Version released: August 23, 2013

Einšteina relativitātes teorija līdz E=mc^2

Matemātiķa piedzīvojumi

Kārlis Podnieks, LU profesors

Karlis.Podnieks@lu.lv

Ievads

Kaut kad 1960-jos gados, vēl students būdams, lasīju (krievu tulkojumā) Einšteina 1916.gadā uzrakstīto populārzinātnisko grāmatiņu:

[1] Albert Einstein. Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie: Gemeinverständlich. *Sammlung Vieweg, Heft 38*; Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1917 (online English translation).

Tur pirmoreiz ieraudzīju Lorenca transformāciju formulu izvedumu. Salīdzinot ar citiem populārzinātniskiem apstāstiem "uz pirkstiem", tas likās aizraujoši kompakts. Palikusi atmiņā "autentiskuma piegarša" (pats Einšteins!), tad pieņēmums, ka formulām ir jābūt lineārām pret x un t (kāpēc to nepamato?), t.s. relativitātes principa izmantošana un vēl pieņēmums (fiziķiem – eksperimentāls fakts) par gaismas ātruma neatkarību no atskaites sistēmas.

Tuvāk pensijas gadiem, 2005.gada vasarā man sagribējās saprast precīzi matemātiski, kādi tieši pieņēmumi ir Einšteina speciālās relativitātes teorijas (Lorenca formulu) pamatā. Nonācu pie secinājuma, ka šo formulu izvedumā pieņēmums par gaismas ātruma neatkarību no atskaites sistēmas nav nepieciešams, jo maksimālā robežātruma eksistence seko jau no relativitātes principa. Arī tas bija aizraujoši: izrādās, ka no ļoti vispārīgiem pieņēmumiem ("dabas likumiem"?) seko, ka ir iespējami tikai divi varianti: Galileja-Ņūtona absolūtā telpa un absolūtais laiks, un Lorenca-Einšteina laiktelpa, kurā telpa un laiks ir savīti kopā, un mehāniski ķermeņi nevar kustēties ātrāk par kādu konstantu ātrumu c (c ir teorijas parametrs, kura konkrēta vērtība no tās nav izrēķināma). Citu variantu nav – neko citu kā Lorenca transformācijas Einšteins izgudrot (vai atklāt?) nevarēja!

Mēģinot visu maksimāli vispārināt, sapinos un beidzot nolēmu paskatīties, ko šajā virzienā ir izdarījuši citi. Un, protams, atklāju, ka mans "atklājums" ir atklāts jau 1910.gadā (Vladimirs Ignatovskis, sk. piemiņas plāksni zemāk). Izskatās gan, ka "īstie" fiziķi šādus meklējumus par nopietniem neuzskata, un grāmatās piemin tikai garāmejot. Tas laikam tāpēc, ka neko jaunu fizikas teoriju attīstībā šie meklējumi nav devuši. Toties uzgāju vairākus "off mainstream" sacerējumus, kuru autori, likās, "manu" problēmu ir atrisinājuši pat labāk nekā es to spēju (sk. tālāk tekstā minētos avotus). Jutos sevī ļoti vīlies, tāpēc šos sacerējumus nemaz nelasīju un visu pasākumu pametu uz 8 gadiem...

Un tikai tagad, 2013.gada jūlijā man sagribējās lietas noskaidrot līdz galam. Un divu nedēļu laikā tiešām tiku līdz galam...

Šī sacerējuma pirmajā versijā (sk. šeit) varējāt lasīt par to, ko izlasīju un izdomāju šajās divās nedēļās.

Bet vasaras brīvībā pagāja vēl mēnesis, un nu varu piedāvāt jau daudz vairāk: gan vēl tālāk būtiski pilnveidotu Lorenca transformāciju matemātisko izvedumu, gan Einšteina speciālās relativitātes teorijas dinamiskās daļas (atkal matemātisku) izvedumu līdz pat slavenajai formulai $E=mc^2$. Par to varat lasīt tālāk.

1. Pirmā daļa - kinemātika

1.1. Slavenās formulas

Pieņemsim, ka mums ir *laiktelpa*, kurā ir tikai viena telpas dimensija x un laiks t, un aplūkosim divas inerciālas atskaites sistēmas S un S' (IAS, nav svarīgi, kas tas ir). Otrā sistēma kustas pret pirmo ar kādu konstantu ātrumu v. Sākumā abu sistēmu koordinātu sākumpunkti sakrīt (x'=x=0, t'=t=0).

Ja kāda laiktelpas punkta koordinātes sistēmā S ir (x, t), bet sistēmā S' tās ir (x', t'), tad kā šīs koordinātes ir savā starpā saistītas, t.i., zinot (x, t), kā var aprēķināt (x', t')? Ir zināmi divi varianti:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}$$ (t.s. Galileja transformācijas);

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ (t.s. Lorenca transformācijas, c ir gaismas ātrums, $|v| < c$).

Ļoti vienkāršās Galileja transformācijas atbilst **Ņūtona mehānikai** [pats Galilejs par "savām" transformācijām gan neko nezināja]. Lorenca transformācijas atbilst **Einšteina speciālajai relativitātes teorijai**, kurā nekas nevar kustēties ātrāk par gaismu (t.i. mehāniskiem objektiem $|v| < c$, pati gaisma ir īpašs gadījums).

1.2. Matemātiķa izvedums

Pārfrazējot Feinmana teicienu: nav svarīgi, kādā veidā Jūs izvedat Lorenca transformācijas, ja vien rezultāts ir ... Lorenca transformācijas. Tas ir fiziķa viedoklis. Bet matemātiķi nav fiziķi – viņus interesē ne tikai rezultāts, bet arī pats tā iegūšanas process: no kādiem pieņēmumiem rezultāts sanāk, un no kādiem – nesanāk.

Kā jau teicu, tas, kas tiek piedāvāts tālāk, pirmkārt, nav nekas īpaši jauns. Jau no pašiem relativitātes teorijas sākuma gadiem atsevišķi cilvēki ir interesējušies par minimālajām pieņēmumu kopām, no kuram var izvest Lorenca transformācijas (sk. tālāk). Un, otrkārt, mēs šo izvedumu veidosim nevis kā fiziķi, bet kā matemātiķi (ko tas nozīmē – redzēsiet paši). Tomēr man gribētos cerēt, ka tālāk izklāstītā pilnveidotā izveduma versija kaut kādā ziņā pārspēj priekšteču sasniegumus...

Viens no Einšteina relativitātes teorijas pamaprincipiem nosaka, ka **visās inerciālās atskaites sistēmās visiem mehānisko procesu likumiem ir jāizskatās vienādi.** Tas ir Einšteina ieviestais "relativitātes princips". Tik izplūdis princips (tā nav kritika!), protams, nav ne formulējams, ne izmantojams kā aksioma. Formulēt un izmantot var tikai konkrētus tā "specgadījumus". Redzēsim, kādi no tiem (īstenībā – niecīgi maza daļa no visa "lielā" principa) tiek izmantoti teorijas būvēšanai.

Tātad sākam vēlreiz un jau nopietnāk: pieņemsim, ka mums ir *laiktelpa*, kurā ir tikai viena telpas dimensija un laiks. Ko tas nozīmē? Laiktelpa it kā sastāv no punktiem, katrs no tiem atrodas kaut kur telpā un kaut kur laikā. Lielas jēgas no šī priekšstata gan nav, jo ne telpa, ne laiks taču nav absolūti (vai ne? bet varbūt ir?). Jēga sāks rasties tikai vēlāk.

Ar sarkanu krāsu šeit un tālāk ir iezīmēti **pieņēmumi** (aksiomas), kas būs mūsu izveduma pamatā. Pārējais teksts ir vai nu beletristika, vai matemātisks izvedums no aksiomām.

Laiktelpā varam ievest *inerciālu atskaites sistēmu* S. Ko tas nozīmē? Pēc sistēmas S ievešanas katram laiktelpas punktam tiek pierakstīta telpas koordināte x un laika koordināte t (divi reāli skaitļi). Punktu ar x=t=0 sauksim par attiecīgās sistēmas *sākumpunktu*. Mums būs jārunā arī par x=0 kā sistēmas S *telpas* sākumpunktu, un t=0 – kā par S *laika* sākumpunktu. Koordināte x nozīmē attālumu *telpā*, tātad sistēmā S ir vajadzīga noteikta *attāluma mērvienība* un attiecīgs mērinstruments *(lineāls)*. Nomainot mērvienību pret citu, koordinātu skaitļi mainītos. Tāpat ir ar *laiku* – sistēmā S ir vajadzīgs *pulkstenis*, kas skaita laiku noteiktās *mērvienībās*. Nomainot šo pulksteni pret citu, laika mērījumi mainītos. Vai sistēmai pietiek ar vienu lineālu un vienu pulksteni, vai arī ir vajadzīgi daudzi (piemēram, katrā telpas punktā savs lineāls un savs pulkstenis)? Matemātiķim tie ir grūti jautājumi... Aizmirstam šo beletristiku!

Bet mēs varam ievest arī citu inerciālu atskaites sistēmu S', un tad katram laiktelpas punktam tiks pierakstīta cita telpas koordināte x' un cits laiks t'. Arī sistēmai S' būs savs sākumpunkts x'=t'=0 utt. (kas principā varētu nesakrist ar S sākumpunktu). Un būs savs lineāls un savs pulkstenis (vai daudzi tādi?).

Ja mums ir divas inerciālas atskaites sistēmas S un S', tad tās viena pret otru kustas ar kādu konstantu ātrumu. Bet ko tas precīzi nozīmē? Ja S' telpas sākumpunkts sistēmā S kustas ar konstantu ātrumu v (reāls skaitlis), tad kā šī situācija izskatīsies sistēmā S', t.i. kā tajā kustēsies sistēmas S telpas sākumpunkts? Ar ātrumu −v? Bet, ja S' ir pieņemtas citādas garuma un laika vienības nekā S? Laikam būtu parocīgāk pieņemt, ka visās IAS ir pieņemtas vienādas garuma un laika vienības? Bet ko tas nozīmē?

Mēs esam matemātiķi, tāpēc nemocīsimies ar atbilžu meklēšanu uz tādiem jautājumiem. Šīs atbildes mums nodrošinās daži saprātīgi pieņēmumi (aksiomas).

Šajā tekstā mēs tiksim galā ar tām IAS, kam ir kopīgs sākumpunkts (t.i. ir tāds laiktelpas punkts O, kura koordinātes (x, t) ir vienādas ar nulli visās mūs interesējošajās IAS), un vienāds koordinātu asu virziens (drīz redzēsim, ko tas nozīmē). Pēc tam, ja vēlēsieties, varēsiet paši uzbūvēt vispārīgāku "IAS teoriju".

Tātad vēlreiz: ja mums ir divas inerciālas atskaites sistēmas S un S', tad tās viena pret otru kustas ar kādu konstantu ātrumu v (reāls skaitlis), precīzāk, S' kustas pret S ar ātrumu v, bet S pret S' – ar ātrumu −v. Ko šī frāze nozīmē (vēl precīzāk)? Pirmkārt, to, ka S' *telpas* sākumpunkta x'=0 "kustības" vienādojums sistēmā S ir $x=vt$, bet S *telpas* sākumpunkta "kustības" vienādojums sistēmā S' ir $x'=-vt'$. Pie t=0 iegūstam, ka x=0, un pie t'=0 – ka x'=0. Tas atbilst pieņēmumam, ka abām IAS ir kopīgs sākumpunkts. [Ja vēlaties to zināt: šie mūsu pieņēmumi jau daļēji nodrošina garuma un laika mērvienību zināmu saskaņotību: S' telpas sākumpunkts sistēmā S kustas ar ātrumu v, bet S telpas sākumpunkts sistēmā S' – ar ātrumu −v, t.i. ar tikpat lielu ātrumu, tikai pretējā virzienā.]

Ko nozīmē "kustība" un tās vienādojums? Punktveida ķermeņa kustību sistēmā S uzdod vienādojums $x=f(t)$, kur f ir kāda divreiz diferencējama funkcija (divreiz – paredzot, ka nākotnē aplūkosim gan kustības ātrumu, gan paātrinājumu). Laika momentā t ķermenis atrodas telpas punktā, kura koordināte ir f(t). Te beidzot parādās īsta *atšķirība starp telpu un laiku*. Funkcija f var nebūt apgriežama, piemēram, konstantā funkcija f(t)≡0 uzdod "kustību", kurā ķermenis sistēmas S telpas sākumpunktā x=0 "stāv uz vietas".

Nākamais jautājums (ko diezvai kāds fiziķis pašā sākumā sev uzdos): **kādas "likumīgas" vērtības var pieņemt ātrums v?** Pieņemsim, ka v nevar būt bezgalīgs, t.i. ka **v ir reāls skaitlis.** Bet vai jebkurš reāls skaitlis? Pieņemsim, ka ātrumu spektrs ir **nepārtraukts**, t.i. ja v>0 ir "likumīgs" ātrums, tad tāds ir arī jebkurš nenegatīvs mazāks ātrums $v_1<v$. Un, protams, pieņemsim, ka

eksistē vismaz viens pozitīvs "likumīgs" ātrums v_0 , un ka ja v ir "likumīgs" ātrums, tad tāds ir arī −v.

[Ja no paša sākuma gribam atļaut arī **diskrētu ātrumu spektru**, tad problēma kļūst savādāka, un zemāk piedāvātais risinājums pilnībā vairs neder. Vai nebūtu interesanti izpētīt šo domu līdz galam?]

Interesanti, ka jau tagad, no mūsu pašiem pirmajiem pieņēmumiem seko, ka **ir iespējami tikai divi varianti** (vai divarpus): vai nu "likumīgie" ātrumi v aizņem visu reālo skaitļu taisni (Galilejs?), vai arī tie aizņem tikai kādu intervālu (–c, +c), kur c ir kāds reāls skaitlis (Lorencs?). Vai, varbūt, intervāla vietā varētu būt segments [–c, +c]?

Ja kāda laiktelpas punkta koordinātes sistēmā S ir (x, t), tad gribētos iemācīties aprēķināt šī punkta koordinātes (x', t') sistēmā S' (un otrādi).

Pieņemsim, ka šīs koordinātes no vienas sistēmas otrā ir pārveidojamas, izmantojot *lineāru transformāciju*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{ , jeb } \begin{matrix} x' = ax + bt \\ t' = dx + et \end{matrix} \quad .$$

Koeficienti a, b, d, e, iespējams, ir atkarīgi (t.i. ir noteiktas funkcijas) no ātruma v (bet ne no x un t): a=a(v); b=b(v); d=d(v); e=e(v), pie tam a(v) un e(v) nedrīkst būt nulles nevienam v (citādi sanāk "pavisam neinteresanti").

[Zemāk minētajos priekšteču rakstos transformācijas linearitāte tiek izvesta no relativitātes principa, vai pat bez tā, sīkāk par to sk. zemāk. Šie izvedumi izmanto fizikālus apsvērumus, piemēram, tajos figurē "cieti stieņi" un to garumi. **Bet ja linearitāti pieņem bez pamatojuma, tad viss formulu izvedums sanāk tīri matemātisks!** No otras puses: vai ir vērts censties pamatot transformāciju linearitāti, ja "tur ārā" laiktelpa, stingri ņemot, nemaz nav lineāra, izotropa, homogena utml.? Ar relativitātes principa palīdzību var pamatot arī Einšteina vispārīgo relativitātes teoriju, kurā laiktelpas transformācijas var būt lineāras tikai tur, kur nav gravitācijas. Bet tādu vietu Visumā nav! Tāpēc transformāciju linearitāte kā pieņēmums nav "sliktāka" par telpas izotropijas utml. citiem, precīzi runājot, tikpat aplamiem pieņēmumiem.]

Tagad varam sākt izvedumus (un jaunus pieņēmumus).

Pie v=0 sistēmas S un S' viena pret otru nekustas, un tā kā tām ir kopīgs sākumpunkts, tad uzskatīsim, ka tās ir identiskas, tātad $a(0) = e(0) = 1 ; b(0) = d(0) = 0$. Tas ir pieņēmums, nevis teorēma!

Nākamais solis: sistēmā S aplūkojam sistēmas S' telpas sākumpunktu, tā kustības vienādojums ir $x = vt$. Sistēmā S' šis punkts ir nekustīgs un tam x'≡0, tātad:

$$x' = avt + bt = (av + b)t \equiv 0 \quad .$$

Tā kā a, b nav atkarīgi no t, tad $av + b = 0$ un $b = -av$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -av \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{ , jeb } \begin{matrix} x' = a(x - vt) \\ t' = dx + et \end{matrix} \quad .$$

Nākamais solis: sistēmā S' aplūkojam sistēmas S telpas sākuma punktu, tā kustības vienādojums ir $x' = -vt'$. Sistēmā S šis punkts ir nekustīgs un tam $x \equiv 0$, tātad:

$$x' = -vt' = a(0 - vt) = -avt ; t' = d \cdot 0 + et = et \quad ,$$

$$-v(et) = -avt ; v(a - e)t = 0 \quad .$$

Tā kā a, e nav atkarīgi no t, tad (ja v≠0) $e(v)=a(v)$. Ja v=0, tad, kā jau zinām, $e(0)=a(0)=1$, tātad varam rakstīt vienkārši, ka $e=a$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -av \\ d & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x'=a(x-vt) \\ t'=dx+at \end{matrix} . \qquad (1)$$

Pieņemsim tagad, ka a=a(v) ir nepārtraukta funkcija. Tad, tā kā visiem v, a(v)≠0, tad, v mainoties, a(v) nevar mainīt zīmi. Un tā kā a(0)=1, tad tas nozīmē, ka a(v)>0 visiem v.

Tāpēc, lai otrā vienādība kļūtu līdzīga pirmajai, varam ievest apzīmējumu $d=-ad_1$, tad:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -d_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x'=a(x-vt) \\ t'=a(-d_1 x+t) \end{matrix} .$$

Starp citu, līdz ar to esam izsecinājuši no mūsu pieņēmumiem arī, ka sistēmās S, S' ir vienādi orientētas koordinātu asis (x augot, aug arī x', un t augot, aug arī t').

Parādīsim, ka $d_1(v)$ ir jābūt **lineārai** funkcijai no v.

Lai to pamatotu, jau 1910.gadā V. Ignatovskis (sk. piemiņas plāksni zemāk) kā vēl vienu pieņēmumu izmantoja šādu “slēgtību pret kompozīciju”: aplūkojam 3 atskaites sistēmas: ja S' kustas pret S ar ātrumu v, un S'' kustas pret S' ar ātrumu w, tad S'' kustas pret S ar kādu ātrumu u, ko var aprēķināt, zinot v un w (visu sistēmu koordinātu sākumpunkti, kā sākumā norunājām, sakrīt: x''=x'=x=0, t''=t'=t=0). Te ir izmantots “mazs gabaliņš” no relativitātes principa.

Tātad, no vienas puses, ņemot punktu, kura koordinātes sistēmā S ir (x, t), tā koordinātes sistēmā S'', t.i. (x'', t'') var aprēķināt caur koordinātēm sistēmā S':

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = a(w) \begin{pmatrix} 1 & -w \\ -d_1(w) & 1 \end{pmatrix} a(v) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -d_1(v) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = a(w)a(v) \begin{pmatrix} 1+wd_1(v) & -v-w \\ -d_1(w)-d_1(v) & 1+vd_1(w) \end{pmatrix}$$

No otras puses:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = a(u) \begin{pmatrix} 1 & -u \\ -d_1(u) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} .$$

Pirmais secinājums:

$$1+wd_1(v)=1+vd_1(w)=\frac{a(u)}{a(w)a(v)} \text{, jeb } \frac{d_1(v)}{v}=\frac{d_1(w)}{w}$$

jebkuriem nenulles v un w. Savukārt, $d_1(0)=-\frac{d(0)}{a(0)}=0.$ **Tātad** $d_1(v)$ **tiešām ir jābūt lineārai funkcijai no v**, ko varam apzīmēt ar $d_1(v)=\alpha v$, kur koeficients α ir kāda (**nu jau universāla**!) **konstante**, kas nav atkarīga no v:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\alpha v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x'=a(x-vt) \\ t'=a(-\alpha v x+t) \end{matrix} . \qquad (2)$$

Otrs secinājums no matricu elementu pielīdzināšanas (tuvojamies ātrumu saskaitīšanas likumam):

$$\begin{matrix} a(u)=a(w)a(v)(1+\alpha vw) \\ a(u)u=a(v)a(w)(v+w) \end{matrix} .$$

Tātad:

$$u=\frac{v+w}{1+\alpha vw} \quad .$$

Redzam, universālās konstantes α dimensija ir ātrums^{-2}. Ko vēl varam par to uzzināt?

Pie $\alpha=0$ mēs iegūtu Ņūtona mehānikas ātrumu saskaitīšanas likumu $u=v+w$. Pie $\alpha>0$ mēs varētu apzīmēt $\alpha=\frac{1}{c^2}$ (tad c būtu universāla konstante, kuras dimensija ir ātrums) un iegūtu Einšteina ātrumu saskaitīšanas likumu...

Bet ja nu $\alpha<0$? Tad mēs varētu apzīmēt $\alpha=-\frac{1}{c^2}$, t.i. sanāktu, ka $u=\frac{v+w}{1-\frac{vw}{c^2}}$, un ja w=v, tad $u=\frac{2v}{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Tas nozīmētu, ka šai gadījumā, pirmkārt, v=c nav "likumīgs" ātrums (jo tad "likumīgs" būtu arī u=∞), un otrkārt, ja v<c ir "likumīgs" ātrums, tad tāds ir arī 2v. Tāpēc, ņemot par v_0 jebkuru "likumīgu" ātrumu, un n – tik lielu, ka $\frac{c}{2^n}<v_0$, mēs iegūtu, ka c ir "likumīgs" ātrums, t.i. iegūtu pretrunu. Tātad nav iespējams, ka $\alpha<0$.

Esam gandrīz galā. Pie $\alpha=0$ iegūstam **gandrīz** Galileja transformācijas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x'=a(x-vt) \\ t'=at \end{matrix} \quad ;$$

un **Ņūtona mehānikas ātrumu saskaitīšanas likumu**: $u=v+w$.

Pie $\alpha>0$, apzīmējot $\alpha=\frac{1}{c^2}$, iegūstam gandrīz Lorenca transformācijas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x'=a(x-vt) \\ t'=a(-\frac{v}{c^2}x+t) \end{matrix} \quad ;$$

un **Einšteina ātrumu saskaitīšanas likumu**:

$$u=\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}} \quad .$$

[Starp citu, man tas bija neliels pārsteigums, ka ātrumu saskaitīšanas likumi "izvedas" jau šajā stadijā, un nav atkarīgi no mūsu pēdējā pieņēmuma, kas sekos tālāk.]

[Tiem, kuri pieraduši domāt trijās dimensijās, te japiebilst, ka šajā samērā vienkāršajā formulā runa ir par "kolineāru" ātrumu saskaitīšanu, t.i. divu tādu ātrumu, kas vērsti paralēlos virzienos. Vispārīgajā gadījumā ātrumu saskaitīšanas formula ir sarežģītāka. Bet tā kā mēs aplūkojam tikai laiktelpu, kurā telpai ir viena dimensija, tad mums šīs problēmas nav.]

Atliek noskaidrot, kādam ir jābūt koeficientam a=a(v). Mēs jau zinām, ka visiem v, a(v)>0 un ka a(0)=1.

Formulās (2) transformācijas matricas determinants $a^2(1-\alpha v^2)$ nedrīkst būt 0 (jo mēs pieņemam, ka ir jāeksistē inversajai transformācijai, kas no (x', t') ļauj aprēķināt (x, t). Kā gan citādi – atkal mazs gabaliņš no relativitātes principa!. Parādīsim, ka tas nozīmē arī, ka $a^2(1-\alpha v^2)>0$.

Tiešām, tā kā a=a(v) ir nepārtraukta funkcija, un visiem v, $a^2(1-\alpha v^2)\neq 0$, tad, v mainoties, $a^2(1-\alpha v^2)$ nevar mainīt zīmi. Un tā kā pie v=0, $a^2(1-\alpha v^2)=1$, tad tas nozīmē, ka $a^2(1-\alpha v^2)>0$ visiem v.

Tagad, tīri matemātiski, no (x', t') varam aprēķināt (x, t):

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{a(1-\alpha v^2)} \begin{pmatrix} 1 & v \\ -\alpha v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \text{ , jeb } x=\frac{x'+vt'}{a(1-\alpha v^2)};\quad t=\frac{\frac{v}{c^2}x'+t'}{a(1-\alpha v^2)} \quad . \qquad (3)$$

Šīs transformācijas matricas determinants ir $\frac{1}{a^2(1-\alpha v^2)}$.

Tālāk, matemātiķim pilnīgi normāls būtu šāds spriedums:

“Saskaņā ar relativitātes principu, abu matricu determinantiem ir jābūt vienādiem ar 1 (citādi vienai sistēmai tas būs mazāks par 1, bet otrai – lielāks par 1, kā var būt tāda atšķirība, ja sistēmas viena pret otru kustas pilnīgi vienādi?). Tātad, visiem v: $a^2(1-\alpha v^2)=1$ un $a=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha v^2}}$. Te ir izmantots “mazs gabaliņš” no relativitātes principa.”

Iespējams, ka fiziķiem tas neliksies pietiekami nopietni. Viņiem varam piedāvāt “fizikālāku” versiju.

Sistēmā S aplūkosim tās telpas sākumpunktu divos dažādos laika momentos: $(0,t_1);(0,t_2);\Delta t=t_2-t_1=\Delta T$. Jau no formulām (1) seko, ka atbilstošā laika starpība sistēmā S' tad būs $\Delta t'=a\Delta T$. Tātad, ķermenim kustoties sistemā S', salīdzinot ar sistēmu S, kur tas nekustas, laika ritums ir jākoriģē ar koeficientu a.

Bet no otras puses, sistēmā S' aplūkosim tās telpas sākumpunktu divos dažādos laika momentos: $(0,t_1');(0,t_2');\Delta t'=t_2'-t_1'=\Delta T$. No formulām (3) seko, ka atbilstošā laika starpība sistēmā S' tad būs $\Delta t=\frac{1}{a(1-\alpha v^2)}\Delta T$. Tātad, ķermenim kustoties sistemā S, salīdzinot ar sistēmu S', kur tas nekustas, laika ritums ir jākoriģē ar koeficientu $\frac{1}{a(1-\alpha v^2)}$.

Tagad varam “piesaukt” relativitātes principu: laika rituma korekcijas koeficients, protams, nevar mainīties tikai tāpēc vien, ka sistēmas S' kustības virzienu pret sistēmu S mēs mainām uz pretējo (ātruma lielumu nemainot). Tātad $a=\frac{1}{a(1-\alpha v^2)}$ un $a=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha v^2}}$.

Līdz ar to arī šajā sprieduma versijā transformācijas matricas determinants $a^2(1-\alpha v^2)=1$.

Ja $\alpha=0$, tad $a=1$ visiem v, un esam ieguvuši Galileja transformācijas:

$$\begin{aligned} x'&=x-vt \\ t'&=t \end{aligned} \quad .$$

Ja $\alpha>0$, tad varam apzīmēt $\alpha=\frac{1}{c^2}$ (kur **c ir universāla konstante, kuras dimensija ir ātrums**), t.i. $a=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, un esam ieguvuši Lorenca transformācijas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

1.3. Secinājumi

Apkoposim visus izvedumā izmantotos pieņēmumus, tie visi ir tīri matemātiski:

1. Mums ir *laiktelpa*, kurā ir tikai viena telpas dimensija un laiks. Pēc inerciālas atskaites sistēmas S ievešanas katram laiktelpas punktam tiek pierakstīta telpas koordināte x un laika koordināte t (divi reāli skaitļi).

2. Ja mums ir divas inerciālas atskaites sistēmas S un S', tad tās viena pret otru kustas ar kādu konstantu ātrumu v (reāls skaitlis). Pirmkārt, S' *telpas* sākumpunkta x'=0 kustības vienādojums sistēmā S ir $x=vt$, bet otrkārt, S *telpas* sākumpunkta kustības vienādojums sistēmā S' ir $x'=-vt'$.

3. Ātrumu spektrs ir *nepārtraukts*, t.i. ja v>0 ir "likumīgs" ātrums, tad tāds ir arī jebkurš nenegatīvs mazāks ātrums $v_1<v$. Eksistē vismaz viens pozitīvs "likumīgs" ātrums v_0 . Ja v ir "likumīgs" ātrums, tad tāds ir arī −v.

4. Koordinātes no sistēmas S uz sistēmu S' ir pārveidojamas, izmantojot *lineāru transformāciju*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x'=ax+bt \\ t'=dx+et \end{matrix} .$$

Koeficienti a, b, d, e, iespējams, ir atkarīgi no ātruma v (bet ne no x un t): a=a(v); b=b(v); d=d(v); e=e(v), pie tam a(v) un e(v) nedrīkst būt nulles nevienam v, bet a(v) ir nepārtraukta funkcija.

5. Pie v=0 sistēmas S un S' viena pret otru nekustas, pieņemsim, ka tad tās ir identiskas, tātad $a(0)=e(0)=1; b(0)=d(0)=0$.

6. "Slēgtība pret kompozīciju": aplūkojam 3 atskaites sistēmas: ja S' kustas pret S ar ātrumu v, S'' kustas pret S' ar ātrumu w, tad S'' kustas pret S ar kādu ātrumu u, ko var aprēķināt, zinot v un w.

7. Transformācijas matricas $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ determinants $ae-bd=1$ (ja vēlamies, šo ļoti matemātisko pieņēmumu varam aizstāt ar "fizikālāku", sk. augstāk).

No šiem pieņēmumiem seko, ka eksistē tāda universāla konstante $\alpha \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha v^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\alpha v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb. } x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\alpha v^2}}; \quad t' = \frac{-\alpha v x+t}{\sqrt{1-\alpha v^2}} .$$

Tātad vai nu $\alpha=0$, tad "likumīgi" ir jebkura lieluma ātrumi, un:

$$\begin{matrix} x'=x-vt; \\ t'=t \end{matrix} \quad \text{(Galileja transformācijas).}$$

Vai arī $\alpha>0$, un tad eksistē tāds **universāls ātrums** c, ka $\alpha=\frac{1}{c^2}$, tad "likumīgi" ir tikai ātrumi, kuru lielums ir mazāks par c, kā arī:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad t'=\frac{-\frac{v}{c^2}x+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ (Lorenca transformācijas).

Citu variantu nav – ja vien neatsakāmies no kāda no minētajiem ļoti vājajiem un vispārīgajiem matemātiskajiem pieņēmumiem! Neko citu kā Lorenca transformācijas Lorencs un Einšteins izgudrot (vai atklāt?) nevarēja! Bet, protams, to, ka c ir gaismas ātrums, tīri matemātiski izsecināt nevarēs, te nu beidzot būs vajadzīgi fiziķi!

1.4. Priekšteči

Pirmkārt, mans domu gājiens aptuveni par 50% atbilst tam, kas ir atrodams jau 10 gadus vecākā sacerējumā:

[2] Palash B. Pal. Nothing but Relativity. *European Journal of Physics,* Vol. 24 N 3, May 2003 (online copy: http://arxiv.org/abs/physics/0302045)

Kolēģis *Palash B. Pal* **transformācijas linearitāti izved** no telpas un laika homogenitātes (lokālās).

Sākumā pieņemam, ka sistēmā S' punkta koordinātes iegūst no koordinatēm sistēmā S ar *diferencējamu* funkciju palīdzību:

$$\begin{aligned} x'&=X(x,t,v)\\ t'&=T(x,t,v) \end{aligned}\quad .$$

Sistēmā S aplūkojam *cietu stieni* (x_1,x_2) , pārvietojam to par h uz priekšu: (x_1+h,x_2+h) . Sistēmā S' tad šis stienis pārvietosies no pozīcijas $(X(x_1,t,v),X(x_2,t,v))$ uz pozīciju $(X(x_1+h,t,v),X(x_2+h,t,v))$. Stieņa garums pie pārvietošanas nedrīkst mainīties, tātad:

$$X(x_1+h,t,v)-X(x_2+h,t,v)=X(x_1,t,v)-X(x_2,t,v)$$,jeb

$$X(x_1+h,t,v)-X(x_1,t,v)=X(x_2+h,t,v)-X(x_2,t,v)\quad .$$

Dalot abas puses ar h un liekot h→0, iegūstam:

$$\frac{\partial X(x_1,t,v)}{\partial x}=\frac{\partial X(x_2,t,v)}{\partial x}$$; t.i. $$\frac{\partial X(x,t,v)}{\partial x}\equiv const\quad .$$

Tātad funkcija X ir argumenta x lineāra funkcija.

Līdzīgā veidā var izsecināt, ka X ir lineāra arī pret t, un ka arī T ir lineāra x un t funkcija. Funkciju koeficienti, protams, var būt atkarīgi no v.

[3] Joel W. Gannett. Nothing but Relativity, Redux. *European Journal of Physics,* Vol. 28, N 6, November 2007 (online copy: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1005/1005.2062.pdf)

Šī raksta autors slavē [2], bet uzrāda vienu nepilnību transformācijas linearitātes izvedumā, kā arī piedāvā šīs linearitātes izvedumu no vēl vispārīgākiem pieņēmumiem (piemēram, viņam nevajag, lai transformāciju funkcijas būtu diferencējamas).

Minētā nepilnība ir interesanta, atgriežamies pie sprieduma par pārvietoto stieni.

“Sistēmā S stieni (x_1,x_2) pārvietojam par h uz priekšu: (x_1+h,x_2+h) . Sistēmā S' tad stienis

$(X(x_1, t, v), X(x_2, t, v))$ pārvietojas uz $(X(x_1+h, t, v), X(x_2+h, t, v))$, bet stieņa garums nedrīkst mainīties, t.i. ...”

Bet kas te notiek ar laikiem? Ja sistēmā S abus stieņa galus ņemam vienā laika momentā t, tad sistēmā S' atbilstošie laika momenti $T(x_1+h, t, v); T(x_2+h, t, v)$ jau var atšķirties! Un tad pieņēmums par garumu vienādību vairs nav izmantojums! Tā vietā kolēģis *Joel W. Gannett* piedāvā sarežģītāku izvedumu no vēl vispārīgākiem pieņēmumiem.

Par to, cik apšaubāma man liekas pati vēlēšanās transformāciju linearitāti “pamatot”, sk. augstāk.

Ir arī citi priekšteči, sākot jau ar 1910.gadu:

Vēsturisks citāts no

[4] Sebastiano Sonego and Massimo Pin. Foundations of anisotropic relativistic mechanics. *Journal of mathematical physics*, 2009, N.4, Vol.50, pp.042902-1 - 042902-28 (online copy: http://arxiv.org/pdf/0812.1294.pdf, šajā rakstā ir ļoti liela bibliogrāfija “par tēmu”):

“Note that the possibility for the existence of invariant speeds has been derived as a kinematical possibility only from the postulates of relativity, homogeneity, and pre-causality. This approach to relativistic kinematics was pioneered by von Ignatowsky in 1910 [11], and was later rediscovered many times in different ways [3, 9, 12, 13]. See also [14] for a rigorous treatment, and [15, 16] for clear presentations at a textbook level.”

Tēmas pioniera piemiņai

Игнатовский Владимир Сергеевич (1875-1942)

(Notiesāts kopā ar sievu un nošauts Ļeņingradā 1942.gada janvārī.)

Wikipedia: Vladimir Ignatowski.

[5] W. von Ignatowsky, “Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip”, *Berichte der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 20/1910, 788-796 (online English translation).

[6] W. von Ignatowsky, “Das Relativitätsprinzip,” *Archiv Der Mathematik Und Physik*, 17/1911, 1-24, and 18/1911, 17-40.

2. Otrā daļa – dinamika

2.1. Ievads

1930.gada 9.novembrī, apcerot Johannesa Keplera nāves 300.gadadienu, Einšteins avīzē *Frankfurter Allgemeine* uzrakstīja: “Liekas, ka cilvēka prātam pašam ir jākonstruē formas, pirms mēs varam tās atpazīt lietās. Keplera brīnišķīgais mūža devums ir sevišķi skaists piemērs, kas parāda, ka zināšanas nevar uzplaukt no kailas empīrijas vien, bet tikai salīdzinot prāta izgudrojumus ar novērojamiem faktiem.”

Ar “formu” izgudrošanu nodarbojas arī matemātiķi. Mēs neesam fiziķi. Fiziķus interesē patiesība “tur ārā”. Mēs esam matemātiķi. Mūs interesē atrast tās izcilās matemātiskās struktūras, kas uzreiz parāda, ka patiesība nemaz nevar būt citāda.

Pirmajā daļā mēs to jau pieredzējām: no ārkārtīgi vājiem un vispārīgiem matemātiskiem pieņēmumiem seko, ka ir iespējamas tikai divas vienkāršas laiktelpas teorijas – Ņūtona (Galileja) un Einšteina (Lorenca). Citi varianti nav iespējami – ja vien negribēsim atteikties no kāda no pieņēmumiem (piemēram, no transformāciju linearitātes, tā dodoties Einšteina vispārīgās relativitātes teorijas virzienā).

Šajā – otrajā daļā mēs to pieredzēsim vēlreiz, pierādot divas teorēmas, kas parāda, ka arī slavenā Einšteina enerģijas formula $E=mc^2$ ir ārkārtīgi vāju un vispārīgu matemātisku pieņēmumu rezultāts. Citi varianti nav iespējami!

Pirmajā daļā mums nebija īstas kustības: viena attiecībā pret otru kustējās atskaites sistēmas, bet citādi – laiktelpā nekas nekustējās.

Tagad mūs sāks interesēt “kustība” kā patstāvīgs fenomens. Mēs protam transformēt laiktelpas punkta koordināti x un laiku t atskaites sistēmā S par šī punkta koordināti x' un laiku t' sistēmā S', kas (sistēma) kustas pret S ar ātrumu v (uzskatam, ka sākumā abu sistēmu koordinātu sākumpunkti sakrīt, x'=x=0, t'=t=0):

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad t'=\frac{-\frac{v}{c^2}x+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad \text{(Lorenca transformācijas).}$$

Tagad iedomāsimies, ka punktveida ķermeņa kustību sistēmā S uzdod vienādojums $x=f(t)$, kur f ir kāda divreiz diferencējama funkcija (divreiz – paredzot, ka drīz vien aplūkosim kustības ātrumu un paātrinājumu). Laika momentā t ķermenis atrodas telpas punktā, kura koordināte ir f(t). Kāds ir šī ķermeņa kustības vienādojums sistēmā S'? Lorenca transformācijas dod:

$$x'=\frac{f(t)-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad t'=\frac{-\frac{v}{c^2}f(t)+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad .$$

Diemžēl, vispārīgajā gadījumā izrēķināt no šejienes **x' kā funkciju no t'** nebūs iespējams. [Ņūtona mehānikā šis uzdevums bija viegls: $x'=f(t)-vt;t'=t$, jeb $x'=f(t')-vt'$.] Šai ziņā relativitātes teorijas matemātika ir “grūti baudāma”... Piemēram, nav iespējama tik vienkārša lieta kā vienmērīgi paātrināta kustība, t.i. kustība ar kvadrātisku vienādojumu $x=pt^2+qt+c$, jo tad ātrums $\frac{dx}{dt}=2pt+q$, laikam t ejot, varētu kļūt lielāks par c.

2.2. Ātruma transformācija relativitātes teorijā

Bet kā ar kustības ātruma transformācijām? Sistēmā S ķermeņa kustības ātrums ir funkcijas atvasinājums $u=\frac{dx}{dt}=f'(t)$. Kāds ir šī paša ķermeņa kustības ātrums u' sistēmā S'? [Nūtona mehānikā atbilde bija vienkārša: $t'=t;u'=\frac{dx'}{dt'}=\frac{dx}{dt}-v$.] Izrādās, ka šis uzdevums arī relativitātes teorijā ir viegli atrisināms:

$$x'=\frac{f(t)-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad t'=\frac{-\frac{v}{c^2}f(t)+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{f'(t)-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{u-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad \frac{dt'}{dt}=\frac{-\frac{v}{c^2}f'(t)+1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1-\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ .$$

Dalot pirmo izteiksmi ar otro (17.-18. gs. matemātiķu stils):

$$u'=\frac{dx'}{dt'}=\frac{f'(t)-v}{-\frac{v}{c^2}f'(t)+1}=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\ .$$

Tā ir **ātruma transformācijas formula** no sistēmas S uz sistēmu S'. T.i. formula, kas punkta ātrumu u sistēmā S transformē par ātrumu u' sistēmā S', izmantojot kā vienīgo papildus parametru ātrumu v (ar kādu S' kustas pret S). Par to ir jāpriecājas, ja atceramies, ka ar paša kustības vienādojuma transformāciju mums nekas nesanāca...

[Tiem, kuri pieraduši domāt trijās dimensijās, te jāpiebilst, ka šajā jau tā sarežģītajā formulā runa ir par tāda ātruma u transformāciju, kas ir "kolineārs" ātrumam v. Vispārīgajā gadījumā formula ir vēl sarežģītāka. Bet tā kā mēs aplūkojam tikai laiktelpu, kurā telpai ir viena dimensija, tad mums šīs problēmas nav.]

2.3. Paātrinājuma transformācija relativitātes teorijā

Ņūtona mehānikā paātrinājums ir invariants pret IAS nomaiņu:

telpas koordināte: $x=f(t);t'=t;x'=f(t')-vt'$;

ātrums: $u=\frac{dx}{dt}=f'(t);u'=\frac{dx'}{dt'}=f'(t')-v$;

paātrinājums: $\frac{du}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t);\frac{du'}{dt'}=\frac{d^2x'}{dt'^2}=f''(t')$.

Tālāk teorijā nāk **otrais Ņūtona likums**: par ātruma maiņas cēloni uzskata "**spēku**", kas pielikts ķermenim, tāpēc rakstām: $m\frac{du}{dt}=F(x,t)$, kur m ir ķermeņa atribūts – propocionalitātes koeficients, ko sauc par "**masu**", un kas raksturo ķermeņa "reaktivitāti" uz spēka iedarbību (t.s. inerci) – jo lielāka masa, jo "slinkāka" reakcija. Mēs pieņemam, ka spēks ir pielikts laiktelpas punktā, un tā lielums nav atkarīgs no atskaites sistēmas (t.i. $F(x',t')=F(x,t)$) un no ķermeņa kustības ātruma (t.i. magnētiskos laukus utml. pagaidām nepētīsim).

Relativitātes teorijā ir sarežģītāk. Kā tūlīt redzēsim, pāatrinājums te vairs **nav** invariants pret IAS nomaiņu:

$$\frac{du'}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\right)=\frac{\frac{du}{dt}(1-\frac{uv}{c^2})-(u-v)\cdot\frac{-v}{c^2}\cdot\frac{du}{dt}}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}=\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}\frac{du}{dt} \quad . \qquad (4)$$

Dalot šo izteiksmi ar jau zināmo $\frac{dt'}{dt}$ izteiksmi $\frac{1-\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, iegūstam:

$$\frac{du'}{dt'}=\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{uv}{c^2})^3}\frac{du}{dt} \quad . \qquad (5)$$

Tā ir **paātrinājuma transformācijas formula** no sistēmas S uz sistēmu S'. Kā redzam, pāatrinājums te vairs **nav** invariants pret IAS nomaiņu.

[Tiem, kuri pieraduši domāt trijās dimensijās, te jāpiebilst, ka šajā jau tā sarežģītajā formulā runa ir par tāda paātrinājuma transformāciju, kas ir "kolineārs" ātrumiem u un v. Vispārīgajā gadījumā formula ir vēl sarežģītāka. Bet tā kā mēs aplūkojam tikai laiktelpu, kurā telpai ir viena dimensija, tad mums šīs problēmas nav.]

Skaidrs, ka ar "tādu" paātrinājumu mums otrais Ņūtona likums "nespīd"... Un ir arī skaidrs, ka relativitātes teorijā konstants spēks vienkārši nevar izraisīt konstantu paātrinājumu – tad jau, laikam ejot, ātrums kādreiz pārsniegtu c! Tāpēc relativitātes teorijā konstantam spēkam, kad ķermeņa ātrums pieaug, "kļūst grūtāk", un iegūtajam paātrinājumam ir jāsamazinās. Ņūtona mehānikā "spēka grūtumu paātrināt" noteica proporcionalitātes koeficients *m*, ko sauca par ķermeņa masu. Tad jau relativitāte teorijā, augot ātrumam, kermeņa masai vajadzētu pieaugt – lai paātrināšanās samazinātos? Var teikt arī tā – bet vai tas nozīmē, ka augot ātrumam, pieaug arī "vielas daudzums" ķermenī? Joks?

2.4. Relatīvistiskais ātrums un relatīvistiskais paātrinājums

Vai varēsim izdomāt kādu "**relatīvistisko ātrumu**" u_r , kura izmaiņu (atvasinājumu pēc laika: $\frac{du_r}{dt}$, t.i. "relatīvistisko paātrinājumu") noteiks "spēks" un "masa" ($m\frac{du_r}{dt}=F(x,t)$)? Tā kā $F(x',t')=F(x,t)$, tad $\frac{du_r}{dt}$ nedrīkst mainīties, pārejot uz citu IAS, t.i. vajag, lai

$$\frac{du_r'}{dt'}=\frac{du_r}{dt} \quad .$$

Liekas, ka u_r ir jābūt funkcijai tikai no u (u_r atkarība tiešā veidā no x un t būtu nesaprotama)? Jā tā, tad $u_r=U(u)$, un:

$$\frac{du_r}{dt}=\frac{dU(u)}{du}\frac{du}{dt} \quad ;$$

$$\frac{du_r'}{dt}=\frac{d}{dt}U(u')=\frac{dU(u')}{du'}\frac{du'}{dt}=\frac{dU(u')}{du'}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}\frac{du}{dt}$$ (izmantojam (4)).

Dalot šo izteiksmi ar jau zināmo $\frac{dt'}{dt}$ izteiksmi $\frac{1-\frac{uv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, iegūstam:

$$\frac{du_r'}{dt'}=\frac{dU(u')}{du'}\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{uv}{c^2})^3}\frac{du}{dt} .$$

Funkcijai U(u) ir jābūt tādai, lai $\frac{du_r'}{dt'}=\frac{du_r}{dt}$ visiem u un v, t.i.:

$$\frac{dU(u')}{du'}\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{uv}{c^2})^3}=\frac{dU(u)}{du} \text{ , jeb } \frac{dU(u')}{du'}=\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{dU(u)}{du} . \qquad (6)$$

Esam ieguvuši nosacījumu U(u) atvasinājuma (pēc u) transformācijai, pārejot no sistēmas S uz sistēmu S'.

Kādai ir jābūt funkcijai U(u), lai nosacījums (6) izpildītos? Jaunības atmiņas par Einšteina formulām liek izmēģināt šādu relatīvistisko ātrumu: $u_r=U(u)=\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Paskatīsimies, kas sanāks:

$$\frac{dU(u)}{du}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}-u\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{-2\mathrm{u}}{c^2}}{1-\frac{u^2}{c^2}}=\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} .$$

Izrādās, ka šī Einšteina izvēle ir vienīga iespējamā. Lai šo vienīgumu pierādītu, ievedīsim vēl funkciju W(u): $\frac{dU(u)}{du}=\frac{W(u)}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$, un parādīsim, ka no nosacījuma (6) seko, ka $W(u)=const$.

[Šis solis ir izšķirošs – W(u) vajag ievest atvasinājuma izteiksmē, nevis tieši U(u) izteiksmē: $U(u)=\frac{uW(u)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ – ar tādu neko nevar izdarīt.]

Aplūkosim analoģisku lielumu sistēmā S': $\frac{dU(u')}{du'}=\frac{W(u')}{(1-\frac{u'^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$.

Apstrādāsim izteiksmi saucējā:

$$1-\frac{u'^2}{c^2}=1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}\right)^2=\frac{1-2\frac{uv}{c^2}+\left(\frac{uv}{c^2}\right)^2-\frac{1}{c^2}(u^2-2\text{uv}+v^2)}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}=\frac{1-\frac{u^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}(1-\frac{u^2}{c^2})}{(1-\frac{uv}{c^2})^2}$$, jeb:

$$1-\frac{u'^2}{c^2}=\frac{(1-\frac{u^2}{c^2})(1-\frac{v^2}{c^2})}{(1-\frac{uv}{c^2})^2} .$$

Tātad:

$$\frac{dU(u')}{du'}=W(u')\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} ,$$

un varam atgriezties pie nosacījuma (6):

$$W(u')\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{W(u)}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$$

Saīsinot abās pusēs, iegūstam: $W(u')=W(u)$. Tas nozīmē, ka nosacījums (6) izpildās tad un tikai tad, ja visiem u un v: $W(u')=W(u)$, kur $u'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$. Un tas, savukārt, nozīmē, ka $W(u)=const$. Tiešām, ņemsim u=0 un liksim v mainīties no –c līdz +c, tad arī u' mainīsies no –c līdz +c, tātad W(u')=W(0) visiem ātrumiem u'.

Esam izveduši no nosacījuma (6) (tātad arī no $\frac{du_r'}{dt'}=\frac{du_r}{dt}$), ka $\frac{dU(u)}{du}=\frac{const}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$. Lai iegūtu U(u), ir jāintegrē. Tā kā $\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ atvasinājums pēc u ir $\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$, tad integrējot iegūstam:

$$U(u)=\frac{const\cdot u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+const_1 .$$

Ja mēs vēlamies, lai pie maziem ātrumiem u relatīvistiskais ātrums $u_r=U(u)$ būtu tuvs u, tad $U(0)=const_1=0$, $U(u)\approx const\cdot u\approx u$, tātad $const=1$. Abus pēdējos nosacījumus var aizstāt ar $\lim_{u\to 0}\frac{U(u)}{u}=1$. Esam pierādījuši teorēmu:

Teorēma 1. Eksistē tikai viena funkcija $u_r=U(u)$, kam $\lim_{u\to 0}\frac{U(u)}{u}=1$, un visiem u un v izpildās $\frac{du_r'}{dt'}=\frac{du_r}{dt}$, un tā ir: $u_r=U(u)=\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$.

Citiem vārdiem, šādam un tikai šādam relatīvistiskajam ātrumam atbilstošais relatīvistiskais paātrinājums $\frac{du_r}{dt}=\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}$ ir vienāds visās inerciālajās atskaites sistēmās un pie maziem ātrumiem saskan ar Ņūtona mehāniku. Einšteinam nebija citas izvēles!

2.5. Otrais Ņūtona likums relativitātes teorijā

Vai parastā paātrinājuma $\frac{du}{dt}$ vietā izmantojot relatīvistisko paātrinājumu $\frac{du_r}{dt}$, mēs varēsim saglabāt otrā Nūtona likuma formu $m\frac{du_r}{dt}=F(x,t)$?

Iedomāsimies atskaites sistēmu S^0, kura pret sistēmu S kustas ar ātrumu u (tas ir ķermeņa ātrums pret S laika momentā t). (Sākumā S^0 sākumpunkts sakrīt ar S sākumpunktu: $x^0=x=0$, $t^0=t=0$.). Laikam t atbilstošajā laika momentā t^0 sistēmā S^0 ķermenis vismaz uz šo brīdi ir nekustīgs. T.i. tam sistēmā S^0 laika momentā t^0 ir **jāuzvedas atbilstoši Ņūtona mehānikas likumiem**. Un tāds šai gadījumā ir otrais Ņūtona likums: tā kā $u^0=0$, tad

$$m\frac{du_r^0}{dt^0}=m\frac{1}{(1-\frac{0^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}=m\frac{du^0}{dt^0} ,$$

un tāpēc $m\frac{du_r^0}{dt^0}=m\frac{du^0}{dt^0}=F(x^{0,}t^0)$ .Vēl gan jāpiebilst, ka masa m šeit raksturo ķermeņa "reaktivitāti" **tikai miera stāvoklī**, kad $u^0=0$! T.i. m vietā būtu jāraksta "miera masa" m_0 :

$$m_0\frac{du_r^0}{dt^0}=m_0\frac{du^0}{dt^0}=F(x^{0,}t^0) .$$

Bet kā ķermenim būtu jāreaģē uz spēku, kad tas (ķermenis) jau kustas ar ātrumu u>0? Nāksies **pieņemt**, ka $m_0\frac{du_r}{dt}=F(x,t)$ arī tad, ja u>0? Formāli ņemot, to varam darīt, jo zinām, ka relatīvistiskais paātrinājums $\frac{du_r}{dt}$ visās IAS ir vienāds!

Šis **pieņēmums** $m_0\frac{du_r}{dt}=F(x,t)$ tad arī būs **otrais Ņūtona likums relativitātes teorijā**.

2.6. Kinētiskā enerģija relativitātes teorijā

Ņūtona mehānikā punktveida ķermeņa **impulsu** (kustības daudzumu) definē kā $p=mu$, un tā atvasinājums pēc laika t ir spēks: $\frac{dp}{dt}=m\frac{du}{dt}=F$. Līdz ar to impulss ir ķermeņa kustības raksturojums, kura atvasinājums pēc laika ir vienāds visās IAS.

No otras puses, Ņūtona mehānikā spēks ir arī punktveida ķermeņa kinētiskās enerģijas $T=\frac{1}{2}mu^2$ atvasinājums – gan ne pēc laika t, bet pēc koordinātes x:

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{2}m\cdot 2\mathrm{u}\frac{du}{dx}=mu\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}=mu\frac{du}{dt}\frac{1}{u}=m\frac{du}{dt}=F \quad .$$

Pamēģināsim atrast līdzīgu "kinētiskās enerģijas" funkciju relativitātes teorijā.

Mums vajadzētu meklēt funkciju $T_r=T(u)$ (būtu taču dīvaini, ja kinētiskā enerģija būtu tiešā veidā atkarīga no x vai t?), kam:

$$\frac{dT_r}{dx}=\frac{dT_r}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dT_r}{dt}\frac{1}{u}=F=m_0\frac{du_r}{dt}=\frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt} \quad . \qquad (7)$$

[Šeit esam izmantojuši sakarību: $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{u}$.]

Bet tāpat kā iepriekš, mēs varam pamēģināt atrisināt vispārīgāku uzdevumu: kādai ir jābūt funkcijai $T_r=T(u)$, lai atvasinājums $\frac{dT_r}{dx}$ nebūtu atkarīgs no izvēlētās IAS: $\frac{dT_r'}{dx'}=\frac{dT_r}{dx}$?

Teorēma 2. Eksistē tikai viena funkcija $T_r=T(u)$, kam $\lim_{u\to 0}\frac{T(u)}{\frac{1}{2}m_0u^2}=1$, un visiem u un v izpildās $\frac{dT_r'}{dx'}=\frac{dT_r}{dx}$, un tā ir: $T_r=T(u)=m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1)$.

Citiem vārdiem, šādai un tikai šādai "relatīvistiskajai kinētiskajai enerģijai" atbilstošais atvasinājums $\frac{dT_r}{dx}=\frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}$ ir vienāds visās inerciālajās atskaites sistēmās un pie maziem ātrumiem saskan ar Ņūtona mehāniku. Einšteinam nebija citas izvēles!

Pierādījums.

$$\frac{dT_r}{dx}=\frac{dT(u)}{du}\frac{du}{dx}=\frac{dT(u)}{du}\frac{1}{u}\frac{du}{dt} \quad ;$$

$$\frac{dT_r'}{dx'}=\frac{dT(u')}{du'}\frac{1}{u'}\frac{du'}{dt'}=\frac{dT(u')}{du'}\frac{1}{u'}\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{uv}{c^2})^3}\frac{du}{dt} \quad \text{(izmantojam (5)).}$$

Pielīdzinām abas izteiksmes:

$$\frac{dT(u')}{du'}\frac{1-\frac{uv}{c^2}}{u-v}\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\frac{uv}{c^2})^3}\frac{du}{dt}=\frac{dT(u)}{du}\frac{1}{u}\frac{du}{dt} \quad ;$$

$$\frac{dT(u')}{du'}\frac{1}{u'}=\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{dT(u)}{du}\frac{1}{u} \quad . \qquad (8)$$

No (7) mēs redzam, ka potenciālajam atrisinājumam būs īpašība:

$$\frac{dT_r}{dx}=\frac{dT_r}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dT_r}{dt}\frac{1}{u}=F=m_0\frac{du_r}{dt}=\frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt} \text{ , t.i. } \frac{dT_r}{dx}=\frac{dT(u)}{du}\frac{1}{u}\frac{du}{dt}=\frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt} \quad .$$

Tāpēc ievedīsim vēl funkciju W(u): $\frac{dT(u)}{du}=\frac{uW(u)}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$, un parādīsim, ka no tikko iegūtā nosacījuma seko, ka $W(u)=const$.

Aplūkosim analoģisku lielumu sistēmā S': $\frac{dT(u')}{du'}=\frac{W(u')}{(1-\frac{u'^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$. Tāpat kā teorēmas 1 pierādījumā, apstrādāsim izteiksmi saucējā:

$$\frac{dT(u')}{du'}=u'W(u')\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \quad .$$

Tagad varam atgriezties pie mūsu nosacījuma (8):

$$\frac{dT(u')}{du'}\frac{1}{u'}=W(u')\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{(1-\frac{uv}{c^2})^3}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{W(u)}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} \quad .$$

Saīsinot abās pusēs, iegūstam: $W(u')=W(u)$. Tas nozīmē, ka nosacījums (8) izpildās tad un tikai tad, ja visiem u un v: $W(u')=W(u)$, kur $u'=\frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$. Un tas, savukārt, nozīmē, ka $W(u)=const$. Tiešām, ņemsim u=0 un liksim v mainīties no –c līdz +c, tad arī u' mainīsies no –c līdz +c, tātad W(u')=W(0) visiem ātrumiem u'.

Esam izveduši no nosacījuma $\frac{dT_r'}{dt'}=\frac{dT_r}{dt}$, ka $\frac{dT(u)}{du}=\frac{const\cdot u}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$. Lai iegūtu T(u), ir jāintegrē.

Tā kā $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ atvasinājums pēc u ir $\frac{1}{c^2}\frac{u}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$, tad integrējot iegūstam:

$$T(u)=\frac{const}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+const_1 \quad .$$

Pie u=0 ir jābūt T=0, tāpēc $const_1=-const$ un $T(u)=const\cdot(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1)$

Mazam q, $\frac{1}{\sqrt{1-q}}\approx 1+\frac{1}{2}q$, tāpēc maziem u: $T(u)\approx const\cdot\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$. Bet pie maziem ātrumiem visam ir jābūt kā Ņūtona mehānikā: $T(u)\approx\frac{1}{2}m_0u^2$, tātad $const=m_0c^2$ un:

$$T(u)=m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1) \quad .$$

Abus nosacījumus, ko izmantojām, lai aprēķinātu konstantes, var apvienot vienā: $\lim_{u\to 0}\frac{T(u)}{\frac{1}{2}m_0u^2}=1$.

Q.E.D.

2.7. Secinājumi

Abas minētās teorēmas es agrāk nekur nebiju redzējis.

Tikai šādam relatīvistiskajam ātrumam (funkcijai no "parastā ātruma" $u=\frac{dx}{dt}$):

$$u_r=\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

atbilstošais relatīvistiskais paātrinājums $\frac{du_r}{dt}=\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}$ ir vienāds visās inerciālajās atskaites sistēmās. Einšteinam nebija citas izvēles!

Un tikai šādai punktveida ķermeņa relatīvistiskajai kinētiskajai enerģijai (funkcijai no "parastā ātruma" u):

$$T_r=m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1)$$

atbilstošais atvasinājums $\frac{dT_r}{dx}=\frac{m_0}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}$ ir vienāds visās inerciālajās atskaites sistēmās. Einšteinam nebija citas izvēles!

Izvedot šīs formulas, mēs izmantojām arī prasību, ka pie maziem ātrumiem visam ir jānotiek kā Ņūtona mehānikā: relatīvistikajam ātrumam u_r ir jātuvojas Ņūtona ātrumam u, bet punktveida ķermeņa relatīvistiskajai kinētiskajai enerģijai T_r – Ņūtona kinētiskajai enerģijai $\frac{1}{2}m_0 u^2$.

Par otro Ņūtona likumu. Ņūtona mehānikā šis likums ļauj sastādīt punktveida ķermeņa kustības diferenciālvienādojumu: $m\frac{du}{dt}=F(x,t)$, jeb $m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x,t)$. Tas ir otrās kārtas vienādojums, kura vispārīgais atrisinājums ir funkcija $x=f(t,C_1,C_2)$, kas nosaka ķermeņa kustību atskaites sistēmā S. Abas konstantes var aprēķināt, uzdodot ķermeņa sākuma telpas koordināti $x|_{t=0}=x_0$ un sākuma ātrumu $u|_{t=0}=u_0$.

Relativitātes teorijā situācija ir tikai nedaudz sarežģītāka. Otrajā Ņūtona likumā $m_0\frac{du_r}{dt}=F(x,t)$ mums ir jāievieto $\frac{du_r}{dt}=\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}$, līdz ar to $m_0\frac{du}{dt}=F(x,t)(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}$, jeb

$$m_0\frac{d^2x}{dt^2}=F(x,t)(1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2)^{\frac{3}{2}} .$$

Arī šī (vairs ne tik jaukā) vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir funkcija $x=f(t,C_1,C_2)$, kas nosaka ķermeņa kustību atskaites sistēmā S, un abas konstantes tāpat var aprēķināt, uzdodot ķermeņa sākuma telpas koordināti $x|_{t=0}=x_0$ un sākuma ātrumu $u|_{t=0}=u_0$.

2.8. Relatīvistiskā masa un kas no tās seko...

Literatūrā gan ir pieņemts runāt nevis par

relatīvistisko ātrumu $u_r=\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$; relatīvistisko paātrinājumu $\frac{du_r}{dt}=\frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dt}$;

relatīvistisko impulsu $p_r=m_0 u_r$; un relatīvistisko kinētisko enerģiju $T=m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1)$,

bet gan par:

relatīvistisko masu $m_r=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$;

relatīvistisko impulsu $p_r=m_r u$; un **relatīvistisko kinētisko enerģiju** $T=(m_r-m_0)c^2$.

Formāli matemātiski ņemot, abi “runas veidi”, protams, ir ekvivalenti.

Pirmajā “runas veidā”, neizbēgamais fenomens, ka augot ķermeņa ātrumam, vienam un tam pašam spēkam ķermeni paātrināt kļūst arvien grūtāk, tiek atstāts laiktelpas ģeometrijas ziņā. Masa ir tikai proporcionalitātes koeficients, kas raksturo ķermeņa paātrināšanas grūtības pakāpi, un tas mainās, pārejot uz citu IAS. “Vielas daudzumu” ķermenī raksturo tā “miera masa” m_0 .

Otrajā “runas veidā” uzreiz centrā tiek izvirzīta relatīvistiskā masa. Vai mums būtu jāsāk domāt, ka pats jēdziens par vielas daudzumu ir relatīvs (atkarīgs no atskaites sistēmas)? Joks? Un kinētiskās enerģijas formula rosina jau pavisam īpatnējas pārdomas: samazinoties ātrumam (t.i. zaudējot kinētisko energiju), ķermeņa (relatīvistiskā) masa samazinās līdz m_0 . Tātad, zaudējot visu **mehānisko** enerģiju $T=(m_r-m_0)c^2$, ķermeņa masa samazinas līdz m_0 . Bet ķermenī taču ir vēl citi enerģijas veidi – molekulu siltumkustība, elektromagnētiskie lauki, kodolspēku lauki utt.! Cik liels varētu būt šīs “slēptās” enerģijas daudzums? Ja kādu “slēptās” enerģijas daļu izdotos pārvērst ķermeņa mehāniskā kustībā, pēc tam to nobremzējot, vai tad ķermeņa masa būtu samazinājusies jau zem m_0 ? Ja tā, tad liekas, ka ķermenī apslēptās enerģijas daudzums nevarētu būt lielāks par $E=m_0c^2$. Un kāpēc “ne lielāks”, varbūt tas ir “vienāds”?

Un cik daudz tas ir? Ja mums ir 1 grams vielas miera stāvoklī , tad “slēptās” enerģijas tajā nevar būt vairāk par (vai ir tieši tik?) $m_0c^2\approx 9\cdot 10^{13}\,J\approx 25\cdot 10^6\,kWh$. Tas ir vienas ģimenes elektroenerģijas patēriņš 10000 gados! Vai arī: 1 kilograms trotila (TNT) uzsprāgstot, izdala $3\cdot 10^6\,J$, tātad vielas 1 grama “slēptā” enerģija nepārsniedz (vai ir vienāda ar?) enerģiju, kas izdalās, uzsprāgstot $3\cdot 10^7\,kg$ jeb 30000 tonnām (30 kilotonnām) trotila.

Jautājums: cik lielu daļu šīs vielā “apslēptās” enerģijas var izdalīt reālos fizikālos procesos, t.i. “pārvērst mehāniskā kustībā” (piemēram, sprādzienā)? Vai tiešām kilotonnas (ja ne visas 30, tas vismaz vienu)? Tāds jautājums diezgan drīz radās gan civilistiem, gan militāristiem...

2.9. Hamiltona vienādojumi relativitātes teorijā

Ņūtona mehānikā, ja mehāniska sistēma kustas t.s. potenciāla spēku laukā (sk. tālāk), tad tās kustības vienādojumus var iegūt, sastādot t.s. Hamiltona funkciju H – sistēmas pilnās enerģijas izteiksmi, kurā sistēmas stāvokli raksturo tās sastāvdaļu koordinātes un impulsi (nevis koordinātes un ātrumi). Punktveida ķermenim viendimensiju telpā tad H=H(x, p, t), kur x ir ķermeņa koordināte telpā, bet $p=m\frac{dx}{dt}$ – impulss, konkrēti:

$$H=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+U(x,t)=\frac{1}{2\mathrm{m}}p^2+U(x,t) \quad ,$$

kur U(x, t) ir spēku lauka potenciāls (potenciālā enerģija). Pats spēks tad ir vērsts pretēji potenciāla gradientam (t.i. uz potenciāla “bedres” pusi): $F(x,t)=-\boldsymbol{grad}\,U(x,t)=\frac{\partial U}{\partial x}$. [Īstenībā jau “tiešas iedarbības” spēku dabā nemaz nav – visas mijiedarbības notiek “it kā caur laukiem”.] Ķermeņa kustību šeit nosaka Hamiltona vienādojumi:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p} \;;\; \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x} \quad ,$$

jeb, ar konkrēto funkciju H:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{p}{m} \quad ;$$

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\boldsymbol{grad}\, U \quad .$$

Pirmais vienādojums sakrīt ar impulsa definīciju (šāds vienādojums ir nepieciešams, ja impulss skaitās neatkarīgs pamatjēdziens), bet otrais – ar otro Ņūtona likumu.

Kā šis formulējums izskatītos relativitātes teorijā?

Vispirms mums ir vajadzīga relatīvistiskās kinētiskās enerģijas T_r izteiksme caur relatīvistisko impulsu p_r :

$$p_r=\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad ; \quad p_r^2(1-\frac{u^2}{c^2})=m_0^2 u^2; \quad p_r^2 c^2-p_r^2 u^2=m_0^2 c^2 u^2;$$

$$u^2=\frac{p_r^2 c^2}{p_r^2+m_0^2 c^2}; \qquad 1-\frac{u^2}{c^2}=\frac{m_0^2 c^2}{p_r^2+m_0^2 c^2};$$

$$T_r=m_0 c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-1)=m_0 c^2(\frac{\sqrt{p_r^2+m_0^2 c^2}}{m_0 c}-1)=m_0 c^2(\sqrt{\frac{p_r^2}{m_0^2 c^2}+1}-1) \quad .$$

Līdz ar to, varam mēģināt šādu relatīvistisko Hamiltona funkciju:

$$H_r=m_0 c^2(\sqrt{\frac{p_r^2}{m_0^2 c^2}+1}-1)+U(x,t) \quad .$$

Tad varam saglabāt Hamiltona vienādojumu formu:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H_r}{\partial p_r} \quad ; \quad \frac{dp_r}{dt}=-\frac{\partial H_r}{\partial x} \quad . \qquad (9)$$

Tiešām:

$$u=\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H_r}{\partial p}=m_0 c^2 \frac{1}{2\sqrt{\frac{p_r^2}{m_0^2 c^2}+1}} \frac{2 p_r}{m_0^2 c^2}=\frac{p_r}{m_0}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}};$$

$$m_0\frac{du_r}{dt}=\frac{dp_r}{dt}=-\frac{\partial H_r}{\partial x}=-\boldsymbol{grad}\, U.$$

Pirmā vienādība atbilst relatīvistiskā impulsa definīcijai, bet otrā – otrajam Ņūtona likumam relativitātes teorijā.

Vienādojumi (9) tad arī kalpos kā Hamiltona vienādojumi relativitātes teorijā.

Pateicības

Paldies Paulim Ķikustam un Dainim Zepam par vērtīgajām diskusijām.