

PSRS AUGSTĀKĀS IZGLĪTĪBAS MINISTRIJA  
LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ZINĀTNISKIE RAKSTI  
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

SĒJUMS  
VIII  
ТОМ

RĪGĀ 1956 RĪGA

PSRS AUGSTĀKĀS IZGLITĪBAS MINISTRIJA  
LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ZINĀTNISKIE RAKSTI  
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

SĒJUMS  
VIII  
ТОМ



RĪGA 1956 РИГА

188

*Redakcijas koleģija:*

- fiz.-matem. zinātņu kand. doc. *V. K. Deļlovs* (atb. redaktors)
- fiz.-matem. zinātņu kand. doc. *P. J. Kuņins*
- fiz.-matem. zinātņu kand. doc. *E. J. Riekstiņš*

*Редакционная коллегия:*

- доцент кандидат физ.-мат. наук *В. К. Делловс* (ответств. редактор)
- доцент кандидат физ.-мат. наук *П. Е. Кунин*
- доцент кандидат физ.-мат. наук *Э. Я. Риекстыньш*

FIZIKAS-MATEMATIKAS ZINĀTNES  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2. IZLAIDUMS  
ВЫПУСК 2

### **К. Я. ЗАЛТС**

*В настоящем сборнике публикуются две работы умершего в 1953 г. старшего преподавателя Латвийского Государственного Университета Карла Яковлевича Залта.*

*Карл Яковлевич Залтс родился в 1885 году в семье латышских крестьян. В 1904 г. окончил Елгавское реальное училище, а в 1912 г. — Киевский Политехнический институт, получив звание инженера-технолога. С 1914 г. работал там же в лаборатории тепловых моторов. При Советской власти работал в конструкторском бюро Киевского арсенала и затем читал лекции о паровых турбинах в Киевском Политехническом институте. В 1921 г. вернулся в Латвию, и с того же года начал работать в Латвийском университете по инженерной математике. В 1936 г. дополнительно окончил математическое отделение Латвийского университета. Его научные работы по математике относятся, преимущественно, к номографии. В последние годы работал старшим преподавателем на кафедре общей математики.*

*После его смерти членами кафедры были просмотрены рукописи его научных работ и, после некоторой обработки, предложены к опубликованию. В первой из этих работ обобщаются некоторые результаты по теории анаморфозирующего множителя, ранее опубликованные автором, а вторая работа носит методический характер.*

## ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТОЧЕК ПЛОСКОСТИ, СОХРАНЯЮЩИЕ ПЛОЩАДИ ФИГУР

К. Я. ЗАЛТС

Если отображение данной фигуры имеет такую же величину площади, какую имеет данная фигура, то в картографии говорят о равновеликой проекции. Равновеликая проекция желательна во всех картах, на которых изображаются величины, зависящие от площади, например, плотность населения.

Основания математической теории равновеликой проекции созданы Эйлером в 1771 г., опубликовавшем в одном томе Трудов Академии Наук три работы по вопросам картографии [1]. В дальнейшей разработке теории равновеликой проекции участвуют Ламберт (1772), Майер (1794) [2] и др. В конце прошлого столетия крупные успехи достигнуты русским математиком Д. А. Граве, опубликовавшем по рассматриваемому вопросу обширные и исчерпывающие исследования [3], [4].

Общая теория равновеликой проекции показывает, что существует бесчисленное множество способов преобразования плоской фигуры в равновеликую плоскую фигуру другого вида.

Среди них лишь немногие отличаются простотой и легкостью применения. Но в приложениях простота метода имеет первостепенное значение. С этим связана задача настоящей статьи: среди преобразований плоских фигур в равновеликие плоские отыскать те, которые выделяются простотой и легкостью графического или графо-аналитического осуществления.

1. Вообразим две плоскости и в каждой из них примем декартову систему координат. Координаты точек одной плоскости обозначим через  $u, v$ , а другой — через  $x, y$ .

Уравнения

$$x = f(u, v), y = g(u, v), \quad (1.1)$$

где функции  $f$  и  $g$  определены в области  $S$ , каждой точке  $P(u, v) \in S$  поставят в соответствие точку  $Q(x, y) \in \Sigma$  на другой плоскости. Можно сказать, что область  $S$  преобразуется в область  $\Sigma$ .

Если допустить, что функции  $f$  и  $g$  в  $S$  дифференцируемы и якобиан

$$D(u, v) \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \equiv \pm 1 \quad (1.2)$$

всюду в  $S$ , то этим обеспечивается линейная независимость функций  $f$  и  $g$ . взаимно однозначное соответствие между точками  $P$  и  $Q$  и сохранение площади при преобразовании [5]. Знак «+» соответствует одинаковым, а знак «—» противоположным направлениям следования вдоль данного и отображенного контуров.

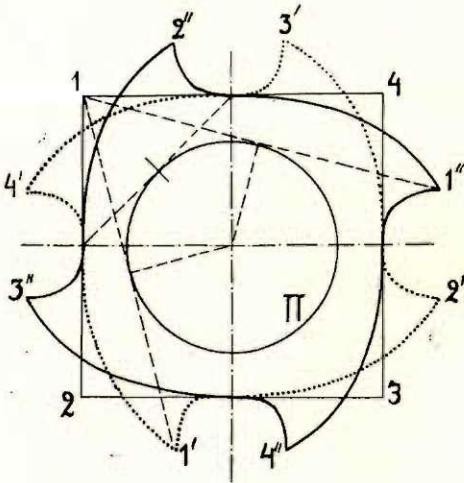
В дальнейшем рассматриваются некоторые частные случаи (1.1) со свойством (1.2).

2. Рассмотрим прием отображения, который можно рассматривать как обобщение центральной симметрии. Из точки  $P$  данной фигуры проводится касательная к произвольно выбранной гладкой вспомогательной кривой, отыскивается точка касания  $T$  и на продолжении касательной откладывается отрезок  $TQ = PT$ . Полученная таким образом точка  $Q$ , согласно определению, есть отображение точки  $P$ .

Назовем такое преобразование зеркальным отражением вдоль касательной относительно точки касания.

В качестве вспомогательной кривой можно выбрать любую линию, допускающую проведение касательной из точек данной фигуры. В практических применениях выбор ограничен тем, что построение касательной должно быть легким и точку касания необходимо найти с максимальной точностью на данном чертеже. Ясно, что при таком построении меняется вид фигуры, за исключением случая, когда вместо вспомогательной кривой выбирается точка. Докажем, что конструкция сохраняет площадь фигуры.

Отображающая точка  $Q(x, y)$  получается в результате зеркального отражения точки  $P(u, v)$  относительно точки касания  $T(\xi, \eta)$ , так что  $OT = TP$ .



Черт. 1.

Фигуры  $1' 2' 3' 4'$  и  $1'' 2'' 3'' 4''$  имеют площадь, равную площади квадрата.

Допустим, что вспомогательная кривая имеет уравнение

$$\eta = F(\xi) \quad (2.1)$$

Абсцисса  $\xi$  точки касания находится из уравнения касательной

$$F(\xi) - v = F'(\xi)(\xi - u), \quad (2.2)$$

если его решить относительно  $\xi$ . Очевидно имеем

$$x + u = 2\xi, \quad y + v = 2\eta, \quad (2.3)$$

и в силу (2.1)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv 0 \quad (2.4)$$

Принимая во внимание (2.4), из (2.3) имеем

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1 - 2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) \quad (2.5)$$

Непосредственным вычислением из (2.1) и (2.2) получаем, что выраженные  $\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v}$  тождественно равняется нулю.

Поэтому

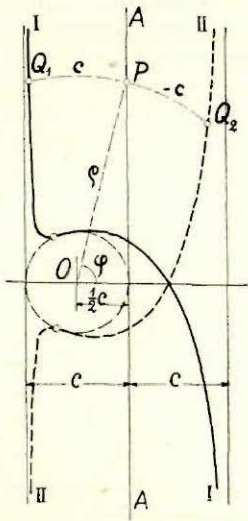
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv +1 \quad (2.6)$$

Формулы преобразования координат  $u, v$  в координаты  $x, y$  вытекают из уравнений (2.1), (2.2) и (2.3):

$$y + v = 2F\left(\frac{x+u}{2}\right), \quad \frac{y-v}{x-u} = F'\left(\frac{x+u}{2}\right) \quad (2.7)$$

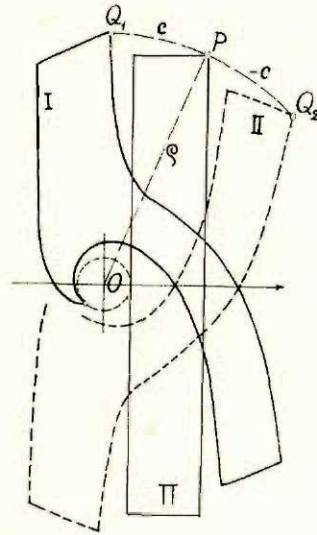
Сказанное иллюстрировано на черт. 1.

3. Пусть данная точка  $P(u, v)$  отображается точкой  $Q(x, y)$  следующим образом: около выбранного неподвижного центра (полюса отображения) описывается окружность, проходящая через  $P$ , и на этой окружности в определенном направлении откладывается дуга  $PQ = c = const$ . Для  $c > 0$  имеем направление против часовой стрелки, а для  $c < 0$  — противоположное направление (см. черт. 2, 3, 4).



Черт. 2.

Прямая  $AA'$  преобразуется в кривую  $II$  (если  $c > 0$ ) или  $II'$  ( $c < 0$ ).



Черт. 3.

Прямоугольник  $II$  преобразуется в фигуры  $I$  и  $II'$  равновеликие прямоугольнику.

Назовём это преобразование постоянным перемещением по concentрическим окружностям.

Введем полярную систему координат. Полюс системы совместим с полюсом отображения и для простоты предположим, что эта точка является началом декартовой системы координат. Точке  $P(\rho, \varphi)$  соответствует отображающая точка  $Q(r, \psi)$ , причем легко видеть, что

$$\rho = r, \quad \varphi = \psi - \frac{c}{r} \quad (3.1)$$

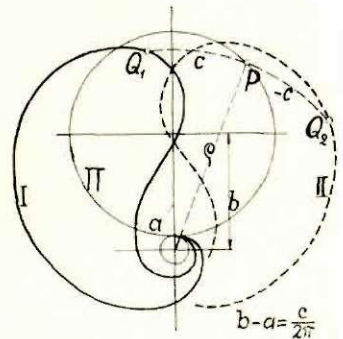
Переходя от полярных координат к декартовым в силу соотношений (3.1), получаем следующие формулы преобразования:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u^2 + v^2} \cos \left( \frac{c}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \arctg \frac{v}{u} \right) \\ y &= \sqrt{u^2 + v^2} \sin \left( \frac{c}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \arctg \frac{v}{u} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Имеем

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \psi)} \cdot \frac{\partial(r, \psi)}{\partial(\rho, \varphi)} \cdot \frac{\partial(\rho, \varphi)}{\partial(u, v)} = r \cdot 1 \cdot \frac{1}{\rho} = 1$$

Поэтому преобразование сохраняет площади фигур и направление следования по контуру.



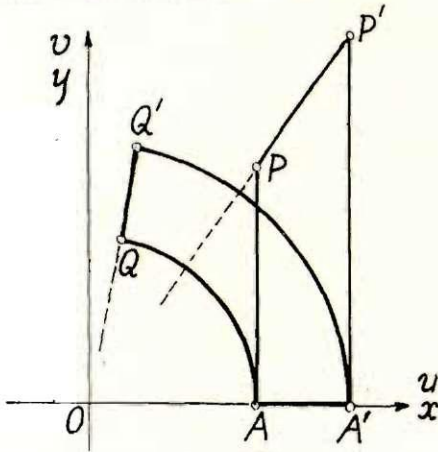
Черт. 4.

Кривые  $I$  ( $c > 0$ ) или  $II$  ( $c < 0$ ) ограничивают фигуры равновеликие окружности  $II$ .



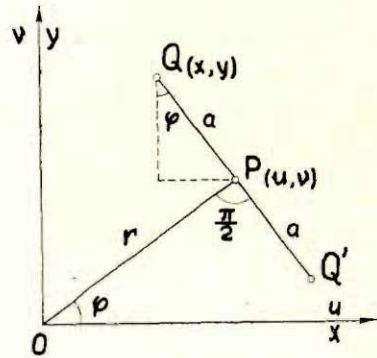
4. Вообразим следующее геометрическое построение. Из точки  $P(u, v)$  проводится перпендикуляр к оси абсцисс, пересекающий последнюю в точке  $A$ . Из начала координат описывается окружность радиуса  $OA = u$ , и на этой окружности (в положительном направлении, если  $v/u > 0$ , в отрицательном, если  $v/u < 0$ ) откладываем  $|v|$ . Полученная точка  $Q(x, y)$  считается отражением точки  $P$ .

Если ординату  $AP$  рассматривать как абсолютно гибкий стержень, закрепленный неподвижно в точке  $A$ , то отображение можно истолковать как изгиб стержня до совпадения с окружностью, описанной около  $O$  радиусом  $u$ . Поэтому этот метод называем изгибом ординат по концентрическим окружностям.



Черт. 5.

Трапеция  $APP'A'$  преобразуется в кольцевой сектор  $AQQ'A'$ .

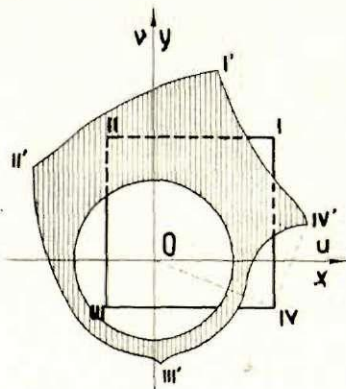


Черт. 6.

Зависимость между координатами точек  $P$  и  $Q$  выражается простыми формулами

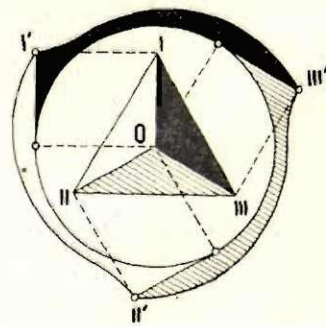
$$x = u \cos \frac{v}{u}, \quad y = u \sin \frac{v}{u} \quad (4.1)$$

Пользуясь этими формулами, легко убедиться в том, что  $D = 1$ , т. е. преобразование сохраняет площади фигур и направление следования по контуру.



Черт. 7.

Квадрат и его отображение (заштрихованное).



Черт. 8.

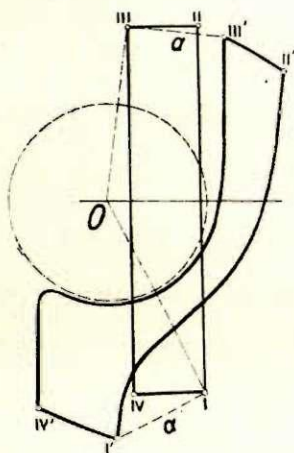
Правильный треугольник и его отображение (кольцеобразная фигура). Соответствующие равновеликие фигуры обозначены одинаково.

При таком преобразовании бесконечная прямая, параллельная оси ординат, отображается окружностью с центром в начале, (см. также черт. 5), а прямая через начало, имеющая угловой коэффициент  $m$ , отображается прямой, проходящей через начало координат, которая составляет с осью абсцисс угол  $m$  (в радианах).

Прямая  $v = b$  отображается гиперболической спиралью  $uv = b$ .

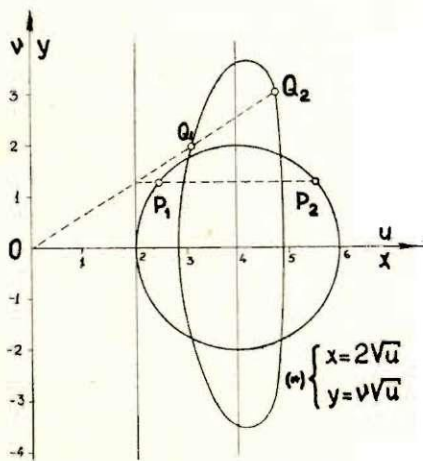
5. Если прямая на плоскости перемещается так, что связанный с нею перпендикуляр проходит через неподвижную точку, и если некоторая точка прямой описывает замкнутый контур, то и остальные точки прямой описывают замкнутые контуры.

Контуры, описанные различными точками, имеют в общем различные виды, и, следовательно, мы имеем преобразование фигур. Назовем это преобразованием посредством прямого угла. Покажем, что оно сохраняет площадь.



Черт. 9.

Прямоугольник I II III IV преобразовывается в равновеликую фигуру I' II' III' IV'.



Черт. 10.

Посредством формул круг  $P_1 P_2$  преобразовывается в равновеликую фигуру  $Q_1 Q_2$ .

Для доказательства совместим начало координат с неподвижной точкой  $O$ , а точку  $P(u, v)$ , описывающую данную линию, примем в точке пересечения перпендикуляра. Отображение находится на перпендикуляре к  $OP$  в точке  $Q$  или  $Q'$  ( $PQ = a > 0$ ,  $PQ' = -a$ ). Из черт. 6 видно, что

$$x = u - a \sin \varphi, \quad y = v + a \cos \varphi \quad (5.1)$$

где  $\varphi$  — полярный угол. Исключив его из (5.1), получаем формулы преобразования

$$x = u - \frac{av}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad y = v + \frac{au}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (5.2)$$

Из них следует значение функционального определителя

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv +1$$

Отображающая точка  $Q(x, y)$  находится на постоянном расстоянии  $a$  от огибающей стороны прямого угла, проходящей через полюс  $O$ . Таким образом отображение располагается вне окружности, описанной около полюса радиусом  $a$ . Полюс отображается этой окружностью. Некоторые примеры такого преобразования даны на черт. 7, 8, 9. Преобразования подобного рода, когда одна сторона прямого угла касается некоторой выпуклой кривой, рассмотрена Шеффером [6].

6. Надо отметить, что формулы преобразований, сохраняющих площади фигур, вытекают также из формулы замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b v \, du = \int_x^{\beta} y \, dx, \quad (6.1)$$

где

$$x = F(u), \quad y = \frac{v}{F'(u)} \quad (6.2)$$

Функция  $F(u)$  может быть произвольной, лишь удовлетворяющей условиям замены переменной в (6.1) [5].

В некоторых случаях преобразование легко осуществляется графически, как это показано на черт. 10.

*Кафедра общей математики.*

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Euler, L. Acta Academia Scientiarum Petropolitanae pro Anno 1777.
- [2]. Mayer, J. Grundl. u. vollstand. Anweisung zur Verzeichn. d. Land-, See- und Himmelskarten. Erlangen, 1794.
- [3]. Grave, D. A. Sur la construction des cartes geographiques. Journal de Mathem., 5-e serie, t. I. 1896.
- [4]. Граве, Д. А. Об основных задачах математической теории построения географических карт. СПб., 1896.
- [5]. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления I, II, III. Гостехиздат. 1948.
- [6]. Scheffers, G. Ein einfaches Werkzeug für gewisse flächentreue Abbildungen der Ebene. Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech., Bf. I, 418—419. (1921).

#### TRANSFORMACIJAS, KAS NEMAINA FIGURAS LAUKUMU

*K. J. Zalts*

(Kopsavilkums)

Darbā apskatītas dažas specialas transformācijas, ar kurām plaknes figūras var pārveidot vienlielās figūras. Apskatītās transformācijas īpatnējas ar to, ka tās atļauj figūru pārveidošanu grafiski izpildīt ļoti vienkāršiem līdzekļiem.

## ОБ АНАМОРФОЗИРУЮЩЕМ МНОЖИТЕЛЕ

К. Я. ЗАЛТС

### ВВЕДЕНИЕ

Пусть даны три шкалы,  $i$ -я помечена значениями переменной  $z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Декартовы координаты  $i$ -ой шкалы выражаются уравнениями

$$x_i = \frac{F_i}{H_i}, \quad y_i = \frac{G_i}{H_i}, \quad (H_i \neq 0) \quad (0.1)$$

где  $F_i, G_i, H_i$  — функции переменной  $z_i$  ( $a_i < z_i < b_i$ ), удовлетворяющие определенным необходимым требованиям.

Будем пользоваться шкалами как номограммой из выравненных точек, т. е. будем рассматривать пометки шкал в точках, лежащих на одной секущей прямой. Пометки таких точек связаны зависимостью

$$\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (0.2)$$

Таким образом, по заданным уравнениям шкал, составляющих номограмму из выравненных точек, без затруднений находят изображаемую номограммой зависимость.

В приложениях чаще всего приходится решать обратную задачу, именно: *пусть дана некоторая функциональная зависимость*

$$\Phi(z_1, z_2, z_3) \equiv \Phi_{123} = 0 \quad (0.3)$$

*Желательно представить ее номограммой из выравненных точек.*

Так как задача эта не всегда разрешима, то возникают два вопроса: 1) каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять функциональная зависимость, чтобы она допускала изображение номограммой из выравненных точек, и 2) если эти условия удовлетворены, то как найти требуемое изображение?

В наиболее общем виде этими вопросами занимался Гронваль в работе, опубликованной в 1912 г. [1]. Необходимое и достаточное условие преобразования уравнения (0.3) в детерминантную форму (0.2), по Гронвалю, заключается в том, что два дифференциальных уравнения в частных производных должны иметь общий интеграл.

По мнению Соро [2, стр. 29], результаты, полученные Гронвалем, ввиду их сложности, имеют лишь теоретический интерес, и никогда не встречаются случаи необходимости их применения на практике.

«Результаты Гронваля», пишет Н. А. Глаголев [3], «были обработаны Соро, который дал значительное продвижение в этой проблеме, но все же не довел ее до окончательного разрешения. Проблему общей анаморфозы можно, таким образом, считать одной из проблем, подлежащих разрешению в будущем».

В теории Гронваля предполагается лишь эквивалентность уравнений (0.3) и (0.2). Можно исходить из менее общей формулировки задачи, именно: представить заданную функцию  $\Phi_{123}$  в виде определителя в (0.2).

По Келлогу [4] необходимым и достаточным условием возможности такого представления является требование, чтобы определенная матрица, составленная из функции  $\Phi_{123}$  и ее частных производных, имела бы ранг меньше 4.

В новейшее время задачей номографического разъединения переменных в общем виде занимался советский математик Х. А. Битнер [5].

Может случиться, что функция  $\Phi_{123}$  не допускает представления в виде определителя (0.2), но такое представление становится возможным после уменьшения ее на некоторый т. н. анаморфозирующий множитель  $V$ .

Окань [6] и Соро [2, стр. 43—45, 107—109] дали применения анаморфозирующего множителя, не углубляясь, однако, в его изучение.

Вопрос о существовании анаморфозирующего множителя исследован С. В. Бахваловым [7]. Им получены необходимые и достаточные условия существования этого множителя. Но простых практических приемов для нахождения его в общем случае пока нет.

Весьма много случаев охватывает формула, имеющая следующую функциональную структуру:

$$\Phi_{123} \equiv F_1 K_{23} + G_1 L_{23} + H_1 M_{23} = 0 \quad (0.4)$$

Это уравнение, ввиду его важных свойств и многочисленных практических применений, подвергалось неоднократному исследованию.

Булад в ряде работ, опубликованных начиная с 1910 года [8, 9], дал очень простой метод непосредственной анаморфозы уравнения (0.4). Но метод Булада не дает никаких указаний относительно того, как следует поступать, когда непосредственная анаморфоза невозможна и когда необходимо прибегнуть к помощи анаморфозирующего множителя.

Соро [2, стр. 27-111] считает детальное исследование уравнений типа (0.4) имеющим чрезвычайно важное значение и посвящает этому исследованию две главы — почти третью часть второго тома своей «Номографии». Метод Соро охватывает одновременно два случая анаморфозы — непосредственную и анаморфозу посредством множителя, причем наметчен также способ нахождения этого множителя.

Способ определения анаморфозирующего множителя, вытекающий из метода Соро, имеет существенный недостаток: анаморфозирующий множитель выражается через функции, которые становятся известными только после разъединения переменных, т. е. когда задача уже полностью разрешена. Устранению этого недостатка посвящена настоящая статья. Автору удалось найти простые критерии анаморфозируемости уравнения (0.4) и показать, что анаморфозирующий множитель, когда он существует, содержится в некотором простом и заранее известном определителе, а в простейших случаях равняется ему.

Излагаемая в дальнейшем теория опирается на предшествующую работу автора [10].

## § 1.

### АНАМОРФОЗА УРАВНЕНИЯ

$$F_1 K_{23} + G_1 L_{23} + H_1 M_{23} = 0$$

1. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \phi_{123} \equiv F_1 K_{23} + G_1 L_{23} + H_1 M_{23} \equiv & F_1(z_1)K(z_2 z_3) + G_1(z_1)L(z_2 z_3) + \\ & + H(z_1)M(z_2 z_3) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где функции  $F$ ,  $G$  и  $H$  определены в  $[a, b]$ , а  $K$ ,  $L$  и  $M$  в некоторой области  $\Delta$ . Из рассмотрения исключаются все случаи, когда выражение (1.1) распадается на произведение множителей, зависящих от числа переменных, меньшего трех.

Допустим, что ни одна из функций  $F$ ,  $G$ ,  $H$  не равняется тождественно нулю. Более того, предположим, что функции  $K$ ,  $L$ ,  $M$  нигде в области  $\Delta$  не обращаются в нуль. Кроме того предположим, что в рассматриваемой области функции  $F$ ,  $G$ ,  $H$  (соотв.  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ) линейно независимы. Это предположение равносильно тому, что  $\Phi_{123}$  неприводимо к двучлену  $F_1K + G_1L$ . При перечисленных предположениях имеем уравнение (1.1) с неприводимым трехчленом на левой стороне.

2. Пусть левая часть уравнения (1.1) после умножения на анаморфозирующий множитель  $v = v(z_2, z_3)$ , тождественно равняется определителю, в котором переменные разъединены по строкам:

$$v(F_1K_{23} + G_1L_{23} + H_1M_{23}) \equiv \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

Требуется найти шесть функций  $F_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$  ( $i=2,3$ ) и множитель  $v \neq 0$ . Однако для построения шкал достаточно знать четыре отношения  $F_i : G_i : H_i$  ( $i=2,3$ ). Добавляя к ним  $v$ , имеем всего пять искомого.

Для определения неизвестных имеются три условия, вытекающие из сравнения левой и правой частей тождества (1.2):

$$vK = \begin{vmatrix} G_2 & H_2 \\ G_3 & H_3 \end{vmatrix}, \quad vL = \begin{vmatrix} H_2 & F_2 \\ H_3 & F_3 \end{vmatrix}, \quad vM = \begin{vmatrix} F_2 & G_2 \\ F_3 & G_3 \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Сложив равенства (1.3), после их умножения соответственно на  $F_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$  ( $i=2,3$ ), и сократив сумму на  $v (\neq 0)$ , получаем:

$$\begin{aligned} F_2K + G_2L + H_2M &\equiv 0 \\ F_3K + G_3L + H_3M &\equiv 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Обратно, рассматривая (1.4) как однородную систему линейных уравнений с неизвестными  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , получаем равенства (1.3), если матрица

$$\begin{vmatrix} F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

всюду в  $\Delta$  имеет ранг 2. Если же в точке  $P_0(z_2^0, z_3^0)$  матрица (1.5) имела бы ранг меньше 2, то тождество (1.2), поскольку  $v \neq 0$ , показывает, что

$$F_1(z_1)K(z_2^0, z_3^0) + G_1(z_1)L(z_2^0, z_3^0) + H_1(z_1)M(z_2^0, z_3^0) \equiv 0$$

т. е. функции  $F_1$ ,  $G_1$ ,  $H_1$  линейно зависимы, вопреки предположению. Поэтому при условии, что матрица (1.5) имеет ранг два, системы (1.3) и (1.4) эквивалентны. Ниже будем рассматривать только систему (1.4).

3. Для определения функций  $F_2$ ,  $G_2$ ,  $H_2$  имеем не только первое равенство (1.4), но и бесчисленное множество других, полученных из него дифференцированием по переменной  $z_3$ :

$$\begin{aligned} F_2K + G_2L + H_2M &= 0 \\ F_2K' + G_2L' + H_2M' &= 0 \\ F_2K'' + G_2L'' + H_2M'' &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

где обозначено

$$K'_i = \frac{\partial K}{\partial z_i}, \quad K''_i = \frac{\partial^2 K}{\partial z_i^2} \quad (i = 2, 3)$$

Предполагается, что все рассматриваемые производные существуют.

Бесконечная однородная система линейных уравнений (1.6) всегда имеет тривиальное решение  $F_2 = 0$ ,  $G_2 = 0$ ,  $H_2 = 0$ , но оно совершенно бесполезно для построения шкалы и не удовлетворяет условию о ранге матрицы (1.5).

Для первых трех уравнений (1.6) должно быть выполнено *условие их совместности*:

$$\begin{vmatrix} K & L & M \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \\ K''_3 & L''_3 & M''_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.7)$$

Тогда их можно решить относительно неизвестных  $F_2$ ,  $G_2$ ,  $H_2$  и решение, отличающееся от тривиального, дается пропорцией

$$F_2 : G_2 : H_2 = \begin{vmatrix} L & M \\ L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M & K \\ M'_3 & K'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K & L \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

если определители на правой стороне не обращаются в нули все одновременно. Поэтому мы будем предполагать, что матрица

$$\begin{vmatrix} K & L & M \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

имеет всюду в  $\Delta$  ранг 2; более того, мы будем предполагать, что по крайней мере один из определителей 2-го порядка этой матрицы всюду в  $\Delta$  отличен от нуля. Для определенности будем считать, что таким является определитель  $KL'_3 - LK'_3$ . В пропорции (1.8) левая часть зависит только от  $z_2$ , а правая, вообще говоря, содержит также  $z_3$ . Функции  $K$ ,  $L$ ,  $M$  поэтому должны удовлетворять *условиям сократимости*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_3} \left\{ \begin{vmatrix} L & M \\ L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K & L \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix} \right\} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z_3} \left\{ \begin{vmatrix} M & K \\ M'_3 & K'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K & L \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Выполняя дифференцирования, указанные в (1.10), в силу (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_3} \frac{LM'_3 - L'_3M}{KL'_3 - K'_3L} &= \begin{vmatrix} K & L & M \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \\ K''_3 & L''_3 & M''_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K & L_2 \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z_3} \frac{MK'_3 - M'_3K}{KL'_3 - LK'_3} &= \begin{vmatrix} K & L & M \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \\ K''_3 & L''_3 & M''_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K & L_2 \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Итак, условие совместности (1.7) является одновременно условием сократимости (1.10). При помощи некоторой функции  $\lambda(z_2, z_3)$  можем представить  $F_2$ ,  $G_2$  и  $H_2$  следующим образом:

$$F_2 = \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} L & M \\ L'_3 & M'_3 \end{vmatrix}, \quad G_2 = \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} M & K \\ M'_3 & K'_3 \end{vmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} K & L \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix} \quad (1.11)$$

Очевидно, эти функции одновременно удовлетворяют и всем остальным уравнениям (1.6).

4. Подобным образом находим функции  $F_3$ ,  $G_3$ ,  $H_3$ , решая бесконечную однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} F_3 K + G_3 L + H_3 M &= 0 \\ F_3 K'_2 + G_3 L'_2 + H_3 M'_2 &= 0 \\ F_3 K''_2 + G_3 L''_2 + H_3 M''_2 &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Для разрешения (1.12) требуются выполнения условия совместности

$$\begin{vmatrix} K & L & M \\ K'_2 & L'_2 & M'_2 \\ K''_2 & L''_2 & M''_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.13)$$

и условия, что матрица

$$\left\| \begin{matrix} K & L & M \\ K'_2 & L'_2 & M'_2 \end{matrix} \right\| \quad (1.14)$$

имеет ранг 2 (более того, по крайней мере один из определителей 2-го порядка этой матрицы всюду в  $\Delta$  отличен от нуля). Введя некоторый множитель  $\mu (\neq 0)$ , имеем

$$F_3 = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} L & M \\ L'_2 & M'_2 \end{vmatrix}, \quad G_3 = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} M & K \\ M'_2 & K'_2 \end{vmatrix}, \quad H_3 = \frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} K & L \\ K'_2 & L'_2 \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

5. Покажем, что матрицы (1.9) и (1.14) при наших оговорках в п. 1 всегда имеют ранг 2.

В самом деле, пусть, напр., ранг матрицы (1.14) меньше 2. Это означает, что все миноры этой матрицы равняются нулю, причем в полном трехчленном уравнении (1.1) ни одна из функций  $K$ ,  $L$ ,  $M$  нигде в  $\Delta$  не равна нулю. В силу этого имеем

$$\frac{K'_2}{K} = \frac{L'_2}{L} = \frac{M'_2}{M}$$

Интегрирование этих равенств убеждает, что  $K : L : M = A : B : C$ . Следовательно, функции  $K$ ,  $L$ ,  $M$  содержат переменную  $z_2$  только в общем множителе, что противоречит оговорке в п. 1. К такому же заключению приходим, рассматривая матрицу (1.9).

6. Для завершения анаморфозы (1.2) разыщем еще анаморфозирующий множитель  $\sigma$ . Покажем, что для него существует простое выражение через данные функции  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и их частные производные, так что его можно найти, не выполняя разведений переменных.

Подставим найденные значения  $F_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$  ( $i=2,3$ ), определяемые формулами (1.11) и (1.15), в одно из равенств (1.3). В силу оговорок в п. 1, безразлично, каким из равенств (1.3) воспользоваться. Выберем, например, первое из этих равенств.



После несложных преобразований определителя находим:

$$\lambda\mu\nu = \frac{1}{K} \begin{vmatrix} MK'_3 - KM'_3 & KL'_3 - LK'_3 \\ MK'_2 - KM'_2 & KL'_2 - LK'_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} K & L & M \\ K'_2 & L'_2 & M'_2 \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

Ввиду того, что в левой части (1.16) ни один из множителей  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  не равняется нулю, функции  $K$ ,  $L$ ,  $M$  должны быть таковы, что всюду в  $\Delta$  имеет место

$$\lambda\mu\nu = \begin{vmatrix} K & L & M \\ K'_2 & L'_2 & M'_2 \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.17)$$

(Это условие гарантирует также, что ранг матрицы (1.5) всюду в  $\Delta$  равен 2).

Таким образом, достаточные условия для анаморфозируемости уравнения (1.1) даются формулами (1.7), (1.13) и (1.17).

Соро [2, стр. 55—56] заметил большую роль определителя (1.17) при номографировании уравнений и называет его *характеристикой* уравнения. Но он слишком мало пользуется этим определителем в своих исследованиях, не подозревая, повидимому, что в нем содержится анаморфозирующий множитель.

7. Из равенства (1.2) непосредственно следует, что анаморфозирующий множитель есть функция переменных  $z_2$  и  $z_3$ . Докажем, что он *не может зависеть только от одной переменной или распадаться на произведение функций одной переменной*.

В самом деле, пусть в тождестве (1.2)  $\nu$  равняется произведению функций одной переменной:  $\nu = \nu_2\nu_3$ . Тогда, разделив левую часть (1.2) на  $\nu$ , а правую — на  $\nu_2$  и  $\nu_3$  (с их распределением по соответствующим строкам определителя), мы анаморфозирующий множитель совершенно устраним. Этим доказывается, что анаморфоза посредством распадающегося множителя есть в сущности непосредственная анаморфоза.

*Анаморфозирующий множитель  $\nu = \nu(z_2, z_3)$  определен с точностью до сомножителей, являющихся функциями одной переменной, отличными от нуля.* В самом деле, если существует анаморфоза (1.2), то при  $\nu_i = \nu_i(z_i)$  ( $i = 2, 3$ ) имеет силу также тождество

$$\nu\nu_2\nu_3(F_1K + G_1L + H_1M) \equiv \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ \nu_2F_2 & \nu_2G_2 & \nu_2H_2 \\ \nu_3F_3 & \nu_3G_3 & \nu_3H_3 \end{vmatrix}$$

В простейших случаях множители  $\lambda$  и  $\mu$  оказываются функциями одной переменной. Тогда определитель (1.17) сам является анаморфозирующим множителем.

8. Иногда мы встречаемся также с неполным уравнением

$$F_1K_{23} + G_1L_{23} = 0, \quad (1.18)$$

если в отличие от оговорок в п. 1 одна из систем функций линейно зависима. Относительно функций  $F$ ,  $K$ ,  $G$  и  $L$  оговорки в п. 1 остаются в силе.

Ищем опять множитель  $\nu(z_2, z_3)$  так, чтобы имело место тождество

$$\nu(F_1K + G_1L) \equiv \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} \quad (1.19)$$

Но здесь, в связи с тем, что  $H$  не задано, надо различать два случая.

1)  $H_1 \neq 0$ .

В этом случае из сравнения левой и правой частей тождества (1.19) следует, что

$$vK = \begin{vmatrix} G_2 & H_2 \\ G_3 & H_3 \end{vmatrix}, \quad vL = \begin{vmatrix} H_2 & F_2 \\ H_3 & F_3 \end{vmatrix}, \quad 0 = \begin{vmatrix} F_2 & G_2 \\ F_3 & G_3 \end{vmatrix}$$

в каждой точке  $\Delta$ . Умножая эти равенства соответственно на  $F_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$  ( $i = 2, 3$ ) и складывая, находим после сокращения на  $v (\neq 0)$ :

$$F_2K + G_2L = 0, \quad F_3K + G_3L = 0, \quad F_2G_3 - F_3G_2 = 0$$

Отсюда ясно, что всюду в  $\Delta$

$$\frac{F_2}{G_2} = \frac{F_3}{G_3} = -\frac{L}{K} = \text{const.}$$

т. е. функции  $K$  и  $L$  линейно зависимы, что противоречит исходному предположению. Это значит, что случай  $H_1 \neq 0$  невозможен.

2)  $H_1 \equiv 0$ .

Определитель  $F_2G_3 - F_3G_2$  не равняется тождественно нулю (в противном случае  $K$  и  $L$  были бы линейно зависимы), поэтому его можно приравнять выражению  $vM$ , где  $M$  есть некоторая функция переменных  $z_2$  и  $z_3$ , отличающаяся от нуля и не зависящая линейно от  $K$  и  $L$ . Тогда для определения неизвестных получаем тождества

$$vK = \begin{vmatrix} G_2 & H_2 \\ G_3 & H_3 \end{vmatrix}, \quad vL = \begin{vmatrix} H_2 & F_2 \\ H_3 & F_3 \end{vmatrix}, \quad vM = \begin{vmatrix} F_2 & G_2 \\ F_3 & G_3 \end{vmatrix} \quad (1.20)$$

по форме совпадающие с тождествами (1.3), использованными при номографировании полного трехчленного уравнения (1.1). Поэтому алгоритм решения остается в силе для системы (1.20).

## § 2.

### УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ В ОБЩЕМ ВИДЕ

1. Напишем уравнение третьего номографического порядка с тремя переменными в общем виде, упорядочив левую часть относительно переменной  $z_1$ :

$$\dot{f}_1(A_1 \dot{f}_2 \dot{f}_3 + B_1 \dot{f}_2 + C_1 \dot{f}_3 + D_1) + (A_2 \dot{f}_2 \dot{f}_3 + B_2 \dot{f}_2 + C_2 \dot{f}_3 + D_2) = 0 \quad (2.1)$$

где  $A_i, B_i, C_i, D_i$  ( $i = 1, 2$ ) — постоянные.

Так как это уравнение должно выражать зависимость между тремя переменными, то из рассмотрения устраним все значения коэффициентов, приводящие к распадению левой части на множители с меньшим числом переменных.

Мы имеем здесь двучленную форму уравнения с левой частью

$$\Phi_{123} = \dot{f}_1 K + L \quad (2.2)$$

где

$$K = A_1 \dot{f}_2 \dot{f}_3 + B_1 \dot{f}_2 + C_1 \dot{f}_3 + D_1$$

$$L = A_2 \dot{f}_2 \dot{f}_3 + B_2 \dot{f}_2 + C_2 \dot{f}_3 + D_2$$



Из условий (1.7) и (1.13) после преобразования определителей следует

$$\begin{vmatrix} C_1 \dot{f}_3 + D_1 & C_2 \dot{f}_3 + D_2 \\ A_1 \dot{f}_3 + B_1 & A_2 \dot{f}_3 + B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{f}_2' & M_2' \\ \dot{f}_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{vmatrix} B_1 \dot{f}_2 + D_1 & B_2 \dot{f}_2 + D_2 \\ A_1 \dot{f}_2 + C_1 & A_2 \dot{f}_2 + C_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{f}_3' & M_3' \\ \dot{f}_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

Более подробное исследование [10, стр. 184—185] показывает, что в формулах (2.3) и (2.4) определители, содержащие  $A_i, B_i, C_i, D_i$  ( $i=1,2$ ), не могут тождественно равняться нулю, не вызывая распада на множители левой части уравнения (2.1). Так как случаи распада мы не рассматриваем, то (2.3) и (2.4) равносильны уравнениям

$$\begin{vmatrix} \dot{f}_2' & M_2' \\ \dot{f}_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{f}_3' & M_3' \\ \dot{f}_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что

$$M = A_3 \dot{f}_2 \dot{f}_3 + B_3 \dot{f}_2 + C_3 \dot{f}_3 + D_3 \quad (2.6)$$

где  $A_3, B_3, C_3, D_3$  — неопределенные постоянные интегрирования. Выбор этих постоянных ограничен требованием (1.17), которое дает в этом случае:

$$-\lambda\mu\nu = \dot{f}_2' \dot{f}_3' \begin{vmatrix} C_1 \dot{f}_3 + D_1 & C_2 \dot{f}_3 + D_2 & C_3 \dot{f}_3 + D_3 \\ A_1 \dot{f}_3 + B_1 & A_2 \dot{f}_3 + B_2 & A_3 \dot{f}_3 + B_3 \\ A_1 \dot{f}_2 + C_1 & A_2 \dot{f}_2 + C_2 & A_3 \dot{f}_2 + C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

После некоторых преобразований получаем

$$\lambda\mu\nu = \dot{f}_2' \dot{f}_3' \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ 1 & -\dot{f}_3 & -\dot{f}_2 & \dot{f}_2 \dot{f}_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.7)$$

Чтобы удовлетворить требованию  $\lambda\mu\nu \neq 0$ , матрица

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

должна быть третьего ранга и  $\dot{f}_2' \neq 0, \dot{f}_3' \neq 0$  в данной области. Тождественное равенство нулю этих производных невозможно в силу того, что рассматривается уравнение с тремя переменными. Это единственное требование, чтобы уравнения третьего номографического порядка с тремя переменными (2.1) имели бы анаморфозирующий множитель.

2. Применяя общее правило предыдущего параграфа — формулу (1.8) — убеждаемся, что  $F_2, G_2, H_2$  могут быть приняты равными минорам матрицы

$$\begin{vmatrix} B_1 \dot{f}_2 + D_1 & B_2 \dot{f}_2 + D_2 & B_3 \dot{f}_2 + D_3 \\ A_1 \dot{f}_2 + C_1 & A_2 \dot{f}_2 + C_2 & A_3 \dot{f}_2 + C_3 \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

Подобным образом  $F_3, -G_3, H_3$  определяются посредством миноров матрицы

$$\begin{vmatrix} C_1 f_3 + D_1 & C_2 f_3 + D_2 & C_3 f_3 + D_3 \\ A_1 f_3 + B_1 & A_2 f_3 + B_2 & A_3 f_3 + B_3 \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

а в (2.7)  $\lambda = f_3', \mu = f_2'$ .

Те же результаты получаются, если исходить из матрицы

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ 0 & -1 & 0 & f_i \\ 1 & 0 & f_i & 0 \end{vmatrix} \quad (i = 2, 3) \quad (2.11)$$

и пользоваться ею согласно следующему правилу: чтобы получить  $F_i, -G_i, H_i$ , надо вычеркнуть в матрице (2.11) соответственно третью, вторую, первую строку. Тогда получаем  $F_i, -G_i, H_i$  в виде определителя четвертого порядка.

Номограмма, соответствующая уравнению (2.1), состоит из одной прямолинейной шкалы (переменной  $z_1$ ) и двух криволинейных шкал (переменных  $z_2$  и  $z_3$ ), расположенных на общем носителе — кривой второго порядка, выражаемой уравнением

$$\frac{A_1 x + A_3 y + A_2}{B_1 x + B_3 y + B_2} = \frac{C_1 x + C_3 y + C_2}{D_1 x + D_3 y + D_2} \quad (2.12)$$

Это уравнение содержит произвольные постоянные  $A_3, B_3, C_3, D_3$ , значения которых ограничены только требованием относительно ранга матрицы (2.8). Свободой в выборе этих постоянных можно воспользоваться для того, чтобы придать номограмме желательный вид.

Доказательство того, что шкалы  $z_2$  и  $z_3$  лежат на общей кривой, и вывод уравнения (2.12) можно найти в цитированной работе автора [10, стр. 188—189].

3. Уравнение четвертого номографического порядка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{123} \equiv & F_1(A_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 + C_1 f_3 + D_1) + \\ & + G_1(A_2 f_2 f_3 + B_2 f_2 + C_2 f_3 + D_2) + \\ & + H_1(A_3 f_2 f_3 + B_3 f_2 + C_3 f_3 + D_3) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $A_i, B_i, C_i, D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — постоянные.

Примем сокращенные обозначения для выражений в скобках

$$K = A_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 + C_1 f_3 + D_1$$

$$L = A_2 f_2 f_3 + B_2 f_2 + C_2 f_3 + D_2$$

$$M = A_3 f_2 f_3 + B_3 f_2 + C_3 f_3 + D_3$$

и мы имеем

$$\Phi_{123} \equiv F_1 K + G_1 L + H_1 M \quad (2.14)$$

Нетрудно убедиться в том, что мы можем воспользоваться результатами, полученными в п. 1 и 2 этого параграфа.

Анаморфозирующий множитель получается по формуле (2.7), а функции  $F_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$  ( $i=2,3$ ) из матрицы (2.11), использованием того же правила. Но в этом случае постоянные  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$ ,  $D_3$  не произвольны, поэтому общему носителю помеченных значений  $z_2$  и  $z_3$  — кривой (2.12) — мы не можем придать желательный вид. Кроме того, в общем случае шкала  $z_1$  криволинейна.

Кафедра общей математики.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1]. *Gronwall, T. H.* Sur les equations entre trois variables representables par des nomogrammes, a points alignes. Journal de Mathem. pures et appliquees, 6. serie, T. VIII, 1912, сmp. 59.
- [2]. *Soreau, R.* Nomographie ou Traite des abaques. Tome II. Paris, 1921.
- [3]. *Глаголев, Н. А.* О научной работе в области номографии. Ученые записки МГУ, вып. 28, 1939, стр. 4.
- [4]. *Kelogg, O. D.* Nomograms with Points in Aligment. Zeitschr. für Math. u. Physik, Bd. 63, 1914, стр. 159.
- [5]. *Битнер, Х. А.* Необходимые и достаточные условия анаморфизуемости функции трех переменных. Номографический сборник, М.—Л., 1935, стр. 77—104.
- [6]. *D'Ocagne, M.* Calcul graphique et nomographie. Paris, 2-e ed., 1914, стр. 290—291, 299.
- [7]. Математика в СССР за тридцать лет (1917—1942). ОГИЗ, 1948, стр. 817.
- [8]. *Boulad, F.* Sur la disjonction des variables des equations nomographiquement rationnelles d'ordre superieur. C. R., T. 150, 1910, стр. 37.
- [9]. *Boulad, E.* Bulletin de la Soc. mathem. de France. T. 39, 1911, стр. 105. T. 40, 1912, стр. 383.
- [10]. *Залтс, К. Я.* Проблема разъединения переменных в номографии (на латышском языке). Acta Univ. Latviensis, серия инж. фак., П. 5, Рига, 1938. Стр. 137—200.

#### PAR ANAMORFOZĒJOŠO REIZINĀTĀJU

*K. J. Zalts*

(Kopsavilkums)

Darbā apskatīts jautājums par dotas sakarības (0.4) attēlošanu, ja tas ir iespējams, ar kolinearū punktu nomogramu, lietojot anamorfozējošo reizinātāju. Seit izraisās šādi jautājumi: 1) vai vienādojuma anamorfoze ir iespējama? 2) ja tā ir iespējama, kā to izvest praktiski? Šie jautājumi ir darbā noskaidroti. Atrasti pietiekami nosacījumi vienādojuma (0.4) anamorfozei. Tie izteikti ar vienādojumiem (1.7), (1.13) un (1.17). Anamorfozējošo reizinātāju dod formula (1.17), bet funkcijas  $F_i$ ,  $G_i$ ,  $H_i$  ( $i=2,3$ ), kas vajadzīgas vienādojuma (0.4) anamorfozei, atrodamas pār formulām (1.11) un (1.15). Kā ilustrācija vispārīgai teorijai apskatīta praktiski svarīgo trešās un ceturtās nomografiskās kārtas vienādojumu anamorfoze.

## РЕШЕНИЕ РАСЩЕПЛЯЕМОЙ МАТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ ВКЛЮЧЕННЫХ СИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Э. Я. РИЕКСТЫНЬШ

В одной из предыдущих работ автора [1] дана формальная схема для решения расщепляемой матричной системы телеграфных уравнений при помощи преобразования Лапласа. В другой работе [2] эта схема иллюстрируется конкретным примером, но изображение решения в этом примере имеет такой вид, что практически можно получить только приближенное решение. Поэтому целесообразно иллюстрировать метод еще одним примером, в котором решение получается в явной форме, и в котором можно провести полное исследование полученного решения. Этому посвящена настоящая статья. Попутно здесь рассматриваются и смежные вопросы — обобщенные решения систем уравнений в частных производных 1-го порядка и некоторые свойства функций Ломмеля.

### § 1.

#### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

1. Рассмотрим матричную систему телеграфных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} + \mathbf{L} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i} + \mathbf{R} \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{G} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{i}(x, t)$  неизвестные колонные матрицы  $n$ -го порядка,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{G}$  — симметричные, постоянные и положительно определенные квадратичные матрицы того же порядка.

Ищем решение системы (1.1) в области  $\Pi$  ( $0 < x < l, 0 < t < T$ ) при следующих начальных и граничных условиях:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{i}(x, 0) = \mathbf{0} \quad (0 < x \leq l) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u}(0, t) = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \sin \delta_1 t + v_1^{(2)} \cos \delta_1 t \\ v_2^{(1)} \sin \delta_2 t + v_2^{(2)} \cos \delta_2 t \\ \dots \\ v_n^{(1)} \sin \delta_n t + v_n^{(2)} \cos \delta_n t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(l, t) = \mathbf{0} \quad (t > 0) \quad (1.3)$$

где  $\delta_k$  неотрицательные, а  $v_k^{(1)}$  и  $v_k^{(2)}$  — вещественные постоянные, причем хотя бы один из  $v_k^{(2)}$  отличается от нуля. Физически такие граничные условия осуществляются, если в начале пучка непосредственно включены синусоидальные напряжения с различными фазами, а в конце пучок заземлен. Если же включенное напряжение в отдельном проводе имеет более одной частоты, то можно воспользоваться суперпозицией решений. Граничные условия в таком виде автору предложил Н. А. Бразма.

Ищем формальное решение системы (1.1) при помощи преобразования Лапласа. Используя общие формулы, приведенные в работе [1], при конкретных условиях (1.2) и (1.3) имеем

$$\begin{aligned} u(x, t) &\supset (e^{-x\Gamma} - e^{-(2l-x)\Gamma}) (\mathbf{E}_n - e^{-2l\Gamma})^{-1} \mathbf{q} \\ i(x, t) &\supset (\mathbf{G} + p\mathbf{C}) \Gamma^{-1} (e^{-x\Gamma} + e^{-(2l-x)\Gamma}) (\mathbf{E}_n - e^{-2l\Gamma})^{-1} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} f(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt \subset F(t) \\ \Gamma &= \sqrt{\mathbf{LC}p^2 + (\mathbf{RC} + \mathbf{LG})p + \mathbf{RG}} \\ \mathbf{E}_n &= [1, 1, \dots, 1] \\ (\mathbf{q})_k &= \frac{v_k^{(1)} \delta_k}{p^2 + \delta_k^2} + \frac{v_k^{(2)} p}{p^2 + \delta_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Обратное преобразование Лапласа выражений (1.4) в явной форме удается выполнить пока лишь в случае расщепляемости [3]. В этом случае матрицы  $\mathbf{LC}$ ,  $\mathbf{RC}$ ,  $\mathbf{LG}$  и  $\mathbf{RG}$  одновременно приводятся к диагональному виду при помощи одной и той же матрицы, которую обозначим через  $\mathbf{S}$  [3]. Таким образом мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{LC} &= \mathbf{S}^{-1} [\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n}] \mathbf{S}, & \mathbf{RC} &= \mathbf{S}^{-1} [\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2n}] \mathbf{S} \\ \mathbf{LG} &= \mathbf{S}^{-1} [\lambda_{31}, \lambda_{32}, \dots, \lambda_{3n}] \mathbf{S}, & \mathbf{RG} &= \mathbf{S}^{-1} [\lambda_{41}, \lambda_{42}, \dots, \lambda_{4n}] \mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.5)$$

При этом матрицу  $\mathbf{S}$  выберем так, чтобы было  $\lambda_{1k} < \lambda_{1, k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ). Заметим, что все  $\lambda_{ik}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ) положительны [3].

Матрицы  $\Gamma$  и  $e^{-\xi\Gamma}$  также приводятся к диагональному виду при помощи той же матрицы  $\mathbf{S}$ :

$$\Gamma = \mathbf{S}^{-1} [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n] \mathbf{S}, \quad e^{-\xi\Gamma} = \mathbf{S}^{-1} [e^{-\xi\gamma_1}, e^{-\xi\gamma_2}, \dots, e^{-\xi\gamma_n}] \mathbf{S} \quad (1.6)$$

где

$$\gamma_i = \sqrt{\lambda_{1i} p^2 + (\lambda_{2i} + \lambda_{3i}) p + \lambda_{4i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

При условиях Коваленкова [3] имеем  $\gamma_i = \omega_i \sqrt{(p + \varrho_i)^2 - \sigma_i^2}$ ,

$$\text{где} \quad \omega_i = \sqrt{\lambda_{1i}}, \quad \varrho_i = \frac{\lambda_{2i} + \lambda_{3i}}{2\lambda_{1i}}, \quad \sigma_i = \frac{|\lambda_{2i} - \lambda_{3i}|}{2\lambda_{1i}} \quad (1.7)$$

Значения корней  $\gamma_i$  берем со знаком  $+$ , так что при  $\text{Re} p > 0$  имеем  $\text{Re} \gamma_i > 0$ . Это всегда возможно, ибо  $\varrho_i > \sigma_i$ .

2. Для выполнения обратного преобразования Лапласа разложим матрицу  $(\mathbf{E}_n - e^{-2l\Gamma})^{-1}$  в бесконечный ряд матриц. Разложение справедливо, ибо согласно сказанному о  $\text{Re} \gamma_i$ , все характеристические числа матрицы  $e^{-2l\Gamma}$  по модулю меньше единицы [4]. Таким образом мы имеем

$$\begin{aligned} u(x, t) &\supset \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(2\nu l + x)\Gamma} - \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-(2\nu l - x)\Gamma} \right) \mathbf{q} \\ i(x, t) &\supset \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{RG} + p\mathbf{RC}) \Gamma^{-1} \left[ \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-(2\nu l + x)\Gamma} + \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-(2\nu l - x)\Gamma} \right] \mathbf{q} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Обратное преобразование Лапласа выполним почленно, не интересуясь пока вопросом о законности этого действия. Для этой цели надо найти оригинал матриц

$$e^{-\tilde{s}v} \Gamma \mathbf{q} \quad \text{и} \quad (\mathbf{R}\mathbf{G} + p\mathbf{R}\mathbf{C}) \Gamma^{-1} e^{-\tilde{s}v} \Gamma \mathbf{q}$$

где

$$\tilde{s}_v = \begin{cases} 2ml + x, & \text{если } v = 2m \\ 2ml - x, & \text{если } v = 2m - 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (m = 0, 1, \dots) \\ (m = 1, 2, \dots) \end{matrix} \quad (1.9)$$

Для простоты значок  $v$  при дальнейших преобразованиях опустим.

В силу соотношения (1.6) имеем

$$e^{-\tilde{s}\Gamma} \mathbf{q} = \mathbf{S}^{-1} [e^{-\tilde{s}\gamma_1}, e^{-\tilde{s}\gamma_2}, \dots, e^{-\tilde{s}\gamma_n}] \mathbf{S} \mathbf{q}$$

Элементы матрицы  $\mathbf{q}$  зависят от  $p$ , поэтому выполнение обратного преобразования Лапласа усложняется. Можно составить произведение последних трех матриц, но формулы получаются более ясными, если разложить матрицу  $\mathbf{q}$  в сумму колонных матриц.

Введем колонные матрицы  $\mathbf{v}_k^{(j)}$  ( $j = 1, 2; k = 1, 2, \dots, n$ ), которые определяются формулой

$$\left\{ \mathbf{v}_k^{(j)} \right\}_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k \\ v_k^{(j)}, & \text{если } i = k \end{cases}$$

Тогда получим

$$\mathbf{q} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial_k}{p^2 + \partial_k^2} \mathbf{v}_k^{(1)} + \frac{p}{p^2 + \partial_k^2} \mathbf{v}_k^{(2)} \right)$$

$$e^{-\tilde{s}\Gamma} \mathbf{q} = \mathbf{S}^{-1} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ \frac{\partial_k e^{-\tilde{s}\gamma_1}}{p^2 + \partial_k^2}, \frac{\partial_k e^{-\tilde{s}\gamma_2}}{p^2 + \partial_k^2}, \dots, \frac{\partial_k e^{-\tilde{s}\gamma_n}}{p^2 + \partial_k^2} \right] \mathbf{S} \mathbf{v}_k^{(1)} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{pe^{-\tilde{s}\gamma_1}}{p^2 + \partial_k^2}, \frac{pe^{-\tilde{s}\gamma_2}}{p^2 + \partial_k^2}, \dots, \frac{pe^{-\tilde{s}\gamma_n}}{p^2 + \partial_k^2} \right] \mathbf{S} \mathbf{v}_k^{(2)} \right\}$$

$$(\mathbf{R}\mathbf{G} + p\mathbf{R}\mathbf{C}) \Gamma^{-1} e^{-\tilde{s}\Gamma} \mathbf{q} = \mathbf{S}^{-1} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ \frac{\partial_k e^{-\tilde{s}\gamma_1} \lambda_{41} + p\lambda_{21}}{p^2 + \partial_k^2}, \frac{\partial_k e^{-\tilde{s}\gamma_2} \lambda_{42} + p\lambda_{22}}{p^2 + \partial_k^2}, \dots, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial_k e^{-\tilde{s}\gamma_n} \lambda_{4n} + p\lambda_{2n}}{p^2 + \partial_k^2} \right] \mathbf{S} \mathbf{v}_k^{(1)} + \left[ \frac{\lambda_{21}}{\gamma_1} e^{-\tilde{s}\gamma_1}, \frac{\lambda_{22}}{\gamma_2} e^{-\tilde{s}\gamma_2}, \dots, \frac{\lambda_{2n}}{\gamma_n} e^{-\tilde{s}\gamma_n} \right] \mathbf{S} \mathbf{v}_k^{(2)} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{e^{-\tilde{s}\gamma_1}}{p^2 + \partial_k^2} \frac{p\lambda_{41} - \partial_k^2 \lambda_{21}}{\gamma_1}, \frac{e^{-\tilde{s}\gamma_2}}{p^2 + \partial_k^2} \frac{p\lambda_{42} - \partial_k^2 \lambda_{22}}{\gamma_2}, \dots, \frac{e^{-\tilde{s}\gamma_n}}{p^2 + \partial_k^2} \frac{p\lambda_{4n} - \partial_k^2 \lambda_{2n}}{\gamma_n} \right] \mathbf{S} \mathbf{v}_k^{(2)} \right\}$$

3. Обратное преобразование Лапласа для отдельных элементов диагональных матриц выполним, пользуясь известными формулами [5, 6]:

$$\frac{\partial_k e^{-\tilde{s}\gamma_i}}{p^2 + \partial_k^2} \subset f_{ik}^{(1)}(\tilde{s}, t) = \{ e^{-\omega_{ik} t} \sin(\delta_{ik} t - \omega_{ik} \mathcal{D}_{ik} \tilde{s}) - e^{-\rho_i t} [sb_0(\beta_{ik} \tau_i, \alpha_{ik} \tau_i, q_{ik}, 0) - \\ - sb_0(\beta_{ik} \tau_i, \alpha_{ik} \tau_i, q_{ik}, 0) + sb_1(\beta_{ik} \tau_i, \alpha_{ik} \tau_i, q_{ik}, 0) - \\ - sb_1(\beta_{ik} \tau_i, \alpha_{ik} \tau_i, q_{ik}, 0)] \} h(\tau_i) \quad (1.10)$$



$$\frac{pe^{-\xi\gamma_i}}{p^2 + \delta_k^2} \subset f_{ik}^{(2)}(\xi, t) = \{ e^{-\omega_i t} \beta_{ik} \xi \cos(\delta_k t - \omega_i \vartheta_{ik} \xi) + e^{-\rho_i t} [cb_0(\beta_{ik} \tau_i, \alpha_{ik} \nu_i, \varphi_{ik}, 0) -$$

$$- cb_0(\beta_{ik} \nu_i, \alpha_{ik} \tau_i, \varphi_{ik}, 0) + cb_1(\beta_{ik} \tau_i, \alpha_{ik} \nu_i, \varphi_{ik}, 0) -$$

$$- cb_1(\beta_{ik} \nu_i, \alpha_{ik} \tau_i, \varphi_{ik}, 0)] \} h(\tau_i) \quad (1.11)$$

$$\frac{\delta_k e^{-\xi\gamma_i} \lambda_{4i} + p \lambda_{2i}}{p^2 + \delta_k^2} \frac{1}{\gamma_i} \subset f_{ik}^{(3)}(\xi, t) = f_{ik}^{(3)}(\xi, t; \varepsilon_{ik}) = \frac{\sqrt{\lambda_{4i}^2 + (\lambda_{2i} \delta_k)^2}}{\omega_i \sqrt{\mu_{ik}^2 + \vartheta_{ik}^2}} \{ e^{-\omega_i t} \beta_{ik} \xi \times$$

$$\times \cos(\delta_i t - \omega_i \vartheta_{ik} \xi - \varepsilon_{ik} \varphi_{ik}) - e^{-\rho_i t} [cb_0(\beta_{ik} \nu_i, \alpha_{ik} \tau_i, \varphi_{ik}, \varepsilon_{ik}) +$$

$$+ cb_1(\beta_{ik} \nu_i, \alpha_{ik} \tau_i, \varphi_{ik}, \varepsilon_{ik}) + cb_1(\beta_{ik} \tau_i, \alpha_{ik} \nu_i, \varphi_{ik}, \varepsilon_{ik}) +$$

$$+ cb_2(\beta_{ik} \tau_i, \alpha_{ik} \nu_i, \varphi_{ik}, \varepsilon_{ik})] \} h(\tau_i) \quad (1.12)$$

$$\frac{e^{-\xi\gamma_i}}{p^2 + \delta_k^2} \frac{p \lambda_{4i} - \delta_k^2 \lambda_{2i}}{\gamma_i} + \lambda_{2i} \frac{e^{-\xi\gamma_i}}{\gamma_i} \subset f_{ik}^{(4)}(\xi, t) =$$

$$= f_{ik}^{(3)}\left(\xi, t; \varepsilon_{ik} - \frac{\pi}{2\varphi_{ik}}\right) + \frac{\lambda_{2i}}{\omega_i} e^{-\rho_i t} I_0(\omega_i \sqrt{\eta_i \tau_i}) h(\tau_i) \quad (1.13)$$

где кроме обозначений (1.7) введены еще следующие:

$$\vartheta_{ik} = \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma_i^2 + \delta_k^2 - \zeta_i^2 + \sqrt{(\sigma_i^2 + \delta_k^2 - \zeta_i^2)^2 + 4\zeta_i^2 \delta_k^2}], \quad \mu_{ik} = \frac{\delta_k \rho_i}{\vartheta_{ik}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{ik} = \frac{\vartheta_{ik}}{\rho_i} \quad \left(0 < \varphi_{ik} < \frac{\pi}{2}\right), \quad \alpha_{ik} = \frac{\vartheta_{ik} + \delta_k}{2 \sin \varphi_{ik}} = \frac{\rho_i + \mu_{ik}}{2 \cos \varphi_{ik}} \quad (1.14)$$

$$\beta_{ik} = \frac{\vartheta_{ik} - \delta_k}{2 \sin \varphi_{ik}} = \frac{\rho_i - \mu_{ik}}{2 \cos \varphi_{ik}}, \quad \tau_i = t - \omega_i \xi, \quad \nu_i = t + \omega_i \xi$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_{ik} \varphi_{ik} = \frac{\lambda_{4i} \mu_{ik} + \lambda_{2i} \delta_k \vartheta_{ik}}{\lambda_{2i} \delta_k \mu_{ik} - \lambda_{4i} \vartheta_{ik}} \quad (0 < \varepsilon_{ik} \varphi_{ik} < \pi)$$

а функции  $cb_\nu$ ,  $sb_\nu$  и  $h$  означают

$$cb_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{2m+\nu} I_{2m+\nu}(2\sqrt{xy}) \cos(2m + \nu + \varepsilon) \varphi \quad (1.15)$$

$$sb_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{2m+\nu} I_{2m+\nu}(2\sqrt{xy}) \sin(2m + \nu + \varepsilon) \varphi$$

$$h(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \geq 0 \\ 0, & \text{если } \tau < 0. \end{cases}$$

Введем еще матрицы

$$\mathbf{F}_k^{(j)}(\xi, t) = \mathbf{S}^{-1} [f_{1k}^{(j)}, f_{2k}^{(j)}, \dots, f_{nk}^{(j)}] \mathbf{S} \quad (j = 1, 2, 3, 4; k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.16)$$

Тогда получим

$$e^{-\xi \Gamma} \mathbf{q} \subset \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \mathbf{F}_k^{(j)}(\xi, t) \mathbf{v}_k^{(j)}$$

$$(\mathbf{R}\mathbf{G} + p \mathbf{R}\mathbf{C}) \Gamma^{-1} e^{-\xi \Gamma} \mathbf{q} \subset \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 \mathbf{F}_k^{(j+2)}(\xi, t) \mathbf{v}_k^{(j)}$$

Итак, наконец, имеем следующее решение:

$$u(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 F_k^{(j)}(\xi_{\nu}, t) v_k^{(j)} \quad (1.17)$$

$$i(x, t) = R^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 F_k^{(j+2)}(\xi_{\nu}, t) v_k^{(j)} \quad (1.18)$$

В случае пучка проводов полубесконечной длины в силу формулы (1.6) имеет место

$$\lim_{l \rightarrow \infty} e^{-2l\Gamma} = 0$$

и в формулах (1.8) остается только тот единственный член, который содержит  $e^{-x\Gamma}$ . Таким образом в этом случае формулы (1.17) и (1.18) принимают вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 F_k^{(j)}(x, t) v_k^{(j)} \quad (1.19)$$

$$i(x, t) = R^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^2 F_k^{(j+2)}(x, t) v_k^{(j)} \quad (1.20)$$

Рассмотрим еще частный случай условий Коваленкова, когда между матрицами существует соотношение Хевисайда [3]

$$RC = LG$$

Тогда имеем

$$\lambda_{2i} = \lambda_{3i}, \quad \sigma_i = 0, \quad \vartheta_{ik} = \delta_k, \quad \mu_{ik} = \varrho_i = \lambda_{2i} / \lambda_{1i}$$

$$\lambda_{2i}^2 = \lambda_{4i} \lambda_{1i}, \quad \varepsilon_{ik} \varphi_{ik} = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_{ik} = 0$$

и в формулах (1.10) — (1.13) получаем

$$f_{ik}^{(1)}(\xi, t) = e^{-\omega_i \varphi_i \xi} \sin \delta_k \tau_i h(\tau_i), \quad f_{ik}^{(3)}(\xi, t) = \sqrt{\lambda_{4i}} f_{ik}^{(1)}(\xi, t)$$

$$f_{ik}^{(2)}(\xi, t) = e^{-\omega_i \varphi_i \xi} \cos \delta_k \tau_i h(\tau_i), \quad f_{ik}^{(4)}(\xi, t) = \sqrt{\lambda_{4i}} f_{ik}^{(2)}(\xi, t)$$

В этом случае решение также выразится при помощи формул (1.17) — (1.20), надо только соответственно изменить выражения для матриц  $F_k^{(j)}(\xi, t)$  в формуле (1.16).

4. Поставим в формулах (1.10) — (1.13) опять значок  $\nu$  при  $\xi$ ,  $\tau_i$  и  $\nu_i$ . Ввиду наличия множителя  $h(\nu_{k\nu})$  в этих формулах, функции  $f_{ik}^{(j)}(\xi_{\nu}, t)$  при фиксированном  $t$ , начиная с некоторого  $\nu$ , обращаются в нуль. Поэтому при любом фиксированном  $t$  ряды (1.17) и (1.18) содержат в действительности только конечное число членов. Выясним, сколько членов имеется в этих рядах при данных  $t$  и  $x$ .

При фиксированном  $t = t_0$  мы всегда можем найти такое  $m$ , что

$$2(m-1)l\omega_1 \leq t_0 < 2ml\omega_1 \quad (1.21)$$

При таком  $t$ , в зависимости от значения  $x$ , справедливо одно из следующих трех неравенств:

$$a) 2(m-1)l\omega_1 \leq t_0 < 2(m-1)l\omega_1 + x\omega_1 \quad (x \neq 0)$$

$$b) 2(m-1)l\omega_1 + x\omega_1 \leq t_0 < 2ml\omega_1 - x\omega_1 \quad (x \neq l)$$

$$c) 2ml\omega_1 - x\omega_1 \leq t_0 < 2ml\omega_1 \quad (x \neq 0)$$

Если  $x=0$ , то имеем неравенство  $b$ ), которое совпадает в этом случае с (1.21), но при  $x=l$  имеем либо  $a$ ), либо  $c$ ).

Число членов находится из выражения

$$\tau_{iv} = t - \xi_v \omega_i \quad (1.22)$$

где  $\xi_v$  определено по формуле (1.9). При  $t=t_0$  получаем из этих формул:

в случае  $a$ )  $\tau_{1, 2m-3} > 0$ ,  $\tau_{1, 2m-2} < 0$ , следовательно

$$h(\tau_{1, 2m-3}) = 1, \quad h(\tau_{i, 2m-2}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

в случае  $b$ )  $\tau_{1, 2m-2} \geq 0$ ,  $\tau_{1, 2m-1} < 0$ , следовательно

$$h(\tau_{1, 2m-2}) = 1, \quad h(\tau_{i, 2m-1}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

в случае  $c$ )  $\tau_{1, 2m-1} \geq 0$ ,  $\tau_{1, 2m} < 0$ , следовательно

$$h(\tau_{1, 2m-1}) = 1, \quad h(\tau_{i, 2m}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Таким образом в рядах (1.17) и (1.18) при указанном  $t$  надо суммировать по  $\nu$  в случае  $a$ ) — до  $2m-3$ , в случае  $b$ ) — до  $2m-2$ , в случае  $c$ ) — до  $2m-1$ .

## § 2.

### ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

1. Решение, представленное формулами (1.17) и (1.18), является формальным и его следует проверить.

Поведение решения характеризуется функциями  $f_{ik}^{(j)}(\xi_v, t)$ , определяемыми формулами (1.10) — (1.13). Ввиду наличия множителя  $h(\tau_{iv})$ , эти функции обращаются в нуль при  $t < \omega_i \xi_v$ . Но при  $t \geq \omega_i \xi_v$  имеем  $h(\tau_{iv}) = 1$  и, поэтому  $f_{ik}^{(j)}(\xi_v, t)$  и их производные могут терпеть разрывы первого рода на прямых  $t = \omega_i \xi_v$ , т. е. на характеристиках. Ввиду непрерывной дифференцируемости функций  $cb_v$ ,  $sb_v$  и  $I_0$ , а также тригонометрических и показательных функций, функции  $f_{ik}^{(j)}(\xi_v, t)$  вне характеристик непрерывно дифференцируемы.

В данном случае легко непосредственно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} f_{ik}^{(1)}(\xi_v, \omega_i \xi_v) &= 0, & f_{ik}^{(2)}(\xi_v, \omega_i \xi_v) &= e^{-\rho_i \omega_i \xi_v} \\ f_{ik}^{(3)}(\xi_v, \omega_i \xi_v) &= 0, & f_{ik}^{(4)}(\xi_v, \omega_i \xi_v) &= \frac{\lambda_{2i}}{\omega_i} e^{-\rho_i \omega_i \xi_v} \end{aligned} \quad (2.1)$$

и поэтому матрицы  $\mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{i}(x, t)$ , определяемыми формулами (1.17) и (1.18), действительно имеют разрывы на прямых  $t = \omega_i \xi_v$ . Впрочем, это следует также из того, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \mathbf{u}(0, t) \neq \lim_{x \rightarrow +0} \mathbf{u}(x, 0)$$

В силу указанных разрывов, матрицы  $\mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{i}(x, t)$  на характеристиках не дифференцируемы. Однако, существуют пределы для их производных по  $x$  и  $t$ , если приближаться к характеристикам с обеих сторон.

Поэтому можно сказать, что и производные матриц  $\mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{i}(x, t)$  имеют разрывы первого рода вдоль характеристик.

Если фиксировать значки  $i$  и  $\nu$ , т. е. взять определенную характеристику  $t = \omega_i \xi_v$ , то в формуле (1.16) разрыв может иметь только диаго-

нальный элемент с первым значком  $i$ , а также несколько последующих элементов, если  $\omega_{i+j} = \omega_i$  ( $j > 0$ ). Обозначим скачки матриц  $\mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{i}(x, t)$  на этой характеристике через  $\Delta \mathbf{u}$  и  $\Delta \mathbf{i}$ . При выводе формулы, связывающей  $\Delta \mathbf{u}$  и  $\Delta \mathbf{i}$ , для простоты допустим, что только один из указанных диагональных элементов отличается от нуля. Тогда в силу формул (2.1) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\Delta \mathbf{i} &= \mathbf{L}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^{-1} \left[ 0, \dots, 0, \frac{\lambda_{2i}}{\omega_i} e^{-\rho_i \omega_i \bar{\xi}_v}, 0, \dots, 0 \right] \mathbf{S} \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^{(2)} = \\ &= \mathbf{S}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & & & \\ & \lambda_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} \left[ 0, \dots, 0, \frac{\lambda_{2i}}{\omega_i} e^{-\rho_i \omega_i \bar{\xi}_v}, 0, \dots, 0 \right] \mathbf{S} \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^{(2)} = \\ &= \omega_i e^{-\rho_i \omega_i \bar{\xi}_v} \mathbf{S}^{-1} [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \mathbf{S} \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^{(2)} \\ \Delta \mathbf{u} &= (-1)^\nu e^{-\rho_i \omega_i \bar{\xi}_v} \mathbf{S}^{-1} [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \mathbf{S} \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^{(2)} \end{aligned}$$

На характеристике  $t = \omega_i \bar{\xi}_v$  имеем

$$\frac{dt}{dx} = (-1)^\nu \omega_i$$

поэтому существует соотношение

$$\mathbf{L}\Delta \mathbf{i} = \Delta \mathbf{u} \frac{dt}{dx} \quad (2.2)$$

Подобным образом на характеристике имеет место соотношение

$$\mathbf{C}\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{i} \frac{dt}{dx} \quad (2.3)$$

Надо отметить, что в точках пересечения двух или больше характеристик формулы (2.2) и (2.3) имеют место только относительно отдельных характеристик.

**З а м е ч а н и е.** При выводе системы (1.1) предполагается, что матрицы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{i}$  дифференцируемы. Но если заранее известно, что вдоль заданной кривой матрицы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{i}$  имеют разрывы, то вместо системы (1.1) получаются соотношения (2.2) и (2.3). В случае одного провода это показано Конторовичем [7], а для системы  $n$  проводов эти соотношения легко выводятся подобным же путем. Поэтому естественно ожидать, что для любого разрывного решения системы (1.1) вдоль кривой разрыва будут иметь место соотношения (2.2) и (2.3).

2. Ввиду сказанного целесообразно рассматривать обобщенные решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Берем более общую систему гиперболического типа

$$\mathbf{A}(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v} + \mathbf{B}(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{D}(x, t) \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

где матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в  $\bar{\Pi}$  непрерывно дифференцируемы, а матрица  $\mathbf{D}$  — суммируема.

Дадим следующее

**О п р е д е л е н и е 1.** Суммируемая матрица  $\mathbf{v}(x, t)$  называется обобщенным решением системы (2.4) в области  $\bar{\Pi}$ , если в каждой области  $\Omega \subseteq \bar{\Pi}$  имеет место соотношение

$$\int_{\Omega} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\psi \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} (\psi \mathbf{B}) - \psi \mathbf{D} \right] \mathbf{v} d\omega = 0 \quad (2.5)$$

для любой гладкой функции  $\psi(x, t)$ , определенной в  $\Omega$  и обращающейся в нуль вблизи границы области  $\Omega$ , причем граница области предполагается достаточно гладкой.

З а м е ч а н и я. 1) Данное определение отличается от общеизвестного [8] тем, что интеграл в (2.5) взят по любой области  $\Omega$ , а не по области  $\bar{\Pi}$ . Функции  $\psi(x, t)$  требуют определения лишь в области  $\Omega$ , но для удобства (например, для определения нормы этих функций в  $\bar{\Pi}$ ) можно считать их определенными всюду в  $\bar{\Pi}$ , причем равными нулю вне  $\Omega$ .

2) В формуле (2.5) вместо функции  $\psi(x, t)$  можно брать строчную матрицу, элементами которой являются любые гладкие функции, обращающиеся в нуль вблизи границы области  $\Omega$ . Такое определение дается в работах Н. А. Бразмы [9] и В. Э. Аболиной [10]. Легко убедиться в том, что это определение обобщенного решения эквивалентно нашему.

Для нашего обобщенного решения имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть матрица  $\mathbf{v}(x, t)$  непрерывно дифференцируема и удовлетворяет системе (2.4) всюду в  $\Pi$ , кроме конечного числа кусочно гладких кривых  $t = g_i(x)$ , на которых она и ее частные производные первого порядка имеют разрывы первого рода. Если на этих кривых для скачка  $\Delta \mathbf{v}$  матрицы  $\mathbf{v}$  имеет место соотношение

$$\left( \mathbf{A} \frac{dt}{dx} - \mathbf{B} \right) \Delta \mathbf{v} = 0 \quad (2.6)$$

то эти кривые являются характеристиками и матрица  $\mathbf{v}(x, t)$  обобщенным решением системы (2.4) в смысле (2.5).

Доказательство теоремы почти очевидно. Первое утверждение сразу следует из (2.6); по условию теоремы  $\Delta \mathbf{v} \neq 0$ , и поэтому необходимо

$$\left| \mathbf{A} \frac{dt}{dx} - \mathbf{B} \right| = 0$$

но это и есть характеристическое уравнение системы (2.4). Далее для простоты возьмем такую область  $\Omega$ , которая содержит только часть от двух указанных кривых. Кривые разделяют область  $\Omega$  на 4 области:  $\Omega_1$  до  $\Omega_4$ , и сами разделяются на 4 куса (рис. 1). Обозначим отдельные куски кривых через  $l_m$ .

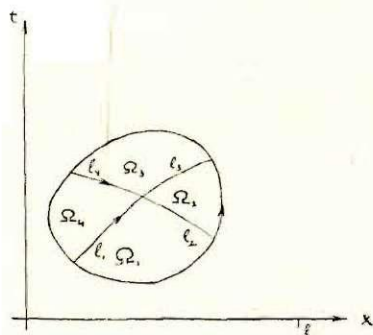


Рис. 1.

Внутри областей  $\Omega_1$  до  $\Omega_4$  матрица  $\mathbf{v}(x, t)$  непрерывно дифференцируема и удовлетворяет системе (2.4), поэтому мы можем к интегралу (2.5) применить формулу Грина для отдельных областей. Тогда в силу свойства функции  $\psi(x, t)$  имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\psi \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} (\psi \mathbf{B}) - \psi \mathbf{D} \right] \mathbf{v} d\omega = \\ & = - \sum_{m=1}^4 \iint_{\Omega_m} \psi \left[ \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v} + \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{D} \mathbf{v} \right] d\omega + \sum_{m=1}^4 \int_{l_m} \psi (\mathbf{A} dt - \mathbf{B} dx) \Delta \mathbf{v} \end{aligned}$$

Ввиду условий теоремы правые части обращаются в нуль, и этим теорема доказана. Очевидно, что ограничение в выборе области  $\Omega$  не существенно.

З а м е ч а н и я. 1) Таким же путем легко можно доказать также следующую теорему:

Пусть матрица  $\mathbf{v}(x, t)$  для любой  $\Omega \subseteq \bar{\Pi}$  удовлетворяет соотношению (2.5). Пусть далее  $\mathbf{v}(x, t)$  всюду в  $\Pi$ , за исключением нескольких кусочно гладких кривых  $t = g_i(x)$ , непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (2.4). Если на этих кривых она и ее частные производные первого порядка имеют разрывы первого рода, то там имеет место соотношение (2.6) и эти кривые являются характеристиками. В случае одного уравнения второго порядка подобная теорема доказана в книге Куранта-Гильберта [11].

2) Рассмотрим частный случай  $\mathbf{A} = \mathbf{E}$  и допустим, что систему (2.4) подстановкой  $\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{y}$  можно привести к каноническому виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{y} + \mathbf{L} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y} + \mathbf{D}_1 \mathbf{y} = 0$$

где  $\mathbf{L}$  — диагональная матрица. Тогда для этой матрицы условие (2.6) принимает вид

$$\left( \mathbf{E} \frac{dt}{dx} - \mathbf{L} \right) \Delta \mathbf{y} = 0$$

Легко непосредственно убедиться в том, что такое соотношение действительно имеет место, если для исходной системы имеет место (2.6).

3. Рассмотрим далее для системы (2.4) другое определение обобщенного решения, данное в случае одного квазилинейного уравнения Тихоновым и Самарским [12]. Для этого напомним нашу систему в форме

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}\mathbf{v}) = \mathbf{D}_1 \mathbf{v} \quad (2.7)$$

О п р е д е л е н и е 2. Суммируемая матрица  $\mathbf{v}(x, t)$  называется обобщенным решением системы (2.7) в области  $\bar{\Pi}$ , если в каждой области  $\Omega \subseteq \bar{\Pi}$  с достаточно гладким контуром  $K$  имеет место соотношение

$$\int_K (\mathbf{A} dt - \mathbf{B} dx) \mathbf{v} = \int_{\Omega} \int \mathbf{D}_1 \mathbf{v} d\omega \quad (2.8)$$

Для этого обобщенного решения имеет место подобная

Т е о р е м а 2. Пусть матрица  $\mathbf{v}(x, t)$  непрерывно дифференцируема и удовлетворяет системе (2.7) всюду в  $\Pi$ , кроме конечного числа кусочно гладких кривых  $t = g_i(x)$ , на которых она и ее частные производные первого порядка имеют разрывы первого рода. Если на этих кривых для скачка  $\Delta \mathbf{v}$  матрицы  $\mathbf{v}$  имеет место соотношение (2.6), то эти кривые являются характеристиками и матрица  $\mathbf{v}(x, t)$  обобщенным решением системы (2.7) в смысле (2.8).

Для доказательства возьмем область  $\Omega$  по рис. 1. Применяя к областям  $\Omega_n$  формулу Грина, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int \mathbf{D}_1 \mathbf{v} d\omega &= \sum_{m=1}^4 \int_{\Omega_m} \int \mathbf{D}_1 \mathbf{v} d\omega = \sum_{m=1}^4 \int_{\Omega_m} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}\mathbf{v}) \right] d\omega = \\ &= \int_K (\mathbf{A} dt - \mathbf{B} dx) \mathbf{v} + \sum_{m=1}^4 \int_{l_m} (\mathbf{A} dt - \mathbf{B} dx) \Delta \mathbf{v} = \int_K (\mathbf{A} dt - \mathbf{B} dx) \mathbf{v} \end{aligned}$$

Этим теорема доказана.

4. Если систему (1.1) привести к виду (2.4), то

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_{2n}, \quad \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & \mathbf{O} \end{vmatrix}$$

Поэтому условие (2.6) дает соотношения (2.2) и (2.3). Таким образом формулы (1.17) и (1.18) дают обобщенное решение системы (1.1) по любому из рассмотренных определений, если окажется, что матрицы  $\mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{i}(x, t)$  вне характеристик удовлетворяют системе (1.1).

Начнем с решения (1.19) и (1.20) в случае проводов полубесконечной длины. Для отличия от других решений обозначим впредь эти решения через  $\mathbf{u}_0(x, t)$  и  $\mathbf{i}_0(x, t)$ . Составим для этих матриц вне характеристик следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}_0 + \mathbf{R} \mathbf{i}_0 + \mathbf{L} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{i}_0 = \mathbf{S}^{-1} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ \frac{\partial f_{1k}^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial f_{2k}^{(1)}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_{nk}^{(1)}}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + [f_{1k}^{(3)}, f_{2k}^{(3)}, \dots, f_{nk}^{(3)}] + \left[ \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{21}} \frac{\partial f_{1k}^{(3)}}{\partial t}, \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}} \frac{\partial f_{2k}^{(3)}}{\partial t}, \dots, \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{2n}} \frac{\partial f_{nk}^{(3)}}{\partial t} \right] \right\} \mathbf{S} \mathbf{v}_k^{(1)} + \\ + \mathbf{S}^{-1} \sum_{k=1}^m \left\{ \left[ \frac{\partial f_{1k}^{(2)}}{\partial x}, \frac{\partial f_{2k}^{(2)}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_{nk}^{(2)}}{\partial x} \right] + [f_{1k}^{(4)}, f_{2k}^{(4)}, \dots, f_{nk}^{(4)}] + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{21}} \frac{\partial f_{1k}^{(4)}}{\partial t}, \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}} \frac{\partial f_{2k}^{(4)}}{\partial t}, \dots, \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{2n}} \frac{\partial f_{nk}^{(4)}}{\partial t} \right] \right\} \mathbf{S} \mathbf{v}_k^{(2)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}_0 + \mathbf{G} \mathbf{u}_0 + \mathbf{C} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_0 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}^{-1} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ \frac{\partial f_{1k}^{(3)}}{\partial x}, \frac{\partial f_{2k}^{(3)}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_{nk}^{(3)}}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + [\lambda_{41} f_{1k}^{(1)}, \lambda_{42} f_{2k}^{(1)}, \dots, \lambda_{4n} f_{nk}^{(1)}] + \left[ \lambda_{21} \frac{\partial f_{1k}^{(1)}}{\partial t}, \lambda_{22} \frac{\partial f_{2k}^{(1)}}{\partial t}, \dots, \lambda_{2n} \frac{\partial f_{nk}^{(1)}}{\partial t} \right] \right\} \mathbf{S} \mathbf{v}_k^{(1)} + \\ + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}^{-1} \sum_{k=1}^n \left\{ \left[ \frac{\partial f_{1k}^{(4)}}{\partial x}, \frac{\partial f_{2k}^{(4)}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_{nk}^{(4)}}{\partial x} \right] + [\lambda_{41} f_{1k}^{(2)}, \lambda_{42} f_{2k}^{(2)}, \dots, \lambda_{4n} f_{nk}^{(2)}] + \right. \\ \left. + \left[ \lambda_{21} \frac{\partial f_{1k}^{(2)}}{\partial t}, \lambda_{22} \frac{\partial f_{2k}^{(2)}}{\partial t}, \dots, \lambda_{2n} \frac{\partial f_{nk}^{(2)}}{\partial t} \right] \right\} \mathbf{S} \mathbf{v}_k^{(2)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Используя свойства функций  $cb$  и  $sb$  [5], после сравнительно длинных, но простых вычислений можно непосредственно убедиться в том, что

$$\frac{\partial f_{ik}^{(j+1)}}{\partial x} + f_{ik}^{(j+3)} + \frac{\lambda_{1i}}{\lambda_{2i}} \frac{\partial f_{ik}^{(j+3)}}{\partial t} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{\partial f_{ik}^{(j+3)}}{\partial x} + \lambda_{4i} f_{ik}^{(j+1)} + \lambda_{2i} \frac{\partial f_{ik}^{(j+1)}}{\partial t} = 0 \quad (j = 0, 1)$$

Поэтому правые части в формулах (2.9) и (2.10) обращаются в нуль.

При помощи матриц  $\mathbf{u}_0(x, t)$  и  $\mathbf{i}_0(x, t)$  формулы (1.17) и (1.18) мы можем представить в следующем виде:

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{u}_0(2\nu l + x, t) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{u}_0(2\nu l - x, t) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{i}(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{i}_0(2\nu l + x, t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{i}_0(2\nu l - x, t) \quad (2.12)$$

причём ряды в действительности содержат только конечное число членов. Легко видеть, что пары матриц  $\mathbf{u}_0(2\nu l + x, t)$ ,  $\mathbf{i}_0(2\nu l + x, t)$  и  $-\mathbf{u}_0(2\nu l - x, t)$ ,  $\mathbf{i}_0(2\nu l - x, t)$  удовлетворяют вне характеристик системе (1.1), и поэтому матрицы  $\mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{i}(x, t)$  также удовлетворяют этой системе.

5. Покажем еще, что матрицы  $\mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{i}(x, t)$ , определяемые формулами (1.17) и (1.18) (или же (2.11) и (2.12)) в обычном смысле удовлетворяют начальным условиям (1.2) и граничным условиям (1.3).

При  $t = 0$ ,  $x > 0$ , мы имеем  $h(\tau_{k\nu}) = 0$ , следовательно

$$f_{ik}^{(j)}(\xi_{\nu}, 0) = 0, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{i}(x, 0) = 0$$

При  $x = 0$  и  $t = t_0$  в формуле (1.21) имеет место неравенство б). При этом ряды в формуле (2.11) имеют всего  $2m - 1$  членов, и мы получаем

$$\mathbf{u}(0, t_0) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \mathbf{u}_0(2\nu l, t_0) - \sum_{\nu=1}^{m-1} \mathbf{u}_0(2\nu l, t_0) = \mathbf{u}_0(0, t_0)$$

Но мы имеем

$$f_{ik}^{(1)}(0, t_0) = \sin \delta_{kt_0} + e^{-\rho_{ik} t_0} [sb_0(\beta_{ikt_0}, \alpha_{ikt_0}, q_{ik}, 0) - sb_0(\beta_{ikt_0}, \alpha_{ikt_0}, q_{ik}, 0) + sb_1(\beta_{ikt_0}, \alpha_{ikt_0}, q_{ik}, 0) - sb_1(\beta_{ikt_0}, \alpha_{ikt_0}, q_{ik}, 0)] = \sin \delta_{kt_0}$$

$$f_{ik}^{(2)}(0, t_0) = \cos \delta_{kt_0} + e^{-\rho_{ik} t_0} [cb_0(\beta_{ikt_0}, \alpha_{ikt_0}, q_{ik}, 0) - cb_0(\beta_{ikt_0}, \alpha_{ikt_0}, q_{ik}, 0) + cb_1(\beta_{ikt_0}, \alpha_{ikt_0}, q_{ik}, 0) - cb_1(\beta_{ikt_0}, \alpha_{ikt_0}, q_{ik}, 0)] = \cos \delta_{kt_0}$$

Поэтому

$$\mathbf{u}(0, t_0) = \mathbf{u}_0(0, t_0) = \sum_{k=1}^n [\sin \delta_{kt_0} \mathbf{v}_k^{(1)} + \cos \delta_{kt_0} \mathbf{v}_k^{(2)}]$$

При  $x = l$  и  $t = t_0$  в формуле (1.21) имеет место либо неравенство а), либо с). В первом случае ряды в формуле (2.11) содержат всего  $2m - 2$  членов, во втором случае —  $2m$  членов, которые попарно уничтожаются, и мы имеем

$$\mathbf{u}(l, t_0) = 0$$

Таким образом формулы (1.17) и (1.18) дают в П обобщенное решение системы (1.1), которое удовлетворяет любому из соотношений (2.5) или (2.8) и поставленным начальным и граничным условиям.

### § 3.

#### АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

1. Мы уже видели, что ряды в формулах (1.17) и (1.18) содержат только конечное число членов. Но с возрастанием  $t$  число членов этих



рядов возрастает, поэтому целесообразно искать асимптотические представления матриц  $\mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{v}(x, t)$ .

Допустим для определенности, что мы имеем такое  $t = t_0$ , которое соответствует случаю с) в формуле (1.21), т. е.

$$t_0 = 2ml\omega_1 - x\omega_1 + t_1 \quad (3.1)$$

где

$$0 \leq t_1 < x\omega_1$$

Представим тогда формулы (1.17) и (1.18) в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Su}(x, t_0) &= \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=0}^{m-1} f_{1k}^{(j)}(2\nu l + x, t_0), \dots, \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=0}^{m-1} f_{nk}^{(j)}(2\nu l + x, t) \right] \mathbf{Sv}_k^{(j)} \right\} - \\ &- \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^m f_{1k}^{(j)}(2\nu l - x, t_0), \dots, \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^m f_{nk}^{(j)}(2\nu l - x, t_0) \right] \mathbf{Sv}_k^{(j)} \right\} \\ \mathbf{SRi}(x, t_0) &= \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=0}^{m-1} f_{1k}^{(j+2)}(2\nu l + x, t_0), \dots, \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=0}^{m-1} f_{nk}^{(j+2)}(2\nu l + x, t_0) \right] \mathbf{Sv}_k^{(j)} \right\} + \\ &+ \sum_{j=1}^2 \left\{ \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^m f_{1k}^{(j+2)}(2\nu l - x, t_0), \dots, \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^m f_{nk}^{(j+2)}(2\nu l - x, t_0) \right] \mathbf{Sv}_k^{(j)} \right\} \end{aligned}$$

Функции  $f_{ik}^{(j)}$  определяются по формулам (1.10)–(1.13) и содержат множитель  $h(\tau_{i\nu})$ . В 1-ом параграфе было показано, что при  $t = t_0$  мы имеем  $h(\tau_{i\nu}) = 1$  ( $0 \leq \nu \leq 2m-1$ ). Но в силу неравенства  $\omega_{k+1} \geq \omega_k$  может случиться, что при  $i > 1$  и том же значении  $\nu$  некоторые  $h(\tau_{i\nu})$  будут равны нулю. Тогда суммы по  $\nu$  в дальнейших диагональных элементах содержат в действительности при данном  $t_0$  меньше чем  $m$  элементов. Несмотря на это обстоятельство, мы можем число членов в каждой сумме по  $\nu$  получить сколь угодно большим, если брать достаточно большое  $t_0$ .

Поэтому очевидно, что асимптотические значения этих сумм будут получаться одинаковым образом для всех  $i$ , т. е. для всех диагональных элементов одной диагональной матрицы. Для определенности возьмем  $i = 1$ .

2. Рассмотрим первую из этих сумм при  $j = 1$ , причём для простоты временно отбросим значки  $i$  и  $k$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{m-1} f^{(1)}(2\nu l + x, t_0) &= \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\omega_1(2\nu l + x)} \sin[\delta t_0 - (2\nu l + x)\omega_1] + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} sb_0(\beta\tau_\nu, \alpha\tau_\nu, \varphi, 0) - \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} sb_0(\beta\tau_\nu, \alpha\tau_\nu, \varphi, 0) + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} sb_1(\beta\tau_\nu, \alpha\tau_\nu, \varphi, 0) - \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} sb_1(\beta\tau_\nu, \alpha\tau_\nu, \varphi, 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Покажем, что суммы последних 4 рядов в формуле (3.2) при возрастающем  $t_0$  стремятся к нулю. Для этого рассмотрим функции [6]

$$u_p(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \left( \sqrt{\frac{x}{y}} \right)^{2r+p} I_{2r+p}(2\sqrt{xy}) \quad (3.3)$$

Очевидно, мы имеем при неотрицательных  $x$  и  $y$ :

$$|sb_p(x, y, \varphi, \varepsilon)| \leq u_p(x, y), \quad |cb_p(x, y, \varphi, \varepsilon)| \leq u_p(x, y) \quad (3.4)$$

поэтому

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} sb_p(\beta r_\nu, \alpha r_\nu, \varphi, 0) \right| \leq \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} u_p(\beta r_\nu, \alpha r_\nu) \quad (3.5)$$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} cb_p(\beta r_\nu, \alpha r_\nu, \varphi, 0) \right| \leq \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} u_p(\beta r_\nu, \alpha r_\nu)$$

Если в формуле (3.3) заменить  $x$  на  $\beta r_\nu$ , а  $y$  на  $\alpha r_\nu$ , то из этой формулы и выражений для  $r_\nu$  и  $r'_\nu$  легко следует, что функции  $u_p(\beta r_\nu, \alpha r_\nu)$  ( $p \geq 0$ ) с возрастанием  $\nu$  монотонно убывают. Поэтому

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} u_p(\beta r_\nu, \alpha r_\nu) < m e^{-\rho t_0} u_p(\beta r_0, \alpha r_0) \quad (3.6)$$

При помощи известных формул [6] легко получаем

$$u_0(x, y) - u_1(x, y) = e^{-(x+y)} + e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{(k+1)!} L_k(-x)$$

где  $L_k(x)$  обозначает полином Лягерра. Поэтому при неотрицательных  $x, y$  имеет место неравенство

$$u_0(x, y) > u_1(x, y) \quad (3.7)$$

и мы можем рассматривать только случай  $p=0$ .

Для функции  $u_0(x, y)$  при  $y > x$  и больших  $x$  и  $y$  имеем следующие асимптотические формулы [6]:

$$u_0(x, y) = e^{2\sqrt{xy}} O\left(\frac{y}{\sqrt[4]{xy}(y-x)}\right) \quad (3.8)$$

$$u_0(\beta x, \alpha x) = e^{2\sqrt{\alpha\beta}x} O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad (\alpha > \beta) \quad (3.9)$$

Формула (3.3) показывает, что функции  $u_p(x, y)$  при возрастающем  $x$  и постоянном  $y$  монотонно возрастают.

Ввиду этого получаем оценку

$$u_0(\beta r_0, \alpha r_0) = u_0[\beta(2ml\omega_1 - 2x\omega_1 + t_1), \alpha(2ml\omega_1 + t_1)] <$$

$$< u_0[\beta(2ml\omega_1 + t_1), \alpha(2ml\omega_1 + t_1)]$$

В силу того, что  $\alpha > \beta$ , мы можем применить формулу (3.9), и имеем:

$$m e^{-\rho t_0} u_0(\beta r_0, \alpha r_0) < m \exp[-(\alpha + \beta)(2ml\omega_1 + t_1 - x\omega_1) +$$

$$+ 2\sqrt{\alpha\beta}(2ml\omega_1 + t_1)] O\left(\frac{1}{\sqrt{2ml\omega_1 + t_1}}\right) =$$

$$= \exp[(\alpha + \beta)x\omega_1 - (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 t_1] \exp[-(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 2ml\omega_1] m O\left(\frac{1}{\sqrt{2ml\omega_1 + t_1}}\right)$$

Из этой оценки следует, что правая часть неравенства (3.6) стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ . Таким образом доказано, что суммы тех рядов в выражении (3.2), которые содержат функции  $sb_0(\beta r_\nu, \alpha r_\nu, \varphi, 0)$  и  $sb_1(\beta r_\nu, \alpha r_\nu, \varphi, 0)$ , стремятся к нулю при  $t_0 \rightarrow \infty$ .

3. В силу неравенств (3.5) и (3.7) мы далее имеем

$$\left| \sum_{\nu=1}^{m-1} e^{-\rho t} s b_0(\beta r_\nu, \alpha r_\nu, q, 0) + \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t} s b_1(\beta r_\nu, \alpha r_\nu, q, 0) \right| < \\ < 2 \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t} u_0(\beta r_\nu, \alpha r_\nu) \quad (3.10)$$

Эту сумму надо оценить по другому, ибо функция  $u_0(\beta r_\nu, \alpha r_\nu)$  при возрастании значка  $\nu$  не всегда изменяется монотонно. Поэтому сперва надо рассмотреть некоторые свойства функции  $u_0(x, y)$ .

Мы имеем формулу [6]

$$u_0(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} r_k(x), \quad r_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{k+2i}}{(2i+k)!}$$

Очевидно, что функция  $u_0(x, y)$  монотонно возрастает при возрастании  $y$  и постоянном  $x$ . Покажем, что функция  $v(z) = u_0(x+z, y-z)$  при возрастании  $z$  ( $0 \leq z \leq y$ ) и постоянных  $x$  и  $y$  также монотонно возрастает.

Ввиду формул [6]

$$\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial x} = u_{-1}(x, y), \quad \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} = u_1(x, y)$$

имеем

$$\frac{dv}{dz} = u_{-1}(x+z, y-z) - u_1(x+z, y-z) = \\ = \left( \sqrt{\frac{x+z}{y-z}} \right)^{-1} I_1(2\sqrt{(x+z)(y-z)}) \geq 0$$

что и требовалось установить.

Далее оценим сумму (3.10).

Ввиду того, что  $\beta < \alpha$ , можно найти такое  $\Omega > 0$ , чтобы имело место неравенство

$$\beta < \frac{\Omega}{\Omega+3} \alpha \quad (3.11)$$

При достаточно большом  $t_0$  разделим сумму (3.10) на две суммы, суммируя в первой сумме по  $\nu$  от 0 до  $E\left(\frac{t_0}{2\Omega t_0} - \frac{x}{2l}\right)$ , а во второй оставляя остальные члены.  $\Omega$  можно выбрать так, чтобы  $N = \frac{t_0}{2\Omega t_0} - \frac{x}{2l}$  являлось целым числом. Тогда имеем

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} u_0(\beta r_\nu, \alpha r_\nu) = \sum_{\nu=0}^N e^{-\rho t_0} u_0(\beta r_\nu, \alpha r_\nu) + \\ + \sum_{\nu=N+1}^{m-1} e^{-\rho t_0} u_0(\beta r_\nu, \alpha r_\nu) \quad (3.12)$$

К первой сумме в силу сказанного можно применить оценку

$$u_0[\beta t_0 + \beta \omega_1(2\nu l + x), \alpha t_0 - \alpha \omega_1(2\nu l + x)] < u_0[\beta t_0 + \beta \omega_1(2\nu l + x), \\ \alpha t_0 - \beta \omega_1(2\nu l + x)] < u_0[\beta t_0 + \beta \omega_1(2Nl + x), \alpha t_0 - \beta \omega_1(2Nl + x)]$$

В силу неравенства (3.11), имеем

$$\alpha t_0 - \beta \omega_1 (2Nl + x) - \beta t_0 - \beta \omega_1 (2Nl + x) > \frac{\beta t_0}{\Omega}$$

т. е. второй аргумент функции  $u_0$  в правой части предыдущего неравенства больше первого аргумента. Поэтому из формулы (3.8) следует

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^N e^{-\rho t_0} u_0(\beta r_{l\nu}, \alpha r_{\nu}) &< e^{-\rho t_0} (N+1) u_0[\beta t_0 + \beta \omega_1 (2Nl + x), \\ &\alpha t_0 - \beta \omega_1 (2Nl + x)] = (N+1) \exp[-\rho t_0 + \\ &+ 2\sqrt{[\beta t_0 + \beta \omega_1 (2Nl + x)] [\alpha t_0 - \beta \omega_1 (2Nl + x)]}] O\left(\frac{1}{\sqrt{t_0}}\right) \end{aligned}$$

Ввиду того, что

$$\begin{aligned} &-\rho t_0 + 2\sqrt{[\beta t_0 + \beta \omega_1 (2Nl + x)] [\alpha t_0 - \beta \omega_1 (2Nl + x)]} = \\ &= -[\alpha t_0 - \beta \omega_1 (2Nl + x)] - [\beta t_0 + \beta \omega_1 (2Nl + x)] + \\ &+ 2\sqrt{[\beta t_0 + \beta \omega_1 (2Nl + x)] [\alpha t_0 - \beta \omega_1 (2Nl + x)]} = \\ &= -[\sqrt{\alpha t_0 - \beta \omega_1 (2Nl + x)} - \sqrt{\beta t_0 + \beta \omega_1 (2Nl + x)}]^2 = \\ &= -\left[\frac{\alpha t_0 - 2\beta \omega_1 (2Nl + x) - \beta t_0}{\sqrt{\alpha t_0 - \beta \omega_1 (2Nl + x)} + \sqrt{\beta t_0 + \beta \omega_1 (2Nl + x)}}\right]^2 < -\left[\frac{\frac{\beta t_0}{\Omega}}{2\sqrt{\frac{\beta t_0}{\Omega}}}\right]^2 = -\frac{\beta t_0}{4\Omega} \end{aligned}$$

первую сумму в правой части формулы (3.12) можно сделать при достаточно большом  $t_0$  сколь угодно малой.

Для оценки второй суммы в (3.12) применим известную формулу [6]

$$u_0(x, y) = ch(x + y) - u_2(y, x) < e^{x+y}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=N+1}^{m-1} e^{-\rho t_0} u_0(\beta r_{l\nu}, \alpha r_{\nu}) &< \sum_{\nu=N+1}^{m-1} e^{-\rho t_0} e^{\alpha r_{\nu} + \beta r_{l\nu}} = \\ &= \sum_{\nu=N+1}^{m-1} e^{-(\alpha - \beta) \omega (2\nu l + x)} < (m - N) e^{-(\alpha - \beta) \omega (2Nl + x)} < (m - N) e^{-\frac{3}{\Omega} \beta t_0} \end{aligned}$$

Таким образом очевидно, что для каждого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать такое  $t_0$ , чтобы при  $t = t_0$  было

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-\rho t_0} u_0(\beta r_{l\nu}, \alpha r_{\nu}) < \varepsilon$$

Этим доказано, что последние четыре суммы в формуле (3.2) стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

4. Подобным путем то же самое можно доказать о сумме

$$\sum_{\nu=1}^m f^{(1)}(2\nu l - x, t)$$

а также, в силу второго неравенства в формуле (3.4), и о суммах

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} f^{(j)}(2\nu l + x, t) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^m f^{(j)}(2\nu l - x, t) \quad (j=2, 3, 4)$$

Аналогично рассматриваются случаи а) и б) неравенства (1.21). Таким образом при достаточно большом  $t$  имеем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} f^{(1)}(\xi_{\nu}, t) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} e^{-\omega \mu \xi_{\nu}} \sin(\delta t - \omega \vartheta \xi_{\nu}) = \omega^{(1)}(x, t)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} f^{(2)}(\xi_{\nu}, t) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} e^{-\omega \mu \xi_{\nu}} \cos(\delta t - \omega \vartheta \xi_{\nu}) = \omega^{(2)}(x, t)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(3)}(\xi_{\nu}, t) \sim \frac{\sqrt{\lambda_4^2 + (\lambda_2 \delta)^2}}{\omega \sqrt{\mu^2 + \vartheta^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\omega \mu \xi_{\nu}} \cos(\delta t - \varepsilon \eta - \omega \vartheta \xi_{\nu}) = \omega^{(3)}(x, t)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f^{(4)}(\xi_{\nu}, t) \sim -\frac{\sqrt{\lambda_4^2 + (\lambda_2 \delta)^2}}{\omega \sqrt{\mu^2 + \vartheta^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\omega \mu \xi_{\nu}} \sin(\delta t - \varepsilon \eta - \omega \vartheta \xi_{\nu}) = \omega^{(4)}(x, t)$$

Эти асимптотические выражения можно представить в конечном виде, применяя формулы

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a^{\nu} \cos b\nu = \frac{1 - a \cos b}{1 - 2a \cos b + a^2}, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{\nu} \sin b\nu = \frac{a \sin b}{1 - 2a \cos b + a^2} \quad (|a| < 1)$$

При обозначениях

$$z^{(1)}(x, t) = e^{-\omega \mu x} \sin(\delta t - \omega \vartheta x), \quad z^{(2)}(x, t) = e^{-\omega \mu x} \cos(\delta t - \omega \vartheta x)$$

$$z^{(3)}(x, t) = e^{-\omega \mu x} \cos(\delta t - \omega \vartheta x - \varepsilon \eta), \quad z^{(4)}(x, t) = e^{-\omega \mu x} \sin(\delta t - \omega \vartheta x - \varepsilon \eta)$$

$$Z = 1 / (1 - 2e^{-2\omega \mu l} \cos 2\omega \vartheta l + e^{-4\omega \mu l}) \quad (3.13)$$

после некоторых преобразований получаем

$$\omega^{(j)}(x, t) = Z \{ z^{(j)}(x, t) - z^{(j)}(2l - x, t) + e^{-4\omega \mu l} [z^{(j)}(-x, t) - z^{(j)}(x - 2l, t)] \}$$

$$\omega^{(j+2)}(x, t) = \frac{(1)^{j+1} \sqrt{\lambda_4^2 + (\lambda_2 \delta)^2}}{\omega \sqrt{\mu^2 + \vartheta^2}} Z \{ z^{(j+2)}(x, t) + z^{(j+2)}(2l - x, t) -$$

$$- e^{-4\omega \mu l} [z^{(j+2)}(-x, t) + z^{(j+2)}(x - 2l, t)] \} \quad (j=1, 2) \quad (3.14)$$

Подставляя опять в соответствующие места значки  $i$  и  $k$ , находим следующее асимптотическое решение системы (1.1):

$$u(x, t) \sim S^{-1} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n [w_{1k}^{(j)}(x, t), w_{2k}^{(j)}(x, t), \dots, w_{nk}^{(j)}(x, t)] S v_k^{(j)} \quad (3.15)$$

$$i(x, t) \sim R^{-1} S^{-1} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n [w_{1k}^{(j+2)}(x, t), w_{2k}^{(j+2)}(x, t), \dots, w_{nk}^{(j+2)}(x, t)] S v_k^{(j)} \quad (3.16)$$

В случае проводов полубесконечной длины формулы (3.15) и (3.16) изменяются следующим образом:

$w_{ik}^{(j)}(x, t)$  надо заменить на  $z_{ik}^{(j)}(x, t)$ , а  $w_{ik}^{(j+2)}(x, t)$  на

$$(-1)^{j+1} \frac{\sqrt{\lambda_{4i}^2 + (\lambda_{2i} \beta_k)^2}}{\omega_i \sqrt{\beta_{ik}^2 + \mu_{ik}^2}} z_{ik}^{(j+2)}(x, t) \quad (j = 1, 2)$$

Асимптотические формулы (3.15) и (3.16) показывают, что при установившемся режиме напряжения и силы токов в фиксированной точке пучка, после исчезновения сложного переходного процесса, получаются в виде суперпозиции таких колебаний, частоты которых совпадают с частотами включенных напряжений. По формулам (3.15) и (3.16) можно подсчитать амплитуды отдельных колебаний.

Кафедра общей математики.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Я. Риекстыньш. О некоторых возможностях решения обобщенной системы телеграфных уравнений при помощи преобразования Лапласа. Прикладная математика и механика, 1952, 16, вып. 3, 375—381.
- [2] Э. Я. Риекстыньш. Решение расщепляемой матричной системы телеграфных уравнений в случае пучка с электромагнитными приемниками в конце проводов. Научно-технический сборник Рижского инженерно-авиационного военного училища, 1955, вып. 19, 19—40.
- [3] Э. Я. Риекстыньш. Об условиях расщепления обобщенной системы телеграфных уравнений. Ученые записки ЛГУ, 1952, № 6, 101—112.
- [4] В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Гостехиздат, М.—Л., 1950, т. III, ч. 2, 326.
- [5] Э. Я. Риекстыньш. О новых специальных функциях, применимых к решению телеграфных уравнений. Прикладная математика и механика, 1953, 17, вып. 1, 125—132.
- [6] Э. Я. Риекстыньш. О некоторых специальных функциях, применимых к решению телеграфных уравнений. Прикладная математика и механика, 1951, 15, вып. 4, 485—494.
- [7] М. И. Конторович. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. Гостехиздат, М., 1953, 214.
- [8] О. А. Ладыженская. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Гостехиздат, М., 1953.
- [9] Н. А. Бразма. Обобщение по С. Л. Соболеву матричных телеграфных уравнений. Научно-технический сборник Рижского инженерно-авиационного военного училища, 1955, вып. 19, 3—12.
- [10] В. Э. Аболля. О смешанной задаче для линейных гиперболических систем дифференциальных уравнений с частными производными на плоскости. Кандидатская диссертация. Рига, 1954.
- [11] Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики. Гостехиздат, М.—Л., 1951, т. II, 447.
- [12] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский. О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка. ДАН СССР, 1954, 99, № 1, 27—30.

SASKALDĀMAS MATRICU TELEGRAFA VIENĀDOJUMU SISTEMAS  
ATRISINĀJUMS PIESLĒGTU SINUSOIDALU SPRIEGUMU GADĪJUMĀ*E. Riekstiņš*

(Kopsavilkums)

Darba atrisināta saskaldāma sistema (1.1) pie nosacījumiem (1.2) un (1.3), lietojot Laplasa transformāciju. Atrisinājumu atklātā formā dod formulas (1.17) un (1.18). Ievērojot to, ka šis atrisinājums uz charakteristikām ir pārtraukts, tālāk noskaidrots, ka iegūtais atrisinājums ir saprotams kā vispārināts atrisinājums vai nu pēc Soboļeva, vai arī pēc Tichonova-Samarska. Pārbaudīts arī, ka atrisinājums apmierina nosacījumus (1.2) un (1.3). Darba beigās atrasta atrisinājuma asimptotiskā izteiksme.

## О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НЕКОТОРОМ СОГЛАСОВАНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРИЕМНО-ПЕРЕДАЮЩИХ УСТРОЙСТВ С ПАРАМЕТРАМИ ПРОВОДОВ

Н. А. БРАЗМА

В работе рассмотрены решения системы матричных телеграфных уравнений матричным методом разделения переменных при граничных условиях, соответствующих некоторому согласованию электромагнитных приемно-передающих устройств с параметрами проводов. Получены лишь формальные схемы для решения поставленных задач. Именно, сходимость полученных рядов, выражающих решение задач, доказана в этой работе только для начального момента времени  $t = 0$ .

Будем рассматривать систему матричных телеграфных уравнений

$$\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{R} \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} + \mathbf{G} \mathbf{u} = 0, \quad (\text{T})$$

где  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{C}$  — постоянные квадратные матрицы  $m$ -го порядка ( $m \geq 1$ ), причём матрицы  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{C}$  симметричны и положительно определены. Искомыми являются переменные колонные матрицы  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ ,  $\mathbf{i} = \mathbf{i}(x, t)$  с  $m$  элементами каждая, которые будем рассматривать в области

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (0 < l < \infty). \quad (\text{P})$$

Граничные условия выберем в следующем виде:

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}_0 e^{i\omega t} - \mathbf{R}_0 \mathbf{i}(0, t) - \mathbf{L}_0 \mathbf{i}'(0, t), \quad \mathbf{u}(l, t) = \mathbf{R}_l \mathbf{i}(l, t) + \mathbf{L}_l \mathbf{i}'(l, t),$$

причём в некоторых из рассмотренных задач  $\mathbf{u}_0 = 0$  или  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{L}_0 = 0$ .

Вышеуказанное согласование приемно-передающих устройств заключается в том, что от матриц сопротивления и индуктивности приемного устройства ( $\mathbf{R}_l$  и  $\mathbf{L}_l$ ) и передающего устройства ( $\mathbf{R}_0$  и  $\mathbf{L}_0$ ) будем требовать пропорциональность соответствующим матрицам  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{L}$  пучка проводов, имеющую вид:

$$\mathbf{R}_l = \frac{1}{\alpha} \mathbf{R}, \quad \mathbf{L}_l = \frac{1}{\alpha} \mathbf{L}, \quad \mathbf{R}_0 = \frac{1}{\beta} \mathbf{R}, \quad \mathbf{L}_0 = \frac{1}{\beta} \mathbf{L},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — данные положительные числа.

Следует отметить, что в изложенных ниже задачах можно рассматривать граничные условия и не ссылаясь на приемно-передающие устройства, именно как граничные условия, приводящие к известным задачам Штурма-Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Среди рассмотренных в этой работе задач решение первой и второй из них получаются предельным переходом  $\alpha \rightarrow \infty$  из решения третьей и



соответственно четвертой задачи. Однако ввиду сложности выражений у решений двух последних задач, а также ввиду формального характера указанного предельного перехода, сперва изложены решения первых двух, значительно более простых, задач.

Матрицу  $\mathbf{f}(x)$  будем называть кусочно-непрерывной на отрезке  $0 \leq x \leq l$ , если ее элементы суть кусочно-непрерывные функции на том же отрезке, причём имеются лишь точки разрыва первого рода, число которых конечно.

**Задача 1.** Найти решение системы (Т) в области (Р) при граничных условиях

$$\mathbf{u}(0, t) = 0, \quad \mathbf{u}(l, t) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{R} \mathbf{i}(l, t) + \frac{1}{\alpha} \mathbf{L} \mathbf{i}'_l(l, t) \equiv -\frac{1}{\alpha} \mathbf{u}'_x(l, t) \quad (1.1)$$

и начальных условиях

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{f}_1(x), \quad \mathbf{i}(x, 0) = \mathbf{f}_2(x), \quad (1.2)$$

где  $\alpha > 0$  — данное число, а  $\mathbf{f}_1(x)$  и  $\mathbf{f}_2(x)$  — известные колонные матрицы, причём будем предполагать  $\mathbf{f}_2(x)$  — непрерывной, а  $\mathbf{f}_1(x)$ ,  $\mathbf{f}'_1(x)$ ,  $\mathbf{f}'_2(x)$ ,  $\mathbf{f}_2''(x)$  — кусочно непрерывными матрицами на отрезке  $0 \leq x \leq l$ .

Решение задачи ищем в виде

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k x \mathbf{u}_k(t), \quad \mathbf{i}(x, t) = \frac{\mathbf{i}_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_k x \mathbf{i}_k(t), \quad (1.3)$$

причём от отдельных соответствующих членов рядов требуем удовлетворения системе (Т) и условиям (1.1) (среди которых первое условие (1.1) автоматически удовлетворено). Тогда получаем систему уравнений

$$\mathbf{L} \mathbf{i}'_k(t) + \lambda_k \mathbf{u}_k(t) + \mathbf{R} \mathbf{i}_k(t) = 0, \quad \mathbf{C} \mathbf{u}'_k(t) - \lambda_k \mathbf{i}_k(t) + \mathbf{G} \mathbf{u}_k(t) = 0 \quad (1.4)$$

$$(0 \leq t < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lambda_0 = 0, \quad \mathbf{u}_0(t) \equiv 0),$$

решение которой представим так [1, 2]:

$$\mathbf{u}_k(t) = \|\mathbf{0} \mathbf{E}_m\| e^{-\mathbf{M}_k t} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_k(0) \\ \mathbf{u}_k(0) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{i}_k(t) = \|\mathbf{E}_m \mathbf{0}\| e^{-\mathbf{M}_k t} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_k(0) \\ \mathbf{u}_k(0) \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

$$(0 \leq t < \infty, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lambda_0 = 0, \quad \mathbf{u}_0(0) = 0),$$

где  $\mathbf{M}_k$  — постоянная квадратная матрица  $2m$ -го порядка:

$$\mathbf{M}_k = \begin{Bmatrix} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} & \lambda_k \mathbf{L}^{-1} \\ -\lambda_k \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \mathbf{G} \end{Bmatrix}, \quad (1.6)$$

$\mathbf{E}_m$  — единичная матрица порядка  $m$ .

Требование удовлетворения граничным условиям (1.1) приводит к известному трансцендентному уравнению

$$\alpha \sin \lambda_k l = -\lambda_k \cos \lambda_k l \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \lambda_k l = -\frac{\lambda_k}{\alpha} \quad (1.7)$$

Числа  $\lambda_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) определяем как неотрицательные корни уравнения (1.7), взятые в возрастающем порядке. Эти числа являются собствен-

ными значениями граничной задачи обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^2 w(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.8)$$

с граничными условиями

$$w(0) = 0, \quad w'(l) + \alpha w(l) = 0. \quad (1.9)$$

Соответствующие собственные функции суть  $\sin \lambda_k x$ , и можно использовать известные теоремы о разложении данной функции в ряд по этим функциям [3, 4].

Для удовлетворения начальным условиям (1, 2) получаем разложения

$$\mathbf{f}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k(0) \sin \lambda_k x, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{f}_2(x) = \frac{1}{2} \mathbf{i}_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{i}_k(0) \cos \lambda_k x \quad (1.11)$$

Первое из них представляет разложение известной колонной матрицы  $\mathbf{f}_1(x)$  в ряд по собственным функциям  $\sin \lambda_k x$ . По известным формулам получаем [3]:

$$\mathbf{u}_k(0) = 2 \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \int_0^l \mathbf{f}_1(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (1.12)$$

При условиях задачи разложение (1.10) с коэффициентами (1.12), как известно, сходится равномерно на всех частичных отрезках основного отрезка  $0 \leq x \leq l$ , не содержащих точек разрыва матрицы  $\mathbf{f}_1(x)$ , а в точках разрыва сумма этого ряда равняется среднему арифметическому правого и левого предельных значений матрицы [4].

Для вычисления коэффициентов ряда (1.11) рассмотрим разложение

$$\int_0^x \mathbf{f}_2(\xi) d\xi + \mathbf{a}x + \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k \frac{\sin \lambda_k x}{\lambda_k}, \quad (1.13)$$

где постоянные матрицы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определим из требования, что элементы левой части матричного равенства (1.13) должны удовлетворять условиям (1.9). Из этого требования, принимая во внимание непрерывность левой части (1.13), следует быстрая сходимость этого разложения, а для  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  получаются выражения,

$$\mathbf{a} = - \left( l + \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \left[ \int_0^l \mathbf{f}_2(x) dx + \frac{1}{\alpha} \mathbf{f}_2(l) \right], \quad \mathbf{b} = 0 \quad (1.14)$$

Для коэффициентов разложения (1.13) имеем выражения, сходные с (1.12). После последующего интегрирования по частям, использования выражений (1.14) и трансцендентного уравнения (1.7) получаем:

$$\mathbf{a}_k = 2 \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \left[ \int_0^l \mathbf{f}_2(x) \cos \lambda_k x dx + \frac{1}{\alpha} \mathbf{f}_2(l) \cos \lambda_k l \right] \quad (1.15)$$

( $k=1, 2, \dots$ )

С целью оценки порядка малости  $\mathbf{a}_k$  выражение (1.15) при  $k \gg \infty$  еще два раза интегрируем по частям, после чего, воспользуясь уравнением (1.7), имеем:

$$\mathbf{a}_k = \frac{2}{\lambda_k^2} \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \left[ \mathbf{c}_k - \int_0^l \mathbf{f}_2''(x) \cos \lambda_k x dx \right] = \mathbf{O} \left( \frac{1}{\lambda_k^2} \right) = \mathbf{O} \left( \frac{1}{k^2} \right) \quad (1.16)$$

( $k = 1, 2, \dots$ )

Здесь  $\mathbf{c}_k$  — некоторая матрица, зависящая от скачков матрицы  $\mathbf{f}_2'(x)$  и значений  $\mathbf{f}_2'(0)$  и  $\mathbf{f}_2'(l)$ , причём  $\mathbf{c}_k$  равномерно ограничено для  $k = 1, 2, \dots$ . Таким образом разложение (1.13) можно дифференцировать почленно, и мы получаем:

$$\mathbf{f}_2(x) = \frac{\mathbf{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k \cos \lambda_k x \quad \left( \frac{\mathbf{a}_0}{2} = -\mathbf{a} \right), \quad (1.17)$$

где, согласно (1.14),  $\mathbf{a}_0$  можно получить из формулы (1.15) при  $k = 0$ . Сравнение разложений (1.11) с (1.17) приводит к формулам:

$$\mathbf{i}_k(0) = 2 \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \left[ \int_0^l \mathbf{f}_2(x) \cos \lambda_k x dx + \frac{1}{\alpha} \mathbf{f}_2(x) \cos \lambda_k l \right] \quad (1.18)$$

( $k = 0, 1, \dots$ )

Ввиду оценки (1.16) ряд (1.11) с коэффициентами (1.18) сходится равномерно на отрезке  $0 \leq x \leq l$ .

Подстановка выражений (1.5) в формулы (1.3), после использования выражений (1.6), (1.12) и (1.18), дает ряды, формально удовлетворяющие уравнениям (Т) и условиям (1.1) и (1.2).

**Задача 2.** Найти решение системы (Т) в области (Р) при граничных условиях

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{u}(l, t) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{R} \mathbf{i}(l, t) + \frac{1}{\alpha} \mathbf{L} \mathbf{i}'(l, t) \equiv -\frac{1}{\alpha} \mathbf{u}_x'(l, t) \quad (2.1)$$

и нулевых начальных условиях

$$\mathbf{u}(x, 0) = 0, \quad \mathbf{i}(x, 0) = 0, \quad (2.2)$$

где  $\alpha > 0$  — данное постоянное число,  $\mathbf{u}_0$  — данная постоянная комплексная матрица,  $\alpha \omega$  — данное постоянное вещественное или комплексное число.

Решение задачи ищем в виде

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{v}(x, t) + \mathbf{f}(x) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{i}(x, t) = \mathbf{j}(x, t) + \mathbf{g}(x) e^{i\omega t}, \quad (2.3)$$

причем от вторых членов  $\mathbf{f}(x) e^{i\omega t}$  и  $\mathbf{g}(x) e^{i\omega t}$  требуем удовлетворения уравнениям (Т) и граничным условиям (2.1). Тогда матрицы  $\mathbf{f}(x)$  и  $\mathbf{g}(x)$  должны удовлетворять уравнениям

$$\mathbf{f}'(x) + (\mathbf{R} + i\omega \mathbf{L}) \mathbf{g}(x) = 0, \quad \mathbf{g}'(x) + (\mathbf{G} + i\omega \mathbf{C}) \mathbf{f}(x) = 0 \quad (2.4)$$

и граничным условиям

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \alpha \mathbf{f}(l) = -\mathbf{f}'(l) \quad (2.5)$$

Общее решение системы (2.4) имеет вид:  $\mathbf{f}(x) = e^{-\Gamma x} \mathbf{a} + e^{\Gamma x} \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{g}(x) = (\mathbf{G} + i\omega \mathbf{C}) \Gamma^{-1} (e^{-\Gamma x} \mathbf{a} - e^{\Gamma x} \mathbf{b})$  в предположении, что матрица  $\Gamma^2 = (\mathbf{R} + i\omega \mathbf{L})(\mathbf{G} + i\omega \mathbf{C})$  неособая.

Требование удовлетворения условиям (2.5) приводит это решение к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x) &= \frac{\alpha \operatorname{sh} \Gamma(l-x) + \Gamma \operatorname{ch} \Gamma(l-x)}{\alpha \operatorname{sh} \Gamma l + \Gamma \operatorname{ch} \Gamma l} \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{g}(x) &= (\mathbf{G} + i\omega \mathbf{C}) \Gamma^{-1} \frac{\alpha \operatorname{ch} \Gamma(l-x) + \Gamma \operatorname{sh} \Gamma(l-x)}{\alpha \operatorname{sh} \Gamma l + \Gamma \operatorname{ch} \Gamma l} \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Далее потребуем от матриц  $\mathbf{v}(x, t)$  и  $\mathbf{j}(x, t)$  удовлетворения той же системе (Т), граничным условиям (1.1) и начальным условиям  $\mathbf{v}(x, 0) = -\mathbf{f}_1(x) = -\mathbf{f}(x)$ ,  $\mathbf{j}(x, 0) = \mathbf{f}_2(x) = -\mathbf{g}(x)$ . Очевидно, что матрицы  $\mathbf{u}(x, t)$  и  $\mathbf{i}(x, t)$ , определенные формулами (2.3), дадут тогда решение задачи 2.

Таким образом матрицы  $\mathbf{v}(x, t)$  и  $\mathbf{j}(x, t)$  оказываются решением задачи 1 при начальных условиях частного вида. Подстановкой выражений (2.6) в формулы (1.12) и (1.18) и интегрированием полученных матричных выражений посредством приведения их к каноническому виду мы получаем следующие коэффициенты разложения [2]:

$$\mathbf{u}_k(0) = -2 \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \lambda_k (\Gamma^2 + \lambda_k^2 \mathbf{E}_m)^{-1} \mathbf{u}_0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{i}_k(0) = -2 \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} (\mathbf{G} + i\omega \mathbf{C}) (\Gamma^2 + \lambda_k^2 \mathbf{E}_m)^{-1} \mathbf{u}_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Из формул (1.3), (1.5), (2.3), (2.6) и (2.7) после некоторых преобразований следует решение задачи 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \frac{\alpha \operatorname{sh} \Gamma(l-x) + \Gamma \operatorname{ch} \Gamma(l-x)}{\alpha \operatorname{sh} \Gamma l + \Gamma \operatorname{ch} \Gamma l} \mathbf{u}_0 - \\ &- 2 \parallel 0 \mathbf{E}_m \parallel \sum_{k=1}^{\infty} \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \sin \lambda_k x e^{-\mathbf{M}_k t} \parallel \frac{\mathbf{G} + i\omega \mathbf{C}}{\lambda_k \mathbf{E}_m} \parallel (\Gamma^2 + \lambda_k^2 \mathbf{E}_m)^{-1} \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{i}(x, t) &= (\mathbf{G} + i\omega \mathbf{C}) \Gamma^{-1} \frac{\alpha \operatorname{ch} \Gamma(l-x) + \Gamma \operatorname{sh} \Gamma(l-x)}{\alpha \operatorname{sh} \Gamma l + \Gamma \operatorname{ch} \Gamma l} \mathbf{u}_0 - \\ &- 2 \parallel \mathbf{E}_m 0 \parallel \sum_{k=0}^{\infty} \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \cos \lambda_k x e^{-\mathbf{M}_k t} \parallel \frac{\mathbf{G} + i\omega \mathbf{C}}{\lambda_k \mathbf{E}_m} \parallel (\Gamma^2 + \lambda_k^2 \mathbf{E}_m)^{-1} \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда формальным переходом к пределу  $\alpha \rightarrow \infty$  получается известное решение подобной задачи при правом граничном условии  $\mathbf{u}(l, t) = 0$  [2].

**Задача 3.** Найти решение системы (Т) в области (Р) при граничных условиях

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, t) &= -\frac{1}{\beta} \mathbf{Ri}(0, t) - \frac{1}{\beta} \mathbf{Li}'(0, t) \equiv \frac{1}{\beta} \mathbf{u}_x'(0, t), \\ \mathbf{u}(l, t) &= \frac{1}{\alpha} \mathbf{Ri}(l, t) + \frac{1}{\alpha} \mathbf{Li}'(l, t) \equiv -\frac{1}{\alpha} \mathbf{u}_x'(l, t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

и начальных условиях (1.2), где  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  — данные постоянные числа, а  $\mathbf{f}_1(x)$  и  $\mathbf{f}_2(x)$  — известные колонные матрицы.

Задачу будем рассматривать при тех же условиях о матрицах  $\mathbf{f}_1(x)$  и  $\mathbf{f}_2(x)$ , как и в задаче 1. При этом и свойства сходимости рядов получаются те же, как для соответствующих рядов в задаче 1.

Решение задачи ищем в виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \sin \lambda_k x + d_k \cos \lambda_k x) u_k(t), \\ i(x, t) &= \frac{i_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos \lambda_k x - d_k \sin \lambda_k x) i_k(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $c_k$  и  $d_k$  — вещественные числа, причём от отдельных соответствующих членов рядов требуем удовлетворения системе (Т) и условиям (3.1). Тогда получаем систему уравнений (1.4), решение которой можно представить в виде (1.5), где матрица  $\mathbf{M}_k$  имеет прежний вид (1.6).

Требование удовлетворения граничным условиям (3.1) приводит к соотношению  $\lambda_k c_k = \beta d_k$ , которое удовлетворяется при выборе коэффициентов  $c_k = \frac{\beta}{\lambda_k}$  и  $d_k = 1$ , и к известному трансцендентному уравнению

$$\operatorname{ctg} \lambda_k l = \frac{1}{\alpha + \beta} \left( \lambda_k - \frac{\alpha \beta}{\lambda_k} \right) \quad (3.3)$$

Числа  $\lambda_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) определяем как положительные корни уравнения (3.3), взятые в возрастающем порядке. Они являются собственными значениями граничной задачи дифференциального уравнения (1.8) с граничными условиями

$$w'(0) - \beta w(0) = w'(l) + \alpha w(l) = 0 \quad (3.4)$$

Соответствующие собственные функции суть

$$w_k(x) = \frac{\beta}{\lambda_k} \sin \lambda_k x + \cos \lambda_k x \quad (3.5)$$

Система (3.2) переходит в такую:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) u_k(t), \quad i(x, t) = \frac{i_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w'_k(x)}{\lambda_k} i_k(t) \quad (3.6)$$

Для удовлетворения начальным условиям (1.2) получаем разложения

$$\mathbf{f}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k(0) w_k(x), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{f}_2(x) = \frac{i_0(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} i_k(0) \frac{w'_k(x)}{\lambda_k} \quad (3.8)$$

Коэффициенты ряда (3.7) получаются по известным формулам [3] как коэффициенты разложения по собственным функциям  $w_k(x)$ :

$$\mathbf{u}_k(0) = \frac{2\lambda_k^2}{\beta^2 + \lambda_k^2} \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \int_0^l \mathbf{f}_1(x) w_k(x) dx \quad (3.9)$$

Для вычисления коэффициентов ряда (3.8) рассмотрим разложение

$$\int_0^x \mathbf{f}_2(\xi) d\xi + \mathbf{a}x + \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k \frac{w_k(x)}{\lambda_k}, \quad (3.10)$$

где постоянные матрицы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определим из требования, что элементы левой части матричного равенства (3.10) должны удовлетворять условиям (3.4). Подобно изложенному при решении задачи 1, для коэффициентов разложения (3.10) получаем:

$$\mathbf{a}_k = \frac{2\lambda_k^2}{\beta^2 + \lambda_k^2} \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \left[ \int_0^l \mathbf{f}_2(x) \frac{w'_k(x)}{\lambda_k} dx + \frac{1}{\alpha} \mathbf{f}_2(l) \frac{w'_k(l)}{\lambda_k} + \frac{1}{\beta} \mathbf{f}_2(0) \frac{w'_k(0)}{\lambda_k} \right] \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

Оценка порядка малости  $\mathbf{a}_k$  оказывается такой же, как и в задаче 1. После почленного дифференцирования разложения (3.10) имеем

$$\mathbf{f}_2(x) = \frac{\mathbf{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k \frac{w'_k(x)}{\lambda_k}, \quad (3.12)$$

где  $\mathbf{a}_0$  можно получить из формулы (3.11) при  $k=0$ , положив в эту формулу  $\lambda_0 = 0$ ,  $\frac{w'_0(x)}{\lambda_0} \equiv 1$ .

Сравнение разложений (3.8) и (3.12) приводит к формулам:

$$\mathbf{i}_k(0) = \frac{2\lambda_k^2}{\beta^2 + \lambda_k^2} \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \left[ \int_0^l \mathbf{f}_2(x) \frac{w'_k(x)}{\lambda_k} dx + \frac{1}{\alpha} \mathbf{f}_2(l) \frac{w'_k(l)}{\lambda_k} + \frac{1}{\beta} \mathbf{f}_2(0) \frac{w'_k(0)}{\lambda_k} \right] \quad \left( k = 0, 1, \dots, \quad \lambda_0 = 0, \quad \frac{w'_0(x)}{\lambda_0} \equiv 1 \right) \quad (3.13)$$

Подстановка выражений (1.5) в формулы (3.6), после использования выражений (1.6), (3.5), (3.9) и (3.13), дает ряды, формально удовлетворяющие уравнениям (Т) и условиям (3.1) и (1.2).

**Задача 4.** Найти решение системы (Т) в области (Р) при граничных условиях

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}_0 e^{i\omega t} - \frac{1}{\beta} \mathbf{Ri}(0, t) - \frac{1}{\beta} \mathbf{Li}'(0, t) \equiv \mathbf{u}_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{\beta} \mathbf{u}_x'(0, t),$$

$$\mathbf{u}(l, t) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{Ri}(l, t) + \frac{1}{\alpha} \mathbf{Li}'(l, t) \equiv -\frac{1}{\alpha} \mathbf{u}_x'(l, t) \quad (4.1)$$

и нулевых начальных условиях (2.2), где  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  — данные постоянные числа,  $\mathbf{u}_0$  — данная постоянная комплексная колонная матрица, а  $\omega$  — данное постоянное вещественное или комплексное число.

Для решения задачи 4 поступаем подобно изложенному о задаче 2. При прежнем предположении, что матрица  $\Gamma^2 = (\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C})$  неособая, решение задачи 4 получается таким:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\alpha \operatorname{sh} \Gamma(l-x) + \Gamma \operatorname{ch} \Gamma(l-x)}{(\Gamma^2 + \alpha\beta\mathbf{E}_m) \operatorname{sh} \Gamma l + (\alpha + \beta) \Gamma \operatorname{ch} \Gamma l} \beta \mathbf{u}_0 -$$

$$- 2 \|\mathbf{0} \mathbf{E}_m\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta \lambda_k}{\beta^2 + \lambda_k^2} \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \omega_k(x) e^{-\mathbf{M}_k t} \left\| \frac{\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C}}{\lambda_k \mathbf{E}_m} \right\| \times$$

$$\times (\Gamma^2 + \lambda_k^2 \mathbf{E}_m)^{-1} \mathbf{u}_0. \quad (4.2)$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C}) \Gamma^{-1} \frac{\alpha \operatorname{ch} \Gamma(l-x) + \Gamma \operatorname{sh} \Gamma(l-x)}{(\Gamma^2 + \alpha\beta\mathbf{E}_m) \operatorname{sh} \Gamma l + (\alpha + \beta) \Gamma \operatorname{ch} \Gamma l} \beta \mathbf{u}_0 -$$

$$- 2 \|\mathbf{E}_m \mathbf{0}\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta \lambda_k}{\beta^2 + \lambda_k^2} \left( l + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_k^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda_k^2} \right)^{-1} \frac{\omega'_k(x)}{\lambda_k} e^{-\mathbf{M}_k t} \left\| \frac{\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C}}{\lambda_k \mathbf{E}_m} \right\| \times$$

$$\times (\Gamma^2 + \lambda_k^2 \mathbf{E}_m)^{-1} \mathbf{u}_0$$

$$(\lambda_0 = 0, \frac{\omega'_0(x)}{\lambda_0} \equiv 1)$$

Отсюда формальным переходом к пределу  $\beta \rightarrow \infty$  получается решение задачи 2.

**З а м е ч а н и е.** Известным приемом, изложенным уже ранее [5], доказывается затухание отдельных членов рядов, выражающих решения задач 1 и 3. При этом можно сослаться на известное интегральное соотношение [6], которое следует из системы (Т) и граничных условий и выражает закон сохранения энергии для пучка проводов при соответствующих приемно-передающих устройствах.

*Кафедра общей математики.*

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. А. Бразма, Новое решение основной задачи распространения электромагнитных явлений в пучке проводов. ДАН СССР, LXXVI: I (1951), стр. 41—44.
- [2] Н. А. Бразма, Решение основных задач обобщенной системы телеграфных уравнений матричным методом разделения переменных. Ученые записки Латвийского государственного университета, т. VI (1952), стр. 79—92.
- [3] В. И. Левин и Ю. П. Гросберг, Дифференциальные уравнения математической физики, Москва—Ленинград (1951), стр. 349—359.
- [4] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, Москва—Ленинград (1951), стр. 362.
- [5] Н. А. Бразма и А. Д. Мышкис, Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений. ПММ, XV: 4 (1951), стр. 495—500. Та же работа в Ученых записках Латв. Гос. Университета, т. VI (1952), стр. 61—68.
- [6] А. Д. Мышкис и В. Э. Аболыня, Теорема о единственности решения смешанной задачи для обобщенной системы телеграфных уравнений. Ученые записки Латв. Гос. Университета, т. VI (1952), стр. 75—78.

PAR MATRICU TELEGRAFA VIENĀDOJUMU SISTEMAS  
ATRISINĀŠANU PIE NOSACĪJUMIEM, KURI ATBILST  
ELEKTROMAGNETISKO RAIDĪŠANAS UN UZTVERSĀNAS  
IERĪČU SASKAŅOŠANAI AR VADU PARAMETRIEM

*N. Brāzma*

(Kopsavilkums)

Šinī darbā apskatīti matricu telegrafa vienādojumu sistēmas atrisinājumi ar mainīgo lielumu atdalīšanas matricu metodi pie robežnosacījumiem, kuri atbilst elektromagnetisko raidīšanas un uztveršanas ierīču saskaņošanai attiecīgā nozīmē ar vadu parametriem. Ar minēto saskaņošanu ir domāta raidīšanas un uztveršanas ierīču matricu (konkrētāk pretestības un elektromagnetiskās indukcijas matricu) proporcionalitāte atbilstošām vadu kūļa matricām. Šeit iegūtas tikai formālas shēmas nosprausto problēmu atrisināšanai. Proti, konverģence iegūtām rindām, kuras izteic problēmu atrisinājumus, pierādīta šinī darbā tikai sākuma mirklī  $t = 0$ .

Atzīmējams, ka apskatītās šeit problēmās robežnosacījumus var formulēt arī neatsaucoties uz raidīšanas un uztveršanas ierīcēm, proti kā robežnosacījumus, kuri noved pie pazīstamiem Šturma-Liuvila problēmas piemēriem otrās kārtas parastiem diferencialvienādojumiem ar konstantiem koeficientiem.



1874

1875

1876

1877

1878

1879

1880

1881

1882

1883

1884

1885

1886

1887

1888

1889

1890

1891

1892

1893

1894

1895

1896

1897

1898

1899

1900

1901

1902

1903

1904

1905

1906

1907

1908

1909

1910

1911

1912

1913

1914

1915

1916

1917

1918

1919

1920

1921

1922

1923

1924

1925

1926

1927

1928

1929

1930

1931

1932

1933

1934

1935

1936

1937

1938

1939

1940

1941

1942

1943

1944

1945

1946

1947

1948

1949

1950

1951

1952

1953

1954

1955

1956

1957

1958

1959

1960

1961

1962

1963

1964

1965

1966

1967

1968

1969

1970

1971

1972

1973

1974

1975

1976

1977

1978

1979

1980

1981

1982

1983

1984

1985

1986

1987

1988

1989

1990

1991

1992

1993

1994

1995

1996

1997

1998

1999

2000

2001

2002

2003

2004

2005

2006

2007

2008

2009

2010

2011

2012

2013

2014

2015

2016

2017

2018

2019

2020

2021

2022

2023

2024

2025

1874

1875

1876

1877

## О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ЛАПЛАСА В СЛУЧАЕ СЛОЖНОГО ПРОВОДА

Э. Я. РИЕКСТЫНЬШ

В одной из предыдущих работ автора [1] рассмотрена формальная схема для решения матричной системы телеграфных уравнений преобразованием Лапласа в случае пучка, состоящего из проводов различных длин. Частным случаем такой системы является случай одного сложного провода, состоящего из двух участков с различными параметрами (фиг. 1). Цель настоящей заметки — выяснить подробнее возможности формального решения таких систем при помощи преобразования Лапласа. В работу включены некоторые результаты, полученные в дипломной работе Э. М. Аронович.

1. Рассмотрим сложный телеграфный провод, состоящий из двух участков  $A$  и  $B$  с неотрицательными постоянными параметрами  $R_1, L_1, C_1, G_1$  для участка  $A$  и, соответственно,  $R_2, L_2, C_2, G_2$  — для участка  $B$  (фиг. 1). Длины участков  $A$  и  $B$  будут соответственно  $l_1$  и  $l_2$ , а длина всего провода —  $l$ . В конце провода включено приемное устройство, а в начале в начальный момент непосредственно включается напряжение. Предположим, что до этого начального момента в проводе и приемном устройстве никаких процессов не было.



Фиг. 1.

Для исследования переходных явлений в проводе введем две системы телеграфных уравнений, отдельно для участков  $A$  и  $B$ :

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} = R_1 i_1 + L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i_1}{\partial x} = G_1 u_1 + C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad (0 < x < l_1, t > 0) \quad (1.1)$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial x} = R_2 i_2 + L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i_2}{\partial x} = G_2 u_2 + C_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} \quad (l_1 < x < l, t > 0) \quad (1.2)$$

где  $u_1(x, t), i_1(x, t); u_2(x, t), i_2(x, t)$  означают соответствующие напряжения и силы тока в участках  $A$  и  $B$ . Для этих систем ввиду указанных физических предположений имеем следующие условия:

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = i_1(x, 0) = i_2(x, 0) = 0 \quad (x > 0) \quad (1.3)$$

$$u_1(0, t) = v(t), \quad Q_1 \left( \frac{d}{dt} \right) u_2(l, t) = Q_2 \left( \frac{d}{dt} \right) i_2(l, t) \quad (t > 0) \quad (1.4)$$

$$u_1(l_1, t) = u_2(l_1, t), \quad i_1(l_1, t) = i_2(l_1, t) \quad (1.5)$$

где  $v(t)$  — включенное напряжение, а  $Q_1$  и  $Q_2$  — многочлены, характеризующие приемное устройство.

Для решения системы (1.2) можно использовать общие результаты, полученные в работе [1]. Введя обозначения

$$\bar{v}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v(t) dt \subset v(t)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{L_1 C_1 p^2 + (R_1 C_1 + L_1 G_1)p + R_1 G_1} \\ \gamma_2 &= \sqrt{L_2 C_2 p^2 + (R_2 C_2 + L_2 G_2)p + R_2 G_2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$P_1(p) = \frac{1}{2} [e^{-\gamma_1 l_1} + e^{\gamma_1 l_1}], \quad P_2(p) = \frac{1}{2} \frac{\gamma_1}{G_1 + pC_1} (e^{\gamma_1 l_1} - e^{-\gamma_1 l_1})$$

$$Z_1(p) = \frac{P_2(p)(G_2 + pC_2) - P_1(p)\gamma_2}{P_2(p)(G_2 + pC_2) + P_1(p)\gamma_2}, \quad Z_2(p) = \frac{Q_2(p)(G_2 + pC_2) - Q_1(p)\gamma_2}{Q_2(p)(G_2 + pC_2) + Q_1(p)\gamma_2}$$

$$Z_3(p) = \frac{\gamma_2}{P_2(p)(G_2 + pC_2) + P_1(p)\gamma_2}$$

имеем

$$u_2(x, t) \supset \frac{e^{-\gamma_2(x-l_1)} + Z_2 e^{-\gamma_2(t+l_2-x)}}{1 - Z_1 Z_2 e^{-2\gamma_2 l_2}} Z_3 \bar{v} \quad (1.7)$$

$$i_2(x, t) \supset \frac{G_2 + pC_2}{\gamma_2} \frac{e^{-\gamma_2(x-l_1)} - Z_2 e^{-\gamma_2(t+l_2-x)}}{1 - Z_1 Z_2 e^{-2\gamma_2 l_2}} Z_3 \bar{v} \quad (1.8)$$

В формулах (1.6) берется та ветвь корней, для которой при  $p > 0$  имеет место  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$ . Переменная  $p$  изменяется в такой правой полуплоскости, в которой все дальнейшие изображения аналитичны.

Решение системы (1.1) можно найти таким же путем, как получено решение системы (1.2) в работе [1]. После несложных преобразований при обозначениях

$$P_3(p) = \frac{Q_2(p)(G_2 + pC_2) + \gamma_2 Q_1(p)}{\gamma_2} (e^{\gamma_2 l_2} - Z_2 e^{-\gamma_2 l_2})$$

$$P_4(p) = \frac{Q_2(p)(G_2 + pC_2) + \gamma_2 Q_1(p)}{G_2 + pC_2} (e^{\gamma_2 l_2} + Z_2 e^{-\gamma_2 l_2})$$

$$Z_4(p) = \frac{P_4(G_1 + pC_1) - P_3\gamma_1}{P_4(G_1 + pC_1) + P_3\gamma_1}$$

получаем

$$u_1(x, t) \supset \frac{e^{-\gamma_1 x} + Z_4 e^{-\gamma_1(2l_1-x)}}{1 + Z_4 e^{-2\gamma_1 l_1}} \bar{v} \quad (1.9)$$

$$i_1(x, t) \supset \frac{G_1 + pC_1}{\gamma_1} \frac{e^{-\gamma_1 x} - Z_4 e^{-\gamma_1(2l_1-x)}}{1 + Z_4 e^{-2\gamma_1 l_1}} \bar{v} \quad (1.10)$$

2. Для выполнения обратного преобразования можно применить два стандартных приема. Первый из них заключается в применении формулы обращения которая приводит к вычислению вычетов в полюсах изображений (1.7) — (1.10). Но в силу сложности изображений, эта задача связана с громоздкими вычислениями. Кроме того, полученные ряды медленно сходятся, по крайней мере для малых  $t$ , а именно эти значения  $t$  имеют наибольший интерес на практике.

Рассмотрим поэтому подробнее второй метод — метод бегущих волн. Для этого преобразуем полученные формулы к более удобному виду.

Преобразуя выражения для  $Z_1$ ,  $Z_3$  и  $Z_4$ , после введения обозначений  $q(p) = \gamma_1(G_2 + pC_2)/\gamma_2(G_1 + pC_1)$ ,  $z = (1 - q)/(1 + q)$  (2.1)

имеем

$$\frac{Z_3}{1 - Z_1 Z_2 e^{-2\gamma_1 l_2}} = \frac{2}{1 + q} \frac{e^{-\gamma_1 l_1}}{1 + z(e^{-2\gamma_1 l_1} + Z_2 e^{-2\gamma_2 l_2}) + Z_2 e^{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)}} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{1 + Z_1 e^{-2\gamma_1 l_1}} = \frac{1 + Z_2 z e^{-2\gamma_2 l_2}}{1 + z(e^{-2\gamma_1 l_1} + Z_2 e^{-2\gamma_2 l_2}) + Z_2 e^{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)}} \quad (2.3)$$

При достаточно большом  $\text{Re } p$  полученные дроби можно разложить в ряды. Таким образом получаем

$$u_2(x, t) \supset e^{-\gamma_1 l_1} [e^{-\gamma_2(x-l_1)} + Z_2 e^{-\gamma_2(t+l_2-x)}] \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu [z(e^{-2\gamma_1 l_1} + Z_2 e^{-2\gamma_2 l_2}) + Z_2 e^{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)}]^\nu \frac{2 \bar{v}}{1 + q} \quad (2.4)$$

$$i_2(x, t) \supset e^{-\gamma_1 l_1} [e^{-\gamma_2(x-l_1)} - Z_2 e^{-\gamma_2(t+l_2-x)}] \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu [z(e^{-2\gamma_1 l_1} + Z_2 e^{-2\gamma_2 l_2}) + Z_2 e^{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)}]^\nu \frac{2 \bar{v} (G_2 + pC_2)}{(1 + q) \gamma_2} \quad (2.5)$$

$$u_1(x, t) \supset [e^{-\gamma_1 x} + Z_4 e^{-\gamma_1(2l_1-x)}] [1 + Z_4 z e^{-2\gamma_2 l_2}] \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu [z(e^{-2\gamma_1 l_1} + Z_2 e^{-2\gamma_2 l_2}) + Z_2 e^{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)}]^\nu \bar{v} \quad (2.6)$$

$$i_1(x, t) \supset [e^{-\gamma_1 x} - Z_4 e^{-\gamma_1(2l_1-x)}] [1 + Z_4 z e^{-2\gamma_2 l_2}] \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu [z(e^{-2\gamma_1 l_1} + Z_2 e^{-2\gamma_2 l_2}) + Z_2 e^{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)}]^\nu \frac{\bar{v} (G_1 + pC_1)}{\gamma_1} \quad (2.7)$$

Решение получается почленным выполнением обратного преобразования Лапласа, причём практически надо найти несколько первых членов рядов. Так как каждый член рядов, начиная уже с первого, содержит произведение двух показательных функций с различными  $\gamma$  в показателях степени, то применяя известные формулы [2, 3] и свертку функций, отдельные члены решения получим в виде интегралов от функций Ломея.

Укажем частные случаи, когда отдельные члены рядов (2.4) — (2.7) содержат только одну показательную функцию и выполнение обратного преобразования упрощается. В таких случаях либо должно иметь место соотношение  $\gamma_2 = k\gamma_1$ , либо можно извлечь корень из одного из выражений (1.6). Таким образом можно указать следующие частные случаи:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2} = \alpha, \quad \frac{G_2}{G_1} = \frac{C_2}{C_1} = \beta, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \gamma_1 \quad (2.8)$$

$$\frac{R_1}{G_2} = \frac{L_1}{C_2} = \alpha, \quad \frac{L_2}{C_1} = \frac{R_2}{G_1} = \beta, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \gamma_1 \quad (2.9)$$

$$\frac{R_1}{G_1} = \frac{L_1}{C_1} = \alpha, \quad \gamma_1 = \sqrt{L_1 C_1 p} + \sqrt{R_1 G_1} \quad (2.10)$$

$$\frac{R_2}{G_2} = \frac{L_2}{C_2} = \beta, \quad \gamma_2 = \sqrt{L_2 C_2 p} + \sqrt{R_2 G_2} \quad (2.11)$$

В этих соотношениях допустимо также, что некоторая дробь имеет вид  $0:0$ . Например, в (2.8) можем включить случай кабеля —  $L_1 = L_2 = G_1 = G_2 = 0$ .

Можно заметить, что к частному случаю (2.3) при  $\gamma_1 = \gamma_2$ ,  $l_1 = l_2$  приводит математическое исследование раздражения нерва электрическим током [4]. Обратное преобразование и в этом случае выполняется изложенным путем.

3. Анализ формул (2.4) — (2.7) показывает, что отдельные члены рядов характеризуют отдельные бегущие волны, отражающиеся несколько раз либо от концов провода, либо от точки смыкания отдельных кусков. В начале провода имеем полное отражение, в точке смыкания отражение характеризуется коэффициентом  $\kappa$ , а в конце провода — коэффициентом  $Z_2$ . Отражение от точки смыкания не происходит, если  $\kappa = 0$ , т. е.  $q = 1$ . Легко убедиться в том, что это имеет место в следующих случаях:

Либо в соотношениях (2.8) надо подставить  $\alpha = \frac{1}{\beta}$ , либо брать совместно соотношения (2.10) и (2.11) и подставить  $\alpha = \beta$ . Решение для сложного провода отличается в таком случае от решения для простого провода только тем, что волны распространяются на различных участках с различными скоростями.

Можно поставить поэтому следующий вопрос: нельзя ли вообще с малой погрешностью заменить сложный провод таким простым проводом, параметры которого будут взвешенными средними значениями данных параметров. Теоретически исследовать этот вопрос очень трудно, ибо функции, входящие в решения, сложным образом зависят от параметров. Приводимый пример показывает, что в некоторых случаях действительно такая замена с малой погрешностью возможна.

Этот пример рассмотрен в дипломной работе Э. М. Аронович. В этом примере система (1.2) решается при простейших граничных условиях

$$u_1(0, t) = 1, \quad u_2(l, t) = 0$$

и следующих значениях параметров (случай соотношений (2.8) при  $\alpha = \beta = 2$ ):

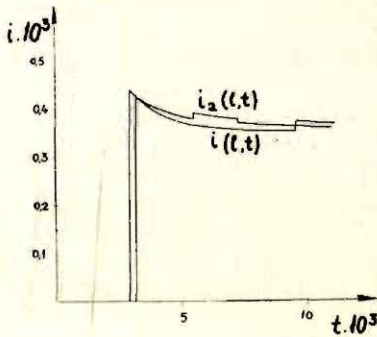
$$R_1 = 2R_2 = 7,36, \quad L_1 = 2L_2 = 7,485 \cdot 10^{-3} \quad l_1 = 200$$

$$C_1 = \frac{1}{2} C_2 = 6,699 \cdot 10^{-9}, \quad G_1 = \frac{1}{2} G_2 = 2 \cdot 10^{-6} \quad l = 400$$

Кроме того, рассматривается такой однородный провод длиной 400 км., параметры которого получены из предыдущих параметров как средние арифметические. Для решения в обоих случаях используются известные формулы преобразования Лапласа [2].

Обозначая силу тока в однородном проводе через  $i(x, t)$ , имеем график в фиг. 2. Единица на оси  $t$  означает  $10^{-3}$  сек., на оси  $i$  —  $10^{-3}$  А. Разность между значениями  $i_2(l, t)$  и  $i(l, t)$  не превосходит 3% от  $i_2(l, t)$  при всех рассмотренных  $t$ .

В сложном проводе в данном примере имеем только одну скорость распространения волны. Это обусловлено тем, что  $L_1 C_1 = L_2 C_2$ . Графики



Фиг. 2.

показывают, что скорость распространения волны в заменяющем однородном проводе меньше скорости в сложном проводе. Легко убедиться в том, что такое явление будет всегда, когда параметры  $L$  и  $C$  заменяющего провода берутся по формулам

$$L = \frac{L_1 l_1 + L_2 l_2}{l_1 + l_2}, \quad C = \frac{C_1 l_1 + C_2 l_2}{l_1 + l_2} \quad (3.1)$$

и имеет место соотношение  $L_1 C_1 = L_2 C_2$ .

Чтобы при таком соотношении получить одинаковые скорости в обоих проводах, вместо формул (3.1) надо брать другие, что можно сделать различными способами. Если же  $L_1 C_1 \neq L_2 C_2$ , то замена сложного провода по формулам (3.1) может привести к различным отношениям скоростей в сложном и заменяющем проводах, в зависимости от значений параметров данного провода.

В заключение следует еще раз отметить, что полученные указанным путем решения являются формальными и их надо проверить. Кроме того, обычно начальные условия не согласованы с граничными, и в итоге получается обобщенное решение, которое имеет разрывы первого рода вдоль основных характеристик.

*Кафедра общей математики*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Я. Риекстыньш. О некоторых возможностях решения обобщенной системы телеграфных уравнений при помощи преобразования Лапласа. Прикладная математика и механика, 1952, 16, вып. 3, 375—381.
- [2] Э. Я. Риекстыньш. О некоторых специальных функциях, применимых к решению телеграфных уравнений. Прикладная математика и механика, 1951, 15, вып. 4, 485—494.
- [3] Э. Я. Риекстыньш. О специальных функциях, применимых к решению телеграфных уравнений. Прикладная математика и механика, 1953, 17, вып. I, 125—132.
- [4] J. Duhamel. Conductibilité électrique du nerf et équation des télégraphistes. Ann. télécomm., 1953, 8, № 6, 197—205.

### DAZAS IESPEJAS TELEGRAFA VIENĀDOJUMU SISTEMAS ATRISINĀSĀNĀ SALIKTA VADA GADIJUMĀ, LIETOJOT LAPLASA TRANSFORMACIJU

*E. Riekstiņš*

(Kopsavilkums)

Salikta vada gadījumā telegrafa vienādojumu sistema jāapskata katram vada gabalam atsevišķi. Dabūjam sistēmas (1.1) un (1.2), kas saistītas savā starpā ar robežnosacījumiem. Darbā tālāk noskaidrots, kā varētu konstruēt formālu problēmas atrisinājumu ar Laplasa transformācijas palīdzību, un norādīti specialgadījumi, kuros inversās transformācijas izpilde kļūst ievērojami vienkāršāka. Darba beigās izvirzīta problēma par salikta vada tuvinātu aizvietošanu ar vienkāršu vadu, un konkrētā piemērā parādīts, ka pielaištā kļūda nav sevišķi liela. Minētais piemērs ņemts no E. M. Aronovičas diplomdarba.

## О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ПОЛИНОМОВ

Г. К. ЭНГЕЛИС

В настоящей работе рассматриваются системы полиномов, обобщающие ортогональные (на действительной прямой) системы полиномов. Известно, что последние обладают весьма интересными свойствами в силу того, что любой член такой системы является простейшей функцией — алгебраическим многочленом, а с другой стороны каждые два члена этого семейства связаны опять таки простым соотношением — ортогональностью, которая может быть задана при помощи дифференциального или интегрального веса или при помощи последовательности моментов. Если дифференциальный вес  $\rho(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0}, \quad (1)$$

то соответствующие ортогональные системы полиномов называются классическими и имеют ряд дополнительных, характерных только для этого класса свойств (см. напр. [1] стр. 37). Естественно возникает вопрос, в какой мере сохраняются или как расщепляются эти свойства, если изменить одно из определяющих свойств (полиномиальный характер членов системы, соотношение ортогональности, характер весовой функции). Аналогичное исследование проведено В. Ганом [10], но там варьируется одно из основных понятий анализа, именно, операция  $\frac{d}{dx}j(x)$  везде заменяется операцией

$$Lf(x) = \frac{f(qx + \omega) - f(x)}{(q-1)x + \omega}$$

В предлагаемой статье ортогональность заменяется биортогональностью по отношению к другим системам функций, в большинстве случаев тоже полиномов. В § 1 дается понятие о биортогонализации двух последовательностей; в § 2 изучается некоторый аналог формулы Родрига из теории классических полиномов; в § 3 рассматриваются дифференциальные уравнения, связанные с одним классом биортогональных систем. Работа не претендует на полное изложение указанных вопросов, но ставит себе целью только привлечь внимание читателя к отдельным интересным фактам, помогающим лучше понять свойства одного важного класса специальных функций — классических ортогональных полиномов.

### § 1.

**Теорема 1.** Пусть 1)  $\{p_k\}_0^\infty$  и  $\{q_k\}_0^\infty$  две последовательности элементов гильбертова пространства, каждая из которых линейно независима; 2) не при одном  $n$  в пространстве элементов  $\{p_k\}_0^{n-1}$  не существует от-

личного от нуля элемента, ортогонального к  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ ; тогда существуют две другие линейно независимые последовательности  $\{P_k\}_0^\infty$  и  $\{Q_k\}_0^\infty$ , такие, что 1)  $P_n = \sum_{i=0}^n a_i p_i$ ,  $Q_n = \sum_{i=0}^n b_i q_i$  ( $a_i, b_i$  — скаляры);

2)  $(P_m, Q_n) = 0$ , если  $m \neq n$ ,  $(P_n, Q_n) = 1$ . При этом один из  $P_n, Q_n$  определен с точностью до скалярного множителя, а другой — единственным образом.

Для доказательства положим  $(p_k, q_l) = \mu_{kl}$ . Из второго условия теоремы следует, что  $\det \|\mu_{kl}\|_0^n \neq 0$ . Ищем теперь коэффициенты  $\alpha_i$  так, чтобы

элемент  $\sum_{i=0}^n \alpha_i p_i$  оказался ортогональным к  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ . Это приводит

нас к системе  $n$  линейных однородных уравнений с  $n+1$  неизвестным, матрица которой имеет ранг  $n$ . Решение этой системы определено с точностью до скалярного множителя. Пусть  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  одно реше-

ние. Тогда за  $P_n$  можно взять  $\alpha_n \sum_{i=0}^n a_i p_i$ , где  $\alpha_n$  — произвольное. Анало-

гично построим  $Q_n = \beta_n \sum_{i=0}^n b_i q_i$ , и, наконец, свяжем  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  условием

$(P_n, Q_n) = 1$ . Легко проверить, что построенные таким образом  $P_n, Q_n$  удовлетворяют всем условиям теоремы. Также очевидно, что имеют место равенства

$$P_n = \alpha_n \begin{vmatrix} \mu_{00} & \mu_{01} & \dots & \mu_{0n-1} & p_0 \\ \mu_{10} & \mu_{11} & \dots & \mu_{1n-1} & p_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n0} & \mu_{n1} & \dots & \mu_{n,n-1} & p_n \end{vmatrix}, \quad Q_n = \beta_n \begin{vmatrix} \mu_{00} & \mu_{01} & \dots & \mu_{0n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1,0} & \mu_{n-1,1} & \dots & \mu_{n-1,n} \\ q_0 & q_1 & \dots & q_n \end{vmatrix} \quad (2)$$

При нарушении второго условия теоремы теряется единственность и линейная независимость и также не всегда будет  $(P_n, Q_n) \neq 0$ . Но свойство ортогональности полиномов, заданных формулами (2), сохраняется.

Мы будем говорить, что  $\{P_k\}_0^\infty, \{Q_k\}_0^\infty$  получаются из  $\{p_k\}_0^\infty, \{q_k\}_0^\infty$  путём биортогонализации.

В дальнейшем нам будут встречаться случаи, где одна система функций биортогональна к нескольким другим одновременно. Более точно это характеризуется следующей теоремой (которая в сущности встречается уже в [5]).

**Теорема 2.** Пусть 1)  $\{p_k\}_0^\infty$  и  $\{q_{ik}\}_{k=0}^\infty$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ) —  $s+1$  последовательность элементов гильбертова пространства, причём каждая из них линейно независима; 2) ни при одном  $n$  в пространстве элементов  $\{p_k\}_0^{ns-1}$  не существует отличного от нуля элемента, ортогонального ко всем  $q_{ik}$  ( $i=1, 2, \dots, s; k=0, 1, \dots, n-1$ ); тогда существует  $s+1$  последовательностей (каждая из которых линейно незави-

сима)  $\{P_k\}_0^\infty$  и  $\{Q_{ik}\}_{k=0}^\infty$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ) такие, что 1)  $P_n = \sum_{j=0}^{ns} a_j p_j$ ;

$Q_{in} = \sum_{j=0}^n b_{ij} q_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ) ( $a_j, b_{ij}$  — скаляры; 2)  $(P_n, Q_{im}) = 0$ , если

$m \neq n$ ,  $(P_n, Q_{in}) = 1$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ). При этом один из элементов  $P_n, Q_{1n}, \dots, Q_{sn}$  определен с точностью до постоянного множителя, остальные — единственным образом.



Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. Сперва построим  $P_n$ , требуя ортогональность ко всем  $q_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ;  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ), потом  $Q_{in}$ , требуя ортогональности к  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ . И здесь решение можно написать при помощи определителей: если положить  $(p_k, q_{il}) = \mu_{kil}$ , то

$$P_n = \alpha_n \begin{vmatrix} \mu_{010} & \mu_{011} & \dots & \mu_{01,n-1} & \mu_{020} & \dots & \mu_{02,n-1} & \dots & \mu_{0n,n-1} & p_0 \\ \mu_{110} & \mu_{111} & \dots & \mu_{11,n-1} & \mu_{120} & \dots & \mu_{12,n-1} & \dots & \mu_{1n,n-1} & p_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{ns,1,0} & \mu_{ns,1,n-1} & \dots & \mu_{ns,1,n-1} & \mu_{ns,2,0} & \dots & \mu_{ns,2,n-1} & \dots & \mu_{ns,n,n-1} & p_{ns} \end{vmatrix} \quad (3)$$

теперь введём обозначение  $(P_k, q_{il}) = \nu_{kil}$ , тогда

$$Q_{in} = \beta_{in} \begin{vmatrix} \nu_{0i0} & \nu_{0i1} & \dots & \nu_{0in} \\ \nu_{1i0} & \nu_{1i1} & \dots & \nu_{1in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu_{n-1,i,0} & \nu_{n-1,i,1} & \dots & \nu_{n-1,i,n} \\ q_{i0} & q_{i1} & \dots & q_{in} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Мы будем говорить, что  $\{P_k\}_0^\infty$ ,  $\{Q_{lk}\}_0^\infty$ , ...,  $\{Q_{sk}\}_0^\infty$  получаются из  $\{p_k\}_0^\infty$ ,  $\{q_{lk}\}_0^\infty$ , ...,  $\{q_{sk}\}_0^\infty$  путём биортогонализации относительно  $\{p_k\}_0^\infty$ . При  $s = 1$  очевидно получим теорему 1.

В дальнейшем гильбертово пространство, о котором шла речь в предыдущих теоремах, будет пространством действительных функций, квадратично интегрируемых на некоторой части  $E$  вещественной оси относительно дифференциального веса  $\varrho(x)$ . При этом (в случае теоремы 2)  $E$  будет объединением  $s$  сегментов (конечных или бесконечных)  $[a_i, b_i]$  без общих внутренних точек, а элементы  $q_{ik}$  — функциями, равными нулю вне  $[a_i, b_i]$ . В частности, можно взять  $q_{ik} = x^{q_i k}$  ( $x \in [a_i, b_i]$ ), где  $q_i$  — действительное число  $\neq 0$ , такое, что  $x^{q_i}$  действительно на  $[a_i, b_i]$ , и  $P_k = x^{p_k}$  ( $x \in E$ ). Если  $q_i$  и  $p$  натуральные,  $\{Q_{ik}\}_0^\infty$  и  $\{P_k\}_0^\infty$  представляют биортогональные системы полиномов. Оказывается, что в случае  $s = 1$  эти системы обладают рекуррентной формулой, позволяющей выразить каждый член системы (начиная с некоторого) через определённое постоянное число предыдущих. При этом несущественно даже то, что  $p_k$  и  $q_k$  натуральные степени аргумента.

**Теорема 3.** Пусть: 1) действительные числа  $p, q$  соизмеримы,  $pq > 0$ ; 2) число  $r$  такое, что  $\frac{r}{p} = p' > 0$ ,  $\frac{r}{q} = q' > 0$ ,  $p', q'$  — целые; 3) при биортогонализации последовательностей  $\{x^{p_k}\}_{k=0}^\infty$ ,  $\{x^{q_k}\}_{k=0}^\infty$  относительно веса  $\varrho(x)$  на сегменте  $[a, b]$  образуются последовательности  $\{P_k(x)\}_0^\infty$ ,  $\{Q_k(x)\}_0^\infty$ ; тогда имеют место соотношения

$$x^r P_n(x) = \sum_{j=n-q'}^{n+p'} \lambda_{n,j}^{(r)} P_j(x); \quad (n \geq q'); \quad x^r Q_n(x) = \sum_{j=n-p'}^{n+q'} \lambda_{j,n}^{(r)} Q_j(x) \quad (n \geq p') \quad (5)$$

где

$$\lambda_{k,l}^{(r)} = \int_a^b \varrho(x) x^r P_k(x) Q_l(x) dx$$

Доказательство получается просто, если заметить, что  $x^r P_n(x)$  — линейная комбинация членов вида  $x^{p'}$ , и поэтому

$$x^r P_n(x) = \sum_{j=0}^{n+p'} \alpha_{nj} P_j(x). \quad (6)$$

Умножая обе части этого равенства на  $\varrho(x) Q_j(x)$  и интегрируя, видим, что  $\alpha_{nj} = \lambda_{nj}^{(r)}$  (при  $j=0, 1, \dots, n+p'$ ). Но наряду с (6) имеем

$$x^r Q_j(x) = \sum_{k=0}^{j+q'} \beta_{jk} Q_k(x),$$

и поэтому

$$\lambda_{nj}^{(r)} = \int_a^b \varrho(x) P_n(x) \sum_{k=0}^{j+q'} \beta_{jk} Q_k(x) dx = 0$$

при  $j+q' < n$ , т. е. при  $j < n - q'$ . Аналогично доказывается вторая из формул (5).

Если  $p=q=1=r$ , (5) дает обычную рекуррентную формулу ортогональных полиномов; если  $r=2, 3, \dots$  получим формулы, связывающие 5, 7, ... последовательных полиномов. Конечно, эти же формулы получаются просто и из основной формулы ( $r=1$ ).

В общем случае ( $s > 1$ ) подобные рассуждения к цели не приводят и, как можно убедиться на примерах, формулы аналогичного вида могут и не существовать.

**Теорема 4.** Пусть 1)  $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $\{Q_{ik}\}_{k=0}^{\infty}$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ) получены из  $\{p_k\}_0^{\infty}$ ,  $\{q_{ik}\}_0^{\infty}$  путем биортогонализации относительно первой последовательности; 2)  $p_k(x) = x^{pk}$ ,  $q_{1k} = x^{qk}$  ( $x \in [a_1, b_1]$ ),  $p, q \neq 0$ ; тогда  $P_n(x)$  имеет на  $[a_1, b_1]$  не меньше  $n$  нулей.

Для доказательства обозначим через  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, l$ ) те нули функции  $P_n(x)$ , которые расположены на  $[a_1, b_1]$  и в которых  $P_n(x)$  меняет знак (случай, когда таких нулей нет, рассматривается аналогично). Тогда

функция  $R(x) = \prod_{j=1}^l (x^q - x_j^q)$  тоже меняет знак в этих точках и

$\int_{a_1}^{b_1} \varrho(x) P_n(x) R(x) dx \neq 0$ , так как весовая функция знака не меняет.

С другой стороны  $R(x)$  — линейная комбинация из  $q_{10}, q_{11}, \dots, q_{1l}$ ; значит  $l \geq n$ .

Если  $s=1$ , ясно, что  $Q_n(x)$  тоже имеет на  $[a, b]$  не меньше  $n$  нулей.

## § 2.

В теории классических ортогональных полиномов большую роль играет формула Родрига, из которой проще всего получается большинство других свойств. Оказывается, что подобная формула имеет место также для некоторых систем биортогональных полиномов  $\{P_k\}$ ; при этом соответствующая система  $\{Q_k\}$  является многочленом относительно функции  $q(x)$ , которая может и не быть степенью аргумента.

**Теорема 5.** Если 1) биортогонализируя на  $[a, b]$  относительно дифференциального веса  $\varrho(x)$  последовательности  $\{x^{pk}\}_{k=0}^{\infty}$  ( $p \neq 0$ ) и

$\{[q(x)]^k\}_{k=0}^{\infty}$  ( $q(x)$  дважды дифференцируема на  $[a, b]$ ,  $q'(x) \neq 0$  для всех  $x \in [a, b]$ ) получим систему функций  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk} x^{pk}$ ; 2) функции  $\rho(x)$  и  $q(x)$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{a_2 x^{2p} + a_1 x^p + (p-1) b_0}{b_2 x^{2p+1} + b_1 x^{p+1} + b_0 x} = \frac{A(x)}{B(x)} \quad (7)$$

$$\frac{q''}{q'} = \frac{c_2 x^{2p} + c_1 x^p + (p-1) b_0}{b_2 x^{2p+1} + b_1 x^{p+1} + b_0 x} = \frac{C(x)}{B(x)} \quad (8)$$

3) выполняется условие

$$\frac{\rho(a)B(a)}{a^p} = \frac{\rho(b)B(b)}{b^p} = 0, \quad (9)$$

то

$$P_n(x) = \gamma_n \frac{q'}{\rho} \left( \frac{d}{q'dx} \right)^n \left[ \frac{\rho}{q'} \left( \frac{Bq'}{x^p} \right)^n \right] \quad (\gamma_n \text{ — постоянная}). \quad (10)$$

Чтобы доказать эту теорему, надо показать, во-первых, что (10) определяет полином степени  $n$  от  $x^p$  и, во-вторых, что (10) определяет функцию, ортогональную к  $[q(x)]^m$  при  $m < n$ . Для первой цели введём обозначения

$$\frac{B(x)q'(x)}{x^p} = u(x), \quad \left( \frac{d}{q'dx} \right)^l \left( \frac{\rho}{q'} u^n \right) = \frac{\rho}{q'} u^{n-l} A_{nl}(x^p).$$

Очевидно  $A_{nn} = \frac{1}{\gamma_n} P_n$  и  $A_{n0} = 1$ . Покажем, что если  $A_{nl}$  полином от  $x^p$  степени не выше  $l$ , то и  $A_{n,l+1}$  полином от  $x^p$  степени не выше  $l+1$ .

На самом деле:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{q'dx} \right)^{l+1} \left( \frac{\rho}{q'} u^n \right) &= \frac{1}{q'} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q'} \rho u^{n-l} A_{nl} \right) = \frac{\rho}{q'} u^{n-l-1} \left[ -\frac{q''}{q'^2} u A_{nl} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{q'} \frac{\rho'}{\rho} u A_{nl} + (n-l) \frac{1}{q'} u' A_{nl} + p x^{p-1} \frac{1}{q'} u A_{nl}' \right] \end{aligned}$$

А так как

$$\frac{u'}{u} = \left( \ln \frac{Bq'}{x^p} \right)' = \frac{B'}{B} + \frac{q''}{q'} - \frac{p}{x} = \frac{[(p+1)b_2 + c_2]x^{2p} + (b_1 + c_1)x^p}{B} = \frac{D(x)}{B},$$

то

$$\begin{aligned} A_{n,l+1} &= \frac{u}{q'} \left[ -\frac{q''}{q'} + \frac{\rho'}{\rho} + (n-l) \frac{u'}{u} \right] A_{nl} + p x^{p-1} \frac{B}{x^p} A_{nl}' = \\ &= \frac{B}{x^p} \cdot \frac{-C + A + (n-l)D}{B} A_{nl} + \frac{pB}{x} A_{nl}' \end{aligned}$$

Но ясно, что в последнем выражении множители при  $A_{nl}$  и  $A_{nl}'$  являются полиномами от  $x^p$ , степени не выше первой или второй соответственно. Значит, первая часть теоремы доказана.

Для доказательства ортогональности интегрируем по частям и используем (9):

$$\begin{aligned} & \int_a^b \varrho \frac{q'}{\varrho} \left( \frac{d}{q'dx} \right)^n \left( \frac{\varrho}{q'} u^n \right) q^m dx = \int_{q(a)}^{q(b)} \left( \frac{d}{dq} \right)^n \left( \frac{\varrho}{q'} u^n \right) q^m dq = \\ & = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} \left( \frac{d}{dq} \right)^{n-k} \left( \frac{\varrho}{q'} u^n \right) \frac{m!}{(m+1-k)!} q^{m+1-k} \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ & = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} \frac{\varrho}{q'} u^k A_{n,n-k} \frac{m!}{(m+1-k)!} q^{m+1-k} \Big|_{x=a}^{x=b} = \\ & = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} \frac{m!}{(m+1-k)!} q^{m+1-k} q'^{k-1} A_{n,n-k} \rho \left( \frac{B}{x^p} \right)^k \Big|_{x=a}^{x=b} = 0 \end{aligned}$$

Теорема доказана. В частном случае  $p=1$ ,  $q(x)=x$  условие (7) обращается в (1), а (10) — в формулу Родрига для классических полиномов. Другие частные случаи были рассмотрены Эмбером [12] ( $\varrho = \exp x^2$ ,  $p=2$ ,  $q=x$ ; ср. также [8]), Курантом и Гильбертом ([2], стр. 378) ( $p=1$ ,  $q=x^2$ ,  $\rho = \exp x$  или  $\rho = x^2 \exp x$ ) и Анджелеску [6] ( $\rho = x^\lambda (x^p - a^p)^\mu$ ,  $q=x$ ).

Нетрудно при заданном  $p$  найти всевозможные весовые функции  $\varrho(x)$  и соответствующие им функции  $q(x)$ , удовлетворяющие условиям теоремы. Требование, чтобы  $q(x)$  тоже было степенью аргумента, налагает на  $\rho$  дополнительное условие, при котором весовые функции мало отличаются от таковых для классических полиномов. Даем краткий перечень результатов, при чем положим  $\frac{B(x)}{x} = E(x^p)$ .

1.  $E(x)$  имеет два различных действительных нуля  $\alpha, \beta$ . Тогда  $\varrho = x^\gamma (x^p - \alpha)^\delta (x^p - \beta)^\varepsilon$ ; если  $p=1$ , то  $\gamma=0$ ; если  $q(x)=x^q$ ,  $q \neq p$ , то  $\alpha=0$ .

2.  $E(x)$  имеет двойной действительный нуль  $\alpha$ . Тогда  $\varrho = x^\gamma (x^p - \alpha)^\delta \exp \frac{\varepsilon}{x^p - \alpha}$ ; если  $p=1$ , то  $\gamma=0$ ; если  $q(x)=x^q$ ,  $q \neq p$ , то  $\alpha=0$ .

Интересно, что  $q(x)=x^q$  приводит к полиномам Бесселя, которые не ортогональны на части действительной оси, но в общем случае, когда  $q(x) \neq x^q$ , появляется ортогональность на  $\left[0, \alpha^{\frac{1}{p}}\right]$ .

3.  $E(x)$  имеет действительный нуль  $\alpha$  и нуль на бесконечности. Тогда  $\rho = x^\gamma (x^p - \alpha)^\delta \exp(\varepsilon x^p)$ ; если  $p=1$ , то  $\gamma=0$ , если  $q(x)=x^q$ ,  $q \neq p$ , то  $\alpha=0$ .

4.  $E(x)$  имеет двойной нуль на бесконечности. Тогда  $\varrho = x^\gamma \exp(\delta x^{2p} + \varepsilon x^p)$ ; если  $p=1$ , то  $\gamma=0$ ; если  $q(x)=x^q$ , то  $q=p$ .

Для системы  $\{Q_n(x)\}$  формула, подобная (10), при помощи аналогичных рассуждений получается в двух случаях: если  $q(x)=x^p$  (обычная ортогональность) и если  $q(x)=x^q$ ,  $q \neq p$  и  $A(x)=0$ ,  $[a, b]=[0, 1]$ . Тогда

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \gamma_n x^{q-1} \left( \frac{d}{dx^q} \right)^n [x^{-q+1} (x^p + q - x^q)^n], \\ Q_n(x) &= \delta_n x^{p-1} \left( \frac{d}{dx^p} \right)^n [x^{-p+1} (x^p + q - x^p)^n] \end{aligned}$$

Теорему 5 легко обобщить на случай, когда  $\{P_n\}$  биортогональна к нескольким системам; для дальнейшего важно, что при этом существенно обобщается условие (7).

**Теорема 6.** Если 1) функции  $\varrho(x)$  и  $q(x)$  удовлетворяют уравнениям ( $p \neq 0$ )

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\sum_{k=1}^{s+1} a_k x^{pk} + (p-1)b_0}{x \sum_{k=0}^{s+1} b_k x^{kp}} = \frac{A(x)}{B(x)}, \quad (11)$$

$$\frac{q''}{q'} = \frac{\sum_{k=1}^{s+1} c_k x^{pk} + (p-1)b_0}{B(x)}$$

2) для  $i = 1, 2, \dots, s$  выполняются условия

$$\left. \frac{\varrho(x)B(x)}{x^p} \right|_{x=a_i} = \left. \frac{\varrho(x)B(x)}{x^p} \right|_{x=b_i} = 0,$$

то функция

$$P_n(x) = \gamma_n \frac{q'}{\varrho} \left( \frac{d}{q dx} \right)^n \left[ \frac{\varrho}{q'} \left( \frac{Bq'}{x^p} \right)^n \right] \quad (12)$$

является полиномом степени  $ns$  от  $x^p$  и ортогональна с  $q^s(x)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) на любом сегменте  $[a_i, b_i]$  с весом  $\varrho(x)$ . (Другими словами, биортогонализируя  $\{x^{pk}\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $\{q_i(x)^k\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , (где  $q_i(x) = q(x)$  на  $[a_i, b_i]$  и 0 вне  $[a_i, b_i]$ ) относительно первой из этих последовательностей, мы получим  $P_n(x)$ ).

Доказательство вполне подобно доказательству предыдущей теоремы. Частные случаи были рассмотрены в [7] и [9].

### § 3.

Теорема 6 дает возможность получить дифференциальное уравнение многочленов  $P_n$ , если  $q(x) = x$ ,  $p = 1$ .

**Теорема 7.** Если 1)  $\varrho(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\sum_{k=0}^s \alpha_k x^k}{\sum_{k=0}^{s+1} \beta_k x^k} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

2) выполняются условия

$$\varrho(x)\beta(x) \Big|_{x=a_i} = \varrho(x)\beta(x) \Big|_{x=b_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

то полином степени  $ns$ , ортогональный к  $x^m$  ( $m = 0, 1, \dots, n-1$ ) на каждом сегменте  $[a_i, b_i]$ , удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\beta(\varrho y)^{(s+1)} + \sum_{k=1}^{s+1} [C_{n+s}^k \beta^{(k)} - C_{n+s}^{k-1} (\alpha + n\beta')^{(k-1)}] (\varrho y)^{(s+1-k)} = 0 \quad (13)$$

По теореме 6 имеем

$$P_n = \frac{1}{\varrho} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (\varrho \beta^n)$$

Обозначим  $\rho\beta^n = v$ ; тогда  $v' = (\rho'\beta + n\beta')\beta^{n-1} = \rho(\alpha + n\beta')\beta^{n-1}$  и  $\beta v' = (\alpha + n\beta')v$ . Последнее равенство продифференцируем  $n + s$  раз. Получим

$$\beta v^{(n+s+1)} + \sum_{k=1}^{s+1} C_{n+s}^k \beta^{(k)} v^{(n+s+1-k)} = \sum_{k=0}^s C_{n+s}^k (\alpha + n\beta')^{(k)} v^{(n+s-k)}$$

Остается заметить, что  $v^{(n)} = \rho P_n$ .

При  $s = 1$ , (13) обращается в уравнение классических ортогональных многочленов. Нетрудно найти общее решение уравнения (13), а именно

$$y = \frac{1}{\rho} \left[ \left( \int \frac{\sum_{k=0}^{s-1} C_k x^k}{\rho \beta^{n+1}} dx + C_s \right) \rho \beta^n \right]^{(n)}$$

$P_n$  является в общем случае единственным полиномиальным решением.

(Частный случай уравнения (13) при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = x^3 - x$  проанализирован в [11])

Для дальнейшего нам понадобится одно соотношение комбинаторики, которое вряд ли является новым (частный случай рассмотрен в [4]), но так как в доступной нам литературе его найти не удалось, приведем идею доказательства.

**Л е м м а.** Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  — целые неотрицательные,  $\alpha \geq \beta$ ,  $\gamma \geq \beta$ ,

$G = G(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{r=0}^{\beta} (-1)^r C_{\alpha-r}^{\beta-r} C_{\gamma}^r$ ; тогда: если  $\alpha - \gamma \geq \beta$ , то  $G = C_{\alpha-\gamma}^{\beta}$ ;

если  $0 \leq \alpha - \gamma < \beta$ , то  $G = 0$ ; если  $\alpha - \gamma < 0$ , то  $G = (-1)^{\beta} C_{\gamma-\alpha+\beta-1}^{\beta}$ .

Пусть  $\beta > 0$ . Используя тождества

$$nC_m^n = mC_{m-1}^{n-1} = (m-n+1)C_m^{n-1},$$

можем получить:

$$\begin{aligned} G(\alpha, \beta, \gamma) &= C_{\alpha}^{\beta} C_{\gamma}^0 + \sum_{r=1}^{\beta-1} (-1)^r C_{\alpha-r}^{\beta-r} C_{\gamma}^r + (-1)^{\beta} C_{\alpha-\beta}^0 C_{\gamma}^{\beta} = \\ &= \frac{1}{\beta} \left[ \beta C_{\alpha}^{\beta} C_{\gamma}^0 + \sum_{r=1}^{\beta-1} (-1)^r [(\beta-r) C_{\alpha-r}^{\beta-r} C_{\gamma}^r + C_{\alpha-r}^{\beta-r} r C_{\gamma}^r] + \right. \\ &+ (-1)^{\beta} C_{\alpha-\beta}^0 \beta C_{\gamma}^{\beta} \left. \right] = \frac{1}{\beta} \left[ (\alpha - \beta + 1) C_{\alpha}^{\beta-1} C_{\gamma}^0 + \right. \\ &+ \sum_{r=1}^{\beta-1} (-1)^r (\alpha - \beta + 1) C_{\alpha-r}^{\beta-1-r} C_{\gamma}^r + \sum_{r=1}^{\beta-1} (-1)^r C_{\alpha-r}^{\beta-r} \gamma C_{\gamma-1}^{r-1} + \\ &+ (-1)^{\beta} C_{\alpha-\beta}^0 \gamma C_{\gamma-1}^{\beta-1} \left. \right] = \frac{1}{\beta} [(\alpha - \beta + 1) G(\alpha, \beta - 1, \gamma) - \\ &- \gamma G(\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1)] \end{aligned}$$

Остается отметить, что  $G(\alpha, 0, \gamma) = 1$  и в каждом из трёх случаев применить индукцию по  $\beta$ .

**Т е о р е м а 8.** Уравнение, сопряжённое (в смысле Лагранжа) с уравнением (13) (в котором за неизвестное считается  $\rho y$ ), имеет вид

$$\beta z^{(s+1)} + \sum_{l=0}^s (-1)^{s-l} C_{n+s-l-1}^{s-l} \left[ \alpha^{(s-l)} + \frac{n(s-l)+1}{s-l+1} \beta^{(s-l+1)} \right] z^{(l)} = 0; \quad (14)$$

это уравнение имеет не меньше  $s$  полиномиальных решений степеней  $n, n+1, n+2, \dots, n+s-1$ .

По определению сопряженного уравнения ([3] стр. 128) можем написать его в виде

$$(\beta z)^{(s+1)} + \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^k \{ [C_{n+s}^k \beta^{(k)} - C_{n+s}^{k-1} (\alpha + n\beta)^{(k-1)}] z \}^{(s+1-k)} = 0$$

Дифференцируя по формуле Лейбница, очевидно получим уравнение вида

$$\beta z^{(s+1)} + \sum_{l=0}^s (A_l \alpha^{(s-l)} + B_l \beta^{(s-l+1)}) z^{(l)} = 0 \quad (15)$$

Здесь  $A_l$  и  $B_l$  легко находятся при помощи леммы, именно:

$$\begin{aligned} A_l &= \sum_{k=1}^{s+1-l} (-1)^{k+1} C_{s+1-k}^l C_{n+s}^{k-1} = \sum_{r=0}^{s-l} (-1)^r C_{s-l-r}^{s-l-r} C_{n+s}^r = \\ &= G(s, s-l, n+s) = (-1)^{s-l} C_{n+s-l-1}^{s-l}; \\ B_l &= C_{s+1}^l + \sum_{k=1}^{s+1-l} (-1)^k C_{s+1-k}^l (C_{n+s}^k - n C_{n+s}^{k-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^{s+1-l} (-1)^k C_{s+1-k}^{s+1-l-k} C_{n+s}^k - n A_l = G(s+1, s+1-l, n+s) - \\ &\quad - n A_l = (-1)^{s+1-l} C_{n+s-l-1}^{s+1-l} + (-1)^{s-l} n C_{n+s-l-1}^{s-l} = \\ &= (-1)^{s-l} C_{n+s-l-1}^{s-l} \cdot \frac{n(s-l)+1}{s-l+1} \end{aligned}$$

Подставляя эти значения  $A_l$  и  $B_l$  в (15), получим (14).

Чтобы доказать второе утверждение теоремы, используем известный факт: для того, чтобы решением дифференциального уравнения

$$\sum_{l=0}^t \left( \sum_{m=0}^l a_{lm} x^m \right) z^{(l)} = 0$$

являлся многочлен степени  $r$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$g(r) = \sum_{l=0}^t a_{ll} \frac{r!}{(r-l)!} = 0$$

(см. напр. [3] стр. 171).

В нашем случае  $t = s+1$ ,  $a_{s+1, s+1} = \beta_{s+1}$ , при  $l < s+1$  имеем  $a_{ll} = A_l \alpha_s \frac{s!}{l!} + B_l \beta_{s+1} \frac{(s+1)!}{l!}$ , а вместо  $r$  поставим  $n+m$ ,  $0 \leq m \leq s-1$ .

Используя опять лемму, получим

$$\begin{aligned} g(n+m) &= \alpha_s \sum_{l=0}^s A_l \frac{s!(n+m)!}{l!(n+m-l)!} + \beta_{s+1} \left[ \frac{(n+m)!}{(n+m-s-1)!} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^s B_l \frac{(s+1)!(n+m)!}{l!(n+m-l)!} \right] = \alpha_s s! \sum_{l=0}^s (-1)^{s-l} C_{n+s-l-1}^{s-l} C_{n+m}^l + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta_{s+1}(s+1)! \left[ C_{n+m}^{s+1} + \sum_{l=0}^s (-1)^{s-l} (nC_{n+s-l-1}^{s-l} - \right. \\
& \left. - C_{n+s-l}^{s+1-l} C_{n+m}^l \right] = \alpha_s s! (-1)^s G(n+s-1, s, n+m) + \\
& + \beta_{s+1}(s+1)! \left[ C_{n+m}^{s+1} + n(-1)^s \sum_{l=0}^s (-1)^l C_{n+s-l-1}^{s-l} C_{n+m}^l - \right. \\
& \left. - (-1)^s \sum_{l=0}^s (-1)^l C_{n+s-l}^{s+1-l} C_{n+m}^l \right] = \beta_{s+1}(s+1)! \left[ C_{n+m}^{s+1} + \right. \\
& \left. + n(-1)^s G(n+s-1, s, n+m) - \right. \\
& \left. - (-1)^s \sum_{l=0}^{s+1} (-1)^l C_{n+s-l}^{s+1-l} C_{n+m}^l - C_{n+s-s-1}^0 C_{n+m}^{s+1} \right] = \\
& = \beta_{s+1}(s+1)! \left[ C_{n+m}^{s+1} - (-1)^s G(n+s, s+1, n+m) - \right. \\
& \left. - C_{n+m}^{s+1} \right] = 0
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

В дальнейшем обозначим левую часть уравнения (13) через  $L_n(\rho y)$ , левую часть уравнения (14) через  $M_n(z)$ , а полиномиальные решения уравнения (14) через  $R_{n,0}(x)$ ,  $R_{n,1}(x)$ , ...,  $R_{n,s-1}(x)$  ( $R_{n,r}$  имеет степень  $n+m$ ). Легко убедиться, что в случае  $s=1$  полиномы  $P_n$ ,  $Q_n$ ,  $R_{n,0}$  совпадают, в общем случае мы имеем здесь от  $s+1$  до  $2s+1$  различных полиномов (так как некоторые  $Q_{n,k}$  тоже могут совпасть между собой или с  $R_{n,0}$ ). С этим связано интересное расщепление свойств (при изменении  $s$ ) классических полиномов. Например, известно, что производные классических ортогональных полиномов также являются ортогональными. Аналогичный факт имеет место также при  $s > 1$ .

**Теорема 9.** Пусть  $\bar{\rho} = \rho\beta$  и  $\bar{P}_n$ ,  $\bar{R}_{n,k}$  — полиномы, соответствующие весу  $\bar{\rho}$ . Тогда

$$1) P_n^{(s)} = (\alpha^{(s)} + \beta^{(s+1)}) \bar{P}_{n-1} + \sum_{k=1}^s (C_s^k \alpha^{(s-k)} + C_{s+1}^k \beta^{(s-k+1)}) \bar{P}_{n-1}^{(k)} + \beta \bar{P}_{n-1}^{(s+1)};$$

$$2) R'_{n,k} = \bar{R}_{n-1,k}$$

Первое утверждение доказывается, используя формулу Родрига:

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{1}{\rho} (\rho\beta^n)^{(n)} = \frac{1}{\rho} [(\rho\beta \cdot \beta^{n-1})^{(n-1)}]' = \frac{1}{\rho} (\rho\beta \bar{P}_{n-1})' = \\
&= \frac{1}{\rho} (\alpha\rho \bar{P}_{n-1} + \rho\beta' \bar{P}_{n-1} + \rho\beta \bar{P}'_{n-1}) = (\alpha + \beta') \bar{P}_{n-1} + \beta \bar{P}'_{n-1}
\end{aligned}$$

Дифференцируя обе части этого равенства  $s$  раз и учитывая, что  $C_s^k + C_s^{k-1} = C_{s+1}^k$ , получим требуемое. В случае  $s=1$  правую часть можно преобразовать, если принять во внимание дифференциальное уравнение для  $P_{n-1}$ , и тогда получается, что  $P_n$  и  $\bar{P}_{n-1}$  могут отличаться только постоянным множителем.

Для доказательства второго утверждения продифференцируем (14).



Получим уравнение порядка  $s + 1$  для  $R'_{n,k}$ . Коэффициент при  $(R'_{n,k})^{(l)}$  в этом уравнении равен

$$\begin{aligned} & (A_l + A_{l+1}) \alpha^{(s-l)} + (B_l + B_{l+1}) \beta^{(s-l+1)} = (-1)^{s-l} \{ (C_{n+s-l-1}^{s-l} - \\ & - C_{n+s-l-2}^{s-l-1}) \alpha^{(s-l)} + [n(A_l + A_{l+1}) - C_{n+s-l-1}^{s+1-l} + C_{n+s-l-2}^{s-l}] \beta^{(s-l+1)} \} = \\ & = (-1)^{s-l} [C_{n+s-l-2}^{s-l} \alpha^{(s-l)} + (nC_{n+s-l-2}^{s-l} - C_{n+s-l-2}^{s+1-l}) \beta^{(s-l+1)}] = \\ & = (-1)^{s-l} \{ C_{n-1+s-l-1}^{s-l} \alpha^{(s-l)} + [(n-1) C_{n-1+s-l-1}^{s-l} - \\ & - C_{n-1+s-l-1}^{s+1-l}] \beta^{(s-l+1)} + C_{n+1+s-l-1}^{s-l} \beta^{(s-l+1)} \} \end{aligned}$$

Но такое же уравнение, очевидно, получится, если в (14) заменить  $n$  на  $n - 1$  и  $\alpha$  на  $\alpha + \beta'$ . Так как последнее равносильно переходу к весовой функции  $\rho\beta$ , утверждение доказано.

Некоторое обобщение известного свойства классических полиномов содержит также следующее утверждение, в котором в уравнениях (13) и (14) допускаются также отрицательные значения величины  $n$ .

**Теорема 10.** Пусть  $\rho^* = \beta^{s-l} \rho^{-l}$  и  $L_n^*, M_n^*$  — операторы, соответствующие весу  $\rho^*$ . Тогда

$$L_{-n-s} = M_n^*, M_{-n-s} = L_n^*$$

Для доказательства заменим в (13)  $n$  через  $-m - s$ . Коэффициент при  $(\rho y)^{(s+1-k)}$  тогда преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{n+s}^k \beta^{(k)} - C_{n+s}^{k-1} (\alpha + n\beta) \beta^{(k-1)} & = -C_{n+s}^{k-1} \left[ \alpha^{(k-1)} + \left( n - \frac{n+s-k+1}{k} \right) \beta^{(k)} \right] = \\ & = -\frac{(-m)(-m-1) \dots (-m+k-2)}{(k-1)!} \left[ \alpha^{(k-1)} - \frac{(m+s)(k-1) + s - k + 1}{k} \beta^{(k)} \right] \end{aligned}$$

Заменим индекс  $k$  через  $s + 1 - l$ . Получим, что коэффициент при  $(\rho y)^{(l)}$  равен

$$-(-1)^{s-l} C_{m+s-l-1}^{s-l} \left[ \alpha^{(s-l)} - \frac{(m+s)(s-l) + l}{s-l+1} \beta^{(s-l+1)} \right]$$

Но такой же результат найдём, если в  $M_m$  заменим  $\alpha$  на  $-\alpha + (s-1)\beta$ , что равносильно переходу к весовой функции  $\rho^*$ . Значит,  $L_{-m-s} = M_m^*$ . Остальное следует из того, что  $(\rho^*)^* = \rho$ .

Итак, можно рассматривать бесконечные в обе стороны последовательности операторов

$$\begin{aligned} \dots, L_{-2}, L_{-1}, L_0, L_1, L_2, \dots \\ \dots, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \dots \end{aligned}$$

Имеем: при  $n \geq 0$ ,  $L_n(\rho P_n) = 0$ ,  $M_n(R_{n,k}) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, s-1$ ;  
при  $n \leq -s$ ,  $L_n(R_{-n-s,k}^*) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, s-1$ ;  $M_n(\rho^* P_n^*) = 0$ .

Если же  $\rho = \rho^*$  (это имеет место у полиномов Лежандра), то  $M_{-n-s} = L_n$ , обе последовательности операторов сольются и получим: при  $n \geq 0$ ,  $L_n(\rho P_n) = 0$ ; при  $n \leq s$ ,  $L_n(R_{-n-s,k}) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, s-1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Я. Л. Геронимус — Теория ортогональных многочленов, ГИТТЛ, М.—Л. (1950).
- [2]. Р. Курант и Д. Гильберт — Методы математической физики, т. 2, ГИТТЛ, М.—Л. (1951).
- [3]. Э. Камке — Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИИЛ, Москва (1951).
- [4]. E. Netto — Lehrbuch der Combinatorik, Leipzig (1901).
- [5]. A. Angelesco — Sur une classe de polynomes à une variable — Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 162 (1916), 121—123.
- [6]. A. Angelesco — Sur certains polynomes biorthogonaux — Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 176 (1923), 1531—1533.
- [7]. P. Appell — Sur une suite des polynomes ayant toutes leurs racines reelles — Archiv der Mathematik und Physik (3) 1 (1901), 69—71.
- [8]. M. de Duffahal — Some polynomials analogous to Abel's polynomials — Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 28 (1936), 151—158.
- [9]. N. Ghosh — On a generalisation of Legendre polynomials — Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 21 (1929), 147—154.
- [10]. W. Hahn — Über Orthogonalpolynome, die q-Differenzgleichungen genügen — Mathematische Nachrichten Bd. 2 (1949), 4—34.
- [11]. P. Humbert — Sur les equations de Didon — Nouvelles Annales de mathematiques, (4) 19 (1949), 443—451.
- [12]. P. Humbert — Sur certains polynomes orthogonaux — Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 176 (1923), 1282—1284.

## PAR DAŽĀM POLINOMU SISTEMĀM

G. Enġelis

(Kopsavilkums)

Darbā apskatītas polinomu virknes, ko var uzskatīt par ortogonālo polinomu sistemu vispārīgājumā, jo tās biortogonālas  $s$  segmentos ar  $s$  dažādām dotām funkciju virknēm. Parādīts, ka gadījumā, kad svāra funkcija apmierina vienādojumu (11) (kas vispārina no klasisko ortogonālo polinomu teorijas pazīstamo vienādojumu (1)) un apmierināti vēl daži nosacījumi, virknes polinomi attēlojami ar formulu (12) (kas vispārina klasisko ortogonālo polinomu Rodriga formulu). Ja apskatāmā polinomu sistēma bez tam  $s$  segmentos ortogonāla tieši ar zemākajām argumenta pakāpēm, var sastādīt arī šīs saimes diferencialvienādojumu (14), kas vispārina pazīstamo klasisko ortogonālo polinomu diferencialvienādojumu. Parādīts, ka minētajam vienādojumam saistīto vienādojumu (15) arī apmierina polinomi, kam piemīt dažas klasisko ortogonālo polinomu īpašības, piemēram, to atvasinājumi apmierina līdzīga tipa vienādojumu, tikai atbilstošu citai svāra funkcijai.

## О ФУНКЦИЯХ ЭРМИТА И ФУНКЦИЯХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Э. Я. РИЕКСТЫНЬШ

### 1. Уравнение Эрмита

$$u'' - 2zu' + 2\nu u = 0 \quad (1.1)$$

встречается во многих задачах математической физики. В качестве одного частного решения обычно выбирают функцию Эрмита первого рода [1]

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} {}_1F_1\left(\frac{-\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{2^\nu \Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\nu}{2})} z {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right) \quad (1.2)$$

Если в этой формуле  $\frac{1-\nu}{2}$  или же  $-\frac{\nu}{2}$  целое неположительное, то соответствующий коэффициент надо считать равным нулю. Это будет иметь место при целых неотрицательных  $\nu$  ( $\nu = n$ ), и тогда  $H_\nu(z)$  совпадает с хорошо известным полиномом Эрмита

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \quad (1.3)$$

Функции  $H_\nu(z)$  имеют следующие интегральные представления [1]:

$$H_\nu(z) = \frac{2^\nu + 1}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(2tz - \frac{\nu\pi}{2}) t^\nu dt \quad (\operatorname{Re} \nu > -1) \quad (1.4)$$

$$H_{-\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty e^{-t^2 - 2tz} t^{\nu-1} dt \quad (\operatorname{Re} \nu > 0) \quad (1.5)$$

При решении уравнений параболического типа используется функция  $H_{-n}(z)$ . Выражение для этой функции через более простые функции найдены независимо друг от друга несколькими авторами, среди них и автором настоящей статьи [2]. При  $n \geq 1$  имеем:

$$\begin{aligned} H_{-n}(z) &= \frac{(-1)^{n-1} \sqrt{\pi}}{2^n (n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (e^{z^2} \operatorname{erfc} z) = \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \sqrt{\pi}}{2^n (n-1)!} \operatorname{erfc} z G_{-n}(z) + \frac{z^{n-2}}{2(n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \varrho_{n-2k} \left(\frac{1}{2z^2}\right)^k \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc} z &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt, \quad \varrho_{nk} = \frac{(-1)^n (n-k)!}{(n-2k)!} \sum_{i=0}^k \binom{n-k+i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(n-2k)! k! 2^k} {}_2F_1(-k, 1, -n; 2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

а функция  $G_{-n}(z)$  будет определена впоследствии. Другие выражения для  $q_{nk}$  можно найти в работе [2].

Вместо функций  $H_\nu(z)$  часто применяются родственные им функции, именно:

1) функции параболического цилиндра  $D_\nu(z)$  [3]:

$$D_\nu(z) = 2^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} H_\nu\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \quad (1.8)$$

Эти функции удовлетворяют уравнению

$$v'' + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right)v = 0 \quad (1.9)$$

2) повторные интегралы  $\operatorname{erfc}$  функции  $i^n \operatorname{erfc} z$  [4]:

$$i^n \operatorname{erfc} z = \left(\int_z^\infty dt\right)^n \operatorname{erfc} t = \frac{2}{n! \sqrt{\pi}} \int_z^\infty (t-z)^n e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} H_{-n-1}(z) \quad (1.10)$$

Они удовлетворяют уравнению

$$u'' + 2zu' - 2nu = 0 \quad (1.11)$$

При решении уравнений параболического типа можно использовать функции [2]

$$\Phi_n(x, t) = \frac{n2^n}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t})^{n-2} H_{-n-1}(x\sqrt{t}) \quad (n \geq 1) \quad (1.12)$$

Можно убедиться в том, что функция  $te^{-\frac{a^2 x^2}{4t}} \Phi_n\left(\frac{ax}{2t} + \alpha, t\right)$  при любом  $\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$$

2. В качестве второго решения уравнения (1.1) часто применяют функцию  $H_\nu(-z)$  [1], но при  $\nu = n$  она только множителем  $(-1)^n$  отличается от функции  $H_n(z)$ . Поэтому при  $\nu = n$  вводится другое решение, названное функцией Эрмита второго рода. Ее обозначают либо  $G_n(z)$  [1], либо  $h_n(z)$  [5]. Свойства ее исследуются только в последнее время (см., например, [6], [7], [8]).

Частными решениями (1.1) являются также функции  $e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz)$  и  $e^{z^2} H_{-\nu-1}(-iz)$  [1]. Цель настоящей работы — предложить еще другое частное решение, которое является обобщением функции  $G_n(z)$  для любого значения индекса, и преимущества которого можно видеть из свойств этого решения.

Определим функцию  $G_\nu(z)$  следующим образом:

$$G_\nu(z) = \frac{1}{2} e^{z^2} \left[ e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i} H_{-\nu-1}(iz) + e^{-\frac{\nu+1}{2}\pi i} H_{-\nu-1}(-iz) \right] \quad (2.1)$$

Применяя формулу [1]

$$e^z {}_1F_1(\alpha, \gamma, -z) = {}_1F_1(\gamma - \alpha, \gamma, z)$$

получим

$$G_\nu(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cos \frac{\nu+1}{2}\pi}{2^\nu \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)} {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sin \frac{\nu+1}{2}\pi}{2^\nu \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} z {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right) \quad (2.2)$$

Легко убедиться в том, что

$$W(H_\nu, G_\nu) = e^{z^2}$$

и функции  $H_\nu$  и  $G_\nu$  линейно независимы при всех  $\nu$ . Используя предыдущие соотношения, при целом  $\nu$  легко установить следующие формулы:

$$G_{-\nu}(z) = \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} e^{z^2} = e^{z^2} (-i)^{\nu-1} H_{\nu-1}(iz) = e^{z^2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\nu-1}{2} \rfloor} \binom{\nu-1}{2k} \frac{(2k)!}{k!} (2z)^{\nu-2k-1} \quad (\nu \geq 1) \quad (2.3)$$

$$G_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+\frac{1}{2}} \nu!} h_\nu(z) = \frac{(-1)^\nu}{2^\nu \nu!} e^{z^2} \frac{d^\nu}{dz^\nu} (e^{-z^2} \operatorname{Erfi} z) = \\ = \frac{1}{2^\nu \nu!} H_\nu(z) \operatorname{Erfi} z + \frac{(-1)^\nu z^{\nu-1} e^{z^2}}{2^\nu \nu!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\nu-1}{2} \rfloor} \varrho_{\nu-1,k} \left(-\frac{1}{2z^2}\right)^k \quad (\nu \geq 0) \quad (2.4)$$

где  $\operatorname{Erfi} z = \int_0^z e^{t^2} dt$ , а  $\varrho_{\nu-1,k}$  определяется по формуле (1.7). Эти формулы частично встречаются в работах [1], [6], [8].

Из предыдущего следуют также формулы

$$G_{\pm \nu}(-z) = (-1)^{\nu+1} G_{\pm \nu}(z) \quad (2.5)$$

$$G'_\nu(z) = G_{\nu-1}(z) \quad (2.6)$$

$$G_{\nu-2}(z) - 2zG_{\nu-1}(z) + 2\nu G_\nu(z) = 0 \quad (2.7)$$

$$G_\nu(z) = \frac{e^{z^2}}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos\left(2tz - \frac{\nu+1}{2}\pi\right) t^\nu dt \quad (\operatorname{Re} \nu > -1) \quad (2.8)$$

$$G_{-\nu}(z) = \frac{2^{\nu-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} [e^{2tz} + e^{-2tz} \cos(\nu-1)\pi] t^{\nu-1} dt \quad (\operatorname{Re} \nu > 0) \quad (2.9)$$

$$H_\nu(z) = \frac{e^{z^2}}{\sin(\nu+1)\pi} \left[ e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i} G_{-\nu-1}(iz) + e^{-\frac{\nu+1}{2}\pi i} G_{-\nu-1}(-iz) \right] \quad (\nu \neq 0, \pm 1, \dots) \quad (2.10)$$

$$G_{\pm n - \frac{1}{2}}(z) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{\Gamma(\pm n + \frac{1}{2}) 2^{\pm n + \frac{1}{2}}} H_{\pm n - \frac{1}{2}}(-z) \quad (2.11)$$

$$G_\nu(z) = \frac{e^{z^2}}{(2z)^{\nu+1}} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(2k+\nu+1)}{k! \Gamma(\nu+1)} (2z)^{2k} + O(z^{-2n-2}) \right] \quad \left( n = 0, 1, 2, \dots, |\arg z| < \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.12)$$

Легко проверить, что функции  $e^{-z^2} H_{-\nu-1}(z)$  и  $e^{-z^2} G_{-\nu-1}(z)$  являются линейно независимыми решениями уравнения (1.11), где вместо  $n$  положено  $\nu$ . Другие свойства функции  $G_\nu$  можно исследовать при помощи преобразования Лапласа, что частично при  $\nu = n$  проводится в работе [7].

3. Рассмотрим теперь частное решение уравнения (1.9), которое соответствует функции  $G_\nu(z)$ . Назовем это решение функцией параболиче-

ского цилиндра второго рода, обозначим через  $Di_\nu(z)$  и определим его следующим образом:

$$Di_\nu(z) = \frac{1}{2} [e^{\frac{\nu+1}{2}\pi i} D_{-\nu-1}(iz) + e^{-\frac{\nu+1}{2}\pi i} D_{-\nu-1}(-iz)] \quad (3.1)$$

В силу соотношения (1.8) легко установить следующие формулы:

$$Di_\nu(z) = 2^{\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} G_\nu\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.2)$$

$$Di_{-n}(z) = e^{-\frac{z^2}{4}} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{\frac{z^2}{2}} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} Di_n(z) &= \frac{(-1)^n \sqrt{2}}{n!} e^{\frac{z^2}{4}} \frac{d^n}{dz^n} \left( e^{-\frac{z^2}{2}} \operatorname{Erfi} \frac{z}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{n!} D_n(z) \operatorname{Erfi} \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{(-1)^n z^{n-1}}{n!} e^{\frac{z^2}{4}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \varrho_{n-1,k} \left( -\frac{1}{z^2} \right)^k \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} D_{-n}(z) &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( e^{\frac{z^2}{2}} \operatorname{erfc} \frac{z}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc} \frac{z}{\sqrt{2}} Di_{-n}(z) + \frac{z^{n-2}}{(n-1)!} e^{-\frac{z^2}{4}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \varrho_{n-2,k} \frac{1}{z^{2k}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$Di_{\nu-2}(z) - z Di_{\nu-1}(z) + \nu Di_\nu(z) = 0 \quad (3.6)$$

$$W(D_\nu(z), Di_\nu(z)) = 1 \quad (3.7)$$

$$Di_{\pm n}(-z) = (-1)^{n+1} Di_{\pm n}(z) \quad (3.8)$$

$$Di_{\pm n - \frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n}{\Gamma\left(\pm n + \frac{1}{2}\right)} D_{\pm n - \frac{1}{2}}(-z) \quad (3.9)$$

4. Рассмотрим теперь более подробно случай  $\nu = \pm n - \frac{1}{2}$ . При  $\nu = -\frac{1}{2}$  уравнение (1.9) переходит в следующее:

$$v'' - \frac{z^2}{4} v = 0 \quad (4.1)$$

Но частными решениями этого уравнения являются функции  $\sqrt{z} \bar{I}_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right)$  и  $\sqrt{z} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right)$  [1]. Поэтому при помощи неопределенных коэффициентов легко убедиться, что [3]

$$D_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{z}{2\pi}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) \quad (4.2)$$

Используя формулу (3.9), а также формулу [9]

$$K_\nu(z e^{m\pi i}) = e^{-m\nu\pi i} K_\nu(z) - \pi i \frac{\sin m\pi\nu}{\sin \pi\nu} I_\nu(z) \quad (4.3)$$

получаем

$$\begin{aligned} Di_{-\frac{1}{2}}(z) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{\pi}} \left[ K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) + \pi \sqrt{2} I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi z}{2}} \left[ I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) + I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Далее используем формулы [3]

$$D_{\nu-n}(z) = \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu+1)} e^{-\frac{z^2}{4}} \frac{d^n}{dz^n} e^{\frac{z^2}{4}} D_{\nu}(z) \quad (4.5)$$

$$D_{\nu+n}(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{4}} \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{z^2}{4}} D_{\nu}(z) \quad (4.6)$$

Для нахождения  $D_{\pm n - \frac{1}{2}}(z)$  положим в формулах (4.5) и (4.6)  $\nu = -\frac{1}{2}$ , используем формулу (4.2) и применяем формулу Лейбница. Далее нужно найти функцию  $\frac{d^n}{dz^n} \left[ \sqrt{z} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) \right]$ . Из уравнения (4.1) легко видеть, что

$$v^{(n)} = \alpha_n(z)v + \beta_n(z)v' \quad (4.7)$$

Дифференцируя это соотношение, получаем рекуррентные формулы

$$\alpha_{n+1} = \alpha'_n + \frac{z^2}{4} \beta_n, \quad \beta_{n+1} = \alpha_n + \beta'_n \quad (4.8)$$

В нашем случае  $v = \sqrt{z} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right)$ . Применяя формулу дифференцирования для функции Макдональда [1], имеем

$$v' = -\frac{z}{2} \sqrt{z} K_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) \quad (4.9)$$

Принимая во внимание, что  $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$ , из формул (4.8) можно постепенно вычислить  $\alpha_n(z)$  и  $\beta_n(z)$  для любого фиксированного  $n$ . После дифференцирования  $n$  раз соотношения (4.1) получим, что полиномы  $\alpha_n(z)$  и  $\beta_n(z)$  удовлетворяют также рекуррентной формуле

$$\alpha_{n+2} = \frac{z^2}{4} \alpha_n + \frac{n}{2} z \alpha_{n-1} + \frac{n(n-1)}{4} \alpha_{n-2} \quad (4.10)$$

Комбинируя формулы (4.8) или же (4.8) и (4.10), можно получить другие рекуррентные соотношения, но они не будут простыми. Кроме того, для наших целей они не нужны.

Возвращаясь к формулам (4.5) и (4.6), после некоторых преобразований получаем

$$D_{\pm n - \frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \left[ K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) \gamma_{\pm n}(z) - \frac{z}{2} K_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) \delta_{\pm n}(z) \right] \quad (4.11)$$

где  $\gamma_{\pm n}(z)$  являются полиномами  $n$ -го порядка, а  $\delta_{\pm n}(z)$  — полиномами  $n-1$ -го порядка. Эти полиномы можно выразить при помощи полиномов Эрмита первого и второго рода и полиномов  $\alpha_k(z), \beta_k(z)$ , но проще всего прямо находить для них рекуррентные формулы. Подставляя формулу (4.11) в рекуррентное соотношение для функции  $D_{\nu}(z)$  [3]

$$D_{\nu+1}(z) - z D_{\nu}(z) + \nu D_{\nu-1}(z) = 0$$

легко убедиться, что полиномы  $\gamma_{\pm n}(z)$  и  $\delta_{\pm n}(z)$  удовлетворяют соотношению

$$\gamma_{n+1} - z\gamma_n + \left(n - \frac{1}{2}\right) \gamma_{n-1} = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.12)$$

причем  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_1 = \frac{z}{2}$ ,  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_1 = -1$ .

При помощи формулы (4.12) легко убедиться также в том, что

$$\gamma_{-n}(z) = \frac{(2i)^n}{(2n-1)!!} \gamma_n(iz), \quad \delta_{-n}(z) = \frac{(2i)^n}{i(2n-1)!!} \delta_n(iz) \quad (4.13)$$

Поэтому по формуле (4.12) надо найти только  $\gamma_n(z)$  и  $\delta_n(z)$ . Используя формулы (3.9) и (4.3), получаем соответствующее выражение для функции  $Di_{\pm n - \frac{1}{2}}(z)$ :

$$Di_{\pm n - \frac{1}{2}}(z) = \frac{(-1)^n \pi}{2\Gamma(\pm n + \frac{1}{2})} \sqrt{\frac{z}{2}} \left\{ \left[ I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) + I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) \right] \gamma_{\pm n}(-z) - \right. \\ \left. - \frac{z}{2} \left[ I_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) + I_{\frac{3}{4}}\left(\frac{z^2}{4}\right) \right] \delta_{\pm n}(-z) \right\} \quad (4.14)$$

При помощи формул (4.11), (4.14), (1.8) и (3.2) можно выразить также функции Эрмита для  $\nu = \pm n - \frac{1}{2}$  через цилиндрические функции.

Кафедра общей математики

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, М.—Л., 1953.
- [2]. Э. Я. Риекстыньши. Некоторые новые формулы для преобразования Лапласа. Прикладная математика и механика, 1953, 17, вып. 6, 761—768.
- [3]. F. G. Tricomi. Funzioni ipergeometriche confluenti. Roma, 1954.
- [4]. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. Гостехиздат, М., 1952.
- [5]. V. Magnus, F. Oberhettinger. Formeln und Sätze für die spezielle Funktionen der mathematischen Physik. Berlin, 1948.
- [6]. B. Mukherjee. A note on the second solution of Hermite's equation. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 1952, 44, № 3, 124—126.
- [7]. H. Bagchi, B. Mukherjee. Note on some operational representations of some special functions. Mathematische Zeitschrift, 1954, 60, 88—93.
- [8]. L. Toscano. Carattere ipergeometrico dei polinomi associati a quelli de Hermite. Bollettino della Unione matematica italiana, 1954, 9, № 2, 146—150.
- [9]. Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.

#### PAR ERMITA UN PARABOLISKĀ CILINDRĀ FUNKCIJĀM

E. Riekstiņš

(Kopsavilkums)

Darbā tiek ieteikts jauna veida partikulārs atrisinājums Ermita vienādojumam (1.1). Šo atrisinājumu  $G_\nu(z)$  definē formula (2.1). Darba tālākā gaitā tiek apskatītas šī atrisinājuma īpašības, kā arī īpašības tam partikulāram paraboliskā cilindra vienādojuma atrisinājumam, kas atbilst funkcijai  $G_\nu(z)$ . Darba pēdējā daļā pētīts jautājums par šo funkciju izteikšanu ar cilindriskām funkcijām gadījumā, kad  $\nu = \pm n - \frac{1}{2}$ .



## О КВАДРАТНОМ КОРНЕ ИЗ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Я. Л. ЭНГЕЛЬСОН

М. М. Вайнберг в работах [1, 2], путем исследования квадратичных форм в пространствах  $L^q$  ( $1 < q < 2$ ), показал, что если самосопряженный в  $L^2$  квазиположительный оператор  $A$  действует вполне непрерывно из  $L^q$  в  $L^p$  ( $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ), то определенный в  $L^2$  главный квадратный корень из оператора  $A$

$$A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, u) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k(x), \quad e_k = \text{sign } \lambda_k \quad (1)$$

( $\lambda_k$  и  $\varphi_k$  — характеристические числа и соответствующие им собственные функции оператора  $A$ ) действует вполне непрерывно из  $L^q$  в  $L^2$  и из  $L^2$  в  $L^p$ .

В настоящей работе мы показываем, что метод, предложенный М. М. Вайнбергом<sup>1</sup>, применим для установления тех же результатов в некоторых линейных топологических пространствах. При этом мы существенно используем различные предложения, содержащиеся в работе Альтмана [3].

1. Пусть  $E$  — рефлексивное локально выпуклое вещественное линейное топологическое пространство с первой аксиомой отделимости и  $E^*$  — пространство, сопряженное к  $E$ .

Мы будем предполагать, что  $E \subset H \subset E^*$ , где  $H$  — некоторое гильбертово пространство (Ср. [4]), всюду плотное в  $E^*$ , и что внутреннее произведение  $(x, y) = y(x)$   $x \in E, y \in E^*$ , совпадает со скалярным произведением в  $H$ , если  $y \in H$ .

Примерами таких пространств могут служить некоторые счетно-нормированные пространства или банаховы пространства  $E = L^p$ , где  $p > 2$ .

Пусть  $A$  — самосопряженный в  $H$  оператор, который действует вполне непрерывно из  $E^*$  в  $E$  (см. [3]).

Отсюда следует, что  $A$  — вполне непрерывный оператор, если его рассматривать в  $H$ . Тогда имеет место

Л е м м а 1. Каковы бы ни были  $u, v \in E^*$ , имеет место равенство

$$(Au, v) = (Av, u) \quad (2)$$

Доказательство. Используя плотность  $H$  в  $E^*$  и первую аксиому отделимости, мы можем выделить в  $H$  последовательности  $\{u_n\}$  и  $\{v_m\}$ , которые сходятся в  $E^*$  соответственно к  $u$  и  $v$ . Отсюда в силу непрерывности в  $E^*$  и самосопряженности в  $H$  оператора  $A$  мы получаем равенство (2).

<sup>1</sup> Автор использовал полный текст доклада [2].

Градиент функционала, заданного в локально выпуклом пространстве, вводится, исходя из дифференциала Гато, так же, как в [5] для банаховых пространств. При помощи леммы 1 мы непосредственно находим, что

$$\text{grad}(Au, u) = 2Au, \quad u \in E^* \quad (3)$$

Положим  $(Au, u) = I(u)$

**Лемма 2.** Квадратичный функционал  $I(u)$  слабо непрерывен на всяком выпуклом ограниченном множестве из  $E^*$ .

**Доказательство.** (См. [5], теор. 2.2.) Пусть  $D$  — ограниченное множество из  $E$ ; тогда  $A(D)$  — компактно в  $E$ . Допустим, что  $I(u_n) \not\rightarrow I(u_0)$ , где последовательность  $\{u_n\}$  из  $D$  слабо сходится к  $u_0 \in D$ .

Тогда найдутся  $\varepsilon > 0$  и подпоследовательность  $\{u_{n_k}\}$  такие, что

$$|I(u_{n_k}) - I(u_0)| \geq \varepsilon \quad (4)$$

Используя теперь формулу Лагранжа [5] и равенство (3) имеем:

$$I(u_{n_k}) - I(u_0) = 2(A(u_0 + t_{n_k}(u_{n_k} - u_0)), u_{n_k} - u_0)$$

где  $0 < t_{n_k} < 1$  и, в силу выпуклости  $D$ ,  $u_0 + t_{n_k}(u_{n_k} - u_0) \in D$ . Так как  $A(D)$  компактно, существует подпоследовательность индексов  $\{m_k\}$ , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(u_0 + t_{m_k}(u_{m_k} - u_0)) = v_0 \quad (5)$$

Далее, имеем:

$$I(u_{m_k}) - I(u_0) = 2(A(u_0 + t_{m_k}(u_{m_k} - u_0)) - v_0, u_{m_k} - u_0) + 2(v_0, u_{m_k} - u_0).$$

Так как  $\{u_{m_k} - u_0\}$  — ограниченное множество, то, согласно определению сходимости в сильной топологии  $\beta(E, E^*)$  (см. [6]), из равенства (5) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A(u_0 + t_{m_k}(u_{m_k} - u_0)) - v_0, u_{m_k} - u_0) = 0$$

Затем, в силу слабой сходимости  $\{u_{m_k}\}$  к  $u_0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (v_0, u_{m_k} - u_0) = 0$$

Отсюда и из предыдущего имеем  $I(u_{m_k}) \not\rightarrow I(u_0)$  при  $k \rightarrow \infty$ , что противоречит неравенствам (4). Лемма доказана.

2. В дальнейшем мы будем дополнительно предполагать, что  $A$  — квазиположительный оператор в  $H$  [7], который имеет счетное число положительных характеристических чисел  $\lambda_k$  и конечное число отрицательных характеристических чисел. Положим

$$A_n u = \sum_{k=1}^n \frac{(\varphi_k, u) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k, \quad u \in E^*, \quad e_k = \text{sign } \lambda_k, \quad |\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}| \quad (6)$$

где  $\varphi_k$  — собственные элементы оператора  $A$ , соответствующие характеристическим числам  $\lambda_k$ . Так как  $A$  действует из  $E^*$  в  $E$ , то  $\varphi_k \in E$  для всякого  $k$ .

Далее, положим

$$I_n(u) = (A_n u, u) = \sum_{k=1}^n \frac{(\varphi_k, u)^2}{\lambda_k} \quad (7)$$

**Лемма 3.** Для всякого  $u \in E^*$  имеет место равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, u)^2}{\lambda_k} = I(u) \quad (8)$$

Доказательство. Из квазиположительности оператора  $A$  следует, что существует  $n_0$  такое, что для всех  $n > n_0$  и фиксированного  $u \in E^*$ :

$$I_n(u) \leq I_{n+1}(u)$$

Далее, так как в  $H$  для всякого  $n > n_0$  имеет место неравенство:

$$I_n(u) \leq I(u) \text{ для } u \in H$$

то, используя непрерывность операторов  $A$  и  $A_n$ , мы также, как при доказательстве леммы 1, получим, что для всякого  $u \in E^*$

$$I_n(u) \leq I(u) \quad (9)$$

Отсюда и из монотонности  $\{I_n(u)\}$  для  $n > n_0$  следует, что для фиксированного  $u \in E^*$  числовая последовательность  $\{I_n(u)\}$  имеет предел, который обозначим  $l(u)$ .

Докажем, что функционал  $l(u)$  непрерывен в любой точке  $u_0 \in E^*$ . Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u_0$ .

Тогда

$$|l(u_k) - l(u_0)| \leq |l(u_k) - I_n(u_k)| + |I_n(u_k) - I_n(u_0)| + |I_n(u_0) - l(u_0)|$$

Непосредственный подсчет с учетом неравенства (9) и слабой непрерывности  $I(u)$  показывает, что равномерно относительно  $n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [I_n(u_k) - I_n(u_0)] = 0$$

Следовательно, найдется такое  $k_0$ , что для  $k > k_0$   $|I_n(u_k) - I_n(u_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$  для всех  $n$  и произвольно заданного  $\varepsilon > 0$ . Считая теперь  $k > k_0$  фиксированным, мы выберем  $n_0$  так, чтобы для  $n > n_0$  было:

$$|l(u_k) - I_n(u_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |I_n(u_0) - l(u_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Следовательно функционал  $l(u)$  непрерывен.

Так как для  $u \in H$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(u) = I(u)$$

то  $l(u) = I(u)$  в  $H$ . Но  $H$  всюду плотно в  $E^*$ , откуда в силу непрерывности  $l(u)$  и  $I(u)$  следует их совпадение в  $E^*$ . Лемма доказана.

3. Для дальнейшего приведем некоторые факты из теории локально выпуклых пространств [6]. По определению, рефлексивное локально выпуклое пространство  $E$  является  $t$ -пространством (см. [6], § 6), а для такого пространства всякое слабо ограниченное множество в  $E^*$  равномерно непрерывно. Но равномерно непрерывные множества из  $E^*$ , по теореме Тихонова, являются слабо компактными в  $E^*$ . Следовательно, если  $E$  рефлексивно, то всякое слабо ограниченное, а поэтому и всякое сильно ограниченное, множество из  $E^*$  слабо компактно.

Обобщенная теорема Дини<sup>1</sup>. Пусть на слабо компактном и слабо замкнутом множестве  $D$  локально выпуклого пространства  $E$  задана монотонная последовательность слабо непрерывных функционалов  $\{f_n(x)\}$ . Тогда, если последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится в каждой точке  $x \in D$  к слабо непрерывному функционалу  $f(x)$ , то  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$  равномерно в  $D$ .

<sup>1</sup> На случай банахова пространства теорема Дини была впервые обобщена М. М. Вайнбергом [1].

Доказательство. Пусть  $\{f_n(x)\}$  — возрастающая последовательность. Допустим, что она не сходится к  $f(x)$  равномерно в  $D$ ; тогда существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для каждого  $n$  найдется элемент  $x_n \in D$ , такой, что

$$f(x_n) - f_n(x_n) \geq \varepsilon$$

Ввиду слабой компактности и слабой замкнутости  $D$ , из последовательности этих точек  $\{x_n\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , слабо сходящуюся к  $x_0 \in D$ .

Тогда

$$f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon$$

Так как  $\{f_n(x)\}$  монотонно возрастает, то для  $n \leq n_k$  тем более

$$f(x_{n_k}) - f_n(x_{n_k}) \geq \varepsilon$$

Следовательно

$$f(x_{n_k}) - f_{n_{k_0}}(x_{n_k}) \geq \varepsilon \text{ при } k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$$

Так как  $f(x)$  и  $f_n(x)$  слабо непрерывны, то переходя в неравенстве к пределу, когда  $x_{n_k} \xrightarrow{\text{сл}} x_0$ , имеем  $f(x_0) - f_{n_{k_0}}(x_0) \geq \varepsilon$  для всякого  $k_0$ .

Но это противоречит сходимости  $\{f_n(x)\}$  в каждой точке множества  $D$ . Противоречие доказывает теорему.

Основная лемма. Для всякого выпуклого ограниченного слабо замкнутого множества  $D \subset E^*$  имеет место равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{u \in D} |I(u) - I_n(u)| = 0. \quad (10)$$

Отсюда, в частности, следует, что для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $n_0$ , что для всех  $n \geq n_0$  и любого  $u \in D$  имеет место неравенство:

$$|I_{n+m}(u) - I_n(u)| < \varepsilon \quad (11)$$

где  $m$  — любое натуральное число.

Доказательство: Из леммы 2 следует, что функционалы  $I(u)$ ,  $I_n(u)$  слабо непрерывны на множестве  $D$ , которое, в силу замечаний, приведенных в начале п. 3, слабо компактно. Поэтому  $I(u) - I_n(u)$  достигает на  $D$  своих граней [5].

Из леммы 3 и обобщенной теоремы Дини следует равенство (10).

Следствие. Из доказанной леммы следует, что  $(A_n u, u)$  сходится к  $(A u, u)$  равномерно на всяком выпуклом ограниченном слабо замкнутом множестве  $D \in E^*$ . Так как конечная сумма и разность таких множеств также обладает этими свойствами, то последовательность  $(A_n u, v) = \frac{1}{4} [(A_n(u+v), u+v) - (A_n(u-v), u-v)]$  также сходится к  $(A u, v)$  равномерно на множествах  $D_1$  и  $D_2$ , где  $u \in D_1, v \in D_2, u+v \in D_1 + D_2$ . Поэтому  $A_n u$  сходится сильно к  $A u$  равномерно относительно  $u \in D_1$ , а следовательно  $A_n \rightarrow A$  в смысле сильной топологии (топологии ограниченной сходимости) в пространстве линейных операторов  $\mathcal{L}(E^*, E)$  (см. [6] § 4).

В частности, для банаховых пространств это означает сходимость последовательности операторов  $\{A_n\}$  к  $A$  по норме <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Для пространства  $L^p$  этот результат получен в [1].

4. Если оператор  $A$ , который действует из  $E^*$  в  $E$ , рассматривать в  $H$ , то главный корень квадратный  $A^{\frac{1}{2}}$  из  $A$  имеет следующее спектральное представление

$$A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, u) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k, \quad u \in H \quad (12)$$

Лемма 4. Ряд (12) сходится в пространстве  $E$  сильно к оператору  $A^{\frac{1}{2}} u$ , действующему из  $H$  в  $E$ .

Доказательство. Так как  $A$  действует из  $E^*$  в  $E$ , то его собственные элементы  $\varphi_k \in E$ , поэтому

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(\varphi_k, u) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k = \omega_{n,m}(u) \in E$$

Пусть  $u \in D_1$ , где  $D_1$  — единичный шар  $\|u\| \leq 1$  пространства  $H$ .

Обозначим  $(\varphi_k, u) = \xi_k$ . Тогда последовательность  $\{\xi_k\} = \xi$  является элементом из единичного шара гильбертова пространства  $l^2$ , т. к.

$$\|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, u)^2 \leq \|u\|^2 \leq 1$$

Пусть  $D$  — выпуклое ограниченное слабо замкнутое множество из  $E^*$ . Тогда для  $z \in D$

$$\begin{aligned} (\omega_{n,m}(u), z) &= \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\xi_k e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} (\varphi_k, z) \leq \left( \sum_{k=n+1}^{n+m} \xi_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(\varphi_k, z)^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left( \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(\varphi_k, z)^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Для  $n > n_0$  будет  $\lambda_k > 0$  ( $k = n+1, n+2, \dots$ ), а потому

$$(\omega_{n,m}(u), z) \leq \left( \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(\varphi_k, z)^2}{\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}} = (I_{n+m}(z) - I_n(z))^{\frac{1}{2}}, \quad n > n_0$$

Отсюда по основной лемме следует, что в пространстве  $E$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{n,m}(u) = \Theta$  равномерно относительно  $u \in D$ . Это значит, что  $\{\omega_{n,m}\}$  сходится к нулю в смысле сильной топологии пространства  $\mathcal{L}(H, E)$ . Далее, в силу полноты пространства  $E$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(\varphi_k, u) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, u) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k = W(u) \in E$$

равномерно относительно  $u \in D_1$ . Значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = W$  в смысле сильной топологии в  $\mathcal{L}(H, E)$ . (В частности, для банахова пространства это означает  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - W\| = 0$ ; см. сноску на стр. 8).

Так как  $W(u) = A^{\frac{1}{2}} u$  в  $H$ , то они совпадают и в  $E$ . Лемма доказана. Из данной леммы согласно теореме Банаха-Штейнгауза [6] следует непрерывность  $A^{\frac{1}{2}}$  из  $H$  в  $E$ .

Теорема 1. Оператор  $A^{\frac{1}{2}}$  действует вполне непрерывно из  $H$  в  $E$ .

Доказательство. Пусть  $\{u_n\}$  сходится слабо к  $u_0$ . Повторяя выкладки леммы 4 найдем, что  $\{A^{\frac{1}{2}}u_n\}$  сильно (в смысле топологии  $E$ ) сходится к  $A^{\frac{1}{2}}u_0$ .

Для доказательства компактности оператора  $A^{\frac{1}{2}}$ , рассмотрим шар  $D_R(\|u\| \leq R)$  в пространстве  $H$  и допустим, что  $A^{\frac{1}{2}}(D_R)$  не компактно в  $E$ . Тогда найдется последовательность  $\{u_n\}$  из  $D$  и окрестность нуля  $U$  в  $E$  такие, что для всяких  $i \neq j$

$$A^{\frac{1}{2}}u_i - A^{\frac{1}{2}}u_j \notin U \quad (13)$$

Так как шар  $\bar{D}_R$  слабо замкнут и слабо компактен, то найдется подпоследовательность  $\{u_{n_k}\}$  последовательности  $\{u_n\}$ , слабо сходящаяся к  $u_0 \in D_R$ .

Но  $\{A^{\frac{1}{2}}u_{n_k}\}$  в силу вышеуказанного сходится сильно к  $Au_0$ , что противоречит (13). Теорема доказана.

Лемма 5. Линейный оператор  $T$ , определенный равенством

$$Tv = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, v) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k \quad (14)$$

действует из  $E^*$  в  $H$ .

Доказательство. По теореме 1 оператор  $A^{\frac{1}{2}}$  действует вполне непрерывно из  $H$  в  $E$ , поэтому для любых  $u \in H, v \in E^*$  имеет смысл выражение  $(A^{\frac{1}{2}}u, v)$ , а так как ряд (12) сходится сильно в  $E$ , то для всякого  $u \in H$

$$(A^{\frac{1}{2}}u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, u) (\varphi_k, v)}{\sqrt{|\lambda_k|}} e_k \quad (15)$$

Если для некоторых  $v \in E^*$  и  $u \in H$  имеет место равенство

$$(A^{\frac{1}{2}}u, v) = (u, Tv)$$

то  $T$  будет сопряженным к  $A^{\frac{1}{2}}$  оператором, т. е.  $T = (A^{\frac{1}{2}})^*$ . Для  $v \in H$  имеет место  $Tv = A^{\frac{1}{2}}v$ . Значит  $T$  есть расширение оператора  $A^{\frac{1}{2}}$ . Из равенства (15) следует, что для тех  $v \in E^*$ , для которых оператор  $T$  существует, выполняется равенство (14), причем в правой части равенства ряд сходится к  $Tv$  сильно в пространстве  $H$ . Так как согласно лемме 3 неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, v)^2}{|\lambda_k|} < \infty$$

имеет место для всякого  $v \in E^*$ , то ряд (14) сходится в метрике  $H$  для всех  $v \in E^*$ . Следовательно, ряд (14) определяет линейный оператор, действующий из  $E^*$  в  $H$ . Лемма доказана.

Таким образом, оператор  $A^{\frac{1}{2}}$ , определенный в  $H$ , допускает расширение  $T$  на все пространство  $E^*$ . Так как операторы  $A^{\frac{1}{2}}$  и  $T$  определяются одинаковыми формулами (12) и (14) с той разницей, что в (12) —

$u \in H$ , а в (14) —  $v \in E^*$ , то в дальнейшем можно для них употреблять одно и то же обозначение  $A^{\frac{1}{2}}$ . Лемма 5, следовательно, утверждает, что определенный в  $H$  оператор  $A^{\frac{1}{2}}$  действует из  $E^*$  в  $H$ .

Отсюда и из теоремы 1, в силу теоремы о полной непрерывности сопряженного оператора [3, теор. 13], следует

**Теорема 2.** Линейный оператор  $T$ , определенный равенством (14), действует вполне непрерывно из  $E^*$  в  $H$ .

Учитывая замечание об одинаковых обозначениях, мы из теоремы 1 и теоремы 2 приходим к предложению

**Основная теорема.** Определенный в  $H$  главный корень квадратный из оператора  $A$ :

$$A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, u) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k, \quad e_k = \text{sign } \lambda_k$$

действует вполне непрерывно из  $E^*$  в  $H$  и из  $H$  в  $E$ .

*Кафедра общей математики*

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1]. М. М. Вайнберг — О некоторых свойствах квадратичных форм в пространствах  $L^q$  ( $q < 2$ ). ДАН СССР 100, № 5 (1955), 845—848.
- [2]. М. М. Вайнберг — О некоторых свойствах интегральных квадратичных форм в пространствах  $L^q$  ( $q < 2$ ). УМН, 1954, т. 9, в. 3 (61), 236—238.
- [3]. M. Altman — On linear functional equations in locally convex linear topological spaces. Studia Math., 13 (1953), 194—207.
- [4]. И. М. Гельфанд и А. Г. Костюченко — Разложение по собственным функциям дифференциальных и других операторов. ДАН СССР, 103 (1955), 349—352.
- [5]. М. М. Вайнберг — Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах. УМН, 1952, т. 7, в. 4 (50), 55—102.
- [6]. Dieudonné J. A. — Recent developments in the theory of locally convex vector spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 1953, 59, № 6, 495—512.
- [7]. М. М. Вайнберг — К вариационной теории нелинейных операторных уравнений. УМН, 1955, т. 10, в. 4, 189—190.

#### PAR LINEARA OPERATORA KVADRATSAKNI LINEARAS TOPOLOGISKAS Telpās

*J. Engelsons*

(Kopsavilkums)

Rakstā iegūts sekojošs rezultāts:

ja

1)  $E$  ir lokāli izliekta lineāra topoloģiska refleksīva telpa,  $E^*$  — tās saistītā telpa un  $H$  — Hilberta telpa, pie kam  $E \subset H \subset E^*$  un telpa  $H$  ir blīva telpā  $E^*$ ;

2)  $A$  ir lineārs pašsaistīts operators telpā  $H$ , kas pilnīgi nepārtraukti darbojas no  $E^*$  uz  $E$ , un kuram sanumurējams skaits pozitīvu un galīgu

skaitis negatīvu īpašvērtību  $\lambda_k$  ( $\varphi_k$  — tām atbilstošās īpašfunkcijas), tad operatora  $A$  galvenā kvadrātsakne

$$A^{\frac{1}{2}} u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, u) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k; \quad e_k = \text{sign } \lambda_k$$

ir lineārs operators, kas darbojas pilnīgi nepārtraukti no  $E^*$  uz  $H$  un no  $H$  uz  $E$ .

Rezultāts un metode ir attiecīga rezultāta un metodes vispārinājumi, kas atrodami M. Vainberga darbos [1, 2] gadījumam, kad  $E = L^p$  ( $p \geq 2$ ).



## ОБОСНОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭФРОСА

И. В. КАРКЛИНЬШ

Пусть функции  $F(t)$  ( $t \geq 0$ ) и  $f(p)$  удовлетворяют соотношению:

$$f(p) = p \int_0^{+\infty} e^{-pt} F(t) dt \quad (1)$$

( $p$  — комплексное,  $\operatorname{Re} p > \beta$ ; интеграл рассматривается в смысле Римана), которое символически записывается так:

$$f(p) \doteq F(t) \text{ или } F(t) \doteq f(p).$$

Пусть кроме функций  $F(t)$  и  $f(p)$  даны еще  $q(p)$ ,  $u(p)$  и  $\Psi(x, t)$ , которые связаны соотношением:

$$\Psi(x, t) \doteq e^{-xq(p)} q(p) u(p) \quad (2)$$

( $x > 0$  — вещественный параметр).

Если функции  $F(t)$ ,  $q(p)$  и  $u(p)$  удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, то из равенств (1) и (2) вытекает соотношение:

$$u(p) f[q(p)] \doteq \int_0^{+\infty} \Psi(x, t) F(x) dx \quad (3)$$

Выражение  $p \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \int_0^{+\infty} \Psi(x, t) F(x) dx$  называется преобразованием Эфроса функции  $F(x)$ . В дальнейшем назовем его  $E$  — преобразованием с ядром  $\Psi(x, t)$ .

Применяя общие теоремы А. М. Эфроса [1], В. А. Диткина [2], Л. Влодарского [3], где даны достаточные условия, налагаемые на функции  $u(p)$ ,  $q(p)$ ,  $F(t)$ , формулу (3) можно обосновать для некоторых из тех частных случаев функций  $u(p)$  и  $q(p)$ , которые рассматриваются практически. Однако, довольно часто в литературе операционного исчисления встречаются формулы  $E$  — преобразования (3), которые получены формальным путём, и функции  $u(p)$ ,  $q(p)$ ,  $F(t)$  не удовлетворяют условиям, гарантирующим справедливость соотношения (3). В этой статье будем рассматривать обоснование некоторых таких формально полученных формул  $E$  — преобразования, для которых указанные условия не выполняются. В целях краткости доказательство теорем даётся только в одном случае — для теоремы 2.1.

### 1 §

1°. Через  $x, y, t$  будем обозначать вещественные переменные, а через  $p, z, w$  — комплексные переменные.

Если  $p = \sigma + i\tau$ , то будем пользоваться обозначениями:  $\operatorname{Re} p = \sigma$ ,  $\operatorname{Im} p = \tau$ . Буквы  $M, N, C$  (с различными индексами) используем для

обозначения положительных постоянных. Кроме того постоянными будем считать  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \omega$ .

Для обозначения оригиналов будем пользоваться прописными буквами, а для обозначения изображений соответствующими строчными буквами, например:

$$f_1(p) \doteq F_1(x), \varphi(p) \doteq \psi(x).$$

Множество функций  $F(x)$ , для которых в некоторой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \beta$  сходится интеграл (1), обозначим через  $K$ , а соответствующее множество функций  $f(p)$  обозначим через  $k$ . Если  $\beta$  — абсцисса сходимости интеграла (1), то будем писать:

$$F(x) \in K[\beta], f(p) \in k[\beta].$$

Множество функций  $F(x)$ , для которых в некоторой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \alpha$  сходится интеграл

$$\bar{f}(p) = p \int_0^{+\infty} |e^{-px} F(x)| dx \quad (4)$$

обозначим через  $K_\alpha$ . Если  $\alpha$  — абсцисса сходимости интеграла (4), то будем писать:  $F(x) \in K_\alpha[\alpha]$ .

Через  $E_\alpha$  обозначим множество функций  $F(x)$  со следующими свойствами:

- 1) при  $x > 0$   $F(x)$  принимает конечные значения;
- 2) существует предел  $\lim_{x \rightarrow +0} F(x)$ , который может быть и бесконечным (определенного знака);
- 3)  $F(x) \in K_\alpha[\alpha]$ ;
- 4)  $F(x)$  не является  $\delta$  — функцией.

В статье будем придерживаться обычных обозначений специальных функций, например, [2], стр. 98.

2°. Для того, чтобы  $u(p) \cdot f[q(p)] \in k$ , необходимо, чтобы эта функция была однозначной и аналитической в некоторой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > c$  [2, стр. 12]. Но это последнее обстоятельство будет выполняться, если функции  $u(p)$  и  $q(p)$  будут аналитическими и однозначными в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \beta$ , и кроме того в этой полуплоскости  $\operatorname{Re} q(p) > \beta$ .

Доказательство равенства (3) упростим, если сведем вопрос к рассмотрению вещественных функций вещественного переменного. Для этой цели используем теорему о единственности однозначной аналитической функции.

Допустим, что существует функция  $F_1(t) \equiv \int_0^{+\infty} \Psi(x, t) F(x) dx$  и, кроме того,  $F_1(t) \in K[\beta_1]$ . Тогда функция  $f_1(p)$  однозначная и аналитическая в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \beta_1$ .

Если доказать, что на действительной полуоси  $\sigma > c_1 \geq \beta_1$  выполняется равенство

$$f_1(\sigma) = u(\sigma) \cdot f[q(\sigma)] \quad (5)$$

и функция  $u(p) \cdot f[q(p)]$  однозначная и аналитическая в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > c$ , то равенство (5) останется верным, по крайней мере, для  $\operatorname{Re} p > \max\{c, c_1\}$ .

3°. Для доказательства верности равенства (3) необходимо оправдать перемену порядка интегрирования. Будем пользоваться следующими теоремами.

**Теорема 1.1.** (Модификация известной теоремы [4, стр. 772]. Пусть функция  $\Phi(x, t; \sigma)$  для каждого фиксированного  $\sigma > c$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\Phi(x, t; \sigma)$  определена в области  $(x \geq a, t \geq b)$ ;
- 2)  $|\Phi(x, t; \sigma)| < M$  в области  $(a \leq x \leq x_0, b \leq t \leq t_0)$  для каждого фиксированного  $x_0 > a$  и  $t_0 > b$ ;

3) для каждого  $x_0 > a$  существует интеграл

$$\int_a^{x_0} dx \int_b^{+\infty} \Phi(x, t; \sigma) dt$$

и для каждого  $t_0 > b$  интеграл  $\int_b^{t_0} dt \int_a^{+\infty} \Phi dx$ ;

- 4) интеграл  $\int_a^{+\infty} dx \int_b^{\eta} \Phi dt$  сходится равномерно относительно  $\eta$  в множестве  $\eta \geq b$ .

Тогда существуют повторные интегралы

$$\int_a^{+\infty} dx \int_b^{+\infty} \Phi dt, \int_b^{+\infty} dt \int_a^{+\infty} \Phi dx,$$

которые равны между собой.

**З а м е ч а н и е.** Условие 3) выполнено, если

- а)  $\int_b^{+\infty} \Phi dt$  сходится равномерно относительно  $x$  в каждом промежутке  $[a, x_0]$ ;
- б)  $\int_a^{+\infty} \Phi dx$  сходится равномерно относительно  $t$  в каждом промежутке  $[b, t_0]$ .

Чтобы упростить формулировку следующей теоремы, определим множество функций  $G$ .

Функция  $\Psi(x, t; \sigma) \in G$ , если

- 1)  $\Psi(x, t; \sigma)$  определена в области  $(x \geq a, t \geq b, \sigma > c)$ ;
- 2)  $\Psi(x, t; \sigma)$  может иметь разрывы первого рода на конечном числе кривых с площадью, равной нулю;
- 3)  $\Psi(x, t; \sigma)$  может быть неограниченной на кривых с площадью, равной нулю. Число этих кривых конечное, и каждая прямая, параллельная координатной оси, пересекает эту кривую только конечное число раз;
- 4)  $\Psi(x, t; \sigma)$  может быть неограниченной на прямой  $x = a$  или  $t = b$ .

**Теорема 1.2.** ([5], [6]). Пусть  $\Psi(x, t; \sigma) \in G$  и интеграл

$$\int_a^{+\infty} dx \int_b^{+\infty} |\Psi| dt \text{ сходится. Тогда сходится двойной интеграл}$$

$$\int_a^{+\infty} \int_b^{+\infty} \Psi dt dx, \text{ который равен повторному.}$$

## 2 §

Теорема 2.1. Пусть  $F(x) \in E_a[\alpha]$  и существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что интеграл  $\int_0^1 |F(x)| x^{-2\nu-\varepsilon} dx$  сходится. ( $\nu$  — вещественное,  $|\nu| < N$ ).

Тогда

1) для всех  $t > 0$  существует функция  $F_1(t)$

$$F_1(t) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2t)^{-\nu-1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu+1} \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right) F(x) dx;$$

2)  $F_1(t) \in K_a[\alpha_1]$ ;

$$\text{при } \nu \leq -\frac{1}{2} \quad \alpha_1 \leq \alpha_1^* = \begin{cases} -\nu - \frac{1}{2}, & \text{если } \alpha \leq 0 \\ -\nu - \frac{1}{2} + \alpha^2, & \text{если } \alpha > 0; \end{cases}$$

$$\text{при } \nu > -\frac{1}{2} \quad \alpha_1 \leq \alpha_1^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \leq 0 \\ a\alpha^2, & \text{если } \alpha > 0 (a > 2); \end{cases}$$

3)  $F_1(t) \doteq p^{\nu+\frac{1}{2}} f(\sqrt{p})$ , по крайней мере в полуплоскости  $\text{Re } p > \alpha_1^*$ .

Под функцией  $p^{\nu+\frac{1}{2}}$  понимается ветвь

$$p^{\nu+\frac{1}{2}} = |p|^{\nu+\frac{1}{2}} \left\{ \cos \left[ \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \arg p \right] + i \sin \left[ \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \arg p \right] \right\} \text{ при } \text{Re } p > 0.$$

Рассматриваемое в теореме соотношение или его частные случаи даны в [2], [1], [9].

Доказательство.

1°. Мы рассматриваем только полуплоскость  $\text{Re } p > 0$  и поэтому  $\text{Re } \sqrt{p} = \sqrt{\frac{1}{2} (V\sigma^2 + \tau^2 + \sigma)} \geq V\sigma > 0$ . Следовательно,  $p^{\nu+\frac{1}{2}} f(\sqrt{p})$  однозначная и аналитическая функция в полуплоскости

$$\begin{cases} \text{Re } p > 0, & \text{если } \beta \leq 0 \\ \text{Re } p > \beta^2, & \text{если } \beta > 0. \end{cases}$$

Известна формула [2, стр. 154.]

$$p^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-x\sqrt{p}} \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2t)^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu+1} \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right) \in K[0]$$

( $x > 0$ ,  $\nu$  — произвольное вещественное число). Используем это соотношение для следующих формальных преобразований:

$$\begin{aligned} \sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} F_1(t) dt &= \sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2t)^{-\nu-1} dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu+1} \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right) F(x) dx = \\ &= \int_0^{\infty} F(x) dx \left\{ \sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2t)^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu+1} \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right) dt \right\} = \\ &= \sigma^{\nu+1} \int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{\sigma}} F(x) dx = \sigma^{\nu+\frac{1}{2}} f(\sqrt{\sigma}) \quad \begin{matrix} \sigma > 0, & \text{если } \beta \leq 0 \\ \sigma > \beta^2, & \text{если } \beta > 0. \end{matrix} \end{aligned}$$

Чтобы оправдать эти преобразования, надо доказать:

- 1) функция  $F_1(t)$  существует для всех  $t > 0$ ;
- 2) законность изменения порядка интегрирования в повторном интеграле.

Попутно докажем, что  $F_1(t) \in K_a[\alpha_1]$ ,

2°. Сходимость интеграла  $F_1(t)$ . Общий случай сведём к случаю  $\nu = -\frac{1}{2}$ .

- 1)  $\nu = -\frac{1}{2}$ . Тогда

$$F_1(t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} F(x) dx = \int_0^{\infty} \chi(x, t) F(x) dx.$$

Определим  $\chi(0, 0)$  через  $\lim_{t \rightarrow +0} \chi(0, t) = +\infty$ . Поскольку  $\lim_{\substack{t \rightarrow +0 \\ x > 0}} \chi(x, t) = 0$ ,

то естественно положить  $\chi(x, 0) \equiv 0$ , если  $x > 0$ .

В общем случае  $F(x)$  при  $x = 0$  может быть неограниченной. Поэтому  $F_1(t)$  будем рассматривать как несобственный интеграл с особенностями  $x = 0, x = +\infty$ .

- а) Особенность  $x = 0$ . По теореме [4, стр. 135.] имеем:

$$I_{\eta}(t) \equiv \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} F(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\eta_1^2}{4t}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x) dx$$

$$0 < \eta_1 < \bar{\eta}_2 < \eta_2.$$

Поскольку  $0 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\eta_1^2}{4t}} < M$  для всех  $t \geq 0$  и  $F(x) \in E_a[\alpha]$ , то  $|I_{\eta}(t)| < M\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  при  $0 < \eta_1 < \bar{\eta}_2 < \eta_2$  и для всех  $t \geq 0$ ;

- б) Особенность  $x = +\infty$ .

$$I_{\omega}(t) \equiv \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} F(x) dx = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\frac{x^2}{4t} + \sigma x} e^{-\sigma x} F(x) dx$$

$$\sigma > \beta, \omega_2 > \omega_1 > 0.$$

По теореме [4, стр. 135] имеем

$$I_{\omega}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\omega_1^2}{4t} + \sigma \omega_1} \int_{\omega_1}^{\bar{\omega}_2} e^{-\sigma x} F(x) dx (\omega_2 > \bar{\omega}_2 > \omega_1).$$

Действительно: функция  $e^{-\sigma x} F(x)$  интегрируема в промежутке  $[\omega_1, \omega_2]$ ,  $\varphi(x) \equiv e^{-\frac{x^2}{4t} + \sigma x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$  для каждого  $\sigma > \beta$  и  $t = t_0 > 0$  в промежутке  $[\omega_1, \omega_2]$  монотонно убывает, если только  $\omega_1$  и  $\omega_2$  взять достаточно большими. (Если  $t = 0$ , то  $\varphi(x) \equiv 0$ .) Так как  $F(x) \in E_a[\alpha]$ , то при достаточно боль-

шом  $\omega_0 > 0$   $\left| \int_{\omega_1}^{\bar{\omega}_2} e^{-\sigma x} F(x) dx \right| < \varepsilon_1, (\bar{\omega}_2 > \omega_1 > \omega_0)$ .

Кроме того  $0 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\omega_1^2}{4t} + \sigma \omega_1} < M$  для всех  $t \geq 0$  и, следовательно,  $|I_\omega(t)| < M \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ . Оценка верна для  $t \in [0, t_0]$ , где  $t_0 > 0$  произвольное. Из доказательства следует, что интеграл  $F_1(t)$  сходится равномерно относительно  $t$  в каждом промежутке  $[0, t_0]$ .

2)  $\nu$  — произвольное вещественное число. Известно [7, стр. 435.], что  $D_\mu(y) = O\left(e^{-\frac{y^2}{4}} y^\mu\right)$  при  $y \rightarrow +\infty$ ,  $|\mu| < N$ .

Следовательно,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} D_\mu(y) = 0$ . Кроме того,  $D_\mu(y)$  непрерывна в каждом промежутке  $[0, y_0]$ . Поэтому

$$|D_\mu(y)| < C_\mu; y \in [0, +\infty], |\mu| < N, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{и } F_1(t) &< C_{2\nu+2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2t)^{-\nu-1} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{8t}} |F(x)| dx = \\ &= C_{2\nu+1} (2t)^{-\nu-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} x \left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) |F(x)| dx. \end{aligned}$$

Поскольку  $F(x) \in K_a[\alpha]$ , то сходимость интеграла  $F_1(t)$  следует из 1.

3°. Изменение порядка интегрирования в повторном интеграле. Введём в рассмотрение функцию

$$\Phi(x, t; \sigma) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\sigma t} (2t)^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2}{8t}} D_{2\nu+1} \left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) F(x) \quad (\sigma > 0).$$

Докажем сходимость и равенство повторных интегралов

$$\int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} |\Phi| dx, \quad \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} |\Phi| dt.$$

Поскольку  $\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |F_1(t)| dt \leq \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} |\Phi| dx$ , то из сходимости последнего

интеграла следует, что  $F_1(t) \in K_a[\alpha_1]$ . Сходимость и равенство повторных интегралов будут доказаны, если показать, что сходятся интегралы

$$\int_1^{\infty} dx \int_0^{\infty} |\Phi| dt, \quad \int_0^{\infty} dt \int_1^{\infty} |\Phi| dx, \quad \int_0^1 dx \int_0^{\infty} |\Phi| dt, \quad \int_0^{\infty} dt \int_0^1 |\Phi| dx$$

и кроме того

$$\int_1^{\infty} dx \int_0^{\infty} |\Phi| dt = \int_0^{\infty} dt \int_1^{\infty} |\Phi| dx, \quad \int_0^1 dx \int_0^{\infty} |\Phi| dt = \int_0^{\infty} dt \int_0^1 |\Phi| dx.$$

Будем отдельно рассматривать случаи  $2\nu + 1 = 0$ ,  $2\nu + 1 < 0$ ,  $2\nu + 1 > 0$ .

1.  $2r + 1 = 0$ . В этом случае  $\Phi(x, t; \sigma) = e^{-\sigma t} \chi(x, t) F(x)$ .

Сходимость и равенство повторных интегралов  $\int_1^{\infty} dx \int_0^{\infty} |\Phi| dt$ ,  $\int_0^{\infty} dt \int_1^{\infty} |\Phi| dx$  доказываются по теореме 1.1:

а)  $|\Phi| < M$  ( $1 \leq x \leq x_0$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ );

б)  $\int_1^{\infty} |\Phi| dx$  сходится равномерно относительно  $t$  в каждом промежутке  $[0, t_0]$ . Это вытекает из оценки  $|\Phi| \leq \chi(x, t) |F(x)|$ , свойства функции  $F(x)$  ( $F(x) \in K_a[\alpha]$ ) и 2°. 1);

в)  $\int_1^{\infty} |\Phi| dt$  сходится равномерно относительно  $x$  в каждом промежутке  $[1, x_0]$ , так как  $|\Phi| < M e^{-\sigma t}$  ( $1 \leq x \leq x_0$ ,  $t \geq 0$ ,  $\sigma > 0$ );

г)  $\int_1^{\infty} dx \int_0^{\eta} |\Phi| dt$  сходится равномерно относительно  $\eta$  в промежутке  $\eta \geq 0$ . Действительно: воспользуясь равенством [2, стр. 153.]

$\sqrt{p} e^{-x\sqrt{p}} \equiv \chi(x, t) \in K_a[0]$  ( $x \geq 0$ ), имеем:

$$\sigma \int_0^{\eta} |\Phi| dt \leq \sigma \int_0^{\infty} |\Phi| dt = \sqrt{\sigma} e^{-x\sqrt{\sigma}} |F(x)| \quad (\sigma > 0).$$

Но  $\int_1^{\infty} e^{-x\sqrt{\sigma}} |F(x)| dx$  сходится в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ , если  $a \leq 0$  и  $\operatorname{Re} p > a^2$ , если  $a > 0$  ( $F(x) \in K_a[\alpha]$ ).

Сходимость и равенство интегралов  $\int_0^1 dx \int_0^{\infty} |\Phi| dt$ ,  $\int_0^{\infty} dt \int_0^1 |\Phi| dx$  доказываются по теореме 1.2:

Воспользуясь оценкой:

$$|\Phi| \leq |F(x)| \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\sigma t}; \quad x \geq 0, t \geq 0, \sigma > 0$$

получаем неравенство

$$\int_0^1 dx \int_0^{\infty} |\Phi| dt \leq \int_0^1 |F(x)| dx \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} dt$$

Но так как  $F(x) \in E_a[\alpha]$  и  $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \in K_a[0]$ , то последний интеграл сходится.

Сходимость интеграла  $\int_0^{\infty} dt \int_0^1 |\Phi| dt$  доказывается подобным образом.

2.  $2\nu + 1 < 0$ . Так как  $0 < D_\mu(y) < C_\mu e^{-\frac{y^2}{4}}$  ( $\mu < 0$ ,  $y \geq 0$ ) [7, стр. 434.], то

$$|\Phi| < C'_{2\nu+1} t^{-\frac{2\nu+1}{2}} e^{-\sigma t} \chi(x, t) |F(x)|.$$

Поскольку при  $\gamma > 0$  для всех  $t \geq 0$   $t^\gamma < e^{\gamma t}$ , то

$$|\Phi| < C'_{2\nu+1} e^{-t(\sigma-\gamma)} \chi(x, t) |F(x)|,$$

$$\text{где } \gamma = -\frac{2\nu+1}{2} > 0.$$

Теперь можно воспользоваться результатами предыдущего пункта ( $2\nu + 1 = 0$ ). Очевидно, рассматриваемые повторные интегралы сходятся в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \gamma$ , если  $\alpha \leq 0$ , и  $\operatorname{Re} p > \gamma + \alpha^2$ , если  $\alpha > 0$ .

3.  $2\nu + 1 > 0$ . Используя (6), получаем:

$$\begin{aligned} |\Phi| &< C'_{2\nu+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma t} t^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2}{8t}} |F(x)| = \\ &\leq C'_{2\nu+1} e^{-\sigma t} t^{-\frac{2\nu+1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{8t}} \chi\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}} x, t\right) |F(x)|. \\ &(x \geq 0, t \geq 0, \delta > 0, \varepsilon > 0, \varepsilon + \delta = 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Если  $x > 0$ , то  $0 < t^{-\frac{2\nu+1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{8t}} < M$  (для  $t \geq 0$ ) и тогда

$$|\Phi| < C'_{2\nu+1} M \chi\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}} x, t\right) |F(x)| e^{-\sigma t} (x > 0, \delta \in (0, 1))$$

Следовательно, сходимость и равенство интегралов  $\int_1^\infty dx \int_0^\infty |\Phi| dt$ ,  $\int_0^\infty dt \int_1^\infty |\Phi| dx$  вытекает из 1.

Интегралы сходятся в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ , если  $\alpha \leq 0$  и  $\operatorname{Re} p > \frac{2}{5} \alpha^2$ , если  $\alpha > 0$  ( $\frac{2}{5} = a > 2$ ).

Доказательство сходимости и равенства интегралов  $\int_0^1 dx \int_0^\infty |\Phi| dt$ ,  $\int_0^\infty dt \int_0^1 |\Phi| dx$  разобьём на два случая:  $\nu \geq 0$  и  $-\frac{1}{2} < \nu < 0$ .

Если  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$ , то из оценки (7) вытекает:

$$|\Phi| < C''_{2\nu+1} e^{-\sigma t} t^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2}{8t}} |F(x)| \quad (7_1)$$

а)  $-\frac{1}{2} < \nu < 0$ . Доказываемый факт следует из теоремы 1.2., если воспользоваться оценкой  $|\Phi| < C''_{2\nu+1} e^{-\sigma t} t^{-\nu-1} |F(x)|$ , ибо  $t^\mu \in K_a [0]$  ( $\mu > -1$ ).



б)  $\nu \geq 0$ . Докажем отдельно следующие равенства:

$$\int_0^1 dx \int_1^{\infty} |\Phi| dt = \int_1^{\infty} dt \int_0^1 |\Phi| dx, \quad \int_0^1 dx \int_0^1 |\Phi| dt = \int_0^1 dt \int_0^1 |\Phi| dx.$$

Для первого равенства воспользуемся оценкой

$$|\Phi| < C''_{2\nu+1} M e^{-xt} |F(x)| \quad (t \geq 1, x \geq 0), \text{ вытекающей из (7)}_1.$$

Во втором случае из (7)<sub>1</sub> получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} |\Phi| &< C''_{2\nu+1} t^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2}{8t}} |F(x)| = \\ &= C''_{2\nu+1} t^{-(1-\varepsilon')} x^{-2(\nu+\varepsilon')} |F(x)| \cdot \left(\frac{x^2}{t}\right)^{\nu+\varepsilon'} e^{-\frac{x^2}{8t}} < \\ &\quad (0 < \varepsilon' < 1) \\ &< M C''_{2\nu+1} t^{-(1-\varepsilon')} x^{-2(\nu+\varepsilon')} |F(x)|, \end{aligned}$$

поскольку функция  $e(y) \equiv y^\mu e^{-ay}$  ( $\mu \geq 0, a > 0$ ) ограничена для всех  $y \in [0, +\infty)$ . Если учесть сходимость интеграла  $\int_0^1 x^{-2(\nu+\varepsilon')} |F(x)| dx =$

$$= \int_0^1 x^{-2\nu-\varepsilon} |F(x)| dx \quad (\varepsilon = 2\varepsilon'), \text{ то равенство следует по теореме 1.2.}$$

В итоге мы доказали равенство  $\sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} F_1(t) dt = \sigma^{\nu+\frac{1}{2}} f(\sqrt{\sigma})$  для всех

$\sigma > \alpha_1^*$  и для всех вещественных  $\nu$ . Если воспользоваться примечанием 1 § 2<sup>о</sup>, то теорема доказана полностью.

Примечания 2.1.

1. Возьмём  $F(x) \equiv 1 \in E_a[0]$  и  $\nu = 1$ . Тогда  $\int_0^1 x^{-2\nu-\varepsilon} |F(x)| dx =$   
 $= \int_0^1 x^{-2-\nu} dx$  расходится. Покажем, что в этом случае  $F_1(t) \notin K$ :

$$F_1(t) = (2t)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \chi(x, t) H e_3\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} t^{-\frac{3}{2}} \notin K.$$

Следовательно, требование о сходимости интеграла  $\int_0^1 x^{-2\nu-\varepsilon} |F(x)| dx$ ,

по крайней мере частично, является необходимым. (Возможно, что необходимым является только требование о сходимости интеграла

$$\int_0^1 x^{-2\nu} |F(x)| dx).$$

2. Если  $2r + 1 = n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), то сходимость интеграла  $F_1(t)$  следует уже из условия  $F(x) \in K[\beta]$ . Однако, оправдать перестановку интегрирования, опираясь только на этом условии, нам не удалось. В этих исследованиях применялись более сильные теоремы, чем 1.1. и 1.2. ([8]).

4°. Следующие теоремы приводим без доказательства. Кроме тех методов, которые применялись в доказательстве теоремы 2.1., мы использовали теорему свертки, а также правило дифференцирования оригинала.

Теорема 2.2. Пусть  $F(x) \in E_a[\alpha]$  и сходится интеграл  $\int_0^1 |F(x)|x^{-\varepsilon} dx$  ( $\varepsilon > 0$ ). Тогда

1) для всех  $t > 0$  существует

$$F_1(t) \equiv e^{-\frac{\gamma}{a}t} \int_0^{\infty} \psi(\sqrt{ax}, t) F(x) dx \quad (a > 0, \operatorname{Re} \gamma \geq 0);$$

2)  $F_1(t) \in K_a[\alpha_1]$

$$\alpha_1 \leq \alpha_1^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \leq 0 \\ \max\left\{0, \frac{\alpha^2 - \operatorname{Re} \gamma}{a}\right\}, & \text{если } \alpha > 0; \end{cases}$$

3)  $F_1(t) \doteq \frac{p}{\sqrt{ap + \gamma}} f(\sqrt{ap + \gamma})$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \alpha_1^*$ .

Теорема 2.3. Пусть  $F(x) \in E_a[\alpha]$  и сходится интеграл

$$\int_0^1 |F(x)| x^{-2\nu - \varepsilon} dx \quad (\varepsilon > 0).$$

Тогда

1) для всех  $t > 0$  существует

$$F_1(t) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t [2(t-x)]^{-\nu-1} e^{-\frac{bx^2}{8(t-x)}} D_{2\nu+1}\left(\frac{bx}{\sqrt{2(t-x)}}\right) F(x) dx$$

$(b > 0; \nu - \text{вещественное, } |\nu| < N);$

2)  $F_1(t) \in K_a[\alpha_1 \leq \max\{0, \alpha\}]$ ;

3)  $F_1(t) \doteq \frac{p^{\nu+1}}{p + b\sqrt{p}} f(p + b\sqrt{p}) \quad (\operatorname{Re} p > \max\{0, \alpha\}).$

Чтобы упростить формулировку дальнейших теорем, определим функцию  $c(\beta, \alpha, a)$  следующим образом:

$$c(\beta, \alpha, a) = \begin{cases} \max\{\alpha, |a|\}, & \text{если } \beta \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \max\{\alpha, |a|, \sqrt{2\beta^2 - a^2}\}, & \text{если } \beta > \frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$(-\infty < \beta < +\infty, -\infty < \alpha < +\infty, -\infty < a < +\infty).$$

Теорема 2.4. Пусть  $F(x)$  непрерывна для  $x > 0$  и  $F(x) \in E_a[\alpha]$ . Тогда для всех  $t > 0$  существует

$$F_1(t) \equiv F(t) - at \int_0^t \frac{J_1(a \sqrt{t^2 - x^2})}{\sqrt{t^2 - x^2}} F(x) dx \quad (-\infty < a < +\infty);$$

$$F_1(t) \in K_a[\alpha_1 \leq \max\{0, \alpha\}] \text{ и } F_1(t) \div \frac{p^2}{p^2 + a^2} f(\sqrt{p^2 + a^2}) \quad (\operatorname{Re} p > c(\beta, \alpha, a)).$$

Теорема 2.5. Пусть  $F(x) \in E_a[\alpha]$ . Тогда

1) для всех  $t > 0$  существует

$$F_1(t) = a^\nu \int_0^t J_\nu[a(t-y)] dy \int_0^y J_0(a \sqrt{y^2 - x^2}) F(x) dx$$

$$\nu > -1 \quad \begin{cases} a \in (-\infty, +\infty), \text{ если } \nu \geq 0 \\ a \neq 0, \text{ если } 0 > \nu > -1; \end{cases}$$

2)  $F_1(t) \in K_a[\alpha_1 \leq \max\{0, \alpha\}]$ ;

3)  $F_1(t) \div \frac{p(\sqrt{p^2 + a^2} - p)^\nu}{(p^2 + a^2)^{\frac{\nu}{2}}} f(\sqrt{p^2 + a^2}) \quad (\operatorname{Re} p > c(\beta, \alpha, a)).$

Кафедра общей математики

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Эфрос А. М., Данилевский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков, 1937.
- [2]. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.—Л., 1951.
- [3]. Włodarski L. Sur une formule de Efron. *Studia math.*, 1953; 13, № 2.
- [4]. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления т. II. М.—Л., 1951.
- [5]. Bromwich T. J. An introduction to the theory of infinite series. London, 1926.
- [6]. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления т. III. М.—Л., 1949.
- [7]. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., 1951.
- [8]. Gibson G. A. *Advanced calculus*. London, 1931.
- [9]. Doetsch G. *Handbuch der Laplace-Transformation*. Bd. I. Basel, 1950.

#### DAZU EFROSA TRANSFORMACIJAS FORMULU PAMATOJUMI

I. V. Kārklīš

(Kopsāvilkums)

Pieņemsim, ka funkcijas  $F(t)$  ( $t \geq 0$ ) un  $f(p)$  apmierina sakarību (1). Bez tam dotas funkcijas  $q(p)$ ,  $u(p)$ ,  $P(x, t)$ , kas apmierina sakarību (2). Ja apskatāmās funkcijas izpilda zināmus papildus nosacījumus, tad no (1) un (2) seko sakarība (3).

Darbā dots pamatojums dažām literatūrā sastopamām formali izvēstām šāda tipa sakarībām, kurās ieejošās funkcijas  $u(p)$  un  $q(p)$  neapmierina pietiekamos nosacījumus, kas doti A. M. Эфроса, V. A. Диткина un L. Влодарска теоремās.

## О КАНАТНЫХ ФУНКЦИЯХ

Э. Я. РИЕКСТЫНЬШ

Действительный член АН УССР Г. Н. Савин предложил канатными функциями назвать полиномы, которые встречаются при решении динамических задач о шахтных канатах. Среди этих функций находится и многочлен Лягерра  $L_n(t)$ . И. Н. Денисюк при решении одной из таких задач ввел новые канатные функции — полиномы  $L_n$  и  $J_n$  [1], которые при помощи преобразования Лапласа определяются следующим образом:

$$f_n(p, \lambda) = \frac{(p-1)^n (p-\lambda)^n}{(p+1)^{n+1} (p+\lambda)^{n+1}} \subset e^{-t} L_n(2t, \lambda) + e^{-\lambda t} J_n(2t, \lambda) = F_n(t, \lambda) \quad (1)$$

$$\left( \lambda \neq 1, n - \text{целое неотрицательное, } f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt \subset F(t) \right)$$

И. Н. Денисюк нашел разностно-дифференциальное уравнение для полиномов  $L_n$  и  $J_n$ , и отсюда получил рекуррентные соотношения для коэффициентов этих полиномов. При обозначениях

$$L_n(2t, \lambda) = \sum_{k=0}^n a_n^{(k)}(\lambda) \frac{(2t)^k}{k!}, \quad J_n(2t, \lambda) = \sum_{k=0}^n b_n^{(k)}(\lambda) \frac{(2t)^k}{k!} \quad (2)$$

рекуррентные соотношения для  $a_n^{(k)}$  и  $b_n^{(k)}$  имеют следующий вид:

$$2(a_{n+1}^{(k+2)} - a_n^{(k+2)}) - (1-\lambda)a_{n+1}^{(k+1)} + (3+\lambda)a_n^{(k+1)} = (1+\lambda)a_n^{(k)} \quad (3)$$

$$2(b_{n+1}^{(k+2)} - b_n^{(k+2)}) + (1-\lambda)b_{n+1}^{(k+1)} + (3\lambda+1)b_n^{(k+1)} = \lambda(1+\lambda)b_n^{(k)} \quad (4)$$

Отсюда трудно найти явные выражения коэффициентов, но они легко получаются другим путем. Этому посвящена настоящая работа.

1. Сначала заметим, что при  $\lambda \neq 0, 1$  существует соотношение между  $L_n$  и  $J_n$ , поэтому нет надобности рассматривать две различные функции.

Действительно, заменяя в формуле (1)  $p$  на  $\lambda p$ , согласно правилам операционного исчисления имеем

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda p - 1)^n}{(\lambda p + 1)^{n+1}} \frac{(\lambda p - \lambda)^n}{(\lambda p + \lambda)^{n+1}} &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{(p-1)^n}{(p+1)^{n+1}} \frac{\left(p - \frac{1}{\lambda}\right)^n}{\left(p + \frac{1}{\lambda}\right)^{n+1}} \subset \\ &\subset \frac{1}{\lambda} \left[ e^{-\frac{t}{\lambda}} L_n\left(\frac{2t}{\lambda}, \lambda\right) + e^{-t} J_n\left(\frac{2t}{\lambda}, \lambda\right) \right] \end{aligned}$$

Но, с другой стороны, по формуле (1) оригинал имеет также вид

$$\frac{1}{\lambda^2} \left[ e^{-t} L_n\left(2t, \frac{1}{\lambda}\right) + e^{-\frac{t}{\lambda}} J_n\left(2t, \frac{1}{\lambda}\right) \right]$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при показательных функциях, получаем

$$L_n(2t, \mu) = \frac{1}{\mu} J_n\left(2\mu t, \frac{1}{\mu}\right) \quad (5)$$

Для коэффициентов это дает соотношение

$$a_n^{(k)}(\lambda) = \lambda^{k-1} b_n^{(k)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (6)$$

Легко проверить, что при этом соотношении из формулы (3) получается формула (4).

При  $\lambda=0$  имеем

$$f_n(p, 0) = \frac{1}{p} \frac{(p-1)^n}{(p+1)^{n+1}}$$

Оригинал этой функции в силу формулы

$$\frac{(p-1)^n}{(p+1)^{n+1}} \subset e^{-t} L_n(2t) \quad (7)$$

имеет вид

$$F_n(t, 0) = \int_0^t e^{-\tau} L_n(2\tau) d\tau$$

Но имеет место формула [2]

$$\int_0^t e^{-x} L_n(\alpha x) dx = e^{-t} [L_{n-1}(t, \alpha) - L_n(\alpha t)] + (1-\alpha)^n \quad (8)$$

где

$$L_n(t, \alpha) = \sum_{k=0}^n N_{nk}(\alpha) \frac{t^k}{k!} \quad (n \geq 0), \quad L_{-1}(t, \alpha) = 0$$

$$N_{nk}(\alpha) = \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} \alpha^\nu - (1-\alpha)^{n+1} = - \sum_{\nu=k+1}^{n+1} (-1)^\nu \binom{n+1}{\nu} \alpha^\nu$$

Таким образом имеем

$$L_n(2t, 0) = L_{n-1}(t, 2) - L_n(2t) \quad (9)$$

$$J_n(2t, 0) = (-1)^n \quad (10)$$

\* Заметим, что в работах И. Н. Денисюка, например [3], встречается обозначение  $L_n(2t, 0) = -M_n(2t)$ .

При  $\lambda=1$  имеем

$$f_n(p, 1) = \frac{(p-1)^{2n}}{(p+1)^{2n+2}} = \frac{1}{2} \frac{(p-1)^{2n}}{(p+1)^{2n+1}} - \frac{1}{2} \frac{(p-1)^{2n+1}}{(p+1)^{2n+2}}$$

В силу формулы (7), получаем

$$F_n(t, 1) = \frac{1}{2} e^{-t} [L_{2n}(2t) - L_{2n+1}(2t)] \quad (11)$$

Можно еще отметить частный случай  $\lambda = -1$ . Тогда

$$f_n(p, -1) = \frac{1}{(p+1)(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}$$

$$L_n(2t, -1) = -\frac{1}{2}, \quad J_n(2t, -1) = \frac{1}{2} \quad (12)$$

2. В силу соотношения (5) ниже будем искать только  $L_n(2t, \lambda)$  ( $\lambda \neq 0, \pm 1$ ). Простейшим путем для этого является разложение изображения на простейшие дроби. Имея в виду формулу

$$\frac{1}{(p + \lambda)^{k+1}} \subset e^{-\lambda t} \frac{t^k}{k!}$$

можно заключить, что в разложении

$$\frac{(p-1)^n (p-\lambda)^n}{(p+1)^{n+1} (p+\lambda)^{n+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{a_n^{(k)} 2^k}{(p+1)^{k+1}} + \sum_{k=0}^n \frac{b_n^{(k)} 2^k}{(p+\lambda)^{k+1}}$$

$a_n^{(k)}$  и  $b_n^{(k)}$  имеют прежние значения. С другой стороны,

$$2^k b_n^{(k)} = \frac{1}{(n-k)!} \frac{d^{n-k}}{dp^{n-k}} \left[ \frac{(p-1)^n (p-\lambda)^n}{(p+1)^{n+1}} \right]_{p=-\lambda}$$

и применяя формулу Лейбница, отсюда получаем

$$2^k b_n^{(k)} = \frac{(-1)^{n+k}}{(1-\lambda)^{n+1}} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n+i}{i} \frac{1}{(1-\lambda)^i} \sum_{j=0}^{n-k-i} \binom{n}{j} \binom{n}{k+i+j} (2\lambda)^{n-j} (1+\lambda)^{k+i+j}$$

После перегруппировки  $b_n^{(k)}$  можно представить в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} b_n^{(k)} &= \frac{(-\lambda)^k}{1-\lambda} \left( \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right)^n \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n+i}{i} \left( \frac{2\lambda}{1-\lambda} \right)^i \sum_{j=0}^{n-k-i} \binom{n}{j} \binom{n}{k+i+j} \left( \frac{2\lambda}{1+\lambda} \right)^j = \\ &= \frac{(-\lambda)^k}{1-\lambda} \left( \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right)^n \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} \left( \frac{2\lambda}{1+\lambda} \right)^i \sum_{j=0}^{n-k-i} \binom{n}{k+i+j} \binom{n+j}{j} \left( \frac{2\lambda}{1-\lambda} \right)^j = \\ &= \frac{(-\lambda)^k}{1-\lambda} \left( \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right)^n \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} \left( \frac{2\lambda}{1+\lambda} \right)^{n-k-i} \sum_{j=0}^{n-k-i} \binom{n}{k+i+j} \binom{n+j}{j} \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^j = \\ &= \frac{(-\lambda)^k}{1-\lambda} \left( \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right)^n \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n+i}{i} \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^i \sum_{j=0}^{n-k-i} \binom{n}{k+i+j} \binom{n}{j} \left( \frac{2\lambda}{1+\lambda} \right)^{n-k-j} \end{aligned} \tag{13}$$

3. Найдем еще разложение функции  $L_n$  по обобщенным многочленам Лягерра. Рассматривая  $f_n(p, \lambda)$  как произведение двух изображений, в силу формулы (7) при помощи свертки имеем

$$F_n(t, \lambda) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} L_n(2\lambda t - 2\lambda\tau) e^{-\tau} L_n(2\tau) d\tau \tag{14}$$

Применяя формулу [4]

$$\frac{d^k}{dx^k} L_n(x) = (-1)^k L_{n-k}^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{n-k-j} \frac{(-x)^j}{j!} \tag{15}$$

найдем по формуле Тейлора

$$L_n(2\lambda t - 2\lambda\tau) = \sum_{k=0}^n L_{n-k}^{(k)}(2\lambda t) \frac{\lambda^k}{k!} (2\tau)^k$$

Следовательно,

$$F_n(t, \lambda) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n L_{n-k}^{(k)}(2\lambda t) \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^t e^{-\tau(1-\lambda)} (2\tau)^k L_n(2\tau) d\tau$$

Теперь разложим  $(2t)^k L_n(2t)$  по полиномам Лягерра. Согласно рекуррентной формуле для этих полиномов [4], справедливо следующее соотношение:

$$x^k L_n(x) = (-1)^k k! \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i c_{ni}^{(k)} L_{n-k+i}(x) \quad (16)$$

Коэффициенты  $c_{ni}^{(k)}$  определяются ниже. Применяя формулу (8), имеем

$$\begin{aligned} F_n(t, \lambda) &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n L_{n-k}^{(k)}(2\lambda t) (-\lambda)^k \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i c_{ni}^{(k)} \int_0^t e^{-\tau(1-\lambda)} L_{n-k+i}(2\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{1-\lambda} e^{-t} \sum_{k=0}^n (-\lambda)^k L_{n-k}^{(k)}(2\lambda t) \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i c_{ni}^{(k)} \left[ L_{n-k+i-1}\left(t-\lambda t, \frac{2}{1-\lambda}\right) - \right. \\ &\quad \left. - L_{n-k+i}(2t) \right] + \frac{1}{1-\lambda} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n (-\lambda)^k L_{n-k}^{(k)}(2\lambda t) \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i c_{ni}^{(k)} \left( \frac{1+\lambda}{\lambda-1} \right)^{n-k+i} \end{aligned}$$

Отсюда при обозначении

$$\beta_{nk}(\lambda) = \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i c_{ni}^{(k)} \left( \frac{1+\lambda}{\lambda-1} \right)^{n-k+i}$$

получаем искомое разложение:

$$J_n(2t, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{k=0}^n (-\lambda)^k L_{n-k}^{(k)}(2\lambda t) \beta_{nk}(\lambda) \quad (17)$$

Остается определить  $c_{ni}^{(k)}$ . Для этого используем опять преобразование Лапласа. Имеем

$$L_n(x) \supset \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^n \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x^k L_n(x) &\supset (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[ \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^n \right] = \\ &= (-1)^k k! \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k} \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^{n-k+i} \left( 1 - 1 + \frac{1}{p} \right)^k = \\ &= (-1)^k k! \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k} \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^{n-k+i+m} = \\ &= (-1)^k k! \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^{n-k+i} \sum_{m=0}^i \binom{n+m}{k} \binom{k}{m} \binom{k}{i-m} \end{aligned}$$

Отсюда в силу формул (16) и (18) получаем

$$\begin{aligned} c_{ni}^{(k)} &= \sum_{m=0}^i \binom{n+m}{k} \binom{k}{m} \binom{k}{i-m} \quad k \leq n \\ &\left( \binom{k}{j} = 0 \text{ при } k < j \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Ввиду того, что  $c_{ni}^{(k)}$  не зависят от  $\lambda$ , они могут быть вычислены раз навсегда и формула (16) может быть полезна также в других случаях. Но выражение  $\beta_{nk}$  можно еще упростить. Для этого подставим

$$\frac{1+\lambda}{\lambda-1} = 1 + \frac{2}{\lambda-1} = 1 + z$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta_{nk} &= \left(\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-k} \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i c_{ni}^{(k)} (1+z)^i = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-k} \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i c_{ni}^{(k)} \sum_{s=0}^i \binom{i}{s} z^s = \\ &= \left(\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-k} \sum_{i=0}^{2k} z^i \sum_{s=i}^{2k} \binom{s}{i} (-1)^s c_{ns}^{(k)} = \\ &= \left(\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-k} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} z^i \left[ \sum_{m=0}^i \binom{n+m}{k} \binom{k}{m} \sum_{s=0}^{k-i+m} (-1)^{i+s} \binom{k}{i-m+s} \binom{i+s}{i} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{m=i+1}^k \binom{n+m}{k} \binom{k}{m} \sum_{s=0}^k (-1)^{m+s} \binom{m+s}{i} \binom{k}{s} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=k}^{2k} z^i \sum_{m=i-k}^k \binom{n+m}{k} \binom{k}{m} \sum_{s=0}^{k-i+m} (-1)^{i+s} \binom{i+s}{i} \binom{k}{i+s-m} \right\} \end{aligned}$$

Имеем

$$\frac{1}{i} \frac{d^i}{dx^i} [x^m (1-x)^k]_{x=1} = \begin{cases} \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{m+s}{i} \binom{k}{s} = 0 & (k, m > i) \\ \sum_{s=0}^{k-i+m} (-1)^{i+s-m} \binom{k}{i-m+s} \binom{i+s}{i} = 0 & (k > i, m \leq i) \\ \sum_{s=0}^{k-i+m} (-1)^{i+s-m} \binom{k}{i-m+s} \binom{i+s}{i} = \\ = (-1)^k \binom{m}{i-k} & (m, k \leq i) \\ & (m+k \geq i) \end{cases}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \beta_{nk} &= \left(\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-k} \sum_{i=k}^{2k} z^i \sum_{m=i-k}^k (-1)^{m+k} \binom{n+m}{k} \binom{k}{m} \binom{m}{i-k} = \\ &= (-1)^k \left(\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-k} \sum_{r=0}^k z^{k+r} \sum_{m=r}^k (-1)^m \binom{n+m}{k} \binom{k}{m} \binom{m}{r} \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{m=r}^k (-1)^m \binom{n+m}{k} \binom{k}{m} \binom{m}{r} &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left[ x^{n+r} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} (1-x)^k \right]_{x=1} = \\ &= (-1)^k \binom{n+r}{r} \binom{k}{r} \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\beta_{nk} = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-k} \sum_{r=0}^k z^{k+r} \binom{n+r}{r} \binom{k}{r} = \left(\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\right)^n \left(\frac{2}{1+\lambda}\right)^k \sum_{r=0}^k \binom{n+r}{r} \binom{k}{r} \left(\frac{2}{\lambda-1}\right)^r \quad (20)$$

Это выражение для  $\beta_{nk}$  надо подставить в формулу (17). Если после этого пользуясь формулой (15) собрать члены с одинаковыми степенями  $t$ , то получим новое представление для  $b_n^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} b_n^{(k)}(\lambda) &= \frac{(-\lambda)^k}{1-\lambda} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k+i} \beta_{ni}(\lambda) \lambda^i = \\ &= \frac{(-\lambda)^k}{1-\lambda} \left(\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\right)^n \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)^i \binom{n}{k+i} \sum_{r=0}^i \binom{n+r}{r} \binom{i}{r} \left(\frac{2}{\lambda-1}\right)^r \quad (21) \end{aligned}$$



Из формулы (17) можно получить еще другое представление для  $L_n$ . Если использовать формулу [2]

$$La_n(t, \alpha) = - \sum_{k=0}^n (-\alpha)^{k+1} L_{n-k}^{(k+1)}(\alpha t)$$

то после перегруппировок найдем

$$L_n(2t, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda} \left( \frac{1+\lambda}{\lambda-1} \right)^n \left\{ L_n(2\lambda t) - \sum_{k=0}^n \left( \frac{2}{\lambda-1} \right)^k \binom{n+k}{k} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dy^k} \left[ La_{n-1} \left( \frac{t(1+\lambda)}{y}, \frac{2\lambda y}{1+\lambda} \right) \right]_{y=1} \right\} \quad (22)$$

Таким образом, полученные формулы (13) и (21) дают выражения для коэффициентов  $b_n^{(k)}(\lambda)$ , а формулы (17) и (22) представления полинома  $L_n$  через другие, более простые полиномы.

*Кафедра общей математики*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1]. И. Н. Денисюк. Об одном обобщении полиномов Лягерра и связанной с ним задаче Коши для уравнения в частных конечных разностях. Украинский математический журнал, 1954, Т. 6, № 2, 245—256.
- [2]. Э. Я. Риекстыньш. Об одном многочлене, применимом к решению телеграфных уравнений. Прикладная математика и механика, 1954, Т. 18, вып. 6, 738—744.
- [3]. И. Н. Денисюк. К расчету тормозного каната парашюта с канатными проводниками. Сборник научных трудов Московского горного института им. Сталина, 1952, Т. 10, 29—59.
- [4]. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, М., 1953, 111—112.

#### PAR VIRVJU FUNKCIJĀM

*E. Riekstiņš*

(Kopsavilkums)

I. N. Deņisjuks savā darbā [1] apskata specialus polinomus, kas sastopami, pētot šachtu virvju svārstības, bet nedod minētiem polinomiem izteiksmi atklātā veidā. Šajā darbā tas izdarīts ar vairākām metodēm, un meklētos polinomus dod formulas (2), (13), (21), kā arī (17) vai (22).

## КОМБИНИРОВАННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

К. А. ШТЕЙНС

В настоящей статье операция Делоне применяется к вычислению возмущений в случае острой соизмеримости средних суточных движений астероида с Юпитером. Показывается, что исключение короткопериодических членов (§ 1) возможно, а исключение долгопериодических (§ 3) и вековых членов (§4) неэффективно. На основе возможности исключения короткопериодических членов предлагается новый вариант определения полных возмущений (§ 5).

### § 1

Под «операцией Делоне» [1] понимается приём составления дифференциальных уравнений, определяющих зависимость от времени тех произвольных постоянных, которые вошли в решение уравнений, построенных для одного периодического члена и непериодической части возмущающей функции.

Рассмотрим теперь исключение короткопериодического члена  $A \cos D^*$  с непериодической частью —  $B$  пертурбационной функции  $W$ . В этом случае возможно установить, какого порядка будет каждый член относительно массы возмущающей планеты  $m'$ . Интегрируя вспомогательную систему методом последовательных приближений в первом приближении имеем

$$a = a_0 + m'f_a(a_0, e_0, i_0) \cos D_0^* \quad (1)$$

$$e = e_0 + m'f_e(a_0, e_0, i_0) \cos D_0^* \quad (2)$$

$$i = i_0 + m'f_i(a_0, e_0, i_0) \cos D_0^* \quad (3)$$

$$D^* = D_0^* + m'f_D(a_0, e_0, i_0) \sin D_0^*$$

$$\omega = \omega_{00} + \omega_0(t+c) + m'f_\omega(a_0, e_0, i_0) \sin D_0^* \quad (4)$$

$$\Omega = \Omega_{00} + \Omega_0(t+c) + m'f_\Omega(a_0, e_0, i_0) \sin D_0^* \quad (5)$$

$$D^* = i_1 M + i_2 \omega + i_3 \Omega + i_4 n' t + q \quad (6)$$

где  $a, e, i, M, \omega, \Omega$  соответственно большая полуось, эксцентриситет, наклонность, средняя аномалия, долгота перигелия и долгота восходящего узла;  $n'$  — среднее суточное движение Юпитера,  $q$  — некоторая постоянная,  $t$  — время,  $i_1, i_2, i_3, i_4$  целые числа;  $a_0, e_0, i_0, \omega_{00}, \Omega_{00}, c$  постоянные интегрирования,  $f_a, f_e, \dots$  — малые величины нулевого порядка,  $D_0^*$  такая же линейная функция от  $\omega^0 = \omega_{00} + \omega_0(t+c), \dots$  как  $D^*$  от  $\omega, \dots$ ;  $\omega_0, \Omega_0$  — некоторые определенные функции постоянных интегрирования  $c, a_0, e_0, i_0$ .

Переходя к новым каноническим переменным Делоне будем иметь с точностью до малых величин первого порядка включительно

$$L^{\circ} = k \sqrt{a_0} \quad (7)$$

$$G^{\circ} = k \sqrt{a_0 (1 - e_0^2)} \quad (8)$$

$$H^{\circ} = k \sqrt{a_0 (1 - e_0^2)} \cos i_0 \quad (9)$$

$$M^0 = i_1^{-1} [D_{00}^{\circ}(t + c) - i_2 \omega^0 - i_3 \Omega^0 - i_4 n' t - q] \quad (10)$$

$$\omega^0 = \omega_{00} + \omega_0 (t + c) \quad (11)$$

$$\Omega^0 = \Omega_{00} + \Omega_0 (t + c) \quad (12)$$

где  $D_{00}^{\circ}$  некоторая функция постоянных интегрирования.

Выразим теперь функцию Гамильтона системы дифференциальных уравнений, к которой окончательно переходим после выполнения операции Делоне, то есть функцию

$$W_2 = C + i_4 n' L^{\circ}, \quad (13)$$

где

$$W_2 = W - (-B - A \cos D^*)$$

через новые переменные, ограничиваясь при этом точностью до малых величин первого порядка включительно. Для этого подставляем в (13) выражения (1)–(12) и  $C$  выражаем при помощи интеграла Якоби. После простых преобразований новая функция Гамильтона примет следующий вид

$$W_2(a_0, e_0, i_0, M^0, \omega^0, \Omega^0) = B(a_0, e_0, i_0). \quad (14)$$

Все периодические члены находятся в функции  $W_2(a_0, e_0, \dots, \Omega^0)$ , которая получается из  $W_2(a, e, \dots, \Omega)$  заменой  $a, e, i, M, \omega, \Omega$  на  $a_0, e_0, i_0, M^0, \omega^0, \Omega^0$  соответственно. Так как  $W_2$  есть та часть возмущающей функции, в которой отсутствуют члены, входящие в функцию Гамильтона вспомогательной системы, то очевидно, что тригонометрический член с аргументом  $D_0^{\circ}$  не содержится в составе членов первого порядка относительно массы возмущающей планеты. Так как мы не выписывали членов высшего порядка, то упомянутый член оказался передвинутым в состав членов высших порядков новой возмущающей функции, ибо в составе членов второго порядка имеются, вообще говоря, члены со всеми возможными аргументами.

Итак в применении к коротко-периодическому члену операция Делоне, действительно, дает возможность исключить соответствующие члены из совокупности членов низшего порядка путем передвижения его в совокупность членов высшего порядка.

## § 2

Мы не имеем права утверждать, что долгопериодические и вековые неравенства являются малыми величинами первого порядка относительно возмущающей массы  $m'$ . Учитывая это, мы будем здесь поступать иначе. Именно, мы примем, что решение вспомогательной системы дифференциальных уравнений для схемы Делоне, соответствующей рассматриваемому долгопериодическому или вековому тригонометрическому члену, получается по формулам (1)–(6) только с той разницей, что величина  $m'$  заменена на  $k_a, k_e, \dots, k_{\Omega}$  соответственно. Величины  $k_a, k_e, \dots, k_{\Omega}$

выбраны так, чтобы величины  $f_a, f_e, \dots$  были бы величинами нулевого порядка малости. Если бы оказалось, что  $k_a \approx k_e \approx \dots \approx m'$ , то мы получили бы случай, рассмотренный в предыдущем параграфе. Если величины  $k_a, k_e, \dots$  можно считать достаточно малыми, то при помощи аналогичных рассуждений мы можем оправдать выводы настоящего параграфа, заменяя, в наших рассуждениях величину  $m'$  величиной « $k$ ». В связи с этим возникает идея обобщенного представления об операции Делоне, как об операции, которая передвигает члены, которые учитывались в вспомогательной системе, из состава членов низшего порядка малости относительно некоторых величин « $k$ », считаемых за малые первого порядка, в состав членов более высокого порядка малости относительно тех же малых величин.

Целью настоящего параграфа является проверка того, что если  $k_e$  принимают значения примерно равные  $e_0$ , то даже и такое обобщенное понимание операции Делоне не дает возможности ее успешного применения.

Для доказательства этого достаточно следующее рассуждение. Пусть мы хотим «исключить» из возмущающей функции долгопериодический член  $A(a, i)e' \cos(M - 2M' + \omega + \Omega - \omega') = Ae' \cos D^*$ . Значок «'» означает, что соответствующие величины относятся к возмущающей планете. Пусть решение вспомогательной системы таково, что  $k_e = e_0$ . Тогда мы имеем

$$e = e_0 + e_0 f_e \cos D_0^{\ddot{}} \quad (15)$$

Остальные « $k$ », ради простоты выкладок, приравняем нулю. В оставшейся части возмущающей функции  $W_2$  имеется член

$$B(a, i)e \cos(D^* - \omega' + \Omega + \omega). \quad (16)$$

По правилам операции Делоне в функции  $W_2$  старые переменные  $a, e, \dots$  должны быть заменены их выражениями через новые переменные  $a_0, e_0, \dots$ . Далее таким образом полученная функция должна быть разложена в ряд Тейлора по степеням  $a - a_0, e - e_0, \dots$ . Это порождает группы членов различных порядков. В рассматриваемом здесь простом случае разлагать в ряд Тейлора не надо и возможно ограничиться подстановкой выражения (15) в (16). Отсюда видно, что члены низшего порядка сводятся к члену

$$Be_0 \cos(D_0^{\ddot{}} - \omega' + \Omega^0 + \omega^0), \quad (17)$$

а члены высшего порядка к членам

$$\frac{1}{2} B f_e e_0 \cos(2 D_0^{\ddot{}} - \omega' + \Omega^0 + \omega^0) + \frac{1}{2} B f_e e_0 \cos(\omega' - \Omega^0 - \omega^0). \quad (18)$$

Поскольку порядок малости в нашем случае определяется степенью  $e_0$  (входящего множителем), постольку здесь все группы членов (17) и (18) оказываются имеющими одинаковый порядок малости.

Итак в рассматриваемом случае в итоге применения операции Делоне из члена  $B(a, i)e \cos(D^* - \omega' + \Omega + \omega)$ , который имеет такой же порядок малости, как и «исключаемый» член, в возмущающей функции возникли три члена такого же порядка малости. Тем самым в случае  $k_e = e_0$  операция Делоне, даже будучи рассматриваемой в указанном обобщенном смысле, оказывается несостоятельной. Действительно, в результате этой операции мы не только не добились уменьшения числа членов данного порядка, но — больше того — дополнили эти члены низшего порядка еще несколькими новыми членами.

## § 3

Чтобы показать несостоятельность применения операции Делоне к исключительно долгопериодических членов, согласно с результатами предыдущего параграфа, следует показать, что у долгопериодических неравенств  $k_e \approx e_0$ . Мы не будем выводить для  $e$  формулу в виде ряда Фурье, а удовлетворимся приближенной оценкой величины  $k_e$ . Именно, вместо величины  $k_e$  мы возьмем максимальную амплитуду изменения  $e$  за период изменения этой величины.

В случае точной соизмеримости ( $n - r^*q^{*-1}n' = 0$ ) удовлетворимся рассмотрением приближенной формулы, выведенной нами для точной соизмеримости и приводимой в статье, помещенной в настоящем сборнике [2]. Из этой формулы непосредственно видна величина амплитуды изменения  $e$ . Удовлетворяясь малыми величинами низшего порядка относительно  $e_0$  и подставляя численные данные для главного члена планет Гекубы, получим, что амплитуда изменения эксцентриситета есть

$$\frac{0,02_2}{\sqrt{e_0}} \sqrt{1 - \cos D_0^*} \quad (19)$$

Легко сообразить, что эта величина на практике часто может принимать значения, близкие к  $e_0$ . Действительно уже при  $e_0 \approx 0,1$  это выражение принимает значение

$$0,07 \sqrt{1 - \cos D_0^*},$$

которое при  $D_0^* > 90^\circ$  близко к 0.1.

Полученное значение  $k_e$  в согласии с признаком невозможности применения операции Делоне показывает, что эта операция неприменима к исключительно долгопериодических членов, так как при немного лучших условиях (т. е. при меньших величинах этих амплитуд) «исключение» будет весьма неэффективным. То обстоятельство, что мы оценили амплитуду точной соизмеримости несущественно, ибо для острой соизмеримости под радикалом имеется еще добавочный положительный член, вследствие чего амплитуда только увеличивается.

## § 4

Этот параграф мы посвящаем определению  $k_e$  в случае «исключения» главного векового тригонометрического члена с аргументом  $\Omega + \omega - \omega'$  при помощи операции Делоне. Так как мы желаем установить только порядок величины  $k_e$ , то мы удовлетворимся величинами второго порядка относительно эксцентриситета.

Во вспомогательной задаче мы здесь будем учитывать всю неперIODическую часть функции Гамильтона и исключаемый тригонометрический член.

$$\begin{aligned} -B - A \cos D^* = & \frac{k^2}{2a} + \frac{k^2 m'}{a'} \left[ \frac{1}{2} c_1^{(0)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) A_1^{(0)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} e e' A_1^{(1)} \cos(\Omega + \omega - \omega') \right] \quad (20) \end{aligned}$$

где  $c_1^{(0)}$ ,  $A_1^{(0)}$ ,  $A_1^{(1)}$  коэффициенты Лапласа,  $a'$  полуось орбиты Юпитера,  $k$  постоянная притяжения.

Соответствующая система дифференциальных уравнений имеет два интеграла, а именно интеграл

$$a = a_0 \quad (21)$$

и интеграл Якоби

$$\frac{a'}{k^2 m'} \frac{k^2}{2a} + \left[ \frac{1}{2} c_1^{(0)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) A_1^{(0)} - \frac{1}{4} e e' A_1^{(1)} \cos(\Omega + \omega - \omega') \right] = C \frac{a'}{k^2 m'} \quad (22)$$

При помощи этих двух интегралов мы выразим величину  $D^* = \Omega + \omega - \omega'$  через  $e$  и подставим таким образом полученное значение в дифференциальное уравнение для  $e$ . Введем обозначения

$$C \frac{a'}{k^2 m'} - \frac{a' 1}{m' 2a_0} - \left( \frac{1}{2} c_1^{(0)} + \frac{1}{8} e'^2 A_1^{(0)} \right) = D_0, \quad (23)$$

$$e^2 = z, \quad (24)$$

$$\frac{1}{8} A_1^{(0)} z - \frac{D_0 A_1^{(0)} + \frac{1}{4} e'^2 A_1^{(1)2}}{A_1^{(0)}} = u, \quad (25)$$

$$\left( \frac{D_0 A_1^{(0)} + \frac{1}{4} e'^2 A_1^{(1)2}}{A_1^{(0)}} \right)^2 - D_0^2 = K^2 \quad (26)$$

В формулах (23)–(26) в функциях  $c_1^{(0)}$ ,  $A_1^{(0)}$ ,  $A_1^{(1)}$  величина  $a$  заменена ее постоянным значением  $a_0$ .

При этих обозначениях дифференциальное уравнение для  $e$  после указанной подстановки примет следующий вид

$$\frac{dz}{V(1-z)(K^2 - u^2)} = - \frac{2km'}{V a_0 a'} dt \quad (27)$$

В первом приближении при интегрировании уравнения (27) заменим  $\sqrt{1-z}$  через  $\sqrt{1-e_0^2}$ . Дальнейшими приближениями заниматься не будем. Тогда после интегрирования получим

$$u = K \cos \frac{km' A_1^{(0)} \sqrt{1-e_0^2}}{4 \sqrt{a_0 a'}} (t + c) \quad (28)$$

Обозначая нетригонометрическую часть через  $e_0$ , где

$$e_0^2 = \frac{8D_0 A_1^{(0)} + 2e'^2 A_1^{(1)2}}{A_1^{(0)2}} \quad (29)$$

получим для  $e$  следующую формулу

$$e^2 = e_0^2 + \frac{2e' A_1^{(1)}}{A_1^{(0)}} \sqrt{e_0^2 - e'^2 \frac{A_1^{(1)2}}{A_1^{(0)2}}} \cos \frac{km' A_1^{(0)} \sqrt{1-e_0^2}}{4 \sqrt{a_0 a'}} (t + c) \quad (30)$$

Подставляя численные значения для планет типа Гекубы, получим

$$e^2 = e_0^2 + 0,064 \sqrt{e_0^2 - (0,032)^2} \cos 0,7 \cdot 10^{-4} (t + c) \quad (31)$$

Отсюда можно видеть, что исключение векового члена также мало эффективно.

## § 5.

Из § 1 непосредственно видны следующие свойства операции Делоне:

1. Свойство повторимости операции Делоне. «Исключение» короткопериодических членов не зависит от того, было ли перед этим выполнено некоторое исключение других короткопериодических членов или нет.

2. Свойство аддитивности неравенств, соответствующих отдельным членам возмущающей функции.

При исключении тригонометрических членов эти члены устраняются из состава членов возмущающей функции первого порядка, причем полные возмущения получаются, как сумма неравенств, определенных в отдельных упрощенных задачах и в последней задаче.

3. Свойства интегрируемости.

Отдельные упрощенные системы дифференциальных уравнений для короткопериодических членов могут быть проинтегрированы методом последовательных приближений в первом приближении.

Все указанные свойства имеют место с точностью до малых величин первого порядка относительно возмущающей массы и дают нам следующую теорему:

Чтобы получить полные возмущения с точностью до малых величин первого порядка относительно массы возмущающей планеты, следует проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, в возмущающей функции которой отброшены все короткопериодические члены, и к таким образом полученным неравенствам прибавить короткопериодические неравенства, полученные методом последовательных приближений в первом приближении.

Согласно этой теореме следует интегрировать систему дифференциальных уравнений, возмущающая функция которой состоит из вековых и долгопериодических членов. Между этими членами, кроме членов типа  $(q^* : r^*)$ , будут также члены, у которых отношения коэффициентов средних аномалий  $M$  и  $M'$  только приблизительно равняются  $q^* : r^*$ . В случае планет типа Гекубы (1 : 2) такими членами, например, могут оказаться члены типа 4 : 9. Вообще говоря, если соизмеримость выражается отношением  $q^* : r^*$  ( $q^*, r^*$  малые числа), то может оказаться, что долгопериодическими членами являются также члены типа  $(jq^* + s) : (jr^* + p)$  при условии, что  $|j| \gg 1$ , а  $s$  и  $p$  малые целые числа. Между коэффициентами  $(jq^* + s) : (jr^* + p)$  и показателями степеней  $h, h', 2f$ , у множителей  $e, e', \sigma = \sin \frac{i}{2}$  существует связь

$$h + h' + 2f \geq |j(q^* + r^*) + s + p| \quad (32)$$

Следовательно, поскольку  $j < q^* + r^*$  большое число сравнительно с  $s + p$ , постольку соответствующие члены имеют очень малый множитель  $e^h e^{h'} \sigma^{2f}$  и эти члены можно отбросить. Таким образом, мы пришли к заключению, что в итоге применения первых двух этапов комбинированного метода мы приходим к системе дифференциальных уравнений, пертурбационная функция которой есть пертурбационная функция однократно осредненной эллиптической ограниченной задачи Делоне-Хилла.

Завершающий этап определения полных возмущений состоит в интегрировании системы дифференциальных уравнений однократно осредненной задачи Делоне-Хилла. В этом параграфе мы рассмотрим интеграцию этой системы *методом численного интегрирования*. Методом численной интеграции возможно интегрировать, вообще говоря, любую систему дифференциальных уравнений. Систему дифференциальных уравнений

оскулирующих элементов эллиптической ограниченной задачи трех точек для малых планет весьма часто интегрируют методом численной интеграции. В этом случае, выбирая интервал табуляции примерно 40 дней, можно отбросить в формулах численной интеграции первые, вторые и т. д. разности и, таким образом, свести интегрирование к простому суммированию. Получаются довольно точные результаты ( $\pm 0^{\circ}.01$ ) при сравнительно не трудных вычислениях, ибо правые части дифференциальных уравнений возможно табулировать с постоянными значениями  $a, e, \dots$  для сравнительно длинных промежутков времени. Посмотрим, каковы будут преимущества и недостатки, если мы вместо интегрирования системы дифференциальных уравнений неосредненной задачи займемся интеграцией системы дифференциальных уравнений однократно осредненной эллиптической задачи Делоне-Хилла.

Численная интеграция системы дифференциальных уравнений однократно осредненной задачи Делоне-Хилла дает следующие преимущества.

1. Интервал табуляции можно выбрать сравнительно большим, ибо аргументы тригонометрических функций долгопериодических и вековых тригонометрических членов меняются медленно.

2. В связи с тем, что интервал табуляции можно выбрать сравнительно большим, учет изменений  $a, e, \dots$  при каждой табуляции правых частей дифференциальных уравнений также не представляет особой трудности.

Второй пункт имеет большое принципиальное значение. Действительно, при интеграции системы дифференциальных уравнений оскулирующих элементов неосредненной задачи, табуляция правых частей дифференциальных уравнений проводится с неизменными значениями  $a, e, \dots$  при сравнительно длинных промежутках времени. Каждый такой этап соответствует при аналитическом интегрировании методом последовательных приближений первому приближению. Переход к исправленным значениям элементов при численной интеграции системы дифференциальных уравнений оскулирующих элементов неосредненной задачи носит весьма случайный характер. Следовательно, с точки зрения учета долгопериодических возмущений этот метод неудовлетворителен. Второй пункт показывает, что этот недостаток отсутствует при интеграции системы дифференциальных уравнений однократно осредненной эллиптической ограниченной задачи Делоне-Хилла.

Численная интеграция системы дифференциальных уравнений однократно осредненной задачи имеет следующий недостаток: правые части дифференциальных уравнений однократно осредненной эллиптической ограниченной задачи Делоне-Хилла даются в виде бесконечных рядов, в то время, как правые части дифференциальных уравнений неосредненной задачи имеют несколько членов. Следовательно, табулировать правые части дифференциальных уравнений однократно осредненной задачи гораздо сложнее.

Указанный выше недостаток частично компенсируется выбором большего интервала табуляции. Этот недостаток делается незначительным в случае планет с малыми эксцентриситетами  $e$  и наклонностями  $i$ . В случае малых значений  $e$  и  $i$  бесконечные ряды можно оборвать на членах первой или второй степени относительно  $e$  и  $i$ .

Поэтому мы рекомендуем первый вариант комбинированного метода применять к планетам типа Гекубы, если

$$\left\{ \begin{array}{l} q < 6^{\circ} \\ i < 10^{\circ} \\ 580'' < n < 620'' \end{array} \right. \quad (33)$$



Так как мы будем применять этот метод для планет с малыми  $e$  и  $i$ , то, учитывая возможное быстрое изменение  $\omega$  и  $\Omega$ , рекомендуется ввести переменные Лагранжа

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega; \quad h = e \sin(\omega + \Omega), \quad l = e \cos(\omega + \Omega). \quad (34)$$

В этих переменных мы имеем с точностью до малых величин первого порядка включительно следующие дифференциальные уравнения однократно осредненной эллиптической ограниченной задачи Делоне-Хилла для планет типа Гекубы

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & \frac{2\sqrt{am'}k}{a'} \{ - [0,5(3+D)c_1^{(1)} - 2\alpha] e' \sin(D^* + \omega') + 0,5(4+D)c_1^{(2)} \times \\ & \times (l \sin D^* + h \cos D^*) - 0,25(38 + 13D + D^2) c_1^{(2)} e'^2 \sin(2D^* + 2\omega') - \\ & - 0,25(44 + 13D + D^2) c_1^{(4)} [(l^2 - h^2) \sin 2D^* + 2hl \cos 2D^*] + \\ & + 0,5 e' (42 + 13D + D^2) c_1^{(3)} [l \sin(2D^* + \omega') + h \cos(2D^* + \omega')] - \\ & - 0,25 c_3^{(3)} (q^2 - p^2) \sin 2D^* - 0,5 c_3^{(3)} pq \cos 2D^* \}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD^*}{dt} = & \frac{k}{a'^2} - 2n' - \frac{km'}{a' \sqrt{a}} \{ Dc_1^{(0)} + 2e' [0,5(3D + D^2) c_1^{(1)} - 2\alpha] \cos(D^* + \omega') + \\ & + (1 - 3,75D - D^2) c_1^{(2)} (l \cos D^* - h \sin D^*) \} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{km'}{4a' \sqrt{a}} (-c_3^{(1)} q + c_3^{(3)} q \cos 2D^* - c_3^{(3)} p \sin 2D^*), \quad (36)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{km'}{4a' \sqrt{a}} (c_3^{(1)} p + c_3^{(3)} p \cos 2D^* + c_3^{(3)} q \sin 2D^*), \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} = & \frac{km'}{a' \sqrt{a}} [0,25(D + D^2) c_1^{(0)} l - 0,5(4 + D) c_1^{(2)} \cos D^* + \\ & + 0,25(44 + 13D + D^2) c_1^{(4)} (l \cos 2D^* - h \sin 2D^*) + \\ & + 0,25(2 - D - D^2) c_1^{(1)} e' \cos \omega'], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} = & \frac{km'}{a' \sqrt{a}} [-0,25(D + D^2) c_1^{(0)} h - 0,5(4 + D) c_1^{(2)} \sin D^* + \\ & + 0,25(44 + 13D + D^2) c_1^{(4)} (h \cos 2D^* + l \sin 2D^*) - \\ & - 0,25(2 - D - D^2) c_1^{(1)} e' \sin \omega'], \end{aligned} \quad (39)$$

где  $D^* = M + \omega + \Omega - 2M' - 2\omega'$ ,  $\alpha = \frac{a}{a'}$ ,  $D = \frac{\partial}{\partial \lg \alpha}$ .

В дифференциальных уравнениях для  $h$  и  $l$  отброшено по одному члену с множителем  $e'$ , ибо эти члены имеют весьма малые коэффициенты.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1]. *F. Tisserand*, Traité de Mécanique Céleste Tome III, 181 Paris, 1894.  
[2]. *К. А. Штейнс*, Уч. зап. Латв. Гос. ун-та, 1956.

## PILNU PERTURBACIJŪ APREĶINĀSANAS KOMBINĒTĀ METODE

*K. Steins*

(Kopsavilkums)

Darbā tiek parādīts, ka Delonē operācija ir efektīva vienīgi īsperiodu locekļu izslēgšanā. Izmantojot šo īpašību, no diferencialvienādojumiem tiek izslēgti visi īsperioda locekļi. Tiek analizētas priekšrocības un trūkumi diferencialvienādojumu, kas satur garperioda un gada simta locekļus, skaitliskā integrēšanā un doti attiecīgie vienādojumi.



## К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ОСРЕДНЕННЫХ ЗАДАЧ ТИПА ДЕЛОНЕ-ХИЛЛА

К. А. ШТЕЙНС

Впервые метод численного интегрирования при решении осредненных задач типа Делоне-Хилла был применен Хиллом [1] для планет типа Гекубы, причем в разложении возмущающей функции учитывались члены до восьмой степени эксцентриситета  $e$  включительно. Б. А. Орлов [2] таким же способом вычислил долгопериодические возмущения для малой планеты (279) Туле, учитывая члены до шестой степени относительно  $e$ . Некоторые этапы численного метода весьма громоздки. Больших вычислений требует нахождение  $e$  из уравнения, выражающего интеграл Якоби. Так, например, для этого Б. А. Орлов решает уравнение 12-й степени. Такого решения в аналитическом виде никто не производил. Более того, некоторые из авторов отрицали возможность решения в аналитическом виде, считая его чрезвычайно сложным. В настоящей статье рассматривается способ аналитического разрешения уравнения, записывающего интеграл Якоби, относительно эксцентриситета. Нам кажется, что в некоторых случаях решений задач типа Делоне-Хилла, равно как и для анализа возможности выполнения операции Делоне, такой способ является наиболее целесообразным. Этому мы посвящаем §1 и §2. В §3 мы даем численные примеры, которые убеждают нас, что выведенные приближенные формулы оправдывают себя на практике. Чтобы получить полное представление о решении осредненных задач в квадратурах, мы включили в настоящую статью преобразование дифференциальных уравнений к такому виду, который по нашему мнению весьма удобен для практических целей (§5). В §4, используя выведенную в §2 формулу, мы оценили период либрации для планет типа Гекубы.

Для определенности в дальнейшем будем рассматривать плоскую круговую ограниченную задачу Делоне-Хилла.

### § 1.

Выберем систему кеплеровых фазовых координат  $(a, e, M, \omega)$ , где  $a$ ,  $e$ ,  $M$ ,  $\omega$  соответственно большая полуось, эксцентриситет, средняя аномалия и расстояние перигелия от узла. Тогда для ограниченной плоской круговой задачи трёх точек Солнце — Юпитер — астероид будем иметь следующую систему осредненных дифференциальных уравнений возмущённого движения

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2\sqrt{a}}{k} q^* \frac{\partial [W]}{\partial D^*} \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{k}{a^{3/2}} - \frac{2\sqrt{a}}{k} \frac{\partial [W]}{\partial a} - \frac{1-e^2}{k\sqrt{ae}} \frac{\partial [W]}{\partial e} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2} (q^* \sqrt{1-e^2} - r^*)}{k\sqrt{ae}} \frac{\partial [W]}{\partial D^*} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{k\sqrt{ae}} \frac{\partial [W]}{\partial e} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где

$$|W| = \frac{1}{2\pi r^*} \int_{M=0}^{2\pi r^*} W dM = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jq^*} j r^* (a, e) \cos j D^*, \quad (2)$$

$$D^* = q^* M + r^* (\omega - M') \quad (3)$$

Здесь  $M'$  — средняя аномалия Юпитера,  $k$  — постоянная притяжения,  $t$  — время,  $q^*$ ,  $r^*$  — целые числа. У этой системы существует интеграл Якоби

$$\frac{k^2}{2a} + k \sqrt{a(1-e^2)} n' + |W| = C_1, \quad (4)$$

где  $n'$  среднее суточное движение Юпитера, и интеграл

$$r^* q^{*2-1} k \sqrt{a} - k \sqrt{a(1-e^2)} = C_2 \quad (5)$$

Интегралов (4) и (5) достаточно, чтобы систему (1) проинтегрировать в квадратурах. Для этого следует написать уравнение для  $D^*$ , имеющее в нашем случае вид

$$\frac{dD^*}{dt} = -r^* n' + \frac{q^* k}{a^{3/2}} - \frac{2q^* \sqrt{a}}{k} \frac{\partial |W|}{\partial a} - \frac{(1-e^2) q^*}{k \sqrt{a} e} \frac{\partial |W|}{\partial e} + \frac{r^* \sqrt{1-e^2}}{k \sqrt{a} e} \frac{\partial |W|}{\partial e}, \quad (6)$$

и из этого уравнения при помощи интегралов (4) и (5) исключить переменные  $a$  и  $e$ . После этого уравнение (6) будет интегрироваться в квадратурах, а переменные  $a$  и  $e$  потом получаются как функции времени с помощью интегралов (4) и (5).

Чтобы осуществить исключение переменных  $a$  и  $e$ , следует воспользоваться разложениями  $a$  (5) в степенные ряды относительно  $e$ , сходящиеся при достаточно малом  $e$ . В функции возмущения  $[W]$  величину  $a$  также нужно выразить через эксцентриситет  $e$ . Полуось  $a$  входит в пертурбационную функцию  $[W]$  через коэффициенты Лапласа. Предположим, что такая замена  $a$  осуществлена в интеграле Якоби (4). Заметим теперь, что пертурбационная функция  $[W]$  имеет малый множитель — массу возмущающей планеты  $m'$ . Опираясь на это обстоятельство, можно искать выражение  $e$  через аномалию  $D^*$  в виде ряда по степеням  $m'$ . После исключения  $a$  из интеграла Якоби он примет следующий вид

$$(a_2 + m' b_2) e^2 + (a_4 + m' b_4) e^4 + \dots + m' (c_1 e + c_2 e^2 + \dots) \cos D^* + m' (c_1' e + c_2' e^2 + \dots) \cos 2D^* + \dots = C_1 \quad (7)$$

Множитель  $m'$  у постоянных подчеркивает, что эти члены произошли от возмущающей функции. Величины  $a_i$  суть некоторые постоянные.

Введём вместо постоянной  $C_1$  другую постоянную  $e_0$ , связанную с постоянной  $C_1$  следующим уравнением

$$a_2 e_0^2 + a_4 e_0^4 + \dots = C_1. \quad (8)$$

Одновременно введём величину  $\Delta e$ , связанную с  $e$  и  $e_0$  соотношением

$$e = e_0 + \Delta e. \quad (9)$$

Тогда уравнение (7) при  $m' = 0$  будет иметь корень  $\Delta e = 0$ . Считая  $m'$  малым, будем искать тот корень уравнения (7) [на практике это уравнение с конечным числом членов] относительно  $\Delta e$ , который стремится

к нулю при стремлении к нулю величины  $m'$ . Из общей теории известно, что в случае, если

$$2e_0 (a_2 + 2a_4 e_0^2 + \dots) = \frac{\partial}{\partial e} \left[ \frac{k^2}{2a} + n' r^* q^{*n-1} k \sqrt{a} \right] \Big|_{e=e_0} = \\ = - \frac{e_0 k \sqrt{a_0}}{\sqrt{1-e_0^2} (\sqrt{1-a_0^2} - r^* q^{*n-1})} \left( \frac{k}{a_0^{3/2}} - n' r^* q^{*n-1} \right) \neq 0, \quad (10)$$

решение будет иметь вид ряда по целым положительным степеням  $m'$ . Таким образом в случае отсутствия острой соизмеримости с точностью до членов первого порядка включительно имеем

$$e = e_0 + \frac{q^{*m'} (c_1 e_0 + c_2 e_0^2 + \dots) \sqrt{1-e_0^2} (\sqrt{1-e_0^2} - r^* q^{*n-1})}{k \sqrt{a_0} e_0 (q^{*n} - r^{*n})} \cos D^* + \\ + \frac{q^{*m'} (c'_1 e_0 + c'_2 e_0^2 \dots) \sqrt{1-e_0^2} (\sqrt{1-e_0^2} - r^* q^{*n-1})}{k \sqrt{a_0} e_0 (q^{*n} - r^{*n})} \cos 2D^* + \dots \quad (11)$$

В этой формуле  $e_0$  обозначает постоянную, которая отличается от величины обозначенной той же самой буквой в предыдущих формулах на постоянную величину порядка  $m'$ . Нетрудно усмотреть, что полученная нами формула (11) в точности совпадает с классическим результатом, полученным способом последовательных приближений в первом приближении. Не трудно убедиться, что это имеет место также для остальных неизвестных.

Примером указанного совпадения могут служить вычисленные Акесоном [3] в задаче Делоне-Хилла возмущения  $e$  и  $a$  для планеты (495) Евлалия. В работе Акесона интеграцией уравнений задачи Делоне-Хилла были получены следующие результаты

$$e = 0,14260 - 0,00576 \cos y_0 - 0,00005 \cos 2y_0,$$

где

$$y_0 = 11'', 707 t + c$$

и

$$a = a_0 \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{16} e^4 - \frac{1}{32} e^6 + \dots \right)$$

Решая эту задачу методом последовательных приближений в первом приближении и удовлетворяясь только тригонометрическим членом  $\cos D^*$  получим для первого тригонометрического члена в возмущении эксцентриситета следующее значение

$$- 0,00547 \cos (12'', 735 t + c)$$

По элементам Штраке для 1925 г. (см. «Эфемериды малых планет» на 1948 г. часть 2) среднее суточное движение планеты Евлалия стало равным  $904'', 749$ , вместо  $910'', 120$  как это принимал Акесон согласно элементам Нейгебауера для 1902 г. Таким образом Евлалия приблизилась к месту точной соизмеримости. С элементами Штраке для 1925 г. нами была заново решена задача Делоне-Хилла для Евлалии, при учёте только одного главного тригонометрического члена, а именно, члена  $\cos D^*$ . При этом оказалось, что и тут, несмотря на приближение к точной соизмеримости, формула (11) для возмущения эксцентриситета остаётся пригодной.

После этого, естественно, возникает вопрос о том, насколько близко можно подходить к точной соизмеримости, не теряя возможности пользоваться формулой (11). Для выяснения этого вопроса мы предприняли

следующее вычисление. Имея в виду, что точная соизмеримость 3 : 1 достигается при  $n \approx 897''{,}4$ , мы взяли последовательность значений  $n$ , приближающихся к указанному критическому и для этих значений  $n$ , при неизменных значениях остальных элементов, мы вычислили амплитуду изменения элемента  $e$ , соответствующую решению задачи Делоне-Хилла. Ту же амплитуду изменения  $e$  мы определили для тех же значений  $n$  методом последовательных приближений в первом приближении. Результаты вычислений приведены в таблице. В первом столбике даются избранные значения  $n$ . Второй столбик содержит значения величины  $(n - 3n')$ , характеризующей остроту соизмеримости. В третьем столбике даётся амплитуда изменения эксцентриситета соответственно решению задачи Делоне-Хилла. В последнем — четвертом столбике даётся коэффициент при соответствующем неравенстве эксцентриситета, вычисленном по методу последовательных приближений в первом приближении

1	2	3	4
904''{,}5	7''{,}1	0.009	0.009
902''{,}5	5''{,}1	0.011	0.012
900''{,}5	3''{,}1	0.011	0.021
898''{,}5	1''{,}1	0.019	0.058
897''{,}5	0''{,}12	0.039	0.53
896''{,}5	-0''{,}9	0.038	0.071
895''{,}5	-2''{,}9	0.015	0.022

Из этой таблицы видно, что результаты двух сравниваемых методов вычисления амплитуды главного неравенства эксцентриситета начинают расходиться лишь начиная с  $n - 3n' = \pm 5''$ , т. е. для планет типа Гестии. По данным 1948 года («Эфемериды малых планет») оказывается, что в этой группе *не существует* планет, которые были бы расположены в области  $|n - 3n'| \leq 5''$ .

## § 2.

Рассмотрим теперь случай точной соизмеримости средних движений. В этом случае следует уже в первом приближении учесть высшие степени  $\Delta e$ . Запишем интеграл Якоби (4) в следующем, более сжатом виде

$$\Phi(a) + [W] = C_3 \quad (12)$$

где

$$\Phi(a) = \frac{k^2}{2a} + n' r^* q^{*-1} k \sqrt{a}$$

Разлагая выражение  $\Phi(a) + [W]$ , учитывая формулу (5), в ряд Тейлора по степеням величины  $(e - e_0)$  получим уравнение (12) в следующем виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial e} (e - e_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} (e - e_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial e^3} (e - e_0)^3 + \dots + m' (c_1 e_0 + \\ & \quad + c_2 e_0^2 + \dots) \cos D^* + m' (c'_1 e_0 + c'_2 e_0^2 + \dots) \cos 2D^* + \\ & \quad + m' (c_1 + 2c_2 e_0 + \dots) (e - e_0) \cos D^* + m' (c'_1 + 2c'_2 e_0 + \dots) (e - \\ & \quad - e_0) \cos 2D^* + \dots = C_3 \end{aligned} \quad (13)$$

Постоянная интегрирования  $C_3$  определяется при начальных условиях  $e = e_0$ ,  $D^* = D_0^*$ . Представляя значение  $C_3$  в уравнение (13) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial e} (e - e_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} (e - e_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial e^3} (e - e_0)^3 + \dots + m' (c_1 + 2c_2 e_0 + \dots) (e - e_0) \cos D^* + m' (c_1' + 2c_2' e_0 + \dots) (e - e_0) \cos 2D^* + \dots + m' (c_1 e_0 + c_2 e_0^2 + \dots) (\cos D^* - \cos D_0^*) + m' (c_1' e_0 + c_2' e_0^2 + \dots) (\cos 2D^* - \cos 2D_0^*) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial e} = 0 \quad (15)$$

т. е. случай точной соизмеримости средних суточных движений.

Чтобы выяснить какие члены в уравнении (14) следует учесть, вычислим для случая точной соизмеримости коэффициенты  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2}$  и  $\frac{\partial^3 \Phi}{\partial e^3}$ . Для первого из этих коэффициентов получаем следующее выражение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} = \frac{3e_0^2 k \sqrt{a_0} n}{(1 - e_0^2) (r^* q^{*-1} - \sqrt{1 - e_0^2})^2} \quad (16)$$

Вычисляя второй коэффициент, ограничимся малыми величинами первого порядка относительно  $e_0$  включительно. Тогда получим следующее выражение

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial e^3} = \frac{9e_0 k \sqrt{a_0} n}{(r^* q^{*-1} - 1)^2} \quad (17)$$

Вследствие множителя  $n \gg 0$  величины  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2}$  и  $\frac{\partial^3 \Phi}{\partial e^3}$  являются величинами нулевого порядка малости относительно массы  $m'$ . Следовательно, возможно удовлетвориться следующим упрощенным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} (e - e_0)^2 + m' (c_1 e_0 + c_2 e_0^2 + \dots) (\cos D^* - \cos D_0^*) + m' (c_1' e_0 + c_2' e_0^2 + \dots) (\cos 2D^* - \cos 2D_0^*) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Это есть квадратное уравнение относительно  $(e - e_0)$ . Решая его с учетом формулы (16), получим

$$\begin{aligned} e = e_0 \pm \frac{(r^* q^{*-1} - \sqrt{1 - e_0^2}) \sqrt{2(1 - e_0^2)}}{e_0 \sqrt{3k \sqrt{a_0} n}} \times \\ \times \sqrt{-m' (c_1 e_0 + c_2 e_0^2 + \dots) (\cos D^* - \cos D_0^*) + \dots} \end{aligned} \quad (19)$$

Решение (19) показывает, что упомянутое упрощение было вполне допустимо. Действительно, из (19) следует, что  $(e - e_0)$  есть величина порядка  $\sqrt{m'}$ . Учитывая это, видим, что мы учли в уравнении (14) в случае  $\frac{\partial \Phi}{\partial e} = 0$  все члены порядка  $(\sqrt{m'})^2$ , а отбросили члены, у которых порядок  $(\sqrt{m'})^3$  или выше.

Посмотрим теперь, что дает нам формула (19). Пусть при значениях  $D_m^* \gg D^* \gg -D_m^*$  подкоренное выражение, оставаясь положительным, колеблется между нулями, которые оно имеет при  $D_m^*$  и  $-D_m^*$ . Такой



случай называется либрацией критического аргумента  $D^*$ . Формула (19) со знаком «+» представляет одну, а со знаком «-» другую ветвь одной и той же непрерывной замкнутой кривой.

После такого анализа точной соизмеримости *перейдем к рассмотрению случая соизмеримости средних суточных движений вообще.* Тогда  $\frac{\partial \Phi}{\partial e}$

равняется нулю не точно, а только приблизительно. Следовательно выше развитые утверждения будут иметь так же приближенный характер. Чтобы уточнить выбор членов в уравнении (14), без этих рассуждений, т. е. без рассуждений, указанных для случая точной соизмеримости, мы еще учтем следующее замечание. На практике  $m'$  не является единственной малой величиной. Здесь играет роль также малость величины  $e_0$ . Вообще говоря, невозможно установить порядок малости  $e_0$  относительно малой величины первого порядка  $m'$ . Тем не менее, мы можем указать на следующее свойство уравнения (14): чем меньше значение  $e_0$ , тем более значительную роль начинают играть члены  $\frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial e^3} (e - e_0)^3$  и  $m' (c_1 + 2c_2 e_0 + \dots) (e - e_0) \cos D^*$ , ибо коэффициент  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2}$  имеет множитель  $e_0^2$ , а в коэффициенты только что написанных членов соответственно входят множители  $e_0$  и  $e_0^0$ . Следовательно при уменьшении значений  $e_0$  быстрее всего уменьшается член с коэффициентом  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2}$  и поэтому на практике при достаточно малых значениях  $e_0$  может оказаться, что отбросить члены с коэффициентами  $\frac{\partial^3 \Phi}{\partial e^3}$  и  $m'(c_1 + 2c_2 e_0 + \dots)$  невозможно. Эту трудность при вычислении можно обойти, разлагая функцию  $\Phi(a) + [W]$  при нескольких значениях  $e$ .

Учитывая все сказанное, получаем следующие решения для интеграла Якоби относительно эксцентриситета  $e$ :

а) для сравнительно больших значений  $e$  (см. формулы 20 и 21)

$$e = e_0 + \frac{-\frac{\partial \Phi}{\partial e} + \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial e}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} [m'(c_1 e_0 + c_2 e_0^2 + \dots) (\cos D^* - \cos D_0^*) + m'(c_1' e_0 + \dots) (\cos 2D^* - \cos 2D_0^*)]}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2}} \quad (20)$$

б) для сравнительно малых значений  $e$

$$e = e_0 + \frac{\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial e} + m'(c_1 + 2c_2 e_0 + \dots) \cos D^* + m'(c_1' + 2c_2' e_0 + \dots) \cos 2D^* \right] \pm \sqrt{\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial e} + m'(c_1 + 2c_2 e_0 + \dots) \cos D^* + m'(c_1' + 2c_2' e_0 + \dots) \cos 2D^* \right]^2 - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} [m'(c_1 e_0 + \dots) (\cos D^* - \cos D_0^*) \dots]}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2}} \quad (21)$$

В случае численного решения формулы (20) и (21) используются в качестве первого приближения. Для получения следующих приближений можно пользоваться методом хорд или касательных.

### § 3.

В случае острой соизмеримости для решения интеграла Якоби нами были предложены формулы (20) и (21). В этом параграфе мы дадим два численных примера, показывающих точность предложенных нами формул. В первом мы покажем, что при достаточно больших значениях  $e$  формула (20) дает хорошее первое приближение на всем периоде изменения эксцентриситета  $e$ . Это имеет место как при наличии, так и при отсутствии либрации. Во втором примере будет показано, что при сравнительно малых значениях  $e$ , даже более точная формула (21) не дает удовлетворительных значений для всего периода изменения эксцентриситета  $e$ . Действительные значения  $e$  были нами получены при помощи метода хорд.

Первый пример. Для планеты (1101) Клематис, которая принадлежит к планетам типа Гекубы, мы вычислили по формуле (20) значения эксцентриситета  $e$ . Для оценки точности этих значений мы вычислили точные значения  $e$  по методу хорд. Результаты сравниваются при одних и тех же значениях  $\psi$ , где

$$\sin \psi = \frac{\sin \frac{D^*}{2}}{\sin \frac{D_m^*}{2}}$$

и представляются в следующей таблице

$\psi$	По приближенной формуле (20)		Точные вычисления	
	$D^*$	$e$	$D^*$	$e$
0°	0°.000	0.1038	0°.000	0.0995
15°	21°.550	0.1040	21°.264	0.1006
30°	42°.344	0.1055	41°.764	0.1040
45°	61°.434	0.1100	60°.540	0.1103
60°	77°.450	0.1184	76°.250	0.1201
75°	88°.494	0.1306	87°.036	0.1332
90°	92°.500	0.1451	90°.940	0.1484
105°	88°.494	0.1596	87°.036	0.1636
120°	77°.450	0.1718	76°.250	0.1758
135°	61°.434	0.1802	60°.540	0.1840
150°	42°.344	0.1847	41°.764	0.1875
165°	21°.550	0.1862	21°.264	0.1873
180°	0°.000	0.1865	0°.000	0.1873

$\psi$  связано со временем  $t$  по формуле

$$\psi - 2^{\circ},0 \sin \psi - 4^{\circ},1 \sin 2\psi + 1^{\circ},2 \sin 3\psi = -54^{\circ},6 \cdot 10^{-4} (t - t_0)$$

Второй пример. Во втором примере мы рассматриваем нахождение эксцентриситета из интеграла Якоби для малой планеты (580) Селена.

Если мы применим формулы (20), то получим следующие значения:

$D^*$	$e$
$0^\circ$	0.13351
$30^\circ$	0.13144
$60^\circ$	0.12476
$90^\circ$	0.10983
$120^\circ$	не существует действительного значения.

Действительные значения суть следующие:

$D^*$	$e$
$0^\circ$	0.13355
$30^\circ$	0.13122
$60^\circ$	0.12422
$90^\circ$	0.11269
$120^\circ$	0.09784
$150^\circ$	0.08493
$180^\circ$	0.03019

Следовательно формула (20) годна только для небольшого промежутка  $D^*$ . Формула (21) дает, вообще говоря, лучшие результаты, чем формула (20). Так, например, для  $90^\circ$  по формуле (20) получаем 0.11252. Однако и по этой формуле получается, что при  $D^* = 120^\circ$  не существует действительных значений для  $e$ , т. е. имеется случай либрации. Для получения правильных результатов следует левую сторону интеграла Якоби вновь разложить в ряд Тейлора при значении  $e = 0.11252$ . Если при неизменных прочих условиях мы возьмем для планеты Селена  $e = 0,2$ , то убедимся, что формула (20) дает хорошие результаты на всем периоде изменения.

#### § 4.

Определим период  $T$ , в течение которого  $e, D^*$ ... пройдут свои значения. Для этого займемся интегрированием дифференциального уравнения для  $D^*$  (6), в которое подставим значение  $e$  из формулы (19). Ограничиваясь точностью до малых величин порядка  $\sqrt{m'}$ , мы получим:

$$\pm \frac{\sqrt{k \sqrt{a_0}}}{q^* \sqrt{3n} \sqrt{-2m'(c_1 e_0 + \dots)}} \frac{dD^*}{\sqrt{\cos D^* - \cos D_0^*}} + \frac{\sqrt{1 - e_0^2} (r^* q^{*-1} - \sqrt{1 - e_0^2})}{q^* e_0^2 3n} dD^* = dt \quad (22)$$

В первом члене сделаем подстановку

$$\sin \frac{D^*}{2} = \left| \sin \frac{D_0^*}{2} \right| \sin x \quad (23)$$

После интегрирования получим

$$\pm \frac{\sqrt{k \sqrt{a_0}} \sqrt{2}}{q^* \sqrt{3n} \sqrt{-2m'(c_1 e_0 + \dots)}} F\left(x, \left| \sin \frac{D_0^*}{2} \right| \right) + \frac{D^* \sqrt{1 - e_0^2} (r^* q^{*-1} - \sqrt{1 - e_0^2})}{3n q^* e_0^2} = t + c \quad (24)$$

Имея таблицу эллиптических интегралов первого рода  $F(x, k)$  нетрудно найти период либрации  $T$  для аномалии  $D^*$ .

Чтобы получить представление о возможном значении периода  $T$ , оценим множитель у эллиптического интеграла

$$\frac{\sqrt{k \sqrt{a_0} \sqrt{2}}}{q^* \sqrt{3n} \sqrt{-2m'(c_1 e_0 + \dots)}}$$

Подставляя в выражение (25) соответствующие численные данные для планет типа Гекубы, для члена  $Ae \cos(M + 2\omega + 2\Omega - 2M' + 2\omega')$  получим  $\frac{10.000}{\sqrt{e_0}}$  дней.

Учитывая возможное изменение функции  $F\left(x, \left|\sin \frac{D_0^*}{2}\right|\right)$ ; видим, что период либрации длится несколько сот лет.

## § 5.

Чтобы проинтегрировать дифференциальные уравнения для угловых переменных  $M$  и  $\omega$ , а также получить  $a = a(t)$ ,  $e = e(t)$ , следует сперва решить дифференциальное уравнение (6) для аномалии Делоне  $D^*$ . Для этого необходимо в уравнении (6) заменить  $a$  и  $e$  их выражениями через  $D^*$ . Взамен этого можно составить новую форму дифференциального уравнения для аномалии Делоне, допускающую более простое выполнение названного исключения. Возьмём интеграл Якоби в форме уравнения (7), из которого уже исключена полуось  $a$ . Запишем эту форму интеграла Якоби в следующем виде

$$F(e, D^*) = C_1 \quad (26)$$

Дифференцируя это соотношение полным образом по времени  $t$ , мы получим

$$\frac{\partial F}{\partial D^*} \frac{dD^*}{dt} + \frac{\partial F}{\partial e} \frac{de}{dt} = 0 \quad (27)$$

Подставим сюда выражение  $\frac{de}{dt}$  из второго уравнения системы (1) и кроме того заметим что,

$$\frac{\partial F}{\partial D^*} = \frac{\partial [W]}{\partial D^*}$$

После этого мы получим искомую новую форму уравнения для аномалии Делоне в виде

$$\frac{dD^*}{dt} = - \frac{\sqrt{1-e^2} [q^* \sqrt{1-e^2} - r^*]}{k \sqrt{a} e} \frac{\partial F}{\partial e} \quad (28)$$

В правую часть этого дифференциального уравнения для  $D^*$  мы должны будем подставить выражение  $e$  через  $D^*$ .

Если мы хотим произвести интегрирование в аналитической форме, то нам нужно использовать результаты предыдущего параграфа. Так например, если мы хотим интегрировать уравнение (28) в случае больших значений  $e$ , мы можем использовать формулу (20). Это даст, ограничиваясь главными членами, следующий результат

$$\begin{aligned} \frac{dD^*}{dt} = & \mp \frac{\sqrt{1-e_0^2} [q^* \sqrt{1-e_0^2} - r^*]}{k \sqrt{a_0} e_0} \times \\ & \times \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial e}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial e^2} [m'(c_1 e_0 + \dots)] (\cos D^* - \cos D_0^*)} \end{aligned} \quad (29)$$

Разделяя в этом уравнении переменные его можно проинтегрировать в квадратурах.

При вычислениях в числах мы учитываем, что правая сторона уравнения (29) есть периодическая функция переменного  $D^*$ . После разделения переменных разлагаем функцию при  $dD^*$  в ряд Фурье по аргументу  $D^*$ , а потом интегрируем почленно.

После того как мы нашли зависимость аномалии Делоне  $D^* = D^*(t)$  от времени  $t$  и нашли с помощью этой зависимости  $a$  и  $e$  как функции от  $t$ , мы можем проинтегрировать в квадратурах дифференциальные уравнения (1) для  $M$  и  $\omega$ .

Вместо двух последних уравнений системы (1) можно использовать иную форму этих уравнений, представляющую известные преимущества. Выведем уравнения для  $M$  и  $\omega$ , удобные в случае, когда в возмущающей функции  $[W]$  полюсь  $a$  выражается через эксцентриситет  $e$  при помощи формул § 2. Для этой цели перепишем формулу (5) § 1 в следующем виде:

$$r^* \sqrt{a} - q^* \sqrt{a(1-e^2)} = (r^* - q^*) \sqrt{\bar{a}} \quad (30)$$

вводя вместо константы  $C_2$  другую константу  $\bar{a}$ , связанную с ней формулой

$$q^* C_2 = (r^* - q^*) k \sqrt{\bar{a}} \quad (31)$$

Формула (5) использовалась для выражения  $a$  через  $C_2$  и  $e$ . Эту процедуру можно рассматривать как преобразование системы переменных  $a$  и  $e$  в систему  $C_2$  и  $e_1$  при помощи формулы (5) и формулы  $e = e_1$ . Аналогично этому мы рассмотрим здесь преобразование системы переменных  $(a, e)$  в систему переменных  $(\bar{a}, e_1)$  при помощи формулы (30) и формулы  $e = e_1$ . Обозначим символом  $\tilde{W}(a, e)$  результат замены в  $W(a, e)$  аргумента  $a$  его выражением через  $\bar{a}$  и  $e$  при помощи формулы (30). Тогда мы будем иметь следующие формулы:

$$\frac{\partial W(a, e)}{\partial a} = \frac{\partial \tilde{W}(\bar{a}, e)}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \bar{a}}{\partial a} \quad (32)$$

$$\frac{\partial W(a, e)}{\partial e} = \frac{\partial \tilde{W}(\bar{a}, e)}{\partial \bar{a}} \frac{\partial \bar{a}}{\partial e} + \frac{\partial \tilde{W}(\bar{a}, e)}{\partial e} \quad (33)$$

Однако, из уравнения (30) мы имеем

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial a} = \frac{[r^* - q^* \sqrt{1-e^2}]^2}{(r^* - q^*)^2}, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial e} = \frac{2\bar{a}eq^*}{[r^* - q^* \sqrt{1-e^2}] \sqrt{1-e^2}} \quad (34)$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения системы (1) для  $M$  и  $\omega$ , мы получим эти уравнения в следующей форме

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{k}{a^{3/2}} - \left[ \frac{2\bar{a}}{k\sqrt{a}} + \frac{2q^* \sqrt{\bar{a}(1-e^2)}}{k(r^* - q^*)} \right] \frac{\partial \tilde{W}(\bar{a}, e)}{\partial \bar{a}} - \frac{1-e^2}{k\sqrt{a}e} \frac{\partial \tilde{W}(\bar{a}, e)}{\partial e} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2q^* \sqrt{\bar{a}}}{k(r^* - q^*)} \frac{\partial \tilde{W}(\bar{a}, e)}{\partial \bar{a}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{k\sqrt{a}e} \frac{\partial \tilde{W}(\bar{a}, e)}{\partial e} \end{aligned} \right. \quad (35)$$

Переменные, входящие в правые части уравнений (35), представляют собой известные периодические функции времени. Поэтому правые части можно разложить в ряды Фурье. Это облегчает практическое интегрирование уравнения (35) и позволяет выразить переменные  $M$  и  $\omega$  как функции времени также в виде тригонометрических рядов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1]. G. W. Hill. The Collected Math. Works, volume IV p. 169.
- [2]. Б. А. Орлов. Известия Главной Астр. Обс. в Пулкове № 138, стр. 71, 1947.
- [3]. O. A. Akesson. Arkiv For Mat. Astr. och Fysik Band 8 N 25, 1912.

PAR DELONĒ-HILLA TIPA IZLĪDZINĀTO UZDEVUMU  
ATRISINĀŠANU

K. Steins

(Kopsavilkums)

Sinī rakstā Delonē-Hilla uzdevumu risināšana apskatīta no praktiskā redzes viedokļa. Tiek konstatēts, ka jāizšķir divi gadījumi: a) parastais gadījums, kur atrisinājums sakrīt ar klasiskās debess mehanikas atrisinājumu (§ 1), b) asās samērojāmības gadījums. Asās samērojāmības gadījuma atrisināšanai tiek izvestas formulas (§ 2). Šo formulu lietderība tiek pārbaudīta konkrētos piemēros (§ 3). Bez tam diferencialvienādojumu sistēmai tiek piedots jauns, praktiski lietderīgs veids (§ 5), konstatēts libracijas perioda ilgums (§ 4).



## РАССЕЯНИЕ НУКЛОНОВ ПРИ МАЛЫХ ЭНЕРГИЯХ С УЧЕТОМ ИЗОБАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

П. Е. КУНИН и И. М. ТАКСАР

И. Е. Таммом и сотрудниками было показано [1], что удовлетворительное теоретическое описание процессов взаимодействия  $\pi$ -мезонов с нуклонами может быть достигнуто с помощью введения предположения о наличии изобарного состояния нуклона, в котором его механический и изотопический спины равны  $3/2$ . Основанное на этом представлении рассмотрение взаимодействия двух нуклонов было дано нами в предыдущей работе [2], в дальнейшем обозначаемой I. Целью настоящей работы является применение полученных в I уравнений к исследованию  ${}^1S_0$  — состояния системы взаимодействующих нуклонов, которое, в частности, полностью определяет рассеяние протонов на протонах при малых энергиях.

Будем исходить из системы интегральных уравнений (13) в I, которая полностью описывает взаимодействие нуклонов с учётом изобарных состояний в первом приближении «лестничной» аппроксимации. Входящие в эти уравнения амплитуды дираковских плоских волн  $u(\vec{k})$  и четыре независимые решения уравнения для свободной частицы со спином  $3/2$  (обладающей положительной энергией и заданным импульсом  $\vec{k}$ )  $\psi_{\mu}^{(\beta)}(\vec{k})$  могут быть представлены в следующем виде:

$$u(\vec{k}) = A_k \begin{pmatrix} (E_k + M) \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & -(E_k + M) \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ (E_k + M) \sin \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} & (E_k + M) \cos \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \\ k \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & k \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ k \sin \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} & -k \cos \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\mu}^{(1)}(\vec{k}) &= (\vec{c}_1 \psi_+, 0), \\ \psi_{\mu}^{(2)}(\vec{k}) &= (\vec{c}_2 \psi_-, 0), \\ \psi_{\mu}^{(3)}(\vec{k}) &= \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{c}_2 \psi_+ + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{E_{1k}}{M_1} \vec{c}_3 \psi_-, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{k}{M_1} \psi_- \right), \\ \psi_{\mu}^{(4)}(\vec{k}) &= \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{c}_3 \psi_- - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{E_{1k}}{M_1} \vec{c}_3 \psi_+, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{k}{M_1} \psi_+ \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



где  $k$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$  — компоненты вектора  $\vec{k}$  в сферических координатах,  $M$  и  $M_1$  — масса нуклона в невозбужденном и в изобарном состояниях,  $\psi_+$  и  $\psi_-$  — два решения уравнений Дирака с положительной энергией, соответствующие направлению спина частицы по и против направления движения, а

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \sqrt{M^2 + k^2}, & E_{1k} &= \sqrt{M_1^2 + k^2}, & A_k &= \frac{1}{\sqrt{2E_k(E_k + M)}}, \\ \vec{c}_1(\vec{k}) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \cos \varphi - i \sin \varphi), \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \sin \varphi + i \cos \varphi), -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta \right), \\ \vec{c}_2(\vec{k}) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \varphi), \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \vartheta \sin \varphi - i \cos \varphi), -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \vartheta \right), \\ \vec{c}_3(\vec{k}) &= \frac{\vec{k}}{k} \equiv (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta). \end{aligned} \right\} (3)$$

Функции  $\psi_+$  и  $\psi_-$  можно представить следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \psi_+(\vec{k}) &= A_{1k} \begin{pmatrix} (E_{1k} + M_1) \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ (E_{1k} + M_1) \sin \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \\ k \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ k \sin \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \\ \psi_-(\vec{k}) &= A_{1k} \begin{pmatrix} -(E_{1k} + M_1) \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ (E_{1k} + M_1) \cos \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \\ k \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \\ -k \cos \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \\ A_{1k} &= \frac{1}{\sqrt{2E_{1k}(E_{1k} + M_1)}} \end{aligned} \right\} (4-a)$$

В  ${}^1S_0$  — состоянии, то есть, когда общий механический спин двух нуклонов равен нулю, из 36-ти волновых функций  $a_{3\gamma}$ , входящих в систему уравнений (13) в I, будут отличны от нуля только те функции, которые соответствуют следующим состояниям: оба нуклона в невозбужденных состояниях, спины антипараллельны; оба нуклона в изобарных состояниях, спины антипараллельны и равны  $\pm 3/2$ ; оба нуклона в изобарных состояниях, спины антипараллельны и равны  $\pm 1/2$ ; один нуклон в невозбужденном состоянии, другой в изобарном, спины антипараллельны

и равны  $\pm 1/2$ . В наших обозначениях (см. I) это соответствует тому, что отличными от нуля являются только следующие функции

$$a_{00}^{++} = -a_{00}^{--} \equiv a_{00}, \quad a_{11} = -a_{22}, \quad a_{33} = -a_{44}, \\ a_{03}^- = -a_{04}^+ = -a_{30}^- = a_{40}^+ \equiv a_{03}.$$

В  $^1S_0$  — состоянии эти четыре функции не зависят от угловых переменных.

После подстановки выражений (1) и (2) в уравнения (13) в I в правых частях в тройных интегралах по  $d\vec{l}$  можно произвести интегрирование по угловым переменным. Для этого  $\vec{k}$  и  $\vec{l}$  представляются в сферических координатах

$$\vec{k}(k \sin \vartheta \cos \varphi, k \sin \vartheta \sin \varphi, k \cos \vartheta), \\ \vec{l}(l \sin \vartheta' \cos \varphi', l \sin \vartheta' \sin \varphi', l \cos \vartheta')$$

и вместо переменных  $\vartheta'$  и  $\varphi'$  вводится угол  $\gamma$  между векторами  $\vec{k}$  и  $\vec{l}$  и соответствующий ему экваториальный угол  $\chi$  согласно соотношениям

$$\cos \vartheta' = \cos \vartheta \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \gamma \cos \chi, \\ \cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\varphi - \varphi'), \\ \sin \chi \cdot \sin \gamma = \sin \vartheta' \sin (\varphi - \varphi').$$

После интегрирования по  $\chi$  и  $\gamma$  получается система четырех «радиальных» уравнений, описывающая взаимодействие двух нуклонов в  $^1S_0$  — состоянии:

$$(W - 2E_k) \alpha_{00}(k) = \int N_1(k, l) \alpha_{00}(l) dl + \int N_2(k, l) \alpha_{03}(l) dl + \\ + \int N_3(k, l) \alpha_{11}(l) dl + \int N_4(k, l) \alpha_{33}(l) dl, \\ (W - E_k - E_{1k}) \alpha_{03}(k) = \int N_5(k, l) \alpha_{00}(l) dl + \int N_6(k, l) \alpha_{03}(l) dl, \\ (W - 2E_{1k}) \alpha_{11}(k) = \int N_7(k, l) \alpha_{00}(l) dl, \\ (W - 2E_{1k}) \alpha_{33}(k) = \int N_8(k, l) \alpha_{00}(l) dl,$$

где

$$\alpha_{\beta\gamma}(k) = k \alpha_{\beta\gamma}(k), \quad (\beta, \gamma = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (6)$$

а весьма громоздкие выражения для ядер интегральных уравнений (5) даны в Приложении.

Эти ядра быстро растут при  $k \rightarrow \infty$  и  $l \rightarrow \infty$ . Поэтому приходится прибегнуть к процедуре «обрезания», применение которой однако оправдывается тем, что теория является полуфеноменологической и не претендует на описание явлений при очень малых расстояниях между нуклонами. В связи с этим помимо введенных ранее четырех констант, определяемых из опытов по рассеянию мезонов на нуклонах (см. I), приходится ввести новую константу — константу обрезания — значение которой определяется из каких-либо экспериментальных данных по взаимодействию нуклонов. Есть основания полагать, что эта константа будет иметь одно и то же значение как для синглетного, так и для триплетного состояний системы двух нуклонов. Наиболее удобным представляется вве-

сти обрезание следующим образом. Во все подинтегральные выражения уравнений (5) введем множитель  $e^{-\lambda l}$ , обеспечивающий сходимость интегралов.

Систему интегральных уравнений (5) можно решать только численно. Численное решение значительно упрощается, если исключением двух функций свести её к системе двух уравнений с двумя неизвестными функциями. Это оказывается возможным вследствие того, что в системе (5) функции  $\alpha_{11}(k)$  и  $\alpha_{33}(k)$  выражаются только через  $\alpha_{00}(k)$ . Исключая эти две функции и вводя указанный выше обрезательный множитель, получим

$$\left. \begin{aligned} (W - 2E_k) \alpha_{00}(k) &= \int P_{11}(k, l) \alpha_{00}(l) dl + \int P_{12}(k, l) \alpha_{03}(l) dl, \\ (W - E_k - E_{1k}) \alpha_{03}(k) &= \int P_{21}(k, l) \alpha_{00}(l) dl + \int P_{22}(k, l) \alpha_{03}(l) dl, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_{11}(k, l) &= N_1(k, l) e^{-\lambda l} + e^{-\lambda l} \int_0^{\infty} N_3(k, l') N_7(l', l) e^{-\lambda l'} dl' + \\ &+ e^{-\lambda l} \int_0^{\infty} N_4(k, l') N_8(l', l) e^{-\lambda l'} dl', \\ P_{12}(k, l) &= e^{-\lambda l} N_2(k, l), \quad P_{21}(k, l) = e^{-\lambda l} N_5(k, l), \\ P_{22}(k, l) &= e^{-\lambda l} N_6(k, l). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Последнюю оставшуюся неопределенной константу  $\lambda$  можно определить, например, из сравнения теории с экспериментами по рассеянию протонов на протонах при малых энергиях (где основную роль играет рассматриваемое  ${}^1S_0$  — состояние). После этого критерием правильности теории будет совпадение ее результатов с экспериментальными данными при вычислении энергии связи дейтона и эффективных сечений для рассеянии нуклонов на нуклонах при любых энергиях.

При применении теории к процессам рассеяния проще всего вычислять фазу рассеяния, которая также легко может быть определена из экспериментальных данных [3]. Мы рассматриваем рассеяние протонов на протонах, поэтому в уравнениях (7) нужно добавить член, учитывающий кулоновское взаимодействие между протонами. Тогда эти уравнения примут вид

$$\left. \begin{aligned} (W - 2E_k) \alpha_{00}(k) &= \int P_{11}(k, l) \alpha_{00}(l) dl + \int P_{12}(k, l) \alpha_{03}(l) dl + \\ &+ \int \Phi(k, l) \alpha_{00}(l) dl, \\ (W - E_k - E_{1k}) \alpha_{03}(k) &= \int P_{21}(k, l) \alpha_{00}(l) dl + \int P_{22}(k, l) \alpha_{03}(l) dl. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Последний член в правой части первого уравнения (9) учитывает электромагнитное взаимодействие протонов (электромагнитным взаимодействием в изобарном состоянии пренебрегается). Релятивистские поправки к кулоновским силам при малых энергиях пренебрежимо малы, поэтому для  $\Phi(k, l)$  будем использовать нерелятивистское выражение

$$\frac{e^2}{2\pi} \ln \left( \frac{k+l}{k-l} \right)^2, \quad (10)$$

где  $e$  — заряд электрона. Мы всё время пользуемся единицами, в которых  $\hbar = c = 1$ , в дальнейшем мы и массу протона будем считать равной единице.

Для решения системы уравнений (9) представим функцию в виде

$$\alpha_{00}(k) = p(k) + \beta(q(k) + v(k)), \quad (11)$$

где  $\beta$  — тангенс фазы рассеяния в  $^1S_0$  — состоянии, а функции  $p(k)$  и  $q(k)$  — регулярное и нерегулярное решения дифференциального уравнения в пространстве импульсов, описывающего нерелятивистское кулоновое взаимодействие двух протонов. Эти функции имеют вид

$$p(k) = \frac{\sin\left(\eta \ln \frac{|k - p_0|}{k + p_0}\right)}{k^2 - p_0^2} \cdot \begin{cases} e^{\pi\eta} & (k < p_0) \\ 1 & (k > p_0), \end{cases} \\ q(k) = \frac{\cos\left(\eta \ln \frac{|k - p_0|}{k + p_0}\right)}{k^2 - p_0^2} \cdot \begin{cases} e^{\pi\eta} & (k < p_0) \\ 1 & (k > p_0), \end{cases} \quad (12) \\ \eta = \frac{e^2}{v_0}$$

Здесь  $v_0$  и  $p_0$  соответственно относительная скорость и относительный импульс сталкивающихся протонов в системе центра масс.

Подставляя выражение (11) в систему интегральных уравнений (9) после ряда преобразований получаем следующую систему уравнений для неизвестных волновых функций  $v(k)$  и  $\alpha_{03}(k)$ :

$$\left. \begin{aligned} \beta(W - 2E_k)v(k) &= \beta D(k) - \delta_1(k) - \beta \delta_2(k) + P_1(k) + \beta Q_1(k) + \\ &+ \beta \int \Phi(k, l)v(l) dl + \beta \int P_{11}(k, l)v(l) dl + \int P_{12}(k, l)\alpha_{03}(l) dl, \\ (W - E_k - E_{1k})\alpha_{03}(k) &= P_2(k) + \beta Q_2(k) + \beta \int P_{21}(k, l)v(l) dl + \\ &+ \int P_{22}(k, l)\alpha_{03}(l) dl, \end{aligned} \right\} (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_1(k) &= \int P_{11}(k, l)p(l) dl, & P_2(k) &= \int P_{21}(k, l)p(l) dl, \\ Q_1(k) &= \int P_{11}(k, l)q(l) dl, & Q_2(k) &= \int P_{21}(k, l)q(l) dl, \\ \delta_1(k) &= \{W - 2E_k - [p_0^2 - k^2]\} \cdot p(k), \\ \delta_2(k) &= \{W - 2E_k - [p_0^2 - k^2]\} \cdot q(k), \\ D(k) &= \int \Phi(k, l)q(l) dl - (p_0^2 - k^2)q(k) \end{aligned} \right\} (14)$$

Полагая в первом из уравнений (13)  $k = p_0$ , определяем тангенс фазы рассеяния  $\beta$  через функции  $v(k)$  и  $\alpha_{03}(k)$ :

$$\beta = - \frac{P_1(p_0) + \int P_{12}(p_0, l)\alpha_{03}(l) dl}{D(p_0) + Q_1(p_0) + \int \Phi(p_0, l)v(l) dl + \int P_{11}(p_0, l)v(l) dl} \quad (15)$$

Далее система уравнений (13) решается методом последовательных приближений следующим образом. В нулевом приближении выбираем некоторое  $v(k)$ , а  $\alpha_{03}(k)$  полагаем равным нулю. Далее из соотношения (15) находим в нулевом приближении  $\beta$ , после чего из второго уравнения (13) находим в первом приближении функцию  $\alpha_{03}(k)$ . Функция  $v(k)$  в первом приближении определяется из первого уравнения (13) и т. д.

Приведенный выше метод вычисления фазы рассеяния протонов на протонах из интегральных уравнений в пространстве импульсов несколько отличается от обычно используемых, однако, как показали непосредственные расчёты в случае, когда взаимодействие описывается одним интегральным уравнением, он дает быстро сходящиеся результаты. Поэтому можно надеяться, что и в случае системы интегральных уравнений результаты также будут быстро сходиться. Получение окончательных численных результатов ввиду громадного объёма вычислительной работы представляется возможным только с помощью электронных счётных машин.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Ядра интегральных уравнений (5) имеют следующий вид:

$$N_1(k, l) = \frac{1}{2} \frac{g^2}{\pi \mu^2} \overset{\succ}{s'} \overset{\succ}{s''} kl \left\{ 2(\pi_1^2 + \pi_2^2) + y_0(00) (\pi_1^2 + \pi_2^2) + y_1(00) (\pi_1^2 - \pi_2^2) - \right. \\ \left. - j_0(00) [\pi_3^2 (1-k)^2 + \pi_4^2 (1+k)^2] - j_1(00) [\pi_3^2 (1-k)^2 - \pi_4^2 (1+k)^2] - \right. \\ \left. - F^2 j_0(00) (\pi_1^2 + \pi_2^2) - F^2 j_1(00) (\pi_2^2 - \pi_1^2) + F j_0(00) [\pi_1 \pi_4 (1+k) + \right. \\ \left. + \pi_2 \pi_3 (1-k)] + F j_1(00) [\pi_2 \pi_3 (1-k) - \pi_1 \pi_4 (1+k)] \right\},$$

$$N_2(k, l) = \frac{1}{2} \frac{gg_1}{\pi \mu^2} \overset{\succ}{s''} \overset{\succ}{s'} \frac{kl^2}{M_1} \frac{V\sqrt{2}}{V\sqrt{3}} \left\{ 4 (\pi_1 \pi_5 + \pi_2 \pi_6) + [y_0(00) + y_0(01)] (\pi_1 \pi_5 + \right. \\ \left. + \pi_2 \pi_6) + [y_1(00) + y_1(01)] (\pi_1 \pi_5 - \pi_2 \pi_6) - [K_0(00) - \right. \\ \left. - K_0(01)] [\pi_3 \pi_5 (1-k) + \pi_4 \pi_6 (1+k)] - [K_1(00) - K_1(01)] [\pi_3 \pi_5 (1-k) - \right. \\ \left. - \pi_4 \pi_6 (1+k)] + F [K_0(00) - K_0(01)] (\pi_2 \pi_6 + \pi_1 \pi_5) + F [K_1(00) + \right. \\ \left. + K_1(01)] (\pi_2 \pi_6 - \pi_1 \pi_5) \right\},$$

$$N_3(k, l) = \frac{1}{4} \frac{g_1^2}{\pi \mu^2} \overset{\succ}{s'} \overset{\succ}{s''} k^3 l \left\{ j_0(01) (\pi_5^2 + \pi_6^2) + j_1(01) (\pi_5^2 - \pi_6^2) - \right. \\ \left. - j_2(01) (\pi_5^2 + \pi_6^2) - j_3(01) (\pi_5^2 - \pi_6^2) \right\},$$

$$N_4(k, l) = \frac{1}{6} \frac{g_1^2}{\pi \mu^2} \overset{\succ}{s'} \overset{\succ}{s''} kl \left\{ \frac{4l^2}{M_1^2} (\pi_5^2 + \pi_6^2) + \frac{2l^2}{M_1^2} y_0(01) (\pi_5^2 + \pi_6^2) + \right. \\ \left. + \frac{2l^2}{M_1^2} y_1(01) (\pi_5^2 - \pi_6^2) + j_0(01) (\pi_5^2 + \pi_6^2) \left( \frac{k^2}{2} + 2l^2 \frac{E_{1l}^2}{M_1^2} \right) + \right. \\ \left. + j_1(01) \left[ -4kl \frac{E_{1l}^2}{M_1^2} (\pi_5^2 + \pi_6^2) + (\pi_5^2 - \pi_6^2) \left( \frac{k^2}{2} + 2l^2 \frac{E_{1l}^2}{M_1^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + j_2(01) \left[ (\pi_5^2 + \pi_6^2) \left( -\frac{k^2}{2} + 2k^2 \frac{E_{1l}^2}{M_1^2} \right) - 4kl \frac{E_{1l}^2}{M_1^2} (\pi_5^2 - \pi_6^2) \right] + \right. \\ \left. + j_3(01) (\pi_5^2 - \pi_6^2) \left( -\frac{k^2}{2} + 2k^2 \frac{E_{1l}^2}{M_1^2} \right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
 N_5(k, l) = & \frac{1}{8} \frac{g_{S_1}^2}{\pi^2} \overset{\triangleright}{s''} \overset{\triangleright}{s'} kl \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left\langle [j_0(00) + j_0(10)] \left\{ (k+1) \pi_4 \left[ k\pi_7 + \right. \right. \right. \\
 & + (k-1) \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \left. \left. \left. - (1-k) \pi_3 \left[ k\pi_8 + (k+1) \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \right\} + [j_1(00) + \right. \right. \\
 & + j_1(10)] \left\{ - (1+k)^2 \pi_4 \left[ \pi_7 + \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] + (1-k)^2 \pi_3 \left[ \pi_8 + \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \right\} + \\
 & + [j_2(00) + j_2(10)] \left\{ 1(1+k) \pi_4 \left[ \pi_7 + 2\pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] + 1(1- \right. \\
 & - k) \pi_3 \left[ \pi_8 + 2\pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \right\} + [K_0(00) - K_0(10)] \left\{ \pi_2 \left[ k\pi_7 + (k-1) \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] - \right. \\
 & - \pi_1 \left[ k\pi_8 + (k+1) \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] - \frac{k}{M_1} (1+k) \pi_4 \pi_8 + \frac{k}{M_1} (1-k) \pi_3 \pi_7 \left. \right\} + \\
 & + [K_1(00) - K_1(10)] \left\{ - \pi_2 (k+1) \left[ \pi_7 + \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] - \pi_1 (k-1) \left[ \pi_8 + \right. \right. \\
 & + \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \left. \right] + \frac{k}{M_1} (1+k) \pi_4 \pi_8 + \frac{k}{M_1} (1-k) \pi_3 \pi_7 \left. \right\} + [K_2(00) - \\
 & - K_2(10)] \left\{ 1\pi_2 \left[ \pi_7 + 2\pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] - 1\pi_1 \left[ \pi_8 + 2\pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \right\} + \frac{4k}{M_1} (\pi_1 \pi_7 - \pi_2 \pi_8) + \\
 & + \frac{k}{M_1} [y_0(00) + y_0(10)] (\pi_1 \pi_7 - \pi_2 \pi_8) + \frac{k}{M_1} [y_1(00) + y_1(10)] (\pi_1 \pi_7 + \\
 & + \pi_2 \pi_8) - F[j_0(00) + j_0(10)] \left\{ \pi_1 \left[ k\pi_7 + (k-1) \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] - \pi_2 \left[ k\pi_8 + \right. \right. \\
 & + (k+1) \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \left. \right\} - F[j_1(00) + j_1(10)] \left\{ - (k+1) \pi_1 \left[ \pi_7 + \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] - \right. \\
 & - (k-1) \pi_2 \left[ \pi_8 + \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left. \right\} - F[j_2(00) + j_2(10)] \left\{ 1\pi_1 \left[ \pi_7 + 2\pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] + \right. \\
 & + 1\pi_2 \left[ \pi_8 + 2\pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left. \right\} - F[K_0(00) - K_0(10)] \frac{k}{M_1} (\pi_2 \pi_7 - \pi_1 \pi_8) - \\
 & - F[K_1(00) - K_1(10)] \frac{k}{M_1} (\pi_2 \pi_7 + \pi_1 \pi_8) \left. \right\rangle,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_6(k, l) = & \frac{1}{24} \frac{g_{S_1}^2}{\pi^2} \overset{\triangleright}{s'} \overset{\triangleright}{s''} kl \left\langle [j_0(00) + j_0(11)] \left\{ \left[ k\pi_7 + (k-1) \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left[ k\pi_5 - \right. \right. \right. \\
 & - 2l\pi_6 \frac{E_{1l}}{M_1} \left. \left. \left. + \left[ k\pi_8 + (k+1) \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left[ k\pi_6 + 2l\pi_5 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] \right\} + \right. \\
 & + [j_1(00) + j_1(11)] \left\{ - (k+1) \left[ \pi_7 + \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left[ k\pi_5 - 2l\pi_6 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] + \right. \\
 & + (k-1) \left[ \pi_8 + \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left[ k\pi_6 + 2l\pi_5 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] + \left[ k\pi_7 + (k-1) \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left[ k\pi_5 + \right. \\
 & + 2k\pi_6 \frac{E_{1l}}{M_1} \left. \right] - \left[ k\pi_8 + (k-1) \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left[ k\pi_6 + 2k\pi_5 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] \left. \right\} + [j_2(00) + \\
 & + j_2(11)] \left\{ - (k+1) \left[ \pi_7 + \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left[ k\pi_5 + 2k\pi_6 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] - (k-1) \left[ \pi_8 + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \left[ k\pi_6 + 2k\pi_5 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] + 1 \left[ \pi_7 + 2\pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left[ k\pi_5 - 2l\pi_6 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] - \\
& - 1 \left[ \pi_8 + 2\pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left[ k\pi_6 + 2l\pi_5 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] + [j_3(00) + j_3(11)] \left\{ kl \left[ \pi_7 + \right. \right. \\
& + 2\pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \left. \right] \left[ \pi_5 + 2\pi_6 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] + kl \left[ \pi_8 + 2\pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left[ \pi_6 + 2\pi_5 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] \left. \right\} + [K_0(00) - \\
& - K_0(11)] \left\{ - \frac{k}{M_1} \pi_8 \left[ k\pi_5 - 2l\pi_6 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] - \frac{k}{M_1} \pi_7 \left[ k\pi_6 + 2l\pi_5 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] + \right. \\
& + \frac{2l}{M_1} \pi_6 \left[ k\pi_7 + (k-1) \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] - \frac{2l}{M_1} \pi_5 \left[ k\pi_8 + (k+1) \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left. \right\} + \\
& + [K_1(00) - K_1(11)] \left\{ - 2 \frac{k(k+1)}{M_1} \pi_6 \pi_8 \frac{E_{1l}}{M_1} + 2 \frac{k(k-1)}{M_1} \pi_5 \pi_7 \frac{E_{1l}}{M_1} - \right. \\
& - \frac{2l}{M_1} (k+1) \pi_6 \left[ \pi_7 + \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] - \frac{2l}{M_1} (k-1) \pi_5 \left[ \pi_8 + \pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left. \right\} + \\
& + [K_2(00) - K_2(11)] \left\{ \frac{k^2}{M_1} \pi_8 \left[ \pi_5 + 2\pi_6 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] + \frac{k^2}{M_1} \pi_7 \left[ \pi_6 + 2\pi_5 \frac{E_{1l}}{M_1} \right] + \right. \\
& + \frac{2l^2}{M_1} \pi_6 \left[ \pi_7 + 2\pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] + \frac{2l^2}{M_1} \pi_5 \left[ \pi_8 + 2\pi_7 \frac{E_{1k}}{M_1} \right] \left. \right\} + \frac{8kl}{M_1^2} (\pi_5 \pi_7 - \pi_6 \pi_8) + \\
& + \frac{2kl}{M_1^2} [y_0(00) + y_0(11)] (\pi_5 \pi_7 - \pi_6 \pi_8) + \frac{2kl}{M_1^2} [y_1(00) + \\
& + y_1(11)] (\pi_5 \pi_7 + \pi_6 \pi_8) \left. \right\} >,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_7(k, l) = \frac{1}{4} \frac{g_1^2}{\pi_1^2} \overset{\rightarrow}{s'} \overset{\rightarrow}{s''} kl^3 \{ j_0(10) (\pi_7^2 + \pi_8^2) + j_1(10) (\pi_7^2 - \pi_8^2) - \\
- j_2(10) (\pi_7^2 + \pi_8^2) - j_3(10) (\pi_7^2 - \pi_8^2) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_8(k, l) = - \frac{1}{12} \frac{g_1^2}{\pi_1^2} \overset{\rightarrow}{s'} \overset{\rightarrow}{s''} kl \left\langle - \frac{4k^2}{M_1^2} (\pi_7^2 + \pi_8^2) - \frac{2k^2}{M_1^2} y_0(10) (\pi_7^2 + \pi_8^2) - \right. \\
- \frac{2k^2}{M_1^2} y_1(10) (\pi_7^2 - \pi_8^2) + j_0(10) \left\{ k\pi_7^2 \left[ 1 - 2(k+1) \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} \right] - \right. \\
- k\pi_8^2 \left[ 1 + 2(k-1) \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} \right] - 2(l^2 + 2k^2) \pi_7 \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \left. \right\} + j_1(10) \left\{ - 2k(k-1) \pi_7^2 \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} - \right. \\
- l\pi_7^2 \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} - l\pi_7^2 \left[ 1 - 2(k+1) \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} \right] + 2k(k+1) \pi_8^2 \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} + \\
+ l\pi_8^2 \left[ 1 - 2(k-1) \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} \right] + 8kl \pi_7 \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \left. \right\} + j_2(10) \left\{ - kl\pi_7^2 \left( 1 - 4 \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} \right) + \right. \\
+ 2l(k-1) \pi_7^2 \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} + kl\pi_8^2 \left( 1 - 4 \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} \right) - 2l(k+1) \pi_8^2 \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} - 2l^2 \pi_7 \pi_8 \frac{E_{1k}}{M_1} \left. \right\} + \\
+ j_3(10) \left\{ l^2 \pi_7^2 \left( 1 - 4 \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} \right) - l^2 \pi_8^2 \left( 1 - 4 \frac{E_{1k}^2}{M_1^2} \right) \right\} \left. \right\rangle >
\end{aligned}$$

Здесь  $\mu$  — масса мезона,  $g$ ,  $\tilde{g}$  и  $g_1$  — константы взаимодействия соответственно невозбужденного нуклона с мезонным полем при псевдовекторной и псевдоскалярной связи и изобара с мезонным полем, обуславливающего переходы из изобарного состояния в невозбужденное и обратно,  $F = \frac{\mu \tilde{g}}{g}$ ,  $\tau$  — оператор изотопического спина,  $s$  и  $s_1$  — операторы в изотопическом пространстве, переводящие соответственно невозбужденное состояние в изобарное и изобарное в невозбужденное,

$$\begin{aligned} \pi_1 &= A_k A_l [(E_k + M)l + (E_l + M)k], \\ \pi_2 &= A_k A_l [(E_k + M)l + (E_l - M)k], \\ \pi_3 &= A_k A_l [(E_k + M)(E_l + M) + kl], \\ \pi_4 &= A_k A_l [(E_k + M)(E_l + M) - kl], \\ \pi_5 &= A_k A_{l1} [(E_k + M)(E_{l1} + M_1) - kl], \\ \pi_6 &= A_k A_{l1} [(E_k + M)(E_{l1} + M_1) + kl], \\ \pi_7 &= A_{1k} A_l [(E_{1k} + M_1)(E_l + M) - kl], \\ \pi_8 &= A_{1k} A_l [(E_{1k} + M_1)(E_l + M) + kl], \end{aligned}$$

$$j_n(ik) = \int_0^\pi \frac{\cos^n \gamma \sin \gamma d\gamma}{\varepsilon(c_{ik} - \varepsilon)},$$

$$y_n(ik) = \int_0^\pi \frac{\varepsilon}{c_{ik} - \varepsilon} \cos^n \gamma \sin \gamma d\gamma,$$

$$K_n(ik) = \int_0^\pi \frac{\cos^n \gamma \sin \gamma d\gamma}{c_{ik} - \varepsilon},$$

$$\begin{aligned} c_{00} &= W - E_k - E_l, & c_{01} &= W - E_k - E_{l1}, \\ c_{10} &= W - E_{1k} - E_l, & c_{11} &= W - E_{1k} - E_{l1}, \end{aligned}$$

величина

$$\varepsilon = \sqrt{\mu^2 + k^2 + l^2 - 2kl \cos \gamma}$$

представляет энергию мезона с импульсом  $\vec{k} - \vec{l}$ , а  $W$  — полную энергию системы двух нуклонов.

Кафедра теоретической физики

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1]. И. Е. Тамм, Ю. А. Гольфанд, В. Я. Файнберг, ЖЭТФ, 26, 649, 1954.  
 [2]. П. Е. Куниш и И. М. Таксар, Изв. АН Латв. ССР.  
 [3]. G. Breit, H. Thaxton and L. Eisenbud, Phys. Rev., 55, 1018, 1939.



NUKLONU IZKLIEDE MAZU ENERĢIJU GADIJUMĀ,  
IEVĒROJOT IZOBARUS STĀVOKĻUS*P. J. Kuņins un I. M. Taksars*

(Kopsavilkums)

Vienā no iepriekšējiem autoru darbiem [2] dota integralvienādojumu sistēma, kura stingri relativistiski apraksta nuklonu mijiedarbību ar I. Tamma un līdzstrādnieku izobarās teorijas palīdzību. Šajā darbā ir parādīts, kādā veidā šajā sistēmā jāintegrē pēc leņķu mainīgiem, kā arī dota metode p-p izkliedes fāzes iegūšanai  ${}^1S_0$ -stāvokļim.

## ВОЗБУЖДЕНИЕ АТОМА НАТРИЯ ЭЛЕКТРОННЫМ УДАРОМ

В. Я. ВЕЛЬДРЕ

В 1953 г. Г. Ф. Друкарев рассмотрел задачу о возбуждении атома водорода медленными электронами с помощью методов применяемых в теории интегральных уравнений [1]. В работе [2] этот метод обобщен на случай многоэлектронного атома.

При рассмотрении возбуждения атома Na медленными электронами в [2] были сделаны следующие приближения:

- 1) пренебрегалось обменным взаимодействием падающего и невалентных электронов;
- 2) пренебрегалось влиянием возбужденного состояния на упругое рассеяние;
- 3) принималось, что после рассеяния электрон не влияет на возбуждение атома.

Целью настоящей работы является рассмотрение взаимодействия медленных электронов с атомами натрия более точно, чем это было сделано в [2]. Основным приближением в данной работе является сведение многоэлектронной задачи к задаче движения двух электронов (падающего и валентного) в заданном самосогласованном поле ядра и невалентных электронов. Кроме того в падающей волне пренебрегается  $p$  — компонентой, что совершенно естественно в случае медленных электронов.

В работе используются атомные единицы  $\hbar = m = e = 1$ .

Задача ставится совершенно так же, как и в [2], но для учета обменного взаимодействия падающего и валентного электронов с невалентными, к оператору энергии электрона добавляется оператор обменной энергии  $\hat{A}$ :

$$\hat{A}\psi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1)$$

здесь

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}') \quad (2)$$

плотность электрического заряда роя невалентных электронов<sup>1</sup>. Волновая функция системы падающего и валентного электронов в поле ядра и невалентных электронов удовлетворяет уравнению

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (3)$$

где  $E$  — полная энергия падающего и валентного электронов.

$$\hat{H} = \hat{H}(\mathbf{r}_1) + \hat{H}(\mathbf{r}_2) + \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (4)$$

<sup>1</sup> Список обозначений дается в конце работы.

Оператор энергии электрона в поле ядра и невалентных электронов  $\hat{H}(\mathbf{r})$  действует на волновую функцию  $\psi(\mathbf{r})$  следующим образом

$$\hat{H}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \Delta \psi(\mathbf{r}) - \frac{Z}{r} \psi(\mathbf{r}) + 2\psi(\mathbf{r}) \int \frac{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}^1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^1|} d\mathbf{r}^1 - \hat{A} \psi(\mathbf{r}) \quad (5)$$

Решение уравнения

$$\hat{H}(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}) = \varepsilon_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{r}) \quad (6)$$

считается известным.

Координатную часть волновой функции системы можно представить в виде ряда

$$\Psi^{(\sigma)}(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) = \sum_{\alpha} [f_{\alpha}^{(\sigma)}(\mathbf{r}_1) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_2) \pm f_{\alpha}^{(\sigma)}(\mathbf{r}_2) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1)] \quad (7)$$

Индекс  $\sigma$  показывает суммарный спин системы, причем верхний знак берется в случае  $\sigma = 0$ , а нижний в случае  $\sigma = 1$ . В дальнейшем изложении индекс  $\sigma$  будет всюду опущен, а все формулы будут выписаны для  $\sigma = 0$ . В случае  $\sigma = 1$  решение находится без затруднений.

Так как  $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$  известно, то для нахождения  $\Psi(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2)$  достаточно найти  $f_{\alpha}(\mathbf{r})$ . Уравнения для  $f_{\alpha}(\mathbf{r})$  получаются после подстановки (4) и (7) в (3) с учетом (1), (2), (5) и (6). После обычных преобразований и разделения переменных (см. [2]) получим уравнения для радиальных функций  $f_{nljm}(r)$ . В случае перехода  $3S - 3P$  вместо уравнений (11) и (12) работы [2] будем иметь систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr^2} + k_0^2 \right) f_0(r) &= V_0(r) f_0(r) + V_{1m}(r) f_{1m}(r) + \\ &+ \int_0^{\infty} f_0(r^1) U_0(r, r^1) dr^1 + \int_0^{\infty} f_{1m}(r^1) U_{1m}(r, r^1) dr^1 \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + k_1^2 - \frac{2}{r^2} \right) f_{1m}(r) &= V_{0m}(r) f_0(r) + V_1(r) f_{1m}(r) + \\ &+ \int_0^{\infty} f_0(r^1) U_{0m}(r, r^1) dr^1 + \int_0^{\infty} f_{1m}(r^1) U_1(r, r^1) dr^1 \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $f_0(r) = f_{3000}(r)$ ,  $f_{1m}(r) = f_{311m}(r)$ , остальные обозначения даны в конце работы. Система интегро-дифференциальных уравнений (8) с граничными условиями

$$f_{\alpha}(0) = 0, \quad \left. \frac{df_0(r)}{dr} \right|_{r=0} = \alpha_1, \quad \left. \frac{df_{1m}(r)}{dr^2} \right|_{r=0} = \alpha_7^m$$

сводится к системе интегральных уравнений (см. [2]),

$$f_0(r) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i q_i(r) + \int_0^r f_0(x) K_{10}(r, x) dx + \int_0^r f_{1m}(x) K_{11}^m(r, x) dx \quad (9)$$

$$f_{1m}(r) = \sum_{i=7}^{12} \alpha_i^m \varphi_i(r) + \int_0^r f_0(x) K_{20}^m(r, x) dx + \int_0^r f_{1m}(x) K_{21}(r, x) dx,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -2 \int_0^\infty f_0(x) u_{10}(x) \frac{dx}{x}, & \alpha_3 &= -2 \int_0^\infty f_0(x) u_{20}(x) \frac{dx}{x}, \\ \alpha_4 &= -\frac{2}{3} \int_0^\infty f_0(x) u_{21}(x) \frac{dx}{x^2}, & \alpha_6 &= A_m \int_0^\infty f_{1m}(x) u_{30}(x) \frac{dx}{x^2}, \\ \alpha_5 &= 2 \int_0^\infty f_0(x) u_{30}(x) \left( \frac{1}{x} + \varepsilon_0 - \frac{k_0^2}{2} \right) dx, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\alpha_8^m = -\frac{2}{3} \int_0^\infty f_{1m}(x) u_{10}(x) \frac{dx}{x^2}, \quad \alpha_9^m = -\frac{2}{3} \int_0^\infty f_{1m}(x) u_{20}(x) \frac{dx}{x^2},$$

$$\alpha_{10}^m = -2 \int_0^\infty f_{1m}(x) u_{21}(x) \frac{dx}{x}, \quad \alpha_{11}^m = B_m \int_0^\infty f_0(x) u_{31}(x) \frac{dx}{x^2},$$

$$\alpha_{12}^m = 2 \int_0^\infty f_{1m}(x) u_{31}(x) \left( \frac{1}{x} + \varepsilon_1 - \frac{k_1^2}{2} \right) dx$$

С помощью линейного преобразования

$$f_0 = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m X_i^m(r) \tag{11}$$

$$f_{1m} = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m Y_i^m(r)$$

уравнения (9) преобразуются к системе интегральных уравнений, решение которой в первом приближении имеет вид

$$X_i^m(r) = \varphi_i(r) + \int_0^r K_1^m(r, x) \varphi_i(x) dx \quad (i = 1 - 6)$$

$$X_i^m(r) = \int_0^r K_1^m(r, x) \varphi_i(x) dx \quad (i = 7 - 12) \tag{12}$$

$$Y_i^m(r) = \int_0^r K_2^m(r, x) \varphi_i(x) dx \quad (i = 1 - 6)$$

$$Y_i^m(r) = \varphi_i(r) + \int_0^r K_2^m(r, x) \varphi_i(x) dx \quad (i = 7 - 12)$$

Подставляя (12) и (11) в (10) получаем систему алгебраических уравнений для нахождения  $\alpha_i$ ;

$$\sum_{i=1}^{12} \alpha_{ni}^m \alpha_i^m = 0 \quad (n=1, 2, \dots, 10) \quad (13)$$

$\alpha_{ni}^m$  см. в списке обозначений.)

Далее подстановкой (12) в (11) получаем

$$\begin{aligned} f_0(r) &= \sum_{i=1}^6 \alpha_i \varphi_i(r) + \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m R_{1i}^m(r) \\ f_{1m}(r) &= \sum_{i=7}^{12} \alpha_i^m \varphi_i(r) + \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m R_{2i}^m(r) \end{aligned} \quad (14)$$

Как легко видеть (14) можно представить в виде

$$\begin{aligned} f_0(r) &= \frac{\sin k_0 r}{k_0} \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m F_{1i}^m(r) - \frac{\cos k_0 r}{k_0} \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m F_{2i}^m(r) \\ f_{1m}(r) &= \frac{\sin k_1 r}{k_1} \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m F_{3i}^m(r) - \frac{\cos k_1 r}{k_1} \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m F_{4i}^m(r) \end{aligned} \quad (15)$$

Сравнивая асимптотический вид выражений (15) с асимптотическим видом радиальных функций, представленных в виде суперпозиции падающей и рассеянной волны, получим недостающие алгебраические уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m (b_{1i}^m + ic_{1i}^m) &= 2 \\ \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m (b_{2i}^m + ic_{2i}^m) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

а также формулы для нахождения эффективных сечений упругого рассеяния и возбуждения уровня ЗР атома натрия.

$$\begin{aligned} q_{\text{упр}} &= \frac{\pi}{4k_0^2} \sum_m \left| \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m (b_{1i}^m - ic_{1i}^m) \right|^2 \\ q_{\text{возб}} &= \frac{3\pi}{2k_0 k_1} \sum_m (1 + |m|) \left| \sum_{i=1}^{12} \alpha_i^m (b_{2i}^m - ic_{2i}^m) \right|^2 \end{aligned} \quad (17)$$

(Коэффициенты  $b_{ik}^m$  и  $c_{ik}^m$  см. в списке обозначений.)

Таким образом решение задачи о нахождении упругого рассеяния и возбуждения атома натрия медленными электронами сводится к численному нахождению интегралов  $a_{ik}^m$ ,  $b_{ik}^m$  и  $c_{ik}^m$ , решению системы алгебраических уравнений (13), (16) и нахождению по формулам (17)  $q_{\text{упр}}$  и  $q_{\text{возб}}$ .

Нужно отметить, что при нахождении коэффициентов  $a_{ik}^m$ ,  $b_{ik}^m$  и  $c_{ik}^m$ , встречаются значительные вычислительные трудности. В большинстве случаев эти коэффициенты (общее число их — 168) являются тройными интегралами. Найти их удаётся только после неоднократной замены порядка интегрирования.

Численные расчёты были проведены для случая, когда энергия падающего электрона

$$\frac{k_0^2}{2} = 0,18 \text{ ат. ед.} = 4,88 \text{ эВ.}$$

Исходные данные были взяты с точностью до четырех значащих цифр. Расчёты проводились на электрическом арифмометре. Нахождение каждого из 168 коэффициентов требовало большой работы. Работа включала большое количество операций, в которых терялась точность. Результат был получен только по порядку величины. Порядок рассчитанной величины эффективного сечения совпадает с порядком полученной в опытах Гафта и Кристофа [3], [4].

Получение более точных результатов ввиду сложности численных расчётов, очевидно, возможно только с применением быстродействующих счетных машин.

Кафедра теоретической физики

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Друкарев Г. Ф. ЖЭТФ 25, 129 (1953).  
 [2]. Вельдре В. Я. Изв. АН Латв. ССР, 5, 105 (1956).  
 [3]. Haft Z. Phys. 82, 73 (1933).  
 [4]. Christoph Ann. Phys. 23, 51 (1935).

Список обозначений

$\frac{k_0^2}{2}$  и  $\frac{k_1^2}{2}$  — энергия падающего и рассеянного электронов соответственно.

$$V_0(r) = 2 \int_0^\infty [2\varrho(r^1, r^1) + |\psi_{30}(r^1)|^2] \left( \frac{1}{|r-r^1|} - \frac{1}{r} \right) dr^1$$

$$V_1(r) = 2 \int_0^\infty [2\varrho(r^1, r^1) + |\psi_{31}(r^1)|^2] \left( \frac{1}{|r-r^1|} - \frac{1}{r} \right) dr^1$$

$\psi_{30}(r)$  и  $\psi_{31}(r)$  — волновые функции атомного электрона в состояниях 3S и 3P

$$V_{1m}(r) = A_m \int_0^\infty u_{30}(r^1) u_{31}(r^1) \gamma_1(r, r^1) dr^1$$

$$V_{0m}(r) = B_m \int_0^\infty u_{30}(r^1) u_{31}(r^1) \gamma_1(r, r^1) dr^1$$

$$U_0(r, r^1) = -2 [u_{10}(r) u_{10}(r^1) + u_{20}(r) u_{20}(r^1)] \gamma_0(r, r^1) - \\ - \frac{2}{3} u_{21}(r) u_{21}(r^1) \gamma_1(r, r^1) + \\ + 2u_{30}(r) u_{30}(r^1) \left[ \varepsilon_0 - \frac{k_0^2}{2} + \gamma_0(r, r^1) \right]$$

$$U_{1m}(r, r^1) = A_m u_{31}(r) u_{30}(r^1) \gamma_1(r, r^1)$$

$$U_{0m}(r, r^1) = B_m u_{30}(r) u_{31}(r^1) \gamma_1(r, r^1)$$

$$U_1(r, r^1) = -\frac{2}{3} [u_{10}(r)u_{10}(r^1) + u_{20}(r)u_{20}(r^1)] \gamma_1(r, r^1) - \\ - 2u_{12}(r)u_{21}(r^1) \gamma_0(r, r^1) + \\ + 2u_{31}(r)u_{31}(r^1) \left[ \varepsilon_1 - \frac{k_1^2}{2} + \gamma_0(r, r^1) \right]$$

$\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_1$  — энергия основного и возбужденного состояния атома.

$u_{ik}(r)$  — радиальные волновые функции атомных электронов

$$u_{10}(r) = 69,804r e^{-10,68r}$$

$$u_{20}(r) = 13,602(1 - 4,9667r)r e^{-4,22r}$$

$$u_{21}(r) = 26,226r^2 e^{-3,49r}$$

$$u_{30}(r) = 0,17040(1 - 5,2676r + 4,0127r^2)r e^{-r}$$

$$u_{31}(r) = -0,19719(1 - 0,8380r)r^2 e^{-0,7r}$$

$$\gamma_n(r, r^1) = \begin{cases} \frac{r^n}{r^{1n+1}} & r \leq r^1 \\ \frac{r^{1n}}{r^{n+1}} & r \geq r^1 \end{cases}$$

$$A_m = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1+m)!}{(1-m)!}},$$

$$B_m = \frac{2}{3\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(1-m)!}{(1+m)!}}$$

$$q_1(r) = \frac{\sin k_0 r}{k_0}$$

$$q_2(r) = \frac{1}{k_0} \int_0^r \sin k_0(r-x) u_{10}(x) dx$$

$$q_3(r) = \frac{1}{k_0} \int_0^r \sin k_0(r-x) u_{20}(x) dx$$

$$q_4(r) = \frac{1}{k_0} \int_0^r \sin k_0(r-x) u_{21}(x) dx$$

$$q_5(r) = \frac{1}{k_0} \int_0^r \sin k_0(r-x) u_{30}(x) dx$$

$$q_6(r) = \frac{1}{k_0} \int_0^r \sin k_0(r-x) u_{31}(x) dx$$

$$q_7(r) = \frac{3}{2k_1^2} \left( \frac{\sin k_1 r}{k_1 r} - \cos k_1 r \right)$$

$$q_8(r) = \int_0^r H(r, x) u_{10}(x) dx$$

$$\varphi_9(r) = \int_0^r H(r, x) u_{20}(x) x dx$$

$$\varphi_{10}(r) = \int_0^r H(r, x) u_{21}(x) dx$$

$$\varphi_{11}(r) = \int_0^r H(r, x) u_{30}(x) x dx$$

$$\varphi_{12}(r) = \int_0^r H(r, x) u_{31}(x) dx$$

$$H(r, x) = \frac{\sin k_1(r-x)}{k_1} \left( \frac{1}{k_1^2 r x} - 1 \right) + \frac{\cos k_1(r-x)}{k_1^2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right)$$

$$K_{10}(r, x) = \frac{\sin k_0(r-x)}{k_0} V_0(x) + 2 \int_x^r \frac{\sin k_0(r-t)}{k_0} \left\{ [u_{10}(x) u_{10}(t) + \right. \\ \left. + u_{20}(x) u_{20}(t) - u_{30}(x) u_{30}(t)] \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{3} u_{21}(x) u_{21}(t) \left( \frac{t}{x^2} - \frac{x}{t^2} \right) \right\} dt$$

$$K_{11}^m(r, x) = \frac{\sin k_0(r-x)}{k_0} V_{1m}(x) - A_m u_{30}(x) \int_x^r \frac{\sin k_0(r-t)}{k_0} u_{31}(t) \left( \frac{t}{x^2} - \frac{x}{t^2} \right) dt$$

$$K_{20}^m(r, x) = H(r, x) V_{0m}(x) - B_m u_{31}(x) \int_x^r H(r, t) u_{30}(t) \left( \frac{t}{x^2} - \frac{x}{t^2} \right) dt$$

$$K_{21}(r, x) = H(r, x) V_1(x) + 2 \int_x^r H(r, t) \left\{ \frac{1}{3} [u_{10}(x) u_{10}(t) + \right. \\ \left. + u_{20}(x) u_{20}(t)] \left( \frac{t}{x^2} - \frac{x}{t^2} \right) + [u_{21}(x) u_{21}(t) - u_{31}(x) u_{31}(t)] \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{t} \right) \right\} dt$$

$$K_1^m(r, x) = K_{10}(r, x) + K_{11}^m(r, x)$$

$$K_2^m(r, x) = K_{20}^m(r, x) + K_{21}(r, x)$$

$$a_{1i}^m = 2 \int_0^\infty u_{10}(t) P_{1i}^m(t) \frac{dt}{t} + \delta_{2i} \quad (i = 1 - 6)$$

$$a_{1i}^m = 2 \int_0^\infty u_{10}(t) R_{1i}^m(t) \frac{dt}{t} \quad (i = 7 - 12)$$

$$a_{2i}^m = 2 \int_0^\infty u_{20}(t) P_{1i}^m(t) \frac{dt}{t} + \delta_{3i} \quad (i = 1 - 6)$$

$$a_{2i}^m = 2 \int_0^\infty u_{20}(t) R_{1i}^m(t) \frac{dt}{t} \quad (i = 7 - 12)$$



$$a_{3i}^m = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} u_{21}(t) P_{1i}^m(t) \frac{dt}{t^2} + \delta_{4i} \quad (i = 1 - 6)$$

$$a_{3i}^m = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} u_{21}(t) R_{1i}^m(t) \frac{dt}{t^2} \quad (i = 7 - 12)$$

$$a_{4i}^m = 2 \int_0^{\infty} u_{30}(t) \left( \frac{1}{t} + \varepsilon_0 - \frac{k_0^2}{2} \right) P_{1i}^m(t) dt - \delta_{5i} \quad (i = 1 - 6)$$

$$a_{4i}^m = 2 \int_0^{\infty} u_{30}(t) \left( \frac{1}{t} + \varepsilon_0 - \frac{k_0^2}{2} \right) R_{1i}^m(t) dt \quad (i = 7 - 12)$$

$$a_{5i}^m = A_m \int_0^{\infty} u_{30}(t) R_{2i}^m(t) \frac{dt}{t^2} - \delta_{6i} \quad (i = 1 - 6)$$

$$a_{5i}^m = A_m \int_0^{\infty} u_{30}(t) P_{2i}^m(t) \frac{dt}{t} \quad (i = 7 - 12)$$

$$a_{6i}^m = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} u_{10}(t) R_{2i}^m(t) \frac{dt}{t^2} \quad (i = 1 - 6)$$

$$a_{6i}^m = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} u_{10}(t) P_{2i}^m(t) \frac{dt}{t^2} + \delta_{8i} \quad (i = 7 - 12)$$

$$a_{7i}^m = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} u_{20}(t) R_{2i}^m(t) \frac{dt}{t^2} \quad (i = 1 - 6)$$

$$a_{7i}^m = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} u_{20}(t) P_{2i}^m(t) \frac{dt}{t^2} + \delta_{9i} \quad (i = 7 - 12)$$

$$a_{8i}^m = 2 \int_0^{\infty} u_{21}(t) R_{2i}^m(t) \frac{dt}{t^2} \quad (i = 1 - 6)$$

$$a_{8i}^m = 2 \int_0^{\infty} u_{21}(t) P_{2i}^m(t) \frac{dt}{t} + \delta_{10,i} \quad (i = 7 - 12)$$

$$a_{9i}^m = B_m \int_0^{\infty} u_{31}(t) P_{1i}^m(t) \frac{dt}{t^2} \quad (i = 1 - 6)$$

$$a_{9i}^m = B_m \int_0^{\infty} u_{31}(t) R_{1i}^m(t) \frac{dt}{t^2} - \delta_{11,i} \quad (i = 7 - 12)$$

$$a_{10,i}^m = 2 \int_0^{\infty} u_{31}(t) \left( \frac{1}{t} + \varepsilon_1 - \frac{k_1^2}{2} \right) R_{2i}^m(t) dt \quad (i = 1 - 6)$$

$$a_{10,i}^m = 2 \int_0^{\infty} u_{31}(t) \left( \frac{1}{t} + \varepsilon_1 - \frac{k_1^2}{2} \right) P_{2i}^m(t) dt - \delta_{12,i} \quad (i = 7 - 12)$$

$$R_{ni}^m(t) = \int_0^t q_1(x) K_n^m(t, x) dx$$

$$P_{ni}^m(t) = q_1(t) + R_{ni}^m(t)$$

$$b_{11}^m = 1 + D_{11}^m$$

$$b_{12}^m = D_{12}^m + \int_0^{\infty} \cos k_0 x u_{10}(x) dx$$

$$b_{13}^m = D_{13}^m + \int_0^{\infty} \cos k_0 x u_{20}(x) dx$$

$$b_{14}^m = D_{14}^m + \int_0^{\infty} \cos k_0 x u_{21}(x) x dx$$

$$b_{15}^m = D_{15}^m + \int_0^{\infty} \cos k_0 x u_{30}(x) dx$$

$$b_{16}^m = D_{16}^m + \int_0^{\infty} \cos k_0 x u_{31}(x) x dx$$

$$b_{1i}^m = D_{1i}^m \quad i = 7 - 12$$

$$D_{1i}^m = \int_0^{\infty} q_i(x) \cos k_0 x [V_0(x) + V_{im}(x)] dx +$$

$$+ 2 \int_0^{\infty} q_i(x) dx \int_x^{\infty} \cos k_0 t \left\{ [u_{10}(x) u_{10}(t) + u_{20}(x) u_{20}(t) - \right.$$

$$- u_{30}(x) u_{30}(t)] \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{t} \right) + \left[ \frac{1}{3} u_{21}(x) u_{21}(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} A_m u_{30}(x) u_{30}(t) \right] \left( \frac{t}{x^2} - \frac{x}{t^2} \right) \Big\} dt$$

$$b_{1i}^m \rightarrow c_{1i}^m \text{ если } \cos k_0 x \rightarrow \sin k_0 x$$

$$b_{2i}^m = D_{3i}^m \quad (i = 1 - 7)$$

$$b_{28}^m = D_{38}^m - \int_0^{\infty} I(s) u_{10}(s) s ds$$

$$b_{29}^m = D_{39}^m - \int_0^{\infty} I(s) u_{20}(s) s ds$$

$$b_{3,10}^m = D_{2,10}^m - \int_0^{\infty} I(s) u_{21}(s) ds$$

$$b_{2,11}^m = D_{3,11}^m - \int_0^{\infty} I(s) u_{30}(s) s ds$$

$$b_{2,12}^m = D_{3,12}^m - \int_0^{\infty} I(s) u_{31}(s) ds$$

$$\begin{aligned} D_{31}^m = & - \int_0^{\infty} q_i(s) I(s) [V_{0m}(s) + V_1(s)] ds - \\ & - 2 \int_0^{\infty} q_i(s) ds \int_0^{\infty} I(t) \left\{ \left[ \frac{1}{3} u_{10}(s) u_{10}(t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{3} u_{20}(s) u_{20}(t) - \frac{1}{2} B_m u_{31}(s) u_{30}(t) \right] \left( \frac{t}{s^2} - \frac{s}{t^2} \right) + \right. \\ & \left. + [u_{21}(s) u_{21}(t) - u_{31}(s) u_{31}(t)] \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) \right\} dt \end{aligned}$$

$$I(s) = \cos k_1 s + \frac{\sin k_1 s}{k_1 s}$$

$$b_{2i}^m \rightarrow c_{2i}^m \text{ если } I(x) \rightarrow \sin k_1 x - \frac{\cos k_1 x}{k_1 x}$$

## NATRIJA ATOMA IEROSINĀŠANA AR ELEKTRONA TRIECIENU

V. J. Veldre

(Kopsavilkums)

Autora iepriekšējā darbā [2] ir apskatīta savstarpējā iedarbība starp natrija atomu un lēniem elektroniem, pie kam tajā nav ievērota savstarpējā iedarbība starp krītošo elektronu un nevalentiem elektroniem. Šajā darbā apskatīts līdzīgs jautājums, pie tam minētais efekts tiek ievērots.

## KRĀSU CENTRU DICHROISMS SĀRMU METALU HALOGENIDU KRISTALOS

*L. Jansons un O. Smits*

Kristala režģa mikrodefektiem ir ļoti liela nozīme tā dažādo īpašību noteikšanā. Režģa mikrodefekti var būt gan vienkārši, gan arī salikti, gan režģa pamatvielu veidoti, gan arī radušies no svešvielu piejaukumiem. Savukārt tie ir pastāvīgā pārveidošanās procesā. Pazīstot šos mikrodefektus un zinot to lomu kristala īpašību noteikšanā, iespējama tikai tālāka mērķtiecīga kristālu īpašību uzlabošana vēlāmā virzienā (piem., izveidojot labus pusvadītājus, labus luminoforus u. c.).

Daudzi pētījumi ir veltīti sārnu metalu halogenīdu kristālu mikrodefektu, tā saucamo krāsu centru īpašību noskaidrošanā [1, 2, 3]. Sevišķi tas sakāms par  $F$  un  $F'$  centriem; arī  $M$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $U$ ,  $V$  un  $Z$  centri ir bijuši daudzu pētījumu objekti. Neskatoties uz to, nav vēl nodibinājies vienots uzskats pat par vispopulārākiem  $F$  un  $F'$  centriem [4], nemaz nerunājot par citiem mazāk pētītiem.

Ar 1953. g. LVU Eksperimentālās fizikas katedrā uzsākti pētījumi kristālu mikrodefektu savstarpējā sakara, formas un pārveidošanās tālākai noskaidrošanai. Kā objekti ir izvēlēti sārnu metalu halogenīdu kristāli, jo tiem ir vienkārša uzbūve un tālab noderīgi šo jautājumu noskaidrošanā. Kā līdzeklis kristālu mikrodefektu pārveidošanai un merīšanai tika izvēlēta lineāri polarizēta gaisma, jo tai ir izteikts viens virziens (svārstību virziens), ko var izmantot mikrodefektu anizotropijas pētīšanā.






Šajā darbā sakopoti galvenie šo pētījumu rezultāti.

Gan jāatzīmē, ka, saņemot papildus literatūru, noskaidrojās, ka polarizēta gaisma sārnu halogenīdu krāsu centru pētniecībā jau ar sekmēm ir tikusi pielietota. M. S. Nikitins [5] konstatējis, ka izdarot balinājumu  $F$  joslā substraktīvi krāsotos KCl un NaCl kristālos šajā pašā  $F$  joslā parādās vājš dichroisms. M. Ueta [6] to pašu konstatē, izdarot balinājumu KCl kristālam  $M$  joslā, bet C. Dorns un Y. Havens [7] parāda, ka izdarot balinājumu aditīvi krāsota KCl kristāla  $F$  joslā, parādās dichroisms gan  $F$ , gan arī  $M$  joslā. Minētie pētījumi vēl neuzrāda dichroisma savstarpējo sakaru vienam centram ar otru un dichroisma aplūkojumu no mikrodefektu uzbūves viedokļa. Bet kā jau minēts, tas ir svarīgi un, kā liekas, polarizētās gaismas pielietojums to arī atļauj.

Uz esošo eksperimentālo un teoretisko datu pamata F. Zeics [8] ir izvirzījis vairāku krāsu centru modeļus. Tādi modeļi doti, piemēram,  $F$ ,  $F'$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $M$  u. c. centriem (skat. 1. attēlu).

1. attēlā redzami krāsu centru apzīmējumi, to veidojumi (modelis) un paskaidrojumi. Pie tam, ja ionu režģī trūkst kāds ions, tad tas attēlots ar kvadrātu un iona lādiņa zīmi, piem.  $\square$  ir aniona iztrūkums (vakance), bet  $\oplus$  ir kationa iztrūkums režģī. Elektrons apzīmēts ar melnu riņķi  $\bullet$ . Iona vakances vietā vai tās tuvumā var novietoties elektrons vai elektroni (resp.

caurums<sup>1</sup> vai caurumi). Protams, tā lokalizētie elektroni (resp. caurumi) ir pastāvīga kustībā ap savu lokalizācijas vietu. No modeļiem redzams, ka  $F$  centram (arī  $F'$  centram) nav kāds izteikts virziens, bet pārējiem atzīmētiem centriem tāds ir. Piemēram,  $M$  centram šāds virziens ir noteikts ar abu anionu vakanču novietojuma virzienu. Līdz ar to redzams, ka  $M$  centram, pēc Zeica modeļa, jābūt anizotropiskam, bet  $F$  centram — izotropiskam veidojumam. Tā iemesla dēļ sagaidāms, ka, ja  $M$  centri kristalā tiktu orientēti noteiktā virzienā, tad anizotropiju iegūtu viss kristals un būtu iespējams dichroisms.

Centru apzīmējums	Modelis	Paskaidrojums
$F$		Aniona vakance ar tur lokalizētu elektronu.
$F'$		Aniona vakance ar diviem tur lokalizētiem elektroniem.
$R_1$		Divas blakus esošas aniona vakances ar tur lokalizētu vienu elektronu.
$R_2$		Divas blakus esošas aniona vakances ar tur lokalizētiem diviem elektroniem.
$M$		Viena kationa un tai blakus divas aniona vakances ar tur lokalizētu vienu elektronu.

I. attēls.

Sajā darbā parādīts, ka šādu  $M$  centru orientāciju un dichroismu var panākt ar polarizētas gaismas palīdzību un ka tas savukārt iespaido kristala  $F$  centrus.

### EKSPERIMENTALĀ IEKĀRTA

Eksperimentālam darbam izmantotas divas metodes: 1) spektralfotometriskā un 2) fotografiski fotometriskā.

Spektralfotometriskā metodē izmantots spektra fotometrs (CΦ-4), tam pie izejas spraugas piemontējot grozāmu polarizācijas prizmu. Uz pētījamo objektu krit lineāri polarizēta gaisma. Tādā kārtā 1) absorbcijas spektru var uzņemt polarizētā gaismā un 2) var izdarīt kristalu apstarojumus (balinājumus) ar monochromatisku polarizētu gaismu. Ar šo metodi iegūstami ātri un precīzi mērījumi.

Fotografiski fotometriskā metode ir gausāka un mazāk precīza nekā spektralfotometriskā. Tā izmantota vairāk spektralfotometriskās metodes kontrolei. Seit no monochromatora (YM-2) nākošo gaismu laiž caur pētījamo kristalu. Tam caurgājušo gaismu ar kalcīta kristalu sadala divos savstarpēji perpendikulāri polarizētos gaismas staros. Ar fotoaparata palīdzību no abiem polarizētiem stariem uz filmas iegūst vienlaicīgi divus attēlus (katru ar savu polarizēto gaismu). Turpat uz filmas ar pakāpju vājinātāju uzņem arī intensitātes markas. Nomelnojumus fotometrē ar mikrofotometru.

Kristalu balinājumus polarizētā gaismā izdara, laižot monochromatorā polarizētu gaismu (ar nikola prizmas palīdzību).

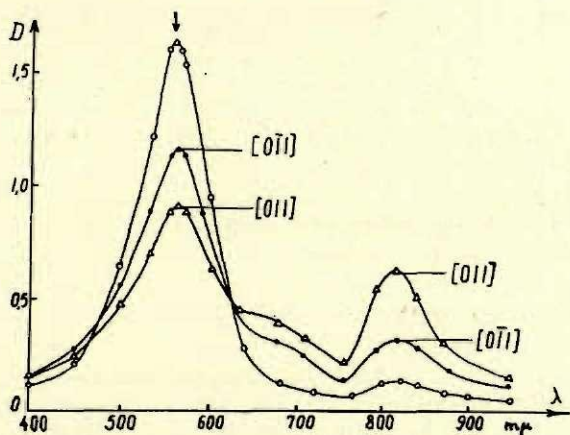
<sup>1</sup> Caurums ir elektrona iztrūkuma nosaukums.

Lietotie kristali audzēti no kausējuma pēc nedaudz pārveidotās Kiro-pulosa (Zs. f. Ph. 63 849 (1930)) metodes. Kristalu krāsojumi izdarīti substraktīvā krāsojumā — ar  $\gamma$  stariem vai X stariem, bet aditīvā krāsojumā — kristalu karsējot kopā ar kalija tvaikiem iepriekš izsūknetā un tad aizkausētā pireksa stikla ampulā.

### MĒRĪJUMU REZULTĀTI.

Krāsotu KCl vai NaCl kristalu balinot ar polarizētu  $F$  joslas gaismu, iegūst  $F$  un  $M$  centrus, kas uzrāda dažādu absorbciju

atkarībā no tā, kāds ir gaismas vektora virziens, t. i., parādās dichroisms. Šī dichroisma lielums ir atkarīgs no tā, kā orientēts balinošās polarizētās gaismas vektora virziens pret kristala režģi. Savukārt gaismas vektora virzienu var raksturot ar gaismas svārstību plaknes un stara virzienu. Bet svārstību plakni var apzīmēt ar kristalografijā parastiem indeksiem. Laižot gaismas staru perpendikulāri pret kristala plakni [100] un mainot gaismas svārstību plakni no [010] virziena līdz [011] virzienam, balināšanā iegūtais dichroisms pieaug un ir lielākais pie [011] gaismas svārstību plaknes virziena. Šīm gadījumam iegūtā KCl kristala absorbcijas līkne parādīta 2. attēla.



2. attēls.

Aditīvi krāsota KCl kristala absorbcijas līknes pirms un pēc balināšanas ar [011] polarizētu  $F$  joslas gaismu (bultiņa).  $F$  josla ir ar maksimumu pie  $\lambda = 560 \text{ m}\mu$ ,  $R_1$  un  $R_2$  joslas — pie  $\lambda = 675 \text{ m}\mu$  un  $\lambda = 730 \text{ m}\mu$ , bet  $M$  josla — pie  $\lambda = 820 \text{ m}\mu$ .

Ar tukšiem riņķiņiem apzīmēta absorbcijas līkne pirms balināšanas; pie tam tā ir viena un tā pati abām polarizētās gaismas svārstību plaknēm [011] un [010]. Pēc balināšanas parādās dichroisms: katrai gaismas svārstību plaknei ir sava absorbcijas līkne (ar trijstūriņiem un melniem punktiem apzīmētās līknes). Uz ordinātas atlikts optiskais blīvums  $D$ .

No 2. att. redzams, ka, balinot ar [011] polarizētu  $F$  joslas gaismu, parādās dichroisms gan  $F$ , gan  $M$  joslā.

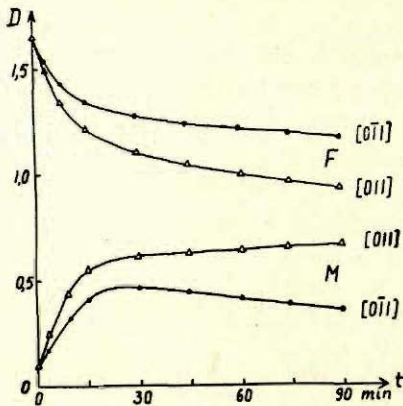
Ir tomēr atšķirība starp abām joslām.  $F$  joslā absorbcija ir mazāka tam polarizētās gaismas svārstību virzienam [011], ar ko izdara balinājumu, nekā tam stateniskam virzienam [010].  $M$  joslā ir pretējais: balinot  $F$  joslu ar [011] svārstību plaknes gaismu, parādās vairāk to  $M$  centru, kas absorbē [011] svārstības, nekā to  $M$  centru, kas absorbē [010] svārstības.

Arī pats dichroisma lielums (pakāpe)  $M$  joslā ir lielāks nekā  $F$  joslā.

Aditīvi krāsota KCl kristala  $F$  joslas izbalēšanu un  $M$  joslas rašanos, balinot ar [011] polarizētu  $F$  joslas gaismu, raksturo 3. attēls. Tur redzams, ka  $F$  josla izbalē abos polarizācijas virzienos dažādi un rodas dichroisms. Savukārt  $M$  josla pastiprinās sākumā abās polarizētās gaismas svārstību plaknēs [011] un [010], bet vēlāk [011] svārstību virzienā absorbcija sāk mazināties. Arī  $M$  joslā izveidojas dichroisms.

Izdarot balināšanu  $F$  joslā substraktīvi krāsotam KCl kristalam,  $F$  joslas izbalēšana ir līdzīga (tomēr ātrāka) 3. attēlā uzrādītai, bet  $M$  joslas rašanās te tomēr ir savādāka. Pēdējā parādīta 4. attēlā. Redzams, ka  $M$  josla sākumā pastiprinās abās polarizācijās, bet vēlāk savukārt savājinās. Arī šajā gadījumā  $M$  joslā dichroisms eksistē. Tāpat dichroisms eksistē arī  $F$  joslā.

$M$  joslas vispārēju savājināšanos abās polarizācijās var izskaidrot ar  $M$  un tāpat  $F$  centru izzušanu substraktīvi krāsotos kristalos, jo elektroni pamazām atgriežas uz caurumiem, no kuriem tos atdalīja, izdarot substraktīvo krāsojumu. Arī pie aditīvi krāsotiem kristaliem ir novērojama

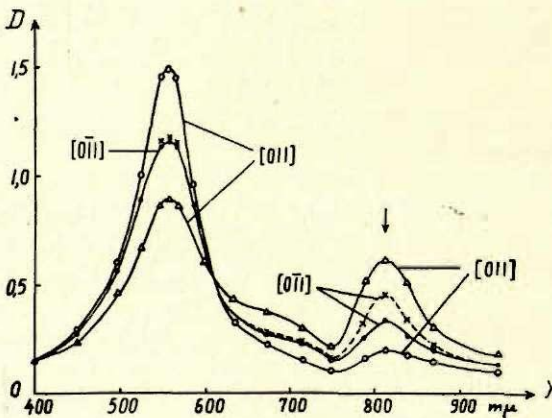


3. attēls.

Aditīvi krāsota KCl kristala  $F$  joslas izbalināšana un  $M$  joslas rašanās atkarībā no balināšanas laika, balinot ar  $[011]$  polarizētu  $F$  joslas gaismu.

Balinot kristalu ar polarizētu  $M$  joslas gaismu (stars perpendikulārs kristala plaknei  $[100]$ ) arī vislielākais dichroisms rodas, ja gaismas svārstību plakne ir  $[011]$  vai  $[0\bar{1}1]$ . Šāds balinošās gaismas stars izsauc  $F$  un  $M$  joslas dažādu ainu (5. attēls).

$M$  joslā mazinās absorbcija gaismas  $[011]$  svārstību plaknei, bet aditīvi

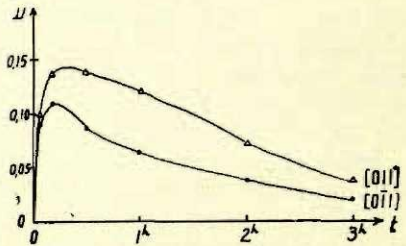


5. attēls.

Aditīvi krāsota KCl kristala absorbcijas liknes pirms un pēc balināšanas ar  $[011]$  polarizētu  $M$  joslas gaismu (bultiņa).

Pirms balināšanas abu polarizāciju absorbcijas liknes atzīmētas ar trijstūriem un melniem punktiem (t. i., 2. att. pēc balināšanas iegūtās liknes), pēc balināšanas — ar tukšiem riņķiņiem un krustiņiem atzīmētas liknes.

$M$  joslas samazināšanās abās polarizācijās ilgi balinot ar polarizētu  $F$  joslas gaismu. Tas vedams sakarā ar  $M$  centru pārveidošanos citos centros [9].



4. attēls.

Substraktīvi krāsota KCl kristala  $M$  joslas rašanās un zušana, kristalu balinot ar  $[011]$  polarizētu  $F$  joslas gaismu. Uz abscisas atlikts balināšanas laiks  $t$  stundās un uz ordinatas optiskais blīvums  $D$ .

krāsotos kristalos pieaug, kamēr substraktīvi krāsotos kristalos paliek neizmainījusies absorbcijas gaismas  $[011]$  svārstību plaknei. Aditīvi krāsotos kristalos tas vedams sakarā ar  $M$  centru sagraušānu un vēl daļēju atjaunošānos.  $M$  centru sagraujot, elektronu pārnēs vadāmības zonā. No tās tas var nokļūt  $F$  centru iedīglī (halogēna vakancē) vai arī  $M$  centru iedīglī. Pēdējā gadījumā rodas atkal  $M$  centrs ar kaut kādu orientāciju. Ja tā orientācija ir tāda, ko grauj gaismas  $[011]$  svārstības, tad viņš atkal padots izbalēšanai, bet ja tā orientācija ir cita (ko varētu, piem., graut  $[0\bar{1}1]$  gaismas svārstības), tad tas saglabājas. Tālab  $[011]$  svārstību virzienam gaismas absorbcija mazinās, bet  $[0\bar{1}1]$  — pieaug.

Substraktīvi krāsotos kristālos, ņemot vērā to, ka no  $M$  centriem atbrīvojie elektroni pa lielākai daļai apvienojas ar caurumiem,  $M$  centru atjauņoņāņās ir mazvarbūtīga un tālab iepriekš aprakstītā  $M$  centra pieaugšana nenotiek.

$F$  joslā turpretim pieaug  $[011]$  svārstību virziena absorbcija un paliek neizmainīta vai nedaudz mainās  $[0\bar{1}1]$  absorbcija.

Atkal dichroisms  $M$  joslā ir panākams lielāks, kā  $F$  joslā.

No tālākiem eksperimentāliem konstatējumiem jāatzīmē:

1. Dichroisms aditīvi krāsotos kristālos  $F$  un  $M$  joslās tumsā pie istabas temperatūras ar laiku nedaudz mazinās, tomēr saglabājas vairākas desmit stundas, kas ir pretrunā ar Dorna un Havena [7] konstatējumu, ka dichroisms saglabājas tikai dažas stundas zemās temperatūrās ( $77^\circ\text{K}$ ) un tas tiek izjaukts, sasildot līdz  $200^\circ\text{K}$ .

2. Krāsotu kristālu balinot polarizētā baltā gaismā, kā to darījis Nikitins [5], iegūst vispār mazāku un nenoteiktu dichroismu. Tas saprotams, jo vienlaicīgi izbalto gan  $F$ , gan  $M$  joslas, bet to izsauktie dichroismi vienos un tais pašos centros ir pretēji. Gala rezultātā dichroisms ir atkarīgs no tā, kāda bijusi  $F$  un  $M$  centru iepriekšējā koncentrācija, un kuri no tiem straujāk izbal (resp. ar kādu spektrālu sastāvu bijusi balinošā gaisma).

3. Izdarot balināšanu  $F$  vai  $M$  joslās ar polarizētu gaismu novērojams neliels dichroisms arī  $R_1$  un  $R_2$  joslās (sk. 2. un 5. attēlos pie viļņu garumiem  $675\text{ m}\mu$  un  $730\text{ m}\mu$ ).

4. Uzrādītais dichroisms  $F$  joslā neceļas no  $Z$  joslas, kura ir  $F$  joslas tuvumā uz garāko viļņu garumu pusi. Tas pierādījās, apzināti mainot  $Z$  centru koncentrāciju (ieaudzējot kristālā vairāk  $\text{Ca}^{++}$  ionus): dichroisms  $F$  joslā nepalielinās līdz ar  $Z$  centru koncentrācijas (resp.  $Z$  joslas) palielināšanu. Bez tam  $F$  un  $Z$  kopējai absorbcijas joslai (istabas  $t^\circ$   $F$  un  $Z$  joslas nav atdalītas, bet ir saplūdušas kopā) lielākais dichroisms ir īsviļņu pusē, kurā ir  $F$  josla, bet tas ir mazs garviļņu pusē, kur atrodas  $Z$  josla. Tas rāda, ka  $Z$  joslā dichroisma nav, bet ir gan  $F$  joslā.

5. Dichroisms parādās  $M$  un  $F$  joslā balinot ar polarizētu gaismu gan aditīvi, gan substraktīvi krāsotus kristālus. Pēdējā gadījumā efekts gan ir ievērojami mazāks.

6. Dichroisms  $F$  joslā cieši saistīts ar  $M$  centru koncentrāciju: jo lielāka  $M$  centru koncentrācija, jo iespējams lielāks dichroisms  $F$  joslā. Tā piemēram: aditīvi krāsotā  $\text{KCl}$  kristālā dabūjama samērā spēcīga  $M$  josla un tāpat arī samērā liels  $F$  joslas dichroisms, substraktīvi krāsotā  $\text{KCl}$  kristālā ir maza  $M$  josla un arī mazs  $F$  joslas dichroisms, substraktīvi krāsotā  $\text{NaCl}$  kristālā parasti  $M$  josla ir niecīga un tāds arī ir  $F$  joslas dichroisms, savukārt aditīvi krāsotā  $\text{KJ}$  kristālā nav  $M$  joslas un nav arī  $F$  joslā dichroisma.

### Secinājumi

1.  $F$ . Zeica ieteiktam  $M$  centru modelim ir izteikts virziens (piem., anionu vakanču novietojums, elektriskais dipols). Skatoties pret  $[100]$  plakni, šis virziens noteikts ar  $[011]$  resp.  $[0\bar{1}1]$  plakni. Domājams, ka ar to stāv sakarā arī tas, ka maksimālo dichroismu  $M$  joslā var sasniegt, balinot ar  $[011]$  resp.  $[0\bar{1}1]$  polarizācijas gaismu.

2.  $M$  centrs pēc Zeica modeļa reprezentē arī elektrisku dipolu, kas kristāla režģī var ieņemt noteiktus virzienus. Balinot ar polarizētu gaismu, daļu no  $M$  centriem var sagraut, bet atlikušā  $M$  centru daļa paliek kristālā ar zināmu orientāciju. Sakarā ar to kristālā ir jābūt arī zināmāi elektriskai polarizācijai.



3.  $F$  centra modelis neuzrāda kādu izteiktu virzienu. Tomēr noteikta  $M$  centru orientācija un ar to saistītā kristāla elektriskā polarizācija var  $F$  centrus izveidot par elektriskiem dipoliem ar noteiktu orientāciju. Sakarā ar to parādās dichroisms  $F$  joslā.

4. Arī pārējiem centriem ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $Z$  u. c.), kuriem ir izteikts virziens (anizotropija), balinot ar polarizētu gaismu, ir sagaidāma orientācija un dichroisms. Tas arī eksperimentāli pierādījies pie  $R_1$  un  $R_2$  centriem. Tikai ņemot vērā to, ka šo centru koncentrācija parasti ir mazāka par  $M$  centru koncentrāciju, to iespējs uz  $F$  joslas dichroismu ir sagaidāms mazāks kā  $M$  centriem.

*Eksperimentālās fizikas katedra*

#### LITERATURA

- [1]. R. Pohl, Phys. Zs. 39 36 (1938).
- [2]. Н. Мотт и Р. Герни, Электронные процессы в ионных кристаллах ИЛ, 1950.
- [3]. С. И. Пекар, Исследования по электронной теории кристаллов. 1951.
- [4]. Ф. Ф. Волькенштейн, Усп. Научной фотографии III 20 (1955).
- [5]. M. S. Nikitine, Comptes Rendus 213, 32 (1941); 216, 730 (1943); 216, 758 (1943).
- [6]. M. Ueta, J. Phys. Soc. Japan 7, 107 (1952).
- [7]. C. Z. van Doorn, Y. Haven, Phys. Rev. 100 753. (1955).
- [8]. F. Seitz, Rev. Mod. Phys. 26 7 (1954).
- [9]. S. Petroff, Zs. f. Phys. 127, 443 (1950).
- [10]. Р. Поль, Физические основы фотографической чувствительности ИЛ, 1953, ст. 89.

### ДИХРОИЗМ ЦЕНТРОВ ОКРАСКИ В ЩЕЛОЧНО-ГАЛОИДНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Л. К. Янсон и О. А. Шмит

(Резюме)

Исследованиям вопросов центров окраски щелочно-галлоидных кристаллов посвящены многочисленные исследования, в которых установлены многие закономерности [1, 2, 3]. Высказан ряд предположений о строении этих центров [8]. Несмотря на это еще не установилось единого мнения о природе даже самых хорошо известных центров окраски [4]. Необходимо еще исследовать взаимное влияние и процессы превращения этих центров, следует проверить пригодность предложенных моделей и т. д. Для этих целей полезно использовать поляризованный свет, который уже применен в ряде работ [5, 6, 7]. В этих работах установлен дихроизм в полосах поглощения центров окраски.

В настоящей работе показано, что:

1) дихроизм полос поглощения центров окраски в  $F$ - и  $M$ -полосах взаимосвязан (рис. 2, 3 и 5);

2) дихроизм  $M$ -полосы возникает в результате анизотропного строения  $M$ -центров (рис. 1), если эти центры в кристалле ориентируются при помощи поляризованного света;

3) дихроизм  $F$ -полосы возникает под действием ориентированных  $M$ -центров, которые своим дипольным полем создают во всем кристалле, а также в  $F$ -центрах электрическую поляризацию определенного направления;

4) дихроизм показывается также и полосах  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 2 и 5), и можно предполагать, что это можно наблюдать во всех полосах поглощения, имеющих анизотропное строение центров окраски.

## ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ФОТОХИМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ В ОКРАШЕННЫХ КРИСТАЛЛАХ ХЛОРИСТОГО КАЛИЯ

О. А. ШМИТ и В. Э. ЗИРАП

В работе Л. Янсона и О. Шмита [1] показано, что в полосах поглощения ( $F$  и  $M$ ) кристаллов хлористого калия после соответствующей обработки линейно поляризованным светом появляется дихроизм. В той же работе приводится объяснение возникновения дихроизма в полосах  $F$  и  $M$ . А именно: у  $M$ -полос дихроизм связан с самой структурой  $M$ -центров, которые распределены неравномерно по осям второго порядка. Появление дихроизма в  $F$ -полосе поглощения связывается с поляризационным воздействием  $M$ -центров.

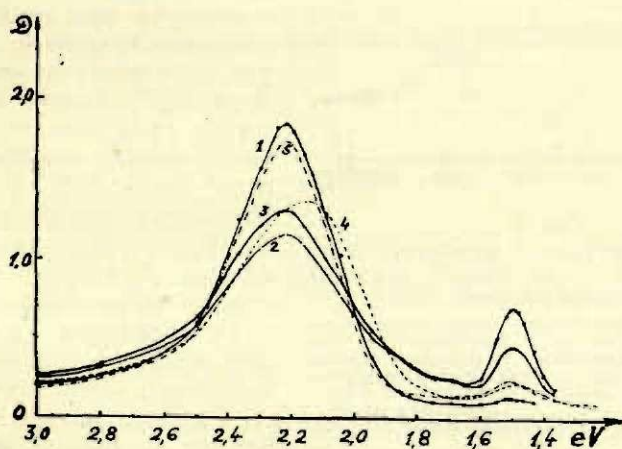


Рис. 1.

Кривые поглощения аддитивно окрашенных кристаллов хлористого калия.

1 — кривая поглощения после окрашивания; 2 — кривая поглощения после облучения линейно поляризованным светом (ориентация электрического вектора при облучении и измерении одинаковы и параллельны грани  $[011]$ ); 3 — кривая поглощения после облучения линейно поляризованным светом (электрический вектор при облучении параллелен грани  $[011]$ , а при измерении — грани  $[011]$ ); 4 — кривая поглощения при температуре  $210^\circ\text{C}$ ; 5 — кривая поглощения кристалла, охлажденного до комнатной температуры ( $20^\circ\text{C}$ ).

Чтобы проверить предложенный выше механизм возникновения дихроизма в  $F$ -полосе, было проведено исследование влияния температуры на фотохимические реакции.

Был взят монокристалл хлористого калия, выращенный по несколько видоизмененному методу Киропулоса. Окрашивание производилось аддитивно в парах калия. Спектр поглощения свежеокрашенного кристалла, полученный на спектрофотометре СФ-4, приведен на рис. 1 (кривая 1).

После двух-трехчасового облучения такого кристалла линейно поляризованным светом длины волны, соответствующей  $F$ -полосе, в случае, если облучение ведется перпендикулярно грани  $[100]$ , а электрический вектор поляризованного света параллелен  $[011]$ , поглощение, измеренное также линейно поляризованным светом (с электрическим вектором, ориентированным так же, как электрический вектор облучающего света) — изменяется и принимает вид 2 (рис. 1).

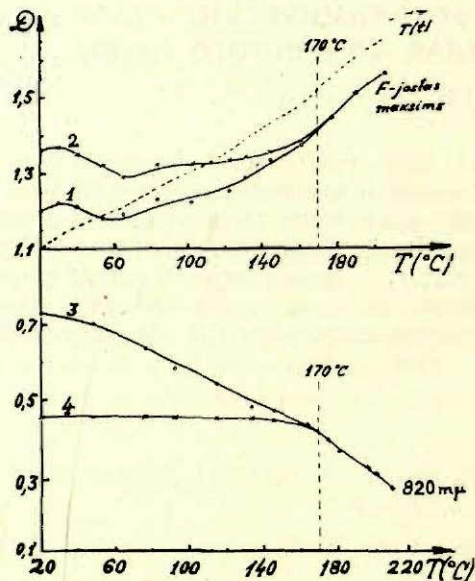


Рис. 2.

Влияние температуры на поглощение после предварительного облучения кристалла линейно поляризованным светом.

1 и 3 — изменение максимального значения поглощения  $F$ - и  $M$ -полос в зависимости от температуры при измерении с помощью линейно поляризованного света с ориентацией электрического вектора параллельно грани  $[011]$ ; 2 и 4 — то же самое, что 1 и 3, при ориентации электрического вектора параллельно грани  $[0\bar{1}1]$ .

поглощения в максимуме  $F$ -полосы в зависимости от температуры. Кривые 3 и 4 (рис. 2) показывают поглощение в  $M$ -полосе в зависимости от температуры. (Начальные точки кривых 1 и 3 рис. 2 соответствуют кривой 2 рис. 1; — кривых 2 и 4 рис. 2 соответствуют кривой 3 рис. 1). Как видно из рис. 2, при повышении температуры разность между значениями поглощения, соответствующими взаимно перпендикулярным ориентировкам электрического вектора поляризованного света параллельно  $[011]$  и  $[0\bar{1}1]$ , постепенно уменьшается, и при температуре  $170^\circ\text{C}$  она исчезает.

Примерно такие же кривые получаются у субстративно окрашенных кристаллов. Разница состоит только в том, что исчезновение дихроизма и уменьшение поглощения у  $M$ -полосы происходит при более низких температурах и спад кривой термического обесцвечивания имеет более крутой вид. Это согласуется с работой Ч. Б. Лушика [2], в которой показано, что если вероятность повторных захватов имеет малую величину (а в субстративно окрашенных кристаллах это имеет место), то кривые

Измеряя поглощение в перпендикулярном направлении, т. е. направляя пучок света, при помощи которого ведется измерение, перпендикулярно грани  $[100]$ , а электрический вектор поляризованного света — параллельно грани  $[0\bar{1}1]$ , — получаем кривую 3 (рис. 1).

Из рис. 1. (кривые 2 и 3) видно, что как в  $F$ -полосе, так и в  $M$ -полосе появляется дихроизм. Повышая постепенно температуру со скоростью примерно один градус Цельсия в минуту до  $210^\circ\text{C}$  и измеряя при этом поглощение, получаем кривую 4 (рис. 1), которая не зависит от того, какое направление имеет электрический вектор поляризованного света. Из рис. 1 видно, что  $M$ -центры исчезают (кривая 4), а вместе с тем исчезает и дихроизм в  $F$ -полосе.

Наша дальнейшая задача состояла в том, чтобы получить кривые термического обесцвечивания  $M$ -центров и проследить, как меняется дихроизм у  $M$ - и  $F$ -центров.

Результаты этих измерений показаны на рис. 2. Кривые 1 и 2 (рис. 2) соответствуют изменению

термического обесцвечивания получают более крутыми. Дихроизм  $F$ -полосы исчезает при тех же температурах, при которых он исчезает у  $M$ -полосы.

Изложенное свидетельствует о том, что причиной возникновения дихроизма  $F$ -полос действительно является поляризующее воздействие  $M$ -центров на  $F$ -центры.

Остается не совсем ясным вопрос о том, почему возникает дихроизм в  $M$ -полосе, т. е. почему при облучении линейно поляризованным светом, соответствующим  $F$ -полосе поглощения, ориентация  $M$ -центров появляется преимущественно в направлении, соответствующем направлению электрического вектора поляризованного света, которым производится облучение. Ведь образование новых центров поглощения согласно общепринятой точке зрения происходит следующим образом: электрон, освобожденный светом и термическими флюктуациями из  $F$ -центров, попадает в зону проводимости и, перемещаясь в ней, попадает на локальный уровень, образуя при этом новый центр поглощения. Если предположить такой механизм, то оказывается невозможным объяснить вышеупомянутое явление. Поэтому единственное, что можно предположить, это то, что возникновение  $M$ -центров происходит (по крайней мере частично) в результате туннельного эффекта. На такую возможность указывает также работа Маркэма [3], в которой автор именно таким механизмом пытается объяснить частичное оптическое выщвечивание центров окраски при очень низких температурах.

*Кафедра экспериментальной физики*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Янсон Л., Шмит О., статья в настоящем сборнике.
- [2]. Луцкич Ч. Б., ЖЭТФ **30**, 488 (1956).
- [3]. Markham J. J., J. Phys. Chem. **57** 762 (1953).

#### TEMPERATURAS IETEKME UZ FOTOĶĪMISKĀM REAKCIJĀM KRĀSOTĀ KCl KRISTALĀ

*O. Smits un V. Ziraps*

(Kopsavilkums)

Darbā parādīts, ka krāsotā KCl monokristalā, kas apstarots ar lineāri polarizētu gaismu  $F$  un  $M$  absorbcijas joslās novērojams dichroisms. Paaugstinot kristala temperatūru, dichroisms  $M$  joslā samazinās un līdz ar to samazinās dichroisms  $F$  joslā. Izdarīts secinājums, ka  $F$  joslā dichroismu izsauc  $M$  centru polarizējošā iedarbība.

Izteikta hipoteze, ka orientētu  $M$  centru rašanos varam izskaidrot ar tuneļa efekta palīdzību.

## ВЫРАЩИВАНИЕ МОНОКРИСТАЛЛОВ МЕТАЛЛОВ С ЗАДАННОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ И ВНЕШНЕЙ ФОРМОЙ

Я. Е. ПЛАТАЦИС

Для исследования механизма пластической деформации металлов необходимо получить монокристаллы различной определенной кристаллографической ориентации и внешней формы.

Большинство методов получения металлических монокристаллов (а также и некоторых солей) основывается на использовании процесса кристаллизации из расплава [1]. Так наиболее распространенные методы Чохральского [2], Обреимова-Шубникова [3], Бриджмена [4] дают возможность получать монокристаллы значительных размеров, но чаще всего произвольной ориентации.

Некоторое достижение в отношении получения монокристаллов с заданной ориентацией и внешней формы удается получить, пользуясь методом Капицы [5], а также различной ориентации — пользуясь опытами Палибина и Фроймана [6] и работами Чигвинадзе [7].

Анализируя методику выращивания монокристаллов и полученные результаты, можно утверждать, что основную роль при определении кристаллографической ориентации по отношению к оси образца играет направление градиента температуры. В упомянутых методах невозможно или возможно только ограниченно изменить направление градиента температуры по отношению к оси кристалла. Так, при выращивании монокристаллов по методу Бриджмена [4], в качестве нагревателя употребляется трубчатая печь и градиент температуры всегда параллелен оси монокристалла. В работах Чигвинадзе [7] применялся видоизмененный метод Бриджмена; трубчатая печь бралась большего диаметра, в которой можно было помещать согнутые стеклянные пробирки с жидким металлом. Но, с увеличением диаметра трубчатой печи, направление градиента температуры становится неопределенным. В этом случае применяя согнутые пробирки с жидким металлом, можно изменить направление градиента температуры к оси выращиваемого кристалла, но невозможно задать определенный угол.

Чтобы осуществить изменение направления градиента температуры по отношению к оси кристалла на определенный, заданный угол, была изготовлена плоско параллельная печь (рис. 1) (а) внутреннего размера  $350 \times 250 \times 10$  мм. Печь устанавливалась неподвижно в вертикальном положении и для устранения циркуляции потоков воздуха при нагревании, снизу плотно присоединилась плоскопараллельная замкнутая

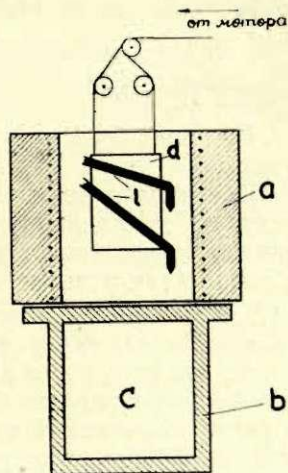


Рис. 1.

камера (b) со стеклянным окошком (c). В этом случае, имея расстояние между нагревательными стенками печи лишь 10 мм и исключая возможность потоков нагреваемого воздуха, можно достичь вертикально направленный градиент в пределах всей печи. На такой установке выращивались монокристаллы цинка. Стеклянные пробирки (l) (внешний диаметр меньше 10 мм) заполнялись жидким цинком и устанавливались в специальную рамку (d). При этом имелась возможность устанавливать пробирки, заполненные металлом, под различными, определенными углами по отношению к вертикальной оси печи, т. е. к направлению градиента температуры. Нижние концы пробирок загибались так, что всегда были по направлению градиента температуры. Рамка с расположенными пробирками (l) помещалась в вышеуказанную печь при помощи синхронного мотора и червячной передачи со скоростью 0,7 мм/мин опускалась вниз в плоскопараллельную камеру (b). Температура печи поддерживалась  $50 \div 60$  градусов выше температуры плавления цинка.

При кристаллизации, плоскость базиса монокристалла цинка почти всегда располагалась параллельно направлению градиента температуры, т. е. в данном случае вертикально и перпендикулярно щели печи. На основе проведенных опытов можно утверждать, что кристаллографические плоскости более плотной упаковки атомов (в частности плоскость базиса) при кристаллизации располагается параллельно направлению градиента температуры, за исключением отдельных других случаев с малой вероятностью (влияние примесей, роль зародыша и другие факторы).

На чертеже 2 штриховкой показано направление плоскости базиса монокристаллов цинка, которая как видно составляет заданный угол  $\alpha$  с осью кристалла. Нужно отметить, что при увеличении угла между осью пробирки и направлением гра-

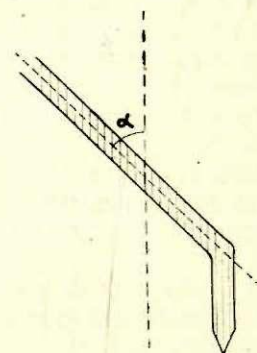


Рис. 2.

диента температуры, т. е. для получения больших углов ( $\alpha \approx 80$  градусов) скорость опускания надо было уменьшить до 0,25 мм/мин.

Пользуясь этим методом, получены монокристаллы цинка, плоскость базиса которых составляла заданный угол с осью данного кристалла.

Выращивались монокристаллы с заданными углами  $\alpha$  от 0 до 90 градусов.

При исследовании механизма пластической деформации необходимо получить металлические монокристаллы заданной внешней формы: цилиндрические, четырехгранные, шестигранные, с утолщением на концах образца (для испытания на растяжение) и др.

Для получения монокристаллов определенной внешней формы, задача сводится к изготовлению пробирок заданной внутренней формы. В частности, для получения монокристаллов цинка четырехгранной и шестигранной формы, в запаянной с одного конца стеклянной пробирке вставляется образец желаемой формы кристалла из тугоплавкого материала, с большим коэффициентом термического расширения. Затем пробирка присоединялась к форвакуумному насосу и вставлялась в трубчатую печь. При температуре размягчения стекла, под действием атмосферного давления, стекло обжималось вокруг образца, который после остывания свободно вынимался и таким образом получалась желаемая внутренняя форма пробирки.

В проведенных опытах использовались латунные образцы и стекло № 23.

Применяя вышеизложенную методику, были получены монокристаллы цинка заданной ориентации как с определенными внешними гранями, так и с утолщением на концах образца для закрепления при механических испытаниях.

В заключении выражаю благодарность Тутану М. Е. за помощь проведения опытов.

*Кафедра экспериментальной физики*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1]. В. Д. Кузнецов, Кристаллы и кристаллизация, 1954 г.
- [2]. Czochralski. Moderne Metallkunde in Theorie und Praxis, Berlin, 76, 1924.
- [3]. IV съезд русских физиков, 70, 1924; Тр. Ленинградская физ.-техн. лаб. вып. I, 21, 1925.
- [4]. P. W. Bridgman. Proc. Am. Acad. Arts. Sci. 60, 306/83, 1925.
- [5]. P. Kapitza. Proc. Roy. Soc., A, 119, 358, 1928.
- [6]. П. А. Палибин и А. И. Фройман. ЖЭТФ, 3, 162, 1933.
- [7]. Д. М. Чинвинадзе. ЖТФ XXV вып. 5, 1955.

#### METALU MONOKRISTALU AUDZĒSANA AR NOTEIKTU ORIENTACIJU UN ĀREJO FORMU

*J. Platacis*

(Kopsavilkums)

1. Izveidota jauna monokristalu audzēšanas iekārta, kurā var viegli mainīt kristala ass virzienu attiecībā pret temperatūras gradienta virzienu.

2. Iegūti noteiktas dažādas kristalografiskas orientācijas un dažādas noteiktas ārejas formas cinka monokristāli.

3. Izstrādātā metodika dod iespēju pētīt kristalizācijas ātrumu un temperatūras gradienta virziena iespāidū uz kristalografisko plakņu orientāciju audzējamos monokristālos.

## SVĪNA PIEMAIŠĪJUMA IETEKME UZ KCI KRISTALU ADITIVO KRĀSOJUMU

A. JANSONE

### I. IEVADS

Svešvielu piemaisījumi, pat nelielā daudzumā, var stiprā mērā ietekmēt kristalisko vielu īpašības, kā piem. absorbciju, luminescenci, elektrovadāmību, cietību u. c. Sistemātiski šos jautājumus sāka pētīt šī gadu simta sākumā. Piemaisījuma defektu raksturs, kā arī viņu konkrētais iespaids uz kristalu, piem., optiskām īpašībām šobrīd vēl izpētīts maz. Tomēr jautājums ļoti svarīgs, jo palīdz ieskatīties vielas uzbūves un pusvadītāju mehānismā.

Lieli nopelni šī virziena pētījumos ir R. Pola skolai. R. Hilšs [1] viens no pirmiem noteicis vairāku sārmmetalhalogenīdu absorbcijas spektrus ar Tl un Pb dažādas koncentrācijas piemaisījumiem. Abi piemaisījumi dod ultravioleto staru rajonā uz garo viļņu pusi no fundamentālās joslas savu selektīvo absorbcijas joslu. Par uzbūves mehānismu literatūrā ir sastopami dažādi uzskati.

R. Hilšs jau uzrādītajā darbā (1927. g.) izteicās sekojoši: «Kā iebūvējas kristalā Tl un Pb ioni, tas vēl līdz šim nav zināms. Visvienkāršāk pieņemt, ka tie iebūvējas kaut kādā sārmmetala kationa vietā. Atklāts paliek jautājums, vai tas iespējams kaut kurā katrā režģa vietā, vai kādā režģa defekta vietā, submikroskopiskās plaisās, traucējumos utt.» 10 gadus vēlāk (1937. g.) R. Hilšs atkal apskata šo jautājumu [2] un secina, ka vienkāršā sārmmetala halogenīdā var iebūvēties ļoti sarežģīts komplekss  $MeX_n$ , kurš tad arī nosaka absorbcijas un emisijas procesu. Hilšs tomēr tuvāk neaplūko šīs kompleksās asociācijas uzbūvi. V. Kochs Tl un Pb šādu kompleksās asociācijas uzbūves mehānismu neatzīst [3], bet H. Fromhercs uz R. Pola ierosinājumu ir izdarījis virkni eksperimentu, kuros šāda veida iebūvi apstiprina [4]. V. Burgmillers apgalvo (1936. g.), ka NaCl kristalā  $PbCl_2$  piemaisījums var novietoties tikai kristala plaisās [5].

Arī pēdējā laikā par Pb iebūves mehānismu sārmmetalu halogenīdu kristalos fizikas literatūrā izteikti dažādi uzskati. P. Pringsheims [6] savā pazīstamā monogrāfijā par fluorescenci un fosforescenci atbalsta kompleksu hipotēzi (489. lpp.). A. Samovskis, A. Rodionova un M. Gostjeva pielaiž divus smago metālu (Ag, Cd) iebūves veidus. Var iebūvēties  $Ag^+$  un  $Cd^{++}$  ioni gan režģa mezglos, gan arī kā neītrali atomi novietoties uz kristalu substrukturās bloku virsmām plānu plevīšu veidā [7, 8]. M. Kacs un B. Semjonovs [9] pilnā mērā atbalsta uzskatus, ka svins pie mazām koncentrācijām sārmmetala halogenīdos iebūvējas kā divvalentīgs  $Pb^{++}$  ions režģa kationa vietā.

Arī piemaisījumu koncentrācijas noteikšanai veltīti daudz darbu. Kristalus audzējot no kausējuma (sārmmetala halogenīdu monokristalus visērtāk audzēt ar Kiropulosa metodi [10]), parasti uzrāda to smagā metāla koncentrāciju, kāda ir kausējuma sastāvam. Tāda nav kristalam, jo piemai-



sījumiem ir tendence sakrāties vairāk tajā daļā, kura kristalizējas pēdējā. Tādā kārtā piemaisījumu lielākā daļa sakrājas kausējuma atlikumā. Ar ķīmiskās analīzes palīdzību vairākos darbos noskaidrots, ka kristalā iebūvējas tikai 20%—1% no tā piemaisījuma daudzuma, kas pielikts kausējumam [8, 3]. Visur tur, kur piemaisījuma koncentrācija nav precīzi jāzina, ar šo attiecību apmierinās.

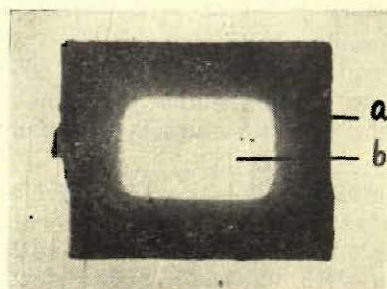
Piemaisījumi var būtiski izmainīt krāsu centru dinamiku. Sajā virzienā sistematiski pētījuma parādījušies vienīgi pēdējos gados [8, 9 u. c.].

Sinī darbā parādīts, kā  $PbCl_2$  piemaisījums KCl kristalam aditīvās krāsošanas procesā kalija tvaikos veicina defektu vietu koagulāciju un reizē ar to traucē  $F$  centru rašanos. Līdz ar to jāsecina, ka svešvielu piemaisījums zināmos apstākļos var stiprā mērā iespaidot režģa mikrodefektu stāvokli.

## II. DARBA METODE UN REZULTATI

KCl (Pb) kristali iegūti no kausējuma ar Kiropulosa metodi, krāsoti aditīvi kalija tvaikos un substraktīvi  $\gamma$  staros. Absorbācijas mērījumi veikti ar spektrofotometru C  $\Phi$ -4.

1) **Kristālu iegūšana.** Pēc minētās metodes izaudzēti vairāki KCl (Pb) kristali ar dažādām svina koncentrācijām. Kausējuma materials sagatavots, rūpīgi samaisot KCl kopā ar  $PbCl_2$  tādā daudzumā, lai kausējumā Pb būtu ap 0,2—0,05 mol. %. Kristala augšējā daļa (tā kristalizējas pirmā) izveidojās dzidra un samērā viengabalaina, turpretī apakšējā daļa, kura kristalizējas pēdējā — opalā krāsā un plaisaina. Tas norāda, ka svina piedeva lielākā daudzumā traucē monokristālu izveidošanos, kā arī to, ka svins šeit lokalizējas kristalā lielāku agregātu veidā.



1. zīm.

KCl(Pb) kristāla vidusdaļas fotoattēls pēc aditīvās krāsošanas dažas stundas K tvaikos  $500^{\circ}C$  temperatūrā.

a — brūnais krāsojums,  
b — nekrāsotā vidusdaļa.

Tālākā darbā lietotie kristāla gabaliņi apm.  $4 \times 4 \times 10 \text{ mm}^3$  lieli tika izskaldīti no kristāla dzidrās daļas un tādā kārtā saskaņā ar ievadā teikto var pieņemt, ka svina koncentrācija tajos bija ap  $2 \cdot 10^{-2}$ — $5 \cdot 10^{-4}$  mol. %.

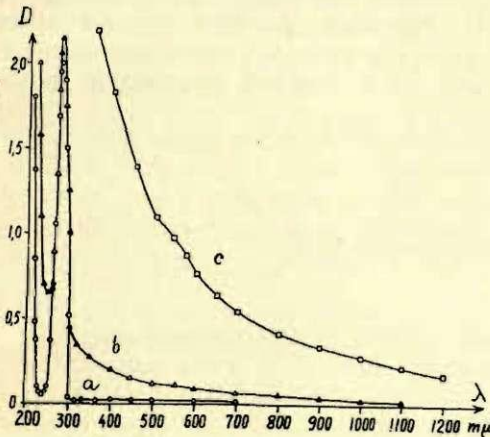
Jāatzīmē, ka KCl (Pb) kristāls ir mehāniski izturīgāks par tīru KCl kristālu un līdz ar to grūtāk skaldās. Līdzīgu konstatējumu izdarījis V. Burgmillers savos pētījumos ar NaCl (Pb) kristāliem [5].

2) **Kristālu krāsošana.** Izskaldītais kristāla gabaliņš tika ievietots pīreksa stikla ampulā kopā ar nelielu gabaliņu metaliskā kalija, izsūkņots gaiss un ampula aizkausēta. Šādā veidā sagatavotās ampulas tika karsētas 0,5—3 stundas krāsnī, kuras temperatūra iepriekš nostabilizēta vēlāmā lielumā — no  $400^{\circ}C$ — $600^{\circ}C$ . Salīdzināšanas nolūkos tajā pašā ampulā bija ievietots arī tīra KCl kristāla gabaliņš.

Pēc karsēšanas kristālu dažu minušu laikā atdzesēja gaisā līdz istabas temperatūrai. Tīrie KCl kristāli minētajā krāsošanas laikā bija nokrāsojušies arvien purpur-zili parastajā  $F$  centru krāsā, turpretī KCl (Pb) kristāli bija ieguvuši brūnu krāsu ar ļoti izteiktu un asi norobežotu, nekrāsotu vidusdaļu. Pēdējās lielums atkarīgs no krāsošanas ilguma.

Kristāli pēc vajadzības tika krāsoti arī substraktīvi — kādu laiku paturot tos pie  $\gamma$  starotāja.

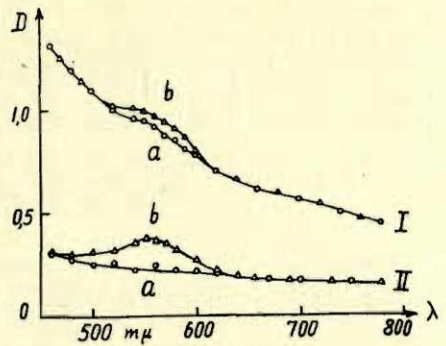
2. zīmējumā parādītas nekrāsota un aditīvi krāsota KCl (Pb) kristāla absorbcijas resp. optiskā blīvuma liknes plašā viļņu garuma diapazonā.



2. zīm.

KCl(Pb) kristālu absorbcijas liknes.

- a — nekrāsots kristāls;  
 b — aditīvi krāsots  $1/2$  stundu K tvaikos  $400^{\circ}\text{C}$  temperatūrā;  
 c — aditīvi krāsots  $3 1/2$  stundas K tvaikos  $500^{\circ}\text{C}$  temperatūrā.



3. zīm.

KCl(Pb) kristālu absorbcijas liknes.

- I — plāksnīte izskaldīta no krāsotā kristāla malas,  
 II — plāksnīte izskaldīta no tā paša krāsotā kristāla vidusdaļas.  
 a — pēc aditīvās krāsošanas K tvaikos  $3 1/2$  stundas  $500^{\circ}\text{C}$  temperatūrā,  
 b — tā pati aditīvi krāsotā plāksnīte pārkrāsota substraktīvi staros.

No aditīvi krāsotiem KCl (Pb) kristāliem tika izskaldītas plāksnītes gan no kristāla malām — viscaur brūnas, gan arī no vidusdaļas (ietverot gan dzidro, gan arī brūno daļu) un uzņemtas absorbcijas liknes. Pēc tam tie paši paraugi tika pārkrāsoti substraktīvi.

Fotometrējuma rezultāti attēloti 3. zīmējumā.

Bez tam substraktīvi  $\gamma$  staros tika krāsoti arī KCl(Pb) kristāli, kas iepriekš aditīvi nebija krāsoti.

Fotomērījumu rezultāti attēloti 4. zīmējumā.

No zīmējumos attēlotām liknēm var izdarīt šādus slēdzienus:

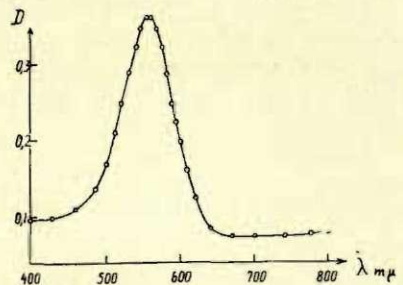
1) izaudzētos KCl kristālos ir svina piemaisījums, jo absorbcijas līknē pie  $\lambda = 273 \text{ m}\mu$  parādās selektīvā svina absorbcijas josla, kā tas jau no literatūras zināms (2. zīm. a, b);

2) KCl (Pb) kristālā krāsošanās process norit samērā lēni. Tādēļ pat  $3 1/2$  stundās dotā izmēra kristāls nav nokrāsējies viscaur, bet vidū palicis nenokrāsots apgabals — «lodziņš» ar asu robežu (1. zīm.);

3) izpētītajos KCl (Pb) kristālos minētās aditīvās krāsošanas rezultātā  $F$  centri radušies ļoti maz (3. zīm. a). Ļoti maz tie parādās arī pēc tam, kad aditīvi krāsotās kristāla plāksnītes pārkrāso substraktīvi  $\gamma$  staros (3. zīm. b).

Var secināt, ka aditīvās krāsošanas rezultātā K tvaikos ir samazinājusies  $F$  centru rašanās iespēja;

4) ja KCl (Pb) kristāls iepriekš nav krāsots aditīvi, tad, krāsojot to



4. zīm.

KCl(Pb) kristāla absorbcijas likne pēc substraktīvā krāsojuma  $\gamma$  staros.

substraktīvi,  $F$  absorbcijas josla parādās izteiktāka kā iepriekš aprakstītos aditīvās krāsošanas gadījumos;

5) aditīvi krāsotiem KCl (Pb) kristaliem plašā viļņu garumu diapazonā absorbcija samazinās monotoni līdz ar viļņu garuma palielināšanos (2. zīm. b, c, kā arī 3. zīm. 1. un 2. a, b). Absorbcijas lielums ir atkarīgs no krāsošanas apstākļiem (temperaturas, laika), turpretī absorbcijas līknes monotona raksturs ir saglabājies.

Aditīvi nekrāsotiem kristaliem šādas monotona absorbcijas samazināšanās nav (2. zīm. a un 4. zīm.).

### III. REZULTATU DISKUSIJA

Eksperimentālie dati dod iespēju izteikt dažas domas par svina iebūvi un kristaliskā režģa defektu vietu kustību aditīvās krāsošanas procesā.

Aditīvi krāsoto KCl (Pb) kristalu absorbcijas līkņu gaita nepārprotami norāda uz to, ka krāsošanas procesā kristalā ir izveidojušās lielākas daļiņas — agregāti — resp. lielākas defektu vietas, kas šādu monotonu absorbciju rada. Turpretī aditīvi nekrāsotos kristalos šādu agregātu nav, jo tajos absorbcijai līdz ar viļņa garumu nav šīs monotona maiņas.

Monotonā absorbcijas maiņa var rasties, pirmkārt, gaismai izkliedējoties no vienāda lieluma agregātiem, kuros nenotiek selektīvā absorbcija. Otrkārt, šie agregāti var būt dažāda lieluma un absorbēt selektīvi katrs pie sava viļņu garuma. Arī šādā gadījumā optiskā blīvuma maiņa var izveidoties monotona.

Jautājumu, kā šādi agregāti varēja rasties, palīdz noskaidrot otrs svarīgais eksperimentālais konstatējums —  $F$  centru iedīgļu samazināšanās aditīvās krāsošanas procesā.

Pieņemsim, ka KCl (Pb) kristalā svina piemaisījums ir iegājis kā divvalentīgs  $Pb^{++}$  ions vienvalentīgā kalija  $K^+$  iona vietā. Lai saglabātos režģa elektriskā neitralitāte (svins ir vismaz divvērtīgs), tad šo svina radīto defekta vietu tuvumā ir piesaistīts vēl attiecīgs daudzums kalija ionu vakanču, jo tās ir negatīvas.

Aditīvās krāsošanas procesā no adsorbētā kalija atbrīvojušies elektroni lokalizēsies pie šiem svina agregātiem, jo varam pieņemt, ka tie rada aizliegtajā zonā savus lokālus akceptoru līmeņus. Līdz ar to kristalā ieslēgtā svina apgabals kļūs negatīvāks un viņa tuvumā, ņemot vērā samērā augsto krāsošanas temperatūru, salasisies ar laiku negatīvas Cl-vakances, jo tās ir pozitīvas. Tādēļ krāsošanas procesā kristalā izveidosies defekts, kura izmēri var vairākkārt pārsniegt režģa konstantes lielumu. Šie agregāti tad arī var gaismu gan izkliedēt, gan arī absorbēt un ar to tad izskaidrojama monotona optiskā blīvuma maiņa.

Abi pieņēmumi, ka svins traucējuma vietā sev piesaista elektronus, kā arī tas, ka Cl-vakances krāsošanas procesā pamazām salasās šīs vietas tuvumā, samazina  $F$  centru izveidošanas iespējas, kā tas atkārtotos eksperimentos tika konstatēts (studentes E. Kaijaka diplomdarbs. 1956. g.).

Substraktīvi krāsojot šāda veida defektu vietu koagulācija nav sagaidāma.

Noslēgumā jāatzīmē, ka KCl (Pb) kristali no kausējuma arvien tiek izaudzēti apmēram ar vienām un tām pašām optiskām īpašībām. Bet pateicoties kristaliskā režģa defektu kustībai, dažādos eksperimentēšanas apstākļos tomēr parādās dažādi rezultāti un līdz ar to ļoti jāuzmanās taisīt vispārinājumus.

## LITERATURA

- [1]. R. Hilsch. Zs. f. Phys. 44, 860 (1927).
- [2]. R. Hilsch. Phys. Zs. 38, 1032 (1937).
- [3]. W. Koch. Zs. f. Phys. 57, 638 (1929).
- [4]. H. Fromherz. Zs. f. Phys. 68, 233 (1931).
- [5]. W. Burgmiller. Zs. f. Phys. 103, 633 (1936).
- [6]. П. Прингсгейм. Флуоресценция и фосфоресценция (1951).
- [7]. Л. М. Шамовский и Л. М. Родионова ДАН СССР т. 99, з 381 (1954).
- [8]. Л. М. Шамовский и М. И. Гостева ЖФЭ т. 28, 7, 1266 (1954).
- [9]. М. Л. Кац и Б. З. Семенов ДАН СССР т. 106, 3, 415 (1956).
- [10]. S. Kyropoulos. Zs. f. anorg. u. allgem. Chem. 154, 308 (1926).

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСИ РЬ НА АДДИТИВНОЕ ОКРАШИВАНИЕ  
КРИСТАЛЛОВ KCl

А. Я. Янсон

(Резюме)

В работе рассматривается влияние, оказываемое примесью свинца на аддитивное окрашивание кристаллов KCl в парах калия.

Кристаллы KCl (Pb) выращенные из расплава с примесью 0,2—0,5 моль<sup>0</sup>/о свинца в расплаве окрашивались аддитивно в парах калия и субстрактивно под действием гамма-лучей. Оптическое поглощение измерялось спектрофотометром СФ-4.

Установлено, что:

1) процесс аддитивного окрашивания в кристаллах KCl (Pb) происходит весьма медленно. За несколько часов при температуре 500°С кристалл толщиной 5 мм окрашивается только частично: в центре кристалла остается непрокрашенная область. Цвет окраски — коричневый;

2) количество  $F$  центров, возникших в результате аддитивной окраски, невелико. Добавочное субстрактивное окрашивание в гамма-лучах мало изменяет существующую концентрацию  $F$  центров;

3) если кристалл KCl (Pb) окрашивается субстрактивно без предварительного внесения в пары калия, то  $F$  — полоса поглощения выражена весьма интенсивно. Можно сделать вывод, что пребывание кристалла KCl (Pb) в парах калия отрицательно влияет на возможность возникновения  $F$  центров;

4) оптическая плотность аддитивно окрашенных кристаллов KCl (Pb) в широком диапазоне длин волн монотонно уменьшается с увеличением длины волны. В неокрашенных и субстрактивно окрашенных кристаллах подобное явление не наблюдается. Это показывает, что в процессе аддитивного окрашивания в кристаллах KCl (Pb) образуются агрегаты, дающие указанное поглощение.

Можно предположить, что примесь свинца захватывает электроны, освобождаящиеся с адсорбированного калия и далее, вокруг этого дефекта концентрируются вакансии Cl, так как они являются носителем положительного заряда. Таким образом, с одной стороны, уменьшается вероятность образования  $F$  центров, с другой стороны, образуются агрегаты, которые, рассеивая свет, обуславливают указанное монотонное изменение коэффициента поглощения.

## СОДЕРЖАНИЕ

		Стр.
1.	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">К. Я. Залтс.</span> Преобразования, сохраняющие площади фигур . . . . .	5
2.	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">К. Я. Залтс.</span> Об анаморфизирующем множителе . . . . .	11
3.	Э. Я. Риекстыньш. Решение расщепляемой матричной системы телеграфных уравнений в случае включенных синусоидальных напряжений . . . . .	21
4.	Н. А. Бразма. О решении системы матричных телеграфных уравнений при некотором согласовании электромагнитных приемно-передающих устройств с параметрами проводов . . . . .	39
5.	Э. Я. Риекстыньш. О некоторых возможностях решения системы телеграфных уравнений преобразованием Лапласа в случае сложного провода . . . . .	49
6.	Г. К. Энгелис. О некоторых системах полиномов . . . . .	55
7.	Э. Я. Риекстыньш. О функциях Эрмита и функциях параболического цилиндра . . . . .	67
8.	Я. Л. Энгельсон. О квадратном корне из линейных операторов в линейных топологических пространствах . . . . .	73
9.	И. В. Карклиньш. Обоснование некоторых формул преобразования Эфроса . . . . .	81
10.	Э. Я. Риекстыньш. О канатных функциях . . . . .	93
11.	К. А. Штейн. Комбинированный способ определения полных возмущений . . . . .	99
12.	К. А. Штейн. К вопросу о решении осредненных задач типа Делоне—Хилла . . . . .	109
13.	П. Е. Кунин, И. М. Таксар. Рассеяние нуклонов при малых энергиях с учетом изобарных состояний . . . . .	121
14.	В. Я. Вельдре. Возбуждение атома натрия электронным ударом . . . . .	131
15.	L. K. Jansons, O. A. Smits. Krāsu centru dichroisms sārmu halogenīdu kristalos . . . . .	141
16.	О. А. Шмит, В. Э. Зирап. Влияние температуры на фотохимические реакции в окрашенных кристаллах хлористого калия . . . . .	147
17.	Я. Е. Платацис. Выращивание металлических монокристаллов заданной ориентации и внешней формы . . . . .	151
18.	A. J. Jansone. Svina piemaisījuma ietekme uz KCl kristalu aditīvo krāsojumu . . . . .	155

Ответственный за выпуск доц. В. К. Дегловс  
Техн. редактор В. К. Звейникс

Подписано к печати 28/III 1956 г. Бумага 70 × 108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. лист. 5, физ. печ. лист. 10, усл. печ. лист. 13,70, уч. изд. лист. 11,34. Тираж 600 экз. Цена 8 руб. 95 коп.

Отпечатано в тип. № 3 Латгавиздата, г. Рига, ул. Ленина 137/139. Зак. № 1450.

### Поправки

На стр.	Строка или № формулы	Напечатано	Следует читать
6	21 сверху	$OT$	$QT$
12	12 "	$V$	$v$
12	в формуле (1.1)	$K(z_2, z_3), L(z_2, z_3), M(z_2, z_3)$	$K(z_2, z_3), L(z_2, z_3), M(z_2, z_3)$
23	в формуле (1.10)	$\dots \sin(\delta_k t - \omega_i \delta_{ik} \xi) - e^{-\rho_i t} \dots$	$\dots \sin(\delta_k t - \omega_i \delta_{ik} \xi) + e^{-\rho_i t} \dots$
24	в начале формулы (1.12)	$e^{-\xi \gamma_i}$	$e^{-\xi \gamma_i}$
25	17 и 18 снизу	$e^{-\omega_i \varphi_i \xi}$	$e^{-\omega_i \rho_i \xi}$
27	10 сверху	$\Delta u$	$\Delta u$
27	12 "	$(-1)^{\nu \omega_i}$	$(-1)^{\nu \omega_i}$
28	16 "	$\Pi$	$\bar{\Pi}$
29	11 снизу	$\Pi$	$\bar{\Pi}$
35	13 "	$\dots = -\frac{\beta t_0}{\Omega}$	$\dots = -\frac{\beta t_0}{\Omega^2}$
36	2 "	$(1)^{j+1}$	$(-1)^{j+1}$
51	в формуле (2.2)	$1 - Z_1 Z_2 e^{-2\gamma_1 t_2}$	$1 - Z_1 Z_2 e^{-2\gamma_2 t_2}$
51	в формулах (2.6) и (2.7)	$1 + Z_4 \kappa e^{-2\gamma_2 t_2}$	$1 + Z_2 \kappa e^{-2\gamma_2 t_2}$
64	3 снизу	$P_{n-1}$	$\bar{P}_{n-1}$
84	7 и 8 сверху	$-\frac{1}{2} \alpha_1$	$-\frac{1}{2}, \alpha_1$
106	4 сверху		формула не должна иметь номер (34)
117	3 "		формула должна быть обозначена номером (25)
152	12 "	$\dots$ печь при $\dots$	$\dots$ печь, и при $\dots$



427818

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTĒKA



0509063852

31-



Цена 8 руб. 95 коп.

44/5764

2434