

58
PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ

ZINĀTNISKIE RAKSTI
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

SĒJUMS 58 TOM

SKAITĻOŠANAS CENTRA
RAKSTI

ТРУДЫ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА

RIGA 1964 РИГА

Pēteris Stučka
Latvijas Valsts universitātes
SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI

ТРУДЫ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
Латвийского
государственного университета
имени Петра Стучки

2. laidiens • Выпуск 2



Rīga 1964 Riga

44/5762

REDAKCIJAS KOLEĢIJA

Fiz.-mat. zinātņu kand. E. J. GRINBERGS

Fiz.-mat. zinātņu kand. L. A. LADIŽENSKIJS

Fiz.-mat. zinātņu kand. A. J. ĻEPINS

Fiz.-mat. zinātņu doktors prof. L. I. RUBINŠTEINS

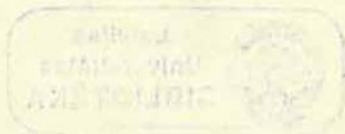
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Кандидат физ.-мат. наук Э. Я. ГРИНБЕРГ

Кандидат физ.-мат. наук Л. А. ЛАДЫЖЕНСКИЙ

Кандидат физ.-мат. наук А. Я. ЛЕПИН

Доктор физ.-мат. наук, профессор Л. И. РУБИНШТЕЙН



ПРЕДИСЛОВИЕ

Вычислительный центр Латвийского государственного университета им. П. Стучки является научно-исследовательским институтом, вокруг которого группируются все математические силы Латвийской ССР.

В связи с этой его ролью расширен характер сборника трудов центра. Именно, к участию в издании сборника привлечены все математики, объединенные Рижским городским математическим семинаром и представляющие как Вычислительный центр и физико-математический факультет Латвийского государственного университета им. П. Стучки, так и математические кафедры других высших учебных заведений республики.

Таким образом сборник трудов центра является фактически Латвийским математическим ежегодником, первым томом которого следует считать изданный в 1963 г. первый выпуск трудов центра.

Редакция сборника выражает надежду на то, что участие в его издании всей математической общественности Латвийской республики будет в дальнейшем расширено.

Л. А. СИМОНЯН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБР ЛИ

Предметом статьи являются локально конечные, локально нильпотентные и локально разрешимые лиевые алгебры.

В первом параграфе доказывается, что локально нильпотентный радикал локально конечной над полем характеристики 0 лиевой алгебры инвариантен относительно любого алгебраического дифференцирования (теорема 1). Теорема 2 позволяет определить локально нильпотентный радикал локально конечной лиевой алгебры над полем характеристики 0 как совокупность элементов алгебры с определенным свойством. Усилением последней на случай локально конечной и локально разрешимой алгебры является теорема 3. Основным методом доказательства результатов первого параграфа является сведение проблем к конечномерному случаю.

Во втором параграфе определяется представление одной лиевой алгебры относительно другой и изучаются внешне нильпотентные и локально стабильные представления. Доказывается существование локально внешне нильпотентного радикала (теорема 4), приводятся случаи существования локально стабильного радикала (теорема 5 и теорема 6).

Теорема 7 указывает на связь локально нильпотентного и локально стабильного радикалов.

Свойства локально стабильных представлений отмечаются теоремами 8 и 9.

Работа над статьей осуществлялась под руководством проф. Б. И. Плоткина. Автор пользуется случаем выразить ему глубокую признательность.

§ 1.

Приводимые ниже определения аналогичны соответствующим определениям теории групп [1].

Пусть в лиевой алгебре \mathfrak{L} дана система подалгебр $\Lambda = \{\mathfrak{L}_\alpha\}$, содержащая нулевую подалгебру $\mathfrak{L}_0 = 0$ и всю алгебру $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_\mu$. Пусть, далее, индексы α пробегает множество всех индексов A , упорядоченное при помощи отношения $<$, причем из $\alpha < \beta$ следует $\mathfrak{L}_\alpha \subset \mathfrak{L}_\beta$, т. е. система подалгебр упорядочена по отношению к теоретико-множественному включению. Если в множестве A есть элемент, непосредственно следующий за α , то условимся обозначать его через $\alpha + 1$ и будем говорить, что \mathfrak{L}_α и $\mathfrak{L}_{\alpha+1}$ составляют скачок в системе Λ . Упорядоченную систему подалгебр назовем полной, если для любой ее подсистемы и объединения, и пересечение подалгебр, составляющих эту подсистему, принадлежат к Λ .

Нормальной системой алгебры \mathfrak{L} называется всякая полная упорядоченная система подалгебр $\Lambda = \{\mathfrak{L}_\alpha\}$ этой алгебры, содержащая 0 и \mathfrak{L} и удовлетворяющая следующему дополнительному условию: для всякого скачка $\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_{\alpha+1}$ системы Λ подалгебра \mathfrak{L}_α будет идеалом в подалгебре $\mathfrak{L}_{\alpha+1}$.

Нормальная система Λ^1 называется уплотнением нормальной системы Λ , если всякая подалгебра, входящая в Λ , содержится и в Λ^1 .

Нормальная система, не допускающая последующих уплотнений, называется композиционной системой.

Всякая упорядоченная по включению полная система идеалов алгебры \mathfrak{L} , содержащая 0 и \mathfrak{L} называется инвариантной системой.

Вполне упорядоченная по возрастанию нормальная система называется возрастающим нормальным рядом.

Пусть \mathfrak{M} и \mathfrak{N} — два подмножества алгебры \mathfrak{L} . Обозначим через $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ множество всевозможных линейных комбинаций из элементов $[x, y]$, где $x \in \mathfrak{M}, y \in \mathfrak{N}$. Если \mathfrak{M} и \mathfrak{N} идеалы в \mathfrak{L} , то $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ также будет идеалом. Введем обозначения:

$$[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(1)] = [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}], \dots, [\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(n)] = [[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(n-1)], \mathfrak{N}]$$

Положим, в частности,

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{(1)} = \mathfrak{L}^1; \quad \mathfrak{L}^{(n)} = [\mathfrak{L}^{(n-1)}, \mathfrak{L}^{(n-1)}]; \quad \mathfrak{L}^n = [\mathfrak{L}^{n-1}, \mathfrak{L}]$$

Последовательность идеалов \mathfrak{L}^n называется убывающим центральным рядом, последовательность идеалов $\mathfrak{L}^{(n)}$ — производным рядом алгебры \mathfrak{L} .

Алгебра Ли \mathfrak{L} называется нильпотентной (соответственно разрешимой), если существует такое целое $n > 0$, что $\mathfrak{L}^n = 0$ (соответственно $\mathfrak{L}^{(n)} = 0$).

Лиева алгебра называется локально нильпотентной, если любое конечное множество ее элементов содержится в нильпотентной подалгебре.

Аналогично определяется локально-разрешимая алгебра.

Лиева алгебра называется локально конечной если всякое конечное подмножество ее элементов содержится в подалгебре конечной размерности. Известно, что всякая локально нильпотентная алгебра локально конечна.

Линейное преобразование D в лиевой алгебре \mathfrak{L} , удовлетворяющее условию

$$[[x, y], D] = [[x, D], y] + [x, [y, D]]$$

для всех $x, y \in \mathfrak{L}$, называется дифференцированием. Здесь через $[x, D]$, $x \in \mathfrak{L}$ обозначен образ элемента x при линейном преобразовании D .

Множество всех дифференцирований лиевой алгебры также образует алгебру Ли относительно операции

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$$

Эта алгебра называется алгеброй всех дифференцирований лиевой алгебры \mathfrak{L} и будет обозначаться через $\Delta(\mathfrak{L})$.

Доказано [3, 4], что произвольная алгебра Ли \mathfrak{L} обладает максимальным локально нильпотентным идеалом, содержащим все локально нильпотентные идеалы алгебры. Этот максимальный локально нильпотентный идеал будем обозначать через $N(\mathfrak{L})$ и называть локально нильпотентным радикалом алгебры \mathfrak{L} .

Аналогично тому, как это делается для группы, можно определить локальную систему подалгебр алгебры Ли.

Лемма 1. Пусть лиева алгебра \mathfrak{L} обладает локальной системой подалгебр $\{\mathfrak{L}_\alpha\}$ и в каждой подалгебре кроме того выбран ее идеал \mathfrak{N}_α причем из $\mathfrak{L}_\alpha \subset \mathfrak{L}_\beta$ следует $\mathfrak{N}_\alpha \subseteq \mathfrak{N}_\beta$. Обозначим через \mathfrak{N} теоретико-множественную сумму всех \mathfrak{N}_α . Тогда \mathfrak{N} является идеалом в \mathfrak{L} с локальной системой $\{\mathfrak{N}_\alpha\}$.

Доказательство. Так как $\{\mathfrak{L}_\alpha\}$ локальная система в \mathfrak{L} , то для любой пары \mathfrak{N}_α и \mathfrak{N}_β найдется такая подалгебра \mathfrak{L}_γ , что $\mathfrak{L}_\alpha \subset \mathfrak{L}_\gamma$, $\mathfrak{L}_\beta \subset \mathfrak{L}_\gamma$ откуда следует, что $\mathfrak{N}_\alpha \subseteq \mathfrak{N}_\gamma$ и $\mathfrak{N}_\beta \subseteq \mathfrak{N}_\gamma$.

Этим уже показано, что \mathfrak{N} алгебра, и $\{\mathfrak{N}_\alpha\}$ является локальной системой в \mathfrak{L} . Пусть $x \in \mathfrak{L}$ и $y \in \mathfrak{N}$.

Существуют такие \mathfrak{N}_β и \mathfrak{L}_α , что $x \in \mathfrak{L}_\alpha$ и $y \in \mathfrak{N}_\beta$. Если $\mathfrak{L}_\gamma \supset \mathfrak{L}_\beta$ и $\mathfrak{L}_\gamma \supset \mathfrak{L}_\alpha$, то, так как \mathfrak{N}_γ идеал в \mathfrak{L}_γ , $[x, y] \in \mathfrak{N}_\gamma$ и, следовательно, \mathfrak{N} идеал в \mathfrak{L} . Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть \mathfrak{N} локально нильпотентная подалгебра алгебры \mathfrak{L} и пусть в \mathfrak{L} имеется локальная система из подалгебр \mathfrak{L}_α , таких, что $N(\mathfrak{L}_\alpha) \supset \mathfrak{N}$. Тогда $N(\mathfrak{L}) \supset \mathfrak{N}$.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{N}^\mathfrak{L}$ минимальный идеал в \mathfrak{L} , содержащий \mathfrak{N} . Если $\mathfrak{L}_\alpha \supset \mathfrak{L}_\beta$, то $\mathfrak{N}^{\mathfrak{L}_\alpha} \supseteq \mathfrak{N}^{\mathfrak{L}_\beta}$, и потому, по лемме 1, $\mathfrak{N}^{\mathfrak{L}_\alpha}$ образуют локальную систему в своем теоретико-множественном объединении $\overline{\mathfrak{N}}$ и $\overline{\mathfrak{N}}$ является идеалом в \mathfrak{L} . $\overline{\mathfrak{N}}$ содержится в любом идеале, содержащем \mathfrak{N} , поэтому $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}^\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{N}^{\mathfrak{L}_\alpha}$ составляют локальную систему в $\mathfrak{N}^\mathfrak{L}$. По условию \mathfrak{N} содержится в $N(\mathfrak{L}_\alpha)$, следовательно, $\mathfrak{N}^{\mathfrak{L}_\alpha} \subseteq N(\mathfrak{L}_\alpha)$. Но тогда $\mathfrak{N}^\mathfrak{L}$ локально нильпотентная алгебра и значит $\mathfrak{N}^\mathfrak{L} \subseteq N(\mathfrak{L})$, откуда следует $\mathfrak{N} \subseteq N(\mathfrak{L})$. Лемма доказана.

Обозначим через x^D минимальную среди инвариантных относительно D подалгебр, содержащих x .

Дифференцирование D лиевой алгебры \mathfrak{L} назовем алгебраическим, если для любого $x \in \mathfrak{L}$ подалгебра x^D имеет конечное число образующих.

Теорема 1. Если \mathfrak{L} локально конечная лиева алгебра над полем характеристики 0, то $N(\mathfrak{L})$ инвариантен относительно всякого алгебраического дифференцирования.

Доказательство. Пусть D алгебраическое дифференцирование. Используя это, можно для любого $x \in N(\mathfrak{L})$ построить локальную систему $\{\mathfrak{L}_\alpha\}$ из инвариантных относительно D подалгебр конечной размерности \mathfrak{L}_α , таких, что $x \in \mathfrak{L}_\alpha$.

Обозначим через $N(\mathfrak{L}_\alpha)$ нильпотентный радикал подалгебры \mathfrak{L}_α . Так как $x \in N(\mathfrak{L}_\alpha)$ и нильпотентный радикал лиевой алгебры конечной размерности над полем характеристики 0 инвариантен относительно всякого дифференцирования этой алгебры, то $[x, D] \in N(\mathfrak{L}_\alpha)$. Из леммы 2 теперь следует, что $[x, D] \in N(\mathfrak{L})$. Теорема доказана.

Подалгебру \mathfrak{N} лиевой алгебры \mathfrak{L} назовем субинвариантной, если в \mathfrak{L} существует возрастающий нормальный ряд, членом которого является подалгебра \mathfrak{N} .

Из теоремы 1 следует, что всякая локально нильпотентная субинвариантная подалгебра локальна конечной над полем характеристики 0 алгебры \mathfrak{L} содержится в локально нильпотентном радикале алгебры \mathfrak{L} .

Подалгебру \mathfrak{M} лиевой алгебры \mathfrak{L} назовем локально субинвариантной, если в \mathfrak{L} существует локальная система $\{\mathfrak{L}_\alpha\}$, содержащих \mathfrak{M} подалгебр, в каждом члене которой \mathfrak{M} является субинвариантной подалгеброй.

Теорема 2. Пусть \mathfrak{L} локально конечная алгебра над полем характеристики 0. Элемент x тогда и только тогда принадлежит радикалу $N(\mathfrak{L})$, когда одномерная подалгебра $\{x\}$, порожденная элементом x , является локально субинвариантной.

Доказательство. Пусть $x \in N(\mathfrak{L})$. Обозначим через \mathfrak{M} произвольную конечномерную подалгебру алгебры \mathfrak{L} , содержащую x . $N(\mathfrak{L}) \cap \mathfrak{M}$ является непустой конечномерной нильпотентной подалгеброй, содержащей x . Так как $N(\mathfrak{L}) \cap \mathfrak{M}$ идеал в \mathfrak{M} , то $N(\mathfrak{L}) \cap \mathfrak{M} \subset N(\mathfrak{M})$ и потому $x \in N(\mathfrak{M})$.

Пусть

$$N(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{N}_n = 0$$

убывающий центральный ряд в $N(\mathfrak{M})$. Из равенства

$$[\mathfrak{N}_i, N(\mathfrak{M})] = \mathfrak{N}_{i+1}$$

следует, что

$$[\mathfrak{N}_i, x] \subseteq \mathfrak{N}_{i+1}$$

поэтому ряд

$$\{x\} \subset \{\mathfrak{N}_n, x\} \subset \dots \subset \{\mathfrak{N}_2, x\} \subset \{\mathfrak{N}_1, x\} = N(\mathfrak{M})$$

будет нормальным. (Здесь через $\{\mathfrak{N}_i, x\}$ обозначена подалгебра, порожденная \mathfrak{N}_i и x).

Пусть теперь в \mathfrak{L} существует локальная система подалгебр $\{\mathfrak{L}_\alpha\}$, в каждом члене которой $\{x\}$ является субинвариантной подалгеброй. Ясно, что в таком случае $\{x\} \subset N(\mathfrak{L}_\alpha)$. Из леммы 2 следует тогда, что $x \in N(\mathfrak{L})$. Теорема доказана.

Пусть x и y произвольные элементы лиевой алгебры \mathfrak{L} . Введем обозначения

$$[x, y(1)] = [x, y], \dots, [x, y(n)] = [[x, y(n-1)], y], \dots$$

Элемент y лиевой алгебры \mathfrak{L} называется нильэлементом, если при любом $x \in \mathfrak{L}$ найдется такое целое $n > 0$, что $[x, y(n)] = 0$.

Если \mathfrak{M} подалгебра лиевой алгебры \mathfrak{L} , то нормализатором \mathfrak{M} называется множество всех $x \in \mathfrak{L}$, таких, что $[\mathfrak{M}, x] \subset \mathfrak{M}$. Этот нормализатор также является подалгеброй.

Л е м м а 3 [3]. Пусть \mathfrak{L} алгебра Ли, \mathfrak{M} ее локально нильпотентная подалгебра и x нильэлемент из \mathfrak{L} , принадлежащий нормализатору \mathfrak{M} . Тогда подалгебра \mathfrak{N} , порожденная \mathfrak{M} и x , также локально нильпотентна.

Доказательство. Допустим, что \mathfrak{M} нильпотентная лиева алгебра конечной размерности. Будем доказывать теорему индукцией по длине убывающего центрального ряда алгебры \mathfrak{M} . Так как \mathfrak{M} конечномерная алгебра, то найдется такое целое $n > 0$, что для любого $y \in \mathfrak{M}$ $[y, x(n)] = 0$. Если \mathfrak{M} коммутативная алгебра, то $\mathfrak{N}^i \subset [\mathfrak{M}, x(i)]$ и, следовательно, \mathfrak{N} нильпотентная подалгебра алгебры \mathfrak{L} . Пусть теорема доказана для всякой алгебры \mathfrak{M} с длиной убывающего центрального ряда, меньшей чем m и пусть

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{M}_m = 0$$

убывающий центральный ряд алгебры \mathfrak{M} . По предложению индукции, алгебра $\mathfrak{N}_1 = \{\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_{m-1}, x\}$ является нильпотентной. Так как x принадлежит нормализатору \mathfrak{M} , то $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}/\mathfrak{M}_{m-1}$.

Из включения

$$[\mathfrak{M}_{m-1}, x(i)] \subseteq [\mathfrak{M}_{m-1}, \mathfrak{N}(i)]$$

следует, что \mathfrak{M}_{m-1} нильпотентна относительно \mathfrak{N} , что означает нильпотентность \mathfrak{N} .

Пусть теперь \mathfrak{M} локально нильпотентная подалгебра алгебры \mathfrak{L} . Элементы подалгебры \mathfrak{N} имеют вид $y + a x$, где $y \in \mathfrak{M}$ и a элемент поля. Пусть $y_1 + a_1 x, \dots, y_s + a_s x$, конечное множество элементов из \mathfrak{N} . Подалгебра \mathfrak{F} алгебры \mathfrak{M} , порожденная y_i и всевозможными $[y_i, x(j)]$, где $i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots$, имеет конечное число образующих, так как x нильэлемент алгебры \mathfrak{L} . Ясно также, что x принадлежит нормализатору подалгебры \mathfrak{F} . По предыдущему, $\{\mathfrak{F}, x\}$ нильпотентная подалгебра, причем $\{\mathfrak{F}, x\}$ содержит элементы $y_1 + a_1 x, \dots, y_s + a_s x$. Лемма доказана.

Л е м м а 4. Пусть \mathfrak{L} лиева алгебра над полем характеристики 0 и пусть \mathfrak{L} локально конечная и локально разрешимая алгебра. Тогда коммутант $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$ алгебры \mathfrak{L} локально нильпотентен.

Л е м м а 5. Если лиева алгебра \mathfrak{L} удовлетворяет условию $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subseteq N(\mathfrak{L})$, то $N(\mathfrak{L})$ есть множество всех нильэлементов алгебры \mathfrak{L} .

Доказательство. Предположим, что нильэлемент x алгебры \mathfrak{L} не принадлежит $N(\mathfrak{L})$. Из леммы 3 следует, что

$\{N(\mathfrak{L}), x\}$ является локально нильпотентной подалгеброй алгебры \mathfrak{L} . Так как всякая подалгебра, содержащая $N(\mathfrak{L})$, является идеалом в \mathfrak{L} , то по определению локально нильпотентного радикала имеем $\{N(\mathfrak{L}), x\} \subseteq N(\mathfrak{L})$ и поэтому $x \in N(\mathfrak{L})$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Если лиева алгебра над полем характеристики 0 локально конечна и локально разрешима, то локально нильпотентный радикал ее есть множество всех нильэлементов алгебры.* Теорема является очевидным следствием леммы 4 и леммы 5.

§ 2.

Пусть заданы лиевы алгебры \mathfrak{L} и \mathfrak{D} над произвольным полем \mathfrak{F} . Пусть еще определена операция $[\]$, назовем ее действием, относящая каждой паре (x, D) , где $x \in \mathfrak{L}$ и $D \in \mathfrak{D}$, однозначно определенный элемент $[x, D]$ из \mathfrak{L} и такая, что выполняются следующие условия ($x, y \in \mathfrak{L}$; $A, B, D \in \mathfrak{D}$; $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}$)

1. $[\alpha x + \beta y, D] = \alpha [x, D] + \beta [y, D]$
2. $[[x, y], D] = [[x, D], y] + [x, [y, D]]$
3. $[x, \alpha A + \beta B] = \alpha [x, A] + \beta [x, B]$
4. $[x, [A, B]] = [[x, A], B] - [x, [B, A]]$

Будем говорить тогда, что операция $[\]$ задает представление лиевой алгебры \mathfrak{D} относительно лиевой алгебры \mathfrak{L} или, просто, задана лиева пара $(\mathfrak{L}, \mathfrak{D})$.

Можно дать второе, эквивалентное первому, определение представления.

Представлением лиевой алгебры \mathfrak{D} относительно лиевой алгебры \mathfrak{L} называется всякое гомоморфное отображение алгебры \mathfrak{D} в лиеву алгебру $\Delta(\mathfrak{L})$ всех дифференцирований алгебры \mathfrak{L} .

Представление называется точным, если \mathfrak{D} изоморфно вкладывается в $\Delta(\mathfrak{L})$ или, на языке первого определения, если, каково бы ни было $D \in \mathfrak{D}$, из того, что $[x, D] = 0$ для любого $x \in \mathfrak{L}$, следует, что $D = 0$.

Если задано представление алгебры \mathfrak{D} относительно алгебры \mathfrak{L} , то будем говорить, что дифференцирование $D \in \Delta(\mathfrak{L})$ индуцируется алгеброй \mathfrak{D} , если D является образом некоторого элемента из \mathfrak{D} .

Подалгебра \mathfrak{N} алгебры \mathfrak{L} будет называться \mathfrak{C} — допустимой, где \mathfrak{C} некоторая, быть может и несобственная, подалгебра алгебры \mathfrak{D} , если \mathfrak{N} инвариантна относительно всех дифференцирований индуцируемых подалгеброй \mathfrak{C} .

Нормальный возрастающий ряд алгебры \mathfrak{Q} назовем \mathfrak{U} — допустимым, если \mathfrak{U} — допустим каждый его член.

Подалгебра \mathfrak{U} алгебры \mathfrak{D} называется внешне нильпотентной относительно \mathfrak{Q} , если в \mathfrak{Q} существует \mathfrak{U} — допустимый конечный нормальный ряд подалгебр

$$0 = \mathfrak{Q}_0 \subset \mathfrak{Q}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{Q}_i \subset \mathfrak{Q}_{i+1} \subset \dots \subset \mathfrak{Q}_n = \mathfrak{Q}$$

такой, что для любого $x_{i+1} \in \mathfrak{Q}_{i+1}$ и любого $A \in \mathfrak{U}$ $[x_{i+1}, A] \in \mathfrak{Q}_i$. Ряд с таким свойством будем называть конечным \mathfrak{U} — стабильным рядом.

Подалгебра \mathfrak{U} алгебры \mathfrak{D} называется локально внешне нильпотентной относительно \mathfrak{Q} , если любая подалгебра алгебры \mathfrak{U} с конечным числом образующих внешне нильпотентна относительно \mathfrak{Q} .

Обозначим через $[\mathfrak{Q}, \mathfrak{U}(1)]$ минимальный идеал в \mathfrak{Q} , содержащий элементы $[x, A]$, где $x \in \mathfrak{Q}$ и $A \in \mathfrak{U}$. Если уже определена подалгебра $[\mathfrak{Q}, \mathfrak{U}(n-1)]$ то $[\mathfrak{Q}, \mathfrak{U}(n)] = [[\mathfrak{Q}, \mathfrak{U}(n-1)] \mathfrak{U}]$.

Легко доказывается следующее известное для конечномерного случая предложение.

Если задано точное представление лиевой алгебры \mathfrak{D} относительно лиевой алгебры \mathfrak{Q} , такое, что \mathfrak{D} локально внешне нильпотентна относительно \mathfrak{Q} алгебра, то \mathfrak{D} локально нильпотентна.

Справедливость данного предложения следует из включения $[\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}^n] \subseteq [\mathfrak{Q}, \mathfrak{R}(n)]$, где \mathfrak{R} произвольная подалгебра алгебры \mathfrak{D} с конечным числом образующих.

Лемма 6. Если задано представление лиевой алгебры \mathfrak{D} относительно лиевой алгебры \mathfrak{Q} , то сумма $\mathfrak{U} + \mathfrak{V}$ двух внешне нильпотентных относительно \mathfrak{Q} идеалов \mathfrak{U} и \mathfrak{V} алгебры \mathfrak{D} снова внешне нильпотентный относительно \mathfrak{Q} идеал.

Доказательство. Так как \mathfrak{U} внешне нильпотентный относительно \mathfrak{Q} идеал, то найдется такое m , что $[\mathfrak{Q}, \mathfrak{U}(m)] = 0$. Покажем, что конечный \mathfrak{U} — стабильный ряд.

$$0 = \mathfrak{Q}_0 \subset \mathfrak{Q}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{Q}_{m-1} \subset \mathfrak{Q}_m = \mathfrak{Q},$$

где $\mathfrak{Q}_i = [\mathfrak{Q}, \mathfrak{U}(m-i)]$, является \mathfrak{V} — допустимым. Пусть уже доказано, что \mathfrak{Q}_i является \mathfrak{V} — допустимой подалгебррой. Для $x_i \in \mathfrak{Q}_i$, $A \in \mathfrak{U}$, $B \in \mathfrak{V}$ имеем

$$[[x_i, A]B] = [[x_i, B], A] + [x_i, [A, B]]$$

откуда следует, что $[[x_i, A], B] \in \mathfrak{Q}_{i-1}$.

Предположим, что для любых $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathfrak{Q}_i$, $A \in \mathfrak{U}$, $B \in \mathfrak{V}$

$$[\dots [y_0, A], y_1], \dots, y_n, B] \in \mathfrak{Q}_{i-1}.$$

Тогда для любых $y_0, y_1, \dots, y_{n+1} \in \mathfrak{L}_i$, $A \in \mathfrak{U}$, $B \in \mathfrak{B}$
 $[\dots [y_0, A], y_1, \dots, y_n, y_{n+1}], B] = [\dots [y_0 A], y_1, \dots, y_n, B], y_{n+1}]$
 $+ [\dots [y_0, A], y_1, \dots, y_n, [y_{n+1}, B]]$

откуда следует, что

$$[\dots [y_0, A], y_1, \dots, y_n, y_{n+1}], B] \in \mathfrak{L}_{i-1}$$

Пусть

$$0 = \mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{M}_s = \mathfrak{L}$$

конечный \mathfrak{B} — стабильный ряд в \mathfrak{L} .

Пересечем члены этого ряда с \mathfrak{L}_i и удалим возможные повторения. Получим конечный \mathfrak{B} — стабильный ряд в \mathfrak{L}_i

$$0 = \mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{N}_t = \mathfrak{L}_i.$$

Так как $\mathfrak{L}_{i-1} = \mathfrak{B}$ — допустимый идеал в \mathfrak{L}_i ,

то ряд

$$\mathfrak{L}_{i-1} \subset \{ \mathfrak{L}_{i-1} \mathfrak{N}_1 \} \subset \dots \subset \{ \mathfrak{L}_{i-1} \mathfrak{N}_t \} = \mathfrak{L}_i$$

будет конечным \mathfrak{B} — стабильным рядом. Вставляя между каждым \mathfrak{L}_{i-1} и \mathfrak{L}_i таким образом построенный ряд, мы получим в \mathfrak{L} конечный одновременно \mathfrak{U} — и \mathfrak{B} — стабильный ряд. Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть задано представление лиевой алгебры \mathfrak{D} относительно лиевой алгебры \mathfrak{L} . Тогда сумма двух локально внешне нильпотентных относительно \mathfrak{L} идеалов \mathfrak{U} и \mathfrak{B} в \mathfrak{D} снова локально внешне нильпотентный относительно \mathfrak{L} идеал в \mathfrak{D} .

Доказательство. Обозначим через $\overline{\mathfrak{U}}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$ образы \mathfrak{U} и \mathfrak{B} в алгебре всех дифференцирований лиевой алгебры \mathfrak{L} . Ясно, что $\overline{\mathfrak{U} + \mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{U}} + \overline{\mathfrak{B}}$ и алгебра $\mathfrak{U} + \mathfrak{B}$ тогда и только тогда локально внешне нильпотентна относительно \mathfrak{L} , когда локально внешне нильпотентна относительно \mathfrak{L} алгебра $\overline{\mathfrak{U}} + \overline{\mathfrak{B}}$. Пусть \mathfrak{K} подалгебра с конечным числом образующих в $\overline{\mathfrak{U}} + \overline{\mathfrak{B}}$. Из предложения, отмеченного в начале параграфа, следует, что \mathfrak{U} и \mathfrak{B} локально нильпотентные идеалы в \mathfrak{D} , но тогда, по [3, 4], $\overline{\mathfrak{U}} + \overline{\mathfrak{B}}$ — локально нильпотентный идеал и \mathfrak{K} — конечномерная подалгебра. Ясно, что $\mathfrak{U}_1 = \overline{\mathfrak{U}} \cap \mathfrak{K}$ и $\mathfrak{B}_1 = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{K}$ конечномерные идеалы в \mathfrak{K} и потому внешне нильпотентные относительно \mathfrak{L} . Так как $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{K}$, то из леммы 6 следует, что \mathfrak{K} внешне нильпотентная подалгебра. Следовательно, $\mathfrak{U} + \mathfrak{B}$ локально внешне нильпотентный относительно \mathfrak{L} идеал. Теорема доказана.

Идеал в \mathfrak{D} , порожденный всеми локально внешне нильпотентными относительно \mathfrak{L} идеалами в \mathfrak{D} будем называть лс-

кально внешне нильпотентным относительно \mathfrak{L} радикалом алгебры \mathfrak{D} и обозначать через $LN(\mathfrak{D}, \mathfrak{L})$.

Прямое произведение $\Delta(\mathfrak{L}) \times \mathfrak{L}$ векторных пространств $\Delta(\mathfrak{L})$ и \mathfrak{L} с операцией коммутирования

$$[(A, x), (B, y)] = ([A, B], [x, B] - [y, A] + [x, y]),$$

где $A, B \in \Delta(\mathfrak{L})$ и $x, y \in \mathfrak{L}$, называется голоморфом [2] лиевой алгебры \mathfrak{L} и обозначается через $\overline{\mathfrak{L}}$. При этом \mathfrak{L} можно рассматривать как идеал алгебры $\overline{\mathfrak{L}}$, а $\Delta(\mathfrak{L})$ — как ее подалгебру.

Всякое дифференцирование в $\overline{\mathfrak{L}}$ может быть продолжено до внутреннего дифференцирования в $\overline{\mathfrak{L}}$ и, наоборот, всякое внутреннее дифференцирование $ad(A, 0)$ индуцирует в \mathfrak{L} дифференцирование A .

Пусть \mathfrak{H} подалгебра в $\Delta(\mathfrak{L})$. Через $\overline{\mathfrak{L}}_{\mathfrak{H}}$ обозначим подалгебру в голоморфе $\overline{\mathfrak{L}}$, порожденную подпространством $\mathfrak{H} \times \mathfrak{L}$. Если \mathfrak{H} идеал в $\Delta(\mathfrak{L})$, то $\overline{\mathfrak{L}}_{\mathfrak{H}}$ идеал в $\overline{\mathfrak{L}}$. Если \mathfrak{L} и \mathfrak{H} разрешимые лиевы алгебры, то $\overline{\mathfrak{L}}_{\mathfrak{D}}$ также разрешима.

Лемма 7. Если \mathfrak{L} конечномерная разрешимая лиева алгебра над полем характеристики нуль и \mathfrak{D} ее алгебра дифференцирований, то фактор — алгебра

$$N(\mathfrak{D})/LN(\mathfrak{D}, \mathfrak{L})$$

является коммутативной лиевой алгеброй.

Доказательство. $\overline{\mathfrak{L}}_{N(\mathfrak{D})}$ является разрешимым идеалом в $\overline{\mathfrak{L}}_{\mathfrak{D}}$. По известной теореме $\overline{K} = [\overline{\mathfrak{L}}_{N(\mathfrak{D})}, \overline{\mathfrak{L}}_{N(\mathfrak{D})}]$ нильпотентный идеал в $\overline{\mathfrak{L}}_{\mathfrak{D}}$. Соотношение

$$[\overline{\mathfrak{L}}_{\mathfrak{D}}, \overline{K}(n)] \subseteq \overline{K}^n$$

показывает, что \overline{K} индуцирует в $\overline{\mathfrak{L}}_{\mathfrak{D}}$ внешне нильпотентную алгебру внутренних дифференцирований. Но тогда $[N(\mathfrak{D}), N(\mathfrak{D})]$ — внешне нильпотентна относительно \mathfrak{L} , и значит, $[N(\mathfrak{D}), N(\mathfrak{D})] \subseteq LN(\mathfrak{D}, \mathfrak{L})$. Лемма доказана.

Лемма 7 остается справедливой и тогда, когда вместо нильпотентного радикала рассматривается разрешимый радикал алгебры \mathfrak{D} .

Пусть задано представление лиевой алгебры \mathfrak{D} относительно лиевой алгебры \mathfrak{L} . Множество \mathfrak{H} элементов из \mathfrak{D} называется стабильным относительно \mathfrak{L} , если в \mathfrak{L} имеется воз-

растающий нормальный \mathcal{C} — допустимый ряд, в факторах которого \mathcal{C} индуцирует нулевые дифференцирования.

Конечное множество \mathcal{C} называется локально стабильным относительно \mathcal{L} , если в \mathcal{L} имеется локальная система из \mathcal{C} — допустимых подалгебр, в каждом члене которой \mathcal{C} действует как стабильное множество.

Подалгебра \mathcal{C} лиевой алгебры \mathcal{D} локально стабильна относительно \mathcal{L} , если локально стабильным относительно \mathcal{L} является каждое конечное подмножество элементов из \mathcal{C} .

Идеал в \mathcal{D} , порожденный всеми локально стабильными относительно \mathcal{L} идеалами в \mathcal{D} будем называть локально стабильным относительно \mathcal{L} радикалом алгебры \mathcal{D} и обозначать через $LS(\mathcal{D}, \mathcal{L})$.

Конечное множество \mathcal{C} дифференцирований алгебры \mathcal{L} назовем алгебраическим, если для любого $x \in \mathcal{L}$ подалгебра $x\mathcal{C}$ имеет конечное число образующих.

Лиева пара $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ называется алгебраической, если любое конечное множество элементов из \mathcal{D} индуцирует в \mathcal{L} алгебраическое множество дифференцирований.

Теорема 5. Если \mathcal{L} локально конечная алгебра Ли и пара $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ алгебраическая, то $LS(\mathcal{D}, \mathcal{L})$ является локально стабильным относительно \mathcal{L} идеалом в \mathcal{D} .

Доказательство. Пусть \mathcal{C} и \mathcal{B} два локально стабильных относительно \mathcal{L} идеала в \mathcal{D} , \mathcal{E} подалгебра в $\mathcal{C} + \mathcal{B}$ с конечным числом образующих и $\{\mathcal{N}_\alpha\}$ локальная система из всех конечномерных инвариантных относительно \mathcal{E} подалгебр алгебры \mathcal{L} .

$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ и $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cap \mathcal{E}$ являются внешне нильпотентными относительно \mathcal{N}_α идеалам в \mathcal{E} , так как \mathcal{N}_α конечномерная подалгебра.

Из леммы 6 следует, что $\mathcal{E} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{B}_1$ также внешне нильпотентна относительно \mathcal{N}_α и поэтому $\mathcal{C} + \mathcal{B}$ локально стабильный идеал в \mathcal{D} . Теорема доказана.

Пусть \mathcal{L} лиева алгебра, \mathcal{M} и \mathcal{N} ее подалгебры. Будем говорить, что пара $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ является алгебраической, если подалгебра \mathcal{M} инвариантна относительно \mathcal{N} и \mathcal{N} индуцирует в \mathcal{M} через внутренние дифференцирования алгебраическую алгебру дифференцирований.

Лемма 8. Если $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ алгебраическая пара подалгебр алгебры \mathcal{L} , то в подалгебре $\mathcal{R} = \mathcal{M} + \mathcal{N}$ имеется локальная система из подалгебр вида $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha + \mathcal{N}_\alpha$ где $\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{N}_\alpha \subset \mathcal{N}$, обе имеют конечное число образующих и \mathcal{M}_α инвариантна относительно \mathcal{N}_α .

Доказательство. Пусть $K = \{\mathfrak{R}_\alpha^1\}$ локальная система из всех подалгебр алгебры \mathfrak{R} с конечным числом образующих и Δ подмножество в K , состоящее из всех подалгебр, удовлетворяющих условию леммы. Если x_1, x_2, \dots, x_n образующие подалгебры \mathfrak{R}_α^1 , то каждый x_i может быть представлен в виде $x_i = y_i + z_i$, где $y_i \in \mathfrak{M}$ и $z_i \in \mathfrak{N}$. Так как подалгебра $\mathfrak{M}_\alpha = \{y_1, \dots, y_n, y_1^z, \dots, y_n^z\}$ где Z — множество элементов z_1, z_2, \dots, z_n имеет конечное число образующих и инвариантна относительно $\mathfrak{N}_\alpha = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, то $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{M}_\alpha + \mathfrak{N}_\alpha$ принадлежит Δ . Кроме того $\mathfrak{R}_\alpha \supset \mathfrak{R}_\alpha^1$. Если \mathfrak{R}_α и \mathfrak{R}_β две подалгебры из Δ , то найдется содержащая их подалгебра из K , которая, в свою очередь, по доказанному выше будет содержаться в некоторой подалгебре из Δ . Тем самым показано, что Δ является локальной системой в \mathfrak{R} .

Если \mathfrak{Q} локально конечная алгебра, то любые два идеала ее составляют алгебраическую пару.

Теорема 6. Пусть задана лиева пара $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{D})$. Если \mathfrak{Q} и \mathfrak{D} локально конечные алгебры, то $LS(\mathfrak{D}, \mathfrak{Q})$ является локально стабильным идеалом алгебры \mathfrak{D} .

Доказательство. Пусть \mathfrak{U} и \mathfrak{V} два локально стабильных идеала алгебры \mathfrak{D} , $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{V}_1$ подалгебра из локальной системы в $\mathfrak{U} + \mathfrak{V}$, удовлетворяющей требованиям леммы 8, и \mathfrak{M} конечномерная подалгебра алгебры \mathfrak{Q} . \mathfrak{U}_1 и \mathfrak{V}_1 индуцируют в \mathfrak{Q} алгебраические множества дифференцирований. Из того, что \mathfrak{U}_1 инвариантна относительно \mathfrak{V}_1 следует, что $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{V}_1$ также алгебраическое множество и потому $\mathfrak{M}^{\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{V}_1}$ — конечномерная подалгебра. Конечный \mathfrak{U}_1 — стабильный ряд в $\mathfrak{M}^{\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{V}_1}$, построенный так, как это сделано в доказательстве леммы 6 будет \mathfrak{V}_1 — допустимым, так как \mathfrak{U}_1 инвариантна относительно \mathfrak{V}_1 . Уплотняя этот ряд так, как это сделано в доказательстве леммы 6, получим $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{V}_1$ — стабильный ряд в $\mathfrak{M}^{\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{V}_1}$. Теорема доказана.

Теорема 7. Если лиева алгебра \mathfrak{Q} над полем характеристики 0 локально конечна и локально разрешима и \mathfrak{D} локально алгебраическая подалгебра алгебры $\Delta(\mathfrak{Q})$, то

$$N(\mathfrak{D})/LS(\mathfrak{D}, \mathfrak{Q})$$

коммутативная лиева алгебра.

Доказательство. Пусть M подалгебра в $[N(\mathfrak{D}), N(\mathfrak{D})]$ с образующими $[y_1, z_1], \dots, [y_n, z_n]$ и \mathfrak{M} конечномерная разрешимая подалгебра алгебры \mathfrak{Q} . Подалгебра \mathfrak{M}^P , где $P = \{y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n\}$, будет также конечномерной и потому разре-

значим через \mathfrak{Z} ядро этого представления. Ясно, что P/\mathfrak{Z} является нильпотентной алгеброй. Из л е м м ы 7 следует, что $[P/\mathfrak{Z}, P/\mathfrak{Z}]$ внешне нильпотентна относительно \mathfrak{M}^p , но тогда $[P, P]$ также внешне нильпотентна.

Из включения $M \subseteq [P, P]$ следует, что M внешне нильпотентна относительно любой конечномерной $[P, P]$ — допустимой подалгебры алгебры \mathfrak{Q} . Так как последние составляют локальную систему в \mathfrak{Q} , то

$$[N(\mathfrak{D}), N(\mathfrak{D})] \subseteq LS(\mathfrak{D}, \mathfrak{Q}).$$

Теорема доказана.

Элемент x лиевой алгебры \mathfrak{Q} будем называть локально стабильным, если adx — локально стабильное дифференцирование.

Легко показать, что элемент $x \in \mathfrak{Q}$ локально стабилен тогда и только тогда, когда подалгебра $\{x\}$ локально субинвариантна.

Т е о р е м а 8. Если \mathfrak{Q} локально конечная алгебра над полем характеристики 0 и \mathfrak{D} локально стабильная алгебра дифференцирований алгебры \mathfrak{Q} , то $[\mathfrak{Q}, \mathfrak{D}] \subseteq N(\mathfrak{Q})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное дифференцирование D из \mathfrak{D} . $\bar{\mathfrak{Q}}_{\{D\}}$ локально конечная алгебра. Если $\{\mathfrak{Q}_\alpha\}$ локальная система из D — допустимых подалгебр, в каждом члене которой D действует как стабильное дифференцирование, то $\bar{\mathfrak{Q}}_{\alpha\{D\}}$ локальная система в $\bar{\mathfrak{Q}}_{\{D\}}$ и $(D, 0)$ стабильный элемент в каждой $\bar{\mathfrak{Q}}_{\alpha\{D\}}$.

Из теоремы 2 следует, что $(D, 0) \in N(\bar{\mathfrak{Q}}_{\{D\}})$. Так как \mathfrak{Q} , т. точностью до изоморфизма, является идеалом в $\bar{\mathfrak{Q}}_{\{D\}}$, то

$$\mathfrak{Q} \cap N(\bar{\mathfrak{Q}}) = N(\mathfrak{Q})$$

Из последнего равенства следует, что для любого $x \in \mathfrak{Q}$ $[x, D] \in N(\mathfrak{Q})$. Теорема доказана.

Инвариантную систему $\{\mathfrak{Q}_\alpha\}$ подалгебр алгебры \mathfrak{Q} назовем центральной, если для всякого скачка $\mathfrak{Q}_\alpha, \mathfrak{Q}_{\alpha+1}$ этой системы $[\mathfrak{Q}_{\alpha+1}, \mathfrak{Q}] \subseteq \mathfrak{Q}_\alpha$.

Всякую алгебру, обладающую хотя бы одной центральной системой будем называть Z — алгеброй.

Всякая лиева алгебра, обладающая локальной системой из Z — подалгебр, является Z — алгеброй.

Л е м м а 9. Пусть задано точное представление алгебры \mathfrak{D} относительно алгебры \mathfrak{Q} , причем каждая подалгебра \mathfrak{C} алгебры \mathfrak{D} с конечным числом образующих стабильна относительно \mathfrak{Q} . Тогда \mathfrak{D} является Z — алгеброй.

Доказательство. Пусть

$$0 = \mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_\alpha \subset \mathfrak{L}_{\alpha+1} \subset \dots \subset \mathfrak{L}_\gamma = \mathfrak{L}$$

Π — стабильный нормальный возрастающий ряд.

Доказательство проводим индукцией по длине этого ряда. Пусть уже доказано, что для $\alpha < \gamma$ Π обладает центральной системой. Обозначим через \mathfrak{B}_α ядро представления Π относительно \mathfrak{L}_α . По предположению индукции, Π/\mathfrak{B}_α обладает центральной системой. Пусть $D \in \bigcap_{\alpha < \gamma} \mathfrak{B}_\alpha$ и $x \in \mathfrak{L}$. Найдется такое β , что $x \in \mathfrak{L}_\beta$. Так как $D \in \mathfrak{B}_\beta$, то $[x, D] = 0$ и, так как представление точное, то $\bigcap_{\alpha < \gamma} \mathfrak{B}_\alpha = 0$. В таком случае $\Pi/\bigcap_{\alpha < \gamma} \mathfrak{B}_\alpha$ изоморфна Π и Π является Z — алгеброй.

Если γ не предельное число, то $\Pi/\mathfrak{B}_{\gamma-1}$ обладает центральной системой. Обозначим через $\mathfrak{S}_\alpha(x)$ подалгебру алгебры Π , состоящую из всех $D \in \mathfrak{D}$, таких, что $[x, D] \in \mathfrak{L}_\alpha$ и через $\mathfrak{F}_\alpha(x)$ подалгебру $\mathfrak{S}_\alpha(x) \cap \mathfrak{B}_{\gamma-1}$. Покажем, что ряд

$$\mathfrak{F}_0(x) \subset \mathfrak{F}_1(x) \subset \dots \subset \mathfrak{F}_\alpha(x) \subset \mathfrak{F}_{\alpha+1}(x) \subset \dots \subset \mathfrak{B}_{\gamma-1} = \bigcup_{\alpha} \mathfrak{F}_\alpha(x)$$

является центральным относительно Π рядом.

Для этого рассмотрим равенство

$$[x[F, A]] = [[x, F], A] - [[x, A], F], \text{ где } F \in \mathfrak{F}_{\alpha+1}(x), A \in \Pi.$$

Так как $[x, F] \in \mathfrak{L}_{\alpha+1}$, то, ввиду стабильности Π относительно \mathfrak{L} , $[[x, F], A] \in \mathfrak{L}_\alpha$ и, так как $[x, A] \in \mathfrak{L}_{\gamma-1}$, и $F \in \mathfrak{B}_{\gamma-1}$, то $[[x, A]F] = 0$, что означает, $[[x, A]F] \in \mathfrak{L}_\alpha$.

Мы показали, что $[x[F, A]] \in \mathfrak{L}_\alpha$, кроме того известно, что $[F, A] \in \mathfrak{B}_{\gamma-1}$, следовательно $[F, A] \in \mathfrak{F}_\alpha(x)$ и ряд

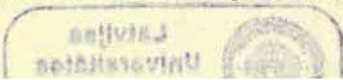
$$\mathfrak{F}_0(x) \subset \dots \subset \mathfrak{F}_\alpha(x) \subset \mathfrak{F}_{\alpha+1}(x) \subset \dots \subset \mathfrak{B}_{\gamma-1} = \bigcup_{\alpha} \mathfrak{F}_\alpha(x)$$

центральный относительно Π .

Так как $\Pi/\mathfrak{F}_0(x)$ является Z — алгеброй и $\bigcap_x \mathfrak{F}_0(x) = 0$, то Π — Z — алгебра. Лемма доказана.

Теорема 9. Если $(\mathfrak{L}, \mathfrak{D})$ точная левая пара и \mathfrak{D} локально стабильна относительно \mathfrak{L} , то \mathfrak{D} является Z — алгеброй.

Доказательство. Пусть Π подалгебра с конечным числом образующих в \mathfrak{D} и $\{\mathfrak{L}_\alpha\}$ локальная система подалгебр в \mathfrak{L} , в каждом члене которой Π действует как стабильное множе-



ство. Из леммы 9 следует, что $\mathcal{U}/\mathfrak{B}_\alpha - Z$ — алгебра, где \mathfrak{B}_α ядро представления \mathcal{U} относительно \mathfrak{L}_α . Так как представление точное, то $\bigcap_{\alpha} \mathfrak{B}_\alpha = 0$ и, следовательно, \mathcal{U} является Z — алгеброй. Теорема доказана.

Если выполнены условия теоремы 9 и если \mathfrak{D} локально конечная алгебра, то \mathfrak{D} локально нильпотентна.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош, Теория групп, М., 1953 г.
2. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, М., 1962 г.
3. Б. И. Плоткин, Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли, Успехи матем. наук, 13, в. 6(84), (1958) 133—138.
4. А. И. Костричкин, Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, 21, № 4, 515—540.

ON REPRESENTATIONS OF LIE ALGEBRAS

Annotation.

The paper presents a study of locally finite, locally nilpotent and locally solvable Lie algebras.

In the first part of the paper it is proved that the locally nilpotent radical of locally finite Lie algebra over a field of characteristic zero is left invariant by every algebraic derivation of Lie algebra.

The second part contains a discussion of outer nilpotent and locally stable representations.

Л. А. Симонян

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБР ЛИ

Аннотация

Предметом статьи являются локально конечные, локально нильпотентные и локально разрешимые лиевы алгебры. В первом параграфе доказывается, что локально нильпотентный радикал локально конечной над полем характеристики 0 лиевой алгебры инвариантен относительно любого алгебраического дифференцирования. Во втором параграфе изучаются внешне нильпотентные и локально стабильные представления.

Е. М. Левич

ПРИМЕР ПРОСТОЙ, НО НЕ СТРОГО ПРОСТОЙ ГРУППЫ

Группа G называется строго простой, если в G нет возрастающих нормальных рядов.

Б. И. Плоткин в обзоре [1] отметил следующую проблему: Существуют ли простые группы, но не являющиеся строго простыми?

В настоящей заметке построена простая, но не строго простая группа. Это дает утвердительный ответ на поставленную проблему.

§1. Возьмем свободную группу G со счетным множеством образующих $\{p_i\}$ ($i=0, 1, 2, \dots, n, \dots$). Пусть дано слово $\omega = p_{j_1}^{\alpha_1} p_{j_2}^{\alpha_2} \dots p_{j_n}^{\alpha_n}$ (α_i принимает любое значение из положительных и отрицательных целых чисел). Запись слова называется допустимой, если в слове для любого $j_i, j_i \neq j_{i+1}$. В дальнейшем мы будем рассматривать слова лишь в допустимой записи, поэтому мы это нигде ниже оговаривать не будем. Длиной слова $\omega = p_{j_1}^{\alpha_1} p_{j_2}^{\alpha_2} \dots p_{j_n}^{\alpha_n}$ будем называть число n . Длину слова ω будем обозначать через $l(\omega)$. Слова a сопряжено со словом b при помощи слова c , если $a = c^{-1}bc$. Два сопряженных друг с другом слова a и b называются элементарно сопряженными, если $l(a) = l(b)$. Слово p_i^k ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots$) мы будем называть элементарным словом. Общей левой частью двух слов a и b называется максимальное по длине слово $\omega(a, b)$, для которого справедливы равенства

$$\begin{aligned} a &= \omega(a, b)a_1 \\ b &= \omega(a, b)b_1, \quad \text{причем} \end{aligned}$$

$$l(a) = l(\omega(a, b)) + l(a_1), \quad l(b) = l(\omega(a, b)) + l(b_1).$$

Например, общей левой частью двух слов $a = p_0 p_1^{-2} p_3 p_2$ и $b = p_0 p_1^{-2} p_3^2 p_2$ есть слово $\omega(a, b) = p_0 p_1^{-2}$.

Пусть A есть множество всех слов a_i , элементарно сопряженных со словом a , а B есть множество всех слов b_i , элементарно сопряженных со словом b . Обозначим через (A, B) множество всех слов $\omega(a_i, b_i)$, где $a_i \in A, b_i \in B$. Пересечением двух слов a и b называется любое слово $\cap(a, b) \in (A, B)$, для которого справедливо равенство: $l(\cap(a, b)) = \max l(\omega(a_i, b_i))$, $a_i \in A, b_i \in B$

Например, пересечением двух слов $a = p_2 p_0^{-2} p_1^2 p_3^2 p_4^2 p_5$ и $b = p_3 p_0^{-2} p_1^2 p_3^2 p_4$ есть слово $\cap(a, b) = p_0^{-2} p_1^2 p_3^2$, которое является общей частью двух слов $a = p_0^{-2} p_1^2 p_3^2 p_4^2 p_5 p_2$ и $b = p_0^{-2} p_1^2 p_3^2 p_4^2 p_4 p_3$, т. е.

$$\omega(a_i, b_i) = \cap(a, b) = p_0^{-2} p_1^2 p_3^2.$$

Общей инверсной частью двух слов a, b есть слово максимальной длины $\bar{\omega}(a, b)$, для которого справедливы равенства $a^{-1} = \bar{\omega}(a, b) a_1, b = \bar{\omega}(a, b) b_1$, причем $l(a^{-1}) = l(\bar{\omega}(a, b)) + l(a_1)$ и $l(b) = l(\bar{\omega}(a, b)) + l(b_1)$. Пусть A — множество всех слов a_i , элементарно сопряженных со словом a , а B есть множество всех слов b_i , элементарно сопряженных со словом b . Обозначим через (\bar{A}, \bar{B}) множество всех слов $\bar{\omega}(a_i, b_i)$, где $a_i \in A, b_i \in B$.

Инверсным пересечением двух слов a и b называется любое слово $\bar{\cap}(a, b) \in (\bar{A}, \bar{B})$, для которого справедливо равенство

$$l(\bar{\cap}(a, b)) = \max_{a_i \in A, b_i \in B} l(\bar{\omega}(a_i, b_i))$$

Общим пересечением двух слов a и b называется слово $O(a, b)$, которое совпадает или со словом $\cap(a, b)$, или со словом $\bar{\cap}(a, b)$, причем $l(O(a, b)) = \max \{l(\cap(a, b)), l(\bar{\cap}(a, b))\}$

§2. Пусть дана свободная группа G со свободными образующими $\{p_i\}$ ($i=0, 1, 2, \dots, n, \dots$). Выберем в группе G множество Ω слов:

$$(q_{10}) p_1^{-1} p_0 p_1 p_0^{-2}$$

$$(q_{21}) p_2^{-1} p_1 p_2 p_0^{-1}$$

$$(q_{20}) p_2^{-1} p_0 p_2 p_0^{-3}$$

.....

$$(q_{i+1,j}) p_{i+1}^{-1} p_j p_{i+1} p_j^{-1}$$

$$(q_{i+1,o}) p_{i+1}^{-1} p_0 p_{i+1} p_0^{-k} \quad (j < i),$$

где k — простое число, стоящее на $i+3$ месте в возрастающем ряду простых чисел.

Лемма 1. Пусть Q минимальная подгруппа свободной группы G , содержащей слова $\{q_{ij}\}$. Пусть $a \in Q$, тогда $l(a) > 4$, или $l(a) = 0$.

Доказательство. Пусть даны два слова $a = p_i^{-1} p_j p_i p_j^{-1}$, ($a = (q_{ij})$) и ($b = (q_{i_1 j_1})$) $b = p_{i_1}^{-1} p_{j_1} p_{i_1} p_{j_1}^{-1}$, причем $a \neq b$, $j, j_1 \neq 0$.
Случай, когда $j = 0$, или $j_1 = 0$ рассматривается аналогично. Очевидно, что $l(a, b) \geq 6$ и $l(b, a) \geq 6$. Покажем, что $l(ab^{-1}) \geq 6$. Действительно, $ab^{-1} = p_i^{-1} p_j p_i p_j^{-1} p_{j_1}^{-1} p_{i_1} p_{j_1} p_{i_1}^{-1}$ и пусть $l(ab^{-1}) < 6$. Это значит, что $p_{j-1} = p_{j_1-1}$ и $p_i = p_{i_1}$, или что $a = b$. Следовательно, т. к. $a \neq b$, то $l(ab^{-1}) \geq 6$. Аналогично показывается, что $l(a^{-1}b) \geq 6$, $l(ba^{-1}) \geq 6$. Из того, что $l(a^{\varepsilon_1} b^{\varepsilon_2}) \geq 6$ и $l(b^{\varepsilon_2} a^{\varepsilon_1}) \geq 6$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$) следует, что $l(\omega(a, b)) \leq 1$, $l(\bar{\omega}(a, b)) \leq 1$. Отсюда вытекает, что для доказательства леммы достаточно показать, что произведение любых двух слов $(q_{ij})^{\varepsilon_1}$ и $(q_{i_1 j_1})^{\varepsilon_2}$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$) имеют длину $= 0$, или ≥ 4 , что мы и показали.

Следовательно, лемма доказана.

Лемма 2. Пусть слово a_i элементарно сопряжено со словом (q_{ij}) , слово b_i элементарно сопряжено со словом $(q_{i_1 j_1})$. Тогда $l(a_i b_i) \geq 4$, или $l(a_i b_i) = 0$.

Доказательство. Пусть $(q_{ij}) = a_0 = p_i^{-1} p_j p_i p_j^{-1}$ и $(q_{i_1 j_1}) = b_0 = p_{i_1}^{-1} p_{j_1} p_{i_1} p_{j_1}^{-1}$ ($j, j_1 \neq 0$). Случай, когда или $j = 0$, или $j_1 = 0$ рассматривается аналогично, поэтому мы его здесь рассматривать не будем. Со словом (q_{ij}) элементарно сопряжены четыре слова: $a_1 = p_j p_i p_j^{-1}$, $a_2 = p_i p_j^{-1} p_i^{-1} p_j$, $a_3 = p_j^{-1} p_i^{-1} p_j p_i$, a_0 со словом $(q_{i_1 j_1})$ элементарно сопряжены также четыре слова: $b_1 = p_{j_1} p_{i_1} p_{j_1}^{-1} p_{i_1}^{-1}$, $b_2 = p_{i_1} p_{j_1}^{-1} p_{i_1}^{-1} p_{j_1}$, $b_3 = p_{j_1}^{-1} p_{i_1}^{-1} p_{j_1} p_{i_1}$, b_0 .

Рассматривая всевозможные произведения из этих слов по два, мы легко убеждаемся, что $l(a_i b_i) \geq 6$ и $l(b_i a_i) \geq 6$. Из леммы 2, в частности, вытекает, что $l(0(a_0 b_0)) \leq 1$.

Из леммы 1 и 2 следует

Теорема 1. Пусть ΩG — минимальная инвариантная подгруппа группы G , содержащая Q . Тогда для любого $a \in \Omega G$ $l(a) \geq 4$ или $l(a) = 0$.

§3. Рассмотрим группу $J = G/\Omega G$. J — непуста, т. к. она содержит различные смежные классы $p_i \Omega G$ и $p_j \Omega G$ ($i \neq j$). Смежный класс $p_i \Omega G$ будем обозначать через p_i .

Построим в J возрастающий нормальный ряд

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset J_{i+1} \subset \dots \subset J_\alpha = J$$

В качестве J_1 возьмем минимальную подгруппу группы J , содержащую элементы вида

$$\rho_m^{k_m} \rho_{m-1}^{k_{m-1}} \dots \rho_2^{k_2} \rho_1^{k_1} \rho_0^{t_0} \rho_1^{-k_1} \rho_2^{-k_2} \dots \rho_{m-1}^{-k_{m-1}} \rho_m^{-k_m},$$

где $t_0, k_1, k_2, \dots, k_m, m$ — натуральные числа, причем, если $k_i = 0$, то $k^{i+1} = 0$.

В качестве J_2 возьмем минимальную подгруппу группы J , содержащую подгруппу J_1 и элементы вида

$$\rho_m^{k'_m} \rho_{m-1}^{k'_{m-1}} \dots \rho_2^{k'_2} \rho_2^{t_1} \rho_2^{-k'_2} \dots \rho_{m-1}^{-k'_{m-1}} \rho_m^{-k'_m},$$

где $t_1, m, k'_m, \dots, k'_2$ — натуральные числа, причем, если $k_i = 0$ то $k_{i+1} = 0$. В качестве J_{i+1} возьмем минимальную подгруппу группы J , содержащую подгруппу J_i и элементы вида

$$\rho_m^{k''_m} \rho_{m-1}^{k''_{m-1}} \dots \rho_{i+1}^{k''_{i+1}} \rho_i^{t_i} \rho_{i+1}^{-k''_{i+1}} \dots \rho_{m-1}^{-k''_{m-1}} \rho_m^{-k''_m},$$

где $t_i, m, k''_m, \dots, k''_{i+1}$ — натуральные числа, причем, если $k''_j = 0$, то $k''_{j+1} = 0$. Легко видеть, что $J_i \neq J_j$, если $i \neq j$.

Лемма 3. J_i есть нормальный делитель в J_{i+1} .

Доказательство. Пусть $a \in J_i, b \in J_{i+1}$. Тогда, не уменьшая общности, a представим в виде

$$\rho_m^{k_m} \rho_{m-1}^{k_{m-1}} \dots \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \rho_j^{t_j} \rho_{j+1}^{-k_{j+1}} \dots \rho_{m-1}^{-k_{m-1}} \rho_m^{-k_m},$$

где $j, m, k_{j+1}, \dots, k_m, t_j$ — натуральные числа, причем $j < i$. Аналогично можно, не уменьшая общности, b представить в виде $\rho_l^{k_l} \dots \rho_{i+1}^{k_{j+1}} \rho_i^{t_i} \rho_{i+1}^{-k_{i+1}} \dots \rho_l^{-k_l}$, где $l, t_i, k, \dots, k_{j+1}$ — натуральные числа, причем, если $k_j = 0$, то и $k_{j+1} = 0$. Покажем, что $bab^{-1} \in J_i$ и $b^{-1}ab \in J_i$. Для этого достаточно показать, что $\rho_l^{-1} a \rho_l \in J_i$.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $l = m$. Тогда

$$\begin{aligned} & \rho_m^{-1} \rho_m^{k_m} \dots \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \rho_j^{t_j} \rho_{j+1}^{-k_{j+1}} \dots \rho_m^{-k_m} \rho_m = \\ & = \rho_m^{k_m-1} \dots \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \rho_j^{t_j} \rho_{j+1}^{-k_{j+1}} \dots \rho_m^{-(k_m-1)} \in J_i \end{aligned}$$

2. $l < m$. Тогда

$$\begin{aligned} & \rho_l^{-1} \rho_m^{k_m} \dots \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \rho_j^{t_j} \rho_{j+1}^{-k_{j+1}} \dots \rho_m^{-k_m} \rho_l = \\ & = \rho_m^{k_m} (\rho_m^{-k_m} \rho_l^{-1} \rho_m^{k_m}) \dots \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \rho_j^{t_j} \rho_{j+1}^{-k_{j+1}} \dots (\rho_m^{-k_m} \rho_l \rho_m^{k_m}) \rho_m^{-k_m} = \\ & = \rho_m^{k_m} \rho_l^{-s} \dots \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \rho_j^{t_j} \rho_{j+1}^{-k_{j+1}} \dots \rho_l^s \rho_m^{k_m} = \dots = \\ & = \rho_m^{k_m} \dots \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \rho_{l_2}^{s_2} \rho_{j+1}^{-k_{j+1}} \dots \rho_m^{k_m} \in J_i \quad (l_2 < j, l_1, \rho_{l_1}^s = \rho_m^{k_m} \rho_l \rho_m^{k_m}). \end{aligned}$$

3. $l > m$. Тогда

$$\begin{aligned} & \rho_l^{-1} \rho_m^{k_m} \dots \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \rho_j^{t_j} \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \dots \rho_m^{-k_m} \rho_l = \\ & = \rho_l^{-1} \rho_m^{k_m} \rho_l \rho_l^{-1} \dots \rho_l (\rho_l^{-1} \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \rho_l) (\rho_l^{-1} \rho_j^{t_j} \rho_l) (\rho_l^{-1} \rho_{j+1}^{k_{j+1}} \rho_l) = \\ & = \rho_l (\rho_l^{-1} \dots \rho_l (\rho_j^{-1} \rho_m^{-k_m} \rho_l) = \\ & = \rho_{m-1}^{k_m} \dots \rho_j^{k_{j+1}} \rho_{j-1}^{t_j} \rho_j^{-k_{j+1}} \dots \rho_{m-1}^{-k_m} \in J_i \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Группа J — простая группа.*

Доказательство. Пусть M — нетривиальный нормальный делитель в J . Пусть $M \cap J_i (i > 0)$ — непустое множество и слово $a \in M \cap J_i$, но $a \notin J_{i-1}$. Тогда, очевидно, что $\rho_{i+1}^{-(i+1)} a \rho_{i+1}^{i+1} = \rho_o^m$. Если m — простое чисто и стоит на k — том месте в возрастающем ряду простых чисел, то $\rho_{k-2} \rho_o^m \rho_{k-2}^{-1} = \rho_o$, т. е. $\rho_o \in M$. Отсюда следует, что $J = M$. Если m — непростое число, пусть k_1, k_2, \dots, k_l — все элементарные множители числа m , причем k_1 стоит на i_1 — том месте в возрастающем ряду простых чисел, k_2 на i_2 — том месте $\dots \dots \dots$, k_l — на i_l — том месте, тогда $\rho_{i_1-2} \rho_{i_2-2} \dots \rho_{i_l-2} \rho_o^m \rho_{i_1-2}^{-1} \dots \rho_{i_l-2}^{-1} \rho_{i_1-2} = \rho_o$. И если $\rho_o \in M$, то $M = J$. Следовательно, теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. Плоткин, Обобщенные разрешимые и обобщенные нильпотентные группы. УМН т. 13. вып. 4(52) (1958) стр. 89—172.

Е. М. Левич

ПРИМЕР ПРОСТОЙ, НО НЕ СТРОГО ПРОСТОЙ ГРУППЫ

Аннотация

В работе показано, что понятия простоты и строгой простоты для групп не эквивалентны. Построен пример простой, но не строго простой группы.

E. M. Levich

AN EXAMPLE OF SIMPLE, BUT OF NOT STRICTLY SIMPLE GROUP.

Annotation

The paper shows that the concepts of simplicity and of strict simplicity are not equivalent for groups. An example of simple but of not strictly simple group is given.

И. Э. Страздинь

ТИПЫ ТРОИЧНЫХ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ*)

0. В теории схем с многопозиционными элементами и конечными дискретными проводимостями, а также в небинарном кодировании используются многозначные переключательные функции (l -ичные функции) $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, принимающие вместе с переменными X_i значения из конечного множества $\{0, 1, \dots, l-1\}$ ($l \geq 2, n \geq 1$). В работах [6], [7] и [8] автор изучал групповую инвариантность l -ичных функций. В частности, было подсчитано число типов функций относительно группы U_n^l преобразований переименования переменных и ее подгруппы T_n^l .

При этом особый интерес представляет частный случай $l=3, n=2$, который единственный (кроме тривиальных случаев $n=1$) поддается полному обозрению — в том смысле, что все типы можно перечислить. Настоящая статья содержит изложение этого примера. Дается перечень типов функций относительно групп T_2^3 и U_2^3 (п. 4), указываются классы групп инерции и находятся области инвариантности относительно подгруппы U_2^3 (п. 6). Необходимые сведения из [6], [7] и [8] излагаются лишь в применении к рассматриваемому примеру.

Для случаев $l=2$ (булевых функций), $n=3, 4$ таблицы типов функций и их схемных реализаций приводятся в [1] и [4]. Области инвариантности при $n=3$ были построены автором в [5].

1. Множество F_2^3 всех троичных функций $f(X, Y)$ содержит 19 683 функций. Каждая функция f задана на 9 наборах (парах) значений переменных X, Y . Пары $X=x, Y=y$ ($x, y=0, 1, 2$) обозначим троичными числами xy или соответствующими им десятичными цифрами, располагая их по возрастанию:

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right.$$

*) Примечание. Статья поступила в редакцию 20 мая 1963 г.

Функции f будем записывать в виде 9-значных троичных чисел, образуемых значениями f на парах, расположенных в указанном «естественном» порядке — с левым верхним индексом « f ». Например, $\max(X, Y) = f012\ 112\ 222$.

Рангом функции f называется тройка $r = (r_0, r_1, r_2)$, где r_j — число значений f , равных j ($j = 0, 1, 2$); $r_0 + r_1 + r_2 = 9$. Ранги, отличающиеся лишь порядком чисел r_j , объединяются в один класс рангов $0^{q_0}1^{q_1}\dots 9^{q_9}$, где q_k — число чисел r_j , равных k ($k = 0, 1, \dots, 9$). Пишутся только те члены k^{q_k} , для которых $q_k > 0$; их число ≤ 3 (т. к. $\sum_{k=0}^9 q_k = 3$). Всего имеется 55 различных рангов и 12 классов рангов:

0²⁹ 018 027 036 045 1²⁷ 126 135 14² 2²⁵ 234 3³

(см. ниже, табл. 4).

Например, функция $\max(X, Y)$ имеет ранг (1, 3, 5), принадлежащий классу рангов 135. К тому же классу относится функция Вебба (см. [2], [9]) $X|Y = \max(X, Y) + 1 = (X+1)(Y+1)(XY+1) = f120\ 220\ 000$ ранга (5, 1, 3); сложение и умножение везде берутся по модулю 3.

Будем пользоваться также обозначением функций в виде множеств номеров пар (расположенных в естественном порядке), на которых они принимают одно и то же значение. Константы «0», «1», «2» (класса рангов 0²⁹) обозначаем пустым множеством Λ . Функцию, принимающую два значения, обозначаем тем из обеих множеств, которое содержит меньшее число пар. Если функция принимает все три значения, обозначаем ее двумя наименьшими множествами, выписывая первым большее множество (а если эти множества содержат одинаковое число пар — располагая их, как сказано дальше) и разделяя оба множества точкой. Поскольку функция таким образом определяется с точностью до ранга, после множеств номеров пар пишем в таком же порядке значения функции на всех непустых множествах (в том числе — последним — значение на наибольшем множестве, явно не указанном).

Если два (наименьших) множества содержат одинаковое число пар (для функций классов рангов 1²⁷, 14², 2²⁵), то пишем их в соответствии с одним из трех расположений значений 012, 021, 120 и указываем лишь последнее из этих значений: 2, 1 или 0. Наконец, для функций f класса рангов 3³ пишем те два множества, на которых f принимает значение 0 (первое множество) и 1 (второе); значения тогда не указываются.

Множество значений отделяем двоеточием, и все обозначение функции пишем с левым верхним индексом «2».

Например, константа $1 = {}^1111111111$ обозначается ${}^2\Lambda: 1$; внешняя дизъюнкция Бочвара (см., например, [9], где F, U, T означают 0, 1, 2) $X \vee Y = {}^f002\ 002\ 222 = {}^20134:02$ (класс рангов **045**); $\max(X, Y) = {}^2134 \cdot 0:102$; произведение (mod 3) $X \cdot Y = {}^248 \cdot 57:0$ (класс рангов **25**); $X + Y + 2 = {}^2138 \cdot 246$ (класс рангов **33**).

2. Группа $O_2^3 = S_3 \times S_3$ *замен значений* (S_3 — симметрическая группа 3-й степени) состоит из 36 пар подстановок (ξ_s, ξ_t) значений переменных X и Y (см. [8]); $s, t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Обозначим

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (0)(1)(2), \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (0)(12),$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (02)(1), \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (01)(2),$$

$$\xi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (012), \quad \xi_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (021).$$

Все эти подстановки являются линейными функциями: они заменяют X соответственно через $X, 2X, 2X+2, 2X+1, X+1, X+2$.

Группа *сдвигов* $N_2^3 = A_3 \times A_3$, где A_3 — знакопеременная группа $\{\xi_0, \xi_4, \xi_5\}$, является подгруппой порядка 9 группы O_2^3 .

Пусть ε — единичное преобразование, σ — перестановка переменных X и Y , $S_2 = \{\varepsilon, \sigma\}$. Произведения преобразований будем записывать слева направо. Группа $U_2^3 = S_2 O_2^3$ («большая» группа переименований) и ее подгруппа $T_2^3 = S_2 N_2^3$ («малая» группа) имеют порядок соответственно 72 и 18. Преобразования вида (ξ_s, ξ_t) или $\sigma(\xi_s, \xi_t)$ из U_2^3 далее обозначим соответственно ${}^s t$ или ${}^\circ s t$; $s, t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Для преобразований из T_2^3 $s, t = 0, 4, 5$. Умножение преобразований описывается очевидными равенствами

$$\begin{aligned} {}^s t_1 \cdot {}^s t_2 &= {}^s (s_1 s_2) (t_1 t_2), & {}^s t_1 \cdot {}^\circ s_2 t_2 &= {}^\circ (t_1 s_2) (s_1 t_2), \\ {}^\circ s_1 t_1 \cdot {}^s t_2 &= {}^\circ (s_1 s_2) (t_1 t_2), & {}^\circ s_1 t_1 \cdot {}^\circ s_2 t_2 &= {}^s (t_1 s_2) (s_1 t_2) \end{aligned}$$

и таблицей 1.

Таблица 1.
Таблица Кейли для S_3 .

Преобразования из U_2^3 индуцируют подстановки множества пар значений переменных. Эти подстановки перечислены в таблице 2. Номера неподвижных пар напечатаны полужирным шрифтом. Преобразования из группы T_2^3 отмечены звездочкой.

0	1 2 3	4 5
1	0 5 4	3 2
2	4 0 5	1 3
3	5 4 0	2 1
4	2 3 1	5 0
5	3 1 2	0 4

Подстановки пар, индуцируемые группой U_2^3

Преобразование	П а р ы								
	00 0	01 1	02 2	10 3	11 4	12 5	20 6	21 7	22 8
'00*	0	1	2	3	4	5	6	7	8
'01	0	2	1	3	5	4	6	8	7
'02	2	1	0	5	4	3	8	7	6
'03	1	0	2	4	3	5	7	6	8
'04*	2	0	1	5	3	4	8	6	7
'05*	1	2	0	4	5	3	7	8	6
'10	0	1	2	6	7	8	3	4	5
'11	0	2	1	6	8	7	3	5	4
'12	2	1	0	8	7	6	5	4	3
'13	1	0	2	7	6	8	4	3	5
'14	2	0	1	8	6	7	5	3	4
'15	1	2	0	7	8	6	4	5	3
'20	6	7	8	3	4	5	0	1	2
'21	6	8	7	3	5	4	0	2	1
'22	8	7	6	5	4	3	2	1	0
'23	7	6	8	4	3	5	1	0	2
'24	8	6	7	5	3	4	2	0	1
'25	7	8	6	4	5	3	1	2	0
'30	3	4	5	0	1	2	6	7	8
'31	3	5	4	0	2	1	6	8	7
'32	5	4	3	2	1	0	8	7	6
'33	4	3	5	1	0	2	7	6	8
'34	5	3	4	2	0	1	8	6	7
'35	4	5	3	1	2	0	7	8	6
'40*	6	7	8	0	1	2	3	4	5
'41	6	8	7	0	2	1	3	5	4
'42	8	7	6	2	1	0	5	4	3
'43	7	6	8	1	0	2	4	3	5
'44*	8	6	7	2	0	1	5	3	4
'45*	7	8	6	1	2	0	4	5	3
'50*	3	4	5	6	7	8	0	1	2
'51	3	5	4	6	8	7	0	2	1
'52	5	4	3	8	7	6	2	1	0
'53	4	3	5	7	6	8	1	0	2
'54*	5	3	4	8	6	7	2	0	1
'55*	4	5	3	7	8	6	1	2	0

Преобразование	П а р ы								
	00 0	01 1	02 2	10 3	11 4	12 5	20 6	21 7	22 8
°00*	0	3	6	1	4	7	2	5	8
°01	0	3	6	2	5	8	1	4	7
°02	2	5	8	1	4	7	0	3	6
°03	1	4	7	0	3	6	2	5	8
°04*	2	5	8	0	3	6	1	4	7
°05*	1	4	7	2	5	8	0	3	6
°10	0	6	3	1	7	4	2	8	5
°11	0	6	3	2	8	5	1	7	4
°12	2	8	5	1	7	4	0	6	3
°13	1	7	4	0	6	3	2	8	5
°14	2	8	5	0	6	3	1	7	4
°15	1	7	4	2	8	5	0	6	3
°20	6	3	0	7	4	1	8	5	2
°21	6	3	0	8	5	2	7	4	1
°22	8	5	2	7	4	1	6	3	0
°23	7	4	1	6	3	0	8	5	2
°24	8	5	2	6	3	0	7	4	1
°25	7	4	1	8	5	2	6	3	0
°30	3	0	6	4	1	7	5	2	8
°31	3	0	6	5	2	8	4	1	7
°32	5	2	8	4	1	7	3	0	6
°33	4	1	7	3	0	6	5	2	8
°34	5	2	8	3	0	6	4	1	7
°35	4	1	7	5	2	8	3	0	6
°40*	6	0	3	7	1	4	8	2	5
°41	6	0	3	8	2	5	7	1	4
°42	8	2	5	7	1	4	6	0	3
°43	7	1	4	6	0	3	8	2	5
°44*	8	2	5	6	0	3	7	1	4
°45*	7	1	4	8	2	5	6	0	3
°50*	3	6	0	4	7	1	5	8	2
°51	3	6	0	5	8	2	4	7	1
°52	5	8	2	4	7	1	3	6	0
°53	4	7	1	3	6	0	5	8	2
°54*	5	8	2	3	6	0	4	7	1
°55*	4	7	1	5	8	2	3	6	0

Таким образом, U_2^3 изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_9 .

Как показано в [8], U_2^3 состоит из 9 классов сопряженных элементов. Символ каждого класса имеет вид $(\alpha_1, \alpha_2; \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(1)}; \gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}; \gamma_1^{(3)}, \gamma_2^{(3)})$, где $(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} (2, 0) \\ (0, 1) \end{cases}$ — класс подстановки из S_2 ; $\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \gamma_i^{(3)}$ — число циклов длины i ($i=1, 2$) этой подстановки, для которых произведение подстановок значений по всем переменным цикла принадлежит соответственно классу $(3, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ или $(0, 0, 1)$ группы S_3 . Классы даны в таблице 3, аналогичной табл. 9 из [6]. В ней для каждого класса указан также производящий полином (энумератор), перечисляющий циклы индуцированных подстановок (см. [8]).

3. Число типов функций из F_2^3 относительно T_2^3 и U_2^3 (кратче: *T-типов* и *U-типов*) найдено соответственно в [6] и [8]. Энумератором *U-типов* по рангам (r_0, r_1, r_2) является полином

Таблица 3

Классы сопряженных элементов группы U_2^3

№ класса	Символ	Число элементов	Энумератор циклов	Число циклов	Порядок элементов	Элементы
1	(20, 20 00 00)	1	$9z_1$	9	1	'00
2	(20, 10 10 00)	6	$3z_1 + 3z_2$	6	2	'01 '02 '03 '10 '20 '30
3	(20, 10 00 10)	4	$3z_3$	3	3	'04 '05 '40 '50
4	(20, 00 20 00)	9	$z_1 + 4z_2$	5	2	'11 '12 '13 '21 '22 '23 '31 '32 '33
5	(20, 00 10 10)	12	$z_3 + z_6$	2	6	'14 '15 '24 '25 '34 '35 '41 '42 '43 '51 '52 '53
6	(20, 00 00 20)	4	$3z_3$	3	3	'44 '45 '54 '55
7	(01, 01 00 00)	6	$3z_1 + 3z_2$	6	2	°00 °11 °22 °33 °45 °54
8	(01, 00 01 00)	18	$z_1 + 2z_4$	3	4	°01 °02 °03 °10 °14 °15 °20 °24 °25 °30 °34 °35 °41 °42 °43 °51 °52 °53
9	(01, 00 00 01)	12	$z_3 + z_6$	2	6	°04 °05 °12 °13 °21 °23 °31 °32 °40 °44 °50 °55

$$\frac{1}{72}[(x+y+z)^9 + 12(x+y+z)^3(x^2+y^2+z^2)^3 + 9(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)^4 + 8(x^3+y^3+z^3)^3 + 18(x+y+z)(x^4+y^4+z^4)^2 + 24(x^3+y^3+z^3)(x^6+y^6+z^6)],$$

содержащий 55 членов $x^r y^r z^r$. Сумма всех его коэффициентов есть общее число U -типов; она равна 438. Для T -типов, число которых — 1230, вычисления приводятся в [6]. (Для сравнения легко показать, что число типов относительно S_2 равно 10 206.) U -типы являются, вообще говоря, объединениями T -типов, состоящими из функций одного ранга. Количество T - и U -типов по рангам приводится в таблице 4, которая содержит таблицу 10 из [6] и табл. 2 из [8]. В ней дано также количество типов различной мощности (мощность — число функций в типе), получаемое из табл. 5 (см. ниже).

При перечислении типов достаточно рассмотреть лишь типы функций одного ранга из каждого класса рангов. Типы других рангов этого класса получаются присвоением соответствующим функциям других значений. Множества пар, на которых функции принимают эти значения, при этом не меняются. Таким образом, можно рассматривать типы «с точностью до ранга» и говорить о *классах типов*, которые соответствуют данному классу рангов. Это позволяет не указывать значений типовых функций (представителей типов) при задании последних. Как видно из табл. 4, число классов T -типов равно 335, а число классов U -типов — 114.

4. В таблице 5 даны все классы U -типов. Для каждого U -типа указаны типовые функции всех T -типов, заданные множествами пар (без индексов «2») и упорядоченные внутри типа в лексикографическом порядке. Первую из них можно считать типовой функцией данного U -типа.

Некоторые T -типы содержат симметрические функции (см. [7]); последние в табл. 5 печатаются полужирным шрифтом. Если типовая функция такого типа не является симметрической, то после нее в квадратных скобках указывается первая из симметрических функций этого типа. Если мощность T -типа меньше 18, а для T -типов, содержащих симметрические функции, — меньше 9, то она указывается в круглых скобках после соответствующей типовой функции.

В последнем столбце табл. 5 указан класс групп инерции функций соответствующего типа. (См. п. 6).

Число типов по рангам

Класс рангов	0 ²⁰	018	027	036	045	1 ²⁷	126	135	14 ²	2 ²⁵	234	3 ³	Всего
Число рангов в классе	3	6	6	6	6	3	6	6	3	3	6	1	55
Число функций в ранге	1	9	36	84	126	72	252	504	630	756	1260	1680	19683
Число <i>T</i> -типов в ранге	1	1	3	8	9	5	16	31	38	46	75	102	1230
Из них типов мощности													
18	—	—	1	3	5	3	12	25	32	38	65	87	972
— 9	—	1	2	2	4	2	4	6	6	8	10	10	232
— 6	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	3	9
— 3	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	2	14
— 1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
Число <i>U</i> -типов в ранге	1	1	2	4	5	2	6	10	13	16	24	30	438
Из них типов мощности													
72	—	—	—	—	—	—	2	4	6	6	12	18	162
— 36	—	—	—	2	3	2	2	6	5	8	10	10	193
— 18	—	—	2	—	—	—	2	—	—	2	2	—	42
— 12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2
— 9	—	1	—	—	2	—	—	—	2	—	—	—	24
— 6	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	12
— 1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3

Типовые функции из F_2^3

№ класса U -типов	Класс рангов	Число рангов в классе	Мощность U -типов	Типовые функции для T -типов (a, b, c, d)	Группы перации
1	0 ²⁹	3	1	Λ (1)	L
2	018	6	9	0	I
3 4	027	6	18 18	01 04, 05 [13]	F E
5 6 7 8	036	6	6 36 36 6	012 (6) 013, 014, 017 [026] 015, 018 048 (3), 057 (3)	K B C J
9 10 11 12 13	045	6	36 9 36 36 9	0123, 0126 0134 0135, 0145 0138, 0148, 0157 [0246] 0158 [1236]	C I D B I
14 15	1 ²⁷	3	36 36	0·1, 0·2 0·4, 0·5, 0·8	C B
16 17 18 19 20 21	126	6	18 72 36 36 72 18	01·2 01·3, 01·4, 01·6, 01·7 01·5, 01·8 04·1, 05·2 [13·0], 05·3 [13·4] 04·2, 04·5, 05·1, 05·4 04·8, 05·7 [13·8]	F A C B A E
22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	135	6	36 72 36 72 36 36 72 72 36 36	012·3, 012·6 013·2, 014·2, 014·7, 017·2 013·4, 014·3, 017·6 [026·8] 013·5, 014·5, 014·6, 017·3 013·8, 014·8, 017·5 [026·4] 015·2, 018·2 015·3, 015·4, 018·6, 018·7 015·6, 015·7, 018·3, 018·4 015·8, 018·5 048·1, 057·1 [057·8], 057·2 [057·4]	C A B A B C A A C B

№ класса U-типов	Класс рангов	Число рангов в классе	Мощность U-типов	Типовые функции для T-типов (a, b, c, d)	Группы инерции
32	14 ²	3	72	0123·4, 0123·5, 0126·7, 0126·8	A
33			36	0123·6, 0126·3	C
34			72	0123·7, 0123·8, 0126·4, 0126·5	A
35			36	0134·2, 0134·5	C
36			9	0134·8	I
37			72	0135·2, 0135·4, 0145·2, 0145·3	A
38			36	0135·6, 0145·7	D
39			72	0135·7, 0135·8, 0145·6, 0145·8	A
40			72	0138·2, 0148·2, 0148·7, 0157·2	A
41			36	0138·4, 0148·3, 0157·6 [0246·8]	B
42			72	0138·5, 0148·5, 0148·6, 0157·3	A
43			9	0158·2 [1236·0]	I
44	36	0158·3 [1236·4], 0158·4, 0158·7 [1236·8]	B		
45	2 ²⁵	3	72	01·23, 01·24, 01·26, 01·27	A
46			36	01·25, 01·28	C
47			36	01·34, 01·67	C
48			72	01·35, 01·45, 01·68, 01·78	A
49			36	01·36, 01·47	C
50			36	01·37, 01·46	D
51			72	01·38, 01·48, 01·56, 01·57	A
52			18	01·58	F
53			72	04·12, 04·17, 05·12, 05·34	A
54			18	04·13, 05·23 [13·04]	E
55			72	04·15, 04·16, 05·13, 05·24	A
56			36	04·18, 05·27 [13·08], 05·37 [13·48]	B
57			36	04·25, 05·14	D
58			36	04·26, 04·57, 05·16	B
59			36	04·27, 05·18 [13·26], 05·46 [13·57]	B
60			72	04·28, 04·58, 05·17, 05·47	A
61			234	6	36
62	18	012·36			F
63	36	012·37, 012·38			D
64	72	013·24, 014·23, 014·37, 017·26			A
65	72	013·25, 014·25, 014·67, 017·28			A
66	36	013·26, 014·27, 017·24 [026·13]			B
67	72	013·27, 014·26, 014·57, 017·23			A
68	72	013·28, 014·28, 014·78, 017·25			A
69	72	013·45, 014·35, 014·36, 017·36			A
70	36	013·48, 014·38, 017·56 [026·48]			B
71	36	013·57, 014·56, 017·38 [026·57]			B
72	72	013·58, 014·58, 014·68, 017·35			A
73	72	015·23, 015·24, 018·26, 018·27			A
74	72	015·26, 015·27, 018·23, 018·24			A

№ класса U-типов	Класс рангов	Число рангов в классе	Мощность U-типов	Типовые функции для T-типов (a, b, c, d)	Группы интерции
75			36	015·28, 018·25	C C A A A C A D E B
76			36	015·34, 018·67	
77			72	015·36, 015·47, 018·36, 018·47	
78			72	015·37, 015·46, 018·37, 018·46	
79			72	015·38, 015·48, 018·56, 018·57	
80			36	015·67, 018·34	
81			72	015·68, 015·78, 018·35, 018·45	
82			36	048·12, 057·12	
83			18	048·13, 057·16 [057·48]	
84			36	048·15, 057·13, 057·24 [057·26]	
85	3 ³	1	12	012·345 (6), 012·678 (6)	H A C A B A A A A A B A B A B C A A A A C A A C A A A C A B G
86			72	012·346, 012·347, 012·367, 012·368	
87			36	012·348, 012·378	
88			72	013·245, 014·235, 014·367, 017·268	
89			36	013·246, 014·237, 017·246 [026·138]	
90			72	013·247, 014·236, 014·357, 017·236	
91			72	013·248, 014·238, 014·378, 017·256	
92			72	013·256, 014·257, 014·267, 017·234	
93			72	013·257, 014·256, 014·567, 017·238	
94			72	013·258, 014·258, 014·678, 017·258	
95			36	013·268, 014·278, 017·245 [026·134]	
96			72	013·278, 014·268, 014·578, 017·235	
97			36	013·457, 014·356, 017·368 [026·578]	
98			72	013·458, 014·358, 014·368, 017·356	
99			36	013·578, 014·568, 017·358 [026·457]	
100			36	015·234, 018·267	
101			72	015·236, 015·247, 018·236, 018·247	
102			72	015·237, 015·246, 018·237, 018·246	
103			72	015·238, 015·248, 018·256, 018·257	
104			36	015·267, 018·234	
105			72	015·268, 015·278, 018·235, 018·245	
106			72	015·346, 015·347, 018·367, 018·467	
107			36	015·348, 018·567	
108			72	015·367, 015·467, 018·346, 018·347	
109			72	015·368, 015·478, 018·356, 018·457	
110			72	015·378, 015·468, 018·357, 018·456	
111			36	015·678, 018·345	
112			72	048·123, 048·126, 057·123, 057·126	
113			36	048·125, 057·124 [057·268], 057·128 [057·134]	
114			12	048·156 (6), 057·138 (3), 057·246 (3)	

5. Тип любой функции f , заданной множествами пар, не трудно найти по табл. 2, отыскивая в ней преобразование, переводящее f в одну из типовых функций соответствующего класса рангов. Для облегчения этого поиска в таблице 6 приводятся все множества из двух и трех наборов, переходящие друг в друга под действием групп U_2^3 и T_2^3 (U - и T -типы наборов). Другими словами, здесь перечисляются все функции классов типов $\tau 3$ — $\tau 8$ (см. далее). Первое из множеств в каждом U - и T -типе соответствует типовой функции из табл. 5.

Таблица 6

Типы множеств наборов

U -тип	T -тип	Множества	Число множеств
$\tau 3$	a	01 02 03 06 12 14 17 25 28 34 35 36 45 47 58 67 68 78	18
$\tau 4$	a	04 08 15 16 23 27 37 48 56	9
	b	05 07 13 18 24 26 38 46 57	9
$\tau 5$	a	012 036 147 258 345 678	6
$\tau 6$	a	013 025 067 124 178 268 346 358 457	9
	b	014 016 023 028 034 068 125 127 145 167 235 278 347 356 367 458 478 568	18
	c	017 026 035 128 134 245 368 467 578	9
$\tau 7$	a	015 024 037 046 058 078 123 136 148 157 168 238 247 256 267 348 357 456	18
	b	018 027 038 045 047 056 126 135 137 146 158 234 236 248 257 378 468 567	18
$\tau 8$	a	048 156 237	3
	b	057 138 246	3

Множества, напечатанные в табл. 6 полужирным шрифтом, соответствуют симметрическим функциям. Они являются объединениями блоков над S_2 (см. п. 7).

Обозначение U -типа состоит из номера его класса и значений типовой функции на множествах пар (подобно записи функции при помощи множеств) — с левым верхним индексом « τ ». При задании T -типа необходимо еще указать его порядковый номер в U -типе; мы будем для этого пользоваться буквами a, b, c, d.

Например, слабая эквивалентность (см. [9]) $X \supset C Y = {}^2 26 \cdot 08 : 1$ переводится в типовую функцию ${}^2 04 \cdot 13 : 1$ преобразованием $\tau 14$; поэтому она принадлежит U -типу $\tau 54 : 1$ и T -типу $\tau 54a : 1$.

6. Рассмотрим теперь классы групп инерции функций из различных U -типов. Как известно (см., например, [3]), группы инерции однотипных функций образуют класс сопряженных подгрупп группы U_2^3 . Типы с одинаковыми классами групп инерции называются *изомерами* (см. [3], [5]). Имеется 12 классов A, B, ..., L групп инерции. Они перечислены в таблице 7; при этом указывается одна группа из каждого класса.

Таблица 7

Классы групп инерции U -типов

Обозначение	Порядок групп	Число групп в классе	Элементы группы	Мощность типов	Число изомеров
A	1	1	'00	72	162
B	2	6	'00 '00	36	83
C	2	6	'00 '01	36	83
D	2	9	'00 '11	36	27
E	4	9	'00 '11 '00 '11	18	21
F	4	9	'00 '01 '10 '11	18	21
G	6	2	'00 '45 '54 '00 '45 '54	12	1
H	6	2	'00 '01 '02 '03 '04 '05	12	1
I	8	9	'00 '01 '10 '11 '00 '01 '10 '11	9	24
J	12	6	'00 '11 '22 '33 '44 '55 '00 '11 '22 '33 '44 '55	6	6
K	12	6	'00 '01 '02 '03 '04 '05 '10 '11 '12 '13 '14 '15	6	6
L	72	1	(Вся группа U_2).	1	3

Пользуясь методом, описанным в [5], можно найти все 111 подгрупп группы U_2^3 . Эти подгруппы составляют 25 классов сопряженных подгрупп. Из них группами инерции являются 66 подгрупп из 12 классов (табл. 7). Имеются подгруппы всех возможных порядков, кроме порядка 24. Нетривиальными нормальными делителями группы U_2^3 являются 4 подгруппы: группа сдвигов N_2^3 (см. п. 2), группа O_2^3 «четных» замен $'st$, где s, t пробегает одно из множеств $\{0, 4, 5\}$ или $\{1, 2, 3\}$ (порядка 18), группа $S_2O_2^3$ (порядка 36) и группа всех замен O_2^3 . Группа T_2^3 содержит 14 подгрупп, составляющих (относительно нее) 9 классов, и имеет 4 нетривиальных нормальных делителя.

Областью инвариантности относительно некоторой подгруппы G группы U_2^3 называется множество всех функций из F_2^3 , инвариантных относительно G . (См. [3], [7].) Области инвариантности относительно сопряженных подгрупп называются *од-*

нотипными; таким образом, можно говорить о типах областей инвариантности.

После того, как найдены блоки (множества транзитивности наборов) над всеми подгруппами группы U_2^3 , можно установить, какие области инвариантности относительно этих подгрупп являются различными. Имеется всего 66 областей, которые составляют 12 типов. (См. таблицу 8.) Каждая область содержит 3^b функций, где b — число блоков над соответствующей подгруппой. Оказывается, что в каждом классе подгрупп с одной и той же областью инвариантности имеется одна подгруппа, содержащая все другие подгруппы этого класса, которая является группой инерции для некоторых функций из этой области. С другой стороны, всем группам инерции из различных классов соответствуют различные области инвариантности. Типы областей инвариантности тогда можно обозначить теми же буквами А, В, ..., L, какими обозначались соответствующие классы групп инерции. Каждый тип областей в табл. 8 представлен одной областью — относительно той подгруппы (группы инерции), которая дана в табл. 7.

Относительно подгрупп группы T_2^3 имеется 12 областей инвариантности, которые составляют 7 типов относительно T_2^3 . Типы из табл. 8, содержащие эти типы, помечены звездочкой; две области, из которых состоит тип G, относятся к разным типам относительно T_2^3 .

Таблица 8

Типовые области инвариантности (относительно U_2^3)

Обозначение	Порядок подгрупп	Число областей	Блоки над подгруппой	Число блоков	Число функций в области
A	1	1	0 · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8*	9	19683
B	2	6	0 · 13 · 26 · 4 · 57 · 8*	6	729
C	2	6	0 · 12 · 3 · 45 · 6 · 78	6	729
D	2	9	0 · 12 · 36 · 48 · 57	5	243
E	4	9	0 · 1236 · 48 · 57	4	81
F	4	9	0 · 12 · 36 · 4578	4	81
G	6	2	057 · 138 · 246*	3	27
H	6	2	012 · 345 · 678*	3	27
I	8	9	0 · 1236 · 4578	3	27
J	12	6	048 · 123567*	2	9
K	12	6	012 · 345678	2	9
L	72	1	012345678*	1	3

7. Наконец, рассмотрим на основе п. 4 и п. 6 групповые свойства известных классов функций из F_2^3 и пересечения этих классов с U - и T -типами и областями инвариантности.

Все множество F_2^3 есть единственная область инвариантности типа А. Наименьшая область инвариантности — область типа L — состоит из констант «0», «1», «2»; она содержится во всех областях.

Типы классов τ_5 и τ_{85} (всего 7 типов) с классами групп инерции H и K состоят из 48 функций, существенно зависящих лишь от одной переменной. Эти функции — отдельно функции от X и функции от Y — вместе с константами составляют две области инвариантности типа H.

Все U -типы с классами групп инерции B, E, G, I, J, L (всего 138 типов) содержат симметрические и обобщенные симметрические функции. (См. [7], [8].) Симметрические функции имеют вид

$$\alpha X^2 Y^2 + \beta (X^2 Y + X Y^2) + \gamma (X^2 + Y^2) + \\ + \delta X Y + \varepsilon (X + Y) + \zeta \quad (\alpha, \dots, \zeta = 0, 1, 2).$$

Они составляют 13 областей инвариантности: 4 области типа J (бисимметрические функции: $\alpha = \beta = \varepsilon = 0, \gamma = \delta$), по 3 — типов E и I, и по одной — типов B (все симметрические функции), G (полисимметрические функции: $\alpha = \beta = 0, \delta = 2\gamma$) и L (константы). Такое же число групп, соответствующих областям, содержит подгруппу S_2 .

Из 18 предполных классов троичных функций (см. [2]) здесь рассмотрим лишь те, которые инвариантны по крайней мере относительно T_2^3 . Нетрудно видеть, что такими являются всего 3 класса — класс линейных функций, класс $T_{N,2}^3$ и класс самодвойственных функций.

Из п. 2 следует, что класс линейных функций $\alpha X + \beta Y + \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2$) инвариантен относительно U_2^3 . В нем содержится 27 функций и 5 U -типов: 3 константы (3 типа класса τ_1), 12 функций одной переменной (тип τ_{85}) и 12 функций, существенно зависящих от обеих переменных (тип τ_{114}). 9 линейных функций, у которых $\alpha = \beta$, являются полисимметрическими.

Класс $T_{N,2}^3$ (см. [2]) также инвариантен относительно U_2^3 . Он содержит 1545 функций и 130 U -типов: 1533 функции, принимающие 2 или 1 значение (классов рангов **029, 018, 027, 036, 045**; всего 129 типов τ_1 — τ_{13}), и 12 функций одной переменной, принимающих 3 значения (тип τ_{85}).

Класс самодвойственных функций (относительно $X+1$) состоит из 27 функций вида

$$\alpha (X^2 + X Y + Y^2) + \beta X + (2\beta + 1) Y + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2).$$

Он инвариантен относительно T_2^3 , но не относительно U_2^3 , и состоит из 4 T -типов. 9 линейных самодвойственных функций, у которых $\alpha=0$, составляют T -типы 785a ($\beta=0, 1$) и 7114c ($\beta=2$: полисимметрические функции); остальные 18 функций — типы 797a ($\alpha=1$), 795c ($\alpha=2$). 9 линейных самодвойственных функций, у которых $\beta=2$, являются симметрическими.

512 функций из классов рангов $0^{29}, 018, 027, 036, 045$, принимающие только значения 0 и 1, могут рассматриваться как двуместные предикаты (отношения) над областью $\{0, 1, 2\}$. Классы неизоморфных предикатов являются типами относительно подгруппы $\{00\ 11\ 22\ 33\ 44\ 55\}$ группы U_2^3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Higonnet, R. Grea, «Logical design of electrical circuit». McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1958.

2. С. В. Яблонский, Функциональные построения в k -значной логике. Сб. «Труды Математич. ин-та им. В. А. Стеклова», т. 51. Изд. АН СССР, М., 1958. 5—142.

3. Г. Н. Поваров, О групповой инвариантности булевых функций. Сб. «Применение логики в науке и технике». Изд. АН СССР, М., 1960. 263—340, 556—558.

4. «Синтез электронных вычислительных и управляющих схем». Сб. переводов под ред. В. И. Шестакова. Изд. иностр. лит., М., 1954.

5. И. Страздинь, Подалгебры в алгебре булевых функций трех переменных. Сб. «Автоматика и вычислительная техника», вып. 3. Изд. АН Латв. ССР, Рига, 1962. 35—53.

6. И. Страздинь, О числе типов l -ичных функций. «Уч. зап. Рижского Политехн. ин-та», т. 10, вып. 1. Рига, 1963. 167—186.

7. И. Страздинь, Симметрические l -ичные функции. «Latv. PSR Zin. Akad. Vēstis», 1962, № 12. 67—74.

8. И. Страздинь, Группа переименований l -ичных функций. «Latv. PSR Zin. Akad. Vēstis», 1963, № 3, 70—77.

9. В. И. Шестаков, О двойной арифметической интерпретации трехзначного исчисления высказываний, используемой при моделировании этого исчисления посредством релейно-коммутаторных схем. Сб. «Применение логики в науке и технике». Изд. АН СССР, М., 1960. 341—376.

И. Э. Страздинь

ТИПЫ ТРОИЧНЫХ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация

Дается таблица типов троичных функций двух переменных относительно группы переименований переменных. Описаны группы инерции и области инвариантности.

TYPES OF THREE-VALUED SWITCHING FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

Annotation

A table of types of three-valued functions of two variables with respect to the renaming group of variables is given. Inertial groups and sets of invariant functions are described.

Г. К. Энгелис

О ПОЛИНОМАХ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ

§ 1. В 1881 г. при построении теории гипергеометрических функций двух аргументов П. Аппель исследовал ([1], [2], [3] стр. 99—113; см. также обзор в [4], стр. 269—273) некоторое семейство полиномов двух аргументов, во многом напоминающее семейство полиномов Якоби. Это семейство задается равенством, напоминающем формулу Родрига

$$F_{m,n} = \frac{t^{-1}(x,y)}{(\gamma)_m(\gamma')_n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [t(x,y) x^m y^n (1-x-y)^{m+n}]. \quad (1)$$

Здесь

$$t(x,y) = x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}, \quad (2)$$

$$\operatorname{Re} \gamma > 0, \operatorname{Re} \gamma' > 0, \operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re}(\gamma + \gamma') - 1, \quad (3)$$

$$(\gamma)_m = \prod_{j=1}^m (\gamma + j - 1), \quad (\gamma)_0 = 1. \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что семейство $F_{m,n}$ обладает следующими свойствами ортогональности:

$$(F_{m,n}, x^k y^s) = 0 \quad \text{при } k < m; \quad (5)$$

$$(F_{m,n}, x^l y^l) = 0 \quad \text{при } l < n; \quad (6)$$

$$(F_{m,n}, F_{k,l}) = 0 \quad \text{при } m+n \neq k+l, \quad (7)$$

где (f, g) означает $\iint_T t(x,y) f(x,y) g(x,y) dx dy$ и T — треугольник

$x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$. Так как при $m+n=k+l$ имеем $(F_{m,n}, F_{k,l}) \neq 0$, то семейство $F_{m,n}$ (в отличие от полиномов Якоби) не ортогонально. В частном случае

$$\alpha = \gamma + \gamma' \quad (8)$$

Аппель построил другую систему полиномов $E_{m,n}$, тоже аналогичную полиномам Якоби и биортогональную с $F_{m,n}$ на T относительно веса $t(x, y)$. А. Эрдейи в 1953 г. отметил ([4], стр. 271), что в случае, когда (8) не выполняется, повидимому неизвестны ортогональные или биортогональные системы полиномов с весом $t(x, y)$. Правда, из общей теории ортогональных полиномов нескольких переменных следует, что существует бесконечно много ортогональных систем полиномов с этим весом. В 1957 г. Ж. Прориоль (в [5]), используя полиномы Якоби, построил некоторое семейство полиномов двух переменных, ортогональное в указанном смысле.

В § 2 этой заметки показано, как обобщить систему Аппеля $E_{m,n}$, чтобы биортогональность с $F_{m,n}$ имела место независимо от (8).

В § 3 результат Прориоля получен как частный случай более общей теоремы, доказательство которой почти тривиально, чего нельзя утверждать о доказательстве Прориоля.

§ 2. Т е о р е м а 1. Если α, γ, γ' удовлетворяют условиям (3) и

$$E_{m,n}(x, y) = \sum_{i,j} \frac{(m+n+\alpha)_{i+j} (-m)_i (-n)_j}{(\gamma)_i (\gamma')_j i! j!} x^i y^j,$$

то $(F_{m,n}, E_{k,l}) = 0$, если $m \neq k$ или $n \neq l$.

Определение Аппеля полиномов $E_{m,n}$ вместо фактора $(m+n+\alpha)_{i+j}$ содержит $(m+n+\gamma+\gamma')_{i+j}$. Доказательство теоремы разобьем на отдельные этапы. В целом оно следует доказательству (для частного случая) Аппеля; основное отличие представляет первый этап, так как при условии (8) уравнение (9) следует из того, что $F_{m,n}$ — гипергеометрическая функция двух аргументов.

1) Покажем, что $F_{m,n}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x(1-x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y(1-y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + [\gamma - (\alpha+1)x] \frac{\partial z}{\partial x} +$$

$$+ [\gamma' - (\alpha+1)y] \frac{\partial z}{\partial y} + (m+n)(m+n+\alpha)z = 0. \quad (9)$$

Пусть

$$v = (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n} x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n};$$

тогда

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(-\frac{\alpha - \gamma - \gamma' + m + n}{1 - x - y} + \frac{\gamma - 1 + m}{x} \right) v;$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(-\frac{\alpha - \gamma - \gamma' + m + n}{1 - x - y} + \frac{\gamma' - 1 + n}{y} \right) v,$$

и отсюда следует

$$x(1-x) \frac{\partial v}{\partial x} - xy \frac{\partial v}{\partial y} = [(-1 + \gamma + m) - (\alpha - 2 + 2m + 2n)x]v.$$

Применим к обеим частям последнего равенства оператор

$$\frac{\partial^{m+n+1}}{\partial x^{m+1} \partial y^n} \text{ и обозначим } \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m \partial y^n} \text{ через } u. \text{ Получим}$$

$$x(1-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + [(\alpha - 4 + n)x + (2 - \gamma)] \frac{\partial u}{\partial x} - \\ - (m+1)y \frac{\partial u}{\partial x} + (m+1)(m+n+\alpha-2)u = 0.$$

В это уравнение поставим $u = (\gamma)_m (\gamma')_n t F_{m,n}$; принимая во внимание (2), находим, что $F_{m,n}$ удовлетворяет уравнению

$$x(1-x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + [\gamma - (\alpha - \gamma' + 1 - n)x] \frac{\partial z}{\partial x} - \\ - (m + \gamma)y \frac{\partial z}{\partial y} + [m(\alpha - \gamma - \gamma') + (m+n)(m + \gamma)]z + \\ + \frac{\alpha - \gamma - \gamma'}{1 - x - y} \left[xy \left(-\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) + (my - nx)z \right] = 0. \quad (10)$$

Очевидно, $F_{m,n}$ удовлетворяет также уравнению, которое получается из (10), если поменять местами x и y , m и n , γ и γ' . После сложения этого уравнения с (10) получим (9).

2) Легко убедиться, что полином $E_{m,n}$ также является решением уравнения (9). Проще всего это следует из факта, что функция $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{i,j} x^i y^j$ удовлетворяет (9), если для всех i, j имеет место равенство

$$(m+n-i-j)(m+n+i+j+\alpha)a_{i,j} + \\ + (i+1)(i+\gamma)a_{i+1,j} + (j+1)(j+\gamma')a_{i,j+1} = 0.$$

3) Аппелем доказано (см. [3], стр. 108): если z_1 — решение уравнения (9) и z_2 — решение уравнения, которое получится из (9) заменой $m+n$ на другое число, то $(z_1, z_2) = 0$ (при условии, что интеграл существует). Итак, $(F_{m,n}, E_{k,l}) = 0$ при $m+n \neq k+l$.

4) Если $m+n=k+l$, то утверждение теоремы следует из (5) и (6) и того факта, что $E_{k,l}$ — полином степени k от x и степени l от y .

§ 3. Теорема 2. Если

1) G — область $xy \geq 0, c \leq x+y \leq 1$;

2) $p(x, y)$ — определенная на G весовая функция, причем

$$p(x, y) = p_1(x+y) p_2\left(\frac{y}{x+y}\right);$$

3) $\varphi_m(x; n)$ — последовательность полиномов, ортогональных на $[c, 1]$ с весом $p_1(x)x^{2n+1}$ и $\psi_m(x)$ — последовательность полиномов, ортогональных на $[a, b]$ с весом $p_2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$,

то двойная последовательность полиномов

$$f_{m,n}(x, y) = \varphi_m(x+y; n) \psi_n\left(\frac{ax+by}{x+y}\right) (x+y)^n$$

ортогональна на G с весом $p(x, y)$.

Для доказательства проведем замену переменных

$$x = \frac{(b-v)u}{b-a}, \quad y = \frac{(v-a)u}{b-a}, \quad \text{тогда} \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{u}{b-a} \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} & \iint_G p(x, y) f_{m,n}(x, y) f_{k,l}(x, y) dx dy = \\ & = \frac{1}{b-a} \int_c^1 p_1(u) u^{n+l+1} \varphi_m(u; n) \varphi_k(u, l) du \int_a^b p_2\left(\frac{v-a}{b-a}\right) \psi_n(v) \psi_l(v) dv. \end{aligned}$$

Если $n \neq l$, то обращается в нуль второй интеграл, если же $n=l, m \neq k$, то обращается в нуль первый интеграл. Этим теорема доказана.

Легко видеть, что при помощи аффинного преобразования плоскости теорему можно распространить на случай, когда вместо G имеется произвольная трапеция или треугольник.

Теорема Прориоля получается из теоремы 2 при $c=0$, $p(x, y)=t(x, y)$, $a=-1$, $b=1$; φ_m и ψ_m тогда просто выражаются через полиномы Якоби. Автор этой теоремы доказал ее по образцу теоремы 1, используя дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют полиномы $f_{m,n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Appell, Sur les polynomes de deux variables analogues aux polynomes de Jacobi, Archiv der Mathematik und Physik, 1881, t. 66, 238—245.
2. P. Appell, Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1882, 3e série, t. 8, 173—217.
3. P. Appell, J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynomes d'Hermite; Paris, Gauthier-Villars et Co, 1926.
4. Staff of the Bateman Manuscript Project — Higher Transcendental Functions, vol II, New York, Toronto, London, Mc Graw-Hill-Book Co, Inc., 1953.
5. J. Proriol, Sur une famille des polynomes à deux variables orthogonaux dans un triangle, Comptes rendus Ac. sci., 1957, t. 245, № 26, 2459—2461.

Г. К. Энгелис

О ПОЛИНОМАХ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Аннотация

П. Аппелем были рассмотрены две последовательности полиномов, биортогональные на треугольнике $T(x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1)$ относительно веса (2) при дополнительном условии (8). Ж. Прориоль показал, что при помощи полиномов Якоби можно построить последовательность полиномов, ортогональную на T относительно веса (2). Теорема 1 настоящей заметки обобщает результат Аппеля на случай, когда (8) не имеет места. Теорема 2 обобщает результат Прориоля: указан способ построения полиномов, ортогональных на треугольнике или на трапеции, если весовая функция удовлетворяет некоторому функциональному уравнению и известны некоторые ортогональные системы полиномов одного аргумента.

ON POLYNOMIALS, ORTHOGONAL ON A TRIANGLE.

Annotation.

P. Appel introduced two sequences of polynomials, biorthogonal on the triangle T ($x \geq 0; y \geq 0; x+y < 1$) with respect to the weight function (2), with the restriction (8). J. Proriol used Jacobi polynomials for constructing a sequence of polynomials, orthogonal on T with the weight function (2). Theorem 1 of this paper generalizes the result of Appell to the case when (8) is not valid. Theorem 2 generalizes the result of Proriol: it gives a method for constructing polynomials, orthogonal on a triangle or on a trapeze, if the weight function satisfies a certain functional equation and if some orthogonal systems of polynomials with one variable are given.

В. Ж. Риекстыня

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СУММЫ НЕКОТОРЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Часто функцию, для которой требуется получить асимптотическое выражение, можно легко представить в виде ряда. В этом случае асимптотическую оценку суммы ряда иногда можно получить, применяя формулы суммирования (например, формулы Эйлера, Пуассона или другие). Так получены асимптотические формулы в работах [1] и [2].

В работе [1] приведено одно видоизменение формулы Эйлера — Маклорена. На некоторых примерах показано, как произвести оценку полученных интегралов, используя метод перевала.

В данной работе мы рассмотрим один класс функций, заданных в виде степенного ряда. Подобно тому, как это делается при выводе формул суммирования Эйлера-Маклорена в работе [1], сведем ряд к контурному интегралу и, используя асимптотические свойства коэффициентов разложения, произведем оценку по методу перевала. Асимптотическое разложение, символы o и O понимаем как в работе [3].

Теорема 1. Если

$$1) F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) t^n; \quad (1)$$

2) в полуплоскости $\text{Re}z > \sigma$ функция $\mu(z)$ регулярна и

$$\mu(z) = Az^\alpha e^{\beta z} z^{-\gamma} \ln^\chi z (1+r(z)), \quad (2)$$

где

$$\lim_{z \rightarrow \infty} r(z) = 0 \quad (r(z) \rightarrow 0 \text{ равномерно}), \quad (3)$$

A, β комплексные числа, $\gamma > 0$, α, κ действительные числа, а для $\ln z$ выбрано главное значение, то ряд (1) сходится во всей плоскости комплексного переменного t и для каждого достаточно большого $|t| > T > 0$ в секторе

$$|\operatorname{arctg} + \operatorname{Im} \beta| \leq \min \left[\pi - \eta, \frac{\gamma \pi}{2} - \eta \right] \quad (4)$$

($\eta > 0$ любое достаточно малое число)

$$F(t) = A \sqrt[2]{\pi \gamma}^{-\kappa - \frac{1}{2}} t^{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma}} \exp \left[\frac{\beta - \gamma}{2\gamma} (2\alpha + 1) + \right. \\ \left. + \gamma e^{\frac{\beta - \gamma}{\gamma}} \frac{1}{t^{\gamma}} \right] \ln^{\kappa} t (1 + o(|t| > T)_{\infty} (1)). \quad (5)$$

Доказательство. Сходимость ряда (1) на всей плоскости сразу вытекает из условия (2).

В соответствии с условием (3) теоремы, для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое m , что

$$|r(z)| < \varepsilon$$

$$\text{если только } \operatorname{Re} z > \sigma_1 = m - \frac{1}{2} > \sigma.$$

Возьмем целое число $M > m$ и обозначим $R = M + \frac{1}{2}$. Рассмотрим интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \mu(z) t^z \operatorname{ctg} \pi z dz,$$

где контур C_R — прямоугольник со сторонами $[\sigma_1 + i\delta; \sigma_1 - i\delta]$, $[\sigma_1 - i\delta; R - i\delta]$, $[R - i\delta; R + i\delta]$, $[R + i\delta; \sigma_1 + i\delta]$. Так как $\sigma_1 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $R \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то контур C_R не проходит через полюсы $\operatorname{ctg} \pi z$. Число $\delta > 0$ будет определено в дальнейшем. Часть контура, расположенную над действительной осью, обозначим через C_R^+ , а часть контура, расположенную под действительной осью, обозначим через C_R^- . На основании теоремы о вычетах:

$$\sum_{n=m}^M \mu(n) t^n = \frac{1}{2i} \int_{C_R} \mu(z) t^z \operatorname{ctg} \pi z dz = \frac{1}{2i} \int_{C_R^+} \mu(z) t^z \operatorname{ctg} \pi z dz + \\ + \frac{1}{2i} \int_{C_R^-} \mu(z) t^z \operatorname{ctg} \pi z dz,$$

или

$$\sum_{n=m}^M \mu(n) t^n = -\frac{1}{2} \int_{C_R^+} \mu(z) t^z dz - \int_{C_R^+} \mu(z) t^z \frac{dz}{e^{-2\pi iz} - 1} + \\ + \frac{1}{2} \int_{C_R^-} \mu(z) t^z dz + \int_{C_R^-} \mu(z) \frac{t^z dz}{e^{2\pi iz} - 1}. \quad (6)$$

Доказательство теоремы проводится в следующем порядке:

1. Выберем δ так, чтобы точка перевала функции $\mu(z)t^z$ лежала на контуре C_R .
2. Перейдем к пределу в равенстве (6), когда $R=M+\frac{1}{2} \rightarrow \infty$. Пределом левой части равенства (6) является ряд $\sum_{n=m}^{\infty} \mu(n) t^n$, а правой части — три контурных интеграла (11), (12), (13) (см. (10)).
3. После предельного перехода в правой части (6) к интегралу с подынтегральной функцией $\mu(z)t^z$ (интеграл (11)) применяется метод перевала.
4. Оцениваются остальные интегралы (12), (13) в выражении (10).
5. Производится оценка суммы $\sum_{n=0}^{m-1} \mu(n) t^n$.

1. Определим точку перевала функции $\mu(z)t^z$. Обозначим

$$e^{\beta - \gamma} t = e^{\gamma \zeta}, \quad \zeta = x + iy. \quad (7)$$

Учитывая обозначение (7) и условие (2), можно написать:

$$\mu(z) t^z = A z^\alpha e^{-\gamma z \ln z + \gamma z (\zeta + 1) \ln \lambda z (1 + r(z))}. \quad (8)$$

Будем использовать не точку перевала функции $\mu(z)t^z$, а приближение к ней — точку перевала z_0 для функции $\exp[-\gamma z \ln z + \gamma z (\zeta + 1)]$. Легко видеть, что $z_0 = e^{\zeta} = e^x \cos y + i e^x \sin y$. Пусть $\operatorname{Re} z_0 = e^x \cos y > 0$. Это выполняется в секторе

$$|y| < \frac{\pi}{2}, \quad \text{или} \quad |\operatorname{arg} t + \operatorname{Im} \beta| < \frac{\gamma \pi}{2}. \quad (9)$$

В дальнейшем рассматривается только сектор $y < \frac{\pi}{2}$. На прямой $z = u + i e^x \sin y$ ($\sigma_1 \leq u < \infty$) в точке $u_0 = e^x \cos y$ функция $\operatorname{Re} [-\gamma z \ln z + \gamma (\zeta + 1) z]$ достигает максимума. Это означает, что в первом и в третьем интегралах равенства (6) δ должно быть

равно $e^x |\sin y|$. Интеграл с подынтегральной функцией $\mu(z)t^z$, контур которого не проходит через точку перевала, преобразуем по теореме Коши:

$$-\frac{1}{2} \int_{c_R^+} \mu(z)t^z dz + \frac{1}{2} \int_{c_R^-} \mu(z)t^z dz = \begin{cases} -\int_{c_R^+} \mu(z)t^z dz & \text{если } y > 0, \\ \int_{c_R^-} \mu(z)t^z dz & \text{если } y < 0, \\ \int_{\sigma_1}^R \mu(u)t^u du & \text{если } y = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Во втором и четвертом интегралах равенства (6) подынтегральные функции регулярны в полуплоскости $\text{Re} z > \sigma_1$, исключая действительную ось, на которой есть особые точки. Поэтому для них возьмем $\delta = e^x |\sin y| + a$, где $a \geq 0$ (если $y \neq 0$, а может быть и равно 0). Определим a в дальнейшем.

2. Покажем, что после предельного перехода в равенстве (6) получается

$$\sum_{n=m}^{\infty} \mu(n)t^n = I_0 + I^+ + I^-, \quad (10)$$

где

$$I_0 = \begin{cases} \int_{c^+} \mu(z)t^z dz & \text{если } y > 0, \\ \int_{c^-} \mu(z)t^z dz & \text{если } y < 0, \\ \int_{\sigma_1}^{\infty} \mu(u)t^u du & \text{если } y = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$I^+ = \int_{c_a^+} \mu(z)t^z \frac{dz}{e^{-2\pi iz} - 1}, \quad (12)$$

$$I^- = \int_{c_a^-} \mu(z)t^z \frac{dz}{e^{2\pi iz} - 1}. \quad (13)$$

Через C^+ обозначен контур, образованный отрезком $[\sigma_1; \sigma_1 + i e^x |\sin y|]$ и прямой $[\sigma_1 + i e^x |\sin y|; \infty + i e^x |\sin y|]$;

C_a^+ — контур, образованный отрезком $[\sigma_1; \sigma_1 + i(e^x |\sin y| + a)]$ и прямой $[\sigma_1 + i(e^x |\sin y| + a); \infty + i(e^x |\sin y| + a)]$. Через C^- и C_a^- обозначены симметричные контуры в нижней полуплоскости.

Для доказательства соотношения (10) необходимо показать, что интегралы по отрезку $[R - i\delta; R + i\delta]$ стремятся к нулю, когда $R \rightarrow \infty$, и существуют интегралы I_0, I^+, I^- .

Ограничимся доказательством существования интеграла I^+ , и предельного перехода для интеграла

$$I_1 = \int_{C_1} \mu(z) t^z \frac{dz}{e^{-2\pi iz} - 1},$$

где C_1 отрезок $[R; R + i\delta]$. Доказательство для остальных интегралов аналогично.

Действительно, на этом контуре

$$z = R + i\tau \quad (0 \leq \tau \leq \delta), \quad R = M + \frac{1}{2}, \quad |\ln^x z| \leq \ln^x R [1 + O_{(R)\infty}(1)],$$

поэтому

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| A \int_{C_1} z^\alpha e^{-\gamma z \ln z + \gamma z(\zeta+1)} \ln^x z \frac{1+r(z)}{e^{-2\pi iz} - 1} dz \right| \leq \\ &\leq O_{(R)\infty}(1) |A(1+\varepsilon) R^\alpha \ln^x R e^{\gamma R(x+1)} \int_0^\delta \exp \left[-\gamma R \ln \sqrt{R^2 + \tau^2} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \tau \operatorname{arctg} \frac{\tau}{R} - \tau \gamma y \right] d\tau \leq O_{(R)\infty}(1) R^\alpha \ln^x R e^{\gamma R(x+1) - \gamma R \ln R} \times \\ &\quad \times \int_0^\delta e^{\gamma \tau \left(\frac{\pi}{2} - y \right)} d\tau. \end{aligned}$$

Очевидно, что для каждого фиксированного x $\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = 0$.

Так как функция $\mu(z) \frac{t^z}{e^{-2\pi iz} - 1}$ регулярна при $\operatorname{Re} z \geq \sigma_1$, кроме точек $z = m$ (m — целое число), то она абсолютно инте-

грируема по каждому конечному контуру в этой области, если только на нем нет точек $z = m$. Остается теперь доказать, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} \mu(z) \frac{t^z}{e^{-2\pi iz} - 1} dz,$$

где C_2 отрезок $[\sigma_1 + i(e^x |\sin y| + a); R + i(e^x |\sin y| + a)]$, существует. На этом контуре $z = u + i\delta$, $\delta = e^x |\sin y| + a$, $\sigma_1 \leq u \leq R$, поэтому

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| A \int_{C_2} z^\alpha e^{-\gamma z \ln z + \gamma z(\zeta+1)} \ln^\alpha z \frac{1+r(z)}{e^{-2\pi iz} - 1} dz \right| \leq \\ &\leq |A| (1+\varepsilon) \frac{e^{-2\pi\delta}}{1-e^{-2\pi\delta}} e^{-\gamma\delta y} O_{(R)\infty} (1) \int_{\sigma_1}^R \exp \left[-\gamma u \ln \sqrt{u^2 + \delta^2} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \delta \arctg \frac{\delta}{u} + \gamma u(x+1) \right] u^\alpha \ln^\alpha u du \leq \\ &\leq O_{(R)\infty} (1) \exp \left[-2\pi e^x |\sin y| - \gamma e^x |\sin y| y + \gamma e^x |\sin y| \frac{\pi}{2} \right] \times \\ &\quad \times \int_{\sigma_1}^R e^{-\gamma u \ln u + \gamma u(x+1)} u^\alpha \ln^\alpha u du. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для каждого фиксированного x интеграл I^+ существует.

3. Далее оценим интегралы [10]. Главным членом в оценке будет интеграл I_0 . Допустим, что $y > 0$. В силу того, что подинтегральная функция аналитическая, вместо контура интегрирования C^+ можно взять ломанную линию, которая соединяет точки: σ_1 , $\frac{\sigma_1}{\cos y} e^{iy}$, $e^x \cos y + i e^x \sin y$, $\infty + i e^x \sin y$.

Окрестность точки перевала $z_0 = e^{\zeta} = e^x \cos y + i e^x \sin y$ определим неравенством: $|z - z_0| \leq e^{\frac{2x}{3}}$, на нашем контуре ей соответствуют отрезки $[e^x \cos y + i e^x \sin y = e^{\zeta}; e^x \cos y + e^{\frac{2x}{3}} + i e^x \sin y]$.

$[e^{\zeta} - e^{\frac{2x}{3} + iy}; e^x \cos y + i e^x \sin y = e^{\zeta}]$, которые обозначим через S_1 и S_2 . Остальные части контура обозначим так (см. рис. 1):

S_3 отрезок $\left[\frac{\sigma_1}{\cos y} e^{iy}; e^\zeta - e^{\frac{2x}{3} + iy} \right];$

S_4 отрезок $\left[e^x \cos y + i e^x \sin y + e^{\frac{2x}{3}}; e^{2x} + i e^x \sin y \right];$

S_5 отрезок $\left[\sigma_1; \frac{\sigma_1}{\cos y} e^{iy} \right];$

S_6 прямая $[e^{2x} + i e^x \sin y; \infty + i e^x \sin y].$

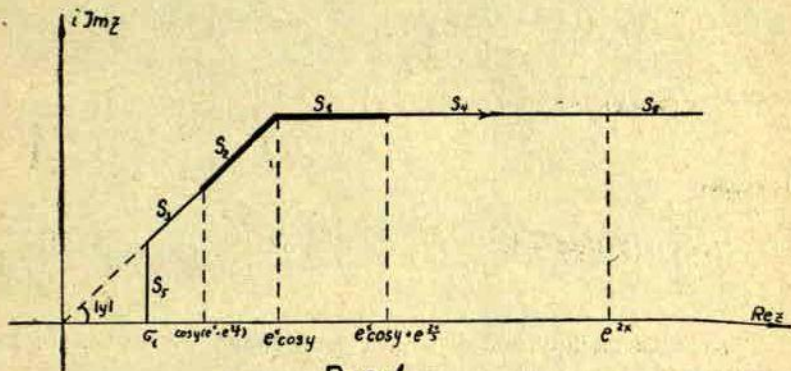


Рис. 1.

Интегралы по этим отрезкам соответственно обозначим через $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$.

Легко видеть, что в окрестности точки перевала

$$z^\alpha \ln^\alpha z e^{-\gamma z \ln z + \gamma z(\zeta+1)} (1+r(z)) = e^{\gamma z_0 - \frac{\gamma}{2z_0}(z-z_0)^2} z_0^\alpha \ln^\alpha z_0 [1 + h_1(x, y, z) e^{-2x(z-z_0)^3} + e^{-\frac{x}{3}} h_2(x, y, z) + r(z)],$$

где

$$|h_1(x, y, z)| < M_1, |h_2(x, y, z)| < M_2 \quad (M_1 > 0, M_2 > 0),$$

если только $x > X > 0$ достаточно велико, и $|y| < \frac{\pi}{2}$. Используя асимптотическое разложение функции вероятности [4], получим:

$$\int_{S_1} e^{-\frac{\gamma}{2z_0}(z-z_0)^2} dz = \sqrt{\frac{2z_0}{\gamma}} \int_0^{\sqrt{\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{x}{6} - i\frac{y}{2}}} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi z_0}{2\gamma}} \left[1 + o(x > X)_\infty \right] \quad (1);$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{S_1} e^{-\frac{\gamma}{2z_0}(z-z_0)^2} [h_1(x, y, z) e^{-2x(z-z_0)^3+r(z)} + \right. \\
& \quad \left. + e^{-\frac{x}{3}} h_2(x, y, z)] dz \right| \leq \\
& \leq M_1 e^{-2x} \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma}{2} e^{-x} \cos y \tau^2} \tau^3 d\tau + [\varepsilon + M_2 e^{-\frac{x}{3}}] \int_0^\infty e^{-\frac{\gamma}{2} e^{-x} \cos y \tau^2} d\tau = \\
& = O_{(x>X)_\infty}(1) + \varepsilon e^{\frac{x}{2}} O_{(x>X)_\infty}(1) + e^{\frac{x}{6}} O_{(x>X)_\infty}(1) = \\
& = e^{\frac{x}{2}} o_{(x>X)_\infty}(1) = \sqrt{z_0} o_{(x>X)_\infty}(1) = \sqrt{\frac{\pi z_0}{2\gamma}} o_{(x>X)_\infty}(1).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$J_1 = \int_{S_1} \mu(z) t^z dz = A e^{\gamma z_0} z_0^\alpha \ln^x z_0 \sqrt{\frac{\pi z_0}{2\gamma}} [1 + o_{(x>X)_\infty}(1)].$$

Такую же оценку получим для интеграла $J_2 = \int_{S_2} \mu(z) t^z dz$; следовательно

$$J_1 + J_2 = A \sqrt{\frac{2\pi z_0}{\gamma}} e^{\gamma z_0} z_0^\alpha \ln^x z_0 [1 + o_{(x>X)_\infty}(1)]. \quad (14)$$

Далее покажем, что все оставшиеся интегралы имеют оценки

$$e^{\gamma e^x \cos y + \alpha x + \frac{x}{2}} x^\alpha o_{(x>X)_\infty}(1), \quad (15)$$

где $x > X$ достаточно велик.

На контурах S_4 и S_6 $z = u + i e^x \sin y$, поэтому

$$|J_4| = \left| \int_{S_4} \mu(z) t^z dz \right| \leq O_{x_\infty}(1) \int_{u_1}^{e^{2x}} e^{f_1(u, x, y)} u^\alpha \ln^x u du,$$

где $u_1 = e^x \cos y + e^{\frac{2x}{3}}$,

$$\begin{aligned}
f_1(u, x, y) = & -\gamma u \ln \sqrt{u^2 + e^{2x} \sin^2 y} + \gamma e^x \sin y \operatorname{arctg} \frac{e^x \sin y}{u} + \\
& + \gamma(x+1) u - \gamma u e^x \sin y.
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что функция $f_1(u, x, y)$ есть убывающая по u функция, если только $e^x \cos y \leq u < \infty, |y| < \frac{\pi}{2}$ и $x > X$ достаточно велико. Следовательно, можно написать:

$$f_1(u, x, y) \leq f_1(u_1, x, y) = \gamma e^x \cos y - \frac{\gamma}{6} \cos y e^{\frac{x}{3}} (1 + o(x > X))_{\infty} \quad (1).$$

Учитывая сказанное, получим:

$$|J_4| \leq O(x > X)_{\infty} (1) \exp \left[\gamma e^x \cos y - \frac{\gamma}{6} \cos y e^{\frac{x}{3}} (1 + o(x > X))_{\infty} (1) \right] + |\alpha| |2x + 2x| x^{|x|}. \quad (16)$$

Оценим интеграл J_6 :

$$\begin{aligned} |J_6| &= \left| \int_{S_4} \mu(z) t^z dz \right| \leq O(x > X)_{\infty} (1) \int_{e^{2x}}^{\infty} e^{h(u, x, y)} u^x \ln^x u du \leq \\ &\leq O(x > X)_{\infty} (1) \int_{e^{2x}}^{\infty} e^{-u\gamma(x-1)} u^x + |x| du = o(x > X)_{\infty} (1). \quad (17) \end{aligned}$$

Формулы (16) и (17) показывают, что для интегралов J_4 и J_6 справедлива оценка (15). Оценка интеграла J_3 аналогична оценке интеграла J_4 , поэтому последнее не приводится.

На контуре S_5 $z = \sigma_1 + i\tau$, поэтому

$$|J_5| = \left| \int_{S_5} \mu(z) t^z dz \right| \leq O(x > X)_{\infty} (1) e^{\gamma(x+1)\sigma_1} \int_0^{\sigma_1 \operatorname{tg} y} e^{-\gamma\sigma_1 \ln \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} d\tau.$$

Очевидно, что оценка (15) справедлива и для интеграла J_5 . Не приводятся оценки в случаях, когда $y < 0$ и $y = 0$, так как они получаются аналогично. Следовательно

$$I_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} A e^{\gamma e^{\xi} + \alpha \xi} + \frac{\xi}{2} \gamma^x [1 + o(x > X)_{\infty} (1)]. \quad (18)$$

4. Далее произведем оценку интеграла I^+ . Контур C_a^+ образуется отрезком $[\sigma_1; \sigma_1 + i\delta]$ и прямой $[\sigma_1 + i\delta; \infty + i\delta]$, где $\delta = e^x |\sin y| + a$. Для оценки удобно взять число $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$ и рассматривать 2 случая:

- I $|y| \geq \xi, a = 0;$
 II $|y| < \xi, a > 0;$ уточним a и ξ .

В первом случае I изменим контур C_a^+ так же, как и для интеграла I_0 (см. рис. 1). Соответствующие интегралы по отрезкам S_k обозначим через J_k ($k=1, 2, \dots, 6$). На контурах S_1, S_4 $z = u + e^x |\sin y|$,

поэтому

$$|\bar{J}_1 + \bar{J}_4| = \left| \int_{S_1 + S_4} \mu(z) t^z \frac{dz}{e^{-2\pi iz} - 1} \right| \leq O(x > X)_\infty \quad (1) e^{-2\pi e^x |\sin y|} \\ \times \int_{e^x \cos y}^{e^{2x}} e^{f_2(u, x, y)} u^\alpha \ln^\alpha u \, du,$$

где

$$f_2(u, x, y) = -y\gamma e^x |\sin y| + \gamma(x+1)u - \gamma u \sqrt{u^2 + e^{2x} \sin^2 y} + \\ + \gamma e^x |\sin y| \operatorname{arctg} \frac{e^x |\sin y|}{u}.$$

Можно убедиться, что функция $f_2(u, x, y)$ для каждого фиксированного x и y в интервале $e^x \cos y \leq u < \infty$ есть убывающая функция по u и в точке $u_0 = e^x \cos y$ принимает максимальное значение:

$$f_2(u_0, x, y) = \begin{cases} \gamma e^x \cos y & \text{если } y > 0, \\ \gamma e^x \cos y - \gamma e^x 2y |\sin y| & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$|\bar{J}_1 + \bar{J}_4| \leq O(x > X)_\infty \quad (1) \exp[-2\pi e^x |\sin y| + f_2(u_0, x, y) + \\ 2x(|\alpha| + 1)] x^{|\alpha|}.$$

При $x > X$ и $y > 0$ полученная оценка соответствует выражению (15). При $y < 0$ необходимо потребовать, чтобы

$$\gamma y > -\pi. \quad (19)$$

Тогда можно утверждать, что для суммы интегралов $\bar{J}_1 + \bar{J}_4$ справедлива оценка (15).

На контуре S_2 $z = u e^{i|y|}$ и

$$|\bar{J}_2| = \left| \int_{S_2} \mu(z) t^z \frac{dz}{e^{-2\pi iz} - 1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant O_{(x>X)} \int_{e^x - e^{\frac{2x}{3}}}^{e^x} u^\alpha \ln^\alpha u \exp \left[f_3(u, x, y) - 2u |\sin y| \times \right.$$

$$\left. \times \left(\pi + \frac{y - |y|}{2} \right) \right] du,$$

где функция

$f_3(u, x, y) = -\gamma u \cos y \ln u + \gamma u (x+1) \cos y$ в точке $u_2 = e^x$ достигает максимума для каждой пары x, y и является возрастающей функцией в интервале $e^x - e^{\frac{2x}{3}} \leqslant u \leqslant e^x$. Так как $f_3(u_2, x, y) = -\gamma e^x \cos y$, то

$$|\bar{J}_2| \leqslant O_{(x>X)} (1) e^{x(|\alpha|+1)} x^{|\alpha|} e^{\gamma e^x \cos y (e^{-2(e^x - e^{\frac{2x}{3}})} |\sin y| (\pi + \frac{y - |y|}{2}) - e^{-2e^x} |\sin y| (\pi + \frac{y - |y|}{2}))}.$$

Если только условие (19) выполнено, то для интеграла \bar{J}_2 оценка (15) справедлива.

Интегралы \bar{J}_5, \bar{J}_3 и \bar{J}_6 оцениваем так же, как интегралы J_5, J_3, J_6 . Следовательно, в случае, когда $|y| \geqslant \xi > 0$

$$I_+ = e^{\gamma e^x \cos y + \alpha x + \frac{x}{2}} x^\alpha O_{(x>X)} (1), \quad (20)$$

если только $|y| < \frac{\pi}{2}$ и $-\pi < \gamma y$.

II. Остается рассмотреть случай, когда $|y| < \xi$.

Для оценки интеграла по контуру C_a^+ разделим его на три части: (см. рис. 2).

L_1 — контур, образованный отрезком

$$[\sigma_1 + i(e^x |\sin y| + a); e^{2x} + i(e^x |\sin y| + a)];$$

L_2 — контур, образованный прямой

$$[e^{2x} + i(e^x |\sin y| + a), \infty + i(e^x |\sin y| + a)];$$

L_3 — контур, образованный отрезком

$$[\sigma_1; \sigma_1 + i(e^x |\sin y| + a)].$$

Соответствующие им интегралы обозначим через I_1, I_2, I_3 .

Оценим эти интегралы:

$$|I_1| \leq O(x > X)_\infty (1) e^{-2\pi[e^x |\sin y| + a]} \int_{\sigma_1}^{e^{2x}} e^{f(u, x, y)} u^x \ln^x u \, du,$$

где

$$f_4(u, x, y) = \gamma u - \gamma u \ln \sqrt{u^2 e^{-2x} + (|\sin y| + a e^{-x})^2} + \\ + \gamma [e^x |\sin y| + a] \left[\operatorname{arctg} \frac{e^x |\sin y| + a}{u} - y \right].$$

Для каждой пары x, y функция $f_4(u, x, y)$ в точке $u_3 = \sqrt{e^{2x} - (e^x |\sin y| + a)^2}$ имеет максимум, поэтому

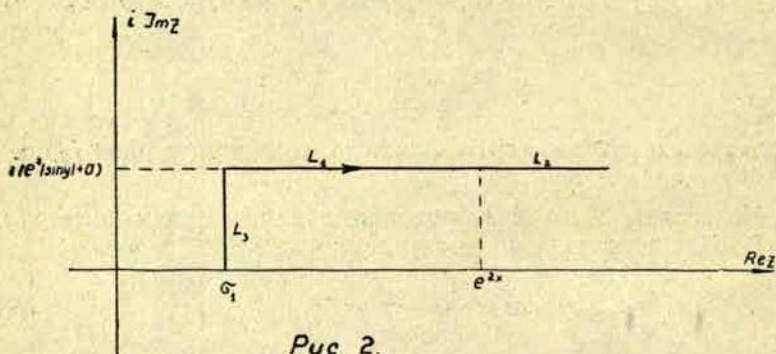


Рис 2.

$$|I_1| \leq O(x > X)_\infty (1) e^{2x(|\alpha| + 1)} x^{|\alpha|} \times \\ \times \exp \left\{ \gamma \sqrt{e^{2x} \cos^2 y - 2a |\sin y| e^x - a^2} + \right. \\ \left. + [e^x |\sin y| + a] \left[\gamma \operatorname{arctg} \frac{e^x |\sin y| + a}{\sqrt{e^{2x} - (e^x |\sin y| + a)^2}} - \gamma y - 2\pi \right] \right\}.$$

Выберем a таким, чтобы:

$$e^{2x} \cos^2 y - 2a |\sin y| e^x - a^2 > 0.$$

Это неравенство справедливо при

$$a < e^x (1 - \sin \xi) \quad (21)$$

и тогда

$$\exp[\gamma \sqrt{e^{2x} \cos^2 y - 2a |\sin y| e^x - a^2}] \leq \exp(\gamma e^x \cos y).$$

Ниже видно будет, что удобно выбрать $a = be^x$, где $b > 0$ постоянная. Возьмем произвольное достаточно малое $\eta_2 > 0$. Можно найти такое $\bar{b} > 0$, что:

$$\left| \arctg \frac{e^x |\sin y| + e^x b}{\sqrt{e^{2x} - (e^x |\sin y| + e^x b)^2}} - |y| \right| < \frac{2}{\gamma} \eta_2, \quad (22)$$

если только $b < \bar{b}$.

Выберем $a = be^x$ таким, чтобы выполнялись условия (22) и (21) ($b < 1 - \sin \xi$).

Тогда

$$|I_1| < O_{(x > X)_\infty} (1) x^{|\alpha|} \exp[2x(|\alpha| + 1) + \gamma e^x \cos y + (e^x |\sin y| + a)(\gamma |y| + 2\eta_2 - \gamma y - 2\pi)].$$

Возьмем произвольное достаточно малое $\eta_1 > 0$ и обозначим

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta. \text{ Пусть } \gamma |y| + 2\eta_2 - \gamma y - 2\pi \leq -2\eta_1 \\ \text{или } -\pi + \eta \leq \gamma y.$$

Учитывая обозначение (7) получим

$$-\pi + \eta \leq \arg t + \operatorname{Im} \beta. \quad (23)$$

Теперь мы можем утверждать, что для интеграла I_1 справедлива оценка (15). Интеграл I_2 оценивается аналогично; нужно учитывать только, что на контуре L_2

$$|f_1(u, x, y)| \leq -\gamma u(x-1),$$

$$|I_2| \leq O_{(x > X)_\infty} (1) e^{-2\pi[e^x |\sin y| + a]} \times$$

$$\times \int_{e^{2x}}^{\infty} u^{\alpha + |\alpha|} e^{-\gamma u(x-1)} du = O_{(x > X)_\infty} (1)$$

и для интеграла I_2 справедлива оценка (15).

Остается оценить интеграл I_3 :

$$\begin{aligned}
 |I_3| &\leq O_{(x>X)} \infty (1) e^{\gamma(x+1)\sigma_1} \int_0^{\infty} \exp \left[-\gamma\sigma_1 \ln \sqrt{\sigma_1^2 + \tau^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sigma_1} - \gamma y \tau - 2\pi\tau \right] (\sigma_1^2 + \tau^2)^{\frac{\alpha}{2}} \ln^x \sqrt{\sigma_1^2 + \tau^2} d\tau \leq \\
 &\leq O_{(x>X)} \infty (1) \exp \left[\gamma(x+1)\sigma_1 + \gamma(e^x |\sin y| + a) \frac{\pi}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma |y| (e^x |\sin y| + a) \right] \int_0^{\infty} e^{-2\pi\tau} (\sigma_1^2 + \tau^2)^{\frac{\alpha}{2}} \ln^x (\sigma_1^2 + \tau^2) d\tau \leq \\
 &\leq e^{\gamma e^x \cos y} O_{(x>X)} \infty (1) e^{\gamma x \sigma_1 - \gamma e^x [\cos y - |\sin y| \pi]} \leq \\
 &\leq e^{\gamma e^x \cos y} O_{(x>X)} \infty (1) e^{\gamma x \sigma_1 - \gamma e^x \cos y \pi \left[\frac{1}{\pi} - \operatorname{tg} \xi \right]}.
 \end{aligned}$$

ξ нужно выбрать так, чтобы $\frac{1}{\pi} - \operatorname{tg} \xi < 0$. В таком случае для интеграла I_3 справедливо разложение (15). Мы доказали, что для всех y , удовлетворяющих условиям (9) и (23),

$$I_+ = e^{\gamma e^x \cos y + \alpha x + \frac{x}{2} x^x} O_{(x>X)} \infty (1). \quad (24)$$

Аналогично можно оценить интеграл I^- , только в этом случае нужно потребовать, чтобы

$$\gamma y \leq \pi - \eta, \text{ или } \arg t + \operatorname{Im} \beta \leq \pi - \eta. \quad (25)$$

Тогда

$$I^- = e^{\gamma e^x \cos y + \alpha x + \frac{x}{2} x^x} O_{(x>X)} \infty (1). \quad (26)$$

Условия (9), (19), (23) и (25) определяют сектор:

$$|\arg t + \operatorname{Im} \beta| \leq \min \left[\pi - \eta; \frac{\gamma \pi}{2} - \eta \right]. \quad (27)$$

В этом секторе в соответствии с формулами (10), (18), (24), (26)

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{\infty} \mu(n) t^n &= \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} A e^{\gamma e^{\zeta} + \alpha \zeta + \frac{\zeta}{2}} \zeta^x + \\ &+ \exp \left[\gamma e^x \cos y + \alpha x + \frac{x}{2} \right] x^x o_{(x>X)}_{\infty} (1) = \\ &+ \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} A e^{\gamma e^{\zeta} + \alpha \zeta + \frac{\zeta}{2}} \zeta^x (1 + o_{(x>X)}_{\infty} (1)). \end{aligned} \quad (28)$$

5. Очевидно, что для отрезка ряда

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} \mu(n) t^n \right| \leq \sum_{n=0}^{m-1} |\mu(n)| e^{\gamma x n - n \operatorname{Re} \beta + n \gamma} = O_{(x>X)}_{\infty} (e^{\gamma(m-1)x}) \quad (29)$$

справедливо соотношение (15).

Учитывая формулы (27), (28), (29), обозначение (7) и принимая во внимание, что

$$\zeta^x = \frac{1}{\gamma^x} [\beta - \gamma + \ln t]^x = \gamma^{-x} \ln^x t [1 + o_{(|t|>T)}_{\infty} (1)],$$

получим утверждение теоремы.

Частный случай этой теоремы, когда

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n!)^{\frac{1}{\rho}}},$$

рассмотрен в работе [1]. Случай, когда

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n t^n}{n!}, \quad t > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

другим методом рассмотрен в [5].

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,

$$r(z) = \frac{1}{z^{\omega}} O_{(\operatorname{Re} z > z_0)}_{\infty} (1),$$

где $\omega > 0$ действительное число, тогда ряд (1) сходится во всей плоскости комплексного переменного t , и в секторе

$$|\arg t + \operatorname{Im} \beta| \leq \min \left[\pi - \eta, \frac{\gamma \pi}{2} - \eta \right]$$

$$\begin{aligned}
 F(t) = & A \sqrt{2\pi} \gamma^{-x-\frac{1}{2}} t^{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma}} \exp \left[\frac{\beta-\gamma}{2\gamma} (2\alpha+1) + \right. \\
 & \left. + \gamma e^{\frac{\beta-\gamma}{\gamma}} \frac{1}{t^{\gamma}} \right] [\beta-\gamma + \ln t]^x [1 + O_{(|t|>T)_{\infty}} (|t|^{-\frac{1}{2\gamma}}) + \\
 & + O_{(|t|>T)_{\infty}} (|t|^{-\frac{w}{\gamma}})] \quad (30)
 \end{aligned}$$

($T > 0$ достаточно велико, $\eta > 0$ любая достаточно малая величина).

Доказательство теоремы почти полностью аналогично доказательству предыдущей теоремы. Отличие заключается в том, что при оценке интегралов J_1 и J_2 надо пользоваться более точной оценкой в окрестности точки перевала для подинтегральной функции:

$$\begin{aligned}
 \mu(z) t^z (1+r(z)) = & A e^{\gamma z_0 - \frac{\gamma}{2z_0} (z-z_0)^2} z_0^{\alpha} \ln^{\alpha} z_0 [1 + \\
 & + h_1(x, y, z) e^{-2x} (z-z_0)^3 + \frac{z-z_0}{z_0} h_2(x, y, z) + r(z) + \\
 & + e^{\frac{-2x}{3}} h_3(x, y, z)],
 \end{aligned}$$

где $|h_1(x, y, z)| \leq M_1$, $|h_2(x, y, z)| \leq M_2$ и $|h_3(x, y, z)| \leq M_3$ ($M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $M_3 > 0$).

Теорема 3. Если

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) h(n) t^n; \quad (31)$$

для функции $\mu(z)$ выполнены условия теоремы 1. и, кроме того, $h(z) = O_{(Re z > \sigma)_{\infty}}(1)$ есть регулярная функция в полуплоскости $Re z > \sigma$, тогда ряд (31) сходится во всей плоскости комплексного переменного t , и в секторе $|\arg t + \text{Im} \beta| \leq \min [\pi - \eta, \frac{\gamma\pi}{2} - \eta]$

$$\begin{aligned}
 F(t) = & A \sqrt{2\pi} \gamma^{-x-\frac{1}{2}} t^{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma}} \exp \left[\frac{\beta-\gamma}{2\gamma} (2\alpha+1) + \right. \\
 & \left. + \gamma e^{\frac{\beta-\gamma}{\gamma}} \frac{1}{t^{\gamma}} \right] \ln^{\alpha} t O_{(|t|>T)_{\infty}}(1) \quad (32)
 \end{aligned}$$

($T > 0$ — достаточно велико, $\eta > 0$ достаточно малая величина).

З а м е ч а н и е. Теорема остается в силе, если символы $o_{(Re z > \sigma)}(1)$ и $o_{(|t| > T)}(1)$ соответственно заменить символами $O_{(Re z > \sigma)}(1)$ и $\bar{O}_{(|t| > T)}(1)$.

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1, поэтому оно не рассматривается.

Теорему 3 можно использовать в других теоремах для оценки остаточного члена асимптотического разложения.

Т е о р е м а 4. Если

$$1) \quad F(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(n)t^n}{n!}, \quad (33)$$

2) в полуплоскости $Re z > \sigma$ функция $h(z)$ регулярна и для каждого N

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+k+1)} + \frac{r_N(z)}{(z+1)(z+2)\dots(z+N+1)},$$

где a_k комплексные числа, $r_N(z) \rightarrow 0$ равномерно когда $z \rightarrow \infty$, тогда ряд (33) сходится во всей плоскости комплексного переменного t , и в секторе $|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$

$$F(t) = \sum_{k=0}^N a_{k+1} t^{-k-1} e^t + e^t t^{-N-1} o_{(|t| > T)}(1) \quad (34)$$

($T > 0$ достаточно велико, $\eta > 0$ любая достаточно малая величина).

Доказательство. Сходимость ряда очевидна. Подставим выражение $h(n)$ в ряд (33):

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[\sum_{k=0}^N \frac{a_{k+1}}{(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)} + \frac{r_N(n)}{(n+1)\dots(n+N+1)} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^N a_{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+k+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n r_n(n)}{(n+N+1)!}. \end{aligned}$$

Так как [4]

$$\frac{k! n!}{(n+k+1)!} = \int_0^1 u^k (1-u)^n du,$$

то

$$F(t) = \sum_{k=0}^N \frac{a_{k+1}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^1 u^k (1-u)^n du + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n r_N(n)}{n! N!} \int_0^1 u^N (1-u)^n du. \quad (35)$$

Так как ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+k+1)!}$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n r_N(n)}{(n+N+1)!}$;

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[t(1-u)]^n}{n!}$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[t(1-u)]^n r_N(n)}{n!}$ сходятся равномерно,

то легко видеть, что можно поменять местами знаки Σ и \int в выражении (35).

Получаем:

$$F(t) = e^t \sum_{k=0}^N \frac{a_{k+1}}{k!} \int_0^1 u^k e^{-tu} du + R_N(t) = \\ = e^t \sum_{k=0}^N \frac{a_{k+1}}{t^{k+1}} - e^t \sum_{k=0}^N \frac{a_{k+1}}{t^{k+1}} \int_t^{\infty} e^{-u} u^k du + R_N(t),$$

где

$$R_N(t) = \frac{1}{N!} \int_0^1 u^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[t(1-u)]^n}{n!} r_N(n) du.$$

Оценим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[t(1-u)]^n r_N(n)}{n!}$$

для фиксированного u . Очевидно, что функция $r_N(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \sigma_1 \geq \sigma$.

Так как [4]

$$\frac{r_N(z)}{\Gamma(z+1)} = z^{-z-\frac{1}{2}} e^{zO} (O(\operatorname{Re} z \geq \sigma_1))_{\infty} \quad (1)$$

то можно применить теорему 3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[t(1-u)]^n}{n!} r_N(n) = e^{t(1-u)} O(|t| > T)_{\infty} \quad (1) \text{ в секторе}$$

$$|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \eta.$$

Легко доказать, что в этом секторе

$$R_N(t) = O(|t| > T)_{\infty} \quad (1) \quad e^t t^{-k-1} \int_0^t u^k e^{-u} du = e^t t^{-k-1} O(|t| > T)_{\infty} \quad (1).$$

Так как

$$e^t \sum_{k=0}^N \frac{a_{k+1}}{t^{k+1}} \int_t^{\infty} e^{-u} u^k du = O(|t| > T)_{\infty} \quad (1)$$

в секторе $|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \eta.$

то для каждого N

$$F(t) = e^t \sum_{k=0}^N \frac{a_{k+1}}{t^{k+1}} + O(|t| > T)_{\infty} (e^t t^{-N-1})$$

в секторе $|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \eta.$

Теорема 5. Если

$$1) F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n h(n)}{n!}; \quad (36)$$

2) в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \sigma$ функция $h(z)$ регулярна и для каждого N

$$h(z) = \sum_{k=0}^N a_k e^{-\lambda_k z} + e^{-\lambda_N z} r_N(z),$$

где a_k комплексные числа, $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k \rightarrow \infty$, когда $k \rightarrow \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} r_N(z) = 0$, ($r_N(z) \rightarrow 0$ равномерно), то ряд (36) сходится

во всей плоскости комплексного переменного t и в секторе

$$|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$$

$$F(t) = e^t \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-t(1-e^{-\lambda_k})} + e^{te^{-\lambda_N}} o(|t| > T)_{\infty} \quad (1) \quad (37)$$

($\eta > 0$ любая достаточно малая величина, $T > 0$ достаточно велико).

Доказательство теоремы почти полностью аналогично доказательству предыдущей теоремы, поэтому рассматривать его не будем.

Пример 1. Найдем асимптотическое выражение обобщенной гипергеометрической функции

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n t^n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_q)_n n!}, \quad (38)$$

где $p \leq q$, t — комплексное переменное, a_k, β_j ($k=1, 2, \dots, p$; $j=1, 2, \dots, q$) — параметры, которые могут принимать любые вещественные значения, $\beta_j \neq 0, -1, -2, \dots$ ($j=1, 2, \dots, q$), и символ $(a_k)_n$ обозначает величину

$$(a_k)_n = \frac{\Gamma(a_k + n)}{\Gamma(a_k)} = a_k (a_k + 1) \dots (a_k + n - 1), \quad (a_k)_0 = 1.$$

Очевидно:

$$\begin{aligned} {}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q; t) &= \frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\dots\Gamma(\beta_q)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\dots\Gamma(a_p)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+a_1)\Gamma(n+a_2)\dots\Gamma(n+a_p)}{\Gamma(n+\beta_1)\Gamma(n+\beta_2)\dots\Gamma(n+\beta_q)} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}. \end{aligned}$$

Используя асимптотическую оценку Γ — функции [4], получим:

$$\Gamma(\alpha_1 + z) = z^z z^{\alpha_1 - \frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi} \left[1 + o(|z|)_{\infty} \left(\frac{1}{z} \right) \right] \text{ в секторе}$$

$|\arg z| < \pi$ или

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha_1 + z) \dots \Gamma(\alpha_p + z)}{\Gamma(\beta_1 + z) \dots \Gamma(\beta_q + z)} \frac{1}{\Gamma(z+1)} &= (2\pi)^{\frac{p-q-1}{2}} z^{-\gamma z} z^{\alpha} e^{\beta z} \times \\ &\times \left(1 + o(\operatorname{Re} z > \sigma)_{\infty} \left(\frac{1}{z} \right) \right), \end{aligned}$$

где $\gamma = q + 1 - p$; $\beta = q + 1 - p$; $\alpha = \sum_{k=1}^p a_k - \sum_{j=1}^q \beta_j + \frac{q-p-1}{2}$.

Применяем теорему 2:

$$\begin{aligned}
 {}_p F_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; t) &= \frac{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_q)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_p)} (2\pi)^{\frac{p-q}{2}} \times \\
 &\times (q+1-p)^{-\frac{1}{2}} \times \\
 &\times t^{\frac{\alpha}{q+1-p} + \frac{1}{2(q+1-p)}} e^{(q+1-p)t} t^{\frac{1}{q+1-p}} (1 + O(|t| > T))_{\infty} (|t|^{-\frac{1}{2(q+1-p)}}),
 \end{aligned} \tag{39}$$

в секторе

$$|\arg t| \leq \min \left[\pi - \eta; \frac{(q+1-p)\pi}{2} - \eta \right],$$

$$\text{где } \alpha = \sum_{k=1}^p \alpha_k - \sum_{j=1}^q \beta_j + \frac{q-p-1}{2}.$$

Пример 2. Найдем асимптотическое разложение функции

$$F(t) = \int_0^t e^v v^v dv, \tag{40}$$

где $t > 0, v > -1$.

Очевидно

$$F(t) = t^{v+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n! (n+v+1)}.$$

Так как

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n+v+1} &= \int_0^1 (1-u)^{n+v} du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{v}{k} \int_0^1 u^k (1-u)^n du = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{v}{k} \frac{k!}{(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)},
 \end{aligned}$$

можно применить теорему 4:

$$F(t) \sim t^v e^t \sum_{k=0}^{\infty} (-1)_k \binom{v}{k} k! t^{-k} \tag{41}$$

когда $t \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. Москва, 1962.
2. L. Berg. Herleitung asymptotischer Ausdrücke für Integrale und Reihen. Sonderdruck aus der Wissen — schaftlichen Zeitschrift der Hochschule für Elektrotechnik Ilmenau — Jahrgang 3, Heft 1, 1957.
3. В. Ж. Риекстыня. Об одном обобщении асимптотических разложений. Ученые записки ЛГУ, 1958, т. XX, 145—152.
4. Н. Н. Лебедев. Специальные функции и их приложения. Москва, 1953 г.
5. Г. Поля и Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Москва, 1956.

В. Ж. Риекстыня

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СУММЫ НЕКОТОРЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Аннотация

Для целой функции $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) t^n$ получены асимптотические оценки в секторе $|\arg t + I_m \beta| \leq \min \left[\pi - \eta, \frac{\gamma \pi}{2} - \eta \right]$ и асимптотические разложения в секторе $|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$ для больших значений аргумента в предположении, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \sigma$ и при $z \rightarrow \infty$

$$\mu(z) \sim A z^{\alpha} e^{\beta z - \gamma z \ln z} \ln^{\kappa} z,$$

где A, β комплексные константы, $\gamma > 0$, α, κ действительные числа, $\eta > 0$ любое достаточно малое число.

ASYMPTOTIC ESTIMATIONS FOR THE SUMS OF SOME
POWER SERIES

Annotation.

Asymptotical estimations for integral function $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) t^n$ in the sector $|\arg t + I_m \beta| \leq \min \left[\pi - 2, \frac{\gamma \pi}{2} - \eta \right]$ and asymptotical expansions in the sector $|\arg t| \leq \frac{\pi}{2} - \eta$ for great values of argument have been obtained, assuming that $\mu(z) \sim A z^\alpha e^{\beta z - \gamma z \ln z} \times \ln^x z$ in half plane $\operatorname{Re} z \geq \delta$ if $z \rightarrow \infty$. (A, β are complex constants; $\gamma > 0$; α and β real numbers, $\eta > 0$ any sufficiently small number).

А. П. Луена

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим оптимальную задачу, в которой закон движения объекта имеет вид:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n, u) = f^i(x, u), \quad i=1, \dots, n, \quad (1)$$

где функции f^i непрерывны по совокупности переменных x^1, \dots, x^n, u и непрерывно дифференцируемы по x^1, \dots, x^n . Управляющий параметр u может принимать значения в области управления V , где V — некоторое ограниченное множество r — мерного векторного пространства E_r . Кусочно-непрерывные управления со значениями в V называются допустимыми.

Определим в пространстве X векторов $x = \{x^1, \dots, x^n\}$ норму следующим образом. Рассмотрим ограниченное выпуклое тело F , содержащее точку O внутри себя. Пусть дана произвольная точка $x \in X$. Проведем из точки O через точку x луч S и обозначим через x_1 точку пересечения луча S с границей тела F . Число, равное отношению отрезков Ox и Ox_1 , будем называть нормой x и обозначать через $\|x\|$. Тело F будем называть единичной сферой.

Тогда оптимальную задачу можно сформулировать следующим образом:

В n -мерном фазовом пространстве X дана точка x_0 и фиксированы моменты времени t_0, t_1 . Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$ найти такое, которое за время $t_0 \leq t \leq t_1$ переведет точку x_0 в такую точку x_1 , что $\|x_1\|$ принимает наименьшее возможное значение.

Частные случаи этой задачи были рассмотрены раньше [2], [3].

В работе [3] рассмотрен случай, когда система (1) линейна. Там предложена процедура определения последовательных приближений допустимых управлений, которая приводит к последовательному уменьшению $\|x_1\|$.

В работе [2] рассмотрен случай, когда система (1) линейна, а норма $\|x_1\|$ введена следующим образом

$$\|x_1\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_1^i)^2}.$$

Переходим теперь к формулировке и доказательству необходимого условия оптимальности.

2. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Рассмотрим в пространстве X выпуклое тело F_1 , подобное единичной сфере F , на границе которого находится точка x_1 .

Отметим следующие свойства тела F_1 .

I Если x внутренняя точка тела F_1 , то $\|x\| < \|x_1\|$.

II Если x не принадлежит телу F_1 , то $\|x\| > \|x_1\|$.

Далее составим сопряженную систему уравнений

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f^\nu}{\partial x^i} \psi_\nu, \quad i=1, \dots, n. \quad (2)$$

Наконец, рассмотрим следующую функцию H переменных $x^1, \dots, x^n, \psi_1, \dots, \psi_n, u$:

$$H(\psi, x, u) = \sum_{\nu=1}^n \psi_\nu f^\nu(x, u)$$

и обозначим через $M(\psi, x)$ верхнюю грань значений функции $H(\psi, x, u)$, при фиксированных ψ и x :

$$M(\psi, x) = \sup_{u \in V} H(\psi, x, u)$$

Нижеследующая теорема дает необходимое условие оптимальности управления $u(t)$.

Т е о р е м а 1. Пусть $u = u(t)$ — допустимое управление, переводящее за время $t_0 \leq t \leq t_1$ точку x_0 в точку $x_1 \neq O$.^{*} Для оптимальности управления $u(t)$ и соответствующей ему траекто-

^{*} Если $x_1 = O$, то управление $u(t)$ тривиальным образом оптимально, и этот случай мы не рассматриваем.

при $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции

$$\psi(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}, \text{ что:}$$

1) величины $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системам (1), (2);

2) для всех t , $t_0 \leq t \leq t_1$, функция $H(\psi(t), x(t), u)$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума, т. е.

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t));$$

3) для любого вектора Θ , исходящего из точки x_1 и принадлежащего F_1 выполнено соотношение

$$(\psi(t_1), \Theta) \geq 0.$$

Доказательство. Проварьировуем управление $u(t)$ (при $\delta t = 0$, $\tau = t_1$) и построим конус достижимости K согласно [1], стр. 98, 106. Проведем из точки x_1 через каждую отличную от x_1 точку тела F_1 луч. Тогда мы получим выпуклый конус, замыкание которого обозначим через K_0 . Покажем, что конусы K и K_0 разделяемы. Доказательство проведем от противного. Предположим, что конусы K и K_0 не разделяемы. Тогда существует точка a принадлежащая конусу K и являющаяся внутренней точкой конуса K_0 (конус K_0 содержит внутренние точки).

Пусть Δx — вектор с началом в точке x_1 и концом в точке a . Так как вектор Δx принадлежит конусу K , то существует настолько малое $\varepsilon > 0$ и такое проварьированное управление $u^*(t)$, что для соответствующей ему траектории $x^*(t)$, исходящей из точки x_0 , имеет место соотношение

$$x^*(t_1) = x(t_1) + \varepsilon \Delta x + o(\varepsilon)$$

Если ε выбрано достаточно малым, то точка $x^*(t_1)$ принадлежит внутренности тела F_1 и мы имеем неравенство

$$\|x^*(t_1)\| < \|x_1\|$$

Последнее неравенство противоречит оптимальности управления $u(t)$. Таким образом, предположение, сделанное в начале доказательства, приводит к противоречию и разделяемость конусов K и K_0 доказана.

Следовательно, существуют такие числа c_1, \dots, c_n , среди которых есть хоть одно, отличное от нуля, что весь конус K лежит в полупространстве $\sum_{\nu=1}^n c_\nu x^\nu \leq 0$, а конус K_0 — в полупространстве $\sum_{\nu=1}^n c_\nu x^\nu \geq 0$.

Пусть $\psi(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$ — решение системы (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi_i(t_1) = c_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда в силу леммы 5, [1], стр. 114,

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)),$$

так что условие 2) теоремы 1 выполнено.

Так как конус K_0 лежит в полупространстве $\sum_{v=1}^n c_v x^v \geq 0$, то $(\psi(t_1), \Theta) \geq 0$, для любого вектора Θ , исходящего из точки x_1 и принадлежащего F_1 , так что условие 3) теоремы 1 тоже выполнено.

3. ОДИН ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим случай, когда $\|x\|$ для любой точки $x \neq 0$ является непрерывно дифференцируемой функцией $N(x) = N(x^1, \dots, x^n)$.

В этом случае конус K_0 для любой точки $x_1 \neq 0$ представляет собой некоторое полупространство пространства X , а именно, полупространство, состоящее из всех векторов a , исходящих из точки x_1 и удовлетворяющих условию $(a, \text{grad } N(x_1)) \leq 0$. Следовательно, вектор $\psi(t_1) = \{\psi_1(t_1), \dots, \psi_n(t_1)\}$ имеет вид

$$\psi(t_1) = \lambda \text{grad } N(x_1),$$

где λ — отрицательный множитель.

Так как система (2) однородна, то мы можем положить $\lambda = -1$.

Тогда мы получим для системы (2) следующие граничные условия:

$$\psi_i(t_1) = -\frac{\partial N(x_1)}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Таким образом, вместо теоремы 1 мы получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Пусть $u = u(t)$ допустимое управление, переводящее за время $t_0 \leq t \leq t_1$ точку x_0 в точку $x_1 \neq 0$. Для оптимальности управления $u(t)$ и соответствующей ему траектории $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции

$$\psi(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}, \quad \text{что:}$$

2) для всех t , $t_0 \leq t \leq t_1$, функция $H(\psi(t), x(t), u)$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума, т. е.

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)).$$

4. ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассмотрим теперь следующую задачу:

В n -мерном фазовом пространстве X дана точка x_0 и фиксированы моменты времени t_0, t_1 . Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$ найти такое, которое за время $t_0 \leq t \leq \tau$, где $\tau \leq t_1$, переводит точку x_0 в такую точку x_1 , что $\|x_1\|$ принимает наименьшее возможное значение.

Для вывода необходимого условия оптимальности мы можем использовать проварьированные управления $u^*(t)$, для которых $\delta t \leq 0$. Тогда мы кроме соотношений 1), 2) и 3) теоремы 1 получим еще следующее соотношение $M(\psi(\tau), x(\tau)) \geq 0$.

Таким образом мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $u(t)$ — допустимое управление, переводящее за время $t_0 \leq t \leq \tau$ точку x_0 в точку $x_1 \neq 0$. Для оптимальности управления $u(t)$ и соответствующей ему траектории $x(t)$, $t_0 \leq t \leq \tau$, необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции

$$\psi(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}, \text{ что:}$$

1) величины $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системам (1), (2);

2) для всех t , $t_0 \leq t \leq t_1$, функция $H(\psi(t), x(t), u)$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума, т. е.

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t));$$

3) в конечный момент $t = \tau$ выполнено соотношение

$$M(\psi(\tau), x(\tau)) \geq 0;$$

4) для любого вектора Θ , исходящего из точки x_1 и принадлежащего F_1 выполнено соотношение

$$(\psi(\tau), \Theta) \geq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелдзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961.
2. Л. С. Кириллова, Задача об оптимизации конечного состояния регулируемой системы, Автоматика и телемеханика, т. XXIII, № 12, 1962.
3. Ho Yu-Chi. A successive approximation technique for optimal control systems subject to input saturation Trans. ASME, D 84, N 1, 1962.

А. П. Луена

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ

Аннотация

Рассматривается нелинейная задача оптимального регулирования в которой минимизируется расстояние конечной точки от начала координат при условии, что время движения закреплено и начальная точка выбрана. Решение задачи основано на принципе максимума. Приводятся необходимые условия оптимальности управления.

А. Р. Лиера

ON A PROBLEM OF OPTIMUM CONTROL IN FIXED TIME SYSTEMS.

Annotation.

The nonlinear problem of optimization with restricted control is considered.

The object is minimization of distance between the finite point and the origin of coordinates under condition that motion time and point of origin are fixed. The solution of the problem is based on the maximum principle. The necessary conditions for optimal control are given.

Л. Э. Рейзинь

О ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = P(x, t), \quad (1)$$

где x является элементом из области $G_0 \subset E$, E — банахово пространство, t принадлежит интервалу S , а $P \in U_0$, где U_0 — пространство операторов, определенных на $G_0 \times S$, имеющих значения в E и дифференцируемых до порядка r включительно. Решение уравнения (1) $\varphi(t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(t_0) = \xi, \quad \xi \in G_0, \quad t_0 \in S \quad (2)$$

принадлежит C , где C — пространство непрерывных операторов, определенных на некотором отрезке $I \subset S$ и имеющих значения в E [1]. Через U обозначим пространство операторов, определенных на компактном множестве $\bar{G} \times I_0$, имеющих значения в E и дифференцируемых до порядка r включительно, где $\bar{G} \subset G_0$, $I_0 \subset S$. Тогда $U_0 \subset U$. Будем рассматривать и такие уравнения (1), где $P \in U$. Обозначим, далее, через Φ оператор, определенный на $U \times G$ и имеющий значения в C .

$$\Phi(P, \xi) = \varphi(t), \quad \varphi(t_0) = \xi. \quad (3)$$

Т е о р е м а. Пусть решение $\varphi_0(t)$ уравнения (1) с $P = P_0 \in U_0$, удовлетворяющее начальному условию (2) с $\xi = \xi_0$, определено на некотором конечном отрезке $I \subset S$, при чем $t_0 \in I$. Тогда можно найти такие \bar{G} и I_0 и ввести норму в $U \times E$ так, чтобы: 1) $\varphi_0(t) = \Phi(P_0, \xi_0)$, 2) для всех $q = (P, \xi)$ из достаточно малой

окрестности (P_0, ξ_0) решения (3) были бы определены на I и 3) оператор $\Phi(P, \xi)$ имел бы в этой окрестности дифференциал Фреше по q до порядка r включительно.

Доказательство. 1°. Если G_0 не совпадает с E , то существует

$$\inf_{t \in I, y \in E \setminus G_0} \|y - \varphi_0(t)\|_E = 3\varepsilon > 0, \quad (4)$$

ибо как $E \setminus G_0$, так и $\varphi_0(I)$ (множество всех значений $\varphi_0(t)$ для $t \in I$) является замкнутыми множествами из E , причем $\varphi_0(I)$ — ограниченное. Если $G_0 = E$, то за ε можно брать любое положительное число. Образует компактное множество \bar{G} из элементов $x \in E$, для которых:

$$\min_{t \in I} \|x - \varphi_0(t)\|_E \leq 2\varepsilon. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что $\varphi_0(I) \subset \bar{G} \subset G_0$. Кроме того образуем отрезок I_0 , такой, что $I \subset I_0 \subset S$ и имеются такие значения t , что $t \in I_0$, но $t \notin I$.

Так как $P_0 \in U_0 \subset U$ и $\xi_0 = \varphi_0(t_0) \in G$, то $\varphi_0(t) = \Phi(P_0, \xi_0)$.

Этим доказано, что построенные \bar{G} и I_0 удовлетворяют первому условию в утверждении теоремы.

Согласно условиям теоремы $P^{(i)}(x, t) = P_x^{(i)}(x, t) \in U_i = (E \rightarrow (E \rightarrow \dots (E \rightarrow E) \dots))$, где $(E^1 \rightarrow E)$ обозначает пространство линейных операторов, отображающих элементы из E^1 на элементы из E . Обозначим через E_j пространство, которому принадлежит x^j , если $x \in E$. В E_j введем норму так, чтобы $\|x^j\|_{E_j} \leq \|x\|_E^j$. Далее введем нормы

$$\|P\|_u = \sum_{i=1}^r \sup_{t \in I_0, x \in \bar{G}} \|P^{(i)}(x, t)\|_{u_i} + \sup_{t \in I_0, x \in \bar{G}} \|P(x, t)\|_E, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\|_c &= \sup \|\varphi(t)\|_E, \\ \|q\| &= \|q\|_{UXE} = \|P\|_u + \|\xi\|_E. \end{aligned} \quad (7)$$

Для краткости обозначим

$$\begin{aligned} \Phi(P + \Delta P, \xi + \Delta \xi) &= \bar{\varphi}(t), \\ \bar{\varphi}(t) - \varphi(t) &= \Delta \varphi(t), \\ \varphi(t) - \varphi_0(t) &= \Delta \varphi_0(t), \\ \bar{f}(\tau) &= \bar{f}, \\ (\Delta P, \Delta \xi) &= h, \end{aligned}$$

длину интервала I (соотв. I^1) через T (соотв. T^1).

2°. Продолжению доказательства предположим несколько лемм. В качестве первой леммы возьмем модификацию известной леммы Гронуолла [2].

Лемма 1. Пусть скалярная функция $u(t) \geq 0$ для $t \in I$ и

$$u(t) \leq a + b \left| \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right|$$

для $t \in I$ и $t_0 \in I$, a и b — положительные постоянные. Тогда

$$\sup_{t \in I} u(t) \leq a \exp(bT).$$

Доказательство. Для $t \geq t_0$ имеем

$$u(t) \leq a + b \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau,$$

откуда

$$\frac{b u(t)}{a + b \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau} \leq b.$$

Интегрируя по t от t_0 до t , получаем

$$\ln(a + b \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau) - \ln a \leq b(t - t_0) \leq bT,$$

следовательно

$$\bar{u}(t) \leq a + b \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \leq a e^{bT} \quad (8)$$

Для $t < t_0$ имеем

$$u(t) \leq a + b \int_t^{t_0} u(\tau) d\tau,$$

откуда

$$\frac{b u(t)}{a + b \int_t^{t_0} u(\tau) d\tau} \leq b.$$

Интегрируя по t от t до t_0 , получаем

$$-\ln a + \ln(a + b \int_t^{t_0} u(\tau) d\tau) \leq b(t - t_0) \leq bT$$

или

$$u(t) \leq a + b \int_t^{t_0} u(\tau) d\tau \leq a e^{bT}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) получаем утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть $H(x, t) \in U$, имеет дифференциалы Фреше по x до порядка r включительно и

$$\sup_{\tau \in I} \frac{\|H(\bar{\varphi}, \tau) - H(\varphi, \tau) - \sum_{j=1}^i H^{(j)}(\varphi, \tau) (\Delta\varphi)^j\|_E}{\|\Delta\varphi\|_E^k} = q(i, k), \quad i \leq r.$$

Тогда $q(i, i+1) \leq 2 \|H\|_u$ при достаточно малом $\|h\|$.

Доказательство следует непосредственно из определения дифференциалов Фреше, (6) и (7).

Лемма 3. Если $\bar{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ определены для $t \in I^1$, то справедлива оценка

$$\sup_{t \in I^1} \|\Delta\varphi(t)\|_E \leq M_0 \|h\|,$$

где M_0 — некоторая постоянная.

Доказательство.

$$\Delta\varphi(t) = \Delta\xi + \int_{t_0}^t \Delta P(\bar{\varphi}, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t (P(\bar{\varphi}, \tau) - P(\varphi, \tau)) d\tau \quad (10)$$

и в силу единственности решения $\varphi(t)$ [1]

$$\|\Delta\varphi(t)\|_E \leq \|\Delta\xi\|_E + \|P\|_u T^1 + \left| \int_{t_0}^t \frac{\|P(\bar{\varphi}, \tau) - P(\varphi, \tau)\|_E}{\|\Delta\varphi\|_E} \|\Delta\varphi\|_E d\tau \right|$$

для всех $t \in I^1$. Согласно лемме 2 и (7) получаем

$$\|\Delta\varphi\|_E \leq \|h\| (1 + T^1) + 2\|P\|_u \left| \int_{t_0}^t \|\Delta\varphi\|_E d\tau \right|.$$

Применяя лемму 1, имеем

$$\sup_{t \in I^1} \|\Delta\varphi(t)\|_E \leq \|h\| (1 + T^1) \exp(2\|P\|_u T^1),$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда $q(i, i) \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$.

Доказательство следует из определения дифференциала Фреше и леммы 3.

Лемма 5. Пусть $\Delta\varphi = \sum_{\nu=1}^{k-1} f_{\nu} + \alpha_{k-1}$, при чем $\|f_{\nu}\|_E \leq M_{\nu} \|h\|^{\nu}$ и $\frac{\|\alpha^{k-1}\|_E}{\|h\|^{k-1}} \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Тогда

$$\sup_{t \in I} \frac{\|(\Delta\varphi)^j - \sum_{\sum \nu_k = j} \prod_{\mu=1}^j f_{\nu_{\mu}}\|_{E_j}}{\|h\|^k} \rightarrow 0 \text{ при } \|h\| \rightarrow 0$$

для $j=2, \dots, i$ ($i \geq 2$).

Доказательство. Преобразуем для $j \geq 2$

$$\begin{aligned} (\Delta\varphi)^j - \sum_j \prod_{\mu=1}^j f_{\nu_{\mu}} &= \left(\sum_{\nu=1}^{k-1} f_{\nu} + \alpha_{k-1} \right)^j - \sum_j \prod_{\mu=1}^j f_{\nu_{\mu}} = \\ &= \sum_{s=0}^j C_j^s \alpha_{k-1}^s \left(\sum_{\nu=1}^{k-1} f_{\nu} \right)^{j-s} - \sum_j \prod_{\mu=1}^j f_{\nu_{\mu}} = \\ &= \sum_{s=0}^j C_j^s \alpha_{k-1}^s \sum_{j-s} \prod_{\mu=1}^{j-s} f_{\nu_{\mu}} - \sum_j \prod_{\mu=1}^j f_{\nu_{\mu}} = \\ &= \sum_j \prod_{\mu=1}^{j(k-1)} f_{\nu_{\mu}} - \sum_j \prod_{\mu=1}^j f_{\nu_{\mu}} + \sum_{s=1}^j C_j^s \alpha_{k-1}^s \sum_{j-s} \prod_{\mu=1}^{j-s} f_{\nu_{\mu}} = \\ &= \sum_{k+1}^{j(k-1)} \prod_{\mu=1}^j f_{\nu_{\mu}} + \sum_{s=1}^j C_j^s \alpha_{k-1}^s \sum_{j-s} \prod_{\mu=1}^{j-s} f_{\nu_{\mu}}, \end{aligned}$$

где C_j^s обозначает биномиальные коэффициенты, а \sum_j^k — знак суммы $\sum_{\sum \nu_{\mu} = j}^k$. Из последнего равенства получаем

$$\|(\Delta\varphi)^j - \sum_j \prod_{\mu=1}^j f_{\nu_{\mu}}\|_{E_j} \leq \sum_{k=1}^{j(k-1)} \prod_{\mu=1}^j M_{\nu_{\mu}} \|h\|^{\nu_{\mu}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=1}^j C_j^s \|\alpha_{k-1}\|_E^s \sum_{j-s}^{(j-s)(k-1)} \prod_{\mu=1}^{j-s} M_{\nu_\mu} \|h\|_{\nu_\mu} = \\
& = \sum_{p=k+1}^{j(k-1)} N_{0p} \|h\|^p + \sum_{s=1}^j C_j^s \|\alpha_{k-1}\|_E^s \sum_{p=j-s}^{(j-s)(k-1)} N_{sp} \|h\|^p
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& \frac{\|(\Delta\varphi)^{j-\sum_j \prod_{\mu=1}^j f_{\nu_\mu}}\|_{E_j}}{\|h\|^k} \leq \sum_{p=1}^{(j-1)k-j} N_{op+k} \|h\|^p + \\
& + \sum_{s=1}^{j-1} C_j^s \frac{\|\alpha_{k-1}\|_E^s \sum_{p=j-s}^{(j-s)(k-1)} N_{sp} \|h\|^p}{\|h\|^{k-1}} + \frac{\|\alpha_{j-1}\|_E^j}{\|h\|^k} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $\|h\| \rightarrow 0$, что и доказывает лемму.

3°. Пусть имеется замкнутое множество $\bar{G}_1 \subset \bar{G}$, определенное неравенством

$$\min_{t \in I} \|\varphi_0(t) - x\|_E \leq \varepsilon \text{ для всех } x \in \bar{G}_1, \quad (11)$$

$$\text{а } \varphi(t) = \Phi(P, \xi) \text{ с } \|P - P_0\|_u < \frac{\varepsilon}{2M_0}, \|\xi - \xi_0\|_E < \frac{\varepsilon}{2M_0} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т. е.}$$

$$\|h_0\| \leq \|P - P_0\|_u + \|\xi - \xi_0\|_E < \frac{\varepsilon}{M_0}. \quad (12)$$

Предположим, что $\varphi(t)$ непродолжимо на весь отрезок I , т. е. оно определено только на интервале $S^1 \subset I$. Тогда по лемме 3.3 из [I] существует такое $t_1 \in I$, что $\lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t) \in \bar{G}$, откуда следует

существование отрезка $I^1 \subset S^1$, на котором $\varphi(t)$ определено, и такого $t_2 \in I^1$, что

$$\varphi(t_2) \in \bar{G}_1 \quad (13)$$

На I^1 определены как $\varphi(t)$, так и $\varphi_0(t)$, поэтому по лемме 3 из (12) имеем

$$\sup_{t \in I^1} \|\Delta\varphi_0(t)\|_E < M_0 \|h_0\| < \varepsilon. \quad (14)$$

Однако из (11) и (13) следует

$$\|\Delta\varphi_0(t)\|_E \geq \min_{t \in I} \|\varphi(t_2) - \varphi(t)\|_E \geq \varepsilon,$$

что противоречит (14) и тем самым опровергает сделанное предположение. Этим доказано, что введенная норма (7) удовлетворяет второму условию утверждения теоремы, при чем окрестность, фигурирующая в этом условии, определяется неравенством (12).

4°. Преобразуем (10) в

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(t) = & \Delta\xi + \int_{t_0}^t \Delta P(\varphi, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t P'(\varphi, \tau) \dot{f}_1 d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t (P(\bar{\varphi}, \tau) - P(\varphi, \tau) - P'(\varphi, \tau) \Delta\varphi) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t (\Delta P(\bar{\varphi}, \tau) - \Delta P(\varphi, \tau)) d\tau + \int_{t_0}^t P'(\varphi, \tau) (\Delta\varphi - \dot{f}_1) d\tau, \end{aligned}$$

где $f_1(t)$ определяется из уравнения

$$f_1(t) - \int_{t_0}^t P'(\varphi, \tau) \dot{f}_1 d\tau = \Delta\xi + \int_{t_0}^t \Delta P(\varphi, \tau) d\tau. \quad (15)$$

В силу теоремы существования для линейного дифференциального уравнения [3] $f_1(t)$ существует для всех $t \in I$. Из (15) получаем

$$\|f_1(t)\|_E \leq \| \Delta\xi \|_E + \| \Delta P \|_u T + \left| \int_{t_0}^t \| P \|_u \| \dot{f}_1 \|_E d\tau \right|,$$

откуда, применяя лемму 1,

$$\sup_{t \in I} \|f_1(t)\|_E \leq \|h\| (1 + T) \exp(\|P\|_u T) = M_1 \|h\|. \quad (16)$$

Если обозначить $\Delta\varphi(t) - \dot{f}_1(t) = \alpha_1(t)$, то

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) = & \int_{t_0}^t (P(\bar{\varphi}, \tau) - P(\varphi, \tau) - P'(\varphi, \tau) \Delta\varphi) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t (\Delta P(\bar{\varphi}, \tau) - \Delta P(\varphi, \tau)) d\tau + \int_{t_0}^t P'(\varphi, \tau) \alpha_1 d\tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\alpha_1(t)\|_E &\leq \left| \int_{t_0}^t \frac{\|P(\bar{\varphi}, \tau) - P(\varphi, \tau) - P'(\varphi, \tau)\Delta\varphi\|_E}{\|\Delta\varphi\|_E} \|\Delta\varphi\|_E d\tau + \right. \\ &= \left| \int_{t_0}^t \frac{\|\Delta P(\bar{\varphi}, \tau) - \Delta P(\varphi, \tau)\|_E}{\|\Delta\varphi\|_E} \|\Delta\varphi\|_E d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^t \|P''_u\| \|\alpha_1\|_E d\tau \right|. \end{aligned}$$

Согласно леммам 1, 2, 3, 4 и (7) получаем

$$\sup_{t \in I} \frac{\|\alpha_1(t)\|_E}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ при } \|h\| \rightarrow 0. \quad (17)$$

Из (15) следует аддитивность, а из (16) — ограниченность оператора, отображающего h на $f_1(t)$, поэтому

$$f_1(t) = \Psi_1(P, \xi)h, \quad (18)$$

где $\Psi_1(P, \xi) \in (U \times E \rightarrow C)$ — линейный оператор. Соотношения (17) и (18) доказывают, что $f_1(t)$ является дифференциалом Фреше $d\Phi(P, \xi, h)$ оператора $\Phi(P, \xi)$.

5^o. Разложим теперь

$$\Delta\varphi(t) = \sum_{i=1}^k f_i(t) + \alpha_k(t), \quad (19)$$

где $f_i(t)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} f_i(t) - \int_{t_0}^t P'(\varphi, \tau) f_i d\tau &= \sum_{j=2}^i \frac{1}{j!} \int_{t_0}^t \Delta P^{(j)}(\varphi, \tau) \sum_i \prod_{\mu=1}^j f_{v_\mu} d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j!} \int_{t_0}^t \Delta P^{(j)}(\varphi, \tau) \sum_{i-1} \prod_{\mu=1}^j f_{v_\mu} d\tau, \quad (20) \end{aligned}$$

здесь \sum_i обозначает $\sum_{\sum v_\mu = i}$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_k(t) &= \int_{t_0}^t (P(\bar{\varphi}, \tau) - P(\varphi, \tau) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} P^{(j)}(\varphi, \tau) (\Delta\varphi)^j) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t (\Delta P(\bar{\varphi}, \tau) - \Delta P(\varphi, \tau) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} \Delta P^{(j)}(\varphi, \tau) (\Delta\varphi)^j) d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=2}^k \frac{1}{j!} \int_{t_0}^t P^{(j)}(\varphi, \tau) \left((\Delta\varphi)^j - \sum_{j=1}^k \prod_{\mu=1}^j \dot{f}_{v_\mu} \right) d\tau + \\
& + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} \int_{t_0}^t \Delta P^{(j)}(\varphi, \tau) \left((\Delta\varphi)^j - \sum_{j=1}^{k-1} \prod_{\mu=1}^j \dot{f}_{v_\mu} \right) d\tau + \int_{t_0}^t P'(\varphi, \tau) \alpha_k d\tau.
\end{aligned} \tag{21}$$

Предположим, что $f_i(t)$ определены для всех $t \in I$, являются однородными формами степени i относительно h и имеет место

$$\sup_{t \in I} \|f_i(t)\|_E \leq M_i \|h\|^i \text{ для } i=1, \dots, k, \tag{22}$$

где M_i — некоторые постоянные.

6°. Во-первых, покажем, что для $p=1, \dots, k$ из сделанного предположения (22) следует

$$\frac{\|\alpha_p(t)\|_E}{\|h\|^p} \rightarrow 0 \text{ при } \|h\| \rightarrow 0. \tag{23}$$

Пусть соотношение (23) справедливо при $p=s-1$. Из (21) с учетом (19) получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{\|\alpha_s(t)\|_E}{\|h\|^s} \leq \\
& \leq \left| \int_{t_0}^t \frac{\|P(\bar{\varphi}, \tau) - P(\varphi, \tau) - \sum_{j=1}^s \frac{1}{j!} P^{(j)}(\varphi, \tau) (\Delta\varphi)^j\|_E}{\|\Delta\varphi\|_E^s} \frac{\|\Delta\varphi\|_E^s}{\|h\|^s} d\tau \right| + \\
& + \left| \int_{t_0}^t \frac{\|\Delta P(\bar{\varphi}, \tau) - \Delta P(\varphi, \tau) - \sum_{j=1}^s \frac{1}{j!} \Delta P^{(j)}(\varphi, \tau) (\Delta\varphi)^j\|_E}{\|h\|_E^s} \frac{\|\Delta\varphi\|_E^s}{\|h\|^s} d\tau \right| + \\
& + \sum_{j=2}^s \frac{1}{j!} \left| \int_{t_0}^t \|P\|_u \frac{\|(\Delta\varphi)^j - \sum_{i=1}^s \prod_{\mu=1}^j \dot{f}_{v_\mu}\|_{E_j}}{\|h\|^s} d\tau \right| + \\
& + \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{j!} \left| \int_{t_0}^t \frac{\|\Delta P\|_u}{\|h\|} \frac{\|(\Delta\varphi)^j - \sum_{i=1}^{s-1} \prod_{\mu=1}^j \dot{f}_{v_\mu}\|_{E_j}}{\|h\|^{s-1}} d\tau \right| + \\
& + \left| \int_{t_0}^t \|P\|_u \frac{\|\alpha_s\|_E}{\|h\|^s} d\tau \right|.
\end{aligned}$$

Используя леммы 1, 2, 3, 4, 5 и (22), получаем справедливость (23) и при $p=s$. Так как это соотношение в силу (17) справедливо при $p=1$, то оно справедливо и для всех p , для которых справедливо (22), т. е. согласно предположению для $p=1, \dots, k$.

7°. Покажем, что из предположений п. 5° с $k=m$ следует справедливость тех же утверждений и для $k=m+1 \leq r$. Пусть теперь в (19) $k=m+1$, при чем $f_{m+1}(t)$ определено уравнением (20) с $i=m+1$. Согласно теореме существования линейных дифференциальных уравнений [3] $f_{m+1}(t)$ существует для всех $t \in I$. Из (20) согласно (22) и лемме 1

$$\sup_{t \in I} \|f_{m+1}(t)\|_E \leq (\|P\|_u)^{m+1} \sum_{j=2}^{m+1} \frac{1}{j!} \sum_{m+1}^j \prod_{\mu=1}^j M_{\nu_\mu} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!} \sum_m^j \prod_{\mu=1}^j M_{\nu_\mu} T \|h\|^{m+1} \exp(\|P\|_u T) = M_{m+1} \|h\|^{m+1}. \quad (24)$$

Наконец, правая часть (20) является однородной формой степени $m+1$ относительно h , что вытекает из предположений п. 5°. Из (20) и (24) следует аддитивность и ограниченность оператора, отображающего правую часть (20) с $i=m+1$ на $f_{m+1}(t)$ поэтому $f_{m+1}(t)$ является однородной формой степени $m+1$ относительно h .

8°. Так как согласно п. 4° предположения п. 5° справедливы при $k=1$, то из п. 7° следует, что они справедливы для любого $k \leq r$. Но тогда согласно п. 6° для любого $p \leq r$ справедливо также и (23). Из этого следует, что $f_i(t)$ является дифференциалом Фреше i -го порядка $d^i \Phi(P, \xi, h)$ оператора $\Phi(P, \xi)$ для всех $i \leq r$. Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский и С. Г. Крейн. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Труды Воронежского Государственного университета, вып. 2, 1956, 3 — 23.
2. Г. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, Москва, 1953.
3. J. L. Massera and J. J. Schäffer. Linear differential equations and functional analysis I. Annals of Math. v. 67, №3, 1958, 517—573.

О ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ

Рассматривается в банаховом пространстве определенное дифференциальное уравнение, правые части которого имеют дифференциалы Фреше до порядка r . Доказывается, что решения этого уравнения имеют дифференциалы Фреше до порядка r по элементам другого банахова пространства, являющимися парами начальных значений и функций правых частей.

L. Reiziņš

THE DEPENDENCE OF THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION ON THE RIGHT HAND SIDE.

Annotation.

Let (1) be a differential equation in a Banach space and let q run through the points (P, ξ) of another Banach space, ξ being the initial value and P the right hand side function of (1). It is proved that if P has the Frechet differential of order r with respect to x , then the solution of (1) has the differential of the same order with respect to q .

Н. А. Авдонин

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЛАСТА ПРИ НАЛИЧИИ В НЕМ ПОДВИЖНОГО ОЧАГА ГОРЕНИЯ

Ниже решается задача о нахождении поля температур при нагнетании в пласт газа и наличии в нем движущегося очага горения. Задача ставится аналогично постановке, сделанной в [1], где решалась задача о нахождении поля температур пласта при закачке в него горячей жидкости. В этой постановке задачи сделаны следующие допущения: а) теплопроводность пласта в вертикальном направлении бесконечно велика (схема «сосредоточенной емкости»), см. [2], б) теплопроводность внешних пород в горизонтальном направлении отсутствует. Постановка задачи в таком виде была названа в [1] «неполной схемой сосредоточенной емкости». На числовых примерах было показано, что решение задачи в этой постановке незначительно отличается от решения задачи по схеме «сосредоточенной емкости».

Таким образом данная постановка задачи с движущимся очагом горения учитывает перенос тепла в пласте путем конвекции и теплопроводности; тепловые потери пласта в кровлю и подошву учитываются по «неполной схеме сосредоточенной емкости». Рассмотрены случаи плоско-линейного равномерного движения фронта горения и радиального движения фронта.

1. В линейном случае в безразмерных величинах задача ставится так

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad z > 0, \quad t > 0; \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma \cdot v \cdot \delta(x - vt) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad z = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (1b)$$

$$u \Big|_{t=0} = 0; \quad u \Big|_{x=z=0} = 1; \quad \lim_{z^2+x^2 \rightarrow \infty} u = 0; \quad (1c)$$

α — характеризует отношение теплопроводностей пород и пласта,

β — безразмерный конвективный параметр, v — безразмерная скорость движения фронта горения.

К задаче (1) применим преобразование Лапласа-Карсона

$$F(p) = p \int_0^{\infty} \exp(-pt) \cdot u(t) dt,$$

после чего задача для изображения F будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{p}{a^2} F, \quad z > 0; \quad (2a)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \frac{\partial F}{\partial z} + \gamma \cdot p \cdot \exp\left(-\frac{px}{v}\right) = pF, \quad z=0, \quad x > 0; \quad (2b)$$

$$F \Big|_{x=z=0} = 1; \quad \lim_{z^2+x^2 \rightarrow \infty} F = 0; \quad (2c)$$

Решением уравнения (2a) с учетом условия на бесконечности (2c) будет

$$F(p) = C(x, p) \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{pz}}{a}\right). \quad (3)$$

Подставляя это значение F в условие (2b), получим задачу для нахождения C :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial C}{\partial x} - b\sqrt{p+p}C + \gamma \cdot p \cdot \exp\left(-\frac{px}{v}\right) = 0, \quad (b = a/a); \quad (4a)$$

$$C = 1, \quad \text{при } x=0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C = 0; \quad (4b)$$

Делая замену $C = A \exp\left(-\frac{px}{v}\right)$, для A получим уравнение 2-го

порядка с постоянными коэффициентами. Находя таким образом решение задачи (4) и подставляя найденное значение C в (3), получим:

$$F(p) = \left(1 + \frac{\gamma p}{g}\right) \cdot \exp\left(\beta x - x \sqrt{\beta^2 + p + b \sqrt{p}} - \frac{z}{a} \sqrt{p}\right) - \frac{\gamma p}{g} \exp\left(-\frac{x p}{v} - \frac{z \sqrt{p}}{a}\right), \quad g = (p/v)^2 + 2\beta p/v - p - b \sqrt{p}. \quad (5)$$

Будем искать оригинал от изображения $F(b^2 p)$. $F(b^2 p)$ можно записать в виде

$$F(b^2 p) = e^{\beta x} \frac{1}{p} F_1(\sqrt{p}) \cdot \frac{p}{p + \sqrt{p}} F_2(p + \sqrt{p}) - F_1'(\sqrt{p}) \cdot \exp\left(-\frac{b^2 x}{v} p\right), \quad (6)$$

здесь.

$$F_1(p) = \left(1 + \frac{dp}{(p-p_0)(p-p_1)(p-p_2)}\right) \exp\left(-\frac{bz}{a} p\right), \quad F_1'(p) = F_1(p) - \exp\left(-\frac{bz}{a} p\right), \quad (7)$$

$$F_2(p) = p \cdot \exp(-bx \sqrt{p + (\beta/b)^2}), \quad (8)$$

$$d = \frac{\gamma \cdot v^2}{b^2}, \quad p_i - \text{корни уравнения } p^3 - a_1 p - a_2 = 0,$$

$$a_1 = \frac{v^2}{b^2} \left(1 - \frac{2\beta}{v}\right), \quad a_2 = \frac{v^2}{b^2}, \quad i=0, 1, 2, \text{ причем}$$

$$p_i = 2 \sqrt{\frac{a_1}{3}} \cos \frac{\varphi + 2i\pi}{3}, \quad \cos \varphi = \frac{a_2}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{a_1}\right)^3}, \quad \text{если } D = \left(\frac{a_2}{2}\right)^2 -$$

$$-\left(\frac{a_1}{3}\right)^3 < 0 \text{ и } p_0 = 2 \sqrt{\frac{a_1}{3}} \operatorname{ch} \frac{\varphi}{3}, \quad p_{1,2} = -$$

$$= \sqrt{\frac{a_1}{3}} \left(\operatorname{ch} \frac{\varphi}{3} \pm i \sqrt{3} \operatorname{sh} \frac{\varphi}{3}\right), \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{a_2}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{a_1}\right)^3}, \quad \text{если } D > 0.$$

Для нахождения оригинала от изображения (6) воспользуемся правилом:

$$\frac{1}{p} F_1(\sqrt{p}) \frac{p}{p + \sqrt{p}} F_2(p + \sqrt{p}) \doteq \int_0^{\infty} \varphi_1(s_1) ds_1 \int_0^t \exp \left[-\frac{(s_1 + s_2)^2}{4(t - s_2)} \right] \frac{\varphi_2(s_2) ds_2}{\sqrt{\pi(t - s_2)}} \quad (9)$$

здесь $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ оригиналы от изображений $F_1(p)$ и $F_2(p)$ соответственно.

Соотношение (9) легко получается после применения операционных соотношений (0.25) и (0.41) из [3] и теоремы о свертках.

Пользуясь правилами (0.1), (0.7), (0.25) из [3] и соотношением (9) можем записать u в виде

$$u(x, z, t) = u_1 - u_2 \quad (10)$$

где

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\beta x} \int_0^{\infty} \varphi_1(s_1) ds_1 \int_0^{bz} \exp \left[-\frac{(s_1 + s_2)^2}{4(b^2 t - s_2)} \right] \frac{\varphi_2(s_2) ds_2}{\sqrt{b^2 t - s_2}}, \quad (11)$$

$$u_2 = \frac{1}{b\sqrt{\pi\left(t - \frac{x}{v}\right)}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{\left(\tau + \frac{bz}{a}\right)^2}{4\left(t - \frac{x}{v}\right)} \right] \varphi_1(\tau) d\tau, \text{ при } t > \frac{x}{v} \quad (12)$$

$$u_2 = 0, \text{ при } t < \frac{x}{v}.$$

Оригиналы $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ от изображений (7), (8) находятся по формулам (1.59) и (3.108) из [3] соответственно:

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \sum_{i=0}^3 \alpha_i \exp \left(p_i s - \frac{bz}{a} p_i \right), \quad \varphi_1(s) = \\ &= \sum_{i=0}^2 \alpha_i \exp \left(p_i s - \frac{bz}{a} p_i \right), \quad s > \frac{bz}{a}; \end{aligned}$$

$$\varphi_2(s) = \frac{bx}{2\sqrt{\pi s^3}} \exp \left(-\frac{\beta^2 s}{b^2} - \frac{b^2 x^2}{4s} \right); \quad \alpha_0 = d/(p_0 - p_1)(p_0 - p_2),$$

$$\alpha_1 = d/(p_0 - p_1)(p_2 - p_1), \quad \alpha_2 = d/(p_0 - p_2)(p_1 - p_2); \quad \alpha_3 = 1, \quad p_3 = 0.$$

Сделав замену переменной $s_2 = b^2 s$, изменив порядок интегрирования и вычислив внутренний интеграл (формула (3.322), [4]) в формуле (11), а также вычисляя интеграл в (12), окончательно получим:

$$u(x, z, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp \left[- \left(\beta \sqrt{s} - \frac{x}{2\sqrt{s}} \right)^2 \right] \cdot B(s) \frac{ds}{s^{3/2}} -$$

$$- \begin{cases} B_1(t - x/v), & t > \frac{x}{v} \\ 0, & t < \frac{x}{v} \end{cases}, \quad (13)$$

где

$$B(s) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \exp(b^2 p_i^2 t -$$

$$- \frac{bz}{a} p_i - b^2 p_i (1 + p_i) s) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{bs + z/a}{2\sqrt{t-s}} - b p_i \sqrt{t-s} \right),$$

$$B_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) = \sum_{i=0}^2 \alpha_i \exp \left(b^2 p_i^2 \left(t - \frac{x}{v} \right) - \frac{b p_i}{a} z \right) \operatorname{erfc}$$

$$\left(\frac{z/a}{2\sqrt{t - \frac{x}{v}}} - b p_i \sqrt{t - \frac{x}{v}} \right),$$

$$\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Можно проверить, что решение (13) удовлетворяет всем условиям задачи (1). При этом после соответствующих дифференцирований первого слагаемого формулы (13) получаются равномерно сходящиеся интегралы, а при проверке условия (1b) дифференцирование второго слагаемого дает дельта-функцию.

Важной характеристикой при проектировании процессов внутрипластового горения является стационарная температура пласта на фронте горения, т. е.

$$u_f = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x_{\text{фр}}, 0, t), \text{ причем } x_{\text{фр}} = vt$$

Из формулы (13) находим

$$u(x_{\phi p}, 0, t) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp\left[-\frac{\delta t}{s}(s-s_0)^2\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{b\sqrt{t}}{2\sqrt{1-s}}(s-2(1-s)p_i)\right] \frac{ds}{s^{3/2}}, \quad (14)$$

где $\delta = \beta^2 + b^2 p_i(1+p_i)$, $s_0 = (\beta v + b^2 p_i^2)/2\delta$ — двукратный корень уравнения $\delta s^2 - (\beta v + b^2 p_i^2)s + \frac{v^2}{4} = 0$.

Равенство $D = (\beta v + b^2 p_i^2)^2 - \delta v^2 = 0$ следует из того что

$$p_i^3 - a_1 p_i - a_2 = 0 \quad (15)$$

Используя равенство (15), легко показать, что $s_0 < 1$, если $p_i > 0$. Перепишем формулу (14) в виде:

$$u(x_{\phi p}, 0, t) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \left(\int_0^{s_0-\varepsilon} + \int_{s_0+\varepsilon}^1 + \int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon} \right) f_1(s) \cdot f_2(s) ds, \quad (16)$$

$$f_1(s) = \frac{v\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi s^3}} \exp\left[\frac{\delta t}{s}(s-s_0)^2\right], \quad f_2(s) = \\ = \operatorname{erfc}\left[\frac{b\sqrt{t}}{2\sqrt{1-s}}(s-2(1-s)p_i)\right].$$

Два первых слагаемых под знаком суммы в (16) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. к. интегралы равномерно сходящиеся. Запишем последнее слагаемое в виде:

$$I = f_2(s^*) \int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon} f_1(s) ds, \quad \text{где } s_0 - \varepsilon < s^* < s_0 + \varepsilon.$$

Используя равенство (15) можно показать, что при $p_i > 0$ будет

$$s_0 - 2(1-s_0)p_i < 0$$

Так как выражение $s - 2(1-s)p_i$ непрерывно, то в силу произвольности ε будет также и $s^* - 2(1-s^*)p_i < 0$, а это значит что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_2(s^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{erfc}\left[\frac{b\sqrt{t}}{2\sqrt{1-s^*}}(s^* - 2(1-s^*)p_i)\right] = 2.$$

Если же $Re p_i \leq 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} |f_2(s^*)| = 0$. Далее

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} f_1(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_1(s) ds = 1,$$

(см., например, формулу (3.325), [4]).

Так как $p_0 > 0$, а $Re p_1$ и $Re p_2 < 0$, то

$$u_f = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x_{\Phi p}, 0, t) = 2\alpha_0 = 2d/(p_0 - p_1)(p_0 - p_2) = 2d/a_1(4q^2 - 1),$$

где $q = \text{Cos } \frac{\Phi}{3}$, если $D < 0$, и $q = ch \frac{\Phi}{3}$, если $D > 0$.

Подставляя значения a_1 и d в выражение для u_f , получим:

$$u_f = \frac{2\gamma}{\left(1 - \frac{2\beta}{v}\right)(4q^2 - 1)}. \quad (17)$$

Г. Бейли и Б. Ларкин в [5] дают решение задачи с движущимся очагом горения, не учитывая потери тепла в кровлю и подошву пласта. Этот случай получается как частный из решения задачи (1) при $\alpha \rightarrow 0$ или что то же самое при $b \rightarrow 0$. Переходя к пределу при $b \rightarrow 0$ в (17), получим*

$$\bar{u}_f = \lim_{b \rightarrow 0} u_f = \frac{\gamma}{1 - \frac{2\beta}{v}}.$$

Это совпадает с соответствующим пределом, полученным в [5].

Отношение $\sigma = \bar{u}_f / u_f = \frac{1}{2}(4q^2 - 1)$ показывает насколько выше будет установившаяся температура пласта на фронте, если не учитывать потери тепла в кровлю и подошву пласта. Например, при $\frac{2\beta}{v} = 0,2$, $v = 10$, получим $\sigma \approx 1,2$, т. е. завышение составляет 20%.

* Так как $\lim_{b \rightarrow 0} \text{Cos } \varphi = 0$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\text{Cos } \frac{\varphi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $4 \text{Cos } \frac{\varphi}{3} - 1 = 2$.

2. Радиальный случай.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad z > 0, t > 0; \quad (18a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1-2\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma \frac{v^2}{2} \frac{1}{r} \delta(r-v\sqrt{t}) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad z=0 \quad (18b)$$

$$u \Big|_{t=0} = 0; \quad u \Big|_{z=r=0} = 1; \quad \lim_{z^2+r^2 \rightarrow \infty} u = 0; \quad (18c)$$

Также как и в п. 1, после применения преобразования Лапласа-Карсона к задаче (18), найдем

$$F(p) = C(r, p) \exp\left(-\frac{z}{a} \sqrt{p}\right), \quad z > 0. \quad (19)$$

Для определения C получится следующая задача:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1-2\nu}{r} \frac{\partial C}{\partial r} - b_1 C + \gamma p \cdot \exp\left(-\frac{pr^2}{v^2}\right) = 0, \quad (20b)$$

$$C \Big|_{r=0} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} C = 0, \quad (20c)$$

где $b_1 = b\sqrt{p} + p$, $b = a/a$.

Решая уравнение (20b) методом вариации произвольных постоянных, найдем:*

$$\begin{aligned} C = & C_1 r^\nu K_\nu(b_1 r) + C_2 r^\nu \cdot I_\nu(b_1 r) + \\ & + \gamma p \cdot r^\nu K_\nu(b_1 r) \int_0^r \varrho^{1-\nu} \cdot I_\nu(b_1 \varrho) \exp\left(-\frac{p\varrho^2}{v^2}\right) d\varrho + \\ & + \gamma p r^\nu \cdot I_\nu(b_1 r) \int_r^\infty \varrho^{1-\nu} \cdot K_\nu(b_1 \varrho) \exp\left(-\frac{p\varrho^2}{v^2}\right) d\varrho. \end{aligned}$$

Константы C_1 и C_2 находятся из условий (20c):

$$C_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^\nu \cdot K_\nu(b_1 r)} = \frac{2}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{b_1}{2}\right)^\nu, \quad C_2 = 0.$$

* $I_\nu(z), K_\nu(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента.

Подставляя найденное таким образом C в (19), можем записать $F(b^2p)$ в виде:

$$\begin{aligned}
 F(b^2p) &= \frac{2}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{br}{2}\right)^\nu \cdot E(p) + \\
 &+ \gamma b^2 r^\nu \left(\int_0^r E_1(\rho) \exp\left(-\frac{b^2 \rho^2}{\nu^2} p\right) \rho^{1-\nu} d\rho + \right. \\
 &\left. + \int_r^\infty E_2(\rho) \exp\left(-\frac{b^2 \rho^2}{\nu^2} p\right) \rho^{1-\nu} d\rho \right). \quad (19')
 \end{aligned}$$

Здесь

$$E(p) = \frac{1}{p} F_1(\sqrt{p}) \cdot \frac{p}{p + \sqrt{p}} F_2(p + \sqrt{p}) \quad (21)$$

$$E_i(\rho) = \exp\left(-\frac{bz}{a} \sqrt{p}\right) \cdot \frac{p}{p + \sqrt{p}} \Phi_i(p + \sqrt{p}), \quad (i=1,2), \quad (22)$$

$$F_1(p) = \exp\left(-\frac{bz}{a} \sqrt{p}\right), \quad F_2(p) = p^{\nu/2+1} \cdot K_\nu(br\sqrt{p});$$

$$\Phi_1(p) = p K_\nu(br\sqrt{p}) \cdot I_\nu(b\rho\sqrt{p}); \quad \Phi_2(p) = p K_\nu(b\rho\sqrt{p}) I_\nu(br\sqrt{p}).$$

Чтобы найти оригинал от $E(p)$, воспользуемся соотношением (9) п. I, правилом (0.7) и формулой (9.115) из [3]. Получим

$$E(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{br}{2}\right)^\nu \int_0^t \exp\left(-\frac{b^2 r^2}{4s}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{s+bz/a}{2\sqrt{t-s}}\right) \frac{ds}{s^{\nu+1}}.$$

Пользуясь правилом (0.41), формулой (3.77) из [3] и теоремой о свертках, легко получим соотношение:

$$\begin{aligned}
 &\frac{p}{p + \sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}} \cdot \Phi(p + \sqrt{p}) \doteq \\
 &\doteq \int_0^t \varphi(s) \frac{s+a}{2\sqrt{\pi(t-s)^{3/2}}} \exp\left[-\frac{(s+a)^2}{4(t-s)}\right] ds, \quad (23)
 \end{aligned}$$

причем $\varphi(s)$ оригинал $\Phi(p)$.

Пользуясь соотношением (23) и формулой (9.140) из [3], найдем:*

$$E_i(p) \doteq \int_0^t \frac{s+bz/a}{2\sqrt{\pi}(t-s)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(s+bz/a)^2}{4(t-s)} - \frac{b^2(r^2+q^2)}{2s} \right] I_\nu \left(\frac{b^2 r q}{2s} \right) \frac{ds}{s}.$$

Видим, что $E_1(p) = E_2(p)$, поэтому в формуле (19') можем сложить интегралы. Применяя еще правила (0.1), (0.7) из [3] и делая замену переменной $q = v \sqrt{tx}$ в интеграле в формуле (19'), окончательно получим

$$u(r, z, t) = u_1 + u_2, \quad (24)$$

$$u_1 = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{r^2}{4} \right)^\nu \int_0^t \exp \left(-\frac{r^2}{4s} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{bs+z/a}{2\sqrt{t-s}} \right) \frac{ds}{s^{\nu+1}},$$

$$u_2 = \frac{\gamma \cdot v^2 t}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{v\sqrt{t}} \right)^\nu \int_0^1 x^{-\nu/2} dx \int_0^{t(1-x)} \frac{bs+z/a}{[t(1-x)-s]^{3/2}} \exp \left[-\frac{(bs+z/a)^2}{4[t(1-x)-s]} - \frac{r^2+v^2tx}{2s} \right] \cdot I_\nu \left(\frac{v\sqrt{t} \cdot r \cdot \sqrt{x}}{2s} \right) \frac{ds}{s}.$$

Следует отметить, что слагаемое u_1 является результатом влияния условия $u/z=z=0=1$ и совпадает с решением, полученным в [1], а слагаемое u_2 — результат влияния источника тепла на фронте горения.

* В формуле (9.140) нужно положить $\gamma=0, \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = br, \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = b\rho$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Авдонин, О некоторых формулах для расчета температурного поля пласта при тепловой инжекции. Известия ВУЗов, «Нефть и газ», № 3, 1964.
2. Л. И. Рубинштейн, О температурном поле пласта при тепловой инжекции. Ученые записки Казанского унив., т. 121, кн. 5, 1961.
3. В. А. Диткин, П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению. Ленинград, 1951.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
5. H. R. Bailei, B. K. Larkin, Conduction-Convection in Underground Combustion. Petroleum Trans. AIME, v. 219, 1960.

**О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ РАСЧЕТА
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЛАСТА ПРИ НАЛИЧИИ
В НЕМ ПОДВИЖНОГО ОЧАГА ГОРЕНИЯ**

Рассмотрена задача (линейный случай):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad z > 0, \quad t > 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma \cdot v \cdot \delta(x-vt) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad z=0, \quad t > 0; \quad x > 0;$$

$$u \Big|_{t=0} = 0; \quad u \Big|_{x=z=0} = 1; \quad \lim_{z^2+x^2 \rightarrow \infty} u = 0$$

Решение получено в квадратурах, (13). Найден предел: $u_f = \lim u(x_{\phi p}, 0, t)$, (17). Аналогичная задача решена в радиальном случае.

N. A. AVDONIN

**SOME CALCULATION FORMULAS OF THE TEMPERATURE
FIELD OF A STRATUM IN AN UNDERGROUND
COMBUSTION PROCESS.**

The problem considered (linear case):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad z > 0, \quad t > 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma \cdot v \cdot \delta(x-vt) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad z=0, \quad t > 0; \quad x > 0;$$

$$u \Big|_{t=0} = 0; \quad u \Big|_{x=z=0} = 1; \quad \lim_{z^2+x^2 \rightarrow \infty} u = 0$$

The solution is obtained in integrals. The limit is found:

$$u_f = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x_{\phi p}, 0, t), \quad (17).$$

A similar problem was solved for radial case.

ОБ УЗЛОВЫХ ЛИНИЯХ КВАДРАТНОЙ МЕМБРАНЫ

Э. Риекстыньш

В 1923 году Курант доказал теорему [1], согласно которой узловые линии собственных функций u_n метагармонического уравнения

$$\Delta u_n(P) + \lambda_n u_n(P) = 0, u_n |_{L(\Omega)} = 0, P \in \Omega, \quad (1)$$

упорядоченных по возрастающим собственным значениям, разделяют область Ω не более чем на n частей. Скоро после этого Антония Штерн в своей диссертации [2] рассматривала узловые линии для функций u_n в случае квадрата $T: x \in [0, \pi], y \in [0, \pi]$ и указала, что узловые линии собственных функций

$$u_n(x, y, \mu) = \sin 2nx \sin y + \mu \sin 2ny \sin x, \mu > 0, \quad (2)$$

соответствующих собственным значениям

$$\lambda_n = 4n^2 + 1,$$

при значениях μ , достаточно близких к 1, разделяют область T только на 2 части. Это указание приведено в книге Куранта — Гильберта [3].

В настоящей заметке зависимость от μ числа частей разбиения анализируется подробнее, и будет показано, что требование близости μ к единице не существенно. Если фиксировать n , то можно указать различные μ , при которых узловые линии функции u_n делят область T на две части. С другой стороны, существуют значения μ , сколь угодно близкие к единице, для которых можно указать такое n , что узловые линии функции u_n делят область T более чем на две части. В заметке использованы некоторые материалы из дипломной работы Р. Шакуровой.

А. В первую очередь отметим, что достаточно рассмотреть $\mu < 1$, так как в противном случае можно было взять $\frac{1}{\mu} u_n$ и заменить местами x и y .

Будем впредь совокупность всех точек, удовлетворяющих уравнению $u_n = 0$, называть линией L . Это уравнение можно представить в форме

$$f_n(x) = -\mu f_n(y), \quad (3)$$

где

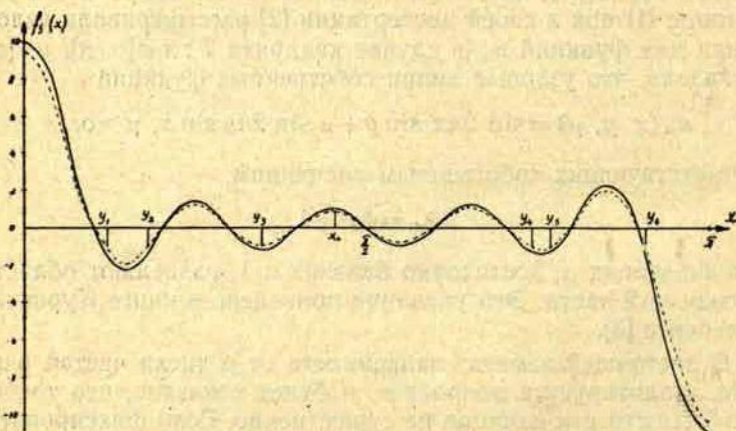
$$f_n(x) = \frac{\sin 2nx}{\sin x}, \quad x \in [0, \pi], \quad (4)$$

причем на концах сегмента функция $f_n(x)$ определяется при помощи предельного перехода. Легко видеть, что

$$f_n(\pi - x) = -f_n(x), \quad (5)$$

поэтому график этой функции симметричен относительно точки $x = \frac{\pi}{2}$.

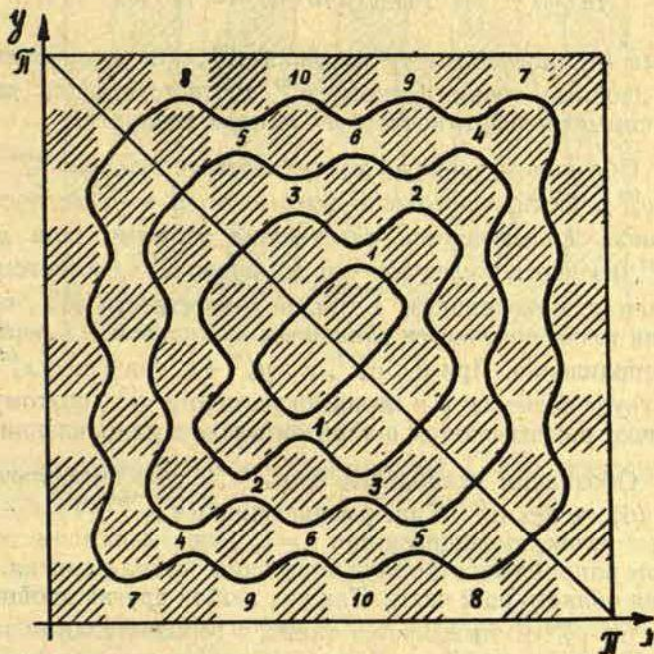
Линия L строится при помощи графика $f_n(x)$ следующим образом. Вместе с $f_n(x)$ построен график для $\mu f_n(x)$ (см. черт. 1).



Черт. 1

На оси x отмечается точка x_0 , фиксируется $f_n(x_0)$ и на графике функции $\mu f_n(x)$ ищутся точки, имеющие ординату $-f_n(x_0)$. Абсциссы этих точек дают значения y , соответствующие x_0 (см. черт. 1). Рассмотрим свойства полученной кривой L .

1⁰. Чтобы легче построить кривую L , квадрат T следует разбить на $(2n)^2$ квадратиков при помощи прямых $\sin 2nx=0$, $\sin 2ny=0$ (см. черт. 2). Так как функция u_n в заштрихованных квадратиках не меняет знака, то линия L проходит только через белые квадратик, причем всегда через вершины квадратиков. Так как $u_n(\pi-x, \pi-y, \mu) = -u_n(x, y, \mu)$, то кривая L симметрична относительно центра квадрата. Кривые для всех $n > 2$ имеют подобный характер. При $\mu=1$, $n=5$ имеем кривую, по-



Черт. 2

казанную на черт. 2. Она имеет $2n-2$ двойных точек и делит область на $2n$ частей.

2⁰ Построение при помощи функции $f_n(x)$ показывает, что в каждом белом квадратике, за исключением, быть может, краевых, либо каждому x соответствует 2 значения y , либо наоборот. При этом может случиться, что некоторая точка будет двойной точкой или же экстремальной точкой.

3⁰ Двойные точки появляются лишь при таких значениях μ , при которых некоторый из экстремумов функции $f_n(x)$ сов-

падает с некоторым из экстремумов функции $\mu f_n(x)$. Действительно, двойная точка (x_0, y_0) определяется из уравнений

$$u_n(x_0, y_0, \mu^{(n)}) = 0, \quad \frac{\partial u_n(x_0, y_0, \mu^{(n)})}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_n(x_0, y_0, \mu^{(n)})}{\partial y} = 0,$$

но легко убедиться в том, что эта система эквивалентна со системой

$$f_n(x_0) = -\mu^{(n)} f_n(y_0), \quad f'_n(x_0) = 0, \quad f'_n(y_0) = 0. \quad (6)$$

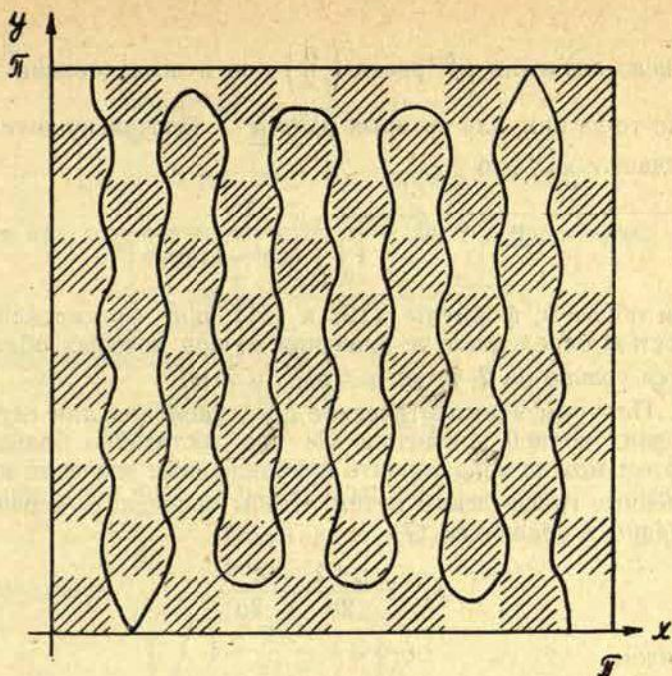
Система (6) определяет те значения $\mu_s^{(n)}$, при которых линия L имеет двойные точки. Одному $\mu_s^{(n)}$ соответствующие двойные точки симметричны относительно центра квадрата.

4.⁰ Обозначим двойную точку, соответствующую $\mu_s^{(n)}$, через $(x_s^{(n)}, y_s^{(n)})$. Если непрерывно уменьшать μ в окрестности $\mu_s^{(n)}$, то кривая L изменяется следующим образом. При $\mu > \mu_s^{(n)}$, $\mu \rightarrow \mu_s^{(n)}$, из черт. 1 следует, что значению $x_s^{(n)}$ соответствуют 2 значения y , находящиеся в малой окрестности $y_s^{(n)}$, поэтому двойная точка получается сливанием дуг кривой L в вертикальном направлении. При $\mu < \mu_s^{(n)}$, $\mu > \mu_s^{(n)} - \varepsilon$, значению $x_s^{(n)}$ не соответствует значение y в малой окрестности $y_s^{(n)}$, поэтому двойная точка развязывается в горизонтальном направлении.

5.⁰ Обозначим наибольшее из $\mu_s^{(n)} < 1$, удовлетворяющих системе (6), через $\bar{\mu}^{(n)}$. При уменьшении $\mu \in (\bar{\mu}^{(n)}, 1)$ все $2n - 2$ двойных точек, имеющиеся при $\mu = 1$, развязываются в горизонтальном направлении и получается одна связная кривая, разделяющая область на 2 части. Так как любая другая двойная точка при $\mu = \mu_s^{(n)}$ развязывается также в горизонтальном направлении, то при $\mu \in (\bar{\mu}^{(n)}, 1)$, $\mu \neq \mu_s^{(n)}$, всегда имеем разбиение области T на 2 части. $\mu = \bar{\mu}^{(n)}$ означает такой корень, при котором двойная точка впервые находится на оси x (см. черт. 3). Точка остается на оси и после развязывания, если $\mu < \bar{\mu}^{(n)}$, поэтому область T в таком случае разбивается более чем на две части.

Б. Очевидно, что для нахождения кратных точек достаточно решить уравнение $f'_n(x) = 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Обозначая его корни через $x_s^{(n)}$, их можно найти из уравнения

$$2n \operatorname{tg} x_s^{(n)} = \operatorname{tg} 2n x_s^{(n)}, \quad x_s^{(n)} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (7)$$



Черт. 3

Их число равно n , и все корни простые. После некоторых преобразований получаем

$$|f_n(x_s^{(n)})| = \frac{2n}{\sqrt{1 + (4n^2 - 1)\sin^2 x_s^{(n)}}}. \quad (8)$$

Если упорядочить корни $x_s^{(n)}$ в порядке возрастания и обозначить их через $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)} = 0$, то из (8) следует, что

$$|f_n(x_i^{(n)})| > |f_n(x_j^{(n)})| \text{ при } i < j. \quad (9)$$

Поэтому все те значения μ , при которых имеем двойные точки, имеют вид

$$\mu_s^{(n)} = \mu_{ij}^{(n)} = \left| \frac{f_n(x_j^{(n)})}{f_n(x_i^{(n)})} \right| = \sqrt{\frac{1 + (4n^2 - 1)\sin^2 x_i^{(n)}}{1 + (4n^2 - 1)\sin^2 x_j^{(n)}}}, \quad 0 \leq i < j \leq n-1. \quad (10)$$

На черт. 2 номерами показаны все те места, в которых будут появляться двойные точки, упорядоченные в порядке убывания $\mu_s^{(n)}$.

Число значений $\mu_s^{(n)}$ равно $\binom{n}{2}$, но в исследовании важны только те из них, для которых $\mu_s^{(n)} > \underline{\mu}^{(n)}$. Поскольку точка $x=0$ совпадает с $x_0^{(n)}$, то

$$\underline{\mu}^{(n)} = \mu_{01}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (4n^2 - 1) \sin^2 x_1^{(n)}}}. \quad (11)$$

Таким образом, формулы (10) и (11) при фиксированном n полностью определяют те значения μ , при которых область T делится только на 2 части: $\mu > \mu_{01}^{(n)}$, $\mu \neq \mu_{ij}^{(n)}$.

В. Получим асимптотические представления для первых и последних корней уравнения (7) при достаточно большом n . При этом можно использовать приближенные значения корней, полученные графическим путем. Чтобы определить корень $x_1^{(n)}$, подставим в уравнение (7)

$$x_1^{(n)} = \frac{\pi + \lambda}{2n} + \frac{z^{(n)}}{2n}. \quad (12)$$

Получаем

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi + \lambda}{2n} + \frac{z^{(n)}}{2n} \right) = \frac{1}{2n} \operatorname{tg}(\lambda + z^{(n)}) = \frac{1}{2n} \frac{\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{tg} z^{(n)}}{1 - \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} z^{(n)}}.$$

Помножим обе части на $1 - \operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} z^{(n)}$ и ищем $z^{(n)}$ асимптотическое разложение в виде

$$z^{(n)} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n^{2k}}, \quad (13)$$

применяя метод неопределенных коэффициентов. Оправдать этот метод в этом случае можно подобно тому, как это сделано в другой работе автора [4]. Для определения λ получаем уравнение

$$\pi + \lambda = \operatorname{tg} \lambda, \quad \lambda_1 \approx 1,3518. \quad (14)$$

Следующие корни уравнения (14) дают асимптотические разложения, согласно формулам (12) и (13), для $x_{(n)}$, и т. д. Подставляя (12) в (11) и учитывая (13), имеем

$$\underline{\mu}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi + \lambda_1)^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}}. \quad (15)$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu^{(n)}}{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi + \lambda_1)^2}} \approx 0,217. \quad (16)$$

При $n=5$ (см. черт. 3) имеем $\mu^{(5)} \approx 0,225$.

Для нахождения корня $x_{n-k}^{(n)}$, $k=1, 2, \dots$, подставим

$$x_{n-k}^{(n)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(2k-1)}{4n} - \frac{z_{n-k}^{(n)}}{2n}. \quad (17)$$

Получаем уравнение

$$\operatorname{ctg} \left[\frac{\pi(2k-1)}{4n} + \frac{z_{n-k}^{(n)}}{2n} \right] = \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{z_{n-k}^{(n)}}{2n}. \quad (18)$$

$z_{n-k}^{(n)}$ ищется в виде (13) методом неопределенных коэффициентов; $\alpha_1^{(k)} = \frac{\pi(2k-1)}{8}$. Подставляя найденное $x_{n-k}^{(n)}$ в формулу (10), получаем

$$\mu_{n-2, n-1}^{(n)} = \sqrt{\frac{1 - \frac{9\pi^2}{64n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)}{1 - \frac{\pi^2}{64n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)}} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому подтверждается ранее высказанное утверждение, что существуют значения μ , сколь угодно близкие к 1 и соответствующие n такие, что узловая линия функции $u_n(x, y, \mu)$ делит область более чем на две части.

Полученные асимптотические представления для $x_{n-k}^{(n)}$ и $\lambda_k^{(n)}$ можно с успехом применить в численных расчетах при небольших n .

Кафедра общей математики ЛГУ им. П. Стучки

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Courant. Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen Selbstadjungierter Differentialausdrücke. Göttinger Nachrichten, Math. — phys. Klasse, 1923, 81—84.
2. A. Stern. Bemerkungen über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen. Dissertation, Göttingen, 1925.
3. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, 1951, Гостехиздат, Т. 1, стр. 386.
4. Э. Риекстыньш. Асимптотическое разложение для вещественных корней некоторых трансцендентных уравнений. Ученые записки ЛГУ, 1959, 28, вып. 4, 67—85.

ОБ УЗЛОВЫХ ЛИНИЯХ КВАДРАТНОЙ МЕМБРАНЫ

В работе показано, что узловые линии собственных функций (2) для квадрата $T: x \in [0, \pi], y \in [0, \pi]$ разделяют квадрат T только на две части, если $\mu \in (\underline{\mu}^{(n)}, 1)$, $\mu \neq \mu_s^{(n)}$, где $\underline{\mu}^{(n)}$ и $\mu_s^{(n)}$ определены согласно (7), (10), (11). Далее показано, что в произвольно малой окрестности 1 существуют такие $\mu_s^{(n)}$, для которых можно найти такое n , что ему соответствующие узловые линии для функции (2) при $\mu = \mu_s^{(n)}$ разделяют квадрат T более чем на две части. Этот факт дополняет соответствующий результат в книге Куранта-Гильберта [3].

E. Riekstiņš

ON THE NODAL LINES OF A SQUARE MEMBRANE

It is shown that the nodal lines of eigenfunctions (2) for a square $T: x \in [0, \pi], y \in [0, \pi]$ divide the square T into two parts only, if $\mu \in (\underline{\mu}^{(n)}, 1)$, $\mu \neq \mu_s^{(n)}$ where $\underline{\mu}^{(n)}$ and $\mu_s^{(n)}$ are defined by (7), (10), (11). It is further shown that in arbitrarily small vicinity of 1 there exist such $\mu_s^{(n)}$, for which it is possible to find a corresponding n such that the nodal line of function (2) with $\mu = \mu_s^{(n)}$ divides the square T into more than two parts. These facts supplement the corresponding results in Courant — Hilbert's book [3].

Л. И. Рубинштейн

ДВУХФАЗНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА НА ОТРЕЗКЕ ПРИ ОДНОФАЗНОМ НАЧАЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

Задача Стефана о распространении тепла посредством теплопроводности в среде с изменяющимся фазовым состоянием в наиболее общей постановке решена Л. С. Каменомостской [1] и О. А. Олейник [2], введшими понятие обобщенного решения этой задачи и доказавшими его существование и единственность. Одновременно ими установлено совпадение обобщенного и классического решений задачи в случае существования последнего. Вопрос о существовании классического решения задачи Стефана остался в работах Л. С. Каменомостской и О. А. Олейник открытым.

В 1960 г. А. Фридман в работе [3], завершившей цикл его исследований задачи Стефана [4], сформулировал две задачи а) изучить асимптотическое при $t \rightarrow \infty$ поведение решения двухфазной задачи Стефана на отрезке и б) доказать существование его при начальном однофазном состоянии теплопроводящей среды. Фридман считал эти вопросы открытыми.

Решение первого из этих вопросов было намечено нами в 1951 г. для случая задания на границе одной из фаз теплообмена с окружающей средой [5]. Решение же второго из вопросов Фридмана было намечено в заметке [6] еще в 1948 г. Однако, рассуждения, проведенные в [6], содержали технические и принципиальные неточности, устранение которых потребовало полной переделки доказательства существования решения в случае однофазного начального состояния теплопроводящей среды. Такое, полностью реконструированное, рассмотрение вопроса было проведено в нашей диссертации в 1957 г. [7], но результаты эти опубликованы не были. Точно так же не были

опубликованы содержащиеся в [7] результаты изучения асимптотического при $t \rightarrow \infty$ поведения решения в случае задания краевых условий первого рода.

В настоящей статье мы воспроизводим указанные, оставшиеся неопубликованными, результаты из [7], имея в виду дать ответ на вопросы, поставленные А. Фридманом в цитированной выше статье.

Сформулируем теперь точно задачи, подлежащие решению.

Пусть $f_j(t)$ определены и дважды непрерывно дифференцируемы при $0 < t < \infty$, причем

$$f_1(t) < 0; f_2(t) > 0 \text{ при } 0 < t < \infty; f_1(0) = 0 \quad (1_1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t) = -T_1; \lim_{t \rightarrow \infty} f_2(t) = T_2; T_i > 0 \quad (i=1,2) \quad (1_2)$$

и в окрестности $t=0$

$$\dot{f}_1(t) = -c_0 t^{m_0} (1 + f^*(t)), \quad (1_3)$$

где

$$c_0 > 0; m_0 \geq 0; |f^*(t)t^{-1}| < \infty. \quad (1_3^*)$$

Пусть, далее, $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определены и дважды непрерывно дифференцируемы при $0 < x < 1$, причем

$$\varphi(0) = 0; \varphi(1) = f_2(0); \varphi(x) > 0 \text{ при } 0 < x \leq 1 \quad (2_1)$$

и в окрестности $x=0$

$$\dot{\varphi}(x) = b_0 x^{n_0} (1 + \varphi^*(x)), \quad (2_2)$$

где

$$b_0 > 0; n_0 \geq 0; |\varphi^*(x) \cdot x^{-1}| < \infty. \quad (2_3)$$

Далее,

$$\varphi_1(0) = f_1(t_0); \varphi_2(1) = f_2(t_0); \varphi_1(l) = \varphi_2(l) = 0. \quad (3_1)$$

Здесь $0 < l < 1$; $l = \text{const}$; $t_0 > 0$ — фиксировано. Кроме того

$$\varphi_1(x) < 0 \text{ при } 0 \leq x < l; \varphi_2(x) > 0 \text{ при } l < x \leq 1 \quad (3_2)$$

Пусть, наконец $D_j(y, T)$ параболические области*

$$\begin{aligned} D_1(y, \tau) &= \{y(\tau) < x < 1; T < \tau \leq t < \infty\}; \\ D_2(y, \tau) &= \{0 < x < y(\tau); T < \tau \leq t < \infty\} \end{aligned} \quad (4)$$

*) Область $D = \{X_1(\tau) < x < X_2(\tau); 0 < \tau \leq t < \infty\}$ наз. параболической, если точки интервала $X_1(t) < x < X_2(t)$ считаются ее внутренними точками при любом $t > 0$.

и L_j ($j=1,2$) — операторы

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}; \quad L_2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}; \quad a^2 = \text{const } t > 0. \quad (5)$$

Ниже рассматриваются следующие задачи:

Задача А. Найти $u_j(x, t)$ и $y(t)$ такие, что u_j и $\frac{\partial}{\partial x} u_j$ непрерывны в замыкании $D_j(y, 0)$ и удовлетворяют внутри и на границе D_j условиям

$$L_1(u_1) = 0; \quad (x, t) \in D_1; \quad L_2(u_2) = 0; \quad (x, t) \in D_2; \quad (6_1)$$

$$u_1 \Big|_{x=0} = f_1(t); \quad u_2 \Big|_{x=1} = f_2(t) \quad (6_2)$$

$$u_2 \Big|_{t=0} = \varphi(x) \quad (6_3)$$

и, сверх того,

$$\frac{dy}{dt} = v_1(t) - v_2(t); \quad y(0) = 0 \quad (6_4)$$

Здесь

$$v_i(t) = \frac{\partial}{\partial x} u_i(y(t), t) \quad (i=1, 2). \quad (7)$$

Задача «В» — ставится так же, как задача «А», но области $D_j(y, 0)$ заменяются областями $D_j(y; t_0)$; ($j=1, 2$), условие $y(0) = 0$ — условием — $y(0) = l$; $0 < l < 1$ и условие (6₃) — условием

$$u_j \Big|_{t=t_0} = \varphi_j(x) \quad (j=1, 2) \quad (6_3^*)$$

Ниже условие (6₄) называем условием Стефана; задачу А — двухфазной задачей Стефана с однофазным начальным вырождением и задачу В — невырожденной двухфазной задачей Стефана на отрезке.

Цель работы состоит в доказательстве существования решения задачи А при $0 < t < \infty$, вместе с доказательством существования пределов

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = L = \frac{T_1}{T_1 + T_2}; \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_i(x, t) = U(x) = -T_1 + (T_2 + T_1)x \quad (9)$$

Задача В является вспомогательной, но может, конечно, рассматриваться и как основная задача.

РЕШЕНИЕ В «БОЛЬШОМ» НЕВЫРОЖДЕННОЙ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ

§1. Интегральные уравнения задачи «В». Решение задачи В в «малом»

Ниже мы пользуемся обозначениями

$$E(x, t) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} e^{-\frac{x^2}{4t}}; \quad (1,1_1)$$

$$g_i(x, \xi, t) = E(x - \xi, t) + (-1)^i E(x + \xi, t); \quad (i=1,2). \quad (1,2_2)$$

$$G_i(x, \xi, t) = E(x - \xi; a^2 t) + (-1)^i E(x + \xi - 2; a^2 t); \quad (i=1,2). \quad (1,1_3)$$

так что E — фундаментальное решение уравнения $L_1 u = 0$, g_i — функция Грина i — краевой задачи этого уравнения на полупрямой $x > 0$ и G_i — функция Грина i — краевой задачи уравнения $L_2 u = 0$ на полупрямой $x < 1$.

Справедливы

Теорема 1. Решение задачи «В» эквивалентно решению системы интегральных уравнений

$$v_1(t) = -2 \int_{t_0}^t f_1(\tau) g_2(y(t), 0, t - \tau) d\tau + 2 \int_t^l \dot{\varphi}_1(\xi) g_2(y(t), \xi, t - t_0) d\xi - \\ - 2 \int_{t_0}^t v_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(y(t), y(\tau), t - \tau) d\tau; \quad (1,2_1)$$

$$v_2(t) = 2 \int_{t_0}^t f_2(\tau) G_2(y(t), 1, t - \tau) d\tau + 2 \int_t^1 \dot{\varphi}_2(\xi) G_2(y(t), \xi, t - t_0) d\xi + \\ + 2 a^2 \int_{t_0}^t v_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G_2(y(t), y(\tau), t - \tau) d\tau; \quad (1,2_2)$$

$$y(t) = l + \int_{t_0}^t [v_1(\tau) - v_2(\tau)] d\tau. \quad (1,2_3)$$

в том смысле, что если v_1 , v_2 и y ограниченные решения системы (1,2₁) — (1,2₃), а $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определены равенствами

$$u_1(x, t) = \int_{t_0}^t \dot{f}_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g_1(x, 0, t-\tau) d\tau + \int_0^l \varphi_1(\xi) g_1(x, \xi, t-t_0) d\xi + \\ + \int_{t_0}^t v_1(\tau) g_1(x, y(\tau), t-\tau) d\tau; \quad (1,2_4)$$

$$u_2(x, t) = -a^2 \int_{t_0}^t \dot{f}_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G_1(x, 1, t-\tau) d\tau + \\ + \int_l^1 \varphi_2(\xi) G_1(x, \xi, t-t_0) d\xi - a^2 \int_{t_0}^t v_2(\tau) G_1(x, y(\tau), t-\tau) d\tau, \quad (1,2_5)$$

то u_1 , u_2 и y являются решениями задачи В и обратно, если u_1 , u_2 и y — решения задачи «В», а v_1 и v_2 определены ими согласно (7), то v_1 , v_2 , y являются решениями уравнений (1,2₁) — (1,2₃).

З а м е ч а н и е. Если u_1 , u_2 и y — решения задачи А, а v_1 и v_2 определены согласно (7), то v_1 , v_2 и y определяются из системы (1,2₁) — (1,2₃), если в ней положить $t_0=0$, $l=0$ и $\varphi_2=\varphi$.

Т е о р е м а 2. Решение системы (1,2₁) — (1,2₃) — а) Существует и единственно на некотором интервале $t_0 < t < t_1$, длина которого стремится к нулю вместе с

$$q = \min \{ \min(y(0), 1-y(0)); K^{-1} \} \quad (1,3)$$

Здесь

$$K = \max \left\{ \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |\dot{f}_i(t)|; \max_{0 < x < y(0)} |\dot{\varphi}_1(x)|; \max_{y(0) < x < 1} |\dot{\varphi}_2(x)| \right\}$$

в) $v_1(t)$ и $v_2(t)$ дифференцируемы при $t_0 < t < t_1$, причем

$$| \sqrt{t-t_0} \dot{v}_i(t) | < \infty \quad (i=1,2) \quad (1,4)$$

с) Решение системы (1,2₁) — (1,2₃) устойчиво на интервале $t_0 < t < t_1$ в следующем смысле.

Назовем a^2 ; l ; $\varphi_i(x)$; $\dot{f}_i(t)$ ($i=1,2$) допустимыми параметрами задачи «В», если $a^2 > 0$, $0 < l < 1$, \dot{f}_i и φ_i дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям (1₁), (1₂), (3₁) и (3₂). Пусть a^2 , l , \dot{f}_1 , \dot{f}_2 , φ_1 ; φ_2 и \bar{a}^2 , \bar{l} , $\bar{\dot{f}}_1$, $\bar{\dot{f}}_2$, $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ два набора

допустимых параметров и v_1, v_2, y и $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{y}$ соответствующие им решения интегральных уравнений задачи «В». Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что из

$$|a^2 - \bar{a}^2| + |l - \bar{l}| + \max_{t_0 < t < t_1} |\dot{f}_1(t) - \dot{\bar{f}}_1(t)| + \max_{t_0 < t < t_1} |\dot{f}_2(t) - \dot{\bar{f}}_2(t)| + \\ + \max_{0 < x < \min(l, \bar{l})} |\dot{\varphi}_1(x) - \dot{\bar{\varphi}}_1(x)| + \max_{\max(l, \bar{l}) < x < 1} |\dot{\varphi}_2(x) - \dot{\bar{\varphi}}_2(x)| < \eta \quad (1,5)$$

следует

$$\max_{i=1,2} \max_{t_0 < t < t_1} |v_i(t) - \bar{v}_i(t)| < \varepsilon. \quad (1,6)$$

Следствие. Из утверждения С следует также устойчивость u_1, u_2 , и $\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x}$ относительно малых изменений параметров задачи.

Теорема 2 содержится в теоремах существования, единственности и устойчивости из (8) во всех пунктах, кроме утверждения дифференцируемости $v_i(t)$; ($i=1,2$). Последнее — тривиально следует из оценок, полученных в (8) (см. также (9)). Ввиду этого доказательства теорем 1 и 2 мы не приводим.

§2. Продолжение решения. Назовем шагом процесс построения решения задач В на интервале времени (t_0, t_1) , обеспеченном теоремой 2.

Принимая t_1 за новый начальный момент времени можем доопределить решение на интервале (t_1, t_2) . Такое доопределение решения можно осуществлять любое число шагов.

Пусть решение определено на интервале (t_0, T) и ΔT длина интервала доопределения решения. Если

$$i n f \Delta T > 0, \quad (2,1) \\ t_0 < T < \infty$$

то тогда любой наперед заданный интервал времени может быть пройден за конечное число шагов и, следовательно, решение задачи «В» может быть построено на любом наперед заданном интервале времени.

Из теоремы 2 следует, что ΔT стремится к нулю вместе с

$$\varrho(T) = \min \{ \min (y(T); 1 - y(T)); N^{-1}(T) \}, \quad (2,2)$$

где

$$N(T) = \max \left\{ \max_{t \in (T, T+\Delta T)} |\dot{f}_i(t)|; \max_{0 < x < y(T)} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_1(x, T) \right|; \max_{y(T) < x < 1} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_2(x, T) \right| \right\} \quad (2,2^*)$$

Таким образом для доказательства существования решения задачи «В» на любом наперед заданном промежутке времени достаточно получить априорные оценки

$$\inf_{t_0 < t < \infty} (y(t); 1 - y(t)) > 0; \quad (2,3)$$

$$\sup_{t_0 < t < \infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_1(x, t) \right|; \sup_{t_0 < t < \infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_2(x, t) \right| < \infty. \quad (2,4)$$

Неравенство (2,4) является очевидным следствием (2,3) и априорной оценки

$$\sup_{t_0 < t < \infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t) \right|; \sup_{t_0 < t < \infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_2(1, t) \right| < \infty. \quad (2,5)$$

Действительно, пусть

$$\inf_{t_0 < t < \infty} |y(t), 1 - y(t)| = \alpha > 0; \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t) \right| < K; \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} u_2(1, t) \right| < K; \quad (2,6)$$

$$\max_{0 < x < l} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_1(x, t_0) \right|; \max_{l < x < 1} \left| \frac{\partial}{\partial x} u_2(x, t_0) \right| < M. \quad (2,7)$$

и допустим, что решение u_1, u_2, y задачи «В» определено на интервале (t_0, T) . Пусть (t_k, t_{k+1}) $k=0, 1, 2, \dots$, интервалы знакопостоянства $\dot{y}(t)$. Будем для определенности считать, что

$$\dot{y}(t) \geq 0 \text{ при } t_{2k} < t < t_{2k+1}; k=0, 1, 2, \dots$$

$$\dot{y}(t) \leq 0 \text{ при } t_{2k+1} < t < t_{2k}; k=1, 2, \dots$$

Определим $\beta = \text{const} > 0$ условиями

$$\alpha \beta > \max_{t_0 \leq t < \infty} \max_{i=1, 2} |f_i(t)|; \quad \beta \geq \max(M, K) \quad (2,8)$$

и положим

$$w = \beta(x - y(t)). \quad (2,9)$$

На интервале $t_0 < t < t_1$ имеем

$$\begin{aligned} \omega \Big|_{x=0} &= -\beta y(t) < -\beta \alpha < f_1(t); \\ \omega \Big|_{t=0} &= \beta(x-y(t_0)) < -M(y(t_0)-x) < \varphi_1(x); \quad 0 < x < y(t_0); \\ \omega \Big|_{x=y(t)} &= 0 \end{aligned} \quad (2,10)$$

Наконец

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\beta \dot{y}(t) \leq 0 \quad (t_0 < t < t_1). \quad (2,11)$$

Положим

$$u_1^* = u_1 - \omega; \quad (t_0 < t < t_1) \quad (2,12)$$

Из определения u_1 , (2,10) и (2,11) следует, что

$$L_1(u_1^*) \leq 0; \quad u_1^* \Big|_{x=0} \geq 0; \quad u_1^* \Big|_{t=0} \geq 0; \quad u_1^* \Big|_{x=y(t)} = 0. \quad (2,13)$$

Отсюда и из принципа максимума [10] следует, что

$$u_1^* = u_1 - \omega \geq 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < y(t); \quad t_0 < t < t_1. \quad (2,14)$$

Поскольку $u_1 = \omega = 0$ при $x = y(t)$ это означает, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=y(t)} \leq \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x=y(t)} = \beta. \quad (2,14^*)$$

В то же время из (2,6), (2,7) и (2,8) следует, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} \leq \beta; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{t=t_0} \leq \beta. \quad (2,15)$$

Но это значит, в силу параболичности $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ и принципа максимума, что

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right| \leq \beta \quad \text{при} \quad 0 < x < y(t); \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (2,16)$$

Далее, из условия Стефана (6₁), из неотрицательности $\dot{y}(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$ и из (2,16) следует

$$0 \leq \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=y(t)} \leq \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=y(t)} \leq \beta \quad \text{при} \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (2,17)$$

Рассматривая w и u_2 на интервале $t_1 < t < t_2$ и рассуждая аналогично предыдущему найдем, что

$$\left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right| \leq \beta; y(t) \leq x \leq 1; t_1 \leq t \leq t_2. \quad (2,18)$$

Отсюда, из условия Стефана и неположительности $\dot{y}(t)$ следует, что

$$\left| \frac{\partial y_1}{\partial x} \right| \leq \beta; 0 \leq x \leq y(t); t_1 \leq t \leq t_2. \quad (2,19)$$

Повторяя рассуждение по индукции найдем, что для любого $k \geq 0$

$$\left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|; \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right| \leq \beta \text{ при } t_0 \leq t \leq t_k \quad (2,20)$$

Если последовательность $\{t_k\}$ имеет точку накопления $t = t^*$, то очевидно, что (2,20) выполняется и при $t = t^*$. Поскольку, в силу теоремы Бэра (11), число точек накопления экстремумов $y(t)$ не более чем счетно, очевидно, что неравенства (2,20) выполняются априори при любом $t \geq t_0$, что и т. д.

Докажем теперь справедливость (2,5) в предположении, что неравенство (2,4) действительно имеет место.

Допустим, что u_1, u_2, y определены при $t_0 \leq t \leq T$ и что α определено согласно (2,6). Возьмем $\zeta_i(t)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяющие условиям:

а) $\zeta_i(t)$ ($i = 1, 2$) непрерывны вместе со своими первыми производными при $t_0 \leq t \leq T$.

в) $\zeta_i(t_0) = 0, 0 < \zeta_i(t) \leq \alpha; t_0 < t \leq T$ ($i = 1, 2$)

с) При любом $t \in (t_0, T)$ выполняются неравенства

$$\left. \begin{aligned} 1 - |\zeta_1(t)| \left| \dot{\zeta}_1(t) \right| - \frac{\zeta_1^2(t)}{|\dot{f}_1(t)|} \left| \dot{f}_1(t) \right| &\geq 0 \\ 1 - \frac{\zeta_2(t)}{\alpha^2} \left| \dot{\zeta}_2(t) \right| - \frac{\zeta_2^2(t)}{\alpha^2 \dot{f}_2(t)} \left| \dot{f}_2(t) \right| &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2,22)$$

Положим, далее,

$$\left. \begin{aligned} u_1^*(x, t) &= \frac{f_1(t)}{e-1} \left(e^{1 - \frac{x}{\zeta_1}} - 1 \right); \\ u_2^*(x, t) &= \frac{f_2(t)}{e-1} \left(e^{1 - \frac{1-x}{\zeta_2}} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (2,23)$$

Из (1,1) и (2,22) следует, что

$$\left. \begin{aligned} L_1(u_1^*) &\leq 0 \text{ при } 0 < x < \zeta_1(t); t_0 < t < T; \\ L_2(u_2^*) &\geq 0 \text{ при } 1 - \zeta_2(t) < x < 1; t_0 < t < T. \end{aligned} \right\} \quad (2,24)$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} L_1(u_1^*) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) u_1^* = \frac{f_1(t)}{e-1} \left[\frac{e^{1-\frac{x}{\zeta_1}}}{\zeta_1^2} 1 - x \dot{\zeta}_1 - \right. \\ &\left. - \frac{\zeta_1^2}{f_1} \dot{f}_1 (1 - e^{-1+\frac{x}{\zeta_1}}) \right] \leq \frac{f_1(t)}{e-1} e^{\frac{1-x}{\zeta_1}} \left[1 - \dot{\zeta}_1 \zeta_1 - \frac{\zeta_1^2}{|f_1|} |\dot{f}_1| \right] \leq 0. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается и $L_2(u_2^*)$.

Из (2,23) следует, далее, что

$$\left. \begin{aligned} u_1^*(\zeta_1(t), t) &= 0; u_1^*(0, t) = f_1(t) = u_1(0, t) \leq 0 \\ u_2^*(1 - \zeta_2(t), t) &= 0; u_2^*(1, t) = f_2(t) = u_2(1, t) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2,25)$$

С другой стороны из краевых условий

$$\begin{aligned} u_1(0, t) &= f_1(t) \leq 0; u_1(x, t_0) = \varphi_1(x) \leq 0; u_1(y(t), t) = 0; \\ u_2(1, t) &= f_2(t) \geq 0; u_2(x, t_0) = \varphi_2(x) \geq 0; u_2(y(t), t) = 0, \end{aligned} \quad (2,26)$$

неравенств

$$y(t) \geq \zeta_1(t); \quad y(t) \leq 1 - \zeta_2(t) \quad (2,27)$$

и принципа максимума следует, что

$$u_1(\zeta_1(t), t) \leq 0; \quad u_2(1 - \zeta_2(t), t) \geq 0 \quad (2,28)$$

Положим

$$\bar{u}_1 = u_1^* - u_1; \quad u_2 = u_2^* - u_2. \quad (2,29)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} L_1(\bar{u}_1) &\leq 0 \text{ при } 0 < x < \zeta_1(t); t_0 < t \leq T; \\ L_2(\bar{u}_2) &\geq 0 \text{ при } 1 - \zeta_2(t) < x < 1; t_0 < t \leq T, \end{aligned}$$

сравнивая (2,25), (2,26) и (2,28) и пользуясь принципом максимума найдем, что

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, t) &\leq u_1^*(x, t) \text{ при } 0 \leq x \leq \zeta_1(t); \\ u_2^*(x, t) &\geq u_2(x, t) \text{ при } 1 - \zeta_2(t) \leq x \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (2,30)$$

Отсюда и из (2,25) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t) &\leq \frac{\partial}{\partial x} u_1^*(0, t) = -\frac{f_1(t)}{\zeta_1(t)}; \\ \frac{\partial}{\partial x} u_2(0, t) &\leq \frac{\partial}{\partial x} u_2^*(1, t) = \frac{f_2(t)}{\zeta_2(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (2,31)$$

Пусть теперь t_0^* некоторое значение $t > t_0$, для которого решение u_i, y задачи определено на основании теоремы 2. Тогда, в силу того, что

$$0 < \delta \leq \zeta_i(t) \quad (i=1, 2) \quad (2,32)$$

найдем

$$\sup_{t_0^* < t < T} \left| \frac{f_i(t)}{\zeta_i(t)} \right| \leq K^*, \quad (2,33)$$

где K^* подходящим образом выбранная константа.

Из (2,31) следует, что при всех $t \in (t_0^*, T)$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t) \leq K^*; \quad \frac{\partial}{\partial x} u_2(1, t) \leq K^*, \quad (2,34)$$

и так как $\frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t)$ и $\frac{\partial}{\partial x} u_2(1, t)$ заведомо ограничены при $t_0 \leq t \leq t_0^*$ видим, что K^* можно считать достаточно большим, чтобы (2,34) выполнялось при всех $t \in (t_0, T)$.

Оценим теперь $\frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t)$ и $\frac{\partial}{\partial x} u_2(1, t)$ снизу. Из принципа максимума и условий задачи В следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} u_i(y(t), t) = v_i(t) \geq 0 \quad (2,35)$$

при всех $t \geq t_0$. В силу определений (1,1₂) и (1,1₃) имеем

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} g_2(0, y(\tau), (t-\tau)) = \frac{y(\tau)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{y^2(\tau)}{4(t-\tau)}} \geq 0 \text{ при } 0 \leq y(\tau);$$

$$\alpha^2 \frac{\partial}{\partial \xi} G_2(1, y(\tau), t-\tau) = \frac{1-y(\tau)}{2\alpha\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[1-y(\tau)]^2}{4\alpha^2(t-\tau)}} \geq 0 \text{ при } 1-y(\tau) \geq 0 \quad (2,36)$$

Дифференцируя (1,2₄) и (1,2₅) по x , пользуясь равенствами

$$\frac{\partial}{\partial x} g_1 = -\frac{\partial}{\partial \xi} g_2; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} G_2 = -\frac{\partial}{\partial x} G_1$$

осуществляя в нужных местах интеграцию по частям и учитывая (3₁) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} = & -\int_{t_0}^t \dot{f}_1(\tau) g_2(x, 0, t-\tau) d\tau + \int_0^t \varphi_1(\xi) g_2(x, \xi, t-t_0) d\xi - \\ & - \int_{t_0}^t v_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(x, y(\tau), t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2,37)$$

Отсюда и из (2,35) и (2,36) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t) > -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^t \dot{f}_1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t \varphi_1(\xi) \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4(t-t_0)}}}{\sqrt{\pi(t-t_0)}} d\xi. \quad (2,38)$$

Аналогично оценивается $\frac{\partial}{\partial x} u_2(1, t)$.

Итак, $\frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t)$ и $\frac{\partial}{\partial x} u_2(1, t)$ оцениваются снизу независимо от $y(t)$ и $v_i(t)$ ($i=1,2$).

Сопоставляя (2,38) и (2,34) найдем, что существует $K > 0$ такое, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t) \right| \leq K; \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} u_2(1, t) \right| \leq K \quad \text{при } t \in (t_0, T), \quad (2,39)$$

причем K может быть выбрано независимо от T , если только α в (2,21) не зависит от T . Таким образом для доказательства существования решения задачи B в «большом» остается убедиться в одной лишь справедливости оценки (2,3). Последняя является следствием следующей элементарной леммы.

Л е м м а 1. Пусть $u_{i,j}(x, t)$ определены и непрерывны вместе со своими первыми производными по x в области $D_{i,j}$:

$$D_{i,j} = \{0 < x < z_j(t); t_0 < t < \infty\}; \quad D_{2,j} = \{z_j(t) < x < 1; t_0 < t < \infty\}, \quad (2,40)$$

причем

$$\begin{aligned}
 L_1(u_{1,1}) &\leq 0 \text{ при } (x, t) \in D_{1,1}; \\
 L_2(u_{2,1}) &\leq 0 \text{ при } (x, t) \in D_{2,1}; \\
 f_1(t) &\leq u_{1,1}(0, t) \leq 0; \varphi_1(x) \leq u_{1,1}(x, t_0) \leq 0 \\
 &\text{при } 0 < x < \min(l, z_1(0)); \\
 0 &\leq f_2(t) \leq u_{2,1}(1, t); 0 \leq \varphi_2(x) \leq u_{2,1}(x, t_0) \\
 &\text{при } \max(l, z_1(0)) < x < 1. \\
 L_1(u_{1,2}) &\geq 0 \text{ при } (x, t) \in D_{1,2}; \\
 L_2(u_{2,2}) &\geq 0 \text{ при } (x, t) \in D_{2,2}; \\
 u_{1,2}(0, t) &\leq f_1(t); u_{1,2}(x, t_0) \leq \varphi_1(x) \\
 &\text{при } 0 < x < \min(l, z_2(t_0)) \\
 0 &\leq u_{2,2}(1, t) \leq f_2(t); 0 \leq u_{2,2}(x, t_0) \leq \varphi_2(x) \\
 &\text{при } \max(l, z_2(t_0)) < x < 1.
 \end{aligned} \tag{2,41}$$

$$\tag{2,41*}$$

Тогда, если для всех $t \in (t_0, T)$

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1(t) &< \frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(z_1(t), t) - \frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(z_1(t), t); \\
 \frac{\partial}{\partial x} u_{1,2}(z_2(t), t) - \frac{\partial}{\partial x} u_{2,2}(z_2(t), t) &< \dot{z}_2(t),
 \end{aligned} \tag{2,42}$$

и если существует интервал (t_0, t_0^*) , на котором заведомо

$$z_1(t) \leq y(t) \leq z_2(t) \tag{2,43}$$

то тогда (2,43) выполняется для всех $t \in (t_0, T)$.

Допустим, что лемма 1 доказана. Пусть

$$\inf_{t_0 < t < \infty} |f_i(t)| = m_i > 0; \sup_{t_0 < t < \infty} |f_i(t)| = M_i; (i=1,2) \tag{2,44}$$

Положим

$$u_{1,1}(x, t) = -m_1^* \left(1 - \frac{x}{l_1}\right); u_{2,1}(x, t) = M_1^* \left(1 - \frac{1-x}{1-l_1}\right) \tag{2,45}$$

и потребуем выполнения неравенств

$$\begin{aligned}
 m_1 &\geq m_1^* > 0; M_2^* \geq M_2; \\
 -m_1^* \left(1 - \frac{x}{l_1}\right) &\geq \varphi_1(x) \text{ при } 0 < x < l_1 < y(0)
 \end{aligned}$$

$$M_2^* \left(1 - \frac{1-x}{1-l_1}\right) \geq \varphi_2(x) \text{ при } y(0) < x < 1; \frac{m_1^*}{l_1} \geq \frac{M_2^*}{1-l_1} \tag{2,46}$$

Совместимость неравенств (2,46) очевидна, в силу условия

$$\min |\varphi_1(x)| > 0 \text{ при } 0 \leq x \leq l_1 < y(0). \quad (2,47)$$

вытекающего из (3₂), и в силу ограниченности $\varphi_2(x)$.

Из (2,45) и (2,46) следует, очевидно, что $u_{1,1}$, $u_{2,1}$ и $z_1 = l_1$ удовлетворяют условиям леммы 1 и, следовательно, что при всех $t \geq t_0$

$$y(t) > l_1 \quad (2,48)$$

Аналогично устанавливается существование $l_2 > 0$, такого, что

$$y(t) < 1 - l_2 \quad (2,48^*)$$

при всех $t \geq t_0$.

Итак, остается убедиться в справедливости леммы 1.

По условию неравенства $z_1(t) \leq y(t)$ выполнено на некотором интервале (t_0, t_0^*) . Допустим, что множество E тех $t \in (t_0, T)$, для которых $y(t) < z_1(t)$, не пусто. Пусть

$$\tau_0 = \inf E$$

Тогда $\tau_0 \geq t_0^* > t_0$. Из определения τ_0 следует, что

$$y(\tau_0) = z_1(\tau_0); \quad y(t) \geq z_1(t) \text{ при } t_0 < t < \tau_0 \quad (2,49)$$

и что, какого бы ни было $\delta > 0$, на интервале $(\tau_0, \tau_0 + \delta)$ найдется τ такое, что

$$y(\tau) < z_1(\tau). \quad (2,50)$$

Таким образом на интервале $(t_0, \tau_0) - u_1$ определена в области существования $u_{1,1}$, а $u_{2,1}$ — в области существования u_2 . Положим

$$u_{1,1} - u_1 = w_{1,1}; \quad u_{2,1} - u_2 = w_{2,1}. \quad (2,51)$$

Из определения $u_{i,1}$ и u_i следует, что $L_i(w_{i,1}) \leq 0$ при $0 < x < z_1(t)$ для $i=1$ и при $y(t) < x < 1$ для $i=2$. Сверх того, в силу краевых условий (2,41) и принципа максимума

$$\begin{aligned} w_{1,1}(0, t) \geq 0; \quad w_{1,1}(x, 0) \geq 0; \quad w_{1,1}(z_1(t), t) = -u_1(z_1(t), t) \geq 0 \\ w_{2,1}(1, t) \geq 0; \quad w_{2,1}(x, 0) \geq 0; \quad w_{2,1}(y(t), t) = u_{2,1}(y(t), t) \geq 0. \end{aligned} \quad (2,52)$$

Отсюда, в силу того же принципа, следует, что всюду в области их существования

$$w_{i,1}(x, t) \geq 0 \quad (i=1,2). \quad (2,53)$$

Так как, сверх того,

$$\begin{aligned} w_{1,1}(z(\tau_0), \tau_0) = 0; \quad w_{2,1}(y(\tau_0), \tau_0) = 0 \\ y(\tau_0) = z_1(\tau_0), \end{aligned} \quad (2,53^*)$$

то очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_1(y(\tau_0), \tau_0) &\geq \frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(z_1(\tau_0), \tau_0); \\ \frac{\partial}{\partial x} u_2(y(\tau_0), \tau_0) &\leq \frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(z_1(\tau_0), \tau_0). \end{aligned} \quad (2,54)$$

Сопоставляя (2,54), (2,42) и условие Стефана (6₄) найдем, что

$$\begin{aligned} \dot{y}(\tau_0) = \frac{\partial}{\partial x} u_1(y(\tau_0), \tau_0) - \frac{\partial}{\partial x} u_2(y(\tau_0), \tau_0) &\geq \\ &\geq \frac{\partial}{\partial x} u_{1,1}(z(\tau_0), \tau_0) - \frac{\partial}{\partial x} u_{2,1}(z(\tau_0), \tau_0) > \dot{z}(\tau_0). \end{aligned} \quad (2,55)$$

Но это, в силу $z_1(\tau_0) = y(\tau_0)$, означает, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$y(t) \geq z_1(t) \quad \text{при } t \in (\tau_0, \tau_0 + \delta), \quad (2,56)$$

что противоречит (2,50). Но это доказывают пустоту множества E а вместе с тем и справедливость левой части неравенства (2,43). Справедливость его правой части доказывается аналогично.

З а м е ч а н и е. Из доказательства леммы 1 видно, что она справедлива и при $y(t_0) = 0$; $(y(t_0) = 1)$. В этом случае $z_1(t_0) = y(t_0)$; $(z_2(t_0) = y(t_0))$ и следовательно для возможности эффективного использования леммы 1 для оценок $y(t)$ нужно независимо определить характер роста $y(t)$ в окрестности $t - t_0 = 0$.

§3. Асимптотическое поведение решения невырожденной двухфазной задачи Стефана. Докажем справедливость утверждений (8) и (9). Из леммы 1 следует что, для доказательства справедливости утверждения (8) достаточно доказать следующее предложение:

Л е м м а 2. Для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие $t_0^* \geq \bar{t}_0$ и $t_1 \geq t_0^*$, что всякому $t_2 \geq t_1$ можно поставить в соответствие

функции $u_{i,j}(x, t); z_j(t)$ ($i, j=1,2$), удовлетворяющие условиям A_i :

$$\left. \begin{aligned} z_1(t_0^*) &= 0; z_1(t_2) = L - \varepsilon; \\ L_1(u_{1,1}) &\leq 0 \text{ при } 0 < x < z_1(t); t_0^* < t \leq t_2; \\ L_2(u_{2,1}) &\leq 0 \text{ при } z_1(t) < x < 1; t_0^* < t \leq t_2; \\ u_{1,1}(0, t) &\geq f_1(t); u_{1,1}(z_1(t), t) = 0; u_{2,1}(1, t) \geq f_2(t); \\ u_{2,1}(x, t_0^*) &\geq u_2(x, t_0^*) \text{ при } y(t_0^*) < x < 1 \\ \dot{z}_1(t) &< \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1} - \frac{\partial}{\partial x} u_{2,1} \right) \Big|_{x=z_1(t)} \text{ при } t_0^* < t < t_2 \end{aligned} \right\} (A_1)$$

$$\left. \begin{aligned} z_2(t_0^*) &= 1; z_2(t_2) = L + \varepsilon; \\ L_1(u_{1,2}) &\geq 0 \text{ при } 0 < x < z_2(t); t_0^* < t \leq t_2; \\ L_2(u_{2,2}) &\geq 0 \text{ при } z_2(t) < x < 1; t_0^* < t \leq t_2; \\ u_{1,2}(0, t) &\leq f_1(t); u_{1,2}(z_2(t), t) = 0; u_{2,2}(1, t) \leq f_2(t); \\ u_{1,2}(x, t_0^*) &\leq u_1(x, t_0^*) \text{ при } 0 < x < y(t_0^*) \\ \dot{z}_2(t) &> \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,2} - \frac{\partial}{\partial x} u_{2,2} \right) \Big|_{x=z_2(t)}; t_0^* < t \leq t_2. \end{aligned} \right\} (A_2)$$

Действительно, так определенные, $u_{i,j}, z_j$ удовлетворяют всем условиям леммы 1 и следовательно

$$z_1(t) \leq y(t) \leq z_2(t) \text{ при } t \in (t_0^*, t_2). \quad (3.1)$$

В частности

$$z_1(t_2) = L - \varepsilon \leq y(t_2) \leq L + \varepsilon = z_2(t_2). \quad (3.2)$$

Поскольку $t_2 > t_1$ произвольно, это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $t_1 > 0$ столь большое, что

$$L - \varepsilon < y(t) < L + \varepsilon \text{ при всех } t \geq t_1 \quad (3.3)$$

что и т. д.

Итак, пусть $\varepsilon < 0$ произвольно мало. Возьмем $\eta > 0$ так, что

$$\eta < (T_1 + T_2) \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.4)$$

и положим

$$T_{1,1} = T_1 - \eta; T_{2,1} = T_2 + \eta \quad (3.5)$$

Здесь T_i ($i=1,2$) определены согласно (1₂).

Выберем, далее, t_0^* столь большое, что при всех $t \geq t_0^*$

$$f_1(t) = u_1(0, t) \leq -T_{1,1}; f_2(t) = u_2(1, t) \leq T_{2,1}. \quad (3,6)$$

и, сверх того,

$$u_2(x, t_0^*) \leq -T_{2,1}; y(t_0^*) \leq x \leq 1. \quad (3,7)$$

Возможность такого выбора t_0^* гарантирована $(1_2)^*$.

Примем в дальнейшем, для упрощения записи, $t_0^* = 0$. Пусть γ_1^* удовлетворяет неравенству

$$\gamma_0^* < \min \left\{ \sqrt{\frac{(T_1+T_2)\varepsilon}{4 \left[T_1 + \frac{3(T_1+\eta)}{a^2(L-\varepsilon)} \right]}}; \sqrt{\frac{(T_1+T_2)\varepsilon}{8[1-L+\varepsilon]}}; \frac{a(L-\varepsilon) \ln^{\frac{1}{2}} 3}{\sqrt{1-(L-\varepsilon)^2}} \right\}. \quad (3,8)$$

Положим

$$t_1 = \frac{(L-\varepsilon)^2}{4\gamma_1^{*2}} \quad (3,9)$$

и возьмем произвольное $t_2 > t_1$. Положим

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{L-\varepsilon}{2\sqrt{t_2}}; z_1 = 2\gamma_1\sqrt{t}; \\ u_{1,1}(x, t) &= -T_{1,1} \left(1 - \frac{\operatorname{Erf} \frac{x}{2\sqrt{t}}}{\operatorname{Erf} \gamma_1} \right); \\ u_{2,1} &= T_{2,1} \frac{\operatorname{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} - \operatorname{Erf} \frac{\gamma_1}{a}}{\operatorname{Erf} \frac{1}{2a\sqrt{t}} - \operatorname{Erf} \frac{a}{\gamma_1}} \end{aligned} \right\} \quad (3,10)$$

Легко видеть, что $u_{i,1}$ и z_1 удовлетворяют всем требованиям леммы 2. Действительно

$$\left. \begin{aligned} u_{1,1}(0, t) = -T_{1,1} \geq u_1(0, t); u_{i,1}(z_1(t), t) = 0; (i=1,2) \\ u_{2,1}(1, t) = T_{2,1} \geq u_2(1, t); u_{2,1}(0, t) = T_{2,1} \geq u_2(x, 0). \end{aligned} \right\} \quad (3,11)$$

* см. ниже (стр. 28; 28) доказательство справедливости (9). См. также А. Н. Тихонов [13].

Далее

$$\left. \begin{aligned} L_1(u_{1,1}) &= 0; \\ L_2(u_{2,1}) &= -T_{2,1} \frac{\operatorname{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} - \operatorname{Erf} \frac{\gamma_1}{a}}{\left(\operatorname{Erf} \frac{\gamma_1}{a} - \operatorname{Erf} \frac{1}{2a\sqrt{t}} \right)^2} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{e^{-\frac{1}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi} t^{3/2}} \leq 0. \end{aligned} \right\} (3,11^*)$$

Таким образом остается только показать, что при всех $t \in (0, t_2)$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \frac{\gamma_1}{\sqrt{t}} < \frac{T_{1,1} e^{-\gamma_1^2}}{\sqrt{\pi t} \operatorname{Erf} \gamma_1} - \frac{T_{2,1} e^{-\frac{\gamma_1^2}{a^2}}}{a\sqrt{\pi t} \left(\operatorname{Erf} \frac{1}{2a\sqrt{t}} - \operatorname{Erf} \frac{\gamma_1}{a} \right)} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{1,1} - \frac{\partial}{\partial x} u_{2,1} \right) \Big|_{x=z_1(t)}. \end{aligned} \quad (3,12)$$

Поскольку при $0 \leq t \leq t_2$

$$\operatorname{Erf} \frac{1}{2a\sqrt{t}} \geq \operatorname{Erf} \frac{1}{2a\sqrt{t_2}} = \operatorname{Erf} \frac{1}{a(L-\varepsilon)}, \quad (3,13)$$

достаточно показать, что

$$\gamma_1 < \frac{T_{1,1} e^{-\gamma_1^2}}{\sqrt{\pi} \operatorname{Erf} \gamma_1} - \frac{T_{2,1} e^{-\frac{\gamma_1^2}{a^2}}}{a\sqrt{\pi} \left[\operatorname{Erf} \frac{\gamma_1}{a(L-\varepsilon)} - \operatorname{Erf} \frac{\gamma_1}{a} \right]} \equiv f(\gamma_1) \quad (3,14)$$

Пользуясь теоремой о среднем найдем

$$f(\gamma_1) = \frac{T_{1,1} (1+\varepsilon-L) e^{-\gamma_1^2 (1-\theta_1^2)} - T_{2,1} (L-\varepsilon) e^{-\frac{\gamma_1^2}{a^2} \left(1 - \frac{\theta_2^2}{(L-\varepsilon)^2} \right)}}{2\gamma_1 (1+\varepsilon-L)}. \quad (3,15)$$

Здесь

$$0 < \theta_1 < 1; L - \varepsilon < \theta_2 < 1, \quad (3,16)$$

Но

$$e^{-\gamma_1^2(1-\theta_1^2)} > 1 - \gamma_1; e^{-\frac{\gamma_1^2}{a^2} \left(1 - \frac{\theta_2^2}{(L-\varepsilon)^2}\right)} < 1 + 3 \frac{\gamma_1^2}{a^2(L-\varepsilon)^2} \quad (3,17)$$

Последнее неравенство выполняется в силу (3,8), поскольку при $t_2 > t_1$

$$\gamma_1 \leq \gamma_1^* \quad (3,18)$$

Таким образом

$$f(\gamma_1) > \frac{T_{1,1}(1+\varepsilon-L) - T_{2,1}(L-\varepsilon) - \gamma_1^2 \left(T_{1,1} + 3 \frac{T_{2,1}}{a^2(L-\varepsilon)}\right)}{2\gamma_1(1+\varepsilon-L)} \quad (3,19)$$

Используя (8), (3,5), (3,8) и (3,18) найдем, что

$$\begin{aligned} f(\gamma_1) &> \frac{(T_1+T_2)\varepsilon - \eta - \gamma_1^2 \left[T_1 + 3 \frac{T_2 + \eta}{a^2(L-\varepsilon)} \right]}{2\gamma_1(1+\varepsilon-L)} > \\ &> \frac{(T_1+T_2)\varepsilon}{8\gamma_1(1+\varepsilon-L)}. \end{aligned} \quad (3,20)$$

Но это в силу (3,18) и (3,8) означает, что

$$\gamma_1 < f(\gamma_1) \quad (3,21)$$

что и т. д.

Совершенно аналогично устанавливается существование $u_{i,2}$ и z_2 , удовлетворяющих требованиям A_2 леммы 2.

Итак мы доказали, что $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ существует, причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = L = \frac{T_1}{T_1 + T_2}. \quad (3,22)$$

Можно утверждать кроме того, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}(t) = 0 \quad (3,23)$$

Для этого достаточно показать, что $\dot{y}(t)$ удовлетворяет при $t_0 < t < \infty$ условию Гельдера

$$|\dot{y}(t) - \dot{y}(\tau)| < K \sqrt{t - \tau} \quad (3,24)$$

Но это является очевидным следствием следующей леммы:

Лемма 3. Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет внутри области

$$D = \{\chi_1(t) < x < \chi_2(t); t > 0\}$$

уравнению

$$L_2 u = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3,25_1)$$

и краевым условиям

$$u(\chi_i(t), t) = f_i(t) \quad (i=1,2); \quad u(x, 0) = \varphi(x); \quad (f_i(0) = \varphi(\chi_i(0))). \quad (3,25_2)$$

Пусть, далее,

$$v_i(t) = \frac{\partial}{\partial x} u(\chi_i(t), t). \quad (i=1,2). \quad (3,25_3)$$

Тогда, если $\chi_i(t)$, $\varphi(x)$; $f_i(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы, а $v_i(t)$ однократно дифференцируемы, то $\frac{\partial u}{\partial t}$ является решением уравнения (3,25₁), удовлетворяющим краевым и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=\chi_i(t)} &= \dot{f}_i(t) - v_i(t) \dot{\chi}_i(t) \quad (i=1,2) \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= a^2 \dot{\varphi}(x); \quad (\chi_1(0) < x < \chi_2(0)). \end{aligned} \right\} \quad (3,26)$$

Допустим, что лемма 3 доказана. Возьмем произвольное $t_0^* > t_0$ и примем его за начальный момент отсчета времени. В силу теоремы 2 $v_i(t) = \frac{\partial}{\partial x} u_i(y(t), t)$ дифференцируемы вблизи t_0^* , причем

$$|\sqrt{t - t_0^*} \dot{v}_i(t)| < \frac{K}{4}, \quad (3,27)$$

где K зависит от $|\dot{f}_i(t)|$ и $|\frac{\partial^m}{\partial x^m} u_i(x, t_0^*)|$; ($i=1,2$; $m=0, 1$).

Далее, в силу доказанного выше, $v_i(t)$, а вместе с тем и $y(t)$ равномерно ограничены. Отсюда и из леммы 3 следует равномерная ограниченность $\frac{\partial u}{\partial t}$, а следовательно и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $t \geq t_0^*$.

Но это означает, что K в (3,27) не зависит от t . Поскольку (3,27) равносильно неравенству

$$|v_i(t) - v_i(t_0)| < \frac{K}{2} \sqrt{t - t_0} \quad (3,27^*)$$

и $y(t) = v_1(t) - v_2(t)$ видим, что если лемма 3 справедлива, то $y(t)$ действительно удовлетворяет условию Гельдера (3,24) с константой K независимой от t , что и т. д.

Мы не будем приводить доказательство леммы 3 во всех деталях, но ограничимся указанием метода. При сделанных предположениях $u(x, t)$ представима в виде (8)

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^4 I_i(x, t) \quad (3,28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \int_{\chi_1(0)}^{\chi_2(0)} \varphi(\xi) E(x - \xi, a^2 t) d\xi; \\ I_i &= (-1)^i \int_0^t [f_i(\tau) \dot{\chi}_i(\tau) + a^2 v_i(\tau)] E(x - \chi_i(\tau), \\ &\quad a^2(t - \tau)) d\tau; \quad (i=1,2) \\ I_i &= (-1)^{i+1} \int_0^t a^2 f_{i-1}(\tau) \frac{\partial}{\partial \chi_{i-2}(\tau)} E(x - \chi(\tau), \\ &\quad a^2(t - \tau)) d\tau; \quad (i=3,4) \end{aligned} \right\} \quad (3,29)$$

Очевидно, что при $\chi_1(0) < x < \chi_2(0)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} I_0 = a^2 \ddot{\varphi}(x); \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} I_i = 0; \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (3,30_1)$$

и что

$$\lim_{x \rightarrow \chi_j} \frac{\partial}{\partial t} I_i + \dot{\chi}_j \lim_{x \rightarrow \chi_j} \frac{\partial}{\partial x} I_i = \frac{d}{dt} I_i(\chi_j(t), t) \quad (3,30_2)$$

Здесь

$$j=1,2; i=0, 1, 2, 3, 4; i \neq j; i-2 \neq j. \quad (3,30^*_2)$$

Наконец непосредственной проверкой, базирующейся на теореме Гольмгрена о разрывах теплового потенциала двойного слоя [12] легко убедиться в том, что

$$\lim_{x \rightarrow \chi_{i_1}} \frac{\partial}{\partial t} I_i + \lim_{x \rightarrow \chi_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x} I_i \cdot \chi_{i_1} = \frac{d}{dt} I_1(\chi_i(t), t); \quad (3,30_3)$$

$$(i_1=i; i-2).$$

Сопоставляя (3,28), (3,30_i); ($i=1, 2, 3$) и (3,26) убедимся в справедливости леммы 3.

З а м е ч а н и е. Для областей с $\chi_i = \text{const}$ ($i=1, 2$) лемма хорошо известна. (См. например А. Н. Тихонов (13). Случай, когда обе границы $x = \chi_i(t)$ — прямые сводится к случаю $\chi_i = \text{const}$ с помощью преобразования Аппеля [12]. В этих случаях можно не требовать дифференцируемости $v_i(t)$.*

Перейдем теперь к доказательству справедливости равенства (9). Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Возьмем $t_0^* > t_0$ столь большое, что при всех $t \geq t_0^*$

$$|f_1(t) + T_1| < \frac{\varepsilon}{2}; T_1 \left(1 - \frac{y(t)}{L} \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3,31)$$

Это возможно в силу (1₂) и (8).

Положим

$$u_1 = -T_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \omega_1(x, t), \quad (3,32)$$

и примем t_0^* за начальный момент отсчета времени. Из определения u_1 следует, что $L_1(\omega_1) = 0$ и что

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(0, t) &= f_1(t) + T_1; \quad \omega_1(y(t), t) = T_1 \left(1 - \frac{y(t)}{L} \right); \\ \omega_1(x, t_0^*) &= u_1(x, t_0^*) + T_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3,33)$$

* Лемма 3 настолько очевидна, что ею часто пользуются без доказательства, и без ссылок на оформленное ее доказательство. Нам неизвестно, было ли оно кем либо опубликовано. Заметим, что она не тривиальна, так как при ослаблении условий она может уже не иметь места. Так, например, при наличии разрывов в условиях в точках $(\chi_i(0), 0)$ лемма 3 окажется несправедливой, если не потребовать дополнительно равномерной ограниченности решения [13].

Представим w_1 в виде суммы двух функций $w_1^{\dot{}}$ и $w_1^{\ddot{}}$, удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} L_1(w_1^{\dot{}}) &= 0; \quad w_1^{\dot{}}(x, t_0^*) = w_1(x, t_0^*); \quad w_1^{\dot{}}(0, t_0^*) = 0; \\ &w_1^{\dot{}}(y(t), t) = 0; \\ L_1(w_1^{\ddot{}}) &= 0; \quad w_1^{\ddot{}}(0, t) = w_1(0, t); \\ w_1^{\ddot{}}(y(t), t) &= w_1(y(t), t); \quad w_1^{\ddot{}}(x, t_0^*) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3,34)$$

Из сопоставления (3,24) и (3,21) следует, что

$$|w_1^{\ddot{}}(y(t), t)| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |w_1^{\ddot{}}(0, t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3,35^*)$$

Но это в силу принципа максимума означает, что всюду в области ее определения

$$|w_1^{\ddot{}}(x, t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3,35)$$

С другой стороны из определения $w_1^{\dot{}}$ следует, что ее модуль мажорируется интегралом

$$\int_0^{y(t_0^*)} |w_1(\xi, t_0^*)| E(x - \xi, t - t_0^*) d\xi. \quad (3,36)$$

Но это значит, что существует $t_1 > t_0^*$ такое, что всюду в области ее определения

$$|w_1^{\dot{}}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } t > t_1. \quad (3,37)$$

Сопоставляя (3,25); (3,27) и (3,22) убедимся в справедливости утверждения (9), что и т. д.

Глава 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА ОТРЕЗКЕ

§4. Вспомогательные функции. Обратимся к нашей основной задаче — доказательству существования решения задачи «А». Она не решается так элементарно, как задач «В». Более того, методы, которыми мы располагаем, позволяют ее решить лишь при некоторых дополнительных ограничениях на краевые и начальные условия задачи, именно — при тех ограничениях,

которые наложены условиями (1₃) и (2₁). Эти ограничения безусловно не связаны с существом задачи, но лишь с принятым ниже методом ее решения.

Решение задачи «А» будем строить, как предел последовательности решений ряда специальным образом поставленных невырожденных задач типа «В». Формулировке и доказательству соответствующего результата предположим вспомогательное построение, которое будет использовано ниже.

Определим λ_i ; ν ; γ и α_i равенствами

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \nu &= m_0; \lambda_2 = \frac{n_0}{2}; \lambda_1 \leq \lambda_2; m_0; n_0 \geq 0; \\ \alpha_1 &= \alpha_2 \text{ при } m_0 > n_0; \alpha_1 = \gamma \text{ при } m_0 < n_0; \gamma = \alpha_1 - \alpha_2 \\ &\text{при } m_0 = n_0 \\ \alpha_2 &= (2a)^{n_0} b_0 \Gamma\left(\frac{n_0+1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}}; \alpha_1 \gamma = c_0 \frac{\nu+1}{m_0+1}. \end{aligned} \right\} (4,1)$$

Здесь m_0 ; n_0 ; c_0 и b_0 определены согласно (1₃) и (2₂). Справедливы априорные равенства [14]

$$v_i(t) = \alpha_i t^{\lambda_i} (1 + v_i^*(t)); \dot{y}(t) = \gamma t^\nu (1 + y^*(t)), \quad (4,2)$$

где

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_i^*(t) = 0; \lim_{t \rightarrow 0} y^*(t) = 0. \quad (4,2^*)$$

Положим теперь

$$z_1(t) = \frac{\gamma t^{\nu+1}}{\nu+1} (1 - \delta\sqrt{t}); z_2(t) = \frac{\gamma t^{\nu+1}}{\nu+1} (1 + \delta\sqrt{t}); \quad (4,3_1)$$

$$\omega_{1,1} = f_1(t) \left[1 - \frac{\operatorname{Erf} \frac{x}{2\sqrt{t}}}{\operatorname{Erf} \frac{z_1}{2\sqrt{t}}} + \frac{\operatorname{Erf}^2 \frac{x}{2\sqrt{t}} - \operatorname{Erf}^2 \frac{z_1}{2\sqrt{t}}}{2 \operatorname{Erf} \frac{z_1}{2\sqrt{t}}} \right]; \quad (4,3_2)$$

$$\omega_{1,2} = f_1(t) \left[1 - \frac{\operatorname{Erf} \frac{x}{2\sqrt{t}}}{\operatorname{Erf} \frac{z_2}{2\sqrt{t}}} \right] \quad (4,3_3)$$

и определим $\omega_{2,j}$ ($j=1,2$) как решение задачи

$$\left. \begin{aligned} L_2(\omega_{2,j}) &= 0 \text{ при } z_j(t) < x < 1; t > 0; \\ \omega_{2,j} &= 0 \text{ при } x = z_j(t); \omega_{2j} = \varphi(x) \text{ при } t = 0 \\ \omega_{2j} &= f_2(t) \text{ при } x = 1. \end{aligned} \right\} (4,4)$$

Легко видеть, что существует $T > 0$ такое, что при $0 < t \leq T$

$$L_1(\omega_{1,1}) \leq 0 \text{ при } 0 < x < z_1(t); L_1(\omega_{1,2}) \geq 0 \text{ при } 0 < x < z_2(t). \quad (4,5)$$

Это следует из ограниченности $\dot{f}_1(t)/f_1(t)$, имеющей место по условию, и из определения $z_j(t)$; ($j=1,2$).

Покажем, что можно указать $T_0 \leq T$ и $\delta > 0$ такие, что при всех $t \in (0, T_0)$ будут выполняться неравенства

$$\dot{z}_1(t) < v_{1,1}^*(t) - v_{2,1}^*(t); v_{2,2}^*(t) - v_{2,2}^*(t) < \dot{z}_2(t). \quad (4,6)$$

Здесь

$$v_{i,j}^*(t) = \frac{\partial}{\partial x} \omega_{i,j}(z_j(t), t); i, j = 1, 2. \quad (4,6^*)$$

В силу (4,4) имеем

$$v_{1,1}^* = -\frac{\dot{f}_1(t)}{\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-\frac{z_1^2(t)}{4t}}}{\text{Erfi} \frac{z_1(t)}{2\sqrt{t}}} \left[1 - \text{Erfi} \frac{z_1(t)}{2\sqrt{t}} \right]; \quad (4,7)$$

$$v_{1,2}^* = -\frac{\dot{f}_1(t)}{\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-\frac{z_2^2(t)}{4t}}}{\text{Erfi} \frac{z_2(t)}{2\sqrt{t}}}. \quad (4,8)$$

Будем считать, что

$$z_i(t) < 2\sqrt{t} \quad (i=1,2) \quad \text{при } 0 \leq t \leq T_0 \quad (4,9_1)$$

и что

$$|f_1^*(t)| \leq M t; |\varphi^*(x)| \leq M x; 0 \leq t \leq T_0; 0 \leq x \leq 1. \quad (4,9_2)$$

Здесь f_1^* и φ^* определены условиями (1₃) и (2₂).

Оценивая $v_{1,1}^*(t)$ снизу и $v_{1,2}^*(t)$ сверху, учитывая (4,1), (4,3₁), (1₃) и (4,9_j) ($j=2,2$) найдем, что при $0 \leq t \leq T_0$

$$\left. \begin{aligned} v_{1,1}(t) &> \alpha_1 t^{\lambda_1} \left[1 - \frac{\gamma t^{\nu + \frac{1}{2}}}{(\nu + 1)\sqrt{\pi}} \right] \left[1 - \frac{\gamma^2 t^{2\nu + 1}}{4(\nu + 1)^2} \right] \frac{1 - Mt}{1 - \delta\sqrt{t}} \\ v_{1,2}(t) &< \alpha_1 t^{\lambda_1} \frac{1 + Mt}{1 + \delta\sqrt{t}} \end{aligned} \right\} \quad (4,10)$$

Рассмотрим $v_{2,j}^*(t)$. Уравнение, определяющее $v_{2,j}^*$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} v_{2,j}^*(t) = I_{1,j}(t) + I_{2,j}(t) + J_j(t) &= \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\frac{(z_j(t) - \xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{d\xi}{a\sqrt{\pi t}} + \\ + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t v_{2,j}^*(\tau) \frac{z_j(t) - z_j(\tau)}{(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{[z_j(t) - z_j(\tau)]^2}{4a^2(t - \tau)}} d\tau &+ J_j(t). \end{aligned} \quad (4,11)$$

Здесь $J_j(t)$ объединяет все интегралы, входящие в (1,2₂), кроме выписанных. При этом $y(t)$ в (1,2₂) заменяется на $z_j(t)$. Интегралы, входящие в $J_j(t)$ таковы, что для всякого $p > 0$ существует $\alpha_p > 0$ такое, что

$$|J_j(t)| < \alpha_p t^p \quad \text{при } 0 \leq t < \infty. \quad (4,12)$$

Пусть

$$\max_{0 \leq \tau \leq T} v_{2,j}^*(\tau) = v_{2,j}^*(t). \quad (4,13)$$

Пользуясь теоремой о среднем и учитывая (4,3₁) найдем

$$\left. \begin{aligned} v_{2,1}^*(t) &< \frac{I_{1,1}(t) + \alpha_p t^p}{1 - \frac{\gamma}{a\sqrt{\pi}} t^{\nu + \frac{1}{2}}}; \\ v_{2,2}^*(t) &> I_{1,2}(t) - \alpha_p t^p. \end{aligned} \right\} \quad (4,14)$$

С другой стороны в силу (1₃), 2₂) и (4,9₂) имеем

$$I_{1,1} < b_0 (I'_{n_0} + M I'_{n_0+1}); \quad I_{1,2}(t) > b_0 (I_{n_0}^2 - M I_{n_0+1}^2), \quad (4,15)$$

где

$$I_m^j = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^1 \xi^m e^{-\frac{(\xi - z_j(t))^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$= (2a)^m t^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{z_j(t)}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{1-z_j(t)}{2a\sqrt{t}}} \left(\xi + \frac{z_j(t)}{2a\sqrt{t}} \right)^m e^{-\xi^2} d\xi. \quad (4,15^*)$$

Легко видеть отсюда, что

$$(2a)^m t^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \left(1 - \operatorname{Erfi} \frac{1}{2a\sqrt{t}} \right) \right] < I_m^j <$$

$$< (2a)^m t^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{z_j(t)}{2a\sqrt{t}} P_{m-1}\left(\frac{z_j(t)}{2a\sqrt{t}}\right) \right], \quad (4,16)$$

где P_{m-1} полином степени $m-1$.

Пользуясь (4,16) и учитывая (4,1), (4,3), (1₃), (2₂) и (4,9₂) найдем

$$I_{1,1}(t) < \alpha_2 t^{\lambda^2} \left[1 + 2a M \sqrt{t} \frac{\Gamma\left(\frac{n_0+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_0+1}{2}\right)} \cdot \left[1 + \frac{z_1(t)}{2a\sqrt{t}} P_{n_0}\left(\frac{z_1(t)}{2a\sqrt{t}}\right) \right] \right];$$

$$I_{1,2}(t) > \alpha_2 t^{\lambda^2} \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n_0+1}{2}\right)} \left(1 - \operatorname{Erfi} \frac{1}{2a\sqrt{t}} \right) - \right. \\ \left. - 2a M \sqrt{t} \frac{\Gamma\left(\frac{n_0+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_0+1}{2}\right)} \left(1 + \frac{z_2(t)}{2a\sqrt{t}} P_{n_0}\left(\frac{z_2(t)}{2a\sqrt{t}}\right) \right) \right]. \quad (4,17)$$

Внося (4,17) в (4,14) и учитывая, что $p > 0$ произвольно, найдем

$$\left. \begin{aligned} v_{2,1}^*(t) &> a_2 t^{\lambda_2} (1 + L\sqrt{t}) (1 + \Psi_1(\delta, t)); \\ v_{2,2}^*(t) &< a_2 t^{\lambda_2} (1 - L\sqrt{t}) (1 + \Psi_2(\delta, t)) \end{aligned} \right\} \quad (4,18)$$

Здесь

$$\Psi_i = N t^{\nu + \frac{1}{2}} P_i (1 - (-1)^i \delta \sqrt{t}), \quad (4,19)$$

причем L и N некоторые положительные константы и $P_i(x)$ полиномы, возрастающие вместе с x .

Сопоставляя (4,10), (4,18) и (4,31), и учитывая, что $a_1 > a_2$ при $\lambda_1 = \lambda_2$ убедимся в справедливости утверждения (4,6) при $\delta > 0$ достаточно большим и $T_0 > 0$ достаточно малом.

§5. Существование решения задачи «А». Возьмем произвольную монотонно убывающую последовательность

$$t_0 > t_1 > \dots > t_n > \dots; \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0; t_0 < T_0, \quad (5,1)$$

где T_0 определено условием (4,6), и определим $u_{i,n}(x, t); y_n(t)$ как решения задачи «В»

$$\begin{aligned} L_1(u_{1,n}) &= 0 \text{ при } 0 < x < y_n(t); \\ L_2(u_{2,n}) &= 0 \text{ при } y_n(t) < x < 1; t > t_n; \end{aligned} \quad (5,2_1)$$

$$u_{1,n}(0, t) = f_1(t); u_{i,n}(y_n(t), t) = 0; u_{2,n}(1, t) = f_2(t); t > t_n \quad (5,2_2)$$

$$u_{i,n}(x, t_n) = w_{i,1}(x, t_n); (i=1,2) \quad (5,2_3)$$

$$\dot{y}_n(t) = v_{1,n}(t) - v_{2,n}(t); y_n(t_n) = z_1(t_n); \quad (5,2_4)$$

Здесь

$$v_{i,n}(t) = \frac{\partial}{\partial x} u_{i,n}(y_n(t), t) \quad (5,2^*_4)$$

и $w_{i,j}$ и z_1 определены согласно (4,31); ($i=1, 2, 3$). Наша цель состоит в доказательстве следующей основной теоремы:

Т е о р е м а 3. Последовательности $\{u_{i,n}(x, t)\}; \{y_n(t)\}$ ($i=1, 2$) равномерно сходятся к единственному решению $u_i(x, t); y(t)$; ($i=1, 2$) задачи «А».

З а м е ч а н и е. Как указано во введении Л. С. Каменомостской доказана единственность обобщенного решения задачи Стефана и совпадение ее с классическим решением в случае существования последнего. Поэтому достаточно доказать теорему 3 в ослабленной формулировке:

Теорема 3*. Существует подпоследовательность $\{n_j\}$ такая, что последовательности $\{u_{i, n_j}\}$; $\{y_{n_j}\}$ равномерно сходятся к решению u_i ; y задачи «А».

Доказательство теоремы 3* сводится к доказательству следующих лемм:

Лемма 4. Последовательности $\{v_{i, n}(t)\}$; $\{\dot{y}_n(t)\}$ определены, равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на интервале $0 < t < T$, где T — достаточно мало.

Лемма 5. Если

$$y(t) = \lim_{n_j \rightarrow \infty} y_{n_j}(t) \quad (5.3)$$

то существует $T^* > 0$ столь малое, что при $0 < t < T^*$ выполняются неравенства

$$\left. \begin{aligned} \gamma t^{m+1} (1 - \delta \sqrt{t}) < y(t) < \gamma t^{m+1} (1 + \delta \sqrt{t}); \\ 0 < \dot{y}(t) < \gamma(m+1)t^m (1 + \delta \sqrt{t}). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Лемма 6. Не существует нетривиального решения интегрального уравнения

$$\omega = -2 \int_0^t \omega(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(y(t), y(\tau), t - \tau) d\tau. \quad (5.5)$$

Действительно, допустим, что леммы 4—6 доказаны. Из леммы 4 и из теоремы Арцела следует существование подпоследовательности $\{n_j\}$ такой, что последовательности $\{v_{i, n_j}(t)\}$; $\{y_{n_j}(t)\}$ сходятся равномерно всюду в области их определения. Пусть

$$v_i(t) = \lim_{n_j \rightarrow \infty} v_{i, n_j}(t); \quad y(t) = \lim_{n_j \rightarrow \infty} y_{n_j}(t). \quad (5.6)$$

Определим $U_i(x, t)$, как решения задачи

$$\left. \begin{aligned} L_1(U_1) = 0 \text{ при } 0 < x < y(t); \quad L_2(U_2) = 0 \text{ при } y(t) < x < 1; \\ U_1|_{x=0} = f_1(t); \quad U_i|_{x=y(t)} = 0; \quad (i=1,2); \quad U_2|_{x=1} = f_2(t); \\ U_2|_{t=0} = \varphi(x) \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

и положим

$$V_i(t) = \frac{\partial}{\partial x} U_i(y(t), t); \quad (i=1,2). \quad (5.8)$$

Покажем, что

$$V_i(t) = v_i(t). \quad (5,9)$$

Отсюда, очевидно, будет следовать, что U_i ; y являются решениями задачи «А», ибо из

$$\dot{y}_n(t) = \dot{v}_{1n}(t) - \dot{v}_{2n}(t) \quad (5,10^*)$$

следует, что

$$\dot{y}(t) = v_1(t) - v_2(t). \quad (5,10)$$

Для определения $V_i(t)$ можно воспользоваться интегральными уравнениями из теоремы 1. Таким образом

$$V_1(t) = -2 \int_0^t \dot{f}_1(\tau) g_2(y(t), 0, t-\tau) d\tau - \\ - 2 \int_0^t V_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(y(t), y(\tau), t-\tau) d\tau; \quad (5,11_1)$$

$$V_2(t) = 2 \int_0^t \dot{f}_2(\tau) G_2(y(t), 1, t-\tau) d\tau + 2 \int_0^1 \dot{\varphi}(\xi) G_2(y(t), \xi, t) d\xi + \\ + 2a^2 \int_0^t V_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G_2(y(t), y(\tau), t-\tau) d\tau. \quad (5,11_2)$$

С другой стороны предельным переходом в уравнениях (1,2₁) и (1,2₂) выписанных для v_{i, n_j} и y_{n_j} , найдем, что v_i и y связаны уравнениями (5,11₁) и (5,11₂), если в них V_i заменить на v_i ($i=1,2$). Отсюда следует, что для доказательства утверждения (5,9) достаточно убедиться в единственности решения интегральных уравнений

$$\omega_1(t) = -2 \int_0^t \omega_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(y(t), y(\tau), t-\tau) d\tau; \quad (5,12_1)$$

$$\omega_2(t) = 2a^2 \int_0^t \omega_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G_2(y(t), y(\tau), t-\tau) d\tau. \quad (5,12_2)$$

Но единственность решения уравнения (5,12₂) является фактом тривиальным, поскольку заведомо $y(t) < 1$. Единственность же решения уравнения (5,12₁) утверждается леммой 6. Таким образом для доказательства теоремы 3* останется только установить существование пределов

$$\lim_{n_j \rightarrow \infty} u_{i, n_j}(x, t) = u_i(x, t); \quad (i=1,2) \quad (5,13)$$

и совпадение их с $U_i(x, t)$. Но это сразу же следует из представимости U_i и u_{i, n_j} в виде квадратур типа (1,2₄), (1,2₅) и очевидной возможности осуществления в них предельного перехода при $n_j \rightarrow \infty$.

§6. Доказательство лемм 4—6. Предположим, что лемма 5 доказана и докажем лемму 6. В силу леммы 5

$$\dot{y}(t) > 0 \text{ при } 0 < t < T, \quad (6,1)$$

где $T > 0$ достаточно мало. Отсюда, в силу определений (1,2₁) и (1,2₂) имеем

$$I = 2 \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(y(t), y(\tau), t-\tau) \right| d\tau = 1 - 2 \operatorname{Erf} \frac{y(t)}{2\sqrt{t}} + I^*, \quad (6,2)$$

где

$$I^* = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau \int_{y(t)-y(\tau)}^{y(t)+y(\tau)} \xi e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}} d\xi. \quad (6,2^*)$$

Меняя порядок интегрирования и пользуясь леммой 5 найдем

$$\begin{aligned} I^*(t) &< \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2y(t)} \xi d\xi \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}} d\tau < \\ &< \frac{4\gamma^2(m+1)}{\sqrt{\pi}} (1+\delta\sqrt{t})^2 t^{2m+1} = I_1. \end{aligned} \quad (6,3_1)$$

Кроме того

$$2 \operatorname{Erf} \frac{y(t)}{2\sqrt{t}} > 2 \operatorname{Erf} \left[\frac{\gamma}{2} t^{m+\frac{1}{2}} (1-\delta\sqrt{t}) \right] = I_0. \quad (6,3_2)$$

Из (6,3) следует, что

$$I < 1 - I_0 + I_1 = I(t). \quad (6,3^*)$$

Но

$$I(0) = 1 \text{ и } \frac{dI}{dt} < 0. \quad (6,4)$$

при $t > 0$ достаточно малом. Следовательно можно указать $T > 0$ столь малое, что будет

$$I < 1 \text{ при } 0 < t < T. \quad (6,5)$$

Пусть $\max |\omega(\tau)|$ при $0 \leq \tau \leq T$ достигается при $\tau = t$. Оценивая ω по модулю и пользуясь (5,5) найдем

$$|\omega(t)| \leq 2 \int_0^t |\omega(\tau)| \left| \frac{\partial}{\partial \xi} g_2(y(t), y(\tau), t-\tau) \right| d\tau \leq |\omega(t)| I < |\omega(t)|, \quad (6,6)$$

что невозможно, если $\omega(t) \neq 0$, что и т. д.

Перейдем к доказательству леммы 4. Заметим, прежде всего, что в силу результатов главы 1 последовательности $\{u_{i,n}(x, t)\}$; $\{v_{i,n}(t)\}$; $\{y_n(t)\}$ определены на некотором интервале $t_n < t < T$, где T не зависит от n . Далее, в силу (4,4), (4,5), (4,6) и определений (4,3₂), (4,3₃) и (5,2_i); ($i=1, \dots, 4$), функции $\omega_{i,j}$; z_j и $u_{i,n}(x, t)$; $y_n(t)$ удовлетворяют при $t_n \leq t \leq T_0$ условиям леммы 1, какого бы ни было n . Следовательно

$$z_1(t) \leq y_n(t) \leq z_2(t) \text{ при } t_n \leq t \leq T_0; n=1,2, \dots \quad (6,7)$$

Кроме того из определения $y_n(t)$ следует, что для каждого n существует такое $\tau_n > t_n$, что

$$\dot{y}_n(t) > 0 \text{ при } t_n < t < \tau_n. \quad (6,8)$$

Пусть τ_n^* — точная верхняя грань множества τ_n , удовлетворяющих условию (6,8). Покажем, что

$$T^* = \inf(\tau_n^*) > 0; n=1,2, \dots \quad (6,9)$$

Заметим, прежде всего, что из принципа максимума следует, что при $t_n \leq t \leq \tau_n^*$

$$u_{1,n}(x, t) \geq f_1(t) \left(1 - \frac{x}{y_n(t)} \right) \equiv U_{1,n}^*(x, t). \quad (6,10)$$

Это сразу следует из принципа максимума, если заметить, что

$$\left. \begin{aligned} L_1(U_{1,n}^*) &\geq 0 \text{ при } t_n < t < \tau_n^*; \\ U_{1,n}^* \Big|_{x=0} &= u_{1,n} \Big|_{x=0}; \quad U_{1,n}^* \Big|_{x=y_n(t)} = u \Big|_{x=y_n(t)} \end{aligned} \right\} \quad (6,11)$$

и что, в силу (5,2₃), (4,3₂) и (6,7),

$$\begin{aligned} u_{1,n} \Big|_{t=t_n} &> \dot{f}_1(t_n) \left[1 - \frac{\operatorname{Erf} \frac{x}{2\sqrt{t_n}}}{\operatorname{Erf} \frac{z_1}{2\sqrt{t_n}}} \right] > \dot{f}_1(t_n) \left[1 - \frac{x}{z_1(t_n)} \right] \geq \\ &\geq \dot{f}_1(t_n) \left[1 - \frac{x}{y_n(t_n)} \right] = U_{1,n}^*(x, t_n). \end{aligned} \quad (6,11_2)$$

При выводе неравенства $L_1(U_{1,n}^*) \geq 0$ мы предполагаем, что $\dot{f}_1(t) < 0$ при $0 < t \leq T_0$, что возможно в силу определения \dot{f}_1 .

Из (6,10) и $U_{1,n}(y_n(t), t) = 0$ следует, что

$$0 \leq v_{1,n}(t) \leq -\frac{\dot{f}_1(t)}{y_n(t)} \text{ при } t_n \leq t \leq \tau_n^*. \quad (6,12)$$

Мажорируя это неравенство с помощью (6,7) получим

$$0 \leq v_{1,n}(t) \leq -\frac{\dot{f}_1(t)}{z_1(t)} \leq \mu; \quad t_n \leq t \leq \tau_n^*. \quad (6,13)$$

где $\mu = \operatorname{const} > 0$.

Оценим теперь $v_{2,n}(t)$, пользуясь интегральным уравнением

$$\begin{aligned} v_{2,n}(t) &= 2 \int_{t_n}^t \dot{f}_2(\tau) G_2(y_n(t), 1, t-\tau) d\tau + \\ &+ 2 \int_{y_n(t_n)}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \omega_{2,1}(\xi; t_n) G_2(y_n(t), \xi, t-t_n) d\xi + \\ &+ 2a^2 \int_{t_n}^t v_{2,n}(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G_2(y_n(t), y_n(\tau), t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6,14)$$

следующим из (3,2₂) и определений (5,2_i); ($i=1, \dots, 4^*$).

Повторяя буквально оценку $v_{2,1}^*$ из §4, пользуясь (6,7) и (6,13) и учитывая, что из определения (4,4) следует

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \omega_{2,1} = \dot{\varphi}(x), \quad (6,15)$$

получим оценку

$$v_{2,n}(t) \leq a_2 t^{\lambda_2} (1 + v_2^*(t)) \text{ при } t_n \leq t \leq \tau_n^*. \quad (6,16)$$

Здесь $\lim v_2^*(t) = 0$ и $v_2^* > 0$ не зависит от n ; a_2 и λ_2 определены согласно (4,1).

Оценим теперь v_{1n} снизу. Положим

$$\bar{U}_n = f_1(t) \left[1 - \frac{\operatorname{Erf} \frac{x}{2\sqrt{t}} - \operatorname{Erf}^2 \frac{y_n(t)}{2\sqrt{t}} - \operatorname{Erf}^2 \frac{x}{2\sqrt{t}}}{\operatorname{Erf} \frac{y_n(t)}{2\sqrt{t}} - 2 \operatorname{Erf} \frac{y_n(t)}{2\sqrt{t}}} \right]. \quad (6,17)$$

Мы уже отмечали, что функции этого типа суперпараболичны в некоторой окрестности $t=0$, т. е. что

$$L_1(\bar{U}_n) \leq 0 \text{ при } 0 < t_0 < \tau_n^{**}, \quad (6,18)$$

где τ_n^{**} достаточно мало. Уточним величину τ_n^{**} . Положим, для упрощения записи,

$$z = \operatorname{Erf} \frac{x}{2\sqrt{t}}; \quad \zeta = \operatorname{Erf} \frac{y_n}{2\sqrt{t}}. \quad (6,19)$$

Имеем

$$L_1(\bar{U}_n) = \frac{f_1(t)}{\zeta} \left\{ z_x^2 + \zeta_t \left[\frac{2}{\zeta} - \frac{z}{\zeta} \left(1 - \frac{z}{2} \right) \right] - \frac{\dot{f}_1(t)}{f_1(t)} \zeta \left(1 - \frac{z}{2} - \frac{\zeta^2 - z^2}{2\zeta} \right) \right\}. \quad (6,20)$$

Мажорируя $L_1(\bar{U}_n)$ с помощью (6,7) и (6,13) найдем, что

$$L_1(\bar{U}_n) \leq \frac{f_1}{\zeta} \left[e^{-\frac{z_2^2}{2t}} - \frac{\mu e^{-\frac{z_1^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - \frac{M_0}{t} \operatorname{Erf} \frac{z_2(t)}{2\sqrt{t}} \right] \equiv \Psi(t) \cdot \frac{f_1(t)}{\zeta}, \quad (6,21)$$

при $t_n < t < \tau_n^{**}$. Здесь M_0 константа, зависящая только от \dot{f}_1 и f_1 .

Пусть $T_1 > 0$ наибольшее из тех t , для которых $\Psi(t) \geq 0$. Положим

$$\tau_n^{**} = \min(\tau_n^*, T_1). \quad (6,22)$$

Из $L_1(U_n) \leq 0$; $L_1(U_{1,n}) = 0$, краевых условий, определяющих $U_{1,n}$, и принципа максимума следует, что при $t_n \leq t \leq \tau_n^{**}$

$$\begin{aligned} v_{1,n}(t) &\equiv \frac{\partial}{\partial x} u_{1,n}(y_n(t), t) \geq \frac{\partial}{\partial x} \bar{U}_n(y_n(t), t) = \\ &= -\frac{f_1(t)}{\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-\frac{y_n^2(t)}{4t}}}{\operatorname{Erf} \frac{y_n(t)}{2\sqrt{t}}} \left(1 - \operatorname{Erf} \frac{y_n(t)}{2\sqrt{t}} \right). \end{aligned} \quad (6,23)$$

Усиливая это неравенство с помощью (6,7) найдем

$$v_{1,n}(t) \geq -\frac{f_1(t)}{z_2(t)} \left(1 - \frac{z_2(t)}{\sqrt{\pi t}} \right) \left(1 - \frac{z_2^2(t)}{4t} \right) \text{ при } t_n \leq t \leq \tau_n^{**}. \quad (6,24)$$

Пользуясь определениями (4,3_i); ($i=1, 2, 3$) и (4,1) найдем отсюда, что

$$v_{1,n} \geq \alpha_1 t^{\lambda_1} (1 - v_1^*(t)) \text{ при } t_n \leq t \leq \tau_n^{**}, \quad (6,25)$$

где $\lim_{t \rightarrow 0} v_1^*(t) = 0$ и $v_1^* > 0$ не зависит от n .

Сопоставляя (6,25), (6,16) и (5,2₄) найдем, что при $t_n \leq t \leq \tau_n^{**}$

$$\dot{y}_n(t) \geq \alpha_1 t^{\lambda_1} (1 - v_1^*(t)) - \alpha_2 t^{\lambda_2} (1 + v_2^*(t)) \equiv \Psi^*(t). \quad (6,26)$$

Поскольку $\lambda_1 \leq \lambda_2$; $\alpha_1 > \alpha_2$ при $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\lim_{t \rightarrow 0} v_i^* = 0$; ($i=1, 2$), видим, что существует $T_2 > 0$, независящее от n , такое, что

$$t^{-\lambda_1} \Psi^*(t) \geq \beta > 0 \text{ при } 0 \leq t \leq T_2. \quad (6,27)$$

Очевидно, что при любом n

$$\bar{T}^* = \min(T_1; T_2) \leq \tau_n^{**}. \quad (6,28)$$

Действительно, допустим противное. Тогда найдется n такое, что $\tau_n^* < \bar{T}^*$. Пусть $\varepsilon < \beta$. Из определения τ_n^* следует, что существует $\tau < \tau_n^*$ такое, что

$$\tau^{-\lambda_1} \dot{y}_n(\tau) < \varepsilon. \quad (6,29)$$

С другой стороны из определений T_1 и T_2 следует, что

$$\tau^{-\lambda_1} \dot{y}_n(\tau) \geq \beta, \quad (6,30)$$

что противоречит (6,29). Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Итак

$$\bar{T}^* = \min(T_1, T_2) \leq \tau_n^{**}. \quad (6,31)$$

Поскольку T_1 и T_2 не зависят от n и $\tau_n^{**} = \min(\tau_n^*, T_1)$ это означает, что

$$T^* = \inf(\tau_n^*) \geq \bar{T}^* \quad (6,32)$$

Отсюда и из определения τ_n^* следует, что оценка (6,13) выполняется на интервале, независимом от n , т. е. что последовательность $\{v_{1n}\}$ равномерно ограничена. Вместе с тем из того, что на этом интервале $\dot{y}_n > 0$, и из условия Стефана (5,2₄) следует равномерная ограниченность $\{v_{2n}\}$ и $\{\dot{y}_n\}$.

Из равномерной ограниченности $\{v_{i,n}\}$ и $\{\dot{y}_n\}$ при $t \geq t_n$ и из леммы 3 следует, так же как в § 3, что $\{v_{i,n}\}$ и $\{\dot{y}_n\}$ равномерно удовлетворяют условию Гельдера порядка $1/2$, что доказывает равностепенную непрерывность $\{v_{i,n}\}$ ($i=1,2$) и $\{\dot{y}_n\}$. Итак лемма 4 доказана. Замечая, что лемма 5 является очевидным следствием оценок (6,7) и (6,13) завершим доказательство теоремы 3*.

В заключение сделаем последнее замечание. При доказательстве теоремы 3 мы сослались на теорему единственности обобщенного решения задачи Стефана. Однако методы, развитые выше, позволяют установить теорему единственности решения задачи «А» непосредственно, без ссылок на теорию обобщенного решения задачи. Такое доказательство было дано нами ранее [15]. Поскольку, после опубликования результата Каменомостской, вопрос о доказательстве теоремы единственности имеет только методический интерес, мы на нем не останавливаемся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Каменомостская. О задаче Стефана. Научные доклады Высшей Школы. Физ.-мат. науки, № 1, 1958.
2. О. А. Олейник. Об одном методе решения общей задачи Стефана. ДАН СССР, т. 135, № 5, 1960.
3. A. Friedman. Remarks on Stefan type Free Boundary Problems for Parabolic Equations. J. Math. and Mech. vol 9, N 6, 1960.
4. A. Friedman. Free Boundary Problems for Parabolic Equations. I. Melting of Solids. J. Math. and Mech. vol 8; N 4; 1959. II Evaporation or Condensation of a Liqueid; J. Math. and Mech. vol. 9. N 1; 1960. III Dissolution of a Gas Bubble in Liquid. J. Math. and Mech. vol. 9; N 3; 1960.
5. Л. И. Рубинштейн. Об асимптотическом поведении границы раздела фаз в одномерной задаче Стефана. ДАН СССР, т. 77, № 1, 1951.
6. Л. И. Рубинштейн. К вопросу о существовании решения задачи Стефана; ДАН СССР, т. 57, № 2, 1948.
7. Л. И. Рубинштейн. О некоторых нелинейных задачах, порожаемых уравнением Фурье. Диссертация, МГУ, 1957.
8. Л. И. Рубинштейн. Об одном варианте одномерной задачи Стефана с усиленной нелинейностью. Уч. зап. Латв. гос. унив. им. П. Стучки, т. 47, 1963. Труды вычислительного центра, вып. 1.
9. Л. И. Рубинштейн. Об определении положения границы раздела двух малосжимаемых жидкостей, фильтрующихся через деформируемую пористую среду. Труды Уфимского нефтяного института, вып. 1, 1956.
10. J. Petrowsky. Zur ersten Randvertaufgabe der Wärmeleitungs-gleichung. Comp. Math. vol. 1. 1935.
11. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. ОНТИ НКТП, 1937.
12. Э. Гурса. Курс математического анализа, т. 3, ч. 1, ГТТИ, 1933.
13. А. Н. Тихонов. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных. Бюлл. МГУ, сек. А, т. 1, вып. 9, 1938.
14. Л. И. Рубинштейн. О начальной скорости продвижения фронта кристаллизации в одномерной задаче Стефана. ДАН СССР, т. 62, № 6, 1948.
15. Л. И. Рубинштейн. К вопросу об единственности решения одномерной задачи Стефана в случае однофазного начального состояния теплопроводящей среды. ДАН СССР, т. 117, № 3, 1957.

Л. И. Рубинштейн

ДВУХФАЗНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА НА ОТРЕЗКЕ ПРИ ОДНОФАЗНОМ НАЧАЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ

Аннотация

Рассматривается одномерная двухфазная задача Стефана на отрезке при однофазном начальном состоянии теплопроводящей среды. При некоторых, дополнительных к обычным, предположениях о характере краевых и начальных распределений температур устанавливается существование классического решения задачи «в большом» и изучается его асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$.

L. I. Rubinstein

**THE TWO — PHASE STEFAN PROBLEM ON A SEGMENT
WITH ONE-PHASE INITIAL STATE OF
THERMOCONDUCTIVE MEDIUM.**

The one — dimensional Stefan problem on a segment is considered. It is assumed that there is a two — phase state of the thermoconductive medium which degenerates to a one — phase state at the initial moment.

If, in addition to the useful ones, some additional assumption are made on the nature of initial and boundary temperature distribution, the existence «in large» of a classical solution of the problem is established and the asymptotical behaviour of it at $t \rightarrow \infty$ is considered.

Л. И. Рубинштейн

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ИСПАРЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПОЛИКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОЙ СМЕСИ

Задачи, трактующие вопросы динамики фазовых переходов, могут быть разбиты на две группы. К первой группе задач могут быть отнесены задачи типа классической задачи Стефана, состоящие в определении положения и формы границы раздела фаз. Этот тип задач наиболее характерен для случаев фазовых переходов в монокомпонентной среде. Ко второй группе задач могут быть отнесены задачи определения состава реагирующей системы. Вопрос этот, возникающий при изучении фазовых переходов в поликомпонентной среде, выдвигается на первый план тогда, когда скорость продвижения границы раздела фаз мала, сравнительно со скоростью изменения состава системы. В чистом виде этот случай осуществляется при испарении поликомпонентных жидких смесей с нелетучим растворителем.

Обычно при анализе процесса испарения предполагают допустимость использования условия квазистационарности. Это условие, в применении к процессу испарения монокомпонентных жидкостей, состоит в допущении, что скорость процесса определяется стационарным кинетическим уравнением

$$\frac{dm}{dt} = \beta(c_m - c_\infty)$$

Здесь $\frac{dm}{dt}$ число молей, испаряющихся с единицы поверхности в единицу времени, c_m — молярная концентрация насыщенного пара и c_∞ — концентрация его на бесконечно большом расстоянии от поверхности испарения.

Величина кинетического коэффициента β определялась при различных условиях обтекания поверхности испарения по аналогии с процессом теплопередачи, которому посвящены многочисленные исследования.*)

В отличие от испарения монокомпонентных жидкостей испарение растворов складывается из двух конвективно-диффузионных процессов: конвективно-диффузионного переноса пара каждого компонента в газовой фазе и конвективно-диффузионного перераспределения концентраций в жидкой фазе.

Пусть, например, рассматривается разбавленная $n+1$ — компонентная жидкая смесь с нелетучим растворителем. Процесс испарения будем считать квазистационарным и распределение концентраций в диффузионных слоях в жидкой и газовой фазах — линейным. Если тогда $c_i(t)$ означает молярную концентрацию i компонента в жидкой фазе вне диффузионного пограничного слоя, $c_{io}(t)$ предельные значения его концентрации на поверхности испарения со стороны жидкой фазы, c_{mi}^o — концентрацию насыщенного пара над i компонентом в жидкой фазе и h глубину испаряющегося слоя, то тогда

$$\frac{dc_i}{dt} = -\frac{\beta_i}{h} (c_i - c_{io}); \quad \frac{dc_i}{dt} = -\frac{\beta_{io}}{h} c_{mi}^o \frac{c_{io}}{c_i}$$

Здесь c_0 означает молярную концентрацию растворителя и c_i/c_0 молярную дробь i — компонента в жидкой фазе. Концентрация пара на бесконечности принята равной нулю. Кинетические коэффициенты β_i и β_{io} считаем заданными функциями коэффициентов диффузии, вязкости, скорости обтекания поверхности испарения и глубины испаряющегося слоя.

Интеграция дает

$$c_i(t) = c_i(0) \exp -\frac{\beta_{io} c_{mi}^o}{hc_0} \cdot \frac{t}{1 + \frac{\beta_{io} c_{mi}^o}{\beta_i c_0}}$$

Мы видим таким образом, что если $\beta_{io} c_{mi}^o \gg \beta_i c_0$, то скорость испарения лимитируется условиями перераспределения концентрацией в жидкой фазе. Если же $\beta_{io} c_{mi}^o \ll \beta_i c_0$, то определяющим будет процесс переноса пара в атмосфере. В общем же случае процесс испарения определяется условиями перераспределения концентраций как в жидкой, так и в газовой фазах.

*) Сводка относящихся сюда результатов дана в монографиях Д. А. Франк-Каменецкого [1] и В. Г. Левича [2], см. также [3].

Ниже рассматривается тот случай, когда процесс испарения определяется условиями переноса паров. Заметим, что он может быть осуществлен при наличии интенсивного перемешивания жидкой фазы, в сочетании с чисто диффузионным (бесконвективным) переносом пара каждого компонента в газовой фазе. Будем предполагать, что имеют место именно такие условия. Именно, рассмотрим испарение разбавленной поликомпонентной жидкой смеси с нелетучим растворителем в предположении, что:

1. Испарение происходит в открытую атмосферу чисто диффузионным путем, без конвекции.
2. Во все время течения процесса сохраняется пространственная однородность жидкой фазы.
3. Количество подводимого к поверхности испарения тепла обеспечивает изотермичность процесса.
4. Мощность испаряющегося слоя мала сравнительно с линейными размерами поверхности испарения.

Последнее допущение позволяет пренебречь отличием изменяющейся во времени и потому неизвестной и подлежащей определению поверхности испарения от ее прообраза в начальный момент времени. Тем самым задача об испарении, являющаяся в точной постановке модификацией классической задачи Стефана [4], сводится к смешанной краевой задаче в области с неизменяющимися границами и потому может решаться сведением к системе интегральных уравнений обычными методами.

Постановке и решению задачи в такой приближенной трактовке мы предпосылаем точную постановку задачи. Это представляется полезным, так как вопросы динамики испарения поликомпонентных систем в литературе освещены весьма слабо.

§ 1. Пусть дана $n+1$ — компонентная, пространственно однородная жидкая смесь состава $N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_n = 1$. Здесь N_i означает молярную дробь i — компонента. Число компонентов в паровой фазе считаем равным числу компонентов в жидкой фазе, т. е. предполагаем исключенными явления диссоциации или ассоциации в обеих фазах.

Процесс испарения считаем протекающим изотермически в открытую атмосферу, чисто диффузионным путем, без конвекции. Задача состоит в определении состава жидкой фазы и количества испарившейся жидкости по известным начальному составу жидкой фазы, концентрации пара каждого компонента в атмосфере и положению поверхности испарения.

Обозначим через c_i молярную концентрацию пара i компонента, через c_{mi} его равновесную концентрацию над раствором состава $N_0 + N_1 + \dots + N_n = 1$ и через c_{mi}^0 концентрацию на-

сыщенного пара над i — компонентом в жидкой фазе при температуре поверхности испарения.

Считаем, что пар каждого из компонентов следует уравнению состояния идеального газа. В таком случае, в силу закона Рауля

$$c_{mi} = c_{mi}^0 N_i; \quad (i=0, 1, 2, \dots, n), \quad (1,1)$$

Пусть испаряющаяся жидкость заполняет цилиндрический сосуд

$$-z_0 \leq z \leq 0; \quad (x, y) \subset \sigma. \quad (1,2)$$

Обозначим через M_t некоторую точку поверхности испарения Σ_t

$$z = \zeta(x, y, t) \quad (x, y) \subset \sigma \quad (1,3)$$

и через $h_M(t)$ глубину испаряющегося слоя в точке M_t . Пусть $n_i(M, t)$ — число молей i — компонента в столбе раствора единичного сечения и глубины $h_M(t)$. Тогда, если α_M угол между нормалью n к Σ_t , внешней по отношению к области, заполненной жидкой фазой, и осью z , то

$$-\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\frac{D_i}{\cos \alpha_M} \frac{\partial c_i}{\partial n}; \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (1,4)$$

Здесь D_i коэффициент диффузии пара i компонента. Так как

$$\cos \alpha_M = \left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial n} = \left[-\frac{\partial c_i}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial c_i}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial c_i}{\partial z} \right] \left[1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}},$$

то условия (1,4) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = D_i \left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right] c_i \Big|_{(x, y) \subset \sigma; z = \zeta}. \quad (1,5)$$

Будем предполагать, что при образовании жидкой фазы из отдельных компонентов имеет место аддитивность объемов. Пусть M_i и d_i молярный вес и плотность i компонента в жидкой фазе. В таком случае

$$h_M(t) = h_0 + \zeta(x, y, t) = \sum_{i=0}^n \frac{M_i}{d_i} n_i(M, t) \quad (1,6)$$

Из (1,5) и (1,6) следует, что при $z = \zeta$ и $(x, y) \subset \sigma$

$$\frac{\partial h_M}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \sum_{i=0}^n \frac{D_i M_i}{d_i} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) c_i \quad (1,7)$$

Помимо условия (1,7) на поверхности испарения должно выполняться условие равенства концентраций равновесным концентрациям c_{mi} . (1,1) дает

$$c_i \Big|_{z=\zeta; (x, y) \subset \sigma} = c_{mi}^0 N_i(t). \quad (1,8)$$

Будем считать плоскость $z=0$ вне площадки σ твердой поверхностью. Тогда область G_t , заполненная паровой фазой, определится неравенствами

$$z > 0 \text{ при } (x, y) \notin \sigma; \quad \zeta(x, y, t) < z < \infty \text{ при } (x, y) \subset \sigma. \quad (1,9)$$

В силу предположения о бесконвективном характере распределения пара в атмосфере, в области G_t должны выполняться уравнения Фика

$$D_i \Delta c_i = \frac{\partial c_i}{\partial t}; \quad (x, y, z) \in G_t; \quad t > 0 \quad (1,10)$$

На твердых границах области, заполненной паром, поток вещества равен нулю, так что

$$\frac{\partial c_i}{\partial z} \Big|_{z=0; (x, y) \notin \sigma} = 0; \quad \frac{\partial c_i}{\partial n} \Big|_{\zeta < z < 0; (x, y) \subset \bar{\sigma} - \sigma} = 0. \quad (1,11)$$

Система (1,5), (1,7), (1,9) — (1,11) замыкается заданием начальных условий. Примем

$$\zeta(x, y, 0) = 0; \quad n_i(M_{i0}) = n_{i0} = \text{const}; \quad c_i(x, y, z, 0) = 0. \quad (1,12)$$

Такова точная постановка задачи. Точное ее решение можно было бы пытаться построить, обобщая методы, предложенные для решения одномерной задачи Стефана. Однако на этом пути, связанном с преодолением фундаментальных трудностей, вряд ли можно рассчитывать на получение обозримых выражений для состава и глубины испаряющегося слоя, что составляет основное содержание задачи. Ввиду этого мы отказываемся от анализа задачи в ее точной постановке, но упрощаем ее исходя из допущения, что во все время течения процесса поверхность испарения $z = \zeta(x, y, t)$ мало отличается от площадки σ плоскости $z=0$. Это дает основание пренебречь влиянием твердых стенок сосуда, заключающего раствор, и, сверх того, снести зада-

ния (1,5) и (1,9) с поверхности испарения на площадку σ плоскости $z=0$. При таком подходе область G обратится в полупространство $z>0$, условия (1,11) перейдут в условия

$$\left. \frac{\partial c_i}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad (x, y) \in \sigma \quad (1,13)$$

и условия (1,5) и (1,9) — в условия

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = D_i \left. \frac{\partial c_i}{\partial z} \right|_{z=0}; \quad c_i \Big|_{z=0} = c_{mi}^0 N_i \text{ при } (x, y) \in \sigma. \quad (1,14)$$

Заметим, что по определению

$$N_i(t) = \frac{n_i(M, t)}{\sum_{i=0}^n n_i(M, t)}. \quad (1,14^*)$$

Наконец, условие (1,7) примет вид

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \sum_{i=0}^n \frac{D_i M_i}{d_i} \left(\frac{\partial c_i}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial c_i}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) \right|_{z=0} (x, y) \in \sigma \quad (1,15)$$

Это последнее условие является, таким образом приближенным условием, служащим для определения положения и формы поверхности испарения.

Заметим, что система уравнений (1,10), (1,12)—(1,14) не зависит от условия (1,15). Таким образом задача разделяется на две задачи: определение числа молей $n_i(M, t)$ каждого компонента в жидкой фазе, с одной стороны, и определение формы и положения поверхности испарения, с другой стороны. Эта вторая задача сводится к решению задачи Коши для линейного уравнения (1,15) после того, как определены c_i и их производные при $z=0$ и $(x, y) \in \sigma$, т. е. после того, как решена первая задача. Отметим, что отнесение краевых условий со свободной поверхности на мало отличающийся от нее прообраз ее в начальный момент является приемом обычным в вопросах, подобных изучаемых нами. Этим приемом, не формулируя его явно, пользовался, в частности, Л. С. Лейбензон в его известной работе об испарении капли [3].

§ 2. Итак, требуется решение задачи:

$$D_i \Delta c_i = \frac{\partial c_i}{\partial t}; \quad z > 0; \quad -\infty < x, y < \infty; \quad t > 0; \quad (2,1)$$

$$c_i \Big|_{t=0} = 0; \frac{\partial c_i}{\partial z} \Big|_{z=0; (x,y) \in \sigma} = 0; \quad c_i \Big|_{z=0; (x,y) \in \sigma} = c_{mi}^0 N_i \quad (2,1_2)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial c_i}{\partial z} \Big|_{(x,y) \in \sigma; z=a}; \quad n_i \Big|_{t=0} = n_{i0}. \quad (2,1_3)$$

Пусть g_i функция Грина второй краевой задачи уравнения (3,2) для полуплоскости $z > 0$. В таком случае из условия (2,1) следует, что

$$c_i = -D_i \int_0^t d\tau \int_{\sigma} v_i g_i \Big|_{\zeta=0} d\sigma. \quad (2,2)$$

Здесь введено обозначение

$$v_i = \frac{\partial c_i}{\partial z} \Big|_{z=0; (x,y) \in \sigma} \quad (2,2^*)$$

Переходя в (2,2) к пределу при $z \rightarrow 0$ и $(x, y) \in \sigma$ и учитывая (2,1₂) найдем

$$c_{mi}^0 N_i = -D_i \int_0^t d\tau \int_{\sigma} v_i g_i \Big|_{z=\zeta=0} d\sigma. \quad (2,4)$$

Уравнение (2,4) разрешим относительно v_i обычным методом. Именно, заменим в нем t на s , умножим на $(t-s)^{-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем. Найдем

$$c_{mi}^0 \int_0^t \frac{N_i ds}{\sqrt{t-s}} = -D_i \int_0^t d\tau \int_{\sigma} v_i d\xi d\eta \int_{\zeta}^t g_i \Big|_{z=\xi=0} \frac{ds}{\sqrt{t-s}}. \quad (2,5)$$

Как известно

$$g_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = E(x-\xi, D_i t) E(y-\eta, D_i t) [E(z-\zeta, D_i t) + E(z+\zeta, D_i t)] \quad (2,6)$$

Здесь

$$E(x, t) = \exp\left(-\frac{x^2}{4t^2}\right) (2\sqrt{\pi t})^{-1}. \quad (2,7)$$

Положим

$$I_i = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\tau}^t E(r, D_i(s-\tau)) \frac{ds}{(s-\tau)\sqrt{t-s}} \quad (2,8)$$

Замена переменных

$$\frac{r^2}{4D_i} \left(\frac{1}{s-\tau} - \frac{1}{t-\tau} \right) = \alpha^2$$

приведет I_i к виду

$$I_i = \frac{2E(r, D_i(t-\tau))}{\pi r} \sqrt{D_i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} = \frac{E(r, D_i(t-\tau))}{r}. \quad (2,9)$$

Полагая

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \quad (2,10)$$

и учитывая (2,6) — (2,9) найдем, что (2,5) равносильно

$$c_{mi}^o \int_0^t \frac{N_i ds}{\sqrt{t-s}} = -\sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{\sigma} v_i E(r, D_i(t-\tau)) \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (2,11)$$

Введем полярные координаты (r, φ) с центром в точке $r=0$, считая, что она расположена внутри площадки σ . Найдем

$$I_i = \int_{\sigma} v_i E(r, D_i(t-\tau)) \frac{d\xi d\eta}{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(\varphi)} v_i E(r, D_i(t-\tau)) dr. \quad (2,12)$$

Здесь $r=R(\varphi)$ уравнение границы площадки σ в выбранной системе координат.

В силу определения (2,7) внутренний интеграл в правой части (2,12) есть интеграл Пуассона. Следовательно, при v_i непрерывной при $t>0$

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \bar{I}_i = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} v_i \Big|_{r=0, \tau=t} d\varphi = \pi v_i(x, y, t). \quad (2,13)$$

Пользуясь этим найдем из (2,11), что

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{mi}^o \int_0^t \frac{N_i ds}{\sqrt{t-s}} = -\sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \left[\pi v_i(x, y, t) + \int_0^t \frac{\partial I_i}{\partial t} d\tau \right] \quad (2,14)$$

В силу (2,12) имеем

$$\int_0^t \frac{\partial \bar{I}_i}{\partial t} d\tau = - \int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\varphi)} v_i \frac{\partial}{\partial \tau} E(r, D_i(t-\tau)) d\tau. \quad (2,15)$$

С другой стороны

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{mi}^o \int_0^{\bar{t}} N_i \frac{ds}{\sqrt{t-s}} = -c_{mi}^o \frac{N_{i0}}{\sqrt{t}} - c_{mi}^o \int_0^{\bar{t}} \frac{dN_i}{ds} \cdot \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \quad (2,16)$$

Здесь

$$N_{i0} = N_i(0). \quad (2,16^*)$$

Пользуясь условием (2,13) и определением (1,14) найдем

$$\frac{dN}{ds} = \frac{D_i v_i \sum_{i=0}^n \left(n_{j0} + D_j \int_0^s v_j ds \right) - \left(n_{i0} + D_i \int_0^s v_i ds \right) \sum_{j=0}^n D_j v_j}{\left[\sum_{j=0}^n \left(n_{j0} + D_j \int_0^s v_j ds \right) \right]^2} \equiv (F_j v_i) \quad (2,17)$$

Внося (2,15) — (2,17) в (2,14) получим

$$-\frac{c_{mi} N_{i0}}{\sqrt{t}} - c_{mi}^o \int_0^{\bar{t}} F_i(v_i) \frac{ds}{\sqrt{t-s}} = \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \left[\pi v_i - \int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\varphi)} v_i \frac{\partial}{\partial \tau} E(r, D_i(t-\tau)) dr \right]$$

Разрешая это равенство относительно V_i найдем окончательно

$$v_i = -\frac{c_{mi}^o N_{io}}{\sqrt{\pi D_i t}} - \frac{c_{mi}^o}{\sqrt{\pi D_i}} \int_0^t F_i(v_i) \frac{ds}{\sqrt{t-s}} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^t \partial\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R(\varphi)} v_i \frac{\partial}{\partial\tau} E(r, D_i(t-\tau)) dr. \quad (2,18)$$

Напомним, что здесь $r=R(\varphi)$ — уравнение границы в полярных координатах с центром в точке $(x, y) \in \delta$.

Система (2,18) получена формальным дифференцированием равенств (2,11). Легко видеть, что если $v_i = t^{-\frac{1}{2}} \omega_i$ где ω удовлетворяет условию Гельдера по r , то последний интеграл в правой части (2,18) сходится равномерно, т. е. произведенное формальное дифференцирование законно. Система (2,18) является таким образом, системой сингулярных уравнений Вольтерровского типа и ее можно было бы решать, используя результаты Е. И. Кима [5], либо каким либо другим численным методом.

§ 3. Будем в дальнейшем рассматривать испарение разбавленного раствора с нелетучим растворителем, к которому отнесем индекс $i=0$. Из допущения нелетучести растворителя и разбавленности раствора следует

$$n_o = \text{const}; N_i = \frac{n_i}{n_o}. \quad (3,1)$$

Из (3,1) и равенств $F_i = \frac{\partial N_i}{\partial s}$ следует, что в рассматриваемом случае

$$F_i = \frac{1}{n_o} \frac{\partial n_i}{\partial s} = \frac{D_i v_i}{n_i}. \quad (3,2)$$

Внося (3,2) в (2,18) и замечая, что

$$2 \frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{zE}{t-\tau} \right),$$

найдем

$$v_i = -\frac{c_{mi}^o N_{io}}{\sqrt{\pi D_i t}} - \frac{c_{mi}^o \sqrt{D_i}}{n_i \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v_i ds}{\sqrt{t-s}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \frac{v_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rE}{t-\tau} \right) d\sigma. \quad (3,3)$$

Таким образом система (2,18) распалась при ее линеаризации на n независимых друг от друга интегральных уравнений одного и того же вида.

Получение точного решения уравнений (3,3) в аналитически замкнутой форме вряд ли возможно. Однако для приложений достаточно следующего приближения. Пусть w_i среднее значение v_i по площадке σ :

$$w_i = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} v_i dx dy. \quad (3,4)$$

Интегрируя (3,3) по площадке σ и учитывая (3,4) найдем

$$w_i = - \frac{c_{mi}^{\circ} N_{i0}}{\sqrt{\pi D_i t}} - \frac{c_{mi}^{\circ} \sqrt{D_i}}{n_o \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{w_i ds}{\sqrt{t-s}} + \\ + \frac{1}{2\pi\sigma} \int_0^t d\tau \int_{\sigma} v_i d\xi d\eta \int_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rE}{t-s} \right) dx dy.$$

Вводя полярные координаты с центром в точке $(\xi, \eta) \in \sigma$ получим

$$w_i = - \frac{c_{mi}^{\circ} N_{i0}}{\sqrt{\pi D_i t}} - \frac{c_{mi}^{\circ} \sqrt{D_i}}{n_o \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{w_i ds}{\sqrt{t-s}} + \\ + \frac{1}{2\pi\sigma} \int_0^t d\tau \int_{\sigma} v_i d\xi d\eta \int_0^{2\pi} R(\varphi) E(R(\varphi), D_i(t-\tau)) \frac{d\varphi}{t-\tau} \quad (3,5)$$

Здесь $r=R(\varphi)$ уравнение границы в выбранной системе координат. В силу знакопостоянства v_i и $R(\varphi)$ к последнему интегралу применима теорема о среднем. Учитывая (3,4) найдем

$$w_i = - \frac{c_{mi}^{\circ} N_{i0}}{\sqrt{\pi D_i t}} - \frac{c_{mi}^{\circ} \sqrt{D_i}}{n_o \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{w_i ds}{\sqrt{t-s}} + \int_0^t w_i \bar{R} E(\bar{R}, D_i t - \tau) \frac{d\tau}{t-\tau}. \quad (3,6)$$

Здесь \bar{R} некий «средний радиус площади испарения», зависящий, вообще говоря, от величин w_i , t и от формы поверхности испарения. Для получения приближенного решения задачи фиксируем «средний радиус поверхности испарения» \bar{R} на основа-

нии каких либо дополнительных соображений. Можно, например, задаться интервалом $[0, T]$ изменения времени и определить на нем \bar{R} посредством равенства

$$2 \operatorname{Erfc} \frac{\bar{R}}{2\sqrt{D_i \tau}} = \frac{1}{\sigma} \int_0^T d\tau \int_0^\sigma d\sigma \int_0^{2\pi} R(\varphi) E(R(\varphi) D_i \tau) \frac{d\varphi}{\tau}. \quad (3,7)$$

Основанием к этому служит то, что при не слишком большой величине площадки σ величина v_i в любой точке σ будет мало отличаться от ее среднего значения w_i . Заметим, что при таком способе определения средний радиус испарения зависит от индекса i .

Итак считаем $\bar{R} = \bar{R}_i$ фиксированным, зависящим, вообще говоря от индекса i . Введем в (3,6) безразмерное время, положив

$$t_i = \frac{D_i t}{\bar{R}_i^2}. \quad (3,8)$$

Опуская всюду индекс i и учитывая (2,7) найдем

$$w = -\frac{a}{\sqrt{\pi t}} - \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{w ds}{\sqrt{t-s}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{w e^{-\frac{1}{4}(t-\tau)}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \quad (3,9)$$

Здесь введены обозначения

$$c_i = \frac{c_{mi}^0 N_{i0}}{\bar{R}_i}; \quad b_i = \frac{c_{mi}^0 \bar{R}_i}{n_i}. \quad (3,10)$$

Уравнение (3,9) решаем пользуясь операционным методом. Пусть \div означает знак соответствия между оригиналом и изображением в преобразовании Лапласа-Карсона. Положим

$$f(p) \div w(t); \quad \varphi(p) = \frac{f(p)}{p} \div \int_0^t w(\tau) d\tau. \quad (3,11)$$

Подвергая (3,9) преобразованию Лапласа-Карсона найдем

$$f(p) = -a\sqrt{p} - \frac{bf(p)}{p} + f(p)e^{-\sqrt{p}}.$$

Отсюда и из (3,11) следует, что

$$\Phi(p) = - \frac{a}{b + \sqrt{p(1 - \epsilon^{-\sqrt{p}})}}. \quad (3,12)$$

Положим

$$\Phi(p) = - \frac{a}{b + p(1 - e^{-p})}; \quad u(t) \div \Phi(p). \quad (3,13)$$

Найдем (6)

$$\int_0^t w \, d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(s) \, ds. \quad (3,14)$$

§ 4. Таким образом для построения приближенного решения задачи нужно осуществить реализацию оператора $\Phi(p)$. С этой целью исследуем полюсы $\Phi(p)$. Они являются корнями уравнения

$$\psi(p) = p(1 - e^{-p}) + b = 0. \quad (4,1)$$

Положим

$$p = x + iy$$

Найдем

$$\begin{aligned} Re \psi &= x(1 - e^{-x} \cos y) - ye^{-x} \sin y + b; \\ Im \psi &= y(1 - e^{-x} \cos y) + xe^{-x} \sin y. \end{aligned} \quad (4,2)$$

Пусть $p = x + iy$ — корень уравнения $\psi = 0$. Разрешая равенства $Re \psi = Im \psi = 0$ относительно $1 - e^{-x} \cos y$ и $e^{-x} \sin y$ найдем, что в точке (x, y)

$$e^{-x} \cos y = \frac{x^2 + y^2 + bx}{x^2 + y^2}; \quad e^{-x} \sin y = \frac{by}{x^2 + y^2} \quad (4,3)$$

Отсюда следует, что

$$x = -\frac{b}{2} \sqrt{\frac{b^2}{4} + by \operatorname{ctg} y - y^2} \equiv -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2} - y \operatorname{tg} \frac{y}{2}\right) \left(\frac{b}{2} + y \operatorname{ctg} \frac{y}{2}\right)}. \quad (4,4)$$

Для того, чтобы x было действительно необходимо совместное выполнение неравенств

$$b < 2y \operatorname{tg} \frac{y}{2}; \quad b < -2y \operatorname{ctg} \frac{y}{2}, \quad (4,5_1)$$

либо

$$b \geq 2y \operatorname{tg} \frac{y}{2}; \quad b \geq -2y \operatorname{ctg} \frac{y}{2}. \quad (4,5_2)$$

Неравенства (4,5₁) несовместимы. Неравенства (4,5₂) выполняются на интервалах

$$k\pi < y < y_k < (k+1)\pi. \quad (4,6)$$

Здесь y_k корень уравнения

$$2y_{2k} \operatorname{tg} \frac{y_{2k}}{2} = b; \quad 2y_{2k+1} \operatorname{ctg} \frac{y_{2k+1}}{2} = -b. \quad (4,7)$$

Из второго из уравнений (4,3) следует, что если

$$(2k+1)\pi < y < 2(k+1)\pi \quad (k \geq 0)$$

и x определен посредством (4,4), то $p = x + iy$ не является корнем уравнения $\psi(p) = 0$. Итак, если (x, y) корень $\psi = 0$, то

$$2k\pi < y < y_{2k} \quad \left(b = 2y_{2k} \operatorname{tg} \frac{y_{2k}}{2} \right). \quad (4,8)$$

Заметим, что если $x < \left(-\infty, -\frac{b}{2} \right)$, то перед радикалом в (4,4) надлежит брать знак минус, и если $x \in \left(-\frac{b}{2}, \infty \right)$ — то знак плюс.

Покажем, что корни уравнения $\psi = 0$ расположены внутри полосы $-\frac{b}{2} < x < 0$. Действительно, второе из уравнений (4,3) равносильно уравнению

$$e^{-x} = \frac{by}{(x^2 + y^2) \sin y}. \quad (4,9)$$

Пусть $-\infty < x < -\frac{b}{2}$. Тогда e^{-x} изменяется в пределах

$$1 < e^{\frac{b}{2}} < e^{-x} < \infty. \quad (4,10)$$

В то же время в этой области

$$\begin{aligned} & \frac{by}{(x^2+y^2)\sin y} \leq \\ & \leq \frac{y}{\frac{b}{2}\sin y + y\cos y + \sqrt{\frac{b^2}{4}\sin^2 y + by\cos y\sin y - y^2\sin^2 y}} \leq \\ & \leq \frac{y}{\frac{b}{2}\sin y + y\cos y} \end{aligned}$$

Но в силу (4,5) при $y > 0$

$$\frac{b}{2}\sin y + y\cos y \geq \left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} \sin y + \cos y \right) y = y$$

Таким образом, при $-\infty < x < -\frac{b}{2}$

$$\frac{by}{(x^2+y^2)\sin y} \leq 1. \quad (4,11)$$

Но это и доказывает, в силу (4,10), невозможность нахождения корня уравнения $\psi = 0$ в полуплоскости $-\infty < x < -\frac{b}{2}$.

Пусть теперь $x > 0$. В этом случае

$$0 < e^{-x} < 1 \quad (4,12)$$

В то же время при $x > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{by}{(x^2+y^2)\sin y} = \\ & = \frac{y}{\frac{b}{2}\sin y + y\cos y - \sqrt{\frac{b^2}{4}\sin^2 y + by\cos y\sin y - y^2\sin^2 y}} \geq \\ & \geq \frac{1}{\cos y} > 1^* \end{aligned} \quad (4,13)$$

Сравнение (4,12), (4,13) и (4,9) снова показывает, что корни уравнения $\psi(p) = 0$ не могут находиться в правой полуплоскости.

*) Заметим, что если $u \in (2k\pi, u_{2n})$ и $x > 0$, то $\cos u > 0$. Мы всюду считаем $y > 0$, ибо если $p = x + iy$ корень уравнения $\psi = 0$, то $p = x - iy$ также корень этого уравнения.

Существование корней уравнения $\psi(p) = 0$ в каждом прямоугольнике $2k\pi < y < y_{2k}$; $-\frac{b}{2} < x < 0$; ($k=0, 1, 2, \dots$) следует из непрерывности e^{-x} и $by/(x^2+y^2)\sin y$ и доказанных выше неравенств (4,10) — (4,13).

Покажем теперь, что в каждой полосе $2k\pi < y < y_{2k}$ расположено не более одного нуля $\psi(p)$. С этой целью рассмотрим

$$f(y) = \frac{(x^2+y^2)\sin y}{by}. \quad (4,14)$$

Имеем

$$\frac{df}{dy} = \frac{(x^2+y^2)(y \cos y - \sin y) + 2y \sin y \left(x \frac{dx}{dy} + y \right)}{b y^2}. \quad (4,15)$$

Но в силу (4,4)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{b \operatorname{ctg} y - y \sin^{-2} y - 2y}{2x+b}. \quad (4,15)$$

Следовательно, при $y > 0$; $\sin y > 0$; $-\frac{b}{2} < x < 0$ имеем

$$\frac{dx}{dy} < 0; \quad x \frac{dx}{dy} > 0. \quad (4,16)$$

Отсюда и из (4,4) следует

$$\frac{df}{dy} > 0 \text{ при } y > 0; \sin y > 0; -\frac{b}{2} < x < 0, \quad (4,17)$$

если, кроме того

$$y \cos y - \sin y > 0. \quad (4,17^*)$$

С другой стороны, из (4,4) следует, что при $-\frac{b}{2} < x$

$$x^2 + y^2 = \frac{b^2}{2} - b \sqrt{\frac{b^2}{4} + by \operatorname{ctg} y - y + by \operatorname{ctg} y}.$$

Отсюда

$$f = \left(\frac{b}{2} \frac{\sin y}{y} + \cos y \right) - \sqrt{\left(\frac{b}{2} \frac{\sin y}{y} + \cos y \right)^2 - 1}.$$

Положим

$$\frac{b}{2} \frac{\sin y}{y} + \cos y = z. \quad (4,18)$$

Найдем

$$f = z - \sqrt{z^2 - 1}. \quad (4,19)$$

Поскольку $f(y) > 0$ при $y \in (2k\pi, y_{2k})$; $k > 0$ видим, что $z > 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{dz}{dz} = 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} < 0 \text{ при } -\frac{b}{2} < x; y \in (2k\pi, y_{2k}); k > 0.$$

Далее

$$\frac{dz}{dy} = \frac{by \cos y - \sin y}{2y^2} - \sin y < 0 \text{ при } y \cos y - \sin y < 0; \sin y > 0.$$

Таким образом

$$\frac{d\psi}{dy} > 0 \text{ при } \sin y > 0; y \cos y - \sin y < 0; -\frac{b}{2} < x < 0. \quad (4,20)$$

Сопоставляя (4,17) и (4,20) видим, что вообще

$$\frac{d\psi}{dy} > 0 \text{ при } y > 0; y \in (2k\pi, y_{2k}); -\frac{b}{2} < x < 0. \quad (4,21)$$

Но это, в силу (4,13) означает, что при x определенном равенством (4,4) и изменяющимся в полосе $-\frac{b}{2} < x < 0; y \in (2k\pi, y_{2k})$, ($k > 0$), правая часть уравнения (4,9) является монотонно убывающей функцией от y . В то же время левая часть (4,9), в силу (4,16) монотонно возрастает в той же области. Но это и доказывает, что в каждой из рассматриваемых областей $\psi(p)$ имеет не более одного нуля.

§ 5. Итак мы доказали, что $\Phi(p)$ имеет счетное число полюсов, расположенных внутри полосы $-\frac{b}{2} < \operatorname{Re} p < 0$ симметрично относительно действительной оси, причем внутри каждой полосы

$$2|k|\pi < \operatorname{Im} p < y_{2k}; \left(|k| = 0, 1, 2, \dots; b = 2y_{2k} \operatorname{tg} \frac{y_{2k}}{2} \right). \quad (5,1)$$

расположен один и только один полюс $\Phi(p)$, а вне этих полос $\Phi(p)$ полюсов не имеет.

Легко видеть, что к $\Phi(p)$ приложима теорема о разложении оператора [7]. Обозначим через $r(t)$ вычет функции $\Phi(p)p^{-1}e^{pt}$ относительно полюса $p=p_k$, лежащего внутри полосы $2k\pi < \text{Im } p < y_{2k}$; ($k \geq 0$); через $r_k(t)$ — вычет этой функции относительно полюса $p=p_k$ сопряженного с $p=p_k$ и через $r^o(t)$ ее вычет при $p=0$. В силу теоремы о разложении оператора найдем

$$u(t) = r^o(t) + \sum_{k=0}^{\infty} [r_k(t) + \overline{r_k(t)}]. \quad (5,2)$$

Заметим, что все полюсы $\Phi(p)$ простые. Действительно, если бы p было кратным полюсом, то должны были бы выполняться уравнения

$$\psi(p) = p(1 - e^{-p}) + b = 0; \quad \frac{d\psi}{dp} = 1 + (p-1)e^{-p} = c. \quad (5,3)$$

Но это невозможно при любом действительном b , ибо при

$$y \in (2k\pi, y_{2k}) \text{ имеем } \text{Im}(\psi(p) + \frac{d\psi}{dp}) = y + e^{-x} \sin y \neq 0.$$

Заметим, далее, что если $\psi(p) = 0$, то в силу (5,3)

$$\left. \frac{d\psi}{dp} \right|_{p=p_k} = p_k^2 + bp_{pk} - b. \quad (5,4)$$

Отсюда, из $\Phi(p) = -a\psi^{-1}(p)$ и (5,2) следует, что

$$u(t) = -\frac{a}{b} - 2a \sum_{k=0}^{\infty} \text{Re} \frac{e^{p_k t}}{p_k^2 + bp_{pk} - b} \quad (5,5)$$

Здесь p_k корень $\psi(p) = 0$, лежащий внутри полосы $2k\pi < y < (2k+1)\pi$; ($k > 0$).

Положим

$$p_k = x_k + iy_k; \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (5,6)$$

После небольших преобразований найдем

$$u(t) = -\frac{a}{b} - 2a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_k t}}{\rho_k} \cos(\theta_k - y_k t). \quad (5,7)$$

Здесь положено

$$\left. \begin{aligned} \varrho_k^2 &= \xi_k^2 + \eta_k^2; \quad \vartheta_k = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta_k}{\xi_k}; \\ \xi_k &= x_k^2 - y_k^2 + b(x_k - 1); \quad \eta_k = y_k(b + 2x_k) \end{aligned} \right\} \quad (5,8)$$

Поскольку $\varrho_k \rightarrow \infty$ как y_k^2 , т. е. как k^2 и $-\frac{b}{2} < x < 0$ ряд (5,7)

сходится при всех $t \geq 0$, равномерно на любом конечном интервале, и притом весьма быстро. Поэтому в первом приближении можно принять

$$u(t) \cong -\frac{a}{b} - \frac{2a}{\rho_0} e^{x_0 t} \cos(\vartheta_0 - y_0 t). \quad (5,9)$$

Внося (5,7) и, соответственно, (5,9) в (3; 14) получим

$$\omega^* = \int_0^t \omega d\tau = -\frac{a}{b} - \frac{2a}{\sqrt{\pi t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_k} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t} + x_k \tau} \cos(\vartheta_k - y_k \tau) d\tau. \quad (5,10)$$

или в первом приближении

$$\omega^* \cong -\frac{a}{b} - \frac{2a}{\rho_0 \sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t} + x_0 \tau} \cos(\vartheta_0 - y_0 \tau) d\tau. \quad (5,11)$$

Подстановка $\tau = 2\sqrt{z^2 t}$ дает (см. (5,10))

$$\omega^* = -\frac{a}{b} - \frac{4a}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k}{\rho_k}. \quad (5,12)$$

где

$$I_k = \int_0^{\infty} e^{-z^2} F_k dz = \int_0^{\infty} e^{-z^2 + 2x_k z \sqrt{t}} \cos(\vartheta_k - 2y_k z \sqrt{t}) dz. \quad (5,13)$$

Разлагая $F_k(z)$ в ряд Тейлора в окрестности $z=0$ и учитывая, что

$$\frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-z^2} z^n dz = \frac{1}{2n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)},$$

без труда найдем

$$\omega^* = -\frac{a}{b} - 2a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r_k^n \cos(\vartheta_k + n \varphi_k)}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)} t^{\frac{n}{2}}. \quad (5,14)$$

Здесь

$$r_k = |p_k| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}; \quad \varphi_k = -\arg p_k = \arctg \frac{y_k}{|x_k|}. \quad (5,14^*)$$

Нетрудно убедиться в том, что $\lim_{t \rightarrow 0} \omega^* = 0$. Это следует из единственности решения интегрального уравнения (3,9) и существования его решения вида f/\sqrt{t} , где f ограничена в окрестности нуля. Отсюда и из (5,14) следует, что

$$-2a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \vartheta_k}{\rho_k} = \frac{a}{b}.$$

Таким образом окончательно находим

$$\omega^* = -2a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r_k^n \cos(\vartheta_k + n \varphi_k)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} t^{\frac{n}{2}}. \quad (5,15)$$

или в первом приближении, отвечающем (5,10)

$$\omega^* = -\frac{2a}{\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r_0^n \cos(\vartheta_0 + n \varphi_0)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} t^{\frac{n}{2}}. \quad (5,16)$$

§ 6. Располагая графиками $\omega^*(t)$ легко построить кривые зависимости состава жидкой фазы от времени. Действительно, обозначим через $\bar{n}_i(t)$ среднее значение числа n_i молей i компонента в столбе испаряющегося раствора единичного сечения:

$$\bar{n}_i(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} n_i dx dy. \quad (6,1)$$

В силу (3,2), (3,4) и (2,1₃) найдем

$$\overline{n_i(t)} = n_{i0} + D_i \int_0^t \omega_i d\tau. \quad (6,2)$$

В силу (3,3) и (5,11) имеем

$$D_i \int_0^t \omega_i d\tau = \overline{R_i^2} \omega_i^* \left(\frac{D_i}{R_i^2} t \right). \quad (6,3)$$

Таким образом

$$\overline{n_i(t)} = n_{i0} + \overline{R_i^2} \omega_i^* \left(\frac{D_i}{R_i^2} t \right). \quad (6,4)$$

Поскольку мы рассматриваем разбавленный раствор с нелетучим растворителем, можно принять с той же степенью приближения, что и при вычислении n_i , что средняя глубина испаряющегося раствора остается равной его начальной глубине

$$\overline{h} = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} h dx dy = h_0. \quad (6,5)$$

Пусть $c_i(t)$ означает молярную концентрацию i компонента в жидкой фазе. Имеем

$$c_i(t) = \frac{\overline{n_i(t)}}{\overline{h}} = \frac{\overline{n_i(t)}}{h_0}. \quad (6,6)$$

Отсюда и из (6,4) следует

$$c_i(t) = c_{i0} + \frac{\overline{R_i^2}}{h_0} \omega_i^* \left(\frac{D_i t}{R_i^2} \right). \quad (6,7)$$

Замечая, что в силу (3,10)

$$\frac{\overline{R_i^2}}{h_0} = \frac{b_i}{a_i} c_i(t).$$

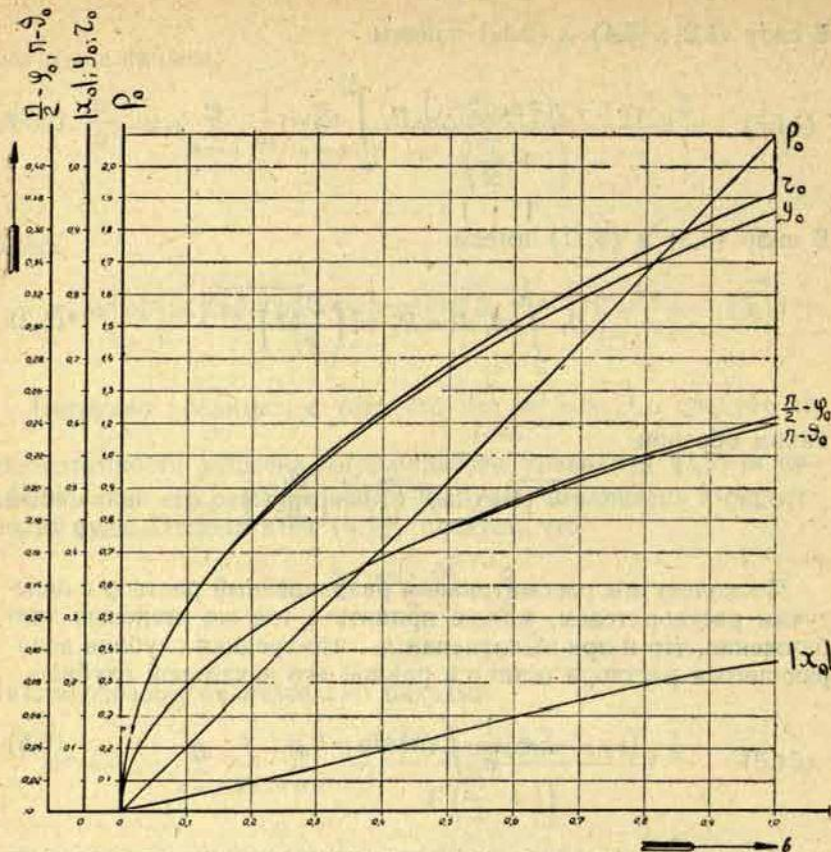


Рис. 1. Корень $\rho_0 + iy_0 = r_0 l - i\varphi_0$ уравнения $p(1 - e^{-p}) + b = 0$ и параметры ρ_0 и φ_0 .

приведем (6,7) к виду

$$\frac{c_i(t)}{c_i(0)} = 1 + \frac{b_i}{a_i} w_i^* \left(\frac{D_i t}{R_i^2} \right). \quad (6.8)$$

На рис. № 1 представлены кривые зависимости параметров φ_0 , ρ_0 , w_0 , ϑ_0 от b . В таблице № 1 даны значения $c_i(t)/c_i(0)$ в функции от b_i и безразмерного времени t , построенные по формуле (6,8) и (5,16). Наконец кривые зависимости $c(t)/c(0)$ от b и t представлены на рис. № 2.

Проиллюстрируем полученные результаты на примере разбавленного раствора нормальных пентана, гексана и гептана в нормальном декане. Для подсчета нами взяты значения упру-

гости насыщенных паров индивидуальных углеводородов из [7] их плотности из [8]. Наконец за отсутствием в нашем распоряжении точных данных о коэффициентах диффузии в воздухе паров индивидуальных углеводородов мы подсчитали их, исходя

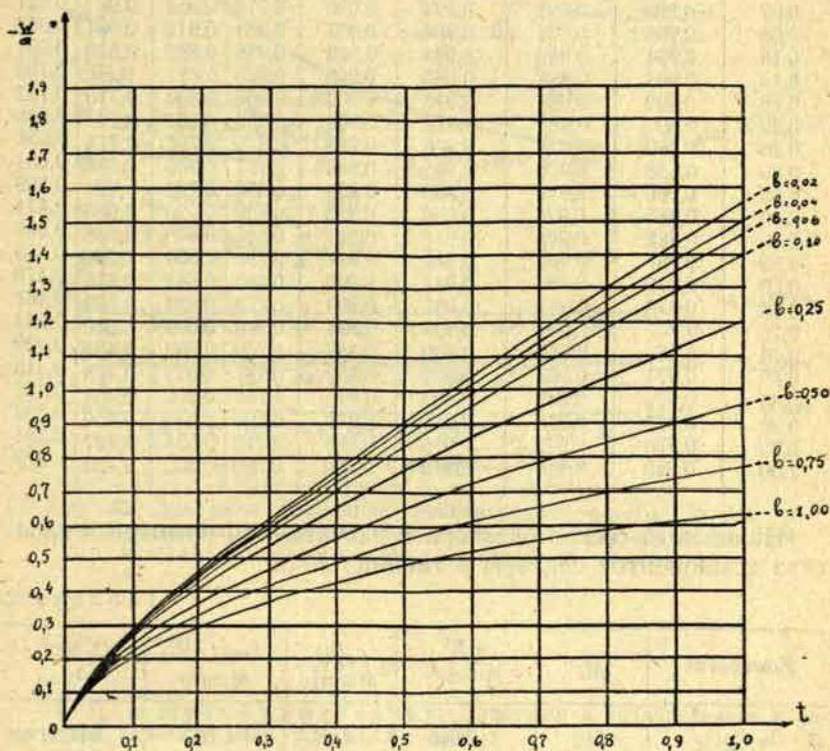


Рис. 2 Зависимость $\frac{w^*}{a}$ от безразмерного времени t и параметра b (первое приближение).

из величины коэффициента диффузии нормального октана, сообщенного в [9]. При подсчете мы пользовались тем, что в пределах одного гомологического ряда можно с достаточной точностью считать отношение коэффициентов диффузии равным корню квадратному из обратного отношения их молярных весов.

Таблица 1

Значения $\frac{c(t)}{c(0)}$ в функции от η от безразмерного

	0,02	0,04	0,06	0,10	0,25	0,50	0,75	1,00
0,02	0,998	0,996	0,994	0,990	0,976	0,955	0,937	0,921
0,06	0,996	0,992	0,988	0,981	0,954	0,912	0,981	0,852
0,10	0,994	0,989	0,984	0,973	0,936	0,882	0,838	0,801
0,14	0,993	0,986	0,980	0,966	0,920	0,855	0,802	0,758
0,18	0,992	0,983	0,976	0,960	0,906	0,830	0,770	0,721
0,22	0,990	0,981	0,972	0,954	0,892	0,807	0,741	0,688
0,26	0,989	0,978	0,968	0,948	0,879	0,786	0,714	0,658
0,30	0,988	0,976	0,965	0,943	0,867	0,766	0,690	0,631
0,35	0,986	0,973	0,960	0,936	0,852	0,742	0,661	0,599
0,40	0,985	0,970	0,956	0,929	0,838	0,720	0,636	0,571
0,50	0,982	0,965	0,948	0,917	0,811	0,679	0,588	0,521
0,55	0,981	0,962	0,944	0,911	0,798	0,660	0,566	0,499
0,60	0,979	0,960	0,941	0,905	0,786	0,642	0,546	0,479
0,65	0,978	0,957	0,937	0,899	0,774	0,624	0,528	0,461
0,70	0,977	0,954	0,934	0,893	0,763	0,608	0,510	0,444
0,75	0,975	0,952	0,930	0,887	0,752	0,592	0,494	0,429
0,80	0,974	0,950	0,926	0,882	0,741	0,577	0,478	0,415
0,85	0,973	0,947	0,923	0,876	0,730	0,562	0,464	0,402
0,90	0,972	0,945	0,919	0,871	0,720	0,548	0,450	0,393
0,95	0,970	0,942	0,916	0,866	0,710	0,535	0,437	0,381
1,00	0,969	0,940	0,912	0,860	0,700	0,522	0,423	0,373

Начальный состав раствора в рассчитанном примере и свойства компонентов сведены в таблицу № 2.

Таблица 2

Компонент	M_i	d^{30} гр ³ /см ³	$c_i(0)$ М/литр	$c_{m_i} \cdot 10^4$ М/литр	$D_i^{30} c^0$ см ² /сек.
0 n C ₁₀ H ₂₂	142	0,7238	4,88	1,10	0,0592
1 n C ₇ H ₁₆	100	0,6751	0,10	30,60	0,0704
2 n C ₆ H ₁₄	86	0,6530	0,10	97,80	0,0760
3 n C ₅ H ₁₂	72	0,6149	0,10	325,3	0,0835

Результаты расчета представлены на рис. № 3 в виде кривых зависимости от времени относительных концентраций компонентов в жидкой фазе при различных R и h_0 . При подсчете мы приняли «средний радиус поверхности испарения» для всех компонентов равным геометрическому радиусу площади испарения. Мы ограничились только малыми значениями безразмерного времени. При построении кривых, как и выше, использовано первое приближение, отвечающее равенству (5,16).

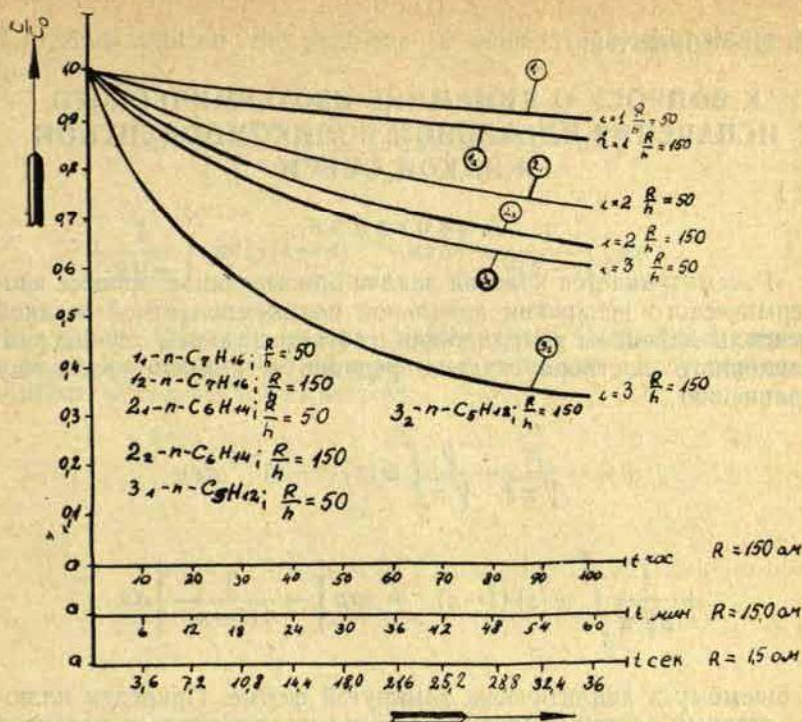


Рис. 3. Динамика изменения концентрации $n-C_5H_{12}$; $n-C_6H_{14}$ и $n-C_7H_{16}$ в разбавленном растворе с нелетучим растворителем при испарении из слоя глубины h_1 радиуса R ; ($c_{i,0} = 0,1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Франк-Каменецкий; Диффузия и теплопередача в химической кинетике; Изд. АН СССР, 1947.
2. В. Г. Левич; Физико-химическая гидродинамика; Изд. АН СССР, 1952.
3. Л. С. Лейбензон, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. № 3, 1940.
4. I. Stefan. Sitz. Ber. Wien. Akad. Math. Naturw. Geb 98; 11a; Ss. 616—634; (1890).
5. Е. И. Ким; ПММ 21, вып. 5, 1957. ДАН СССР, т. 113, № 2, 1957.
6. В. А. Диткин и П. И. Кузнецов; Справочник по операционному исчислению, ГИТТИ, 1951.
7. Физико-химические свойства индивидуальных углеводов. Вып. 3 под редакцией М. Д. Тилличева, Гостоптехиздат 1951.
8. Техн. Энцикл. Справочник физ. хим и технол. велич. Т. 5, 1930.
9. loc. cit. (8) т. 7, 1931.

К ВОПРОСУ О ДИНАМИКЕ ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ИСПАРЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ПОЛИКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОЙ СМЕСИ

А н н о т а ц и я

Рассматривается краевая задача описывающая процесс изотермического испарения идеальной поликомпонентной жидкой смеси. В линейном приближении, соответствующем случаю разбавленного раствора, задача редуцируется к интегральному уравнению

$$\omega = -\frac{a}{\sqrt{\pi t}} - \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \omega(s) (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \omega(s) (t-s)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4(t-s)}\right] ds.$$

решаемому в аналитически замкнутой форме. Приведен иллюстративный расчет изменения состава испаряющегося раствора нормальных пентана, гексана и гептана в нормальном декане.

L. Rubinstein

ON THE PROCESS OF ISOTHERMAL EVAPORATION OF AN IDEAL POLYCOMPONENT LIQUID MIXTURE.

Annotation.

The boundary value problem describing the process of isothermal evaporation of polycomponent liquid mixture is analysed. In case of linear approximation, corresponding to the case

of diluted solution, the problem is reduced to the integral equation

$$w = -\frac{a}{\sqrt{\pi t}} - \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_0^t w(s) (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t w(s) (t-s)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{4(t-s)}\right] ds.$$

which can be solved in an analytically closed form. An example is given for evaporation of *n*-pentane, *n*-hexane, and *n*-heptane solution, with *n*-decane as solvent.

Л. И. Рубинштейн

«О ДИНАМИКЕ ОДНОМЕРНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ИСПАРЕНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКИХ СМЕСЕЙ»

Диффузионная теория испарения идеальных поликомпонентных жидких смесей развивалась нами ранее в предположении пространственной однородности жидкой фазы по ее составу и изотермичности процесса [1; 2]. Ниже (§§ 1—4) рассматривается одномерный процесс испарения поликомпонентной смеси в предположении наличия равномерно распределенных внутри каждой фазы и зависящих от времени источников тепла, диффузионного распределения концентраций и распределения температур внутри каждой фазы, следующего уравнению теплопроводности. Кроме того предполагается наличие источников тепла на поверхности испарения, внешних по отношению к процессу испарения, и учитывается выделение скрытой теплоты фазового перехода на поверхности раздела фаз.

В такой постановке задача сводится нами к системе интегральных уравнений типа Вольтерра для определения градиентов температур и концентраций на поверхности испарения. Эта система редуцируется к системе несвязанных между собой однотипных уравнений, для которых изучается асимптотическое при $t \rightarrow \infty$ поведение решения.

Рассмотрения §§ 1—4 проведены безотносительно к какому либо конкретному процессу и представляет собой теорию, приложение которой возможно в различных направлениях. Один из вариантов такого приложения сообщен в §§ 5—8. Именно, мы интерпретируем задачу, рассмотренную в §§ 1—4, как задачу об определении количества и состава потерь нефтепродуктов при малых дыханиях атмосферных резервуаров. При этом вся трактовка задачи в §§ 5—8 — приближенная, что связана

прежде всего с очевидно приближенным характером гипотез, положенных в основу теории в названной ее интерпретации.

§ 1. Рассмотрим $n+1$ компонентный раствор, состоящий из нелетучего растворителя, к которому будем во всех случаях относить индекс 0 , и n летучих, химически не взаимодействующих, компонентов. Обозначим через \bar{u} , \bar{v} , \bar{c}_i и $\bar{\sigma}_i$ абсолютные температуры жидкой и газовой фазы, молярную концентрацию i — компонента в жидкой и, соответственно, газовой фазе. Газовую фазу считаем состоящей из паров всех компонентов раствора (кроме нелетучего растворителя) и нерастворимого в жидкой фазе газа («воздух»), к которому так же относим индекс 0 . Будем предполагать, что жидкая фаза заполняет слой $0 < z < h$ и газовая фаза — слой $h < z < H$.

Пусть, далее, в жидкой и газовой фазах распределены пространственно однородные источники тепла $Q_i(t)$ ($[Q_i] = \frac{\text{кал}}{\text{см}^3 \text{сек}}$). Индекс $i=1$ относим здесь к жидкой и $i=2$ к газовой фазе. Кроме того считаем, что на поверхности испарения $z=h$ помимо выделения скрытой теплоты фазового перехода сосредоточены равномерно распределенные источники тепла поверхностной плотности \bar{q}^* ($[\bar{q}^*] = \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{сек}}$). Наконец примем, что задан поток тепла Q^{**} через поверхность $z=H$. Плоскости $z=0$ и $z=H$ считаем непроницаемыми. Плоскость $z=0$ — теплоизолированной.

Считая, что распределение температур и концентраций в жидкой и газовой фазах следует уравнениям теплопроводности и диффузии, найдем, что \bar{u} , \bar{v} , \bar{c} и $\bar{\sigma}$ должны удовлетворять условиям:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = b_1^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \bar{q}_1; \quad 0 < z < h; \quad t > 0; \quad (1,1_1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = b_2^2 \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} + \bar{q}_2; \quad h < z < H; \quad t > 0; \quad (1,1_2)$$

$$\frac{\partial \bar{c}_i}{\partial t} = \bar{D}_{i,1} \frac{\partial^2 \bar{c}_i}{\partial z^2}; \quad 0 < z < h; \quad t > 0; \quad (i=1; 2; \dots, n) \quad (1,1_3)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = \bar{D}_{i,2} \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_i}{\partial z^2}; \quad h < z < H; \quad t > 0; \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1,1_4)$$

Здесь

$$\bar{q}_i = \frac{Q_i(t)}{c^i \rho^i}; \quad (1,2)$$

b_i^2 ; $\bar{D}_{i,j}$; c^i и ρ^i суть соответствующие коэффициенты теплопроводности, диффузии, удельная теплоемкость и плотность, которые считаем постоянными.

Положим

$$\bar{v}^*(t) = \frac{Q^{**}(t)}{\bar{k}_2}. \quad (1,2^*)$$

Должны иметь:

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right|_{z=H} = \bar{v}^*(t); \quad (1,3_1)$$

$$\bar{u} \Big|_{z=h} = \bar{v} \Big|_{z=h}; \quad \bar{D}_{i,1} \left. \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial z} \right|_{z=h} = \bar{D}_{i,2} \left. \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial z} \right|_{z=h}; \quad (1,3_2)$$

$$\bar{k}_1 \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|_{z=h} - \bar{k}_2 \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right|_{z=h} + \sum_n^{i=1} \lambda_i \bar{D}_{i,1} \left. \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial z} \right|_{z=h} - \bar{q}^* = 0; \quad (1,3_3)$$

$$\bar{c}_i \Big|_{z=h} = \bar{\sigma}_{i,m} \cdot \bar{N}_i \Big|_{z=h}; \quad (1,3_4)$$

$$\bar{u} \Big|_{t=0} = \bar{u}_0; \quad \bar{v} \Big|_{t=0} = \bar{v}_0; \quad \bar{\sigma}_i \Big|_{t=0} = \bar{\sigma}_{i,0}; \quad \bar{c}_i \Big|_{t=0} = \bar{c}_{i,0}. \quad (1,3_5)$$

Здесь λ_i — скрытая молярная теплота испарения i — компонента

$\bar{\sigma}_{i,m}$ — концентрация насыщенного пара над i компонентом при температуре \bar{v} ,

\bar{k}_i — коэффициент теплопроводности ($i=1, 2$).

\bar{N}_i — молярная дробь i компонента в жидкой фазе:

$$\bar{N}_i = \frac{c_i}{\sum_{j=0}^n c_j}; \quad (1,4)$$

Можно принять (3):

$$\bar{\sigma}_{i,m} = \bar{\sigma}_{i,m}^0 \exp \left[-\frac{\lambda_i}{R} \left(\frac{1}{\bar{v}} - \frac{1}{\bar{v}_0} \right) \right] \Big|_{z=h}, \quad (1,5)$$

где R — универсальная газовая постоянная и $\bar{\sigma}_{i,m}^0$ — концентрация насыщенного пара над i компонентом при температуре \bar{v}_0 .

Подвергнем линеаризации условие (1,3₄). Разложим, с этой целью, произведение $\bar{\sigma}_{i,m} \bar{N}_i |_{z=h}$ в ряд по степени $\bar{v} - \bar{v}_o$ и $c_j - c_{j,o}$ и ограничимся линейными членами разложения*. Найдем

$$\bar{\sigma}_i |_{z=h} = \alpha_{o,i}^* + \alpha_{1,i}^* (\bar{v} - \bar{v}_o) |_{z=h} + \sum_{j=i}^n \alpha_{2,i,j}^* (\bar{c}_j - c_{j,o}) |_{z=h}; \quad (i=1, 2; \dots, n) \quad (1,6)$$

Здесь

$$\alpha_{o,i}^* = \bar{\sigma}_{i,m}^o \cdot N_{i,o}; \quad \alpha_{1,i}^* = \frac{\bar{\sigma}_{i,m}^o \lambda_i}{R \bar{v}_o^2} \cdot N_{i,o};$$

$$\alpha_{2,i,j}^* = \begin{cases} \frac{-\bar{\sigma}_{i,m}^o \bar{N}_{i,o}}{\sum_{j=o}^n \bar{c}_{j,o}} \text{ при } i \neq j \\ \bar{\sigma}_{i,m}^o \left(1 - \frac{\bar{N}_{i,o}}{\sum_{k=n}^n \bar{c}_{k,o}} \right) \text{ при } i = j \end{cases} \quad (1,7)$$

$$\bar{N}_{i,o} = \bar{N}_i |_{t=o}.$$

Введем безразмерные величины:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{h-z}{h}; \quad y = \frac{z-h}{H-h}; \quad \tau = \frac{Dt}{(H-h)^2}; \quad a_{1,1}^2 = \frac{\bar{D}_{1,1}}{D} \left(\frac{H-h}{h} \right)^2; \\ a_{1,2}^2 &= \frac{\bar{D}_{1,2}}{D}; \quad b_1^2 = \frac{\bar{b}_1^2}{D} \left(\frac{H-h}{h} \right)^2; \quad b_2^2 = \frac{\bar{b}_2^2}{D}; \\ \lambda &= \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} \cdot \frac{h}{H-h}; \quad \gamma_i = \frac{\bar{c}_{i,o} \lambda_i \bar{D}_{1,1}}{u^* \bar{k}_1}; \quad c_i = \frac{\bar{c}_i - c_{i,o}}{\bar{c}_{i,o}}; \\ \sigma_i &= \frac{\bar{\sigma}_i - \sigma_{i,o}}{\bar{c}_{i,o}}; \quad u = \frac{\bar{u} - \bar{u}_o}{u^*}; \quad v = \frac{\bar{v} - \bar{v}_o}{u^*}; \\ q_i &= \frac{(H-h)^2}{D u^*} q_i^*; \quad (i=1, 2); \quad v^* = \frac{H-h}{u^*} \bar{v}^*; \quad q^* = \frac{\bar{q}^*}{k_1 u^*} \cdot h. \end{aligned} \right\} \quad (1,8)$$

Здесь D и u^* некоторые характерные константы, размерности коэффициента диффузии и температуры.

* Это очевидно можно делать из соображений порядка малости отбрасываемых величин при достаточно большой концентрации нелетучего растворителя и не слишком больших колебаниях температуры.

В безразмерных единицах задача (1,1 i), (1,3 i), (1,6) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = b_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q_1(\tau); \quad 0 < x < 1; \quad \tau > 0; \quad (1,9_1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = b_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + q_2(\tau); \quad 0 < y < 1; \quad \tau > 0; \quad (1,9_2)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \tau} = a_{i,1}^2 \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2}; \quad 0 < x < 1; \quad \tau > 0; \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (1,9_3)$$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \tau} = a_{i,2}^2 \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial y^2}; \quad 0 < y < 1; \quad \tau > 0; \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (1,9_4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=1} = v^*(\tau); \quad (1,9_5)$$

$$\left. \frac{\partial c_i}{\partial x} \right|_{x=1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \sigma_i}{\partial y} \right|_{y=1} = 0; \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1,9_6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, \tau) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} v(0, \tau) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial}{\partial x} c_i(0, \tau) + q^* = 0; \quad (1,9_7)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, \tau) &= v(0, \tau) + \mu; \\ \frac{\partial}{\partial x} c_i(0, \tau) + \delta_i \frac{\partial}{\partial y} \sigma_i(0, \tau) &= 0; \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} (1,9_8)$$

$$\sigma_i(0, \tau) = \alpha_{0,i} + \alpha_{1,i} v(0, \tau) + \sum_{j=1}^n \alpha_{2,i,j} c_j(y, 0) = 0; \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1,9_9)$$

$$u(x, 0) = v(y, 0) = c_i(x, 0) = \sigma_i(y, 0) = 0; \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1,9_{10})$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{\bar{v}_0 - \bar{u}_0}{u^*}; \quad \delta_i = \frac{\bar{D}_{i,2}}{\bar{D}_{i,1}} \cdot \frac{h}{H-h}; \\ \alpha_{0,i} &= \frac{\alpha_{0,i}^* - \bar{\sigma}_{i,0}}{c_{i,0}}; \quad \alpha_{1,i} = \frac{u^*}{c_{i,0}} \alpha_{1,i}^*; \quad \alpha_{2,i,j} = \alpha_{2,i,j}^* \frac{\bar{c}_{j,0}}{c_{i,0}} \end{aligned} \right\} (1,10)$$

§ 2. Будем искать u и v в виде:

$$u = u_1 + \int_0^t q_1(\tau) d\tau; \quad v = v_1 + \int_0^t q_2(\tau) d\tau. \quad (2,1)$$

Здесь и ниже мы пишем t вместо τ . В силу (1,9) должны иметь

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = b_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}; \quad 0 < y < 1; \quad t > 0; \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = b_1^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}; \quad 0 < x < 1; \quad t > 0, \quad (2,2_1)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=1} = 0; \quad \left. \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|_{y=1} = v^*(t);$$

$$u_1(0, t) = v_1(0, t) + f_0(t); \quad u_1|_{t=0} = v_1|_{t=0} = 0; \quad (2,2_2)$$

$$\sigma_i(0, t) = f_i(t) + a_{1,i} v_1'(0, t) + \sum_{j=1}^n a_{2,i,j} c_j(0, t) \quad (2,2_3)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

Здесь

$$f_0(t) = \mu + \int_0^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] d\tau;$$

$$f_i(t) = a_{0,i} + a_{1,i} \int_0^t q_2(\tau) d\tau; \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2,2_4)$$

Условие (1,9₇) остается неизменным при замене в нем u и v на u_1 и v_1 .

Пусть $g(x, \xi, \alpha^2(t-\tau))$ — функция Грина второй краевой задачи уравнения теплопроводности на отрезке $(0,1)$:

$$g(x, \xi, \alpha^2(t-\tau)) = \frac{1}{2\alpha \sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4\alpha^2(t-\tau)} \right] + \right.$$

$$\left. + \exp \left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4\alpha^2(t-\tau)} \right] \right\} \quad (2,3)$$

Положим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u_1(0, t) &= \psi_{1,0}(t); \quad \frac{\partial}{\partial y} v_1(0, t) = \psi_{0,0}(t); \\ \frac{\partial}{\partial x} c_i(0, t) &= \psi_{1,i}(t); \quad \frac{\partial}{\partial y} \sigma_i(0, t) = \psi_{i,0}(t); \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (2,4)$$

Из (2,2₁), (2,2₂) и (1,9_{*i*}) (*i*=3; 4; 6; 10) следует, что

$$\begin{aligned}
 u_1(x, t) &= -b_1^2 \int_0^t \psi_{1,0}(t-\tau) g(x, 0, b_1^2(t-\tau)) d\tau; \\
 v_1(y, t) &= \\
 &= b_2^2 \int_0^t v^*(\tau) g(y, 1, b_2^2(t-\tau)) d\tau - b_2^2 \int_0^t \psi_0(\tau) g(x, 0, a_2^2(t-\tau)) d\tau; \\
 c_i(x, t) &= -a_{1,i}^2 \int_0^t \psi_{1,1}(\tau) g(y, 0, a_{1,i}^2(t-\tau)) d\tau; \quad (2,5)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_i(y, t) = -a_{i,2}^2 \int_0^t \psi_i(\tau) g(y, 0, a_{i,2}^2(t-\tau)) d\tau; \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Условия (1,9₇) и (1,9₈) дают

$$\begin{aligned}
 \psi_{1,i}(t) + \delta_i \psi_i(t) &= 0; \quad i=1, 2, \dots, n. \\
 \psi_{1,0}(t) + \lambda \psi_0(t) - \sum_{j=1}^n \delta_j \gamma_j \psi_j(t) + q^* &= 0. \quad (2,6)
 \end{aligned}$$

Потребуем выполнения условий (2,2₂) и (2,2₃). Переходя в (2,5) к пределу при $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$, внося полученные выражения в (2,2₃) и (2,2₂) и учитывая (2,6) найдем

$$\sum_{j=0}^n \int_0^t \psi_j(\tau) K_{i,j}^0(t-\tau) d\tau = F_i^0(t); \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2,7)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned}
 F_0^0(t) &= f_0(t) - b_1^2 \int_0^t q^*(\tau) g(0, 0, b_1^2(t-\tau)) d\tau + \\
 &+ b_2^2 \int_0^t v^*(\tau) g(0, 1, b_2^2(t-\tau)) d\tau; \\
 F_i^0(t) &= f_i(t) + a_{1,i} b_2^2 \int_0^t v^*(\tau) g(0, 1, b_2^2(t-\tau)) d\tau; \\
 &\quad (i=1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \right\} \quad (2,8_1)$$

Далее

$$\begin{aligned}
 K_{o,o}^o(t-\tau) &= \lambda b_1^2 g(o, o, b_1^2(t-\tau)) + b_2^2 g(o, o, b_2^2(t-\tau)), \\
 K_{o,j}^o(t-\tau) &= -\delta_j \gamma_j b_1^2 g(o, o, b_1^2(t-\tau)); \quad (j=1, 2, \dots, n), \\
 K_{i,o}^o(t-\tau) &= a_{1,i} b_2^2 g(o, o, b_2^2(t-\tau)) \quad (i=1, 2, \dots, n), \\
 K_{i,j}^o(t-\tau) &= -a_{2,i,j} \delta_j a_{j,1}^2 g(o, o, a_{j,1}^2(t-\tau)); \quad (i \neq j; i, j=1, 2, \dots, n) \\
 K_{i,i}^o(t-\tau) &= -a_{2,i,i}^2 g(o, o, a_{i,2}^2(t-\tau)) - \\
 &\quad - a_{2,i,i} \delta_j a_{i,1}^2 g(o, o, a_{i,1}^2(t-\tau)); \quad (i=1, 2, \dots, n).
 \end{aligned}
 \tag{2,8_2}$$

§ 3. Систему (2,7) легко свести к $n+1$ независимому уравнению, разрешенному относительно $\psi_i(t)$ ($i=0; 1; 2; \dots, n$). Действительно, положим

$$\begin{aligned}
 K_{i,j}^{l+1}(t-\tau) &= \int_0^t [K_{i,l}^l(t-s) K_{l,j}^l(s-\tau) - K_{i,j}^l(t-s) K_{l,l}^l(s-\tau)] ds \\
 &\quad (i, j=l+1, l+2, \dots, n) \\
 F_i^{l+1}(t) &= \int_0^t [F_l^l(\tau) K_{i,l}^l(t-\tau) - F_l^l(\tau) K_{l,i}^l(t-\tau)] d\tau; \\
 &\quad (i=l+1; l+2, \dots, n)
 \end{aligned}
 \tag{3,1}$$

Легко видеть, что система (2,7—) сводится к системе:

$$\sum_{j=m}^n \int_0^t \psi_j(\tau) K_{i,j}^m(t-\tau) d\tau = F_i^m(t); \quad (i=m; m+1, \dots, n), \tag{3,2}$$

каково бы ни было целое m ($0 \leq m \leq n$). Действительно, при $m=0$ (3,2) совпадает с (2,7). Допустим что (3,2) справедливо при $m=l$ и докажем его справедливость при $m=l+1$. Заменяем в (3,2) t на s . Умножая (3,2) на $K_{i,m}^m(t-s)$ при $i=m$ и на $K_{m,m}^m(t-s)$ при $i \neq m$ и интегрируя получим, после перемены порядка интегрирования:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^n \int_0^t \psi_j(\tau) d\tau \int_0^t K_{i,m}^m(t-s) K_{m,j}^m(s-\tau) ds = \\
 = \int_0^t F_m^m(s) K_{i,m}^m(t-s) ds;
 \end{aligned}
 \tag{3,3_1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^n \int_0^t \psi_j(\tau) d\tau \int_{\tau}^t K_{m,m}^m(t-s) K_{i,j}^m(s-\tau) ds = \\ = \int_0^t F_i^m(s) K_{m,m}^m(t-s) ds. \end{aligned} \quad (3,3_2)$$

Вычитая (3,3₁) из (3,3₂) и учитывая (3,1) получим

$$\sum_{j=m+1}^n \int_0^t \psi_j(\tau) K_{i,j}^{m+1}(t-\tau) d\tau = F_i^{m+1}(t); \quad (3,4)$$

($i=m+1; m+2, \dots, n$)

ибо

$$\int_{\tau}^t [K_{m,m}^m(t-s) K_{i,m}^m(s-\tau) - K_{i,m}^m(t-s) K_{m,m}^m(s-\tau)] ds \equiv 0. \quad (3,4^*)$$

Зафиксируем теперь любое m ($0 \leq m \leq n$) и положим

$$K_{i,j}^{m,0} = K_{i,j}^m; F_i^{m,0} = F_i^m; (i, j = m, m+1, \dots, n); \quad (3,5)$$

$$\begin{aligned} K_{i,j}^{m,l+1}(t-\tau) = \int_0^t [K_{m+l,m+l+1}^{m,l}(t-s) K_{i,j}^{m,l}(s-\tau) - \\ - K_{i,m+l+1}^{m,l}(t-s) K_{m+l,j}^{m,l}(s-\tau)] ds; \end{aligned} \quad (3,6_1)$$

$$\begin{aligned} F_i^{m,l+1}(t) = \int_0^t [F_i^{m,l}(\tau) K_{m+l,m+l+1}^{m,l}(t-\tau) - \\ - F_{m+l}^{m,l}(\tau) K_{i,m+l+1}^{m,l}(t-\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (3,6_2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} l=0, 1, 2, \dots, n-m; i=m+l+1; m+l+2, \dots, n; \\ j=m, m+l+2; m+l+3; \dots, n. \end{aligned} \quad (3,7)$$

Так же как при выводе (3,4) найдем по индукции, что

$$\int_0^t \psi_m(\tau) K_{i,m}^{m,l}(t-\tau) d\tau + \sum_{j=m+l+1}^n \int_0^t \psi_j(\tau) K_{i,j}^{m,l}(t-\tau) d\tau = F_i^{m,l}(t). \quad (3,8)$$

Здесь

$$i = m + l, m + l + 1, \dots, n; l = 0, 1, 2, \dots, n - m. \quad (3,8^*)$$

Полагая в (3,8) $l = n - m$ получим окончательно

$$\int_0^t \psi_m(\tau) K_{n,m}^{m,n-n}(t-\tau) d\tau = F_n^{m,n-m}(t) \equiv \Phi_m(t). \quad (3,9)$$

§ 4. Покажем теперь, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k}{dt^k} K_{n,m}^{m,n-m}(t) = 0 \text{ при } k = 0, 1, 2, \dots, p_n - 1;$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{p_n}}{dt^{p_n}} K_{n,m}^{m,n-m} \neq 0. \quad (4,1)$$

Здесь

$$p_0 = -\frac{1}{2}; p_{l+1} = 2 p_l + 1; l = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (4,1^*)$$

Из (2,3) следует, что

$$g(0, 0, \alpha^2 t) = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi t}} + \frac{2}{\alpha \sqrt{\pi t}} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{n^2}{4 \alpha^2 t}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi t}} + G(\alpha^2 t). \quad (4,2)$$

Внося (4,2) в (2,8) найдем

$$K_{i,j}^0(t) = \frac{A_{i,j}^0}{\sqrt{t}} + B_{i,j}^0(t). \quad (4,3)$$

где

$$A_{0,0}^0 = \frac{\lambda b_1 + b_2}{\sqrt{\pi}}; A_{0,j}^0 = -\frac{\delta_j \gamma_j b_1}{\sqrt{\pi}}; A_{i,0}^0 = \frac{\alpha_{1,i} b_2}{\sqrt{\pi}};$$

$$A_{i,j}^0 = \begin{cases} -\frac{\alpha_{2,i,j} \delta_j a_{j,1}}{\sqrt{\pi}} & \text{при } i \neq j \\ -\frac{a_{i,2} + \alpha_{2,i,i} \delta_i a_{i,1}}{\sqrt{\pi}} & \text{при } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4,3_1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 B_{0,0}^{\circ}(t) &= \lambda b_1^2 G(b_1^2 t) + b_2^2 G(b_2^2 t); \\
 B_{0,j}^{\circ}(t) &= -\delta_j \gamma_j b_1^2 G(b_1^2 t); \\
 B_{i,0}^{\circ} &= \alpha_1 b_2^2 G(b_2^2 t); \\
 B_{i,j}^{\circ} &= -\alpha_{2,i,j} \delta_j a_{j,1}^2 G(a_{j,1}^2 t); \quad j \neq i \\
 B_{i,i}^{\circ}(t) &= -a_{i,2}^2 G(a_{i,2}^2 t) - \alpha_{2,i,i} \delta_i a_{i,1}^2 G(a_{i,1}^2 t); \quad (i, j=1, 2, \dots, n).
 \end{aligned} \right\} (4,3_2)$$

Заметим, что G , а вместе с ней и $B_{j,j}^{\circ}$ неограниченно дифференцируемы, причем при любых $m \geq 0$ и $p \geq 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[t^p \frac{d^m}{dt^m} B_{i,j}^{\circ}(t) \right] = 0 \quad (i, j=0, 1, 2, \dots, n) \quad (4,3^*)$$

Функции $f(t)$ — неограниченно дифференцируемые и при $t \rightarrow 0$ стремящиеся к нулю вместе со всеми своими производными быстрее любой степени t будем называть функциями класса E . Таким образом $B_{i,j}^{\circ}$ принадлежит к классу E .

Покажем теперь, что

$$K_{i,j}^l(t) = A_{i,j}^l t^{p_l} + B_{i,j}^l(t); \quad (4,4)$$

($l=0, 1, 2, \dots, n; i, j=l+1, l+2, \dots, n$),

где $B_{i,j}^l(t) \in E$, а $A_{i,j}^l$ и p_l определены рекуррентными формулами:

$$p_0 = -\frac{1}{2}; \quad p_l; \quad p_{l+1} = 2p_l + 1; \quad (l=0, 1, \dots, n-1),$$

$$A_{i,j}^l = [A_{i,l}^l A_{l,j}^l - A_{i,l}^l A_{l,j}^l] \frac{\Gamma^2(p_l + 1)}{\Gamma(2p_l + 2)}. \quad (4,5)$$

Здесь $\Gamma(p)$ — гамма функция Эйлера.

Заметим, что поскольку (4,4) переходит в (4,3) при $l=0$, постольку (4,4) справедливо при $l=0$. Далее

$$\int_0^1 (t-s)^{p_l} s^{p_l} ds = t^{2p_l+1} \int_0^1 (1-z)^{p_l} z^{p_l} dz =$$

$$= B(p_l + 1, p_l + 1) \cdot t^{2p_l+1} = \frac{\Gamma^2(p_l + 2)}{\Gamma(2p_l + 1)} t^{2p_l+1}. \quad (4,6)$$

Допустим, что $B_{i,j}^l$ уже определены при $l > 0$, причем при любых i и j

$$B_{i,j}^l \subset E. \quad (4,7^*)$$

Положим

$$I_0(t) = \int_0^t (t-s)^{p_l} B_{i,j}^l(s) ds; \quad I_1(t) = \int_0^t B_{i,j}^l(s) B_{k,n}^l(t-s) ds. \quad (4,7)$$

Из (4,7) и (4,7*) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d^m I_0}{dt^m} &= \int_0^t s^{p_l} \frac{d^m}{dt^m} B_{i,j}^l(t-s) ds; \\ \frac{d^m I_1}{dt^m} &= \int_0^t B_{i,j}^l(s) \frac{d^m}{dt^m} B_{k,n}^l(t-s) ds. \end{aligned} \quad (4,8)$$

Возьмем произвольное $p < 0$. Положим $|p| = q$. Найдем

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^p \frac{d^m I_0}{dt^m} \equiv \lim_{t \rightarrow 0} t^{-q} \int_0^t z^{p_l} (t-z)^q \left[\frac{1}{(t-z)^q} \frac{d^m}{dt^m} B_{i,j}^l(t-z) \right] dz. \quad (4,9)$$

Выражение в квадратных скобках под интегралом в правой части ограничено в силу (4,7*). Следовательно

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^p \frac{d^m I_0}{dt^m} = 0.$$

Итак $I_0 \subset E$. Аналогично докажем, что $I_1 \subset E$.

Допустим теперь, что (4,4) справедливо при $l = 0, 1, 2, \dots, m$. Пользуясь (3,1) и (4,4) и учитывая, что $I_0 \subset E$ убедимся в справедливости представления (4,4) при $l = m+1$. При этом

$$\begin{aligned} B_{i,j}^{l+1}(t) &= \int_0^t [A_{i,l}^l B_{i,j}^l(s) + B_{i,l}^l(s) A_{i,j}^l - A_{i,l}^l B_{i,j}^l(s) - A_{i,j}^l B_{i,l}^l] \cdot \\ &\cdot (t-s)^{p_l} ds + \int_0^t [A_{i,l}^l t - s) B_{i,l}^l(s) - B_{i,j}^l(s) B_{i,l}^l(t-s)] ds. \end{aligned} \quad (4,10)$$

Фиксируем теперь произвольное $m > 0$ ($0 < m \leq n$). Аналогично (4,4) покажем, что

$$K_{i,j}^{m,l}(t) = A_{i,j}^{m,l} t^{\rho_l + m} + B_{i,j}^{m,l}(t), \quad (4,11)$$

$$l = m+1, m+2, \dots, n;$$

где ρ_k определено согласно (4,1*), $B_{i,j}^{m,l} \subset E$ и

$$A_{i,j}^{m,0} = A_{i,j}^m; \quad B_{i,j}^{m,0} = B_{i,j}^m;$$

$$A_{i,j}^{m,l+1} = [A_{m+l, m+l+1}^{m,l} A_{i,j}^{m,l} - A_{i, m+l+1}^{m,l} A_{m+l, j}^{m,l}] \frac{\Gamma^2(\rho_{l+m} + 1)}{\Gamma(2\rho_{l+m} + 2)}. \quad (4,12)$$

Из (4,11) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k}{dt^k} K_{n,m}^{m,n-m} = 0; \quad k = 1, 2, 3, \dots, \rho_n - 1.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\rho_n}{dt^{\rho_n}} K_{n,m}^{m,n-m} = \rho_n! A_{m,n}^{m,n-m}; \quad (m=0, 1, 2, \dots, n) \quad (4,13)$$

Введем обозначения

$$\frac{1}{\rho_n! A_{n,m}^{m,n-m}} \frac{d^{\rho_n+1}}{dt^{\rho_n+1}} K_{n,m}^{m,n-m}(t-\tau) = R_m(t-\tau); \quad (4,14)$$

$$\frac{1}{\rho_n! A_{n,m}^{m,n-m}} \frac{d^{\rho_n+1}}{dt^{\rho_n+1}} \Phi_m(t) = \Psi_m(t).$$

Дифференцируя (3,9) $\rho_n + 1$ раз получим

$$\psi_m(t) + \int_0^t \psi_m(\tau) R_m(t-\tau) d\tau = \Psi_m(t); \quad (m=0, 1, 2, \dots, n) \quad (4,15)$$

Заметим, что

$$R_m(t-\tau) \subset E.$$

Рассмотрим теперь $\Psi_m(t)$. В силу (2,8₁) и (2,3)

$$F_i^0(t) = F_{i,1}^0(t) + F_{i,2}^0(t), \quad (4,16)$$

где

$$F_{i,2}^0 \subset E;$$

$$F_{i,1}^0 = \begin{cases} f_0(t) - b_1^2 \int_0^t g(0, 0, b_1^2(t-\tau)) q^*(\tau) d\tau & \text{при } i=0 \\ f_i(t) & \text{при } i=1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4,16^*)$$

Из (4,16), (4,4) и 3,1) следует, что

$$F_i^1(t) = F_{i,1}^1(t) + F_{i,2}^1(t), \quad (4,17)$$

где

$$F_{i,1}^1(t) = \int_0^t [A_{0,0}^0 F_{i,1}^0(\tau) - F_{0,1}^0(\tau) A_{i,0}^0] \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \int_0^t \frac{f_1^1(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}};$$
$$F_{i,2}^1(t) = \int_0^t \frac{A_{0,0}^0 F_{i,2}^0(\tau) - A_{i,0}^0 F_{0,2}^0(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau +$$
$$+ \int_0^t [F_i^0(\tau) B_{0,0}^0(t-\tau) - F_0^0(\tau) B_{i,0}^0(t-\tau)] d\tau. \quad (4,17^*)$$

Очевидно, что

$$F_{i,2}^1(t) \subset E, \quad (4,18)$$

Покажем теперь, что вообще

$$F_i^l(t) = F_{i,1}^l(t) + F_{i,2}^l(t), \quad (4,19)$$

где

$$F_{i,1}^l = \int_0^t Q_l(t-\tau)^q f_i^l(\tau) d\tau; \quad F_{i,2}^l \subset E. \quad (4,20)$$

причем

$$Q_1 = 1; \quad q_1 = -\frac{1}{2}; \quad q_{l+1} = q_l + p_l + 1;$$

$$Q_{l+1} = Q_l \cdot \frac{\Gamma(p_l + 1) \Gamma(q_l + 1)}{\Gamma(p_l + q_l + 2)}; \quad (4,21)$$

$$f_i^{l+1} = A_{i,l}^l f_i^l - A_{i,l}^l f_i^l; \quad l=0, 1, 2, \dots, m; \quad m \leq n.$$

Здесь p_l и $A_{i,k}^l$ определены согласно (4,5).

Действительно, при $l=0$ эти равенства справедливы в силу (4,17*) и (4,18). Допустим справедливость (4,19) при $l=m$. В таком случае из (3,1) следует, что

$$F_i^{m+1}(t) = F_{i,1}^{m+1}(t) + F_{i,2}^{m+1}(t), \quad (4,22)$$

где

$$\begin{aligned} F_{i,2}^{m+1} = & \int_0^t [F_{i,2}^m(\tau) B_{m,m}^m(t-\tau) - F_{m,1}^m(\tau) B_{i,m}^m(t-\tau)] d\tau + \\ & + \int_0^t [F_{i,2}^m(\tau) K_{m,m}^m(t-\tau) - F_{m,2}^m(\tau) K_{i,m}^m(t-\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (4,23)$$

и

$$F_{i,1}^{m+1} = \int_0^t [F_{i,1}^m(\tau) A_{m,m}^m - F_{m,1}^m(\tau) A_{i,m}^m] (t-\tau)^{p_m} d\tau. \quad (4,24)$$

Поскольку $B_{i,j}^m(t) \subset E$, $F_{i,2}^m \subset E$ очевидно, что $F_{i,2}^{m+1} \subset E$.

Внося, далее, (4,20) в (4,24) и меняя порядок интегрирования найдем

$$\begin{aligned} F_{i,1}^{m+1}(t) = & \int_0^t Q_m [A_{m,m}^m f_i^m(\tau) - A_{i,m}^m f_m^m(\tau)] d\tau \cdot \\ & \cdot \int_{\tau}^t (t-s)^{p_m} (s-\tau)^{q_m} ds. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{\tau}^t (t-s)^{p_m} (s-\tau)^{q_m} ds = (t-\tau)^{p_m+q_m+1} \frac{\Gamma(p_m+1)\Gamma(q_m+1)}{\Gamma(p_m+q_m+2)} \quad (4,25)$$

убеждаемся в справедливости (4,19) при $l=m+1$.

Фиксируем теперь $m < n$ и рассмотрим $F_i^{m,l}$;
($l=1, 2, \dots, n-m$)

Положим

$$f_i^m = f_{i,j}^{m,0}; F_{i,j}^m = F_{i,j}^{m,0}; (j=1, 2) \quad (4,26)$$

$$f_i^{m,l+1}(t) = A_{m+l,m+l+1}^{m,l} f_i^{m,l}(t) - A_{i,m+l+1}^{m,l} f_{m+l}^{m,l}(t);$$

($l=0, 1, 2, \dots, n-m$)

Найдем

$$F_{i,1}^{m,l} = \int_0^t Q_{m+l} f_i^{m,l}(\tau) (t-\tau)^{q_{m+l}} d\tau; F_{i,2}^{m,l} \subset E, \quad (4,27)$$

где Q_j, q_j определены согласно (4,21). Действительно (4,27) справедливо при $l=0$ в силу (4,20). Далее из (3,6₂) и (4,11) следует, что если (4,27) справедливо при $l=j$, то оно справедливо при $l=j+1$.

Заметим, что из (4,21) и (4,1*) следует, что

$$q_{l+1} - p_{l+1} = q_l - p_l = \dots = q_1 - p_1 = -\frac{1}{2}. \quad (4,28)$$

Итак

$$q_l = p_l - \frac{1}{2}. \quad (4,28^*)$$

Внося (4,27) и (4,28*) в (4,14) найдем, что

$$\Psi_m(t) = \Psi_{m,1}(t) + \Psi_{m,2}(t) \quad (4,29)$$

где

$$\Psi_{m,2}(t) \subset E, \quad (4,30)$$

и

$$\Psi_{m,1}(t) = \frac{1}{p_n! A_{m,n-m}^{n,m}} \frac{d}{dt} \int_0^t Q_n \frac{\Gamma(p_n + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} f_n^{m,n-m}(\tau) d\tau, \quad (4,31)$$

или, что то же самое,

$$\Psi_{m,1}(t) = \frac{Q_n \Gamma\left(p_n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} p_n! A_{n,m}^{m, n-m}} \frac{f_n^{m, n-m}(0)}{\sqrt{t}} +$$

$$+ \frac{Q_n \Gamma\left(p_n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} p_n! A_{n,m}^{m, n-m}} \int_0^t \frac{\dot{f}_n^{o, m, n-m}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (4,33)$$

Положим теперь

$$\omega_m(t) = \frac{w_m(t)}{\sqrt{t}}; \quad \Psi_{m,i}(t) = \frac{W_{m,i}(t)}{\sqrt{t}}. \quad (4,33^*)$$

Система (4,14) примет вид

$$\omega_m(t) + \int_0^t \omega_m(\tau) \sqrt{\frac{t}{\tau}} R_m(t-\tau) d\tau = W_{m,1}(t) + W_{m,2}(t).$$

$$(m=0, 1, 2, \dots, n) \quad (4,33)$$

Здесь

$$R_m \subset E; \quad W_{m,2} \subset E. \quad (4,34)$$

и $W^{m,1}$ непрерывна при $t \geq 0$ и ограничена. Следовательно уравнения (4,33) являются регулярными уравнениями типа Вольтерра и могут быть решены обычными методами. Заметим, что из (4,34) очевидно следует, что, с точностью до слагаемых из класса E , $\omega_m = W_{m,1}$. Таким образом $\omega_m(t)$ и $W_{m,1}(t)$ имеют при $t=0$ соприкосновение бесконечно высокого порядка.

§ 5. Рассмотрим теперь процесс испарения нефтепродуктов из наземных резервуаров с целью оценки величины и состава потерь при малых дыханиях. Сделаем предварительно следующие замечания:

До настоящего времени анализ потерь нефтепродуктов из атмосферных резервуаров за счет малых дыханий проводился в предположении, что:

1. Газовое пространство однородно по составу.
2. Равновесие между газовой и жидкой фазой наступает мгновенно.

3. Газовое пространство абсолютно прозрачно для тепловой радиации.

Эти предположения делаются как в элементарной теории [4, 5], так и в значительно более совершенной теории, развитой

Н. Н. Константиновым [6]*. При таком подходе основное внимание уделялось определению количества потерь. Вопрос о составе потерь оставался фактически не разобранным.

Очевидно, что предположение о наличии равновесия между газовой и жидкой фазами приводит к завышению величины потерь. В этом же направлении действует и допущение диатермичности газового пространства резервуара. Отсутствие необходимых данных о спектрах поглощения тепловой радиации парами углеводородов не позволяет количественно оценить погрешность, вносимую в расчет допущением диатермичности газового пространства. Очевидно, что второе крайнее допущение полной непрозрачности его для тепловой радиации является слишком далеким. Ввиду этого мы сохраним ниже допущение диатермичности газового пространства.

Ниже предполагается, что:

1. После закрытия всасывающего клапана и до достижения максимальной температуры газового пространства температура жидкой и газовой фазы является возрастающей функцией высоты.

2. Температурный градиент в жидкой фазе вблизи поверхности испарения достаточно велик, для того, чтобы утяжеление нефтепродукта, вследствие испарения легких фракций, не приводило к возникновению конвективных токов в жидкой фазе.

3. Дно резервуара считаем теплоизолированным.

Ниже рассматриваются средние по сечению резервуара температуры и концентрации компонентов, так что они считаются функциями одних лишь времени и высоты. Из условия «2» следует, что распределение температур и концентраций по высоте внутри жидкой фазы подчиняется уравнениям теплопроводности и диффузии. Из условия «1» и предположения диатермичности газового пространства резервуара следует, кроме того, что в течение времени от закрытия всасывающего клапана и до открытия выкидного клапана перераспределение температур и концентраций в газовой фазе также следует уравнениям теплопроводности и диффузии. При этом, конечно, предполагается, что можно пренебречь термической диффузией и диффузионной теплопроводностью.

Истечение газа из резервуара при открытом клапане вызывает перемешивание слоев газа, примыкающих к клапану. Интенсивность этого перемешивания и глубина слоя им захватываемого нуждаются в экспериментальном изучении. (Априори очевидно, что скорость истечения из клапана, а следовательно

*) Н. Константинов анализируя потери от больших дыханий отказывается от второго из перечисленных допущений и учитывает кинетику насыщения газового пространства парами.

и интенсивность перемешивания по вертикали, является возрастающей функцией разности давлений под клапаном и давления открытия клапана).

До получения необходимых экспериментальных данных попытки учета кинетики истечения газа через дыхательный клапан были бы беспредметными. Ввиду этого мы отказываемся совершенно от учета кинетики истечения газа через дыхательный клапан, и, вместо этого, пользуемся искусственным приемом:

1. Будем считать, что в течение периода от закрытия всасывающего клапана до достижения максимальной температуры выкидной клапан остается закрытым, так что в течение этого периода осуществляется чисто диффузионное распределение концентраций как в жидкой, так и в газовой фазах.

2. По достижении максимальной температуры газового пространства происходит мгновенное осреднение температуры и концентраций в газовой фазе и, вслед за ним, мгновенное изотермическое падение давления в газовом пространстве до давления открытия клапана. Заметим, что такой чисто объемный подход к определению потерь принят до сих пор и в элементарной теории (5).

Сказанное выше относится к периоду от закрытия всасывающего клапана и до закрытия клапана выкидного («дневное время»). В «ночное время», т. е. от момента закрытия выкидного клапана и до момента закрытия клапана всасывающего в резервуаре возникают вертикальные конвективные токи. Кроме того, вследствие охлаждения стенок и крыши резервуара, на них должна начаться конденсация легких фракций. Неизвестно, является ли этот процесс обратимым, так же как неизвестно, не происходит ли конденсация внутри объема. Таким образом теоретическому анализу процесса в «ночное время» должно быть предпослано специальное экспериментальное исследование. Ввиду этого мы ограничиваемся анализом чисто диффузионного процесса.

Будем рассматривать испаряющийся нефтепродукт как поликомпонентную идеальную жидкую смесь с нелетучим растворителем. Такая идеализация позволяет описывать процесс испарения нефтей и большинства продуктов ее переработки. Исключение составляют лучшие сорта авиационных бензинов, для которых предположение о наличии нелетучего растворителя является слишком грубым.

Мы ограничиваемся здесь лишь одной методической стороной вопроса. Табулирование процесса для практически интересных случаев было бы целесообразно лишь после постановки тщательного эксперимента, позволившего бы определить необходимые параметры и проверить близость допущений, положен-

ных в основу теории, и действительных условий течения процесса. Просчитанный ниже пример носит поэтому чисто иллюстративный характер.*

Пусть r , φ , z — цилиндрические координаты. Рассмотрим цилиндрический резервуар радиуса R_0 и высоты H , заполненный до уровня $z=h$ нефтепродуктом, коотрый мы будем считать сосотоящим из $n+1$ фракции, настолько узкой, что каждую из них можно отождествить с индивидуальным компонентом [7]. В таком случае мы можем рассматривать испоряющийся нефтепродукт, как идеальную поликомпонентную жидкую смесь.

Температура в резервуаре формируется под влиянием прямой солнечной радиации и конвективного и радиационного теплообмена резервуара и окружающего его воздуха. Будем предполагать, что неоднородность облучения боковой поверхности резервуара прямой солнечной радиацией вызывает возникновение горизонтальных токов настолько большой интенсивности, что температура и концентрации пренебрежимо мало отличаются от их средних значений по r и φ . Таким образом будем считать температуры и концентрации функциями одного лишь z и времени t .

Заметим, что потоки тепла, поступающего в резервуар за счет инсоляции и конвективного теплообмена с атмосферой, играют разную роль. В силу допущения диатермичности газового пространства резервуара радиационный поток тепла передается непосредственно поверхности испарения. Наоборот, та часть потока тепла через боковую поверхность резервуара, которая обусловлена конвективным теплообменом с атмосферой воспринимается газовым пространством резервуара и потому может быть интерпретирована как объемный источник тепла. Радиационная же часть поотка тепла через крышу и боковую поверхность резервуара, ограничивающую его газовое пространство, должна быть интерпретирована как поверхностный источник тепла, сосредоточенный на поверхности испарения. Наконец, все тепло, поступающее внутрь жидкой фазы через боковую поверхность резервуара, должно быть, в силу непрозрачности нефтепродуктов для тепловой радиации, отождествлено с объемным источником тепла, распределенным внутри жидкой фазы.

*) Очевидно, что схема, принятая нами, является довольно далекой идеализацией. Так, например, горизонтальные токи неизбежно должны вызывать возникновение вертикальных токов, т. е. нарушить диффузионный характер распределения компонентов. В том же направлении действует поглощение радиационного тепла поверхностью испарения. Учесть возникающую таким образом конвекцию можно было бы путем введения коэффициентов турбулентной теплопроводности и диффузии. Однако мы не располагаем данными даже для определения порядка их величин.

Таким образом в принятой нами схематизации процесса распределения температур и концентраций в жидкой и газовой фазах должны подчиняться уравнениям (1,1), (1,3). При этом если Q_i и Q_i^1 среднее количество тепла, падающего в единицу времени за счет прямой инсоляции и, соответственно, теплообмена с атмосферой на единицу боковой поверхности резервуара (при $0 < z < h$ для $i=1$ и при $h < z < H$ для $i=2$), и Q^* количество радиационного тепла, падающего в единицу времени на единицу поверхности крыши резервуара, то

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= \frac{2}{R_0} \frac{Q_1 + Q_1^1}{c^1 \rho^1}; \quad \bar{q}_2 = \frac{2}{R_0} \frac{Q_2^1}{c^2 \rho^2} \\ \bar{q}^* &= Q^* + \frac{2 Q_2 (H-h)}{R_0}. \end{aligned} \quad (5,1)$$

Здесь q_i и q^* определены согласно условиям § 1.

Заметим теперь, что при не очень больших степенях заполнения резервуара выражения (4,33) могут быть значительно упрощены, если учесть порядок входящих в них величин.

Будем ориентироваться на параметры конкретной смеси, начальный состав которой задан таблицей № 1.

Таблица № 1

Начальный состав жидкой фазы в расчетном примере

<i>i</i>	Компонент	Кип. °C	Концентрация		
			моль/литр	N_i	% % объемные
0	п C ₁₀ H ₂₂	161,0	2,75	0,446	50
1	п C ₈ H ₁₈	126,6	1,24	0,201	20
2	п C ₇ H ₁₆	98,3	1,36	0,221	20
3	п C ₆ H ₁₄	69,0	0,37	0,061	5
4	п C ₅ H ₁₂	36,2	0,44	0,071	5

Для сравнения в таблице № 2 приведены температурные пределы разгонки моторных топлив [8]:

Таблица 2

Группа топлив	Начало разгон. °C	10% °C	50% °C	90% °C	Конец разгонки °C
Авиабензины	40—50	65—85	95—115	130—150	185
Автобензины	30—50	60—80	125—145	175—195	195—205
Лигроины	80—110	130—150	150—170	180—200	210—230
Керосины	120—180	180—200	190—250	240—275	290—300

Значения коэффициентов диффузии, теплоемкости, теплопроводности, температуропроводности, молярных теплот испарения и концентрации насыщенных паров нормальных углеводородов

i	Компонент	Мг/моль	d гр/см ²		Теплоемкость кал/моль		D см ² /сек.	
			Жидкая фаза d_{20}^{20}	Газовая фаза норм. условия	Жидкая фаза c_n	Газовая фаза c_n	Жидкая фаза	Газовая фаза
0	Воздух	29		$1,293 \cdot 10^{-3}$		69**	**)	(1)
0	п C ₁₀ H ₂₂	142	0,730	$6,45 \cdot 10^{-3}$	52,0*		*	0,059
1	п C ₈ H ₁₈	114	0,705	$5,18 \cdot 10^{-3}$	46,6		$4,3 \cdot 10^{-5}$	0,066
2	п C ₇ H ₁₆	100	0,684	$4,55 \cdot 10^{-3}$	40,8		$4,9 \cdot 10^{-5}$	0,070
3	п C ₆ H ₁₄	86	0,660	$3,90 \cdot 10^{-3}$	34,5	31,4	$5,8 \cdot 10^{-5}$	0,076
4	п C ₅ H ₁₂	72	0,630	$3,27 \cdot 10^{-3}$	30,0	29,6	$6,9 \cdot 10^{-5}$	0,084

i	Компонент	K $\frac{\text{кал}}{\text{см/сек}^{\circ}\text{C}}$		b ² см ² /сек.		$\frac{\lambda}{\text{моль}}$	$\sigma_{i,m}^{\circ} \frac{\text{моль}}{\text{см}^3}$ при $\bar{v}_0 = 293^{\circ}\text{K}$
		Жидкая фаза	Газовая фаза	Жидкая фаза	Газовая фаза		
0	Воздух	(!!)	$5,8 \cdot 10^{-5}$		$2,10^{-2}$	(o)	(oo)
0	п C ₁₀ H ₂₂	$2,10^{-4}$		$7,10^{-4}$		$8,5 \cdot 10^3$	$0,15 \cdot 10^{-5}$
1	п C ₈ H ₁₈					$8,08 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{-5}$
2	п C ₇ H ₁₆					$7,41 \cdot 10^3$	$3,2 \cdot 10^{-5}$
3	п C ₆ H ₁₄					$6,82 \cdot 10^3$	$10,2 \cdot 10^{-5}$
4	п C ₅ H ₁₂					$6,15 \cdot 10^3$	$32,4 \cdot 10^{-5}$

Примечания:

*) C_p для пC₁₀H₂₂ — проэкстраполировано. Для C₅H₁₂—C₈H₁₈ см [7];

***) C_p для воздуха [9]; C_n для C₅H₁₂—C₆H₁₄ см [10];

)) Растворитель пC₁₀H₂₂; Принято $D = \frac{RT}{6\pi\mu aN}$ [11]; для пC_nH_{2n}+2 принято $a = \alpha n$, где α — радиус группы CH₂; $\alpha = 1,54 \text{ \AA}$ [12];

(1) Принято $D_i = D_1 \sqrt{M_1/M_i}$; D_1 для пC₈H₁₈ по [13]; Согласно А. С. Ирсову [8] для пC₇ и пC₆ D_i равно 0,0755 и 0,0736 соответственно.

(!!) Подсчитано по Н. Б. Варгафтику [14].

(o) См. [8]; для пC₁₀H₂₂ подсчитано по правилу Трутона.

(oo) См. [15].

Сопоставляя таблицы №№ 1 и 2 видим, что взятая для иллюстрации смесь укладывается в температурные пределы разгонок автобензинов, если не считать отсутствия в ней фракции с температурой кипения выше 175 °С. Это отличие не является для нас существенным, так как $n C_{10}H_{22}$ в нашем примере рассматривается как нелетучий растворитель.

В таблице № 3 собраны значения параметров, характеризующих рассматриваемую смесь.

Заметим, что коэффициенты диффузии в жидкой фазе рассчитаны нами по формуле, справедливой для сферических молекул. В действительности они имеют более близкие значения друг к другу. То же самое относится к коэффициентам диффузии паров в воздухе.

Пренебрегая различием коэффициентов диффузии отдельных компонентов как в жидкой, так и в газовой фазах, примем для них средние значения:

$$\bar{D}_{i,1} = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{сек}; \quad \bar{D}_{i,2} = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{сек}. \quad (5,2^*)$$

Коэффициент теплопроводности \bar{K} жидкой фазы рассчитываем по Варгафтику (14), исходя из средних молярного веса, теплоемкости и плотности смеси в начальный момент, т. е. по формуле:

$$\bar{k} = 4,32 \cdot 10^{-3} c_p \left(\frac{\gamma_0}{M} \right)^{4/3} \frac{\text{см сек}^\circ\text{С.}}{\text{кал}}. \quad (5,2)$$

Коэффициент термического расширения пентана равен $1,46 \cdot 10^{-3}$ (1/град). Принимая его в качестве коэффициента термического расширения смеси получим $\gamma_0 = 0,75$. Внося эти величины в (5,2) получим

$$\bar{k}_1 = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ кал/см сек}^\circ\text{С}. \quad (5,3)$$

Для газовой фазы принимаем k равным теплопроводности воздуха

$$\bar{k}_2 = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ кал/см сек}^\circ\text{С}. \quad (5,3^*)$$

Далее примем

$$D = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{сек}; \quad u^* = 293^\circ\text{К}; \quad \bar{v}_0 = \bar{u}_0 = 293^\circ\text{К}. \quad (5,4)$$

Размеры атмосферных резервуаров стандартизованы (Т5). Высота их колеблется в пределах

$$4,14 \cdot 10^2 \text{ см} < H < 11,44 \cdot 10^2 \text{ см}$$

Примем для расчета

$$H_1 = 400 \text{ см}; H_2 = 800 \text{ см}; H_3 = 1200 \text{ см.}$$

и три значения h/H

$$\left(\frac{h}{H}\right)_1 = 0,10; \quad \left(\frac{h}{H}\right)_2 = 0,5; \quad \left(\frac{h}{H}\right)_3 = 0,95.$$

В таблице № 4 приведены значения безразмерных коэффициентов диффузии и температуропроводности, подсчитанные для всех рассматриваемых вариантов значений параметров. Кроме того в таблице приведена безразмерная длительность полусуток. Эту последнюю величину мы обозначаем $T_{1/2}$.

Таблица 4

Значения b_i^2 $a_{i,j}^2$ соответствующие различным H и h

$H_{\text{см}}$	$\frac{h}{H}$	b_1^2	b_2^2	$a_{i,1}^2$	$a_{i,2}^2$	$T_{1/2}$
4.10 ²	0,10	0,95 · 10 ⁻²	0,25	0,06	1	2,5 · 10 ⁻²
	0,50	0,95 · 10 ⁻²	0,25	0,75 · 10 ⁻³	1	8,0 · 10 ⁻²
	0,95	2,6 · 10 ⁻⁵	0,25	1,9 · 10 ⁻⁷	1	8,0
8.10 ²	0,10	0,77	0,25	0,06	1	0,6 · 10 ⁻²
	0,50	0,95 · 10 ⁻²	0,25	0,75 · 10 ⁻³	1	2,0 · 10 ⁻²
	0,95	2,6 · 10 ⁻⁵	0,25	1,9 · 10 ⁻⁷	1	2,0
12.10 ²	0,10	0,77	0,25	0,06	1	0,23 · 10 ⁻²
	0,50	0,95 · 10 ⁻²	0,25	0,75 · 10 ⁻³	1	0,89 · 10 ⁻²
	0,95	2,6 · 10 ⁻⁵	0,25	1,9 · 10 ⁻⁷	1	0,89

Из таблицы № 4 видим, что произведения $b_1^2 T_{1/2}$ и $a_{i,2}^2 T_{1/2}$ во всех случаях остаются много меньше единицы, так как увеличение $T_{1/2}$ сопровождается уменьшением b_1^2 и $a_{i,1}^2$. Так как b_2^2 и $a_{i,2}^2$ не зависят от H и h/H , то произведения $b_2^2 T_{1/2}$ и $a_{i,1}^2 T_{1/2}$ быстро растут с увеличением степени заполнения резервуара.

Оценим погрешность, которую мы сделаем, если пренебрежем величиной $G(0, 0, \alpha^2 t)$. Относительная погрешность, вызываемая этим пренебрежением, не превосходит, в силу (4,2), величины.

$$S = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{\alpha^2 t}}. \quad (5,5)$$

Но ряд

$$\bar{S} = 2e^{-\frac{1}{\alpha^2 t}} + 2e^{-\frac{4}{\alpha^2 t}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{4}{\alpha^2 t}}.$$

очевидно мажорирует ряд S . Таким образом

$$S < 2e^{\frac{1}{\alpha^2 t}} + \frac{2e^{-\frac{4}{\alpha^2 t}}}{1 - e^{-\frac{4}{\alpha^2 t}}}. \quad (5,5^*)$$

При $\alpha^2 t < \frac{1}{3}$ имеем

$$S < 0,10 + 2 \cdot \frac{0,05^4}{1 - 0,05^4} \cong 0,1.$$

Таким образом при $\alpha^2 t < \frac{1}{3}$ с точностью до 10% можно в выражении $g(0, 0, \alpha^2 t)$ ограничиться первым членом $\frac{1}{\alpha \sqrt{\pi t}}$. Это означает, что при $\alpha t < \frac{1}{3}$ влиянием условий на верхнем и нижнем основаниях резервуара на градиенты температуры и концентрации компонентов на поверхности раздела фаз можно пренебречь с точностью до 10%.

В рассматриваемом примере интервал изменения параметров $\alpha^2 \leq 1$. Примем $\alpha^2 T_{1/2} = T_{\frac{1}{3}} < \frac{1}{3}$. Переходя к размерному времени $\bar{T}_{1/2}$ с помощью (1,8) найдем, что $T_{1/2} < \frac{1}{3}$, если

$$\frac{h}{H} < 1 - \frac{1}{H} \sqrt{3 D \bar{T}_{1/2}}.$$

где H — высота резервуара в см и $\bar{T}_{1/2}$ длительность полусуток в секундах. При принятом значении $D = 7,4 \cdot 10^{-2}$ см²/сек найдем,

что $T_{1/2} < \frac{1}{3}$ при $\frac{h}{H} < 1 - \frac{98}{H}$.

Итак при

$$\frac{h}{H} < 1 - \frac{98}{H} = \left(\frac{h}{H}\right)_m$$

погрешность, вызванная пренебрежением влиянием верхнего и нижнего оснований резервуара на градиенты температур и концентраций на границе раздела фаз, не превосходит 10%.

В таблице № 5 приведены значения $\left(\frac{h}{H}\right)_m$ в функции от H .

Таблица 5

$$\text{Значения } \left(\frac{h}{H}\right)_m = 1 - \frac{98}{H}$$

$H_{\text{см}}$	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
$\left(\frac{h}{H}\right)_m$	0,75	0,80	0,84	0,86	0,88	0,89	0,90	0,91	0,92

Фактическая ошибка от отбрасывания слагаемого G в выражении $g(o, o, \alpha^2 t)$ ($\alpha^2 \leq 1$) при $\frac{h}{H} < \left(\frac{h}{H}\right)_m$ меньше указанных выше 10%. Действительно, выражение $g(o, o, \alpha^2 t)$ входит в вычисления под знаком интеграла, так что нужно оценивать не $G(\alpha^2 T_{1/2})$, а $G(\alpha^2 \tau^*)$ где $o < \tau^* < T_{1/2}$. Кроме того интерес представляет лишь тот интервал изменения времени, на котором температура газовой фазы не убывает. Следовательно нужно рассматривать t , удовлетворяющее неравенству $t < (T_{1/4} + t_o)$ вместо $t < T_{1/2}$. Здесь t_o момент смещения максимума температуры газового пространства. Итак приближенно должно быть $2 t < T_{1/4}$ вместо $t < T_{1/2}$, а это дает уменьшение погрешности более чем в четыре раза.

Заметим, наконец, что отбрасывание величины $G(\alpha^2 t)$ в выражении $g(o, o, \alpha^2 t)$ приводит к увеличению значений градиентов концентрации компонентов на поверхности испарения, ибо на границах $x=1$ и $y=1$ градиент концентраций равен нулю.

Итак, ниже мы ограничимся приближением, соответствующим пренебрежению всеми членами зависящими от слагаемого $G(\alpha^2 t)$ в выражении $g(o, o, \alpha^2 t)$. Поскольку $G(\alpha^2 t) \subset E$ это означает, что в уравнениях (4,37) мы пренебрегаем величинами, зависящими от ядра $R_m \subset E$ и от $W_{m,2}$.

Таким образом мы принимаем приближению $\omega_m(t) = W_{m,1}(t)$, или что то же самое

$$\psi_m(t) = \Psi_{m,i}(t) \equiv \frac{Q_n \Gamma\left(p_n + \frac{1}{2}\right)}{A_{n,m}^{m,n-m} p_n! \sqrt{\pi t}} \cdot \left[f_n^{m,n-m}(o) + \sqrt{t} \int_0^t \frac{\dot{f}_n^{m,n-m}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]. \quad (5,6)$$

Заметим, что из рекуррентных соотношений (4,27), (4,20) и (4,21) следует, что

$$f_n^{m,n-m}(t) = \sum_{i=0}^n D_i^{m,n-m} f_i(t), \quad (5,7)$$

где

$$f_i^o = F_{i,1}^o = \begin{cases} f_o(t) - b_1 \int_0^t \frac{q^*(\tau) d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}; & (i=0) \\ f_i(t); & (i=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (5,8)$$

причем

$$f_o(t) = \mu + \int_0^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] d\tau; \\ f_i(t) = \alpha_{o,i} + \alpha_{1,i} \int_0^t q_2(\tau) d\tau. \quad (5,9)$$

и коэффициенты $D_i^{m,n-m}$ выражаются через $A_{i,j}^{m,l}$ с помощью композиции равенств (4,21) и (4,27).

Ниже выписываются значения коэффициентов $D_i^{m, n-m}$ для случая $n=4$. Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 D_4^{0,4} &= A_{3,4}^{0,3} A_{2,3}^{0,2} A_{1,2}^{0,1} A_{0,1}^{0,0}; \\
 D_3^{0,4} &= -A_{4,4}^{0,3} A_{2,3}^{0,2} A_{1,2}^{0,1} A_{0,1}^{0,0}; \\
 D_2^{0,4} &= A_{1,2}^{0,1} A_{0,1}^{0,0} (A_{4,4}^{0,3} A_{3,3}^{0,2} - A_{3,4}^{0,3} A_{4,3}^{0,2}); \\
 D_1^{0,4} &= A_{2,3}^{0,2} A_{0,1}^{0,0} (A_{4,4}^{0,3} A_{3,2}^{0,1} - A_{3,4}^{0,3} A_{4,1}^{0,0}) - \\
 &\quad - A_{2,2}^{0,1} A_{0,1}^{0,0} \cdot (A_{4,4}^{0,3} A_{3,3}^{0,2} - A_{3,4}^{0,3} A_{4,3}^{0,2}); \\
 D_0^{0,4} &= A_{2,3}^{0,2} A_{1,2}^{0,1} \cdot (A_{4,4}^{0,3} A_{3,1}^{0,0} - A_{3,4}^{0,3} A_{4,1}^{0,0}) - \\
 &\quad - A_{2,3}^{0,2} A_{1,1}^{0,0} (A_{4,4}^{0,3} A_{3,2}^{0,1} - A_{3,4}^{0,3} A_{4,2}^{0,1}) + \\
 &\quad + (A_{4,4}^{0,3} A_{3,3}^{0,2} - A_{3,4}^{0,3} A_{4,3}^{0,2}) \cdot (A_{2,2}^{0,1} A_{1,1}^{0,0} - A_{1,2}^{0,1} A_{2,1}^{0,0})
 \end{aligned} \right\} (5,10_1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 D_4^{1,3} &= A_{3,4}^{1,2} A_{2,3}^{1,1} A_{1,2}^{1,0} A_{0,0}^{0,0}; \quad D_3^{1,3} = -A_{4,4}^{1,2} A_{2,3}^{1,1} A_{1,2}^{1,0} A_{0,0}^{0,0}, \\
 D_2^{1,3} &= A_{1,2}^{1,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,4}^{1,2} A_{3,3}^{1,1} - A_{3,4}^{1,2} A_{4,3}^{1,1}); \\
 D_1^{1,3} &= A_{2,3}^{1,1} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,4}^{1,2} A_{3,2}^{1,0} - A_{3,4}^{1,2} A_{4,2}^{1,0}) - \\
 &\quad - A_{2,2}^{1,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,4}^{1,2} A_{3,3}^{1,1} - A_{3,4}^{1,2} A_{4,3}^{1,1}); \\
 D_0^{1,3} &= A_{2,3}^{1,1} A_{1,2}^{1,0} (A_{4,4}^{1,2} A_{3,0}^{0,0} - A_{3,4}^{1,2} A_{4,0}^{0,0}) - \\
 &\quad - A_{2,3}^{1,1} A_{1,0}^{0,0} (A_{4,4}^{1,2} A_{3,2}^{1,0} - A_{3,4}^{1,2} A_{4,2}^{1,0}) + \\
 &\quad + (A_{2,2}^{1,0} A_{1,0}^{0,0} - A_{1,2}^{1,0} A_{2,0}^{0,0}) (A_{4,4}^{1,2} A_{3,3}^{1,1} - A_{3,4}^{1,2} A_{4,3}^{1,1}); \\
 D_0^{1,3} &= A_{2,3}^{1,1} A_{1,2}^{1,0} (A_{4,4}^{1,2} A_{3,0}^{0,0} - A_{3,4}^{1,2} A_{4,0}^{0,0}) - \\
 &\quad - A_{2,3}^{1,1} A_{1,0}^{0,0} (A_{4,4}^{1,2} A_{3,2}^{1,0} - A_{3,4}^{1,2} A_{4,2}^{1,0}) + \\
 &\quad + (A_{2,2}^{1,0} A_{1,2}^{0,0} - A_{1,2}^{1,0} A_{2,0}^{0,0}) (A_{4,4}^{1,2} A_{3,3}^{1,1} - A_{3,4}^{1,2} A_{4,3}^{1,1}).
 \end{aligned} \right\} (5,10_2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 D_4^{2,2} &= A_{3,4}^{2,1} A_{2,3}^{2,0} A_{1,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0}; \quad D_3^{2,2} = -A_{4,4}^{2,1} A_{2,3}^{2,0} A_{1,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0}; \\
 D_2^{2,2} &= A_{1,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,4}^{2,1} A_{3,3}^{2,0} - A_{3,4}^{2,1} A_{4,3}^{2,0}); \\
 D_1^{2,2} &= A_{2,3}^{2,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,4}^{2,1} A_{3,1}^{1,0} - A_{3,4}^{2,1} A_{4,1}^{1,0}) - \\
 &\quad - A_{2,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,4}^{2,1} A_{3,3}^{2,0} - A_{3,4}^{2,1} A_{4,3}^{2,0}); \\
 D_0^{2,2} &= A_{2,3}^{2,0} A_{1,0}^{0,0} (A_{4,4}^{2,1} A_{3,0}^{0,0} - A_{3,4}^{2,1} A_{4,0}^{0,0}) - \\
 &\quad - A_{2,3}^{2,0} A_{1,0}^{0,0} (A_{4,4}^{2,1} A_{3,1}^{1,0} - A_{3,4}^{2,1} A_{4,1}^{1,0}) + \\
 &\quad + (A_{2,1}^{1,0} A_{1,0}^{0,0} - A_{1,1}^{1,0} A_{2,0}^{0,0}) (A_{4,4}^{2,1} A_{3,3}^{2,0} - A_{3,4}^{2,1} A_{4,3}^{2,0});
 \end{aligned} \right\} (5,10_3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 D_4^{3,1} &= A_{3,4}^{3,0} A_{2,2}^{2,0} A_{1,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0}; \quad D_3^{3,1} = -A_{4,4}^{3,0} A_{2,2}^{2,0} A_{1,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0}; \\
 D_2^{3,1} &= A_{1,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,4}^{3,0} A_{3,2}^{2,0} - A_{3,4}^{3,0} A_{4,2}^{2,0}); \\
 D_1^{3,1} &= A_{2,2}^{2,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,4}^{3,0} A_{3,1}^{1,0} - A_{3,4}^{3,0} A_{4,1}^{1,0}) - \\
 &\quad - A_{2,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,4}^{3,0} A_{3,2}^{2,0} - A_{3,4}^{3,0} A_{4,2}^{2,0}); \\
 D_0^{3,1} &= A_{2,2}^{2,0} A_{1,0}^{1,0} (A_{4,4}^{3,0} A_{3,0}^{0,0} - A_{3,4}^{3,0} A_{4,0}^{0,0}) - \\
 &\quad - A_{2,2}^{2,0} A_{1,0}^{0,0} (A_{4,4}^{3,0} A_{3,1}^{1,0} - A_{3,4}^{3,0} A_{4,1}^{1,0}) + \\
 &\quad + (A_{2,1}^{1,0} A_{1,0}^{0,0} - A_{1,1}^{1,0} A_{2,0}^{0,0}) (A_{4,4}^{3,0} A_{3,2}^{2,0} - A_{3,4}^{3,0} A_{4,2}^{2,0}).
 \end{aligned} \right\} (5,10_4)$$

$$\left. \begin{aligned}
 D_4^{4,0} &= A_{3,3}^{3,0} A_{2,2}^{2,0} A_{1,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0}; \quad D_3^{4,0} = -A_{4,3}^{3,0} A_{2,2}^{2,0} A_{1,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0}; \\
 D_2^{4,0} &= A_{1,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,5}^{3,0} A_{3,2}^{2,0} - A_{3,3}^{3,0} A_{4,2}^{2,0}); \\
 D_1^{4,0} &= A_{2,2}^{2,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,3}^{3,0} A_{3,1}^{1,0} - A_{3,3}^{3,0} A_{4,1}^{1,0}) - \\
 &\quad - A_{2,1}^{1,0} A_{0,0}^{0,0} (A_{4,3}^{3,0} A_{3,2}^{2,0} - A_{3,3}^{3,0} A_{4,2}^{2,0}); \\
 D_0^{4,0} &= A_{2,2}^{2,0} A_{1,1}^{1,0} (A_{4,3}^{3,0} A_{3,0}^{0,0} - A_{3,3}^{3,0} A_{4,0}^{0,0}) - \\
 &\quad - A_{2,2}^{2,0} A_{1,0}^{0,0} (A_{4,3}^{3,0} A_{3,1}^{1,0} - A_{3,3}^{3,0} A_{4,1}^{1,0}) + \\
 &\quad + (A_{2,0}^{1,0} A_{1,0}^{0,0} - A_{1,1}^{1,0} A_{2,0}^{0,0}) (A_{4,3}^{3,0} A_{3,2}^{2,0} - A_{3,3}^{3,0} A_{4,2}^{2,0}).
 \end{aligned} \right\} (5,10_5)$$

Из (5,8) и (5,9) найдем

$$\dot{f}_0^o(t) = \dot{f}_0(t) + \frac{b_1}{\sqrt{\pi}} \frac{q^*(0)}{\sqrt{t}} + \frac{b_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\dot{q}^*(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}};$$

$$\dot{f}_i^o(t) = \alpha_{1,i} q_2(t); \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$f_0^o(0) = \mu; \quad f_i^o(0) = \alpha_{0,i}; \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Внося (5,7) и (5,11) в (5,6) найдем, после очевидных преобразований:

$$\begin{aligned}
 \psi_m(t) &= \frac{Q_n \Gamma\left(p_n + \frac{1}{2}\right)}{p_n! A_{n,m}^{m,n-n} \sqrt{\pi}} \left\{ \frac{D_o^{m,n-m} \mu + \sum_{i=0}^n \alpha_{0,i} D_i^{m,n-m}}{\sqrt{t}} + \right. \\
 &+ D_o^{m,n-m} \left(b_1 \sqrt{\pi} q^*(0) + b_1 \sqrt{\pi} \int_0^t \dot{q}^*(\tau) d\tau \right) - D_o^{m,n-m} \int_0^t \frac{q_1(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \\
 &\left. + \left(D_o^{m,n-m} + \sum_{i=1}^n \alpha_{1,i} D_i^{m,n-m} \right) \int_0^t \frac{q_2(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\}. \quad (5,12)
 \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_n \Gamma\left(p_n + \frac{1}{2}\right)}{A_{n,m}^{m, n-m} p_n! \sqrt{\pi}} b_1 \sqrt{\pi} D_o^{m, n-m} &= L_m^*; \\ \frac{Q_n \Gamma\left(p_n + \frac{1}{2}\right)}{A_{n,m}^{m, n-m} p_n! \sqrt{\pi}} \left[D_i^{m, n-m} \mu + \sum_{i=1}^n \alpha_{0,i} D_i^{m, n-m} \right] &= L_m^0; \\ \frac{Q_n \Gamma\left(p_n + \frac{1}{2}\right)}{A_{n,m}^{m, n-m} p_n! \sqrt{\pi}} D_o^{m, n-m} &= -L_m^1; \\ \frac{Q_n \Gamma\left(p_n + \frac{1}{2}\right)}{A_{n,m}^{m, n-m} p_n! \sqrt{\pi}} \left(D_o^{m, n-m} + \sum_{i=1}^n \alpha_{1,i} D_i^{m, n-m} \right) &= L_m^2, \end{aligned} \right\} (5,13)$$

получим

$$\psi_m = L_m^* q^*(t) + \frac{L_m^0}{\sqrt{t}} + L_m^1 \int_0^t q_1(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + L_m^2 \int_0^t \frac{q_2(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (5,14)$$

Располагая значениями $\psi^m(t)$ выразим c_p , σ_p , u_i и v квадратурами (2,5) и (2,1).

§6. Решения c_i , σ_i , u и v зависят от потоков тепла $q_i(t)$ и $v^*(t)$. До сих пор мы считали их заданными функциями времени. Между тем естественнее считать их зависящими от температур u и v .

Пусть \bar{u} и \bar{v} размерные температуры жидкой и газовой фазы и \bar{u}^* и \bar{v}^* их средние по пространству:

$$\bar{u}^* = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{u} dz; \quad \bar{v}^* = \frac{1}{H-h} \int_h^H \bar{v} dz. \quad (6,1)$$

Примем

$$Q_1^1 = \beta(\bar{u}^0 - \bar{u}^*); \quad Q_2^1 = \bar{\beta}(\bar{u}^0 - \bar{v}^*); \quad \bar{v}^* = \frac{\bar{\beta}}{k^2} \left(\bar{u}^0 - \bar{v} \Big|_{z=H} \right). \quad (6,2)$$

Можно считать, [5], что

$$\bar{\beta} = \alpha_w + 0,2 A_s \frac{\bar{u}^o}{100}; \quad [\bar{\beta}] = \frac{\text{к кал}}{\text{м}^2 \text{ час град. с.}} \quad (6,3)$$

где α_w — коэффициент конвективного теплообмена при скорости ветра w ; A_s — коэффициент поглотительной способности поверхности резервуара* и \bar{u}^o абсолютная температура воздуха**.

Можно принять, [5] далее,

$$\alpha_w = 5,3 + 3,6 w; \quad [w] = \frac{M}{\text{сек}}; \quad [\alpha_w] = \frac{\text{к кал}}{\text{м}^2 \text{ час град. с.}} \quad (6,3^*)$$

Пусть β^* — величина коэффициента теплообмена $\bar{\beta}$ пересчитанная в физической системе единиц, так что

$$\beta^* = \frac{\bar{\beta}}{3,6} 10^{-1} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{ сек. град. с.}} \quad (6,4)$$

Переходя к безразмерным величинам согласно (2,8) и учитывая (5,1) найдем

$$q_1(t) = \beta_1 (u^o |_{y=0} - \bar{u}) + q_1^*(t); \quad q_2(t) = \beta_2 (v^o - \bar{v});$$

$$v^* = \beta (v^o - v |_{y=1}). \quad (6,5)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} u^o &= \frac{\bar{u}^o - \bar{u}_o}{u^*}; \quad v^o = \frac{\bar{v}^o - \bar{v}_o}{v^*}; \quad \bar{u} = \int_0^1 u dx; \quad \bar{v} = \int_0^1 v dy \\ \beta_i &= \frac{2 \beta^* (H-h)^2}{R_o D c^i \rho^i}; \quad (i=1, 2); \quad \beta = \frac{\beta^*}{k_2} (H-h); \\ q_1^* &= \frac{2 Q H}{D c^1 \rho^1 R_o u^*} \left(1 - \frac{h}{H} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (6,6)$$

Заметим, что для цилиндрических резервуаров можно считать

$$2 R_o = H.$$

* Для резервуара крытого алюминиевой краской, с учетом сильного загрязнения, $A_s = 0,5$ (5).

** В (6,3) следовало бы писать вместо \bar{u}^o величину T равную средней температуре воздуха и стенок резервуара. Однако это вызвало бы излишние осложнения в дальнейшем расчете.

Таким образом

$$\beta_i = \frac{4 \beta^* H}{D c^i Q^i} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2; \quad (i=1, 2)$$

$$\beta = \frac{\beta^* H}{k_2} \left(1 - \frac{h}{H}\right); \quad q_1^* = \frac{4 Q}{D c^1 Q^1} \frac{H}{u^*} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2. \quad (6,7)$$

Заметим теперь, что из (2,1) и (2,5) следует, что

$$\bar{u} = \int_0^t q_1(\tau) d\tau - b_1^2 \int_0^t \psi_{1,0}(\tau) d\tau \int_0^1 g(x, 0, b_1^2(t-\tau)) dx;$$

$$\bar{v} = \int_0^t q_2(\tau) d\tau - b_2^2 \int_0^t \psi_0(\tau) d\tau \int_0^1 g(y, 0, b_2^2(t-\tau)) dy +$$

$$+ b_2^2 \int_0^t v^*(\tau) d\tau \int_0^1 g(y, 1, b_2^2(t-\tau)) dx. \quad (6,8)$$

Но интеграл

$$I = \int_0^1 g(\xi, x, t-\tau) d\xi \quad 0 \leq x \leq 1.$$

определяет температуру слоя $0 \leq x \leq 1$ при краевых и начальных условиях:

$$\left. \frac{\partial I}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial I}{\partial x} \right|_{x=1} = 0; \quad I \Big|_{t=\tau} = 1.$$

Следовательно $I=1$. Таким образом

$$\bar{u} = \int_0^t q_1(\tau) d\tau - b_1^2 \int_0^t \psi_{1,0}(\tau) d\tau; \quad \bar{v} = \int_0^t q_2(\tau) d\tau - b_2^2 \int_0^t (\psi_0(\tau) - v^*(\tau)) d\tau. \quad (6,9)$$

Внося сюда $\psi_{1,0}$ из (2,6) найдем:

$$\bar{u} = \int_0^t q_1(\tau) d\tau + b^2 \int_0^t q^*(\tau) d\tau - b_1^2 \sum_{j=1}^n \delta_j \gamma_j \int_0^t \psi_j(\tau) d\tau + \lambda b_1^2 \int_0^t \psi_0(\tau) d\tau. \quad (6,9^*)$$

Пользуясь (5,14) получим

$$\bar{u} = \int_0^t q_1(\tau) d\tau + B_0^* \sqrt{t} + B_0^{**} \int_0^t q^*(\tau) d\tau +$$

$$+ B_1^* \int_0^t q_1(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau + B_2^* \int_0^t q_2(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau. \quad (6,10_1)$$

$$\bar{v} = \int_0^t q_2(\tau) d\tau + b_2^2 \int_0^t v^*(\tau) d\tau - b_2^2 L_0^* \int_0^t q^*(\tau) d\tau -$$

$$- 2 b_2^2 L_0^0 \sqrt{t} - 2 b_2^2 L_0^1 \int_0^t q_1(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau -$$

$$- 2 b_2^2 L_0^2 \int_0^t q_2(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau. \quad (6,10_2)$$

Здесь

$$B_0^* = 2 b_1^2 \left[\lambda L_0^0 - \sum_{j=1}^n \delta_j \gamma_j L_j^0 \right];$$

$$B_0^{**} = b_1^2 \left[\lambda L_0^* - \sum_{j=1}^n \delta_j \gamma_j L_j^* \right] + b_1^2.$$

$$B_1^* = 2 b_1^2 \left[\lambda L_0^1 - \sum_{j=1}^n \delta_j \gamma_j L_j^1 \right];$$

$$B_2^* = 2 b_1^2 \left[\lambda L_0^2 - \sum_{j=1}^n \delta_j \gamma_j L_j^2 \right] \quad (6,11)$$

Обратимся к определению v^* . Имеем

$$v \Big|_{y=1} = \int_0^t q_2(\tau) d\tau - b_2^2 \int_0^t \psi_0(\tau) g(1,0, b_2^2(t-\tau)) d\tau +$$

$$+ b_2^2 \int_0^t v^*(\tau) g(1,1, b_2^2(t-\tau)) d\tau. \quad (6,12)$$

В § 5 мы приняли приближение, равносильное пренебрежению влиянием условий на границах $x=1$ и $y=1$ на величины градиентов температур и концентраций компонентов на поверхностях $x=0$, $y=0$, раздела фаз. С той же степенью точности можно пренебречь и обратным влиянием градиента температуры при $y=0$ на температуру при $y=1$. Это означает возможность пренебрежения величиной второго интеграла в правой части (6,12).

Далее, в обозначениях (4,2) имеем

$$g(1,1, b_2^2(t-\tau)) = \frac{1}{b_2\sqrt{\pi(t-\tau)}} + G(b_2^2(t-\tau)),$$

причем величиной $G(b_2^2(t-\tau))$ можно пренебречь, ибо $G \subset E$.

Таким образом

$$v \Big|_{y=1} = \int_0^t q_2(\tau) d\tau + \frac{b_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v^*(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (6,13)$$

Внося сюда $v \Big|_{y=1}$ из (6,5) получим

$$v^* = -\beta \int_0^t q_2(\tau) d\tau + \beta v^0 - \frac{\beta b_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v^*(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (6,14)$$

Легко видеть, что решение этого уравнения имеет вид

$$v^* = \beta v^0 e^{\beta^2 b_2^2 t} \operatorname{Erfc}(\beta b_2 \sqrt{t}) - \beta \int_0^t e^{\beta^2 b_2^2(t-\tau)} \operatorname{Erfc}(\beta b_2 \sqrt{t-\tau}) q_2(\tau) d\tau. \quad (6,15)$$

Здесь

$$\operatorname{Erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2} dz.$$

Заметим, что при не слишком малых t мы можем пользоваться асимптотическим выражением

$$e^x \operatorname{Erfc} x = \frac{1}{x\sqrt{\pi}}. \quad (6,16)$$

Действительно, пусть $t > 10^{-4}$. Тогда при $\beta = 2,75 \cdot 10^3$; $b_2 = 0,5^*$ найдем, что

$$e^{\beta^2 b_2^2 t} \operatorname{Erf} c(\beta b_2 \sqrt{t}) = \frac{1}{\beta b_2 \sqrt{\pi t}}$$

с относительной погрешностью не большей 0,026%. Таким образом

$$v^* = \frac{v^o}{b_2 \sqrt{\pi t}} - \frac{1}{b_2 \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q_2(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (6,17)$$

Внося (6,17) и (6,10₂) получим

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \int_0^t q_2(\tau) d\tau + 2 b_2^2 \left[\frac{v^o}{b_2 \sqrt{\pi}} - L_o^o \right] \sqrt{t} - \\ &- 2 b_2^2 \left[L_o^2 + \frac{1}{b_2 \sqrt{\pi}} \right] \int_0^t q_2(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau - \\ &- b_2^2 L_o^* \int_0^t q^*(\tau) d\tau + 2 b_2^2 L_o^1 \int_0^t q_1(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (6,18)$$

Внесем теперь (6,5) в (6,10₁) и (6,18). Получим

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \varphi_1(t) + \eta_1 \int_0^t \bar{u}(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau + \eta_2 \int_0^t \bar{v}(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau - \beta_1 \int_0^t \bar{u}(\tau) d\tau, \\ \bar{v} &= \varphi_2(t) + \eta_3 \int_0^t \bar{u}(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau + \eta_4 \int_0^t \bar{v}(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau - \beta_2 \int_0^t \bar{v}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6,19)$$

* Величины $t < 1/3$, $\beta = 2,75 \cdot 10^3$ и $b_2 = 0,5$ определены в соответствии с данными примера, рассматриваемого в § 5.

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = & B_o^* \sqrt{t} + \beta u^o t + \frac{2}{3} (\beta_1 B_1^* u^o + \beta_2 v^o) t^{3/2} + \\ & + \int_0^t q_1^*(\tau) d\tau + B_o^{**} \int_0^t q^*(\tau) d\tau + B_1^* \int_0^t q_1^*(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau; \\ \varphi_2(t) = & v_1 \sqrt{t} + v_2 t + v_2'' t^{3/2} + v_3 \int_0^t q^*(\tau) d\tau + v_4 \int_0^t q^*(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (6,20)$$

причем

$$\begin{aligned} \eta_1 = -\beta_1 B_1^*; \quad \eta_2 = -\beta_2 B_2^*; \quad \eta_3 = -2 b_2^2 L_o^1 \beta_1; \quad \eta_4 = 2 b_2^2 \beta_2 L_o^2 + \frac{1}{b_2 \sqrt{\pi}} \\ v_1 = 2 b_2^2 \left(\frac{v^o}{b_2 \sqrt{\pi}} - L_o^o \right); \quad v_2^1 = \beta_2 v^o; \\ v_2'' = \frac{4}{3} b_2^2 \left[L_o^1 \beta_1 u^o - \left(L_o^2 + \frac{1}{b_2 \sqrt{\pi}} \right) \beta_2 v^o \right]; \\ v_3 = -b_2^2 L_o^*; \quad v_4 = 2 b_2^2 L_o^2. \end{aligned} \quad (6,20^*)$$

Решение системы (6,19) может быть получено либо операционно, либо итерационно-разностным методом. Однако, при тех значениях параметров, которые приняты в § 5 и при допустимых значениях степени заполнения резервуара практически вполне удовлетворительное приближенное решение этой системы может быть получено в аналитически замкнутой форме. Это будет сделано ниже, применительно к рассчитываемому примеру.

§ 7. Мы можем теперь подсчитать величину и состав потерь за один акт малого дыхания резервуара, в соответствии с схемой, принятой в § 5.

Построив график зависимости \bar{v} от t найдем максимальную температуру газового пространства и момент ее достижения. Пусть \bar{v}_m — максимальная безразмерная температура газового пространства и t_m момент ее достижения. Пусть T_m соответствующая размерная температура, так что

$$T_m = u^* \bar{v}_m + \bar{v}_o. \quad (7,1)$$

Обозначим через $\bar{\sigma}_i^m$ значение средней концентрации i компонента в газовой фазе в момент времени t_m :

$$\bar{\sigma}_i^m = \frac{1}{H-h} \int_h^H \bar{\sigma}_i dz \quad (7,2)$$

и через $\bar{\sigma}_i^m$ соответствующую безразмерную величину

$$\bar{\sigma}_i^m = \int_0^1 \sigma_i dy. \quad (7,2^*)$$

Тогда

$$\bar{\sigma}_i^m = \bar{\sigma}_i^m c_{i,0} + \bar{\sigma}_{i,0}. \quad (7,2^{**})$$

Согласно принятой нами схеме давление p в резервуаре перед открытием клапана будет равно

$$P_m = RT_m \sum_{i=0}^n \bar{\sigma}_i^m = RT_m n_m^*. \quad (7,3)$$

Здесь $\bar{\sigma}_0^m$ молярная концентрация воздуха и n_m^* общее число молей в единице объема газового пространства при температуре T_m . (до открытия клапана).

При изотермическом снижении давления до p^0 суммарная молярная концентрация станет равной

$$n^0 = n_m^* \frac{p^0}{p_m}. \quad (7,4)$$

Следовательно суммарное число молей, теряемых за один акт малого дыхания равно

$$\Delta n = \pi R_o^2 (H-h) n_m^* \left(1 - \frac{p^0}{p_m} \right). \quad (7,5)$$

Потери каждого из компонентов пропорциональны их концентрации при $p = p_m$. Следовательно

$$\Delta n_i = \pi R_o^2 (H-h) n_m^* \left(1 - \frac{p^0}{p_m} \right) M_i \bar{\sigma}_i^m; \quad (7,6)$$

Здесь Δn_i число молей i компонента, теряемых за один акт малого дыхания.

Пусть M_i молярный вес i компонента. Тогда индивидуальные и суммарные потери будут равны

$$\Delta m_i = \pi R_o^2 (H-h) n_m^* \left(1 - \frac{p^o}{p_m} \right) M_i \bar{\sigma}_i^m.$$

$$\Delta m = \pi R_o^2 (H-h) n_m^* \left(1 - \frac{p^o}{p_m} \right) \sum_{i=1}^n M_i \bar{\sigma}_i^m. \quad (7,7)$$

Заметим, что в силу

$$\int_0^1 g(y, \eta, \alpha^2(t-\tau)) \cdot dy \equiv 1$$

из (2,5) следует, что

$$\bar{\sigma}_i^m = -a_{i,2}^2 \int_0^{t_m} \psi_i(t) dt. \quad (7,8)$$

§ 8. Проиллюстрируем полученные результаты расчетом примера, базирующегося на исходных данных § 5 (таблицы № 1, 3). Поток тепла Q и Q^* зададим равенствами (5)

$$Q = \frac{c}{2} A_s \psi \rho \frac{1}{\cos z} \sin z; \quad Q^* = c A_s \psi \rho \frac{1}{\cos z} \omega z. \quad (8,1)$$

Здесь z — зенитное расстояние в момент t , c — солнечная постоянная, A_s — поглощательная способность материала стенки резервуара, ρ — коэффициент прозрачности атмосферы для всего пучка солнечной радиации, ψ — поправка на облачность дня. (5)

Для A_s , ρ и ψ могут быть указаны пределы:

$$0,25 < A_s < 0,74; \quad 0,75 < \rho < 0,85; \quad 0,34 < \psi < 1.$$

В силу (1,3₆), (1,8) и (1,6) получим

$$q_1^*(t) = N e^{-\frac{\varepsilon}{\cos z}} \sin z; \quad q^*(t) = e^{-\frac{\varepsilon}{\cos z}} [N_1 \sin z + N_2 \cos z], \quad (8,2)$$

где

$$N = \frac{c A_s \psi (H-h)^2}{u^* R_o D c^1 \rho^1}; \quad N_1 = \frac{c A_s \psi h}{R_o} \cdot \frac{H-h}{\bar{k}_1 u^*}; \quad N_2 = \frac{c A_s \psi h}{\bar{k}_1 u^*}; \quad \left. \vphantom{N} \right\} (8,3)$$

$$\cos z = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \cos [\omega(t-\tau)];$$

$$\omega = \frac{2\pi - 10^{-4}}{8,64} \frac{(H-h)^2}{D};$$

$$\varepsilon = |\ln \varrho|; \quad \ddot{\alpha} = \cos z_o - \cos \varphi \cos \delta; \quad \ddot{\beta} = \cos \varphi \cos \delta. \quad (8,3)$$

Здесь t — безразмерное время и $2T$ — безразмерная длительность дня; z_o — зенитное расстояние в полдень, т. е. при $t=T$; φ — географическая широта и δ склонение. Заметим, что если $2T$ длительность дня отсчитываемая в радианах, то

$$\cos \omega T \cong \cos T \cong -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta; \quad z_o = \varphi - \delta. \quad (8,3^*)$$

В таблицах №№ 6 и 6* для удобства обозрения сведены значения всех размерных и безразмерных параметров, а также начальные условия, принятые в расчетном примере. Зависимость q_1^* и q^* от времени, подсчитанная согласно (8,2), представлена в таблице № 7. Значения коэффициентов, входящих в уравнения (5,14), (6,19) и (6,20) сведены в таблицу № 8.

Таблица № 6

Размерные параметры расчетного примера

$$R_o = 500 \text{ см}; \quad H = 1000 \text{ см}; \quad h = 500 \text{ см}.$$

$$c^1 \varrho^1 = 0,282 \text{ кал/см}^3 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad c^2 \varrho^2 = 0,0031 \text{ кал/см}^3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$k_1 = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ кал/см. сек. } ^\circ\text{C}; \quad k_2 = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ кал/см. сек. } ^\circ\text{C}.$$

$$\bar{b}_1^2 = 7,44 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{сек}; \quad \bar{b}_2^2 = 1,87 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{сек}.$$

$$\bar{D}_{i,1} = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{сек}; \quad \bar{D}_{i,2} = D = 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{сек}.$$

i	1	2	3	4	5
$\bar{\sigma}_{i,m}^o \cdot 10^6 \text{ моль/см}^3$	1,0	3,2	10,2	32,4	0,15
$\lambda_i \cdot 10^3 \text{ кал/моль}$	8,08	7,41	6,82	6,15	8,55
$M_i \text{ гр/моль}$	114	100	86	72	$\frac{142 \text{ н-декан}}{29 \text{ воздух}}$

$$u^* = 293 \text{ } ^\circ\text{K}. \quad \bar{u}^o = 293 \text{ } ^\circ\text{K}.$$

$$\omega = 100 \text{ см/сек}.$$

$$\beta^* = 3,22 \cdot 10^{-4} \text{ кал/см}^2 \cdot \text{сек. } ^\circ\text{C}.$$

$$\bar{A} = 0,5; \quad \psi = 1; \quad \varrho = 0,75; \quad \varepsilon = 0,288.$$

$$C = 3,24 \cdot 10^{-2} \text{ кал/см}^2 \cdot \text{сек}. \quad R = 1,987 \text{ кал/}^\circ\text{C. моль}.$$

Начальные условия

i	0	1	2	3	4
$\bar{C}_{i,0} \cdot 10^3$ моль/см ²	2,75	1,24	1,36	0,37	0,44 ; $\bar{u}_0 = \bar{v}_0 =$
$\bar{\sigma}_{i,0}$ моль/см ³	0	0	0	0	0 = 293°k

Широта, склонение, продолжительность дня:

$$\varphi = 54^\circ 44'; \delta = 23^\circ 28'; 2T = 4,46$$

Таблица 6*

Безразмерные параметры расчетного примера

$$b_1^2 = 2,77 \cdot 10^{-5}; \quad b_2^2 = 0,25; \quad a_{i,1}^2 = 2,0 \cdot 10^{-5}; \quad a_{i,2}^2 = 1 \quad (i=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$\vartheta_i = 25,6 \cdot 10^3 \quad (i=0, 1, 2, 3, 4) \quad \lambda = 5,25; \quad \mu = 0.$$

i	0	1	2	3	4
$\gamma_i \cdot 10^3$	21,0	8,96	9,01	2,26	2,42

t	0	1	2	3	4
$\alpha_{0,i} \cdot 10^3$	0,0243	0,162	0,520	1,68	5,23
$\alpha_{1,i} \cdot 10^6$	0,357	2,25	6,62	19,7	55,2
$\alpha_{1,2,i} \cdot 10^3$	-0,0724	0,130	-0,0358	-0,00947	-0,0116
$\alpha_{2,2,i} \cdot 10^3$	-0,232	-0,105	0,405	-0,0312	-0,0371
$\alpha_{2,3,i} \cdot 10^3$	-0,751	-0,338	-0,371	1,56	-0,120
$\alpha_{2,4,i} \cdot 10^3$	-2,33	-1,05	-1,15	-0,314	4,89

$$\beta = 2,75 \cdot 10^3; \quad \beta_1 = 15,5; \quad \beta_2 = 1,41 \cdot 10^3$$

$$N = 1,33; \quad N_1 = 1,33; \quad N_2 = 1,33;$$

$$\bar{a} = 0,325; \quad \bar{\beta} = 0,530; \quad \omega = 245,7; \quad T = 0,92 \cdot 10^{-2}.$$

Начальные условия: $c_i = \sigma_i = 0$ ($i=1, 2, 3, 4$)

$$u_0 = v_0 = 0; \quad u^0 = 0.$$

Значения $q_1^*(t)$ и $q^*(t)$.

t	q_1^*	q^*	t	q_1^*	q^*	t	q_1^*	q^*
0	0	0	0,007	0,569	129,6	0,013	0,658	116,3
0,001	0,098	10,88	0,008	0,524	130,4	0,014	0,645	101,0
0,002	0,374	46,43	0,009	0,492	130,4	0,015	0,557	78,25
0,003	0,557	78,25	0,010	0,524	130,4	0,016	0,374	46,43
0,004	0,645	101,0	0,011	0,569	129,6	0,017	0,098	10,88
0,005	0,658	116,3	0,012	0,624	125,2	0,018	0	0
0,006	0,624	125,2						

Таблица 8

Коэффициенты уравнений (5,14), (6,19) и (6,20)

m	$-L_m^*$	$-L_m^o$	$-L_m^1$	$-L_m^2$	B_o^{**}	B_o^*	B_1^*	B_2^*
	$\cdot 10^4$	$\cdot 10^3$	$\cdot 10^2$	$\cdot 10^2$	0,010306	0,0004574	0,003846	0,003827
0	10,340	2,2405	0,1108	0,0245	η_1	η_2	η_3	η_4
1	0,0119	0,0989	2,2405	0,1359	-0,0596	-5,356	0,00852	0,793 $\cdot 10^3$
2	0,3474	0,3129	0,3725	0,3843	ν_1	ν_2	ν_3	ν_2^1 ν_2''
3	0,9505	0,9414	1,0189	1,1015	$1,12 \cdot 10^{-3}$	$2,59 \cdot 10^{-4}$	$-0,55 \cdot 10^{-3}$	0 0
4	2,4109	2,5751	2,5485	2,7273	$2/3 (\beta_1 E_1^* u^o + \beta_2 v^o) = 0; \beta u^o = 0.$			

Произведем, пользуясь данными таблиц №№ 6*, 7 и 8 расчет температур u и v . Имеем (см. (6,19))

$$\bar{u}(t) = \varphi_1(t) + \eta_2 \int_0^t \bar{v}(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau - \beta_1 \int_0^t \bar{u}(\tau) \left[1 + \frac{|\eta_1|}{\beta_1} \sqrt{t-\tau} \right] d\tau. \quad (8,41)$$

$$\bar{v}(t) = \varphi_2(t) + \eta_3 \int_0^t \bar{u}(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau - \beta_2 \int_0^t \bar{v}(\tau) \left[1 - \frac{\eta_1}{\beta_2} \sqrt{t-\tau} \right] d\tau. \quad (8,42)$$

Рассмотрение должно вестись в пределах длительности дня, т. е. при

$$0 < t < 2T = 0,018. \quad (8,5)$$

Следовательно

$$\frac{|\eta_1|}{\beta_1} \sqrt{t-\tau} \leq 0,52 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{\eta_4}{\beta_2} \sqrt{t-\tau} \leq 0,077.$$

Таким образом с погрешностью заведомо меньшей 0,052% и, соответственно, 7,7% в уравнениях (8,4₁) и (8,4₂) можно пренебречь членами, зависящими от η_1 и, соответственно, от η_4 .

Итак принимаем

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \varphi_1(t) + \eta_2 \int_0^t \bar{v}(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau - \beta_1 \int_0^t \bar{u}(\tau) d\tau \equiv \psi^1(t) - \beta_1 \int_0^t \bar{u}(\tau) d\tau; \\ \bar{v}(t) &= \varphi_2(t) + \eta_3 \int_0^t \bar{u}(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau - \beta_2 \int_0^t \bar{v}(\tau) d\tau \equiv \psi^2(t) - \beta_2 \int_0^t \bar{v}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8,6)$$

Интеграция (8,6) дает

$$\bar{u} = e^{-\beta_1 t} \int_0^t \varphi_1(\tau) e^{\beta_1 \tau} d\tau; \quad \bar{v} = e^{-\beta_2 t} \int_0^t \psi^2(\tau) e^{\beta_2 \tau} d\tau,$$

или, что то же самое:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = e^{-\beta_1 t} \int_0^t \varphi_1(\tau) e^{\beta_1 \tau} d\tau + \eta_2 e^{-\beta_1 t} \int_0^t e^{\beta_1 \tau} d\tau \frac{d}{d\tau} \int_0^{\bar{\tau}} \bar{v}(s) \sqrt{\tau-s} ds; \\ \bar{v} &= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = e^{-\beta_2 t} \int_0^t \varphi_2(\tau) e^{\beta_2 \tau} d\tau + \eta_3 e^{-\beta_2 t} \int_0^t e^{\beta_2 \tau} d\tau \frac{d}{d\tau} \int_0^{\bar{\tau}} \bar{u}(s) \sqrt{\tau-s} ds. \end{aligned} \quad (8,7)$$

Преобразуем выражения \bar{u}_2 и \bar{v}_2 . Интегрируя по частям и меняя порядок интегрирования получим

$$\bar{u}_2 = \eta_2 \int_0^t \bar{v}(s) \sqrt{t-s} ds - \eta_2 \beta_1 \int_0^t \bar{v}(s) e^{-\beta_1(t-s)} ds \int_0^{t-s} e^{\beta_1 \tau} \sqrt{\tau} d\tau.$$

Отсюда с помощью интегрирования по частям найдем

$$\bar{u}_2(t) = \frac{\eta_2}{\sqrt{\beta_1}} \int_0^t \bar{v}(s) W[\sqrt{\beta_1(t-s)}] ds. \quad (8,8)$$

Здесь

$$W(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{z^2} dz. \quad (8,9)$$

Совершенно аналогично

$$\bar{v}_2(t) = \frac{\eta_3}{\sqrt{\beta_2}} \int_0^t \bar{u}(s) W[\sqrt{\beta_2(t-s)}] ds. \quad (8,10)$$

Внося (8,8) и (8,10) в (8,7) получим

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_1 + \frac{\eta_2}{\sqrt{\beta_1}} \int_0^t \bar{v}_1(s) W[\sqrt{\beta_1(t-s)}] ds + \\ &+ \frac{\eta_2}{\sqrt{\beta_1}} \int_0^t \bar{v}_2(s) W[\sqrt{\beta_1(t-s)}] ds; \\ \bar{v} &= \bar{v}_1 + \frac{\eta_3}{\sqrt{\beta_2}} \int_0^t \bar{u}_1(s) W[\sqrt{\beta_2(t-s)}] ds + \\ &+ \frac{\eta_3}{\sqrt{\beta_2}} \int_0^t \bar{u}_2(s) W[\sqrt{\beta_2(t-s)}] ds. \end{aligned} \quad (8,11)$$

Внося u и v из (8,11) в (8,8) и (8,10) найдем

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(t) &= \frac{\eta_2}{\sqrt{\beta_1}} \int_s^t \bar{v}_1(s) W(\sqrt{\beta_1(t-s)}) ds + \\ &+ \frac{\eta_2 \eta_3}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \int_s^t \bar{u}_1(s) ds \int_s^t W(\sqrt{\beta_1(t-\tau)}) W(\sqrt{\beta_2(\tau-s)}) d\tau + \\ &+ \frac{\eta_2 \eta_3}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \int_0^t \bar{u}_2(s) ds \int_s^t W(\sqrt{\beta_1(t-\tau)}) W(\sqrt{\beta_2(\tau-s)}) d\tau. \end{aligned} \quad (8,12)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2(t) = & \frac{\mu_1}{\sqrt{\beta_2}} \int_0^t \bar{u}_1(s) W(\sqrt{\beta_2(\tau-s)}) d\tau + \\ & + \frac{\eta_2 \eta_3}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \int_0^t \bar{v}_1(s) ds \int_s^t W(\sqrt{v_1(s) ds}) W(\sqrt{\beta_2(t-s)}) ds + \\ & + \frac{\eta_2 \eta_3}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \int_0^t \bar{v}_2(s) ds \int_s^t W(\sqrt{\beta_1(t-\tau)}) W(\sqrt{\beta_1(t-\tau)}) d\tau. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Заметим теперь, что при всех значениях аргумента $W(z) < 1$.
Далее

$$\frac{|\eta_2 \eta_3|}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} = 3,1 \cdot 10^{-4}; \quad t < 0,018.$$

Отсюда следует, что с погрешностью заведомо не большей $6,5 \cdot 10^{-4}\%$ относительно величины u_2 и, соответственно, v_2 — в правых частях (8,12) можно пренебречь последним слагаемым. Поскольку

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2; \quad \bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$$

закключаем, с той же точностью, что

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) = & \bar{u}_1(t) + \frac{\eta_2}{\sqrt{\beta_1}} \int_0^t \bar{v}_1(s) W(\sqrt{\beta_1(t-s)}) ds; \\ \bar{v}(t) = & \bar{v}_1(t) + \frac{\eta_1}{\sqrt{\beta_2}} \int_0^t \bar{u}_1(s) W(\sqrt{\beta_2(t-s)}) ds. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Вычислим теперь u_1 и v_1 . В силу (6,20) и начальных условий $u^0 = v^0 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t) = & \frac{B_o^*}{2\sqrt{t}} + q_1^*(t) + B_o^{**} q^*(t) + B_1^* \int_0^t q_1^*(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}; \\ \dot{\varphi}_2(t) = & \frac{v_1}{2\sqrt{t}} + v_3 q^*(t) + v_4 \int_0^t q_1^*(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 = & \frac{B_o^*}{\sqrt{\beta_1}} W(\sqrt{\beta_1 t}) + e^{-\beta_1 t} \int_0^t e^{\beta_1 \tau} [q_1^*(\tau) + B_o^{**} q^*(\tau)] d\tau + \\ & + \frac{B_1^*}{\sqrt{\beta_1}} \int_0^t q_1^*(\tau) W(\sqrt{\beta_1(t-\tau)}) d\tau. \end{aligned} \quad (8,15_1)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 = & \frac{v_1}{\sqrt{\beta_1}} W(\sqrt{\beta_2 t}) + v_3 e^{-\beta_2 t} \int_0^t e^{\beta_2 \tau} q^*(\tau) d\tau + \\ & + \frac{v_4}{\sqrt{\beta_2}} \int_0^t q_1^*(\tau) W(\sqrt{\beta_2(t-\tau)}) d\tau. \end{aligned} \quad (8,15_2)$$

Внося (8,15) в (8,13) получим

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \frac{B_o^*}{\sqrt{\beta_1}} W(\sqrt{\beta_1 t}) + \frac{v_1 \eta_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \int_0^t W(\sqrt{\beta_1(t-s)}) W(\sqrt{\beta_2 s}) ds + \\ & + \int_0^t q_1^*(\tau) \left\{ e^{-\beta_1(t-\tau)} + \frac{B_1^*}{\sqrt{\beta_1}} W(\sqrt{\beta_1(t-\tau)}) + \right. \\ & + \left. \frac{v_1 \eta_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \int_{\tau}^t W(\sqrt{\beta_1(t-s)}) W(\sqrt{\beta_2(s-\tau)}) ds \right\} d\tau + \\ & + \int_0^t q^*(\tau) \left\{ B_o^{**} e^{-\beta_1(t-\tau)} + \right. \\ & + \left. \frac{v_3 \eta_2}{\sqrt{\beta_1}} \int_{\tau}^t e^{-\beta_2(s-\tau)} W(\sqrt{\beta_1(t-s)}) ds \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (8,16_1)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = & \frac{v_1}{V\beta_2} W(\sqrt{\beta_2 t}) + \frac{\eta_3 B_o}{V\beta_1} \int_0^t W(\sqrt{\beta_2(t-\tau)}) W(\sqrt{\beta_1 s}) ds + \\ & + \int_0^t q_1^*(\tau) \left\{ \frac{v_4}{V\beta_2} W(\sqrt{\beta_2(t-s)}) + \int_\tau^t \left[\frac{\eta_3}{V\beta_2} e^{-\beta_1(s-\tau)} W(\sqrt{\beta_2(t-s)}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\eta_3 B_1^*}{V\beta_1 \beta_2} W(\sqrt{\beta_2(t-s)}) W(\sqrt{\beta_1(s-\tau)}) \right] ds \right\} d\tau + \\ & + \int_0^t q^*(\tau) \left\{ v_3 e^{-\beta_2(t-\tau)} + \frac{\eta_3 B_o^{**}}{V\beta_2} \int_\tau^t e^{-\beta_1(s-\tau)} W(\sqrt{\beta_2(t-s)}) ds \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (8,16)$$

Замечая, что

$$\int_0^x e^{\beta_1 z} W(\sqrt{\beta_2(x-z)}) dz = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \frac{V\beta_2 W(\sqrt{\beta_2 x}) - V\beta_1 W(\sqrt{\beta_2 x})}{V\beta_1} \quad (8,17)$$

и сопоставляя выражения в правой части (8,16) по порядку величин найдем, что с погрешностью заведомо меньшей 3% можно принять

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) = & \frac{B_o^*}{V\beta_1} W(\sqrt{\beta_1 t}) + \int_0^t e^{-\beta_1(t-\tau)} [q_1^*(\tau) + B_o^{**} q^*(\tau)] d\tau; \\ \bar{v}(t) = & \frac{v_1}{V\beta_2} W(\sqrt{\beta_2 t}). \end{aligned}$$

Более точно

$$\begin{aligned} \bar{v}(t) = & \frac{v_1}{V\beta_2} W(\sqrt{\beta_2 t}) + \frac{v_4}{V\beta_2} \int_0^t q_1^*(\tau) W(\sqrt{\beta_2(t-\tau)}) d\tau + \\ & + \int_0^t q^*(\tau) \left\{ v_3 e^{-\beta_2(t-\tau)} + \right. \\ & \left. + \frac{\eta_3 B_o^{**}}{V\beta_1 \beta_2} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} [V\beta_2 W(\sqrt{\beta_1(t-\tau)}) - V\beta_1 W(\sqrt{\beta_2(t-\tau)})] \right\} d\tau. \end{aligned}$$

В таблице № 9 приведены значения

$$\Delta \bar{u} = \bar{u}(t) - \bar{u}_0 \equiv 293 \bar{u}; \quad \Delta \bar{v} = \bar{v}(t) - \bar{v}_0 \equiv 293 \bar{v},$$

а также значения теплот $q_1(t)$ и $q_2(t)$.

Таблица 9

Значения $\Delta \bar{u}$, $\Delta \bar{v}$, q_1 и q_2 .

t	$T_{\text{час}}$	$\Delta \bar{u}$	$\frac{\Delta \bar{v}}{0,5}$	$q_1(t)$	$-q_2(t)$	t	$T_{\text{час}}$	$\frac{\Delta \bar{u}}{0,5}$	$\frac{\Delta \bar{v}}{0,5}$	$q_1(t)$	$-q_2(t)$
0	0	0	0	0	0	0,010	10,5	4,97	0,001	0,261	0,0059
0,001	1,0	0,40	0,004	0,077	0,0216	0,011	11,6	5,48	0,001	0,277	0,0055
0,002	2,1	0,70	0,004	0,338	0,0160	0,012	12,6	6,00	0,001	0,306	0,0058
0,003	3,1	1,13	0,003	0,497	0,0123	0,013	13,6	6,49	0,001	0,315	0,0051
0,004	4,2	1,65	0,002	0,558	0,0101	0,014	14,7	6,96	0,001	0,277	0,0049
0,005	5,2	2,22	0,002	0,541	0,0092	0,015	15,8	7,32	0,001	0,170	0,0047
0,006	6,3	2,80	0,002	0,476	0,0078	0,016	16,8	7,59	0,001	-0,028	0,0046
0,007	7,4	3,36	0,001	0,391	0,0071	0,017	17,8	7,68	0,001	-0,307	0,0044
0,008	8,4	3,92	0,001	0,317	0,0067	0,018	18,9	7,62	0,001	-0,402	0,0043
0,009	9,4	4,45	0,001	0,257	0,0062						

Как видим температура газового пространства остается практически постоянной, равной температуре воздуха, окружающей резервуар, которая в нашем примере совпадает с начальной температурой газовой и жидкой фаз. Это, очевидно, является следствием предположения об абсолютной диатермичности газового пространства резервуара.*

Обращаясь к расчету средних величин концентраций паров летучих компонентов заметим, что в силу (7,8), (5,14) и равенства $a_{i2}^2 = 1$ имеем

$$\bar{\sigma}_m(t) = -L_m^* \int_0^t q^*(\tau) d\tau - 2 L_m^0 \sqrt{t} - 2 \int_0^t [L_m^1 q_1(\tau) + L_m^3 q_2(\tau)] \sqrt{t-\tau} d\tau. \quad (8,18)$$

* Возможно, что если бы вместо молекулярных коэффициентов теплопроводности и диффузии в расчет входили бы турбулентные коэффициенты, то результат был бы существенно иным. Заметим, что приближенно радиационное распределение температур в газовой фазе можно описать с помощью уравнения теплопроводности с некоторым условным «радиационным» коэффициентом теплопроводности.

Средние концентрации летучих компонентов в газовом пространстве резервуара

t	$T_{\text{час}}$	$\bar{\sigma}_1 \cdot 10^6$ МОЛЬ/СМ ³	$\bar{\sigma}_2 \cdot 10^6$ МОЛЬ/СМ ³	$\bar{\sigma}_3 \cdot 10^6$ МОЛЬ/СМ ³	$\bar{\sigma}_4 \cdot 10^6$ МОЛЬ/СМ ³	t	$T_{\text{час}}$	$\bar{\sigma}_1 \cdot 10^6$ МОЛЬ/СМ ³	$\bar{\sigma}_2 \cdot 10^6$ МОЛЬ/СМ ³	$\bar{\sigma}_3 \cdot 10^6$ МОЛЬ/СМ ³	$\bar{\sigma}_4 \cdot 10^6$ МОЛЬ/СМ ³
0	0,0	0	0	0	0	0,010	10,5	0,025	0,129	0,102	0,331
0,001	1,0	0,008	0,027	0,022	0,074	0,011	11,6	0,026	0,139	0,110	0,356
0,002	2,1	0,011	0,040	0,032	0,104	0,012	12,6	0,028	0,149	0,118	0,380
0,003	3,1	0,014	0,051	0,042	0,137	0,013	13,6	0,029	0,159	0,126	0,404
0,004	4,2	0,016	0,062	0,051	0,166	0,014	14,7	0,030	0,168	0,132	0,425
0,005	5,2	0,018	0,074	0,060	0,195	0,015	15,8	0,031	0,175	0,138	0,444
0,006	6,3	0,019	0,084	0,068	0,224	0,016	16,8	0,032	0,182	0,143	0,460
0,007	7,4	0,021	0,097	0,077	0,252	0,017	17,8	0,033	0,186	0,147	0,472
0,008	8,4	0,022	0,108	0,086	0,279	0,018	18,9	0,034	0,190	0,150	0,482
0,009	9,4	0,024	0,119	0,094	0,305	$\sigma_{\text{равн.}} \cdot 10^6$	$\frac{\text{МОЛЬ}}{\text{СМ}^3}$	0,201	0,707	0,622	2,300

Из таблиц № 7, 8 и 9 видим, что при $t < 0,018$ с погрешностью заведомо не превышающей 3% можно принять

$$\bar{\sigma}_m(t) = -L_m^* \int_0^t q^*(\tau) d\tau - 2 L_m^o \sqrt{t}. \quad (8,19)$$

Переходя к размерным концентрациям получим

$$\bar{\sigma}_m(t) = -\bar{c}_{m,o} \left[L_m^* \int_0^t q^*(\tau) d\tau + 2 L_m^o \sqrt{t} \right]. \quad (8,19^*)$$

Значения $\bar{\sigma}_m(t)$ представлены в таблице № 10.

В последней строке таблицы № 10 представлены для сравнения значения концентраций паров всех компонентов, равновесных с раствором, состав которого совпадает с начальным составом раствора в рассматриваемом нами примере.

Как видим средняя концентрация паров всех компонентов через 19 часов после начала процесса, т. е. за время заведомо большее, чем длительность одного акта малого дыхания составляет примерно одну пятую часть равновесной концентрации. Этот вывод, очевидно, существенно зависит от того, что при расчете мы предполагали диатермичность газового пространства и, кроме того, пользовались молекулярными, а не турбулентными, коэффициентами теплопроводности и диффузии. Введение турбулентных коэффициентов диффузии могло бы значительно приблизить средние концентрации к равновесным. Однако для этого у нас в настоящее время нет необходимых экспериментальных данных.

Очевидно, что все выводы, полученные выше, в столь сильной мере зависят от допущений, положенных в основу теории, что проведение более точных расчетов было бы нецелесообразным. Наоборот, они показывают необходимость проведения специальной экспериментальной работы, которая дала бы необходимый материал для существенного уточнения теории. В то же время проведенные расчеты по-видимому указывают и на то, что принятие элементарной теорией потерь допущения равенства концентраций паров всех компонентов равновесным концентрациям-недопустимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Рубинштейн. ДАН СССР, т. 87, № 3 (1953); т. 90, № 6 (1953), т. 91, № 4 (1953).
2. Л. И. Рубинштейн. О некоторых нелинейных задачах, порождаемых уравнением Фурье. Докторская диссертация, МГУ, 1957.
3. А. С. Ирисов. Испаряемость топлив для поршневых двигателей и методы ее исследования, Гостоптехиздат, 1955.
4. В. И. Черников. Проектирование сооружений и эксплуатация нефтебаз, Гостоптехиздат, 1955.
5. Т. С. Алексеев. Нефтяное Хозяйство, № 4, 7—77, 1955.
6. Н. Н. Константинов. ВНИИ НП: Сборник трудов по транспорту и хранению нефти, вып. 5, 1956.
7. Л. И. Рубинштейн и И. С. Старобинец. Известия АН Туркменской ССР, № 4, 1954.
8. loc. cit. [3].
9. О. Д. Хвольсон. Курс физики, т. 2, 1923.
10. Техническая энциклопедия. Справочник физ. хим. и технол. величин. т. 5, 1931.
11. Франк и Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.
12. Н. К. Адам. Физика и химия поверхности, ОГИЗ, 1947.
13. loc. cit [10] т. 7.
14. М. А. Михеев. Основы теплопередачи, Госэнергоиздат, 1949.
15. Gas Engineers Handbook; New-York-London; 1934.
16. loc cit. [14].

Л. И. Рубинштейн

О ДИНАМИКЕ ОДНОМЕРНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ИСПАРЕНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКИХ СМЕСЕЙ

А н н о т а ц и я

Рассмотрен одномерный процесс испарения разбавленной идеальной жидкой смеси в предположении наличия диффузионного распределения концентраций внутри каждой фазы и распределения температур, следующего уравнению теплопроводности. Предполагается наличие источников тепла равномерно распределенных внутри каждой фазы и на поверхности испарения. Учитывается скрытая теплота испарения.

В первой части работы (§§ 1—4) изучается асимптотическое при $t \rightarrow 0$ решение задачи. Во второй части (§§ 5—8) дается приложение полученных результатов к вопросу об испарении нефтепродуктов из наземных резервуаров. Впервые сделана попытка изучения потерь при малых дыханиях наземных резервуаров, учитывающего не только массу испаряющегося продукта, но и изменение его состава. Проведены иллюстративные расчеты. Указана необходимость постановки специальных экспериментов.

L. Rubinstein

**ON ONE-DIMENSIONAL NON-ISOTHERMAL
EVAPORATION PROCESS OF AN IDEAL
LIQUID MIXTURE.**

Annotation

The paper deals with the problem of evaporation of an ideal liquid mixture under certain conditions:

- a) Supposing there is a distribution of components in the solution owing to diffusion.
- b) Supposing there is a temperature distribution due to thermo-conductivity.
- c) Supposing the heat sources are uniformly distributed in each phase and on the evaporation surface.

The first part (§§ 1—4) of the paper deals with asymptotic (at $t \rightarrow 0$) behaviour of the solution. In the second part (§§ 5—8) the results obtained are used for solving the problem of evaporation of oil-products from storage tanks.

For the first time an attempt is made to estimate losses due to small respiration of surface storage tanks, taking in to consideration its change of composition. Examples are given and necessity of special experiment is pointed out.

Я. Л. Энгельсон

О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе [1] авторы приводят ряд теорем о ветвлении решений операторного уравнения вида $F(x, y) = 0$, где оператор F действует в банаховых пространствах, а его производная G по y не имеет обратного оператора. Эти теоремы дают возможность построить для операторного уравнения уравнение разветвления и в частном случае применить к последнему диаграмму Ньютона для нахождения числа и вида решений. В настоящей заметке упомянутые предложения распространяются на более широкие классы локально выпуклых пространств. При этом используется основной результат работы [2] — теорема о неявных аналитических операторах.

1. РАЗЛОЖЕНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВА ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА НА ПРЯМЫЕ СУММЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

Проведем сначала некоторые построения, нужные в дальнейшем.

Пусть $B \in L(E_1, E_2)$, где $L(E_1, E_2)$ — множество линейных непрерывных операторов, действующих из отделимого локально выпуклого пространства E_1 в отделимое локально выпуклое пространство E_2 . Предположим, что множество значений $B(E_1)$ оператора B замкнуто в E_2 . Как известно (см. напр. [3], теорема 2.1), это требование эквивалентно нормальной разрешимости оператора B , что означает разрешимость уравнения $Bg = f$ для тех и только тех $f \in E_2$, для которых $\langle f, \psi \rangle = 0$ при любом $\psi \in N'(B')$, или — $B(E_1) = \{f \in E_2; \langle f, \psi \rangle = 0, \psi \in N'(B')\}$

Здесь $N'(B')$ есть подпространство нулей оператора B' , сопряженного к B . Предположим далее, что подпространство $N(B)$ нулей оператора B , а также подпространство $N'(B')$ конечномерны и имеют размерности n и m соответственно.

Построим разложения пространств E_1 и E_2 на прямые суммы подпространств такие, что в каждом разложении одно из подпространств конечномерно.

Пусть $n > 0$, а элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ образуют базис в $N(B)$. Тогда найдутся элементы $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in E'_1$ такие, что $\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Действительно, для построения линейного непрерывного функционала γ_j достаточно рассмотреть функционал, определенный на подпространстве $N(B) \subset E_1$, и равный j -ой координате элемента $x \in N(B)$ в вышеуказанном базисе. Непрерывное продолжение этого функционала на пространстве E_1 , существующее в силу теоремы Хана-Банаха, и будет функционалом γ_j с требуемыми свойствами.

Рассмотрим теперь линейный непрерывный оператор

$$Q = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \quad (1)$$

действующий из E_1 в $N(B)$. Так как $Q^2 = Q$ и $BQ = 0$, то оператор Q является проектором и порождает разложение пространства E_1 на прямую сумму своих подпространств

$$E_1 = N(B) + Q^{-1}(0)$$

(см. напр. [4], гл. 1, § 1), причем

$$Q^{-1}(0) = \{y \in E_1, \langle y, \gamma_i \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Рассмотрим теперь систему векторов $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ ($m > 0$), образующих базис в $N'(B')$. Выберем элементы $z_1, z_2, \dots, z_m \in E_2$ так, что (см. напр. [5], теорема 3 (1. V))

$$\langle z_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Векторы z_i по построению линейно независимы и поэтому векторное подпространство M из E_2 , натянутое на эти векторы, имеет размерность m .

Оператор

$$P = \sum_{i=1}^m \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i \quad (3)$$

является проектором из E_2 на M , причем для любого $x \in E_1$

$$PBx = \sum_{i=1}^m \langle Bx, \psi_i \rangle z_i = \sum_{i=1}^m \langle x, B'\psi_i \rangle z_i = 0 \quad (4)$$

Непрерывный проектор P порождает разложение пространства E_2 на прямую сумму

$$E_2 = M + P^{-1}(0). \quad (5)$$

Докажем, что $P^{-1}(0) = B(E_1)$. Действительно, так как в силу (4) $PB(E_1) = 0$, то $B(E_1) \subset P^{-1}(0)$. Пусть теперь $z \in P^{-1}(0)$, т. е. $Pz = \sum_{i=1}^m \langle z, \psi_i \rangle z_i = 0$. Тогда, в силу линейной независимости элементов z_i , $\langle z, \psi_i \rangle = 0$, откуда $\langle z, \psi \rangle = 0$ для всех $\psi \in N'(B')$. В силу нормальной разрешимости оператора B отсюда следует $z \in B(E_1)$, поэтому $P^{-1}(0) \subset B(E_1)$. Отсюда и из предыдущего включения следует совпадение множеств $P^{-1}(0)$ и $B(E_1)$.

2. ТЕОРЕМЫ О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ

Здесь мы рассмотрим ряд теорем о решениях уравнения

$$F(x, y) = 0, \quad (6)$$

где $F(\mathfrak{B})$ — аналитический [2] оператор, действующий из некоторой окрестности $\omega = (x_0 + U) \times (y_0 + V)$ точки (x_0, y_0) пространства $E \times E_1$ в пространство E_2 . Пространства E , E_1 и E_2 предполагаются отделимыми локально выпуклыми пространствами над комплексным полем C , причем E_1 — полуполное $B_r(\mathcal{T})$ — пространство (см. [6], а E_2 — бочечное пространство. Кроме того мы будем предполагать, что оператор F обладает следующими свойствами:

1° $F(x_0, y_0) = 0$.

2° Оператор $B = -F'_y(x_0, y_0) \in L(E_1, E_2)$ и имеет замкнутую область значений.

3° Размерности подпространств нулей $N(B)$ и $N'(B')$ равны соответственно n и m .

4° Оператор $F + B$ ограничен в окрестности ω .

Теорема 1. Если $n > 0$ и $m = 0$, то уравнение (6) имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) решения вида

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i + \sum_{p+l=1}^{\infty} R_{pl} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i \right)^p (x - x_0)^l$$

Здесь $\xi_i = c_i(x - x_0)$, где c_i — произвольные достаточно малые по модулю функционалы такие, что $c_i(0) = 0$, а R_{pl} — однородные операторы степени p относительно первого и степени l относительно второго аргумента.

Доказательство. Так как F — (B) — аналитический оператор в ω , то

$$F(x, y) = \sum_{i, k=0}^{\infty} \frac{C_{i+k}^i}{(i+k)!} F_{ix, ky}^{(i+k)}(x_0, y_0) (x-x_0)^i (y-y_0)^k,$$

где ряд сходится равномерно на каждом ограниченном множестве из ω , принадлежащем системе (B). Обозначая $x-x_0=h$, $y-y_0=g$ и $-F'_y(x_0, y_0) = B$, мы в силу условия 1⁰ можем уравнение (6) переписать в виде

$$\begin{aligned} Bg &= F'_x(x_0, y_0)h + \sum_{i+k=2}^{\infty} \frac{C_{i+k}^i}{(i+k)!} F_{ix, ky}^{(i+k)}(x_0, y_0) h^i g^k \equiv \\ &\equiv F(x_0+h, y_0+g) + Bg \end{aligned} \quad (7)$$

Так как B удовлетворяет условиям п. 1, то имеет место разложение (2), а поэтому всякий элемент $g \in E_1$ единственным образом представим в виде $u+v$, где $u \in Q^{-1}(0)$, $v \in N(B)$. Ввиду равенства $Bv=0$, из уравнения (7) следует

$$Bu = F(x_0+h, y_0+u+v) + B(u+v) \quad (8)$$

Обозначим через \tilde{B} сужение оператора B на подпространство $Q^{-1}(0)$. Тогда уравнение принимает вид

$$\tilde{B}u = F(x_0+h, y_0+u+v) + B(u+v). \quad (9)$$

Покажем, что \tilde{B} есть гомеоморфизм подпространства $Q^{-1}(0) \subset E_1$ на пространство E_2 .

Действительно, так как $m=0$, то $N'(B')$ состоит из одного лишь нулевого элемента Θ , и ввиду замкнутости $B(E_1)$, (т. е. нормальной разрешимости B) $B(E_1) = \{z \in E_2; \langle z, \Theta \rangle = 0\} = E_2$. Следовательно

$$\tilde{B} Q^{-1}(0) = BQ^{-1}(0) = B(N(B) + Q^{-1}(0)) = B(E_1) = E_2$$

Отображение \tilde{B} является взаимно однозначным, ибо из $\tilde{B}u_1 = \tilde{B}u_2$, $u_1, u_2 \in Q^{-1}(0)$, следует $\tilde{B}(u_1 - u_2) = 0$, и значит $u_1 - u_2 \in N(B) \cap Q^{-1}(0) = 0$. Поэтому существует обратный оператор \tilde{B}^{-1} , отображающий E_2 на $Q^{-1}(0)$. Чтобы установить непрерывность оператора \tilde{B}^{-1} заметим, что $Q^{-1}(0)$ изоморфно факторпространству $E_1/N(B)$, а поэтому $Q^{-1}(0)$, также как и пространство E_1 , является $B_r(\mathcal{T})$ — пространством [6]. Следовательно, в силу

бочечности пространства E_2 отображение \check{B} является открытым, а оператор \check{B}^{-1} — непрерывным.

Из непрерывности \check{B}^{-1} и условия 4° следует ограниченность оператора

$$G = \check{B}^{-1}(F + B)$$

в окрестности ω . Применяя к обоим частям уравнения (9) оператор \check{B}^{-1} , получаем

$$u = \check{B}^{-1}(F(x_0 + h, y_0 + u + v) + B(u + v)) = G(h, u, v), \quad (10)$$

причем в силу условия 1° имеем $G(0, 0, 0) = 0$, а дифференциал Гато

$$\begin{aligned} d_u G(0, 0, 0, k) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(0, 0 + tk, 0) - G(0, 0, 0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\check{B}^{-1}(F(x_0, y_0 + tk) + B(tk) - F(x_0, y_0))}{t} = \\ &= \check{B}^{-1}(F'_y(x_0, y_0)k + Bk) = 0, \quad (k \in Q^{-1}(0)). \end{aligned}$$

Так как из (B) — аналитичности оператора F следует (B) — аналитичность оператора G из некоторой окрестности нуля пространства $E \times Q^{-1}(0) \times N(B)$ в пространство E_1 , то уравнение (10) удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [2]. Поэтому в некоторой окрестности нуля из $E \times N(B)$ существует единственное (B) — аналитическое решение $u = f(h, v)$ уравнения (10) такое, что $f(0, 0) = 0$. Это решение имеет вид $u = \sum_{p+l=1}^{\infty} R_{pl} v^p h^l$, а значит общее решение уравнения (7) есть

$$g = v + u = v + \sum_{p+l=1}^{\infty} R_{pl} v^p h^l.$$

Переходя к переменным x и y и учитывая, что $v \in N(B)$, а значит $v = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$, получаем общее решение уравнения (6):

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i + \sum_{p+l=1}^{\infty} R_{pl} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i \right)^p (x - x_0)^l$$

где коэффициенты ξ_i являются произвольными функционалами от $x \in E$.

Теорема 2. Если $n=0$ и $m>0$, то уравнение (6) имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) решение

$$y = y_0 + R(h) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k h^k, \quad h = x - x_0$$

где R_k — однородные операторы из E в E_1 , для всех h , удовлетворяющих равенству

$$P(F(x_0+h, y_0+R(h)) + BR(h)) = 0. \quad (11)$$

Доказательство. Отметим сначала, что если решение $g=R(h)=R(x-x_0)$ уравнения (6) существует, то оно удовлетворяет уравнению (7), т. е.

$$BR(h) = F(x_0+h, y_0+R(h)) + BR(h).$$

Применяя и обием частям этого равенства проектор P отображающий E_2 на M , и учитывая равенство (4), получаем равенство (11).

Перейдем и доказательству существования решения. По доказанному в п. 1, линейный непрерывный оператор B отображает пространство E_1 на подпространство $P^{-1}(0)$ пространства E_2 , а в силу того, что $n=0$, нульподпространств оператора B содержит лишь нулевой элемент и следовательно указанное отображение взаимно однозначно. Так как E_1 является $B_r(\mathcal{T})$ — пространством, а $P^{-1}(0)$, как подпространство бочечного пространства E_2 , имеющее дополнение в E_2 , является бочечным ([4], гл. III, § 1), то отображение B открыто и B^{-1} отображает непрерывно $P^{-1}(0)$ на E_1 . Ввиду равенства (11), правая часть уравнения (7) принадлежит $P^{-1}(0)$ и к обием частям этого уравнения применим оператор B^{-1} . Отсюда следует

$$g = B^{-1}(F(x_0+h, y_0+g) + Bg) \equiv G(h, g) \quad (12)$$

Оператор G очевидно удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [2]. Следовательно, в некоторой окрестности нуля из E существует единственное (\mathfrak{B}) -аналитическое решение $g=R(h)$ уравнения (12), которое равно нулю при $h=0$. Ему соответствует решение уравнения (6) имеющее вид

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k (x - x_0)^k.$$

Как уже указано, $h = x - x_0$ должно удовлетворять равенству (11), которое в развернутом виде обращается в следующую систему условий:

$$\begin{aligned} PF_{01}h &= 0 \\ PF_{02}h^2 + 2PF_{11}R_1(h)h + PF_{20}[R_1(h)]^2 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\text{где } F_{hi} = \frac{1}{(i+k)!} F_{ix, ky}^{(i+k)}(x_0, y_0).$$

Теорема 3. Если $m > 0$ и $n > 0$, то уравнение (6) имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) решения вида

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i + \sum_{k+l=1}^{\infty} R_{kl} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i \right)^k h^l; \quad \xi_i = c_i(h), \quad h = x - x_0$$

и число их совпадает с числом малых решений относительно $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ($\xi_i(0) = 0$) уравнения разветвления

$$\begin{aligned} <F_{01}h, \psi_k> + \sum_{r+s \geq 2} <F_{rs} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i + \right. \\ &\left. + \sum_{v+l=1}^{\infty} R_{vl} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i \right)^v h^l \right)^r h^s, \psi_k> = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. Разыскивая решение уравнения (7) в виде $g = v + u$, где $v \in N(B)$, $u \in Q^{-1}(0)$, приходим снова к уравнению (9). Применяя и обоим его частям оператор P , получим

$$P(F'_x(x_0, y_0)h + \sum_{i+k=2}^{\infty} \frac{C_{i+k}^i}{(i+k)!} F_{ix, ky}^{(i+k)}(x_0, y_0) h^i (u+v)^k) = 0. \quad (14)$$

Как показано в п. 1, область значений оператора B есть $P^{-1}(0)$. Сужение \tilde{B} оператора B на $Q^{-1}(0)$ отображает множество $Q^{-1}(0)$ на $P^{-1}(0)$ взаимно однозначно, ибо $\tilde{B}Q^{-1}(0) = BQ^{-1}(0) = B(E_1) = P^{-1}(0)$ и из $\tilde{B}u = 0$ следует, что $u \in Q^{-1}(0) \cap N(B) = \emptyset$. Так как $Q^{-1}(0)$ есть $B_r(\mathcal{T})$ — пространство, а $P^{-1}(0)$ бочечно, то оператор \tilde{B}^{-1} отображает непрерывно $P^{-1}(0)$ на $Q^{-1}(0)$. Поэтому оператор $\tilde{B}^{-1}(F+B)$ ограничен в ω и применяя к уравнению (9) оператор \tilde{B}^{-1} , получаем уравнение

$$u = \tilde{B}^{-1}(F(x_0 + h, y_0 + u + v) + B(u + v)) \equiv G(h, u, v),$$

правая часть которого удовлетворяет всем условиям теоремы 1 из [2]. Следовательно, существует единственное решение $u = f(h, v)$ этого уравнения, (\mathfrak{B}) — аналитическое в некоторой окрестности нуля пространства $E \times N(B)$ и такое, что $f(0, 0) = 0$. Решения уравнения (6) поэтому имеют вид

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i + \sum_{k+l=1}^{\infty} R_{kl} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i \right)^k (x - x_0)^l.$$

Так как решения должны удовлетворять равенству (14), то отсюда, пользуясь выражением (3) и учитывая, что элементы z_i линейно независимы, приходим к уравнению разветвления (13).

Отметим в заключение, что в случае, когда $n = m$, имеет место лемма Шмидта, которая доказывается аналогично тому, как это сделано в [1] для банаховых пространств. В частности, при $m = n = 1$, полагая $h = \lambda h_1$, где h_1 — фиксированный элемент из E , а λ — комплексный параметр, получается уравнение разветвления в виде

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0}(h_1) \xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{l=1}^{\infty} L_{kl}(h_1) \lambda^l = 0,$$

где L_{kl} — функционалы, определенные на пространстве E , значения которых в точке h_1 вычисляются по формулам, приведенным в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Вайнберг и В. А. Треногин. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. УМН, 1962, в. 2, 13—75.
2. М. М. Вайнберг и Я. Л. Энгельсон. О неявных аналитических операторах в локально выпуклых пространствах. Уч. зап. Латв. Г. У., т. 47, 1963, труды выч. центра университета, вып. 1, 19—27.
3. F. E. Browder. Functional analysis and partial differential equations. I, Math. Ann, 138 (1959), 55—79.
(Русск. перевод: Математика, сборник переводов иностранных статей; 4:3, 1960, 79—106.)
4. N. Bourbaki. Espaces vectoriels topologiques, Paris, 1953.
(Русск. перевод: Бурбаки Н. Топологические векторные пространства, М., 1959).
5. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
6. Husain Taqdir. Locally convex spaces with the $B(\mathcal{T})$ -property. Math. Ann., 1962, 146, № 5, 413—422.
7. А. С. Понтрягин. Непрерывные группы. Москва, 1954.

О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Аннотация

Применяя теорему о неявных аналитических операторах в локально выпуклых пространствах, ряд теорем о ветвлении решений уравнения вида $F(x, y) = 0$, где F (\mathfrak{B})-аналитический оператор в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in E \times E_1$, приведенных в статье М. М. Вайнберга и В. А. Треногина (УМН, 1962, в. 2), обобщается на случай, когда E и E_1 , а также пространство E_2 , которому принадлежат значения оператора F , являются комплексными локально выпуклыми пространствами. Предполагается, что пространство E_1 обладает $B_r(\mathcal{T})$ — свойством, а пространство E_2 бочечно.

J. Engelson

BRANCHING OF SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS IN LOCALLY CONVEX SPACES.

Annotation.

By using of the theorem about implicit analytic operators in locally convex spaces, some theorems from the paper of M. Vainberg and Trenogin (УМН, 1962, Nr. 2) about the branching of solutions of the equation $F(x, y) = 0$, where F is an \mathfrak{B} — analytic function in a neighbourhood of the point $(x_0, y_0) \in E \times E_1$, are generalized to the case of complex locally convex spaces E , E_1 , and E_2 , $F(x, y) \in E_2$, where E_1 has the $B_r(\mathcal{T})$ — property and E_2 is a t -space.

Я. Я. Рачевский, Г. Л. Ионин

НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ «СТАНКИ И РАБОЧИЕ»

Некоторые задачи теории надежности и теории массового обслуживания можно свести к следующей схеме. Имеется n машин, которые обслуживаются m рабочими. В исправном состоянии машина не требует внимания рабочего. Если в момент выхода из строя машины имеется хотя бы один не занятый рабочий, он приступает к ремонту этой машины, в противном случае образуется очередь. Длительности исправной работы и длительности ремонта машин являются независимыми случайными величинами. Будем считать, что длительности исправной работы всех машин одинаково распределены и обозначим их функцию распределения через $F(x)$. Предположим то же самое относительно продолжительности ремонта и обозначим соответствующую функцию распределения через $G(x)$. Рассмотрим только случай $m < n$, так как $m \geq n$ не представляет интереса.

Известно, что в случае, когда

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}x} \quad \text{и} \quad G(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

система описывается марковским процессом имеющим следующее стационарное распределение:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-m} \frac{m^i}{i!} (\lambda \mu)^i + \sum_{i=n-m+1}^n \frac{m^i m^{n-m}}{i!(n-i)!} (\lambda \mu)^i} \quad (1)$$
$$p_k = p_0 \frac{m^k}{k!} (\lambda \mu)^k \quad \text{для} \quad 0 < k \leq (n-m)$$

$$p_k = p_0 \frac{m^{n-m} m!}{k! (n-k)!} (\lambda \mu)^k \text{ для } (n-m) \leq k \leq n$$

где p_k — вероятность того, что число исправных машин равно k .

В работе показано, что формулы (1) остаются справедливыми, когда $G(x) = 1 - e^{-\mu x}$, а $F(x)$ — произвольная функция распределения с конечным математическим ожиданием λ . Доказательство вполне аналогично доказательству Севастьянова [1] для формул Эрланга.

Введем фазовое пространство, состоящее из изолированной точки ω_0 , полупрямой $\omega_1 (0 \leq x_1 < \infty)$, части плоскости $\omega_2 (0 \leq x_1, x_2 < \infty)$, части n -мерного пространства $\omega_n (0 \leq x_1, \dots, x_n < \infty)$.

Точка ω_0 соответствует состоянию системы с 0 исправными машинами. Точка (x_1, \dots, x_k) из ω_k соответствует состоянию системы с k исправными машинами, первая из которых проработала x_1 единиц времени с момента окончания последнего ремонта, вторая — x_2 единиц времени, и т. д. Такую точку обозначим $\omega_k(x_1, \dots, x_k)$. Здесь порядок, в котором нумеруются машины произволен, т. к. мы считаем их неразличимыми. Тем самым точки (x_1, \dots, x_k) и $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, где i_1, i_2, \dots, i_k — перестановка из чисел $1, 2, \dots, k$ соответствуют одному и тому же состоянию системы.

Предположим, что в случае окончания ремонта машины точка $\omega_k(x_1, \dots, x_k)$ с одной и той же вероятностью $\frac{1}{k+1}$ переходит в любую из точек $\omega_{k+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_k)$ $i=1, \dots, k+1$.

При наших предположениях процесс является марковским. Обозначим распределение вероятностей в фазовом пространстве через P_t и стационарное распределение через P . Предположим P_0 на ω_k симметричным по отношению к переменным x_1, \dots, x_k . Введем обозначения $p_k(t) = P_t(\omega_k)$ и $p_k = P(\omega_k)$ $k=1, \dots, n$.

Распределение вероятностей на траекториях марковского процесса обозначим через \mathcal{P} .

Напишем переходные вероятности за время Δt

$$P(\omega_0, \Delta t, \omega_0) = 1 - m \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

(не окончился ни один ремонт)

$$P(\omega_0, \Delta t, \omega_1(\Theta \Delta t)) = m \mu \Delta t + o(\Delta t) \quad 0 \leq \Theta < 1$$

(окончился один ремонт)

$$\begin{aligned}
 & P(\omega_k(x_1, \dots, x_k), \Delta t, \omega_k(x_1 + \Delta t, \dots, x_k + \Delta t)) = \\
 & = \prod_{i=1}^k \frac{1 - F(x_i + \Delta t)}{1 - F(x_i)} (1 - (n - k)\mu \Delta t + o(\Delta t)) \\
 & \qquad \qquad \qquad (n - m) < k \leq n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & P(\omega_k(x_1, \dots, x_k), \Delta t, \omega_k(x_1 + \Delta t, \dots, x_k + \Delta t)) = \\
 & = \prod_{i=1}^k \frac{1 - F(x_i + \Delta t)}{1 - F(x_i)} (1 - m\mu \Delta t + o(\Delta t)) \\
 & \qquad \qquad \qquad 0 < k \leq (n - m)
 \end{aligned}$$

(не вышла из строя ни одна машина и не закончился ни один ремонт)

$$\begin{aligned}
 & P(\omega_k(x_1, \dots, x_k), \Delta t, \omega_{k-1}(x_1 + \Delta t, \dots, x_{i-1} + \Delta t, x_{i+1} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \Delta t, \dots, x_k + \Delta t)) = \\
 & = \frac{F(x_i + \Delta t) - F(x_i)}{1 - F(x_i)} \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq k}} \frac{1 - F(x_j + \Delta t)}{1 - F(x_j)} (1 - (n - k)\mu \Delta t + o(\Delta t)) \\
 & \qquad \qquad \qquad (n - m) < k \leq n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & P(\omega_k(x_1, \dots, x_k), \Delta t, \omega_{k-1}(x_1 + \Delta t, \dots, x_{i-1} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \Delta t, x_{i+1} + \Delta t, \dots, x_k + \Delta t)) = \\
 & = \frac{F(x_i + \Delta t) - F(x_i)}{1 - F(x_i)} \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq k}} \frac{1 - F(x_j + \Delta t)}{1 - F(x_j)} (1 - m\mu \Delta t + o(\Delta t)) \\
 & \qquad \qquad \qquad 0 < k \leq (n - m)
 \end{aligned}$$

(вышла из строя машина, которая проработала время x_i и не окончился ни один ремонт)

$$\begin{aligned}
 & P(\omega_k(x_1, \dots, x_k), \Delta t, \omega_{k+1}(x_1 + \Delta t, \dots, x_{j-1} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \Delta t, \Theta \Delta t, x_j + \Delta t, \dots, x_k + \Delta t)) = \\
 & = \prod_{i=1}^k \frac{1 - F(x_i + \Delta t)}{1 - F(x_i)} \left(\frac{n - k}{k + 1} \mu \Delta t + o(\Delta t) \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad (n - m) < k < n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & P(\omega_k(x_1, \dots, x_k), \Delta t, \omega_{k+1}(x_1 + \Delta t, \dots, x_{j-1} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \Delta t, \Theta \Delta t, x_j + \Delta t, \dots, x_k + \Delta t)) = \\
 & = \prod_{i=1}^k \frac{1 - F(x_i + \Delta t)}{1 - F(x_i)} \left(\frac{m}{k + 1} \mu \Delta t + o(\Delta t) \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad 0 < k \leq (n - m)
 \end{aligned}$$

(окончился ремонт одной машины и ни одна машина не вышла из строя.)

Покажем, что распределение P_t при любом P_0 имеет в точке $\omega_k(x_1, \dots, x_k)$ k -мерную плотность $p_k(x_1, \dots, x_k; t)$, если $t > \max\{x_1, \dots, x_k\}$, причем:

$$(2) \quad p_k(x_1, \dots, x_k; t) \leq \frac{m^k}{k!} \mu^k [1 - F(x_1)] \dots [1 - F(x_k)]$$

Рассмотрим событие A , заключающееся в том, что в момент времени t система находится в множестве точек $X \in \omega_k$, координаты которых y_1, \dots, y_k удовлетворяют условиям:

$$x_i < y_i < x_i + \Delta_i \quad i = 1, \dots, k$$

Событие B — в каждом интервале времени $(t - (x_i + \Delta_i), t - x_i)$ закончился ремонт одной машины, которая потом не вышла из строя до момента t .

$$A \subseteq B \text{ при } t > \max x_i.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P_t \{ \omega_k(y_1, \dots, y_k); x_i < y_i < x_i + \Delta_i \} &= \mathcal{P}(A) \leq \\ &\leq P(B) \leq \frac{(m\mu)^k}{k!} [1 - F(x_1)] \dots [1 - F(x_k)] \Delta_1 \dots \Delta_k \end{aligned}$$

откуда следует существование $p_k(x_1, \dots, x_k; t)$ и неравенство (2).

Следовательно, стационарное распределение тоже имеет плотности, удовлетворяющие (2).

Покажем, что определенный выше марковский процесс имеет стационарное распределение

$$p_k(x_1, \dots, x_k) = p_0 \frac{m^k}{k!} \mu^k [1 - F(x_1)] \dots [1 - F(x_k)]$$

$$0 < k \leq (n - m)$$

$$p_k(x_1, \dots, x_k) = p_0 \frac{m^{n-m} m!}{k!(n-k)!} \mu^k [1 - F(x_1)] \dots [1 - F(x_k)]$$

$$(3) \quad (n - m) < k \leq n$$

где

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-m} \frac{m^k}{k!} (\lambda\mu)^k + \sum_{k=n-m+1}^n \frac{m! m^{n-m}}{k!(n-k)!} (\lambda\mu)^k}$$

если $F(x)$ имеет конечное математическое ожидание λ .

Используя вероятности перехода, получим следующие соотношения для плотностей.

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t) (1 - m \mu \Delta t) + \int_0^{\infty} p_1(x_1; t) \frac{F(x_1+\Delta t) - F(x_1)}{1 - F(x_1)} dx_1 + o(\Delta t)$$

$$p_1(x_1; t+\Delta t) = p_1(x_1-\Delta t; t) \frac{1 - F(x_1-\Delta t)}{1 - F(x_1)} (1 - m \mu \Delta t) + 2 \int_0^{\infty} p_2(x_1-\Delta t, x_2; t) \frac{1 - F(x_1)}{1 - F(x_1-\Delta t)} \cdot \frac{F(x_2+\Delta t) - F(x_2)}{1 - F(x_2)} dx_2 + o(\Delta t)$$

$$\dots$$

$$p_k(x_1, \dots, x_k; t+\Delta t) = p_k(x_1-\Delta t, \dots, x_k-\Delta t; t) \prod_{i=1}^k \frac{1 - F(x_i)}{1 - F(x_i-\Delta t)} \times$$

$$\times (1 - m \mu \Delta t) + (k+1) \int_0^{\infty} p_{k+1}(x_1-\Delta t, \dots, x_k-\Delta t, x_{k+1}; t) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^k \frac{1 - F(x_j)}{1 - F(x_j-\Delta t)} \cdot \frac{F(x_{k+1}+\Delta t) - F(x_{k+1})}{1 - F(x_{k+1})} dx_{k+1} + o(\Delta t)$$

$0 < k \leq (n-m)$

$$\dots$$

$$p_h(x_1, \dots, x_h; t+\Delta t) = p_h(x_1-\Delta t, \dots, x_h-\Delta t; t) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^h \frac{1 - F(x_i)}{1 - F(x_i-\Delta t)} \cdot (1 - (n-k) \mu \Delta t) + (k+1)$$

$$\int_0^{\infty} p_{k+1}(x_1-\Delta t, \dots, x_k-\Delta t, x_{k+1}; t) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^k \frac{1 - F(x_j)}{1 - F(x_j-\Delta t)} \cdot \frac{F(x_{k+1} + \Delta t) - F(x_{k+1})}{1 - F(x_{k+1})} dx_{k+1} + o(\Delta t)$$

$(n-m) < k < n$

$$\begin{aligned}
 & (\#) p_n(x_1, \dots, x_n; t + \Delta t) = \\
 & = p_n(x_1 - \Delta t, \dots, x_n - \Delta t; t) \prod_{i=1}^n \frac{1 - F(x_i)}{1 - F(x_i - \Delta t)} \\
 & p_k(x_1, \dots, x_k; t) \prod_{i=1}^k \frac{1 - F(x_i + \Delta t)}{1 - F(x_i)} \left(\frac{m \mu \Delta t}{k+1} + o(\Delta t) \right) = \\
 & = p_{k+1}(x_1 + \Delta t, \dots, x_k + \Delta t, \Theta \Delta t; t + \Delta t) \Delta t \\
 & \qquad \qquad \qquad o < k \leq (n - m)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & p_k(x_1, \dots, x_k; t) \prod_{i=1}^k \frac{1 - F(x_i - \Delta t)}{1 - F(x_i)} \left(\frac{(n - k) \mu \Delta t}{k+1} + \right. \\
 & \left. + o(\Delta t) \right) = p_{k+1}(x_1 + \Delta t, \dots, x_k + \Delta t, \Theta \Delta t; t + \Delta t) \Delta t \\
 & \qquad \qquad \qquad (n - m) < k < n
 \end{aligned}$$

Подстановкой убеждаемся, что выражения (3) удовлетворяют соотношениям (4).

Доказательство существования единственного стационарного распределения, которое является эргодическим, сводится к проверке условий эргодической теоремы, полученной Б. А. Севастьяновым [1] и ни чем не отличается от доказательства для процесса, рассмотренного в [1].

Из соотношений

$$p_k = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty p_k(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k$$

получаем формулы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Севастьянов. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. Теор. вероятн. и ее примен., 2, 1 (1957) 106—116.

Я. Я. Рачевский, Г. Л. Ионин

НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ «СТАНКИ И РАБОЧИЕ»

А н н о т а ц и я

Рассмотрена система из n машин с произвольным распределением времени исправной работы и с показательным распределением времени ремонта, обслуживаемых m рабочими.

Показано, что для такой системы справедливы формулы, выведенные в предположении показательного закона распределения времени исправной работы.

J. J. Rachevskis and G. L. Jonins

THE INDEPENDENCE OF «SERVERS AND MACHINES» PROBLEM SOLUTION FROM DISTRIBUTION FUNCTION.

A n n o t a t i o n .

This paper deals with serving of n machines with arbitrary distributed working time and m servers with exponentially distributed serving time.

It is shown that in this problem all formulas obtained for the case of exponentially distributed working time are valid.

Л. А. ЛАДЫЖЕНСКИЙ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Наиболее распространенными на практике методами решения задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений являются различные конечно-разностные методы (Рунге-Кутта, Адамса и т. п.). Хотя эти методы и обладают рядом очевидных достоинств, существуют многочисленные задачи, в которых применение конечно-разностных методов не приводит к удовлетворительным результатам. Таковыми являются, во-первых, задачи, в которых нужно отыскивать решение на большом интервале, во-вторых, задачи, в которых требуется найти решения нескольких уравнений, отличающихся только правыми частями (например, краевая задача, для решения которой нужно отыскивать фундаментальную систему решений). В задачах первого рода часто происходит неустрашимое накопление ошибок, а в задачах второго рода объем вычислений становится слишком большим. Более перспективным представляется применение в подобных задачах какого-либо варианта метода моментов (например, метода Галеркина). Однако, классические варианты метода моментов дают только среднее квадратичное приближение решения и не позволяют находить одновременно производные решения.

В настоящей заметке предлагается модификация метода моментов, позволяющая находить равномерные приближения для решения и его первых производных. Указываются способы, позволяющие судить о величине погрешности.

В вычислительном центре Латвийского государственного университета в настоящее время ведется экспериментальная проверка эффективности предложенного метода.

1. Любая задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения n -го порядка на конечном отрезке может быть приведена к виду:

Найти n -кратно дифференцируемую на сегменте $[0,1]$ функцию $y(x)$, удовлетворяющую условиям

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \quad (2)$$

Мы рассмотрим поставленную задачу в предположении, что $f(x) \in Z^2(0,1)$, $a_i(x) \in Z^2(0,1)$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Возьмем какую-либо систему функций $\{\varphi_j(x)\}_{1 \leq j < \infty}$, полную в $Z^2(0,1)$. Умножая уравнение (1) на $\varphi_j(x)$ и интегрируя от 0 до 1, получим

$$(y^{(n)}, \varphi_j) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 a_i(x) y^{(n-i)}(x) \varphi_j(x) dx = (f, \varphi_j) \quad (j=1, 2, \dots) \quad (3)$$

где положено

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

Преобразуем равенство (3), воспользовавшись тем, что в силу (2)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 a_i(x) \varphi_j(x) y^{(n-i)}(x) dx = \\ & -y^{(n-i)}(x) \cdot \int_x^1 a_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi \Big|_0^1 + \int_0^1 y^{(n-i+1)}(x) \int_0^1 a_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi dx = \\ & = \int_0^1 y^{(n-i+1)}(x) \int_x^1 a_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi dx = \dots = \\ & = \int_0^1 y^{(n)}(x) \int_x^1 \int_{\xi_1}^1 \dots \int_{\xi_{i-1}}^1 a_i(\xi_i) \varphi_j(\xi_i) d\xi_i \dots d\xi_{i-1} dx. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_x^1 \int_{\xi_1}^1 \cdots \int_{\xi_{i-1}}^1 a_i(\xi_i) \varphi_j(\xi_i) d\xi_1 \cdots d\xi_i = \frac{1}{(i-1)!} \int_x^1 (\xi-x)^{i-1} a_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi,$$

то

$$\begin{aligned} & \int_0^1 a_i(x) \varphi_j(x) y^{(n-i)}(x) dx = \\ &= \frac{1}{(i-1)!} \int_0^1 y^{(n)}(x) \int_x^1 (\xi-x)^{i-1} a_i(\xi) \varphi_j(\xi) d\xi dx. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3), мы сможем записать (3) в виде

$$(y^{(n)}, \psi_j) = (f, \varphi_j) \quad (j=1, 2, \dots) \quad (4)$$

где

$$\psi_j(x) = \varphi_j(x) + \int_x^1 \varphi_j(\xi) \sum_{i=1}^n \frac{(\xi-x)^{i-1}}{(i-1)!} a_i(\xi) d\xi.$$

Положим для краткости

$$K(x, \xi) = \sum_{i=1}^n \frac{(\xi-x)^{i-1}}{(i-1)!} a_i(\xi).$$

Лемма. Система $\{\psi_j(x)\}_{1 \leq j < \infty}$ полна в $L^2(0,1)$.

Доказательство. Предположим противное, тогда найдется $g(x) \in L^2$, такая, что

$$(g, \psi_j) = 0$$

для всех j . Последнее же означает, что

$$(g, \varphi_j) + \int_0^1 g(x) \int_x^1 K(x, \xi) \varphi_j(\xi) d\xi dx = 0 \quad (j=1, 2, \dots)$$

или, после элементарных преобразований

$$(h, \varphi_j) = 0 \quad (j=1, 2, \dots)$$

где

$$h(x) = g(x) + \int_0^x g(\xi) \sum_{i=1}^x \frac{(x-\xi)^{i-1}}{(i-1)!} a_i(\xi) d\xi$$

Так как система $\{\varphi_j(x)\}$ полна в $L^2(0,1)$, то $h(x)$ почти всюду равна нулю. Таким образом, функция $g(x)$ является решением однородного интегрального уравнения типа Вольтерра. Как известно (смотри, например, [1]) отсюда следует, что $g(x)$ почти всюду на $[0,1]$ равна нулю.

Лемма доказана.

Из известного процесса ортогонализации по Шмидту следует, что в $L^2(0,1)$ существует полная ортонормированная система $\{\check{\varphi}_j(x)\}_{1 \leq j < \infty}$ такая, что

$$\check{\varphi}_j(x) = \sum_{k=1}^j \alpha_{jk} \psi_k(x)$$

Очевидно, что тогда из (4) вытекает, что

$$(y^{(n)}, \check{\varphi}_j) = (j, \sum_{k=1}^j \alpha_{jk} \varphi_k) = \beta_j \quad (j=1, 2, \dots)$$

и, следовательно,

$$y^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \check{\varphi}_j(x),$$

где ряд, стоящий справа сходится в смысле среднего квадратичного. Формальным интегрированием мы находим, что

$$y^{(n-k)}(x) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^k \beta_j \int_0^x (x-\xi)^{k-1} \check{\varphi}_j(\xi) d\xi \quad (k=1, \dots, n) \quad (5)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \left| y^{(n-k)}(x) - \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^N \beta_j \int_0^x (x-\xi)^{k-1} \check{\varphi}_j(\xi) d\xi \right| = \\ & = \frac{1}{(k-1)!} \left| \int_0^x (x-\xi)^{k-1} [y^{(n)}(\xi) - \sum_{j=1}^N \beta_j \check{\varphi}_j(\xi)] d\xi \right| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{(k-1)!} \left[\int_0^x (x-\xi)^{2k-2} d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^x |y^{(n)}(\xi) - \sum_{j=1}^N \beta_j \ddot{\psi}_j(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \frac{1}{(k-1)!} \sqrt{\frac{x^{2k-1}}{2k-1}} \left[\int_0^1 |y^{(n)}(\xi) - \sum_{j=1}^N \beta_j \ddot{\psi}_j(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

то ряды, стоящие в правой части равенств (5) сходятся равномерно на $[0,1]$ и сумма их равна левой части.

2. Приведенная выше оценка погрешности рассматриваемого метода практически неприменима, так как в ее правую часть входит неизвестная величина

$$\int_0^1 |y^{(n)}(\xi) - \sum_{j=1}^N \beta_j \ddot{\psi}_j(\xi)|^2 d\xi$$

о скорости стремления к нулю которой, вообще говоря, ничего сказать нельзя. Получим теперь неравенства, позволяющие практически оценить величину погрешности. Для простоты ограничимся только оценкой погрешности $y(x)$. Получение оценок погрешностей производных функции $y(x)$ совершенно аналогично.

Определим в $L^2(0,1)$ оператор A при помощи формулы

$$A g(x) = \int_x^1 K(x, \xi) g(\xi) d\xi$$

и положим $B=I+A$. Легко видеть, что оператор A вполне непрерывен, так как

$$A g(x) = \int_0^1 \tilde{K}(x, \xi) g(\xi) d\xi,$$

где

$$\tilde{K}(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi) & \text{если } \xi \geq x \\ 0 & \text{если } \xi < x \end{cases}$$

и

$$\int_0^1 \int_0^1 |\tilde{K}(x, \xi)|^2 dx d\xi < \infty$$

Введем в $L^2(0,1)$ билинейный функционал

$$(g, h)_1 = (Bg, Bh),$$

который, как легко видеть, обладает всеми свойствами скалярного произведения. Тем самым в $L^2(0,1)$ определяется новая норма

$$\|g\|_1^2 = (Bg, Bg)$$

Покажем прежде всего, что эта норма эквивалентна обычной норме пространства $L^2(0,1)$. Для этого заметим, что

$$\|g\|_1^2 = (g + Ag, g + Ag) \leq (\|g\| + \|Ag\|)^2 \leq (1 + \|A\|)^2 \|g\|^2.$$

С другой стороны, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_1 = 0$, то $\|g_n\|$ тоже стремится к

нулю. Предположим противное, тогда, выбирая в случае необходимости подпоследовательность последовательности $\{g_n\}$ и сохраняя для нее то же обозначение, что и для всей последовательности, мы можем считать, что найдется постоянная $\alpha > 0$ такая, что

$$\|g_n\| \geq \alpha \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Тогда последовательность элементов $h_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}$ такова, что $\|h_n\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\|h_n\|_1 \rightarrow 0$. Так как оператор A вполне непрерывен, то из последовательности $\{Ah_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{Ah_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому элементу $-h_0$. Так как при этом

$$\|h_{n_k}\|_1 = \|h_{n_k} + Ah_{n_k}\|_1 \rightarrow 0$$

то последовательность h_{n_k} сходится к h_0 и $h_0 + Ah_0 = 0$. Как показано при доказательстве леммы на стр. 3, отсюда следует, что $h_0 = 0$. Но это невозможно, так как $\|h_{n_k}\| = 1$ ($k = 1, 2, \dots$) и $h_{n_k} \rightarrow h_0$.

Тем самым упомянутая эквивалентность норм становится очевидной.

Обозначим теперь

$$\overset{\circ}{\varphi}_j = \sum_{k=1}^i \alpha_{jk} \varphi_k \quad (j = 1, 2, \dots),$$

где α_{jk} — числа, введенные на стр. 3. Из самого определения чисел α_{jk} следует, что система $\{\overset{\circ}{\varphi}_j\}$ ортонормирована относительно

но нового скалярного произведения. Так как в гильбертовом пространстве полнота системы влечет за собой ее замкнутость и обратно (см., напр., [2]), то из эквивалентности норм следует, что система $\{\varphi_j\}$ полна относительно нового скалярного произведения. Пусть g и h — произвольные элементы пространства $L^2(0,1)$. Положим

$$g_n = \sum_{k=1}^n (g, \varphi_k)_1 \varphi_k$$

Элементы g_n при $n \rightarrow \infty$ сходятся по новой норме к элементу g , следовательно по старой норме они также сходятся к g . Отсюда немедленно следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (g, \check{\varphi}_k)_1 (h, \varphi_k) = (g, h).$$

Положим в этом равенстве $h=f$. Тогда получим

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (Bg, \check{\psi}_k).$$

Зададимся каким-либо натуральным числом N и пусть

$$\Phi_N(g) = \frac{|(f, g) - \sum_{k=1}^N \beta_k (Bg, \check{\psi}_k)|}{\|Bg\|}.$$

Тогда с одной стороны,

$$\begin{aligned} \Phi_N(g) &= \frac{|\sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k (Bg, \check{\psi}_k)|}{\|Bg\|} \leq \\ &= \frac{\sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} (Bg, \check{\psi}_k)^2}}{\|Bg\|} \leq \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

а, с другой стороны, полагая $g = \sum_{j=N+1}^{\infty} \beta_j \check{\varphi}_j$,

$$\Phi_N(g) = \frac{\sum_{j=N+1}^{\infty} \beta_j^2}{\|Bg\|} = \frac{\sum_{j=N+1}^{\infty} \beta_j^2}{\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty} \beta_j^2}} = \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \beta_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом

$$\sup_{\|Bg\|=1} \Phi_N(g) = \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \beta_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценку (6) можно, следовательно, переписать в виде

$$\begin{aligned} \left| y(x) - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=1}^N \beta_j \int_0^x (x-\xi)^{n-1} \bar{\psi}_j(\xi) d\xi \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} \sqrt{\frac{2n-1}{x^{2n-1}}} \cdot \sup_{\|Bg\|=1} \Phi_N(g). \end{aligned}$$

Вычисление точной верхней грани функционала $\Phi_N(g)$ в большинстве случаев не представляет затруднений, так как для этого можно, естественно, ограничиться вычислением точной верхней грани этого функционала на специально подобранном счетном множестве, всюду плотном в множестве тех g , для которых $\|Bg\|=1$.

3. Пусть теперь нам задана задача Коши для системы линейных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} y_i'(x) + \sum a_{ik}(x) y_k(x) &= f_i(x) \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ y_1(0) = \dots = y_n(0) &= 0 \end{aligned}$$

Все проведенные выше построения могут быть очевидным образом перенесены и на этот, более общий, случай, с той лишь разницей, что коэффициенты $\beta^{(k)}$ разложения функций $y_k'(x)$ по ортонормированной системе $\{\bar{\psi}_j(x)\}$ будут определяться из бесконечной системы линейных уравнений вида

$$\sum_{s=1}^{rn} c_{rs} z_s = b_r \quad (r=1, 2, \dots)$$

Системы такого вида были исследованы О. Теплицем [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми, Интегральные уравнения, М., 1960.
2. Ахиезер и Глазман, Теория линейных операторов, М., 1950.
3. Теплиц Pal. Rend., 28, 1909, 88—96.

стр. 88—96.

**ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

А н н о т а ц и я

Предложена модификация метода моментов, позволяющая находить равномерные приближения для решения и его первых производных. Указаны способы, позволяющие судить о величине погрешности.

L. Ladizhensky

**ON ONE METHOD FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF
THE CAUCHY PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL
EQUATIONS.**

A n n o t a t i o n .

One modification of the «moments» — method is given. This method enables to find uniform approximations of the solution and its first derivatives. Some methods for estimation of error value are pointed out.

$$\begin{cases} z_1 = \frac{d_1}{\beta_1} \\ z_k = \frac{1}{\beta_k} (d_k - z_{k-1} c_{k-1}) \quad (k=2, 3, \dots, n), \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_n = z_n \\ x_k = \gamma_k x_{k+1} + z_k \quad (k=1, 2, \dots, n-1). \end{cases} \quad (5)$$

Предположим, что коэффициенты системы (1) не содержат ошибки округления и удовлетворяют условиям

$$\left| \frac{a_k}{\beta_k} \right| < 1, \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (6)$$

где

$$a_k = \max (|b_k|, |c_k|).$$

Тогда можно получить сравнительно простые оценки ошибки округления решений.

Обозначим нижнюю границу для β_k через β_* , а верхние границы для γ_k, z_k, x_k — соответственно через γ^*, z^*, x^* . Эти величины можно выбрать, например, следующим образом:

$$\beta_* = \min_{1 \leq k \leq n} |\beta_k|, \quad (7)$$

$$\gamma^* = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{b_k}{\beta_k} \right|, \quad (8)$$

$$z^* = \frac{d^*}{\beta_* (1 - \eta^*)}, \quad (9)$$

$$x^* = \frac{z^*}{1 - \gamma^*}, \quad (10)$$

$$\text{где } d^* = \max_{1 \leq k \leq n} |d_k| \text{ и } \eta^* = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{c_k}{\beta_k} \right|.$$

Действительно, используя (4) и (6), получим

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{d_k}{\beta_k} - \frac{c_{k-1} d_{k-1}}{\beta_k \beta_{k-1}} + \frac{c_{k-1} c_{k-2} d_{k-2}}{\beta_k \beta_{k-1} \beta_{k-2}} + \dots + \\ &+ (-1)^{k-1} \frac{c_{k-1} c_{k-2} \dots c_1 d_1}{\beta_k \beta_{k-1} \dots \beta_1} \\ &(k=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

$$|z_h| \leq \frac{d^*}{\beta_*} (1 + \eta^* + \eta^{*2} + \dots + \eta^{*(k-1)}) < \frac{d^*}{\beta_*} \cdot \frac{1}{1 - \eta^*}$$

Аналогично, при помощи (5) и (6) найдем x^* .

Теперь введем следующие обозначения. Обозначим через $E(\beta_k)$ абсолютное значение ошибки округления для β_k , а через $E^*(\beta)$ — верхнюю границу для $E(\beta_k)$. Аналогичные обозначения введем для γ_k , z_k и x_k . Будем считать, что результат каждого деления и умножения содержит d знаков после запятой, т. е. ошибка округления на одно действие $\delta \leq \frac{1}{2} 10^{-d-1}$.

Так как $E(\beta_1) = 0$, то

$$E(\beta_2) = \delta,$$

$$E(\beta_3) = \frac{|c_2 b_2|}{\beta_2^2} E(\beta_2) + \delta \leq (\eta^* \gamma^* + 1) \delta,$$

$$\dots$$

$$E(\beta_n) \leq [(\eta^* \gamma^*)^{n-2} + \dots + \eta^* \gamma^* + 1] \delta < \frac{\delta}{1 - \gamma^* \eta^*}$$

$$E^*(\beta) = \frac{\delta}{1 - \gamma^* \eta^*}. \quad (11)$$

Для нахождения $E^*(\gamma)$ заметим, что

$$E(\gamma_k) = \frac{|b_k|}{\beta_k^2} E(\beta_k) + \delta \leq \frac{\gamma^*}{\beta_*} E^*(\beta) + \delta.$$

Тогда

$$E^*(\gamma) = \frac{\gamma^*}{\beta_*} E^*(\beta) + \delta. \quad (12)$$

Теперь найдем $E^*(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} E(z_h) &= 1 - \frac{1}{\beta_k^2} E(\beta_k) (d_h - z_{k-1} c_{k-1}) - \frac{1}{\beta_k} E(z_{k-1}) c_{k-1} | + \\ &+ \delta \leq \frac{1}{\beta_*^2} E^*(\beta) (d^* + z^* c^*) + \frac{1}{\beta_k} E(z_{k-1}) c^* + \delta. \end{aligned}$$

Рассуждения, аналогичные выводу формулы (11), приводят к равенству

$$E^*(z) = \frac{\beta_*}{|\beta_* - c_*|} \left[\frac{1}{\beta_*^2} E^*(\beta) (d^* + z^* c^*) + \delta \right]. \quad (13)$$

Подобным же образом устанавливается, что

$$E^*(x) = \frac{1}{1 - \gamma^*} (E^*(\gamma) x^* + E^*(z) + \delta). \quad (14)$$

Это — искомая оценка ошибки округления решений.

Можно указать некоторые достаточные условия для того, чтобы коэффициенты системы (1) удовлетворяли требованию (6). Формулировка этих условий будет зависеть от того, все ли коэффициенты a_k отличны от нуля. Пусть $a_k > 0$ ($k=1, 2, \dots, n$). Тогда для выполнения условий (6) достаточно, чтобы для тех индексов k , для которых $b_{k-1} c_{k-1} > 0$, имело место неравенство

$$a_k > |\alpha_k| + |c_{k-1}|, \quad (15)$$

а для тех индексов k , для которых $b_{k-1} c_{k-1} \leq 0$, имело место неравенство

$$a_k > |\alpha_k|. \quad (16)$$

Отметим, что условие (15) может быть заменено условием

$$a_k > |\alpha_k| + |b_{k-1}|.$$

Это легко показать методом математической индукции. Так как $a_1 > 0$ и $\beta_1 = 0$, то $\beta_1 > 0$ и из условий (15) и (16) следует, что

$$\frac{|\alpha_1|}{\beta_1} = \frac{a_1}{a_1} < 1.$$

Предположим, что при $k=l-1$ имеют место неравенства

$$\beta_{l-1} > 0, \quad \left| \frac{\alpha_{l-1}}{\beta_{l-1}} \right| < 1.$$

Пусть $b_{l-1} c_{l-1} > 0$. Тогда из (15) следует, что

$$\begin{aligned} \beta_l &= a_l - \frac{c_{l-1} b_{l-1}}{\beta_{l-1}} = a_l - \frac{|c_{l-1}| |b_{l-1}|}{\beta_{l-1}} > \\ &> a_l - |c_{l-1}| > |\alpha_l| > 0 \end{aligned}$$

и

$$\frac{|\alpha_l|}{\beta_l} < \frac{|\alpha_l|}{\alpha_l - |c_{l-1}|} < 1.$$

Если же $b_{l-1} c_{l-1} \leq 0$, то согласно условию (16),

$$\beta_l = \alpha_l - \frac{c_{l-1} b_{l-1}}{\beta_{l-1}} = \alpha_l + \frac{|c_{l-1}| |b_{l-1}|}{\beta_{l-1}} \geq \alpha_l > 0$$

и

$$\frac{|\alpha_l|}{\beta_l} \leq \frac{|\alpha_l|}{\alpha_l} < 1,$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е: 1) Если $b_k c_k < 0$ для всех $k=1, 2, \dots, n-1$, то можно взять $\beta_* = \min_{1 \leq k \leq n} a_k$. Заменяя (6) условием

$$\frac{|\alpha_k|}{\beta_*} < 1 \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (6a)$$

в формулировке достаточного условия можно (16) заменить через

$$|\alpha_k| < \min_{1 \leq j \leq n} (a_j - |c_{j-1}|) \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

2) Аналогично, если $b_k c_k > 0$ ($k=1, 2, \dots, n-1$), то можно взять

$$\beta_* = \min_{1 \leq k \leq n} (a_k - |c_{k-1}|)$$

и заменить (16) через

$$|\alpha_k| < \min_{1 \leq i < n} (a_i - |c_{i-1}|) \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

II Если какой-нибудь из a_k равен нулю, то для выполнения условия (6) достаточно, чтобы для этого индекса имело место неравенство

$$|\alpha_k| < \frac{|c_{k-1}| |b_{k-1}|}{a_{k-1} + |c_{k-2}|}.$$

Это легко доказать.

Если $a_k = 0$, то β_k может быть как положительным, так и отрицательным. Если $a_{k+1} \neq 0$ и $\beta_k > 0$, то применимо первое достаточное условие. Если же $\beta_k < 0$, то предварительно (15) и (16) нужно поменять местами.

I. Arnold N. Lowan. On the propagation of errors in the inversion of certain tridiagonal matrices. Math. Comput, 1960, 14, № 72, pp. 333—338.

Б. Грива

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОШИБОК ОКРУГЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЕДИНСТВЕННОГО ДЕЛЕНИЯ

Аннотация

Линейная алгебраическая система с трехдиагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

решается методом единственного деления. В работе найдена сравнительно простая оценка ошибки округления решений при предположении, что коэффициенты системы не содержат ошибки округления и удовлетворяют условиям

$$\left| \frac{a_k}{\beta_k} \right| < 1, \quad (1)$$

где

$$\alpha_k = \max(|b_k|, |c_k|) \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

и

$$\beta_k = \alpha_k - \frac{c_{k-1} b_{k-1}}{\beta_{k-1}}.$$

Указаны некоторые условия достаточные для выполнения неравенств (1).

**ON THE PROPAGATION OF THE ROUND — OFF ERRORS
IN SOLVING OF LINEAR ALGEBRAIC SYSTEMS BY THE
METHOD OF SINGLE DIVISION.**

Annotation.

A linear algebraic system with a tridiagonal matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

can be solved by the method of single division. The paper gives a relatively simple upper bound of the round — off errors of the solution. The coefficients of the systems are supposed to possess no round — off errors and to satisfy the conditions

$$\left| \frac{\alpha_k}{\beta_k} \right| < 1, \quad (1)$$

where

$$\alpha_k = \max(|b_k|, |c_k|) \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

and

$$\beta_k = a_k - \frac{c_{k-1} b_{k-1}}{\beta_{k-1}}.$$

Some conditions for validity of inequalities (1) are given.

Б. Б. Леви

ПРОГРАММА ОТЛАДКИ ПН ДЛЯ МАШИНЫ БЭСМ-2М

I. ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГРАММЫ

Предлагаемая программа отладки, которую назовем ПН (программа — наблюдатель), дает возможность после выполнения указанных в информации команд основной программы с выборочной и взаимнонезависимой частотой в произвольном порядке отпечатать один, или несколько массивов чисел или команд, или выполнить желаемые массивы команд.

Массивы печатаются с интервалами и признаками.

При работе ПН содержимое ячеек 0001 ÷ 0006 (которые являются рабочими для программы печати) сохраняется и при желании может быть отпечатано.

Имеется возможность сравнительно легко восстанавливать основную программу в исходное положение по отношению к изменениям, внесенным ПН.

Программа может применяться не только при отладке, но и при работе отлаженных программ.

Перечисленные возможности ПН позволяют получить сведения о работе логической схемы основной программы, проследить за изменениями в программе, выводить на печать промежуточные результаты арифметических или логических действий, осуществлять вмешательство в работу программы и все это делать с некоторой регулировкой, т. е. ПН позволяет установить активное наблюдение за ходом работы основной программы, а это, в частности, помогает обнаружить и локализовать ошибки в программе.

Эффективность использования ПН в значительной мере зависит от опыта программиста.

II. ОСНОВНОЙ ПРИНЦИП РАБОТЫ ПН

Обращение к ПН осуществляется четырьмя постоянными командами и специальной таблицей с информацией для отладки.

При обращении к ПН на массив 0001 ÷ 0017 вызывается первый блок, который осуществляет контроль записи и вызов третьего блока на массив, предназначенный для ПН.

Третий блок считывает на место первого блока второй блок, настраивает его для перекодировки третьего и последующих блоков, формирует из заданной информации константы и вызывает на свое место четвертый блок.

Четвертый блок, просматривая таблицу с информацией, пересылает указанные в ней команды основной программы в массив, отведенный для их хранения, а на место перемещенных команд (команд подключения) засылает команды обращения к исполнительному блоку.

При этом команды обращения снабжаются служебной информацией, а первоначальная таблица с информацией преобразуется к более рациональному виду.

После расстановки всех команд обращения («наблюдателей») вызывается и перекодируется исполнительный блок и передается управление основной программе.

Встреча в естественном ходе работы основной программы команду обращения к ПН, программа отладки находит и выполняет первоначальную команду, расшифровывает указания, помещенные в таблице информации, выполняет их и возвращается к исходной программе.

III. ОБРАЩЕНИЕ К ПН И ЗАДАНИЕ ИНФОРМАЦИИ

Использование ПН включает следующие элементы:

1. Программу ПН.
2. Команды обращения к ПН.
3. Таблицу с информацией для отладки.
4. Массив для хранения перемещенных команд.

Программа самостоятельно настраивается для работы на любом месте оперативной памяти и занимает там 114₈ ячеек.

Команды обращения к ПН пишутся в следующем виде:

30	04αβ	b	0016
31	P	0001	0005
77	T	τ	0001
n	k ₄	k ₆	A

где:

- α — признак барабана, на котором записана ПН.
 βb — номер первой команды ПН на барабане. (В каждом конкретном случае α и βb принимают постоянные числовые значения и оба пояснения излишни)
 P — номер команды, которой передается управление после обращения и подготовительной работы ПН.
 T — начало таблицы информации.
 τ — начало массива, предусмотренного для хранения перемещенных команд. Длина этого массива не должна быть меньше, чем число команд подключения K_i (см. ниже).
 n — число строк в таблице информации.
 k_4 — любой номер команды обращения к 4-той СП (печать чисел).
 т. е. номер команды

77	—	0004	3777
----	---	------	------

- k_6 — любой номер команды обращения к 6-той СП (печать команд)
 т. е. номер команды

77	—	0006	3777
----	---	------	------

A — начало программы отладки ПН.

З а м е ч а н и е: Команды k_4 и k_6 могут находиться в основной программе и к моменту обращения к ПН должны быть уже обработаны компилирующей системой. После подготовительной работы ПН команды k_4 и k_6 могут заменяться другими, ибо после этого они входят в состав ПН. Так, например, команда k_6 может быть помещена на место формирующей команды.

Таблица с информацией для отладки помещается на любое место памяти и пишется в следующем виде:

T	v_1	m_1	$\alpha_1 n_1$	k_1	1
	v_2	m_2	$\alpha_2 n_2$	k_2	2
	— — —	— — —	— — —	— — —	
	v_i	m_i	$\alpha_i n_i$	k_i	i
	— — —	— — —	— — —	— — —	
	v_n	m_n	$\alpha_n n_n$	k_n	n

где:

i — номер строки в таблице информации. В этих строках находятся указания, выполняемые ПН.

k_i — либо K_i , либо 0007.

K_i — номер команды основной программы, к которой происходит подключение (команды подключения), т. е. команды, после выполнения которой осуществляется указание, помещенное в i -той строке таблицы информации и в последующих строках, если они содержат в третьем адресе признак 0007.

0007 — признак, означающий, что указание, заключенное в строке с этим признаком, осуществляется после выполнения предшествующей ей команды подключения K_i .

α_i — четверичное число, помещаемое в 10 и 11 разрядах второго адреса.

При $\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{— печатается массив чисел.} \\ 1 & \text{— выполняется массив команд } m_i \div (m_i + n_i - 1). \\ 2 & \text{— печатается массив команд.} \\ 3 & \text{— блокируется выполнение всех следующих указаний } (i+1, i+2, \dots), \text{ имеющих в третьем адресе признак 0007, до встречи с новой командой подключения или концом таблицы.} \\ & \text{При } \alpha_i = 3 \text{ следует писать } m_i = n_i = 0. \end{cases}$

m_i — начало массива.

$n_i \leq 777_8$ — длина массива.

v_i — код частоты выполнения указаний при прохождении команды подключения K_i , или, в случае признака 0007, при прохождении предшествующей команды подключения. В случае блокировки ($\alpha_i = 3$) все $v_j (j > i)$, входящие в указания, подлежащие этой блокировке, вступают в силу только при окончании их блокировки.

При $v_i = \begin{cases} 77 & \text{— указание выполняется каждый раз.} \\ 0 \leq p < 77 & \text{— указание выполняется только } p \text{ раз.} \end{cases}$

В случаях $\alpha_i = 0, 1, 2$ перед выполнением указаний печатается интервал и признак — порядковый номер указания, т. е. i в шестнадцатеричной системе.

IV. ПРИМЕР ТАБЛИЦЫ ИНФОРМАЦИИ

01	1560	2020	0356
77	2300	0030	0007
02	2700	1050	0007
23	0000	3000	0405
77	0204	0010	0007
04	0000	3000	0500
01	0175	0010	0007
05	0000	3000	0007
01	0175	0010	0007

После выполнения команды с номером 0356 один раз будет печататься массив команд 1560 (20); каждый раз будет печататься массив чисел 2300 (30) и лишь два раза будет выполняться массив команд 2700 (50).

После двадцатого (24₈) раза выполнения команды 0405 каждый раз будет печататься массив чисел 0204 (10).

После пятого и десятого раза выполнения команды 0500 будет печататься массив чисел 0175 (10).

V. ЗАМЕЧАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ ПН.

1. Останов на команде 0003 (33, 0003, — 0003) означает неправильное считывание первого блока ПН. В этом случае нужно либо нажать пуск машины, либо (что надежнее) повторить обращение к ПН. Остальные блоки ПН также вводятся с контролем, но в случае несовпадения контрольных сумм происходит непосредственное повторение считывание.
2. Обращение к ПН должно произойти после работы КИС, т. е. после обработки команд k_4 и k_6 . (ПН можно поместить на место комплицирующей системы).
3. Если печать чисел или команд не предусмотрена, то соответствующая команда k_4 и k_6 может отсутствовать. Если требуется иная печать массивов, то место k_4 или k_6 должен занимать адрес входа в соответствующую подпрограмму.
4. При необходимости отпечатать числа или команды, находящиеся в ячейках 0001 ÷ 0006, нужно вывести на печать содержимое ячеек $A+1 ÷ A+6$ соответственно, где A — начало ПН.
5. Среди строк информации ($v_i, m_i, a_i n_i, k_i$) могут быть и пустые. Они не оказывают влияния на основную программу, но соответственно удлиняют таблицу τ .

6. Если выполняется указание $(v_i, —, —, k_i)$, то печатается только признак i .
7. При прохождении в основной программе команд K_i , происходит переход к ПН и сначала в ней выполняется первоначальная команда K_i и лишь потом происходит реакция согласно указанной информации.
8. Нельзя подключаться:
 - а) к связанным командам $[M(a), M(b)]$; командам обращения к стандартным программам, если возврат не происходит к следующей команде или если последняя содержит информацию и т. д.]
 - б) к командам, которые работают на МУК-е;
 - в) к переменным командам (командам, которые формируются, переадресуются и т. д.);
 - г) к командам обращения к блокам, если в этих блоках в свою очередь имеются обращения к ПН; в противном случае подключение возможно;
 - д) дважды к одной и той же команде, т. е. в таблице информации не должны быть одинаковые команды подключения K_i .
9. При подключении к командам сравнения выполнение указаний происходит лишь тогда, когда управление передается следующей команде.
10. При подключении к командам ИЦУК с возвратом или ИМУК, печать происходит после возврата к следующей команде.
11. При выполнении массива команд $(a_i=1)$, ПН предварительно перемещает команду, следующую за массивом и лишь потом передает управление началу массива с возвратом от упомянутой команды. После возврата к ПН перемещенная команда восстанавливается. Следовательно, восстановление не произойдет, если при работе массива управление не передается следующей за ним команде.

Кроме того, команда возврата, т. е. команда, следующая за массивом, не должна принимать участие в работе массива.

12. Строка таблицы информации

v_i	m_i	$a_i n_i$	k_i
-------	-------	-----------	-------

после подготовительной работы ПН преобразуется к виду:

a_i	m_i	n_i	v_i
-------	-------	-------	-------

Если $v_i=77$ или $v_i=0$, то v_i в дальнейшем не меняется. При $v_i=77$ указание помещенное в этой строке выполняется каждый раз. При $v_i=0$ указание не выполняется. При $0 < v_i < 77$ до выполнения указания от v_i вычитается каждый раз одна единица.

13. Рабочие ячейки ПН находятся внутри программы.
14. Длина таблицы информации должна быть не более 77_8 , а число следующих друг за другом строк с признаком 0007 — не больше 37_8 .
15. Входом в исполнительный блок ПН является ячейка $A+7$, а выходом — $A+77$, где A — начало ПН.
16. Команда обращения к исполнительному блоку ПН, которая засылается на место команды подключения, имеет вид:

77	S	S	A+7
----	---	---	-----

где: A — начало ПН.

17. Чтобы восстановить основную программу в исходное положение по отношению к изменениям, внесенным ПН, нужно выполнить массив команд:

m_i	00	τ		K ₁
	00	τ+1		K ₂

	00	τ+j-1		K _j

	00	τ+J-1		K _J

где:

$K_j (j=1, \dots, J)$ — команды подключения, указанные в таблице информации. В нумерации этих команд, строки с признаком 0007 пропускаются.

τ — начало массива, предусмотренного для хранения перемещенных команд.

Массив восстанавливаемых команд $m_i(J)$ можно выполнить с помощью ПН, поместив в таблице информации указание:

v_i	m_i	$\alpha_i J$	k_i
-------	-------	--------------	-------

где: $v_i > 0$ и $\alpha_i = 1$.

Приведенным способом можно также произвести частичное восстановление программы. При этом команда K_j восстанавливается командой

00	$\tau + j - 1$	—	K_j
----	----------------	---	-------

18. К ПН можно обращаться несколько раз, но только после восстановления всех команд подключения. При этом каждый раз нужно пользоваться новой таблицей информации.

VI. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ПРИ РАБОТЕ С ПН.

1. Для удобства отладки желательно таблицу с информацией разместить на отдельную перфокарту и в обращении к ПН указать все строки этой карты.
Тогда для изменения информации достаточно менять только одну карту, причем в неиспользованных строках следует записать пустышки.
2. Так как при подключении к командам сравнения печать информации произойдет лишь тогда, когда управление передается следующей команде, то это можно использовать при желании отпечатать информацию после выхода из цикла.
3. Если отдельные части программы циркулируют между барабанами и МОЗУ, то подключение к ПН должно осуществляться до пересылки данной части программы на барабан.
4. При желании в определенном месте остановить машину можно включить в информацию выполнение команды останов. Это можно делать с кратной блокировкой, что дает возможность прервать цикл после его выполнения желаемое число раз.

С этой целью нужно в таблице информации записать строки:

v_i	—	3000	k_i
v_{i+1}	m_{i+1}	1001	0007

где в ячейке m_{i+1} находится команда останов. При этом разрушается следующая за остановом команда.

5. При необходимости печатать ряд массивов с непредусмотренной в ПН частотой, можно в таблицу информации включить указания

v_i	m_i	$1 \ n_i$	K_i
v_{i+1}	m_{i+1}	$\alpha_{i+1} \ n_{i+1}$	0007
v_{i+2}	m_{i+2}	$\alpha_{i+2} \ n_{i+2}$	0007
.....

где выполняемый массив команд $m_i(n_i)$ (он помещается вне таблицы и, в частности, может быть $n_i = 1$) должен заканчиваться командой необходимого сравнения, в третьем адресе которой находится номер $A+77$ (выход из ПН). Печать массивов $m_{i+1}(n_{i+1}), m_{i+2}(n_{i+2}), \dots$ произойдет лишь тогда, когда управление передается следующей команде. За командой сравнения нужно помещать пустую команду. При этом каждый раз после выполнения текущей команды подключения и перед выполнением массива $m_i(n_i)$ будет печататься признак i .

6. Строка информации из первоначального вида:

v_i	m_i	$\alpha_i n_i$	k_i
-------	-------	----------------	-------

после подготовительной работы ПН преобразуется к виду:

α_i	m_i	n_i	v_i
------------	-------	-------	-------

где v_i управляет частотой выполнения указаний этой строки (см. V, 12). Меняя величину v_i , можно добиться изменения в характере работы частоты выполнения указаний.

Пример 1. Если в таблице информации помещены строки:

a_1	v	m	$0n$	K_i
a_2	$v + \mu - 1$		3000	0007
	77	b	1002	0007

где массив b состоит из следующих команд:

22	a_1	$\langle v''' \rangle$	a_1
22	a_2	$\langle v + \mu - 1''' \rangle$	a_2

(v''' — v единиц третьего адреса), то после выполнения команды $K_i v$ — раз будет печататься массив чисел $m(n)$, потом μ — раз эта печать будет блокироваться и в дальнейшем весь этот цикл начнется сначала.

Пример 2. Если в таблице информации помещены строки:

a_1	v		3000	K_i
	77	m_{i+1}	$0n_{i+1}$	0007
	77	b	1001	0007

где b есть команда

22	a_1	$\langle v''' \rangle$	a_1
----	-------	------------------------	-------

то после выполнения команды $K_i v$ -раз подряд не произойдет печать массива m_{i+1} (n_{i+1}), один раз отпечатается этот массив и потом все начнется сначала.

З а м е ч а н и е: Перед выполнением массива команд b (в обоих примерах) произойдет печать признака $i+2$.

- Если печать признаков перед массивами нежелательна, то после выхода из обращения к ПН нужно погасить команду $A+40$.
- Желая отпечатать с пульта заранее предусмотренную последовательность массивов чисел или команд можно подключиться к команде, которая в работе программы не участвует (фиктивное подключение). Печать этих массивов, указанных в таблице информации строкой подключения и последующими строками с признаком 0007, произойдет при передаче управления (с пульта) команде подключения, за которой можно поместить команду останова. Этот способ может предусматриваться в случае сбоя (аварии) в работе отлаживаемой программы.
- Если ПН не записана стационарно на магнитном барабане, то ее можно перед каждым употреблением вводить с перфокарт в МОЗУ и оттуда на выбранное место магнитного барабана.

Указанный ввод ПН на барабан с надлежащим контролем (контрольная сумма ПН — 34, 2004, 2002, 2002) и автоматическим продолжением ввода основной программы может быть оформлен на специальной перфокарте.

Опыт поможет увеличить этот перечень.

VII. ПРОГРАММА В СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ И В УСЛОВНЫХ АДРЕСАХ.

Пояснения

1. μ', μ'', μ''' — μ единиц соответственно первого, второго и третьего адресов.
2. $\langle a \rangle$ — адрес ячейки, содержащей машинное слово a .
3. $[a]$ — содержимое ячейки a .
4. γ_i, δ_i — рабочие ячейки.
5. l — адрес третьей команды обращения к ПН.
6. i — номер строки в таблице информации.
7. Δi — число последовательных строк с признаком 0007.
8. * — звездочка перед меткой команды означает, что данная команда переменная.
9. Первый, третий и четвертый блок содержат команды, зависящие от размещения ПН на магнитном барабане. Следовательно возникает необходимость в каждом конкретном случае вычислить дополнения до контрольных сумм этих блоков.

Ниже приведена таблица адресов и способ вычисления упомянутых дополнений:

I блок	$\beta b + 4$	\overline{KC}_1	67, 3301, 3575, 3566 — KC_0
III блок	$\beta b + 67$	\overline{KC}_3	56, 3743, 2055, 0413 — $2 KC_0$
IV блок	$\beta b + 121$	\overline{KC}_4	47, 2225, 1022, 0704 — KC_0

где KC_0 — константа —

$$KC_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 00 & 00\alpha\beta & b & 0000 \\ \hline \end{array}$$

\overline{KC}_i — дополнение до контрольной суммы i -того блока.

α — номер барабана, на котором записана ПН.

βb — начало программы ПН на барабане.

10. На барабане программа занимает 302 восьмеричных ячеек.
11. Общая контрольная сумма всех блоков ПН — 34, 2004, 2002, 2002.

ПРОГРАММА

I блок

a_1	→		a_1	a_2	$\beta b + 0$	0001	34		0001	0002
a_2	=	a_3	a_4	a_5	1	2	35	0005	0017	0006
a_6	33	0003		0003	2	3	33	0003		0003
a_8	← →	a_1	a_6	a_3	3	4	62	0001	0003	0005
* a_3	→	(3775)		1-2	4	5			KC_1	
a_5	+	a_1	0026	a_1	5	6	26	0001	0026	0001
	← + →	a_7	a_1	a_7	6	7	22	0010	0001	0010
* a_7	Λ	1+1	a_4	a_4	7		17		0017	0017
	+	a_4	0013	a_8	$\beta b + 10$	1	26	0017	0013	0004
	← + →	a_9	a_8	a_9	1	2	22	0014	0004	0014
a_{10}	30	04 $\alpha\beta$	b+33	0057	2	3	30	04 $\alpha\beta$	b+33	0057
* a_9	31		A	a_2	3	4	31			0002
	≠	a_2	a_6	a_{10}	4	5	75	0002	0003	0013
* a_4	65	a_4	0034	a_4	5	6	65	0017	0034	0017
	→			A	6	7	00			3777

II блок

b_1	04	0001		0001	$\beta b + 17$	0003	04	0001		0001
b_2	00	2000	2000	2000	$\beta b + 20$	4	00	2000	2000	2000
* b_3			KC_2	($\Lambda - 2001$)	1	5	36	3650	3566	3641
* b_4	Λ	b_2	$A + \approx$	γ_1	2	6	17	0004	0003	0002
* b_5	Λ	b_2	$A + \approx^*$	γ_1	$\beta b + 23$	0007	17	0004	0054	0002
	+	γ_1	0112	γ_1	4	0010	26	0002	0112	0002
	=	γ_1		b_6	5	1	35	0002		0014
	51	b_3	γ_1	γ_1	6	2	51	0005	0002	0002
* b_7	← + →	$A + \approx^*$	γ_1	$A + \approx^*$	7	3	22	0054	0002	0054
b_6	42	b_5	b_1	b_5	$\beta b + 30$	4	42	0007	0003	0007
	← →	b_7	b_1	b_7	1	5	62	0013	0003	0013
	≠	b_5	b_4	b_5	2	6	75	0007	0006	0007

III блок

A	04aβ	b+17	0013	βb+33	2001	30	04aβ	b+17	0013
	30					30			
	31					31			
	≠	γ ₁	b ₂	a ₄	4	75	0002	0003	0002
	←+→	b ₂	b ₁	b ₃	5	22	0004	0004	0017
	+	b ₃	0126	b ₃	6	26	0005	0003	0005
	←-→	a ₄	b ₃	b ₃	7	62	0017	0126	0005
	+	a ₄	0013	γ ₁	βb+40	26	0017	0005	0005
	←+→	b ₅	γ ₁	b ₅	1	26	0017	0013	0002
	←+→	b ₄	γ ₁	b ₄	2	22	0007	0002	0007
	←+→	b ₇	a ₄	b ₇	3	22	0006	0002	0006
	+	γ ₁	0013	γ ₁	4	22	0013	0017	0013
	←+→	b ₇	γ ₁	b ₇	5	26	0002	0013	0002
	→	c ₁₂	a ₄	b ₅	6	22	0013	0002	0013
	→	c ₁₃		b ₅	7	34		0017	0007
	→	c ₉		b ₇	βb+50	00	2050		0007
	→	c ₁₀		A	1	00	2051		0013
	→	c ₁₁		A+1	2	00	2060		2001
	←+→	<1+1>	c ₂	A+2	3	00	2053		2002
	→	1+1		βb+54	βb+54	00	2052		2003
*C ₂	+	γ ₁		c ₂	5	22	0001	2024	2024
	Δ	γ ₁	0141	γ ₁	6	00			0001
	←+→	γ ₁	<3777'>	<n'''>	7	26	0001	0141	2067
*C ₃	→	k ₄	(K ₆)	γ ₁	βb+60	17	0001	2056	0001
	+	γ ₁	0013	c ₃	1	22	0001	2030	2030
*C ₄	←+→	c ₄	γ ₁	e ₂₅	2	2030			2113
	→	k ₆		γ ₁	3	26	0001	0013	0001
*C ₅	←+→	c ₂	<3777'>	c ₄	βb+64	22	2033	0001	2033
	→	l		e ₂₇	5	00			2114
	←+→	γ ₁		c ₅	6	22	2024	2057	2035
	+	γ ₁	0126	γ ₁	βb+70	7		KC ₃	
	←+→	c ₈	γ ₂	γ ₁	7	00		0001	0001
	←+→	c ₇	γ ₂	γ ₂	1	26	0001	0126	0002
	+	γ ₁	0113	D ₃	2	22	2054	0002	2066
	←+→	c ₈	<3777'>	e ₂₈	3	22	2055	0002	2112
	+	c ₈		D ₄	4	26	0001	0113	2065
	←+→	c ₈		c ₈	5	22	2035	2057	2044

*c ₆	->	1-1		γ_1	6	4	00			
	Δ	γ_1	<3777'>	γ_1	7	5	17	0001	2057	0001
	+	γ_1	0126	<P'''>	$\beta b + 100$	6	26	0001	0126	0001
	->			A	1	7	34			2001
c ₁₂	Δ	b ₂	A+57	γ_1	2	2050	17	0004	2060	0002
c ₁₃	<+>	A+57	γ_1	A+57	3	1	22	2060	0002	2060
c ₁₁	\neq	γ_1	b ₂	A	4	2	75	0002	0004	2001
c ₁₀	31		A+3	γ_1	$\beta b + 105$	2053	31		2004	0002
c ₈	<+>	γ_1	γ_2		6	4	22	2004	2001	
c ₇	62	e ₆	<1'''>		7	5	62	2017	2107	
	00	3777	3777		$\beta b + 110$	6	00	3777	3777	
	00	3777			1	7	00	3777		
c ₉	30	04a β	b+113	0060	2	2060	30	04a β	b+113	0060

IV блок

	->			b ₅	$\beta b + 113$	2004	34		0017	0007
	65	<P'''>	a ₄	a ₄	4	5	65	0001	0034	0017
d ₁	->		0034	<1'''>	5	6	00			0001
d ₆	<+>	D ₃	<1'''>	d ₃	6	7	22	2066	0001	2023
	+	d ₃	0026	γ_1	7	2010	26	2023	0026	2004
	<+>	D ₂	γ_1	d ₂	$\beta b + 120$	1	22	2063	2004	2012
*d ₂	->	T+i		γ_1	1	2	00		KC ₄	
	<+>	<1'''>	<1'''>	<1'''>	2	3	22	0001	2006	0001
	Δ	γ_1	<3777'''>	<k/0007>	3	4	17	0007	2061	2005
	<->	γ_1	<k/0007>	γ_2	4	5	62	0007	2005	2001
	+	γ_2	0141	γ_1	5	6	26	2001	0141	2004
	<+>	γ_1	γ_2	γ_2	6	7	22	2004	2001	2001
	Δ	γ_2	<3000''>	γ_1	7	2020	17	2001	2062	2004
	20	γ_2	γ_1	γ_2	$\beta b + 130$	1	20	2001	2004	2001
	+	γ_1	0015	γ_1	1	2	26	2004	0015	2004
*d ₃	<+>	γ_1	γ_2	T+i	2	3	00			
*d ₅	00				3	4	00			
d ₁₁	+	<k/0007>	0026	γ_1	4	5	26	2005	0026	2004

d ₄	←+→ =→	γ ₁ k	D ₄	d ₄ τ	βb + 135 6	2026 7	22 00	2004	2065	2027
	←+→	D ₄	<1'''>	D ₄	7	2030	22	2065	2006	2065
d ₇	←+→	<i'''>	<1'''>	<i ₀ '''>	βb + 140	1	22	0001	2006	0002
	≠	<i'''>	<n'''>	d ₁₂	1	2	75	0001	2067	2035
	←+→	<i'''>	<1'''>	<i'''>	2	3	22	0001	2006	0001
d ₁₂	74		d ₁₃	d ₁₀	3	4	74		2050	2037
	→		d ₅	d ₆	4	5	34		2024	2007
d ₁₀	=	<k/0007>	<7'''>	d ₇	5	6	35	2005	2063	2032
	←-→	<i'''>	<i ₀ '''>	<Δi'''>	6	7	62	0001	0002	2024
	+	<Δi'''>	0021	γ ₂	7	2040	26	2024	0021	2001
	←+→	D ₈	γ ₂	γ ₁	βb + 150	1	22	2057	2001	2004
	+	d ₄	0026	γ ₂	1	2	26	2027	0026	2001
	←+→	γ ₁	γ ₂	γ ₁	2	3	22	2004	2001	2004
	+	<i ₀ '''>	0013	γ ₂	3	4	26	0002	0013	2001
	+	d ₄	0126	d ₉	4	5	26	2027	0126	2047
*d ₉	←+→	D ₉	d ₉	d ₉	5	6	22	2056	2047	2047
d ₁₃	←+→	γ ₁	γ ₂	k	6	7	00			
	→			d ₁₁	7	2050	34			2025
	=→	D ₁₀		A	βb + 160	1	00	2064		2001
	=→	D ₁₂		b ₅	1	2	00	2060		0007
	=→	D ₁₁		b ₇	2	3	00	2055		0013
	→			A	3	4	34			2001
D ₁₁	←+→	A + 103	γ ₁	A + 103	4	5	22	2104	0002	2104
D ₉	←+→	γ ₁	γ ₂		5	6	22	2004	2001	
D ₈	77		0076	e ₁	βb + 166	2057	77		0076	2010
D ₁₂	Λ	b ₂	A + 103	γ ₁	7	2060	17	0004	2104	0002
	00		3000	3777	βb + 170	1	00			3777
	00				1	2	00		3000	
D ₂	00			0007	2	3	00			0007
D ₁₀	30	04αβ	b + 174	0105	3	4	30	04αβ	b + 174	0105
D ₄	00		(T)	τ		5				
*D ₃	←+→	γ ₁	γ ₂	(T)		6				
	00			n		7				

				V блок					
	→		KC ₃	b ₅	βb+174	2004	34		0007
	00		S		5	5	17		3356
	00		S		6	6	00	1304	
e ₁	→	βe	0026	e ₂	βb+200	2010	34		2100
e ₂	+	e ₄	e ₅	e ₅	1	1	26	2100	0026
e ₃	←+	e ₈	<1'+1'''>	e ₅	2	2	22	2101	2014
*e ₅	←+	e _k	<3777',,>	e ₅	3	3	62	2014	2111
*e ₇	←+	e ₈	δ ₁	e ₇	4	4	00		
e ₆	→	τ*	Δi, i	e ₆	5	5	22	2102	2001
	+	δ ₁	[k]		6	6	00		
	Λ	<i'''>	0113	<i'''>	7	7	00		
	+	δ ₁	<77'''>	<i'''>	βb+210	2020	26	2001	0113
	+	<Δi'''>	0021	<Δi'''>	1	1	17	2014	2106
e ₃₁	←+	e ₂₅	0142	<Δi'''>	2	2	26	2001	0021
	+	e ₁₁	<i'''>	e ₁₁	βb+213	2023	26	2016	0142
	←+	e ₈	0026	γ ₁	4	4	22	2112	2014
*e ₉	→	T+i	γ ₁	γ ₁	5	5	26	2034	0026
	←+	<i'''>	<i'''>	e ₉	6	6	22	2102	2002
	Λ	e ₆	<77'''>	e ₆	7	7	00		
	=	γ ₁	<77'''>	γ ₁	βb+220	2030	22	2014	2107
	=	γ ₁	<77'''>	e ₂₃	1	1	17	2017	2106
*e ₁₁	←+	e ₆	<i'''>	e ₁₂	2	2	35	2002	2076
e ₁₂	→	e ₈	<1'''>	T+i	3	3	35	2002	2106
	+	e ₈	0141	e ₁₁	βb+224	2034	00		
	Λ	<2'''>	e ₁₁	βe	5	5	26	2017	0141
e ₁₀	72	e ₆	<3777', ₁₁ >	e ₁₆	6	6	36	2110	2034
	32	0007		0007	7	7	17	2017	2105
	=	<i'''>			βb+230	2040	72	0007	0007
	=	e ₁₁	<1'''>	e ₁₉	1	1	32	2014	
	→	e ₁₁	<2'''>	e ₁₇	2	2	35	2034	2107
	65	e ₂₆		e ₁₃	3	3	35	2034	2110
e ₂₈	20	e ₁₆	0032	e ₁₆	4	4	00	2113	2054
	←+	e ₂₉	<A'+A'''>	e ₂₉	5	5	65	2055	0032
		e ₃₀	e ₁₀	γ ₁	6	6	20	2050	2103
					7	7	22	2050	2040

e ₂₉	->	A*		-*	βb+240	2050	00	2001		
	<+>	e ₂₉	<1'+1'''>	e ₂₉	1	1	22	2050	2111	2050
	≠	e ₂₉	γ ₁	e ₂₉	2	2	75	2050	2027	2050
*e ₁₃	<->	e ₂₉	e ₁₀	e ₂₉	3	3	62	2050	2040	2050
e ₁₆	77	m _i	0004/0006	k ₄ /k ₆	4	4	00			
	52/00		n _i		βb+245	2055	00			
	→		e ₁₃	e ₂₈	6	6	34		2054	2046
e ₁₇	->	e ₂₇		e ₂₃	7	7	34			2076
e ₁₄	→			e ₁₃	βb+250	2060	00	2114		2054
e ₁₉	+	e ₁₆	0013	e ₂₈	1	1	34			2046
	<+>	e ₁₆	γ ₁	γ ₁	2	2	26	2055	0013	2001
	<+>	e ₈	γ ₁	γ ₁	3	3	22	2055	2001	2001
	+	γ ₁	0126	e ₂₁	4	4	22	2102	2001	2073
	<+>	e ₃₀	γ ₁	γ ₁	5	5	26	2001	0126	2001
	+	e ₁₆	0126	e ₂₀	6	6	22	2104	2001	2075
	+	γ ₁	0013	γ ₂	7	7	26	2055	0126	2002
	<+>	γ ₁	γ ₂	γ ₁	βb+260	2070	26	2001	0013	2001
	65	γ ₁	0034	e ₂₂	1	1	22	2001	2002	2001
*e ₂₁	→	m+n	(n)	e ₅	2	2	65	2001	0034	2074
*e ₂₂	→		m+n	m	3	3	00			
*e ₂₀	->	e ₆		m+n	4	4	00			
e ₂₃	<->	<Δi'''>	<1'''>	<Δi'''>	5	5	00			
	≠	<Δi'''>		e ₃₁	6	6	62	2016	2107	2016
β _e			←		7	7	75	2016		2024
e ₄	Λ		<3777'>	δ ₁ +1	βb+270	2100	00			
e ₈	00	A		e ₆	1	1	17		2105	2002
e ₃₀	00	e ₆		A	2	2	00			2017
	00	3777	3777		3	3	00	2001		2001
	00				4	4	00	2017		
	00				5	5	00	3777	3777	
	00			0077	6	6	00			0077
	00			0001	βb+277	2107	00			0001
	00	0001		0002	βb+300	2110	00			0002
	00	e ₆	<1'''>	0001	1	1	00	0001		0001
*e ₂₅	<->		0004	T		2				
*e ₂₆	77		0006	k ₄		3				
*e ₂₇	77			k ₆		2114				

Б. Б. Леви

ПРОГРАММА ОТЛАДКИ ДЛЯ МАШИНЫ БЭСМ-2М

Аннотация

Программа отладки ПН составлена для машины БЭСМ-2М и дает возможность вести активное наблюдение за естественным ходом работы отлаживаемых программ, что облегчает и ускоряет процесс их отладки.

B. B. Levi

A CHECKING PROGRAMME FOR BESM-2M COMPUTER

Annotation.

The checking programme ПН made for BESM—2M computer makes it possible to organize an active observation of the natural workuig of the programme which facilitates and accelerates the checking process.

В. Л. Калмыков, Я. Я. Даубе

МЕТОД СОГЛАСОВАНИЯ ЧИТАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА С ЛЕНТОПРОТЯЖНЫМ БЛОКОМ ПРИ ЗАПИСИ ИНФОРМАЦИИ С ПЕРФОКАРТ НА МАГНИТНУЮ ЛЕНТУ ДЛЯ МАШИНЫ БЭСМ-2М

Как известно, решение экономических и ряда других проблем с помощью электронных вычислительных машин связано с накоплением большого количества информации в их внешних запоминающих устройствах. Применяемые же в большинстве случаев перфосчитывающие устройства ввода, а также выводные устройства, отличаются низким быстродействием, вследствие чего на ввод этой информации и вывод результатов вычислений затрачивается много машинного времени.

Одним из методов ускорения ввода и вывода данных является предварительная запись информации на магнитные ленты, которые используются во внешних запоминающих устройствах машины и имеют высокую скорость работы, достигающую в отдельных случаях $5 \cdot 10^5$ двоичных знаков в секунду. Благодаря этому значительно сокращается время, требуемое для приема и выдачи информации, и повышается производительность машины в целом [1].

Для предварительной записи исходных данных задачи и программы ее решения, а также для печатания результатов служат различные внешние устройства, не связанные с машиной. В частности, перезапись информации с перфокарт на магнитную ленту осуществляется с помощью специальных преобразователей, широко применяемых за рубежом в машинах фирм «ИБМ», «Рэммингтон Рэнд» и др. [2].

Типичный преобразователь записи информации с перфокарт на магнитную ленту состоит из карточного считывающего устройства и лентопротяжного блока, связанных между собой по-

средством блока памяти. Блок памяти служит для согласования работы этих устройств. Он представляет из себя буферное запоминающее устройство, в котором производится промежуточное хранение информации, считываемой с перфокарт. При заданном быстродействии карточного считывающего устройства согласование обеспечивается соответствующим выбором скорости протяжки магнитной ленты и емкости буферной памяти. В различных преобразователях емкость буферной памяти может составлять от десятков до несколько сот чисел.

Упомянутые преобразователи предназначены, главным образом, для записи на многодорожечную магнитную ленту и не могут быть непосредственно использованы для машины БЭСМ-2М.

В машине БЭСМ-2М применяются стандартные 80-ти колонные перфокарты и узкая (6,35 мм) магнитная лента. На каждой перфокарте по строкам могут размещаться двенадцать 39-ти разрядных двоичных чисел в виде двенадцати позиций пробивок. Считывание этой информации осуществляется построчно параллельным способом в читающем устройстве со средней скоростью 20 чисел в сек.

Запись информации на магнитную ленту ведется последовательным способом отдельными группами чисел с промежутками между ними для разгона и торможения ленты. Каждое 39-ти разрядное число располагается на кодовой дорожке магнитной ленты против соответствующих 39-ти синхроимпульсов, записываемых на другой дорожке. Против 40-го синхроимпульса ничего не записывается, вследствие чего он как бы разделяет между собой соседние числа. Скорость движения магнитной ленты при записи и считывании — 2 м/сек., рабочая частота следования импульсов — 16 кгц. При этом скорость обмена информацией составляет 400 чисел в сек.

Таким образом, в то время, как читающее устройство выдает 1200 чисел в минуту, на магнитную ленту записывается 24 тысячи чисел. Однако основная трудность согласования заключается не в столь значительном различии скоростей работы этих устройств, а в том, что имеется промежуток между соседними картами, за счет которого фактически скорость считывания информации с перфокарт колеблется от 19 до 21 чисел в сек. Это обстоятельство и вызывает необходимость применения буферной памяти, т. к. при перезаписи информации непосредственно из читающего устройства не выполняются требования расположения чисел на магнитной ленте.

На первой строке рис. 1 приведена временная последовательность считывания информации с перфокарт. Числа 1, 2, ..., 12, соответствующие номерам считываемых позиций, обознача-

ют моменты времени, в которых на кодовые шины читающего устройства поступает параллельным способом с периодом $T = 43.5$ мсек содержащаяся в этих позициях информация. Согласно конструкции читающего устройства длительность паузы между позициями, находящимися на двух соседних картах, составляет $T_1 = 3T$.

Описываемый метод согласования основан на том, что содержимое каждой перфокарты записывается на магнитную ленту в течение времени $11T + T_1$, благодаря чему на ней исклю-

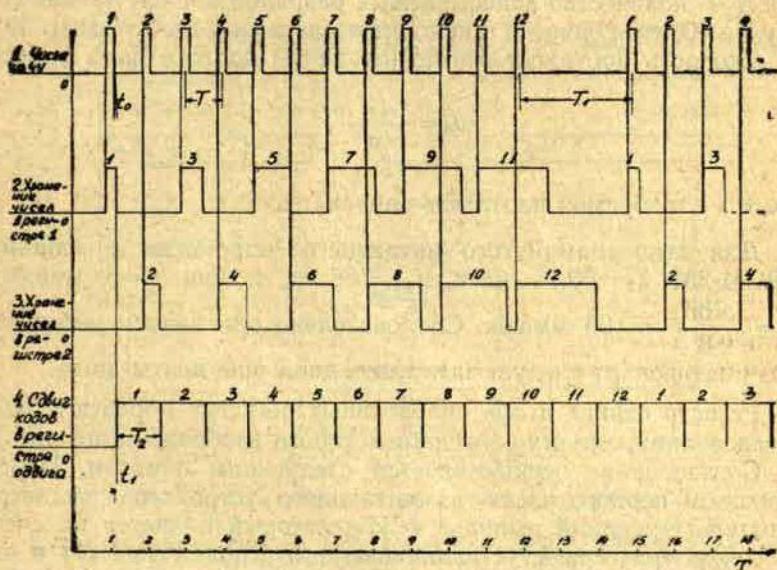


Рис. 1. Временная диаграмма работы блока согласования.

чаются недопустимые промежутки между двенадцатым числом предыдущей и первым числом последующей перфокарты. При этом числа поступают на ленту последовательным способом из регистра сдвига, график работы которого изображен на строке 4 рис. 1. Время сдвига T_2 каждого числа определяется из соотношения

$$T_2 = \frac{11T + T_1}{12} = \frac{14T}{12}$$

Очевидно $T_2 > T$, следовательно, в регистр сдвига не могут передаваться числа непосредственно из читающего устройства. Промежуточное хранение этих чисел осуществляется в двух оперативных регистрах как показано на строках 2 и 3 рис. 1.

Здесь числа 1, 2, ..., 12 обозначают время, в течение которого соответствующие числа запоминаются в первом либо втором регистре.

Частота сдвигов f_p на регистре, при последовательной записи кода на ленту определяется из соотношения

$$f_p = \frac{1}{T_2} \cdot n,$$

где n — количество записываемых разрядов в числе (в данном случае 40, хотя сдвигов в каждом числе может быть только 39).

Скорость протяжки магнитной ленты должна быть равной

$$v_2 = \frac{f_p}{\sigma},$$

где σ — требуемая плотность записи.

Для вышеупомянутого читающего устройства и машины БЭСМ-2М $T_2 = 50,75$ мсек, $f_p \approx 788$ гц и при $\sigma = 8$ имп./мм

$v_2 = \frac{788}{8} \approx 100$ мм/сек. Следовательно при записи информации с перфокарт следует замедлить движение ленты до v_2 .

Регистр сдвига и оба оперативных регистра образуют блок согласования, структурная схема которого изображена на рис. 2.

Согласование осуществляется следующим образом. Перед приходом первого числа из читающего устройства выдается синхронизирующий импульс «СИ», который подается на счетный вход триггера 4, устанавливает его в положение «1» и открывает клапан 5. Тем самым оперативный регистр 1 подготавливается к приему первого числа. При выдаче этого числа на кодовые шины импульс «ОМ», создаваемый пробитым на перфокарте маркером позиции, проходит через клапан 5 и разрешает регистру 1 зафиксировать это число. В это время из схемы управления записью поступает т. н. «импульс 40-й» (в дальнейшем — 40-й импульс записи предыдущего числа), который, проходя через клапан 9, открытый «1» триггера 8, производит передачу первого числа из регистра 1 в регистр сдвига 3. Вслед за этим схема управления записью выдает в регистр 3 39 (или 40) сдвиговых импульсов, и происходит запись числа на магнитную ленту. Пока записывается первое число, второй импульс «СИ» возвращает триггер 4 в «0» и открывает клапан 6, через который импульс «ОМ» разрешает зафиксировать в регистре 2 второе число. Когда в регистр 1 приходит 39-й импульс сдвига, он одновременно попадает на счетный вход триггера 8, уста-

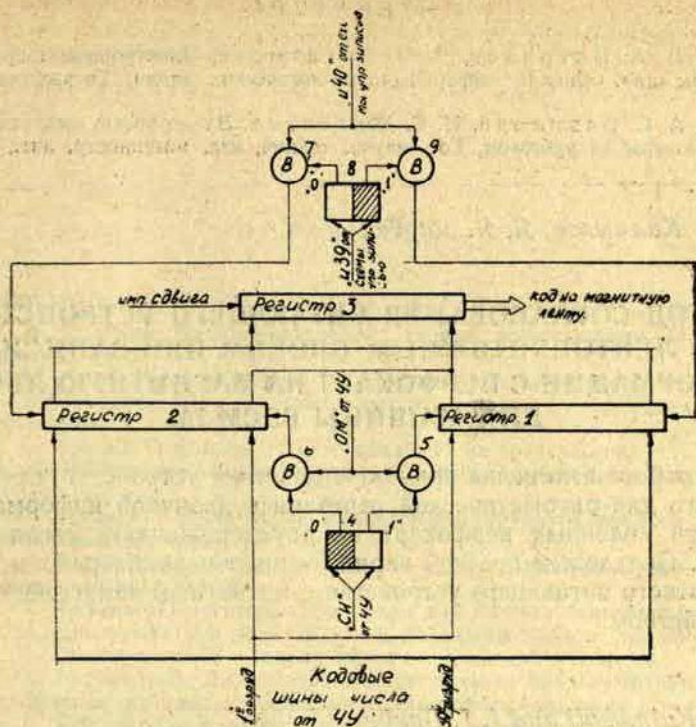


Рис. 2. Структурная схема блока согласования.

- 1,2 — регистры хранения чисел; 3 — регистр сдвига кодов; 4 — триггер приема чисел; 5, 6 вентили приема чисел в регистры 1 и 2; 7, 9 — вентили передачи чисел в регистр 3; 8 — триггер передачи чисел.

навливая его в «0», и разрешает «импульсу 40-му», заканчивающему запись предыдущего числа, передать в регистр сдвига второе число, которое до этого хранится в регистре 2.

Для надежного согласования в месте стыка двенадцатого числа предыдущей и первого числа последующей перфокарты сдвиг первого числа начинается с момента t_1 ($t_1 > t_2$), благодаря чему запись двенадцатого числа заканчивается лишь после того, как первое число последующей перфокарты уже зафиксировалось в регистре 1.

Приведенная схема блока согласования отличается простотой. Применение одноктактных феррит-дидонных регистров сдвига позволяет создать малогабаритный и экономичный преобразователь, с использованием которого ввод информации в оперативную память машины БЭСМ-2М ускоряется ориентировочно в 20 раз.

ЛИТЕРАТУРА:

1. В. А. Батраков, В. И. Богатырев, Электронные цифровые машины для решения информационно-логических задач, Госэнергоиздат, 1961.

2. А. С. Вавилова, И. С. Жевелева, Электронные вычислительные машины за рубежом, Гос. научн. технич. изд. машиностр. лит., 1962,

В. Л. Калмыков, Я. Я. Даубе

МЕТОД СОГЛАСОВАНИЯ ЧИТАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА С ЛЕНТОПРОТЯЖНЫМ БЛОКОМ ПРИ ЗАПИСИ ИНФОРМАЦИИ С ПЕРФОКАРТ НА МАГНИТНУЮ ЛЕНТУ ДЛЯ МАШИНЫ БЭСМ-2М

В работе изложены принципы действия устройства, предлагаемого для автоматической перезаписи двоичной информации с 80-ти колонных перфокарт на двухдорожечную магнитную ленту. Предложен простой вариант синхронизации работы перфокартного читающего устройства с магнитным записывающим устройством.

V. L. Kalmykoff and J. J. Daube

A METHOD FOR PUNCH-CARD READER SYNCHRONIZATION WITH MAGNETIC-TAPE RECORDER FOR BESM-2M COMPUTER.

The paper discusses principles of an automatic device for digital information transcription from conventional 80-column cards to two-channel magnetic tape.

A simple method is given for synchronization of punch-card reader and magnetic-tape recorder.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	5
1. <i>Л. А. Симонян.</i> Некоторые вопросы теории представления алгебр ЛИ	21
2. <i>Е. М. Левич.</i> Пример простой но не строго простой группы	27
3. <i>И. Э. Страздинь.</i> Типы трюичных переключагельных функций двух переменных	43
4. <i>Г. К. Энгелис.</i> О полиномах ортогональных на треугольнике	49
5. <i>В. Ж. Риекстыня.</i> Асимптотические оценки для сумм некоторых степенных рядов	73
6. <i>А. П. Лиена.</i> Об одной задаче оптимального регулирования с закрепленным временем	79
7. <i>Л. Э. Рейзинь.</i> О зависимости решений дифференциальных уравнений от правых частей	91
8. <i>Н. А. Авдонин.</i> О некоторых формулах для расчета температурного поля пласта при наличии в нем подвижного очага горения	103
9. <i>Э. Я. Риекстыня.</i> Об узловых линиях квадратной мембраны	111
10. <i>Л. И. Рубинштейн.</i> Двухфазная задача Стефана на отрезке при однофазном начальном состоянии теплопроводящей среды	149
11. <i>Л. И. Рубинштейн.</i> К вопросу о динамике изотермического испарения идеальной поликомпонентной жидкой смеси	177
12. <i>Л. И. Рубинштейн.</i> О динамике одномерного неизотермического испарения идеальных жидких смесей	229
13. <i>Я. Л. Энгельсон.</i> О ветвлении решений нелинейных уравнений в локально выпуклых пространствах	239
14. <i>Я. Я. Рачевский и Г. Л. Ионин.</i> Независимость от распределения в задаче «Станки и рабочие»	247
15. <i>Л. А. Ладыженский.</i> Об одном методе численного решения задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений	257
16. <i>Б. Грива.</i> О распространении ошибок округления при решении алгебраических систем методом единственного деления	265
17. <i>Б. Б. Леви.</i> Программа отладки ПН для машины БЭСМ-2М	283
18. <i>В. Л. Калмыков, Я. Я. Даубе.</i> Метод согласования читающего устройства с летопротяжным блоком при записи информации с перфокарт на магнитную ленту для машины БЭСМ-2М	283

Pēterā Stučkā Latvijas Valsts universitātes
Zinātniskie raksti, 58. sējums,
SKAITĻOSANAS CENTRĀ RAKSTI.

Parakstīta iespiešanai 1964. g. 24. septembrī. Papīra formāts 60x90/16. 18,25 līz. iespiedl.; 18,25 uzsk. iespiedl.; 19 izdevn. I. Metiens 520 eks. JT 05224. Maksā 1 rubl. 28 kap. Pēterā Stučkā Latvijas Valsts universitāte Rīgā, Raiņa bulv. 19. Iespiesta Latvijas PSR Ministru Padomes Valsts preses komitejas Poligrāfiskās rūpniecības pārvaldes 1. tipogrāfijā «Cīņa», Rīgā, Blaumaņa ielā 38/40. Pasūt. Nr. 1431-n.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка, формула	Напечатано	Следует читать
10	22 сверху	$[\mathfrak{M}_{m-1}, x(i)] \subseteq \subseteq [\mathfrak{M}_{m-1}, \mathfrak{N}(i)]$	$[\mathfrak{M}_{m-1}, \mathfrak{N}(i)] \subseteq \subseteq [\mathfrak{M}_{m-1}, x(i)]$
13	12 сверху	$\mathfrak{L}_{i-1} = \mathfrak{B} -$	$\mathfrak{L}_{i-1} - \mathfrak{B} -$
13	29 сверху	Π и \mathfrak{B}	$\overline{\Pi}$ и $\overline{\mathfrak{B}}$
14	9 сверху	$\overline{\mathfrak{L}}$	\mathfrak{L}
14	16 сверху	$\overline{\mathfrak{L}}_{\mathfrak{D}}$	$\overline{\mathfrak{L}}_{\Pi}$
15	30 сверху	идеалам	идеалами
17	26 сверху	τ точностью	c точностью.
51	4 снизу	$y < \frac{\pi}{2}$	$ y < \frac{\pi}{2}$
53	6 снизу	$ A(1+\varepsilon); \int_0^a$	$ A (1+\varepsilon); \int_0^b$
53	4 снизу	\int_0^a	\int_0^b
54	2 снизу	e^s	e^p
63	4 снизу	$O_{\text{Re}z > z(\sigma)}_{\infty}$	$O_{\text{Re}z > (b)}_{\infty}$
65	Ф-ла (33)	$F(t) \sum_{n=0}^{\infty}$	$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty}$
66	6 сверху	$\sum_{k=0}^{\infty}$	$\sum_{n=0}^{\infty}$
68	Ф-ла (37)	$\sum_{k=0}^{\infty}$	$\sum_{k=0}^N$
68	1 снизу	$\sum_{j=1}^q$	$\sum_{j=1}^q$
71	5 сверху	$\pi - 2,$	$\pi - \eta,$
71	7 сверху	$\ln zx$	$\ln z$

Страница	Строка, формула	Напечатано	Следует читать
86	3 сверху	=	+
86	Ф-ла (19)	f_1	f_i
86	Ф-ла (20)	$\Delta p^{(i)}$	$p^{(i)}$
87	3 снизу	\bar{i}	j
87	2 снизу	i	j
92	Ф-ла (4а)	$-b \sqrt{p+p} C$	$(b \sqrt{p+p})$
93	Ф-ла (6)	$-F_1^1 \cdot (\sqrt{p})$	$-F_1^1 (\sqrt{p})$
98	5 сверху	также	так же
100	11 сверху	$[t(1-x) - s]^{2n}$	$[t(1-x) - s]^{n/2}$
114	Ф-ла (1.2 ₁)	\int_i^i	\int_0^i
115	Ф-ла (1.2 ₂)	\int_i^i	\int_i^1
115	9 снизу	$y(0)$	$y(0)$
116	9 сверху	$\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x}$	$\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x}$
118	Ф-ла (2.13)	$u_{x=y}^*$	$u_1^* _{x=y(0)}$
118	Ф-ла (2.14)	u^*	u_1^*
119	18 сверху	$(i=1,2)$	$(i=1,2)$
119	7 снизу	$\zeta_i(t_0)$	$\zeta_i(t_0)$
120	6 сверху	$e^{-\frac{1-x}{\zeta_1^2}}$	$\frac{1-x}{e^{\zeta_1^2}}$
120	Ф-ла (2.28)	$u_2(1-\zeta_2(t)), t \geq 0$	$u_2(1-\zeta_2(t), t) \geq 0$
120	Ф-ла (2.29)	$u_2 = u_2^* - u_2$	$u_2 = u_2^* - u_2$
120	Ф-ла (2.30)	u_2	u_2
123	Ф-ла (2.42)	$-\frac{\partial}{\partial x} u_{21} z_1(t), t$	$-\frac{\partial}{\partial x} u_{21}(z_1(t), t)$

Страница	Строка, формула	Напечатано	Следует читать
212	Ф-ла (6.20)	v_2'	v_2^1
215	2 снизу	\overline{A}	A_s
216	10 снизу	10^6	10^3
217	Таблица 8 столбец 3 строка 2	2.2405	0.0128
217	3 снизу	u и v	\overline{u} и \overline{v}
219	Ф-ла (8,12 ₁)	$\int_s^t; W(\sqrt{\beta_2(\tau-s)})$	$\int_s^t; W(\sqrt{\beta_2(\tau-s)})$
220	Ф-ла (8,12 ₂)	μ_1	η_1
220	4 снизу	u_1 и v_1	$\overline{u_1}$ и $\overline{v_1}$
222	Ф-ла (8,17)	$e^{\beta_1 z}$	$e^{-\beta_1 z}$
222	5 снизу	\overline{v}	\overline{v}
230	15 сверху	пространстве	пространство
231	16 снизу	(см. [6],	(см. [6]).
234	11 сверху	объем	объем
240	2 снизу	$p(\omega_0, \Delta t, \omega_1(\Theta \Delta t) =$	$p(\omega_0, \Delta t, \omega_1(\Theta \Delta t)) =$
243	5 сверху	$\frac{1-F(x_1-\Delta t)}{1-F(x_1)}$	$\frac{1-F(x_1)}{1-F(x_1-\Delta t)}$
243	4 снизу	$(k+1)$	$(k+1) \times$
243	3 снизу	\int_0^∞	$\times \int_0^\infty$
243	7 сверху (4)
244	1 сверху	$\mathbb{A} p_n(x_1, \dots, x_n, t + \Delta t)$	$p_n(x_1, \dots, x_n, t + \Delta t)$
244	2 сверху	$\prod_{i=1}^n \frac{1-F(x_i)}{1-F(x_i-\Delta t)}$	$\prod_{i=1}^n \frac{1-F(x_i)}{1-F(x_i-\Delta t)} +$ $+ o(\Delta t)$
244	5 сверху	$0 < k \leq (n-m)$	$0 \leq k \leq (n-m)$
244	6 сверху	$\frac{1-F(x_i-\Delta t)}{1-F(x_i)}$	$\frac{1-F(x_i+\Delta t)}{1-F(x_i)}$

Страница	Строка, формула	Напечатано	Следует читать
127	Ф-ла (3.8)	Y_0^*	Y_1^*
133	Ф-лы (3.34) и (3.37)	ω_1^1	ω_1
135	Ф-ла (4.7)	$\left[1 - \operatorname{Erf} \frac{z_1(t)}{2\sqrt{t}} \right]$	$\left[1 - \operatorname{Erf} \frac{z_1(t)}{2\sqrt{t}} \right]$
141	Ф-ла (6,2*)	$y(t) - y(t)$	$y(t) - y(\tau)$
150	8 снизу	$\exp - \frac{\beta_{io} c_{mi}^o}{hc_o} \cdot \frac{t}{1 + \frac{\beta_{io} c_{mi}^o}{\beta_i c_o}}$	$\exp \left[- \frac{\beta_{io} c_{mi}^o}{hc_o} \cdot \frac{t}{1 + \frac{\beta_{io} c_{mi}^o}{\beta_i c_o}} \right]$
155	Ф-ла (2.1 ₃)	$\frac{\partial c_i}{\partial z} \Big _{(x,y) \subset \sigma; z=a}$	$\frac{\partial c_i}{\partial z} \Big _{(x,y) \subset \sigma; z=0}$
155	Ф-ла (2.7)	$\exp \left(- \frac{x^2}{4t^2} \right)$	$\exp \left(- \frac{x^2}{4t} \right)$
158	1 сверху	V_i	v_i
158	Ф-ла (3.3)	$\int_0^t d\tau \frac{v_i}{r}$	$\int_0^t d\tau \int_0^r \frac{v_i}{r}$
160	1 снизу	$-\frac{bf(p)}{p}$	$-\frac{bf(p)}{\sqrt{p}}$
161	Ф-ла (4.4)	$-\frac{b}{2} \sqrt{\quad}$	$-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\quad}$
162	9 снизу	$x <$	$x \in$
165	9 сверху	$by \cos y - \sin y$	$b(y \cos y - \sin y)$
168	Ф-ла (5, 14)	$\left(\frac{n}{2} + 1 \right)$	$\Gamma \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$
170	4 снизу	$c(t)/c(o)$	$-\frac{\omega^*}{a}$
172	2 сверху	от n от безразмерного	от b и от безразмерного t

Страница	Строка, формула	Напечатано	Следует читать
173	3 снизу	мжно	можно
182	Ф-ла (2.4)	Π	π
183	Ф-ла (2,5)	$a_{1,t}^2$	$a_{i,1}^2$
184	Ф-ла (2.8 ₂)	$a_{2,i,i}$	$a_{2,i,i}$
184	Ф-ла (3,1)	$K_{i,j}^i(t-s)$	$K_{i,i}^i(t-s)$
185	Ф-ла (3.61)	\int_0^t	\int_0^t
187	Ф-ла (4,6)	$\frac{\Gamma^2(p_e+2)}{\Gamma(2p_e+1)}$	$\frac{\Gamma^2(p_e+1)}{\Gamma(2p_e+2)}$
188	4 снизу	I_0	I_i
188	Ф-ла (4.10)	$A_{i,t}^i(t-s)$	$B_{i,i}^i(t-s)$
189	Ф-ла (4.11)	$K_{i,i}^{m,i}$	$K_{i,j}^{m,i}$
189	Ф-ла (4.13)	$\frac{dp_n}{dt^{p_n}}$	$\frac{d^{p_n}}{dt^{p_n}}$
191	Ф-ла (4.23)	$F_{i,2}^m$	$F_{i,1}^m$
193	Ф-ла (4.33)	$f_n^{o,m,n-m}$	$f_n^{m,n-m}$
196	6 сверху	коотрый	который
196	8 снизу	поотка	потока
199	14 снизу	(14)	[14]
199	Ф-ла (5,2)	$\frac{\text{см сек } ^\circ\text{с}}{\text{кал}}$	$\frac{\text{кал}}{\text{см сек } ^\circ\text{с}}$
200	1 сверху	(15)	[15]
200	Таблица 4 столбец 3, строка 1	0.99.10 ⁻²	0.77
201	11 снизу	αt	$\alpha^2 t$
207	3 сверху	a_n	a_w
208	Ф-ла (6,9*)	b^2	b_1^2
209	Ф-ла (6,12)	\int_0^t	\int_0^t

nr

1,28

44/5762

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTĒKA



0509052563