

123. ✓

752



ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ПЕТРА СТУЧКИ

РАСЧЕТЫ

**НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ
НЕФТЕОТДАЧИ
МНОГОСЛОЙНЫХ
ПЛАСТОВ**

РИГА 1970

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ПЕТРА СТУЧКИ

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ 123

Труды Вычислительного центра, выпуск 4

РАСЧЕТЫ
НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ НЕФТЕОТДАЧИ МНОГОСЛОЙНЫХ
ПЛАСТОВ



РИГА 1970

В сборнике представлены работы по расчету температурного поля и нефтеотдачи многослойных нефтяных пластов при нагнетании в них горячей или холодной воды с поддержанием заданных расходов или забойных давлений. Подробно описана разработанная авторами методика расчета на ЭЦМ, позволяющая прогнозировать нефтеотдачу в течение длительного периода эксплуатации. Обнаружен ряд эффектов, свидетельствующих о значительно большем влиянии неизотермичности условий фильтрации на нефтеотдачу многослойных пластов при поддержании заданных забойных давлений, чем в обследовавшемся ранее случае поддержания заданных скоростей фильтрации в каждом из пропластков, составляющих пласт. Помимо того, в сборнике обоснован конечно-разностный метод определения температурного поля однородного пласта и окружающих его пород по схеме сосредоточенной емкости в случае непостоянства скоростей фильтрации и дано доказательство существования решения задачи об определении нефтеотдачи нефтяного пласта на базе теории двухфазного потока Баклея-Левретта в неизотермическом случае.

Сборник предназначен для работников вычислительных центров, научных работников, изучающих проблемы теории фильтрации, студентов и аспирантов нефтяных вузов и инженеров, занимающихся вопросами разработки нефтяных месторождений.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задача исследования температурных полей и нефтеотдачи в неизотермических условиях фильтрации за последние годы приобрела весьма большое значение. Этому способствовала как установленная рядом экспериментов перспективность термических методов воздействия на нефтяные пласты с целью повышения их нефтеотдачи, так и то, что практика площадного заводнения на крупных месторождениях, связанная с нагнетанием в пласты больших масс холодной воды, заставляет считаться с возможностью существенного снижения нефтеотдачи многослойных пластов вследствие охлаждения малопроницаемых пропластков.

Особенно остро проявилась необходимость анализа температурных полей и нефтеотдачи в неизотермических условиях фильтрации при составлении генеральной схемы разработки месторождения Узень (полуостров Мангышлак), пласты которого насыщены высокопарафинистой нефтью при температуре начала кристаллизации парафинов. В этих условиях вероятность катастрофически вредных последствий нагнетания в пласт холодной воды особенно велика и потому анализ температурного поля и его влияние на нефтеотдачу совершенно необходим.

Указанные соображения привели к признанию необходимости считать расчеты температурных полей и нефтеотдачи в условиях нагнетания воды с температурой, отличной от начальной пластовой температуры, столь же обязательным элементом составления проекта разработки месторождений (во всяком случае таких, которые обладают специфическими особенностями, подобными особенностями месторождения Узень) как и обычные гидродинамические расчеты.

Для того, чтобы расчеты температурных полей и нефтеотдачи в неизотермических условиях фильтрации могли проводиться при проектировании систем разработки нефтяных месторождений, необходимо располагать методикой, допускающей многовариантный счет на ЭВМ среднего класса,

которыми оснащены вычислительные центры научно-исследовательских и проектных институтов Министерства нефтедобывающей промышленности. Это значит, прежде всего, что счет должен быть достаточно быстрым, в то же время иметь достаточно высокую точность.

В точной постановке задача расчета температурного поля при нагнетании в пласт теплоносителя неотделима от задачи определения поля нефтенасыщенности. Совместное определение этих двух полей с помощью наиболее простых вычислительных алгоритмов, каковыми являются конечно-разностные алгоритмы, предъявляет столь высокие требования к объему оперативной памяти ЭВМ и связаны со столь большими затратами машинного времени, что многовариантный счет делается практически нереализуемым. Однако проведение расчетов температурного поля и поля нефтенасыщенности в точной постановке задачи заведомо нецелесообразно. Дело в том, что к определению поля температур и поля насыщенности должны предъявляться существенно различные требования. Расчет температуры может проводиться весьма грубо, поскольку влияние погрешности определения температуры на погрешность расчета нефтеотдачи невелико. Определение величины нефтеотдачи, наоборот, должно проводиться с высокой точностью для того, чтобы сделать возможным выявление малых влияний неизотермичности условий фильтрации на нефтеотдачу.

При использовании конечно-разностных алгоритмов счета требование высокой точности определения поля насыщенности приводит к необходимости работать с малыми шагами по времени и пространству. Поскольку при этом прогнозирование динамики изменения нефтеотдачи должно проводиться на промежутки времени, близкие к длительности разработки нефтяных месторождений, применение стандартных расчетных схем сопряжено со столь большими затратами машинного времени, что многовариантный счет оказывается практически нереализуемым даже тогда, когда поле температур может считаться заданным.

Сказанное объясняет необходимость тщательной обработки всех методических вопросов, возникающих при расчетах на ЭВМ полей температуры и нефтенасыщенности в многослойных пластах. Предлагаемый вниманию читателя сборник, посвященный решению именно этой задачи, включает две статьи А.А. Буйкиса, содержащие разработку методики и результаты расчетов неизотермической нефтеотдачи многослойных пластов как при задании постоянных расходов нагнетательной галереи (скважины), так и при задании перепада давлений между нагнетательной и эксплуатационной галереями (скважинами), и статью Н.А. Авдонина и К.С. Белоглазова, в которой содержится обоснование приближенного приема расчета температурного поля однородного пласта при задании забойных давлений, входящего в качестве существенного элемента в методику расчета нефтеотдачи, разработанную А.А. Буйкисом. Это статья имеет, впрочем, и самостоятельный интерес, поскольку содержит обоснование и отработку конечно-разностного метода расчета температурного поля пласта по так называемой неполной схеме сосредоточенной емкости в случае переменной скорости фильтрации, т.е. тогда, когда отсутствует аналитически замкнутое решение.

Расчеты А.А. Буйкиса проведены по широкой программе на модели двуслойного или трехслойного пластов, сложенных термически контактирующими, но гидравлически разоб- щенными пропластками, проницаемости которых относятся как 1 : 10 или 1 : 10 : 2 соответственно. Рассмотрены случаи нагнетания холодной воды с температурой, близкой к температуре полного застывания нефти, или температурой, существенно более низкой, чем температура полного застывания, случаи нагнетания в пласт горячей воды в течение всего времени эксплуатации или одного лишь начального периода с последующим переходом на нагнетание холодной воды и случай раздельной эксплуатации пропластков. Выявлены значительные эффекты перераспределения скорости фильтрации между пропластками при поддержании заданных

забойных давлений и, как следствие их, существенное влияние неизотермичности на нефтеотдачу малопроницаемых пропластков. Показано, что возможны случаи полного исключения малопроницаемых пропластков из эксплуатации. Показано, наконец, что создание горячего температурного вала не компенсирует вредного влияния охлаждения на нефтеотдачу малопроницаемого пропластка. Все эти результаты являются существенно новыми. До сего времени проводились расчеты нефтеотдачи многослойных пластов лишь при задании постоянных скоростей воды в каждый из пропластков, когда все эти эффекты практически отсутствуют. Таким образом, результаты, полученные А.А. Буйкисом, далеко выходят за рамки одной лишь методической работы, и проливают совершенно новый свет на влияние неизотермичности условий фильтрации на нефтеотдачу многослойных пластов.

Статьям А.А. Буйкиса и Н.А. Авдониной и К.С. Белоглазова предпослана в сборнике имеющая чисто математическое значение статья Л.И. Рубинштейна, в которой устанавливается теорема существования решения задачи об определении нефтеотдачи в неизотермических условиях фильтрации на базе теории двухфазного потока Баклея-Левеверетта в случае предзадания температурного поля. Целесообразность включения этой работы в сборник обусловлена как тем, что все расчеты А.А. Буйкиса, как и более ранние расчеты Н.А. Авдониной и Л.И. Рубинштейна¹⁾, базируются на теории Баклея-Левеверетта, так и тем, что в литературе по вопросу укоренилась ошибка, состоящая в перенесении способа определения величины и положения скачка насыщенности в изотермическом случае на случай неизотермический.

¹⁾ Н.А. Авдониной, Л.И. Рубинштейна.
НТС по добыче нефти. 28, М., "Недра", 1965;
Теория и практика добычи нефти. "Недра", М., 1966.

Эта ошибка имеется как в известной работе Фейерса¹⁾, так и в названных работах Н.А. Авдонина и Л.И. Рубинштейна²⁾.

Публикация настоящего сборника является итогом многолетних работ по расчету температурных полей в нефтяных пластах и нефтеотдачи при неизотермических условиях фильтрации, проводимых отделом инженерно-физических проблем вычислительного центра Латвийского государственного университета им. П. Стучки по договорам с объединением "Башнефть" (1961-1963 гг.) и Всесоюзным научно-исследовательским нефте-газовым институтом министерства нефтедобывающей промышленности СССР (ВНИИ-Нефть) (1964-1969 гг.). Пользуемся случаем отметить, что постоянный контакт с заведующим отделом гидродинамики ВНИИ-Нефть профессором М.Д. Розенбергом, сотрудниками этого отдела профессором Ю.И. Борисовым и кандидатами техн. наук А.К. Курбановым и В.С. Орловым, проявляющими неизменный интерес к этим работам и в значительной мере повлиявшими на их направление, был чрезвычайно полезен. Составители сборника обязаны им, в частности, постановкой задачи о вытеснении нефти из многослойного пласта водой, имеющей на забое нагнетательной скважины температуру, меньшую чем температура полного застывания пластовой нефти. Мы рады принести нашу благодарность всем названным лицам.

Л.И. Рубинштейн

¹⁾ Фауерс F.J. J. Fluid Mech., 13, 1962, No.1, p.65-76.

²⁾ Ошибка в определении положения и величины скачка насыщенности в названных работах Н.А. Авдонина и Л.И. Рубинштейна не сказалась на результатах проведенных числовых расчетов.

К ВОПРОСУ ОБ ОПЕРЕДЕЛЕНИИ ВЕЛИЧИНЫ И ПОЛОЖЕНИЯ СКАЧКА
НАСЫЩЕННОСТИ В ЗАДАЧЕ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
БАКЛЕЯ-ЛЕВЕРЕТТА В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Л.И. Рубинштейн

Цель настоящей заметки состоит в доказательстве существования решения задачи об определении распределения водонасыщенности в однородном пласте в случае нагнетания в него несжимаемой жидкости через прямолинейную галерею с заданным расходом. Предполагается, что температурное поле пласта предзадано и что распределение насыщенности следует теории двухфазного потока Баклея-Левретта.

В такой постановке задача определения нефтеотдачи сводится к решению задачи Коши

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad -\infty < x < \infty, \quad (I)$$

для уравнения Баклея-Левретта

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где

$$\varphi = \varphi(u, \mu) = (1 + f(u)\mu)^{-1}, \quad (3)$$

u - водонасыщенность; $f(u)$ - относительная проницаемость для нефти и воды и μ - относительная вязкость воды и нефти. Поскольку температурное поле принимается предзадан-

ным можно считать, что μ является заданной гладкой функцией от x и t . Ниже считаем, что $\varphi(u, \mu) \equiv \varphi(u, x, t)$ определена при $0 < x < \infty$; $0 \leq t \leq T$ и $0 \leq u \leq 1$, причем при всех x и t

$\varphi \equiv 0$ при $0 \leq u \leq u_0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial u} > 0$ при $u_0 < u < u_1$; $\varphi \equiv 1$ при $u_1 \leq u \leq 1$ (4)
Примем далее

$$u_0(x) = \begin{cases} 1; & x < 0; \\ u_0; & x > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что из (4) следует, что постоянные $u = u_i$ ($i = 0, 1$) являются решениями уравнения (2).

Будем предполагать, что $\varphi(u, x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемая по совокупности своих аргументов функция при $0 \leq x < \infty$, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq u \leq 1$, причем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} < 0 \text{ при } u_2(x, t) < u < 1; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} > 0 \text{ при } u_2(x, t) > u > u_0 \quad (6)$$

Так поставленная задача является частным случаем задачи о распаде произвольного разрыва, рассматривавшейся И.М. Гельфандом [Г] в предположении, что φ зависит явно только от u и не зависит явно от x и t . В этом предположении И.М. Гельфанд выделил класс разрывных решений задачи о распаде, удовлетворяющих интегральному закону сохранения, и нашел условия, при выполнении которых разрывное решение этой задачи определяется однозначно. Именно, допустимые разрывными решениями являются решения с не более чем конечным числом кусочно-гладких линий разрыва, которые могут быть получены как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(u) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad -\infty < x < \infty; \quad (7)$$

$$u(x, 0) \equiv u_0(x) = \begin{cases} u_- = \text{const} \\ u_+ = \text{const} \end{cases}$$

для уравнения с исчезающе малой псевдвязкостью $\varepsilon > 0$.

И.М. Гельфанд показал, что это требование равносильно выполнению двух условий:

условие А. Пусть индексы + и - означают право - и левосторонние (по отношению изменения x) пределы на линии разрыва. Тогда вдоль линии разрыва

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{u_+ - u_-} \quad (8)$$

условие Б. Пусть L - прямая на плоскости (u, φ) соединяющая точки (u_+, φ_+) и (u_-, φ_-) . Тогда вдоль допустимого разрыва кривая $(u, \varphi(u))$ располагается на интервале (u_-, u_+) над прямой L , если $u_- < u_+$ и под L , если $u_- > u_+$.

Независимо показывается, что условие А выражает локально закон сохранения.

В работе И.М. Гельфанда допускалось, что кривая $(u, \varphi(u))$, имеет любое конечное число точек перегиба. И.М. Гельфанд не доказывал единственности допустимого решения задачи о распаде разрыва. Он описал просто алгоритм его построения, из которого единственность решения следовала с полной очевидностью. В случае же задачи Коши с произвольной начальной функцией $u_0(x)$, имеющей произвольное конечное число точек разрыва, единственность решения в классе функций, удовлетворяющих на линиях разрыва условию А всюду и условию Б всюду, за исключением конечного числа точек, была доказана О.А. Олейник [2] для φ , зависящей явно не только от u , но и от x и t . Устойчивость решений задачи Коши с исчезающей вязкостью к решению задачи Коши (I) в рассматриваемом классе разрывных решений была установлена О.А. Олейник [3] для $\varphi(u, x, t)$ выпуклой по u и А.С. Калашниковым [4] для φ , имеющей произвольное конечное число точек перегиба, но не зависящей явно от x и t . Общая задача Коши для квазилинейного уравнения типа (I) с $\varphi(u, x, t)$ обладающей произвольным конечным числом точек перегиба,

и даже ее частный случай - задача о распаде разрыва для функции Баклея-Левретта, обладающей только одной точкой перегиба, остались, по-видимому, не проанализированными.

Предлагаемый ниже анализ восполняет указанный пробел теории именно в этом частном случае. Мы доказываем теорему существования разрывного решения задачи (2), (1), (5), при выполнении условий (4), (6) в малом, существенно используя предположение о единственности точки перегиба функции φ . При этом алгоритм построения решения является точным аналогом алгоритма, развитого в цитированной работе И.М. Гельфанда для $\varphi = \varphi(u)$, и не предполагает введения исчезающей вязкости. Сходимость метода исчезающей вязкости, подтверждаемая счетом, в задаче об определении неизотермической нефтеотдачи по Баклею-Левретту остается недоказанной. Вопрос о существовании решения в большом на произвольном интервале времени также остается открытым.

Перейдем к доказательству существования решения рассматриваемой задачи. Не ограничивая общности, можно считать, что на интервале $0 < t < T$ проекции на плоскость (x, t) характеристик уравнения (2), проходящих через интервал $t = 0, x = 0, u_0 < u < u_1$, не пересекаются. Существование такого $T > 0$ следует из единственности локального решения задачи Коши для всякого квазилинейного уравнения первого порядка с достаточно гладкими коэффициентами.

В предположении (4) характеристики уравнения (2), определяемые условием (5), совпадают с прямыми

$$\begin{aligned} x &= \xi; \quad u = 1 \quad \text{при} \quad \xi < 0; \\ x &= \xi; \quad u = u_0 \quad \text{при} \quad \xi > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Разрывная функция

$$u = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0; \\ u_0 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (10)$$

не является допустимым решением уравнения (2) в силу условия E. Действительно, прямая, соединяющая точки $(1, 1)$ и $(u_0, 0)$ плоскости (u, φ) при любых фиксированных x и t пересекает кривую $\varphi(u, x, t)$, между тем как для допустимости решения она должна была бы лежать над этой кривой, поскольку $u_1 > u_0$.

Очевидно, что при $x = 0$ осуществляется допустимый скачок от $u = 1$ к $u = u_1$. При таком скачке прямая, соединяющая точки $(1, 1)$ и $(u_1, 1)$ плоскости (u, φ) , совпадает на интервале $u_1 < u < 1$ с кривой $\varphi(u, x, t)$, что согласуется как с условием A, так и с условием E.

Невозможность перехода от $u = u_1$ к $u = u_0$ с помощью скачка указывает на то, что такой переход должен осуществляться не только с помощью "ударных скачков", но и непрерывно, по "волнам разрежения" (мы пользуемся здесь принятой в литературе по теории квазилинейных уравнений первого порядка газодинамической терминологией).

Переход по волне разрежения из области выпуклости φ в область ее вогнутости при $t > 0$ достаточно малых невозможен. Действительно, волна разрежения определяется как область, занятая интегральными кривыми системы характеристических уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, x, t); \quad \frac{du}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} \varphi(u, x, t) \quad (11)$$

проходящих через отрезок

$$t = 0; \quad x = 0; \quad u = v; \quad v' \leq v \leq v'',$$

где v' и v'' - некоторые константы. Таким образом, вдоль волны разрежения

$$x(\tau, v) = \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial u} \varphi [u(\lambda, v), x(\lambda, v), \lambda] d\lambda;$$

$$u(\tau, v) = v - \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial x} \varphi [u(\lambda, v), x(\lambda, v), \lambda] d\lambda. \quad (13)$$

Отсюда

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \int_0^{\tau} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right] d\lambda; \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 1 - \int_0^{\tau} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right] d\lambda.$$

При заданных непрерывных $u(t, v)$ и $x(t, v)$ система (14) может трактоваться как система интегральных уравнений для определения $\partial x / \partial v$ и $\partial u / \partial v$. В силу ограниченности $\partial^2 \varphi / \partial u^2$, $\partial^2 \varphi / \partial u \partial x$ и $\partial^2 \varphi / \partial x^2$ из (14) следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial v} x(\tau, v) = 0; \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial v} u(\tau, v) = 1. \quad (15)$$

Таким образом, по непрерывности заключаем, что при $\tau > 0$ достаточно малом $u(\tau, v)$ является монотонной функцией от v . Из (15) следует далее, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \varphi(v, 0, 0) \quad (16)$$

и, следовательно, при $\tau > 0$ достаточно малом

$$\text{sgn} \frac{\partial x}{\partial v} = \text{sgn} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \varphi(v, 0, 0), \quad (17)$$

если только $\frac{\partial^2}{\partial u^2} \varphi(v, 0, 0) \neq 0$.

Итак, мы заключаем, что если в области, занятой волной разрежения, меняется направление выпуклости φ , то x как функция от v меняется немонотонно, а u монотонно. Но это означало бы, что для каждого достаточно малого $\tau > 0$ нашлись бы $v_1 > u_2(0, 0)$ и $v_2 < u_2(0, 0)$, которым соответствовали бы характеристики с пересекающимися проекциями на плоскость (x, τ) , причем в точках их пересечения значения $u(\tau, v_1)$ и $u(\tau, v_2)$ были бы заведомо различными. Но это противоречило бы теореме единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка, доказанной О.А. Олейник [2]. Это показывает, что, рассматриваемый переход действительно невозможен.

Таким образом, при $\tau > 0$ достаточно малом, переход из области выпуклости φ в область ее вогнутости возможен только с помощью ударного скачка.

Покажем, наконец, невозможность достижения насыщенности u_0 по волне разрежения. Действительно, такая возможность означала бы, что для каждого $t > 0$ существует такое $v_0(t)$, что

$$v_0(t) < u_2(0, 0);$$

$$x[\tau, v_0(t)] > x[\tau, v] \text{ при } v > u_2(0, 0); 0 < \tau < t; \quad (18)$$

$$u[\tau, v_0(t)] \geq u_0; \quad \hat{u}[\tau, v_0(t)] = u_0.$$

Здесь $x/\tau, v_0(t), u/\tau, v_0(t)$ - характеристики, определенные начальными условиями

$$x \Big|_{\tau=0} = 0; \quad u \Big|_{\tau=0} = v_0(t). \quad (19)$$

По предположению, при $0 \leq \tau \leq T$ решение системы характеристических уравнений однозначно. Следовательно,

если взять фиксированное $t_0 < T$ и рассмотреть интегральную кривую, определяемую условиями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, x, \tau); \quad x|_{\tau=t_0} = x(t_0, v(t_0)) \\ \frac{du}{d\tau} &= -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(u, x, \tau); \quad u|_{\tau=t_0} = u_0, \end{aligned} \quad (20)$$

то эта интегральная кривая должна совпасть с кривой

$$x = x[\tau, v_0(t_0)]; \quad u = u[\tau, v_0(t_0)]. \quad (21)$$

Но

$$x = x[t_0, v_0(t_0)]; \quad u = u_0 \quad (22)$$

является интегральной кривой, ибо $\varphi(u_0, x, t) \equiv 0$. Таким образом, мы пришли к противоречию, которое и доказывает невозможность достижения величины u_0 вдоль волны разрежения.

Итак, характер решения определяется следующим образом. При $x = 0$ имеет место скачок от $u = I$ к $u = u_1$. Далее идет область $0 < x < x_d(t); u_1 > u > u_d^-(t) > u_2(x_d(t), t)$, занятая волной разрежения. При $x = x_d(t)$ происходит скачок до величины $u = u_d^+(t) < u_2(x_d(t), t)$. Далее априори возможен переход в область $u < u_d^+(t)$ с помощью чередования волн разрежения и ударных скачков, но такой, что достижения насыщенности $u = u_0$ осуществляется с помощью ударного скачка, правее которого лежит область $u \equiv u_0$.

В частном случае $\varphi(u)$, не зависящей явно от x и t , возможен только один скачок, ибо он располагается вдоль характеристики $u = u_d = \text{const}; \quad x/t = \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u_d)$.

Покажем, что и в рассматриваемом случае в окрестности $t = 0$ существует один и только один скачок и одновре-

менно, построим алгоритм, позволяющий определять как величину ударного скачка, так и его положение.

Пусть $x = x_s(t)$ - положение скачка и $u = u_s(t)$ - величина насыщенности перед скачком. За скачком насыщенность равна u_0 . Зафиксируем момент $\tau = t$ и рассмотрим характеристику, выходящую из точки $\tau = 0, x = 0, u = v(t)$ и приходящую в точку $\tau = t, x = x_s(t), u = u_s(t)$. Эта характеристика определяется равенствами

$$\begin{aligned} x(\tau, v(t)) &= \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial u} \varphi[u(\lambda, v(t)), x(\lambda, v(t)), \lambda] d\lambda \\ u(\tau, v(t)) &= v(\tau) - \int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial x} \varphi[u(\lambda, v(t)), x(\lambda, v(t)), \lambda] d\lambda. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда
$$x_s(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} \varphi[u(\lambda, v(t)), x(\lambda, v(t)), \lambda] d\lambda$$

$$u_s(t) = v(t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \varphi[u(\lambda, v(t)), x(\lambda, v(t)), \lambda] d\lambda \quad (24)$$

Согласно условию A, скорость распространения ударного скачка задается равенством (8), сводящимся, в силу (4), к

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\varphi[u_s(t), x_s(t), t]}{u_s(t) - u_0}. \quad (25)$$

Отсюда

$$x_s(t) = \int_0^t \frac{\varphi[u_s(\tau), x_s(\tau), \tau]}{u_s(\tau) - u_0} d\tau. \quad (26)$$

Значения $x_s(t)$, определенные равенствами (24)

и (26) должны совпадать тождественно. Вместе с тем должны совпадать и их производные. Дифференцируя $x_3(t)$, из (24) получим

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial}{\partial u} \varphi [u_3(t), x_3(t), t] + \frac{dv}{dt} \int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} \varphi(u, x, \lambda) \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial x} \varphi(u, x, \lambda) \frac{\partial x}{\partial v} \right] d\lambda. \quad (27)$$

Положим

$$F(\lambda) = \frac{\varphi [u_3(\lambda), x_3(\lambda), \lambda]}{u_3(\lambda) - u_0} - \frac{\partial}{\partial u} \varphi [u_3(\lambda), x_3(\lambda), \lambda]; \quad (28)$$

$$\Phi(\lambda, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \varphi [u, x, \tau] \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial u} \varphi [u, x, \tau] \frac{\partial x}{\partial v},$$

где $v = v(\lambda)$; $u = u(\tau, v(\lambda))$; $x = x(\tau, v(\lambda))$;

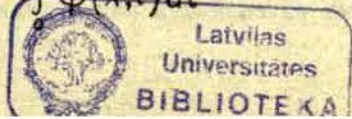
$$u_3(\lambda) = u(\lambda, v(\lambda)); \quad x_3(\lambda) = x(\lambda, v(\lambda)). \quad (29)$$

Приравнявая правые части (27) и (28) и учитывая (25), получим

$$\frac{dv}{dt} = F(t) / \int_0^t \Phi(t, \tau) d\tau, \quad (30)$$

откуда

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \frac{F(\lambda) d\lambda}{\int_0^\lambda \Phi(\lambda, \tau) d\tau}. \quad (31)$$



Заметим, что в предположении ограниченности $\frac{dv}{dt}$ из (28) следует

$$F(0) = 0. \quad (32)$$

Отсюда и из равенства

$$x_A(0) = 0; \quad u_A(0) = v(0) \quad (33)$$

найдем, что $v(0)$ является корнем трансцендентного уравнения

$$\frac{\varphi[v(0), 0, 0]}{v(0) - u_0} = \frac{\partial}{\partial u} \varphi[v(0), 0, 0]. \quad (34)$$

Поскольку, по условию, $\varphi(u, 0, 0)$ имеет единственную точку перегиба $u = u_2(0, 0)$, выпукла при $u_2(0, 0) < u < 1$ и, кроме того, $u_0 < u_2(0, 0)$, то очевидно, что

$$v(0) > u_2(0, 0). \quad (35)$$

Очевидно также, что при $t > 0$ достаточно малом $v(t)$ возрастает. Действительно, в области выпуклости $\varphi F < 0$, ибо $\varphi(u_0, x, t) \geq 0$. В то же время, как показано выше, знак Φ совпадает со знаком $\partial^2 \varphi / \partial u^2$, т.е. $\Phi < 0$.

В выражение Φ входят производные по v от $u(\tau, v(\tau))$ и $x(\tau, v(\tau))$ при $0 < \tau \leq t$. Они подлежат определению из равенства (14), в которых надо заменить v на $v(t)$ и считать $0 < \tau \leq t \leq T$.

Итак, если существует решение задачи (2), (5) о распаде разрыва с неподвижным разрывом при $x = 0$, одной волной разрежения и одним ударным скачком, отделяющим эту волну от области $u = u_0$ постоянных значений u , то это решение описывается как решение системы уравнений

$$u(x, t) \equiv 1 \text{ при } x < 0; \quad u(x, t) \equiv u_0 \text{ при } x > x_s(t); \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial}{\partial u} \varphi[u_0, x, \tau]; \quad x(0) = 0; \\ \frac{du}{d\tau} &= -\frac{\partial}{\partial x} \varphi[u, x, \tau]; \quad u(0) = v(t); \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F(t, v)}{\Phi_1(t, v)}; \quad v(0) = v_0; \quad (38)$$

$$x_s(t) = x(t, v(t)); \quad u_s(t) = u(t, v(t)), \quad (39)$$

где v_0 - корень уравнения

$$\frac{\varphi[v, 0, 0]}{v - u_0} = \frac{\partial}{\partial u} \varphi[v, 0, 0] \quad (40)$$

и в (37)

$$v = \text{const}; \quad v_0 \leq v \leq u_1; \quad 0 \leq \tau \leq t. \quad (41)$$

Далее

$$F(t, v) = \frac{\varphi[u(t, v), x(t, v), t]}{u(t, v) - u_0} - \frac{\partial}{\partial u} \varphi[u(t, v), x(t, v), t]. \quad (42)$$

$$\Phi_1(t, v) = \int_0^t \Phi(\tau, v) d\tau \equiv \int_0^t \left\{ \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \varphi[u(\tau, v), x(\tau, v), \tau] + \right. \\ \left. + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2}{\partial u \partial x} \varphi[u(\tau, v), x(\tau, v), \tau] \right\} d\tau. \quad (43)$$

Очевидно и обратно, что всякое решение системы (36)–(39) является решением исходной задачи описанного типа.

Докажем теперь существование и однозначную определенность решения этой системы вблизи $t=0$. С этой целью заметим, что при сделанных относительно $\varphi[u, x, t]$ предположениях решение x , u системы (37) однозначно определено при всех v , удовлетворяющих (41), и при $0 \leq t \leq T$ достаточно малых. Функции эти можно считать известными, поскольку они определяются из системы (37) независимо от (38). Следовательно, для доказательства существования решения нашей задачи достаточно доказать существование решения уравнения (38), проходящего через точку $t=0$; $v=v_0$.

Точка $t=0$; $v=v_0$ является особой точкой уравнения (38), ибо, в силу (40), (42) и (43),

$$F(0, v_0) = \Phi_1(0, v_0) = 0 \quad (44)$$

Как известно [5], тип особой точки определяется линейными членами разложения F и Φ_1 в ряд по степеням t и $v - v_0$, если характеристическое уравнение

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} \Phi(0, v_0) \\ \frac{\partial}{\partial t} F(0, v_0) & \lambda - \frac{\partial}{\partial v} F(0, v_0) \end{vmatrix} \quad (45)$$

имеет отличные от нуля действительные корни, причем

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(0, v_0) - \frac{\partial}{\partial t} F(0, v_0) \neq 0. \quad (46)$$

Особая точка будет седлом или узлом, если при этом индекс Пуанкаре

$$n = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} \Phi_1(0, v_0) \\ \frac{\partial}{\partial t} F(0, v_0) & \frac{\partial}{\partial v} F(0, v_0) \end{vmatrix} \quad (47)$$

равен -1 или 1 , соответственно.

Из (14) и (37) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} x(0, v_0) &= \frac{\partial}{\partial u} \varphi(v_0, 0, 0); & \frac{\partial}{\partial v} x(0, v_0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} u(0, v_0) &= -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(v_0, 0, 0); & \frac{\partial}{\partial v} u(0, v_0) &= 1. \end{aligned} \quad (48)$$

Отсюда и из определений (40)–(43) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(0, v_0) &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} \varphi(v_0, 0, 0); & \frac{\partial}{\partial v} \Phi_1(0, v_0) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial v} F(0, v_0) &= -\frac{\partial^2}{\partial u^2} \varphi(v_0, 0, 0). \end{aligned} \quad (49)$$

Внося эти выражения в (45)–(47), найдем, что корни характеристического уравнения равны $\pm \frac{\partial^2}{\partial u^2} \varphi(v_0, 0, 0)$ и индекс Пуанкаре $n = -1$. Таким образом, в рассматриваемом случае особая точка является седлом.

Обычно, в качественной теории дифференциальных уравнений, при исследовании системы автономных уравнений

$$\frac{dv}{d\lambda} = F(t, v); \quad \frac{dt}{d\lambda} = \Phi_1(t, v) \quad (50)$$

уравнения

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{\Phi_1} \quad \text{и} \quad \frac{dt}{dv} = \frac{\Phi_1}{F} \quad (51)$$

считаются эквивалентными. Тогда седловая точка характеризуется тем, что в нее входят две интегральные кривые, служащие асимптотами интегральных кривых в ее окрестности. В нашем случае одной из таких кривых является, очевидно, ось $t = 0$. Однако, с точки зрения исходной задачи, ось $t = 0$ не является решением, так что уравнения (51) следует считать неэквивалентными. Для нас представляет интерес лишь та интегральная кривая, вдоль которой время t монотонно возрастает. Таким образом, существует одна и только одна допустимая интегральная кривая, проходящая через точку $t = 0$, $v = v(0)$, а вместе с ней и единственное решение системы (36)-(39).

Для эффекта вного построения этой кривой поступим следующим образом. Определим \dot{v}_0 и v_0 равенствами

$$\dot{v}_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t, v(t))}{\Phi_1(t, v(t))}; \quad v_0 = v(0) \quad (52)$$

и $v_\varepsilon(t)$ условиями

$$\frac{dv_\varepsilon}{dt} = \frac{F(t, v)}{\Phi_1(t, v)} \quad t > \varepsilon; \quad v_\varepsilon(\varepsilon) = v_0 + \dot{v}_0(\varepsilon) \cdot \varepsilon. \quad (53)$$

Тогда искомое $v(t)$ определится как предел

$$v(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon(t). \quad (54)$$

Из теоремы о непрерывной зависимости интегральной кривой от начальных данных следует, очевидно, что предел (54) является искомым решением.

Литература

1. Г е л ь ф а н д И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. - УМН, 14, 1959, 2.
2. О л е й н и к О.А. Об единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. - УМН, 14, 1959, 2.
3. О л е й н и к О.А. О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения исчезающей вязкости. - УМН, 14, 1959, 2.
4. К а л а ш н и к о в А.С. Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром. - ДАН СССР, 127, 1959, 1.
5. Т р и к о м и Ф. Дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1962.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЛАСТА ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ

Н.А. Авдонин, К.С. Белоглазов

Расчеты нефтеотдачи при задании забойных давлений требуют совместного решения уравнений для насыщенностей и температуры. При этом суммарная скорость фильтрации v является искомой функцией от времени t . В случае определения поля температуры это приводит к уравнению теплопроводности с переменными коэффициентами, что не позволяет для расчета температур использовать известные приближенные формулы (такие, как формула Ловерье, формула Авдонина и др.), выведенные в предположении $v = \text{const}$. Решение же уравнений с переменными коэффициентами возможно лишь конечно-разностными методами, что наряду с чисто техническими трудностями требует больших затрат машинного времени, ограничивая тем самым возможность серийных расчетов.

В настоящей заметке обосновывается разностный метод расчета температурного поля пласта в постановке неполной схемы сосредоточенной емкости. Используя предложенную схему, путем расчетов и сравнений показывается возможность приближенных расчетов температурного поля пласта при переменной скорости фильтрации по формулам Ловерье, Авдонина и др., если в них подставить определенным образом осредненную переменную скорость фильтрации.

Выпишем уравнения для тепловой задачи, полагая, что скорость фильтрации $v(t)$ предзадана. Задачу ставим в предположениях неполной схемы сосредоточенной емкости, приня-

тых в работе [1] :

$$\lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - w(t) \frac{\partial T}{\partial x} = c(t) \frac{\partial T}{\partial t} - \beta \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{при } z = 0 \quad (1)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{при } z > 0 \quad (2)$$

$$T|_{t=0} = T_0; \quad T|_{z=0} = T_1. \quad (3)$$

Здесь

$$\beta = \frac{\lambda}{h_0}; \quad a^2 = \frac{\lambda}{c_n}$$

$$w(t) = c_B v_B(t) + c_H v_H(t)$$

$$c(t) = (1-m)c_n + m\sigma(t)c_B + m(1-\sigma(t))c_H \quad (4)$$

где C_n, C_B, C_H - соответственно теплоемкости пласта, воды и нефти; v_B и v_H - скорости фильтрации воды и нефти, $v_B(t) + v_H(t) = v(t)$; m - пористость пласта; σ - водонасыщенность; h_0 - мощность пласта; λ_0 и λ - теплопроводности пласта и окружающих пласт пород. Для численного решения этой задачи была принята следующая разностная схема:

$$\lambda_0 \frac{T_{i+10}^{k+1/2} - 2T_{i0}^{k+1/2} + T_{i-10}^{k+1/2}}{h^2} - w_{i0}^{k+1/2} \frac{T_{i0}^{k+1/2} - T_{i-10}^{k+1/2}}{h} = c_{i0}^{k+1/2} \frac{T_{i0}^{k+1/2} - T_{i0}^k}{\tau} - \beta \frac{T_{i1}^k - T_{i0}^k}{g}; \quad (5)$$

$$a^2 \frac{T_{ij+1}^{k+1} - 2T_{ij}^{k+1} + T_{ij-1}^{k+1}}{g^2} = \frac{T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^{k+1/2}}{\tau}; \quad (6)$$

$$T_{ij}^0 = T_0, \quad T_{00}^k = T_1; \quad (7)$$

Присоединим дополнительно условия на границах:

$$T_{in}^k = T_0, \quad T_{m,j}^k = T_0. \quad (8)$$

Здесь $Ng = h_0$; $M(t_k) = \overline{M(t_{k-1})} + \text{const}$,

где $\overline{M(t_{k-1})}$ определяется из условия $T_{\overline{M(t_{k-1})}0}^{k-1} = 0$

Счет по этой схеме производится следующим образом: вначале осуществляется горизонтальная прогонка уравнения (5), затем производим M вертикальных прогонок уравнения (6), причем в качестве граничных значений при $z = 0$ берутся значения функции $T_{i0}^{k+1/2}$, полученные после горизонтальной прогонки. Такую схему решения задачи можно рассматривать как некоторую модификацию схемы переменных направлений. Покажем условную устойчивость этой схемы. Полагая

$$T_{mn}^k = \rho^k \exp \{ i(\kappa_1 mh + \kappa_2 ng) \} \quad (9)$$

и подставляя это значение в уравнение (5), найдем, после некоторых преобразований, значение оператора шага ρ_1 (см. [2]):

$$\rho_1 = \frac{\rho^{k+1/2}}{\rho^k} = \frac{1 - 2 \frac{\beta \tau}{cg} \sin^2 \frac{\kappa_2 g}{2} + i \frac{\beta \tau}{cg} \sin \kappa_2 g}{1 + 4 \frac{w \tau}{ch^2} \sin^2 \frac{\kappa_1 h}{2} + 2 \frac{w \tau}{ch} \sin^2 \frac{\kappa_1 h}{2} + i \frac{w}{h} \sin \kappa_1 h} \quad (10)$$

Вычислим квадрат модуля числителя выражения (10)

$$\begin{aligned} \left| 1 - 2 \frac{\beta \tau}{cg} \sin^2 \frac{\kappa_2 g}{2} + i \frac{\beta \tau}{cg} \sin \kappa_2 g \right|^2 &= \left[1 - 2 \frac{\beta \tau}{cg} \sin^2 \frac{\kappa_2 g}{2} \right]^2 + \left[\frac{\beta \tau}{cg} \sin \kappa_2 g \right]^2 = \\ &= 1 - 4 \frac{\beta \tau}{cg} \sin^2 \frac{\kappa_2 g}{2} + 4 \left(\frac{\beta \tau}{cg} \right)^2 \sin^4 \frac{\kappa_2 g}{2} + \left(\frac{\beta \tau}{cg} \right)^2 \sin^2 \kappa_2 g = \\ &= 1 - 4 \frac{\beta \tau}{cg} \sin^2 \frac{\kappa_2 g}{2} + 4 \left(\frac{\beta \tau}{cg} \right)^2 \sin^2 \frac{\kappa_2 g}{2} = 1 + 4 \frac{\beta \tau}{cg} \sin^2 \frac{\kappa_2 g}{2} \left(\frac{\beta \tau}{cg} - 1 \right). \end{aligned}$$

Это выражение меньше единицы или равно единице, если

$$\frac{\beta \tau}{cg} \leq 1 \quad (11)$$

Так как абсолютная величина знаменателя выражения (10)

всегда больше единицы, то для ρ_1 при условии выполнения ограничения (II) справедлива оценка $|\rho_1| \leq 1$. Для оператора шага уравнения (6) имеем

$$\rho_2 = \frac{\rho^{k+1}}{\rho^{k+1/2}} = \frac{\rho^{k+1}}{1 + 4 \frac{c^2 \tau}{g^2} \sin^2 \frac{k_2 g}{2}} \quad (12)$$

так что $\rho_2 < 1$. Отсюда следует, что для $\rho = \rho_1, \rho_2 = \rho^{k+1}/\rho^k$ справедлива общая оценка $|\rho| \leq 1$, если выполнено условие (II), и тем самым доказана условная устойчивость схемы (5)-(6).

Рассмотрим теперь вопрос об аппроксимации дифференциальных уравнений (I), (2) конечно-разностной схемой (5), (6). Аппроксимация уравнения (2) разностным уравнением (6) очевидна. Чтобы показать аппроксимацию уравнения (I) заметим, что $T_{ij}^{k+1/2} = T_{ij}^k$ для всех $j \neq 0$, ибо линии $j=1, 2, 3, \dots$ в горизонтальном направлении не прогоняются. Для линии $j=0$ справедливо равенство $T_{i0}^k = T_{i0}^{k-1/2}$. Тогда, добавляя и вычитая в уравнении (5) выражение $\frac{\beta}{g} T_{i0}^{k+1/2}$, уравнение (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_0}{h^2} (T_{i+10}^{k+1/2} - 2T_{i0}^{k+1/2} + T_{i-10}^{k+1/2}) - \frac{W_{i0}}{h} (T_{i0}^{k+1/2} - T_{i-10}^{k+1/2}) = \\ & = \frac{C_i}{\tau} (T_{i0}^{k+1/2} - T_{i0}^{k-1/2}) - \frac{\beta}{g} (T_{i1}^{k+1/2} - T_{i0}^{k+1/2}) - \frac{\beta}{g} (T_{i0}^{k+1/2} - T_{i0}^{k-1/2}). \end{aligned} \quad (13)$$

Последнее слагаемое в уравнении (13) имеет вид

$$\frac{\beta \tau}{g} \left(\frac{T_{i0}^{k+1/2} - T_{i0}^{k-1/2}}{\tau} \right)$$

следовательно, если τ , например, порядка g^2 , то уравнение (I) аппроксимируется конечно-разностным уравнением (5) с порядком $O(h) + O(g) + O(\tau)$. Если же $\frac{\tau}{g} = \gamma = \text{const.}$ то аппроксимируется не (5), а другое уравнение, отличающееся от (5) дополнительным членом $\beta \gamma \frac{\partial T}{\partial t}$. При принятых

в наших расчетах значения коэффициентов аппроксимируется уравнение

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - w \frac{\partial T}{\partial x} = \bar{c} \frac{\partial T}{\partial t} - \beta \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (14)$$

где $\bar{c} = c - 0,01c$. А так как решение задачи (I)-(3) при постоянных коэффициентах очевидно непрерывным образом зависит от коэффициентов, то при такой аппроксимации следует ожидать малой погрешности для T .

Перейдем теперь к изложению некоторых результатов, полученных при использовании данной схемы. Сначала сравним результаты расчетов, проведенных по описанной выше методике при $v = \text{const}$ с решениями, получаемыми по формуле, выведенной в работе [1].

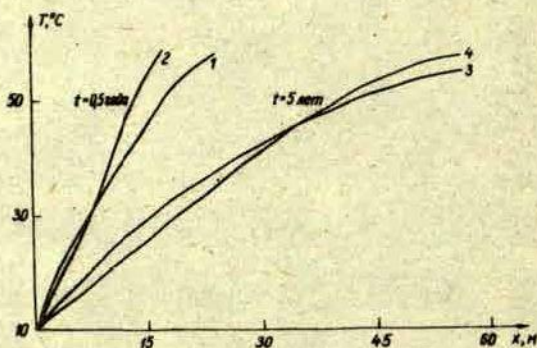


Рис. I. Сравнение расчетов разностным методом (кривые 1,3) с точным решением по неполной схеме сосредоточенной емкости (кривые 2,4)

Итоги этих сравнений видны на рис. I, где приведены ре-

зультаты расчетов для двух значений времени. Как видно из этого рисунка, конечно-разностный метод дает вполне удовлетворительный результат. Среднеинтегральная (по x) погрешность, полученная при сетке $h = 2$ м, $q = 0,5$ м, $T = 5$ сут. не превышает 3%. Отметим, что все эти расчеты, проведенные по схеме (3)-(5) были сделаны при упрощающем предположении равенства теплоемкости воды и нефти. Как видно из формул (4), это предположение позволяет ликвидировать зависимость коэффициентов уравнения (1) от насыщенности β , а следовательно и от x и t . Однако предложенная схема дает возможность расчетов при переменных коэффициентах, в частности при $c_n \neq c_b$ пользуясь этим определим погрешность, даваемую предположением $c_b = c_n$. На рисунке 2 приведены результаты

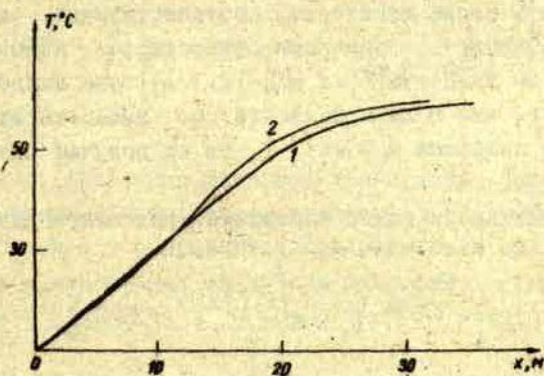


Рис. 2. Влияние учета различия теплоемкостей воды и нефти на расчет температуры пласта.
 1 - расчет при различии теплоемкостей ($c_b \neq c_n$);
 2 - расчет при осредненной теплоемкости c_{cp}
 ($c_{cp} = c_b = c_n$); $t = 365$ сут.

двух расчетов при $v = v_b + v_n = \text{const}$; одного, когда $c_b = c_n$

и другого - когда $C_B \neq C_H$, причем в этом случае значение водонасыщенности рассчитывалось по формулам (относящимся к изотермическому случаю) работы [3]. Эти результаты показывают, что подобное упрощение приводит к искажению результатов не более, чем на 6%. Наконец, отметим, что указанная методика дает, в сравнении с разностным счетом "точной" ([4]) двумерной задачи приолизительно трехкратную экономию машинного времени.

Как уже указывалось выше, не существует достаточно простых и эффективных методов расчета температурного поля в случае, когда скорость фильтрации зависит от времени. Изложенная выше методика является некоторым шагом на пути создания подобных методов или схем. Однако к существенному упрощению расчетов поля температур пласта привело бы использование формул, подобных формуле Ловерье, формуле работы [1] и др., в которых на месте постоянной скорости v стоят некоторые, соответствующие каждому моменту времени t , значения скорости \bar{v}_t , подобранные так, чтобы величина $|T(x, t, v(t)) - T(x, t, \bar{v}_t)|$ была наименьшей. Оказалось, что если в качестве \bar{v}_t выбирать мгновенное значение скорости и $\bar{v}_t = v(t)$, то мы получим завышение температур.

Физически более оправдана среднеинтегральная скорость

$$\bar{v}_t = \frac{\int_0^t v(\tau) d\tau}{t}, \quad (15)$$

однако и она для больших времен не дает достаточно хорошего приближения. Среднеарифметическое же этих двух значений скорости

$$\bar{v}_t = \frac{tv(t) + \int_0^t v(\tau) d\tau}{2t}, \quad (16)$$

дает вполне удовлетворительный результат, в чем можно убедиться, рассмотрев рисунок 3, на котором приведены результаты сравнений описанных выше расчетов с расчетом при $v = v(t)$ для двух значений времени.

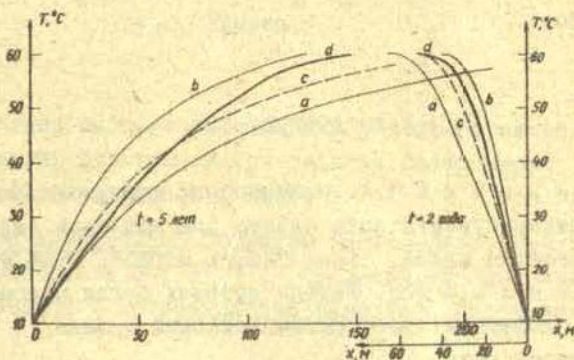


Рис. 3. Сравнение расчетов температуры при переменной скорости фильтрации $v(t)$ ($v(t) = 0,7 \cdot 10^{-4} \cdot t$) (кривые d) с приближенными расчетами при различных моментальных значениях скорости (a - при $\bar{v}_t = v(t)$ b- при $\bar{v}_t = \frac{1}{t} \int_0^t v(\tau) d\tau$; c - при $\bar{v}_t = \frac{1}{2t} (t v(t) + \int_0^t v(\tau) d\tau)$).

Заметим, что все расчеты при предложенных выше значениях скорости \bar{v}_t проведены по предложенной разностной схеме. Выше было показано хорошее совпадение таких расчетов с точной формулой работы [I]. Так как поле температуры при точном значении скорости $v(t)$ считалось по той же разностной схеме, то при сравнениях это исключало ошибку метода сеток.

Отметим, наконец, что все расчеты проводились в том случае, когда скорость $v(t)$ изменялась по линейному за-

кону

$$v(t) = \alpha + \beta t$$

где $\alpha = 0 \div 0,4$, $\beta = 10^{-3} \div 10^{-6}$, что соответствует изменению скорости, имеющему место в действительности.

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору Л.И. Рубинштейну за ценные советы и существенную помощь в работе.

Литература

1. А в д о н и н Н.А. О некоторых формулах для расчета температурного поля пласта при тепловой инжекции Известия ВУЗов, серия "Нефть и газ", 1964 №3.
2. Я н е н к о Н.Н. Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики Новосибирск, 1967.
3. А в д о н и н Н.А., Р у б и н ш т е й н Л.И. Расчет нефтеотдачи нефтяных пластов в неизотермических условиях фильтрации Теория и практика добычи нефти, М., "Недра", 1966.
4. Р у б и н ш т е й н Л.И. О температурном поле пласта при тепловой инжекции Ученые записки Казанского государственного университета 121, 1961, №5.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА НЕФТЕОТДАЧИ НА ОСНОВЕ
ТЕОРИИ БАКЛЕЯ - ЛЕВЕРЕТТА ПРИ ЗАДАНИИ
РАСХОДОВ ИЛИ ЗАБОЙНЫХ ДАВЛЕНИЙ

А.А. Буйкио

§I. Методика расчета нефтеотдачи в неизотермических условиях фильтрации при задании постоянного расхода нагнетательной галереи

пI. Обзор литературы. Согласно Баклею-Левретту [1], поле водонасыщенности $\sigma(x, t)$ однородного однослойного пласта, вскрытого прямолинейной галереей, определяется условиями

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{v}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\sigma, \mu) = 0, \quad (1)$$

$$\sigma|_{t=0} = \sigma_1, \quad \sigma|_{x=0} = \sigma_2, \quad (2)$$

где

$$\varphi(\sigma, \mu) = \frac{1}{1 + \frac{f_n(\sigma) \cdot \mu_B(T)}{f_B(\sigma) \cdot \mu_n(T)}} \quad (3)$$

Здесь $f_B(\sigma)$, $\mu_B(T)$, $f_n(\sigma)$, $\mu_n(T)$ - фазовая проницаемость и вязкость для воды и нефти соответственно; $\mu(T) = \mu_B(T) / \mu_n(T)$ - относительная вязкость; $T(x, t)$ - температура пласта в момент времени t в точке x ($x=0$ соответствует месторасположению нагнетательной галереи); v - расход нагнетательной галереи на единицу мощности и единицу длины галереи в одну сторону (другими словами, v - суммарная скорость фильтрации, принимаемая постоянной); m - пористость; σ_1 - насыщенность связан-

ной (реликтовой) воды; $\bar{S}_2 = I - S_2$, где S_2 - остаточная нефтенасыщенность; T_0 - начальная температура пласта.

При изотермических условиях фильтрации

$$T(x, t) \equiv T_0. \quad (4)$$

В этом случае, как хорошо известно (см. [2 - 5]), водонасыщенность $\bar{S}(x, t)$ определяется из трансцендентного уравнения

$$\xi = \frac{x}{t} = \frac{v}{m} \frac{\partial}{\partial \bar{S}} \varphi(\bar{S}, \mu_0) \quad (5)$$

при $0 \leq x \leq \bar{v}_s t$, $\bar{S}(x, t) \geq \bar{S}_s$

а при $x > \bar{v}_s t$

$$\bar{S}(x, t) \equiv \bar{S}_s. \quad (6)$$

Здесь

$$\bar{v}_s = \frac{v}{m} \frac{\partial}{\partial \bar{S}} \varphi(\bar{S}_s, \mu_0), \quad (7)$$

$$\mu_0 = \mu(T_0),$$

а \bar{S}_s определяется как больший из двух корней трансцендентного уравнения

$$\frac{\varphi(\bar{S}, \mu_0) - \varphi(\bar{S}_s, \mu_0)}{\bar{S} - \bar{S}_s} = \frac{\partial}{\partial \bar{S}} \varphi(\bar{S}, \mu_0). \quad (8)$$

(Меньший корень уравнения (8) не удовлетворяет условию единственности - "условию E" по терминологии [6]).

Таким образом, решение (водонасыщенность $\bar{S}(x, t)$) в изотермическом случае в точке $\bar{x}_s = \bar{v}_s t$ имеет скачок от \bar{S}_s до начальной водонасыщенности \bar{S}_1 .

Если многослойный пласт сложен гидравлически

разооценными пропластками^{I)}, то расчет насыщенности при изотермических условиях фильтрации в нем ничем не отличается от такового в пласте однородном. Действительно, наличие между отдельными пропластками непроницаемых прослоек позволяет рассматривать каждый пропласток как независимый однородный пласт со своей определенной проницаемостью.

При неизотермических условиях фильтрации к (I)-(3) должно добавляться уравнение для определения поля температуры, которое должно решаться совместно с уравнением для насыщенности.

Нам известна лишь одна работа, рассматривающая задачу нахождения поля насыщенности совместно с задачей определения поля температуры. Ее автор Фейерс [7] рассматривает теплоизолированный пласт. Однако многократными исследованиями показано (см., например, [8, 9]), что поле температуры теплоизолированного пласта качественно отличается от такового в пласте неизолированном. Отметим, кроме того, что условие для скорости передвижения скачка насыщенности Фейерс записывает в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{v}{m} \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{\sigma_+ - \sigma_-} \quad (9)$$

(x_s - месторасположение скачка насыщенности, индексы "+" и "-" означают предельные значения соответствующих величин слева и справа), ссылаясь на книгу А. Шейдеггера [10], в которой это выражение приведено для изотермических условий фильтрации. При неизотермических условиях фильтрации это соотношение уже не имеет места [II]. Наконец, Фейерс принимает, что скорость перемещения скачка температурного поля равна скорости перемещения скачка насыщенности. Однако скорость перемещения "фронта тем-

^{I)} Всюду ниже мы рассматриваем только такие многослойные пласты. Неизотермическая фильтрация двухфазной жидкости в слоистых гидравлически не разооценных пластах, насколько нам известно, никем не рассматривалась.

пературы" в однородном неизолированном пласте в несколько раз меньше скорости передвижения скачка насыщенности [12, 13]. Все это не позволяет делать на основе работы Фейерса каких-либо количественных суждений о влиянии неизотермичности условий фильтрации на процесс вытеснения нефти водой из однородного пласта.

Другие авторы, рассматривавшие задачу о вытеснении нефти водой на базе теории Баклея-Левретта при неизотермических условиях фильтрации, температурное поле пред- задавали. При этом делались следующие допущения.

1. Коэффициенты термического расширения и сжимаемости воды и нефти равны нулю.
2. Скорость фильтрации воды v_1 и нефти v_2 подчиняются обобщенному закону Дарси:

$$v_i = -k \frac{f_i(\sigma)}{\mu_i(T)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad i = (1, 2), \quad (10)$$

где k - проницаемость пласта.

3. Пласт имеет постоянную мощность.
4. Температура нагнетаемой воды на входе в пласт T_1 постоянна.
5. межфазный теплообмен происходит с бесконечно большой скоростью.
6. Теплофизические характеристики фильтрующихся жидкостей, пласта и окружающих пород не зависят от температуры.
7. Объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности нефти равны объемной теплоемкости и коэффициенту теплопроводности воды.
8. Термические характеристики пород, слагающих кровлю и подошву пласта, одинаковы.
9. Вязкость воды и нефти зависят только от температуры.
10. Фазовые проницаемости воды и нефти зависят только от насыщенности.

II. Суммарная скорость фильтрации

$$V = V_1 + V_2 \quad (II)$$

постоянна.

I2. Температурное поле пласта вычисляется на основе схемы Ловерье [I4].

В первой части нашей работы сохраняются все перечисленные здесь предположения. Вопрос о их допустимости обсуждается ниже (см. § 2).

Нам известны только работы [I2, I5, I6], (помимо цитированной выше работы Фейерса), рассматривающие задачу о вытеснении из пласта нефти водой с температурой, отличной от начальной пластовой. Однако, предложенные в них алгоритмы численного решения этой задачи остались методически не разработанными.

Именно, в [I2] для решения уравнения (I) для однородного пласта предлагалась схема Лакса [I7], т.е. уравнение (I) аппроксимировалось следующим конечно-разностным:

$$\sigma_i^{k+1} = \frac{\sigma_{i+1}^k + \sigma_{i-1}^k}{2} - \frac{v}{m} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\varphi_{i+1}^k - \varphi_{i-1}^k). \quad (I2)$$

Здесь введены принятые обычно обозначения: $\sigma_i^k = \sigma(x_i, t_k)$, $\varphi_i^k = \varphi(\sigma_i^k, \mu(T(x_i, t_k)))$. Для устойчивости этой схемы необходимо выполнение условия

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \cong v_s, \quad (I3)$$

где v_s - скорость перемещения скачка насыщенности (в изотермическом случае v_s дается соотношением (7)). Оказалось, что счет по схеме Лакса для этой задачи требует соблюдения условия (I3) с высокой точностью. В неизотермических условиях скорость перемещения скачка насыщенности v_s заранее неизвестна, а небольшая погрешность, возникающая при определении $v_s(t)$ во время счета, исхо-

дя из решения конечно-разностного уравнения (12), вызывает неустойчивость.

Фурье [15] рассматривает уравнение (1) в лагранжевых координатах и решает соответствующее конечно-разностное уравнение схемой предиктор-корректор. И в этом случае возникает колебания вблизи месторасположения скачка насыщенности (это отмечает сам автор работы [15]).

С прикладной точки зрения особенно интересным является вопрос о неизотермической фильтрации в слоистых пластах. Насколько нам известно, влияние неизотермичности на нефтеотдачу слоистых пластов рассмотрена лишь в работе Н.А. Авдонина и Л.И. Рубинштейна [16]. В этом случае большие дополнительные трудности вычислительного характера представляет расчет температурного поля, так как имеет место взаимное температурное влияние отдельных пропластков на другие пропластки. Учитывая, что прямой расчет двумерного температурного поля (например, методом конечных разностей) по сравнению с расчетом поля насыщенности, одномерного в отдельных пропластках, потребовал бы неоправданно большого расхода времени при использовании ЭВМ, а также то, что для расчета температурного поля нужна относительно невысокая точность (небольшие возмущения температуры практически не сказываются на величине нефтеотдачи), в работе [16] был предложен приближенный метод определения температурного поля многослойного пласта, названный "формулой аддитивности". Для простоты записи рассмотрим ее для пласта, состоящего из двух пропластков с расходами q_1 и q_2 нагнетаемой в них воды и мощностями h_1 и h_2 , разделенных непроницаемой прослойкой толщины h_{12} . Нормированная к единице температура i -го ($i=1,2$) пропластка $u_i(x, t)$ по "формуле аддитивности" определяется тогда следующим образом:

$$u_i(x, t) = \min \left\{ 1, \operatorname{erfc} \frac{\alpha_i x}{\beta \sqrt{t - w_i(x)}} \eta(t - w_i(x)) + \frac{1}{h_i} [(\alpha_j x + z) \times \right.$$

$$x \operatorname{erfc} \frac{\alpha_j x + z}{\beta \sqrt{t - w_j x}} - \frac{\beta \sqrt{t - w_j x}}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\alpha_j x + z}{\beta \sqrt{t - w_j x}}\right)^2} \eta(t - w_j x) \Big|_{z=h_{12}}^{z=h_{12}+h_i},$$

где

$$\alpha_i = \frac{2K_2}{q_i c_0}, \quad \beta = 2\sqrt{\frac{K_2}{C_2}}, \quad W_i = \frac{h_i c_i}{q_i c_0}, \quad f(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a),$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz, \quad (15)$$

K_i - теплопроводность; c_i - объемная теплоемкость (индекс "0" относится к нагнетаемой жидкости, "1" - к пласту, "2" - к окружающим пласт породам). Таким образом, по "формуле аддитивности" предполагается, что температурное поле отдельного пропластка получается суперпозицией температурного поля его самого (рассчитанного по формуле Ловерье [14]) и осредненным по его мощности температурным влиянием других пропластков (температурное поле их также вычисляется по формуле Ловерье), причем, если эта суперпозиция дает величину, большую возможной (т.е. единицы), то принимается, что нормированная температура в точности равна единице.

В работе [16] был проведен расчет нефтеотдачи четырехслойного пласта для нефти арланского месторождения. Так как распределение водонасыщенности $\bar{\sigma}(x, t)$ в изотермическом случае известно (формулы (5), (6)), авторы предлагали вычислять непосредственно разность насыщенностей

$$w(x, t) = \sigma(x, t) - \bar{\sigma}(x, t) \quad (16)$$

при неизотермических и изотермических условиях фильтрации. Для $w(x, t)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{v}{m} \frac{\partial}{\partial x} F(w, \mu) = 0 \quad (17)$$

с условиями

$$W \Big|_{t=0} = W \Big|_{x=0} = W \Big|_{x=\bar{v}_s t} = 0, \quad (18)$$

которое аппроксимируется следующим конечно-разностным уравнением

$$W_i^{k+1} = W_i^k - \frac{v}{m} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^k - F_{i-1}^k). \quad (19)$$

Здесь

$$F(w, \mu) = \varphi(\bar{\sigma}_+, w, \mu) - \varphi(\bar{\sigma}_-, \mu_0). \quad (20)$$

Последнее из условий (18) показывает, что, основываясь на проведенном ранее в [12] расчете распределения насыщенности в однородном пласте, авторы предполагают, что скачки насыщенности при изотермических и неизотермических условиях фильтрации практически совпадают вследствие отставания фронта температур от скачка насыщенности. Однако оказалось, что для наименее проницаемого пропластка температурный фронт и скачок насыщенности практически совпадают, что привело к неустойчивости счета по конечно-разностной схеме (19). Для нахождения распределения насыщенности в этом пропластке авторы предложили метод линеаризации - разложение функции $\varphi(\bar{\sigma}_+, w, \mu)$ в ряд Тейлора, в окрестности точки $(\bar{\sigma}_-, \mu_0)$, ограничиваясь линейными членами разложения.

Однако ясно, что конечно-разностная схема (19) при заметном влиянии неизотермичности вообще непригодна для расчета, так как функция $w(x, t)$ в этом случае терпит разрывы в отличающихся друг от друга местах расположения изотермического и неизотермического скачков. Априори ясно также, что линеаризация уравнения (17) пригодна лишь в предположении малости функции $w(x, t)$.

Таким образом, вопрос о разработке методики для

расчета нефтеотдачи при неизотермических условиях фильтрации осаталвался открытым.

п 2. Методика расчета нефтеотдачи однородного пласта.

В 1950 году Дж. фон Нейманом и Р.Д. Рихтмайером [18] для расчета разрывных решений уравнений газовой динамики было предложено ввести в эти уравнения члены вязкостного типа, которые сглаживают разрывы. Из периодической литературы известно несколько работ, доказывающих при различных предположениях сходимость решения уравнения с "искусственной вязкостью" к разрывному решению исходного уравнения, когда коэффициент "псевдовязкости" стремится к нулю.

В [19,20] в предположении выпуклости функции $\varphi(\sigma, x, t)$ т.е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma^2} > 0$$

доказана сходимость, в частности, решения задачи

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\sigma, x, t) = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}, \quad (21)$$

$$\sigma \Big|_{t=0} = \begin{cases} \sigma_1, & x > 0 \\ \sigma_2, & x < 0 \end{cases} \quad (22)$$

при $a^2 \rightarrow 0$ к решению уравнения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\sigma, x, t) = 0 \quad (23)$$

с тем же начальным условием (22).

С другой стороны, А.С. Калашников [21] доказал сходимость решения задачи (21), (22) при $a^2 \rightarrow 0$ к решению (23), (22) без предположения выпуклости по σ функции φ , но при условии, что она не зависит явно от x и t , т.е. в интересующей нас постановке - при изотермических условиях фильтрации,

Таким образом, при неизотермических условиях фильтрации, когда функция $\varphi(\sigma, \mu)$ имеет точку перегиба и в то же время явно зависит от x и t , отсутствует доказательство сходимости уравнения с "псевдовязкостью" к решению исходного уравнения Баклея - Леверетта при $\alpha^2 \rightarrow 0$.

Метод введения "псевдовязкости" был опробован для расчета влияния неизотермичности на нефтеотдачу. Именно, в уравнение (17) для $w(x, t) = \sigma(x, t) - \bar{\sigma}(x, t)$ был введен член $\alpha^2 \partial^2 w / \partial x^2$, а правое краевое условие перенесено с точки $\bar{x}_s = \bar{v}_s t$ в точку $x_s = \bar{v}_s t + c(t)$, причем $c(t)$ выбиралось с таким расчетом, чтобы с достаточной точностью можно было считать, что

$$w \Big|_{x=x_s} = 0 \quad (24)$$

Полученное таким образом уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{v}{m} \frac{\partial}{\partial x} F(w, \mu) = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (25)$$

с условиями

$$w \Big|_{t=0} = w \Big|_{x=0} = 0 \quad (26)$$

и условием (24) заменялось следующим конечно-разностным уравнением:

$$w_i^{k+1} - w_i^k + \frac{v}{m} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^k - F_{i-1}^k) = \frac{\alpha^2 \Delta t}{(\Delta x)^2} (w_{i+1}^{k+1} - 2w_i^{k+1} + w_{i-1}^{k+1}), \quad (27)$$

которое решалось методом прогонки, причем, как и в работах [12, 16], соблюдалось выполнение условия

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v}_s \quad (28)$$

Таким образом была рассчитана нефтеотдача двуслойного пласта, когда проницаемости пропластков отличаются

в 10 или 20 раз. Результаты этих расчетов сообщаются в [22].

Однако в некоторых случаях расчет по схеме (27), также как и в работах [12, 10], становился неустойчивым. Это заставило обратить серьезное внимание на вопросы методического характера, связанные с выбором конечно-разностной схемы, численной проверкой сходимости и устойчивости ее, выбором α^2 и т.д.

В связи с этим возникает несколько вопросов. Например, как влияет разрыв в уравнении (25) на точность получаемых результатов (несмотря на введение в это уравнение сглаживающего члена $\alpha^2 \partial^2 w / \partial x^2$ и обеспечения тем самым непрерывности функции $w(x, t)$, остается разрыв функции $F(\bar{\sigma}, \mu) = \varphi(\bar{\sigma} + w, \mu) - \varphi(\bar{\sigma}, \mu_0)$ в точке $\bar{x}_s = \bar{v}_s t$). Далее, каков должен быть критерий выбора "оптимального" α^2 в уравнении (25) (или (21)) (т.е. с одной стороны, не слишком большого α^2 , чтобы решение уравнения с "псевдовязкостью" не очень отличалось от решения исходного уравнения Баклея-Левретта, но, с другой стороны, и не слишком малого, чтобы не возникала неустойчивость в соответствующем конечно-разностном уравнении). Кроме того, как задать краевое условие на эксплуатационной галерее, так как условие типа условия (24) вызывает увеличение количества точек сетки по x , что приводит к необходимости увеличивать шаг по x через определенные промежутки времени, вследствие чего снижается точность расчетов. Наиболее сложным в задаче исследования влияния неизотермичности условий фильтрации на процесс вытеснения нефти водой, на наш взгляд, является вопрос о сохранении достаточно высокой точности расчетов для промежутка времени, равного длительности эксплуатации реального нефтяного месторождения (как известно, этот промежуток времени равен 10-20 годам). Эта трудность еще возрастает при рассмотрении слоистого пласта, когда в нем контактируют пропластки существенно различной проницаемости. Например, как показывают расчеты, проведенные для случая за-

дания забойных давлений (см. нашу статью в настоящем сборнике о результатах расчета неизотермической фильтрации в слоистых пластах), если проницаемости соседних пропластков различаются в 10 раз, то к 5-8 годам вытеснение нефти из более проницаемого пропластка практически кончилась, т.е. его эксплуатацию можно было бы прекратить (причем к этому времени нет практически никакого влияния неизотермичности на нефтеотдачу рассматриваемого двуслойного пласта), однако, к 15 годам кончается лишь безводная эксплуатация менее проницаемого пропластка и только к этому моменту времени влияние нагнетания горячей или холодной воды на величину нефтеотдачи становится значительным. Таким образом, проблема состоит в расчете влияния весьма малых эффектов, но таких, которые, суммируясь, со временем могут достигнуть значительных величин. С другой стороны, методика расчета должна быть такой, которая позволяла бы проводить серийные расчеты на ЭВМ средней мощности.

Рассмотрению этих вопросов предпослём краткий анализ сформулированных в п I. исходных допущений теории. Среди этих допущений обсуждению подлежат, очевидно, следующие.

1. Принятие бесконечно большой скорости межфазового теплообмена.
2. Приравнивание объемных теплоемкостей воды и нефти.
3. Независимость фазовых проницаемостей от температуры.
4. Постоянство суммарной скорости фильтрации.
5. Принятие для расчета температурного поля схемы Лаверье.
6. Пренебрежение сжимаемостью и термическим расширением воды и нефти.

Остальные допущения не имеют принципиального характера. Так, например, расчет температурного поля при задании постоянной температуры на входе в пласт может быть заменен, с сохранением всех остальных допущений, расчетом его при задании полного количества тепла, вносимого

в пласт при нагнетании воды [23]. Однако оказывается, что разница в распределении температур при этих двух способах расчета проявляется лишь в течении времени, малою по сравнению с рассматриваемой длительностью течения процесса. Поэтому нецелесообразно идти на усложнение расчета поля температур за счет отказа от задания кусочно-постоянной температуры на входе в пласт. То же относится к остальным неперечисленным здесь предположениям.

Обоснованность пренебрежения различием температуры твердого скелета пласта и пластовой жидкости следует из оценок, проводившихся рядом авторов [24,25], и потому здесь специально не обсуждается.

Допустимость приравнивания, при расчете температурного поля, объемной теплоемкости нефти к объемной теплоемкости воды подтверждается количественным анализом, основанном на рассмотрении поршневого механизма вытеснения нефти водой. Здесь укажем только, что малость влияния учета различия теплоемкости воды и нефти на температуру в пласте обусловлена сильным отставанием "температурного" фронта от "фронта нагнетания" в пропластках с максимальной проницаемостью. (См. также [26])

Допустимость расчета температурного поля по схеме Ловерье (т.е. с принятием предположения о том, что теплопроводность пласта и внешних пород в направлении простирания пласта равна нулю, что в вертикальном направлении теплопроводность окружающих пород равна их истинной теплопроводности, а теплопроводность пласта бесконечно велика) была предметом рассмотрения многих авторов [8,9, 27, 28]. Оказывается, что при нагнетании воды конвективный перенос тепла в пласте играет основную роль, и поэтому допущение Ловерье приводит к вполне удовлетворительной аппроксимации температуры пласта в течение времени порядка возможной длительности разработки нефтяных месторождений.

Допущение постоянства суммарной скорости фильтрации является следствием задания постоянных расходов в каждый из пропластков и пренебрежения термическим расширением воды и нефти. Ниже (§2) специально рассматривается задача при задании забойных давлений, а не расходов. Таким образом, это допущение при обсуждении постановки задачи может не рассматриваться.

Допущение о независимости фазовых проницаемостей от температуры с методической точки зрения не обязательно. Именно, без всяких существенных изменений алгоритма счета можно считать кривые фазовых проницаемостей воды и нефти зависящими не только от насыщенности, но и от температуры. Однако количественно учет зависимости фазовых проницаемостей от температуры может оказаться значительным (см. уже упомянутую нашу статью в настоящем сборнике). Все же практически полное отсутствие экспериментальных данных о зависимости фазовых проницаемостей от температуры не позволяет проводить обоснованное количественное исследование с учетом этой зависимости. (Нам известны лишь два указания на зависимость фазовых проницаемостей от температуры. Одно из них содержится в работе [29], второе - в неопубликованном еще докладе А.А. Кочешкова и В.И. Хомутова [30] . В этом докладе сообщалось об экспериментах, в которых конечная нефтеотдача менялась с температурой на 15-20%. В первой же работе рассматривалась задача о циклической обработке нефтенасыщенного песчаника паром и приводилась таблица зависимости фазовой проницаемости нефти от температуры, включающая интервал двухфазного состояния воды. Поэтому в наших расчетах эта таблица не могла быть использована).

Таким образом, остается оправдать только пренебрежение сжимаемостью и термическим расширением воды и нефти. Очевидно, что эффект термического расширения и, тем более, сжимаемости является эффектом "второго порядка малости" сравнительно с эффектами изменения фазовых проницаемостей

и вязкостей воды и нефти. В самом деле максимально возможная, при рассматриваемом интервале изменения температуры пласта (на $\pm 40-50^{\circ}\text{C}$), дополнительная отдача нефти за счет ее теплового расширения не может превысить 1-1,5% от начального нефтесодержания пласта. В действительности же даже в менее проницаемых пропластках весьма значительная часть нефти вымывается из пласта при температуре, весьма близкой к начальной пластовой температуре. Если для остальной массы нефти принять максимальное изменение температуры $\pm 40-50^{\circ}\text{C}$, то это приведет к дополнительной нефтеотдаче в 0,1-0,4% при нагнетании горячей воды (соответственно , к уменьшению при нагнетании холодной воды). Очевидно, что считаться с этим при постановке задачи нет смысла, во всяком случае, на современном уровне исследования проблемы (особенно, если принять во внимание, что учет термического расширения или сжимаемости привел бы к существенному усложнению алгоритма счета).

Перейдем к рассмотрению перечисленных выше методических вопросов. Отметим, прежде всего, что методические вопросы по выбору конечно-разностной схемы были изучены для схемы, аппроксимирующей уравнение Баклея-Левверетта при изотермических условиях фильтрации, так как в этом случае имеется возможность проверки точности расчета по выбранной конечно-разностной схеме путем непосредственного сравнения полученных результатов с известным точным решением (формулы (5), (6)). При неизотермических условиях методика расчета $\sigma(x, t)$ остается прежней, но дополняется определением температурного поля.

Заметим далее, следующее. Теория Баклея-Левверетта считается с наличием нагнетательной галереи и игнорирует наличие галереи эксплуатационной. Иными словами, поле насыщенности $\sigma(x, t)$ определяется в области $0 < x < \infty$ вместе с тем уравнение Баклея-Левверетта с "псевдовязкостью"

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{v}{m} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\sigma, \mu) = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \quad (29)$$

нужно интегрировать в области $0 < x < \infty$, и поэтому к начальному условию

$$\sigma|_{t=0} = \sigma_1, \quad 0 < x < \infty \quad (30)$$

и условию на нагнетательной галерее

$$\sigma|_{x=0} = \sigma_2, \quad t > 0 \quad (31)$$

должно быть присоединено условие на бесконечности

$$\sigma|_{x \rightarrow \infty} = \sigma_1, \quad t > 0 \quad (32)$$

Переход к конечным разностям требует усечения бесконечной области до конечной. Это может быть осуществлено заменой условия (32) условием

$$\sigma|_{x=L^*} = \sigma_1, \quad t > 0, \quad (33)$$

где L^* достаточно велико по сравнению с размерами интересующей нас области.

Введем сетку

$$x_i = i\Delta x, \quad t_k = k\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, N^*; \quad k = 0, 1, \dots; \quad N^*\Delta x = L^*. \quad (34)$$

Тогда условия (30), (31) записываются в граничных узлах в виде

$$\sigma_i^0 = \sigma_1, \quad i = 1, 2, \dots, N^*; \quad \sigma_0^k = \sigma_2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (35)$$

Здесь, как и выше, введено обычное обозначение

$$\sigma_i^k = \sigma(x_i, t_k). \quad (36)$$

Граничное условие (33) должно быть заменено условием

$$\sigma_{N^*}^k = \sigma_1, \quad k = 0, 1, \dots \quad (37)$$

Однако практически пользоваться этим условием нецелесообразно, так как оно приводит к неоправданному расширению той области, в которой определяется насыщенность σ_i^k . Действительно, скорость изменения насыщенности

в конечно-разностной аппроксимации конечна и поэтому расширяющаяся с переходом от одного временного слоя к другому сетчатая область, в которой $\sigma_i^k > \sigma_1$, в начальный момент вырождается в точку $\sigma_0^0 = \sigma_2$. В связи с этим условие (33) заменяется условием

$$\sigma_{N_{k+1}}^{k+1} = \sigma_1 \quad (38)$$

где $N_0 = 1$, а N_{k+1} определяется следующим образом. Пусть I_k определено условиями

$$\sigma_1 \leq \sigma_{I_k}^k \leq \varepsilon, \quad \sigma_{I_k-1}^k > \varepsilon, \quad (39)$$

($\varepsilon > 0$ - выбранная точность). Тогда

$$N_{k+1} = I_k + 2. \quad (40)$$

При таком способе задания N_{k+1} обеспечивается выполнение не только условия (38), но и условия

$$\frac{\sigma_{N_{k+1}}^{k+1} - \sigma_{N_{k+1}-1}^{k+1}}{\Delta x} \approx 0.$$

Заметим, далее, что такой способ перенесения краевого условия (37) на подвижную границу целесообразен лишь для тех временных слоев, на которых эта граница лежит между нагнетательной и эксплуатационной¹⁾ галереями. Если же $N_{k+1} \Delta x > L$, то с увеличением времени сохранение условия (38) привело бы к неоправданному увеличению объема вычислительной работы и необходимости работы с переменной сеткой (с увеличивающимися расстояниями между пространственными узлами). Расчет с такой переменной сеткой связан не только с усложнением программы,

¹⁾ Напоминаем, что теория не учитывает наличия отбора. Таким образом, говоря о наличии эксплуатационной галереи, мы говорим об условном месте возможного отбора.

но и с существенным снижением точности.

Мы уже отметили выше, что в постановке задачи по Баклею-Левретту эксплуатационная галерея фактически не рассматривается. Поэтому замена краевого условия (37) на подвижной границе каким-то условием на границе фиксированной, расположенной вблизи эксплуатационной галереи, но за ней (чтобы уменьшить возможное накопление ошибки из-за введения такого краевого условия), нужно формулировать исходя из предварительного рассмотрения задачи в неограниченной области. Расчеты показали, что на расстояниях, сравнимых с расстояниями между нагнетательной и эксплуатационной галереями, сеточная аппроксимация насыщенности $\sigma(x, t)$ является локально близкой к линейной по x функции. Это значит, что можно воспользоваться краевым условием вида

$$\left. \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right|_{x=L_1} = 0. \quad (41)$$

В конечно-разностной аппроксимации использование этого условия приводит к счету по следующей схеме

$$\begin{array}{ccc} t^{k+1} & x_{N-1} = L_1 - \Delta x & x_N = L_1 \\ t^k & x & x \end{array},$$

т.е. значение σ при $x = L_1$, определяется явным образом из уравнения

$$\sigma_N^{k+1} = \sigma_N^k + \frac{v}{m} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} (\varphi_{N-1}^k - \varphi_N^k). \quad (42)$$

Здесь

$$\varphi_i^k = \varphi(\sigma_i^k, \mu(T(x_i, t_{k+1}))). \quad (43)$$

Величина L_1 выбиралась равной $L(1 + \Delta)$, $\Delta \approx 0,1$. При таком выборе L_1 расчет расширяющейся со временем об-

ласти (т.е. без введения условия (4I)) и расчет с введением этого краевого условия давали практически совпадающие между собой величины.

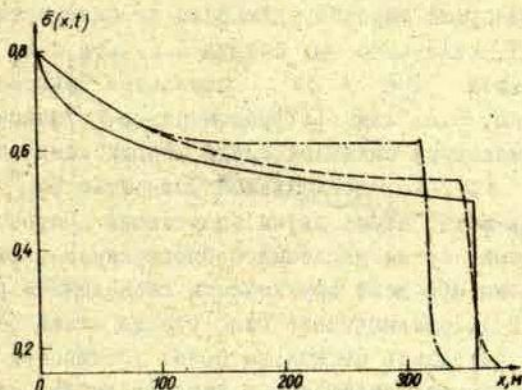


Рис.1. Поведение конечно-разностной схемы с разностью "шаг вперед". $t = 730$ суток, $\Delta x = 2,5$ м.
 ————— точное решение; - - - - $\alpha^2 = 2 \text{ м}^2/\text{сутки}$;
 - · - · $\alpha^2 = 1 \text{ м}^2/\text{сутки}$.

Для расчетов по методу конечных разностей была выбрана следующая аппроксимация уравнения (29):

$$\frac{2\sigma_i^{k+1} - \sigma_{i-1}^k - \sigma_{i+1}^k}{2\Delta t} + \frac{v}{m} \cdot \frac{\varphi_{i+1}^k - \varphi_{i-1}^k}{2\Delta x} = \alpha^2 \frac{\sigma_{i+1}^{k+1} - 2\sigma_i^{k+1} + \sigma_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}. \quad (44)$$

Выбор схемы (44) был продиктован следующими соображениями. Так как решение уравнения (29) должно мало отличаться от решения исходного уравнения (I), терпящего разрыв в точке $x_s(t)$, что в окрестности этой точки решение уравнения (29) будет меняться весьма резко, поэтому для ап-

проксимации производной $\partial \sigma / \partial t$ выбрана разность Лакса $(2\sigma_i^{k+1} - \sigma_{i-1}^k - \sigma_{i+1}^k) / 2 \Delta t$. Далее, так как с ростом времени характеристики уравнения (I), несущие определенные значения σ , движутся вправо, то априори ясно, что неестественной является аппроксимация нелинейного члена $\partial \varphi / \partial x$ разностью "шаг вперед" $(\varphi_{i+1}^k - \varphi_i^k) / \Delta x$. Это подтверждает численная проверка (рис. 1)¹⁾. Учитывая упомянутый характер движения характеристик уравнения (I), надо было бы, следуя С.К. Годунову [31, 32] аппроксимировать $\partial \varphi / \partial x$ разностью "шаг назад". С другой стороны, Р.Д. Лакс [17] рекомендует в "законах сохранения" механики сплошной среды аппроксимировать члены типа $\partial \varphi / \partial x$ центральной разностью $(\varphi_{i+1}^k - \varphi_{i-1}^k) / 2 \Delta x$. Выбор между этими двумя возможными аппроксимациями был сделан путем численного эксперимента. Оказывается, что они обе дают практически совпадающие результаты (рис. 2). Предпочтение было отдано схеме (44), так как она оказалась несколько более устойчивой при малых α^2 . Точнее, колебания в распределении насыщенности вблизи точки разрыва $x_s(t)$ в решении уравнения (I) при выборе схемы (44) возникали при меньших α^2 , нежели при выборе схемы с разностью "шаг назад".

Как известно, предпочтительнее пользоваться дивергентной формой записи уравнений при решении их методом конечных разностей. Этот факт подтверждается и в нашем конкретном случае: замена дивергентной формы уравнений (2^o) недивергентной

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{v}{m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) = \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}$$

¹⁾ В подписях к рисункам указаны значения только некоторых параметров; численные значения остальных параметров, а также положенная в основу расчетов модель пласта, описаны в следующей статье настоящего сборника.

и аппроксимация ее конечно-разностным уравнением

$$\frac{2\sigma_i^{k+1} - \sigma_{i+1}^k - \sigma_{i-1}^k}{2\Delta t} + \frac{v}{m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right)_i^k \frac{\sigma_{i+1}^{k+1} - \sigma_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \left(\frac{\mu_{i+1}^{k+1} - \mu_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x} \right) = a^2 \frac{\sigma_{i+1}^{k+1} - 2\sigma_i^{k+1} + \sigma_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}$$

дает, как это видно из рис. 3, крайне неудовлетворительные результаты.

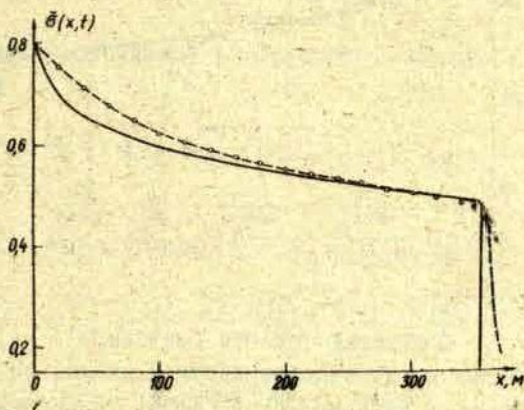


Рис. 2. Сравнение конечно-разностных схем с центральной разностью (---) и разностью "шаг назад" (....) $t = 750$ суток ; $\Delta x = 2,5$ м; $a^2 = 1,5$ м²/сутки, — точное решение.

Таким образом, для дальнейших расчетов на основе теории Баклея-Левретта будем пользоваться конечно-разностной схемой (44).

После выбора определенного шага по пространству Δx шаг по времени Δt в (44) выбирался так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \tilde{V}_s, \quad (45)$$

где \tilde{v}_s определяется из уравнения (7).

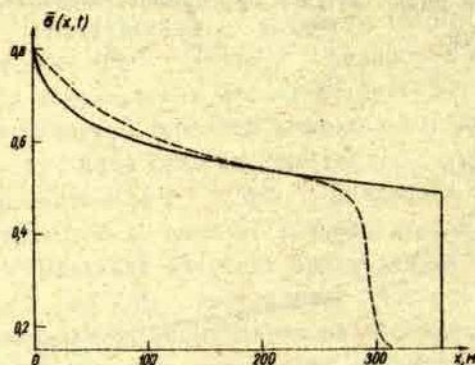


Рис. 3. Сравнение точного решения (—) с расчетом по конечно-разностной схеме, аппроксимирующей недивергентную форму уравнения Баклея-Левретта (---). Значения параметров те же, что на рис. 2.

Введение псевдовязкости в уравнение (1) существенно ослабляет требование точности соблюдения условия (13), (по сравнению, например, с работой [12]). При отработке методики расчета величина $v_s(t)$ варьировалась на 10-20%. При этом результаты оказались практически совпадающими. Это позволило в целях упрощения счета пользоваться вместо (13) условием (45) и, тем самым, не определять $v_s(t)$ на каждом временном слое.

Отметим, что, как видно из (43), выбор аргумента $\sigma(x, t)$ из предыдущего временного слоя t_k при вычислении функции $\varphi(\sigma, \mu)$ для определения поля насыщенности на $k+1$ -ом временном слое по конечно-разностной

схеме (44) позволяет избежать необходимости делать итерации.

Поскольку схема (44) неявная, то для ее решения применяется метод прогонки: из соотношений

$$a_{1/2}^{k+1} = 0; \quad a_{i+1/2}^{k+1} = \frac{A_{i+1/2}^{k+1}}{1 - a_{i-1/2}^{k+1} B_{i+1/2}^{k+1}}; \quad (46)$$

$$b_{1/2}^{k+1} = \sigma_0^{k+1}; \quad b_{i+1/2}^{k+1} = \frac{b_{i-1/2}^{k+1} B_{i+1/2}^{k+1} + C_{i+1/2}^{k+1}}{1 - a_{i-1/2}^{k+1} B_{i+1/2}^{k+1}}$$

вычислялись прогоночные коэффициенты $a_{i+1/2}^{k+1}$, $b_{i+1/2}^{k+1}$ уравнений

$$\sigma_i^{k+1} = a_{i+1/2}^{k+1} \sigma_{i+1}^{k+1} + b_{i+1/2}^{k+1}; \quad i = 0, 1, \dots, M-1. \quad (47)$$

Здесь

$$A_{i+1/2}^{k+1} = B_{i+1/2}^{k+1} = A = \frac{a^2}{2a^2 + (\Delta x)^2 / \Delta t};$$

$$C_{i+1/2}^{k+1} = \frac{\Delta x}{2} \frac{[\Delta x / \Delta t (\sigma_{i+1}^k + \sigma_{i-1}^k) - \nu / m (\varphi_{i+1}^k - \varphi_{i-1}^k)]}{2a^2 + (\Delta x)^2 / \Delta t}; \quad (48)$$

$$M = \min(N_{k+1}, N),$$

где N_{k+1} определяется из (39), (40), а $N = \frac{L_1}{\Delta x}$.

Если $M = \min(N_{k+1}, N) = N_{k+1}$, (т.е. если возмущение поля насыщенности до точки $x = L_1$ еще не дошло), то, по определению (38), $\sigma_M^{k+1} = \sigma_1$. Если же $M = N$, (т.е. $\sigma_N^k > \sigma_1$), то σ_M^{k+1} определяется из уравнения (42).

Подставляя найденное таким образом (из (38) или (42))

σ_M^{k+1} в (47) при $i = M-1$, вычисляем σ_{M-1}^{k+1} , затем, подставляя σ_{M-1}^{k+1} в (47) при $i = M-2$, находим σ_{M-2}^{k+1} и т.д. до σ_1^{k+1} .

Заканчивая обсуждение вопроса о выборе конечно-разностной схемы для численного решения уравнения (I), заметим, что выбор уравнения (29) с псевдовязкостью для аппроксимации уравнения (I) был продиктован не только соображениями вычислительного характера. Если учитывать капи-

лярный скачок давления $p_c(\sigma)$, т.е. различие локальных средних давлений в воде и в нефти:

$$p_n - p_b = p_c(\sigma), \quad (49)$$

то в этом случае процесс вытеснения нефти водой описывается уравнением Лиса-Рапопорта [33]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{v}{m} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\sigma, \mu) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(\sigma, \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right), \quad (50)$$

где

$$\Phi(\sigma, \mu) = \frac{\kappa}{m} \frac{f_n(\sigma)}{\mu_n(T)} \frac{d}{d\sigma} p_c(\sigma) \varphi(\sigma, \mu). \quad (51)$$

Уравнение Баклея-Левретта (1) получается из уравнения Лиса-Рапопорта, если в последнем принять $p_c(\sigma) \equiv 0$.

Заменяя в уравнении Лиса-Рапопорта (50) функцию $\varphi(\sigma, \mu)$ на какое-то среднее ее значение a^2 , получаем из него уравнение Баклея-Левретта с псевдовязкостью (уравнение (29)). Таким образом, введение псевдовязкости в уравнение Баклея-Левретта позволяет приближенно учесть капиллярные эффекты, учитываемые теорией Лиса-Рапопорта.

Оценим оптимальную величину a^2 для расчета по конечно-разностной схеме (44). После линеаризации ее получаем

$$\frac{2\sigma_j^{k+1} - \sigma_{j-1}^k - \sigma_{j+1}^k}{2\Delta t} + \Phi \frac{\sigma_{j+1}^k - \sigma_{j-1}^k}{2\Delta x} = a^2 \frac{\sigma_{j+1}^{k+1} - 2\sigma_j^{k+1} + \sigma_{j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \quad (52)$$

(где Φ - значение $\frac{v}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$ в какой-то пока неопределенной точке (σ, μ)). Будем искать σ_j^k в виде

$$\sigma_j^k = \lambda^k e^{ijf} \quad (53)$$

(здесь λ является функцией $f, \Delta x, \Delta t$), т.е. восполь-

зуюмся методом интеграла Фурье, применяемым для нахождения необходимых условий устойчивости конечно-разностных схем, аппроксимирующих линейные дифференциальные уравнения (см. например, [34 , дополнение]). Необходимое условие устойчивости заключается в требовании $|\lambda| < 1$.

Необходимо отметить, что в нашем случае имеется некоторая особенность при нахождении необходимого условия устойчивости конечно-разностной схемы. Обычно величина a^2 задана, и для выбранного Δx из требования $|\lambda| < 1$ определяются допустимые Δt . В этой задаче ситуация противоположная: условие (45) при выбранном Δx фиксирует Δt и задача заключается в определении минимального a^2 , удовлетворяющего необходимому условию устойчивости.

Подставляя (53) в (52), получаем

$$\frac{2\lambda - e^{if} - e^{-if}}{2\Delta t} + \phi \frac{e^{if} - e^{-if}}{2\Delta x} = a^2 \frac{e^{if} + e^{-if} - 2}{(\Delta x)^2},$$

которое после несложных преобразований принимает вид

$$\lambda \left[1 + \frac{2a^2\Delta t}{(\Delta x)^2} (1 - \cos f) \right] = \cos f - i \frac{\phi \Delta t \sin f}{\Delta x}$$

Условие $|\lambda| < 1$ будет выполнено при

$$\left| 1 - i \frac{\phi \Delta t}{\Delta x} \operatorname{tg} f \right| < \left| \frac{2a^2\Delta t}{(\Delta x)^2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 f} - 1) + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 f} \right|$$

и, тем более, при

$$\sqrt{1 + \frac{\phi \Delta t}{\Delta x} \operatorname{tg} f} < \left| \frac{2a^2\Delta t}{(\Delta x)^2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 f} - 1) - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 f} \right|. \quad (54)$$

Это неравенство должно иметь место для всех ϕ . Выберем в качестве неопределенной точки (σ, μ) точку $(\bar{\sigma}_s, \mu_0)$, так как в этой точке в нестационарном случае функция ϕ принимает максимальное значение на "волне разрежения", равное \bar{v}_s . Тогда из (54) с учетом соотношения (45) получаем

$$\sqrt{1+tg^2f} < \left| \frac{2a^2}{\tilde{v}_s \Delta x} (\sqrt{1+tg^2f} - 1) - \sqrt{1+tg^2f} \right|.$$

Это дает следующее неравенство для

$$a^2 \geq \Delta x \tilde{v}_s \frac{\sqrt{1+tg^2f}}{\sqrt{1+tg^2f} - 1}. \quad (55)$$

Нижний предел для f в (55) на "волне разрежения" равен $\arctg \frac{t}{x_s}$, т.е., приближенно $tg f > \frac{t}{x_s}$. Учитывая, что правая часть (55) является убывающей функцией от f , мы должны наложить следующее требование на a^2 (чтобы не вводить зависимость a^2 от x):

$$a^2 \geq \Delta x \tilde{v}_s \frac{\sqrt{1+\tilde{v}_s^2}}{\sqrt{1+\tilde{v}_s^2} - \tilde{v}_s}.$$

Необходимое условие устойчивости конечно-разностной схемы (44), таким образом, имеет вид

$$a^2 = \Delta x \tilde{v}_s \frac{\sqrt{1+\tilde{v}_s^2}}{\sqrt{1+\tilde{v}_s^2} - \tilde{v}_s}. \quad (56)$$

Отметим, что "оптимальное" a^2 , найденное на ЭВМ путем численного эксперимента, с точностью до 5% совпало со значением a^2 , которое дает равенство (56).

Введение в уравнение (I) псевдовязкости дает даже при минимальном a^2 , определяемом из (56), существенное завышение величины водонасыщенности $\tilde{\sigma}(x, t)$ в окрестности нагнетательной галереи¹⁾ (см. рис. 2). Вследствие этого интересующая нас величина нефтеотдачи

¹⁾ За истинное значение водонасыщенности принимается то, которое дается теорией Бакля-Леверетта, т.е. то, которое должно вычисляться без введения псевдовязкости.

вычисляется с абсолютной погрешностью (завышением), которая непрерывно увеличивается, достигая к концу интересующего нас промежутка времени величины порядка 10%¹⁾.

Легко видеть, однако, что точность вычисления нефтеотдачи при введении псевдовязкости в уравнение Баклея-Левретта может быть повышена. С этой целью проинтегрируем уравнения (I) и (29) по прямоугольной области $\{0 \leq \tau \leq t, 0 \leq x \leq L\}$. Это дает

$$\int_0^L [\sigma(x, t) - \sigma_1] dx = \frac{v}{m} \left[\int_0^t (\varphi|_{x=0} - \varphi|_{x=L}) d\tau \right],$$

т.е.

$$L(1 - \sigma_1) \eta(t) = \frac{v}{m} \left(t - \int_0^t \varphi|_{x=L} d\tau \right) \quad (57)$$

для уравнения (I) и

$$L(1 - \sigma_1) \eta(t) = \frac{v}{m} \left(t - \int_0^t \varphi|_{x=L} d\tau \right) + a^2 \int_0^t \left. \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=L} d\tau \quad (58)$$

для уравнения (29).

Сравнение (57) и (58) показывает, что если пренебречь различием $\int_0^t \varphi|_{x=L} d\tau$, то оба эти выражения отличаются интегралом $\frac{1}{a^2} \int_0^t \left. \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=L} d\tau$.

Поэтому нефтеотдачу при расчете $\sigma(x, t)$ по конечно-разностной схеме (44) определим следующим образом

$$\eta(t) = \frac{1}{L(1 - \sigma_1)} \left\{ \int_0^L [\sigma(x, t) - \sigma_1] dx - a^2 \int_0^t \left. \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=L} d\tau \right\}. \quad (59)$$

¹⁾ Напомним, что под нефтеотдачей $\eta(t)$ мы понимаем количество извлеченной нефти по отношению к начальному нефтесодержанию пласта, т.е.

$$\eta(t) = \frac{1}{L(1 - \sigma_1)} \int_0^L [\sigma(x, t) - \sigma_1] dx. \quad (57)$$

$$\sqrt{1+tg^2f} < \left| \frac{2a^2}{\tilde{v}_s \Delta x} (\sqrt{1+tg^2f} - 1) - \sqrt{1+tg^2f} \right|.$$

Это дает следующее неравенство для

$$a^2 \geq \Delta x \tilde{v}_s \frac{\sqrt{1+tg^2f}}{\sqrt{1+tg^2f} - 1}. \quad (55)$$

Нижний предел для f в (55) на "волне разрежения" равен $\arctg \frac{t}{x_s}$, т.е. приближенно $tg f > \frac{1}{\tilde{v}_s}$. Учитывая, что правая часть (55) является убывающей функцией от f , мы должны наложить следующее требование на a^2 (чтобы не вводить зависимость a^2 от x):

$$a^2 \geq \Delta x \tilde{v}_s \frac{\sqrt{1+\tilde{v}_s^2}}{\sqrt{1+\tilde{v}_s^2} - \tilde{v}_s}.$$

Необходимое условие устойчивости конечно-разностной схемы (44), таким образом, имеет вид

$$a^2 = \Delta x \tilde{v}_s \frac{\sqrt{1+\tilde{v}_s^2}}{\sqrt{1+\tilde{v}_s^2} - \tilde{v}_s}. \quad (56)$$

Отметим, что "оптимальное" a^2 , найденное на ЭВМ путем численного эксперимента, с точностью до 5% совпало со значением a^2 , которое дает равенство (56).

Введение в уравнение (I) псевдовязкости дает даже при минимальном a^2 , определяемом из (56), существенное завышение величины водонасыщенности $\theta(x, t)$ в окрестности нагнетательной галереи¹⁾ (см. рис. 2). Вследствие этого интересующая нас величина нефтеотдачи

¹⁾ За истинное значение водонасыщенности принимается то, которое дается теорией Баклея-Леверетта, т.е. то, которое должно вычисляться без введения псевдовязкости.

вычисляется с абсолютной погрешностью (завышением), которая непрерывно увеличивается, достигая к концу интересующего нас промежутка времени величины порядка 10%¹⁾.

Легко видеть, однако, что точность вычисления нефтеотдачи при введении псевдовязкости в уравнение Баклея-Лаверетта может быть повышена. С этой целью проинтегрируем уравнения (I) и (29) по прямоугольной области $\{0 \leq \tau \leq t, 0 \leq x \leq L\}$. Это дает

$$\int_0^L [\sigma(x, t) - \sigma_1] dx = \frac{v}{m} \left[\int_0^t (\varphi|_{x=0} - \varphi|_{x=L}) d\tau \right],$$

т.е.

$$L(1 - \sigma_1) \eta(t) = \frac{v}{m} \left(t - \int_0^t \varphi|_{x=L} d\tau \right) \quad (57)$$

для уравнения (I) и

$$L(1 - \sigma_1) \eta(t) = \frac{v}{m} \left(t - \int_0^t \varphi|_{x=L} d\tau \right) + a^2 \int_0^t \left. \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=L} d\tau \quad (58)$$

для уравнения (29).

Сравнение (57) и (58) показывает, что если пренебречь различием $\int \varphi|_{x=L} d\tau$ и $a^2 \int \left. \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=L} d\tau$, то оба эти выражения отличаются интегралом $a^2 \int \left. \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=L} d\tau$.

Поэтому нефтеотдачу при расчете $\sigma(x, t)$ по конечно-разностной схеме (44) определим следующим образом

$$\eta(t) = \frac{1}{L(1 - \sigma_1)} \left\{ \int_0^L [\sigma(x, t) - \sigma_1] dx - a^2 \int_0^t \left. \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_{x=0}^{x=L} d\tau \right\}. \quad (59)$$

¹⁾ Напомним, что под нефтеотдачей $\eta(t)$ мы понимаем количество извлеченной нефти по отношению к начальному нефтесодержанию пласта, т.е.

$$\eta(t) = \frac{1}{L(1 - \sigma_1)} \int_0^L [\sigma(x, t) - \sigma_1] dx. \quad (57)$$

Оказывается, что в изотермическом случае величина нефтеотдачи, определенная подобным образом, отличается от истинного ее значения, получаемого из (57) или интегрированием по δ в уравнении (5), не более на 0,5 - 1% от порового объема пласта.

Из этого, однако не следует, что ошибка в определении разности нефтеотдач $\delta \eta(t)$ при неизотермических и изотермических условиях фильтрации достигает погрешности в вычислении $\eta(t)$. Действительно, интеграл $a^2 \int \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=L} d\tau$ при изотермических и неизотермических условиях фильтрации принимает близкие значения одного и того же знака. Погрешность же в определении отклонения неизотермической нефтеотдачи от изотермической, вызванная введением псевдовязкости, определяется разностью таких интегралов. При величине $\delta \eta(t) \cong 5-10\%$ от начального нефтесодержания пласта разность этих интегралов оказывается, по расчету, величиной порядка 0,1 - 1%. Это означает, что погрешность при вычислении разности нефтеотдачи $\delta \eta(t)$ приблизительно на порядок ниже, чем при вычислении самой нефтеотдачи.

Уточним, что мы понимаем под погрешностью счета и под "истинным" значением нефтеотдачи.

Ошибка в вычислении нефтеотдачи складывается из нескольких погрешностей. Это, во-первых, погрешность самой теории, которую мы не рассматриваем. Во-вторых, это только что оцененная погрешность, вызванная введением псевдовязкости в исходное уравнение Баклея-Левверета. В-третьих, это погрешность, вызванная приближенным вычислением температуры. Теоретическая оценка возможной ее величины дается в следующем параграфе, а вычисление - при анализе результатов расчетов. В-четвертых, это погрешность, возникающая при решении на ЭВМ конечно-разностного уравнения (44) для $\delta \eta$ с последующим интегрированием насыщенности по формуле (59). Именно эта погрешность подразумевается под погрешностью счета,

а под истинной величиной нефтеотдачи понимается величина ее, получающаяся в итоге решения на ЭВМ конечно-разностного уравнения для B_i^k и интегрирования полученного дискретного поля насыщенности по "исправленной" формуле (59) для нефтеотдачи.

При задании расходов расчета нефтеотдачи отдельных пропластков многослойного пласта проводится также, как в пласте однородном, только расчет температурного поля ведется не по формуле Лаверье, а по "формуле аддитивности".

§2. Расчет нефтеотдачи при задании забойных давлений

п1. Обзор литературы. При постоянном расходе (т.е. суммарной скорости фильтрации) в каждый пропласток и предзаданном поле температуры для определения нефтеотдачи необходимо лишь знание распределения насыщенности. Вычисление поля насыщенности на основе теории Баклея-Левретта при таких предположениях и являлось предметом изучения всех работ, рассмотренных в §1 п1¹). методика, предложенная в п2 предыдущего параграфа, также относилась к случаю задания постоянного расхода в каждый пропласток и предзаданию температурного поля.

На практике, однако, задаются не постоянные расходы нагнетательных скважин (галерей), а забойные давления. Таким образом, необходимо разработать методику расчета нефтеотдачи многослойного (и даже однослойного) пласта в неизотермическом случае при задании забойных давлений на нагнетательной и эксплуатационной галереях. Эта задача является существенно более сложной, чем задача оп-

¹Как уже отмечалось, Фейерс [7] не считает поле температуры предзаданным. Однако и он рассматривал задачу при постоянной суммарной скорости фильтрации. Кроме того, он сильно упростил задачу совместного определения полей насыщенности и температуры, пренебрегая потерями тепла в окружающие пласт породы.

ределения нефтеотдачи в неизотермических условиях при задании расходов: оказывается невозможным рассматривать распределение температуры независимо от распределения насыщенности (даже при сохранении предположения о совпадении теплоемкостей воды и нефти). Действительно, в этом случае поля насыщенности $\sigma(x, t)$, температуры $T(x, t)$ и суммарной скорости фильтрации однородного пласта подлежат определению из условий

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{v(t)}{m} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\sigma, \mu(T)) = 0, \quad (60)$$

$$\sigma|_{t=0} = \sigma_1, \quad 0 < x < \infty, \quad (61)$$

$$\sigma|_{x=0} = \sigma_2, \quad t > 0, \quad (62)$$

$$v(t) = \frac{k \Delta p(t)}{\int_0^L \frac{dx}{\frac{f_g(\sigma)}{\mu_g(T)} + \frac{f_w(\sigma)}{\mu_w(T)}}}, \quad (63)$$

$$k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c_2 \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x, z < \infty, \quad t > 0, \quad (64)$$

$$-v(t) c_0 \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{2k_2}{h} \frac{\partial T}{\partial z} = c_1 \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < \infty, z=0, \quad t > 0, \quad (65)$$

$$T|_{t=0} = T_0, \quad 0 \leq x, z < \infty, \quad (66)$$

$$T|_{x=z=0} = T_1, \quad t > 0. \quad (67)$$

Здесь $\Delta p(t)$ - перепад давления на расстоянии L между нагнетательной и эксплуатационной галереями; координата x направлена вдоль пласта; z - перпендикулярно ему.

В уравнениях (64), (65) сохранена схематизация Ловьерье. Как видно из (60)-(67), поля насыщенности и температуры зависят от суммарной скорости фильтрации $v(t)$, которая сама зависит как от температуры, так и от насы-

ценности.

В изотермическом случае замена временной переменной t по формуле [4, 35]

$$\tau = \frac{1}{v} \int_0^t v(s) ds \quad (68)$$

с точностью до обозначений временной переменной переводит уравнение (60) в (I), поэтому в изотермическом случае водонасыщенность $\bar{\sigma}$ определяется в функции x и τ . Зная $\bar{\sigma}(x, \tau)$ (по формулам (5) и (6)), можно определить суммарную скорость фильтрации v в функции от τ , а затем, согласно (68), и зависимость t от τ :

$$t = v \int_0^{\tau} \frac{ds'}{v(s')}$$

Это означает, что задача определения поля насыщенности при задании давлений в изотермическом случае сводится к задаче с заданием постоянной скорости фильтрации путем пересчета времени.

В неизотермическом случае подстановка (68) задачу не упрощает. Действительно, поле температуры, а вместе с ним и относительная вязкость μ в функции от времени τ , определенного согласно (68), не известны. Это значит, что трудность расчета подстановкой (68) переносится на вычисление температуры, а задача определения поля насыщенности не отделяется от задачи определения температурного поля.

Нам известны только две работы, относящиеся к рассматриваемому вопросу. Это, во-первых, книга [36], во-вторых - работа [37].

В начале гл. VI, своей работы А.А. Аббасов [36] рассматривает однородный пласт, заполненный однофазной жидкостью, которая поршневым образом вытесняется жидкостью, обладающей теми же физико-химическими свойствами. В нагнетательной скважине поддерживаются заданное постоянное давление и температура, отличная от начальной пластовой.

Изучается влияние температуры на изменение во времени относительного расхода $q(t) = Q(t) / Q_0$ нагнетательной (или эксплуатационной) скважины (Q_0 - расход скважины до нагнетания горячей воды). Расчет температурного поля пласта ведется в двух различных постановках:

- а) "точной" схемы (в смысле [38])
- б) теплоизолированного пласта.

В [36] в таблице автор приводит зависимость $q(\tau)$ от безразмерного времени τ . При изменении τ от нуля до 200 $q(\tau)$ возрастает более чем в 1,5 раза, однако разница в величине $q(\tau)$ при учете потерь тепла в окружающие породы по "точной" схеме и без учета тепла не превышает 1,5%. Основываясь на этом, А.А. Аббасов при рассмотрении задачи о вытеснении нефти горячей водой вычисляет температурное поле без учета потерь тепла в окружающие пласт породы.

Оказывается, однако, что безразмерное время $\tau = 200$ соответствует реальному времени порядка 30 суток для величин теплофизических констант, характерных для нефтяных пластов. За такое незначительное время, по сравнению со временем разработки нефтяных месторождений (10-20 лет), влияние потерь тепла в окружающие пласт породы на температурное поле его очень незначительно. Кроме того, ссылаясь на работу Н.А. Авдонина и Л.И. Русинштейна [16], А.А. Аббасов предполагает практическое совпадение скачков насыщенности при изотермических и неизотермических условиях фильтрации. Это предположение в данной ситуации остается совершенно необоснованным, так как вывод о практическом совпадении скачков насыщенности при изотермических и неизотермических условиях фильтрации в [16] относился к однородному пласту при задании постоянных расходов, а не забойных давлений. Поскольку предположение о совпадении скачков насыщенности при изотермических и неизотермических условиях фильтрации имеет для методики А.А. Аббасова существенное значение, ее нельзя признать сколько-

ниоудь удовлетворительной. Количественные же результаты ее не позволяют судить о влиянии условий неизотермичности фильтрации на нефтеотдачу в реальных условиях эксплуатации пластов из-за отмеченной краткосрочности прогнозирования.

Авторы второй работы [37] А.Г. Спилетт и Р.Л. Нильсен ставили перед собой конкретную цель - приблизиться как можно ближе к условиям эксплуатации месторождения Окуне-оик. Ими был выделен участок реального пласта, на котором было расположено четыре эксплуатационных и две нагнетательных скважины. Расчет полей температуры и насыщенности проводился конечно-разностным методом. При этом в направлении простирания пласта было размещено 30 узлов конечно-разностной сетки, так что между некоторыми скважинами располагалось не более 1-2 узлов. Очевидно, что при такой сетке можно рассчитывать на получение лишь весьма приближенной информации о распределении насыщенности в пласте. Между тем, авторы, не задумываясь над вопросом о целесообразности этого, учитывают множество деталей, заведомо вносящих минимальный вклад в отклонение неизотермической нефтеотдачи пласта от нефтеотдачи изотермической. Так, они учитывают сжимаемость воды и нефти, их термическое расширение и т.п. В то же время температурное поле они рассчитывают с большой погрешностью: ошибка на отдельных участках может достигнуть величины порядка $100^{\circ} F$ при температуре нагнетаемой воды $400^{\circ} F$. При столь приближенном расчете температуры и выбранной сетки учет всех перечисленных деталей совершенно нецелесообразен. Таким образом, публикация работы Спиллета и Нильсена в методическом отношении никак не продвинула вперед решение проблемы определения влияния термических факторов на нефтеотдачу пластов.

п2.Методика расчета нефтеотдачи однородного пласта

Решение задачи (60)-(67) требует весьма больших затрат машинного времени при применении ЭВМ. Цель же

нашей работы состоит в разработке методики, пригодной для серийных расчетов на ЭВМ среднего класса. В связи с этим необходимо пользоваться каким-то приближенным алгоритмом, не приводящим к существенным погрешностям. Для задания такого алгоритма воспользуемся соображениями по аналогии.

В одной из ранних работ [39], посвященных анализу температурного поля однородного пласта при нагнетании в него через скважину жидкости с температурой, отличной от начальной пластовой, температура пласта определялась с помощью коэффициента теплообмена α между пластом и окружающими его породами. Этот постоянный коэффициент теплообмена α в [39] определялся исходя из априорных соображений. Г.Е. Малофеев [8] сопоставил решение аналогичной линейной задачи (с постоянным α) с экспериментальными данными, полученными им на линейной модели пласта. Оказалось, что решение линейной задачи дает удовлетворительное совпадение с результатами эксперимента лишь для малых времен. Однако он показал, что если в это решение внести коэффициент $\alpha(t)$, зависящий от времени и определенный путем наложения теоретической кривой на экспериментальную, то расчет по такой "исправленной" формуле дает вполне удовлетворительные результаты.

Этот вывод Г.Е. Малофеева позволил предположить, что если в формулу Лаверье, полученную интегрированием системы (64)-(67) при постоянной v ввести $v(t)$ переменную, то результат должен оказаться близким к тому результату, который был бы получен интегрированием ее при этой переменной $v(t)$. Это предположение было проверено Н.А. Ардониним и К.С. Белоглазовым [26]. Оказалось, что для получения этим методом хорошего совпадения результатов расчета с решением системы (64)-(67) методом конечных разностей, необходимо в формулу Лаверье ввести скорость фильтрации $\bar{v}(t)$, осредненную следующим образом:

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{2} \left[v(t) + \frac{1}{t} \int_0^t v(\tau) d\tau \right]. \quad (69)$$

Это означает, что температурное поле однородного пласта определяется нами по следующей приближенной формуле

$$u(x, t) = \operatorname{erfc} \frac{x}{\bar{v}(t) h \sqrt{\frac{c_0^2}{k_2 c_2} \left(t - \frac{c_1 x}{c_0 \bar{v}(t)} \right)}} \cdot \eta \left(t - \frac{c_1 x}{c_0 \bar{v}(t)} \right). \quad (70)$$

(Обозначения теплофизических констант такие же, как в формуле (15)).

В дальнейшем мы пользуемся следующей методикой решения системы (60)–(67). Пусть известны распределения температуры $T(x, t_k)$ и насыщенности $\sigma(x, t_k)$ для момента времени t_k и суммарная скорость фильтрации $v(t_j)$ для $j = 0, 1, \dots, k$. Принимая $T(x, t_k)$ и $\sigma(x, t_k)$ постоянными за промежуток времени от t_k до t_{k+1} , из уравнения (63) находим $v(t_{k+1})$. После этого по формуле Лаверье с $\bar{v}(t_{k+1})$, определенной согласно (69), вычисляем поле температуры $T(x, t_{k+1})$. Зная $v(t_{k+1})$ и $T(x, t_{k+1})$, из конечно-разностной аппроксимации уравнения (60) находим распределение насыщенности $\sigma(x, t_{k+1})$.

Для численного решения уравнения Баклея-Лаверетта использовалась его конечно-разностная аппроксимация (44), подробно исследованная в предыдущем параграфе. Единственное отличие заключалось в том, что шаг по времени $\Delta t_{k+1} = t_{k+1} - t_k$ выбирался переменным исходя из условия

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \tilde{v}_s(t_{k+1}) \quad (71)$$

где $\tilde{v}_s(t_{k+1})$ получено из (?), если в это уравнение

вместо v подставить $v(t_{k+1})$.

Нахождение $v(t_{k+1})$ из уравнения (63) не представляет затруднений вычислительного характера.

Небольшое изменение предложенной выше методики позволяет на основе теории Баклея-Леверетта рассчитывать также вытеснение загустевающей нефти, если не происходит ее структурирования. Действительно, пусть при температуре T_3 ($T_1 < T_3 < T_0$, где T_0 - начальная температура пласта, а T_1 - температура нагнетаемой воды) кривая вязкости нефти имеет вертикальную асимптоту, т.е. при $T(x,t) \leq T_3$ нефть становится неподвижной; пусть далее, для $T(x,t) > T_3$ нефть остается ньютоновской жидкостью. Тогда в области, где $T(x,t) < T_3$ из основного уравнения (I) получаем $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv 0$ (так как $\varphi \equiv I$ при $\mu = \mu_v / \mu_n = 0$), т.е. $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$, что и означает застывание нефти. Введение псевдовязкости в уравнение (I) нарушает условие $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$ при $T(x,t) < T_3$ (так как в этом случае из уравнения (29) получаем $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}$), поэтому расчет следует вести следующим образом. На каждом временном слое t_k определяется точка x'_1 разностной сетки, такая, что $T(x'_1, t_k) \leq T_3$, а $T(x'_1 + \Delta x, t_k) > T_3$. После этого расчет по конечно-разностной схеме (44) ведется только в области справа от точки x'_1 .

В предложенной методике расчета неизотермической нефтеотдачи однородного пласта самым существенным упрощением является расчет температурного поля по формуле Лаврье (70) с переменной скоростью фильтрации, осредненной по формуле (69). Поэтому необходимо оценить влияние погрешности в вычислении температурного поля на точность определения нефтеотдачи.

Обозначим через $T(x,t)$ вычисленную температуру, через $T^*(x,t)$ - "истинное" ее значение, а через $\sigma(x,t)$ и $\sigma^*(x,t)$ - соответствующие им поля насыщенности. Пусть далее, $\eta(t)$ и $\eta^*(t)$ - соответствующая нефтеотдача (определенная согласно (59)). Наконец, че-

рез $S^* \eta(t) = \eta(t) - \eta^*(t)$ обозначим погрешность в вычислении неферотдачи, вызванную погрешностью в вычислении поля температуры.

Интегрируя уравнение Баклея-Левретта (60) по x от нуля до L , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L (\sigma - \sigma_1) dx + \frac{v(t)}{m} \varphi(\sigma, \mu) \Big|_{x=0}^{x=L} = 0,$$

соответственно

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L (\sigma^* - \sigma_1) dx + \frac{v^*(t)}{m} \varphi(\sigma^*, \mu^*) \Big|_{x=0}^{x=L} = 0.$$

Отсюда

$$L(1 - \sigma_1) \frac{d}{dt} \delta^* \eta(t) + \left[\frac{v(t)}{m} \varphi(\sigma, \mu) - \frac{v^*(t)}{m} \varphi(\sigma^*, \mu^*) \right]_{x=0}^{x=L} = 0$$

Разложим $v^*(t) \varphi(\sigma^*, \mu^*) \Big|_{x=L}$ в окрестности точки $v(t) \varphi(\sigma, \mu) \Big|_{x=L}$ в ряд Тейлора, ограничиваясь линейными членами разложения и пренебрегая разностью $v(t) - v^*(t)$ (поскольку $v(t)$ менее чувствительно к возмущениям поля насыщенности, чем $\varphi(\sigma, \mu)$). Получаем

$$\left[\frac{v(t)}{m} \varphi(\sigma, \mu) - \frac{v^*(t)}{m} \varphi(\sigma^*, \mu^*) \right]_{x=L} = \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{v(t)}{m} \varphi(\sigma, \mu) (\sigma^* - \sigma) + \frac{\partial}{\partial T} \frac{v(t)}{m} \varphi(\sigma, \mu) (T^* - T) \right]_{x=L}$$

Приближенная замена $(\sigma^* - \sigma) \Big|_{x=L}$ на $\frac{2}{L} \int_0^L (\sigma^* - \sigma) dx$ дает

$$(\sigma^* - \sigma) \Big|_{x=L} = -2(1 - \sigma_1) \delta^* \eta(t).$$

Таким образом, получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\delta^* \eta(t)$:

$$\frac{d}{dt} \delta^* \eta(t) + F(t) \delta^* \eta(t) + \Phi(t) = 0, \quad (72)$$

где

$$F(t) = \frac{2v(t)}{mL} \frac{\partial}{\partial \sigma} \varphi(\sigma, \mu) \Big|_{x=L}; \quad \Phi(t) = -\frac{v(t)(T^* - T)}{m(1 - \sigma_1)L} \frac{\partial}{\partial T} \varphi(\sigma, \mu) \Big|_{x=L} \quad (73)$$

Интегрирование уравнения (72) дает (с учетом начального условия $\delta^* \eta(0) = 0$)

$$\delta^* \eta(t) = \int_0^t \Phi(\tau) e^{-\int_{\tau}^t F(\lambda) d\lambda} d\tau. \quad (74)$$

Как видно из (73), величины $F(t)$, $\Phi(t)$, а значит и $\delta^* \eta(t)$, зависят от изменения во времени величин $v(t)$, $(T - T^*) \Big|_{x=L}$ и $\sigma(L, t)$. Поэтому дадим лишь несколько общих соображений о характере изменения величины $\delta^* \eta(t)$.

Во-первых, из (73) видно, что $\delta^* \eta(t) \equiv 0$ до тех пор, пока $(T - T^*) \Big|_{x=L} = 0$ (т.е. пока возмущение температурного поля не дошло до точки $x = L$) или пока $\sigma(L, t) = \sigma_1$ (так как в этих случаях $\Phi(t) = 0$). Во-вторых, после того, как $\sigma(x, t) \Big|_{x=L}$ стало близким к σ_1 , $\Phi(t)$ и $F(t)$ практически равны нулю, так как производные функции $\varphi(\sigma, \mu)$ равны нулю при предельных значениях насыщенности. Это означает, что характер изменения $\delta^* \eta(t)$ таков: при $t < \underline{t}$ $\delta^* \eta(t) \equiv 0$, при $\underline{t} < t < \bar{t}$ $\delta^* \eta(t)$ является непрерывной, хотя и, быть может, не монотонной функцией времени (так как $\Phi(t)$ может менять знак в зависимости от знака разности $(T - T^*) \Big|_{x=L}$). При $t > \bar{t}$ $\delta^* \eta(t)$ практически уже не меняется, т.е. остается равной $\delta^* \eta(\bar{t})$.

I) Заметим, что $F(t) > 0$, т.е. всегда $\exp\left[-\int_{\tau}^t F(\lambda) d\lambda\right] < 1$.

п3. Применение разработанной методики для расчета нефтеотдачи многослойного пласта. Как уже указывалось, мы рассматриваем многослойный пласт, сложенный из плоскопараллельных гидравлически разобщенных, но термически контактирующих пропластков. Такая схема далека от структуры реальных неоднородных пластов, тем не менее рассмотрение ее имеет существенное прикладное значение, поскольку позволяет делать выводы об условиях фильтрации в реальных пластах. Заметим, прежде всего, что с прикладной точки зрения интересно рассматривать такие модели многослойного пласта, на которых термические эффекты могут проявляться наиболее отчетливо, — модели пластов, в которых контактируют пропластки резко различной проницаемости. С инженерной точки зрения очевидно, что пласты, в которых колебания проницаемости невелики, при расчете следует трактовать как однородные.

Наши расчеты проводились на модели двух- и трехслойного пластов при отношении проницаемостей отдельных пропластков 1:10 и 1:10:2 соответственно (результаты этих расчетов сообщаются в следующей статье настоящего сборника). Расчеты показали, что если начальные скорости фильтрации в соседних пропластках отличаются больше, чем в 3-5 раз, то влиянием менее проницаемого пропластка на более проницаемый можно полностью пренебречь. Это позволяет вести расчет нефтеотдачи многослойного пласта при задании забойных давлений в два этапа. Сначала рассчитывается нефтеотдача $\eta(t)$ и суммарная скорость фильтрации $v(t)$ в наиболее проницаемом пропластке с пренебрежением влияния нагнетания воды в пропластки менее проницаемые. Таким образом, на первом этапе расчета пласт рассматривается как однослойный однородный. На втором этапе расчета вычисляются нефтеотдачи и скорости фильтрации менее проницаемых пропластков. Влияние температурных полей более проницаемых пропластков учитывается посредством "формулы аддитивности", так как распределение скоростей филь-

рации в этих пропластках уже найдено. Возможность рассмотрения наиболее проницаемого пропластка как однородного пласта основывается на том, что температурное возмущение менее проницаемых пропластков сказывается лишь в окрестности нагнетательной галереи, причем со временем это влияние становится менее заметным, так как увеличение скорости фильтрации со временем в более проницаемом пропластке происходит намного быстрее, чем в пропластках менее проницаемых.

Заметим в заключение, что вся методика расчета без изменений переносится на радиальный случай. Действительно, замена пространственной переменной по формуле

$$x = \frac{v}{q} \pi r^2 \quad (75)$$

(q - расход нагнетательной скважины на единицу мощности пласта) переводит уравнение Баклея-Левретта и формулу Ловерье из линейного случая в радиальный (см., например, [12]).

Автор пользуется возможностью выразить свою искреннюю благодарность научному руководителю профессору Л.И. Рубинштейну за постоянную поддержку и помощь в этой работе.

Литература

1. Buckley S.E. and Leverett M.C. Mechanism of fluid displacement in sands. Trans. AIME, 146, 1942, pp. 107-116.
2. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. УМН, 14, вып.2 (86), 1959, стр.87-158.
3. Рождественский В.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к

газовой динамике. М., "Наука", 1968.

4. Ч а р н ы й И.А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостолтехиздат, 1963.
5. К о л л и н з Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М., "Мир", 1964.
6. О л е й н и к О.А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. УМН, 14, вып. 2 (86), 1959, стр. 165-170.
7. F a u e r s F.J. Some theoretical results concerning the displacement of a viscous oil by a hot fluid in a porous medium. Journal of Fluid Mech., 13, part 1, 1962, pp. 65-76.
8. М а л о ф е е в Г.Е. Сравнительная оценка формул для расчета нагревания пласта при нагнетании горячей жидкости. Нефтяное хозяйство, 1962, №4, стр. 48-52.
9. А в д о н и н Н.А. О некоторых краевых задачах математической теории теплопроводности, связанных с проблемой термического воздействия на пласт. Канд. дисс. Рига, 1964.
10. Ш е й д е г г е р А.Е. Физика течения жидкостей в пористой среде. М.-Л., ГТТИ, 1960.
11. Р у б и н ш т е й н Л.И. К вопросу об определении величины и положения скачка насыщенности в задаче о распаде разрыва для уравнения Баклея-Левретта в неизотермическом случае. В настоящем сборнике.
12. А в д о н и н Н.А., Р у б и н ш т е й н Л.И. О влиянии охлаждения пласта на его нефтеотдачу. НТС по добыче нефти, вып. 28. М., "Недра", 1965, стр. 66-71.
13. А в д о н и н Н.А., Б у й к и с А.А., О р л о в В.С. Исследование влияния закачки холодной и горячей воды на температурный режим месторождения Узень. Разработка нефтяных месторождений и гидродинамика пласта. Труды ВНИИ, вып. 1.

14. L a u w e r i e r H.A. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid. Appl. Scient. Res.A.,5, 1955, No.2-3, p.145.
15. F o u r n i e r K.P. A numerical method for computing recovery of oil by hot water injection in a radial system. Soc. of petroleum engineers journal, 5, 1965, Nr.2, pp.181-190.
16. А в д о н и н И.А., Р у б и н ш т е й н Л.И. Расчет нефтеотдачи нефтяных пластов в неизотермических условиях фильтрации. Теория и практика добычи нефти. М., "Недра", 1966, стр. 195-205.
17. L a x P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equation and their numerical computation. Commun. pure and applied math.,7, 1954, pp. 159-193.
18. v o n N e u m a n n J., R i c h t m y e r R.D. A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks. J. of appl. phys.,21, 1950, p.232.
19. О л е й н и к О.А. О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения "исчезающей вязкости". УМН, 14, вып. 2 (86), 1959, стр. 159-164.
20. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О построении разрывных решений квазилинейных гиперболических уравнений как пределов решений соответствующих параболических уравнений при стремлении "коэффициента вязкости" к нулю. ДАН СССР, 111, 1956, №2, стр. 291-294.
21. К а л а ш н и к о в А.С. Построение обобщенных решений квазилинейных уравнений первого порядка без условия выпуклости как пределов решений параболических уравнений с малым параметром. ДАН СССР, 127, 1959, №1, стр. 27-30.
22. А н т и м и р о в И.Я., Б е л о г л а з о в К.С., Б у й к и с А.А., К а ц И.М., Р у б и н ш т е й н Д.И. К вопросу о влиянии охлаждения на нефтеотдачу

при вытеснении нефти, обладающей нормальной ньютоновской вязкостью. НТС по добыче нефти, вып. 37, в печати.

23. Б у й к и с А.А. Замечание по поводу формулы Ловерье в линейном случае. Латвийский математический ежегодник, 7, в печати.
24. Ч а р н ы й И.А. Нагревание призабойной зоны при закачке горячей жидкости в скважину. Нефтяное хозяйство, 1953, №2и3, стр. 18-23, 29-30.
25. Ч е к а л ю к Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта, М., "Недра", 1965.
26. А в д о н и н Н.А., Б е л о г л а з о в К.С. Приближенный расчет температурного поля пласта при переменной скорости фильтрации. В настоящем сборнике.
27. А в д о н и н Н.А. О различных методах расчета температурного поля пласта при тепловой инъекции. Изв. ВУЗов, сер. Нефть и газ, 1964, №8, стр. 39-46.
28. S p i l l e t t e A.G. Heat transfer during hot fluid injection into an oil reservoir. J. of canadian petroleum technology, oct.-dec., 1965, pp. 213-218.
29. D a v i d s o n L.B., M i l l e r F.G., M u e l l e r T.D. A mathematical model of reservoir response during the cyclic injection of steam. Soc. of petroleum engineers journal, june, 1967, pp. 174-188.
30. К о ч е ш к о в А.А., Х о м у т о в В.И. Методика и предварительные результаты экспериментального изучения процесса вытеснения нефти паром. Доклад на Всесоюзном совещании по тепловым методам разработки нефтяных месторождений и обработки призабойных зон пластов. г. Москва, 8-11 апреля 1969г.
31. Г о д у н о в К.С. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики. Математический сборник, 47 (89), 1959, стр. 271-306.
32. Г о д у н о в К.С. Разностные методы для уравнений газовой динамики (лекции для студентов) ИГУ, 1962.

33. R a p o r t I.A., Leas W.I. Properties of linear floods. Trans. AIME, 198, 1953, pp.139-148.
34. П е т р о в с к и й И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961.
35. J a h n s H.O. Lineare und radiale Verwässerung geschichteter Olträger. Erdöl Zeitschrift für Bohr- und Förderungstechnik, 77, 1961, Nr.12, S.581-602.
36. А б б а с о в А.А. Вопросы нефтяной гидродинамики. Азернефр, Баку, 1968.
37. S p i l l e t t e A.G, N i e l s e n R.L. Two-dimensional method for predicting hot waterflood recovery behavior. J. of petroleum technology, 20, 1968, Nr.6, pp.627-638.
38. Р у б и н ш т е й н Л.И. О температурном поле пласта при тепловой инъекции. Ученые записки Казанского государственного ун-та, 121, 1961, кн.5, стр.129-156.
39. Р у б и н ш т е й н Л.И. О температурном поле пласта при нагнетании в пласт горячего теплоносителя. Труды Уфимского нефтяного института, вып. 2, 1958, стр. 149-173.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА НЕФТЕОТДАЧИ ПРИ
ПОСТОЯННОЙ И ПЕРЕМЕННОЙ СУММАРНОЙ
СКОРОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ

А.А. Буйкис

§I. Исходные модели пласта и значения параметров

Расчеты нефтеотдачи при неизотермических условиях фильтрации проводились для моделей двух- и трехслойного пласта. В обоих случаях принималось, что пласт состоит из соприкасающихся, но гидравлически разобценных пропластков одинаковой мощности $h=5\text{ м}$ и пористости $m=0,2$. Проницаемости пропластков принималась равными 25 и 250 милитарси (мд) для двухслойного пласта и 25, 250 и 50 мд для трехслойного пласта, причем в случае трехслойного пласта центральным являлся наиболее проницаемый пропласток (250 мд). Расстояние L между нагнетательной и эксплуатационной галереями принималось равным 376 м. Краевое условие (I.41) для конечно-разностной схемы (I.44) задавалось при $L_1=400\text{ м. I}$

Объемные теплоемкости воды c_0 , пласта c_1 , и окружающих пласт пород c_2 принимались равными 1000, 750 и 650 ккал/м³°С, коэффициент теплопроводности окружающих пород $\kappa_2=36$ ккал/м сутки °С, начальная температура пласта $T_0=60^\circ\text{С}$, температура нагнетаемой в пласт воды $T_1=100^\circ\text{С}$ или 100°С .

Фазовые проницаемости воды $f_w(\sigma)$ и нефти $f_n(\sigma)$

При ссылке на формулу из первой нашей статьи в настоящем сборнике, перед номером соответствующей формулы в скобках ставится I.

задавались выражениями (σ - водонасыщенность)¹⁾

$$f_{\sigma}(\sigma) = \begin{cases} a_{\sigma}(\sigma - \sigma_1)^{b_{\sigma}}, & \sigma > \sigma_1; \\ 0, & \sigma \leq \sigma_1; \end{cases} \quad \begin{matrix} a_{\sigma} = 1,55; \\ b_{\sigma} = 3,01; \\ \sigma_1 = 0,15; \end{matrix} \quad (I)$$

$$f_{\mu}(\sigma) = \begin{cases} a_{\mu}(\sigma_2 - \sigma)^{b_{\mu}}, & \sigma < \sigma_2; \\ 0, & \sigma \geq \sigma_2; \end{cases} \quad \begin{matrix} a_{\mu} = 1,59; \\ b_{\mu} = 2,20; \\ \sigma_2 = 0,80. \end{matrix} \quad (2)$$

Вязкости воды $\mu_{\sigma}(T)$ и нефти $\mu_{\mu}(T)$ в функции от температуры задавались равенствами²⁾

$$\mu_{\sigma}(T) = \frac{1}{c_{\sigma} + d_{\sigma}T}; \quad \begin{matrix} c_{\sigma} = 0,419; \\ d_{\sigma} = 0,0315; \end{matrix} \quad (3)$$

$$\mu_{\mu}(T) = \frac{1}{c_{\mu} + d_{\mu}T}; \quad \begin{matrix} c_{\mu} = -0,049; \\ d_{\mu} = 0,0053. \end{matrix} \quad (4)$$

Для иллюстрации характера этой зависимости приведем значения $\mu_{\mu}(T)$ для нескольких значений T .

¹⁾ Зависимость фазовых проницаемостей от насыщенности получены методом наименьших квадратов из экспериментальных данных, полученных Уфимским нефтяным институтом для цементированных песков. При выбранных фазовых проницаемостях максимальная возможная нефтеотдача равна 76,74%. Здесь и везде в дальнейшем нефтеотдача дается в % от начального нефтесодержания пласта (т.е. $\eta(t)$ в равенствах (I.57) и (I.59) должно умножаться на 100).

²⁾ На интервале 40-140°C температурная зависимость вязкости нефти совпадает с кривой вязкости пластовой нефти из скважины №245 XIV горизонта месторождения Узень (по данным Всесоюзного нефте-газового научно-исследовательского института (ВНИИ)). На интервале 10-40°C ход температурной зависимости получен с помощью экстраполяции.

| | | | | | | | |
|---------------|----------|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| T (°C) | 9,25 | 10 | 15 | 30 | 40 | 60 | 100 |
| μ_n (спз) | ∞ | 250 | 33 | 9,1 | 6,1 | 3,7 | 2,1 |

Таким образом, в области низких температур рассмотрена быстро загустевающая нефть, а в области высоких - маловязкая. В рассматриваемом интервале изменения температуры (от 10 до 100°C) вязкость нефти изменяется в 120 раз, в то время как вязкость воды только в 5 раз (от 1,4 спз при 10°C до 0,28 спз при 100°C).

При расчете процесса вытеснения загустевающей нефти рассматривались два случая: 1) нефть застывает при $T_3 = 20^\circ\text{C}$; 2) застывание происходит при $T_3 = 30^\circ\text{C}$ (вязкость нефти в области температур, больших 40°C , оставалась прежней, т.е. рассчитывалась по формуле (4)).

Тогда в первом случае имеем

$$\begin{aligned} c_n &= -0,163; & 20^\circ\text{C} < T \leq 40^\circ\text{C}, \\ d_n &= 0,00815; \end{aligned} \quad (5)$$

во втором

$$\begin{aligned} c_n &= -0,489; & 30^\circ\text{C} < T \leq 40^\circ\text{C}. \\ d_n &= 0,0163; \end{aligned} \quad (6)$$

Примем для дальнейшего следующие обозначения. Индекс "1" относится к высокопроницаемому пропластку (250 мд), "2" - к наименее проницаемому (25 мд), а "3" - к пропластку с проницаемостью 50 мд. Знак "~" над какой-нибудь величиной обозначает ее значение при изотермических условиях фильтрации. Через $\tilde{\eta}_i^*(t)$ обозначим точное значение нефтеотдачи i -го пропластка, определенное интегрированием уравнения (1.5) при задании постоянного расхода). Наконец, через $\overline{\delta\eta}_i(t)$ ($\underline{\delta\eta}_i(t)$) обозначим разность

между нефтеотдачей при нагнетании воды с температурой, большей (соответственно, меньшей) начальной пластовой температуры и нефтеотдачей при изотермических условиях фильтрации, а через $\delta\eta_i(t)$ обозначим $\bar{\delta}\eta_i(t) - \delta\eta_i(t)$.

§2. Результаты расчета нефтеотдачи при постоянной скорости внедрения воды в каждый пропласток

пI. Результаты расчета нефтеотдачи двуслойного пласта. Для расчетов при постоянной скорости фильтрации v были заданы следующие ее значения: для высокопроницаемого пропластка 0,41 м/сутки, для малопроницаемого - 0,041 м/сутки. Заметим, что приняты весьма большие значения скоростей фильтрации в обоих пропластках: потребовался бы перепад давлений порядка 300-400 атмосфер, чтобы обеспечить такие их величины. Столь большие скорости фильтрации были выбраны из расчета, чтобы скачок насыщенности прошел эксплуатационную галерею в малопроницаемом пропластке через 2-3 года - иначе счет стал бы бессмысленным: из материального баланса следует, что при задании расходов $\delta\eta(t) \equiv 0$, если скачки насыщенности эксплуатационную галерею еще не прошли

В таблице I приведены результаты расчета нефтеотдачи малопроницаемого и высокопроницаемого пропластков.

Таблица I.

| t (годы) | 2 | 5 | 8 | 10 |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
| $\tilde{\eta}_2^*(t)$ | 46,86 | 56,45 | 59,85 | 61,35 |
| $\tilde{\eta}_2(t)$ | 47,55 | 56,50 | 59,59 | 60,91 |
| $\bar{\delta}\eta_2(t)$ | -0,01 | 0,23 | 0,35 | 0,38 |
| $\delta\eta_2(t)$ | 0,02 | -0,35 | -0,67 | -0,82 |
| $\delta\eta_2(t)$ | -0,03 | 0,58 | 1,02 | 1,20 |
| $\tilde{\eta}_1(t)$ | 65,56 | 69,88 | 71,54 | 72,21 |

Сравнение $\bar{\eta}_2(t)$ с $\tilde{\eta}_2^*(t)$ показывает, что в этом случае погрешность в вычислении нефтеотдачи по конечно-разностному уравнению (1.44) не превышает 0,7% от порового объема пласта. Величины $\delta\bar{\eta}_2(t) = -0,01\%$ (соответственно $\delta\underline{\eta}_2(t) = 0,02\%$) при $t = 2$ года - погрешности счета, так как к этому моменту скачок насыщенности эксплуатационную галерею еще не прошел. Таким образом, хотя ошибка в вычислении самой нефтеотдачи к этому моменту достигла максимума (0,7%), ошибка в определении $\delta\bar{\eta}_2(t)$ на порядок меньше и составляет лишь 0,03% (это отмечалось также в предыдущей статье).

В таблице не приведена разность между нефтеотдачей при нагнетании горячей и холодной воды $\delta\eta_2(t)$ для более проницаемого пропластка, так как с точностью до погрешности счета она равна нулю на всем рассматриваемом интервале времени.

Напомним, что на рассматриваемом интервале температур (от 10 до 100°C) относительная вязкость $\mu(T) = \mu_s(T)/\mu_n(T)$ изменяется очень сильно (в 25 раз):

$$0,55 \cdot 10^{-2} \leq \mu(T) \leq 0,135. \quad (7)$$

Несмотря на такое изменение $\mu(T)$, нет никакого влияния неизотермичности на нефтеотдачу в более проницаемом пропластке. Это позволяет утверждать, что в однородном пласте при задании постоянной суммарной скорости фильтрации можно пренебречь влиянием неизотермичности условий фильтрации на нефтеотдачу, т.е. подтвердить вывод, сделанный в работе [1] для рассмотренного в ней конкретного случая.

Как видно из таблицы I, влияние нагнетания горячей или холодной воды на нефтеотдачу незначительно также и в менее проницаемом пропластке - к 10 годам разница $\delta\eta_2(t)$ достигает только 1,2%, хотя к этому времени через более проницаемый пропласток прошло 20 поровых объемов воды и охлаждение (или прогрев), как видно из рис. I, уже существенно сказывается на поле температуры в менее про-

нищаемом пропластке.

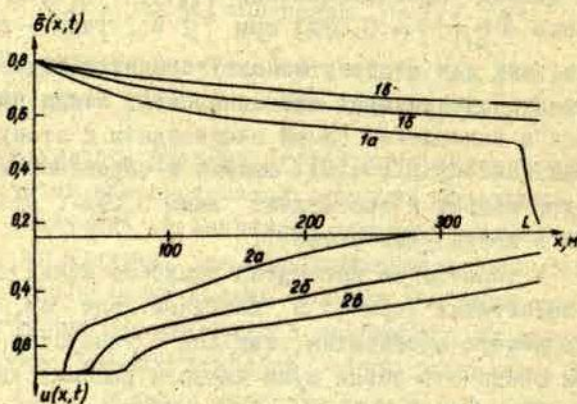


Рис. 1. Распределение водонасыщенности $\bar{G}(x, t)$ (кривые 1) и нормированной к единице температуры $u(x, t)$ (кривые 2) вдоль малопроницаемого пропластка.

$\alpha - t = 2$ года; $\delta - t = 5$ лет; $\beta - t = 10$ лет.

Из этого можно сделать следующий общий вывод. Если суммарные скорости фильтрации в каждом пропластке поддерживаются постоянными, то влияние неизотермичности условий фильтрации незначительно не только в высокопроницаемом, но и в менее проницаемых пропластках. Только в особых случаях (когда, например, малопроницаемый пропласток малой мощности расположен между двумя высокопроницаемыми или когда рассматривается чрезвычайно вязкая нефть) нагнетание холодной или горячей воды может заметно повлиять на нефтеотдачу малопроницаемых пропластков.

Эта незначительность влияния неизотермичности на нефтеотдачу обусловлена тем, что в принятой схеме (когда поддерживается постоянство во времени суммарной ско-

рости фильтрации в каждом пропластке) не учитываются различные изменения во времени фильтрационных сопротивлений этих пропластков, а следовательно, и изменение со временем отношения скоростей фильтрации в них. Учет изменения фильтрационных сопротивлений отдельных пропластков приводит к совершенно другим выводам о влиянии неизотермичности на нефтеотдачу в однородных и слоистых пластах (см. §3).

п2. Оценка погрешности расчета. Для окончательных расчетов по конечно-разностной схеме (I.44) были выбраны следующие величины шага по пространству и псевдовязкости: $\Delta x = 2,5$ м, $a^2 = 1,5$ м²/сутки. Так как величина скачка насыщенности $\tilde{\sigma}_s$ из уравнения (I.8) при $T_0 = 60^\circ\text{C}$ равна 0,4926, а $\tilde{V}_s = 0,4888$ м/сутки, то условие (I.45) дает для шага по времени величину $\Delta t = 5,115$ суток.

Для вычисления погрешности найденной величины нефтеотдачи малопроницаемого пропластка, вызванной ошибкой в определении температурного поля, воспользуемся приведенными на рис. I кривыми распределения температуры и насыщенности в нем. Рассмотрим для определенности случай охлаждения. Как видно из этого рисунка, к двум годам температурное влияние на эксплуатационной галерее еще не сказалось. Разность $(T-T^*)|_{x=L}$ становится отличной от нуля приблизительно через $t = 2,5$ года. К этому времени $\sigma|_{x=L} \cong 0,4$ и $F \cong 0,4 \cdot 10^{-2}$. К пяти годам $\sigma|_{x=L} \cong 0,55$, $T|_{x=L} \cong 52^\circ\text{C}$. Как следует из оценок, приведенных в [2], ошибка в определении температуры при принятых скоростях фильтрации не превышает 1%, т.е. $(T-T^*)|_{x=L} \leq 0,5^\circ\text{C}$. Это означает, что к пяти годам $F \cong 0,17 \cdot 10^{-2}$; $\phi \cong 0,11 \cdot 10^{-4}$. Подставляя в интеграл (I.74) средние за этот промежуток значения $F(t)$ и $\phi(t)$, получаем

$$\delta \eta^*(1800) \cong \int_{900}^{1800} \frac{0,11 \cdot 10^{-2}}{2} e^{-\frac{1800}{\tau}} \int_0^{\tau} 0,29 \cdot 10^{-2} d\lambda d\tau = 0,16 \cdot 10^{-2},$$

т.е. ошибка в определении нефтеотдачи малопроницаемого пропластка к пяти годам может достигь 0,16% от начального

нефте содержания пласта. Очевидно, что с прикладной точки зрения с такой ошибкой можно не считаться.

В связи с малостью влияния неизотермичности условий фильтрации на нефтеотдачу двухслойного пласта расчет ее для трехслойного пласта при задании постоянной скорости внедрения в каждый пропласток не проводился.

§3. Анализ результатов расчета нефтеотдачи и скорости фильтрации при задании забойных давлений

п1. Вытеснение нефти водой из однородного пласта.

Наиболее проницаемый (250 мд) пропласток двухслойного (или трехслойного) пласта можно рассматривать при расчете как однородный пласт, так как влияние на него температурных полей менее проницаемых пропластков пренебрежимо мало (при выбранных параметрах).

Примем для дальнейших расчетов¹⁾, что перепад давлений $\Delta p(t)$ между нагнетательной и эксплуатационной галереями постоянен и равен 40 атмосфер (одинаков для всех пропластков).

На рис.2 (кривая I) показана нефтеотдача наиболее проницаемого пропластка при изотермических условиях фильтрации, а в таблице 2 приведены величины нефтеотдачи, характеризующие процесс вытеснения нефти из этого пропластка.

Таблица 2.

| t (годы) | 2 | 5 | 8 | 10 | 15 | 20 |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| $\tilde{\eta}_1(t)$ | 47,7 | 57,5 | 60,8 | 62,0 | 63,6 | 64,5 |
| $\delta\eta_1(t)$ | 0 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
| $\underline{\delta}\eta_1(t)$ | 0 | -0,4 | -0,6 | -0,7 | -0,8 | -0,8 |
| $\overline{\delta}\eta_1(t)$ | 0 | 0,6 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,4 |

¹⁾ Величины параметров расчета (шаги конечно-разностной сетки, a^2) приводятся в конце этой статьи (§5.).

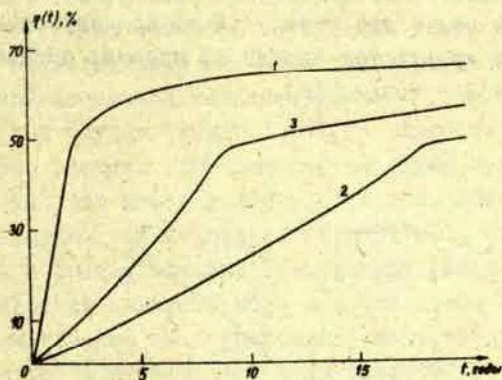


Рис. 2. Нефтеотдача при изотермических условиях фильтрации.

- 1 - высокопроницаемый пропласток (250мд);
- 2 - малопроницаемый пропласток (25 мд);
- 3 - пропласток с проницаемостью 50 мд.

Влияние на нефтеотдачу погрешности в вычислении температуры начинает сказываться только через 10 лет эксплуатации, причем максимум функции $\Phi(t)$ (из (1.74)) достигает только $10^{-5}-10^{-6}$ (это связано с тем, что к этому моменту времени $\sigma|_{x=L} > 0,7$, т.е. $\partial\varphi/\partial T$ весьма мало). Отсюда ясно, что с ошибкой в определении нефтеотдачи высокопроницаемого пропластка можно не считаться.

На рис. 3 показано изменение во времени суммарной скорости фильтрации в этом пропластке. Как видно из рисунка, до двух лет скорости фильтрации при нагнетании горячей и холодной воды практически совпадают (к двум годам кончилась безводная эксплуатация высокопроницаемого про-

пластка и нефтеотдача его достигла почти 50%, т.е. 2/3 от возможной). Поэтому разность в нефтеотдаче при нагнетании горячей и холодной воды невелика (к 20 годам она меньше 1,5%, хотя к этому времени скорости фильтрации различаются более чем в два раза, причем при нагнетании горячей воды через пропласток прошло 18 поровых объемов воды, а при холодной - только 11).

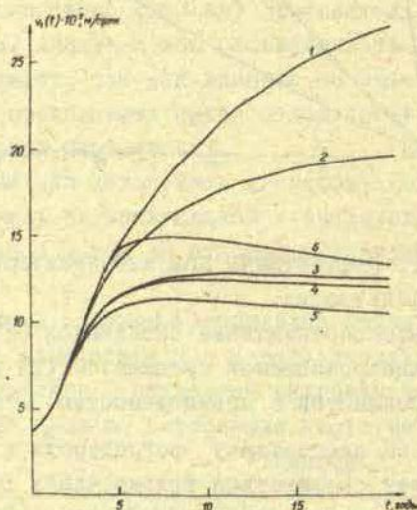


Рис. 3. Скорость фильтрации в однородном пласте (пропласток с проницаемостью 250 мд).
 1 - нагнетание горячей воды ($T_1 = 100^\circ\text{C}$);
 2 - изотермическая фильтрация ($T \equiv 60^\circ\text{C}$);
 3 - нагнетание холодной воды ($T_1 = 10^\circ\text{C}$);
 4 - застывание ($T_3 = 20^\circ\text{C}, T_1 = 10^\circ\text{C}$);
 5 - застывание ($T_3 = 30^\circ\text{C}, T_1 = 5^\circ\text{C}$);
 6 - "тепловой вал".

Рассмотрение задачи совместного определения полей насыщенности, температуры и скорости фильтрации приводит к картине, качественно отличной от той, которая имеет место при задании постоянных расходов: при учете изменения фильтрационного сопротивления пропластка обнаруживается различное протекание процесса вытеснения нефти водой в зависимости от того, выше или ниже температура нагнетаемой воды начальной пластовой температуры.

В первом случае (когда $T_1 > T_0$) скорость фильтрации непрерывно растет. Это объясняется двумя причинами: во-первых, тем, что нефть замещается водой, обладающей меньшей вязкостью, чем нефть; во-вторых, тем, что в любой точке пласта с ростом времени температура увеличивается, вызывая уменьшение вязкости воды и нефти и, тем самым, дальнейшее уменьшение фильтрационного сопротивления пласта. При нагнетании холодной воды температура пласта постепенно понижается и через некоторое время, когда вытеснение нефти уже протекает медленнее (поскольку основная масса нефти наиболее проницаемого пропластка вытеснена), фильтрационное сопротивление этого пропластка начинает увеличиваться ввиду увеличения вязкости воды (и оставшейся нефти). Из рисунка 3 видно, что при выбранных параметрах фильтрационное сопротивление начинает увеличиваться через 10-12 лет с начала эксплуатации. Этот момент достигается тем быстрее, чем меньше отношение вязкости нефти к вязкости воды (при прочих равных условиях).

На рисунке 3 показано также влияние застывания пластовой нефти на изменение скорости фильтрации в этом пропластке. Кривая 4 относится к случаю, когда температура застывания $T_3 = 20^{\circ}\text{C}$, кривая 5 - к случаю $T_3 = 30^{\circ}\text{C}$ (при $T_3 = 30^{\circ}\text{C}$ температура нагнетаемой воды T_1 принималась равной 5°C). Как видно из этого рисунка, влияние застывания нефти на скорость фильтрации (и, тем самым, на нефтеотдачу) при $T_3 = 20^{\circ}\text{C}$ весьма мало. При $T_3 = 30^{\circ}\text{C}$ и $T_1 = 5^{\circ}\text{C}$ это влияние более значительно, однако нет качест-

венного различия между охлаждением пласта (т.е. нагнетанием холодной воды) и охлаждением пласта с учетом застывания. Подчеркнем еще раз, что при расчете предполагается, что, во-первых, при температурах, больших температуры застывания T_3 , нефть является ньютоновской жидкостью, во-вторых, при застывании не выделяется скрытая теплота кристаллизации (учет теплоты фазового перехода приводит к рассмотрению более общей системы уравнений [3]).

Из проведенного расчета вытеснения нефти водой из однородного пласта при задании забойных давлений можно сделать следующие выводы.

В однородном пласте при задании забойных давлений неизотермичность условий фильтрации не оказывает значительного влияния на его нефтеотдачу. Эта незначительность влияния обусловлена той же причиной, что и при задании постоянного расхода: фронт температуры в однородном пласте отстает от скачка насыщенности в несколько раз. При задании давлений весьма существенно, однако, меняется скорость фильтрации: для выбранных параметров скорость фильтрации за 20 лет при нагнетании горячей воды возрастает в 7 раз, при изотермических условиях фильтрации - в 5 раз, (при нагнетании холодной воды скорость фильтрации меняется немонотонно). Из столь существенного изменения скорости фильтрации следует, что выводы, полученные из расчета при заданной постоянной скорости фильтрации, нельзя применять к случаю, когда заданы забойные давления. Например, при задании постоянной скорости фильтрации разность между нефтеотдачей при нагнетании горячей воды и нефтеотдачей при нагнетании воды холодной, как уже отмечалось, тождественно равна нулю до тех пор, пока скачки насыщенности не прошли эксплуатационную галерею. При задании забойных давлений это уже не имеет места.

п2. Нефтеотдача двухслойного пласта. Так как численная проверка показала, что влиянием малопроницаемого (25 мд) пропластка на высокопроницаемый (250 мд) можно

пренебречь, то для последнего остаются в силе результаты предыдущего пункта.

Рассмотрим вытеснение нефти из малопроницаемого пропластка. Нефтеотдачи его при изотермических условиях фильтрации показана на рисунке 2 (кривая 2). В таблице 3 приведены величины $\tilde{\eta}(t)$, $\overline{\delta\eta}(t)$, $\underline{\delta\eta}(t)$, $\delta\eta(t)$ этого пропластка для некоторых моментов времени.

Таблица 3.

| t (годы) | 3 | 5 | 8 | 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 20 |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\tilde{\eta}_2(t)$ | 6,6 | 11,3 | 18,7 | 23,9 | 29,4 | 38,2 | 41,4 | 48,0 | 49,8 |
| $\overline{\delta\eta}_2(t)$ | 0,1 | 0,2 | 0,7 | 1,5 | 2,6 | 5,1 | 6,2 | 2,4 | 2,2 |
| $\underline{\delta\eta}_2(t)$ | -0,1 | -0,3 | -1,1 | -1,9 | -2,9 | -4,9 | -5,7 | -7,5 | -4,3 |
| $\delta\eta_2(t)$ | 0,2 | 0,5 | 1,8 | 3,4 | 5,5 | 10,0 | 11,9 | 9,9 | 6,5 |

Разница между вытеснением нефти горячей и холодной водой наглядно представлена на рисунке 4, на котором показано распределение водонасыщенности вдоль малопроницаемого пропластка. Для сравнения показана картина распределения водонасыщенности в более проницаемом пропластке. Из этого рисунка видно, что к 15 годам нефть практически полностью вытеснена из более проницаемого пропластка. В малопроницаемом же пропластке водо-нефтяной контакт при охлаждении находится еще на расстоянии 100 м от эксплуатационной галереи и даже при нагреве нефтеотдача этого пропластка достигала лишь 57% от возможной (при выбранных кривых фазовых проницаемостей).

Из рисунка 4 и таблицы 3 видно, что в малопроницаемом пропластке нагнетание горячей воды дает весьма существенную дополнительную нефтеотдачу $\delta\eta(t)$ по сравнению с нефтеотдачей при нагнетании холодной воды. Максимальная величина $\delta\eta(t)$ достигается в момент, когда зона резкого

изменения насыщенности при нагнетании горячей воды достигает эксплуатационной галереи. Это происходит при $t = 16,5$ лет и в этот момент величина $\delta\eta$ достигает $12,3\%$ от начального нефтесодержания пласта.

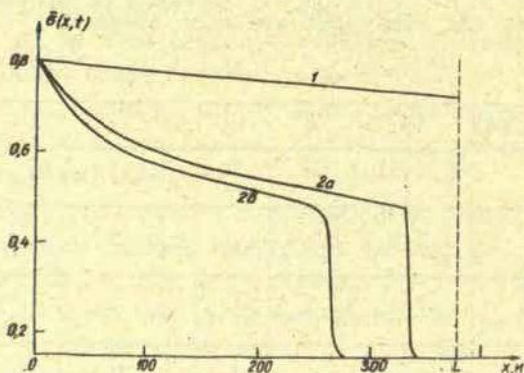


Рис. 4. Распределение водонасыщенности вдоль пласта к моменту времени 15 лет.
 1 - изотермическая фильтрация в высокопроницаемом пропластке; 2 - нагнетание горячей воды в малопроницаемом пропластке; 2 - нагнетание холодной воды в малопроницаемом пропластке.

Столь сильное влияние неизоотермичности условий фильтрации объясняется тем, что к моменту окончания безводного периода эксплуатации малопроницаемого пропластка скорости фильтрации при нагреве и охлаждении отличаются почти в два раза (см. кривые 1и 3 на рис. 5). Различия же в скоростях фильтрации вызваны сильным нагревом (соответственно охлаждением) соседним высокопроницаемым пропластком зоны, богатой нефтью: при нагреве тем-

пература на водо-нефтяном контакте к 15 годам достигает 23% от максимальной, а область вблизи нагнетательной галереи, в которой еще находится почти 10% нефти, содержащейся в этом пропластке в начальный момент, нагрета (охлаждена при нагнетании холодной воды) более чем на 80%.

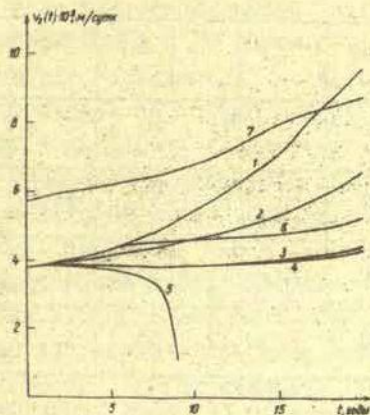


Рис.5. Скорость фильтрации в малопроницаемом пропластке.

1 - 6 - то же, что на рис.3; 7 - раздельная эксплуатация ($\Delta p = 60$ атм).

Расчет при задании расходов (§2) показывал гораздо меньшее влияние нагрева (охлаждения) малопроницаемого пропластка при том же соотношении проницаемостей (10 : 1). Это кажущееся противоречие объясняется следующим. При задании забойных давлений начальное отношение скоростей фильтрации в отдельных пропластках (равное отношению проницаемостей этих пропластков) не остается неизменным. Оно со временем существенно меняется в пользу более проницаемых пропластков. Изменение отношения скоростей фильтрации обусловлено тем, что в высокопроницаемых пропластках вы-

теснение основной массы нефти происходит за более короткий промежуток времени. Изменение со временем отношения скорости фильтрации в высокопроницаемом пропластке к скорости фильтрации в малопроницаемом пропластке для некоторых моментов времени отражено в следующей таблице 4.

Таблица 4.

| t (годы) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|
| $T_1 = 100^{\circ}\text{C}$ | 10,0 | 32,6 | 37,9 | 34,4 | 27,8 |
| $T \equiv 60^{\circ}\text{C}$ | 10,0 | 32,2 | 37,0 | 34,8 | 29,5 |
| $T_1 = 10^{\circ}\text{C}$ | 10,0 | 29,9 | 33,0 | 31,3 | 28,4 |
| $T_3 = 20^{\circ}\text{C}$ | 10,0 | 29,7 | 32,3 | 30,5 | 27,9 |

Хотя изменение со временем отношения скоростей фильтрации весьма значительно, оно мало зависит от того, рассматривается изотермическая фильтрация или нагнетание горячей или холодной воды. Это дает возможность следующей приближенной оценки процесса вытеснения нефти водой из слоистого пласта при неизотермических условиях фильтрации: из рассмотрения фильтрации при изотермических условиях находится изменение со временем отношения скоростей, после этого вычисляется изменение скорости в однородном пласте (т.е. в высокопроницаемом пропластке) при неизотермических условиях. Знание скорости фильтрации в высокопроницаемом пропластке позволяет оценить изменение скорости фильтрации в малопроницаемом пропластке. Необходимо, однако, сразу подчеркнуть, что такой прием определения скорости в малопроницаемом пропластке при неизотермических условиях может привести иногда к неверным выводам. Это иллюстрирует расчет двуслойного пласта, когда температура застыва-

ния нефти T_3 принимается равной 30°C , а $T_4 = 50^{\circ}\text{C}$. Из характера изменения скорости фильтрации в высокопроницаемом пропластке (кривая 5 на рис. 3), если воспользоваться указанным приемом, следовало бы, что скорость фильтрации в малопроницаемом пропластке должна быть практически постоянной во времени. На самом деле скорость фильтрации в этом пропластке меняется совсем иначе: через 7 лет она начинает резко уменьшаться и к 10 годам становится равной нулю, т.е. происходит "замерзание" малопроницаемого пропластка (его нефтеотдача не достигла даже 20%). Последний расчет показывает возможность исключения из эксплуатации малопроницаемых пропластков слоистого пласта и в тех случаях, когда уже некоторое время продолжалось вытеснение нефти водой из них. Напомним, что в нашем расчете не учитывается структурирование нефти, могущее только ухудшить условия фильтрации в малопроницаемых пропластках.

С целью не допустить охлаждения зон пласта, богатых нефтью, Э.В. Чекалюком с сотрудниками в 1954 г. был предложен метод "теплого вала" 4, заключающийся в том, что в течение некоторого времени с начала эксплуатации в пласт нагнетается горячая вода. Через определенный промежуток времени авторы метода рекомендуют перейти на нагнетание холодной воды, так как нефть будет вытесняться подогретой водой. Расчеты температурных полей в однородных и слоистых пластах подтвердили последнее предположение [5,6]. Однако эти расчеты проведены при задании постоянных расходов и, следовательно, не учитывают изменение фильтрационного сопротивления пласта. Проведенный нами расчет изменения скоростей фильтрации и нефтеотдачи в двухслойном пласте, когда в него в течение пяти лет нагнетается горячая вода ($T_1=100^{\circ}\text{C}$) с последующим переходом на нагнетание холодной воды с температурой 10°C , показал, что после перехода на нагнетание холодной воды резко уменьшаются (по сравнению со случаем, когда все время нагнетается горячая вода) скорости как в высокопроницаемом, так и в низкопроницаемом

пропластке (см. кривые 6 на рис. 3 и 5). Уменьшение скоростей фильтрации можно объяснить изменением вязкости нагнетаемой воды (при 10°C вязкость воды в пять раз превышает вязкость ее при 100°C). На рисунке 6 показана нефтеотдача малопроницаемого пропластка при режиме "теплового вала" (кривая 3) и нефтеотдача при нагнетании горячей или холодной воды (нефтеотдача высокопроницаемого пропластка в этом случае практически совпадает с его нефтеотдачей при изотермических условиях фильтрации).

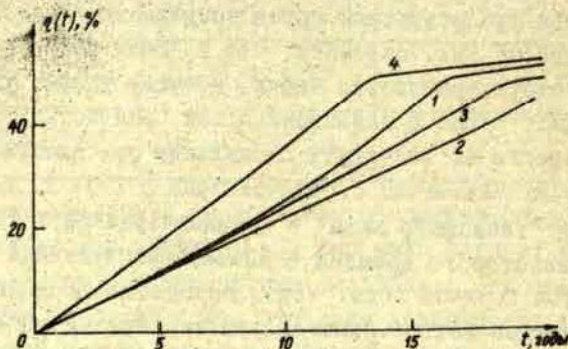


Рис. 6. Нефтеотдача малопроницаемого пропластка.

1 - нагнетание горячей воды; 2 - нагнетание холодной воды; 3 - "тепловой вал"; 4 - раздельная эксплуатация ($\Delta p = 60$ атм).

Не обсуждая здесь вопрос о возможности практической реализации, мы приводим результаты расчета нефтеотдачи малопроницаемого пропластка при дифференцированной по давлению раздельной закачке холодной воды (как это предполагается в работе [7] по отношению к месторождению Ромашки-

но). В последнем расчете принималось, что перепад давлений между нагнетательной и эксплуатационной галереями в малопроницаемом пропластке равен 60 атмосферам (в высокопроницаемом пропластке принималась обычная для наших расчетов величина $\Delta p = 40$ атмосфер). Нефтеотдача малопроницаемого пропластка показана на рисунке 6 (кривая 4), а скорость фильтрации в нем - на рисунке 5 (кривая 7). Расчет показывает весьма большую эффективность раздельной эксплуатации.

п3. Расчет нефтеотдачи трехслойного пласта. Влияние температурных полей менее проницаемых пропластков друг на друга, как показал расчет, весьма мало. Например, влияние температурного поля пропластка с проницаемостью 50 мд на распределение температур в малопроницаемом пропластке к 15 годам проявлялось лишь на расстоянии 20 м.

Приведем результаты расчета нефтеотдачи среднего по проницаемости (50 мд) пропластка.

Таблица 5.

| t (годы) | 2 | 5 | 8 | 12 | 16 | 20 |
|---------------------|-----|------|------|------|------|------|
| $\tilde{\eta}_3(t)$ | 8,5 | 23,6 | 41,2 | 51,2 | 54,5 | 56,8 |
| $\delta\eta_3(t)$ | 0,1 | 0,8 | 3,3 | 1,6 | 2,5 | 3,2 |

Приведенная таблица показывает, что разность между нефтеотдачей при нагнетании холодной и горячей воды резко падает в момент окончания безводной эксплуатации этого пропластка (8 лет), но потом опять постепенно возрастает. Однако влияние на нефтеотдачу его неизотермичности условий фильтрации существенно меньше. Влияние учета застывания нефти при $T_3 = 30^\circ\text{C}$ также весьма незначительно - скорость к 10 годам при нагнетании холодной воды равна 0,0114 м/сутки, при застывании - 0,0103 м/сутки. Изменение скоростей фильтрации показано на рисунке 7.

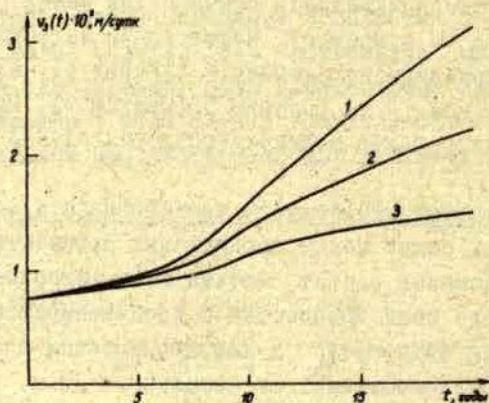


Рис. 7. Скорость фильтрации в пропластке с проницаемостью 50 мд.

Обозначения те же, что на рисунке 3.

§4. Результаты расчета нефтеотдачи двухслойного пласта при зависимости фазовых проницаемостей от температуры

Как мы отмечали при обсуждении постановки задачи в первой нашей статье (§1, п2), учет зависимости фазовых проницаемостей от температуры не вносит в расчет никаких методических затруднений. Но отсутствие обоснованных экспериментальных данных не позволяет проводить убедительное исследование влияния такого учета. Поэтому мы ограничиваемся проведением только иллюстративного расчета¹⁾.

¹⁾ При проведении этого расчета нефтеотдача вычислялась по формуле (I. 57), а в формуле (I. 69) принималось $\bar{v}(t) = v(t)$. Это, однако, практически не отразилось на величине $\delta\eta(t)$.

Расчет проведен в предположении, что фазовая проницаемость воды не зависит от температуры, а конечная нефтенасыщенность является линейной функцией температуры:

$$\sigma_2 = \sigma_{20} + \alpha(T - T_0); \quad \sigma_{20} = 0,8; \quad \alpha = 0,001(^{\circ}\text{C}^{-1}), \quad (8)$$

что приводит к изменению конечной нефтеотдачи на 11% на рассмотренном интервале изменения температуры.

В этом случае разница в нефтеотдаче при нагреве и охлаждении высокопроницаемого пропластка достигла к двум годам 3%, а к 15 - 7,5% (напомним, что к 15 годам эта разница составляла 1,3% при независимости фазовых проницаемостей от температуры). В малопроницаемом пропластке разница в нефтеотдаче к 15 годам достигает 16,5% (вместо 10%). Таким образом, суммарная потеря в нефтеотдаче по обоим пропласткам к 15 годам возросла в два раза.

Подчеркнем еще раз, что мы не придаем, однако, количественного значения этим результатам, так как они базируются на применении произвольного допущения о характере зависимости фазовых проницаемостей от температуры. Они указывают лишь на необходимость серьезного экспериментального изучения этой зависимости для воды и конкретных типов нефти.

§5. Некоторые характеристики программы

Все расчеты проводились на ЭВМ типа БЭСМ-2м. Окончательно были выбраны следующие величины шага по пространству и коэффициента псевдовязкости α^2 в уравнении (I.44): для высокопроницаемого (250 мд) пропластка $\Delta x = 5\text{ м}$; $\alpha^2 = 5\text{ м}^2/\text{сутки}$, для среднего по проницаемости (50 мд) пропластка $\Delta x = 2,5\text{ м}$; $\alpha^2 = 0,5\text{ м}^2/\text{сутки}$, для малопроницаемого (25 мд) пропластка $\Delta x = 1\text{ м}$, $\alpha^2 = 0,1\text{ м}^2/\text{сутки}$. Шаг по времени Δt определялся из условия (I.71) и колебался в пределах от двух суток (в высокопроницаемом пропластке при нагреве) до 30 суток (в менее проницаемых при вастывании).

Для получения всех результатов, приведенных в §3 по-

требовалось около 35 часов машинного времени. Расчет одного варианта (например, скорости фильтрации и нефтеотдачи высокопроницаемого пропластка на промежутке времени эксплуатации до 20 лет) требовал в среднем двух часов машинного времени. Сюда, естественно, не включено время на вариацию шага по пространству для проверки точности расчета. Выбор для высокопроницаемого пропластка $\Delta x = 10\text{м}$, $\alpha^2 = 7\text{м}^2/\text{сутки}$ уменьшает машинное время в 2-3 раза по сравнению с расчетом при $\Delta x = \alpha^2 = 5$, причем расхождение между этими расчетами не превышает 7%.

Литература.

1. А в д о н и н Н.А., Р у б и н ш т е й н Л.И. О влиянии охлаждения пласта на его нефтеотдачу. НТС по добыче нефти, вып. 28. М., "Недра", 1965, стр. 66-71.
2. А в д о н и н Н.А. О различных методах расчета температурного поля пласта при тепловой инжекции. Изв. ВУЗов, сер. Нефть и газ, 1964, №8, стр. 39-46.
3. К у р б а н о в А.К., Р о з е н б е р г М.Д. Неизотермическая фильтрация многокомпонентных жидкостей. Теория и практика добычи нефти. М., "Недра", 1968, стр. 102 - 108.
4. Ч е к а л ю к Э.Б., С т е п а н ч и к о в К.А., О г а н о в К.А., С н а р с к и й А.Н. Тепловая обработка истощенного нефтяного пласта. Нефтяное хозяйство, 1954, № 1 и 2.
5. Р у б и н ш т е й н Л.И. О температурном поле пласта при нагнетании в пласт горячего теплоносителя. Труды Уфимского нефтяного института, вып. 2, 1958, стр. 149-173.
6. А в д о н и н Н.А., Б о р и с о в Ю.П., О р л о в Б.С., Р о з е н б е р г М.Д. Распределение температуры в неоднородном пласте месторождения Узень. НТС по добыче нефти, вып. 34. М., "Недра", 1968, стр. 133-137.

7. Мингареев Р.Ш., Вахитов Г.Г., Султанов С.А. Влияние закачки холодной воды на процесс разработки и нефтеотдачу пластов Ромашкинского месторождения. Нефтяное хозяйство, 1968, №11, стр. 26-30.

С о д е р ж а н и е

| | |
|--|----|
| Предисловие | 3 |
| ✓ Л.И. Р у б и н ш т е й н. К вопросу об определении величины и положения скачка насыщенности в задаче о распаде разрыва для уравнения Баклея-Левретта в неизотермическом случае | 8 |
| Н.А. А в д о н и н, К.С. Б е л о г л а з о в. Приближенный расчет температурного поля пласта при переменной скорости фильтрации | 24 |
| ✓ А.А. Б у й к и с. Методика расчета нефтеотдачи на основе теории Баклея-Левретта при задании расходов или забойных давлений | 33 |
| ✓ А.А. Б у й к и с. Результаты расчета нефтеотдачи при постоянной и переменной суммарной скорости фильтрации | 77 |

РАСЧЕТЫ

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ НЕФТЕОТДАЧИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТОВ

Ученые записки, том 123

Редактор Н.Буртнице

Корректор Г.Гальченко

Подписано к печати 7/1 1970 г. ЯТ 12011 Зак. № 24

Ф/б 60x84/16. Писчая № 1. Физ.п.л. 6,4. Уч.и.л. 4,6

Тираж 600 экз.

Цена 47 коп.

Отпечатано на ротапринте. г.Рига-Ц, бульв.Райниса, 19,
Латвийский государственный университет им.Петра Стучки.

44/5502

ЦЕНА 47 коп.

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTĒKA



0509023670