Emanuels Grinbergs

Motives for reflections

Part Two

Facsimile of manuscript
(in Russian)

The archive of Emanuels Grinbergs manuscripts

University of Latvia

Riga, December 2013

Annotation

The article (in three pieces of manuscripts), written in Russian, contains some reflections on graph theory. It may be written in 1973.

The graph on page 30 built from Petersen's graph is the flower snark J_5, see http://en.wikipedia.org/wiki/Flower_snark. E. Grinbergs was building these graphs before 1975, when graphs named flower snarks were introduced by Rufus Isaacs.

D. Zeps

dainize@mii.lu.lv

Мотивы для размышлений $\underline{II}$.

N 9622

Неориентированные кубические графы.

В дальнейшем G – <u>всегда</u> связный кубический униграф без петель и перешейков, ~~...~~ ~~...~~, плоский или неплоский – смотря по умолчанию. Графы других типов обозначаем через G' или $\tilde{G}$.

В некоторых отношениях графы G проще произвольных графов, напр. их матрицы инциденций и смежности имеют известные постоянные суммы по строкам и столбцам; хроматическое число ≤ 3 (по Бруксу), хроматический класс (если G не K_4) 3 или 4 (по Визингу); всегда есть совершенное паросочетание с перекрывающимися циклами, покрывающими все рёбра [Берж, стр. 207] или другими специальными свойствами [Там же, стр. 208]; если G – плоский, то двойственный граф – триангуляция, т.е. плоский граф с максимальным числом рёбер для данного числа вершин (какова наиболее простая формулировка соответствующего экстремального свойства у G?), и т.д.

С другой стороны, преобразование данного графа G' в G, рассматриваемое далее в 1.2.-1.3. вроде подсказывает, что класс графов G не беднее класса всех графов по некоторым топологическим свойствам, напр. по налагаемости на поверхности данного рода с минимальным числом линий скрещений рёбер. Поэтому не исключено, что интересующие нас плоскостные свойства графов несколько легче изучить на графах G, а потом обобщить на произвольные графы. Далее изложены некоторые факты, а больше — вопросов, более или менее тесно связанных с плоскостными свойствами графов G.

016423

1. Непосредственные плоскостные свойства.

1.1. Из частичных подграфов Понтрягина - Куратовского, у G могут быть только графы типа 3 домов и 3 колодцев. Нельзя-ли найти другой, практически более удобный критерий неплоскостности для них, напр. анализируя случаи, когда останазывается алгоритм Я.Я. Дамбита, модифицирующ другие критерии плоскостности (о критерии ~~[illegible]~~ Мус-Лейна будет речь в п.2.1.) или работая с какими-то числовыми, полиномиальными или символическими матрицами и определителями (ср. ниже п.2., и „Мотивы...I").

Можно-ли найти критерии наложимости G без пересечений на k плоскостей, хотя бы для $k=2$ (для общих графов, как кажется, таких критериев вообще нет), на тор и вообще поверхности данного рода? (Возможно, здесь могут помочь работы киевских графистов - Юменко и других.)

026424

<u>Преобразование $G' \to G$, общий идеи.</u>

1.2. Преобразование произвольного униграфа G' (неорграфа, без петель и перешейков) в G и обратно.

Общий принцип преобразования (рис. 1): в каждой вершине $x \in G'$ задается „циклический порядок" рёбер, исходящих из x, каждое x заменяется на цикл по схеме:

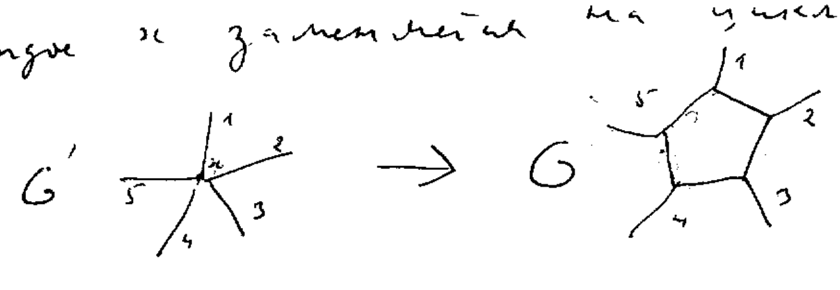


Рис. 1.

Циклом без хорд будем называть любой элементарный цикл G такой, что G не имеет рёбер типа α (рис. 2), не входящих в цикл, но связывающих две вершины цикла (пример:

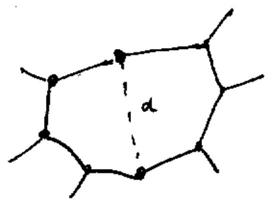


Рис. 2.

в плоском рисунке без пересечений плоского G все границы областей — циклы без хорд).

Фактороидом (2-ой степени) без хорд будем называть такой фактороид, состоящий только из циклов без хорд. Пример: граф Петерсена, у которого все 6 фактороидов состоят из циклов без хорд.

Указанное выше преобразование $G' \to G$ имеет следующие свойства: 0/6425

~~каждой~~ число вершин G равно двойному числу рёбер G';

каждая вершина $x \in G'$ порождает цикл без хорд $\in G$, а множество всех таких вершин — фактороид F без хорд графа G.

множество рёбер $\in G'$ порождает совершенное паросочетание W в G, причём любое ребро $\in W$ связывает вершины двух различных циклов $\in F$.

Ясен и обратный переход $G \to G'$, если в G выделен и известен некоторый фактороид F без хорд: „стягивая" ~~…~~ циклы этого фактороида в вершины, мы получим некоторый G'.

Что можно сказать о наличии и числе φ фактороидов без хорд у данного G, плоского или неплоского (примеры графов с большими и малыми или нулевыми значениями φ, оценки φ снизу и сверху и т.д.)? Например у шестивершинных G:

$\varphi = 1$, Рис. 3. $\varphi = 0$,

6428

у куба $\varphi = 3$ и т.д.

Все графы G, имеющие хотя бы один фактороид без хорд, очевидно, можно получить следующим образом: берем систему элементарных циклов F длины c_i, при чем все $c_i \geq 3$,

$$n = \sum_i c_i \equiv 0 \pmod 2$$

и ни одно из c_i не больше суммы всех остальных (это, как кажется, необходимо и достаточно — доказать или дополнить!).

Потом подходящим образом, гарантируя для чисел c'_i ещё не использованных вершин циклов выполнение условия

ПZ/А427

$$2c'_i \le \sum_i c'_i \quad \text{для всех } i,$$

соединяем попарно вершины различных циклов рёбрами, которые образуют W (или обеспечить связность и отсутствие перемычек?).

Каково число возможных систем соединений, если все вершины пронумерованы? Понятно, если игнорировать нумерацию, то получаются и изоморфные графы, с „усиленными изоморфизмами", превращающими F в F и W в W. Группа этих „усиленных изоморфизмов" содержит в качестве подгрупп все группы диэдров, соответствующие отдельным циклам (смещение на 1,2 шага в том же направлении всех точек присоединения рёбер W и изменение направления обхода цикла этими точками). Если среди c_i есть одинаковые, то к „усиленным изоморфизмам" добавляются ещё и перестановки таких циклов между собой.

В результате число получаемых неизоморфных G значительно меньше числа ρ соединений при пронумерованных вершинах. Напр. если F состоит из 2 циклов, 016428

то обязательно $c_1 = c_2$ и $\rho = (c_1)!$; $c_1 = c_2 = 3$ дают 1 граф, $c_1 = c_2 = 4$ дают 2 графа. Можно ли указать хороший вид записи, обеспечивающий получение только одного представителя для каждого класса – усиленного изоморфизма?
Этот способ построения G с фактороидами без хорд сводит исследование таких G к исследованию следующего комбинаторного объекта:

списка циклов номеров вершин (12..)(..)(..)... и списка пар номеров. В каждом из этих списков только по одному разу встречается каждый номер, а каждая пара содержит номера из различных циклов.

Понятно, если берем такие списки циклов и пар и допускаем появление в парах также и двух несмежных номеров одного цикла, то получаем представление некоторого G посредством какого-то фактороида и соответствующего паросочетания. У данного G много таких представлений равно числу фактороидов, однако в силу автоморфизмов G число неизоморфных представлений может быть меньше. Для куба, например, мы имеем:

3 изоморфных представления с фактороидами без хорд и $c_1 = c_2 = 4$;

6 изоморфных представлений с $c_1 = 8$, т. е. гамильтоновым циклом.

Для графа Петерсена: 6 изоморфных представлений с $c_1 = c_2 = 5$.

Если G имеет гамильтонов цикл H, то можно пронумеровать вершины по порядку следования на этом цикле — такой G с 2ν вершинами однозначно определяется заданием своих ν хорд, т.е. списком ν пар неупорядоченных различных чисел из $\{1, 2, .. 2\nu\}$. Изоморфные представления порождаются [illegible] другого гамильтонова цикла (они могут и частично или даже все совпадать — пример понятно: все пары имеют вид $i, i+\nu \pmod{2\nu}$).

Не так давно на нашем семинаре говорилось о критерии плоскостности и оценке снизу минимального числа λ скрещений у плоского рисунка такого G. Как кажется, все еще нет хорошего решения для возникающей при этом вспомогательной проблемы: дан граф G''. Как найти минимальное (или одно из минимальных, если их несколько) множество вершин (или же — рёбер), после отбрасывания которых G'' становится бихроматическим. 016429

Есть, понятно, и другие вопросы, связанные с такими представлениями посредством H (списка пар). Известно, например, что в G через каждое ребро проходит чётное число гамильтоновых циклов (доказательство, скорее по идее но в плоском исполнении у Бержа, стр. 210). Из этого следует, что если общее число гамильтоновых циклов не ноль, то оно, не меньше трёх (есть ли, помимо 1 и 2, еще другие запрещенные значения для числа гамильтоновых циклов у G? Или же можно указать примеры с любыми такими числами ≥ 3?). Было бы ценным дать по возможности простой способ, как по списку пар построить список всех гамильтоновых циклов.

Преобразование рисунка $G' \to G$.

1.3. Если G' — рисунок, т.е. наложение некоторого графа на какую-то поверхность, в частности — на плоскость, то при рассмотренном в 1.2 преобразовании $G' \to G$ за циклический порядок ребер G' в каждой вершине $x \in G'$ естественно брать порядок, задаваемый рисунком. Тогда, если все x заменяются на циклы достаточно малых размеров, а часть ~~[illegible]~~

рёбер G', т.е. фрагментов рисунка G' на той же поверхности, лежащие вне этих циклов, берутся в качестве рёбер прообраза W, то скрещения рёбер G' и G будут однозначно соответствовать друг другу и в G лежат только на рёбрах W.

Если мы имели рисунок G' с минимальным возможным числом λ' скрещений, то минимум λ числа скрещений для всех рисунков, изоморфных построенному G,

будет
$$\lambda \leq \lambda',$$
при чем минимизацию λ для G можно произвести ~~двумя~~ тремя способами:

α) рассматриваются только рисунки, у которых ~~[illegible]~~ фрагменты, соответствующие $F \subset G$, не содержат скрещений;

α') рассматриваются рисунки, у которых хотя бы один фрагмент без хорд не содержит скрещений.

β) рассматриваются все рисунки.

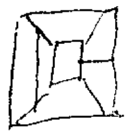
Имеем-ли мы $\lambda = \lambda'$, или же есть примеры, в которых при минимизации способом β или даже α' получаем $\lambda < \lambda'$ (для α по всем вершинам невозможно — тогда обратный переход $G \to G'$ дал бы G' с λ скрещениями).

Обратный переход $G \to G'$ возможен путём стягивания ~~фрагментов~~ циклов фрагментов без хорд и без скрещений в вершины G', т.е. при минимизациях типа α и α'. Если имеем несколько неизоморфные друг другу. Также факторизуя различные рисунки G с минимальными λ или в одном таком рисунке, то соответствующие переходы $G \to G'$ по всей вероятности дадут не изоморфные друг другу G' – имеется ли для них равенство минимальных λ, может быть не для любых, а для некоторого класса G'?

Можно-ли и как характеризовать связь двух G', получаемых из изоморфных G стягиванием циклов неизоморфных факторграфов без хорд? Есть ли условия, обеспечивающие равенство минимальных λ для них? Если получился бы положительный ответ, то мы имели бы класс графов G' с одинаковыми λ. 016432

Разное

1.4. Не исключено, что проверка оптимальных и субоптимальных алгоритмов для уменьшения числа λ скрещений в плоских рисунках проще производится с G. Последние, например, позволяют построить неприятные примеры, у которых, при минимальном λ, имеются скрещения на каждом гамильтоновом цикле, на значительной части деревьев и т.д.

1.5. Существуют плоские кубические графы G, не имеющие фактороидов без хорд, напр.  Каковы другие отличительные свойства G с такими фактороидами и без них? (Одновременно рассматривать и двойственные им триангуляции).

Пока, как кажется, есть только одно интересное использование фактороидов без хорд у плоских G, именно теорема Грёцша (Sachs, стр. 260), которую можно переформулировать следующим образом: пусть плоский G имеет фактороид без хорд и не более 3 разрезов, состоящих из 3 рёбер соответствующего паросочетания; тогда двойственный граф $\hat{G}$ – нечетырёххроматический. 01.6433

Это – доказательство частного случая гипотезы 4-х красок. Так как 4-х-хроматичность $\hat{G}$ эквивалентна хроматическому классу 3 графа G, а последние при раскраске рёбер сводятся к более простым, если имеются разрезы, содержащие 3 ребра и отделяющие более чем 1 вершину, то думается, что не слишком сложно осво-

бодить Теорему Греца от условия на
разрезы (если это уже не сделано — я
совершенно не в курсе по новым публи-
кациям). Правда, плоские G с факторизациями без пере-
весьма специальные, так что много думать именно в этом
направлении не стоит.

1.6. Упоминаемые здесь и многие
другие свойства кубических графов связаны
с факторизациями и совершенными паро-
сочетаниями. Доказательство их наличия
у Берже (стр. 207 и окрестности) не очень
обозримо. У Закса (Sachs I, гл. III) это
более обозримо, но длинно: Теорема Петер-
сена о существовании у G совершенного
паросочетания доказывается на стр. 61-70.
Нельзя ли найти более простое обос-
нование? (Опять — если такое уже не опуб-
ликовано). У всех графов G, с которыми
приходилось иметь дело, было значительно
больше одного совершенного паросочетания,
как это и следует из Теоремы у Берже стр. 207.
Нельзя ли сразу доказать, что число
совершенных паросочетаний не меньше какого-то числа, напр 3?
(ср. начало следующего пункта). П.6434

G с тремя совершенными паросочетаниями:

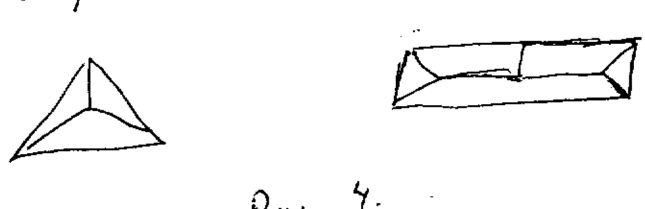


Рис. 4.

2. Статический и (или) комбинаторный подход.

026435

Комбинаторные формулировки.

2.1. Решения упомянутых выше и родственных им задач довольно просто выражаются на языке комбинаторики, именно в виде существования комбинаций с определёнными свойствами. Однако, как кажется, до сих пор нет непосредственных приёмов конструирования этих комбинаций (чем чёрт не шутит, нельзя-ли, напр., приспособить методы конструирования потоков в сетях?). Нет также удобно проверяемых условий существования комбинаций нужного типа.

Рёбра G считаем пронумерованными, их множество V, $|V| = 3\nu$. Любое подмножество $V' \subset V$ обычным способом характеризуем 3ν-мерным вектором с координатами

$$v(j) = \begin{cases} 0 & \text{если ребро } j \notin V', \\ 1 & \text{— " — } j \in V'. \end{cases}$$

Комплект таких векторов пишем в виде строк матрицы M с 3ν столбцами. Далее рассматриваемые матрицы считаем частями M с общей нумерацией столбцов.

Для начала используем расчёт по модулю 2 — суммирование и скалярное умножение векторов-строк — обычно применяемые для неорграфов.

Матрица инциденций A имеет 2ν строк, отвечающих вершинам x_i. В каждой строке 3 единицы, в каждом столбце 2, нет двух одинаковых столбцов. Имеем

$$\sum_{i=1}^{2\nu} x_i = 0. \qquad (2.1)$$

Для связного кубического графа нет других соотношений типа (2.1), A содержит только $2\nu-1$ линейно независимых строк.

Матрица B циклов состоит из векторов-строк c_j, ортогональных каждому x_i. В силу (2.1), для этого необходимо и достаточно

$$c_j x_i = 0 \qquad i = 1, 2, \dots 2\nu-1. \qquad (2.2)$$

Векторы c_j образуют линейное пространство $3\nu-(2\nu-1)=\nu+1$ измерений. Следовательно, можно выбрать в качестве базиса $\nu+1$ линейно независимых векторов c_j. Векторы остальных решений (2.2), т.е. циклов и остальных систем циклов или квазициклов по Зыкову получаем как суммы базисных векторов.

Отсутствие перемычек у (смежного) кубического графа: в M нет столбца, в котором базисные векторы B не содержали бы хотя одну единицу. Это свойство, как и смежность, легко проверяются по любому базису; для графов G, не предполагаемых, эти свойства имеют место.

Хорошо из всех способ построения базиса с помощью дерева-остова T. Проблема — установление удачнейших свойств с таким или другим базисом. Л26437

Критерий Мак-Лейна: если G — плоский, то существует „базис Уитни“: матрица B с $\nu+1$ линейно независимой строкой, в каждом столбце B 1 или 2 единицы. Этот базис отличен от всех, получаемых непосредственно с любым T.*)

Вообще подсчет или контроль числа единиц в строке или столбце матрицы 0,1 в поле по модулю 2 возможен, но неудобен. Если, напр., вектор (строка или столбец) с координатами $y_{(\alpha)}$, $\alpha=1,2,\dots,l$, должен иметь хотя бы одну единицу, т.е. не быть нулевым, то

$$\prod_{\alpha=1}^{l}\left(y_{(\alpha)}+1\right)=0.$$

Если число единиц не больше двух, то

$$\prod \left(y_{(\alpha)}y_{(\beta)}y_{(\gamma)}+1\right)=1, \qquad (23)$$

где произведение берется по всем сочетаниям трех различных индексов α,β,γ.

*) Произвольный G имеет не более одного базиса Мак-Лейна, с точностью до замены одного базисного вектора

Если число единиц должно равняться только k,
то имеют место соотношения типа (2.3), где
в скобках берутся все произведения $k+1$
координат с различными индексами и ана-
логичное соотношение с 0 в правой части и
произведениями k координат в скобках.
Эти два соотношения можно объединить
в одно, еще менее обозримое. Очевидно,
при раскрытии скобок появляются еди-
ничные члены, которые взаимно уничто-
жаются. В ряде случаев удобнее работать не
с вектором в целом, а с определенными под-
множествами его координат, как это делается
далее в п. 2.2. ПЛБ438

Фактор - это являющийся с вектором, т.е. макси-
содержащим только 2ν единиц,
число единиц.
мальное возможное (совершенное) - это допол-
Паросочетание. Вектор паросочета-
нение фактора до G. Вектор какого-то фак-
ния p равен сумме вектора какого-то фак-
тора и вектора $e(1,1,\dots 1)$. Имеет место

$$p x_i = 1 \qquad i = 1,2,\dots,2\nu-1 \tag{2.4}$$

и p имеет только ν единиц.

Решения системы (2.4) без ограничения на
число единиц соответствуют такие множества рёбер,
что каждой вершине инцидентны 1 или 3 из них.
Такое множество будем называть квазисочета-
нием. Каждое из них - дополнение какого то
квази..., возможно и пустого, до G; число их
равно $2^{\nu-1}$!

Паросочетание - частный случай квазисочетания:
тот, когда число рёбер минимально и равно ν. Вектор p паро-
сочетания характеризуется любым из эквивалентных

свойств:

1) Как отмечено, p имеет только ν единиц, т. е. минимальное число единиц для вектора паросочетания;

2) p и любое из x_i имеют только один столбец с единицами в обоих векторах.

Аналогично можно указать ряд эквивалентных условий для G с хроматическим классом 3:

1) существуют 3 паросочетания, сумма векторов которых равна $e(1,1,\dots,1)$;

2) существуют 3 вектора факторизаций, сумма которых – нулевой вектор;

3) эти три вектора независимы и в каждом столбце имеют по 2 единицы (условие аналогичное условию для базиса ~~Уитни~~ Мак-Лейна, дополненного суммой базисных векторов, только там мы имели $\nu+2$ векторов, здесь – только 3). Пример: $\langle 4\rangle$

$$\text{Б. Уитни}\left\{\begin{array}{c} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 4\ 6 \\ 2\ 4\ 5 \\ 3\ 5\ 6 \end{array}\right. \Bigg| \left.\begin{array}{c} 1\ 2\ 5\ 6 \\ 1\ 3\ 4\ 5 \\ 2\ 3\ 4\ 6 \end{array}\right\} \text{Факторизации}$$

Сумма

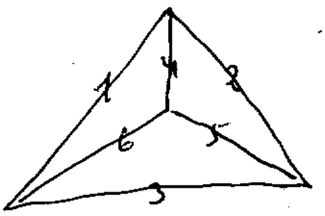


Рис. 5.

4) G налагается без скрещений на некоторую поверхность и разбивает ее на 3 области.

Пример: Тот же $\langle 4\rangle$ и проективная

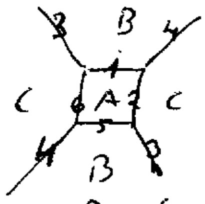


Рис. 6.

области A, B, C.

плоскости,

Гипотеза 4-х красок: из существования базиса Уитни следует хроматический класс 3 (конечно, не обратное – множество с 3 узлом, есть много неплоских G с хроматическим классом 3).

Только что рассмотренные свойства и соотношения можно выразить чисто комбинаторным образом, без матриц, но это вряд-ли более удобно. Считаем, что ребра пронумерованы 1, 2, …, 3ν; образуем множества этих номеров.

Вершины x_i: тройки номеров, (троек) число 2ν, каждый номер – только в двух тройках, нет повторения пар в двух тройках.

Перешеек: множество троек (x_i) разбивается на 2 класса, только один номер встречается в обоих классах.

Квадрупль: подмножество номеров, имеющее 2 или 0 общих номера с каждым x_i.

Фактор – аналогично, только только 2 номера общих с каждым x_i; следствие – фактороид содержит только 2ν номеров.

Факторoид без хорд: множество F из 2ν номеров, разбитое на [illegible] упорядоченные пары, согласованные с элементами подмножества. Из пар, составленных с элементами [illegible] F, все пары [illegible] элементами [illegible] подмножеств и только эти пары встречаются

п/6441

в тройках x_i.

Паросочетание: множество из ν номеров, только 1 общий с каждым x_i.

Хроматический класс 3: 3 паросочетания ~~попарно~~ без общих номеров, т.е. разбиение всех номеров на 3 паросочетания.

Можно также работать не в поле по модулю 2, а в кольце целых чисел. Тогда число единиц вектора с координатами 0,1 – это просто сумма его координат, зато сумма по модулю 2 двух координат, значениями α, β со значениями 0,1 становится нелинейной

$$\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta - 2\alpha\beta .$$

Линейная комбинация по модулю 2 векторов с координатами 0,1 получится как вектор, координаты которого – полиномиальные функции от одноименных координат слагаемых векторов. Билинейные уравнения становятся проще:

для фракторондов

$$cx_i = 2,$$

для пересечений

$$px_i = 1,$$

без добавочных условий. 116442

Было-бы заманчиво найти, если это вообще возможно, какой то гибридный способ расчёта, удобный для трёх типов операций:

1) образование линейных комбинаций векторов 0,1 по модулю 2;

2) подсчёт числа единиц среди координат такого вектора;

3) выражения условий для рассматриваемых множеств рёбер.

Вариант такого способа расчёта: удобное символическое исчисление с множествами рёбер, задаваемыми списками.

Кажется, что нет ещё критериев для произвольно заданных матриц (0,1): когда это матрица циклов, или разрезов – какого то графа, кубического графа, графа G, таких плоских графов?

Обобщение проблемы фракторонда: даны k линейно независимых вектора с n координатами 0,1; по модулю 2 строим их векторное пространство.

Нахождение и определение числа решений: вектора с максимальным числом 1; ненулевого вектора с минимальным числом 1. Когда любые 2 таких максимальных вектора имеют $\geq p$ единиц на тех же местах?

Определение ~~к~~квазисочетаний и паросочетаний. 01.6443

2.2. В качестве скромного примера использования аналитического подхода рассмотрим использование параметрических представлений для указанного определения. Мы используем булевое поле, где любые величины „u" равны 0 или 1, следовательно

$$u^2 = u, \qquad (2.5)$$
$$u + u = 0.$$

+ и умножение - ассоциативны и идемпотентны; в частности $(s+u)^2 = s+u$.

Мы работаем с отдельными координатами вектора p из соотношения (2.4), т. е. каждому ребру сопоставляется своя независимая или зависимая переменная, равная 1, если ребро входит в рассматриваемое множество, и равная 0 в противном случае. Если ребрам, инцидентным вершине x, соответствуют переменные a, b, c, то в случае квази-

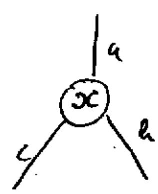


Рис. 7

сочетания для каждой вершины имеет место соотношение вида

$$a + b + c = 1, \qquad (2.6)$$

а в случае совершенного паросочетания в каждой вершине имеет место еще соотношение вида

$$ab = 0 \qquad (2.7)$$

Действительно, в силу (2.6), либо 3, либо 1 из величин a, b, c равны 1, а в силу (2.7) не может быть $a = b = 1$, т.е. оба условия выполнены тогда и только тогда, когда в точности одна из величин a, b, c имеет значение 1, а две остальные $= 0$.

Соотношение (2.7) само по себе не симметрично по отношению к a, b, c, но из сказанного видно, что вместе с (2.6) оно дает симметричные условия. Это можно проверить и формально: умножая (2.6) на a и b, видим, что из (2.6) следует

$$ab = ac = bc = ab + ac + bc,$$

так что в левой части (2.7) можно писать любую из этих величин. Этот факт можно использовать для более простого нахождения выражения левой части (2.7) в случае, когда a, b, c выражены как многочлены суммы групп величин, удовлетворяющих (2.6). Пример:

$$a = q$$

116444

$$b = \alpha + \beta + \gamma$$

$$c = a + \alpha + \beta + \gamma + 1$$

Выражение ab – наиболее простой способ расчета левой части (2.7); ac же дает, понятно, тот же результат после приведения подобных членов. Как уже указывалось в п. 2.1, сумма всех уравнений (2.6) дает $0 = 0$, а для следующих уравнений (2.6) дает ... быстрых графов групп линейных зависимостей для уравнений (2.6) нет. Поэтому систему этих уравнений можно преобразовать к эквивалентному виду, в котором $2\nu-1$ из величин $a, b, \ldots$ выражены как линейные комбинации остальных $\nu+1$; последние будем называть параметрами. Из свойств матрицы смежности (или теории электрических цепей — ведь уравнения 2.6 имеют вид уравнений Кирхгофа) следует, что зависимые переменные, выражаемые через суммы, соответствуют рёбрам некоторого дерева остова, а параметры — хордам этого дерева.

При работе с машиной вероятно стоит исследовать, что целесообразнее: искать сначала T и поступать аналогично удалённому, или же просматривать непосредственно варианты одну за другой и решать уравнения (2.6) при подходящем предписании самим выбора параметров. 111.6445

Работая от руки, если есть рисунок графа, можно выбрать T и непосредственно на рисунке отмечать около ребер обозначения параметров и слагаемые, фигурирующие в выражениях для зависимых переменных. Часто удобно параметры нумеровать подряд и обозначать их номерами $1, 2, \ldots$. Тогда, понятно, единица в выражениях обозначаются как-то иначе, напр. через E.

Если значения переменных a, b (независимых или зависимых) для двух рёбер, инцидентных некоторой вершине x, известны, то третьему ребру соответствует a+b+E (по модулю 2, как все расчёты). Таким образом непосредственно получаем значения для внешних ~~вершин~~ рёбер T, а затем и для всех остальных рёбер.

Примеры (рёбра T – красные):

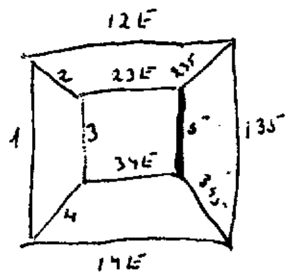


Рис. 8.

114646

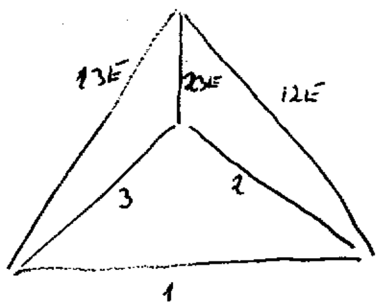


Рис 9.

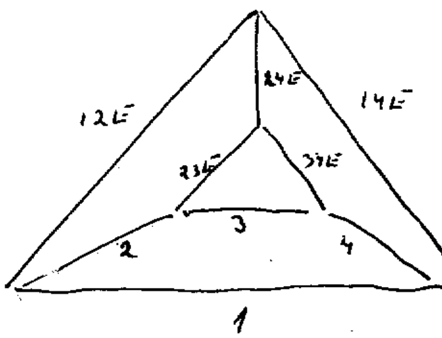


Рис 10.

... T пишутся символы рёбер соответ-

Составляем уравнения (2.7) и берем их сумму (рядом записанные символы в формулах – их произведение, а в рисунке – сумма!)

Рис. 8	Рис. 9	Рис. 10	
$12=0$	$12=0$	$12=0$	
$23=0$	$23=0$	$23=0$	
$34=0$	$13=0$	$34=0$	(2.8)
$14=0$	$12+13+23+1+2+3+E=0$	$14=0$	
$12+13+15+23+25+2+3+5=0$		$23+24+34+2+3+4+E=0$	
$13+14+15+34+45+3+4+5=0$		$12+14+24+1+2+4+E=0$	
$25+35+5=0$			
$35+45+5=0$			
сумма $0=0$	$1+2+3+E=0$	$1+3=0$	(2.9)

116447

В общем случае для графов G, как и в примерах, имеют место следующие свойства.

Символ любого параметра фигурирует около рёбер стандартного элементарного цикла, образованного соответствующей хордой и цепью из рёбер T. Если хорду называть нечётной в случае, когда этот цикл нечётной длины, то в сумме уравнений типа (2.9) (2.7) фигурируют все символы нечётных хорд и только их, со слагаемым E (рис. 9) или без парами со слагаемыми E (рис. 10.), при чём общее число слагаемых в левой части – чётное. Поэтому для бихроматического графа (рис. 8.) эта сумма дает $0=0$, т. е. любое из уравнений (2.7) – линейное следствие остальных уравнений (2.7) и независимых уравнений (2.6).

Дерево T содержит чётное число 2ν вершин. Будем называть ребро T нечётным, если после удаления этого ребра T распадается на две компоненты с нечётным числом вершин.ˣ⁾ Символ E фигурирует в рисунках около нечётных рёбер и только около них. Эти рёбра образуют единственное квазисочетание, состоящее из рёбер T. (Последний факт можно обобщить. Пусть T – дерево с чётным числом вершин, степени вершин T – любые, не обязательно ≤ 3. Определим, как выше, нечётные рёбра T, эти рёбра образуют единственное квазисочетание, являющееся частью T). В зависимости от вида T, это квазисочетание может быть паросочетанием (рис. 8, любой случай, когда T – гамильтонова цепь и т.д.), но может и содержать все рёбра T (рис. 9 и 10, и любой случай, когда все вершины T имеют нечётную степень).

Есть ли простая характеристика для всех этих случаев?

116448

Если G не бихроматический, то из линейного соотношения типа (2.9) можно один из параметров выразить как линейную комбинацию остальных и подставить это значение в суммы, указанные рисунком 6 и в соотношения типа (2.8).

ˣ⁾ Эквивалентное условие: разрез, соответствующий ребру T, содержит чётное число хорд.

Если для графов рис. 9 и 10 параметр 3 выразить через остальные, то преобразованные рисунки имеют вид

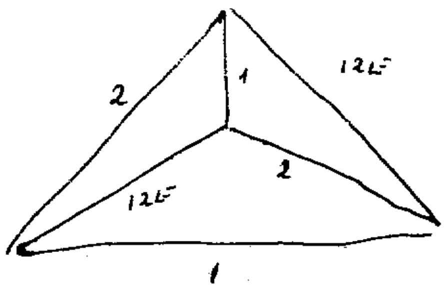
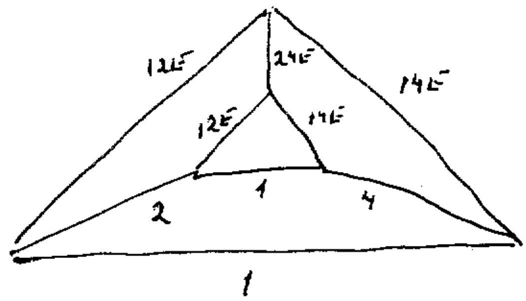


Рис. 9а.



11.6449

Рис. 10а.

Около каждого ребра снова записано нечётное число символов (включая E), значит, как и в исходной ситуации, если все параметры имеют значение E, то получаемое квазисочетание — весь граф G. Символ каждого параметра фигурирует теперь около нечётного числа рёбер, образующих либо элементарный цикл, либо два таких цикла (параметр 1 в рис 10а).

Можно ли, подходящим выбором T и заменяемого параметра, получить всегда лишние квалификаторы для оставшихся параметров?

Та же подстановка (значения 3 в конкретном случае) в систему ~~Тадка~~ (2.8) даёт существенные упрощения. Можно и заново составить эти соотношения с использованием изменённых рисунков.

Для графа рис. 9а мы получим 8450

$$12 = 0,$$

повторенное 4 раза. Набор значений $1=2=E$ даёт веса G, остальные три набора — не про- соответственно.

Для графа рис. 10а мы по два раза получим соотношения

$$12=0\ ,\quad 14=0\ ,\quad 12+14+24+1+2+4+E=0 .$$

Эта система эквивалентна соотношению

$$1+(2+E)(4+E)=0$$

Наборы значений а) $1=E$, $2=4=0$; и б) $1=0$, хотя бы один из $2,4$ равен E, дают не четыре паросочетания.

Можно ли для любого G с чётными числами циклами дать правильное определение числа и вообще нелинейно независимые и вообще второй степени? Высшие соотношения.

В бинарном поле, как в любом конечном поле, любая система уравнений эквивалентна одному уравнению достаточно высокой степени, но вопрос о алгоритме для редуцирования уравнений второй степени.

Пусть, напр., G — граф Петерсена, где 1, 2, 3, 4, 5 — параметры, соответствующие следующим друг за другом рёбрам любого пятиугольника. В качестве результирующих уравнений второй степени можем брать:

α) любые 4 из следующих (их сумма дает $0=0$):

$$1+4+13+24=0$$
$$2+5+24+35=0 \qquad (2.10)$$
$$1+3+14+35=0$$
$$2+4+14+25=0$$
$$3+5+13+25=0$$

111.6451

β) еще любое одно из

$$12=0,\quad 23=0,\quad 34=0,\quad 45=0,\quad 15=0,$$

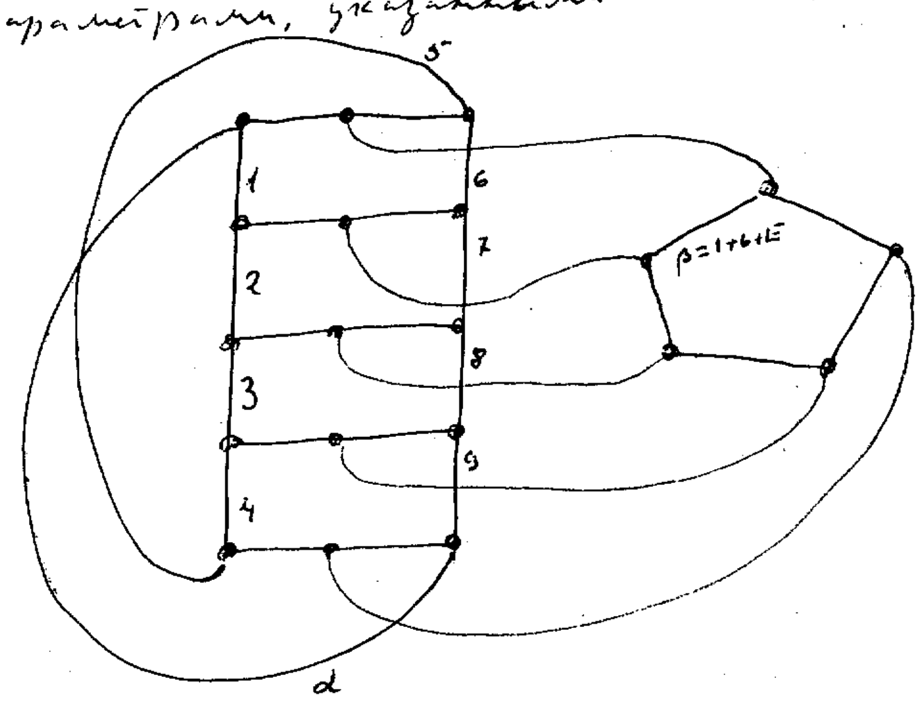
так как в силу (2.10) левые части все равны, напр.

$$2[1+4+13+24]+2[3+5+13+25]=12+23=0.$$

Имеем 6 решений: α′) $1=2=3=4=5=0$

β′) значение E имеют только 2 несмежных параметра: 1и3; 2и4; 3и5; 1и4; 2и5.

Для графа рис. 11. с 20 вершинами и 10 параметрами, указанными около рёбер, получаем



Р. 11.

результирующую систему, которую можно писать в виде

$$(1+E)(5+E)+(6+E)(\alpha+E)=E,$$
$$(1+E)(7+E)+(2+E)(6+E)=E,$$
$$(2+E)(8+E)+(3+E)(7+E)=E,$$
$$(3+E)(9+E)+(4+E)(8+E)=E,$$
$$(4+E)(\alpha+E)+(5+E)(9+E)=E.$$

Все решения, в числе 32, получаются циклическими сдвигами из следующих четырех — не указанные параметры все равны 0:

$$1=3=5=7=9=E,$$
$$1=3=5=7=E,$$
$$1=3=5=E,$$
$$1=4=7=E.$$

116452

Этот граф, как и граф Петерсена, имеет хроматический класс 4, но нет фактор-графов без хорд (у Петерсена — все без хорд).

2.3. Как видно, указанный прием не очень трудоемок при нахождении совершенных паросочетаний. Более интересным было-бы его использование для доказательств. Возвращаясь в последний раз к теореме Петерсена о существовании паросочетания, эквивалентным было-бы установление факта, что система типа (2.8) всегда имеет решение.

Это, вероятно, не просто, но перспективно в смысле методики, так как многие другие свойства графов и их найти можно выразить через аналогичные системы уравнений.

№ 6453

Если ограничиться только теоремой Петерсена, то более легким кажется следующий путь. Рёбра, входящие в некоторое квазисочетание S, будем считать сильными, а все другие рёбра графа G будем считать слабыми. Если взять в G произвольный (без повторения рёбер внутри) цикл, а слабые рёбра заходящие в этот цикл менять на сильные и наоборот, то получаем другое квазисочетание S′. Следовательно, достаточно показать: если S не парасочетание, то в G существует хотя бы один цикл C, содержащий более сильных рёбер, чем слабых. Тогда S′, полученный перемещением рёбер C, будет иметь меньше сильных рёбер, чем S. Повторное применение такой редукции за конечное число шагов доведёт до минимума числа сильных рёбер, т.е. до парасочетания.

Не исключено, что можно использовать соответственно модифицированные идеи из главы 18 у Берга. Вообще, кажется,

что стоило бы переформулировать прямо
и результаты этой главы конкретно для графов G.
Многие вещи, напр. Теорема Берже-Нормана-Рейбина, становятся значительно более простыми
и обозримыми. Желательно, понятно,
пойти дальше, особенно в направлении
плоскостных свойств. Наконец, желательно,
если это возможно, обобщить теорию
перечисляющих цепей на цепи следующего
типа: в G мы имеем квазисильные,
т.е. как отдельные сильные рёбра, так и сильные
деревья - подграфы G - состоящие из сильных
рёбер. Рассматриваются элементарные цепи, в которых допускаются
слабые рёбра - изолированные, но допускаются
целые участки, состоящие из сильных рёбер.
Ещё шаг дальше, может быть и пусто:
цепи такого же типа, сильные рёбра в G задана
произвольно.

Как уже отмечено на стр. 27, у этих деревьев все вершины
имеют нечётные степени - в данном случае либо 1, либо 3.