LVU

УЧЕНЫЕ
ЗАПИСКИ

Безразмерное, евклидово
и
полуевклидовы пространства

III

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра общей математики

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки
том 204

БЕЗРАЗМЕРНОЕ, ЕВКЛИДОВО И ПОЛУЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

III

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1974

УДК 513.015

Безразмерное, евклидово и полуевклидовы пространства, вып. Ш.

Ученые записки, т. 204, 1974.

Сборник содержит работы по дифференциальной геометрии, выполненные сотрудниками физико-математического факультета ЛГУ, аспирантами и выпускниками ЛГУ.

В безразмерном пространстве исследуются свойства проективно-аффинного пространства и аффинные коллинеации в нем.

В собственно евклидовом пространстве интерпретируется основная задача линейного программирования.

Некоторые статьи посвящены линейчатой геометрии в различных полуевклидовых пространствах.

Первый выпуск вышел в свет в 1971 году, второй - в 1972.

Ш.Д.ТРУПИН

Простейшие свойства безразмерного проективно-аффинного пространства

Безразмерное линейное векторное пространство введено А.М.Лопшицем в работе /I/. Ему же принадлежат идеи построения безразмерного проективного и аффинного пространств /2,3,4/, Некоторые простейшие свойства безразмерного проективного пространства $\mathcal{P}$ рассмотрены в работе /5/. В настоящей статье автор поставил себе целью рассмотреть простейшие свойства безразмерного аффинного пространства, полученного из пространства $\mathcal{P}$ путем выделения некоторой гиперплоскости ω и выяснить, что эти свойства вполне аналогичны тем, которые хорошо известны для аффинного пространства конечной размерности. Вполне понятно, что эти свойства должны быть получены средствами безразмерной линейной алгебры.

Пользуюсь случаем, чтобы выразить А.М.Лопшицу свою искреннюю благодарность за помощь и ценные указания.

Выделим в безразмерном проективном пространстве $\mathcal{P}$ некоторую гиперплоскость ω , которую будем называть н е с о б с т в е н н о й. Эту гиперплоскость мы оставим в пространстве $\mathcal{P}$, но её точки не будем считать точками. Совокупность точек пространства $\mathcal{P}$, из которого удалены точки несобственной гиперплоскости ω , мы назовем б е з р а з м е р н ы м п р о е к т и в н о - а ф ф и н н ы м п р о с т р а н с т в о м , которое обозначим через $\mathcal{P}^{\omega}$.*

Если $A_1(a_1)$ и $A_2(a_2)$ - две различные точки пространства $\mathcal{P}^{\omega}$, то упорядоченную пару (A_1, A_2) назовем в е к т о р о м и обозначим через $\overline{A_1A_2}$. Если векторы a_i $(i = 1, 2)$ исходного линейного безразмерного пространства

---

* Для краткости, в дальнейшем, мы будем пространство $\mathcal{P}^{\omega}$ называть б е з р а з м е р н ы м а ф ф и н н ы м п р о с т р а н с т в о м .

V принадлежат одному и тому же классу $[a]$, т.е. коллинеарны, то точки A_1 и A_2 совпадают. Вектор $\overline{A_1A_1}$ мы будем называть нулевым и обозначать через $\bar{0}$.

I. Коллинеарность векторов. Умножение вектора на число

Два вектора $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ пространства P^ω, не расположенные на одной прямой, мы назовем к о л л и н е а р н ы м и, если точки A_i и B_i $(i=1,2)$ принадлежат одной двумерной плоскости и точка пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2 принадлежит несобственной гиперплоскости ω. Мы будем называть эти векторы коллинеарными также и в случае, когда все эти 4 точки принадлежат одной прямой. В обоих случаях будем писать: $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$.

Выведем необходимые и достаточные условия коллинеарности двух векторов. Допустим сначала, что векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ не принадлежат одной прямой и что в пространстве P точки A_i и B_i определены классами $[a_i]$ и $[b_i]$, а точка $Q(q)$, в которой пересекаются прямые A_1A_2 и B_1B_2 - классом $[q]$.

Тогда мы можем писать

$$q=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2 \tag{I.I}$$

$$q=\beta_1 b_1+\beta_2 b_2, \tag{I.2}$$

где α_i, β_i - некоторые отличные от нуля скаляры. Так как $Q\in\omega$, то $\omega q=0$ и из (I.I) следует, что

$$\alpha_1\cdot\omega a_1+\alpha_2\cdot\omega a_2=0,$$

т.е. что

$$\begin{aligned}\alpha_1&=-\lambda\cdot\omega a_2,\\ \alpha_2&=\lambda\cdot\omega a_1,\end{aligned}\qquad(\lambda\neq 0) \tag{I.3}$$

где λ - произвольный отличный от нуля скаляр.

Подставив найденные значения α_i в равенство (I.I), получим:

$$q=\lambda_1\left(\frac{a_2}{\omega a_2}-\frac{a_1}{\omega a_1}\right), \qquad (I.4)$$

где $\lambda_1=\lambda\cdot\omega a_1\cdot\omega a_2\neq 0$.

Так как точка $Q(q)$ принадлежит также и прямой B_1B_2, то аналогично получим

$$q=\lambda_2\left(\frac{b_2}{\omega b_2}-\frac{b_1}{\omega b_1}\right). \qquad (I.5)$$

Из (I.4) и (I.5) найдем искомое условие коллинеарности векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$:

$$\lambda_2\left(\frac{b_2}{\omega b_2}-\frac{b_1}{\omega b_1}\right)=\lambda_1\left(\frac{a_2}{\omega a_2}-\frac{a_1}{\omega a_1}\right). \qquad (I.6)$$

А.М.Лопшиц предложил называть вектор

$$\tilde{m}=\frac{m}{\omega m} \quad (\omega m\neq 0) \qquad (I.7)$$

радиус-вектором точки $M(m)$. Радиус-вектор $\tilde{m}$ точки $M(m)$ будет одним и тем же для всех векторов класса $[m]$ исходного безразмерного линейного пространства V. Очевидно, что

$$\omega\tilde{m}=1. \qquad (I.8)$$

Теперь условие (I.6) принимает вид:

$$\lambda_2(\tilde{b}_2-\tilde{b}_1)=\lambda_1(\tilde{a}_2-\tilde{a}_1), \qquad (I.9)$$

т.е. разности радиус-векторов точек B_1, B_2 и A_1, A_2 должны быть пропорциональными.

Если же все 4 точки A_i и B_i принадлежат одной прямой, то равенства (I.4) и (I.5) также выполняются. Так как точка $Q(q)$ - единственная несобственная точка этой прямой, то также будет иметь место условие (I.6) или (I.9).

Теперь докажем, что условие (I.6) или (I.9) достаточно для того, чтобы векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ были коллинеарны. В самом деле, допустим, что выполняется условие (I.6) и что прямые A_1A_2 и B_1B_2 не совпадают*, причем прямая A_1A_2 пересекает несобственную гиперплоскость ω в точке $Q(q)$, а прямая B_1B_2 - в некоторой другой точке $S(s)$. Тогда для точки Q имеет место (I.4), а для точки S равенство

$$s = \sigma\left(\frac{b_2}{\omega b_2} - \frac{b_1}{\omega b_1}\right). \quad (\sigma \neq 0) \qquad (I.10)$$

Из равенств (I.4), (I.6) и (I.10) находим, что

$$s = \frac{\sigma}{\lambda_2} \cdot q,$$

т.е. что векторы s и q принадлежат одному классу. Следовательно точки S и Q совпадают, а потому $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$.

С помощью условия (I.9) нетрудно проверить, что коллинеарность векторов является о т н о ш е н и е м э к в и в а л е н т н о с т и. Из этого условия также вытекает, что векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\lambda \cdot \overline{A_1A_2}$ $(\lambda \neq 0)$ коллинеарны. Таким образом, умножая вектор на отличный от нуля скаляр, мы получим коллинеарный с ним вектор.

2. Равенство векторов

Пусть в пространстве P^ω два вектора $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ коллинеарны, но не принадлежат одной прямой. Тогда мы их будем называть р а в н ы м и и писать: $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$, если также коллинеарны векторы $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$. В случае, когда векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ принадлежат одной прямой, мы будем называть их равными, если существует третий вектор $\overline{C_1C_2}$, не расположенный с ними на одной прямой такой, что $\overline{A_1A_2} = \overline{C_1C_2}$.

Выведем теперь условие равенства векторов, заданных радиус-векторами "концов" этих векторов.

---

* Если эти прямые совпадают, то $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$ в силу нашего определения.

Если имеет место первый случай, то, используя условия $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$ и $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2}$, мы, в силу (I.9), получим:

$$\begin{cases} \lambda_2(\tilde{b}_2-\tilde{b}_1) = \lambda_1(\tilde{a}_2-\tilde{a}_1) \\ \mu_2(\tilde{b}_2-\tilde{a}_2) = \mu_1(\tilde{b}_1-\tilde{a}_1). \end{cases} \qquad (2.I)$$

Введя обозначения $\lambda_1/\lambda_2 = \lambda$, $\mu_1/\mu_2 = \mu$, можем выразить из этой системы векторы $\tilde{b}_1$ и $\tilde{b}_2$ как линейные комбинации векторов $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ в следующем виде:

$$\begin{cases} (1-\mu)\tilde{b}_1 = (\lambda-\mu)\tilde{a}_1 + (1-\lambda)\tilde{a}_2 \\ (1-\mu)\tilde{b}_2 = \mu(\lambda-1)\tilde{a}_1 + (1-\lambda\mu)\tilde{a}_2. \end{cases}$$

Так как, согласно условию, точки B_1 и B_2 не коллинеарны с точками A_1 и A_2, то оба эти равенства могут выполняться только при $\lambda = \mu = 1$. Поэтому оба равенства (2.I) фактически сводятся к одному:

$$\tilde{b}_2 - \tilde{b}_1 = \tilde{a}_2 - \tilde{a}_1. \qquad (2.2)$$

Это и есть искомое у с л о в и е р а в е н с т в а векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$.

Легко проверить, что это условие также и достаточно для того, чтобы $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$. Действительно, (2.2) есть частный случай равенства (I.9) (при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$). Следовательно, $\overline{B_1B_2} \parallel \overline{A_1A_2}$. С другой стороны, переписав (2.2) в виде

$$\tilde{b}_2 - \tilde{a}_2 = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_1, \qquad (2.3)$$

мы можем утверждать, что $\overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_1B_1}$, а потому $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}$.

Отметим еще, что из (2.2) следует, что $\overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1}$. Четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ (с упорядоченной четверкой вершин: A_1, A_2, B_2, A_1), для которого $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$ и $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2}$, будем называть п а р а л л е л о г р а м м о м . Очевидно, что векторы, принадлежащие противоположным сторонам параллелограмма, попарно равны.

Пусть теперь векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ принадлежат одной прямой и существует третий вектор $\overline{C_1C_2}$, не принадлежащий этой прямой, такой, что $\overline{C_1C_2} = \overline{A_1A_2}$ и $\overline{C_1C_2} = \overline{B_1B_2}$. Если точки C_i определены своими радиус-векторами $\tilde{c}_i$, то из равенств

$$\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 = \tilde{a}_2 - \tilde{a}_1,$$
$$\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1 = \tilde{b}_2 - \tilde{b}_1$$

заключаем, что выполняется условие (2.2), которое верно и в этом случае.

Используя условие (2.2), нетрудно убедиться в том, что равенство векторов является отношением эквивалентности.

3. Сложение векторов

Пусть заданы два неколлинеарных вектора $\overline{OK}$ и $\overline{OL}$ с общей начальной точкой O . В двумерной плоскости, определяемой этими векторами, построим такую четвертую точку M, чтобы четырехугольник $OKML$ был параллелограммом. Тогда вектор $\overline{OM}$ будем называть с у м м о й векторов $\overline{OK}$ и $\overline{OL}$ и писать:

$$\overline{OM} = \overline{OK} + \overline{OL}. \tag{3.1}$$

Прежде всего, выясним, что такая точка M существует и притом только одна. В самом деле, если прямые OK и OL пересекают несобственную гиперплоскость ω , соответственно, в точках Q и S , то точки K, S, L и Q лежат в одной двумерной плоскости. Поэтому прямые KS и LQ пересекаются в определенной точке M . В силу определения коллинеарности векторов, имеем: $\overline{OK} \parallel \overline{LM}$ и $\overline{OL} \parallel \overline{KM}$, а потому $OKML$ - параллелограмм.

Используя условие равенства векторов (2.2), можем писать: $\tilde{m}-\tilde{l}=\tilde{k}-\tilde{o}$ или

$$\tilde{m}=\tilde{k}+\tilde{l}-\tilde{o}. \tag{3.2}$$

Следовательно, если заданы радиус-векторы точек O, K и L, то радиус-вектор точки M определяется однозначно.

Предположим теперь, что $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ - два произвольных вектора пространства P^ω. Выберем в этом пространстве произвольную точку O и построим векторы $\overline{OK}=\overline{A_1A_2}$ и $\overline{OL}=\overline{B_1B_2}$. Для векторов $\overline{OK}$ и $\overline{OL}$ с общей точкой O построим вектор $\overline{OM}=\overline{OK}+\overline{OL}$. Тогда вектор $\overline{OM}$ будем называть с у м м о й векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ о т н о с и т е л ь н о т о ч к и O и писать:

$$\left(\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}\right)_O=\overline{OM}. \tag{3.3}$$

Легко убедиться в том, что при заданном выборе точки O, точка M существует и только одна. Действительно, пусть прямые A_1A_2, OA_1, B_1B_2 и OB_1 пересекают несобственную гиперплоскость ω, соответственно, в точках Q, R, S и T. Тогда в силу нашего построения, прямые OK и OL проходят, соответственно, через точки Q и S. Поэтому точки O, K, L, Q и S расположены в одной двумерной плоскости и точка $M=KS\cap LQ$ существует и притом единственная.

Докажем теперь, что сумма $\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}$ не зависит от выбора точки O. Другими словами, если O' - произвольная другая точка пространства P^ω и

$$\left(\overline{A_1A_2}+\overline{B_1B_2}\right)_{O'}=\overline{O'M'},$$

то $\overline{O'M'}=\overline{OM}$. Действительно, в силу нашего построения, имеем: $\overline{OK}=\overline{A_1A_2}$, $\overline{OL}=\overline{B_1B_2}$, а потому

$$\tilde{k}-\tilde{o}=\tilde{a}_2-\tilde{a}_1,\qquad \tilde{l}-\tilde{o}=\tilde{b}_2-\tilde{b}_1.$$

Используя условие (3.2), мы найдем, что

$$\tilde{m}=\tilde{o}+\tilde{a}_2-\tilde{a}_1+\tilde{b}_2-\tilde{b}_1.$$

Аналогично выводим, что

$$\tilde{m}' = \tilde{o} + \tilde{a}_2 - \tilde{a}_1 + \tilde{b}_2 - \tilde{b}_1.$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\tilde{m}' - \tilde{o}' = \tilde{m} - \tilde{o},$$

а это означает, что $\overline{O'M'} = \overline{OM}$.

4. Безразмерное аффинное векторное пространство

Операция сложения векторов коммутативна. В этом можно убедиться используя "правило параллелограмма". Из основного построения (3.I) можно вывести также и "правило треугольника":

$$\overline{OK} + \overline{KM} = \overline{OK} + \overline{OL} = \overline{OM}. \qquad (4.I)$$

Используя транзитивное свойство равенства векторов и правило треугольника, легко доказать ассоциативное свойство сложения векторов. Теперь убеждаемся в том, что для каждого вектора $\overline{A_1A_2}$ вектор $\overline{A_2A_1}$ является противоположным, так как

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_1} = \overline{A_1A_1} = \overline{O}. \qquad (4.2)$$

Таким образом, множество векторов безразмерного аффинного пространства P^{ω} представляет собой абелеву группу относительно операции сложения векторов.

Нетрудно убедиться также и в том, что введенная нами операция умножения вектора на скаляр обладает свойствами ассоциативности и дистрибутивности. Все это позволяет нам утверждать, что множество векторов аффинного пространства представляет собою безразмерное линейное пространство. Будем называть его безразмерным аффинным в е к т о р н ы м пространством и обозначать через $\overline{P}^{\omega}$, в отличие от пространства P^{ω}, которое назовем безразмерным т о ч е ч н о - в е к т о р н ы м аффинным пространством.

5. Простое отношение трех коллинеарных точек

Допустим, что точки $A_i(a_i)$ $(i=1,2,3)$ принадлежат некоторой прямой, пересекающей несобственную гиперплоскость ω в точке $Q(q)$. Назовем простым отношением этих трех точек число ϑ, которое определим так:

$$\vartheta=(A_1A_2A_3)=(A_1A_2A_3Q). \qquad (5.I)$$

Здесь символ $(A_1A_2A_3Q)$ означает двойное отношение точек A_1, A_2, A_3 и Q в пространстве P.

Выясним геометрический смысл числа ϑ в нашем аффинном пространстве P^ω. Для этой цели допустим, что коллинеарные векторы $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_2}$ связаны между собой зависимостью

$$\overline{A_1A_3}=\lambda\cdot\overline{A_1A_2}. \quad (\lambda\neq 0) \qquad (5.2)$$

Тогда, в силу соотношений (5.2) и (I.9), можем писать:

$$\tilde{a}_3-\tilde{a}_1=\lambda(\tilde{a}_2-\tilde{a}_1),$$

т.е.

$$\tilde{a}_3=(1-\lambda)\tilde{a}_1+\lambda\tilde{a}_2. \qquad (5.3)$$

Кроме того, используя (I.4), имеем:

$$q=\sigma\cdot\tilde{a}_1-\sigma\cdot\tilde{a}_2. \quad (\sigma\neq 0) \qquad (5.4)$$

Из (5.3) и (5.4) следует, что

$$\vartheta=(A_1A_2A_3)=\frac{\lambda}{\lambda-1}. \qquad (5.5)$$

В частном случае, когда $\lambda=\frac{1}{2}$, т.е. $\overline{A_1A_3}=\frac{1}{2}\overline{A_1A_2}$, мы будем называть точку A_3 "серединой" отрезка A_1A_2. В этом случае $\vartheta=-1$. Таким образом, если в пространстве P^ω точка A_3 является "серединой" отрезка A_1A_2, то в пространстве P точка A_3 гармонически сопряжена с точкой

Q относительно точек A_1 и A_2. Очевидно, что при $\lambda=\frac{1}{2}$, мы получим из равенства (5.3):

$$\tilde{a}_3=\frac{1}{2}(\tilde{a}_1+\tilde{a}_2).$$

Переписав признак параллелограмма (2.2) в виде

$$\tilde{a}_1+\tilde{b}_2=\tilde{a}_2+\tilde{b}_1,$$

можем утверждать, что середины диагоналей A_1B_2 и A_2B_1 совпадают.

6. Аффинные n -плоскости

Пусть в безразмерном проективном пространстве P задана n -плоскость P_n. Множество точек этой n -плоскости, принадлежащие некоторой гиперплоскости ω, обозначим через ω_n. Выделив в P гиперплоскость ω в качестве несобственной, мы получаем безразмерное аффинное пространство P^ω. Одновременно с этим мы в множестве точек n -плоскости P_n выделяем некоторое подмножество точек $\omega_n\subset\omega$. Разность множеств P_n и ω_n обозначим P_n^ω и назовем а ф ф и н н о й n -п л о с к о с т ь ю.

Если в пространстве P n-плоскость P_n задана линейно независимыми точками $A_i(a_i)$ $(i=0,1,\dots,n)$, т.е. линейно независимыми классами $[a_i]$ в исходном линейном пространстве V, то для произвольной точки $X(x)$ этой n-плоскости мы имеем:

$$x=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i a_i. \tag{6.I}$$

Если при этом все точки A_i не принадлежат несобственной гиперплоскости ω, т.е.

$$\omega a_i\neq 0,\ (i=0,1,\dots,n), \tag{6.2}$$

то множество точек X, удовлетворяющих уравнению (6.I), представляет собою аффинную n-плоскость P_n^ω. В силу условия (6.2), для любой точки $X(x)$ этой n-плоскости выполняется неравенство

$$\omega x \neq 0. \qquad (6.3)$$

Будем говорить, что вектор $\overline{AB} \in \overline{P}^{\omega}$ **параллелен** n-плоскости P_n^{ω}, если в ней найдутся две такие точки C и D, что $\overline{AB} = \overline{CD}$. Будем при этом писать: $\overline{AB} \parallel P_n^{\omega}$. Легко доказывается следующая

Теорема 1. Если $\overline{AB} \parallel P_n^{\omega}$ и точка $E \in P_n^{\omega}$, то точка F, удовлетворяющая условию $\overline{AB} = \overline{EF}$ принадлежит P_n^{ω}.

Действительно, в силу условия теоремы, существуют две такие точки C и D, принадлежащие P_n^{ω}, что $\overline{AB} = \overline{CD}$. Из равенства $\overline{CD} = \overline{EF}$ следует, что четырехугольник $CDFE$ - параллелограмм, а потому по формуле (3.2),

$$\tilde{f} = \tilde{d} + \tilde{e} - \tilde{c}. \qquad (6.4)$$

Так как точки C, D и E принадлежат P_n^{ω}, то из (6.4) следует, что и точка $F \in P_n^{\omega}$.

Следствие. Если две точки A_0 и A_1 принадлежат n-плоскости P_n^{ω}, то и любая точка X прямой A_0A_1 принадлежит P_n^{ω}.

В самом деле, если упомянутые точки определены при помощи классов $[a_0], [a_1]$ и $[x]$, то уравнение (6.1) выполняется при $\alpha_0 \cdot \alpha_1 \neq 0$, $\alpha_j = 0$ $(j = 2, \dots, n)$.

Теорема 2. Совокупность $\overline{R}$ всех векторов, параллельных n-плоскости P_n^{ω}, образует n-мерное подпространство безразмерного векторного аффинного пространства $\overline{P}^{\omega}$.

Прежде всего докажем, что существуют n линейно независимых векторов, принадлежащих $\overline{R}$. В самом деле, в P_n^{ω} найдутся линейно независимые точки $A_0, A_1, \dots, A_n$, а потому векторы $\overline{A_0A_i}$ линейно независимы и принадлежат совокупности $\overline{R}$.

Докажем теперь, что любые $n+1$ векторов, принадлежащих $\overline{R}$ линейно зависимы. Не нарушая общности доказательства, можем считать, что все эти векторы имеют общую начальную точку, например, точку B_0.

Предположим теперь, что векторы $\overline{B_0 B_j} \in \overline{R}$ $(j=1,2,\dots,n+1)$ – линейно независимы. Так как $\overline{B_0 B_j} \parallel P_n^\omega$, то в P_n^ω имеются $n+2$ точки $C_0, C_1, \dots, C_{n+1}$ такие, что $\overline{C_0 C_j} = \overline{B_0 B_j}$. В силу этих равенств, векторы $\overline{C_0 C_j}$ также линейно независимы. Однако это противоречит тому, что размерность P_n^ω равна n. Тем самым доказано, что $\overline{R}$ является n-мерным подпространством безразмерного аффинного векторного пространства $\overline{P}^\omega$. Обозначим это подпространство через $\overline{R}_n^\omega$ и будем называть н а п р а в л я ю щ и м п о д п р о с т р а н с т в о м n-плоскости P_n^ω.

Теорема 3. Если даны точка A_0 и n линейно независимых векторов $\overline{B_i C_i}$ $(i=1,\dots,n)$, то существует одна и только одна n-плоскость P_n^ω, проходящая через точку A_0 и параллельная векторам $\overline{B_i C_i}$.

Для доказательства построим векторы

$$\overline{A_0 D_i} = \overline{B_i C_i} \quad (i=1,\dots,n). \tag{6.5}$$

Система точек $A_0, D_1, \dots, D_n$ – линейно независима, а потому она определяет некоторую n-плоскость P_n^ω. Докажем, что эта плоскость единственная. В самом деле, предположим, что существует некоторая другая плоскость $P_n'^\omega$, проходящая через точку A_0, такая, что $\overline{B_i C_i} \parallel P_n'^\omega$. Тогда, согласно теореме I, в $P_n'^\omega$ найдутся такие точки D_i', что $\overline{A_i D_i'} = \overline{B_i C_i}$. Так как имеют место равенства (6.5), находим, что $\overline{A_0 D_i'} = \overline{A_0 D_i}$, т.е. что плоскости $P_n'^\omega$ и P_n^ω совпадают.

Доказанную теорему можно сформулировать еще и так;

Теорема 3а. Если дана точка A_0 и n-мерное аффинное векторное подпростарнство $\overline{R}_n^\omega$, то существует одна и только одна n-плоскость P_n^ω, проходящая через точку A_0 и для которой $\overline{R}_n^\omega$ является направляющим подпространством.

Таким образом, если плоскость P_n^ω задана при помощи линейно независимых точек A_0, A_i $(i=1,\dots,n)$, то точку A_0 можно выбрать в качестве начальной, а векторы $\overline{A_0 A_i}$ – в качестве независимых направляющих (базисных) и тогда, в силу теоремы 3, для произвольной (текущей) точки X этой плоскости будет выполняться равенство

$$\overline{A_0X} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{A_0A_i}\,, \qquad (6.6)$$

которое назовем уравнением плоскости P_n^ω.

Примечание. Можно доказать, что если точки A_0, A_i плоскости P_n^ω линейно независимы, то в качестве начальной можно выбрать любую из точек A_i $(i>0)$ и тогда векторы

$$\overline{A_iA_0}, \ldots, \overline{A_iA_{i-1}}, \overline{A_iA_{i+1}}, \ldots, \overline{A_iA_n}$$

линейно независимы, а потому также образуют базис в $\bar{R}_n^\omega$.

7. Взаимное расположение n -плоскостей

Рассмотрим в аффинном пространстве две плоскости P_ℓ^ω и P_m^ω размерности ℓ и m. Для определенности всюду в дальнейшем положим, что $\ell \leq m$. При исследовании вопроса о взаимном расположении плоскостей необходимо учесть, что $P^\omega \subset P$. Следует принять во внимание взаимное расположение их направляющих подпространств $\bar{R}_\ell^\omega$ и $\bar{R}_m^\omega$, а также и возможность наличия у них общих точек. Для пересечения и объединения этих плоскостей введем обозначения:

$$P_\ell^\omega \cap P_m^\omega = P_k^\omega, \qquad P_\ell^\omega \cup P_m^\omega = P_s^\omega.$$

Разумеется, что

$$0 \leq k \leq \ell \leq m \leq s$$

и что

$$s + k = \ell + m. \qquad (7.1)$$

7.1. Скрещивающиеся плоскости

Пусть плоскость P_ℓ^ω определена системой линейно назависимых точек A_0, A_i $(i=1,\ldots,\ell)$, а плоскость P_m^ω - линейно независимой системой точек B_0, B_j $(j=1,\dots,m)$. Тогда, выбрав в качестве начальных точек A_0 и B_0, их направляющие подпространства $\overline{R}_\ell^\omega$ и $\overline{R}_m^\omega$ определятся базисными векторами $\overline{A_0A_i}$ и $\overline{B_0B_j}$.

Предположим, что система векторов

$$\overline{A_0B_0}, \quad \overline{A_0A_i}, \quad \overline{B_0B_j} \tag{7.2}$$

линейно независима, т.е. $\overline{R}_\ell^\omega \cap \overline{R}_m^\omega = \varnothing$. Легко видеть, что обе плоскости не могут иметь общих точек $(k=0)$. В самом деле, если X -их общая точка, то по формуле (6.6) имеем:

$$\overline{A_0X} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \cdot \overline{A_0A_i}, \qquad \overline{B_0X} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \overline{B_0B_j}.$$

Так как $\overline{A_0B_0} = \overline{A_0X} - \overline{B_0X}$, то отсюда получается соотношение

$$\overline{A_0B_0} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \cdot \overline{A_0A_i} - \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \overline{B_0B_j},$$

которое противоречит условию независимости векторов (7.2).

Будем говорить, что в случае, когда плоскости P_ℓ^ω и P_m^ω не имеют ни общих направлений, ни общих точек, то эти плоскости с к р е щ и в а ю т с я.

Векторы (7.2) определяют векторное подпространство $\overline{R}_s^\omega$ размерности $s=\ell+m+1$, которое можно принять за направляющее подпространство некоторой s -плоскости P_s^ω, проходящей через точки A_0, B_0, A_i и B_j. Если выберем точку A_0 в качестве начальной, то по формуле (6.6) можем написать уравнение этой s -плоскости:

$$\overline{A_0X} = \alpha_0 \cdot \overline{A_0B_0} + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \cdot \overline{A_0A_i} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \overline{A_0B_j}. \tag{7.3}$$

Следует отметить, что в случае скрещивания плоскостей имеем:

$$\omega_\ell \cap \omega_m = \varnothing.$$

7.2. Параллельные плоскости

Допустим, что плоскости P_ℓ^ω и P_m^ω имеют k общих направлений $(\bar{R}_\ell^\omega \cap \bar{R}_m^\omega = \bar{R}_k^\omega,\ k \geqslant 1)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $\overline{B_0 B_h} \parallel \overline{A_0 A_h}$ или

$$\overline{B_0 B_h} = \lambda_h \cdot \overline{A_0 A_h} \quad (\lambda_h \neq 0,\ h = 1, \dots, k). \qquad (7.4)$$

Будем говорить тогда, что плоскости P_ℓ^ω и P_m^ω k-параллельны. При $k = \ell \leq m$ будем называть эти плоскости вполне параллельными или просто параллельными и писать: $P_\ell^\omega \parallel P_k^\omega$.

Из (7.4) следует, что

$$\bar{R}_\ell^\omega \subseteq \bar{R}_m^\omega, \quad \bar{R}_\ell^\omega \cap \bar{R}_m^\omega = \bar{R}_k^\omega, \quad (1 \leq k \leq \ell \leq m)$$

причем для $k = \ell < m$ имеем: $\bar{R}_\ell^\omega \subset \bar{R}_m^\omega$, а для $k = \ell = m$: $\bar{R}_\ell^\omega = \bar{R}_m^\omega$.

Рассмотрим сначала случай, когда обе плоскости не имеют общих точек $(P_\ell^\omega \cap P_m^\omega = \Phi)$. Тогда в силу (7.4), среди векторов (7.2) мы будем иметь $\ell + m - k + 1$ линейно независимых. Поэтому обе наши плоскости можно вместить в аффинное пространство $P_{\ell+m-k+1}^\omega$. Если выберем в качестве начальной точку A_0, то уравнение этого пространства можно записать в виде:

$$\overline{A_0 X} = \alpha_0 \cdot \overline{A_0 B_0} + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \cdot \overline{A_0 A_i} + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j \cdot \overline{A_0 B_j}. \qquad (7.5)$$

Предположим теперь, что плоскости P_ℓ^ω и P_m^ω имеют общую точку. Пусть, например, $B_0 = A_0$. Тогда из (7.4) следует, что точки A_0, A_h и B_h, взятые по три, коллинеарны. Следовательно, плоскости P_ℓ^ω и P_m^ω имеют общую k-плоскость P_k^ω, определяемую линейно независимыми точками A_0, A_h $(h=1,\dots,k)$; $P_\ell^\omega \cap P_m^\omega = P_k^\omega$. Объединение $\bar{R}_s = \bar{R}_\ell^\omega \cup \bar{R}_m^\omega$ определяется $\ell + m - k$ линейно независимыми векторами

$$\overline{A_0A_i}\,,\quad \overline{A_0A_h}\quad (h=k+1,\dots,m).$$

Обе плоскости можно вместить в пространство P_s^ω размерности $s=l+m-k$, определяемое системой линейно независимых точек

$$A_0,\ A_i\ (i=1,\dots,l)\,,\ B_h\ (h=k+1,\dots,m).$$

Уравнение этого пространства будет:

$$\overline{A_0X}=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\cdot\overline{A_0A_i}+\sum_{h=k+1}^{m}\beta_h\cdot\overline{A_0B_h}. \qquad (7.6)$$

Заметим, что в случае k -параллельности имеем:

$$\omega_l\cap\omega_m=\omega_k\,,$$

а в случае полной параллельности -

$$\omega_l\subseteq\omega_m.$$

В крайних случаях, когда $k=l\le m$ имеем: $P_l^\omega\subseteq P_m^\omega$. Согласно нашему определению, в обоих этих случаях плоскости P_l^ω и P_m^ω (вполне) параллельны.

7.3. Пересекающиеся плоскости

Предположим, что плоскости P_l^ω и P_m^ω имеют k -мерное пересечение P_k^ω, определяемое их общими линейно независимыми точками

$$A_0=B_0\ ,\quad A_h=B_h\quad (h=1,\dots,k)$$

и что система векторов

$$\overline{A_0A_i}\ (i=1,\dots,l),\ \overline{A_0B_p}\ (p=k+1,\dots,m) \qquad (7.7)$$

линейно независима. Тогда обе плоскости k -параллельны, т.к. они имеют общее направляющее подпространство R_k^ω, определяемое k линейно независимыми векторами $\overline{A_0A_h}$. Естественно в этом случае обе плоскости P_l^ω и P_m^ω называть **пересекающимися**. Обе эти плоскости можно вместить в пространство P_s^ω размерности $s = l + m - k$, определяемое, например, линейно независимыми точками

$$A_0, A_i, B_p \quad (i = 1, \dots, l; \; p = k+1, \dots, m).$$

Уравнение этого пространства фактически не отличается от уравнения (7.6.).

Может случиться, что обе наши плоскости имеют только одну общую точку $(k=0)$, например, $B_0 = A_0$ Тогда эта точка и система линейно независимых векторов (7.7) определяют пространство P_s^ω размерности $s = l + m$, в которое можно вместить обе эти плоскости.

Легко убедиться в том, что пересекающиеся плоскости тогда и только тогда (вполне) параллельны, когда одна из них содержится в другой $(P_l^\omega \subseteq P_m^\omega)$.

Л и т е р а т у р а

I. Лопшиц А.М. Некоторые задачи тензорной алгебры в линейных безразмерных пространства. - Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1948, вып.VI. М., 1948, с.365-419.
2. Лопшиц А.М. Некоторые вопросы проективной, аффинной и начертательной геометрии в безразмерном пространстве. - Труды III Всесоюзного съезда математиков, т.2. М., 1956, с. 140.
3. Лопшиц А.М. Геометрическая характеристика аффинного отображения.-Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. М., 1958, с. 213-221.
4. Лопшиц А.М. Некоторые задачи алгебраической и дифференциальной геометрии безразмерного пространства. Тезисы кратких научных сообщений международного конгресса математиков. Секция 9. М., 1966, с. 34.
5. Трупин Ш.Д. Некоторые простейшие свойства безразмерного проективного пространства. - "Уч. зап. ЛатвГУ", 1971, т.152, с. 3-24.
6. Буземан Г. и Келли П. Проективная геометрия и проективные метрики. М., 1957.
7. Burau W. Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie. Berlin, 1961.

Ш.Д.ТРУПИН

Некоторые простейшие свойства аффинных коллинеаций в безразмерном проективно-аффинном пространстве

В работе /I/ показано, что в безразмерном проективном пространстве $\mathcal{P}$ точечное проективное преобразование (коллинеация)

$$X'(x') = \Pi\left(X(x)\right) \qquad (1)$$

индуцируется соответствующим преобразованием

$$x' = A x \cdot \psi(x) \qquad (2)$$

в безразмерном линейном векторном пространстве V. Здесь A - однозначно определяемая (с точностью до постоянного множителя) линейная векторная функция векторного аргумента x, ψ - однозначно определяемая скалярная функция $(\psi(x) \neq 0)$.

Коллинеация (I) сохраняет коллинеарность точек и не изменяет двойное отношение четырех коллинеарных точек. В случае, когда коллинеация Π невырождающаяся, она преобразует n-плоскость в n-плоскость.

Как указано в работе /2/, безразмерное аффинное пространство $\mathcal{P}^{\omega}$ мы получаем, выделив в пространстве $\mathcal{P}$ некоторую фиксированную гиперплоскость ω, которая называется несобственной. Все точки пространства $\mathcal{P}$, не принадлежащие этой гиперплоскости, называются собственными (конечными).

Будем рассматривать в дальнейшем такие невырождающиеся коллинеации в $\mathcal{P}$, которые отображают точки несобственной гиперплоскости ω в точки этой же гиперплоскости, Такие коллинеации мы назовем аффинными и обозначим через Π^{ω}.

В силу этого определения, аффинная коллинеация Π^{ω} преобразует n -плоскость в n -плоскость. Докажем, что имеет место следующая

<u>Теорема I</u>. Аффинная коллинеация Π^{ω} отображает несобственные точки n -плоскости P_n^{ω} в несобственные точки соответствующей ей n -плоскости $P_n'^{\omega}$.

Пусть $Q_i(q_i)$ $(i=0,\dots,n)$ - линейно независимые несобственные точки плоскости P_n^{ω} и пусть при коллинеации Π^{ω} им соответствуют линейно независимые несобственные точки $Q_i'(q_i')$. Докажем, что если $Q(q)$ - произвольная несобственная точка плоскости P_n^{ω}, то соответствующая ей точка $Q'(q')$ плоскости $P_n'^{\omega}$ также несобственная.

В самом деле, согласно условию, имеем:

$$q=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i q_i, \quad (\alpha_i\neq 0)$$

$$\omega q_i=0, \qquad \omega q_i'=0, \qquad (i=0,\dots,n).$$

Так как точки Q_i и Q_i' - соответствующие, то, в силу (2),

$$q_i'=A_{q_i}\cdot\psi(q_i), \qquad (\psi(q_i)\neq 0)$$

а потому

$$\omega q_i'=\omega(A_{q_i})\cdot\psi(q_i)=0.$$

Отсюда выводим, что

$$\omega(A_{q_i})=0, \quad (i=0,\dots,n). \quad (3)$$

Введя обозначение $\delta=\psi(q)\neq 0$, можем писать:

$$q'=A_q\cdot\psi(q)=\delta\cdot A\Big(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i q_i\Big)=\delta\cdot\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(A_{q_i}).$$

Используя (3), убеждаемся в том, что

$$\omega q'=\delta\cdot\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\cdot\omega(A_{q_i})=0$$

и тем самым теорема доказана.

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 2*. Существует аффинная коллинеация, отображающая две заданные собственные точки A_1 и A_2 в другие две заданные собственные точки A_1' и A_2'. [x]

Из этой теоремы следует, что вектору $\overline{A_1A_2}$ (т.е. упорядоченной паре точек A_1, A_2) соответствует вектор $\overline{A_1'A_2'}$. Если два вектора $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ коллинеарны, то прямые A_1A_2 и B_1B_2 имеют общую несобственную точку Q . Поэтому соответствующие прямые имеют общую несобственную точку Q' , т.е. векторы $\overline{A_1'A_2'}$ и $\overline{B_1'B_2'}$ также коллинеарны. Таким образом, аффинная коллинеация сохраняет параллельность прямых. Отсюда, далее, вытекает, что при аффинной коллинеации параллелограмму соответствует параллелограмм и, используя определение операции сложения векторов в P^ω, можем утверждать, что аффинная коллинеация отображает сумму векторов в сумму соответствующих им векторов.

В аффинном пространстве P^ω простое отношение трех коллинеарных точек $A_i\ (a_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ определяется равенством

$$\nu = (A_1 A_2 A_3) = (A_1 A_2 A_3 Q),$$

где Q - несобственная точка прямой A_1A_2 и символом $(A_1 A_2 A_3 Q)$ обозначено двойное отношение этих четырех точек в пространстве P .

Так как в P^ω аффинная коллинеация Π^ω индуцируется коллинеацией Π пространства P , можем писать:

$$\nu' = (A_1' A_2' A_3') = (A_1' A_2' A_3' Q') = (A_1 A_2 A_3 Q) = (A_1 A_2 A_3) = \nu.$$

Следовательно, аффинная коллинеация не изменяет простое отношение трех коллинеарных точек. Отсюда следует, что при умножении вектора на скаляр соответствующий ему вектор умножается на тот же скаляр.

Можно доказать, что если при аффинной коллинеации n - плоскости P_n^ω и $P_n'^\omega$ являются соответствующими, то соот-

---

[x] Доказательство теоремы проводится аналогично тому, как это делается в проективно-аффинном пространстве конечной размерности. См., например, /3/.

ветствующими являются также и их направляющие подпространства $\bar{R}_n^{\omega}$ и $\bar{R}_n'^{\omega}$.

В силу теоремы I, можем утверждать, что если две плоскости P_ℓ^{ω} и P_m^{ω} κ-параллельны (вполне параллельны), то и соответствующие им плоскости $P_\ell'^{\omega}$ и $P_m'^{\omega}$ κ-параллельны (вполне параллельны).

В работе /I/ доказано, что если в простанстве P заданы линейно независимые точки $A_i(a_i)$ $(i=0,\dots,n)$, принадлежащие некоторой гиперплоскости φ, которые при невырождающейся коллинеации (I) отображаются в линейно независимые точки $A_i'(a_i')$, принадлежащие другой гиперплоскости φ', то образ $X'(x')$ любой точки $X(x)$ n-плоскости P_n, определяемой точками A_i, принадлежит гиперплоскости φ'.

Если в качестве гиперплоскостей φ и φ' выбрать фиксированную несобственную гиперплоскость ω, то, как мы видели, аффинная коллинеация Π^{ω} преобразует несобственные точки в несобственные. По этой причине можем утверждать, что произведение двух аффинных коллинеаций Π_1^{ω} и Π_2^{ω} (с одной и той же несобственной гиперплоскостью ω), является аффинной коллинеацией. Так как тождественная коллинеация и коллинеация $(\Pi^{\omega})^{-1}$, обратная коллинеации Π^{ω}, являются аффинными коллинеациями, приходим к выводу, что множество всех аффинных коллинеаций вида Π^{ω} представляет собою подгруппу группы всех проективных коллинеаций пространства P.

Литература

I. Трупин Ш.Д. Некоторые простейшие свойства безразмерного проективного пространства. - "Уч. зап. ЛатвГУ", 1971, т. 152, с. 3-24.

2. Трупин Ш.Д. Простейшие свойства безразмерного проективно-аффинного пространства. См. с. 3 настоящего сборника.

3. Burau W. Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie. Berlin, 1961.

Л.Я.БЕРЕЗИНА

Об одной геометрической интерпретации оптимума линейной формы

В предлагаемой статье рассматривается геометрическая интерпретация теории двойственности задач линейного программирования в собственно евклидовом пространстве. Отмечаются некоторые следствия, имеющие практическое значение при численном решении задач.

Автор выражает свою глубокую благодарность профессору Д.Б.Юдину за ценные указания.

§I.

Рассмотрим каноническую форму задачи линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = B_i, \qquad i=1,2,\dots,m.$$

$$x_j \geq 0, \qquad j=1,2,\dots,n. \tag{I}$$

$$F=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \min.$$

Из линейности системы ограничения и формы F, как известно /I/, следует, что экстремумы F расположены в "допустимых базисных решениях" системы (I). Такие решения находим следующим образом. Полагаем $n-m$ неизвестные $\{x_\alpha\}$ из числа x_j, равными нулю и решаем систему m уравнений (I) относительно оставшихся m неизвестных $\{x_k\}$. Если $x_k \geq 0$, то получено допустимое базисное решение.

Геометрически система

$$(L): \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = B_i, \qquad i=1,2,\dots,m. \tag{2}$$

определяет в n -мерном собственно евклидовом пространстве E_n, $(n-m)$ -мерную плоскость, которую в дальнейшем назовем плоскостью (L).

Система $n-m$ - уравнений

$$(A): \quad x_\alpha = 0, \tag{3}$$

где α принимает $n-m$ различные значения из 1,2,...,n, задает m -мерную координатную плоскость (A).

Заметим, что каждой координатной плоскости (A) соответствует определенная "дополняющая" координатная плоскость (B) так, что

$$(A) \oplus (B) = E_n. \tag{4}$$

Допустимое базисное решение, следовательно, определяет точку пересечения плоскости (L) с некоторой m -мерной координатной плоскостью (A), если координаты точки пересечения неотрицательны.

Допустим, что найдено такое решение A_1 $(x_k \geq 0,\ x_\alpha = 0)$. Проверить, является ли эта точка оптимумом для формы F можно следующим образом.

Решаем систему (2) относительно x_k

$$x_k = \sum_\alpha a_{k\alpha} x_\alpha + b_k. \tag{5}$$

Система (5) эквивалентна системе (2) и определяет ту же $(n-m)$ -плоскость (L).

Подставляя выражения x_k из (5) в форму F

$$F = \sum_k c_k x_k + \sum_\alpha c_\alpha x_\alpha, \tag{6}$$

получаем

$$F = \sum_k c_k b_k + \sum_{\alpha, k} (a_{k\alpha} c_k + c_\alpha) x_\alpha \tag{7}$$

Учитывая согласно (I) $x_\alpha \geq 0$ получаем, что форма F имеет минимум в точке A_1 при

$$\left\{ \sum_k a_{k\alpha} c_k + c_\alpha \right\} \geq 0, \tag{8}$$

и только в этом случае.

Условия (8), которые зависят только от направления плоскости (L) и коэффициентов формы F допускают следующую геометрическую интерпретацию в E_n.

Рассмотрим m-мерную плоскость (M), проходящую через точку с координатами $\{c_j\}$, перпендикулярно к плоскости (L). Уравнения этой плоскости можно написать в форме

$$(M): \; x_\alpha - c_\alpha = -\sum_k a_{k\alpha} (x_k - c_k). \tag{9}$$

Плоскость (M) пересекает $(n-m)$-мерную координатную плоскость (B): $x_k = 0$ дополняющую к плоскости (A) в точке B_1 с координатами

$$x_k = 0, \quad x_\alpha = \sum_k a_{k\alpha} c_k + c_\alpha. \tag{10}$$

Условия оптимальности (8), следовательно, означают, что плоскость (M) пересекает координатную плоскость (B) в точке с неотрицательными координатами.

Заметим, что уравнение плоскости (M) не изменится, если числа c_j заменить числами c_j^*, где точка с координатами c_j^* лежит в плоскости (M). Это дает возможность определить всю совокупность форм, имеющих оптимум в одной и той же точке. Действительно, пусть найдено, что задача (I) имеет решение в точке A_1 $(x_k \geq 0,\ x_\alpha = 0)$ тогда, сохраняя систему ограничения, можно заменить форму F любой формой

$$F^* = \sum_j c_j^* x_j, \tag{11}$$

если c_j^* есть координаты некоторой точки плоскости (M). Форма (II) также имеет минимум - в точке A_1.

Наоборот, если рассмотреть форму

$$\varphi = \sum_j \alpha_j x_j, \tag{I2}$$

где α_j координаты некоторой точки плоскости (L), то форма φ имеет минимум в точке B_1 $(x_k=0,\ x_\alpha \geq 0)$.

Значит, если в E_n имеются две взаимно перпендикулярные плоскости (L) и (M), пересекающие дополняющие координатные плоскости (A) и (B) в точках с неотрицательными координатами A_1 и B_1, то, присоединив к плоскости (L) форму (II) и к плоскости (M) форму (I2), получаем две задачи, двойственные в обычном смысле /I/, имеющие решения соответственно в точках A_1 и B_1. Предложенная интерпретация двойственности, очевидно, обладает свойством симметричности.

§2.

Интерпретация обеих двойственных задач в одном собственно евклидовом пространстве иногда помогает быстро решать числовые примеры, не прибегая к симплекс методу, или хотя бы уменьшить размерность задачи.

Пример: /I/ стр.538.

$$(L)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 1, \\ \qquad x_i \geq 0 \end{cases} \tag{I3}$$

$$F = 10x_1 + 2x_2 + x_3 + 9x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 \to max$$

Заменяем форму F формой $-F$ и пишем уравнения плоскости (M)

$$(M)\begin{cases} x_1 - 2x_5 - x_6 - 3x_7 = -2, \\ x_2 - 3x_5 - 4x_6 - 4x_7 = 12, \\ x_3 - 3x_5 - 2x_6 - 2x_7 = 9, \\ x_4 - x_5 - 3x_6 - 2x_7 = -2 \end{cases} \tag{I4}$$

Задача теперь сводится к тому, чтобы в плоскостях (L) и (M) найти точки A_1 и B_1 с неотрицательными координатами, лежащие в дополняющих координатных плоскостях.

Из системы (M) усматриваем, что для точки $B_1 \in (M)$ исключается вариант $x_2=0$, $x_3=0$, ибо тогда во втором и третьем уравнениях левая сторона отрицательна, а правая положительна. Это значит, что для точки A_1 обязательно $x_2=0$, $x_3=0$. Вносим эти значения в систему (L), а из системы (M) исключаем второе и третье уравнения.

Получаем

$$(L_1)\begin{cases} 2x_1+x_4+x_5=3, \\ x_1+3x_4+x_6=2, \\ 3x_1+2x_4+x_7=1 \end{cases} \qquad (M_1)\begin{cases} x_1-2x_5-x_6-3x_7=-2, \\ x_4-x_5-3x_6-2x_7=-2 \end{cases} \tag{I5}$$

Нам уже удалось сократить измерение задачи на два. Если больше ничего не уссматривается, то можно любым способом продолжить решение, определяя $\max F(x_2=0, x_3=0)$ на неотрицательной части плоскости (L_1). Однако в нашем случае система (L_1) легко приводит к эквивалентному виду

$$(L_1)\begin{cases} 7x_1+5x_4-x_5+3x_7=0, \\ 5x_1+x_4-x_6+2x_7=0, \\ 3x_1+2x_4+x_7=1 \end{cases} \tag{I6}$$

Из системы (I6) следует, что для точки A_1 исключается вариант $x_5=0$, $x_6=0$. Следовательно, для B_1 обязательно $x_5=0$, $x_6=0$. Исключаем из (I6) первое и второе уравнения, а в уравнения (M_1) подставляем $x_5=0$, $x_6=0$. Получаем

$$(L_2)\ 3x_1+2x_4+x_7=1 \qquad (M_2)\begin{cases} x_1-3x_7=-2 \\ x_4-2x_7=-2 \end{cases} \tag{I7}$$

Далее из первого уравнения (M_2) следует, что для B_1 $x_7 \neq 0$ и следовательно, для A_1, $x_7 = 0$. Вносим в (L_2) $x_7 = 0$, а из системы (M_2) исключаем x_7, получаем

$$(L_3)\ 3x_1 + 2x_4 = 1 \qquad (M_3)\ 2x_1 - 3x_4 = 2 \tag{18}$$

Из (M_3) следует, что для A_1 $x_1 = 0$. Этим полностью определяется координатная плоскость (A), в которой лежит A_1, уравнениями

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 0,\quad x_7 = 0 \tag{19}$$

Из уравнений опущенных при каждом преобразовании (L) легко определяются отличные от нуля координаты точки A_1. Так из (L_3) находим $x_4 = \frac{1}{2}$, а из первых двух уравнений (16) при $x_1 = 0$, $x_7 = 0$, $x_4 = \frac{1}{2}$, имеем $x_5 = \frac{5}{2}$, $x_6 = \frac{1}{2}$. Значит искомая точка

$$A_1\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \tag{20}$$

§3.

Естественно возникает вопрос, для каких задач возможно подобное решение. Во-первых, отметим, что, конечно, не для любых задач. Действительно, усматривая из некоторого уравнения системы (L) или (M) $x_i \neq 0$, мы узнаем, что $x_i \neq 0$ для всех допустимых базисных решений данной системы. В общем случае наличие таких x_i необязательно. Далее, рассматривая решение примера §2, видим, что для получения нужных результатов использованы не числовые значения коэффициентов системы, а их знаковая структура. Отсюда и понятно сходство решения §2 с алгорифмом, предложенным в книге /2/ для решения S -задач. Действительно, решение §2 можно считать обобщением алгорифма /2/ для задач с более общей знаковой структурой. В §2 также, как в /2/, "количественному" решению предшествует "качественное" решение, то есть определение координатной плоскости (A), в которой лежит решение. В частности, если плоскость (M) пересекает единственную координатную плоскость (B) в точке с неотрицательными координатами, то плоскость (A) определяется однозначно направлением плоскости (L) и следовательно, решение не меняется при параллельном переносе (L). Отсюда и следует свойство S - задачи, что решение не зависит от выбора b_i.

Теперь постараемся выяснить для общего случая, когда возможны уменьшения размерности задачи типа примера §2.

Пусть для задачи (I) написана система (M), определяющая n -плоскость, проходящую через точку с координатами c_i перпендикулярно к плоскости (L). Свободные члены в системах (L) и (M) пишем справа.

Упрощения, проделанные с примером §2 сводятся к следующему правилу.

Правило I. Если в некотором уравнении α_k одной из систем (L) или (M) знаки всех коэффициентов, кроме одного, у x_{j_0} противоположны знаку свободного члена, то x_{j_0} исключается при помощи уравнения α_k из всей системы, содержащей α_k, а в двойственную систему подставляется $x_{j_0}=0$.

Рассмотрим еще, как сказывается правило I, когда задача (I) задана в форме с неравенствами.

Пусть дано

$$\sum_{\alpha=1}^{m} a_{i\alpha} x_\alpha \le b_i \qquad i = m+1, \dots, n$$

$$x_\alpha \ge 0 \tag{21}$$

$$F = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha x_\alpha \to max,$$

тогда системы (L) и (M) находятся без дополнительных вычислений.

$$(L): \quad x_i + \sum_\alpha a_{i\alpha} x_\alpha = b_i \tag{22}$$

$$(M): \quad x_\alpha - \sum_i a_{i\alpha} x_i = - c_\alpha . \qquad (23)$$

Знаковая структура систем (22) и (23), значит, определяется числами $a_{i\alpha}$, b_i, c_α или матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{i\alpha} & b_i \\ c_\alpha & 0 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

Применяя правило I к системе (23), получаем

Правило 2. Если в некотором столбце α_0 матрицы (24) имеем $a_{i\alpha_0} \geq 0$, $c_{\alpha_0} \leq 0$, то для решения задачи (2I) $x_{\alpha_0} = 0$.

Столбец с индексом α_0, следовательно, можно вычеркнуть из матрицы (24).

Применение правила I к системе (L) дает вполне очевидный факт, что если в некотором неравенстве (2I) левая сторона отрицательна, а правая положительна, то такое неравенство не дает ограничения для x_α и его можно исключить из системы, т.е. из матрицы (24) вычеркнуть соответствующую строку. Такие неравенства обычно прямо не включаются в задачу. Однако,то что такая картина может показаться после применения правила 2 уже не столь очевидно. Поэтому после вычеркивания столбца может последовать вычеркивание строки и т.д.

§4.

Указанная возможность уменьшить измерение задачи вычеркиванием столбцов и строк, напоминает применение "соотношения превосходства" в теории матричных игр /3/.Учитывая связь этой теории с задачей (I), покажем, что из правила I легко следуют "соотношения превосходства". Можно также считать, что правило I представляет собой перенос "соотношения превосходства" на задачу (I).

Действительно, игра с матрицей

$$[a_{i\alpha}] \qquad (25)$$

сводится к задаче /3/

$$\sum_{\alpha} a_{i_0\alpha} y_\alpha + y_{i_0} \to \min$$

$$\sum_{\alpha} (a_{i\alpha} - a_{i_0\alpha}) y_\alpha + y_i - y_{i_0} = 0, \qquad (26)$$

$$\sum_{\alpha} y_\alpha = 1$$

$$y_\alpha \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad y_{i_0} \geq 0,$$

где i_0 - произвольно фиксированный индекс строки матрицы (25).

Правило (I) применимо при $a_{i\alpha} - a_{i_0\alpha} > 0$, т.е. когда все элементы строки i превосходят элементы строки i_0 в матрице (25).

Литература

I. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Т. Линейное программирование. М., 1963.

2. Мееров М.В., Литвак Б.Л. Оптимизация систем многосвязного управления. М., 1972.

3. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. М., 1960.

М.Т. БЕРЕЗИНА

К нормализации в $R_n^{12\cdots(n-p)}$

Рассмотрим полуевклидового пространство $R_n^{12\cdots(n-p)}$ / 1 /, в котором вращение ортонормированного репера задается следующим образом: $(c_{ik}c_{jk}=\delta_{ij})$

$$\begin{cases} \vec{e}_i{}' = c_{ik}\vec{e}_k \\ \vec{e}_\alpha{}' = a_\alpha^k \vec{e}_k + a_\alpha^{\varkappa}\vec{e}_{\varkappa} + \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_n{}' = a_n^k\vec{e}_k + a_n^\alpha \vec{e}_\alpha + \vec{e}_n \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i,k=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \quad \varkappa<\alpha \\ \varkappa=p+1,\dots,\alpha-1 \end{pmatrix} \qquad (I)$$

Теория линейчатых поверхностей (однопараметрических семейств прямых) и некоторые вопросы теории конгруэнции — $(n-1)$ -параметрического семейства прямых — изучались в работе / 2 /.

Задача данной работы найти инвариантные нормали $(\vec{e}_\alpha)$ прямой конгруэнции.

I. Рассмотрим вопрос нормализации в пространстве R_n^{123} $(p=n-3)$.

Разложение главных форм по базису имело вид:

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda_k^i \omega_n^k + \lambda_\alpha^i \omega_n^\alpha \\ \omega^\alpha = \lambda_k^\alpha \omega_n^k + \lambda_\beta^\alpha \omega_n^\beta . \end{cases} \qquad \omega_n^1\wedge\omega_n^2\wedge\dots\wedge\omega_n^{n-1}\neq 0 \qquad \begin{pmatrix} i,k=1,2,\dots,n-3 \\ \alpha,\beta=n-2,n-1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Используем аффинор λ_t^s $(s,t=1,2,\dots,n-1)$, для которого вычислена зависимость от допустимых преобразований репера / 2 /. Образуем свертку основного вектора прямой конгруэнции / 2 /.

$$\lambda_j^{n-1}\vec{e}_j \qquad (j=1,2,\dots,n-3) \qquad (3)$$

С вектором $\lambda_j^{n-2}\vec{e}_j$ $(j=1,2,\dots,n-3)$, зависящим и от нормализации.

Эта свертка

$$\lambda_i^{n-1}\lambda_i^{n-2} \qquad (i=1,2,\dots,n-3) \tag{4}$$

зависит только от выбора нормалей:

$$\bar{\lambda}_i^{n-2}\bar{\lambda}_i^{n-1}=(\lambda_i^{n-2}+A_{n-1}^{n-2}\lambda_i^{n-1})\lambda_i^{n-1} \tag{5}$$

Пусть

$$\bar{\lambda}_i^{n-2}\cdot\bar{\lambda}_i^{n-1}=0 \tag{6}$$

при

$$(\lambda_1^{n-1})^2+(\lambda_2^{n-1})^2+\dots+(\lambda_{n-3}^{n-1})^2\neq 0 \tag{7}$$

Из уравнения (6) определяем A_{n-1}^{n-2}

Когда вектор $\vec{e}_1$ направлен по основному вектору

$$\lambda_2^{n-1}=\lambda_3^{n-1}=\dots=\lambda_{n-3}^{n-1}=0 \tag{8}$$

условие (6) принимает вид:

$$\lambda_1^{n-2}=0 \tag{9}$$

Для определения A_α^k $\begin{pmatrix} k=1,2,\dots,n-3 \\ \alpha=n-2,n-1 \end{pmatrix}$ рассмотрим свертки:

$$(\bar{\lambda}_i^k-\bar{\lambda}_{n-1}^{n-1}\bar{\delta}_i^k)\bar{\lambda}_i^{n-1},$$

$$(\bar{\lambda}_i^k-\bar{\lambda}_{n-1}^{n-1}\bar{\delta}_i^k)\bar{\lambda}_i^{n-2} \qquad (i=1,2,\dots,n-3) \tag{10}$$

зависящие только от нормализаций (при фиксированном A_{n-1}^{n-2}) следующим образом:

$$(\bar{\lambda}_i^k - \bar{\lambda}_{n-1}^{n-1}\bar{\delta}_i^k)\bar{\lambda}_i^{n-1} = [\lambda_i^k + A_{n-2}^k\lambda_i^{n-2} + A_{n-1}^k\lambda_i^{n-1} -$$

$$-(+a_{n-1}^{j}\lambda_j^{n-1} + \lambda_{n-1}^{n-1})\delta_i^k]\lambda_i^{n-1}$$

$$(\bar{\lambda}_i^k - \bar{\lambda}_{n-1}^{n-1}\bar{\delta}_i^k)\bar{\lambda}_i^{n-2} = [\lambda_i^k + A_{n-2}^k\lambda_i^{n-2} + A_{n-1}^k\lambda_i^{n-1} - \tag{II}$$

$$-(a_{n-1}^{j}\lambda_j^{n-1} + \lambda_{n-1}^{n-1})\delta_i^k]\lambda_i^{n-2}$$

$$(i,k,j = 1,2,\dots,n-3)$$

Система (I2)

$$\begin{cases} (\bar{\lambda}_i^k - \bar{\lambda}_{n-1}^{n-1}\bar{\delta}_i^k)\bar{\lambda}_i^{n-1} = 0 \\ (\bar{\lambda}_i^k - \bar{\lambda}_{n-1}^{n-1}\bar{\delta}_i^k)\bar{\lambda}_i^{n-2} = 0 \end{cases} \tag{I2}$$

$$(i,k = 1,2,\dots,n-3)$$

состоящая из $2(n-3)$ уравнений с $2(n-3)$ неизвестными A_{n-1}^k, A_{n-2}^k $(k=1,2,\dots,n-3)$, линейная при

$$(\lambda_1^{n-1})^2 + (\lambda_2^{n-1})^2 + \dots + (\lambda_{n-3}^{n-1})^2 \neq 0$$

$$(\lambda_1^{n-2})^2 + (\lambda_2^{n-2})^2 + \dots + (\lambda_{n-3}^{n-2})^2 \neq 0 \tag{I2'}$$

задает инвариантные нормали прямой конгруэнции в R_n^{123}. Эти нормали назовем нормалями γ_1 и γ_2. Для выявления геометрического смысла нормалей γ_1 и γ_2, упростим систему (I2), внеся в неё условия (8), (9) и условия фиксации вектора $\vec{e}_2$ (направляем вектор $\vec{e}_2$ по вектору $\vec{a}_1$ /2/):

$$\lambda_3^{n-2}=\lambda_4^{n-2}=\dots=\lambda_{n-3}^{n-2}=0 \tag{13}$$

Система (I2) принимает вид:

$$\begin{cases} \lambda_1^1-\lambda_{n-1}^{n-1}=0 \\ \lambda_1^m=0 \\ \lambda_2^2-\lambda_{n-1}^{n-1}=0 \\ \lambda_2^l=0 \qquad \begin{pmatrix} m=2,3,\dots,n-3 \\ l=1,3,\dots,n-3 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{14}$$

Вектор $\vec{e}_1$ направлен по основному вектору, значит координатная поверхность

$$\omega_n^2=\omega_n^3=\dots=\omega_n^{n-1}=0, \ \omega_n^1\neq 0 \tag{15}$$

стала поверхностью α / 2 /.

Условия

$$\lambda_1^2=\lambda_1^3=\dots=\lambda_1^{n-2}=0 \tag{16}$$

означают, что вектор $\vec{e}_{n-1}$ направлен по вектору распределения поверхности α.

Вектор $\vec{e}_2$ направлен по вектору $\vec{Q}_1$, значит координальная поверхность

$$\omega_n^1=\omega_n^3=\dots=\omega_n^{n-1}=0, \ \omega_n^2\neq 0 \tag{17}$$

стала поверхностью Q_1 (так был назван проходящий через прямую конгруэнции квазиторс порядка два, у образующей которого вектор центральной нормали параллелен вектору $\vec{Q}_1$)

Требованя

$$\lambda_2^1=\lambda_2^3=\dots=\lambda_2^{n-3}=0 \tag{18}$$

означают, что вектор $\vec{e}_{n-2}$ направлен по вектору распределения образующей поверхности Q_1.

Система (I2), (6), помимо условий (I6), (I8) содержит условие:

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^2 = \lambda_{n-1}^{n-1} \tag{19}$$

что означает, что орто-квазицентр / 3 / образующей координатной поверхности α совпадает с квазицентром / 2 / образующей координатной поверхности Q_1 и совпадает с горловой точкой образующей координатной поверхности порядка три. Из высказанных соображений следует

Теорема.

Через прямую конгруэнции в R_n^{123} проходит поверхность порядка три, у которой вектор центральной нормали образующей параллелен вектору распределения образующей поверхности α, а горловая точка образующей совпадает с орто-квазицентром образующей поверхности α.

Также через прямую конгруэнции проходит поверхность порядка два, у которой вектор центральной нормали образующей параллелен вектору распределения образующей поверхности Q_1, причем квазицентр образующей поверхности Q_1 совпадает с горловой точкой образующей поверхности порядка три.

Обобщим нормализацию в R_n^{123} на $R_n^{12\cdots(n-p)}$.

Для определения нормалей в $R_n^{12\cdots(n-p)}$ нужно фиксировать величины A_α^x, A_α^k $\left(\begin{matrix}\alpha = p+1, \cdots, n-1 \\ x = p+1, \cdots, \alpha-1\end{matrix}\; x<\alpha \; k=1,2,\cdots,p\right)$

Величины A_α^x будем определять с помощью сверток:

$$\lambda_i^{n-1}\lambda_i^{n-2},\ \lambda_i^{n-1}\lambda_i^{n-3},\ \cdots,\ \lambda_i^{n-1}\lambda_i^{p+1} \tag{20}$$

$$\lambda_i^{n-2}\lambda_i^{n-3},\ \lambda_i^{n-2}\lambda_i^{n-4},\ \cdots,\ \lambda_i^{n-2}\lambda_i^{p+1} \tag{21}$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$\lambda_i^{p+1}\lambda_i^{p+2} \quad (i=1,2,\cdots,p) \tag{22}$$

зависящих только от нормализации.

Свертки (20) и (21) можно образовать всегда, так как полагаем $p \geq 2$.

Следовательно, из уравнений

$$\bar\lambda_i^{n-1}\bar\lambda_i^{n-2}=0$$

$$\bar\lambda_i^{n-1}\bar\lambda_i^{n-3}=0$$

— — — — —

$$\bar\lambda_i^{n-1}\bar\lambda_i^{p+1}=0 \tag{23}$$

$$\bar\lambda_i^{n-2}\bar\lambda_i^{n-3}=0$$

— — — — — —

$$\bar\lambda_i^{n-2}\bar\lambda_i^{p+1}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

при

$$(\lambda_1^{n-1})^2+(\lambda_2^{n-1})^2+\cdots+(\lambda_p^{n-1})^2\neq 0 \tag{23'}$$

$$(\lambda_1^{n-2})^2+(\lambda_2^{n-2})^2+\cdots+(\lambda_p^{n-2})^2\neq 0$$

определяем

$$A_{n-1}^{n-2},\ A_{n-1}^{n-3},\ldots,\ A_{n-1}^{p+1},\ A_{n-2}^{n-3},\ldots,\ A_{n-2}^{p+1} \tag{24}$$

Свертки же вида

$$\lambda_i^{n-3}\lambda_i^{n-4},\ \lambda_i^{n-3}\lambda_i^{n-5},\ldots,\ \lambda_i^{n-3}\lambda_i^{p+1} \tag{25}$$

— — — — — — — — — — —

$$\lambda_i^{p+1}\lambda_i^{p+2},$$

с помощью которых можно вычислить остальные

$$A_{n-3}^{n-4},\ldots,\ A_{n-3}^{p+1},\ A_{n-4}^{n-5},\ldots,\ A_{p+2}^{p+1}, \tag{26}$$

возможно составить только тогда, когда число условий налагаемых на координаты векторов $\lambda_i^{\alpha}\ \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,p \\ \alpha=p+1,\ldots,n-1 \end{pmatrix}$ не более числа координат, т.е.

$$n-p-2 \leq p \tag{27}$$

или

$$p \geq \frac{n-2}{2} \tag{28}$$

Значит, определение величин $A_\alpha^\tau \begin{pmatrix} \alpha=p+1,\dots,n-1 \\ \tau=p+1,\dots,\alpha-1 \;\; \tau<\alpha \end{pmatrix}$ с помощью сверток

$$\lambda_i^\alpha \lambda_i^\beta \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \;\; \alpha\neq\beta \\ \tau=p+1,\dots,n-2 \end{pmatrix} \tag{29}$$

возможно не при любом p, а только тогда, когда выполняется требование (28).

При том же ограничении (28), когда фиксированы A_α^k $\begin{pmatrix} k=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p$ величины A_α^τ можно определить, используя $\lambda_\alpha^k \begin{pmatrix} k=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \end{pmatrix}$

Когда A_α^τ найдены, величины A_α^k определяем, приравнивая к нулю свертки:

$$\begin{cases} \left(\bar\lambda_i^k - \bar\lambda_{n-1}^{n-1}\bar\delta_i^k\right)\bar\lambda_i^{n-1} = 0 \\ \left(\bar\lambda_i^k - \bar\lambda_{n-1}^{n-1}\bar\delta_i^k\right)\bar\lambda_i^{n-2} = 0 \\ \text{-------------------} \\ \left(\bar\lambda_i^k - \bar\lambda_{n-1}^{n-1}\bar\delta_i^k\right)\bar\lambda_i^{p+1} = 0 \\ (\lambda_1^\alpha)^2 + (\lambda_2^\alpha)^2 + \dots + (\lambda_p^\alpha)^2 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,p \\ k=p+1,\dots,n-1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Левая часть уравнений (30) зависит только от нормализации.

Свертки вида (30) можно составить только при условии, что после определения A_α^τ у векторов $\lambda_i^\alpha \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \end{pmatrix}$ осталось еще хотя бы одна координата, т.е.

$$n-p-2 \leq p-1 \tag{31}$$

или
$$p \geqslant \frac{n-1}{2}. \tag{32}$$

Фиксация A_α^{τ} и A_α^{k} $\begin{pmatrix} k=1,2,\dots,p & \tau=p+1,\dots,\alpha-1 \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 & \tau<\alpha \end{pmatrix}$

при помощи сверток (29), (30) возможна при условии (32).

Назовем нормали, заданные системой (30) и
$$\bar{\lambda}_i^{\alpha} \bar{\lambda}_i^{\beta} = 0, \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,p \\ \alpha,\beta=p+1,\dots,n-1 \\ \alpha\neq\beta \end{pmatrix} \tag{33}$$

нормалями γ_α.

Геометрическое истолкование нормалей γ_α следующее: нормали γ_α являются векторами центральных нормалей поверхностей порядка z_1 $(z_1=2,3,\dots,n-p)$, причем эти векторы параллельны векторам распределения поверхностей α и Q_f. $\left(f=1,2,\dots,p-2 \text{ при } p>\frac{n-1}{2}\right)$.
Под поверхностью Q_f понимаем проходящий через прямую конгруэнции квазиторс порядка $(f+1)$ $(f=1,2,\dots,p-2)$, у которого вектор центральной нормали образующей параллелен вектору Q_f. Кроме того, для поверхностей порядка z_1 характерно то, что горловая точка образующей поверхности порядка $(n-p)$ совпадает с орто-квазицентром образующей поверхности α и с квазицентрами образующих поверхностей Q_f. $(f=1,2,\dots,p-2)$

Теорема.

Через прямую конгруэнции проходят поверхности порядка z_1 $(z_1=2,3,\dots,n-p)$, у которых векторы центральных нормалей образующих параллельны вектором распределения образующих поверхностей α и Q_f $(f=1,2,\dots,p-2)$, и горловая точка образующей поверхности порядка $(n-p)$ совпадает с орто-квазицентром образующей поверхности α и с квазицентром образующих поверхностей Q_f.

3. Рассмотрим фиксацию параметров A_α^k $\begin{pmatrix} k=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \end{pmatrix}$ с помощью величин λ_α^{γ} $(\alpha,\gamma=p+1,\dots,n-1)$.

Величины λ_α^{n-1} зависят от нормализации следующим образом:

$$\bar{\lambda}^{n-1}_{\alpha} = a^{k}_{\alpha}\lambda^{n-1}_{k} + a^{\mathcal{D}}_{\alpha}\lambda^{n-1}_{\mathcal{D}} + \lambda^{n-1}_{\alpha} \tag{34}$$

$$\begin{pmatrix} k=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \\ \mathcal{D}=p+1,\dots,\alpha-1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{D}<\alpha$$

Пусть

$$\bar{\lambda}^{n-1}_{p+1}=0,\ \bar{\lambda}^{n-1}_{p+2}=0,\dots,\bar{\lambda}^{n-1}_{n-1}=0 \tag{35}$$

Тогда имеем систему $(n-p-1)$ уравнений с p неизвестными

$$\begin{cases} a^{k}_{p+1}\lambda^{n-1}_{k} + \lambda^{n-1}_{p+1}=0 \\ a^{k}_{p+2}\lambda^{n-1}_{k} + \lambda^{n-1}_{p+2}=0 \\ \text{------------} \\ a^{k}_{n-1}\lambda^{n-1}_{k} + \lambda^{n-1}_{n-1}=0 \end{cases} \quad \left(|\lambda^{n-1}_{i}\vec{e}_{i}|\neq 0\right) \tag{36}$$

$$(k=1,2,\dots,p)$$

(вершина репера предполагается фиксированной). Используя условия (35) получаем

$$\begin{cases} \bar{\lambda}^{n-2}_{p+1} = a^{k}_{p+1}\lambda^{n-2}_{k} + \lambda^{n-2}_{p+1}=0 \\ \bar{\lambda}^{n-2}_{p+2} = a^{k}_{p+2}\lambda^{n-2}_{k} + \lambda^{n-2}_{p+2}=0 \\ \text{------------} \\ \bar{\lambda}^{n-2}_{n-1} = a^{k}_{n-1}\lambda^{n-2}_{k} + \lambda^{n-2}_{n-1}=0 \end{cases} \quad (\lambda^{n-2}_{1})^2+(\lambda^{n-2}_{2})^2+\dots+(\lambda^{n-2}_{p})^2\neq 0 \tag{37}$$

$$(k=1,2,\dots,p)$$

Аналогично полагаем равными нулю

$\bar{\lambda}^{n-3}_{\alpha}$, $\bar{\lambda}^{n-4}_{\alpha}$, $\bar{\lambda}^{n-5}_{\alpha}$ и так далее, пока не определим

все A^{k}_{α} $\begin{pmatrix} k=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \end{pmatrix}$

Предложенная фиксация A^{k}_{α} возможна, когда число $\lambda^{\gamma}_{\alpha}$ $(\alpha,\gamma=p+1,\dots,n-1)$ не менее числа A^{k}_{α} $\begin{pmatrix} k=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \end{pmatrix}$ т.е.

$$n-p-1 \geq p \tag{38}$$

или

$$p \leq \frac{n-1}{2} \tag{39}$$

Литература

1. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. М., 1969.

2. Березина М.Т. К теории линейчатых поверхностей и конгруэнции в $R_n^{12\cdots(n-p)}$. – "Уч. зап. ЛатвГУ", 1972, т.172.

3. Березина М.Т. О нормалях конгруэнции в R_4^{12}. – "Уч. зап. ЛатвГУ", 1971, т.152.

4. Березина М.Т. Некоторые вопросы семейств прямых в R_n^{12}. – "Уч. зап. ЛатвГУ", 1971, т. 152.

В.М. ГОШТЕЙН

Комплексы прямых K_1 в R_4^2 с главной нормалью первого порядка

Комплексы прямых K_1 в полуевклидовом пространстве R_4^2 уже рассматривались для случая, когда главная нормаль комплекса есть прямая наибольшего, второго порядка [1], [2]. При этом для компонент движения ортонормированного репера $T_0(\vec{A}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, где ось $\vec{e}_4$ коллинеарна прямой комплекса, а вершина репера A лежит на образующей, имеет место

$$[\omega^3\ \omega_4^1\ \omega_4^2\ \omega_4^3] \neq 0.$$

Если же $[\omega^3\ \omega_4^1\ \omega_4^2\ \omega_4^3]=0$, но $[\omega^2\ \omega_4^1\ \omega_4^2\ \omega_4^3] \neq 0$ (либо $[\omega^1\ \omega_4^1\ \omega_4^2\ \omega_4^3] \neq 0$) то систему дифференциальных уравнений, характеризующих комплекс K_1 в первой окрестности образующей, можно записать в виде

$$\begin{cases} \omega^1 = \lambda_1^1\omega_4^1 + \lambda_2^1\omega_4^2 + \lambda_3^1\omega_4^3 + \gamma_2^1\omega^2 \\ \omega^3 = \lambda_1^3\omega_4^1 + \lambda_2^3\omega_4^2 + \lambda_3^3\omega_4^3 \end{cases} \qquad (I)$$

Решение системы (I) существует с произволом одной функции 4-х переменных.

Главная нормаль комплекса теперь прямая первого порядка, она коллинеарна вектору $\gamma_2^1\vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Направим вектор $\vec{e}_2$ по главной нормали комплекса, тогда

$$\begin{cases} \omega^1 = \lambda_1^1\omega_4^1 + \lambda_2^1\omega_4^2 + \lambda_3^1\omega_4^3 \\ \omega^3 = \lambda_1^3\omega_4^1 + \lambda_2^3\omega_4^2 + \lambda_3^3\omega_4^3 \\ \omega_2^1 = \lambda_{21}^1\omega_4^1 + \lambda_{22}^1\omega_4^2 + \lambda_{23}^1\omega_4^3 + \gamma_{22}^1\omega^2 \end{cases} \qquad (2)$$

Допустимыми преобразованиями репера T теперь будут

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + t\vec{e}_4, \\ \vec{e}_1{}' = \vec{e}_1, \ \vec{e}_2{}' = \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3{}' = a_3^1\vec{e}_1 + a_3^2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ \vec{e}_4{}' = \vec{e}_4 \end{cases} \tag{3}$$

При переходе от репера T к реперу T' по формулам (3) коэффициенты системы (2) меняются следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1^1 = \lambda_1^1 - a_3^1\lambda_1^3 + t, \quad \tilde{\lambda}_2^1 = \lambda_2^1 - a_3^1\lambda_2^3, \\ \tilde{\lambda}_3^1 = \lambda_3^1 - a_3^1\lambda_3^3 + a_3^1(\lambda_1^1 - a_3^1\lambda_1^3) + a_3^2(\lambda_2^1 - a_3^1\lambda_2^3), \\ \tilde{\lambda}_1^3 = \lambda_1^3, \quad \tilde{\lambda}_2^3 = \lambda_2^3, \quad \tilde{\lambda}_3^3 = \lambda_3^3 + a_3^1\lambda_1^3 + a_3^2\lambda_2^3 + t, \\ \tilde{\lambda}_{21}^1 = \lambda_{21}^1 + a_3^2\lambda_1^3\gamma_{22}^1; \quad \tilde{\lambda}_{22}^1 = \lambda_{22}^1 + a_3^2\lambda_2^3\gamma_{22}^1 + t\gamma_{22}^1, \\ \tilde{\lambda}_{23}^1 = \lambda_{23}^1 + a_3^1(\lambda_{21}^1 + a_3^2\lambda_1^3\gamma_{22}^1) + a_3^2(\lambda_{22}^1 + a_3^2\lambda_2^3\gamma_{22}^1 + t\gamma_{22}^1) + \\ \quad + a_3^2\lambda_3^3\gamma_{22}^1; \quad \tilde{\gamma}_{22}^1 = \gamma_{22}^1. \end{cases} \tag{4}$$

Определение.

Назовем вектор $\gamma_{22}^1\vec{e}_1$ вектором бинормали комплекса K_1 с главной нормалью первого порядка.

Теорема I.

Если скалярный инвариант комплекса $(\lambda_1^3)^2 + (\lambda_2^3)^2$ отличен от нуля, то: а) поверхность первого порядка, принадлежащая комплексу, является квазиторсом тогда и только тогда, если центральная нормаль поверхности коллинеарна инвариантному вектору $\lambda_2^3\vec{e}_1 - \lambda_1^3\vec{e}_2$;

б) параметр распределения линейчатой поверхности первого порядка, принадлежащей комплексу, достигает максимального значения для поверхностей, чьи центральные нормали сонаправлены $\lambda_1^3\vec{e}_1 + \lambda_2^3\vec{e}_2$.

Доказательство.

Линейчатую поверхность первого порядка, принадлежащую комплексу, можно задать отношением базисных форм:

$$\omega^2 : \omega_4^1 : \omega_4^2 = \mu : \cos\alpha : \sin\alpha; \quad \omega_4^3 = 0, \tag{5}$$

где α -угол между центральной нормалью поверхности и бинормалью комплекса;

Для данной поверхности параметром распределения является $p(\alpha) = |\lambda_1^3 \cos\alpha + \lambda_2^3 \sin\alpha|$, следовательно, поверхность будет квазиторсом [2], если $tg\alpha = -\frac{\lambda_1^3}{\lambda_2^3}$.

Исследуя $p(\alpha)$, получим, что $\frac{dp}{d\alpha}$ обращается в нуль при $tg\alpha = \frac{\lambda_2^3}{\lambda_1^3}$ причем $\frac{d^2p}{d\alpha^2}$ строго меньше нуля при $\alpha = arctg\frac{\lambda_2^3}{\lambda_1^3}$. Значит, при $\alpha = arctg\frac{\lambda_2^3}{\lambda_1^3}$ функция $p(\alpha)$ принимает максимальное значение, что и требовалось доказать.

Теорема 2.

Сумма квадратов параметров распределения одна и та же для любой ортогональной пары [1] первого порядка, принадлежащей комплексу K_1 с главной нормалью первого порядка.

Доказательство следует из того факта, что

$[p(\alpha)]^2 + [p(\frac{\pi}{2}+\alpha)]^2 = (\lambda_1^3)^2 + (\lambda_2^3)^2$ независимо от выбора α.

Для произвольной линейчатой поверхности первого порядка комплекса K_1, заданной отношением (5),

$(\lambda_1^1 \cos\alpha \sin^2\alpha + \lambda_2^1 \sin^3\alpha - \mu \sin\alpha\cos\alpha)\vec{e}_1 + (\mu\cos^2\alpha - \lambda_1^1\cos^2\alpha\sin\alpha - \lambda_2^1\cos\alpha\sin^2\alpha)\vec{e}_2 + (\lambda_1^3\cos\alpha + \lambda_2^3\sin\alpha)\vec{e}_3$ - вектор распределения;

$-(\lambda_1^1\cos^2\alpha + \lambda_2^1\cos\alpha\sin\alpha + \mu\sin\alpha)$ - абсцисса относительного центра поверхности.

Отсюда следует, что для квазиторса $\left|\frac{\mu\lambda_2^3}{(\lambda_1^3)^2 + (\lambda_2^3)^2}\right|$ есть расстояние между горловой точкой данного квазиторса и инвариантной точкой прямой комплекса, абсцисса которой есть

$$t = \frac{\lambda_2^1\lambda_1^3 - \lambda_1^1\lambda_2^3}{\lambda_2^3} \tag{6}$$

Инвариантность точки (6) следует из (4)

Теорема 3.

Если скалярные инварианты комплекса λ_1^3 и λ_2^3 отличны от нуля, то единственной торсовой поверхностью первого порядка, принадлежащей комплексу, является поверхность с центральной нормалью, коллинеарной $-\lambda_2^3\vec{e}_1 + \lambda_1^3\vec{e}_2$ и горловой точкой, совпадающей с инвариантной точкой (6).

Доказательство.

Так как торсовая поверхность необходимо является квазиторсом, то центральная нормаль торса, как следует из теоремы I, параллельна $-\lambda_2^3\vec{e}_1 + \lambda_1^3\vec{e}_2$. Следовательно, вектор распределения торсовой поверхности, если она существует, есть

$$\left[\frac{\mu\lambda_1^3\lambda_2^3}{(\lambda_1^3)^2+(\lambda_2^3)^2} - \frac{(\lambda_1^1\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^1)(\lambda_1^3)^2}{[(\lambda_1^3)^2+(\lambda_2^3)^2]^{3/2}}\right]\vec{e}_1 + \left[\mu + \frac{(\lambda_1^3)^2\mu}{(\lambda_1^3)^2+(\lambda_2^3)^2} - \frac{\lambda_1^3\lambda_2^3(\lambda_1^1\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^1)}{[(\lambda_1^3)^2+(\lambda_2^3)^2]^{3/2}}\right]\vec{e}_2$$

Для того, чтобы поверхность была торсовой, достаточно задать μ так, чтобы

$$\begin{cases} \mu = \dfrac{\lambda_2^3}{\lambda_1^3}\cdot\dfrac{\lambda_1^1\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^1}{\sqrt{(\lambda_1^3)^2+(\lambda_2^3)^2}} \\[2ex] \mu = \dfrac{\lambda_1^3(\lambda_1^1\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^1)\lambda_2^3}{\sqrt{(\lambda_1^3)^2+(\lambda_2^3)^2}\,[(\lambda_2^3)^2+2(\lambda_1^3)^2]} \end{cases}$$

Система будет совместной, если $\lambda_2^3 = 0$, либо $\lambda_1^1\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^1=0$. Но $\lambda_1^1\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^1=0$ лишь в точке (6), следовательно, получим, что требовалось доказать.

Определение.

Назовем двумерные векторные пространства, проходящие:

1) через главную нормаль комплекса и вектор $\frac{\lambda_2^1}{\lambda_2^3}\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ – D_1 – пространством;

2) через главную нормаль комплекса и вектор $\frac{\lambda_{22}^1-\gamma_{22}^1\lambda_3^3}{\lambda_1^3}\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ – D_2 – пространством,

3) через бинормаль комплекса и вектор $-\frac{\lambda_{21}^1}{\lambda_1^3\gamma_{22}^1}\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ D_3 – пространством;

4) через бинормаль комплекса и вектор $\frac{2(\lambda_1^1\lambda_2^3-\lambda_2^1\lambda_1^3)-(\lambda_1^1+\lambda_3^3)\lambda_2^3}{(\lambda_2^3)^2}\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ – D_4 –пространством и

5) через векторы $\lambda_2^3\vec{e}_1 + \lambda_1^3\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1 + \frac{(\lambda_1^1+\lambda_1^3)\gamma_{22}^1 - \lambda_{22}^1}{\lambda_2^3\,\gamma_{22}^1}\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
D_5 - пространством.

Из формул (4) легко усмотреть:

Теорема 4.

Для линейчатых поверхностей комплекса, чьи центральные нормали коллинеарны главной нормали комплекса, все векторы распределения, ортогональные центральной нормали, расположены в D_1 - пространстве.

Теорема 5.

Для всех линейчатых поверхностей второго порядка, центральные нормали которых принадлежат D_1 -пространству, составляющая вектора распределения, коллинеарная бинормали, одна и та же.

Теорема 6.

Относительные центры линейчатых поверхностей совпадают с инвариантной точкой комплекса (6), если центральные нормали поверхностей коллинеарны бинормали комплекса, а ось $\vec{e}_3$ принадлежит D_1 -пространству.

Теорема 7.

Относительные центры линейчатых поверхностей, чьи центральные нормали коллинеарны бинормали комплекса, совпадают, если $\vec{e}_3$ принадлежит D_2 -пространству, с инвариантной точкой прямой комплекса, абсцисса которой t удовлетворяет уравнению

$$t = \frac{\lambda_{22}^1 - (\lambda_1^1 + \lambda_3^3)\gamma_{22}^1}{\gamma_{22}^1}. \tag{7}$$

Так как выбор квазиторса первого порядка, принадлежащего комплексу, фактически определяется выбором его горловой точки, то каждой инвариантной точке на образующей комплекса отвечает инвариантный выбор квазиторса. Если горловая точка квазиторса совпадает с (7), то вектор распределения такого квазиторса коллинеарен его центральной нормали.

Кроме этого, можно дать еще одну интерпретацию инвариантной точки (7) - горловые точки всех поверхностей второго порядка, принадлежащих комплексу и имеющих центральную нормаль в D_5 -пространстве, совпадают с точкой (7).

Теорема 8.

Для любого вектора второго порядка $\vec{\gamma}$, находящегося в D_3 -пространстве, имеет место:

горловая точка линейчатой поверхности второго порядка, центральная нормаль которой параллельна $\vec{\gamma}$, и относительный центр поверхности первого порядка с центральной нормалью, сонаправленной бинормали комплекса, расположены симметрично относительно инвариантной точки прямой комплекса

$$t = -\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_{2i}^{1}\lambda_2^3}{\lambda_1^3\gamma_{22}^{1}} + (\lambda_1^1+\lambda_3^3)\right] \qquad (8)$$

если относительный центр отвечает выбору $\vec{e}_3 \parallel \vec{\gamma}$.

Доказательство. Абсцисса относительного центра линейчатой поверхности первого порядка, если её центральная нормаль коллинеарна бинормали, равна

$$t_1 = -\lambda_1^1 + a_3^1\lambda_1^3$$

Абсцисса же горловой точки поверхности второго порядка с центральной нормалью в D_3 -пространстве есть

$$t_2 = -\lambda_3^3 - a_3^1\lambda_1^3 - \frac{\lambda_{21}^{1}\lambda_2^3}{\lambda_1^3\gamma_{22}^{1}}$$

Наконец, точка (8) инвариантна, это следует из (4). Точка (8) является горловой точкой поверхности второго порядка, центральная нормаль которой сонаправлена вектору

$$\frac{\lambda_3^3-\lambda_1^1}{2\lambda_1^3}\vec{e}_1 - \frac{\lambda_{21}^{1}\lambda_2^3}{\lambda_1^3\gamma_{22}^{1}}\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Теорема 9.

Если скалярный инвариант комплекса λ_1^3 отличен от нуля, то составляющая вектора распределения поверхности второго порядка с центральной нормалью в D_3 -пространстве, коллинеарная бинормали комплекса, достигает экстремального значения для поверхности, единичный вектор центральной нормали которой есть

$$\left[\frac{\lambda_2^3 \lambda_{21}^1}{2(\lambda_1^3)^2 \gamma_{22}^1} - \frac{\lambda_3^3 - \lambda_1^1}{2\lambda_1^3}\right]\vec{e}_1 - \frac{\lambda_{21}^1 \lambda_2^3}{\lambda_1^3 \gamma_{22}^1}\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Доказательство.

Составляющая вектора распределения поверхности с центральной нормалью в D_3 -пространстве, коллинеарная бинормали комплекса, имеет вид

$$\left[\lambda_3^1 - a_3^1(\lambda_3^3 - \lambda_1^1) - (a_3^1)^2\lambda_1^3 - \frac{\lambda_{21}^1}{\lambda_1^3 \gamma_{22}^1}(\lambda_2^1 - a_3^1\lambda_2^3)\right]\vec{e}_1$$

где a_3^1 - произвольный скаляр.

Исследуя

$$f(a_3^1) = \lambda_3^1 - a_3^1(\lambda_3^3 - \lambda_1^1) - (a_3^1)^2\lambda_1^3 - \frac{\lambda_{21}^1}{\lambda_1^3 \gamma_{22}^1}(\lambda_2^1 - a_3^1\lambda_2^3),$$

получим утверждение теоремы, причем минимальное значение достигается, если $\lambda_1^3 < 0$, а максимальное при $\lambda_1^3 > 0$

Теорема I0.

Среди линейчатых поверхностей, принадлежащих комплексу K_1 и имеющих центральные нормали в D_3 -пространстве, существуют две поверхности, обладающие следующим свойством:

векторы распределения этих поверхностей коллинеарны главной нормали комплекса.

Горловые точки этих поверхностей являются инвариантными точками образующей комплекса, их абсциссы удовлетворяют уравнению

$$t^2 + t\left(\lambda_1^1 + \lambda_3^3 + \frac{\lambda_{21}^1 \lambda_2^3}{\lambda_1^3 \gamma_{22}^1}\right) + \left(\lambda_1^1\lambda_3^3 - \lambda_3^1\lambda_1^3 + \frac{\lambda_{21}^1\lambda_2^1}{\gamma_{22}^1}\right) = 0$$

Доказательство.

Очевидно, что проекция вектора распределения на бинормаль комплекса будет нулевой тогда и только тогда, если

При таком выборе a_3^1 инвариантные точки с абсциссами

$$t = \frac{-\left(\lambda_1^1+\lambda_3^3+\dfrac{\lambda_{21}^1\lambda_2^3}{\lambda_1^3\gamma_{22}^1}\right) \pm \sqrt{\left(\lambda_1^1-\lambda_3^3+\dfrac{\lambda_2^3\lambda_{21}^1}{\lambda_1^3\gamma_{22}^1}\right)^2+4\left(\lambda_1^3\lambda_3^1-\dfrac{\lambda_{21}^1\lambda_2^1}{\gamma_{22}^1}\right)}}{2},$$

будут горловыми точками. Легко видеть, что эти точки расположены симметрично относительно точки (8).

Для линейчатых поверхностей с центральными нормалями в D_4 -пространстве и D_5 -пространстве получим аналоги теорем 8,9,10. Вообще, при любом инвариатном выборе a_3^2 мы имеем аналогичные свойства для линейчатых поверхностей второго порядка.

До сих пор мы считали, что скалярные инварианты комплекса, в частности λ_1^3, λ_2^3, отличными от нуля. Рассмотрим класс комплексов, для которого это условие места не имеет.

<u>Теорема II.</u>

С произволом одной функции 4-х переменных существует класс комплексов K_1 в R_4^2, обладающий следующими свойствами: главная нормаль любого комплекса из данного класса является прямой первого порядка и все линейчатые поверхности первого порядка, принадлежащие комплексу, - квазиторсы.

Доказательство.

Для того, чтобы все поверхности первого порядка, принадлежащие комплексу, являлись квазиторсами, в системе (2)

$$\lambda_1^3 = 0\ ,\quad \lambda_2^3 = 0$$

Таким образом, система (2) для комплекса данного класса имеет вид

$$\begin{cases} \omega^1 = \lambda_1^1\omega_4^1 + \lambda_2^1\omega_4^2 + \lambda_3^1\omega_4^3\ ; \quad \omega^3 = \lambda_3^3\omega_4^3, \\ \omega_2^1 = \lambda_{21}^1\omega_4^1 + \lambda_{22}^1\omega_4^2 + \lambda_{23}^1\omega_4^3 + \gamma_{22}^1\omega^2 \end{cases} \qquad (9)$$

Доказательство сводится к исследованию на инволюцию системы (9).

Для комплекса из данного класса, в частности, имеет место следующее свойство: горловые точки всех линейчатых поверхностей второго порядка, принадлежащих комплексу, совпадают.

Литература

I. Гоштейн В.М. Комплексы в R_4^2 - "Уч. зап. ЛатвГУ", 1971, т. 152.

2. Гоштейн В.М. Некоторые вопросы комплексов K_1 в $R_n^{m_1 m_2 \ldots m_s}$ "Уч. зап. ЛатвГУ", 1972, т.172.

Е.П.КЛЕЙНШТЕЙН

Конгруэнция прямых в пространстве $R_n^{1(n-1)}$

Рассматривается обобщение некоторых результатов теории конгруэнции прямых пространства R_4^{13} [3;4] на n-мерное полуевклидовое пространство $R_n^{1(n-1)}$ [1].

I. В полуевклидовом пространстве $R_n^{1(n-1)}$ вращение базисных векторов ортонормированного репера имеет вид

$$
\begin{aligned}
e_1 &= e_1' \\
e_i &= a_i^1 e_1' + a_i^k e_k' \\
e_n &= a_n^1 e_1' + a_n^k e_k' + e_n',
\end{aligned}
\tag{I}
$$

где (a_i^k) - ортогональная матрица. Здесь и далее

$$i, j, k, l = 2, 3, \dots, n-1$$

Уравнения движения ортонормированного репера имеют вид

$$
\begin{aligned}
dA &= \omega^1 e_1 + \omega^i e_i + \omega^n e_n \\
de_1 &= 0 \\
de_i &= \omega_i^1 e_1 + \omega_i^k e_k \\
de_n &= \omega_n^1 e_1 + \omega_n^k e_k, \quad \omega_i^k = -\omega_k^i
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Рассмотрим r - параметрическое семейство прямых, образующие которых не лежат в инвариантной плоскости $[e_1 e_2 \dots e_{n-1}]$ пространства $R_n^{1(n-1)}$. Отнесем это r-параметрическое семейство прямых к реперу нулевого порядка, т.е. вершина A репера расположена на прямой семейства, а вектор e_n направлен по прямой семейства. Допустимые преобразования репера нулевого порядка аналогичны преобразованиям в [3]. Определяя изменение главных форм

$$\omega^1, \omega^i; \omega_n^1, \omega_n^i, \tag{3}$$

при допустимых преобразованиях репера, образуем ряд форм, инвариантных при вращении репера в плоскости $[e_1 e_2 \dots e_{n-1}]$

$$\mathrm{I} = \sum_i (\omega_n^i)^2 \tag{4}$$

$$\mathrm{II} = \sum_i \omega^i \omega_n^i \tag{5}$$

$$\mathrm{III} = \sum_i (\omega^i \omega_n^k - \omega^k \omega_n^i)^2 \tag{6}$$

2. Перейдем к рассмотрению линейчатых поверхностей (однопараметрических семейств прямых). Отнесем линейчатую поверхность к ортонормированному реперу нулевого порядка.

Назовем изотропной линейчатой поверхностью такое однопараметрическое семейство прямых, центральная нормаль de_n которого направлена по изотропному вектору e_1 репера. Неизотропными линейчатыми поверхностями назовем такие однопараметрические семейства прямых, центральные нормали de_n которых не направлены по изотропному вектору e_1 репера.

Рассмотрим изотропную линейчатую поверхность. Она характеризуется условиями

$$\omega_n^2 = \omega_n^3 = \dots = \omega_n^{n-1} = 0 \tag{7}$$

По аналогии с [3], принимая форму ω_n^1 за базис, имеем

$$\begin{aligned} \omega^1 &= b_1^1 \omega_n^1 \\ \omega^i &= b_1^i \omega_n^1 \end{aligned} \tag{8}$$

где $\{b_1^i\}$ – координаты инвариантного вектора распределения изотропной линейчатой поверхности,

b_1^1 – абсцисса α-центра образующей изотропной линейчатой поверхности, зависящая от выбора векторов e_i, т.е. от выбора плоскости α.

Рассмотрим неизотропную линейчатую поверхность. Направляя вектор e_i по центральной нормали de_n, получаем

$$\omega_u^1 = \omega_u^2 = \ldots = \omega_u^{i-1} = \omega_u^{i+1} = \ldots = \omega_u^{n-1} = 0 \tag{9}$$

Аналогично [3], принимая форму ω_u^i за базис, имеем

$$\begin{aligned} \omega^i &= b_i^i \omega_u^i \\ \omega^j &= b_i^j \omega_u^i \end{aligned} \tag{10}$$

где b_i^i – α-внешний параметр распределения неизотропной линейчатой поверхности (9), зависящий от выбора плоскости α,

$\{b_i^j\}$ – координаты внутреннего вектора распределения неизотропной линейчатой поверхности ($i \neq j$),

b_i^i – абсцисса инвариантной точки, которую назовем стрикционной, образующей неизотропной линейчатой поверхности.

Отметим, что в репере нулевого порядка отношение квадратичных форм (4) и (5)

$$\frac{\overline{\Phi}}{\Phi} = \frac{\sum\limits_i \omega^i \omega_u^i}{\sum\limits_i (\omega_u^i)^2} \tag{11}$$

определяет абсциссу стрикционной точки образующей неизотропной линейчатой поверхности.

3. Перейдем к рассмотрению конгруэнции прямых, т.е. $(n-1)$ – параметрического семейства прямых.

Присоединим к прямой конгруэнции ортонормированный репер нулевого порядка. Исключая случай линейной зависимости $[\omega_u^1 \omega_u^2 \ldots \omega_u^{n-1}] = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \lambda_1^1 \omega_u^1 + \lambda_k^1 \omega_u^k \\ \omega^i &= \lambda_1^i \omega_u^1 + \lambda_k^i \omega_u^k \end{aligned} \tag{12}$$

Для геометрической интерпретации коэффициентов системы (12) рассмотрим координатные [2] линейчатые поверхности, принадлежащие конгруэнции прямых.

Конгруэнция прямых содержит одну изотропную координатную линейчатую поверхность

$$\omega_n^1 \neq 0, \quad \omega_n^i = 0 \tag{I3}$$

и $(n-2)$-неизотропные координатные линейчатые поверхности

$$\begin{aligned} &\omega_n^1 = 0, \ \omega_n^2 \neq 0, \ \omega_n^3 = 0, \ldots, \ \omega_n^{n-1} = 0 \\ &\omega_n^1 = 0, \ \omega_n^2 = 0, \ \omega_n^3 \neq 0, \ldots, \ \omega_n^{n-1} = 0 \\ &\text{— — — — — —} \\ &\omega_n^1 = 0, \ \omega_n^2 = 0, \ \omega_n^3 = 0, \ldots, \ \omega_n^{n-1} \neq 0 \end{aligned} \tag{I4}$$

Для координатной изотропной линейчатой поверхности (I3), из (I2) следует

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \lambda_1^1 \omega_n^1 \\ \omega^i &= \lambda_1^i \omega_n^1 \end{aligned} \tag{I5}$$

где e_1 – сонаправлен центральной нормали $de_n \ (\omega_n^i = 0)$,

e_n – по образующей.

Сравнивая системы (I5) и (8), находим

λ_1^1 – абсцисса α-центра образующей изотропной линейчатой поверхности,

$\{\lambda_1^i\}$ – координаты вектора распределения изотропной линейчатой поверхности.

Для координатной неизотропной линейчатой поверхности

$$\omega_n^1 = 0; \ \omega_n^2 = 0; \ ; \ \omega_n^{i-1} = 0; \ \omega_n^i \neq 0; \ \omega_n^{i+1} = 0, \ldots, \ \omega_n^{n-1} = 0 \tag{I6}$$

из (I2) следует

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \lambda_i^1 \omega_n^i \\ \omega^j &= \lambda_i^j \omega_n^i \end{aligned} \tag{I7}$$

где вектор e_i направлен по центральной нормали de_n, а вектор e_n – по образующей. Сравнивая системы (I7) и (I0), находим

λ^1_i – α – внешний параметр распределения неизотропной линейчатой поверхности,

$\{\lambda^j_i\}$ – координаты внутреннего вектора распределения неизотропной линейчатой поверхности ($i \neq j$),

λ^i_i – абсцисса стрикционной точки образующей неизотропной линейчатой поверхности.

4. При переносе вершины A репера на отрезок t, коэффициенты системы (I2) изменяются следующим образом

$$\bar\lambda^1_1 = \lambda^1_1 - t \ , \quad \bar\lambda^1_k = \lambda^1_k \qquad \text{(I8)}$$
$$\bar\lambda^i_1 = \lambda^i_1 \ , \quad \bar\lambda^i_k = \lambda^i_k - \delta^i_k t$$

При вращении векторов e_i в плоскости α, имеем

$$\bar\lambda^1_1 = \lambda^1_1 \ , \quad \bar\lambda^1_k = A^i_k \lambda^1_i \qquad \text{(I9)}$$
$$\bar\lambda^i_1 = a^i_k \lambda^k_1 \ , \quad \bar\lambda^i_k = a^i_\ell A^j_k \lambda^\ell_j \ ,$$

т.е. $\{\lambda^i_1\}$ и $\{\lambda^1_i\}$ – изменяются, как координаты векторов, а коэффициенты λ^j_i – изменяются, как координаты двухвалентного тензора в евклидовом пространстве.

При изменении плоскости α, коэффициенты системы (I2) изменяются следующим образом:

$$\bar\lambda^1_1 = \lambda^1_1 + a^1_i \lambda^i_1 \ , \quad \bar\lambda^1_k = \lambda^1_k + a^1_i \lambda^i_k - a^1_k \bar\lambda^1_1$$
$$\bar\lambda^i_1 = \lambda^i_1 \ , \quad \bar\lambda^i_k = \lambda^i_k - a^1_k \bar\lambda^i_1 \qquad \text{(20)}$$

Из соотношения (I8), (I9) и (20) замечаем, что вектор распределения

$$\lambda^i_1 e_i \qquad \text{(2I)}$$

изотропной линейчатой поверхности, принадлежащей конгруэнции прямых, не зависит ни от переноса вершины репера, ни от изменения плоскости α, а при вращении векторов e_i в плоскости α, координаты λ^i_1 изменяются, как координаты вектора.

Отсюда:

Теорема. Модуль вектора распределения изотропной линейчатой поверхности есть инвариант конгруэнции.

Теорема. Вектор распределения изотропной линейчатой поверхности, принадлежащей конгруэнции прямых, лежит в инвариантной двухмерной плоскости.

Назовем инвариантную двухмерную плоскость, проходящую через изотропный вектор e_1 и вектор распределения (21) изотропной линейчатой поверхности, плоскостью β. Ортогональную к ней инвариантную ($n-3$)-мерную плоскость, лежащую в инвариантной гиперплоскости $[e_1 e_2 \ldots e_{n-1}]$, назовем плоскостью γ. Линейчатые поверхности, центральные нормали которых лежат в плоскости β, назовем поверхностями P_β.

Если плоскость β совместить с плоскостью $[e_1 e_j]$, то выполнится условие

$$\lambda_1^2 = 0, \ldots ; \lambda_1^{j-1} = 0, \lambda_1^j \neq 0, \lambda_1^{j+1} = 0, \ldots , \lambda_1^{n-1} = 0 \qquad (22)$$

В этом случае коэффициенты $\lambda_j^i (i \neq j)$ системы (12), определяющие координаты векторов внутреннего распределения неизотропных линейчатых поверхностей P_β не зависят от изменения плоскости α, что следует из соотношений (21).

Теорема. Неизотропные линейчатые поверхности P_β имеют инвариантный вектор внутреннего распределения.

При выполнении условий (22) коэффициенты $\lambda_i^i (i \neq j)$ системы (12) также не зависят от изменения плоскости α (20).

Теорема. Неизотропные линейчатые поверхности, центральные нормали которых лежат в плоскости γ, имеют инвариантные стрикционные точки.

Литература

1. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. М., 1969.
2. Березина Л.Я. Классическая дифференциальная геометрия, I. Рига, 1970.
3. Клейнштейн Е.П. Инвариантные образы конгруэнции в R_4^{13} - "Уч. зап. ЛатвГУ", 1971, т.152.
4. Клейнштейн Е.П. Инвариантные плоскости конгруэнции прямых в R_4^{13} - "Уч. зап. ЛатвГУ", 1972, т.172.

Л.И. МАДРЕВИЦ

Класс конгруэнции K_4^2 в F_4

Предлагаемая работа является продолжением статьи /I/. Канонизация репера в /I/ строилась при условии, что инвариант $\lambda_4^2 \neq 0$. В данной статье рассматривается класс конгруэнции, для которого $\lambda_4^2 = 0$. Доказывается его существование, свойства и проводится канонизация репера. В квадратных скобках помещены номера соответствующих формул из /I/.

§I.

Основная система репера конгруэнции в F_4 имеет вид /22/. Рассмотрим класс конгруэнции, для которого инвариант

$$\lambda_4^2 = 0 \qquad (I)$$

Этот класс обозначим K_4^2. Условие (I) геометрически означает следующее:

линейчатая поверхность, центральная нормаль которой сонаправлена изотропному вектору $\vec{e}_4$ (L_3), имеет нулевой параметр распределения.

При условии (I) основная система репера /22/ принимает вид:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \lambda_2^2 \omega_1^2 + \lambda_3^2 \omega_1^3 \\ \omega^3 &= \lambda_2^3 \omega_1^2 + \lambda_3^3 \omega_1^3 + \lambda_4^3 \omega_1^4 \qquad (2) \\ \omega^4 &= \lambda_2^4 \omega_1^2 + \lambda_3^4 \omega_1^3 + \lambda_4^4 \omega_1^4 . \end{aligned}$$

Исследуем на инволюцию данный класс. Дифференцируя систему (2) внешним образом, получим:

$$\begin{aligned} &[\Delta_1 \omega_1^2] + [\Delta_2 \omega_1^3] = 0 \\ &[\Delta_3 \omega_1^2] + [\Delta_4 \omega_1^3] + [\Delta_5 \omega_1^4] = 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

$$[\Delta_6 \omega_1^2] + [\Delta_7 \omega_1^3] + [\Delta_8 \omega_1^4] = 0$$

где

$$\Delta_1 = -\alpha \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \omega_2^3 + \omega^1$$

$$\Delta_2 = -\alpha \lambda_3^2$$

$$\Delta_3 = -\alpha \lambda_2^3 + \lambda_3^3 \omega_2^3 + \lambda_4^3 \omega_2^4 - \lambda_2^2 \omega_2^3$$

$$\Delta_4 = -\alpha \lambda_3^3 - \lambda_3^2 \omega_2^3 + \lambda_4^3 \omega_3^4 + \omega^1$$

$$\Delta_5 = -\alpha \lambda_4^3$$

$$\Delta_6 = -\alpha \lambda_2^4 + \lambda_3^4 \omega_2^3 + \lambda_4^4 \omega_2^4 - \lambda_2^2 \omega_2^4 + \lambda_2^3 \omega_3^4$$

$$\Delta_7 = -\alpha \lambda_3^4 + \lambda_4^4 \omega_3^4 - \lambda_3^2 \omega_2^4 - \lambda_3^3 \omega_3^4$$

$$\Delta_8 = -\alpha \lambda_4^4 - \lambda_4^3 \omega_3^4 + \omega^1$$

Система (3) есть система Васенина, для которой легко подсчитать: $S_1 = 3$, $S_2 = 3$, $S_3 = 2$.
Соответственно, найдем: $Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 = 15$, $N = 15$.
Итак, система в инволюции с произволом двух функций трех аргументов.

§2.

Рассмотрим свойства класса K_4^2. Используя условие (I), перепишем формулы /24/ преобразования коэффициентов λ_j^i основной системы (2):

$$\bar{\lambda}_2^2 = \lambda_2^2 + a_2^3 \lambda_3^2$$

$$\bar{\lambda}_3^2 = \lambda_3^2$$

$$\bar{\lambda}^3_2 = \lambda^3_2 - a^3_2\left(\lambda^2_2 - \lambda^3_3\right) - \left(a^3_2\right)^2\lambda^2_3 + a^4_2\lambda^3_4$$

$$\bar{\lambda}^3_3 = \lambda^3_3 - a^3_2\lambda^2_3 + a^4_3\lambda^3_4$$

$$\bar{\lambda}^3_4 = \lambda^3_4$$

$$\bar{\lambda}^4_2 = \lambda^4_2 - a^4_2\left(\lambda^2_2 - \lambda^4_4\right) - a^4_3\lambda^3_2 + a^3_2\lambda^4_3 +$$

$$+ a^3_2 a^4_3\left(\lambda^2_2 - \lambda^3_3\right) - a^3_2 a^4_2\lambda^2_3 - a^3_2 a^4_3\lambda^3_4 + \qquad (4)$$

$$+ \left(a^3_2\right)^2 a^4_3\lambda^2_3$$

$$\bar{\lambda}^4_3 = \lambda^4_3 - a^4_2\lambda^2_3 - a^4_3\left(\lambda^3_3 - \lambda^4_4\right) + a^3_2 a^4_3\lambda^2_3 - \left(a^4_3\right)^2\lambda^3_4$$

$$\bar{\lambda}^4_4 = \lambda^4_4 - a^4_3\lambda^3_4$$

Среди линейчатых поверхностей, принадлежащих конгруэнции, имеются поверхности, центральная нормаль каждой из которых расположена в инвариантной плоскости $[\vec{e}_3, \vec{e}_4]$, но не совпадает с вектором $\vec{e}_4$ (L_2). Любую из этих поверхностей мы можем сделать координатной. Согласно /I/, вектор распределения такой поверхности $\vec{z} = \lambda^2_3\vec{e}_2 + \lambda^4_3\vec{e}_4$, а параметр распределения — λ^2_3. Из формул (4) следует:

<u>Теорема I</u>. Все линейчатые поверхности L_2 имеют одинаковый параметр распределения (λ^2_3).

Инварианты J^2_2 /28/ и J^3_3 /32/ для K^2_y принимают вид:

$$J^2_2 = J^3_3 = \lambda^2_3\lambda^3_4 \qquad (5)$$

Если в общем случае конгруэнции прямых обращение в нуль инвариантов $\mathcal{J}_2^2$ и $\mathcal{J}_3^3$ посредством переноса вершины репера определило соответственно абсцисси флагового центра и точки стабилизации, то для K_4^2 эти инварианты более не зависят от переноса вершины репера, т.е. данные точки для K_4^2 не определяются.

§3. Для канонизации репера класса K_4^2 поместим вершину его в аффинный центр конгруэнции, вследствие чего будем иметь:

$$\bar{\lambda}_2^2+\bar{\lambda}_3^3+\bar{\lambda}_4^4=0 \qquad (6)$$

далее предположим, что для координатной линейчатой поверхности, центральная нормаль которой расположена в инвариантной плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$, но не лежит в плоскости $[\vec{e}_3, \vec{e}_4]$ (L_1) выполняются условия;

$$\bar{\lambda}_2^2=0 \qquad (7)$$

и вектор распределения (L_1) $\vec{\tau}=\lambda_2^3\vec{e}_3+\lambda_2^4\vec{e}_4$ сонаправлен изотропному вектору $\vec{e}_4$, т.е.

$$\bar{\lambda}_2^3=0 \qquad (8)$$

Вследствие такого предположения из формул (4) будем иметь:

$$\begin{cases} \lambda_2^2+a_2^3\lambda_3^2=0 \\ \lambda_2^3-a_2^3(\lambda_2^2-\lambda_3^3)-(a_2^3)^2\lambda_3^2+a_2^4\lambda_4^3=0 \end{cases} \qquad (9)$$

Из системы (9) найдем:

$$a_2^3=-\frac{\lambda_2^2}{\lambda_3^2}, \qquad a_2^4=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_2^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3\end{vmatrix}}{\lambda_3^2\lambda_4^3} \qquad (10)$$

где $\lambda_3^2\neq 0$, $\lambda_4^3\neq 0$.

Из условий (6), (7), (8) имеем:

Теорема 2. Среди линейчатых поверхностей L_1 существует ровно одна поверхность с нулевым параметром распределения, стрикционная точка которой совпадает с аффинным центром конгруэнции.

Для полной канонизации репера осталось зафиксировать лишь положение вектора $\vec{e}_3$, т.е. определить a_3^4. Для этого достаточно предположить, что $\bar\lambda_3^3 = 0$ или $\bar\lambda_4^4 = 0$.

Полагая $\bar\lambda_3^3 = 0$ (II), найдем:

$$a_3^4 = -\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^3}{\lambda_4^3} \qquad (12)$$

В силу того, что a_3^4 входит в (II) линейно, имеем:

Теорема 3. Среди линейчатых поверхностей L_2 существует ровно одна поверхность, относительный центр которой совпадает с аффинным центром конгруэнции и стрикционной точкой поверхности L_1 .

Аналогично, полагая $\bar\lambda_4^4 = 0$ (13), найдем:

$$a_3^4 = \frac{\lambda_4^4}{\lambda_4^3} \qquad (14)$$

Полная система инвариантов класса K_4^2 имеет вид:

$$\mathcal{J}_3^2 = \lambda_3^2 \qquad \mathcal{J}_2^4 = -\lambda_4^3 \begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_2^4 & \lambda_3^4 \end{vmatrix} + \lambda_4^4 \begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{J}_4^3 = \lambda_4^3 \qquad \mathcal{J}_3^4 = \lambda_2^2 \lambda_4^4 + \begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ \lambda_3^4 & \lambda_4^4 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{J}_4^4 = \lambda_2^2 + \lambda_3^3 + \lambda_4^4 \qquad (15)$$

Литература

I. Мадревиц Л.И. Конгруэнция прямых в F_4. - "Уч. зап. ЛатвГУ", 1971, т. 152.

И.Н. ЛЕВИ

О представлении алгебр Ли матрицами над некоторым полем характеристики нуль

В 1937 году Г.Биркгоф в /5/ показал, что каждая конечнопорожденная нильпотентная алгебра Ли над полем Ω нулевой характеристики может быть точно представлена треугольными матрицами с нулями на главной диагонали над полем Ω. Затем И.Адо и К.Ивасава доказали точную представимость матрицами любой конечномерной алгебры Ли над любым полем. В связи с этими рассмотрениями естественно возникает вопрос о нахождении условий, при которых данная алгебра Ли над полем P точно представима матрицами над некоторым полем Ω, причем P есть подполе поля Ω.

Настоящая статья посвящена нахождению необходимых и достаточных условий представимости разрешимых алгебр Ли над полем P нулевой характеристики матрицами над некоторым расширением поля P. Результаты, полученные здесь, во многом аналогичны соответствующим результатам из теории представлений разрешимых групп матрицами над некоторым полем характеристики нуль /I,3,4,6/.

п.I. Пусть L - произвольная алгебра Ли над полем P характеристики нуль, Ω - некоторая алгебра над полем P, x^λ - однозначно определенная функция, ставящая элементам $x\in L$ и $\lambda\in\Omega$ в соответствие некоторый элемент из L. Алгебра L называется Ω-степенной, если выполнены следующие условия:

I) $x^1 = x, \quad x^{\lambda+\mu} = x^\lambda + x^\mu, \quad x^{\lambda\mu} = (x^\lambda)^\mu$;

2) $[x^\lambda, y] = [x, y^\lambda] = [x,y]^\lambda, \quad (x+y)^\lambda = x^\lambda + y^\lambda$,

где в условии I) I является единицей алгебры Ω, элементы x, y произвольны в L, а λ, μ - в Ω.

Ω-подалгебра H алгебры L называется Ω-изолированной, если из того, что $x^\lambda\in H$ для некоторого

$\lambda\in\Omega$ следует $x\in H$. Очевидно, что сама Ω-степенная алгебра L является Ω-изолированной алгеброй. Кроме того, пересечение любого числа Ω-изолированных подалгебр в L снова есть Ω-изолированная подалгебра.

Отсюда вытекает для любой подалгебры H в L существование минимальной Ω-изолированной подалгебры, содержащей H. Эту подалгебру мы назовем Ω-изолятором подалгебры L и обозначим через $J(H)$. Ω-степенная подалгебра H имеет в L Ω-периодический индекс, если для любого $x\in L$ найдется такая функция $\lambda\in\Omega$, что $x^{\lambda}\in H$.

Понятие Ω-изолированности для подалгебр полностью аналогично давно применяемому в теории групп понятию изолированности для подгрупп. Многие общие факты /3/ об изолированных подгруппах естественным образом переносятся на Ω-изолированные подалгебры. В качестве примера приведём следующие утверждения.

Лемма I. Пусть H - Ω-изолированный идеал Ω-степенной алгебры L и M -произвольная подалгебра в L, содержащая H. Тогда $J(M/H)=J(M)/H$.

Лемма 2. Пусть H - идеал L и M - произвольная подалгебра, содержащая H. Тогда

$$J(MJ(H))/J(H)\cong J(M)/J(H)$$

Лемма 3. Ω-изолятор идеала H произвольной Ω-степенной алгебры L является идеалом в L.

Ω-степенная алгебра L называется ΩR-степенной алгеброй, если для произвольных x,y из L и λ из Ω из равенства $x^{\lambda}=y^{\lambda}$ следует, что $x=y$.

Лемма 4. Для любого множества M элементов ΩR-степенной алгебры L централизатор $Z(M)$ этого множества является Ω-изолированной подалгеброй в L.

Доказательства лемм I,2,3,4 полностью аналогичны доказательству лемм I.I, I.2, I.4, I.7 из /3/.

Везде ниже мы будем предполагать, чтс Ω- область целостности над полем P характеристики нуль.

Будем говорить, что Ω-степенная алгебра L имеет общий Ω-ранг m или просто Ω-ранг m, если каждая конечнопорожденная Ω-подалгебра H в L содержится в некоторой Ω-подалгебре с не более, чем m Ω-образующими. Если же каждая конечнопорожденная Ω-подалгебра $H\subset L$ имеет не более n Ω-образующих, то в этом случае мы будем говорить, что Ω-степенная алгебра L имеет специальный Ω-ранг, ранг n.

<u>Лемма 5</u>. Пусть в Ω-степенной алгебре L, обладающей конечной системой Ω-образующих $x_1, x_2, \ldots, x_s$ дана такая Ω-подалгебра H, что для всякого образующего x_i $(i=1,2,3,\ldots,s)$ найдется такое $\lambda_i\in\Omega$, при котором $x_i^{\lambda_i}\in H$. Тогда Ω-подалгебра H имеет в L Ω-периодический индекс и поэтому для всякого элемента $y\in L$ найдется такое $\mu\in\Omega$, что $y^{\mu}\in H$.

Утверждение леммы доказывается аналогично соответствующему утверждению (теорема 2.4) из /3/.

<u>Лемма 6.</u> В Ω-степенной алгебре L изолятор $J(H)$ произвольной Ω-подалгебры H состоит из тех элементов x алгебры L, для каждого из которых найдется такая функция $\lambda\in\Omega$, что $x^{\lambda}\in H$.

Ω-степенная алгебра L называется Ω-полной, если для любых $\lambda\in\Omega$ и $y\in L$ уравнение $x^{\lambda}=y$ имеет в L решение.

Если $\overline{\Omega}$ -поле частных области целостности Ω, то Ω-полная Ω-степенная алгебра Ли L над полем P может быть естественным образом рассмотрена как алгебра Ли над полем $\overline{\Omega}$.

Лемма 7. ΩR-степенная алгебра Ли L тогда и только тогда является Ω-полной алгеброй, когда она является $\bar{\Omega}$-степенной алгеброй. Для $\bar{\Omega}$-степенных алгебр Ли из конечности $\bar{\Omega}$-ранга следует конечность числа $\bar{\Omega}$-образующих, т.е. конечная размерность над $\bar{\Omega}$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.3 из / 4 /.

Если Ω-полная Ω-степенная алгебра Ли L содержит подалгебру H, которая имеет Ω-периодический индекс в L, то L называется Ω-пополнением H.

Лемма 8. Если Ω-полная ΩR-степенная алгебра L есть Ω-пополнение своей подалгебры H и M- какая-либо Ω-полная подалгебра L, то M есть Ω-пополнение $H \cap M$.

Доказательство. В самом деле, для любого элемента $h \in M$ найдется такое $\lambda \in \Omega$, что $h^{\lambda} \in H$. Но тогда h^{λ} содержится и в пересечении $H \cap M$.

Теорема I. Каждая ΩR-степенная алгебра Ли L содержится в некоторой Ω-полной Ω-степенной алгебре L^*, являющейся Ω-пополнением L. Все Ω-пополнения изоморфны.

Доказательство. Пусть L - ΩR-степенная алгебра Ли. Другими словами, это означает, что L^* мы можем рассматривать как алгебру, получившуюся из L путем расширения алгебры скаляров до $\bar{\Omega}$. Очевидно, что L^* является алгеброй над полем Ω, т.е. является Ω-полной Ω-степенной алгеброй. Легко проверить, что L^* есть Ω-пополнение алгебры L. Так как любое пополнение алгебры L мы можем представить в таком виде, то любые два Ω-пополнения алгебры L Ω-изоморфны.

Следствие I. Каждое дифференцирование ΩR-степенной алгебры Ли L однозначно продолжается до дифференцирования Ω-пополнения алгебры L.

Следствие 2. Ω-ранг Ω-пополнения L^* Ω-степенной алгебры L без Ω-кручения не больше Ω-ранга L.

п.2. Лемма 9. Для того, чтобы нильпотентная алгебра Ли L над полем характеристики нуль могла быть точно представлена при помощи треугольных матриц с нулевой главной диагональю над полем Ω характеристики нуль, необходимо и достаточно, чтобы она изоморфно вкладывалась в некоторую конечномерную над полем Ω нильпотентную алгебру Ли.

Доказательство. Пусть L вкладывается в конечномерную над Ω нильпотентную алгебру Ли $\bar{L}$. По теореме Биркгофа $\bar{L}$, а вместе с ней и L, допускает точное представление треугольными матрицами с нулевой главной диагональю над Ω.

Обратно, пусть L точно представима треугольными матрицами с нулевой главной диагональю над Ω. Алгебра треугольных матриц с нулевой главной диагональю относительно операции коммутирования является конечномерной нильпотентной алгеброй Ли, таким образом, L изоморфно вкладывается в конечномерную над Ω нильпотентную алгебру Ли.

Теорема 2. Пусть алгебра Ли L обладает точным конечномерным представлением (F, L) над полем P, UL - её универсальная обёртывающая алгебра над полем Ω; H - максимальный идеал алгебры UL, аннулирующий F; M - подалгебра алгебры дифференцирований L.

Если H инвариантен относительно дифференцирований из M, т.е. $h\gamma \in H$ для любых $\gamma \in M$ и $h \in H$, то полупрямое произведение $L \lambda M$ обладает точным матричным представлением над полем P.

Доказательство. Так как L обладает точным конечномерным представлением над P, то L вкладывается в конечномерную над P алгебру Ли $\bar{L}$, а M можно рассматривать как подалгебру алгебры дифференцирований $\bar{M}$ конечномерной алгебры Ли $\bar{L}$. $\bar{M}$ конечномерна, значит $\bar{L}\lambda\bar{M}$ по теореме Адо-Ивасавы допускает точное матричное представление над P, что влечет точное матричное представление $L\lambda M$ над P.

Замечание. Из теоремы Адо-Ивасавы следует, что конечное расширение алгебры Ли над полем P, допускающей точное матричное представление над P, точно представимо матрицами над P.

Лемма IO. Пусть L - алгебра Ли над полем P, H - её идеал, причем L/H - конечномерная абелева алгебра Ли; $g_1, g_2, \dots, g_k$ - прообразы образующих L/H в L. Пусть существует изоморфное вложение μ_0 H в алгебру Ли M_0 над Ω, причем сужение любого внутреннего дифференцирования L на H индуцирует Ω - дифференцирование M_0.

Тогда:

I) существует изоморфное вложение μ алгебры Ли L в алгебру Ли $\bar{L}$ над Ω такое, что μ продолжает μ_0, причем размерности $\bar{L}/M_0$ над Ω и L/H над P совпадают;

2) $g_1^{\mu}, g_2^{\mu}, \dots, g_k^{\mu}$ являются прообразами образующих $\bar{L}/M_0$ в $\bar{L}$, причем сужение внутреннего дифференцирования $\bar{L}$ на L, порожденное g_i^{μ} совпадает с внутренним дифференцированием L, порожденным g_i для любого $i = 1,2,\dots, k$.

Доказательство. По условию леммы H можно изоморфно вложить в M_0 так, что алгебра L гомоморфно вкладывается в алгебру Ω-дифференцирований M_0. Пусть $L_0 = H$, L_i - алгебра Ли, натянутая на $H, g_1, g_2, \dots, g_k$ над Ω. Применим индукцию по i. Пусть для $i-1$ лемма справедлива, т.е. существует алгебра Ли M_{i-1}, что выполняется заключение леммы. Надо доказать справедливость леммы для i. Покажем сначала, что внутреннее дифференцирование, индуцируемое g_i на L_i, можно продолжить до дифференцирования g_i^{μ} на L_i. На L_0 дифференцирование.

порожденное g_i, продолжается согласно условию. Положим
$M_{i-1}=\{M_0, g_1^{\mu_{i-1}}, g_2^{\mu_{i-1}}, \ldots, g_{i-1}^{\mu_{i-1}}\}$,
где $\mu_{i-1}: H \to M_{i-1}$, $[g_j^{\mu_{i-1}}, g_i]=[g_j, g_i]^{\mu_{i-1}}$,
так как $[g_j, g_i]\in H$. Пусть $M_i = M_{i-1} \oplus \{g_i\}$
и $\mu_i: M_{i-1} \to M_i; g^{\mu_{i-1}\mu_i}=g$ по определению для любого $g\in M_{i-1}$.
Очевидно, что алгебра M_i удовлетворяет условиям I) и 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для того, чтобы конечнопорожденную разрешимую алгебру Ли L над полем P без кручения можно было изоморфно представить матрицами над некоторым полем Ω характеристики 0, необходимо и достаточно, чтобы L имела следующее строение:

$$L \supset L_1 \supset L_2 \supset \{0\},$$

где L/L_1 - конечная алгебра Ли, L_1/L_2 - конечнопорожденная абелева алгебра Ли, а алгебру L_2 можно изоморфно вложить в ΩR-степенную алгебру Ли H конечного Ω-ранга, причем сужение каждого внутреннего дифференцирования алгебры L_1 на подалгебре L_2 индуцирует Ω-дифференцирование алгебры H.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы Ли.

Пусть L имеет указанное строение, тогда L - конечное расширение L_1, значит по замечанию достаточно доказать утверждение для L_1.

Каждый элемент из L_1 индуцирует Ω-дифференцирование алгебры H. Тогда по лемме IO алгебру L_1 можно изоморфно вложить в разрешимую алгебру Ли $\bar{L}$ над полем Ω, имеющую следующее строение:

$$\bar{L} \supset H \supset \{0\},$$

где $\bar{L}/H$ - конечнопорожденная абелева алгебра Ли. Алгебра Ли H конечного Ω-ранга, значит она конечномерна над Ω и по теореме Адо допускает точное матричное представление, тогда по замечанию $\bar{L}$ тоже допускает точное матричное представление, а вместе с ней и L_1.

Теорема 3. Для того, чтобы разрешимая алгебра Ли L без кручения и без центра была изоморфно представлена матрицами над некоторым полем Ω нулевой характеристики, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) в L выполняется условие обрыва для централизаторов возрастающей последовательности подалгебр из L;

2) в L имеется инвариантный ряд

$$L \supset L_1 \supset L_2 \supset \{0\} ,$$

где L/L_1 - конечная алгебра Ли, L_1/L_2 - абелева алгебра Ли, а L_2 можно изоморфно вложить в ΩR-степенную нильпотентную алгебру Ли H конечного Ω-ранга, причем сужение каждого внутреннего дифференцирования L на L_2 индуцирует Ω-дифференцирование H.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы Ли.

Пусть теперь выполняются условия 1) и 2). По 1) в L существует конечнопорожденная подалгебра L_0, содержащая L_2, такая, что $З_L(L_0)=\{0\}$ и L_0/L_2 - конечнопорожденная абелева алгебра Ли. По 2) L имеет следующее строение:

$$L \supset L_0 \supset L_2 \supset \{0\} ,$$

где L_0/L_2 - конечнопорожденная абелева алгебра Ли, а L_2 можно изоморфно вложить в ΩR-степенную нильпотентную алгебру H конечного Ω-ранга, причем сужение каждого внутреннего дифференцирования L на L_0 индуцирует Ω-дифференцирование H. По предыдущему предложению L_0 точно представима матрицами над Ω, а следовательно, вкладывается в конечномерную алгебру Ли и сужение любого внутреннего дифференцирования L на L_0 индуцирует Ω-дифференцирование M. Таким образом, получили представление (M,L). Так как $З_L(L_0)=\{0\}$, то L действует на L_0 точно, т.е. L можно рассматривать как подалгебру алгебры всех дифференцирований алгебры Ли M над Ω. Ввиду того, что M конечномерна, алгебра её дифференцирований также конечномерна, значит L изоморфно вкладывается в конечномерную над Ω алгебру Ли, которая по теореме Адо допускает точное матричное представление. Теорема доказана.

В заключение приведем теорему, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 3 в /4/.

Теорема 4. Свободная нильпотентная алгебра класса n представима треугольными матрицами с нулями на главной диагонали над некоторым полем характеристики нуль.

Литература

I. Мальцев А.И. Нильпотентные группы без кручения. — "Изв.АН СССР. Сер.матем." 1949, т.13, с. 201-212.

2. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., 1964.

3. Левич Е.М. Об изоморфном представлении разрешимых групп матрицами над некоторым полем характеристики нуль.—"Тр. Рижского алгебраического семинара, т.I. Рига, 1969.

4. Левич Е.М., Вилящер В.Г. Об изоморфном представлении свободных нильпотентных групп матрицами над некоторым полем характеристики нуль.—"Матем.заметки," т. 7, тетрадь 3, Свердловск, 1970.

5. Birkhoff G. Representability of Lie algebras, and Lie groups by matrices. Ann Math. 1937, 38, 2, 526-532.

6. Мерзляков Ю.И.—"Алгебра и логика", 1968, № 3, с.7.

Р.С. ЛИПЯНСКИЙ

Разрешимые алгебры Ли над полем характеристики $P>0$

Настоящая статья является продолжением работ /3,4/. Она посвящена рассмотрению основных результатов, полученных ранее, в случае линейных алгебр Ли над полем K характеристики $P>0$.

Пусть L - линейная алгебра Ли над K ($char K=P$). Будем считать, что

1) алгебра Ли L удовлетворяет условию (A), если $n(m-1)<P$, где n - максимальная степень алгебраических элементов из L, а m - максимальный показатель энгелевости энгелевых элементов из L;

2) конечномерная алгебра Ли L удовлетворяет условию (B), если $z(m-1)<P$, где z - размерность алгебры L, а m - максимальный показатель энгелевости энгелевых элементов из L.

Целью настоящей статьи является доказательство следующих теорем.

Теорема I. Пусть L - локально разрешимая линейная алгебра Ли над K, удовлетворяющая условию (A). Тогда совокупность алгебраических элементов из L образует идеал L_1, совокупность нильпотентных элементов из L образует идеал L_2, причем $[L,L_1]\subseteq L_2$

Теорема 4. Производная алгебра Ли конечномерной разрешимой алгебры Ли с условием (B) является нильпотентной.

Теорема 5. Пусть L - разрешимая конечномерная алгебра Ли над K с условием (B). Тогда $LD\subseteq R$, где R - ниль-радикал L, а D - любое дифференцирование L.

В заключение приведены некоторые примеры, иллюстрирующие существенность условий (A) и (B) в данных теоремах.

Автор благодарит своего научного руководителя Е.М.Левича за постоянное внимание к работе.

§I. Алгебраические элементы в локально разрешимых алгебрах Ли над полем характеристики

Пусть L - алгебра Ли, а $a, b \in L$. Обозначим через $[a, b(0)] = a$, $[a, b(1)] = [a, b]$, $\ldots, [a, b(n)] = [[a, b(n-1)], b]$.

Лемма I. Пусть L - линейная алгебра Ли, удовлетворяющая условию (A). Если a - алгебраический элемент из L, т.е. $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i = 0$ и $b \in L$, такой, что $[a, b(m-1)] \neq 0$, $[a, b(m)] = 0$ при $m > 1$, то $[a, b(m-1)]^2 = 0$.

Доказательство. Из $[ab, c] = [a, c]b + a[b, c]$ следует, что $[a^k, b(r)]$ есть линейная комбинация элементов вида

$[a, b(r_1)], \ldots, [a, b(r_k)]$ $\left(\sum_{i=1}^{k} r_i = r\right)$

Отсюда

$$[a^k, b(n(m-1))] = \alpha [a, b(m-1)]^k + u$$

где u есть линейная комбинация элементов вида $[a, b(r_1)], \ldots, [a, b(r_k)]$, причем хотя бы один из $r_i > m-1$, $\alpha = C_{n(m-1)}^{m-1} \cdots C_{m-1}^{m-1}$

Из условий леммы следует, что $u = 0$. Более того $[a^k, b(n(m-1))] = 0$, если $k < n$.

Так как $\sum \alpha_i a^i = 0$, то

$$0 = \left[\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i, b(n(m-1))\right] = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i [a^i, b(n(m-1))] =$$
$$= \alpha_n [a^n, b(n(m-1))] = \alpha_n' [a, b(m-1)]^n,$$

где $\alpha_n' = \alpha_n C^{m-1}_{n(m-1)} C^{m-1}_{(n-1)(m-1)} \cdots C^{m-1}_{m-1}$

Так как $n(m-1) < p$, то $[a, b(m-1)]^n = 0$

<u>Лемма 2</u>. Пусть L - линейная алгебра Ли, удовлетворяющая условию (А). Если a - алгебраический элемент из L, такой, что $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i a^i = 0$ и $a \in B$, где B - абелев идеал L, то $[a, b]^{2n-1} = 0$

Доказательство. Докажем предварительно формулу

$$\sum_{i=k}^{n} \beta_{ik} a^{i-k} a_1^{2k-1} = 0 \tag{I}$$

где $a_1 = [a, c]$, $k = 1, 2, \ldots n$, $\beta_{ik} = \frac{i!}{(i-k)!} \alpha_i$

Доказательство проводится индукцией по k. Первый шаг $k=1$. Покажем, что

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_{i1} a^{i-1} a_1 = 0 \qquad \text{где } \beta_{i1} = i\alpha_i$$

Действительно,

$$[\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i, c] = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i [a^i, c] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} i \alpha_i a^{i-1} [a, c]$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$[ab, c] = [a, c] b + a [b, c] \tag{2}$$

(если необходимо, то и несколько раз), а также перестановочностью a и a_1. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{i1} a^{i-1} a_1 = 0 \tag{3}$$

Так как алгебра Ли L удовлетворяет условию (А), то $n < p$. Следовательно, запись (3) является несократимой. Пусть при $k = m$ имеем

$$\sum_{i=m}^{n} \beta_{im} a^i a_1^{2m-1} = 0 .$$

Покажем, что $\sum\limits_{i=m+1}^{n} \beta_{i,m+1} a^{i-(m+1)} a_1^{2(m+1)-1} = 0$

где $\beta_{i,m+1} = (i-m) \beta_{im}$

Действительно,

$$[\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}a^{i-m}a_1^{2m-1},c] = \sum_{i=m}^{n}\beta_{im}a^{i-m}[a_1^{2m-1},c] +$$
$$+\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}[a^{i-m},c]a_1^{2m-1} = \sum_{i=m}^{n}(2m-1)\beta_{im}a^{i-m}a_1^{2m-2}[a_1,c]+$$
$$+\sum_{i=m+1}^{n}(i-m)\beta_{im}a_1^{2m-1}a^{i-m-1}[a,c] =$$
$$=(2m-1)\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}a^{i-m}a_1^{2m-2}+\sum_{i=m+1}^{n}(i-m)\beta_{im}a_1^{2m}a^{i-m-1}$$

где $a_1=[a,c]$, $a_2=[a_1,c]$

Здесь мы воспользовались формулой (2) и перестановочностью a, a_1, a_2.

Окончательно, имеем

$$(2m-1)a_2\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}a^{i-m}a_1^{2m-2}+\sum_{i=m+1}^{n}(i-m)\beta_{im}a_1^{2m}a^{i-m-1}=0$$

Умножим последнее равенство на a_1:

$$(2m-1)a_2\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}a^{i-m}a_1^{2m-1}+\sum_{i=m+1}^{n}(i-m)\beta_{im}a_1^{2m+1}a^{i-m-1}=0$$

По предположению индукции первая сумма последнего равенства равна 0.

Следовательно,

$$\sum_{i=m+1}^{n}(i-m)\beta_{im}a^{i-(m+1)}a_1^{2(m+1)-1}=0 \qquad (4)$$

Так как $i-m<p$, для $\forall i\in[m+1,n]$, то запись (4) несократима. Таким образом, формула (I) доказана.

Положив в формуле (I) $k=n$, получим $\beta_{nn}a_1^{2n-1}=0$. Так как $n<p$, то $a_1^{2n-1}=0$.

<u>Следствие I</u>. В абелевом идеале линейной алгебры Ли совокупность L_1 всех алгебраических элементов является идеалом, совокупность L_2 всех нильпотентных элементов является идеалом, причем $[L_1,L_1]\subseteq L_2$.

<u>Лемма 3.</u> Пусть L - линейная алгебра Ли, удовлетворяющая условию (А), и J - абелев идеал в алгебре L из нильпотентных элементов. Тогда $A(J)$ - нильпотентная алгебра.

Доказательство. Так как алгебра Ли L удовлетворяет условию А, то $n < p$, где n - степень произвольного нильпотентного элемента из L. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ - произвольные нильпотентные элементы из J. Рассмотрим $S_{p-1}(x_1, \ldots, x_{p-1})$ - симметрическая функция от $x_i \in J$, $i = 1, \ldots, N$. Тогда имеем /5/:

$$S_{p-1}(x_1, \ldots, x_{p-1}) = \sum_{\tau} (-1)^{p-1-z} (x_{i_1} + \ldots + x_{i_z})^{p-1}$$

Так как $x_i x_j = x_j x_i$, то

$$(p-1)!\, x_1 x_2 \ldots x_{p-1} = \sum_{\tau} (-1)^{p-1-z} (x_{i_1} + \ldots + x_{i_z})^{p-1} = 0$$

Следовательно, $\prod_{i=1}^{p-1} x_i = 0$.

Дальнейшие рассуждения будут существенно опираться на следующие леммы, доказанные в /3,4/.

<u>Лемма 4</u> /см.3/. Пусть L - линейная алгебра Ли, $A(L)$ - её линеаризация. Если J - такой идеал в L, что $A(J) \subset A(L)$ есть нильпотентная алгебра, то двусторонний идеал $\bar{A}(J)$, порожденный $A(J)$, является нильпотентным.

<u>Лемма 5</u> /см.4/. Пусть L - разрешимая алгебра Ли, $N(L)$ - локально нильпотентный радикал L, $Z(N(L))$ - централизатор $N(L)$ в L. Тогда $Z(N(L)) \subset N(L)$

Далее докажем следующее утверждение

<u>Лемма 6</u>. Пусть L - разрешимая линейная алгебра Ли, удовлетворяющая условию (А), и a - ненулевой нильпотентный элемент из L: $a^n = 0$. Тогда в L существует абелев идеал, состоящий из нильпотентных элементов.

Доказательство. Покажем, что в L существует абелев идеал, содержащий ненулевой нильпотентный элемент.

Доказательство проводим методом от противного. Рассмотрим два случая.

I. Пусть $[a, N(L)] = 0$. Тогда $a \in Z(N(L))$.

Но $Z(N(L)) \subset N(L)$ и, следовательно, $Z(N(L))$ - абелев идеал в L (лемма 5). Мы пришли к тому, что абелев идеал $Z(N(L))$ содержит нильпотентный элемент a, что противоречит исходному предположению.

2. Пусть $[a, N(L)] \neq 0$. Рассмотрим в L производный ряд длины n:

$$L \supset L' \supset L^{(2)} \supset \ldots \supset L^{(n)} = 0 \quad (2)$$

Используя пересечения $N(L)$ с членами производного ряда (2), мы можем построить возрастающий ряд идеалов в L:

$$L \supset N_1 \supset \cdots \supset N_n = 0$$

где $N_k = L^{(k)} \cap N(L)$.

Так как $[a, N(L)] \neq 0$, то $\exists b \in N(L)$, что $c_1 = [a, b(m_1 - 1)] \neq 0$ и $[a, b(m_1)] = 0$. По лемме I $c_1^n = 0$, где $c_1 \in L'$. Если $[c_1, N_1] = 0$, то $c_1 \in Z_{N_1}$, где Z_{N_1} - центр N_1. Но Z_{N_1} - абелев идеал в L, что противоречит первоначальному предположению. Следовательно, $[c_1, N_1] \neq 0$. Но тогда $\exists b_2 \in N_1$, что $c_2 = [c_1, b_2(m_2 - 1)] \neq 0$ и $[c_1, b_2(m_2)] = 0$. По лемме I $c_2^n = 0$, причем $c_2 \in N_2$. Ясно, что через конечное число шагов мы получим нильпотентный элемент в $N_{n-1} = L^{(n-1)}$. Но $L^{(n-1)}$ - абелев идеал в L, что противоречит нашему предположению.

Следовательно, существует абелев идеал J в L, содержащий ненулевой нильпотентный элемент. Но тогда по лемме 2 нильпотентные элементы из J образуют идеал в L. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть L - линейная разрешимая алгебра Ли, удовлетворяющая условию (A). Тогда совокупность нильпотентных элементов из L образует идеал.

Доказательство. Пусть a - нильпотентный элемент из L. Тогда существует абелев идеал J в L, состоящий из нильпотентных элементов (лемма 6). По лемме 3 $A(J)$-нильпотентная алгебра. Но тогда по лемме 4 $\overline{A(J)}$- двусторонний идеал, порожденный $A(J)$, является нильпотентным. Следовательно, радикал Левицкого $\mathcal{Y}(A) \neq 0$ в $A(L)$ отличен от 0. Рассмотрим $\bar{A} = A(L)/\mathcal{Y}(A)$. Гомоморфизм $A(L)$ на $\bar{A}$ индуцирует гомоморфизм алгебры L на $\bar{L}$, причем $\bar{A} = A(\bar{L})$. Все нильпотентные элементы $\bar{L}$ лежат в $\mathcal{Y}(A)$. Действительно, в противном случае, повторяя вышеизложенные построения для алгебры $\bar{L}$, приходим к тому, что $\mathcal{L}(\bar{A})\neq 0$, что противоречит полупростоте $A(\bar{L})$. Так как нильпотентные элементы $\bar{L}$ лежат в $\mathcal{L}(A)$, они образуют идеал в L. Лемма доказана.

Следствие 2. Пусть L - разрешимая линейная алгебра Ли, удовлетворяющая условию (А). Тогда радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ алгебры $A(L)$ отличен от 0, и все нильпотентные элементы из L лежат в $\mathcal{L}(A)$.

Лемма 8. Пусть L - разрешимая линейная алгебра Ли, удовлетворяющая условию (А). Тогда совокупность алгебраических элементов из L образует идеал.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

I. Пусть $[a, N(L)] = 0$, для всякого алгебраического элемента a из L. Тогда $a \in \mathfrak{Z}(N(L))$. Но $\mathfrak{Z}(N(L))$ - абелев идеал в L, так как $\mathfrak{Z}(N(L)) \subset N(L)$ (лемма 5). Следовательно, все алгебраические элементы из L лежат в абелевом идеале. По лемме 3 они образуют идеал в L.

2. Пусть $[a, N(L)] \neq 0$ для некоторого алгебраического элемента $a \in L$. Тогда $\exists b \in N(L)$, что $[a, b(m-1)] \neq 0$, $[a, b(m)] = 0$ при $m>1$. По лемме I $[a, b(m-1)]^n = 0$. Тогда по следствию 2 $\mathcal{L}(A)\neq 0$. Рассмотрим $\bar{A} = A(L)/\mathcal{L}(A)$. Гомоморфизм $A(L)$ на $\bar{A}$ индуцирует гомоморфизм L на $\bar{L}$, где $\bar{A} = A(\bar{L})$. Все нильпотентные элементы алгебры L лежат в $\mathcal{L}(A)$ (следствие 2). Следовательно, алгебраические элементы из $\bar{L}$ находятся в централизаторе локально нильпотентного радикала $N(\bar{L})$ алгебры $\bar{L}$. Но тогда мы оказываемся в рассмотренной выше ситуации. Следовательно, алгебраические элементы в $\bar{L}$ образуют идеал. Отсюда, алгебраические элементы в L образуют идеал. Лемма доказана.

Так как свойство алгебраических и нильпотентных элементов из L быть идеалами является свойством конечного типа, то имеет место следующая теорема.

Теорема I. Пусть L - локально разрешимая алгебра Ли, удовлетворяющая условию (А). Тогда совокупность алгебраических элементов алгебры L образует идеал L_1, совокупность нильпотентных элементов алгебры L образует идеал L_2, причем $[L, L_1] \subset L_2$.

Следствие 3. Пусть L - локально разрешимая линейная алгебра Ли, удовлетворяющая условию (А). Если $b L$ существует алгебраический элемент не равный 0, то $Z_L \neq 0$ (Z_L - центр L).

Так как все нильпотентные элементы разрешимой линейной алгебры Ли L находятся в радикале Левицкого $\mathcal{L}(A)$ линейной оболочки алгебры L (следствие 2), имеет место теорема 2.

Теорема 2. Разрешимая линейная алгебра Ли с условием (А), порожденная нильпотентными элементами является локально нильпотентной.

§2. Приложения к абстрактным разрешимым алгебрам Ли

Рассмотрение множества линейных преобразований $ad L$, где L - абстрактная алгебра Ли, даёт возможность применить полученные результаты о линейных разрешимых алгебрах Ли к абстрактным алгебрам Ли.

Теорема 3. Разрешимая алгебра Ли с условием (А), порожденная энгелевыми элементами, является локально нильпотентной.

Доказательство. Рассмотрим разрешимую алгебру Ли $ad L$. В качестве линеаризации этой алгебры Ли берем её естественную оболочку $A(ad L)$ в ассоциативной алгебре D дифференцирований алгебры L. Каждый энгелев элемент $b L$ является нильпотентным элементов в $A(ad L)$ и наоборот. По теореме 2 $ad L$ - локально нильпотентная алгебра. Но тогда L - локально нильпотентная алгебра.

Теорема 4. Производная алгебра Ли конечномерной разрешимой алгебры Ли L с условием (В) является нильпотентной.

Доказательство. Рассмотрим разрешимую алгебру $ad\,L$. Так как $ad\,L$ - конечномерная алгебра, то каждый её элемент является алгебраическим в $A(ad\,L)$. Но тогда по теореме I $[ad\,L, ad\,L] = ad[L,L]$ - алгебра Ли из энгелевых элементов. Следовательно, $ad[L,L]$ - нильпотентная алгебра. Но тогда $[L,L]$ - нильпотентная алгебра.

<u>Теорема 5</u>. Пусть L - разрешимая конечномерная алгебра Ли над K, удовлетворяющая условию(В), R - её нильпотентный радикал. Тогда $LD \leq R$ для любого дифференцирования D алгебры L.

Доказательство. Пусть $L_1 = L \oplus KD$ - расщепляемое расширение подалгебры KD посредством L. Так как L_1/L - одномерна, то L_1 - разрешимая алгебра Ли. По теореме 4 L_1' - нильпотентный идеал в L. Но $L_1' = L' + KD$, так что $L' + KD$ - нильпотентный идеал в L_1 и $L' + LD < R$. Значит, $LD < R$.

§3. <u>Некоторые примеры</u>

Мы покажем теперь, что условия А и В, налагаемые на алгебру Ли L, являются существенными для получения результатов §I и §2.

I. Пусть $\mathfrak{M}$ - p-мерное векторное пространство над полем K ($\operatorname{char} K = p$). Пусть E и G - линейные преобразования пространства $\mathfrak{M}$, действие которых на базис ($e_1, \ldots, e_p$) задается формулами

$$e_i E = e_{i+1}, \quad i \leq p-1$$

$$e_p E = e_1$$

$$e_i G = (i-1)\, e_{i-1}$$

Тогда получим $[G, E] = I$, где I - тождественное преобразование $\mathfrak{M}$. Ясно, что $[E, I] = 0$, $[G, I] = 0$. Тогда алгебра Ли L, порожденная преобразованиями E, I, G над K, является нильпотентной ступени 2. Имеем,

далее, $(E-I)^p=0$, и по построению G : $G^p=0$
Но $[E-I,G]=[E,G]=I$ - не нильпотентный элемент алгебры L.

Здесь в обозначениях условия (А) имеем: $n=p$, $m=2$, т.е. $n(m-1)=p$. Условие (А) не выполнено, а поэтому в данном примере теорема I не имеет место.

2. Покажем теперь, что если $n(m-1)>p$, то теорема I также не выполняется. Пусть $\mathfrak{M}$ - p-мерное векторное пространство над полем K характеристики p $(p>2)$. Пусть F, E, G, I - линейные преобразования $\mathfrak{M}$, действие которых на базис (e_1,..., e_p) задается формулами:

$$e_i E = e_{i+1},\quad i \le p-1$$
$$e_p E = e_1,$$
$$e_i F = e_{i+2},\quad i \le p-2$$
$$e_{p-1} F = e_1,$$
$$e_p F = e_2,\quad e_i G = (i-1) e_{i-1}$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$[E,G]=-I,\quad [G,F]=2E$$
$$[E,F]=0,\quad [G,I]=[F,I]=[E,I]=0$$

Рассмотрим теперь $L=KE+KF+KG+KI$. Легко проверить, что L - 3-х ступенно нильпотентная алгебра Ли. В данном примере в обозначениях условия (А) имеем $n=p$, $m=3$. Значит, $n(m-1)>p$. Как и в предыдущем примере $(E-I)^p=0$, $G^p=0$, но $[E-I,G]=I$ - не нильпотентный элемент из L.

Теорема I не имеет место, так как $n(m-1)>p$.

3. Следующий пример из /I/ иллюстрирует существенность условия (B) в теореме 4.

Пусть $\mathfrak{M}$ - p-мерное векторное пространство. Пусть E и F - линейные преобразования $\mathfrak{M}$, действие которых на базис $(e_1, \dots, e_p)$ задается формулами:

$$e_i E = e_{i+1}$$
$$e_p E = e_1, \quad e_i F = (i-1) e_i$$

Пусть R - расщепляемое расширение, $R = \mathfrak{M} \oplus L$ где $L = KE + KF$. Можно показать, что R' не нильпотентная алгебра /I/. Рассмотрим выполнение условий (B) в этом примере. Здесь $z = p+2, m = 2$, т.е. $z(m-1) > p$. Так как условие (B) нарушилось, становится ясным невыполнение теоремы 4 в данном примере.

4. Покажем теперь существенность условия (B) в теореме 5.

Пусть $\mathfrak{M}$ - p -мерное векторное пространство над K с базисом $(e_0, \dots, e_{p-1})$. Пусть E и F линейные преобразования $\mathfrak{M}$, такие, что $e_i E = e_{i+1}$, $e_p E = 0$, $e_i F = i e_{i-1}$. Тогда $[F, E] = I$. Пусть R - алгебра Ли, порожденная F и I над K. Пусть L_1 - расщепляемое расширение, $L_1 = \mathfrak{M} \oplus R$. В алгебре L_1 алгебра $L_2 = \mathfrak{M} \oplus KF$ является нильпотентным идеалом. Следовательно, $L_2 \subset N(L_1)$. Рассмотрим $L = \mathfrak{M} \oplus P$, где $P = KE + KF + KI$. Ясно, что $L_1 \triangleleft L$. Следовательно, $ad\, E$ - внешнее дифференцирование L_1. Далее, по построению $F\, ad\, E = I$. Но $F \subset N(L_1)$, а $I \notin N(L_1)$, так как $[[x, I], \dots, I] = x$, для $\forall x \in \mathfrak{M}$. Значит, $z(m-1) > p$, и поэтому теорема 5 в данном примере не выполняется.

5. Следующий пример показывает, что условие (A), накладываемое на алгебру Ли в теореме I, не является необходимым.

<u>Теорема 6</u>. В двуступенно разрешимой алгебре Ли над произвольным полем энгелевы элементы образуют идеал L_1, внутренние алгебраические элементы образуют идеал L_2, причем $[L, L_2] \subset L_1$.

<u>Доказательство</u>. Пусть L - двуступенно разрешимая алгебра Ли. Мы можем построить производный ряд в $ad\, L$:

Ясно, что $ad L'$ - абелев идеал в $ad L$ и $ad^2 a=0$, для $\forall a \in L'$. Рассмотрим $A(ad L')$, где линеаризация берется в ассоциативной алгебре D дифференцирований L. Тогда $A(ad L')$ - нильпотентная алгебра. Следовательно, по лемме 4 $A(ad L')$ - двусторонний идеал в $A(ad L)$, натянутый на $A(ad L')$ является нильпотентным. Но тогда радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ в $A(ad L)$ отличен от 0.

Рассмотрим $\bar{A} = A(ad L)/\mathcal{L}(A)$. Гомоморфизм $A(L)$ на $\bar{A}$ индуцирует гомоморфизм L на $\bar{L}$, причем $\bar{A} = A(\bar{L})$. Алгебра $\bar{L}$ - абелева. Но тогда нильпотентные элементы в $\bar{L}$ образуют идеал. Следовательно, энгелевы элементы образуют идеал L_1. Можно показать, что $L_1 \subset \mathcal{L}(A)$. Внутренние алгебраические элементы образуют в $\bar{L}$ идеал $\bar{L}_2$. Следовательно, внутренние алгебраические элементы L образуют идеал L_2, причем $[L, L_2] \subset L_1$. Теорема доказана.

Литература

1. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., 1964.
2. Джекобсон Н. Строение колец. М., 1961.
3. Левич Е.М., Липянский Р.С. Алгебраические элементы в линейных локально нильпотентных алгебрах Ли. - "Уч. зап. ЛатвГУ, 1972, т. 172.
4. Левич Е.М., Липянский Р.С. Алгебраические элементы в линейных локально разрешимых алгебрах Ли (в печати).
5. Higman V. On a conjecture of Nagata. Proc.Cambridge Philos,Soc. 52 (1956), V.4.

О г л а в л е н и е

Ученые записки, том 204

БЕЗРАЗМЕРНОЕ, ЕВКЛИДОВО И ПОЛУЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Выпуск III

Редактор Я.Томсон
Технический редактор Дз.Дамберга
Корректор В.Пуките

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1974

Подписано к печати 3.01.1974. ЯТ 06004. Зак.№ 384.
Ф/б 60х84/16. Бумага №3. Физ.п.л. 5,5. Уч.-и.л. 4,0
Тираж 350 экз. Цена 40 к.

Отпечатано на ротапринте, Рига-50, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

Цена 40 к.

Учен. зап. (ЛГУ им. Петра Стучки), 1974, т.204, I-84.