



Ученые записки

**Безразмерное, евклидово
и
полуевклидовы пространства**

IV

Министерство высшего и среднего специального образования

Латвийской ССР

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки

Кафедра общей математики

Ученые записки

Латвийского государственного университета

имени Петра Стучки

том 222

БЕЗРАЗМЕРНОЕ, ЕВКЛИДОВО И ПОЛУЕВКЛИДСЫ
ПРОСТРАНСТВА

IV

Латвийский государственный университет

Рига 1975

Сборник содержит работы по геометрии и ее приложениям, выполненные сотрудниками ЛГУ, аспирантами и выпускниками ЛГУ.

В безразмерном пространстве исследуются коллинеации проективного пространства.

В собственно евклидовом пространстве дается геометрическая теория линейной дискриминантной функции при классификации двух образов.

Остальные статьи посвящены линейчатой геометрии в собственно евклидовом и различных полувеклидовых пространствах.

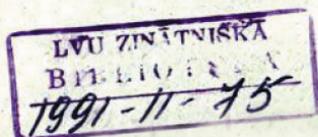
Первый выпуск вышел в свет в 1971 году, второй - в 1972 году, а третий в - 1974 году.

Редакционная коллегия:

Л.Березина (отв.ред.), Ш.Трупин, Я.Томсон.

© Латвийский государственный университет, 1975

Б 20203-128y I33-75
М 812(II)-75



К вопросу о коллинеациях в безразмерном проективном пространстве

Идея построения безразмерного аффинного и проективного пространств принадлежит А.М.Лопшицу /1,2/. Некоторые простейшие свойства безразмерного проективного пространства рассмотрены в работе автора данной статьи. В этой работе безразмерное проективное пространство определяется следующим образом. Если a - ненулевой вектор безразмерного линейного векторного пространства V , то множество всех векторов, коллинеарных вектору a (т.е. векторов вида αa , где $\alpha \in \Omega$ - произвольное отличное от нуля число исходного поля Ω) называется проективной точкой и обозначается через $A(a)$. Множество всех возможных проективных точек называется безразмерным проективным пространством и обозначается через P .

В пространстве P естественным образом вводится n -плоскость P_n любой конечной размерности n как множество всех тех проективных точек $X(x)$, для которых в исходном безразмерном векторном пространстве V выполняется равенство

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot a_i, \quad (\alpha_i \in \Omega, a_i \in V) \quad (1)$$

где a_i ($i=1, \dots, n+1$) - линейно независимые векторы.

Если в пространстве V задана скалярная линейная функция φ векторного аргумента (ковектор), т.е. такая линейная функция, которая каждому вектору $x \in V$ относит определенное число $\alpha \in \Omega$, то множество всех проективных точек $X(x)$ пространства P , для которых выполняется равенство

$$\varphi x = 0, \quad (2)$$

называется гиперплоскостью. Очевидно, что если две скалярные линейные функции φ и ψ линейно зависимы (коллинеарны), т.е. если для всех векторов x имеет место равенство

$$\psi x = \lambda \cdot \varphi x, \quad (\lambda \in \Omega, \lambda \neq 0),$$

то уравнением

$$\psi x = 0 \quad (3)$$

определяется та же гиперплоскость, что и уравнением (2).

Имеет место следующая теорема: если линейно независимые точки A_i ($i = 1, \dots, n+1$) пространства P принадлежат гиперплоскости φ , то все точки n -плоскости P_n , определяемой этими точками, принадлежат гиперплоскости φ .

В пространстве P коллинеации определяются следующим образом. Рассмотрим отображение

$$P: X(x) \rightarrow X'(x') = P(X), \quad (4)$$

которое индуцируется отображением

$$F: x \rightarrow x' = F(x) \quad (5)$$

в исходном безразмерном векторном пространстве V . Коллинеацией называется такое отображение пространства P на себя, которое сохраняет коллинеарность точек. Как доказал А.М.Лопшиц, наиболее общее отображение F пространства V на себя, индуцирующее коллинеацию P , должно иметь вид

$$x' = F(x) = Ax \cdot \omega(x), \quad (6)$$

где A — однозначно определяемая (с точностью до постоянного множителя) линейная векторная функция векторного аргумента x (аффинор), а ω — однозначно определяемая скалярная функция этого аргумента.

В работе /3/ доказано, что образом n -плоскости при коллинеации (4) является некоторая m -плоскость, причем $m \leq n$, т.е. коллинеация не может увеличить размерность n -плоскостей. Поэтому возможны только два случая:

1) $m = n$, и тогда коллинеация (4) отображает n -плоскость

на n -плоскость, но не в плоскость меньшей размерности. В этом случае отображение Π называется невырождающимся.

2) $m < n$ и тогда коллинеация (4) называется вырождающейся. Если при этом $n - m = k$, то говорят, что коллинеация Π k -кратно вырождающаяся.

Докажем следующую теорему.

при коллинеации (4) образом n -плоскости служит либо n -плоскость, если эта коллинеация невырождающаяся, либо $(n-k)$ -плоскость, если k — порядок вырождения коллинеации.

Действительно, пусть n -плоскость P_n определяется линейно независимыми точками $A_i(a_i)$ ($i=1, \dots, n+1$) и пусть $X(x)$ — произвольная точка этой плоскости, т.е. такая точка, для которой имеет место равенство (1). При коллинеации (4) образом точки $X(x)$ служит такая точка $X'(x')$, для которой выполняется равенство (6), а потому,

$$x' = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot A a_i \cdot \omega(a_i)$$

или

$$x' = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \cdot A a_i, \quad (7)$$

где

$$\beta_i = \alpha_i \cdot \omega(a_i).$$

Рассмотрим два случая.

I случай. Допустим, что точки $A'_i(a'_i)$, соответствующие точкам $A_i(a_i)$ при коллинеации Π , линейно независимы. Тогда из (7) следует, что образом произвольной точки $X(x)$ n -плоскости (1) служит точка $X'(x')$ такая, что

$$x' = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \cdot a'_i, \quad (8)$$

где

$$a'_i = A a_i$$

и, следовательно, в силу линейной независимости точек A'_i равенство (8) определяет некоторую n -плоскость P'_n .

Легко проверить, что наше отображение Π взаимно однозначное. В самом деле, предположим, что двум различным точкам $X(x)$ и $Y(y)$ n -плоскости (1) соответствует одна и та

же точка $X'(x')$ плоскости (8), т.е. одновременно с равенством (8) выполняется также и равенство

$$y' = \nu x' = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i \cdot a_i', \quad (\nu \neq 0; \nu \neq 1), \quad (9)$$

причем не все числа γ_i , соответственно, пропорциональны числам β_i . Вычтя из равенства (6) равенство (9), мы получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\beta_i - \gamma_i) \cdot a_i' = 0,$$

которое противоречит нашему предположению о линейной независимости точек $A_i'(a_i')$.

Таким образом, мы убедились в том, что в нашем случае отображение Π , определяемое равенством (6), взаимнооднозначное и, следовательно, невырождающееся ($m = n$, $\kappa = 0$).

II случай. Допустим, что среди точек $A_i'(a_i')$ ($i = 1, \dots, n+1$) имеется $(m+1)$ линейно-независимых ($m < n$, $n-m = \kappa$). Для определенности будем считать, что линейно-независимы точки $A_j'(a_j')$ ($j = 1, \dots, m+1$). Докажем, что в этом случае коллинеация Π отображает плоскость (I) на некоторую m -плоскость P_m , определяемую линейно независимыми точками $A_j'(a_j')$ и, следовательно, κ -кратно вырождающаяся.

Действительно, в силу нашего предположения

$$a_\ell' = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_\ell^j \cdot a_j', \quad (\ell = m+2, \dots, n+1)$$

причем ранг матрицы (λ_ℓ^j) равен $\kappa = n-m$. Теперь из равенства (8) заключаем, что для образа $X'(x')$ точки $X(x)$ мы будем иметь:

$$\begin{aligned} x' &= \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i \cdot a_i' + \sum_{\ell=m+2}^{n+1} \beta_\ell \cdot a_\ell' = \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j \cdot a_j' + \sum_{\ell=m+2}^{n+1} \beta_\ell \cdot \lambda_\ell^j \cdot a_j' = \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} \left(\beta_j + \sum_{\ell=m+2}^{n+1} \beta_\ell \cdot \lambda_\ell^j \right) \cdot a_j' = \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j \cdot a_j', \end{aligned}$$

где

$$\mu_j = \beta_j + \sum_{\ell=m+2}^{n+1} \beta_\ell \cdot \lambda_\ell^j.$$

Из равенства

$$x' = \sum_{j=1}^{m+1} \mu_j \cdot a_j' \quad (10)$$

следует, что образом произвольной точки $X(\kappa)$ n -плоскости (I) служит точка $X'(x')$ m -плоскости (IO), определяемой линейно независимыми точками $A_j'(a_j')$ ($j=1, \dots, m+1$) и что коллинеация (4) κ -кратно вырождающаяся.

В частности, если $m=1$ ($m+1=2$, $\kappa=n-1$) n -плоскость отображается на прямую $A_1' A_2'$, которая определяется двумя различными точками $A_1'(a_1')$ и $A_2'(a_2')$. При $m=0$ ($\kappa=n$) вся n -плоскость (I) отображается в точку $A_1'(a_1')$.

В заключение следует отметить, что естественно возникает вопрос о структуре оператора F , определяемого равенством (6) в случае, когда коллинеация (4) κ -кратно вырождающаяся. Эта задача в данной работе не решена и является предметом для дальнейшего исследования.

Л и т е р а т у р а

1. Лопшиц А.М. Некоторые задачи тензорной алгебры в линейных безразмерных пространствах.—Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. VI. М., 1948, с. 365—419.
2. Лопшиц А.М. Геометрическая характеристика аффинного отображения.—Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной граф. М., 1958, с. 213—221.
3. Трунин Ш.Д. Некоторые простейшие свойства безразмерного проективного пространства. — Учен. зап. Латв. ун-та, 1971, т. 152, с. 3—24.

Об одной геометрической интерпретации линейной
дискриминантной функции

Рассматривается задача классификации образов для двух нормально распределенных совокупностей с различными, невырожденными ковариационными матрицами.

Разделяющая гиперплоскость трактуется как общая касательная плоскость двух касающихся поверхностей уровня в точке касания. Доказывается, что множество таких касательных гиперплоскостей совпадает со множеством допустимых решений, предложенных Андерсоном и Тахадурой [1].

Предлагается при решении задачи предварительно переходить к канонической системе координат, что намного сокращает вычислительную процедуру. Даются все формулы алгоритма для такого способа расчета.

§1. В p -мерном пространстве величин X рассматриваются две совокупности с нормальными законами распределения (Y_1, Σ_1) и (Y_2, Σ_2) . Ковариационные матрицы Σ_1 и Σ_2 предполагаются различными ($\Sigma_1 \neq \Sigma_2$) и невырожденными ($\det \Sigma_1 \neq 0, \det \Sigma_2 \neq 0$). Поверхности уровня плотности распределения обеих совокупностей есть эллипсоиды

$$(x - Y_1)' \Sigma_1^{-1} (x - Y_1) = K_1 \quad (1)$$

и

$$(x - Y_2)' \Sigma_2^{-1} (x - Y_2) = K_2 \quad (2)$$

Геометрическое место точек в которых поверхности (1) и (2) касаются, есть пространственная кривая, которую, в дальнейшем, назовем "кривой касания" и обозначим (КРК). Ниже будет

показано, что совокупность линейных дискриминантных функций, предложенных Андерсоном и Бахадурой \mathcal{L} совпадает с совокупностью касательных плоскостей поверхностей (1) и (2), вычисленных в различных точках (КРК). Такая геометрическая точка зрения на линейную дискриминантную функцию ($\mathcal{L}Df$), облегчает расчет ($\mathcal{L}Df$) особенно в более сложных случаях, когда одна или обе ковариационные матрицы вырождаются.

Все выкладки значительно упрощаются, если предварительно переходить в каноническую систему координат, в которой обе матрицы имеют диагональную форму. Поскольку Σ_1 и Σ_2 обе положительно определенные, всегда возможно преобразование

$$X = AZ \quad (3)$$

так, чтобы

$$A \Sigma_1 A' = E, \quad A \Sigma_2 A' = \Lambda, \quad (4)$$

где E - единичная, а Λ - диагональная матрица с элементами λ_i . Полагая

$$\mu_1 = AY_1, \quad \mu_2 = AY_2, \quad (5)$$

получаем в пространстве X совокупность с законами распределения (μ_1, E) и (μ_2, Λ) . Для этих совокупностей определяем ($\mathcal{L}Df$), а потом подстановкой (3) возвращаемся в исходную систему координат.

§2. Поверхности уровня (1) и (2) в канонической системе координат принимают вид

$$(X - \mu_1)'(X - \mu_1) = K_1 \quad (6)$$

и

$$(X - \mu_2)' \Lambda^{-1} (X - \mu_2) = K_2. \quad (7)$$

В точках, где поверхности (6) и (7) касаются, градиенты должны быть параллельны. Поскольку нас интересуют только те точки (КРК), в которых поверхности (6) и (7) расположены с

различных сторон касательной плоскости, то градиенты должны иметь еще и противоположное направление.

Имеем

$$G_1 = x_0 - \mu_1 \quad (8)$$

и

$$G_2 = \lambda^{-1} \cdot (x_0 - \mu_2) \quad (9)$$

и, следовательно, для радиуса-вектора x_0 точки (КРК)

$$t_1 (x_0 - \mu_1) + t_2 \cdot \lambda^{-1} \cdot (x_0 - \mu_2) = 0$$

или при переходе к координатам

$$t_1 (x_0^i - \mu_1^i) + t_2 \cdot \frac{1}{\lambda^i} (x_0^i - \mu_2^i) = 0,$$

$$x_0^i = \frac{t_1 \lambda^i \mu_1^i + t_2 \mu_2^i}{t_1 \lambda^i + t_2} \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, p.$$

Уравнение (10) является уравнением (КРК) в параметрической форме, где параметром служит отношение t_1/t_2 . При $t_2=0$ получаем $x_0^i = \mu_1^i$, а при $t_1=0$ имеем $x_0^i = \mu_2^i$, значит, что и естественно (КРК) проходит через центры совокупностей. Нетрудно усмотреть, что в классическом случае когда $\Sigma_1 = \Sigma_2$ (РПК) есть прямая, проходящая через центры совокупностей. Нас интересуют только точки (КРК), расположенные между центрами μ_1 и μ_2 . Чтобы выделить различные точки (КРК), расположенные между центрами, наверно, проще всего придать одной из координат x_0 , например x_0^1 , различные значения, расположенные между μ_1^1 и μ_2^1 и по формуле

$$t_1/t_2 = \frac{\mu_2^1 - x_0^1}{\lambda^1 (x_0^1 - \mu_1^1)} \quad (11)$$

вычислить соответствующие значения t_1/t_2 .

§3. Вычислим уравнение общей касательной плоскости к поверхностям (6) и (7) в некоторой точке (КРК) X_0 . Такая плоскость задается уравнением

$$\delta' \cdot (X - X_0) = 0, \quad (I2)$$

где X_0 - радиус-вектор выбранной точки (КРК), X - радиус-вектор произвольной точки плоскости, а δ - любой вектор направления обоих градиентов в точке X_0 . Чтобы остановиться на определенном выборе вектора δ , вычисляем G_1 в точке X_0 .

$$\begin{aligned} G_1^i &= X_0^i - \mu_1^i = \frac{t_1 \lambda^i \mu_1^i + t_2 \mu_2^i}{t_1 \lambda^i + t_2} - \mu_1^i = \\ &= \frac{t_2 (\mu_2^i - \mu_1^i)}{t_1 \lambda^i + t_2} \end{aligned} \quad (I3)$$

Отбросив общий множитель t_2 , выбираем

$$\delta^i = \frac{\mu_2^i - \mu_1^i}{t_1 \lambda^i + t_2}. \quad (I4)$$

Сравнивая формулу (I4) для дискриминантного вектора с формулой Андерсона-Бахадур Π'

$$b = (t_1 \Sigma_1 + t_2 \Sigma_2)^{-1} (\mu_2 - \mu_1) \quad (I5)$$

находим несущественное различие выражающееся в перестановке t_1 и t_2 местами.

Свободный член уравнения (I2), при определенном X_0 и δ легко вычисляется по формуле

$$c = \delta' X_0. \quad (I6)$$

Чтобы показать, что это значение совпадает со значением, предложенным Андерсоном и Бахадурой Π' , вычислим (I6) развернуто,

предварительно переставляя в формулах (10) и (14) t_1 и t_2 местами, тогда

$$c = \sum_i \frac{(\mu_2^i - \mu_1^i)(t_1 \mu_2^i + t_2 \lambda^i \mu_1^i)}{(t_1 + t_2 \lambda^i)^2} \quad (17)$$

Вычисляя по формуле Андерсона и Бахадура IV

$$\begin{aligned} c &= b' \mu_1 + t_1 b' \Sigma_1, \quad b = \\ &= \sum_i \left\{ \frac{(\mu_2^i - \mu_1^i) \mu_1^i}{t_1 + \lambda^i t_2} + t_1 \frac{(\mu_2^i - \mu_1^i)^2}{(t_1 + t_2 \lambda^i)^2} \right\} = \\ &= \sum_i \frac{(\mu_2^i - \mu_1^i)}{(t_1 + \lambda^i t_2)^2} \left\{ (t_1 + t_2 \lambda^i) \mu_1^i + t_1 (\mu_2^i - \mu_1^i) \right\} = \\ &= \sum_i \frac{(\mu_2^i - \mu_1^i)(t_1 \mu_2^i + t_2 \lambda^i \mu_1^i)}{(t_1 + \lambda^i t_2)^2} \end{aligned}$$

получаем результат, совпадающий с формулой (17).

§4. По формулам (12)-(16) определяется ($\mathcal{A}D\phi$), если выбрана определенная точка χ_0 ($\mathcal{K}D\mathcal{K}$). Какую именно точку χ_0 выбрать, зависит от двух вероятностей неправильной классификации, которые имеем для некоторого ($\mathcal{A}D\phi$). Рассмотрим подробнее расчет этих вероятностей. Для этой цели вспомним IV, что используя ($\mathcal{A}D\phi$) для классификации, мы фактически переходим к скалярной величине

$$y = \delta' x. \quad (18)$$

При этом, данные совокупности переходят в две одномерные совокупности $(\delta'\mu_1, \delta'\Sigma_1, \delta)$ и $(\delta'\mu_2, \delta'\Sigma_2, \delta)$. Вероятности неправильной классификации равны $1 - \Phi(y_1)$

и $1 - \Phi(y_2)$, где

$$y_1 = \frac{c - \delta'\mu_1}{\sqrt{\delta'\Sigma_1\delta}} \quad (19)$$

$$y_2 = \frac{\delta'\mu_2 - c}{\sqrt{\delta'\Sigma_2\delta}} \quad (20)$$

и

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (21)$$

Вывод этих формул при условии, что наблюдение относится к первой совокупности, когда $\delta'x \leq c$ и к второй при $\delta'x > c$ изложен в статье [2].

Нам надлежит указать удобные формулы для расчета y_1 и y_2 . Подставляя в формулы (19) и (20)

$$c = \delta'x_0, \quad \Sigma_1 = E, \quad \Sigma_2 = \lambda,$$

получаем

$$(y_1)^2 = \frac{\{\delta'(x_0 - \mu_1)\}^2}{\delta'\delta}, \quad (22)$$

$$(y_2)^2 = \frac{\{\delta'(\mu_2 - x_0)\}^2}{\delta'\lambda\delta}. \quad (23)$$

Поскольку y_1 и y_2 однородные функции координат вектора δ , то в формулы (22) и (23) вместо δ можно ставить любой вектор дискриминантного направления. Возьмем для расчета y_1 вектор (8)

$$\delta = G_1 = x_0 - \mu_1,$$

тогда

$$(\gamma_1)^2 = (x_0 - \mu_1)' \cdot (x_0 - \mu_1), \quad (24)$$

а для расчета γ_2

$$\delta = -\sigma_2 = \lambda^{-1} \cdot (\mu_2 - x_0),$$

тогда

$$(\gamma_2)^2 = (\mu_2 - x_0)' \lambda^{-1} (\mu_2 - x_0). \quad (25)$$

Формулы (24) и (25) допускают геометрическую интерпретацию. Действительно, через каждую точку x_0 (КРК), расположенную между μ_1 и μ_2 , проходят две поверхности уровня (6) и (7), которые касаются в этой точке. Параметры κ_1 и κ_2 определяются, если вместо x подставить любую точку этих поверхностей. Значит, для тех поверхностей, которые проходят через x_0 и полностью отделяются дискриминантной гиперплоскостью, имеем

$$\kappa_1 = (\gamma_1)^2, \quad \kappa_2 = (\gamma_2)^2 \quad (26)$$

Отсюда следует, что перемещая x_0 вдоль (КРК) от μ_1 до μ_2 , $(\gamma_1)^2$ монотонно возрастает от нуля в точке μ_1 до максимального значения

$$\alpha_1 = (\mu_2 - \mu_1)' (\mu_2 - \mu_1), \quad (27)$$

при этом $(\gamma_2)^2$ монотонно убывает от

$$\alpha_2 = (\mu_2 - \mu_1)' \lambda^{-1} (\mu_2 - \mu_1) \quad (28)$$

до нуля.

Числа α_1 и α_2 в исходной системе координат вычисляются по формулам

$$\alpha_1 = (\gamma_2 - \gamma_1)' \Sigma_1^{-1} (\gamma_2 - \gamma_1), \quad (29)$$

$$\alpha_2 = (Y_2 - Y_1)' \Sigma_2^{-1} (Y_2 - Y_1), \quad (30)$$

и характеризуют общие возможности классификации данной задачи. Это может оказаться полезным при сравнении различных кодов. В случае равных ковариационных матриц ($\Sigma_1 = \Sigma_2$) имеем $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, где α число Махаланобиса.

§5. Теперь нетрудно представить общую схему расчета, как последовательность следующих шагов.

I. Определяем линейное преобразование

$$X = AZ, \quad (31)$$

при котором

$$A \Sigma_1 A' = E, \quad A \Sigma_2 A' = \lambda, \quad (32)$$

это приведение пары форм к каноническому виду подробно описывается в учебниках алгебры.

2. Далее следует выбрать некоторую точку (KPK) , через которую проведем дискриминантную гиперплоскость. Для этой цели выбираем ряд значений x_0^i , расположенных между μ_1^i и μ_2^i . По каждому значению x_0^i вычисляем

$$t_1/t_2 = \frac{\mu_2^i - x_0^i}{\lambda^i (x_0^i - \mu_1^i)}, \quad (33)$$

$$x_0^i = \frac{t_1 \lambda^i \mu_1^i + t_2 \mu_2^i}{t_1 \lambda^i + t_2}, \quad (34)$$

$$i = 2, 3, \dots, p,$$

и для каждой из найденных таким образом точек x_0 , находим

$$(Y_1)^2 = (x_0 - \mu_1)' (x_0 - \mu_1), \quad (35)$$

$$(y_2)^2 = (\mu_2 - x_0)' \bar{\Sigma}' (\mu_2 - x_0), \quad (36)$$

$$J_{11} = 1 - \phi_0(y_1), \quad (37)$$

$$J_{12} = 1 - \phi_0(y_2). \quad (38)$$

Из числа проверенных отбираем точку x_0 , для которой J_{11} и J_{12} имеют значения, которые нас устраивают.

3. По выбранному x_0 вычисляем дискриминантную функцию

$$\delta'x - c, \quad (39)$$

где

$$\delta = x_0 - \mu_1, \quad (40)$$

$$c = \delta'x_0. \quad (41)$$

4. Подстановкой выражения (31) $x = Az$ в формулу (39) переходим назад к исходным переменным.

Л и т е р а т у р а

1. Anderson T.N., Bahadur R.R. Classification into two multivariate normal distributions with different covariance matrices. —

The Annals of Mathematical statistics, v.33, Nr.2, 1962, p. 420-431.

Л. Я. БЕРЕВИНА

Об одном способе минимизации количества параметров в задаче классификации образов

Рассматривается классификация двух нормально распределенных образов, с одинаковыми ковариационными матрицами, для случаев вырожденных, невырожденных и "плохо обусловленных" матриц. Указываются случаи, когда минимизация возможна без потери точности.

§1. Основные формулы [1]

Для двух нормально распределенных образов с законами распределения $N(\mu^1, \Sigma)$ и $N(\mu^2, \Sigma)$ линейная дискриминантная функция имеет вид

$$x' \delta - x_0' \delta \quad (1)$$

Здесь δ - дискриминантный вектор, который определяется из линейной системы

$$\Sigma \delta = \mu^2 - \mu^1, \quad (2)$$

а x_0 - радиус-вектор некоторой внутренней точки отрезка, соединяющего центры μ^1 и μ^2 . Если цены ошибочной классификации равны между собой, то

$$x_0 = \frac{1}{2} (\mu^1 + \mu^2), \quad (3)$$



т.е. χ_c определяет середину отрезка, соединяющего центры μ^1 и μ^2 . χ - радиус-вектор классифицируемой точки.
При $\det |c| \neq 0$ имеем

$$\delta = \Sigma^{-1} (\mu^2 - \mu^1) \quad (4)$$

Точность классификации при этом определяется числом Махалано-биса

$$\alpha = (\mu^2 - \mu^1)' \Sigma^{-1} (\mu^2 - \mu^1) \quad (5)$$

Рассмотрим отображение

$$y = c x \quad (6)$$

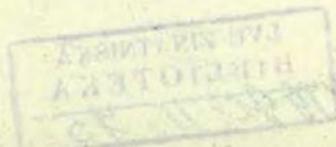
при котором, как известно, данные совокупности пространства X переходят в нормально распределенные совокупности пространства Y , с законами распределения $N(c\mu^1, c\Sigma c')$ и $N(c\mu^2, c\Sigma c')$.

Если c квадратная матрица максимального ранга то отображение (6) можно трактовать как переход к другим координатам в пространстве X , при этом квадратичная форма (5) сохраняет свое значение α и, следовательно, точность классификации не меняется. Такие величины X и Y в дальнейшем назовем аффинно-эквивалентными.

Если c квадратная вырожденная матрица ($\det |c| = 0$), то скажем, что отображение (6) определяет "явную минимизацию".

Отображение (6) определяет "явную минимизацию", когда c есть прямоугольная матрица максимального ранга (число строк меньше числа столбцов). Частным случаем явной минимизации является "тривиальная минимизация", для которой

$$c = (y \ 0) \quad (7)$$



При этом отбрасывается часть координат вектора X и из ковариационной матрицы вычеркиваются соответствующие строки и столбцы.

Заметим, что в литературе по классификации образов обычно рассматривается только тривиальная минимизация.

§2. Случай вырожденной ковариационной матрицы

Покажем, что в этом случае возможна тривиальная минимизация без потери точности классификации. Для этой цели вспомним определение [2] нормального распределения ранга m .

Мы скажем, что случайная величина распределена нормально с рангом m , ($X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ с рангом m), тогда и только тогда, когда

$$X - \mu = BY, \quad BB' = \Sigma, \quad (8)$$

где B - $(p \times m)$ - матрица ранга m , и $y \sim N_m(0)$, т.е. когда y_1, y_2, \dots, y_m независимы и каждая из них распределена как $N_1(0, 1)$.

Геометрический смысл этого определения состоит в том, что X распределен в m -плоскости p -мерного пространства. Столбцы матрицы B образуют векторный базис этой m -плоскости. Но поскольку векторные пространства, порожденные столбцами B и BB' совпадают, то базисом подпространства могут служить любые m линейно-независимых столбцов матрицы Σ ($\Sigma = BB'$). Пусть для определенности первые m столбцов Σ линейно-независимы. Образует из них матрицу A , тогда

$$X - \mu = AZ \quad (9)$$

Другое параметрическое представление той же m -плоскости (8)

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{\Gamma} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где \bar{A} - $(m \times m)$ матрица ранга m , тогда

$$\bar{x} - \bar{\mu} = \bar{A} z \quad (II)$$

и

$$\hat{x} - \hat{\mu} = \hat{A} z, \quad (I2)$$

где $\bar{x}, \bar{\mu}$ - столбцы из первых m координат x и μ ,
 $\hat{x}, \hat{\mu}$ - столбцы из остальных $p-m$ координат.

Из уравнения (II) получаем

$$z = (\bar{A})^{-1} (\bar{x} - \bar{\mu}), \quad (I3)$$

и, подставляя в (I2)

$$\hat{x} - \hat{\mu} = \hat{A} \cdot (\bar{A})^{-1} (\bar{x} - \bar{\mu}) \quad (I4)$$

Система (I4) дает непараметрические уравнения m -плоскости (8).

Уравнения (II) или (I3) показывают, что z и, следовательно, также y , аффинно-эквивалентны \bar{x} .

Поверхности уровня поля плотности являются эллипсоидами, лежащими в плоскости (I4) и получаются, как пересечение этой плоскости с гиперцилиндрами

$$(\bar{x} - \bar{\mu})' (\bar{A})^{-1} (\bar{x} - \bar{\mu}) = const. \quad (I5)$$

Рассмотрим классификацию двух образов в p -мерном пространстве с одинаковой вырожденной ковариационной матрицей \hat{z} , ранга m ($m < p$).

Если $m = p-1$, то гиперплоскости, в которых распределены образы, определяются уравнениями

$$\hat{x} - \hat{\mu}' = \hat{A} \cdot (\hat{A})^{-1} (\hat{x} - \hat{\mu}') \quad (I6)$$

$$\hat{x} - \hat{\mu}^2 = \hat{A} (\hat{A})^{-1} (\bar{x} - \bar{\mu}^2) \quad (17)$$

Заметим, что (16) и (17) дают по одному линейному уравнению, здесь \hat{x} , $\hat{\mu}^1$, $\hat{\mu}^2$ — последние координаты соответствующих векторов, \hat{A} — последняя строка матрицы A .

Гиперплоскости (16) и (17) совпадают, когда

$$\hat{\mu}^2 - \hat{\mu}^1 - \hat{A} \cdot (\hat{A})^{-1} (\bar{\mu}^2 - \bar{\mu}^1) = 0, \quad (18)$$

и параллельны, когда

$$\hat{\mu}^2 - \hat{\mu}^1 - \hat{A} \cdot (\hat{A})^{-1} (\bar{\mu}^2 - \bar{\mu}^1) \neq 0 \quad (19)$$

В последнем случае образы классифицируются без погрешности. Разделяет их любая гиперплоскость, проходящая через некоторую точку отрезка, соединяющего центры μ^1 и μ^2 параллельно гиперплоскостям (16) и (17). В частности, можно взять гиперплоскость, проходящую через середину указанного отрезка, т.е. точку $\frac{1}{2}(\mu^1 + \mu^2)$.

Линейная дискриминантная функция в таком случае имеет вид

$$\hat{x}^1 - \frac{1}{2} (\hat{\mu}^1 + \hat{\mu}^2) - \hat{A} \cdot (\hat{A})^{-1} \left(\bar{x} - \frac{\bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2}{2} \right) \quad (20)$$

Эта функция в общем случае содержит все координаты x . Если условие (18) имеет место, то гиперплоскости (16) и (17) совпадают. Оба образа распределены в одной гиперплоскости и разделяются в ней дискриминантной плоскостью размерности $m-2$.

Из уравнений (11) и (13) следует, что величины z (или y) аффинно-эквивалентны величинам \bar{x} и, следовательно, точность классификации не изменится при переходе от z \bar{x} , т.е. при тривиальной минимизации, приводящей к отбрасыванию координаты \hat{x} .

Геометрически это означает, что все точки гиперплоскости, в которой распределены образы, проектируются на $(p-1)$ -мерную координатную гиперплоскость \bar{X} , параллельно координатной оси X . Дискриминантная гиперплоскость в p -мерном пространстве, проходит через $(p-2)$ -мерную дискриминантную плоскость, параллельно оси X и, следовательно, не содержит X .

Аналитически изложенное эквивалентно решению системы (2) при помощи g -обратной матрицы максимального ранга. Уравнение (18) дает условие совместности системы (2).

Пример I. Пусть $\mu^1 = [0 \ 0 \ 0]$ и $\mu^2 = [1 \ 1 \ 1]$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Ранг матрицы $R(\Sigma) = 2$, т.е. $m=2$, причем в нашем примере линейно независимы любые два столбца. Так что за матрицу A можно брать любые два столбца Σ . Возьмем

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

тогда

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{X} = X^3, \quad \bar{\mu}^2 - \bar{\mu}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\hat{\mu}^2 - \hat{\mu}^1 = 1$$

Наши образы распределены в плоскостях, параметрические уравнения которых будут согласно (9)

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

и

$$\begin{bmatrix} x^1 - 1 \\ x^2 - 1 \\ x^3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Проверку, совпадают ли эти плоскости или нет, проводим по условию (18), получаем

$$1 - \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0 \quad (27)$$

и, значит, плоскости не совпадают. Вычисляем уравнение гиперплоскости, разделяющей наши образы без погрешности по формуле (20),

$$x^3 - \frac{1}{2} \cdot 1 - \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (28)$$

или

$$2x^1 - x^2 + 2x^3 - \frac{3}{2} = 0 \quad (29)$$

Уравнение (29) содержит все координаты вектора X и минимизация без потери точности не возможна.

Заметим, что если, например, полагать

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^3 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = x^2$$

Разделяющая гиперплоскость будет

$$x^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Что, естественно, дает ту же плоскость (29).

Пример 2. Пусть

$$\begin{aligned} \mu^1 &= [0 \ 0 \ 0] \\ \mu^2 &= [1 \ 4 \ 1] \end{aligned} \quad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Полагаем

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mu}^2 - \bar{\mu}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \hat{\mu}^2 - \hat{\mu}^1 = 1$$

Вычисляем левую сторону условия (18) и (19)

$$1 - \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0 \quad (31)$$

Значит, вектор $\mu^2 - \mu^1$, принадлежит векторному пространству, построенному на столбцах $\hat{\Sigma}$, и оба образа расположены в одной плоскости

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Величины $y = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}$ аффинно-эквивалентны
 величинам $\bar{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$

Задача сводится к классификации величин с законами распределения $N_2(\bar{\mu}^1, \bar{A})$, $N_2(\bar{\mu}^2, \bar{A})$,

$$\bar{\mu}^1 = [0 \ 0], \quad \bar{\mu}^2 = [1 \ 4],$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Число Махалонобиса

$$\alpha = [1 \ 4] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{9}{2} \quad (34)$$

В нашем примере все диагональные определители Σ отличны от нуля, поэтому предложенную минимизацию можно также провести, отбрасывая первую или вторую координату вектора x . Тогда исходная задача приведет к классификации величин

$$N_2(\bar{\mu}^1, \bar{A}), \quad N_2(\bar{\mu}^2, \bar{A}),$$

где

$$\bar{\mu}^1 = [0 \ 0], \quad \bar{\mu}^2 = [4 \ 1], \quad (35)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{9}{2}$$

либо

$$\bar{\mu}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mu}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{9}{2} \quad (36)$$

Если ранг матрицы Σ $m < p-1$, то каждая из матричных уравнений (16) и (17) дает $p-m$ линейных уравнений, определяющих m -плоскости, в которых распределяются величины. Эти плоскости совпадают, когда выполняются $p-m$ условия (16) или параллельны в случае (19).

Когда плоскости совпадают, то все точки этой m -плоскости аффинно-эквивалентны точкам любой m -мерной координатной плоскости, частная плотность которой имеет невырожденную ковариационную матрицу. Точность классификации при этом не зависит от выбора координатной плоскости. Этот случай ничем не отличается по существу от случая совпавших гиперплоскостей.

Если плоскости не совпадают, то они параллельны и, следовательно, обе плоскости вместе с вектором $\mu^2 - \mu^1$ укладываются в одной $(m+1)$ -мерной плоскости, в которой наши m -плоскости играют роль гиперплоскостей. Значит, допустима тривиальная минимизация, проектируя оба образа в $(m+1)$ -мерную координатную плоскость. В ней имеем ранее рассмотренный случай двух параллельных гиперплоскостей.

Пример 3. Пусть

$$\mu^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mu^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

тогда $m = 1$, за базисный вектор можно взять

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Полагая

$$\bar{x} = x^1, \quad \bar{\mu}^2 - \bar{\mu}^1 = 3, \quad \bar{A} = 1$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mu}^2 - \hat{\mu}^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

и подставляя в левую сторону (18), (19), получаем

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot 3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Образы распределены на одной и той же прямой. Их можно классифицировать по первой координате, тогда

$$\mu^1 = 0, \quad \mu^2 = 3, \quad \Sigma = 1, \quad \alpha = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 9 \quad (41)$$

Либо по второй, что дает такие же числа, либо по третьей, тогда

$$\mu^1 = 0, \quad \mu^2 = 6, \quad \Sigma = 4, \quad \alpha = 6 \cdot 4 \cdot 6 = 9 \quad (42)$$

Точность классификации в любом случае одна и та же.

Пример 4. Пусть

$$\mu^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mu^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Выделяем

$$\bar{x} = x^1, \quad \bar{\mu}^2 - \bar{\mu}^1 = 3, \quad \bar{A} = 1,$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mu}^2 - \hat{\mu}^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Вычисляем левую сторону (18), (19) получаем

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot 3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Прямые расположены в двумерной плоскости, базисом которой служат векторы

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mu^2 - \mu^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Без потери точности можно отбросить только одну координату. Причем только x^1 либо x^2 , поскольку только для x^3 соответствующая строка (45) отлична от нуля. Это значит, что только в проекциях на координатные плоскости (x^1, x^3) или (x^2, x^3) получаем параллельные прямые, которые разделяются без погрешности. Откинем x^2 , тогда наша задача сводится к разделению образов, для которых

$$\mu^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mu^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

расположенных в параллельных гиперплоскостях. Дискриминантную функцию определяем по формуле (20). Здесь

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \bar{A} = 1 \quad \hat{A} = 2 \quad (48)$$

$$\bar{\mu}^2 + \bar{\mu}^1 = 3, \quad \hat{\mu}^2 + \hat{\mu}^1 = 7,$$

и, следовательно, по формуле (20) получаем, что разделяющая гиперплоскость имеет уравнение

$$x^3 - \frac{1}{2} \cdot 7 - 2 \cdot 1 \cdot \left(x^1 - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$4x_1 - 2x_3 + 1 = 0. \quad (49)$$

Настоящий пример нарочно подобран настолько простым, чтобы решение легко определялось известными формулами аналитической геометрии. Действительно, оба образа распределены на двух параллельных прямых с уравнениями

$$\frac{x^1}{1} = \frac{x^2}{1} = \frac{x^3}{2} \quad (50)$$

и

$$\frac{x^1 - 3}{1} = \frac{x^2 - 3}{1} = \frac{x^3 - 4}{2} \quad (51)$$

Эти прямые расположены в плоскости

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad (52)$$

и в этой плоскости разделяется прямой

$$\frac{x^1 - \frac{3}{2}}{1} = \frac{x^2 - \frac{3}{2}}{1} = \frac{x^3 - \frac{4}{2}}{2} \quad (53)$$

Любая плоскость, проходящая через эту прямую разделяет наши образы. Плоскость, проходящая через прямую (53), параллельно координатной оси x^2 , имеет уравнение

$$\frac{x^1 - \frac{3}{2}}{1} = \frac{x^3 - \frac{4}{2}}{2}$$

или

$$4x^1 - 2x^3 + 1 = 0 \quad (54)$$

Уравнение (54) не содержит x^2 , поэтому классификация проводится по координатам x^1 и x^3 .

К тому же решению можно придти следующим образом. Через прямые (50) и (51) проводим плоскости параллельные оси x^2 . Эти плоскости имеют уравнения

$$\frac{x^1}{1} = \frac{x^3}{2}, \quad \frac{x^1 - 3}{1} = \frac{x^3 - 4}{2}, \quad (55)$$

которые можно рассматривать как уравнения двух прямых в плоскости (x^1, x^3) . Эти прямые разделяются прямой (54).

Резюме. Для классификации двух нормально распределенных величин с законами распределения (μ^1, Σ) и (μ^2, Σ) , с вырожденной ковариационной матрицей Σ ранга m с одновременной минимизацией без потери точности, поступаем следующим образом.

1. Выделяем совокупность m координат \bar{x} , для которых частная плотность имеет невырожденную ковариационную матрицу. Совокупность остальных координат обозначим через \hat{x} . Значит, вычеркивая из матрицы Σ строки и столбцы, соответствующие координатам \hat{x} , остается невырожденная матрица размером $(m \times m)$, которая обозначается через \bar{A} . Столбцы матрицы Σ , которые содержат \bar{A} , образуют матрицу A . Из строк A , не входящих в \bar{A} , образуем \hat{A} . Векторы μ^1 и μ^2 разбиваем на $\bar{\mu}^1$, $\bar{\mu}^2$ и $\hat{\mu}^1$ и $\hat{\mu}^2$ так же, как x разбит на \bar{x} и \hat{x} . Естественно, что во всех матрицах с "чертой" или "шпалочкой" координаты расположены в одном и том же определенном порядке.

2. Вычисляем элементы матрицы столбца

$$\mu^2 - \hat{\mu}^1 - \hat{A} \cdot (\hat{A})^{-1} \cdot (\mu^2 - \hat{\mu}^1) \quad (56)$$

3. Если все элементы (56) равны нулю, отбрасываем координаты \hat{x} и проводим классификацию величин распределенных (μ^1, \hat{A}) и (μ^2, \hat{A}) .

4. Если не все элементы (56) равны нулю, то оставляем одну из координат \hat{x} , для которой в соответствующей строке (56) стоит элемент отличный от нуля. Остальные координаты \hat{x} откидываем. В полученном $(m+1)$ -мерном пространстве образы делятся без погрешности дискриминантной функцией (20).

§3. Случай невырожденной ковариационной матрицы

Рассматриваем две совокупности, распределенные $N_p(\mu^1, \Sigma)$ и $N_p(\mu^2, \Sigma)$, где $\det \Sigma \neq 0$.

Пусть P матрица, столбцы которой совпадают с единичными векторами собственных направлений Σ , а λ - диагональная матрица из соответствующих собственных чисел, тогда

$$\Sigma = P \cdot \lambda \cdot P' \quad (57)$$

здесь P - ортогональная матрица

$$P' = P^{-1} \quad (58)$$

Величины

$$y = P'x \quad (59)$$

с законами распределения $N_p(P\mu^1, \lambda)$ и $N_p(P\mu^2, \lambda)$ аффинно-эквивалентно величинам x и, следовательно, точность классификации при переходе (59) не меняется. Проведем над

У тривиальную минимизацию, откидывая p -м величины \hat{y} и оставляя m величин \bar{y} . Разбивая соответственно (59), получаем

$$\bar{y} = \bar{P}'x \tag{60}$$

и $\hat{y} = \hat{P}'x \dots \tag{61}$

Здесь \bar{P}' матрица $(m \times p)$ ранга m , строки которой занимают координаты единичных векторов m -отобранных нами собственных направлений.

Соотношение (60) определяет отображение p -мерного пространства x в m -мерное пространство \bar{y} , т.е. явную минимизацию. Исходные совокупности, при этом отображаются в совокупности с законами распределения $N_m(\bar{P}'\mu, \lambda_m)$, $N_m(\bar{P}'\mu^2, \lambda_m)$, где λ_m -диагональная матрица, содержащая, соответственно расположенные собственные числа, соответствующие m отобранным собственным направлениям Σ .

При такой минимизации обычно \bar{y} есть "главные компоненты", [1], [3], т.е. соответствуют собственным направлениям, имеющим большую дисперсию. Однако в задачах классификации при любой минимизации, следует учитывать как при этом меняется точность классификации.

Для этой цели используем спектральное разложение матрицы

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} P_1 P_1' + \frac{1}{\lambda_2} P_2 P_2' + \dots + \frac{1}{\lambda_p} P_p P_p' \tag{62}$$

Отсюда получаем следующие выражения для числа Махаланобиса

$$\begin{aligned} \alpha &= (\mu^2 - \mu^1)' \Sigma^{-1} (\mu^2 - \mu^1) = \\ &= \frac{1}{\lambda_1} (\mu^2 - \mu^1)' P_1 P_1' (\mu^2 - \mu^1) + \dots \\ &\quad \dots + (\mu^2 - \mu^1)' P_p P_p' (\mu^2 - \mu^1) \end{aligned} \tag{63}$$

и для дискриминантного вектора

$$\begin{aligned} \delta &= \Sigma^{-1} \cdot (\mu^2 - \mu^1) = \\ &= \frac{1}{\alpha_1} P_1 P_1' (\mu^2 - \mu^1) + \frac{1}{\alpha_2} P_2 P_2' (\mu^2 - \mu^1) + \dots + \frac{1}{\alpha_p} P_p P_p' (\mu^2 - \mu^1). \end{aligned} \quad (64)$$

Формула (63) представляет число α как сумму слагаемых, каждое из которых соответствует одному собственному направлению, а формула (64) выражает вектор δ как сумму векторов, сонаправленных собственным направлениям. По этим формулам можно проследить, как изменяется α и δ при минимизации (60).

Отметим, что если вектор $\mu^2 - \mu^1$ перпендикулярен некоторому P_i , то скалярное произведение

$$P_i' (\mu^2 - \mu^1) = 0 \quad (65)$$

и соответствующие слагаемые в формулах (63) и (64) равны нулю. Значит, отбрасывание таких собственных направлений не меняет число α и вектор δ .

В общем случае, когда условие (65) не имеет места, отбрасывание некоторого собственного направления уменьшает α и, следовательно, точность классификации, оценим это уменьшение. Для этой цели преобразуем представление (63) числа α . Обозначим через

$$M^2 = (\mu^2 - \mu^1)' (\mu^2 - \mu^1), \quad (66)$$

квадрат модуля вектора $\mu^2 - \mu^1$, тогда скалярное произведение вектора $\mu^2 - \mu^1$ и единичного вектора P_i

$$P_i' (\mu^2 - \mu^1) = (\mu^2 - \mu^1)' P_i = M \cdot \cos \alpha_i, \quad (67)$$

где α_i - угол между векторами $\mu^2 \mu^1$ и φ_i . Формула (68), следовательно, можно написать в следующей форме

$$\alpha = \sum_{i=1}^p \frac{M^2 \cos^2 \alpha_i}{\lambda_i} \quad (68)$$

"Вклад" каждого собственного направления прямо пропорционален $\cos^2 \alpha_i$ и обратно пропорционален λ_i . Значит, используя в задачах классификации метод главных компонент, надо быть весьма осторожным. Компоненты с малыми дисперсиями будут самыми информативными, если $\cos^2 \alpha_i$ достаточно большой.

В конце рассмотрим задачу минимизации, эквивалентную задаче минимизации (60). Для этой цели умножим обе стороны (60) на матрицу \bar{P} , получаем

$$\bar{P}y = \bar{P}\bar{P}'x \quad (69)$$

Обозначим

$$z = \bar{P}y \quad (70)$$

и, значит,

$$z = \bar{P}\bar{P}'x \quad (71)$$

Уравнение (71) определяет отображение p -мерного вектора $\bar{P}'x$ в p -мерный вектор z . Вырожденная матрица, ранга m , $\bar{P}\bar{P}'$ суть проектор, сопоставляющий каждому x его проекцию на выбранную m -плоскость. Исходные совокупности при этом отображаются в совокупности с законами распределения

$$N_p(\bar{P}\bar{P}'\mu^1, \bar{P}\lambda_m\bar{P}')$$

$$N_1(\bar{P}\bar{P}'\mu^2, \bar{P}\lambda_m\bar{P}')$$

с выраженной ковариационной матрицей. Классификация таких величин и возможная минимизация рассмотрены в предыдущем параграфе.

Указанная неявная минимизация (71) приобретает особый смысл, когда исходные величины распределены "вблизи" некоторой m -плоскости и, следовательно, величины χ мало отличаются от $\bar{\chi}$ и могут быть ими заменены. Этот случай рассматривается в следующем параграфе.

§". Случай "плохо обусловленной" ковариационной матрицы

При решении практических задач, когда классифицируемые объекты кодируются числами, обусловленной аппаратурой, часто получаем ковариационные матрицы, определители которых весьма близки к нулю. (Сравн. [3]).

Из рассуждений §2 и §3 следует, что в таком случае целесообразно поступить следующим образом

1. Вычисляем величину

$$M^2 = (\mu^2 - \mu^1)' (\mu^2 - \mu^1). \quad (72)$$

2. Методом "исчерпывания" определяем собственные числа λ_i и соответствующие единичные векторы собственных направлений Φ_i матрицы Σ . Параллельно, для каждого Φ_i вычисляем

$$M_i = (\mu^2 - \mu^1)' \Phi_i \quad (73)$$

и накапливаем суммы

$$\bar{M}_i^2 = \sum_i (M_i)^2 \quad (74)$$

и

$$\alpha_i = \sum_i \frac{(M_i)^2}{\mu_i^2} \quad (75)$$

Процесс выделения λ_i, φ_i прекращаем, когда λ_i становится достаточно малым (учитывая общую погрешность измерения величин X_i) и когда $M_i^2 \approx M^2$.

Если при существенном уменьшении $\lambda_i, \xi \bar{M}_i^2$ перестает заметно увеличиваться и намного отстает от M^2 , то это означает, что совокупности распределены вблизи двух параллельных m - плоскостей.

Сумма (75) по окончании процесса исчерпывания определяет точность классификации.

3. Пишем матрицу φ , столбцы которой совпадают с отобранными φ_i и диагональную матрицу λ , содержащую соответствующие λ_i , вычисляем

$$\Sigma = \varphi \lambda \varphi' \quad (76)$$

4. Исходная задача классификации величин с плохо обусловленной матрицей Σ , заменяется задачей классификации величин с вырожденной матрицей $\bar{\Sigma}$, решение которой подробно рассмотрено в §2.

Л и т е р а т у р а

1. Андерсон Т.В. Введение в многомерный статистический анализ. М., 1963.
2. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. М., 1968.
3. Малиновский Л.Г. Последовательный дискриминантный анализ электрокардиограмм. — В кн.: Опознавание и описание линий. М., 1972.

Об n -мерной полосе в E_m

Под n -мерной полосой в m -мерном евклидовом пространстве (E_m) будем понимать кривую, в каждой точке которой дана n -мерная плоскость Σ , проходящая через касательную к кривой. Плоскость Σ назовем касательной плоскостью полосы, ортогональную к ней плоскость Σ' - нормальной плоскостью полосы.

Присоединим к полосе ортонормированный репер следующим образом: вершину репера поместим в точку кривой, вектор \vec{e}_1 направим по касательной к кривой, векторы $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ положим в касательную плоскость, а $\vec{e}_{n+1}, \vec{e}_{n+2}, \dots, \vec{e}_m$ в нормальную плоскость.

Так как вектор $\vec{e}_1 \parallel d\vec{A}$, то

$$\omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_m = 0 \quad (1)$$

Допустимые преобразования репера:

$$I \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}' = \vec{A} \\ \vec{e}_1' = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_i' = C_{i,k_1} \vec{e}_k \\ \vec{e}_\alpha' = \vec{e}_\alpha \end{array} \right. \quad (C_{i,k_1}, C_{i,j_1} = \delta_{k_1 j_1}) \quad (2)$$

$$\left(\begin{array}{l} i, k_1, j_1 = 2, 3, \dots, n \\ \alpha = n+1, n+2, \dots, m \end{array} \right)$$

$$\text{II} \begin{cases} \vec{K}' = \vec{K} \\ \vec{e}'_i = \vec{e}_i \\ \vec{e}'_{\alpha} = C_{\alpha\beta} \vec{e}_{\beta} \end{cases} \quad (C_{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}) \quad (3)$$

$$\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ (\alpha, \beta, \gamma) = n+1, n+2, \dots, 2n \end{matrix}$$

Принимая ω_i за базис, имеем:

$$\begin{cases} \omega_{i\alpha} = N_{i\alpha} \omega_i \\ \omega_{i\beta} = N_{i\beta} \omega_i \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ \alpha = 1, 2, \dots, n \\ \beta = n+1, \dots, 2n \end{matrix}$$

Подсчитав зависимость $N_{i\alpha}$, $N_{i\beta}$ от преобразований I и II замечаем, что

$N_{i\alpha} \vec{e}_i$ инвариантный вектор в Σ'
 $N_{i\beta} \vec{e}_i$ инвариантный вектор в Σ
 Назовем вектор $N_{i\alpha} \vec{e}_i$ — вектором нормальной кривизны (по аналогии с E_3 [1]).

Величины $N_{i\alpha}$ при преобразовании I меняются, как вектор Σ , а при преобразовании II, как вектор Σ' . Из $N_{i\alpha}$ можно образовать инвариантные векторы:

$(N_{11}^2 + N_{21}^2 + \dots + N_{n1}^2) \vec{e}_1$ принадлежащий Σ'
 и $N_{k\alpha} N_{i\alpha} \vec{e}_k$ принадлежащий Σ
 Назовем вектор $N_{k\alpha} N_{i\alpha} \vec{e}_k$ — вектором геодезической кривизны [I]
 Направим вектор \vec{e}_{n+1} по вектору нормальной кривизны.
 Тогда

$$N_{1(n+2)} = N_{1(n+3)} = \dots = N_{1(2n)} = 0 \quad (5)$$

Допустимые преобразования репера принимают вид:

$$I \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}' = \vec{A} \\ \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}'_i = C_{i, k} \vec{e}_k \\ \vec{e}'_{2n} = \vec{e}_{2n} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (i, k = 2, 3, \dots, n) \\ (i = n+1, \dots, 2n) \end{array} \quad (6)$$

$$II \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}' = \vec{A} \\ \vec{e}'_i = \vec{e}_i \\ \vec{e}'_{n+1} = \vec{e}_{n+1} \\ \vec{e}'_{\alpha+1} = C_{\alpha, \beta} \vec{e}_{\beta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (i = 1, 2, \dots, n) \\ (\alpha, \beta = n+2, n+3, \dots, 2n) \end{array} \quad (7)$$

Вектор геодезической кривизны принимает вид:

$$\mu_{k, (n+1)} \vec{e}_k, \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (8)$$

Величины $\mu_{i, \beta}$ ($i = 2, 3, \dots, n$; $\beta = n+2, n+3, \dots, 2n$) при преобразовании I меняются, как вектор плоскости $\Sigma_i \subset \Sigma$ плоскости ортогональной к вектору \vec{e}_i , а при преобразовании II как вектор плоскости $\Sigma'_1 \subset \Sigma'$ плоскости ортогональной к \vec{e}_{n+1} . Величины $\mu_{i, \beta}$ являются координатами связывающего тензора [2]. Связывающий тензор можно использовать для построения канонического репера.

Направим векторы $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+2}, \vec{e}_{n+3}, \dots, \vec{e}_{2n}$ по стационарным направлениям, направлениям стационарных углов, которые плоскость Σ_i образует с плоскостью $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n]$ [2], где

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{t}_2 = \mu_{2, (n+2)} \vec{e}_{n+2} + \vec{e}_2 \\ \vec{t}_3 = \mu_{3, (n+3)} \vec{e}_{n+3} + \vec{e}_3 \\ \dots \\ \vec{t}_n = \mu_{n, (2n)} \vec{e}_{2n} + \vec{e}_n \end{array} \right. \quad (9)$$

Такая фиксация $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+2}, \dots, \vec{e}_{2n}$ приводит матрицу $(M_{i,\beta})$ ($i=2, 3, \dots, n; \beta=n+2, n+3, \dots, 2n$) к диагональному виду.

Назовем полосу, для которой вектор, нормальной кривизны - нулевой вектор, асимптотической полосой (по аналогии с $E_2[\square]$).

Для асимптотической полосы

$$M_{1,(n+1)} = M_{1,(n+2)} = \dots = M_{1,(2n)} = 0, \quad (10)$$

предложенная выше канонизация не имеет место, матрица

$$(M_{i,\beta}) \quad \left(\begin{array}{l} i=2, 3, \dots, n \\ \beta=n+1, n+2, \dots, 2n \end{array} \right) \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} i=2, 3, \dots, n \\ \beta=n+1, n+2, \dots, 2n \end{array}} \right\} \text{прямоугольная.}$$

Положим

$$M_{2,(n+1)} = M_{3,(n+1)} = \dots = M_{n,(n+1)} = 0 \quad (11)$$

Условие (11) инвариантно относительно преобразования I,

т.к. означает, что вектор $M_{i,(n+1)} \vec{e}_i$ ($i=2, 3, \dots, n$) стал нулевым.

Условия (11) означают совмещение плоскости $[\vec{e}_{n+2}, \vec{e}_{n+3}, \dots, \vec{e}_{2n}]$ с инвариантной плоскостью $[\vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n]$, где

$$\vec{a}_2 = M_{2,n+1} \vec{e}_n, \quad \vec{a}_3 = M_{3,n+1} \vec{e}_n, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = M_{n,n+1} \vec{e}_n \quad (12)$$

($i=2, 3, \dots, n$)

Внесем условия (11) в матрицу $(M_{i,\beta})$, матрица принимает вид:

$$(M_{i,\beta}), \quad \left(\begin{array}{l} i=2, 3, \dots, n \\ \beta=n+2, n+3, \dots, 2n \end{array} \right),$$

т.е. становится квадратной.

Теперь можно векторы $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+2}, \vec{e}_{n+3}, \dots, \vec{e}_{2n}$ направить по стационарным направлениям, которые образуют плоскости $[\vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n]$ и $[\vec{t}_2, \vec{t}_3, \dots, \vec{t}_n]$,

где

$$\begin{cases} \vec{l}_2 = \mu_{2d_1} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{l}_3 = \mu_{3d_1} \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \\ \dots \\ \vec{l}_n = \mu_{nd_1} \vec{e}_1 + \vec{e}_n \end{cases} \quad (15)$$

Матрица (μ_{id_1}) принимает диагональный вид.

Л и т е р а т у р а

1. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию". М., 1957.
2. Березина Л.Я. Репер Россинского для семейства плоскостей". - "Изв. высш. уч. заведений", 1971, № 10.
3. Березина Л.Я. К теории семейств плоскостей в многомерном аффинном пространстве. - Труды РИИГА, вып. 85. Рига, 1966.

Об однопараметрическом семействе двухмерных
плоскостей в R_4^{12}

Пространство R_4^{12} - это полуевклидово пространство \mathcal{N} , в котором граждение базисных векторов задается группой:

$$\begin{cases} \vec{e}_i' = c_{ik} \vec{e}_k \\ \vec{e}_3' = a_3^1 \vec{e}_1 + a_3^2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4' = a_4^1 \vec{e}_1 + a_4^2 \vec{e}_2 + a_4^3 \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \end{cases} \quad (1)$$

$(i, k = 1, 2)$

где $\|c_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2$) — ортогональная матрица. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ расположены в трехмерном инвариантном векторном пространстве, которое будем обозначать через (А), а векторы \vec{e}_4, \vec{e}_5 расположены в двухмерном инвариантном векторном пространстве с Евклидовой метрикой, которое обозначим (В).

Назовем векторы из R_4^{12} , не принадлежащие (А), векторами третьего порядка, векторы из (А), не принадлежащие (В), векторами второго порядка и векторы из (В) - векторами первого порядка.

§ I. Рассмотрим в пространстве R_4^{12} плоскость Σ , построенную на двух линейно-независимых векторах третьего порядка:

$$\Sigma = [\vec{x}_1, \vec{y}_1], \quad \vec{x}_1, \vec{y}_1 \in R_4^{12}, \quad \vec{x}_1, \vec{y}_1 \notin (A), \quad \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1 \neq 0$$

Пусть

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i \in \Sigma_1 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

тогда

$$\vec{a} = \lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{y}_1 \quad (2)$$

или

$$a^i = \lambda x_1^i + \mu y_1^i \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (3)$$

Если вектор $\vec{a} \in (A)$, то

$$a^4 = \lambda x_1^4 + \mu y_1^4 = 0, \quad (4)$$

что задает инвариантно-направленный вектор \vec{a} второго порядка. Будем называть плоскость Σ_1 — плоскостью вида один.

§2. В пространстве R_4^{12} была изучена линейчатая поверхность (однопараметрическое семейство прямых), у которой направляющий вектор образующей — вектор третьего порядка [4].

Было показано, что образующая линейчатой поверхности обладает инвариантно-направленным вектором — вектором центральной нормали. Если вектор центральной нормали $\vec{s} \in (A)$, $\vec{s} \notin (B)$, то имеем поверхность порядка два, если $\vec{s} \in (B)$, то поверхность порядка один.

С образующей поверхности порядка два связан инвариантный вектор — вектор распределения, на образующей поверхности порядка два имеется инвариантная точка — горловая точка.

У образующей поверхности порядка один найдены: вектор распределения, принадлежащий (A) , его проекция на нормаль \vec{p} ($\vec{p} \in (A)$, $\vec{p} \notin (B)$) — внешний параметр распределения (инвариант), равенство нулю которого выделяет специальный класс поверхности, квазиторс; θ — центр, сопоставляемый каждому выбору нормали точку на образующей.

Рассмотрим линейчатую поверхность, у которой направляющий вектор образующей - вектор второго порядка. Присоединим к образующей поверхности фтормированный репер следующим образом: вершину репера \bar{N} поместим на образующую, вектор \bar{e}_3 направим по образующей. Разбиваем допустимые преобразования репера на элементарные:

$$I \begin{cases} \bar{N}' = \bar{N} + t\bar{e}_3 \\ \bar{e}_j' = \bar{e}_j \end{cases} \quad (j=1,2,3,4) \quad (4)$$

$$II \begin{cases} \bar{N}' = \bar{N} \\ \bar{e}_i' = C_{ik}\bar{e}_k \\ \bar{e}_3' = \bar{e}_3 \\ \bar{e}_4' = \bar{e}_4 \end{cases} \quad (C_{ik}C_{ki} = \delta_{ik}) \quad (5)$$

(i, k, l = 1, 2)

$$III \begin{cases} \bar{N}' = \bar{N} \\ \bar{e}_m' = \bar{e}_m \\ \bar{e}_4' = a_1^1\bar{e}_1 + a_1^2\bar{e}_2 + a_1^3\bar{e}_3 + \bar{e}_4 \end{cases} \quad (m=1,2,3) \quad (6)$$

Главными формами являются формы: $\omega^1, \omega^2, \omega^4, \omega_3^1, \omega_3^2$. Нетрудно вычислить, что при преобразовании I (4):

$$\begin{cases} \bar{\omega}^1 = \omega^1 + t\omega_3^1 \\ \bar{\omega}^2 = \omega^2 + t\omega_3^2 \end{cases} \quad (7)$$

при преобразовании II (5) ω^1 и ω^2 меняются, как координаты вектора, принадлежащего (B), при преобразовании III (6):

$$\begin{cases} \bar{\omega}^1 = \omega^1 + A_4^1 \omega^4 \\ \bar{\omega}^2 = \omega^2 + A_4^2 \omega^4, \end{cases} \quad (8)$$

где $\|A_4^i\| = T$, $\|A_4^i\| = T^{-1}$ ($i=1,2$).

Формы ω_3^1 и ω_3^2 не зависят от преобразования I и III, а при преобразовании II меняются, как координаты вектора из (B).

Инвариантный вектор $d\bar{e}_3 = \omega_3^1 \bar{e}_1 + \omega_3^2 \bar{e}_2$, по аналогии с Евклидовым пространством, назовем вектором центральной нормали.

Направим вектор \bar{e}_3 по вектору центральной нормали, тогда

$$\omega_3^2 = 0. \quad (9)$$

Независимо от фиксации (9) система

$$\begin{cases} \bar{\omega}^1 = 0 \\ \bar{\omega}^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

задает зависимость между параметрами A_4^1, A_4^2, t :
(условие (10) не зависит от преобразования II)

$$\begin{cases} \omega^1 + A_4^1 \omega^4 + t \omega_3^1 = 0 \\ \omega^2 + A_4^2 \omega^4 + t \omega_3^2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

При $\omega^4 \neq 0$ имеем функциональную зависимость между точками над образующей и плоскостями $[\bar{e}_3 \bar{e}_4]$, такую, что каждой точке образующей соответствует плоскость

Из условия (10) следует, что $[\bar{e}_3 \bar{e}_4]$

$$d\bar{H} = \omega^3 \bar{e}_3 + \omega^4 \bar{e}_4, \quad (12)$$

т.е. плоскость $[\bar{e}_3 \bar{e}_4]$ — это касательная плоскость поверхности в точке приложения репера.

Равенство нулю инвариантной формы ω^4 (ω^4 не зависит от преобразования I-III)

$$\omega^4 = 0 \quad (13)$$

выделяет специальный класс поверхности, который назовем квазиторсом.

Когда вектор \vec{e}_4 направлен по вектору центральной нормали образующей квазиторса (условия (9) и (13)), форма ω^2 не зависит от преобразования I-III. Тогда уравнение

$$\omega^2 = 0 \quad (13')$$

выделяет торсовую поверхность. Если вектор \vec{e}_4 не фиксирован, то торс выделяется условиями:

$$\omega^4 = 0 \quad (13'')$$

$$\begin{vmatrix} \omega^1 & \omega^2 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 \end{vmatrix} = \omega^1 \omega_3^2 - \omega^2 \omega_3^1 = 0,$$

где выражение $\omega^1 \omega_3^2 - \omega^2 \omega_3^1$ не зависит от преобразования I-III.

У квазиторса формы ω^1 , ω^2 не зависят от преобразования III, поэтому уравнение

$$\bar{\omega}^1 \bar{\omega}_3^1 + \bar{\omega}^2 \bar{\omega}_3^2 = 0 \quad (14)$$

задает инвариантную точку образующей квазиторса с абсциссой:

$$t = - \frac{\omega^1 \omega_3^1 + \omega^2 \omega_3^2}{(\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2} \quad (14')$$

точка, которую назовем квазицентром.

§3. Совокупность (d, Σ) будем называть линейчатой поверхностью, через каждую образующую d которой проходит двумерная плоскость вида Σ . Назовем совокупности (d, Σ) совокупностями класса i ($i = 1, 2, 3$), когда вектор коллинеарный образующей d , вектор i порядка.

Рассмотрим совокупность (d, Σ) класса три, присоединим к образующей совокупности ортонормированный репер следующим образом: вершину репера M поместим на образующую d , векторы \vec{e}_3 и \vec{e}_4 положим в плоскость Σ вектор \vec{e}_4 направим по образующей, вектор \vec{e}_3 является инвариантно-направленным вектором.

Допустимые преобразования репера разбиваем на элементарные:

$$I \begin{cases} \vec{M}' = \vec{M} + t\vec{e}_4 \\ \vec{e}_j' = \vec{e}_j \end{cases} \quad (j=1,2,3,4) \quad (15)$$

$$II \begin{cases} \vec{M}' = M \\ \vec{e}_i' = c_{ik}\vec{e}_k \\ \vec{e}_3' = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4' = \vec{e}_4 \end{cases} \quad (i,k=1,2), \quad (16)$$

где $\|c_{ik}\|$ — ортогональная матрица.

Главные формы $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_1^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2$ зависят от преобразований I (15) и II (16) следующим образом: ω_3^1, ω_3^2 и ω_4^1, ω_4^2 задают два инвариантно-направленных вектора образующей d :

$$\omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2 \quad (17)$$

$$\omega'_4 \vec{e}_1 + \omega''_4 \vec{e}_2 \quad (18)$$

форма ω^3 — инвариантная форма,
 ω^3 зависит только от переноса I (15):

$$\bar{\omega}^3 = \omega^3 + t\omega''_4 \quad (19)$$

ω', ω'' зависят от переноса I:

$$\begin{cases} \bar{\omega}' = \omega' + t\omega''_1 \\ \bar{\omega}'' = \omega'' + t\omega''_2 \end{cases} \quad (20)$$

а при преобразовании II (16) меняются, как координаты векторе из (B).

Отметим те образы образующей совокупности (α, Σ) , которые индуцированы линейчатой поверхностью:

1) вектор центральной нормали образующей поверхности

$$\omega'_4 \vec{e}_1 + \omega''_4 \vec{e}_2 + \omega'''_4 \vec{e}_3 \quad (21)$$

когда вектор центральной нормали — вектор первого порядка, инвариантная форма

$$\omega'''_4 = 0. \quad (22)$$

что выделяет специальный класс совокупностей (α, Σ)

2) вектор распределения

$$\begin{vmatrix} \omega' & \omega^3 \\ \omega'_4 & \omega''_4 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} \omega'' & \omega^3 \\ \omega''_4 & \omega'''_4 \end{vmatrix} \vec{e}_2 \quad (24)$$

когда $\omega_4^3 \neq 0$

3) горловая точка образующей поверхности с абсциссой

$$t_1 = - \frac{\omega^3}{\omega_4^3} \quad (\omega_4^3 \neq 0) \quad (25)$$

Кроме того, аналогично, как для совокупности (α, Σ) Евклидова пространства [2], с образующей α связан ряд инвариантных точек, названных по аналогии с E_4 :

1) внешний центр с абсциссой

$$t_2 = - \frac{\omega' \omega_4' + \omega^2 \omega_4^2}{(\omega_4')^2 + (\omega_4^2)^2} \quad (26)$$

Для внешнего центра характерно, то, что проекция на (В) касательной к направляющей поверхности $(d\vec{H})$ в данной точке перпендикулярна проекции на (В) вектора центральной нормали $(d\vec{e}_4)$.

2) Первый центр кривизны с абсциссой

$$t_3 = - \frac{\omega' \omega_3' + \omega^2 \omega_3^2}{\omega_3' \omega_4' + \omega_3^2 \omega_4^2} \quad (27)$$

точка, в которой проекция на (В) касательной к направляющей $(d\vec{H})$ ортогональна вектору

$$d\vec{e}_3 = \omega_3' \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2 \quad (28)$$

который назовем вектором внешней геодезической кривизны, аналогично как в E_4 [2].

3) Второй центр кривизны с абсциссой

$$t_4 = - \frac{\begin{vmatrix} \omega' & \omega^2 \\ \omega_3' & \omega_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_4' & \omega_4^2 \\ \omega_3' & \omega_3^2 \end{vmatrix}} \quad (29)$$

точка, в которой проекция на (B) вектора касательной к направляющей коллинеарна вектору внешней геодезической кривизны.

§4. Изучим совокупность (α, Σ) класса два, присоединим к прямой α совокупности ортонормированный репер: положим векторы \vec{e}_3, \vec{e}_4 в плоскость Σ , направим вектор \vec{e}_3 по образующей, вершину репера P поместим на прямую α . Разбиваем допустимые преобразования репера на элементарные:

$$I \begin{cases} \vec{P}' = \vec{P} + t\vec{e}_3 \\ \vec{e}_j' = \vec{e}_j \end{cases} \quad (j=1,2,3,4) \quad (30)$$

$$II \begin{cases} \vec{P}' = \vec{P} \\ \vec{e}_i' = C_{ik}\vec{e}_k \\ \vec{e}_3' = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4' = \vec{e}_4 \end{cases} \quad (i,k=1,2) \quad (31)$$

$\|C_{ik}\|$ - ортогональная матрица.

$$III \begin{cases} \vec{P}' = \vec{P} \\ \vec{e}_m' = \vec{e}_m \\ \vec{e}_n' = a_n^3\vec{e}_3 + \vec{e}_n \end{cases} \quad (m=1,2,3) \quad (32)$$

Главные формы $\omega^1, \omega^2, \omega^4, \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2$ зависят от преобразования I-III (31-33) следующим образом: формы ω^1, ω^2 линейно зависят от переноса I (30)

$$\begin{cases} \bar{\omega}^1 = \omega^1 + t\omega_3^1 \\ \bar{\omega}^2 = \omega^2 + t\omega_3^2 \end{cases} \quad (33)$$

при преобразовании (II (32) меняются, как координаты вектора

из (B) и не зависят от преобразования III. Формы ω_3^1, ω_3^2 задают инвариантно-направленный вектор

$$\omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2 \quad (34)$$

формы ω_4^1, ω_4^2 не зависят от переноса I, при преобразовании II меняются, как координаты вектора из (B), при преобразовании III:

$$\begin{cases} \bar{\omega}_4^1 = a_4^3 \omega_3^1 + \omega_4^1 \\ \bar{\omega}_4^2 = a_4^3 \omega_3^2 + \omega_4^2 \end{cases} \quad (35)$$

форма ω^4 — инвариантная форма. Отметим те инвариантные образы образующей \mathcal{L} совокупности (α, Σ) , которые имеет линейчатая поверхность:

1) вектор центральной нормали

$$\omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2 \quad (36)$$

2) инвариантная точка с абсциссой

$$t_1 = - \frac{\omega^1 \omega_3^1 + \omega^2 \omega_3^2}{(\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2} \quad (37)$$

которую назовем Σ -центром.

Σ -центр — это точка, в которой проекция на (B) вектора касательной к направляющей ортогональна вектору центральной нормали.

Далее составим выражение

$$\left| \begin{array}{cc} \bar{\omega}^1 & \bar{\omega}^2 \\ \bar{\omega}_4^1 & \bar{\omega}_4^2 \end{array} \right| \quad (38)$$

не зависящее от преобразования II, но зависящее от преобразований I и III. Уравнение

$$\begin{vmatrix} \bar{\omega}^1 & \bar{\omega}^2 \\ \bar{\omega}_4^1 & \bar{\omega}_4^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (39)$$

Видим функциональную зависимость между параметрами t и a_4^3

$$t = - \frac{\omega^1 \omega_4^2 - \omega^2 \omega_4^1 + a_4^3 (\omega^1 \omega_3^2 - \omega^2 \omega_3^1)}{\omega_3^1 \omega_4^2 - \omega_3^2 \omega_4^1} \quad (40)$$

Когда

$$\omega_3^1 \omega_4^2 - \omega_3^2 \omega_4^1 \neq 0 \quad \text{и} \quad \omega^1 \omega_3^2 - \omega^2 \omega_3^1 \neq 0 \quad (41)$$

зависимость (40) означает, что каждому выбору вектора \vec{e}_4 в плоскости Σ соответствует точка образующей, в этих точках проекция на (В) вектора касательной к направляющей ($d\vec{H}$) коллинеарна проекции на (В) вектора $d\vec{e}_4$.

Для фиксации вектора \vec{e}_4 используем уравнение:

$$\bar{\omega}_3^1 \bar{\omega}_4^1 + \bar{\omega}_3^2 \bar{\omega}_4^2 = 0, \quad (42)$$

где левая часть уравнения не зависит от преобразований I и II. Уравнение (42) можно записать в виде:

$$(a_4^3 \omega_3^1 + \omega_4^1) \omega_3^1 + (a_4^3 \omega_3^2 + \omega_4^2) \omega_3^2 = 0 \quad (43)$$

или

$$a_4^3 = - \frac{\omega_3^1 \omega_4^1 + \omega_3^2 \omega_4^2}{(\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2} \quad (44)$$

при

$$(\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2 \neq 0$$

Фиксация (42) означает, что проекция на (B) вектора $d\vec{e}_4$ ортогональна вектору центральной нормали $(d\vec{e}_3)$.

§5. Рассмотрим однопараметрическое семейство плоскостей, где плоскость Σ — плоскость вида оди.. Присоединим к плоскости семейства Σ ортонормированный репер: векторы \vec{e}_3, \vec{e}_4 поместим в плоскость Σ , вершину репера Π тоже поместим в Σ . Разбиваем допустимые преобразования репера на элементарные:

$$I \begin{cases} \vec{M}' = \vec{M} + t_1 \vec{e}_3 + t_2 \vec{e}_4 \\ \vec{e}_j' = \vec{e}_j \end{cases} \quad (j=1,2,3,4) \quad (45)$$

$$II \begin{cases} \vec{M}' = \vec{M} \\ \vec{e}_i' = C_{ik} \vec{e}_k \\ \vec{e}_3' = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4' = \vec{e}_4 \end{cases} \quad (i,k=1,2) \quad (46)$$

где $\|C_{ik}\|$ ортогональная матрица.

$$III \begin{cases} \vec{M}' = \vec{M} \\ \vec{e}_l' = \vec{e}_l \\ \vec{e}_4' = a_4^3 \vec{e}_3 + \vec{e}_4 \end{cases} \quad (l=1,2,3) \quad (47)$$

Главными формами являются: $\omega^1, \omega^2, \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2$. Нетрудно подсчитать зависимость главных форм от преобразований I-III (45-47).

Формы ω^1, ω^2 линейно зависят от переноса I (45):

$$\begin{cases} \bar{\omega}^1 = \omega^1 + t_1 \omega_3^1 + t_2 \omega_4^1 \\ \bar{\omega}^2 = \omega^2 + t_1 \omega_3^2 + t_2 \omega_4^2 \end{cases} \quad (48)$$

при преобразовании II (46) меняются, как координаты вектора из (B), не зависят от преобразований III (47). Формы ω_3^1 , ω_3^2 не зависят от преобразований I (45), III (47), а при преобразовании II (46) меняются как координаты вектора из (B), т.е. ω_3^1, ω_3^2 задают инвариантно-направленный вектор плоскости семейства

$$\omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2, \quad (49)$$

который назовем главным вектором.

Формы ω_4^1, ω_4^2 не зависят от переноса I (45), при преобразовании II (46) меняются, как координаты вектора из (B), линейно зависят от a_4^3 при преобразовании III (47):

$$\begin{cases} \bar{\omega}_4^1 = a_4^3 \omega_3^1 + \omega_4^1 \\ \bar{\omega}_4^2 = a_4^3 \omega_3^2 + \omega_4^2 \end{cases} \quad (50)$$

Далее изучим совокупности (d, Σ) , принадлежащие данному семейству плоскостей.

Каждая прямая $d \in \Sigma$ индуцирует совокупность (d, Σ) . Совокупности (d, Σ) класса два индуцируют некоторые инвариантные образы плоскости Σ , например, главный вектор: $\omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2$ — это вектор центральной нормали образующей совокупности (d, Σ) . Главный вектор можно использовать при построении канонического репера, направим по главному вектору вектор \vec{e}_3 , тогда

$$\omega_3^3 = 0. \quad (51)$$

Составим выражение

$$\frac{\begin{vmatrix} \bar{\omega}_4^1 & \bar{\omega}_4^2 \\ \bar{\omega}_3^1 & \bar{\omega}_3^2 \end{vmatrix}}{(\bar{\omega}_3^1)^2 + (\bar{\omega}_3^2)^2} \quad (52)$$

не зависящее от преобразований I-III, т.е. являющееся инвариантом плоскости Σ данного семейства.

Равенство нулю инварианта (52) выделяет специальный класс семейства плоскостей, для которого проекция на (В) вектора центральной нормали произвольной совокупности (α_1, Σ) класса три коллинеарна вектору центральной нормали совокупности (α, Σ) класса два.

Потребуем, чтобы

$$\begin{cases} \bar{\omega}^1 = 0 \\ \bar{\omega}^2 = 0 \end{cases} \quad (53)$$

система (53) не зависит от преобразований II и III. Она задает инвариантную точку плоскости Σ , с координатами:

$$t_1^0 = - \frac{\begin{vmatrix} \omega^1 & \omega^2 \\ \omega_4^1 & \omega_4^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_3^1 & \omega_4^1 \\ \omega_3^2 & \omega_4^2 \end{vmatrix}} \quad (54)$$

$$t_2^0 = - \frac{\begin{vmatrix} \omega^1 & \omega^2 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_3^1 & \omega_4^1 \\ \omega_3^2 & \omega_4^2 \end{vmatrix}}$$

когда инвариант (52) отличен от нуля. Назовем эту точку центром плоскости Σ . Если вершина репера помещена в центр плоскости

$$d\vec{R} = \omega_3^3 \vec{e}_3 + \omega_4^4 \vec{e}_4 \quad (55)$$

значит вектор касательной К линии центров принадлежит плоскости Σ .

Изучим уравнение

$$\bar{\omega}'\bar{\omega}'_3 + \bar{\omega}^2\bar{\omega}^2_3 = 0 \quad (56)$$

левая часть этого уравнения: $\bar{\omega}'\bar{\omega}'_3 + \bar{\omega}^2\bar{\omega}^2_3$ зависит только от переноса I, так что уравнение (56) можно преобразовать к виду:

$$t_1 [(\omega'_3)^2 + (\omega^2_3)^2] + t_2 (\omega'_3\omega'_4 + \omega^2_3\omega^2_4) + \omega\omega'_3 + \omega^2\omega^2_3 = 0 \quad (57)$$

Уравнение (57), линейное относительно t_1 и t_2 , задает инвариантную прямую в плоскости Σ , уравнение (56) означает, что скалярное произведение векторов

$$\omega'\bar{e}_1 + \omega^2\bar{e}_2$$

и

$$\omega'_3\bar{e}_1 + \omega^2_3\bar{e}_2$$

равно нулю. Значит, в каждой точке прямой (57) проекция на (B) вектора \overline{AP} (вектора касательной к линии, описываемой вершиной репера) ортогональна к главному вектору.

На прямой (57) расположены все первые центры кривизны совокупностей (ω, Σ) класса три (см. формулу (27)). Также на прямой (57) расположены Σ -центры совокупностей (ω, Σ) класса два (см. формулу (31)).

Составим уравнение

$$\begin{vmatrix} \bar{\omega}' & \bar{\omega}^2 \\ \bar{\omega}'_3 & \bar{\omega}^2_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (58)$$

левая часть этого уравнения зависит только от переноса I. Преобразуем уравнение (58):

$$\begin{vmatrix} \omega' + t_1\omega'_3 + t_2\omega'_4 & \omega' \\ \omega^2 + t_1\omega^2_3 + t_2\omega^2_4 & \omega^2 \end{vmatrix} =$$

$$= t_2 \begin{vmatrix} \omega_4^1 & \omega_3^1 \\ \omega_4^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \omega^1 & \omega_3^1 \\ \omega^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (59)$$

Уравнение (59) задает инвариантную прямую в плоскости Σ , причем в каждой точке этой прямой проекция на (В) вектора $d\vec{R}$ коллинеарна главному вектору.

На прямой (59) расположены вторые центры кривизны совокупностей класса три (см. формулу (29)).

Рассмотрим возможность фиксации вектора \vec{e}_4 . Образует выражение

$$\bar{\omega}_3^1 \bar{\omega}_4^1 + \bar{\omega}_3^2 \bar{\omega}_4^2, \quad (60)$$

зависящее только от преобразования III, приравняем его к нулю. Из уравнения

$$\bar{\omega}_3^1 \bar{\omega}_4^1 + \bar{\omega}_3^2 \bar{\omega}_4^2 = 0 \quad (61)$$

вычисляем

$$a_4^3 = - \frac{\omega_3^1 \omega_4^1 + \omega_3^2 \omega_4^2}{(\omega_3^1)^2 + (\omega_3^2)^2}. \quad (62)$$

Вектор \vec{e}_4 фиксирован так, что проекция вектора $d\vec{e}_4$ на (В) ортогональна главному вектору.

Л и т е р а т у р а

1. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. М., 1969.

2. Березина Л.Я. Классическая дифференциальная геометрия. I. Рига, 1970. (Изд. Латв. ун-та.)
3. Березина Л.Я. Классическая дифференциальная геометрия II. Рига, 1971. (Изд. Латв. ун-та.)
4. Березина М.Т. Некоторые вопросы семейств прямых в $R_n^{1,2}$. "Учен. зап. Латв. ун-та", 1971, т. 152.

Некоторые инвариантные образы комплекса
прямых K_1 в A_4

В настоящей статье рассматриваются некоторые инвариантные линейчатые поверхности, проходящие через луч комплекса прямых K_1 в A_4 . Попутно указывается одна из возможных канонизаций репера T , присоединенного к комплексу K_1 .

Пусть репер T ($\vec{A}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$) в A_4 имеет вершину на прямой комплекса K_1 , причем вектор \vec{e}_4 направлен по данной прямой.

Допустимыми преобразованиями репера T_0 будут:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}' = \vec{A} + t\vec{e}_4 \\ \vec{e}_1' = a_1^1\vec{e}_1 + a_1^2\vec{e}_2 + a_1^3\vec{e}_3 + a_1^4\vec{e}_4 \\ \vec{e}_2' = a_2^1\vec{e}_1 + a_2^2\vec{e}_2 + a_2^3\vec{e}_3 + a_2^4\vec{e}_4 \\ \vec{e}_3' = a_3^1\vec{e}_1 + a_3^2\vec{e}_2 + a_3^3\vec{e}_3 + a_3^4\vec{e}_4 \\ \vec{e}_4' = a_4^4\vec{e}_4 \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\det |a_i^k| \neq 0, (i, k=1, 2, 3, 4)$

Мы исключим из рассмотрения случай, когда для компонент уравнений движения репера $T[2]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{A} = \omega^i \vec{e}_i \\ d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k \end{array} \right. \quad (i, k=1, 2, 3, 4)$$

при любом $i=1,2,3,4$ имеет место

$$[\omega^i \omega_4^1 \omega_4^2 \omega_4^3] = 0.$$

Теперь без ограничения общности можно выбрать формы $\omega^3, \omega_4^1, \omega_4^2, \omega_4^3$ за базисные и разложить оставшиеся главные формы [1] через базисные следующим образом:

$$\omega^\alpha = \lambda_\beta^\alpha \omega_4^\beta + \lambda_3^\alpha \omega_4^3 + \gamma_3^\alpha \omega^3 \quad (2)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2.$$

Чтобы выделить однопараметрическое семейство прямых - линейчатую поверхность, проходящую через луч комплекса, достаточно наложить на базисные формы три связи.

Пусть этими связями будут

$$\omega_4^1 = 0, \quad \omega_4^2 = 0, \quad \omega_4^3 = 0. \quad (3)$$

Система уравнений (3) инвариантна при допустимых преобразованиях репера T_0 [1], следовательно, определяет инвариантную линейчатую поверхность. Из системы (3) следует также, что поверхность будет цилиндрической.

Касательная плоскость Γ_2 цилиндрической поверхности, проходящей через луч комплекса, определяется в репере T_0 бивектором $[\gamma_3^\alpha \bar{e}_\alpha + \bar{e}_3, \bar{e}_4]$.

Рассматривая изменение коэффициентов системы (2) при преобразованиях репера T_0 , получим, что плоскость Γ_2 инвариантно связана с образующей комплекса:

$$\begin{aligned} & [\gamma_3^\alpha \bar{e}'_\alpha + \bar{e}'_3, \bar{e}'_4] = \\ & = \left[\frac{a_4^\alpha a_3^\alpha (A_3^\alpha + A_3^\alpha \gamma_3^\beta)}{1 - a_3^\alpha (A_3^\alpha \gamma_3^\alpha + A_3^\alpha)} (a_4^\alpha \bar{e}_\alpha + a_4^3 \bar{e}_3 + a_4^4 \bar{e}_4) + \right. \\ & \left. + a_3^\alpha \bar{e}_\alpha + a_3^3 \bar{e}_3 + a_3^4 \bar{e}_4 \rightarrow a_4^4 \bar{e}_4 \right] = \kappa_0 [\gamma_3^\alpha \bar{e}_\alpha + \bar{e}_3, \bar{e}_4], \end{aligned}$$

где a_i^k и A_i^k - компоненты соответственно прямой и обратной матриц преобразования (I).

Назовем двумерную плоскость Γ_2 главной 2-плоскостью комплекса K_1 . Главная 2-плоскость проходит через луч комплекса, поэтому можно рассмотреть линейчатые поверхности, для которых Γ_2 является первой соприкасающейся плоскостью [I].

Чтобы выделить среди прямых комплекса линейчатую поверхность с указанным свойством (K-поверхность), необходимо наложить на базисные формы следующие связи:

$$\omega_4^\alpha = \gamma_3^\alpha \omega_4^3, \quad \omega_4^3 = \kappa \omega_4^3 \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (4)$$

Для K-поверхности, заданной уравнениями (4), κ - абсцисса относительного центра [I],

$$(\lambda_3^\alpha + \lambda_\beta^\alpha \gamma_3^\beta) \vec{e}_\alpha - \text{вектор распределения [I];}$$

$$[(\lambda_3^\alpha + \lambda_\beta^\alpha \gamma_3^\beta) \vec{e}_\alpha, \gamma_3^\alpha \vec{e}_\alpha + \vec{e}_3, \vec{e}_4] - \text{ковектор распределения [I].}$$

Для того, чтобы выделить инвариантную K-поверхность, нужно инвариантным образом задать κ в уравнениях (4). Однако для любой K-поверхности ковектор распределения определяет одну и ту же, инвариантно связанную с образующей, трехмерную плоскость L:

$$\begin{aligned} & [(\tilde{\lambda}_3^\alpha + \tilde{\lambda}_\beta^\alpha \tilde{\gamma}_3^\beta) \vec{e}'_\alpha, \tilde{\gamma}_3^\alpha \vec{e}'_\alpha + \vec{e}'_3, \vec{e}'_4] = \\ & = l [(\lambda_3^\alpha + \lambda_\beta^\alpha \gamma_3^\beta) \vec{e}_\alpha, \gamma_3^\alpha \vec{e}_\alpha + \vec{e}_3, \vec{e}_4] \end{aligned}$$

Инвариантные плоскости Γ_2 и L можно использовать для канонизации репера T.

Продифференцируем внешним образом систему (2):

$$\begin{aligned}
 & [d\lambda_{\beta}^{\alpha} + \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} - \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\alpha} - \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} - \lambda_{\beta}^{\alpha} \gamma_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} - \\
 & - \omega_{\beta}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\alpha} + \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\alpha}, \omega_{\beta}^{\beta}] + [d\lambda_{\beta}^{\alpha} - \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} + \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\alpha} + \\
 & + \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} + \gamma_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\alpha} - \gamma_{\beta}^{\alpha} \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} + \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\alpha}, \omega_{\beta}^{\beta}] + \\
 & + [d\gamma_{\beta}^{\alpha} - \gamma_{\beta}^{\alpha} \gamma_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} - \gamma_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} + \gamma_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\alpha} + \omega_{\beta}^{\alpha}, \omega_{\beta}^{\beta}] = 0 \\
 & (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2).
 \end{aligned} \quad (5)$$

Положив вектор \vec{e}_3 в плоскость Γ_2 , мы тем самым накладываем на коэффициенты системы (2) условия

$$\gamma_3^{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2)$$

Внешние уравнения (5) примут вид

$$\begin{aligned}
 & [d\lambda_{\beta}^{\alpha} + \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} - \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\alpha} - \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} - \omega_{\beta}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\alpha} + \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\alpha}, \omega_{\beta}^{\beta}] + \\
 & + [d\lambda_{\beta}^{\alpha} - \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} + \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\alpha} + \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta} + \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\alpha}, \omega_{\beta}^{\beta}] + [\omega_{\beta}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\beta}] = 0.
 \end{aligned} \quad (5')$$

Отсюда по лемме Картана следует, что ω_3^{α} - главные формы:

$$\omega_3^{\alpha} = \lambda_{3\beta}^{\alpha} \omega_4^{\beta} + \lambda_{33}^{\alpha} \omega_4^3 + \gamma_{33}^{\alpha} \omega_3^3.$$

В репере T_1 вторая соприкасающаяся плоскость [I] К-поверхности, заданной уравнениями (4), определяется коковектором $[(\lambda_{33}^{\alpha} + \kappa \gamma_{33}^{\alpha}) \vec{e}_{\alpha}, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$, положение её зависит от выбора абсциссы относительного центра К-поверхности.

Трёхмерная же плоскость Γ_3 , определяемая в репере T_1 коковектором $[\gamma_{33}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$, инвариантно связана с образующей комплекса:

при допустимых преобразованиях репера T_1

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + t \vec{e}_4 \\ \vec{e}'_\alpha = a_\alpha^\beta \vec{e}_\beta + a_\alpha^3 \vec{e}_3 + a_\alpha^4 \vec{e}_4 \\ \vec{e}'_3 = a_3^3 \vec{e}_3 + a_3^4 \vec{e}_4 \\ \vec{e}'_4 = a_4^4 \vec{e}_4 \end{cases}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2).$$

Легко видеть, что, если вершина репера A описывает некоторую линию на цилиндрической поверхности, то Γ_3 совпадает с плоскостью $[d\vec{A}, d^2\vec{A}, \vec{e}_4]$.

В самом деле, в репере T_4 :

$$\begin{aligned} [d\vec{A}, d^2\vec{A}, \vec{e}_4] &= \\ &= [\omega^3 \vec{e}_3 + \omega^4 \vec{e}_4, d\omega^3 \vec{e}_3 + \gamma_{33}^3 \omega^3 \vec{e}_3 + \omega^3 \vec{e}_3 + \omega^3 \vec{e}_4 + \omega^4 \vec{e}_4 + d\omega^4 \vec{e}_4, \vec{e}_4] = \\ &= (\omega^3)^2 [\vec{e}_3, \gamma_{33}^3 \vec{e}_3, \vec{e}_4]. \end{aligned}$$

Продолжим канонизацию репера.

Поместим ось \vec{e}_1 репера T в инвариантную плоскость L , а \vec{e}_2 - в инвариантную плоскость Γ_3 , этим мы накладываем на систему (2) условия

$$\lambda_3^2 = 0 \text{ и } \gamma_{33}^3 = 0.$$

Из (5') получим:

$$\begin{aligned} & [d\lambda_1^2 - \lambda_1^2 \omega_1 + \lambda_1^2 \omega_4^4 - \lambda_2^2 \omega_1^2 + \lambda_1^2 \omega_2^2 + \lambda_1^1 \omega_1^2, \omega_4^4] + \\ & + [d\lambda_2^2 - \lambda_2^2 \omega_2^2 + \lambda_2^2 \omega_4^4 - \lambda_1^2 \omega_2^2 - \omega_4^4 + \lambda_2^2 \omega_2^2 + \lambda_2^1 \omega_1^2, \omega_4^4] + \\ & + [d\lambda_3^1 \omega_1^2 - \lambda_1^2 \omega_1^3 - \lambda_2^2 \omega_3^2, \omega_4^3] + [\omega_3^2, \omega_3^3] = 0. \end{aligned} \quad (5'')$$

По лемме Картана отсюда следует, что

$$\omega_1^2 = \lambda_{11}^2 \omega_4 + \lambda_{12}^2 \omega_4^2 + \lambda_{13}^2 \omega_4^3 + \frac{\lambda_1^2 \chi_{33}^2 + \lambda_{23}^2 \chi_{33}^2 + \lambda_{33}^2}{\lambda_3^2} \omega_3^3.$$

$$\omega_3' = \lambda_{31}' \omega_4 + \lambda_{32}' \omega_4^2 + \lambda_{33}' \omega_4^3.$$

$$\begin{aligned} & [d\lambda_{31}' + \lambda_{31}' \omega_4 - \lambda_{32}' \omega_1^2 - \lambda_{33}' \omega_1^3 + \lambda_{31}^2 \omega_2' + \lambda_{31}' \omega_3 - \omega_3^4, \omega_4'] + \\ & + [d\lambda_{32}' - \lambda_{32}' \omega_2^2 + \lambda_{32}' \omega_4^4 - \lambda_{33}' \omega_2^3 - \lambda_{31}' \omega_2' + \lambda_{31}' \omega_2' + \lambda_{32}' \omega_1' + \\ & + \lambda_{32}^2 \omega_2' + \lambda_{32}' \omega_3^3, \omega_4^2] + [d\lambda_{33}' - \lambda_{33}' \omega_3^3 + \lambda_{33}' \omega_4^4 - \lambda_{31}' \omega_3 - \\ & - \lambda_{32}' \omega_3^2 + \lambda_{33}' \omega_1' + \lambda_{33}^2 \omega_2' - \lambda_{33}' \omega_3^3, \omega_4^3] + [\omega_2' \chi_{33}^2, \omega_3^3] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\omega_2' = \lambda_{23}' \omega_4^4 + \lambda_{23}^2 \omega_4^3 + \chi_{33}' \omega_3^3.$$

В репере T_2 (вершина репера на прямой комплекса, \vec{e}_4 направлен по прямой комплекса, $\vec{e}_2 \in L$, $\vec{e}_3 \in \Gamma_3$) бивектор

$[\lambda_3' \vec{e}_2 - \lambda_2' \vec{e}_3, \vec{e}_4]$ определяет инвариантную двумерную плоскость, проходящую через прямую комплекса.

При допустимых изменениях репера T_2

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + t \vec{e}_4 \\ \vec{e}_1' = a_1' \vec{e}_1 + a_1^3 \vec{e}_3 + a_1^4 \vec{e}_4 \\ \vec{e}_2' = a_2^2 \vec{e}_2 + a_2^3 \vec{e}_3 + a_2^4 \vec{e}_4 \\ \vec{e}_3' = a_3^3 \vec{e}_3 + a_3^4 \vec{e}_4 \\ \vec{e}_4' = a_4^4 \vec{e}_4 \end{cases} \quad (6).$$

коэффициенты разложения главных форм по базисным

$$\left\{ \begin{aligned} \omega^1 &= \lambda_1^1 \omega_4^1 + \lambda_2^1 \omega_4^2 + \lambda_3^1 \omega_4^3, \\ \omega^2 &= \lambda_1^2 \omega_4^1 + \lambda_2^2 \omega_4^2, \\ \omega_3^1 &= \lambda_{31}^1 \omega_4^1 + \lambda_{32}^1 \omega_4^2 + \lambda_{33}^1 \omega_4^3, \\ \omega_3^2 &= \lambda_{31}^2 \omega_4^1 + \lambda_{32}^2 \omega_4^2 + \lambda_{33}^2 \omega_4^3 + \gamma_{33}^2 \omega^3, \\ \omega_1^2 &= \lambda_{11}^2 \omega_4^1 + \lambda_{12}^2 \omega_4^2 + \lambda_{13}^2 \omega_4^3 + \frac{\lambda_2^2 \gamma_{31}^2 + \lambda_{33}^2}{\lambda_3^1} \omega^3, \\ \omega_2^2 &= \lambda_{21}^2 \omega_4^1 + \lambda_{22}^2 \omega_4^2 + \lambda_{23}^2 \omega_4^3 + \gamma_{23}^2 \omega^3 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

будут меняться следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1^1 &= (\lambda_1^1 + A_1 a_3^3 \lambda_3^1 + t) a_4^1; & \tilde{\lambda}_2^1 &= A_1 a_4^1 (a_2^2 \lambda_2^1 + A_1 a_2^3 \lambda_3^1); \\ \tilde{\lambda}_2^2 &= (\lambda_2^2 + t) a_4^2; & \tilde{\lambda}_1^2 &= a_4^2 A_2 a_1^1 \lambda_1^2; & \tilde{\lambda}_3^2 &= A_1 a_3^3 a_4^1 \lambda_3^2; \\ \tilde{\lambda}_{31}^1 &= a_4^1 a_3^3 A_1 (a_1^1 \lambda_{31}^1 + a_3^3 \lambda_{33}^1) + a_4^1; & \tilde{\lambda}_{32}^1 &= a_3^3 a_4^1 A_1 (a_2^2 \lambda_{32}^1 + \\ & + a_2^3 \lambda_{33}^1); & \tilde{\lambda}_{31}^2 &= a_3^3 a_4^2 A_2 (a_1^1 \lambda_{31}^2 + a_1^3 \lambda_{33}^2 + a_1^3 \gamma_{33}^2 \tilde{\lambda}_1^1 + \\ & + a_2^3 \gamma_{33}^2 \tilde{\lambda}_1^2); & \tilde{\lambda}_{32}^2 &= a_3^3 a_4^2 A_2 (a_2^2 \lambda_{32}^2 + a_2^3 \lambda_{33}^2 + a_1^3 \tilde{\lambda}_1^2 \gamma_{33}^2 + \\ & + a_2^3 \gamma_{33}^2 \tilde{\lambda}_1^2) + a_4^2; & \tilde{\lambda}_{33}^1 &= (a_3^3)^2 A_1 a_4^1 \lambda_{33}^1; & \tilde{\lambda}_{33}^2 &= \\ & = a_4^2 a_3^3 A_2 (a_3^3 \lambda_{33}^2 + a_1^3 \gamma_{33}^2 \tilde{\lambda}_1^2) - t \gamma_{33}^2; & \tilde{\gamma}_{33}^2 &= (a_3^3)^2 A_2 \gamma_{33}^2; \quad (8) \\ \tilde{\gamma}_{23}^1 &= A_1 a_2^2 a_3^3 \gamma_{23}^1; & \tilde{\lambda}_{22}^1 &= a_4^1 \{ A_1 [a_2^2 (a_2^3 \lambda_{22}^1 + a_2^3 \lambda_{32}^1) + \\ & + a_2^3 (a_2^2 \lambda_{23}^1 + a_2^3 \lambda_{33}^1)] + a_2^2 \gamma_{23}^1 a_1^3 \tilde{\lambda}_1^1 + a_2^3 \tilde{\lambda}_2^2 \} + a_4^1; \\ \tilde{\lambda}_{11}^2 &= a_4^2 A_2 [a_1^1 (a_1^1 \lambda_{11}^2 + a_1^3 \lambda_{21}^1) + a_3^3 (a_1^1 \lambda_{13}^2 + a_1^3 \lambda_{23}^1) - a_1^3 (\lambda_1^1 + \\ & + A_1 a_3^3 \lambda_3^1) / a_3^3 \gamma_{23}^1 + a_1^1 \frac{\lambda_{35}^2 + \lambda_2^2 \gamma_{33}^2}{\lambda_3^1} + a_2^3 A_2 a_1^1 \lambda_1^2 (a_3^3 \gamma_{23}^1 + a_1^1 \frac{\lambda_{33}^2 + \lambda_2^2 \gamma_{33}^2}{\lambda_3^1})] + a_4^2. \end{aligned}$$

Из формул (8) легко видеть, что не только плоскость M , определяемая бивектором $[\lambda_3^1 \vec{e}_2 - \lambda_2^1 \vec{e}_3, \vec{e}_4]$, будет инвариантной,

но также инвариантной будет двумерная плоскость N :

$[\lambda_3^2 \vec{e}_1 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \vec{e}_3, \vec{e}_4]$, проходящая через прямую комплекса.

Рассмотрим, какими свойствами обладают линейчатые поверхности, первыми соприкасающимися плоскостями которых являются M и N

$-\lambda_2^2$ и $-\lambda_1'$ суть абсциссы относительных центров [1] линейчатых поверхностей, проходящих через прямую комплекса, чьи первые соприкасающиеся плоскости [I] соответственно $[\vec{e}_2, \vec{e}_4]$ и $[\vec{e}_1, \vec{e}_4]$.

Из формул (8) видно, что λ_2^2 зависит лишь от переноса вершины репера вдоль прямой комплекса и нормировки \vec{e}_4 .
Уравнение

$$\tilde{\lambda}_2^2 = 0 \quad (9)$$

инвариантно в репере T_2 , следовательно, определяет инвариантную точку на прямой комплекса.

Из сказанного очевидно, что:

Линейчатые поверхности, проходящие через луч комплекса и имеющие в Γ_3 свою первую соприкасающуюся плоскость (не совпадающую с Γ_2), обладают следующим свойством: их относительные центры совпадают с фокусом прямой комплекса.

Двумерная плоскость $M \subset \Gamma_3$, $M \neq \Gamma_2$, следовательно, у линейчатых поверхностей, чьи первые соприкасающиеся плоскости совпадают с M , относительные центры совпадают с фокусом прямой комплекса.

Если поместить \vec{e}_2 в M , то $\tilde{\lambda}_2^2 = 0$, но тогда вектор распределения [I] линейчатой поверхности с первой соприкасающейся плоскостью M принадлежит Γ_2 . Назовем линейчатые поверхности с таким свойством (вектор распределения принадлежит Γ_2) квазиторсами.

Значит, M - первая соприкасающаяся плоскость квазиторсов.

Рассмотрим теперь поверхности, первой соприкасающейся плоскостью которых является N . Если поместить \vec{e}_1 в N , то $\tilde{\lambda}_2^2 - \tilde{\lambda}_1' = 0$; с другой стороны, N теперь будет координатной плоскостью $[\vec{e}_1, \vec{e}_4]$, значит, $-\tilde{\lambda}_1'$ - абсцисса относительного центра рассматриваемых поверхностей. Отсюда получаем: относительные центры линейчатых поверхностей, пер-

вой соприкасающейся плоскостью которых является M , совпадают с фокусом прямой комплекса.

Если в уравнениях (4) задать $\kappa = \lambda_2^2$ (репер τ_2 : $\vec{e}_3 \in \Gamma_2$, $\vec{e}_4 \in L$, $\vec{e}_2 \in \Gamma_3$), то K -поверхность, определяемая этими уравнениями, будет инвариантной. Ее относительный центр совпадает с фокусом, как было показано выше, второй соприкасающейся плоскостью для данной K -поверхности является плоскость $S = [\lambda_{33} \vec{e}_1 + (\lambda_{33}^2 + \lambda_2^2 \chi_{33}^2) \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$,

которая, в свою очередь, будет инвариантной.

Если поместить Θ_1 в S , то точка на прямой комплекса, абсцисса которой в репере τ_2 удовлетворяет уравнению

$$t = \frac{\lambda_{33}^2 - \lambda_2^2 \chi_{33}^2}{2 \chi_{33}^2} \quad (10)$$

(инвариантность точки следует из (8)), будет иметь абсциссу

$$t = - \frac{\tilde{\lambda}_1^2 + \tilde{\lambda}_2^2}{2}.$$

Но $-\lambda_1^2$ теперь абсцисса относительного центра любой линейчатой поверхности, проходящей через луч комплекса, чья I -ая соприкасающаяся плоскость совпадает с S . Следовательно, точка с абсциссой (10), которую будем называть центром прямой комплекса, имеет абсциссу, равную среднему арифметическому абсциссы фокуса и абсциссы относительного центра линейчатой поверхности с первой соприкасающейся плоскостью S .

Естественно, отсюда следует, что K -поверхности, относительные центры которых совпадают либо с центром прямой комплекса, либо с относительным центром линейчатых поверхностей, чьи первые соприкасающиеся плоскости совпадают с S , будут инвариантны. Соответственно, эти поверхности индуцируют 3-мерные инвариантные вторые соприкасающиеся плоскости.

Все эти инвариантные образы комплекса можно использовать для канонизации репера:

поместим \vec{e}_2 в M , тогда $\tilde{\lambda}_2 = 0$,
 — \vec{e}_1 в S , тогда $\tilde{\lambda}_{33}^2 + \tilde{\lambda}_2^2 \chi_{33}^2 = 0$,

вершину репера - в фокус прямой комплекса, тогда $\tilde{\lambda}_2^2 = 0$.

Учитывая эти условия, из (5'), (5'') и внешних производных уравнения

$$\omega_3^2 = \lambda_{31}^2 \omega_4^1 + \lambda_{32}^2 \omega_4^2 + \gamma_{33}^2 \omega_4^3,$$

по лемме Картана получим:

$$\omega_2^3 = \lambda_{21}^3 \omega_4^1 + \lambda_{22}^3 \omega_4^2 + \lambda_{23}^3 \omega_4^3 - \frac{\lambda_{12}^3 \gamma_{23}^1 + \lambda_{32}^1 \omega_4^3}{\lambda_3^1};$$

$$\omega_4^1 = \tau_1 \omega_4^1 + \tau_2 \omega_4^2 + (\lambda_{32}^1 - \lambda_3^1 \lambda_{31}^2 - \lambda_1^2 \lambda_{23}^1) \omega_4^3 - \lambda_1^2 \gamma_{23}^1 \omega_4^3;$$

$$\omega_1^3 = \lambda_{11}^3 \omega_4^1 + \lambda_{12}^3 \omega_4^2 + \lambda_{13}^3 \omega_4^3 + \gamma_{13}^3 \omega_4^3.$$

Свободным при этом останется положение \vec{e}_1 в S , \vec{e}_2 в M , \vec{e}_3 в Γ_2 , не произведена и нормировка $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$.

Легко видеть, что при оставшихся допустимых преобразованиях репера T :

$$\vec{A}' = \vec{A}, \quad \vec{e}_1' = a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^4 \vec{e}_4, \quad \vec{e}_2' = a_2^2 \vec{e}_2 + a_2^4 \vec{e}_4;$$

$$\vec{e}_3' = a_3^3 \vec{e}_3 + a_3^4 \vec{e}_4, \quad \vec{e}_4' = a_4^4 \vec{e}_4$$

уравнения $\omega_3^3 = 0, \omega_4^4 = 0, \omega_4^3 = 0$ выделяют инвариантную линейчатую поверхность,

Это торовая поверхность, относительный центр ее совпадает с фокусом прямой комплекса. Прежде чем продолжить канонизацию репера, введем понятие вектора вынужденной кривизны.

Пусть с лучом \vec{L} линейчатой поверхности инвариантным образом связан некоторый вектор \vec{Y} . Разобьем $d\vec{Y}$ на две составляющие, одна из которых находится в двумерной плоскости $[\vec{L}, \vec{Y}]$. Вторую составляющую назовем вектором \vec{Y} - вынужденной кривизны.

Из формул (8) следует, что в S имеется инвариантное направление $\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \lambda_{12}^2 \vec{e}_2$, в M - инвариантное направление

$$\vec{a}_2 = \vec{e}_2 - \lambda'_{21} \vec{e}_1, \quad \text{в } \Gamma_2 \rightarrow \vec{e}_3 - \lambda'_{31} \vec{e}_1 = \vec{a}_3.$$

Вектор \vec{a}_3 - вынужденной кривизны для всех линейчатых поверхностей с первой соприкасающейся плоскостью S принадлежит Γ_3 ;

Для всех квазиторсов вектор \vec{a}_L - вынужденной кривизны принадлежит L .

Доказательство этого факта становится очевидным, если направить оси репера соответственно по \vec{a}_1 , \vec{a}_2 и \vec{a}_3 .

Теперь осталось только нормировать $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$. Для этого достаточно положить

$$\overline{\lambda}_3^1 = 1; \quad \overline{\lambda}_1^2 = 1, \quad \overline{\lambda}_1^3 = 1; \quad \overline{\gamma}_{33}^4 = 1.$$

Уравнения движения канонического репера примут вид:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= (\omega_1^4 + \omega_4^3) \vec{e}_1 + \omega_4^2 \vec{e}_2 + \omega_4^3 \vec{e}_3 + (\tau_1 \omega_1^4 + \tau_2 \omega_4^2 - \lambda_{12}^2 \omega_4^3) \vec{e}_4; \\ d\vec{e}_1 &= [(a+b-2c-3\lambda_{41}^4) \omega_4^1 + (\lambda_{22}^2 - \tau_1 - 2\lambda_{23}^3 + d - 3\tau_2 + 3\lambda_{22}^2 - 3\lambda_{12}^3 + 3\lambda_{21}^3) \omega_4^2 + \\ &+ (\lambda_{13}^3 - 2\lambda_{11}^2 + 2f - \lambda_{33}^3 \gamma_{13}^3 - \lambda_{31}^2 \lambda_{32}^2 + 2\lambda_{32}^2 - \gamma_{13}^3 - 3c - 3\lambda_{13}^3 + 3\lambda_{12}^2 + 3\lambda_{32}^2) \omega_4^3 + \\ &+ (2\lambda_{32}^2 - \lambda_{31}^2 - l - 3\gamma_{13}^3) \omega^3] \vec{e}_1 + (\lambda_{11}^2 \omega_4^1 + \lambda_{13}^2 \omega_4^3) \vec{e}_2 + (\lambda_{11}^3 \omega_4^1 + \lambda_{12}^3 \omega_4^2 + \\ &+ \lambda_{13}^3 \omega_4^3 + \gamma_{13}^3 \omega^3) \vec{e}_3 + [\lambda_{11}^4 \omega_4^1 + \lambda_{12}^4 \omega_4^2 + \lambda_{13}^4 \omega_4^3 + \omega^3 (\lambda_{12}^2 - \gamma_{13}^3 \lambda_{32}^2 - \\ &+ \lambda_{11}^2 \lambda_{32}^2 + \lambda_{13}^2 (\lambda_{32}^2 - \lambda_{32}^2))] \vec{e}_4; \\ d\vec{e}_2 &= (\lambda_{22}^1 \omega_4^2 + \lambda_{32}^1 \omega_4^3 - \lambda_{32}^2 \omega^3) \vec{e}_1 + [(2a+2c-b-4\lambda_{41}^4) \omega_4^1 + (2\lambda_{22}^2 - \\ &- 2\tau_1 - 2\lambda_{23}^3 + d - 4\tau_2 + 4\lambda_{22}^2 - 4\lambda_{12}^3 + 4\lambda_{21}^3) \omega_4^2 + (2\lambda_{13}^3 - 2\lambda_{11}^2 + 2f - \\ &- \lambda_{33}^3 \gamma_{13}^3 + \lambda_{32}^2 (2 - \lambda_{31}^2) - \gamma_{13}^3 - 4c - 4\lambda_{13}^3 + 4\lambda_{12}^2 + 4\lambda_{32}^2) \omega_4^3 + (2\lambda_{32}^2 - \\ &- 2\lambda_{31}^2 - l - 4\gamma_{13}^3) \omega^3] \vec{e}_2 + [\lambda_{21}^3 \omega_4^1 + \lambda_{22}^3 \omega_4^2 + \lambda_{23}^3 \omega_4^3 + (\lambda_{32}^2 - \lambda_{32}^1) \omega^3] \vec{e}_3 + \\ &+ (\lambda_{21}^4 \omega_4^1 + \lambda_{22}^4 \omega_4^2 + \lambda_{23}^4 \omega_4^3 + \gamma_{23}^4 \omega^3) \vec{e}_4; \\ d\vec{e}_3 &= (\lambda_{31}^1 \omega_4^1 + \lambda_{32}^1 \omega_4^2 + \lambda_{33}^1 \omega_4^3) \vec{e}_1 + (\lambda_{31}^2 \omega_4^1 + \lambda_{32}^2 \omega_4^2 + \omega^3) \vec{e}_2 + \\ &+ [(a+c-b-2\lambda_{41}^4) \omega_4^1 + (\lambda_{22}^2 - \tau_1 - \lambda_{23}^3 + d - 2\tau_2 + 2\lambda_{22}^2 - 2\lambda_{12}^3 + \\ &+ 2\lambda_{21}^3) \omega_4^2 + (\lambda_{13}^3 - \lambda_{11}^2 + f - \lambda_{33}^3 \gamma_{13}^3 - \lambda_{31}^2 \lambda_{32}^2 + 2\lambda_{32}^2 - 2c - 2\lambda_{13}^3 + \\ &+ 2\lambda_{12}^2 + 2\lambda_{32}^2) \omega_4^3 + (\lambda_{32}^2 - \lambda_{31}^2 - l - 2\gamma_{13}^3) \omega^3] \vec{e}_3 + (\lambda_{21}^4 \omega_4^1 + \lambda_{22}^4 \omega_4^2 + \\ &+ \lambda_{23}^4 \omega_4^3 + \gamma_{23}^4 \omega^3) \vec{e}_4; \\ d\vec{e}_4 &= \omega_4^1 \vec{e}_1 + \omega_4^2 \vec{e}_2 + \omega_4^3 \vec{e}_3 + [\lambda_{41}^4 \omega_4^1 + (\tau_2 - \lambda_{22}^2 - \lambda_{12}^3 - \lambda_{21}^3) \omega_4^2 + \\ &+ (c + \lambda_{13}^3 - \lambda_{13}^2 - \lambda_{32}^2) \omega_4^3 + \gamma_{13}^3 \omega^3] \vec{e}_4. \end{aligned}$$

Репер канонизирован с использованием инвариантных образов линейчатых поверхностей комплекса; так вершина репера находится в фокусе прямой комплекса, \vec{e}_1 есть вектор распределения K -поверхности с относительным центром в фокусе прямой комплекса; \vec{e}_2 равен удвоенному вектору, соединяющему фокус и центр прямой комплекса.

Л и т е р а т у р а

1. Березина Л.А. Классическая дифференциальная геометрия. II. Рига, 1971. (Изд. Латв. ун-та.)
2. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.-Л., 1948.

Некоторые канонизации реперакомплекса прямых K_1 в $R_n^{2m_2 \dots m_s}$

В \mathcal{L} комплекс прямых K_1 рассматривался в $R_n^{2m_2 \dots m_s}$ при помощи репера нулевого порядка T_0 , присоединенного к прямой комплекса K_1 следующим образом:

\vec{e}_n коллинеарен прямой комплекса;

вершина репера A находится на прямой комплекса.

Уравнения движения репера T_0 в $R_n^{m_1, m_2, \dots, m_s}$ имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\bar{A} = \omega^{P_1} \vec{e}_{P_1} + \omega^{P_2} \vec{e}_{P_2} + \dots + \omega^{P_s} \vec{e}_{P_s} + \omega^{n-1} \vec{e}_{n-1} + \omega^n \vec{e}_n \\ d\vec{e}_{P_1} = \omega_{P_1}^{R_1} \vec{e}_{R_1} \\ d\vec{e}_{P_2} = \omega_{P_2}^{R_1} \vec{e}_{R_1} + \omega_{P_2}^{R_2} \vec{e}_{R_2} \\ \dots \\ d\vec{e}_{P_s} = \omega_{P_s}^{R_1} \vec{e}_{R_1} + \omega_{P_s}^{R_2} \vec{e}_{R_2} + \dots + \omega_{P_s}^{R_s} \vec{e}_{R_s} \\ d\vec{e}_{n-1} = \omega_{n-1}^{R_1} \vec{e}_{R_1} + \omega_{n-1}^{R_2} \vec{e}_{R_2} + \dots + \omega_{n-1}^{R_s} \vec{e}_{R_s} + \omega_{n-1}^n \vec{e}_n \\ d\vec{e}_n = \omega_n^{R_1} \vec{e}_{R_1} + \omega_n^{R_2} \vec{e}_{R_2} + \dots + \omega_n^{R_s} \vec{e}_{R_s} + \omega_n^{n-1} \vec{e}_{n-1} \end{array} \right.$$

где

$$P_2, R_1 = 1, 2, \dots, n-m_s; \quad P_2, R_p = n-m_s+1, n-m_s+2, \dots, n-m_s-1; \dots;$$

$$P_s, R_s = n-m_2+1, n-m_2+2, \dots, n-2$$

и для любого $i = 1, 2, \dots, s$

$$\omega_{P_i}^{R_i} + \omega_{R_i}^{P_i} = 0,$$

наконец,

$$\omega_n^{n-1} + \omega_{n-1}^n = 0.$$

Было показано, что с прямой комплекса K_1 инвариантным образом связаны:

вектор главной нормали комплекса (в репере T_0 , где

$$\begin{cases} \omega^1 = \lambda_1^1 \omega_n^1 + \lambda_2^1 \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-2}^1 \omega_n^{n-2} + \lambda_{n-1}^1 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1}^1 \omega_n^{n-1} \\ \omega^2 = \lambda_1^2 \omega_n^1 + \lambda_2^2 \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-2}^2 \omega_n^{n-2} + \lambda_{n-1}^2 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1}^2 \omega_n^{n-1} \\ \dots \\ \omega^{n-2} = \lambda_1^{n-2} \omega_n^1 + \lambda_2^{n-2} \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-2}^{n-2} \omega_n^{n-2} + \lambda_{n-1}^{n-2} \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1}^{n-2} \omega_n^{n-1} \end{cases} \quad (I)$$

расположение главных форм по базисным, этот вектор может быть записан в виде:

$$\gamma_{n-1}^1 \bar{e}_1 + \gamma_{n-1}^2 \bar{e}_2 + \dots + \gamma_{n-1}^{n-2} \bar{e}_{n-2} + \bar{e}_{n-1};$$

вектор распределения, общий для всех K -поверхностей комплекса (в репере T_0 это вектор

$$\bar{e}_1 = (\lambda_{n-1}^\alpha + \lambda_\beta^\alpha \gamma_{n-1}^\beta) \bar{e}_\alpha, \quad \text{где } \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-2);$$

центральные нормали торсовых линейчатых поверхностей, проходящих через луч комплекса K_1 (в репере T_0 они коллинеарны собственным направлениям аффинора λ_β^α ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-2$)). Все эти направления, естественно, могут быть использованы для канонизации репера.

В качестве примера рассмотрим одну из возможных канонизаций, построив при помощи \bar{e}_1 и аффинора λ_β^α ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-2$) цепь $(n-2)$ -х попарно ортогональных векторов. При этом мы предполагаем, что порядок вектора \bar{e}_1 есть S , то есть мы пока исключаем из рассмотрения случаи, когда скалярный инвариант комплекса

$$\sum_{\beta} (\lambda_{n-1}^\beta + \lambda_\beta^\beta \gamma_{n-1}^\beta)^2 = 0.$$

Пусть \bar{e}_{n-1} направлен по главной нормали комплекса тогда:

$$\begin{cases} \gamma_{n-1}^1 = 0 \\ \gamma_{n-1}^2 = 0 \\ \dots \\ \gamma_{n-1}^{n-2} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Продифференцируем уравнения (1) внешним образом с учетом условия (2):

$$\begin{cases} (d\lambda_\beta^1 - \delta_\beta^1 \omega^n - \lambda_\alpha^1 \omega_\beta^\alpha + \lambda_\beta^\alpha \omega_\alpha^1) \wedge \omega_n^\beta + \\ + (d\lambda_{n-1}^1 - \lambda_\beta^1 \omega_{n-1}^\beta + \lambda_{n-1}^\alpha \omega_\alpha^1) \wedge \omega_n^{n-1} + \omega_{n-1}^1 \wedge \omega_n^{n-1} = 0; \\ (d\lambda_\beta^2 - \delta_\beta^2 \omega^n - \lambda_\alpha^2 \omega_\beta^\alpha + \lambda_\beta^\alpha \omega_\alpha^2) \wedge \omega_n^\beta + \\ + (d\lambda_{n-1}^2 - \lambda_\beta^2 \omega_{n-1}^\beta + \lambda_{n-1}^\alpha \omega_\alpha^2) \wedge \omega_n^{n-1} + \omega_{n-1}^2 \wedge \omega_n^{n-1} = 0; \\ \dots \\ (d\lambda_\beta^{n-2} - \delta_\beta^{n-2} \omega^n - \lambda_\alpha^{n-2} \omega_\beta^\alpha + \lambda_\beta^\alpha \omega_\alpha^{n-2}) \wedge \omega_n^\beta + \\ + (d\lambda_{n-1}^{n-2} - \lambda_\beta^{n-2} \omega_{n-1}^\beta + \lambda_{n-1}^\alpha \omega_\alpha^{n-2}) \wedge \omega_n^{n-1} + \omega_{n-1}^{n-2} \wedge \omega_n^{n-1} = 0; \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-2$$

Отсюда, по лемме Картана, получаем:

$$\begin{cases} \omega_{n-1}^1 = \lambda_{n-1,1}^1 \omega_n^1 + \lambda_{n-1,2}^1 \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-1,n-1}^1 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1,n-1}^1 \omega_n^{n-1} \\ \omega_{n-1}^2 = \lambda_{n-1,1}^2 \omega_n^1 + \lambda_{n-1,2}^2 \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-1,n-1}^2 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1,n-1}^2 \omega_n^{n-1} \\ \dots \\ \omega_{n-1}^{n-2} = \lambda_{n-1,1}^{n-2} \omega_n^1 + \lambda_{n-1,2}^{n-2} \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-1,n-1}^{n-2} \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1,n-1}^{n-2} \omega_n^{n-1} \end{cases}$$

и, следовательно, разложение главных форм по базисным в репере \bar{T}_1 (\bar{e}_n -по-прямой комплекса, \bar{e}_{n-1} - по главной нормали комплекса, вершина репера на прямой комплекса) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^1 = \lambda_1^1 \omega_n^1 + \lambda_2^1 \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-1}^1 \omega_n^{n-1} \\ \omega^2 = \lambda_1^2 \omega_n^1 + \lambda_2^2 \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-1}^2 \omega_n^{n-1} \\ \dots \\ \omega^{n-2} = \lambda_1^{n-2} \omega_n^1 + \lambda_2^{n-2} \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-1}^{n-2} \omega_n^{n-1} \\ \omega_{n-1}^1 = \lambda_{n-1-1}^1 \omega_n^1 + \lambda_{n-1-2}^1 \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-1-n-1}^1 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1-n-1}^1 \omega_n^{n-1} \\ \omega_{n-1}^2 = \lambda_{n-1-1}^2 \omega_n^1 + \lambda_{n-1-2}^2 \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-1-n-1}^2 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1-n-1}^2 \omega_n^{n-1} \quad (4) \\ \dots \\ \omega_{n-1}^{n-2} = \lambda_{n-1-1}^{n-2} \omega_n^1 + \lambda_{n-1-2}^{n-2} \omega_n^2 + \dots + \lambda_{n-1-n-1}^{n-2} \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1-n-1}^{n-2} \omega_n^{n-1} \end{array} \right.$$

Так как вектор \bar{e}_1 , по нашему предположению, имеет порядок S , то можно направить \bar{e}_{n-2} по \bar{e}_1 , при этом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{n-1}^1 = 0 \\ \lambda_{n-1}^2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_{n-1}^{n-3} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

Теперь формы

$$\lambda_{n-1}^{n-2} \omega_{n-2}^1 - \lambda_{\beta}^1 \omega_{n-1}^1, \quad \lambda_{n-1}^{n-2} \omega_{n-2}^2 - \lambda_{\beta}^2 \omega_{n-1}^2, \dots,$$

$$\lambda_{n-1}^{n-2} \omega_{n-2}^{n-3} - \lambda_{\beta}^{n-3} \omega_{n-1}^{n-3}, \quad (\beta = 1, 2, \dots, n-2),$$

а следовательно, и формы

$$\omega_{n-2}^1, \quad \omega_{n-2}^2, \quad \dots, \quad \omega_{n-2}^{n-3}$$

будут главными (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{n-2}^1 = \lambda_{n-2\beta}^1 \omega_n^\beta + \lambda_{n-2n-1}^1 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-2n-1}^1 \omega^{n-1} \\ \omega_{n-2}^2 = \lambda_{n-2\beta}^2 \omega_n^\beta + \lambda_{n-2n-1}^2 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-2n-1}^2 \omega^{n-1} \\ \dots \\ \omega_{n-2}^{n-3} = \lambda_{n-2\beta}^{n-3} \omega_n^\beta + \lambda_{n-2n-1}^{n-3} \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-2n-1}^{n-3} \omega^{n-1} \end{array} \right.$$

$$(\beta = 1, 2, \dots, n-2);$$

причем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{n-1n-1}^1 = \lambda_{n-1}^{n-2} \gamma_{n-2n-1}^1 - \lambda_{\beta}^1 \gamma_{n-1n-1}^\beta \\ \lambda_{n-1n-1}^2 = \lambda_{n-1}^{n-2} \gamma_{n-2n-1}^2 - \lambda_{\beta}^2 \gamma_{n-1n-1}^\beta \\ \dots \\ \lambda_{n-1n-1}^{n-3} = \lambda_{n-1}^{n-2} \gamma_{n-2n-1}^{n-3} - \lambda_{\beta}^{n-3} \gamma_{n-1n-1}^\beta \end{array} \right. \quad (6)$$

У прямой квазиторса $\theta_s \{K_1, \bar{l}_1\}$ - линейчатой поверхности, проходящей через луч комплекса K_1 и имеющей центральную нормаль, коллинеарную \bar{l}_1 - существует инвариантный вектор распределения \bar{l}_{20} , ортогональный центральной нормали поверхности, то есть ортогональный \bar{l}_1 . В репере T_2 (\bar{e}_{n-2} направлен по вектору распределения K-поверхности комплекса)

$$\bar{l}_{20} = \lambda_{n-2}^1 \bar{e}_1 + \lambda_{n-2}^2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_{n-2}^{n-3} \bar{e}_{n-3}.$$

Направим вектор \bar{e}_{n-3} по \bar{l}_{20} , тогда

$$\begin{cases} \lambda_{n-2}^1 = 0 \\ \lambda_{n-2}^2 = 0 \\ \dots \\ \lambda_{n-2}^{n-2} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Дифференциальные формы из внешних уравнений (3)

$$d\lambda_{n-2}^1 - \lambda_{\beta}^1 \omega_{n-2}^{\beta} + \lambda_{n-2}^{\beta} \omega_{\beta}^1, \quad d\lambda_{n-2}^2 - \lambda_{\beta}^2 \omega_{n-2}^{\beta} + \lambda_{n-2}^{\beta} \omega_{\beta}^2 + \lambda_{n-2}^{\beta} \omega_{\beta}^2, \dots, d\lambda_{n-2}^{n-2} - \lambda_{\beta}^{n-2} \omega_{n-2}^{\beta} + \lambda_{n-2}^{\beta} \omega_{\beta}^{n-2}$$

($\beta = 1, 2, \dots, n-2$)

теперь

(7) примут вид

$$\lambda_{n-2}^{n-3} \omega_{n-3}^1 - \lambda_{\beta}^1 \omega_{n-2}^{\beta}; \quad \lambda_{n-2}^{n-3} \omega_{n-3}^2 - \lambda_{\beta}^2 \omega_{n-2}^{\beta};$$

$$\dots; \quad \lambda_{n-2}^{n-3} \omega_{n-3}^{n-4} - \lambda_{\beta}^{n-4} \omega_{n-2}^{\beta}.$$

Следовательно, в репере T_3 (\vec{e}_n - по прямой комплекса, \vec{e}_{n-1} - по главной нормали комплекса, \vec{e}_{n-2} - по вектору распределения K-поверхностей комплекса \vec{t}_1 , \vec{e}_{n-3} - по вектору распределения квази-горса $\Theta\{K_1, \vec{t}_1\}$, формы $\omega_{n-3}^1, \omega_{n-3}^2, \dots, \omega_{n-3}^{n-4}$ будут главными. Их разложение по базисным формам можно представить в виде

$$\begin{cases} \omega_{n-3}^1 = \lambda_{n-3\beta}^1 \omega_n^{\beta} + \lambda_{n-3n-1}^1 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-3n-1}^1 \omega^{n-1} \\ \omega_{n-3}^2 = \lambda_{n-3\beta}^2 \omega_n^{\beta} + \lambda_{n-3n-1}^2 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-3n-1}^2 \omega^{n-1} \\ \dots \\ \omega_{n-3}^{n-4} = \lambda_{n-3\beta}^{n-4} \omega_n^{\beta} + \lambda_{n-3n-1}^{n-4} \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-3n-1}^{n-4} \omega^{n-1} \end{cases}$$

$$\beta = 1, 2, \dots, n-2.$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{n-1, n-1}^1 &= \lambda_{n-2}^{n-3} \gamma_{n-3, n-1}^1 - \lambda_1^1 \gamma_{n-2, n-1}^1 - \lambda_2^1 \gamma_{n-2, n-1}^2 - \dots - \lambda_{n-3}^1 \gamma_{n-2, n-1}^{n-3} \\ \lambda_{n-1, n-1}^2 &= \lambda_{n-2}^{n-3} \gamma_{n-3, n-1}^2 - \lambda_1^2 \gamma_{n-2, n-1}^1 - \lambda_2^2 \gamma_{n-2, n-1}^2 - \dots - \lambda_{n-3}^2 \gamma_{n-2, n-1}^{n-3} \\ \lambda_{n-1, n-1}^{n-4} &= \lambda_{n-2}^{n-3} \gamma_{n-3, n-1}^{n-4} - \lambda_1^{n-4} \gamma_{n-2, n-1}^1 - \lambda_2^{n-4} \gamma_{n-2, n-1}^2 - \dots - \lambda_{n-3}^{n-4} \gamma_{n-2, n-1}^{n-3} \\ \lambda_{n-1, n-2}^1 &= \lambda_{n-2}^{n-3} \lambda_{n-3, n-1}^1 - \lambda_1^1 \lambda_{n-2, n-1}^1 - \lambda_2^1 \lambda_{n-2, n-1}^2 - \dots - \lambda_{n-3}^1 \lambda_{n-2, n-1}^{n-3} \\ \lambda_{n-1, n-2}^2 &= \lambda_{n-2}^{n-3} \lambda_{n-3, n-1}^2 - \lambda_1^2 \lambda_{n-2, n-1}^1 - \lambda_2^2 \lambda_{n-2, n-1}^2 - \dots - \lambda_{n-3}^2 \lambda_{n-2, n-1}^{n-3} \\ &\dots \\ \lambda_{n-1, n-2}^{n-4} &= \lambda_{n-2}^{n-3} \lambda_{n-3, n-1}^{n-4} - \lambda_1^{n-4} \lambda_{n-2, n-1}^1 - \lambda_2^{n-4} \lambda_{n-2, n-1}^2 - \dots - \lambda_{n-3}^{n-4} \lambda_{n-2, n-1}^{n-3} \end{aligned} \right.$$

В свою очередь у прямой квазиторса $\Theta \{K_1, \vec{t}_{20}\}$ - центральная нормаль квазиторса коллинеарна \vec{t}_{20} - также имеется инвариантный вектор распределения \vec{t}_3 , ортогональный центральной нормали, т.е. \vec{t}_{20} .

Разложим вектор \vec{t}_3 , который в репере T_3 имеет вид

$$\vec{t}_3 = \lambda_{n-3}^1 \vec{e}_1 + \lambda_{n-3}^2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_{n-3}^{n-4} \vec{e}_{n-4} + \lambda_{n-3}^{n-2} \vec{e}_{n-2}$$

на две составляющие, одна из которых - $\lambda_{n-3}^{n-2} \vec{e}_{n-2}$ - коллинеарна \vec{t}_4 , а вторая - $\vec{t}_{30} = \lambda_{n-3}^1 \vec{e}_1 + \lambda_{n-3}^2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_{n-3}^{n-4} \vec{e}_{n-4}$ ортогональна не только центральной нормали \vec{t}_{20} , но и вектору \vec{t}_4 .

Мы получили, таким образом, три попарно ортогональных вектора \vec{t}_1, \vec{t}_{20} и \vec{t}_{30} .

Продолжая аналогичным образом, будем направлять векторы \vec{e}_{n-i-1} ($i = 3, 4, \dots, n-3$) по составляющей вектора распределения квазиторса $\Theta \{K_1, \vec{t}_{i,0}\}$ - $\vec{t}_{i,0}$ - ортогональной каждому из векторов $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_{i,0}$.

При этом на коэффициенты системы (4) будут наложены следующие условия:

$$\begin{cases} \lambda_{n-1}^1 = \lambda_{n-1}^2 = \dots = \lambda_{n-1}^{n-3} = 0 \\ \lambda_{n-2}^1 = \lambda_{n-2}^2 = \dots = \lambda_{n-2}^{n-4} = 0 \\ \dots \\ \lambda_4^1 = \lambda_4^2 = 0 \\ \lambda_3^1 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Положение всех векторов репера T этим будет фиксировано; двухиндексные формы - компоненты уравнений движения репера T - станут главными. Чтобы окончательно канонизировать репер, нам осталось поместить его вершину в инвариантную точку. Выберем для этой цели центр прямой A_S - подмногообразия комплекса, тогда

$$\lambda_1^1 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_{n-2}^{n-2} = 0.$$

Данный канонический репер построен в предположении, что вектор распределения K -поверхностей комплекса K_1 , является вектором S -го порядка.

Рассмотрим теперь комплекс, для которого это условие места не имеет.

Пусть вектор \vec{l}_1 имеет порядок i_0 ($i_0 = 0, 1, 2, \dots, s-1$). Тогда

$$\begin{cases} \lambda_{n-1}^{n-m_{s+1-i_0}+1} = 0 \\ \lambda_{n-1}^{n-m_{s+1-i_0}+2} = 0 \\ \dots \\ \lambda_{n-1}^{n-2} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Исследуя при условиях (9) систему (3), получим, что характеры системы соответственно равны:

$$S_1 = n-2; S_2 = n-2; \dots; S_{n-1} = n-2;$$

$$S_n = n - m_{S+1-i_0}.$$

В свою очередь число новых независимых форм в системе (3) равно

$$\begin{aligned} q &= n(n - m_{S+1-i_0}) + (n-1)(m_{S+1-i_0} - 2) = \\ &= n^2 - 2n + 2 - m_{S+1-i_0}. \end{aligned}$$

Сумма характеров системы равна q . Производ системы (3)

$$\begin{aligned} N &= (n - m_{S+1-i_0}) \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (m_{S+1-i_0} - 2) \frac{(n-1)n}{2} = \\ &= \frac{n}{2}(n^2 - 3n + 2) - n(n - m_{S+1-i_0}), \end{aligned}$$

а число Картана $Q = \sum_{i=1}^n i S_i = (n-2) \frac{(n-1)n}{2} + n(n - m_{S+1-i_0})$,

следовательно, система (3) находится в инволюции.

Класс комплексов K_1 с главной нормалью максимального порядка, у которого k -поверхности суть квазиторсы порядка i_0 ($i_0 = 1, 2, \dots, S-1$) существует с произволом $(n - m_{S+1-i_0})$ функций n аргументов.

Если же все K -поверхности, проходящие через луч комплекса, являются торсовыми, то класс комплексов, обладающих данным свойством, существует с произволом $(n-2)$ -х функций $(n-1)$ -го переменного.

Мы не можем использовать для указанной канонизации вектор \vec{e}_1 если его порядок меньше S . Однако в полуканоническом репере T_1 , где \vec{e}_{n-1} коллинеарен главной нормали комплекса, мы можем построить такие же цепочки векторов, взяв за исходный вектор вместо \vec{e}_1 либо вектор бинормали комплекса;

либо один из векторов

$$\left[\lambda_{n-1, \alpha}^{\alpha} - \frac{\lambda_{n-1, n-1}^{P_S} \gamma_{n-1, n-1}^{P_S}}{\sum_{R_S} (\gamma_{n-1, n-1}^{R_S})^2} \gamma_{n-1, n-1}^{\alpha} \right] \vec{e}_{\alpha}$$

и

$$\left[\lambda_{n-1, n-1}^{\alpha} - \frac{\lambda_{n-1, n-1}^{P_S} \lambda_{n-1}^{P_S}}{\gamma_{n-1, n-1}^{R_S} \lambda_{n-1}^{R_S}} \gamma_{n-1, n-1}^{\alpha} \right] \vec{e}_{\alpha},$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-2$; $P_S, R_S = n-m_2+1, n-m_2+2, \dots, n-2$,

при условии, что этот исходный вектор имеет порядок S .

Можно, наконец, взять исходным вектором свертку какого-либо из инвариантных векторов порядка S с аффинором $\lambda_{n-1, \beta}^{\alpha}$ или использовать для канонизации собственные направления аффинора $\lambda_{n-1, \beta}^{\alpha}$, имеющие порядок S .

При канонизациях репера T , подобных рассмотренной канонизации (8), мы использовали лишь центральные нормали и векторы распределения некоторой совокупности инвариантных линейчатых поверхностей, проходящих через луч комплекса K_1 . Нам удалось, поэтому, при аналитической записи ограничиться коэффициентами системы (4).

Рассмотрим теперь еще одну из возможных канонизаций репера T , которая будет базироваться на инвариантных образах лишь одной инвариантной линейчатой поверхности, проходящей через луч комплекса K_1 .

Пусть бинормаль комплекса имеет порядок S , т.е. исключим пока из рассмотрения частный случай, когда скалярный инвариант комплекса $\sum_{P_S} (\gamma_{n-1, n-1}^{P_S})^2$ равен нулю. Направим по бинормали вектор \vec{e}_{n-2} , тогда

$$\begin{cases} \gamma_{n-1, n-1}^1 = 0 \\ \gamma_{n-1, n-1}^2 = 0 \\ \dots \\ \gamma_{n-1, n-1}^{n-3} = 0 \end{cases}$$

$$y_{n-2n-1}^1 \bar{e}_1 + y_{n-2n-1}^2 \bar{e}_2 + \dots + y_{n-2n-1}^{n-3} \bar{e}_{n-3}$$

является инвариантным. Направим по этому вектору \bar{e}_{n-3} , тогда

$$\begin{cases} y_{n-2n-1}^1 = 0 \\ y_{n-2n-1}^2 = 0 \\ \dots \\ y_{n-2n-1}^{n-4} = 0. \end{cases}$$

Продифференцировав внешним образом систему (10), получим

$$\begin{aligned} & (d\lambda_{n-2\beta}^1 - \lambda_{n-2\alpha}^1 \omega_\beta^\alpha + \delta_\beta^1 \omega_n^{n-1} + \lambda_{n-2\beta}^{\mu'} \omega_{\mu'}^1) \Lambda \omega_n^\beta + \\ & + (d\lambda_{n-2n-1}^1 - \omega^n y_{n-2n-1}^1 - \lambda_{n-2\beta}^1 \omega_{n-1}^\beta + \lambda_{n-2n-1}^{\mu'} \omega_{\mu'}^1) \Lambda \omega_n^{n-1} + \\ & + (dy_{n-2n-1}^1 + y_{n-2n-1}^{\mu'} \omega_{\mu'}^1) \Lambda \omega_n^{n-1} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (d\lambda_{n-2\beta}^2 - \lambda_{n-2\alpha}^2 \omega_\beta^\alpha + \delta_\beta^2 \omega_n^{n-1} + \lambda_{n-2\beta}^{\mu'} \omega_{\mu'}^2) \Lambda \omega_n^\beta + \\ & + (d\lambda_{n-2n-1}^2 - \omega^n y_{n-2n-1}^2 - \lambda_{n-2\beta}^2 \omega_{n-1}^\beta + \lambda_{n-2n-1}^{\mu'} \omega_{\mu'}^2) \Lambda \omega_n^{n-1} + \\ & + (dy_{n-2n-1}^2 + y_{n-2n-1}^{\mu'} \omega_{\mu'}^2) \Lambda \omega_n^{n-1} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (d\lambda_{n-2\beta}^{n-3} - \lambda_{n-2\alpha}^{n-3} \omega_\beta^\alpha + \delta_\beta^{n-3} \omega_n^{n-1} + \lambda_{n-2\beta}^{\mu'} \omega_{\mu'}^{n-3}) \Lambda \omega_n^\beta + \\ & + (d\lambda_{n-2n-1}^{n-3} - \omega^n y_{n-2n-1}^{n-3} - \lambda_{n-2\beta}^{n-3} \omega_{n-1}^\beta + \lambda_{n-2n-1}^{\mu'} \omega_{\mu'}^{n-3}) \Lambda \omega_n^{n-1} + \\ & + (dy_{n-2n-1}^{n-3} + y_{n-2n-1}^{\mu'} \omega_{\mu'}^{n-3}) \Lambda \omega_n^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-2; \mu' = 1, 2, \dots, n-3).$$

Следовательно, после того, как по $\gamma_{n-2, n-1}^1 \vec{e}_1 + \dots + \gamma_{n-2, n-1}^{n-3} \vec{e}_{n-3}$ будет направлен \vec{e}_{n-3} , формы $\omega_{n-3}^1, \omega_{n-3}^2, \dots, \omega_{n-3}^{n-4}$ станут главными

$$\begin{cases} \omega_{n-3}^1 = \lambda_{n-3, \beta}^1 \omega_n^\beta + \lambda_{n-3, n-1}^1 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-3, n-1}^1 \omega^{n-1} \\ \omega_{n-3}^2 = \lambda_{n-3, \beta}^2 \omega_n^\beta + \lambda_{n-3, n-1}^2 \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-3, n-1}^2 \omega^{n-1} \\ \dots \\ \omega_{n-3}^{n-4} = \lambda_{n-3, \beta}^{n-4} \omega_n^\beta + \lambda_{n-3, n-1}^{n-4} \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-3, n-1}^{n-4} \omega^{n-1} \end{cases}$$

($\beta = 1, 2, \dots, n-2$)

Вектор $\gamma_{n-3, n-1}^1 \vec{e}_1 + \gamma_{n-3, n-1}^2 \vec{e}_2 + \dots + \gamma_{n-3, n-1}^{n-4} \vec{e}_{n-4}$ будет инвариантным при оставшихся допустимых преобразованиях репера, значит, можно направить по нему \vec{e}_{n-4}

Продолжая аналогично, будем направлять \vec{e}_{n-i} по

$$\gamma_{n-i+1, n-1}^l \vec{e}_l,$$

где

$$i = 1, 2, \dots, n-2; \quad l = 1, 2, \dots, n-i;$$

а $\gamma_{n-i+1, n-1}^l$ суть коэффициенты разложения ω_{n-i+1}^l по базисным формам:

$$\omega_{n-i+1}^l = \lambda_{n-i+1, \beta}^l \omega_n^\beta + \lambda_{n-i+1, n-1}^l \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-i+1, n-1}^l \omega^{n-1}$$

($l = 1, 2, \dots, n-i; \quad i = 1, 2, \dots, n-2; \quad \beta = 1, 2, \dots, n-2$).

Нам осталось выяснить геометрический смысл данной канонизации. Для этого рассмотрим цилиндрическую поверхность, проходящую через луч комплекса. Пусть точка A описывает некоторую кривую на поверхности цилиндра, вектор образующей которого есть \vec{z} . Тогда главная нормаль комплекса принадлежит касательной плоскости цилиндра:

$$\vec{e}_{n-1} \in [d\vec{A}, \vec{z}].$$

Действительно, чтобы задать цилиндрическую поверхность, проходящую через луч комплекса, нужно наложить на базисные формы следующие связи:

$$\omega_n^1 = \omega_n^2 = \dots = \omega_n^{n-2} = 0.$$

Касательная к направляющей цилиндра тогда

$$d\vec{A} = (\gamma_{n-1}^\alpha \vec{e}_\alpha + \vec{e}_{n-1})\omega^{n-1} + \omega^n \vec{e}_n,$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-2$; \vec{e}_n - единичный вектор образующей цилиндра, а $\gamma_{n-1}^\alpha \vec{e}_\alpha + \vec{e}_{n-1}$ есть единичный вектор главной нормали комплекса.

Совершенно аналогично можно показать, что бинормаль комплекса, а, следовательно, и \vec{e}_{n-2} в каноническом репере, принадлежит соприкасающейся плоскости цилиндра.

$$\vec{e}_{n-2} \in [d^2\vec{A}, d\vec{A}, \vec{z}]$$

вообще,

$$\vec{e}_{n-i} \in [d^{(i)}\vec{A}, d^{(i-1)}\vec{A}, \dots, d\vec{A}, \vec{z}],$$

где

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

Чтобы репер T был окончательно канонизирован, нам осталось положить его вершину в инвариантную точку на прямой комплекса, например, в горловую точку K -поверхности, у которой вектор первой кривизны ортогонален бинормали комплекса. При этом $\lambda_{n-1, n-1}^{n-2}$ обратится в нуль.

Если же бинормаль комплекса имеет порядок меньше, чем 3, то указанным способом мы фиксируем положение векторов репера

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-m_{\mathcal{S}}-l+1},$$

где ϵ - порядок бинормали.

В случае, когда бинормаль комплекса не определена (данный класс комплексов существует с произволом $2(n-2)$ функций $(n-1)$ -го аргумента $[U]$), то за исходный вектор при канонизации можно взять, кроме указанных ранее, вектор первой кривизны любой K -поверхности комплекса.

И. Говштейн В.М. Некоторые вопросы комплексов K , в $R_n^{m_1, m_2, \dots, m_s}$
 "Учен. зап. Латв. ун-та", 1972, т. 172.

Л. И. МАДРЕВИЧ

Класс конгруэнции $K_{3,4}^2 \in F_4$

В данной статье рассматривается класс конгруэнции, для которого инварианты конгруэнции $\gamma_4^2 = 0$, $\gamma_3^3 = 0$ [1]. Доказывается его существование, отмечаются свойства и проводится канонизация репера.

§1. Основная система для конгруэнции в F_4 имеет вид [1]:

$$\omega = \lambda_{\beta}^{\alpha} \omega_1^{\beta}, \quad (\alpha, \beta = 2, 3, 4) \quad (1)$$

Рассмотрим класс конгруэнции, для которого инварианты конгруэнции

$$\gamma_4^2 = \lambda_4^2 = 0 \quad (2) \quad \text{и} \quad \gamma_3^3 = \begin{vmatrix} \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Из условия (3) следует, что $\lambda_3^2 \lambda_4^3 = 0$.

Рассмотрим случай, когда

$$\lambda_3^2 = 0, \quad \lambda_4^2 = 0, \quad \lambda_4^3 \neq 0 \quad (4)$$

Этот класс конгруэнции, выделяемый условием (4), обозначим $K_{3,4}^2$.

Условие (4) геометрически означает следующее:
координатные линейчатые поверхности (L_2) и (L_3) имеют нулевые параметры распределения.

Основная система (1) репера конгруэнции в силу условий (4) примет вид:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \lambda_2^2 \omega_1^2 \\ \omega^3 &= \lambda_2^3 \omega_1^2 + \lambda_3^3 \omega_1^3 + \lambda_4^3 \omega_1^4 \\ \omega^4 &= \lambda_2^4 \omega_1^2 + \lambda_3^4 \omega_1^3 + \lambda_4^4 \omega_1^4\end{aligned}\quad (5)$$

Исследуем на инволюции данный класс. Дифференцируя систему (5) внешним образом и принимая формы $\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4$ за базисные, получим:

$$\begin{aligned}[\mu_1, \omega_1^2] &= 0 \\ [\mu_2, \omega_1^2] + [\mu_3, \omega_1^3] + [\mu_4, \omega_1^4] &= 0 \\ [\mu_5, \omega_1^2] + [\mu_6, \omega_1^3] + [\mu_7, \omega_1^4] &= 0,\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \omega^1 - d\lambda_2^2 \\ \mu_2 &= -d\lambda_2^3 + \lambda_3^3 \omega_2^3 + \lambda_4^3 \omega_2^4 - \lambda_2^2 \omega_2^3 \\ \mu_3 &= \omega^1 - d\lambda_3^3 + \lambda_4^3 \omega_3^4 \\ \mu_4 &= -d\lambda_4^3 \\ \mu_5 &= -d\lambda_2^4 + \lambda_3^4 \omega_2^3 + \lambda_4^4 \omega_2^4 - \lambda_2^2 \omega_2^4 - \lambda_2^3 \omega_3^4 \\ \mu_6 &= -d\lambda_3^4 + \lambda_4^4 \omega_3^4 - \lambda_3^3 \omega_3^4 \\ \mu_7 &= \omega^1 - d\lambda_4^4 - \lambda_3^4 \omega_3^4\end{aligned}$$

Система (6) есть система Васенина, для которой нетрудно подсчитать:

$$S_1 = 3, S_2 = 2, S_3 = 2, \quad \text{т.е. } Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 = 13.$$

Раскрывая (6) по лемме Картана, будем иметь $N = 13$.

Итак, $Q = N = 13$ и система (6) в инволюции с произвольном двух функций трех аргументов.

§2. Закон изменения коэффициентов λ_β^2 системы (5) имеет вид:

$$\bar{\lambda}_1^2 = \lambda_1^2$$

$$\bar{\lambda}_2^3 = \lambda_2^3 - a_2^3 (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) + a_2^4 \lambda_4^3$$

$$\bar{\lambda}_3^3 = \lambda_3^3 + a_3^4 \lambda_4^3$$

$$\bar{\lambda}_4^3 = \lambda_4^3$$

(7)

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_2^4 = & \lambda_2^4 - a_2^4 (\lambda_2^2 - \lambda_4^2) - a_3^4 \lambda_2^3 + a_2^3 \lambda_3^4 + \\ & + a_2^3 a_3^4 (\lambda_2^2 - \lambda_3^2) - a_2^4 a_3^4 \lambda_4^3 \end{aligned}$$

$$\bar{\lambda}_3^4 = \lambda_3^4 - a_3^4 (\lambda_3^2 - \lambda_4^2) - (a_3^4)^2 \lambda_4^3$$

$$\bar{\lambda}_4^4 = \lambda_4^4 - a_4^4 \lambda_4^3$$

Из формул (7) видно, что λ_2^2 и λ_4^3 являются инвариантами класса $K_{3,4}^4$. Из инвариантности λ_2^2 следует:

Теорема 1. Все линейчатые поверхности L_4 имеют общую стрикционную точку.

Из инвариантности λ_4^3 следует:

Теорема 2. Нулевая поверхность L_3 имеет параметр распределения λ_4^3 , являющийся инвариантом конгруэнции.

§3. Коэффициенты λ_4^3, λ_4^4 системы (5) образуют координаты контравариантного вектора в плоскости $[\vec{e}_3, \vec{e}_4]$.

Для канонизации репера направим вектор \vec{e}_3 по вектору $\{\lambda_3^3, \lambda_4^4\}$. Вследствие этого будем иметь:

$$\dot{\lambda}_4^4 = 0 \quad \text{а, соответственно,} \quad a_3^4 = \frac{\lambda_4^4}{\lambda_3^4} \quad (8)$$

В силу такого крепления векторы \vec{e}_3 , очевидно, λ_3^3 и λ_3^4 становятся инвариантными.

Действительно, подставляя вместо a_3^4 его значение (8) в формулы $\bar{\lambda}_3^3, \bar{\lambda}_3^4$ из (7), получим:

$$\bar{\lambda}_3^3 = \lambda_3^3 + \lambda_4^4 \quad (9)$$

$$\bar{\lambda}_3^4 = - \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3^3 & \lambda_4^4 \\ \lambda_3^4 & \lambda_4^4 \end{vmatrix}}{\lambda_3^4} \quad (10)$$

Из равенств (9) и (10) следует, что абсцисса относительного центра инвариантного двухпараметрического семейства $M_2 [3]$

$$t = - \frac{\lambda_3^3 + \lambda_4^4}{2} \quad (11)$$

и его фокус

$$\begin{vmatrix} \lambda_3^3 + t & \lambda_4^4 \\ \lambda_3^4 & \lambda_4^4 + t \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

более не зависят от вращения репера.

Для канонизации вектора \vec{e}_2 репера предположим, что он направлен по центральной нормали торосовой линейчатой поверхности L_1 , принадлежащей конгруэнции.

Для торосовой координатной поверхности L_1 вектор распределения $\{\lambda_2^3, \lambda_2^4\}$ равен нулю, т.е.

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_2^3 = 0 \\ \bar{\lambda}_2^4 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda_2^3 + a_2^3 (\lambda_3^3 - \lambda_2^2) + a_2^4 \lambda_4^3 = 0 \\ \lambda_2^4 + a_2^3 \lambda_3^4 + a_2^4 (\lambda_4^4 - \lambda_2^2) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Из системы (13) найдем:

$$a_{22}^3 = - \frac{\begin{vmatrix} \lambda_2^3 & \lambda_4^3 \\ \lambda_2^4 & \lambda_4^4 - \lambda_2^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3^3 - \lambda_2^3 & \lambda_4^3 \\ \lambda_3^4 & \lambda_4^4 - \lambda_2^4 \end{vmatrix}} ; \quad a_{22}^4 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_2^3 & \lambda_3^3 - \lambda_2^3 \\ \lambda_2^4 & \lambda_3^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3^3 - \lambda_2^3 & \lambda_4^3 \\ \lambda_3^4 & \lambda_4^4 - \lambda_2^4 \end{vmatrix}} \quad (14)$$

Для полной канонизации репера достаточно закрепить его вершину в одной из инвариантных точек конгруэнции.

Поместим вершину репера в аффинный центр конгруэнции

$$t = - \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^3 + \lambda_4^4}{3}$$

откуда

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^3 + \lambda_4^4 = 0$$

В силу крепления вектора \vec{e}_3 (8) будем иметь:

$$\lambda_2^2 = - \lambda_3^3 \quad (15)$$

Теорема 3. Существует ровно одна пара поверхностей L_1 и L_2 , для которых относительный центр нулевой поверхности L_2 и стрикционная точка поверхности L_1 расположены симметрично относительно аффинного центра конгруэнции.

В силу инвариантности λ_2^2 , что следует из формул (7), можем поместить вершину репера в стрикционную точку поверхности L_1 , т.е.

$$\lambda_2^2 = 0. \quad (16)$$

Из (8) и (16) следует:

Теорема 4. Существует ровно одна пара поверхностей L_2 и L_3 , для которой относительный центр нулевой поверхности L_3 совпадает со стрикционной точкой торсовой поверхности L_1 .

Известно, что фокусы конгруэнции определяются уравнением:

$$\begin{vmatrix} \lambda_2^2 + t & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 + t & \lambda_4^3 \\ \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 + t \end{vmatrix} = 0.$$

Для $K_{3,4}^2$, очевидно, последнее уравнение примет вид:

$$(\lambda_2^2 + t) \begin{vmatrix} \lambda_3^3 + t & \lambda_4^3 \\ \lambda_3^4 & \lambda_4^4 + t \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Из уравнений (16) и (12) следует: один из фокусов конгруэнции совпадает со стрикционной точкой поверхности L_1 , а два других - с фокусами инвариантного двухпараметрического семейства $M_2 [3]$.

Инвариантами $K_{3,4}^2$ будут:

$$y_2^2 = \lambda_2^2$$

$$y_4^3 = \lambda_4^3$$

$$y_3^4 = \lambda_3^4 + \lambda_4^4$$

$$y_3^4 = \begin{vmatrix} \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ \lambda_3^4 & \lambda_4^4 \end{vmatrix}$$

Л и т е р а т у р а

1. Мадревиц Л.И. Конгруэнция прямых в F_4 . "Учен. зап. Латв. ун-та", 1971, т.102.
2. Мадревиц Л.И. Класс конгруэнции K_4^2 в F_4 . "Учен. зап. Латв. ун-та", 1974, т.304.
3. Мадревиц Л.И. Инвариантные подмногообразия конгруэнции прямых в F_n . "Учен. зап. Латв. ун-та", 1972, т.172.

О некоторых свойствах компактной аппроксимации
замкнутых линейных отображений

Введение. Г.М. Вайникко ввел и исследовал понятие компактной аппроксимации (к.а.) на случай линейного непрерывного отображения (библ. см. в монографии [4]). В работах Л.С. Раковщика ([8]) и автора ([5], [7]) рассматривалось это понятие в той ситуации, когда области определения отображений совпадают. В этом случае аппроксимацию называли секвенциально компактной (с.к.а.), причем рассматривали ее в пространстве всех линейных, не обязательно непрерывных отображений. Однако в случае линейных замкнутых отображений (основные результаты работ ([5] и [7]) справедливы, если требование б) определения 1.1. ослаблено: вместо ограниченных последовательностей векторов рассматриваются лишь f -ограниченные.) силу того, что для линейного непрерывного отображения f понятия f -ограниченности и ограниченности совпадают, естественно, что аппроксимацию с ослабленным условием б) будем называть компактной. Отметим, что с.к.а. является частным случаем к.а., причем эти понятия эквивалентны в классе линейных непрерывных отображений.

В предлагаемой статье обобщаются основные результаты Л.С. Раковщика ([8]) и автора ([5], [7]) на случай к.а. линейных замкнутых отображений. В §1 основными являются предложения 1.8., 1.11., 1.16., где исследуются вопросы f -ограниченности, сходимости на всех f -сходящихся последовательностях векторов при к.а., а так же теорема 1.13., дающая необходимое (см. замечание 2.11.) и достаточное условие к.а. на языке с.к.а. линейных непрерывных отображений. В §2 рассматриваются устойчивость относительно открытости и нормальной разрешимости (теоремы 2.4., 2.7., следствия 2.5., 2.8. и 2.9.) при к.а., показана с.к.а. обратных отображений в случае непрерывной обратимости отображения f (теоремы 2.10. и 2.12.), дано необходимое и дос-

таточное условие равенства: $\dim f_n^{-1}\{0\} = \dim f^{-1}\{0\}$ (теорема 3.7.) при к.а. в §3 рассматривается устойчивость свойств спектра при к.а. (теоремы 3.1., 3.3., 3.5.), с.к.а. проекторов Рисса (теорема 3.7.), условие сходимости собственных чисел линейных замкнутых отображений при к.а. (следствие 3.8.).

§1. Определение и основные свойства компактной аппроксимации линейных замкнутых отображений.

Определение 1.1. Пусть Z и Y нормированные пространства. Будем говорить, что последовательность линейных отображений $f_n: Z \rightarrow Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f: Z \rightarrow Y$, если:

- а) для любого вектора $z \in Z$ $\lim_n f_n z = f z$ в пространстве Y .
- б) для любой ограниченной последовательности векторов (z_n) из Z последовательность векторов $(f_n z_n - f z_n)$ относительно компактна в пространстве Y , т.е. из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

В этой ситуации для краткости будем писать, что

$$f_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f$$

Замечание 1.2. Из результатов [5] следует, что если отображение f непрерывно и $f_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f$, то для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ отображение f_n так же является непрерывным. Там же показано, что если Z - векторное подпространство банахова пространства X и отображение f замкнуто, т.е. его график замкнут в пространстве $X \times Y$, то в случае $f_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ отображение f_n замкнуто.

Для основного определения нам понадобятся некоторые вспомогательные определения.

Определение 1.3. Пусть X и Y банаховы пространства, $f: D_f \subset X \rightarrow Y$ - линейное отображение. Последовательность векторов $(x_n) \subset D_f$ называется f -ограниченной (соответственно f -сходящейся) если существует такое число $\epsilon > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\| \leq \epsilon$ и $\|f x_n\| \leq \epsilon$ (соответственно, существуют $x \in X$ и $y \in Y$ такие, что $\lim_n x_n = x$ и $\lim_n f x_n = y$).

Если наряду с нормой $\| \cdot \|_X$, индуцированной из X

в пространстве \mathcal{D}_f рассматривать норму Б.Секкефальви-Надя $\| \cdot \|_1$ (см. [4]), определенную равенством:

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad \|x\|_1 = \|x\|_X + \|fx\|_Y, \quad (1)$$

то определения f -ограниченности и f -сходимости для линейных замкнутых отображений равносильны ограниченности и сходимости последовательностей векторов в пространстве $(\mathcal{D}_f, \| \cdot \|_1)$. Отметим, что для замкнутых отображений в силу полноты пространства $(\mathcal{D}_f, \| \cdot \|_1)$ предел любой f -сходящейся последовательности векторов принадлежит \mathcal{D}_f . В силу неравенства $\|x\|_1 \geq \|x\|_X$ получаем, что топология, определяемая нормой $\| \cdot \|_1$ слабее топологии, определяемой нормой $\| \cdot \|_X$. Далее, если $\mathcal{D}_g \subset \mathcal{D}_f$ и отображение g непрерывно при наделении пространства \mathcal{D}_f нормой $\| \cdot \|_1$, то через $\|g\|_1$ будем обозначать норму отображения g в пространстве $[C((\mathcal{D}_f, \| \cdot \|_1), Y)]$.

Следуя Като (см. [2] стр. 241), отображение g будем называть f -ограниченным, если $\mathcal{D}_g \subset \mathcal{D}_f$ и существует такое число $a > 0$ и существует такое число $b > 0$, что

$$\forall x \in \mathcal{D}_g \quad \|gx\| \leq a \|fx\| + b \|x\|. \quad (2)$$

Нижнюю грань всех чисел $a > 0$, удовлетворяющих неравенству (2) будем называть f -гранью отображения g . Не трудно убедиться, что если отображение g непрерывно в пространстве $(\mathcal{D}_g, \| \cdot \|_1)$, то отображение g f -ограничено, причем его f -грань не превосходит числа $\|g\|_1$, если разность отображений $f - g$ непрерывна, то отображение g f -ограничено и его f -грань не превосходит единицы. Условимся в дальнейшем писать вместо $\| \cdot \|_X$ просто $\| \cdot \|$.

Определение 1.4. Пусть X и Y - банаховы пространства. Будем говорить, что последовательность отображений $f_n: \mathcal{D}_{f_n} \rightarrow Y$ компактно аппроксимирует линейное отображение $f: \mathcal{D}_f \rightarrow Y$, если $\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D}_f \subset X$ и последовательность отображений (f_n) секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение f при наделении пространства \mathcal{D}_f нормой $\| \cdot \|_1$. В этой ситуации будем писать, что $f_n \xrightarrow{к.а.} f$.

В силу определений 1.3. и 1.4. справедлива следующая теорема, дающая необходимое и достаточное условие к.а.:

Теорема 1.5. Пусть X и Y - банаховы пространства, Z - векторное подпространство пространства X и последова-

тельность линейных отображений $f_n: Z \rightarrow Y$ поточечно сходится к линейному замкнутому отображению $f: Z \rightarrow Y$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

а) $f_n \xrightarrow{к.а.} f$;)

б) для любой f -ограниченной последовательности векторов $(z_n) \subset Z$ последовательность векторов $(f_n z_n - f z_n)$ относительно компактна в пространстве Y .

В дальнейшем для удобства записи будем считать, что $D_f = D_{f_n} = Z \subset X$.

Предложение 1.6. Пусть X и Y - банаховы пространства и $f_n \xrightarrow{к.а.} f$, тогда $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Если $f_n \xrightarrow{к.а.} f$ и отображение f - непрерывно, то $f_n \xrightarrow{с.к.а.} f$.

Справедливость этого утверждения получаем непосредственно из определений 1.1 и 1.3. в силу теоремы 1.5.

Пример 1.7. Пусть $X=Y=l_2$, $Z = \{ (x(n)) \in l_2 \mid \sum_n |n x(n)| < +\infty \}$, отображение $f: Z \rightarrow l_2$ определено следующим образом:

$$\forall (x(n)) \in Z \quad f(x(n)) = (n x(n)).$$

Далее, пусть δ_{nm} - символ Кронекера и $e_n = (\delta_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ - ортонормальная тотальная последовательность векторов в l_2 . Определим последовательность отображений $g_n: Z \rightarrow l_2$ следующим образом:

$$\forall z \in Z \quad g_n z = n(z|e_n)e_1. \quad (3)$$

Тогда $f_n + g_n \xrightarrow{к.а.} f$, $f + g_n \xrightarrow{с.к.а.} f$ и если рассматривать сходимость по норме в пространстве $Le((Z, ||\cdot||), Y)$ то $\lim_n ||f_n + g_n - f|| \neq 0$.

Действительно, то что $f + g_n \xrightarrow{к.а.} f$ показано в замечании 214. Так как последовательность векторов $(e_n) \subset Z$ ограничена в l_2 , но последовательность векторов $(g_n e_n) = (n e_1)$ не относительно компактна в l_2 , то $f + g_n \xrightarrow{с.к.а.} f$. Далее, последовательность векторов $z_n = \frac{1}{n} e_n$ является f -ограниченной, но в то же время в силу условия (3) $\forall n \in \mathbb{N} \quad ||g_n z_n|| = 1$, следовательно, $\lim_n ||(f + g_n)z_n - f z_n|| = 1$ или $\lim_n ||f + g_n - f|| \neq 0$.

Предложение 1.8. Пусть X и Y - банаховы пространства, $f_n \xrightarrow{к.а.} f$ и $g_n \xrightarrow{к.а.} g$. Тогда:

а) $\forall d \in K \quad d f_n \xrightarrow{к.а.} d f$;

б) если отображения f и g - $f+g$ -ограничены, то

$$f_n + g_n \xrightarrow{к.а.} f + g.$$

Заметим, что условие б) в силу определения 1.3, равносильно следующему условию:

$$\forall z \in Z \quad \|fz\| + \|gz\| \leq \alpha \|fz + gz\| + \beta \|z\|. \quad (4)$$

Доказательство справедливости условия а) проверяется непосредственно по определению. Покажем справедливость условия б). Не трудно убедиться в поточечной сходимости по следовательности отображений $(f_n + g_n)$ к отображению

$f + g$. Далее, пусть (z_n) - произвольная $f + g$ -ограниченная последовательность векторов из Z . Тогда из неравенства (4) (z_n) является как f -ограниченной, так и g -ограниченной последовательностью векторов.

Тогда в силу теоремы 1.5, последовательности векторов $(f_n z_n - f z_n)$ и $(g_n z_n - g z_n)$ относительно компактны в пространстве Y , поэтому и $((f_n + g_n) z_n - (f + g) z_n) = (f_n z_n - f z_n) + (g_n z_n - g z_n)$ - относительно компактная последовательность векторов.

Следствие 1.9. Пусть X и Y - банаховы пространства, $f_n \xrightarrow{к.а.} f$, $g_n \xrightarrow{к.а.} g$, отображение g f -ограничено и его f -грань меньше $\frac{1}{2}$. Тогда $f_n + g_n \xrightarrow{к.а.} f + g$.

Действительно, в силу определения f -грани отображения g существуют такие числа $\frac{1}{2} > \alpha > 0$ и $\beta > 0$, что

$$\forall z \in Z \quad \|gz\| \leq \alpha \|fz\| + \beta \|z\|. \quad (5)$$

Тогда из неравенства (5) и из неравенства $\|fz + gz\| \geq \|fz\| - \|gz\|$ получаем, что $\forall z \in Z \quad \|fz\| + \|gz\| \leq 2\alpha \|fz\| + 2\beta \|z\| + \|fz + gz\|$, а так как $(1 - 2\alpha)^{-1} \geq 1$, то

$$\|fz\| + \|gz\| \leq \|fz\| + (1 - 2\alpha)^{-1} \|gz\| \leq (1 - 2\alpha)^{-1} \|gz\| + \frac{2\beta}{1 - 2\alpha} \|z\|.$$

Таким образом нам осталось лишь воспользоваться результатом предложения 1.8.

Следствие 1.10. Если $f_n \xrightarrow{к.а.} f$, $g_n \xrightarrow{к.а.} g$ и отображение g непрерывно, то $f_n + g_n \xrightarrow{к.а.} f + g$. Действительно, в этой ситуации f -грань отображения g равна нулю.

Предложение 1.11. Пусть X и Y - банаховы пространства $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Тогда существуют такие числа $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\epsilon > 0$, что для всех $n \geq n_0$ отображения f_n -

f -ограничены, причем для всех $n \geq n_0$ f - грани отображений f_n не превосходят числа $c > 0$.

Доказательство. В силу определения 1.4., непрерывности отображения f в пространстве $(Z, \|\cdot\|_1)$ из следствия 5 (см. [5]) существуют такие числа $n_0 \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, что для всех $n \geq n_0$ и

$$\forall z \in Z \quad \|f_n z\| \leq c \|z\|_1$$

Поэтому из определения нормы $\|\cdot\|_1$ получаем, что $\forall n \geq n_0$

$$\forall z \in Z \quad \|f_n z\| \leq c \|fz\| + c \|z\|$$

Следствие 1.12. Пусть X и Y - банаховы пространства, отображение $f: Z \subset X \rightarrow Y$ - замкнуто и $f_n \xrightarrow{\text{к.а.}} f$. Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $f_n: Z \subset X \rightarrow Y$ является замкнутым отображением.

Справедливость этого утверждения следует из предложения 1.11' и из замечания 1.4. (см. [2] стр. 243).

Рассмотрим еще одно достаточное условие к.а. (в замечании 2.11. будет указано в какой ситуации это условие будет необходимым).

Теорема 1.13. Пусть X и Y - банаховы пространства, Z - векторное подпространство пространства X , отображения $f_n: Z \subset X \rightarrow Y$ и $f: Z \subset X \rightarrow Y$ являются замкнутыми. Предположим, что существуют такое банахово пространство V и такие линейные непрерывные отображения $g: V \rightarrow X$, $h_n: V \rightarrow Y$ и $h: V \rightarrow Y$, что g - биекция V на Z , для всех $n \in \mathbb{N}$ $f_n \circ g = h_n$ и $f \circ g = h$, $h_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} h$. Тогда $f_n \xrightarrow{\text{к.а.}} f$.

Иллюстрируем условия теоремы 1.13.



Доказательство. В силу замкнутости отображения f его график $G(f)$ является банаховым подпространством пространства $X \times Y$. Рассмотрим линейное непрерывное отображение $t: V \rightarrow X \times Y$, определенное следующим образом:

$$\forall v \in V \quad tv = (gv, hv)$$

В силу биективности отображения g и равенства $h = f \circ g$ отображение t будет инъекцией банахова простран-

ва V на банахово пространство $G(f)$. Поэтому из теоремы об открытом отображении существует такое число $\epsilon > 0$,

$$\text{что } \forall v \in V \quad \|tv\| \geq \epsilon \|v\|. \quad (6)$$

По аналогии с отображением t определим последовательность отображений $(t_n): \forall n \in \mathbb{N} \forall v \in V \quad t_n v = (g_n v, h_n v)$. Из биективности отображения g и из равенства $h_n = f_n \circ g$ отображения t_n будут инъекциями V на подпространство $G(f_n)$ пространства $X \times Y$, причем не трудно убедиться, что $t_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} t$. Далее, пусть $z \in Z$ - произвольно

выбранный вектор. В силу биективности отображения g существует такой вектор $v \in V$, что $g v = z$, а из того, что

$$t_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} t \text{ получаем, что } \lim_n t_n v = t v. \text{ Откуда}$$

$$\lim_n h_n v = h v, \text{ и из равенств } f_n \circ g_n = h_n \text{ и } f \circ g = h$$

$$\text{получим нужное: } \lim_n f_n z = f z.$$

Пусть (z_n) - произвольная f -ограниченная последовательность векторов из Z . В силу биективности отображения g существует такая последовательность векторов $(v_n) \subset V$ что $\forall n \in \mathbb{N} \quad g v_n = z_n$, так как существует такое число $a > 0$ что $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|z_n\| \leq a$ и $\|f z_n\| \leq a$, то в силу определения отображений h и $g \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|g v_n\| + \|h v_n\| \leq 2a$. Воспользуемся неравенством (6) и определением нормы в пространстве $X \times Y$ и получим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|v_n\| \leq \frac{1}{\epsilon} \|t_n v_n\| = \frac{1}{\epsilon} (\|g v_n\| + \|h v_n\|) \leq \frac{2a}{\epsilon}.$$

Таким образом последовательность векторов (v_n) является ограниченной в пространстве V и в силу определения I.1.

и того, что $t_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} t$ последовательность векторов $(t_n v_n - t v_n)$ относительно компактна в пространстве Y . Из последнего и из равенства $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n v_n - t v_n =$

$$(g_n v_n; h_n v_n) - (g v_n; h v_n) = (0; f_n z_n - f z_n)$$

получаем относительную компактность последовательности векторов $(f_n z_n - f z_n)$.

Замечание I.14. В качестве пространства V в примере I.7. можно брать e_2 , в качестве отображения $g: V_1 \rightarrow e_2$ -компактное отображение, определенное формулой: $\forall (x(n)) \in e_2 \quad g(x(n)) = (\frac{1}{n} x(n))$. Тогда $f \circ g = I e_2, (f+g) \circ g = I + (e_1 e_1)$ и не трудно убедиться, что $I + (e_1 e_1) \xrightarrow{\text{с.к.а.}} I$, поэтому $f_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f$.

Замечание 1.15. Если ослабить требование теоремы 1.13. и вместо равенства $f_n \circ g = k_n$ рассматривать равенство

$f_n \circ g_n = k_n$, причем потребовать, чтобы $g_n \xrightarrow{с.к.а.} g$, то заключение теоремы 1.13., вообще говоря не верно. Действительно, пусть $V = X = Y = \ell_2$, $Z = \{ (x(n)) \in \ell_2 \mid \sum_n |n x(n)|^2 < +\infty \}$, $\forall n \in \mathbb{N} \forall (x(j)) \in \ell_2$ $f_n(x(j)) = (x(1), \frac{1}{2}x(2), \dots, \frac{1}{n-1}x(n-1), \frac{1}{n}x(n), \frac{1}{n+1}x(n+1), \dots)$ и $\forall (x(j)) \in \ell_2$ $g(x(j)) = (x(1), \frac{1}{2}x(2), \dots, \frac{1}{n}x(n), \dots)$.

Далее, положим по определению

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall z \in Z \quad f_n z \stackrel{def}{=} g_n^{-1} z \quad \text{и} \quad f z \stackrel{def}{=} g^{-1} z.$$

Тогда $f_n \circ g_n = I_{\ell_2}$, $f \circ g = I_{\ell_2}$ и $g_n \xrightarrow{с.к.а.} g \in C(\ell_2, \ell_2)$, но в то же время последовательность векторов $z_n = \frac{1}{n} e_n$ является f -ограниченной, а последовательность векторов $(f_n z_n - f z_n) = (e_n)$ не относительно компактна в пространстве ℓ_2 , поэтому $f_n \xrightarrow{к.п.} f$.

Предложение 1.16. Пусть X и Y - банаховы пространства, отображение $f: Z \subset X \rightarrow Y$ - замкнуто и $f_n \xrightarrow{к.п.} f$. Тогда для любой f -сходящейся последовательности векторов $(z_n) \subset Z$ к пределу $z \in Z$ $\lim_n f_n z_n = f z$.

Доказательство. В силу предложения 1.11. существует такое число $c > 0$, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ и $\forall z \in Z$ $\|f_n z\| \leq c \|f z\| + c \|z\|$. Тогда из неравенств: $\|f_n z_n - f z_n\| \leq c \|f(z_n - z)\| + c \|z_n - z\| + \|f_n z - f z\|$ и из определений 1.3. и 1.4. получаем нужное: $\lim_n \|f_n z_n - f z_n\| = 0$.

§2. Устойчивость открытости линейных отображений при к.а.

Определение 2.1. Пусть X и Y - банаховы пространства, Z - векторное подпространство пространства X . Отображение $f: Z \subset X \rightarrow Y$ называется относительно открытым, если существует такое число $d > 0$, что $f B_Z(0, d) \supset f Z \cap B_Y(0, d)$. Семейство отображений $(f_\alpha)_{\alpha \in A} \subset C(Z, Y)$ называется относительно открытым, если существует такое число $d > 0$, что

$$\forall \alpha \in A \quad f_\alpha B_Z(0, d) \supset f_\alpha Z \cap B_Y(0, d)$$

Более подробно эти понятия и их взаимосвязь рассмотрены в работе [5]. Используя технику доказательства предложения 19 и 21 из [5] не трудно показать справедливость следующего предложения:

Предложение 2.2. Пусть X и Y - банаховы простран-

ства, $f: Z \subset X \rightarrow Y$ - линейное замкнутое отображение и его ядро $f^{-1}\{0\}$ имеет топологическое дополнение в Z , т.е. пространство Z можно представить в виде прямой топологической суммы $f^{-1}\{0\}$ и некоторого замкнутого векторного подпространства пространства $V: Z = f^{-1}\{0\} \oplus V$.

Тогда следующие три условия эквивалентны:

- а) отображение f - относительно открыто;
- б) существует такое число $\alpha > 0$, что $\forall z \in V \|fz\| \geq \alpha \|z\|$;
- в) отображение f - нормально разрешимо:

Следствие 2.3. Пусть X и Y - банаховы пространства, семейство отображений $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ таково, что $\forall \alpha \in A f_\alpha: Z \subset X \rightarrow Y$ - замкнутое линейное отображение, $f_\alpha^{-1}\{0\} \cap V_\alpha = \{0\}$ и существует такое число $c > 0$, что $\forall \alpha \in A \|P_\alpha\| \leq c$, где $P_\alpha: Z \rightarrow Z$ - линейный и непрерывный проектор Z на V_α вдоль $f_\alpha^{-1}\{0\}$. Тогда семейство отображений $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ равномерно относительно открыто тогда и только тогда, когда существует такое число $\alpha > 0$, что

$$\forall \alpha \in A \forall z \in V_\alpha \|f_\alpha z\| \geq \alpha \|z\|.$$

Теорема 2.4. Пусть X и Y - банаховы пространства, отображение $f: Z \subset X \rightarrow Y$ является линейным замкнутым относительно открытым, $\dim f^{-1}\{0\} < +\infty$ и $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ отображение f_n - относительно открыто и $\dim f_n^{-1}\{0\} \leq \dim f^{-1}\{0\}$.

Доказательство. В силу конечномерности ядра отображения f существует топологическое дополнение V к $f^{-1}\{0\}$ до Z . Тогда из предложения 2.2. существует такое число $\alpha > 0$, что

$$\forall z \in V \|fz\| \geq \alpha \|z\|. \quad (7)$$

Покажем, что существует такое число $\beta > 0$, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$

$$\forall z \in V \|f_n z\| \geq \beta \|z\|. \quad (8)$$

Т.е. покажем, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $\dim f_n^{-1}\{0\} \leq \dim f^{-1}\{0\} + \infty$ и что отображения f_n - относительно открыты. Если условие (8) не верно, то, переходя если нужно к подпоследовательности, можно считать, что существует такая последовательность векторов $(z_n) \subset V, \|z_n\| = 1$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n z_n\| = 0. \quad (9)$$

Из неравенства (7) $\forall n \in \mathbb{N} \|f_n z_n\| \geq \alpha > 0$ и поэтому корректно определение последовательности векторов (v_n) :

$$v_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\|f_n z_n\|} \cdot z_n$$

Тогда последовательность векторов (v_n) f -ограничена, причем из неравенства $\frac{1}{\|f_n z_n\|} \leq \frac{1}{\alpha}$ и из равенства (9):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n v_n\| = 0. \quad (10)$$

Далее, в силу теоремы 1.5. последовательность векторов $(f_n v_n - f v_n)$ - относительно компактна в пространстве Y . Поэтому существует такая подпоследовательность векторов (v_{n_j}) последовательности (v_n) , что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (f_{n_j} v_{n_j} - f v_{n_j}) = -y \in Y.$$

Таким образом мы из равенства (10) получаем равенство:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f v_{n_j} = y \quad (11)$$

В силу предложения 2.2. $fZ = f\bar{Z}$, значит, существует такой вектор $v \in Z$, что $y = f v$. Пусть $p: Z \rightarrow Z$ - линейный непрерывный проектор Z на V вдоль $f^{-1}\{0\}$. Тогда $y = f \circ p v + f \circ (I-p)v = f \circ p v$. Таким образом из равенства (11) получаем, что $\lim_{j \rightarrow \infty} f(v_{n_j} - p v) = 0$. Поэтому в силу неравенства (7) из предположения о принадлежности $v_{n_j} - p v \in V$ следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_{n_j} = p v. \quad (12)$$

Из равенств (11) и (12) и из замкнутости отображения f $y = f \circ p v$ и последовательность векторов (v_{n_j}) f -сходится к $p v$. Таким образом в силу предложения 1.16. получаем: $\lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_j} v_{n_j} = f \circ p v$, следовательно, из равенства (10) $f \circ p v = 0$. Но с другой стороны, $\forall n \in \mathbb{N} \|f_n v_n\| = \frac{1}{\|f_n z_n\|} \|f_n z_n\| = 1$. Значит, в силу равенства (11) получаем равенство: $\|f \circ p v\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|f v_{n_j}\| = 1$, которое противоречит равенству: $f \circ p v = 0$.

Следствие 2.5. Пусть X и Y - банаховы пространства, $f: Z \subset X \rightarrow Y$ - линейное замкнутое отображение и $f_n \xrightarrow{k.a.} f$. Предположим, что существует такое число $\alpha > 0$, что

$$\forall z \in Z \quad \|f z\| \geq \alpha \|z\|$$

Тогда существуют такие числа $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\beta > 0$, что

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall z \in Z \quad \|f_n z\| \geq \beta \|z\|.$$

Действительно, в этом случае $f^{-1}\{0\} = \{0\}$ и $V = Z$. Следовательно, для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ отображения

f_n -инъективны, причем в силу неравенства (8)

$$\forall z \in Z \quad \|f_n z\| \geq \delta \|z\|$$

Замечание 2.6. Пусть X и Y - банаховы пространства, $f: Z \subset X \rightarrow Y$ - линейное замкнутое отображение, $f_n \xrightarrow{k.a.} f$ и $\dim f^{-1}\{0\} < +\infty$. Тогда в силу теоремы 2.4. существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $\dim f_n^{-1}\{0\} < \dim f^{-1}\{0\}$. Поэтому существует такая подпоследовательность подпространств $(V_n)_{n \geq n_0}$ пространства Z , что

$$\forall n \geq n_0 \quad Z = f_n^{-1}\{0\} \oplus V_n. \quad (13)$$

Теорема 2.7. Пусть X и Y - банаховы пространства, $f: Z \subset X \rightarrow Y$ - линейное замкнутое относительно открытое отображение, $\dim f^{-1}\{0\} < +\infty$ и $f_n \xrightarrow{k.a.} f$. Тогда для того, чтобы для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $\dim f_n^{-1}\{0\} = \dim f^{-1}\{0\}$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\delta > 0$ и такая последовательность подпространств (V_n) пространства Z , удовлетворяющая условию (13), что $\forall n \geq n_0$

$$\forall z \in V_n \quad \|f_n z\| \geq \delta \|z\|.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть V - произвольное топологическое дополнение к $f^{-1}\{0\}$ в пространстве Z . Тогда из неравенства (8) для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $\forall z \in V \quad \|f_n z\| \geq \delta \|z\|$, где δ - некоторое положительное число. В силу равенства $\dim f_n^{-1}\{0\} = \dim f^{-1}\{0\}$, того, что $Z = f^{-1}\{0\} \oplus V$ и того, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $f_n^{-1}\{0\} \cap V = \{0\}$ получаем, что $Z = f_n^{-1}\{0\} \oplus V$, чем доказательство необходимости исчерпывается.

Достаточность. В силу теоремы 2.4. нам нужно показать, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $\dim f_n^{-1}\{0\} \geq \dim f^{-1}\{0\}$. Или, что то же, показать, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $f^{-1}\{0\} \cap V_n = \{0\}$. Предположим, что это условие не верно. Тогда существует такая последовательность векторов $(z_j) \subset f^{-1}\{0\}$ что $z_j \in V_n, \|z_j\| = 1$. В силу конечномерности пространства $f^{-1}\{0\}$ последовательность (z_j) можно выбрать сходящейся, т.е. $\lim z_j = z \in f^{-1}\{0\}$. Следовательно, в силу принадлежности z_j и z ядру отображения f последовательность векторов (z_j) - f -сходящаяся. Поэтому в силу предложения 1.16. получаем противоречие:

$$0 = \|f z\| = \|\lim f z_j\| \geq \delta \|z_j\| = \delta > 0$$

Следствие 2.8. (см. теорему I из [3] на случай линейных непрерывных отображений) Пусть X - гильбертово Y - банахово пространства, отображение $f: Z \subset X \rightarrow Y$ - линейное замкнутое нормально разрешимое и $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Тогда для равномерной относительной открытости семейства отображений $f_n: Z \rightarrow Y$ необходимо и достаточно, чтобы для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $\dim f_n^{-1}\{0\} = \dim f^{-1}\{0\}$.

Действительно, в случае гильбертово пространства мы можем в качестве дополнения к $f_n^{-1}\{0\}$ взять ортогональное. Поэтому нормы проекторов будут равны 1 и, значит, в силу результатов следствия 2.3. и теоремы 2.7. следствие 2.8. справедливо.

Следствие 2.9. Пусть X и Y - банаховы пространства, $f: Z \subset X \rightarrow Y$ - линейное замкнутое отображение и $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Тогда для инъективности отображения f и для его относительной открытости необходимо и достаточно, чтобы для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ отображения f_n были инъективны и последовательность отображений (f_n) была бы равномерно относительно открытой.

Справедливость следствия 2.9. получается из результатов следствия 2.3. и теоремы 2.9. в силу равенства $f_n^{-1}\{0\} = \{0\}$ для инъективных отображений.

Теорема 2.10. Пусть X и Y - банаховы пространства, $f: Z \subset X \rightarrow Y$ - линейное замкнутое отображение и $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Предположим, что f - биекция и отображение $f^{-1}: Y \rightarrow Z$ непрерывно. Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$ и такое число $d > 0$, что для всех $n \geq n_0$ отображение f_n - биекция и отображение $f_n^{-1}: Y \rightarrow Z$ - непрерывно, $\|f_n^{-1}\| \leq d$, $f_n^{-1} \xrightarrow{с.к.а.} f^{-1}: Y \rightarrow Z$ и $f_n \circ f^{-1} \xrightarrow{с.к.а.} I_Y$.

Доказательство. В силу условия теоремы отображение f является изоморфизмом пространства $(Z, \|\cdot\|_1)$ на пространство Y . Поэтому в силу определения 1.4. и в силу теоремы I6 из [5] существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$ и существует такое число $d > 0$, что для всех $n \geq n_0$ отображение f_n является изоморфизмом пространства $(Z, \|\cdot\|_1)$ на Y , причём $\forall y \in Y \ \|f_n^{-1}y\|_1 \leq d\|y\|$ и последовательность отображений $f_n^{-1}: Y \rightarrow (Z, \|\cdot\|_1)$ с.к.а. линейное непрерывное ото-

бражение $f^{-1}: Y \rightarrow Z$. Из указанного не трудно получить справедливость теоремы 2.10.

Замечание 2.11. Таким образом мы вывели условие, при котором достаточный признак компактной аппроксимации, указанный в теореме 1.13, является необходимым, а именно, отображение f - биективно и обратное к нему непрерывно. Тогда в качестве отображения g можно взять f^{-1} , а в качестве отображений h и h_n - взять $f_n \circ f^{-1}$ и I_Y соответственно.

Теорема 2.10. допускает следующее обращение:

Теорема 2.12. Пусть X и Y - банаховы пространства, отображение $f: Z \subset X \rightarrow Y$ - линейное замкнутое и $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Предположим, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ отображение f_n - биективно, $f_n^{-1}: Y \rightarrow Z$ - непрерывное отображение и существует такое число $\alpha > 0$, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $\|f_n^{-1}\| \leq \alpha$. Тогда отображение f - биекция, $f^{-1}: Y \rightarrow Z$ - непрерывное отображение,

$$f_n^{-1} \xrightarrow{с.к.а.} f^{-1} \quad \text{и} \quad f_n \circ f^{-1} \xrightarrow{с.к.а.} I_Y$$

Доказательство. В силу теоремы 2.10. и следствия 2.9. нам достаточно показать сюръективность отображения f , так как в силу поточечной сходимости f_n к f

$$\forall z \in Z \quad \|fz\| \geq \alpha^{-1} \|z\|. \quad (14)$$

Из неравенства (14) $\forall z \in Z \quad \|fz\| \geq \frac{1}{2} \min(\alpha^{-1}, 1) \|z\|_1$. Таким образом в силу полноты пространства $(Z, \|\cdot\|_1)$, непрерывности отображения $f: (Z, \|\cdot\|_1) \rightarrow Y$ и определения 1.4. мы можем воспользоваться результатом теоремы 17 из [5], откуда получаем сюръективность отображения f .

§3. Устойчивость свойств спектра линейных замкнутых отображений при компактной аппроксимации.

Теорема 3.1. Пусть X - банахово пространство, отображение $f: Z \subset X \rightarrow X$ - линейное замкнутое и $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Тогда для любого компактного подмножества M резольвентного множества $\rho(f)$ отображения f существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $M \subset \rho(f_n)$.

Доказательство. Если предположить, что заключение теоремы 3.1. не верно, то существует такая последовательность чисел $(\lambda_j) \subset M$, что

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \lambda_j \in \mathcal{D}(f_{n_j}). \quad (15)$$

В силу компактности множества M , не умаляя общности можно считать, что $\lim \lambda_j = \lambda \in M$. Тогда

$$\lambda_j I_2 \xrightarrow{с.к.а.} \lambda I_2$$

Поэтому из предложения 1.8. и из следствия 1.10.

$$\lambda_j I_2 - f_{n_j} \xrightarrow{с.к.а.} \lambda I_2 - f$$

Из последнего условия, из того, что $\lambda \in \rho(f)$ и того, что $\lambda I_2 - f$ - замкнутое отображение в силу теоремы 2.10. существует такое число $j_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $j \geq j_0$ отображение $\lambda_j I_2 - f_{n_j}$ - биекция и $(\lambda_j I_2 - f_{n_j})^{-1}: X \rightarrow X$ - непрерывное отображение. Следовательно, для всех $j \geq j_0$ $\lambda_j \in \rho(f_{n_j})$, что противоречит условию (15).

Следствие 3.2. Пусть X - банахово пространство, отображение $f: Z \subset X \rightarrow X$ - линейное замкнутое и $f_n \xrightarrow{с.к.а.} f$. Тогда для любого компактного множества $M \subset \rho(f)$ существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$ и такое число $\delta > 0$, что для всех $n \geq n_0$ $M \subset \rho(f_n)$ $\forall \lambda \in M \quad \|R(\lambda; f)\| \leq \delta$ и $\forall n \geq n_0, \lambda \in M \quad \|R(\lambda; f_n)\| \leq \delta$, (16)

$$\forall \lambda \in M \quad R(\lambda; f_n) \xrightarrow{с.к.а.} R(\lambda; f)$$

Доказательство этого утверждения опирается на результат теоремы 2.10. и аналогично доказательству теоремы 3.1.

Теорема 3.3. Пусть X - банахово пространство, отображение $f: Z \subset X \rightarrow X$ - линейное замкнутое и $f_n \xrightarrow{с.к.а.} f$. Предположим, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ отображение f_n имеет компактную резольвенту и $\rho(f) \neq \emptyset$. Тогда отображение f имеет компактную резольвенту.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(f)$. Тогда в силу теоремы 3.1. для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $\lambda \in \rho(f_n)$, поэтому отображения $R(\lambda; f_n): X \rightarrow X$ компактны. Следовательно, в силу

$$R(\lambda; f_n) \xrightarrow{с.к.а.} R(\lambda; f)$$

из следствия 12 из [6] получаем компактность $R(\lambda; f)$

Замечание 3.4. Пусть Z - векторное подпространство банахова пространства X , $f: Z \subset X \rightarrow X$ - линейное замкнутое отображение и M - компактное подмножество $\rho(f)$. Рассмотрим банахово пространство $C_X(M)$ всех непрерывных функций из M в X с нормой:

$$\|x\|_2 = \sup_{\lambda \in M} \|x(\lambda)\|$$

Далее, предположим, что $f_n \xrightarrow{с.к.а.} f$. Тогда в силу теоремы

3.1. существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $M \subset \rho(f_n)$. В дальнейшем будем считать, что $n_0 = 1$. В силу тождества Гильберта

$$\forall \lambda, \mu \in M \quad R(\lambda; f) - R(\mu; f) = (\mu - \lambda)R(\lambda; f)R(\mu; f)$$

и

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \lambda, \mu \in M \quad R(\lambda; f_n) - R(\mu; f_n) = (\mu - \lambda)R(\lambda; f_n)R(\mu; f_n).$$

Поэтому из неравенств (16)

$$\forall x \in X \quad \forall \lambda, \mu \in M \quad \|R(\lambda; f)x - R(\mu; f)x\| \leq |\mu - \lambda| \rho^2 \|x\| \quad (17)$$

и

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda, \mu \in M \quad \|R(\lambda; f_n)x - R(\mu; f_n)x\| \leq |\mu - \lambda| \rho^2 \|x\| \quad (18)$$

Значит, $\forall x \in X \quad R(\cdot; f)x \in C_X(M)$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad R(\cdot; f_n)x \in C_X(M)$.

Положим далее по определению

$$\forall x \in X \quad R_M(f)x = R(\cdot, f)x \quad (19)$$

и

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad R_M(f_n)x = R(\cdot, f_n)x \quad (20)$$

Отметим, что из неравенств (16) и определения нормы в

$$\forall x \in X \quad \|R_M(f)x\|_2 \leq \rho \|x\|$$

и

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \|R_M(f_n)x\|_2 \leq \rho \|x\|.$$

Теорема 3.5. Пусть X — банахово пространство, отображение $f: Z \subset X \rightarrow X$ — линейное замкнутое и M — компактное подмножество $\rho(f)$. Тогда если $f_n \xrightarrow{к.а.} f$, то последовательность отображений $R_M(f_n)$, определённых равенством (20) (с.к.а. отображение $R_M(f)$, определённое равенством (19)).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 15 из [7].

Замечание 3.6. Пусть Z — векторное подпространство комплексного банахова пространства X , $\lambda_0 \neq 0$ — изолированное собственное число отображения $f: Z \subset X \rightarrow X$, являющимся линейным замкнутым. Тогда существует такое число δ : $0 < \delta < |\lambda_0|$, что $B_c(\lambda_0, \delta) \cap \rho(f) = \{\lambda_0\}$. Определим проектор Рисса $p: X \rightarrow X$:

$$p = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; f) d\lambda. \quad (21)$$

Тогда pX — корневое подпространство отображения f , соответствующее собственному числу λ_0 . Пусть $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Тогда в силу компактности сферы $|\lambda - \lambda_0| = \delta$ из теоремы 3.1.

существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $|\lambda_n - \delta| < \rho(f_n)$.
 Поэтому для любого $n \geq n_0$ по аналогии с (22) определим проектор Рисса $P_n: X \rightarrow X$:

$$P_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; f_n) d\lambda. \quad (23)$$

Оказывается, что $P_n X$ содержит все корневые подпространства отображения f_n , которые соответствуют лежащим в круге $B_c(\lambda_0; \delta)$ собственным числам отображений f_n (см. [3] §149).

Теорема 3.7. Пусть X - комплексное банаховое пространство, $f: Z \subset X \rightarrow X$ - линейное замкнутое отображение и $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Тогда для любого изолированного собственного числа отображения f последовательность проекторов (23) с.к.а. проектор (22).

Справедливость этого утверждения не трудно получить из результата теоремы 3.5.

Следствие 3.8. Пусть X - комплексное банахово пространство, $f: Z \subset X \rightarrow X$ - линейное замкнутое отображение и $f_n \xrightarrow{к.а.} f$. Предположим, что $\lambda_0 \neq 0$ - изолированное собственное число отображения f . Тогда

а) существует такая последовательность чисел $\lambda_n \in \mathcal{Z}(f_n)$, что $\lambda = \lim \lambda_n$;

б) если $\dim p\lambda = 1$, то для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ в круге $B_c(\lambda_0; \delta)$ существует единственное собственное число из $\mathcal{Z}(f_n)$ единичной кратности и $\lambda = \lim \lambda_n$;

в) если $\dim p\lambda < +\infty$, то для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ в круге $B_c(\lambda_0; \delta)$ находится лишь конечное число чисел из $\mathcal{Z}(f_n)$, причем $\dim p_n \lambda = \dim p\lambda$.

Справедливость указанных утверждений получается непосредственно из результата теоремы 17 из [6] и теоремы 3.7.

Л и т е р а т у р а

1. Байнико Г.М. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту, 1970.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
3. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., К 34.

4. Szökefalvi-Nagy B. On the stability of the index of unbounded linear transformations. - Acta, Math, Acad, Hung., 1952, v. 3, p. 49-51.
5. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах". - Учен. зап. Латв. ун-та", 1975, т. 236, с. 39-58.
6. Лабеев В.И. Устойчивость секвенциальной предкомпактности отображений в топологических векторных пространствах при секвенциально предкомпактной аппроксимации. - "Учен. зап. Латв. ун-та," 1975, т.236, с. 76-90.
7. Лабеев В.И. Устойчивость свойств спектра линейных отображений при секвенциально компактной аппроксимации в банаховых пространствах. - "Учен. зап. Латв. ун-та", 1975, т. 236, с. 69-75.
8. Раковщик Л.С. Устойчивость индекса и полустойчивость дефектных чисел при компактной аппроксимации. - "Сибирский математический журнал", 1972, т.12, № 3, с. 630-638.

О некоторых свойствах ϵ -сходимости линейных замкнутых отображений

Введение. Автором в работе [4] показано, что если для некоторой последовательности линейных замкнутых отображений (f_n) с компактной резольвентой выполнены условия секвенциально компактной аппроксимации (с.к.а.), то предельное отображение f так же имеет компактную резольвенту. Г. М. Вайникко поставил вопрос о справедливости обратного утверждения. Оказалось, что оно верно, причём требование с.к.а. отображений можно ослабить и потребовать лишь равномерную сходимость на всех компактных множествах (ϵ -сходимость).

В предлагаемой статье основными результатами являются следующие: теорема 2.5. об устойчивости обратимости отображений при ϵ -сходимости, теорема 2.9. о сходимости по норме отображений обратных к f_n и f в той ситуации, когда $f_n \xrightarrow{\epsilon} f$ и отображение f ϵ -компактно обратимо, теоремы 3.1., 3.3., 3.4., где устанавливаются устойчивость свойств спектра линейных отображений при ϵ -сходимости, изучается вопрос о сходимости по норме проекторов Рисса, в теореме 3.6. указана взаимосвязь между спектрами отображений f_n и f .

§1. Некоторые свойства ϵ -сходимости линейных отображений.

Определение 1.1. Пусть X и Y - нормированные век-

торные пространства над полем действительных или комплексных чисел. Будем говорить, что последовательность линейных отображений $f_n: D_{f_n} \subset X \rightarrow Y$ равномерно сходится к отображению $f: D_f \subset X \rightarrow Y$ на всех компактных множествах их пространства X (в дальнейшем эту сходимость будем называть ϵ -сходимостью), если

а) $\forall n \in \mathbb{N} \cdot \overline{D_{f_n}} = X$ и $D_{f_n} \subset D_f$;

б) для любого компактного множества $M \subset X$

$$\lim_n \sup_{x \in M \cap D_{f_n}} \|f_n x - f x\| = 0.$$

В этой ситуации для краткости будем писать, что

$$f_n \xrightarrow{\epsilon} f.$$

Замечание 1.2. Определение 1.1. является обобщением понятия равномерной сходимости на всех компактных множествах для линейных непрерывных отображений, заданных на всем пространстве X .

Замечание 1.3. Отметим следующие простые свойства ϵ -сходимости, непосредственно следующие из определения 1.1. и из свойств операции \sup :

а) если $f_n \xrightarrow{\epsilon} f$, то для любой подпоследовательности отображений (f_{n_j}) последовательности (f_n)

$$f_{n_j} \xrightarrow{\epsilon} f ;$$

б) если $f_n \xrightarrow{\epsilon} f$, $g_n \xrightarrow{\epsilon} g$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ $D_{f_n} \cap D_{g_n} = X$, то для любых чисел α и β из K

$$\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{\epsilon} \alpha f + \beta g ;$$

в) $f_n \xrightarrow{\epsilon} f$ тогда и только тогда, когда $\forall \alpha \in K$

$$\alpha f_n - \alpha f \xrightarrow{\epsilon} 0.$$

Предложение 1.4. Пусть X и Y - нормированные пространства. Последовательность линейных отображений $f_n: D_{f_n} \rightarrow Y$

с-сходится к линейному отображению $f: D_f \rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности векторов $x_n \in D_{f_n}$ в пространстве X

$$\lim_n \|f_n x_n - f x_n\| = 0. \quad (1)$$

Доказательство. В силу определения 1.1. и относительной компактности любой сходящейся последовательности векторов условие (1) является необходимым.

Достаточность. Предположим, что утверждение предложения не верно, т.е. предположим, что существует такое компактное множество M из пространства X и существует такое число $a > 0$, что для некоторой подпоследовательности отображений (f_{n_j}) последовательности (f_n)

$$\sup_{x \in M \cap D_{f_{n_j}}} \|f_{n_j} x - f x\| > a.$$

Тогда существует такая последовательность векторов $x_j \in D_{f_{n_j}}$, что

$$\forall j \in N \quad \|f_{n_j} x_j - f x_j\| > a > 0 \quad (2)$$

В силу компактности множества M и включения $(x_j) \subset M$ из последовательности векторов (x_j) можно выделить сходящуюся подпоследовательность (x_{j_m}) . Тогда в силу условия (1) получим, что

$$\lim_m \|f_{n_{j_m}} x_{j_m} - f x_{j_m}\| = 0,$$

но это равенство противоречит неравенству (2).

Следствие 1.5. Пусть X и Y - нормированные пространства, последовательность линейных отображений $f_n: X \rightarrow Y$ компактно аппроксимирует линейное отображение $f: X \rightarrow Y$.

Тогда $f_n \xrightarrow{c} f$.

Действительно, из того, что $f_n \xrightarrow{c.к.а.} f$ следует, что $f_n - f \xrightarrow{c.к.а.} 0: X \rightarrow Y$ (см. [4]). Поэтому в силу определе-

ния компактной аппроксимации для любой сходящейся последовательности векторов $x_n \in \mathcal{D}_{f_n} = X$

$$\lim_n \|f_n x_n - f x_n\| = 0.$$

Следовательно, в силу предложения 1.4. $f_n \xrightarrow{c} f$.

Пример 1.6. Утверждение, обратное к предложению 1.5., не верно, вообще говоря. Действительно, пусть $X = Y = \ell_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{D}_{f_n} = \ell_2$ и последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ определена следующим образом:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \ell_2 \quad f_n x = (x | e_n) e_n,$$

где (e_n) - тотальная ортонормальная последовательность векторов в пространстве ℓ_2 . Тогда воспользовавшись результатом предложения 1.4. не трудно показать, что

$$f_n \xrightarrow{c} 0.$$

Но в то же время последовательность векторов $f_n e_n = e_n$ не относительно компактна в пространстве ℓ_2 , следовательно,

$$f_n \not\xrightarrow{c.k.a} 0.$$

Предложение 1.7. Пусть X и Y - нормированные пространства, последовательность линейных отображений $f_n: \mathcal{D}_{f_n} \rightarrow Y$ c -сходится к линейному непрерывному отображению $f: \mathcal{D}_f \rightarrow Y$. Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$ и такое число $c > 0$, что для всех $n \geq n_0$ отображение f_n - непрерывно и $\|f_n\| \leq c$.

Доказательство. Если предположить, что заключение предложения 1.7. не верно, то существуют такая подпоследовательность отображений (f_{n_j}) последовательности (f_n) и такая последовательность векторов (x_j) , что

$$\forall j \in N \quad \alpha_j \in \mathcal{D}_{f_n_j}, \|\alpha_j\| = 1, \lim \|f_n_j \alpha_j\| = +\infty. \quad (3)$$

Определим последовательность векторов $z_j \in \mathcal{D}_{f_n_j}$ следующим образом:

$$\forall j \in N \quad z_j = \frac{1}{\|f_n_j \alpha_j\|} \alpha_j,$$

(в силу условия (3) мы можем считать, что для всех $j \in N$ $f_n_j \alpha_j \neq 0$). Тогда из ограниченности последовательности векторов (α_j) в силу условия (3) $\lim z_j = 0$. Поэтому из предложения 1.4. получаем, что

$$\lim \|f_n_j z_j - f z_j\| = 0.$$

А так как отображение f - непрерывно, то

$$\lim f_n_j z_j = 0. \quad (4)$$

Но с другой стороны из оценки (3) и из определения последовательности векторов (z_j) следует, что справедливо следующее равенство:

$$\forall j \in N \quad \|f_n_j z_j\| = \frac{1}{\|f_n_j \alpha_j\|} \|f_n_j \alpha_j\| = 1,$$

противоречащее равенству (4).

Замечание 1.8. Пусть X - нормированное, Y - банахово пространство, последовательность линейных отображений $f_n: \mathcal{D}_{f_n} \rightarrow Y$ с-сходится к линейному отображению $f: \mathcal{D}_f \rightarrow Y$. Тогда $f_n - f \xrightarrow{c} 0$ и в силу непрерывности нулевого отображения из предложения 1.7. существуют такие числа $n_0 \in N$ и $c > 0$, что для всех $n \geq n_0$ отображение $f_n - f$ - непрерывно, причём $\|f_n - f\| \leq c$. Таким образом, учитывая полноту пространства Y и плотность подпространств \mathcal{D}_{f_n} в X (в \mathcal{D}_f - соответственно) мы для всех $n \geq n_0$ можем определить единственное линейное и непрерывное продолжение t_n (соответ-

венно h_n) отображения $f_n - f$ с \mathcal{D}_{f_n} на все X) соответственно на \mathcal{D}_f). Покажем теперь, что $t_n \xrightarrow{c} 0: X \rightarrow Y$. Отсюда в частности в силу определения 1.1. будет следовать, что $h_n \xrightarrow{c} 0: \mathcal{D}_f \rightarrow Y$.

Учитывая результат предложения 1.4., нам достаточно показать, что для любой сходящейся последовательности векторов $(x_n) \subset X$ $\lim_n \|t_n x_n\| = 0$. В силу предложения 1.7. существует такое число $c > 0$, что для всех $n \geq n_0$ $\|f_n - f\| \leq c$. Таким образом для всех $n \geq n_0$ $\|t_n\| \leq c$. далее, в силу плотности подпространства \mathcal{D}_{f_n} в X

$$\forall n \in N \exists z_n \in \mathcal{D}_{f_n} \text{ , что } \|x_n - z_n\| < \frac{1}{cn} \quad (5)$$

Отметим, что из сходимости последовательности векторов (x_n) в X и из условия (5) следует, что последовательность векторов (z_n) сходится, причем справедливо следующее неравенство:

$$\forall n \in N \quad \|t_n x_n - t_n z_n\| < \frac{1}{n} . \quad (6)$$

Тогда в силу равенства:

$$\forall n \in N \quad t_n z_n = (f_n - f) z_n,$$

предложения 1.4. и оценки (6) получаем нужное:

$$0 \leq \lim_n \|t_n x_n\| \leq \lim_n \|f_n z_n - f z_n\| + \lim_n \|t_n x_n - t_n z_n\| = 0.$$

Предложение 1.9. Пусть X - нормированное, Y - банахово пространства, последовательность линейных отображений $f_n: \mathcal{D}_{f_n} \rightarrow Y$ с-сходится к линейному отображению $f: \mathcal{D}_f \rightarrow Y$. Тогда существует единственное продолжение g_n отображения f_n с \mathcal{D}_{f_n} на \mathcal{D}_f такое, что $g_n \xrightarrow{c} f$.

Единственность продолжения g_n здесь понимается в следующем смысле: если существует такая последовательность ли-

нейных отображений $\varphi_n: \mathcal{D}_{f_n} \rightarrow Y$, что $\varphi_n \xrightarrow{c} f$,
 $\forall n \in \mathbb{N} \varphi_n|_{\mathcal{D}_{f_n}} = f_n$, то для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$
 $\varphi_n \equiv g_n$.

Доказательство. Пусть h_n - линейное непрерывное отображение, определённое в замечании 1.8. Для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ положим $g_n \stackrel{\text{def}}{=} f + h_n$. Тогда не трудно убедиться, что $g_n \xrightarrow{c} f$, причём в силу определения отображения h_n получаем, что

$$\forall x \in \mathcal{D}_{f_n} \quad g_n x = f x + h_n x = f x + f_n x - f x = f_n x.$$

Таким образом отображение g_n является продолжением отображения f_n .

Далее, пусть последовательность линейных отображений

$$\varphi_n: \mathcal{D}_f \rightarrow Y \quad \text{такова, что}$$

$$\varphi_n \xrightarrow{c} f, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_n|_{\mathcal{D}_{f_n}} = f_n.$$

Тогда $g_n - \varphi_n \xrightarrow{c} 0: \mathcal{D}_f \rightarrow Y$. Следовательно, в силу предложения 1.7. существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ отображение $g_n - \varphi_n$ является непрерывным. Поэтому в силу плотности подпространства \mathcal{D}_{f_n} в \mathcal{D}_f того, что сужение отображения $g_n - \varphi_n$ на \mathcal{D}_{f_n} является нулевым, получаем, что

$$\forall n \geq n_0 \quad g_n - \varphi_n \equiv 0 \quad \text{или} \quad g_n \equiv \varphi_n.$$

§2. Некоторые свойства компактно обратимых линейных отображений, действующих в банаховых пространствах.

Определение 2.1. Пусть X и Y - банаховы пространства. Будем говорить, что линейное отображение $f: \mathcal{D}_f \subset X \rightarrow Y$ компактно обратимо, если оно биективно и обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ является компактным, т.е. множество

$f^{-1}[B_Y(0,1)]$ - относительно компактно в пространстве X .
 В этой ситуации для краткости будем писать, что
 $f \in LIC(X, Y)$. (LIC - *linearly isometric compact*).

Замечание 2.2. Если линейное отображение $f \in LIC(X, Y)$,
 линейное отображение $g: Z \rightarrow D_f$ и $h: Y \rightarrow Z$ - биек-
 тивны и обратные к ним непрерывны, то $f \circ g \in LIC(Z, Y)$ и
 $h \circ f \in LIC(X, Z)$. В частности, если $g \in Isom(Z, D_f)$ и
 $h \in Isom(Y, Z)$, то $f \circ g \in LIC(Z, Y)$ и $h \circ f \in LIC(X, Z)$.
 Из последнего получаем, что если отображение $f \in LIC(X, Y)$,
 то для любого числа $\lambda \neq 0$ $\lambda f \in LIC(X, Y)$.

Справедливость этого утверждения следует из равенств:
 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ и $(h \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1}$
 и из сохранения компактности линейного отображения при
 композиции его с линейными непрерывными.

Предложение 2.3. Пусть X и Y - банаховы пространства и
 отображение $f \in LIC(X, Y)$. Тогда

а) отображение $f: D_f \subset X \rightarrow Y$ является замкнутым,
 т.е. его график замкнут в банаховом пространстве $X \times Y$.

б) если отображение $f: D_f \subset X \rightarrow Y$ - непрерывно, то
 $D_f = \overline{D_f}$ и алгебраические размерности пространств D_f
 и Y конечны и совпадают: $\dim Y = \dim D_f < +\infty$.

Доказательство. а). Пусть для некоторой последовательности
 векторов $(x_n) \subset D_f$

$$\lim_n x_n = \alpha \in X \quad \text{и} \quad \lim_n f x_n = y \in Y.$$

Тогда в силу непрерывности отображения $f^{-1}: Y \rightarrow X$
 $\alpha = \lim_n x_n = \lim_n f^{-1} f x_n = f^{-1} \lim_n f x_n = f^{-1} y \in D_f$.

б). В этой ситуации $f \in Isom(D_f, Y)$. Следовательно, в силу
 полноты пространства Y пространство D_f полно и по-
 этому замкнуто в пространстве X . А так как f^{-1} - ком-
 пактное отображение, имеющее непрерывное обратное, то
 $\dim D_f < +\infty$. Откуда $\dim D_f = \dim Y < +\infty$.

Пример 2.4. Пусть $X = Y$ - банахово пространство,
 $f: D_f \subset X \rightarrow X$ - линейное замкнутое отображение. Предполо-
 жим, что отображение f имеет компактную резольвенту, т.е.

существует такое число $\lambda_0 \in \rho(f)$, что отображение $R(\lambda_0, f): X \rightarrow X$ является компактным. Тогда

$$\forall \lambda \in \rho(f) \quad \lambda I - f \in LIC(X, X)$$

Действительно, в силу тождества Гильберта:

$$(\lambda I - f)^{-1} = R(\lambda, f) = R(\lambda_0, f) + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda, f)R(\lambda_0, f)$$

нужное получаем из сохранения компактности линейного отображения при его композиции с непрерывным и при сложении компактных отображений.

Теорема 2.5. Пусть X и Y - банаховы пространства, последовательность линейных отображений $f_n: \mathcal{D}_{f_n} \subset X \rightarrow Y$ сходится к линейному компактно обратимому отображению $f: \mathcal{D}_f \rightarrow Y$. Тогда существует такая непрерывная биекция $g_n: \mathcal{D}_{f_n} \rightarrow \mathcal{D}_f$, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $\|g_n\| \leq C = \text{const}$. Множество $g_n[B_Y(0, \delta) \cap \mathcal{D}_{f_n}]$ - относительно компактно в пространстве X ,

$$I_{\mathcal{D}_{f_n}} = g_n \circ f_n \quad \text{и} \quad I_{\mathcal{D}_f} = f_n \circ g_n.$$

Доказательство. Рассмотрим композицию линейных отображений $h_n \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y$, где h_n - отображение, определенное в замечании 1.8. и покажем, что

$$\lim_n \|h_n \circ f^{-1}\| = 0. \quad (7)$$

Для этого достаточно показать, что

$$\lim_n \sup_{\|y\|=1} \|h_n \circ f^{-1}y\| = 0.$$

Так как отображение $f \in LIC(X, Y)$, то множество $f^{-1}[S_Y(0, 1)]$ - относительно компактно в пространстве X и поэтому в силу определения 1.1. и в силу того, что

из замечания 1.8. $h_n \xrightarrow{c} 0: \mathcal{D}_f \rightarrow Y$ получаем, что

$$\lim_n \sup_{\|y\|=1} \|h_n \circ f^{-1}y\| = \lim_n \sup_{\|fx\|=1} \|h_n x\| = 0.$$

В силу равенства (7) существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$

$$\|h_n \circ f^{-1}\| \leq \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Тогда в силу полноты пространства Y для всех $n \geq n_0$ линейное отображение

$$I + h_n \circ f^{-1} \in \text{Isom}(Y, Y).$$

Следовательно, линейное отображение $(I + h_n \circ f^{-1})^{-1}: Y \rightarrow Y$ является непрерывным, причём в силу неравенства (8)

$$\|(I + h_n \circ f^{-1})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|h_n \circ f^{-1}\|} \leq 2, \quad (9)$$

откуда в силу оценки (9) для отображения $v_n: Y \rightarrow \mathcal{D}_f$, определенного следующим образом:

$$\forall n \geq n_0 \quad v_n \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1} \circ (I + h_n \circ f^{-1})^{-1} \quad (10)$$

справедлива оценка:

$$\forall n; n \geq n_0 \quad \|v_n\| \leq 2 \|f^{-1}\| = \text{const.} \quad (11)$$

Из (10) и из замечания 2.2. получаем, что $v_n^{-1} \in L[C(X, Y)]$ и поэтому $v_n[B_Y(0,1)]$ — относительно компактное множество в пространстве X . Рассмотрим теперь сужение отображения

v_n на $f\mathcal{D}_{f_n}$ и обозначим его через g_n . Тогда в силу непрерывности v_n , неравенства (11) и из свойств сужения

$$\forall n; n \geq n_0 \quad \|g_n\| \leq \|v_n\| \leq \text{const.}$$

$g_n[B_Y(0,1) \cap f\mathcal{D}_{f_n}] \subset v_n[B_Y(0,1)]$, следовательно, множество $g_n[B_Y(0,1) \cap f\mathcal{D}_{f_n}]$ — относительно компактно в пространстве X , таким образом нам осталось проверить равенства:

$$I_{\mathcal{D}_{f_n}} = g_n \circ f_n \quad \text{и} \quad I_{f\mathcal{D}_{f_n}} = f_n \circ g_n.$$

Пусть вектор $x \in \mathcal{D}_{f_n}$. Так как h_n — продолжение отображения $f_n - f$ с \mathcal{D}_{f_n} на \mathcal{D}_f , то $h_n x = (f_n - f)x$. Поэтому:

$$g_n^{-1} x = (I_Y + h_n \circ f^{-1}) \circ f x = f x + h_n x = f x + f_n x - f x = f_n x.$$

Покажем справедливость второго равенства. Пусть вектор $y \in f\mathcal{D}_{f_n}$. Тогда существует такой вектор $x \in \mathcal{D}_{f_n}$, что $y = f x$, т.е. $x = f^{-1} y$. Далее в силу определения отображения h_n и того, что $f^{-1} y = x \in \mathcal{D}_{f_n}$ получаем, что:

$$(I_Y + h_n \circ f^{-1}) y = y + h_n \circ f^{-1} y = y + (f_n - f) \circ f^{-1} y = f_n \circ f^{-1} y$$

Поэтому

$$\forall y \in f\mathcal{D}_{f_n} \quad y = f_n \circ f^{-1} \circ (I_Y + h_n \circ f^{-1})^{-1} y = f_n \circ g_n y.$$

Замечание 2.6. Отображение g_n , построенное при доказательстве теоремы 2.5. является ничем иным, как обратным к отображению f_n в подпространстве $f_n \mathcal{D}_{f_n}$ пространства Y . Таким образом мы еще показали, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $f_n \mathcal{D}_{f_n} = f \mathcal{D}_{f_n}$.

Пример 2.7. Пусть $X = Y = \ell_2$, $\mathcal{D}_{f_n} = \{(x, y) \in \ell_2 \mid \sum_j |y_j^2 x_j| < +\infty\}$, $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \ell_2 \mid \sum_j |y_j x_j| < +\infty\}$. Стационарную последовательность линейных отображений $f_n: \mathcal{D}_{f_n} \rightarrow \ell_2$ определим

как сужение отображения $f: \mathcal{D}_f \subset \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_2$, определенного следующим равенством:

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f \quad f(x, y) = (j(x, y))$$

на подпространство \mathcal{D}_{f_n} . Тогда $f_n \xrightarrow{c} f: \mathcal{D}_f \mapsto \mathcal{E}_2$,
 $f \in \text{LIC}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, $f_n \mathcal{D}_{f_n} = f \mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D}_f$ и поэтому $\overline{f_n \mathcal{D}_{f_n}} = \mathcal{E}_2$,
 причем $f_n \mathcal{D}_{f_n} \neq \mathcal{E}_2$.

Пример 2.8. Однако при всех предположениях теоремы 2.5. не обязательно подпространство $f_n \mathcal{D}_{f_n}$ - плотно в пространстве Y . Действительно, пусть $X=Y=\mathcal{E}_2$, положим по определению вектора $a=(2^{-1}; 2^{-2}; \dots; 2^{-n}; \dots)$ и пусть подпространство $Z \subset \mathcal{E}_2$ является ортогональным дополнением к $Z \{fa\}$. Далее, пусть δ_{nm} - символ Кронеккера и положим $e_n = (\delta_{nm})_{m \in N}$. Определим компактную биекцию $g: \mathcal{E}_2 \mapsto \mathcal{E}_2$ следующим образом:

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}_2 \quad g(x, y) = (2^{-d} x, y).$$

Положим по определению

$$\mathcal{D}_f = g \mathcal{E}_2 \quad \text{и} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad fx = g^{-1}x.$$

Тогда $f \in \text{LIC}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2)$. Далее, пусть

$$\forall n \in N \quad \mathcal{D}_{f_n} = gZ \quad \text{и} \quad f_n = f|_{gZ}.$$

Таким образом, если мы покажем, что $\overline{\mathcal{D}_{f_n}} = \overline{gZ} = \mathcal{E}_2$, то

$$f_n \xrightarrow{c} f, \quad f \in \text{LIC}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2) \quad \text{но} \quad f_n \mathcal{D}_{f_n} = f_n \mathcal{D}_{f_n} = Z \neq \mathcal{E}_2.$$

В силу разложения $\mathcal{E}_2 = Z \oplus Z \{fa\}$ и того, что $\overline{g \mathcal{E}_2} = \mathcal{E}_2$, получаем, что

$$\mathcal{E}_2 = \overline{g \mathcal{E}_2} = \overline{g(Z \oplus Z \{fa\})} = \overline{gZ + gZ \{fa\}} \subset \overline{gZ} + Z \{gfa\}.$$

(значок \oplus означает прямая топологическая сумма, а $+$ - просто сумма, не обязательно прямая). Поэтому нам достаточно показать, что $ga \in \overline{gZ}$. Определим последовательность векторов $(z_n) \subset \mathcal{E}_2$ следующим образом: $\forall n \in N$

$$z_n = (2^{-1}; 2^{-2}; 2^{-3}; \dots; 2^{-n}; \alpha_n; 0; 0; \dots),$$

где $\alpha_n = -\frac{2}{3} [2^n - 2^{-n}]$. Тогда не трудно проверить, что $(a | z_n) = 0$, поэтому $\forall n \in N \quad z_n \in Z$. Так как легко показать, что $\lim_n \|ga - gz_n\| = 0$, то $ga \in \overline{gZ}$.

Теорема 2.9. Пусть X , и Y - банаховы пространства, последовательность линейных отображений $f_n: \mathcal{D}_{f_n} \mapsto Y$ с-сходится к линейному компактно обратимому отображению

$f: D_f \rightarrow Y$. Если для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $D_{f_n} = D_f$, то существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$ и существует такое число $a > 0$, что для всех $n \geq n_0$, $f_n \in LIC(X, Y)$, $\|f_n^{-1}\| \leq a$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^{-1} - f^{-1}\| = 0. \quad (12)$$

Доказательство. Все заключения теоремы, кроме равенства (12) следует непосредственно из теоремы 2.5. потому что в этой ситуации $f D_{f_n} = f D_f = Y$.

Рассмотрим теперь разность отображений $f_n^{-1} - f^{-1}$, которая в силу условия (10) равна $f^{-1} [(I_Y + h_n \circ f^{-1})^{-1} I_Y]$. Положим

$$u_n \stackrel{\text{def}}{=} (I_Y + h_n \circ f^{-1})^{-1} - I_Y.$$

Тогда

$$f_n^{-1} - f^{-1} = f^{-1} \circ u_n, \quad I_Y + u_n = (I_Y + h_n \circ f^{-1})^{-1}. \quad (13)$$

При доказательстве теоремы 2.5. показано (см. условие (7)) что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n \circ f^{-1}\| = 0$. Покажем теперь, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^{-1} - f^{-1}\| = 0$.

Окуда как следствие (13) сразу получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n^{-1} - f^{-1}\| = 0$. Действительно, в силу условия (13)

$$(I_Y + u_n)(I_Y + h_n \circ f^{-1}) = I_Y,$$

поэтому

$$I_Y + u_n \circ h_n \circ f^{-1} + u_n + h_n \circ f^{-1} = I_Y.$$

Таким образом мы получили, что $(u_n + I_Y) \circ h_n \circ f^{-1} = u_n$, значит $(\|u_n\| + 1) \|h_n \circ f^{-1}\| \geq \|u_n\|$. Следовательно, справедливо неравенство:

$$\|u_n\| \leq \frac{\|h_n \circ f^{-1}\|}{1 - \|h_n \circ f^{-1}\|}$$

Итак, в силу условия (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$, т.е. нужное показали.

§3. Устойчивость свойств спектра линейных отображений при σ -сходимости.

Теорема 3.1. Пусть Z - векторное подпространство банахова пространства Y (теперь мы будем считать в дальнейшем, что $D_{f_n} = D_f = Z$, $\bar{Z} = Y$) и последовательность линейных отображений: $f_n: Z \rightarrow Y$ σ -сходится к линейному замкнутому отображению $f: Z \rightarrow Y$, которое имеет компактную резольвенту. Тогда для любого компактного под-

множества F резольвентного множества $\rho(f)$ существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$

а) $F \subset \rho(f_n)$;

б) $\forall \lambda \in \rho(f_n)$ отображение $R(\lambda; f_n): Y \rightarrow Y$ является компактным;

в) $\lim_{\lambda \in F} \sup_{\lambda \in F} \|R(\lambda; f_n) - R(\lambda; f)\| = 0$. (14)

Доказательство. Допустим, что утверждение а) теоремы 3.1. не верно. Тогда существует такая подпоследовательность отображений (f_{n_j}) последовательности (f_n) и существует такая последовательность чисел $(\lambda_j) \subset F$, что $\lim_j \lambda_j = \lambda \in F$ и $\forall j \in \mathbb{N} \quad \lambda_j \notin \rho(f_{n_j})$. (15)

С другой стороны,

$$\lim_j \| \lambda_j I_2 - \lambda I_2 \| = 0,$$

поэтому $\lambda_j I_2 \xrightarrow{c} \lambda I_2$, значит $\lambda_j I_2 - f_{n_j} \xrightarrow{c} \lambda I_2 - f$. Так как из примера 2.4. и из того, что $\lambda \in \rho(f)$, то отображение $\lambda I_2 - f \in LIC(Y, Y)$. Следовательно, выполнены все предположения теоремы 2.9., и поэтому существует такое число $j_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $j \geq j_0$

$$\lambda_j I_2 - f_{n_j} \in LIC(Y, Y).$$

Значит, для всех $j \geq j_0$ в силу определения 2.1. получаем, что $\lambda_j \in \rho(f_{n_j})$, но это противоречит условию (15).

В силу предложения 2.3. и того, что сумма закруток и непрерывного отображений с одинаковой областью определения является закрутым, отображение $f_n = \lambda I_2 - (\lambda I_2 - f_n)$, $\lambda \in \rho(f_n)$ является закрутым. Далее, в силу теоремы 2.9. для всех $\lambda \in F$ и для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ отображение $R(\lambda; f_n) = (\lambda I_2 - f_n)^{-1}: Y \rightarrow Y$ является компактным, тогда в силу тождества Гильберта для всех $\lambda \in \rho(f_n)$ отображение $R(\lambda; f_n) = (\lambda I_2 - f_n)^{-1}: Y \rightarrow Y$ - компактно.

Допустим, что утверждение в) теоремы 3.1. не верно. Тогда существуют такое число $\alpha > 0$, такая подпоследовательность отображений (f_{n_j}) последовательности (f_n) и такая последовательность чисел (λ_j) из F , что

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \|R(\lambda_j; f_{n_j}) - R(\lambda_j; f)\| \geq \alpha \quad (16)$$

В силу компактности множества F существует такая подпоследовательность чисел (λ_{j_m}) последовательности (λ_j) и существует такое число $\lambda \in F$, что $\lim_m \lambda_{j_m} = \lambda$. Поэтому

$\lambda_{j_m} I_2 - f_{j_m} \xrightarrow{c} \lambda I_2 - f$ и $\lambda_{j_m} I_2 - f \xrightarrow{c} \lambda I_2 - f$.
 Следовательно, в силу принадлежности числа $\lambda \in \rho(f)$ и отображения $\lambda I - f \in LIC(M)$ в силу теоремы 2.9.

$$\lim_m \|R(\lambda_{j_m}; f_{j_m}) - R(\lambda; f)\| = 0$$

и

$$\lim_m \|R(\lambda_{j_m}; f) - R(\lambda; f)\| = 0.$$

Тогда в силу неравенства: $\|R(\lambda_{j_m}; f_{j_m}) - R(\lambda_{j_m}; f)\| \leq \|R(\lambda_{j_m}; f_{j_m}) - R(\lambda; f)\| + \|R(\lambda_{j_m}; f) - R(\lambda; f)\|$ получаем следующее равенство:

$$\lim_m \|R(\lambda_{j_m}; f_{j_m}) - R(\lambda_{j_m}; f)\| = 0$$

которое противоречит неравенству (16).

Следствие 3.2. Пусть выполнены все предположения теоремы 3.1. Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ спектр отображения f_n состоит из изолированных собственных чисел, имеющих конечную кратность.

Доказательство. Так как в силу теоремы 3.1. существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ отображения f_n замкнуты и имеют компактную резольвенту, то нам осталось лишь сослаться на теорему 6.29. (см. [1] стр.237).

Пусть Z - векторное подпространство банахова пространства Y , последовательность линейных замкнутых отображений $f_n: Z \subset Y \rightarrow Y$ с-сходится к линейному замкнутому отображению $f: Z \subset Y \rightarrow Y$ с компактной резольвентой. Тогда в силу теоремы 3.1. для любого компактного подмножества $F \subset \rho(f)$ существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $F \subset \rho(f_n)$. В силу компактности множества F существует такое число $\epsilon > 0$, что

$$\sup_{\lambda \in F} \|R(\lambda; f)\| \leq \epsilon \quad (17)$$

В силу равенства (14) можно считать, что для всех $n \geq n_0$

$$\sup_{\lambda \in F} \|R(\lambda; f_n)\| \leq \epsilon \quad (18)$$

Рассмотрим теперь банахово пространство $C_Y(F)$ всех непрерывных функций $z: F \rightarrow Y$ с нормой:

$$\|z\|_{C_Y(F)} = \max_{\lambda \in F} \|z(\lambda)\|_Y$$

определим линейное непрерывное отображение

$$R_F(f): Y \longrightarrow C_Y(F)$$

следующим образом:

$$\forall y \in Y \quad R_F(f)y = R(\cdot, f)y.$$

Отметим, что в силу неравенства (I7) $\|R_F(f)\| \leq C$. Аналогичным образом для всех $n \geq n_0$ можно определить линейное непрерывное отображение

$$R_F(f_n): Y \longrightarrow C_Y(F)$$

и в силу неравенства (I8) $\|R_F(f_n)\| \leq C$. Тогда для любого вектора $y \in Y$ справедливо соотношение:

$$\|R_F(f_n)y - R_F(f)y\|_{C_Y(F)} \leq \sup_{\lambda \in F} \|R(\lambda, f_n) - R(\lambda, f)\| \|y\|.$$

Поэтому в силу равенства (I4) $\lim_n \|R_F(f_n) - R_F(f)\| = 0$. Таким образом мы доказали следующую теорему:

Теорема 3.3. Пусть Z - векторное подпространство банахова пространства Y , последовательность линейных отображений $f_n: Z \subset Y \rightarrow Y$ с-сходится к линейному отображению $f: Z \subset Y \rightarrow Y$ с компактной резольвентой. Тогда для любого компактного подмножества F резольвентного множества отображения существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $F \subset \rho(f_n)$ и $\lim_n \|R_F(f_n) - R_F(f)\| = 0$.

Пусть выполнены все предположения теоремы 3.3. Тогда спектр отображения f состоит из изолированных собственных чисел конечной корневой кратности (теорем 6.2.9.) из [1] стр. 237). Пусть $\lambda_0 \in \sigma(f) \setminus \{0\}$ - произвольно взятое комплексное число. Тогда существует такое число $\delta > 0$ ($\delta < |\lambda_0|$), что $B_C(\lambda_0, \delta) \cap \sigma(f) = \{\lambda_0\}$. Рассмотрим линейное непрерывное отображение $g: Y \rightarrow Y$, определённое следующим образом:

$$g = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda, f) d\lambda. \quad (19)$$

В [2] (§ I49 стр. 453) показано, что отображение g является линейным непрерывным проектором и

$$gY = \{z \in Z \mid \lim_n \|(\lambda I_Z - f)^n z\| = 0\}.$$

Таким образом, корневое подпространство, соответствующее собственному числу λ_0 содержится в gY . Не трудно убедиться в компактности отображения $g: Y \rightarrow Y$, значит, алгебраическая размерность gY конечна.

Пусть теперь последовательность линейных отображений $f_n: Z \rightarrow Y$ σ -сходится к линейному отображению $f: Z \rightarrow Y$ с компактной резольventой. Тогда в силу компактности сферы $S_C(\lambda_0, \delta)$ из теоремы 3.1. существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $S_C(\lambda_0, \delta) \subset \sigma(f_n)$. Поэтому для любого $n \geq n_0$ мы можем определить отображение g_n следующим образом:

$$g_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda, f_n) d\lambda. \quad (20)$$

Отметим, что подпространство $g_n Y$ содержит все корневые подпространства отображения f_n , которые соответствуют лежащим в круге $B_C(\lambda_0, \delta)$ собственным числам отображения f_n . Если $B_C(\lambda_0, \delta) \cap \sigma(f_n) = \emptyset$, то $g_n = 0$.

Теорема 3.4. Пусть Z - векторное подпространство банахова комплексного пространства Y и последовательность линейных отображений $f_n: Z \rightarrow Y$ σ -сходится к линейному отображению $f: Z \subset Y \rightarrow Y$ с компактной резольventой. Тогда для любого собственного числа $\lambda_0 \neq 0$ отображения f последовательность проекторов $g_n: Y \rightarrow Y$, определенная равенством (20) сходится по норме к проектору g , определенному равенством (19).

Доказательство. Справедливость этого утверждения получаем в силу равенства (14) из следующих соотношений:

$$\|g_n - g\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} \|R(\lambda, f_n) - R(\lambda, f)\| \cdot |d\lambda| \leq$$

$$\sup_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} \|R(\lambda, f_n) - R(\lambda, f)\| \cdot \delta.$$

Следствие 3.5. Пусть выполнены все предположения теоремы 3.4. Тогда

а) для любого числа $\lambda_0 \in \sigma(f) \setminus \{0\}$ существует такая последовательность чисел $\lambda_n \in \sigma(f_n)$, что $\lambda_0 = \lim_n \lambda_n$, $\dim g Y = \dim g_n Y < +\infty$, где g и g_n - проекторы, определенные условиями (20) и (19);

б) если $\dim g Y = 1$, то для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ в круге $B_C(\lambda_0, \delta)$ существует единственное число из $\sigma(f_n)$ единичной кратности λ_n и $\lambda_0 = \lim_n \lambda_n$.

Доказательство. Справедливость равенства $\dim gY = \dim g_n Y < +\infty$ следует в силу теоремы 17 из [4] из компактности проектора $g: Y \rightarrow Y$ и того, что последовательность отображений $g_n \xrightarrow{c.c.g} g$. Остальные утверждения легко доказываются методом от противного, в этой ситуации нужно воспользоваться результатом теоремы 3.4.

Теорема 3.6. Пусть Z - векторное подпространство комплексного банахова пространства Y и последовательность линейных отображений $f_n: Z \rightarrow Y$ s -сходится к линейному закнутому отображению $f: Z \subset Y \rightarrow Y$ с компактной резольвентой. Тогда

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} \mathcal{S}(f_m)} = \mathcal{S}(f)$$

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$ - произвольно выбранное собственное число (в силу того, что отображение f имеет компактную резольвенту любое число λ из $\mathcal{S}(f)$ является собственным) отображения f . Тогда в силу условия а) следствия 3.5. существует такая последовательность собственных чисел $\lambda_n \in \mathcal{S}(f)$, что $\lambda = \lim_n \lambda_n$. Далее, предположим, что $0 \in \mathcal{S}(f)$. Из условия теоремы 3.6. существует такое число $\lambda \in \rho(f)$, что отображение $R(\lambda; f): Y \rightarrow Y$ - компактно. Рассмотрим теперь отображения h_n и h , определенные следующим образом:

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \lambda I_Z - f \quad \text{и} \quad h_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda I_Z - f_n$$

Не трудно убедиться, что для последовательности отображений $h_n: Z \subset Y \rightarrow Y$ и для отображения $h: Z \subset Y \rightarrow Y$ выполнены все предположения теоремы 3.4. и число λ является изолированным собственным числом отображения h . Поэтому в силу условия а) следствия 3.5. существует такая последовательность собственных чисел (λ_n) отображений (h_n) что $\lambda = \lim_n \lambda_n$. Из того, что число λ_n является собственным для отображения $h_n = \lambda I_Z - f_n$ получаем, что $\lambda - \lambda_n \in \mathcal{S}(f_n)$. Таким образом существует такая последовательность собственных чисел $\lambda - \lambda_n \in \mathcal{S}(f_n)$, что $\lim_n (\lambda - \lambda_n) = 0$.

Обратно, пусть $\lambda \in \mathcal{S}$ - произвольная точка прикосновения множества $\bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{m \geq n} \mathcal{S}(f_m)}$. Тогда существует

такая последовательность чисел $\lambda_j \in \mathcal{Z}(f_{n_j})$, что $\lambda = \lim \lambda_j$. Если предположить что $\lambda \in \mathcal{P}(f)$, то в силу изолированности точек спектра отображения f существует такая компактная окрестность F точки λ , что $F \subset \mathcal{P}(f)$. Таким образом, существует такое число $j_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $j \geq j_1$ $\lambda_j \in F$. С другой стороны, в силу теоремы 3.1. существует такое число $j_2 \in \mathbb{N}$, что для всех $j \geq j_2$ $\lambda_j \in \mathcal{P}(f_{n_j})$. Следовательно, мы получили противоречие:

$\forall j \geq j_0 = \max(j_1, j_2) \quad \lambda_j \in \mathcal{Z}(f_{n_j}) \cap \mathcal{P}(f_{n_j}) = \emptyset$,
 значит, предположение: $\lambda \in \mathcal{P}(f)$ не верно, откуда $\lambda \in \mathcal{Z}(f)$

В §3 мы рассматривали s -сходимость в той ситуации, когда для всех $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D}_f$. Отметим, что при получении основных результатов это условие существенно использовалось. Если же рассматривать общую схему s -сходимости, то мы получаем следующую теорему:

Теорема 3.7. Пусть Y — банахово пространство, последовательность линейных отображений $f_n: \mathcal{D}_{f_n} \subset Y \rightarrow Y$ s -сходится к линейному замкнутому отображению $f: \mathcal{D}_f \subset Y \rightarrow Y$ с компактной резольвентой. Тогда для любого компактного подмножества $F \subset \mathcal{P}(f)$ существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ либо $\lambda \in \mathcal{P}(f)$ и в этой ситуации $\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D}_f$, либо $\lambda \in \mathcal{Z}_c(f_n) \cup \mathcal{Z}_c(f)$ и в этом случае $\mathcal{D}_{f_n} \neq \mathcal{D}_f$, $\mathcal{P}(f_n) = \emptyset$.

Доказательство. В силу теоремы 2.5. рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 3.1. не трудно показать, что существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ существует линейное непрерывное отображение $g_n: (\lambda I - f) \mathcal{D}_{f_n} \rightarrow \mathcal{D}_{f_n}$ (где число $\lambda \in F$ взято произвольно), что $I_{\mathcal{D}_{f_n}} = g_n \circ (\lambda I - f_n)$ и $I_{(\lambda I - f) \mathcal{D}_{f_n}} = (\lambda I - f_n) \circ g_n$. Если $\mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D}_f$, то $(\lambda I - f) \mathcal{D}_{f_n} = Y$ и поэтому $g_n = R(\lambda, f_n)$, т.е. $\lambda \in \mathcal{P}(f_n)$.

Если $\mathcal{D}_{f_n} \neq \mathcal{D}_f$, то $(\lambda I - f) \mathcal{D}_{f_n} \neq Y$, следовательно, $\lambda \in \mathcal{Z}(f_n)$. Далее, в силу инъективности $\lambda I - f_n$ получаем, что $\lambda \notin \mathcal{Z}_p(f_n)$. Таким образом, если $(\lambda I - f) \mathcal{D}_{f_n} = Y$, то $\lambda \in \mathcal{Z}_c(f_n)$, если $(\lambda I - f) \mathcal{D}_{f_n} \neq Y$, то $\lambda \in \mathcal{Z}_c(f_n)$.

Рассуждая методом от противного, не трудно показать, что если $\forall n \in \mathbb{N} \mathcal{D}_{f_n} = \mathcal{D}_f$, то для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $\rho(f_n) = \emptyset$.

Замечание 3.3. В примере 2.8. для любого числа $\lambda \in \mathcal{P}(f)$ $\lambda \in \mathcal{Z}_c(f_n)$, а в примере 2.7. для любого числа $\lambda \in \mathcal{P}(f)$ $\lambda \in \mathcal{Z}_c(f_n)$.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю И.В.Карклиньшу за внимание к данной работе.

Л и т е р а т у р а

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
2. Рисс Ф., Секверальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1954.
3. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах. - "Учен. зап. Латв. ун-та", 1975, т. 236, с. 39-58.
4. Лабеев В.И. Устойчивость секвенциальной предкомпактности отображений в топологических векторных пространствах при секвенциально предкомпактной аппроксимации - "Учен. зап. Латв. ун-та," 1975, т. 236, с. 76-90.

О г л а в л е н и е

Ш.Д.Трушин. К вопросу о коллинеациях в безразмерном про- ективном пространстве	3
Л.Я.Березина. Об одной геометрической интерпретации ли- нейной дискриминантной функции	8
Л.Я.Березина. Об одном способе минимизации параметров в задаче классификации образов	17
М.Т.Березина. Об n -мерной плоскости в E_{2n}	37
М.Т.Березина. Об орчопараметрическом семействе двумер- ных плоскостей в R_{14}^{12}	42
В.М.Гоштейн. Некоторые инвариантные образы комплекса прямых K_1 в \mathcal{L}_4	59
В.М.Гоштейн. Некоторые канонизации репера комплекса. прямых K_1 в $R_n^{2m_1 \dots m_s}$	71
Л.И.Матрениц. Класс конгруэнции $K_{3,4}^2$ в F_4	86
В.И.Лабеев. О некоторых свойствах компактной аппрокси- мации замкнутых линейных отображений	92
В.И.Лабеев. О некоторых свойствах с-сходимости линейных замкнутых отображений	109

Ученые записки, том 222

БЕЗРАЗМЕРНОЕ, ЕВКЛИДОВО И ПОЛУЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВА

Выпуск IV

Редактор Я.Томсон. Технический редактор В.Пуките
Корректор В.Пуките

Латвийский государственный университет
Рига 1975

Подписано к печати 30.07.1975. ЯТ 05343. Зак. № 961.
Ф/б 60x84/16. Бумага №1. Физ.п.л. 8,3. Уч.-и.л. 6,1
Тираж 350 экз. Цена 61 к.

Отпечатано на ротапринтере, Рига-50, ул. Вейденбаума, 5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки.