КАФЕДРА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

III

L. Pauple

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра электродинамики и механики сплошных сред

ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

III

Республиканский межвузовский сборник
научных трудов

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1977

1 ЛЛ

В сборнике представлены следующие направления исследований:

- расчет электромагнитного поля и сил в МГД насосах и расходомерах, а также для высокоскоростного наземного транспорта (ВСНТ);
- расчет электромагнитного поля и поля осредненных скоростей в индукционных плавильных печах;
- расчет напряженного состояния упругих многослойных сред;
- формулировка и исследование критериев качества для калориметрических систем;
- приближенное обращение интегрального преобразования Лапласа.

Сборник предназначен для научно-технических работников и студентов, интересующихся прикладными вопросами электродинамики и механики сплошных сред, математическими методами решения прикладных задач электродинамики и механики сплошных сред, а также решением тепловых задач.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
ЛГУ им. П.Стучки от 27 мая 1977 года

В $\frac{20305-075у}{М\ 812(11)-77}$ 219-77

УДК - 539.3

Н.Н.Блумберг, В.П.Тамуж
ЛГУ им.П.Стучки, АН ЛатвССР

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Многослойные и особенно трехслойные пластины широко используются в инженерном деле. Исследования по прочности, устойчивости и колебаниям многослойных анизотропных и армированных конструкций, которых объединяют родственные методы и идеи по их изучению широко представлены в различных публикациях. Нами выделены обобщающие работы [1,2,3,4,5], которые снабжены достаточно полной библиографией по рассматриваемому вопросу. Детальное ознакомление с литературой однако показывает, что не все вопросы, возникающие из-за многослойности изделий, решены достаточно подробно.

Давно известен такой способ технологии как склеивание. В последние два десятилетия получили распространение полимерные материалы. Оба эти обстоятельства требуют разработки методов, которые обеспечивают прочность, целостность и долговечность составных клеенных изделий. Существующие методы, обобщенные в обзоре [6], в настоящее время уже недостаточно точны и надежны. Намечены новые пути решения задачи, но их разработка еще не завершена [7].

В предлагаемой статье, опираясь на результаты исследований [3-10], заново составлены уравнения равновесия, которыми определяется напряженно-деформированное состояние многослойных пластин. Эти уравнения отличаются от аналогичных уравнений других авторов тем, что при их составлении не применяются некоторые распространенные допущения.
Иногда пренебрегают напряжениями растягивающими или сжимающими мягкие слои вдоль пластины, в других случаях считают, что касательные напряжения постоянны в мягких слоях, и что последние не обжимаются. Отказ от всех этих предпосылок позволяет уравновесить воздействие сил и моментов, прило-

женных к каждому отдельно выбранному слою независимо от того, мягкий тот или жесткий. Появляется также возможность задавать для каждого слоя любые граничные условия, что представляется нами важным обстоятельством в том случае, если исследуется прочность многослойных клеенных пластин в изменяющихся температурных условиях.

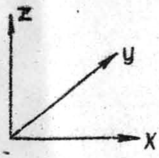
Следует обратить внимание, что клеевые прослойки достаточно тонкие. Общий объем мягкого связующего материала в клееных изделиях неуравненно ниже чем в трехслойных силовых панелях с мягким заполнителем или в армированных композитных материалах. В этих, и еще в целом ряде конструкций, которые изготовлены из разнородных материалов, могут образоваться области с высокой концентрацией напряжений при внешнем силовом или температурном воздействии. Тонкая клеевая прослойка является резким концентратором напряжений в краевой зоне многослойной пластины, что подтверждается различными наблюдаемыми у торцов дефектами.

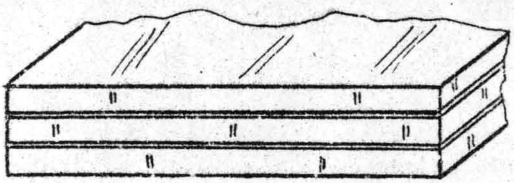
Составленные здесь уравнения позволяют детальнее изучить концентрацию напряжений и места ее локализации в краевых зонах. Решения, получаемые на основе уравнений, которые составлены путем аппроксимации перемещений или напряжений по толщине всего многослойного пакета в целом [2] , или в которых мягкие слои моделируются как набор некоторых не связанных между собой пружин [2] , не всегда удовлетворяют всем особенностям задачи, не полностью отражают существующую концентрацию напряжений и краевые эффекты в многослойных пластинах с тонким слоем клея при изменении температуры окружающей среды.

I. Исходные соотношения теории упругости.

Пусть дана многослойная прямоугольная пластина с чередующимися жесткими и мягкими слоями.

Под воздействием внешних силовых факторов и в результате изменения температуры многослойная пластина претерпевает деформацию, сопровождающуюся появлением механических напряжений. Тогда произвольная точка пластины получит перемещение, которое являясь вектором, имеет три проекции $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ и $w(x,y,z)$ на соответствующие оси прямоугольной Декартовой системы.





- жесткий слой (силикатное стекло)
- мягкий слой (полимерный клей)

Рис.I. Многослойная прямоугольная клеенная пластина

Компоненты симметричного тензора деформаций выражаются известными формулами Коши через перемещения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad . \tag{1.}$$

Связь деформаций с компонентами другого симметричного тензора, называемого тензором напряжений, устанавливается опытным путем. В случае малых деформаций в линейной теории упругости справедлив обобщенный закон Гука. Нам достаточно рассматривать материалы, обладающие плоскостью изотропии в отношение упругих свойств. Такие материалы называются трансверсально изотропными, причем плоскость изотропии каждого из слоев перпендикулярна толщине слоя, которая везде постоянна. Используя технические упругие постоянные, обобщенный закон Гука в нашем частном случае анизотропии записывается в следующем виде:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu^*}{E^*}\sigma_z \ ; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu^*}{E^*}\sigma_z \ ; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G^*}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu^{**}}{E}\sigma_x - \frac{\nu^{**}}{E}\sigma_y + \frac{\sigma_z}{E^*}; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G^*} . \tag{2}$$

Здесь $\sigma_{..}$ – нормальные напряжения; $\tau_{..}$ – касательные напряжения; E – модуль Юнга для направлений в плоскости изотропии; $G = E/2(1+\nu)$ – модуль сдвига для плоскости изотропии; E^* – модуль Юнга для направлений перпендикулярных к плоскости изотропии (трансверсальный модуль Юнга); G^* – трансверсальный модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости; ν^* – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в трансверсальном направлении; ν^{**} – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в трансверсальном направлении при растяжении в плоскости изотропии. Ввиду симметрии строения уравнения (2) существует зависимость:

$$\nu^{**}E^* = \nu E . \tag{3}$$

2. Гипотезы о распределении напряжений по толщине слоев.

В точной постановке решение задачи о напряженно деформированном состоянии пластины является трехмерной проблемой, что сопряжено с преодолением больших трудностей математического характера. В силу этого, в прикладной теории упругости применяются различные допущения упрощающие задачу и приводящие к зависимости неизвестных величин только от двух координат. Нами для указанной цели использованы два известных метода:

1) классическая гипотеза Кирхгофа-Лява для жестких слоев [11] ;

2) теория С.А. Амбарцумяна с учетом сжимаемости для мягких слоев [2, 12] .

Выбор указанных упрощающих предпосылок обусловлен весьма выраженной неоднородностью материалов, из которых собрана многослойная пластина. Заранее можно предположить, что неудовлетворительной будет попытка пользоваться одной лишь гипотезой Кирхгофа-Лява, как это принято делать для однородных тонких пластин. В этом случае напряжения σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} считаются второстепенными и их можно не принимать во внимание. В рассматриваемом случае целостность многослойной пластины зависит от напряжений σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} в мягких слоях, с помощью которых обеспечивается совместная работа жестких слоев. Поэтому представляется естественным избрать напряжения σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} на швах между жесткими и мягкими слоями в качестве неизвестных задачи. Далее с помощью уточненной теории С.А.Амбарцумяна, разработанной для анизотропных материалов, можно учесть относительно слабую сопротивляемость мягких слоев на сдвиг и поперечное обжатие.

Формально геометрические соображения, лежащие в основе гипотезы Кирхгофа-Лява и основанные на малости толщин слоев по сравнению с их размерами в плане, можно заменить подходящей физической моделью материала, обладающего различными свойствами в плоскостях параллельных к пластине и в трансверсальном к пластине направлению. Так достаточно в обобщенном законе Гука для трансверсально изотропного тела (2) принять упругие постоянные E^* и G^* бесконечно большими. При этом получается следующий результат:

$$\varepsilon_z^i = \gamma_{xz}^i = \gamma_{yz}^i = 0 , \tag{4}$$

где $i = 1,3,5,\dots,n$ нечетный номер, соответствующий жесткому слою; n - общее количество слоев пластины.

Для мягких слоев упругие постоянные E^* и G^* поскольку полимерный связующий материал достаточно податлив, сохраняют конечное численное значение. Поэтому по теории Амбарцумяна постолируется некоторый закон изменения напряжений $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ по толщине слоя, ибо соответствующие деформации $\varepsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ уже не нулевые. Последнее обстоятельство как показано в [2,5], вносит существенную поправку на определение напряженно деформированного состояния конструкций, изготовленных из слабо сопротивляющихся сдвигу материалов.

Приводим математическую формулировку гипотез Амбарцумяна.

а) для касательных напряжений:

$$\tau_{xz}^k(x,y,z) = \tau_{xz}^{ks}(x,y) f_1^k(z) + \tau_{xz}^{ka}(x,y) f_2^k(z) + \tau_{xz}^{kv}(x,y) f_3^k(z) \tag{5}$$

$$x \leftrightarrow y$$

где, второе аналогичное уравнение получается заметной x на y и наоборот;

K - четный номер, соответствующий мягкому слою;

$f^K_{jm}(z)$ - закон изменения напряжений по толщине слоя;

индексами "s" и "a" обозначены соответственно полусумма и полуразность напряжений сверху ("в"; $z = s_K/2$) и снизу ("н"; $z = -s_K/2$) слоя:

$$\tau^{Ks}_{xz} = 0{,}5(\tau^{Kв}_{xz} + \tau^{Kн}_{xz})$$

$$\tau^{Ka}_{xz} = 0{,}5(\tau^{Kв}_{xz} - \tau^{Kн}_{xz}), \qquad (6)$$

h_i, s_K - толщины жесткого и мягкого слоев;

индексом "v" обозначено напряжение в срединной плоскости слоя за вычетом τ^{Ks}_{xz} :

$$\tau^{Kv}_{xz} = \tau^{K}_{xz}(x,y,0) - \tau^{Ks}_{xz}; \qquad (7)$$

б) для поперечных нормальных напряжений:

$$\sigma^K_z(x,y,z) = \sigma^{Ks}_z(x,y)\, f^K_4(z) + \sigma^{Ka}_z(x,y)\, f^K_5(z) +$$
$$+ \left(\frac{\partial \tau^{Ka}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{Ka}_{yz}}{\partial y}\right) f^K_6(z) + \left(\frac{\partial \tau^{Ks}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau^{Ks}_{yz}}{\partial y}\right) f^K_7(z), \qquad (8)$$

где смысл обозначений прежний, что и в пункте а.

В заключении добавим, что при использовании обеих упомянутых здесь гипотез принимается отсутствие взаимного влияния поперечного нормального напряжения на продольные деформации и наоборот, т.е.

$$\nu^{*} = \nu^{**} = 0 . \qquad (9)$$

Хотя учитывается влияние изменяющейся температуры окружающей среды, в явном виде температура в приводимых здесь выкладках не присутствует, поскольку, следуя Тимошенко С.П. [13] , мы пользуемся методом устранения деформаций.

3. Выбор функций $f_m^k(z)$, аппроксимирующих напряжения по толщине слоев.

Строго обосновать определенный выбор затруднительно. Приходиться полагаться на опыт и результаты решения более простых задач, в частности, классических задач нагружения тонких однородных пластин. Известно, что в этом случае распределение касательных напряжений следует параболическому закону:

$$\tau_{xz}(x,y,z) \sim \varphi(x,y)\left(1 - \frac{4z^2}{h_i^2}\right), \tag{10}$$

где $\varphi(x,y)$ произвольная функция.

Приведенную закономерность рекомендует С.А.Амбарцумян в теории анизотропных пластин и оболочек. [2, 12] , считая ее достаточно точной в обычных инженерных расчетах. Детальная проверка соотношения (10) для армированных материалов дана в работе [5] . Указанные соображения позволяют избрать закон (10) в качестве одной из аппроксимирующих функций для касательных напряжений τ_{xz}^{kv} , τ_{yz}^{kv} в срединной плоскости слоя. Этим, по существу определяется выбор и остальных $f_m^k(z)$, которые получаются путем удовлетворения граничных условий сверху и снизу слоя, и интегрированием третьего уравнения равновесия в теории упругости.

Конкретный вид $f_m^k(z)$ в нашем случае следующий:

$$f_1^k(z)=1; \quad f_2^k(z)=\frac{2z}{s_k}; \quad f_3^k(z)=\left(1-\frac{4z^2}{s_k^2}\right);$$

$$f_4^k(z)=1; \quad f_5^k(z)=\left(\frac{3z}{s_k}-\frac{4z^3}{s_k^3}\right);$$

$$f_6^k(z)=\left(\frac{s_k}{4}-\frac{z^2}{s_k}\right); \quad f_7^k(z)=\left(\frac{z}{2}-\frac{2z^3}{s_k^2}\right); \tag{11}$$

Заметим, что Рейснер Э. [11] применял функции, подобные приведенным выше выражениям, обобщая классическую теорию изгиба пластин, в которой учитывается влияние перерезывающих сил на прогиб.

Однако, очевидно, что $f_m^k(z)$ могут выражаться любыми "разумными" по терминологии Амбарцумяна С.А. функциями. Запись (5) и (8) отражает этот произвол, и в случае, если выражения (II) окажутся недостаточно точными, то они могут корректироваться.

4. Перемещения в слоях.

Принятые гипотезы Кирхгофа-Лява и теория Амбарцумяна позволяет определить перемещения в слоях пластины. Общеизвестные выражения для жестких слоев выписывать не будем, а результат интегрирования уравнений (I) для деформаций ε_z^k, γ_{xz}^k и γ_{yz}^k мягких слоев следующий:

$$w_k(x,y,z) = w_0^k(x,y) + \varepsilon_z^{ks}(x,y) f_{41}^k(z) + \varepsilon_z^{ka}(x,y) f_{51}^k(z) +$$
$$+ \frac{1}{2(1+\nu_k)}\left[\left(\frac{\partial\gamma_{xz}^{ka}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{yz}^{ka}(x,y)}{\partial y}\right) f_{61}^k(z) +\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial\gamma_{xz}^{ks}(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{yz}^{ks}(x,y)}{\partial y}\right) f_{71}^k(z)\right] ;$$

$$u_k(x,y,z) = u_0^k(x,y) + \gamma_{xz}^{ks}(x,y) f_{11}^k(z) + \gamma_{xz}^{ka}(x,y) f_{21}^k(z) +$$
$$+ \gamma_{xz}^{kv}(x,y) f_{31}^k(z) - \frac{\partial w_0^k(x,y)}{\partial x} z - \frac{\partial\varepsilon_z^{ks}(x,y)}{\partial x} f_{42}^k(z) -$$
$$- \frac{\partial\varepsilon_z^{ka}(x,y)}{\partial x} f_{52}^k(z) - \frac{1}{2(1+\nu_k)}\left[\left(\frac{\partial^2\gamma_{xz}^{ka}(x,y)}{\partial x^2} +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^2\gamma_{yz}^{ka}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right) f_{62}^k(z) + \left(\frac{\partial^2\gamma_{xz}^{ks}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\gamma_{yz}^{ks}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right) f_{72}^k(z)\right]$$

$$u \to v \;; \quad x \to y \,, \qquad (12)$$

где

$$f^{\kappa}_{m1}(z)=\int\limits_0^z f^{\kappa}_m(z)dz\;;\qquad f^{\kappa}_{m2}(z)=\int\limits_0^z f^{\kappa}_{m1}(z)dz\;;$$

индекс "0" указывает, что координата $z=0$.

5. Сшивание слоев пластины и основные неизвестные задачи.

На i шве (под жестким слоем, имеющим i номер) должна соблюдаться непрерывность перемещений и напряжений:

$$u_i(x,y,-h_i/2)=u_\kappa(x,y,s_\kappa/2)$$

$$\tau^i_{xz}(x,y,-h_i/2)=\tau^\kappa_{xz}(x,y,s_\kappa/2) \tag{13}$$

$$u\to v\to w\;;\quad \tau_{xz}\to\tau_{yz}\to\sigma_z\;;\quad \kappa=i+1\,.$$

За неизвестные задачи примем u^i_0, v^i_0, w^i_0 жестких слоев и $\tau^{\kappa s}_{xz}$, $\tau^{\kappa a}_{xz}$, $\tau^{\kappa s}_{yz}$, $\tau^{\kappa a}_{yz}$, w^κ_0 мягких слоев. Непрерывность продольных перемещений будет соблюдена, если исключить переменные u^κ_0 и $\gamma^{\kappa v}_{xz}$ из (I2), используя для этого полусумму, $u^{\kappa s}$ и полуразность $u^{\kappa a}$ продольных перемещений на швах, определяемые неизвестными жестких слоев:

$$\frac{u_0^{i-1}\pm u_0^{i+1}}{2}+\frac{h_{i-1}}{4}\frac{\partial w_0^{i-1}}{\partial x}\mp\frac{h_{i+1}}{4}\frac{\partial w_0^{i+1}}{\partial x}$$

$$\kappa=i\;;\qquad u\to v\;;\qquad x\to y \tag{14}$$

Результат соответствующих выкладок приводим в нижеследующем компактном виде, опуская тривиальные, но довольно громоздкие алгебраические преобразования:

$$u_\kappa(x,y,z)=\sum_{r=1}^{9}u^{\kappa r}(x,y)\,\Phi^{\kappa r}(z)\;;\quad \begin{matrix}u\to v\\ x\to y\end{matrix}\;, \tag{15}$$

где, учитывая (II), суммируются следующие 9 слагаемые:

1) $u^{\kappa s}(x,y)\cdot 1$; 2) $u^{\kappa a}(x,y)\left(\frac{3z}{s_\kappa}-\frac{4z^3}{s_\kappa^3}\right)$; 3) $\gamma_{xz}^{\kappa s}(x,y)\left(\frac{2z^3}{s_\kappa^2}-\frac{z}{2}\right)$;

4) $\gamma_{xz}^{\kappa a}(x,y)\left(\frac{z^2}{s_\kappa}-\frac{s_\kappa}{4}\right)$; 5) $\frac{\partial w_0^\kappa(x,y)}{\partial x}\left(\frac{z}{2}-\frac{2z^3}{s_\kappa^2}\right)$;

6) $\frac{\partial \varepsilon_z^{\kappa s}(x,y)}{\partial x}\left(\frac{s_\kappa}{8}-\frac{z^2}{2}\right)$; 7) $\frac{\partial \varepsilon_z^{\kappa a}(x,y)}{\partial x}\left(\frac{27}{160}s_\kappa z-\frac{29z^3}{40 s_\kappa}+\frac{z^5}{5s_\kappa^3}\right)$;

$$8)\ \frac{1}{2(1+\nu_\kappa)}\left(\frac{\partial^2\gamma_{xz}^{\kappa a}(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma_{yz}^{\kappa a}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{5}{192}s_\kappa^3-\frac{s_\kappa z^2}{8}+\frac{z^4}{12 s_\kappa}\right); \qquad (16)$$

$$9)\ \frac{1}{2(1+\nu_\kappa)}\left(\frac{\partial^2\gamma_{xz}^{\kappa s}(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma_{yz}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{7}{320}s_\kappa^2 z-\frac{27}{240}z^3+\frac{z^5}{10 s_\kappa^2}\right);$$

Используя непрерывность поперечных перемещений, определяем σ_z на швах или, что то же, $\varepsilon_z^{\kappa s}$ и $\varepsilon_z^{\kappa a}$ мягких слоев:

$$\varepsilon_z^{\kappa s}=\frac{w_0^{\kappa-1}-w_0^{\kappa+1}}{s_\kappa}-\frac{1}{2(1+\nu_\kappa)}\left(\frac{\partial\gamma_{xz}^{\kappa a}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{yz}^{\kappa a}}{\partial y}\right)\frac{s_\kappa}{6};$$

$$\varepsilon_z^{\kappa a}=\frac{8}{5}\,\frac{w_0^{\kappa-1}-2w_0^{\kappa}+w_0^{\kappa}}{s_\kappa}-\frac{1}{2(1+\nu_\kappa)}\left(\frac{\partial\gamma_{xz}^{\kappa s}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{yz}^{\kappa s}}{\partial y}\right)\frac{s_\kappa}{10}. \qquad (17)$$

Теперь очевидно, что все соотношения (I3) выполнены, а формулы (I4) и (I7) позволяют выразить перемещения (I5) через основные неизвестные задачи. Количество неизвестных совпадает с количеством уравнений равновесия, которые можно составить для каждого слоя в зависимости от действующих в них внутренних сил и моментов. Таких уравнений будет 3 для жестких слоев и 5 для мягких слоев.

6. Деформации, напряжения, силы и моменты в слоях многослойной пластины

ε_z^κ в мягких слоях приведены формулами (I7), а γ_{xz}^κ и

γ_{yz}^{κ} компактно, аналогично (15), записывается в виде:

$$\gamma_{yz}^{\kappa}(x,y,z) = \sum_{r=1}^{6} \gamma_x^{\kappa r}(x,y)\, \psi^{\kappa r}(z)\,; \qquad \begin{matrix} u \to v \\ x \to y \end{matrix} \tag{18}$$

где, учитывая (11), суммируются следующие 6 слагаемых:

$$1)\ u^{\kappa a}(x,y)\left(\frac{3}{s_\kappa} - \frac{12z^2}{s_\kappa^3}\right); \qquad 2)\ \gamma_{xz}^{\kappa s}(x,y)\left(\frac{6z^2}{s_\kappa^2} - \frac{1}{2}\right);$$

$$3)\ \gamma_{xz}^{\kappa a}(x,y)\,\frac{2z}{s_\kappa}; \qquad 4)\ \frac{\partial w_0^{\kappa}(x,y)}{\partial x}\left(\frac{3}{2} - \frac{6z^2}{s_\kappa^2}\right);$$

$$5)\ \frac{\partial \varepsilon_z^{\kappa a}(x,y)}{\partial x}\left(\frac{27}{160}s_\kappa - \frac{27}{40}\frac{z^2}{s_\kappa}\right); \tag{19}$$

$$6)\ \frac{1}{2(1+\nu_\kappa)}\left(\frac{\partial^2 \gamma_{xz}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}(x,y)}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{7}{320}s_\kappa^2 - \frac{7}{80}z^2\right);$$

Формулы Коши (1), обобщенный закон Гука (2) и выражения для перемещений (15) мягкого слоя приводят к следующим соотношениям для напряжений:

$$\sigma_x^{\kappa} = \frac{E_\kappa}{1-\nu_\kappa^2}\sum_{r=1}^{9}\left(\frac{\partial u^{\kappa r}}{\partial x} + \nu_\kappa \frac{\partial v^{\kappa r}}{\partial y}\right)\Phi^{\kappa r}(z)\,; \qquad \begin{matrix} u \leftrightarrow v \\ x \leftrightarrow y \end{matrix}$$

$$\tau_{xy}^{\kappa} = G_\kappa \sum_{r=1}^{9}\left(\frac{\partial u^{\kappa r}}{\partial y} + \frac{\partial v^{\kappa r}}{\partial x}\right)\Phi^{\kappa r}(z)\,; \tag{20}$$

Внутренние силы и моменты вводятся в общепринятом виде:

$$N_x^{\kappa} = \int_{-s_\kappa/2}^{s_\kappa/2} \sigma_x^{\kappa}\,dz = \sum_{r=1}^{9}\left(\frac{\partial u^{\kappa r}}{\partial x} + \nu_\kappa \frac{\partial v^{\kappa r}}{\partial y}\right)A^{\kappa r}; \qquad \begin{matrix} u \leftrightarrow v \\ x \leftrightarrow y \end{matrix}$$

$$S^{\kappa}=\int\limits_{-s_\kappa/2}^{s_\kappa/2}\tau_{xy}^{\kappa}\,dz=\sum_{r=1}^{9}\left(\frac{\partial u^{\kappa r}}{\partial y}+\frac{\partial v^{\kappa r}}{\partial x}\right)A_G^{\kappa r}\quad, \tag{21}$$

где

$$A^{\kappa r}=\int\limits_{-s_\kappa/2}^{s_\kappa/2}\frac{E_\kappa}{1-\nu_\kappa^2}\,\Phi^{\kappa r}(z)dz\ ;\qquad A_G^{\kappa r}=\frac{1-\nu_\kappa}{2}A^{\kappa r}\quad ;$$

$$M_x^{\kappa}=\int\limits_{-s_\kappa/2}^{s_\kappa/2}\sigma_x^{\kappa}z\,dz=\sum_{r=1}^{9}\left(\frac{\partial u^{\kappa r}}{\partial x}+\nu_\kappa\frac{\partial v^{\kappa r}}{\partial y}\right)C^{\kappa r}\ ;\qquad \begin{matrix}u\longleftarrow v\\ x\longleftarrow y\end{matrix}\ .$$

$$H^{\kappa}=\int\limits_{-s_\kappa/2}^{s_\kappa/2}\tau_{xy}^{\kappa}z\,dz=\sum_{r=1}^{9}\left(\frac{\partial u^{\kappa r}}{\partial y}+\frac{\partial v^{\kappa r}}{\partial x}\right)C_G^{\kappa r}\ ; \tag{22}$$

где $C^{\kappa r}=\int\limits_{-s_\kappa/2}^{s_\kappa/2}\dfrac{E_\kappa}{1-\nu_\kappa^2}\,\Phi^{\kappa r}(z)z\,dz\ ;\ C_G^{\kappa r}=\dfrac{1-\nu_\kappa}{2}C^{\kappa r}\ ;$

Перерезывающие силы мягких слоев получаются интегрированием (I8) :

$$Q_x^{\kappa}=\int\limits_{-s_\kappa/2}^{s_\kappa/2}\tau_{xz}^{\kappa}\,dz=\sum_{r=1}^{6}\gamma_x^{\kappa r}\cdot F^{\kappa r}\ ;\qquad \begin{matrix}u\longleftarrow v\\ x\longleftarrow y\end{matrix}\ , \tag{23}$$

где $F^{\kappa r}=\int\limits_{-s_\kappa/2}^{s_\kappa/2}G_\kappa^{*}\,\psi^{\kappa r}(z)dz$

Ненулевые коэффициенты $A^{\kappa r}$, $C^{\kappa r}$, $F^{\kappa r}$ имеют следующие значения:

$$A^{\kappa 1}=\tilde{E}_\kappa s_\kappa\ ;\quad A^{\kappa 4}=-\tilde{E}_\kappa\frac{s_\kappa^2}{6}\ ;\quad A^{\kappa 6}=\tilde{E}_\kappa\frac{s_\kappa^3}{12}\ ;$$

$$A^{\kappa 8}=\tilde{E}_\kappa\frac{s_\kappa^4}{60}\ ;\quad C^{\kappa 2}=\tilde{E}_\kappa\frac{s_\kappa^2}{5}\ ;\quad C^{\kappa 3}=-\tilde{E}_\kappa\frac{s_\kappa^3}{60}\ ;$$

$$C^{\kappa 5}=\tilde{E}_\kappa\frac{s_\kappa^3}{60}\ ;\quad C^{\kappa 7}=\tilde{E}_\kappa a s_\kappa^4\ ;\quad C^{\kappa 9}=\tilde{E}_\kappa b s_\kappa^5\ ;$$

$$a=-\frac{1{,}75}{320}\ ;\quad b=-\frac{0{,}4}{640}\frac{1}{2(1+\nu)}\ ;\ \tilde{E}_\kappa=E_\kappa/(1-\nu_\kappa^2)\ ;$$

$$F^{\kappa 1}=2G_{\kappa}^{*}\ ; \qquad F^{\kappa 4}=G_{\kappa}^{*} s_{\kappa}\ ;$$

$$F^{\kappa 5}=\frac{9}{80}G_{\kappa}^{*} s_{\kappa}^{2}\ ; \qquad F^{\kappa 6}=\frac{7}{480}G_{\kappa}^{*} s_{\kappa}^{3}\ ; \tag{24}$$

Выше даны выражения для мягких слоев, полагая в них $u^{is}=u_0^i$, $u^{ia}=-0{,}5\,h_i\dfrac{\partial w_0^i}{\partial x}$; $\gamma_{xz}^{is}=\gamma_{xz}^{ia}=\varepsilon_z^{is}=\varepsilon_z^{ia}=0$ $(u \to v;\ x \to y)$ получим общеизвестные значения сил и моментов жестких слоев. Выражения аналогичные (2I,22) состоят из одного слагаемого, а коэффициенты B^i (для сил) и D^i (для моментов) таковы:

$$B^i=\tilde{E}_i h_i\ ; \qquad D^i=-\tilde{E}_i h_i^3/12\ ; \tag{25}$$

7. Система уравнений деформированной многослойной пластины и граничные условия.

Предыдущие выкладки позволяют привести систему уравнений равновесия многослойной пластины в ее окончательном виде, разрешенном относительно первых производных неизвестных функций. Такую форму записи предполагает метод пограничных функций, примененный для решения полученных уравнений в статье [I4].

Система уравнений условно разбивается на три группы. I-ая группа это $5n$ уравнений равновесия отдельных слоев, в которых $8n$ неизвестных:

а) равновесие сил:

$$\frac{\partial N_x^i}{\partial x}+\frac{\partial S^i}{\partial y}+n_x^i+\left(\tau_{xz}^{i-1}-\tau_{xz}^{i}\right)=0$$

$$x \to y$$

$$\frac{\partial Q_x^i}{\partial x}+\frac{\partial Q_y^i}{\partial y}+n_z^i+\left(\sigma_z^{i-1}-\sigma_z^{i}\right)=0 \tag{26}$$

б) равновесие моментов:

$$\frac{\partial M_x^i}{\partial x}+\frac{\partial H^i}{\partial y}-Q_x^i+m_x^i+\frac{h_i}{2}\left(\tau_{xz}^{i-1}+\tau_{xz}^{i}\right)=0$$

$$x \to y, \tag{27}$$

где n_x^i, n_y^i, n_z^i – заданные распределенные силы

m_x^i, m_y^i – заданные распределенные моменты

$i \to k$ – для мягких слоев

2-ая группа уравнений имеет вспомогательное назначение: исключить из системы все производные выше первой. Запишем эти уравнения для отдельных слоев.

а) жесткий слой:

$$\partial w_0^i/\partial x = \varphi_x^i \quad ; \qquad x \to y \tag{28}$$

б) мягкий слой:

$$\frac{\partial \gamma_{xz}^{ks}}{\partial x} = \psi_1^{ks} \; ; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}^{ks}}{\partial y} = \psi_2^{ks} \; ; \quad \frac{\partial \gamma_{xz}^{ks}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}^{ks}}{\partial x} = \psi_3^{ks} \; ;$$

$$\psi^{ks} = \psi_1^{ks} + \psi_2^{ks} \; ; \; \frac{\partial \psi^{ks}}{\partial x} = \psi_x^{ks} \; ; \; \frac{\partial \psi^{ks}}{\partial y} = \psi_y^{ks} \; ; \qquad s \to a \tag{29}$$

Последнюю 3-ью группу уравнений образуют соотношения, в которых производные основных неизвестных задачи выражены через силы и моменты. Они получаются в результате довольно громоздких алгебраических преобразований уравнений (21-23)

а) жесткий слой:

$$E_i h_i \frac{\partial u_0^i}{\partial x} = N_x^i - \nu_i N_y^i \; ; \qquad \begin{matrix} x \to y \\ u \to v \end{matrix}$$

$$G_i h_i \left(\frac{\partial u_0^i}{\partial y} + \frac{\partial v_0^i}{\partial x} \right) = S^i \; ;$$

$$\frac{E_i h_i^3}{12} \frac{\partial \varphi_x^i}{\partial x} = M_x^i - \nu_i M_y^i \quad ; \qquad x \to y$$

$$-\frac{G_i h_i^3}{6} \frac{\partial \varphi_x^i}{\partial y} = -\frac{G_i h_i^3}{6} \frac{\partial \varphi_y^i}{\partial x} = H^i \tag{30}$$

б) мягкий слой:

$$0{,}64 \frac{\partial w_0^k}{\partial x} = \frac{Q_x^k}{G_k^* s_k} - \frac{u_0^{k-1}}{s_k} + \frac{u_0^{k+1}}{s_k} - \varphi_x^{k-1} \left(\frac{h_{k-1}}{2 s_k} + 0{,}18 \right) -$$

$$-\varphi_x^{\kappa+1}\left(\frac{h_{\kappa+1}}{2s_\kappa}+0{,}18\right)-\frac{s_\kappa^2}{600(1+\nu_\kappa)}\,\psi_x^{\kappa s}\quad;$$

$$x \to y\ ; \quad u \to v$$

$$\frac{s_\kappa^2}{720(1+\nu_\kappa)}\left(\frac{\partial\psi_x^{\kappa a}}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y^{\kappa a}}{\partial x}\right)=\frac{S^\kappa}{G_\kappa s_\kappa^2}+\frac{\psi_3^{\kappa a}}{6}-$$

$$-\frac{S^{\kappa-1}}{2G_{\kappa-1}h_{\kappa-1}s_\kappa}-\frac{S^{\kappa+1}}{2G_{\kappa+1}h_{\kappa+1}s_\kappa}$$

$$+\frac{H^{\kappa-1}}{G_{\kappa-1}h_{\kappa-1}^2}\left(\frac{3}{s_\kappa}+\frac{1}{h_{\kappa-1}}\right)-\frac{H^{\kappa-1}}{G_{\kappa+1}h_{\kappa+1}^2}\left(\frac{3}{s_\kappa}+\frac{1}{h_{\kappa+1}}\right)\quad;$$

$$\frac{c\cdot s_\kappa^2}{640(1+\nu_\kappa)}\left(\frac{\partial\psi_x^{\kappa s}}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y^{\kappa s}}{\partial x}\right)=\frac{H^\kappa}{G_\kappa s_\kappa^3}+\frac{\psi_3^{\kappa s}}{60}-$$

$$-\frac{S^{\kappa-1}}{10G_{\kappa-1}h_{\kappa-1}s_\kappa}+\frac{S^{\kappa+1}}{10G_{\kappa+1}h_{\kappa+1}s_\kappa}+$$

$$+\frac{H^{\kappa-1}}{G_{\kappa-1}h_{\kappa-1}^2}\left(\frac{3}{5s_\kappa}+\frac{1}{10h_{\kappa-1}}\right)+\frac{H^{\kappa+1}}{G_{\kappa+1}h_{\kappa+1}^2}\left(\frac{3}{5s_\kappa}+\frac{1}{10h_{\kappa+1}}\right);$$

$$c=0{,}03\quad; \qquad (31)$$

где последовательная замена всех указанных ниже символов в последних двух соотношениях дает 4 новых:

$$\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right)\to\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\to\frac{\partial\psi_y}{\partial y};\quad \psi_3\to\psi_1\to\psi_2$$

$$S\to(N_x-\nu N_y)\to(N_y-\nu N_x);\quad H\to(M_x-\nu M_y)\to$$

$$\to(M_y-\nu M_x);\quad G\to E\to E\,.$$

Искомые неизвестные должны удовлетворять как системе уравнений (26 по 31), так и граничным условиям на торцевых поверхностях пластины. Мы не станем обсуждать все возможные комбинации опирания пластины, а будем считать, что кромки мягких слоев всегда свободны от внешних механических воздействий. Непосредственным подсчетом можно установить, что сист.25 уравнений записанных для каждого из мягких слоев имеет I4 порядок, т.е., на каждом торце слоя можно задавать 7 условий:

$$N_x^k\Big|_{x=\pm\ell}=\bar{N}_x^k\ ;\qquad S^k\Big|_{x=\pm\ell}=\bar{S}^k\ ;$$

$$Q_x^k\Big|_{x=\pm\ell}=\bar{Q}_x^k\ ;\qquad M_x^k\Big|_{x=\pm\ell}=\bar{M}_x^k\ ;$$

$$H^k\Big|_{x=\pm\ell}=\bar{H}^k\ ;$$

$$\gamma_{xz}^{ka}\Big|_{x=\pm\ell}=0\ ;\qquad \gamma_{xz}^{ks}\Big|_{x=\pm\ell}=0\ ; \tag{32}$$

где ℓ - половина длины пластины вдоль оси X .

Если пластина деформируется из-за перепада давления, то все надчеркнутые правые части (32) нулевые, а в случае нагрева клея правые части подсчитываются, исходя из упоминавшегося метода устранения тепловых деформаций.

Система I3 уравнений жестких слоев, как известно 8 порядка. Поэтому если края жесткого слоя свободны, то пригодны первые четыре из выражений (32) или в случае жесткой заделки можно писать:

$$u_0^i\Big|_{x=\pm\ell}=0\ ;\quad v_0^i\Big|_{x=\pm\ell}=0\ ;\quad w_0^i\Big|_{x=\pm\ell}=0\ ;\quad \varphi_x^i\Big|_{x=\pm\ell}=0\ . \tag{33}$$

Другой способ заделки комбинируется из условий (32) и (33) . Например, при свободном опирании слоя по контуру условие наложенное на Q_x^k в (32) заменяется условием $w_0^i\Big|_{x=\pm\ell}=0$ из (33).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., "Машиностроение", 1973.167 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М., "Наука", 1967.268 с.
3. Новичков Ю.Н. Теория толстостенных оболочек и пластин и ее приложения. Дис.на соиск.учен.степени физ.-мат.наук, М.,1973.
4. Ржаницын А.Р. Теория составных стержней строительных конструкций. М., "Стройиздат"1948.192 с.
5. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига, "Зинатне",1969. 275 с.
6. Артюхин Ю.П. Напряжения в клеевых соединениях. - В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1973,с.3-27.
7. Артюхин Ю.П. Модифицированная теория Голанда-Рейсснера склеенных пластин.-В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Вып.II,Казань, Изд-во Каз.ун-та,1975,с.136-148.
8. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров.М., "Наука",1970.482 с.
9. Крайчинович Д. Расчет трехслойной балки.-"Прикладная механика. Сер."Е",1972, 3, с.137-143.
10. Болотин В.В. К теории слоистых плит.-"Изв.АН СССР. Механика и машиностроение", 1963,3, с.65-72.
11. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., "Наука",1966. 635 с.
12. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.М., "Наука",1974.448 с.
13. Тимошенко С.П.,Гудьер Жд. Теория упругости.М.,"Наука", 1975.575 с.
14. Блумберг Н.Н. Решение задачи о цилиндрическом изгибе многослойных пластин методом пограничных функций (в настоящем сборнике).

УДК -539.3

Н.Н.Блумберг
ЛГУ им. П.Стучки

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

В данной статье ставится вопрос об определении напряженно деформированного состояния в прямоугольной пластине. Пластина изготовлена из листов силикатного стекла, склеенных тонким слоем полимерного связующего.

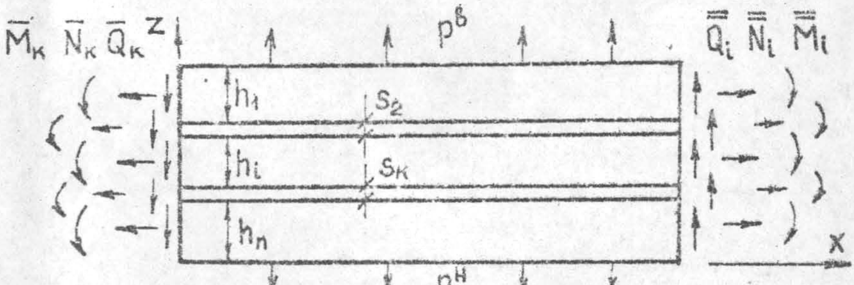
Многослойные пластины и родственные им по методам изучения анизотропные и армированные конструкции рассматриваются во многих работах, из которых перечислим лишь некоторые [I, 2,3,4] , имеющие обширную библиографию. В публикуемых работах больше внимание уделяется вопросам жесткости и устойчивости. Прочность многослойных конструкций исследуется реже [3,5,6,7] , причем характерно применение относительно упрощенных предпосылок, касающихся напряженно деформированного состояния мягких полимерных прослоек. Пренебрегая напряжениями, растягивающими слой в продольном направлении пластины, не удается учесть температурные деформации мягких слоев при нагреве или охлаждении составного изделия. Последнее существенно ввиду того, что произведение модуля упругости и коэффициента линейного температурного расширения у стекла и полимера примерно одинаково.

В предлагаемой статье используется система уравнений равновесия, составленная в статье [I0] . Одним из условий при ее составлении является то, чтобы граничные условия могли задаваться на торцах как жестких, так и мягких слоев. Это позволяет выявить в решении дополнительные быстро изменяющиеся у торцов пластины слагаемые, которые характеризуют присущие многослойным конструкциям краевые эффекты и концентрацию напряжений. Заметим, что в литературе почти отсутствуют подробные исследования напряженного состояния многослойных пластин в зависимости от весьма разнообразных комбинаций опирания или загружения торцевых поверхностей. На слабую разработку данного вопроса указывается в обзоре [9].

Система уравнений равновесия деформированной многослойной пластины сложна и громоздка. Этим объясняется то, что иногда [8] ограничиваются выводом самих уравнений, не приводя методику их решения. Поэтому здесь предложено использовать ранее не применявшийся к подобным задачам, метод асимптотического разложения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений или, короче, метод пограничных функций (МПФ). Пограничные функции являются теми быстро затухающими при удалении от краев пластины составляющими решения, о которых сказано выше. Математический аппарат МПФ детально освещен в [II], и нами он используется только для решения конкретной задачи механики. Аналогичные вопросы, касающиеся присутствия малого параметра при старшей производной, исследованы в статье [I7], однако нами избран путь решения систем уравнений первого порядка, не сводя их к одному эквивалентному разрешающему уравнению высокого порядка.

I. Постановка задачи

Пусть дана многослойная пластина, составленная из чередующихся жестких и мягких слоев.



 – „i" жесткий слой; – „к" мягкий слой

Рис.I. Поперечное сечение многослойной прямоугольной пластины.

Пластина нагружается внешними заданными распределенными усилиями n_x, n_z и моментами m_x, а также разностью давления $\Delta p = p^b - p^н$. Напряжения, получающиеся от внешнего силового воздействия, должны суммироваться с термическими, которые возникают при изменении температуры окружающей среды (на θ градусов), или при включении внутреннего источника тепла, который образован напылением ничтожно тонкого проводящего слоя на один из жестких слоев составной пластины. Следуя С.П. Тимошенко [12], учет температурных изменений проводится по методу устранений деформаций.

Даны физико-механические параметры трансверсально изотропных материалов, из которых могут изготовляться отдельные слои, причем плоскость изотропии параллельна самой пластине. Упругие константы в данном частном случае анизотропии следующие: E, E^* - модули упругости, в плоскости изотропии и в трансверсальном направлении соответственно; G, G^* - модули сдвига; ν - коэффициент Пуассона в плоскости изотропии. Остальные два коэффициента Пуассона трансверсально изотропного материала здесь приравнены нулю, чтобы исключить взаимное влияние продольных и поперечных нормальных напряжений на деформации. Если материал изотропный, то $E = E^*$; $G = G^*$.

Все приводимые в этом пункте величины, кроме Δp, относяться к одному произвольно взятому слою. Если необходимо указать на конкретно избранный слой, то следует ставить индексы i (нечетный номер жесткого слоя) или k (четный номер мягкого слоя); n - общее количество слоев пластины.

Неизвестными искомыми функциями задачи являются перемещения серединной плоскости слоя, напряжения, внутренние силы и моменты. N - продольная растягивающая слой сила; Q - перерезывающая сила, M - изгибающий слой момент. Напряжения: $\sigma_N = N/(h$ или $s)$; $q = Q/(h$ или $s)$; $\sigma_M = 6M/(h^2$ или $s^2)$. τ и σ_z касательные и нормальные трансверсальные напряжения в плокостях контакта двух прилегающих слоев (на швах). Номер шва совпадает с номером вышележащего слоя. Перемещения: u - продольное, w - поперечное. Угол поворота нормали жесткого слоя $\varphi = dw/dx$.

Перечисленные неизвестные находятся из решения системы уравнений, которая составлена в статье [10]. * После перехода к безразмерной координате $\zeta = x/l$ упрощенная система уравнений равновесия многослойной пластины при цилиндрической деформации записывается в нижеследующем виде:

а) жесткие слои

$$\frac{1}{l}\frac{du^i}{d\zeta} = \frac{\sigma_N^i}{\tilde{E}_i}; \quad \frac{h^i}{l}\frac{d\sigma_N^i}{d\zeta} + n_x^i + \tau^{i-1} - \tau^i = 0$$

$$\frac{h_i}{l}\frac{d\varphi^i}{d\zeta} = -2\frac{\sigma_M^i}{\tilde{E}_i}; \quad \frac{h_i}{l}\frac{d\sigma_M^i}{d\zeta} - 6q^i + 6\frac{m_x^i}{h_i} + 3(\tau^{i-1} + \tau^i) = 0$$

$$\frac{1}{l}\frac{dw^i}{d\zeta} = \varphi^i; \quad \frac{h_i}{l}\frac{dq^i}{d\zeta} + n_z^i + \sigma_z^{i-1} - \sigma_z^i = 0, \qquad (1)$$

$$\sigma_z^{i-1} = \frac{E_{i-1}^*}{s_{i-1}}\left(-0{,}6\, w^{i-2} + 3{,}2\, w^{i-1} - 2{,}6\, w^i\right)$$

$$\sigma_z^i = \frac{E_{i-1}^*}{s_{i-1}}\left(2{,}6\, w^i - 3{,}2\, w^{i+1} + 0{,}6\, w^{i+2}\right)$$

$$\tilde{E}_i = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2};$$

б) мягкие слои

$$\frac{s_\kappa}{l}\frac{d\sigma_N^\kappa}{d\zeta} + n_x^\kappa + \tau^{\kappa-1} - \tau^\kappa = 0$$

---

* Поскольку основная цель данной статьи изложить МПГ применительно к задачам деформирования многослойных пластин, то уравнения статьи [10] упрощены, пренебрегая в них градиентами касательных напряжений.

$$\frac{s_\kappa}{l}\frac{d\sigma_M^\kappa}{d\zeta}-6q^\kappa+6\frac{m_x^\kappa}{s_\kappa}+3(\tau^{\kappa-1}+\tau^\kappa)=0 \quad ;$$

$$\frac{s_\kappa}{l}\frac{dq^\kappa}{d\zeta}+u_z^\kappa+\sigma_z^{\kappa-1}-\sigma_z^\kappa=0 \;;$$

$$\frac{s_\kappa}{l}\frac{d\tau^{\kappa-1}}{d\zeta}=\frac{\nu_\kappa-1}{2}(10\sigma_M^\kappa+6\sigma_N^\kappa)+G_\kappa^*\Big[9\frac{\sigma_N^{\kappa-1}}{\bar{E}_{\kappa-1}}-$$

$$-3\frac{\sigma_N^{\kappa+1}}{\bar{E}_{\kappa+1}}-\frac{\sigma_M^{\kappa-1}}{\bar{E}_{\kappa-1}}\Big(9+2\frac{s_\kappa}{h_{\kappa-1}}\Big)-3\frac{\sigma_M^{\kappa+1}}{\bar{E}_{\kappa+1}}\Big] \;;$$

$$\frac{s_\kappa}{l}\frac{d\tau^\kappa}{d\zeta}=\frac{\nu_\kappa-1}{2}(10\sigma_M^\kappa-6\sigma_N^\kappa)+G_\kappa^*\Big[3\frac{\sigma_N^{\kappa-1}}{\bar{E}_{\kappa-1}}-$$

$$-9\frac{\sigma_N^{\kappa+1}}{\bar{E}_{\kappa+1}}-3\frac{\sigma_M^{\kappa-1}}{\bar{E}_{\kappa-1}}-\frac{\sigma_M^{\kappa+1}}{\bar{E}_{\kappa+1}}\Big(9+2\frac{s_\kappa}{h_{\kappa+1}}\Big)\Big] \;;$$

$$\frac{s_\kappa}{l}\frac{dw^\kappa}{d\zeta}=\frac{1}{0{,}64}\Big[\frac{q^\kappa\cdot s_\kappa}{G_\kappa^*}-u^{\kappa-1}+u^{\kappa+1}-\varphi^{\kappa-1}\Big(\frac{h_{\kappa-1}}{2}+$$

$$+0{,}18s_\kappa\Big)-\varphi^{\kappa+1}\Big(\frac{h_{\kappa+1}}{2}+0{,}18s_\kappa\Big)\Big], \qquad (2)$$

где

$$\sigma_z^{\kappa-1}-\sigma_z^\kappa=3{,}2\,E_\kappa^*\,(w^{\kappa-1}-2w^\kappa+w^{\kappa+1})/s_\kappa \;.$$

Решение системы дифференциальных уравнений (I),(2) должно удовлетворять граничным условиям, которые задаются на торцах каждого слоя:

$$\sigma_N(0)=\bar{\sigma}_N \;; \qquad \sigma_N(1)=\bar{\bar{\sigma}}_N \,.$$

$$\sigma_M(0)=\bar{\sigma}_M \;; \qquad \sigma_M(1)=\bar{\bar{\sigma}}_M \,.$$

$$q(0)=\bar{q} \;; \qquad q(1)=\bar{\bar{q}} \,. \qquad (3)$$

Поскольку пластина деформируется из-за разности давления сверху и снизу, то:

$$\tau^0(\zeta)=0\ ; \qquad \sigma_z^0(\zeta)=p^{в}$$

$$\tau^n(\zeta)=0\ ; \qquad \sigma_z^n(\zeta)=p^{н}. \tag{4}$$

2. Метод решения и алгоритм вычислений.

Поставленная в предыдущем пункте задача является краевой, что создает определенные трудности при ее решении. Так классические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, приводимые в общих курсах [13], во многих случаях приводят к вычислениям с плохо обусловленными матрицами [14] и недопустимо большим погрешностям результата. Этим характеризуются неустойчивые вычислительные процессы, к исключению которых применяются и разрабатываются различные методы, в частности, метод ортогонализации [15], нашедший распространение в исследованиях по теории оболочек [16].

Приведенные соображения указывают на необходимость поиска того или иного специального метода решения задач. В данной статье предлагается использовать МПФ. МПФ, по нашему мнению, обладает рядом достоинств, из которых отметим следующие: имеется строгое математическое обоснование метода [11]; разработан алгоритм решения [11]; решение исходной сложной и громоздкой задачи расщепляется на последовательно проводимые решения нескольких более простых задач, которые с одной стороны достаточно четко отражают физико-механические особенности задачи, а с другой стороны это способ избежать некоторые трудности, связанные с неустойчивым счетом.

Внешней отличительной особенностью решаемых уравнений, которая побуждает применить МПФ, является малый множитель (параметр) при первых производных неизвестных функций, относительно которых система разрешена. В целях дальнейшего изложения запишем приводимые выше уравнения (1,2) в следующем компактном виде:

$$\frac{d\bar{X}}{d\zeta}=A\bar{X}+\bar{\psi}, \tag{5}$$

где $\bar{X}(\zeta)$. - вектор неизвестных функций

$\vec{\psi}(\zeta)$ – вектор заданных функций

$A(\zeta)$ – квадратная матрица коэффициентов, постоянная или зависящая от аргумента ζ .

Если элементы матрицы $a_{ij}(i,j=1,2,3,\ldots,n)$ приравнять по порядку единице, то для некоторых конкретных систем уравнений выделяется малый параметр μ . Этим параметром умножается либо правая часть некоторой i строки, либо соответствующая этой строке производная. Опираясь на терминологию, принятую в [II] , эти два случая различаются как регулярное или сингулярное возмущение решаемой системы уравнений.

При регулярном возмущении решение задачи ищется в виде асимптотического степенного ряда разложенного по малому параметру:

$$\vec{x}_{рег}(\zeta,\mu) = \vec{x}_0(\zeta) + \mu\,\vec{x}_1(\zeta) + \ldots + \mu^k x_k(\zeta) + \ldots \qquad (6)$$

При сингулярном возмущении, полагая $\mu=0$, т.е., решая вырожденную задачу, нельзя удовлетворить всем граничным условиям из-за понижения порядка системы дифференциальных уравнений. В результате, решение, если искать его в виде разложения (6), значительно отличается от точного вблизи границ интервала интегрирования (в краевых зонах или пограничных слоях). Однако и в этом случае оказывается возможным построить асимптотическое разложение решения по малому параметру, если его брать в виде суммы:

$$\vec{x}(\zeta,\mu) = \vec{x}_в(\zeta,\mu) + \tilde{x}(\chi_0,\mu) + \tilde{\tilde{x}}(\chi_1,\mu) =$$

$$= \vec{x}_0(\zeta) + \tilde{x}_0(\chi_0) + \tilde{\tilde{x}}_0(\chi_1) + \mu\left[\vec{x}_1(\zeta) + \tilde{x}_1(\chi_0) + \tilde{\tilde{x}}_1(\chi_1)\right] +$$

$$+ \ldots + \mu^k\left[\vec{x}_k(\zeta) + \tilde{x}_k(\chi_0) + \tilde{\tilde{x}}_k(\chi_1)\right] + \ldots , \qquad (7)$$

где $\vec{x}_в$ решение внутренней задачи; $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ пограничные функции.

Аргументы пограничных функций связаны с координатой ζ соотношением:

$$x_i = \frac{\zeta - i}{\mu}; \qquad i = 0,1; \tag{8}$$

которое может рассматриваться как растяжение масштаба краевых зон.

Пограничные функции экспоненциально затухают, что установлено путем математических исследований в [II] или следует из физико-механических соображений, основанных на принципе Сен-Венана. Справедлива следующая оценка:

$$\|\tilde{x}\| \leqslant c \cdot \exp(-\varkappa \chi_0); \quad \|\tilde{\tilde{x}}\| \leqslant c \cdot \exp(\varkappa \chi_0),$$

где $\|\tilde{x}\|$ норма вектора, равная максимальной его компоненте; $c, \varkappa$ - произвольные постоянные.

Учитывая приведенную оценку, легко видеть, что:

$$\tilde{x}(\infty) = \tilde{\tilde{x}}(-\infty) = 0. \tag{9}$$

Последние соотношения позволяют формулировать дополнительные граничные условия для пограничных функций на поверхностях отделяющих краевую зону от остальной, занимаемой пластиной, области.

Выполняя (9) приближенно, со сколь угодно-заданной точностью Δ, находим протяженность краевой зоны от торца пластины, а также получаем оценку точности решения внутренней задачи:

$$\|\tilde{x}(\chi_0^*)\| = \|\tilde{\tilde{x}}(-\chi_1^*)\| = \Delta$$

$$\|\bar{x}(\zeta) - \bar{x}_b(\zeta)\| \leqslant 2\Delta, \text{ если } \mu\chi_0^* \leqslant \zeta \leqslant 1 + \mu\chi_1^*.$$

Переходим к изложению алгоритма вычислений. Для этого сперва заметим, что малым параметром будем считать частное среднеарифметическое толщины мягких слоев и длины пластины:

$$\mu = \frac{s^*}{l}; \qquad s^* = \sum_{k=2,4,6,\ldots}^{n-1} s_k \Big/ \frac{n-1}{2}. \tag{10}$$

Запишем систему (I,2) или (5) в следующем виде:

$$\frac{d\bar{y}}{d\zeta} = A_{11}\bar{y} + A_{12}\bar{z} + \bar{\psi}_1 = \bar{\varphi}(\bar{y}, \bar{z}, \zeta);$$

$$\mu\frac{d\bar{z}}{d\zeta} = A_{21}\bar{y} + A_{22}\bar{z} + \bar{\psi}_2 = \bar{f}(\bar{y}, \bar{z}, \zeta), \tag{11}$$

где $\bar{y}$ – вектор неизвестных жестких слоев

$\bar{z}$ – вектор неизвестных мягких слоев

$A_{ij}(i,j=1,2)$ подблоки матрицы A

Граничные условия системы (II) следующие:

$$\bar{z}_{1/2}(0) = \bar{z}\ ; \qquad \bar{y}_{1/2}(0) = \bar{y}$$

$$\bar{z}_{1/2}(1) = \bar{\bar{z}}\ ; \qquad \bar{y}_{1/2}(1) = \bar{\bar{y}}\ ,$$

где $\bar{z}_{1/2}, \bar{y}_{1/2}$, те компоненты векторов $\bar{z}, \bar{y}$ для которых заданы условия на торцах пластины.

Подставляя разложение (7) в систему (II) получаем:

$$\mu \frac{d\bar{y}_b}{d\zeta} + \frac{d\tilde{y}}{d\chi_0} + \frac{d\tilde{\tilde{y}}}{d\chi_1} = \mu\left[\bar{\varphi}_b + \tilde{\varphi} + \tilde{\tilde{\varphi}}\right]$$

$$\mu \frac{d\bar{z}_b}{d\zeta} + \frac{d\tilde{z}}{d\chi_0} + \frac{d\tilde{\tilde{z}}}{d\chi_1} = \bar{f}_b + \tilde{f} + \tilde{\tilde{f}}\ , \tag{13}$$

где

$$\bar{\varphi}_b = A_{11}\bar{y}_b + A_{12}\bar{z}_b + \bar{\psi}_1$$

$$\tilde{\varphi} = A_{11}\tilde{y} + A_{12}\tilde{z}$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}} = A_{11}\tilde{\tilde{y}} + A_{12}\tilde{\tilde{z}} \tag{14}$$

с аналогичным разложением функции $\bar{f}$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях для каждого из аргументов ζ, χ_0, χ_1 раздельно получаем несколько систем уравнений j -того приближения:

$$\frac{d\tilde{y}_j}{d\chi_0} = \tilde{\varphi}_{j-1}\ ; \qquad \frac{d\tilde{\tilde{y}}_j}{d\chi_1} = \tilde{\tilde{\varphi}}_{j-1} \tag{15}$$

$$\text{а)}\ \frac{d\bar{z}_{j-1}}{d\zeta} = \bar{f}_j\ ; \qquad \text{б)}\ \frac{d\bar{y}_j}{d\zeta} = \bar{\varphi}_j \tag{16}$$

(алгебр.сист.) (диффер.сист.)

$$\frac{d\tilde{z}_j}{d\chi_0}=\tilde{f}_j \; ; \qquad \frac{d\tilde{\tilde{z}}_j}{d\chi_1}=\tilde{\tilde{f}}_j \qquad (17)$$

Граничные условия приведенных систем следующие:

$$\tilde{y}_j(\infty)=0 \; ; \qquad \tilde{\tilde{y}}_j(-\infty)=0 \qquad (15гр.)$$

$$\bar{y}_{1/2}(0)=a\bar{y}-\tilde{y}_{1/2\,j}(0)$$

$$\bar{y}_{1/2\,j}(1)=a\bar{\bar{y}}-\tilde{\tilde{y}}_{1/2\,j}(0) \qquad (16гр.)$$

$$\tilde{z}_{1/2\,j}(0)=a\bar{z}-\bar{z}_{1/2\,j}(0); \qquad \tilde{z}_{1/2\,j}(\infty)=0$$

$$\tilde{\tilde{z}}_{1/2\,j}(0)=a\bar{\bar{z}}-\bar{z}_{1/2\,j}(1); \quad \tilde{\tilde{z}}_{1/2\,j}(-\infty)=0\,, \quad (17гр.)$$

где $a=1$, если $j=0$ и $a=0$, если $j\neq 0$.

Решение задачи осуществляется в той последовательности, в которой она записана, т.е., сперва решаются системы (I5), затем (I6a, I6б) и заканчивается j приближение решением систем (I7).

Опуская точные математические формулировки [II] , приведем следующие сведения необходимые при практической реализации МПФ.

Точность предложенного асимптотического разложения решения по малому параметру оценивается теоремой, в которой доказывается, что максимальное отклонение приближенного решения, полученного после выполнения j приближений, отличается от точного не больше, чем произведение некоторой константы на μ^{j+1} . Сказанное справедливо при выполнении пяти условий:

I-ое условие касается гладкости правых частей решаемых уравнений, которые для нас не существенны, ибо, ограничиваясь решением линейных задач , не приходится разлагать правые части в ряд Тейлора.

2-ое условие требует разрешимости алгебраической системы уравнений (I6а), т.е., здесь неизвестные мягких слоев должны быть выражены через неизвестные жестких слоев.

3-ее условие требует разрешимости системы дифференциальных уравнений (I6б) и единственность этого решения.

4-ое условие связано со свойствами подблока A_{22} матрицы A в (II) . Часть собственных значений матрицы A_{22} должны быть строго положительными, а оставшиеся строго отрицательными. Для комплексных собственных значений речь идет об их вещественной части.

5-ое условие налагается на число граничных условий для пограничных функций мягких слоев. Слева пластины должны быть заданы столько граничных условий, сколько отрицательных собственных значений имеет матрица A_{22}. Справа, аналогично, количество положительных собственных значений A_{22} должно равняться числу поставленных граничных условий. Данное условие вместе с предыдущим обеспечивает экспоненциальное затухание пограничных функций.

Проверка всех условий налагаемых на решаемую систему проще всего осуществляется путем непосредственного решения рассматриваемых здесь уравнений равновесия многослойных пластин.

3. Численный пример решения простейшей задачи – цилиндрическая деформация трехслойной пластины.

Трехслойная пластина изгибается от воздействия разности давления $\Delta p = p^{в} - p^{н}$, а также нагрета на θ градусов по отношению к той температуре, при которой в ней отсутствуют напряжения, возникающие из-за неодинаковых коэффициентов линейного температурного расширения отдельных слоев ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$).

Пусть даны геометрические и физико-механические параметры пластины, перечисленные в п.I и показанные на рис.I. Тогда граничные условия (3) или N^i, Q^i, M^i на торцах пластины определяются соотношениями:

$$N^i(0) = N^i(1) = \bar{N}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \frac{\alpha_i E_i \theta}{1-\nu_i} dz$$

$$M^i(0) = M^i(1) = \bar{M}^i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \frac{\alpha_i E_i \theta}{1-\nu_i} z\,dz = 0$$

$$Q^i(0) = Q^i(1) = \bar{Q}^i = 0\ ; \qquad i \neq 1$$

$$Q^1(0) = -Q^1(1) = \bar{Q}^1 = \frac{\Delta p \cdot l}{2}$$

$$i = 1,3\ ; \quad i \to \kappa\ ; \quad h_i \to s_2\ . \qquad (18)$$

Согласно МКФ вычисления начинаем с решения системы (I5) с граничными условиями (I5 гр.). Для этого следует переписать систему (I) делая следующие изменения: I) заменить аргумент ζ на χ_0 или χ_1 ; 2) переобозначить искомые напряжения.с тем, чтобы указать на то, что ищутся пограничные функции; 3) поставить индекс j –номер очередного выполняемого приближения; 4) приравнять нулю внешние заданные функции. Например:

$$\frac{h_i}{l}\frac{d\tilde{\sigma}^i_{Nj}}{d\chi_0}+\tilde{\tau}^{i-1}_{j-1}-\tilde{\tau}^i_{j-1}=0\,;$$

Поскольку в каждом уравнении неизвестна лишь производная, решение сводится к элементарной операции интегрирования.

Следующий шаг состоит в решении алгебраической системы (I6а), которое после преобразования системы (2) представимо в виде:

$$q^2_j=\frac{G^*_2}{s_2}\left[u^1_j-u^3_j+\varphi^1_j\left(\frac{h_1}{2}+0{,}18s_2\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi^3_j\left(\frac{h_3}{2}+0{,}18s_2\right)\right]+0{,}64\frac{G^*_2}{s_2}\frac{dw^2_{j-1}}{d\zeta}$$

$$\tau^1_j=q^2_j-\frac{1}{2}\frac{d\sigma^2_{N(j-1)}}{d\zeta}-\frac{1}{6}\frac{d\sigma^2_{M(j-1)}}{d\zeta}$$

$$\tau^2_j=q^2_j+\frac{1}{2}\frac{d\sigma^2_{N(j-1)}}{d\zeta}-\frac{1}{6}\frac{d\sigma^2_{M(j-1)}}{d\zeta}$$

$$w^2_j=\frac{w^1_j+w^3_j}{2}+\frac{s_2}{6{,}4\cdot E^*_2}\frac{dq^2_{j-1}}{d\zeta}\,. \qquad (19)$$

Полученное решение, которым неизвестные мягких слоев выражены через неизвестные жестких слоев и результат предыдущих приближений, позволяет находить решение системы (I6 б) с граничными условиями (I8). Систему (I6 б) удобно записать разрешенную относительно вторых производных, получаемую после преобразования системы (I):

$$\left(\frac{h_i}{l}\right)^2 \frac{d^2\sigma_N^i}{d\zeta}j \mp G_2^* \frac{h_i}{s_2}\left[\frac{\sigma_{Nj}^1}{\tilde{E}_1} - \frac{\sigma_{Nj}^3}{\tilde{E}_3} - \frac{\sigma_{Mj}^1}{\tilde{E}_1} - \frac{\sigma_{Mj}^3}{\tilde{E}_3}\right] = f_{Nj}^i(\zeta)$$

$$\left(\frac{h_i}{l}\right)^2 \frac{d^2\sigma_M}{d\zeta^2} \mp 6\frac{E_2^*}{s_2}(w^1 - w_j^3) + 3G_2^* \frac{h_1}{s_2}\left[\frac{\sigma_{Nj}^1}{\tilde{E}_1} - \frac{\sigma_{Nj}^3}{\tilde{E}_3} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma_{Mj}^1}{\tilde{E}_1} - \frac{\sigma_{Mj}^3}{\tilde{E}_3}\right] = f_{Mj}^i(\zeta)$$

$$\left(\frac{h_i}{l}\right)^2 \frac{d^2 w_j^i}{d\zeta^2} = -2h_i \frac{\sigma_{Mj}^i}{\tilde{E}_i}\,, \qquad (20)$$

где $i=1$ при верхнем знаке

$i=3$ при нижнем знаке

f_{Nj}^i и f_{Mj}^i – известные функции, которые определяются в зависимости от заданных нагрузок или результата ранее выполненных приближений.

Решение системы (20) находим в два приема. Сперва составляются 3 уравнения интегрируемые непосредственно:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(h_1\sigma_{Nj}^1 + h_3\sigma_{Nj}^3\right) = F_N(\zeta)$$

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(h_1^2\sigma_{Mj}^1 + h_3^2\sigma_{Mj}^3 + 3(h_1+h_3)h_1\sigma_{Nj}^1\right) = F_M(\zeta)$$

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\frac{w_j^1 + w_j^3}{l^2}\right) = -\frac{2}{h_1}\frac{\sigma_{Mj}^1}{\tilde{E}_1} - \frac{2}{h_3}\frac{\sigma_{Mj}^3}{\tilde{E}_3}\,. \qquad (21)$$

После решения первых двух уравнений приведенной системы можно количество неизвестных в системе (20) уменьшить до трех и преобразовать к виду:

$$\frac{d^2\sigma^1_{Nj}}{d\zeta^2} - a\sigma^1_{Nj} + b\sigma^1_{Mj} = \Phi_N(\zeta)$$

$$\frac{d^2\sigma^1_{Mj}}{d\zeta^2} + 3a\sigma^1_{Nj} - 3b\sigma^1_{Mj} - c\sigma_{zj} = \Phi_M(\zeta)$$

$$\frac{d^2\sigma_{zj}}{d\zeta^2} + e\sigma^1_{Nj} + g\sigma^1_{Mj} = \Phi_z(\zeta), \qquad (22)$$

где после введения безразмерных параметров

$$\alpha = \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_3}; \qquad \beta = \frac{h_1}{h_3}; \qquad \gamma = 2(1+\nu);$$

$$t = \frac{h_1}{l}; \qquad \kappa = \frac{G_2^* l^2}{\tilde{E}_1 s_2 h_1},$$

получаем следующие выражения для коэффициентов при неизвестных функциях:

$$a = \kappa(1 + 4\alpha\beta + 3\alpha\beta^2);$$

$$b = \kappa(1 - \alpha\beta^2);$$

$$c = 6/t^2;$$

$$e = 6\alpha\beta\gamma\kappa(1+\beta);$$

$$g = 2\gamma\kappa(1+\alpha\beta^3). \qquad (23)$$

Решение полученной системы (22) осуществляем стандартным методом: находим собственные значения и собственные векторы матрицы коэффициентов. Характеристическое уравнение для собственных значений следующее:

$$\lambda^6 - (a+3b)\lambda^4 + cg\lambda^2 - c(ag+bc) = 0 . \qquad (24)$$

Составляющие собственного вектора для каждого из трех корней $\lambda_m^2 (m=1,2,3)$ даются формулами:

$$r_{1m} = -\frac{gc + \lambda_m^4 - \lambda_m^2 \cdot 3b}{ec + 3a\lambda_m^2} ; \quad r_{2m} = 1$$

$$r_{3m} = +\frac{3a}{c} r_{1m} + \frac{\lambda_m^2 - 3b}{c} . \qquad (25)$$

Тогда общее решение системы (22) можно записать в матричных обозначениях:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{Nj}^1 \\ \sigma_{Mj}^1 \\ \sigma_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{Nj}^1 \\ \sigma_{Mj}^1 \\ \sigma_{zj} \end{Bmatrix}^* + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 1 & 1 & 1 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{1j}^+ \exp(\lambda_1\zeta) + c_{1j}^- \exp(-\lambda_1\zeta) \\ c_{2j}^+ \exp(\lambda_2\zeta) + c_{2j}^- \exp(-\lambda_2\zeta) \\ c_{3j}^+ \exp(\lambda_3\zeta) + c_{3j}^- \exp(-\lambda_3\zeta) \end{Bmatrix} \qquad (26)$$

где звездочкой помечен вектор какого-либо частного решения, а C_{mj}^+ и C_{mj}^- константы интегрирования, определяемые из граничных условий.

Завершается каждое из приближений решением системы (17) с граничными условиями (17 гр.). Перезаписывая систему (2) следует придерживаться тех же правил, которые даны выше при записи погранфункций жестких слоев. Далее разрешим преобразованную указанным способом систему (2) относительно вторых производных тех неизвестных, для которых обычно задаются граничные условия:

$$\frac{d^2\tilde{\sigma}^2_{Nj}}{d\chi_0^2} - 6(1-\nu)\tilde{\sigma}^2_{Nj} = \tilde{f}_N(\chi_0)$$

$$\frac{d^2\tilde{\sigma}_{Mj}}{d\chi_0^2} - 30(1-\nu)\tilde{\sigma}^2_{Mj} - 6\tilde{q}^2_j = \tilde{f}_M(\chi_0)$$

$$\frac{d^2\tilde{q}^2_j}{d\chi_0^2} - \frac{5}{(1+\nu)}\,\tilde{q}^2_j = \tilde{f}_q(\chi_0) \qquad (27)$$

здесь правые части $\tilde{f}$ образованы из ранее найденных погранфункций жестких слоев.

Мы здесь и ранее определяем лишь левые погранфункции, ибо ввиду симметрии они равны также и правым погранфункциям. Решение (27) достаточно просто и дает резко затухающие составляющие в сумме окончательного решения, накапливаемого по формуле (7) после выполнения очередного приближения. Результат считается достаточно точным, и вычисления прекращаются, если очередное приближение дает поправку к уже имеющейся сумме (7) менее I %.

Приведенный алгоритм позволяет решить конкретную задачу и получить численные или графические результаты. Рассматривалась симметричная по толщине пластина. Во всех случаях $\Delta p = p^{в} - p^{н} = 0{,}5$ атм ; $h_1 = h_3 = 1$ см ; $\nu = 0{,}25$; $\alpha_2 E_2^* \theta = -120\,\frac{кг}{см^2}$; $E_1 = E_3 = 30\cdot E_2^*$; $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2/15$.

Различные варианты расчета помечаются буквой, если изменяются геометрические параметры, и цифрой, если меняется характер внешнего воздействия:

$A - l = 10$ см; $s_2 = 0{,}1$ см

$B - l = 31{,}6$ см; $s_2 = 0{,}1$ см

$C - l = 31{,}6$ см; $s_2 = 1$ см

$1 - \Delta p \neq 0$; $\theta = 0$

$2 - \Delta p = 0$; $\theta \neq 0$

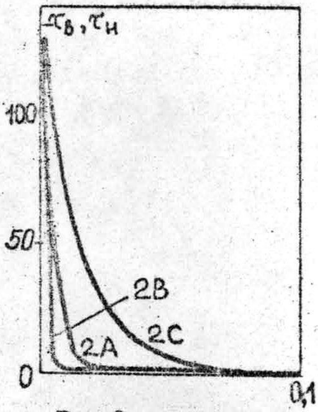


Рис.2. Касательные напряжения в склейке при $=-60^\circ C$

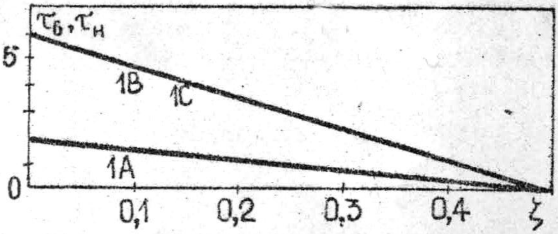


Рис.3. Касательные напряжения в склейке при $=0{,}5$ атм.

Приводимые графики касательных напряжений характеризуют коренное отличие между результатами вычислений по МКФ и обычно излагаемыми в литературе, когда пренебрегают механическими свойствами мягких слоев в продольном направлении, а также не удовлетворяют граничным условиям на их торцах.

Во первых, при температурных воздействиях, численные значения касательных напряжений на порядок выше по сравнению с теми же напряжениями от изгиба разностью давления. Методы расчета с указанными выше допущениями для симметричных пластин при постоянной температуре приводят к тождественно нулевому результату.

Во-вторых, изменение длины образца и толщины мягкого слоя незначительно изменяют τ от приложения Δp. С другой стороны, τ при $\theta=const$ сохраняет свое максимальное значение почти неизменным, а меняется только относительная длина локализации концентратора касательных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

I. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., "Машиностроение",1973,
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.,"Физматгиз", 1967.266 с.
3. Новичков Ю.Н. Теория толстостенных оболочек и пластин и ее приложения. Дис.на соиск. учен.степени докт.физ.-мат. наук,М., 1973. 392 с.
4. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков.Рига, "Зинатне",1969. 276 с.
5. Ржаницын А.Р. Теория составных стержней строительных конструкций. М., "Стройиздат", 1948.192 с.
6. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров.М., "Наука", 1970. 482 с.
7. Крайчинович Д. Расчет трехслойной балки.- "Прикладная механика.Сер."Е",1972,3,с.137-143.
8. Артюхин Ю.П. Модифицированная теория Голанда-Рейсснера склеенных пластин.- В кн.:Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, Изд-во Каз.гос.университета, 1975, с.136-148.
9. Алумяэ Н.А. Теория упругих оболочек и пластинок.- В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т.3, М., "Наука", 1972,с.227-266.
10. Блумберг Н.Н. Уравнения равновесия упругой многослойной пластины.(В настоящем сборнике).
II. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений.М., "Наука", 1973.272 с.

12. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.М.,"Наука", 1975.575 с.

13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., "Наука", 1974.332 с.

14. Бахвалов Н.С. Численные методы. Ч.I.М., "Наука",1973. 632 с.

15. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.- "Успехи математических наук", 1961,т.ХУI,вып.3, с.171-174.

16. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости.Киев,"Наук. думка",1973,228 с.

17. Вишек М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - "Успехи математических наук", 1957, №5, вып.12,с.3-122.

Ю.Я.Микельсон, А.Т.Якович
ЛГУ им.П.Стучки

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В ИНДУКЦИОННЫХ ПЕЧАХ
Часть II

Как уже отмечалось в первой части настоящего обзора [1], первым этапом для теоретического решения задачи о движении расплава в индукционных тигельных печах (ИТП) в безиндукционном приближении, является нахождение распределения плотности электромагнитной силы, а вторым этапом - исследование гидродинамических явлений в жидком металле. В данной II части обзора анализируются математические модели и методы решения этой задачи.

I. Электромагнитное поле и силы

Все работы, рассмотренные в этом параграфе, условно разделены на аналитические, в которых находятся аналитические выражения для магнитной индукции и электромагнитной силы, и на работы, в которых уравнение для векторного потенциала

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{A}{r^2}=i\hat{\omega}A+j_a , \qquad (1.1)$$

где $A=A(r,z)$ - азимутальная составляющая комплексного векторного потенциала;

j_a - плотность построенного тока;

$\hat{\omega}=\sigma\mu_0 r_0^2\omega$ - безразмерная частота ; (I.2)

$A_0=j_0\mu_0 r_0^2$ - характерный потенциал ; (I.3)

i - мнимая единица,

решается численными методами. В большинстве аналитических работ авторы пренебрегают конечной высотой проводника - в качестве модели служит бесконечно длинный проводящий цилиндр с постоянными электромагнитными свойствами по всему объему ($\sigma=const$; $\mu=\mu_0$). В тех случаях, когда допускается также предположение о бесконечной высоте индуктора, его воздействие учитывается заданием магнитной индукции на боковой поверхности проводящего цилиндра в виде периодически зависящей от времени функции (однофазная обмотка) или в виде бегущей волны (многофазная обмотка).

Для расчетов с учетом конечной высоты индуктора, последний заменяется бесконечно тонким азимутальным токовым слоем j_φ радиуса r_1 (рис.I.I.)

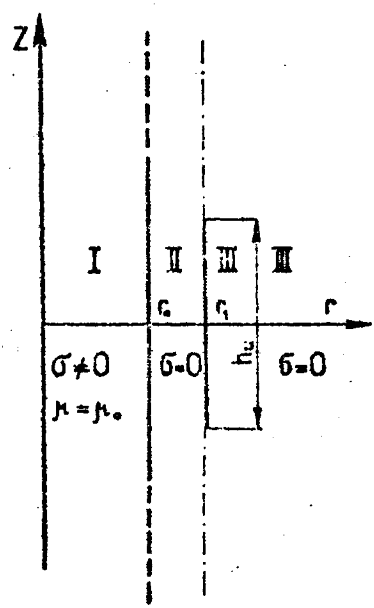


Рис.I.I
Модель индукционной тигельной печи - проводящий цилиндр с радиусом r_0 и индуктор с высотой h_u

Далее рассмотрены основные модели, применяемые для исследования поля сил в ИТП, сначала - наиболее простые, потом - более сложные.

I) Бесконечный проводящий цилиндр с заданным на боковой поверхности $r=r_0$ магнитным полем, периодически зависящим от времени.

Решением уравнения для магнитной индукции

$$\Delta\vec{B} - i\sigma\mu_0\omega\vec{B} = 0, \tag{1.4}$$

где $\bar{B}$ - комплексный вектор магнитной индукции,

в цилиндрической области I (рис.I.I) бесконечной длины с заданным полем на поверхности цилиндра $r=r_0$, в работах [2, 3] найдено распределение аксиальной составляющей магнитной индукции $B_z (B_r = B_\varphi = 0)$ и радиальной компоненты плотности средней электромагнитной силы $\bar{f}_r$ по радиусу:

$$\frac{\bar{f}_r}{\bar{f}_{r_0}} = \frac{\mathrm{ber}\left(\frac{\alpha r}{r_0}\right)\cdot \mathrm{ber}'\left(\frac{\alpha r}{r_0}\right) + \mathrm{bei}\left(\frac{\alpha r}{r_0}\right)\cdot \mathrm{bei}'\left(\frac{\alpha r}{r_0}\right)}{\mathrm{ber}\,\alpha\cdot \mathrm{ber}'\alpha + \mathrm{bei}\,\alpha\cdot \mathrm{bei}'\alpha}, \tag{1.5}$$

где

$$\bar{f}_{r_0} = -\frac{B_0^2\alpha}{r_0\mu_0}\cdot\frac{\mathrm{ber}\,\alpha\cdot \mathrm{ber}'\alpha + \mathrm{bei}\,\alpha\cdot \mathrm{bei}'\alpha}{\mathrm{ber}^2\alpha + \mathrm{bei}^2\alpha} - \tag{1.6}$$

максимальное значение силы (на боковой поверхности проводника.) Далее в тексте знаки усреднения опускаются.

$\alpha = \sqrt{\hat{\omega}}$ (см. определение безразмерной частоты (I.2) (1.7)

$\mathrm{ber}\,x, \mathrm{bei}\,x$ - функция Кельвина 4 ,

$B_0 = \mu_0 I$ - значение магнитной индукции на поверхности металла, (1.8)

I - настил тока на поверхности $r=r_0$.

На рисунках I.2 и I.3 показаны соответственно зависимости максимальной силы от параметра α и распределение безразмерной силы $f_r(\hat{r})/f_{r_0}$ по радиусу металла для такой идеализированной ИТП. Остальные компоненты силы $f_z = f_\varphi = 0$.

Максимальное значение силы при значениях безразмерной частоты $\hat{\omega} > 10$ меняется пропорционально ее квадратному корню:

$$f_r(r_0) \sim \sqrt{\hat{\omega}}\,. \tag{1.9}$$

Распределение силы по радиусу, имеющее экспоненциальный характер, также существенно зависит от $\hat{\omega}$, что связано с вытеснением поля из проводника при больших значениях $\hat{\omega}$. Например, для $\hat{\omega} = 100$ сила уменьшилась по сравнению с ее значением на поверхности в 100 раз при $\hat{r} = 0{,}6$ (случай действующей печи), а для $\hat{\omega} = 25$ (случай модельной печи)

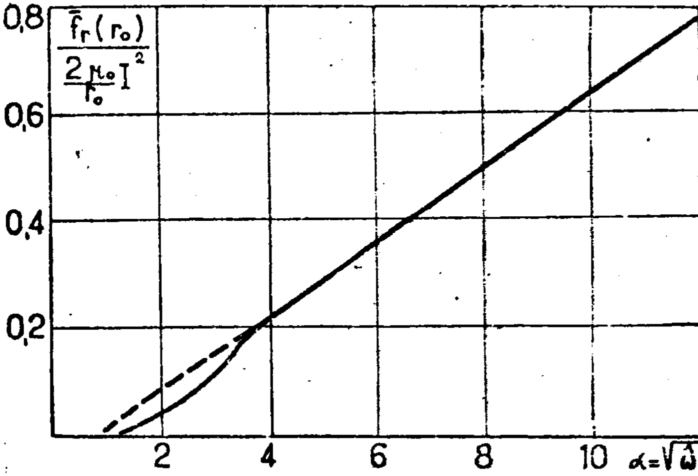


Рис.I.2
Зависимость максимального значения плотности радиальной силы от $\alpha=\sqrt{\hat{\omega}}$. I - настил тока в индукторе

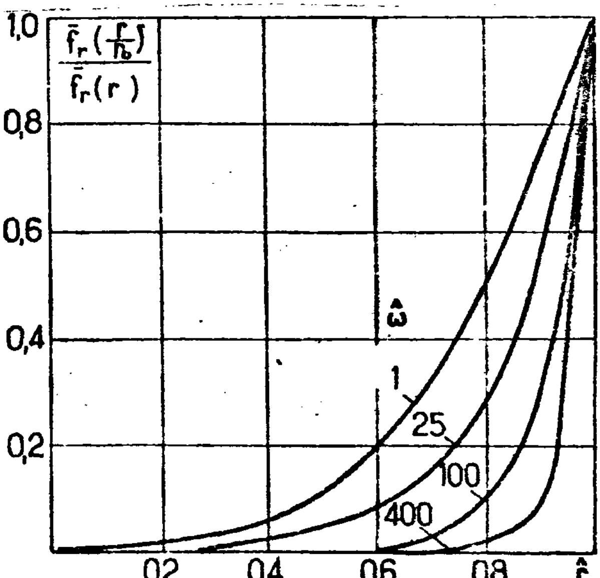


Рис.I.3
Распределение безразмерной плотности радиальной силы по радиусу при разных значениях безразмерной частоты

сила уменьшилась в 100 раз только при $\hat{r}=0{,}3$.

Подход к решению поставленной задачи возможен также на основе теории цепей. При ярко выраженном скин-эффекте ($r_0 \gg \delta$) это осуществлено в работе [5] .

Рассмотренная модель однофазной ИТП не дает возможности оценить аксиальную составляющую силы, кроме того - сила f_r зависит только от радиуса и $\mathrm{rot}\,\bar{f}=0$. Это вытекает из предположения о бесконечности высоты индуктора и металла.

2) Бесконечный проводящий цилиндр в поле однофазного индуктора конечной высоты (рис.I.I).

Решение задачи о распределении поля и сил на поверхности металла в плоском приближении (пренебрегая кривизной цилиндрической поверхности $-r_0 \gg \delta$) позволяет оценить характер силового поля и интегральные характеристики поля сил [6] :

$$z_i = \oint_{l_i} \bar{f}\, d\bar{l} ,$$

где l_i - произвольный контур внутри металла.

Циркуляция z_i характеризует способность электромагнитного поля возбуждать движение. Если

$$\mathrm{rot}\,\bar{f}=0 , \tag{1.10}$$

то и $z_i \equiv 0$ - отсутствие завихренности силы определяет отсутствие движения. Заданием эпюры тока на поверхности $r=r_1$ (рис.I.I)можно достаточно хорошо описать систему с однофазным индуктором и выявить некоторые характерные особенности силы. Например, аксиальная сила преимущественно направлена к торцам системы, однако может существовать зона с обратной ориентацией силы, что подтверждается численными экспериментами на ЭВМ [7] .

В системе с осевой протяженностью металла, значительно превосходящей длину индуктора при обычных параметрах (толщина скин слоя $\delta_0/r_0 = 0{,}1 \div 0{,}3$), интегральные вихревые свойства поля сил оцениваются максимальным значением электромагнитного давления в поверхностном слое металла [6] .

Решение задачи в цилиндрической области с токовым слоем конечной высоты h_u на поверхности $r=r_1$, можно получить, выделив в пространстве три области с граничными поверхностями

$r=r_0$ и $r=r_1$ (рис.I.I). Воздействие индуктора учитывается при помощи граничных условий на разделяющей поверхности $r=r_1$, где токовый слой задается интегралом Фурье:

$$j_\varphi = \begin{cases} I, \text{ при } |z| \leqslant \frac{h_u}{2}; \\ 0, \text{ при } |z| > \frac{h_u}{2}. \end{cases} \qquad (1.11)$$

В выражении (I.II) I – настил тока в индукторе.
Магнитное поле в данном случае имеет две составляющие – и B_z отличные от нуля.

Влияние конечной высоты обмотки на распределение силы характеризуется фактором плотности силы:

$$\Phi(z) = \frac{f_{r=r_0}(z)}{f_\infty}, \qquad (1.12)$$

где $f_{r=r_0}$ – сила на боковой поверхности металла для индуктора конечной высоты,

f_∞ – сила на боковой поверхности, расчитанная на основе модели с бесконечным азимутальным токовым слоем на боковой поверхности бесконечного цилиндра.

Распределение фактора Ф по высоте поверхности цилиндра существенно зависит от безразмерной частоты, относительной высоты индуктора и ширины зазора между индуктором и металлом [2] (рис.I.4): $s=r_1-r_0$.

Функция Φ_r имеет максимум в плоскости симметрии индуктора $\hat{z}=0$ и значение Φ_r равно единице при $\bar{h}=\frac{h_u}{2\delta}\to\infty$ и $s=0$. Как и следовало ожидать функция на фиксированной высоте $\left|\frac{2z}{h_u}\right|<1$ уменьшается с увеличением ширины непроводящего зазора s или с уменьшением относительной высоты индуктора. Радиальная составляющая убывает к краям индуктора. Скорость затухания силы вне зоны $\left|\frac{2z}{h_u}\right|\leqslant 1$ также зависит от $\bar{h}_u$ и s. Чем уже зазор и длиннее индуктор (или больше частота) тем быстрее убывает f_r отдалением от плоскости симметрии системы.

Распределение аксиальной составляющей силы заметно отклоняется от нуля только вблизи концов индуктора, но и там значение f_z не превышает 10 % максимального значения

f_r . Поэтому в рамках рассматриваемой приближенной модели это значение не учитывается [2], [3] .

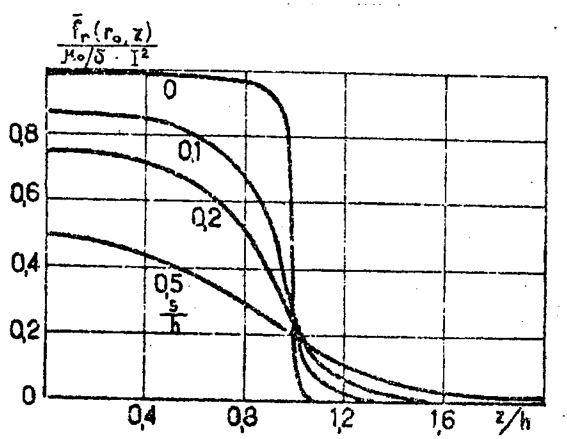


Рис. I.4
Распределение фактора плотности силы по высоте проводника на поверхности $r = r_0$ при различных значениях толщины непроводящего зазора s

Вихрь плотности средней электромагнитной силы

$$\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{f}, \tag{1.13}$$

определяющий движение расплава исчезает на оси симметрии $r=0$ и в плоскости $z=0$, а максимальное значение $w_\varphi (w_r = w_z = 0)$ достигается на боковой поверхности расплава ($r = r_0$) около концов обмотки $|z| = \frac{h_u}{2}$.

В работах [8] и [9] для такой же модели распределение векторного потенциала ($A_r = A_z = 0$; $A_\varphi = f(r, z)$), поля и сил найдено путем суммирования потенциалов элементарных токовых витков:

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I r_1 e^{i\omega t}}{\pi r_0} \int_0^\infty \frac{I_1(pr) K_1(\lambda r_1) \cos \lambda z \, d\lambda}{\lambda \mu I_1(pr_0) K_0(\lambda r_0) + p I_0(pr_0) K_1(\lambda r_0)}, \tag{1.14}$$

где I_0, I_1, K_0, K_1 - модифицированные функции Бесселя [4] ;

$$p^2 = \lambda^2 + i \sigma \mu_0 \omega . \tag{1.15}$$

Численное интегрирование выражения (I.I4) для получения распределений интересующих величин по объему проводника задача трудоемкая даже для выполнения на ЭВМ. Поэтому делаются попытки подинтегральное выражение в (I.I4) заменить приближенными формулами, которые в определенных интервалах значений параметров устройства аппроксимируют исходную функцию [10], [II]. В работе [10] такая аппроксимация дает возможность при $r_0 > 10\delta$ вычислять распределение силы без применения численного интегрирования.

Рассмотренная модель объясняет вихревой характер электромагнитных сил в ИТП и тем самым возможность стационарного течения расплава. Описание печи в данном приближении допустимо, если высота металла не меньше высоты катушки индуктора. Основная часть мощности индуцируется в части цилиндра, ограниченной концами индуктора, и если индуктор расположен в зоне $|z| < \frac{h_p}{2}$. В противном случае картина поля и силы возмущается концевым эффектом проводника.

3) Бесконечно длинный проводящий цилиндр с заданным на боковой поверхности "идеальным" бегущим полем.

Решая уравнение магнитной индукции (I.4) для бесконечно длинной проводящей цилиндрической области, магнитное поле на поверхности которой задано в виде бегущей волны

$$\vec{B} = \vec{B}^\circ e^{i(\omega t - kz)}, \qquad B^\circ_\varphi = 0 \qquad (1.16)$$

где k - волновое число, получаем выражения для компонент плотности силы через функции Бесселя [3, I2, I3]. Для данной модели, в отличие от предыдущих, аксиальная составляющая средней плотности силы существенно отличается от нуля:

$$f_z(r) = \frac{2\gamma B_z^{\circ 2}}{r_0 \mu_0} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^4}} \cdot \frac{\mathrm{Re}^2 J_1(m\hat{r}) + \mathrm{I}m^2 I_1(m\hat{r})}{\mathrm{Re}^2 J_0(m) + \mathrm{I}m^2 J_0(m)}, \qquad (1.17)$$

где

$$m = i\sqrt{\gamma^2 + i\alpha^2}; \qquad (1.18)$$

$$\gamma = \frac{2\pi r_0}{\lambda};$$

$\lambda = \frac{1}{k}$ -длина бегущей волны;

Так же, как в любом осесимметричном случае, радиальные составляющие поля и силы на оси симметрии равны нулю, аксиальные составляющие в данном случае отличны от нуля. Все величины зависят только от одной координаты - радиуса.

Зависимость радиальной составляющей силы от α, также как и в случае "идеальной печи" (рис.I.2) имеет характерный линейный участок при $\alpha > 5$, а величина f_z для больших значений безразмерной частоты $\hat{\omega}$ стремится к постоянному значению

$$f_z(r_3) = \frac{\gamma B_z^{\circ 2}}{r_0 \mu_0}, \qquad (1.20)$$

которое практически достигается уже при $\alpha = 2\gamma$. Если $\hat{\omega}$ постоянна, то плотность аксиальной силы на поверхности максимальна при $\gamma = \sqrt{\hat{\omega}}$. Для промышленной печи ($\hat{\omega} \sim 100$), это условие выполняется, если $\lambda \sim 0{,}5$ м.

Заданием линейной токовой нагрузки $I_\varphi = I e^{i(\omega t - kz)}$ на поверхности $r = r_1$ (рис.I.I) и решением уравнения для векторного потенциала (I.I), исследуется роль непроводящего зазора между металлом и индуктором [8]. Здесь можно рассматривать два частных случая:

а) пространство вне индуктора заполнено ферромагнитным материалом с $\mu = \infty$, $\sigma = 0$ (идеальный ферромагнитный экран);

в) пространство вне индуктора газ ($\mu = 1, \sigma = 0$).

Показано, что в обоих случаях зависимость максимального значения поля на боковой поверхности расплава от $\hat{r}_1$ мало чувствительна к изменению частоты ($10 < \hat{\omega} < 100$), но чувствительна к изменению длины волны бегущего поля. При $\lambda = 40 r_0$ H_0 убывает с увеличением $\hat{r}_1$ медленно (пятикратное увеличение $\hat{r}_1$ меняет H_0 меньше чем на 20 %), а при малом значении длины волны - $\lambda = 0{,}8 r_0$ H_0 убывает очень быстро (при $\hat{r}_1 = 1{,}7$, $H_0 \approx 0$).

Для ИТП с многофазным индуктором в технических расчетах применима теория цилиндрических насосов, если $\hat{\omega} \gg 16$ [14].

Рассмотренная в этом пункте модель объясняет возникновение движения расплава и характеризует зависимость сил от частоты $\hat{\omega}$ и длины волны бегущего поля, однако в реальном устройстве из-за конечной высоты многофазной обмотки и вида секционирования поле является не бегущим, а пульсирующим.

4) Цилиндр конечной длины с бегущим магнитным полем (I.16) на боковой поверхности $r=r_b$ (рис.I.I). В окружающем пространстве $r>r_b$, $\sigma=0$, $\mu=\infty$ 8. В данной работе исследования распределения силы отсутствуют, однако такая модель, учитывающая конечную высоту металла, может быть применена для ИТП, если $h_p<h_u$, и металл не выдвинут из индуктора, что имеет место в случае частичного заполнения тигля.

5) Бесконечный проводящий цилиндр в поле многофазного индуктора конечной высоты.

Соответствие этой модели реальным устройствам (качество приближения) определяется в основном тем, насколько заданное распределение тока в индукторе соответствует действительному распределению.

В работах [I5-I8] приводится выражение силы для модели конечного индуктора, найденное путем суммирования потенциалов (I.I4) элементарных токовых витков по высоте катушки и последующим суммированием векторных потенциалов отдельных катушек с учетом сдвигов фаз токов, протекающих в них. Аналогичные выражения приводятся в монографии [8]. Всюду предполагается бесконечная тонкость токового слоя. Результаты расчета радиальной составляющей магнитного поля на поверхности цилиндра показали хорошее совпадение с экспериментом [I6]. Составляющая силы f_z имеет выраженный максимум по частоте, а около концов многофазного индуктора имеются области, где меняется направление компоненты силы f_z

Сравнение интегральной силы, действующей на единицу длины металлического цилиндра, с соответствующей величиной для бесконечного индуктора [I8] показывает, что результат в обоих случаях отличается всего лишь на 5 %. Однако, интегральная сила является второстепенным показателем и не определяет применимость той или иной модели для описания МГД процессов в ИТП, где существенно распределение силы по объему расплава.

Более точно соответствует реальной конструкции ИТП и объясняет эффекты, определяемые конечной высотой индуктора и металла (первичный и вторичный концевые эффекты), а также взаимным расположением этих составных частей, модель, где проводящая область, также как индуктор, имеет конечные размеры. Расчет моделей этого класса требует применения численных методов, так как соответствующих аналитических решений не существует.

6) Осесимметричная проводящая область конечной высоты в поле кольцевого индуктора конечных размеров.

Расчёт вихревых токов в осесимметричной области сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно составляющей напряженности электрического поля E_φ [19-21] . Учитывая аналогию уравнения таким же образом, расчет можно провести для векторного потенциала. Однако на практике эта методика может применяться только для небольших сплошных или больших тонкостенных проводников, т.е. при небольшом числе ($h < 100$) точек расчета [19] . Кроме того, решая интегральное уравнение итеративно, имеет определенный интервал сходимости процесса. Границы этого интервала зависят от частоты и геометрических параметров системы, однако в рассмотренных работах эти границы не определены.

Делаются попытки учесть первичный и вторичный концевые эффекты, т.е., рассчитать модель с индуктором и металлом конечной высоты, комбинацией результатов, которые получены для двух более простых моделей (пункты 4 и 5) [22] . Для упрощения задачи - сведения интеграла (1.14) к ряду Фурье-Бесселя, рассматривается периодическая система индукторов с периодом многократно превышающем высоту индуктора h_u ($T \geqslant 30 h_u$). Имеющиеся в работе [24] графические иллюстрации для относительных величин поля, указывают на заметное отличие теоретических и экспериментальных распределений этих величин по высоте расплава, а информация о совпадении абсолютных величин отсутствует вообще.

Для осесимметричной модели с произвольным распределением азимутального тока, электромагнитные силы вычисляются по методу, изложенному в статье [23]. Составляется конечно-разностное уравнение для азимутальной компоненты комплексного векторного потенциала в кусочнооднородной (σ и μ -

кусочно гладкие функции) двумерной области, на границе которой полагается $A_\varphi=0$. Указывается, что для получения распределения векторного потенциала с точностью до I % на решетке 70 x 70 узловых точек потребовалось около 500 итераций, но проверка данной разностной схемы авторами настоящего обзора показала, что:

а) с увеличением значений σ и μ сходимость замедляется и при больших значениях σ или μ схема становится неустойчивой,

б) при $\mu=100$ и $\sigma=10^6 \frac{1}{Ом \cdot м}$ на решетке 30 x 30 узловых точек (5-6 раз меньше указанной в статье) точность I % достигается примерно в 400$^{-х}$ итерациях.

Практическая разностная схема с переменным шагом для расчета векторного потенциала методом нижней релаксации в осесимметричной проводящей области (рис.I.5) построены в работах [24,3I] ,однако численные результаты расчетов поля и сил отсутствуют. Недостатком схемы является недостаточная точность аппроксимации исходной задачи - порядок аппроксимации $O(h_r+h_z)$.

Результаты расчетов азимутальной составляющей вихря плотности средней электромагнитной силы

$$w_\varphi=\frac{\partial f_r}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial r} \tag{1.22}$$

для рассматриваемой цилиндрической модели с однофазным и двухфазным индуктором (сдвиг фаз в секциях $\frac{\pi}{2}$) приведены в статье [25] (описание численной методики отсутствует). Наибольшее значение вихрь для однофазной печи принимает около верхнего конца индуктора и нижнего конца проводящего цилиндра (индуктор имеет положительный нижний вылет). В этих зонах необходимо считаться с большой интенсивностью движения. Для двухфазной обмотки максимум ротора силы расположен около середины обмотки и абсолютные величины вихря, определяющего интенсивность движения, в этом случае больше.

В работах [7,26] описана методика расчета комплекса величины $B_z, B_r, f_z, f_r, w_\varphi$ для рассматриваемой модели (в безразмерном виде). Для решения уравнения векторного потенциала в кусочно - однородной области используются два

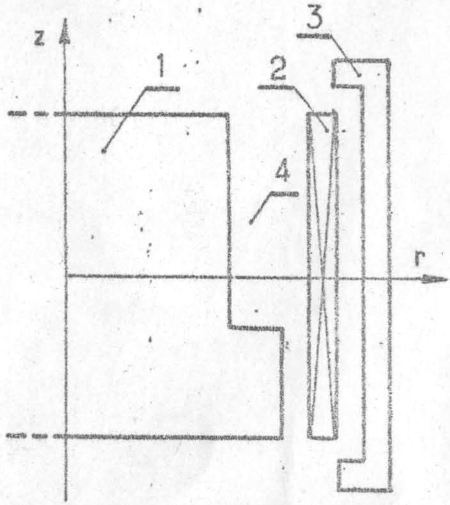


Рис.I.5
Осесимметричная модель индукционной печи (в разрезе). I - металл, 2-индуктор, 3-магнитный экран

метода:

I) метод верхней релаксации,

2) метод матричной прогонки.

Сравнение продолжительности счета и экономии машинной памяти выявили преимущества I-го метода по сравнению со вторым, а также методами, описанными в статьях [23,24]. Для расчета одного варианта распределения всех интересующих величин по объему проводника на решетке порядка 800 узловых точек, необходимо около 7 минут машинного времени на ЭВМ GE -415. Методика опробована на счете устройств с сильно отличающимся электромагнитными ($\hat{\omega}$ и μ) и геометрическими параметрами. Установлено, что во многих случаях без ухудшения точности счет можно существенно упростить, заменяя реальный магнитный экран ($\mu=f(B)$) "идеальным" экраном ($\mu=\infty$). Разностная схема устойчива в интервале $\hat{\omega}<10^3$ при шаге сетки $h=0{,}1$ и имеет порядок аппроксимации $O(h_r^2+h_z^2)$.

Распределения аксиальной и радиальной составляющей силы по высоте проводника при $\hat{r}=1$ (на боковой поверхности) для однофазного и трехфазного устройства (рис.I.6 и I.7) показывают влияние концевых эффектов, обусловленных индуктором. При высоте $h_p \gg h_ц$ результаты, полученные на основе этой модели, совпадают с соответствующими результатами, полученными на основе моделей 2 и 5, где проводник не

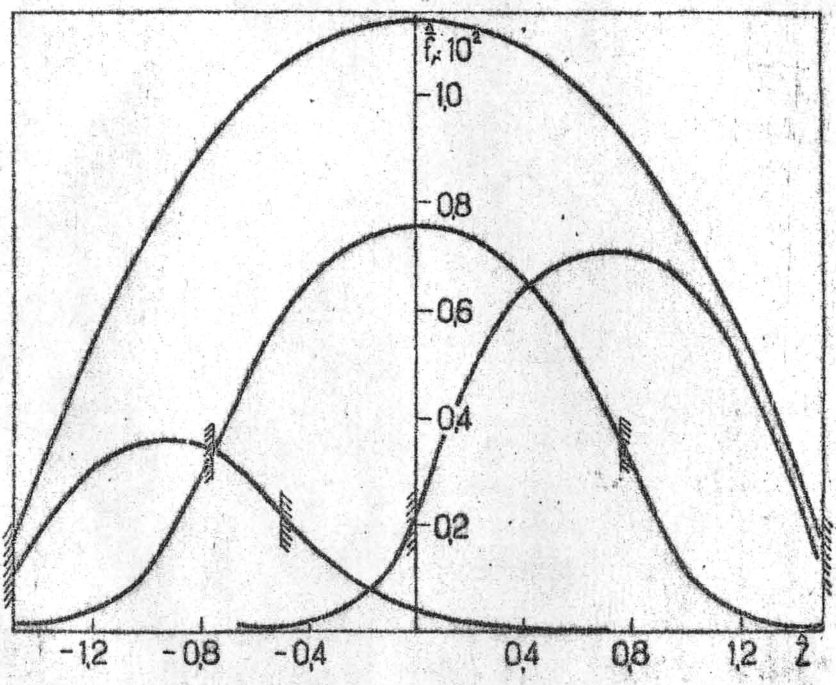


Рис.I.6
Распределения радиальной составляющей плотности силы по высоте металла на поверхности $\hat{r}=1$ при разном расположении и высоте однофазных индукторов

ограничен в аксиальном направлении. Если концы однофазного индуктора не выступают вне зоны заполненной металлом, то оправдано пренебрежение аксиальной составляющей силы (модели I и 2), однако в большинстве случаев встречающихся на практике высоты проводника и цилиндра, а также их расположение таковы, что распределение силы определяется концевыми эффектами, обусловленными металлом и индуктором.

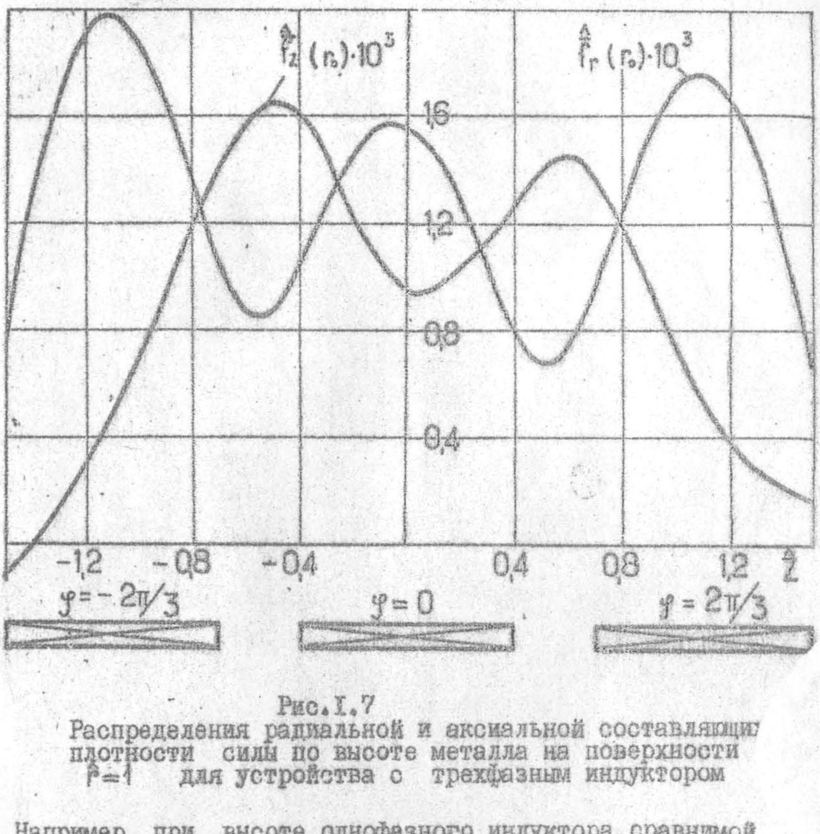


Рис.I.7
Распределения радиальной и аксиальной составляющих плотности силы по высоте металла на поверхности $\hat{r}=1$ для устройства с трехфазным индуктором

Например, при высоте однофазного индуктора, сравнимой с высотой металла, в концевых зонах металла значение аксиальной составляющей силы превышает значение радиальной составляющей силы. Такой результат принципиально нельзя получить на основе ранее рассмотренных моделей (пункты I,2,5).

Во всех рассмотренных работах существенно используется осевая симметрия модели, что упрощает задачу - расчет поля и сил в трехмерной области сводится к расчету в двумерной области. Для исследования сил в ИТП с учетом несимметричной формы устройства или распределения характеризующих величин, необходим расчет трехмерной модели.

2. Динамика расплава

В данном параграфе рассматриваются модели и методы описания гидростатических и гидродинамических явлений в ИТП. Исследовательских работ по этому вопросу гораздо меньше, чем работ, посвященных исследованию электромагнитных процессов в аксиально симметричных системах. Это объясняется сложностью вопроса - уравнения, описывающие движение расплава (как в ламинарном, так и в турбулентном режиме) существенно нелинейны, линеаризовать и решить эти уравнения аналитически удается только в самых простых случаях. Кроме того, во всех работах, за исключением [27] для упрощения задачи применяется приближение $Re_m \ll 1$.

I) Бесконечный проводящий цилиндр с заданным на боковой поверхности $r=r_0$ зависящим периодически от времени магнитным полем.

Электромагнитное давление для этой модели является функцией одного переменного - радиуса [2]:

$$\frac{p(r)}{p(0)} = 1 - \frac{\mathrm{ber}^2\left(\frac{\alpha r}{r_0}\right) + \mathrm{bei}^2\left(\frac{\alpha r}{r_0}\right) - 1}{\mathrm{ber}^2\alpha + \mathrm{bei}^2\alpha - 1} \qquad (2.1)$$

где

$$p(0) = \frac{B_0^2}{2\mu_0}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{ber}^2\alpha + \mathrm{bei}^2\alpha}\right) - \qquad (2.2)$$

- максимальное значение среднего электромагнитного давления (на оси цилиндра),

B_0 - максимальное значение магнитной индукции боковой на поверхности проводника.

На основе этого выражения можно оценить изменение формы свободной поверхности расплава под воздействием электромагнитных сил. Из уравнения гидростатики следует выражения для изменения высоты расплава - $h_ц$, по сравнению со случаем, когда внешнее поле не наложено, а также выражение для высоты мениска:

$$h_м = \frac{p(0)}{\rho g}, \qquad (2.3)$$

где $g\left[\frac{м}{с^2}\right]$ - ускорение силы тяжести.

Полученные выражения давления и высоты мениска $h_м$ при $\hat{\omega} > 10$, переходят в ранее известные результаты, которые были получены Эсмархом [28] в приближении плоской электромагнитной волны. При больших значениях безразмерной частоты (1.2) ($\hat{\omega} > 60$), давление и высота мениска становятся практически независимыми от частоты, а $h_ц$ стремится к нулю [14]. В этих расчетах не учитываются концевые эффекты, которые существенно меняют давление, вблизи торцов металла, не учитывается также движение расплава и воздействие электромагнитного поля на область самого мениска. Эксперименты показывают, что эти оценки дают завышенные значения (при коротких индукторах выявлены завышения $h_м$ до трехкратных). Так как сила имеет безвихревой характер ($f_z = f_\varphi = 0$), $f_r = f(r)$), то не объясненной остается также движение расплава, существующее в реальных индукционных печах.

2) Бесконечный проводящий цилиндр в поле однофазного индуктора конечной высоты.

Эта модель делает давление зависящее от двух пространственных переменных - z и r, но зависимость от частоты при этом меняется мало по сравнению с предыдущей моделью [2]:

$$p(0,z) \sim \frac{1}{\sqrt{\omega}} \qquad (2.4)$$

Аппроксимацией бесселевых функций, полученные инженерные формулы для расчета высоты и формы мениска (верхний конец индуктора находится на уровне свободной поверхности металла), показывают, что учет конечности индуктора высоту и форму мениска существенно не меняет, однако несколько снижается высота максимального поднятия расплава над исходным уровнем $h_ц$, так как мениск становится более сплющенным. Поэтому сохраняется сильное отличие от экспериментальных данных, и результаты пригодны только для предварительной оценки порядка высоты мениска.

Силовое поле в расплаве имеет вихревой характер ($\mathrm{rot}\,\vec{f} \neq 0$) и существует двухконтурное движение, но расчеты динамики металла по рассматриваемой модели отсутствуют.

3) Бесконечный проводящий цилиндр с заданным на поверхности идеальным бегущим полем.

Для учета замкнутости течения в бесконечно длинном цилиндрическом **объеме** на аксиальную составляющую скорости налагается следующее условие [12, 29] :

$$\int_0^{r_0} r v_z \, dr = 0 . \qquad (2.5)$$

Ввиду осевой симметрии скорость имеет только одну компоненту $v_z (v_r = v_\varphi = 0)$, зависящую от радиуса и уравнение Навье-Стокса (2.8) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g - f_z \; ; \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mathrm{const}.$$

Оценив время установления стационарного течения, в дальнейшем можно рассматривать только стационарную задачу. Значение максимальной скорости при этом определяется тремя электромагнитными параметрами - длиной волны λ, индукцией B_0 бегущего магнитного поля и безразмерной частотой $\hat{\omega}$. Нормированное значением магнитной индукции на поверхности цилиндра B_0, максимальная скорость движения на оси V_0 имеет выраженный максимум как по частоте $\hat{\omega}$, так и по длине волны бегущего поля. При $\hat{\omega} \to \infty$ или $\lambda \to 0$, V_0 стремится к нулю (рис.2.I).

Радиальное распределение v_z при $\hat{\omega} = 9$ для различных значений

$$\gamma = \frac{2\pi r_0}{\lambda} , \qquad (2.7)$$

показывает, что с возрастанием γ максимальное значение скорости в пристеночном потоке возрастает по абсолютной величине и место максимума смещается к стенке $r = r_0$, однако с увеличением $\hat{\omega}$ влияние длины волны становится мало заметным (при $\hat{\omega} = 100$, распределения скоростей для $\gamma = 2$ и $\gamma = 8$ практически совпадают). Максимум скорости в центральном потоке всегда находится на оси симметрии, существует поверхность $r = r_н$, где скорость течения обращается в нуль. Положение этой поверхности также определяется параметрами λ и $\hat{\omega}$.

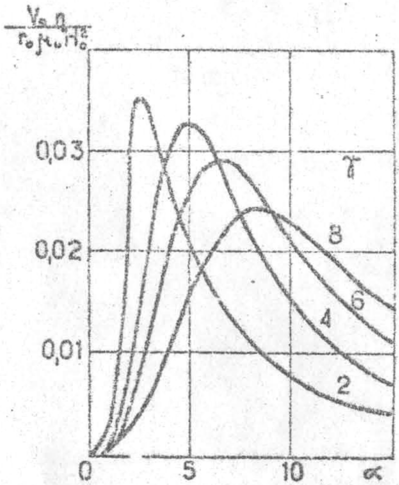


Рис.2.I

Зависимость относительной скорости на оси симметрии от $\alpha=\sqrt{\hat{\omega}}$

В работе [29] для этой задачи рассмотрен длинноволновой предел: $\lambda \gg \delta$ Профиль скорости при этом определяется значением одного единственного критерия - $\hat{\omega}$, что подтверждается экспериментом [30] (см.также [I] о моделировании). Сравнение профиля осредненной скорости движения металла в средней зоне многофазной ИТП с теоретическим, ламинарным [I2, 29] показывает, что максимум усредненной турбулентной скорости в пристеночном потоке смещается к стенке, а профиль скорости средней части цилиндра становится более сплющенным.

Так как реально действующие многофазные индукторы определяют распределение сил отличающиеся от поля сил "идеального" индуктора бегущего поля, то рассмотренная модель не применима для описания движения в концевых зонах расплава, где существенно отлична от нуля радиальная составляющая скорости

V_r , а компонента V_z - мала, однако модель дает представление о движении и управляющих ею параметрах в средней зоне расплава многофазной ИТП.

4) Цилиндр конечных размеров в поле индуктора конечной высоты.

Как уже отмечалось, расчет движения и модели, учитывающей конечные размеры всех ее элементов, в настоящее время возможен только численными методами.

Записав систему уравнений описывающую движение жидкости (уравнение Навье-Стокса и условие несжимаемости) в форме ротора для переменных величин Ψ и u , где

$$u = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \qquad (2.8)$$

- азимутальная составляющая ротора скорости,

Ψ - функция тока; которая вводится в следующем виде:

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\ ; \qquad V_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \qquad (2.9)$$

из рассмотрения удается исключить давление. В работе [31] построена и доведена до численной реализации разностная схема для уравнений несжимаемой жидкости, однако авторами отмечается, что схема устойчива только при малых значениях числа Рейнольдса. Кроме того полученные численные результаты несогласуются с экспериментальными данными - полученное по методике [31] распределение $V_z = V_z(z)$ имеет нефизический пик на оси симметрии. Это явление обусловлено

а) плохой аппроксимацией исходных уравнений, что особенно проявляется при малых r ,

б) тем, что в практических вычислениях опускаются инерционные (нелинейные) члены.

В разностной схеме [32] для безразмерных переменных $\hat{\Psi}$ и $\hat{u}$, с соответствующими граничными условиями, используется распределение ротора электромагнитной силы, которое, находится также с учетом концевых эффектов [7,22-24,26] . Введением турбулентных напряжений и соответствующего эффективного числа

Рейнольдса $Re_{эф}$, значение которого определяется сравнением экспериментальных и теоретических результатов, можно с данной разностной схемой приближенно также описать усредненное турбулентное течение.

Сравнение результатов расчетов с результатами полученными для модели с идеальным бегущим полем [I2,29] (рис. 2.2), указывает на удовлетворительное совпадение в средней зоне расплава и сильные отличия в концевой зоне.

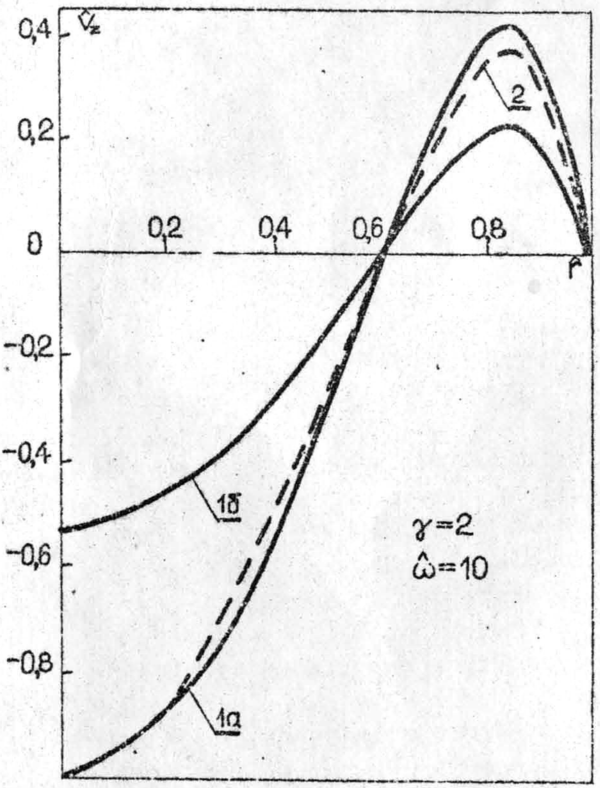


Рис.2.2

Распределения аксиальной составляющей скорости по радиусу:
I.- из статьи [3I] , а) в средней зоне,
б) в концевой зоне расплава.
2 - из статьи [I2] .

На рис.2.3 показано типичное распределение линий тока в однофазном устройстве при двухконтурной циркуляции.

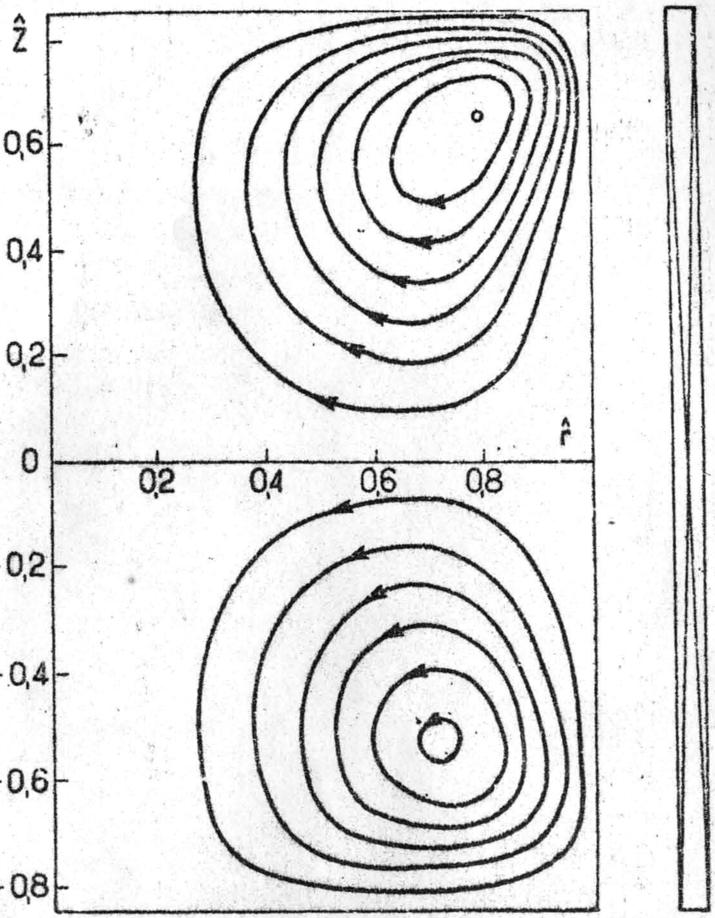


Рис.2.3

Распределение линий тока в однофазном устройстве

Единая методика расчета электромагнитных и гидродинамических процессов в ИТП [27] позволяет учитывать обратное воздействие течения на электромагнитное поле $Re_m \neq 0$. Совместно решается уравнение для магнитной индукции и уравнение движения [I] . Учет конечных значений магнитного числа Рейнольдса расширяет границы применения разработанной методики - охватываются также промышленные установки, в которых не выполняется условие $Re_m \ll 1$, а

$$0,1 < Re_m < 3$$

Во всех рассмотренных в этом параграфе работах существенно используется аксиальная симметрия системы($v_z = f(r,z)$, $v_r = g(r,z)$).

Для учета несимметричностей, которые имеют место в реальных установках, необходимо строить математические модели, в которых учитывается зависимость параметров от азимутального угла.

ВЫВОДЫ

I) В проанализированной литературе более полно исследованы электромагнитные процессы в ИТП:

а) для получения предварительных сведений и характерных значений электромагнитного поля и поля силы, а также для получения инженерных оценок процессов в ИТП и планирования эксперимента, можно пользоваться моделями, пренебрегающими конечной высотой системы "индуктор-металл" или одного из этих элементов, в зависимости от соотношения длины и взаимного расположения индуктора и проводника в реальном устройстве. Методика для таких расчетов хорошо разработана. Решение линейной задачи при этом сводится к аналитическим выражениям, численные значения которых вычисляются на ЭВМ. Однако недостаточно внимания уделяется оценке погрешностей и границ применимости различных моделей;

б) для исследования структуры электромагнитного поля и распределения скоростей движения расплава в большинстве случаев необходимо учитывать концевые эффекты, обусловленные, как металлом, так и индуктором. Расчет моделей такого вида основан на применении конечно-разностных методов и требует дальнейшего усовершенствования.

Решение гидродинамической части проблемы более сложно и менее разработано. Трудности для эксперимента обусловлены агрессивностью среды и турбулентным характером течения, с теоретической точки зрения - задача нелинейна и необходимо разрабатывать полуэмпирические гипотезы для описания турбулентных напряжений.

2) В рассмотренных работах почти отсутствуют сравнения и сопоставления экспериментальных и теоретических результатов, что необходимо для уточнения физико-математической модели описывающей МГД процессы в ИТП.

3) Имеющиеся экспериментальные и теоретические данные недостаточны для выяснения строгих количественных зависимостей движения от комплекса электромагнитных и геометрических параметров (таких как безразмерная частота, высота расплава, высота индуктора и др.), однако основные параметры, определяющие характер движения, выделены и установлен характер зависимости гидродинамических показателей, в том числе, максимального значения скорости движения расплава от параметров системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Микельсон Ю.Я., Якович А.Т. Движение жидкого металла в индукционных печах.-"Учен.зап.ЛГУ им.П.Стучки",1976, т.252, Рига, с.3-26.
2. Muhlbauer A. Kräfte and Stromungen in der Schmelze eines Induktions - Tügelofens.- "Acta Technica", 1969, Nr.6, c.686-692.
3. Mühlbauer A. Über die elektrodynamischen Kräfte in der Schmelze von Induktionsofen.- Elektrowärme International", 1967, m.25,Nr.12, c.461-473.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.Ч.2.М., "Наука", 1974, с.9-120.
5. Reichert K. Die Berechnung von kernlosen Induktionstiegelofen mit elektrisch leitendem Tügel.-"Archiv für Elektrotechnik", 1965, m.49, Nr.6,S.376-398.
6. Тир Л.Л. О вихревых силах в жидком металле в поле однофазного индуктора. -"Магнитная гидродинамика", 1974, №1,с.127-135.
7. Якович А.Т., Стетюха Ю.А., Столярова Л.А. Распределение плотности электромагнитных сил в индукционной тигельной печи. - В кн.: Научно-технический прогресс в промышленнос[ти] Свердловск, 1974, с.64.

8. Круминь Ю.К. Взаимодействие бегущего магнитного поля с проводящей средой. Рига, "Зинатне", 1969. 228 с.
9. Махмудов К.М., Слухоцкий А.Е. Расчет электрических параметров цилиндрических индукторов произвольной длины.- "Труды ВНИИ токов высокой частоты", 1969, вып.IO, с.20-29.

IO. Гецелев З.Н., Мартынов Г.И. Расчет электромагнитных параметров цилиндрической системы "индуктор-металл".-"Магнитная гидродинамика",1974,№4, с.87-94.

II. Махмудов К.М., Немков В.С., Слухоцкий А.Е. Методы электрического расчета индукторов.- "Изв.Ленинградского электротехнического института", 1973,вып.II4, с.3-27.

I2. Mühlbauer A. Badebewegung im mehrphasig erregten Induktions - Tiegelofen.- "Die Elektrische Ausrüstung",1969, m.10,Nr.1,S.1-7.

I3. Panaitescu A . Бегущее электромагнитное поле и силы в цилиндрическом круговом канале, заполненным электропроводящей жидкостью.- " Rev. roum.sci.techn.ser. electrotechnique et electroenergetique", 1973,m.18,Nr.2, S.169-189.

I4. Тир Л.Л. Движение расплава в индукционной тигельной печи под действием бегущего магнитного поля.- В кн.: Исследования в области промышленного электронагрева. М., 1973, вып.6, с.I22-I3I.

I5. Микельсон А.Э., Саулите У.А., Шкерстена А.Я. Исследование цилиндрических безсердечниковых насосов.-"Магнитная гидродинамика", I965,№2,с.26-32.

I6. Саулите У.А. Учет неравномерности поля и концевых эффектов при расчете трехфазных аксиально симметричных систем с бегущим магнитным полем.-"Изв.АН ЛатвССР.Сер.физ.-техн.наук",1968, №4, с.96-IOI.

I7. Микельсон А.Э., Саулите У.А. К расчету сил действующих на цилиндр в бегущем магнитном поле цилиндрического индуктора конечной длины.-"Изв.АН ЛатвССР," Сер.физ. техн.наук", 1966,№6, с.57-69.

18. Столов М.Я. Электромагнитное поле и пондеромоторные силы в устройствах электромагнитного перемешивания цилиндрического типа.- В кн.: Исследования в области промышленного электронагрева. М.,1970,вып.4,с.192-199.

19. Федчун Л.В., Романович С.С. Расчет на ЦВМ вихревых токов в осесимметричных проводниках.- В кн.: Кибернетика и вычислительная техника, Киев, 1972,вып.17,с.31-36.

20. Романович С.С., Федчун Л.В., Юхимов И.Г. Электрический и тепловой расчет индукционного нагрева осесимметричных металлических тел.- В кн.: Кибернетика и вычислительная техника, Киев, 1973,вып.22,с.155-162.

21. Костюк Э.Н. Исследование вихревых токов в массивном анизотропном цилиндре методами численного анализа.-В кн.: Кибернетика и вычислительная техника, Киев, 1974, вып.29,с.122-128.

22. Lavers J.D. An analysis of the coreless induction furnace: Load end effects.-"Elektrowarme International", 1971, Nr.7, S.390-396.

23. Dodd C.V., Deeds W.E. Электромагнитные силы в проводниках.- " Journal of Applied Physics", 1967,Nr.13, p.5045-5054.

24. Reichert K. Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Anordnungen zur induktiven Erwarmung.-"Elektrowarme International", 1968, Nr.4, S.113-123.

25. Vogt W. Badebewegung und magnetische Feldkräfte im Induktionstiegelofen.-"Brown Boveri Mitteilungen",1969, Nr.1, S.25-35.

26. Микельсон Ю.Я., Якович А.Т., Полманис Я.Э., Стетюха Ю.А. Магнитное поле и объемные силы в цилиндрических проводниках ограниченных размеров.-В кн.: УIII Рижское совещание по МГД. Рига,1975, с.23-24.

27. Микельсон Ю.Я., Якович А.Т., Тир Л.Л. Методика расчета МГД-течения в цилиндрической электропечи.- В кн.:УIII Рижское совещание по МГД, Рига,1975,с.34-36.

28. Esmarch W. Zur Theorie kernlosen Induktionsofen.-"Wissenschaftliche Veröffentlichungen Siemens",1931,Nr.10, S.172-184.

29. Бирих Р.В., Брискман В.А., Рудаков В.К. Осесимметричные замкнутые течения вызванные бегущим полем, при малых магнитных числах Рейнольдса.- Учен.зап. Пермского гос-го ун-та , I970, т.2I6, с.24I-253.

30. Тир Л.Л. Движение расплава в индукционной тигельной печи под действием бегущего магнитного поля.- В кн.: Исследования в области промышленного электронагрева, М., I973,вып.6,с.I22-I3I.

3I. Reichert K. Die numerische Berechnung der elektromagnetisch verursachten Strömung in Induktionstiegelofen.- "Scientia elektrica", 1970, Nr.4, S.126-146.

32. Якович А.Т., Столярова Л.А. Гидродинамика расплава в индукционной тигельной печи.- В кн.: Научно-технический прогресс в промышленности, Свердловск,I974, с.63.

УДК : 538.4 + 532.517.4

А.Т.Якович
ЛГУ им. П.Стучки

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ДЛЯ РАСЧЕТА УСРЕДНЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ИНДУКЦИОННЫХ ЭЛЕКТРОПЕЧАХ

I. Введение

Течения жидкого металла в индукционных тигельных печах (ИТП), как и в других металлургических установках (насосах, лотках) имеют характер развитой турбулентности. Значение числа Рейнольдса

$$Re = \frac{v_0 r_0}{\nu_L}, \tag{1.1}$$

где $v_0\left[\frac{м}{c}\right]$ - максимальное значение скорости движения жидкости,

$r_0\,[м]$ - характерный размер области,

$\nu_L\left[\frac{м^2}{c}\right]$ - коэффициент кинематической вязкости ламинарного течения,

для ИТП лежит в интервале $10^5 \div 10^7$, что многократно превышает критические значения, при которых начинается турбулизация течения.

Существуют два основных подхода к теоретическому исследованию турбулентных течений:

I) применение статистической теории турбулентности [I];

2) исследования на основе предположения, что турбулентное течение жидкости описывается таким-же образом как ламинарное течение, т.е., уравнением движения.

Первый из подходов в настоящём этапе разработок не пригоден для решения прикладных задач. На основе второго подхода в результате представления скорости и давления, в виде суммы их средних по времени величин и пульсационных добавок v_i', p' :

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \ ; \quad p = \bar{p} + p' , \qquad (1.2)$$

получаем уравнение Рейнольдса для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu_i \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial(\overline{v_i' v_k'})}{\partial x_k} + \bar{f}_i , \qquad (1.3)$$

где $\overline{v_i' k_i'}$ – компоненты тензора турбулентных напряжений,

$\bar{f}_i \left[\frac{H}{M^3}\right]$ – среднее по периоду значение составляющей вектора плотности объемной силы.

Форма условия несжимаемости при усреднений не меняется:

$$\operatorname{div} \bar{\bar{v}} = 0 . \qquad (1.4)$$

Так как система уравнений (I.3.) и (I.4.) с соответствующими граничными условиями является не замкнутой, то для решения данной задачи необходимо рассматривать какие-то дополнительные связи. В целях замыкания системы уравнений можно:

I) пользоваться уравнениями для одноточечных или многоточечных моментов высших (второго и третьего) порядков [I], в которые необходимо вводить определенное количество эмпирических постоянных и строить те или иные гипотезы, определяющие взаимосвязь между моментами;

2) определить турбулентные напряжения на основе данных о пульсациях скорости полученных непосредственно из эксперимента;

3) определить турбулентные напряжения в уравнении (I.3.) на основе полуэмпирических формул, учитывающих структуру турбулентного течения в конкретном классе устройств.

При использовании первого из указанных приемов необходимо наряду с уравнениями (I.3.) и (I.4.) дополнительно решать интегро-дифференциальную проблему, которая существенно сложнее исходной задачи при ламинарном течении. Второй из методов недоступен из-за недостаточности экспериментальных данных о структуре турбулентного потока в ИТП. Третий метод позволяет при определенных допущениях исследовать усредненное турбулентное течение в электропечах по методике разработанной для расчетов течения в ламинарном режиме [2], [3], задачу при этом существенно не усложняя. Далее рассматриваются три способа определения турбулентных напряжений на основе полуэмпирических формул.

2. Гипотеза Буссинеска

Формула Буссинеска, которая была разработана для одномерных течений, при обобщении на случай многомерного турбулентного течения -

$$\overline{V_i' V_k'} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{V}_k}{\partial x_i} \right) , \qquad (2.1)$$

позволяет уравнение движения (I.3.) представить в форме аналогичной форме уравнений Навье-Стокса. Если турбулентное течение квазистационарно, то уравнение (I.3.) принимает вид:

$$\overline{V}_k \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + (\nu_L + \nu_T) \frac{\partial^2 \overline{V}_i}{\partial x_k \partial x_k} + \overline{f}_i \quad , \qquad (2.2)$$

где $\nu_T \left[\frac{м^2}{c} \right]$ - коэффициент турбулентной вязкости, характеризующий способность пульсационного поля скоростей переносить количество движения.

Коэффициент ν_T не является физической постоянной для данной жидкости и может зависить от вида течения, формы области, присутствия электромагнитных полей и других факторов. Для записи уравнения Рейнольдса в форме (2.2.), необходимо, чтобы $\nu_T = const$, т.е., коэффициент турбулентной вязкости не зависел от пространственных координат, что выполняется только в случае однородной турбулентности. Течение в ИТП не является однородно-турбулентным и по этому в дальнейшем будут рассматриваться также формулы для ν_T , которые устанавливают зависимость этого коэффициента от пространственных кооординат, составляющих усредненной скорости и других величин.

В безразмерной постановке задачи [2] , соотношение сил инерции и сил трения в уравнениии (2.2.)характеризуется эффективным числом Рейнольдса:

$$Re_{эф} = \frac{V_0 r_0}{\nu_L + \nu_T} \qquad (2.3)$$

Значение $Re_{эф}$ меньше числа Рейнольдса (I.I) соответствующего ламинарного течения, так как $V_{0,LAM} > V_{0,TUR}$ и $\nu_T > 0$. Из экспериментальных данных следует, что для циркуляции металла в ИТП $\nu_L \ll \nu_T (\nu_L \sim 10^{-6} \frac{м^2}{с})$ и поэтому приближенно $Re_{эф} = \frac{V_0 r_0}{\nu_T}$.

В ранее проведенных расчетах [2], [3], предполагалось, что

$$\nu_T = K V_0 \qquad (2.4)$$

По физической сущности это эквивалентно существованию однородной турбулентности во всем объеме, заполненном жидкостью, и приближенно соответствует характеру турбулентности в центральной части тигля, заполненного расплавом (рис.I). При

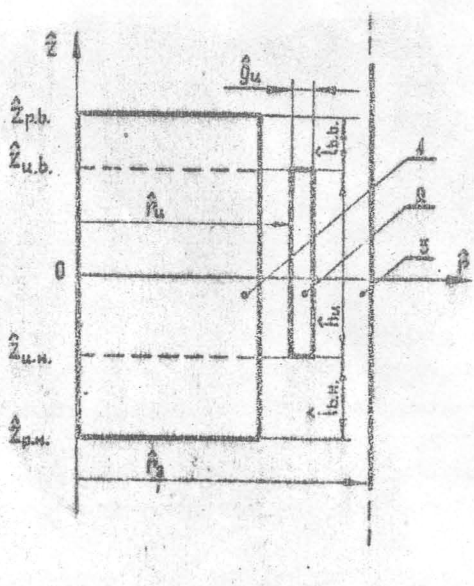


Рис.I. Модель ИТП в разрезе:
I. Расплав. 2. Индуктор. 3. Магнитный экран.

этом для решения задачи (2.2.), (I.4.) необходимо определить одну постоянную $K[\text{м}]$, так как

$$Re_{эф} = \frac{r_0}{K} . \qquad (2.5)$$

На основе сравнения максимальных значений скорости движения жидкого металла в модельных (лабораторных) печах и расчетных значений максимальной скорости определено, что $K = 4 \cdot 10^{-3}$ м, что приводит к значению эффективного числа Рейнольдса $Re_{эф} \approx 50$ для модельных печей ($r_0 = 0{,}2$ м) и значениям $Re_{эф}$ = 200 - 500 для промышленных печей (r_0 = I-I,5 м).

3. Обобщенная формула Кармана

Формула Кармана для определения коэффициента турбулентной вязкости одномерного течения

$$\nu_T = \varkappa^2 \frac{\left|\frac{d v_x}{d y}\right|^3}{\left(\frac{d^2 v_x}{d x^2}\right)^2} , \qquad (3.1)$$

построенная на основе теории размерности, легко обобщается на случай трехмерного течения [4] :

$$\nu_T = \varkappa^2 \frac{\left[\frac{1}{2}(\Delta ; \Delta)\right]^{\frac{3}{2}}}{\left[\frac{1}{2}(\Omega ; \Omega)\right]} , \qquad (3.2)$$

где $\bar{\varkappa}$ - безразмерная эмпирическая постоянная,

$$\bar{\Delta}_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} ; \quad \Omega_{i,j} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} ; \qquad (3.3)$$

$(\Omega ; \Omega)$ - скалярное произведение тензоров;

$\vec{w} = \mathrm{rot}\, \vec{v}$ - вихрь скорости.

Начиная с формулы (3.I.) и далее знаки усреднения опущены. Для двумерного осесимметричного течения ($v_\varphi = 0$; $v_r = v_r(r, z)$; $v_z = v_z(r, z)$) формула (3.2.) упрощается:

$$\nu = \varkappa^2 \frac{(\Phi_v)^{\frac{3}{2}}}{R} , \qquad (3.4)$$

где

$$\Phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^2 \qquad (3.5)$$

- диссипативная функция Релея, характеризующая переход механической энергии в тепловую, т.е., диссипацию энергии трением.

$$R = r^2\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)\right]^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 ; \qquad (3.6)$$

$w = w_\varphi$ - азимутальная составляющая ротора скорости.

Определенный таким образом коэффициент турбулентной вязкости используется в расчетах значений эффективного числа Рейнольдса (2.3.). Для согласования вычислительного процесса выражения (2.3.) с существующей методикой [2], [3], формула (3.4.) записывается в конечно-разностном виде на основе центральных разностей - погрешность аппроксимации $O\,(h_r^2 + h_z^2)$, при этом согласована с погрешностью аппроксимации уравнения движения в форме ротора по схеме Джакупова [5] и граничных условий. Экспериментально установлено [4], что для турбулентных течений в трубах постоянная $\varkappa = 0{,}36 - 0{,}4$. В расчетах течений в ИТП положено $\nu_L = 2\cdot 10^{-7}\frac{м^2}{с}$, и рассматриваются значения $\varkappa$ в интервале $0{,}04 \leqslant \varkappa \leqslant 0{,}4$.

4. Кусочно-линейная функция турбулентной вязкости

Руководствуясь требованиями, которые предъявляются к численному решению задачи (1.4.), (2.2.) для согласования его с экспериментальными данными, характеризующими осредненное течение в цилиндрических электропечах, предлагается следующая эмпирическая формула, для определения коэффициента турбулентной вязкости:

$$\nu_T = \nu_0 \cdot \nu_1(\hat{z}) \cdot \nu_2(\hat{r}) , \qquad (4.1)$$

где

$$\nu_1 = \begin{cases} \dfrac{(c-1)\hat{z} + \hat{z}_{р.в.} - c\cdot\hat{z}_{и.в.}}{\hat{z}_{р.в.} - \hat{z}_{и.в.}}, & при\ \hat{z} > \hat{z}_{и.в.} ; \\ 1, & при\ \hat{z}_{и.н.} < \hat{z} < \hat{z}_{и.в.} ; \\ \dfrac{(c-1)\hat{z} + \hat{z}_{р.н.} - c\cdot\hat{z}_{и.н.}}{\hat{z}_{р.н.} - \hat{z}_{и.н.}}, & при\ \hat{z} < \hat{z}_{и.н.} ; \end{cases} \qquad (4.2)$$

$$\nu_z = \begin{cases} 1, \text{ при } \hat{r} < a; \\ \left(\dfrac{1-\hat{r}}{1-a}\right)^n, \text{ при } \hat{r} > a; \quad (n > 0), \end{cases} \tag{4.3}$$

$\hat{z}_{и.н.}, \hat{z}_{и.в.}, \hat{z}_{р.н.}, \hat{z}_{р.в.}$ – коэффициенты нижнего и верхнего концов индуктора и металла соответственно (рис.I.),

a, c – безразмерные постоянные определяющие изменение ν_T соответственно в радиальном и в аксиальном направлениях,

$\nu_0\left[\frac{м^2}{c}\right]$ – параметр, определяющий абсолютное значение коэффициента турбулентной вязкости в центральной части объема заполненного расплавом.

Значение эффективного числа Рейнольдса определяется по формуле (2.3.), где значение коэффициента молекулярной вязкости $\nu_L = 2 \cdot 10^{-7} \frac{м^2}{c}$. Линейное убывание коэффициента турбулентной вязкости по радиусу (4.3.) в сторону боковой стенки по своей сущности эквивалентно гипотезе Прандтля [4], дающей логарифмический профиль скорости в турбулентном пограничном и переходном слоях при течении в трубах. Физический смысл положения заключается в том, что размер крупных вихрей, определяющих турбулентный перенос количества движения, растет пропорционально расстоянию от твердой стенки. В средней части цилиндрической области, турбулентность приближенно можно считать однородной, поэтому в данной зоне $\nu_T = const = \nu_0$; причем $\nu_0 \gg \nu_L$, т.е., перенос количества движения осуществляется полностью за счет турбулентных пульсаций. Для квазиодномерного турбулентного течения в круглой трубе такое предположение справедливо при $\hat{r} < \hat{r}_{кр,0} = 0,8$, при рассмотрении замкнутого течения $\hat{r} < \hat{r}_{кр,1} = 0,5$, где $\hat{r}_{кр,1} = \hat{r}_{кр,0} \cdot \hat{r}_1$, $\hat{r}_1$ – радиус поверхности разделяющей противонаправленные потоки.

Увеличение значения коэффициента турбулентной вязкости в торцевых зонах ($\hat{z} > \hat{z}_{и.в.}, \hat{z} < \hat{z}_{и.н.}$), где отсутствуют объемные электромагнитные силы (4.2.) диктуется необходимостью уменьшить вынос скорости в эти зоны, который наблюдается в расчетах по формуле Буссинеска при $Re_{эф}>10$ систем с индукторами, высота которых меньше высоты металла (рис.I). Если в зоне действия электромагнитных сил для получения результатов удовлетворительно согласующихся с экспериментальными данными достаточно определить $\nu_т$ по порядку величины, то в торцевых зонах, где объемные силы отсутствуют, для получения удовлетворительных результатов необходимо $\nu_т$ определить более точно, так как характер течения в этой зоне полностью определяется соотношением сил инерции и сил молекулярной и турбулентной вязкости.

Проверка пригодности формулы (4.I.) для расчетов усредненного турбулентного течения в ИТП с однофазным индуктором осуществлена для нескольких комбинаций эмпирических постоянных c и ν_0 при постоянном значении коэффициента $a=0,5$. Значения коэффициентов c и ν_0 выбираются таким образом, чтобы в центральной части объема заполненного жидкостью значение эффективного числа Рейнольдса приближенно равнялось со значением полученным для рассматриваемого устройства по гипотезе Буссинеска (см.2.).

5. Сопоставление результатов

Оценка результатов полученных на основе рассмотренных трех гипотез и их сопоставление с экспериментальными данными проводится по двум показателям раздельно:

I) Сопоставляются распределения безразмерной скорости.

2) Сравниваются максимальные значения абсолютной скорости движения расплава.

Значения параметров входящих в выражения турбулентной вязкости и параметры расчетной модели приведены в таблице [I].

Из расчетов поля скоростей при различных значениях эффективного числа Рейнольдса, (рис.2-4) следует, что с увеличением значения $Re_{эф}$:

I) возрастает соотношение максимальных значений аксиальной составляющей скорости в пристеночном и в центральном потоках (рис.2):

при $Re_{эф} = 5$; $v_п \approx 0,6\, v_ц$,

а при $Re_{эф} = 10^4$; $v_п \approx v_ц$

2) поверхность разделяющая противонаправленные потоки сдвигается в сторону боковой стенки, но сдвиг Δr относительно не велик - $\Delta r \approx 0{,}05 r_0$ (рис.2);

3) максимумы распределений $\hat{V}_z = \hat{V}_z(z)$, при $r=0$, сдвигаются в сторону торцов цилиндрической области в пределах 10 % высоты расплава (рис.3);

4) пристеночные максимумы распределений $\hat{V}_r = \hat{V}_r(z)$ при $\hat{r} = 0{,}6$ (рис.4) сдвигаются в сторону дна тигля и экстремумы становятся более выраженными:

$$\frac{\hat{V}_{r,max}\Big|_{Re_{эф}=10^4}}{\hat{V}_{r,max}\Big|_{Re_{эф}=5}} \approx 1{,}7 .$$

Совпадение профилей $\hat{V}_r = \hat{V}_r(z)$ при $\hat{r} = 0{,}6$ и $\hat{V}_z = \hat{V}_z(z)$ при $\hat{r} = 0$ с соответствующими экспериментальными профилями [6] точнее при малых значениях эффективного числа Рейнольдса, но для распределения $\hat{V}_z = \hat{V}_z(r)$ совпадение лучше при больших значениях $Re_{эф}$. При $Re_{эф} > 10$ профили безразмерной скорости мало отличаются, а также замедляется возрастание абсолютных значений скорости. Свойства решения при больших значениях $Re_{эф}$ обусловлены тем, что при этом эффективная вязкость мала и влияние ее сказывается только в зонах, где градиент скорости имеет большое значение. Отчасти это явление обусловленно также действием так называемой "аппроксимационной вязкости", влияющей на решение разностной задачи посредством разностных аналогов граничных условий, так как использованные разностные аналоги уравнений для вихря ω и функции тока Ψ [5] не имеют аппроксимационной вязкости. Экспериментально установлено, что максимальное значение скорости для устройства, параметры которого приведены в таблице I, находится в интервале $V_0 = 0{,}15 \div 0{,}25\ \frac{м}{с}$, т.е., в расчете максимальное значение скорости правильно передается при $Re_{эф} \geqslant 50$.

В расчетах по гипотезе Кармана полученные распределения (п.2 табл.I) безразмерных составляющих скорости при $\varkappa = 0{,}1$ и $\varkappa = 0{,}04$ отличаются незначительно:

I) максимальные значения аксиальная компонента скорости принимает на оси симметрии при $|\hat{z}| = 0{,}7$;

2) максимальное значение $\hat{V}_z$ в пристеночном потоке

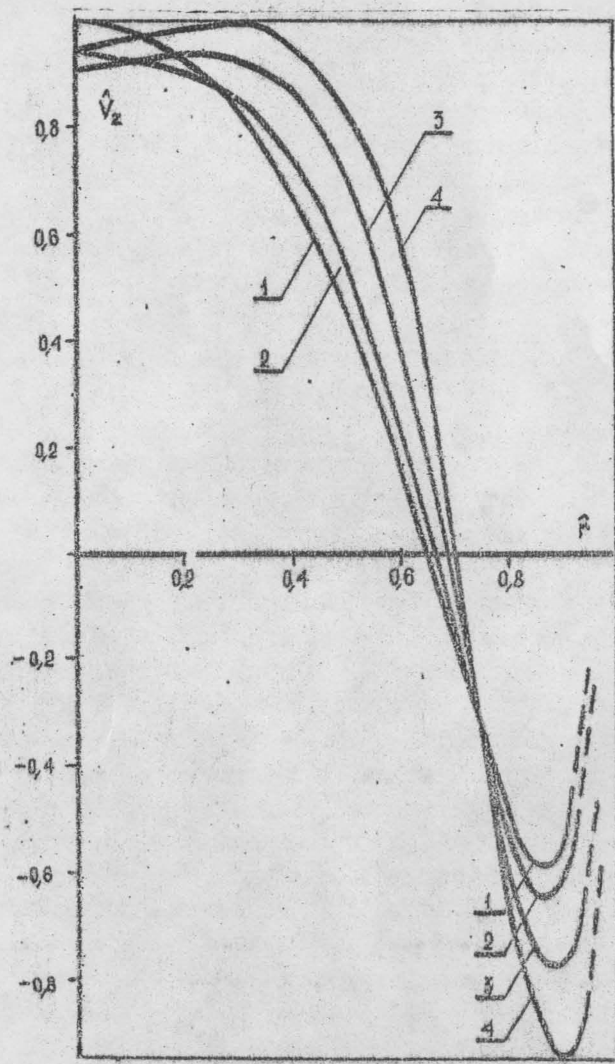


Рис.2.Распределение аксиальной составляющей скорости по радиусу для различных значений эффективного числа Рейнольдса:

1) $Re_{эф} = 5$; $\hat{z} = 0,6$,
2) $Re_{эф} = 50$; $\hat{z} = 0,6$,
3) $Re_{эф} = 10^4$; $\hat{z} = 0,6$,
4) $Re_{эф} = 10^4$; $\hat{z} = 0,8$.

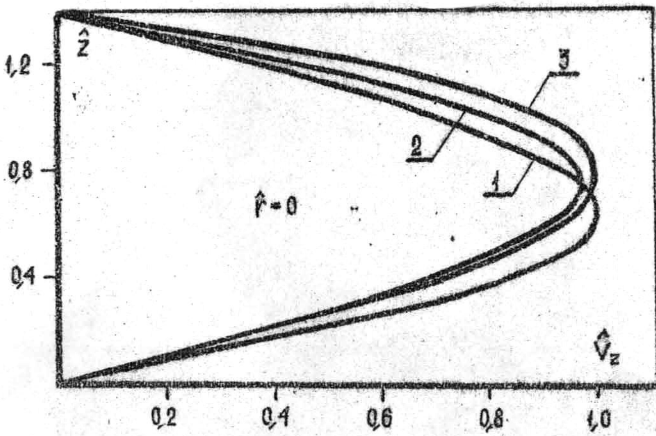


Рис.3. Распределение аксиальной составляющей скорости по высоте расплава на оси симметрии:

I) $Re_{эф} = 5$

2) $Re_{эф} = 50$

3) $Re_{эф} = 10^4$.

$V_n \approx 0,8$, при $\hat{r} \approx 0,9$;

3) радиальная составляющая скорости при $\hat{r} = 0,5$:

а) на поверхности расплава ($\hat{z} = 1,4$) $\hat{V}_r \doteq 0,6$,

б) в плоскости симметрии устройства ($\hat{z} = 0$) ; $\hat{V}_r = 0,45$,

в) максимальное значение в данном потоке при

$$\hat{z}_{max} = -1,2 \; ; \quad \hat{V}_{r,max} = 0,5 .$$

Следовательно при рассмотренных значениях параметра $\varkappa$ расчетные профили имеют примерно те же характерные точки и значения, как и в расчетах при $Re_{эф} = 50$ (п.I табл.I). Распределения компонент скорости полученные при $\varkappa = 0,4$ (п.2 табл.I) более точно соответствуют экспериментальным данным:

I) $\hat{V}_z$ при $\hat{r} = 0$, максимально на высотах $|\hat{z}| = 0,5$.

2) максимальное значение $\hat{V}_z$ в пристеночном потоке $\hat{V}_z \approx 0,9$.

3) радиальная составляющая скорости при $\hat{r} = 0,5$:

а) $\hat{z} = 1,4$; $\hat{V}_r = 0,2$,

б) $\hat{z} = 0$; $\hat{V}_r = 0,45$.

в) $\hat{z}_{max} = -0,9$; $\hat{v}_{r,max} = 0,4$.

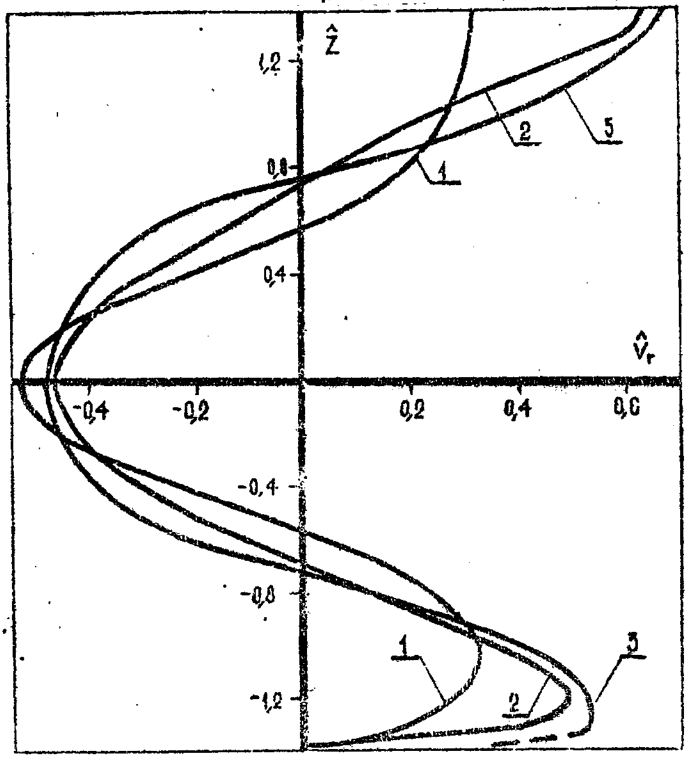


Рис.4. Распределение радиальной составляющей скорости по высоте расплава при $\hat{r}=0,6$:

I) $Re_{эф} = 5$.
2) $Re_{эф} = 50$.
3) $Re_{эф} = 10^4$.

Полученные абсолютные значения скорости при $\varkappa = 0,04$ - 0,I соответствуют экспериментально наблюдаемым значениям, а при $\varkappa = 0,4$ численно получено заниженное значение скорости $V_0 = 0,08 \frac{м}{с}$, что приблизительно равно V_0 в расчетах с $Re_{эф}=5$ (п.I табл. I).

В п.3 табл.I приведены три варианта выбора коэффициентов c и ν_0 в полуэмпирической формуле турбулентной вязкости (4.I). Наилучшее соответствие экспериментальным данным достигается при $\nu_0 = 0,5 \cdot 10^{-3}$, $c = 30$, однако третий вариант выбора коэффициентов $\nu_0 = 1.10^{-3}$; c =25, только незначительно ему уступает. Полученные максимальные значения во всех трех случаях достаточно близки к экспериментально наблюдаемым.

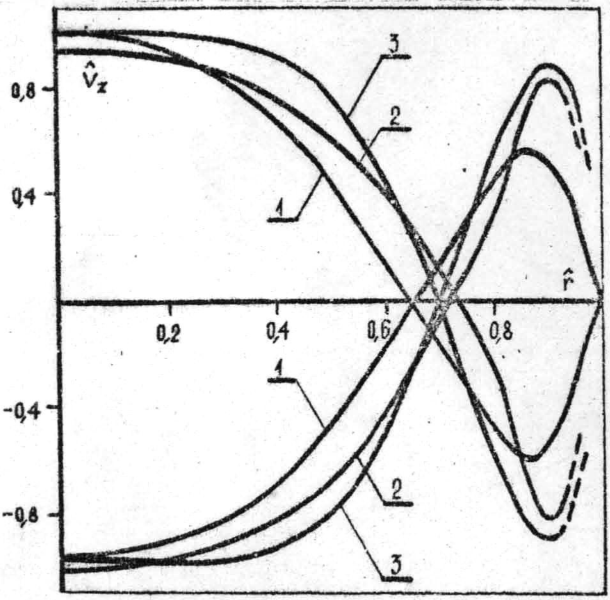


Рис.5. Распределение аксиальной составляющей скорости по радиусу при $|\hat{z}|$ =0,6 :
1) гипотеза Буссинеска: $Re_{эф}$= 5;
2) гипотеза Кармана: $\varkappa$ = 0,4; ν_L =$2.10^{-7} \frac{м^2}{c}$;
3) кусочно-линейная функция турбулентной вязкости: a = 0,5; c =30;
ν_0 = $0,5 .10^{-3} \frac{м^2}{c}$; ν_L = $2.10^{-7} \frac{м^2}{c}$; n=1.

6. Заключение

Для сопоставления результатов расчета распределений безразмерной скорости полученных на основе разных формул определения турбулентной вязкости, рассматриваются три варианта определения ν_T , дающие в каждом отдельном случае профили скорости наиболее полно соответствующие экспериментальным данным (см. табл.1):

1) гипотеза Буссинеска - $Re_{эф}$ =5 ;
2) гипотеза Кармана - $\varkappa$ = 0,4 ; ν_L = $2 .10^{-7} \frac{м^2}{c}$;
3) кусочно-линейная функция турбулентной вязкости -

$a = 0{,}5$; $c = 30$; $\nu_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{м^2}{с}$; $\nu_L = 2 \cdot 10^{-7} \frac{м^2}{с}$; $n = 1$.

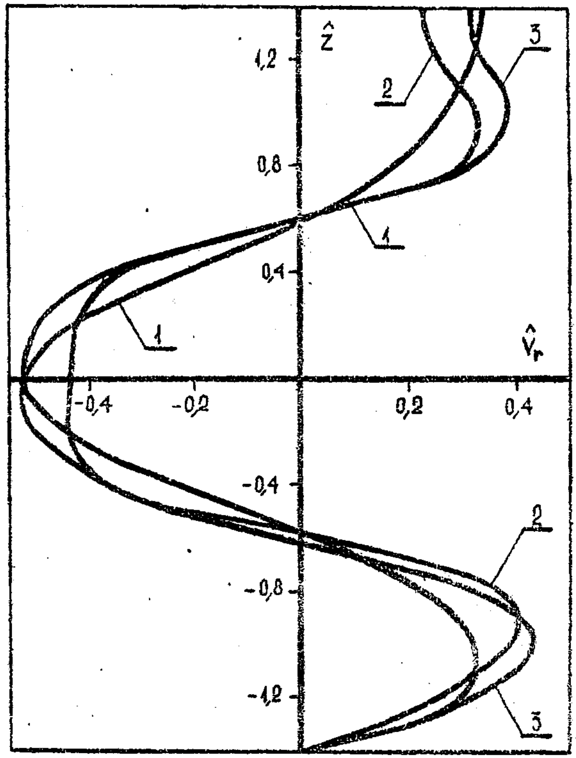


Рис.6. Распределение радиальной составляющей скорости по высоте расплава при $\hat{r} = 0{,}5$ (нумерация кривых как на рис.5).

Из сравнения следует (рис.5 и 6):

I. С помощью гипотезы Буссинеска одновременно нельзя удовлетворить всем требованиям, предъявляемым к профилям скорости - при малых значениях $Re_{эф}$ неудовлетворительным является профиль $\hat{V}_z = \hat{V}_z(r)$ и абсолютное значение скорости, при больших значениях $Re_{эф}$ неудовлетворительны профили $\hat{V}_z = \hat{V}_z(z)$ и $\hat{V}_r = \hat{V}_r(z)$.

2. На основе формулы Кармана и кусочно-линейной функции турбулентной вязкости можно удовлетворить требованиям предъявляемым экспериментом. Применение первой из гипотез удобно, так как необходимо определить только одну постоянную

$\varkappa$, но недостатком является то, что при хорошем совпадении профилей, численно получаются неправильные абсолютные значения скорости и их необходимо определять другим способом. Для применения кусочно линейной функции ν_T (4.I) необходимо определить три эмпирические постоянные a, c и ν_0 , но при этом численно полученные абсолютные значения скорости также согласуются с экспериментальными данными.

Проверка рассмотренных трех гипотез применительно к промышленной печи с емкостью 50 тонн (r_0 =0,95 м) указывает на аналогичные результаты, поэтому рассмотренные формулы совместно с методикой предложенной в работах [2] , [3] могут применяться для проектирования ИТП с заранее заданным характером циркуляции расплава.

Для дальнейшего усовершенствования методики расчета движения в ИТП исследуется влияние воздействия магнитного поля на структуру течения.

Таблица I

Параметры расчетной модели ИТП

№ п.п.	Метод и значения параметров	Максимальное значение скорости (м/с)	Примечания
I	2	3	4
I	Гипотеза Буссинеска I) $Re_{эф} = 5$ 2) $Re_{эф} = 50$ 3) $Re_{эф} = 10^4$	 0,07 0,17 0,22	Рис. 2–6 §2, формулы (2.3) и (2.5)
2	Обобщенная гипотеза Кармана $\nu_L = 2.10^{-7} (\frac{м^2}{с})$ I) $\varkappa = 0,04$ $Re_{эф}\|_{\hat{r}=0,max} = 2,6.10^3$ 2) $\varkappa = 0,1$ $Re_{эф}\|_{\hat{r}=0,max} = 0,9.10^3$ 3) $\varkappa = 0,4$ $Re_{эф}\|_{\hat{r}=0,max} = 0,8.10^3$	 0,22 0,17 0,08	Рис. 5–6 §3, формулы (3.4)-(3.6)
3	Кусочно-линейная турбулентная вязкость $\nu_L = 2.10^{-7}$; $a = 0,5$ I) $c = 10$, $\nu_0 = 10^{-3}$ $Re_{эф}\|_{z=0, r=0} = 60$; $Re_{эф}\|_{min} = 2$ 2) $c = 30$; $\nu_0 = 0,5.10^{-3}$ $Re_{эф}\|_{z=0, r=0} = 70$; $Re_{эф}\|_{min} = 2,5$ 3) $c = 25$; $\nu_0 = 1.10^{-3}$ $Re_{эф}\|_{z=0, r=0} = 32$; $Re_{эф}\|_{min} = 1,3$	 0,20 0,18 0,16	Рис. 5–6 §4, формулы (4.1)-(4.3)

Таблица I. (Продолжение)

Параметры устройства (рис.I). $\hat{h}_p = 2,8$; $\hat{h}_ц = I,4$;
$\hat{l}_{в.в.} = -0,7$; $\hat{l}_{в.н.} = -0,7$; $\hat{R}_ц = I,2$; $\hat{R}_з = I,4$; $\hat{g}_ц = 0,I$; $r_o = 0,2м$;
$\hat{\omega} = 30$; $I = 5.I0^4 \frac{A}{м}$; $\sigma_p = 2,I.I0^6 \frac{1}{Ом \cdot м}$; $\rho = 6,84.I0^3 \frac{кг}{м^3}$;
где $\hat{\omega}$ – безразмерная частота,
I – настил тока в индукторе,
σ_p – проводимость расплава,
ρ – плотность расплава.

ЛИТЕРАТУРА

I. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М., "Наука", I975.256 с.
2. Микельсон Ю.Я., Якович А.Т., Тир Л.Л. Методика расчета МГД-течения в цилиндрической электропечи. – В кн.:УIII Рижское совещание по МГД. Ч.3, I975, с.34 – 36.
3. Микельсон Ю.Я., Якович А.Т. Движение жидкого металла в индукционных печах.– "Учен.зап.ЛГУ им.П.Стучки", I975,Рига, т.252, с.3 – 26.
4. Берд Р., Стюарт В., Лейтфут Е. Явления переноса. М.,"Химия" I975, 688 с.
5. Джакупов К.Б. О разностной схеме без аппроксимационной вязкости для стационарных уравнений Гельмгольца. – В кн.: Вопросы прикладной математики и механики. Вып.I. I974, с.77 – 85.
6. Тир Л.Л., Столов М.Я. Электромагнитные устройства для управления циркуляцией расплава в электропечах. М., "Энергия", I975. 224 с.

Н.Н.Устинов, В.Я.Ауза, Г.Я.Сермонс
ЛГУ им.П.Стучки, ЛГУ им.П.Стучки, АН ЛатвССР

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СИЛЫ И ДЖОУЛЕВЫ ПОТЕРИ В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДВЕСА С ПРОВОДЯЩИМ ПОЛОТНОМ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Идея бесконтактного подвеса экипажа с использованием для этого электромагнитных полей, принадлежащая Пауэллу и Дэнби [I] , в последние годы получила конкретное воплощение в проектировании и создании высокоскоростных наземных транспортных систем [2] . Однако несмотря на известный прогресс, достигнутый в создании действующих моделей, вопрос конструирования полномасштабного экипажа в настоящее время представляется весьма проблематичным [3] .

Одной из главных причин, препятствующих успешному решению этой задачи, является недостаточное понимание основных физических процессов, происходящих при движении твердых тел в электромагнитном поле. В настоящей работе исследуются вихревые токи, возникающие в проводящем полотне конечной толщины, при движении над ним плоского токового контура произвольной формы с постоянной скоростью. Предлагаемая математическая модель электродинамического подвеса обладает большей степенью общности, чем, например, аналогичные модели в работах [4,5].

Для исследования основных зависимостей электромагнитных сил и джоулевых потерь от параметров системы подвеса рассмотрим следующую математическую модель индукционного подвеса (рис.I).

Плоский токовый контур произвольной формы (криволинейный) находится в плоскости xOy и движется с постоянной скоростью $\vec{V}\{V_x, V_y, V_z\}$ относительно проводящей путевой структуры конечной толщины d и бесконечной в направлениях осей x и y . Пусть в начальный момент времени $t=0$, плоскость контура находится на высоте h над путевой структурой. По контуру течет линейный ток I . Рассмотрение производится в системе отсчета, связанной с контуром.

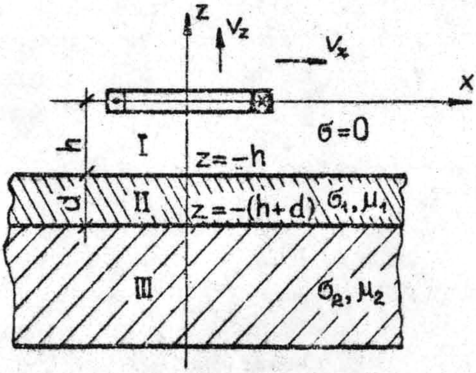


Рис. I.

Для расчета, действующих на контур электромагнитных сил в рамках указанной модели, прежде всего необходимо найти распределение трехмерного магнитного поля токов, индуцированных в проводящем полотне при движении токового контура. Последнее может быть найдено из решения соответствующей краевой задачи для уравнения Максвелла.

Геометрия задачи естественным образом разделяет пространство, в котором ищется поле на три области: область I (над путевой структурой) с нулевой проводимостью, область II (путевая структура) с проводимостью σ_1 , и область III (под путевой структурой) с проводимостью σ_2 (см. рис. I.).

Распределение магнитного поля в этих областях в квазистационарном приближении описывается следующей системой уравнений Максвелла [6] :

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} && \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \\ &\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 && \vec{J} = \sigma(\vec{V}\times\vec{B}) \qquad (1) \\ &\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} && \end{aligned}$$

Таким образом в задаче используется линейная связь между $\vec{B}$ и $\vec{H}$ (изотропность среды). Будем также считать среду однородной, т.е. относительную магнитную проницаемость и проводимость в пределах объема вещества считать постоянными, кроме того, примем, что $\mu = 1$.

При этих предположениях систему уравнений первого порядка (I) можно преобразовать к системе уравнений второго порядка относительно вектора магнитной индукции $\bar{B}$:

$$\Delta\bar{B} + \sigma_i \mu_0 \operatorname{rot}(\bar{v}\times\bar{B}) = 0 \quad \text{(в области II и III)}$$
$$\Delta\bar{B} = 0 \quad \text{(в области I)}$$

Поскольку области I-III неограничены по переменным x и y для нахождения магнитной индукции можно сначала применить метод интегрального преобразования Фурье по этим переменным, что сводит систему уравнений (2) к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по переменной z [7].

В соответствии со сказанным будем искать решение системы уравнений (2) в виде

$$\bar{B}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dK_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dK_y\, \tilde{\bar{B}}(K_x,K_y,z)\, e^{i(K_x x + K_y y)}, \qquad (3)$$

где $\tilde{\bar{B}}(K_x,K_y,z)$ представляет собой Фурье-образ (Фурье-поле) магнитной индукции

$$\tilde{\bar{B}}(K_x,K_y,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, \bar{B}(x,y,z)\, e^{-i(K_x x + K_y y)} \qquad (4)$$

Если магнитное поле, обусловленное вихревыми токами найдено, то силу, действующую на контур с током I, можно найти по известной формуле [6]

$$\bar{F} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \left\{\bar{I}(x,y,z) \times \bar{B}(x,y,z)\right\} \qquad (5)$$

Однако более удобным является расчет силы при помощи соотношения

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dK_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dK_y \left\{\tilde{\bar{I}}^*(K_x,K_y,z) \times \tilde{\bar{B}}(K_x,K_y,z)\right), \qquad (6)$$

олучаемого с использованием теоремы Парсеваля [7] и показывающего, что вычисление сил можно произвести, производя интегрирование в Фурье-плоскости. Аналогично вычисляются и джоулевы потери в единице объема путевого полотна для данной скорости.

Обозначим через σ проводимость областей I-III так, что

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{в области I} \\ \sigma_1 & \text{в области II} \\ \sigma_2 & \text{в области III} \end{cases}$$

и запишем уравнение (2) сразу для всех трех областей в декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial z^2} - \mu_0 \sigma \left(V_x \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \bar{B}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \bar{B}}{\partial z} \right) = 0. \quad (7)$$

Поскольку в данной постановке задачи магнитная индукция имеет все три составляющие

$$\bar{B}(x,y,z) = \{ B_x(x,y,z);\ B_y(x,y,z);\ B_z(x,y,z) \},\ \text{и}$$

уравнение (7) будет иметь одинаковый вид для всех трех компонент, ограничимся рассмотрением уравнения только для компоненты $B_x(x,y,z)$, которую в дальнейшем обозначим как $B(x,y,z)$.
Тогда

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \mu_0 \sigma \left(V_x \frac{\partial B}{\partial x} + V_y \frac{\partial B}{\partial y} + V_z \frac{\partial B}{\partial z} \right) = 0. \quad (8)$$

Применяя преобразование Фурье, определяемое соотношением (4) к уравнению (8), получаем следующее уравнение относительно Фурье-образа магнитной индукции $\tilde{B}(K_x, K_y, z)$

$$\frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial z^2} - \mu_0 \sigma V_z \frac{\partial \tilde{B}}{\partial z} - \left[K_x^2 + K_y^2 - i \mu_0 \sigma (V_x K_x + V_y K_y) \right] \tilde{B} = 0. \quad (9)$$

Введем обозначения

$$k^2=k_x^2+k_y^2\ ;\qquad k_{1,2}=\pm\sqrt{k_x^2+k_y^2}\ ;$$

$$p_{1,2}(\sigma)=\frac{\mu_0\sigma V_x}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\mu_0\sigma V_x}{2}\right)^2+k^2-i\mu_0\sigma(k_xV_x+k_yV_y)}. \qquad (10)$$

С их помощью общее решение уравнения (9) для Фурье-поля $\tilde{B}(k_x,k_y,z)$ в областях I–III можно представить в виде

$$\tilde{B}_x^{(1)}(k_x,k_y,z)=a_x e^{k_1 z}+b_x e^{k_2 z}\ ;$$

$$\tilde{B}_x^{(1)}(k_x,k_y,z)=a_y e^{k_1 z}+b_y e^{k_2 z}\ ;$$

$$\tilde{B}_z^{(1)}(k_x,k_y,z)=a_z e^{k_1 z}+b_z e^{k_2 z}\ ; \qquad \text{(в области I)} \qquad (11)$$

$$\tilde{B}_x^{(2)}(k_x,k_y,z)=c_x e^{p_1(\sigma_1)z}+d_x e^{p_2(\sigma_1)z}\ ;$$

$$\tilde{B}_y^{(2)}(k_x,k_y,z)=c_y e^{p_1(\sigma_1)z}+d_y e^{p_2(\sigma_1)z}\ ;$$

$$\tilde{B}_z^{(2)}(k_x,k_y,z)=c_z e^{p_1(\sigma_1)z}+d_z e^{p_2(\sigma_1)z}\ ; \qquad \text{(в области II)} \qquad (12)$$

$$\tilde{B}_x^{(3)}(k_x,k_y,z)=g_x e^{p_1(\sigma_2)z}\ ;$$

$$\tilde{B}_y^{(3)}(k_x,k_y,z)=g_y e^{p_1(\sigma_2)z}\ ;$$

$$\tilde{B}_z^{(3)}(k_x,k_y,z)=g_z e^{p_1(\sigma_2)z}\ ; \qquad \text{(в области III)} \qquad (13)$$

В соотношениях (I3) решения для области III сразу записаны с учетом ограниченности решения на бесконечности.

Таким образом подлежат определению I5 констант. Поскольку имеющихся в нашем распоряжении граничных условий не хватает, для нахождения соотношений между искомыми коэффициентами воспользуемся дополнительными условиями

$$\operatorname{div}\vec{B}=0\ ; \qquad (14)$$

$$(\operatorname{rot}\vec{B})_z=0\ ; \qquad (15)$$

которые после применения к ним преобразования Фурье преобразуются к виду

$$\frac{\partial\tilde{B}^{(m)}}{\partial z} - i\left(\kappa_x\tilde{B}_x^{(m)} + \kappa_y\tilde{B}_y^{(m)}\right) = 0 \; ; \qquad (16)$$

$$-i\kappa_x\tilde{B}_y^{(m)} + i\kappa_y\tilde{B}_x^{(m)} = 0 \quad , \qquad (17)$$

где m принимает значения m =1,2,3 и соответствует номеру области.

Отметим, что предположение, выражаемое соотношением (15), является приближенным по отношению к токам индукции в путевой структуре и означает, что фактическое распределение индуцированных токов считается плоским. Однако можно показать, что условие (15) не является необходимым при получении связи между коэффициентами поля в области токового контура.

Использование условий (16) и (17) приводит к соотношениям для коэффициентов поля вида

$$g_y = \frac{\kappa_y}{\kappa_x} g_x \; ; \qquad g_z = i\frac{\kappa^2}{\kappa_x p_1(\sigma_2)} g_x \qquad (18)$$

Аналогичным образом выражаются коэффициенты a_y и a_z через a_x, b_y и b_z через b_x, c_y и c_z через c_x и d_y и d_z через d_x. Нужно только в формулах (18) заменять каждый раз сомножитель $p_1(\sigma_2)$ на соответствующий коэффициент в показателе у экспоненты.

Для определения пяти оставшихся констант используем сначала условия равенства на границе II–III составляющих поля $\tilde{B}_z$ и $\tilde{B}_x$. Это позволяет выразить c_x через d_x :

$$c_x = -d_x\frac{(1-p_1(\sigma_2)/p_2(\sigma_1))}{(1-p_1(\sigma_2)/p_1(\sigma_1))}\exp\left\{\left[p_1(\sigma_1)-p_2(\sigma_1)\right](h+d)\right\} \qquad (19)$$

Соответственно использование условий равенства $\tilde{B}_z$ и $\tilde{B}_x$ на границе областей I и II, а также соотношения (19) позволяет выразить b_x через a_x :

$$b_x = a_x X\exp(-2\kappa_1 h) \; , \qquad (20)$$

где

$$X = \frac{\left(\frac{\kappa_1}{p_2(\sigma_1)}-1\right)\left(1-\frac{p_1(\sigma_2)}{p_1(\sigma_1)}\right)+\left(1-\frac{\kappa_1}{p_1(\sigma_1)}\right)\left(1-\frac{p_1(\sigma_2)}{p_2(\sigma_1)}\right)\exp[(p_1(\sigma_1)-p_2(\sigma_1))d]}{\left(\frac{\kappa_2}{p_2(\sigma_1)}-1\right)\left(1-\frac{p_1(\sigma_2)}{p_1(\sigma_1)}\right)+\left(1-\frac{\kappa_2}{p_1(\sigma_1)}\right)\left(1-\frac{p_1(\sigma_2)}{p_2(\sigma_1)}\right)\exp[(p_1(\sigma_1)-p_2(\sigma_1))d]} \qquad (21)$$

Таким образом для определения Фурье-поля в области токового контура, а только его и необходимо знать для вычисления действующих на контур сил, осталось определить еще одну константу a_x.

Для этого заметим, во-первых, что во всех зонах поле $\bar{B}$ (соответственно и его Фурье-образ $\bar{\bar{B}}(k_x,k_y,z)$) во всех зонах является суммой первичного поля контуров возбуждения и вторичного поля индуцированных токов. По отношению к области I вторичное поле токов индукции распространяется от области II, занимаемой проводящим полотном в сторону положительных z. Но это означает, что это поле должно быть представлено экспонентой с отрицательным показателем степени, чтобы обеспечить затухание поля вихревых токов на бесконечности.

Рассматривая с другой стороны поле токового контура возбуждения по отношению к области II видим, что оно распространяется в сторону отрицательных z и тем самым должно быть представлено экспонентой с положительным показателем степени.

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что первое слагаемое в решении (II) соответствует полю контуров возбуждения, а второе - полю токов индукции, и, следовательно, коэффициенты a_x, a_y и a_z(фактически необходимо знать только a_x, т.к. соотношения, выражающие a_y и a_z через a_x известны) можно определить, рассматривая отдельную задачу о нахождении поля контура возбуждения в отсутствии областей II и III, т.е. считая проводимость всюду равной нулю.

Учитывая также, что конечное вычисление электромагнитных сил производится в Фурье-плоскости, будем искать сразу Фурье-поле произвольного плоского токового контура, по которому течет линейный ток I.

Для этого заметим, что любой контур может быть "построен" из точек. Аналогично, ток, текущий по контуру, может быть представлен, как совокупность точечных токов.

Поэтому определим сначала Фурье-поле точечного тока, а затем производя интегрирование вдоль заданного контура, найдем Фурье-поле последнего.

....

Векторный потенциал точечного тока удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\bar{A}(x,y,z) = -\mu_0\bar{I}(x',y',z')\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') , \qquad (22)$$

которое после применения к нему тройного преобразования Фурье принимает вид

$$\tilde{\bar{A}}(K_x,K_y,K_z) = \frac{\mu_0\bar{I}(x',y',z')}{K_x^2+K_y^2+K_z^2}\exp[-i(K_x x'+K_y y'+K_z z')] , \qquad (23)$$

где x',y',z' – текущие координаты точечного тока.

Поскольку нас в конечном счете интересует x -компонента Фурье-поля плоского контура, можно считать, что $z'=0$ и векторный потенциал имеет только x и y компоненты. В "плоском" случае магнитная индукция $B_x(x,y,z)$ и соответственно $\tilde{B}_x(K_x,K_y,z)$ определяются через векторный потенциал как

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z} ; \qquad \tilde{B}_x(K_x,K_y,z) = -\frac{\partial\tilde{A}_y(K_x,K_y,z)}{\partial z} \qquad (24)$$

Тогда применяя к соотношению (23) обратное преобразование Фурье по переменной K_z и используя для вычисления интеграла теорему о вычетах [7] , получим для y - компоненты векторного потенциала плоского точечного тока в Фурье-плоскости

$$\tilde{A}_y(K_x,K_y,z) = \frac{\mu_0 I_y(x',y')}{2\pi}\exp[-i(K_x x'+K_y y')]\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iK_z z}dK_z}{K_z^2-(iK)^2} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_y(x',y')}{2\sqrt{K_x^2+K_y^2}}\exp[-i(K_x x'+K_y y')](e^{K_1 z}+e^{K_2 z}) .$$

Поскольку решению в области I под контуром отвечает слагаемое пропорциональное $e^{K_1 z}$, то для Фурье-образа y -компоненты векторного потенциала точечного тока имеем в области I

$$\tilde{A}_y(K_x,K_y,z) = \frac{\mu_0 I_y(x',y')}{2K_1}\exp[-i(K_x x'+K_y y')]e^{K_1 z} \qquad (25)$$

Дифференцируя соотношение (25) получаем для x – компоненты Фурье-поля точечного тока

$$\tilde{B}_x(K_x,K_y,z) = -\frac{1}{2}\mu_0 I_y(x',y')\exp[-i(K_x x' + K_y y')]e^{K_1 z} \qquad (26)$$

и таким образом искомая постоянная a_x в каждом конкретном случае определяется простым интегрированием по x' и y' вдоль заданного контура коэффициента, стоящего в выражении (26) перед $e^{K_1 z}$.

Отметим также, что Фурье-образ плоского точечного тока

$$\vec{I}(x,y) = \vec{I}(x',y')\,\delta(x-x')\,\delta(y-y') \qquad (27)$$

текущего в плоскости xOy, находятся применением преобразования Фурье к выражению (27) и равен

$$\tilde{\vec{I}}(K_x,K_y) = \vec{I}(x',y')\exp[-i(K_x x' + K_y y')], \qquad (28)$$

где функция $\vec{I}(x',y')$, например, для прямоугольного контура длиной $2a$ и шириной $2b$, лежащего в плоскости xOy, (размер $2a$ отложен вдоль оси x -ов) по которому течет постоянный ток I равна

$$\vec{I}(x',y') = I\{\vec{e}_x[\delta(y'+b)-\delta(y'-b)]\,\theta(a-x')\theta(a+x') +$$
$$+\vec{e}_y[\delta(x'-a)-\delta(x'+a)]\,\theta(b-y')\,\theta(b+y')\} \qquad (29)$$

В этом случае Фурье-образ тока находится подстановкой соотношения (29) в выражение (28) и интегрированием последнего по x' и y' в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\tilde{\vec{I}}(K_x,K_y) = 4i\,I\sin K_x a\cdot\sin K_y b\left(\frac{\vec{e}_x}{K_x} - \frac{\vec{e}_y}{K_y}\right). \qquad (30)$$

Для вычисления действующих электромагнитных сил рассмотрим снова практически важный пример прямоугольного контура. В соответствии с вышесказанным константу a_x, определяющую Фурье-поле токов возбуждения, а также и поле токов индукции, можно найти, подставляя в выражение (26) y – компоненту точечного тока из выражения (29) и производя интегрирование в соотношении (26) по x' и y' в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда получим для x - компоненты Фурье-поля индукции в области токового контура

$$\tilde{B}_x^{(1)}(k_x,k_y,z)=2i\mu_0 I\sin k_x a\,\sin k_y b\,\frac{1}{k_y}\,e^{k_1 z}+$$
$$+2i\mu_0 I\sin k_x a\,\sin k_y b\,\frac{1}{k_y}\,\chi e^{-2k_1 h}e^{k_2 z}\,; \qquad (31)$$

$$a_x=2i\mu_0 I\sin k_x a\,\sin k_y b\,\frac{1}{k_y}\,. \qquad (32)$$

В выражении (31) использовано соотношение (20). Остальные компоненты Фурье-поля определяются элементарно на основе соотношений типа (18)-(20).

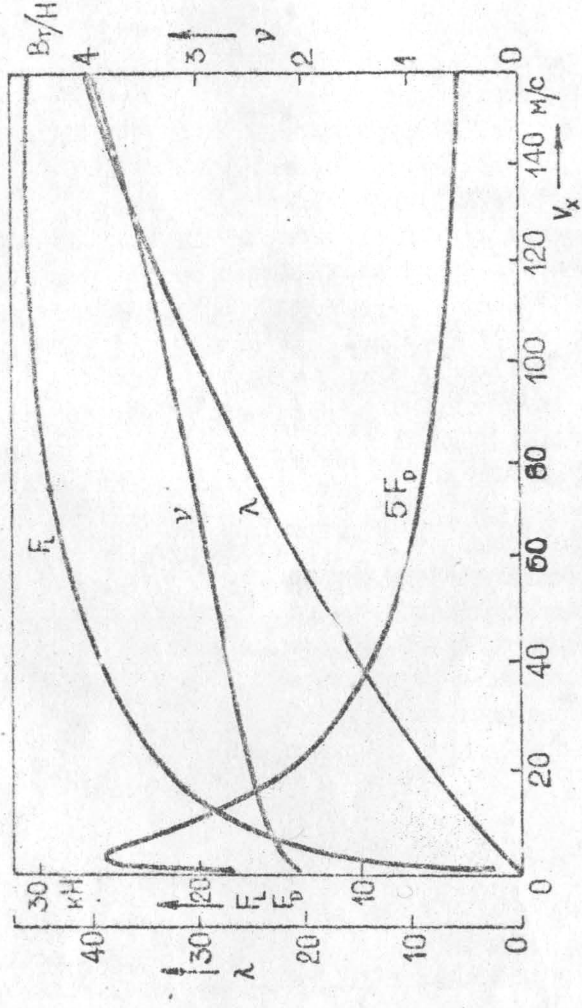
Зная ток возбуждения и магнитную индукцию в Фурье-плоскости можно произвести вычисление сил по формуле (6). Проводя интегрирование необходимо учесть, что вычисляется суммарная (интегральная) сила, действующая на контур и поэтому под $\tilde{B}(k_x,k_y,z)$ в формуле (6) следует понимать только Фурье-поле вихревых токов в путевом полотне [6]. Тогда на основании формул (6),(18)-(20) и (30) для составляющих электромагнитных сил, ответственных за подъем и диссипативное торможение токового контура, можно записать

$$F_z=F_L=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_y\left\{\tilde{I}_x^*(k_x,k_y)\tilde{B}_y^{(1)}(k_x,k_y,0)-\tilde{I}_y^*(k_x,k_y)\tilde{B}_x^{(1)}(k_x,k_y,0)\right\},$$

$$-F_x=F_D=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_y\left\{\tilde{I}_y^*(k_x,k_y)\tilde{B}_z^{(1)}(k_x,k_y,0)\right\} \qquad (33)$$

После подстановки в выражения (33) необходимых соотношений получаем окончательные выражения для электромагнитных сил:

$$F_L=\frac{2\mu_0 I^2}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_y\left\{\sin^2 k_x a\sin^2 k_y b\,e^{-2k_1 h}\chi\left(\frac{1}{k_x^2}+\frac{1}{k_y^2}\right)\right\}; \qquad (34)$$



Bт/Н
4
3
2
1
0
ν
м/с
140
120
100
80
60
40
20
0
V_x
30
кН
20
F_L
F_D
10
λ
40
30
20
10
0
F_L
ν
λ
$5F_D$

Рис.2.

$$F_D = i\frac{2\mu_0 I^2}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dK_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dK_y \left\{\sin^2 K_x a\cdot \sin^2 K_y b e^{-2K_1 h}\chi \frac{K_2}{K_x K_y^2}\right\} \quad (35)$$

Полученные соотношения (34) и (35) позволяют произвести исследование зависимостей подъемных сил, а также джоулевых потерь от следующих параметров: горизонтальной скорости V_x, вертикальной скорости V_z, толщины проводящей структуры d, ее проводимости σ_1, проводимости слоя σ_2, лежащего под полотном, высоты подвеса h, геометрии контура и силы тока в нем. Кроме того эти же соотношения позволяют найти аналогичные зависимости для левитационного качества $\lambda = F_L / F_D$ и подьемной мощности $\nu = F_D \cdot v / F_L$.

Вычисление интегралов производится численно при помощи ЭВМ. Программы расчета написаны на языке "FORTRAN - ASA" и отлажены на ЭВМ БЕ-4I5 в ВЦ ЛГУ.

Пример расчета по указанной программе для случая $V_y = V_z = 0$; $I = 3\cdot 10^5 a$, $\sigma = 3\cdot 10^7 \text{ом}^{-1}\text{м}^{-1}$, $h = 0{,}2\text{м}$, $d = 0{,}02\text{м}$, $a = 0{,}5\text{м}$, $b = 0{,}15\text{м}$ приводится на рис.2.

Приведенные зависимости подъемной силы, силы магнитного торможения, левитационного качества и подъемной мощности от горизонтальной скорости показывают полное совпадение с качественными результатами, вытекающими из приближенного теоретического анализа [2] и количественно совпадают с данными, приводимыми в других исследованиях [4,5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Powell S.R., Danby G.T. Magnetic syspension for levitated tracked vehicles.-"Cryogenics", 1971, vol.11, N.3, p.192-204.
2. Thornton R.D. Magnetic levitation and propulsion 1975.-"IEEE Transactions on Magnetics", 1975, vol.MAG-11, N.4, p.981-995.
3. Japanese prototype gets under way.-"Electrical Rexiced", 1976, vol.198, N.132, p.95.
4. Uvankart L., Miericke . Forces on arbitrary plane multipole excitation current systems used in magnetic levitation.-"Siemens Forsch.- u.Entwickl.", 1974, vol.3, N.3, p.142-148.
5. Menendez R.C., Lee S.W. Side force on coil- sheet magnetic levitation systems.-"Proceedings of the IEEE", 1975, vol.63, N.5, p.768-776.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1957. 532 с.
7. Морс С.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том.I. М., ИЛ, 1958. 930 с.

Н.Н.Устинов, В.Я.Ауза
ЛГУ им.П.Стучки

ВЛИЯНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ КОНТУРОВ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДВЕСА НА СИСТЕМУ ЛЕВИТАЦИИ ЭКИПАЖЕЙ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО НАЗЕМНОГО ТРАНСПОРТА

Любая реальная система подвеса экипажей высокоскоростного наземного транспорта работает в условиях, когда путевое полотно имеет конечную ширину и экипаж при своем движении расположен асимметрично относительно последнего. Такая асимметрия вызывает определенное перераспределение токов, индуцированных в путевом полотне при движении экипажа, и приводит к появлению дополнительных электромагнитных сил, действующих на экипаж в боковом направлении и стремящихся столкнуть его с путевого полотна [I]. Для стабилизации положения экипажа в пространстве некоторыми авторами [I,2] предлагается введение в систему магнитного подвеса стабилизирующих контуров (рис.I.)

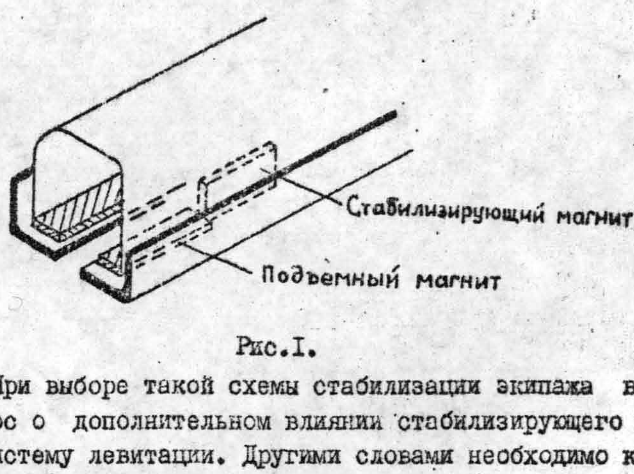


Рис.I.

При выборе такой схемы стабилизации экипажа возникает вопрос о дополнительном влиянии стабилизирующего контура на систему левитации. Другими словами необходимо как-то оценить вклад, даваемый стабилизирующим контуром, на величину подъемной и тормозной сил, обусловленных подъемными магнитами [3].

Не учитывая взаимодействия подъемных и стабилизирующих контуров, рассмотрим следующую математическую модель (рис.2.)

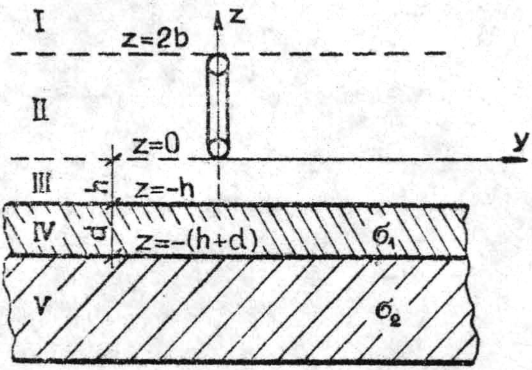


Рис.2.

Пусть прямоугольный плоский контур размеров $2a\times 2b$ с линейным током I находится в плоскости zOx на высоте h (в начальный момент времени) над проводящей путевой структурой толщины d и бесконечной в направлениях Ox и Oy. Контур движется вдоль оси x-ов с постоянной скоростью $\vec{V}(v_x, v_y, v_z)$. Остальные предположения те же, что и в задаче для горизонтального токового контура [3].

Разделим область изменения переменной z задачи на пять зон (см.рис.2.). Поскольку все основные рассуждения при определении коэффициентов поля и электромагнитных сил для этой модели не отличаются от рассмотренных в статье [3], акцентируем внимание лишь на узловых моментах.

Распределение Фурье-поля в области изменения переменной z описывается уравнением [3]

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{B}}}{dz^2} - \mu_0\sigma v_z\frac{d\tilde{\tilde{B}}}{dz} - \left[k_x^2 + k_y^2 - i\mu_0\sigma(v_x k_x + v_y k_y)\right]\tilde{\tilde{B}} = 0 \qquad (1)$$

Решение уравнения (I) для Фурье-поля $\tilde{\vec{B}}(K_x, K_y, z)$ в областях I и II можно записать в виде

$$\tilde{\vec{B}}^{(1)}(K_x, K_y, z) = \vec{r} e^{K_2 z} \qquad (2)$$

$$\tilde{\vec{B}}^{(2)}(K_x, K_y, z) = \vec{s} e^{K_1 z} + \vec{t} e^{K_2 z} \qquad (3)$$

где $\quad K_{1,2} = \pm\sqrt{K_x^2 + K_y^2}$,

K_x и K_y - переменные преобразования Фурье.

Решение для Фурье-поля в областях III-У записывается в таком же виде, что и в [3] , т.е.

$$\tilde{\vec{B}}^{(3)}(K_x, K_y, z) = \vec{a} e^{K_1 z} + \vec{b} e^{K_2 z} \qquad (4)$$

$$\tilde{\vec{B}}^{(4)}(K_x, K_y, z) = \vec{c} e^{p_1(\sigma_1) z} + \vec{d} e^{p_2(\sigma_1) z} \qquad (5)$$

$$\tilde{\vec{B}}^{(5)}(K_x, K_y, z) = \vec{g} e^{p_1(\sigma_2) z} , \qquad (6)$$

где

$$p_{1,2}(\sigma) = \frac{\mu_0 \sigma V_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_0 \sigma V_z}{2}\right)^2 + K^2 - i\mu_0 \sigma (V_x K_x + V_y K_y)} \text{ , а}$$

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 .$$

Таким образом подлежат определению 8 векторных коэффициентов $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ и $\vec{g}$ или 24 постоянные.

Для нахождения связи между искомыми коэффициентами используем два дополнительных условия:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad (7)$$

$$(\operatorname{rot} \vec{B})_y = 0 , \qquad (8)$$

первое из которых является очевидным, а второе означает, что контуры, индуцированных в путевом полотне токов, предполагаются расположенными в плоскости zOx или параллельных плоскостях. Разумеется, что условие (8) в данной постановке задачи выполняется точно лишь для токов возбуждения. В областях с нулевой проводимостью справедливы оба условия.

Применяя Фурье-преобразование к условиям (7) и (8), получаем

$$\frac{\partial \tilde{B}_z^{(m)}}{\partial z} - i\left(\kappa_x \tilde{B}_x^{(m)} + \kappa_y \tilde{B}_y^{(m)}\right) = 0 \quad ; \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_x^{(m)}}{\partial z} + i\kappa_x \tilde{B}_z^{(m)} = 0 \quad , \qquad (10)$$

где m = 1,2,3,4,5 и означает номер соответствующей области.

Использование условий (9) и (10) приводит к соотношениям для искомых коэффициентов поля вида

$$\eta_z = i\frac{\theta(\sigma)}{\kappa_x}\eta_x \quad ; \qquad \eta_y = \frac{\theta^2(\sigma) - \kappa_x^2}{\kappa_x \kappa_y}\eta_x \quad , \qquad (11)$$

где η_x в зависимости от σ означает поочередно s_x, a_x, c_x и g_x при $\theta(\sigma)$ равном, соответственно, $\kappa_1, p_1(\sigma_1), p_1(\sigma_2)$, или η_x принимает значения r_x, t_x, b_x и d_x при $\theta(\sigma)$ равном κ_2 или $p_2(\sigma_1)$. Что касается η_y и η_z, то они в зависимости от выбранного η_x и $\theta(\sigma)$ принимают значения r_z, r_y, s_z, s_y и т.д.

Таким образом применение соотношений (11) в областях I-У сводит число неизвестных коэффициентов поля до восьми - $r_x, s_x, t_x, a_x, b_x, c_x, d_x$ и g_x.

Используем далее условия непрерывности составляющих поля $\tilde{B}_z$ и $\tilde{B}_x$ на границе областей IУ-У и III-IУ. После исключения постоянных d_x и c_x, получим соотношение, связывающее коэффициенты b_x и a_x:

$$b_x = -\chi e^{-2\kappa_1 h} a_x \qquad (12)$$

где

$$\chi = \frac{\left(\frac{K_1}{p_2(\sigma_1)}-1\right)\left(1-\frac{p_1(\sigma_2)}{p_1(\sigma_1)}\right)+\left(1-\frac{K_1}{p_1(\sigma_1)}\right)\left(1-\frac{p_1(\sigma_2)}{p_2(\sigma_1)}\right)exp[(p_1(\sigma_1)-p_2(\sigma_1)d]}{\left(\frac{K_2}{p_2(\sigma_1)}-1\right)\left(1+\frac{p_1(\sigma_2)}{p_1(\sigma_1)}\right)+\left(1-\frac{K_2}{p_1(\sigma_1)}\right)\left(1-\frac{p_1(\sigma_2)}{p_2(\sigma_1)}\right)exp[(p_1(\sigma_1)-p_2(\sigma_1))d]}$$

и в точности совпадает с аналогичным по смыслу коэффициентом, полученным в работе [3] . Таким образом использование условия $(rot\,\vec{B})_y=0$ привело к такому же соотношению между коэффициентами поля в III зоне, что и использование условия $(rot\,\vec{B})_z=0$ в [3] .

Это значит, что принимаемое всеми исследователями [I] приближение о плоском характере вихревых токов в путевом полотне не является обязательным для нахождения коэффициентов поля. Этот факт, несомненно, повышает доверие к описанному способу вычислений и результатам.

Оставшиеся четыре коэффициента r_x, s_x, t_x и a_x можно найти, используя условия для составляющих поля $\tilde{B}_z$ и $\tilde{B}_y$ на границе областей II-III и I-II, а также тот факт, что константа a_x выражает Фурье-поле токов возбуждения в области III в отсутствие проводящей структуры и, следовательно, может быть определена независимым образом [3] .

Используя соотношения (II) и (I2) записываем решения уравнения (I) в областях I-III в виде:

$$\tilde{B}_x^{(1)}(K_x,K_y,z)=r_x e^{K_2 z}$$

$$\tilde{B}_y^{(1)}(K_x,K_y,z)=\frac{K_y}{K_x} r_x e^{K_2 z}$$

$$\tilde{B}_z^{(1)}(K_x,K_y,z)=i\frac{K_2}{K_x} r_x e^{K_2 z} \quad \text{(в области I)} \qquad (13)$$

$$\tilde{B}_x^{(2)}(K_x,K_y,z)=s_x e^{K_1 z}+t_x e^{K_2 z}$$

$$\tilde{B}_y^{(2)}(K_x,K_y,z)=\frac{K_y}{K_x} s_x e^{K_1 z}+\frac{K_y}{K_x} t_x e^{K_2 z}$$

$$\tilde{B}_z^{(2)}(K_x,K_y,z)=i\frac{K_1}{K_x} s_x e^{K_1 z}+i\frac{K_2}{K_x} t_x e^{K_2 z} \quad \text{(в области II)} \qquad (14)$$

$$\tilde{B}_x^{(3)}(k_x,k_y,z)=a_x e^{k_1 z}-a_x X e^{k_2 z}\cdot e^{-2k_1 h}$$

$$\tilde{B}_y^{(3)}(k_x,k_y,z)=\frac{k_y}{k_x}a_x e^{k_1 z}-a_x X\frac{k_y}{k_x}e^{-2k_1 h}e^{k_2 z}$$

$$\tilde{B}_z^{(3)}(k_x,k_y,z)=i\frac{k_1}{k_x}a_x e^{k_1 z}-i a_x X\frac{k_2}{k_x}e^{-2k_1 h}e^{k_2 z} \qquad \text{(в области III)}. \qquad (15)$$

Граничные условия для $\tilde{B}_z(k_x,k_y,z)$ и $\tilde{B}_y(k_x,k_y,z)$ на границе областей I-III имеют вид:

$$\tilde{B}_z^{(2)}(k_x,k_y,0)=\tilde{B}_z^{(3)}(k_x,k_y,0);\quad \tilde{B}_y^{(2)}(k_x,k_y,0)-\tilde{B}_y^{(3)}(k_x,k_y,0)=\mu_0\tilde{I}_x\Big|_{z=0};$$

$$\tilde{B}_z^{(2)}(k_x,k_y,2b)=\tilde{B}_z^{(1)}(k_x,k_y,2b);\quad \tilde{B}_y^{(1)}(k_x,k_y,2b)-\tilde{B}_y^{(2)}(k_x,k_y,2b)=\mu_0\tilde{I}_x\Big|_{z=2b}. \qquad (16)$$

Воспользовавшись тем, что $\tilde{I}_x\Big|_{z=0}=-\tilde{I}_x\Big|_{z=2b}$, на основе соотношений (16) можем получить для коэффициента t_x следующее выражение

$$t_x=-\left[X e^{-2k_1 h}+1/(1-e^{-2k_1 b})\right]a_x=b_x-a_x/(1-e^{-2k_1 b}), \qquad (17)$$

которое показывает; что t_x выражая Фурье-поле в области II для положительных z, в соответствии с принципом суперпозиций представляет собой сумму коэффициента b_x, отвечающего за Фурье-поле индуцированных в путевом полотне токов, и добавки, обусловленной вкладом Фурье-поля возбуждающего контура в этой области.

Для определения Фурье-поля контура возбуждения в области III и, соответственно, коэффициента a_x воспользуемся снова методом точечного тока [3]. Учитывая, что в этом случае, точечный ток расположен в плоскости zOx, получим для z - компоненты Фурье-потенциала точечного тока:

$$\tilde{A}_z(k_x,k_y,z)=\frac{\mu_0 I_z(x',z')}{2\sqrt{k_x^2+k_y^2}}\,e^{-ik_x x'}e^{\sqrt{k_x^2+k_y^2}(z-z')}, \qquad (18)$$

где функция $I_z(x',z')$, например, для прямоугольного контура размеров 2а х 2в (см.рис.2.) имеет вид:

$$I_z(x',z')=I\left[\delta(x'+a)-\delta(x'-a)\right]\theta(z')\theta(2b-z'), \qquad (19)$$

а $\delta(x')$ и $\theta(z')$ - дельта-функция Дирака и функция Хевисайда соответственно.

Подстановка выражения (19) в соотношение (18) и интегрирование последнего по переменным x' и z' в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ приводит к следующему выражению для $\tilde{A}_z$ - компоненты Фурье-потенциала прямоугольного контура, лежащего в плоскости $z\partial x$:

$$\tilde{A}_z(k_x,k_y,z)=-\frac{\mu_0 I\, i\sin k_x a}{k_x^2+k_y^2}\left(e^{-2k_1 b}-1\right)e^{k_1 z}, \qquad (20)$$

При заданном расположении контура (см.рис.2.) векторный потенциал тока возбуждения имеет только A_z и A_x составляющие. Поэтому для x -составляющей поля токов возбуждения имеем $B_x=-\partial A_z/\partial y$, что соответствует в Фурье-плоскости соотношению

$$\tilde{B}_x(k_x,k_y,z)=-i\,k_y\tilde{A}_z(k_x,k_y,z). \qquad (21)$$

На основе формул (20) и (21) для прямоугольного контура с током получаем

$$\tilde{B}_x^{(a)}(k_x,k_y,z)=a_x\,e^{k_1 z}=\frac{\mu_0 I\sin k_x a\cdot k_y}{k_x^2+k_y^2}\left(1-e^{-2k_1 b}\right)e^{k_1 z}, \qquad (22)$$

и таким образом искомый коэффициент a_x оказывается равным

$$a_x = \mu_0 I \sin k_x a \frac{k_y}{k_x^2 + k_y^2}\left(1 - e^{-2k_1 b}\right). \qquad (23)$$

По известному коэффициенту a_x постоянные b_x и t_x выражающие Фурье-поле токов индукции находятся на основе соотношений (12) и (17) и позволяют вычислять действующие электромагнитные силы.

Вычисление электромагнитных сил можно производить по формуле [3]

$$\vec{F} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int\limits_{0}^{2b} dz \left[\tilde{\vec{I}}^*(k_x,k_y,z) \times \tilde{\vec{B}}(k_x,k_y,z)\right], \qquad (24)$$

где под $\tilde{\vec{B}}(k_x,k_y,z)$ нужно понимать только Фурье-поле индуцированных токов в области, занимаемой контуром, т.е. в области II. Используя формулу (24) можно написать следующие выражения для подъемной и тормозной сил;

$$F_L = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int\limits_{0}^{2b} dz \left\{\tilde{I}_x^*(k_x,k_y,z)\,\tilde{B}_y^{(2)}(k_x,k_y,z)\right\}; \qquad (25)$$

$$F_D = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int\limits_{0}^{2b} dz \left\{\tilde{I}_z^*(k_x,k_y,z)\,\tilde{B}_y^{(2)}(k_x,k_y,z)\right\}. \qquad (26)$$

Компоненту $\tilde{B}_y^{(2)}(k_x,k_y,z)$ Фурье-поля в области II для положительных z согласно соотношению (14) представляет слагаемое

$$\tilde{B}_y^{(2)}(k_x,k_y,z) = \frac{k_y}{k_x} t_x e^{k_2 z} \qquad (27)$$

В этом выражении полю токов индукции соответствует не весь коэффициент t_x, а как отмечалось выше, только его часть, представляемая коэффициентом b_x. Тогда с учетом соотношений (17), (23) и (27) для Фурье-поля токов индукции в области II получим выражение

$$\tilde{B}_y^{(e)}(\kappa_x,\kappa_y,z) = \mp\mu_0 \frac{I\sin\kappa_x a\cdot\kappa_y^2}{\kappa_x(\kappa_x^2+\kappa_y^2)} \chi e^{-2\kappa_1 h}(1-e^{-2\kappa_1 b})e^{\kappa_2 z} \quad (28)$$

Для нахождения составляющих Фурье-тока в контуре воспользуемся снова методом точечного тока. Имеем для "плоского" точечного тока, текущего в плоскости $z0x(y'=0)$

$$\tilde{\vec{I}}(\kappa_x,\kappa_y,z) = \vec{I}(z',x')\,\delta(z-z')e^{-i\kappa_x x'}, \quad (29)$$

где функция $\vec{I}(z',x')$ в случае прямоугольного контура, лежащего в плоскости $z0x$, по которому течет постоянный ток I, имеет вид

$$\vec{I}(z',x') = I\{\vec{e}_x[\delta(z'-2b)-\delta(z')]\theta(a-x')\theta(a+x') +$$
$$+\vec{e}_z[\delta(x'+a)-\delta(x'-a)]\theta(z')\theta(2b-z'), \quad (30)$$

В формуле (30) $\theta(z')$ - функция Хевисайда, $\delta(x')$ - дельта-функция Дирака, расположение контура соответствует рис.2.

Подстановка выражения (30) в соотношение (29) и интегрирование последнего по переменным z' и x' в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ дает следующее выражение для Фурье-тока вертикального прямоугольного контура

$$\tilde{\vec{I}}(\kappa_x,\kappa_y,z) = \vec{e}_x\tilde{I}_x(\kappa_x,\kappa_y,z)+\vec{e}_z\tilde{I}_z(\kappa_x,\kappa_y,z),$$

где $$\tilde{I}_x(\kappa_x,\kappa_y,z) = \frac{2I\sin\kappa_x a}{\kappa_x}[\delta(z-2b)-\delta(z)]; \quad (31)$$

$$\tilde{I}_z(\kappa_x,\kappa_y,z) = \begin{cases} 2iI\sin\kappa_x a & z\in[0,2b] \\ 0 & z<0,\ z>2b \end{cases}. \quad (32)$$

Используя соотношения (28), (31) и (32) в формулах (25) и (26), и производя в них интегрирование по переменной z получаем окончательные выражения для подъемной и тормозной сил:

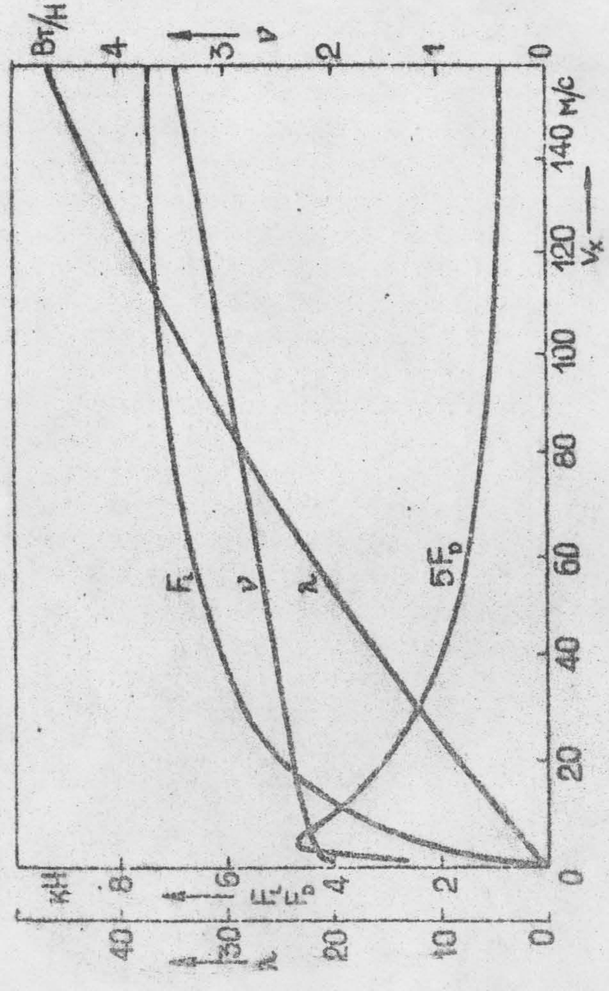

кН
8
6
4
2
0
40
30
20
10
0
λ
F_L
F_D
Вт/Н
4
3
2
1
0
ν
20
40
60
80
100
120
140 м/с
V_x
F_L
ν
λ
$5F_D$

Рис. 3.

$$F_L=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dK_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dK_y\left\{\frac{\sin^2 K_x a\cdot K_y^2}{K_x^2(K_x^2+K_y^2)}Re(-\chi)e^{-2K_1h}(1-e^{-2K_1b})^2\right\} \quad (33)$$

$$F_D=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dK_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dK_y\left\{\frac{\sin^2 K_x a\cdot K_y^2}{K_x(K_x^2+K_y^2)^{3/2}}Im(-\chi)e^{-2K_1h}(1-e^{-2K_1b})^2\right\} \quad (34)$$

Расчет интересующих зависимостей сил от скорости токового контура, геометрических параметров системы электродинамического подвеса и электромагнитных свойств путевого полотна производится численно на ЭВМ на основе формул (33) и (34).

Пример численного расчета сил, левитационного качества $\lambda=F_L/F_D$ и подъемной мощности $\tilde{V}=F_D\cdot v/F_L$ для случая $v_y=v_z=0$, $I=3\cdot10^5 a$, $\sigma_1=3\cdot10^7 ом^{-1}м^{-1}$; $\sigma_2=\sigma_1/30$, $h=0{,}2м$, $d=0{,}02м$, $a=0{,}5м$, $b=0{,}15 м$ приводится на рис.3.

Сравнение приведенных данных с аналогичными расчетами для подъемных магнитов [3] показывает, что при определенных условиях вклад стабилизирующих контуров в параметры системы левитации становится существенным. Это обстоятельство необходимо принять во внимание при конструировании конкретных систем подвеса для достижения оптимальных показателей системы по весу и геометрическим размерам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Thornton R.D. Magnetic levitation and propulsion 1975. "IEEE Transactions on Magnetics", 1975, vol. MAG-11, N 4, p.981-995.
2. Uvankar L. Basic magnetic levitation systems with a continuos sheet track. "Siemens Forsch.-u.Entwickl.", 1975, Bd4, N.1, p.25-32.
3. Устинов Н.Н., Ауза В.Я., Сермонс Г.Я. Электромагнитные силы и джоулевы потери в системе электродинамического подвеса с проводящим полотном конечной толщины (в настоящем сборнике).

УДК 536.24

Ю.А.Дрейманис
ЛГУ им.П.Стучки

КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА КАЛОРИМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ

В данной работе приводятся результаты, полученные для критериев качества калориметрических систем [I] в приближении плоской одномерной модели калориметра [2] . Здесь рассматриваются только три критерия качества: защищенность от внешних тепловых импульсов, взаимное влияние ячеек и повторяемость.

I. Защищенность A_1.

Защищенность от внешних тепловых импульсов вычислялась по формуле (I8) из [2] .

$$A_1=\frac{(1+K_{12})(1+K_{23})}{4}\cdot\frac{\left\{\left[e^{-\frac{a_*}{4t_*}}-e^{-\frac{(2h_8+\sqrt{a_*})}{4t_*}}\right]/\sqrt{t_*}\right\}_{max}}{\left\{\left[e^{-\frac{(h_1+h_2+h_3-h_5)^2}{4t_*}}-e^{-\frac{(h_1+h_2+h_3+h_5)^2}{4t_*}}\right]/\sqrt{t_*}\right\}_{max}} \qquad (1)$$

Обозначения:

a_{*i} - коэффициент температуропроводности i -го слоя,

$$a_{*i}=\sqrt{\frac{\lambda_{*i}}{c_{*i}\rho_{*i}}}$$

λ_{*i} - теплопроводность i -го слоя,

c_{*i} - удельная теплоемкость i -го слоя,

ρ_{*i} - плотность i -го слоя,

I $^{-й}$ слой соответствует выравнивающему цилиндру калориметра;

2$^{-й}$ слой соответствует слою изоляции калориметра;

3$^{-й}$ слой соответствует цилиндру детектора калориметра;

h_i - эффективные толщины слоев калориметра;

$$h_i = \frac{l_{*i}}{a_{*i}}, \quad i = 1,2,3; \quad h_5 = \frac{l_{*5}}{a_{*3}},$$

l_{*1} - толщина выравнивающего цилиндра;

l_{*2} - толщина слоя изоляции;

l_{*3} - радиус цилиндра детектора;

l_{*5} - половина расстояния между ячейками;

K_{ij} - коэффициент перехода;

$$K_{ij} = \frac{\lambda_{*i}\, a_{*j}}{\lambda_{*j}\, a_{*i}}.$$

q_* - постоянная характеризующая скорость химической реакции в ячейке.

Все величины приведены к безразмерному виду.

Из формулы (I) следует, что в приближении плоской одномерной модели калориметра защищенность зависит от следующих параметров, характеризующих калориметр:

$$A_1 = A_1(h_1, h_2, h_3, h_5, K_{12}, K_{23}, q_*) \qquad (2).$$

Первые шесть параметров изменяемы (зависят от размеров и теплофизических характеристик материалов, из которых изготовлены отдельные части калориметра), а последний - q_* зависит только от скорости химической реакции в ячейке.

Далее рассматриваются зависимости защищенности от отдельных параметров калориметра.

На рис.I. изображена зависимость защищенности от толщины (эффективной) слоя изоляции h_2. Так как h_1, h_2 и h_3 в (I) входят одинаково, то такие же зависимости существуют и для зависимости защищенности от эффективной толщины выравнивающего цилиндра и от эффективного радиуса цилиндра детектора. Как следует из рис.I, логарифм защищенности почти что прямо пропорционален h_1, h_2 и h_3. Здесь невозможно выделить области для этих параметров, при которых защищенность имеет наибольшее значение. Чем больше эти параметры, тем выше защищенность.

На рис.2 изображена зависимость защищенности от эффективного расстояния между ячейками. Как следует из рисунка, защищенность при увеличении расстояния между ячейками уменьшается: сначала резко, потом медленнее. Из кривой 4 следует, что при приближении ячеек к краям цилиндра детектора при малых тол-

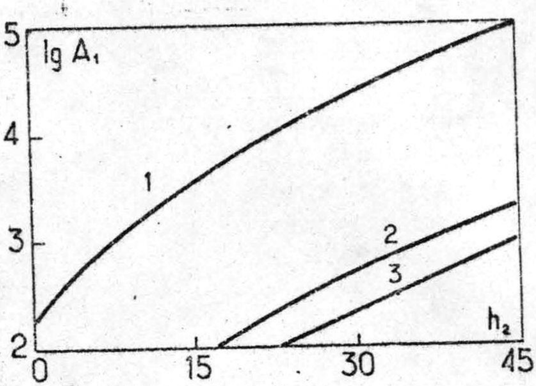


Рис.I. Зависимость защищенности от толщины слоя изоляции $q_*=0{,}1$; $h_3=0{,}5$; 1) $h_1=0{,}5$; $h_5=1\times10^{-5}$; 2) $h_1=2{,}5$, $h_5=0{,}5$; 3) $q_*=10$, $h_1=4$, $h_3=0{,}5$; $h_5=1\times10^{-5}$.

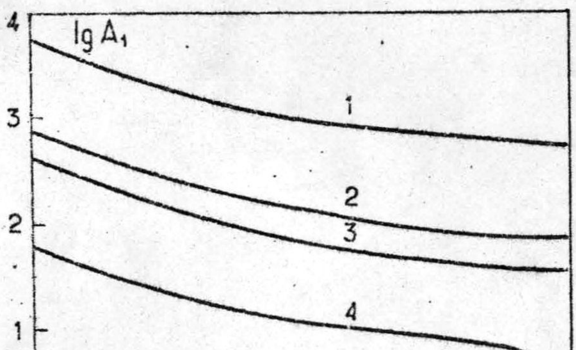


Рис.2. Зависимость защищенности от эффективного расстояния между ячейками $q_*=0{,}1$, $h_1=4$, $h_3=1$; 1) $h_2=20$; 2) $h_2=10$; 3) $h_2=5$; 4) $h_2=0{,}5$.

щинах слоя изоляции и выравнивающего цилиндра, защищенность резко уменьшается.

Из рассмотренных графиков следует, что для увеличения защищенности необходимо сближать ячейки детектора между собой, однако при их сближении усиливается взаимное влияние между ячейками. Из этого следует, что в "оптимальном" калориметре по защищенности и взаимному влиянию, обязательно существует "оптимальное" расстояние между ячейками.

Из рис.2 следует, что работа калориметра при расстояниях между ячейками меньших чем 0,05 является неустойчивой, т.е. небольшие изменения расстояния между ячейками вызывают резкое изменение защищенности. Учитывая это, и то, что защищенность резко меняется при приближении к краям цилиндра детектора, можно установить следующую область изменения эффективного расстояния между ячейками: $0{,}05 < h_5 < (0{,}5 \div 0{,}6) \times (h_1 + h_2 + h_3)$.

На рис.3 изображена зависимость защищенности от скорости прохождения реакции в одной из ячеек.

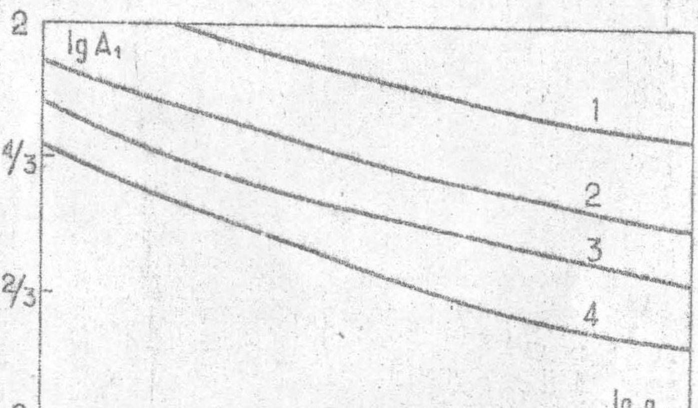


Рис.3. Зависимость защищенности от скорости химической реакции $h_1=2, h_3=6, h_5=4$;
1) $h_2=2$; 2) $h_2=6$; 3) $h_2=10$; 4) $h_2=20$.

Из рисунка следует, что чем медленнее реакция (чем больше q_*), тем меньше защищенность калориметра. Скорость реакции в первом приближении не зависит от конструкции калориметра и поэтому нет возможности влиять на ее.

Из (I) следует, что зависимость защищенности от K_{12} и K_{23} простая

$$A_1(h_1,h_2,h_3,h_5,K_{12},K_{23},q_*)=\frac{(1+K_{12})(1+K_{23})}{4}\times$$
$$\times A_1(h_1,h_2,h_3,h_5,1,1,q_*), \qquad (3)$$

т.е. чем больше K_{12} и K_{23}, тем выше защищенность калориметра. Следует отметить, что в реальных калориметрах $K_{12}>1$, $K_{23}<1$.

II. Взаимное влияние ячеек $A_з$.

Взаимное влияние ячеек вычислялось по формуле (29) из [2]:

$$A_з=\frac{2K_{43}}{(1+K_{43})^2}\left\{\left[e^{-\frac{(h_4+2h_5+\sqrt{q_*})^2}{4t_*}}-e^{-\frac{(2h_4+2h_5+\sqrt{q_*})^2}{4t_*}}\right]\Big/\sqrt{t_*}\right\}_{max}\Big/$$
$$\Big/\left\{\left[e^{-\frac{q_*}{4t_*}}-\frac{K_{43}}{1+K_{43}}\left[e^{-\frac{(h_4+\sqrt{q_*})^2}{4t_*}}-e^{-\frac{(3h_4+4h_5+\sqrt{q_*})^2}{4t_*}}-\right.\right.\right. \qquad (4)$$
$$\left.\left.\left.-C_{45}\left(e^{-\frac{(3h_4+\sqrt{q_*})^2}{4t_*}}-e^{-\frac{(h_4+4h_5+\sqrt{q_*})^2}{4t_*}}\right)\right]\right]\Big/\sqrt{t_*}\right\}_{max}$$

Обозначения:

$$h_4=\frac{l_{*4}}{a_{*4}}$$

l_{*4} - толщина термоэлемента;

a_{*4} - температуропроводность термоэлемента;

$$C_{ij}=\frac{1-K_{ij}}{1+K_{ij}};$$

а K_{ij}, h_5, q_* - объяснены в формуле (I).

Все величины приведены к безразмерному виду.

Из формулы (4) следует, что в приближении плоской одномерной модели калориметра взаимное влияние ячеек зависит от следующих параметров, характеризующих калориметр:

$$A_3 = A_3(h_4, h_5, K_{43}, q_*).$$

Первые три параметра изменяемы (зависят от размеров и теплофизических характеристик материалов, из которых изготовлены отдельные части калориметра, и последний - q_*, зависит только от скорости химической реакции в ячейке.

Далее рассматриваются зависимости взаимного влияния ячеек от отдельных параметров калориметра.

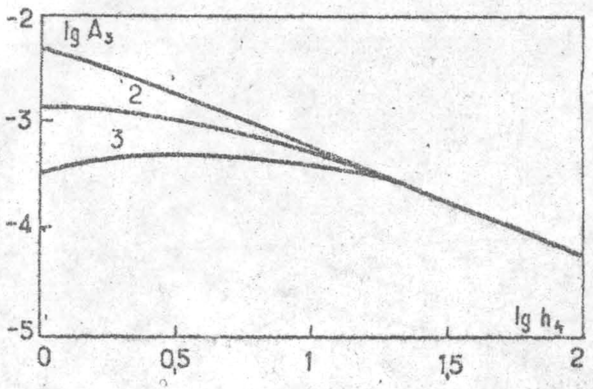


Рис.4. Зависимость взаимного влияния ячеек от эффективной толщины термоэлемента $q = 0{,}1$, $K_{43} = 0{,}01$, 1) $h_5 = 0$; 2) $h_5 = 0{,}5$; 3) $h_5 = 1$.

На рис.4 изображена зависимость взаимного влияния ячеек от эффективной толщины термоэлементов. Наименьшее взаимное влияние получается при $h_4 \to 0$ и $h_4 \to \infty$. Первый вариант ($h_4 \to 0$) нет возможности реализовать по той причине, что при $h_4 \to 0$ становится невозможной регистрация сигнала, так как интегральная чувствительность стремится к нулю (см. [2] формулу (42)). При $h_4 \to \infty$ взаимное влияние уменьшается медленнее, т.е. калориметр по отношению к взаимному влиянию работает стабильнее (большие изменения h_4 вызывают малые изменения A_3), но при $h_4 \to \infty$ должны стремиться к бесконечности размеры калориметра. Из сказанного следует, в "оптимальном" калориметре по чувствительности, весу и взаимному влиянию ячеек существует "оптимальная" эффективная толщина термоэлемента.

По рис.4 можно судить также о зависимости взаимного влияния ячеек от эффективного расстояния между ячейками. При $h_4 > 10$ взаимное влияние ячеек практически не зависит от эффективного расстояния между ячейками. При $h_4 < 10$ взаимное влияние ячеек тем меньше, чем больше расстояние между ячейками.

При уменьшении h_4 зависимость взаимного влияния ячеек от расстояния между ячейками усиливается. Следует отметить, что защищенность при увеличении расстояния между ячейками уменьшалась (см.рис.2), так что должно существовать оптимальное расстояние между ячейками, дающее достаточно большую защищенность от внешних тепловых импульсов и достаточно малое взаимное влияние ячеек.

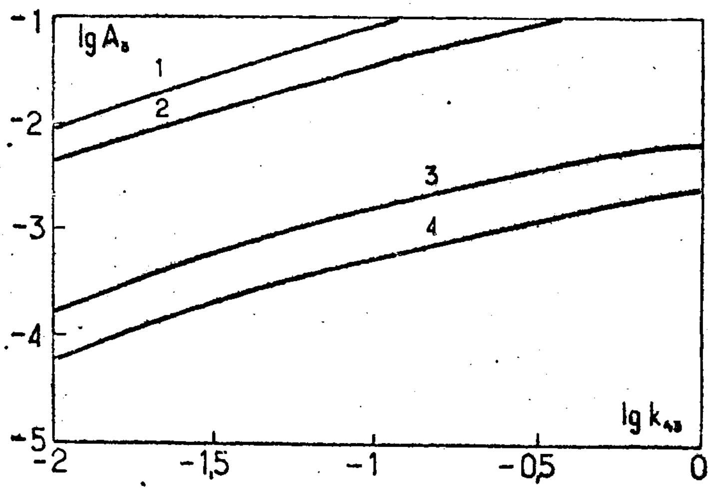


Рис.5. Зависимость взаимного влияния ячеек теплофизических свойств материалов термоэлементов и детектора $h_5=0$, $q_*=0{,}1$; 1) $h_4=1$; 2) $h_4=10$; $q_*=1$; 3) $h_4=1$, 4) $h_4=10$.

На рис.5 показана зависимость взаимного влияния ячеек от отношения параметров, характеризующих теплофизические свойства термоэлементов и цилиндра детектора. Как следует из [2] формула (3) коэффициент перехода равен

$$K_{43} = \sqrt{\frac{\lambda_{*4} C_{*4} \rho_4}{\lambda_{*3} C_{*3} \rho_{*3}}} ,$$

где:
индекс 4 соответствует термоэлементу;
3 - цилиндру детектора;
λ_* - теплопроводность;
C_* - удельная теплоемкость;
ρ_* - плотность.

Коэффициент перехода зависит от отношения теплопроводностей контактирующих частей калориметра, от отношения удельных теплоемкостей и от отношения плотностей этих частей калориметра. В данном случае рассматриваются термоэлемент и цилиндр детектора. Как следует из рисунка, то при уменьшении коэффициента перехода K_{43}, взаимное влияние ячеек уменьшается, т.е. чем меньше теплопроводность, удельная теплоемкость и плотность материала термоэлемента по отношению к соответствующим характеристикам материала цилиндра детектора, тем меньше взаимное влияние ячеек. Следует отметить, что для повторяемости существует обратная зависимость (см.рис.8), так что имеется "оптимальный" коэффициент перехода K_{43}, дающий "оптимальный" калориметр по отношению к взаимному влиянию ячеек и повторяемости.

На рис.6 показана зависимость взаимного влияния ячеек от параметра q_*, характеризующего скорость химической реакции. Этот рисунок приведен в качестве иллюстрации, так как скорость химической реакции в данном приближении не зависит от конструкции калориметра и, следовательно, не изменяема. Из рисунка следует, что чем медленнее реакция (больше q_*), тем больше взаимное влияние ячеек.

III.

Повторяемость вычисляется по формуле (30) с использованием (34) (обе формулы в [2]).

$$A_4 = \frac{1}{t_{*1}} ,$$

где t_{*1} удовлетворяет трансцедентному уравнению

$$\frac{e^{-\frac{q_*}{4t_{*1}}}-\frac{2K_{43}}{1+K_{43}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}C_{43}^{k}e^{-\frac{[h_4(2k+1)+\sqrt{q_*}]^2}{4t_{*1}}}}{\sqrt{t_{*1}}\left\{\left[e^{-\frac{q_0}{4t_*}}-\frac{2K_{43}}{1+K_{43}}\sum_{k=0}^{\infty}C_{43}^{k}e^{-\frac{[h_4(2k+1)+\sqrt{q_*}]^2}{4t_*}}\right]\Big/\sqrt{t_*}\right\}_{max}}=K\ , \quad (8)$$

где

K - определенное наперед заданное число,

а K_{43} объяснено в (6), C_{43}; h_4 - в (4) и q_* - в (I).

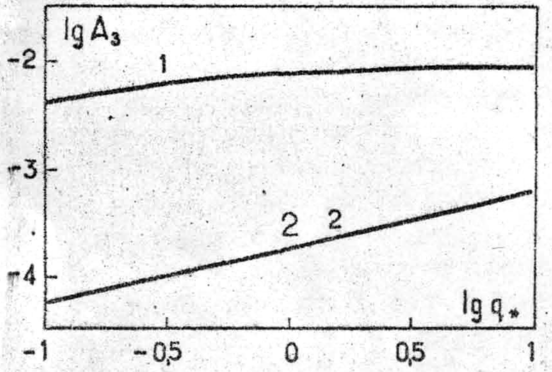


Рис.6. Зависимость взаимного влияния ячеек от скорости химической реакции $K_{43}=0{,}01$, $h_5=0$ 1) $h_4=1$; 2) $h=100$.

Все величины приведены к безразмерному виду.

Из формулы (8) следует, что в приближении плоской одномерной модели калориметра повторяемость зависит от следующих параметров, характеризующих калориметр:

$$A_4=A_4(h_4,K_{43},q_*,K)\ , \qquad (9)$$

Первые три параметра изменяемы (зависят от размеров и материалов, из которых изготовлены отдельные части калориметра), а q_* зависит от скорости химической реакции, и K характеризует степень изменения температуры в термоэлементе.

Далее рассматриваются зависимости повторяемости от отдельных параметров, входящих в (9).

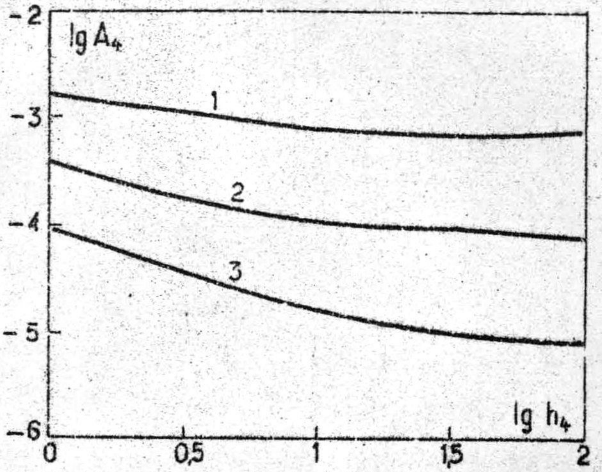


Рис.7. Зависимость повторяемости от эффективной толщины термоэлемента $K_{43}=0{,}01$; $K=0{,}01$; 1) $q_*=0{,}1$; 2) $q_*=1$; 3) $q_*=10$.

На рис.7 показана зависимость повторяемости от эффективной толщины термоэлементов. При уменьшении эффективной толщины термоэлементов повторяемость увеличивается, а при увеличении h_4 – уменьшается. Так как при больших h_4 взаимное влияние ячеек уменьшалось, то налицо противоречия и должно существовать – оптимальное h_4.

Так как зависимости повторяемости A_4 от h_4 почти прямые, то, очевидно, существует простая формула, связывающая эти величины.

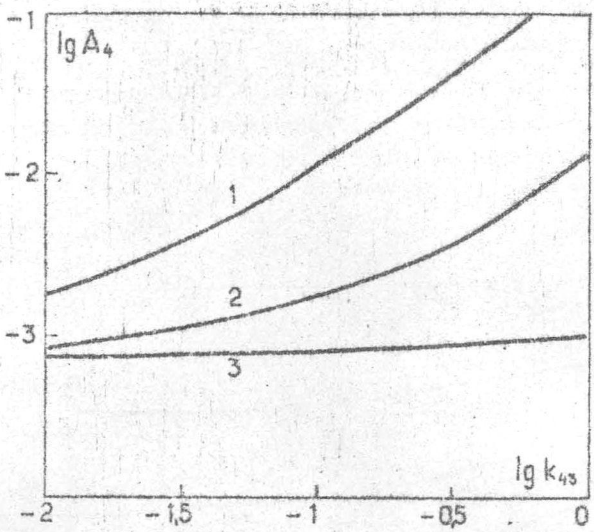


Рис.8. Зависимость повторяемости от теплофизических свойств материалов термоэлементов и детектора $K=0{,}01$, q_* 0,1; 1) $h_4=1$; 2) $h_4=10$; 3) $h_4=100$.

На рис.8 показана зависимость повторяемости от отношения параметров, характеризующих теплофизические свойства термоэлементов и цилиндра детектора (см.(6)). Как следует из рисунка при выравнивании теплофизических свойств материалов термоэлементов и цилиндра детектора повторяемость увеличивается. Для взаимного влияния ячеек зависимость была обратной, так что должно существовать оптимальное K_{43}. Следует также отметить, что при малых h_4 калориметр по отношению к повторяемости работает нестабильно (малое изменение h_4 вызывает большое изменение A_4) в областях близких к $K_{43}=1$. Можно наложить ограничение, что при малых h_4 ($h_4<10$) K_{43} не должно быть больше 0,32 ($K_{43}\leqslant 0{,}32$ или $\lg K_{43}\leqslant -0{,}5$).

На рис.9 показана зависимость повторяемости от того, во сколько раз требуется уменьшение разности температур на концах термоэлементов по сравнению с максимальной разностью температур. Как и следовало ожидать, чем больше требуется выравнивание температур в термоэлементе (чем меньше K), тем

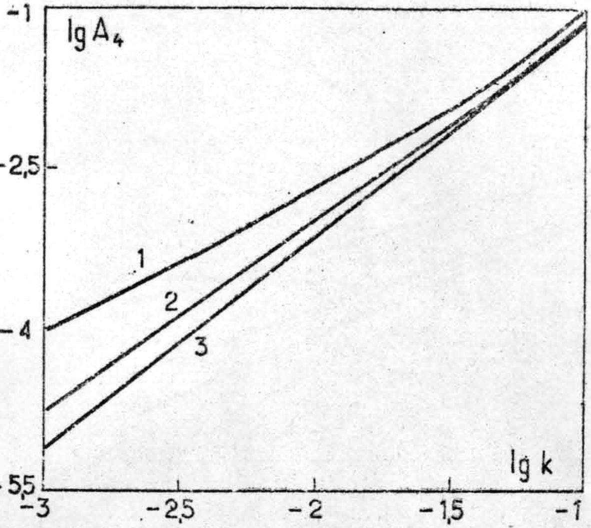


Рис.9. Зависимость повторяемости от параметра характеризующего уменьшение температуры $K_{43}=0{,}01$; $q_*=0{,}1$
1) $h_4=1$; 2) $h_4=10$; 3) $h_4=100$

меньше повторяемость измерений в калориметре. Из рисунка также следует, что в первом приближении зависимость повторяемости от K можно считать линейной. В качестве иллюстрации рассмотрим еще зависимость повторяемости от скорости химической реакции.

Здесь, как и для защищенности от внешних тепловых импульсов и взаимного влияния ячеек, при более медленных реакциях (q_* увеличивается) повторяемость ухудшается. Зависимость повторяемости от параметра q_*, очевидно, простая, т.е. есть возможность найти простую зависимость A_4 от q_*.

Далее сравниваются результаты, полученные для защищенности в приближении плоской одномерной модели, с результатами, полученными при помощи цилиндрической модели [3].

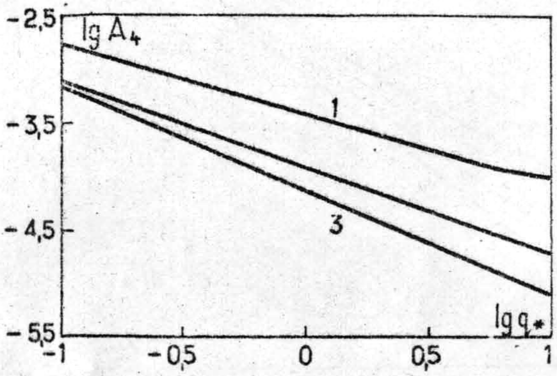


Рис.10. Зависимость повторяемости от скорости химической реакции $K_{43}=0,01$; 1) $h_4=1$; 2) $h_4=10$; 3) $h_4=100$.

IУ. Сравнение плоской одномерной и цилиндрической моделей

Защищенность выбрана для сравнения по той причине, что защищенность является единственным критерием качества, который можно посчитать на цилиндрической модели без учета термоэлементов (как отмечено в [2] , то численное решение уравнения теплопроводности с учетом конкретных конструктивных особенностей калориметра, является трудноосуществимой задачей). Результаты, полученные в [3] , очень хорошо (в пределах I,5 %) совпадают с экспериментальными данными. Сравниваются максимальные разности температур в ячейках $\Delta U_{B max}$, вызванные внешним тепловым импульсом. Максимальные разности температур в ячейках вычисляются по формуле (II) в [2] , с использованием только первого члена ряда. Расчеты проводятся при параметрах, соответствующих размерным параметрам цилиндрической модели. Рассмотрены зависимости максимальной разности температур от толщины слоя изоляции и расстояния между ячейками.

На рис.II показана зависимость максимальной разности температур в ячейках ΔU_{Bmax} от толщины слоя изоляции (параметры размерные), при этом сумма толщин выравнивающего цилиндра и слоя изоляции оставалась постоянной (и соответственно $h_1+h_2=const$). Материалы частей калориметра: детектор -медь;

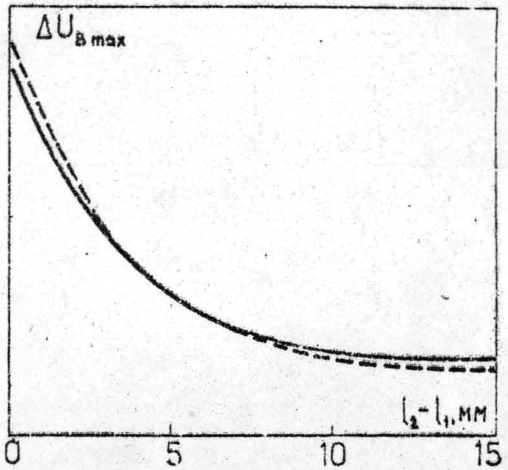


Рис.II. Зависимость ΔU_{Bmax} от толщины слоя изоляции $l_2=30$мм, $l_7-l_6+l_3-l_2=67$мм

------ цилиндрическая модель;

——— плоская модель.

слой изоляции - пенопласт; выравнивающий цилиндр - алюминий. Из рисунка видно, что совпадение хорошее. На рис.I2 показана зависимость ΔU_{Bmax} (по формуле (II) в [2] используя первый член суммы) от расстояния между ячейками. И здесь качественное совпадение хорошее. Последнее сравнение мы проводили, рассчитывая времена максимального отклика (время при котором ΔU_B максимально). Здесь совпадение уже численное (см.рис.I3). Можно утверждать, что плоскую модель можно использовать для качественной оценки влияния параметров калориметра на его работу.

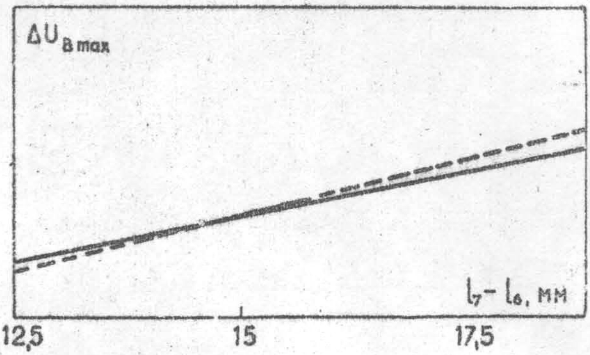


Рис. I2. Зависимость $\Delta U_{B\,max}$ от расстояния между ячейками. $l_1 = 30$мм; $l_2 - l_1 = 0$; $l_7 - l_6 + l_3 - l_2 = 67$.
цилиндрическая модель;
плоская модель.

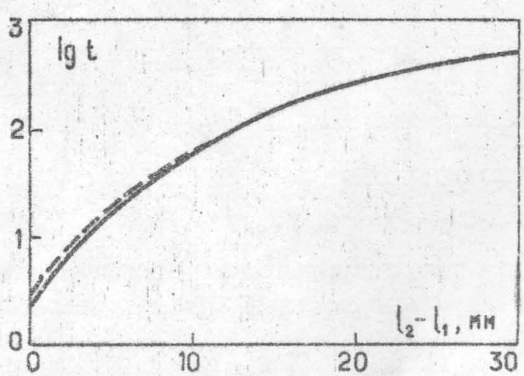


Рис. I3. Зависимость времени максимального отклика от толщины слоя изоляции. $l_2 = 30$мм; $l_7 - l_6 + l_3 - l_2 = 67$
--- цилиндрическая модель;
—— плоская модель.

Как отмечалось раньше, этого достаточно для решения задачи оптимизации в первом приближении.

Коротко рассмотрим интегральную чувствительность термоэлемента и вес калориметра.

У. Интегральная чувствительность термоэлемента A_2.

Интегральная чувствительность термоэлемента в стационарном случае выражается следующей формулой (см. (42) в [2])

$$A_3 = \frac{\varepsilon}{P_0 + \frac{\pi_T \varepsilon_T}{\rho_T l_T} + \frac{\lambda_4 S}{l_T}}, \qquad (10)$$

где:

ε_T - термосила термоэлемента;

π_T - коэффициент Пельтье;

ρ_T - удельное сопротивление термоэлемента;

λ_4 - теплопроводность термоэлемента $\lambda_4 \backsim l_T/(K_{43} \cdot h_4)$;

l_T - толщина термоэлемента $l_T = h_4 \cdot n_{ж4} \cdot r_0$;

r_0 - радиус калориметра;

S - площадь поперечного сечения термоэлемента;

P_0 - потери мощности в термоэлементе вследствие разных причин, кроме теплопроводности.

Как следует из (10), то при увеличении h_4 $(l_T \backsim h_4)$ интегральная чувствительность термоэлемента увеличивается, и при увеличении K_{43} $\left(\frac{\lambda_4}{l_T} \backsim 1/(K_{43} \cdot h_4)\right)$ интегральная чувствительность термоэлемента увеличивается.

УI. Вес калориметра A_5.

Очевидно, что при увеличении размеров калориметра вес калориметра увеличивается, а эффективные толщины отдельных частей калориметра пропорциональны размерам этих частей.

После обсуждения влияния параметров калориметра на критерии качества представим эти результаты в виде таблицы. Со знаком плюс "+" отмечается улучшение соответствующего критерия качества (например, увеличение защищенности или уменьшение взаимного влияния ячеек) при увеличении данного параметра,

Таблица I

Влияние параметров калориметра на критерии качества

	Эффективные толщины		Эффект. радиус цил. детектора	Эффект. толщина термо-элемента	Эффект. расстояние между ячейками	Коэффициенты перехода		
	выравн. цилиндра h_1	слоя изоляции h_2	h_3	h_4	h_5	Выравн. цилиндр. изоляции K_{12}	изоляция цил. детектора K_{23}	термоэлемент – цил. детектора K_{43}
Защищенность A_1	+	+	+		− $0,05–0,6 \times (h_1+h_2+h_3)$; $< h_3$	+ $> I$	+ $< I$	
Интегральная чувствительность A_2				+				
Взаимное влияние ячеек A_3				− +	+			−
Повторяемость A_4				−				+ $< 0,32$ для $h_4 < 10$
Вес A_5	−	−	−					

знаком"-" - ухудшение. В нижней строчке при каждом критерии отмечаются пределы изменяемости данного параметра.

Как следует из таблицы I, только K_{12} и K_{23} однозначно влияют на критерии качества, а остальные параметры h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, K_{45} имеют оптимальные значения.

В данной работе рассмотрено влияние отдельных параметров дифференциального калориметра на критерии качества калориметрических систем в приближении плоской одномерной модели калориметра. Полученные результаты сравнены с результатами, имеющимися для цилиндрической модели калориметра. Выяснены области изменения параметров калориметра, а также параметры, по которым возможна оптимизация дифференциального калориметра по критериям качества в приближении плоской одномерной модели калориметра.

ЛИТЕРАТУРА

I. Вичутинский А.А., Дрейманис Ю.А., Микельсон Ю.Я. Критерии качества микрокалориметра для исследования биохимических реакций. - "Учен.зап.ЛГУ им.П.Стучки",1976, т. 252 ,Рига,с.42 - 65.

2. Дрейманис Ю.А. Критерии качества биологического микрокалориметра в приближении плоской модели. -"Учен.зап.ЛГУ им.П.Стучки, 1976.т.252,Рига,с.37-41.

3. Великов А.А., Вичутинский А.А.,Лиепиньш А.К. и др.. Высокочувствительный дифференциальный переворачиваемый микрокалориметр для биохимических исследований. -В кн.: Шестая Всесоюзная конференция по калориметрии (Расширенные тезисы докладов), Тбилиси, 1973, с.529-533.

УДК 538.3 : 532.5 : 621

Э.С.Сорокина, В.Э.Циркунов
ЛГУ им.П.Стучки

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕГО ПОТОКА

При гидродинамических исследованиях помимо измерений полного расхода, средней скорости потока и т.д. часто необходимо знать распределение параметров потока [I] . В первую очередь, это относится к измерению скоростей потока как по величине, так и по направлению. Электромагнитный метод измерения скоростей основан на измерении разностей потенциалов или их градиентов, индуцированных при движении электропроводящей жидкости во внешнем магнитном поле. Градиент потенциала пропорционален векторному произведению $[\vec{V}_{жидк.} \times \vec{B}_{поля}]$ и зависит как от скорости жидкости, так и от направления ее течения.

При измерении скорости в гидравлических системах, имеющих небольшие размеры, обычно используют внешнее магнитное поле [2] .

Измерения производятся с помощью датчика, представляющего собой тонкий стержень с вмонтированными в него двумя электродами, удаленными друг от друга на расстояние 0,I - 0,4 мм. Из-за малых размеров зонд вносит незначительные искажения в измеряемый поток, и практическая безинерционность показаний и линейность характеристики (при малых числах Re_m) позволяют использовать этот метод для измерений скорости и ее флуктуаций в быстропеременных потоках, а также пульсаций скорости в турбулентных потоках.

Точность измерения локальной скорости повышается с уменьшением расстояния между электродами, но при этом уменьшается величина полезного сигнала, и на результаты измерения влияют специфические электродные шумы, приводящие к флуктуациям напряжения в измерительной цепи.

Для увеличения доли полезного сигнала используют электроды с возможно большей активной поверхностью [I] .

Существенную роль при измерениях локальных скоростей играют циркуляционные токи. Разность потенциалов между электродами зависит как от э.д.с. индукции $[\vec{V}\times\vec{B}]$, так и от токов проводимости в потоке:

$$\vec{E} = -\,grad\,U = -[\vec{V}\times B] + \vec{j}_{пр}/\sigma \quad .$$

Токи проводимости могут возникать как за счет градиента скорости во всей области течения жидкости, так и за счет градиента магнитного поля.

При конечной проводимости жидкого металла циркуляционные токи вызывают дополнительное падение напряжения между электродами и вносят погрешность в измерения локальной скорости.

Для устранения влияния циркуляционных токов используют экранированные электроды, препятствующие замыканию токов через область между электродами. Примером такого устройства может служить [2] .

Приборы с внешним магнитным полем (обычно постоянным для жидких металлов и переменным для сред с ионной проводимостью) применяются при измерении распределения скоростей лишь в небольших гидравлических системах. Кроме того, они позволяют измерить лишь две компоненты скорости.

Для измерения локальных скоростей в системах больших размеров, например, в индукционных печах, перемешивателях и открытых потоках, где нельзя использовать внешнее магнитное поле, или при необходимости знать все три компоненты скорости потока применяют преобразователи скорости с локализованным магнитным полем. Примерами таких преобразователей служат системы, описанные в [3,4] .

С целью одновременного и независимого измерения двух составляющих вектора скорости предложено устройство [5] , в котором используются две пары электродов со взаимно перпендикулярными базами.

Однако точность измерения составляющих скорости зависит от идентичности изготовления электродных пар и точности их относительного расположения на полюсах магнита.

С целью непосредственного определения величины и направления скорости можно использовать вращающееся магнитное поле. Это дает возможность, используя лишь одну пару электродов, зафиксированную в направлении, перпендикулярном к плоскости изменения индукции вращающегося магнитного поля и скорости потока, по максимуму э.д.с. измерить абсолютную величину скорости, а по сдвигу максимумов э.д.с. и индукции вращающегося поля или одной из его компонент непосредственно измерить фазовый угол сдвига скорости по отношению к направлению этой компоненты индукции.

Способ измерения заключается в следующем (см.рис.I,2).

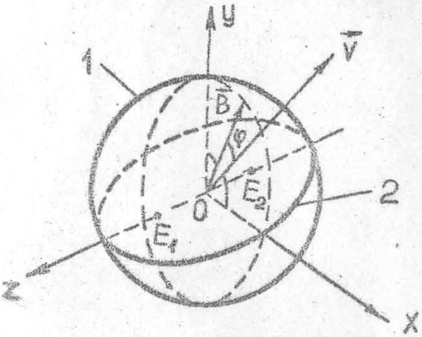


Рис.I.

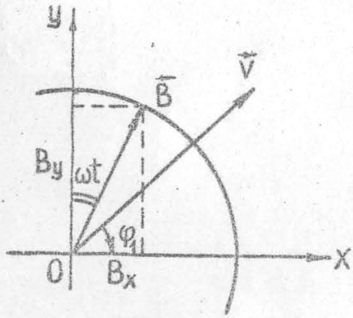


Рис.2.

С помощью обмоток I и 2, расположенных во взаимно перпендикулярных плоскостях, создается вращающееся магнитное поле в плоскости ХОУ, т.к. катушки запитаны током, сдвинутым по фазе на $\pi/2$:

$$B_x = B_0 \sin \omega t$$
$$B_y = B_0 \cos \omega t$$

По направлению $0Z$ расположена пара электродов E_1, E_2, расстояние L между которыми должно быть достаточно мало, чтобы $\frac{\partial B}{\partial z} \approx 0$. Т.к. величина индуцируемой э.д.с. при движении жидкости пропорциональна $[\vec{V}\times\vec{B}]L$, в приближении, когда можно пренебречь омическими потерями, разность потенциалов между электродами

$$E\sim|\vec{V}||\vec{B}|L\sin\varphi,\quad \varphi=\measuredangle(\vec{V},\vec{B}),\qquad \vec{B}=\vec{B}_0e^{i\omega t}.$$

Катушки зонда первоначально устанавливаются так, чтобы вектор магнитной индукции и вектор скорости находились в одной плоскости. Этим добиваются максимума выходного сигнала в направлении расположения электродов.

Для каждой компоненты вектора индукции магнитного поля можно записать:

$$E_1=B_0Lv\sin\omega t\sin\varphi_1$$
$$E_2=-B_0Lv\cos\omega t\cos\varphi_1\ ,$$

где φ_1 - угол наклона вектора скорости относительно направления B_x . Полная величина индуцированной э.д.с. определится следующим выражением:

$$E=B_0Lv\cos(\omega t+\varphi_1).$$

Таким образом, амплитудное значение э.д.с. дает абсолютное значение скорости, а сдвиг фаз между э.д.с. и одной из компонент индукции, например, B_x , определяет угол наклона вектора скорости к другой (B_y) компоненте.

Частота изменения вращающегося магнитного поля должна быть гораздо больше угловой скорости потока:

$$\omega\gg\frac{\partial\varphi}{\partial t}\qquad (1)$$

Изменение фазы дает изменение угла наклона вектора скорости $\vec{V}$ в плоскости XOY. Изменение модуля э.д.с. дает изменение величины проекции $\vec{V}$ на плоскость XOY. Поворот зонда вокруг оси OY до момента, когда э.д.с. принимает наибольшее значение, при условии (I) дает возможность измерить полную скорость.

Способ пригоден для измерения полных скоростей в электропроводящих потоках, угол наклона которых к плоскости вращения вектора индукции меняется медленно по сравнению с частотой вращающегося поля.

Следует отметить, что при практической реализации данного способа измерений важно исключение влияния индуцированных токов на измерительную систему (экранирование электродов или из замена измерительной обмоткой, непосредственно измеряющей э.д.с. индукции).

Таким образом, дальнейшее совершенствование электромагнитных методов измерения локальных скоростей в открытых потоках с помощью индуцированных магнитных и электрических полей в принципе позволяет однозначно определять как величину скорости так и ее направление.

ЛИТЕРАТУРА

I. Бесконтактный контроль потока жидких металлов. Под общей ред. В.Э.Циркунова. Рига, "Зинатне", 1973. 252 с.
2. Kolin A. Electromagnetic method for the determination of velocity distribution in fluid flow.-"Phys.Rev." "1953, v.63, N5, 218.
3. Kolin A. An alternating field induction flowmeter of high sensivity.-"Rev.Scient.Instr.",1945,v.16,N5,109.
4. Remenieras G., Hermant C. Electromagnetic measurement of speed in liquides. Houille Blanche,9,732 (1954).
5. Корсунский Л.М., Семенченко А.Ф. Электромагнитный измеритель скорости потока. -"Бюллетень изобретений", 1971, №23 (а.с.№310182).

УДК 621.3.013

Ю.Я.Микельсон, Э.А.Завицкий
ЛГУ им.П.Стучки

К РАСЧЕТУ ПОЛЯ Ш-ОБРАЗНОЙ МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ КОНДУКЦИОННОГО МГД-НАСОСА

Важным узлом кондукционной МГД-машины является магнитная система, создающая в рабочем зазоре машины магнитное поле требуемой величины и представляющая собой токопровод в сочетании с ферромагнитным сердечником [1] . Вес, размеры и экономичность машины существенно зависят от конструктивного выполнения магнитной системы, что определяет значение оптимального проектирования, основывающегося на расчетах магнитного поля.

Проводящийся в [1-6] расчет магнитной системы основан на теории магнитных цепей. В работе [2] сравниваются результаты исследования С - и Ш - образных электромагнитов, полученные методом теории цепей и при помощи электромоделирования. В [3,4] основное внимание уделяется уменьшению веса магнитной системы; работа [5] посвящена более общей задаче оптимизации магнитной системы МГД-машин. Для частного случая зависимости $\mu=\mu(B)$ стали в [6] задача нахождения поля решена методом теории цепей с распределенными параметрами. В отдельных работах получены явные выражения определяемых магнитных потоков в виде (приближенных) формул [3-6] . Отметим, что в работе [1] , кроме прочего, указывается на необходимость уточнения существующей методики расчета магнитной системы кондукционных МГД-машин.

В настоящей статье рассчитывается магнитное поле в рабочей зоне кондукционного МГД-насоса большой мощности с Ш-образной магнитной системой, геометрическая форма которой считается заданной. Целью расчета является определение зависимости характеристик поля от тока в шинах и от размеров магнитопровода, учитывая зависимость $\mu=\mu(B)$ стали.

Поле находится численным решением краевой задачи для векторного магнитного потенциала.

Исследуемая модель магнитной системы насоса изображена на рис.I. Магнитное поле создается двумя шинами, по которым с постоянной плотностью j в противоположных направлениях перпендикулярно плоскости рисунка протекает электрический ток; таким образом, рассматривается некомпенсированный насос; поле токов, протекающих по каналу, также не учитывается. Шины и канал окружены стальным магнитопроводом, внешняя граница которого - окружность радиуса r. Для

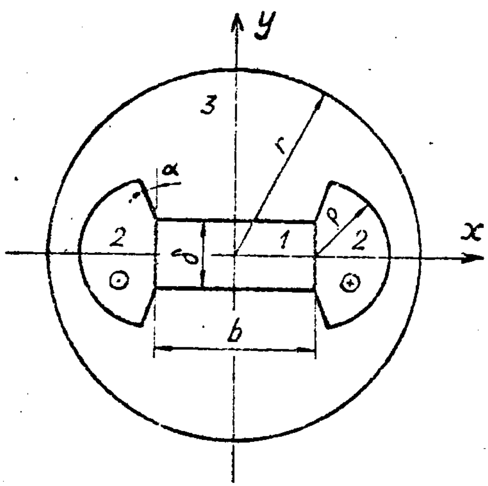


Рис.I. Двумерная модель магнитной системы кондукционного насоса I- рабочая зона (канал насоса), 2- токопроводящие шины, 3- стальной магнитопровод.

стали принимается следующая зависимость B от H (в единицах системы СИ):

$$B = 100\mu_0 H \quad , 0 \leqslant B < 2,$$
$$B = \mu_0 H + 1{,}98 \quad , 2 \leqslant B.$$

Такой кусочно-линейный аппроксимацией зависимости намагничивания стали отражены наиболее существенные магнитные свойства материала: при малых значениях индукции магнитная проницаемость постоянна и равна $100\mu_0$; при достижении значения $B=2T$ наступает насыщение и по мере дальнейшего увеличения B значение магнитной проницаемости стремится к μ_0 .

Магнитное поле в данном случае описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\right)=-\mu_0 j\ , \qquad (2)$$

где A - z - составляющая векторного магнитного потенциала, $\mu=\frac{B}{\mu_0 H}$ - определяемая из (I) магнитная проницаемость стали; в областях, не занятых магнитопроводом, $\mu=1$; $j\neq 0$ в токопроводах.

Связь между A и индукцией $\vec{B}$ дается соотношениями

$$B_x=\frac{\partial A}{\partial y}\ , \qquad B_y=+\frac{\partial A}{\partial x}\ .$$

Для численного решения задачи необходимо рассмотреть ограниченную область плоскости xy . В работе принимается следующее условие:

$$A\Big|_{x^2+y^2=R^2}=0\ , \qquad R>r\ . \qquad (3)$$

Это приводит к искажению картины поля по сравнению с решением задачи без искусственного условия (3) в непосредственной близости окружности радиуса R , однако при достаточно большом R условие (3) должно мало влиять на решение в области, ограниченной магнитопроводом.

Так как картина поля симметрична относительно осей x и y , потенциал ищется только в первом квадранте плоскости xy . Тогда условие (3) вследствие симметрии следует дополнить следующими:

$$A\Big|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant R,$$
$$\frac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant R. \qquad (4)$$

Таким образом, в первом квадранте плоскости xy искомое поле описывается уравнением (2) с граничными условиями (3,4) (рис.2).

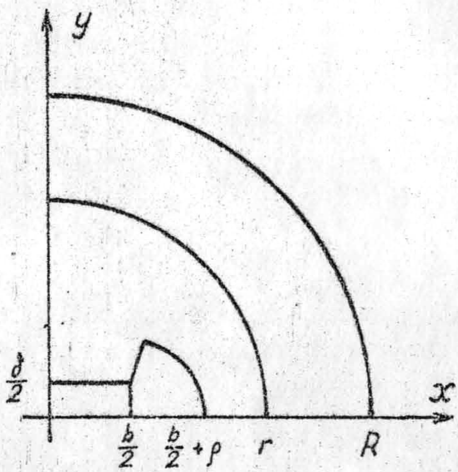


Рис.2. К формулировке краевой задачи.

Выше сформулированная краевая задача для потенциала A, подобно работе [7], решалась методом конечных элементов.

При использовании метода конечных элементов вместо решения уравнения (2) прямым способом проводится минимизация энергетического функционала

$$W(A) = \iint\limits_S \left[\int\limits_0^{\vec{B}} \frac{1}{\mu} \vec{B} d\vec{B} \right] dxdy - \iint\limits_S jAdxdy, \qquad (5)$$

приближенно заданного на треугольной сетке в области S, где ищется поле. Можно показать [8], что уравнению (2) удовлетворяет потенциал $A(x,y)$, доставляющий минимум функционалу $W(A)$. Это соответствует условию

$$\frac{\partial W}{\partial A}=0 \qquad (6)$$

во всех узлах сетки с неизвестным значением потенциала. Иными словами, (6) есть система нелинейных уравнений, число неизвестных которой определяется разбиением области S на конечные элементы.

По найденному из (6) потенциалу приближенным дифференцированием находится индукция $\bar{B}$.

В нашем случае область делилась на 235 треугольных конечных элементов; число вершин, в которых отыскивался потенциал, равнялось I42 (см.рис.3). Система уравнений (6) решалась методом итераций [9].

Расчеты проводились при различных токах I в шинах и значениях радиуса r. Величина R удовлетворяла условию $R=2r$. Остальные геометрические величины полагались постоянными: b =0,64 м, δ =0.4 м, ρ =0,72 м, α =5,62^{0}. Ниже на рис.4-8 приводятся результаты вычислений.

Выводы

I. Проделанные методом конечных элементов расчеты при заданной кривой намагничивания стали дают качественную и количественную характеристику поля в канале насоса в зависимости от тока в шинах и радиуса магнитопровода. Численные решения представлены в виде графиков (рис.4-6).

2. Получена возможность определить значение радиуса магнитопровода, по достижении которого (при неизменном токе) увеличение r мало меняет величину поля в канале (рис.6).

3. Получена картина распределения поля по сечению насоса в случае ненасыщенного и насыщенного магнитопровода (рис.7,8).

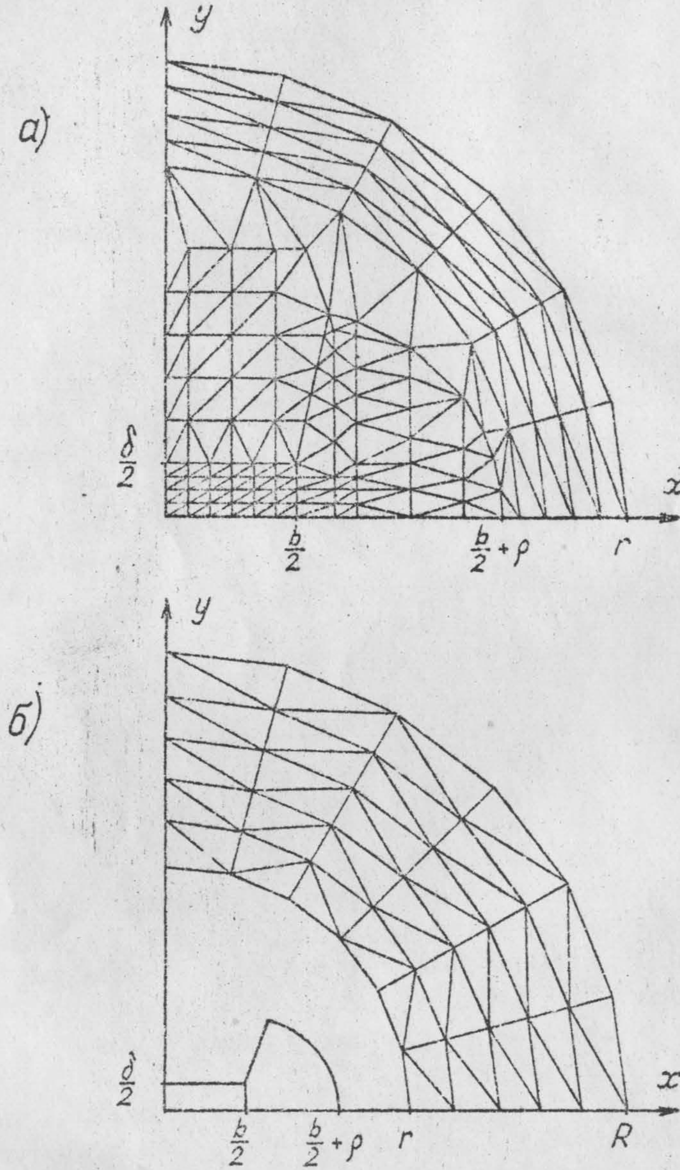


Рис.3. Деление области расчета на конечные элементы : а) внутренняя часть области, б) внешняя часть области.

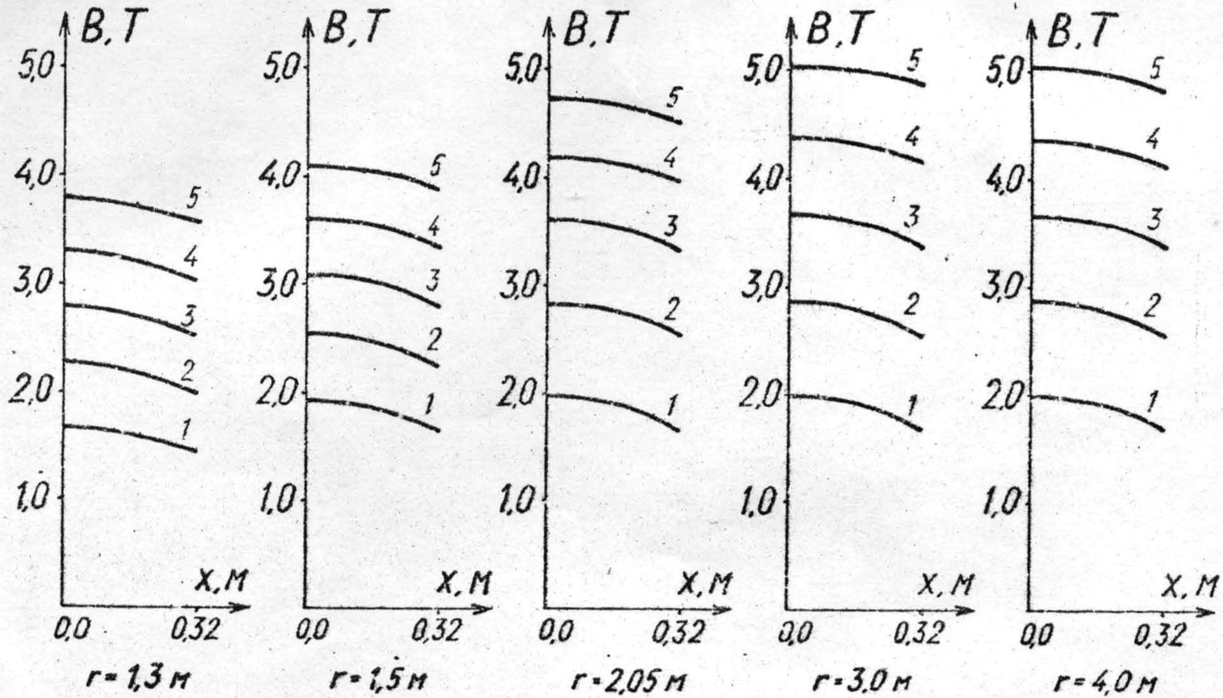


Рис. 4. Распределения поля вдоль оси x в пределах половины канала при различных значениях тока I и радиуса магнитопровода r. Числа на графиках соответствуют значениям тока в мегаамперах.

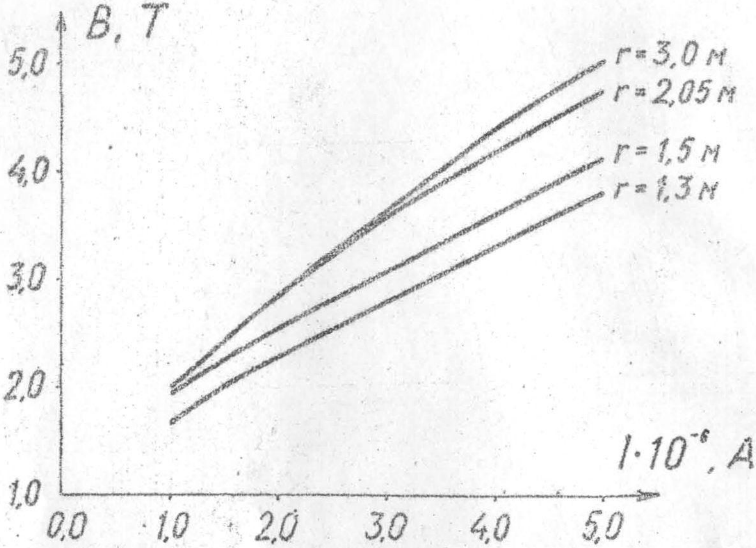


Рис.5. Зависимость индукции поля в центре канала от тока при фиксированном радиусе магнитопровода.

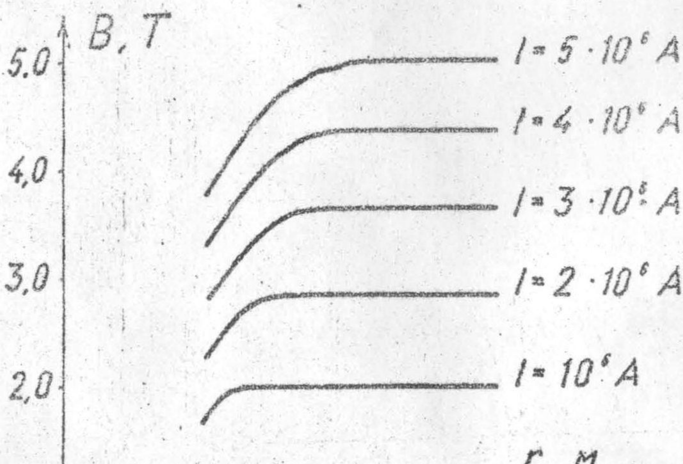
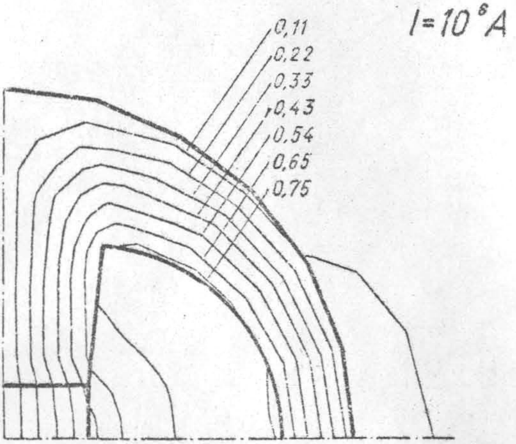


Рис.6. Зависимость индукции поля в центре канала от радиуса магнитопровода при фиксированном токе.



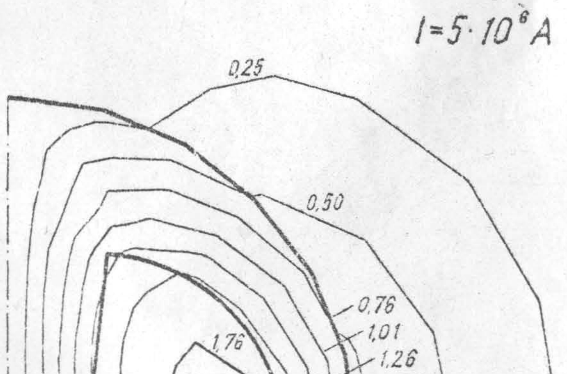


Рис.7. Картина силовых линий в случае r =I,3м. При линиях указаны значения векторного потенциала в Вб/м.

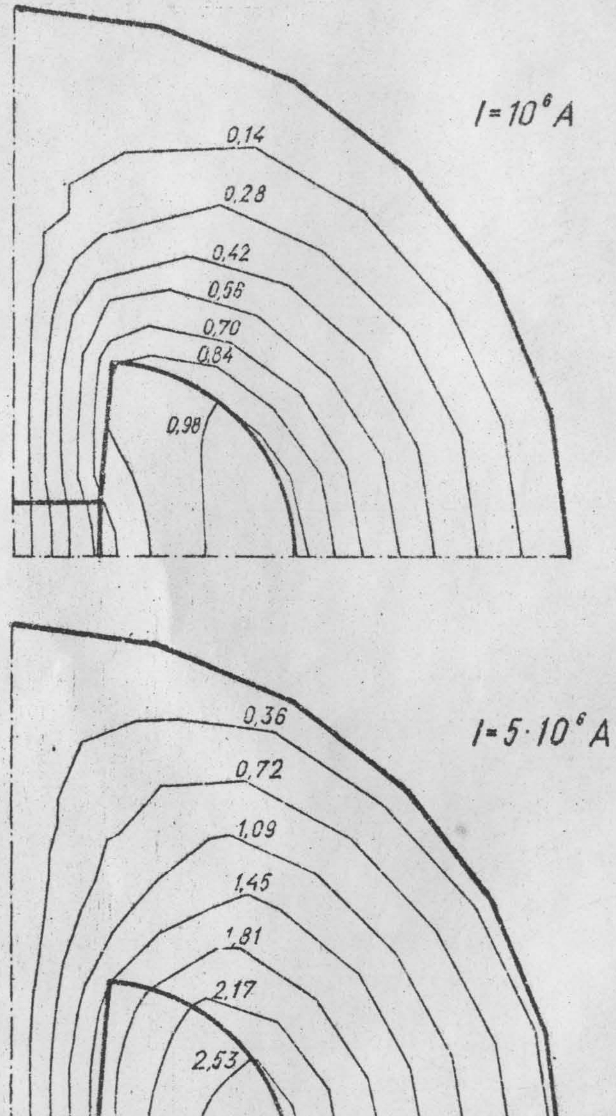


Рис.8. Картина силовых линий в случае r =2,05 м. Указаны значения векторного потенциала в Вб/м .

ЛИТЕРАТУРА

I. Бирзвалк Ю.А. Основы теории и расчета кондукционных МГД-насосов постоянного тока. Рига,"Зинатне",1968. 236 с.

2. Шахтарин В.Н. Исследование электромагнитов постоянного тока с железным сердечником, применяемых в МГД-машинах.-"Магнитная гидродинамика",1965,№2,с.151-158.

3. Гринберг Г.К. Электромагнит с постоянной индукцией в железе.-"Изв.АН ЛатвССР.Сер.физ.и техн.наук",1966,№6, с.60-65.

4. Бертинов А.И., Бут Д.А.,Калугин В.Н. Магнитные системы вихревых МГД-машин.-"Магнитная гидродинамика",1965,№3, с.145-154.

5. Коськин Ю.П. О критериях и методах оптимизации магнитных систем МГД-машин.-"Магнитная гидродинамика",1969,№4, с.127-134.

6. Долгошеев А.Т. Приближенный расчет поля магнитопровода МГД-устройств.-"Магнитная гидродинамика",1976,№3,с.87-91.

7. Новик Я.А. Численный расчет магнитного поля методом конечных элементов в электрических машинах с учетом насыщения стали.-"Изв.АН ЛатвССР.Сер.физ.-техн.наук",1974, №5, с.96-104.

8. Новик Я.А. Вариационная формулировка решения задачи расчета трехмерного стационарного магнитного поля с учетом нелинейных свойств среды.-"Изв.АН Латв ССР.Сер. физ.и техн.наук", 1974,№4, с.79-89.

9. Каптейне Д.Ф.,Кокле Ю.Л.,Стрикис А.Л. Конечно-разностный метод расчета магнитных полей на ЭЦВМ.-"Изв.АН ЛатвССР. Сер.физ.и техн.наук",1973,№4,с.91-96.

УДК 517.63:518.43

М.А.Белов, Т.Т.Цирулис
ЛГУ им. П.Стучки

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРИБЛИЖЕННОМ ОБРАЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Часть II

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [I], т.е. данная работа и работа [I] представляют собой единое целое с общей нумерацией параграфов и формул.

§ 5. Метод асимптотического расширения интервала

Представление искомого оригинала $f(t)$ в форме некоторого ряда Фурье (2.3) с последующей регуляризацией алгоритма вычисления коэффициентов Фурье методом асимптотических разложений не является единственным возможным вариантом устойчивого обращения преобразования Лапласа, в котором существенно используются асимптотические разложения. В этом параграфе рассмотрим метод обращения без использования представления (2.3).

Сущность метода, изложенного в данном параграфе, заключается в следующем: пусть

$$f(t,T)=f(t) \tag{5.1}$$

для $t\in(0,T)$, $f(t,T)$ при $t>T$ продолжена произвольным образом, лишь бы существовало преобразование Лапласа по t от $f(t,T)$. Очевидно, таких функций $f(t,T)$ бесконечно много и для них легко построить интегральное представление. Асимптотическое выражение для $f(t,T)$ при $T\to+\infty$ можно считать приближенным значением оригинала $f(t)$ при $t\in[0,T]$, которое тем точнее, чем больше T. Оригинал $f(t)$ для $t>T$ следует искать по асимптотическим формулам для $f(t)$ при $t\to+\infty$.

Интегральное представление функции $f(t,T)$ можно получить из следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть выполнены условия:

1) оригинал $f(t)$ удовлетворяет формуле обращения (2.2);
2) фиксирован такой вещественный параметр α, что $F(p+\alpha)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\delta, \delta > 0$;
3) $F(p+\alpha) = O(1)$ при $p \to \infty$, $\operatorname{Re} p \geqslant -\delta$, причем оценка равномерна относительно $\arg(p+\delta) \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Тогда

$$f(t,T) = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p+\alpha) \Psi(e^{-Tp}) dp, \quad s > 0. \qquad (5.2)$$

Функция $\Psi(z)$, которую будем называть опорной функцией срезания оригинала или короче опорной функцией, определяется рядом, сходящимся в круге $|z| < 1$,

$$\Psi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n z^{\beta_n}, \qquad \beta_1 \geqslant 1, \qquad (5.3)$$

где $\{\beta_n\}$ - такая монотонно возрастающая последовательность, для которой $(\beta_n / n) > 0$.

Примечания. 1. Очевидно, что каждую функцию $\Psi(z)$, аналитическую в круге $|z| < 1$ с $\Psi(0) = 1$, можно выбрать в качестве опорной.

2. Вообще говоря, соотношение (5.1) справедливо при t $[0, \beta_1 T]$, (5.3) $\beta_1 \geqslant 1$.

Теперь построив асимптотическое представление интеграла (5.2) при $T \to +\infty$, мы тем самым получаем алгоритм приближенного вычисления оригинала.

В зависимости от выбора опорной функции $\Psi(z)$, можно найти сколь угодно много различных приближенных формул для вычисления искомого оригинала $f(t)$, причем во всех этих формулах находит отражение характер и расположение особых точек изображения $F(p)$, т.е. получаемые алгоритмы учитывают информацию об особенностях $F(p)$. Так, например, можно доказать следующую теорему.

Теорема 6. Пусть:

1) выполнены условия теоремы 5;
2) имеет место сильноасимптотическое разложение оригинала:

$$f(t) \sim \sum_{\kappa=0}^{+\infty} b_\kappa(t) U_\kappa(t), \quad t \to +\infty, \tag{5.4}$$

где $U_\kappa(t)$, $\kappa=0,1,\ldots$ – функции простой шкалы, а $b_\kappa(t)$; $\kappa=0,1,\ldots$ удовлетворяют условиям коэффициентов сильноасимптотического разложения, причем для каждого $\kappa=0,1,2,\ldots$ существует такое $\tau_\kappa>0$, что при $t\geqslant\tau_\kappa$ функция $\exp\{(\delta-\alpha)t\}U_\kappa(t)$ монотонна;

3) $\Psi(z)$ аналитична в круге $|z|<1$;
4) на окружности $|z|=1$ $\Psi(z)$ имеет конечное число полюсов; $z_1, z_2, \ldots, z_m$;
5) при $|z|>1$ $\Psi(z)$ разложима в ряд Лорана

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n-l}, \qquad a_0 \neq 0, \tag{5.5}$$

где l – натуральное число;

6) интеграл

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} F(p-\delta+\alpha)e^{pt}dp = \lim_{\omega\to+\infty} \int_{-i\omega}^{+i\omega} F(p-\delta+\alpha)e^{pt}dp$$

сходится равномерно относительно $t\geqslant\tau>0$.

Тогда имеет место представление

$$S(t,T) = S(t,T) + R(t,T), \quad t\in(0,T), \tag{5.6}$$

где

$$S(t,T) = e^{\alpha t}\sum_{\kappa=1}^{m}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\operatorname{res}_p\left\{e^{pt}F(p+\alpha)\Psi(e^{-Tp}); -\frac{i}{T}\arg z_\kappa + \frac{2n\pi i}{T}\right\}, \tag{5.7}$$

а для

$$R(t,T) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\{-\alpha T(n+l)\} f[t+T(n+l)] \tag{5.8}$$

при $T\to+\infty$ справедливо сильноасимптотическое разложение:

$$R(t,T) \sim \sum_{\kappa=0}^{+\infty} e^{-\alpha T l} U_\kappa(t+Tl) B_\kappa(t,T). \tag{5.9}$$

коэффициенты $B_\kappa(t,T)$ сильноасимптотического разложения (5.9) определяются из сходящегося ряда:

$$B_\kappa(t,T) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\alpha T n} b_\kappa(t+T(n+l)) \frac{U_\kappa(t+T(n+l))}{U_\kappa(t+Tl)}, \quad \kappa=0,1,\ldots .$$

Доказательство. В (5.2) контур интегрирования передвинем влево через мнимую ось так, чтобы он оказался между прямыми $\operatorname{Re}p=\delta_0$ и $\operatorname{Re}p=0$, где $\delta_0=\sup\limits_{K}\{\operatorname{Re}p_K\}$, а p_K – особые точки $F(p+\alpha)$. Тогда сумма вычетов в точках, где

$$e^{-Tp}=z_K, \quad K=1,2,\dots,m,$$

совпадает с (5.7), а

$$R(t,T)=\frac{e^{\alpha T}}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{pt}F(p+\alpha)\Psi(e^{-Tp})dp, \quad \delta_0<s<0. \qquad (5.10)$$

Подставляя $\Psi(e^{-Tp})$ из (5.5), интегрируя почленно и используя (5.4), получаем

$$R(t,T)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\exp\{-\alpha T(n+l)\}f[t+T(n+l)]\sim$$
$$\sim\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\alpha Tl}u_K(t+Tl)B_K(t,T), \quad T\to+\infty; \qquad (5.11)$$

Законность выполненных действий можно обосновать воспользовавшись условиями б) и 2) теоремы 6. Теорема доказана.

Примечания. I. Соотношение (5.6) является точным, если $S(t,T)$ определять из (5.7), а $R(t,T)$ из (5.8).

2. Если асимптотика $f(t)$ при $t\to+\infty$ неизвестна, то представление интеграла (5.10) при $t\to+\infty$ можно получить непосредственным передвижением контура интегрирования влево с добавлением вкладов от особых точек изображения $F(p)$.

3. В (5.2) e^{pt} можно заменить на $2\operatorname{sh}pt$ или $2\operatorname{ch}pt$, причем соотношения (5.I) и (5.2) остаются в силе.

4. Если оригинал $f(t)$ представим в виде $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$, где $f_2(t)=0$ при $t<t_0$, $t_0>T$; то (5.I) и (5.2) справедливы, если в них $F(p+\alpha)$ заменено на $F_1(p+\alpha)$.

5. Если $f(t)\equiv0$ при $t\geqslant t_0$, $t_0<T$, то для $t>0$ $R(t,T)\equiv0$.

Таблица 3

№	$\Psi(z)$	$S(t,T)$	$R(t,T)$	l
1.	$\frac{1}{1+z^2}$	$\frac{e^{\alpha T}}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{i\pi t}{T}(n+\frac{1}{2})\right\}F\left[\alpha+\frac{i\pi}{T}(n+\frac{1}{2})\right]$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\exp\left\{-2\alpha T(n+1)\right\}f\left[t+2T(n+1)\right]$	2
2.	$\frac{1}{1-z^2}$	$\frac{e^{\alpha T}}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{in\pi t}{T}\right\}F(\alpha+\frac{in\pi}{T})$	$-\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left\{-2\alpha T(n+1)\right\}f\left[t+2T(n+1)\right]$	2
3.	$\frac{1}{(1-z^2)^2}$	$\frac{e^{\alpha T}}{4T^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{in\pi t}{T}\right\}\left[(t+2T)F(\alpha+\frac{in\pi}{T})+\right.$ $\left.+F(\alpha+\frac{in\pi}{T})\right]$	$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\exp\left\{-2\alpha T(n+2)\right\}f\left[t+2T(n+2)\right]$	4
4	$\frac{1}{(1+z^2)^2}$	$\frac{e^{\alpha T}}{4T^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{i\pi t}{T}(n+\frac{1}{2})\right\}\left\{(2T-t)F\left[\alpha+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{i\pi}{T}(n+\frac{1}{2})\right]-F\left[\alpha+\frac{i\pi}{T}(n+\frac{1}{2})\right]\right\}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)e^{-2\alpha T(n+2)}f\left[t+2T(n+2)\right]$	4

6. В таблице 3. приведены $S(t,T)$ и $R(t,T)$ для некоторых конкретных опорных функций $\Psi(z)$.

Итак, опираясь на теорему 6, мы можем построить сколь угодно много алгоритмов численного обращения, в которых существенно используется информация о наиболее правых особых точках изображения $F(p)$ (общеизвестно, что асимптотика $f(t)$ при $t\to+\infty$, необходимая для приближенного вычисления $R(t,T)$, как раз и определяется этими точками).

При практической реализации метода асимптотического расширения интервала возникают следующие вопросы: I) выбор α, 2) выбор T, 3) оценка погрешности.

Практические расчеты показывают, что выбор слишком большого α приводит к значительной потере точности при вычислении суммы (5.7), поэтому предлагается выбирать следующим образом:

$$\alpha=\lambda+1/T, \tag{5.12}$$

где $\lambda=\sup\limits_{k}\{\mathrm{Re}\,p_k\}$, p_k - особые точки. $F(p)$.

Выбор параметра T определяется с одной стороны погрешностью задания изображения $F(p)$, а с другой стороны - точностью асимптотики (5.9). Действительно вычисляя $R(t,T)$ по асимптотической формуле (5.9), мы будем вносить тѐм меньшую погрешность, чем больше T. Однако при слишком большом T будет происходить большая потеря точности при счете $S(t,T)$ по (5.7). Поэтому для задачи обращения методом асимптотического расширения интервала существует некоторое оптимальное значение T, зависящая как от точности значений $F(p)$ при вычислении суммы (5.7), так и от точности асимптотики (5.9). Практический выбор оптимального T наиболее эффективно проводить отдельно для каждой конкретной задачи обращения. Выбор T может контролироваться в процессе вычислений следующими соображениями:

а) увеличение T не должно существенно менять значения оригинала в промежутке $[0,T]$;

б) выбор слишком малого T, как правило, приводит к явно неверному оригиналу на $[0,T]$;

в) некоторой мерой погрешности может служить модуль разности между найденным приближенным значением оригинала в точке $t=0$ и обычно легко определяемым точным значением $f(+0)$ (если только этот предел существует);

г) аналогично для точки $t=T$;

д) точной оценкой погрешности $R(t,T)$, определяемой формулой (5.6) (для некоторых задач можно легко получить достаточно простую точную оценку этой погрешности). Лучше всего начинать исследование с интегрального представления (5.2).

§ 6. Связь с методом регуляризации

Общеизвестно, что задача решения уравнения (0.I) является некорректной. Для устойчивого решения некорректных задач А.Н. Тихоновым предложен метод регуляризации, базирующийся на фундаментальном понятии регуляризирующего оператора [2] . Чтобы установить связь между нашими алгоритмами и методом регуляризации, заметим, что во всех случаях в качестве приближенного решения мы принимаем функцию $f(t,\omega)$, зависящую от некоторого параметра ω и имеющую представление

$$f(t,\omega)=f_0(t,\omega)+f^*(t,\omega). \tag{6.1}$$

Так, например, при первой практической реализации F-A метода $\omega=N$,

$$f_0(t,N)=\theta(t)\sum_{k=0}^{N}c_k v_k(t), \tag{6.2}$$

$$f^*(t,N)=\theta(t)\sum_{k=N+1}^{+\infty}c_k^* v_k(t),$$

где c_k^* - асимптотические выражения коэффициентов при $k\to+\infty$.

Для метода асимптотического расширения интервала $\omega\equiv T$, $f_0(t,T)=S(t,T)$, а

$$f^*(t,T)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{-\alpha T(n+l)}g[t+(n+l)T], \tag{6.4}$$

где $g(t)$ находится из (5.9). Выбор параметра ω определяется погрешностью Δ в задании изображения $F(p)$ (чтобы при счете $f_0(t,\omega)$ не происходила большая потеря точности). Далее, когда $\Delta \to +0$, то $\omega \to +\infty$, а отсюда $f(t,\omega) \to f(t)$. Теперь становится очевидным, что предложенные нами методики решения уравнения (0.I) являются регуляризирующими, а $f(t,\omega)$ дает регуляризованное решение [2], для которого выбор регуляризирующего параметра $\omega \to +\infty$ согласован с заданной погрешностью Δ.

В основе построения регуляризованного решения лежит принцип отбора возможных решений [2]. Поясним сущность этого принципа на примере уравнения (0.I). Если правая часть (0.I) известна с погрешностью Δ (в некоторой удобной для данной постановки задачи метрике пространства изображений), то тогда естественно приближенное решение уравнения (0.I) искать в классе Q_Δ элементов $f(t)$, изображения которых уклоняются от заданного не более, чем на Δ. Однако в ряде случаев такой класс Q_Δ слишком широк, так как среди его элементов есть такие, которые могут сильно отличаться друг от друга. Поэтому не все элементы класса Q_Δ можно брать в качестве приближенного решения уравнения (0.I). Необходим принцип отбора возможных решений. Для этого надо использовать обычно имеющуюся дополнительную информацию о решении. В наших алгоритмах эта дополнительная информация определяется особыми точками изображения. Так, если применяем первую практическую реализацию F-A метода, используя разложение (I.I), то мы определяем решение не среди всего класса Q_Δ элементов $f(t)$, изображения которых близки к заданному в точках $p_n = \sigma(n+1)$, а только среди его подкласса Q^*_Δ, элементы которого имеют определенные асимптотики при $t \to +\infty$ и $t \to +0$ а так же фиксированную гладкость (заметим, что обычно в это подмножество не входит элемент

$$N \sin at \doteqdot Na/(p^2+a^2),$$

который используют (при $a \to +\infty$) для наглядной иллюстраций некорректности задачи решения уравнения (0.I)).

Аналогично, действие принципа отбора, можно проследить и у остальных, предложенных нами алгоритмов.

Итак, полученные решения уравнения (0.I) являются регуляризованными решениями, а параметр по которому проводится асимптотическое разложение, есть параметр регуляризации.

ЛИТЕРАТУРА

I. Белов М.А., Цирулис Т.Т. Асимптотические методы в приближенном обращении интегрального преобразования Лапласа. Часть I. -"Учен.зап. ЛГУ им.П.Стучки",1976,т.252,Рига,с.77-97.

2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., "Наука",1974.223 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

III

Республиканский межвузовский сборник научных трудов

Редакторы: Я.Полманис, Р.Довгополова
Технический редактор А.Адамсоне
Корректор Л.Паэгле

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1977

Подписано к печати 04.07.1977. ЯТ 12182. Зак. № 1199.
Бумага №1.Ф/б 60х84/16. 9,8 физ.печ.л. 7,5 уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Цена 75 к.

Отпечатано на ротапринте, Рига-50, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

Цена 75 к.