

Tehniskās Universitātes
Lietišķās matemātikas katedra

Inta Volodko

Dažu brīvās magnētohidrodinamiskās
siltumkonvekcijas problēmu skaitliskie un
asimptotiskie atrisinājumi stipros
magnētiskos laukos.

Promocijas darbs LR doktora grāda iegūšanai matemātikā.

Darba vadītājs: Fizikas zinātņu habilitētais doktors,
profesors Maksimiljans Antimirovs.

Rīga 1995.

SATURA RĀDĪTĀJS.

Ievads.....	4
1. Problēmas fiziskā nostādne un pamatvienādojumi.....	6
2. Īss literatūras apskats.....	12
3. Disertācijas materiāla izvietojums pa nodaļām.....	20
1. Brīvā MHD konvekcija ap vertikālu pusbezgalīgu plati.....	22
1.1. Tāda magnētiskā lauka vispārīga veida izvedums, kurš doto problēmu saglabā automodālu.....	22
1.2. Automodālās problēmas skaitliskie atrisinājumi dažu ārējo magnētisko lauku gadījumā.....	27
1.3. Problēmas asimptoiskais atrisinājums, kad $Ly \rightarrow \infty$. Problēmas risinājums pēc integrālo sakarību metodes, izmantojot eksponentfunkcijas.....	38
2. Brīvā MHD siltumkonvekcija virs lineārā horizontāla un punktveida siltuma avota.....	48
2.1. Brīvā MHD siltumkonvekcija virs lineārā horizontālā siltuma avota.....	48
2.1.1. Tādu magnētisko lauku klases noteikšana, kuri doto problēmu saglabā automodālu, un problēmas atrisinājums ar skaitliskās	

metodes palīdzību.....	48
2.1.2. Problēmas atrisinājuma asimptotika, kad $Ly \rightarrow \infty$	59
2.2. Brīvā MHD siltumkonvekcija virs punktveida siltuma avota.....	66
2.2.1. Tāda ārējo magnētisko lauku klases noteikšana, kas do to problēmu saglabā automodālu.....	66
2.2.2. Problēmas asimptotiskais atrisinājums, kad $Pr \ll 1$ un $Ly \rightarrow \infty$	71
3. Brīvā MHD siltumkonvekcija virs lineāra siltuma avota, kurš piestiprināts pie vertikālas virsmas...	72
3.1. Problēmas atrisinājums automodālā nostādņē ar skaitliskās un integrālās metodes palīdzību.....	72
3.2. Problēmas asimptotiskais atrisinājums, kad $Pr \ll 1$ un $Ly \rightarrow \infty$, pēc asimptotisko izvirzījumu saaudzēšanas metodes.....	80
Kopsavilkums.....	86
Svarīgākie apzīmējumi.....	90
Literatūra.....	92

IEVADS.

Darbā tiek aplūkota brīvā magnētohidrodinamiskā konvekcija ap sasildītiem ķermeņiem. Tās problēmu skaitliski - analītiskie atrisinājumi un precīzu asimptotiku iegūšana izraisa interesi kā teorētiskā, tā arī lietišķā plānā.

Esošajā literatūrā automodālā nostādnē sastopami skaitliskie atrisinājumi problēmām, kuras apraksta brīvo MHD siltumkonvekciju ap vertikālu pusbezgalīgu plati un virs lineāra horizontāla siltuma avota, tikai gadījumā, kad vispārinātais MHD savstarpējās mijiedarbības parametrs ir neliels $Ly \leq 1.5$, kur

$$Ly = 2 Ha^2 Gr^{-1/2} - \text{Likudisa skaitlis,}$$

Ha - Hartmana skaitlis,

Gr - Grashofa skaitlis.

Lai pārietu pie automodālām problēmām, izmantoti tikai speciāla veida šķērsie ārējie magnētiskie lauki. Atrisinājuma asimptotika ir pētīta tikai bez magnētiskā lauka iedarbības pie lieliem un maziem Prandtļa skaitļiem Pr /11/. Interesi izraisa iespēja paplašināt to magnētisko lauku klasi, pie kuriem minētās problēmas ir automodālas, noteikt šo atrisinājumu asimptotiku, kad $Ly \rightarrow \infty$, un turpināt to skaitliskos aprēķinus līdz tik lieliem Ly , kamēr skaitliskais atrisinājums praktiski sakrīt ar asimptotisko. Lietišķā pielietojumā šis

problēmas ir aktuālas kā pie kristālu audzēšanas, tā arī projektējot termokodolreaktorus, kuros paredzēts izmantot šķidro metālu siltuma noņemšanai, plazmas piemaisījumu atdalīšanai un cieto ķermeņu virsmu aizsargāšanai no pārkarsšanas un korozijas.

Disertācijā ir noteiktas vispārīgākas tādu ārējo magnētisko lauku klases, pie kuriem brīvās MHD siltumkonvekcijas problēmas ap vertikālu plati un ap siltuma avotu, piestiprinātu pie vertikālas virsmas, kā arī virs lineāra un punktveida siltuma avota, paliek automodālas, iegūti šo problēmu skaitliskie atrisinājumi un atrastas šo atrisinājumu precīzās asimptotikas gadījumā, kad vispārinātais MHD savstarpējās mijiedarbības parametrs Ly ir liels. Darbā tiek izmantota asimptotisko izvirzījumu saudzēšanas metode (sk./18/). Bez tam šīs problēmas tiek risinātas arī pēc integrālo sakarību metodes, izmantojot pakāpes funkcijas un eksponentfunkcijas. Iegūtas samērā vienkāršas formulas, kas dod ne tikai pareizas atrisinājuma integrālās raksturliķnes, bet arī labi aproksimētus pašus atrisinājumus.

1. PROBLĒMAS FIZISKĀ NOSTĀDNE UN PAMATVIENĀDOJUMI.

Darbā tiek pētīta stacionāra brīvā MHD siltumkonvekcija ap vertikālu pusbezglīgu plati, ap lineāru horizontālu siltuma avotu, kas piestiprināts pie vertikālas siltumu izolējošas sienas, kā arī siltumkonvekcija virs lineāra horizontāla punktveida siltuma avota.

Konvektīvās plūsmas pētīšana tiek veikta Businesska tuvinājumā /16/: pieņem, ka vides saspiešana maza, t.i. blīvuma novirze no vidējās vērtības tiek uzskatīta par tik mazu, ka to var atņemt visos vienādojumos, izņemot kustības vienādojumus, kur šī novirze tiek ņemta vērā tikai locekļi ar celšanas spēju sekojošā formā

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \beta (\tilde{T} - T_0) \right]^{1)},$$

kur ρ - blīvums,

\tilde{T} - temperatūra,

β - siltumizplešanās koeficients,

ρ_0 - šķidruma blīvums pie $\tilde{T} = T_0$.

Stacionārā brīvās MHD siltumkonvekcijas vienādojumu

1) Ar zīmi (\sim) tiek apzīmēti tie lielumi, kuri pēc pārejas pie bezdimensijas lielumiem, ir apzīmēti ar to pašu burtu bez zīmes \sim .

sistēma Businesska tuvinājumā ir sekojoša (sk. /14/):

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{array} \right) \tilde{\mathbf{v}} = - \frac{1}{\rho_0} \tilde{\mathbf{v}} \tilde{p}_m + \nu \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}} + g \beta \left[\tilde{T} - T_\infty \right] \mathbf{k} + \\ + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (0.1)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B} \right), \quad (0.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B}, \quad (0.3), (0.4)$$

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{array} \right) \tilde{T} = a \tilde{\Delta} \tilde{T}, \quad (0.5)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (0.6), (0.7)$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2},$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \mathbf{e}_z,$$

kur $\tilde{\mathbf{v}}$ - šķidruma ātrums,

\mathbf{B} - magnētiskās indukcijas vektors,

$$\tilde{p}_m = \tilde{p} + \frac{1}{2 \mu_0} \mathbf{B}^2 - \text{pilnais spiediens,}$$

\tilde{p} - šķidruma spiediens, atskaitot no hidrostatis-
kā spiediena $\tilde{p}_0 = \rho_0 g \tilde{z} + \text{const}$, kas atbilst pastāvīgajai
temperatūrai T_∞ (un tātad arī pastāvīgajam blīvumam),

\mathbf{E} - elektriskā lauka intensitātes vektors,

\mathbf{j} - strāvas blīvums,

g - smaguma spēka paātrinājums,

$\mathbf{k} = \{0, 0, 1\} = \mathbf{e}_z$ - vertikāli uz augšu vērsts z ass
vienības vektors,

ν - kinemātiskās viskozitātes koeficients,

a - šķidruma siltumvadīšanas koeficients,

c_p - siltumietilpība pie pastāvīga spiediena,

σ - strāvas vadāmība,

μ_0 - šķidrums magnētiskā caurlaidība.

No vienādojuma (0.3) seko, ka elektriskais lauks \mathbf{E} ir potenciāls,

$$\mathbf{E} = - \tilde{\nabla} \Phi, \quad (0.8)$$

kur Φ - elektriskais potenciāls.

Brīvās MHD siltumkonvekcijas uzdevumos, kā parādīts darbā /42/, Reynolds magnētiskais skaitlis $Re_m = \mu_0 \sigma v_0 L$ (v_0 - raksturīgais ātrums, L - raksturīgais garums) ir ievērojami mazāks par vieninieku. Šajā gadījumā, kā zināms, (sk. /7/, /13/, /21/) inducēto magnētisko lauku \mathbf{B}^i salīdzinājumā ar ārējo magnētisko lauku \mathbf{B}^e var neņemt vērā (tā saucamais bezindukcijas tuvinājums) un, tā kā $\mathbf{B} = \mathbf{B}^i + \mathbf{B}^e$, no sistēmas (0.1)-(0.7) iegūst stacionāru MHD siltumkonvekcijas vienādojumu sistēmu bezindukcijas tuvinājumā, pie tam \mathbf{B} jāmaina uz \mathbf{B}^e tieši vienādojumā (0.2), nevis vienādojumā (0.4), jo no fakta, ka $|\mathbf{B}^i| \ll |\mathbf{B}^e|$, neseko, ka $|\text{rot } \mathbf{B}^i| \ll |\text{rot } \mathbf{B}^e|$. Piemēram, ja $\mathbf{B}^e = \text{const}$, tad $\text{rot } \mathbf{B}^e = 0$, bet $\text{rot } \mathbf{B}^i \neq 0$. Rezultātā iegūsim sistēmu:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \right) \tilde{\mathbf{v}} = & - \frac{1}{\rho_0} \tilde{\nabla} \tilde{P}_m + \nu \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}} + g \beta \left[\tilde{T} - T_\infty \right] \mathbf{k} + \\ & + \frac{\sigma}{\rho} \left(- \tilde{\nabla} \Phi + \tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}^e \right) \times \mathbf{B}^e, \end{aligned} \quad (0.9)$$

$$\tilde{\Delta} \Phi = \text{div} \left(\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}^e \right), \quad \text{div } \tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (0.10), (0.11)$$

Vienādojums (0.10) ir iegūts, pielietojot operāciju

diverģence vienādojumam (0.2) un izmantojot strāvas blīvuma nepārtrauktības vienādojumu $\text{div } \mathbf{j} = 0$.

Iespējams parādīt (sk. /7/), ka ja plūsma ir divdimensionāla un magnētiskais lauks atrodas plūsmas plaknē (vai arī plūsma ir asisimetriska un $B_\varphi^e = B_\rho^e = 0$, $B_z^e = B_z^e(\rho, z)$, $v_\varphi = 0$, $v_\rho = v_\rho(\rho, z)$, $v_z = v_z(\rho, z)$), tad elektriskais lauks \mathbf{E} ir pastāvīgs, $\mathbf{E} = \text{const}$. Beidzot, ja strāvas blīvums bezgalībā ir vienāds ar nulli, tad $\mathbf{E} = 0$. Rezultātā, ja

$$\tilde{\mathbf{v}} = \left(\tilde{v}_x(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \right) - \text{šķidrums ātrums vektors,}$$

$$\mathbf{B}^e = \left(B_x(\tilde{x}, \tilde{y}), B_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \right) - \text{ārējais magnētiskais lauks,}$$

tad sistēma (0.9)-(0.11) pēc tās projicēšanas uz \tilde{x} un \tilde{y} asīm ir uzrakstāmas sekojošā veidā (\tilde{x} ass tagad ir vērsta vertikāli augšup un vienādojumā (0.9) \mathbf{e}_z ir jāsamaina ar \mathbf{e}_x):

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} = & - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{P}_m}{\partial \tilde{x}} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \tilde{v}_x + \\ & + g \beta \left[\tilde{T} - T_\infty \right] + \frac{\sigma}{\rho} B_y \left[\tilde{v}_y B_x - \tilde{v}_x B_y \right], \end{aligned} \quad (0.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} = & - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{P}_m}{\partial \tilde{y}} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \tilde{v}_y + \\ & + \frac{\sigma}{\rho} B_x \left[\tilde{v}_x B_y - \tilde{v}_y B_x \right], \end{aligned} \quad (0.13)$$

$$\text{div } \tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (0.14)$$

Vienādojums (0.5) būs sekojošs (ņemot vērā, ka e_z jāsamaina ar e_x):

$$\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = a \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \tilde{T}. \quad (0.15)$$

Beidzot, ja Grashofa skaitlis

$$Gr = g \beta \left(T_w - T_\infty \right) L^3 \nu^{-2},$$

kur T_w - plāksnes temperatūra, ir pietiekami liels, tad no sistēmas (0.12) - (0.15) iegūst brīvās siltumkonvekcijas vienādojumus bezindukcijas un robežslāņu tuvinājumā (sk. /14/, /15/, /22/, /9/):

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}^2} + g \beta \left(\tilde{T} - T_\infty \right) + \\ + \frac{\sigma}{\rho_0} B_y \left(\tilde{v}_y B_x - \tilde{v}_x B_y \right), \end{aligned} \quad (0.16)$$

$$\tilde{v}_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}_y \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = a \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad (0.17)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (0.18)$$

Gadījumā, kad tiek aplūkota MHD siltumkonvekcija virs punktveida siltuma avota ar siltuma daudzumu Q , kurš atrodas punktā $\tilde{\rho} = 0, \tilde{z} = 0$ ($\tilde{\rho}, \tilde{\varphi}, \tilde{z}$ - cilindriskās koordinātes), ātruma vektors un ārējais magnētiskais lauks ir sekojoši:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{v}_\rho(\tilde{\rho}, \tilde{z}) \mathbf{e}_\rho + \tilde{v}_z(\tilde{\rho}, \tilde{z}) \mathbf{e}_z, \quad (0.19)$$

$$\mathbf{B}^e = B_\rho(\tilde{\rho}, \tilde{z}) \mathbf{e}_\rho + B_z(\tilde{\rho}, \tilde{z}) \mathbf{e}_z. \quad (0.20)$$

Tad brīvo MHD siltumkonvekciju apraksta sekojoši robežslāņu vienādojumi (sk. /14/ un /16/):

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\rho \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{\rho}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{z}} &= \frac{\nu}{\tilde{\rho}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{\rho}} \right) + g \beta \left(\tilde{T} - T_\infty \right) + \\ &+ \frac{\sigma}{\rho_0} B_\rho \left(\tilde{v}_\rho B_z - \tilde{v}_z B_\rho \right), \end{aligned} \quad (0.21)$$

$$\tilde{v}_\rho \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\rho}} + \tilde{v}_z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} = \frac{a}{\tilde{\rho}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\rho}} \right), \quad (0.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{\rho} \tilde{v}_z \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\rho}} \left(\tilde{\rho} \tilde{v}_\rho \right) = 0. \quad (0.23)$$

2. ĪSS LITERATŪRAS APSKATS.

Brīvās siltumkonvekcijas ap sasildītiem ķermeņiem teorētiskajai pētīšanai ir veltīti daudzi darbi, kuru apskats izdarīts monogrāfijās /11/, /12/, /15/. Uzdevums par brīvo siltumkonvekciju ap vertikālu pusbezglīgu plati tika reducēts uz automodālo un skaitliski atrisināts jau 1921. gadā, piedevām iegūtie rezultāti gandrīz sakrita ar eksperimentālajiem (sk. /22/, 303. lpp.). Nedaudz vēlāk (pirmoreiz J. Zeļdoviča darbā /16/, bet pēc tam arī daudzos citos darbos, starp kuriem atzīmēsim darbus /27/ un /29/) tika parādīts, ka uz automodālām problēmām var reducēt arī brīvās siltumkonvekcijas problēmas virs lineārā horizontālā un punktveida siltuma avota.

Brīvā siltumkonvekcija ap vertikālu pusbezglīgu plati un virs punktveida siltuma avota pētīta arī nesen publicētajos darbos /33/, /39/, /40/, /46/, /49/, /53/, /57/. Darbā /57/ skaitliski aprēķināta nestacionāra problēma vertikālas pusbezglīgas plates gadījumā, bet darbos /33/ un /39/ dotā problēma rēķināta stacionārā nostādnē stratificētās ārējās vides gadījumā. Darbā /40/ šajā uzdevumā tiek ievesti tādi automodālie mainīgie, ka šķidrums bezdimensijas temperatūras lauks paliek gandrīz nemainīgs plašā Prandtļa skaitļu izmaiņas diapazonā, darbā /46/ tiek ņemta vērā fizikālo siltuma parametru atkarība no temperatūras, bet darbā /49/ - skaitliski

tiek pētīta binārā maisījuma nestacionāra siltuma un koncentrācijas konvekcija ap vertikālu virsmu. Darbā /53/ ar asimptotisko izvirzījumu saudzēšanas metodes palīdzību tiek pētīti otrās kārtas efekti problēmai par brīvo siltumkonvekciju virs punktveida siltuma avota, kurš atrodas koniskas virsmas virsotnē.

Svarīga dabas un tehniskajos procesos ir magnētiskā lauka iedarbība uz strāvu vadoša šķidrums brīvo siltumkonvekciju ap sasildītiem ķermeņiem. Homogēnā magnētiskā šķērslauka iedarbība uz brīvo siltumkonvekciju ap vertikālu pusbezglīgu plati tika pētīta sakarā ar konvekcijas apspiesšanas analīzi, audzējot kristālus pēc Čohraļska metodes, darbā /35/. Homogēnā magnētiskā šķērslauka iedarbība analogiskā uzdevumā, ja Prandtļa skaitlis ir mazs, aplūkota sakarā ar metāliskajiem reaktoru siltumnesējiem darbā /34/, bet tīri teorētiski, pie patvaļīgiem Prandtļa skaitļiem - darbos /44/, /51/, /52/, /54/, /55/, /56/. Atzīmēsim, ka homogēnā magnētiskā lauka gadījumā problēma nav automodāla un tiek rēķināta vai nu skaitliski, ar galīgo diferencu shēmu palīdzību (sk. /44/, /52/, /55/), vai pēc asimptotisko izvirzījumu saudzēšanas metodes (sk. /54/, /56/), vai arī pēc mazā parametra metodes (sk. /51/).

Pirmais darbs, kurā noteikts tāda veida magnētiskais lauks, kura iedarbībā brīvās MHD siltumkonvekcijas problēma ap vertikālu pusbezglīgu plati saglabājas automodāla, ir Likudisa darbs /42/.

Tika pieņemts, ka plate atrodas apgabalā $0 \leq \tilde{x} < +\infty$ (\tilde{x} ass vērsta vertikāli augšup, \tilde{y} - horizontāli). Sistēma (0.16)-(0.18) tika rēķināta ar robežnosacījumiem

$$\tilde{y} = 0: \tilde{v}_x = \tilde{v}_y = 0, \tilde{T} = T_w; \tilde{y} = \infty: \tilde{v}_x = 0, \tilde{T} = T_\infty. \quad (0.24)$$

Likudis darbā /42/ parāda, ka problēma (0.16)-(0.18), (0.24) būs automodāla, ja ārējais magnētiskais lauks $B^e(B_x, B_y)$ ir sekojošā formā:

$$B_x = 0, \quad B_y = B_0 (L / \tilde{x})^{-1/4} \quad (0.25)$$

kur L - garuma raksturlielums. Ievedot strāvas funkciju $\psi(\tilde{x}, \tilde{y})$ ($\tilde{v}_x = \partial\psi / \partial\tilde{y}$, $\tilde{v}_y = -\partial\psi / \partial\tilde{x}$) un automodālos mainīgos

$$\eta = k \tilde{y} \tilde{x}^{-1/4}, \quad \psi = 4 \nu k \tilde{x}^{3/4} f(\eta), \quad k^4 = 4^{-1} Gr L^{-3},$$

$$\theta = (\tilde{T} - T_\infty) / (T_w - T_\infty), \quad (0.26)$$

kur $Gr = g \beta (T_w - T_\infty) L^3 \nu^{-2}$ - Grashofa skaitlis, Likudis ieguva sekojošu nelineāru automodālu problēmu:

$$f'''' + 3 f f'' - 2 f'^2 + \theta - Ly f' = 0, \quad (0.27)$$

$$\theta'' + 3 Pr f \theta' = 0, \quad (0.28)$$

$$\eta = 0: f = f' = 0, \theta = 1; \quad \eta = \infty: f' = 0, \theta = 0, \quad (0.29)$$

kur $Ly = 2 Ha^2 Gr^{-1/2}$.

Darbā /42/ piedāvāti dažādi problēmas (0.27)-(0.29) tuvinātie atrisinājumi, kā arī noteikts šīs problēmas asimptotiskais atrisinājums, kad Prandtlja skaitlis $Pr \ll 1$ un $Ly \rightarrow \infty$, taču tikai plūsmas kodolā. Disertācijas

1. nodaļā problēma (0.27)-(0.29) aprēķināta skaitliski pēc piešaudes metodes līdz pat parametram $Ly = 10$, pie kura konvekcija gandrīz pilnīgi tiek apspiesta. Bez tam iegūts šīs problēmas precīzais asimptotiskais atrisinājums, kad $Pr \ll 1$ un $Ly \rightarrow \infty$, ne tikai plūsmas kodolā, bet arī robežslānī. Pēc tam konstruēts kopīgais izvīzījums (sk. /8/, /17/, /18/), kurš praktiski sakrīt ar precīzo skaitlisko atrisinājumu, kad $Ly = 10$, un maz atšķiras no tā, $Ly = 4$. 1. nodaļā noteikts arī vispārīgāka veida ārējais magnētiskais lauks nekā lauks (0.25), kurš problēmu (0.16)-(0.18) saglabā automodālu. Darbā /43/ eksperimentāli izdarīta darba /42/ pārbaude un iegūta laba teorijas un eksperimenta sakritība.

Pirmais darbs, tas ir darbs /30/, kurā tika noteikts ārējā magnētiskā lauka veids, kurš saglabā automodālu brīvās MHD siltumkonvekcijas problēmu virs lineāra horizontāla siltuma avota, parādījās ievērojami vēlāk, 1977. gadā. Lineārs horizontāls siltuma avots novietots gar taisni $\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = 0$ (\tilde{x} ass vērsta vertikāli augšup, \tilde{y} ass - horizontāli). Sistēma (0.16)-(0.18) tika rēķināta ar robežnosacījumiem

$$\tilde{y} = 0: \quad \tilde{v}_y = 0, \quad \partial \tilde{v}_x / \partial \tilde{y} = 0, \quad \partial \tilde{T} / \partial \tilde{y} = 0;$$

$$\tilde{y} = \infty: \quad \tilde{v}_x = 0, \quad \tilde{T} = T_\infty \quad (0.30)$$

Darbā /30/ parādīts, ka problēma (0.16)-(0.18), (0.30) būs automodāla, ja ārējais magnētiskais lauks ir

sekojošs

$$B_x = 0, \quad B_y = B_0 \left(\tilde{x} / L \right)^{-2/5}. \quad (0.31)$$

Pēc automodālo mainīgo ieviešanas (sk. formulu (2.1.8) disertācijas 2. nodaļā) problēmu (0.16)-(0.18), (0.30) laukam (0.31) var uzrakstīt sekojošā formā

$$f'''' + \frac{12}{5} f f'' - \frac{4}{5} f'^2 + \theta - Ly f' = 0, \quad (0.32)$$

$$\theta'' + \frac{12}{5} Pr (f \theta)' = 0, \quad (0.33)$$

$$\eta = 0: \theta' = f = f'' = 0, \quad \theta = 1; \quad \eta = \infty: f' = 0. \quad (0.34)$$

Darbā /30/ dažu konkrētu Prandtļa skaitļu gadījumā ($Pr = 5/9$ un $2 \leq Pr < +\infty$) iegūti vienkārši precīzie problēmas (0.32) - (0.34) atrisinājumi. Ja $Pr = 5/9$, problēmas (0.32)-(0.34) atrisinājumu var uzrakstīt sekojošā formā:

$$f(\eta) = \frac{3}{2} D \operatorname{th}(D \eta), \quad \theta(\eta) = \operatorname{ch}^{-2}(D \eta), \quad (0.35)$$

kur

$$D = -\frac{5}{32} Ly + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{25 Ly^2}{256} + \frac{5}{6}}. \quad (0.36)$$

Šis atrisinājums tiek izmantots disertācijas 1. nodaļā, lai nodemonstrētu skaitliskā atrisinājuma, iegūta pēc piešaudes metodes, strauju "noraušanos", kad Ly vērtības ir lielas ($Ly = 60$). Darbā /30/ iegūts arī problēmas (0.32)-(0.34) skaitliskais atrisinājums pēc piešaudes metodes, taču tikai līdz $Ly \leq 1$ un ir atzīmētas lielas skaitliskā aprēķina grūtības, kad $Pr \ll 1$ un $Ly > 1$. Disertācijas 2. nodaļā problēma (0.32)-(0.34) aprēķināta skaitliski līdz pat $Ly = 100$, kad konvekcija gandrīz

pilnīgi tiek apspiesta. Bez tam 2. nodaļā noteikta problēmas (0.32) - (0.34) atrisinājuma precīzā asimptotika, kad $Ly \rightarrow \infty$ un $Pr \ll 1$. Kad $Ly = 10$, noteiktā asimptotika gandrīz pilnīgi sakrīt ar precīzo skaitlisko atrisinājumu, bet, kad $Ly = 4$, maz atšķiras no tā. Tādā veidā, kaut gan asimptotiskais atrisinājums nav precīzs, tomēr, atšķirībā no darba /30/, tas dod labu sakritību ar precīzo skaitlisko atrisinājumu plašā Prandtļa skaitļa Pr izmaiņas diapazonā pie $Ly \geq 4$. Tā kā pie $Ly > 1$ precīzu skaitlisku atrisinājumu darbā /30/ neizdevās iegūt, tad Grejs darbā /31/ ieguva vienkāršas aproksimējošās formulas problēmas (0.32) - (0.34) atrisināšanai. Koeficienti šajās formulās tika iegūti salīdzinot šīs formulas ar precīzajiem analītiskajiem, skaitliskajiem un asimptotiskajiem atrisinājumiem no darba /30/. Darbā /31/ Grejs apgalvo, ka šīs aproksimējošās formulas pielietojamas apgabalā $0.01 \leq Pr \leq 100$, $0 \leq Ly \leq 100$. Taču reālā šīs formulas pārbaude tika veikta tikai pie $Pr = 0.01$, $Ly = 0; 1.0$, $Pr = 5/9$, $0 \leq Ly \leq 100$ un $2 \leq Pr \leq 100$, $0 \leq Ly \leq 100$, tā kā apgabalā $Pr \ll 1$ un $Ly \gg 1$ precīzo atrisinājumu nav. Darbā /32/ Grejs ieguva skaitlisko atrisinājumu MHD problēmai par siltumkonvekciju ap siltuma avotu, piestiprinātu pie sienas, ārējā magnētiskā lauka (0.31) iedarbībā arī tikai pie $Ly \leq 1$ un $0 \leq Pr \leq 100$.

Disertācijas 2. nodaļā noteikts arī vispārīgs ārējā magnētiskā lauka veids, kurš problēmu (0.32)-(0.34) saglabā automodālu. Jāatzīmē, ka vienkārši precīzie

atrisinājumi brīvās siltumkonvekcijas automodālām problēmām virs lineāra horizontāla un punktveida siltuma avota bez magnētiskā lauka iedarbības tika iegūti jau agrāk darbos /25/, /27/, /58/, /59/.

Disertācijas 1. un 3. nodaļās nelineāras brīvās MHD siltumkonvekcijas problēmas ap sasildītiem ķermeņiem tiek rēķinātas ar darbā /5/ un monogrāfijā /6/ speciāli izstrādāto integrālo sakarību metodi. Metodes jauninājums ir divu dažādu robežslāņu - dinamiskā un siltuma robežslāņu ieviešana. Disertācijā veiktais pēc šīs metodes iegūto rezultātu salīdzinājums ar precīzo skaitlisko atrisinājumu rāda, ka metode dod samērā labus rezultātus ātruma un temperatūras laukiem, kad Prandtļa skaitlis nav sevišķi mazs, un diezgan labu sakritību siltuma plūsmai no ķermeņa virsmas. Metodi var izmantot kā labu sākuma nosacījumu, rēķinot problēmu ar skaitlisko piešaudes metodi.

Kā zināms, šķidrājiem metāliem Prandtļa skaitlis $Pr \ll 1$, bet mašīneļļai Prandtļa skaitlis $Pr \approx 10^4$. Tādēļ interesi izraisa atrisinājuma asimptotika brīvās siltumkonvekcijas problēmai ap sasildītiem ķermeņiem gan, kad $Pr \rightarrow 0$, gan arī gadījumā, kad $Pr \rightarrow \infty$. Tādi pētījumi gadījumos bez ārējā magnētiskā lauka iedarbības veikti ar asimptotisko izvirzījumu saaudzēšanas metodes palīdzību darbos /19/, /20/, /23/, /26/, /28/, /36/, /37/, /38/, /41/, /45/, /47/, /48/, /50/. Pirmo tāda veida pētījumu brīvai siltumkonvekcijai ap vertikālu pusbezglīgu plati ar pastāvīgu virsmas temperatūru

veicis Lefevrs darbā /41/, izmantojot mainīgo maiņu. Darbā /41/ parādīts, ka gadījumā, kad $Pr \rightarrow \infty$, siltuma plūsmas no plates virsmas asimptotiku un berzes spēku uz plates var uzrakstīt sekojošā formā:

$$\theta'(0) = -0,5027 \sqrt{2} Pr^{1/4}, \quad (0.37)$$

$$f''(0) = 0,8245 Pr^{-1/4}, \quad (0.38)$$

bet, ja $Pr \rightarrow 0$, tad

$$\theta'(0) = -0,6004 \sqrt{2} Pr^{1/2}. \quad (0.39)$$

Šīs problēmas stingrāka analīze ar asimptotisko izvirzījumu saudzēšanas izmantošanu tika izdarīta, kad $Pr \rightarrow \infty$, darbos /19/, /36/, /45/, /50/, bet, kad $Pr \rightarrow 0$, - darbā /37/. Darbā /28/ noteikta problēmas atrisinājuma asimptotika gadījumā, kad šķidruma plūsma uz plates virsmas ir pastāvīga un $Pr \rightarrow \infty$. Analoģiska problēma laminārai siltumkonvekcijas masu apmaiņai uz vertikālas virsmas ar homogēnu masas plūsmu aprēķināta darbā /20/. Darbos /38/ un /48/ analoģiski pētījumi veikti siltuma avota gadījumā. Darbos /23/, /26/, /47/ problēmas atrisinājuma asimptotika vertikālas plates gadījumā, kad $Pr \rightarrow 0$, noteikta pēc integrālo sakarību metodes.

Magnētiskā lauka iedarbības gadījumā asimptotisko izvirzījumu saudzēšanas metode, pētot brīvo siltumkonvekciju ap sasildītiem ķermeņiem automodālā nostādņē, pirmoreiz izmantota šajā disertācijā.

3.DISERTĀCIJAS MATERIĀLA IZVIETOJUMS

PA NODAĻĀM.

Disertācija ir sadalīta trijās nodaļās, katra no kurām ir veltīta brīvās MHD siltumkonvekcijas pētīšanai ap kādu konkrētu ķermeni. Katra daļa savukārt sadalīta vairākās nodaļās un apakšnodaļās, katrā no kurām konkrētā problēma tiek risināta ar kādu noteiktu metodi.

1. nodaļā "Brīvā MHD konvekcija ap vertikālu pusbezgalīgu plati", kas satur 3 apakšnodaļas, ir noteikts vispārēja veida ārējais magnētiskais lauks, kurš minēto problēmu saglabā automodālu, un automodālā problēma atrisināta skaitliski pēc piešaudes metodes un pēc integrālo sakarību metodes, izmantojot pakāpes funkcijas. Atrasts arī problēmas asimptotiskais atrisinājums, kad $Ly \rightarrow \infty$, izmantojot integrālo sakarību metodi, pakāpes funkciju vietā izmantojot eksponentfunkcijas.

2. nodaļa "Brīvā MHD siltumkonvekcija virs lineārā horizontālā un punktveida siltuma avota" sadalīta divās apakšnodaļās un satur atbilstošo materiālu par virsrakstā minēto problēmu, tātad aplūkots magnētiskais lauks, kurš doto problēmu saglabā automodālu, un problēmu atrisinājumi tiek iegūti skaitliski pēc piešaudes metodes un noteikts arī problēmu asimptotiskais atrisinājums, kad $Ly \rightarrow \infty$.

3. nodaļa "Brīvā MHD siltumkonvekcija virs lineāra

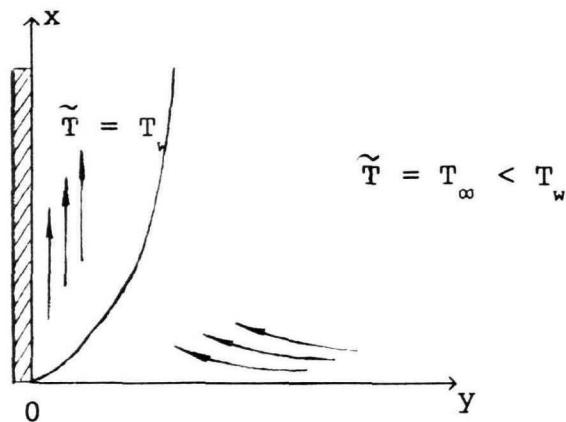
siltuma avota, kurš piestiprināts pie vertikālas virsmas" satur divas apakšnodaļas un ir veltīta virsrakstā minētās problēmas atrisināšanai ar skaitliskās un integrālās metodes palīdzību. Problēmas asimptotiskā atrisinājuma noteikšanai ir izmantota asimptotisko izvirzījumu saudzēšanas metode.

Formulas un zīmējumi disertācijā numurēti, kā pirmo norādot nodaļas numuru. Formulu numerācijā otrais skaitlis norāda apakšnodaļas numuru. Atsauces uz literatūru norādītas slīpās iekavās.

1. BRĪVĀ MHD KONVEKCIJA AP VERTIKĀLU
 PUSBEZGALĪGU PLATI (/3/, /10/).

1.1. TĀDA ĀRĒJĀ MAGNĒTISKĀ LAUKA VISPĀRĪGĀ VEIDA
 IZVEDUMS, KURŠ DOTO PROBLĒMU SAGLABĀ AUTOMODĀLU.

Tiek aplūkota vertikāla pusbezglīga plate, kura novietota apgabalā $0 \leq \tilde{x} < +\infty$, $\tilde{y} = 0$ (\tilde{x} ass vērsta vertikāli uz augšu - sk. 1.1. zīm.).



1.1. zīm. Brīvā MHD siltumkonvekcija ap vertikālu pusbezglīgu plati.

Ir jāatrisina vienādojumu sistēma (0.16) - (0.18) ar sekojošiem robežnosacījumiem:

$$\tilde{y} = 0: \tilde{v}_x = \tilde{v}_y = 0, \quad \tilde{T} = T_0;$$

$$\tilde{y} = \infty: \tilde{T} = T_\infty, \quad \tilde{v}_x = 0. \quad (1.1.1)$$

Atzīmēsim, ka pie $\tilde{y} = \infty$ ātruma horizontālā komponente nav vienāda ar nulli, jo caur katru vertikālo šķēlumu $\tilde{y} = \text{const} > 0$ iztek, ņemot vērā nepārtrauktības

vienādojumu (0.18), tieši tik daudz šķidruma, cik caur katru vertikālo šķēlumu $\tilde{x} = \text{const} > 0$. Lai uzdevumā (0.16)-(0.18), (1.1.1) pārietu pie automodālās problēmas, ievēd strāvas funkciju $\psi(\tilde{x}, \tilde{y})$ ($\tilde{v}_x = \psi_y$, $\tilde{v}_y = -\psi_x$), automodālo mainīgo η un bezdimensijas temperatūru θ (sk. /15/):

$$\eta = k \tilde{y} \tilde{x}^{-1/4}, \quad \psi = 4 \nu k \tilde{x}^{3/4} f(\eta), \quad k^4 = 4^{-1} \text{Gr} L^{-3},$$

$$\theta = \frac{\tilde{T} - T_\infty}{T_0 - T_\infty}. \quad (1.1.2)$$

Šeit $\text{Gr} = \nu^{-2} g \beta (T_w - T_\infty) L^3$ - Grashofa skaitlis, L - raksturlielums. Tad problēma (0.16)-(0.18), (1.1.1) ir uzrakstāma sekojošā formā (" ' " nozīmē diferencēšanu pēc η):

$$f'''' + 3 f f'' - 2 f'^2 + \theta + \sigma \left(4 \rho \nu k^3 \right)^{-1} \left[(\eta f' - 3 f) B_x B_y \tilde{x}^{-1/4} - 4 k \sqrt{\tilde{x}} B_y^2 f' \right] = 0, \quad (1.1.3)$$

$$\theta'' + 3 \text{Pr} f \theta' = 0, \quad (1.1.4)$$

$$\eta = 0: f = f' = 0, \theta = 1; \quad \eta = \infty: f' = \theta = 0, \quad (1.1.5)$$

kur $\text{Pr} = \nu/a$ - Prandtlja skaitlis.

B_x un B_y jāizvēlās tādas, lai vienādojums (3) būtu atkarīgs tikai no η . Uzdevumu apgrūtina tas, ka funkcijām B_x un B_y jāapmierina arī vienādojums

$$\frac{\partial B_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial B_y}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (1.1.6)$$

tā ka iegūstam triju vienādojumu sistēmu ar diviem

mainīgajiem, tomēr šajā gadījumā to izdodas atrisināt. Lai izteiksme kvadrātiekvāš vienādojumā (3) nebūtu atkarīga no x , pietiek prasīt

$$B_y = B_0 (L/\tilde{x})^{1/4} F(\eta), \quad B_x = B_0 \varphi(\eta) \sqrt{\tilde{x}/L} \quad (1.1.7)$$

kur $F(\eta)$, $\varphi(\eta)$ - patvaļīgas diferencējamas funkcijas. Izteiksmes (7) ievietojot vienādojumā (6), iegūst diferenciālvienādojumu funkcijai $\varphi(\eta)$:

$$-\frac{1}{4} B_0 k \tilde{y} \tilde{x}^{-3/4} L^{-1/2} \varphi'(\eta) + \frac{1}{2} B_0 (\tilde{x} L)^{-1/2} \varphi(\eta) + B_0 L^{1/4} \tilde{x}^{-1/2} k F'(\eta) = 0, \quad (1.1.8)$$

no kurienes, saīsinot, seko:

$$\eta \varphi'(\eta) - 2 \varphi(\eta) = 4^{3/4} Gr^{1/4} F'(\eta) = 0, \quad (1.1.9)$$

Vienādojuma (9) vispārīgo atrisinājumu patvaļīgai funkcijai $F(\eta)$ apraksta formula

$$\varphi(\eta) = 4^{3/4} Gr^{1/4} \bar{\varphi}(\eta),$$

$$\bar{\varphi}(\eta) = \eta^2 \int_{\eta_0}^{\eta} \xi^{-3} F'(\xi) d\xi + C \eta^2 \quad (1.1.10)$$

kur C - patvaļīga konstante. Formulas (7), (10) dod tāda magnētiskā lauka vispārīgo veidu, kurš problēmu (3)-(5) saglabā automodālu.

Vienādojums (3) pie nosacījumiem (7) pieņem

sekojošu veidu:

$$f'''' + 3 f f'' - 2 f'^2 + Ly \left[(\eta f' - 3 f) \bar{\varphi}(\eta) F(\eta) - F^2(\eta) f' \right] = 0, \quad (1.1.11)$$

kur $Ly = 2 Ha^2 / \sqrt{Gr}$,

$Ha = B_0 L \sqrt{\sigma / (\rho \nu)}$ - Hartmana skaitlis.

Likudisa skaitlis Ly ir analoģisks MHD savstarpējās mijiedarbības parametram $N = Ha^2 / Re$ (Re - Reynoldska skaitlis) MHD izotermiskajās problēmās. Tā kā pēdējās robežslāņu vienādojumi ir spēkā pietiekami lielu Re skaitļu gadījumā, tad analoģiskie vienādojumi (0.16)-(0.18) ir spēkā pietiekami lielu Gr skaitļu gadījumā. Ja $F(\eta) = 1$, $C = 0$, no (7) un (10) iegūst sekojošu lauku

$$B_y = B_0 (L/\tilde{x})^{1/4}, \quad B_x = 0, \quad (1.1.12)$$

aplūkotu darbā /42/ un eksperimentāli realizētu darbā /43/.

Lauka (7) magnētisko spēka līniju diferenciālvienādojumu

$$\frac{dy}{B_y(x,y)} = \frac{dx}{B_x(x,y)} \quad (1.1.13)$$

var integrēt kvadrātūrās, un tad vienādojuma (13) atrisinājumu parametriskā formā var uzrakstīt sekojoši:

$$x = x_0 \exp [4 \Phi(u)], \quad y = x_0^{1/4} k^{-1} u \exp [\Phi(u)],$$

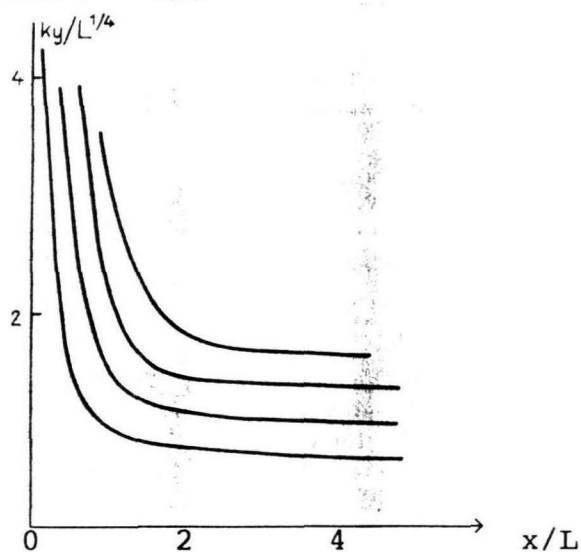
$$\Phi(u) = \int_{u_0}^u \bar{\varphi}(\xi) \left[F(\xi) - \xi \bar{\varphi}(\xi) \right]^{-1} d\xi,$$

$$u_0 = k y_0 x_0^{-1/4}, \quad (1.1.14)$$

kur $u \geq 0$ - parametrs, $y = y_0$, ja $x = x_0$. 1.2. zīmējumā parādīts magnētisko spēka līniju veids sekojošām funkcijām:

$$F(\eta) = \eta^4 e^{-\eta^2}, \quad \bar{\varphi}(\eta) = \eta^2 \left(\frac{3}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \eta + \eta e^{-\eta^2} \right),$$

$$\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-x^2} dx. \quad (1.1.15)$$



1.2. zīm. Ārējā magnētiskā lauka spēka līnijas, kuras izskaitļotas pēc formulas (14) funkcijām (15).

1.2. AUTOMODĀLĀS PROBLĒMAS SKAITLISKIE
 ATRISINĀJUMI DAŽU ĀRĒJO MAGNĒTISKO LAUKU GADĪJUMĀ.

1.2.1. Funkcijas $F(\eta)$ un $\varphi(\eta)$ tiek definētas pēc
 formulas (1.1.15).

Šajā gadījumā ārējais magnētiskais lauks (kad
 funkcijas $F(\eta)$ un $\varphi(\eta)$, definētas pēc formulas (1.1.15),
 ievieto formulā (1.1.7)) ir sekojošs:

$$B_x = B_0 \sqrt{\tilde{x}/L} 4^{3/4} Gr^{1/4} \eta^2 \left(\frac{3}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \eta + \eta e^{-\eta^2} \right),$$

$$B_y = B_0 (L/\tilde{x})^{1/4} \eta^4 e^{-\eta^2}. \quad (1.2.1)$$

No vienādojuma (1.1.3), izmantojot funkcijas $F(\eta)$ un
 $\varphi(\eta)$ no (1.1.15), seko

$$f'''' + 3 f f'' - 2 f'^2 + \theta - Ly \left\{ \left[\frac{3}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta \exp(-\eta^2) \right] \exp(-\eta^2) \eta^6 (3 f - f') + \right. \\ \left. + \eta^8 \exp(-2 \eta^2) f' \right\} = 0 \quad (1.2.2)$$

Problēma (1.2.2), (1.1.4), (1.1.5) tiek risināta
 skaitliski ar ESM palīdzību pēc piešaudes metodes.
 Funkcijas $f'(\eta)$ skaitliskos rezultātus (funkcija tieši
 proporcionāla ātruma vertikālajai komponentei) var
 apskatīt 1. tabulā.

1. tabula.

Funkcijas $f'(\eta)$ vērtības pusbežgalīgai vertikālai platei, ja $Pr = 0,0625$.

Ly	η					
	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1
1	0,075	0,196	0,280	0,331	0,353	0,354
4	0,057	0,142	0,189	0,202	0,185	0,150
10	0,046	0,108	0,132	0,122	0,083	0,034

Ly	η		
	1,3	1,5	1,7
1	0,343	0,330	0,322
4	0,114	0,098	-
10	0,006	-	-

1.2.2. Ārējais magnētiskais lauks tiek definēts pēc formulas (1.1.12)..

No vienādojuma (1.1.3), ievietojot tajā B_x un B_y no (1.1.12), seko

$$f'''' + 3 f f'' - 2 f'^2 + \theta - Ly f' = 0. \quad (1.2.3)$$

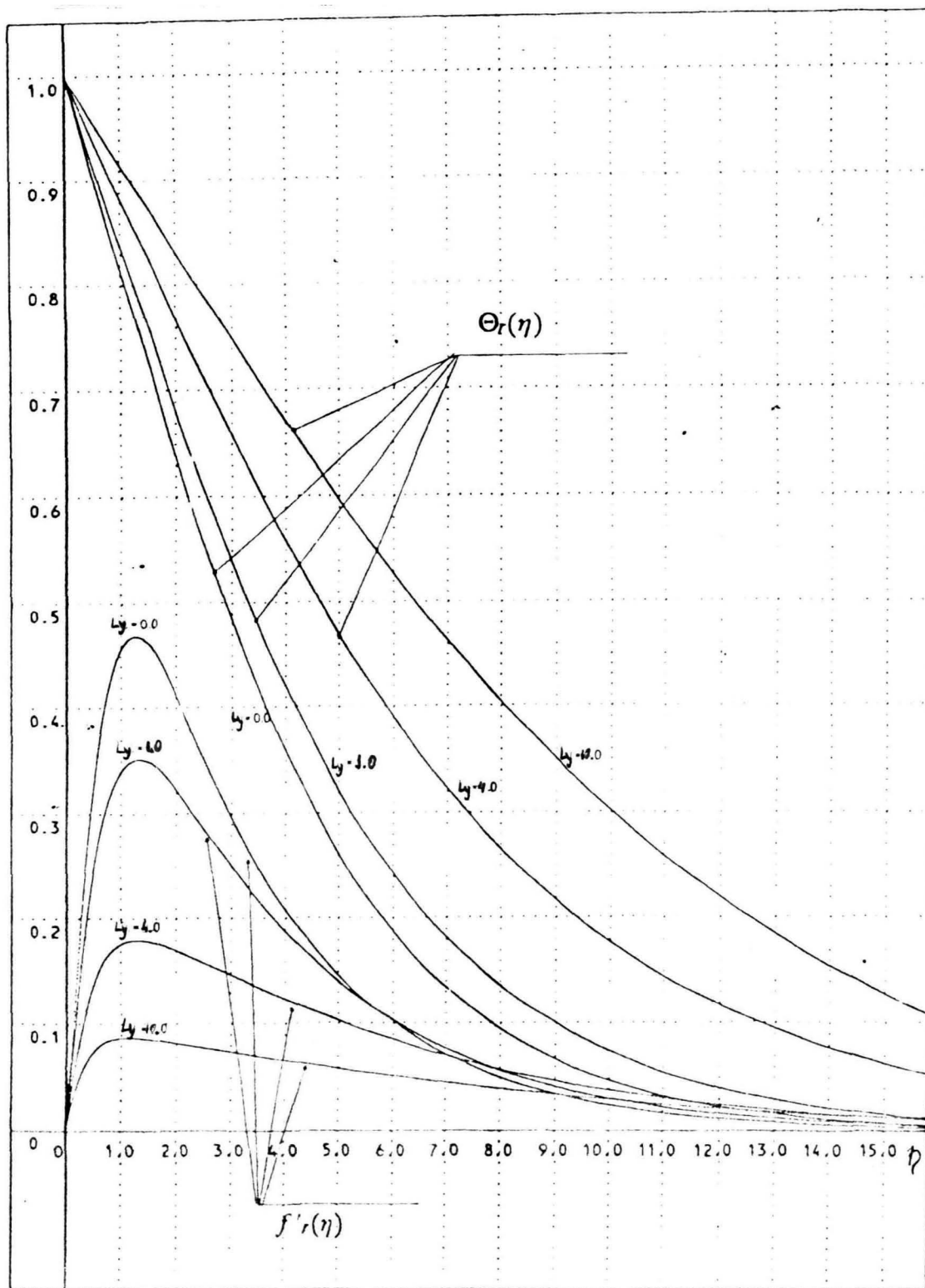
Šim vienādojumam jāpievieno vienādojums (1.1.4) un robežnosacījumi (1.1.5) :

$$\theta'' + 3 Pr f \theta' = 0. \quad (1.2.4)$$

$$\eta = 0: f = f' = 0, \theta = 1; \quad \eta = \infty: f' = \theta = 0. \quad (1.2.5)$$

Piezīmēsim, ka darbā /42/ izdarīti tikai tuvināti Nuselta skaitļa aprēķini lauka (1.1.12) gadījumā un šie tuvinātie rezultāti tiek salīdzināti ar skaitliskajiem tikai, kad $Ly \leq 1,5$.

Rēķinot problēmu (3)-(5) ar piešaudes metodi, tiek izmantota 4. kārtas Runge-Kutta shēma, bet punktā $\eta = 0$ divi iztrūkstošie nosacījumi ($f''(0)$ un $\theta'(0)$) tiek uzdoti patvaļīgi un variēti tik ilgi, līdz kamēr izpildās divi robežnosacījumi no (5) punktā $\eta = \infty$. Programma realizēta ar kompjuāteru IBM PC 386, izmantojot matemātisko līdzprocesoru 11T2C287-8. 1.3. zīmējumā redzami skaitliskie rezultāti, kad Prandtļa skaitlis $Pr = 0,0625$ (šķidrāis kālijs), kuri demonstrē brīvās MHD siltumkonvekcijas apspiešanu ar magnētiskā lauka palīdzību. Kā redzams no zīmējuma, pie $Ly = 10$



1.3. zīm. Brīvās MHD siltumkonvekcijas apspiešana ar magnētiskā lauka palīdzību ap vertikālu plati, ja $Pr = 0,0625$.

siltumkonvekcija gandrīz pilnīgi tiek apspiesta.

Bez tam dotā problēma tika risināta pēc integrālo sakarību metodes, kura izstrādāta monogrāfijā /6/ brīvās MHD siltumkonvekcijas uzdevumu rēķināšanai. Šīs metodes jauninājums ir divu robežslāņu ieviešana: hidrodinamiskā slāņa - ar platumu α un siltumslāņa - ar platumu β , pie tam $\alpha < \beta$, ja $Pr < 1$ un otrādi, $\alpha > \beta$, ja $Pr > 1$. Metodes būtība ir tāda, ka vispirms vienādojumi (3) un (4) tiek integrēti pēc η no 0 līdz ∞ , tad, ņemot vērā robežnosacījumus (5), pēc parciālās integrēšanas iegūst

$$-f''(0) - 5 \int_0^{\infty} f'^2 d\eta + \int_0^{\infty} \theta d\eta + Ly f(0) = 0, \quad (1.2.6)$$

$$-\theta'(0) + 3 Pr \int_0^{\infty} f \theta' d\eta = 0. \quad (1.2.7)$$

Funkcijas f un θ meklē kā pakāpju rindas ar nenoteiktiem koeficientiem:

$$f = \sum_{i=0}^5 a_i \eta^i, \quad \theta = \sum_{i=0}^4 b_i \eta^i. \quad (1.2.8)$$

Koeficientus a_i un b_i nosaka no nosacījumiem (kurus iegūst no robežnosacījumi (5) un vienādojumiem (3) un (4)) :

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad & f(0) = f'(0) = 0, \quad f''''(0) = -1, \\ \eta = \alpha: \quad & f'(\alpha) = f''(\alpha) = f'''(\alpha) = 0, \\ \eta = 0: \quad & \theta(0) = 1, \quad \theta''(0) = 0, \\ \eta = \beta: \quad & \theta(\beta) = \theta'(\beta) = \theta''(\beta) = 0. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Rindas (8) ievietojot nosacījumos (9), iegūst lineāru vienādojumu sistēmu, no kuras nosaka koeficientu a_i un b_i vērtības. Šim nolūkam tiek izmantota pakete REDUCE, kura ļauj burtos atrisināt lineāru vienādojumu sistēmu a_i un b_i aprēķināšanai un burtos izskaitļot sekojoša veida integrāļus

$$\int_0^{\alpha} f' d\eta, \quad \int_0^{\beta} \theta d\eta, \quad \int_0^{\alpha} f' \theta d\eta \quad (1.2.10)$$

pēc tam, kad tajos ievietotas rindas ar noteiktajiem koeficientiem a_i un b_i . Integrāļu (6) un (7) augšējā robeža (kad $Pr < 1$, t.i. $\alpha < \beta$) vienāda ar α , ja zemintegrāļa funkcija satur tikai funkciju f un tās atvasinājumus, vai ar β , ja zemintegrāļa funkcijā ietilpst tikai funkcija θ un tās atvasinājumi. Ja turpretī zemintegrāļa funkcija satur f un θ vai to atvasinājumu reizinājumu, tad augšējā robeža ir α . Rezultātā tiek iegūta nelineāru algebrisku vienādojumu sistēma, no kuras, zinot Ly un Pr ($Pr < 1$) vērtības, var noteikt α un β :

$$\frac{\alpha}{6} + \frac{5 \alpha^5}{9072} - \frac{3 \beta}{10} + \frac{Ly \alpha^3}{120} = 0,$$

$$-\frac{2}{\beta} + 3 Pr \alpha^3 \left[-\frac{1}{120} - \frac{1}{180m} + \frac{1}{840m^3} - \frac{1}{3024m^4} \right] = 0,$$

$$m = \beta / \alpha. \quad (1.2.11)$$

Sistēmas (11) atrisināšanai tiek izmantota pakete EUREKA, kura ļauj ar lielu precizitāti skaitliski atrisināt līdzīgas sistēmas. Aprēķinātās α un β vērtības

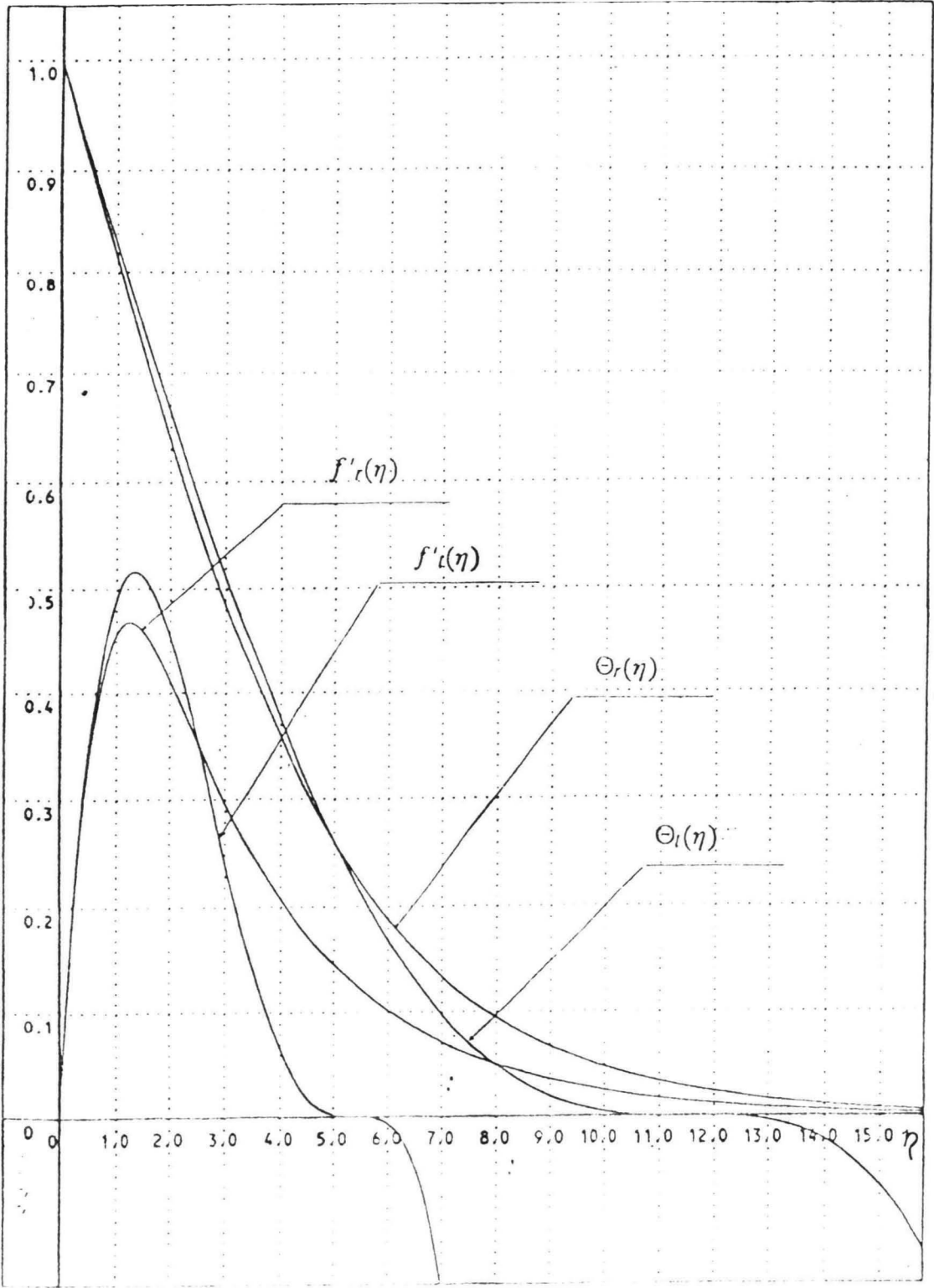
funkcijai no Ly gadījumā, ja $Pr = 0,0625$ var apskatīt 2. tabulā.

2. tabula

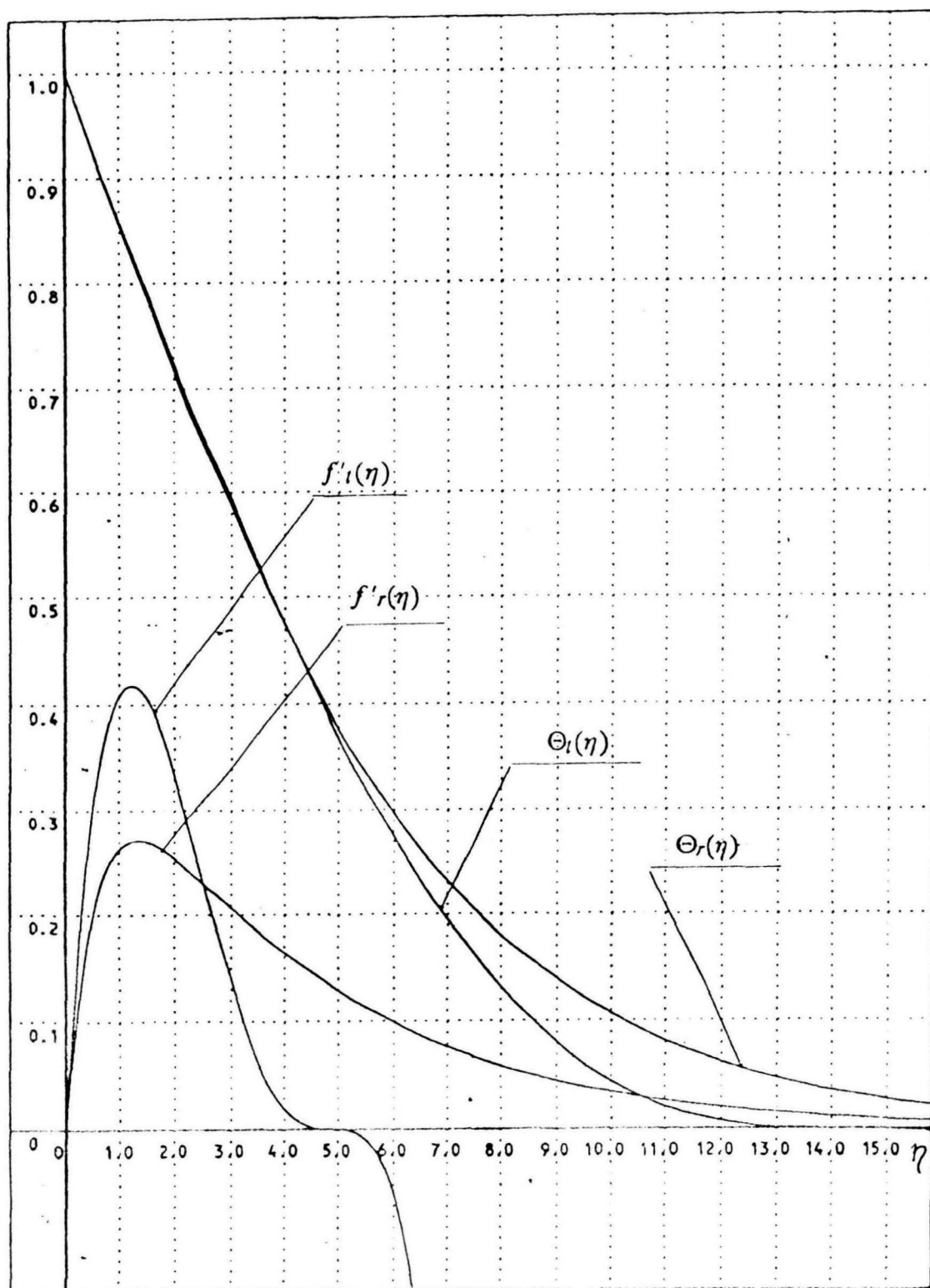
Ly	α	β
0,0	5,418785	11,535359
0,2	5,343155	11,816700
1,0	5,106532	12,915234
2,0	4,876300	14,215942
4,0	4,550003	16,576708
10,0	4,025167	22,292834

1.4.-1.7. zīmējumos var redzēt problēmas (3)-(5) skaitliskos rezultātus, iegūtus kā pēc piešaudes metodes (līnijas $\theta_r(\eta)$ un $f'_r(\eta)$), tā arī pēc integrālo sakarību metodes (līnijas $\theta_t(\eta)$ un $f'_t(\eta)$).

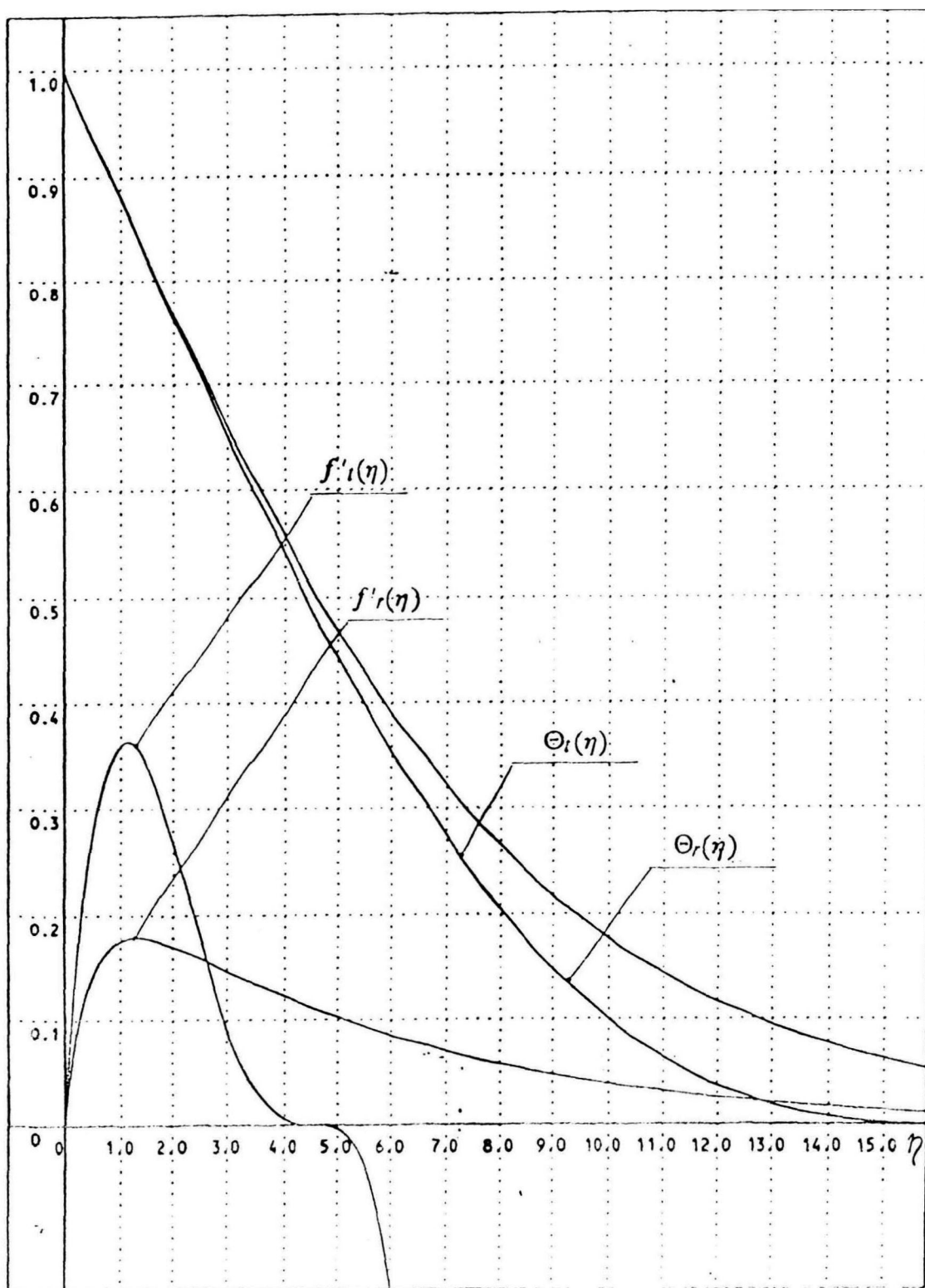
Kā redzams no zīmējumiem, pēc integrālās metodes aprēķiniem konstruētā temperatūras līknes gandrīz sakrīt ar precīzo skaitlisko atrisinājumu, tātad integrālo metodi var izmantot Nuselta skaitļa aprēķināšanai, taču šī metode samazina konvekcijas apspiešanas kārtu, pastiprinot magnētisko lauku. Tomēr integrālā metode ir labs sākuma nosacījums, rēķinot uzdevumu pēc piešaudes metodes.



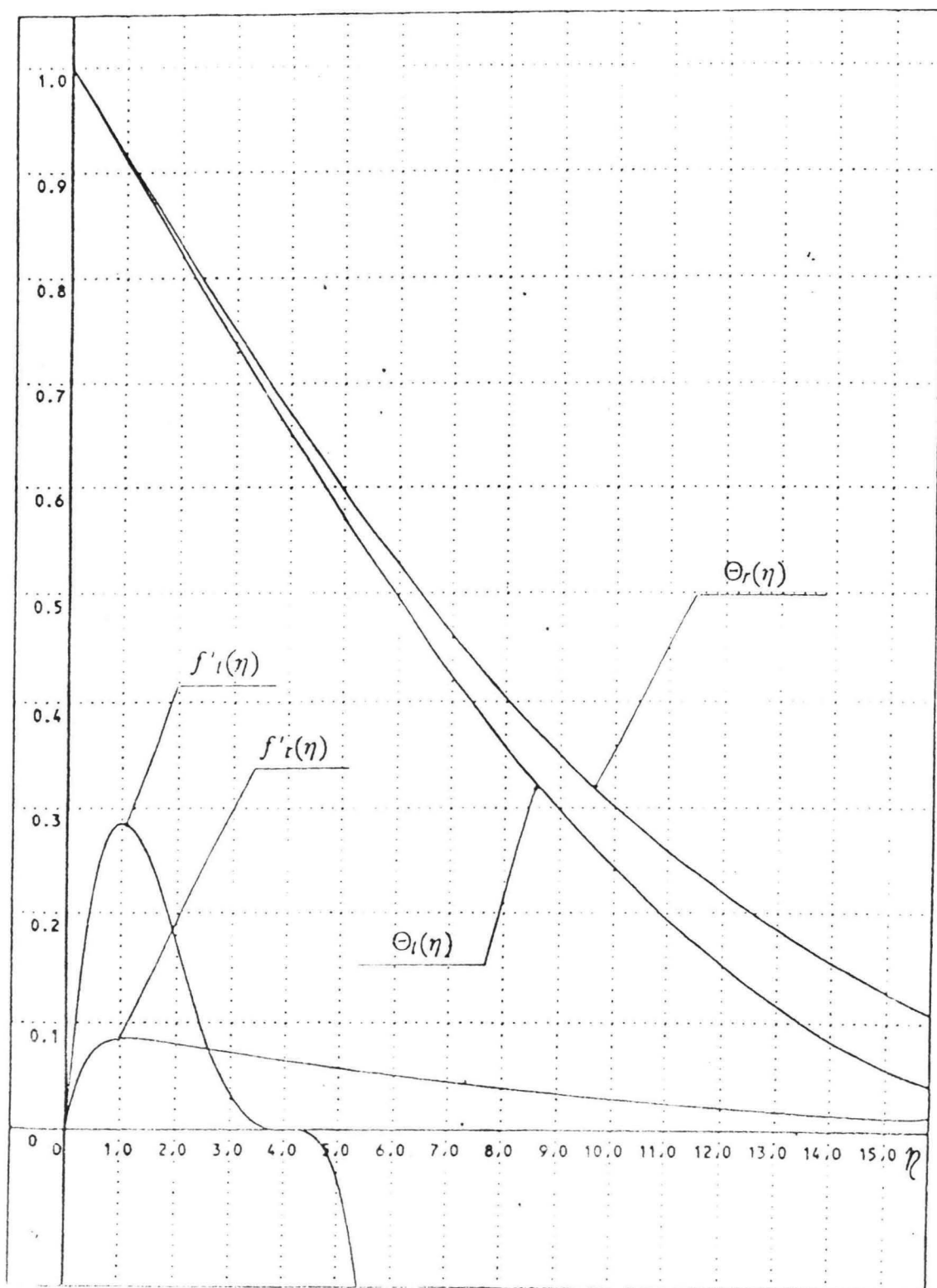
1.4. zīm. Problēmas integrālais (f'_t, θ_t) un skaitliskais (f'_r, θ_r) atrisinājums, kad $Pr = 0,0625$ un $Ly = 0$ (vertikālā plate).



1.5. zīm. Problēmas integrālais (f'_t, θ_t) un skaitliskais (f'_r, θ_r) atrisinājums, kad $Pr = 0,0625$ un $Ly = 2$ (vertikālā plate).



1.6. zīm. Problēmas integrālais (f'_t, θ_t) un skaitliskais (f'_r, θ_r) atrisinājums, kad $Pr = 0,0625$ un $Ly = 4$.



1.7. zīm. Problēmas integrālais (f'_t, θ_t) un skaitliskais (f'_r, θ_r) atrisinājums, kad $Pr = 0,0625$ un $Ly = 10$.

1.3. PROBLĒMAS (1.2.3)-(1.2.5) ASIMPTOTISKAIS
 ATRISINĀJUMS, KAD $Ly \rightarrow \infty$. PROBLĒMAS
 RISINĀJUMS PĒC INTEGRĀLO SAKARĪBU METODES,
 IZMANTOJOT EKSPONENTFUNKCIJAS.

Noteiksim problēmas (1.2.3)-(1.2.5) risināšanas asimptotiku, kad $Ly \rightarrow \infty$ izmantojot asimptotisko izvīzījumu saudzēšanas metodi (sk. /18/). Atzīmēsim ka darbā /42/ noteikta problēmas (1.2.3)-(1.2.5) atrisinājuma asimptotika, kad $Ly \rightarrow \infty$, tikai šķidruma plūsmas kodolā, turpretī dotajā nodaļā noteikta asimptotika gan kodolā, gan arī dinamiskajā robežslānī, kad $Ly \rightarrow \infty$.

Lai iegūtu atrisinājuma asimptotiku plūsmas kodolā, vienādojumos (1.2.3) un (1.2.4) pieņem

$$\theta = Ly \tilde{\theta} \quad (1.3.1)$$

un nosaka robežu, kad $Ly \rightarrow \infty$. Iegūst sekojošu sistēmu:

$$\tilde{\theta} - f' = 0, \quad \tilde{\theta}'' + 3 Pr f \tilde{\theta}' = 0. \quad (1.3.2,3)$$

Ievietojot $\tilde{\theta} = f'$ no vienādojuma (2) vienādojumā (3), dabū

$$f''' + 3 Pr f f'' = 0, \quad (1.3.4)$$

$$\eta = 0: f = 0, f' = Ly^{-1}; \quad \eta = \infty: f' = 0, \quad (1.3.5)$$

pie kam nosacījums $f' = Ly^{-1}$, ja $\eta = 0$, seko no (1) un (2).

Lai vienādojumos (4) un (5) atbrīvotos no

parametriem Pr un Ly, pieņem

$$f = \frac{1}{\sqrt{Ly Pr}} F, \quad \eta = \sqrt{\frac{Ly}{Pr}} \eta_1. \quad (1.3.6)$$

Tad no (4) un (5) seko

$$F'''' + 3 F F'' = 0, \quad \left(' = \frac{d}{d\eta_1} \right) \quad (1.3.7)$$

$$\eta_1 = 0: F = 0, F' = 1; \quad \eta_1 = \infty: F' = 0. \quad (1.3.8)$$

Darbā /42/ ir iegūti problēmas (7), (8) skaitliskie rezultāti, no kuriem seko

$$F''(0) = -1,087. \quad (1.3.9)$$

Aprēķināsim problēmu (7), (8) pēc integrālo sakarību metodes (sk. /6/) izmainot to tā, lai iegūtu ne tikai $F''(0)$ vērtību, tuvu vērtībai (9), bet lai arī līknes $F(\eta_1)$ un $\theta(\eta_1)$ būtu tuvas precīzajam skaitliskajam rezultātam. Tādēļ parasti izmantoto pakāpju funkciju tuvinājumu vietā izmantosim tuvinājumu ar eksponentfunkciju palīdzību:

$$F(\eta_1) = a_0 + a_1 e^{-\eta_1} + a_2 e^{-2\eta_1} + a_3 e^{-3\eta_1}, \quad (1.3.10)$$

kur $a_0 - a_3$ - nenoteiktie koeficienti. Funkcija (10) jau apmierina nosacījumu bezgalībā no nosacījumiem (8). Lai noteiktu četrus koeficientus $a_0 - a_3$, izmantosim divus pirmos robežnosacījumus no (8), kā arī nosacījumu

$$F''''(0) = 0, \quad (1.3.11)$$

kuru iegūst no vienādojuma (7) un nosacījuma $F(0) = 0$. Integrējot vienādojumu (7) pēc η robežās no $\eta = 0$ līdz

$\eta = \infty$, iegūst

$$F'''(0) + 3 \int_0^{\infty} F'^2(\eta_1) d\eta_1 = 0. \quad (1.3.12)$$

Izmantojot divus pirmos robežnosacījumus no (8) un nosacījumu (11), izdodas koeficientus a_0 - a_3 izteikt ar a_0 :

$$a_1 = \frac{19 - 30 a_0}{12}, \quad a_2 = \frac{-13 + 12 a_0}{6}, \quad (1.3.13)$$

$$a_3 = \frac{7 - 6 a_0}{12},$$

bet sakarība (12) dod kvadrātvienādojumu a_0 aprēķināšanai

$$a_0^2 + \frac{109}{111} a_0 - \frac{1619}{1332} = 0. \quad (1.3.14)$$

No kvadrātvienādojuma atrisinājumiem jāņem pozitīvā sakne $a_0 > 0$. (No (1.1.2) seko, ka

$$\tilde{v}_x = 4 \nu k^2 \tilde{x}^{1/2} f'(\eta),$$

$$\tilde{v}_y = -\nu k \tilde{x}^{-1/4} \left[3 f(\eta) - \eta f'(\eta) \right].$$

Tā kā $f'(\infty) = 0$, tad

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{v}_y = -3 \nu k \tilde{x}^{-1/4} f(\infty).$$

Tā kā ir jābūt $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{v}_y < 0$ (iesūkšana), tad sekojoši jābūt arī $a_0 = f(\infty) > 0$). Rezultātā iegūst

$$a_0 = 0,7158; \quad a_1 = -0,2063; \quad a_2 = -0,7349;$$

$$a_3 = 0,2254; \quad F'''(0) = -1,117, \quad (1.3.15)$$

kas mazāk nekā par 3% atšķiras no precīzās $F'''(0)$ vērtības (9).

Ievietojot funkciju (10) sakarībās (6) un (2), iegūst problēmas atrisinājumu plūsmas kodolā

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\text{Ly Pr}}} \sum_{k=0}^3 a_k e^{-k\eta\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ly}}}, \quad (1.3.16)$$

$$\theta(\eta) = \text{Ly} f'(\eta) = - \sum_{k=1}^3 k a_k e^{-k\eta\gamma}, \quad (1.3.17)$$

kur $a_0 - a_3$ tiek noteikti no (15).

Tā kā nosacījums $f'(0) = \text{Ly}^{-1}$ no nosacījumiem (5) ir pretrunā ar nosacījumu $f'(0) = 0$ no (1.2.5), tad punkta $\eta = 0$ apkārtnē ir jābūt robežslānim, kas kompensē šo pretrunu. Lai šajā robežslānī konstruētu atrisinājumu, pieņem, ka Prandtļa skaitlis $\text{Pr} \ll 1$, tad dinamiskajā robežslānī temperatūra ir pastāvīga un vienāda ar 1. Vienādojumos (1.2.3) un (1.2.4) pieņem

$$\eta_1 = \frac{\xi}{\sqrt{\text{Ly}}}, \quad \theta = \text{Ly}^{3/2} \theta_1, \quad f = f_1 \quad (1.3.18)$$

un nosaka robežu, kad $\text{Ly} \rightarrow \infty$. Iegūst sekojošu problēmu

$$\frac{d^3 f_1}{d\xi^3} + \theta_1 - \frac{df_1}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} = 0, \quad (1.3.19, 20)$$

$$\xi = 0: \quad f_1 = f_1' = 0, \quad \theta_1 = \text{Ly}^{-3/2}. \quad (1.3.21)$$

Ņemot vērā, ka $\text{Pr} \ll 1$, no (20) un (21) seko, ka

$$\theta_1 = \text{Ly}^{-3/2}, \quad (1.3.22)$$

tātad nezināmās funkcijas f_1 aprēķināšanai iegūst

sekojošu vienādojumu:

$$\frac{d^3 f_1}{d\xi^3} + Ly^{-3/2} - \frac{df_1}{d\xi} = 0 \quad (1.3.23)$$

Vienādojuma (23) atrisinājumu, kurš apmierina robežnosacījumus (21) un kura atvasinājums ir ierobežota funkcija pie $\xi \rightarrow \infty$, var uzrakstīt sekojošā formā (pēc pārejas pie mainīgā η)

$$f_1(\eta) = Ly^{-3/2} \left(e^{-\eta\sqrt{Ly}} - 1 + \eta \sqrt{Ly} \right), \quad (1.3.24)$$

$$\theta \equiv 0,$$

No (24) seko, ka

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f_1'(\eta) = \frac{1}{Ly}, \quad (1.3.25)$$

kas sakrīt ar robežu plūsmas kodolā (sk. (16))

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} f_1'(\eta) = \frac{1}{Ly}, \quad (1.3.26)$$

t.i. saudzēšanas nosacījumi ir izpildīti. Lai konstruētu vispārīgo izvirzījumu (sk. /18/), ir jāņem abu atrisinājumu (kodolā un robežslānī) summa un no tās jāatņem kopīgā robeža (t.i. Ly^{-1}), no kurienes

$$f(\eta) = Ly^{-3/2} \left(e^{-\eta\sqrt{Ly}} - 1 \right) + \sum_{k=0}^3 a_k e^{-k\gamma\eta}. \quad (1.3.27)$$

Formulas (27), (17) dod problēmas (1.2.3)-(1.2.5) asimptotisko atrisinājumu, kad $Ly \rightarrow \infty$ un $Pr \ll 1$. No (27)

seko

$$f'(\eta) = -Ly^{-1} e^{-\eta\sqrt{Ly}} - Ly^{-1} \sum_{k=1}^3 k a_k e^{-k\eta}. \quad (1.3.28)$$

$$f''(0) = Ly^{-1/2}, \quad (1.3.29)$$

kur $f''(0)$ ir bremzes spēks uz plāksnes.

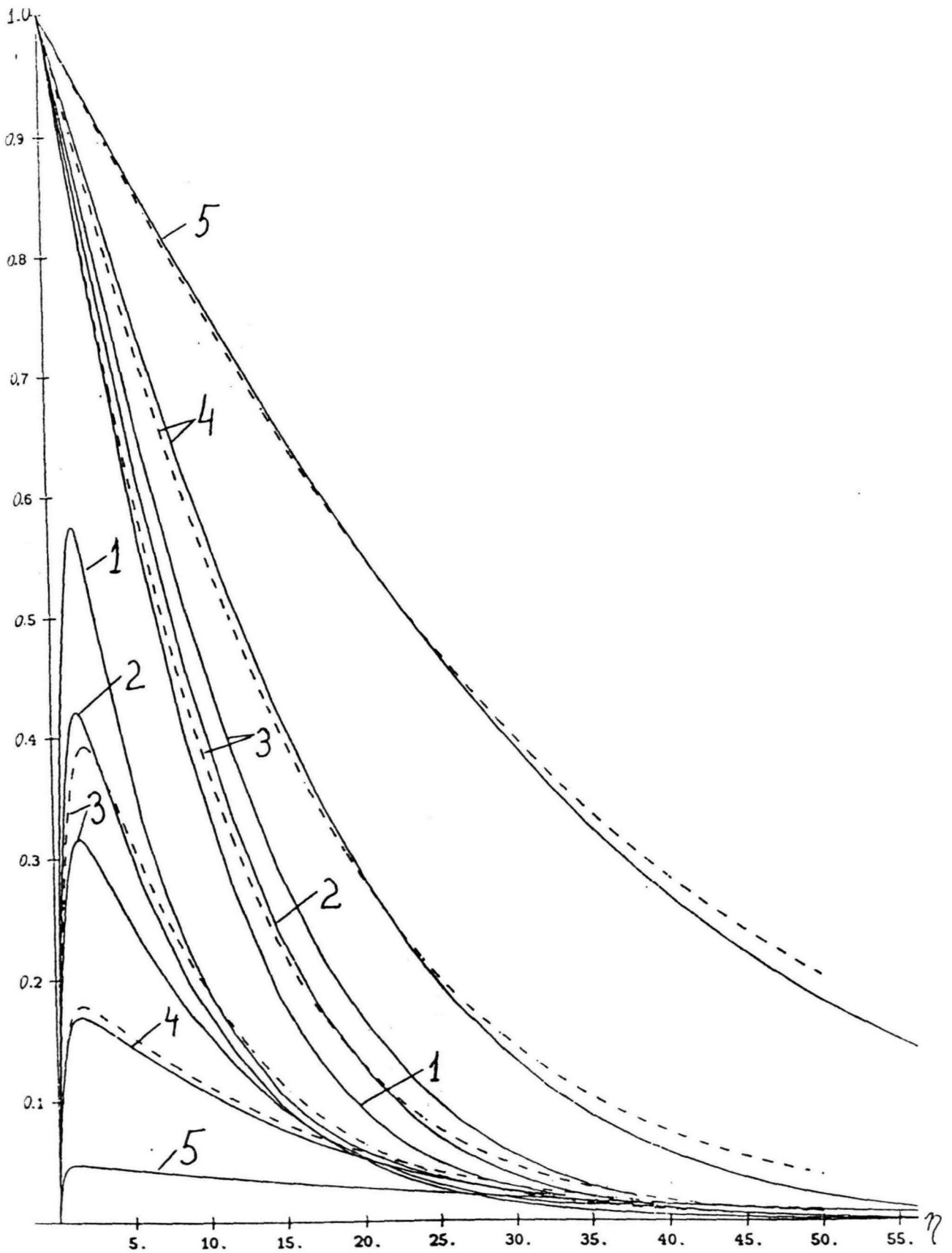
$f''(0)$ vērtības, aprēķinātas pēc formulas (29), ir 3. tabulas otrajā rindiņā (katram fiksētam Ly). Pirmajā rindā ir skaitliskās $f''(0)$ vērtības. Kā redzams no tabulas, formulas (29) kļūda, ja $Pr = 0.01$, ir 0.5 % pie $Ly = 20$, 1.5 % pie $Ly = 10$ un tikai pie $Ly = 2$ kļūda sasniedz 10 %, ja $Pr = 0.01$, un 18 %, ja $Pr = 0.0625$.

3. tabula.

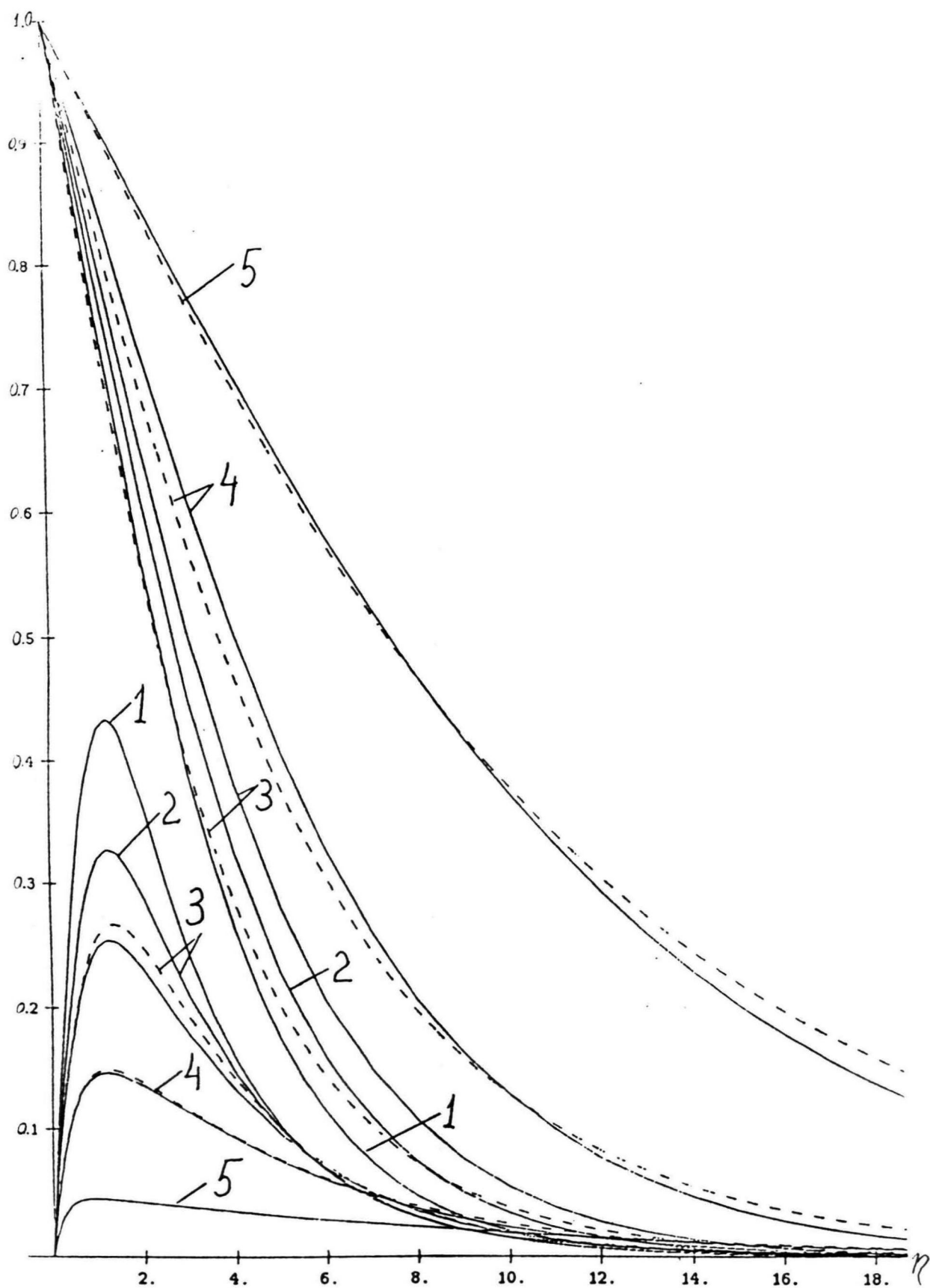
($f''(0)$ vērtības vertikālajai plāksnei).

Pr	0.001	0.0625	0.1	1
Ly	$f''(0)$	$f''(0)$	$f''(0)$	$f''(0)$
1	0.76480	0.71032	0.68947	0.54527
	1	1	1	1
2	0.62666	0.59325	0.57997	0.48074
	0.70711	0.70711	0.70711	0.70711
5	0.43143	0.42067	0.41421	0.37083
	0.44721	0.44721	0.44721	0.44721
10	0.31161	0.30654	0.30480	0.28588
	0.31623	0.31623	0.31623	0.31623
20	0.22218	0.22060	0.21965	0.21219
	0.22360	0.22360	0.22360	0.22360

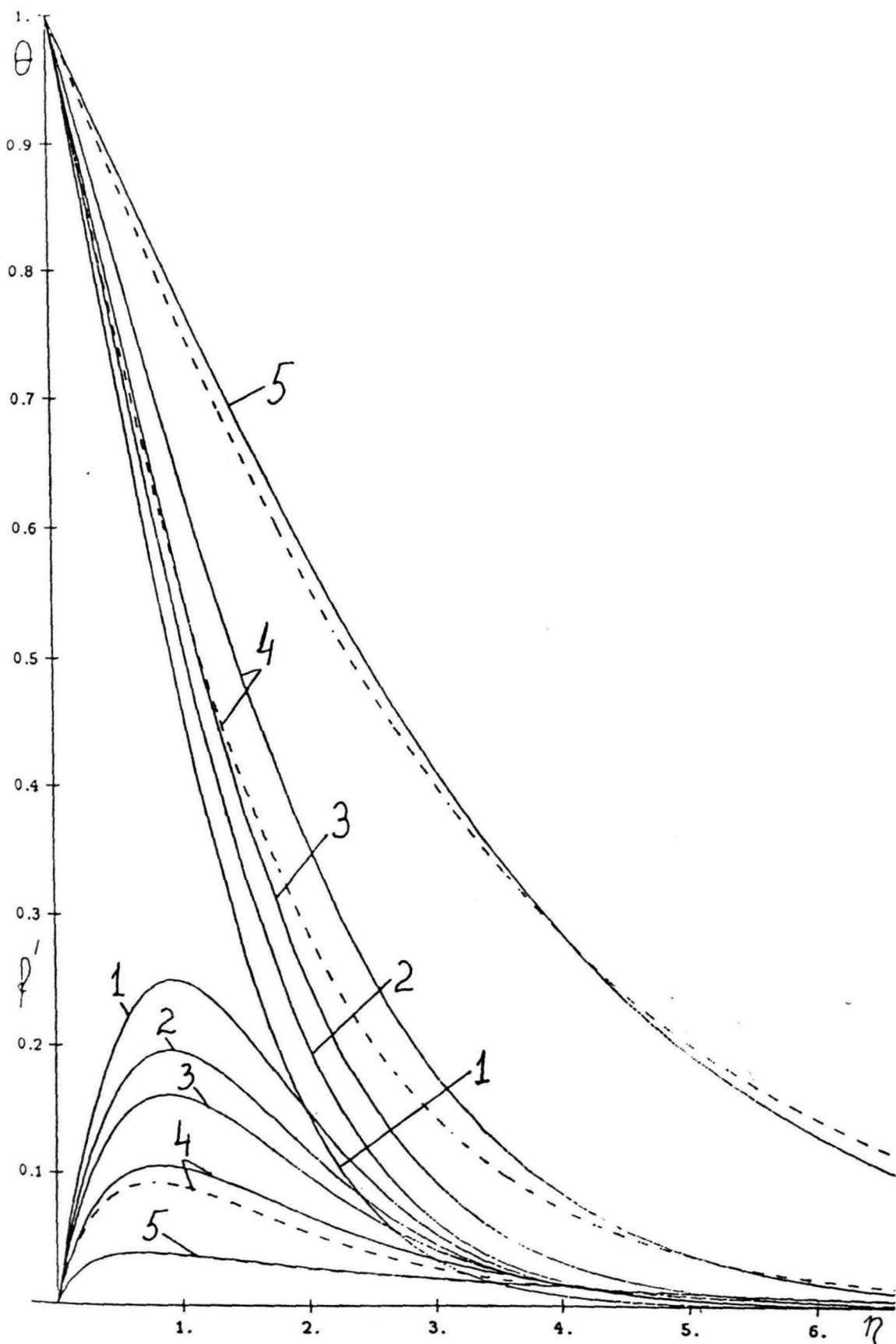
1.8.-1.10. zīmējumos parādīti funkciju $f'(\eta)$ un $\theta(\eta)$ rezultāti, izskaitļoti pēc formulām (17), (28). Šajā pašā zīmējumā var redzēt arī problēmas (1.2.3)-(1.2.5) precīzus skaitliskos rezultātus, kas iegūti pēc piešaudes metodes, kad $Pr = 0,0625$, $Ly = 4$ un $Ly = 10$. Kā redzams no zīmējuma, asimptotika (17) un (28) praktiski sakrīt ar precīzo skaitlisko atrisinājumu pie $Ly = 10$ un maz atšķiras no tā pie $Ly = 4$.



1.8. zīm. Precīzā skaitliskā atrisinājuma (—) un asimptotiskā atrisinājuma (---) salīdzināšana vertikālai platei, kad $Pr = 0,01$: 1- $Ly = 0$, 2- $Ly = 1$, 3- $Ly = 2$, 4- $Ly = 5$, 5- $Ly = 20$. Augšējās līknes - $\theta(\eta)$, apakšējās - $f'(\eta)$.



1.9. zīm. Precīzā skaitliskā atrisinājuma (—) un asimptotiskā atrisinājuma (---) salīdzināšana vertikālai platei, kad $Pr = 0,1$: 1- $Ly = 0$, 2- $Ly = 1$, 3- $Ly = 2$, 4- $Ly = 5$, 5- $Ly = 20$. Augšējās līknes - $\theta(\eta)$, apakšējās - $f'(\eta)$.



1.10.zīm. Precīzā skaitliskā atrisinājuma (—) un asimptotiskā atrisinājuma (---) salīdzināšana vertikālai platei, kad $Pr = 1,0$: 1- $Ly = 0$, 2- $Ly = 1$, 3- $Ly = 2$, 4- $Ly = 5$, 5- $Ly = 20$. Augšējās līknes - $\theta(\eta)$, apakšējās - $f'(\eta)$.

2. BRĪVĀ MHD SILTUMKONVEKCIJA VIRS LINEĀRĀ
HORIZONTĀLĀ UN PUNKTVEIDA SILTUMA AVOTA (/2/, /3/).

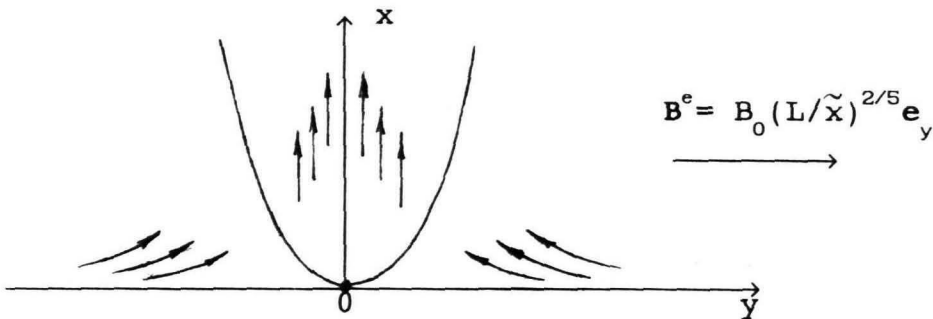
2.1. BRĪVĀ MHD SILTUMKONVEKCIJA VIRS LINEĀRĀ
HORIZONTĀLĀ SILTUMA AVOTA.

2.1.1. TĀDU MAGNĒTISKO LAUKU KLASĒS NOTEIKŠANA,
KURI DOTO PROBLĒMU SAGLABĀ AUTOMODĀLU,
UN PROBLĒMAS ATRISINĀJUMS AR SKAITLISKĀS
METODES PALĪDZĪBU.

Lineārs horizontāls siltuma avots ar dotu pastāvīgu
jaudu Q uz garuma vienību atrodas gar taisni $\tilde{x} = 0, \tilde{y} =$
 $= 0$ (\tilde{x} ass vērsta vertikāli augšup - sk. 2.1. zīm.).
Šķidruma ātrums $\tilde{\mathbf{v}}$ un ārējais magnētiskais lauks \mathbf{B}^e ir
sekojoši:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \left\{ \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}) \right\}, \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{B}^e = \left\{ B_x(\tilde{x}, \tilde{y}), B_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \right\}.$$



2.1. zīm. Brīvā MHD siltumkonvekcijs virs lineāra
horizontāla siltuma avota.

Brīvo MHD siltumkonvekciju apraksta robežslāņu vienādojumi (0.16)-(0.18) ar robežnosacījumiem

$$\tilde{y} = 0: \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = 0; \quad (2.1.2)$$

$$\tilde{y} = \infty: \tilde{u} = 0, \tilde{T} = T_{\infty}.$$

Ja pieņem, ka $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}) - T_{\infty} = \hat{T}$, tad no vienādojumiem (0.17) un (0.18) seko

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u} \hat{T} d\tilde{y} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \hat{T} + \tilde{u} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \tilde{x}} \right) d\tilde{y} = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \hat{T} d\tilde{y} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a^2 \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \tilde{y}} \right) d\tilde{y} = \\ &= (\text{integrējot parciāli}) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \hat{T} d\tilde{y} + a^2 \left. \frac{\partial \hat{T}}{\partial \tilde{y}} \right|_{-\infty}^{+\infty} - \left(\tilde{v} \hat{T} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} d\tilde{y} = 0, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

ja pieņem, ka $\partial \hat{T} / \partial \tilde{y} = 0$, kad $\tilde{y} \rightarrow \pm\infty$. No (3) seko

$$\frac{d}{d\tilde{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u} \hat{T} d\tilde{y} = 0, \text{ tas ir}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u} (\hat{T} - T_{\infty}) d\tilde{y} = \text{const.} \quad (2.1.4)$$

Sakarības (4) fizikālā jēga ir tā, ka dotajā procesā caur katru šķēlumu $\tilde{x} = \text{const}$ vienā laika vienībā jāizplūst pastāvīgam siltuma daudzumam Q , kas sakrīt ar

siltuma avota jaudu uz garuma vienību (sk. /15/):

$$c_p \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u} (\tilde{T} - T_\infty) d\tilde{y} = Q, \quad (2.1.5)$$

kur c_p - šķidrumsiltumietilpība pie pastāvīga spiediena, ρ - šķidrums blīvums. Šajā gadījumā viena no metodēm, pārejot uz automodālo problēmu, var būt sekojoša (pirmoreiz šī metode tika izmantota darbā /16/) - pieņem, ka uz vertikālās ass $\tilde{y} = 0$ temperatūra mainās kā pakāpes funkcija:

$$\tilde{T}(\tilde{x}, 0) - T_\infty = N \tilde{x}^n, \quad N = \text{const} \quad (2.1.6)$$

Problēma (0.16)-(0.18), (2.1.2), ņemot vērā (6), ir automodāla (bez magnētiskā lauka iedarbības) pie patvaļīga n (sk. /15/). Ievietojot funkcijas $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y})$ un $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}) - T_\infty$, kas ir izteiktas ar automodālo mainīgo, sakarībā (5), iegūst, ka integrālis (5) kreisajā pusē nav atkarīgs no \tilde{x} tikai tad, ja $n = -3/5$. Rezultātā strāvas funkcijas $\psi(\tilde{x}, \tilde{y})$ ($\tilde{u} = \partial\psi/\partial\tilde{x}$, $\tilde{v} = -\partial\psi/\partial\tilde{y}$) un bezdimensijas temperatūras

$$\theta = \frac{\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}) - T_\infty}{\tilde{T}(\tilde{x}, 0) - T_\infty} \quad (2.1.7)$$

aprēķināšanai iegūst sekojošas automodālās mainīgo maiņas (sk. /15/):

$$\eta = k \tilde{y} \tilde{x}^{-2/5}, \quad \psi = 4 \nu k \tilde{x}^{3/5} f(\eta),$$

$$k^4 = \frac{1}{4} \text{Gr} L^{-12/5}, \quad \theta = (\tilde{T} - T_\infty) \tilde{x}^{3/5} N^{-1}, \quad (2.1.8)$$

$$\text{Gr} = g \beta L^{12/5} \nu^{-2},$$

pie kam

$$\begin{aligned} \tilde{u} = 4 \nu k^2 \tilde{x}^{1/5} f'(\eta), \quad \tilde{v} = - \frac{12}{5} \nu k \tilde{x}^{-2/5} f(\eta) + \\ + \frac{8}{5} \nu k \eta \tilde{x}^{-2/5} f'(\eta). \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Ievietojot $\tilde{T} - T_\infty$ un u no sakarībām (8) un (9) vienādībā (5), dabū sekojošu sakarību starp parametriem N un Q :

$$N^5 = Q^4 (64 g \beta \rho^4 \nu^2 c_p^4 I^4), \quad (2.1.10)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(\eta) \theta(\eta) d\eta$$

(funkcijas $f(\eta)$ un $\theta(\eta)$ skaitliski un analītiski noteiktas vēlāk). Pārejot uz jauniem mainīgajiem (8), no (0.16)-(0.18), (2.1.2) seko

$$\begin{aligned} f'''' + \frac{12}{5} f f'' - \frac{4}{5} (f')^2 + \theta + \\ + \frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{1}{5} \nu^{-1} k^{-3} \tilde{x}^{1/5} (2 \eta f' - 3 f) B_x B_y - \right. \\ \left. - \nu^{-1} k^{-2} \tilde{x}^{4/5} f' B_y^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

$$\theta'' + \frac{12}{5} \text{Pr} (f \theta)' = 0, \quad (2.1.12)$$

$$\eta = 0: \theta' = f = f'' = 0, \theta = 1; \eta = \infty: f' = 0. \quad (2.1.13)$$

Lai izteiksme vienādojuma (11) kvadrātiekvāds nebūtu atkarīga no \tilde{x} , pieņem

$$\begin{aligned} B_x = B_0 (\tilde{x} / L)^{1/5} \varphi(\eta), \\ B_y = B_0 (\tilde{x} / L)^{-2/5} F(\eta), \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

kur $F(\eta)$, $\varphi(\eta)$ - patvaļīgas diferencējamas funkcijas.
Ievietojot (14) vienādojumā

$$\frac{\partial B_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial B_y}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (2.1.15)$$

iegūst diferenciālvienādojumu funkcijas $\varphi(\eta)$ aprēķināšanai

$$2 \eta \varphi'(\eta) - \varphi(\eta) = 5 L^{3/5} k F'(\eta). \quad (2.1.16)$$

Patvaļīgai funkcijai $F(\eta)$ vienādojuma (16) atrisinājums ir

$$\varphi(\eta) = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{4} Gr \right)^{1/4} \bar{\varphi}(\eta), \quad (2.1.17)$$

$$\bar{\varphi}(\eta) = \sqrt{\eta} \int_{\eta_0}^{\eta} \xi^{-3/2} F'(\xi) d\xi + C \sqrt{\eta},$$

kur C - patvaļīga konstante. No vienādojuma (0.16) seko

$$f''' + \frac{12}{5} f f'' - \frac{4}{5} f'^2 + \theta - Ly \left[F^2(\eta) f' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} F(\eta) \bar{\varphi}(\eta) (2 \eta f' - 3 f) \right] = 0 \quad (2.1.18)$$

kur $Ly = 2 Ha^2 Gr^{-1/2}$.

Magnētiskā lauka (14) magnētisko spēka līniju diferenciālvienādojumu

$$\frac{dy}{B_y(x, y)} = \frac{dx}{B_x(x, y)} \quad (2.1.19)$$

var integrēt kvadrātūrās un vienādojuma (19) atrisinājumu var uzrakstīt parametriskā formā

$$x = x_0 \exp \left[\frac{5}{2} \Phi(u) \right], \\ \Phi(u) = \int_u^u \bar{\varphi}(\xi) \left[F(\xi) - \xi \bar{\varphi}(\xi)^{-1} \right] d\xi, \quad (2.1.20)$$

$$u_0 = k y_0 x_0^{-2/5}, \quad y_0 = x_0^{2/5} k^{-1} u \exp [\Phi(u)],$$

kur $u \geq 0$ - parametrs; $y = y_0$, kad $x = x_0$.

Konkrētā gadījumā, ja sakarībās (17) pieņem $F(\eta) = 1$, $C = 0$, tad $\varphi(\eta) = 0$ un no (14) iegūst ārējo magnētisko lauku, analogisku laukam (1.1.12), kurš aplūkots darbā /42/ :

$$B_x = 0, \quad B_y = B_0 \left(L / \tilde{x} \right)^{2/5} \quad (2.1.21)$$

Pirmoreiz lauks (21) iegūts darbā /30/. Lauku, kurš plūsmas apgabalā ir tuvs laukam (21), tāpat kā lauks (1.1.12) darbā /43/, var realizēt eksperimentāli, ņemot speciālas formas magnēta serdi.

No vienādojuma (18) laukam (21) seko

$$f'''' + \frac{12}{5} f f'' - \frac{4}{5} f'^2 + \theta - Ly f' = 0. \quad (2.1.22)$$

No simetrijas nosacījumiem (2) uz vertikālās ass un no sakarībām (8) un (9) seko, ka $f(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $\theta'(0) = 0$. No sakarībām (6) un (7) iegūst, ka $\theta(0) = 1$. Bez tam no pēdējiem diviem nosacījumiem no (2) un sakarībām (9) seko, ka $f'(\infty) = 0$, $\theta(\infty) = 0$. Tādā veidā iegūst sešus robežnosacījumus piektās kārtas vienādojumu sistēmai (12), (22). Tiešām, no (12) seko, ka

$$\theta' + \frac{12}{5} Pr f \theta = 0, \quad (2.1.23)$$

pie kam vienādojuma (23) labajā pusē ir nulle tādēļ, ka $\theta'(0) = 0$ un $f(0) = 0$. Tālāk no (23) seko

$$\theta(\eta) = \theta(0) \exp \left[- \frac{12}{5} Pr \int_0^\eta f(\xi) d\xi \right]. \quad (2.1.24)$$

No sakarībām (9) un fakta, ka $f'(\infty) = 0$, iegūst

$$\tilde{v}(\tilde{x}, \infty) = -12 \nu k \tilde{x}^{-2/5} f(\infty) / 5. \quad (2.1.25)$$

Tā kā ir jābūt $\tilde{v}(\tilde{x}, \infty) < 0$ (ņemot vērā uzsūkšanu), tad $f(\infty) > 0$. Seko, ka integrālis no (24) tiecās uz $+\infty$, kad $\eta \rightarrow \infty$, t.i. $\theta(\infty) = 0$. Tādā veidā ir pietiekami atrisināt vienādojumu sistēmu (12), (22) ar robežnosacījumiem

$$\eta = 0: f = f'' = 0, \theta = 1; \quad \eta = \infty: f' = 0. \quad (2.1.26)$$

Problēma (12), (22), (26) atrisināta skaitliski pēc piešaudes metodes. Funkcijas $f'(0)$ vērtības, pie kurām izpildās nosacījums $f'(\infty) = 0$, parādītas 4. tabulā dažādām Ly vērtībām, kad $Pr = 0,0625$.

4. tabula ($Pr = 0,0625$)

(lineārs horizontāls siltuma avots)

Ly	0,0	0,1	0,5
$f'(0)$	0,876673632	0,843411039	0,720870237

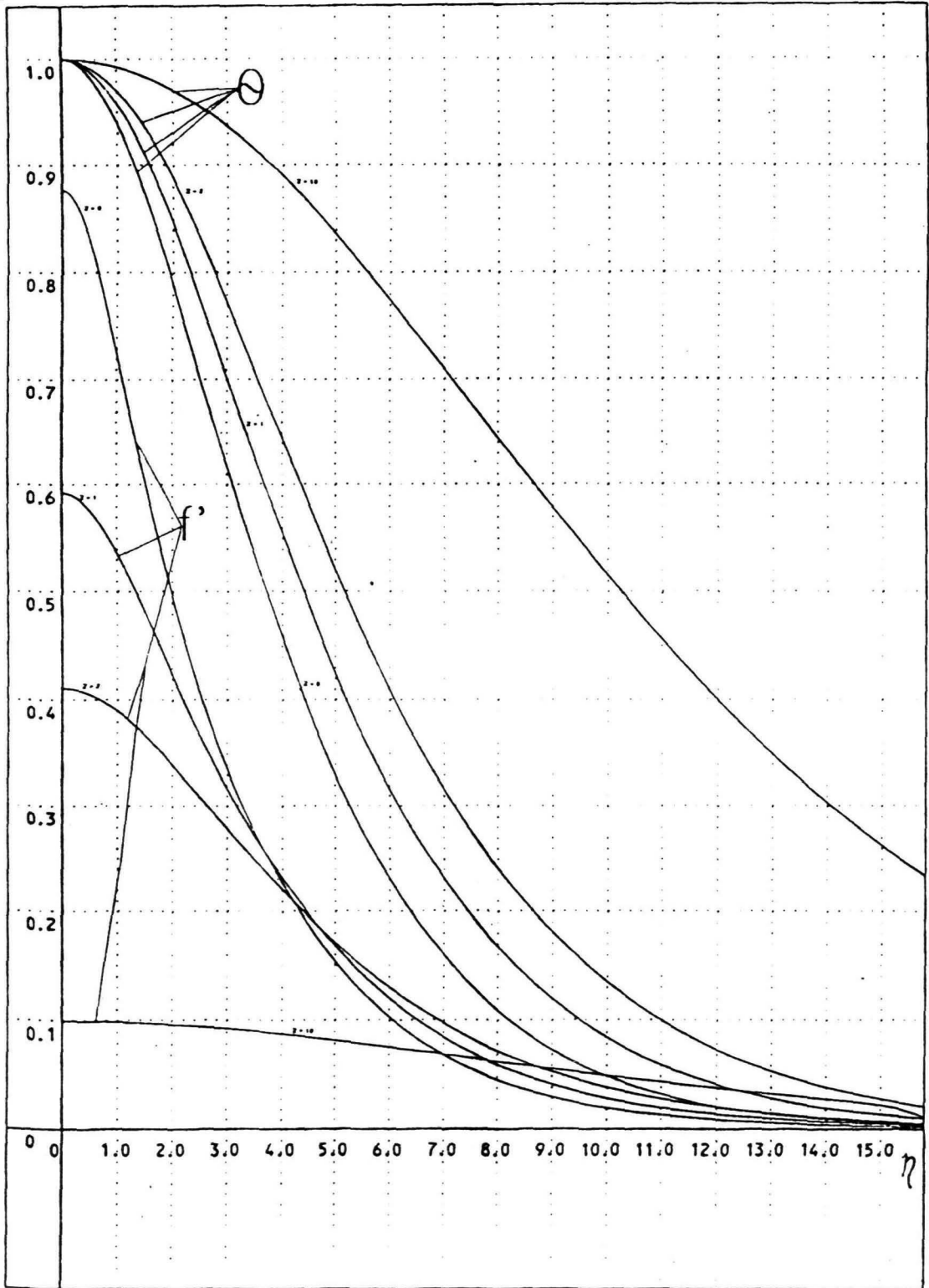
Ly	1,0	2,0	5,0
$f'(0)$	0,592177030	0,410589776	0,192778047

Ly	10,0
$f'(0)$	0,099062469

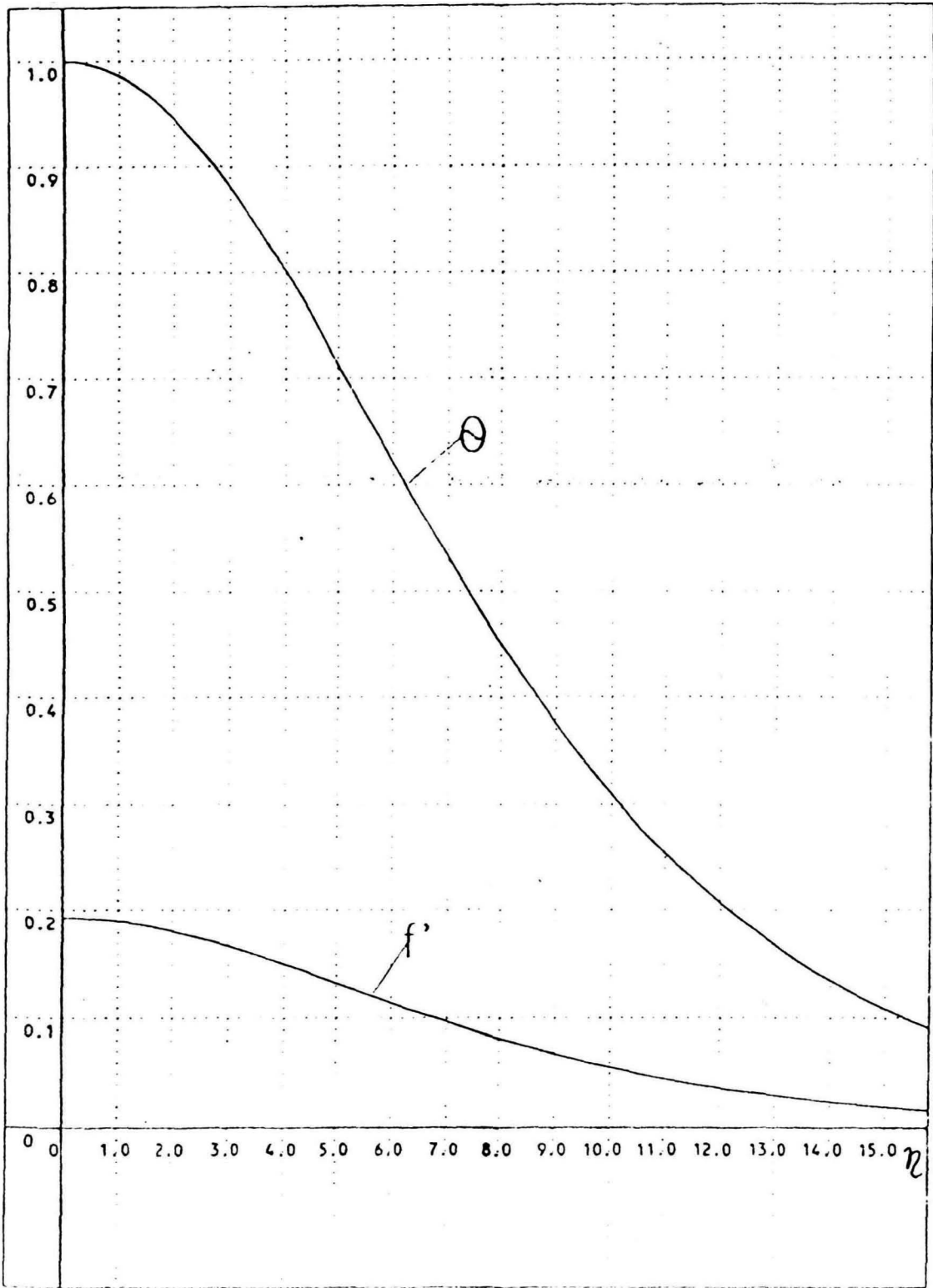
2.2. un 2.3. zīmējumos var redzēt problēmas (12), (22), (26) rezultātu iegūtus pēc piešaudes metodes (ātrums v_x , $f'(\eta)$). 2.2. zīmējums rāda funkciju $f'(\eta)$ un

$\theta(\eta)$ uzvedības kopējo likumsakarību, pieaugot Ly vērtībām. Abas līknes, gan ātruma, gan temperatūras, redzami iztaisnojas pie $Ly = 10$.

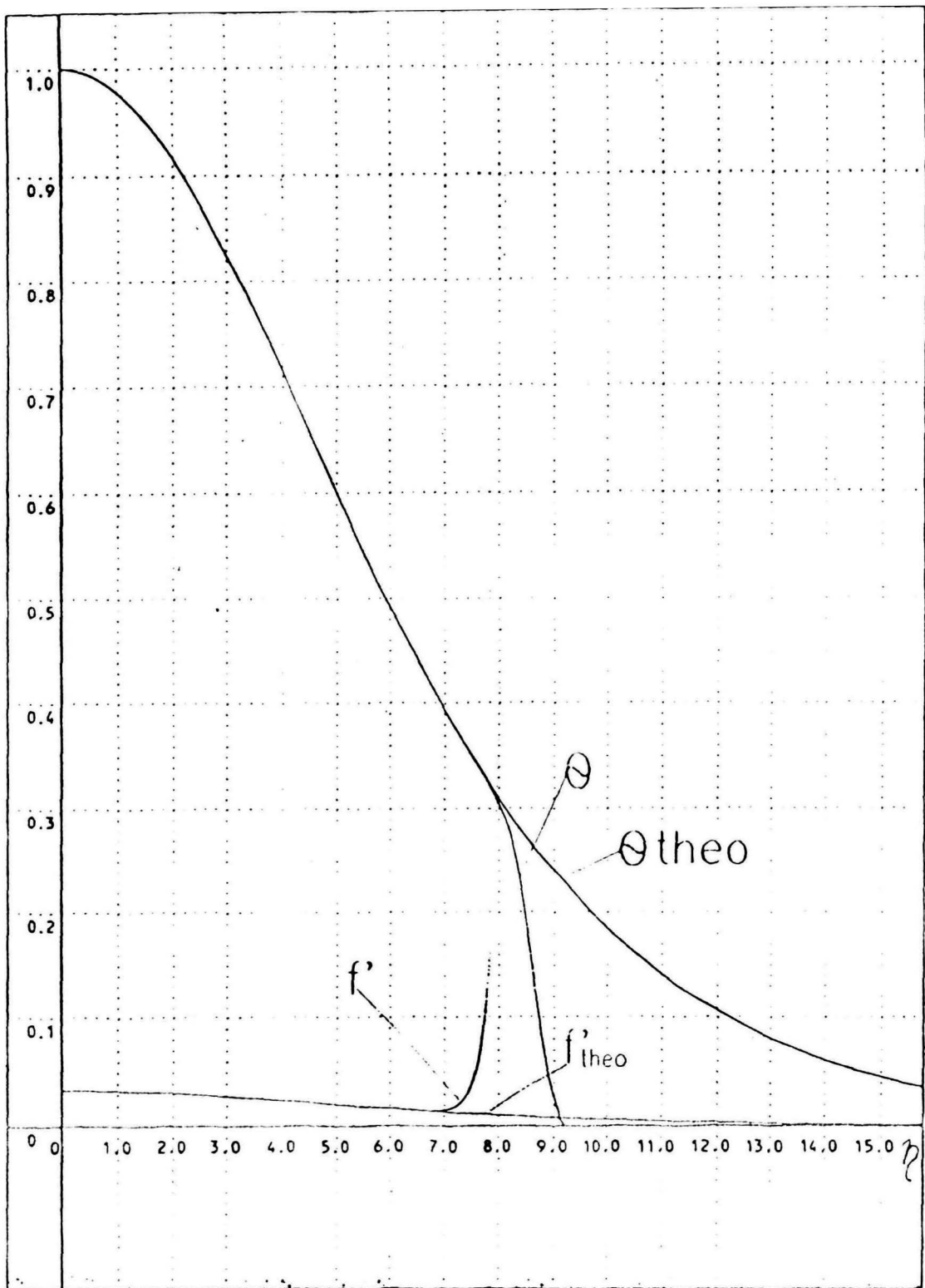
Interesi izraisa skaitliskā atrisinājuma salīdzināšana ar precīzo analītisko atrisinājumu, iegūtu darbā /30/, kad $Pr = 5/9$ un $2 \leq Pr < +\infty$. Salīdzinājums tiek izdarīts, kad $Pr = 5/9$. Pie $Ly \leq 10$ līknes gandrīz sakrīt - sakrīt sešas zīmes aiz komata. Tomēr, palielinot Ly , nākas būtiski palielināt aprēķina precizitāti, kas rada zināmas grūtības. 2.4. zīmējumā var salīdzināt analītiskos un skaitliskos rezultātus, kad $Pr = 5/9$ un $Ly = 30$. Līdz $\eta = 6$ līknes sakrīt, bet tad skaitliskais atrisinājums strauji krīt.



2.2. zīm. Brīvās MHD siltumkonvekcijas apspiešana ar magnētisko lauku lineārajam horizontālajam siltuma avotam pie $Pr = 0,0625$.



2.3. zīm. Funkcijas $f'(\eta)$ un $\theta(\eta)$, kad $Ly = 5$ un $Pr = 0.0625$ (lineārs horizontāls siltuma avots).



2.4. zīm. Precīzā analītiskā un skaitliskā atrisinājuma salīdzināšana, kad $Pr = 5/9$ un $Ly = 30$ (lineārs horizontāls siltuma avots).

2.1.2. PROBLĒMAS (12), (22), (26) ATRISINĀJUMA

ASIMPTOTIKA, KAD $Ly \rightarrow \infty$.

Vienādojumos (12) un (22) pieņem

$$\theta = Ly \tilde{\theta} \quad (2.1.27)$$

un nosaka robežu, kad $Ly \rightarrow \infty$. Iegūst sistēmu

$$\tilde{\theta} - f' = 0, \quad \tilde{\theta}' + \frac{12}{5} f \tilde{\theta} = 0. \quad (2.1.28,29)$$

Ievietojot θ no vienādojuma (28) vienādojumā (29), iegūst

$$f'' + \frac{12}{5} f f' = 0. \quad (2.1.30)$$

No vienādojuma (30) seko, ka $f''(0) = 0$, tā kā $f(0) = 0$. Tāpēc, ņemot vērā vienādojumus (27) un (28), vienādojums (30) jābrēkina ar robežnosacījumiem

$$\eta = 0: f = 0, f' = Ly^{-1}; \quad \eta = \infty: f' = 0. \quad (2.1.31)$$

Vispārīgi runājot, otrās kārtas vienādojums nevar apmierināt trīs robežnosacījumus, tomēr problēmas (30), (31) gadījumā tas izbrādās iespējams. Problēmas (30), (31) atrisinājumu meklē sekojošā formā:

$$f(\eta) = b \operatorname{th}(a \eta), \quad (2.1.32)$$

kur a un b - nenoteiktas konstantes. Funkcijas (32) jau apmierina pirmo un trešo robežnosacījumu no (31). Ievietojot funkciju (32) vienādojumā (30) un otrajā

robežnosacījumā no (31), seko

$$b = \sqrt{\frac{5}{6 \text{ Pr}}} , \quad a = \sqrt{\frac{6 \text{ Pr}}{5 \text{ Ly}}} . \quad (2.1.33)$$

Rezultātā iegūst problēmas (28), (29), (31) atrisinājumu

$$f(\eta) = \sqrt{\frac{5}{6 \text{ Pr}}} \text{ th} \left(\eta \sqrt{\frac{6 \text{ Pr}}{5 \text{ Ly}}} \right) , \quad (2.1.34)$$

$$\theta(\eta) = \text{ch}^{-2} \left(\eta \sqrt{\frac{6 \text{ Pr}}{5 \text{ Ly}}} \right) .$$

Funkcijas (34) ir problēmas (12), (22), (26) asimptotiskais atrisinājums, kad $\text{Ly} \rightarrow \infty$. Atzīmēsim, ka atrisinājums (34) apmierina visus robežnosacījumus no (26). Atšķirībā no vertikālās plates gadījuma, dotajā problēmā robeža $\eta = 0$ ir brīvā robeža un tāpēc neeksistē eksponenttipa dinamiskais un siltuma robežslāņi (sk. /17/). No (34) seko, ka funkcija $f'(\eta)$ (kura ir proporcionāla ātruma vertikālajai komponentei) ir sekojoša

$$f'(\eta) = \text{Ly}^{-1} \text{ ch}^{-2} \left(\eta \sqrt{\frac{6 \text{ Pr}}{5 \text{ Ly}}} \right) , \quad (2.1.35)$$

$$f'(0) = \text{Ly}^{-1} \quad (2.1.36)$$

Jau pie $\text{Ly} = 5$ sakarība (36) gandrīz sakrīt ar problēmas (12), (22), (26) precīzo skaitlisko aprēķinu. Problēmas (12), (22), (26) precīzā skaitliskā aprēķina un aprēķina pēc formulas (36) (3. rinda) rezultāti, kad Prandtļa skaitlis $\text{Pr} = 0,0625$ (šķidrāis kālijs), redzami 5. tabulā.

5. tabula.

Funkcijas $f'(0)$ vērtības lineāram horizontālam siltuma avotam, kad $Pr = 0,0625$.

Ly	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
$f'(0)$	0,7209	0,5922	0,4106	0,1928	0,0991
$f'(0)$ f. (36)	2,0000	1,0000	0,5000	0,2000	0,1000

Kā redzams no tabulas, formulas (36) kļūda ir mazāka nekā 1 %, kad $Ly = 10$, kļūda ir 3,5 %, kad $Ly = 5$, un tikai pie $Ly = 2$ kļūda ir liela - 19 %. 2.5. un 2.6. zīmējumos ir attēloti funkciju $\theta(\eta)$ un $f'(\eta)$ grafiki, konstruēti pēc asimptotiskajām formulām (34) un (35), kā arī problēmas (12), (22), (26) precīzā skaitliskā atrisinājuma grafiki. Kā redzams no zīmējumiem, asimptotiskās līknes gandrīz sakrīt ar precīzajām pie $Ly = 10$ un nedaudz atšķirās pie $Ly = 5$.

Lai noteiktu $f'(0)$ asimptotiku, kad $Pr \rightarrow 0$ (t.i. ātruma asimptotiku uz siltuma avota ass, kad $Pr \rightarrow 0$), pieņemsim

$$\xi = \eta \sqrt{Pr}, \quad f = \tilde{f} / \sqrt{Pr}. \quad (2.1.37)$$

Tad vienādojumus (22), (23) var pārrakstīt sekojošā veidā:

$$Pr \tilde{f}'''' + \frac{12}{5} \tilde{f} \tilde{f}'' - \frac{4}{5} \tilde{f}'^2 + \theta - Ly \tilde{f}' = 0, \quad (2.1.38)$$

$$\theta' + \frac{12}{5} \tilde{f} \theta = 0, \quad \left(' = \frac{d}{d\xi} \right) \quad (2.1.39)$$

ar iepriekšējiem robežnosacījumiem (26). Pieņem $Pr = 0$ un $\xi = 0$. Tad, ņemot vērā robežnosacījumus $f''(0) = 0$ un $\theta(0) = 1$ no (26), iegūsim kvadrātvienādojumu $f'(0)$ atrisināšanai:

$$\frac{4}{5} \left(f'(0) \right)^2 - Ly f'(0) + 1 = 0. \quad (2.1.40)$$

Šī vienādojuma atrisinājums (ir jāņem pozitīvais atrisinājums $f'(0)$, jo ātrums uz siltuma avota ass ir pozitīvs lielums) ir sekojošs:

$$f'(0) = \frac{2}{Ly + \sqrt{Ly^2 + 3,2}}. \quad (2.1.41)$$

6. tabulā ir norādītas $f'(0)$ vērtības, kuras ir iegūtas pēc skaitliskās piešaudes metodes, kā arī $f'(0)$ vērtības, iegūtas pēc formulas (41).

Tabulas pirmajā rindiņā (katram fiksētam Ly) ir precīzās $f'(0)$ vērtības, otrajā rindiņā - $f'(0)$ vērtības, aprēķinātas pēc formulas (41), bet trešajā rindiņā - tuvinātās $f'(0)$ vērtības, kuras aprēķinājis Grejs darbā /31/ pēc sekojošās formulas:

$$f'(0) = f'_0(0) \left[1 + \left(f'_0 Ly \right)^{3/2} \right]^{2/3}, \quad (2.1.42)$$

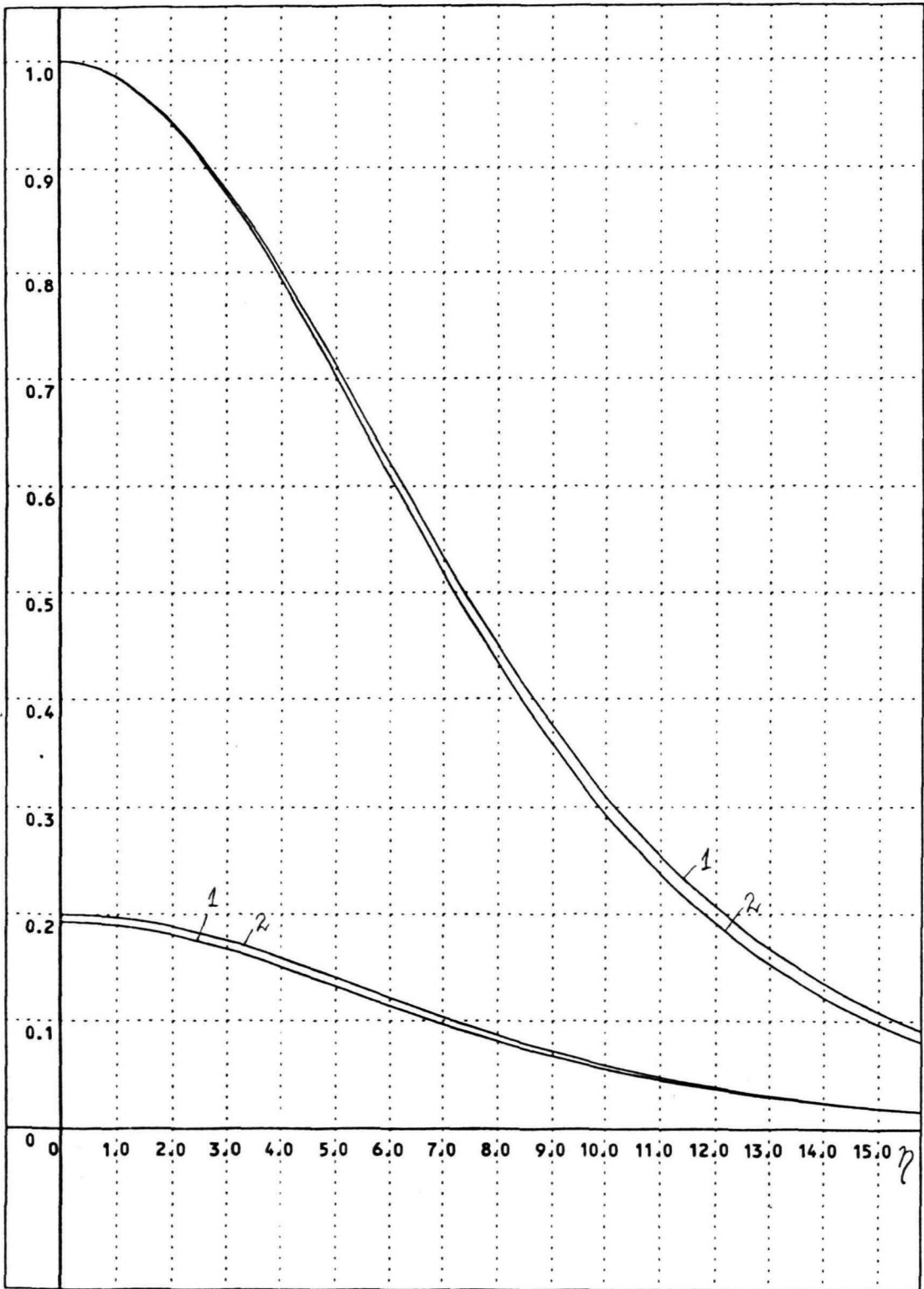
$$f'_0(0) = 0,6228 - 0,0821 \ln Pr, \quad 0,01 \leq Pr \leq 1.$$

Kā redzams no tabulas, formula (41) dod vislabāko tuvinājumu, ja $Pr = 0,01$ un $Ly \geq 2$.

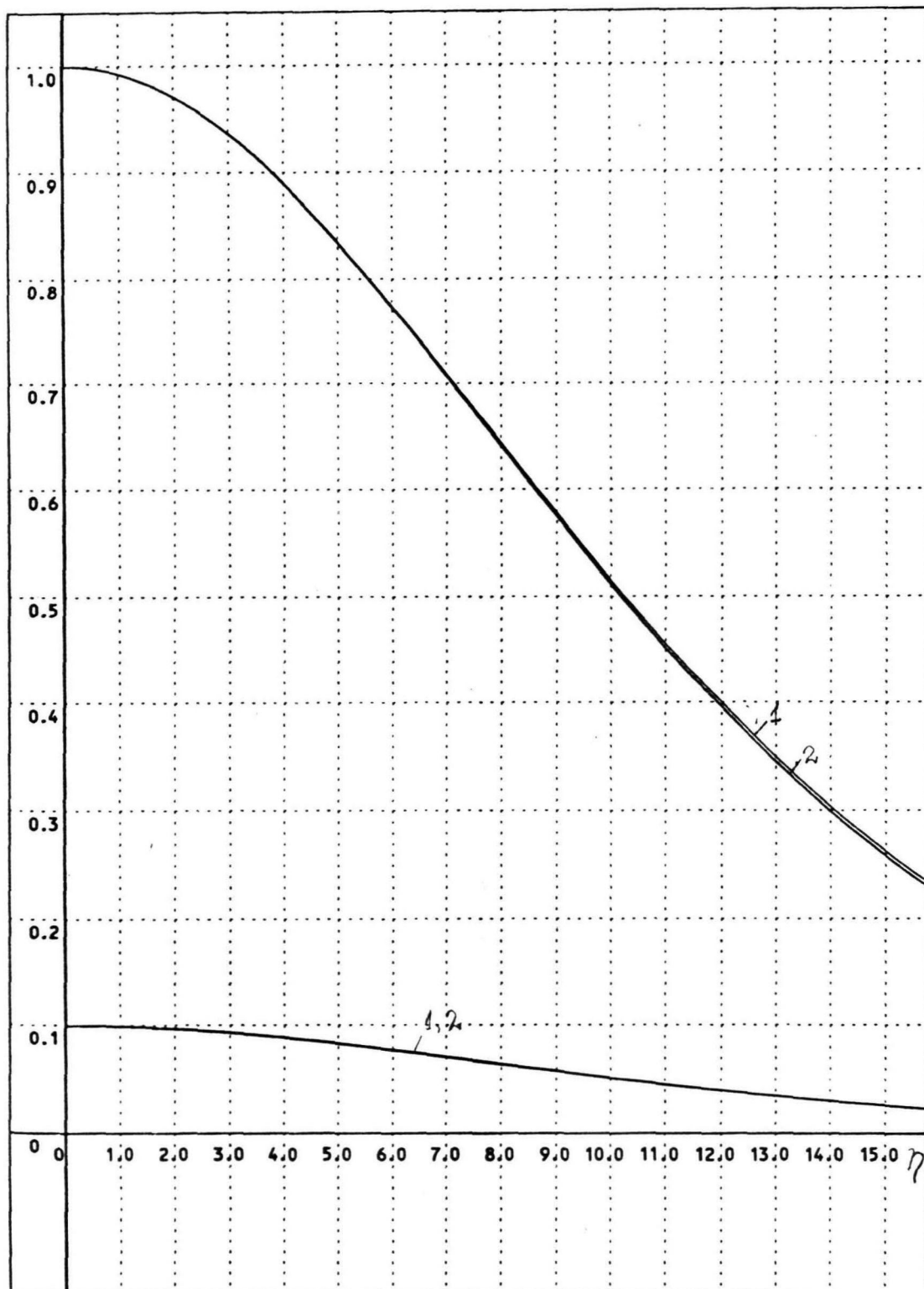
6. tabula.

($f'(0)$ vērtības lineāram horizontālam siltuma avotam).

Pr	0.01	0.1	1
Ly	$f'(0)$	$f'(0)$	$f'(0)$
0	0.98223	0.84087	0.62656
	1.11803	1.11803	1.11803
	1.00088	0.81184	0.62280
1	0.63215	0.57568	0.45134
	0.65587	0.65587	0.65587
	0.63024	0.56302	0.47709
2	0.42323	0.40402	0.33857
	0.42705	0.42705	0.42705
	0.40871	0.38442	0.34838
5	0.19378	0.19210	0.18031
	0.19398	0.19398	0.19398
	0.18891	0.18520	0.17891
10	0.09919	0.09897	0.09705
	0.09921	0.09921	0.09921
	0.09795	0.09722	0.09593
25	0.03995	0.03993	0.03980
	0.03995	0.03995	0.03995
	0.03979	0.03971	0.03957
50	0.01999	0.01999	0.01997
	0.01999	0.01999	0.01999
	0.01996	0.01995	0.01992



2.5. zīm. Precīzā skaitliskā (1) un asimptotiskā (2) atrisinājumu salīdzināšana lineāram horizontālam siltuma avotam, kad $Pr = 0,0625$, $Ly = 5$. Augšējās līknes - $\theta(\eta)$, apakšējās - $f'(\eta)$.



2.6. zīm. Precīzā skaitliskā (1) un asimptotiskā (2) atrisinājumu salīdzināšana lineāram horizontālam siltuma avotam, kad $Pr = 0,0625$, $Ly = 10$. Augšējās līknes - $\theta(\eta)$, apakšējās - $f'(\eta)$.

2.2. BRĪVĀ MHD SILTUMKONVEKCIJA VIRS
PUNKTVEIDA SILTUMA AVOTA.

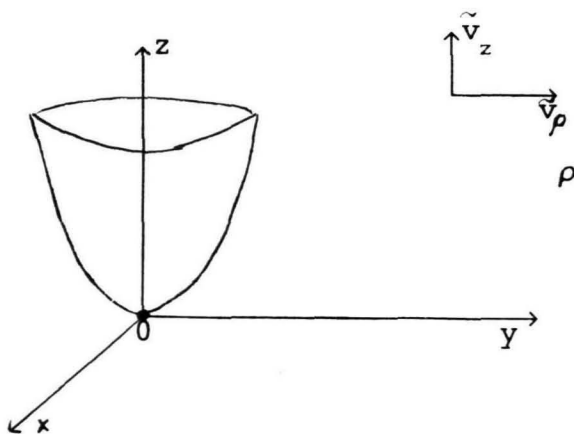
2.2.1. TĀDA ĀRĒJO MAGNĒTISKO LAUKU KLASĒS
NOTEIKŠANA, KAS DOTO PROBLĒMU SAGLABĀ AUTOMODĀLU.

Aplūkosim brīvo MHD siltumkonvekciju virs punktveida siltuma avota ar jaudu Q , kurš atrodas punktā $\tilde{\rho} = 0, \tilde{\varphi} = 0, \tilde{z} = 0$ ($\tilde{\rho}, \tilde{\varphi}, \tilde{z}$ - cilindriskās koordinātes). Ātruma lauks un ārējais magnētiskais lauks tiek definēts pēc formulām (0.19), (0.20). Izmantosim vienādojumu sistēmu (0.21)-(0.23) ar robežnosacījumiem

$$\tilde{\rho} = 0: \tilde{v}_\rho = \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial \tilde{\rho}} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\rho}} = 0;$$

$$\tilde{\rho} = \infty: \tilde{v}_z = 0, \tilde{T} = T_\infty.$$

(2.2.1)



2.7. zīm. Brīvā MHD siltumkonvekcija virs punktveida siltuma avota.

Lai pārietu uz automodālo problēmu, pieņem (sk. /15/), ka uz vertikālās ass $\tilde{\rho} = 0$ temperatūra mainās pēc

likuma

$$\tilde{T}(0, \tilde{z}) - T_\infty = N \tilde{z}^n, \quad N = \text{const} \quad (2.2.2)$$

Tad prasība, lai siltuma daudzums Q , kas izplūst caur katru šķēlumu $\tilde{z} = \text{const}$, būtu pastāvīgs, ļauj noteikt n vērtību - $n = -1$ un dod sekojošas automodālās mainīgo maiņas ($\tilde{\rho} \tilde{v}_z = \partial\psi/\partial\tilde{\rho}$, $\tilde{\rho} \tilde{v}_\rho = -\partial\psi/\partial\tilde{z}$; sk. (0.23) un /15/):

$$\eta = \kappa \tilde{\rho} \tilde{z}^{-1/2}, \quad \psi = \nu \tilde{z} f(\eta), \quad \text{Gr}^4 = \text{Gr} L^{-2}, \quad (2.2.3)$$

$$\theta = (\tilde{T} - T_\infty) \tilde{z} N^{-1}, \quad \text{Gr} = g \beta N L^2 \nu^{-2}.$$

Parametrs N un parametrs Q saistīti ar sakarību (sk. /15/, 143. lpp.):

$$N = Q / (2 \pi c_p \tilde{\rho} \nu I), \quad I = \int_0^\infty f'(\eta) \theta(\eta) d\eta, \quad (2.2.4)$$

kur funkcijas $f(\eta)$ un $\theta(\eta)$ tiek noteiktas no vēlāk aplūkotās problēmas (12), (6), (7) vai arī tās speciālā gadījuma - problēmas (18), (6), (7). Tādā veidā arī šajā gadījumā temperatūra $\tilde{T}(0, \tilde{z})$ atkarīga no parametriem Ly un Pr .

Ievietojot sakarības (4) vienādojumos (0.21), (0.22) un nosacījumos (1), iegūst

$$f'''' + (f - 1) \left(\frac{f'}{\eta} \right)' + \eta \theta + \frac{\sigma}{\nu \kappa^3 \rho_0} \left[2(-2f + \right. \\ \left. + \eta f') B_\rho B_z \tilde{z}^{1/2} - \kappa \tilde{z} B_\rho^2 f' \right] = 0, \quad (2.2.5)$$

$$(\eta \theta')' + Pr (f \theta)' = 0, \quad (2.2.6)$$

$$\eta = 0: f = f' = \theta' = 0, \quad \theta = 1; \quad \eta = \infty: f' = 0. \quad (2.2.7)$$

Lai vienādojums (5) būtu atkarīgs tikai no η , pietiek prasīt

$$B_\rho = B_0 \sqrt{\frac{L}{z}} F(\eta), \quad B_z = B_0 \varphi(\eta), \quad (2.2.8)$$

kur $F(\eta)$, $\varphi(\eta)$ - patvaļīgas diferencējamas funkcijas. Ievietojot (8) vienādojumā

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{\rho} B_z \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\tilde{\rho} B_\rho \right) = 0, \quad (2.2.9)$$

iegūst diferenciālvienādojumu funkcijas $\varphi(\eta)$ aprēķināšanai:

$$\eta^2 \varphi'(\eta) - 2 k L^{1/2} (\eta F(\eta))' = 0. \quad (2.2.10)$$

Vienādojuma (10) atrisinājums patvaļīgai funkcijai $F(\eta)$ ir

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 2 Gr^{1/4} \bar{\varphi}(\eta), \\ \bar{\varphi}(\eta) &= \int_{\eta_0}^{\eta} \xi^{-2} \left[\xi F(\xi) \right]' d\xi + 2 Gr^{1/4} C, \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

kur C - patvaļīga konstante. Tad no vienādojuma (5) seko

$$\begin{aligned} f'''' + (f - 1) \left(\frac{f'}{\eta} \right)' + \eta \theta - Ly \left[F^2(\eta) f' + \right. \\ \left. + \bar{\varphi}(\eta) F(\eta) (2f - \eta f') \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

$$Ly = 2 Ha^2 / \sqrt{Gr}.$$

Magnētiskā lauka (8) magnētisko spēka līniju diferenciālvienādojumu

$$\frac{d\rho}{B_\rho(\rho, z)} = \frac{dz}{B_z(\rho, z)} \quad (2.2.13)$$

var integrēt kvadrātūrās un vienādojuma (13) atrisinājumu var uzrakstīt parametriskā formā:

$$z = z_0 \exp [2 \Phi(u)],$$

$$\Phi(u) = \int_{u_0}^u \bar{\varphi}(\xi) \left[F(\xi) - \xi \bar{\varphi}(\xi) \right]^{-1} d\xi, \quad (2.2.14)$$

$$\rho = z_0^{1/2} k^{-1} u \exp [\Phi(u)], \quad u_0 = k \rho_0 z_0^{-1/2},$$

kur $u \geq 0$ - parametrs, $\rho = \rho_0$, kad $z = z_0$.

Konkrētā gadījumā, ja pieņem $F(\eta) = Gr^{1/4} \eta^{-1}$, $C = 0$, tad $\bar{\varphi} = 0$ un formulas (11) dod literatūrā pazīstamo radiālo magnētisko lauku (sk. /9/):

$$B_\rho = B_0 \frac{L}{\tilde{\rho}}, \quad B_z = 0. \quad (2.2.15)$$

Darbā /1/ parādīts, ka lauku (15) var radīt apgabalā $\tilde{\rho} \geq \rho_0$, $-\infty < \tilde{z} < +\infty$, ja plānās, no šķidrums izolētās apaļā solenoīda sienās plūst virsmas strāvas ar blīvumu

$$\mathbf{j} = i_0 \tilde{z} \delta(\tilde{\rho} - \rho_0) \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.2.16)$$

kur $\delta(\rho)$ - delta-funkcija. Strāvām (16) magnētisko lauku var uzrakstīt sekojošā formā (sk. /1/):

$$\mathbf{B}^e = \begin{cases} - \frac{i_0 \rho_0^2}{2 \rho} \mathbf{e}_\rho, & \text{ja } \rho \geq \rho_0 \\ - \frac{1}{2} i_0 \rho \mathbf{e}_\rho + i_0 z \mathbf{e}_z, & \text{ja } 0 \leq \rho \leq \rho_0. \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Lai solenoīds nesagrozītu ātruma lauku, pie $Pr < 1$ ir jāizpildās nosacījumam $\rho_0 < \delta$, kur δ - dinamiskā robežslāņa biezums. Vienādojumu (12) magnētiskā lauka

(15) gadījumā var pārrakstīt kā

$$f'''' + (f - 1) \left(\frac{f'}{\eta} \right)' + \eta \theta - z \frac{f'}{\eta^2} = 0. \quad (2.2.18)$$

Problēmu (18), (6), (7) var atrisināt skaitliski ar ESM palīdzību, analogiski tam, kā tas jau izdarīts 1. un 2. nodaļās.

2.2.2. PROBLĒMAS (18), (6), (7) ASIMPTOTISKAIS

ATRISINĀJUMS, KAD $Pr \ll 1$ UN $Ly \rightarrow \infty$.

Līdzīgi kā lineārā siltumavota gadījumā, ja $Pr \ll 1$ un $Ly \rightarrow \infty$, vienādojumā (18) var atbilst viskozos un inerciālos locekļus, t.i. pielīdzināt nullei elektromagnētiskā spēka un cēlējspēka summu. Tas dod

$$\theta = Ly \frac{f'}{\eta^3}. \quad (2.2.19)$$

Ievietojot θ no (19) vienādojumā (6), iegūst robežproblēmu

$$\eta \left(\frac{f'}{\eta^3} \right)' + Pr f \frac{f'}{\eta^3} = 0, \quad (2.2.20)$$

$$\eta = 0: f = f' = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{Ly f'}{\eta^3} = 1; \quad \eta = \infty: f' = 0. \quad (2.2.21)$$

Problēmas (20), (21) atrisinājums ir

$$f(\eta) = \frac{1}{4 Ly} \frac{\eta^4}{1 + b \eta^4}, \quad (2.2.22)$$

$$\theta(\eta) = \frac{1}{(1 + b \eta^4)^2}, \quad b = \frac{Pr}{32 Ly}.$$

Tā kā (sk. (3))

$$\begin{aligned} \tilde{v}_z &= \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\rho}} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \nu \tilde{z} f'(\eta) k \tilde{z}^{-1/2} = \\ &= \frac{\nu k^2}{Ly} \frac{\eta^2}{(1 + b \eta^4)^2}, \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

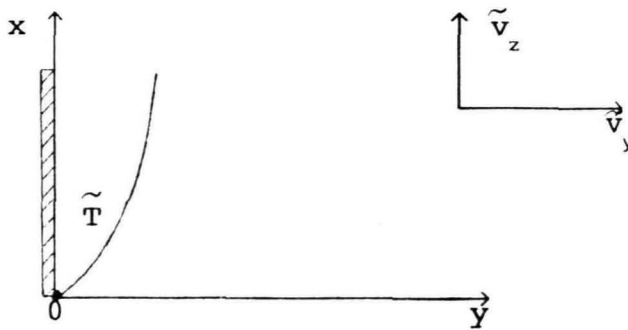
tad $\tilde{v}_z|_{\eta=0} = 0$. Tas nozīmē, ka funkcijai $\tilde{v}_z(\eta)$ ir M-veida ātruma profils.

3. BRĪVĀ MHD SILTUMKONVEKCIJA VIRS LINEĀRA
SILTUMA AVOTA, KURŠ PIESTIPRINĀTS
PIE VERTIKĀLAS VIRSMAS (/2/).

3.1. PROBLĒMAS ATRISINĀJUMS AUTOMODĀLĀ NOSTĀDNĒ
AR SKAITLISKĀS UN INTEGRĀLĀS METODEDES PALĪDZĪBU.

Aplūkosim brīvo MHD siltumkonvekciju virs lineāra horizontāla siltuma avota, kurš piestiprināts pie vertikālas siltumizolējošas virsmas. Atšķirībā no lineārā horizontālā siltuma avota, kuram pastāv simetrijas nosacījumi, vertikālajai ātruma komponentei \tilde{v}_x šoreiz ir spēkā pielipšanas nosacījumi, t.i. robežnosacījumus ātrumam un temperatūrai var uzrakstīt sekojošā formā (\tilde{x} ass vērsta vertikāli augšup, \tilde{y} ass - horizontāli):

$$\tilde{y} = 0: \tilde{v}_x = \tilde{v}_y = 0, \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}} = 0; \quad \tilde{y} = \infty: \tilde{v}_x = 0, \quad \tilde{T} = 0. \quad (3.1.1)$$



3.1. zīm. Brīvā MHD siltumkonvekcija virs lineāra siltuma avota, kurš piestiprināts pie vertikālas virsmas.

Tātad problēmu ārējā magnētiskā lauka (2.1.21) iedarbības gadījumā apraksta sekojoša diferenciālvienādojumu sistēma (izmantojot automodālos mainīgos (2.1.8), kuri tika noteikti lineārajam horizontālajam siltuma avotam):

$$f'''' + \frac{12}{5} f f'' - \frac{4}{5} f'^2 + \theta - Ly f' = 0, \quad (3.1.2)$$

$$\theta' + \frac{12}{5} Pr f \theta = 0. \quad (3.1.3)$$

ar robežnosacījumiem

$$\eta = 0: f = f' = 0, \theta' = 0, \theta = 1; \quad \eta = \infty: f' = 0. \quad (3.1.4)$$

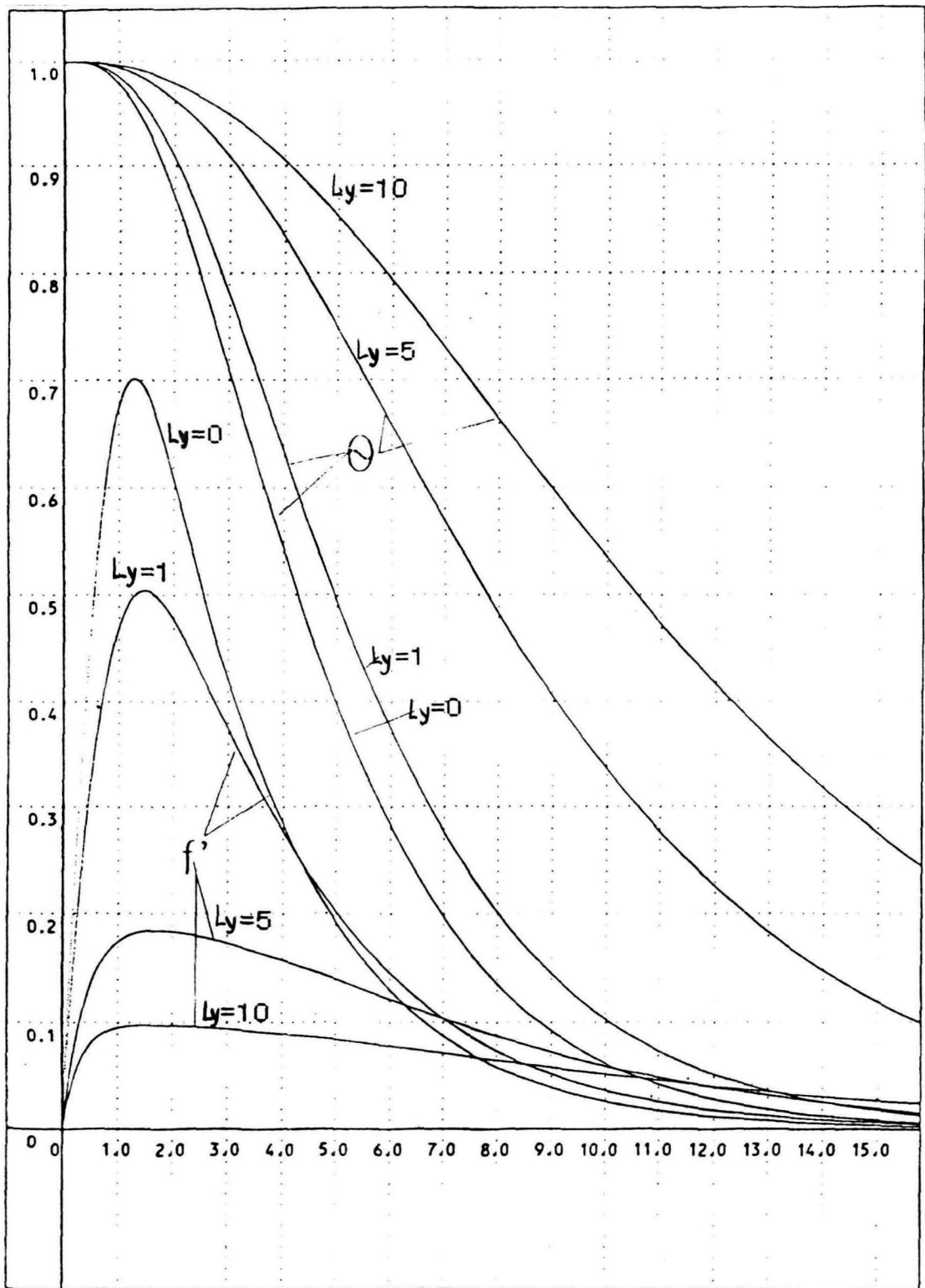
Problēma (2)-(4) tiek risināta skaitliski pēc piešaudes metodes, pēc metodikas, aprakstītas 1. nodaļā. Tiek uzdots papildus robežnosacījums $f''(0) = C$ un meklēta tāda C vērtība, lai izpildītos robežnosacījums $f'(\infty) = 0$. 7. tabulā parādīti lieluma $f''(0)$ skaitliskie rezultāti atkarībā no Ly , kad $Pr = 0,0625$.

7. tabula.

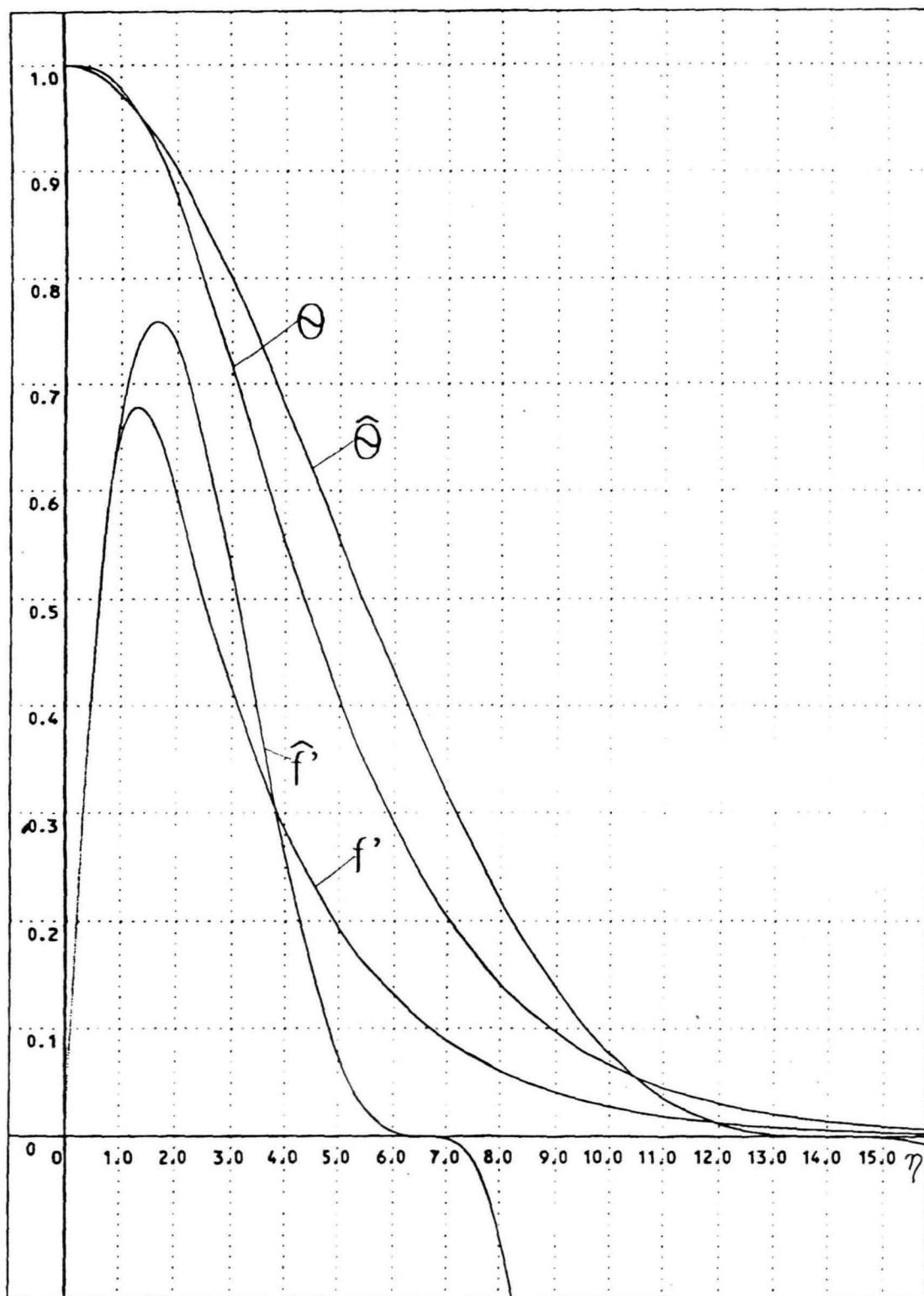
(Lineārs, pie sienas piestiprināts siltuma avots).

Ly	0,0	0,1	0,5	1,0
$f''(0)$	1,179442	1,140179	1,000984	0,863101

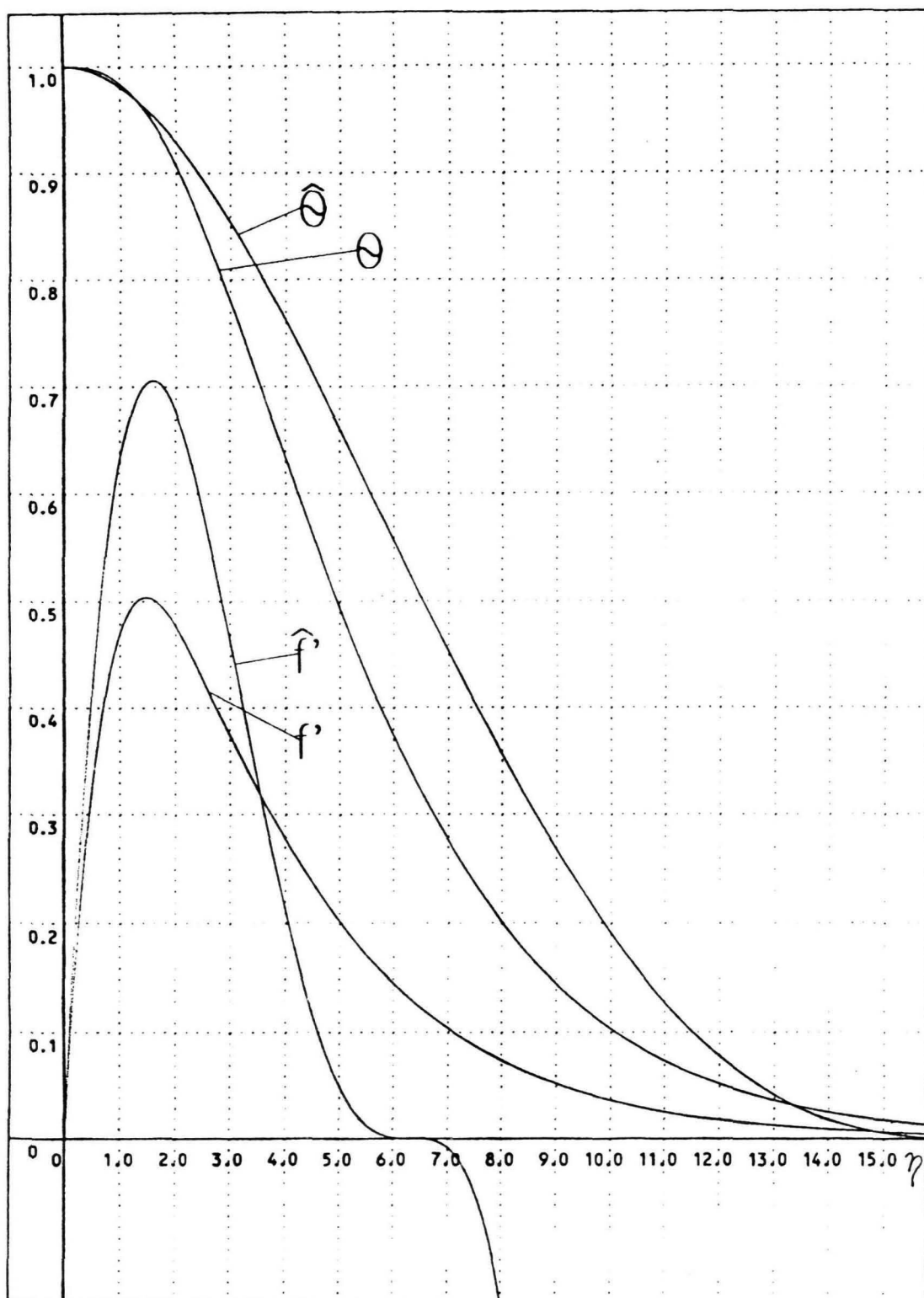
Ly	2,0	5,0	10,0
$f''(0)$	0,677963	0,444554	0,315774



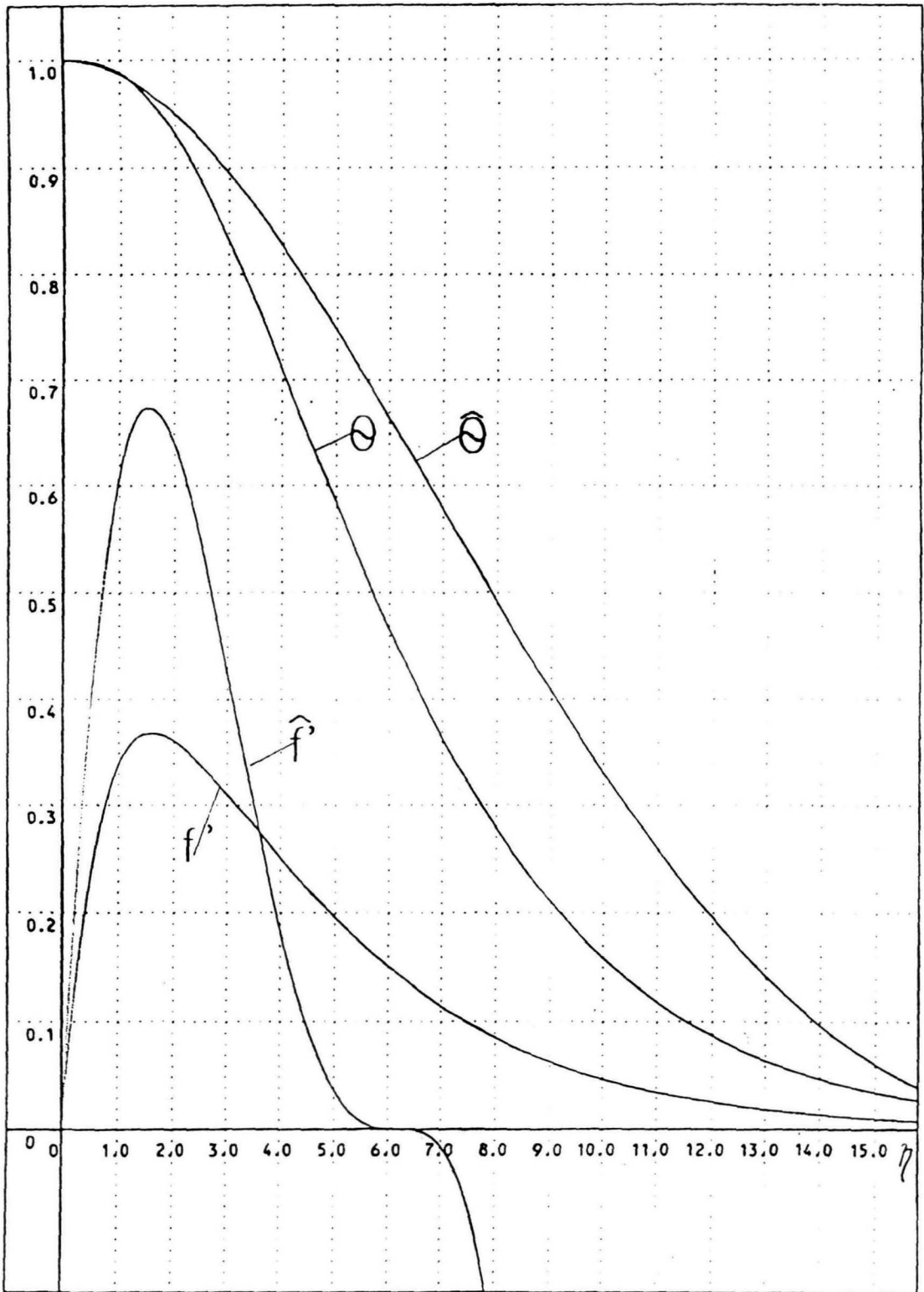
3.2. zīm. Brīvās MHD siltumkonvekcijas apspiešana pie sienas piestiprinātam siltuma avotam, kad $Pr = 0,0625$.



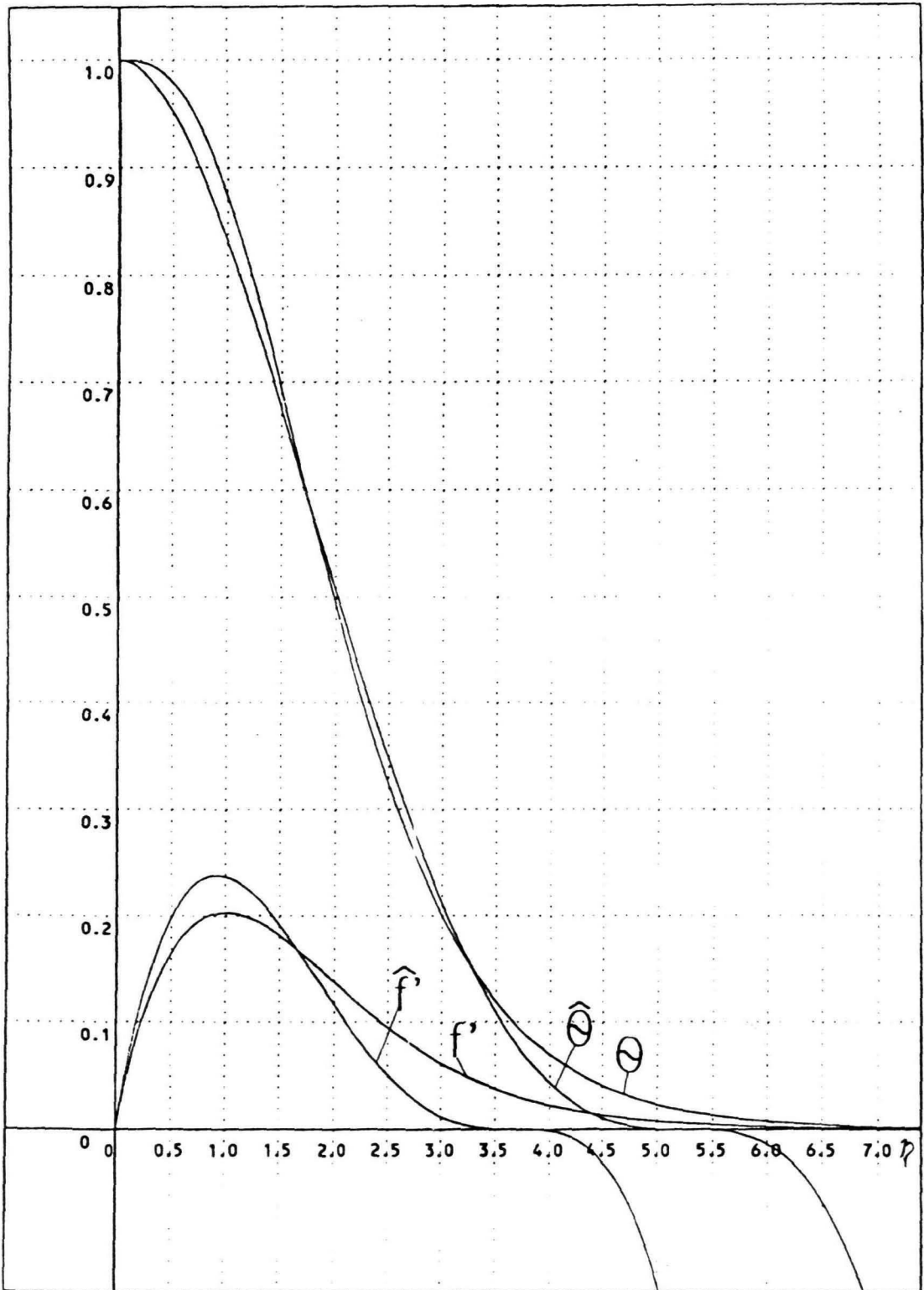
3.3. zīm. Integrālais ($\hat{\theta}$) un skaitliskais problēmas atrisinājums, kad $Pr = 0,0625$ un $Ly = 0,1$ (pie sienas piestiprināts siltuma avots).



3.4. zīm. Integrālais (\hat{f}) un skaitliskais problēmas atrisinājums, kad $Pr = 0,0625$ un $Ly = 1$ (pie sienas piestiprināts siltuma avots).



3.5. zīm. Integrālais ($\hat{\quad}$) un skaitliskais problēmas atrisinājums, kad $Pr = 0,0625$ un $Ly = 2$ (pie sienas piestiprināts siltuma avots).



3.6. zīm. Integrālais ($\hat{}$) un skaitliskais problēmas atrisinājums, kad $Pr = 1$ un $Ly = 3$ (pie sienas piestiprināts siltuma avots).

3.2. zīmējumā attēloti funkciju $f'(\eta)$ un $\theta(\eta)$ rezultāti, aprēķināti pie $Pr = 0,0625$ un dažādām Ly vērtībām. Kā redzams no zīmējuma, pie $Ly = 10$ konvekcija gandrīz pilnīgi tiek apspiesta.

Bez tam dotā problēma tiek rēķināta pēc integrālo sakarību metodes, kura sīki aprakstīta 1. nodaļā. Nenoteikto koeficientu nosacīšana, kā arī sekojošā intergēšana tiek izpildīta ar paketes REDUCE palīdzību. Izmantojot iegūtos rezultātus, ar paketes EUREKA palīdzību tiek rēķināta nelineāru vienādojumu sistēma ar dotiem parametriem Ha un $Pr < 1$.

3.3.-3.5. zīmējumos parādīti funkciju $f'(\eta)$ un $\theta(\eta)$ rezultāti, kas iegūti pēc šaušanas un integrālo sakarību (līknes $\hat{f}'(\eta)$ un $\hat{\theta}(\eta)$) metodēm. Kā redzams no zīmējumiem, pie $Pr = 0,0625$ un $Ly < 1$ ātruma līknes $\hat{f}'(\eta)$, konstruētas pēc aprēķiniem ar integrālo metodi, kļūda salīdzinājumā ar precīzo skaitlisko atrisinājumu diapazonā no $\eta = 0$ līdz $\eta = \alpha/2$ (- dinamiskā robežslāņa biezums) ir ne lielāka par 8 %. Palielinot Ly , starpība palielinās. No otras puses, pie $Pr = 1$ līknes 3.6. zīmējumā gandrīz sakrīt, kas acīmredzot saistīts ar dinamiskā un siltumrobežslāņa sakritību šajā gadījumā.

3.2. PROBLĒMAS ASIMPTOTISKAIS ATRISINĀJUMS,
KAD $Pr \ll 1$ UN $Ly \rightarrow \infty$, PĒC ASIMPTOTISKO
IZVIRZĪJUMU SAAUDZĒŠANAS METODEDES.

Dotajā problēmā eksistē eksponenciāla tipa dinamiskais robežslānis uz cietās sienas $\eta = 0$, bet siltuma robežslānis tāpat kā iepriekš neeksistē (jo siena ir siltumizolēta). Tāpēc atsevišķi atrisina problēmu plūsmas kodolā, pēc tam - robežslānī un konstruē salikto atrisinājumu (sk. /18/).

Lai konstruētu atrisinājumu plūsmas kodolā, vienādojumos (3.1.2), (3.1.3) ievieto

$$\theta = Ly \tilde{\theta} \quad (3.2.1)$$

un nosaka robežu, kad $Ly \rightarrow \infty$. Rezultātā iegūst sistēmu

$$\tilde{\theta} - f' = 0, \quad \tilde{\theta}' + \frac{12}{5} f \tilde{\theta} = 0. \quad (3.2.2,3)$$

Ievietojot $\tilde{\theta}$ no (2) vienādojumā (3), seko

$$f'''' + \frac{12}{5} Pr f f' = 0. \quad (3.2.4)$$

Ir viegli pārliecināties, ka funkcija

$$f(\eta) \equiv f_0(\eta) = \frac{5a}{6Pr} \operatorname{th} a \eta, \quad (3.2.5)$$

kur a - nenoteiktā konstante, ir vienādojuma (4) atrisinājums, un tā apmierina arī pirmo un pēdējo robežnosacījumu no (3.1.1), bet neapmierina nosacījumu $f'(0) = 0$. Tāpēc punkta $\eta = 0$ apkārtnē ir jābūt dinamiskajam robežslānim, kurā būs likvidēta šī

pretruna. No vienādojuma (2) un formulas (5) seko

$$\tilde{\theta}(\eta) \equiv \tilde{\theta}_0(\eta) = \frac{5}{6} \frac{a^2}{Pr} ch^{-2} a \eta; \quad (3.2.6)$$

$$\theta(\eta) \equiv \theta_0(\eta) = Ly \tilde{\theta}_0(\eta).$$

Funkcija (6) apmierina nosacījumu $\tilde{\theta}(\infty) = 0$, kā arī nosacījumu $\tilde{\theta}'(0) = 0$.

Lai konstruētu atrisinājumu robežslānī punkta $\eta = 0$ apkārtnē, pieņem, ka Prandtļa skaitlis $Pr \ll 1$, tad dinamiskajā robežslānī temperatūra ir pastāvīga un ir vienāda ar 1. Vienādojumos (3.1.2), (3.1.3) pieņem

$$\eta = Ly^{-1/2} \eta_1, \quad \theta = Ly^{3/2} \theta_1, \quad f = f_1 \quad (3.2.7)$$

un nosaka robežu, kad $Ly \rightarrow \infty$. Iegūst sistēmu

$$\frac{d^3 f_1}{d\eta_1^3} + \theta_1 - \frac{df_1}{d\eta_1} = 0, \quad \frac{d\theta_1}{d\eta_1} = 0 \quad (3.2.8,9)$$

ar robežnosacījumiem

$$\eta_1 = 0: f_1 = f_1' = 0, \quad \theta_1 = Ly^{-3/2}. \quad (3.2.10)$$

Vienādojuma (9) atrisinājumu, kas apmierina pēdējo robežnosacījumu no (10), var uzrakstīt sekojošā formā:

$$\theta_1 = Ly^{-3/2}, \quad (3.2.11)$$

pie kam funkcija (11) apmierina arī nosacījumu $\theta_1'(0) = 0$ Ievieto sakarību (11) vienādojumā (8), tad iegūst

$$\frac{d^3 f_1}{d\eta_1^3} + Ly^{-3/2} - \frac{df_1}{d\eta_1} = 0 \quad (3.2.12)$$

Vienādojuma (12) atrisinājums, kas apmierina

robežnosacījumus (10) un kuram ir ierobežots atvasinājums, kad $\eta_1 \rightarrow \infty$, ir sekojošs:

$$f_1(\eta_1) = Ly^{-3/2} \left(e^{-\eta_1} - 1 + \eta_1 \right)$$

vai, pārejot pie iepriekšējiem mainīgajiem

$$f_1(\eta) = Ly^{-3/2} \left(e^{-\eta\sqrt{Ly}} - 1 + \eta\sqrt{Ly} \right), \theta = 1. \quad (3.2.13)$$

Tagad patvaļīgo konstanti a atrisinājumā (5), (6) plūsmas kodolā nosaka tādu, lai izpildītos saskaņošanas nosacījumi (sk. /18/):

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f_1'(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} f_0'(\eta); \quad (3.2.14)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \theta_0(\eta). \quad (3.2.15)$$

No nosacījumiem (5), (6), (13), (15) seko

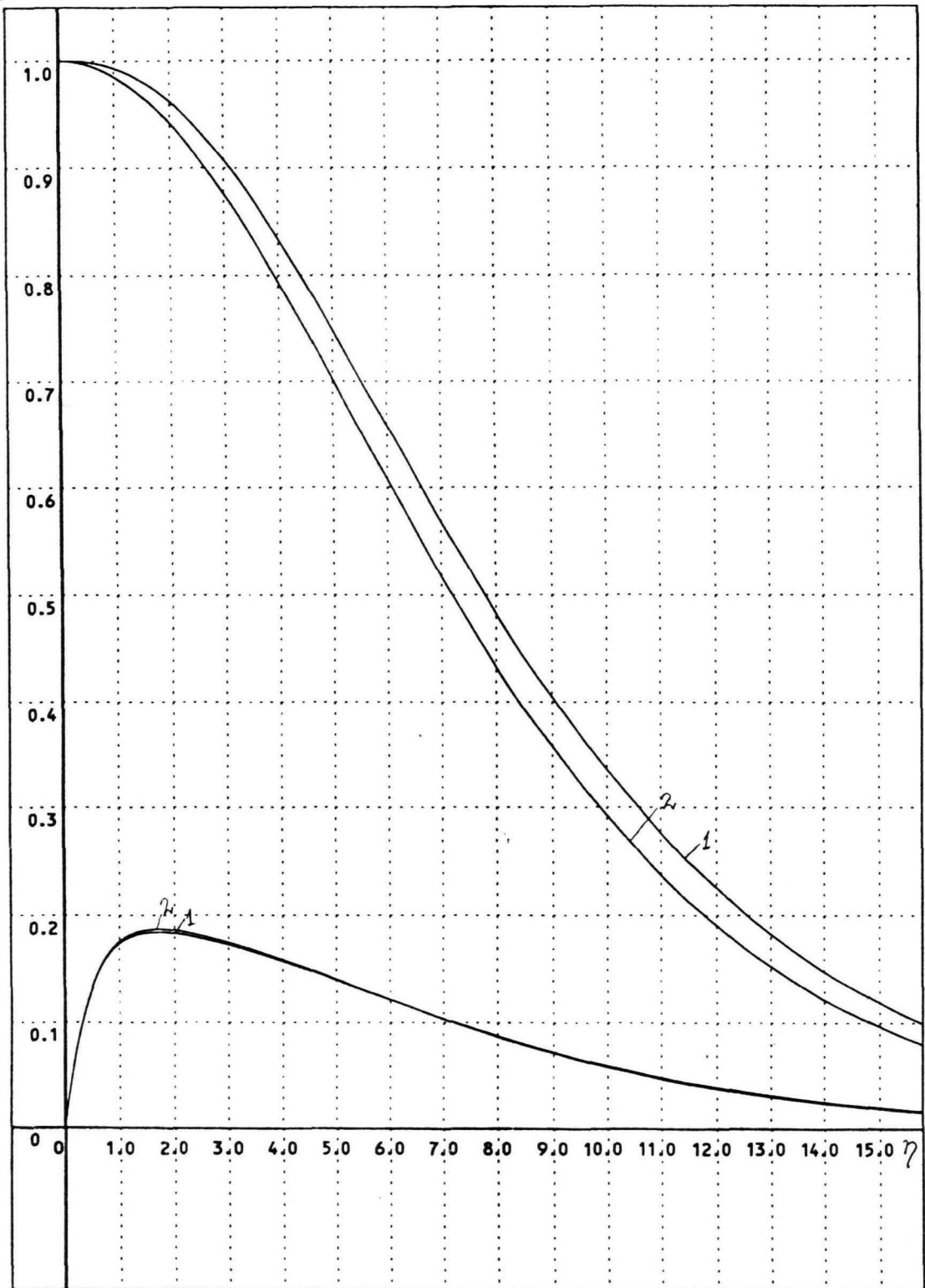
$$a = \sqrt{\frac{6 \text{ Pr}}{5 \text{ Ly}}}, \quad (3.2.16)$$

bez tam tāds a apmierina arī nosacījumu (14), tātad atrisinājumu plūsmas kodolā apraksta formulas (5), (6), (16). Lai konstruētu salikto atrisinājumu (sk. /16/), ir jāņem abu atrisinājumu (kodolā un robežslānī) summa un no tās jāatņem kopīgā robeža (14) un (15) (t.i. jāatņem atbilstoši Ly^{-2} un 1). Tas dod

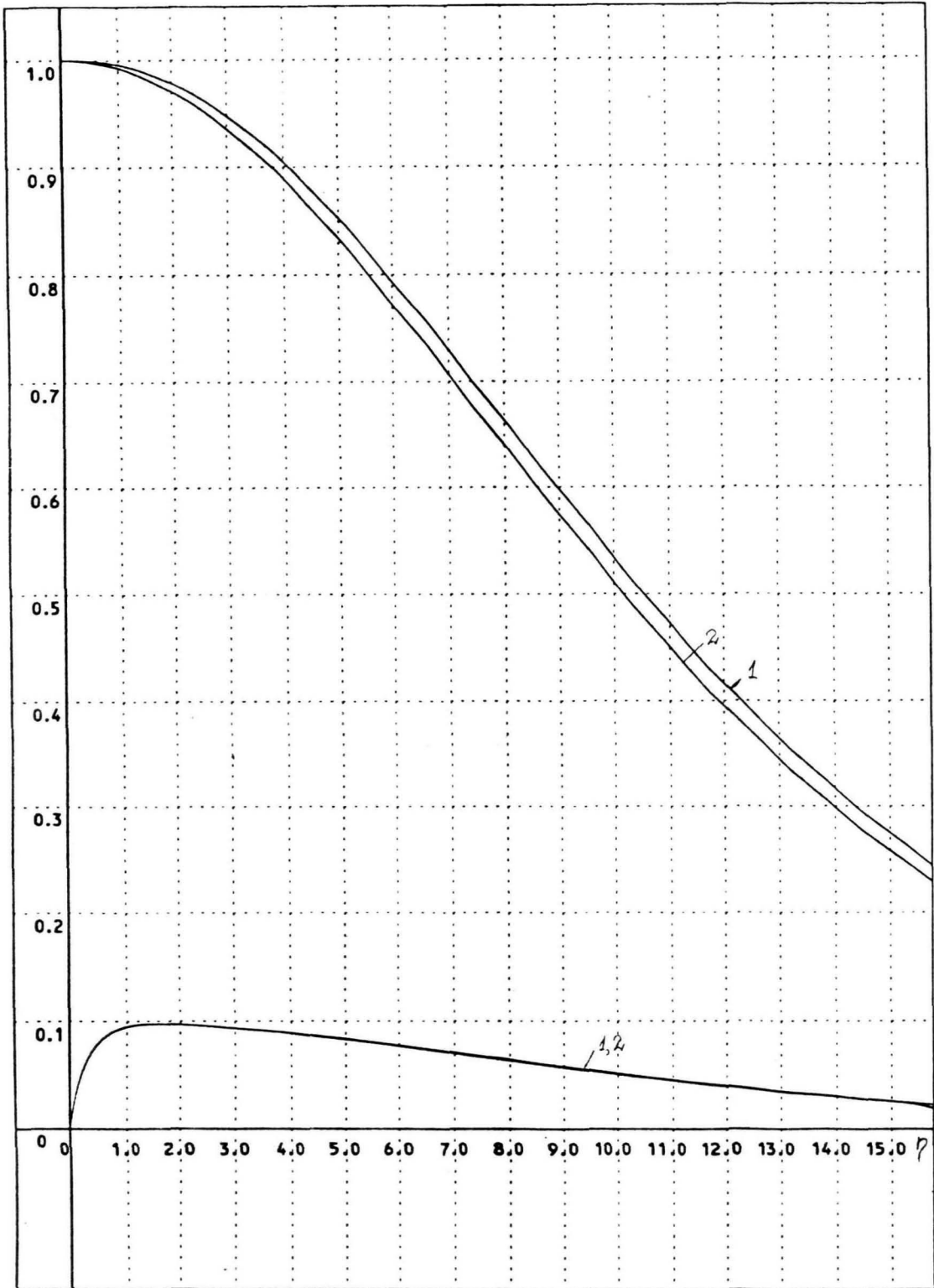
$$f(\eta) = Ly^{-3/2} \left(e^{-\eta\sqrt{Ly}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{5}{6 \text{ Pr} \text{ Ly}}} \text{th} \left(\eta \sqrt{\frac{6 \text{ Pr}}{5 \text{ Ly}}} \right), \quad (3.2.17)$$

$$\theta(\eta) = \text{ch}^{-2} \left(\eta \sqrt{\frac{6 \text{ Pr}}{5 \text{ Ly}}} \right). \quad (3.2.18)$$

3.7. un 3.8. zīmējumos var redzēt funkciju $f'(\eta)$ un $\theta(\eta)$ aprēķinus pēc formulām (17), (18). Turpat parādīti arī problēmas (3.1.2)-(3.1.4) precīzie skaitliskie rezultāti, kas iegūti pēc piešaudes metodes, kad $Pr = 0,0625$, $Ly = 5$ un $Ly = 10$. Kā redzams no zīmējuma, asimptotika (17), (18) praktiski sakrīt ar precīzo skaitlisko atrisinājumu, kad $Ly = 10$, un maz atšķiras no tā, kad $Ly = 5$.



3.7. zīm. Precīzā skaitliskā (1) un asimptotiskā (2) atrisinājumu salīdzināšana lineāram siltuma avotam, kas piestiprināts pie vertikālas virsmas, kad $Pr = 0,0625$ un $Ly = 5$. Augšējās līknes - $\theta(\eta)$, apakšējās - $f'(\eta)$.



3.8. zīm. Precīzā skaitliskā (1) un asimptotiskā (2) atrisinājumu salīdzināšana lineāram siltuma avotam, kas piestiprināts pie vertikālas virsmas, kad $Pr = 0,0625$ un $Ly = 10$. Augšējās līknes - $\theta(\eta)$, apakšējās - $f'(\eta)$.

KOPSAVILKUMS.

Darbā iegūti atrisinājumi nelineārām automodālām brīvās MHD siltumkonvekcijas problēmām ap vertikālu pusbezglīgu plāksni, kā arī virs lineāra, pie sienas piestiprināta un punktveida siltuma avota pēc integrālās un skaitliskās metodēm, kā arī konstruēti šo problēmu asimptotiskie atrisinājumi stipros magnētiskos laukos. Konstruējot asimptotiskos atrisinājumus, tika izmantota asimptotisko izvīzījumu saudzēšanas metode.

Problēmas aktualitāte. Brīvās magnētohidrodinamiskās konvekcijas problēmu skaitliskie un asimptotiskie atrisinājumi stipros magnētiskos laukos izraisa interesi kā teorētiskā, tā arī lietišķā plānā.

Automodālā nostādņē brīvās MHD siltumkonvekcijas problēmas ir iespējamās tikai speciāla veida ārējo magnētisko lauku iedarbībā. Pirmoreiz tāda veida lauku brīvai MHD siltumkonvekcijai ap vertikālu pusbezglīgu plāksni 1962. gadā atrada Likudis darbā /00/:

$$B^e = B_0 (L / \tilde{x})^{1/4} e_y \quad (1)$$

(\tilde{x} ass vērsta vertikāli uz augšu, \tilde{y} ass - horizontāli, plāksne atrodas apgabalā $0 \leq \tilde{x} < +\infty$).

Taču Likudis noteicis tikai dažādus tuvinātos problēmas atrisinājumus, bet precīzo skaitlisko atrisinājumu atradis tikai maziem Likudisa skaitļiem $Ly \leq 1,5$ ($Ly = 2 Ha^2 Gr^{-1/2}$). Likudis vēl noteicis problēmas

asimptotisko atrisinājumu, ja $Ly \rightarrow \infty$, plūsmas kodolā, kas ļauj noteikt asimptotisku siltuma plūsmai no plāksnes virsmas, bet neļauj atrast berzes spēka asimptotiku uz plāksnes, ja $Ly \rightarrow \infty$. Pie Prandtļa skaitļiem $Pr \ll 1$ un lieliem Ly Likudis saskata grūtības atrast problēmas skaitlisko atrisinājumu. Analoģisku automodālās problēmas pētījumu ārējā magnētiskā laukā

$$\mathbf{B}^e = B_0 (L / \tilde{x})^{2/5} \mathbf{e}_y \quad (2)$$

izdarījis Grejs. Viņš pētījis brīvo siltumkonvekciju virs lineāra horizontāla siltuma avota un virs siltuma avota, piestiprināta pie vertikālas siltumizolējošas virsmas. Taču arī Grejs šo problēmu precīzo skaitlisko atrisinājumu ieguvis tikai gadījumos, kad $Ly \leq 1$. Arī Grejs atzīmē grūtības, saistītas ar mēģinājumu iegūt šo problēmu skaitlisko atrisinājumu, ja $Pr \ll 1$ un $Ly \gg 1$.

Tādēļ ir aktuāli

1. Paplašināt to magnētisko lauku klasi, kuru iedarbībā iepriekš minētās brīvās MHD siltumkonvekcijas problēmas ir automodālas.
2. Noteikt šo problēmu asimptotiskos atrisinājumus, kad $Ly \rightarrow \infty$.
3. Noteikt šo problēmu skaitliskos atrisinājumus līdz tik lieliem Likudisa skaitļiem, kamēr asimptotiskais atrisinājums sakrīt ar skaitlisko.

Lietišķā pielietojumā šīs problēmas ir aktuālas projēktējot termokodolreaktorus, kuros paredzēts izmantot šķidro metālu siltuma noņemšanai, plazmas

piemaisījumu atdalīšanai un cieto ķermeņu virsmu aizsargāšanai no pārkaršanas un korozijas. Bez tam šīs problēmas svarīgas arī pie kristāla audzēšanas, kur stipru magnētisko lauku, paralēlu kristāla rotācijas asij, rada, lai nepieļautu piemaisījumu iekļūšanu kristālā no trauka sienām.

Darba mērķis ir paplašināt to ārējo magnētisko lauku klasi, kuru iedarbībā ir automodālas brīvās MHD siltumkonvekcijas problēmas ap vertikālu pusbezglīgu plāksni, kā arī virs lineāra, punktveida un pie sienas piestiprināta siltuma avotiem, noteikt šo problēmu asimptotiskos atrisinājumus stipros magnētiskos laukos, kā arī iegūt precīzus skaitiskus atrisinājumus, kad Likudisa skaitlis $Ly \gg 1$.

Zinātniskie jaunumi uz aizstāvēšanu izvirzītajos rezultātos ir sekojoši:

1. Noteikta plašāka to ārējo magnētisko lauku klase, kuru iedarbībā iepriekš minētās brīvās MHD siltumkonvekcijas problēmas ir automodālas.
2. Pēc asimptotisko izvirzījumu saudzēšanas metodes iegūti precīzi šo problēmu asimptotiskie atrisinājumi, kad Likudisa skaitlis $Ly \rightarrow \infty$.
3. Pēc skaitliskās piešaudes metodes atrasti šo problēmu atrisinājumi līdz tik lielām skaitļa Ly vērtībām, kamēr asimptotiskais atrisinājums sakrīt ar skaitlisko (līdz $Ly = 20$ vertikālajai plāksnei un līdz $Ly = 50$ lineārajam horizontālajam un pie sienas piestiprinātajam siltuma avotiem).

Publikācijas. Disertācijas tēmā ir nopublicēti 5 darbi un 2 darbi pieņemti publicēšanai.

Aprobācija. Disertācijas pamatrezultāti vairākkārt ir apspriesti RTU Lietišķās matemātikas katedras zinātniskajos semināros, Rīgas 13. magnētiskās hidrodinamikas konferencē (Rīga, 1990), LU Diferenciālvienādojumu un tuvināto metožu katedras zinātniskajā seminārā 1994. gada 16. novembrī, LU Matemātikas un Informātikas Institūta Datortehnoloģiju nodaļas zinātniskajā seminārā 1995. gada janvārī.

Darba apjoms un struktūra. Disertācija sastāv no ievada daļas, trim nodaļām un kopsavilkuma un satur 99 lappuses mašīnrakstā, ieskaitot 25 zīmējumus, 7 tabulas un literatūras sarakstu, kas satur 59 nosaukumus.

SVARĪGĀKIE APZĪMĒJUMI.

\tilde{x}, \tilde{y} - Dekarta koordinātes.

$\tilde{\rho}, \tilde{\varphi}, \tilde{z}$ - cilindriskās koordinātes.

η - automodālais mainīgais.

$\mathbf{v} = \{ v_x(x,y), v_y(x,y) \}$ - šķidruma ātruma vektors.

$\mathbf{B}^e = \{ B_x(x,y), B_y(x,y) \}$ - ārējais magnētiskais lauks.

$T(x,y)$ - šķidruma temperatūra.

θ - bezdimensijas temperatūra.

Ly - Likudisa skaitlis.

Ha - Hartmana skaitlis.

Gr - Grashofa skaitlis.

Pr - Prandtļa skaitlis.

Re - Reinoldsa skaitlis.

P_m - pilnais spiediens.

\mathbf{E} - elektriskā lauka intensitātes vektors.

Φ - elektriskais potenciāls.

ν - šķidruma kinemātiskās viskozitātes koeficients.

g - smaguma spēka paātrinājums.

β - siltumizplešanās koeficients.

ρ - šķidruma blīvums.

ρ_0 - šķidruma blīvums pie $T = T_0$.

σ - šķidruma vadāmība.

μ_0 - šķidruma magnētiskā caurlaidība.

a - šķidruma siltuma vadāmības koeficients.

L - raksturlielums.

v_0 - raksturīgais ātrums.

$\psi(x,y)$ - strāvas funkcija.

j - strāvas blīvums.

i_0 - strāvas stiprums.

c_p - šķidrums siltumietilpība pie pastāvīga spiediena.

$\delta(\rho)$ - delta-funkcija.

LITERATŪRA.

1. Антимиров М.Я. Нестационарное течение проводящей жидкости в круглом канале в неоднородном магнитном поле // Магнитная гидродинамика. - 1978. - N 2. - С. 47...53.
2. Антимиров М.Я., Володко И.М. Свободная тепловая магнитогидродинамическая конвекция над линейным и пристенным источниками тепла в сильном магнитном поле // Магнитная гидродинамика.- 1993. - N 1. - С. С. 24...30.
3. Антимиров М.Я., Володко И.М., Жирнов О.В., Подвысоцкий А.Ю. О классе магнитных полей, оставляющих автомодельными задачи свободной тепловой магнитогидродинамической конвекции // Магнитная гидродинамика.- 1991. - N 3. - С. 75...81.
4. Антимиров М.Я., Володко И.М., Жирнов О.В., Подвысоцкий А.Ю. О классе магнитных полей, оставляющих автомодельными задачи свободной тепловой магнитогидродинамической конвекции // Тринадцатое рижское совещание по магнитной гидродинамике. 1. Общие и теоретические вопросы. - Саласпилс. - 1990. - С. 119...120.
5. Блум Э.Я. Приближенный метод решения задач свободной МГД - конвекции вблизи плоских и осесимметричных тел произвольной формы // Магнитная

- гидродинамика. - 1978.- № 3.- С. 11...17.
6. Блум Э.Я., Михайлов Ю.А., Озолс Р.Я. Тепло- и массообмен в магнитном поле. - Рига: Зинатне. - 1980. - 354 с.
 7. Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. - М.: Наука, 1970, 379 с.
 8. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. - М.: Мир. - 1967. - 310 с.
 9. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. - М.: Наука. - 1970. - 672 с.
 10. Володко И.М. Свободная тепловая МГД конвекция около вертикальной пластины в сильном магнитном поле // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.- Рига: ЛУ, 1992. - Вып. 3. - С. 117...124.
 11. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течение, тепло- и массообмен. - М.: Мир.- 1991.- т.1.- 678 с.
 12. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. - М.: Мир.- 1991.- т.2.- 528 с.
 13. Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Шербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. - Рига: Зинатне.- 1976.- 231 с.
 14. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная

- устойчивость несжимаемой жидкости. - М.: Наука. - 1972. - 392 с.
15. Джалурия Й. Естественная конвекция. - М.: Мир.- 1983.- 399 с.
16. Зельдович Я.Б. Предельные зоны свободно восходящих конвективных потоков // Журн. эксперим. и теорет. физики.- 1937.- т.7, N 12. - С. 1463...1467.
17. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач.- М.: Наука.- 1989.- 336 с.
18. Найфэ А. Введение в методы возмущений.- М.: Мир.- 1984.- 535 с.
19. Рой С. Свободная конвекция при постоянном тепловом потоке на поверхности и высоких числах Прандтля // Труды амер. о-ва инж.- мех., сер. С. - 1973. - N 1.- С. 135.
20. Селман, Ньюман. Свободная конвекция на вертикальной пластине при постоянном тепловом потоке. Предельный случай больших чисел Шмидта // Труды амер. о-ва инж.- мех., сер. С, Теплопередача. - 1971. - N 4. - С. 143.
21. Цинобер А.Б. Магнитогидродинамическое обтекание тел.- Рига: Зинатне. - 1970. - 291 с.
22. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М., 1969.- 742 с.
23. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. // Теория тепло- и

массообмена.- М.-Л.: Госэнергоиздат.- 1961.

24. Antimirov M. Ya., Volodko I. M., Zhirnov O. V., Podvisotsky A.Yu. A Class of Magnetic Fields Cause the Problems of Free Magnetohydrodynamic Thermal Convection to Remain Self-Similar. // The Seventh Beer-Sheva International Seminar on MHD Flows and Trubulence, Israel. February 14-18, 1993, p.4.
25. Brand R.S., Lahey F.J. Heated laminar vertical jet // J. Fluid Mech.- 1967. - Vol. 29.- P. 305...315.
26. Cydan D.A., Richardson P.D. // Can. J. Chem. Eng.- 1968.- Vol. 46.- P. 321.
27. Fujii T. Theory of steady laminar convection above a horizontal line heat source and a point heat source // Intern. J. Heat a. Mass Transfer.- 1963.- Vol. 6. - P. 597...606.
28. Gebhart B. // Heat Transfer. 2d ed. McGraw, New York.- 1971.
29. Gebhart B., Pera H., Shorr V. Steady laminar natural convection plumes above a horizontal line heat source // Intern. J. Heat a. Mass Transfer. - 1970.- Vol. 13.- P. 161...171.
30. Gray Donald D. The laminar plume above a line heat source in a transverse magnetic field // Appl. Sci. Res.- 1977.- Vol. 33.- P. 437...457.
31. Gray D. D. An Approximate Solution for Two Dimensional Plumes Including Magnetic Effects //

- Int. Comm. in Heat and Mass Transfer, Vol. 10. - 1983.- P. 231...239.
32. Gray D.D. The Laminar Wall Plume in a Transverse Magnetic Field // Int. Jour. of Heat and Mass Transfer, Vol. 22. - 1979. - P. 1155...1158.
33. Henkes R.A.W., Hoogendorn G.J. Laminar natural convection boundary - layer flow along a heated vertical plate in a stratified field environment // Int. J. Heat a. Mass Transfer. - 1989. - Vol. 12., N 1.- P. 147...155.
34. Hunt R., Wilks G. Low Prandtl number magnetohydrodynamic natural convection in a strong cross field // Numer. Heat Transfer.- 1981.- Vol. 4, N 3.- P. 303...316.
35. Kerr S.O., Weeler A.A. The effect of a weak vertical magnetic field on the buoyancy - driven boundary layer flow past a vertical heated wall // J. Fluid Mech.- 1989.- Vol. 199.- P. 217...236.
36. Kuiken H.K. // J. Eng. Math.- 1968.- Vol. 2.- P. 95.
37. Kuiken H.K. // J. Fluid Mech.- 1969.- Vol. 37.- P. 785.
38. Kuiken H.K., Rotem Z. Asymptotic solution for plume at very large and small Prandtl numbers // J. Fluid Mech.- 1971.- Vol. 45.- P. 585...600.
39. Kulkarni A.K., Jacobs H.R., Hwang J.J. Similarity solution for natural convection flow over an

- isothermal vertical wall immersed in thermally stratified medium // Int. J. Heat a. Mass Transfer.- 1987.- Vol. 30, N 4.- P. 691...698.
40. Larsen Poul S., Arpaci Vedat S. On the similarity solutions to laminar natural convection boundary layers // Int. J. Heat a. Mass Transfer. - 1986. - Vol. 29.- P. 342...344.
41. LeFevre E.J. // Proc. 9th Int. Cong. Appl. Mech.- 1956.- Vol. 4.- P. 168.
42. Lykoudis P.S. Natural convection of an electrically conducting fluid in the presence of a magnetic field // Intern. J. Heat a. Mass Transfer.- 1962.- Vol. 5. - P. 23...34.
43. Papailion D.D., Lykoudis P.S. Magneto - fluid - mechanic laminar natural convection- an experiment // Intern. J. Heat a. Mass Transfer. - 1968. - Vol. 11, N 9.- P. 1385...1391.
44. Rabindra N.J. Hydromagnetic free convection flow past a vertical flat plate with variable viscosity and thermal conductivity // Jap. J. Appl. Phys. - 1974.- Vol. 13, N 9.- P. 1443...1448.
45. Roy S. A note on natural convection at high Prandtl numbers // Int. J. Heat a. Mass Transfer. - 1969. - Vol. 12.- P. 239...241.
46. Sabhapathy P., Cheng K. C. The effects of temperature - dependent properties on the laminar

- natural convective flow of a liquid along an isothermal vertical flat plate // AIAA pap.- 1988.- N 2619.- P. 1...9.
47. Saunders O.A. // Proc. R. Soc. London, ser. A.- 1939.- Vol. 172.- P. 255.
48. Spalding D.B., Cruddace R.G. Theory of the steady laminar buoyant flow above a line heat source in a fluid of large Prandtl number and temperature - dependent viscosity // Int. J. Heat a. Mass Transfer. - 1961.- Vol. 3.- P. 55...59.
49. Srinivasan J., Angirasa D. Numerical study of double - diffusive free convection from a vertical surfase // Int. J. Heat a. Mass Transfer.- 1988.- Vol. 31, N 10.- P. 2033...2038.
50. Stewartson K., Jones L.T. The heated vertical plate at high Prandtl number // J. Aerosp. Sci. - 1957.- Vol. 24.- P. 379...380.
51. Takhar S.H., Soundalgekar V.M. Dissipation effects of MHD free convection flow past a semi - infinite vertical plate // Appl. Sci. Res.- 1980.- Vol. 36, N 3.- P. 163...171.
52. Takhar S.H., Soundalgekar V.M. MHD free convection flow past a vertical semi - infinite plate with a uniform free - streem // Mech. Res. Commun. - 1985.- Vol. 12, N 3.- P. 155...162.
53. Thomas T.G., Takhar H.S. Second-order effects in an

- axisymmetric plume // Quart. J. Mech. a. Appl. Math.
- 1988.- Vol. 41.- P. 1...16.
54. Wilks G. Magnetohydrodynamic free convection about
a semi - infinite vertical plate in a strong cross
field // ZAMP.- 1976.- Vol. 27, N 5.- P. 621...631.
55. Wilks G., Hunt R. Low Prandtl number MHD convection
about a semi - infinite horizontal plate // Numer.
Heat Transfer.- 1985.- Vol. 8, N 2.- P. 203...216.
56. Wilks G., Hunt R. Magnetohydrodynamic free
convection flow about a semi - infinite plate at
whose surface the heat flux is uniform // ZAMP.-
1984.- Vol. 35, N 1.- P. 34...36.
57. Williams J.C., Mulligan J.C., E Rhyne T.B.
Semi - similar solutions for unsteady free -
convective boundary - layer flow on a vertical flat
plate // J. Fluid Mech. - 1987. - Vol. 175. -
P. 309...332.
58. Yih C.S. Free convection due to a point source of
heat // Proc. 1st U.S. Natn. Congr. Appl. Mech. -
1951.- P. 941...947.
59. Yih C.S. Laminar free convection due to a line
source of heat // Trans. Am. Geophys.- 1962.- Vol.
33, N 5.- P. 669...672.