



ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра электродинамики и механики сплошных сред

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Межвузовский сборник научных трудов

Под общей ред. Ю.Я.Микельсона

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1981

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД,
ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Предлагаемый сборник содержит 13 научных статей, посвященных применению различных численных методов (метода конечных разностей, методов оптимизации, вариационных методов, интегральных преобразований и др.) для решения задач:

- магнитной гидродинамики с нелокальными краевыми условиями,
- нестационарного магнитного поля,
- динамики составных оболочечных конструкций,
- разрушения композитных цилиндрических оболочек и др.

Сборник предназначен для специалистов, работающих в области механики, электродинамики и прикладной математики, а также для научно-технических работников, аспирантов и студентов, интересующихся прикладными вопросами и вычислительными методами решения задач электродинамики и механики сплошных сред.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
ЛГУ им. П. Стучки

Э 20005-063у 45.81.1704000000
М 812(II)-81

© Латвийский
государственный
университет
им. П. Стучки, 1981

УДК 517.949 : 538.12. - 621.335

В.Я. Луза

ЛГУ им. П. Стучки

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТАХ

В режиме включения и выключения электромагнит работает в нестационарных режимах. Поэтому исследование поведения электромагнитов в нестационарных режимах представляет большой интерес. Но точное решение этой проблемы на данном этапе исследований является слишком трудной задачей. Поэтому рассматривается более простая в математическом отношении модель, учитывающая только основные физические эффекты.

Рассматривается электромагнит без учёта поворотов вокруг его осей и с механической точки зрения считаем его точечным. В модели учитывается зависимость магнитной проницаемости μ от величины магнитной индукции B .

Используется известная зависимость между напряжением в обмотке U , омическим сопротивлением обмотки R , индуктивностью системы подвеса L , током в обмотке I и временем t :

$$U(t) = I(t)R + \frac{d(L(t)I(t))}{dt} \quad (1)$$

Индуктивность электромагнита L для конкретного электромагнита зависит от величины намагничивающей силы Iw :

$$L = L(Iw).$$

Результирующую намагничивающую силу Iw можно выразить через ток в обмотке I , число витков n_0 и намагничивающую силу вихревых токов в феррорельсе Iw'

$$Iw = In_0 + Iw' \quad (2)$$

Так как

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dIw} \frac{dIw}{dt},$$

то учитывая зависимость (2) получаем

$$\frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dIw'} \left(n_0 \frac{dI}{dt} + \frac{dIw'}{dt} \right).$$

Следовательно уравнение (1) можно привести к виду:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U - I R + \frac{dL}{dIw'} \frac{dIw'}{dt}}{L + I n_0 \frac{dL}{dIw'}} \quad (3)$$

В уравнении (3) неизвестными функциями, подлежащими определению, являются индуктивность L и намагничивающая сила вихревых токов в феррорельсе Iw' .

Так как магнитное поле в феррорельсе в основном имеет y компоненту (рис. 1 и рис. 2) $B_{\varphi} = (0, B_{\varphi}, 0)$, то вихревые токи в основном имеют две компоненты $\vec{j}_{\varphi}(x, z) = (j_{\varphi x}, 0, j_{\varphi z})$.

Из уравнений Максвелла следует, что

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial t},$$

так как

$$\vec{j}_{\varphi} = \sigma_{\varphi} \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{j}_{\varphi} = - \sigma_{\varphi} \frac{dB_{\varphi}}{dt}, \quad (4)$$

где σ_{φ} - удельная проводимость феррорельса.

Проводя интегрирование уравнения (4) по площади, где B_{φ} отлично от нуля в плоскости XOZ , имеем (рис. 1)

$$\int \text{rot } \vec{j}_{\varphi} d\vec{s} = \oint_L \vec{j}_{\varphi} d\vec{l} = - \sigma_{\varphi} \int_S \frac{dB_{\varphi}}{dt} d\vec{s},$$

и проводя усреднение, получаем

$$j_{\varphi} = - \sigma_{\varphi} \frac{dB_{\varphi}}{dt} \frac{d}{2(1+d/L_M)},$$

где d - толщина феррорельса,

L_M - длина электромагнита.

Для нахождения намагничивающей силы вихревых токов проведём интегрирование уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{H}' = \vec{j}_{\varphi},$$

где \vec{H}' - напряжённость магнитного поля, создаваемого вихревыми токами в плоскости YOZ по площади, где \vec{j}_{φ} отлично от нуля:

$$\int_S \text{rot } \vec{H}' d\vec{s} = \oint_L \vec{H}' d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{\varphi} d\vec{s}.$$

Получаем

$$H'(a_0 + d) = j_{\varphi} a_0 \frac{d}{2} = i\omega'$$

Значит имеем

$$i\omega' = -\sigma_{\varphi} \frac{dV_{\varphi}}{dt} \frac{d^2 a_0}{4(1+d/L_M)},$$

где a_0 - эквивалентная ширина феррорельса.

Так как индукция магнитного поля V_{φ} зависит от н.с. $i\omega$ и учитывая (3), получаем

$$\frac{d i\omega'}{dt} = -\sigma_{\varphi} \frac{d^2 a_0}{4(1+d/L_M)} \left[\frac{dV_{\varphi}}{d i\omega} n_0 (\mu - \gamma k_0) + \left(L + \gamma n_0 \frac{dL}{d i\omega} \right) i\omega' \right] / \left[\sigma_{\varphi} \frac{d^2 a_0}{4(1+d/L_M)} \frac{dV_{\varphi}}{d i\omega} L \right]. \quad (5)$$

Для решения уравнений (3) и (5) необходимо знать зависимость индуктивности L и индукции магнитного поля в феррорельсе V_{φ} как функцию от н.с. Нахождение этих функций в нестационарном случае является математически сложной задачей. Находим L и V_{φ} из модели электромагнита в статике. Считаем, что н.с. в статике γn_0 производит такое же воздействие на электромагнит, как и при одинаковых значениях суммарное н.с. $i\omega = \gamma n_0 + i\omega'$.

Численные результаты, полученные из двумерной точной модели в статике с учётом $\mu = \mu(B)$, но без учёта длины электромагнита $[l]$, аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} L &= A_1 + A_2 i\omega + A_3 i\omega^2 + A_4 i\omega^3 \\ V &= A_5 i\omega + A_6 i\omega^{3/2} + A_7 i\omega^2 + A_8 i\omega^{5/2} \\ F_L &= A_9 i\omega + A_{10} i\omega^{3/2} + A_{11} i\omega^2 + A_{12} i\omega^{5/2}, \end{aligned}$$

где F_L - сила притяжения.

Выбор формы аппроксимации ещё подлежит дальнейшему исследованию для определения наиболее подходящей формы.

По приведённой методике составлена и отлажена программа на алгоритмическом языке Фортран. Программа реализована для ЕС-1022 и занимает 150 к оперативной памяти (из них 100 к сами программы, 50 к - массивы).

Расчёт вариантов в статике (вычисления $A_i, i=1,2,\dots,12$)

требует 20 минут. Один вариант счёта переходных процессов занимает порядка 5 минут.

В качестве примера расчёта выбран электромагнит со следующими геометрическими параметрами: длина электромагнита (полоса и ярма) 0,6 м, ширина магнитопровода 0,2 м, толщина магнитопровода 0,04 м, заход магнитопровода за обмотку 0,01 м. Площадь сечения обмотки (0,09 x 0,05) м². Ширина феррорельса 0,24 м, толщина - 0,03 м. Площадь сечения одного провода $8,4 \cdot 10^{-6}$ м², а общее число витков (обоих катушек) 540, коэффициент заполнения 0,7. Магнитопровод сделан из стали Э330, а феррорельс из Ст 30. Удельная проводимость феррорельса $4 \cdot 10^5$ Ом⁻¹·м⁻¹, а обмотки $2,8 \cdot 10^7$ Ом⁻¹·м⁻¹. Имеются две обмотки на полюсах, подключённые последовательно. Омическое сопротивление обмотки 3,4 Ом.

Исследуется наброс и сброс напряжения U в обмотках при постоянном воздушном зазоре δ . Вычисляются величина тока I в обмотке, индуктивность системы L и подъёмная сила F_L от времени t при разных значениях зазора δ .

На рис. 3 представлена зависимость тока I от времени t при включении электромагнита (от $t=0$, напряжение в обмотке за 0,001 с меняется линейно от 0 В до 80 В), для различных воздушных зазоров δ .

На рис. 4 отображена зависимость силы притяжения F_L , а на рис. 5 индуктивности от времени при включении.

Из рис. 3, рис. 4 и рис. 5 следует, что переходные процессы при меньших зазорах проходят медленнее, чем при больших. Это связано с большей индуктивностью и тем, что в феррорельсе при меньших зазорах δ вихревые токи в феррорельсе больше.

На рис. 6 отображена зависимость тока I от времени при выключении электромагнита (от $t=0$, напряжение в обмотке за 0,001 с меняется линейно от 80 В до 0 В), для различных воздушных зазоров.

На рис. 7 представлена зависимость притяжения силы F_L , а на рис. 8 индуктивности L от времени t при выключении.

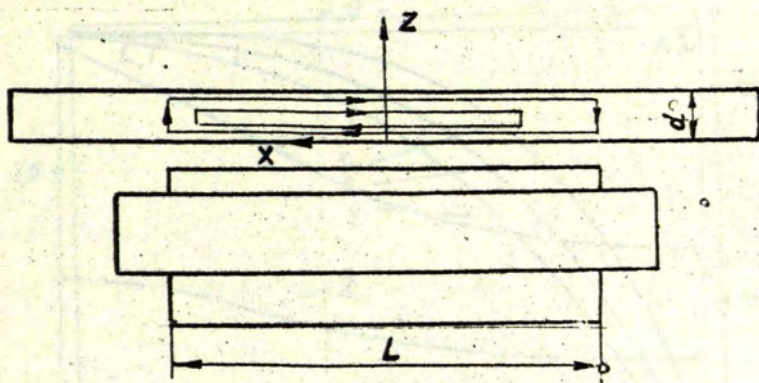


Рис. 1. Электромагнит в плоскости xOz

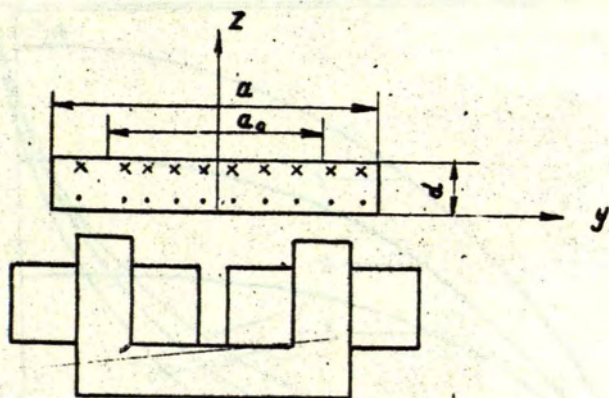


Рис. 2. Электромагнит в плоскости yOz

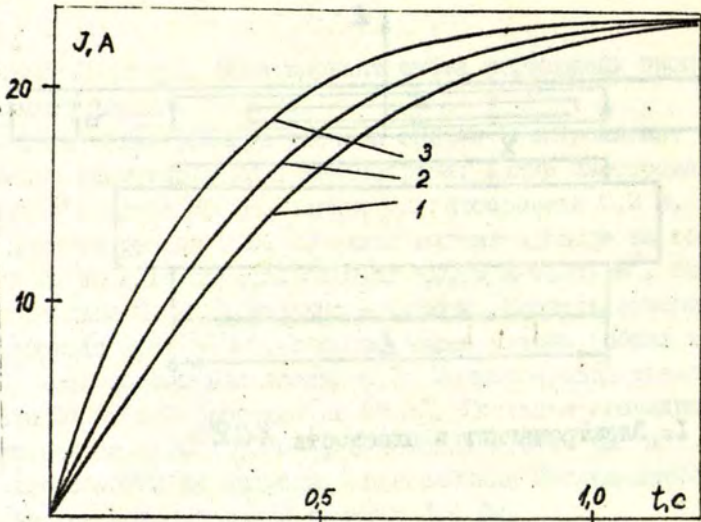


Рис. 3. Зависимость тока I в обмотке от времени при включении для воздушных зазоров: 1 - 0,010 м, 2 - 0,015 м, 3 - 0,020 м.

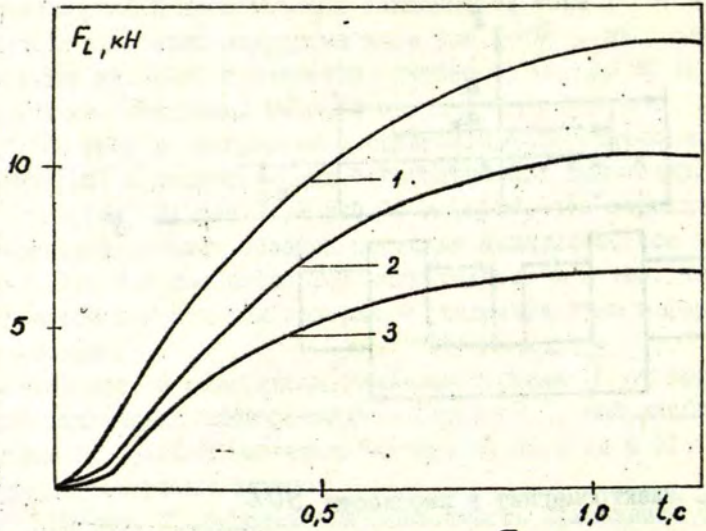


Рис. 4. Зависимость силы притяжения F_L от времени при включении для воздушных зазоров: 1 - 0,010 м, 2 - 0,015 м, 3 - 0,020 м.

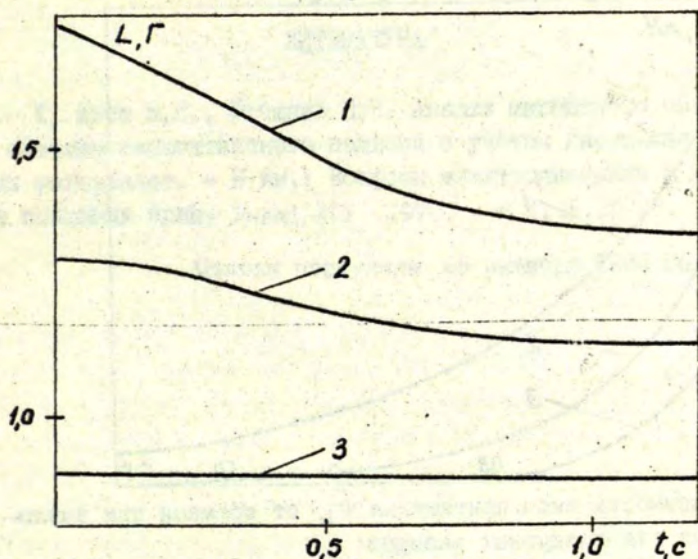


Рис. 5. Зависимость индуктивности L от времени при включении для воздушных зазоров: 1 - 0,010 м, 2 - 0,015 м, 3 - 0,020 м.

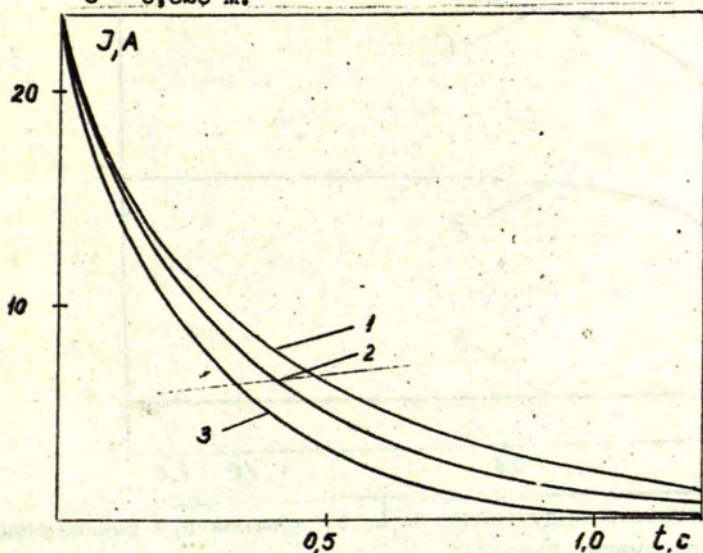


Рис. 6. Зависимость тока J в обмотке от времени при включении для воздушных зазоров: 1 - 0,010 м, 2 - 0,015 м, 3 - 0,020 м.

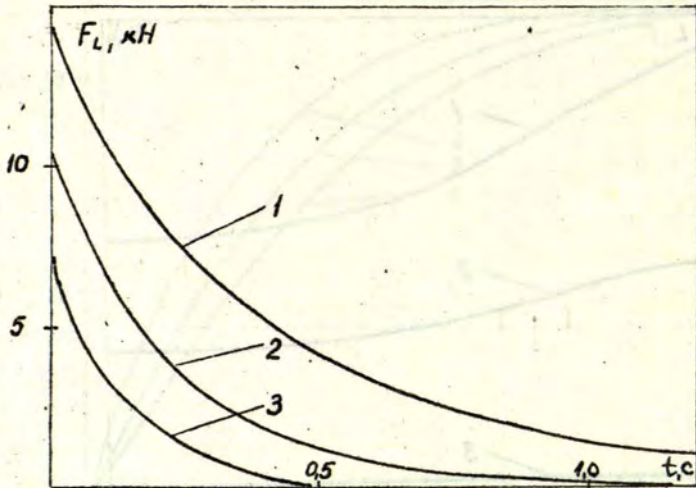


Рис.7. Зависимость силы притяжения F_L от времени при выключении для воздушных зазоров:
1 - 0,010 м, 2 - 0,015 м, 3 - 0,020 м.

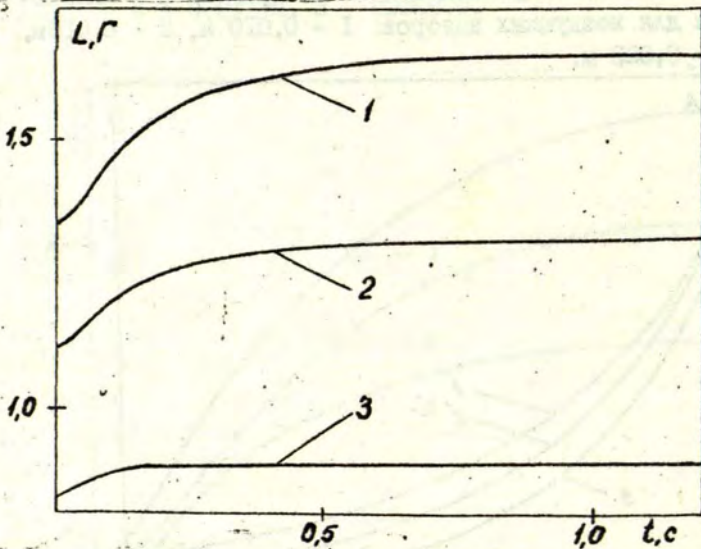


Рис.8. Зависимость индуктивности L от времени при выключении для воздушных зазоров:
1 - 0,010 м, 2 - 0,015 м, 3 - 0,020 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ауза В.Я., Устинов Н.Н. Анализ магнитного поля и сил в системе бесконтактного подвеса с учётом насыщения магнитных материалов. - В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига: ЛГУ, 1978, вып.4, с.16-29.

Статья поступила 28 октября 1980 года

Применяя вместо магнитной проницаемости μ обратную величину $\nu = 1/\mu$, и учитывая, что в данной постановке векторный потенциал A имеет только x компоненту $\vec{A} = (A, 0, 0)$ из (1) и $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, получаем

$$\oint_L \left(\nu \frac{\partial A}{\partial x} dy - \nu \frac{\partial A}{\partial y} dx \right) = J \quad (2)$$

где \vec{B} - магнитная индукция.

В модели пренебрегается концевыми эффектами по длине. Не учитывается дискретная структура обмотки. Принимается, что во всей области обмотки протекает ток с усреднённой плотностью. Величина ν зависит от индукции магнитного поля B в магнитопроводе и феррорельсе.

Используется неравномерная расчётная сетка с шагами $h_j, j=1, 2, \dots, L$ по оси y и с шагами $h_k, k=1, 2, \dots, N$, по оси x . Считаем, что обратная величина магнитной проницаемости ν и плотность тока J в пределах расчётной ячейки не меняются. Проводя интегрирование вокруг точки (y_j, x_k) (подробнее изложено в [1]), получаем конечно-разностное уравнение

$$A_{jk} = (0,5(S_{jk} + S_{j,k-1} + S_{j-1,k} + S_{j-1,k-1}) + C_{jk} A_{j+1,k} + C_{j-1,k} A_{j-1,k} + e_{jk} A_{j,k+1} + e_{j,k-1} A_{j,k-1}) / (C_{jk} + C_{j-1,k} + e_{jk} + e_{j,k-1}) \quad (3)$$

где $S_{jk} = J_{jk} h_j h_k$

$$C_{jk} = (\nu_{j,k-1} h_{k-1} + \nu_{jk} h_k) / h_j$$

$$e_{jk} = (\nu_{j-1,k} h_{j-1} + \nu_{jk} h_j) / h_k,$$

$$j=2, 3, \dots, L; k=2, 3, \dots, N.$$

Полученные консервативные разностные уравнения имеют первый порядок аппроксимации для неравномерной сетки и решаются методом последовательной верхней релаксации.

Массив значений ν_{jk} пересчитывается через 4 итерации методом нижней релаксации с коэффициентом α

$$\nu_{jk}^n = (1 - \alpha) \nu_{jk}^{n-1} + \alpha \nu_{jk}^m$$

где ν_{jk}^m вычисляется по следующей формуле:

$$D_{jk}^m = D_{1m} + D_{2m} B_{jk}^2 + D_{3m} B_{jk}^4 + D_{4m} B_{jk}^6,$$

а массивы коэффициентов кусочной аппроксимации $D_{Lm}, L=1,2,3,4$ вычислены заранее и заданы в виде одномерных массивов для конкретной стали. Величина m определяется как целая часть от $(B_{jk}^2 + 1) / \Delta B^2$, где ΔB^2 — величина области аппроксимации. Константы аппроксимации определены таким образом, чтобы функция $D(B^2)$ и первая производная по B^2 была непрерывна в точках сшивания.

Численно проведены исследования силы притяжения по оси y F_y и по оси x F_x от смещения феррорельса d_2 и высоты зубцов феррорельса h_5 (при $h_5=0$ феррорельс плоский).

Для расчётов сил выбраны следующие параметры (см. рис. I)

$$d_1 = 0,055 \text{ м,}$$

$$h_1 = 0,040 \text{ м,}$$

$$d_3 = 0,040 \text{ м,}$$

$$h_2 = 0,070 \text{ м,}$$

$$d_4 = 0,010 \text{ м,}$$

$$h_3 = 0,010 \text{ м,}$$

$$h_4 = 0,012 \text{ м,}$$

$$h_6 = 0,030 \text{ м,}$$

длина электромагнита 1 м. Магнитопровод изготовлен из стали Э330, а феррорельс из Ст 30. Принимаем, что на расстоянии 1 м от центра электромагнита векторный потенциал A равен нулю.

На рис. 2 приведены численные значения силы F_x , а на рис. 3 силы F_y , при разных значениях ампервитков Iw (суммарное число ампервитков в обеих обмотках) в зависимости от смещения феррорельса d_2 . Феррорельс является плоским, т.е. высота его зубцов $h_5=0$. Сила F_x уменьшается при возрастании d_2 , а сила F_y имеет максимум, который при увеличении Iw смещается при больших значениях d_2 .

На рис. 4 отобразена зависимость силы F_y от высоты зубцов феррорельса h_5 при разных значениях ампервитков электромагнита Iw ($d_2=0,01$ м). Имеется слабо выраженный максимум F_y в интервале изменения h_5 от 0,07 до 0,09 м. Подъёмная сила при изменении h_5 от 0,0 м до 0,12 м уменьшается на 7÷10%.

На рис. 5 и рис. 6 представлено распределение модуля $B = (B_y^2 + B_x^2)^{0,5}$ индукции магнитного поля в воздушном зазоре по оси y , для случая плоского феррорельса и ампервитках электромагнита.

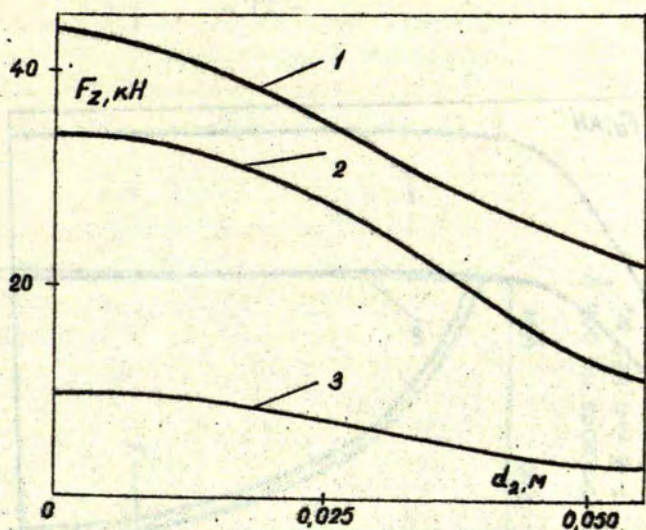


Рис. 2. Зависимость притяжения силы F_z от смещения феррорельса d_2 , 1 - $I_w = 28$ кА, 2 - $I_w = 20$ кА, 3 - $I_w = 10$ кА.

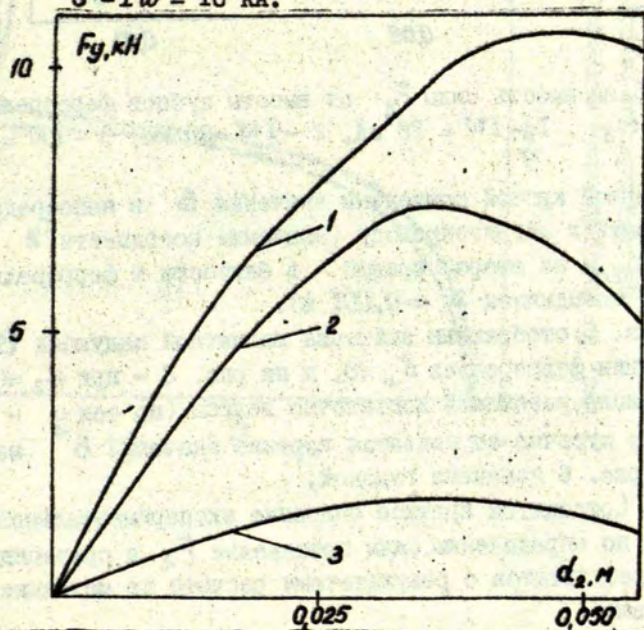


Рис. 3. Зависимость силы F_y от смещения феррорельса d_2 . 1 - $I_w = 28$ кА, 2 - $I_w = 20$ кА, 3 - $I_w = 10$ кА.

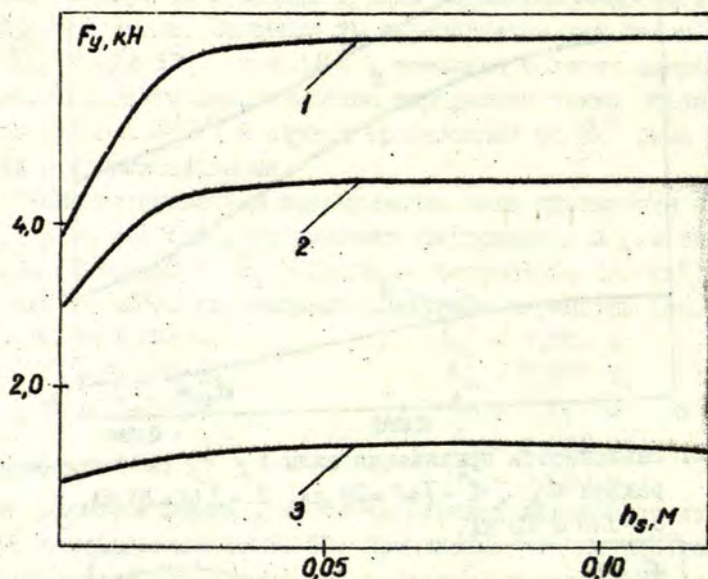


Рис. 4. Зависимость силы F_y от высоты зубцов феррорельса h_2 . 1 - $I\omega = 28$ кА, 2 - $I\omega = 20$ кА, 3 - $I\omega = 10$ кА.

На первой кривой приведены значения B в непосредственной близости к магнитопроводу (значение координаты $z = -0,011$ м), а на второй кривой - в близости к феррорельсу (значение координаты $z = -0,001$ м).

На рис. 5 отображены значения магнитной индукции B при смещении феррорельса $d_2 = 0$, а на рис. 6 - при $d_2 = 0,04$ м. Так как число разбиений достаточно велико, (по оси y - 42 точки), то кусочно-ступенчатая картина значений B на рис. 5 и рис. 6 заменена гладкой.

Далее пригодятся краткое описание экспериментальной установки по определению силы притяжения F_z и сравнение полученных результатов с результатами расчёта по методике, изложенной выше.

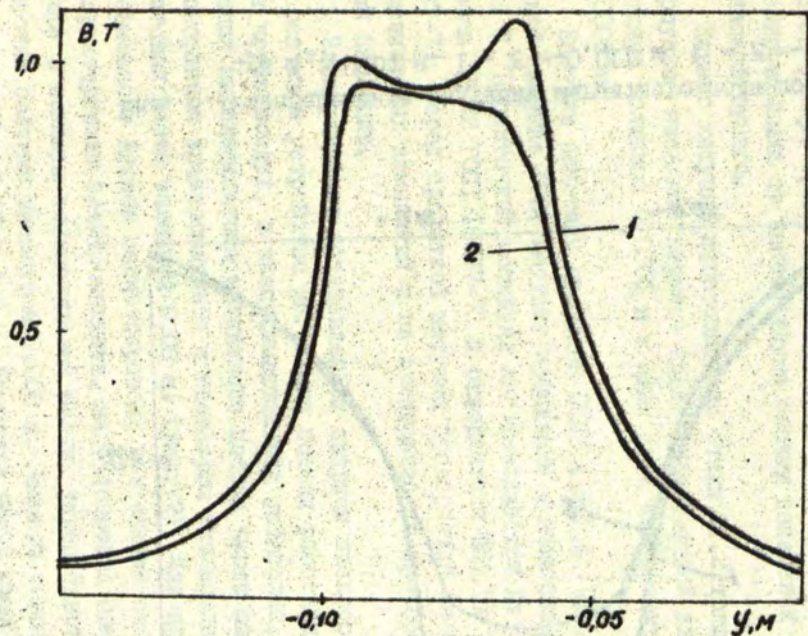


Рис. 5. Распределение индукции магнитного поля по оси y при несмещённом феррорельсе. 1 - $z = -0,011$ м, 2 - $z = -0,001$ м.

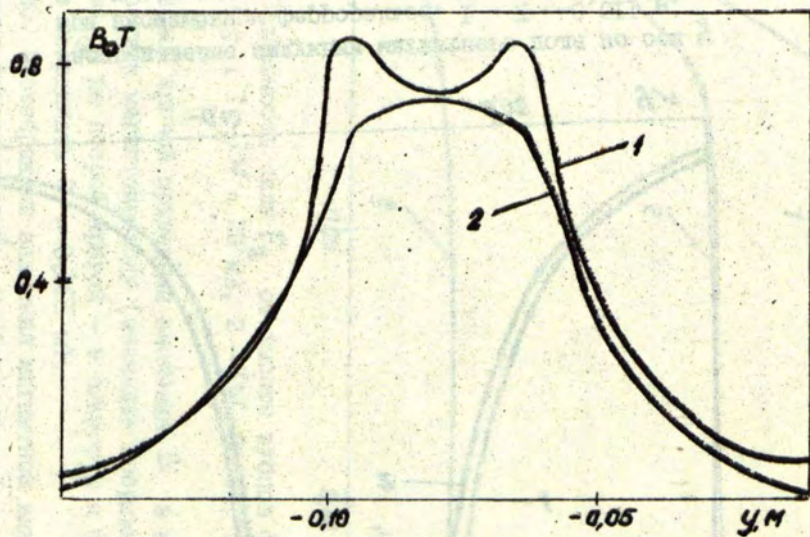


Рис. 6. Распределение индукции магнитного поля по оси y
 при $d_2 = 0,04$ м. 1 - $z = -0,011$ м, 2 - $z = -0,001$ м.

Главной составной частью экспериментальной установки является электромагнит с П-образным магнитопроводом и двумя катушками. Магнитопровод собран из листов электротехнической стали Э330 толщиной 0,003 м, серийно изготавливаемых электротехнической промышленностью. Невозможность получения идеального постоянного тока вызывает появление вихревых токов и в статике, поэтому листы магнитопровода изолированы электроизоляционным лаком 243 печной сушки. Пакет листов стянут тремя стальными шпильками диаметром 0,006 м, изолированными от пакета двумя слоями запечённой электротехнической бумаги.

Каркас катушки изготовлен из стали Ст.2 толщиной 0,001 м. Корпусная изоляция каркаса представляет собой два слоя стеклоткани толщиной 0,0005 м и один слой электронита толщиной 0,0005 м.

Катушки намотаны проводом ПСДК 4,5х1,5. Число витков в одной катушке 178. Катушки пропитаны в компаунде типа монолит 2. Пропиточный компаунд изготавливается из эпоксициной смолы ЭД-22 ГОСТ 10587-72 и отвердителя ИМТГФА ТУ38-103. I49-73. Перед пропиткой катушка проверяется на отсутствие межвитковых замыканий и на электрическую прочность корпусной изоляции.

Электромагнит установлен на сварном швеллере. Поскольку в реальном устройстве магнитные потоки рассеивания замыкаются через воздух, в экспериментальной установке, для уменьшения нежелательного магнитного потока через швеллер, между основанием электромагнита и швеллером установлена текстолитовая плита толщиной 0,06 м. (рис. 7). Для предотвращения возможного изгиба магнитопровода при снятии статистических характеристик электромагнита, магнитопровод прижат к швеллеру с помощью текстолитовой балки, укрепленной к швеллеру шестью болтами диаметром 0,008 м. Размеры текстолитовой балки 0,04 х 0,06 х 1,4 м. Крепящие болты были размещены на концах текстолитовой балки и не проходили через магнитопровод. Во время эксперимента, когда подъёмная сила F_2 достигала порядка 4 кН, текстолитовая балка начинала изгибаться. Поэтому чтобы предотвратить изгибание текстолитовой

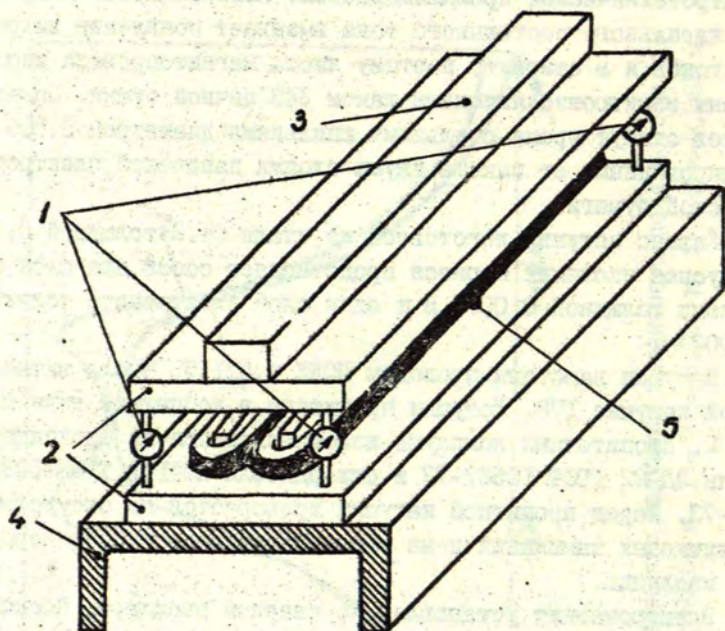


Рис. 7. Схема определения статических характеристик подъемного электромагнита

- 1 - динамометр
- 2 - текстолит
- 3 - феррорельс
- 4 - швеллер
- 5 - электромагнит

балки, два аналогичных болта были пропущены и через магнитопровод. Это позволило получить экспериментальные результаты и при F_x больше, чем 4 кН.

Подъёмная сила электромагнита определялась с помощью четырёх динамометров типа ДОСМ-3-1. Максимальная ошибка, вносимая этими динамометрами, не превышает 5%. При сравнении расчётных и экспериментальных результатов основные трудности связаны с тем, что в математической модели воздушный зазор считается постоянным по длине магнитопровода, а в реальной установке зазор не полностью соответствует этому представлению. В некоторых экспериментах разница воздушного зазора по длине магнитопровода доходила до 10 мм. Это было в тех случаях, когда феррорельс имел изгиб вниз (к магнитопроводу), который при увеличении F_x всё более увеличивался и, таким образом, (так как концы феррорельса опирались на динамометры) воздушный зазор в центре магнитопровода оказывался меньше, чем на краях. Но при повороте феррорельса с изгибом от магнитопровода удавалось (при увеличении F_x) получить довольно постоянный воздушный зазор по длине магнитопровода. Эквивалентный воздушный зазор для расчётов определяем следующим образом

$$h_4 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta_i^q} \right)^{-1/q} \quad (4)$$

где N - число измерений зазора δ_i в эксперименте, а $q = -1, 1, 2, 3$. При $q = -1$ h_4 просто среднее арифметическое.

Приводятся значения силы притяжения для следующего электромагнита (см. рис. 1)

$d_1 = 0,053$	$h_1 = 0,042$ м,
$d_2 = 0,000$ м,	$h_2 = 0,053$ м,
$d_3 = 0,042$ м,	$h_3 = 0,010$ м,
$d_4 = 0,050$ м,	$h_5 = 0,000$ м,
	$h_6 = 0,030$ м,

длина магнитопровода 0,93 м. Магнитопровод изготовлен из стали Э330, а феррорельс из Ст 30.

В таблице I отображены четыре экспериментальных значения силы притяжения $F_{эк}$ и значения эквивалентного воздуш-

ного зазора h_y , вычисленного по формуле (4) при разных значениях ρ , и вычисленная сила притяжения F_x .

Таблица 1. Значения сил притяжения

Номер эксперимента	$I\omega$, кА	$F_{ак}$, кН	$\rho = -1$		$\rho = 1$		$\rho = 2$		$\rho = 3$	
			F_x , кН	h_y , мм	F_x , кН	h_y , мм	F_x , кН	h_y , мм	F_x , кН	h_y , мм
1	7832	2,94	2,65	18,90	2,79	18,26	2,90	17,93	2,96	17,88
2	8544	4,33	4,54	15,40	4,66	15,19	4,72	15,08	4,76	15,03
3	9256	8,42	9,08	11,49	9,23	11,33	9,35	11,26	9,39	11,23
4	8116	12,65	12,01	8,52	12,80	8,19	13,11	8,04	13,24	7,98

Значения зазоров δ_i между феррорельсом и полюсами магнитопровода определялись в 22 точках (попарно, с интервалом 9,5 мм по длине) для каждого эксперимента. Эти значения приведены в таблице ...

Таблица 2. Значения зазоров δ_i

Номер экспериментов	δ_i , мм										
1	20	16	14,5	16	14	14	13	19	21,5	24,2	26
	24	21	19	17	17,5	17,5	17,8	19	21	21,8	22
2	14	15	16	16,5	17	16,5	16	15	15	15	14
	16	17	17,7	18	18	16,5	15,1	14	12,5	12	12
3	9,5	10	10,6	11,8	13,1	12,1	11,4	11,2	11,8	11,5	11,9
	12	12,5	13,5	13,2	13,1	12,7	12,0	10,8	9,5	9,3	9,3
4	6,5	6,5	6,2	8	8,6	7,5	7,1	6,5	7,7	7,9	9
	10,8	11,8	11,5	10,5	11	10,8	9	8,2	7,1	7,1	8,1

При анализе результатов, приведённых в таблице 1, необходимо учесть, что в первом эксперименте феррорельс был

изогнут в сторону магнитопровода, т.е. в середине δ_i имеет наименьшие значения, а в других случаях — от магнитопровода.

Необходимо также учесть, что двумерная математическая модель даёт завышенные результаты по сравнению с трёхмерной моделью в статике [2]. При зазоре $h_4 = 18,9$ мм и $I_w = 7832$ А получаем $F_z = 2,57$ кН, а при $h_4 = 8,52$ мм и $I_w = 8116$ А получаем $F_z = 11,43$ кН.

Анализ полученных результатов показывает, что при феррорельсе, изогнутом в сторону магнитопровода, хорошие совпадения расчётных и экспериментальных результатов даёт определение h_4 по формуле (4) при $\rho = 3$, если отношение эквивалентного воздушного зазора к ширине магнитопровода $h_4/d_3 \geq 1/4$ и $\rho = 2$, если $h_4/d_3 < 1/4$.

Для случая, когда феррорельс изогнут в сторону от магнитопровода, необходимо выбирать $\rho = 1$ для $h_4/d_3 \geq 1/3$ и $\rho = -1$ для $h_4/d_3 < 1/3$.

Таким образом, предложенная формула (4) для расчёта эквивалентного воздушного зазора позволяет использовать математические модели электромагнита для прогнозирования экспериментального измерения сил с реальными феррорельсами, имеющими некоторый прогиб по длине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ауза В.Я., Устинов Н.Н. Анализ магнитного поля и сил в системе бесконтактного подвеса с учётом насыщения магнитных материалов. — В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига: ЛГУ, 1978, вып. 4, с. 16-29.

2. Ауза В.Я., Устинов Н.Н. Методика расчёта трёхмерного магнитного поля и сил в статике с учётом насыщения магнитных материалов. — В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Рига: ЛГУ, 1980, с. 59-67.

УДК 538.54.001.24

К.Э.Воеводский, В.М.Кочетков

Ленинградский институт инженеров
железнодорожного транспорта

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИЛ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ДВИЖУЩИМИСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТАМИ
И ПРОВОДЯЩЕЙ СТРУКТУРОЙ

Вопрос, связанные с расчётом силового взаимодействия между движущимися электромагнитами и вихревыми токами, наведёнными ими в электропроводящей структуре, приобрели в последние годы значительную актуальность в связи с появлением ряда новых технических направлений, использующих эффект магнитного удержания движущегося электромагнита над пластинами из проводящего материала. Физическая постановка задачи при этом состоит в следующем. В области $|z| < T/2$ (в декартовой системе координат x, y, z) располагается тело с удельной электропроводностью σ , а параллельно границе тела в горизонтальном направлении x движутся со скоростью v электромагниты. Последние могут располагаться как по одну сторону от проводящего тела (в области $z > T/2$), так и по обе стороны от него (в областях $|z| > T/2$). На систему движущихся электромагнитов действует полный вектор силы F , имеющий вертикальную компоненту F_z и горизонтальную F_x (последняя отрицательна по величине; её модуль называют обычно силой торможения).

Для оценки качества систем магнитного удержания используют отношение $\beta = F_z / |F_x|$. В связи с тем, что в пренебрежении омическими потерями в электромагнитах (на практике электромагниты обычно выполняют сверхпроводящими) затрачиваемая

на удержание мощность равна $v|F_x|$, величина β/v определяет силу магнитного удержания F_x на единицу затрачиваемой мощности. Величина β далее именуется параметром качества.

Вопрос о предельно достижимом значении параметра качества и зависимости последнего от характеристик системы магнитного удержания представляет значительный практический интерес. В настоящей работе эти вопросы рассмотрены сначала для варианта одностороннего расположения электромагнитов над проводящей полосой, затем двустороннего.

1. Параметр качества для односторонней системы магнитного удержания

Вектор силы \vec{F}^1 , действующей на систему электромагнитов при одностороннем расположении последней над пластиной может быть найден известными методами [1]:

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}^* R(\vec{k}) \left| \left(\vec{S}, \sum_{n=1}^M \dot{I}_n \vec{N}_n \right) \right|^2 dk_x dk_y. \quad (1)$$

В формуле (1) приняты следующие обозначения: μ_0 - магнитная постоянная, $\vec{S} = ik_x \vec{e}_x + ik_y \vec{e}_y + k \vec{e}_z$ (\vec{e}_x и \vec{e}_y - орты на плоскости k_x, k_y соответственно по направлениям координатных осей x и y , $\vec{e}_z = [\vec{e}_x, \vec{e}_y]$, $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$,

i - мнимая единица); величина $R(\vec{k})$ определяется равенством

$$R(\vec{k}) = \frac{k - \alpha}{k + \alpha} \left[1 - \exp(-2\alpha T) \right] / \left[1 - \left(\frac{k - \alpha}{k + \alpha} \right)^2 \exp(-2\alpha T) \right], \quad (2)$$

где $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y$, $\alpha = (k^2 - i\mu_0 \beta v k_x)^{1/2}$, причём берётся ветвь корня с положительной вещественной частью. Считается, что электромагнит (или система электромагнитов) состоит из M токовых контуров с токами \dot{I}_n ($1 \leq n \leq M$) в каждом контуре; векторы \vec{N}_n в (1) зависят от формы и ориентации токовых контуров и определяются равенствами

$$\vec{N}_n = \iint_{S_n} \vec{n} \exp(-ik_x x - ik_y y - kz) dS. \quad (3)$$

В формуле (3) интегрирование производится по поверхности S_n , натянутой на n -ый токовый контур, \vec{n} - единичная нормаль к

этой поверхности. Звёздочкой в (I) обозначено комплексное сопряжение.

Параметр качества $\beta = F_k^*/|F_k|$ определяется, таким образом, отношением

$$\beta = \iint_{-\infty}^{\infty} R(\vec{k}) Q(\vec{k}) dk_x dk_y / i \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x}{k} R(\vec{k}) Q(\vec{k}) dk_x dk_y,$$

где вещественная функция $Q(\vec{k})$ равна $|\vec{\xi}, \sum_{n=1}^M \vec{i}_n \vec{N}_n|^{(4)}$. Для вещественной и мнимой частей величины $R(\vec{k})$, задаваемой формулой (2), введём соответственно обозначения $R_1(\vec{k})$ и $R_2(\vec{k})$. Учитывая характер чётности по k_x и k_y величин $R_1(\vec{k})$ и $R_2(\vec{k})$, получаем для β

$$\beta = - \iint_{-\infty}^{\infty} R_1(\vec{k}) Q(\vec{k}) dk_x dk_y / \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x}{k} R_2(\vec{k}) Q(\vec{k}) dk_x dk_y. \quad (5)$$

Если вместо реального источника рассмотреть его фурье-гармонику по переменным x и y , определяемую волновыми числами k_x и k_y , то из (5) получаем

$$\beta = - \frac{k}{k_x} \frac{R_1(\vec{k})}{R_2(\vec{k})}.$$

В явном виде через параметры системы величина β даётся при этом формулой

$$\beta = \frac{u v (\operatorname{ch} 2uT - \cos 2vT) + k (v \operatorname{sh} 2uT - u \sin 2vT)}{k_x (u \operatorname{sh} 2uT + v \sin 2vT) + k (\operatorname{ch} 2uT - \cos 2vT)}, \quad (6)$$

где u и v - соответственно вещественная и мнимая части комплексного параметра d :

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{k^2 + \lambda^2 k_x^2 + k^2})^{1/2}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{k^2 + \lambda^2 k_x^2 - k^2})^{1/2}; \quad \lambda = \mu_0 \delta v.$$

Из анализа соотношения (6) можно получить, что параметр качества увеличивается при уменьшении $|k|$. При $\lambda k_x T^2 \ll 1$ и $kT \ll 1$, используя соответствующие разложения функций, входящих в формулу (6), получаем для β максимально возможное значение

$$\beta_{\max} = \frac{1}{2} \lambda T, \quad \lambda = \mu_0 \delta v, \quad (7)$$

которое оказывается независимым от k .

Приведённое рассмотрение делает очевидным утверждение,

что для произвольного одностороннего источника магнитного поля максимально возможное значение параметра качества определяется формулой (7). Строгое доказательство, основывающееся на использовании точной формулы (5), определяющей параметр качества для произвольной односторонней системы магнитного удержания, может быть проведено следующим образом. Подынтегральное выражение числителя формулы (5) представим в виде произведения

$$\left[-\frac{\kappa}{\kappa_x} \frac{R_1(\vec{R})}{R_2(\vec{R})} \right] \left[\frac{\kappa_x}{\kappa} R_2(\vec{R}) Q(\vec{R}) \right].$$

Учитывая далее знакопостоянство функций $\kappa_x R_2(\vec{R})$ и $R_1(\vec{R})$ и оценивая числитель формулы (5) посредством вынесения за интеграл величины $(-\kappa/\kappa_x)[R_1(\vec{R})/R_2(\vec{R})]$, получаем неравенство

$$\beta \leq \max_{\kappa_x, \kappa_y} \left\{ -\frac{\kappa}{\kappa_x} \frac{R_1(\vec{R})}{R_2(\vec{R})} \right\}. \quad (8)$$

В соответствии с изложенным выше правая часть этого неравенства тождественна выражению (7), и, таким образом, формула (7) действительно определяет максимально достижимое значение параметра качества для произвольной односторонней системы магнитного удержания.

Хотя точное значение параметра β , определяемое формулой (7), реализуется, строго говоря, при $\vec{R} = 0$, тем не менее для значений \vec{R} , оказывающихся практически существенными при разложении в спектр поля реальных источников, формула (7) даёт довольно хорошее приближение. По этой причине действительные значения параметра качества обычно ненамного ниже уровня (7).

2. Параметр качества в системе с двусторонним расположением источников магнитного поля

Напомним, что двусторонней системой мы называем совокупность двух электромагнитов с движущимся между ними проводящим телом. Формы как электромагнитов, так и проводника могут быть совершенно произвольными, тем не менее мы примем одно упрощающее предположение, а именно, будем считать, что

вся система обладает зеркальной симметрией относительно срединной плоскости $Z = 0$. Отказ от этого предположения не вносит сколь-нибудь серьезных изменений в окончательные результаты.

При заданной геометрии системы её электромагнитные свойства определяются токами в верхнем и нижнем электромагнитах - \dot{I}_1 и \dot{I}_2 . Мы будем считать, что направления обхода токовых контуров в электромагнитах взаимно противоположны, таким образом совпадение знаков \dot{I}_1 и \dot{I}_2 отвечает случаю встречной ориентации верхнего и нижнего токов.

Очевидно, суммарная сила, действующая на составной источник, является квадратичной функцией токов \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , причём в силу вертикальной симметрии X -компонента силы есть симметричная, а Z -компонента - антисимметричная квадратичные формы. Таким образом,

$$F_z^{(2)} = f_{11z}(\dot{I}_1^2 - \dot{I}_2^2); F_x^{(2)} = f_{11x}(\dot{I}_1^2 + \dot{I}_2^2) - 2f_{12} \dot{I}_1 \dot{I}_2. \quad (9)$$

Здесь f_{11z} , f_{11x} , f_{12} - коэффициенты квадратичных форм, верхним индексом "(2)" помечены величины, характеризующие двустороннюю систему. При $\dot{I}_2 = 0$ силы $F_z^{(2)}$ и $F_x^{(2)}$ принимают значения $F_z^{(1)} = f_{11z} \dot{I}_1^2$ и $F_x^{(1)} = f_{11x} \dot{I}_1^2$, отвечающие случаю одностороннего источника. Отсюда с учётом соотношений (9):

$$F_z^{(2)}/F_z^{(1)} = 1 - t^2, \quad F_x^{(2)}/F_x^{(1)} = 1 + t^2 - 2\gamma t, \quad (10)$$

где $t = \dot{I}_2/\dot{I}_1$, $\gamma = f_{12}/f_{11x}$, и, следовательно,

$$\eta \equiv \beta^{(2)}/\beta^{(1)} = (1 - t^2)/(1 + t^2 - 2\gamma t). \quad (11)$$

Величину η можно назвать относительным параметром качества, так как она показывает, во сколько раз параметр качества двусторонней системы $\beta^{(2)}$ превосходит значение этого параметра $\beta^{(1)}$ для односторонней системы той же геометрии.

График функции $\eta(t)$ схематически представлен на рис. I, причём отмеченные на этом рисунке значения t_0 и η_{\max} определяются формулами:

$$t_0 = (1 - \sqrt{1 - \gamma^2})/\gamma; \quad \eta_{\max} = (1 - \gamma^2)^{-1/2}. \quad (12)$$

Отметим, что представленный график отвечает случаю $0 < \gamma < 1$.

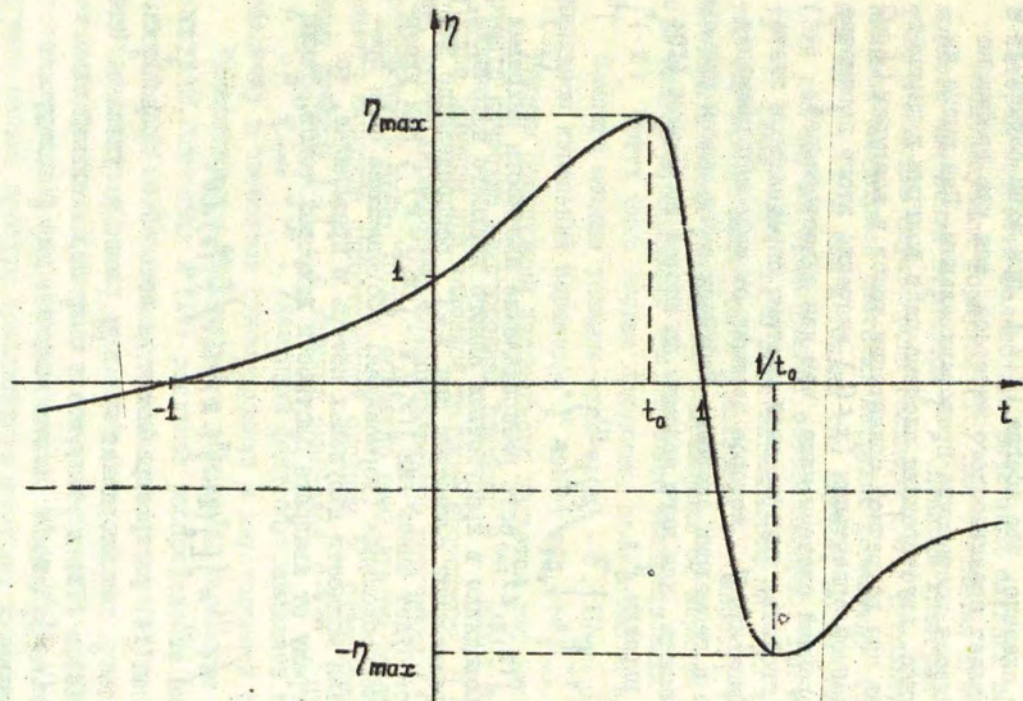


Рис. I. Зависимость относительного параметра качества $\eta = \beta^{(2)}/\beta^{(1)}$ от отношения токов $t = \dot{I}_2/\dot{I}_1$.

При $-1 < \gamma < 0$ этот график симметрично отразится относительно оси ординат, причём формулы (12) останутся в силе, в случае же $|\gamma| \geq 1$ величина η_{\max} обратится в бесконечность. Ниже будет сказано, что всегда $|\gamma| < 1$, при этом случай $\gamma < 0$ не представляет практического интереса, так что график на рис. 1 является достаточно представительным. Как видно из этого рисунка, двусторонняя система даёт выигрыш в параметре качества при встречной ориентации токов в контурах ($t > 0$), а при согласной ориентации ($t < 0$) значенке этого параметра для двусторонней системы ниже, чем для односторонней.

Итак, свойства двусторонней системы определяются значением коэффициента γ , которое зависит от скорости движения проводника и геометрии системы. Займёмся вычислением упомянутой зависимости, для чего положим во второй из формул (10) $t=1$ и выразим γ :

$$\gamma = 1 - F_x^{(2)} \Big|_{t=1} / (2F_x^{(1)}). \quad (13)$$

Пусть $\vec{j}(x, y, z)$ есть распределение плотности вихревых токов в проводнике в присутствии одного верхнего источника. В силу вертикальной симметрии при $t=1$ распределение вихревых токов будет иметь вид $\vec{j}(x, y, z) - \vec{j}(x, y, -z)$. Как указывалось выше, продольная (тормозящая) составляющая силы пропорциональна мощности джоулевых потерь в проводнике, то есть интегралу от квадрата плотности вихревых токов. Таким образом,

$$F_x^{(2)} \Big|_{t=1} / F_x^{(1)} = \int [\vec{j}(z) - \vec{j}(-z)]^2 dV / \int \vec{j}^2(z) dV. \quad (14)$$

Интегралы в (14) распространяются на весь объём проводника, зависимость \vec{j} от координат x и y явно не указана. Подставляя (14) в (13) и учтя, что в силу вертикальной симметрии $\int \vec{j}^2(z) dV = \int \vec{j}^2(-z) dV$ можно получить для γ следующее представление:

$$\gamma = \int \vec{j}(z) \vec{j}(-z) dV / \int \vec{j}^2(z) dV. \quad (15)$$

Как видно из приведённой формулы, для полного описания свойств двусторонней системы достаточно знать распределение вихревых токов в односторонней системе той же геометрии.

Следует отметить, что с точки зрения техники вычислений формула (15) удобнее прямого расчёта вихревых токов в двусторонней системе, так как при $t = I_2/I_1$ этот расчёт сопряжён с потерей точности вследствие вычитания близких величин.

Воспользуемся формулой (15) для отыскания диапазона возможного изменения параметра γ . Оценивая интеграл в числителе с помощью неравенства Гельдера [2] и пользуясь вертикальной симметрией системы, нетрудно доказать, что $|\gamma| < 1$, причём $\gamma = \pm 1$ в том и только том случае, когда $\vec{j}(z) = \pm \vec{j}(-z)$. (Эти два случая представляют особый интерес, так как при $|\gamma| = 1 \quad \eta_{\max} = \infty$). В действительности ни один из упомянутых случаев не может быть реализован в точности, так как плотность токов убывает по направлению от верхней поверхности вглубь проводника, тем не менее распределения $\vec{j}(z)$ и $\vec{j}(-z)$ могут быть весьма близкими, если толщина проводника T намного меньше толщины скин-слоя $-\delta$. Таким образом, диапазон изменения параметра γ имеет вид $-1 < \gamma_{\min} \leq \gamma < 1$.

Важным следствием изложенного является тот факт, что параметр качества двусторонней системы $\beta^{(2)}$ может быть сколь угодно высоким при заданной толщине проводника. В самом деле, пусть характерный волновой вектор источника $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y$ стремится к нулю. Тогда, согласно результатам раздела I, параметр качества односторонней системы $\beta^{(1)}$ стремится к конечному пределу $\frac{1}{2} \lambda T$, а толщина скин-слоя $\delta \rightarrow \infty$, откуда $\beta^{(2)} = \beta^{(1)} \eta_{\max} \rightarrow \infty$. Указанный факт обуславливает коренное различие в свойствах односторонней и двусторонней систем.

Исчерпывающую информацию о поведении параметра γ можно получить, подставив в (15) реальное распределение вихревых токов $\vec{j}(x, y, z)$. Учитывая сложный характер этого распределения (во многих случаях оно может быть найдено лишь численно), целесообразно иметь в распоряжении набор приближённых формул, пригодных для аналитического исследования. Можно получить весьма простую приближённую формулу, взяв в качестве $\vec{j}(x, y, z)$ распределение токов, наводимых в проводящем пространстве под действием однородного однокомпонентного внешнего поля, синусоидально изменяющегося во времени. Названная формула имеет вид

$$\gamma = \sin(T/\delta) / \operatorname{sh}(T/\delta) \quad (16)$$

Если источником внешнего поля считать движущуюся вдоль проводника "монокроматическую" токовую систему (то есть, систему, пространственный спектр которой содержит лишь одну компоненту с волновым вектором $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y$), то можно получить для γ следующее представление, которое несколько ближе отвечает реальной ситуации:

$$\gamma = u \sin vT / (v \operatorname{sh} uT). \quad (17)$$

Здесь u и v определяются так же, как в равенстве (6). Наконец, если проводящее полупространство заменить плоским слоем толщины T , формула для γ примет вид

$$\gamma = \frac{2 \sin vT [u^3 \operatorname{ch} uT + k(u^2 + v^2) \operatorname{sh} uT] + v^3 \operatorname{sh} uT \cos vT}{uv u \operatorname{sh} 2uT + v \sin 2vT + k(\operatorname{ch} 2uT - \cos 2vT)}. \quad (18)$$

Формулы (16) - (18) подтверждают результаты качественно исследования точной формулы (15) и позволяют сделать некоторые количественные оценки. Так, с помощью формулы (16) можно легко оценить нижнюю границу изменения параметра $\gamma - \gamma_{\min}$. Нетрудно видеть, что значение γ_{\min} отвечает первому минимуму функции $\sin s / \operatorname{sh} s$ ($s = T/\delta$). Соответствующее значение s является наименьшим положительным корнем уравнения $\operatorname{tg} s = \operatorname{th} s$, и его с достаточной степенью точности можно считать равным $5\pi/4$, откуда $\gamma_{\min} \approx 0,04$. Таким образом, отрицательные значения γ весьма малы по абсолютной величине, следовательно, при $\gamma < 0$ относительный параметр качества η может лишь незначительно превышать единицу, так, при $\gamma = \gamma_{\min} = -0,04$ $\eta_{\max} \approx 1,001$. Именно по этой причине случай $\gamma < 0$ был выше охарактеризован как не представляющий практического интереса. Вообще, можно заметить, что из-за быстрого роста знаменателя в правой части (16) двусторонняя система обеспечивает значительный выигрыш в параметре качества лишь при малых T/δ , а при прочих значениях этого отношения (к ним относятся и области отрицательности γ) преимущество двусторонней системы утрачивается.

Формула (18) позволяет выяснить асимптотическое поведение параметра качества при малой толщине проводника T . Из представления (6) следует, что параметр качества односторонней системы стремится к нулю при $T \rightarrow 0$, точнее $\beta^{(1)} = \frac{1}{2} \gamma T + O(T^2)$. В случае двусторонней системы дело обстоит иначе. Из формулы

(18) можно получить, что $\beta = 1 - 1/6(kT)^2 + O(T^3)$, откуда в силу (12) $\eta_{\max} \approx \frac{\sqrt{6}}{kT} + O(1)$. Таким образом, $\beta_{\max}^{(2)} = \eta_{\max} \beta^{(1)} \xrightarrow{\Gamma \rightarrow 0} \rightarrow \sqrt{3} \lambda / (2k) > 0$.

В заключение отметим, что при использовании двусторонней системы за повышение параметра качества приходится платить снижением удельной вертикальной силы на единицу силы тока источника. Это видно из формул (9), которые показывают, что удельная вертикальная сила в двусторонней системе всегда ниже, чем в односторонней той же геометрии. В дополнение к этому, как явствует из формул (12), неограниченный рост параметра качества предполагает выравнивание токов в верхнем и нижнем электромагнитах, и, следовательно, исчезновение вертикальной составляющей силы. (При этом горизонтальная сила стремится к нулю быстрее вертикальной, что и обеспечивает неограниченный рост параметра качества). Снижение вертикальной силы можно скомпенсировать без ущерба для параметра качества взаимно пропорциональным увеличением силы тока в обоих электромагнитах. Если названные электромагниты являются сверхпроводящими, то такое увеличение не связано с дополнительными энергетическими затратами, но всё же оно лимитируется токонесущей способностью сверхпроводника и, возможно, иными конструктивными соображениями. Следовательно, этими же факторами ограничивается в конечном счёте и практически достижимое значение параметра качества.

Несмотря на указанные ограничения, система с двусторонним источником представляет значительно более богатые возможности для повышения параметра качества, чем её односторонний аналог.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reitz J.R., Davis L.C. Force on a rectangular coil moving above a conducting slab. - J.Appl.Phys., 1972, № 4, v 43.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: "Наука", 1974. - 560 с.

УДК 538.65:51.380

Б. Л. Цилевич
ЛГУ им. П. Стучки

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МНОГОМЕРНОЙ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Во многих практических задачах, связанных, в частности, с разработкой устройств автоматической сборки и комплектовки при помощи электромагнитных методов, возникает вопрос о расчёте динамики системы многих твёрдых тел в электромагнитном поле. Такого рода задачи можно решать, составляя систему электромеханических уравнений движения для каждого тела рассматриваемой системы и решая её [1], что является достаточно сложной задачей. Частным случаем этой проблемы является задача о расчёте равновесной конфигурации определённой системы в статике. Возможен следующий подход к этой задаче.

Систему тел, взаимодействующих в электромагнитном поле, можно характеризовать потенциальной энергией

$$W = W(x_1, \dots, x_N, E_0, B_0, \dots), \quad (I)$$

где x_1, \dots, x_N - координаты тел, входящих в систему, E_0, B_0 - внешние электрическое и магнитное поля; энергия может зависеть и от других параметров системы и внешних воздействий. Если тела, входящие в рассматриваемую систему, расположены в каком-то смысле упорядоченно, то можно попытаться ввести некоторые параметры, характеризующие систему в целом (типа координационного числа, параметров симметрии и т.п., как это делается, например, в физике твёрдого тела при описании кристаллов). Тогда энергия будет зависеть от значительно меньшего числа параметров, поэтому вопрос о степени упорядоченности конфигурации системы пред-

ставляется весьма важным.

Реальной равновесной конфигурации системы, очевидно, должен соответствовать минимум потенциальной энергии (I), достигающийся при ограничениях, обусловленных свойствами рассматриваемой системы. Таким образом, равновесную конфигурацию системы можно найти как решение задачи условной минимизации: найти $\min W$ при условиях

$$A_i \leq x_i \leq B_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

$$f_j(x_i) \leq C_j, \quad j = 1, \dots, N_1 \quad (3)$$

$$g_k(x_i) = \Phi_k, \quad k = 1, \dots, N_2 \quad (4)$$

Ограничения (2) представляют собой условия локализации тел системы в ограниченной области в случае простой формы этой области, (3) - аналогичные ограничения для области более сложной формы (либо какие-то другие ограничения), (4) - характеризуют возможные жесткие связи между телами системы.

Возможно, что система имеет несколько равновесных конфигураций, тогда задача оптимизации является многоэкстремальной. В таком случае, видимо, желательно не ограничиваться поиском глобального минимума, а пытаться определить все локальные минимумы.

Возможность реализации такой методики расчёта равновесной конфигурации, очевидно, зависит от наличия численных алгоритмов, позволяющих эффективно решать поставленную задачу условной оптимизации. Целевая функция (I), очевидно, является нелинейной, нелинейность может появиться и в ограничениях. Кроме того, в практически важных случаях можно ожидать, что либо аналитический расчёт электромагнитного поля окажется невозможным и потребуются применение конечно-разностных методов, либо решение получится в виде разложения в ряд по специальным функциям, эллиптическим интегралам и т.п., поэтому предположение о непрерывной дифференцируемости и даже дифференцируемости целевой функции представляется нецелесообразным. Следовательно, при построении эффективного алгоритма решения задач оптимизации такого типа разумно с самого начала отказаться от градиентных методов. Наиболее многообещающими кажутся две группы методов: методы прямого поиска, не требующие вычисления производных

(типа симплекс-метода), и методы случайного поиска. В настоящей работе рассматривается один метод, относящийся к первой из указанных групп.

Для практической проверки применимости численных алгоритмов оптимизации была рассмотрена следующая относительно простая задача. Требуется найти равновесные конфигурации системы N магнитных диполей, локализованных на плоскости, в круглой области радиуса R_0 , с наложенным поперечным магнитным полем B_0 . Граница немагнитна, условие на границе - механическое [2]. В такой системе между диполями возникают силы отталкивания, что приводит к образованию некоторой структуры и может быть использовано, в частности, для создания электродинамических устройств кассетирования [3]. Потенциальную энергию такой системы можно записать как

$$W_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{M_0}{4\pi} \frac{p_k}{R_{ik}^3} - B_0 \right] \quad (5)$$

где p_i - магнитный момент i -ого диполя, R_{ik} - расстояние между i -ым и k -ым диполями. Если учесть взаимное влияние диполей на магнитные моменты друг друга, то магнитные моменты определяются из системы уравнений

$$p_i = \frac{V \alpha'}{\mu_0} \left[B_0 - \frac{M_0}{4\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{p_k}{R_{ik}^3} \right], \quad i=1, \dots, N \quad (6)$$

где V - объём диполя, α' - коэффициент поляризуемости. Если диполи постоянны, то матрица системы (6) диагональна. В случае однородного внешнего поля в качестве целевой функции удобнее выбрать только положительную часть энергии

$$W = \frac{M_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{p_i p_k}{R_{ik}^3} \quad (7)$$

поскольку отрицательная часть (5) представляет собой постоянную добавку. Введём на плоскости полярную систему координат, тогда ограничения выглядят следующим образом:

$$0 \leq r_i \leq R_0 \quad (8)$$

$$0 \leq \varphi_i \leq 2\pi, \quad i=1, \dots, N. \quad (9)$$

Таким образом, поставлена задача минимизации функции (7) при ограничениях (8) и (9).

В качестве наиболее многообещающего метода прямого поиска был выбран комплекс-метод Бокса [4], "простой, удобный алгоритм, с успехом применяемый для решения различных задач оптимизации" [5]. На преимущества комплекс-метода по сравнению с другими методами прямого поиска указывается, в частности, и в [6]. Вкратце идея комплекс-метода такова:

I. В M -мерном пространстве переменных строится "начальный комплекс" - фигура, состоящая из $L \geq M+1$ вершин, по следующему правилу:

$$x_{ij} = a_i + c_i (b_i - a_i), \quad \begin{matrix} i=1, \dots, M \\ j=1, \dots, L-1 \end{matrix} \quad (10)$$

где a_i и b_i определяют диапазон изменения каждой переменной:

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad (11)$$

а c_i - псевдослучайные числа, равномерно распределённые на интервале $[0, 1]$. L -ая точка начального комплекса - "начальная точка" - выбирается так, чтобы она удовлетворяла всем ограничениям задачи. Если какая-либо точка начального комплекса нарушает ограничения, её помещают в середину отрезка, соединяющего исходную точку с центром тяжести уже выбранных вершин, до тех пор, пока все точки начального комплекса не будут удовлетворять всем ограничениям задачи.

2. Вычисляют значения целевой функции во всех точках начального комплекса и затем "худшую точку" - точку, где целевая функция максимальна - отражают относительно центра тяжести остальных точек

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{L-1} \frac{x_{ij}}{L-1}, \quad i=1, \dots, M \quad (12)$$

по закону

$$x_{iL}^{нов} = (\alpha + 1) \bar{x}_i - \alpha x_{iL}^{см}, \quad i=1, \dots, M, \quad (13)$$

где $\alpha > 1$ - коэффициент отражения. Если полученная новая точка нарушает ограничения вида (II), то её помещают в допусти-

мую точку вблизи нарушенного ограничения; если нарушено какое-либо другое ограничение, то коэффициент отражения α делится пополам.

3. Если целевая функция в новой точке меньше, чем в заменяемой, то возвращаемся к этапу поиска худшей точки, если нет, то коэффициент отражения α делится пополам.

4. Поиск ведётся до тех пор, пока целевая функция не будет мало меняться в течение пяти последовательных шагов.

Характерными особенностями рассматриваемой задачи являются:

- 1) многомерность;
- 2) многоэкстремальность;
- 3) активность многих ограничений;
- 4) различная зависимость целевой функции от радиальных и угловых координат.

Определим сразу примерную размерность задачи. Ограничимся системами, состоящими из такого количества диполей, что непосредственное решение системы электромеханических уравнений уже достаточно сложно, а статистические законы распределения применять ещё нельзя, т.е. $N \approx 10-25$. Соответственно размерность задачи оптимизации $M \approx 20-50$. Среди известных успешных реализаций комплексного поиска в оригинальной работе [4] рассматриваются задачи размерности 5 и 2, в работе [7] - размерности 4 и 6, в [6] - размерности 8, в [8] и [9] - размерности 5, в [10] - также размерности до 5 для наиболее популярных тестов, в [11] - размерности 12 с 8-ю ограничениями в виде равенств, что позволило провести редукцию размерности до 4. По-видимому, наибольшая размерность задачи, для решения которой с успехом применялся комплекс-метод - 18 [12]. Таким образом, можно ожидать, что многомерность задачи (а также другие вышеуказанные её особенности) приведёт к необходимости некоторой модификации комплекс-метода, адаптации его к конкретной проблеме.

Остановимся подробнее на существенно важной стадии построения начального комплекса. Авторы [7] относят случайный способ выбора всех (кроме начальной) точек начального комплекса к недостаткам метода (эту точку зрения разделяют и авторы [5]) и предлагают неслучайный способ построения началь-

ного комплекса из $L = 2M + 1$ точек по правилу:

$$x_{ij} = a_i, \text{ для } j = 2i - 1, i = 1, \dots, M$$

или $x_{ij} = b_i, \text{ для } j = 2i, i = 1, \dots, M$ (14)

$$x_{ij} = x_{i0}, \text{ для остальных } i,$$

где $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{M0})$ - начальная точка. Такой способ построения начального комплекса имеет ряд недостатков. Так, очевидно, что, если K -ая координата начальной точки

$$x_{k0} \approx \frac{1}{2}(a_k + b_k), \quad (15)$$

то K -ая координата центра тяжести близка к x_{k0} , поэтому при замене худшей точки K -ая координата будет существенно меняться только в том случае, если она равна a_k или b_k (отметим, что аналогичная картина наблюдается даже, если условие (15) не выполняется, в интересующем нас случае задачи большой размерности). При вполне естественном допущении о близости начальной точки к центру допустимой области вряд ли удастся "растянуть" комплекс, кроме того, поиск приобретает по координатный смысл, что чревато опасностью попадания в овраг (кстати, та же опасность появляется и при использовании модификации, предложенной в [8] - применении метода золотого сечения для поиска минимума по направлению, вместо отражения с уменьшенным наполовину коэффициентом α).

С другой стороны, ряд авторов указывает и на положительные стороны случайного способа построения начального комплекса: устранение (по сравнению с обычным симплекс-методом) трудностей выбора начального масштаба [13], возможность повторить поиск с той же начальной точки в случае неудачи [10], возможность использования метода для определения глобального минимума, многократно проводя поиск с использованием различных начальных комплексов [11]. Существенно, что в [7] предлагается в случае неудачи повторить поиск, изменив начальную точку, то есть успех неслучайного поиска определяется удачным выбором начальной точки, который проблематичен без использования каких-либо дополнительных соображений о вероятном расположении минимума. Таким образом, модификацию [7] можно трактовать как попытку использования дополнительной информации о вероятном положении экстремума. Однако, ту же идею можно реализовать, сохранив преимущества,

связанные со случайным способом построения начального комплекса, например, задавать одну из точек начального комплекса вблизи вероятного минимума (когда одна из точек начального комплекса находится вблизи минимума, процесс быстро сходится [13]), а остальные отстроить в соответствии с (10). В нашем конкретном случае информацию о вероятном положении минимума можно получить, исходя из соображений симметрии, из данных эксперимента и результатов предыдущих расчётов, а также при помощи зависимостей целевой функции от какой-либо одной координаты, когда остальные координаты фиксированы. Как показал численный эксперимент, поиск может быть успешно осуществлён без использования такого рода информации, если размерность задачи не превышает 12-14; при $M > 14$ сходимости не наблюдается. Если же задавать начальную точку вблизи вероятного минимума, то процесс сходится к этому минимуму при $M \sim 40$. Величина окрестности минимума δ , в которую должна попасть начальная точка для успешного завершения поиска, зависит от количества локальных минимумов и их относительной глубины. Чем больше минимумов и чем ближе значения целевой функции в них, тем меньше δ . Следовательно, в нашей задаче наибольшую трудность составляет расчёт равновесных конфигураций с высокой симметрией. Кроме того, δ уменьшается с ростом M . Значения целевой функции в начальной точке и в точке минимума для некоторых конфигураций приведены в табл. I.

M	20	22	28	38
конфигурация	2 - 8	2 - 9	4 - 10	1 - 6 - 12
$W_{\text{нач}}$	0,07202133	0,09581843	0,2116005	0,5547162
W_{min}	0,07185765	0,09572944	0,2114763	0,5541700

Табл. I

Значения целевой функции в начальной точке и в минимуме (примеры), M - размерность задачи, "конфигурация" - расположение диполей по слоям (см. [14]), $W_{\text{нач}}$ и W_{min} - энергия (в безразмерной форме) в начальной точке и в минимуме со-

ответственно.

Перейдём теперь к рассмотрению особенностей, связанных с многоэкстремальностью задачи. Алгоритмическая многоэкстремальность выражается в наличии различных минималей (в соответствии с удобной терминологией [15]) в M -мерном пространстве переменных, соответствующих физически эквивалентным равновесным конфигурациям системы диполей, и появляется из-за инвариантности целевой функции относительно поворота всей системы на произвольный угол φ , трансляции по τ , а также взаимных перестановок двух или более диполей. Поэтому разумно попытаться сузить область поиска таким образом, чтобы функция в суженной области была унимодальной. Для этого, во-первых, наложим дополнительное ограничение в виде равенства

$$\varphi_1 = 0, \quad (16)$$

т.е. фиксируем угловую координату одного из диполей. С вычислительной точки зрения удобнее не рассматривать (16) как ограничение в виде равенства и не уменьшать на единицу размерность задачи, а сразу перевести весь комплекс в соответствующее подпространство, положив для всех точек начального комплекса

$$\varphi_{1j} = 0, \quad j = 1, \dots, L. \quad (17)$$

Во-вторых, для устранения многоэкстремальности из-за инвариантности целевой функции относительно перестановок диполей, после построения начального комплекса следует упорядочить координаты каждой вершины таким образом, чтобы все они оказались в окрестности одного и того же алгоритмического минимума. В ФОРТРАН-программе, реализующей излагаемый алгоритм, для этой цели используется перенумерация координат каждой точки начального комплекса в порядке возрастания угла; применяется процедура сортировки массива.

Помимо алгоритмических, целевая функция (7) может иметь и несколько различных физических экстремумов, соответствующих физически различным конфигурациям (см. рис. 1,2 в [14]). Из-за этого, в частности, возможна несходимость метода, когда точки комплекса локализируются вблизи различных физических минимумов (критерием сходимости, видимо, следует считать стягивание комплекса в точку). Поскольку нас интересу-

ют все возможные равновесные конфигурации, в процессе счёта следует пытаться обнаружить все локальные физические минимумы, задавая начальную точку, как указывалось выше, вблизи каждого из них. Вероятность появления той или иной равновесной конфигурации определяется начальными условиями и зависит от "области притяжения" данного минимума, т.е. области монотонности функции в окрестности данного минимума. Оценить эту вероятность можно сравнением относительной глубины минимумов.

Рассмотрим теперь вопрос о критерии останова. Критерий, предложенный в [4], представляется не особенно удачным, ведь возможна такая ситуация, когда уменьшение коэффициента α не приведёт к сколько-нибудь заметному изменению целевой функции (например, если центр тяжести и худшая точка лежат на одной линии уровня). В [16] предлагается отражать не худшую, а точку со второй по величине целевой функцией, если коэффициент α стал меньше заданной величины α_0 (в [16] $\alpha_0 = 10^{-5}$). Очевидно, выбор α_0 сильно ограничивает точность определения минимума, поэтому более логичной представляется такая модификация: если после 5-кратного уменьшения α (независимо от его абсолютного значения) не достигнута точка с меньшим значением целевой функции, то производим отражение точки комплекса со второй по величине целевой функцией, затем с третьей и т.д. Поиск прекращается, когда отражение всех точек комплекса не даёт уменьшения целевой функции.

Упомянем ещё о двух полезных изменениях алгоритма Бокса. В [7] предлагается в случае, если после отражения худшей точки мы получили точку с меньшим, но максимальным среди точек комплекса значением целевой функции, на следующем шаге заменять не худшую, а точку со второй по величине целевой функцией - для устранения осцилляций относительно центра тяжести.

Рекомендация Бокса [4] о помещении точки вблизи границы в случае нарушения ограничения вида (II) (конкретнее, на расстоянии $0,00001$ размера допустимой области [4]) не представляется удачной. Во-первых, надо иметь в виду, что в нашей задаче многие ограничения являются активными,

т.е. минимум достигается вблизи границы, в многомерном углу. Поэтому нам выгоднее, чтобы все координаты приближались к оптимальным значениям по возможности более равномерно, иначе либо коэффициент отражения α будет преждевременно уменьшаться, либо соответствующая координата всё равно вернётся внутрь области. Во-вторых, это может привести к заикливанию, если коэффициент α ещё не достаточно мал, а нам требуется большая точность определения минимума. В-третьих, как указано в [I 6] и [I 7], использование этого правила резко увеличивает вероятность вырождения комплекса, перехода его в подпространство. Поэтому лучше использовать правило о делении коэффициента α пополам в случае нарушения любых ограничений.

Выше говорилось о различной зависимости целевой функции от радиальных и угловых координат. Это приводит к тому, что минимальная достигается в первую очередь для радиус-векторов диполей и, поскольку коэффициент отражения α к этому времени уже весьма мал, углы определяются с гораздо худшей точностью. Для устранения этого явления были введены два различных коэффициента отражения для радиальных и угловых координат: α_r и α_φ . Это приводит к тому, что поиск не всегда осуществляется вдоль прямой, соединяющей худшую точку и центр тяжести, но зато позволяет более точно определить оптимальные значения углов. Кроме того, значительно возрастает способность комплекса двигаться вдоль границы, что привело к успешной реализации поиска для таких вариантов задачи, для которых алгоритм с $\alpha_r \equiv \alpha_\varphi$ не работал. Следует отметить, что вводить эту модификацию необходимо только при большой размерности задачи, начиная с $M \approx 14$. При $M \leq 12$ алгоритм поиска с $\alpha_r \equiv \alpha_\varphi$ приводит к цели за значительно меньшее число шагов при той же точности определения минимума.

Рассмотрим, наконец, вопрос о выборе параметров алгоритма. Для количества точек в комплексе в [4] рекомендовано значение $L = 2M$, впрочем, "при $M > 5$ такая величина может быть слишком большой" [5]. Для задач большой размерности лучше брать значение $L = 1,5M$ (поскольку физическая область двумерна, M всегда чётное), тогда успешный поиск

требует меньшего количества шагов при той же точности определения минимума функции (табл. 2).

	I6	I6	I8	I8
конфигурация	0 - 8	I - 7	0 - 9	I - 8
n при $L=2M$	2820	2480	3750	2980
n при $L=1,5M$	I880	I670	2570	I990

Табл. 2

Зависимость числа шагов поиска от количества точек в комплексе. M - размерность задачи, L - число точек в комплексе, n - количество шагов поиска, "конфигурация" - расположение диполей по слоям (см. [14]).

Что касается выбора численного значения коэффициента отражения α , то, на наш взгляд, оно не является существенным. В [4] рекомендуется значение $\alpha = 1,3$, в [8] утверждается, что наилучшее значение $\alpha = 1,62$. Поскольку роль этого коэффициента состоит в том, чтобы не дать комплексу преждевременно стянуться в точку, то значение α следует увеличивать, если такое нежелательное явление наблюдается. В расчётах автора было принято $\alpha = 1,3$.

При большой размерности задачи для достаточно точного определения минимума требуется весьма маленькое значение точности определения минимума ϵ , т.е. критерия "малого изменения" целевой функции на протяжении пяти последовательных шагов. С целью определения разумного значения ϵ был проведён численный эксперимент, результаты которого отражены в табл. 3. Расчёт проводился при $M = 10$, при одном и том же начальном комплексе, счёт велся с двойной точностью.

ϵ	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}
$W_{min}(10^{-8})$	5,957894	5,956673	5,953770	5,953764	5,953764	5,953764
n	3060	4239	6887	6963	7070	7949

Табл. 3

Точность определения минимума и число шагов поиска при различных ε . ε - параметр в критерии останова, W_{min} - минимальное значение целевой функции (в безразмерной форме), n - число шагов поиска.

Для численных расчётов было выбрано значение $\varepsilon = 10^{-10}$.

Изложенный алгоритм был реализован в виде программы для ЭС ЭВМ. К сожалению, ввиду значительных затрат машинного времени (≈ 75 минут на ЭВМ ЕС-1022 при $M=28$ и 125 минут на ЕС-1033 при $M=38$) не удалось более подробно исследовать эффективность различных модификаций метода и зависимость скорости сходимости от параметров алгоритма. Тем не менее, можно заключить, что изложенный алгоритм эффективно работает для рассмотренной задачи и родственной ей. К основным его недостаткам, видимо, следует отнести необходимость дополнительных исследований с целью получения информации о вероятном положении минимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сермонс Г.Я. Динамика твердых тел в электромагнитном поле.-Рига, 1974.-248 с.
2. Цилевич Б.Л. Применение метода многомерной условной минимизации для расчета конфигурации системы диполей во внешнем электромагнитном поле. - Известия АН ЛатвССР, сер.физ.и техн.наук, 1981, №2 (в печати).
3. Жук В.В. Электродинамический метод касетирования деталей.-Рига : ЛатНИИТИ, 1979.-46 с.
4. Vox M.J. A new method of constrained optimization and a comparison with other methods. - The Computer Journal, 1965, v.8, No1, p. 42-52.
5. Численные методы условной оптимизации/ Ред. Ф.Гилл, У.Мюррей.-М., 1977.-290 с.
6. Friedman P., Pinder K.L. Optimization of a Simulation Model of a Chemical Plant. - Ind.Eng.Chem.Process Des. Develop., 1972, v.II, No.4, p.512-520.

7. Mitchell R.A., Kaplan J.L. Nonlinear Constrained Optimization by a Nonrandom Complex Method. - Journal of Res.Nat. Bureau of Stand., -1968, v.72c, No.4, p.249-258.

8. Umeda T., Ichikawa A. Modified Complex Method for Optimization. - Ind.Eng.Chem.Process Des.Develop., 1971, v.10, No.2, p.229-236.

9. Umeda T. Optimal Design of an Absorber-Stripper System. - Ind.Eng.Chem.Process Des.Develop., 1969, v.8, No.3, p.308-317.

10. Ghani S.N. An Improved "Complex" Method of Function Minimization. - Computer Aided Design, 1972, No.1, p.71-78.

11. Adelman A., Stevens F. Process Optimization by the "Complex" Method. - Amer.Inst.of Chem.Eng.Journal, 1972, No.1, p.20-24.

12. Umeda T., Nishio M., Komatsu S. Method for Plant Data Analysis and Parametres Estimation. - Ind.Eng.Chem.Process Des.Develop., 1971, v.10, No.2, p.236-243.

13. Ермуратский П.В. Модификации симплексного метода оптимизации. - Труды МЭИ, 1969, вып.68, с.121-128.

14. Жук В.В., Цилевич В.Л. Численное и экспериментальное исследование равновесия системы диполей во внешнем поле. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1981, с.

15. Стоян Ю.Г., Соколовский В.З. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей.-Киев, 1980.-208 с.

16. Guin J.A. Modification of the Complex Method of Constrained Optimization. - The Computer Journal, 1968, v.10, No.4, p.416-417.

17. Keefer D.L. Simpat: Self-Bounding Direct Search Method for Optimization. - Ind.Eng.Chem.Process Des.Develop., 1973, v.12, No.1, p.92-99.

Статья поступила 5 января 1981 года

УДК 621.757 : 538.65

В. В. Жук

Институт физики АН ЛатвССР

Б. Л. Цилевич

ЛГУ им. П. Стучки

ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
 РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ДИПОЛЕЙ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

В [1] получено уравнение состояния системы N диполей в поперечном магнитном поле. Диполи, взаимно отталкиваясь, перемещаются в ограниченной плоской области (круге), образуя определенную структуру. Полученное в [1] уравнение состояния основывается на предположении об образуемой структуре как гексагональной. Уравнение состояния используется для описания процесса комплектования стержневых ферромагнитных элементов.

Явление образования структуры диполями в плоской ограниченной области в поперечном магнитном поле может быть использовано для группового кассетирования деталей электромагнитными методами [2]. В таком случае желательно знать точное положение каждой детали (диполя) в области кассетирования. Уравнение состояния, используемое для описания процесса ввода-вывода деталей, также требует уточнения на основе более точных сведений о структуре.

Для получения такой информации в [3] была сделана попытка численного расчета конфигурации системы. С этой целью была поставлена задача нелинейного программирования, где в качестве минимизируемой целевой функции выступала потенциальная энергия системы:

$$W = \sum_{i=1}^N \left[-\rho_i B + \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \frac{\rho_i \rho_k}{R_{ik}^3} \right], \quad (1)$$

где ρ_i - магнитный дипольный момент i -ого тела, B - магнитная индукция, R_{ik} - расстояние между i -ым и k -ым д.

полями, N - общее количество диполей. Поскольку существенно, что диполи находятся в ограниченной области, необходимо решать задачу условной оптимизации с ограничениями (в полярных координатах):

$$\begin{aligned} 0 &\leq r_i \leq R_0, \\ 0 &\leq \varphi_i < 2\pi, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

где R_0 - радиус области локализации диполей.

Для решения задачи применялся модифицированный комплекс-метод [4].

Задача в такой постановке является многоэкстремальной, причём имеет место как алгоритмическая, так и физическая многоэкстремальность (см. ниже рис. 2). Часть алгоритмических минимумов удалось исключить наложением дополнительных ограничений и модификацией алгоритма расчёта [4]. Тем не менее, очевидно, что целевая функция имеет несколько локальных минимумов, соответствующих различным возможным равновесным конфигурациям системы. Появление той или иной конфигурации зависит от начальных условий. Вероятность появления определённой конфигурации определяется "областью притяжения" соответствующего минимума, т.е. областью монотонности целевой функции - энергии - в окрестности этого минимума. Впрочем, оценить эту вероятность можно, по-видимому, сравнением глубины минимумов. Поэтому при численном расчёте осуществлялся поиск не только глобального, но и локальных минимумов.

Были рассчитаны возможные равновесные конфигурации системы диполей при $N = 2, \dots, 14$. Учитывая сравнительно большие затраты машинного времени, при $N > 14$ рассчитывались только отдельные, представляющие наибольший интерес, конфигурации системы. Пример результатов расчёта - возможные равновесные конфигурации для системы из 14 диполей - показан на рис. 1. В табл. 1 приведены значения энергии системы в безразмерном виде, а в табл. 2 - значения отношения радиусов внутреннего и внешнего слоёв для различных равновесных конфигураций.

Отметим, что значительные трудности встретились при расчёте конфигураций, обладающих высокой угловой симметри-

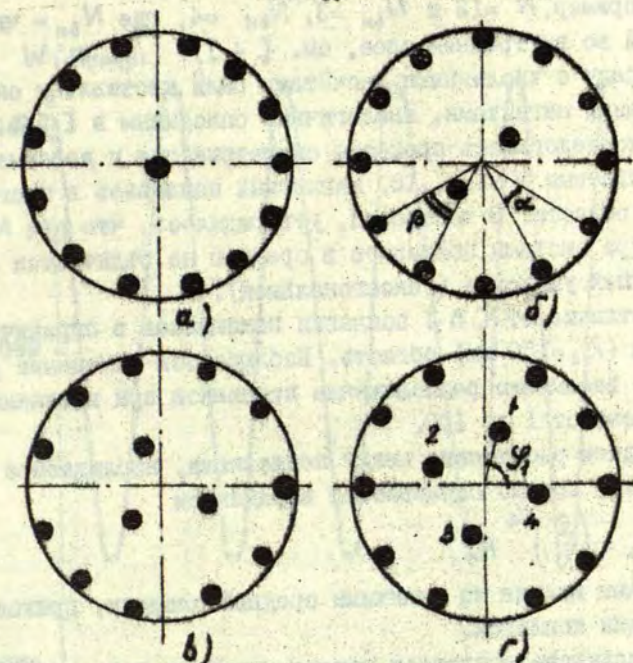


Рис. I. Возможные конфигурации системы диполей для $N=14$.
 На рис. I б $\beta > \alpha$.

$N_{\text{вн}} \backslash N$	10	11	12	13	14
0	0,08184	0,11842	-	-	-
1	0,06841	0,09730	0,13542	0,18467	0,24712
2	0,07186	0,09572	0,12701	0,16750	0,21904
3	-	0,10329	-	0,16366	0,20679
4	-	-	-	0,17422	0,21148

Табл. I. Энергии различных равновесных конфигураций. N - общее число диполей, $N_{\text{вн}}$ - число диполей во внутреннем слое.

ей (например, $N = 12$ и $N_{\text{вн}} = 3$, $N_{\text{вн}} = 4$, где $N_{\text{вн}}$ - число диполей во внутреннем слое, см. [4]).

Наряду с численными расчётами были поставлены опыты с плавающими магнитами, аналогичные описанным в [5]. В [5] исследовались процессы симметризации и десимметризации в системе $N = 1, \dots, 18$, магнитных поплавок в неограниченной области. В частности, утверждалось, что при $N > 18$ структура системы поплавок в среднем не отличается от плотнейшей упаковки (гексагональной).

В отличие от [5] поплавки помещались в ограниченную кольцом ($R_0 = 150$ мм) область. Наблюдалось изменение равновесного взаимного расположения поплавок при изменении их количества от 1 до 150.

Среднее расстояние между поплавками, наблюдаемое в эксперименте, хорошо оценивается выражением

$$l_0 = \left(\frac{\pi}{N} \right)^{1/2} R_0, \quad (3)$$

полученным исходя из величины средней площади, приходящейся на один поплавок.

В структуре поплавок хорошо выделяются группы поплавок в виде концентрических границе колец. Из (3) оледует, что число колец должно равняться

$$m = \left[\frac{N}{\pi} \right] \quad (4)$$

где [] - целая часть числа.

На рис. 3 показана степень совпадения этого правила с наблюдаемым на опыте числом колец.

Если исходить из среднего расстояния между соседними поплавками, то число поплавок в i -ом кольце

$$n_i = 2\pi \frac{R_i}{l_0}, \quad R_i - \text{радиус } i\text{-ого кольца} \quad (5)$$

так как расстояние между соседними кольцами по радиусу также равно l_0 , то

$$R_i \approx i l_0 \quad (6)$$

и

$$n_i = 2\pi i / l_0 \approx 6i.$$

Следовательно, при таких предположениях осесимметричному расположению поплавок должно соответствовать следующее

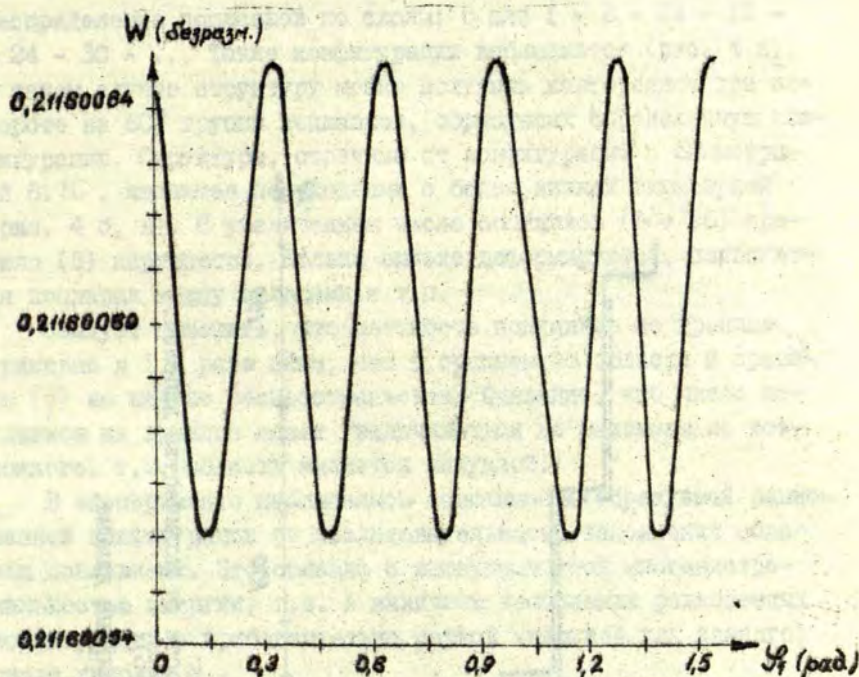


Рис. 2. Зависимость энергии конфигурации 4 - 10 (см. рис. 1 г) от угла поворота внутреннего слоя относительно внешнего (угол φ_1 на рис. 1 г, угловые координаты остальных диполей во внутреннем слое изменяются по закону $\varphi_i = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}(i-1)$, $i = 1, \dots, 4$, диполи пронумерованы в порядке возрастания угла).

$N_{вн} \backslash N$	10	11	12	13	14
2	0,3268	0,3189	0,3151	0,3150	0,3050
3	-	0,3949	-	0,3800	0,3750
4	-	-	-	0,4349	0,4300

Табл. 2. Отношение радиусов внутреннего и внешнего кольца для различных равновесных конфигураций (обозначения см. табл. 1).

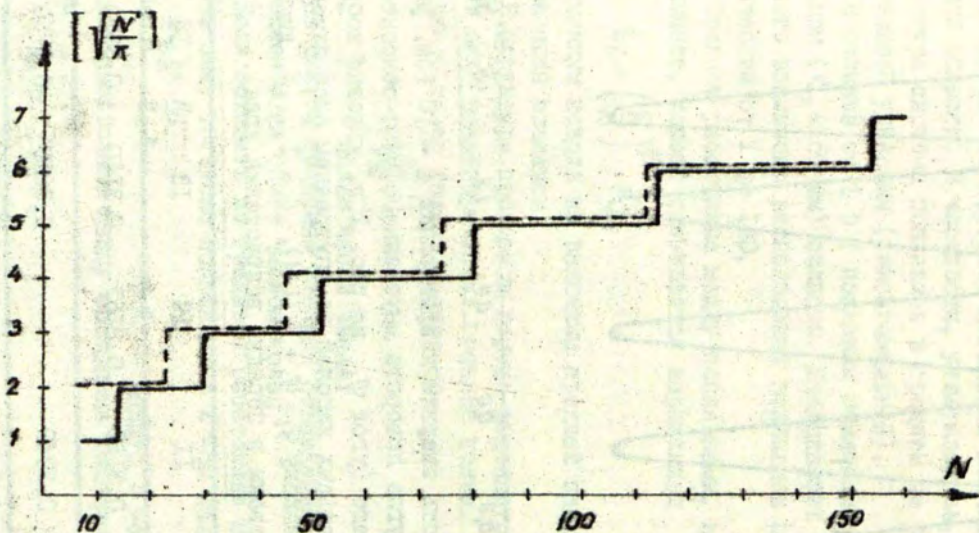


Рис. 3. Число слоёв в зависимости от количества диполей:
 — по формуле (5),
 - - - экспериментальные данные.

распределение поплавок по слоям: 0 или I - 6 - I2 - I8 - 24 - 30 - ... Такие конфигурации наблюдаются (рис. 4 а). В таком случае структуру можно получить повторением при повороте на 60° группы поплавок, образующих определённую конфигурацию. Структуры, отличные от конфигураций с симметрией $6. \mathcal{N}$, являются переходными с более низкой симметрией (рис. 4 б, в). С увеличением числа поплавок ($N \geq 90$) правило (5) нарушается. Кольца сильно деформируются, появляются полавки между кольцами и т.п.

Следует отметить, что плотность поплавок на границе примерно в 1,5 раза выше, чем в среднем по области и правило (5) на них не распространяется. Очевидно, что число поплавок на границе может увеличиваться до максимально возможного, т.к. область является выпуклой.

В эксперименте наблюдалась зависимость образуемой равновесной конфигурации от последовательности заполнения области поплавками. Это связано с вышеупомянутой многоэкстремальностью энергии, т.е. с наличием нескольких равновесных конфигураций с приблизительно равной энергией для данного числа диполей N .

При сопоставлении экспериментальных и численных результатов следует иметь в виду, что численные расчёты, требующие значительных затрат машинного времени, проводились для сравнительно небольшого количества диполей. В эксперименте же при малой плотности диполей взаимодействие их было слабым. Поэтому детального сравнения численных данных с экспериментальными не проводилось. Различия в общих закономерностях образования структур не наблюдалось. Таким образом, результаты численного расчёта и эксперимента дополняют друг друга.

Следует отметить существенное влияние границы области на образуемую структуру. В численных расчётах, например, для $N = 7$ и $N = 19$ конфигурации I - 6 и I - 6 - I2, соответствующие гексагональной структуре, не являются наиболее устойчивыми (табл. 3). В эксперименте отличие от гексагональной структуры проявлялось в появлении поплавок со средним числом соседей, равным 5.

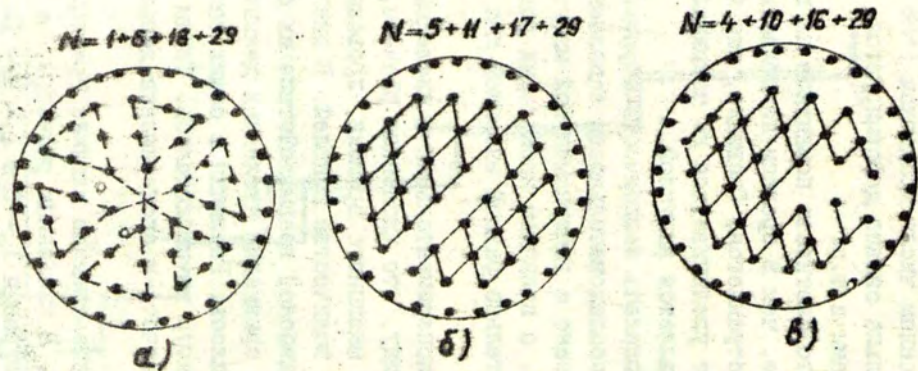


Рис. 4. Примеры экспериментально полученных конфигураций системы диполей.

N	7	7	19	19
конфигурация	0 - 7	I - 6	0 - 6 - I3	I - 6 - I2
энергия	0,02084	0,02091	0,54749	0,55417

Табл. 3. Сравнение энергий конфигураций, соответствующих гексагональному распределению, с энергиями других возможных конфигураций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жук В.В. Исследование процесса заполнения межполюсного пространства магнита стержневыми деталями. - Известия АН ЛатвССР. Серия физ. и техн. наук, 1979, № 2, с. 100-105.

2. Иванов А.А. Автоматизация сборки миниатюрных и микроминиатюрных изделий. - М.: "Машиностроение", 1977. - 248 с.

3. Цилевич Б.Л. Применение метода многомерной условной минимизации для расчёта конфигурации системы диполей во внешнем электромагнитном поле. - Известия АН ЛатвССР. Серия физ. и техн. наук, 1981, № 2. В печати.

4. Цилевич Б.Л. Об одном методе многомерной условной оптимизации. - В кн.: "Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов, Рига: ЛГУ, 1981, с.

5. Шубников А.В. Плавающие магниты и плавающие кристаллы. - Природа, 1962, № 3, с. 17.

Статья поступила 12 января 1981 года

Межузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Применение численных методов
1981, Рига, ЛГУ им. П. Стучки, с. 56-69

УДК 538.4+621.365.5

С.И. Павлов
ЛГУ им. П. Стучки

А.Т. Якович
ЛГУ им. П. Стучки

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЫСОТЫ И ФОРМЫ МЕНИСКА В ИНДУКЦИОННОЙ ЭЛЕКТРОПЕЧИ В ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Под действием электромагнитных (ЭМ) сил и движения жидкого металла в индукционных электропечах (ИЭП) формируется свободная поверхность - мениск. В большинстве крупных промышленных установок мениск достаточно сильно выражен (в индукционных печах с холодным тиглем может осуществляться полное отжатие металла от стенок тигля), и его форма существенно влияет на технологические процессы как на поверхности, так и в объеме расплавленного металла.

Возможности экспериментального исследования мениска в промышленных установках ограничены из-за высокой температуры и агрессивности среды, а в модельных экспериментальных установках - из-за сложности обеспечения физического и геометрического подобия. Определение формы свободной поверхности (с учетом влияния на нее движения) на основе решения краевой задачи с нелокальным граничным условием для системы уравнений магнитной гидродинамики является сложной вычислительной задачей, осуществимой только с привлечением мощных ЭВМ (методика решения такой задачи предложена в статье [1]). Поэтому представляется целесообразным оценить возможности использования гидростатического приближения для расчетов мениска с привлечением различных математических моделей ИЭП. В настоящей работе предлагается также уточненный

способ расчета высоты и формы мениска в гидростатическом приближении, основанный на конечно-разностной методике расчета ЭМ поля и сил [2], позволяющий учитывать влияние торцевых эффектов жидкого металла и индуктора.

I. Основные положения

Для расчета высоты и формы мениска в гидростатическом приближении с учетом аксиальной симметрии необходимо:

а) с использованием уравнений гидростатики определить угол α наклона градиента давления, вычисленного на поверхности Γ_c , к радиальному направлению (рис. 1)

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\partial p / \partial r}{\partial p / \partial z} = \frac{f_r}{f_z - 1/\Pi q}, \quad (1)$$

где f_r, f_z - радиальная и аксиальная составляющие плотности безразмерной ЭМ силы на поверхности Γ_c ,

$$\Pi q = Al \cdot Fr = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho g r_0^2} \quad (2)$$

безразмерный критерий, характеризующий соотношение ЭМ силы и силы тяжести, Fr и Al - числа Фруда и Альфвена, B_0 - характерная магнитная индукция, g - ускорение силы тяжести, r_0 - радиус области, заполненной жидким металлом;

б) координаты точек свободной поверхности находятся по формуле

$$\xi(r) = \xi(0) - \int_0^r \frac{f_r}{f_z - 1/\Pi q} dr, \quad (3)$$

где $\xi(0)$ - высота столба металла на оси симметрии, для определения которой используется условие сохранения массы

$$h_p = 2 \int_0^1 r \xi(r) dr, \quad (4)$$

где h_p - высота цилиндрической садки в невозмущенном состоянии;

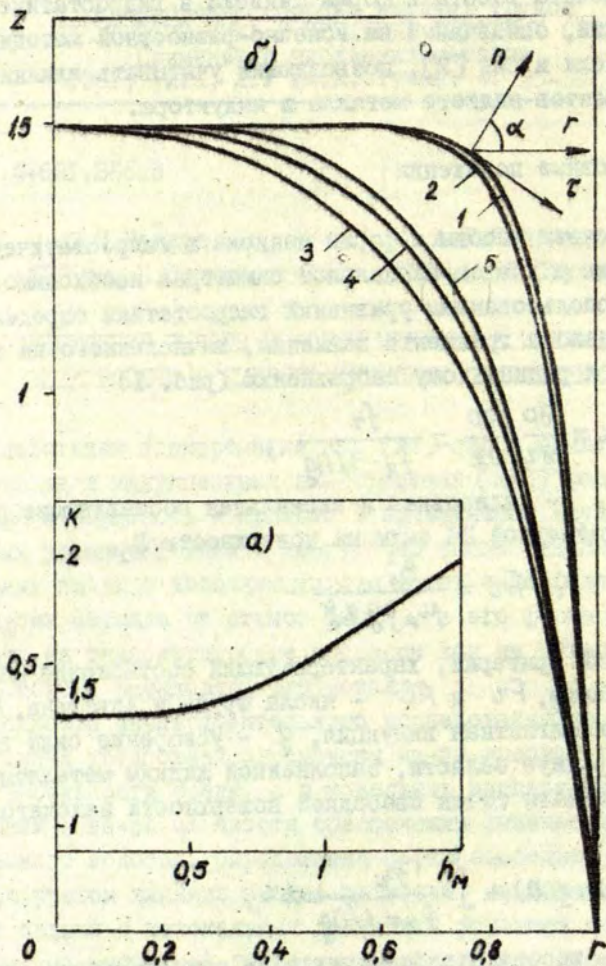


Рис. 1. а) Зависимость коэффициента K от высоты мениска.
 б) форма мениска при $h_M = 1,5$.

- 1 формула (II), $\omega = 100$, $\pi g = 6$.
- 2 формула (I7), $\omega = 100$, $\pi g = 6$.
- 3 формула (II), $\omega = 10$, $\pi g = 6,07$.
- 4 формула (I7), $\omega = 10$, $\pi g = 7,43$.
- 5 формула (24), $\omega_3 = 25$, $\pi g = 1,63$.

в) высота мениска равна

$$h_M = \int_0^1 \frac{fz}{fz - 1/\eta g} dz \quad (5)$$

Методы расчета мениска отличаются приближением, используемым для формул (3), (5), а также распределением ЭМ силы на поверхности мениска, для нахождения которого обычно применяются следующие модели [3]: плоская или осесимметричная модель с проводящей областью и индуктором неограниченной высоты; модели, в которых один из цилиндрических элементов системы индуктор-металл ограничен по высоте; модель, учитывающая концевые эффекты и металла, и индуктора.

2. Плоская модель

Проникновение ЭМ поля вглубь проводящей области (в безразмерной постановке) характеризуется толщиной скин-слоя $\delta = \sqrt{2/\omega}$, где $\omega = 6\mu_0 \omega r_0^2$ - безразмерная частота, $\omega = 2\pi f$ - циклическая частота тока, возбуждающего ЭМ поле, σ - проводимость, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м. При $\delta \ll 1$ правомерно замена бесконечного в аксиальном направлении цилиндра бесконечным полупространством, на поверхности которого при $y = -1$ задается настил тока \dot{I} [А/м]. ЭМ поле определяется из уравнения для комплексной амплитуды индукции B_{z0} :

$$\frac{d^2 B_{z0}}{dy^2} - i\omega B_{z0} = 0 \quad (6)$$

Если в качестве характерной индукции при $y = -1$ взять $B_0 = \mu_0 \dot{I}$, то безразмерная индукция

$$B_x = \exp \left[\frac{1+i}{\delta} (y-1) + i\omega t \right] \quad (7)$$

Так как плотность тока $j_x = dB_x/dy$, то с учетом (7)

$$j_x = \frac{1+i}{\delta} \exp \left[\frac{1+i}{\delta} (y-1) + i\omega t \right] \quad (8)$$

Плотность средней ЭМ силы определяется по формуле

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \text{Real} (\vec{j} \times \vec{B}^*), \quad (9)$$

откуда в частном случае для силы, под действием которой образуется мениск, следует

$$f_y = -\frac{1}{2\delta} \exp \left[\frac{2(y-1)}{\delta} \right]; \quad f_x = 0 \quad (10)$$

(характерное значение силы при $y=1$ $f_0 = j_0 B_0 = \dot{I}^2 \mu_0 / \tau_0$). В соответствии с формулами (3) и (5) для формы и высоты мениска получаем

$$\xi(z) = \xi(0) - \frac{\Pi g}{4} \exp(-2/z) [\exp(2y/\delta) - 1]; \quad (11)$$

$$h_M^{(1)} = \frac{\Pi g}{4} [1 - \exp(-2/\delta)]. \quad (12)$$

3. Цилиндрическая модель

ЭМ поле в модели, учитывающей цилиндрическую симметрию, описывается уравнением для аксиальной составляющей индукции B_{z0} ($B_r = B_\varphi = 0$):

$$\frac{d^2 B_{z0}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dB_{z0}}{dz} - i \hat{\omega} B_{z0} = 0, \quad (13)$$

ограниченное при $z=0$, решение которого выражается в виде

$$B_{z0} = \frac{I_0(\sqrt{i \hat{\omega}} z)}{I_0(\sqrt{i \hat{\omega}})} = \frac{\text{ber}(\sqrt{\hat{\omega}} z) + i \text{bei}(\sqrt{\hat{\omega}} z)}{\text{ber} \sqrt{\hat{\omega}} + i \text{bei} \sqrt{\hat{\omega}}}, \quad (14)$$

где I_0 - модифицированная функция Бесселя нулевого индекса, ber и bei - функции Кельвина нулевого индекса.

Плотность азимутального тока и радиальной составляющей ЭМ силы соответственно равны [4]:

$$j_{\varphi 0} = \frac{\hat{A} i}{\delta} \frac{\text{ber}_1(\sqrt{\hat{\omega}} z) + i \text{bei}_1(\sqrt{\hat{\omega}} z)}{\text{ber} \sqrt{\hat{\omega}} + i \text{bei} \sqrt{\hat{\omega}}}; \quad (15)$$

$$f_z = -\frac{\sqrt{\hat{\omega}}}{2} \frac{\text{ber}'(\sqrt{\hat{\omega}}z) \text{ber}(\sqrt{\hat{\omega}}z) + \text{bei}'(\sqrt{\hat{\omega}}z) \text{bei}(\sqrt{\hat{\omega}}z)}{\text{ber}^2 \sqrt{\hat{\omega}} + \text{bei}^2 \sqrt{\hat{\omega}}}. \quad (16)$$

По формулам (3), (5) получаем

$$\xi(z) = \xi(0) - \frac{\Pi g}{4} \frac{[\text{ber}^2(\sqrt{\hat{\omega}}z) + \text{bei}^2(\sqrt{\hat{\omega}}z) - 1]}{\text{ber}^2 \sqrt{\hat{\omega}} + \text{bei}^2 \sqrt{\hat{\omega}}}; \quad (17)$$

$$h_M^{(2)} = \frac{\Pi g}{4} \left(1 - \frac{1}{\text{ber}^2 \sqrt{\hat{\omega}} + \text{bei}^2 \sqrt{\hat{\omega}}} \right). \quad (18)$$

Так как при $x \gg 1$

$$\text{ber}(x) \approx \frac{\exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{2\pi x}}, \quad \text{bei}(x) \approx \frac{\exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (19)$$

то в приближении выраженного скин-эффекта ($\delta \ll 1$) имеем

$$h_M^{(3)} = \frac{\Pi g}{4} [1 - 2\sqrt{\hat{\omega}} \exp(-\sqrt{2\hat{\omega}})]. \quad (20)$$

Из рис. 2 видно, что при $\hat{\omega} > 15$ $h_M^{(2)} \approx h_M^{(3)}$, и для вычислений можно пользоваться приближенной формулой (20). Если учесть, что деформация поверхности мениска приходится на промежуток $2\delta \ll z \ll 1$ (ЭМ сила при этом убывает на порядок по сравнению с ее значением на боковой поверхности), то при $\hat{\omega} > 50$ для определения формы мениска при $z > 0,45$ вместо (17) можно применять формулу

$$\xi(z) = \xi(0) - \frac{\Pi g}{4z} \exp[\sqrt{2\hat{\omega}}(z-1)], \quad (21)$$

а оставшаяся часть поверхности мениска заменить прямой, соединяющей точки $\xi(0,45)$ и $\xi(0)$. При $\hat{\omega} > \hat{\omega}_n = 35$ высота мениска практически не зависит (с точностью до 1%) от частоты (рис. 2), а превышение центра мениска над уровнем металла в невозмущенном состоянии $h_u = \xi(0) - h_p$ имеет максимум при $\hat{\omega}_0 \approx 20$. Значения частот $\hat{\omega}_n$ и $\hat{\omega}_0$, вычисленные на основе плоской модели, занижены и равны, соответственно, 10 и 8. Это объясняется тем, что при $\hat{\omega} = 10$ $\delta = 0,47$, и не выполняется условие применимости модели $\delta \ll 1$. В промышленных установках, для которых $\hat{\omega} \gg 100$, высота мениска (без учета торцевых эффектов

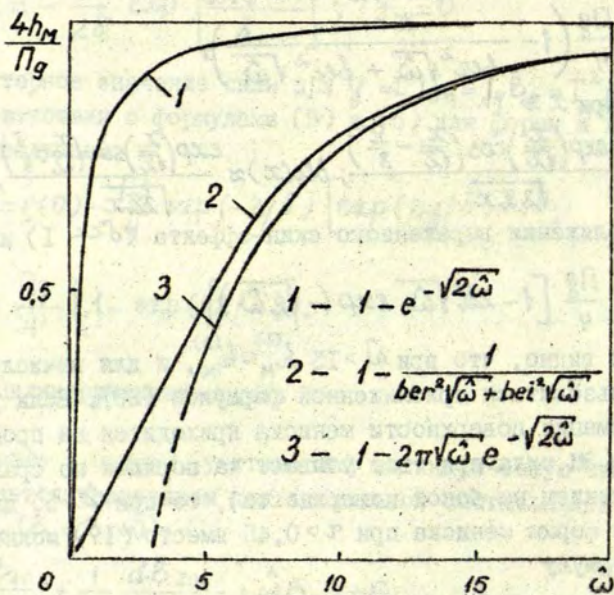


Рис. 2. Зависимость высоты мениска от безразмерной частоты.

1) Плоская модель.

2) Цилиндрическая модель.

3) Цилиндрическая модель в приближении $\delta \ll 1$.

и движения) определяется по формуле $h_m = \rho g / 4$.

4. Учет торцевого эффекта индуктора

Индукция магнитного поля имеет две составляющие $B_r = B_r(r, z)$ и $B_z = B_z(r, z)$, поэтому целесообразно ввести векторный потенциал \vec{A} , азимутальная составляющая комплексной амплитуды которого $A_\varphi = A_\varphi$ ($A_r = A_z = 0$) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} - i \hat{\omega} A_\varphi = 0, \quad (22)$$

которое решается методом разделения переменных [5]. ЭМ поле по принципу суперпозиции можно представить в виде суммы двух полей: поля витка с током в отсутствие цилиндрического металла неограниченной высоты и поля, создаваемого вихревыми токами, протекающими в металле. Интегрирование по высоте однофазного индуктора от $-h_u/2$ до $h_u/2$ приводит к следующим выражениям для индукции магнитного поля и плотности вихревых токов:

$$B_{z0} = \frac{2r_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{p}{\lambda} \dot{I}_0(\rho r) F(\lambda, p) \cos(\lambda z) \sin\left(\frac{\lambda h_u}{2}\right) d\lambda;$$

$$B_{z0} = \frac{2r_1}{\pi} \int_0^\infty \dot{I}_1(\rho r) F(\lambda, p) \sin(\lambda z) \sin\left(\frac{\lambda h_u}{2}\right) d\lambda;$$

$$j_{\varphi 0} = -\frac{2i\hat{\omega}r_1}{\pi} \int_0^\infty \dot{I}_1(\rho r) F(\lambda, p) \cos(\lambda z) \sin\left(\frac{\lambda h_u}{2}\right) d\lambda;$$

$$F(\lambda, p) = \frac{K_1(\lambda, r_1)}{\lambda \dot{I}_1(\rho) K_0(\lambda) + \rho \dot{I}_0(\rho) K_1(\lambda)}, \quad (23)$$

где $\rho^2 = \lambda^2 + i\hat{\omega}$, K_0 и K_1 - функции Макдональда, r_1 - радиус индуктора. Составляющие ЭМ силы определяются по формуле (9). Для проведения анализа результатов необходимо вычислить несобственные интегралы от комплексной функции, что представляет достаточно сложную задачу, требующую привлечения ЭМ, поэтому методики, предложенные различными авторами [5, 6, 7],

основываются на упрощенном задании подынтегральной функции, и при этом на параметры задачи налагаются ограничения (например, $\delta \ll 1$). Эффективная и надежная методика расчета отсутствует.

Из расчетов, проведенных в [5] при относительной ширине зазора между индуктором и металлом $S' = 2(\tau_1 - 1)/h_u = 0,1$ и нормированной на δ высоте индуктора $h' = h_u/2\delta = 10$, следует, что значение радиальной составляющей силы на высоте торца индуктора ($Z = h_u/2$) составляет 0,25 от максимального значения силы в плоскости симметрии $Z = 0$. С ростом безразмерной частоты и с уменьшением относительного зазора отношение силы при $Z = h_u/2$ к максимальному ее значению убывает. Это означает, что высота мениска, вычисленная по любой из формул (12), (18) или (20) без учета торцевого эффекта индуктора, завышена по крайней мере в 2-4 раза.

Так как, с одной стороны, рассматриваемая модель применима при симметричном расположении индуктора относительно средней плоскости металла при $h_p > h_u$, то есть отрицательном вылете индуктора ($l_B < 0$), когда силовое воздействие вблизи свободной поверхности ослаблено, и мениск слабо выражен ($h_M < 0,5$), а, с другой стороны, как отмечалось в [4], использование остальных моделей, допускающих аналитическое решение (например, модели с бесконечным индуктором и металлом ограниченной высоты), для нахождения мениска не обоснованно, то для установок с $h_p \sim h_u$ и $l_B \geq 0$, в которых наблюдается выраженный мениск ($h_M > 1$), целесообразно применение модели, учитывающей ограниченную высоту и металла, и индуктора при произвольном их расположении друг относительно друга [2,8].

5. Учет торцевых эффектов индуктора и металла

Предложенная в [8] методика конечно-разностного расчета ЭМ величин позволяет проводить исследования для систем с цилиндрической областью, заполненной металлом, индуктором конечной высоты и магнитным экраном и тем самым учитывать

влияние их торцевых эффектов на распределение ЭМ поля. В [2] эта методика обобщена на случай осесимметричных подобластей с произвольной образующей. С использованием методики проведены многочисленные расчеты, в том числе при произвольной заданной форме мениска [9]. Методика, предложенная в [10], основанная на рассмотрении периодической в аксиальном направлении системы цилиндрических проводников и индукторов, по мнению авторов, обладает недостатками, отмеченными в пункте 4.

6. Анализ результатов

Приведенные на рис. 3 распределения составляющих ЭМ силы с учетом торцевых эффектов металла и индуктора (в отличие от моделей, описанных в пунктах 2-4, при определении ЭМ силы конечно-разностным методом [2] характерное значение силы выбирается равным $f_0 = i^2 \mu_0 / d_0^2$, где d_0 - толщина индуктора) при $\omega = 100$ имеют ряд отличий от силы, полученной для "идеализированной" модели с неограниченной в аксиальном направлении высотой (кривая 1). Так как в модели присутствует "идеальный" магнитный экран, и зазор между металлом и индуктором относительно небольшой $S' = 0,14$, максимальное значение силы в центральной части проводника конечной высоты (кривая 2) несколько превышает соответствующее значение для "идеализированной" ИЭП с увеличением высоты металла (при фиксированных остальных параметрах сила убывает и стремится к некоторому пределу). На торце цилиндрической области при $\ell_B = 0,5$ в результате действия торцевого эффекта металла сила еще больше (кривая 3), так как плотность вихревых токов и индукция магнитного поля в этой зоне растут по сравнению с их значениями при $z = 0$. В случае выраженного мениска $h_M = 1,5$ (кривая 5) радиальная составляющая силы на поверхности мениска продолжает расти, однако наряду с этим меняется характер убывания силы вдоль мениска при уменьшении z . Если в "идеализированной" модели сила f_r убывает в $\ell \approx 2,73$ раза на глубине $\delta_1 = \delta/2 = 0,07$ (при $\omega = 100$ распределения f_r ,

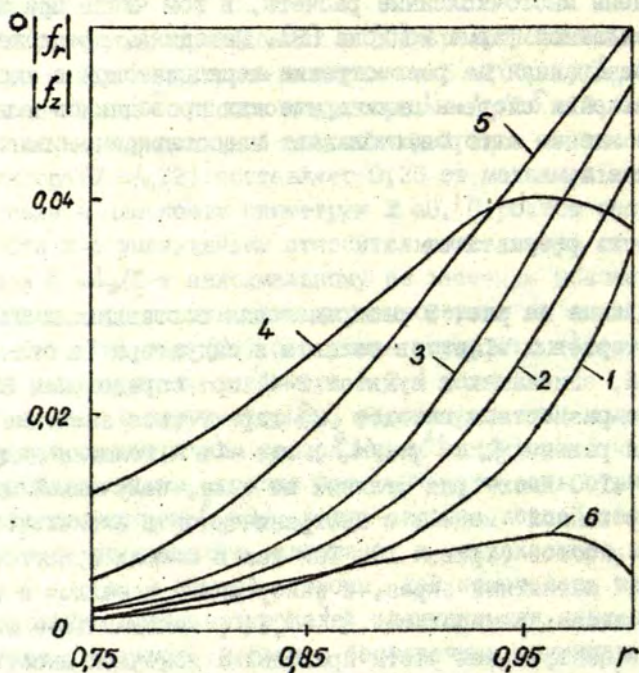


Рис. 3. Распределение составляющих плотности безразмерной ЭМ силы по радиусу при $\omega = 100$:

1) f_r - расчёт по цилиндрической модели.

2) f_r - $h_p = 2,8$, $h_u = 2,8$, $z = 0$.

3) f_r - $h_p = 2,8$, $h_u = 3,5$, $z = 1,4$.

4) f_z - $h_p = 2,8$, $h_u = 3,5$, $z = 1,4$.

5) f_r - $h_p = 2,8$, $h_u = 3,5$, $h_M = 1,5$, на поверхности $z = \xi(\tau)$

6) f_z - $h_p = 2,8$, $h_u = 3,5$, $h_M = 1,5$, на поверхности $z = \xi(\tau)$

γ - глубина, при которой f_r в $e \approx 2,73$ раза меньше по сравнению со значением при $\tau = 1$.

полученные на основе плоской и цилиндрической моделей, практически совпадают), то на выпуклой поверхности проводящей области $\delta_3 = \kappa \delta_1$, где при $h_M = 1,5$ $\kappa \approx 2$. Значение κ зависит от высоты и формы мениска и поэтому, строго говоря, должно определяться в результате решения МГД-задачи в полной постановке [1], однако коэффициент κ (рис. 1а) не чувствителен к изменению вылета индуктора l_B от 0 до 0,5 (интервала, представляющего наибольший интерес для практики). Если с использованием коэффициента κ ввести эффективное значение частоты $\hat{\omega}_3 = \hat{\omega} / \kappa^2$, то для уточнения расчета формы мениска по формулам (18), (20) достаточно заменить $\hat{\omega}$ на $\hat{\omega}_3$.

При $l_B < 0$ максимум f_z на поверхности мениска примерно равен значению f_z при $z = 1$ для модели с $h_M = 0$, взятому на той же высоте, что и основание мениска в модели с $h_M \neq 0$. При $l_B > 0$ в результате проявления торцевых эффектов металла и индуктора это приближенное равенство может нарушаться, и максимум f_z на поверхности мениска становится приближенно равным максимуму f_z при $z = 1$ для модели с $h_M = 0$, то есть, при $z = h_M / 2$. Ошибка при таком задании максимума силы не превышает 25% (соответствует $l_B = 0$). С учетом сказанного для определения формы мениска может быть использована формула

$$\xi(z) = \xi(0) - \frac{\rho g f_0 [\operatorname{ber}^2(\sqrt{\hat{\omega}_3} z) + \operatorname{bei}^2(\sqrt{\hat{\omega}_3} z) - 1]}{\sqrt{2} \hat{\omega}_3 [\operatorname{ber} \sqrt{\hat{\omega}_3} (\operatorname{ber}_1 \sqrt{\hat{\omega}_3} + \operatorname{bei}_1 \sqrt{\hat{\omega}_3}) + \operatorname{bei} \sqrt{\hat{\omega}_3} (\operatorname{bei}_1 \sqrt{\hat{\omega}_3} - \operatorname{ber}_1 \sqrt{\hat{\omega}_3})]}, \quad (24)$$

где f_0 - значение плотности радиальной составляющей силы f_z при $z = \xi(1)$, которое определяется из решения задачи о невозмущенной поверхности конечно-разностным методом [2].

До сих пор при определении формы мениска аксиальная составляющая силы f_z игнорировалась. Расчет f_z (рис. 3, кривые 5, 6) показывает, что значение f_z на поверхности мениска чувствительно к изменению его формы: при $h_M = 1,5$ максимум f_z на поверхности в 5 раз меньше, чем при $h_M = 0$. Это отчасти может служить обоснованием приближения $f_z = 0$, применяемого в [3-6]. Так как в зоне мениска $f_z < 0$, то высота мениска, полученная с использованием формулы (24), будет несколько завышенной: при $h_M = 1,5$ и $\hat{\omega} = 1$ составляет ошибку 10%.

На рис. 16 показаны результаты расчета формы мениска. Как и следовало ожидать, при $\hat{\omega} = 100$ результаты, полученные по формулам (II) и (I7) практически совпадают (рис. 16, кривые 1 и 2, соответственно). При $\hat{\omega} = 10$ по сравнению с формулой (I7) проявляется неточность формулы (II), дающей также заниженное значение параметра Πq . Использование в расчетах формулы (24) при $\ell_B = 0,5$ и $\hat{\omega} = 100$ ($\hat{\omega}_z = 25$) приводит к форме поверхности (рис. 16, кривая 5), существенно отличающейся от рассчитанных по формулам (II), (I7) при той же частоте. При применении этих формул завышается также значение параметра Πq , при котором достигается необходимая высота мениска, и так как $\Pi q \sim I^2$, то значение настила тока завышается примерно в 2 раза.

Выводы

1) При моделировании мениска в гидростатическом приближении необходимо учитывать торцевые эффекты и металла, и индуктора, игнорирование которых приводит к существенным искажениям высоты и формы мениска.

2) Учитывая приближенный характер оценок в гидростатическом приближении, в целях упрощения расчетных формул влиянием аксиальной составляющей ЭМ силы можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов С.И., Якович А.Т. Методика расчета формы свободной поверхности при осесимметричном МГД-течении вязкой несжимаемой жидкости. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ, 1981, с. 70-77.

2. Микельсон Ю.Я., Павлов С.И., Якович А.Т. Методика численного расчета осесимметричного МГД-течения в произвольной области. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Рига: ЛГУ, 1980, с. 3-19.

3. Микельсон Ю.Я., Якович А.Т. Движение жидкого металла в индукционных печах.- В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига: ЛГУ, 1976, вып.2, с.3-26; 1977, вып. 3, с. 40-66.

4. Mühlbauer A. Über die elektrodynamischen Kräfte in der Schmelze von Induktionsöfen.- Elektrowärme International, 1967, Bd. 25, Nr. 12, S. 461-473.

5. Mühlbauer A. Kräfte und Strömungen in der Schmelze eines Induktions-Tiegelofens.- Acta Technica, 1969, Nr. 6, S. 686-712.

6. Гецелев З.Н., Мартынов Г.И. Расчет электромагнитных параметров цилиндрической системы "металл-индуктор".- Магнитная гидродинамика, 1974, № 4, с. 87-94.

7. Махмудов К.М., Немков В.С., Слухоцкий А.Е. Методы расчета индукторов.- Известия Ленинградского ордена Ленина электротехнического института им.В.И.Ульянова-Ленина, 1973, вып. II4, с. 3-27.

8. Reichert K. Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Anordnungen zur induktiven Erwärmung.- Elektrowärme International, 1968, Bd. 26, Nr. 4, S. 113-123.

9. Павлов С.И., Якович А.Т. Влияние мениска на циркуляцию расплава в индукционной электропечи.- Магнитная гидродинамика, 1981 (в печати).

10. Lavers J.D. An analysis of the coreless induction furnace: Load and effects.- Elektrowärme International, 1971, vol. 29, Nr. 7, p. 390-396.

Статья поступила 10 ноября 1980 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Применение численных методов
1981, Рига, ЛГУ им. П. Стучки, с. 70-77

УДК 518.12:538.4+621.365.5

С.И. Павлов
ЛГУ им. П. Стучки

А.Т. Якович
ЛГУ им. П. Стучки

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ МГД-ТЕЧЕНИИ
ВЯЗКОЙ НЕСКИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Под действием электромагнитных (ЭМ) сил и движения металла в металлургических МГД-устройствах (индукционных печах, кристаллизаторах, устройствах ЭМ перемешивания и других) образуется мениск, форма которого оказывает существенное влияние на массоперенос в объеме металла на различных этапах технологического процесса. Высота и форма мениска в гидростатическом приближении оценены в работе [1], однако результаты неудовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Если форма мениска известна, то распределение гидродинамических (ГД) величин может быть рассчитано по методике, изложенной в [2], где рассматривается модель МГД-устройства произвольной осесимметричной конфигурации.

Так как возможности экспериментального исследования мениска ограничены, представляет интерес определение его формы в результате решения краевой задачи со свободной поверхностью для системы уравнений магнитной гидродинамики. До настоящего времени подобные расчеты проводились для непроводящих жидкостей (конечно-разностным методом [3] и методом конечных элементов [4]). Работы, в которых ставится задача нахождения свободной поверхности в случае МГД-течения, авторам не известны.

I. Постановка задачи

Рассматривается вариант модели МГД-устройства (рис. I), предложенной в [2]: вязкая несжимаемая проводящая жидкость (область I), находящаяся в цилиндрическом сосуде, охватываемом индуктором (область 2). До включения ЭМ поля и начала движения свободная поверхность занимает горизонтальное положение $z = z_0$ (z_0 - высота цилиндрической области). Под действием ЭМ сил жидкость приходит в движение, свободная поверхность деформируется и в случае стационарного процесса приобретает некоторую форму Γ_0 (рис. I), которая описывается уравнением $z = \xi(r)$, где $\xi(r)$ - функция, подлежащая определению наряду с ЭМ и ГД полями.

МГД-течение проводящей жидкости в области произвольной осесимметричной конфигурации с фиксированными границами описывается следующей системой безразмерных уравнений в переменных: азимутальная составляющая векторного потенциала магнитного поля $-A$ и ротора скорости $-W$, функция тока ψ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -j^{ex} - j^i; \quad (1)$$

$$j^i = -i\hat{\omega}A - Rm \left[v_r \frac{\partial(rA)}{\partial r} + v_z \frac{\partial A}{\partial z} \right]; \quad (2)$$

$$\left(r v_r - \frac{3}{Re} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) + v_z \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left[r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{W}{r} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] + Al \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = rW; \quad (4)$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad v_z = -\frac{r}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad (5)$$

$$f_r = \frac{1}{2} \text{Real} \left[\frac{j^i}{r} \frac{\partial(rA^*)}{\partial r} \right]; \quad f_z = \frac{1}{2} \text{Real} \left(j^i \frac{\partial A^*}{\partial z} \right), \quad (6)$$

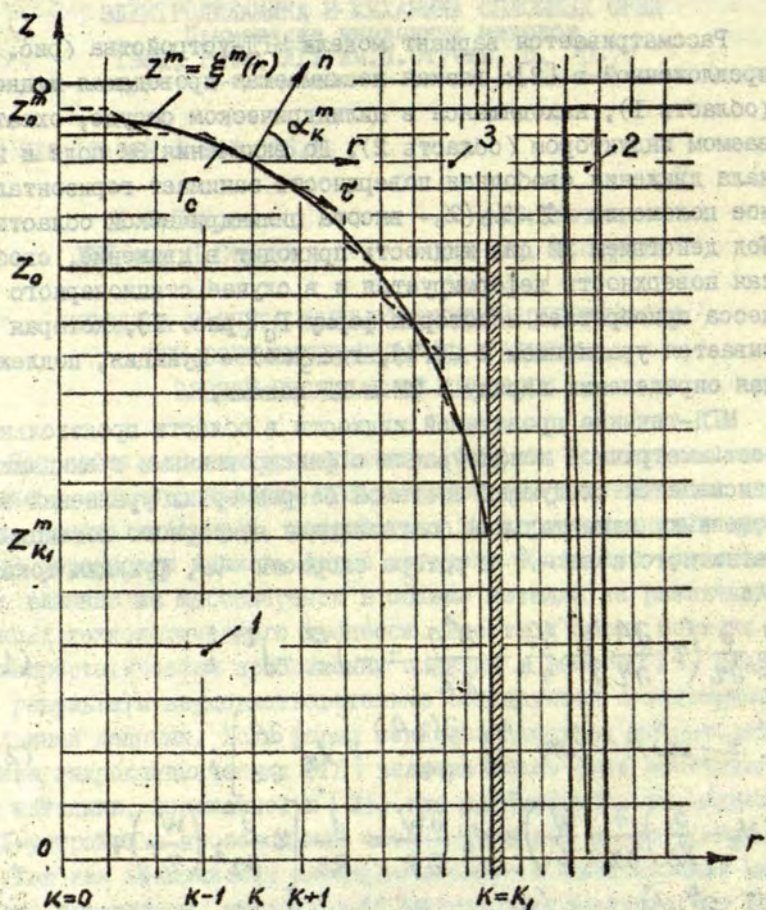


Рис. 1. Наложение конечно-разностной сетки на исследуемую область.

- 1) Вязкая несжимаемая проводящая жидкость.
- 2) Источник электромагнитного поля (индуктор).
- 3) Непроводящее немагнитное пространство.

$$10) \left(\frac{AC}{55} \right) \frac{2000}{2} = 1 + \left[\frac{(A^2) 6}{55} \right] \frac{2000}{2} = 2.7$$

где $\hat{\omega} = \mu_0 \delta \omega \tau_0^2$ - безразмерная частота, $Rm = v_0 \tau_0 \mu_0 \sigma$ - магнитное число Рейнольдса, $Re = v_0 \tau_0 / \nu$ - число Рейнольдса, $Al = j_0^2 \mu_0 \tau_0^2 / \rho v_0^2$ - число Альфвена, j_0^{ex} - плотность наружных токов в индукторе (подробнее см. в [2]).

ГД краевые условия задаются на границе области I (рис. I)

$$W=0; \psi=0 \quad \text{при } \tau=0; \quad (7)$$

$$W=0; \psi=0 \quad \text{при } z=\xi(\tau) \quad (\tau, z \in \Gamma_c); \quad (8)$$

$$W = \frac{1}{\tau} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}; \quad \psi=0 \quad \text{при } z=0; \quad (9)$$

$$W = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}; \quad \psi=0 \quad \text{при } \tau=1. \quad (10)$$

Условия (7)-(10) следуют из эквивалентных им условий для составляющих скорости

$$v_\tau = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau=0; \quad (7a)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial \tau} - \frac{\partial v_\tau}{\partial z} = 0; \quad v_\tau \cos \alpha + v_z \sin \alpha = 0 \quad \text{при } \tau, z \in \Gamma_c \quad (8a)$$

$$v_\tau = 0; \quad v_z = 0 \quad \text{при } \tau=1 \text{ или } z=0, \quad (9a, 10a)$$

где α - угол между нормалью к свободной поверхности и осью τ (рис. I).

На поверхности Γ_c внешнее давление $p_{вн}$ постоянно и равно атмосферному ($p_{вн} = p_0$). Это означает, что градиент внутреннего давления (состоящего в случае МГД-течения из ЭМ и ГД давления) перпендикулярен свободной поверхности Γ_c в каждой ее точке

$$\text{grad } p \perp \Gamma_c. \quad (11)$$

Так как форма Γ_0 неизвестна, система ГД уравнений (3), (4) решается в области, ограниченной сверху некоторой кривой $z^m = \xi^m(r)$ (рис. 1), являющейся m -тым приближением поверхности Γ_0 . При этом условие (II) для давления p^m не выполняется. Если из уравнения Навье-Стокса определить компоненты градиента давления $\text{grad } p^m = (\partial p^m / \partial r; 0; \partial p^m / \partial z)$:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] - v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + Al \cdot f_r; \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + Al \cdot f_z - \frac{1}{Fr}; \quad (13)$$

где $Fr = v_0^2 / r_0 g$ - число Фруда, и каждой точке на границе $z^m = \xi^m(r)$ поставить в соответствие значение угла α^{m+1} между направлением $\text{grad } p^m$ (не совпадающим с нормалью к $z^m = \xi^m(r)$) и осью r

$$\text{ctg } \alpha^{m+1} = \frac{\partial p^m / \partial r}{\partial p^m / \partial z}, \quad (14)$$

то можно определить семейство кривых $z^{m+1} = \eta^{m+1}(r)$

$$\eta^{m+1}(r) = \eta^{m+1}(0) - \int_0^r \text{ctg } \alpha^{m+1} dr, \quad (15)$$

одна из которых, удовлетворяющая условию сохранения массы (нелокальное граничное условие)

$$z_0 = 2 \int_0^r r \xi^{m+1}(r) dr, \quad (16)$$

представляет собой $(m+1)$ -е приближение $z^{m+1} = \xi^{m+1}(r)$ границы Γ_0 . Если процесс последовательных приближений сходится, то после необходимого числа уточнений получается форма границы Γ_0 , для которой приближенно выполняется условие (II).

2. Методика расчета

Система уравнений (1)-(6) с учетом граничных условий (7)-(10), (16) решается конечно-разностным методом. Иссле-

дуемая область (рис. I) заменяется сеточной областью Ω . Сеточный аналог области I - Ω_0^m - является подобластью сеточной области Ω и имеет координаты узловых точек (r_k, z_n) ($k=0, I, \dots, K_1; n=N, N+I, \dots, N_K$). Размеры области Ω_0^m зависят от положения границы $z^m = \xi^m(r)$ (рис. I).

Пусть задано m -тое приближение $z^m = \xi^m(r)$ формы границы Γ_0 , а также соответствующие этому положению границы распределения ЭМ и ГД величин. Для определения формы свободной поверхности в $(m+1)$ - приближении $z^{m+1} = \xi^{m+1}(r)$ необходимо провести следующие вычисления:

1) Из уравнений (I2), (I3) в разностной форме и соотношения (I4) вычисляются значения $\text{ctg } \alpha^{m+1}$ в $(m+1)$ - приближении в точках с координатами $z_k^m = \xi^m(r_k)$ ($k=0, I, \dots, K_1$).

2) Координаты \tilde{z}_k^{m+1} в $(m+1)$ - приближении точек пересечения линий сетки $r=r_k$ с поверхностью $\tilde{z}^{m+1} = \tilde{\xi}^{m+1}(r)$ в $(m+1)$ - приближении определяются из формулы (I5) путем численного интегрирования на неоднородной сетке по формуле трапеции

$$\tilde{z}_1^{m+1} = \tilde{z}_0^{m+1} - \frac{1}{2} h_0 \text{ctg } \alpha_1^{m+1}; \quad (17)$$

$$\tilde{z}_k^{m+1} = \tilde{z}_0^{m+1} - \frac{1}{2} h_{k-1} \text{ctg } \alpha_k^{m+1} - \sum_{i=1}^{k-1} h_{i-\frac{1}{2}} \text{ctg } \alpha_i^{m+1}; \quad k=2, 3, \dots, K_1,$$

где h_k ($k=0, I, \dots, K_1-1$) - шаг сетки в радиальном направлении, $h_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(h_{i-1} + h_i)$.

Координата \tilde{z}_0^{m+1} точки пересечения поверхности $\tilde{z}^{m+1} = \tilde{\xi}^{m+1}(r)$ с осью симметрии $r=0$ находится из условия сохранения массы (I6) также в результате численного интегрирования с применением формулы трапеции:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_0^{m+1} = & \left[h_{1/2} h_0^2 \text{ctg } \alpha_1^{m+1} + \frac{1}{2} h_{K_1-1}^2 \text{ctg } \alpha_{K_1}^{m+1} + h_{K_1-1} \sum_{i=1}^{K_1-1} h_{i-\frac{1}{2}} \right. \\ & \times \text{ctg } \alpha_i^{m+1} + z_0 + \sum_{j=2}^{K_1-1} r_j h_{j-\frac{1}{2}} (h_{j-1} \text{ctg } \alpha_j^{m+1} + \\ & \left. + 2 \sum_{i=1}^{j-1} h_{i-\frac{1}{2}} \text{ctg } \alpha_i^{m+1}) \right] \left(h_{K_1-1} + \sum_{j=1}^{K_1-1} r_j h_{j-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \quad (18) \end{aligned}$$

3) Форма свободной поверхности в $(m+1)$ - приближении $\tilde{z}^{m+1} = \tilde{\xi}^{m+1}(\tau)$ корректируется с помощью релаксационного параметра u_1 (как правило, используется нижняя релаксация):

$$z_k^{m+1} = u_1 \tilde{z}_k^{m+1} + (1-u_1) z_k^m. \quad (19)$$

Таким образом, получена форма свободной поверхности Γ_0 в $(m+1)$ - приближении $z^{m+1} = \xi^{m+1}(\tau)$.

4) Производится вычисление погрешности

$$e_1 = \max_{k=0,1,\dots,K_1} \frac{|z_k^{m+1} - z_k^m|}{|z_k^{m+1}|}. \quad (20)$$

5) Граница области, заданная вектором $z_k^{m+1} = \xi^{m+1}(\tau_k)$ с помощью сдвига в пределах половины шага сетки заменяется ломаной линией так, чтобы аппроксимированная граница \tilde{z}_k^{m+1} проходила через узловые точки неоднородной сетки (на рис. 1 она показана пунктирной линией). В соответствии с новой границей корректируются сеточная область Ω_0^{m+1} , массивы безразмерной частоты $\tilde{\omega}$, магнитного числа Рейнольдса Rm .

6) В области Ω_0^{m+1} с границей \tilde{z}_k^{m+1} ($k=0,1,\dots,K_1$) производится расчет уточненного распределения ЭМ силы, ротора скорости и функции тока по методике [2]. С помощью разностных аналогов граничных условий (7)-(10) второго порядка аппроксимации определяются компоненты скорости на границе z_k^{m+1} .

7) Производится вычисление погрешности

$$e_2 = \left| 1 - \max_{\Omega_0^{m+1}} \sqrt{v_z^2 + v_x^2} \right|. \quad (21)$$

8) Производится сравнение погрешностей (20), (21) с заданной точностью вычислений, ε_1 , ε_2 . Если выполняются условия $e_1 < \varepsilon_1$ и $e_2 < \varepsilon_2$ задача по определению формы свободной поверхности Γ_0 считается решенной, и результаты расчетов выводятся на печать. В противном случае итерационный цикл повторяется.

Методика расчета формы свободной поверхности при стационарном МГД-течении проводящей жидкости реализована на ЭМ ЕС-1022. Программа расчетов написана на языке ФОРТРАН. В зависимости от размеров сеточной области и заданной точности вычислений для расчета одного варианта требуется до десяти часов машинного времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mühlbauer A. Kräfte und Strömungen in der Schmelze eines Induktions-Tiegelofens.- Acta Technica, 1969, Nr. 6, S. 686-692.

2. Микельсон Ю.Я., Павлов С.И., Якович А.Т. Методика численного расчета осесимметричного МГД-течения в произвольной области.- В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Рига: ЛГУ, 1980, с. 3-19.

3. Васенин И.М., Козлобородов А.Н., Шрагер Г.Р. Расчет течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью.- В кн.: Труды 5-го Всесоюзного семинара по численным методам вязкой жидкости. Новосибирск, 1975, с. 58-69.

4. Pohl W. Numerische Behandlung der Stationären Navier-Stokes-Gleichung mit freier Oberfläche.- Vorträge der 2. Tagung der Strömungsmechanik, Berlin, 1979, S. 130-133.

Статья поступила 15 декабря 1979 года

УДК 536.12:537.311.6:621.313.3

Л.Г.Иванов
ЛГУ им. П.Стучки

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОТДАЧИ ПЛОСКОЛИНЕЙНОЙ ИНДУКЦИОННОЙ МГД-МАШИНЫ

Тепловой режим МГД-машины определяется подводимой мощностью и условиями теплообмена с окружающей средой. С учётом того, что часть материалов (изоляция, ферромагнитный магнитопровод) при высоких температурах теряет свойства, необходимые для нормальной работы, требуется экспериментально исследовать температурное поле МГД-машины в зависимости от подводимой мощности и условий теплообмена. Особое значение этот вопрос приобретает при работе МГД-машины в энергонепригодном режиме, когда достигаются высокие температуры, близкие к максимально допустимым для наиболее чувствительных материалов МГД-машины. В настоящее время достаточно хорошо исследованы условия конвективного теплообмена для тел простой геометрической формы (пластина, цилиндр и т.п.) [1]. Однако, для тел со сложной поверхностью и геометрической формой определение теплотдачи путём конвекции затруднительно. Кроме того, излучательная способность любого излучателя является функцией температуры, которая (функция) зависит не только от материала излучателя, но во многом и от состояния его поверхности (шероховатость, окисленность, окраска). По этой причине, зависимость излучательной способности от температуры, как правило, приходится определять эмпирически [2] для каждого отдельного объекта измерения.

Имеется целый ряд методов расчёта температурных полей в МГД-машинах с различными системами охлаждения [3]. В случае наличия охлаждаемых поверхностей тепловой расчёт упрощается, поскольку на этих поверхностях известны точные граничные условия (постоянная температура или теплообмен). Однако, как отмечалось выше, в случае свободного теплообмена с окружающей средой точные граничные условия практически неизвестны. Особое значение этот вопрос приобретает в случае тепловых расчётов при высоких температурах, когда коэффициенты теплоотдачи (конвективной и излучательной) существенно зависят от температуры. В данных условиях приближённый расчёт может дать большие погрешности. Состояние теории и методы расчёта температурного поля в высокотемпературных МГД-устройствах приведены в обзоре [4].

В настоящей работе приведены результаты экспериментального исследования температурного поля плосколинейного индукционного МГД-насоса в условиях свободного теплообмена с окружающей средой. На рис. I схематически изображён данный экспериментальный образец с указанием конструктивных элементов. Питание насоса осуществлялось от однофазного автотрансформатора РНО-250-5 ($f = 50 \text{ Гц}$), обмотки индуктора были соединены последовательно, что облегчает измерение мощности и других электрических величин. Измерения температур проводились с помощью хромелего-алюмелевых термопар, которые дают линейную зависимость термо-ЭДС от температуры в пределах $0 \div 800^\circ\text{C}$. Термопары были размещены в точках, указанных на рис. I. Показания термопар фиксировались на ленте автоматического потенциометра КСП4, отградуированного для данных термопар. Измерения мощности, силы тока и напряжения проводились с помощью измерительного комплекта К5С (класс точности - 0,5).

Измерения температурного поля проводились в холостом режиме, когда вся подводимая мощность отдаётся окружающей среде в виде тепла. В экспериментах насос доводился до различных тепловых стационарных режимов. Для уменьшения времени проведения опытов выход на каждый стационарный режим осуществлялся ускоренным путём: насос быстро нагревался до температур, близких к температурам задуманного стационарного режима, после чего понижалась подаваемая мощность и температурное по-

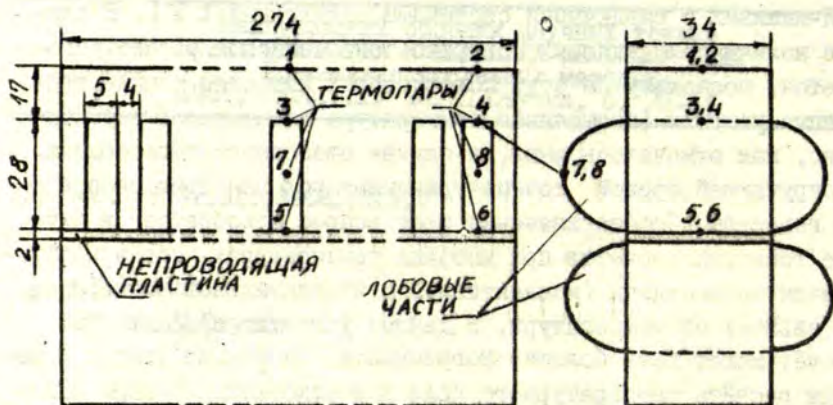


Рис. 1. Схематическое изображение плосколинейного МГД-насоса с указанием точек расположения термопар

ле медленно достигало стационарного состояния. Подобный метод возможен, поскольку конечное тепловое состояние согласно стационарному уравнению теплопроводности зависит от начальных условий. Состояние стационарности фиксировалось, когда показания термопар во всех точках измерений оказались практически неизменными в течение $15 + 20$ мин. В достигнутом стационарном режиме отмечались: мощность, сила тока, напряжение и величина температур во всех отмеченных на рис. 1 точках. В таблице 1 приведены значения измеряемых электрических величин в различных стационарных режимах.

● Величина температур в различных стационарных режимах показана на рис. 2, где нумерация кривых соответствует номерам термопар на рис. 1 (на рис. 2 отмечены только температуры в центре насоса, а также самая низкая температура на поверхности спинки вблизи торца). На основе экспериментальных данных был получен эмпирический закон, описывающий теплоотдачу насоса в зависимости от некоторой температуры, которую можно считать характерной для плосколинейных МГД-машин. В качестве характерной температуры $T_{хар}$ была избрана температура поверхности лобовой части обмоток индуктора (термопара 7). Такой выбор обусловлен следующими факторами:

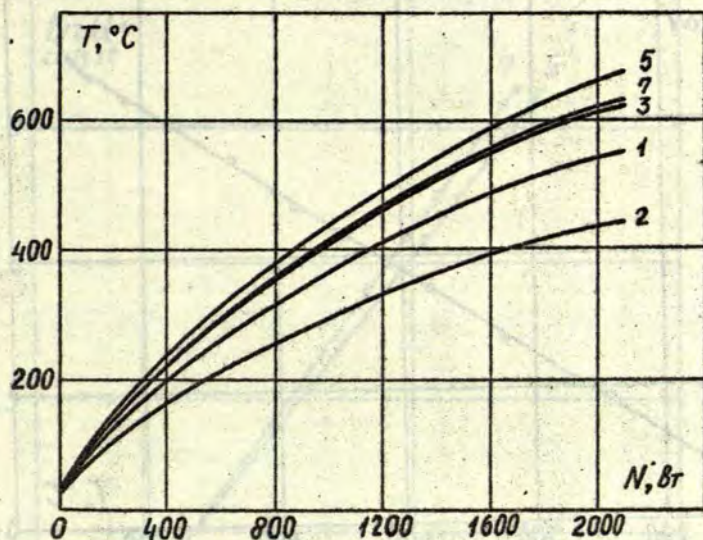


Рис. 2. Зависимость стационарных температур в различных точках от подводимой мощности

1. Из-за хорошей теплопроводности меди температура каждой катушки индуктора имеет приблизительно одинаковую температуру в различных точках. (Это подтверждается экспериментом - кривые 3 и 7 на рис. 2).

2. Ввиду малой частоты переменного тока тепловыделение в магнитопроводе незначительно, поэтому в обмотках индуктора за счёт выделения джоулева тепла достигается максимальная температура.

3. Так как наибольшая температура поверхности достигается на лобовой части индуктора, то основная часть теплоотдачи осуществляется именно на этой поверхности (путём естественной конвекции и излучением). Кроме того, лобовые части имеют конфигурацию радиаторов, что ещё более улучшает конвективный теплообмен.

4. Эксперименты показали, что полное активное сопротивление обмоток индуктора линейно зависит от данной температуры $T_{хар}$ (рис. 3), причём температурный коэффициент сопротивления, полученный по экспериментальным данным ($\alpha = 4,27 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$), хорошо согласуется со значением α для меди. Следовательно, избранная $T_{хар}$ характеризует среднюю температуру всей обмотки (полное сопротивление обмоток в каж-

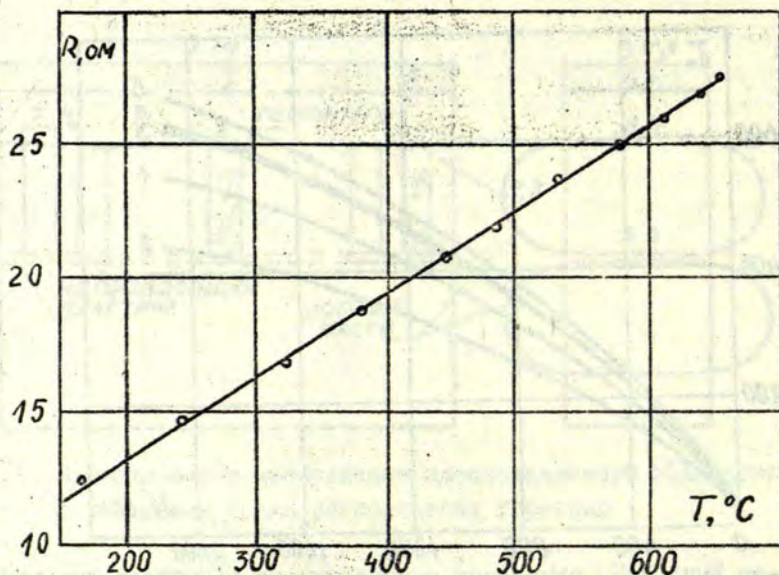


Рис. 3. Зависимость полного активного сопротивления обмоток от $T_{хар}$.

дом стационарном режиме определялось по формуле $R_c = P/I^2$, поскольку тепловыделение в магнитопроводе незначительно).

5. Температуру поверхности лобовой части индуктора легко измерить для каждой МГД-машины.

При обработке экспериментальных данных теплоотдачи данной МГД-машины в зависимости от $T_{хар}$ в интервале температуры $500^\circ \div 900^\circ$ К использовалась степенная функция в виде

$$Q = \alpha_0 T_{хар}^\beta \quad (I)$$

где α_0 и β - некоторые постоянные, $T_{хар}$ - абсолютная температура поверхности лобовой части индуктора (в наших экспериментах - T_z).

В таблице 2 показаны сравнительные результаты экспериментальных и расчётных значений теплоотдачи при заданных температурах $T_{хар}$ и значениях $\alpha_0 = 1,8 \cdot 10^{-5}$ вт; $\beta = 2,730$, полученных при обработке экспериментальных данных.

В последней строке таблицы указаны отклонения значения β в каждом отдельном случае от среднего значения $\beta = 2,730$. Среднее значение $\Delta \beta = 1,84 \cdot 10^{-3}$, однако, по табли-

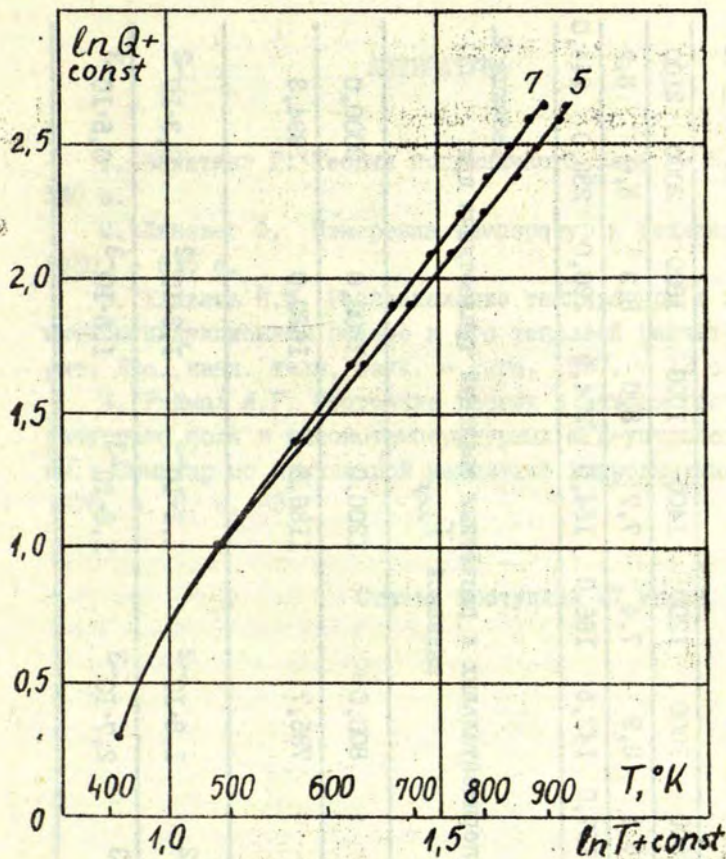


Рис. 4. Зависимость теплоотдачи от температуры, изображённая в логарифмическом масштабе

Из видно, что при более высоких температурах отличие расчётных и экспериментальных значений уменьшается, т.е., $\Delta\beta$ принимает меньшее значение.

В заключение отметим, что необходимы дальнейшие эксперименты с МГД-машинами других размеров и мощностей для исследования теплоотдачи и получения эмпирических её зависимостей.

Таблица 1.

Значения электрических величин в различных стационарных режимах

P, Вт	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2100
I, А	4,0	5,2	5,9	6,5	6,9	7,4	7,7	8,0	8,3	8,6	8,7
U, В	53,0	80,0	105,0	127,0	142,5	166,0	184,0	204,0	220,0	238,0	244,0

Таблица 2.

Сравнительные результаты экспериментальных и расчётных значений теплоотдачи при заданной $T_{хар}$.

$Q_{экс.}, Вт$	400,0	800,0	1200,0	1600,0	2000,0
$Q_{рас.}, Вт$	394,2	786,7	1186,5	1620,0	1994,3
$\frac{Q_{экс.} - Q_{рас.}}{Q_{экс.}}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$0,3 \cdot 10^{-2}$
$\Delta \beta$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М., 1974. - 340 с.
2. Линевег Ф. Измерения температур в технике. - М., 1980. - 615 с.
3. Клявинь Я.Я. Распределение температуры в электромагнитном индукционном насосе и его тепловой расчёт: Автореферат. Дис...канд. техн. наук. - Рига, 1967. - 12 с.
4. Реймал Л.Р. Состояние теории и методы расчёта температурного поля в высокотемпературных МГД-устройствах. - В кн.: Семинар по прикладной магнитной гидродинамике. Пермь, 1978, ч. II, с. 85.

Статья поступила 27 марта 1981 года.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Применение численных методов
1981, Рига, ЛГУ им. П. Стучки, с. 86-96

УДК 539.3:534.1

Э.Г.Фелдмане

ЛГУ им. П. Стучки

О РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ
ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

При решении прямыми вариационными методами задачи о параметрических колебаниях цилиндрической оболочки в геометрически нелинейной постановке основным является вопрос о выборе аппроксимирующих выражений для искомым функций, обеспечивающих решение с достаточной точностью. Этот вопрос был исследован в работе [1], где показано, что вид аппроксимации прогиба оболочки следует определять, исходя из характера расположения областей динамической неустойчивости, т.е. из решения соответствующей линейной задачи. В разложении прогиба $w(x, y, t)$ в двойной ряд Фурье по системе координатных функций $\{X_m(x), Y_n(y)\}$, удовлетворяющих граничным условиям, следует удерживать только те гармоники с номерами (m, n) , колебания по которым являются резонансными. При заданных величинах амплитуды и частоты внешней нагрузки точка на плоскости параметров попадает внутрь областей динамической неустойчивости, соответствующих этим гармоникам. Таким образом, если в данной точке пересекаются N областей динамической неустойчивости для форм $(m_1, n_1), (m_2, n_2), \dots, (m_N, n_N)$; то следует использовать N -членную аппроксимацию прогиба

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^N W_{m_i n_i}(t) X_{m_i}(x) Y_{n_i}(y). \quad (1)$$

После подстановки (1) в уравнения движения оболочки и применения процедуры Бубнова-Галеркина по продольной координате x и окружной координате y задача сводится к интегрированию по времени системы N нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим круговую пологую ортотропную цилиндрическую оболочку радиуса R , длины L и толщины h , к обоим торцам которой приложена равномерно распределенная осевая вибрационная нагрузка $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$. Исследуем случай, когда соответствующая этой нагрузке точка на плоскости параметров попала в пересечение N областей динамической неустойчивости для одной и той же осевой формы колебаний m и различных окружных форм n (именно этот случай чаще всего реализуется в представляющем наибольший практический интерес начальном участке спектра областей неустойчивости^{*)}). При условиях шарнирного опирания на торцах оболочки будем искать прогиб в виде:

$$w(x, y, t) = \sin \alpha_m x \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} W_{mn}(t) \cos \beta_n y \quad (2)$$

$$\alpha_m = \frac{\pi m}{L}, \quad \beta_n = \frac{n}{R}.$$

Построение координатной зависимости для функции напряжений Φ с использованием аппроксимации прогиба (2) и сведение смешанной краевой задачи к задаче Коши описано в работе [2]. В результате для нахождения амплитуд колебаний $W_{mn}(t)$ необходимо провести численное интегрирование приведенной в [2] системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений при заданной вибрационной нагрузке $P(t)$.

^{*)} Это иллюстрирует, в частности, начальный участок спектра, приведенный на рис. 1.

После того, как функции $W_{mn}(t)$ определены, суммированием ряда (2) можно найти полный прогиб, а также напряжения в произвольной точке оболочки в любой момент времени. При использовании гипотезы Кирхгофа-Лява напряжения $\tilde{\sigma}_{ij}$ линейно распределены по толщине и определяются по известным формулам:

$$\tilde{\sigma}_{xx}(x, y, z, t) = \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - z \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{P(t)}{h};$$

$$\tilde{\sigma}_{yy}(x, y, z, t) = \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - z \left(B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$\tilde{\sigma}_{xy}(x, y, z, t) = -\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - 2z B_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Здесь z - радиальная координата; B_{ij} - матрица жесткости ортотропного материала. Прогиб w и координата z считаются положительными по направлению к центру кривизны поверхности оболочки.

Приведем некоторые результаты расчета напряженного состояния в изотропной оболочке со следующими геометрическими и механическими характеристиками: $R/h = 100$; $L/R = 2$; $E = 4 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\nu = 0,3$; $\rho = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³ (E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона, ρ - плотность материала оболочки). На рис. 1 изображен начальный участок спектра областей динамической неустойчивости для этой конструкции в координатах (θ, δ) при постоянной составляющей нагрузки $P_0 = 0,5 P^*$, где P^* - эйлерово усилие; безразмерный параметр

$$\delta = \frac{P_t / P^*}{2(1 - P_0 / P^*)}.$$

На рис. 2, 3. приведены зависимости напряжений от окружной координаты в сечении $x = 0,5 L$ на внешней (а) и на внутренней (б) поверхности в момент времени $t = 0,125$ с для случая $\theta = 650$ рад/с, $\delta = 0,35$. При этом соответствующая точка на плоскости параметров попадает внутрь одной

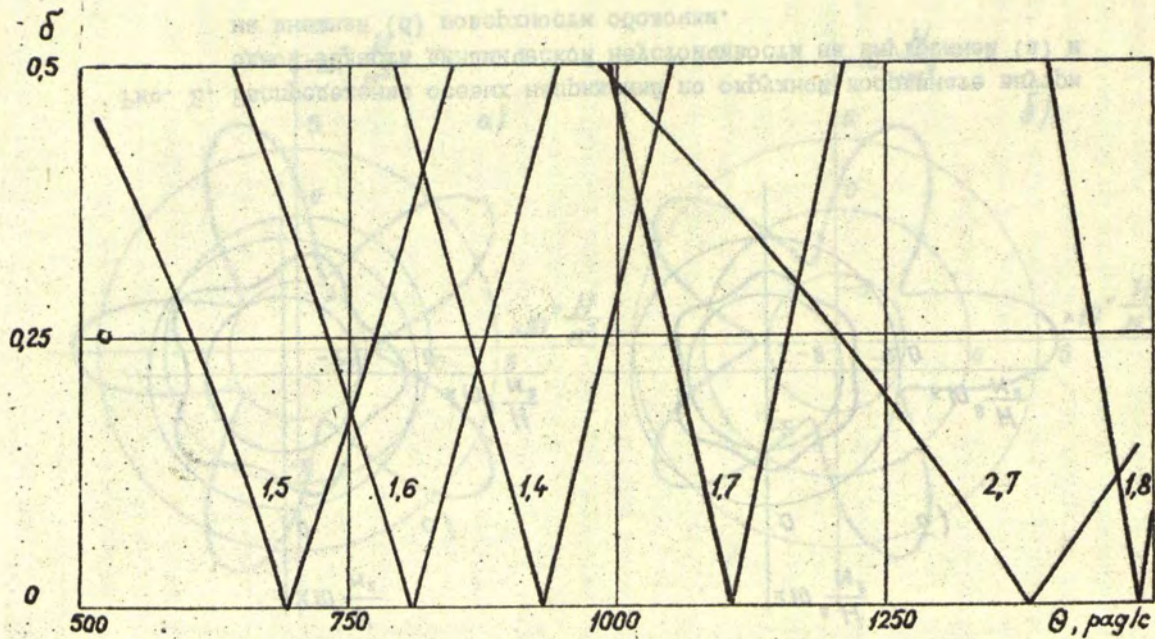


Рис. 1. Начальный участок спектра областей динамической неустойчивости.

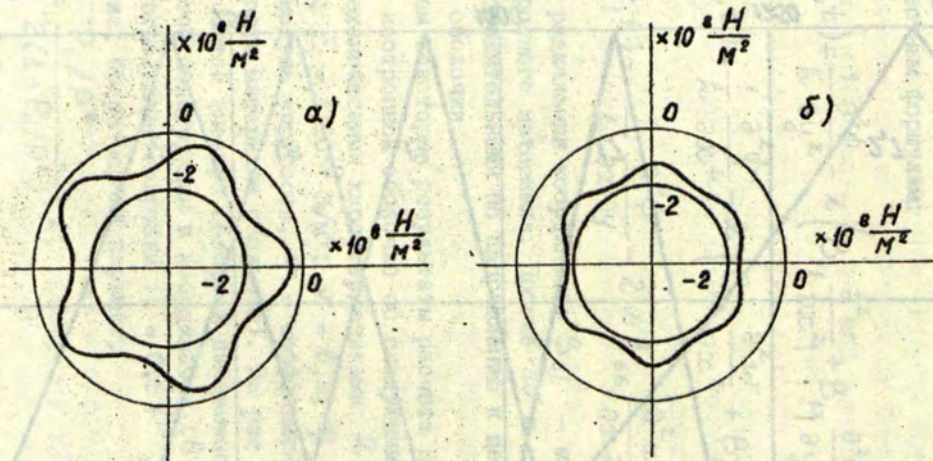


Рис. 2. Распределение осевых напряжений по окружной координате внутри одной области динамической неустойчивости на внутренней (а) и на внешней (б) поверхности оболочки.

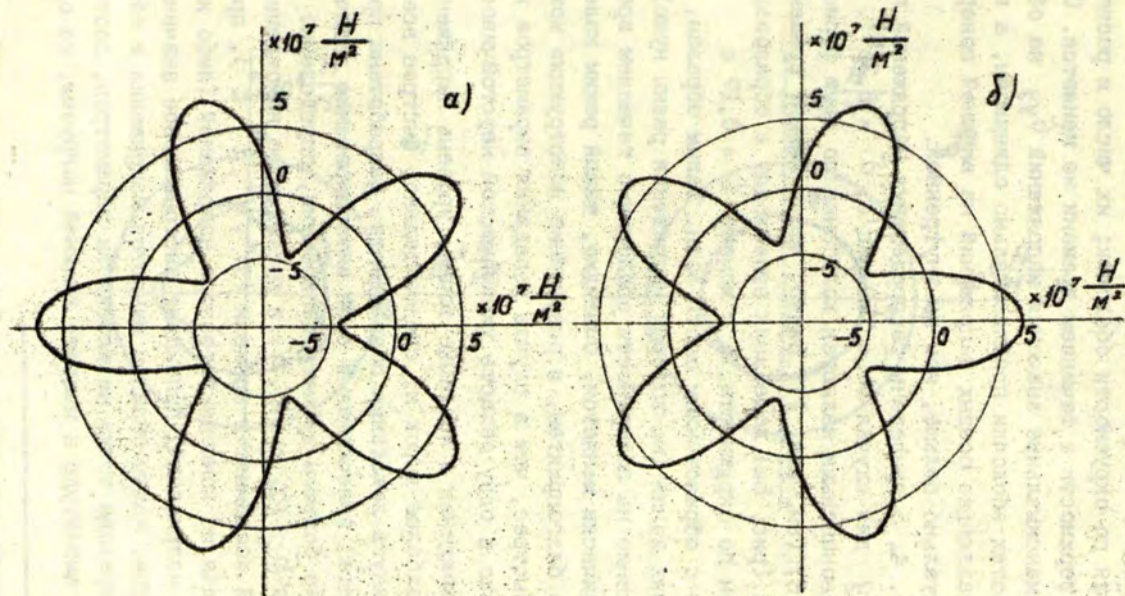


Рис. 3. Распределение окружных напряжений по координате ψ внутри одной области динамической неустойчивости на внутренней (а) и на внешней (б) поверхности оболочки.

области неустойчивости для форм $m = 1$, $n = 5$. Отчетливо видны десять узловых линий; соответствующие образования пяти волн по окружности оболочки; их число и расположение на поверхности с течением времени не меняется. Отметим, что максимальные значения напряжений σ_{yy} на обеих поверхностях оболочки приблизительно одинаковы, а изгибные составляющие осевых напряжений на внешней поверхности значительно больше, чем на внутренней.

На рис. 4, 5. приведены распределения напряжений по координате y для случая $\theta = 750$ рад/с, $\sigma = 0,35^*$. При этом резонансными являются колебания по двум формам: (1,5) и (1,6) (см. рис. 1). Видно, что в момент времени $t = 0,13$ с. (рис. 5а) колебания происходят с образованием пяти волн по окружности, а в момент $t = 0,17$ с (рис. 5б) - с образованием шести волн. Таким образом, число узловых линий (на которых напряжения равны нулю) и их расположение на поверхности оболочки с течением времени периодически меняется. Очевидно, такой режим колебаний менее благоприятен, и разрушение конструкции может произойти быстрее, чем в случае попадания параметров нагрузки только в одну область динамической неустойчивости.

Для нахождения в оболочке точек, уровень напряжений в которых наиболее высок и, следовательно, быстрее всего могут возникнуть локальные повреждения, разработана программа расчета, включающая в себя интегрирование задачи на достаточно большом промежутке времени, определение зависимостей $\sigma_{ij}(x, y, z, t)$ и последующее нахождение тех значений координат и времени (x^*, y^*, z^*, t^*) , при которых каждая из компонент тензора напряжений (либо интенсивность напряжений) принимает экстремальное значение.

Проследим, каким образом меняются напряжения в оболочке при переходе точки на плоскости параметров, соответствующей амплитуде и частоте внешней нагрузки, из од-

*) Отметим, что все дальнейшие результаты относятся к сечению $X = 0,5 L$ и внешней поверхности оболочки.

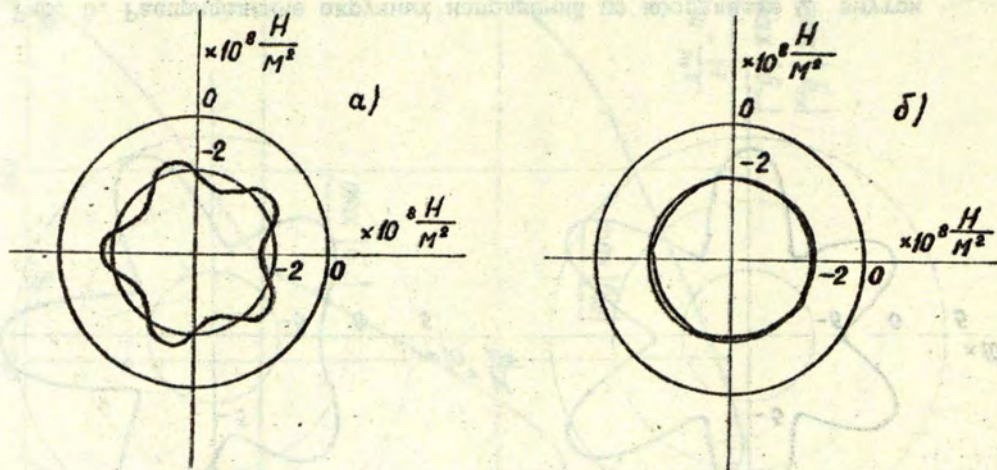


Рис. 4. Распределение осевых напряжений по окружной координате внутри пересечения двух областей динамической неустойчивости в моменты времени $t = 0,13$ с (а) и $t = 0,17$ с (б).

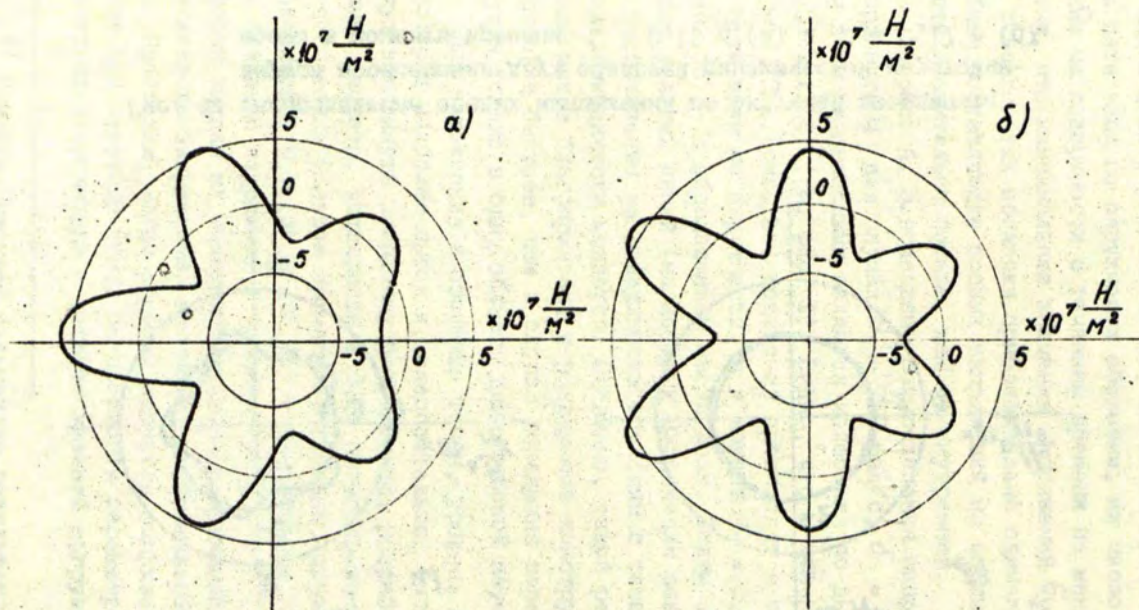


Рис. 5. Распределение окружных напряжений по координате y внутри пересечения двух областей динамической неустойчивости в моменты времени $t = 0,13$ с (а) и $t = 0,17$ с (б).

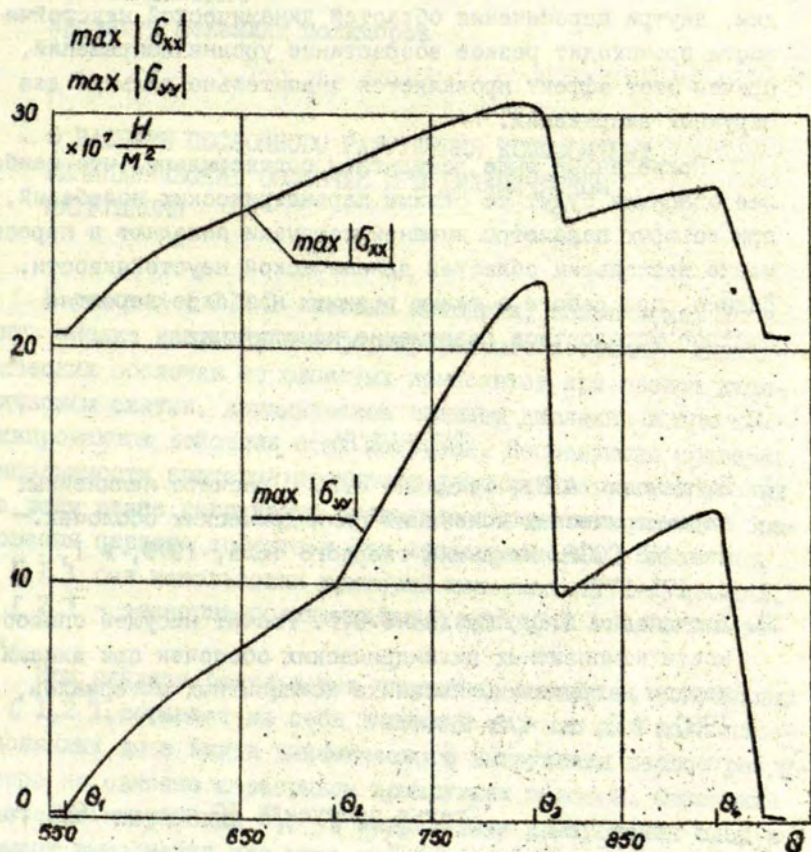


Рис. 6. Зависимость экстремальных значений напряжений от частоты.

ной области неустойчивости в пересечение двух областей. На рис. 6 изображены зависимости от частоты внешней нагрузки θ экстремальных значений напряжений при изменении θ от $\theta_1 = 560$ рад/с (левая граница области неустойчивости для формы (I,5)) до $\theta_4 = 905$ рад/с (правая граница области неустойчивости для формы (I,6)). Частоты $\theta_2 = 700$ рад/с и $\theta_3 = 805$ рад/с соответствуют левой и правой границам пересечения этих областей (см. рис. 1). Как видим, внутри пересечения областей динамической неустойчивости происходит резкое возрастание уровня напряжений, причем этот эффект проявляется значительно сильнее для окружных напряжений.

Приведенные выше результаты подтверждают, что наиболее опасными будут те режимы параметрических колебаний, при которых параметры внешней нагрузки попадают в пересечение нескольких областей динамической неустойчивости. Видимо, при работе в таких режимах наиболее вероятно быстрое усталостное разрушение конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданович А.Е., Фелдмане Э.Г. О расчете нелинейных параметрических колебаний цилиндрических оболочек. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1979, № 1, с. 171-177.
2. Богданович А.Е., Фелдмане Э.Г. Расчет несущей способности композитных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении. — Механика композитных материалов, 1980, № 3, с. 476-484.

Статья поступила 16 января 1981 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Применение численных методов
1981, Рига, ЛГУ им. П.Стучки, с. 97-102

УДК 539.3:534.1

А. Е. Богданович

Институт механики полимеров
АН ЛатвССР

О РАСЧЁТЕ ПОСЛОЙНОГО РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТНЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ
НАГРУЖЕНИИ

В работах [1,2] описаны методики, позволяющие проводить анализ напряжённо-деформированного состояния цилиндрических оболочек из слоистых композитов при осевом динамическом сжатии, динамическом внешнем давлении и при комбинированном действии этих нагрузок. Последующая проверка выполнимости критерия прочности для каждого слоя оболочки на всём этапе нагружения позволила определить момент образования первого дефекта и его местоположение в оболочке. В [1] был использован критерий максимальных деформаций, в [2] - тензорно-полиномиальный критерий А.К.Малмейстера.

При анализе результатов численных расчётов, полученных в [1,2], обращает на себя внимание то, что для всех перечисленных выше видов динамического нагружения первое разрушение не связано с разрывом армирующих волокон. Отношение значения напряжения σ_{11} в направлении армирования слоя в момент выполнения для него критерия прочности к пределу прочности F_{11} в этом же направлении изменяется в пределах $0,04 \leq |\sigma_{11}/F_{11}| \leq 0,6$ в зависимости от структуры армирования пакета. Максимальные значения $|\sigma_{11}/F_{11}|$ соответствуют армированию оболочки вдоль образующей при осевом сжа-

тии и армированию в кольцевом направлении при внешнем давлении.

Таким образом, при рассматриваемых видах динамического нагружения (подчеркнём, что причиной разрушения является неосесимметричное выпучивание оболочки) возникновение первого дефекта в некотором слое не эквивалентно полной потере оболочкой несущей способности. В этой связи возникает интерес к расчёту процесса деформирования оболочки после момента первого разрушения слоя и определению величины нагрузки, при которой напряжения, действующие в направлении армирования, достигают предельных значений во всех слоях.

В настоящее время известно несколько подходов к анализу деформирования и разрушения слоистого композитного материала после первого разрушения слоя (некоторые из них описаны в работах [3-5]). Однако применены они были лишь к простым статическим задачам: расчёту многослойных пластин при одноосном растяжении, либо цилиндрических оболочек при внутреннем давлении. Некоторое качественное представление о поведении цилиндрических оболочек, нагруженных осевым динамическим сжатием или динамическим внешним давлением, после первого разрушения слоя можно получить, используя модель, описанную в работе [5]. Согласно ей, при выполнении критерия прочности для одного из однонаправленных слоёв в пакете, но при условии в этом слое $|\sigma_{11}/F_{11}| < 1$, считается, что во всём слое разрушено связующее. Слой предполагается разорванным от касательных напряжений и напряжений, действующих перпендикулярно волокнам, сохраняя несущую способность в направлении волокон. В соответствии с этим пересчитываются эффективные значения матриц жёсткости и податливости слоистого пакета. Таким образом, расчёт и после первого разрушения слоя проводится исходя из модели линейно-упругого поведения материала оболочки. При возрастающей во времени нагрузке можно рассчитать второй и т.д. моменты разрушения. В случае, когда в некотором слое выполняется условие $|\sigma_{11}/F_{11}| \geq 1$, принимается, что он разрушен полностью, и все его жёсткостные характеристики в дальнейшем считаются равными нулю.

Ввиду специфических трудностей решения рассмотренных в

[I,2] задач, численная реализация даже описанного выше сильно упрощённого подхода к расчёту процесса разрушения конструкций (игнорирующего, в частности, локальный характер каждого акта разрушения), потребовала создания весьма объёмной и сложной по структуре программы .

Остановимся на некоторых результатах численных расчётов, полученных для шестислойных углепластиковых оболочек с отношениями геометрических параметров $L/R = 2, R/h = 200$ (L - длина, h - толщина, R - радиус срединной поверхности оболочки). В случае осевого динамического сжатия, как показали расчёты, процесс разрушения носит лавинообразный характер; момент полной потери оболочкой несущей способности лишь незначительно превышает момент первого разрушения слоя. Причина этого заключается в том, что разрушение начинается и заканчивается при сравнительно малых прогибах, до того, как сказывается нелинейный эффект - уменьшение скорости роста прогиба (\dot{a} , следовательно, и напряжений) во времени с последующим уменьшением во времени самой величины прогиба. При динамическом внешнем давлении этот эффект в определённом диапазоне углов армирования оболочки проявляется в полной мере, в результате чего величина нагрузки, при которой происходит полная потеря оболочкой несущей способности, может значительно превышать величину нагрузки, отвечающую первому разрушению слоя.

Рассмотрим случай линейно возрастающего во времени внешнего давления. Для каждого из рассматриваемых ниже пакетов скорость нагружения задаётся так, что статическое критическое значение внешнего давления достигается за время двукратного пробега волны сжатия по длине оболочки. В таблице для четырёх структур пакетов оболочки приведены значения последовательных моментов разрушения τ_i^* (определение безразмерного времени τ дано в [I I]) с указанием номера слоя, в котором произошло $i^{\text{е}}$ разрушение и вида разрушения (в случаях " с " имело место условие $|G_{11}/F_{11}| < 1$, в случаях " в " - условие $|G_{11}/F_{11}| \geq 1$). Во-первых, обратим внимание на

существенное различие в моментах первого разрушения слоя, рассчитанных при одночленной и при многочленной аппроксимациях прогиба [I], для первого пакета. Для остальных трёх пакетов не только моменты первого разрушения слоя, но и несколько последующих моментов разрушения совпадают при расчётах с одночленной и с многочленной аппроксимациями прогиба.

Из приведённых результатов следует, что в задачах о выпучивании оболочек из слоистых композитов началу разрывов армирующих волокон хотя бы в одном слое предшествует разрушение связующего (либо отслаивание волокон от связующего) почти во всех слоях оболочки. Особенно отчётливо это видно на примере последних двух пакетов: первое разрушение волокон происходит через значительный промежуток времени после разрушения связующего в последнем слое. Следствием такого характера разрушения и является существенно большее значение нагрузки, соответствующей полной потере оболочкой несущей способности, по сравнению с её значением, соответствующим первому разрушению слоя.

Следует сказать в заключение, что для более точной оценки несущей способности многослойных конструкций, работающих в режимах нагружения, приводящих к выпучиванию, необходимо использование моделей, учитывающих локальный характер разрушения в каждом слое.

Таблица I.

		одночленная аппроксимация										многочленная аппроксимация			
		τ_i^*	6,0	6,1	6,2	6,4	6,5	6,7	6,8	7,1	7,7	7,8	7,9		
Структуры пакетов ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$)	90, 90 +80, -80 90, 90	№ слоя	4	3	6	5	1	6	2	5	4	3	4		
		вид разрушения	с	с	с	с	с	в	в	в	в	с	с		
		τ_i^*	6,4	6,5	7,1	7,3	7,6	7,7	7,9	8,1	8,2	9,4	6,4	6,5	7,1
	90, 90 +45, -45 90, 90	№ слоя	4	3	6	5	6	1	5	2	2	3	4	3	1
		вид разрушения	с	с	с	с	в	в	в	с	в	в	с	с	с
		τ_i^*	9,1	9,2	9,3	9,5	9,6	10,3	11,0	11,5	12,4	12,7	13,4	13,5	
	90, +45 -45, +45 -45, 90	№ слоя	5	2	6	4	3	1	6	1	2	5	3	4	
		вид разрушения	с	с	с	с	с	с	в	в	в	в	в	в	
		τ_i^*	8,4	8,6	8,8	8,9	9,6	10,3	10,9	11,0	11,3	12,0	12,5	12,6	
	+45, -45 90, 90 +45, -45	№ слоя	6	1	5	2	4	3	6	4	3	1	2	5	
		вид разрушения	с	с	с	с	с	с	в	в	в	в	в	в	

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданович А.Е., Фелдмане Э.Г. Расчёт несущей способности композитных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении. - Механика композитных материалов, 1980, № 3, с. 476-484.

2. Богданович А.Е., Фелдмане Э.Г. Деформирование композитных цилиндрических оболочек при комбинированном динамическом нагружении. - Механика композитных материалов, 1981, № 3. (В печати).

3. Цай С., Хан Х. Анализ разрушения композитов. - В кн.: Неупругие свойства композитных материалов. М., 1978, с. 104-139.

4. Протасов В.Д., Ермоленко А.Ф., Филипенко А.А., Дмитриенко И.П. Исследование несущей способности слоистых цилиндрических оболочек при помощи моделирования процесса разрушения на ЭВМ. - Механика композитных материалов, 1980, № 2, с. 254-261.

5. Роуландс Р. Течение и потеря несущей способности композитов в условиях двухосного напряжённого состояния: сопоставление расчёта и экспериментальных данных. - В кн.: Неупругие свойства композиционных материалов. М., 1978, с. 140-179.

Статья поступила 25 февраля 1981 г.

УДК 539.3:534.1

А. Е. Богданович; Т. Б. Кошкина
Институт механики полимеров
АН ЛатвССР

ВЫПУЧИВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КОЛЫЦЕВЫМИ РЕБРАМИ ЖЁСТКОСТИ ПРИ ОСЕВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

Задачи динамики цилиндрических оболочек, усиленных рёбрами жёсткости, в последние годы привлекают большое внимание исследователей. Вызван такой интерес, в первую очередь, широким использованием подкреплённых тонкостенных оболочек в ответственных элементах авиационных, ракетных и судовых конструкций. В известных теоретических работах наиболее детально рассмотрены вопросы собственных и вынужденных колебаний ребристых цилиндрических оболочек (обзор этих исследований дан в статье [1]). Результаты же, полученные к настоящему времени по проблеме динамического выпучивания подкреплённых цилиндрических оболочек, явно недостаточны как для ясного понимания влияния подкрепляющих элементов на процесс выпучивания, так и для их эффективного использования с целью повышения несущей способности конструкции.

Работа [2] была, по-видимому, первой, где исследовалось влияние дискретно расположенных ребер жёсткости на устойчивость цилиндрической оболочки, нагруженной осевым импульсом прямоугольной формы. Она явилась развитием известной работы [3], где аналогичная задача решалась для гладкой цилиндрической оболочки. С учётом конечности прогибов оболочки были получены нелинейные уравнения движе-

ния (принималось, что рёбра локализованы вдоль координатных линий цилиндрической поверхности). Перемещения разлагались в двойные ряды Фурье, и после применения процедуры Галёркина была получена связанная система $2K$ алгебраических и K дифференциальных уравнений (K - число членов в аппроксимациях перемещений). За критическую нагрузку, как и в [3], принималась та, при которой происходит резкое увеличение амплитуд прогибов (такой критерий динамической потери устойчивости широко использовался ранее в работах А.С. Вольмира [4]). В численных расчётах рассматривалось движение оболочки лишь по низшей осевой форме ($m = 1$) и по различным окружным формам выпучивания. В результате был сделан вывод, что "влияние дискретности рёбер является существенным и что расчёт, выполненный с применением "размазывания", полностью ошибочен. Это различие обусловлено локальным выпучиванием оболочки между шпангоутами, а не общей неустойчивостью".

Тем не менее, при решении той же задачи в несколько более поздних работах [5,6] для расчёта жёсткостных параметров ребристых цилиндрических оболочек использовалась модель "размазанных" рёбер. Уравнения движения ребристой оболочки (с точностью до определения жёсткостей), метод решения и критерий потери устойчивости в этих работах полностью идентичен предложенным в [3]. Основной упор при анализе численных результатов был сделан на исследование изменения чувствительности оболочки к начальным несовершенствам при подкреплении её продольными либо кольцевыми рёбрами жёсткости. Было установлено, в частности, что при нагружении осевой ступенчатой нагрузкой чувствительность к несовершенствам высока для оболочек как с наружными стрингерами, так и с наружн и шпангоутами. В то же время при внутреннем подкреплении шпангоутами "оболочка оказалась почти нечувствительной к несовершенствам".

В рассмотренных выше работах [2,5,6] прогиб аппроксимировался несколькими членами рядов Фурье, причём не определялись наиболее опасные формы выпучивания в осевом направлении. Кроме того, использованный критерий потери устойчивости - по резкому возрастанию во времени амплитуды -

ды некоторой заранее выбранной гармоникой - носит весьма условный характер.

Значительный шаг вперед был сделан в работе [7], где нагрузка, при которой происходит потеря несущей способности цилиндрической оболочки, подкреплённой продольными ребрами, определялась по выполнению критерия текучести Мизеса. Как и в работах [2, 5, 6], рассматривалось нагружение осевым ступенчатым импульсом. Решение проведено в геометрически линейной постановке с "размазанными" ребрами жёсткости.

В результате численных расчётов была установлена, в частности, граница в соотношении между толщиной оболочки и геометрическими параметрами рёбер, отделяющая область, в которой напряжения в оболочке больше, чем напряжения в стрингерах от области, в которой отношение этих напряжений противоположно. Интересен также результат, свидетельствующий о существовании такой величины площади сечения рёбер жёсткости, при которой эффект подкрепления конкретной оболочки максимален.

В работе [8] изложена методика решения геометрически нелинейных задач выпучивания цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами при действии осевых динамических нагрузок. Она позволяет в произвольный момент времени при любом заданном законе нагружения определить зоны на поверхности оболочки, где максимальны прогиб и напряжения. С привлечением некоторого критерия прочности в конечном итоге можно найти динамическую нагрузку, при которой возникают первичные очаги разрушения конструкции. В результате обстоятельного численного анализа был получен следующий результат: в значительном интервале скоростей приложения осевой сжимающей силы, в широком диапазоне изменения геометрических параметров оболочки первые локальные зоны разрушения возникают при таких нагрузках, когда эффекты геометрической нелинейности практически незаметны. Этим обосновывается допустимость решения такой задачи в геометрически линейной постановке^{*}).

^{*} О возможности расчёта несущей способности тонкостенных цилиндрических оболочек, подверженных осевому динамическому нагружению, в линейной постановке, говорилось (без соответствующего количественного обоснования) в работе [7].

Тот факт, что при фиксированных параметрах геометрии оболочки, поля начальных несовершенств и формы импульса внешней нагрузки можно с полной определённой установить места наиболее опасного выпучивания, позволяет с новой точки зрения подойти к проблеме повышения несущей способности оболочки посредством подкрепления её рёбрами жёсткости. Естественно ожидать, что подкрепляющий эффект будет наибольшим при размещении рёбер именно в зонах наиболее опасного выпучивания для гладкой оболочки. Очевидно, что такое локальное повышение жёсткости конструкции даст значительное снижение величины прогиба в этих зонах (а, следовательно, и величины напряжений). Соответственно, критические значения напряжений будут достигнуты при большей величине импульса внешней нагрузки. Что касается выбора параметров рёбер и эксцентриситета, то оптимальным будет, видимо, случай одновременного достижения предельного состояния как в оболочке, так и в рёбрах жёсткости. Из сказанного ясно, в частности, какую принципиальную роль в излагаемой ниже методике расчёта играет учёт дискретности расположения подкрепляющих элементов.

Опираясь на результаты работы [8], решение задачи об осевом динамическом нагружении ребристой цилиндрической оболочки будем проводить в геометрически линейной постановке.

При описании деформирования цилиндрической оболочки, подкреплённой стрингерами и шпангоутами, будем предполагать, что рёбра жёсткости расположены вдоль координатных линий $y = y_s$ и $x = x_z$ недеформированной цилиндрической поверхности (координата x отсчитывается от одного из торцов в осевом направлении, y - окружная координата). Для оболочки принимается гипотеза Кирхгофа-Лява; материал оболочки - ортотропный. Принимается, что рёбра сопротивляются осевой деформации, изгибу в направлении, нормальном к срединной поверхности оболочки и кручению в плоскости, перпендикулярной оси ребра. Предполагается, что толщина стенки ребра значительно меньше его высоты (что позволяет учесть воздействие ребра на оболочку посредством дельта-функции) и, что высота ребра значительно меньше его радиуса кривизны (это делает допустимым использование гипотез Кирхгофа при описании

изгиба рёбер). Материал рёбер считается моноотропным; плоскость изотропии совпадает с плоскостью поперечного сечения ребра.

Геометрически нелинейные уравнения движения и соотношения, связывающие усилия и моменты с перемещениями срединной поверхности оболочки, основанные на перечисленных выше предположениях, приведены в работе [2] для изотропной цилиндрической оболочки, подкреплённой продольными и кольцевыми изотропными рёбрами жёсткости. Обобщение соотношений упругости на случай ортотропной оболочки и моноотропных рёбер жёсткости не вызывает затруднений. В дальнейшем будем пользоваться линейризованными уравнениями движения и линейными соотношениями упругости:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{1}{R} N_y - \rho_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \sum_z \delta(x-x_z) \rho_z A_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \sum_s \delta(y-y_s) \rho_s A_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где

$$N_x = C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w-w_0}{R} \right) + \sum_s \delta(y-y_s) E_s A_s \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \bar{x}_s \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial x^2} \right];$$

$$N_y = C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w-w_0}{R} \right) + C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_z \delta(x-x_z) E_z A_z \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w-w_0}{R} - \bar{x}_z \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial y^2} \right];$$

$$N_{xy} = C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} - \sum_s \delta(y-y_s) E_s A_s \left[\frac{J_{0s}}{A_s} \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} - \bar{x}_s \frac{\partial u}{\partial x} \right];$$

$$M_y = -D_{22} \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} - \sum_r \delta(x-x_r) E_r A_r \left[\frac{J_{0r}}{A_r} \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} - \bar{x}_r \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w-w_0}{R} \right) \right];$$

$$M_{xy} = -2D_{66} \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \sum_s \delta(y-y_s) G_s J_s \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \sum_r \delta(x-x_r) G_r J_r \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y},$$

где $\delta(x-x_r)$ - дельта-функция Дирака; $N_x, N_{xy}, N_y, M_x, M_{xy}, M_y$ - внутренние усилия и моменты в оболочке; u и v - перемещения точки срединной поверхности оболочки в направлениях x и y ; $w(x, y, t)$ и $w_0(x, y, t)$ - полный и начальный прогибы; $P_x(t)$ - заданное осевое усилие на торцах оболочки; R, h и ρ - радиус срединной поверхности, толщина и плотность оболочки; C_{ij} и D_{ij} - матрицы жёсткости ортотропного материала оболочки; ρ_s и ρ_r - плотности материалов стрингеров и шпангоутов; A_s и A_r - площади поперечных сечений рёбер; E_s и E_r - модули упругости рёбер в направлениях их осей; G_s и G_r - модули сдвига рёбер в плоскостях, перпендикулярных к их осям; \bar{x}_s и \bar{x}_r - расстояния от центров тяжести рёбер до срединной поверхности оболочки (положительные при внутреннем подкреплении); J_{0s} и J_{0r} - моменты инерции рёбер относительно срединной поверхности оболочки; J_s и J_r - моменты инерции поперечных сечений

чений ребер относительно их осей.

Подстановкой (4) в (I) - (3) получаем следующие уравнения движения в перемещениях:

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial(w-w_0)}{\partial x} +$$

$$+ \sum_s \delta(y-y_s) E_s A_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \bar{z}_s \frac{\partial^3(w-w_0)}{\partial x^3} \right] = 0; \quad (5)$$

$$C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{C_{22}}{R} \frac{\partial(w-w_0)}{\partial y} +$$

$$+ \sum_r \delta(x-x_r) E_r A_r \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial(w-w_0)}{\partial y} - \bar{z}_r \frac{\partial^3(w-w_0)}{\partial y^3} \right] = 0; \quad (6)$$

$$- \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{C_{22}}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{C_{22}}{R^2} (w-w_0) + \rho_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho_{11} \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^4} +$$

$$+ 2(\rho_{12} + 2\rho_{66}) \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_{22} \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial y^4} + \sum_s \delta(y-y_s) G_s \gamma_s \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ \sum_r \delta(x-x_r) G_r \gamma_r \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \sum_s \delta(y-y_s) E_s A_s \left[\frac{\gamma_{0s}}{A_s} \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^4} - \bar{z}_s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] +$$

$$+ \sum_r \delta(x-x_r) E_r A_r \left[\frac{\gamma_{0r}}{A_r} \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial y^4} + \frac{w-w_0}{R^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - \bar{z}_r \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} \right) \right] + \rho_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} +$$

$$+ \sum_r \delta(x-x_r) \rho_r A_r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_s \delta(y-y_s) \rho_s A_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

Принимая на торцах оболочки условия шарнирного опирания, разложим перемещения в ряды, почленно удовлетворяющие этим условиям:

$$u(x, y, t) = \sum_m \sum_n U_{mn}(t) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y$$

$$v(x, y, t) = \sum_m \sum_n V_{mn}(t) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

$$w(x, y, t) = \sum_m \sum_n W_{mn}(t) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad (8)$$

где $\alpha_m = m\pi/L$, $\beta_n = n\pi/R$, $m = 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, \dots$

Подставляя (8) в (5) - (7) и применяя процедуру Галёркина, сводим систему дифференциальных уравнений в частных производных к следующей системе $2K$ алгебраических и K обыкновенных дифференциальных уравнений (K - число членов, удерживаемых в аппроксимациях перемещений):

$$\begin{aligned} Q_{11}^{pl} U_{pl} + Q_{12}^{pl} V_{pl} + \sum_s Q_{14}^{ps} \cos \beta_s y_s \sum_n U_{pn} \cos \beta_n y_s = \\ = Q_{13}^p (W_{pl} - W_{pl}^0) + \sum_s Q_{15}^{ps} \cos \beta_s y_s \sum_n (W_{pn} - W_{pn}^0) \cos \beta_n y_s \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Q_{12}^{pl} U_{pl} + Q_{22}^{pl} V_{pl} + \sum_r Q_{24}^{lr} \sin \alpha_r x_r \sum_m V_{ml} \sin \alpha_m x_r = \\ = Q_{23}^l (W_{pl} - W_{pl}^0) + \sum_r Q_{25}^{lr} \sin \alpha_r x_r \sum_m (W_{ml} - W_{ml}^0) \sin \alpha_m x_r \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M^* \frac{\partial^2 W_{pl}}{\partial t^2} + Q_{13}^p U_{pl} + Q_{23}^l V_{pl} + Q_{31}^{pl} (W_{pl} - W_{pl}^0) - \alpha_p^2 P_x(t) W_{pl} + \\ + \sum_s \cos \beta_s y_s \sum_n (Q_{32}^{ps} \beta_n^2 + Q_{34}^{ps}) (W_{pn} - W_{pn}^0) \cos \beta_n y_s + \\ + \sum_r \sin \alpha_r x_r \sum_m (Q_{33}^{lr} \alpha_m^2 + Q_{35}^{lr}) (W_{ml} - W_{ml}^0) \sin \alpha_m x_r + \\ + \sum_s Q_{15}^{ps} \cos \beta_s y_s \sum_n U_{pn} \cos \beta_n y_s + \\ + \sum_r Q_{25}^{lr} \sin \alpha_r x_r \sum_m V_{ml} \sin \alpha_m x_r = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

где M^* - отношение суммарной массы оболочки и ребер к площади поверхности оболочки;

$$Q_{11}^{pl} = -(\alpha_p^2 C_{11} + \beta_l^2 C_{66}); \quad Q_{12}^{pl} = \alpha_p \beta_l (C_{12} + C_{66});$$

$$Q_{13}^p = \frac{C_{12}}{R} \alpha_p; \quad Q_{14}^{ps} = -E_s A_s \frac{\alpha_p^2}{\bar{x} R}; \quad Q_{15}^{ps} = -E_s A_s \bar{x}_s \frac{\alpha_p^3}{\bar{x} R};$$

$$Q_{22}^{pl} = -(C_{66} \alpha_p^2 + C_{22} \beta_l^2); \quad Q_{23}^l = -\frac{C_{22}}{R} \beta_l; \quad Q_{24}^{lv} = -E_v A_v \frac{2\beta_l^2}{L};$$

$$Q_{25}^{lv} = -E_v A_v \frac{2\beta_l}{L} \left(\frac{1}{R} - \bar{x}_v \beta_l^2 \right);$$

$$Q_{31}^{pl} = \frac{C_{22}}{R^2} + D_{11} \alpha_p^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha_p^2 \beta_l^2 + D_{22} \beta_l^4;$$

$$Q_{32}^{ps} = G_s \gamma_s \frac{\alpha_p^2}{\bar{x} R}; \quad Q_{33}^{lv} = G_v \gamma_v \frac{2\beta_l^2}{L}; \quad Q_{34}^{ps} = E_s \gamma_{os} \frac{\alpha_p^4}{\bar{x} R};$$

$$Q_{35}^{lv} = \frac{2E_v}{L} \left(\gamma_{ov} \beta_l^4 + \frac{A_v}{R^2} - 2A_v \bar{x}_v \frac{\beta_l^2}{R} \right).$$

Система уравнений (9) - (II) решалась с помощью стандартных программ, имеющихся в математическом обеспечении машин типа ЕС. Для отыскания функций W_{ij} из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (II) используется алгоритм Рунге-Кутты четвертого порядка. При этом необходимо знать функции U_{ij} и V_{ij} на соответствующем временном слое; они находятся из системы алгебраических уравнений (9) - (IO) методом Гаусса-Жордана. Для того, чтобы эта процедура начала работать, необходимо задать начальные значения амплитуд прогиба $W_{ij}(0)$. В качестве таких начальных значений принимаются амплитуды начальных несовершенств W_{ij}^0 .

В результате решения системы (9) - (II) получаем значения коэффициентов Фурье $U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t)$ в требуемом интервале времени. Последующее суммирование рядов (8) позволяет определить зависимости от времени перемещений u, v, w в произвольной точке (x, y) срединной поверхности оболочки. Используя затем известные формулы теории Кирхгофа-Лява, связывающие напряжения в оболочке и ребрах с перемещениями срединной поверхности, можем рассчитать

также зависимости напряжений от времени в любой точке тела оболочки.

На основе описанной выше методики была решена задача о выпучивании изотропной цилиндрической оболочки с изотропными шпангоутами при действии на оба торца равномерно распределённой осевой динамической нагрузки. Рассматривалась линейно возрастающая во времени нагрузка: $P_x(t) = V_0 t$. В конкретных численных расчётах принималось, что $R/h = 200$, $L/R = 2$, материал оболочки и рёбер - сталь. Скорость нагружения V_0 была выбрана так, что за время $t = 2t^*$ ($t^* = 2L/c$, c - скорость продольной волны сжатия в оболочке) нагрузка достигает эйлерова критического значения. Поперечное сечение рёбер считалось прямоугольным. Принималось следующее распределение амплитуд начальных несовершенств:

$$W_{ij}^0 = 0,2h \frac{(-1)^{l+j}}{i^2} e^{-1/2-3i} \quad (12)$$

где $l = i/2$ при i чётном и $l = (i+1)/2$ при i нечётном.

Для того, чтобы с требуемой точностью рассчитать перемещения в оболочке, необходимо прежде всего установить пределы суммирования по m и n в (8). Проиллюстрируем методику их определения на примере оболочки, подкреплённой одним и двумя шпангоутами высотой h .

На рис. 1 представлены зависимости коэффициентов Фурье W_{mn} от номера осевой формы m для нескольких значений n (*). Как видим, эти зависимости для гладкой оболочки и для двух подкреплённых оболочек качественно не отличаются. Имеется один ярко выраженный максимум в районе $m = 18$ и второй - для формы $m = 1$. Наибольшие значения коэффициенты Фурье имеют для окружной формы $n = 3$, которой соответствует максимум в распределении (12). Влияние рёбер заключается в незначительном уменьшении коэффициентов Фурье для всех форм. Из приведённых на рис. 1 результатов следует, что для трёх рассмотренных оболочек пределы суммирования по m и n можно выбирать одинаковыми.

На рис. 2 приведены зависимости коэффициентов Фурье от

* Все последующие результаты относятся к моменту времени $t = 3,4t^*$.

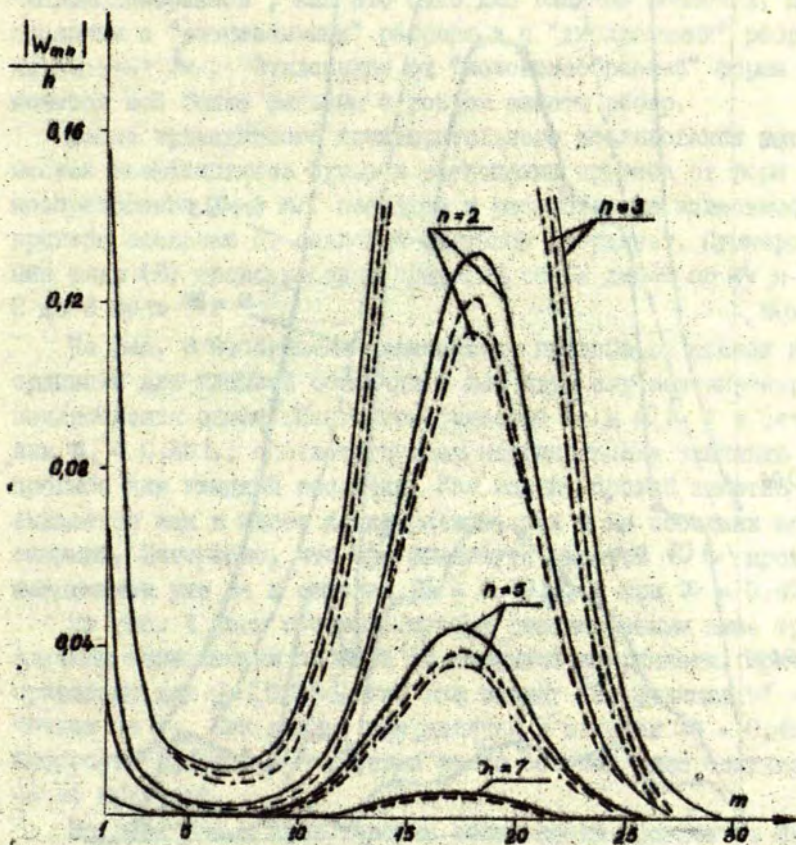


Рис. 1. Зависимость коэффициентов Фурье в разложении прогиба от номера осевой формы для шпангоутов высотой h :
——— гладкая оболочка; - - - - I шпангоут;
- · - · - 2 шпангоута.

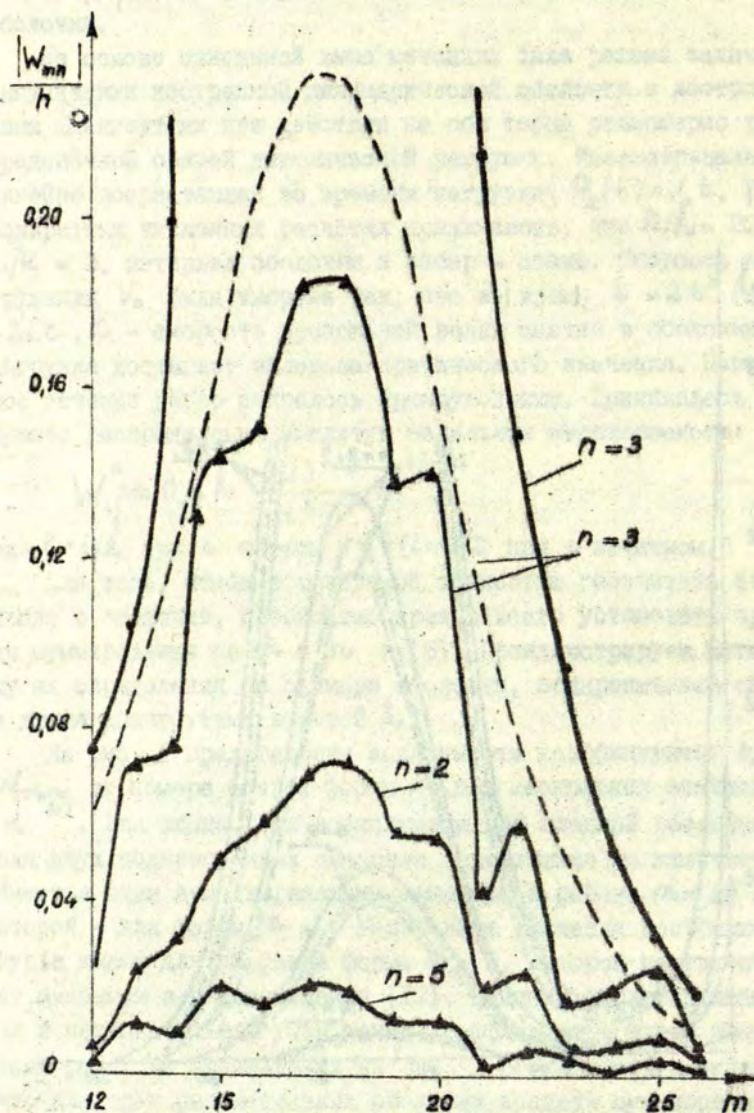


Рис. 2. Зависимость коэффициентов Фурье в разложении прогиба от номера осевой формы для шанпоутов высотой $4h$:
—●—●—●— гладкая оболочка; — — — 2 "размазанных" шанпоута; —▲—▲—▲— 2 "дискретных" шанпоута.

номера осевой формы для гладкой оболочки и для оболочки, подкреплённой двумя шпангоутами высотой $4h$. Штриховой линией изображена зависимость, полученная по модели "размазанных" рёбер жёсткости. Видно, что различие в коэффициентах Фурье, рассчитанных по моделям "дискретных" и "размазанных" рёбер, весьма существенно. Отметим также, что для рёбер высотой $4h$ зависимость W_{mn} от m уже не является "колоколообразной", как это было для гладкой оболочки, для оболочки с "размазанными" рёбрами и с "дискретными" рёбрами высотой h . Отклонение от "колоколообразной" формы становится всё более сильным с ростом высоты рёбер.

После проведённого предварительного исследования зависимостей коэффициентов Фурье в разложении прогиба от форм волнообразования m и n перейдём к рассмотрению зависимостей прогиба оболочки от осевой и окружной координат. Суммирование ряда (8) проводилось в пределах от 12 до 26 по m и от 2 до 6 по n *).

На рис. 3 изображены зависимости прогиба от осевой координаты для гладкой оболочки и для двух случаев внешнего подкрепления одним шпангоутом (высотой h и $10h$) в сечении $x_1 = 0,49L$, соответствующем максимальному значению прогиба для гладкой оболочки. Как видим, прогиб заметно снижается как в месте подкрепления, так и на соседних максимумах. Интересно, что при шпангоуте высотой $10h$ прогиб максимален уже не в сечении $x = 0,49L$, а при $x = 0,47L$.

На рис. 4 даны соответствующие рассмотренным выше трём случаям зависимости прогиба от окружной координаты. Кривые приведены для $y \in [0, \pi R]$, так как в силу (8) функция w - чётная по y . Как видим, при наличии в сечении $x_1 = 0,49L$ шпангоута высотой $10h$, форма этого сечения мало отличается от круговой.

На рис. 5 и 6 представлены зависимости прогиба от осевой и окружной координат при подкреплении двумя шпангоута-

* Учёт слагаемых с малыми m не приводит к изменению положения максимума у кривой $w(x)$, давая лишь некоторое "провисание" относительно линии $w = 0$.

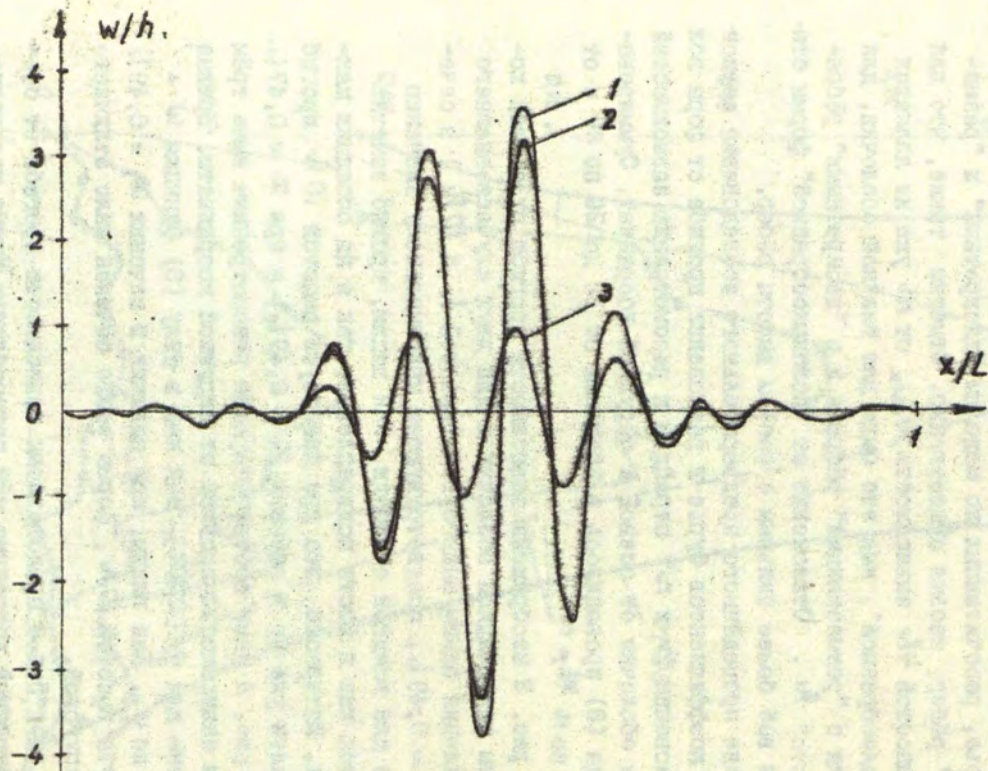


Рис. 3. Зависимость прогиба от осевой координаты: 1 - гладкая оболочка; 2 - I шпангоут высотой h ; 3 - I шпангоут высотой $10h$.

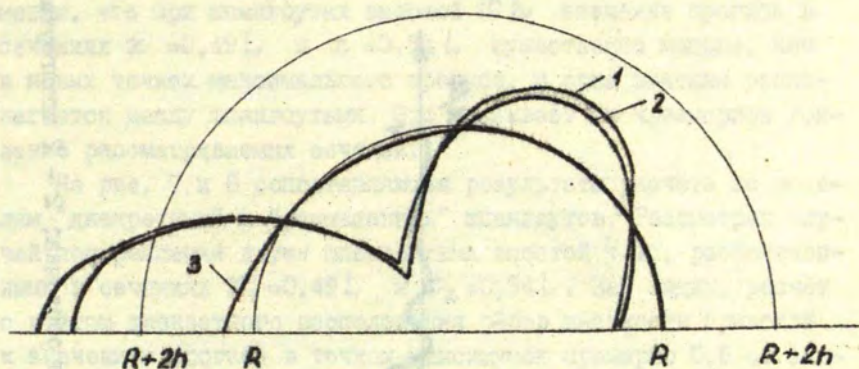


Рис. 4. Зависимость прогиба от окружной координаты: 1 - гладкая оболочка; 2 - I шпангоут высотой h ; 3 - I шпангоут высотой $10h$.

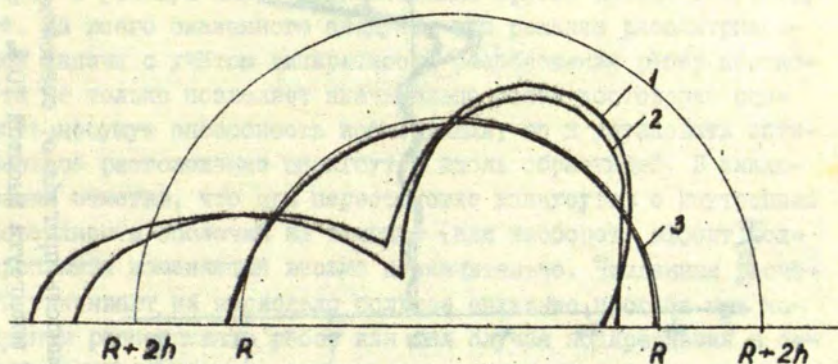


Рис. 6. Зависимость прогиба от окружной координаты: 1 - гладкая оболочка; 2 - 2 шпангоута высотой h ; 3 - 2 шпангоута высотой $10h$.

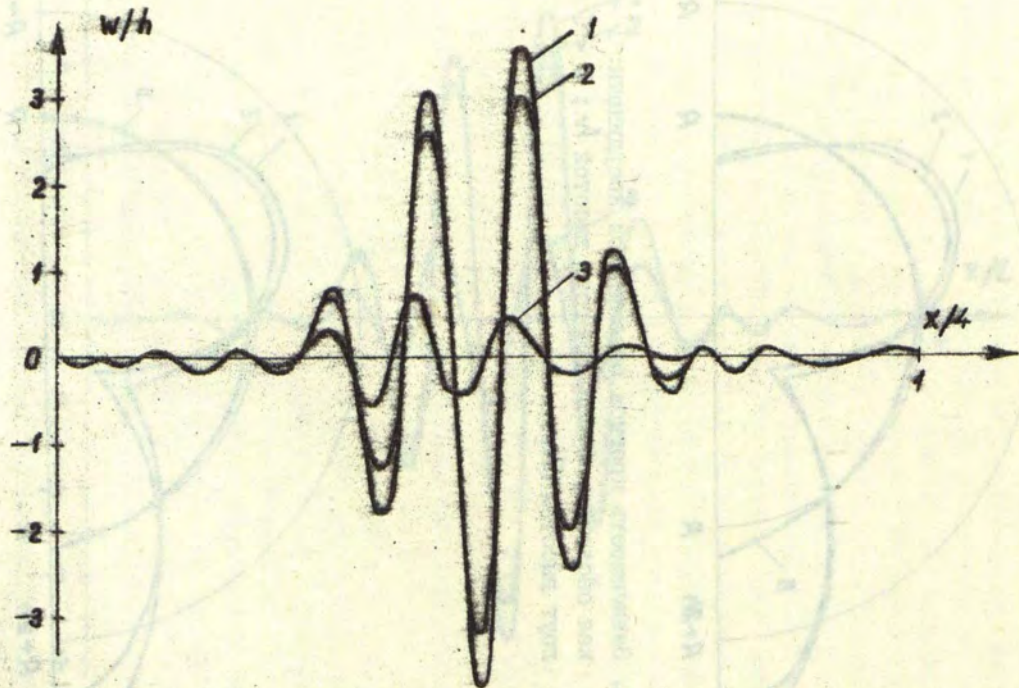


Рис.5. Зависимость прогиба от осевой координаты: 1 - гладкая оболочка; 2 - 2 шпангоута высотой h ; 3 - 2 шпангоута высотой $10 h$.

ми, расположенными в сечениях $x_1 = 0,49L$ и $x_2 = 0,54L$ *). Качественно эффект подкрепления тот же, что и в случае одного шпангоута, но снижение прогиба более значительное. Отметим, что при шпангоутах высотой $10h$ значение прогиба в сечениях $x = 0,49L$ и $x = 0,54L$ существенно меньше, чем в новых точках максимального прогиба, и одна вмятина располагается между шпангоутами. Это указывает на чрезмерное усиление рассматриваемых сечений.

На рис. 7 и 8 сопоставляются результаты расчёта по моделям "дискретных" и "размазанных" шпангоутов. Рассмотрен случай подкрепления двумя шпангоутами высотой $4h$, расположенными в сечениях $x_1 = 0,49L$ и $x_2 = 0,54L$. Как видим, расчёт с учётом дискретного расположения рёбер жёсткости приводит к значениям прогиба в точках максимумов примерно 0,6 от значений, получаемых при расчёте с "размазанными" рёбрами. Кроме того, эффекта смещения вдоль образующей точек максимума прогиба, отмеченного выше для "дискретных" рёбер, при использовании модели "размазанных" рёбер не наблюдается. Отметим также следующий результат численных расчётов; даже небольшое смещение шпангоутов вдоль оси X из сечений с максимумами прогиба для гладкой оболочки приводит к резкому ослаблению подкрепляющего эффекта. А при помещении шпангоута в узловую линию подкрепляющий эффект вообще отсутствует. Из всего сказанного следует, что решение рассматриваемой задачи с учётом дискретности расположения рёбер жёсткости не только позволяет значительно более достоверно оценить несущую способность конструкции, но и установить оптимальное расположение шпангоутов вдоль образующей. В заключение отметим, что при перестановке шпангоутов с внутренней поверхности оболочки на внешнюю (или наоборот) эффект подкрепления изменяется весьма незначительно. Численные расчёты указывают на несколько большее снижение прогиба при наружном расположении рёбер как для случая подкрепления в сечениях максимального выпучивания наружу, так и для случая подкрепления в сечениях максимального выпучивания вовнутрь.

*) Здесь и далее шпангоут в x_1 расположен на внешней поверхности оболочки, а в x_2 - на внутренней.

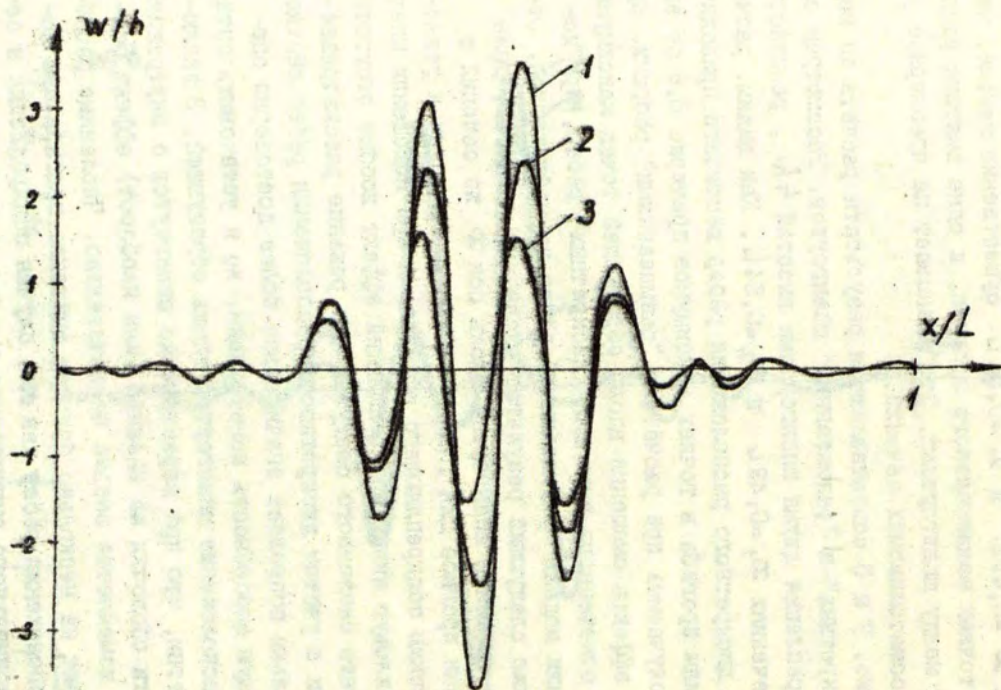


Рис. 7. Зависимость прогиба от осевой координаты: 1 - гладкая оболочка; 2 - 2 "размазанных" шпангоута высотой $4h$; 3 - 2 "дискретных" шпангоута высотой $4h$.

Видимо эффективность того или другого вида подкрепления нельзя установить без расчёта напряжений в оболочке и рёбрах и последующего анализа достижения в них предельного состояния.

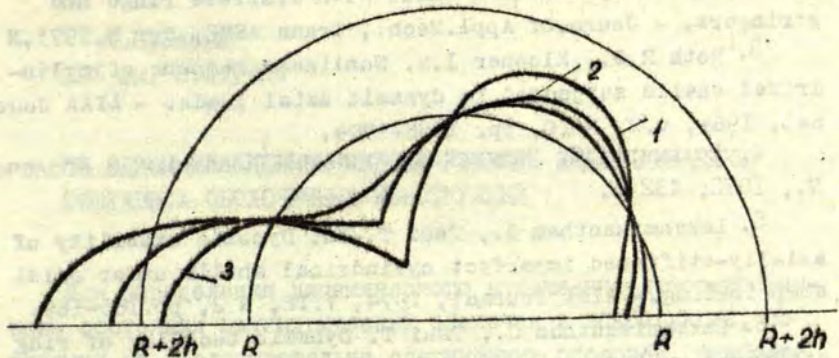


Рис. 8. Зависимость прогиба от окружной координаты: 1 - гладкая оболочка; 2 - 2 "размазанных" шпангоута высотой $4h$; 3 - 2 "дискретных" шпангоута высотой $4h$.

Выводы

В работе представлено решение задачи о выпучивании при осевом динамическом нагружении цилиндрической оболочки, подкреплённой произвольно расположенными вдоль образующей кольцевыми рёбрами жёсткости. Показано, что при подкреплении прогиб заметно снижается в зонах, где он максимален; этот эффект существенно зависит как от жёсткости каждого ребра и их количества, так и от расположения рёбер вдоль образующей оболочки. Решение по модели "размазанных" рёбер жёсткости приводит к сильно завышенным значениям прогиба и не позволяет описать смещение точек максимума прогиба при изменении жёсткости рёбер и их количества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Епигалко Ю.П., Дмитриева Л.М. Динамика ребристых пластин и оболочек. - В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, 1978, вып. 13, с. 3-30
2. Fisher C.A., Bert C.W. Dynamic buckling of an axially compressed cylindrical shell with discrete rings and stringers. - Journ.of Appl.Mech., Trans ASME, ser E, 1973, N 3.
3. Roth R.S., Klosner I.M. Nonlinear response of cylindrical shells subjected to dynamic axial loads. - AIAA Journal, 1964, v.2, N 10, pp. 1788-1794.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., 1972, 432 с.
5. Lakshminathan C., Tsui T.-Yu. Dynamic stability of axially-stiffened imperfect cylindrical shells under axial step loading. - AIAA Journal, 1974, V.12, N 2, pp.163-169.
6. Lakshminathan C., Tsui T. Dynamic buckling of ring stiffened cylindrical shells. - AIAA Journal, 1975, v.13, N 9, pp. 1165-1170.
7. Maunon G., Libai A. Dynamics and failure of cylindrical shells subjected to axial impact. - AIAA Journal, 1977, v.15, N 11, pp.1624-1630.
8. Богданович А.Е., Фелдмане Э.Г. Расчёт несущей способности композитных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении. - Механика композитных материалов, 1980, № 3, с. 476-484.

Статья поступила 8 января
1981 года.

УДК 539.3 : 534.1

Я.П.Варна

ЛГУ им. П.С.Пучки

ОБ ОДНОМ ИНЖЕНЕРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ
СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Для определения динамического напряжённо-деформированного состояния цилиндрических оболочек и конструкций, состоящих из последовательно соединённых оболочек, наиболее часто [1, 2] используются соотношения волновой теории типа Тимошенко, учитывающей деформации сдвига и инерцию вращения нормального к срединной поверхности элемента. Имеются также работы [3, 4], в которых расчёты проведены по классической теории недеформируемых нормалей Кирхгофа-Лява. Обе указанные теории и большое число их модификаций в случае конструкций из большого числа составных элементов - оболочек мало пригодны для проведения инженерных расчётов, так как уже для отдельного элемента-оболочки имеем разрешающую систему дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка. Математические затруднения, связанные с возрастанием порядка общей системы уравнений, при увеличении числа составных элементов - цилиндрических оболочек различных материалов и разработанная методика их преодоления приводит к довольно сложным и громоздким вычислительным схемам, требующим много машинного времени и ресурсов памяти при расчётах на ЭВМ.

Учитывая вышесказанное, имеет смысл для практического применения в инженерных расчётах разработать более простые методы нахождения напряжённого состояния конструкций при

динамическом нагружении на торцах. Анализ результатов расчёта по теории Тимошенко [2] даёт обоснование возможности пренебречь некоторыми членами в исходных уравнениях в зависимости от внешнего воздействия (поперечный или продольный торцевой удар). При этом для оценки точности разработанных инженерных методов производится сравнение с результатами уточнённой теории.

I. Рассмотрим свободную составную цилиндрическую конструкцию, нагруженную продольным осесимметричным импульсом ударного типа на одном торце. Расчёты показывают [2], что независимо от механических и геометрических свойств составных элементов-оболочек, значением перерезывающего усилия $Q_{li}^{\text{разм.}}$ ($i = 1, 2, \dots, m$, m - число элементов) можно пренебречь, так как максимальные значения этого усилия примерно на четыре порядка меньше соответствующих значений продольного усилия $N_{li}^{\text{разм.}}$, играющего основную роль в напряжённо-деформированном состоянии при продольном нагружении. При таком предположении с учётом уравнений равновесия, начальных и граничных условий следует, что в любой точке оболочки $M_{li}^{\text{разм.}} \equiv 0$, что также хорошо согласуется с результатами расчётов. Так как $\partial Q_{li}^{\text{разм.}} / \partial \alpha \neq 0$, то в результате имеем для каждого элемента систему дифференциальных уравнений четвёртого порядка. В первом приближении решим полученную упрощённую задачу при условии равенства нулю коэффициента поперечной деформации. Оказывается, что этот простейший вариант, соответствующий продольным колебаниям стержневой конструкции из элементов различных материалов, даёт хорошее описание процесса прохождения и отражения волн продольных усилий $N_{li}^{\text{разм.}}$ в многоэлементной цилиндрической конструкции.

При данных предположениях имеем систему дифференциальных уравнений для конструкции из m элементов в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \alpha^2} = K_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2}, \quad (I)$$

где $K_i = \frac{C_{01}}{C_{0i}}$, $C_{0i} = \sqrt{\frac{E_i^{(i)}}{\rho(1-(v_{12}^{(i)})^2)}}$, u_i - безразмерное продольное

перемещение, α и τ - безразмерная координата и время, введенные по формулам (2)

$$\alpha = x/R, \quad \tau = t c_{01}/R$$

R - радиус оболочки.

Однородные начальные условия, граничные условия в виде заданной на одном торце динамической продольной нагрузки

$N_1^0(\frac{R\tau}{c})$ и условия "сшивания" на границе раздела двух элементов имеют вид:

$$u_i(0, \alpha) \equiv \frac{\partial u_i(0, \alpha)}{\partial \tau} \equiv 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_i} = f(\tau), \quad \left. \frac{\partial u_m}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{m+1}} = 0, \quad (4)$$

$$f(\tau) = \frac{N_1^0(\frac{R\tau}{c})}{E_1^{(i)} h_1}$$

$$u_i|_{\alpha=\alpha_{i+1}} = u_{i+1}|_{\alpha=\alpha_{i+1}}, \quad h_i E_1^{(i)} \left. \frac{\partial u_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{i+1}} = h_{i+1} E_1^{(i+1)} \left. \frac{\partial u_{i+1}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{i+1}}$$

Решение поставленной задачи хорошо известно и находится с применением преобразования Лапласа. Легко вывести также соотношения, связывающие максимальные значения падающей, проходящей и отраженной волны на поверхности раздела двух элементов с различными механическими и геометрическими параметрами. Если на поверхность раздела между i -той и $i+1$ -ой оболочкой падает волна продольного усилия N_{1i} с единичной амплитудой ($N_{1i \max}^{\text{пад}} = 1$), имеем формулы для нахождения максимальных значений отраженной и проходящей волны:

$$N_{1i \max}^{\text{отр}} = - \frac{1 - \frac{E_1^{(i+1)}}{E_1^{(i)}} \frac{h_{i+1}}{h_i} \frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i}}{1 + \frac{E_1^{(i+1)}}{E_1^{(i)}} \frac{h_{i+1}}{h_i} \frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i}} \quad (6)$$

$$N_{1i+1 \max}^{\text{проход}} = \frac{2 \frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i} \frac{E_1^{(i+1)}}{E_1^{(i)}}}{1 + \frac{E_1^{(i+1)}}{E_1^{(i)}} \frac{h_{i+1}}{h_i} \frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i}} \quad (7)$$

Проведём анализ пригодности формул (6), (7) для характеристики процесса отражения волн в составной конструкции из последовательно соединённых металлической и композитной оболочек со следующими механическими и геометрическими параметрами:

1. Металлическая оболочка:

$$\frac{E_2^{(2)}}{E_1^{(1)}} = 1; \nu = 0,3; \frac{h_1}{R} = \frac{1}{50}; \frac{L_1}{R} = 1,1. \quad (8)$$

2. Полимерная оболочка из ортотропного материала:

$$\frac{E_2^{(2)}}{E_1^{(2)}} = 0,5; \nu_{12} = 0,3; \frac{G^{(2)}}{E_1^{(2)}} = 0,138; \frac{R}{h_2} = 50; \quad (9)$$

$$\frac{L_2}{R} = 0,9; \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,5; \frac{E_1^{(2)}}{E_1^{(1)}} = 0,5. \quad (10)$$

Функция нагрузки $f(\tau)$, аналитическое выражение которой приведено в [4], на рис. 1. Результаты расчёта по теории типа Тимошенко при нагружении конструкции "коротким" продольным импульсом представлены на рис. 2, где изображена зависимость продольного безразмерного усилия N_{11} от времени в середине первой оболочки. Результаты расчёта по элементарной теории составных стержней практически совпадают с приведёнными на рис. 2. Вместе с этим многочисленные расчёты показали высокую точность формул (6) и (7), которые, например, для данной конструкции, дают $N_{11 \max}^{\text{отр}} = 0,333$, $N_{12 \max}^{\text{прох}} = 0,666$, когда численные расчёты по теории Тимошенко дают соответственно 0,345 и 0,673. Расчёты показали, что $N_{11}(\alpha, \tau)$ по стержневой теории отличаются от решения теории Тимошенко не более, чем на 2-3% после прохода первых двух волн. Таким образом, элементарная теория, изложенная в этом пункте, может быть успешно применена для расчёта продольных усилий в конструкции в начальной стадии волнового процесса. Для определения прогибов и других характеристик напряжённого состояния следует использовать более точные модели.

2. При нагружении составной оболочечной конструкции поперечным импульсом

$$Q_{11}^{\text{разл}} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = f\left(\frac{tc}{R}\right) \frac{E_1^{(1)} h_1}{1 - \nu_{12}^{(1)} \nu_{21}^{(1)}}$$

разработка достаточно точной и простой инженерной методики

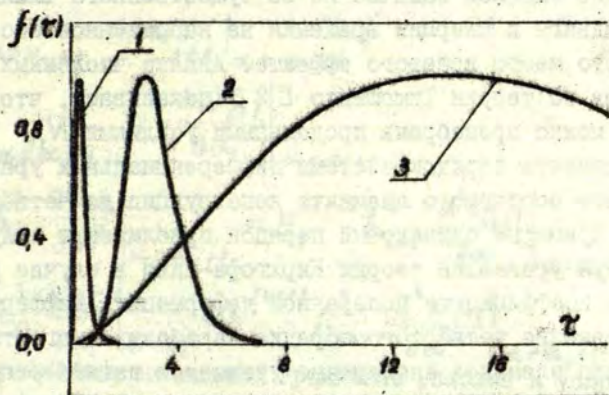


Рис. 1.

Зависимость приложенного импульса от безразмерного времени τ .
 1 - "короткий" импульс, 2 - "средний" импульс, 3 - "длинный"
 импульс; соответствующая длина импульсов $0,2 \cdot 10^{-4}$, $4 \cdot 10^{-4}$,
 $3 \cdot 10^{-3}$ сек.

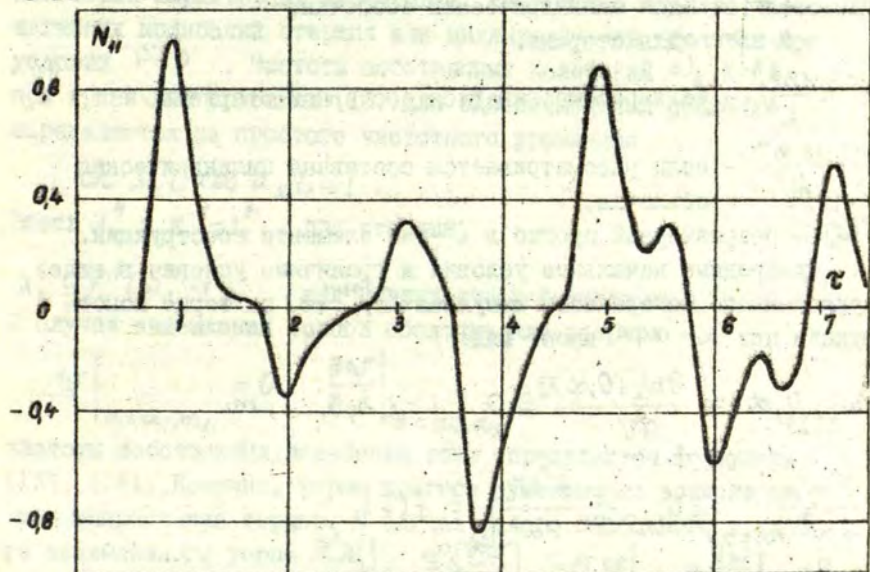


Рис. 2.

Зависимость безразмерного продольного усилия N_{11} от безразмерного времени τ в середине первого составного элемента двухэлементной конструкции ($\alpha = 0,55$)

является более сложной задачей из-за существенного влияния деформаций сдвига и инерции вращения на напряжённое состояние и имеющего место краевого эффекта. Анализ численных экспериментов по теории Тимошенко [2] показывает, что в этом случае можно пренебречь продольными усилиями N_{i1} и тем самым понизить порядок системы дифференциальных уравнений для одного составного элемента конструкции до четвёртого порядка. Примерно одинаковый порядок приближения получим, используя уравнения теории Кирхгофа-Лява в случае равенства нулю коэффициента поперечной деформации. Дифференциальное уравнение четвёртого порядка параболического типа для отдельного элемента аналогично уравнению изгиба стержня по указанной теории и имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial \alpha^4} + \left(a w_i + k_i^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial \tau^2} \right) \varepsilon_i^{-1} = 0, \quad (11)$$

где $a = 1$ для цилиндрической оболочки,
 $a = 0$ для стержня.

$\varepsilon_i^{-1} = \frac{12 L^2}{h_i^2}$ - если рассматривается составной стержень,

$\varepsilon_i^{-1} = \frac{12 R_i^2}{h_i^2}$ - если рассматривается составная цилиндрическая оболочка,

w_i - безразмерный прогиб в i -том элементе конструкции.

Однородные начальные условия и граничные условия в виде приложенного поперечного импульса $Q_1^{разл}(t)$ на торце конструкции при $\alpha = \alpha_1$ имеют вид:

$$w_i(0, \alpha) \equiv \frac{\partial w_i(0, \alpha)}{\partial \tau} \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$\left. \frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha = \alpha_1} = 0, \quad \varepsilon_1 \left. \frac{\partial^3 w_1}{\partial \alpha^3} \right|_{\alpha = \alpha_1} = f(\tau), \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w_m}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha = \alpha_{m+1}} = 0, \quad \varepsilon_m \left. \frac{\partial^3 w_m}{\partial \alpha^3} \right|_{\alpha = \alpha_{m+1}} = 0.$$

На поверхности раздела между двумя элементами сшиваются прогибы w_i , их производные по α , моменты и перерезываю-

ная сила:

$$w_i \Big|_{\alpha=\alpha_i+1} = w_{i+1} \Big|_{\alpha=\alpha_i+1};$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_i+1} = \frac{\partial w_{i+1}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_i+1};$$

$$E_1 h_i^3 \frac{\partial^2 w_i}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha_i+1} = E_1 h_{i+1}^3 \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha_i+1};$$

$$E_1 h_i^3 \frac{\partial^3 w_i}{\partial \alpha^3} \Big|_{\alpha=\alpha_i} = E_1 h_{i+1}^3 \frac{\partial^3 w_{i+1}}{\partial \alpha^3} \Big|_{\alpha=\alpha_i+1}.$$

(14)

Приведённые начальные граничные условия и условия "слипания" справедливы как для изгиба стержня, так и для цилиндрической оболочки в применяемом приближении.

Перед тем как перейти к построению решения и анализу результатов расчёта по инженерной методике остановимся на некоторых характерных выражениях, касающихся спектра частот изгибных колебаний стержня или цилиндрической оболочки при условии $\nu=0$. Частоты собственных колебаний $\omega_k, k=1, 2, \dots$ при граничных условиях (13) для одноэлементной оболочки определяются из простого частотного уравнения

$$\operatorname{ch} \lambda_k L \cos \lambda_k L = 1. \quad (15)$$

$$\lambda_k^4 = \varepsilon^{-1} \omega_k^2 \quad \text{для стержня,} \quad (16)$$

$$\lambda_k^4 = \varepsilon^{-1} (\omega_k^2 - 1) \quad \text{для цилиндрической оболочки.}$$

В случае защемления торцов оболочки или стержня

$$w \Big|_{\alpha=\alpha_1, \alpha_2} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1, \alpha_2} = 0, \quad (17)$$

частоты собственных колебаний тоже определяются формулами (15), (16). Конечно, формы прогиба существенно зависят от вида закрепления торцов. В случае одного свободного и одного защемлённого торца $\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = \varepsilon \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0, w \Big|_{\alpha=\alpha_2} = \frac{\partial w}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} = 0$ частотное уравнение принимает вид:

$$\operatorname{ch} \lambda_k L \cos \lambda_k L + 1 = 0, \quad (18)$$

где зависимость λ_k от частоты определяется соотношением (16).

Следует отметить, что корни уравнений (15) и (18) имеют одинаковую асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$. С другой стороны, основная частота собственных колебаний цилиндрических оболочек всегда несколько больше единицы и наблюдается сгущение частот вблизи этого значения с увеличением геометрического параметра $\varepsilon^{-1} = \frac{12 R^2}{h^3}$ оболочки.

Расчёты для однослойной оболочки по теории Тимошенко дают аналогичный результат, только частоты несколько ниже, что объясняется отливом от нуля коэффициента поперечной деформации. Понижение основной частоты при увеличении модуля Пуассона отмечено многими авторами не только для цилиндрических, но и сферических [5] и других оболочек.

Решение поставленной задачи для составной цилиндрической оболочечной конструкции (аналогично для составного стержня) проводится методом преобразования Лапласа. Полученную в пространстве изображений систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $4m$ решаем методом Эйлера. Для определения постоянных интегрирования используются 4 граничных условия и $4(m-1)$ условия "сшивания". Вместо решения алгебраической системы уравнений квазидиагонального вида применяется упрощённый вариант общего матричного метода [2], приводящий к алгебраической системе четвёртого порядка независим от числа составных элементов конструкции m .

Обратное преобразование проводится с использованием теории вычетов и решения представлены в виде рядов типа Фурье по времени. Методика и расчётные формулы мало отличаются при переходе от составной цилиндрической оболочки к составному стержню. Далее рассмотрим конструкцию, состоящую из двух последовательно соединённых цилиндрических оболочек (металлическую и полимерную) под действием поперечной силы типа короткого импульса $f(\tau)$ на торце $\alpha = \alpha_1$ и приведём сравнительный анализ характеристик напряжённо-деформированного состояния конструкций, полученных по инженерной методике и по теории типа Тимошенко. В расчётах использовалась металлическая оболочка с параметрами (8) и полимер-

ная оболочка с геометрическими и механическими параметрами

$$\frac{E_2^{(2)}}{E_1^{(2)}} = 2; \quad \nu_{12} = 0,2; \quad \frac{G^{(2)}}{E_1^{(2)}} = 0,276; \quad \frac{R}{h_2} = 50; \quad (19)$$

$$\frac{L_2}{R} = 0,9; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,39; \quad \frac{E_1^{(2)}}{E_1^{(1)}} = 0,4.$$

Зависимость прогиба w_1 от времени τ по инженерной методике изображена на рис. 3 линией 1а. Оказалось, что прогиб в этой точке мало зависит от числа последовательно соединённых оболочек и их механических свойств при условии, что длина первого элемента примерно равна радиусу конструкции. Величина прогиба в основном определяется механическими и геометрическими параметрами первого элемента. Расчёт для одноэлементной металлической модели одинаковой длины по этой методике дал только на 1% отличающийся результат. Приближённая методика даёт примерно на 20% заниженные величины прогибов по отношению к теории Тимошенко (рис. 3, линия 1б). Это объясняется тем, что приближённая теория не учитывает добавочные деформации, связанные с деформацией сдвига и с влиянием отличного от нуля коэффициента поперечной деформации. Некоторое увеличение частоты квазигармонических колебаний также связано с увеличением общей жёсткости системы в результате упрощений. Кривая 2а (рис. 3) изображает зависимость прогиба от времени в середине металлической оболочки - первого составного элемента конструкции ($\alpha = 0,55$), а кривая 2б $w_1(\tau)$ в точке $\alpha = 0,50$ металлической оболочки, имеющей одинаковую длину с рассматриваемой конструкцией. Некоторое запаздывание во времени кривой 2а объясняется большей отдалённостью точки от торца, где происходит нагружение. При этом отражение волн на границе между двумя элементами мало влияет на величину прогибов. Оказывается также, что прогибы при явно выраженном динамическом нагружении ("короткий" импульс) значительно меньше максимальных прогибов при квазистационарном нагружении (кривая 1в соответствует прогибу на торце $\alpha = 0$ при воздействии "длинного" импульса). Это заключение подтверждает также рис. 4, на котором изображена зависимость прогибов от α при статическом поперечном

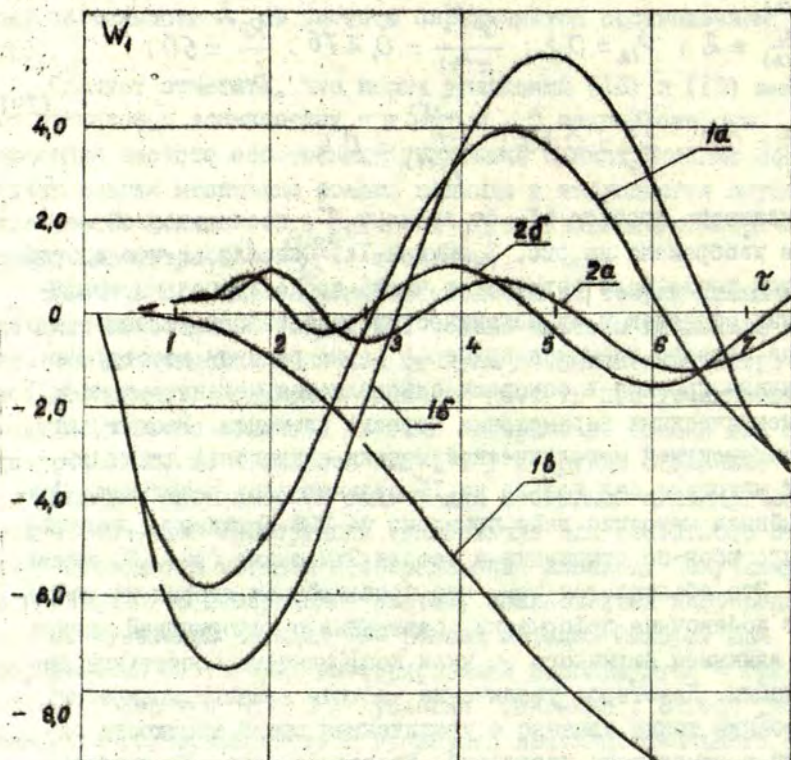


Рис. 3.

Зависимость безразмерного прогиба w_1 в первом элементе составной конструкции от безразмерного времени τ

I — на торце конструкции ($\alpha = 0$)

а — инженерная методика, "короткий" импульс;

б — т. Тимошенко, "короткий" импульс;

в — инженерная методика, "длинный" импульс;

2.а — "короткий" импульс, двухэлементная оболочка;

2.б — "короткий" импульс, изотропная оболочка одинаковой длины.

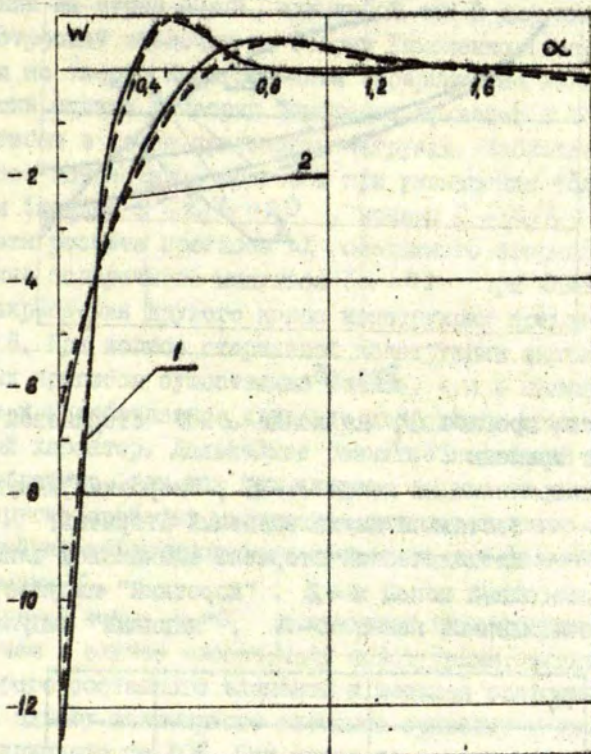


Рис. 4.

Зависимость прогиба w от координаты α при статическом воздействии на торце $\alpha=0$ цилиндрической оболочки

1 - $R/h=20$;

2 - $R/h=5$.

— т. Тимошенко; — — — т. Кирхгофа-Лява.

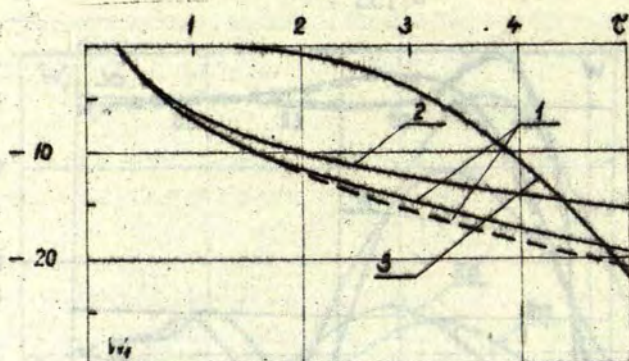


Рис. 5.

Зависимость прогиба w_1 на конце $\alpha = 0$ стержневой конструкции от времени τ

- 1 - защемление на конце $\alpha = 2$, "короткий" импульс
- составной двухэлементный стержень;
- металлический стержень одинаковой длины;
- 2 - свободный конец $\alpha = 2$, "короткий" импульс;
- 3 - защемлённый конец $\alpha = 2$, "длинный" импульс.

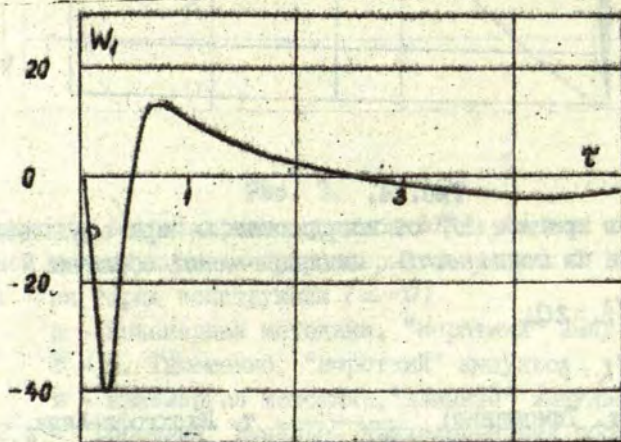


Рис. 6.

Зависимость ускорения $\frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2}$ от безразмерного времени τ на торце $\alpha = 0$ составной цилиндрической конструкции по инженерной методике.

нагружении на торце $\alpha = 0$ единичной силой для цилиндрической изотропной оболочки по теории Тимошенко (непрерывная линия) и по теории Кирхгофа-Лява (прерывистая линия). Учёт деформаций сдвига в теории Тимошенко приводит к более высоким прогибам в точке приложения нагрузки. Наблюдается также сильное возрастание прогибов при уменьшении толщины оболочки (кривая 2 - $R/h = 20$, кривая I - $R/h = 5$). Результаты расчёта прогибов w_i составного стержня в точке приложения поперечного импульса ($\alpha = 0$) при некоторых видах закрепления другого конца конструкции представлены на рис. 5. При изгибе стержневой конструкции значения максимальных прогибов существенно больше, чем в цилиндрической оболочке и колебательное движение свободного конца имеет медленный характер. Дальнейшее развитие колебаний на рис. 5 не изображено, так как применяемая теория не учитывает вязко-упругие свойства материала, имеющие сильное влияние на напряжённо-деформированное состояние при больших значениях времени t .

На прогиб конца $\alpha = 0$ стержневой конструкции существеннее, чем в случае оболочечной конструкции, влияет материал второго составного элемента и меньшая сопротивляемость изгибу и сдвигу полимерного элемента приводит к увеличению прогиба примерно на 10%. При ударе по незакреплённой стержневой конструкции прогибы меньше, что объясняется переходом некоторой части энергии в энергию вращательного движения всей конструкции. При нагружении длинным импульсом прогибы возрастают медленнее, но достигают максимальные значения ≈ 80 при $t \approx 12$, что в четыре раза больше, чем при воздействии "короткого" импульса.

Ускорение $\partial^2 w_i / \partial t^2$ в составной цилиндрической конструкции зависит в основном от скорости нагружения и максимальные значения с существенно выраженным краевым эффектом достигаются в точке приложения импульса ($\alpha = 0$). При этом изменение граничных условий на втором торце или изменение механических свойств второго составного элемента влияют на $|\dot{w}_i|$ не более, чем на 3%. При сравнении изображённой на рис. 6 зависимости с результатами теории Тимошенко наблюдается хорошее совпадение результатов. Теория Тимошен-

ко даёт следующие экстремальные значения ускорений на торце $\alpha=0$ составной конструкции:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} = -41,2 \quad \text{при} \quad \tau = 0,25 ;$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} = +13,7 \quad \text{при} \quad \tau = 0,70 .$$

Сравнение приведённых на рис. 7 зависимостей моментов M_1 от времени τ в составной цилиндрической конструкции, полученных по используемой инженерной методике (рис. 7а) и по теории Т.мошенко (рис. 7б), показывает возможность применения инженерной методики для расчёта указанных характеристик напряжённого состояния. Некоторое смещение направо картины волнового процесса объясняется увеличением общей жёсткости конструкции вследствие уменьшения степеней свободы. Необходимо отметить, что при увеличении скорости нагружения, моментные напряжения, несмотря на ярко выраженный краевой эффект, проникают гораздо глубже в конструкции, чем при статическом нагружении и, например, при воздействии "короткого" удара (рис. I), достигают в точке $\alpha=0,55$ (середина первого элемента) значения, которое примерно на порядок больше, чем при медленном нагружении. Приложенные к торцу перерезывающие усилия достигают максимальных значений в точке приложения и не глубоко проникают внутрь конструкции. Во внутренних точках инженерная методика даёт качественно неверные результаты.

В этой статье сделана первая и не совсем последовательная попытка разработать инженерную методику расчёта напряжённо-деформированного состояния конструкций, состоящих из последовательно соединённых цилиндрических оболочек различных материалов. Некоторые направления получения физически более обоснованной методики расчёта, удовлетворяющей условиям простоты применения и минимальному потреблению машинного времени, указаны в ходе изложения материала.

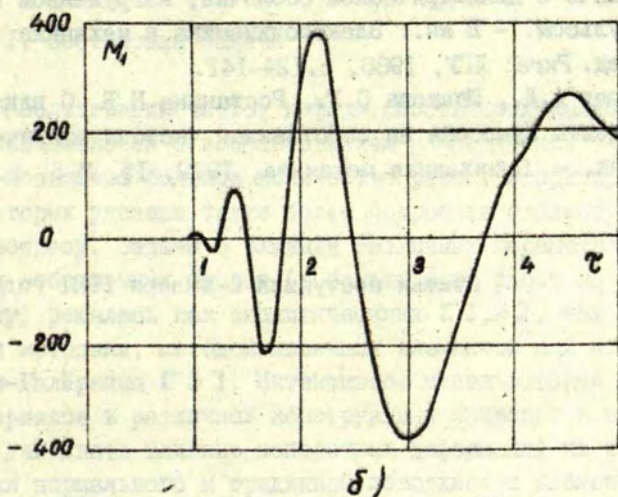
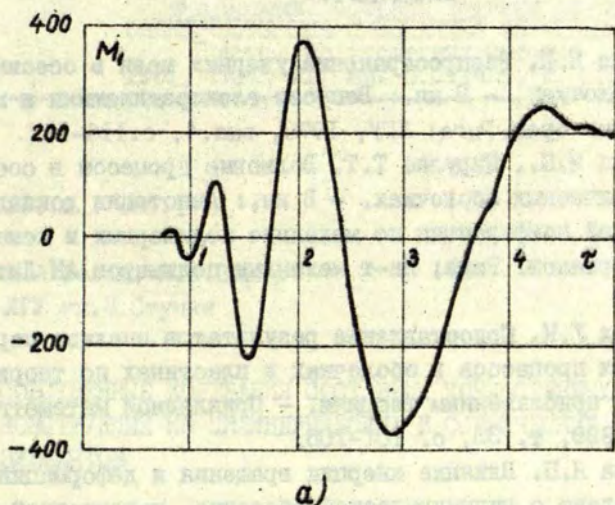


Рис. 7.

Зависимость моментов M_1 от времени τ в точке $\alpha = 0,55$ составной цилиндрической оболочки при воздействии "короткого" поперечного импульса

- а - инженерная теория;
- б - теория Тимошенко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варна Я.П. Распространение ударных волн в осесимметричных оболочках. - В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига: ЛГУ, 1978, вып.4, с.116-127.

2. Варна Я.П., Цирулис Т.Т. Волновые процессы в составных цилиндрических оболочках. - В кн.: Аннотации докладов IV Всесоюзной конференции по механике полимерных и композитных материалов. Рига; Ин-т механики полимеров АН ЛатвССР, 1980, с. 20.

3. Нигул У.К. Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближенным теориям. - Прикладная математика и механика, 1969, т. 33, с. 101-105.

4. Варна Я.П. Влияние инерции вращения и деформации сдвига в задаче о цилиндрической оболочке, нагруженной продольным импульсом. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Рига: ЛГУ, 1980, с.124-141.

5. Лизарев А.Д., Шакова С.Г., Ростанина Н.Б. О влиянии коэффициента Пуассона на собственные частоты сферических оболочек. - Прикладная механика, 1979, 15, № 5, с.98-101.

Статья поступила 6 января 1981 года

УДК 539.4 : 534.1

М.А.Белов, Я.П.Варна
ЛГУ им.П.Стучки

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

1. Постановка задачи

Исследованию частот и форм собственных колебаний сферических оболочек с использованием классических теорий оболочек посвящено большое количество работ, например [1,2,3], в которых указана также более подробная библиография по этому вопросу. Задача о влиянии различных параметров на величины собственных частот (в большинстве работ на основную частоту) решалась как аналитическими [1,2], так и разностными методами, методом конечных элементов или методом Бубного-Галёркина [3]. Интенсивное использование композитных материалов в различных конструкциях приводит к необходимости учитывать влияние поперечных деформаций их инерции вращения нормального к срединной поверхности элемента. Кроме того, отдельное излучение динамических характеристик каждого составного элемента конструкции (сферическая или цилиндрическая оболочка) при различных условиях закрепления даёт лишь частичную информацию о колебательных процессах в конструкции в целом. В данной статье изучаются осесимметричные колебания тонкостенной конструкции, состоящей из последовательно соединённых изотропной сферической и трансверсально ортотропной цилиндрических оболочек одинакового радиуса в поста-

новке геометрически и физически линейной теории типа Тимошенко. Отдельно рассматривается также вопрос о влиянии различных параметров и граничных условий на частоты собственных колебаний сферической оболочки в уточнённой постановке.

Рассмотрим изотропную, симметричную, упругую сферическую оболочку с углом полураствора α_0 , радиусом срединной поверхности R и постоянной толщиной h_s . Согласно уточнённой теории типа Тимошенко, учитывающей инерцию вращения нормального к срединной поверхности элемента и деформации сдвига [4, 5], имеем уравнения движения в перемещениях:

$$\left(\Delta_\alpha - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 1 - \nu_s\right) \theta_1 + (1 - \nu_s) \theta_2 + \frac{\partial^2 w_s}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$-(1 + \nu_s) \theta_1 + \epsilon_s \left(\Delta_\alpha - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 1 - \nu_s\right) \theta_2 - \frac{\partial^2 w_s}{\partial \tau^2} = 0; \quad (I.1)$$

$$-\frac{3 + \nu_s}{2} \theta_1 + \frac{1 - \nu_s}{2} \theta_2 + \left(\frac{1 - \nu_s}{2} \Delta_\alpha - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 1 - \nu_s\right) w_s = 0.$$

Здесь $\Delta_\alpha f \equiv \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sin \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)$, θ_1 и θ_2 - функции, связанные с безразмерными перемещениями u_1 и w_1 :

$$\theta_1 = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sin \alpha u_s(\alpha, \tau) \right] + 2 w_s;$$

$$\theta_2 = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\sin \alpha \psi_s(\alpha, \tau) \right], \quad (I.2)$$

где $u_s = u_s^*/R$, $w_s = w_s^*/R$ - безразмерные перемещения, ψ_s - угол поворота нормали, α - угол долготы на поверхности оболочки, $\tau = t c_s / R$ - безразмерное время, $c_s = \sqrt{\frac{E_s}{\rho_s(1 - \nu_s^2)}}$ - скорость продольной волны в сферической оболочке, $\epsilon_s = \frac{h_s}{12 R^2}$ -

геометрический параметр оболочки.

В случае полусферической оболочки к торцу $\alpha_0 = \pi/2$ может быть присоединена ортотропная цилиндрическая оболочка кругового сечения толщины h_c и безразмерной длины $2z_1 = \frac{L}{R}$. Уравнения движения такой оболочки согласно теории Тимошенко приведены в [6] и имеют вид:

$$\begin{aligned}
 K^2 \frac{\partial^2 u_c}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2} + d_{2c} \frac{\partial w_c}{\partial z} ; \\
 K^2 \frac{\partial^2 w_c}{\partial \tau^2} &= -d_{2c} \frac{\partial u_c}{\partial z} - d_{1c} w_c + d_{3c} \frac{\partial^2 w_c}{\partial z^2} + d_{3c} \frac{\partial \psi_c}{\partial z} ; \\
 K^2 \frac{\partial \psi_c}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial \psi_c}{\partial z^2} - \varepsilon_c^{-1} d_{3c} \psi_c - \varepsilon_c^{-1} d_{3c} \frac{\partial w_c}{\partial z} .
 \end{aligned}
 \tag{I.3}$$

Здесь $u_c = \frac{u_c^*}{R}$, $w_c = \frac{w_c^*}{R}$ - безразмерные перемещения, ψ_c - угол поворота нормали к деформированной средней поверхности цилиндрической оболочки $z = x/R$ - безразмерная координата вдоль образующей оболочки, $K^2 = c_c^2/c_s^2$ - отношение скоростей продольных волн, $\varepsilon_c = \frac{R^2}{12R^2}$, $d_{ic}, i = 1, 2, 3$ - безразмерные материальные константы цилиндрической оболочки.

В дальнейшем рассматриваются ненагруженные оболочки, а также конструкция в целом, что приводит к однородным начальным условиям.

Вместе с тремя граничными условиями в форме различных линейных комбинаций перемещений и их первых производных по продольной координате, вид которых зависит от условий закрепления, и шестью условиями "сшивания" на линии раздела цилиндрической и сферической оболочки они образуют необходимое число добавочных условий для решения уравнений (I.1), (I.2), (I.3).

2. Влияние геометрических и механических параметров на колебания сферических оболочек в уточнённой постановке

Изучим зависимость частот осесимметричных колебаний сферических оболочек от коэффициента поперечных деформаций ν , относительной толщины R/h и небольшого изменения угла полураствора α_0 сферической оболочки. Хотя рассматриваемая зависимость изучалась в работах разных авторов [1, 7, 8], полученные результаты противоречивы. Кроме того, большинство известных авторам работ относится к теориям оболочек, не-

учитываем деформации сдвига и инерцию вращения, что ограничивает применимость полученных результатов для композиционных материалов.

Решение спектральной задачи, соответствующей системе (I.1) и определённому типу закрепления на краю $\alpha = \alpha_0$, ищем в виде:

$$\Delta_{\alpha} w_s = \lambda w_s, \quad \Delta_{\alpha} \theta_k = \lambda \theta_k, \quad k=1,2.$$

Тогда система (I.1) принимает вид, отличающийся от (3.1) тем, что $\partial^2/\partial r^2$ заменяется на $-\omega^2$, а Δ_{α} на λ . Здесь

и далее $\omega = \frac{\omega^*}{c_s} R$ - безразмерная частота колебаний. Для осуществления нетривиального решения необходимо обращение в ноль определителя указанной системы. Это условие приводит к характеристическому кубическому уравнению для определения $\lambda(\omega)$. Общее решение системы уравнений находим в виде линейной комбинации шести сферических функций. Подставляя это решение в однородные граничные условия и учитывая требование ограниченности решения и необходимость осуществления нетривиального решения, получаем частотное уравнение $\mathcal{D}(\lambda\omega) = 0$, где \mathcal{D} - определитель третьего порядка системы граничных условий. Несмотря на то, что в данной статье рассматривается более адекватная система кинематических гипотез, методика расчёта несущественно отличается от изложенной в [1] и из-за ограниченного объёма статьи на более подробном её изложении не остановимся.

Зависимость первых 8-9 частот собственных осесимметричных колебаний от коэффициента Пуассона для полусферической оболочки с относительной толщиной $\frac{h_s}{R} = \frac{1}{30}$ изображена на рис. 1 и рис. 2.

Все приведённые рисунки соответствуют двум типам граничных условий:

1. Жёстко заземленный край

$$u_s|_{\alpha=\alpha_0} = 0; \quad w_s|_{\alpha=\alpha_0} = 0; \quad \psi_s|_{\alpha=\alpha_0} = 0. \quad (2.1)$$

2. Свободный край

$$\left[\frac{\partial u_s}{\partial \alpha} + w_s(1+\nu_s) + \nu_s \operatorname{ctg} \alpha u_s \right] \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0; \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial w_s}{\partial \alpha} - u_s + \psi_s \right) \Big|_{\alpha = \alpha_0} = 0;$$

$$\left(\frac{\partial \psi_s}{\partial \alpha} + \nu_s \operatorname{ctg} \alpha \psi_s \right) \Big|_{\alpha = \alpha_0} = 0.$$

Результаты расчётов подтверждают справедливость утверждения работы [8] о том, что в зависимости от конкретной частоты или формы колебаний изменение коэффициента Пуассона может по-разному влиять на величину собственной частоты.

Некоторые результаты исследований влияния угла полураствора α_0 сферической оболочки на частоты собственных колебаний для сферической оболочки с относительной толщиной

$\frac{h_s}{R} = \frac{1}{30}$ и коэффициентом поперечной деформации $\nu = 0,3$ приведены на рис. 3 и рис. 4. Оказывается, что небольшое изменение угла полураствора даже менее существенно влияет на собственные частоты, чем некоторая произвольность в выборе коэффициента Пуассона, имеющая место в большинстве практических расчётов.

Зависимость частот собственных колебаний от относительной толщины h/R для полусферической оболочки при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$, изображённая для защемлённой и свободной оболочки на рис. 5 и рис. 6, показывает сильное сгущение безразмерных частот с уменьшением толщины оболочки вблизи единицы, но на основную частоту изменение указанного параметра оказывает не большее влияние, чем указанная произвольность в выборе коэффициента Пуассона.

Приведённые результаты показывают, что изменение ν , h_s/R или α_0 оказывают примерно одинаковое влияние на первые частоты собственных колебаний, тем самым обосновывая необходимость проведения экспериментов для точного определения значения коэффициента поперечной деформации различных материалов. Сравнение с результатами по классической теории [1] показывает, что учёт деформаций сдвига и инерции вращения приводит к уменьшению основной частоты примерно на 1%.

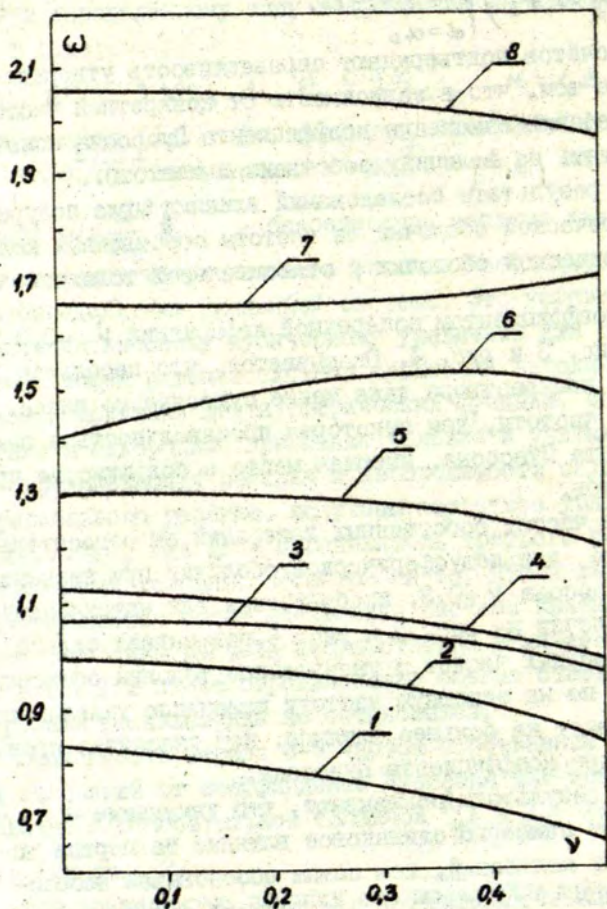


Рис. 1. Зависимость безразмерных частот собственных колебаний заземлённой сферической оболочки от коэффициента Пуассона ν .

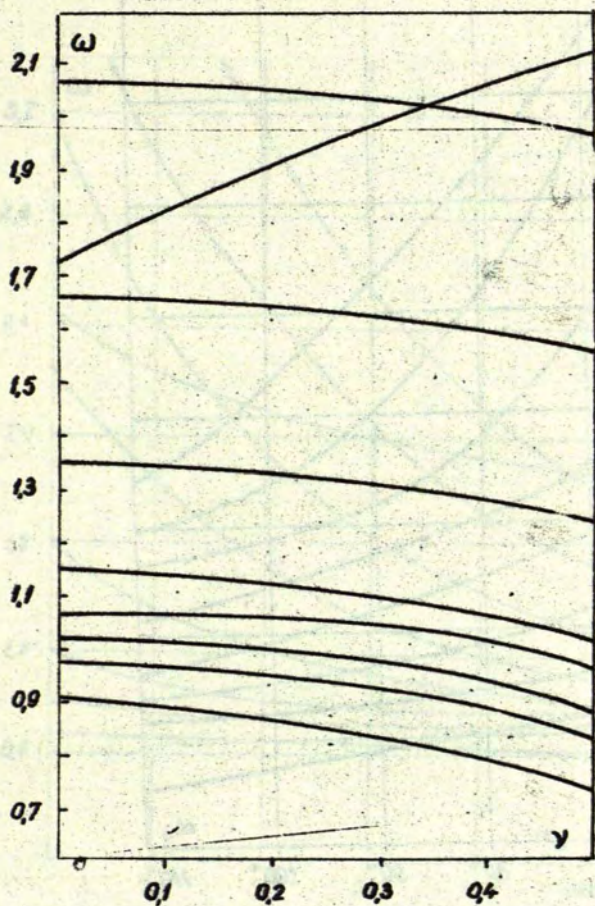


Рис. 2. Зависимость безразмерных частот собственных колебаний свободной полусферической оболочки от коэффициента Пуассона ν .

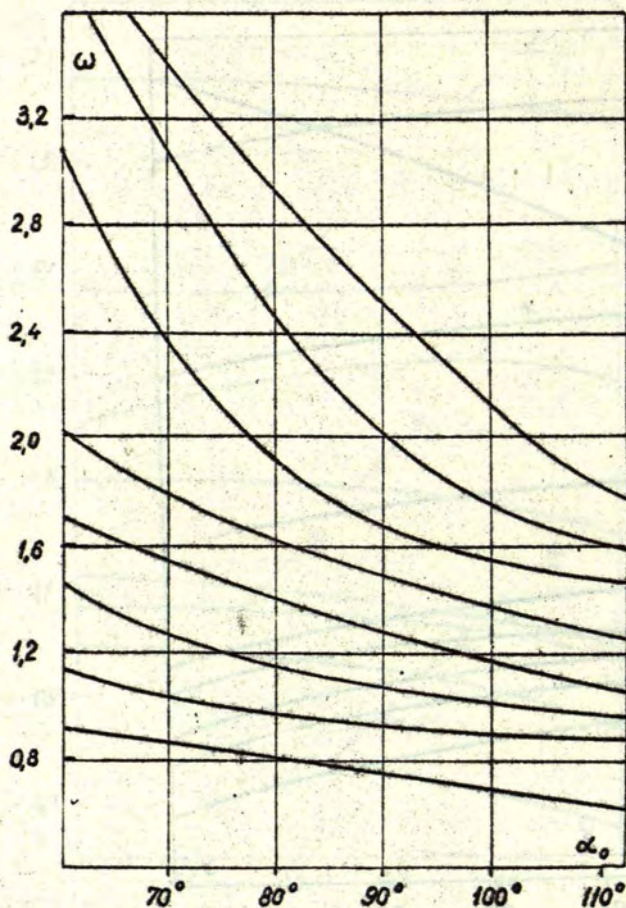


Рис. 3. Зависимость безразмерных частот собственных колебаний заземленной сферической оболочки от угла полураствора α_0 .

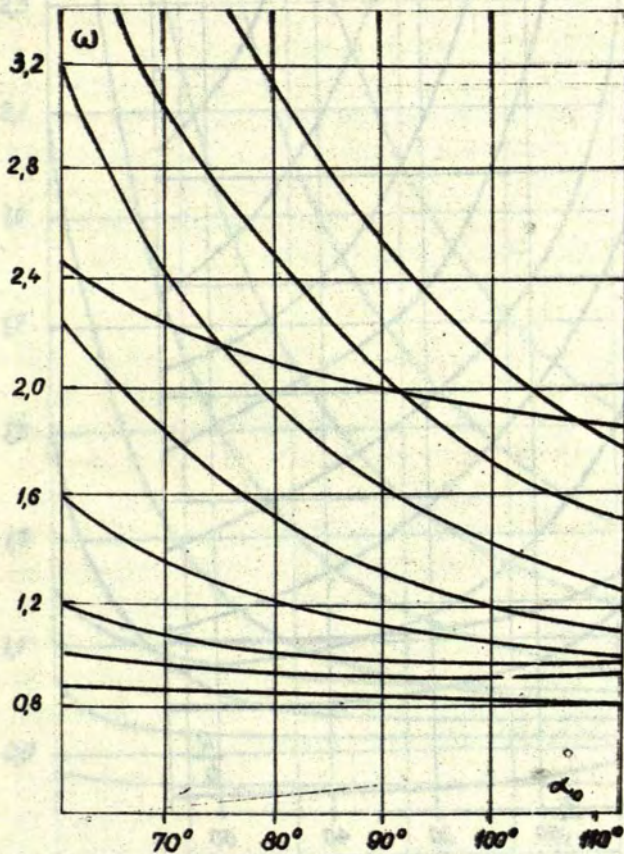


Рис. 4. Зависимость безразмерных частот собственных колебаний свободной сферической оболочки от угла полураствора α_0 .

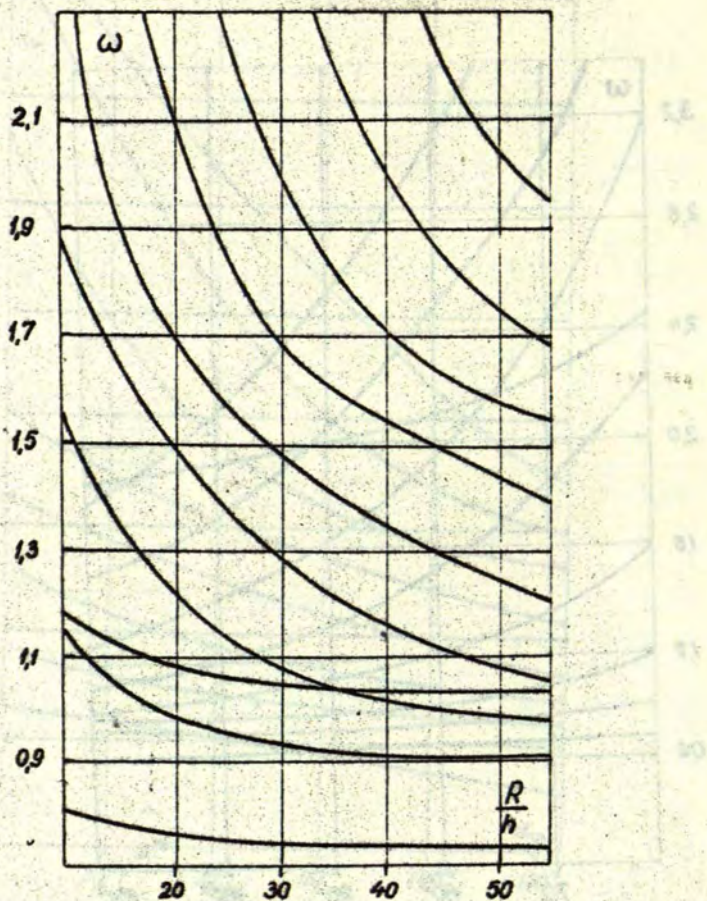


Рис. 5. Зависимость безразмерных частот собственных колебаний защемлённой полусферической оболочки от относительной толщины.

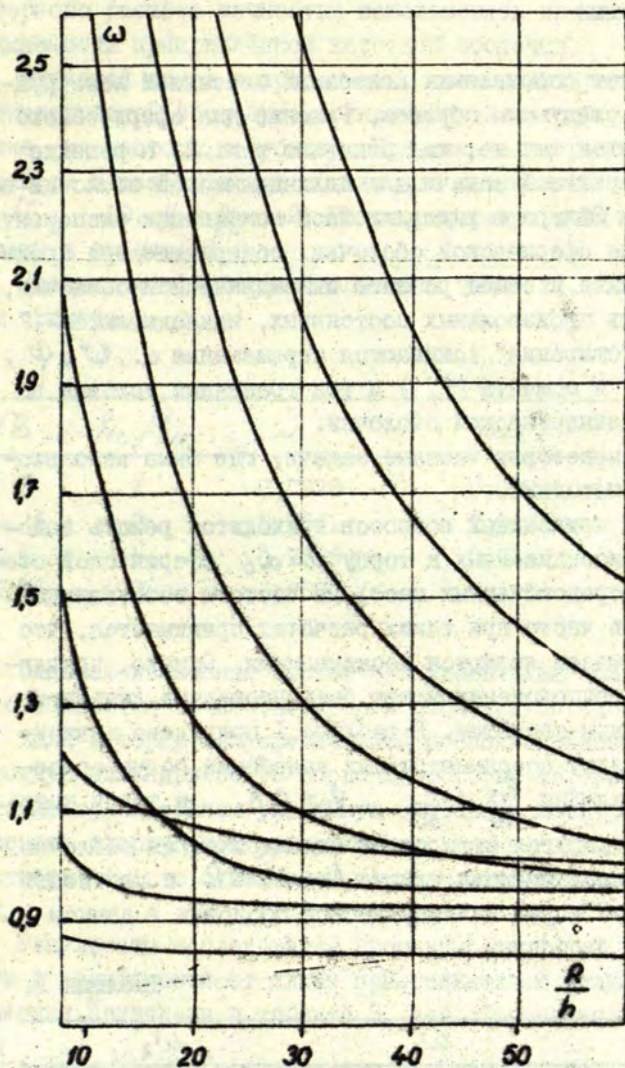


Рис. 6. Зависимость безразмерных частот собственных колебаний свободной полусферической оболочки от относительной толщины

3. Решение некоторых прикладных задач для составной конструкции

Расчёт частот собственных колебаний составной конструкции проводится следующим образом. Решение для сферического элемента находится так же, как показано в п. 2, а решение уравнения спектральной задачи для цилиндрической оболочки находится методом Эйлера в виде линейной комбинации экспонент. На общее решение сферической оболочки, содержащее три произвольные постоянные и общее решение цилиндрической оболочки, содержащее шесть произвольных постоянных, накладываются шесть условий "сливания" (сливаются перемещения u, w, ψ , усилия N_1, Q_1 и моменты M_1) и три граничные условия на втором торце цилиндрической оболочки.

Рассмотрим некоторые частные задачи, где была использована указанная методика.

При решении прикладных вопросов приходится решать задачи о влиянии присоединённых к торцу $\alpha = \alpha_0$ сферической оболочки колец (сосредоточенных масс) на частоты собственных колебаний. Очень часто при таких расчётах принимается, что присоединённые массы являются несжимаемыми. Однако, правдивость данного предположения может быть проведена лишь при сравнении с точным расчётом. В таблице I приведена зависимость первых частот осесимметричных колебаний полусферической оболочки толщины $\frac{h_s}{R} = \frac{1}{30}$, $\nu_s = 0,3$, к торцу которой прикреплена упругая изотропная цилиндрическая оболочка одинаковой толщины, имеющая длину $L = 0,25 R$ и плотность $\rho_c = 4\rho_s$. Второй торец цилиндрической оболочки в данном примере и далее свободный.

Таблица I.

E_c/E_s	ω_1	ω_2
1	0,6962	0,8073
2	0,7629	0,8688
5	0,7837	0,9229
25	0,7958	0,9410
500	0,7994	0,9448
5000	0,7996	0,9449

Очевидно, только при $E_c/E_s > 5$ можно с достаточной для инженерного расчёта точностью использовать предположение о нежимаемости прикреплённой короткой оболочки.

Изучался также вопрос о том, как влияют размеры короткой цилиндрической оболочки, прикреплённой к полусферической оболочке, на частоты колебаний. При изменении геометрических размеров масса оболочки оставалась неизменной $m_c/m_s = 1$, $E_c/E_s = 10$, $\rho_c/\rho_s = 2$. Некоторые результаты расчётов приведены в таблице 2.

Параметры сферической оболочки такие же, как в предыдущем примере.

Таблица 2.

L/R	h_c/h_s	ω_1	ω_2	ω_3
0,5	1	0,7928	0,9379	1,0625
0,25	2	0,7941	0,9391	1,0649
0,1	5	0,7775	0,9182	1,0248
0,05	10	0,7597	0,8938	0,9971

Сильное изменение частот при увеличении толщины оболочки объясняется точностью теории оболочек порядка h_c/R .

Если к торцу полусферической оболочки присоединить очень короткую цилиндрическую оболочку того же материала, то с некоторым приближением указанную составную конструкцию можно заменить сферической оболочкой несколько большего угла полураствора α_0 , с одинаковой, как у конструкции длиной образующей.

Результаты исследований применимости такой упрощённой замены в зависимости от длины присоединённой цилиндрической оболочки приведены в таблице 3. для сферической оболочки с

$$R/h_s = 30, \nu_s = 0,3$$

Таблица 3.

$\frac{L}{2R}$	ω_1		ω_2	
	точное реш.	прибл. реш.	точн. реш.	прибл. реш.
0,02	0,8307	0,8307	0,9259	0,9259
0,03	0,8289	0,8289	0,9256	0,9257
0,05	0,8255	0,8253	0,9249	0,9251
0,08	0,8204	0,8198	0,9233	0,9234
0,10	0,8171	0,8160	0,9221	0,9216
0,15	0,8095	0,8064	0,9186	0,9151
0,20	0,8024	0,7963	0,9155	0,9074
0,25	0,7955	0,7861	0,9131	0,8994
0,30	0,7891	0,7756	0,9109	0,8915

Если присоединённая оболочка имеет длину $L \leq 0,2R$, указанная упрощённая замена приводит к ошибке, не превышающей 0,1%, в пределах $0,2R < L < 0,6R$ её применимость зависит от необходимой для конкретной цели точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лизарев А.Д., Шпакова С.Г., Ростанина Н.Б. О влиянии коэффициента Пуассона на собственные частоты сферических оболочек. - Прикладная механика, 1979, т. XV, 5, с. 98-101
2. Мартыненко В.С., Шпакова С.Г. Несимметричные колебания сферических оболочек. - Прикладная механика, 1973, 9, № 10, с. 23-28
3. Шамаков В.П. О колебаниях непологих сферических оболочек. - Изв. АН СССР, Механика твёрдого тела, 1969, №3, с. 177-185
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М., 1972. 432 с.
5. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопrotивление жёстких полимерных материалов. Рига, 1972. 498 с.
6. Варна Я.П., Цирулис Т.Т. Влияние сосредоточенных масс на распространение продольного импульса в цилиндрической оболочке. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред, Рига: ЛГУ, 1980, с. 141-159.
7. Осипов Л.Н., Халимович М.П. Свободные колебания односрезной сферической оболочки. - Вестник Белорус. ун-та, сер. I, 1972, № 1, с. 82-87
8. Jain R.K. On free vibrations of spherical shells. - Univ. Roorkee Research J., 1969, II, N I-2, Part 7, p.23-31.

Статья поступила 20 марта 1981 года.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Ауза В.Я. Математическое моделирование нестационарных процессов в электромагнитах	3
2. Ауза В.Я., Круминьш Я.Р., Устинов Н.Н., Шикин В.М. Сравнение экспериментальных и расчетных результатов для подъемных электромагнитов	12
3. Воеводский К.Э., Кочетков В.М. Некоторые предельные соотношения для сил взаимодействия между движущимися электромагнитами и проводящей структурой	24
4. Цилевич Б.Л. Об одном методе многомерной условной оптимизации	34
5. Жук В.В., Цилевич В.Л. Численное и экспериментальное исследование равновесия системы диполей во внешнем поле	47
6. Павлов С.И., Якович А.Т. К определению высоты и формы мениска в индукционной электропечи в гидростатическом приближении	56*
7. Павлов С.И., Якович А.Т. Методика расчета формы свободной поверхности при осесимметричном МГД-течении вязкой несжимаемой жидкости	70
8. Иванов Л.Г. Экспериментальное исследование теплоотдачи плосколинейной индукционной МГД-машины	78
9. Фелдмане Э.Г. О расчете напряжений в цилиндрической оболочке при нелинейных параметрических колебаниях ..	86
10. Богданович А.Е. О расчете послынного разрушения композитных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении	97
11. Богданович А.Е., Кошкина Т.Б. Выпучивание цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами жесткости при осевой динамической нагрузке	103
12. Варна Я.П. Об одном инженерном методе решения задач динамики составных оболочечных конструкций	123
13. Белов М.А., Варна Я.П. Собственные колебания составных тонкостенных конструкций из цилиндрических и сферических элементов	139

УДК 517.949 : 538.12-621.335

Луза В.Я. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТАХ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1981, с.3-II.

В работе приводится математическая модель электромагнита с учетом нелинейных и краевых эффектов в нестационарных режимах. В методике учитываются вихревые токи в феррорельсе, возникающие при переходных процессах. Разработанная методика основывается на аппроксимации численных результатов двумерной нелинейной модели электромагнита в статике. Используя зависимость индуктивности и индукции магнитного поля от намагничивающей силы и учитывая вихревые токи в феррорельсе, получается зависимость тока в обмотке от времени. Ил.7, библиогр. 1 назв.

УДК 517.949:538.12-621.335

Луза В.Я., Круминьш Я.Р., Устинов Н.Н., Дикин Б.М. ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1981, с. 12-23.

В работе приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований электромагнита. Приведены зависимости сил притяжения от формы и бокового смещения феррорельса. Обсуждаются трудности, связанные с сравнением численных и экспериментальных результатов. Ил.7, библиогр. 3 назв.

УДК 538.54.001.24

Воеводский К.Э., Кочетков В.М. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ДВИЖУЩИМИСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТАМИ И ПРОВОДЯЩЕЙ СТРУКТУРОЙ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1981, с.24-33.

Рассмотрены характеристики силового взаимодействия поля движущегося электромагнита и поля вихревых токов, наведенных им в электропроводящей полосе. Для отношения поперечной и продольной (по отношению к направлению движения электромагнита) компонент силы, называемого параметром качества, получены соотношения, характеризующие его максимально достижимую величину. Исследована зависимость параметра качества от величин, определяющих скорость движения и форму электромагнита, а также от параметров электропроводящей полосы. При этом рассмотрены два варианта расположения электромагнитов по отношению к полосе: односторонний и двусторонний. Показано, что для второго варианта при надлежащем подборе токов в электромагнитах достижимы весьма высокие значения параметра качества. Ил.1, библиогр. 2 назв.

УДК 538.65:51.380

Цилевич Б.Л. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МНОГОМЕРНОЙ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1981, с. 34-46.

Предложена методика расчета равновесной конфигурации системы диполей во внешнем электромагнитном поле, основанная на прямой минимизации потенциальной энергии системы. Описан эффективный численный алгоритм решения задачи условной оптимизации, построенный путем модификации комплекс-метода Бокса, приведены рекомендации по выбору численных значений параметров алгоритма. Табл. 3, библиогр. 17 назв.

УДК 621.757:538.65

Жук В.З., Цилевич Б.Л. ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ДИПОЛЕЙ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1981, с. 47-55.

Рассматривается система диполей, помещенных в ограниченную круглую область с наложенным поперечным полем. Равновесная конфигурация системы ищется путем минимизации потенциальной энергии системы. Для решения задачи условной оптимизации применяется модифицированный комплекс-метод. Изложены также результаты эксперимента с плавающими магнитами в ограниченной области. Приведены примеры результатов эксперимента и численных расчетов. Ил. 4, табл. 3, библиогр. 5 назв.

УДК 538.4+621.365.5

Павлов С.И., Якович А.Т. К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВЫСОТЫ И ФОРМЫ МЕНИСКА В ИНДУКЦИОННОЙ ЭЛЕКТРОПЕЧИ В ГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1981, с.56-69.

Рассматриваются различные модели индукционной электропечи, допускающие аналитическое или конечно-разностное решение, и сопоставляются полученные по ним результаты. Показано, что при моделировании мениска в гидростатическом приближении необходимо учитывать влияние на распределение электромагнитных сил торцевых эффектов как металла, так и индуктора. Предложена уточненная аналитическая формула расчета формы мениска. Ил. 3, библиогр. 10 назв.

УДК 518.12:538.4+621.365.5

Павлов С.И., Якович А.Т. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ МГД-ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1981, с. 70-77.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION
455 N. 5TH ST. NEW YORK, N.Y.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION
455 N. 5TH ST. NEW YORK, N.Y.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION
455 N. 5TH ST. NEW YORK, N.Y.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION
455 N. 5TH ST. NEW YORK, N.Y.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION
455 N. 5TH ST. NEW YORK, N.Y.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION
455 N. 5TH ST. NEW YORK, N.Y.

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION
455 N. 5TH ST. NEW YORK, N.Y.

Предлагается конечно-разностная методика расчета формы свободной поверхности в осесимметричном МГД-устройстве. Используется метод последовательных приближений для нахождения положения свободной поверхности из условия перпендикулярности к ней градиента суммарного электромагнитного и гидродинамического давления. Распределения электромагнитных и гидродинамических величин определяются с помощью ранее разработанной для фиксированной формы области методики расчета, основанной на решении системы МГД-уравнений для векторного потенциала магнитного поля, ротора скорости и функции тока. Ил. 1, библиогр. 4 назв.

УДК 536.12:537.311.6:621.313.3

Иванов Д. Г. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОТДАЧИ ПЛОСКОЛИНЕЙНОЙ ИНДУКЦИОННОЙ МГД-МАШИНЫ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1981, с. 78-85.

В работе приводятся результаты экспериментальных исследований температурного поля плосколинейного индукционного МГД-насоса в высокотемпературном режиме. Получена зависимость стационарного температурного поля от подводимой мощности. Экспериментальные значения теплоотдачи аппроксимируются с помощью степенной функции температуры обмоток индуктора. Ил. 4, табл. 2, библиогр. 4 назв.

УДК 539.3:534.1

Фельдмане Э. Г. О РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1981, с. 86-96.

Излагается методика расчета напряжений в оболочке при нелинейных параметрических колебаниях с использованием разработанного ранее способа построения аппроксимации прогиба при решении задачи прямыми вариационными методами. Исследуется характер распределения напряжений в различных сечениях оболочки в различные моменты времени. Показано, что наиболее опасными будут те режимы параметрических колебаний, при которых параметры внешней нагрузки попадают в пересечение нескольких областей динамической неустойчивости (при этих режимах наиболее вероятно быстрое усталостное разрушение конструкции). Ил. 6, библиогр. 2 назв.

УДК 539.3:534.1

Богданович А. Е. О РАСЧЕТЕ ПОСЛОЙНОГО РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1981, с. 97-102.

Представлена модель послойного анализа разрушения цилиндрических оболочек из слоистых композитов. Она основана на пересчете упругих характеристик слоя после каждого акта разрушения (в связующем либо в волокнах). Применение модели для случая нагружения оболочки осевым динамическим сжатием либо динамическим внешним давлением указывает на существенную зависимость процесса разрушения от вида нагружения и от структуры многослойного пакета. Табл. 1, библиогр. 5 назв.

УДК 539.3:534.1

Богданович А.Е., Кошкина Т.Б. ВЫПУЧИВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ОСЕВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1981, с. 103-122.

В работе представлено решение задачи о выпучивании при осевом динамическом нагружении цилиндрической оболочки, подкрепленной произвольно расположенными вдоль образующей кольцевыми ребрами жесткости. Показано, что при подкреплении прогиб заметно снижается в зонах, где он максимален; этот эффект существенно зависит как от жесткости каждого ребра и их количества, так и от расположения ребер вдоль образующей оболочки. Решение по модели "размазанных" ребер жесткости приводит к сильно завышенным значениям прогиба и не позволяет описать смещение точек максимума прогиба при изменении жесткости ребер и их количества. Ил. 8, библиогр. 8 назв.

УДК 539.3:534.1

Варна Я.П. ОБ ОДНОМ ИНЖЕНЕРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1981, с. 123-138.

Предложен инженерный метод нахождения динамического напряженно-деформированного состояния составных полимерных конструкций, состоящих из некоторого числа последовательно соединенных цилиндрических оболочек кругового сечения. На торцах конструкции действуют динамические нагрузки типа продольного или поперечного удара, задаваемого некоторой четырехпараметричной функцией. Точность применяемой приближенной методики оценивается сравнением с результатами, полученными по уточненной теории типа Тимошенко, учитывающей инерцию вращения и деформацию сдвига. Ил.7, библиогр. 5 назв.

УДК 539.4:534.1

Белов М.А., Варна Я.П. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1981, с. 139-153.

Изучаются осесимметричные колебания тонкостенной конструкции, состоящей из последовательно соединенных изотропной сферической и трансверсально ортотропной цилиндрических оболочек одинакового радиуса в постановке геометрически и физически линейной теории типа Тимошенко. Отдельно рассматривается вопрос о влиянии различных параметров и граничных условий на частоты собственных колебаний сферической оболочки в уточненной постановке. Ил.6, библиогр. 8 назв.

1. 1933. 3. 23

Ваше письмо от 1933. 3. 23 получено. В ответ на него сообщается, что в настоящее время в распоряжении редакции нет материалов, относящихся к делу № 10000. Ввиду этого просим вас обратиться к соответствующим органам власти.

Ваше письмо от 1933. 3. 23 получено. В ответ на него сообщается, что в настоящее время в распоряжении редакции нет материалов, относящихся к делу № 10000. Ввиду этого просим вас обратиться к соответствующим органам власти.

Ваше письмо от 1933. 3. 23 получено. В ответ на него сообщается, что в настоящее время в распоряжении редакции нет материалов, относящихся к делу № 10000. Ввиду этого просим вас обратиться к соответствующим органам власти.

Ваше письмо от 1933. 3. 23 получено. В ответ на него сообщается, что в настоящее время в распоряжении редакции нет материалов, относящихся к делу № 10000. Ввиду этого просим вас обратиться к соответствующим органам власти.

Ваше письмо от 1933. 3. 23 получено. В ответ на него сообщается, что в настоящее время в распоряжении редакции нет материалов, относящихся к делу № 10000. Ввиду этого просим вас обратиться к соответствующим органам власти.

Ваше письмо от 1933. 3. 23 получено. В ответ на него сообщается, что в настоящее время в распоряжении редакции нет материалов, относящихся к делу № 10000. Ввиду этого просим вас обратиться к соответствующим органам власти.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Межвузовский сборник научных трудов

Под общей ред. Ю.Я. Микельсона

Редактор С. Рязанцева
Технический редактор М. Даугупе
Корректор М. Даугупе

Подписано к печати 20.05.1981. ЯТ П1088. Ф/б 60x84/16.
Бумага №1. 10,5 физ. печ. л. 9,8 усл. печ. л. 8,0 уч.-изд. л.
Тираж 500 экз. Зак. № 1002. Цена 80 к.

Латвийский государственный университет им. П. Стучки
Рига 226098, б. Райниса, 19
Отпечатано на ротапринтере, Рига 226050, ул. Вейденбаума, 5
Латвийский государственный университет им. П. Стучки