# Анализ движения небесных тел и их наблюдений

РИГА
1982

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Астрономическая обсерватория

# АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ

Сборник научных трудов

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1982

УДК 521.4, 521.61

Анализ движения небесных тел и их наблюдений: Сборник научных трудов. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982. - 180 с.

В статьях настоящего сборника приводится анализ движения комет и статистическое распределение их орбит, дается оценка ошибок наблюдений. Приведены исследования пространственного и видимого движения ИСЗ, а также методы определения орбит по полным и неполным наблюдениям. Освещаются вопросы уточнения эфемерид ИСЗ, обработки оптических наблюдений ИСЗ и автоматизация наблюдений прохождения звезд через меридиан.

Рис. 13, табл. - 21, список лит. - 67 назв.



Печатается по решению редакционно-издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

А $\frac{20603-092у}{М\ 812(11)-82}$ 39.82.1705030000

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982.

УДК. 521.I

К.А.Штейнс, А.Л.Салитис
(АО ЛГУ им. П.Стучки)

# АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ КОМЕТ

В течение нескольких миллиардов лет орбиты долгопериодических комет из-за незначительной массы этих тел испытывают сильные изменения в результате действия гравитационных, а также негравитационных сил. Основную роль в эволюции орбит комет на небольших расстояниях от Солнца играют возмущения со стороны планет гигантов. Для долгопериодических комет, поскольку они удаляются на большие расстояния от Солнца, существенными являются и возмущения со стороны звезд, проходящих мимо Солнечной системы, в результате которых, как установил Штейнс [I], сильно меняются перигелийные расстояния комет.

В настоящее время ряд ученых, рассматривая эволюцию кометных орбит, делит процесс образования наблюдаемого распределения кометных орбит по $x$ на несколько этапов.

В частности, Казимирчак - Полонская [2] выделяет четыре стадии.

I) Это некоторая совокупность комет, движущихся по орбитам, близким к параболическим.

2) Стадия возмущений со стороны звезд. В результате этих возмущений кометные орбиты могут значительно менять перигелийное расстояние и войти во внутреннюю область Солнечной системы.

3) Диффузия комет, т.е. медленное накопление случай-

ных возмущений в обратной величине большой полуоси кометных орбит, которые вызывает гравитационное действие планет. В результате токого накопления случайных возмущений большая полуось может получить значительное изменение.

4) Захват далеких комет планетами гигантами.

В настоящей работе мы предлагаем несколько иной подход к вопросу преобразования орбит долгопериодических комет. На наш взгляд, нельзя отделить процесс возмущающего действия звезд от процесса диффузии и поэтому считаем, что неправильно расматривать эволюцию орбит долгопериодических комет, выделяя отдельно стадию возмущений со стороны звезд и стадию диффузии, так как эти процессы имеют место одновременно.

Теперь попытаемся уточнить процесс диффузии. Как уже отмечалось, диффузия - это процесс постепенного накопления малых возмущений $\delta$ в обратной величине большой полуоси кометной орбиты $\frac{1}{a}$, которые имеют случайный характер и подчиняются определенному закону распределения. Случайный характер возмущений объясняется тем, что в случае долгопериодических комет, которые имеют $a > 40$ а.е., мы имеем дело с большими промежутками времени. Период обращения таких комет более 260 лет. Но если мы рассматриваем кометы с бо́льшими значениями большой полуоси $a$, то мы имеем дело с периодами обращения, которые составляют несколько миллионов лет. За такой длительный промежуток времени комета испытывает случайные возмущения из-за гравитационных и негравитационных сил, и поэтому момент очередного прохождения через внутреннюю часть Солнечной системы остается неопределенным, а следовательно, и взаимное расположение планет будет неопределенным, т.е. имеет случайный характер. Более того, уже для короткопериодических комет, период которых меньше ста лет, нельзя точно определить время следующего сближения с какой-либо большой планетой. К примеру, можно отметить комету Галлея. Как показывают вычисления Коуэлла и Кроммелина [3], период этой кометы менялся в пределах от 74,5 лет до 79,3 лет, что составляет разницу около пяти лет. Это лишний раз подтверждает случайный характер возмущений $\delta$, которые вызывающая гравитационным действием планет.

Основоположником теории диффузии является Вурком [4]. Им впервые было получено уравнение диффузии для симметричного распределения возмущений $\delta$ со стороны планет. Уравнение диффузии в частных производных, полученное Вуркомом, имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{D} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( N z^{3/2} \right) , \qquad (I)$$

где $$D = 2\left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\delta)\delta^2 d\delta \right]^{-1} .$$

Интегрирование проводится от $-\infty$ до $+\infty$ и поэтому рассматриваются все возможные значения возмущений в $\frac{1}{a}$. Однако в действительности интегрирование проводится в конечных пределах от $-\delta$ до $+\delta$, так как возмущения всегда являются конечными. Уравнение (I) определяет приток комет в Солнечную систему под действием случайных возмущений со стороны планет.

Недостатком в теории диффузии Вуркома является то, что не учтена дезинтеграция. Для комет, имеющих $a$ от 40 а.е. до 1000 а.е., дезинтеграцию Вурком считал незначительной.

Оорт [5] в 1950 году, рассматривая стационарный процесс диффузии, получил уравнение диффузии с учетом дезинтеграции

$$n(z) = (1-k) N \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} + (1-k)\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{\infty} n(z+\delta) e^{-h^2\delta^2} d\delta, \quad (2)$$

где $n(z)$ - представляет число, пропорциональное плотности вероятностей прохождения комет через перигелий с $z$ в интервале ( $z$ , $z+\delta$ ), $N$ - число комет, которые впервые проходят через перигелий в течение года и орбиты которых считают параболами, $z = \frac{1}{a}$, $\delta$ - изменение $\frac{1}{a}$ в результате возмущений со стороны планет, $k$ - коэффициент, характеризующий дезинтеграцию, и $h$ - дисперсия для $\delta$. В уравнении (2) $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2}$ представляет закон распределения Гаусса. Интегрирование проводится от $-z$ потому, что Оорт учитывал только параболические кометы.

Однако надо отметить, что до настоящего времени развитая теория диффузии не дает хорошего соответствия теории с наблюдениями. На рис.I изображена кривая зависимости, которая имеет хорошее совпадение теории с наблюдениями для больших значений $z$ .

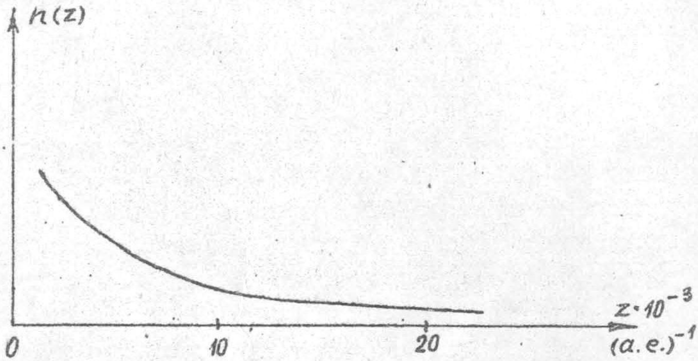


Рис. I

Для малых значений $z$ ход кривой $n(z)$ становится неопределенным. Это, по-видимому, связано с тем, что при малых значениях $z$ , т.е. больших $a$ , существенным является гравитационное действие звезд.

Поэтому мы предлагаем в уравнении диффузии учитывать возмущения со стороны звезд. Для этого уточним второе слагаемое в уравнении Оорта (2). Первое слагаемое является неопределенным, так как неизвестно значение $N$ .

Допустим, что на больших расстояниях от Солнца комета испытывает возмущения со стороны проходящих звезд и в результате этого меняет $\frac{1}{a}$ на величину $\Delta$ . Пусть эти возмущения имеют плотность распределения вероятностей $f(\Delta)$, тогда число $n'(z)$, пропорциональное плотности вероятностей и характеризующее вероятность прохождения кометы через перигелий, имеющей $z$ в интервале от $z$ до $z + \Delta$, можно записать:

$$n'(z) = c\int_{-z}^{\infty} n(z+\Delta) f(\Delta) d\Delta ,$$

где $c$ – некоторая постоянная, учитывающая количество звезд, проходящих через данную область пространства в определенный промежуток времени.

В свою очередь, на небольших расстояниях от Солнца основную роль имеют возмущения со стороны планет, которые существенно могут изменить параметры кометной орбиты и главным образом большую полуось орбиты.

Допустим, что при прохождении через внутреннюю часть Солнечной системы комета получает возмущения $\delta$ в обратной величине большой полуоси $\frac{1}{a}$, имеющие плотность распределения вероятностей $\varphi(\delta)$ и обусловленные притяжением планет. Теперь мы можем получить число $n(z)$, характеризующее вероятность прохождения комет в интервале обратных величин большой полуоси ( $z$ , $z + \Delta + \delta$ ) с учетом возмущений как со стороны звезд, так и со стороны планет. Аналитически $n(z)$ можно записать следующим образом:

$$n(z) = (1-\kappa)c\int_{-z}^{\infty}\left[\int_{-z-\Delta}^{\infty} n(z+\Delta+\delta) f(\Delta) d\Delta\right]\varphi(\delta) d\delta \qquad ,(3)$$

где $c$ – так же, как в уравнении Оорта, характеризует дезинтеграцию.

Таким образом, мы получили новое уравнение диффузии, которое учитывает как влияние звезд, так и влияние планет на эволюцию орбит долгопериодических комет.

Уравнение (3) не поддается аналитическому решению, так как неизвестны аналитические выражения $f(\Delta)$ и $\varphi(\delta)$ для распределения плотностей вероятности возмущений. Несмотря на это решение уравнения (3) можно получить численным методом на ЭВМ, благодаря тому, что мы знаем численные значения плотностей распределения вероятностей $f(\Delta)$ и $\varphi(\delta)$ для различных значений возмущений $\Delta$ и $\delta$, которые найдены уже раньше также численными методами и опубликованы.

## Литература

1. Штейнс К.А. К вопросу о возмущениях от звезд на движение комет. - Астрон.ж., 1956, т.33,вып.5,с.756-760.
2. Kazimirchak - Polonskaya E.I. The Major Planets as Powerful Transformers of Cometary Orbits. - IAU Symp., 1972, No 45, p.373 - 396.
3. Proctor M., Crommelin A.C. - Comets , London, 1937, p.61 - 75.
4. Woerkom A.J. On the Origin of Comets. - Bull.Astron. Inst. Nether.,1948, v.10, No 399, p.445 - 472.
5. Oort J.H. The Structure of the Cloud of Comets Surrounding the Solar System, and a Hypothesis Concerning its Origin. - Bull.Astron.Inst.Nether., 1950, v.11,No 408, p.93 - 110.

## Резюме

К.А.Штейнс
А.Л.Салитис

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ КОМЕТ

Установлено, что раньше развитая теория диффузии комет не учитывает некоторые важные факторы. Получено новое уравнение диффузии и показана возможность его решения.

## K o p s a v i l k u m s

K.A.Šteins
A.L.Salītis

KOMĒTU DIFŪZIJAS VIENĀDOJUMU ANALĪZE

Konstatēts ka agrāk izstrādātā komētu difūzijas teorija neņem vērā dažus svarīgus faktorus.Iegūts jauns difūzijas vienādojums un parādīta tā atrisināšanas iespēja.

## S u m m a r y

K.A.Šteins
A.L.Salītis

ANALYSIS OF COMETARY DIFFUSION EQUATION

The existing cometary diffusion theory has been found to be ignoring some important factors.A new diffusion equation has been obtained and the possibility of its solution has been shown.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 521.73

А.Л.Салитис
(АО ЛГУ им.П.Стучки)

# АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМЕТ ПО ОБРАТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ БОЛЬШИХ ПОЛУОСЕЙ ОРБИТ

Решая вопросы кометной космогонии в рамках той или другой гипотезы, необходимо исследовать эволюцию кометных орбит в течение больших промежутков времени. Для этого изучаются те изменения, которым подвергнута вся совокупность комет. Исходя из принятой гипотезы строится определенная начальная модель, в которой задаются начальные элементы и исследуется их дальнейшее изменение под действием определенных факторов. В конечном итоге, с точки зрения небесной механики, нас интересует, как кометы распределяются по значениям элементов орбит по истечении этого промежутка времени. Обычно за такой период времени в космогонии принимают $10^9$ лет.

Поскольку мы имеем дело, во-первых, с большими промежутками времени и, во-вторых, уравнения движения комет с учетом возмущений не интегрируются аналитически, то основными являются численные и статистические методы. Критерием достоверности полученных результатов является наблюдаемое распределение комет по значениям элементов орбит. В качестве токого элемента чаще всего рассматривают обратную величину большой полуоси орбиты $z = \frac{1}{a}$. Распределение комет по $z$ в рамках теории диффузии рассматривали Сорт [1], Штейнс [2], Штейнс и Риекстиньш [3]. Исходя из принятой теории строения кометных ядер, Добровольский [4] оценил время жизни кометы и сравнил результаты с теорией диффузии, определяя при этом распределение комет по $z$. Как показали исследования [I,2,4], теоретическое распределение комет по $z$ плохо согласуется с наблюдениями для малых значений $z$. Это, по-видимому, связано с тем, что до настоящего времени развитая теория диффузии не учитывает ряд важных факторов. Основным недостатком является то, что в уравнении диффузии Оорта [5] не учитываются возмущения со стороны звезд, которые являются существенными для долгопериодических комет, период которых больше 200 лет.

Эволюцию орбит долгопериодических комет под действием возмущений как со стороны планет, так и со стороны звезд, рассматривал Фернандес [6]. Им была исследована численным методом эволюция 500 орбит гипотетических комет со следующими значениями начальных элементов орбит: расстояния перигелия в пределах от 20 до 30 а.е., большие полуоси орбит в пределах от $5 \cdot 10^3$ до $5 \cdot 10^4$ а.е., а наклонности плоскостей орбит меньше 20°. Учитывались возмущения со стороны четырех планет Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна, а также возмущения со стороны звезд по осредненным формулам, полученным на основе гипотезы Русселя - Эпика по известным формулам задачи двух тел.

Возмущения со стороны планет-гигантов учитывались при условии, что входящая во внутреннюю часть Солнечной системы комета имела перигелийное расстояние $q < 35$ а.е., притом индивидуально в зависимости от $q$, $i$ и $a$. Уравнения движения интегрировались численным способом по методу Коуэлла.

Возмущения со стороны звезд берутся осредненно относительно распределения звезд, однако учитываются индивидуальные свойства комет, зависящие от элементов $a$ и $q$. Осреднения уравнений для учета возмущений со стороны звезд ведутся некорректно, с целью получения достаточно простых уравнений для учета возмущений и получения изменений в элементах.

Несмотря на необоснованность выбора средних значений параметров, полученные результаты представляют некоторый интерес, так как отражают реальные распределения комет по элементам орбит.

В настоящей работе мы определили распределение комет по $z$, полученное на основе нового уравнения диффузии [7]

$$n(z) = (1-k)c \int_{-z}^{\infty} \left[ \int_{-z-\Delta}^{\infty} n_k(z+\Delta+\delta) f(\Delta)\, d\Delta \right] \varphi(\delta)\, d\delta. \quad (I)$$

Уравнение (I) не поддается аналитическому решению, поэтому его решение было получено численным методом на ЭВМ. Для этого уравнение (I), которое содержит несобственные интегралы, преобразовалось в виде конечной двойной суммы

$$n(z) = (1-k)c \sum_{i=1}^{11} \left[ \sum_{j=1}^{101} n_k(z+\Delta+\delta) f_j(\Delta)\Delta \right] \varphi_i(\delta)\delta. \quad (2)$$

Такое преобразование возможно благодаря тому, что при больших значениях возмущений $\Delta$ и $\delta$ распределения плотностей вероятности $f(\Delta)$ и $\varphi(\delta)$ превращаются в нуль. Вычисление двойной суммы (2) на ЭВМ осуществляется просто. Для этого необходимо ввести $f_j(\Delta)$, $\varphi_i(\delta)$ и $n_k(z)$ в память ЭВМ и осуществить суммирование. Значения распределения плотностей вероятности $f_j(\Delta)$ были нами найдены численно, которые приведены в таблице I.

Значения распределения плотностей вероятности $\varphi(\delta)$, которые приведены в таблице 2, также были получены численным методом Штейнсом и Кронькалне [8].

Для того, чтобы получить значения $n_k(z)$ мы поступили следующим образом: из вычислений Марсдена [9] мы выбрали все долгопериодические кометы из I и II класса, имеющие начальные значения большой полуоси от 200 а.е. до $10^6$ а.е., всего I38 комет, за исключением гиперболических. Данный интервал изменения $a_{orig}$ разделили на десять равных частей и подсчитали относительное количество комет в каждом интервале. Полученные значения $n_k(z)$ приведены в таблице 3.

Подставляя полученные значения $n_k(z)$ в уравнение диффузии (2) мы получим распределение комет по $z$, которое отражено на рис.I. На рисунке заштрихованная часть диаграммы соответствует распределению комет по $z$ согласно уравнению Оорта, в котором определяется второе слагаемое диаграммы.

$$\mathcal{N}(z) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{\infty} n(z+\delta) e^{-h^2\delta} d\delta. \qquad (3)$$

Таблица I

| $j$ | $f_j(\Delta)$ | $j$ | $f_j(\Delta)$ | $j$ | $f_j(\Delta)$ | $j$ | $f_j(\Delta)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,36124 | 26 | $2,04\cdot10^{-4}$ | 51 | $4,12\cdot10^{-5}$ | 76 | $1,04\cdot10^{-5}$ |
| 2 | 0,01365 | 27 | $1,90\cdot10^{-4}$ | 52 | $3,50\cdot10^{-5}$ | 77 | $1,41\cdot10^{-5}$ |
| 3 | 0,00607 | 28 | $1,78\cdot10^{-4}$ | 53 | $3,38\cdot10^{-5}$ | 78 | $1,23\cdot10^{-5}$ |
| 4 | 0,00364 | 29 | $1,42\cdot10^{-4}$ | 54 | $4,18\cdot10^{-5}$ | 79 | $1,97\cdot10^{-5}$ |
| 5 | 0,00257 | 30 | $1,49\cdot10^{-4}$ | 55 | $3,32\cdot10^{-5}$ | 80 | $1,54\cdot10^{-5}$ |
| 6 | 0,00183 | 31 | $7,98\cdot10^{-5}$ | 56 | $4,97\cdot10^{-5}$ | 81 | $2,33\cdot10^{-5}$ |
| 7 | 0,00151 | 32 | $8,35\cdot10^{-5}$ | 57 | $5,52\cdot10^{-5}$ | 82 | $1,78\cdot10^{-5}$ |
| 8 | 0,00123 | 33 | $1,65\cdot10^{-4}$ | 58 | $7,37\cdot10^{-6}$ | 83 | $2,33\cdot10^{-5}$ |
| 9 | 0,00099 | 34 | $4,70\cdot10^{-5}$ | 59 | $1,78\cdot10^{-5}$ | 84 | $2,45\cdot10^{-6}$ |
| 10 | 0,00079 | 35 | $5,30\cdot10^{-5}$ | 60 | $1,72\cdot10^{-5}$ | 85 | $4,30\cdot10^{-6}$ |
| 11 | 0,00066 | 36 | $9,10\cdot10^{-5}$ | 61 | $1,41\cdot10^{-5}$ | 86 | $3,68\cdot10^{-6}$ |
| 12 | 0,00061 | 37 | $1,59\cdot10^{-4}$ | 62 | $1,22\cdot10^{-5}$ | 87 | $4,30\cdot10^{-6}$ |
| 13 | 0,00052 | 38 | $4,73\cdot10^{-5}$ | 63 | $1,66\cdot10^{-5}$ | 88 | $1,23\cdot10^{-6}$ |
| 14 | 0,00049 | 39 | $5,00\cdot10^{-5}$ | 64 | $1,17\cdot10^{-5}$ | 89 | $3,07\cdot10^{-6}$ |
| 15 | 0,00046 | 40 | $6,75\cdot10^{-5}$ | 65 | $1,84\cdot10^{-5}$ | 90 | $6,10\cdot10^{-6}$ |
| 16 | 0,00047 | 41 | $8,90\cdot10^{-5}$ | 66 | $1,23\cdot10^{-5}$ | 91 | $2,46\cdot10^{-6}$ |
| 17 | 0,00043 | 42 | $7,34\cdot10^{-5}$ | 67 | $1,11\cdot10^{-5}$ | 92 | $5,53\cdot10^{-6}$ |
| 18 | 0,00045 | 43 | $8,72\cdot10^{-5}$ | 68 | $1,29\cdot10^{-5}$ | 93 | $3,69\cdot10^{-6}$ |
| 19 | 0,00045 | 44 | $1,12\cdot10^{-4}$ | 69 | $1,22\cdot10^{-5}$ | 94 | $3,07\cdot10^{-6}$ |
| 20 | 0,00041 | 45 | $3,07\cdot10^{-5}$ | 70 | $1,41\cdot10^{-5}$ | 95 | $4,91\cdot10^{-6}$ |
| 21 | 0,00039 | 46 | $9,72\cdot10^{-5}$ | 71 | $1,60\cdot10^{-5}$ | 96 | $2,46\cdot10^{-6}$ |
| 22 | 0,00040 | 47 | $9,40\cdot10^{-5}$ | 72 | $1,17\cdot10^{-5}$ | 97 | $3,16\cdot10^{-6}$ |
| 23 | 0,00027 | 48 | $3,32\cdot10^{-5}$ | 73 | $1,47\cdot10^{-5}$ | 98 | $3,07\cdot10^{-6}$ |
| 24 | 0,00023 | 49 | $3,99\cdot10^{-5}$ | 74 | $1,23\cdot10^{-5}$ | 99 | $2,46\cdot10^{-6}$ |
| 25 | 0,00021 | 50 | $3,62\cdot10^{-5}$ | 75 | $1,53\cdot10^{-5}$ | 100 | $2,46\cdot10^{-6}$ |

$j$ – номер соответствующего интервала изменения $\Delta z$, а $f_j(\Delta)$ плотность вероятностей попадания изменения $\Delta z$ в этот интервал.

Таблица 2.

| $i$ | $\varphi_i(\delta)$ | $i$ | $\varphi_i(\delta)$ | $i$ | $\varphi_i(\delta)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 0,0557 | 6 | 0,0440 | II | 0,0491 |
| 2 | 0,0546 | 7 | 0,0362 | I2 | 0,0173 |
| 3 | 0,056I | 8 | 0,03I6 | I3 | 0,0086 |
| 4 | 0,0493 | 9 | 0,0286 | I4 | 0,0058 |
| 5 | 0,0453 | I0 | 0,022I | I5 | 0,0000 |

Таблица 3.

| $K$ | $z \cdot 10^{-6}$ (a.e.) | $n_K(z)$ | $K$ | $z \cdot 10^{-6}$ (a.e.) | $n_K(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | I - 502 | 0,5507 | 6 | 25I0 - 30I2 | 0,0507 |
| 2 | 502 - I004 | 0,I522 | 7 | 30I2 - 35I4 | 0,0290 |
| 3 | I004 - I506 | 0,0652 | 8 | 35I4 - 40I6 | 0,0072 |
| 4 | I506 - 2008 | 0,0507 | 9 | 40I6 - 45I8 | 0,02I7 |
| 5 | 2008 - 25I0 | 0,0580 | I0 | 45I8 - 5023 | 0,0I45 |

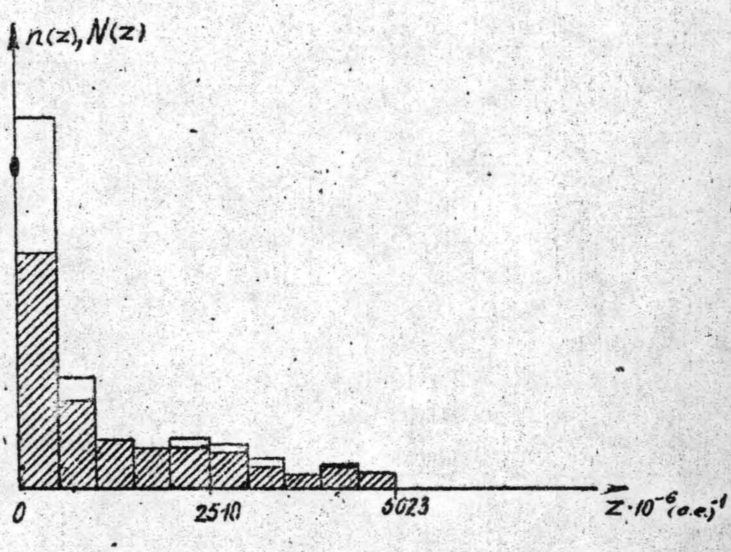


Рис. I

Распределение комет по $z$ согласно уравнению диффузии (I) представляет заштрихованная и незаштрихованная часть

Диаграмма показывает, с учетом возмущений со стороны звезд получается больше комет с малыми значениями $z$, что дает лучшее совпадение теории с наблюдениями. Как известно, по наблюдениям получается бо́льшее количество комет с бо́льшими $a$. Решение нового уравнения диффузии показывает, что большинство комет в результате возмущающего действия звезд и планет приобретают значения больших полуосей орбит в интервале от $10^3$ до $10^6$ а.е.

В численном эксперименте Фернандес [6] получил, что большинство рассматриваемых им комет после эволюции в течение $10^9$ лет имеют $a$ больше $0,6 \cdot 10^3$ а.е., что хорошо совпадает с нашим результатом, полученным на основе статистических методов.

Поэтому можно сделать заключение, что, исследуя эволюцию орбит долгопериодических комет, в уравнении диффузии необходимо учитывать возмущения со стороны звезд.

## Литература


I. Oort J.H., Schmidt M. Differences Between New and Old Comets. - Bull. Astron. Inst. Nether., 1951, v.II, No419.
2. Штейнс К.А. К вопросу о диффузии комет. II Стационарный процесс. - Астрон. ж., 1961, т.38 вып.I, с.107 - 114.
3. Штейнс К.А., Риекстиньш Э.Я. К вопросу о диффузии комет. - Астрон. ж., 1960, т.37, вып.6, с. 1061 - 1067.
4. Dobrovolskij O.V. New Estimates of Cometary Disintegration Times and the Implications for Diffusion Theory. - IAU symp. No 45, "The Motions, Evolution of Orbits, and Origin of Comets", Dodrecht—Holland, 1972, p. 352-355.
5. Oort J.H. The Structure of the Cloud of Comets Surrounding the Solar System, and a Hypothesis Concerning its Origin. - Bull. Astron. Inst. Nether., 1950, v.II, No408.
6. Fernandez J.A. Evolution of Comet Orbits under the Influence of the Giant Planets and Nearby Stars. - Icarus, 1980, v.42, No3, p.406 - 421.
7. Штейнс К.А., Салитис А.Л. Анализ уравнений диффузии

комет. - Настоящий сборник.

8. Šteins K., Kropkalne S. Changes in Orbital Elements for a Complete Comet's Passage through the Planetary System. - Acta Astronomica, v.14, No4. 1964, p.311 - 321.

9. Marsden B.G., Sekanina Z., Everhart E. New Osculating Orbits for 110 Comets and Analysis of Original Orbits for 200 Comets. - Astron. J., 1978, v.83, No1, p.64 - 71.

## Р е з ю м е

А.Л.Салитис

АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМЕТ ПО ОБРАТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ БОЛЬШИХ ПОЛУОСЕЙ ОРБИТ

Используя усовершенствованное уравнение диффузии комет, получено распределение комет по обратным значениям больших полуосей орбит. Найденное распределение сравнивается с результатами численных исследований других авторов.

## K o p s a v i l k u m s

A.L.Salītis

KOMĒTU SADALĪJUMA ANALĪZE PA ORBĪTU LIELO PUSASU APGRIEZTAJĀM VĒRTĪBĀM

Izmantojot uzlaboto komētu difūzijas vienādojumu, ir iegūts komētu sadalījums pa orbītu lielo pusasu apgrieztajām vērtībām. Iegūtais sadalījums tiek salīdzināts ar citu autoru skaitlisko pētījumu rezultātiem.

S u m m a r y

A.L.Salītis

THE ANALYSIS OF DISTRIBUTION OF COMETS BY THE SEMI-MAJOR AXES

The distribution of comets by the reciprocal semi--major axes has been obtained by use of improved cometary diffusion equation.The obtained distribution is compared with numerical investigations of other investigators.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 523.64

В.П.Томанов
(Вологодский пединститут)

# СТАТИСТИКА ПОЧТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КОМЕТ

Статистический анализ кометной системы проводился многими авторами [1-5] и, как правило, с космогоническими целями: поиск генетических закономерностей или сравнение теоретических результатов с данными наблюдений. Познание тайны рождения космических тел - главнейшая задача астрономических исследований. Космогонисты-кометчики находятся в более благоприятном положении, например, с исследователями, изучающими планетную космогонию, поскольку в их распоряжении - богатый, непрерывно увеличивающийся наблюдательный материал. Статистические исследования кометной системы целесообразно периодически повторять на более обширном материале (ежегодно открываются 3 - 4 новых кометы) что может дать основу для новых космогонических обобщений.

В 1980 г. мы опубликовали результаты статистического исследования системы короткопериодических комет [6,7]. По нашему мнению, реально существует только семейство короткопериодических комет Юпитера, образовавшееся в результате гравитационных планетных возмущений почти параболических комет.

В настоящей статье мы дадим краткий статистический анализ системы почти параболических (период $P > 200$ лет) комет, но вначале приведем общие сведения о совокупности всех комет.

Общие сведения о кометной системе.

Для статистических подсчетов будем использовать последний и наиболее точный из всех ранее изданных источников -

Таблица I

| Параметр и его пределы | | Годы открытия | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | До I600 | I600–-I699 | I700–-I799 | I800–-I899 | I900–-I978 | Всего |
| P (годы) | 3,3 -30,0 | I | – | 6 | 26 | 65 | 98 |
| | 30 -I00 | 2 | – | – | 7 | 2 | II |
| | I00 -200 | – | – | I | 3 | – | 4 |
| | 200 -500 | – | – | – | I0 | II | 2I |
| | 500 -I000 | – | – | – | 7 | I2 | I9 |
| | I000 - | 36 | I8 | 54 | I8I | 2I6 | 505 |
| | 3,3 - | | | | | | |
| $H_{10}$ | -4 - -2 | – | – | I | – | – | I |
| | - 2 - 0 | I | – | I | – | – | 2 |
| | 0 - 2 | 5 | – | I | 3 | 4 | I3 |
| | 2 - 4 | I5 | 2 | 7 | I2 | I0 | 46 |
| | 4 - 6 | II | I3 | 22 | 63 | 59 | I68 |
| | 6 - 8 | 5 | 3 | 2I | 83 | 67 | I79 |
| | 8 - I0 | 2 | – | 6 | 60 | 80 | I48 |
| | I0 - I2 | – | – | 2 | I3 | 63 | 78 |
| | I2 - I4 | – | – | – | – | I5 | I5 |
| | I4 - I6 | – | – | – | – | 5 | 5 |
| | I6 - I7 | – | – | – | – | 3 | 3 |
| q (a.e.) | 0 - 0.5 | I3 | 9 | I6 | 45 | 45 | I28 |
| | 0.5 - I.0 | 24 | 7 | 32 | 94 | 64 | 22I |
| | I.0 - I.5 | 2 | 2 | 9 | 62 | 80 | I55 |
| | I.5 - 2.0 | – | – | 2 | 23 | 43 | 70 |
| | 2.0 - 2.5 | – | – | I | 8 | 30 | 39 |
| | 2.5 - 3.0 | – | – | – | I | I0 | II |
| | 3.0 - 3.5 | – | – | – | – | 8 | 8 |
| | 3.5 - 4.0 | – | – | – | – | 7 | 7 |
| | 4.0 - 6.9 | – | – | I | – | I8 | I9 |

каталог кометных орбит Б.Мардена [8]. В этом каталоге содержится 658 различных комет в первых появлениях.

В первой части таблицы I дается распределение всех комет по величине периода обращения P и по времени открытия. Из 658 комет 545 или 83% двигались по почти параболическим орбитам ($P>200$лет), II3 комет являются короткопериодическими ($P<200$ лет). Кометная система в зависимости от периода обращения резко распадается на две группы, граница между которыми лежит около P=I00-200 лет.

Относительное число открываемых по столетиям короткопериодических комет растет. По-видимому, к текущему столетию около орбит планет-гигантов скопилось огромное число комет [9] и, соответственно, возросла эффективность захвата комет планетами из этих кометных резервуаров.

До I800 г. большинству кометных орбит приписывался эксцентриситет e=I. За последние I80 лет вследствие улучшения качества наблюдений и повышения точности вычисления орбит у 40 комет вычисленный период обращения оказался в пределе 200-I000 лет. В XX столетии не открыто ни одной кометы с $100 < P < 200$ лет.

Во второй части табл.I приводится распределение комет по абсолютной звездной величине $H_{10}$ в зависимости от времени их открытия. Как видим, со временем открываются все более слабые кометы. Так, если в прошлом столетии максимум открытых комет приходится на интервал $H_{10}=6^m - 8^m$, то в текущем столетии максимум сместился в диапазон $H_{10}=8^m - 10^m$.

За последние 200 лет не открыто ни одной абсолютно яркой кометы ($H_{10} < 0$). С другой стороны, в числе самых слабых ($12 < H_{10} < 17$) насчитывается только 23 кометы.

В третьей части табл.I приводится распределение комет по перигельным расстояниям $q$. В этом распределении максимум комет приходится на интервал $q$=0.5 - I.0 а.е. По-видимому, наличие максимума комет с $q<1$ реально и не искажено условиями наблюдательной селекции. Как известно, с точки зрения условий видимости легче открывать кометы с $q>1$, но во все столетия, за исключением последнего, преимущественно открывались кометы с $q<1$. В XX столетии открыто много короткопериодических комет, большинство из коротких имеют $q>1$, что и привело к смещению максимума распределения комет по $q$ в диапазон $q>1$.

Распределение элементов кометных орбит.

1. Распределение орбит по аргументу перигелия $\omega$ приводится в таблице 2.

Таблица 2

| $\Delta\omega$ | $n$ | $\Delta\omega$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $0^0 - 30^0$ | 51 | $180^0 - 210^0$ | 39 |
| 30 - 60 | 51 | 210 - 240 | 32 |
| 60 - 90 | 60 | 240 - 270 | 37 |
| 90 - 120 | 62 | 270 - 300 | 32 |
| 120 - 150 | 51 | 300 - 330 | 38 |
| 150 - 180 | 45 | 330 - 360 | 47 |

275 орбит или 50.5% имеют $\omega<150^0$. Таким образом, заметна некоторая тенденция к группировке перигелиев к восходящему узлу. Этот факт может быть интерпретирован как следствие возмущающего действия планет: если долгопериодическая комета вышла из сферы действия планеты, то перигелий орбиты должен быть расположен около узла.

2. Наблюдаемое распределение орбит $n_н$ по долготе восходящего узла $\Omega$ дано в таблице 3.

Таблица 3

| $\Delta\Omega$ | $n_н$ | $n_т$ |
|---|---|---|
| $330^0 - 30^0$ | 77 | 75 |
| 30 - 90 | 93 | 99 |
| 90 - 150 | 93 | 99 |
| 150 - 210 | 81 | 75 |
| 210 - 270 | 95 | 99 |
| 270 - 330 | 106 | 99 |

Если кометы имеют межзвездное происхождение, то число узлов на дуге эклиптики в пределах от $\Omega_1$ до $\Omega_2$ определяется из формулы [10] :

$$n_т = \frac{N}{360}\left[\operatorname{arctg}(0.8\,\operatorname{tg}\Omega_2) - \operatorname{arctg}(0.8\,\operatorname{tg}\Omega_1)\right], \quad (1)$$

где $N$ - общее число орбит, в нашем случае $N = 545$. Вычисленное по формуле (1) теоретическое число узлов дано в последней колонке табл.3. Используя критерий Пирсона, можно было показать, что существует хорошее согласие между наблюдаемым и теоретическим распределением узлов. Четко выраженные минимумы в распределении узлов лежат около точек равноденствий и максимумы – в районах точек солнцестояний.

3. В распределении орбит по наклону к плоскости эклиптики $i$ (табл.4) имеет место дефицит комет, движущихся вблизи плоскости эклиптики ($i < 40^\circ$ и $i > 150^\circ$).

Таблица 4

| $\Delta i$ | $n$ | $\Delta i$ | $n$ |
|---|---|---|---|
| $0^\circ$- $10^\circ$ | 15 | $90^\circ$-$100^\circ$ | 37 |
| 10 - 20 | 15 | 100 -110 | 40 |
| 20 - 30 | 21 | 110 -120 | 29 |
| 30 - 40 | 18 | 120 - 130 | 45 |
| 40 - 50 | 38 | 130 -140 | 49 |
| 50 - 60 | 32 | 140 -150 | 45 |
| 60 - 70 | 43 | 150 -160 | 24 |
| 70 - 80 | 42 | 160 -170 | 15 |
| 80 - 90 | 38 | 170 -180 | 9 |

Этот факт может иметь две причины. 1. Почти параболические кометы "вычерпываются"в разряд короткопериодических и гиперболических в результате тесных гравитационных взаимодействий с планетами. 2. Если кометы были захвачены в Солнечную систему несколько миллионов лет тому назад из межзвездного пространства, то в эпоху захвата наклон кометных орбит должен быть заключен в пределах [10] $180 - \beta_A > i > \beta_A$, $\beta_A = 53^\circ\!.5$-широта апекса пекулярного движения Солнца. Возможно, что и в настоящую эпоху основная масса комет сохранила наклоны орбит в этих пределах.

Многие авторы отмечали недостаток комет с $i$ =110-120°, но до сих пор это явление не получило теоретического объяснения.

4. Распределение перигелиев - табл. 5.

В этой таблице представлено число перигелиев на участках небесной сферы, имеющих приблизительно одинаковую площадь. Как видно из табл.5, в распределении перигелиев кометных орбит по долготе $\lambda_\pi$ существуют два максимума- около $90^\circ$ и $270^\circ$. В северном эклиптическом полушарии ($\beta > 0$) находится 323 или 59% перигелиев. Некоторое преобладание перигелиев с $\beta_\pi > 0$ может отражать как реальные особен - ности кометной системы, так и быть следствием эффектов селекции: число астрономических обсерваторий в северном полушарии Земли больше, чем в южном, большинство комет открыто наблюдателями северного полушария.

Таблица 5

| $\beta_\pi$ \ $\lambda_\pi$ | 0°–45 | 45–90 | 90–135 | 135–180 | 180–225 | 225–270 | 270–315 | 315–360 | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +90°…+50 | 8 | 13 | 20 | 7 | 8 | 15 | 4 | 5 | 80 |
| +50…+30 | 10 | 10 | 10 | 7 | 11 | 12 | 26 | 10 | 96 |
| +30…+15 | 12 | 8 | 9 | 2 | 3 | 7 | 13 | 7 | 61 |
| +15…0° | 7 | 6 | 16 | 9 | 5 | 10 | 25 | 8 | 86 |
| 0°…−15 | 7 | 10 | 12 | 7 | 17 | 5 | 14 | 3 | 75 |
| −15…−30 | 6 | 6 | 8 | 14 | 12 | 7 | 6 | 1 | 60 |
| −30…−50 | 2 | 6 | 7 | 3 | 6 | 10 | 8 | 4 | 46 |
| −50…−90° | 10 | 7 | 3 | 3 | 2 | 8 | 6 | 2 | 41 |
| | 62 | 66 | 85 | 52 | 64 | 74 | 102 | 40 | 545 |

Некоторые статистические закономерности.

Как видно из табл.5, максимум перигелиев приходится на площадку $270^\circ < \lambda < 315^\circ$ и $30^\circ < \beta < 50^\circ$, расположенную около апекса пекулярного движения Солнца

$$\lambda_A = 270^\circ, \qquad \beta_A = 53^\circ.5. \qquad (2)$$

В работе [11] было показано, что в случае захвата ко - мет в Солнечную систему из межзвездного пространства должна наблюдаться повышенная концентрация перигелиев кометных орбит в районе солнечного апекса (2) и их дефицит около антиапекса. В этом случае распределение перигелиев по угловому расстоянию от апекса Солнца $\vartheta$ описывается следующей формулой

$$\Delta n = \frac{N}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos\vartheta}. \qquad (3)$$

Для всех $N$ = 545 комет каталога Марсдена мы вычислили величину $\vartheta$ из формулы

$$\cos\vartheta = \sin\beta_{\Pi} \sin\beta_{A} - \cos\beta_{\Pi} \cos\beta_{A} \cos\lambda_{\Pi}. \qquad (4)$$

Таблица 6

| $\Delta\vartheta$ | наблюд. | | теоретич. | | $\bar{q}$ | $\bar{H}_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta n_H$ | % | $\Delta n_T$ | % | | |
| 0°- 60° | 186 | 34% | 273 | 50% | 1.05 | 6.3 |
| 60 - 90 | 130 | 24 | 114 | 21 | 1.19 | 6.7 |
| 90 - 120 | 124 | 23 | 85 | 16 | 1.12 | 6.8 |
| 120 - 180 | 105 | 19 | 73 | 13 | 1.03 | 7.1 |

Наблюдаемое и теоретическое распределение перигелиев по их угловому расстоянию $\vartheta$ от солнечного апекса, представленное в табл.6, показывает, что действительно существует максимум перигелиев в районе апекса и минимум около антиапекса Солнца.

В работе [11] теоретически предсказаны еще две корреляции: 1. перигелийное расстояние орбит с перигелиями около апекса ($\vartheta < 60°$) и антиапекса ($\vartheta > 120°$) должны в среднем быть меньше, чем у орбит с $60° < \vartheta < 120°$,
2. с ростом $\vartheta$ блеск комет должен убывать.

Данные, приведенные в двух последних колонках табл. 6, полностью подтверждают эти теоретические прогнозы. Таким образом, вышеописанные статистические результаты можно рассматривать как аргументы в пользу гипотезы межзвездного происхождения комет.

Недавно В.П. Коноплева обнаружила планетные семейства долгопериодических комет [12]. Действительно, находясь на гелиоцентрических орбитах, кометы могли неоднократно проходить вблизи планет. Планетные возмущения могут очень существенно изменить кометную орбиту. Но новая орбита должна недалеко проходить от орбиты планеты. Покидая сферу влияния планеты, комета выходит на новую орбиту из района узла. Этот узел мы называем рабочим узлом. Расчеты [13] показывают, что перигелий новой орбиты находится недалеко от рабочего узла.

Для всех почти параболических комет мы вычислили гелиоцентрическое расстояние узлов по формуле

$$R = \frac{2q}{1 \pm \cos\omega} . \tag{5}$$

Таблица 7

| $R_{\mathcal{N}}$ | Планета | $n$ | $\bar{H}_{10}$ |
|---|---|---|---|
| < 0,307 | - | 26 | $6^m.5$ |
| 0.307 - 0.467 | Меркурий | 9 | 6.0 |
| 0.467 - 0.693 | - | 30 | 7.0 |
| 0.693 - 0.753 | Венера | 14 | 6.4 |
| 0.753 - 0.960 | - | 26 | 6.7 |
| 0.960 - 1.040 | Земля | 17 | 6.6 |
| 1.040 - 1.364 | - | 48 | 7.5 |
| 1.364 - 1.684 | Марс | 29 | 6.3 |
| 1.684 - 4.362 | - | 54 | 6.4 |
| 4.362 - 6.044 | Юпитер | 6 | 4.2 |
| > 6.044 | - | 3 | 5.7 |

В табл. 7 приведено распределение комет с прямыми движениями ($i < 90^\circ$) по величине гелиоцентрического расстояния рабочего узла $R_{\mathcal{N}}$. Для каждой группы комет указано среднее значение абсолютной звездной величины $H_{10}$.

Как известно, из всех элементов орбит узлы подвержены возмущениям в наибольшей степени. Как видно из табл.7, кометы, узлы орбит которых сохранились в зоне орбит планет, оказываются в среднем ярче, а, следовательно, и моложе [14] тех комет, узлы которых сместились из зон планет.

Резюмируя изложенное, можно констатировать, что статистика кометной системы дает основание для двух выводов: кометы могли быть захвачены в Солнечную систему из межзвездного пространства, современные кометные орбиты оформировались под действием планетных возмущений.

## Литература


1. Всехсвятский С.К.-Астрон. ж., 1934, II, 547-549.
2. Всехсвятский С.К. Физические характеристики комет. - М., 1958.
3. Коноплева В.П. Статистическое исследование системы комет.-Киев, 1958.
4. Richter H. Statistik und Physik der Kometen.-Leipzig, 1954.
5. Porter J.G.The Solar system.-Chicago,1963.
6. Томанов В.П.-Астрон.вестник, 1980, I4, №3, с.162-167.
7. Томанов В.П.-Кометы и метеоры, 1980, №28, с.26-32.
8. Marsden B.G.Catalogue of Cometary Orbits,SAC, 1979.
9. Казимирчак-Полонская Е.И.-В кн.:Проблемы исследования вселенной, М.;Л., 1978, с.384-417.
10. Томанов В.П., Радзиевский В.В.-Астрон. вестник, 1975, 9, №1, с.35-39.
11. Радзиевский В.В.,Томанов В.П.-Астрон. вестник,1973, 7, № 2, с.73-82.
12. Коноплева В.П. Кометный цирк.-Киев, 1980, № 258,с.2-3.
13. Томанов В.П.-Астрон. ж., 1981, 58, №2, с.408-415.
14. Томанов В.П.-Астрон. вестник, 1974, 8, №2, с.87-91.

Р е з ю м е

В.П.Томанов

СТАТИСТИКА ПОЧТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КОМЕТ

Приводятся результаты статистистического анализа почти параболических комет (P > 200 лет, $n$ = 545) и дополнительные аргументы в пользу гипотезы межзвездного происхождения долгопериодических комет.

K o p s a v i l k u m s

V.P.Tomanovs

GANDRĪZ PARABOLISKU KOMĒTU STATISTIKA

Darbā sniegti gandrīz parabolisku komētu statistiskās analīzes rezultāti (P>200 gadi, $n$=545) , kā arī papildus argumenti, kas apstiprina hipotēzi par ilgperioda komētu izcelšanos starpzvaigžņu vidē.

S u m m a r y

V.Tomanov

STATISTICS OF NEARLY PARABOLIC COMETS

A Statistical analysis of the system of nearly parabolic (P>200 years, $n$=545) comets is presented. Some additional facts are presented in favour of the hypothesis of the interstellar origin of long-periodic comets.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

С.Д.Шапорев

УДК 518.62 : 521.27

(Ленинградская артиллерийская академия)

## О ПОЛИНОМИНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Результаты астрономических наблюдений небесных объектов всегда могут быть представлены в виде временного ряда,достаточно общей математической моделью которого может служить модель вида

$$\varphi_i = f_i(t) + u_t ,$$

где $f_i(t)$ детерминированная последовательность,называемая обычно систематической составляющей,а $u_t$ - случайная последовательность,подчиняющаяся некоторому вероятностному закону. Компоненты этого ряда почти никогда не наблюдаются раздельно, однако часто возникает необходимость рассматривать каждую из них самостоятельно и,следовательно,встаёт задача о их предварительном разделении каким-нибудь теоретическим методом. Модель временного ряда,описанная выше,может рассматриваться в различных вариантах,ибо влияние времени можно учитывать как в первой,так и во второй компоненте,либо в обеих сразу [I].

В данной работе ставится задача выделения систематической составляющей в указанной модели временного ряда и аппроксимации её полиномом высокой степени. Принято,что влияние времени проявляется только в этой составляющей,а распределение случайной компоненты следует нормальному закону с неизвестной средней и дисперсией. Полином для временной последовательности $f_i(t)$, часто называемый трендом, строится по методу группового учёта аргументов – МГУА [2].

### Алгоритм построения линейного тренда по МГУА

Аппроксимация систематической составляющей временного ряда полиномом высокой степени как и большинство интерполяционных задач, решаемых с помощью метода группового учёта аргументов, сводится к прямому восстановлению функции по небольшому количеству её заданных точек. Метод покоится на двух принципах: самоорганизации и массовой селекции, причём первый принцип даёт ряд критериев, позволяющих выбирать оптимальную в некотором смысле модель, а второй указывает путь усложнения этой модели. Принцип массовой селекции заимствован авторами МГУА у природы.

Итак, пусть систематическая составляющая временного ряда аппроксимируется полиномом высокой степени:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n .$$

Преобразовывая переменные, получим уравнение

$$f(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n .$$

Это уравнение, называемое полным описанием, можно заменить несколькими рядами частных описаний на протяжении нескольких этапов – рядов селекции. Например, частное описание первого ряда селекции:

$$y_1 = a_0' + a_1' x_1 + a_2' x_2 \ , \ y_2 = a_0'' + a_1'' x_1 + a_2'' x_3 , \dots ,$$

$$y_s = a_0^{(s)} + a_1^{(s)} x_{n-1} + a_2^{(s)} x_n , \quad s = C_n^2 .$$

Для второго ряда селекции будем иметь:

$$z_1 = b_0' + b_1' y_1 + b_2' y_2 , \quad z_2 = b_0'' + b_1'' y_1 + b_2'' y_3 , \ldots ,$$

$$z_k = b_0^{(k)} + b_1^{(k)} y_{s-1} + b_2^{(k)} y_s , \quad k = C_s^2 .$$

Третий и последующие ряды селекции подобны предыдущим. Вид частного описания может быть и иным. Можно,например,брать не три,а четыре или более членов в частном описании,можно также учитывать члены с произведениями промежуточных переменных. Проделав $m$ рядов селекции,процесс обращают,исключая промежуточные частные описания от $m$-го ряда до первого,и получают,таким образом,аналог полного описания. Поскольку для построения каждого частного описания необходимо оценить лишь три коэффициента,то конструирование частного,а следовательно и полного описания возможно по очень малому числу исходных данных. По принципу селекции из предыдущего ряда в последующий из множества частных описаний пропускаются не все,а лишь те из них,которые удовлетворяют выбранному критерию самоорганизации. В качестве такого критерия можно, например,взять величину среднеквадратической ошибки,определяемой на отдельной последовательности исходных данных. Разделение исходного временного ряда на две части - обучающую и проверочную последовательность-неожиданная,но сильная сторона метода группового учёта аргументов. Коэффициенты частных описаний оцениваются только по точкам обучающей последовательности,а среднеквадратическая ошибка модели подсчитывается по точкам проверочной последовательности,не используемых для оценки коэффициентов. Этим самым конструируется внешний критерий,минимум которого и указывает единственную модель оптимальной сложности. Построенная таким образом модель обладает, в частности, бо́льшей прогнозирующей способностью по сравнению с моделями обычного регрессионного анализа.

Практически процесс наращивания рядов селекции заканчивается как только ошибка частных описаний на проверочной последовательности перестаёт уменьшаться. На последнем ряду выбирают наилучшее частное описание и, заменяя затем переменные этого описания переменными соответствующих частных описаний предыдущих рядов вплоть до первого, получают аналог полного описания. В теории метода группового учёта аргументов доказано, что при построении модели описанным образом минимум критерия самоорганизации достигается за конечное число шагов и при этом не теряется наиболее точная и оптимальная математическая модель.

Описанные принципы были реализованы автором в вычислительной программе, причём в процесс построения полного описания внесены некоторые изменения. Так, в частности, рассматривались только трехчленные частные описания. Процесс селекции для каждого конкретного вида частного описания проводился раздельно, например, конструировались разные полные описания для частных описаний, содержащих промежуточные аргументы до третьей, до четвёртой и т.д. вплоть до двадцатой степени. Затем из этого набора полных описаний выбирался тот полином, который представлял все точки исходных данных, включая и точки проверочной последовательности, с наименьшей ошибкой. Коэффициенты частных описаний оценивались по методу наименьших квадратов. В проверочную последовательность включалась каждая третья точка исходных данных. Таким образом, минимальное количество точек исходных данных для описанной программы равно пяти (четыре точки в обучающую последовательность и одна в проверочную).

## Обработка наблюдений короткопериодической кометы Ольберса

В качестве примера можно привести результаты аппроксимации систематической части в (О-С) кометы Ольберса в появлении 1956 г. Ранее в статье автора [3] была проведена статистическая обработка (О-С) этой кометы. Эта обработка включала в себя проверку с помощью ранговых критериев на принадлежность к одной или нескольким генеральным совокупностям, наблюдений, выполненных в разных обсерваториях на разных инструментах; проверку на нормальность и на однородность средних и дисперсий выделенных совокупностей, проверку на наличие систематической ошибки в наблюдениях. Было выяснено, что по прямому восхождению все (О-С) можно объединить в одну группу, по склонению в две, причём распределение (О-С) всех трёх групп "ненормальное", кроме того средние и дисперсии этих групп неоднородны, что свидетельствует о всякого рода неучтённых ошибках в том числе и систематических.

В результате работы программы систематическая часть всех трёх групп (О-С) была аппроксимирована следующими полиномами.

Группа по прямому восхождению:

$$f(t) = 0''.500984 - 1''.091440\, t_i + 0''.034843\, t_i^2 - 0''.000505\, t_i^3 + 0''.000004\, t_i^4 .$$

Первая группа по склонению:

$$f(t) = 1''.111963 - 0''.121062\, t_i + 0''.004730\, t_i^2 -$$

$$- 0\overset{''}{.}000056\, t_i^3 + 0\overset{''}{.}000001\, t_i^4 \quad .$$

Вторая группа по склонению:

$$f(t) = - 0\overset{''}{.}733385 + 4\overset{''}{.}263605\, t_i - 0\overset{''}{.}196946\, t_i^2 + \\ + 0\overset{''}{.}003742\, t_i^3 - 0\overset{''}{.}000037\, t_i^4 + 0\overset{''}{.}000001\, t_i^5 \quad .$$

Здесь $t_i$ - текущее время каждого конкретного наблюдения, а $f(t)$ аппроксимирует систематическую составляющую в (O-C) на всём периоде наблюдений кометы Ольберса в 1956 г. Следует заметить, что несмотря на малость коэффициентов при высоких степенях $t_i$, члены, их содержащие, дают заметный вклад в $f(t)$, так как период наблюдений кометы велик, а следовательно может быть большим и значение $t_i$ .

Построенные полиномы очень хорошо аппроксимируют исходные ряды (O-C). После выделения систематической составляющей из (O-C) абсолютные значения остаточных уклонений, то есть абсолютные значения членов случайной последовательности $u_t$ оказались весьма малыми. Представление о их величинах даёт рис I, где вверху изображено распределение (O-C) кометы Ольберса до выделения линейных трендов, а внизу - после их выделения. Из рисунка видно, что конфигурация распределения (O-C) до выделения и после выделения трендов существенно иная, это говорит в пользу того, что в трендах содержатся не только ошибки исходной орбиты, которые не меняют существенно конфигурацию распределения (O-C), но и другие виды ошибок, в том числе возможные систематические ошибки наблюдений, ошибки обработки данных и т.п.

Остаточные уклонения, то есть члены случайной последовательности $u_t$ с высокой степенью вероятности следуют нормальному закону: по прямому восхождению с P = 99.4%, а по склонению с P = 84.7 %.

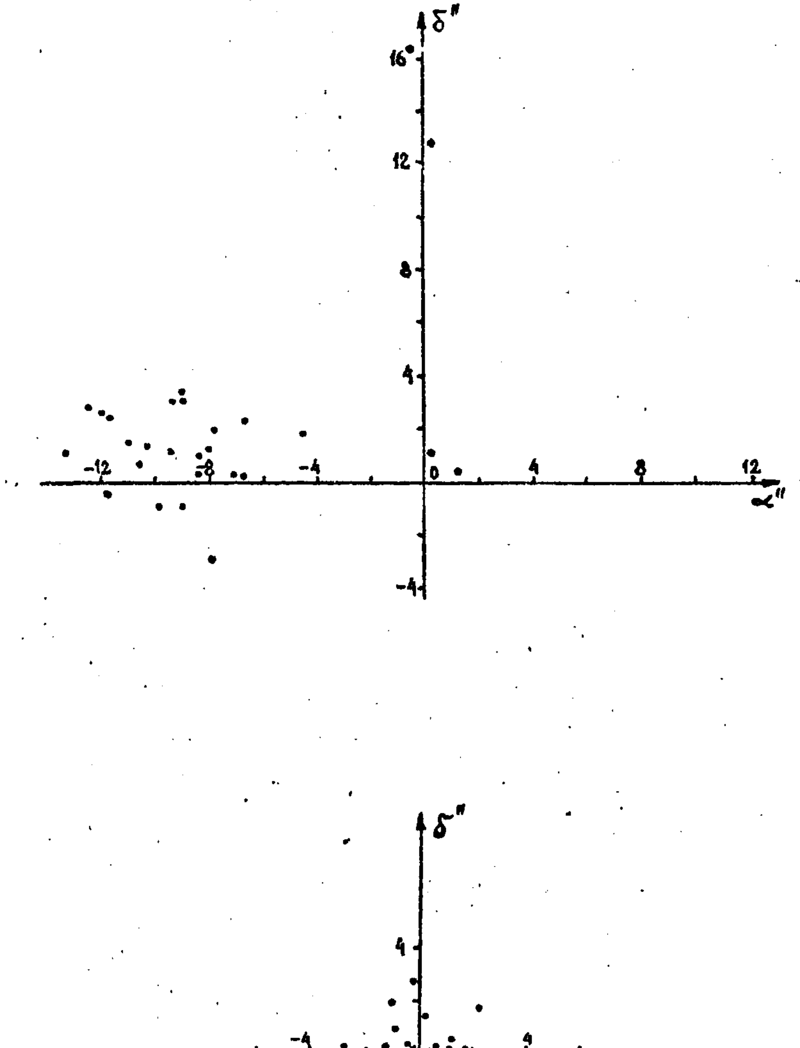


Рис I. Распределение (O-C) кометы Ольберса до выделения (вверху) и после выделения (внизу) полиноминальных трендов.

## ЛИТЕРАТУРА

I. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.- М.: Мир ,1976, с.43-98.

2. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами.-Киев: Техника ,1975,с.19-118.

3. Шапорев С.Д. Применение некоторых статистических методов анализа однородности результатов астрономических наблюдений.-Бюлл. ИТА,1981,т.15,№ 2(165), с. 36-47.

## РЕЗЮМЕ

С.Д.Шапорев

О ПОЛИНОМИНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Изложен один из подходов к оценке систематической и случайной составляющей временных рядов. Приведен пример аппроксимации систематической составляющей в (O-C) кометы Ольберса в появлении 1956 г.

## K o p s a v i l k u m s

S.D.Šaporevs

PAR LAIKRINDU APROKSIMĀCIJU AR POLINOMIEM

Darbā aprakstīta viena no pieejām laikrindu sistemātisko un gadījuma kļūdu novērtēšanai. Dots piemērs Olbersa komētas 1956.gada novērojumu kļūdas (O-C) sistemātiskās daļas aproksimācijai.

## S u m m a r y

S.Shaporev

ON POLYNOMIAL APPROXIMATION OF TIME SERIES

The present paper deals with an approache to evaluation of systematic and random components of the time series. An example of approximation of the systematic component in (O-C) is given for P/Olbers 1956 apparition.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 521.7

А.Л.Салитис
(АО ЛГУ им.П.Стучки)

# ЗАВИСИМОСТЬ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ОТ ФОРМЫ ОБЪЕКТА

Траектория движения небесного тела определяется элементами его орбиты. Для комет элементы орбиты определяются по наблюдениям, которые обычно охватывают небольшую дугу траектории. Определяя эфемериды для дальнейших наблюдений, а также для изучения эволюции орбиты важно насколько точно определены эти элементы. Точность определения элементов орбиты зависит от точности астрономических наблюдений и измерений.

Пусть в распоряжении вычислителей имеется некоторая совокупность наблюдений. Для момента наблюдений $t_i$ имеем экваториальные координаты $\alpha_i$ и $\delta_i$, которые являются функциями элементов орбиты и времени

$$\alpha_i = \alpha_i(\Omega, i, \omega, a, e, M_0, t_i),$$
$$\delta_i = \delta_i(\Omega, i, \omega, a, e, M_0, t_i).$$

Так как элементы $\Omega$, $i$, $\omega$, ... $M_0$ найдены путем вычислений, то они отличаются от действительных элементов $\Omega_0$, $i_0$, $\omega_0$, ... $M_0^0$. По этой причине наблюденные координаты (O) отличаются от вычисленных (C).

Критерием точности определения орбиты является величина O – C (наблюденные координаты минус вычисленные).

Координаты небесного тела для любого момента наблюдений можно выразить как функции элементов начальной эпохи $\Omega_0$, $i_0$, ... $M_0^0$ и поправок элементов орбиты при помощи рядов Тейлора

$$\alpha_i = \alpha_i(\Omega_0, i_0, \ldots, M_0^\circ, t_i) + \frac{\partial \alpha_i}{\partial \Omega}\delta\Omega + \ldots + \frac{\partial \alpha_i}{\partial M_0}\delta M_0,$$
$$\delta_i = \delta_i(\Omega_0, i_0, \ldots, M_0^\circ, t_i) + \frac{\partial \delta_i}{\partial \Omega}\delta\Omega + \ldots + \frac{\partial \delta_i}{\partial M_0}\delta M_0. \qquad (1)$$

Вычисленные координаты являются функциями элементов начальной эпохи и времени $t_i$, которые для $i$ - того момента времени можно записать

$$\alpha_i = \alpha_i(\Omega_0, i_0, \ldots, M_0^\circ, t_i),$$
$$\delta_i = \delta_i(\Omega_0, i_0, \ldots, M_0^\circ, t_i). \qquad (2)$$

Для рассматриваемого момента времени О – С согласно (I) и (2) можно записать

$$(O-C)_{\alpha_i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \Omega}\delta\Omega + \frac{\partial \alpha_i}{\partial i}\delta i + \ldots + \frac{\partial \alpha_i}{\partial M_0}\delta M_0,$$
$$(O-C)_{\delta_i} = \frac{\partial \delta_i}{\partial \Omega}\delta\Omega + \frac{\partial \delta_i}{\partial i}\delta i + \ldots + \frac{\partial \delta_i}{\partial M_0}\delta M_0.$$

Для фотометрически слабых объектов основным методом является фотографический метод. В этом случае точность определения координат зависит от точности съемки и точности измерения полученных фотонегативов.

В общем случае можно назвать следующие причины возникновения ошибок при определении координат небесного тела .

I. Ошибки, связанные с неточностью слежения за видимым движением светила.

Допустим, что наблюдения проводятся с помощью телескопа с экваториальной монтировкой. Из -за неточности слежения за видимым движением светила на фотонегативе получается несколько размытое изображение. Например, на фотоснимке кометы вместо звездообразного ядра получится овальное изображение ядра, которое не может обеспечить точное измерение координат $\alpha$ и $\delta$. Перемещение изображения в поле зрения телескопа в этом случае приведет к бо́льшим ошибкам по $\alpha$, чем по $\delta$ . Кроме того, такого рода ошибки будут разными для разных обсерваторий. При улучшении орбит важно знать оценку точности для каждой обсерватории.

Вопросами отбраковки грубых ошибок с помощью ЭВМ занимался Шапорев С.Д. [I]. Им было установлено, что грубые ошибки имеют наблюдения, проводимые в обсерваториях, имеющих заметные систематические ошибки.

Наблюдения с низкой точностью берутся с малым весом при составлении условных уравнений для того, чтобы повысить точность определения элементов.

2. Ошибки, связанные с движением Земли вокруг Солнца. Движение Земли вокруг Солнца также может привести к некоторому размытию изображения на фотоснимке.

3. Ошибки, связанные с физической формой объекта. Причиной возникновения такого рода ошибок является неопределенность точки, на которую наводят крест нитей компаратора. Эти ошибки и влияние негравитационных эффектов рассматривали К.А.Штейнс, А.В.Дивина и И.А.Ревина [2].

В настоящей работе рассмотрим подробнее третью причину возникновения ошибок на примере кометы Швассмана - Вахмана 1930 VI и попытаемся часть "ошибочных" наблюдений включить в улучшение орбиты. Комета Швассмана - Вахмана 1930 VI интересна тем, что она имеет сложную видимую форму, которая затрудняет измерение координат. В работе использовались вычисления орбиты данной кометы, которые были получены в ИТА АН СССР на ЭВМ БСМ - 6 по програме, составленной Н.А.Беляевым. Для определения орбиты кометы им было использовано 49 наблюдений. Из них при улучшении было отброшено 12 наблюдений, которые имели большие О - С или давали большие невязки. Мы исследовали, как распределяются отброшенные наблюдения О - С. Оказалось, что в распределении О - С имеется некоторый систематический характер. Менее точные наблюдения рассеяны в направлении, совпадающем с хвостом кометы. Назовем это направление, вокруг которого располагаются неточные наблюдения, осью максимального разброса наблюдений (Рис.I). На рис.I круг радиуса $R = \sqrt{(\Delta\alpha\cos\delta)^2 + (\Delta\delta)^2}$ ограничивает О - С для тех наблюдений, которые использовались в улучшении орбиты.

Для того, чтобы убедиться, не является ли это направление чисто случайным, мы определили методом Монте-Карло на ЭВМ вероятность, с которой небольшое число наблюдений (в нашем случае 50) может располагаться в определенном направлении. При 10 испытаниях мы получили вероятность $\approx 10^{-8}$. Это свидетельствует о том, что данное направление не является случайным.

Используя ось максимального разброса наблюдений, можно увеличить число наблюдений, участвующих в процессе улучшения орбиты. Для этого спроецируем менее точные наблюдения на ось максимального разброса наблюдений. Составляющие по данной оси мы не будем рассматривать, так как они не точны, а будем использовать проекцию перпендикулярно оси максимального разброса наблюдений. В результате для каждого наблюдения вместо двух условных уравнений мы имеем одно.

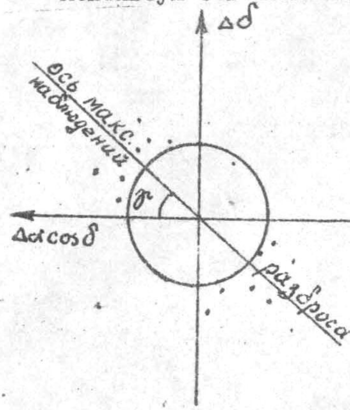

Рис. I

Прибавляя полученные уравнения к обычной системе условных уравнений мы получим расширенную систему условных уравнений. Для нахождения поправок элементов орбиты использовался метод Эккерта – Броуэра[3]. Условные уравнения составлялись для эклиптикальных элементов. Для $n$ наблюдений мы имеем $2n$ обыкновенных условных уравнений. В общем виде их можно записать:

$$\begin{cases} A_{i1}\delta M_0 + A_{i2}\delta i + A_{i3}\delta\Omega + A_{i4}\delta\omega + A_{i5}\dfrac{\delta a}{a} + A_{i6}\delta e = \Delta\alpha_i\cos\delta_i \\ B_{i1}\delta M_0 + B_{i2}\delta i + B_{i3}\delta\Omega + B_{i4}\delta\omega + B_{i5}\dfrac{\delta a}{a} + B_{i6}\delta e = \Delta\delta_i , \end{cases} \qquad (3)$$

где коэффициенты $A_{ik}$ и $B_{ik}$ являются функциями наблюденных координат и элементов начальной эпохи и имеют следующий вид:

$$A_{i1} = \frac{y_i'}{n}\frac{\cos\alpha_i}{\rho_i} - \frac{x_i'}{n}\frac{\sin\alpha_i}{\rho_i}$$

$$A_{i2} = \frac{\cos\alpha_i}{\rho_i}\left(N_z x_i - N_x z_i\right) - \frac{\sin\alpha_i}{\rho_i}\left(N_y z_i - N_z y_i\right)$$

$$A_{i3} = \frac{\cos\alpha_i}{\rho_i} x_i\cos\varepsilon + \frac{\sin\alpha_i}{\rho_i}\left(z_i\sin\varepsilon + y_i\cos\varepsilon\right)$$

$$A_{i4} = \frac{\cos\alpha_i}{\rho_i}(R_z x_i - R_x z_i) - \frac{\sin\alpha_i}{\rho_i}(R_y z_i - R_z y_i)$$

$$A_{i5} = \frac{\cos\alpha_i}{\rho_i}(y_i - \frac{3}{2}t_i y_i') - \frac{\sin\alpha_i}{\rho_i}(x_i - \frac{3}{2}t_i x_i')$$

$$A_{i6} = \frac{\cos\alpha_i}{\rho_i}(H y_i - K\frac{y_i'}{n}) - \frac{\sin\alpha_i}{\rho_i}(H x_i + K\frac{x_i'}{n})$$

$$B_{i1} = -\frac{\cos\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}\frac{x_i'}{n} - \frac{\sin\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}\frac{y_i'}{n} - \frac{\cos\delta_i}{\rho_i}\frac{z_i'}{n}$$

$$B_{i2} = -\frac{\cos\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}(N_y z_i - N_z y_i) - \frac{\sin\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}(N_z x_i - N_x z_i) + \frac{\cos\delta_i}{\rho_i}(N_x y_i - N_y x_i)$$

$$B_{i3} = -\frac{\cos\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}(-z_i \sin\varepsilon - y_i\cos\varepsilon) - \frac{\sin\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}x_i\cos\varepsilon + \frac{\cos\delta_i}{\rho_i}x_i \sin\varepsilon$$

$$B_{i4} = -\frac{\cos\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}(R_y z_i - R_z y_i) - \frac{\sin\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}(R_z x_i - R_x z_i) + \frac{\cos\delta_i}{\rho_i}(R_x y_i - R_y x_i)$$

$$B_{i5} = -\frac{\cos\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}(x_i - \frac{3}{2}t_i x_i') - \frac{\sin\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}(y_i - \frac{3}{2}t_i y_i') + \frac{\cos\delta_i}{\rho_i}(z_i - \frac{3}{2}t_i z_i')$$

$$B_{i6} = -\frac{\cos\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}(H x_i + K\frac{x_i'}{n}) - \frac{\sin\alpha_i \sin\delta_i}{\rho_i}(H y_i + K\frac{y_i'}{n}) + \frac{\cos\delta_i}{\rho_i}(H z_i + K\frac{z_i'}{n}).$$

К системе уравнений мы еще прибавим $n_1$ (в данном случае I2 ) уравнений, которые получили, используя ось максимального разброса наблюдений. Для того, чтобы получить эти уравнения, каждое из уравнений системы (3) для $\Delta\delta$ умножим на $\cos\gamma$, а для $\Delta\alpha\cos\delta$ на $(-\sin\gamma)$ и сложим почленно. Для этого необходимо сложить матрицы $\|A_{ik}(-\sin\gamma)\|$ и $\|B_{ik}\cos\gamma\|$. Решая расширенную систему $2n + n_1$ условных уравнений мы получим поправки элементов орбиты. Разности между поправками элементов, полученными нашим способом вычисления и полученными используя 37 наблюдений, которые использовал Беляев Н.А., приведены в таблице.

| $\delta M_0$ | $\delta\Omega$ | $\delta i$ | $\delta\omega$ | $\delta a/a$ |
|---|---|---|---|---|
| -0,000002 | 0,000013 | 0,000007 | 0,000003 | 0,000004 |

Коэффициенты условных уравнений, а также решение системы $2n + n_1$ уравнений методом наименьших квадратов было получено на ЭВМ ЕС 1022. Для этого с некоторыми дополнениями и преобразованиями была использована программа разработанная М.А.Дирикисом для малых планет.

Рассмотренный способ увеличения числа наблюдений, входящих в улучшение орбиты, успешно может быть применен в тех случаях, когда в распоряжении наблюдателя имеется небольшое количество точных наблюдений.

В заключении автор благодарит Н.А.Беляева и М.А.Дирикиса за предоставленные программы и ценные советы.

## Литература

1. Шапорев С.Д. Новый критерий отбора грубых ошибок в астрономических наблюдениях. - В кн.: Определение координат небесных тел. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1981, с. 104 - 112.
2. Штейнс К.А., Дивина Л.В., Ревина И.А. О выявлении негравитационных сил в движении комет. Часть I. Анализ ошибок наблюдений. - В кн.: Точность орбит комет и ИСЗ. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1973, с. 38 - 61.
3. Самойлова - Яхонтова Н. Исправление эллиптических орбит.- Бюлл. Астрон. инст. АН СССР, 1945, т.3, №53, с. 447 - 455.

Р е з ю м е

А.Я.Салитис

ЗАВИСИМОСТЬ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ОТ
ФОРМЫ ОБЪЕКТА

Разработан метод, позволяющий увеличить число наблюдений, участвующих в улучшении орбиты, используя для этого неточные наблюдения с систематическим характером. Метод применен для определения поправок элементов орбиты кометы Швасмана - Вахмана III (I930 VI).

K o p s a v i l k u m s

A.Salītis

MĒRĪJUMU PRECIZITĀTES ATKARĪBA NO OBJEKTA FORMAS

Izstrādāta metode, kura dod iespēju palielināt orbītas uzlabošanā ietverto novērojumu skaitu, izmantojot neprecīzos novērojumus ar sistemātisku raksturu. Metode pielietota nosakot orbītas elementu labojumus Švasmana - Vahmana III (I930 VI).

S u m m a r y

A.Salītis

DEPENDENCE OF MEASUREMENT PRECISION UPON
THE SHAPE OF THE OBJECT

A method has been developed, which increases number of observations available for orbit determination, by permitting the use of low-precision observations with systematic errors. This method has been applied to determine the orbital elements of the comet Schwassmann-Wachmann III (I930 VI).

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 521.4

В.Г.Соколов
(ИТА АН СССР)

# ОГОБЩЕННЫЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ОРБИТЫ ДЛЯ НАЧАЛЬНЫХ УЧАСТКОВ ВОЗМУЩЕННЫХ ТРАЕКТОРИЙ

При исследовании возмущенного движения часто используется метод промежуточных орбит, основанный на построении достаточно простой и вместе с тем близкой к реальному движению орбиты и последующем изучении малых отклонений реального движения от промежуточного. В методе Энке за промежуточную принимается невозмущенная орбита, удовлетворяющая условиям оскуляции (касание I-го порядка) в начальный момент времени $t=t_0$ [1] . Промежуточные орбиты, обеспечивающие при $t=t_0$ совпадение в промежуточном и реальном движениях векторов положения, скорости и ускорения (касание 2-го порядка), получены в работах [2-5]. Промежуточные орбиты с касанием 3-го и 4-го порядков предложены соответственно в работах [4-5] и [6]. Эти орбиты определяют невозмущенное движение в поле притяжения фиктивного центра, движение которого задается в функции времени и не является кеплеровским. В данной работе изложен метод по –

строения промежуточных орбит, обеспечивающих при $t=t_0$ совпадение в промежуточном и реальном движениях векторов положения и их производных по времени до $K$-го порядка включительно (касание $K$-го порядка), при этом для фиктивных центров допускается движение по кеплеровским орбитам.

Пусть возмущенное движение тела малой массы в невращающейся системе координат с началом в одном из притягивающих центров определяется уравнением

$$\bar{r}^{(2)}=\bar{F}, \tag{1}$$

где $\bar{F}$ – вектор ускорения, вызываемого всеми действующими на тело силами, $\bar{r}^{(2)}$ – вторая производная вектора $\bar{r}$ положения тела по $t$ (индекс в скобках указывает порядок дифференцирования по $t$ ).

Введем промежуточное движение формулами

$$\bar{r}^{*}=\varkappa\sum_{m=0}^{M}\bar{R}_0^{(m)}(t-t_0)^m/m!+\sum_{n=1}^{N}\bar{\rho}_n, \quad (0!=1) \tag{2}$$

$$\bar{\rho}_n^{(2)}+\mu_n\rho_n^{-3}\bar{\rho}_n=0, \quad \rho_n=|\bar{\rho}_n|, \tag{3}$$

где $\varkappa$ = 0 или 1. Будем считать, что уравнения (2)-(3) определяют невозмущенное движение $\bar{\rho}_N$ в поле притяжения (отталкивания) фиктивного центра с постоянной $\mu_N>0$ ( $\mu_N<0$ ), который движется по орбите с радиус-вектором $\bar{\rho}_{N-1}$ относительно фиктивного центра с постоянной $\mu_{N-1}$ и т.д.; наконец, фиктивный центр с постоянной $\mu_2$ движется по орбите с радиус-вектором $\bar{\rho}_1$ относительно фиктивного центра с постоянной $\mu_1$, который расположен в начале координат, если $\varkappa=0$, или описывает кривую, определяемую полиномом по степеням $t-t_0$, если $\varkappa=1$.

Потребуем, чтобы при $t=t_0$ выполнялись равенства

$$\left.\begin{aligned}\bar{r}_0^{(m)}=\bar{r}_0^{*(m)}&=\varkappa\bar{R}_0^{(m)}+\sum_{n=1}^{N}\bar{\rho}_{n0}^{(m)} \quad (m=0,\varkappa 1,\ldots,\varkappa M),\\ \bar{r}_0^{(k)}=\bar{r}_0^{*(k)}&=\sum_{n=1}^{N}\bar{\rho}_{n0}^{(k)} \quad (k=\varkappa M_1,\varkappa M_1+1,\ldots,K),\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $M_1 = M+1$. Здесь $\bar{r}_0^{(0)} = \bar{r}_0, \bar{r}_0^{(1)}$ известны как начальные условия, $\bar{r}_0^{(2)}$ можно получить из (I), $\bar{r}_0^{(\ell)}$ при $\ell > 2$ – дифференцированием (I) по $t$. Тогда разложение по степеням $t-t_0$ разности $\bar{r}-\bar{r}^*$ будет начинаться с члена

$$\left\{ \bar{r}_0^{(K_1)} - \sum_{n=1}^{N} \bar{\rho}_{n0}^{(K_1)} \right\} (t-t_0)^{K_1} / K_1! \,,$$

в котором $K_1 = K+1$. Отметим, что в данной работе $N \geqslant 1$, поскольку при $N=0$ $(\bar{\rho}_n \equiv 0)$, $\varkappa = 1$ формула (2) с учетом (4) дает полином, лежащий в основе численного интегрирования уравнения (I) по методу Тейлора–Стеффенсена [7].

Константы $\mu_n$ и векторы $\bar{\rho}_{n0}, \bar{\rho}_{n0}^{(1)}$, а также $\bar{R}_0^{(m)}$ при $\varkappa = 1$ (всего $7N + 3\varkappa M_1$ скалярных параметров) полностью определяют промежуточное движение (2)–(3), удовлетворяющее равенствам (4), поскольку $\bar{\rho}_{n0}^{(2)}$ можно получить из (3), а $\bar{\rho}_{n0}^{(\ell)}$ при $\ell > 2$ – дифференцированием (3) по $t$. Легко показать, что

$$K_1 = [7N/3] + \varkappa M_1 \,, \tag{5}$$

$$\bar{\rho}_{n0}^{(\ell)} = \alpha_{n\ell} \bar{\rho}_{n0} + \beta_{n\ell} \bar{\rho}_{n0}^{(1)} \,, \tag{6}$$

где

$$\alpha_{n0} = \beta_{n1} = 1 \,, \quad \alpha_{n1} = \beta_{n0} = \beta_{n2} = 0 \,, \quad \alpha_{n2} = -\mu_n \rho_{n0}^{-3} \,,$$
$$\alpha_{n,\ell+1} = \alpha_{n\ell}^{(1)} + \alpha_{n2} \beta_{n\ell} \,, \quad \beta_{n,\ell+1} = \alpha_{n\ell} + \beta_{n\ell}^{(1)} \quad (\ell \geqslant 2).$$

Подставляя (6) в (4), получим систему $K_1$ векторных ( $3K_1$ скалярных) нелинейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Psi}_m &\equiv \varkappa \bar{R}_0^{(m)} + \sum_{n=1}^{N} \left( \alpha_{nm} \bar{\rho}_{n0} + \beta_{nm} \bar{\rho}_{n0}^{(1)} \right) - \bar{r}_0^{(m)} = 0 \,, \\ \bar{\Psi}_k &\equiv \sum_{n=1}^{N} \left( \alpha_{nk} \bar{\rho}_{n0} + \beta_{nk} \bar{\rho}_{n0}^{(1)} \right) - \bar{r}_0^{(k)} = 0 \,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

которые служат для определения $\mu_n, \bar{\rho}_{n0}, \bar{\rho}_{n0}^{(1)}$, а также $\bar{R}_0^{(m)}$ при $\varkappa = 1$. В общем случае эти уравнения независимы. Условие совместимости системы (7), определяемое неравенством $3K_1 \leqslant 7N + 3\varkappa M_1$, выполняется автоматически в силу (5).

Пусть ранг матрицы частных производных первого порядка по $\mu_n$ и компонентам векторов $\bar{\rho}_{n0}, \bar{\rho}_{n0}^{(1)}$ от проекций функций $\overline{\Psi}_k$ на координатные оси в некоторой окрестности решения уравнений $\overline{\Psi}_k = 0$ равен $3K_1 - 3\varkappa M_1$. Тогда искомые значения $\mu_n, \overline{\rho}_{no}, \overline{\rho}^{(1)}_{no}$ можно найти из уравнений $\overline{\Psi}_k = 0$ в общем случае численными методами, причем $\gamma$ скалярных величин ( $\gamma = 7N - 3K_1 + 3\varkappa M_1$, $\gamma \leqslant 2$ ) могут быть выбраны либо произвольно, либо из некоторых дополнительных условий, упрощающих решение этих уравнений. При $\varkappa$ = I векторы $\overline{R}^{(m)}_o$ определяются из уравнений $\overline{\Psi}_m = 0$ после подстановки в $\overline{\Psi}_m$ значений $\mu_n, \overline{\rho}_{no}, \overline{\rho}^{(1)}_{no}$.

Промежуточные орбиты, известные в настоящее время из литературы, являются частными случаями промежуточных орбит, предложенных в данной работе. Действительно, из (2)-(3) при $N$ = I, $\varkappa$ = 0 получим оскулирующую орбиту, а при $N$ =I, $\varkappa$ = I, $M$ = 0, I и 2 - промежуточные орбиты с касанием 2-го, 3-го и 4-го порядка соответственно. Построение орбит в этих частных случаях не требует использования численных методов.

Класс промежуточных орбит, допускающих при их построении аналитическое решение, не ограничен указанными выше случаями. В качестве примера построим орбиту при $N$ = 2, $\varkappa$ = 0. Тогда $K$ = 3, $\gamma$ = 2 и при условиях

$$\mu_1 \rho_{10}^{-2} = \mu_2 \rho_{20}^{-2}, \quad \rho_{20} - \rho_{10} = \frac{1}{2}(\rho_{10} + \rho_{20})$$

уравнения $\overline{\Psi}_k$ = 0 имеют аналитическое решение

$$\mu_1 = -\frac{1}{32}|\overline{r}^{(2)}_0|^{-1} q^{-1} Q^3, \qquad \mu_2 = 9\mu_1,$$

$$\overline{\rho}_{10} = -\frac{1}{2}\left(\overline{r}_0 - \frac{3}{2} s \overline{r}^{(2)}_0\right), \quad \overline{\rho}_{20} = \frac{3}{2}\left(\overline{r}_0 - \frac{1}{2} s \overline{r}^{(2)}_0\right),$$

$$\overline{\rho}^{(1)}_{20} = -\frac{1}{2}\left(\overline{r}^{(1)}_0 - \frac{3}{2}\overline{R}\right), \quad \overline{\rho}^{(1)}_{20} = \frac{3}{2}\left(\overline{r}^{(1)}_0 - \frac{1}{2}\overline{R}\right),$$

где

$$\overline{R} = 3A^{-1}B\overline{r}_0 + \frac{3}{2}A^{-1}Cs\overline{r}^{(2)}_0 + s\overline{r}^{(3)}_0,$$

$$A = \left[\rho^2 + 3(\rho^2 - q^2)(1 + 18q^2)\right] Q^2 / \overline{r}^{(2)2}_0,$$

$$B = b_1(22\rho^2 - 21q^2) - 9b_2 q^2 + 5b_3(10\rho^2 - 3q^2),$$

$$C = b_1(51q^2 - 38\rho^2) + b_2(15q^2 + 4\rho^2) + b_3(105q^2 - 194\rho^2),$$

$$b_1 = \frac{4}{3} q_{01}, \quad b_2 = 2s(q_{12} + q_{03}), \quad b_3 = s^2 q_{23},$$

$$q_{lk} = (\bar{r}_0^{(l)}, \bar{r}_0^{(k)}) \quad (l \neq k), \quad q = q_{02},$$

$$\rho = |\bar{r}_0||\bar{r}_0^{(2)}|, \quad Q = \sqrt{4\rho^2 - 3q^2}, \quad s = q / \bar{r}_0^{(2)2}.$$

Вычисленные по этим формулам значения $\mu_n, \bar{\rho}_{n0}, \bar{\rho}_{n0}^{(1)}$ ( $n$ = I, 2) позволяют найти элементы искомых орбит, после чего по формулам невозмущенного движения определяются текущие векторы $\bar{\rho}_n$ и вектор $\bar{r}^*$ промежуточной орбиты. Легко видеть, что константы $\mu_n$ будут положительными (отрицательными) при отрицательных (положительных) значениях $q = (\bar{r}_0, \bar{r}_0^{(2)})$ , которые соответствуют вогнутым (выпуклым) относительно начала координат участкам реальных траекторий. При $\mu_n > 0$ орбиты будут эллипсами, гиперболами или параболами в зависимости от того, положительно, отрицательно или равно нулю значение $a_n^{-1}$ ( $a_n$ - полуось орбиты), определяемое из интеграла живых сил соотношением

$$a_n^{-1} = 2\rho_{n0}^{-1} - \mu_n^{-1} \dot{\bar{\rho}}_{n0}^{(1)2} \qquad (n = \mathrm{I}, 2).$$

При $\mu_n < 0$ орбиты будут гиперболами, обращенными выпуклостью к фокусам, в которых расположены фиктивные отталкивающие центры. Случай $q = 0$ , соответствующий прямолинейным участкам или точкам перегиба реальных траекторий, является особым.

Для иллюстрации точности представления начальных участков возмущенных траекторий системой двух невозмущенных орбит рассмотрим движение частицы с начальными условиями $\bar{r}_0 = \{\mathrm{I}, 0, 0\}$, $\bar{r}_0^{(1)} = \{0, \mathrm{I}, 0\}$ под действием центрального ускорения $\bar{f} = -\mu_\odot r^{-3} \bar{r}$ ($\mu_\odot = 1$), вызываемого притяжением Солнца, с учетом возмущающего ускорения $\bar{\varphi} = \varepsilon r^{-3} \bar{r}$ ( $\varepsilon$ = I/II, I/2, 2 ), обусловленного давлением солнечной радиации. В таблице для интервала времени $t - t_0 \leqslant 0.25$ , который в реальном движении соответствует углу истинной аномалии $\vartheta \sim 14^0$, приведены отклонения $\delta' = |\bar{r} - \bar{r}'|$ и $\delta^* = |\bar{r} - \bar{r}^*|$ , где $\bar{r}, \bar{r}'$ и $\bar{r}^*$ - радиус-векторы возмущенной, оскулирующей и промежуточной орбиты.

| $\varepsilon$ | $t-t_0$ | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{11}$ | $\delta'$ | 0.000228 | 0.000455 | 0.001025 | 0.001827 | 0.002863 |
| | $\delta^*$ | 0.000000 | 0.000002 | 0.000011 | 0.000037 | 0.000092 |
| $\frac{1}{2}$ | $\delta'$ | 0.000625 | 0.002502 | 0.005632 | 0.010021 | 0.015679 |
| | $\delta^*$ | 0.000000 | 0.000001 | 0.000004 | 0.000011 | 0.000027 |
| 2 | $\delta'$ | 0.002499 | 0.009981 | 0.022403 | 0.039678 | 0.061775 |
| | $\delta^*$ | 0.000000 | 0.000003 | 0.000013 | 0.000041 | 0.000096 |

Как показывают данные таблицы, точность аппроксимации возмущенной траектории промежуточной орбитой значительно выше, чем оскулирующей.

В рассмотренном примере возмущенная орбита будет кеплеровским эллипсом при $\varepsilon = 1/11$, параболой при $\varepsilon = 1/2$, гиперболой, обращенной выпуклостью к началу координат, при $\varepsilon = 2$. Невозмущенная оскулирующая орбита, используемая в методе Энке ( $\varepsilon = 0$), будет окружностью единичного радиуса с центром в начале координат. Вектор положения на промежуточной орбите дается выражением

$$\bar{r}^* = \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2 ,$$

в котором $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$ - векторы, определяющие положение в невозмущенных движениях с начальными условиями

$$\bar{\rho}_{10} = \frac{1}{4}\bar{r}_0 , \quad \bar{\rho}_{10}^{(1)} = \frac{1}{4}\bar{r}_0^{(1)} , \quad \bar{\rho}_{20} = \frac{3}{4}\bar{r}_0 , \quad \bar{\rho}_{20}^{(1)} = \frac{3}{4}\bar{r}_0^{(1)}$$

в поле фиктивных центров с постоянными

$\mu_1 = 5/176$, $\mu_2 = 45/176$ при $\varepsilon = 1/11$,

$\mu_1 = 1/64$ , $\mu_2 = 9/64$ при $\varepsilon = 1/2$,

$\mu_1 = -1/32$, $\mu_2 = -9/32$ при $\varepsilon = 2$.

Заметим, что в терминах теории эпициклов, применявшейся древними и средневековыми астрономами для описания нерегулярного движения планет на небесной сфере [8] , невозмущенные орбиты с векторами $\bar{\rho}_1$ и $\bar{\rho}_2$ можно называть "деферентом" и "эпициклом" соответственно.

В заключение отметим, что предлагаемые промежуточные орбиты особенно удобны для описания движения в случае больших возмущений.

## Литература


1. Субботин М.Ф. Курс небесной механики. - М.; Л., 1937, ОНТИ НКТП, т.2. - 404 с.
2. Shaikh N.A. A new perturbation method for computing Earth-Moon trajectories.- Astron.acta, 1966, v.12, N 3, p.207-211.
3. Батраков Ю.В., Макарова Е.Н. Обобщенный метод Энке для изучения возмущенного движения. - Бюл.ИТА, 1979, т.14, № 7(160), с.397-401.
4. Батраков Ю.В. Промежуточные орбиты для начального участка движения. - В кн.: Определение координат небесных тел , Рига, 1981, с.3-10.
5. Батраков Ю.В. Промежуточные орбиты,аппроксимирующие начальный участок возмущенного движения. - Бюл.ИТА, 1981, т.15, № 1(164), с.1-5.
6. Соколов В.Г. Промежуточные орбиты с касанием четвертого порядка к траекториям возмущенного движения.- Бюл.ИТА,1982,т.15, № 3(166),с.172-177.
7. Мячин В.Ф., Сизова О.А. Совместное интегрирование уравнений небесной механики методом Тейлора-Стеффенсена. - Бюл. ИТА,1970,т.12, № 5(138), с.389-400.
8. Паннекук А. История астрономии.-М.:Наука,1966.- 592 с.


## Резюме


В.Г.Соколов

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ОРБИТЫ ДЛЯ НАЧАЛЬНЫХ УЧАСТКОВ ВОЗМУЩЕННЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Дан метод построения промежуточных орбит с касанием произвольного порядка к траекториям возмущенного движения.Вектор положения точки на промежуточной орбите определяется суммой векторов положений на кеплеровских орбитах и вектора,представленного полиномом по степеням времени.

K o p s a v i l k u m s

V.G.Sokolovs

VISPĀRINĀTĀS STARPORBĪTAS PERTURBĒTO TRAJEKTORIJU SĀKUMA POSMOS

Darbā dota metode starporbītu veidošanai,kas pieskaras perturbētām trajektorijām ar patvaļīgu kārtu.Starporbītas punkta stāvokļa vektors tiek noteikts ar Keplera orbītu stāvokļu vektoru summu un vektoru, kuru nosaka polinoms.

S u m m a r y

V.Sokolov

GENERALIZED INTERMEDIATE ORBITS FOR THE INITIAL PARTS OF PERTURBED TRAJECTORIES

A method has been developed for constructing intermediate orbits with arbitrary order tangency to the perturbed trajectories. The position vectors of these intermediate orbits are determined as a sum of the keplerian position vectors and certain additional vectors expressed as polynomials of powers of time.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 521.61

Ю.Х.Жагар
(АО ЛГУ им.П.Стучки)

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВИДИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ ИСЗ

## Введение

Первые исследования свойств видимых траекторий ИСЗ были выполнены в шестидесятых годах в связи с разработкой следящих фотоустановок для наблюдений спутников (см.обзор Масевич А.Г., Лозинский А.М., 1970). Эти исследования носили в основном эмпирический характер и привели к результату, что хорошим приближением видимой траектории ИСЗ является малый круг небесной сферы (см.Лийгант М., 1965, 1966). Методы определения параметров этого малого круга были разработаны Лийгантом М. (1966) и Абеле М.К. (1971), а подробные численные исследования выполнены Лийгантом М. (1965) и Сочилиной А.С. (1975). Других, принципиально новых результатов получено не было, хотя и опубликовано некоторое количество интересных работ, посвященных свойствам видимого движения ИСЗ (Пахельски В., 1963, Штейнбах М. 1966 и др.).

Аналитические исследования видимых траекторий ИСЗ почти не проводились, однако можно выделить работу Беневского Я. (1970), в которой видимая траектория спутника, движущегося по круговой орбите, построена в виде пересечения эллиптического конуса с небесной сферой. Метод, предложенный Беневским Я.(1970), не получил широкой известности, но он послужил хорошей основой для некоторых аналитических исследований, которым посвящена данная работа.

## Уравнение видимой траектории ИСЗ

Введем топоцентрическую систему координат, основная плоскость которой параллельна плоскости орбиты ИСЗ, а ось $x$ параллельна вектору Лапласа. Эту систему будем именовать топоцентрической орбитальной системой координат. Она связана с II-й экваториальной системой координат при помощи соотношения

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{орб} = r(\omega)\,p(i)\,r(\Omega) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{\text{II}\ экв}, \qquad (1)$$

где $i$, $\omega$, $\Omega$, - элементы орбиты ИСЗ, $p(\theta)$, $r(\theta)$ - матрицы поворота (*Mueller*, 1969) вокруг осей $x$ и $z$.

Рассмотрим эллиптическую орбиту $AB$ спутника (рис.I, вид с ребра), которая проецируется на небесную сферу с центром $C$ в виде пространственной кривой $A'B'$.

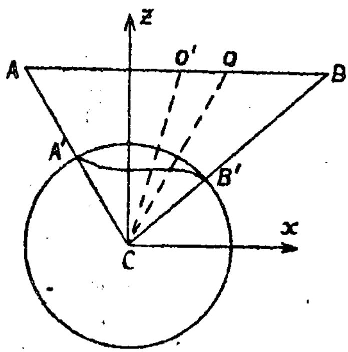


Рис. 1.

Координаты динамического центра орбиты (центра масс Земли) $O(-X_0, -Y_0, -Z_0)$ связаны с координатами геометрического центра орбиты $O'(x_0, y_0, z_0)$ при помощи соотношений

$$x_0 = -X_0 - ae,$$
$$y_0 = -Y_0, \qquad (2)$$
$$z_0 = -Z_0.$$

Если координаты динамического центра $O$ известны в II-й экваториальной системе координат, то координаты геометрического центра в орбитальной системе $O'(x_0, y_0, z_0)$ могут быть найдены по формулам (I) и (2), если известны элементы орбиты $a$, $e$, $i$, $\Omega$ и $\omega$.

Видимая траектория ИСЗ, движущегося по эллиптической орбите, образуется при пересечении небесной сферы

$$x^2+y^2+z^2=1 \qquad (3)$$

с конической поверхностью

$$\left(\frac{z_0 x - x_0 z}{az}\right)^2+\left(\frac{z_0 y - y_0 z}{bz}\right)^2=1, \qquad (4)$$

где $b=a\sqrt{1-e^2}$. В случае гиперболического или параболического движения вместо (4) имеем

$$\left(\frac{z_0 x - x_0 z}{az}\right)^2-\left(\frac{z_0 y - y_0 z}{bz}\right)^2=1 \qquad (5)$$

или

$$2pz_0(z_0 x - x_0 z)=(z_0 y - y_0 z)^2, \qquad (6)$$

где $p$ - фокальный параметр параболы. Отметим, что пересечение поверхностей (4), (5) или (6) с плоскостью $z=z_0$ дает орбиту спутника $AB$.

Введем сферические координаты $\alpha$, $\delta$ согласно формулам, удовлетворяющим (3), т.е.

$$\begin{aligned} x &= \cos\delta\cos\alpha, \\ y &= \cos\delta\sin\alpha, \\ z &= \sin\delta, \end{aligned} \qquad (7)$$

подстановка которых в (4) дает уравнение видимой траектории ИСЗ в виде

$$(1-B^2-D^2)\,tg^2\delta+2(AB\cos\alpha+CD\sin\alpha)\,tg\,\delta-$$
$$-(A^2\cos^2\alpha+C^2\sin^2\alpha)=0\,, \qquad (8)^{*)}$$

где

$$A=\frac{z_0}{a}\,,\quad B=\frac{x_0}{a}\,,\quad C=\frac{z_0}{b}\,,\quad D=\frac{y_0}{b}\,. \qquad (8')$$

Уравнение видимой траектории (8) является квадратным уравнением относительно $tg\,\delta$ , которое имеет действительные решения для всех $\alpha$ , удовлетворяющих неравенству

$$C^2(1-B^2)\,tg^2\alpha+2ABCD\,tg\,\alpha+A^2(1-D^2)\geq 0. \qquad (9)$$

Лишние корни уравнения (8) нетрудно исключить согласно условию

$$\mathrm{sign}\;tg\,\delta=\mathrm{sign}\;z_0. \qquad (10)$$

Отметим, что уравнение (8) точно представляет видимую траекторию ИСЗ в орбитальной системе координат относительно неподвижного наблюдателя. Реальная видимая траектория будет искажена прежде всего эффектом вращения Земли, вслествие чего $A$ , $B$ , $C$ и $D$ будут медленно меняющимися функциями времени.

Докажем следующее утверждение:

Т е о р е м а I. При любых значениях постоянных (8′) существует непустое множество $M$ такое, что если $\alpha\in M$ , то уравнение (8) имеет действительные решения.

---

*) Уравнение в форме (8) получено при допущении $\cos\delta\neq 0$, что справедливо для любого наблюдателя, находящегося на поверхности Земли.

Доказательство: Если $1-B^2>0$, то согласно (9) всегда найдется достаточно большое $tg\alpha$, для которого неравенство (9) будет удовлетворяться. Если $1-B^2\leq 0$, то дискриминант квадратного трехчлена (9)

$$A^2C^2[(B^2-1)+D^2]>0$$

и соответствующее уравнение имеет некратные действительные корни, определяющие границы искомого множества $M$.

## Свойства видимой траектории

Видимая траектория ИСЗ, как было показано, является сложной пространственной кривой, образующейся при пересечении двух поверхностей (3)и (4) второго порядка (см.Ильин В.А., Позняк Э.Г., 1968). Существуют, однако, случаи, когда ее можно представить плоскими кривыми - кругами небесной сферы.

Действительно, если $z_0=0$, то $A=C=0$ и вместо (8) имеем

$$(1-B^2-D^2)tg^2\delta=0. \qquad (11)$$

Отсюда следует хорошо известный факт, что если наблюдатель расположен в плоскости орбиты, то видимая траектория ИСЗ является большим кругом небесной сферы, в частности при $\delta=0$.

Малые круги небесной сферы образуются при пересечении поверхности (3) плоскостями

$$ax+by+cz=d, \qquad (12)$$

где $d\neq 0$.

Подстановка (7) в (12) дает уравнение малого круга в виде

$$a\cos\delta\cos\alpha + c\sin\delta = d - b\cos\delta\sin\alpha. \qquad (13)$$

Рассмотрим уравнение (8), предварительно преобразовав его к виду

$$(C^2-A^2)\cos^2\delta\cos^2\alpha + 2AB\sin\delta\cos\delta\cos\alpha +$$
$$+(1-B^2+C^2-D^2)\sin^2\delta = C^2-2CD\sin\delta\cos\delta\sin\alpha. \qquad (14)$$

Для того, чтобы полученное уравнение (14) выродилось в уравнение плоской кривой (13), необходимо, чтобы (14) представляло собой равенство полных квадратов некоторых функций. Это так, если

$$D=0,$$
$$(C^2-A^2)(1-B^2+C^2)=A^2B^2. \qquad (15)$$

Подставляя в (15) значения констант (8′) находим, что (15) равносильно условиям

$$y_0=0,$$
$$\frac{x_0^2}{a^2e^2} - \frac{z_0^2}{a^2(1-e^2)} = 1. \qquad (16)$$

Условия (16) инвариантны относительно преобразования $x_0' = -x_0$, $y_0' = -y_0$, $z_0' = -z_0$, и им можно дать следующую интерпретацию. Если координаты наблюдателя относительно геометрического центра орбиты ИСЗ удовлетворяют условиям (16), то видимая траектория ИСЗ является малым кругом небесной сферы. Обратим внимание на факт, что в случае гиперболического или параболического движения ИСЗ соответствующие уравнения видимых траекторий ни при каких условиях не вырождаются в уравнения малого круга небесной сферы (13).

Введем далее геоцентрическую орбитальную систему координат ( $X$ , $Y$ , $Z$ ), которая связана с топоцентрической орбитальной системой ( $x$ , $y$ , $z$ ) соотношениями

$$
\begin{aligned}
x &= X + (x_0 + ae), \\
y &= Y + y_0, \\
z &= Z + z_0,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

и рассмотрим гиперболу

$$
\frac{(X+ae)^2}{a^2e^2} - \frac{Z^2}{a^2(1-e^2)} = 1, \tag{18}
$$

расположенную в плоскости $Y=0$ . Эту гиперболу, одна из ветвей которой проходит через динамический центр $O$ , будем называть сопряженной данной орбите ИСЗ. Тогда, согласно (16), можно утверждать, что для наблюдателя, расположенного на ветвях сопряженной гиперболы, видимая траектория ИСЗ является малым кругом небесной сферы.

## Круговые точки орбиты

Продолжим исследования в геоцентрической орбитальной системе координат, которая определяется формулами (17).

Круговыми точками орбиты будем называть точки на поверхности Земли, наблюдая с которых видимая траектория ИСЗ является кругом небесной сферы. Согласно (11), круговые точки образуют линию пересечения поверхности Земли с плоскостью орбиты $Z=0$ . Кроме того, согласно (16), круговыми точками являются также точки пересечения $C_1$ , $C_2$ , $C_3$ , $C_4$ поверхности Земли (рис.2) ветвями сопряженной гиперболы (18). Координаты этих точек удовлетворяют системе уравнений

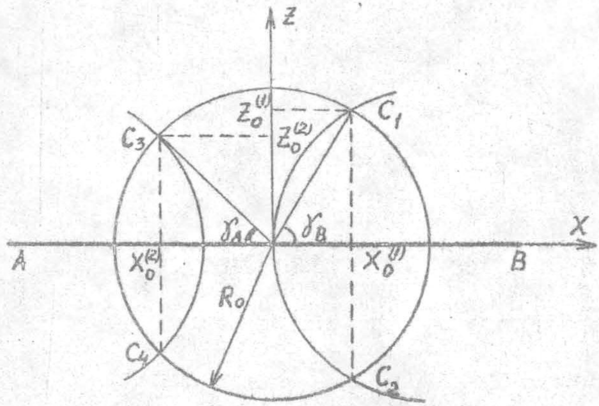


Рис.2.

$$\frac{(X+ae)^2}{a^2e^2} - \frac{Z^2}{a^2(1-e^2)} = 1,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R_0^2, \qquad (19)$$
$$Y = 0,$$

что легко преобразовать к виду

$$X^2 + 2ae(1-e^2)X - R_0^2e^2 = 0,$$
$$X^2 + Z^2 = R_0^2, \qquad (20)$$
$$Y = 0.$$

В общем случае, если $2ae < R_0$, система (20) имеет 4 решения, соответствующие точкам $C_1$, $C_2$, $C_3$ и $C_4$

$$X_0 = e\left(-p \pm \sqrt{p^2 + R_0^2}\right), \qquad (21)$$

$$Y_0 = 0,$$
$$Z_0 = \pm\sqrt{R_0^2 - X_0^2}, \qquad (21)$$

где $p = a(1-e^2)$. Если $2ae > R_0$, то система (20) имеет всего два действительных решения, соответствующих точкам $C_1$ и $C_2$. Если $2ae = R_0$, то имеются три действительных решения (точки $C_3$ и $C_4$ сливаются в одну двухкратную точку). И, наконец, в случае круговой орбиты $e = 0$, система (20) имеет два двухкратных решения, совпадающих с полюсами орбиты на поверхности Земли.

Координаты круговых точек в II-й экваториальной системе координат могут быть найдены по формуле

$$\begin{Bmatrix} R_0 \cos\varphi \cos S \\ R_0 \cos\varphi \sin S \\ R_0 \sin\varphi \end{Bmatrix} = r(-\Omega)p(-i)r(-\omega)\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix}, \qquad (22)$$

где $r(\theta)$, $p(\theta)$ - матрицы поворота; $\varphi$, $S$ -широта и звездное время круговой точки с орбитальными координатами $X_0$, $Y_0$, $Z_0$.

### Видимость ИСЗ с круговых точек

Очевидно, что если $e = 0$, то спутник невидим наблюдателю, расположенному в любой из двух круговых точек, совпадающих с полюсами орбиты. Выясним, при каких значениях $e$ и $a$ подобные наблюдения возможны.

Т е о р е м а 2. Не существует такой орбиты ИСЗ, которая имеет наблюдаемые участки с круговых точек перицентра $C_1$ и $C_2$.

Доказательство: Точкой кульминации ИСЗ для наблюдателя, находящегося в точках $C_1$ или $C_2$ является перицентр орбиты. Необходимым условием видимости

ИСЗ является (см.рис.2)

$$\cos\gamma_B > \cos\gamma_{B_0}, \tag{23}$$

где

$$\cos\gamma_B = \frac{X_0}{R_0}, \tag{24}$$

$$\cos\gamma_{B_0} = \frac{R_0}{a(1-e)}. \tag{25}$$

Формула (25) соответствует положению ИСЗ на горизонте наблюдателя. Подстановка (24) и (25) в (23) с учетом (21) приводит к неравенству

$$a^2e(1-e^2)(2+e)+R_0^2<0, \tag{26}$$

что неосуществимо для $e\in[0,1)$. Следовательно, орбит, удовлетворяющих (23), не существует.

Теорема 3. Каждому $e\in(0,\frac{1}{3})$ можно найти такие $a_0$ и $a_0'$, что если $a\in(a_0,a_0')$, то орбита спутника имеет наблюдаемые участки с круговых точек апоцентра $C_3$ и $C_4$.

Доказательство: Точкой кульминации ИСЗ для наблюдателя, находящегося в точках $C_3$ или $C_4$, является апоцентр орбиты. Необходимым и достаточным условием видимости является (см.рис.2)

$$\cos\gamma_A > \cos\gamma_{A_0}, \tag{27}$$

где

$$\cos\gamma_A = -\frac{X_0}{R_0}, \tag{28}$$

$$\cos \gamma_{A_0} = \frac{R_0}{a(1+e)} \quad . \tag{29}$$

Подстановка (28) и (29) в (27) с учетом (2I) приводит к неравенству

$$a^2 e(1+e^2)(2-e) > R_0^2 \; . \tag{30}$$

Кроме того, должны удовлетворяться еще следующие неравенства:

а) условие существования круговых точек $C_3$ и $C_4$

$$2ae < R_0 , \tag{3I}$$

б) условие реальности орбиты в перицентре

$$a(1-e) > R_0 . \tag{32}$$

Условия (30), (3I) и (32) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} &4e^2 < \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 < (1-e)^2 , \\ &4e^2 < \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 < e(1+e)^2(2-e). \end{aligned} \tag{33}$$

Первые из неравенств (33) имеют смысл, если

$$4e^2 < (1-e)^2 \quad \text{, т.е.} \quad e < \frac{1}{3} \; .$$

Вторые из неравенств (33) имеют смысл, если

$$4e^2 < e(1+e)^2(2-e) \quad \text{, т.е.} \quad e < 1 \; .$$

Следовательно, каждому $e \in (0, \frac{1}{3})$ соответствует некоторое множество $a$, определяемое условием

$$4e^2 < \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 < \min \begin{cases} (1-e)^2 \\ e(1+e)^2(2-e), \end{cases} \qquad (34)$$

для которого орбита одновременно удовлетворяет неравенствам (30), (31) и (32), т.е. для наблюдателя, находящегося в одной из круговых точек $C_3$ или $C_4$, спутник виден в окрестностях апоцентра.

## Заключение

В настоящее время трудно указать области непосредственного практического применения полученных результатов. Однако, изучение свойств видимых траекторий и видимого движения ИСЗ как численными, так и аналитическими методами представляется целесообразным в связи с разработкой более совершенных приборов и методов наблюдений ИСЗ. Это относится как к лазерным дальномерам II-го поколения, так и другим, создаваемым в настоящее время установкам.

## Литература

I. Абеле М.К. Вычисление эфемерид ИСЗ для синхронных наблюдений на установках с четырехосной монтировкой.- препринт Астрономического Совета АН СССР, 1971. (см. также Абеле М.К., Вятерс Я.В. Вычисление эфемерид ИСЗ для установок с четырехосной монтировкой.- Наблюдения ИСЗ, Бухарест, 1975, №14.

2. Беневски Я. Топоцентрическая траектория спутника, движущегося по круговой орбите. - Наблюдения ИСЗ, Варшава, 1970, №9.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия.-М., 1968.

4. Лийгант М. К теории следящих фотокамер для наблюдения ИСЗ.-Публикации Тартуской астрофизической обсерватории, 1965, т.35, №4.

5. Лийгант М. Об определении параметров малого круга, аппроксимирующего видимую орбиту ИСЗ.-Публикации Тартуской астрофизической обсерватории, 1966, т.35, №4.

6. Масевич А.Г., Лозинский А.М. Фотографические наблюдения искусственных спутников Земли.-Научные информации Астросовета АН СССР, 1970, №18.

7. Пахельски В. Вычисление эфемерид ИСЗ на электронной цифровой машине "Урал-2". - Наблюдения ИСЗ, Варшава, 1963, №2.

8. Сочилина А.С. О вычислении эфемерид для наблюдений на камерах АФУ.-Бюллетень ИТА, 1975, т.14, №2.

9. Штейнбах М. Траектории спутников с любой высотой кульминации в приближении зенитных траекторий.- Наблюдения ИСЗ, Прага, 1966, №4.

10. Mueller I. Spherical and Practical Astronomy as applied to Geodesy.-Ungar Publ.Comp.,New-York, 1969 (см. также: Справочное руководство по небесной механике и астродинамике/Под ред.Г.Н.Дубошина, М., 1976).

Резюме.

Ю.Х.Жагар

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВИДИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ ИСЗ.

В работе выведено уравнение видимой траектории ИСЗ для орбитальной системы координат и исследованы некоторые его свойства. Основное внимание уделено частным случаям, когда решения уравнения видимой траектории являются кругами небесной сферы. Доказаны две теоремы, касающиеся свойств т.н. круговых точек, которые сопряжены упомянутым частным решениям.

Kopsavilkums.

J.Žagars.

ZMP REDZAMO TRAJEKTORIJU DAŽAS ĪPAŠĪBAS

Darbā izvests ZMP redzamās trajektorijas vienādojums orbitālajā koordinātu sistēmā un izpētītas dažas tā īpašības. Galvenā uzmanība veltīta speciālgadījumiem, kad redzamās trajektorijas vienādojuma atrisinājumi ir debess sfēras riņķi. Pierādītas divas teorēmas, kas attiecas uz šiem speciālgadījumiem atbilstošu punktu uz Zemes virsmas īpašībām.

Summary

J.Zhagars

SOME PROPERTIES OF SATELLITE VISIBLE TRAJECTORIES

In this paper equation for the visible trajectory of a satellite in the orbital coordinate system is deduced and investigated. The main attention is paid to some particular cases, in which the solution of this equation are represented by circles on the celestial sphere. Two theorems deal with some properties of the so-called circular points associated to these particular solutions.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 521.61

Ю.Х.Жагар, А.Я.Зариньш
(АО ЛГУ им. П.Стучки)

# РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СБЛИЖЕНИЯ ИСЗ И ОБСЕРВАТОРИИ

Во многих задачах, связанных с вычислением эфемерид и наблюдением ИСЗ, важное значение имеет понятие сближения ИСЗ и обсерватории. В работе [3] показано, что это понятие не является однозначным, т.к. близость ИСЗ и обсерватории можно характеризовать различными скалярными величинами, такими, как:

- угловой высотой ИСЗ над горизонтом $h$,
- топоцентрическим расстоянием до ИСЗ $\rho$,
- горизонтальной составляющей топоцентрического радиус-вектора ИСЗ $w$,
- вертикальной составляющей топоцентрического радиус-вектора ИСЗ $H$,
- углом $\psi$ между геоцентрическими радиус – векторами ИСЗ и обсерватории.

Перечисленные величины, характеризующие близость ИСЗ и обсерватории, являются функциями времени. Согласно [3], моменты времени и точки орбиты, при которых характеристики близости достигают своих экстремальных значений (максимум для $h$, $H$ и минимум для $\psi$, $w$, $\rho$), называются соответственно моментами и точками сближения ИСЗ и обсерватории. В зависимости от того, которая из перечисленных величин достигает своего экстремального значения, различают следующие виды сближения:

- кульминация (максимум $h$),
- радиальное сближение (минимум $\rho$),
- горизонтальное сближение (минимум $w$),
- вертикальное сближение (максимум $H$),
- угловое сближение (минимум $\psi$).

Нахождение моментов и точек сближения сводится к решению некоторых уравнений, называемых уравнениями сближения. В работе [3] приведены уравнения сближения для перечисленных выше случаев в радиальной топоцентрической системе координат, основная плоскость которой перпендикулярна радиус – вектору обсерватории $\vec{R}$.

Точное аналитическое решение уравнений сближения, зависящих от радиус – векторов ИСЗ, обсерватории и их первых производных, построить трудно. Однако, рассматривая ИСЗ с достаточно низкой орбитой, можно в первом приближении пренебречь медленным (по сравнению с движением ИСЗ) вращением Земли и изменением плоскости орбиты ИСЗ. В этом случае уравнения сближения приобретают сравнительно простой вид и легко решаются аналитическими методами. Сделанное допущение можно записать в виде

$$\dot{\vec{R}}=0\,, \qquad \dot{\vec{P}}=0\,, \qquad \dot{\vec{Q}}=0\,, \tag{I}$$

где $\vec{P}$ – нормированный вектор Лапласа, $\vec{Q}=\dfrac{\partial\vec{P}}{\partial\omega}$. Если в уравнениях сближения положить

$$\vec{r}=\vec{P}\xi+\vec{Q}\eta\,, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}\xi&=a(\cos E-e)\,,\\ \eta&=a\sqrt{1-e^2}\,\sin E\,,\end{aligned} \tag{3}$$

то получим уравнения, зависящие от одной переменной $E$. Решая эти уравнения, находим эксцентрические аномалии $E_i$ точек сближения. Соответствующие моменты сближения определяются уравнением Кеплера в форме

$$T=\tau+\frac{1}{n}\left(E_i-e\cos E_i\right), \tag{4}$$

где $\tau$ – момент прохождения ИСЗ через перицентр орбиты.

Полученные таким образом эксцентрические аномалии и моменты сближения являются приближенными решениями уравнений сближения в силу допущения (I). Для уточнения их значений вычисляются более точные значения векторов $\vec{R}$,

$\vec{P}$ и $\vec{Q}$ на приближенный момент сближения, и повторно решаются уточненные таким образом уравнения сближения. Этот итерационный процесс продолжается, пока не достигнута достаточная точность. Расчеты показывают, что сходимость процесса быстрая - для геодезических ИСЗ типа *GEOS-A*, *GEOS-C* одна итерация увеличивает точность определения $E_i$ примерно на порядок.

<u>Кульминация</u>. Согласно [3], уравнение сближения, определяющее кульминацию ИСЗ, имеет форму:

$$\vec{R}(\dot{\vec{\rho}}\rho^2 - \vec{\rho}(\vec{\rho}\dot{\vec{\rho}})) = -\dot{\vec{R}}\vec{\rho}\rho^2. \qquad (5)$$

Имея в виду, что $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{R}$, и полагая $\dot{\vec{R}} = 0$, находим

$$(\vec{R}\dot{\vec{r}})(r^2 - \vec{R}\vec{r}) = (\vec{r}\dot{\vec{r}})(\vec{R}\vec{r} - R^2). \qquad (6)$$

Далее, воспользовавшись (I), (2) и (3), получим:

$$\dot{\xi}(\vec{R}\vec{P}\eta^2 - (\vec{R}\vec{P})^2\xi^2 - (\vec{R}\vec{P})(\vec{R}\vec{Q})\eta - \vec{R}\vec{Q}\xi\eta + R^2\xi) +$$
$$+\dot{\eta}(\vec{R}\vec{Q}\xi^2 - (\vec{R}\vec{Q})^2\eta^2 - (\vec{R}\vec{P})(\vec{R}\vec{Q})\xi - \vec{R}\vec{P}\xi\eta + R^2\eta) = 0,$$

или

$$(\vec{R}\vec{Q}a(\cos E - e)^2 - (\vec{R}\vec{Q})^2\sqrt{1-e^2}\sin E - (\vec{R}\vec{P})(\vec{R}\vec{Q})(\cos E - e) +$$
$$+ R^2\sqrt{1-e^2}\sin E - \vec{R}\vec{P}a\sqrt{1-e^2}\sin E(\cos E - e))\cdot\sqrt{1-e^2}\cos E =$$
$$= (\vec{R}\vec{P}a(1-e^2)\sin^2 E - (\vec{R}\vec{P})^2(\cos E - e) - (\vec{R}\vec{P})(\vec{R}\vec{Q})\sqrt{1-e^2}\sin E +$$
$$+ R^2(\cos E - e) - \vec{R}\vec{Q}a\sqrt{1-e^2}\sin E(\cos E - e))\cdot\sin E. \qquad (7)$$

Введём обозначения:

$$\beta_1 = \vec{R}\vec{P}, \quad \beta_2 = \vec{R}\vec{Q}\sqrt{1-e^2}, \quad \beta_3 = ae, \quad \beta_4 = Re,$$

при помощи которых уравнение (7) можно записать в виде

$$p_1\cos^2 E + p_2\sin^2 E + p_3\sin E\cos E + p_4\cos E + p_5\sin E + p_6 = 0, \qquad (8)$$

где

$$p_1 = a\beta_2(\beta_1 + \beta_3), \quad p_4 = -\beta_2(a^2 + \beta_1\beta_3 + \beta_3^2),$$
$$p_2 = a\beta_1\beta_2, \quad p_5 = \beta_1(\beta_3^2 - a^2) + \beta_3(R^2 - \beta_1^2) \qquad (9)$$
$$p_3 = a(\beta_1^2 + (1-e^2)\beta_1\beta_3 - \beta_2^2 - \beta_4^2), \quad p_6 = -a\beta_2\beta_3$$

Возведением в квадрат (8) можно преобразовать в уравнение 4-й степени относительно $\cos E$ :

$$a_4\cos^4 E + a_3\cos^3 E + a_2\cos^2 E + a_1\cos E + a_0 = 0, \tag{10}$$

где коэффициенты $a_i$ определяются формулами:

$$\begin{aligned}
a_4 &= (\beta_1 - \beta_2)^2 + \beta_3^2, \\
a_3 &= 2\beta_3\beta_5 + 2\beta_4(\beta_1 - \beta_2), \\
a_2 &= \beta_4^2 + 2(\beta_1 - \beta_2)(\beta_6 + \beta_2) - \beta_3^2 + \beta_5^2, \\
a_1 &= 2(\beta_6 + \beta_2)\beta_4 - 2\beta_3\beta_5, \\
a_0 &= (\beta_6 + \beta_2)^2 - \beta_5^2 .
\end{aligned} \tag{11}$$

Уравнение (10) решается одним из стандартных способов (см., например, [2]). Возведение уравнения (8) в квадрат, разумеется, может увеличить число его корней. В общем случае имеем 4 различных значения $\cos E$, удовлетворяющих уравнению (10). Ввиду сказанного два из них не имеют реального физического смысла, а остальные два соответствуют верхней и нижней кульминации ИСЗ. Для нахождения эксцентрической аномалии интересующей нас верхней кульминации $E_h$, лишние корни необходимо исключить. Естественно при этом отобрать то значение $E$, для которого $h(E)$ максимально, что равносильно максимальности $\sin h(E)$. Так как

$$\sin h = \frac{\vec{R}(\vec{r} - \vec{R})}{R\,|\vec{r} - \vec{R}|},$$

то критерий отбора корней сводится к требованию

$$\frac{\vec{R}(\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \max . \tag{12}$$

Когда таким образом найдено искомое $E_h$, радиус - вектор точки кульминации определяется формулами (2) и (3):

$$\vec{r}_h = \vec{P}a(\cos E_h - e) + \vec{Q}a\sqrt{1-e^2}\sin E_h , \tag{13}$$

а момент кульминации $T_h$ - уравнением Кеплера (4).

Радиальное сближение. Экстремум топоцентрического расстояния до ИСЗ согласно [3] определяется уравнением радиального сближения:

$$(\vec{r}-\vec{R})\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}}\vec{r}. \qquad (14)$$

Подставляя в (I4) формулы (2) и (3) с учетом (I) имеем:

$$(\xi\dot{\xi}+\eta\dot{\eta}) = \vec{R}\vec{P}\dot{\xi} + \vec{R}\vec{Q}\dot{\eta},$$

или $(\vec{R}\vec{P}+ae)\sin E - \vec{R}\vec{Q}\sqrt{1-e^2}\cos E = ae^2\sin E\cos E.$ (I5)

Как и прежде, уравнение (I5) можно привести к форме (I0), где коэфициенть $a_i$ определяются соотношениями (II) с постоянными $\gamma_i$:

$$\gamma_1=\gamma_2=\gamma_6=0, \qquad \gamma_3=-ae^2,$$
$$\gamma_4=-\vec{R}\vec{Q}\sqrt{1-e^2}, \qquad \gamma_5=\vec{R}\vec{P}+ae. \qquad (16)$$

Как и в предыдущем случае, соответствующее уравнение (I0) имеет 4 корня, два из которых являются значениями $\cos F$ в точках орбиты с минимальным и максимальным топоцентрическим расстоянием до ИСЗ. Условые минимальности $\rho(E)$ приводит к критерию отбора значений эксцентрической аномалии в виде требования:

$$r^2-2(\vec{R}\vec{r}) = \min. \qquad (17)$$

Если орбита близка к круговой ($r\simeq a$), (I7) можно приблизительно заменить на условие:

$$\vec{R}\vec{r} = \max. \qquad (18)$$

Заметим, что, хотя для реальных ИСЗ такая замена в большинстве случаев приводит к правильному результату, однако не исключён неверный выбор корней.

<u>Горизонтальное сближение</u>. Экстремуму горизонтальной составляющей $w$ топоцентрического радиус - вектора ИСЗ соответствует уравнение горизонтального сближения·

$$(\dot{\vec{r}}\vec{R})(\vec{r}\vec{R})-R^2(\vec{r}\dot{\vec{r}}) = -(\dot{\vec{R}}\vec{r})(\vec{r}\vec{R}). \qquad (19)$$

Подобно предыдущим случаям его можно преобразовать к уравнению относительно $\cos E$ в форме (I0), коэфициенты $a_i$ которого определяются соотношениями (II) с постоянными $\gamma_i$:

$$\gamma_1=-2\beta_1\beta_2, \quad \gamma_2=0, \quad \gamma_3=\beta_4^2(1-e^2)-\beta_1^2,$$
$$\gamma_4=-e\beta_1\beta_2, \quad \gamma_5=e\beta_3^2, \quad \gamma_6=\beta_1\beta_2 \qquad (20)$$

где $\beta_1=\vec{R}\vec{P}$, $\beta_2=\vec{R}\vec{Q}\sqrt{1-e^2}$, $\beta_3^2=R^2-(\vec{R}\vec{P})^2$, $\beta_4^2=R^2-(\vec{R}\vec{Q})^2$.

Отбор значений эксцентрической аномалии можно осуществить по условию минимальности $W$ в виде

$$R^2 r^2-(\vec{R}\vec{r})^2=min. \tag{2I}$$

В приближении круговой орбиты это условие также сводится к (I8).

Вертикальное сближение. Экстремум вертикальной составляющей $H$ топоцентрического радиус - вектора ИСЗ определяется уравнением вертикального сближения

$$\vec{R}\dot{\vec{r}}=-\dot{\vec{R}}\vec{r}, \tag{22}$$

откуда, как и прежде, имеем:

$$\vec{R}\vec{P}\sin E=\vec{R}\vec{Q}\sqrt{1-e^2}\cos E. \tag{23}$$

Решение уравнения (23) можно представить в форме:

$$\cos E_H=\frac{\vec{R}\vec{P}}{B},\quad \sin E_H=\frac{\vec{R}\vec{Q}}{B}\sqrt{1-e^2}, \tag{24}$$

где $B^2=(\vec{R}\vec{P})^2+(\vec{R}\vec{Q})^2(1-e^2)$, $\quad B\neq 0.$ (25)

Так как $H=\dfrac{\vec{R}(\vec{r}-\vec{R})}{R}$, то требование максимальности $H$ равносильно условию (I8). Учитывая, что при минимальном $H$ всегда $\vec{R}\vec{r}<0$, (I8) можно заменить условием

$$\vec{R}\vec{r}_H>0. \tag{26}$$

С учётом соотношений (2), (3), (24) и (25) радиус-вектор вертикального сближения можно написать в явном виде:

$$\vec{r}_H=\frac{a}{B}\left(\vec{P}(\vec{R}\vec{P})+\vec{Q}(\vec{R}\vec{Q})(1-e^2)\right)-\vec{P}ae. \tag{27}$$

Знак величины $B$ здесь определяется подстановкой (27) в условие (26), можно показать, что $B>0$. Следовательно, уравнение вертикального сближения в приближении (I) имеет замкнутое аналитическое решение в форме (27).

Угловое сближение. Угол $\psi$ между геоцентрическими радиус - векторами ИСЗ и обсерватории имеет экстремум в точках, удовлетворяющих уравнению углового сближения

$$\vec{R}(\dot{\vec{r}}r^2 - \vec{r}(\vec{r}\dot{\vec{r}})) = -\dot{\vec{R}}\vec{r}r^2. \qquad (28)$$

Учитывая (1) при помощи (2) находим:

$$\eta\dot{\xi}(\vec{R}\vec{P}\eta - \vec{R}\vec{Q}\xi) = \xi\dot{\eta}(\vec{R}\vec{P}\eta - \vec{R}\vec{Q}\xi). \qquad (29)$$

Так как равенство $\eta\dot{\xi} = \xi\dot{\eta}$ противоречит интегралу площадей, остаётся предположить:

$$\vec{R}\vec{P}\eta = \vec{R}\vec{Q}\xi. \qquad (30)$$

Решение уравнения (30), очевидно, имеет форму:

$$\begin{cases} \eta_\psi = c\vec{R}\vec{Q}, \\ \xi_\psi = c\vec{R}\vec{P}, \end{cases} \qquad (31)$$

где величину $c$ можно определить из условия $r^2_\psi = \eta^2_\psi + \xi^2_\psi$, согласно которому

$$c^2 = \frac{r^2_\psi}{(\vec{R}\vec{P})^2 + (\vec{R}\vec{Q})^2}. \qquad (32)$$

Знак величины $c$ положительный, что следует из условия минимальности $\psi$, которое можно написать в форме (26).

Поскольку $r = a(1 - e\cos E)$, то из (31), (32) и (3) следует:

$$\begin{cases} \xi_\psi = a(\cos E_\psi - e), \\ \xi_\psi = \dfrac{a(1 - e\cos E_\psi)}{\sqrt{(\vec{R}\vec{P})^2 + (\vec{R}Q)^2}}\vec{R}\vec{P}. \end{cases}$$

Приравниванием обоих формул находим:

$$\cos E_\psi = \frac{\vec{R}P + e\sqrt{(\vec{R}\vec{P})^2 + (\vec{R}\vec{Q})^2}}{e\vec{R}\vec{P} + \sqrt{(\vec{R}\vec{P})^2 + (\vec{R}\vec{Q})^2}}. \qquad (33)$$

Из приведённых выше формул следует также:

$$\sin E_\psi = \frac{\vec{R}\vec{Q}\sqrt{1 - e^2}}{e\vec{R}\vec{P} + \sqrt{(\vec{R}\vec{P})^2 + (\vec{R}\vec{Q})^2}}. \qquad (34)$$

Таким образом, можно получить замкнутую аналитическую формулу для радиус - вектора точки углового сближения:

$$\vec{r}_\varphi = a(1-e^2)\frac{(\vec{R}\vec{P})\vec{P} + (\vec{R}\vec{Q})\vec{Q}}{\sqrt{(\vec{R}\vec{P})^2 + (\vec{R}\vec{Q})^2} + e\vec{R}\vec{P}} .$$

Точки сближения для круговой орбиты. В случае $e=0$ согласно [3] все точки сближения совпадают. Тогда, например, из (22) с учётом (3) следует единое уравнение сближения: $\vec{R}(n\vec{Q}\cos E - n\vec{P}\sin E) = -\dot{\vec{R}}(\vec{P}\cos E - \vec{Q}\sin E)$,

где $n$ - среднее движение ИСЗ, и положено $\dot{\vec{P}}=0$ и $\dot{\vec{Q}}=0$.
Решение этого уравнения имеет вид

$$tg E_0 = \frac{n\vec{R}\vec{Q} + \dot{\vec{R}}\vec{P}}{n\vec{R}\vec{P} + \dot{\vec{R}}\vec{Q}} .$$

Квадрант угла $E_0$ можно определить согласно условию (26).

Полученные результаты показывает, что в допущении (I) рассмотренные нами уравнения сближения сводятся к алгебро-тригонометрическим уравнениям относительно $\cos E$ степени не выше 4. При этом степень уравнений вертикального и углового сближения равна 2 и их решения можно представить в замкнутом аналитическом виде. Заметим, что если учитывать вращение Земли, то степень всех уравнений сближения $\geqslant 4$ и замкнутых аналитических решений не существует. Однако, если полагать $e \neq 0$, $\dot{\vec{R}}\vec{P} \neq 0$, $\dot{\vec{R}}\vec{Q} \neq 0$, но пренебречь произведениями $e\dot{\vec{R}}\vec{P}$ и $e\dot{\vec{R}}\vec{Q}$, то в предположении $\dot{E}=n$ уравнение вертикального сближения допускает решение:

$$tg E_H' = \frac{\vec{R}\vec{Q}n\sqrt{1-e^2} + \dot{\vec{R}}\vec{P}}{\vec{R}\vec{P}n - \dot{\vec{R}}\vec{Q}\sqrt{1-e^2}} ,$$

являющееся более точным, чем (24). Как и раньше, здесь положено $\dot{\vec{P}}=0$, $\dot{\vec{Q}}=0$.

Существование замкнутых аналитических решений уравнений вертикального и углового сближения в указанных приближениях оказывается очень полезным при анализе условий видимости ИСЗ. Во многих задачах, связанных, в частности, с вычислением интервалов видимости ИСЗ и эфемерид для их наблюдения, можно рассматривать точки углового или вертикального сближения вместо точки кульминации в качестве "центральной" точки видимой траектории ИСЗ. Это может существенно сократить объем необходимых вычислений.

Изложенные алгоритмы решения уравнений сближения были использованы при составлении ряда программ для исследования свойств видимого движения ИСЗ. Расчеты показали, во-первых, что при определении моментов сближения для достижения точности порядка 0.01 сек. обычно достаточно 3-5 итераций (в основном по вектору $\vec{R}$ ). Во-вторых, оказалось, что несовпадения различных точек сближения для ИСЗ типа Geos-A, Geos-C, Lageos могут иметь значительную величину, достигающую нескольких градусов по эксцентрической аномалии. В качестве примера на рис. 1 показаны изменения эксцентрической аномалии точек сближения относительно точки кульминации $\delta E = E_h - E_i$ в зависимости от положения перигея орбиты (сохраняя её плоскость неизменной). Видно, что поворот орбиты в её плоскости приводит к различному ходу $\delta E$ у различных точек сближения.

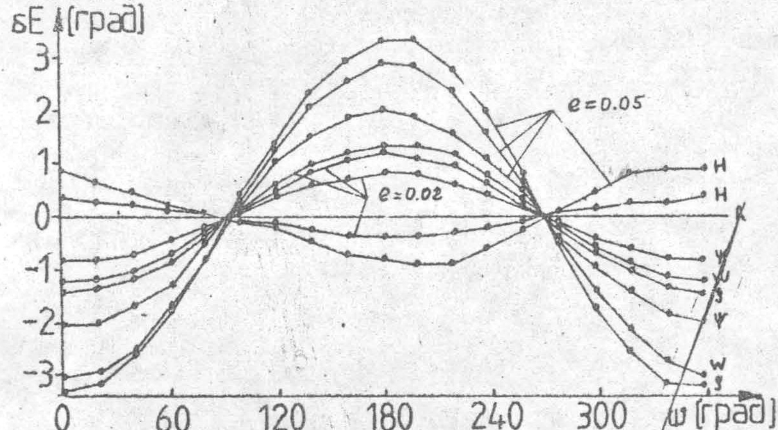


Рис. 1. Расположение различных точек сближения на орбите относительно точки кульминации в зависимости от их аргумента перигея (сближению в апогее соответствует 95°, в перигее - 275°). Большая полуось орбиты 8 Мгм, высота точки кульминации над горизонтом около 30°.

## Литература

1. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике /Под.ред. Г.Н.Дубошина.- М.: Наука, 1976, с. 37-58, 221-230.
2. Эскобал П. Методы определения орбит.- М.: Мир, 1970, с. 80-134, 448-551.
3. Жагар Ю.Х., Заринып А.Я. Экстремальные задачи сближения ИСЗ и обсерватории. -В кн.:Навигационная привязка и статистическая обработка космической информации. М.: Наука, 1982.

## Резюме

Ю.Х.Жагар
А.Я.Зариньш

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СБЛИЖЕНИЯ ИСЗ И ОБСЕРВАТОРИИ

Статья посвящена решению пяти различных уравнений сближения ИСЗ и обсерватории в приближении неизменной плоскости орбиты и неподвижной Земли. Точное решение затем может быть получено путём быстро сходящихся итераций по времени. Показано, что эти уравнения в указанном приближении сводятся к алгебро- тригонометрическим уравнениям отностиельно $\cos E$ степени не выше четвёртой, а уравнения вертикального и углового сближения являются квадратичными и их решения представлены в замкнутом аналитическом виде.

## Kopsavilkums

J.Žagars

A.Zariņš

### ZMP UN OBSERVATORIJAS TUVOŠANĀS VIENĀDOJUMU RISINĀŠANA

Darbā apskatīts jautājums par ZMP un observatorijas tuvošanās vienādojumu risināšanu, tuvināti pieņemot, ka ZMP orbītas plakne nemainās un neņemot vērā Zemes rotāciju. Precīzus šo vienādojumu atrisinājumus var pēc tam iegūt, lietojot ātri konverģējošas iterācijas. Parādīts, ka tuvošanās vienādojumi minētajā tuvinājumā ir reducējami uz ne augstāk kā ceturtās kārtas algebro-trigonometriskiem vienādojumiem attiecībā pret $\cos E$. Pie tam vertikālās un leņķiskās tuvošanās vienādojumi ir otrās kārtas un to atrisinājumi izsakāmi noslēgtā analītiskā formā.

## Summary

J.Zhagar

A.Zarinsh

### SOLUTION OF THE SATELLITE AND OBSERVERS APPROACH EQUATIONS

In this paper solution of five different kinds of satellite and observer approach equations has been considered without accounting for Earth rotation and motion of satellite's orbital plane. Accurate solution can be obtained thereafter by rapidly converging interation. In this approximation the approach equations are algebro-trigonometric up to fourth power of $\cos E$. In the cases of vertical and angular approach they can be reduced to square equations, and their solutions can be expressed in closed analytical form.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 521.24

А.М.Черницов
С.С.Краев
(НИИПММ при ТГУ)

# ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АНАЛОГОВ МЕТОДА НЬЮТОНА ПРИ УЛУЧШЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТ

Предполагается, что задача улучшения параметров орбит может рассматриваться как задача минимизации некоторой целевой функции вида

$$\Phi(x)=[r(x)-r^*]^T K^{-1}[r(x)-r^*]=\min , \qquad (1)$$

где $x$ – $m$ – мерный вектор улучшаемых параметров; $r(x)$ – известная $N$– мерная вектор-функция измеряемых параметров; $r^*$ – $N$ – мерный вектор наблюдений ($N>m$); $K^{-1}$ – известная весовая матрица.

В такой постановке решение данной задачи может быть сведено к решению системы нелинейных уравнений вида

$$\Phi'(x)=R^T(x)K^{-1}[r(x)-r^*]=0 , \qquad (2)$$

где $R(x)$ – матрица размером $N\times m$, элементы которой $\partial r_k(x)/\partial x_i$ суть частные производные от измеряемых параметров по определяемым; $k=1,2,\ldots,N$; $i=1,2,\ldots,m$.

Тогда обычно применяемый на практике при улучшении параметров орбит метод Гаусса

$$x_{n+1}=x_n-[R^T(x_n)K^{-1}R(x_n)]^{-1}R^T(x_n)K^{-1}[r(x_n)-r^*] \qquad (3)$$

можно рассматривать как классическую модификацию метода Ньютона

$$x_{n+1}=x_n-[\Phi''(x_n)]^{-1}R^T(x_n)K^{-1}[r(x_n)-r^*] \qquad (4)$$

для решения системы (2), где $\Phi''(x)=R^T(x)K^{-1}R(x)+G(x,r^*)$; $G(x,r^*)$ – матрица размером $m\times m$, элементы которой суть комбинации вторых частных производных $\partial^2 r_k/\partial x_i\partial x_j$, элементов вектора невязок $r(x)-r^*$ и весовой матрицы $K^{-1}$.

Такая трактовка метода Гаусса позволяет оценить размеры его области сходимости и скорость сходимости. Из имеющихся оценок [I – 4] следует, что итерационный процесс метода Гаусса имеет линейную скорость сходимости в отличие от соответствующего итерационного процесса метода Ньютона, имеющего квадратичную скорость сходимости. Несмотря на наличие такого рода оценок, использование метода Ньютона для решения задач улучшения параметров орбит, как показывает анализ соответствующих расчётов, вряд ли целесообразно. Это обусловлено как определённой сложностью вычисления с достаточной точностью значений вторых частных производных, так и тем, что реальная область сходимости метода Ньютона может иметь значительно меньшие размеры, чем соответствующая область для метода Гаусса. Последнее обстоятельство объясняется характером изменений свойств соответствующих матриц $[\Phi''(x)]^{-1}$ и $[R^T(x)K^{-1}R(x)]^{-1}$ в окрестности решения искомой задачи. Так, в области реальной сходимости метода Гаусса (которая, как правило, больше теоретической) матрица $[\Phi''(x)]^{-1}$, из-за наличия в ней элементов вектора невязки $r(x)-r^*$ , может деформироваться значительно сильнее, чем матрица $[R^T(x)K^{-1}R(x)]^{-1}$, и не быть положительно определённой на множестве точек этой области. Некоторое представление о степени деформации обеих матриц в области сходимости метода Гаусса дают результаты, приведённые в табл.I и 2. для X спутника Юпитера и модельной задачи движения материальной точки в поле сжатого сфероида вращения. В последней задаче полностью моделировался процесс улучшения начальных параметров траектории как с помощью метода Гаусса, так и метода Ньютона. Как видно из этих таблиц, деформация матрицы $R^TR$ относительно невелика, в частности мало меняются её собственные значения и она является положительно определённой в области сходимости метода Гаусса. Данные табл.2 показывают, что матрица $\Phi''(x)$ деформируется значительно сильнее и, в частности, для более далёких точек $x_n$ относительно искомого решения $\hat{x}$ у этой матрицы появляются отрицательные собственные значения ( она перестаёт быть положительно определённой в отличии от матрицы $R^TR$ ). В связи с этим можно ещё отметить, что при значении одного из начальных параметров $a$ = 15002 км ( последняя строка в табл. 2 )итерации в методе Ньютона становятся расходящимися в отличие от метода Гаусса, для которого итерации сходятся и при более грубых значениях начальных параметров ( до $a$ =15012 км ).

Подводя итог сказанному, можно сделать вывод, что реальная ( не теоретическая ) область сходимости итераций метода Гаусса может значительно перекрывать реальную область сходимости итераций метода Ньютона и в сочетании с большой практической эффективностью метода Гаусса всё это делает очевидным его преимущество перед методом Ньютона при улучшении параметров орбит.

Не рассматривая вопроса, связанного с определённой трудоёмкостью вычислений коэффициентов условных уравнений, к недостаткам метода Гаусса можно отнести ограниченность размеров области сходимости его итераций. Для " попадания" в область сходимости данного метода иногда необходимо использовать другие, менее эффективные методы, что в общем затрудняет решение задачи улучшения параметров орбит. Такие случаи, например, возможны при отождествлении комет, когда имеется большой промежуток времени не охваченный наблюдениями между двумя фиксированными появлениями новых объектов.

В данной работе рассматривается случай больших временных интервалов, охваченных наблюдениями. Предлагается несколько новых, простых способов решения такого рода задач. Итерации одного из этих способов имеют реальную область сходимости, перекрывающую соответствующую область для итераций метода Гаусса, и сходятся, в отличие от последних, с квадратичной скоростью к решению в некоторой его окрестности.

В качестве исходной, вместо системы (2), была взята новая система уравнений вида

$$R_0^T K^{-1} [r(x) - r^*] = 0 , \qquad (5)$$

где $R_0 \equiv R(x_0)$, $x_0$ – вектор известных приближённых значений начальных параметров орбиты, подлежащих улучшению.

Система (5) удовлетворяет следующим требованиям:

I) в области, перекрывающей область сходимости итераций метода Гаусса, решения систем уравнений (5) и (2) практически не отличаются;

2) по своим аналитическим свойствам система уравнений (5) проще системы (2), что следует из отсутствия в матрице Якоби для системы (5) вторых частных производных от измеряемых параметров по определяемым и отсутствия составляющих вектора невязок.

Всё это в целом определяет практическую применимость метода продолжения по параметру [5] для решения задач улучшения параметров орбит. В данном случае этот метод позволяет рассматривать в качестве исходной вместо системы уравнений (5) систему нелинейных уравнений

$$R_o^T K^{-1}[\tau(x)-\tau^*]-R_o^T K^{-1}[\tau_o-\tau^*]\,e^{-\lambda}=0 \qquad (6)$$

или систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered} \dot{x}_\lambda=-[R_o^T K^{-1}R(x)]^{-1}R_o^T K^{-1}[\tau(x)-\tau^*], \\ x(0)=x_o \qquad (\lambda\in[0,\infty)) \end{gathered} \qquad (7)$$

Здесь $\tau_o=\tau(x_o)$, $\lambda$ – новая вспомогательная переменная. Для систем (6) и (7) при $\lambda\to\infty$ $x(\lambda)$ стремится к решению системы (5).

Такая трактовка задач улучшения параметров орбит позволяем применить в последнем случае хорошо разработанный аппарат решения систем дифференциальных уравнений. Приведём простейшие методы решения для всех трёх систем (5), (6) и (7).

Для системы уравнений (5) может быть реализован в строгом смысле метод Ньютона, итерационная схема которого имеет вид

$$x_{n+1}=x_n-[R_o^T K^{-1}R(x_n)]^{-1}R_o^T K^{-1}[\tau(x_n)-\tau^*] \qquad (8)$$

Отличие итерационной схемы метода Гаусса (3) от данной итерационной схемы состоит в том, что в последней элементы транспонированной матрицы ( состоящие из частных производных $\partial\tau_k(x)/\partial x_i$ ) вычисляются только в начальной точке и дальше в процессе итераций остаются постоянными. Скорость сходимости итераций (8), в отличие от итераций (3), является [I-4] квадратичной в некоторой окрестности решения системы (5). Можно ещё отметить, что результаты первой итерации для метода Ньютона (8) и традиционного метода Гаусса (3) полностью совпадают.

Для системы уравнений (6) возможен следующий простой способ её решения: строится последовательность точек $\lambda_0=0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_K<\ldots$ и для каждого значения $\lambda_K$ из этого ряда ищется решение системы (6) с помощью итераций метода Ньютона

$$x_{p+1}^{(K)}=x_p^{(K)}-[R_o^T K^{-1} R(x_p^{(K)})]^{-1}(R_o^T K^{-1}[\tau(x_p^{(K)})-\tau^*]- \\ -R_o^T K^{-1}[\tau_o-\tau^*]\cdot e^{-\lambda_{K+1}} \tag{9}$$

В качестве начального приближения может быть взято решение этой системы в предыдущей точке $\lambda_{K-1}$ : $x_o^{(K)}=x(\lambda_{K-1})$ .

При $p=0$ имеем следующий простой алгоритм решения задачи

$$x_{K+1}=x_K-[R_o^T K^{-1} R(x_K)]^{-1}(R_o^T K^{-1}[\tau(x_K)-\tau^*]- \\ -R_o^T K^{-1}[\tau_o-\tau^*]\cdot e^{-\lambda_{K+1}}, \tag{10}$$

где в соответствии с (9) $x_K=x_o^{(K)}$ , $x_{K+1}=x_1^{(K)}$.

Наконец, для решения системы дифференциальных уравнений (7) могут быть использованы простые схемы метода Эйлера

$$x_{n+1}=x_n-h_n[R_o^T K^{-1} R(x_n)]^{-1} R_o^T K^{-1}[\tau(x_n)-\tau^*] \tag{11}$$

и

$$x_{n+1}=x_n-h_n[R_o^T K^{-1} R(x_{n+1})]^{-1} R_o^T K^{-1}[\tau(x_{n+1})-\tau^*], \tag{12}$$

где $h_n=\lambda_{n+1}-\lambda_n$. В последнем случае решение на каждом шаге нелинейной относительно $x_{n+1}$ системы уравнений (12) может быть осуществлено с помощью метода последовательных приближений

$$x_{p+1}^{(n+1)}=x_n-h_n[R_o^T K^{-1} R(x_p^{(n+1)})]^{-1} R_o^T K^{-1}[\tau(x_p^{(n+1)})-\tau^*], \tag{13}$$

где $p=0,1,2,\ldots$; $x_o^{(n+1)}=x_n$ .

Кроме приведённых выше способов нами ранее было показано, что решение задачи улучшения параметров орбит сводится также к интегрированию другой системы дифференциальных уравнений, а именно

$$\dot{x}_\lambda=-[R^T(x)K^{-1}R(x)]^{-1}R^T(x)K^{-1}[\tau(x)-\tau^*], \\ x(0)=x_0 \qquad (\lambda\in[0,\infty)) \tag{14}$$

Решение этой системы также может быть осуществлено с помощью явной и неявной схем метода Эйлера. В частном случае, при $h_n$ =I явные схемы метода Эйлера для систем (7) и (I4) полностью совпадают с итерациями метода Ньютона (8) и традиционного метода Гаусса (3).

Некоторое представление об эффективности применения всех приведённых выше способов при решении задач улучшения параметров орбит дают таблица 3 и рисунок I, где приведены результаты расчётов для модельной задачи. Данные таблицы 3 показывают, что все три итерационных способа – метод Гаусса, метод Ньютона решения системы (5) и метод (I0) при $\lambda_K = K$ ( $K$ =0,I,2,... ) практически одинаково эффективны, если начальное приближение находится внутри области сходимости метода Гаусса. На рисунке I изображены проекции областей сходимости этих методов на плоскость $a$, $e$ . Таким образом, область сходимости метода (I0) при $\lambda_K = K$ перекрывает область сходимости итераций методов Гаусса и Ньютона (8), которые совпадают между собой.

Наконец, из таблицы 4 видно, что в случае, когда начальное приближение плохое ( находится вне области сходимости метода Гаусса ), метод (9) позволяет решать задачу в несколько раз быстрее, чем методы Эйлера.

Таким образом, при улучшении параметров орбит объектов, учитывая практическую одинаковость конструкций рассмотренных выше схем, очевидно преимущество использования алгоритма (9) по сравнению с неявными схемами метода Эйлера.

Таблица I

Значения диагональных элементов матрицы $R^T R$ для различных начальных параметров X спутника Юпитера ( моменты наблюдений с 1938 по 1958 гг. )

| $X_n$ | $\{R^T(X_n)\,R(X_n)\}_{ii}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | I.804 | 5.432 | 6.9I0 | 0.00355 | 0.0007I | 0.0006I |
| $X_2$ | I.798 | 5.436 | 6.85I | 0.00355 | 0.00070 | 0.0006I |
| $X_3$ | I.878 | 5.954 | 7.856 | 0.00376 | 0.00080 | 0.00059 |

$\sqrt{\dfrac{\Phi(X_1)}{N-m}} = 688''.59 \qquad \sqrt{\dfrac{\Phi(X_2)}{N-m}} = 36''.0I \qquad \sqrt{\dfrac{\Phi(X_3)}{N-m}} = 0''.76$

Таблица 2

Значения диагональных элементов $(R^TR)_{ee}$, $(\Phi'')_{ee}$ и собственных значений $\lambda_2(R), \lambda_2(\Phi'')$ для различных начальных параметров модельной задачи

| $x_n$ | $(R^TR)_{ee}$ | $\lambda_2(R)$ | $(\Phi'')_{ee}$ | $\lambda_2(\Phi'')$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{a}$ =I5000 км<br>$\hat{e}$ 0.4999897 | 0.788 | 0.2I4 | 0.788 | 0.2I4 |
| $a_1$ =I500I<br>$e_1$ =0.5 | 3.2II | 0.2I4 | 7.058 | -I3.066 |
| $a_2$ =I5002<br>$e_2$ =0.5 | I5.569 | 0.2I3 | 32.380 | -43.745 |

Таблица 3

Сходимость итераций при решении систем (2),(5)и (8) для модельной задачи ($h_n$ =I)

| $X_n$ | МГ | МН | МПр |
|---|---|---|---|
| $a_0$<br>$e_0$ | I5006 км<br>0.5 | I5006 км<br>0.5 | I5006 км<br>0.5 |
| $a_1$<br>$e_1$ | I4999.3<br>0.42859 | I4999.3<br>0.42859 | I500I.8<br>0.45356 |
| $a_5$<br>$e_5$ | I5000.0000I<br>0.5000004I | I5000.0000I<br>0.5000004I | I5000.03I7<br>0.49952 |

МГ : $x_{n+1}=x_n-[R^T(x_n)R(x_n)]^{-1}R^T(x_n)[\tau(x_n)-\tau^*]$

МН : $x_{n+1}=x_n-[R_0^T R(x_n)]^{-1}R_0^T[\tau(x_n)-\tau^*]$

МПр: $x_{n+1}=x_n-[R_0^T R(x_n)]^{-1}(R_0^T[\tau(x_n)-\tau^*]-$

$-R_0^T[\tau_0-\tau^*]\cdot e^{-n-1})$

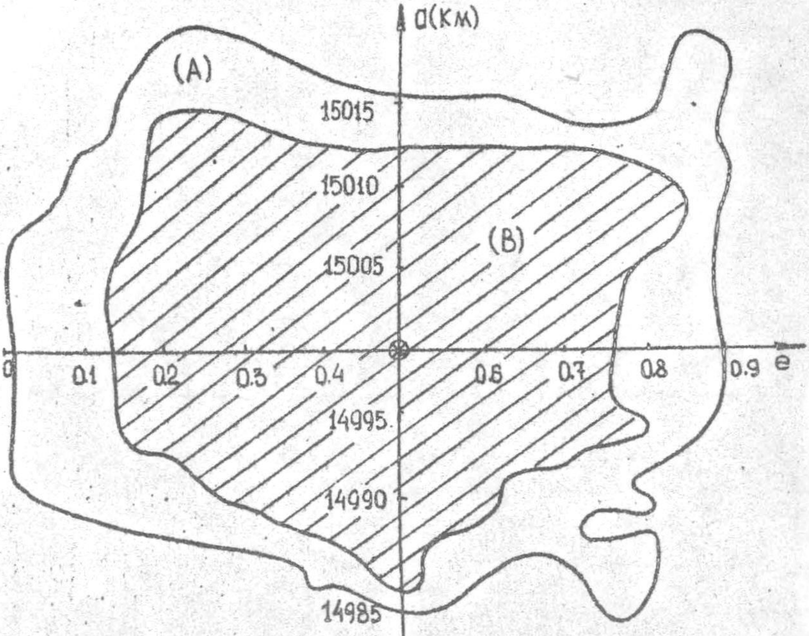


Рис. I

(A) - Область сходимости итераций МПр.

$$x_{n+1}=x_n-[R_0^T R(x_n)]^{-1}[R_0^T \Delta\tau(x_n)-R_0^T \Delta\tau_0 \cdot e^{-n-1}];$$

(B) - Область сходимости итераций

метода Гаусса $x_{n+1}=x_n-[R^T(x_n)R(x_n)]^{-1}R^T(x_n)\Delta\tau(x_n)$

и метода Ньютона $x_{n+1}=x_n-[R_0^T R(x_n)]^{-1}R_0^T \Delta\tau(x_n);$

$\Delta\tau(x_n)=\tau(x_n)-\tau^*;\quad \Delta\tau_0=\tau(x_0)-\tau^*;$

$n$ =0,I,2,...; $\otimes$ - искомое решение.

Таблица 4

Сравнение неявных схем метода Эйлера и метода (9) для модельной задачи при плохом начальном приближении

| | Значения $\lambda$, при которых получено решение | | |
|---|---|---|---|
| | МЭI | МЭ2 | МПр |
| 0.5 | 24.5 | 24 | I4 |
| 0.8 | - | - | I4 |
| 0.9 | - | - | I5 |
| I.0 | - | - | - |

МЭI: $$x_{n+1} = x_n - h\,[R^T(x_{n+1})R(x_{n+1})]^{-1}R^T(x_{n+1})[\tau(x_{n+1}) - \tau^*]$$

$$(p = 0,1\ ;\quad n = 0,1,2,\dots).$$

МЭ2: $$x_{n+1} = x_n - h\,[R_0^T R(x_{n+1})]^{-1}R_0^T[\tau(x_{n+1}) - \tau^*]$$

$$(p = 0,1\ ;\quad n = 0,1,2,\dots)$$

МПр: $$x_{p+1}^{(n)} = x_p^{(n)} - [R_0^T R(x_p^{(n)})]^{-1}(R_0^T[\tau(x_p^{(n)}) - \tau^*] - R_0^T[\tau_0 - \tau^*]\cdot e^{-\lambda_{n+1}},\quad x_0^{(n)} = x_n,\ x_2^{(n)} = x_{n+1}$$

$$(p = 0,1\ ;\quad n = 0,1,2,\dots\ ;\quad \lambda_{n+1} = \lambda_n + h)$$

Литература

I. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.-М.: Физматгиз,1959.

2. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими переменными.-М.: Мир,1975.

3. Холшевников К.В. К учёту возмущений в процессе улучшения орбит.-Вестник ЛГУ, 1973,13,с.153-159.

4. Черницов А.М. Анализ некоторых упрощённых схем определения параметров движения небесных тел.-Астрономия и геодезия, 1975,вып.5, с.6-19.

5. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений.-ДАН, 1953, т.88,№ 4, с. 60I-602.

## Р е з ю м е

А.М.Черницов
С.С.Краев

### ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АНАЛОГОВ МЕТОДА НЬЮТОНА ПРИ УЛУЧШЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТ

Рассматриваются вопросы, связанные с использованием методов ньютоновского типа при улучшении параметров орбит по результатам наблюдений. Показана более высокая эффективность традиционного метода Гаусса по сравнению с методом Ньютона использующим вторые частные производные от измеряемых параметров по определяемым. Получены исходные системы дифференциальных и нелинейных уравнений, позволяющие построить алгоритмы, по крайней мере, не уступающие по своим характеристикам ( скорости сходимости, размерам области сходимости ) методу Гаусса и его демпфированному варианту. В частности, построены итерационные схемы с квадратичной скоростью сходимости, не использующие вторые частные производные.

Табл. –4, рис. –I, библиогр. –5 назв.

## K o p s a v i l k u m s

A.M.Čerņicovs
S.S.Krajevs

### PAR ŅŪTONA METODES ANALOGU PIELIETOŠANAS EFEKTIVITĀTI PIE ORBĪTU PARAMETRU UZLABOŠANAS.

Darbā aplūkotas Ņūtona tipa metodes orbītu parametru uzlabošanai pēc novērojumiem. Konstruētas nelineāras vienādojumu sistēmas, kas ļauj izveidot algoritmus, kuri pēc konvergences ātruma un konvergences apgabala lieluma līdzvērtīgi Gausa metodes algoritmiem. Izveidotas iterācijas shēmas ar kvadrātisku konverģences ātrumu, un kurām nav nepieciešams izskaitļot otrās kārtas parciālos atvasinājumus.

S u m m a r y

A.Chernitsov
S.Kraev

ON THE EFFICIENCY OF NEWTON METHOD'S ANALOGUES IN THE ORBITAL PARAMETER IMPROVEMENT PROBLEM.

This paper relates to the use of Newton-type methods in the orbital parameter improvement problem. Higher efficiency of the traditional Gauss method,as compared with the Newton method using second partial derivatives from measured parameters on improved ones is shown. Original systems of differential and non-linear equations were obtained which allow to construct algorithms having properties (convergence rate, convergence set dimensions),at least non-inferiour tho those of the Gauss method and its damped version. In particular,interative schemes with quadratic convergences rate not using second partial derivatives were obtained.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 521.35:629.195.I

Р.А.Зейналов
(ИКИПР АН АзССР)

# ОБ УЛУЧШЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ ИСЗ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С НЕТОЧНЫМИ МОМЕНТАМИ ВРЕМЕНИ

Задача улучшения орбит небесных тел решается с помощью многих различных,как классических,так и современных методов,которые в основном различаются выбором улучшаемых параметров и систем координат и учетом некоторых особенностей движения объектов.Так как средне-суточные движения планет и комет малы,то ошибка фиксации момента времени не имела практического значения. Поэтому при разработке классических методов улучшения орбит указанных тел ошибка времени не учитывалась.

Для случая ИСЗ, средне-суточные движения которых весьма велики, ошибки фиксации времени имеют существенное значение. Учитывая указанную особенность движения ИСЗ в [1] разработан метод для улучшения орбит ИСЗ с учетом ошибки времени. Здесь наряду с поправками к элементам в условные уравнения введены и поправки к моментам времени. Сущность метода заключается в выборе новой системы координат, при использовании которой одно из условных уравнений, соответствующих моменту времени $t$ не содержит поправки к моменту наблюдения. Эта дополнительная поправка $\Delta t$ входит только во второе условное уравнение. Возникает вопрос о том, можно ли только по условным уравнениям, свободным от поправок времени, улучшать орбиты ИСЗ и с какой точностью. Рассмотрение этого вопроса и является нашей ближайшей задачей.

## Условные уравнения

Воспользуемся векторным равенством

$$\bar{\rho} = \bar{r} - \bar{R} \tag{I}$$

где $\bar{\rho}(\xi,\eta,\zeta)$, $\bar{r}(x,y,z)$ и $\bar{R}(X,Y,Z)$ – вектор положения ИСЗ относительно наблюдателя, векторы положения ИСЗ и наблюдателя относительно центра инерции Земли соответственно. Последние векторы отнесены к неподвижной геоцентрической экваториальной прямоугольной системе.

Очевидно, что $\bar{\rho}$ – функция элементов орбиты ИСЗ, сферических координат наблюдателя и времени. Варьируя (I) и допуская, что $\Delta\bar{R}$ пренебрежимо мала, имеем

$$\overline{\Delta\rho} = \overline{\Delta r} + \dot{\bar{\rho}}\,\Delta t, \tag{2}$$

где

$$\overline{\Delta r} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \bar{r}}{\partial E_i}\,\Delta E_i, \tag{3}$$

а $\Delta E_i$ – ошибка элементов орбиты.

В вспомогательной системе координат с началом в расчетной точке положения ИСЗ и с осями, направленными по радиусу-вектору $\bar{\rho}$, касательной к суточной параллели и касательной к кругу склонения, формула (2) получает вид

$$\Delta\rho\,\bar{j}_\rho + \rho\cos\delta\,\Delta\alpha\,\bar{j}_\alpha + \rho\,\Delta\delta\,\bar{j}_\delta = \overline{\Delta r} + \dot{\bar{\rho}}\,\Delta t, \tag{4}$$

где орты определяются формулами

$$\bar{j}_\rho = \frac{\bar{\rho}}{\rho}, \quad \bar{j}_\alpha = \frac{[\bar{j}_J, \bar{\rho}]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad \bar{j}_\delta = [\bar{j}_\rho, \bar{j}_\alpha], \tag{5}$$

а $\bar{j}_J$ является единичным вектором, направленным по оси $J$.

В формуле (4) $\Delta\rho$ и $\Delta t$ являются неизвестными, а $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ – известными отклонениями вычисленных положений ИСЗ от наблюденных. Формула (4) лежит в основе задачи улучшения орбит ИСЗ и связывает подлежащие определению поправки элементов орбиты ИСЗ и времени с $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$.

Если выбрать единичные векторы [I]

$$\bar{j}_g = \frac{[\bar{\rho}, \dot{\bar{\rho}}]}{\rho v}, \quad \bar{j}_G = [\bar{j}_g, \bar{j}_\rho] \tag{6}$$

и образовать вторую вспомогательную систему координат с тем же началом и осями по единичным векторам $\bar{j}_\rho$, $\bar{j}_g$ и $\bar{j}_G$, то векторному равенству (4) в этой системе будут соответствовать скалярные соотношения

$$\left.\begin{aligned} \rho\Delta g &= (\bar{j}_g, \Delta\bar{r}), \\ \rho\Delta G &= (\bar{j}_G, \Delta\bar{r}) + v\Delta t, \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

являющиеся проекциями (4) на $\bar{j}_g$ и $\bar{j}_G$.

Третье соотношение, т.е. проекция (4), на $\bar{j}_\rho$ не представляет интереса, поскольку оно содержит неизвестную $\Delta\rho$.

Величина $v$, входящая в (6) и (7), является составляющей скорости $\dot{\bar{\rho}}$ по перпендикуляру к вектору $\bar{\rho}$.

$\Delta g$ и $\Delta G$ в формулах (7) выражаются через $\Delta\delta$ и $\Delta\alpha$ следующим образом

$$\left.\begin{aligned} \Delta g &= \cos\psi\Delta\delta - \sin\psi\cos\delta\Delta\alpha, \\ \Delta G &= \sin\psi\Delta\delta + \cos\psi\cos\delta\Delta\alpha, \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

где угол $\psi$ определяется формулами

$$\cos\psi = \frac{\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}}{v\sqrt{\xi^2+\eta^2}}, \quad \sin\psi = \frac{\rho\dot{J} - J\dot{\rho}}{v\sqrt{\xi^2+\eta^2}}. \qquad (9)$$

Соотношения (8) говорят о том, что переход от первой системы координат ко второй осуществляется поворотом вокруг оси, направленной по единичному вектору $\bar{j}_\rho$ под углом $\psi$, определяемым формулами (9).

Таким образом, на первое условное уравнение в (7), как видно, ошибка времени $\Delta t$ не влияет и в принципе его можно использовать для определения поправок к элементам орбиты ИСЗ, а второе уравнение - для определения поправок к приближенным моментам времени.

## Ковариационная матрица

Первое уравнение (7) с учетом (6) и (3) напишем в форме

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{\rho^2 v}\left([\bar{\rho}, \dot{\bar{\rho}}], \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial E_i}\right)\Delta E_i = \Delta g. \qquad (10)$$

Учитывая, что ошибки текущих элементов $\Delta E_i$ выражаются через ошибки элементов $\Delta E_{oj}$ для эпохи $t_o$ формулой

$$\Delta E_i = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial E_i}{\partial E_{oj}} \Delta E_{oj}, \quad (i=1,2,\dots,6), \qquad (11)$$

условное уравнение (10) получит окончательный вид

$$\sum_{j=1}^{6} \tilde{g}_j \Delta E_{oj} = \Delta g, \qquad (12)$$

где

$$\tilde{g}_j = \sum_{i=1}^{6} g_i \frac{\partial E_i}{\partial E_{oj}}, \qquad (13)$$

$$g_i = \frac{1}{\rho^2 v}\left([\bar{\rho}, \dot{\bar{\rho}}], \frac{\partial \bar{r}}{\partial E_i}\right). \qquad (14)$$

При наличии $n \geqslant 6$ наблюдений матрица условных уравнений (12) будет

$$A = \|\tilde{g}_{kj}\|, \quad (j=1,2,\dots,6;\ k=1,2,\dots,n),$$

а матрица системы нормальных уравнений –

$$N = A^* P A,$$

где $*$ – символ транспонирования, $P$ – матрица весов.

Тогда ковариационная матрица определяется следующим образом [2]

$$K = N^{-1}\sigma_0^2,$$

где $\sigma_0$ – средне-квадратическая ошибка единицы веса. Матрица $K$ – симметричная ранга $6$, ее диагональные элементы представляют собой квадраты средне-квадратических ошибок $\sigma_j^2$ соответствующих поправок $\Delta E_{oj}$, а внедиагональные элементы связаны с коэффициентами корреляции $r_{ij}$ между соответствующими поправками, т.е. имеют вид $\sigma_i \sigma_j r_{ij}$. Если значение $r_{ij}$ близко к единице, то это означает, что между соответствующими поправками имеется взаимная зависимость.

## Выбор улучшаемых параметров орбиты.

Известно, что за исправляемые элементы $E_i$ могут быть приняты любые шесть величин, вполне определяющих Кеплерово движение [3]. Чтобы избежать появления особенностей при малых орбитальных наклонах и эксцентриситетах, берем следующие комбинации, использованные в работе [4]:

$$a,\ p = \sigma\sin\Omega,\ q = \sigma\cos\Omega,\ h = e\sin\pi,\ l = e\cos\pi,\ \lambda_0 = M_0 + \pi, \qquad (15)$$

где

$$\sigma = \sin\frac{i}{2}, \quad \pi = \Omega + \omega.$$

Используем следующую систему координат. За основную плоскость берем плоскость орбиты ИСЗ. Ось $\bar{C}$ направим в точку орбиты на угловом расстоянии $\Omega$ по часовой стрелке от точки узла, а ось $\bar{S}$ по орбите перпендикулярно к оси $\bar{C}$. Тогда координаты векторов $\bar{r}$ и $\bar{\dot{r}}$ будут выражаться

$$\left.\begin{aligned} x&=(1-2p^2)c+2pqs, & \dot{x}&=(1-2p^2)\dot{c}+2pq\dot{s},\\ y&=2pqc+(1-2q^2)s, & \dot{y}&=2pq\dot{c}+(1-2q^2)\dot{s},\\ z&=-2p\eta c+2q\eta s, & \dot{z}&=-2p\eta\dot{c}+2q\eta\dot{s}, \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

причем

$$\left.\begin{aligned} c&=a\left(\cos\hat{E}-l+\frac{h}{1+\xi}H\right), \quad \dot{c}=\frac{na^2}{r}\left(-\sin\hat{E}+\frac{h}{1+\xi}K\right),\\ s&=a\left(\sin\hat{E}-h-\frac{l}{1+\xi}H\right), \quad \dot{s}=\frac{na^2}{r}\left(\cos\hat{E}-\frac{l}{1+\xi}K\right),\\ \xi&=\sqrt{1-h^2-l^2}, \quad \eta=\sqrt{1-p^2-q^2}, \quad n=ka^{-3/2}, \quad r=a(1-K) \end{aligned}\right\} (17)$$

где через $H$ и $K$ обозначены

$$H=l\sin\hat{E}-h\cos\hat{E}, \quad K=l\cos\hat{E}+h\sin\hat{E}, \quad \hat{E}=E+\pi.$$

Здесь $\hat{E}$ является модифицированной эксцентрической аномалией и находится из уравнения Кеплера, которое в данном случае будет

$$\hat{E}-H=\lambda, \qquad (18)$$

где

$$\lambda=M+\pi. \qquad (19)$$

Ограничимся только вековыми возмущениями в угловых элементах, т.е.

$$(a=a_0,\ e=e_0,\ i=i_0),$$

$$\Omega=\Omega_0+\Omega'(t-t_0), \quad \omega=\omega_0+\omega'(t-t_0), \quad M_0=M_{00}+M_0'(t-t_0),$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Omega'&=\frac{3}{2}C_{20}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\xi^{-4}\cos i\cdot n,\\ \omega'&=-\frac{3}{4}C_{20}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\xi^{-4}(5\cos^2 i-1)\cdot n, \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} M_0' &= -\frac{3}{4} C_{20}\left(\frac{a_э}{a}\right)^2 \xi^{-3}(3\cos^2 i - 1)\cdot n, \\ \cos i &= 1 - 2(p_0^2 + q_0^2), \end{aligned}\right\}$$

$a_э$ - экваториальный радиус Земли, $C_{20}$ - коэффициент при второй зональной гармонике потенциала притяжения. Тогда элементы (I5) будут выражаться через элементы для эпохи $t_0$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 \\ p &= p_0 \cos\Omega'(t-t_0) + q_0 \sin\Omega'(t-t_0), \\ q &= -p_0 \sin\Omega'(t-t_0) + q_0 \cos\Omega'(t-t_0), \\ h &= h_0 \cos\pi'(t-t_0) + l_0 \sin\pi'(t-t_0), \\ l &= -h_0 \sin\pi'(t-t_0) + l_0 \cos\pi'(t-t_0), \\ \lambda_0 &= \lambda_{00} + \lambda'(t-t_0), \end{aligned}\right\},$$

где

$$\lambda_{00} = M_{00} + \pi_0, \quad \lambda' = M_0' + \pi', \quad \pi' = \Omega' + \omega'.$$

Правая часть уравнения Кеплера (I8) в рассматриваемом случае будет

$$\lambda = \lambda_0 + n(t-t_0).$$

Частные производные координат (I6) по новым элементам $\frac{\partial r}{\partial E_i}$ и возмущенных элементов по элементам для эпохи $t_0$, т.е. $\frac{\partial E_i}{\partial E_{0j}}$, входящие в коэффициенты (I3), и (I4) соответственно мы приводить не будем, их выражения получены в работе [4].

## Численные примеры

Для проверки возможностей улучшения орбит ИСЗ только по условным уравнениям, свободным от ошибки времени были вычислены модельные примеры (сорок вариантов).

В качестве наблюдательных станций были выбраны точки на земной поверхности, условно соответствующие городам: Абастумани, Казани, Киеву, Китабу, Николаеву, Пулково и Ташкенту.

Были выбраны фиктивные спутники с системами элементов:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 8378{,}155;\ 12378{,}155;\ 26000;\ 40000\,(\text{км}) \\ e_0 &= 0{,}001, \\ i_0 &= 60^\circ;\ 75^\circ;\ 90^\circ;\ 105^\circ;\ 120^\circ, \\ \Omega_0 &= 90^\circ, \\ \omega_0 &= 45^\circ;\ 135; \\ M_{00} &= 0^\circ; \qquad t_0 = 1981 \text{ Март } 10,\ 0 \text{ часов U.T.} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

При составлении фиктивных наблюдений на основе элементов (19) за шаг времени была принята 1 минута, начальный момент интервала наблюдений 1981, март $5{,}0^h$ U.T., конечный - 1981, март $15{,}0^h$ U.T.

Все наблюдения считались равноточными.

Для каждого момента времени сначала проверялись условия видимости ИСЗ (ночи на станции наблюдения, нахождения ИСЗ над горизонтом станции и освещенности ИСЗ Солнцем), после чего для моментов, удовлетворяющих этим условиям составлялись условные уравнения (12) с нулевыми правыми частями. Для каждого такого условного уравнения составлялась нормальная система уравнений, затем такие нормальные системы суммировались, давая полную систему нормальных уравнений, соответствующих всем наблюдениям на рассматриваемом интервале времени.

За значение ошибки единицы веса $\sigma_0$ была принята 1 секунда дуги. Далее вычислялись ошибки неизвестных по известным формулам метода наименьших квадратов и составлялась матрица коэффициентов корреляции.

Результаты вычислений по первому варианту приводятся в одной комбинированной матрице (см. табл. I), в которой по главной диагонали помещены средние квадратические ошибки неизвестных поправок в секундах дуги ( $\Delta a$ - в метрах), а в верхней и нижней ее частях (относительно главной диагонали) - соответственно элементы матрицы нормализованной нормальной системы и коэффициенты корреляция (безразмерные величины).

В данном примере было использовано всего 6609 наблюдений ИСЗ.

Таблица показывает, что система нормальных уравнений

Таблица I

Коэффициенты нормализованной нормальной системы (выше диагонали), средние ошибки (по диагонали) и коэффициенты корреляции (ниже диагонали)

| $\Delta E_{ij}$ | $\Delta a_0$ | $\Delta p_0$ | $\Delta q_0$ | $\Delta h_0$ | $\Delta l_0$ | $\Delta \lambda_{00}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta a_0$ | 0.0227(м) | 0.I223 | -0.00I8 | 0.0333 | 0.I045 | -0.0005 |
| $\Delta p_0$ | -0.I626 | 0".0024 | 0.0588 | -0.090I | -0.2457 | -0.0532 |
| $\Delta q_0$ | 0.02I2 | -0.049I | 0".0II7 | -0.3802 | 0.0763 | -0.8872 |
| $\Delta h_0$ | -0.0744 | 0.I286 | -0.08I9 | 0".0242 | -0.I583 | 0.4602 |
| $\Delta l_0$ | -0.I522 | 0.2846 | -0.0657 | 0.I828 | 0".0I36 | -0.0640 |
| $\Delta \lambda_{00}$ | 0.027I | -0.0386 | 0.8679 | -0.2950 | -0.06I7 | 0".3865 |

достаточно хорошо обусловлена: имеется лишь одна значительная корреляционная связь (между поправками $\Delta\lambda_{00}$ и $\Delta q_0$ ),для которой коэффициент корреляции достигает величины 0,868, остальные коэффициенты корреляции по абсолютной величине меньше 0,300.

Поправки параметров орбиты определяются с достаточно малыми среднеквадратическими ошибками. Полученные результаты говорят о том, что позиционные наблюдения ИСЗ,в которых с высокой точностью определяются координаты на небесной сфере, но время известно менее точно (например, при фотографировании ИСЗ на длиннофокусных инструментах, не имеющих специальных затворов для точной засечки времени) могут иметь важное значение для получения высокоточных орбит.

Вычисления были проведены на ЭВМ БЭСМ-6 ИТА АН СССР по программе, разработанной автором на языке фортран--Дубна.

## Литература

I. Куликов Д.К., Батраков Ю.В. Метод улучшения орбит искусственных спутников Земли по наблюдениям с приближенными моментами.- Бюлл.Ин-та теоретич.астрон. АН СССР, I960, т.УП, №7(90), с. 554-569.

2. Худсон Д. Статистика для физиков. - М.: Мир, 1967.
3. Субботин Ю.В. Курс небесной механики.-М.-Л.,т.I,1941.
4. Батраков Ю.В.,Никольская Т.К. Формулы для улучшения орбит близких спутников Земли, свободные от особенностей при нулевых наклонах и эксцентриситетах. - Бюлл.Ин-та теоретич.астрон.АН СССР,1981,т.ХУ, № 2 (165), с. 71-75.

## Р е з ю м е

Р.А.Зейналов

### ОБ УЛУЧШЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ ИСЗ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С НЕТОЧНЫМИ МОМЕНТАМИ ВРЕМЕНИ

Исследуется возможность улучшения орбиты ИСЗ по наблюдениям с ошибками времени. На модельном примере показывается,что условные уравнения, свободные от ошибок времени позволяют получить элементы орбиты с достаточной для практики точностью.

## K o p s a v i l k u m s

R.A.Zeinalovs

### PAR ZMP ORBĪTU ELEMENTU UZLABOŠANU PĒC NOVĒROJUMIEM AR NEPRECĪZI ZINĀMIEM LAIKA MOMENTIEM

Darbā tiek pētīta iespēja uzlabot ZMP orbītas elementus pēc novērojumiem ar kļūdainiem laika momentiem. Dots piemērs (modelis), kurā parāda, ka nosacītie vienādojumi, kuri nesatur laika kļūdas, ļauj atrast orbītas elementus ar praksei pietiekamu precizitāti.

## S u m m a r y

R. Zeinalov

**ON IMPROVEMENT OF THE ORBITAL ELEMENTS OF THE SATELLITE USING OBSERVATIONS WITH INACURATE TIME FIXATION**

The possibility of improving orbital elements of an artificial satellite from observations with inacurate time fixation has been investigated. Model computations show that the orbital elements can be obtained with practically sufficient accuracy using only time-free equations of condition.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 521.61

Ю.Х.Жагар,Л.К.Лауцениекс
(АО ЛГУ им.П.Стучки)

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ УТОЧНЕНИЕ ЭФЕМЕРИД ИСЗ

Не все обсерватории, осуществляющие наблюдения ИСЗ, могут быть своевременно обеспечены точными эфемеридами, что значительно затрудняет наблюдения спутников. Имея также в виду,что вычисление эфемерид ИСЗ в экспедиционных обсерваториях, не снабженных достаточно мощными ЭВМ, практически неосуществимо, была исследована возможность уточнения имеющейся неточной эфемериды. Решение этой задачи при помощи номограмм было получено в работе [I].

В настоящей работе предлагается аналитическое решение задачи.

Основной причиной "старения" эфемерид мы считаем погрешности в усредненных значениях вековых возмущений и среднего движения спутника. Предполагаем также, что погрешности эфемериды разложены на следующие составляющие: во-первых, погрешности в плоскости орбиты, характеризуемые временем $\Delta t$ запаздывания или опережения спутником эфемеридных моментов времени, и, во-вторых, погрешности ориентации плоскости орбиты, характеризуемые величиной $\Delta\tau = \Delta(s-\Omega)$, где $s$ - местное звездное время, $\Omega$ - долгота восходящего узла орбиты.

Первая из составляющих погрешности эфемериды может быть учтена введением поправки $\Delta t$ в эфемеридные моменты времени. Однако, вторая составляющая, приводящая к изменениям положения ИСЗ на небесной сфере, не может быть учтена таким же образом. Она в линейном приближении представляется в виде

$$\Delta h = \frac{dh}{d\tau}\Delta\tau\ , \quad \Delta A = \frac{dA}{d\tau}\Delta\tau\ ,$$

где $\Delta h$ , $\Delta A$ - поправки к топоцентрическим горизонтальным координатам точки кульминации (или углового сближения) ИСЗ.

Суть предлагаемого метода заключается в вычислении производных $\frac{dh}{d\tau}$ и $\frac{dA}{d\tau}$ по аргументу $\tau = s - \Omega$ , так как значения $\Delta t$ и $\Delta\tau$ могут быть определены по наблюдениям непосредственно в обсерватории [I] .

Определение функций $h(\tau,\psi),\ A(\tau),\ \psi(\tau)$.

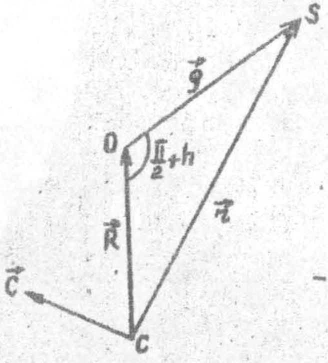

Рис.I.

Рассмотрим треугольник $COS$ (рис.I), где $O$ - обсерватория, $C$ - центр Земли, $S$ - спутник в угловом сближении [2] , $\vec{c}\,(\sin\Omega\sin i, -\cos\Omega\sin i, \cos i)$ - единичный вектор, перпендикулярный плоскости орбиты.

Определим угол $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ при помощи соотношения

$$\sin\psi = \frac{\vec{c}\,\vec{R}}{R}\ . \qquad \text{(I)}$$

Если ИСЗ находится в угловом сближении с обсерваторией [2], [3] (при $\dot{\vec{R}} = 0$), т.е. смешанное произведение

$$[\vec{R}\,\vec{C}\,\vec{r}] = 0\ ,$$

то в этом случае, очевидно, соотношение (I) определяет угол $\psi_s$ между векторами $\vec{R}$ и $\vec{r}$ , т.е. $\psi_s = |\psi|$ .

Из треугольника $COS$ (рис.I) следуют соотношения

$$R + \rho \sin h = r \cos |\psi| ,$$

$$\rho \cos h = r \sin |\psi| , \qquad (2)$$

которые определяют функции $h = h(r, \psi)$ и $\rho = \rho(r, \psi)$.

При анализе зависимости $A = A(\tau)$ необходимо рассматривать 4 частных случая в зависимости от того, находится ли точка углового сближения в восточной половине небесной сферы или в западной половине, и движение спутника происходит в северном направлении или в южном направлении. Случаи $i \leq \frac{\pi}{2}$ и $i > \frac{\pi}{2}$ отдельно рассматривать нет необходимости, так как они сводятся к уже перечисленным случаям.

Рассмотрим для определенности лишь один случай, а именно случай, (см.рис.2), когда точка углового сближения находится в восточной половине небесной сферы и движение ИСЗ происходит в северном направлении.

На рис.2 обозначено:

$N$ - северный полюс,

$\Pi$ - проекция полюса орбиты на поверхность Земли,

$O$ - обсерватория,

$S$ - проекция ИСЗ на поверхность Земли в момент углового сближения.

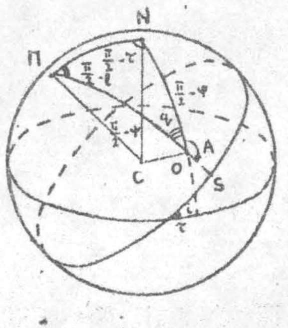


Рис.2.

Из приведенного рисунка видно, что азимут точки углового сближения $A$ определяется формулой

$$A = \pi - q , \qquad (3)$$

где $q$ - угол при вершине $O$ в сферическом треугольнике $\Pi O N$.

Применяя теоремы синусов и косинусов [4], имеем

$$\cos q = \frac{\cos i - \sin\psi \sin\varphi}{\cos\psi \cos\varphi},$$

$$\sin q = \frac{\sin i \cos\tau}{\cos\psi}. \qquad (4)$$

формулы (3) и (4) определяют азимут углового сближения как функцию $A = A(\psi, \tau)$.
Согласно теореме косинусов имеем также

$$\sin\psi = \sin\varphi \cos i - \cos\varphi \sin i \sin\tau, \qquad (5)$$

что позволяет из формул (4) исключить угол $\psi$.

Отметим, что в общем случае азимут точки углового сближения можно вычислить по одной из следующих формул

$$\begin{aligned} A &= \pi - q, && \text{если} \quad \psi > 0,\ |\tau| < \tfrac{\pi}{2}, \\ A &= \pi + q, && \text{если} \quad \psi > 0,\ |\tau| > \tfrac{\pi}{2}, \\ A &= 2\pi - q, && \text{если} \quad \psi < 0,\ |\tau| < \tfrac{\pi}{2}, \\ A &= 2\pi + q, && \text{если} \quad \psi < 0,\ |\tau| > \tfrac{\pi}{2}, \end{aligned} \qquad (3')$$

где угол $q \in [0, \pi]$ определяется первой из формул (4).

Вторая из формул (4) справедлива лишь при $|\tau| < \frac{\pi}{2}$.

### Вычисление производных $\frac{dh}{dt}$ и $\frac{dA}{d\tau}$.

Из формул (2) находим

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\psi}\sin h + \rho\cosh\frac{dh}{d\psi} &= -r\sin|\psi|\,\mathrm{sign}\,\psi + \frac{dr}{d\psi}\cos|\psi| \\ \frac{d\rho}{d\psi}\cos h - \rho\sin h\frac{dh}{d\psi} &= r\cos|\psi|\,\mathrm{sign}\,\psi + \frac{dr}{d\psi}\sin|\psi| \end{aligned} \qquad (6)$$

Исключая из формул (6) производную $\frac{d\rho}{d\psi}$, находим, что

$$\rho\frac{dh}{d\psi} = -r\,\mathrm{sign}\,\psi\sin(h + |\psi|) + \frac{dr}{d\psi}\cos(h + |\psi|).$$

С учетом (2) исключая $\varrho$ имеем

$$\frac{dh}{d\psi}=-\frac{\sin(h+|\psi|)\cos h}{\sin|\psi|}\,\mathrm{sign}\,\psi+\frac{\cos(h+|\psi|)\cos h}{r\sin|\psi|}\,\frac{dr}{d\psi}. \qquad (7)$$

Умножая (7) на производную $\frac{d\psi}{d\tau}$ и учитывая, что из треугольника $COS$ (см.рис.I) следует соотношение

$$r\cos(h+|\psi|)=R\cos h,$$

приходим к следующему виду для производной $\frac{dh}{d\tau}$, т.е.

$$\frac{dh}{d\tau}=-\frac{\sin(h+|\psi|)\cos h}{\sin\psi}\,\frac{d\psi}{d\tau}+\frac{\cos^2(h+|\psi|)}{R\sin|\psi|}\,\frac{dr}{d\tau}. \qquad (8)$$

Согласно (3) и (4) имеем

$$\frac{dA}{d\tau}=-\frac{dq}{d\tau}=-\frac{\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos q}{\cos\psi\cos\varphi\sin q}\,\frac{d\psi}{d\tau}.$$

Учитывая, что согласно (5)

$$\frac{d\psi}{d\tau}=-\frac{\cos\varphi\sin i\cos\tau}{\cos\psi}, \qquad (9')$$

и с учетом (4) и (3′)

$$\frac{d\psi}{d\tau}=-\cos\varphi\sin A\,\mathrm{sign}\,\psi, \qquad (9)$$

приходим к окончательной формуле для производной $\frac{dA}{d\tau}$ в виде

$$\frac{dA}{d\tau}=\sin\varphi+\cos\varphi\cos A\,\mathrm{tg}\,|\psi|, \qquad (10)$$

которая справедлива для всех перечисленных выше частных случаев.

Формула (9) позволяет также преобразовать выражение (8) и привести его к следующему виду

$$\frac{dh}{d\tau}=\frac{\sin(h+|\psi|)\cos h\cos\varphi\sin A}{\sin|\psi|}+\frac{\cos^2(h+|\psi|)}{R\sin|\psi|}\,\frac{dr}{d\tau}. \qquad (11)$$

Вычисление производных $\frac{dr}{d\tau}$ и $\frac{dl}{d\tau}$.

Для круговых орбит $\frac{dr}{d\tau}=0$ и в формуле (II) достаточно рассматривать только первое слагаемое. При этом угол $|\psi|$ может быть вычислен по формуле [5]

$$|\psi| = \arccos\left(\frac{R}{a}\cos h\right) - h\,,$$

где $a$ - радиус круговой орбиты.

Если эксцентриситетом орбиты пренебречь нельзя, то необходимо вычислять также $\frac{dr}{d\tau}$.

Геоцентрическое расстояние $r$ до ИСЗ в точке углового сближения с данной обсерваторией можно представить в виде [6]

$$r = a\left(1 - e\,\frac{F_1 + eF_4}{eF_1 + F_4}\right); \tag{I2}$$

где использованы обозначения

$$F_1 = \frac{\vec{R}\vec{P}}{R},\ F_2 = \frac{\vec{R}\vec{Q}}{R},\ F_3 = \frac{\vec{R}\vec{C}}{R},\ F_4 = \sqrt{1 - F_3^2}.$$

Согласно (I2)

$$\frac{dr}{d\tau} = -ae(1-e^2)\,\frac{\dot{F}_1 F_4 - F_1\dot{F}_4}{(eF_1 + F_4)^2}\,, \tag{I3}$$

где точкой обозначено дифференцирование по $\tau$.

Если согласно рис.2 ввести орбитальную долготу $l$, то

$$\begin{aligned} F_1 &= \cos\psi\cos(l-\omega),\\ F_2 &= \cos\psi\sin(l-\omega),\\ F_3 &= \sin\psi,\ \ F_4 = \cos\psi, \end{aligned} \tag{I4}$$

откуда

$$\dot F_1 = -\sin\psi\cos(l-\omega)\frac{d\psi}{d\tau} - \cos\psi\sin(l-\omega)\frac{dl}{d\tau}$$

$$\dot F_4 = -\sin\psi\,\frac{d\psi}{d\tau},$$

$$\dot F_1 F_4 - F_1 \dot F_4 = F_2 F_4 \frac{dl}{d\tau}.$$

Таким образом, (I3) можно переписать в виде

$$\frac{d\eta}{d\tau} = ae(1-e^2)\frac{F_2 F_4}{(eF_1+F_4)^2}\,\frac{dl}{d\tau}. \tag{I5}$$

Из сферического треугольника $A\Pi N$ (см.рис.2) следует, что

$$\cos\psi\sin l = \sin\psi\sin i + \cos\psi\cos i\sin\tau, \tag{I6}$$

откуда с учетом (9′)

$$\frac{dl}{d\tau} = \cos i - \sin i\,\sin l\,tg\,\psi.$$

Исключая долготу $l$ при помощи (I6) имеем

$$\frac{dl}{d\tau} = \frac{\cos i - \sin\psi\sin\psi}{\cos^2\psi} \tag{I7}$$

Подставляя (I7) в (I5) с учетом (I4) для производной $\frac{d\eta}{d\tau}$ находим

$$\frac{d\eta}{d\tau} = ae(1-e^2)\frac{F_2}{F_4}\,\frac{\cos i - F_3\sin\psi}{(eF_1+F_4)^2}. \tag{I8}$$

### Численные примеры

Чтобы проиллюстрировать возможность практического применения вышеизложенного и получить некоторые численные характеристики, были проведены численные эксперименты со спутниками *Geos-A* (650890I) и ИКБ - I300(8I0750I). Для упомянутых спутников кроме эфемерид, т.е. моментов углового сближения и соответствующих азимутов $A$ и высот

$h$ , для обсерватории Рига вычислялись также производные $\frac{dA}{d\tau}$ и $\frac{dh}{d\tau}$ по формулам (I), (10), (11), (18). Эфемериды были вычислены с учетом вековых возмущений при варьированных значениях долготы восходящего узла $\Omega$ и средней аномалии в эпоху $M_0$ .

На рис.3 представлены значения $\frac{dA}{d\tau}$ и $\frac{dh}{d\tau}$ в зависимости от изменения долготы восходящего узла $\Omega$ для спутника *Geos-A* (эпоха элементов 44918.0 *MJD* ) для двух различных прохождений над станцией наблюдений 22 ноября 1981 года.

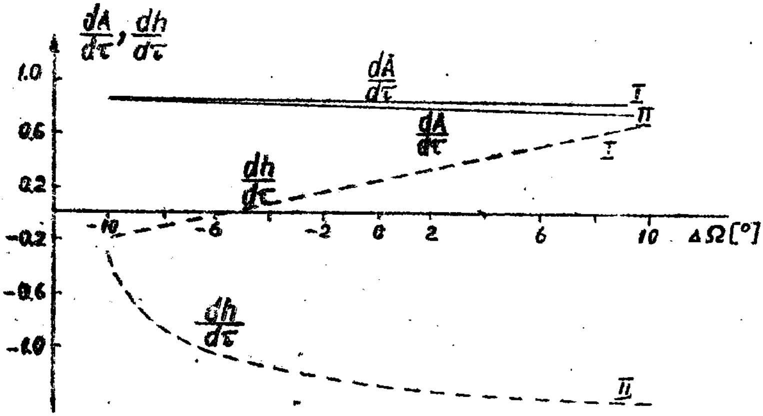


Рис.3.

Графики показывают, что при изменении долготы восходящего узла от $\Omega$ - $10^0$ до $\Omega$ + $10^0$ производные $\frac{dA}{d\tau}$ изменяются в пределах, не превышающих $0\overset{\circ}{.}1$, а производные $\frac{dh}{d\tau}$ меняются на величины до $1^0$, притом разные прохождения обладают неодинаковым характером изменений. Это следует также из формул (10) и (11). Так как в моменты углового сближения угол $\psi$ сравнительно небольшой, то значения производной $\frac{dA}{d\tau}$ действительно должны изменяться в меньших пределах, чем для $\frac{dh}{d\tau}$.

Следует также отметить, что производная $\frac{dh}{d\tau}$ при фиксированной высоте сближения $h$ зависит от азимута сближения $A$. Влияние слагаемого, пропорционального $\frac{dr}{d\tau}$ в формуле (II), весьма несущественно для почти круговых орбит геодезических ИСЗ. Кроме того, вычисления по формулам (I0) и (II) нельзя проводить при близзенитных прохождениях, когда угол $\psi$ близок к нулю.

На рис.4 представлены изменения азимута $A$ и высоты $h$ углового сближения спутника *Geos-A* при различных значениях аргумента $\tau$ (т.е. $\Delta\Omega$ ).

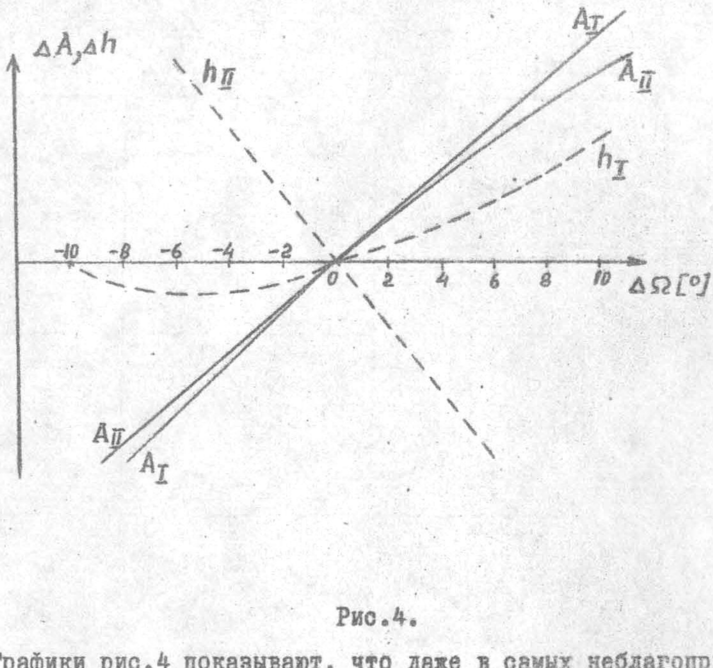


Рис.4.

Графики рис.4 показывают, что даже в самых неблагоприятных случаях при помощи производных $\frac{dA}{d\tau}$ и $\frac{dh}{d\tau}$ можно достаточно эффективно уточнять эфемериды ИСЗ. Погрешность уточненного эфемеридного положения спутника не превышает $1^{\circ}$, когда аргумент $\tau$ отклоняется от своего первоначального значения до $\pm 3^{\circ}$, а в некоторых случаях и много больше.

Аналогичные результаты вычислений для спутника ИКБ - I300 (эпоха элементов 44982.703742 *MJD* ) в трех прохождениях 15 января 1982 года приведены в таблицах 1 и 2. В таблице 1 представлены результаты при варьировании долготы восходящего узла $\Omega$ с шагом $1^\circ$, в таблице 2 – при варьировании средней аномалии в эпоху $M_0$ с шагом $14^\circ.1408$, что соответствует изменению $\tau$ на $1^\circ$.

В приведенных таблицах

$$A_{np} = A + \frac{dA}{d\tau}\Delta\tau \ , \quad h_{np} + \frac{dh}{d\tau}\Delta\tau \ ,$$

где $\Delta\tau = 1^\circ$.

Таблица 1.

| $A\,[^\circ]$ | $\frac{dA}{d\tau}$ | $A_{np}\,[^\circ]$ | $h\,[^\circ]$ | $\frac{dh}{d\tau}$ | $h_{np}\,[^\circ]$ | $\Delta t_c\,[сек]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 72.7 | 0.84 | 73.54 | 73.8 | 4.32 | 78.12 | |
| 73.6 | 0.84 | 74.77 | 78.2 | 4.52 | 82.72 | + 2.7 |
| 74.5 | 0.84 | 75.34 | 82.6 | 4.74 | 87.34 | 2.6 |
| 75.5 | 0.84 | 76.34 | 87.2 | 5.14 | 92.34 *) | 2.5 |
| 256.3 | 0.84 | 257.14 | 88.3 | -3.75 | 84.55 *) | 2.1 |
| 257.0 | 0.84 | 257.84 | 83.7 | -4.32 | 79.38 | 2.3 |
| 95.2 | 0.83 | 96.03 | 49.6 | 2.90 | 52.50 | |
| 96.0 | 0.83 | 96.83 | 52.6 | 3.09 | 55.69 | 0.9 |
| 96.8 | 0.83 | 97.63 | 55.8 | 3.28 | 59.08 | 1.1 |
| 97.7 | 0.83 | 98.53 | 59.2 | 3.46 | 62.66 | 1.2 |
| 98.5 | 0.83 | 99.33 | 62.7 | 3.64 | 66.34 | 1.4 |
| 99.3 | 0.83 | 100.13 | 66.6 | 3.81 | 70.41 | 1.5 |
| 297.0 | 0.87 | 297.87 | 39.9 | -2.08 | 37.82 | |
| 297.9 | 0.87 | 298.77 | 37.9 | -1.95 | 35.95 | 4.4 |
| 298.8 | 0.88 | 299.68 | 36.1 | -1.83 | 34.27 | 4.6 |
| 299.7 | 0.88 | 300.58 | 34.4 | -1.72 | 32.68 | 4.8 |
| 300.6 | 0.88 | 301.48 | 32.7 | -1.61 | 31.09 | 5.0 |
| 301.5 | 0.89 | 302.39 | 31.1 | -1.52 | 29.58 | 4.9 |

Величина $\Delta t_c$ является изменением момента прохождения спутником через точку углового сближения. Звездочкой отмечены результаты вычислений в окрестностях зенита.

Из приведенных таблиц видно, что при изменении $\Delta\tau$ на $1^\circ$ прогнозированные значения $A_{np}$ и $h_{np}$ отличаются от вычисленных значений $A$ и $h$ не более, чем на $0^\circ.1 \div 0^\circ.2$

(см.также [7] ).

Эксперименты показывают, что вычисленные с помощью формул

$$\Delta\tau_A = \frac{A_{\Omega} - A_{\Omega+\Delta\Omega}}{\frac{dA}{d\tau}}, \quad \Delta\tau_h = \frac{h_{\Omega} - h_{\Omega+\Delta\Omega}}{\frac{dh}{d\tau}},$$

где $A_{\Omega}$ и $h_{\Omega}$ обозначают вычисленные значения азимута $A$ и высоты $h$ углового сближения при долготе восходящего узла $\Omega$ , а $A_{\Omega+\Delta\Omega}$ и $h_{\Omega+\Delta\Omega}$ - при долготе восходящего узла $\Omega+\Delta\Omega$ , значения $\Delta\tau_A$ или $\Delta\tau_h$ позволяют улучшать эфемериду ИСЗ с точностью до $1^{\circ}.5$, если их значения по модулю не превышают $2^{\circ} \div 3^{\circ}$. Для изменений средней аномалии $M_o$ подобный предел увеличится в $n$ раз (где $n$ - среднее движение ИСЗ).

Следует отметить, что при изменении средней аномалии $M_o$ в соответствующих пределах сильнее изменяются

Таблица 2.

| $A\,[^{\circ}]$ | $\frac{dA}{d\tau}$ | $A_{np}\,[^{\circ}]$ | $h\,[^{\circ}]$ | $\frac{dh}{d\tau}$ | $h_{np}\,[^{\circ}]$ | $\Delta t_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 70.9 | 0.85 | 71.75 | 65.7 | 3.89 | 69.59 | |
| 71.8 | 0.85 | 72.65 | 69.6 | 4.11 | 73.71 | $+4^m3^s.2$ |
| 72.7 | 0.84 | 73.54 | 73.8 | 4.32 | 78.12 | 3.0 |
| 73.6 | 0.84 | 74.44 | 78.2 | 4.52 | 82.72 | 2.9 |
| 74.5 | 0.84 | 75.34 | 82.6 | 4.74 | 87.34 *) | 2.8 |
| 75.4 | 0.84 | 76.24 | 87.3 | 5.06 | 92.36 | 2.5 |
| 256.3 | 0.84 | 257.14 | 88.2 | -3.76 | 84.44 *) | 2.5 |
| 93.5 | 0.83 | 94.33 | 44.0 | 2.56 | 46.56 | |
| 94.4 | 0.83 | 95.23 | 46.7 | 2.72 | 49.42 | 4 0.8 |
| 95.2 | 0.83 | 96.03 | 49.5 | 2.90 | 52.40 | 1.0 |
| 96.0 | 0.83 | 96.83 | 52.6 | 3.09 | 55.39 | 1.1 |
| 96.8 | 0.83 | 97.63 | 55.8 | 3.28 | 59.08 | 1.2 |
| 97.7 | 0.83 | 98.53 | 59.2 | 3.46 | 62.66 | 1.3 |
| 98.5 | 0.83 | 99.33 | 62.8 | 3.65 | 66.45 | 1.5 |
| 295.2 | 0.87 | 296.07 | 44.5 | -2.38 | 42.12 | |
| 296.1 | 0.87 | 296.97 | 42.1 | -2.23 | 39.87 | 4 4.2 |
| 297.0 | 0.87 | 297.87 | 39.9 | -2.08 | 37.82 | 4.5 |
| 297.9 | 0.87 | 298.77 | 37.9 | -1.95 | 35.95 | 4.6 |
| 298.8 | 0.88 | 299.68 | 36.1 | -1.83 | 34.27 | 4.7 |
| 299.7 | 0.88 | 300.58 | 34.4 | -1.71 | 32.69 | 4.9 |
| 300.6 | 0.88 | 301.48 | 32.7 | -1.61 | 31.09 | 5.2 |

моменты $t_c$ прохождения спутника через точку углового сближения (см.таблицы 1 и 2).

В заключение приведем некоторые соображения о том, как проводить наблюдения по неточным эфемеридам, т.е. эфемеридам, вычисленным по "устаревшим" элементам орбиты.

Во-первых, изменяя значения $\Delta\tau$ ,вычисляется область поиска спутника $A_n$ , $h_n$ по формулам

$$A_n = A_{эф} + \frac{dA}{d\tau}\Delta\tau, \quad h_n = h_{эф} + \frac{dh}{d\tau}\Delta\tau. \qquad (19)$$

Затем осуществляется сканирование по области поиска и фиксируется то значение $\Delta\tau^*$, при котором поиск оказался успешным.

Формулы (19) позволяют определить искомое значение $\Delta\tau^*$ независимо: как по уточненным значениям азимута $A$ так и высоты $h$ углового сближения ИСЗ. При этом согласно рис.3 производная $\frac{dA}{d\tau}$ меняется в значительно меньшей степени, чем $\frac{dh}{d\tau}$ . Следовательно, можно было отдать предпочтение определению $\Delta\tau^*$по формуле, содержащей $\frac{dA}{d\tau}$, если только азимут углового сближения ИСЗ можно было определить с достаточной точностью. Но, к сожалению, азимут углового сближения определяется так неуверенно, что для практического определения $\Delta\tau^*$ приходится отдавать предпочтение формуле, содержащей $\frac{dh}{d\tau}$ . Наблюдения спутника в дальнейшем осуществляются при тех значениях $A$ и $h$ точки углового сближения, которые согласно (19) соответствуют значению $\Delta\tau = \Delta\tau^*$.

## Литература

1. Жагар Ю.Х. Улучшение эфемерид ИСЗ.-В кн.:Наблюдения ИНТ , 1982, № 73.
2. Жагар Ю.Х., Зариньш А.Я. Экстремальные задачи сближения ИСЗ и наблюдателя.-В кн.:Навигационная привязка и статистическая обработка космической информации . М.:Наука, 1982.

3. Lala P. A computer program for computation of ephemerides of artifical Earth satellites. ITCP bulletin, Washington, Sept.12, 1968.
4. Куликов К.А. Курс сферической астрономии.-М.:Наука, 1974.
5. Ерпылев Н.П., Соболевский В.Д., Петрова О.А. Прогнозирование периодов времени, благоприятных для одновременных наблюдений ИСЗ с двух станций с помощью ЭВМ. - В кн.: Наблюдения ИНТ. М.: Астросовет АН СССР, № 70, 1978.
6. Зариньш А.Я., Жагар Ю.Х. Решение уравнений сближения ИСЗ и обсерватории (в данном сборнике).
7. Абеле М.К., Вятер Я.В., Балодис Я.К., Лаупениекс Л.К. Об изменении параметров видимого движения ИСЗ.- В кн.: Определение координат небесных тел. Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1981.

## Р е з ю м е

Жагар Ю.Х.
Лаупениекс Л.К.

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ УТОЧНЕНИЕ ЭФЕМЕРИД ИСЗ

В работе изложены теоретические основы и практические приемы уточнения эфемерид ИСЗ. Метод основан на применении производных $\frac{dA}{d\tau}$ и $\frac{dh}{d\tau}$, вычисляемых аналитически. Численные расчеты, выполненные для ИСЗ *Geos-A* и ИКБ - 1300 показали, что точность улучшенных эфемерид составляет $0\overset{\circ}{.}1 \div 0\overset{\circ}{.}2$ для азимута и угловой высоты кульминации спутника.

## K o p s a v i l k u m s

J.Žagare
L.Laucenieks

### ZMP EFEMERĪDU ANALITISKĀ PRECIZĒŠANA

Darbā aplūkoti ZMP efemerīdu precizēšanas teorētiskie pamati, kā arī to pielietošanas iespējas. Analizētajā metodē tiek izmantoti atvasinājumi $\frac{dA}{d\tau}$ un $\frac{dh}{d\tau}$, kuru vērtības aprēķina analitiski. Skaitliskie aprēķini, kas veikti pavadoņiem Geos - A un IKB - I300 rāda, ka precizēto efemerīdu kulminācijas azimutu un leņķisko augstumu kļūdas nepārsniedz 0°.I + 0°.2.

## S u m m a r y

J.Zhagar
L.Laucenieks

### ANALYTICAL IMPROVEMENT OF SATELLITE EPHEMERIDES

This paper deals with the theoretical principles of the satellite ephemerides improvement as well as ways of their application. The proposed method is based on use of the derivatives $\frac{dA}{d\tau}$ and $\frac{dh}{d\tau}$ easily determined analytically; it has shown an accuracy of 0°.I + 0°.2 for elevation and azimuth of satellite culmination. Testing of this method and examination of its accuracy were performed for Geos - A and IKB - I300 satellites.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 521.24

Я.К.Балодис
И.Е.Абакумов
(АО ЛГУ им.П.Стучки)

# ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ ЭКСПОЗИЦИЙ ГЕОСТАЦИОНАРНЫХ СПУТНИКОВ,СНЯТЫХ НА КАМЕРЕ АФУ-75

Хотя фотографическая камера АФУ-75 не предназначена для съёмки геостационарных спутников,однако в экспедиционных станциях она для этой цели применяется [I] . При обработке этих наблюдений несколько нужно модифицировать и программы астрометрической редукции. В этой статье мы расскажем о вычислении средних моментов времени экспозиций геостационарного спутника.

Принимаем такие же обозначения,как в работе [2] :

$\bar{x}_i$ – координаты измерения стоп-индексов,

$x_{ij}$ – координаты подвижных индексов,

$t_{ij}$ – моменты времени соответствующих подвижных индексов.

$n$ – количество перемещений кассетного стола камеры,

$m_i$ – количество подвижных индексов при каждом перемещении стола,

$$1 \le i \le n+1, \quad 1 \le j \le m_i$$

Согласно информационному сообщению [I] ,геостационарные спутники наблюдаются в режиме компенсации 3 мм и $m_i = 2$. Такие значения мы будем учитывать в нашей работе.

Возможны два варианта вычисления моментов экспозиции.

I. Определяем скорость перемещения стола

$$V_i = \frac{x_{i,2} - x_{i,1}}{t_{i,2} - t_{i,1}} \qquad (1)$$

Тогда интересующие нас моменты начала и конца экспозиции геостационарных спутников будут

$$T'_{i,1} = t_{i,2} + \frac{\bar{x}_i - x_{i,2}}{V_i}, \qquad (2)$$

$$T'_{i,2} = t_{i+1,1} - \frac{x_{i+1,1} - \bar{x}_i}{V_{i+1}}, \qquad (3)$$

а средний момент экспозиции

$$T_i = \frac{T'_{i,1} + T'_{i,2}}{2} \qquad (4)$$

2. Есть другой способ вычисления экспозиций,подобный тому,который изложен в работе [2] . Определяем по формуле (I) скорости $V_i$ . Составляем для всего снимка систему уравнений

$$a t_i^3 + b t_i^2 + c t_i + d = V_i, \qquad (5)$$

где

$$t_i = \frac{t_{i,1} + t_{i,2}}{2} \qquad (6)$$

Решая систему (5) способом наименьших квадратов, получаем коэффициенты $a, b, c, d$. Также определяем погрешности $\varepsilon_{V_i}$

Для всех моментов $t_{ij}$ определяем скорости

$$V_{ij} = a t_{ij}^3 + b t_{ij}^2 + c t_{ij} + d . \tag{7}$$

Для каждого интервала между стоп-индексами составляем системы уравнений

$$A_i t_{ij}^2 + B_i t_{ij} + C_i = X_{ij} , \tag{8}$$

$$2 A_i t_{ij} + B_i = V_{ij} . \tag{9}$$

Решая обе системы (8) и (9) совместно способом наименьших квадратов, получаем коэффициенты $A_i$, $B_i$, $C_i$. Также определяются погрешности $\varepsilon_{x_{ij}}$ и $\varepsilon_{V_{ij}}$. Необходимые нам моменты начала $T'_{i,1}$ или конца $T'_{i,2}$ экспозиции геостационарного спутника находятся соответственно из квадратных уравнений вида

$$A_{i+j-1} T_{ij}'^{2} + B_{i+j-1} T'_{ij} + C_{i+j-1} = \bar{X}_i , \tag{10}$$

где $j$ =I,2, а средний момент экспозиции определяется по формуле (4).

Сравнивая оба изложенных способа, получаются одинаковые результаты с точностью до $10^{-4}$ сек. Первый метод простой, но совершенно без контроля. Второй со строгим контролем и погрешностей, и правильного выбора соответствующих измерений меток времени. Однако, при нахождении корней квадратных уравнений (IO) мы имеем 4 значения, и истиные значения не всегда могут выбираться из условий, изложенных в работе[2]. Надёжно правильные значения можно выбрать, только зная результат (4). Поэтому для массовой редукции снимков с высокоточным контролем мы предлагаем вычисления дублировать и использовать оба метода совместно.

## Литература

I. Юров Е.А. Проведение наблюдений стационарных спутников на спутниковой фотокамере АФУ-75.-Информационное сообщение. Программа " Большая Хорда". М.: Астросовет АН СССР. 1976.

2. Лапушка К.,Лауцениекс Л.,Балодис Я. Некоторые оценки эффективности применения камер АФУ-75 в фотографической спутникометрии и спутниковой геодезии. - Научные информации. М.: Астросовет АН СССР, № 35, 1977.

## РЕЗЮМЕ

Я.К.Балодис
И.Е.Абакумов

### ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ ЭКСПОЗИЦИЙ ГЕОСТАЦИОНАРНЫХ СПУТНИКОВ,СНЯТЫХ НА КАМЕРЕ АФУ-75

Для массовой редукции снимков с высокоточным контролем предлагается совместное использование двух различных способов вычислений.

K o p s a v i l k u m s

J.Balodis
I.Abakumovs

AR KAMERU AFU-75 FOTOGRAFĒTO ĢEOSTACIONĀRO PAVADOŅU EKSPOZĪCIJU LAIKA MOMENTU APRĒĶINĀŠANA

Masveida kadru redukcijai ar augstas precizitātes kontroli ieteikta divu dažādu aprēķina veidu kopīga pielietošana.

S u m m a r y

J.Balodis
I.Abakumov

COMPUTATION OF EXPOSURE MOMENTS FOR PHOTOS TAKEN BY THE AFU-75 TYPE CAMERA

A joint application of two different ways of exposure moment computation has been proposed for the case of mass reduction of geostationary satellite observations made by the AFU-75 type camera.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 52.06

М.К.Абеле, Э.Э.Мукин
(АО ЛГУ им. П.Стучки)

# ОБРАБОТКА ЛАЗЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ИМПУЛЬСОВ

Расстояние до ИСЗ определяется, как известно, путем измерения времени распространения светового импульса, излучаемого лазером, до ИСЗ и обратно. Амплитуда импульсов может меняться в весьма широких пределах, однако регистрирующее устройство срабатывает при достижении строго определенного уровня сигнала. Поэтому в некоторых системах применяют т.н. "адаптационный порог" - устройство,которое автоматически меняет уровень срабатывания пропорционально амплитуде сигнала и таким путем устраняет зависимость от его величины.

В Астрономической обсерватории Латвийского государственного университета подобного устройства нет, и мы попытались исключить влияние изменений амплитуды сигнала путем измерения длительности импульсов на фиксированном уровне срабатывания. Для этой цели было изготовлено экспериментальное устройство, которое позволяет регистрировать моменты времени передних фронтов и длительности импульсов с дискретностью в 0,2 наносекунды. Для контроля работы устройства имеется внутренний генератор импульсов, а регистрация результатов измерений производится ленточным перфоратором типа ПЛ-10.

Для редукции к середине импульсов при обработке результатов измерений к моментам времени передних фронтов прибавляется полуширина импульсов. Время распространения светового сигнала до ИСЗ и обратно определяется как разность между средними моментами импульсов.

Для обработки наблюдений с учетом ширины импульсов составлена программа, работающая на ЭВМ Единой серии под управлением операционной системы ОС. Чтобы программа имела эксплуатационный характер и позволяла проводить обработку наблюдений предельно оперативно, блок ввода и сортировки исходной информации выполнен фактически как элемент автоматизированной системы обработки данных. А именно, он составлен так, чтобы:

1) по возможности упростить подготовку дополнительной информации, набиваемой на перфоленту вручную;

2) производить диагностику исходных данных и выдавать ее результаты в виде сообщений на общепонятном языке;

3) при обнаружении мелких ошибок производить их исключение (или исправление) и продолжать обработку на основе оставшейся информации;

4) при наличии крупных ошибок сохранить полную работоспособность программы для обработки последующих наборов данных (перфолент);

5) использовать устройство перфоленточного ввода ЭВМ в наиболее устойчивом режиме работы.

Например, набивка дополнительной информации допускается в произвольном формате, каждое введенное число проверяется на правильность кодировки и правдоподобность значения, и.т.п.

В случае достаточно успешного ввода блок учета ширины импульсов приводит данные к форме, принятой для обычных лазерных наблюдений, т.е. не учитывающих ширину импульсов. Таким образом, для получения окончательных результатов можно воспользоваться любой программой обработки лазерных наблюдений ИСЗ. Нами для этой цели применяются алгоритм и программа, разработанные в Астрономической обсерватории Латвийского государственного университета А.Зариньшем [1].

По такому методу нами были обработаны результаты наблюдений нескольких прохождений ИСЗ "Геос-3" и "Интеркосмос - Болгария-1300" над станцией 1884 Рига. Оказалось, что среднеквадратическая ошибка одного измерения составляет 0,7-1,5 м, что в среднем в два раза лучше, чем без учета ширины импульсов. В настоящее время метод и программа используются для обработки регулярных лазерных наблюдений ИСЗ, проводимых на станции №1084 Рига.

## Литература

1. Зариньш А.Я. Шумоустойчивый метод фильтрации лазерных наблюдений ИСЗ. - Научные информации Астрономического совета АН СССР, 1980, № 44.

## Резюме

М.Абеле, Э.Э.Мукин

Обработка лазерных наблюдений ИСЗ с учетом ширины импульсов

Проведена обработка лазерных измерений дальности до ИСЗ с учетом ширины световых импульсов. Среднеквадратическая ошибка одного измерения уменьшилась примерно вдвое и составила 0,7-1,5 м.

## K o p s a v i l k u m s

M.Ābele, E.Mūkins

ZMP lāzernovērojumu apstrāde, ievērojot impulsu platumu

Attāluma mērījumi līdz ZMP ar lāzera tālmēru apstrādāti, ievērojot gaismas impulsa platumu. Rezultātā viena mērījuma vidējā kvadrātiskā kļūda samazinājusies uz pusi, nonākot 0,7-1,5 m robežās.

## S u m m a r y

M.Abele, E.Mukins

Satellite laser ranging data reduction, accounting for the width of the light pulse

Satellite ranging data have been reduced, taking into account the width of the light pulse. As a result, the mean square error of a single measurement dropped by half to 0.7-I.5 meters.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П.СТУЧКИ
АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ.
АСТРОНОМИЯ.1982

УДК 522.982

Г.М.БИЧЕВСКА
(АО Латв.ГУ им.П.Стучки)

# УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ АВТОМАТИЧЕСКОГО НАВЕДЕНИЯ ТРУБЫ ПАССАЖНОГО ИНСТРУМЕНТА ПО ЗЕНИТНОМУ РАССТОЯНИЮ.

В статье рассматривается новая система поворота трубы пассажного инструмента на базе современных коммутирующих устройств тока шагового электродвигателя. Вращением трубы можно управлять, задавая необходимое расстояние с пульта управления. Использованная ранее электрическая часть системы не давала возможности вращать трубу с необходимой скоростью. Исследования стабильности инструмента [I] показали, что вращение трубы не меняет азимут пассажного инструмента. Увеличение скорости вращения в два раза не может существенно изменить устойчивость инструмента.

## Блок-схема управления.

Блок-схема управления инструментам дана на рис.I. Имеется шаговый электродвигатель ШД-4М, вращением которого управляют коммутационные сигналы $F1$, $F2$, $F3$, которые поступают на ключевые стабилизаторы тока. На вход синхронного счётчика, смонтированного на печатной плате "распределитель", подаются тактовые импульсы. Коммутационные сигналы $F1$, $F2$, $F3$, поступают с выходов синхронного счетчика в определённом порядке. Двигатель так же можно вращать, подавая одиночные импульсы. Последние при переключении механического переключателя "од. имп". формирует $J$-$K$ триггер в схеме "распределитель". "Формирователь", построенный на отдельной печатной пла-

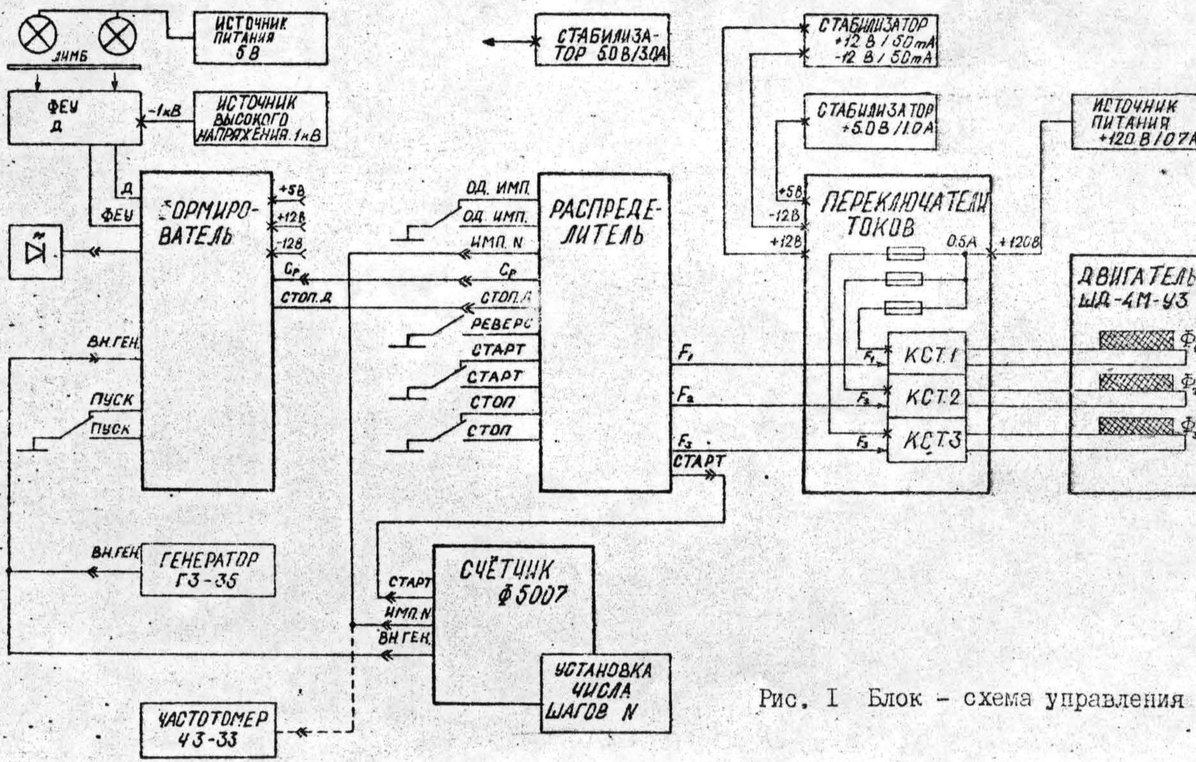


Рис. I Блок - схема управления

те, состоит из транзисторного ключа и триггера Шмитта и обеспечивает необходимую для ТТЛ-сигналов крутизну фронтов сигнала "Вн.ген", поступающего от любого внешнего генератора. Тактовые импульсы "ср", вырабатываемые после нажатия механического ключа "пуск", поступают в синхронный счётчик распределителя, и двигатель вращается до нажатия кнопки "стоп". Автоматическую остановку трубы можно реализовать при каждом пересечении "0" зенитного расстояния. Это обеспечивают ФЭУ и светочувствительный диод Д, которые реагируют на отметку нуля на шкале лимба. Формирователь образует импульс "стоп.Д", прекращающий поступление "имп.$N$" или "ср" на счётчик распределителя. Одновременно загорается светодиод на панели. ФЭУ питает отдельный источник высокого напряжения.

Переключатель "Реверс" позволяет менять направление вращения трубы без остановки двигателя. Чтобы установить трубу на желаемое зенитное расстояние, нужно подать определённое число такт-импульсов. Это обеспечивает программный реверсивный счётчик Ф5007, работающий в режиме формирования заданного числа импульсов. Число шагов устанавливается механическими переключателями. Работа счётчика проверялась счётчиком импулсов ЧЗ-33, а установка трубы - по освещённой шкале - лимбу. Двигатель начинает работать после нажатия кнопки "старт", и импульсы "имп.$N$" поступают в синхронный счётчик.

Наибольшие трудности составляет наладка ключевых стабилизаторов тока, которые построены с форсировкой выключения и рекуперацией реактивной энергии. Усовершенствованная схема отличается быстротой переключения токов обмоток двигателя, что позволяет достигать больших скоростей вращения, чем со стандартными схемами.

Экспериментальная проверка.

Определялась частота приёмистости двигателя - максимальная частота переключения тока в обмотках двигателя, при которой он ещё способен начать движение из состояния покоя без потери шага.

Установлено, что с нагруской трубы инструмента двигатель устойчиго срабатывал из состояния покоя при частоте коммутации до 2 кГц. С постепенным повышением частоты коммутации двигатель можно эксплуатировать на частотах до I0 кГц. Один шаг двигателя - I0", 360 шагов - I°. При частоте коммутации I,8 кГц быстрота движения трубы 5 градусов в секунду.

На угол в I00° труба поворачивается за 20 секунд. Время наведения трубы инструмента на звезду наблюдателями АО ЛГУ ≈20 сек. Визирная решётка инструмента построена исходя из этого значения. [2] При использовании генератора с нарастающей после включения от I,5 до 6 кГц частотой, труба повернётся на I00° не более чем за I0 секунд.

## Литература

I. Бичевска Г.М. Иванов А.В. Об устойчивости азимута при автоматической установке трубы пассажного инструмента по зенитному расстоянию. - В кн.: Астрономия.Автоматическая регистрация моментов прохождения звезд. - Рига: 1980, с. 81 - 84.

2. Штейнс К.А. О выборе параметров при фотоелектрической регистрации прохождения звезд. - В кн.: Теория астрономических приборов. Рига, 1969, т.I2I, вып.4, с. 3 - I0.

Р е з ю м е

Г.М. Бичевска

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ АВТОМАТИЧЕСКОГО НАВЕДЕНИЯ ТРУБЫ ПАССАЖНОГО ИНСТРУМЕНТА ПО ЗЕНИТНОМУ РАССТОЯНИЮ.

Разработана система поворота трубы пассажного инструмента на базе современных ключевых стабилизаторов тока шагового электродвигателя. Вращением трубы можно управлять задавая необходимое зенитное расстояние с пульта управления. Быстрота движения трубы - 5 градусов в секунду. С постепенным повышением скорости - до 15 градусов в секунду.

K o p s a v i l k u m s

Bičevska G.M.

PASĀŽINSTRUMENTA TĀLSKATA ZENĪTDISTANCES AUTOMĀTISKĀS IESTĀDĪŠANAS VADĪŠANA.

Izgatavota iekārta izmantojot uzlabotus soļu elektromotora impulsu strāvas stabilizatorus. Tālskata griešanos var vadīt padodot nepieciešamo zenītdistanci no vadības pults. Instrumenta ass griešanās ātrums - 5 grādi/sek., bet ar paātrinājumu var sasniegt ātrumu 15 grādi/sek.

S u m m a r y

G.Bichevska

AUTOMATIC ELEVATION SETTING CONTROL FOR A TRANSIT INSTRUMENT

A transit instrument tube turning system, incorporating the stepper - motor current stabilizers, has been developed. The movement of the tube is controlled by setting the value of the required zenith distance upon the console. The initial tube turning rate is 5 deg/sec with subsequent gradual increase to 15 deg/sec.

Содержание

C o n t e n t s

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И ИХ НАБЛЮДЕНИЙ
Сборник научных трудов

Редакторы: Л.Лауцениекс, Р.Довгополова
Технический редактор И.Юмаре
Корректор П.Розенбергс

Подписано к печати 01.07.82. ЯТ 09112 Ф/б 60х84/16.
Бумага №1. 8,2 физ.печ.л. 7,2 усл.печ.л. 6,4 уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Зак.№ 1261. Цена 95 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки.
Рига 226098, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, Рига 226050,ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 521.1

Анализ уравнений диффузии комет / Штейнс К.А., Салитис А.Л. - В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч.тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 3-9.

Установлено, что раньше развитая теория диффузии комет не учитывает ряд важных факторов. Получено новое уравнение диффузии и показана возможность его решения.

Ил.1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 521.73

Анализ распределения комет по обратным значениям больших полуосей орбит / Салитис А.Л. - В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч.тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 10-17.

Используя усовершенствованное уравнение диффузии комет, получено распределение комет по обратным значениям больших полуосей орбит. Найденное распределение сравнивается с результатами численных исследований других авторов.

Ил.1. Табл. 3. Библиогр.: 9 назв.

УДК 523.64

Статистика почти параболических комет / Томанов В.П.- В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб. науч.тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 18-27.

Приводятся результаты статистического анализа почти параболических комет ( $P >$ 200 лет, $n$ = 545 ) и дополнительные аргументы в пользу гипотезы межзвездного происхождения долгопериодических комет.

Табл. 7. Библиогр.: 14 назв.

УДК 518.62 : 521.27

О полиномиальной аппроксимации временных рядов / Шапорев С.Д. – В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч.тр. Рига:ЛГУ им. П.Стучки, 1982,с. 28-36.

Изложен один из подходов оценки систематической и случайной составляющей временных рядов. Приведен пример аппроксимации систематической составляющей в (О-С) кометы Ольберса в появлении 1956 г.

Ил.1. Библиогр.: 3 назв.

УДК 521.7

Зависимость точности измерений от формы объекта / Салитис А.Л. – В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч.тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 37-43.

Разработан метод, позволяющий увеличить число наблюдений участвующих в улучшении орбиты, используя для этого неточные наблюдения с систематическим характером. Метод применен для определения поправок элементов орбиты кометы Швассмана – Вахмана 1930 I.

Ил.1. Табл. 1. Библиогр.: 3 назв.

УДК 521.4

Обобщенные промежуточные орбиты для начальных участков возмущенных траекторий / Соколов В.Г. – В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч.тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 44-51.

Дан метод построения промежуточных орбит с касанием произвольного порядка к траекториям возмущенного движения. Вектор положения точки на промежуточной орбите определяется суммой векторов положений на кеплеровских орбитах и вектора, представленного полиномом по степеням времени.

Табл. 1. Библиогр.: 8 назв.

УДК 521.61

Некоторые свойства видимых траекторий ИСЗ / Жагар Ю.Х. – В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч.тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 52-65.

В работе выведено уравнение видимой траектории ИСЗ для орбитальной системы координат и исследованы некоторые его свойства. Основное внимание уделено частным случаям, когда решения уравнения видимой траектории являются кругами небесной сферы. Доказаны две теоремы, касающиеся свойств т. н. круговых точек, которые сопряжены упомянутым решениям.

Ил.2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 521.61

Решение уравнений сближения ИСЗ и обсерватории / Жагарс Ю.Х., Зариньш А.Я. – В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч.тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 66-76.

Статья посвящена решению уравнений сближения ИСЗ и обсерватории. Показано, что эти уравнения в некотором приближении сводятся к алгебро-тригонометрическим уравнениям относительно $\cos E$ степени не выше четвёртой, а уравнения вертикального и углового сближения являются квадратичными и их решения представлены в замкнутом аналитическом виде.

Ил.1. Библиогр : 3 назв.

УДК 521.24

Об эффективности применения аналогов метода Ньютона при улучшении параметров орбит / Черницов А.М., Краев С.С.– В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч.тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 77-87.

Рассматриваются вопросы, связанные с использованием методов ньютоновского типа при улучшении параметров орбит по результатам наблюдений. Получены исходные системы дифференциальных и нелинейных уравнений, позволяющие построить алгоритмы, не уступающие по некоторым характеристикам методу Гаусса и его демпфированному варианту. Получены итерационные схемы с квадратичной скоростью сходимости, не использующие вторые частные производные.

Ил.I. Табл. 4. Библиогр.: 5 назв.

УДК 521.35 : 629.195.1

Об улучшении элементов орбит ИСЗ по наблюдениям с неточными моментами времени / Зейналов Р.А. – В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб. науч. тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с.88–98.

Исследуется возможность улучшения орбиты ИСЗ по наблюдениям с ошибками времени. На модельном примере показывается, что условные уравнения, свободные от ошибок времени позволяют получить элементы орбиты с достаточной для практики точностью.

Табл. I. Библиогр.: 4 назв.

УДК 521.61

Аналитическое уточнение эфэмерид ИСЗ / Жагар Ю.Х., Лауцениекс Л.К. – В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч.тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с.99–112.

В работе изложены теоретические основы и практические приемы уточнения эфемерид ИСЗ. Метод основан на применении производных $\frac{dA}{dt}$ и $\frac{dh}{dt}$, вычисляемых аналитически. Численные расчеты, выполненные для ИСЗ Geos-A и ИКБ – 1300 показали, что точность улучшенных эфемерид составляет $0^{\circ}.1 \div 0^{\circ}.2$ для азимута и угловой высоты кульминации спутника.

Ил.4. Табл. 2. Библиогр.: 7 назв.

УДК 521.24

Вычисление моментов времени экспозиции геостационарных спутников, снятых на камере АФУ-75 / Балодис Я.К., Абакумов И.Е. - В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч .тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982,с. 113-117.

Для массовой редукции снимков с высокоточным контролем предлагается совместное использование двух различных способов вычислений.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 52.06

Обработка лазерных измерений ИСЗ с учетом ширины импульсов / Абеле М.К., Мукин Э.Э. - В кн.: Анализ движения небесных тел и их наблюдений. Сб.науч.тр. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1982, с.118-121.

Была проведена обработка лазерных измерений ИСЗ с учетом ширины импульсов. Среднеквадратическая ошибка одного измерения +0,7 - 1,5 м.

Библиогр.: 1 назв.

УДК 522.982

Управление системой автоматического наведения трубы пассажного инструмента по зенитному расстоянию / Бичевска Г.М. - В кн.: Анализ небесных тел и их наблюдений. Сб. науч.тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 122-126.

Разработана система поворота трубы пассажного инструмента на базе современных ключевых стабилизаторов тока шагового электродвигателя. Вращением трубы можно управлять, задавая необходимое зенитное расстояние с пульта управления. Быстрота движения трубы -5 град/с с постепенным повышением скорости до 15 град/с.

Ил.1. Библиогр.: 2 назв.