Алгебра
и дискретная
математика

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра дискретной математики и программирования

АЛГЕБРА И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1984

УДК 512,5+512,6+512,7+519,7+590,4

АЛГЕБРА И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Алгебра и дискретная математика: Сборник научных трудов /Отв.ред. Э.А.Икауниекс. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1984. - 164 с.

Сборник научных трудов "Алгебра и дискретная математика" содержит результаты исследований, проведенных в 1982 - 1983 годах на математических кафедрах ЛГУ им. П.Стучки, РПИ им. А.Пельше, РКИИГА им. Ленинского комсомола, а также в других вузах и научных учреждениях. О большинстве этих результатов докладывалось на Рижском городском алгебраическом семинаре. Сборник предназначен для научных работников в области алгебры, теории чисел, теории автоматов. Имеются и статьи, так или иначе связанные с приложениями алгебры. Сборник окажется полезным также студентам - математикам, интересующимся современной алгеброй и ее связями с дискретной математикой.

Рис. - 10, список лит. - 63 библиогр. назв.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

А $\frac{60602-013у}{М812(11)-84}$ 87.84.4306020403

Алгебра и дискретная математика. Рига, 1984.

УДК 519.713.3

А.В.Анджанс

ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

ВОЗМОЖНОСТИ АВТОМАТОВ ПРИ ОБХОДЕ ПРОСТРАНСТВА

Введение

Задача обхода лабиринтов, занимавшая еще древних (Тезей и Минотавр), в последнее время вновь стала активно изучаться.

Рассмотрим пространство (плоскость), стандартным способом разделенное на одинаковые кубические (квадратные) клетки. Клетки называются соседними, если они имеют общую грань (сторону). Некоторые клетки являются доступными, некоторые-недоступными. Множество всех доступных клеток называется пространственным (плоским) лабиринтом, если оно связано по отношению к вышеупомянутому соседству.

В лабиринте может одновременно находиться конечное число различимых флажков и конечное число автоматов (конечные автоматы; автоматы с магазинной памятью, со счетчиками, со стеками и т.д.). В каждой доступной клетке одновременно может помещаться любое количество флажков и автоматов. Автоматы различают постоянные направления "вверх", "вниз", " вправо", " влево", "вперед", "назад" (в случае плоских лабиринтов-четыре последних направления)

Между дискретными моментами времени $t=0;1;2;\ldots$ каждый автомат и флажок находится внутри одной доступной клетки. В течении интервала времени $]t;t+1[$, $t=0;1;2;\ldots$, каждый автомат устанавливает:

1) какие другие автоматы и в каких внутренних состояниях находятся вместе с ним в одной клетке,
2) какие флажки находятся вместе с ним в одной клетке,
3) какие из шести (в случае плоскости - четырех) соседних клеток-доступны.

Исходя из этой информации, а также из своего внутреннего состояния и содержимого обозреваемых ячеек магазинов, счетчиков и стеков (если такие имеются), в момент времени $t+1$ каждый автомат, во-первых, детерминированно переходит в одну из соседних доступных клеток или остается на месте; во-вторых, при переходе в соседнюю клетку берет с собой несколько (может быть, ни одного) флажков; в-третьих, изменяет свое внутреннее состояние и содержимое магазинов, счетчиков и стеков (если такие имеются).

Флажки сами по лабиринту передвигаться не могут. Они служат ориентирами для автоматов при перемещении по лабиринту.

Пусть L -лабиринт, A -система, состоящая из некоторых автоматов и флажков. Говорят, что A обходит L ,если выполняется следующее: в какой бы доступной клетке в момент времени $t=0$ не поместить систему A , в каждой клетке лабиринта L когда-нибудь появится хоть один автомат из A .

В [I] доказано, что не существует конечной системы автоматов и флажков, которая обходит любой конечный пространственный лабиринт.

В [2] доказано, что не существует системы, состоящей из одного конечного автомата и одного флажка, которая обходит любой конечный плоский лабиринт. В противоположность тому, в [3] указана система, состоящая из одного автомата со счетчиком (или из одного конечного автомата и двух флажков), которая обходит любой конечный плоский лабиринт.

В [4] выяснено, какие системы автоматов и флажков могут обойти всю плоскость без недоступных клеток.

Настоящая статья посвящена вопросу о том, какие системы автоматов и флажков могут обойти все пространство без недоступных клеток.

Определения

Автоматы с магазинной памятью и автоматы со счетчиками определены, например, в [5] , стр.137, 155.

Магазин-это бесконечная последовательность M ячеек с номерами $0;1;2;3;\ldots$. В ячейке с номером 0 всегда записан один специализированный символ, который никогда не стирается и не может быть записан ни в какую другую ячейку. В каждой другой ячейке может быть записан любой символ из конечного алфавита A_M , содержащего т.н. "пустой символ" λ .

Автомат с магазинной памятью-это конечный автомат, снабженный одним или несколькими магазинами.

Опишем операции, которые автомат производит с одним магазином.

В начале работы (в момент $t=0$) автомат обозревает ячейку магазина с номером 0 ; во всех остальных ячейках записан пустой символ λ . Пусть в момент времени t , $t=0;1;2;\ldots$ автомат обозревает ячейку магазина с номером m_t , в которую записан символ a_t . Тогда в момент времени $t+1$ в зависимости от своего внутреннего состояния, символа a_t и информации о том, какие другие автоматы и флажки находятся вместе с ним в одной клетке и о том, какие из соседних клеток доступные, автомат может или записать некоторый символ $b\in A_M$, $b\neq\lambda$ в ячейку магазина с номером m_t+1 (в которой раньше было записано λ) и перейти к обозреванию этой ячейки, или (если $m_t>0$) заменить a_t на λ и перейти к обозреванию (m_t-1)-ой ячейки, или (если $m_t>0$) заменить a_t на $b\in A_M$, $b\neq\lambda$ и продолжать обозревать ячейку с номером m_t , или же изменений в магазине не производить и продолжать обозревать ячейку с номером m_t.

Таким образом, автомат всегда обозревает ячейку магазина с наибольшим номером среди тех, в которых записан непустой символ, и все изменения в магазине происходят только около обозреваемой ячейки.

Работа автомата с несколькими магазинами определяется аналогично. Там все изменения детерминированно зависят от содержимого всех обозреваемых ячеек магазинов.

Счетчик-это магазин M, алфавит которого A_M содержит лишь один непустой символ. Содержательно в счетчике может хранится любое число из множества $\{0;1;2;3;..\}$; за один такт работы автомат может увеличивать или уменьшать значение счетчика на 1 или оставить его без изменения, а также проверить, стало ли значение счетчика равным нулю.

Понятие стека используется в программировании. В настоящей статье стек-это разновидность магазина, когда автомат может углубляться в массив заполненных ячеек магазина и читать записанные там символы, не стирая при этом содержимого ячеек магазина с большими номерами, но изменять может только или содержимое ячейки с наибольшим номером среди заполненных (обозревая эту ячейку) или первой незаполненной ячейки (переходя к обозреванию этой ячейки).

Введем в пространстве декартову координатную систему $Oxyz$. Клеткой с номером $(m;n;k)$, где m, n и k -целые числа, называется множество точек $\{(x;y;z) \mid m<x<m+1 \,\&\, n<y<n+1 \,\&\, k<z<k+1\}$; т.е., номером клетки называется тройка координат ее левого нижнего заднего угла. Номер клетки, в которой находится автомат или флажок A в течении интервала времени $]t;t+1[$, обозначается через $A(t)$. Последовательность $A(0), A(1), \dots, A(n), \dots$ называется траекторией автомата (флажка) A. Траектория называется квазипериодической, если существует такое $T>0$, t_0, a, b и c, что $\forall t \; t>t_0 \Rightarrow A(t+T)=A(t)+(a;b;c)$.

Пространство-это множество всех клеток.

Плоскость-это множество всех двумерных клеток в евклидовой плоскости.

Проведем прямую ℓ, проходящую через центры двух различных клеток (тогда она проходит через центры бесконечно многих клеток). Пусть $c>0$ -некоторая константа. Множество всех клеток, центры которых отстоят от ℓ не больше чем на C, называется коридором.

Две системы автоматов и флажков называются системами одного типа, если в них одинаковое количество флажков, конечных автоматов с одним счетчиком и т.д.

Результаты о невозможности обхода

Часть результатов о невозможности обхода пространства системами автоматов и флажков в этой статье получаются из соответствующих результатов о невозможности обхода плоскости (см.[4]) при помощи следующей леммы.

Лемма I. Если не существует системы автоматов и флажков определенного типа, способной обойти плоскость, то не существует системы такого же типа, способной обойти пространство.

Из этой леммы и результатов статьи [4] сразу вытекает следующий результат.

Теорема I. Не существует:

а) системы из двух конечных автоматов,

б) системы из одного конечного автомата и двух флажков,

в) системы из одного автомата с одним магазином и одного флажка, которая обходит пространство.

Более сложно доказывается следующая теорема, обобщающая пункты а) и б) теоремы I.

Теорема 2. Не существует системы, состоящей из двух конечных автоматов и одного флажка, которая обходит пространство.

Схема доказательства. Так как подробное доказательство занимает около I5 страниц, наметим только основные шаги.

Лемма 2. Если в клетку пустого пространства поместить систему, состоящую из одного конечного автомата (и, быть может, флажка), то траектория автомата (и флажка)-квазипериодическая.

Лемма 3. Если в клетку пустого пространства поместить систему, состоящую из одного флажка и двух конечных автоматов, и если существует такое $d>0$, что бесконечно много раз оба автомата одновременно находятся не дальше чем на расстоянии d от флажка, то траектории обоих автоматов и флажка-квазипериодические.

Лемма 4. Квазипериодическую траекторию можно покрыть коридором. Поэтому никакое конечное множество квазипериодических траекторий не содержит в себе все клетки пространства.

Допустим от противного, что существует система S, состоящая из двух конечных автоматов A_1 и A_2 и флажка F, которая обходит пространство. Используя леммы 2-4, постепенно доказываются следующие утверждения.

I. По крайней мере один автомат (допустим, A_1) бесконечно много раз встречается с флажком.

2. Автоматы A_1 и A_2 встречаются бесконечно много раз. Иначе или A_2 "теряет связь" с F и с A_1, и поэтому траектории A_1 и A_2 становятся квазипериодическими, или A_2 не удаляется от F больше чем на фиксированное расстояние, что опять делает все траектории квазипериодическими, или же движение A_1 и A_2 все время проходит по клеткам, центры которых лежат между двумя параллельными плоскостями. Во всех этих случаях S не обходит пространство.

3. Систему S можно заменить на систему того же типа S', тоже обходящую пространство, но такую, что автомат A_1' встречается с флажком F' и с автоматом A_2' бесконечно много раз, а A_2' с F' после интервала времени $[0,1]$ уже не встречается.

4. Траектория F'-квазипериодическая. Поместим ее в коридор K.

5. Автомат A_1' отходит от K только по участкам коридоров, направления которых образуют конечное множество, и встречается с A_2' во время каждого из этих отлучений. Найдется коническая поверхность, внутри которой A_1' никогда не попадает; поэтому все клетки внутри этой поверхности обходит A_2'. Между двумя встречами с A_1' автомат A_2' должен посещать клетки, число которых возрастает как квадратная функция, а время между двумя последовательными встречами A_1' и A_2' возрастает как арифметическая прогрессия. Полученное противоречие доказывает теорему.

Алгоритм обхода пространства

В этом пункте мы опишем некоторые "минимальные" системы автоматы и флажков, способные обойти пространство.

Теорема . Существует:

а) система, состоящая из одного автомата с двумя счетчиками,

б) система, состоящая из одного конечного автомата и трех флажков,

в) система, состоящая из одного автомата с одним стеком и одного флажка, каждая из которых обходит пространство.

Доказательство. а) В работе [I] намечено доказательство, а в работе [6] доказано строго, что существует автомат с двумя счетчиками, способный обойти любой (конечный или бесконечный) плоский лабиринт. Доказательство основывается на известном результате Минского (см., например, [7], стр. 330-335) о том, что для любой частично рекурсивной функции f существует автомат A с двумя счетчиками, такой, что для любого натурального x автомат A, начиная работу с числом 2^x в одном счетчике и с числом 0 во втором счетчике, работает бесконечно долго, если $f(x)$ не определено, но останавливается с числом 0 в первом счетчике и с числом $2^{f(x)}$ во втором счетчике, если $f(x)$ определено. В [6], в частности, показано, как для общерекурсивной функции g, принимающей конечное число значений, построить автомат с двумя счетчиками A_g, который, начиная работу с числом 0 в обоих счетчиках, работает бесконечно долго и в подходящей кодировке последовательно вычисляет значения $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$. Пронумеруем все клетки пространства числами $0; 1; 2; \ldots$, так, чтобы клетки, номера которых отличаются на I, были соседними. Определим функцию $\tilde{g}(x)$ так: $\tilde{g}(x)=0\ (1;2;3;4;5)$, если $(x+1)$ -ая клетка находится справа (слева, спереди, сзади, сверху, снизу) от x-ой клетки. Ясно, что нумерацию можно произвести так, что $\tilde{g}(x)$ -общерекурсивная функция. Рассмотрим автомат $A_{\tilde{g}}$ и построим автомат $\mathfrak{A}$, моделирующий работу автомата $A_{\tilde{g}}$. Будучи помещённым в некоторую клетку, $\mathfrak{A}$ сначала моделирует работу $A_{\tilde{g}}$, пока $A_{\tilde{g}}$ вычисляет (в некоторой кодировке) значение $\tilde{g}(0)$. Так как функция $\tilde{g}$ принимает только 6 различных значений, то может "узнать" значение $\mathfrak{z}(0)$ и после этого вернуть свои счетчики в состояние того момента, когда вычислилось значение $\mathfrak{z}(0)$. После этого $\mathfrak{A}$ переходит в ту клетку, в которую указывает вычисленное значение $\mathfrak{z}(0)$, и начинает моделировать работу $A_{\mathfrak{z}}$ до того момента, пока вычислится значение $\mathfrak{z}(1)$ и т.д. Ясно, что автомат $\mathfrak{A}$ обходит пространство.

б) Для автомата $\mathfrak{A}$ доказательства предыдущего пункта построим систему, моделирующую работу $\mathfrak{A}$ и состоящую из одного конечного автомата A и трех флажков. Флажок F_3 всегда находится в той клетке, в которой находился бы моделируемый автомат $\mathfrak{A}$. Флажок F_1 находится на столько клеток выше флажка F_3, сколько единиц содержится в первом счётчике автомата $\mathfrak{A}$, а флажок F_2 находится на столько клеток ниже флажка F_3, сколько единиц содержится во втором счётчике автомата $\mathfrak{A}$. Конечный автомат A "курсирует" между флажками F_1, F_2 и F_3, изменяя расстояние между F_3 и F_1 или F_3 и F_2 и перемещая всю систему по траектории автомата $\mathfrak{A}$.

в) Доказательство этого пункта-прямое, а не с помощью моделирования. Мы рассмотрим стек, алфавит которого состоит лишь из одной буквы. Опишем работу автомата A.

Автомат A работает по этапам.

0-ой этап. A оставляет флажок F на месте, передвигается на одну клетку влево, записывает в стек один непустой символ и оставляет головку стека на этом символе.

$(2n-1)$-ый этап $(n = 1; 2; 3; \ldots)$. В начале этого этапа автомат находится на n клеток слева от флажка, в стеке записано n непустых символов, и головка стека обозревает последний из них (тот, который записан в ячейке стека с наибольшим номером)- см.рис.I, где показан вид сверху на горизонтальный слой клеток, в котором находятся A и F.

Теперь автомат проходит зигзагообразную траекторию, показанную на рис.2. Чтобы узнать, где находятся вершины "квадратной" траектории, автомат использует стек. Сначала после каждых двух шагов автомат углубляет головку в

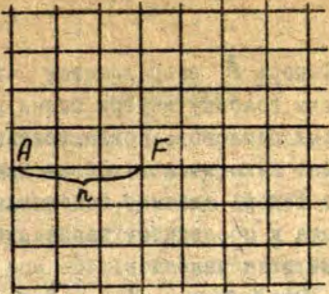

Рис. I

стек на одну ячейку, не стирая при этом непустых символов. Знаком того, что автомат достиг "вершины" x, служит достижение головкой начала стека. После этого автомат поворачивает на 90° и двигается дальше, после каждых двух шагов передвигая головку по стеку на одну ячейку вперед. Знаком того, что автомат достиг (и уже на два шага прошел) вершину y, служит обнаружение в стеке пустого символа. Тогда автомат приходит назад в клетку y и повторяет описанный процесс симметрично центру квадратной ломаной, завершая ее обход.

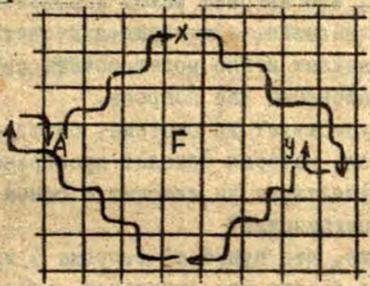

Рис. 2

Теперь автомат A перемещается на одну клетку вверх и вправо и стирает последний, записанный в стеке непустой символ. Если в стеке еще есть непустые символы, то A проходит такую же зигзаообразную траекторию, опять перемещается на одну клетку вверх и вправо и т.д. Если же в стеке непустых символов нет, то A находится над флажком, и между ними лежат $n-1$ клеток. Теперь A направляется вниз, после каждого шага записывая в стек по одному непустому символу. Когда A достит флажка, в стеке есть n

непустых символа. Теперь A направляется влево, после каждого шага углубляя головку внутри стека на одну ячейку, но не стирая непустых символов. Когда головка достигает начала стека, автомат находится в той же клетке, в которой начинался этап. Теперь автомат останавливается и переводит головку стека к последнему записанному в нем символу. Этим $(2n-1)$-ый этап закончен.

$(2n)$-ый этап $(n=1;2;3,\ldots)$. В начале этого этапа автомат действует так же, как в $(2n-1)$ -ом этапе, только направление "вверх" меняется на "вниз" и наоборот. После промоделирования $(2n-1)$-ого этапа A передвигается на одну клетку влево, записывает в стек еще один непустой символ и переходит к $(2n+1)$-ому этапу.

Легко проследить, что описанная система обходит пространство. Заметим, что флажок все время остается на месте.

Заключение

Учитывая то, что автомат может использоваться как флажок, стек-как магазин, а магазин-как счетчик, а также то, что двумя флажками можно моделировать счетчик, видим, что остаются нерешенными два вопроса.

Вопрос I. Существует ли система, состоящая из трех конечных автоматов, которая обходит пространство?

Вопрос 2. Существует ли автомат с одним стеком, который обходит пространство?

Заметим также, что пункт а) теоремы 3 можно доказать и без указанных в статье моделирований, примерно по образцу доказательства пункта в) этой теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

I. Blum M., Sakoda W. On the Capability of Finite Automata in 2 and 3 Dimensional Space.- Proc. 18 th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1977, p. 147-161.

2. Hoffmann F. One Pebble Does Not Suffice to Search Plane Labyrinths.- Lect. Notes in Comp.Sci., 1981, v.117, p. 433-444.

3. Blum M., Kozen D. On the Power of the Compass.- Proc. 19-th IEEE FOCS Conf.,1978, p. 132-142.

4. Анджан А.В. Возможности автоматов при обходе плоскости.-Проблемы передачи информации, 1983 т.XIX.,вып.3, с.78-89.

5. Гладкий А.В. Формальные грамматики и языки. - М.: Наука, 1973, с.368.

6. Habasin'ski Z., Karpin'ski M. A codification of Blum-Sakoda 7 pebbles algorithm.- ICS PAS Reports, 1981, N 448, 20 pp.

7. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции.-М.: Наука, 1965, с.392.

Алгебра и дискретная математика. Рига, 1984.

УДК 512.7

С.Н.Бойко

РКИИ ГА, ВШПД ВЦСПС

АВТОМОРФИЗМЫ СПЛЕТЕНИЙ АВТОМАТОВ

Введение

В теории конечных автоматов хорошо известна теорема Крона-Роудза о декомпозиции. Основная конструкция, которая используется в этой теореме,- это конструкция сплетения автоматов.

Данная статья посвящена изучению автоморфизмов сплетений автоматов. Эта задача возникает естественно, поскольку симметрии автоматов могут учитываться в различных прикладных вопросах. В частности, это относится и к симметриям сплетений. В статье будут описаны все автоморфизмы треугольного типа, определение их дано ниже; результат будет оформулирован в последнем пункте статьи.

I. Основные понятия

Автомат-это алгебраическая система с тремя основными множествами $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ и двумя бинарными операциями:

$$\circ: A \times \Gamma \longrightarrow A$$

$$*: A \times \Gamma \longrightarrow B.$$

Множество A называется множеством состояний автомата; Γ -множество входных сигналов и B -множество выходных сигналов. Каждый входной сигнал γ преобразует состояние a в новое состояние: $a \circ \gamma = a' \in A$, и кроме того, γ преобразует a в сигнал на выходе; $a * \gamma = b \in B$.

Полугрупповой автомат - это автомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$, в котором система входных сигналов Γ есть полугруппа, причем умножение в ней связано с операциями $\circ$ и $*$ следующими аксиомами:

$$a \circ \gamma_1 \gamma_2 = (a \circ \gamma_1) \circ \gamma_2$$

$$a * \gamma_1 \gamma_2 = (a \circ \gamma_1) * \gamma_2 .$$

Пусть A и B - два произвольных множества. Через $S_A = Fun(A,A)$ обозначим полугруппу всех преобразований множества A, а $Fun(A,B)$ - множество всех отображений из A в B. Рассмотрим декартово произведение $S(A,B) = S_A \times Fun(A,B)$, и на этом множестве зададим полугруппу, полагая:

$$(\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2) = (\varphi_1\varphi_2, \varphi_1\psi_2), \quad \varphi_i \in S_A, \ \psi_i \in Fun(A,B), \ i=1,2.$$

Можем построить полугрупповой автомат $(A, S(A,B), B)$, задавая операции $\circ$ и $*$ правилами:

$a \circ (\varphi,\psi) = a\varphi$, где $a \in A$, $\varphi \in S_A$, $\psi \in Fun(A,B)$.

$a * (\varphi,\psi) = a\psi$.

Если задан автомат (A,Γ,B), то задан гомоморфизм $\Gamma \longrightarrow S(A,B)$. Автомат точный, если этот гомоморфизм-вложение /инъективный/.

Если автомат (A,Γ,B) -точный, то отвечающую Γ подполугруппу из $S(A,B)$ обозначим через Γ^*; если нет необходимости в специальных оговорках, то Γ будем отождествлять с Γ^*, а элемент $\gamma \in \Gamma$ - с отвечающим ему элементом (φ,ψ) из $S(A,B)$.

Автомат $\mathfrak{A}' = (A',\Gamma',B')$ есть подавтомат автомата $\mathfrak{A} = (A,\Gamma,B)$, если $A' \subset A$, $\Gamma' \subset \Gamma$, $B' \subset B$ и кроме того: $a \circ \gamma \in A'$, $a * \gamma \in B'$ для любых $a \in A'$ и $\gamma \in \Gamma'$.

Автоморфизм автомата $\mathfrak{A} = (A,\Gamma,B)$ - это тройка отображений $\sigma_A : A \rightarrow A$, $\alpha : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, $\sigma_B : B \rightarrow B$ удовлетворяющая следующим условиям:

I. σ_A -подстановка множества A, σ_B - подстановка множества B, α - автоморфизм полугруппы Γ.

2. $(a \circ \gamma)\sigma_A = a\sigma_A \circ \gamma^{\alpha}$, $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$.

$(a * \gamma)\sigma_B = a\sigma_A * \gamma^{\alpha}$

Обозначим через Σ_A, Σ_B группы подстановок множеств A и B. Возьмем $\Sigma = \Sigma_A \times \Sigma_B$. Определим действие Σ на $S(A,B)$ по правилу:

$$(\varphi,\psi) \circ (\sigma_A, \sigma_B) = (\sigma_A^{-1}\varphi\sigma_A, \ \sigma_A^{-1}\psi\sigma_B),$$

$$(\varphi,\psi) \in S(A,B), \ (\sigma_A, \sigma_B) \in \Sigma.$$

Непосредственно проверяется, что так определенное действие задает представление $(S(A,B),\Sigma)$.
Покажем только, что оно сохраняет умножение.
Возьмем $(\varphi_1,\psi_1),(\varphi_2,\psi_2)\in S(A,B);(\sigma_A,\sigma_B)\in\Sigma$.

$$[(\varphi_1,\psi_1)(\varphi_2,\psi_2)]\circ(\sigma_A,\sigma_B)=(\varphi_1\varphi_2,\varphi_1\psi_2)\circ(\sigma_A,\sigma_B)=$$
$$=(\sigma_A^{-1}\varphi_1\varphi_2\sigma_A,\sigma_A^{-1}\varphi_1\psi_2\sigma_B)=(\sigma_A^{-1}\varphi_1\sigma_A\sigma_A^{-1}\varphi_2\sigma_A,$$
$$\sigma_A^{-1}\varphi_1\sigma_A\sigma_A^{-1}\psi_2\sigma_B)=(\sigma_A^{-1}\varphi_1\sigma_A,\sigma_A^{-1}\psi_1\sigma_B)\cdot$$
$$\cdot(\sigma_A^{-1}\varphi_2\sigma_A,\sigma_A^{-1}\psi_2\sigma_B)=((\varphi_1,\psi_1)\circ(\sigma_A,\sigma_B))\cdot((\varphi_2,\psi_2)\circ(\sigma_A,\sigma_B))$$

Σ -нормализатор множества $\Gamma\subset S(A,B)$ в данном представлении - это совокупность всех таких $\sigma\in\Sigma$, что $\Gamma\circ\sigma=\Gamma$.

Конгруэнция автомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ - это тройка бинарных отношений $\rho=(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$, где
ρ_1 - эквивалентность на множестве A ,
ρ_2 - эквивалентность на множестве B ,
ρ_3 - конгруэнция полугруппы Γ ,
при этом должны выполняться условия:

$$a\rho_1 a' \,\&\, \gamma\rho_2\gamma' \Rightarrow (a\circ\gamma)\rho_1(a'\circ\gamma'),$$
$$a\rho_1 a' \,\&\, \gamma\rho_2\gamma' \Rightarrow (a*\gamma)\rho_3(a'*\gamma').$$

Фактор-автомат $\mathfrak{A}/\rho$ - это автомат $(A/\rho_1,\Gamma/\rho_2,B/\rho_3)$, где A/ρ_1, B/ρ_3 - фактор-множества, а Γ/ρ_2 рассматривается как фактор-полугруппа полугруппы Γ по конгруэнции ρ_2 . Действия $\circ$ и $*$ в фактор-автомате определяются естественным образом.

Пусть даны два автомата (A_1,Γ_1,B_1) и (A_2,Γ_2,B_2). Их сплетение $(A_1,\Gamma_1,B_1)\,wr\,(A_2,\Gamma_2,B_2)$ есть автомат

$$(A_1\times A_2,\Gamma_1^{A_2}\lambda\Gamma_2,B_1\times B_2)$$

операции $\circ$ и $*$ в котором определены следующим образом:

$$(a_1,a_2)\circ(\bar\gamma_1,\gamma_2)=(a_1\circ\bar\gamma_1(a_2),a_2\circ\gamma_2) \;,$$
$$(a_1,a_2)*(\bar\gamma_1,\gamma_2)=(a_1*\bar\gamma_1(a_2).\,a_2*\gamma_2) .$$

Если $\Gamma_1\subset S(A_1,B_1)$, $\Gamma_2\subset S(A_2,B_2)$, то

$(A_1, \Gamma_1, B_1)\, wr\, (A_2, \Gamma_2, B_2)$ есть подавтомат в сплетении $(A_1, S(A_1, B_1), B_1)\, wr\, (A_2, S(A_2, B_2), B_2) =$
$= (A_1 \times A_2, S(A_1, B_1)^{A_2} \lambda S(A_2, B_2), B_1 \times B_2)$.

Лемма I. Если $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ есть автоморфизм точного автомата (A, Γ, B) и $\gamma = (\varphi, \psi)$ - элемент из Γ, то

$$\gamma^\alpha = (\sigma_A^{-1} \varphi \sigma_A, \sigma_A^{-1} \psi \sigma_B).$$

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $a \in A$, обозначим $\gamma^\alpha = (\varphi', \psi')$. Из определения автоморфизма:

$$(a \circ \gamma)\sigma_A = a\sigma_A \circ \gamma^\alpha; \; (a * \gamma)\sigma_B = a\sigma_A * \gamma^\alpha.$$

Так как $a \circ \gamma = a\varphi$, $a * \gamma = a\psi$, то $(a \circ \gamma)\sigma_A = a\varphi\sigma_A$,

$$(a * \gamma)\sigma_B = a\psi\sigma_B$$

$$a\sigma_A \circ \gamma^\alpha = a\sigma_A\varphi', \quad a\sigma_A * \gamma^\alpha = a\sigma_A\psi'.$$

Следовательно, для произвольного элемента $a \in A$

$$a\varphi\sigma_A = a\sigma_A\varphi' \quad \text{и} \quad a\psi\sigma_B = a\sigma_A\psi'.$$

Таким образом, $\varphi\sigma_A = \sigma_A\varphi'$, $\psi\sigma_B = \sigma_A\psi'$ и

$$\varphi' = \sigma_A^{-1}\varphi\sigma_A, \; \psi' = \sigma_A^{-1}\psi\sigma_B$$ т.е.

$$\gamma^\alpha = (\varphi', \psi') = (\sigma_A^{-1}\varphi\sigma_A, \sigma_A^{-1}\psi\sigma_B),$$ что и требовалось.

Лемма означает, что если $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ - автоморфизм автомата (A, Γ, B), то α однозначно определяется подстановками σ_A, σ_B.

Лемма 2. Пусть дан точный автомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ и (σ_A, σ_B) такой элемент из $\Sigma_A \times \Sigma_B$, что для всех элементов $\gamma = (\varphi, \psi)$ справедливо включение $(\varphi, \psi) \circ (\sigma_A, \sigma_B) \in \Gamma$. Тогда отображение $\alpha : \Gamma \to \Gamma$, определяемое по правилу

$$(\varphi, \psi)^\alpha = (\varphi, \psi) \circ (\sigma_A, \sigma_B)$$

есть автоморфизм полугруппы Γ, а тройка $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ - автоморфизм автомата (A, Γ, B).

Доказательство. Возьмем $\gamma = (\varphi, \psi)$. Дано, что

$$(\varphi, \psi)^\alpha = (\varphi, \psi) \circ (\sigma_A, \sigma_B) = (\sigma_A^{-1}\varphi\sigma_A, \sigma_A^{-1}\psi\sigma_B) \in \Gamma.$$

Уже отмечалось, что такое отображение α сохраняет умножение. Итак, мы имеем тройку отображений $\sigma_A : A \to A$, $\alpha : \Gamma \to \Gamma$, $\sigma_B : B \to B$, где σ_A, σ_B - подстановки множеств A и B соответственно, а α - автоморфизм полугруппы Γ. Чтобы тройка $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ была автоморфизмом автомата (A,Γ,B), должны выполняться условия: для $a\in A$ и $\gamma\in\Gamma$:

$$(a\circ\gamma)\sigma_A = a\sigma_A\circ\gamma^{\alpha},$$

$$(a*\gamma)\sigma_B = a\sigma_A * \gamma^{\alpha}.$$

Действительно, $(a\circ\gamma)\sigma_A = a\varphi\sigma_A = a\sigma_A\sigma_A^{-1}\varphi\sigma_A = a\sigma_A\circ\gamma^{\alpha}$,

$$(a*\gamma)\sigma_B = a\psi\sigma_B = a\sigma_A\sigma_A^{-1}\psi\sigma_B = a\sigma_A*\gamma^{\alpha}.$$

Согласно доказанной лемме найти все автоморфизмы автомата $\mathfrak{A}$ значит описать в тех или иных терминах нормализатор $N_{\Sigma_A\times\Sigma_B}(\Gamma)$ полугруппы $\Gamma\subset S(A,B)$ в описанном представлении $(S(A,B),\Sigma_A\times\Sigma_B)$.

2. Автоморфизмы треугольного типа

Конгруэнция $\rho=(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ автомата (A,Γ,B) называется инвариантной относительно автоморфизма $(\sigma_A,\alpha,\sigma_B)$ этого автомата, если выполняются условия:

$$a\rho_1 a' \Rightarrow a\sigma_A\rho_1 a'\sigma_A;\quad \gamma\rho_2\gamma' \Rightarrow \gamma^{\alpha}\rho_2\gamma'^{\alpha};\quad b\rho_3 b' \Rightarrow b\sigma_3\rho_3 b'\sigma_3.$$

Рассмотрим следующую конгруэнцию $\rho=(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ автомата $\mathfrak{A}_1 \operatorname{wr} \mathfrak{A}_2=(A_1\times A_2,\ \Gamma_1^{A_2}\lambda\Gamma_2,\ B_1\times B_2)$:

ρ_1 - эквивалентность на множестве $A_1\times A_2$, классы которой имеют вид $A_1\times a_2=\{(a_1,a_2)\mid a_2$ - фиксированный элемент из A_2, a_1 пробегает множество $A_1\}$;

ρ_3 - эквивалентность на множестве $B_1\times B_2$, классы которой имеют вид $B_1\times b_2=\{(b_1,b_2)\mid b_2$ - фиксированный элемент из B_2, b_1 пробегает множество $B_1\}$;

ρ_2 - тривиальная конгруэнция полугруппы $\Gamma_1^{A_2}\lambda\Gamma_2$, классами которой являются отдельные элементы этой полугруппы.

Выполнение аксиом конгруэнции автомата для тройки (ρ_1,ρ_2,ρ_3) очевидно.

Автоморфизмы автомата $\mathfrak{A}_1 \operatorname{wr} \mathfrak{A}_2$, относительно которых инвариантна введенная конгруэнция, будем называть автоморфизмами треугольного типа. Наша цель - найти такие автоморфизмы.

Лемма 3. Для того, чтобы автоморфизм $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ автомата $\mathfrak{A}_1 \, wr \, \mathfrak{A}_2$ был автоморфизмом треугольного типа, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_A \in \Sigma_{A_1} \overset{A_2}{wr} \Sigma_{A_2}$; $\sigma_B \in \Sigma_{B_1} \overset{B_2}{wr} \Sigma_{B_2}$.

Доказательство. Пусть автоморфизм $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ автомата $\mathfrak{A}_1 \, wr \, \mathfrak{A}_2$ является автоморфизмом треугольного типа, т.е. конгруэнция $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ инвариантна относительно этого автоморфизма. Тогда выполняется: $(a_1, a_2)\rho_1(a_1', a_2') \Rightarrow (a_1, a_2)\sigma_A \, \rho_1 (a_1', a_2')\sigma_A$, где ρ_1 - эквивалентность на множестве $A_1 \times A_2$, классы которой имеют вид $A_1 \times a_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_2$ - фиксированный элемент из A_2, a_1 пробегает множество $A_1\}$. Для произвольного σ_A рассмотрим пару $(\bar\sigma_{A_1}, \sigma_{A_2})$, которую будем строить. Определим вначале σ_{A_2}. Пусть $a_2 \in A_2$, a_1 - произвольный элемент в A_1 и пусть выполняется $(a_1, a_2)\sigma_A = (a_1'', a_2'')$. Тогда полагаем $a_2\sigma_{A_2} = a_2''$. Из определения ρ и σ_A следует, что при этом a_2'' не зависит от выбора элемента a_1. Действительно, пусть вместо a_1 мы взяли другой элемент a_1' и пусть $(a_1', a_2)\sigma_A = (a_1''', a_2''')$. Так как $(a_1', a_2)\rho_1(a_1, a_2)$, то должно быть $a_2''' = a_2''$.

Теперь будем определять $\bar\sigma_{A_1}$. Возьмем произвольный элемент a_2 и определим значение $\bar\sigma_{A_1}(a_2)$. Берем $a_1 \in A_1$ и рассмотрим пару (a_1, a_2). Имеем $(a_1, a_2)\sigma_A = (a_1'', a_2')$. Полагаем $a_1\bar\sigma_{A_1}(a_2) = a_1''$. Из этих определений видно, что

$$(a_1, a_2)\sigma_A = (a_1\bar\sigma_{A_1}(a_2), a_2\sigma_{A_2}) = (a_1, a_2)(\bar\sigma_{A_1}, \sigma_{A_2}).$$

И отсюда $\sigma_A = (\bar\sigma_{A_1}, \sigma_{A_2})$, т.е. действительно $\sigma_A \in \Sigma_{A_1} \overset{A_2}{wr} \Sigma_{A_2}$.

Аналогично $\sigma_B = (\bar\sigma_{B_1}, \sigma_{B_2})$ т.е. $\sigma_B \in \Sigma_{B_1} \overset{B_2}{wr} \Sigma_{B_2}$.

Достаточность. Пусть $(a_1, a_2)\rho_1(a_1', a_2')$, т.е. $a_2 = a_2'$ и пусть $\sigma_A = (\bar\sigma_{A_1}, \sigma_{A_2}) \in \Sigma_{A_1} \overset{A_2}{wr} \Sigma_{A_2}$. Тогда

$(a_1,a_2)(\bar\sigma_{A_1},\sigma_{A_2})=(a_1\bar\sigma_{A_1}(a_2),\ a_2\sigma_{A_2})$

$(a_1',a_2)(\bar\sigma_{A_1},\sigma_{A_2})=(a_1'\bar\sigma_{A_1}(a_2),\ a_2\sigma_{A_2})$

т.е. $(a_1,a_2)\sigma_A\,\rho_1\,(a_1',a_2)\sigma_A$.

Аналогично из $(b_1,b_2)\rho_3(b_1',b_2')$ следует, что $(b_1,b_2)\sigma_B\,\rho_3(b_1',b_2')\sigma_B$. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{S}$ подгруппу $(\Sigma_{A_1}^{A_2}\lambda\Sigma_{A_2})\times(\Sigma_{B_1}^{B_2}\lambda\Sigma_{B_2})$ из $\Sigma_A\times\Sigma_B$. Лемма 3 означает, что для описания автоморфизмов треугольного типа автомата $\mathfrak{A}_1 wr\,\mathfrak{A}_2=(A,\Gamma,B)$ надо, исходя из представления $(S(A,B),\mathfrak{S})$, найти нормализатор $N_{\mathfrak{S}}(\Gamma)$, т.е. найти все элементы (σ_A,σ_B) из $\mathfrak{S}$, удовлетворяющие условию: для всякого $\gamma\in\Gamma$ справедливы включения: $\gamma\circ(\sigma_A,\sigma_B)\in\Gamma$, $\gamma\circ(\sigma_A,\sigma_B)^{-1}\in\Gamma$.

3. Некоторые вспомогательные построения.

Будем исходить из автомата $\mathfrak{A}=(A,S(A,B),B)$, $S(A,B)=S_A\times Fun(A,B)$ и допустим, что $A=A_1\times A_2$, $B=B_1\times B_2$.

В соответствии с этим выделим в $S(A,B)$ определенную полугруппу

$$\tilde S=S_{A_1}^{A_2}\lambda S_{A_2}\times Fun(A_1,B_1)^{A_2}\times Fun(A_2,B_2),$$

где $S_{A_1}^{A_2}\lambda S_{A_2}\in S_A$; $Fun(A_1,B_1)^{A_2}\times Fun(A_2,B_2)\subset Fun(A,B)$. В $S(A,B)$ действует группа $\Sigma_A\times\Sigma_B$, в этой последней выделим подгруппу $\mathfrak{S}=\Sigma_{A_1}^{A_2}\lambda\Sigma_{A_2}\times\Sigma_{B_1}^{B_2}\lambda\Sigma_{B_2}$. Мы покажем сейчас, что подгруппа $\tilde S$ инвариантна относительно $\mathfrak{S}$ и выведем формулу, определяющую действие.

Возьмем произвольный элемент $\gamma\in\tilde S$:

$$\gamma=((\bar\varphi_1,\varphi_2)(\bar\psi_1,\psi_2)),$$

и пусть $\sigma\in\mathfrak{S}$:

$$\sigma=((\bar\sigma_{A_1},\sigma_{A_2}),(\bar\sigma_{B_1},\sigma_{B_2})).$$

Вычислим $\gamma\circ\mathfrak{S}$ в соответствии с определением действия $\Sigma_A\times\Sigma_B$ на $S(A,B)$:

$$\gamma\circ\mathfrak{S}=((\bar\sigma_{A_1},\sigma_{A_2})^{-1}(\bar\varphi_1,\varphi_2)(\bar\sigma_{A_1},\sigma_{A_2});(\bar\sigma_{A_1},\sigma_{A_2})^{-1}(\bar\psi_1,\psi_2)(\bar\sigma_{B_1},\sigma_{B_2})).$$

Вычислим первую компоненту этой пары

$$(\bar{\sigma}_{A_1},\sigma_{A_2})^{-1}(\bar{\varphi}_1,\varphi_2)(\bar{\sigma}_{A_1},\sigma_{A_2})=(\sigma_{A_2}^{-1}\bar{\sigma}_{A_1}^{-1},\sigma_{A_2}^{-1})(\bar{\varphi}_1,\varphi_2)(\bar{\sigma}_{A_1},\sigma_{A_2})=$$

$$=(\sigma_{A_2}^{-1}\bar{\sigma}_{A_1}^{-1}\cdot(\sigma_{A_2}^{-1}\bar{\varphi}_1),\sigma_{A_2}^{-1}\varphi_2)(\bar{\sigma}_{A_1},\sigma_{A_2})=$$

$$=(\sigma_{A_2}^{-1}\bar{\sigma}_{A_1}^{-1}\cdot(\sigma_{A_2}^{-1}\bar{\varphi}_1)\sigma_{A_2}^{-1}\varphi_2\bar{\sigma}_{A_1},\sigma_{A_2}^{-1}\varphi_2\sigma_{A_2})=$$

$$=(\sigma_{A_2}^{-1}\cdot(\bar{\sigma}_{A_1}^{-1}\cdot\bar{\varphi}_1(\varphi_2\bar{\sigma}_{A_1}));\sigma_{A_2}^{-1}\varphi_2\sigma_{A_2}).$$

Для второй компоненты имеем

$$(\bar{\sigma}_{A_1},\sigma_{A_2})^{-1}(\bar{\psi}_1,\psi_2)(\bar{\sigma}_{B_1},\sigma_{B_2})=(\sigma_{A_2}^{-1}\bar{\sigma}_{A_1}^{-1},\sigma_{A_2}^{-1})(\bar{\psi}_1,\psi_2)(\bar{\sigma}_{B_1},\sigma_{B_2})=$$

$$=(\sigma_{A_2}^{-1}\bar{\sigma}_{A_1}^{-1}(\sigma_{A_2}^{-1}\bar{\psi}_1),\sigma_{A_2}^{-1}\psi_2)(\bar{\sigma}_{B_1},\sigma_{B_2})=$$

$$=(\sigma_{A_2}^{-1}\bar{\sigma}_{A_1}^{-1}(\sigma_{A_2}^{-1}\bar{\psi}_1)\cdot\sigma_{A_2}^{-1}\psi_2\bar{\sigma}_{B_1};\sigma_{A_2}^{-1}\psi_2\sigma_{B_2})=(\sigma_{A_2}^{-1}(\bar{\sigma}_{A_1}^{-1}\cdot\bar{\psi}_1(\psi_2\bar{\sigma}_{B_1}));\sigma_{A_2}^{-1}\psi_2\sigma_{B_2}).$$

Итак, в результате мы получили:

$$\gamma\circ\sigma=(\sigma_{A_2}^{-1}(\bar{\sigma}_{A_1}^{-1}\bar{\varphi}_1(\varphi_2\bar{\sigma}_{A_1})),\sigma_{A_2}^{-1}\varphi_2\sigma_{A_2};\sigma_{A_2}^{-1}(\bar{\sigma}_{A_1}^{-1}\bar{\psi}_1(\psi_2\bar{\sigma}_{B_1})),\sigma_{A_2}^{-1}\psi_2\sigma_{B_2}).$$

Ясно, что это элемент, лежащий в $\widetilde{S}$.

Рассмотрим сейчас автомат

$$(A_1\times A_2, S, B_1\times B_2)=(A_1\times A_2, S(A_1,B_1)^{A_2}\lambda S(A_2,B_2), B_1\times B_2).$$

Покажем, что этот автомат изоморфен автомату

$$(A_1\times A_2,\widetilde{S},B_1\times B_2)=(A_1\times A_2, S_{A_1}^{A_2}\times S_{A_2}\times Fun(A_1,B_1)^{A_2}\times Fun(A_2,B_2), B_1\times B_2).$$

Для каждого элемента $s=(\bar{s}_1,s_2)=((\bar{\varphi}_1,\bar{\psi}_1)(\varphi_2,\psi_2))\in S$ через s^{μ} обозначим элемент

$$((\bar{\varphi}_1,\varphi_2)(\bar{\psi}_1,\psi_2))\in\widetilde{S}\ .$$

Из предыдущего видно, что всегда выполняется:

$$(a_1,a_2)\circ s=(a_1,a_2)\circ s^{\mu}.$$

$$(a_1,a_2)*s=(a_1,a_2)*s^{\mu}.$$

Отсюда непосредственно следует, что переход от s к s^{μ} – есть изоморфизм полугрупп S и $\widetilde{S}$ и этот изоморфизм влечёт изоморфизм соответствующих автоматов (при этом учитывается, что автоматы-точные).

Одновременно с группой $\mathfrak{S}=\Sigma_{A_1}^{A_2}\lambda\Sigma_{A_2}\times\Sigma_{B_1}^{B_2}\lambda\Sigma_{B_2}$ рассмотрим группу $\Sigma=\Sigma_{A_1}^{A_2}\times\Sigma_{B_1}^{B_2}\lambda\Sigma_{A_2}\times\Sigma_{B_2}$; действие в ней определим по правилу:

$$(\bar\sigma_{A_1}, \bar\sigma_{B_1}, \sigma_{A_2}, \sigma_{B_2})(\bar\sigma'_{A_1}, \bar\sigma'_{B_1}, \sigma'_{A_2}, \sigma'_{B_2}) =$$
$$= (\bar\sigma_{A_1}(\sigma_{A_2} \cdot \bar\sigma'_{A_1}), \bar\sigma_{B_1}(\sigma_{B_2} \bar\sigma'_{B_1}); \sigma_{A_2}\sigma'_{A_2}, \sigma_{B_2}\sigma'_{B_2}).$$

Изоморфизм η между Σ и $\mathfrak{S}$ определяется по правилу:

$$(\bar\sigma_{A_1}, \bar\sigma_{B_1}; \sigma_{A_2}, \sigma_{B_2})^{\eta} = (\bar\sigma_{A_1}, \sigma_{A_2}; \bar\sigma_{B_1}, \sigma_{B_2}).$$

Кроме того, сравнив равенства $(\bar\sigma_{A_1}, \bar\sigma_{B_1}, \sigma_{A_2}, \sigma_{B_2})(\bar\sigma'_{A_1}, \bar\sigma'_{B_1}, \sigma'_{A_2}, \sigma'_{B_2})$
$= (\bar\sigma_{A_1}(\sigma_{A_2}\bar\sigma'_{A_1}), \bar\sigma_{B_1}(\sigma_{B_2}\bar\sigma'_{B_1}), \sigma_{A_2}\sigma'_{A_2}, \sigma_{B_2}\sigma'_{B_2})$
и $(\bar\sigma_{A_1}, \sigma_{A_2}; \bar\sigma_{B_1}, \sigma_{B_2})(\bar\sigma'_{A_1}, \sigma'_{A_2}; \bar\sigma'_{B_1}, \sigma'_{B_2}) =$
$= (\bar\sigma_{A_1}(\sigma_{A_2}\bar\sigma'_{A_1}), \sigma_{A_2}\sigma'_{A_2}; \bar\sigma_{B_1}(\sigma_{B_2}\bar\sigma'_{B_1}), \sigma_{B_2}\sigma'_{B_2})$
мы видим, что η сохраняет групповую операцию, т.е. $\Sigma \cong \mathfrak{S}$

Определим действие Σ в S по формуле:

$$s \circ \sigma = (\sigma_{A_2}^{-1}(\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}), \sigma_{A_2}^{-1}(\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_1(\psi_2\bar\sigma_{B_1}); (\varphi_2, \psi_2) \circ (\sigma_{A_2}, \sigma_{A_2})).$$

Проверить справедливость равенства $(s \circ \sigma)^{\mu} = s^{\mu} \circ \sigma^{\eta}$ несложно.

Из всего сказанного выше вытекает

Лемма 4. Представление (S, Σ) изоморфно подпредставлению $(\tilde S, \mathfrak{S})$ из $(S(A,B), \Sigma_A \times \Sigma_B)$.

4. Основной результат

Итак, мы рассматриваем сплетение двух точных автоматов: $(A_1, \Gamma_1, B_1) \, \mathrm{wr} \, (A_2, \Gamma_2, B_2) = (A_1 \times A_2, \Gamma_1^{A_2} \lambda \Gamma_2, B_1 \times B_2)$.

Ясно, что $\Gamma = \Gamma_1^{A_2} \lambda \Gamma_2$ лежит в $S(A_1 \times A_2, B_1 \times B_2)$, но мы не знаем, как лежит, поэтому провести вычисления непосредственно невозможно. Но мы знаем, как $\Gamma_1^{A_2} \lambda \Gamma_2$ лежит в $S(A_1, B_1)^{A_2} \lambda S(A_2, B_2)$, а именно:

$$\Gamma_1^{A_2} \subset S(A_1, B_1)^{A_2}, \quad \Gamma_2 \subset S(A_2, B_2).$$

По леммам 3 и 4 нам надо найти все элементы (σ_1, σ_2) из $\Sigma_{A_1}^{A_2} \lambda \Sigma_{B_1}^{B_2} \times \Sigma_{A_2} \times \Sigma_{B_2}$, удовлетворяющие условию: для всякого $\gamma \in \Gamma = \Gamma_1^{A_2} \lambda \Gamma_2$ справедливы включения: $\gamma \circ (\bar\sigma_1, \sigma_2) \in \Gamma$ и $\gamma \circ (\bar\sigma_1, \sigma_2)^{-1} \in \Gamma$.

Итак, мы вычисляем

$$\gamma \circ \sigma = (\sigma_{A_2}^{-1}(\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1})), \sigma_{A_2}^{-1}(\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_1(\psi_2\bar\sigma_{B_1})); (\varphi_2, \psi_2) \circ (\sigma_{A_2}, \sigma_{B_2}).$$

Так как $(\varphi_2, \psi_2) \circ (\sigma_{A_2}, \sigma_{B_2})$ должен лежать в Γ_2, то $(\sigma_{A_2}, \sigma_{B_2})$ лежит в нормализаторе полугруппы Γ_2, вычисленном в $\Sigma_{A_2} \times \Sigma_{B_2}$.

Легко видеть, что первая компонента $(\sigma_{A_2}^{-1}(\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1})), \sigma_{A_2}^{-1}(\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_1(\psi_2\bar\sigma_{B_1})$ лежит в $\Gamma_1^{A_2}$ тогда и только тогда, когда в $\Gamma_1^{A_2}$ лежит $(\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}), \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_1(\psi_2\bar\sigma_{B_1}))$.

Рассмотрим теперь специальное проектирование

$$S(A_1,B_1)^{A_2}\leftthreetimes S(A_2,B_2)\longrightarrow S(A_1,B_1)^{A_2}$$

осуществляемое произвольным элементом из $\Sigma_{A_1}^{A_2}\times\Sigma_{B_1}^{B_2}$ по правилу: возьмем $s=(\bar s_1,s_2)=((\bar\varphi_1,\bar\psi_1),(\varphi_2,\psi_2))$ и $\bar\sigma=(\bar\sigma_{A_1},\bar\sigma_{B_1})$. Тогда:

$$s\circ\bar\sigma=(\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}),\ \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_1(\psi_2\bar\sigma_{B_1})).$$

Оказывается, что имеет место соотношение:

$$(\bar s_1,s_2)\cdot(\sigma\bar\sigma')=((\bar s_1,s_2)\cdot\bar\sigma,\ s_2)\cdot\bar\sigma',\quad \bar\sigma,\bar\sigma'\in\Sigma_{A_1}^{A_2}\times\Sigma_{B_1}^{B_2}$$

имеем:

$$(\bar s_1,s_2)\circ(\bar\sigma\bar\sigma')=(\bar s_1,s_2)\cdot(\bar\sigma_{A_1}\bar\sigma'_{A_1};\ \bar\sigma_{B_1}\bar\sigma'_{B_1})=$$
$$=(\bar\sigma'^{-1}_{A_1}\bar\sigma^{-1}_{A_1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}\bar\sigma'_{A_1});\ \bar\sigma'^{-1}_{A_1}\bar\sigma^{-1}_{A_1}\bar\psi_1(\psi_2\bar\sigma_{B_1}\bar\sigma'_{B_1}))=$$
$$=(\bar\sigma'^{-1}_{A_1}(\bar\sigma^{-1}_{A_1}\bar\varphi_1\ \varphi_2\bar\sigma_{A_1})\cdot\varphi_2\bar\sigma'_{A_1};\ \bar\sigma'^{-1}_{A_1}(\bar\sigma^{-1}_{A_1}\bar\psi_1\psi_2\bar\sigma_{B_1})\psi_2\bar\sigma'_{B_1})=$$
$$=((\bar\sigma^{-1}_{A_1}\bar\varphi_1\varphi_2\bar\sigma_{A_1},\ \bar\sigma^{-1}_{A_1}\bar\psi_1\psi_2\bar\sigma_{B_1}),(\varphi_2,\psi_2))\cdot(\bar\sigma'_{A_1},\bar\sigma'_{B_1})=$$
$$=((\bar s_1,s_2)\circ\bar\sigma;\ s_2)\cdot\bar\sigma'.$$

Пусть $\Gamma_1\subset S(A_1,B_1)$, $\Gamma_2\subset S(A_2,B_2)$. Уже отмечалось, что $\Gamma=\Gamma_1^{A_2}\leftthreetimes\Gamma_2\subset S(A_1,B_1)^{A_2}\leftthreetimes S(A_2,B_2)$.

Определение. Назовем косым нормализатором полугруппы Γ в группе $\Sigma_{A_1}^{A_2}\times\Sigma_{B_1}^{B_2}$ множество всех таких $\bar\sigma$, $\bar\sigma\in\Sigma_{A_1}^{A_2}\times\Sigma_{B_1}^{B_2}$, для которых выполняется $\gamma\circ\bar\sigma\in\Gamma_1^{A_2}$ и $\gamma\cdot\sigma^{-1}\in\Gamma_1^{A_2}$, для $\gamma\in\Gamma$. Из отмеченного соотношения вытекаер, что косой нормализатор есть подгруппа в $\Sigma_{A_1}^{A_2}\times\Sigma_{B_1}^{B_2}$.

Теорема I. Для того,чтобы элемент $\sigma=(\bar\sigma_{A_1},\bar\sigma_{B_1},\sigma_{A_2},\sigma_{B_2})$ принадлежал нормализатору в Σ полугруппы $\Gamma=\Gamma_1^{A_2}\leftthreetimes\Gamma_2$, необходимо и достаточно, чтобы I)элемент $(\sigma_{A_2},\sigma_{B_2})$ принадлежал нормализатору Γ_2 в $\Sigma_{A_2}\times\Sigma_{B_2}$ и 2) элемент $(\bar\sigma_{A_1};\bar\sigma_{B_1})$ принадлежал косому нормализатору полугруппы Γ в группе $\Sigma_{A_1}^{A_2}\times\Sigma_{B_1}^{B_2}$.

Доказательство теоремы следует из приводившихся уже замечаний. Теорема дает подход к описанию автоморфизмов треугольного типа сплетения двух точных автоматов.

5. Случай автоматов Мура

Если (A,Γ,B)-точный автомат Мура и Γ рассматривается как подполугруппа в $S(A,B)$, то элементы из Γ имеют вид $\gamma=(\varphi,\varphi\psi_0)$, где φ пробегает некоторую подполугруппу Φ в S_A, а ψ_0-фиксированный элемент из $Fun(A,B)$.

Известно, что автомат (A,Γ,B) тогда и только тогда муровский, если его можно продолжить до автомата (A, Γ', B), где Γ' есть результат присоединения к Γ внешней единицы. Поэтому без ограничения общности можно считать, что полугруппа Γ уже содержит единицу, которая имеет вид $e = (\varepsilon, \psi_0)$, где ε -единица в S_A.

Применим доказанную ранее теорему к сплетению двух автоматов Мура $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$:

$$\mathfrak{A}_1 \operatorname{wr} \mathfrak{A}_2 = (A_1, \Gamma_1, B_1) \operatorname{wr} (A_2, \Gamma_2, B_2) = (A_1 \times A_2, \Gamma_1^{A_2} \lambda \Gamma_2, B_1 \times B_2).$$

Обозначим через $e_1 = (\varepsilon_1, \psi_0)$ единицу в Γ_1, а через $e_2 = (\varepsilon_2, \psi_0')$ единицу в Γ_2. При этом ε_1 есть единица в S_{A_1}, ε_2 -в S_{A_2}, $\psi_0 \in Fun(A_1, B_1)$, $\psi_0' \in Fun(A_2, B_2)$.

Рассмотрим такие элементы $(\bar{\sigma}_{A_1}, \bar{\sigma}_{B_1}) \in \Sigma_{A_1}^{A_2} \times \Sigma_{B_1}^{B_2}$, что для них самих и обратных к ним элементов $(\bar{\sigma}_{A_1}, \bar{\sigma}_{B_1})^{-1}$ выполняется равенство $\bar{\sigma}_{A_1} \bar{\psi}_0 = \bar{\psi}_0 (\psi_0' \bar{\sigma}_{B_1})$. Множество всех таких элементов образует подгруппу в $\Sigma_{A_1}^{A_2} \times \Sigma_{B_1}^{B_2}$. Действительно, пусть $(\bar{\sigma}_{A_1}, \bar{\sigma}_{B_1})$ и $(\bar{\sigma}_{A_1}', \bar{\sigma}_{B_1}')$ -элементы с указанным свойством. Тогда $\bar{\sigma}_{A_1} \bar{\sigma}_{A_1}' \bar{\psi}_0 = \bar{\sigma}_{A_1} (\bar{\psi}_0 \psi_0' \bar{\sigma}_{B_1}') = (\bar{\sigma}_{A_1} \bar{\psi}_0) \psi_0' \bar{\sigma}_{B_1}' = (\bar{\psi}_0 \psi_0' \bar{\sigma}_{B_1}) \psi_0' \bar{\sigma}_{B_1}' = \bar{\psi}_0 \psi_0' \bar{\sigma}_{B_1} \bar{\sigma}_{B_1}'$ что и требовалось.

Полученную подгруппу будем называть централизатором пары элементов (ψ_0, ψ_0').

В ситуации автоматов Мура строение нормализатора в Σ полугруппы Γ описывзет следующая

Теорема 2. Для того, чтобы элемент $\sigma = (\bar{\sigma}_{A_1}, \bar{\sigma}_{B_1}, \sigma_{A_2}, \sigma_{B_2})$ принадлежал нормализатору в Σ полугруппы Γ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: если $\gamma = (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_1 \bar{\psi}_0; \varphi_2, \varphi_2 \psi_0') \in \Gamma = \Gamma_{A_1}^{A_2} \lambda \Gamma_2$, то

I) $\bar{\sigma}_{A_1} \in N_{\Sigma_{A_1}^{A_2}}(\Phi_1^{A_2})$,

2) $(\bar{\sigma}_{A_1}, \bar{\sigma}_{B_1})$ принадлежит централизатору пары (ψ_0, ψ_0'),

3) $(\bar{\sigma}_{A_1}^{-1} / \varphi_2 \bar{\sigma}_{A_1}), \bar{\sigma}_{A_1}^{-1} \bar{\psi}_0 (\psi_2 \bar{\sigma}_{B_1})) \in \Gamma_1^{A_2}$,

4) $(\sigma_{A_1}, \sigma_{A_2}) \in N_{\Sigma_{A_2} \times \Sigma_{B_2}}(\Gamma_2)$.

Для того, чтобы элемент $\sigma = (\bar{\sigma}_{A_1}, \bar{\sigma}_{B_1}, \sigma_{A_2}, \sigma_{B_2})$ принадлежал нормализатору в Σ полугруппы $\Gamma = \Gamma_1^{A_2} \lambda \Gamma_2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия теоремы I. Принадлежность $(\bar{\sigma}_{A_1}, \bar{\sigma}_{B_1})$ косому нормализатору полугруппы Γ в группе $\Sigma_{A_1}^{A_2} \times \Sigma_{B_1}^{B_2}$ означает, что элемент $\gamma \cdot \bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{A_1}^{-1} \bar{\varphi}_1 (\varphi_2 \bar{\sigma}_{A_1}), \bar{\sigma}_{A_1}^{-1} \bar{\psi}_1 (\psi_2 \bar{\sigma}_{B_1}))$ должен принадлежать $\Gamma_1^{A_2}$.

Запишем последнюю формулу для случая сплетения автоматов Мура: $((\bar\varphi_1, \bar\varphi_1\bar\psi_0), (\varphi_2, \varphi_2\psi_0')) \circ (\bar\sigma_{A_1}, \bar\sigma_{B_1}) =$
$= (\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}); (\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1\bar\psi_0(\varphi_2\psi_0'\bar\sigma_{B_1})) = (\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1});$
$(\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}))(\varphi_2\bar\sigma_{A_1})^{-1}\bar\psi_0(\varphi_2(\psi_0'\bar\sigma_{B_1})))$

В частности, для элемента $\gamma = ((\bar\varphi_1, \bar\varphi_1\bar\psi_0), (\varepsilon_2, \psi_0'))$ получим: $((\bar\varphi_1, \bar\varphi_1\bar\psi_0), (\varepsilon_2, \psi_0')) \circ (\bar\sigma_{A_1}, \bar\sigma_{B_1}) =$
$= (\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1\bar\sigma_{A_1}, (\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1\bar\sigma_{A_1})\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_0(\psi_0'\bar\sigma_{B_1}))$.
Этот элемент должен принадлежать $\Gamma_1^{A_2}$. Это означает, что
(а) $\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1\bar\sigma_{A_1} \in \Phi_1^{A_2}$, т.е. что $\bar\sigma_{A_1} \in N_{\Sigma_{A_1}^{A_2}}(\Phi_1^{A_2})$
(б) $\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_0(\psi_0'\bar\sigma_{B_1}) \in \bar\Psi_0$, что равносильно равенству
$\bar\psi_0(\psi_0'\bar\sigma_{B_1}) = \bar\sigma_{A_1}\bar\psi_0$.

Последнее равенство означает, что элемент $(\bar\sigma_{A_1}, \bar\sigma_{B_1})$ принадлежит централизатору пары (ψ_0, ψ_0').
Рассмотрим теперь условие $\gamma\cdot\bar\sigma \in \Gamma_1^{A_2}$ для элементов $\gamma \in \Gamma$ вида $\gamma = ((\bar\varepsilon_1, \bar\psi_0), (\varphi_2, \psi_2))$, у которых $(\varphi_2, \psi_2) \in \Gamma_2$ и $\bar\varepsilon_1(a_2) = \varepsilon_1$, $\bar\psi_0(a_2) = \psi_0$ для всех $a_2 \in A_2$:
$(\gamma\cdot\bar\sigma) = ((\bar\varepsilon_1, \bar\psi_0), (\varphi_2, \psi_2)) \circ (\bar\sigma_{A_1}, \bar\sigma_{B_1}) = (\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varepsilon_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}), \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_0\psi_2\bar\sigma_{B_1}) =$
$= (\bar\sigma_{A_1}^{-1}(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}); \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_0(\psi_2\bar\sigma_{B_1}) \in \Gamma_1^{A_2}$ (в)

Таким образом, если (A_1, Γ_1, B_1) и (A_2, Γ_2, B_2) -автоматы Мура, то из условия 2) теоремы I следуют условия (а), (б) и (в). Покажем, что с другой стороны, из условий (а), (б) и (в) следует выполнения условия 2) теоремы I.

Пусть $\gamma = ((\bar\varphi_1, \bar\Psi_1)(\varphi_2, \psi_2)) = (\bar\varphi_1, \bar\varphi_1\bar\psi_0), (\varphi_2, \varphi_2\psi_0'))$ — произвольный элемент из Γ. Проверим сначала, что элемент $\gamma\cdot\bar\sigma = (\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}), \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\Psi_1(\psi_2\bar\sigma_{B_1}))$ может быть представлен в виде следующего произведения:

$$\gamma\cdot\bar\sigma = (\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1\bar\sigma_{A_1}, \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\Psi_1(\psi_0'\bar\sigma_{B_1}))\cdot(\bar\sigma_{A_1}^{-1}(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}), \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_0(\psi_2\bar\sigma_{B_1})) \quad (*)$$

Действительно:
$(\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1\bar\sigma_{A_1}, \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\Psi_1(\psi_0'\bar\sigma_{B_1}))\cdot(\bar\sigma_{A_1}^{-1}(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}), \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_0(\psi_2\bar\sigma_{B_1})) =$
$= (\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1\bar\sigma_{A_1}\bar\sigma_{A_1}^{-1}(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}), \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1\bar\sigma_{A_1}\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\psi_0(\psi_2\bar\sigma_{B_1})) =$
$= (\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}), \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1\bar\psi_0\psi_2\bar\sigma_{B_1}) =$
$= ((\bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\varphi_1(\varphi_2\bar\sigma_{A_1}), \bar\sigma_{A_1}^{-1}\bar\Psi_1(\psi_2\bar\sigma_{B_1})) = \gamma\cdot\bar\sigma$.
Предпоследнее равенство получено с учетом того, что $\bar\varphi_1\bar\psi_0 = \bar\Psi_1$.

Условия (а) и (б) означают, что в $\Gamma_1^{A_2}$ содержится первый из сомножителей выражения $(*)$, а условие (в), что в $\Gamma_1^{A_2}$ содержится второй сомножитель.

Так как условие 4) теоремы 2 совпадает с условием I) теоремы I, то этим теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. Плоткин Б.И.,Алгебраические структуры. Группы, полугруппы и автоматы.-Рига,1974.
2. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп/ Под ред.Р.Арбиба.-М.1975.

Алгебра и дискретная математика. Рига, 1984.

УДК 519.4

С.М.Вовси, А.А.Матвеев

РПИ им. А.Я.Пельше

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАДИКАЛЫ И КОРАДИКАЛЫ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ ГРУПП

I. Введение. В настоящей заметке вводятся понятия ρ-радикального и ρ-корадикального классов Ω-групп, где ρ - некоторое отношение между Ω-группой и ее Ω-подгруппой. Доказывается, что между такими классами имеется естественное соответствие Галуа и дается характеристика ρ-радикальных и ρ-корадикальных классов, замкнутых относительно этого соответствия. В качестве частных случаев здесь содержится основной результат из [I] и теорема I из [2]. Отметим, что в доказательстве используется работа Фрида - Вигандта [3], в которой близкие вопросы рассматриваются с весьма общих позиций.

2. Теорема о соответствии. Пусть $\mathcal{U}$ - класс Ω-групп с фиксированной системой мультиоператоров Ω, замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. Следуя общепринятой терминологии, такой класс будем называть универсальным. Зафиксируем некоторый универсальный класс $\mathcal{U}$ и в дальнейшем под Ω-группой будем всегда понимать Ω-группу из $\mathcal{U}$.

Пусть ρ есть отношение между Ω-группами из $\mathcal{U}$ и их Ω-подгруппами (т.е. бинарное отношение на $\mathcal{U}$, для которого $H \rho G$ влечет, что H есть ρ-подгруппа в G), удовлетворяющее следующим условиям:

(а) если $H \rho G$, то $H^{\varphi} \rho G^{\varphi}$ для любого гомоморфизма φ Ω-группы G;

(б) если $H \rho G$ и K есть характеристический идеал в H, то $K \rho G$;

(в) если $H \rho G$ и $H \leq A \leq G$, то $H \rho A$;

(г) если $H \triangleleft G$, то $H \rho G$.

Простейшими примерами отношений, удовлетворяющих условиям (а) - (г), являются отношения $H \leq G$ (H есть Ω-подгруппа в G) и $H \triangleleft G$ (H есть идеал в G). Если для данного ρ выполняется $H \rho G$, то H называется ρ-Ω-подгруппой в G. Далее, H называется ρ-достижимой Ω-подгруппой в G, если в G существует возрастающая цепь Ω-подгрупп

$$H = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G,$$

для которых $G_i \rho G_{i+1}$.

Под классами Ω-групп всегда подразумеваются абстрактные подклассы в $\mathfrak{U}$, содержащие единичную Ω-группу. Если $\mathfrak{X}$ - класс Ω-групп, то его элементы называются просто $\mathfrak{X}$-группами, а Ω-подгруппы и идеалы некоторой Ω-группы G, принадлежащие классу $\mathfrak{X}$, называются ее $\mathfrak{X}$-подгруппами и $\mathfrak{X}$-идеалами соответственно. Наконец, идеал H в G называется ко-$\mathfrak{X}$-идеалом, если $G/H \in \mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ - класс Ω-групп, замкнутый по гомоморфизмам. Через $\mathfrak{X}^{\vee}$ обозначим класс всех Ω-групп, у которых нет неединичных ρ-достижимых $\mathfrak{X}$-подгрупп. Очевидно, что класс $\mathfrak{X}^{\vee}$ является ρ-наследственным, т.е. замкнут относительно взятия ρ-Ω-подгрупп. С другой стороны, пусть $\mathfrak{Y}$ есть ρ-наследственный класс, тогда через $\mathfrak{Y}^{\wedge}$ обозначим класс всех Ω-групп, у которых нет неединичных гомоморфных образов, принадлежащих $\mathfrak{Y}$. Очевидно, что $\mathfrak{Y}^{\wedge}$ замкнут относительно гомоморфизмов.

Предложение I. Отображения $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{\vee}$ и $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}^{\wedge}$ образуют соответствие Галуа между гомоморфно замкнутыми и ρ-наследственными классами Ω-групп. Иными словами, выполняются соотношения:

$$\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2 \Rightarrow \mathfrak{X}_1^{\vee} \supseteq \mathfrak{X}_2^{\vee}, \ \mathfrak{Y}_1 \subseteq \mathfrak{Y}_2 \Rightarrow \mathfrak{Y}_1^{\wedge} \supseteq \mathfrak{Y}_2^{\wedge}$$
$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^{\vee\wedge}, \ \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}^{\vee\wedge}.$$

Это предложение является частным случаем теоремы I работы [3].

Определение I. Класс Ω-групп $\mathfrak{X}$ называется ρ-радикальным, если: (P1) $\mathfrak{X}$ является гомоморфно замкнутым; (P2) в каждой Ω-группе G идеал, порожденный всеми ее ρ-$\mathfrak{X}$-подгруппами, принадлежит $\mathfrak{X}$ (этот идеал обозначается через $\mathfrak{X}(G)$ и называется $\mathfrak{X}$-ρ радикалом Ω-группы G).

Определение 2. Класс Ω-групп $\mathfrak{Y}$ называется ρ-корадикальным, если: (K1) $\mathfrak{Y}$ является ρ-наследственным; (K2) в каждой Ω-группе G есть наименьший ко-$\mathfrak{Y}$-идеал, который обозначается через $\mathfrak{Y}^*(G)$ и называется $\mathfrak{Y}$-ρ-корадикалом Ω-группы G.

В частном случае $\rho = \triangleleft$ эти определения превращаются в определения радикального и корадикального классов соответственно в смысле [4].

Если $\mathfrak{X}$ есть ρ-радикальный класс, то согласно предыдущему ему отвечает класс $\mathfrak{X}^{\vee}$. Используя (б), легко понять, что в этом случае $\mathfrak{X}^{\vee}$ состоит в точности из тех Ω-групп G, для которых $\mathfrak{X}(G)=\{1\}$. Столь же очевидно, что если $\mathfrak{Y}$ есть ρ-корадикальный класс, то $\mathfrak{Y}^{\wedge}=\{G\mid\mathfrak{Y}^*(G)=G\}$.

Предложение 2. I) Если $\mathfrak{X}$ - гомоморфно замкнутый класс, то $\mathfrak{X}^{\vee}$ есть ρ-корадикальный класс, замкнутый по расширениям. 2) Если $\mathfrak{Y}$ - ρ-наследственный класс, то $\mathfrak{Y}^{\wedge}$ есть ρ-радикальный класс, замкнутый по расширениям.

Доказательство. I) То, что $\mathfrak{X}^{\vee}$ является ρ-наследственным, уже отмечалось выше. Докажем, что $\mathfrak{X}^{\vee}$ удовлетворяет условию (K2). Пусть G - произвольная группа, A_i - всевозможные ко-$\mathfrak{X}^{\vee}$-идеалы в G и $A=\bigcap_{i\in I}A_i$. Надо доказать, что $G/A\in\mathfrak{X}^{\vee}$. Предположим, что H/A есть ρ-$\mathfrak{X}$-подгруппа в G/A. Естественный эпиморфизм $G/A\to G/A_i$ отсбражает H/A на $\langle H,A_i\rangle/A_i$. Из (а) следует, что $\langle H,A_i\rangle/A_i\ \rho$ $\rho\ G/A_i$. Так как $G/A_i\in\mathfrak{X}^{\vee}$, то $H\subseteq A_i$. Это верно для всех i, поэтому $H\subseteq A$.

Докажем, что класс $\mathfrak{X}^{\vee}$ замкнут по расширениям. Пусть $G/A\in\mathfrak{X}^{\vee}$ и $A\in\mathfrak{X}^{\vee}$. Предположим, что $H\rho G$ и $H\in\mathfrak{X}$. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\varphi: G\to G/A$. Тогда $H^{\varphi}\rho\, G/A$ (ввиду (а)) и $H^{\varphi}\in\mathfrak{X}$ (по определению ρ-радикального класса). Поэтому $H^{\varphi}=\{1\}$, т.е. $H\subseteq A$. Из (в) теперь следует, что $H \rho A$. Поэтому $H = 1$, что и требовалось доказать.

2) Ясно, что $\mathcal{Y}^{\wedge}$ замкнут по гомоморфизмам. Пусть далее H_i – всевозможные ρ-$\mathcal{Y}^{\wedge}$-подгруппы Ω-группы G и H – идеал в G, порожденный всеми H_i. Докажем, что $H \in \mathcal{Y}^{\wedge}$, т.е. что у H нет неединичных гомоморфных образов, принадлежащих $\mathcal{Y}$. Рассмотрим произвольный эпиморфизм φ : $H \to H^{\varphi} \in \mathcal{Y}$. Так как $H_i \rho G$ и $H_i \le H \trianglelefteq G$ для всех i, то из (в) следует, что $H_i \rho H$, а из (а) – что $H_i^{\varphi} \rho H^{\varphi}$. Так как $\mathcal{Y}$ – ρ-корадикальный класс, то $H_i^{\varphi} \in \mathcal{Y}$. В то же время $H_i \in \mathcal{Y}^{\wedge}$ и поэтому у H_i нет неединичных гомоморфных образов, принадлежащих $\mathcal{Y}$. Поэтому $H_i^{\varphi} = \{1\}$. Но тогда и $H^{\varphi} = \{1\}$, т.е. $\mathcal{Y}^{\wedge}$ есть ρ-корадикальный класс.

Докажем, что $\mathcal{Y}^{\wedge}$ замкнут относительно расширений. Пусть $G/A \in \mathcal{Y}^{\wedge}$ и $A \in \mathcal{Y}^{\wedge}$. Предположим, что имеется эпиморфизм $\varphi : G \to G^{\varphi}$, где $G^{\varphi} \in \mathcal{Y}$. Так как $A \triangleleft G$, то из (а) следует, что $A^{\varphi} \triangleleft G^{\varphi}$, а из (г) – что $A^{\varphi} \rho G^{\varphi}$. Класс $\mathcal{Y}$ является ρ-наследственным, поэтому $A^{\varphi} \in \mathcal{Y}$. Но у A нет неединичных гомоморфных образов в $\mathcal{Y}$, следовательно $A^{\varphi} = \{1\}$. Таким образом, $G^{\varphi}/A^{\varphi} = G^{\varphi} \in \mathcal{Y}$. Так как G/A также не имеет неединичных гомоморфных образов, принадлежащих $\mathcal{Y}$, то $G^{\varphi} = \{1\}$, откуда $G \in \mathcal{Y}^{\wedge}$. Тем самым доказательство предложения закончено.

Будем говорить, что универсальный класс $\mathcal{U}$ удовлетворяет *условию характеристичности*, если как только $G \in \mathcal{U}$, $H \triangleleft G$ и K – характеристический идеал в H, то $K \triangleleft G$.

Предложение 3. I) Если ρ-радикальный класс $\mathfrak{X}$ замкнут по расширениям, то $\mathfrak{X}^{\vee\wedge} = \mathfrak{X}$. 2) Если основной класс $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию характеристичности и ρ-корадикальный класс $\mathcal{Y}$ замкнут по расширениям, то $\mathcal{Y}^{\wedge\vee} = \mathcal{Y}$.

Доказательство. Непосредственно из определений следует, что ρ-радикальный (ρ-корадикальный) класс заведомо является радикальным (корадикальным). Однако согласно теореме I из [2], если радикальный (корадикальный) класс $\mathfrak{X}$ ($\mathcal{Y}$) замкнут по расширениям, то $\mathfrak{X}^{\vee\wedge} = \mathfrak{X}$ ($\mathcal{Y}^{\wedge\vee} = \mathcal{Y}$); при этом доказательство последнего равенства в [2] использует условие характеристичности.

Подытожим полученные результаты. Если ограничиваться ρ-радикальными и ρ-корадикальными классами (которым и посвящена настоящая заметка), то предложения I – 3 можно суммировать следующим образом.

Теорема. Отображения $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^{\vee}$ и $\mathcal{U} \to \mathcal{U}^{\wedge}$ образуют соответствие Галуа между ρ-радикальными и ρ-корадикальными классами. При этом ρ-радикальный класс является Галуа-замкнутым тогда и только тогда, когда он замкнут по расширениям. Если класс $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию характеристичности, то подобное верно и для ρ-корадикальных классов.

3. *Некоторые следствия*. I) Пусть $\mathcal{U}$ есть класс всех решеточно упорядоченных групп, а $H \rho G$ означает, что H есть выпуклая подгруппа в G. Хорошо известно, что в этом случае выполняются условия характеристичности и (а) – (г). При этом ρ-радикальные и ρ-корадикальные классы есть в точности классы кручения и классы без кручения решеточно упорядоченных групп в смысле [I]. Поэтому из доказанной здесь теоремы непосредственно вытекает основной результат работы [I].

2) Пусть $\mathcal{U}$ – универсальный класс Ω-групп, удовлетворяющий условию характеристичности, а $H \rho G$ означает, что $H \lhd G$. В этом случае условия (а) – (г) тривиальны, а ρ-радикальные и ρ-корадикальные классы есть просто радикальные и корадикальные классы. Поэтому теорема I из [2] есть частный случай теоремы настоящей заметки.

3) Пусть $\mathcal{U}$ – произвольный универсальный класс Ω-групп, а $H \rho G$ означает, что H есть ρ-подгруппа в G. Выполнимость условий (а) – (г) опять очевидна и мы получаем еще один результат типа предыдущих. При этом ρ-радикальный класс – это радикальный класс $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий следующему дополнительному условию: если H есть $\mathfrak{X}$-подгруппа в G, то $H \leq \mathfrak{X}(G)$ (т.е. строгий радикальный класс в смысле [5]. С другой стороны, ρ-корадикальный класс в данном случае – это корадикальный класс, замкнутый относительно взятия Ω-подгрупп (т.е. предмногообразие Ω-групп). Таким образом, из на-

шей теоремы следует, что между строгими радикальными классами и предмногообразиями имеется естественное соответствие Галуа.

ЛИТЕРАТУРА

I. Martinez J. The fundamental theorem on torsion classes of lattice-ordered groups.- Trans.Amer.Math.Soc., 1980, vol.259, p.311-317.

2. Vovsi S.M. The Galois correspondence between radical and coradical classes.- In: Radical Theory (Proc. Conf. Enger,1982)..Colloq.Math.Soc.J.Bolyai, vol. 38 (in print).

3. Fried E., Wiegandt R. Connectednesses and disconnectednesses of graphs.- Algebra Universalis, 1975, vol.5, p.411-428.

4. Плоткин Б.И. О функториалах, радикалах и корадикалах в группах.- Мат.записки Урал.гос.унив., I970, т.7, № 3, с.I50-I82.

5. Курош А.Г. Радикалы в теории групп.- Сибир.матем. журн., I962, т.3, № 6, с.9I2-93I.

Алгебра и дискретная математика, Рига, 1984.

УДК 512.57/579

А.А.Гварамия

РКИИ ГА, АГУ им.А.М.Горького

ТЕОРЕМА МАЛЬЦЕВА О КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ ДЛЯ МНОГОСОРТНЫХ АЛГЕБР

В [1] А.И.Мальцев указал инвариантную характеристику квазимногообразий алгебр. Ф.Хиггинс [3] обобщил на многосортные алгебры теорему Биркгофа о характеристике многообразий алгебр (по этому поводу смотри также [4]). Квазимногообразия, псевдомногообразия и другие аксиоматизируемые классы для многосортных алгебр специально еще не изучались. В то же время есть много аргументов, указывающих на необходимость этого. Приведем примеры: 1) регулярность алгебраической 3-сети эквивалентна выполнению в координатизирующей ее трехсортной квазигруппе некоторого условия замыкания т.е. двусортного квазитождества [6]; 2) чистые и линейные автоматы Мура задаются квазитождествами вида: $x_1 \circ y_1 = x_2 \circ y_2 \Longrightarrow x_1 * y_1 = x_2 * y_2$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \circ u_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i * u_i = 0$$

соответственно, где x_i пробегает множество состояний, y_i-входные сигналы, u_i-элементы свободной полугрупповой алгебры; 3) различные условия погружения [2] связаны с рассмотрением многосортных квазитождеств; 4) понятие псевдомногообразия оказывается полезным в теории многообразий представлений групп [5].

В данной работе теорема А.И.Мальцева обобщается на многосортные алгебры (результат анонсирован в [9]), дается инвариантная характеристика псевдомногообразий таких алгебр и отмечается выполнимость для них теоремы компактности Гёделя-Мальцева.

Многосортной алгеброй называется набор множеств $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_i, i \in \Gamma\}$ на котором определена система Ω многосортных алгебраических операций, каждая из которых имеет определенный тип: последовательность $\tau(\omega) = (i_1, i_2, \ldots, i_m; j)$ есть тип операции $\mathcal{A}_{i_1} \times \mathcal{A}_{i_2} \times \ldots \times \mathcal{A}_{i_m} \to \mathcal{A}_j$.

Пусть $\mathfrak{M}$ -некоторое многообразие многосортных Ω-алгебр с фиксированной системой $\Gamma = \{1, 2, \ldots, k\}$ имен основных множеств и $W = \{W_i, i \in \Gamma\}$ -свободная в $\mathfrak{M}$ Ω-алгебра над системой свободных образующих $X = \{X_i, i \in \Gamma\}$.

Для произвольной алгебры $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_i, i \in \Gamma\} \in \mathfrak{M}$ через $\widetilde{\mathfrak{A}}$ обозначим свободное объединение основных множеств $\mathcal{A}_i, i \in \Gamma$. Если при этом элемент $a \in \widetilde{\mathfrak{A}}$ взят из некоторого основного множества $\mathcal{A}_i$, то i назовем типом элемента a и обозначим через $t(a)$.

Квазитождество в многообразии $\mathfrak{M}$ -это выражение вида

$$u_1 = v_1 \wedge \ldots \wedge u_n = v_n \Longrightarrow u_{n+1} = v_{n+1}, \quad \text{(I)}$$

где все u_i, v_i -элементы из $\widetilde{W}$, связанные условиями $t(u_i) = t(v_i)$.

Будем говорить, что квазитождество (I) выполняется в алгебре $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_i, i \in \Gamma\} \in \mathfrak{M}$, если для любого гомоморфизма $\mu = \{\mu_i, i \in \Gamma\} : W = \{W_i, i \in \Gamma\} \to \mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_i, i \in \Gamma\}$ из равенств $u_1^{\mu} = v_1^{\mu}, \ldots, u_n^{\mu} = v^{\mu}$ следует равенство $u_{n+1}^{\mu} = v_{n+1}^{\mu}$ (здесь μ стоящий над u_i и v_i - это $\mu_{t(u_i)}$).

Очевидно, что наряду с (I) в алгебре $\mathfrak{A}$ выполняется и любое его следствие вида

$$u_1 = v_1 \wedge \ldots \wedge u_n = v_n \wedge u_1' = v_1' \wedge \ldots \wedge u_k' = v_k' \Rightarrow u_{n+1} = v_{n+1}.$$

Далее, если $\nu : W \to W$ -эндоморфизм алгебры и (I) выполняется в $\mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{A}$ выполняется также квазитождество:

$$u_1^{\nu} = v_1^{\nu} \wedge \ldots \wedge u_n^{\nu} = v_n^{\nu} \Longrightarrow u_{n+1}^{\nu} = v_{n+1}^{\nu}. \quad (2)$$

Действительно, если $\mu : W \to \mathfrak{A}$ - произвольный гомоморфизм и $u_1^{\nu\mu} = v_1^{\nu\mu} \wedge \ldots \wedge u_n^{\nu\mu} = v_n^{\nu\mu}$ в $\mathfrak{A}$, то используя (произвольный) сквозной гомоморфизм

$\nu\mu : W \to \mathfrak{A}$ находим, что $u_{n+1}^{\nu\mu} = v_{n+1}^{\nu\mu}$, т.е. $(u_{n+1}^{\nu})^{\mu} = (v_{n+1}^{\nu})^{\mu}$.

Квазимногообразие в $\mathfrak{M}$ -это подкласс в $\mathfrak{M}$, определяемый некоторым набором квазитождеств. Для построения инвариантной характеристики квазимногообразий используется понятие фильтрованного произведения, которое мы сейчас введем. Пусть I -множество, каждому $\alpha \in I$ сопоставлена алгебра $\mathfrak{A}_\alpha = \{A_i^\alpha, i \in \Gamma\} \in \mathfrak{M}$ и $\mathcal{D}$ -фильтр булевой алгебры всех подмножеств в I. Составим декартово произведение

$\mathfrak{A} = \prod_\alpha \mathfrak{A}_\alpha = \{A_i, i \in \Gamma\}$, $A_i = \prod_\alpha A_i^\alpha$ и введем на нем эквивалентность $\rho = \{\rho_i, i \in \Gamma\}$ при помощи $\mathcal{D}$ по правилу:

$$\forall a, a' \in A_i : a \rho_i a' \Longleftrightarrow \{\alpha \in I : a(\alpha) = a'(\alpha)\} \in \mathcal{D}.$$

Легко проверить, что ρ согласована с каждой операцией из Ω, т.е., что ρ есть конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}$. Соответствующая фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\rho = \{A_i/\rho_i, i \in \Gamma\}$ обозначается через $\prod_\alpha \mathfrak{A}_\alpha/\mathcal{D}$ и называется фильтрованным произведением алгебр $\mathfrak{A}_\alpha$ по фильтру $\mathcal{D}$.

Эквивалентность ρ допускает еще следующее обобщение.

Допустим, что φ есть символ некоторого отношения типа $\tau = (i_1, \ldots, i_m)$ над Γ и, что он реализован на всех $\mathfrak{A}_\alpha$, $\alpha \in I$. Тогда φ реализуется на декартовом произведении $\mathfrak{A} = \prod_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$: для $a_1 \in A_{i_1}, \ldots, a_m \in A_{i_m}$ полагаем

$$\varphi(a_1, \ldots, a_m) = 1 \Longleftrightarrow \{\alpha \in I : \varphi(a_1(\alpha), \ldots, a_m(\alpha)) = 1\} \in \mathcal{D}.$$

Непосредственно проверяется, что если $a_1 \rho_1 a'_1, a_2 \rho_2 a'_2, \ldots, a_m \rho_{i_m} a'_m$, то

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 1 \Longleftrightarrow \varphi(a'_1, a'_2, \ldots, a'_m) = 1.$$

Этим отношение φ переносится на фильтрованное произведение $\prod_\alpha \mathfrak{A}_\alpha/\mathcal{D}$ и можно говорить о фильтрованных произведениях произвольных многосортных алгебраических систем.

Если фильтр $\mathcal{D}$ является ультрафильтром, то $\prod_\alpha \mathfrak{A}_\alpha/\mathcal{D}$ называется ультрапроизведением.

Класс алгебр θ называется наследственным, если вместе с каждой алгеброй $\mathfrak{A}$ классу θ принадлежат все подалгебры из $\mathfrak{A}$. Алгебра $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_i, i \in \Gamma\}$, где все $\mathcal{A}_i$ -одноэлементны, называется единичной.

Следующая теорема обобщает теорему А.И.Мальцева на многосортный случай.

Теорема I. Подкласс Θ в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда является квазимногообразием, когда он замкнут относительно произвольных фильтрованных произведений, содержит единичную алгебру и является наследственным.

Основная идея доказательства этой теоремы такая же, как и в односортном случае. Однако имеются некоторые особенности, вызванные многосортностью, и поэтому приведем ее доказательство полностью.

Необходимость. Предполагаем, что Θ -квазимногообразие и проверяем все три условия замкнутости.

Даны множество I , фильтр $\mathcal{D}$ над I и фильтрованное произведение $\prod_\alpha \mathfrak{A}_\alpha / \mathcal{D}$ алгебр из Θ . Докажем, что $\prod_\alpha \mathfrak{A}_\alpha / \mathcal{D} \in \Theta$, т.е., что в нем выполняется любое из квазитождеств

$$u_1 = v_1 \wedge \ldots \wedge u_n = v_n \Longrightarrow u_{n+1} = v_{n+1} \qquad \text{(I)}$$

определяющих Θ .

Пусть задан произвольный гомоморфизм $\mu : W \rightarrow \prod_\alpha \mathfrak{A}_\alpha / \mathcal{D}$ и выполняются равенства $u_1^\mu = v_1^\mu, \ldots, u_n^\mu = v_n^\mu$. По каждому отображению $\mu_i : W_i \rightarrow \mathcal{A}_i / \rho_i$ определим отображение $\nu_i : X_i \rightarrow \mathcal{A}_i$: пусть $\eta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} / \rho$ -естественный эпиморфизм, тогда для каждого $x \in X_i$ соответствующий ν_i -образ x^{ν_i} определяем условием $x^{\nu_i \eta} = x^{\mu_i}$. Все $\nu_i , i \in \Gamma$ продолжаются до гомоморфизма $\nu : W \rightarrow \mathfrak{A}$, причем имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\mu"'] & \mathfrak{A} \arrow[d, "\eta"] \\
& \mathfrak{A} = \mathfrak{A}/\rho
\end{tikzcd}$$

Для каждого равенства $u_s^\mu = v_s^\mu$, $s = 1, \ldots, n$ введем множество $\mathcal{J}_s = \{\alpha : u_s^\nu(\alpha) = v_s^\nu(\alpha)\}$ и через $\mathcal{J}$ обозначим пересечение всех $\mathcal{J}_s$, $s = 1, \ldots, n$. Ясно, что $\mathcal{J} \in \mathcal{D}$.

Для $\alpha \in I$ через $\hat{\alpha}$ обозначим соответствующий гомоморфизм проектирования $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_\alpha$. Пусть $\alpha \in \mathcal{J}$. Тогда, используя сквозной гомоморфизм

$$\nu\hat{\alpha} : W \longrightarrow \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_\alpha ,$$

имеем $u_s^{\nu\hat{\alpha}} = u_s^{\nu}(\alpha) = v_s^{\nu}(\alpha) = v_s^{\nu\hat{\alpha}}$, $s = 1, 2, \ldots, n$.
Так как все $\mathfrak{A}_\alpha$ принадлежат θ, то имеем также $u_{n+1}^{\nu\hat{\alpha}} = v_{n+1}^{\nu\hat{\alpha}}$. Таким образом, для каждого $\alpha \in \mathcal{J}$ выполняется $u_{n+1}^{\nu}(\alpha) = v_{n+1}^{\nu}(\alpha)$, и это дает включение

$$\{\alpha \in I : u_{n+1}^{\nu}(\alpha) = v_{n+1}^{\nu}(\alpha)\} \in \mathcal{D} .$$

Следовательно, $u_{n+1}^{\nu c} = v_{n+1}^{\nu c}$, откуда $u_{n+1}^{\mu} = v_{n+1}^{\mu}$ и тем самым (I) выполняется в $\prod_\alpha \mathfrak{A}_\alpha / \mathcal{D}$. Итак, θ замкнут относительно фильтрованных произведений.

Пусть теперь $\mathfrak{A} \in \theta$ и $\mathfrak{B}$ -подалгебра в $\mathfrak{A}$. Гомоморфизм $W \to \mathfrak{A}$ является одновременно и гомоморфизмом $W \to \mathfrak{A}$. Поэтому, если формула (I) выполняется в $\mathfrak{A}$, то она выполняется и в $\mathfrak{B}$.

Наконец, если $\mathfrak{A}$ -единичная алгебра, то в ней выполняется любое квазитождество, ибо в такой алгебре всегда верно равенство $u = v$ с $t(u) = t(v)$: в одноэлементном множестве неравенств нет.

Достаточность. Нам потребуются дополнительные построения, к которым сейчас переходим.

Прежде всего, каждый символ операции из Ω будем рассматривать как соответствующий символ отношения и получаемое таким образом множество символов отношений обозначим через Φ. Все алгебры из $\mathfrak{M}$ будем теперь рассматривать как модели. Это позволит нам для произвольной $\mathfrak{A} = \{A_i, i \in \Gamma\} \in \mathfrak{M}$ каждую систему $\mathfrak{A}' = \{A_i', i \in \Gamma\}$, где A_i' -произвольное подмножество в A_i, рассматривать как подмодель в $\mathfrak{A}$. Если все A_i' конечны, то и $\mathfrak{A}'$ называется конечной. Конечные подмодели алгебры $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ называются ее локальными подмоделями, если множество Φ основных отношений конечно. Если Φ -бесконечно, то локальная подмодель в $\mathfrak{A}$ -это конечная подмодель, рассматриваемая относительно некоторого определенного конечного поднабора в Φ.

Класс θ алгебр из $\mathfrak{M}$ называется локально замкнутым, если для каждой алгебры $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$ из вложимости любой ее локальной подмодели в некоторую алгебру из θ

следует, что $\mathfrak{A} \in \Theta$.

Локально замкнутый класс является, очевидно, наследственным.

Некоторый класс Θ алгебр из $\mathfrak{M}$ называется универсально аксиоматизируемым, если он состоит из всех алгебр из $\mathfrak{M}$ удовлетворяющих определенному набору универсальных аксиом в языке узкого исчисления многосортной логики предикатов над множеством символов отношений Φ.

Предложение I (теорема Лося-Тарского). Класс алгебр Θ тогда и только тогда является универсально аксиоматизируемым в $\mathfrak{M}$, когда он локально замкнут в $\mathfrak{M}$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть Θ -универсально аксиоматизируемый подкласс в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{A}$ -алгебра в $\mathfrak{M}$, каждая локальная подмодель которой вложима в некоторую алгебру из Θ. Надо доказать, что $\mathfrak{A} \in \Theta$. Допустим, что $\forall x_1, \ldots, x_n\, \mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n)$-одна из универсальных аксиом, определяющих класс Θ в $\mathfrak{M}$. Проверим, что для любых $a_1, \ldots, a_n$, где $a_i \in \mathcal{A}_t(a_i)$, выполняется $\mathcal{U}(a_1, \ldots, a_n) \cdot 1$. Возьмем в $\mathfrak{A}$ конечную подмодель $\mathfrak{A}' = \{\mathcal{A}_i', i \in \Gamma\}$, такую, что для всех $i = 1, \ldots, n$ выполняется $a_i \in \mathcal{A}_t'(a_i)$. Эту подмодель рассмотрим относительно конечного поднабора символов отношений из Φ, участвующих в записи формулы $\mathcal{U}$. При этом имеем мономорфизм

$$\mu : \mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{B} \in \Theta .$$

В $\mathfrak{B}$ имеем $\mathcal{U}(a_1^{\mu}, \ldots, a_n^{\mu}) = 1$. Отсюда следует, что $\mathcal{U}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ в $\mathfrak{A}'$ и в $\mathfrak{A}$.

Достаточность. Пусть Θ локально замкнут в $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}$ -множество всех универсальных формул над Φ, выполняющихся в Θ и $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}$-алгебра, в которой выполняются все формулы из $\mathfrak{S}$. Надо доказать, что $\mathfrak{A} \in \Theta$. Допустим, что это не так. Тогда, по условию, в алгебре $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_i, i \in \Gamma\}$ найдется локальная подмодель $\mathfrak{A}' = \{\mathcal{A}_i, i \in \Gamma\}$ с конечным набором отношений Φ_0, для которой не существует вложения ни в одну алгебру из Θ. Воспользуемся логическим описанием модели $\mathfrak{A}'$.

Для каждого множества $\mathcal{A}_i'$ возьмем подмножество

$X_i' \subset X_i$ с взаимно однозначным соответствием $\nu_i : X_i' \longrightarrow A_i'$ и пусть $X' = \{X_i', i \in \Gamma\}$. Тогда имеем также взаимно однозначное отображение $\nu : X' \longrightarrow \mathfrak{A}'$. Далее, для каждого символа отношения $\varphi \in \bar{\Phi}_0$ рассмотрим множество $\Psi(\varphi)$ формул, которое сейчас построим. Пусть $\tau(\varphi) = (i_1, \dots, i_m)$. Рассмотрим всевозможные допустимые выражения $\varphi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{i_m})$, где $a_{\alpha_s} \in A'_{n}(a_{\alpha_s})$, $n(a_{\alpha_s}) = i_s$. Каждому такому выражению сопоставим формулу $\varphi(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_m})$, где $x_{\alpha_s} \in X_{n(x_{\alpha_s})}$ и $\nu(x_{\alpha_s}) = a_{\alpha_s}$. Эту формулу отнесем к $\Psi(\varphi)$, если $\varphi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_m}) = 1$. Если же $\varphi(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_s}) = 0$, то к $\Psi(\varphi)$ отнесем отрицание формулы $\varphi(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_m})$. Пусть Ψ -объединение всех $\Psi(\varphi)$ и всех соответствующих неравенств типа $x_i \neq x_j$. Это конечный набор формул. Конъюнкцию всех формул из Ψ обозначим через U и пусть $x_1, \dots, x_n$ -все переменные из всевозможных X_i' входящие в U. Описание модели $\mathfrak{A}'$- это формула

$$\exists x_1, \dots, x_n \, U(x_1, \dots, x_n) \qquad (3)$$

Очевидно, что $\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда вкладывается в качестве локальной подмодели в некоторую алгебру $\mathfrak{B}$ из θ, когда в $\mathfrak{B}$ выполняется (3).

Так как, по допущению, $\mathfrak{A}'$ не вкладывается ни в одну алгебру $\mathfrak{B}$ из θ, то во всех таких алгебрах $\mathfrak{B}$ выполняется отрицание (3)

$$\forall x_1, \dots, x_n \, \bar{U}(x_1, \dots, x_n) .$$

Это отрицание принадлежит, следовательно, множеству формул $\mathfrak{S}$. Оно выполняется и в $\mathfrak{A}$. Но тогда выходит, что в $\mathfrak{A}'$ выполняется описание этой модели и его отрицание- противоречие, доказывающее достаточность.

Предложение 2. Пусть каждая локальная подмодель $\mathfrak{A}_\alpha = \{A_i^\alpha; i \in \Gamma\}$ алгебры $\mathfrak{A} = \{A_i, i \in \Gamma\} \in \mathfrak{M}$ вкладывается в некоторую алгебру $\mathfrak{B}_\alpha = \{B_i^\alpha, i \in \Gamma\}$ из $\mathfrak{M}$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ вкладывается в подходящее ультрапроизведение алгебр $\mathfrak{B}_\alpha$.

Доказательство.

Пусть I -множество всех индексов α локальных подмоделей из $\mathfrak{A}$. На I введем отношение порядка: $\alpha \angle \beta$, если для соответствующих $\mathfrak{A}_\alpha = \{A_i^\alpha, i \in \Gamma\}$ и $\mathfrak{A}_\beta = \{A_i^\beta, i \in \Gamma\}$ выполняется включение $A_i^\alpha \subset A_i^\beta$, $i \in \Gamma$ и все отношения модели $\mathfrak{A}_\alpha$ принадлежат множеству отношений модели $\mathfrak{A}_\beta$. Через I_α обозначим множество всех β, для которых $\alpha \leq \beta$. Пересечение любого конечного набора таких I_α не пусто, и, следовательно, все эти I_α составляют центрированную систему подмножеств в I. Эту центрированную систему можно дополнить до некоторого ультрафильтра $\mathfrak{D}$ над I.

Для каждого $\alpha \in I$ зафиксируем теперь вложение

$$\mu^\alpha = \{\mu_i^\alpha, i \in \Gamma\} : \mathfrak{A}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{B}_\alpha,$$

где $\mathfrak{B}_\alpha$ -алгебра в $\mathfrak{M}$, и пусть $\mathfrak{B} = \prod_\alpha \mathfrak{B}_\alpha$ -декартово произведение всех $\mathfrak{B}_\alpha$, а $\prod_\alpha \mathfrak{B}_\alpha / \mathfrak{D}$ -соответствующее ультрапроизведение.

Построим вложение алгебр $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod_\alpha \mathfrak{B}_\alpha / \mathfrak{D}$ следующим образом. В каждом из множеств $B_i = \prod_\alpha B_i^\alpha$, $i = 1, \dots, k$ выделим по элементу b_i и с их помощью определим отображения $\nu_i : A_i \longrightarrow B_i$ по правилу: для $a \in A_i$ полагаем,

$$a^{\nu_i}(\alpha) = a^{\mu_i^\alpha}, \text{ если } a \in A_i^\alpha;$$

$$a^{\nu_i}(\alpha) = b_i(\alpha), \text{ если } a \notin A_i^\alpha.$$

При помощи этих ν_i составим отображение

$$\nu = \{\nu_i, i \in \Gamma\} : \mathfrak{A} = \{A_i, i \in \Gamma\} \longrightarrow \mathfrak{B} = \{B_i, i \in \Gamma\}.$$

Это отображение вообще говоря, не являются гомоморфизмом алгебр. Воспользуемся естественным гомоморфизмом $\eta : \mathfrak{B} \to \overline{\mathfrak{B}}$ и покажем, что $\varphi = \nu\eta$ удовлетворяет нужным требованиям. Пусть w -символ операции типа $\tau = (i_1, \dots, i_m; j)$ в наборе Ω, $(a_1, \dots, a_m) \in A_{i_1} \times \dots \times A_{i_m}$ и $a = a_1 \dots a_m w \in A_j$. Нужно проверить равенство $a^{\varphi_j} = a_1^{\varphi_{i_1}} \dots a_m^{\varphi_{i_m}} w$ или, что то же самое, $a^{\nu_j \eta_j} = a_1^{\nu_{i_1} \eta_{i_1}} \dots a_m^{\nu_{i_m} \eta_{i_m}} w = (a_1^{\nu_{i_1}} \dots a_m^{\nu_{i_m}} w)^{\eta_j}$.

Для этого достаточно проверить включение

$$\{\alpha \in I : a^{\nu_j}(\alpha) = (a_1^{\nu_{i_1}} \dots a_m^{\nu_{i_m}} w)(\alpha)\} \in \mathfrak{D}.$$

При этом учитываем, что $(a_1^{\nu_{i_1}} \dots a_m^{\nu_{i_m}} w)(\alpha) = a_1^{\nu_{i_1}}(\alpha), \dots a_m^{\nu_{i_m}}(\alpha) w$. Пусть $\mathfrak{A}_\alpha = \{A_i^\alpha, i \in \Gamma\}$ -локальная подмодель в $\mathfrak{A}$, такая, что $a_1 \in A_{i_1}^\alpha, \dots, a_m \in A_{i_m}^\alpha$, $a \in A_j^\alpha$, и что символ отношения φ, отвечающий символу операции w, входит в число отношений модели $\mathfrak{A}_\alpha$. Тогда в $\mathfrak{A}_\alpha$ имеем

$\varphi(a_1,\dots,a_m;a)=1$. То же верно и для всех $\beta\in I_\alpha$. Кроме того, имеем:

$$a^{\nu_i}(\alpha)=a^{\mu_i^\alpha};\ a_1^{\nu_{i_1}}(\alpha)=a_1^{\mu_{i_1}^\alpha},\dots,a_m^{\nu_{i_m}}(\alpha)=a_m^{\mu_{i_m}^\alpha}.$$

Используя изоморфизм $\mu_\alpha:\mathfrak{A}_\alpha\longrightarrow\mathfrak{B}_\alpha$ в $\mathfrak{B}_\alpha$ имеем $\varphi(a_1^{\mu_{i_1}^\alpha},\dots,a_m^{\mu_{i_m}^\alpha},a^{\mu_i^\alpha})=1$, что равносильно $a_1^{\mu_{i_1}^\alpha}\dots a_m^{\mu_{i_m}^\alpha}w=a^{\mu_i^\alpha}$. Таким образом, для каждого $\beta\in I_\alpha$ имеем:

$$a^{\mu_i}=a^{\nu_i}(\beta)=a_1^{\mu_{i_1}^\beta}\dots a_m^{\mu_{i_m}^\beta}w=a_1^{\nu_{i_1}}(\beta)\dots a_m^{\nu_{i_m}}(\beta)w$$

Этим проверено, что $\varphi:\mathfrak{A}\longrightarrow\prod_\alpha\mathfrak{B}_\alpha/\mathfrak{D}$ -гомоморфизм алгебр. Остается проверить, что этот гомоморфизм является инъективным. Для этого необходимо, чтобы каждый $\varphi_i=\nu_i\eta_i:\mathcal{A}_i\longrightarrow\overline{\mathcal{B}}_i$ был инъективен. Но это на самом деле так. Действительно, пусть $a,a'\in\mathcal{A}_i$ и $a^{\nu_i\eta_i}=a'^{\nu_i\eta_i}$. Тогда

$$\mathcal{J}=\{\alpha\in I:a^{\nu_i}(\alpha)=a'^{\nu_i}(\alpha)\}\in\mathfrak{D}.$$

Для a и a' найдем локальную подмодель $\mathfrak{A}_\alpha$, такую, что a и a' принадлежат $\mathcal{A}_i^\alpha$. Множество I_α, а также пересечение $I_\alpha\cap\mathcal{J}$ принадлежат $\mathfrak{D}$, причем $I_\alpha\cap\mathcal{J}$ не пусто. Если $\beta\in I_\alpha\cap\mathcal{J}$, то a и a' принадлежат $\mathcal{A}_i^\beta$. Теперь $a^{\nu_i}(\beta)=a^{\mu_i^\beta}=a'^{\nu_i}(\beta)=a'^{\mu_i^\beta}$ и, так как μ^β - мономорфизм, то $a=a'$. Предложение доказано.

Следствие. Если класс Θ алгебр в $\mathfrak{M}$ является абстрактным классом, замкнут относительно ультрапроизведений и является наследственным по подалгебрам, то он универсально аксиоматизируем.

Доказательство.

Согласно предложению 2 достаточно установить, что класс Θ с указанными условиями локально замкнут в $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{A}$ -алгебра в $\mathfrak{M}$, для которой любая ее локальная подмодель $\mathfrak{A}_\alpha$ допускает вложение в некоторую алгебру $\mathfrak{B}_\alpha$ из Θ. По доказанному, алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна подалгебре в ультрапроизведении всех $\mathfrak{B}_\alpha$. Из условий следует, что $\mathfrak{A}$ содержится в Θ.

Повторяя известные для односортного случая рассуждения ([2]) можно доказать, что верно и обратное утверждение.

Вернемся теперь к доказательству достаточности в теореме I. Пусть θ наследственный подкласс в $\mathfrak{M}$, содержащий единичную алгебру и замкнутый относительно фильтрованных произведений. Покажем, что θ -квазимногообразие.

По предыдущему, класс θ универсально аксиоматизируем в $\mathfrak{M}$. Следовательно, он определяется некоторым набором аксиом вида

$$\forall x_1,\dots,x_n\, \mathcal{U}(x_1,\dots,x_n), \qquad (4)$$

где $\mathcal{U}$ -булево выражение, построенное над символами отношений из Φ. Формулу (4) можно представить как конъюнкцию формул вида:

$$\mathcal{V} = \forall x_1,\dots,x_n(u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m),$$

где u_i есть атомная формула $\varphi_i(x_1,\dots,x_n)$, $\varphi_i \in \Phi$, либо отрицание такой же атомной формулы. Класс θ определяется и такими $\mathcal{V}$. Формулу вида $\mathcal{V}$ назовем несократимой, если после удаления из неё одного из u_k получается формула, не выполняющаяся в θ. Понятно, что класс θ определяется также некоторым набором несократимых формул типа $\mathcal{V}$. Покажем теперь, что если $\mathcal{V}$ -несократимая формула, являющаяся аксиомой в θ, то в этой формуле имеется не более одного положительного слагаемого, то есть слагаемого типа $\varphi_i(x_1,\dots,x_n)$ без отрицания.

Пусть $\mathcal{V}_k$ обозначает результат удаления из $\mathcal{V}$ k-го слагаемого u_k и допустим, что u_1 и u_2 -положительны. По условию найдутся алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ в θ, такие, что $\mathcal{V}_1$ не выполняется в $\mathfrak{A}_1$ и $\mathcal{V}_2$ не выполняется в $\mathfrak{A}_2$. Но тогда в $\mathfrak{A}_1$ выполняется формула

$$\exists x_1,\dots,x_n(\bar{u}_2 \wedge \bar{u}_3 \wedge \dots \wedge \bar{u}_m).$$

Так как в $\mathfrak{A}_1$ выполняется формула

$$\forall x_1,\dots,x_n(u_1 \vee u_2 \vee u_3 \vee \dots \vee u_m),$$

то в ней выполняется также и формула

$$\exists x_1,\dots,x_n(u_1 \wedge \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_3 \wedge \dots \wedge \bar{u}_m).$$

Точно также устанавливаем, что в $\mathfrak{A}_2$ выполняется формула

$$\exists x_1,\dots,x_n(\bar{u}_1 \wedge u_2 \wedge \bar{u}_3 \wedge \dots \wedge \bar{u}_m).$$

Пусть теперь $\mathfrak{A}_1 = \{A_i^1, i \in \Gamma\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{A_i^2, i \in \Gamma\}$ и $X = \{X_i, i \in \Gamma\}$ -переменные, порождающие свободную в

$\mathfrak{M}$ алгебру W . Рассмотрим отображения

$$\mu^1 = \{\mu_i^1, i\in\Gamma\} : X = \{X_i, i\in\Gamma\} \to \mathfrak{A}_1 = \{A_i^1, i\in\Gamma\},$$
$$\mu^2 = \{\mu_i^2, i\in\Gamma\} : X = \{X_i, i\in\Gamma\} \to \mathfrak{A}_2 = \{A_i^2, i\in\Gamma\}.$$

Первое из них выполняет в $\mathfrak{A}_1$ формулу $u_1\wedge\bar{u}_2\wedge\bar{u}_3\wedge\ldots\wedge\bar{u}_m$, а второе играет такую же роль для формулы $\bar{u}_1\wedge u_2\wedge\bar{u}_3\wedge\ldots\wedge\bar{u}_m$ в $\mathfrak{A}_2$. Продолжим μ^1 и μ^2 до гомоморфизма $\mu : X \longrightarrow \mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$. Так как на $\mathfrak{A}_1$ формула u_1 принимает значение "истина", а на $\mathfrak{A}_2$ -"ложь", то на $\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$ она принимает значение "ложь". То же и для u_2 . Таким образом, на $\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$ выполняется формула

$$\exists x_1,\ldots,x_n(\bar{u}_1\wedge\bar{u}_2\wedge\bar{u}_3\wedge\ldots\wedge\bar{u}_m)\cdot$$

Так как класс θ замкнут относительно декартовых произведений, то $\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2\in\theta$ и на $\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$ выполняется также формула

$$\forall x_1,\ldots,x_n(u_1\vee u_2\vee u_3\vee\ldots\vee u_m).$$

Получили противоречие, которое устанавливает, что в несократимой формуле

$$\forall x_1,\ldots,x_n(u_1\vee u_2\vee\ldots\vee u_m)$$

участвует не более одного положительного слагаемого. Если здесь все слагаемые отрицательны, то формула не выполняется на единичной алгебре, входящей в класс θ . Таким образом, класс θ определяется формулами вида

$$\forall x_1,\ldots,x_n(\bar{\varphi}_1\vee\bar{\varphi}_2\vee\ldots\vee\bar{\varphi}_{m-1}\vee\varphi_m),$$ что равносильно

$$\forall x_1,\ldots,x_n(\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\ldots\wedge\varphi_{m-1}\Longrightarrow\varphi_m).$$

Чтобы завершить доказательство достаточности, остается заметить, что каждую атомную формулу $\varphi(x_{i_1},\ldots,x_{i_m},x_{i_{m+1}})$ можно переписать как $x_{i_1}\ldots x_{i_m}w = x_{i_{m+1}}$. Теорема доказана.

Заметим далее, что дословно также как это делается для моделей в односортном случае (см.[7] или [8]) доказывается, что каждый элементарно-аксиоматизируемый класс многосортных алгебр замкнут относительно ультрапроизведений. Применением этого утверждения стандартным приемом доказывается теорема компактности Геделя-Мальцева ([2]) для многосортных алгебр.

Квазитождество является обобщением тождества. Другим обобщением тождества является псевдотождество.

Псевдотождеством или дизъюнктивным тождеством называется выражение вида

$$u_1 = v_1 \vee u_2 = v_2 \vee \dots \vee u_n = v_n,$$

где u_i и v_i -элементы из $\widetilde{W}$, связанные условием $t(u_i) = t(v_i)$. При $n = 1$ имеем тождество. Псевдотождество выполняется в алгебре $\mathfrak{A}$, если для каждого гомоморфизма $\mu : W \to \mathfrak{A}$ имеет место хотя бы одно из равенств $u_i^{\mu} = v_i^{\mu}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Класс алгебр, задаваемый некоторым набором псевдотождеств называется псевдомногообразием.

Инвариантную характеристику псевдомногообразий многосортных алгебр дает следующая теорема.

Теорема 2. Класс Θ многосортных алгебр тогда и только тогда является псевдомногообразием, когда он наследственен, замкнут относительно гомоморфизмов и ультрапроизведений.

Доказательство.

Непосредственно проверяется, что каждое псевдомногообразие удовлетворяет первым двум условиям замкнутости. Кроме того, как отмечалось выше, каждый элементарно-аксиоматизируемый класс многосортных алгебр замкнут относительно ультрапроизведений.

С другой стороны, мы знаем из доказательства теоремы I, что класс замкнутый относительно ультрапроизведений и наследственный, определяется несократимыми формулами вида

$$\forall x_1, \dots, x_n (u_1 \vee u_2 \vee \dots \vee u_m).$$

Из условия замкнутости по гомоморфизмам, как и в односортном случае ([2]); выводится, что в последней формуле все слагаемые положительны. Остаётся заметить, что каждое u_i может быть записано в виде $x_{i_1} \dots x_{i_k} w = x_{k+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Мальцев А.И. Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем.- Алгебра и логика, I966, т.5,№ 3,с.3-9.

2. Мальцев А.И. Алгебраические системы.-М.: Наука,I970.

3. Higgins P.J. Algebras with a scheme of operators.- Math.Nachr.,1963, Bd 27, N 1-2, S.115-132.

4. Плоткин Б.И.,Дидидзе Ц.Е.,Кубланова Е.М. Многообразия автоматов.-Кибернетика, I977, № I, с.47-54.

5. Плоткин Б.И., Вовси С.М. Многообразия представлений групп.-Рига: Зинатне, I983.

6. Белоусов В.Д. Алгебраические сети и квазигруппы.- Кишинев: Штиинца, I97I.

7. Тайманов А.Д. Характеристики аксиоматизируемых классов моделей.- Алгебра и логика, I964, т.I, вып.4, с.5-32.

8. Kochen S. Ultraproducts in the theory of models.- Ann.Math.ser 2, 1961, Bd 74, S.221-261.

9. Гварамия А.А. Квазимногообразия многосортных алгебр.- В кн.: Short communications (abstracts)II, Section 2: Algebra(тезисы кратких сообщений междунар. матем. конгресса, Варшава, август I983), с.20.

Алгебра и дискретная математика. Рига, 1984.

УДК 519.76

В.К.Детловс

ЛГУ им.П.Стучки

ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МОТИВЫ

0.0 В настоящей работе строится некоторое обобщение понятия формального мотива или F -мотива М.Г.Бороды [I]. В определении F -мотива (см. дальше пункт 2.2.2) используются исключительно метроритмические (а не звуковысотные) параметры мелодии; то же относится к предложенным здесь конкретным вариантам обобщенных формальных мотивов. Но изложенная ниже общая методика (см.§I) допускает также и мотивы другого рода. Более того, построенный в работе алгорифм $\mathfrak{A}$ пригоден для сегментации не только записи мелодии, но и любого другого линейно упорядоченного дискретного текста. Поэтому общая схема методики сначала будет изложена в терминах теории множеств и формальных языков. Только после этого дана интерпретация алгорифма $\mathfrak{A}$, предназначенная для сегментации мелодии.

0.I. Договоримся об общей терминологии и обозначениях. Пусть дан конечный список символов ("букв"), т.е. алфавит A. Тогда словом в A называется конечная последовательность его букв, возможно, с повторениями. Равенство двух слов следует понимать как графическое равенство — оба слова состоят из тех же букв в том же порядке. Длина слова V означает число букв в нем и обозначается через $|V|$. Множество всех слов в A записывается как $W(A)$. Если P — некоторое свойство слов, то через

$$\max V : P(V)$$

обозначается самое длинное слово, обладающее свойством P. Конкатенацией двух слов V_1 и V_2 называется их слияние в одно слово, которое записывается как $V_1 V_2$. Если

$V_1 = V'\xi$ и $V_2 = \xi V''$, т.е. последняя буква слова V_1 равна первой букве слова V_2, то сцеплением слов V_1 и V_2 называется конкатенация

$$\langle V_1 V_2 \rangle = V'\xi V'',$$

из которой, по сравнению с $V_1 V_2$, выброшена одна буква ξ. Говорится, что слово B входит в слово V, если существуют такие слова B' и B'' (возможно пустые), что $V = B'BB''$. Если при этом $|B'| = m-1$, то скажем, что слово B входит в слово V, начиная с m-ого места, и будем писать

$$[BmV].$$

Сегментацией слова V называется такая последовательность непустых слов $V_1, V_2, \dots, V_e$, что $V = V_1 V_2 \dots V_e$. Частью слова V именуется всякое слово, которое получается вычеркиванием из V каких-то произвольно расположенных α букв $(0 \leq \alpha < |V|)$. Множество всех частей слова V обозначается через $F(V)$.

I.I Переходим к более специальной терминологии. Пусть дан алфавит

$$L = \{l_1, l_2, \dots, l_t\},$$

именуемый в дальнейшем алфавитом текста. Слова в L иногда называются текстами. Другой алфавит

$$E = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_g\}$$

называется алфавитом элементарных сегментов, а его буквы-элементарными сегментами. Пусть, кроме того, дано всюду определенное соответствие

$$\rho : E \to W(L),$$

называемое реализацией элементарных сегментов. От соответствия ρ не требуется ни однозначности, ни сюръективности, ни инъективности. Как обычно, запись $\varepsilon \rho V$ будет означать, что между буквой $\varepsilon \in E$ и словом $V \in W(L)$ имеет место соответствие ρ. Полный образ буквы ε определяется как множество всех таких V:

$$\varepsilon\rho = \{V \mid \varepsilon \rho V\};$$

это некоторое подмножество множестве всех слов в L.

При помощи данного соответствия $\rho : E \to W(L)$ можно построить новое соответствие $\tilde{\rho} : W(E) \to W(L)$, которое определяется индуктивно:

$$\begin{cases} \varepsilon\widetilde{\rho} = \varepsilon\rho, \\ (V_\varepsilon)\widetilde{\rho} = \langle V\widetilde{\rho}\,\varepsilon\widetilde{\rho}\rangle, \end{cases}$$

где $\varepsilon \in E$, $V \in W(E)$ и в последнем равенстве справа записано сцепление слов $V\widetilde{\rho}$ и $\varepsilon\widetilde{\rho}$. Дальше для простоты запись $\widetilde{\rho}$ будет заменена через ρ. Теперь можно говорить о реализации не только букв, но также и некоторых слов в E. В частности можно рассматривать $F(M)\rho$, т.е. реализации всех частей слова M.

Пусть дано, наконец, некоторое фиксированное слово

$$M = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_K \qquad (\alpha_i \in E),$$

именуемое прототипом сегмента (или короче прототипом) и состоящее из элементарных сегментов.

I.2.0 Построим теперь общий алгорифм сегментации текста как алгорифм $\mathfrak{A}(M)$ разбиения данного текста

$$T = t_1 t_2 \ldots t_N \; (t_j \in L, N \geqslant 1)$$

на сегменты T_i, построенные по данному прототипу M, который интерпретируется согласно указанной реализации ρ элементарных сегментов.

В формулировке алгорифма $\mathfrak{A}(M)$ участвуют четыре натуральных индекса: номер очередной буквы j, номер текущего элементарного сегмента i в прототипе, номер s настоящего сегмента текста и номер n буквы текста, с которой начинается настоящий сегмент.

I.2.I Алгорифм $\mathfrak{A}(M)$ задается блок-схемой (см. рис.I). В работе алгорифма можно различать малые циклы и большие циклы. Незаключительный малый цикл первого вида состоит из блоков (2)(3)(4)(5)(6)(2), а второго вида— из блоков (3)(I0)(II)(3). Заключительный малый цикл первого вида состоит из блоков (2)(3)(4)(5)(7)(8)(9)(2), а второго вида— из блоков (2)(3)(I0)(I2) ((I3)или(I5))(I4)(9)(2).

Большой цикл состоит из некоторого (может быть, нулевого) количества незаключительных малых циклов и одного заключительного малого цикла (всего $|M|$ малых циклов). Индекс s задает номер большого цикла, а индекс i — номер малого цикла.

I.2.2 Малый незаключительный цикл первого вида ра-

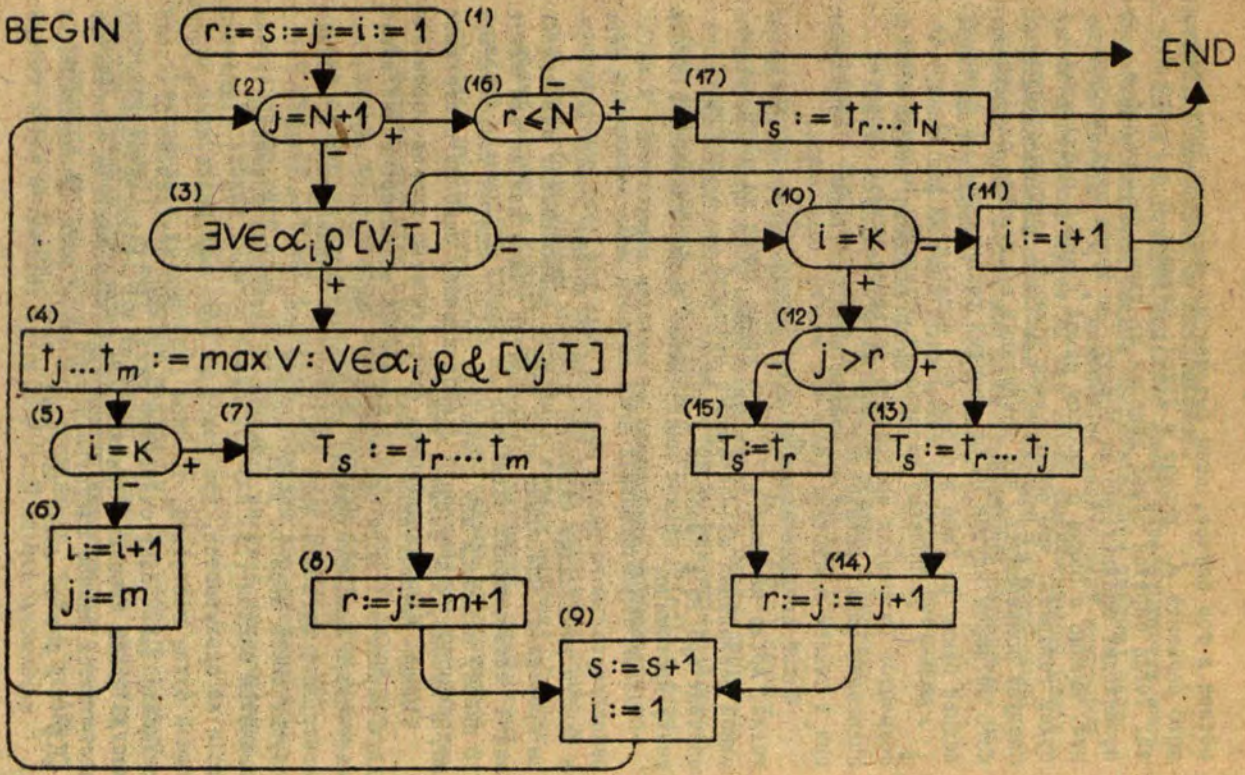
BEGIN
$r := s := j := i := 1$ (1)
END
(2) $j = N+1$
+
−
(16) $r \leqslant N$
−
+
(17) $T_s := t_r \ldots t_N$
(3) $\exists V \in \alpha_i \rho [V_j T]$
−
+
(10) $i = K$
−
+
(11) $i := i+1$
(4) $t_j \ldots t_m := \max V : V \in \alpha_i \rho \,\&\, [V_j T]$
(12) $j > r$
−
+
(5) $i = K$
+
−
(7) $T_s := t_r \ldots t_m$
(15) $T_s := t_r$
(13) $T_s := t_r \ldots t_j$
(6) $i := i+1$
$j := m$
(8) $r := j := m+1$
(14) $r := j := j+1$
(9) $s := s+1$
$i := 1$

Рис.I

ботает в том случае, если реализации текущего элементарного сегмента $\mathcal{L}_i$ входят в текст, начиная с j-ого места. Тогда берется самая длинная из таких реализаций и происходит продвижение по тексту до конца этой реализации. Именно в связи с выбором самой длинной реализации будем говорить, что соблюдается принцип максимальности. Следует подчеркнуть, что реализации следующего элементарного сегмента ищутся не за текущей реализацией, а с последней буквы ее (ибо в блоке (6) полагается $j := m$, а не $j := m + 1$). Поэтому реализации отдельных элементарных сегментов (в рамках настоящего большого цикла) образуют сцепление слов; вследствие этого можно говорить о реализации в тексте прототипа (или его части) как слова.

Малый незаключительный цикл второго вида работает тогда, когда начиная с j-ого места текст не содержит ни одной реализации элементарного сегмента $\mathcal{L}_i$. Этот цикл состоит просто в переходе к следующему элементарному сегменту прототипа.

Малый заключительный цикл первого вида отличается от незаключительного цикла первого вида тем, что обнаруженная в тексте реализация является образом именно последней буквы прототипа. Сцепление всех обнаруженных в тексте реализаций элементарных сегментов (в рамках настоящего большого цикла) выдается как очередной результат работы алгорифма, а именно, как сегмент текста T_1.

Малый заключительный цикл второго вида существует в двух вариантах. Если при обработке прототипа (в рамках настоящего большого цикла) реализация хотя бы одного элементарного сегмента была обнаружена в тексте, то, как и в случае цикла первого вида, сцепление всех этих реализаций выдается блоком (13) как настоящий сегмент текста T_1. Если же оказывается, что текст не содержал реализаций ни одной буквы прототипа, то блок (15) выдает в качестве сегмента T_1 одну очередную букву текста. (Такой T_1 иногда будем называть тривиальным сегментом текста). Этим достигается важное свойство полной применимости алгорифма $\mathfrak{A}(M)$, ибо не может наступить ситуация, в которой сегментация оказалась бы невозможной.

I.2.3 В течение большого цикла обрабатывается весь прототип и выдается (малым заключительным циклом) один сегмент текста T_λ, являющийся реализацией некоторой части прототипа. Будет ли эта часть несобственной (весь прототип в полном виде) или собственной (с пропусками некоторых букв ℓ_i) или даже тривиальным сегментом, зависит от контекста.

Последний большой цикл может оказаться неполным; в этом случае работает блок (I7).

I.2.4. Итак, работа алгорифма всегда кончается тем, что вырабатываются некоторые слова

$$T_1, T_2, \ldots, T_\lambda \ldots, T_p,$$

дающие сегментацию текста: $T = T_1 T_2 \ldots T_\lambda \ldots T_p$, причем каждое T_λ есть либо реализация какой-то части прототипа M либо однобуквенное слово. Этим мы завершаем рассмотрение общего алгорифма сегментации текста $\mathcal{A}(M)$ и переходим к сегментации мелодии на обобщенные формальные мотивы.

2.0 Пусть теперь упомянутый выше алфавит L состоит из записей всевозможных отдельных звуков мелодии. Практически эти записи можно осуществить, например, средствами традиционной нотной азбуки. Следует только позаботиться о том, чтобы не было никаких потерь существенной информации; например, должна быть известна метрическая сила данного звука для возможности сравнения с метрической силой других звуков текста. Запись любой мелодии будет, тем самым, текстом в определенном выше (пункт I.I) смысле.

Далее мы конкретизируем понятие элементарного сегмента. Начнем с алфавита, состоящего из двух элементарных сегментов

$$E_1 = \{T, A\},$$

где T называется простым тактом, и A — возрастающей последовательностью. Эти названия, конечно, по существу еще ничего не объясняют. Содержание элементарного сегмента раскрывается лишь через его реализацию, т.е. в данном случае через множества T_ρ и A_ρ. Конечные множества слов в принципе можно задавать перечнем их элементов. Однако гораздо удобнее строить их при помощи соответствующего характеристического предиката, т.е. свойства, выделяющего элементы множества среди других слов в алфавите текста. Так мы и поступим.

2.I. Введем $T\rho$ как множество фрагментов мелодии, каждый из которых состоит из двух или трех звуков одинаковой длительности с дополнительным условием, что каждый следующий звук фрагмента метрически слабее предыдущего.

Поскольку мелодический рисунок в этом и следующих определениях не играет никакой роли, примеры могут быть даны без указания высоты звука. Рис.2 содержит ряд примеров простых тактов, а также некоторые контрпримеры.

Элементарный сегмент A по определению реализуется в фрагментах из двух или более звуков, в которых каждый следующий звук по длительности превосходит предыдущий (см.рис.2).

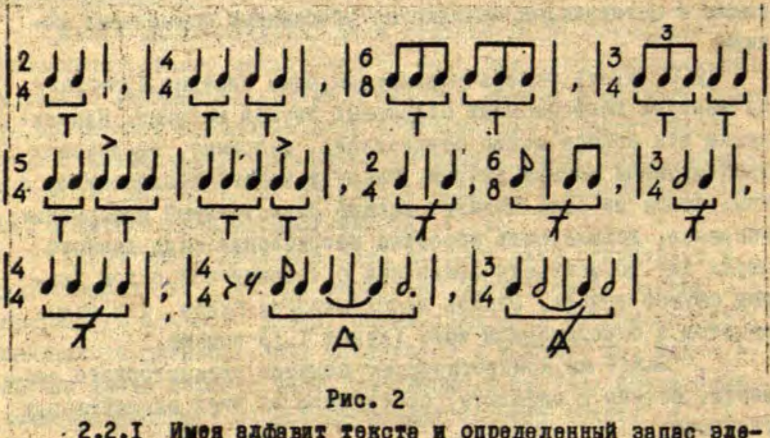

Рис. 2

2.2.I Имея алфавит текста и определенный запас элементарных сегментов, можно все еще строить не один, а много вариантов обобщенных формальных мотивов путем выбора различных прототипов. Рассмотрим прежде всего прототип

$$M_1 = TA .$$

Применение его означает, что при сегментации мелодия будет разрезана на фрагменты, каждый из которых является реализацией некоторой части слова M_1, т.е. реализацией некоторого слова из множества $F(TA)$. Условимся всякий такой фрагмент мелодии называть реализацией $F(TA)$-мотива или короче $F(TA)$-мотивом или еще короче просто TA-мотивом.

Пример сегментации на $F(TA)$-мотивы дан на рис.3. Реализации отдельных элементарных сегментов маркируются буквами T и A (это результаты работы малого цикла алгорифма $\mathfrak{A}(M_1)$), а TA - мотивы — буквой F (результат работы большого цикла). Тривиальный сегмент отмечается звездочкой. В данном примере реализуются все возможные части TA-мотива, т.е. слова TA, T, A.

Рис. 3

2.2.2 Рассмотренный в предыдущем пункте обобщенный формальный $F(TA)$-мотив совпадает с формальным мотивом М.Г.Бороды [I]. Таким образом, рассматриваемое здесь понятие обобщенного формального мотива содержит в качестве частного случая F-мотив М.Г.Бороды.

Отправным пунктом при построении обобщенного формального мотива в настоящей работе послужили идеи, заложенные в определении F-мотива. Действительно, М.Г.Борода уже выдвинул требование сцепленности элементарных сегментов и воспользовался принципом максимальности, а также понятием части прототипа, хотя и без этой терминологии; им были введены понятия простого такта и возрастающей последовательности. Кроме того, в работе [2] дана блок-схема алгорифма сегментации мелодии на F-мотивы. В ней более детально отражена та часть работы, которая соответствует блокам (3) и (4) алгорифма $\mathfrak{A}$ (рис.I). А именно, рассматриваются (в наших обозначениях) слова

$$T_0 = t_j,\ T_1 = t_j t_{j+1},\ T_2 = t_j t_{j+1} t_{j+2}, \ldots$$

Если $T_1 \in \alpha_i \rho$, проверяется T_2 , и т.д.. Когда первый раз $T_{m+1} \bar{\in} \alpha_i \rho$, слово $T_m = t_j \dots t_m$ является искомой самой длинной реализацией элементарного сегмента.

2.2.3 Кроме $M_1 = TA$ можно воспользоваться и другими прототипами, например, ATA , TAT и т.п., однако сейчас не будем на этом останавливаться. Вместо этого подумаем о расширении запаса элементарных сегментов.

Грубая метрическая классификация музыкальных интонаций позволяет разделить их на два класса — хореические (акцент на первой половине) и ямбические (акцент на второй половине). Как отметил М.Г.Борода, понятие простого такта содержит в себе идею хореического, а понятие возрастающей последовательности — идею ямбического. В этом обстоятельстве, вероятно, заключена одна из причин успеха F -мотива. В то же время возможны и такие случаи, скажем, ямбической интонации, которые не охватываются элементарным сегментом A . Поэтому, видимо, имеет смысл расширить запас элементарных сегментов. В этой связи целесообразно рассмотреть одну формальную операцию над словами.

2.3.1 Возвращаясь на общую точку зрения пункта 0.1, введем операцию обращения слова. Обратным для слова $V = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1} \gamma_n$ называется слово $\bar{V} = \gamma_n \gamma_{n-1} \cdots \gamma_2 \gamma_1$, состоящее из тех же букв в обратном порядке. Теперь можно каждому элементарному сегменту ε поставить в соответствие его обращение $\bar{\varepsilon}$, определяя его реализацию как

$$\bar{\varepsilon}\rho = \overline{\varepsilon\rho}.$$

Это означает, что данное соответствие реализации ρ автоматически доопределено и для всех обращений элементарных сегментов данного алфавита E , т.е. этот алфавит как бы удваивается. Например, из E_1 получается алфавит

$$E_2 = \{T, \bar{T}, A, \bar{A}\}.$$

2.3.2 Говоря конкретнее, в качестве обращения простого такта имеем элементарный сегмент

$$\bar{T},$$

в реализациях которого звуки имеют одинаковую длительность, и каждый следующий звук метрически сильнее предыдущего.

Обращение возрастающей последовательности — это элементарный сегмент

$$\bar{A},$$

в реализациях которого каждый следующий звук короче предыдущего (убывающая последовательность).

Сегмент $\bar{T}$ из двух звуков представляет собой вид ямбической интонации, притом именно такой, который не охватывается сегментом A . Типичным случаем $\bar{T}$ является затакт. Наоборот $\bar{A}$, как правило, относится к хореической интонации.

2.3.3 Алфавит E_2 позволяет строить целый ряд различных прототипов, например, $M_2 = \bar{T}\,T\,A$. Пример сегментации на M_2 - мотивы см. на рис.4.

Рис. 4

Для сравнения приводится также сегментация на F -мотивы. Она является более мелкой и содержит также тривиальные сегменты, отсутствующие в M_2 -сегментации.

2.3.4 Запас элементарных сегментов можно дополнить еще, например, сегментом U , реализация которого определяется как последовательность двух звуков, из которых второй метрически тяжелее и не короче первого. Это сегмент типичного простого затакта (состоящего из одного звука). Примеры см. на рис.5.

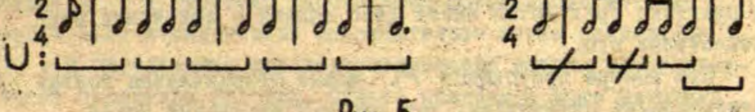

Рис. 5

Сложный затакт из двух или трех звуков одинаковой длительности может появляться как реализация прототипа

$M_3 = TU$. Еще заслуживает внимания прототип $M_4 = UTA$, представляющий собой F -мотив с затактом и охватывающий M_2 как частный случай.

2.4 Запас элементарных сегментов теперь уже составляет множество

$$E_3 = \{T, \bar{T}, A, \bar{A}, U, \bar{U}\}.$$

В принципе могут быть введены еще и другие ритмометрические элементарные сегменты. Однако очень большое разнообразие мотивов может быть достигнуто при использовании прототипов в алфавите E_3. Приведем еще только один пример.

Многие латышские народные мелодии имеют размер 2/4 без затакта. Форма у них чаще всего квадратная, границы традиционного (интуитивного) мотива нередко совпадают с границами такта. Можно построить сегментацию на обобщенные формальные мотивы с прототипом $M_5 = TUT$, который неплохо справляется с сегментацией такого текста. Пример приведен на рис.6.

Рис. 6

3.1. Если отойти в сторону большей свободы еще дальше от конструктивных идей, заложенных в определении F - мотива, то можно ввести свободный обобщенный формальный мотив. Его свободный прототип S записывается как конечное множество прототипов P_i в прежнем смысле:

$$S = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}.$$

Реализацию свободного прототипа S по определению понимаем как объединение реализаций всех прототипов из $W(S)$. Теоретически такое множество реализаций бесконечно, однако на практике приходится иметь дело только с конечными подмножествами его.

При выборе прототипов P_i можно ограничиться только элементарными сегментами, так как использование более длинных слов в E ничего нового не дает. В частности, свободный прототип $\{\varepsilon_1 \varepsilon_2\}$ очевидно дает в точности те же реализации, что и $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, а именно реализации всех слов с буквами ε_1 и ε_2 .

3.2 Методику определения F -мотива можно видоизменять также в сторону бо̀льшей требовательности. Например, можно отказаться от использования собственных частей прототипа и прийти к понятию строгого обобщенного формального мотива. Его прототип записывается как слово в E , заключенное в квадратные скобки: $[M]$. Реализацией строгого прототипа называется каждая реализация слова M (взятого в полном виде).

3.2.2 Рис.7 содержит пример сегментации на $F(UT\bar{\bar{T}}T)$-мотивы, на свободные мотивы $F(\{U,T,\bar{T}\})$ и на строгие мотивы $F([UT\bar{\bar{T}}T])$. Здесь наблюдается то типичное явление, что тривиальных сегментов меньше всего в случае свободных мотивов, а больше всего при сегментации на строгие мотивы. Встречаемость длинных мотивов, наоборот, больше в сегментации на свободные мотивы, а меньше в сегментации на строгие мотивы.

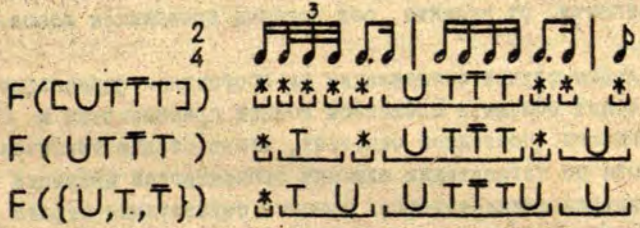

Рис. 7

4. Рассмотренные выше понятия обобщенного формального мотива (§2), свободного обобщенного формального мотива (пункт 3.I) и строгого обобщенного формального мотива (пункт 3.2) использовали исключительно такие реализации ρ , в определении которых участвовали только метроритмические параметры мелодии. Однако описанная выше методика (§I) безразлична к выбору реализации ρ . Она столь же естественно допускает и такие реализации, которые используют мелодический рисунок музыки. К примеру, при определе-

нии реализаций мелодических прототипов могут быть использованы восходящие и (или) нисходящие участки мелодии, участки с ограниченной вариацией мелодической линии в смысле интервалики и другие подобные признаки.

В принципе ясно, что самыми плодотворными должны оказаться формальные мотивы, в определении которых будут удачно сочетаться метроритмические с интервальными характеристиками мелодии. Однако этот очень трудный вопрос еще ждет своего мастера.

5. Не будем здесь останавливаться на тех проблемах и методах теоретического музыкознания, при рассмотрении которых может оказаться полезным понятие формального мотива как средства сегментации мелодии. Первые шаги в этом направлении сделаны М.Г.Бородой, в том числе в работах [I],[2] и [3] .

Отметим еще только одно соображение. Вероятно, не стоит искать среди многих разновидностей обобщенных формальных мотивов одного "самого правильного". По всей видимости, полезными могут оказаться различные формальные мотивы, в зависимости как от анализируемого текста, так и, в особенности, от аспекта, под которым проводится исследование.

В любом случае сегментация на обобщенные формальные мотивы будет обладать свойством полной применимости и объективности. Последнее означает, что в стадии технической работы по сегментации влияние субъективной интуиции исследователя элиминируется. Процесс сегментации строго алгорифмизирован и может быть доверен ЭВМ.

Конечно, это не исключает возможности и полезности сравнения различных понятий формального мотива, их целесообразного отбора. Можно ожидать, в частности, что свое значение сохранит F -мотив — источник всех идей данной работы.

На английском языке эта работа печатается в сборнике "Количественная лингвистика" [4] .

ЛИТЕРАТУРА

I. Борода М.Г. Частотные структуры музыкальных текстов.- В кн.: Сб.статей, посвященный 60-летию Великой Октябрьской революции, Тбилисская Государственная консерватория им. В.Сараджишвили. Тбилиси,1977,с.178-203.

2. Борода М.Г. О мелодической элементарной единице.- В кн.: Первый Всесоюзный семинар по машинным аспектам алгоритмического формализованного анализа музыкальных текстов: Материалы, Ереван, 1977, с.II2-I20.

3. Борода М.Г. Об одной количественной закономерности ритмики вокальной мелодии.-В кн.: Конференция молодых музыковедов: Тезисы и материалы, Тбилиси,1980, с.18-21.

4. Detlovs V. On microsegmentation of tunes. Alternative units to F-motif.-In: Quantitative Linguistics , Bochum (in print).

Алгебра и дискретная математика. Рига, 1984.

УДК 519.6

А.А.Земитис

ЛГУ им.П.Стучки

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе с помощью дискретизации условия разрешимости одной задачи гармонических функций построен численный метод для решения задачи Дирихле в областях с гладкой границей. В начале изложено обоснование возможности использования условия разрешимости. Далее основное внимание уделено дискретизации и изучению свойств полученной линейной алгебраической системы.

§ I. Теоретические предпосылки численного метода

Решение одного класса задач со свободной границей заключается в том, чтобы найти изменение границы области во времени, если передвижение границы зависит от решения уравнения Лапласа в рассматриваемой области в соответствующем моменте времени. Точнее, скорость передвижения границы зависит от нормальной и касательной производной решения на границе области. При построении алгоритмов численного решения подобных задач со свободной границей, один из важнейших этапов - построение метода решения следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 u(P)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(P)}{\partial y^2} = 0, \quad P \in G \subset \mathbb{R}^2; \qquad \text{(I)}$$

$$u(P) = f(D) \text{ при } P \in L,$$

где L - граница области G.

Найти $\frac{\partial u}{\partial n_P}$, $P \in L$, n_P - вектор нормали в точке P.

Отличие этой задачи от классической задачи Дирихле лишь в том, что нас интересует не сама функция $u(P)$, а ее нормальная производная на границе области. Это обстоятельство ориентирует на поиск методов, которые были бы приспособлены к этой особенности и тем самым были бы более эффективными по сравнению с методами, которые построены на методах решения классической задачи Дирихле.

Алгоритм решения задачи (I) построим, основываясь на условии разрешимости следующей задачи для гармонических функций [2]:
найти регулярно гармоническую в области G функцию $u(Q)$, удовлетворяющую на границе области L условию:

$$\frac{\partial}{\partial n_P}u(P)+i\frac{\partial}{\partial s_P}u(P)=\varphi(P),\ P\in L,\qquad \varphi(P)\in C^{(0,\lambda)}(L), \tag{2}$$

где L - кривая ляпуновского типа,

n_P - вектор внутренней нормали в точке P,

s_P - вектор, касательный к кривой L в точке P, ориентирован в положительном направлении обхода контура.

В работе [2] показано, что общее решение задачи (2) выражается как сумма частного вещественного решения задачи (2) и общего решения соответствующей однородной задачи. Требование вещественности решения задачи (2) приводит к переопределенной задачи, так как на границе заданы как нормальная, так и тангенциальная производная. Как известно, для определения гармонической функции с точностью до постоянной достаточно задать на границе области или нормальную производную (задача Неймана) или тангенциальную производную (семейство задач Дирихле, различающихся между собой постоянной). В [2] получены условия, необходимые и достаточные для разрешимости задачи (2), которые фактически дают связь между нормальной и тангенциальной производной гармонической функции на границе области.

Таким образом, если задана тангенциальная производная $\frac{\partial u}{\partial s_P}$ на границе области L, то нормальную производную $\frac{\partial u}{\partial s_P}$ можно найти из следующего интегрального уравнения:

$$\pi\frac{\partial u}{\partial n_P}+\int_L\frac{\partial u}{\partial n_Q}\frac{\cos\mu(P,Q)}{r(P,Q)}ds_Q=-\int_L\frac{\partial u}{\partial s_Q}\frac{\sin\mu(P,Q)}{r(P,Q)}ds_Q, \tag{3}$$

где $r(P,Q)$ - расстояние между точками Q, P

$\mu(P,Q)$ - угол между нормалью n_P и вектором $\overrightarrow{PQ}$.

§ 2. Дискретизация интегрального уравнения, свойства системы алгебраических уравнений

Вернемся к задаче (I). Предположим, что контур L задан параметрически:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Относительно функций $x(t)$, $y(t)$ потребуем, чтобы они были класса $C^1[0,2\pi]$. Такое же требование поставим для $f(x(t)y(t)) = f(P)$ как функции от t . В таком случае можем найти $\frac{\partial u}{\partial s_Q}$ на L :

$$\frac{\partial u}{\partial s_Q} = \frac{\partial f}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

и неизвестные значения $\frac{\partial u}{\partial n_P}$ на L можно определить из интегрального уравнения (3).

Для ляпуновских кривых L ядро интегрального уравнения (3) является слабо полярным, но в таком случае оно является уравнением Фредгольма 2-го рода, для которого справедливы теоремы Фредгольма. Решение интегрального уравнения будем искать в выбранных точках $P_1, P_2, \dots, P_N$ границы L , которым соответствуют значения параметра $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N = 2\pi$.

Предположим, что $\frac{\partial u}{\partial n_P}$ между каждыми двумя точками P_k , P_{k+1} меняется линейно от значения $\frac{\partial \mu}{\partial n_{P_k}}$ до значения $\frac{\partial u}{\partial n_{P_{k+1}}}$. Тогда для определения $\frac{\partial \mu}{\partial n_P}$ в выбранных точках получим линейную систему алгебраических уравнений. Обозначим элементы матрицу системы $A = \|a_{ij}\|, 1 \leq i,j \leq N$, их можно определить по формуле

$$a_{ij} = \delta_i^j \pi + \int_{P_j P_{j-1}} \frac{t_Q - t_j}{t_j - t_{j-1}} \cdot \frac{\cos\mu(P_i,Q)}{r(P_i,Q)}\, ds_Q + \int_{\overset{\frown}{P_j P_{j+1}}} \frac{t_{j+1} - t_Q}{t_{j+1} - t_j} \cdot \frac{\cos\mu(P_i,Q)}{r(P_i,Q)}\, ds_Q,$$

где δ_i^j - символ Кронекера,

t_Q - значение параметра в текущей точке Q .

Отметим некоторые свойства матрицы.

I. Для выпуклых областей коэффициенты матрицы a_{ij}, $1 \leq i,j \leq N$ - неотрицательны. Это следует из того, что для выпуклых областей угол $|\mu(P,Q)| \le \frac{\pi}{2}$.

2. Для выпуклых областей матрица системы имеет доминирующую главную диагональ. Действительно, если взять сумму всех недиагональных элементов одной строки матрицы:

$$\sum_{\substack{j\ne i\\ j=1}}^{N} a_{ij} = \int\limits_{L/P_{i-1}P_{i+1}} \frac{\cos\mu(P_i,Q)}{r(P_i,Q)}\,ds_Q + \int\limits_{P_iP_{i+1}} \frac{t_Q-t_i}{t_{i+1}-t_i}\,\frac{\cos\mu(P_i,Q)}{r(P_i,Q)}\,ds_Q + \int \frac{t_i-t_Q}{t_i-t_{i-1}}\,\frac{\cos\mu(P_i,Q)}{r(P_i,Q)}\,ds_Q,$$

то видно, что

$$\sum_{\substack{j\ne i\\ j=1}}^{N} a_{ij} \le \int \frac{\cos\mu(P_i,Q)}{r(P_i,Q)}\,ds_Q = \pi.$$

С другой стороны, $a_{ii} \ge \pi$, следовательно

$$a_{ii} \ge \sum_{\substack{j\ne i\\ j=1}}^{N} a_{ij}.$$

Для проведений конкретных расчетов интегралы по частям контура L необходимо заменить интегралами по параметру и вычислить их используя квадратурные формулы. Полученную систему можно решить, например, методсм Гаусса. После нахождения $\frac{\partial u}{\partial n_{P_i}}, i=1,2,\ldots N$ не составляет особых трудностей и определение значений самой функции $u(P)$ внутри области. Для этого мы можем использовать формулу интегрального представления гармонической функции:

$$u(P)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L}\left(u(Q)\,\frac{\cos\mu(Q,P)}{r(P,Q)}-\frac{\partial u}{\partial n_Q}\ln\frac{1}{r(P,Q)}\right)ds_Q.$$

Интегралы легко вычисляются с помощью квадратурных формул, так как в этом случае сингулярностей нет.

Для проверки работоспособности алгоритма, решалась следующая конкретная задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ ,\ x^2+y^2<1.$$

$$u(x,y)=x \quad \text{при } x^2+y^2=1.$$

Требуется найти $\frac{\partial u}{\partial n_P}$ на границе области. Как легко видеть, решением является

$$\frac{\partial u}{\partial n_P}=-\cos\varphi \quad , \ \varphi \text{ - полярный угол.}$$

Если с помощью численного метода искать $\frac{\partial u}{\partial n_P}$ в N равноотстоящих точках, то элементы матрицы A имеют следующие значения: $a_{ij}=\pi\delta_i^j+\frac{\pi}{N}$.

Для сравнения проводились расчеты, когда число фиксированных точек ρ_i равно 8 или 40. Для 8 точек при определении величины нормальной производной относительная ошибка не превосходила 0,3%, а при 40 точек - 0,004%. Это указывает на высокую точность метода. Описанный метод использовался и при решении задач Дирихле в эллиптических областях.

Если граница области имеет углы (например, прямоугольник), то это уже не кривая ляпуновского типа. Для применения вышеописанного метода необходимо углы сгладить. Используя для задания границы сплайны, это легко сделать - достаточно выбрать узлы, не совпадающие с угловыми точками.

ЛИТЕРАТУРА

I. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.- М.: Наука,1968.

2. Габов С.А. Угловой потенциал и его некоторые приложения.- Математический сборник,1977,т.103(145),с.490-504.

Алгебра и дискретная математика. Рига, 1984.

УДК 519.4

Р.С.Липянский

ЛГУ им. П.Стучки

О ТРИАНГУЛИРУЕМОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ АЛГЕБР И АЛГЕБР ЛИ

I. В работе рассматриваются вопросы о существовании триангулируемых представлений алгебр Ли и p -алгебр Ли с предварительно заданной ступенью стабильности коммутанта. Эта задача имеет тесные связи со следующим вопросом: каковы тождества p -алгебры Ли треугольных матриц $T_p(n,K)$ и тождества алгебры Ли треугольных матриц $T(n,K)$ n -ого порядка над полем K. Излагаемые ниже результаты о тождествах алгебры $T(n,K)$ кратко приведены в / 3 /.

При решении последней задачи используются идеи, аналогичные соответствующим рассмотрениям при описании полных треугольных групп над полями / I /. В реализации идей отмеченных работ имеются трудности, связанные, в частности, с отсутствием в алгебрах Ли операции, аналогичной операции сплетения в группах. С другой стороны, при описании тождеств алгебры Ли $T(n,K)$ приходится, в отличии от групп, проводить рассуждения в два этапа: сначала привлекается категория p -алгебр Ли где ситуация напоминает групповую и выписываются тождества p -алгебры $T_p(n,K)$ и лишь затем, используя структуру слов Джекобсона, возвращаемся к категории алгебр Ли для получения тождеств алгебры $T(n,K)$. Этим объясняется, в частности, что $\mathrm{var}\, T(n,K)$ не разлагается как в случае групп в произведение соответствующих многообразий алгебр Ли.

Основные определения и факты, используемые в категории представлений алгебр Ли, приведены в / I /. Их можно сформулировать также в категории представлений ограниченных алгебр Ли (иначе - p -пар). Доказательство большинства утверждений проводится по той же схеме, что и в лиевском (групповом) случае. В проверке нуждается лишь то, что возникающие там отображения согласованы с p -структурой.

2. Рассмотрим операцию треугольного произведения p -пар - аналогичную операции треугольного произведения лиевских пар / 2 /. Всюду в этом пункте фиксируется поле K характеристики p .

Пусть даны две ограниченные лиевские пары (V_1, L_1) и (V_2, L_2) Обозначим через $\Phi = Hom_K(V_2, V_1)$ и $(V, \Sigma) = (V_1 + V_2, L_1 + L_2)$ - прямая сумма исходных p -пар. Определим действие ограниченной алгебры $\Sigma = L_1 + L_2$ на $\Phi = Hom(V_2, V_1)$: если $\varphi \in \Phi$, $\sigma = l_1 + l_2 \in \Sigma$,где $l_1 \in L_1$ и $l_2 \in L_2$, $v_2 \in V_2$, то $v_2(\varphi \circ \sigma) = v_2(\varphi \circ (l_1 + l_2)) = (v_2 \varphi) l_1 - (v_2 l_2)\varphi$ Таким образом возникает лиевская пара (Φ, Σ) .

Если теперь мы имеем лиевскую пару (Φ, Σ) , то ей отвечает полупрямая сумма $L = \Phi \lambda \Sigma$ (здесь Φ - абелева алгебра Ли). Превратим теперь L в p -алгебру Ли. Для этого заметим, что если M и N - ограниченные алгебры над K , то $M + N$ естественным образом превращается в p -алгебру Ли:

$$(m+n)^{[p]} = m^{[p]_1} + n^{[p]_2} + \sum_{i=1}^{n-1} s_i(m,n)\ , \quad m \in M,\ n \in N$$

$[p]_1$ и $[p]_2$ - p - отображения соответственно в M и ,V. В нашей ситуации Φ - p -алгебра Ли с p -операцией $\varphi^{[p]} = 0$, $\varphi \in \Phi$, Σ - p -алгебра Ли с p -операцией $(l_1 + l_2)^{[p]} = l_1^{[p]} + l_2^{[p]}$, $l_1 \in L_1$, $l_2 \in L_2$ (здесь p -операция обозначается единым символом для всех участвующих алгебр). Легко видеть, что $L = \Phi \lambda \Sigma$ является p -алгеброй Ли с p -операцией: $(\varphi + l)^{[p]} = l^{[p]} + s_1(\varphi, l)$ Определим теперь ограниченную лиевскую пару $(V_1 + V_2, \Phi \lambda \Sigma)$ Сначала определим действие Φ в $V_1 + V_2$: если $\bar{\varphi}$ элемент из Φ, рассматриваемый как элемент в $L = \Phi \lambda \Sigma$, то для $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$ положим $v_1 \bar{\varphi} = 0$, $v_2 \bar{\varphi} = v_2 \varphi$ и продолжим далее действие φ по линейности. Так как действие Σ на V было определено ранее, мы получим представление алгебры Ли L в V .

Построенную ограниченную лиевскую пару $(V_1 + V_2, Hom_K(V_2, V_1)\lambda(L_1 + L_2))$ обозначим $(V_1, L_1) \triangledown (V_2, L_2)$ и назовём треугольным произведением исходных ограниченных пар (V_1, L_1) и (V_2, L_2) .

Мы будем ссылаться в дальнейшем на соответствующие свойства треугольных произведений лиевских пар доказанных в / 2 /, так как в случае p -пар доказательство проводится аналогично.

Отметим отдельно одно важное свойство треугольных произведений p -пар: если (V_1, L_1) и (V_2, L_2) - p -пары, то

$$\mathrm{var}\,((V_1, L_1) \triangledown (V_2, L_2)) = \mathrm{var}\,(V_1, L_1) \cdot \mathrm{var}\,(V_2, L_2).$$

(ср. с теоремой I8.2.I из / I /).

§ I. О тождествах p -алгебры Ли треугольных матриц. Триангулируемость p -алгебр Ли

Одним из первых и важнейших вопросов, который возникает при изучении многообразий представлений ограниченных алгебр Ли является следующий: все ли тождества конечномерного представления являются следствиями конечного множества тождеств из их числа. Естественно, аналогичный вопрос возникает и при изучении многообразий ограниченных алгебр Ли. В этом параграфе положительный ответ на этот вопрос получен при описании тождеств канонического представления $T_p(n,K)$ - p -алгебры Ли треугольных матриц и тождеств самой p -алгебры $T_p(n,K)$. Имеют место теоремы.

Теорема I.I. Если поле K бесконечно, то $\mathrm{var}\,(K^n, T_p(n,K))$ задается тождеством

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0 \qquad (I)$$

2. Если поле K конечно $(|K| = p^m)$, то $\mathrm{var}\,(K^n, T_p(n,K))$ задается тождествами вида:

$$v_1 v_2 \dots v_n = 0, \qquad (2)$$

где вместо v_i стоят слова $x_{i1}^{p^m} - x_{i1}$ или $[y_{i1}, y_{i2}]$.

Теорема I.2. Если поле K бесконечно, то $\mathrm{var}\, T_p(n,K)$ задается тождествами

$$[\dots[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]] = 0$$
$$[\dots[x_1, x_2] \dots [x_{2(s)-1}, x_{2(s)}]] = 0 \qquad (3)$$
$$[x_1, x_2]^{p^k} = 0 \text{ , если } p^{k-1} \leq n < p^k$$

2. Если поле K конечно $(|K| = p^m)$, то $\mathrm{var}\, T_p(n,K)$ задается тождествами вида:

$$[\ldots[v_1,v_2]\ldots v_n]=0$$

$$[\ldots[v_1,v_2]\ldots v_{(\frac{n}{p})}]^p=0 \qquad (4)\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_1^{p^k}=0\text{ , если } p^{k-1}\leq n<p^k,$$

где вместо v_i стоят слова вида $x_{1i}^{p^m}-x_{1i}$ или $[y_{1i},y_{2i}]$ Доказательства теорем I.I и I.2 распадается на несколько шагов.

I. Введем в рассмотрение класс $\mathfrak{M}_{n,p}$ алгебр Ли. Пусть L -p-алгебра Ли над полем $K(\operatorname{char}K=p)$. Рассмотрим в ней по аналогии с теорией групп / I /, убывающий ряд из подалгебр L

$$L=\mathfrak{M}_1\supset\mathfrak{M}_2\supset\ldots\supset\mathfrak{M}_i\supset\ldots$$

Здесь $\mathfrak{M}_1=L$., а дальше определяется индуктивно: $\mathfrak{M}_i=\{[\mathfrak{M}_{i-1},L],\mathfrak{M}_{(\frac{i}{p})}^{[p]}\}$, где $[\mathfrak{M}_{i-1},L]$ взаимный коммутант p-алгебр $\mathfrak{M}_{i-1}$ и L, $\mathfrak{M}_i^{[p]}$ -подалгебра, порожденная p-ми степенями элементов из $\mathfrak{M}$, $(\frac{i}{p})$ - наименьшее целое $\geq\frac{i}{p}$. Такой ряд будем называть $\mathfrak{M}$ -рядом.

Лемма I.3. $\mathfrak{M}$-ряд в p-алгебре Ли L обладает свойствами:

I) $[\mathfrak{M}_i,\mathfrak{M}_j]\subset\mathfrak{M}_{i+j}$,

2) $\mathfrak{M}_i^{[p]}\subset\mathfrak{M}_{ip}$,

3) для любого другого ряда подалгебр из L : $L=\Sigma_1\supset\Sigma_2\supset\ldots\supset\Sigma_n\supset\ldots$ удовлетворяющего свойствам I и 2 имеет место включение: $\Sigma_i\supseteq\mathfrak{M}_i\ (i=1,2\ldots)$.

Доказательство проводится индукцией по индексам i и j.

Рассмотрим теперь класс $\mathfrak{M}_{n,p}$-алгебр Ли.

Определение I.4. Ограниченная алгебра Ли над полем K характеристики p называется $\mathfrak{M}_{n,p}$-алгеброй, если она обладает $\mathfrak{M}$ -рядом, у которого $n+1$ член равен 0. Очевидно, что $\mathfrak{M}_{n,p}$ -алгебры образуют многообразие (этот класс замкнут относительно операторов Q, S и C). Опишем тождества этого многообразия.

Лемма I.5. Многообразие $\mathfrak{M}_{n-1,p}$-алгебр задается тождествами:

$$[\ldots[x_1,x_2]\ldots x_n]=0\ ,$$

$$[\ldots[x_1, x_2] \ldots x_{(a)}]^p = 0,$$

$$[\ldots[x_1, x_2] \ldots x_{(a_2)}]^{p^2} = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_1^{p^k} = 0 \text{, если } p^{k-1} \le n < p^k.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно описать набор слов из свободной ограниченной алгебры Ли, чье замыкание совпадает с n-ым членом $\mathfrak{M}$-ряда, построенного в этой алгебре. Доказательство ведется индукцией по n.

2. Объектом рассмотрения на этом шаге будет многообразие $\mathfrak{S}_p^n$, где $\mathfrak{S}_p$ -многообразие p-пар с тривиальным действием. Очевидно, многообразие $\mathfrak{S}_p^n$ задается битождеством $x \cdot y_1 y_2 \cdots y_n = 0$. Легко видеть, что p-пара $(A, L) \in \mathfrak{S}_p^n$ тогда и только тогда, когда в A имеется ряд:

$$A = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_i \supset A_{i+1} \supset \ldots \supset A_m = 0$$

длины $m (m \le n)$ из L-допустимых подмодулей во всех факторах которого A_i / A_{i+1} p-алгебра L действует нулевым образом. Отметим также, что если Δ - идеал в $U(F_p)$, порожденный свободной ограниченной алгеброй F_p, то идеал тождеств $\mathfrak{S}_p^n$ есть Δ^n.

Докажем теперь аналог теоремы Биркгофа / 5 / для $\mathfrak{M}_{n,p}$-алгебр.

Предложение I.6. p-алгебра Ли L тогда и только тогда допускает точное n-стабильное представление, когда L - $\mathfrak{M}_{n,p}$- алгебра.

Доказательство. Необходимость. Пусть p-алгебра Ли L обладает рядом

$$L = \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_i \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_n = 0 \qquad (I)$$

таким, что $[\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_j] \subset \mathfrak{M}_{i+j}$, $\mathfrak{M}_i^{[p]} \subset \mathfrak{M}_{ip}$. Для доказательства необходимости сформулированного условия достаточно рассмотреть случай когда L конечномерна. Полагаем, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - базис в L, такой, что

$e_1, e_2, \ldots, e_{m(1)}$ базис в $\mathfrak{M}_{n-1}$,

$e_1, e_2, \ldots, e_{m(2)}$ базис в $\mathfrak{M}_{n-2}$.

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$e_1, e_2, \ldots, e_{m(n-1)}$ базис в $\mathfrak{M}_1 = L$.

Ясно, что $m(1) < m(2) < \dots < m(n-1) = z$ Известно / 4 /, что базисом в u -алгебре $\bar{U}(L) = \frac{U(L)}{B}$, где B - идеал, порожденный элементами вида $a^p - a^{[p]}$, $a \in L$ являются мономы $e_1^{d_1} e_2^{d_2} \dots e_z^{d_z}$, где $0 \leq d_i < p-1$. Введем для этих мономов, следуя / 5 /, понятие веса: если элемент $e_i \in \mathfrak{M}_s$, но $e_i \notin \mathfrak{M}_{s+1}$ то полагаем $\mu(e_i) = s$ - вес элемента e_i. Вес одночлена $\mu(e_1^{d_1} \dots e_z^{d_z}) = \sum_i d_i s_i$ по определению. Далее полагаем, что вес одночлена равен минимуму весов стандартных одночленов в линейную комбинацию которых он раскладывается.

Используя свойства $\mathfrak{M}$ -ряда можно показать, что вес произведения двух одночленов не меньше суммы весов этих одночленов. Отсюда следует, что одночлены веса $\geq n$ образуют в $\bar{U}(L)$ идеал, который обозначается через $W(L)$. Ясно, что $W(L) \cap L = 0$ и $\frac{\bar{U}(L)}{W(L)}$ - ассоциативная алгебра класса нильпотентными $n-1$. Рассматривая далее регулярное представление $(U(L), L)$, получим требуемое n -стабильное представление p -алгебры Ли L.

Достаточность. Пусть L допускает точное n -стабильное представление (V, L). Покажем, что L - $\mathfrak{M}_{n-1,p}$-алгебра. Для доказательства нам понадобится нижний L -стабильный ряд в V :

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_i \supset \dots \supset V_n = 0, \quad \text{(I)}$$

где $V_0 = V$, $V_i = V_{i-1} \cdot L$.

Пусть теперь Σ_k - подалгебра в L, совпадающая с пересечением ядер k -стабильных представлений $(V_i / V_{i+k}, L)$, $i = 0, 1, \dots$ Подалгебры Σ_k образуют в L убывающий ряд

$$L = \Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \dots \supset \Sigma_k \supset \dots \supset \Sigma_n = 0. \quad (2)$$

Можно показать, что ряд (2) является $\mathfrak{M}$ -рядом, т.е. $[\Sigma_k, \Sigma_m] \subset \Sigma_{k+m}$ и $\Sigma_k^{[p]} \subset \Sigma_{kp}$. Но по условию $\Sigma_n = 0$, и, значит $\mathfrak{M}_n = 0$, т.е. L - $\mathfrak{M}_{n-1,p}$-алгебра.

3. С каждым многообразием p -пар $\mathfrak{X}$ связано квазимногообразие $\overrightarrow{\mathfrak{X}}$, состоящее из всех p -алгебр, допускающее точное представление в $\mathfrak{X}$. В случае, когда $\mathfrak{X}$ - многообразие представлений групп, а Θ - многообразие групп справедлива формула $\overrightarrow{\mathfrak{X} \times \Theta} = \overrightarrow{\mathfrak{X}} \cdot \Theta$. Доказательство этой формулы основано на применении понятия смешанного сплетения групповой парк и

группы /I/. В случае p-алгебр Ли аналогичного понятия не имеется. Тем не менее справедлив следующий частный случай указанной формулы, который в дальнейшем нам понадобится.

Предложение I.7. Пусть Θ - многообразие p-алгебр Ли над полем K. Тогда имеет место равенство: $\mathfrak{S}_p^n \times \Theta = \overrightarrow{\mathfrak{S}}_p^n \cdot \Theta$.

Доказательство. Пусть $L \in \mathfrak{S}_p^n \times \Theta$. Это означает, что существует точная p-пара $(V, L) \in \mathfrak{S}_p^n \times \Theta$, т.е. $(V, \Theta^*(L)) \in \mathfrak{S}_p^n$ Пара $(V, \Theta^*(L))$ точная и поэтому $\Theta^*(L) \in \mathfrak{S}_p^n$ Значит, $L \in \mathfrak{S}_p^n \cdot \Theta$.

Обратно, пусть $L \in \overrightarrow{\mathfrak{S}}_p^n \cdot \Theta$. Тогда в L имеется идеал J такой, что $\bar{L} = L/J$, где $J \in \overrightarrow{\mathfrak{S}}_p^n$. Обозначим через $\bar{E}$ базис алгебры $\bar{L}$ над K, а через E - множество представителей классов смежности из $\bar{E}$. Пусть также A - множество всевозможных произведений этих представителей, т.е. $A = \{\prod_i l_i,\ l_i \in E\}$. Тогда $\overline{U}(L)$ можно представить в виде суммы: $\overline{U}(L) = \sum_i a_i \overline{U}(L)$, где $a_i \in A$. Ясно, что естественно возникающая лиевская пара $(\overline{U}(L), J)$ соответствует абсолютно свободному представлению алгебры J, порожденному множеством A.

Рассмотрим теперь в $\overline{U}(L)$ следующий J - инвариантный ряд:

$$U(L) = V \supset V^{(1)} \supset V^{(2)} \supset \ldots \supset V^{(n)} \supset \ldots$$

где $V^{(i)} = U(L)\Delta^{i}(J)$, а $\Delta(J)$ - идеал в $U(L)$, порожденный p-алгеброй Ли J. В фаторах этого ряда p-алгебра J действует, очевидно, нулевым образом. Пусть теперь $\bar{V} = V/V^{(n)}$. Тогда пара $(\bar{V}, J)$ определяет свободное n-стабильное представление p-алгебры Ли J, порожденное множеством A, в том смысле, что для любой другой пары (M, J), принадлежащей многообразию $\mathfrak{S}_p^n$, каждое отображение из A в M единственным образом продолжается до гомоморфизма лиевских J - модулей $\bar{V}$ в M.

Так как $J \in \mathfrak{S}_p^n$, то каждое свободное представление p-алгебры J в многообразии $\mathfrak{S}_p^n$ точно. Значит, $(\bar{V}, J)$ - - точная пара. Отметим также, что можно говорить о парах $(V^{(k)}/V^{(k+1)}, L)$, так как $J \triangleleft L$ и $V^{(k)}$ являются L - инвариантными подпространствами V.

Покажем теперь, исходя из предыдущих рассмотрений, что пара $(\bar{V}, L) \in \mathfrak{G}_p^n \times \Theta$, т.е. p-алгебра L допускает точное представление в $\mathfrak{G}_p^n \times \Theta$. Действительно, по условию $\left(\frac{V^{(i)}}{V^{(i+1)}}, L\right) \in \mathfrak{G}_p$ и $L/J \in \Theta$. Значит, $\left(\frac{V^{(i)}}{V^{(i+1)}}, L\right) \in \mathfrak{G}_p \times \Theta$ Следовательно, если рассмотреть в $\bar{V}$ ряд длины n из L- допустимых подмодулей:

$$\bar{V} = \overline{V^{(0)}} \supset \overline{V^{(1)}} \supset \dots \supset \overline{V^{(n)}} = 0,$$

то по доказанному $\left(\frac{V^{(i)}}{V^{(i+1)}}, L\right) \in \mathfrak{G}_p \times \Theta$ для любого i, что означает справедливость включения $(\bar{V}, L) \in (\mathfrak{G}_p \times \Theta)^n = \mathfrak{G}_p^n \times \Theta$

Для завершения доказательства покажем, что пара $(\bar{V}, L)$ точна. Пусть $l \in L$ содержится в ядре этой пары. Тогда для любого $\bar{v} \in \bar{V}$ имеем $\bar{v} \cdot l = 0$, т.е. $v l \in \bar{U}(L) \Delta^n(J)$. Если теперь положить $v = 1$, то $l \in \bar{U}(L) \Delta^n(J)$, и значит, $l \in \bar{U}(L) \Delta(J)$. Тогда $l = \sum \alpha_j a_j b_{j1} \dots b_{jn}$, где $\alpha_j \in K$, $a_j \in A$, $b_{j\cdot} \in J$. Рассмотрим теперь естественный гомоморфизм $\mu : \bar{U}(L) \to \bar{U}(L/J)$ индуцируемый гомоморфизмом $L \to L/J$. Получаем $l^\mu = \sum \alpha_j a_j^\mu b_{j1}^\mu \cdots b_{jn}^\mu = 0$, т.е. $l \in J$. Но, как уже упоминалось, пара $(\bar{V}, J)$ точна и, следовательно, $l = 0$. Предложение доказано.

4. Выделим теперь одно важное для дальнейшего многообразие p-алгебр Ли. Для этого нам понадобится лемма.

Лемма I.8. / 3 / Если L -ограниченная алгебра Ли над где $|K| = p^m$ и $x^{p^m} = x$ для любого $x \in L$, то L - абелева алгебра.

Из леммы I.8 следует, что тождество $x^{p^m} - x = 0$ задает подмногообразие $\mathfrak{A}_p$ в многообразии ограниченных алгебр Ли над K. Рассмотрим теперь лиевскую пару (K, K), где K стоящее справа рассматривается как ограниченная абелева алгебра Ли, если $|K| = \infty$, и как ограниченная алгебра Ли с тождеством $x^{p^m} - x = 0$, если $|K| = p^m$. Имеет место лемма.

Лемма I.9.

$$\operatorname{var}(K, K) = \begin{cases} \mathfrak{G}_p \times \mathfrak{A}, & \text{если } |K| = \infty \\ \mathfrak{G}_p \times \mathfrak{A}_p, & \text{если } |K| < \infty \end{cases}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству предложения I0.I.5 из / I /.

Переходим теперь к доказательству теорем I.I и I.2.

Пусть поле K бесконечно. Из определения треугольного произведения p -алгебр Ли ясно, что

$$(K^n, T_p(n,K)) = (K,K) \triangledown (K,K) \triangledown \dots \triangledown (K,K).$$

Тогда согласно свойствам треугольного произведения, упомянутым ранее, $var(K^n, T_p(n,K)) = var((K,K) \triangledown \dots \triangledown (K,K)) = var(K,K) \dots var(K,K) = \mathfrak{G}_p^n \times \mathfrak{A}$. Заметим теперь, что идеал тождеств $\mathfrak{A}$ состоит из p -ых степеней всевозможных линейных комбинаций слов вида $[y,z]$ со всевозможными специализациями переменных y и z. Вспоминая правило выписывания тождеств многообразия $\mathfrak{X} \times \Theta$, если известны вербальные идеалы многообразия представлений $\mathfrak{X}$ и многообразия p-алгебр Θ (см. / I /), получим доказательство пункта I теоремы I.I.

Аналогично, если $|K| = p^m$, то $var(K^n, T_p(n,K)) = \mathfrak{G}_p^n \times \mathfrak{A}_p$ и, учитывая, что многообразие $\mathfrak{A}_p$ задается словами вида $[y,z]$ и $y^{p^m} - y$, получим доказательство пункта 2 теоремы I.I. Для доказательства теоремы I.2 заметим, что если (V,L) - точное представление, $\mathfrak{X} = var(V,L)$ и $\bar{\mathfrak{X}}$ -клас алгебр, допускающих точное представление в $\mathfrak{X}$, то ясно выполнение следующего равенства: $var\,L = var\,\bar{\mathfrak{X}}$. Поэтому при $|K| =$

$$var(T_p(n,K)) = var(\mathfrak{G}_p^n \times \mathfrak{A}) = var(\mathfrak{G}_p^n \cdot \mathfrak{A}) = \mathfrak{M}_{n-1,p} \cdot \mathfrak{A}.$$

Так как вербальные идеалы тождеств последних многообразий нам известны (см. лемму I.5) можно выписывать тождества $var(T_p(n,K))$. Если же $|K| = p^m$, то $var(T_p(n,K)) = var(\mathfrak{G}_p^n \times \mathfrak{A}_p) = var(\mathfrak{G}_p^n \cdot \mathfrak{A}_p) = \mathfrak{M}_{n-1,p}\mathfrak{A}_p$ и снова по известным правилам выписываем базис тождеств в этом случае. Заметим, что при этом мы пользуемся следующим свойством: вместо переменных, учитывающих в записи тождеств многообразия $\mathfrak{M}_{n-1,p}$, достаточно подставлять элементы вида $[y,z]$ и $y^{p^m} - y$, так как при подстановке всевозможных линейных комбинаций и p -х степеней комбинаций этих слов образуются тождества, являющиеся следствиями тождеств вида (4), а также появляются слова Джекобсона от элементов указанного вида. Последние, как легко видеть, также являются следствиями первого тождества из набора (4). Теоремы I.I и I.2 доказаны.

Переходим теперь к вопросу о представлении p -алгебр Ли треугольными матрицами.

Определение I.I0. p -алгебра Ли L линейных преобразований векторного пространства V над K называется триангулируемой, если существует ряд из L -инвариантных подпространств $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$ с одномерными факторами. Мы будем говорить также, что при этих условиях пара (V, L) - триангулируема, а алгебра L приводится к треугольному виду.

Теорема I.II. Конечномерная p -алгебра Ли L над алгебраически замкнутым полем K допускает точное конечномерное триангулируемое представление с n -стабильно действующим коммутантом тогда и только тогда, когда она принадлежит многообразию $var(T_p(n,K))$, т.е. удовлетворяет тождествам (3) из теоремы I.2.

Доказательство Необходимость. Если p -алгебра приводится в некотором представлении к треугольному виду с n -стабильно действующим коммутантом, то непосредственно можно проверить, что для этой алгебры все тождества (3) выполняются

Достаточность. Пусть $L \in var(T_p(n,K))$. Тогда она допускает точное представление в многообразии $var(K^n, T_p(n,K))$. Воспользуемся тем, что если p -алгебра Ли L допускает точное представление в классе $\mathfrak{X}$, то все ее свободные представления в этом классе являются точными (ср. с / I /). Следовательно, свободное циклическое представление $(\overline{U(L)}/W, L) \in var(K^n, T_p(n,K))$, где W -вербальный идеал, отвечающий тождествам (3), является точным представлением p -алгебры Ли L . Это представление конечномерно, так как $\overline{U}(L)$-конечномерная алгебра / 4 /. Ясно, что коммутант $[L,L]$ в этом представлении действует n -стабильно. Покажем, наконец, что p -алгебра Ли L триангулируема. Так как в рассматриваемом представлении алгебры L выполняется тождество $[x_1,x_2]\dots[x_{2n-1},x_{2n}]=0$, то $[x,y]^n=0$ для $\forall x,y \in L$. Из теоремы Энгеля заключаем, что существует $[L\ L]$ -инвариантный ряд:

$$0 = V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V \qquad (2)$$

такой, что V_1 - множество всех векторов, аннулируемых алгеброй $[L,L]$, V_2 - множество всех векторов, аннулируемых алгеброй $[L,L]$ в факторе V/V_2 и т.д. Очевидно, ряд (2) является также L - инвариантным рядом. Уплотним этот ряд до композиционного L - инвариантного ряда. Если рассмотреть действие p -алгебры Ли L в факторах последнего ряда, то ясно, что ядра возникающих представлений содержат коммутант $[L,L]$, т.е. в каждом неприводимом факторе действует абелева p -алгебра Ли. Так как основное поле алгебраически замкнуто, то по известной теореме линейной алгебры из предыдущего следует, что эти факторы одномерны. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема I.I2. Конечная p -алгебра Ли L над конечным полем $K\ (|K| = p^m)$ допускает точное конечномерное триангулируемое представление с n -стабильно действующим коммутантом тогда и только тогда, когда она принадлежит $var(T_p(n,K))$, т.е. удовлетворяет тождествам (4) теоремы I.2.

§ 2. Тождества алгебры Ли треугольных матриц. Триангулируемость алгебр Ли

Зная тождества p -алгебры Ли $T_p(n,K)$ опишем базис тождеств алгебры Ли $T(n,K)$.

I. В этом пункте мы фиксируем поле характеристики p из p^m элементов. Введем несколько определений.

Определение 2.I. Множество слов $V \in F_p(X)$ называется p -замкнутым, если

I) $v \in V \Longrightarrow v^p \in V$,

2) $v_1 \in V,\ v_2 \in V \Longrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in V,\ \forall \alpha, \beta \in K$,

т.е. V - векторное пространство, замкнутое относительно возведения в p-ую степень.

Определение 2.2. p -оболочкой произвольного множества слов $E \subset F_p(X)$ называется пересечение всех p -замкнутых множеств содержащих E.

При этом слова из E назовем p -образующими рассматриваемой p -оболочки.

Лемма 2.3. Идеал тождеств M многообразия $\mathfrak{A}_p$ состоит из p -оболочки слов вида:

$$z_i^{p^m} - z_i \quad \text{и} \quad [x_i, y_i], \tag{I}$$

где $x_i, y_i, z_i \in F_p(X)$.

Доказательство. Согласно лемме I.8 слова вида $[x_i, y_i]$ входят в идеал M. Поэтому идеал тождеств M получается вышеописанным образом.

Лемма 2.4. Идеал тождеств C_p многообразия $\mathfrak{N}_{n-1,p}\mathfrak{A}_p$ состоит из p -оболочки слов вида

$$[\ldots[x_1, x_2]\ldots x_n] \qquad (2)$$

и слов вида:

$$\begin{gathered}[\ldots[x_1,x_2]\ldots x_{(\frac{n}{p})}]^p \\ [\ldots[x_1,x_2]\ldots x_{(\frac{n}{p^2})}]^{p^2} \\ \ldots \\ x_1^{p^k}\end{gathered} \qquad (3)$$

, где $p^{k-1} \leq n < p^k$,

а вместо x_i стоят всевозможные слова из M .

Доказательство. Заметим вначале, что идеал тождеств многообразия $\mathfrak{N}_{n-1,p}$ состоит из p -оболочки слов вида (2) и (3), у которых $x_i \in F_p(X)$. Действительно, коммутирование слов вида (3) с любым элементом из F_p приводит к слову вида (2) с соответствующими специализациями переменных $x_i \in X$. Далее, выписывая по известному правилу идеал тождеств многообразия $\mathfrak{N}_{n-1,p}\mathfrak{A}_p$, получим искомое утверждение.

Лемма 2.5. Если элемент $w \in U(F)$ и w^p -лиевское слово, то $w=0$.

Доказательство. Эта лемма доказывается стандартными рассуждениями. Вначале рассмотрим фильтрацию алгебры $U(F)$, определенную подпространствами $U_0 = K, \ldots, U_i = k + F^1 + F^2 + \ldots + F_i, i \geq 1$, где F^i – подпространство, порожденное всеми произведениями i элементов, взятых из F . Имеем $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n \subset \ldots$. Рассмотрим, далее, коммутативную алгебру $gr\,U(F) = \sum \bar{u}_i$, $\bar{u}_i = U_i/U_{i-1}$ (умножение в $gr\,U(F)$ определяется покомпонентно формулой $(a_i + U_{i-1}) \cdot (a_j + U_{j-1}) = u_i a_j + U_{i+j-1})$.

Пусть $0 \neq w \in U_m - U_{m-1}$. Тогда $\bar{u} \in U_m/U_{m-1}$ и $\bar{u}^p \equiv u^p \pmod{U_{pm-1}}$. Но $u^p \in U_1 \subset U_{pm-1}$. Значит, $\bar{u}^p = 0$. Так как $gr\,U(F) \simeq S(F)$, а последняя алгебра без делителей нуля, то $\bar{u} = 0$, т.е. $u \in U_{m-1}$.

Противоречие. Значит $w = 0$.

Следствие 2.6. Если элемент $w = \alpha_1 u_1^{p^{k_1}} + \ldots + \alpha_s u_s^{p^{k_s}} \in F$, где $\alpha_i \in K$, $k_i \in N$, $k_i > 0$, то он представим в виде линейной комбинации слов Джекобсона от элементов вида:

$$\beta_1 u_1^{p^{k_1-1}}, \beta_2 u_2^{p^{k_2-1}}, \ldots, \beta_s u_s^{p^{k_s-1}}, \qquad (4)$$

где $\beta_i^p = \alpha_i$.

Доказательство. По известным соотношениям, связывающим операцию возведения в p -ую степень с операциями в ассоциативной алгебре характеристики p, имеем:

$$w = \alpha_1 u_1^{p^{k_1}} + \alpha_2 u_2^{p^{k_2}} + \ldots + \alpha_s u_s^{p^{k_s}} = (\beta_1 u_1^{p^{k_1-1}} + \beta_2 u_2^{p^{k_2-1}} + \ldots + \beta_s u^{p^{k_s-1}})^p +$$

+ слова Джекобсона от элементов вида (4). В силу сделанных предложений элемент $(\beta_1 u_1^{p^{k_1-1}} + \ldots + \beta_s u_s^{p^{k_s-1}})^p$ является лиевским словом. Но тогда, согласно предыдущей лемме, $\beta_1 u^{p^{k_1-1}} + \beta_2 u_2^{p^{k_2-1}} + \ldots + \beta_s u_s^{p^{k_s-1}} = 0$. Это доказывает справедливость утверждения.

Переходим теперь к описанию тождеств многообразия $var(T(n,K))$ в случае конечного поля. Ясно, что для того чтобы выписать тождества, которым удовлетворяет алгебра Ли $T(n,K)$, где $|K| = p^m$, достаточно уметь выделять все лиевские слова из вербального идеала C_p, соответствующего многообразию $\mathfrak{M}_{n-1,p}\mathfrak{A}_p$.

Первую серию лиевских слов из C_p легко получить, подставляя в слово вида (2) вместо переменных x_i элементы вида $z_i^{p^m} - z_i$ и $[x_{1i}, y_{1i}]$. Покажем, что слова из этой серии образуют базис тождеств многообразия $var(T(n,K))$.

Действительно, при подстановке в слова вида (2) элементов из идеала M мы получаем линейную комбинацию слов, являющихся, как легко видеть, следствием тождеств из первой серии. Если теперь рассмотреть всевозможные коммутаторы слов вида (3) с элементами алгебры F_p, то мы также не получим новых лиевских слов: эти тождества получаются из слов вида (2) с соответствующими специализациями вместо x_i, так как длина полученных коммутаторов $\geqslant n$, а по составу переменных они также соответствуют следствиям слов из первой серии. Наконец, если линейная комбинация слов вида (3) является лиевским словом, то согласно следствию 2.6 она является линейной комбинацией p-х степеней слов Джекобсона от элементов $[\ldots[x_1,x_2]\ldots x_{(q)}]^{p^{k_1}}, \ldots, [\ldots[x_1,x_2]\ldots x_{(q_2)}]^{p^{k_2}}, \ldots$.

Но слова Джекобсона над полем характеристики p имеют длину p. Поэтому мы снова делаем вывод, что рассматриваемая линейная комбинация является следствием слов из первой серии тождеств. Таким образом доказана теорема.

Теорема 2.7. Если поле K - конечно $(|K| = p^m)$, то $\operatorname{var}(T(n,K))$ задается тождествами

$$[\ldots[x_1,x_2]\ldots x_n] = 0, \tag{5}$$

где вместо x_i стоят элементы вида $z_i^{p^m} - z_i$ или $[x_i, y_i]$.

2. Если поле K - произвольное, то для алгебр Ли над K можно доказать аналог теоремы I.I, следуя приведенной там схеме доказательства. При этом подчеркнем, что соответствующие свойства треугольного произведения представлений алгебр Ли (см. / 2 /) и операций $\times$ и $\longrightarrow$ переносятся на рассматриваемый случай без изменений.

Таким образом справедлива теорема.

Теорема 2.8. Если K - поле, то

$$\operatorname{var}(K^n, T(n,K)) = \begin{cases} \mathfrak{G}^n \times \mathfrak{A} & \text{, если } |K| = \infty \\ \mathfrak{G}^n \times \mathfrak{A}_p & \text{, если } |K| < \infty, \end{cases}$$

где $\mathfrak{G}^n$ - многообразие n -стабильных пар над K.

Пусть теперь поле K -бесконечно. Согласно теореме Биркгофа / 5 /, $\overline{\mathfrak{G}^n} = \mathfrak{N}_{n-1}$ - многообразие $n-1$ -нильпотентных алгебр Ли. Поэтому, учитывая теорему 2.8 получаем:

$$\operatorname{var}(T(n,K)) = \overline{\operatorname{var}(K^n, T(n,K))} = \overline{\mathfrak{G}^n \times \mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{G}^n}\mathfrak{A} = \mathfrak{N}_{n-1}\mathfrak{A}.$$

Тем самым доказана теорема.

Теорема 2.9. Если поле K -бесконечно, то $\operatorname{var}(T(n,K))$ задается тождеством

$$[\ldots[x_1,x_2]\ldots[x_{2n-1},x_{2n}]] = 0 \tag{6}$$

3. Рассмотрим теперь вопрос о существовании триангулируемых представлений абстрактных алгебр Ли.

Имеет место теорема (ср. с теоремой I.II).

Теорема 2.10. Конечномерная алгебра Ли L над алгебраически замкнутым полем допускает точное конечномерное триангулируемое представление с n -стабильно действующим коммутантом, тогда и только тогда, когда она принадлежит многообразию $var(T(n,K))$, т.е. удовлетворяет тождествам (6) из теоремы 2.9.

Доказательство. Необходимость сформулированных условий очевидна. Переходим к доказательству достаточности. Так как алгебра $L \in var(T(n,K))$, то коммутант $D=[L,L]$ является нильпотентным идеалом в L. Пусть $D^c \neq 0$ и $D^{c+1}=0$, т.е. в D имеется нижний центральный ряд

$$D = D^1 \supset D^2 \supset \ldots \supset D^c \supset D^{c+1} = 0,$$

обрывающийся на $c+1$ шаге. Через этот ряд проводим упорядоченный базис, который продолжается до базиса алгебры L с сохранением порядка. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - построенный таким образом базис. Далее, для всякого набора целых неотрицательных чисел $m_1, \ldots, m_n$ положим $x^M = \prod\limits_{i=1} e_i^{m_i} \in U(L)$ где множители e_i берутся в порядке заданном в базисе. По теореме $П-Б-В$ такие стандартные одночлены образуют базис в $U(L)$. Теперь введем понятие веса для элементов из $U(L)$. Если $e_i \in D^s \setminus D^{s+1}$, то весом $s(e_i)$ элемента e_i считаем число s. Вес элемента $e_k \in L \setminus D$ считаем равным 0. Вес стандартного одночлена x^M есть $\sum\limits_{i=1} m_i s_i$, где s_i - вес e_i. Вес любого элемента из $U(L)$ - минимум весов стандартных одночленов в линейную комбинацию которых он раскладывается (ср. также с предложением I.6).

Обозначим через W -вербальный идеал в $U(L)$ соответствующий слову $[x_1,x_2]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}]$ Ясно, что веса элементов идеала W больше, либо равны n. Отсюда следует, что $W \cap L = 0$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится также другой базис в $U(L)$ (см. / 4 /). Напомним его построение. Известно, что если L - конечномерная алгебра над полем характеристики $p \neq 0$, то для любого элемента $a \in L$ существует такой p - многочлен $m_a(d)$, что $m_a(a)$ принадлежит центру Z алгебры $U(L)$. Если теперь $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - построенный выше базис L и $m_i(d)$ - p - многочлен, для которого $m_i(e_i) = e_i \in Z$ причем $\deg(m_i(d)) = p^{m_i}$, то $e_i = e^{p^{m_i}} + w$, где $w \in U^{p^{m_i}-1}$. Тогда в силу леммы 5.4 из / 4 / элементы

$$z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_r^{n_r} e_1^{t_1} e_2^{t_2} \dots e_s^{t_s}, \quad n_i \geq 0, 0 \leq t_i < p^{m_i} \qquad (7)$$

образуют базис в $U(L)$. Отсюда следует, что идеал B в $U(L)$, порожденный элементами $z_1, \dots, z_r$, имеет с L нулевое пересечение.

Покажем теперь, что $(B+W) \cap L = 0$. Действительно, пусть ненулевой элемент $l \in L$ представим в виде: $l = b + w$, $b \in B$, $w \in W$. Запишем элемент b в виде:

$$b = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i + \sum_{j \in J} \beta_j b_j,$$

где b_i, b_j - элементы из базиса (7), в записи которых участвует, по крайней мере, один из элементов z_i и $s(b_i) \geq n$ для $\forall i \in I$, $s(b_j) < n$, для $\forall j \in J$. Тогда $l - \sum_j \beta_j b_j = \sum_i \alpha_i b_i + w$

Но вес правой части последнего равенства $\geq n$, а левой части $< n$. Значит $\sum_i \alpha_i b_i + w = 0$, т.е. $l = \sum_j \beta_j b_j \in B$ (противоречие).

Так как $(B+W) \cap L = 0$, то имеется каноническое вложение в ассоциативную алгебру $U/B+W$. Так как по теореме Ивасава U/B - конечномерная алгебра, то регулярное представление $(U/B+W, L)$ определяет точное конечномерное представление с n-стабильно действующим коммутантом $[Z, L]$. Далее, рассуждениями аналогичными теореме I.II доказывается триангулируемость алгебры L в этом представлении. Теорема I.10 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. Плоткин Б.И., Вовси С.М. Многообразия представлений групп. - Рига: Зинатне, 1983.

2. Липянский Р.С. Полугруппа многообразий лиевских пар.- В кн.: Теория множеств и топология.-Ижевск,1977,с.44-54.

3. Липянский Р.С. О тождествах многообразия порожденного треугольными матрицами. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. - Рига, 1979, с. 147 - 149.

4. Джекобсон Н. Алгебры Ли. - М.: Мир, 1964.

5. Birkhoff G. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices - Ann.Math.,1937 , p 433-454 ;

Алгебра и дискретная математика, Рига, 1984

УДК 590.4

Г.В.Пивоварова

РКИИ ГА, МАИ

РЕШЕТОЧНЫЕ ПАРЫ

Постановка задачи

Будем рассматривать представление (A,Γ), где A - множество или линейное пространство, а Γ есть множество, или полугруппа, или группа, или ассоциативная алгебра или алгебра Ли, действующие на A. Возможно также, что (A,Γ) - групповая пара.

Во всех этих случаях имеем следующие решетки: $S_1 = S(A)$ - решетка всех подмножеств или подпространств в A и $S_2 = S(\Gamma)$ - решетка подмножеств в Γ или подполугрупп в Γ и т.д.

С другой стороны, можно рассматривать решетку $S(A,\Gamma)$ подпар пары (A,Γ). Элементы этой решетки имеют вид (B,Σ), где $B \in S_1$, $\Sigma \in S_2$ и B инвариантно относительно действия Σ. Если B - произвольный элемент в S'_1, а $\Sigma \in S_2$, то всегда определено Σ - замыкание B до инвариантного относительно Σ элемента в S_1.

Наша основная цель - изучение при тех или иных предположениях решетки подпар $S(A,\Gamma)$. При этом целесообразно стать на некоторую общую точку зрения и рассматривать пары (S'_1, S_2), составленные из двух решеток S_1 и S_2, причем каждый объект решетки S'_2 действует в решетке S'_1 в качестве оператора замыкания.

Рассмотрим соответствующую аксиоматику и приведем приложения.

I.

Пусть даны две решетки S_1 и S_2. Определим действие решетки S_2 на S_1, т.е. каждой паре элементов (a, b), где $a \in S_1, b \in S_2$ сопоставим определенный элемент $ab \in S_1$ и при этом потребуем выполнение следующих условий.

I. $a \subset ab$

2. $(ab)b = ab$

3. $(a_1 \cup a_2)b = a_1 b \cup a_2 b$

Эти три условия определяют действие элементов S_2 на S_1 в качестве операторов замыкания.

Заметим при этом, что аксиома (I) может быть записана в виде тождества

$$a \cap ab = a.$$

Из аксиом I-3 сразу следует

Предложение I. Если $a \subset a_1$, то $ab \subset ab_1$.

В самом деле, т.к. $a \subset a_1$, то имеем $a_1 = a_1 \cup a$ и по аксиоме (3) $(a_1 \cup a)b = ab \cup a_1 b = a_1 b$ т.е. $ab \subset a_1 b$.

Будем рассматривать еще некоторые другие условия.

4. Если $b_1 \subset b_2$, то $ab_1 \subset ab_2$.

Аксиома (4) равносильна следующему условию:

$$(ab_1)b_2 \subset a(b_1 \cup b_2).$$

Действительно, если $(ab_1)b_2 \subset a(b_1 \cup b_2)$, то, записав V для $b_1 \subset b_2$ равенство $b_2 = b_1 \cup b_2$, получим:

$$ab_1 \subset (ab_1)b_2 \subset a(b_1 \cup b_2) = ab_2.$$

Пусть теперь наоборот, дано, что $b_1 \subset b_2 \to ab_1 \subset ab_2$. Тогда $b_1 \subset b_1 \cup b_2$ и значит, $ab_1 \subset a(b_1 \cup b_2)$. Так как $b_2 \subset b_1 \cup b_2$, то для $ab_1 = ab_1$ применяя $b_2 \subset b_1 \cup b_2$, получим $(ab_1)b_2 \subset (ab_1)(b_1 \cup b_2)$. Но по предложению I, применяя к $ab_1 \subset a(b_1 \cup b_2)$ $b_1 \cup b_2$, получим

$$(ab_1)(b_1 \cup b_2) \subset (a(b_1 \cup b_2))(b_1 \cup b_2) = a(b_1 \cup b_2).$$

Из чего окончательно следует

$$(ab_1)b_2 \subset a(b_1 \cup b_2).$$

$(ab_1)b_2 = ab_1b_2,\ (ab_1b_2)b_1b_2$ и т.д.

6. Множество таких элементов обладает точной верхней гранью, совпадающей с $a(b_1 \cup b_2)$.

Нетрудно видеть, что аксиома 5 есть следствие аксиомы 6.

7. $(ab_1)b_2 = a(b_1 \cup b_2)$.

Это более сильная аксиома, чем 5 и 6 и выполняется не всегда для рассмотренных выше представлений, но справедлива для случая, когда, например, Γ - абелева группа. Мы уже отметили, что аксиомы I-4 определяют многообразие пар (S'_1, S_2). Аксиомы I-5 определяют квазимногообразие. Для указанных выше пар выполняется также набор аксиом I-4,6.

Понятно также, что набор аксиом I-4, 7 задает снова многообразие.

Если существуют минимальные элементы o в S_1 и e в S_2, то для $\forall(a \in S_1)$ $ae = a$ и $0 \cdot b = 0$ для $\forall(b \in S'_2)$.

Отметим, что для пары (S_1, S_2) с набором аксиом I-4 справедливо

Предложение 4. $(ab_1)(b_1 \cup b_2) = a(b_1 \cup b_2)$.

Доказательство. Так как $b_1 \subset b_1 \cup b_2$, то по аксиоме 4 имеем: $ab_1 \subset a(b_1 \cup b_2)$ и, применив к этим множествам $b_1 \cup b_2$, из предложения I получим:

$$ab_1(b_1 \cup b_2) \subset (a(b_1 \cup b_2))(b_1 \cup b_2) = a(b_1 \cup b_2)$$

С другой стороны, $a \subset ab_1$ и опять по предложению I имеем:

$a(b_1 \cup b_2) \subset (ab_1)(b_1 \cup b_2)$ следовательно, получим нужное равенство.

Пару (S'_1, S'_2) с введенными для нее аксиомами I-5 мы будем называть решеточной рарой.

Пусть теперь имеется произвольная решетка S и на ней определены операторы замыкания, т.е. $\varphi : S \to S$ и при этом для $\forall(a \in S)$

1) $a < a\varphi$,

2) $(a\varphi)\varphi = a\varphi$,

3) $(a_1 \cup a_2)\varphi = a_1\varphi \cup a_2\varphi$.

Множество всех операторов замыкания на S обозначим $\Pi(S)$.

На множестве $\Pi(S)$ устанавливается отношение порядка: $\varphi_1 \subset \varphi_2$, если для $\forall (a \in S)$ $a\varphi_1 \subset a\varphi_2$.

Теперь можно ввести следующую операцию сложения на $\Pi(S)$: $\varphi_1 + \varphi_2$ есть точная верхняя грань операторов φ_1 и φ_2, т.е. для $\forall a$:

I) $a\varphi_1 \subset a(\varphi_1 + \varphi_2)$,
$a\varphi_2 \subset a(\varphi_1 + \varphi_2)$;

2) если $\varphi_1, \varphi_2 \in \psi$, то $\varphi_1 + \varphi_2 \subset \psi$.

Вопрос существования точной верхней грани φ_1 и φ_2 в случае произвольной решетки S проблематичен, но если S - полная решетка, т.е. в ней определено объединение и пересечение любого числа элементов (т.е. в ней существует точная верхняя и точная нижняя грань ее элементов), то можно показать существование точной верхней грани для φ_1 и φ_2 в $\Pi(S)$.

Для этого будем считать, что $\varphi_1 + \varphi_2$ действует следующим образом $a(\varphi_1 + \varphi_2) = \bigcap a_\lambda$, где $a_\lambda \supset a$ и a_λ φ_1, φ_2 - замкнуты, т.е. $a_\lambda\varphi_1 = a_\lambda$, $a_\lambda\varphi_2 = a_\lambda$.

Теперь проверим следующие два условия:

I. Определенный таким образом оператор $\varphi_1 + \varphi_2$ есть оператор замыкания.

2. $\varphi_1 + \varphi_2$ есть точная верхняя грань φ_1 и φ_2

Оператор $\varphi_1 + \varphi_2$ есть оператор замыкания, если

I) $a(\varphi_1 + \varphi_2) \supset a$;

2) $(a(\varphi_1 + \varphi_2))(\varphi_1 + \varphi_2) = a(\varphi_1 + \varphi_2)$;

3) $(a_1 \cup a_2)(\varphi_1 + \varphi_2) = (a_1(\varphi_1 + \varphi_2)) \cup (a_2(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Первое условие выполнено, т.к. $\bigcap a_\lambda$ содержит a, 2-ое и 3-е условия также достаточно очевидны. Чтобы $\varphi_1 + \varphi_2$ был точной верхней гранью φ_1 и φ_2 убедимся, что

I) $\varphi_i \subset \varphi_1 + \varphi_2$, $i = 1,2$;

2) $\varphi_i \subset \psi \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \subset \psi$, $i = 1,2$.

Для $\forall(a \in S)\, a(\varphi_1+\varphi_2)=\bigcap a_\alpha$, где $a_\alpha \supset a$ и $a_\alpha \varphi_i = a_\alpha$, т.е. $a_\alpha \supset a\varphi_i$ при $\forall \alpha$, значит $\bigcap a_\alpha \supset a\varphi_i$, т.е. $a(\varphi_1+\varphi_2) \supset a\varphi_i\, (i=1,2)$.

Из 2-го условия $\varphi_i \subset \psi$ имеем, что для $\forall a\; a\varphi_i \subset a\psi$. Это значит, что $a\psi$ φ_i - замкнуто. Но $a(\varphi_i+\varphi_2)=\bigcap a_\alpha$, где $a_\alpha \varphi_i = a_\alpha$ и $a_\alpha \supset a$. Множество $a\psi \supset a$ и φ_i - замкнуто. Следовательно, $a\psi \supset \bigcap a_\alpha$, т.е. $\varphi_1+\varphi_2 \subset \psi$.

Таким образом, множество $\mathcal{T}(S)$ стало полурешеткой.

Если теперь вернуться к решеточной паре (S_1, S_2), то нетрудно заменить что элементы S_2 действуют в S_1 аналогично операторам замыкания на S_1. Возьмем полурешетку $\mathcal{T}(S_1)$ и зададим отображение $\mu: S_2 \to \mathcal{T}(S_1)$ по такому правилу:

$b^\mu = \varphi_b$, где для $\forall(a \in S_1)\;\; a\cdot\varphi_b = ab$.

Можно показать, что отображение μ сохраняет операцию сложения в S_2 т.е. μ является гомоморфизмом полурешеток $\mathcal{T}(S_1)$ и S_2 по сложению. Проверим, что $(b_1 \cup b_2)^\mu = b_1^\mu \cup b_2^\mu$, т.е. $a(b_1 \cup b_2)^\mu = a(b_1^\mu \cup b_2^\mu)$. По определению μ $a(b_1 \cup b_2)^\mu = a(b_1 \cup b_2)$. По определению суммы операторов $a(b_1^\mu \cup b_2^\mu) = \bigcap a_\alpha$, где $a_\alpha \supset a$ и $a_\alpha b_i = a_\alpha$, $i=1,2$. Так $b_i^\mu \subset (b_1 \cup b_2)^\mu$, то $a(b_1 \cup b_2)^\mu = a(b_1 \cup b_2) \supset a(b_1^\mu \cup b_2^\mu)$.

Надо показать теперь, что $a(b_1 \cup b_2) \subset \bigcap a_\alpha$, где a_α обладают указанными выше свойствами. Но $a \subset a_\alpha$. Так как a_α $b_1 b_2$- замкнут, то $a(b_1 \cup b_2) \subset a_\alpha$ при любом α. Значит $a(b_1 \cup b_2) \subset \bigcap a_\alpha$.

Отсюда следует также, что μ сохраняет монотонность.

Можно было бы ввести в $\mathcal{T}(S_1)$ операцию пересечения операторов замыкания, приняв за $\varphi_1 \cap \varphi_2$ их точную нижнюю грань, и сделать $\mathcal{T}(S_1)$ решеткой. Но при этом μ не сохранило бы операцию пересечения т.е. μ не стало бы гомоморфизмом решеток S_2 и $\mathcal{T}(S_1)$. Это видно из следующего примера.

Пусть дана пара $(A, \mathcal{A}ut\, A)$, где A - двумерное векторное пространство. Возьмем $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathcal{A}ut\, A$, причем

$$\Sigma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0 \right\} \quad \text{и} \quad \Sigma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \beta \neq 0 \right\}.$$

Тогда $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Но $\langle \Sigma_1 \rangle = \langle \Sigma_2 \rangle$ - линейные оболочки Σ_1 и Σ_2 - есть множество всех диагональных матриц. Тогда, поскольку $B \circ \Sigma = B \circ \langle \Sigma \rangle$, то Σ_1 и Σ_2 действуют одинаково как операторы, но их пересечение есть единичный оператор, т.е.

$$(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)^\mu = e^\mu \neq \Sigma_1^\mu \cap \Sigma_2^\mu = \Sigma_1^\mu.$$

Таким образом, каждой решеточной паре (S_1, S_2) отвечает гомоморфизм полурешеток $\mu: S_2 \to \mathcal{T}(S_1)$. Но верно и обратное, а именно, если имеются две решетки S_1 и S_2 и существует гомоморфизм полурешеток $\mu: S_2 \to \mathcal{T}(S_1)$, то ему отвечает решеточная пара (S_1, S_2), где действие определяется так: для (a, b) где $a \in S_1$, $b \in S_2$, $ab = ab^\mu$.

При этом выполнение аксиом I-3 сразу следует из определения оператора замыкания, аксиома 4 следует из того, что гомоморфизм μ сохраняет монотонность, а аксиома 5 верна потому, что μ сохраняет операцию, т.е.

$$(b_1 \cup b_2)^\mu = b_1^\mu + b_2^\mu.$$

Пусть теперь имеем две решетки S_1 и S_2 и определено действие S_2 на S_1, подчиненное аксиомам I-5. Возьмем множество S пар (a, b), где $b \in S_2$, $a \in S_1(b)$.

На множестве S введем следующие две операции:

I) $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = (a_1 \cap a_2, b_1 \cap b_2)$;

2) $(a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) = ((a_1 \cup a_2)(b_1 \cup b_2), b_1 \cup b_2)$.

Предложение 5. Множество S с операциями I) и 2) есть решетка.

Доказательство. Проверим сперва, что $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = (a_1 \cap a_2, b_1 \cap b_2) \in S$. Нам нужно показать, что $a_1 \cap a_2$ будет $b_1 \cap b_2$ - замкнуто. Но множество a_1 $b_1 \cap b_2$ - замкнуто и a_2 $b_1 \cap b_2$ - замкнуто. Тогда по предложению 3 следует, что $a_1 \cap a_2$ $b_1 \cap b_2$ - замкнуто.

Теперь будем последовательно проверять выполнение аксиом решетки.

L_1 идемпотентность: $X\cup X=X$ и $X\cap X=X$.

L_2 коммутативность: $X\cap Y=Y\cap X$ и $X\cup Y=Y\cup X$.

L_3 ассоциативность:

$$X\cap(Y\cap Z)=(X\cap Y)\cap Z$$
$$X\cup(Y\cup Z)=(X\cup Y)\cup Z \,.$$

L_4 поглощение:

$$X\cap(X\cup Y)=X \quad \text{и} \quad X\cup(X\cap Y)=X \,.$$

Проверяем L_1 .

$(a_1,b_1)\cup(a_1,b_1)=((a_1\cup a_1)(b_1\cup b_1),b_1\cup b_1)=(a_1,b_1,b_1)=(a_1,b_1)$, т.к. a_1 b_1 - замкнуто. Для пересечения выполнение этого свойства очевидно.

L_2. $(a_1,b_1)\cup(a_2,b_2)=((a_1\cup a_2)(b_1\cup b_2),b_1\cup b_1)=((a_2\cup a_1)(b_2\cup b_1,b_2\cup b_1)=$
$=(a_2,b_2)\cup(a_1,b_1)$ Для пересечения это свойство очевидно.

L_3. $(a_1,b_1)\cap((a_2,b_2)\cap(a_3,b_3))=(a_1\cap(a_2\cap a_3),b_1\cap(b_2\cap b_3))=$
$=((a_1\cap a_2)\cap a_3,(b_1\cap b_2)\cap b_3)=((a_1,b_1)\cap(a_2,b_2))\cap(a_3,b_3)$.

Рассмотрим L_3 по объединению. Левая часть:

$(a_1,b_1)\cup((a_2,b_2)\cup(a_3,b_3))=(a_1,b_1)\cup((a_2\cup a_3)(b_2\cup b_3),b_2\cup b_3)=$
$=((a_1\cup(a_2\cup a_3)(b_2\cup b_3))(b_1\cup(b_2\cup b_3)),b_1\cup(b_2\cup b_3))=$
$=(a_1(b_1\cup b_2\cup b_3)\cup(a_2(b_2\cup b_3)(b_1\cup(b_2\cup b_3))\cup$
$\cup(a_3(b_2\cup b_3)(b_1\cup b_2\cup b_3),b_1\cup b_2\cup b_3)=$
$=(a_1(b_1\cup b_2\cup b_3)\cup a_2(b_1\cup b_2\cup b_3)\cup a_3(b_1\cup b_2\cup b_3),$
$b_1\cup b_2\cup b_3)$.

Правая часть:

$((a_1,b_1)\cup(a_2,b_2))\cup(a_3,b_3)=((a_1\cup a_2)(b_1\cup b_2),b_1\cup b_2)\cup(a_3,b_3)=$
$=(((a_1\cup a_2)(b_1\cup b_2)\cup a_3)((b_1\cup b_2)\cup b_3),(b_1\cup b_2)\cup b_3)=$
$=((a_1(b_1\cup b_2)\cup a_2(b_1\cup b_2)\cup a_3)(b_1\cup b_2\cup b_3),b_1\cup b_2\cup b_3)=$
$=(a_1(b_1\cup b_2))(b_1\cup b_2\cup b_3)\cup(a_2(b_1\cup b_2))(b_1\cup b_2\cup b_3)\cup a_3(b_1\cup b_2\cup b_3),b_1\cup b_2\cup b_3)=$
$=(a_1(b_1\cup b_2\cup b_3)\cup a_2(b_1\cup b_2\cup b_3)\cup a_3(b_1\cup b_2\cup b_2),b_1\cup b_2\cup b_3)$.

т.е. L_3 по объединению выполнено.

Последние переходы в двух предыдущих равенствах возможны на основании предложения 4.

L_4 - аксиома поглощения I.

$$(a_1,b_1)\cap((a_1,b_1)\cup(a_2,b_2))=((a_1\cup a_2)(b_1\cup b_2),b_1\cup b_2)\cap(a_1,b_1)=$$

$$=(a_1(b_1\cup b_2)\cup a_2(b_1\cup b_2)\cap(a_1,b_1)=$$

$$=((a_1(b_1\cup b_2)\cup a_2(b_1\cup b_2))\cap a_1,(b_1\cup b_2)\cap b_1).$$

Так как $a_1\subset a_1(b_1\cup b_2)$, то $a_1(b_1\cup b_2)=a_1\cup a_1(b_1\cup b_2)$. Тогда $a_1(b_1\cup b_2)\cup a_2(b_1\cup b_2)=(a_1\cup a_1(b_1\cup b_2))\cup a_2(b_1\cup b_2)=$

$=a_1\cup(a_1(b_1\cup b_2)\cup a_2(b_1\cup b_2))=a_1\cup a$, где $a=a_1(b_1\cup b_2)\cup a_2(b_1\cup b_2)$. Таким образом, $((a_1\cup a)\cap a_1,b_1)=(a_1,b_1)$, где $(a_1\cup a)\cap a_1=a_1$

по аксиоме поглощения для S_1.

Аксиома поглощения 2.

$$(a_1,b_1)\cup((a_1,b_1)\cap(a_2,b_2))=(a_1,b_1)\cup((a_1\cap a_2),b_1\cap b_2)=$$

$$=((a_1\cup(a_1\cup a_2))(b_1\cup(b_1\cap b_2)),b_1\cup(b_1\cap b_2))=$$

$$=(a_1b_1,b_1)=(a_1,b_1).$$

Замечание. Соответствие $\varphi:(a,b)\to b$ есть эпиморфизм решетки S на решетку S_2, т.к. $(a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)\to b_1\cap b_2$, где b_1 - образ (a_1,b_1) и b_2 - образ (a_2,b_2).

$(a_1,b_1)\cup(a_2,b_2)\to b_1\cup b_2$.

В самом деле:

$$(a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)=(a_1\cap a_2,b_1\cap b_2)\to b_1\cap b_2.$$

$$(a_1,b_1)\cup(a_2,b_2)=((a_1\cup a_2)(b_1\cup b_2),b_1\cup b_2)\to b_1\cup b_2.$$

Отсюда сразу следует:

Предложение 6. Для того, чтобы решетка S была модулярна (дистрибутивна) необходимо, чтобы модулярна (дистрибутивна) была решетка S_2.

В дальнейшем усилим условие 4 на действие S_2 в S_1 и заменим его условием:

7. $(ab_1)b_2 = a(b_1 \cup b_2)$.

Следствие аксиомы (7).

Если a b - замкнут, то $a(b \cup b_1) = ab_1$.

П.

Будем теперь рассматривать произвольную пару (A,Γ) и в качестве решеточной пары (S_1, S_2) берем $S_1 = S(A)$, $S_2 = S(\Gamma)$. и тогда решетка S есть $S'(A,\Gamma)$.

Теорема I. Если в S_1 существует хотя бы один элемент a, который не инвариантен относительно Γ, то $S = S(A,\Gamma)$ не модулярна.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что S модулярна. Тогда сразу следует модулярность решеток S_1 и S_2. В силу модулярности S должно быть для любых трех пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) и (a_3, b_3) таких, что $(a_1, b_1) \subset (a_3, b_3)$ выполнено равенство

$$((a_1,b_1) \cup (a_2,b_2)) \cap (a_3,b_3) = (a_1,b_1) \cup ((a_2,b_2) \cap (a_3,b_3)).$$

Для удобства упростим это выражение, преобразовав левую и правую части с учетом модулярности S_1 и S_2.

Левая часть: $((a_1,b_1) \cup (a_2,b_2)) \cap (a_3,b_3) = ((a_1 \cup a_2) b_1 b_2, b_1 \cup b_2) \cap (a_3,b_3) = ((a_1 b_2 \cup a_2 b_1) \cap a_3, (b_1 \cup b_2) \cap b_3)$

Правая часть: $(a_1,b_1) \cup ((a_2,b_2) \cap (a_3,b_3)) = (a_1,b_1) \cup (a_2 \cap a_3, b_2 \cap b_3) =$

$$= ((a_1 \cup (a_2 \cap a_3))(b_1 \cup (b_2 \cap b_3)), b_1 \cup (b_2 \cap b_3)) =$$

$$= ((a_1 (b_2 \cap b_3)) \cup (a_2 \cap a_3) b_1), b_1 \cup (b_2 \cap b_3)).$$

Так как S_2 - модулярна, то $(b_1 \cup b_2) \cap b_3 = b_1 \cup (b_2 \cap b_3)$ для $b_1 \subset b_3$. Поэтому вместо исходного равенства достаточно рассмотреть равенство

$$\circledast\ (a_1 b_2 \cup a_2 b_1) \cap a_3 = (a_1 (b_2 \cap b_3)) \cup ((a_2 \cap a_3) b_1)$$

Выберем три такие пары (a, e), $(0, \Gamma)$, (A, e). Тогда левая часть в равенстве $\circledast$ равна $a \cdot \Gamma$, а правая часть равна a. Так как a не инвариантен, то $a\Gamma \neq a$, т.е. условие модулярности для S не выполнено (тем более нет дистрибутивности).

Лемма. $S \simeq S_1 \times S_2$ тогда и только тогда, когда выполняется для $\forall(a\in S_1)$ и $\forall(b\in S_2)$ равенство $ab=a$.

Доказательство. Достаточность понятна. Необходимость следует из того, что $(a,\Gamma)\in S_1\times S_2$ для $\forall(a\in S_1)$.

Теорема 2. Для того, чтобы $S=S(A,\Gamma)$ была модулярна, необходимо и достаточно, чтобы $S\simeq S_1\times S_2$ и S_1 и S_2 были модулярны.

Доказательство.

Необходимость. Пусть S – модулярна. Это значит, что для $\forall(a\in S_1)$ $a\Gamma=a$. Но тогда $S\simeq S_1\times S_2$. Так как $S_1\simeq S_1\times e$, а $S_2\simeq 0\times S_2$, то из модулярности S следует модулярность S_1 и S_2.

Достаточность. Пусть S_1 и S_2 – модулярны и $S\simeq S_1\times S_2$. В силу модулярности S_1 и S_2 можно пользоваться сразу упрощенным условием модулярности. Проверим его для произвольных пар (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), где $a_1\subseteq a_3$, $b_1\subseteq b_3$. Т.к. $S\simeq S_1\times S_2$, то в S лежит подмножество (a,Γ) для $\forall(a\in S_1)$, т.е. любой элемент $a\in S_1$ замкнут относительно любого элемента из S_2. Поэтому упрощенное модулярное равенство примет вид

$$(a_1\cup a_2)\cap a_3 = a_1\cup(a_2\cap a_3),$$

справедливость которого сразу следует из модулярности решетки S_1.

Замечание. Теорема 2 дословно формулируется и доказывается для свойства дистрибутивности решетки $S=S(A,\Gamma)$. Если в качестве исходной пары рассматривается линейная пара (A,Γ) т.е. A – линейное пространство, Γ – группа, которая на A действует линейно, то из теорем I и 2 сразу получаем

Следствие I. Если (A,Γ) – линейная пара, то для того, чтобы $S(A,\Gamma)$ была модулярна, необходимо и достаточно, чтобы

I) $S(A)$, $S(\Gamma)$ были модулярны,

2) каждое подпространство в A само было инвариантно относительно Γ.

Таким образом мы свойство действия для линейной пары (A,Γ) смогли выразить через свойство модулярности решетки $S = S(A,\Gamma)$. Заметим, что наличие минимального элемента в S_1 в случае модулярности или дистрибутивности решетки S существенно влияет на свойства действия Γ в A. Действительно, в случае пары (A,Γ) где A - множество, Γ - группа, дистрибутивность или модулярность решетки S влечет по теореме I тривиальность действия Γ в A.

Но можно ввести ограниченную дистрибутивность или ограниченную модулярность в S. Тогда возможности для действия Γ в A несколько расширятся.

Для решеточной пары (S_1, S_2) будем говорить, что ее решетка ограниченно дистрибутивна, если она дистрибутивна для всех пар, кроме пар вида (o, b), где o - минимальный элемент в S_1, а b - любой элемент в S_2.

Теорема 3. Если для пары (A,Γ), где A - множество, Γ - группа, S - ограниченно дистрибутивна, то Γ действует в A транзитивно или тривиально.

Доказательство. Предположим, что действие Γ в A не транзитивно и разобьем A на непересекающиеся орбиты. Пусть для простоты $A = H_1 \cup H_2$, где хотя бы одна из орбит содержит не менее двух элементов. Пусть, например, $H_2 = \{h_1, h_2\}$. Возьмем теперь следующие три пары решетки S:

$$(a_1, b_1) = (H_1 \cup h_1, e);$$

$$(a_2, b_2) = (H_1, \Gamma);$$

$$(a_3, b_3) = (H_1 \cup h_2, e).$$

Проверим для них выполнение условия дистрибутивности.

$$((a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)) \cap (a_3, b_3) = ((a_1, b_1) \cap (a_3, b_3)) \cup ((a_2, b_2) \cap (a_3, b_3)) \quad (I).$$

В силу дистрибутивности S_2 можно упростить выражение (I). Для этого преобразуем отдельно левую и правую части равенства (I). Левая часть будет выглядеть также как для преобразованного модулярного равенства, т.е. иметь вид

$$(a_1 b_2 \cup a_2 b_1) \cap a_3.$$

А правую часть преобразуем следующим образом:

Правая часть:

$$(a_1\cap a_3,\, b_1\cap b_3)\cup(a_2\cap a_3,\, b_2\cap b_3)=$$

$$=(((a_1\cap a_3)\cup(a_2\cap a_3))((b_1\cap b_3)\cup(b_2\cap b_3)),(b_1\cap b_3)\cup(b_2\cap b_3))=$$

$$=(((a_1\cap a_3)(b_2\cap b_3))\cup((a_2\cap a_3)(b_1\cap b_3)),(b_1\cup b_2)\cap b_3)$$

$$a_1 b_2=(H_1\cup h_1)\Gamma=A \Longrightarrow a_1 b_2\cup a_2 b_1=A.$$

Левая часть:

$$(a_1 b_2\cup a_2 b_1)\cap a_3=A\cap(H_1\cup h_2)=H_1\cup h_2.$$

Правая часть:

$$a_1\cap a_3=H_1,\quad a_2\cap a_3=H_1,\quad b_1\cap b_3=b_2\cap b_3=e.$$

Следовательно, правая часть равна H_1.

Так как $H_1\cup h_2\neq H_1$, то условие дистрибутивности не выполнено. Поэтому, либо Γ действует в A транзитивно, либо каждая орбита содержит не более одного элемента, т.е. Γ - действует в A тривиально.

Дадим теперь определение ограниченной модулярности. Решетка S решеточной пары (S_1, S_2) называется ограниченно модулярной, если S модулярна для всех пар, кроме пар вида $(0, b)$, где 0 - минимальный элемент в S_1, $b\in S_2$.

Теорема 4. Если в паре (A,Γ), где A - множество, Γ - группа, решетка S ограниченно модулярна, то Γ действует в A транзитивно или тривиально.

Доказательство. Предположим, что Γ действует в A не транзитивно. Тогда A можно рассматривать как объединение Γ - орбит. Для простоты предположим, что $A=H_1\cup H_2$ и пусть H_2 содержит не менее двух элементов. Теперь возьмем 3 таких пары:

$$(a_1, b_1)=(H_1\cup h_1, e);\quad h_1\in H_2;$$

$$(a_2, b_2)=(H_1,\Gamma);$$

$$(a_3, b_3)=(A, e).$$

Проверим для них условие модулярности $\circledast$:

$$(a_1 b_2\cup a_2 b_1)\cap a_3=(a_1(b_2\cap b_3))\cup((a_2\cap a_3)b_1)$$

$a_1 b_2 = (H_1 \cup h_1)\Gamma = A \Rightarrow a_1 b_2 \cup a_2 b_1 = A \Rightarrow$

$(a_1 b_2 \cup a_2 b_1) \cap a_3 = A$ - такова левая часть.

$b_2 \cap b_3 = e$, $a_1(b_2 \cap b_3) = a_1 e = H_1 \cup h_1$

$a_2 \cap a_3 = H_1$, $b_1 = e$, $(a_2 \cap a_3) b_1 = H_1$

$(H_1 \cup h_1) \cup H_1 = H_1 \cup h_1$ - такова правая часть равенства ⊗, что противоречит условию модулярности решетки S. Значит, либо Γ действует в A транзитивно, либо каждая орбита содержит не более одного элемента, т.е. Γ действует в A тривиально. Отсюда получаем

Следствие 2. Пусть пара (A, Γ), где A - множество, Γ - группа, действующая на A транзитивно, имеет ограниченно дистрибутивную решетку S. Тогда каждая подгруппа в Γ действует на A либо транзитивно либо тривиально.

В самом деле, пусть b - подгруппа в Γ. Предположим, что (A, b) не транзитивна и не тривиальна. Тогда обобщенная решетка $S(a, b)$ не может быть ограниченно дистрибутивной по теореме 3. Но так как $S(a, b)$ - подрешетка в $S(A, \Gamma)$, то и S не может быть ограниченно дистрибутивной, что противоречит предположению.

Теорема 5. Если дана пара (A, Γ), где A - множество, а Γ группа, действующая на A транзитивно, то

I) S ограниченно дистрибутивна, если дистрибутивна S_2,

2) S ограниченно модулярна, если модулярна S_2.

Докажем первую часть. Выберем произвольные три пары (a_{i_1}, b_{i_1}), (a_{i_2}, b_{i_2}), (a_{i_3}, b_{i_3}), где $a_{ij} \in S_1$, $b_{ij} \in S_2$. При этом, если b_{ij} действует на A транзитивно, то a_{ij} совпадает с A. Для действующих подгрупп возможны следующие ситуации:

I) b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3} - все три действуют транзитивно,

2) b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3} - все три действуют тривиально,

3) b_{i_1} , b_{i_2} действуют транзитивно, b_{i_3} - тривиально,

4) b_{i_1} , b_{i_3} действуют транзитивно, b_{i_2} - тривиально,

5) b_{i_2} , b_{i_3} действуют транзитивно, b_{i_1} - тривиально,

6) b_{i_1} действует транзитивно, b_{i_2} , b_{i_3} - тривиально,

7) b_{i_2} действует транзитивно, b_{i_1} , b_{i_3} - тривиально,

8) b_{i_3} действует транзитивно, b_{i_1} , b_{i_2} - тривиально.

В каждом из этих случаев выполняется упрощенное дистрибутивное равенство;

$$(a_1b_2\cup a_2b_1)\cap b_3=((a_1\cap a_3)(b_2\cap b_3))\cup((a_2\cap a_3)(b_1\cap b_3)).$$

Проверим, например, для случая 3. Здесь имеем три такие пары:

$$(A, b_{i_1}), (A, b_{i_2})\cdot, (a_{i_3}, b_{i_3}).$$

В левой части для этих пар получим a_{i_3} , а в правой части объединение $a_{i_3}\cup a_{i_3}$, т.е. снова a_{i_3} .

Аналогично проверяются остальные случаи и доказывается вторая часть теоремы.

Из теорем I-5 получаем такой результат:

I. Для того, чтобы решетка $S(A,\Gamma)$ пары (A,Γ) была ограниченно модулярна необходимо и достаточно, чтобы

I) группа Γ обладала модулярной структурой подгрупп,

2) группа Γ действовала на A транзитивно и при этом каждая подгруппа в Γ действовала транзитивно или тривиально или группа Γ действовала на A тривиально.

2. Для ограниченной дистрибутивности решетки S пары (A,Γ) необходимо и достаточно, чтобы

I) группа Γ была циклической или локально циклической,

2) действие Γ было таким же, как в предыдущем случае.

3) b_{i_1}, b_{i_2} действуют транзитивно, b_{i_3} - тривиально,
4) b_{i_1}, b_{i_3} действуют транзитивно, b_{i_2} - тривиально,
5) b_{i_2}, b_{i_3} действуют транзитивно, b_{i_1} - тривиально,
6) b_{i_1} действует транзитивно, b_{i_2}, b_{i_3} - тривиально,
7) b_{i_2} действует транзитивно, b_{i_1}, b_{i_3} - тривиально,
8) b_{i_3} действует транзитивно, b_{i_1}, b_{i_2} - тривиально.

В каждом из этих случаев выполняется упрощенное дистрибутивное равенство:

$$(a_1 b_2 \cup a_2 b_1) \cap a_3 = ((a_1 \cap a_3)(b_2 \cap b_3)) \cup ((a_2 \cap a_3)(b_1 \cap b_3))$$

Проверим, например, для случая 3. Здесь имеем три такие пары:

$$(A, b_{i_1}),\ (A, b_{i_2}),\ (a_{i_3}, b_{i_3})$$

В левой части для этих пар получим a_{i_3}, а в правой части объединение $a_{i_3} \cup a_{i_3}$, т.е. снова a_{i_3}.

Аналогично проверяются остальные случаи и доказывается вторая часть теоремы.

Из теорем I-5 получаем такой результат:

I. Для того, чтобы решетка $S(A,\Gamma)$ пары (A,Γ) была ограниченно модулярна необходимо и достаточно, чтобы

I) группа Γ обладала модулярной структурой подгрупп,

2) группа Γ действовала на A транзитивно и при этом каждая подгруппа в Γ действовала транзитивно или тривиально или группа Γ действовала на A тривиально.

2. Для ограниченной дистрибутивности решетки S пары (A,Γ) необходимо и достаточно, чтобы

I) группа Γ была циклической или локально циклической,

2) действие Γ было таким же, как в предыдущем случае.

ЛИТЕРАТУРА

I. Курош А.Г. Теория групп.-М.: Наука, 1967.
2. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем.-М.:Наука, 1966.

Алгебра и дискретная математика, Рига, 1984.

УДК 512.57/579

Е.Б.Плоткин

ВНИИводполимер

МНОГОСОРТНЫЕ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫЕ ГРУППЫ

Цель настоящей заметки - привести предварительные сведения об идеалах в многосортных мультиоператорных группах. Соответствующие общие конструкции будут применяться к представлениям групп, колец, алгебр Ли, автоматам, супералгебрам Ли.

I. Многосортные мультиоператорные группы

Пусть $\mathfrak{A} = (A_i)$ - многосортная алгебра с набором операций Ω, где каждая $\omega \in \Omega$ имеет свой тип $i = (i_1, \dots, i_n; j)$. Будем считать, что каждое множество A_i является группой и в аддитивной записи выполнено условие

$$0_{i_1} \dots 0_{i_n} \omega = 0_j$$

для любой операции ω типа $(i_1, \dots, i_n; j)$.
В этом случае будем называть такую многосортную алгебру многосортной мультиоператорной группой или многосортной Ω-группой. Примерами таких многосортных групп являются представления групп, колец, алгебр Ли, линейные групповые автоматы, супералгебры Ли.

Многоосновные Ω - группы образуют категорию с морфизмами $\mu = \{\mu_i, i \in I\} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, |I| = m$, где $\mu_i : A_i \to B_i$ гомоморфизмы групп и выполнено $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\omega)^{\mu_i} = a_{i_1}^{\mu_{i_1}} \dots a_{i_n}^{\mu_{i_n}\omega}$. Обычным образом определяются Ω - подгруппы. Ядро гомоморфизма μ - это Ω - подгруппа $U = (U_1, \dots, U_m)$, где $U_i = Ker\, \mu_i$.

Зафиксируем некоторое многообразие K многосортных Ω - групп и все рассмотрения будем производить внутри этого фиксированного многообразия.

Определение. Система $U=(U_1, \ldots, U_m)$, $U_i \subset A_i$ называется идеалом Ω - группы $\mathfrak{A}=(A_i)$, если

1. U_i - нормальный делитель в группе A_i ,
2. $\forall \omega$ вида: $A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n} \to A_j$ и для $\forall a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} | a_{i_k} \in A_{i_k}$; $\forall u_{i_1}, \ldots, u_{i_n} | u_{i_k} \in U_{i_k}$ имеет место

$$(a_{i_1}+v_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (a_{i_n}+u_{i_n})\omega - a_{i_1} \ldots a_{i_n}\omega\, U_j .$$

Аналогично односортному случаю (см. [I]) показывается, что идеалы многосортных Ω - групп являются ядрами гомоморфизмов и пересечение идеалов снова дает идеал. Проверим, что идеалы складываются покомпонентно.

Лемма. Пусть $U=(U_i, i \in I)$, $V=(V_i, i \in I)$ - два идеала в $\mathfrak{A}=(A_i, i \in I)$. Тогда

$$U+V=\{U_i+V_i, i \in I\} .$$

Любой элемент из U_i+V_i имеет вид u_i+v_i , где $u_i \in U_i$, $v_i \in V_i$. Очевидно, $(U_i+V_i) \triangleleft A_i$.

Надо показать, что:

$$(u_{i_1}+v_{i_1}+a_{i_1})(u_{i_2}+v_{i_2}+a_{i_2}) \ldots (u_{i_n}+v_{i_n}+a_{i_n})\omega - a_{i_1} \ldots a_{i_n}\omega \in U_j+V_j$$

, если ω типа $(i_1, \ldots, i_n; j)$.

Имеем:

$$(u_{i_1}+v_{i_1}+a_{i_1}) \ldots (u_{i_n}+v_{i_n}+a_{i_n})\omega - (v_{i_1}+a_{i_1}) \ldots (v_{i_n}+a_{i_n})\omega \in U_j$$

$$(v_{i_1}+a_{i_1}) \ldots (v_{i_n}+a_{i_n})\omega - a_{i_1} \ldots a_{i_n}\omega \in V_j .$$

Следовательно:

$$(u_{i_1}+v_{i_1}+a_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (u_{i_n}+v_{i_n}+a_{i_n})\omega - (v_{i_1}+a_{i_1}) \ldots (v_{i_n}+a_{i_n})\omega + (v_{i_1}+a_{i_1}) \ldots (v_{i_n}+a_{i_n})\omega - a_{i_1} \ldots a_{i_n}\omega \in U_j+V_j .$$

Покажем, как выглядят идеалы в автоматах.

Лемма. Пусть $\mathfrak{A}=(A, \Gamma, B)$ - линейный групповой автомат. Тогда подавтомат $\mathfrak{A}_0=(A_0, \Gamma_0, B_0)$ является идеалом в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда

I. A_0 - инвариантное относительно Γ подпространство в A , $\Gamma_0 \triangleleft \Gamma$, $A_0 * \Gamma \subset B_0$,

2. В $(A/A_0, \Gamma, B/B_0)$ Γ_0 действует как единица. Будем применять для Γ мультипликативную запись. Пусть $a_0 \in A_0$, $\gamma_0 \in \Gamma_0$, $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$. Условие 2 из определения идеала запишется так:

$$(a+a_0)\circ(\gamma\gamma_0) - a\circ\gamma \in A_0,$$
$$(a+a_0)*(\gamma\gamma_0) - a*\gamma \in B_0.$$

Возьмем $\gamma_0 = 1$. Имеем: $a_0\circ\gamma \in A_0$, $a_0 * \gamma \in B_0$, $\forall a_0 \in A_0$, $\gamma \in \Gamma$. Рассмотрим $(A/A_0, \Gamma_0)$. Из определения идеала, при $\gamma = 1$ получаем:

$a\circ\gamma_0 + a_0\circ\gamma_0 - a \in A_0$ или $a\circ\gamma_0 - a \in A_0$.

Это и означает, что $\overline{a\circ\gamma_0} = \bar{a}\circ\gamma_0 = \bar{a}$, т.е. Γ_0 действует в A/A_0 как единица. Далее, т.к. $A_0 * \Gamma \subset B_0$, то определен автомат $(A/A_0, \Gamma, B/B_0)$. Положим $\gamma = \varepsilon$, $a_0 = 0$. Тогда $a*\gamma_0 - a*\varepsilon \in B_0$ или $\overline{a*\gamma_0} = \overline{a*\varepsilon}$, т.е. любой $\gamma_0 \in \Gamma_0$ на выходе автомата $(A/A_0, \Gamma, B/B_0)$ действует как единица.

Обратно, пусть для $\mathfrak{A} = (A_0, \Gamma_0, B_0)$ выполнено I и 2. Требуется проверить, что $\forall a \in A$, $\gamma \in \Gamma$, $a_0 \in A_0$, $\gamma_0 \in \Gamma_0$ выполнено: $(a+a_0)\circ(\gamma\gamma_0) - a\circ\gamma \in A_0$,

$$(a+a_0)*(\gamma\gamma_0) - a*\gamma \in B_0.$$

Т.к. Γ_0 действует в A/A_0 как единица, то $a\circ\gamma_0' - a \in A_0$, где γ' возьмем таким, что $\gamma\gamma_0 = \gamma_0'\gamma$. Тогда

$(a\circ\gamma_0' - a)\circ\gamma \in A_0\circ\gamma$ или $a\circ\gamma\gamma_0 - a\circ\gamma \in A_0$.

Очевидно, что $a_0\circ\gamma\gamma_0 \in A_0$. Отсюда следует, что $(a+a_0)\circ\gamma\gamma_0 - a\circ\gamma \in A_0$. Аналогично проверяется условие на $*$. Имеем $\forall a \in A$, $\gamma_0 \in \Gamma_0$:

$$(a+a_0)*(\gamma\gamma_0) - a*\gamma = (a\circ\gamma)*\gamma_0 - (a\circ\gamma)*\varepsilon + (a_0\circ\gamma)*\gamma_0 \in B_0.$$

В действительности, все условия на $*$ уже следуют из соответствующих условий на операцию $\circ$ и их можно было бы отдельно не проверять.

С этой точки зрения рассмотрим, что является идеалами супералгебр Ли. Будем рассматривать супералгебру Ли L как двусортную Ω - группу (L_1, L_0), где L_1 - векторное пространство, L_0 - алгебра Ли с системой операций $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, которые имеют следующий вид:

$\omega_1 : L_0 \times L_1 \longrightarrow L_0$, $\omega_2 : L_1 \times L_1 \longrightarrow L_0$,

$\omega_3 : L_1 \times L_0 \to L_1$. Операция ω_2 является билинейной, симметрической и обладает свойством $(xx\omega_2)x\omega_1=0$. Для ω_2 принято обозначение ρ и запись $\rho(x,y)$ вместо $xy\omega_2$. Тогда Ω - подгруппа (U,V) в (L_1,L_0) является идеалом в L тогда и только тогда, когда

I. U - инвариантное относительно L_0 подпространство в L_1 , V - идеал в L_0 ,

2. V действует как 0 в L_1/U,

3. $\rho(u,x)\in V$, $\forall u\in U$, $x\in L_1$.

Первые два условия следуют из леммы, аналогичной предыдущей, а третье - из определения операции $\omega_2 = \rho$ . .

Эти идеалы в точности соответствуют идеалам, которые возникают, если рассматривать супералгебру Ли L как Z_2 - градуированную алгебру с умножением, обладающим дополнительными свойствами.

Рассмотрим еще мономорфизмы многосортных Ω - групп. Так как мы находимся внутри заданного многообразия многосортных Ω -групп, то легко видеть, что если $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ - категорный мономорфизм Ω - групп, то все μ_i являются инъективными отображениями. Напомним определение нормального мономорфизма в категории с нулем [2].

Мономорфизм $\mu : A \to B$ называется нормальным мономорфизмом, если для любого $\gamma : D \to B$, со свойством $\mu\varphi = 0$, $\forall \varphi \in \mathrm{Ann}\,\mu$, $(\mathrm{Ann}\,\mu = \{\varphi \mid \mu\varphi = 0\})$ найдется γ' такой, что $\gamma'\mu = \gamma$.

Доказательство следующего предложения аналогично известному.

Предложение. Мономорфизм $\mu : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ в произвольном многообразии многосортных Ω - групп нормален тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}^{\mu}$ является идеалом в $\mathfrak{B}$.

2. Мультипредставления

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $A - \overline{\Omega}_1$-группа, G $-\Omega_2$- группа и, кроме того, задана система операций Ω_3 , где все $\omega \in \Omega_3$ имеют тип вида $i=(1,1,\dots,3,1)$.

Пусть выполнено еще условие $0 \cdot \ldots \cdot 0 g\omega = 0$, для любой операции $\omega \in \Omega_3$ и любого $g \in G$.

Такую двусортную Ω -группу будем называть мультипредставлением Ω_2 -группы G . Для любой операции $\omega \in \Omega_3$, каждый $g \in G$ можно рассматривать как операцию g^{ω} в A :

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n g^{\omega} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n g\omega .$$

Тогда A становится односортной $\Omega_1 \cup (G \times \Omega_3)$ -группой. Ее идеалы - это идеалы B односортной Ω_1 -группы A , для которых выполнено:

$$\forall g\omega \in G \times \Omega_3, \forall b_1, \ldots, b_n \in B, \forall a_1, \ldots, a_n \in A,$$

$$(b_1 + a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n + a_n) g\omega - a_1 \cdot \ldots \cdot a_n g\omega \in B.$$

Такие идеалы будем называть G -инвариантными идеалами в A .

Приведем характеристику идеалов мультипредставлений Ω - групп.

Предложение. (B, H) является идеалом в $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ группе (A, G) тогда и только тогда, когда

1. B является G - инвариантным идеалом в A , H является идеалом в G .
2. $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n (h + g)\omega = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n g\omega$

$$\forall a_1, \ldots, a_n \in A, \ h \in H, \ g \in G.$$

Доказательство. Пусть (B, H) -идеал в (A, G) Тогда непосредственно видно, что B - идеал в A , а H - идеал в G . Кроме того,

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n)(g + h)\omega - a_1 \cdot \ldots \cdot a_n g\omega \in B.$$

Если положить $h = 0$, то получим, что $B - G$ - инвариантный идеал в A . Условие 2 выполняется, если взять $b_i = 0$, $\forall i \in I$.

Обратно, если выполнено I,2 то имеем:

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n)(g + h)\omega - a_1 a_2 \ldots a_n g\omega =$$

$$= (a_1 + b_1) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)(g + h)\omega - a_1 \ldots a_n (g + h)\omega +$$

$$+ a_1 \ldots a_n (g + h)\omega - a_1 \ldots a_n g\omega \in B.$$

Пусть K - некоторое многообразие мультипредставлений (A, G) при фиксированных $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. K рассматриваем также как категорию двусортных Ω -групп. Определим функторы проектирования F_1 и F_2. Положим $F_1(A, G) = A$, $F_2(A, G) = G$. Таким образом, F_1 есть функтор из K в категорию K_1 Ω_1- групп, а F_2 - в категорию K_2 Ω_2 - групп. Будем теперь рассматривать мономорфизмы, нормальные относительно этих функторов. Определим это условие нормальности в общем виде относительно произвольного функтора F из категории K в категорию K'. Обозначим через $Ann_F \mu = \{\varphi \in K \mid \mu F(\varphi) = 0\}$ (здесь $\mu \in K'$).

Определение. Пусть $\mu : B \to F(\mathfrak{A})$ - мономорфизм в K'. Мономорфизм μ называется F - нормальным, если для любого $\gamma : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, такого что $F(\gamma\varphi) = 0$, $\forall \varphi \in Ann_F \mu$, существует такой морфизм $\gamma' : F(\mathfrak{B}) \to B$, что $\gamma'\mu = F(\gamma)$.

Вернемся к нашему конкретному случаю мультипредставлений.

Предложение. Мономорфизм $\mu : B \to F_1(A, G)$ F_1 - нормален тогда и только тогда, когда $B^\mu - G$ - инвариантный идеал в $F_1(A, G)$. Мономорфизм $\mu : H \to F_2(A, G)$ F_2 - нормален тогда и только тогда, когда H^μ - идеал в G.

Доказательство. Пусть $B^\mu - G$ - инвариантный идеал в $A = F_1(A, G)$. Тогда определен гомоморфизм $\Omega_1 \cup (G \times \Omega_3)$- - групп $\varphi : (A, G) \to (A/B^\mu, G)$ и $\mu F_1(\varphi) = 0$. Пусть $\gamma : (C, \Sigma) \to (A, G)$ и $F(\gamma\psi) = 0$, для любого $\psi \in Ann_F \mu$. Тогда $C^{\gamma\psi} \subset B^\mu$ (как $\Omega_1 \cup G$ - подгруппа). Т.к. μ - мономорфизм в категории Ω - групп, то μ - инъективное отображение. Следовательно, существует $\mu^{-1} : B^\mu \to B$. Положим $\gamma' = F_1(\gamma)\mu^{-1}$. Тогда, очевидно, γ' - искомый гомоморфизм $F_1(C, \Sigma) \to b$.

Обратно. Пусть μ F_1 - нормален. Возьмем $\varphi : (A, G) \to (B, H)$. Пусть $(A_\varphi, G_\varphi) = Ker\, \varphi$ и, следовательно, $A_\varphi - G$ - инвариантный идеал в A.

Положим $(A_0, G_0) \bigcap_{\psi} (A_\psi, G_\psi)$, где $\psi \in Ann_{F_1} \mu$. Тогда имеем $B^\mu \subset A_0$. Покажем, что $B^\mu = A_0$. Пусть $\gamma : (A_0, G_0) \longrightarrow (A, G)$ - тождественное вложение. Это морфизм в категории K. Тогда, по определению A_0 имеем $F_1(\gamma\psi) = 0$, $\forall \psi \in Ann_{F_1} \mu$. Следовательно, существует $\gamma' : F_1(A_0, G_0) \longrightarrow B$, такой что $\gamma' \mu = F_1(\gamma)$.

Доказательство второй части предложения проводится по той же схеме. Необходимо только заметить, что если H^μ - идеал в $G = F_2(A, G)$, то определено мультипредставление $(0, G/H^\mu)$, и оно принадлежит нашей категории как гомоморфный образ мультипредставления (A, G).

Следствие. Мономорфизм $\mu : H \longrightarrow F_2(A, G)$ F_2- нормален тогда и только тогда, когда μ нормален в категории Ω_2 - групп.

Доказательство. Это следует из того, что μ нормален в категории Ω - групп тогда и только тогда, когда образ относительно μ есть идеал.

3. Эпиморфизмы

В категории многосортных Ω -групп можно показать, что сюръективные отображения являются эпиморфизмами. Обратное верно не всегда. Приведем важный для нас пример, когда это так.

Предложение. Пусть K - категория линейных групповых автоматов над некоторым кольцом. Гомоморфизм $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) : (A, \Gamma, B) \longrightarrow (A', \Gamma', B')$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда μ_1, μ_2, μ_3 - отображения "на".

Доказательство.

Пусть μ - эпиморфизм $(A, \Gamma, B) \xrightarrow{\mu} (A', \Gamma', B')$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$

Имеет место разложение: $\mu = \bar{\mu}_3 \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2$, где $\bar{\mu}_3 = (\varepsilon_A, \varepsilon_\Gamma, \mu_3)$, $\bar{\mu}_2 = (\varepsilon_A, \mu_2, \varepsilon_B)$, $\bar{\mu}_1 = (\mu_1, \varepsilon_\Gamma, \varepsilon_B)$.

ε обозначает тождественное отображение. Из этого разложения сразу же следует, что μ_1 - эпиморфизм [2]. Тогда μ_2 - тоже эпиморфизм. Действительно, пусть

$\mu_2\varphi = \mu_2\psi$, где $\varphi : \Gamma' \to G$, $\psi : \Gamma' \to G$. Имеем гомоморфизм $(A', \Gamma', B') \xrightarrow{\bar\varphi, \bar\psi} (0, \bar G, 0)$ и $\bar\mu_2\bar\varphi = \bar\mu_2\bar\psi$. Следовательно, $\bar\varphi = \bar\psi$ и поэтому $\varphi = \psi$.

Итак, μ_2 - эпиморфизм в категории групп, но в ней эпиморфизмы являются отображениями "на". Перейдем к μ_1 и μ_3.

Пусть $A^{\mu_1} \subset A'$, $B^{\mu_3} \subset B'$, и хотя бы одно включение является строгим. Рассмотрим автомат $(A' \oplus A', \Gamma', B' \oplus B')$ Имеем канонические вложения:

$$\nu_1 : A' \to A' \oplus 0 \,,\; B' \to B' \oplus 0,$$

$$\nu_2 : A' \to 0 \oplus A' \,,\; B' \to 0 \oplus B'.$$

Этим вложениям соответствует гомоморфизм автоматов:

$$(A', \Gamma', B') \xrightarrow{\nu_1, \nu_2} (A' \oplus A', \Gamma', B' \oplus B').$$

Пусть $A_0' = \{x^{\nu_1} - x^{\nu_2}\}$, где $x \in A^{\mu_1}$, $y \in B^{\mu_3}$

$B_0' = \{y^{\nu_1} - y^{\nu_2}\}$.

Тогда A_0' является инвариантным подмодулем в A', т.к. Γ отображается на Γ'. Действительно:

$$(x^{\nu_1} - x^{\nu_2}) \circ \gamma' = x^{\nu_1} \circ \gamma' - x^{\nu_2} \circ \gamma' = (x \circ \gamma')^{\nu_1} - (x \circ \gamma')^{\nu_2} =$$

$$= (a^{\mu_1} \circ \gamma')^{\nu_1} - (a^{\mu_1} \circ \gamma')^{\nu_2} = (a \circ \gamma)^{\mu_1 \nu_1} - (a \circ \gamma)^{\mu_1 \nu_2} = x'^{\nu_1} - x'^{\nu_2}.$$

Кроме того, аналогично имеет место $A_0' * \Gamma' \subset B_0'$. Поэтому определен факторавтомат $(A' \oplus A'/A_0', \Gamma', B' \oplus B'/B_0')$ и соответствующие гомоморфизмы:

$$(A', \Gamma', B') \to (A' \oplus A'/A_0', \Gamma', B' \oplus B'/B_0').$$

По построению $\mu\bar\nu_1' = \mu\bar\nu_2'$, и т.к. μ - эпиморфизм в K, то $\bar\nu_1' = \bar\nu_2'$ и $\nu_1' = \nu_2'$. Но это противоречит выбору ν_1 и ν_2. В самом деле, если $A^{\mu_1} \subset A$, то вовьмем $a \in A' \setminus A^{\mu_1}$ и пусть $a^{\bar\nu_1} = a^{\bar\nu_2}$. Тогда: $a^{\nu_1} - a^{\nu_2} = \sum_i x_i^{\nu_1} - x_i^{\nu_2}$, $x_i \in A^{\mu_1}$ или $(a - \sum_i x_i)^{\nu_2} = (a - \sum_i x_i)^{\nu_1}$.

Отсюда $a - \sum x_i = 0$, что противоречит выбору a. Если же $A^{\mu_1} = A$, то совершенно аналогично получаем, что $B'^{\nu_1} \neq B'^{\nu_2}$. Следовательно, $\nu_1' \neq \nu_2'$, и мы получили окончательное противоречие о том, что $A^{\mu_1} \subset A'$ или $B^{\mu_3} \subset B$. -

Замечание. Подобное предложение верно и в категории K чистых автоматов. Вообще, если K' - некоторая категория, в которой эпиморфизмы являются сюръективными отображениями, то предложение верно в категории автоматов, с объектами из K в качестве входных сигналов. Однако в категории полугрупповых или кольцевых автоматов оно уже не верно.

Пример. Известно, что если G - группа, а H -ее подполугруппа, причем каждый $g \in G$ имеет вид $g = h_1 \cdot h_2^{-1}$, $h_i \in H$, то тождественное вложение $\varepsilon : H \to G$ является эпиморфизмом в категории полугрупп. Пусть P - поле. Рассмотрим вложение автоматов:

$$(PH, H, PH) \xrightarrow{\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)} (PG, G, PG).$$

Покажем, что это эпиморфизм представлений. Пусть $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $(PG, G, PG) \xrightarrow{\mu, \nu} (A, \Gamma, B)$ и пусть $\varepsilon\mu = \varepsilon\nu$. Тогда $\mu = \nu$. Действительно, если $\varepsilon\mu = \varepsilon\nu$, то $\varepsilon_2\mu_2 = \varepsilon_2\nu_2$ и, следовательно, $\mu_2 = \nu_2$. Пусть $x \in PG$. Тогда $x = \sum p_i h_i \cdot h_i'^{-1}$.

$$x^{\mu_1} = \sum (p_i h_i)^{\mu_1} \cdot (h_i'^{-1})^{\mu_2} = \sum (p_i h_i)^{\nu_1} \cdot (h_i'^{-1})^{\nu_2} = x^{\nu_1}.$$

$$x^{\mu_3} = (\sum p_i h_i \cdot h_i'^{-1})^{\mu_3} = (\sum (p_i h_i) * h_i'^{-1})^{\mu_3} = \sum (p_i h_i)^{\nu_1} * (h_i'^{-1})^{\nu_2} = x^{\nu_3}$$

Т.е. $\nu_1 = \mu_1$, $\nu_3 = \mu_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре.-М.,1962.
2. Цаленко М.Ш.,Шульгейфеф Е.Г. Основы теории категорий. М.,1974.

Алгебра и дискретная математика. Рига, 1984.

УДК 512.647;
512.872.7

Т.Л.Плоткина

РКИИ ГА

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НОРМАЛИЗУЮЩЕЙ КОНСТАНТЫ $G(N)$ В УРАВНЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАЯВОК В СЕТИ

I. При исследовании сетей СМО большую роль играет функция $G(N)=\sum\prod_{i=1} x_i^{n_i}$, где x_i - действительные положительные и сумма берется по всем n_i , таким что $\sum_{i=1}^{M} n_i = N$, а также функция $\rho = G(N-1)/G(N)$ [1] . Поэтому исследование свойств функций $G(N)$ и ρ представляет самостоятельный интерес. Например, Бузен [2] дал численный метод определения $G(N)$, а Прайс (ссылка по [3]) доказал выпуклость $1/\rho$.

2. Функция $G(N)$ симметрична относительно x_i . Представим ее в виде

$$G(N)=\sum_{\sum_{i=1}^{M} n_i = N} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_M^{n_M} \frac{x_1^{n_2+\dots n_M}}{x_1^{n_2+\dots n_M}} \cdot \frac{x_2^{n_3+\dots+n_M}}{x_2^{n_3+\dots+n_M}} \dots \frac{x_{M-1}^{n_M}}{x_{M-1}^{n_M}} =$$

$$=\sum_{\sum_{i=1}^{M} n_i = N} x_1^{n_1+\dots+n_M} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n_2+\dots+n_M} \dots \left(\frac{x_M}{x_{M-1}}\right)^{n_M} .$$

В замкнутой сети с центральным обслуживающим прибором одну из переменных x_i можно выбрать произвольно (например, $x_1 = 1$),т.к. одно из уравнений системы для нахождения x_i оказывается зависимым. Поэтому удобно вынести x_1 .

Обозначим $\sum_{j=i}^{M} n_j = k_i$, $\frac{x_i}{x_{i-1}} = y_i$.

Тогда
$$G(N)=x_1^N \sum_{k_2=0}^{N} y_2^{k_2} \left(\sum_{k_3=0}^{k_2} y_3^{k_3} \left(\dots\left(\sum_{k_M=0}^{k_{M-1}} y_M^{k_M}\right)\dots\right)\right)$$

Число слагаемых в сумме $G(N)$ равно $\binom{M+N-1}{N}$.

При небольших значениях M сумма $G(N)$ допускает легкое сворачивание. Рассмотрим случаи M=3 и M=4 .

2.I. M=3

$$G(N)=x_1^N\sum_{k_2=0}^{N} y_2^{k_2}\Big(\sum_{k_3=0}^{k_2} y_3^{k_3}\Big)=x_1^N\sum_{k_2=0}^{N} y_2^{k_2}\Big(\frac{y_3^{k_2+1}-1}{y_3-1}\Big)=$$

$$=\frac{x_1^N}{y_3-1}\Big(\sum_{k_2=0}^{N} y_3(y_2y_3)^{k_2}-\sum_{k_2=0}^{N} y_2^{k_2}\Big)=\frac{x_1^N}{y_3-1}\Big(y_3\frac{(y_2y_3)^{N+1}-1}{y_2y_3-1}-\frac{y_2^{N+1}+1}{y_2-1}\Big).$$

2.2. M=4

$$-G(N)=x_1^N\sum_{k_2=0}^{N} y_2^{k_2}\Big(\sum_{k_3=0}^{k_2} y_3^{k_3}\Big(\sum_{k_4=0}^{k_3} y_4^{k_4}\Big)\Big)=x_1^N\sum_{k_2=0}^{N} y_2^{k_2}\Big(\frac{1}{y_4-1}\Big(y_4\frac{(y_3y_4)^{k_2+1}-1}{y_3y_4-1}-$$

$$-\frac{y_3^{k_2+1}-1}{y_3-1}\Big)\Big)=\frac{x_1^N}{y_4-1}\Big(\sum_{k_2=0}^{N}\frac{y_3y_4^2}{y_3y_4-1}(y_2y_3y_4)^{k_2}-\sum_{k_2=0}^{N}\frac{y_4}{y_3y_4-1}y_2^{k_2}-$$

$$-\sum_{k_2=0}^{n}\frac{y_3}{y_3-1}(y_2y_3)^{k_2}+\sum_{k_2=0}^{N}\frac{y_2^{k_2}}{y_3-1}\Big)=\frac{x_1^N}{y_4-1}\Big(\frac{y_3y_4^2((y_2y_3y_4)^{N+1}-1)}{(y_3y_4-1)(y_2y_3y_4-1}-$$

$$-\frac{y_3((y_2y_3)^{N+1}-1)}{(y_3-1)(y_2y_3-1)}+\Big(\frac{1}{y_3-1}-\frac{y_4}{y_3y_4-1}\Big)\frac{y_2^{N+1}-1}{y_2-1}\Big).$$

3. Нам понадобятся некоторые замечания о функциях многих переменных, связанные с симметриями.

3.I. Пусть задана функция n переменных $y=f(x_1,\dots,x_n)$ и пусть σ - некоторая роизвольная подстановка этих переменных. Подстановку σ будем применять к функции f по правилу:

$$(f\sigma)(x_1,\dots,x_n)=f(x_1\sigma,\dots,x_n\sigma).$$

Тогда имеет место следующее правило:

$$\frac{\partial(f\sigma)}{\partial(x_i\sigma)}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma .$$

Проиллюстрируем это правило примером. Пусть $f=x^2+xy$, а σ переставляет переменные x и y . Тогда

$$f\sigma=y^2+xy\ ;\ \frac{\partial(f\sigma)}{\partial(x\sigma)}=2y+x\ ;\ \frac{\partial f}{\partial x}=2x+y \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x}\sigma=2y+x.$$

Приведем теперь доказательство правила. Функцию $f\sigma$ будем рассматривать как сложную функцию, составленную из $f(x_1,\dots,x_n)$ и функций $x_i=x_i\sigma$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$\frac{\partial(f\sigma)}{\partial(x_i\sigma)}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma\cdot\frac{\partial x_i}{\partial(x_i\sigma)}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma.$$

Приведенное правило можно применить в частности к случаю, когда f - симметрическая функция. В этом случае $f\sigma = f$ и правило принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial(x_i\sigma)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma .$$

3.2. Предложение.

Пусть F - симметрическая форма. Тогда $F'_{x_i} - F'_{x_j}$ делится нацело на $x_i - x_j$.

Доказательство. Рассмотрим разность $F'_{x_i} - F'_{x_j}$. При перестановке x_i и x_j местами F'_{x_i} перейдет в F'_{x_j} и наоборот, и знак разности изменится на противоположный. Но при $x_i = x_j$ разность не изменится и поэтому $x_i = x_j$ обращает ее в нуль.

Рассмотрим случай двух переменных x и y . Обозначим $\psi(x,y) = F'x - F'y$.

$$\psi(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m x^m y^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m x^m y^n y^{-m} = y^n \sum_{m=0}^{n} \alpha_m \left(\frac{x}{y}\right)^m .$$

Обозначим $t = x/y$, тогда $\psi(x,y) = y^n \sum_{m=0}^{n} \alpha_m t^m$.

При равных x и y $t = 1$ и I является корнем полинома $\sum_{m=0}^{n} \alpha_m t^m$. Тогда справедливо разложение:

$\psi(x,y) - y^n(t-1)\psi_1(t)$, а это соответствует

$\psi(x,y) = (x-y)\psi_2(x,y)$.

Перейдем теперь к случаю m переменных и выделим переменные x и y : $(x, y, x_3, \ldots, x_M)$. Форма степени N $F_N(x,y,x_3,\ldots,x_M)$ раскладывается в сумму $\sum_{i=0}^{N} F_{N-i}(x,y)\Phi_i$, где Φ_i - форма степени i от переменных $(x_3,\ldots,x_M)$. Для производных имеем:

$$F'_{N_x} - F'_{N_y} = \sum((F_{N-i}(x,y))'_x - F_{N-i}(x,y))'_y)\Phi_i) = \sum \Psi_{N-i}(x,y)\Phi_i .$$

Каждая из функций $\Psi_{N-i}(x,y)$ делится нацело на $(x-y)$. Из этого следует, что $G^2(\rho'x - \rho'y)$ также делится нацело на $(x-y)$.

4. При решении задачи оптимизации параметров распределенной базы данных, моделируемой сетью СМО с центральным обслуживающим прибором, возникает необходимость максимизировать функцию производительности по параметрам вычислительной сети при заданных ограничениях. Приводимые ниже

теоремы I и 2 используются для доказательства единственности решений в указанной оптимизационной задаче.

Поскольку x_1 мы приняли равным 1, число переменных становится равным М- I. Меняется и вид функции $G(N)$. Поэтому удобно ввести новые обозначения. Чтобы не рассматривать переменные $x_2, \dots, x_M$, не теряя общности будем по-прежнему рассматривать переменные $x_1, \dots, x_M$. Через $F(n)$ обозначим форму

$$F(n) = \sum_{\sum_{i=1}^{M} n_i = n} x_1^{n_1} \dots x_M^{n_M}$$

Теперь $G(N)$ принимает вид

$$G(N) = \sum_{n=0}^{N} F(n).$$

Это также симметрическая функция относительно переменных $x_1, \dots, y_M$. Ее и будем исследовать.

4.I. Будем теперь исследовать свойства функции ρ. Эта функция как функция переменных x_i является симметрической. Приведем две теоремы.

Теорема I. Обозначим $\tau = \frac{\rho'_{x_i} - \rho'_{x_j}}{x_i - x_j}$. Функция τ не имеет корней, у которых все x_i, $i = \overline{1, M}$ действительные положительные.

Теорема 2. Обозначим $\sigma = x_i \tau + \rho'_{x_i}$. Функция σ не имеет корней, у которых все x_i, $i = \overline{1, M}$ действительные положительные.

В этом пункте приводятся доказательства теорем для случая двух переменных x и y.

4.2. Доказательство теоремы I.

Обозначим $G(N)$ через G, $G(N-1)$ через H и симметрическую однородную форму степени n через $\overset{n}{F}$. Тогда $G = H + \overset{n}{F}$.

Запишем выражения для производных ρ'_x и ρ'_y

$$\rho'_x = \left(\frac{H}{G}\right)'_x = \frac{H'_x G - G'_x H}{G^2} = \frac{H'_x (H + \overset{n}{F}) - (H'_x + \overset{n}{F}{}'_x) H}{G^2} = \frac{H'_x \overset{n}{F} - \overset{n}{F}{}'_x H}{G^2}$$

$$\rho'_y = \frac{H'_y \overset{n}{F} - \overset{n}{F}{}'_y H}{G^2}$$

Функция τ, теперь примет вид $\tau = \frac{(H'_x - H'_y)\overset{n}{F} - (\overset{n}{F}{}'_x - \overset{n}{F}{}'_y) H}{G^2 (x-y)}$.

4.2.I. Лемма.

Верна формула для разности: $\overset{n}{F}{}'_x - \overset{n}{F}{}'_y = (x-y) \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(n-1-k) x^k y^{n-2-k}$.

Для $\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(n-1-k)x^k y^{n-2-k}$ имеем треугольник коэффициентов:

I
2 2
3 4 3
4 6 6 4
5 8 9 8 5
...

Доказательство проведем по индукции.

База индукции.

Проверим формулу для $n=2$.

$\overset{2}{F} = x^2+xy+y^2$,

$\overset{2}{F}{}'_x = 2x+y$, $\overset{2}{F}{}'_y = x+2y$,

$\overset{2}{F}{}'_x - \overset{2}{F}{}'_y = x-y$.

Наша формула дает тот же результат:

$$\overset{2}{F}{}'_x - \overset{2}{F}{}'_y = (x-y)\sum_{k=0}^{2}(k+1)(n-1-k)x^k y^{n-2-k} = (x-y)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = x-y.$$

Пусть теперь формула верна для $\overset{n-1}{F}$, т.е.

$$\overset{n-1}{F}{}'_x - \overset{n-1}{F}{}'_y = (x-y)\sum_{k=0}^{n-3}(k+1)(n-2-k)x^k y^{n-3-k}.$$

Докажем, что формула верна и для $\overset{n}{F}$.

$\overset{n}{F} = x\overset{n-1}{F} + y^n = y\overset{n-1}{F} + x^n$

$\overset{n}{F}{}'_x = \overset{n-1}{F} + x\overset{n-1}{F}{}'_x$, $\overset{n}{F}{}'_y = \overset{n-1}{F} + y\overset{n-1}{F}{}'_y$

$$\overset{n}{F}{}'_x - \overset{n}{F}{}'_y = x\overset{n-1}{F}{}'_x - y\overset{n-1}{F}{}'_y = x\overset{n-1}{F}{}'_x - x\overset{n-1}{F}{}'_y + x\overset{n-1}{F}{}'_y - y\overset{n-1}{F}{}'_y =$$

$$= x(\overset{n-1}{F}{}'_x - \overset{n-1}{F}{}'_y) + (x-y)\overset{n-1}{F}{}'_y = (x-y)(x\sum_{k=0}^{n-3}(k+1)(n-2-k)x^k y^{n-3-k} + \overset{n-1}{F}{}'_y).$$

Но $\overset{n-1}{F} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$ и $\overset{n-1}{F}{}'_y = \sum_{k=0}^{n-2}(n-1-k)x^k y^{n-2-k}$,

поэтому $\overset{n}{F}{}'_y - \overset{n}{F}{}'_y = (x-y)(\sum_{k=0}^{n-3}(k+1)(n-2-k)x^k y^{n-2-k} +$

$+ \sum_{k=0}^{n-2}(n-1-k)x^k y^{n-2-k} = (x-y)\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(n-1-k)x^k y^{n-2-k}$,

т.е. формула верна для $\overset{n}{F}$.

4.2.2. Теперь мы должны сравнить коэффициенты при одинаковых степенях мономов выражений $(H'_x - H'_y)\overset{n}{F}/(x-y)$ и $(\overset{n}{F}{}'_x - \overset{n}{F}{}'_y)H/(x-y)$ и показать, что их разность всегда имеет один знак

Выясним сначала, какие коэффициенты стоят в мономах $(H'_x - H'_y)F^n/(x-y)$

$$\left(\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{k=0}^{i}(k+1)(i-k+1)x^k y^{i-k}\right)\sum_{s=0}^{n} x^s y^{n-s} = \sum_{p+q=n}^{2n-3} P_1 x^p y^q ,$$

правая часть представляет общий вид рассматриваемых мономов. Из последнего равенства мы можем сделать следующие выводы:

$p+q>n$,

$p=k+s$, следовательно $k=p-s$ и $k\leq p$,

$q=i-k+n-s$.

Из пределов сумм в левой части равенства видно, что $k\leq i$ и $i\leq n-3$.

Рассмотрим теперь три возможные случая расположения относительно i и n .

1) $p\leq i$.

Найдем k_{min} . Минимальное значение k принимает при максимальном s :

$$k_{min} = k\big|_{s_{max}=n} = p-n\leq 0 .$$

Теперь найдем k_{max} . Должны выполняться следующие условия:

$k\leq k\big|_{s_{min}=0} = p$, $k\leq i$, $p\leq i$. Следовательно, $k_{max}=p$.

В этом случае коэффициент P_1 вычисляется по формуле:

$$P_1 = \sum_{k=0}^{p}(k+1)(i-k+1) .$$

2) $i<p\leq n$.

Минимальное значение k , как и в первом случае, $k_{min} = p-n\leq 0$.

Максимальное значение k определяется условиями $k\leq k\big|_{s_{min}=0} = p$, $k\leq i$, $i<p$, из которых следует, что $k_{max} = i$. Коэффициент P_1 теперь вычисляется по формуле

$$P_1 = \sum_{k=0}^{i}(k+1)(i-k+1) .$$

3) $p>n$.

Минимальное значение k теперь равно:

$k_{min} = k|_{s_{max}=n} = p-n$.

Максимальное значение определяется условиями $k \leq p$, $k \leq i$. Но $p > n$, а $n > i$, следовательно $p > i$ и $k_{max} = i$.

Коэффициент P_1 вычисляется по формуле

$$P_1 = \sum_{k=p-n}^{i} (k+1)(i-k+1).$$

4.2.3. Теперь выясним, какие коэффициенты стоят в мономах $(\overset{n}{F}{}'_x - \overset{n}{F}{}'_y)H/(x-y)$

$$\left(\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)(n-1-k)x^k y^{n-2-k}\right)\sum_{q=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{q} x^s y^{q-s} = \sum_{p+q\geq n-2}^{2n-3} P_2 x^p y^q,$$

где правая часть есть общий вид рассматриваемых мономов.

Из последнего равенства видно, что

$p+q \geq n-2$,

$p = k+s$, следовательно $k = p-s$ и $k \leq p$,

$q = n-k-2+q-s$.

Из пределов сумм в левой части равенства видно, что $k \leq n-2$ и $q \leq n-1$. Рассмотрим теперь возможные случаи расположения p относительно q и n.

I. $q \leq n-2$.

1) $p \leq q$.

Найдем k_{min}.

$k_{min} = k|_{s_{max}=q} = p-q \leq 0$.

Определим теперь k_{max}. Должны выполняться следующие условия: $k \leq p$, $k \leq n-2$. Но $p \leq q$, а $q \leq n-2$. Следовательно $p \leq n-2$ и $k_{max} = p$.

Таким образом, коэффициент P_2 вычисляется по формуле

$$P_2 = \sum_{k=0}^{p}(k+1)(n-k-1).$$

2) $q < p \leq n-2$.

Найдем k_{min}.

$k_{min} = k|_{s_{max}=q} = p-q$.

Максимальное значение k определяется условиями $k \leq p$, $k \leq n-2$, $p \leq n-2$. Отсюда следует, что $k_{max} = p$.

В этом случае коэффициент P_2 вычисляется по формуле $P_2 = \sum_{k=p-q}^{p} (k+1)(n-k-1)$.

3) $p > n-2$.

Минимальное значение k, как и во втором случае, равно $p-q$.

Максимальное значение K можно найти, учитывая условия: $K \le p$, $K < n-2$, $p > n-2$. Из этих условий следует, что $k_{max} = n-2$ и коэффициент P_2 вычисляется по формуле

$$P_2 = \sum_{k=p-q}^{n-2} (k+1)(n-k-1).$$

П. $q = n-1$.

4) $p \le n-2$.

В этом случае $k_{min} = k|_{S_{max}=q} = p-q < 0$.

Должны выполняться условия: $k \le p$, $k \le n-2$ и $p \le n-2$. Следовательно, $k_{max} = p$. Коэффициент P_2 вычисляется по формуле

$$P_2 = \sum_{k=0}^{p} (k+1)(n-k-1).$$

5) $n-1 \le p$.

$k_{min} = k|_{S_{max}=q} = p-q$.

k_{max} определяется условиями $k \le p$, $k \le n-2$ и $p \ge n-1$. Таким образом $k_{max} = n-2$, и коэффициент P_2 вычисляется по формуле

$$P_2 = \sum_{k=p-q}^{n-2} (k+1)(n-k-1).$$

4.2.4. Для того, чтобы сравнить коэффициенты P_1 и P_2, мы должны рассмотреть 9 случаев расположения p.

I. $q \le n-2$.

1) $p \le p+q-n$.

$$P_1 = \sum_{k=0}^{p} (k+1)(i-k+1), \quad P_2 = \sum_{k=0}^{p} (k+1)(n-k+1).$$

2) $p+q-n < p < p+q-n+2$

$$P_1 = \sum_{k=0}^{i} (k+1)(i-k+1), \quad P_2 = \sum_{k=0}^{p} (k+1)(n-k-1).$$

3) $p+q-n+2 < p \leq n-2$

$$P_1 = \sum_{k=0}^{i} (k+1)(i-k+1) \quad , \qquad P_2 = \sum_{k=p-g}^{p} (k+1)(n-k-1) \, .$$

4) $n-2 < p \leq n$

$$P_1 = \sum_{k=0}^{i} (k+1)(i-k+1) \quad , \qquad P_2 = \sum_{k=p-g}^{n-2} (k+1)(n-k-1) \, .$$

5) $p > n$

$$P_1 = \sum_{k=p-n}^{i} (k+1)(i-k+1) \quad , \qquad P_2 = \sum_{k=p-g}^{n-2} (k+1)(n-k-1) \, .$$

II. $g = n-1$

6) $p \leq n-3$

$$P_1 = \sum_{k=0}^{p} (k+1)(i-k+1) \quad , \qquad P_2 = \sum_{k=0}^{p} (k+1)(n-k-1) \, .$$

7) $n-3 < p < n-1$, или $p = n-2$

$$P_1 = \sum_{k=0}^{i} (k+1)(i-k+1) = \sum_{k=0}^{n-3} (k+1)(i-k+1), \quad P_2 = \sum_{k=0}^{p} (k+1)(n-k-1) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)(n-k-1) \, .$$

8) $n-1 \leq p \leq n$

$$P_1 = \sum_{k=0}^{i} (k+1)(i-k+1) \quad , \qquad P_2 = \sum_{k=p-g}^{n-2} (k+1)(n-k-1) \, .$$

9) $p > n$

$$P_1 = \sum_{k=p-n}^{i} (k+1)(i-l+1) \quad , \qquad P_2 = \sum_{k=p-g}^{n-2} (k+1)(n-k-1) \, .$$

Покажем, что во всех перечисленных случаях $P_2 > P_1$. В случаях I и 6 пределы сумм P_1 и P_2 одинаковы, но члены суммы P_2 больше членов суммы P_1, следовательно $P_2 > P_1$.

В случаях 2 и 7 у суммы P_2 больше и предел суммирования, и члены.

В остальных случаях нельзя качественно сравнить коэффициенты P_1 и P_2, поэтому необходимо вычислить следующие суммы:

$$P_1 = \sum_{k=0}^{g-2} (k+1)(g-k-1) = \frac{g^3-g}{6},$$

$$-P_1 = \sum_{k=p-n}^{g-2} (k+1)(g-k-1) = \frac{g^3-g}{6} - \frac{(p-n)(p-n+1)(2n-2p+3g-1)}{6},$$

$$P_2 = \sum_{k=p-g}^{p} (k+1)(n-k-1) = \frac{1}{6}((p+1)(p+2)(3n-2p-3)-(p-g)(p-g+1)(2g-2p+3n-1)',$$

$$P_2 = \sum_{k=p-g}^{n-2} (k+1)(n-k-1) = \frac{1}{6}((n^3-n)-(p-g)(p-g+1)(2g-2p+3n-1).$$

В случае 3 $g = p + q + 2 < p \le n-2$.

$$P_1 = \sum_{k=0}^{g-2} (k+1)(g-k-1) = \frac{1}{6}(g^3-g),$$

$$P_2 = \sum_{k=p-g}^{p} (k+1)(n-k-1) = \frac{1}{6}((p+1)(p+2)(3n-2p-3)-(p-g)(p-g+1)(2g-2p+3n-1)),$$

$$6(P_2-P_1) = p^2(-2-2g)+p(-2g+2n-4+2g^2+2gn)+(-g^3-2-g^2n+g^2+2n+gn).$$

Мы получили уравнение параболы, ветви которой смотрят вниз. Покажем, что на границах, т.е. при $p = g+1$ и $p = n-2$ значение $(P_2 - P_1)$ положительно.

а) $p = g+1$, $p^2 = g^2+2g+1$.

$$6(P_2-P_1) = -5g^2-12g-8-g^3+5gn+4n+g^2n.$$

Здесь $5g^2+8 < 5gn$ при $g>0$ и $g^2n+4n > g^3+12g$, следовательно $6(P_2-P_1)>0$.

б) $p = n-2$, $p^2 = n^2-4n+4$.

$$6(P_2-P_1) = 3gn-4g+g^2n-3g^2-g^3-2+2n.$$

Здесь $g^2n+2n > g^3+4g$ и $3gn > 3g^2+2$, следовательно $6(P_2-P_1)>0$.

Таким образом разность $P_2 - P_1$ положительна во всей области $g < p \le n-2$.

В случае 4 $n-2 < p \le n$.

$$P_1 = \sum_{k=0}^{q-2} (k+1)(q-k-1) = \frac{q^3-q}{6},$$

$$P_2 = \sum_{k=p-q}^{n-2} (k+1)(n-k-1) = \frac{1}{6}(n^3-n-(p-q)(p-q+1)(2q-2p+3n-1),$$

$$6(P_2-P_1) = n^3 - n - 6qp^2 + 6q^2p - 6qp - 3q^3 + 3q^2 + 2p^3 + 3p^2 - 3p^2n \underline{+6qpn - 3pn - 3q^2n} + {}$$

$${} + 3qn + p,$$ а) $p = n-1$, $p^2 = n^2 - 2n + 1$, $p^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$.

$$G(P_2-P_1) = q(q+1)(n-q) > 0.$$

б) $p = n$.

$$6(P_2-P_1) = q(q-1)(n-q) \geq 0.$$

В случае 8 мы имеем тот же результат, т.к. для $q = n-1$ соотношения выполняются.

В случае 5 $p > n$.

$$P_1 = \sum_{k=p-n}^{q-2} (k+1)(q-k-1) = \frac{1}{6}(q^3 - q - (p-n)(p-n+1)(2n-2p+3q-1)),$$

$$P_2 = \sum_{k=p-q}^{n-2} (k+1)(n-k-1) = \frac{1}{6}(n^3 - n(p-q)(p-q+1)(2q-2p+3n-1)),$$

$$6(P_2-P_1) = (p-q-n)^2 + q(q-1) + (p-n).$$

Здесь все 3 слагаемых не меньше нуля, поэтому $P_2 - P_1$, также не меньше нуля. Тот же результат мы имеем в случае 9, т.к. он не зависит от соотношения q и n.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях коэффициенты P_2 мономов выражения $(\overset{n}{F}'_x - \overset{n}{F}'_y)H/(x-y)$ не меньше коэффициентов P_1 мономов выражения $(H'_x - H'_y)\overset{n}{F}/(x-y)$, следовательно функция τ не имеет корней, у которых x, y действительные положительные. Теорема I доказана для случая двух переменных x и y.

4.3. Доказательство теоремы 2.

Все коэффициенты полинома τ отрицательны. Докажем теперь, что все коэффициенты p'_y также отрицательны.

$$G^2 p'_y = H'_y \overset{n}{F} - \overset{n}{F}'_y H.$$

Т.к. $G^2 \geq 0$, то выпишем только выражения из правой части равенства.

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} x^{i-k} y^{k}, \qquad \overset{n}{F} = \sum_{m=0}^{n} x^{n-m} y^{m},$$

$$H_y = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} k x^{i-k} y^{k-1}, \qquad \overset{n}{F}'_y = \sum_{m=1}^{n} m x^{n-m} y^{m-1}.$$

4.3.I. Рассмотрим сначала коэффициенты мономов выражения $H'_y \overset{n}{F}$.

$$\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{K=1}^{i} K x^{i-K} y^{K-1}\Big)\sum_{m=0}^{n} x^{n-m} y^{m} = \sum_{p+q=n}^{2n-2} P_1 x^p y^q .$$

Здесь правая часть представляет собой общий вид мономов. Коэффициент P_1 равен $\sum K$. Чтобы найти пределы этой суммы, рассмотрим, каким условиям удовлетворяет K .

Показатели p и q равны соответственно

$p = i-K+n-m$,

$q = K-1+m$, следовательно $K = q+1-m$ и $K \le q+1$.

Отсюда $i = p+q+1-n$. Из пределов сумм видно, что $K \le i$ и $i < n$.

Возможны 3 случая расположения $q+1$.

I) $q+1 \le i$.

Определим K_{min} . $K_{min} = K|_{m_{max}=n} = q+1-n \le 0$.

Максимальное значение K определяется условиями: $K \le q+1$, $K \le i$ и $q+1 \le i$. Следовательно, $K_{max} - q+1$.

P_1 вычисляется по формуле:

$$P_1 - \sum_{K=1}^{q+1} K = \frac{(q+1)(q+2)}{2} .$$

2) $i < q+1 < n$.

$K_{min} - K|_{m_{max=n}} - q+1-n < 0$.

Должны выполняться условия: $K \le i$, $K \le q+1$ и $i < q+1$. Следовательно, $K_{max} = i$ и P_1 вычисляется по формуле

$$P_1 = \sum_{K=1}^{i} K - \frac{i(i+1)}{2} .$$

3) $q+1 > n$.

Как и раньше, K_{min} определяется при $m_{max} = n$, т.е. $K_{min} = K|_{m_{max}=n} = q+1-n$.

Должны выполняться условия: $K \le i$, $K \le q+1$. Но $q+1 > n$, а $i \le n-1$, следовательно $i < q+1$, и $K_{max} = i$.

P_1 вычисляется по формуле :

$$P_1 = \sum_{K=q+1-n}^{i} K = \frac{1}{2}(q+1-n+i)(i-q+n).$$

4.3.2. Теперь найдем коэффициенты мономов выражения HF'^{n}_{y}.

$$\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i} x^{i-k}y^{k}\right)\sum_{m=1}^{n} m x^{n-m}y^{m-1}=\sum_{p+q=n-1}^{2n-2} P_2 x^{p}y^{q}$$

Здесь в правой части имеем общий вид мономов. Коэффициент P_2 равен $\sum m$. Найдем пределы этой суммы.

$p=i-k+n-m,$

$q=k+m-1$, следовательно $m=q+1-k$ и $m\le q+1$

$i=p+q+1-n$.

Из пределов сумм видно, что $m\le n$.

Возможны три случая расположения $q+1$:

I) $q+1\le i$

В этом случае $m_{min}=m|_{k\,max=i}=q+1-k\le 0$.

Максимальное значение m определяется условиями: $m\le n$, $m\le q+1$. Но $q+1\le i$, а $i<n$, следовательно $m_{max}=q+1$. Коэффициент P_2 вычисляется по формуле:

$$P_2=\sum_{m=1}^{q+1} m=\frac{1}{2}(q+1)(q+2).$$

2) $i<q+1\le n$.

Минимальное значение m вычисляется при $k_{max}=i$, $m_{min}=m|_{k\,max=i}=q+1-i$.

Должны выполняться условия: $m\le n$, $m\le q+1$, но $q+1\le n$, поэтому $m_{max}=q+1$ и P_2 определяется по формуле:

$$P_2=\sum_{m=q+1-i}^{q+1} m=\frac{1}{2}(2+2q-i)(i+1).$$

3) $q+1>n$.

Как и во втором случае, $m_{min}=q+1-i$.

При нахождении m_{max} учитываются условия: $m\le n$, $m\le q+1$. При этом $q+1>n$ и поэтому $m_{max}=n$.

P_2 вычисляется по формуле

$$P_2=\sum_{m=q+1-i}^{n} m=\frac{1}{2}(q+1-i+n)(n-q+i).$$

4.3.3. Сравним теперь коэффицкенты P_1 и P_2.

I $p+q=n-1$.

1) $P_1=0$ и $P_2>P_1$.

П. $p+q \geq n$.

2) $q+1<i$.

$$P_1=\frac{1}{2}(q+1)(q+2)\quad,\quad P_2=\frac{1}{2}(q+1)(q+2).$$

Мы видим, что $P_1=P_2$.

3) $i<q+1\leq n$.

$$P_1=\frac{i(i+1)}{2}\quad,\quad P_2=\frac{1}{2}(2q+2-i)(i+1).$$

$q+1>i$, следовательно $2q+2>2i$ и $2q+2-i>i$. Отсюда $P_2>P_1$.

4) $q+1>n$.

$$P_1=\frac{1}{2}(q+1-n+i)(i-q+n)\quad,\quad P_2=\frac{1}{2}(q+1-i+n)(n-q+i).$$

Т.к. $i<n$, то $q+1+i-n<q+1+n-i$ и, следовательно, $P_2>P_1$.

Таким образом, во всех случаях $P_2\geq P_1$ и все коэффициенты полинома ρ'_y не положительны. Тогда функция б не имеет корней, у которых x,y действительные положительные и теорема 2 доказана для случая двух переменных x и y.

5. Перейдем к случаю многих переменных $(x,y,x_3,\dots,x_M)$ и производные будем брать по x и по y. Представим выражение $(\rho'_x-\rho'_y)(N)G^2(N)$ в виде, позволяющем применять индуктивное доказательство.

$$(\rho'_x-\rho'_y)(N)G^2(N)=(\rho'_x-\rho'_y)(N-1)G^2(N-1)+$$

$$+(G'_x-G'_y)(N-1)F(N)-(G'_x-G'_y)(N)F(N-1)+$$

$$+(F'_x-F'_y)(N-1)G(N-1)-(F'_x-F'_y)(N)G(N-2).$$

Здесь $G(N)=G(N-1)+F(N)$. Кроме того, обозначим $\mathring{G}(N)$ соответствующую функцию $G(N)(x,y)$ и аналогично $\mathring{F}(N)=F(N)(x,y)$. Тогда имеет место разложение:

$$G(N)=\mathring{G}(N)+\mathring{G}(N-1)\varphi_1+\mathring{G}(N-2)\varphi_2+\dots+\varphi_N,$$

$$F(N)=\mathring{F}(N)+\mathring{F}(N-1)\varphi_1+\mathring{F}(N-2)\varphi_2+\dots+\varphi_N,$$

где φ_i - форма степени i от переменных $(x_3,\dots,x_M)$

Распишем формулы, входящие в выражение для $(\rho'_x-\rho'_y)(N)G^2(N)$. Обозначим:

$$\frac{(\mathring{G}'_x - \mathring{G}'_y)(N)}{x-y} = T(N) \qquad , \qquad \frac{(\mathring{F}'_x - \mathring{F}'_y)(N)}{x-y} = S(N) \quad .$$

В этих обозначениях

$$T(1)=0\ ,\ T(2)=1\ ,\ T(3)=1+2x+3y,\ T(4)=1+2x+2y+3x^2+4xy+3y^2,$$

$$S(1)=0\ ,\ S(2)=1\ ,\ S(3)=2x+2y,\ S(4)=3x^2+4xy+3y^2.$$

Получаем :

$$(G'_x-G'_y)(N)=(x-y)(T(N)+T(N-1)\Phi_1+T(N-2)\Phi_2+\ldots+T(3)\Phi_{N-3}+T(2)\Phi_{N-2});$$

$$(F'_x-F'_y)(N)=(x-y)(S(N)+S(N-1)\Phi_1+S(N-2)\Phi_2+\ldots+S(3)\Phi_{N-3}+S(2)\Phi_{N-2}$$

Проведение индукции в общем виде связано с громоздкими вычислениями (как мы видели, вычисления громоздки и для случая двух переменных), и мы ограничимся значениями $N\leq 4$, причем только для теоремы I.

5.I. $N=2$

$$G(2)=1+x+y+x^2+xy+y^2+\Phi_1(1+x+y)+\Phi_2$$

$$G(1)=1+x+y+\Phi_1$$

$$G'_x(1)=1 \quad ,\quad G'_x(2)=1+2x+y+\Phi_1$$

$$G'_y(1)=1 \quad ,\quad G'_y(2)=1+2y+x+\Phi_1$$

$$(p'_x-p'_y)(2)G^2(2)=-(x-y)(1+x+y+\Phi_1)\ .$$

5.2. $N=3$

Имеем :

$$(G'_x-G'_y)(2)F(3)=(x-y)(\mathring{F}(3)+\mathring{F}(2)\Phi_1+\mathring{F}(1)\Phi_2+\Phi_3)=$$

$$=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3+(x^2+xy+y^2)\Phi_1+(x+y)\Phi_2+\Phi_3$$

$$(G'_x-G'_y)(3)F(2)=(x-y)(T(3)+T(2)\Phi_1)(\mathring{F}(2)+\mathring{F}(2)+\mathring{F}(1)\Phi_1+\Phi_2)=$$

$$=(x-y)(1+2x+2y+\Phi_1)(x^2+xy+y^2+(x+y)\Phi_1+\Phi_2)=$$

$$=(x-y)(x^2+xy+y^2+2x^3+4x^2y+4xy^2+2y^3+(x+y+3x^2+5xy+3y^2)\Phi_1$$

$$+(2x+2y)\Phi_2+(x+y)\Phi_1^2+\Phi_1\Phi_2.$$

Вычитая, получим

$$(G'_x-G'_y)(2)F(3)-(G'_x-G'_y)(3)F(2)=-(x-y)(x^3+2x^2y+3xy^2+y^3+x^2+$$

$$+xy+y^2+(2x^2+4xy+2y^2+x+y)\Phi_1+(x+y+1)\Phi_2-\Phi_3+\Phi_1^2(x+y)+\Phi_1\Phi_2)$$

Подготовим теперь следующие две формулы:

$$(F'-F'_y)(2)G(2)=(x-y)(1+x+y+x^2+xy+y^2+\Phi_1(1+x+y)+\Phi_2),$$

$$(F'_x-F'_y)(3)\,G(1)=(x-y)(2x+2y+\Phi_1)(1+x+y+\Phi_1)=$$
$$=(x-y)(2x+2y+2x^2+4xy+2y^2+\Phi_1(3x+3y)+\Phi_1^2).$$

Тогда

$$(F'_x-F'_y)(2)\,G(2)-(F'_x-F'_y)(3)\,G(1)=-(x-y)(-1+x+y+x^2+3xy+y^2+$$
$$+\Phi_1(2x+2y)-\Phi_2+\Phi_1^2).$$

Теперь имеем

$$(\rho'_x-\rho'_y)(3)\,G^2(3)=-(x-y)(1+x+y+\Phi_1+x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+x^2+xy+y$$
$$+\Phi_1(2x^2+4xy+2y^2+x+y)+\Phi_2(x+y+1)+\Phi_1^2(x+y)-\Phi_3+\Phi_1\Phi_2-1+x+y+$$
$$+x^2+3xy+y^2+\Phi_1(2x+2y)-\Phi_2+\Phi_1^2).$$

Приведя подобные и обозначив $\Phi_1\Phi_2=\Phi_3+\Psi_{12}$, получим окончательную формулу, в которой при положительных переменных все слагаемые во втором множителе положительн

$$(\rho'_x-\rho'_y)(3)\,G^2(3)=-(x-y)(2x+2y+2x^2+4xy+2y^2+x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+$$
$$+\Phi_1(1+3x+3y+2x^2+4xy+2y^2)+\Phi_2(x+y)+\Phi_1^2(1+x+y)+\Psi_{12}.$$

5.3. $N=4$

Будем действовать по схеме предыдущего пункта.

$$(G'_x-G'_y)(3)\,F(4)=(x-y)(T(3)+T(2)\Phi_1)(\overset{\circ}{F}(4)+\overset{\circ}{F}(3)\Phi_1+\overset{\circ}{F}(2)\Phi_2+\overset{\circ}{F}(1)\Phi_3+\Phi_4)=$$
$$=(x-y)(1+2x+2y+\Phi_1)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+(x^3+x^2y+xy^2+y^3)\Phi_1+$$
$$+(x^2+xy+y^2)\Phi_2+(x+y)\Phi_3+\Phi_4)=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+2x^5+4x^4y+$$
$$+4x^3y^2+4x^2y^3+4xy^4+2y^5+\Phi_1(x^3+x^2y+xy^2+y^3+3x^4+5x^3y+5x^2y^2+5xy^3+3y^4)+$$
$$+\Phi_2(x^2+xy+y^2+2x^3+4x^2y+4xy^2+2y^3)+\Phi_3(x+y+2x^2+4xy+2y^2)+$$
$$+\Phi_4(1+2x+2y)+\Phi_1^2(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\Phi_1\Phi_2(x^2+xy+y^2)+\Phi_1\Phi_3(x+y)+\Phi_1\Phi_4.$$

$$(G'_x-G'_y)(4)\,F(3)=(x-y)(T(4)+T(3)\Phi_1+T(2)\Phi_2)(\overset{\circ}{F}(3)+\overset{\circ}{F}(2)\Phi_1+\overset{\circ}{F}(1)\Phi_2+$$
$$+\Phi_3)=(x-y)(1+2x+2y+3x^2+4xy+3y^2+(1+2x+2y)\Phi_1+\Phi_2)(x^3+x^2y+$$
$$+xy^2+y^3+\Phi_1(x^2+xy+y^2)+\Phi_2(x+y)+\Phi_3)=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3+2x^4+$$
$$+4x^3y+4x^2y^2+4xy^3+2y^4+3x^5+7x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+7xy^4+3y^5+$$
$$+\Phi_1(x^2+xy+y^2+3x^3+5x^2y+5xy^2+3y^3+5x^4+11x^3y+14x^2y^2+11xy^3+$$
$$+5y^4)+\Phi_2(x+y+2x^2+4xy+2y^2+4x^3+8x^2y+8xy^2+4y^3)+\Phi_3(1+2x+$$
$$+2y+3x^2+4xy+3y^2)+\Phi_1\Phi_2(x+y+3x^2+5xy+3y^2)+\Phi_1\Phi_3(1+2x+2y)+\Phi_2\Phi_3+$$
$$+\Phi_2^2(x+y)+\Phi_1^2(x^2+xy+y^2+2x^3+4x^2y+4xy^2+2y^3)).$$

$$(F'_x-F'_y)(3)G(3)=(x-y)(S(3)+S(2)\Phi_1)(\overset{\circ}{G}(3)+\overset{\circ}{G}(2)\Phi_1+\overset{\circ}{G}(1)\Phi_2+\Phi_3)=$$
$$=(x-y)(2x+2y+\Phi_1)(1+x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3+\Phi_1(1+x+y+x^2+$$
$$+xy+y^2)+\Phi_2(1+x+y)+\Phi_3)=(x-y)(2x+2y+2x^2+4xy+2y^2+2x^3+4x^2y+$$
$$+4xy^2+2y^3+2x^4+4x^3y+4x^2y^2+4xy^3+2y^4+\Phi_1(1+3x+3y+3x^2+5xy+$$
$$+3y^2+3x^3+5x^2y+5xy^2+3y^3)+\Phi_2(2x+2y+2x^2+4xy+2y^2)+\Phi_3(2x+2y)+$$
$$+\Phi_1^2(1+x+y+x^2+xy+y^2)+\Phi_1\Phi_2(1+x+y)+\Phi_1\Phi_3).$$

$$(F'_x-F'_y)(4)G(2)=(x-y)(S(4)+S(3)\Phi_1+S(2)\Phi_2)(\overset{\circ}{G}(2)+\overset{\circ}{G}(1)\Phi_1+\Phi_2)=$$
$$=(x-y)(3x^2+4xy+3y^2+(2x+2y)\Phi_1+\Phi_2)(1+x+y+x^2+xy+y^2+\Phi_1(x+y)+\Phi_2)=$$
$$=(x-y)(3x^2+4xy+3y^2+3x^3+7x^2y+7xy^2+3y^3+3x^4+7x^3y+10x^2y^2+$$
$$+7xy^3+3y^4+\Phi_1(2x+2y+5x^2+8xy+5y^2+5x^3+11x^2y+11xy^2+5y^3)+$$
$$+\Phi_2(1+x+y+4x^2+5xy+4y^2)+\Phi_1\Phi_2(1+3x+3y)+\Phi_1^2(2x+2y+2x^2+4xy+$$
$$+2y^2)+\Phi_2^2).$$

Собирая все вместе, получаем:

$$(\rho'_x-\rho'_y)(4)G^2(4)=-(x-y)(3x^2+4xy+3y^2+3x^3+7x^2y+7xy^2+3y^3+2x^4+$$
$$+6x^3y+9x^2y^2+6xy^3+2y^4+x^5+3x^4y+6x^3y^2+6x^2y^3+3xy^4+y^5+$$
$$+\Phi_1(2x+2y+5x^2+8xy+5y^2+4x^3+10x^2y+10xy^2+4y^3+2x^4+6x^3y+9x^2y^2+$$
$$+6xy^3+2y^4)+\Phi_2(1+x+y+3x^2+4xy+3y^2+2x^3+4x^2y+4xy^2+2y^3)+$$
$$+\Phi_3(-x-y+x^2+y^2)+\Phi_4(-1-2x-2y)+\Phi_1^2(2x+2y+2x^2+4xy+2y^2+x^3+3x^2y+3xy^2+$$
$$+y^3)+\Phi_1\Phi_2(1+3x+3y+2x^2+4xy+2y^4)+\Phi_1\Phi_3(x+y)+\Phi_2^2(1+x+y)+\Phi_2\Phi_3-\Phi_1\Phi_4)$$

Обозначим $\Phi_i\Phi_j=\Phi_{ij}+\Psi_{ij}$. Все Ψ_{ij} содержат только положительные слагаемые. Кроме того, легко проверяется, что $\Phi_2\Phi_3-\Phi_1\Phi_4$ – также есть сумма только положительных слагаемых. Окончательно имеем:

$$(\rho'_x-\rho'_y)(4)G^2(4)=-(x-y)(3x^2+4xy+3y^2+3x^3+7x^2y+7xy^2+3y^3+$$
$$+2x^4+6x^3y+9x^2y^2+6xy^3+2y^4+x^5+3x^4y+6x^3y^2+6x^2y^3+3xy^4+y^5+$$
$$+\Phi_1(2x+2y+5x^2+8xy+5y^2+4x^3+10x^2y+10xy^2+4y^3+2x^4+6x^3y+$$

$$+9x^2y^2+6xu^3+2u^4)+\varphi_2(1+x+y+3x^2+4xy+3y^2+2x^3+4x^2y+4xy^2+$$

$$+2y^3)+\varphi_3(1+2x+2y+3x^2+4xy+3y^2)+\psi_{12}(1+3x+3y+2x^2+4xy+2y^2)+$$

$$+\psi_{13}(x+y)+\Phi_{12}(1+x+y)+\varphi_1^2(2x+2y+2x^2+4xy+2y^2+x^3+3x^2y+$$

$$+3xy^2+y^3)+(\varphi_2\varphi_3-\varphi_1\varphi_4)).$$

Таким образом, и в этом случае второй сомножитель содержит слагаемые одного знака.

В заключение выражаю благодарность Э.Я.Петерсону за постановку оптимизационной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

I. Феррари Д. Оценка производительности вычислительных систем.-М.,I98I.

2. Buzen J.P. Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers.- Communications of the ACM, 1973, v.16, p.527-531.

3. Trivedy K.S., Wagner R.A., Sigmon T.M. Optimal Selection of CPV Speed, Device Capacities, and File Assignments.- Journal of the ACM, 1980, v.27, p.457-473.

Алгебра и дискретная математика. Рига, 1984.

УДК 512.7

В.Е. Спектор

РКИИ ГА, КВВИУ

РЕШЕТКА ОБЫКНОВЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП КОНЕЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

Если $\mathfrak{A}_n$ -многообразие абелевых групп экспоненты n, то соответствующее многообразие представлений обозначим $\omega\mathfrak{A}_n$. Тогда $\omega\mathfrak{A}_n$ есть класс пар (A, Γ), где A - линейное пространство над полем K, а Γ - действующая группа, являющаяся абелевой экспоненты n, с точностью до ядра представления. Так как многообразие в дальнейшем обыкновенно, то дальше предполагается, что число n взаимно просто с характеристикой поля K.

Все подмногообразия в $\omega\mathfrak{A}_n$ в этом случае полностью описаны следующим образом (см. I теорема 2.2.3.3).

Рассмотрим набор M делителей числа n, в котором никакое число не является делителем другого числа из M. Такой набор называется несократимым. Пусть ему соответствует подмногообразие $\mathfrak{X} \subset \omega\mathfrak{A}_n$, порожденное всеми $\omega\mathfrak{A}_m$, $m \in M$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между несократимыми наборами и подмногообразиями в $\omega\mathfrak{A}_n$.)*.

В первом параграфе статьи с помощью различных специальных наборов делителей числа n описывается строение решетки $\omega\mathfrak{A}_n$. Во втором параграфе на основе полученного описания находятся атомы в решетке $\omega\mathfrak{A}_n$, минимальные и максимальные подмногообразия в $\omega\mathfrak{A}_n$, приводятся конкретные примеры.

)* говоря о решетке $\omega\mathfrak{A}_n$, имеем в виду решетку подмногообразий в $\omega\mathfrak{A}_n$.

§ I. Построение решетки $\omega \mathfrak{A}_n$

Обозначим через $N(n)$ множество всех делителей числа n, а через $\mathfrak{D}(n)$ множество всех подмножеств в $N(n)$. Тогда $\mathfrak{D}(n)$ является дистрибутивной решеткой относительно обычных операций объединения и пересечения множеств. Элементами $\mathfrak{D}(n)$ являются различные наборы делителей числа n.

Введем на множестве $\mathfrak{D}$ следующее отношение. Пусть M_1 и M_2 элементы $\mathfrak{D}(n)$, т.е. наборы делителей числа n. $M_1 \leq M_2$, если для каждого $m_1 \in M_1$ найдется такое $m_2 \in M_2$, что m_1 делит m_2. Нетрудно видеть, что отношение $\leq$ является рефлексным и транзитивным.

Введем на $\mathfrak{D}(n)$ отношение ρ: $M_1 \rho M_2$, если $M_1 \leq M_2$ и $M_1 \geq M_2$.

Тогда отношение ρ - эквивалентность и, кроме того, $M_1 \rho M_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}_{M_1} = \mathfrak{X}_{M_2}$.

Рассмотрим фактор-множество $\overline{\mathfrak{D}}(n) = \mathfrak{D}(n)/\rho$ множества наборов делителей $\mathfrak{D}(n)$ по эквивалентности ρ. Тогда отношение $\leq_{-}$ на фактор-множестве $\overline{\mathfrak{D}}(n)$, определяемое условием $\overline{M}_1 \leq \overline{M}_2$, если $M_1 \leq M_2$, оказывается отношением порядка в $\overline{\mathfrak{D}}(n)$. Таким образом $\overline{\mathfrak{D}}(n)$ уже будет частично упорядоченным множеством. Элементами в $\overline{\mathfrak{D}}(n)$ будут классы эквивалентных наборов Каждому классу $\overline{M} \in \overline{\mathfrak{D}}(n)$ взаимно однозначно соответствует многообразие $\mathfrak{X}_{\overline{M}}$.

Предложение I.I. Эквивалентность ρ сохраняет операцию объединения в решетке $\mathfrak{D}(n)$.

Доказательство. Пусть $M \rho M_2$ и $M_1' \rho M_2'$ и $m_1 \in M_1 \cup M_1'$. Если $m_1 \in M_1$, то найдется такое $m_2 \in M_2$, что m_1 делит m_2, а так как $m_2 \in M_2 \cup M_2'$, то $M_1 \cup M_1' \leq M_2 \cup M_2'$. Аналогично проверяется обратное соотношение $M_1 \cup M_1' \geq M_2 \cup M_2'$. Следовательно, получаем $(M_1 \cup M_1') \rho (M_2 \cup M_2')$

Замечание I.I. Эквивалентность ρ не сохраняет операцию пересечения в решетке $\mathcal{D}(n)$, т.е. предложение, аналогичное первому для пересечения множеств в $\mathcal{D}(n)$ уже не верно. Приведем пример, показывающий, что соотношение $(M_1 \cap M_1')\rho(M_2 \cap M_2')$ не выполняется.

Пример I.I. Пусть $(2,6)\rho(3,6)$ и $(2,12)\rho(3,12)$. Тогда $(2,6)\cap(2,12)=(2)$ и $(3,6)\cap(3,12)=(3)$. Но соотношение $(2)\rho(3)$ неверно, так как числа 2 и 3 не являются делителями друг друга.

Вместе с тем $(2,6)\cup(2,12)=(2,6,12)$ и $(3,6)\cup(3,12)=(3,6,12)$. Соотношение $(2,6,12)\rho(3,6,12)$ верно, так как любой элемент из одного набора является делителем некоторого элемента из другого.

Согласно предложению I.I. можно естественным образом определить сложение в частично упорядоченном множестве $\bar{\mathcal{D}}(n)$. Именно, сумма любых двух элементов в $\bar{\mathcal{D}}(n)$ и есть теоретико-множественное объединение любых соответствующих представителей этих элементов, т.е. получаем следствие I.I

Следствие I.I $\bar{M}_1+\bar{M}_2=\overline{M_1\cup H_2}$.

Ввиду замечания I.I произведение элементов нельзя определить через пересечение произвольных представителей соответствующих классов. Чтобы корректно определить произведение в $\bar{\mathcal{D}}(n)$ и, следовательно, построить решетку, рассмотрим некоторые специальные представители в каждом классе $\bar{M}\in\bar{\mathcal{D}}(n)$.

M_* - несократимый набор делителей данного класса $\bar{M}$, т.е. такой набор делителей $m \in M$, в котором никакое число не является делителем некоторого другого числа.

M_* - полный набор делителей данного класса $\bar{M}$, т.е. набор всех делителей этого класса. $d \in M^*$, если найдется такое $m \in M$, что d делит m.

Например, если $M=(2,6,10,12)$, то $M_*=(10,12)$, $M^*=(2,3,4,5,6,10,12)$.

Очевидно, что для каждого класса $\bar{M}$ наборы M_* и M^* определяются однозначно и лежат в данном классе, т.к. являются представителями классов в $\bar{\mathcal{D}}(n)$;

Таким образом M^* является наибольшим, а M_* наименьшим по числу элементов представителем данного класса $\bar{M}$.

Для данного класса M его представители M^* и M_* можно найти следующим образом.

Построение полного набора M^* :

I. Выписать все простые делители $p_1, p_2, \ldots, p_r$ элементов класса M .

2. Выписать все те вторые степени простых делителей $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_r^2$ и их произведения $p_1p_2, \ldots p_1p_r, \ldots p_{r-1}p_r$, которые являются делителями хотя бы одного элемента из M .

3. Если выписаны все делители S -ой степени элементов из M , то выписать те числа $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ по всем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ таким, что $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r = S+1$, которые являются делителями какого-либо элемента из M .

Построение несократимого набора M_* :

I. Выбрать наибольший элемент $m \in M$.

2. Вычеркнуть все элементы из M , которые делят m .

3. Выбрать из оставшихся элементов наибольший.

4. Повторить процесс до тех пор пока не останутся только выбранные элементы.

Оказывается, полные наборы уже обладают хорошими свойствами, дающими возможность построить решетку.

Предложение I.2. Объединение и пересечение полных наборов опять полный набор.

Доказательство. Если $d \in M_1^* \cup M_2^*$,то d принадлежит или M_1^* или M_2' . Если $d \in M_1^*$, то так как M_1^* - полный набор, то все делители элемента d принадлежат M_1^* , а следовательно и $M_1^* \cup M_2^*$. Аналогично, если $d \in M_2^*$, то все делители d принадлежат также $M_1^* \cup M_2^*$. Отсюда следует, что $M_1^* \cup M_2^*$ - полный набор делителей.

Если $d \in M_1^* \cap M_2^*$,то $d \in M_1^*$ и $d \in M_2^*$. Но M^*_1 - полный набор, поэтому все делители d принадлежат M_1^* , а так как M_2^* тоже полный набор, то все делители d принадлежат M_2^* . Следовательно, для каждого $d \in M_1^* \cap M_2^*$ все его делители принадлежат этому же набору. Отсюда $M_1^* \cap M_2^*$ - полный набор делителей.

Следствие I.2. Полные наборы делителей числа n образуют решетку $\mathcal{D}^*(n)$ относительно операций объединения и пересечения множеств.

Следствие I.3. Решетка полных наборов $\mathcal{D}^*(n)$ является подрешеткой решетки всех наборов делителей $\mathcal{D}(n)$ числа n .

Отсюда в частности следует, что решетка полных наборов дистрибутивна.

Замечание I.2. Несократимые наборы делителей числа n не образуют решетку относительно операции объединения и пересечения, т.е. предложение, аналогичное второму для несократимых наборов уже неверно.

Приведем пример, показывающий, что объединение несократимых наборов уже не будет несократимым.

Пример I.2. $M_*' = (2,3,5)$ и $M_*'' = (5,8)$ – два несократимых набора. Тогда $M_*' \cup M_*'' = (2,3,5,8)$ будет сократимым набором, так как 2 -делитель 8 . Вместе с тем $M_*' \cap M_*'' = (5)$ - несократимый набор. Данное соотношение справедливо и в общем случае.

Предложение I.3. Пересечение несократимых наборов будет несократимым.

Доказательство. Пусть M_*' и M_*''–два несократимых набора. Если $d \in M_*' \cap M_*''$ и d' произвольный другой элемент пересечения, то так как d и d' принадлежат M_*' , а M_*'–несократимый набор, то ни один из этих элементов не может быть делителем другого. Так как d' - произвольный элемент пересечения, то элемент d не является делителем никакого элемента из $M_*' \cap M_*''$,т.е. $M_*' \cap M_*''$ будет несократимым набором делителей.

Хотя операция пересечения для несократимых наборов имеет место, оказывается что произведение элементов можно определить только на основе полных наборов.

Предложение I.4. $\overline{M_1^* \cap M_2^*}$ - точная нижняя грань для элементов $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2 \in \overline{\mathcal{D}(n)}$,т.е.

$$\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 = \overline{M_1^* \cap M_2^*}$$

Доказательство. Так как каждый элемент из набора $M_1^* \cap M_2^*$ будет делителем некоторого элемента из класса

M_1 и некоторого элемента из класса M_2, то $\overline{M_1^* \cap M_2^*}$ - нижняя грань для $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$. Пусть теперь $\overline{M}$ произвольная нижняя грань для $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$. Так как $\overline{M} \leq \overline{M}_1$, то для любого $d \in M$ найдется $m_1 \in M_1$, что d делит m_1. Так как M_1^* полный набор делителей, то $d \in M_1^*$. Аналогично, так как $\overline{M} \leq \overline{M}_2$ и M_2^* также полный набор, то $d \in M_2^*$, т.е. $d \in M_1^* \cap M_2^*$. Отсюда следует, что $M \subset M_1^* \cap M_2^*$ тогда тем более $\overline{M} \leq \overline{M_1^* \cap M_2^*}$, т.е. $\overline{M_1^* \cap M_2^*}$ - точная нижняя грань.

Замечание I.3. Предложение I.4 имеет место только для полных наборов. Это предложение не сохраняется не только для несократимых наборов, но и для любых других наборов, отличных от полных.

Пример I.3. Пусть $M_1=(2,4,8,9)$, $M_2=(2,3,9,12)$. Тогда $M_1 \cap M_2 = (2,9)$.

Для несократимых наборов имеем

$$M_{1*}=(8,9),\ M_{2*}=(9,12) \quad \text{и} \quad M_{1*} \cap M_2 = (9).$$

Для полных наборов имеем

$$M_1^* = (2,3,4,8,9),\ M_2^* = (2,3,4,6,9,12) \text{ и } M_1^* \cap M_2^* = (4,9).$$

Таким образом получаем соотношения

$$M_{1*} \cap M_{2*} \angle M_1 \cap M_2 \angle M_1^* \cap M_2^*,$$

причем равенства нигде нет.

Следовательно для построения решетки в $\overline{\mathcal{D}}(n)$ необходимо использовать только полные наборы делителей.

Следствие I.4. Частично упорядоченное множество классов наборов делителей $\overline{\mathcal{D}}(n)$ будет решеткой, изоморфной решетке полных наборов $\mathcal{D}^*(n)$, если положить

1. $\overline{M}_1 + \overline{M}_2 = \overline{M_1^* \cup M_2^*}$,
2. $\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 = \overline{M_1^* \cap M_2^*}$.

Доказательство. Корректность определения первого действия в $\overline{\mathcal{D}}(n)$ следует из следствия I.I., а второго из предложения I.4. Изоморфизм решеток определяется выбором полного набора в соответствующем классе $\nu : \overline{M} \to M^*$.

Так как решетка $\overline{\mathcal{D}}(n)$ будет очевидным образом изоморфна решетке многообразия $\omega\mathfrak{A}_n$, то получаем следующее важное следствие.

Следствие I.5. Решетка многообразия $\omega\mathfrak{A}_n$ изоморфна подрешетке полных наборов $\mathcal{D}^*(n)$ в решетке всех наборов делителей $\mathcal{D}(n)$ числа n.

Из дистрибутивности решетки полных наборов следует известный факт дистрибутивности решетки многообразия $\omega\mathfrak{A}_n$.

С помощью полных наборов можно определить и изоморфную решетку несократимых наборов $\mathcal{D}_*(n)$.

Замечание I.4. Несократимые наборы делителей следует использовать только как представителей элементов решетки $\mathcal{D}(n)$. В этом случае запись получается наиболее компактной. Поэтому в конкретных примерах ответы удобно давать с использованием несократимых наборов. Все вычисления при построении решеток необходимо вести только на основе полных наборов делителей.

§2 Атомы решетки $\omega\mathfrak{A}_n$

Пусть $\mathfrak{X}$ – подмногообразие в $\omega\mathfrak{A}_n$, отвечающее некоторому набору M делителей числа n. Для построения атомов будем использовать согласно следствию I.5. решетку полных наборов делителей. Поэтому для данного набора M строим полный набор делителей M^* по методу, указанному в §I.

Если $p \in \mathcal{D}(n)$, т.е. p делит n, то возможны два случая

I) $p \notin M^*$, 2) $p \in M^*$

Если $p \notin M^*$, то $(M^*,p) \supsetneq M^*$. Тогда (M^*,p) снова полный набор делителей и, очевидно, не существует никакого другого набора делителей заключенного между этими наборами. Поэтому (M^*,p) – атом над M^*. Стоит отметить, что данное рассуждение сохраняется и для несократимых наборов, т.е. если M^* несократимый набор из того же класса, что и M^*, то в этом случае (M_*,p) – также несократимый набор и является атомом над M_*. Таким образом доказано предложение.

Предложение 2.I. Если M -набор делителей числа n, соответствующий многообразию $\mathfrak{X} \subset \omega\mathfrak{A}_n$, $p \in \mathcal{D}(n)$ и $p \notin M^*$, где M^* полный набор делителей, соответствующий набору M , то $\mathfrak{X} \cup \omega\mathfrak{A}_p$ атом над $\mathfrak{X}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $p \in M^*$.

Предложение 2.2. Если M набор делителей числа n , соответствующий многообразию $\mathfrak{X} \subset \omega\mathfrak{A}_n$, $p \in \mathcal{D}(n)$, $p \in M^*$, то $\mathfrak{X} \cup \omega\mathfrak{A}_{mp}$ атом над $\mathfrak{X}$ для всех таких m , что

I) $mp \notin M^*$,

2) (M^*, mp) - полный набор делителей числа n .

Других атомов в случае $p \in M^*$ нет.

Доказательство. Так как $mp \notin M^*$, то $(M^*, mp) \gneqq M^*$. Из того, что (M^*, mp)-полный набор, получаем, что все делители числа mp принадлежат M^* . Предположим, что существует такой полный набор M_1^* , отличный от M^* и (M^*, mp), что $M^* \angle M_1^* \angle (M^*, mp)$. Тогда $M_1^* = (M^*, d)$, где $d \notin M^*$ и d делит mp . Но $p \in M^*$, а $d \notin M^*$, следовательно $d = m_1 p$, где m_1 делит m и $m_1 p \notin M^*$. Так как $M_1^* \neq (M^*, mp)$, то $m_1 p \neq mp$. Отсюда получаем, что делитель числа mp $m_1 p \notin (M^*, mp)$, а это противоречит полноте данного набора. Таким образом (M^*, mp) - атом над M^* , а следовательно, выполняется соответствующее условие для подмногообразий в $\omega\mathfrak{A}_n$.

Из построения атомов видно; рассмотрены все возможные случаи и других атомов нет.

Из доказательствоа предложения получаем следствие 2.I. Условие 2 предложения 2.I. может быть заменено эквивалентным условием

2') не существует такого $m_1 \in M^*$, что m_1 делит m и $m_1 p \notin M^*$.

Пример 2.I. Пусть подмногообразию $\mathfrak{X} \subset \omega\mathfrak{A}_n$ соответствует несократимый набор делителей $M_* = (p^3 q^2, pq^3, q^4)$, где p и q - делители числа n . Требуется найти атомы над $\mathfrak{X}$:

I. Атомы вида $\mathfrak{X} \cup \omega\mathfrak{A}_s$ по всем простым делителям s числа n , отличным от p и q .

2. По данному несократимому набору M_* составим полный набор делителей M^* :

1) p, q;
2) p^2, pq, q^2;
3) p^3, p^2q, pq^2, q^3;
4) p^3q, p^2q^2, pq^3, q^4;
5) p^3q^2.

Составим произведения mp и mq по всем $m \in \mathcal{M}^*$:

1) p^2, pq;	1) pq, q^2;
2) p^3, p^2q, pq^2;	2) p^2q, pq^2, q^3;
3) p^4, p^3q, p^2q^2, pq^3;	3) p^3q, p^2q^2, pq^3, q^4;
4) $p^4q, p^3q^2, p^2q^3, pq^4$;	4) $p^3q^2, p^2q^3, pq^4, q^5$;
5) p^4q^2.	5) p^3q^3.

Выберем все делители, которые не принадлежат $\mathcal{M}^*$:

$$p^4, p^4q, p^2q^3, pq^4, p^4q^2, q^5, p^3q^3.$$

Из оставшихся делителей выберем только те, которые не имеют делителей среди выбранных p^4, p^2q^3, pq^4, q^5.

Эти делители удовлетворяют условию предложения 2.2. Поэтому получаем следующие четыре атома над $\mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{X} \cup \omega\mathfrak{A}p^4, \mathfrak{X} \cup \omega\mathfrak{A}p^2q^3, \mathfrak{X} \cup \omega\mathfrak{A}pq^4, \mathfrak{X} \cup \omega\mathfrak{A}q^5.$$

Присоединяя к несократимому набору $\mathcal{M}^*$ соответствующие делители и производя сокращение, получаем несократимые наборы, отвечающие данным атомам:

$$(p^4, p^3q^2, pq^3, q^4), (p^3q^2, p^2q^3, q^4), (p^3q^2, pq^4)(p^3q^2, pq^3, q^5).$$

Пример 2.2. Используя метод, рассмотренный подробно в примере 2.1., построим решетку для $\omega\mathfrak{A}p^2q^2$. Решетку в $\omega\mathfrak{A}p^2q^2$ запишем через изоморфную решетку несократимых наборов.

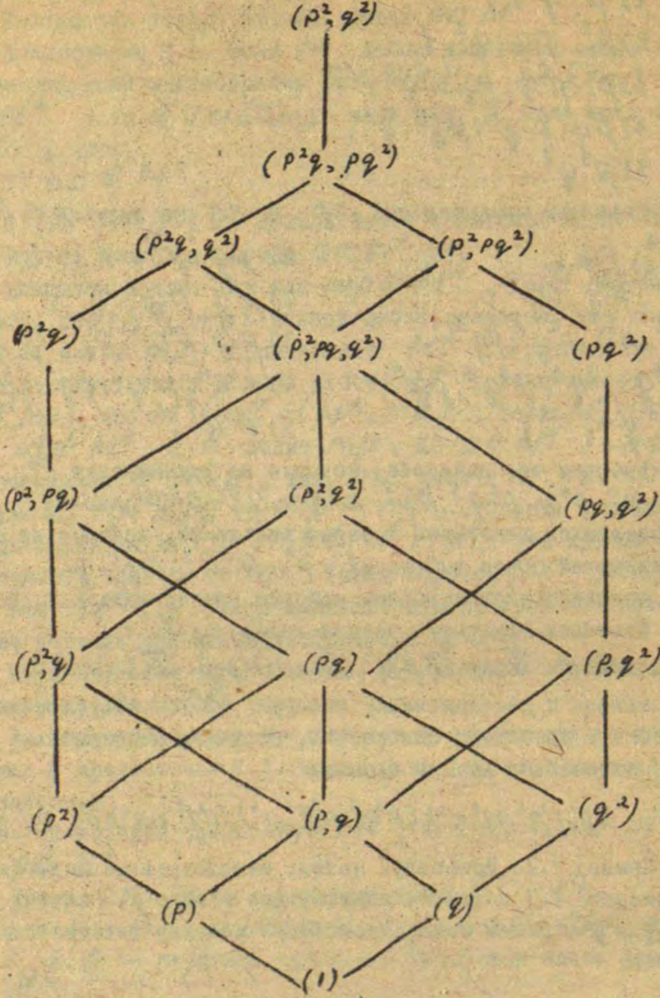
(p^2, q^2)
(p^2q, pq^2)
(p^2q, q^2)
(p^2, pq^2)
(p^2q)
(p^2, pq, q^2)
(pq^2)
(p^2, pq)
(p^2, q^2)
(pq, q^2)
(p^2, q)
(pq)
(p, q^2)
(p^2)
(p, q)
(q^2)
(p)
(q)
(1)

Рис I.

Предложение 2.3.

1) Минимальными в $\omega\mathfrak{A}_n$ будут подмногообразия вида $\omega\mathfrak{A}_p$, где p -любой простой делитель числа n.

2) Максимальное подмногообразие единственное и порождается всеми $\omega\mathfrak{A}_d$ для всех d таких, что $n = dp$ по всем простым делителям числа n.

Доказательство. Так как наборы (p) будут полными наборами при различных p и, очевидно, являются атомами в решетке $\mathfrak{D}^*(n)$, то $\omega\mathfrak{A}_p$ - атомы в решетке многообразий $\omega\mathfrak{A}_n$.

Пусть M набор делителей, указанный во втором пункте предложения. Тогда n не делит никакое $m \in M$, поэтому $\bar{M} \nleq \bar{n}$, следовательно и подмногообразие, отвечающее набору делителей М, собственное.

Пусть M_1, произвольный набор делителей, не содержащий n. Выберем произвольный $d \in M_1$, d - делитель числа n, поэтому $n = dn_1$ и $n_1 \neq 1$. Пусть p некоторый простой делитель числа n_1, $n_1 = n_2 p$. Тогда $n = dn_2 p$ и по условию $dn_2 \in M$. Таким образом для любого элемента d из M_1 найдется такой элемент dn_2 из M_1, что d делит dn_2. Следовательно $M_1 \leq M$ и класс наборов делителей соответствующий M - максимален и содержит любой другой класс наборов. Так как решетка $\mathfrak{D}(n)$ изоморфна решетке подмногообразий в $\omega\mathfrak{A}_n$, то вторая часть предложения доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плоткин Б.И., Многообразия в представлениях конечных групп. Локально стабильные многообразия. Матричные группы и многообразия представлений. -УМН, 1979г, т.34, вып.4 (208), с.65-95.

Алгебра и дискретная математика. Рига, 1984.

УДК 517.12

А.А. Тверской

ИППИ АН СССР

О КОНСТРУКТИВИЗИРУЕМОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Наши примеры формальных (арифметических) структур делятся по возможности конструктивизации в нестандартных моделях формальной арифметики Пеано (РА) на три вида: (I) формальные структуры, не конструктивизируемые ни в одной нестандартной модели РА ; (2) формальные структуры, конструктивизируемые в каждой нестандартной счетной модели РА; (3) формальные структуры, конструктивизируемость которых в нестандартной счетной модели РА зависит от выбора такой модели. Этот перечень полный. Набросаем основные понятия.

Формальная структура задана, когда условленные предикатные и функциональные символы "осмыслены" через определяющие соотношения" формулами языка РА. Пример: $y = f(x) \leftrightarrow \varphi(x,y)$; $P(x,y,z) \leftrightarrow \psi(x,y,z)$. Здесь f , P – символы, φ и ψ – формулы, $PA \vdash (\forall x \exists ! y)\varphi$. В данной работе речь идет только о формальных структурах с конечным набором символов.

Если задать модель РА, то каждый предикатный (функциональный) символ, "формально определенный" формальной структурой, приобретает смысл предиката (функции) на модели, называемого интерпретацией символа в модели. Формальная структура σ конструктивизируема в модели $\mathcal{M}$ теории РА, если интерпретации в модели символов формальной структуры переходят при одной биекции $\nu : \omega \to \mathcal{M}$ в (обще-) рекурсивные предикаты и функции на натуральном ряде ω .

Обозначения $lh(s)$, $(s)_p$, связанные с кодированием конечных последовательностей, введены в [I] . Нумерал языка РА , соответствующий числу $i \in \omega$, обозначим $\bar{i}$.

Следующая лемма полезна для выяснения принадлежности формальной структуры к виду (I).

Лемма о кодировках. Пусть $(p \varepsilon x)$ - такая формула PA со свободными переменными p, x, что $PA \vdash (\forall s \, \exists x \, \forall p < lh(s))((s)_p = 0 \leftrightarrow (p \varepsilon x))$. Если $\mathcal{M}$ - нестандартная модель PA, то $(\forall b \in \mathcal{M})(\exists a \in \mathcal{M})$(множество $\{ i \in \omega \mid \mathcal{M} \models (i \varepsilon a)\}$ нерекурсивно & $\mathcal{M} \models (b < a)$.

Обсудим теперь примеры. (См. также [2], [3].)

I. Рассмотрим в PA "эффективно почти периодический" [4] предикат $P(x) \longleftrightarrow$ (для некоторого целого v, $\frac{x}{v} < \sqrt{2} < \frac{x+1}{v}$). Пусть σ - формальная структура с соотношениями $s(x) = x+1$, $p(x) \longleftrightarrow P(x)$ для символов s, p. Сигнатура $\{s, p\}$ "бедна" в том смысле, что согласно [4], ее монадическая теория разрешима. Между тем σ относится к виду (I). Без утверждения о монадической разрешимости здесь возможно обобщение. Говоря приблизительно, свойство предиката P, влекущее неконструктивизируемость, состоит в том, что образы фрагментов двоичного "сверхслова" p при подходящем вычислимом монотонном операторе всюду плотны в двоичных последовательностях.

Модификация этого примера с использованием независимой от PA формулы дает пример формальной структуры вида (3) с определяющими соотношениями класса $\Sigma_1 \cap \Pi_1$. В рассуждениях важно, что по лемме о кодировках элементы модели с нужным свойством нерекурсивности не ограничены сверху.

2. Пусть одноместная функция d доказуемо в PA изображает (в кодах) такое отображение дерева с постоянным (конечным или счетным) ветвлением: корень неподвижен, выше - спуск к непосредственному предшественнику. (Одна из таких функций вместе с функцией $x+1$ позволяет выразить сложение и умножение средствами первого порядка, ср. [5]). Формальная структура, единственное соотношение которой вводит символ для функции d, принадлежит к виду (2). Замена "предшествования" хотя бы двумя "следованиями" в таком же дереве приводит к формальной структуре вида (I). Еще один пример вида (I): два соотношения, вводящие функцию $(x)_1$ и предикат $(x)_0 = 0$. Этот пример можно обобщить.

Формальная структура, вводящая символы для " n следований" в "сетке" $\omega^s \times Z^{n-s}$, где Z - множество целых чисел, принадлежит к виду (2).

ЛИТЕРАТУРА

I. Шенфильд Дж. Математическая логика. - М., I975.

2. Тверской А.А. Исследование рекурсивности и арифметичности сигнатурных функций в нестандартных моделях арифметики. - Доклады АН СССР, I982, т. 262, №6, с. I325 - I328.

3. Тверской А.А. О нумеруемости некоторых сигнатур. - В кн: Тезисы УI Всесоюзной конференции по математической логике. Тбилиси, I982, с. I84.

4. Семенов А.Л. О разрешимости некоторых неэлементарных теорий. - В кн: Тезисы У Всесоюзной конференции по математической логике. Новосибирск, I979, с. I38.

5. Härtig K. Einstellige Funktionen als Grundbegriffe der elementaren Zahlentheorie.- Zeitschr.Math.Log. Grundl.Math., 1959.- Bd 5 H.3/4. S.209-215.

Алгебра и дискретная математика. Рига, 1984.

УДК 519:48

А.И.Токаренко

РВВАИУ им. Я.Алксниса

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Г.БИРКГОФА

В заглавии работы речь идет о следующем известном результате Г.Биркгофа /I/: всякая нильпотентная алгебра Ли над полем вкладывается в нильпотентную ассоциативную алгебру над тем же полем. Естественным обобщением этого утверждения было бы такое: всякая локально нильпотентная алгебра Ли вкладывается в локально нильпотентную ассоциативную алгебру. В такой формулировке, однако, это утверждение неверно. В работе /2/ Л.А.Симонян построил пример локально нильпотентной алгебры Ли, не допускающей вложения ни в какую локально нильпотентную ассоциативную алгебру. Там же сформулировано необходимое условие вложимости: для вложимости локально нильпотентной алгебры Ли в локально нильпотентную ассоциативную алгебру необходимо, чтобы все элементы алгебры Ли были энгелевыми. Вопрос о достаточности этого условия в настоящее время открыт и поэтому кажется естественной задача выделения классов тех алгебр Ли, для которых существует вложение в локально нильпотентную ассоциативную алгебру.

В настоящей работе мы выделяем один такой класс алгебр Ли и рассматриваем некоторые связанные с этим вопросы.

§ I. Пример алгебры Ли, не допускающей вложения

Этот пример конструктивен и в некотором смысле минимален по сравнению с примером Л.А.Симоняна из работы /I/.

Пусть V — векторное пространство над полем K с базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и d - линейное преобразование V, задаваемое своим действием на базисные элементы

$$de_n = \begin{cases} e_{n-1}, & \text{если } n > 1, \\ 0, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Если рассматривать V как алгебру Ли с нулевым умножением, то d есть дифференцирование V. Пусть $L = V + D$ есть полупрямая сумма алгебры Ли V и алгебры D, порожденной дифференцированием d в алгебре всех дифференцирований алгебры V. В алгебре L цепь подалгебр $\langle e_1\rangle \subset \langle e_1, e_2\rangle \subset \ldots \subset \langle e_1, e_2, \ldots e_n\rangle \subset \ldots \subset V \subset L$ выдерживает действие d. Напомним, что элемент x алгебры Ли L является энгелевым, если для всякого элемента y из L выполняется условие $[y, x, n] = 0$, причем число n зависит только от x. Здесь как обычно $[y, x, 1] = [y, x]$, а $[y, x, n] = [[y, x, n-1]x]$. Легко понять, что элемент d нашей алгебры L не является энгелевым, т.к. $[e_n, d, n-1] = e_1$ и потому L не вкладывается ни в какую локально нильпотентную ассоциативную алгебру.

Возрастающий ряд $0 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots L_i \subset L_{i+1} \subset \ldots L_j = L$ идеалов алгебры L называется центральным рядом, если $[L, L_{i+1}] \subset L_i$. Алгебра Ли L, обладающая возрастающим центральным рядом, называется ZA —алгеброй Ли. Алгебра $L = V + D$ является ZA —алгеброй, т.к. ряд $\langle e_1\rangle \subset \langle e_1, e_2\rangle \subset \ldots \subset \langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle \subset \ldots \subset V \subset L$ центральный. Следовательно, существуют ZA -алгебры Ли, не допускающие вложения ни в какую локально нильпотентную ассоциативную алгебру.

§ 2. Класс алгебр Ли, допускающих вложение

Длина центрального ряда в алгебре $L = V + D$ равна $\omega + 1$. Если ограничиться ZA -алгебрами с длиной центрального ряда $\leq \omega$, то для них необходимое вложение уже существует.

Теорема. ZA —алгебра Ли над полем K с длиной центрального ряда $\leq \omega$ обладает изоморфным вложением в локально нильпотентную ассоциативную алгебру над тем же полем.

Доказательство. Мы следуем идее Г.Биркгофа /I/ и используем аппарат весов. Пусть L - ZA -алгебра Ли и

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_{n-1} \subset L_n \subset \ldots L_\omega = L$$

есть центральный ряд алгебры L. Выберем в L базис, проходящий через этот ряд, и обозначим базисные элементы из $L_n \setminus L_{n-1}$ посредством e_{nm}. Базисные элементы из $L_n \setminus L_{n-1}$ упорядочим произвольным образом. Если же $n_1 < n_2$, то мы считаем, что $e_{n_1m_1} < e_{n_2m_2}$. Обозначим посредством $U(L)$ универсальную обертывающую алгебры L над K. По теореме Пуанкаре-Биркгофа -Витта /3/ базис $U(L)$ состоит из 1 и одночленов вида $e_{n_1m_1} e_{n_2m_2} \ldots e_{n_tm_t}$ в которых $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_t$ и $m_i \leq m_{i+1} \leq \ldots \leq m_j$, если $n_i = n_{i+1} = \ldots = n_j$. Умножение двух таких одночленов в $U(L)$ заключается в "приписывании" к одному одночлену другого и последующей процедуре "выпрямления" [I] полученного произведения, базирующейся на законе умножения элементов L :

$$[e_{n_1m_1}, e_{n_2m_2}] = \sum_{n_km_k} C^{n_km_k}_{n_1m_1n_2m_2} e_{n_km_k},$$

где $n_k < \min(n_1, n_2)$. В $U(L)$ этому соотношению отвечает соотношение:

$$(*)\ e_{n_1m_1} e_{n_2m_2} = e_{n_2m_2} e_{n_1m_1} + \sum_{n_km_k} C^{n_km_k}_{n_1m_1n_2m_2} e_{n_km_k}.$$

Для элементов u из $U(L)$ определим теперь следующим образом веса $w(u)$: мы считаем, что $w(e_{nm}) = \frac{1}{2^n}$, $w(e_{n_1m_1} e_{n_2m_2} \ldots e_{n_tm_t}) = \sum_{i=1}^{t} w(e_{n_im_i})$, а $w(u)$ равен наименьшему из весов одночленов, входящих в запись элемента u. Из соотношения $(*)$ следует, что "выпрямление" сохраняет нижнюю границу весов членов любого многочлена, т.к. справедливо неравенство $w(e_{n_1m_1}, e_{n_2m_2}) < w(e_{n_im_i})$ $1 \leq i \leq t$.

Возьмем теперь в $U(L)$ подпространство S, порожденное всеми одночленами веса $> \frac{1}{2}$. Из сохранения нижней границы весов при "выпрямлении" следует, что это подпространство является идеалом в $U(L)$. Идеал фактор-кольца $U(L)/S$, порожденный всеми элементами $e_{nm} + S$, локально нильпотентен. Так как линейных комбинаций элементов e_{nm} весов $>\frac{1}{2}$ нет, то различные элементы алгебры L лежат в разных классах вычетов по $\mathrm{mod}\, S'$ и потому L изоморфно вкладывается в указанный локально нильпотентный идеал ассоциативной алгебры $U(L)/S$.

§ 3. Класс ZA -групп, допускающих точное локально финитно стабильное представление

Приведем вначале нужные определения. Мы говорим, что задано представление группы G относительно абелевой группы A, если фиксирован гомоморфизм группы G в группу $\mathrm{Aut}\, A$ автоморфизмов абелевой группы A. В этом случае говорят также о паре (A,G) (см. /4/). Если задан гомоморфизм алгебры Ли L в алгебру $\mathrm{End}\, A$ эндоморфизмов абелевой группы A, то мы говорим, что задано представление алгебры Ли L относительно A, задана пара (A,L). Группа A называется областью действия G. Она может быть векторным пространством над полем. Пару (A,G) (аналогично (A,L)) называют точной, если для всякого элемента $g\in G$ ($l\in L$) можно указать такой элемент $x\in A$, что $x\circ g\neq x$ ($x\circ l\neq 0$). Символом $\circ$ здесь обозначено действие элемента из G (L) на элементы из абелевой группы A.

Пару (A,G) $((A,L))$ называют финитно стабильной, если в A существует такой ряд G —допустимых (L —допустимых) подгрупп

$$0=A_0<A_1<A_2<\cdot\cdot A_{i-1}<A_i<\ldots A_n=A,$$

в факторах которого G (L) действует тривиально, т.е. для $x\in A_i$ будет $x\circ g = x(\mathrm{mod}\, A_{i-1})$ ($x\circ l=0(\mathrm{mod}\, A_{i-1})$). Пару (A,G) /(A,L)/ называют локально финитно стабильной, если каждая конечно порожденная подгруппа $\Sigma<G$ (подалгебра $\Sigma<L$) действует в A финитно стабильно, т.е. если пара (A,Σ), действие в которой индуцировано G (L), финитно стабильна.

Докажем вначале, что существуют ZA —группы, не допускающие точного локально финитно стабильного представления абелевой областью действия

Пример. Пусть A есть свободная абелева группа счетного ранга со свободными образующими $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, A_n - подгруппа A, порожденная элементами $a_1, a_2, \dots, a_n$, t - автоморфизм A, определяемый своим действием на базисные элементы:

$$a_n t = \begin{cases} a_n \cdot a_{n-1}, & \text{если } n > 1, \\ a_1 & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Пусть G - полупрямое произведение групп A и $\{t\}$. Группа G является ZA-группой. Действительно, коммутатор $(a_n, t) \cdot a_n^{-1} \cdot a_n t = a_{n-1}$, поэтому ряд $A_1 \subset A_2 \subset \dots A_{n-1} \subset A_n \subset \dots A \subset G$ является центральным рядом.

Предположим, что группа G допускает точное локально финитно стабильное представление (V, G) над полем характеристики 0. Тогда элементы $g-1$, $g \in G$, из алгебры $End\, V$ нильпотентны, в частности, нильпотентен элемент $t-1$ и потому найдется такое число n, что $(t-1)^n = 0$.

Воспользуемся теперь таким утверждением, доказанным в работе Л.А.Симоняна /2/: если G содержит подгруппу Σ, нильпотентную класса $2n+1$ и имеющую элемент g с $(g-1)^n = 0$, то показатель энгелевости элемента g в Σ будет $\leq 2n$.

Возьмем в G в качестве Σ подгруппу $\{A_{2n+1}, t\}$. Элемент t имеет в Σ показатель энгелевости $2n+1$, т.к. $(a_{2n+1}, t, 2n) = a_1 \neq 1$, $(a_{2n+1}, t, 2n+1) = 1$. Но $(t-1)^n = 0$, следовательно, показатель энгелевости элемента t в Σ должен быть $\leq 2n$. Полученное противоречие означает, что группа G не допускает точного локально финитно стабильного представления над полем характеристики 0.

Группа G не допускает локально финитно стабильного представления и над полем характеристики p, ибо существование такого представления влечет периодичность группы, а группа G - без кручения.

Убедимся теперь, что группа G не допускает точного локально финитно стабильного представления относительно абелевой группы.

Предположим, что такое представление для G существует и A есть область представления. Пусть $\langle G \rangle$ - ассоциативная оболочка группы G в алгебре $End\,A$. Порожденная множеством $G-1$ подалгебра из $\langle G \rangle$ локально нильпотентна. Обозначим посредством P периодическую часть аддитивной группы алгебры $\langle G \rangle$. Так как P является идеалом в $\langle G \rangle$, то $G_p = G \cap (1+P)$ - нормальная подгруппа группы G. Докажем, что эта подгруппа периодична.

Пусть $1+x \in G_p$ и x - элемент порядка p, принадлежащий p —примарной компоненте группы P. Из равенств $px=0$ и $x^n=0$, выбирая k таким образом, чтобы было $p^k \geqslant n$, получим $(1+x)^{p^k} = 1+x^{p^k} = 1$. Случай, когда элемент x имеет порядок p^e, легко сводится к рассмотренному.

Группа G, однако, не имеет кручения. Следовательно, $G_p = 1$ и поэтому G изоморфно вкладывается в алгебру $\langle G \rangle / P$. Взяв тензорное произведение $Q \otimes (\langle G \rangle / P)$ и определив действие группы G на $Q \otimes (\langle G \rangle / P)$ регулярным образом, получим точное локально финитно стабильное представление группы G над Q. Полученное противоречие доказывает, что группа G не имеет точного локально финитно стабильного представления с абелевой областью действия.

В том, что у группы G нет нужного представления над Q можно убедиться и другим способом. Пусть $\overline{G}$ - пополнение группы G. В силу известной теоремы Федорова (/5/, с.421) группа $\overline{G}$ также является ZA —группой с длиной центрального ряда $\leqslant \omega$. Группе $\overline{G}$, как это доказано А.И.Мальцевым в работе /6/, отвечает определенная алгебра Ли L над полем Q рациональных чисел. Легко понять, что эта алгебра Ли совпадает с алгеброй Ли, построенной в §I, если в качестве исходного поля взять поле рациональных чисел. В работе /7/ автором приведено доказательство того, что полная локально нильпотентная без кручения группа $\overline{G}$ тогда и только тогда допускает точное локально финитно стабильное представление над Q, когда такое представление имеет отвечающая ей алгебра Ли L. Если группа G имеет точное локально финитно стабильное представление, то его имеет и группа $\bar{G}$, а с ней и алгебра L, что невозможно.

Из упомянутого результата работы /7/ и доказанной в §2 теоремы о вложении ZA —алгебры Ли в локально нильпотентную ассоциативную алгебру следует такая

Теорема. Всякая ZA —группа без кручения с длиной центрального ряда $\leq \omega$ допускает точное локально финитно стабильное представление.

Доказательство. Пусть G - ZA— группа без кручения с длиной центрального ряда $\leq \omega$. Пусть $\bar{G}$ - пополнение этой группы. Центральный ряд в $\bar{G}$ также имеет длину $\leq \omega$. Рассмотрим алгебру Ли L, отвечающую $\bar{G}$. Длина центрального ряда в L будет $\leq \omega$, поэтому L вкладывается в локально нильпотентную ассоциативную алгебру U над полем Q. Если V есть алгебра, получаемая из U присоединением единицы, то регулярное представление (V, U) является точным локально финитно стабильным представлением U, а значит и алгебры Ли .
Остается применить результат работы /7/.

§ 4. О локально конечномерных представлениях

В связи с примерами, построенными в §§I и 3, следует еще отметить, что и алгебра L, и группа G не вкладываются ни в какие локально конечномерные ассоциативные алгебры. Напомним, что локально конечномерной называется такая алгебра, в которой конечномерна каждая конечнопорожденная подалгебра.

Для группы G известно, что из вложимости локально нильпотентной без кручения группы G в локально конечномерную алгебру над полем характеристики 0 следует локально финитно стабильная представимость группы $G/Z(G)$ над тем же полем. Здесь $Z(G)$ - центр G. В нашем случае $G/Z(G) \cong G$, поэтому, если G вложима в локально - конечномерную алгебру, то она допускает локально финитно стабильное представление.

Аналогичный факт имеет место и для алгебры L .

Теорема. Если локально нильпотентная алгебра Ли L вкладывается в локально конечномерную ассоциативную алгебру над некоторым полем K , то фактор-алгебра $L/Z(L)$, где $Z(L)$ - центр L , вкладывается в локально нильпотентную ассоциативную алгебру над тем же полем.

Доказательство. Пусть A - локально конечномерная ассоциативная алгебра, содержащая L . Можно считать, не ограничивая общности, что A порождается множеством L .

Определим представление L дифференцированиями алгебры A , связав с элементами $\ell \in L$ дифференцирование $\bar{\ell}$, действующее на A по правилу: $a \circ \bar{\ell} = [a, \ell]$, где $[a, \ell] = a\ell - \ell a$. Алгебра дифференцирований, порожденная этими $\bar{\ell}$, изоморфна $\bar{L} = L/Z(L)$. Докажем, что ассоциативная алгебра, порожденная множеством $\bar{L}$ в алгебре $End\ A$, локально нильпотентна. Для этого проверим прежде всего, что каждое отображение $\bar{\ell}$ является нильпотентным эндоморфизмом.

Элемент ℓ является алгебраическим элементом как элемент локально конечномерной алгебры, поэтому найдется такое число n и такие элементы $\alpha_i (1 \leq i \leq n-1)$ из базисного поля, что $\ell^n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \ell^i$. Из этого равенства следует, что пространство $V_\ell(a)$, натянутое на элементы $\ell^i a \ell^j$, конечномерно, причем $\dim V_\ell(a) \leq n^2$. С другой стороны, элемент $\bar{\ell}$ является локально нильпотентным дифференцированием алгебры A ,т.к. алгебра L локально нильпотентна. Это означает, что для всякого элемента $a \in A$ можно указать такое m , зависящее, вообще говоря, от a и $\bar{\ell}$, что $a \circ \bar{\ell}^m = 0$. Но из неравенства $\dim V_\ell(a) \leq n^2$ следует, что $m \leq n^2$, т.е. число m не зависит от a . Следовательно, эндоморфизм $\bar{\ell}$ пространства A нильпотентен.

Из локальной нильпотентности алгебры $\bar{\ell}$ и того, что все ее элементы нильпотентны, следует локальная нильпотентность ассоциативной подалгебры алгебры $End\ A$, порожденной $\bar{L}$. Доказательство этого утверждения вытекает, например, из теоремы 23.1.3, приведенной в книге

М.И.Каргаполова и Ю.И.Мерзлякова /8/ ,с.2II .

Нужное заключение о невозможности вложения алгебры Ли $\mathcal{L}$ из §I в локально конечномерную ассоциативную алгебру следует из изоморфизма $\mathcal{L}/Z(\mathcal{L})\cong\mathcal{L}$. Отсюда следует также, что теорема Адо-Ивасава не допускает обобщения на локально конечномерные алгебры Ли, т.е.,что локально конечномерная алгебра Ли не вкладывается, вообщего говоря, в локально конечномерную ассоциативную алгебру.

ЛИТЕРАТУРА

I. Birkhoff G., Representations of Lie algebras and Lie groups by matrices.-Ann.Math.,-1937,vol.38,p.526-532.

2. Симонян Л.А. Некоторые примеры групп и алгебр Ли.- Сиб.мат.ж., I97I, т.I2, №4, с.837-843.

3. Семинар "Софус Ли".-М.,I967.

4. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем.-М.,I966.

5. Курош А.Г. Теория групп.-М.,I967.

6. Мальцев А.И. Нильпотентные группы без кручения.- Известия АН СССР, Серия матем.,I949,т.I3,с.20I-2I2.

7. Токаренко А.И.,Об энгелевых группах и алгебрах Ли.- В кн: Сборник работ по алгебре. Рига, I978,с.3I7-328.

8. Каргаполов М.И. Мерзляков Ю.И.,Основы теории групп.- М.,I977.

Алгебра и дискретная математика. Рига,1984

УДК 512.56:519.71

Я.П.Цирулис
ЛГУ им. П.Стучки

ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ КВАНТОВОЙ ЛОГИКИ

При т. наз. квантово-логическом подходе к аксиоматике квантовой механики с каждой физической системой S связывается некоторое,особым образом частично упорядоченное множество L, элементы которого интерпретируются как утверждения вида "при измерении значения такой-то наблюдаемой, (т.е. физической величины, связанной с S) результат лежит или должен лежать и т.п. в такой-то области числовой прямой". Само множество L тогда называют квантовой логикой системы S, и оно в зависимости от тех или иных исходных предпосылок физического, философского и математического характера наделяется алгебраической структурой определенного типа, отражающей и некоторые свойства конкретной системы. Каждое состояние системы представляется в L как вероятностная мера определенного вида. (Подробнее об этом см. в обзорах [5-7].) Мы не будем заниматься непосредственно этой тематикой, и от читателя не требуется знакомство с ней, хотя оно помогло бы оценить содержание работы в целом. Мы ставили себе цель продемонстрировать, что подобный подход может быть полезным и в совсем другой области, а также - описать возникающие при этом структуры и сравнить их с "традиционными". Вместо квантовой системы S мы будем иметь "черный ящик", перерабатывающий слова одного алфавита в слова другого (например, автомат). Роль наблюдаемых системы S будут играть входные последовательности, роль значений наблюдаемых - выходные последовательности черного ящика. Будем считать, что он, вообще говоря, недетерминированный, но не стохастический,поэтому вместо упомянутых выше вероятностных мер на L у нас появятся некоторые подмножества L, аналогичные главным фильтрам в решетках. Мы увидим, например, что в отличие от случая, типичного для физических систем, логика черного ящика не обязана быть даже ортомодулярным ортоупорядоченным множеством.

§I. Описание черного ящика

Предположим, что имеется черный ящик с одним входом и одним выходом, работающий в дискретном времени и следующим образом перерабатывающий слова в своем выходном алфавите X ("входные последовательности") в слова в выходном алфавите Y ("выходные последовательности"): если буквы произвольного слова α в X последовательно подаются на вход, то на выходе, также последовательно, появляются буквы из Y, образующие какое-либо слово β. Будем считать, что слово β, вообще говоря, не определяется однозначно словом α, что β и α всегда имеют одинаковую длину и что черный ящик работает "без предвосхищения". Типичным примером такого устройства является произвольный недетерминистический, или ND-автомат[8] - система (X, Y, Z, f, g), где как и выше X и Y - входной и выходной алфавиты, Z - множество внутренних состояний, f, g - соответственно функция переходов и функция выходов автомата, всюду определенные, но возможно, неоднозначные. Пусть X^*, Y^* - множества всех слов, включая пустое, в X, и, соответственно, в Y. Определим соответствие v из $X^* \times Z$ в Y^* следующим образом:

$(y_1 \cdots y_m) \in v(x_1, \dots x_m, z) \leftrightarrow n=m$ и для всех i $y_i \in g(x_i, z_i)$,

где $z_1 = z$, а $z_{j+1} \in f(x_j, z_j)$. Тогда, если автомат находится в начальном состоянии $z_0 \in Z$, то каждой входной последовательности $\alpha \in X^*$ в указанном выше смысле будет соответствовать любая из возможных последовательностей $\beta \in v(\alpha, z_0)$.

Чтобы точнее описать работу черного ящика в общем случае, введем ряд обозначений. Длину слова $\alpha \in X^* \cup Y^*$ обозначим через $|\alpha|$, а через Y^α обозначим множество всех слов из Y^* длины $|\alpha|$. Будем писать $\alpha \sqsubseteq \beta$, если α - начальный отрезок β, а β - продолжение α (равенство α и β не исключается). Не будем различать произвольные слова и их единичные множества. Если $\alpha \sqsubseteq \beta \in X^*$ и $L \subset Y^\beta$, обозначим через $L|\alpha$ множество начальных отрезков $\{\gamma \in Y^\alpha : \exists \gamma' \in L \ \gamma \sqsubseteq \gamma'\}$. Теперь мы можем сказать, что наш черный ящик реализует некоторое всюду определенное, но быть может, многозначное соответствие T из X^* в Y^*, обладающее свойствами

$$\alpha \in X^* \Rightarrow T(\alpha) \subset Y^{\alpha},$$
$$\alpha \subset \beta \in X^* \Rightarrow T(\alpha) = T(\beta)|\alpha .$$

По терминологии [8] это недетерминистический, или ND-оператор; мы для краткости будем называть T просто оператором. В рассмотренном выше примере каждое непустое множество состояний $M \subset Z$ определяет оператор T следующим образом:

$$T(\alpha) = \bigcup(\psi(\alpha, z) : z \in M).$$

В действительности любой ND-оператор подобным образом может быть реализован подходящим ND-автоматом, и даже при помощи одноэлементного множества M (см. [8], §II.4). Таким образом, при желании можно считать, что черный ящик - это некоторый "инициальный" ND-автомат. Однако мы вплоть до §5 не будем интересоваться внутренними состояниями нашего черного ящика, поэтому нам удобней отождествить его с самим оператором T. Будем называть черный ящик тривиальным, если всегда $T(\alpha) = Y^{\alpha}$, и детерминированным, если все множества $T(\alpha)$ одноэлементны.

§2. Логика черного ящика

Итак, пусть T - фиксированный в последующем ND-оператор, соответствующий нашему черному ящику. Выделим некоторое множество Q входных последовательностей, содержащее вместе с каждым членом и все его начальные отрезки. Элементы Q будем называть вопросами, а элементы множества $A :=$ $= \bigcup(T(\alpha) : \alpha \in Q)$ - возможными ответами черного ящика. Будем считать, что мы можем проводить с ним эксперименты, задавая ему любое число раз любые вопросы и фиксируя его ответы. Пару (α, K), где $K \subset T(\alpha), \alpha \in Q$, можно воспринять как сообщение о том, что в эксперименте на вопрос α был получен ответ, принадлежащий множеству альтернатив K (или как прогноз, что ожидаемый ответ будет принадлежать K). Интуитивно понятно, что такие сообщения не могут быть полностью независимыми даже для тривиального черного ящика: истинность одних из них влечет за собой истинность других и ложность третьих. Чтобы эксплицировать это интуитивное представление, определим на множестве $\mathbb{M}$ всех сообщений бинарное отношение следования $\prec$. Перед этим мы должны пополнить список обозначений.

Если $K, K' \subset T(\alpha)$, будем писать $K^{\perp}$ вместо $T(\alpha) \setminus K$ и $K \perp K'$ вместо $K \cap K' = \emptyset$. Если, кроме того, β - произвольный вопрос из Q, положим $K * \beta = \{\delta \in T(\beta) : \exists \gamma \in K \ \ \delta|\alpha \sqcap \beta = \gamma|\alpha \sqcap \beta\}$, где $\alpha \sqcap \beta$ - наибольший общий начальный отрезок слов α и β. В частности, если $\alpha \sqsubseteq \beta$, то $K * \beta$ - множество продолжений длины $|\beta|$ всех слов из K, а если $\beta \sqsubseteq \alpha$, то $K * \beta = K|\beta$. В общем случае $K \subset (K * \beta) * \alpha$, но если $\alpha \sqsubseteq \beta$, то $(K * \beta) * \alpha = K$.

Определим на $\mathbb{M}$ два двуместных отношения $\prec, \sim$ полагая, что

$$(\alpha, K) \prec (\beta, L) \iff K \subset M * \alpha \text{ и } M * \beta \subset L \text{ для некоторого } M \subset T(\alpha \sqcap \beta),$$

$$(\alpha, K) \sim (\beta, L) \iff K = M * \alpha \text{ и } L = M * \beta \text{ для некоторого } M \subset T(\alpha \sqcap \beta).$$

Отметим, что

$$(\alpha, K) \prec (\alpha, L) \iff K \subset L,$$
$$\alpha \sqsubseteq \beta \Rightarrow (\alpha, K) \sim (\beta, K * \beta),$$
$$(\alpha, K) \prec (\beta, K * \beta),$$
$$(\alpha, \emptyset) \sim (\beta, \emptyset) \text{ и } (\alpha, T(\alpha)) \sim (\beta, T(\beta)).$$

Лемма I. (а) $(\alpha, K) \prec (\beta, L) \iff (K * \beta) \subset L$,

(б) отношение $\prec$ рефлексивно и транзитивно,

(в) отношение $\sim$ является эквивалентностью на $\mathbb{M}$, причем

$$(\alpha, K) \sim (\beta, L) \iff (\alpha, K) \prec (\beta, L) \quad (\beta, L) \prec (\alpha, K),$$

(г) если $(\alpha, K) \prec (\beta, L)$, то $(\beta, L^{\perp}) \prec (\alpha, K^{\perp})$.

Доказательство. (а) проверяется непосредственно.

(б) Рефлексивность отношения $\prec$ очевидна. Чтобы проверить его транзитивность, допустим, что $(\alpha, K) \prec (\beta, L) \prec (\gamma, M)$ и положим $\sigma = \alpha \sqcap \beta$, $\tau = \beta \sqcap \gamma$. Ввиду (а) имеем, что $K * \beta \subset L$ и $L * \gamma \subset M$. Отсюда $(K * \beta) * \gamma \subset M$. Далее, если $\sigma \sqsubseteq \tau$, то $\alpha \sqcap \gamma = \sigma$ и $(K * \beta) * \gamma = ((K|\sigma) * \tau) * \gamma = (K|\sigma) * \gamma$, а если $\tau \sqsubseteq \sigma$, то $\alpha \sqcap \gamma = \tau$ и аналогично предыдущему $(K * \beta) * \gamma = (K|\tau) * \gamma$. В обоих случаях $K * \gamma \subset (K|\alpha \sqcap \beta) * \gamma \subset M$, т.е. $(\alpha, K) \prec (\gamma, M)$. а других случаев нет. поскольку $\sigma, \tau \sqsubseteq \beta$.

(в) вытекает непосредственно из определений.

(г) также вытекает из определения $\prec$, если учесть, что для $M \subset T(\alpha \sqcap \beta)$ имеем $(M * \beta)^{\perp} = M^{\perp} * \beta$ и $(M * \alpha)^{\perp} = M^{\perp} * \alpha$.

Пусть $\mathbb{L} = \mathbb{M}/\sim$; это множество будем называть логикой рассматриваемого черного ящика (см. введение). Элементы будем называть суждениями. Обозначим через $\leq$ отношение порядка, индуцируемое на $\mathbb{L}$ отношением $\prec$, а через 0 и I - соответственно суждения $|(\alpha, \emptyset)|$ и $|(\alpha, T(\alpha))|$, где α - произвольно. Очевидно, 0 - наименьший, а I - наибольший элемент упорядоченного множества $\mathbb{L}$. На $\mathbb{L}$ можно еще определить одноместную операцию $^{\perp}$, полагая $|(\alpha, K)|^{\perp} = |(\alpha, K^{\perp})|$. Из определений и леммы I(г) вытекает

<u>Теорема 2</u>. Операция $^{\perp}$ является ортодополнением на $\mathbb{L}$, т.е. для любых $a, b \in \mathbb{L}$

$$a^{\perp\perp} = a \;, \quad a \leq b \Rightarrow b^{\perp} \leq a^{\perp} \;, \quad \sup(a, a^{\perp}) = 1 .$$

Напомним, что упорядоченное множество, на котором задана операция ортодополнения, часто называют ортоупорядоченным множеством. Точную верхнюю (нижнюю) грань множества $X \subset \mathbb{L}$ обозначим через $\vee X$ (соответственно $\wedge X$), или через $x \vee y$ (соответственно $x \wedge y$), когда $X = \{x, y\}$. Частичные операции объединения и пересечения $\vee, \wedge$ связаны между собой правилами де Моргана:

$$a \vee b = (a^{\perp} \wedge b^{\perp})^{\perp} , \quad a \wedge b = (a^{\perp} \vee b^{\perp})^{\perp} .$$

Будем говорить, что два суждения a, b ортогональны, и писать $a \perp b$, если $a \leq b^{\perp}$. При этом

$$a \perp b \Leftrightarrow b \perp a \;, \quad a \perp a \Leftrightarrow a = 0 \;, \quad a \leq b \perp c \Rightarrow a \perp c .$$

§3. Множество внутренних событий черного ящика

С точностью до изоморфизма логику $\mathbb{L}$ можно построить и используя совсем другую идею. Мы увидим, что $\mathbb{L}$ изоморфно некоторому множеству множеств, ортоупорядоченному отношением включения.

Будем называть (выходной) конфигурацией черного ящика любую функцию $\omega \in A^{Q}$, такую, что при любых a, b из Q

$$\omega(\alpha) \in T(\alpha),$$

$$\alpha \sqsubset \beta \Rightarrow \omega(\alpha) \subset \omega(\beta).$$

Тогда, в частности, $\omega(\alpha) \in \omega(\beta) * \alpha$ и, если $\gamma \in T(\alpha)$, $\delta \in T(\beta)$ - две выходные последовательности, имеющие общий начальный отрезок длины $|\alpha \sqcap \beta|$, то можно подобрать такую конфигурацию ω, что $\omega(\alpha)=\gamma$ и $\omega(\beta)=\delta$. Пусть Ω - множество всех конфигураций, и пусть E - множество всех подмножеств Ω. Элементы E будем называть событиями. Если $\alpha \in Q$ и $K \subset T(\alpha)$, то обозначим через $[\alpha, K]$ множество $\{\omega \in \Omega : \omega(\alpha) \in K\}$; о событиях такого вида будем говорить, что они (экспериментально) наблюдаемы.

Пусть E_0 - множество всех наблюдаемых событий. Оно, очевидно, замкнуто относительно операции дополнения $'$ ($[\alpha,K]' = [\alpha, K^{\perp}]$) и содержит также нулевое событие $\emptyset$ и универсальное событие Ω, но не обязательно замкнуто относительно теоретико-множественного объединения, а значит и пересечения. Понятно, что $'$ - ортодополнение на E_0, т.е. $(E_0, \subset, ')$ - ортоупорядоченное множество.

Следующая лемма, между прчим, еще раз показывает, что отношение $\dashv$ на $\mathbb{M}$ транзитивно.

<u>Лемма 3</u>. $[\alpha,K] \subset [\beta,L]$ тогда и только тогда, когда $(\alpha,K) \dashv (\beta,L)$.

Доказательство. Допустим, что при любом ω $\omega(\alpha) \in K$ влечет $\omega(\beta) \in L$, и выберем $\delta \in K * \beta$. Тогда в K имеется такое слово γ, что $\delta \in \gamma * \beta$ и $\gamma|\alpha \sqcap \beta = \delta|\alpha \sqcap \beta$. Следовательно, для подходящей конфигурации ω $\gamma = \omega(\alpha)$ и $\delta = \omega(\beta)$, а это ввиду сделанного допущения и означает, что $\delta \in L$. В итоге $K * \beta \subset L$. Наоборот, если $K * \beta \subset L$, то для любого ω, такого, что $\omega(\alpha) \in K$,

$$\omega(\beta) \in \omega(\alpha \sqcap \beta) * \beta \subset K * \beta \subset L,$$

так что из $\omega(\alpha) \in K$ всегда вытекает $\omega(\beta) \in L$. Остается напомнить лемму I(a).

Как следствие получаем обещанный в начале параграфа результат.

<u>Теорема 4</u>. Ортоупорядоченные множества $(\mathbb{L}, \leq, {}^{\perp})$ и $(E_0, \subset, ')$ изоморфны. Иначе: логика $\mathbb{L}$ изоморфно вкладывается в алгебру событий E.

Соответствующий изоморфизм $f: |(\alpha,K)| \mapsto [\alpha,K]$ сохраняет, разумеется, и все существующие точные верхние и нижние грани. Если теоретико-множественное объединение (пересечение) двух наблюдаемых событий входит в E_0, то оно будет также их т.в.г. (т.н.г.) в E_0, но обратное, вообще говоря, неверно (см. теорему 8 ниже). Отметим в этой связи, что если $\alpha \in Q$ и $\{K_i\}_{i \in I}$ - семейство подмножеств $T(\alpha)$, то

$$\bigcup([\alpha, K_i] : i \in I) = [\alpha, \bigcup(K_i : i \in I)];$$
$$\bigcap([\alpha, K_i] : i \in I) = [\alpha, \bigcap(K_i : i \in I)].$$

§4. Структура множества $\mathbb{L}$

В первой половине параграфа будем изучать свойства операций объединения и пересечения в $\mathbb{L}$. Зафиксируем три произвольных суждения a, b, c. Вплоть до теоремы 8 включительно будем считать, что $a = |(\alpha, K)|$, $b = |(\beta, L)|$, $c = |(\gamma, M)|$, а также, что $a' = |(\beta, K * \beta)|$, $b' = |(\alpha, L * \alpha)|$. Очевидно, $a \leq a'$, $b \leq b'$, $a \vee b' = |(\alpha, K \cup L * \alpha)|$, $a' \vee b = |(\beta, K * \beta \cup L)|$.

<u>Лемма 5</u>. Если $\beta \sqcap \gamma \sqsubset \alpha \sqcap \gamma$ и $b \leq c$, то $b' \leq c$.

Доказательство. Пусть $\sigma = \alpha \sqcap \gamma$, $\tau = \beta \sqcap \gamma$. Тогда имеем

$$(L * \alpha) * \gamma = ((L * \alpha) | \sigma) * \gamma = ((((L | \tau) * \sigma) * \beta) | \sigma) * \gamma =$$
$$= ((L | \tau) * \sigma) * \gamma = (L | \sigma) * \gamma = L * \gamma,$$

откуда ввиду леммы I(a) и выбора γ вытекает требуемое. Проверку деталей предоставляем читателю.

<u>Лемма 6</u>. Если $a, b \leq c$, то $a \vee b' \leq c$ или $a' \vee b \leq c$.

Доказательство. Возможны два случая: $\beta \sqcap \gamma \sqsubset \alpha \sqcap \gamma$ или $\alpha \sqcap \gamma \sqsubset \beta \sqcap \gamma$. Если $a, b \leq c$, то ввиду предыдущей леммы в первом случае $b' \leq c$ и далее $a \vee b' \leq c$, а во втором - аналогично $a' \vee b \leq c$.

Из этой леммы вытекает интересное и полезное следствие. Если существует объединение $a \vee b$, то разумеется, $a \vee b \leq a \vee b'$ и $a \vee b \leq a' \vee b$. . Вто же время в силу леммы имеет место по крайней мере одно из обратных неравенств. Наоборот, если например, $a \vee b' \leq a' \vee b$, то ввиду леммы 6 $a \vee b'$ - наименьшая из верхних граней пары $\{a, b\}$, и аналогично, если $a' \vee b \leq a \vee b'$. Таким образом, нами доказана

<u>Теорема 7</u>. Объединение a и b существует в том и только в том случае, когда суждения $a \vee b'$ и $a' \vee b$ сравнимы, и тогда оно равно наименьшему из них.

Будем писать $a \between b$, если имеется слово $\delta \in Q$ и такие множества $K', L' \subset T(\delta)$, что $a = |(\delta, K')|$, $b = |(\delta, L')|$. В этом случае, разумеется, $a \vee b$ существует и равно $|(\delta, K' \cup L')|$. Иногда имеет место и обратное.

Следствие I. Если $a \perp b$, то $a \vee b$ существует только тогда, когда $a \downarrow b$.

Доказательство. Пусть $a \perp b$, т.е. $b \le a^\perp$. Тогда по лемме 5 (с $a^\perp$ вместо c) $b' \le a^\perp$ или, что то же, $a \le b'^\perp$. Еще раз применим эту лемму (с a вместо b, α вместо β и $b'^\perp$ вместо c); получим, что $a' \le b'^\perp$; Теперь, учитывая теорему, допустим, что $a \vee b = a \vee b' \le a' \vee b$. Тогда, в частности, должно быть $b' \le a' \vee b \le b'^\perp \vee b$, откуда $b' \le b$. Итак, $b' = b$; если же $a \vee b = a' \vee b \le a \vee b'$, то аналогично $a' = a$. В обоих случаях $a \downarrow b$.

Замечание. Предположение об ортогональности a и b здесь существенно. Утверждение нельзя также обобщить для большего числа суждений. Из-за ограниченного объема статьи мы не можем привести подтверждающие это контрпримеры.

Ортоупорядоченное множество называют ортомодулярным, если

$$a \perp b \Rightarrow (a \vee b \text{ существует и } b = (a \vee b) \wedge a^\perp).$$

Обычно предполагают, что квантовая логика является ортомодулярным ортоупорядоченным множеством или даже решеткой [5-7]. В противном случае этому имеем

Следствие 2. Множество $\mathbb{L}$ ортомодулярно тогда и только тогда, когда множество Q линейно упорядочено отношением $\subset$.

Доказательство. Если $\mathbb{L}$ ортомодулярно, то из $a \perp b$ всегда вытекеет $a \downarrow b$. Это невозможно, если Q не линейно. Наоборот, если Q линейно, то всегда $a \downarrow b$; более того, если $a \perp b$, то в определении $\downarrow$ $K' \cap L' = \phi$, поэтому $L' = (K' \cup L') \cap K'^\perp$. Следовательно, $(a \vee b) \wedge a^\perp = b$.

Мы можем уточнить связь между операциями $\vee$ в $\mathbb{L}$ и $\cup$ в $\mathbb{E}$.

Теорема 8. $[\gamma, M] = [\alpha, K] \cup [\beta, L]$ тогда и только тогда, когда $c = a \vee b$ и для любого δ из M $|(\gamma, \delta)| \le a$ или $|(\gamma, \delta)| \le b$.

Доказательство. Левая часть утверждения означает, что

$$[\alpha, K] \subset [\gamma, M],\ [\beta, L] \subset [\gamma, M],\ [\gamma, M] \subset [\alpha, K] \cup [\beta, L].$$

Первые два из этих включений ввиду теоремы 4 можно заменить на неравенства $a \le c$, $b \le c$; третье же перепишем в виде

$$\forall \omega (\omega(\gamma) \in M \rightarrow \omega(\alpha) \in K \vee \omega(\beta) \in L).$$

Но что означает здесь квантор "для произвольного ω"? В данном контексте не различимы конфигурации, имеющие одинаковые значения на каждом из трех слов α, β, γ . В свою очередь, если $\omega(\gamma)$ зафиксировано, то $\omega(\alpha)$ и $\omega(\beta)$ должны, как мы знаем, удовлетворять условиям $\omega(\alpha) \in \omega(\gamma) * \alpha$, $\omega(\beta) \in \omega(\gamma) * \beta$ и могут быть любыми в этих пределах. Итак, на следующем шаге равносильных преобразований получаем

$$\forall \delta \in M \ (\delta * \alpha \subset K \vee \delta * \beta \subset L).$$

Ввиду леммы I(a) это означает, что для любого δ из M $(\gamma, \delta) \prec (\alpha, K)$ или $(\gamma, \delta) \prec (\beta, L)$, т.е. $|(\gamma, \delta)| \leq a$ или $|(\gamma, \delta)| \leq b$. Из этого вытекает также, что любая верхняя грань a и b превышает c; вместе с полученным ранее это означает, что $c = a \vee b$.

Вкратце сравним структуру логики $\mathbf{L}$ с некоторыми другими структурами, возникающими при логическом подходе к квантовой механике.

Пусть множество $X \subset \mathbf{L}$ удовлетворяет условиям

$$1 \in X, \quad a \in X \to a^{\perp} \in X, \quad a, b \in X \Rightarrow (a \wedge b = 0 \Rightarrow a \perp b),$$

$$a, b \in X \Rightarrow a \vee b \text{ существует и принадлежит } X.$$

Тогда $0 \in X$ и для всех a, b из X $a \wedge b$ также существует и принадлежит X. Нетрудно видеть, что в системе $(X, \wedge, ^{\perp})$ выполняются известные аксиомы Фринка для булевых алгебр (см. [3], [4]). Будем поэтому называть такое множество X булевой алгеброй в $\mathbf{L}$ (ср. с определением 4.3 в [I]). Например, для любого $\alpha \in Q$ множество $\mathbf{L}_{\alpha}$ всех суждений вида $|(\alpha, K)|$ является булевой алгеброй в $\mathbf{L}$, ибо $|(\alpha, K \cup L)| = |(\alpha, K)| \vee |(\alpha, L)|$. Более того, эта булева алгебра полна, а пересечение $\mathbf{L}_{\alpha} \cap \mathbf{L}_{\beta}$ является полной подалгеброй как $\mathbf{L}_{\alpha}$, так и $\mathbf{L}_{\beta}$. В частности, семейство $\{\mathbf{L}_{\alpha}\}_{\alpha \in Q}$ совместно в смысле [I], [2]. Следуя примеру I.7 из [I], определим на $\mathbf{L}$ двуместную частичную операцию $\triangledown$ и двуместное отношение $\lhd$ следующим образом:

$$a \triangledown b = c \Leftrightarrow a \downarrow b \text{ и } a \vee b = c; \quad a \lhd b \Leftrightarrow a \downarrow b \text{ и } a \leq b;$$

определим также для каждого $n > 2$ отношение C_n на $\mathbf{L}$ при помощи условия

$$C_n(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbf{L}_{\alpha} \text{ для некоторого } \alpha \in Q.$$

Как указано в [I] (см. также [2], определение А.I), полученная так система $(\mathbf{L}, \{C_n\}_{n \geq 2}, \triangledown, ^{\perp}, 1)$ является т. наз. частичной булевой алгеброй в широком смысле. Добавим лишь, что из определения отношения $\lhd$ вытекает, что $\leq - \lhd^2$, в частности, $\leq$ является транзитивным замыканием $\lhd$.

Будем называть множество $X \subset \mathbb{L}$ когерентным, если $X \subset \mathbb{L}_\alpha$ для некоторого α из Q, и обозначим через $\mathbb{K}$ класс всех когерентных подмножеств $\mathbb{L}$. Он обладает следующими свойствами:

I) $\cup(X : X \in \mathbb{K}) = \mathbb{L}$,

2) $X \in \mathbb{K},\ Y \subset X \Rightarrow Y \in \mathbb{K}$,

3) $X \in \mathbb{K} \Rightarrow \vee X$ и $\wedge X$ существуют,

4) $X \in \mathbb{K} \Rightarrow X$ солержится в некоторой когерентной полной и атомной булевой алгебре в $\mathbb{L}$.

Нам неизвестно, могут ли существовать в $\mathbb{L}$ некогерентные булевы алгебры. Нерешен и другой интересный вопрос, касающийся погружения $\mathbb{L}$ в $\mathbb{E}$, какие множества событий соответствуют когерентным множествам суждений. Пусть X - некоторое множество суждений, и пусть X^* - множество, событий соответствующих им при изоморфизме теоремы 4. Несложная проверка показывает, что если $X \in \mathbb{K}$, то полное поле множеств (т.е. полная булева подалгебра), порождаемое множеством X^* в $\mathbb{E}$, полностью включено в $\mathbb{E}_0$. Весьма вероятно, что это свойство множества X^* также и достаточно для того, чтобы X было когерентным, однако мы не обладаем доказательством этого.

§5. Состояния черного ящика

Разумно попытаться хотя бы частично разъяснить многозначность оператора T тем, что черный ящик обладает некоторым множеством внутренних состояний и в начале эксперимента может находиться в любом из них. Будем считать, что задано некоторое состояние, если задана информация, позволяющая уменьшить априорную неопределенность ответа на произвольный вопрос из Q. При этом два состояния будем отождествлять, если они для каждого вопроса дают одинаковые множества возможных ответов. Таким образом, для нас состояние - это фактически соответствие из Q в A, не обязательно функциональное. Такое соответствие s должно быть согласовано со строением черного ящика; потребуем, чтобы

$$\alpha \in Q \Rightarrow s(\alpha) \subset T(\alpha),$$

$$\alpha \subset \beta \in Q \Rightarrow s(\alpha) = s(\beta)|\alpha$$

(ср. с определением конфигурации в §3). Наоборот, любое соответствие описанного вида будем рассматривать как состояние. Подчеркнем, что мы не требуем, чтобы состояние было всюду определенным на Q : однако тогда оно должно быть нигде неопределенным. Для математических целей нам будет удобно допускать такое несобственное состояние.

Пусть Σ - множество всех состояний рассматриваемого черного ящика. В частности, $\Omega\subset\Sigma$. Будем говорить, что состояние s_1 тоньше s_2 и писать $s_1\subset s_2$, если $s_1(\alpha)\subset s_2(\alpha)$ для любого α из Q. Отношение $\subset$ является частичным порядком на Σ с наибольшим элементом $T|Q$ и наименьшим элементом - несобственным состоянием. Соответствие, $s_1\cup s_2$, определяемое условием

$$(s_1\cup s_2)(\alpha) = s_1(\alpha)\cup s_2(\alpha),$$

где $s_1, s_2\in\Sigma$, само является состоянием, которое будем называть смесью состояний s_1 и s_2. Аналогично определяется смесь любого множества состояний. Заключаем, что множество Σ образует полную решетку относительного $\subset$. Конфигурации мы теперь будем называть детерминированными состояниями. Отметим, что в силу аксиомы выбора для каждого собственного состояния имеются детерминированные, которые тоньше его. Оно даже является смесью всех их, поэтому решетка Σ атомическая (точечная), и Ω служит множеством всех ее атомов.

Мы покажем, что понятие состояния можно описать непосредственно в терминах логики $\mathbf{L}$. Докажем сперва один вспомогательный результат.

Лемма 9. В определении состояния второе условие можно заменить на следующее:

$$(\alpha, K)\prec(\beta, L),\ s(\alpha)\subset K \Rightarrow s(\beta)\subset L$$

Доказательство. Пусть соответствие s из Q в A выбрано так, что $s(\alpha)\subset T(\alpha)$ для всех α из Q. Допустим, что s - состояние и что $(\alpha, K)\prec(\beta, L)$, а $s(\alpha)\subset K$. Тогда

$$s(\beta)=(s(\beta)|\alpha\sqcap\beta)*\beta=(s(\alpha)|\alpha\sqcap\beta)*\beta=s(\alpha)*\beta\subset K*\beta\subset L.$$

Наоборот, допустим, что выполнено условие из леммы и что $\alpha\sqsubseteq\beta$. Тогда $(\beta, s(\beta))\prec(\alpha, s(\beta)|\alpha)$ и поэтому $s(\alpha)\subset s(\beta)|\alpha$ (ибо $s(\beta)\subset s(\alpha)$). Обратное включение установим следующим образом: так как $(\alpha, s(\alpha))\prec(\beta, s(\alpha)*\beta)$ и $s(\alpha)\subset s(\beta)$, из допущения получаем, что $s(\beta)\subset s(\alpha)*\beta$; далее

$$s(\beta)|\alpha \subset (s(\alpha)*\beta)|\alpha = s(\alpha).$$

Таким образом, $s(\alpha)=s(\beta)|\alpha$, т.е. s - состояние.

Фильтром на $\mathbb{L}$ будем называть любое подмножество $F\subset\mathbb{L}$, обладающее свойствами

$$a\in F\,,\ a\leq b \Rightarrow b\in F,$$

$$a,b\in F,\ a\downarrow b \Rightarrow a\wedge b\in F.$$

Если вместо второго из этих условий F удовлетворяет более сильному условию

$$X\subset F,\ X\in\mathbb{K} \Rightarrow \wedge X\in F.$$

то будем называть фильтр F полным. Например, $\{1\}$ и $\mathbb{L}$ являются полными фильтрами, которые будем называть соответственно тривиальным и собственным. Отметим, что для фильтра F пересечение $F\cap\mathbb{L}_\alpha$ не обязательно будет булевым фильтром в $\mathbb{L}_\alpha$. Максимальные несобственные фильтры будем называть, как обычно, ультрафильтрами. Пересечение любого множества фильтров является снова фильтром, притом полным, если таковы все исходные фильтры. Итак, множество $\mathbb{F}$ всех фильтров - ограниченная решетка, а множество $\mathbb{F}_0$ всех полных фильтров - полная ее подрешетка.

Теорема I0. Пусть s - произвольное состояние, а F - полный фильтр. Тогда

(а) множество $s^{\blacktriangledown}:=\{|(\alpha,K)|: s(\alpha)\subset K\}$ является полным фильтром,

(б) соответствие F° из Q в A , определяемое условием

$$F^{\circ}(\alpha)=\bigcap(K: |(\alpha,K)|\in F),$$

является состоянием,

(в) $s^{\blacktriangledown\circ}=s$,

(г) $F^{\circ\blacktriangledown}=F$.

Доказательство. (а) Допустим, что $|(\alpha,K)|\leq|(\beta,L)|$ и что $|(\alpha,K)|\in s^{\blacktriangledown}$. Это означает, в частности, что $s(\alpha)\subset K$, поэтому согласно лемме $s(\beta)\subset L$, т.е. $|(\beta,L)|\in s^{\blacktriangledown}$. Далее, если имеется семейство $\{|(\alpha_i,K_i)|\}_{i\in I}$, причем $|(\alpha_i,K_i)|\in s^{\blacktriangledown}$ при всех i, а $\{|(\alpha_i,K_i)|: i\in I\}\in\mathbb{K}$, то в Q найдется такое α , что для всех i $\alpha_i=\alpha$. Тогда

$$\wedge(|(\alpha_i,K_i)|: i\in I)=|(\alpha,\bigcap(K_i: i\in I))|\in s^{\blacktriangledown}.$$

Таким образом, $s^{\blacktriangledown}$ - полный фильтр.

(б) Очевидно, $F^{\circ}(\alpha)\subset T(\alpha)$. Теперь, имея в виду лемму, допустим, что $(\alpha,K)\dashv(\beta,L)$ и $F^{\circ}(\alpha)\subset K$. Но

$$F^{\bullet}(\alpha)\subset K \Longleftrightarrow \bigcap(K' : |(\alpha,K')|\in F)\subset K \Longleftrightarrow |(\alpha,K)|\in F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(\beta,L)|\in F \Longleftrightarrow \bigcap(L' : |(\beta,L')|\in F)\subset L \Longleftrightarrow F^{\bullet}(\beta)\subset L .$$

Итак, $F^{\bullet}$ - состояние.

(в) Имеем

$$\gamma\in s^{\blacktriangledown\bullet}(\alpha) \Longleftrightarrow \forall K(|(\alpha,K)|\in s^{\blacktriangledown}\rightarrow \gamma\in K) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall K(s(\alpha)\subset K\rightarrow \gamma\in K) \Longleftrightarrow \gamma\in s(\alpha) .$$

Следовательно,

(г) $|(\alpha,K)|\in F^{\bullet\blacktriangledown}$ в том и только в том случае, когда $F^{\bullet}(\alpha)\subset K$. Но последнее, как мы уже выдели в (б), равносильно $|(\alpha,K)|\in F$. Поэтому $F^{\bullet\blacktriangledown}=F$.

<u>Следствие</u>. Преобразования $s\mapsto s^{\blacktriangledown}$ и $F\mapsto F^{\bullet}$ взаимно обратны и устанавливают антиизоморфизм между решеткой состояний черного ящика и решеткой полных фильтров на $\mathbb{L}$. При этом множеству всех детерминированных состояний соответствует множество всех полных ультрафильтров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Czelakowski J. Partial boolean algebras in a broader sense.- Stud. Log., 1979, vol.38, N1, p.1-16.
2. Czelakowski J. Partial Boolean algebras in a broader sense as a sematics for quantum logic.- Reports Math. Log., 1981, N 11, p.132-180.
3. Frink O. Representations of Boolean algebras.- Bull. Amer.Math.Soc., 1941, vol.47, p.755-756.
4. Frink O. Pseudo-complements in semi-lattices.- Duke Math. J., 1962, vol.29, p.504-514.
5. Greechie R.J., Gudder S.P. Quantum logic.- In: The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics I. Dordrecht: D.Reidel, 1975, p.545-575.
6. Gudder S.P. On the quantum logic approach to quantum mechanics.- Communs Math.Phys., 1969, vol.12, N1, p.1-15.
7. Gudder S.P. A survey of axiomatic quantum mechanics.- In: The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics II, Dordrecht: D.Reidel, 1979, p.323-363.
8. Starke P.H. Abstrakte Automaten.-Berlin: VEB Deutsher Verl.Wissensh., 1969, 392 S.

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник научных трудов

Редакторы: В.Плоткин, Р.Павлова
Технический редактор Н.Аппель
Корректор М.Литвинова

Подписано к печати II.04.84 , ЯТ 09121 . Ф/б 60x84/I6.
Бумага № I. I0,5 физ.печ.л. 9,8 усл.печ.л.7,8 уч.-изд.л.
Тираж 350 экз. Зак.№ 621. Цена I р.I5 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 226098, б. Райниса, I9
Отпечатано в типографии, Рига 226050,ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 519.713.3

Анджанс А.В. Возможности автоматов при обходе пространства. - В кн.:Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1984, с. 3-13.

Исследуется вопрос о том, какие семейства конечных автоматов, снабжённых метками,магазинами, стеками и флажками, могут обойти всё трёхмерное пространство без недоступных клеток, а какие не могут.

Библиог. 7 назв., рис.2.

УДК 512.7

Бойко С.Н. Автоморфизмы сплетений автоматов. - В кн.:Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П.Стучки,1984 с. 14-26.

В статье изучаются автоморфизмы сплетений автоматов треугольного типа и приводится их описание.

Библиог. 2 назв.

УДК 519.4

Вовси С.М., Матвеев А.А. Относительные радикалы и корадикалы мультиоператорных групп. - В кн.: Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1984, с.27-32.

Вводится понятия ρ -радикального и корадикального классов Ω -групп, где ρ -некоторое отношение между Ω -группой и её Ω -подгруппой. Доказывается, что между такими классами имеется естественное соответствие Галуа, и даётся характеристика ρ -радикальных и ρ -корадикальных классов относительно этого соответствия.

Библиог. 5 назв.

УДК 512.57/579

Гварамия А.А. Теорема Мальцева о квазимногообразиях для многосортных алгебр. - В кн.: Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П. Стучки,1984, с.33-45.

Даётся инвариантная характеристика квазимногообразий и псевдомногообразий многосортных алгебр.

Библиог. 9 назв.

УДК 519.76

Детловс В.К. Обобщённые формальные мотивы. – В кн.: Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1984, с. 46–52.

Предлагается семейство понятий формальных мотивов к которому приводит обобщение F -мотива М. Бороды. Каждое из этих понятий даёт возможность алгорифмической сегментации мелодии.

Библиог. 4 назв., рис.7.

УДК 519.6

Земитис А.А. Об использовании дискретизации условия разрешимости одной задачи для гармонических функций. – В кн.: Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1984, с. 60–64.

В работе рассматривается численный метод нахождения нормальной производной на границе области решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Метод основан на интервальном соотношении, связывающего нормальную и касательную производную гармонической функции на границе области.

Библиог. 2 назв.

УДК 519.48

Липянский Р.С. О триангулируемости p -алгебр Ли. – В кн.: Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1984, с. 65–80.

В работе решён вопрос о существовании триангулируемого представления алгебр Ли с предварительно заданной ступенью стабильности коммутанта. Эта задача связана со следующим вопросом : каковы тождества p -алгебры Ли треугольных матриц $T_p(n,K)$ и тождества алгебры Ли треугольных матриц $T(n,K)$ n-ого порядка над полем K . Излагагаемые в статье результаты о тождествах алгебры Ли кратко изложены в [3] .

Библиог. 5 назв.

УДК 590.4

Пивоваров Г.В. Решёточные пары. – В кн.: Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1984, с.81–95

Пусть дано представление (A,Γ), где A - множество или линейное пространство, а Γ - группа. Рассматривается решётка подпар пар из (A,Γ) - $S(A,\Gamma)$. В настоящей работе изучаются связи между строением этой решётки и строением пары (A,Γ).

Библиог. 2 назв.

УДК 519. 57/579

Плоткин Е.Б. Многосортные мультиоператорные группы. - В кн.: Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1984, с. 96-104.

Целью работы является приведение предварительных сведений об идеалах в многоосновных мультиоператорных группах. В частности, выясняется строение идеалов для групповых автоматов, супералгебр Ли, мультипредставлений. Изучается также структура некоторых гомоморфизмов в категории мультиоператорных групп.

Библиог. 2 назв.

УДК 512.647, 512.872.7

Плоткина Т.Л. О некоторых свойствах нормализующей константы $G(N)$ в уравнении статистического распределения заявок в сети. - В кн. : Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1984, с. 105-122.

Рассматриваются некоторые свойства функции $G(N)=\sum\prod_{i=1}^{M}x_i^{n_i}$, где x_i - действительные положительные числа, а сумма берётся по всем n_i таким, что $\sum_{i=1}^{M}n_i=N$, а также связанной с ней функции $p=G(N-1)/G(N)$. Приведённые результаты применяются при решении задачи оптимизации параметров баз данных.

Библиог. 3 назв.

УДК 512.7

Спектор В.Е. Решётка обыкновенных многообразий представлений абелевых групп конечной экспоненты.-В кн.:Алгебра и дискретныя математика.Рига:ЛГУ им.П.Стучки,1984, с.123-133.

Пусть $\omega\mathfrak{A}_n$ - решётка представлений абелевых групп конечной экспоненты n. В работе описывается её строение, находятся атомы этой решётки, минимальные и максимальные подмногообразия $\omega\mathfrak{A}_n$, приводятся конкретные примеры.

Библиог. I назв., рис I.

IY

УДК 517.I2

Тверской А.А. О конструктивизируемости формальных арифметических структур.- В кн.: Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П.Стучки,I984, с. I34-I36.

Обсуждаются примеры формальных структур с точки зрения возможности конструктивизации их в нестандартных моделях арифметики Пеано.

Библиог. 5 назв.

УДК 5I9.48

Токаренко А.И. Обобщение одной теоремы Г.Биркгофа.- В кн.: Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, I984, с. I37-I45.

В работе доказывается ,что алгебра Ли,обладающая возрастающим центральным рядом длины $\leq \omega$, вкладывается в локально нильпотентную ассоциативную алгебру. Доказательство проводится с помощью метода весов. Приводятся примеры,показывающие, что для алгебр Ли с возрастающими центральными рядами большей длины такое вложение может уже не существовать. Обсуждаются ,кроме того, некоторые другие вопросы о вложениях.

Библиог. 8 назв.

IДК 512.56:5I9.7I

Цирулис Я.П Вариации на тему квантовой логики. - В кн.: Алгебра и дискретная математика. Рига: ЛГУ им. П. Стучки.I984, с.I46-I59.

Рассматриваются некоторые алгебраические структуры, возникающие в теории недетерминистических автоматов,и аналогичные структурам, изучаемым в так называемой квантовой логике. Автомат отождествляется с реализуемым им словарным оператором. С ним связывается некоторое ортоупорядоченное множество $\mathcal{L}$,называемое логикой, и алгебра событий $\mathcal{E}$ автомата. Показывается, что $\mathcal{L}$ можно вложить в $\mathcal{E}$ и что каждому состояни автомата соответствует некоторый фильтр в $\mathcal{L}$.

Библиог. 8 назв.

К №621. т. 350.