RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

Evija Liepa

MARKOVA IMPULSU DINAMISKĀS SISTĒMĀS BAZĒTU KOCIKLU ROBEŽTEORĒMAS UN STABILITĀTE

Promocijas darbs matemātikā

Rīga, 1998

Darbs izstrādāts RTU Informācijas tehnoloģijas institūta Matemātiskās statistikas profilinstitūtā.

Darba autore: Evija Liepa

Zinātniskais vadītājs: Prof. J. Carkovs

Recenzenti: Akad. V. S. Koroļuks
Prof. A. Lorencs
Doc. K. Šadurskis

Darbs aizstāvēšana paredzēta 1998. gada 3. jūnijā pl. 15.00 LU Fizikas un matemātikas fakultātē (Raiņa bulv. 19, 12. Aud.) LU Habilitācijas un promocijas padomes matemātikā atklātā sēdē.

____
____
____
____

Ar darbu un tā kopsavilkumiem latviešu, krievu un angļu valodās var iepazīties LU bibliotēkā Kalpaka bulv. 4

SATURS

IEVADS

Pirms pāriet pie promocijas darba rezultātu apraksta, skaidrosim dažus perturbāciju teorijas apzīmējumus un definīcijas, kādi pieņemti mūsdienu matemātiskajā literatūrā un izmantoti arī šajā darbā.

Viens no izplatītākajiem dinamisku sistēmu ar dažādām perturbācijām uzvedības analīzes veidiem ir to dinamikas apraksts ar divu dažādas dabas mainīgo kopu palīdzību:

- galvenie mainīgie $x(t)$ ar vērtībām no teplas $\mathbb{R}^n$, kuri apraksta pētāmā objekta fāzu koordinātu izmaiņas;

- palīgmainīgie $y(t)$ ar vērtībām no telpas $\mathbb{R}^d$, kuri apraksta parametru perturbējošās izmaiņas.

Un kaut arī abu grupu mainīgo izmaiņas laikā dažreiz tiek aprakstītas ar viena veida matemātiskajiem modeļiem (diferenciālvienādojumiem, diferenču vienādojumiem u.c.), galvenais analīzes objekts ir fāzu koordinātu uzvedība. Tad tiek pieņemts, ka ir zināmas galveno mainīgo izmaiņu likumsakarības gadījumā, ja perturbācijas neiedarbojas, t.i., ja $y(t) \equiv const$, un parametru izmaiņu likumsakarības nav atkarīgas no fāzu koordinātu vērtībām. Šis apstāklis tad arī tiek izmantots, aprakstot dinamisku sistēmu: vispirms tiek izrakstīts vienādojums mainīgajam $x(t)$ gadījumam, kad $y(t) = y$, un pēc tam tiek izrakstītas parametru izmaiņas likumsakarības. Tā, piemēram, pazīstamais lineāru sistēmu ar pastāvīgu parametrisku perturbāciju klātbūtni stabilitātes analīzes uzdevums tiek formulēts šādi:

pētīt diferenciālvienādojuma telpā $\mathbb{R}^n$

$$\frac{dx}{dt} = A(y)x \tag{1}$$

atrisinājumu uzvedību pie nosacījuma, ka parametra y *vietā matricā* $A(y)$ *ievietots diferenciālvienādojuma*

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \tag{2}$$

atrisinājums.

Skaidrs, ka jebkurai fiksētai y vērtībai stabilitātes problēma tiek risināta salīdzinoši vienkārši: jāpēta matricas $A(y)$ īpašvērtību reālo daļu zīmes. Bet jau tad, kad $n = 2$, y vietā liekot pat tik vienkāršu funkciju kā $y(t) = cost$, $x(t)$ asimptotikas, ja $t \to \infty$, analīzes uzdevums kļūst tik sarežģīts (Flokē problēma), ka tā atrisinājumam veltītas veselas monogrāfijas (sk. apskatu monogrāfijā [32])

Tālākajā darba gaitā tiks izmantota šāda terminoloģija un apzīmējumi:

- *visiem fiksētiem* $y \in \mathbb{R}^d, t \geq 0, d$ (1) *labajā pusē Košī uzdevuma matricu atrisinājums ar vienības matricu kā sākuma nosacījumu laika momentā 0 tiek apzīmēts ar* $\Gamma_y(t)$ *jeb* $e^{A(y)t}$*;*

- *visiem fiksētiem* $y \in \mathbb{R}^d, t \geq s \geq 0$ (2) *Košī uzdevuma atrisinājums ar* y *kā sākuma nosacījumu laika momentā* s *tiek apzīmēts ar* $y(t,s,y)$*;*

- *visiem fiksētiem* $y \in \mathbb{R}^d, t \geq s \geq 0$ (1) *Košī uzdevuma matricu atrisinājums ar* $y(t,s,y)$ y *vietā un ar vienības matricu kā sākuma nosacījumu laika momentā* s *tiek apzīmēts ar* $X(t,s,y)$.

Matricu saimei $\{X(t,s,y), t \geq s \geq 0, y \in \mathbb{R}^d\}$ *piemīt* **evolūcijas** *īpašība:*

$$X(t,s,y) = X(t,\tau,y(\tau,s,y))X(\tau,s,y) \tag{3}$$

un tāpēc tā tiek saukta par **evolucionējošu saimi** *jeb par* **kociklu pār dinamisko sistēmu (2)** [72].

Daudz sarežģītāk analizēt sistēmu (1)-(2), ja pastāvīgi darbojas gadījuma perturbācijas. Tad, lai varētu aprakstīt matemātisko modeli, jāieved vēl viena mainīgo grupa - $\{\xi(t), t \geq 0\}$ - un jāpārraksta sistēma (1)-(2) formā:

$$\frac{dx}{dt} = A(y,\xi)x \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = f(y,\xi). \tag{5}$$

Tālāk tiks apskatīts tikai gadījums, kad $\xi(t)$ ir *Markova atjaunošanas process*, kas pieņem vērtības no galīgas vai sanumurējamas kopas $\mathbb{U}$, t.i., $\xi(t)$ ir gabaliem konstants Markova process, kuram ir pārtraukumi gadījuma laika momentos $\{\tau_j, j \in \mathbb{N}\}$. Pētāmā objekta dinamisko raksturojumu aprakstam izmantosim Markova īpašību sekojošā formā: ar $\xi(t,s,u)$ *apzīmēsim Markova procesu*

ξ laika momentā t pie nosacījuma, ka laika momentā s izpildījās sakarība $\xi(s) = u$. Sākumā aprakstīsim visizplatītāko (5) analīzes metodi. Ar $\mathbb{C}(\mathbb{R}^d)$ apzīmēsim nepārtrauktu, ierobežotu argumenta $y \in \mathbb{R}^d$ funkciju telpu ar normu $||v|| = \sup\limits_{u \in \mathbb{R}^d} |v(y)|$. Ja $y(t, s, y, u)$ ir (5) atrisinājums pie sākuma nosacījumiem $y(s) = y, \xi(s) = u$, tad katrai $v \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^d)$ var uzrakstīt vienādību

$$(Y(t, s, u)v)(y) = v(y_u(t, s, y))$$

jebkuriem fiksētiem $t \geq s \geq 0, u \in \mathbb{U}, y \in \mathbb{R}^d$. Tādā veidā telpā $\mathbb{C}(\mathbb{R}^d)$ tiek uzdota lineāru, nepārtrauktu operatoru saime $\{Y(t, s, u), t \geq s \geq 0, u \in \mathbb{U}\}$, kam piemīt, analogi kā saimei (3), *evolūcijas īpašība*

$$Y(t, s, u) = Y(t, \tau, \xi(\tau, s, u))Y(\tau, s, u), \tag{6}$$

Šo saimi sauc par *Markova evolūcijām* [44 u.c.]. Atzīmēsim, ka pārim $\{y(t), \xi(t)\}$ piemīt Markova īpašība [22], kura dotajā gadījumā nozīmē sekojošo: ja ir zināmas $\{y(\tau), \xi(\tau), \tau \leq s \leq t\}$ vēr- tības, tad sadalījums laika momentā t ir atkarīgs tikai no $\{y(s), \xi(s)\}$ vērtības. Tāpēc (5) atrisinājums un process $\xi(t)$ pie nosacījuma $\{y(s) = y, \xi(s) = u\}$ parasti tiek pierakstīti formā $\{y(t, s, y, u),\ \xi(t, s, u)\}$.

Tagad pāriesim pie galvenajiem mainīgajiem, kuri evolucionē Markova gadījuma procesa $\{y(t), \xi(t)\}$ radīto perturbāciju iedarbībā. Analoģiski iepriekšējam izmantosim šādus apzīmējumus:

- *visiem fiksētiem* $y \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{U}, t \geq 0$ *(4) Košī uzdevuma matricu atrisinājums ar vienības matricu kā sākuma nosacījumu laika momentā 0 tiek apzīmēts ar* $\Gamma_{y,u}(t)$ *jeb* $e^{A(y,u)t}$*;*

- *visiem fiksētiem* $y \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{U}, t \geq s \geq 0$ *(4) Košī uzdevuma matricu atrisinājums ar* $y(t, s, y, u)$ *y vietā,* $\xi(t, s, u)$ *u vietā un vienības matricu kā sākuma nosacījumu laika momentā s tiek apzīmēts ar* $X(t, s, y, u)$.

Gadījuma matricu saimei $\{X(t, s, y, u), t \geq s \geq 0, y \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{U}\}$ *piemīt* **evolūcijas** *īpašība:*

$$X(t, s, y, u) = X(t, \tau, y(\tau, s, y, u), \xi(\tau, s, u))X(\tau, s, y, u) \tag{7}$$

un tāpēc tā tiek dēvēta par **stohastisku evolūciju saimi** *jeb par* **kociklu pār Markova dinamisko sistēmu (5) un Markova procesu** $\{\xi(t)\}$ [19,54,72 u.c.].

Vienādojumu sistēma (4)-(5) ir ļoti sarežģīts matemātisks objekts, un tāpēc tā tiek pētīta tuvināti vai nu ar dinamisku sistēmu teorijas asimptotiskajām metodēm [9] vai arī ar varbūtību teorijas robežteorēmu palīdzību [46, 51, 54, 55, 56, 58, 59, 86, 94, 96, 97, 100, 101, 103, 108 u.c.]. Šajā sakarībā rodas sekojoša problēma: pamatot iespējamību lietot tālāk aprakstītās metodes un tuvinātās dinamiskās robežsistēmas.

Tā kā dotais dinamisko sistēmu teorijas un tās lietojumu virziens radies salīdzinoši nesen, un šajā virzienā attīstītās matemātiskās metodes nav tik plaši pazīstamas, aprakstīsim dažas no tām detalizētāk.

Šim nolūkam jāievieš *mazs, pozitīvs parametrs* ε, t.i., pētīsim vienādojumu sistēmu

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = A(y_\varepsilon, \xi_\varepsilon, \varepsilon)x_\varepsilon \tag{8}$$

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} = f(y_\varepsilon, \xi_\varepsilon(t), \varepsilon). \tag{9}$$

Tas arī ir tas parametrs, kurš tiek izmantots, formulējot robežteorēmas un aprakstot asimptotiku. Ja Markova process ir ergodisks, ar invariantu mēru $\mu(du)$ un ir atkarīgs no maza parametra ε formā $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t/\varepsilon)$ *(sistēmas ar ātriem pārslēgumiem* [49u.c.]), tad pie dažiem pieņēmumiem vienādojuma (9) atrisinājumus var aproksimēt ar atbilstošajiem *vidējotā vienādojuma*

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = \overline{f}(\overline{y}), \tag{10}$$

kur

$$\overline{f}(y) = \int_{\mathbb{U}} f(y, u, 0)\mu(du)$$

atrisinājumiem, pie tam šie atrisinājumi atšķiras par lielumu ar kārtu $\sqrt{\varepsilon}$. Šo analīzes metodi sauc par **vidējošanas metodi**.

Markova atjaunošanas teorijā bieži tiek lietota metode, kad pārslēdzošā Markova procesa stāvokļi tiek apvienoti apakškopās un ieviests jauns, **sabiezināts** Markova process, kura stāvokļi ir šīs apakškopas. Formāli tas nozīmē stāvokļu kopas $\mathbb{U}$ saskaldīšanu disjunktās apakškopās $\mathbb{U}_j, j = \overline{1,m}$. Pieņemsim, ka Markova process $\xi_\varepsilon(t)$ var būt formā $\xi_\varepsilon(t) = \eta_\varepsilon(t/\varepsilon)$, pie kam, ja $\varepsilon \to 0$, tad procesa $\eta_\varepsilon(t)$ pārejas varbūtību matrica tiecas uz kāda procesa $\eta_0(t)$ ar invariantām stāvokļu apakškla- sēm $\mathbb{U}_j, j = \overline{1,m}$ pārejas varbūtību matricu un katrā no šīm apakšklasēm procesu $\eta_0(t)$ var aplūkot kā ergodisku ar varbūtību $p_j(u), u \in \mathbb{U}_j, j = \overline{1,m}$ robežsadalījumu.

Tad sākotnējo procesu $\xi_\varepsilon(t/\varepsilon)$ var kādā nozīmē pietuvināt robežprocesam $\check{\xi}(t)$ ar sabiezinātiem stāvokļiem $\mathbb{U}_j, j = \overline{1,m}$, un, ja $\varepsilon \to 0$, izmantot kādu sabiezinātu robežmatricu varbūtību pārejai formā $exp\{t\check{Q}_{jk}\}$ no viena sabiezināta stāvokļa otrā laikā t ($\check{Q}_{jk}$ - sabiezinātā procesa infinitezimālā matrica). Šī Markova atjaunoša- nas procesu pētīšanas metode aprakstīta monogrāfijā [46]. Šo metodi var lietot arī (5) asimptotiskajai analīzei [19,54]. Šim nolūkam nepieciešams vidējot (5) labo pusi pēc katras apakšklases:

$$\check{f}(y,j) := \sum_{u\in\mathbb{U}_j} f(y,u,0)p_j(u), \quad j = \overline{1,m}$$

un izrakstīt *sabiezināto Markova dinamisko sistēmu*

$$\frac{d\check{y}}{dt} = \check{f}(\check{y},\check{\xi}(t)). \tag{11}$$

Šo Markova dinamisko sistēmu izpētes metodi sauc par **fāzu palielināšanas metodi** .

Ja pārslēdzošais Markova process ir ergodisks, ar invariantu mēru $\mu(du)$ un atkarīgs no maza parametra ε formā $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t/\varepsilon)$, un $\overline{f}(y) \equiv 0$, tad var turpināt (5) asimptotisko analīzi, izdarot laika substitūciju $s = t\varepsilon$ un pārejot uz procesu $\zeta_\varepsilon(t) := y_\varepsilon(s/\varepsilon)$. Šajā gadījumā pie papildus pieņēmumiem izdodas konstruēt difūziju tipa Ito stohastisko diferenciālvienādojumu kādam robežprocesam $\zeta_0(t)$, kā varbūtību sadalījums aproksimē procesa $\zeta_\varepsilon(t)$ varbūtību sadalījumu. Šī metode tiek saukta par **Markova dinamiskās sistēmas (5) difūziju aproksimāciju**. Šī metode izklāstīta monogrāfijā [89].

Apskatīsim gadījuma evolūciju teorijas attīstības vēsturi, izmantojot norādes uz bibliogrāfiju.

Pirmo reizi gadījuma evolūcijas vienkāršākā modeļa analīzi izdarīja M.Kacs [33]. Markova gadījuma evolūciju vispārīga definīcija ieviesta R.Grego un R.Herša darbā [25], taču pats termins "gadījuma evolūcijas" pieder Laksam. Būtiski gadījuma evolūciju teorija attīstījās, pateicoties G.Papanikolau [73-80], M.Pinski [81-84], D.Kvairinga [121], R.Kerca [36-40], J.A.Votkinsa [122-125], R.Kogberna un R.Herša [41], J.Carkova [10-19] u.c. darbiem.

Gadījuma evolūciju teorijā vienu no pirmajām vietām ieņem robežteorēmas sēriju shēmā. Nepārtrauktu Markova gadījuma evolūciju vidējošanas iespējas aplūkotas darbos [28, 29, 40, 41, 46, 65, 94], pārtrauktu - darbos [37 - 39, 81], stacionāru - [122]. Fāzu asimptotiskās vidējošanas sēriju shēmā robežteorēmas Markova gadījuma evolūcijām iegūtas darbos [43, 44, 45, 46, 52, 53, 54, 57, 60, 61, 94, 96, 99, 105].

Evolūciju difūziju aproksimācija apskatīta darbos [47, 55, 58, 59, 107], bet fāzu vidējošanas shēmā -darbos [45, 56, 58]. Nehomogēnu Markova evolūciju vidējošanas un difūziju aproksimācijas algoritmi piedāvāti V.S.Koroļuka un A.Sviščuka darbos [57, 58].

Pirmo reizi martingālu īpašības Markova procesu raksturojumiem izmantoja D.Struks un S.R.S.Varadans [90]. Nepārtrauktu Markova evolūciju martingālie aspekti un multiplikatīvu operatoru funkcionāļu martingālās īpašības tika apskatītas M. Pinski darbā [81]. Neatkarīgu un stacionāru evolūciju pētīšana ar martingālu palīdzību tika veikta J. Votkinsa darbos [122 - 124]. Markova procesu robežteorēmas ar martingālu metodēm pierādītas M.Sviridenko darbā [93]. Pieeja no martingālu viedokļa plaši piedāvāta arī citos darbos, piemēram,V.S.Koroļuka un A.Sviščuka [45, 59], kā arī A. Sviščuka darbos [102, 105, 107, 110, 112, 113, 114]. Gadījuma evolūcijām, kuras tiek aprakstītas ar stohastiskām diferenciālvienādojumu sistēmām ar ātriem Markova pārslēgumiem, veltīta A.Skorohoda monogrāfija [89], kurā arī tiek lietota pieeja no martingālu viedokļa.

Kā jau tika atzīmēts, evolūcijas kalpo par abstraktu matemātisku modeli daudzām reālām stohastiskām sistēmām. Publikāciju par gadījuma evolūciju tēmu vidū nozīmīgu vietu ieņem darbi par šo evolūciju pielietojumiem: [25, 26, 28 - 30, 39, 44, 47, 52, 53, 55 - 58, 61, 64, 71, 95, 97, 98, 100-103, 111, 119]. Lielākā daļa no tiem saistīta ar G.Papanikolau darbiem [73 - 80].

Markova gadījuma evolūciju teorijas rezultātu un uzdevumu apskats sniegts R.Herša darbā [28], bet Markova procesu multiplikatīvo operatoru funkcionāļu teorijas - M.Pinski darbā [82].

Dinamisko sistēmu ar gadījuma perturbācijām, bet bez trajektoriju pārrāvumiem, asimptotiskās analīzes problēma ir apskatīta daudzos zinātniskos darbos (sk. apskatu darbos [24, 27, 89]).

Sarežģītāka ir kociklu asimptotiskās analīzes problēma. Kā parādīts darbos [15, 116, 117],pie dažiem papildus ierobežojumiem gan vidējotos (10), gan sabiezinātos (11) atrisinājumus, gan to difūziju aproksimāciju pietiekoši mazam ε var izmantot, lai pētītu (9) atrisinājumu asimptotisko uzvedību, ja $t \to \infty$.

Vēl sarežģītāka ir fāzu koordinātu uzvedības analīze gadījumā, kad (8)-(9) labo pušu $\xi_\varepsilon(t)$ perturbāciju pārrāvumu rezultātā rodas fāzu trajektoriju pārrāvumi.Kā Markova matemātisku modeļu ar trajektoriju pārrāvumiem piemēru var minēt modeļus, kādi bieži sastopami finansu matemātikā: vērtspapīru tirgus dalībnieku kapitāla evolūcijas (sk., piem., [5,7]). *Šajos modeļos kapitāls evolucionē nepārtraukti ar fiksētu procentu likmi, apmierinot kādu diferenciālvienādojumu, izvestu, pamatojoties uz ekonomiskajām likumsakarībām, bet gadījuma laika momentos notiek gan procentu likmes, gan paša kapitāla lieluma lēcienveidīgas izmaiņas. Šie lēcieni var būt saistīti gan ar saistību izmaksu nepieciešamību, gan ar valūtas apmaiņas kursa procentu likmes lēcieniem, gan ar daudz ko citu.*

Lai aprakstītu modeli ar lēcieniem, ieviesīsim Markova procesa pārslēgumu laika momentus, sakārtotus gadījuma lielumu virknē: $\mathbb{T} := \{\tau_j, j \in \mathbb{N}\}$. *Pieņemsim, ka*

- *procesi* $x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)$ *ir nepārtraukti no labās puses un apmierina diferenciālvienādojumus* (8) – (9) *visiem* $t \notin \mathbb{T}$;

- *procesiem* $x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)$ *ir pārrāvumi*

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t-0) + \varepsilon G(y_\varepsilon(t-0), \xi_\varepsilon(t-0), \varepsilon)x_\varepsilon(t-0) \qquad (12)$$

$$y_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t-0) + \varepsilon g(y_\varepsilon(t-0), \xi_\varepsilon(t-0), \varepsilon), \qquad (13)$$

ja $t \in \mathbb{T}$. (8) – (9) *tipa dinamiskās sistēmas pieņemts saukt par* **Markova impulsu dinamiskām sistēmām** *jeb* **impulsu dinamiskām sistēmām ar Markova lēcieniem** (sk., piem., [16-18]).

Pēc analoģijas ar augstāk izklāstīto (8) – (12) tipa dinamiskās sistēmas sauksim par **Markova impulsu kocikliem pār Markova impulsu dinamisko sistēmu (9)-(13)** jeb vienkārši par **kocikliem pār Markova impulsu sistēmu (9)-(13)**.

Šī promocijas darba **izpētes objekts** *ir* (8) – (9) – (12) – (13) *tipa dinamiskās sistēmas. Šī modeļa detalizēts apraksts un visi tālākai analīzei nepieciešamie pieņēmumi doti ievaddaļā un 2. un 3. daļu sākumā.*

Pētījuma mērķis. *Kociklu pār Markova impulsu dinamiskām sistēmām asimptotisku izteiksmju konstruēšana un asimptotisko metožu lietojuma iespējamības pamatojums asimptotikas, ja* $t \to \infty$, *analīzei.*

Pētnieciskās metodes.

- *Funkcionāļu no Markova procesiem uzdošana ar šo procesu infinitezimālo operatoru palīdzību (J.Dinkina formula [22]);*

- *Integrālvienādojumu atrisinājumu izpētes otrā Ļapunova metode Ļapunova tipa funkcionāļu no Markova procesiem matemātiskajām cerībām [27];*

- *Gadījuma procesu teorijas martingālās metodes [21] konverģences gandrīz droši analīzei;*

- *Robežteorēmas Markova procesu bez otrā veida pārrāvumiem sadalījumu virkņu konverģences uz difūziju procesu analīzei [89].*

Promocijas darbs sastāv no ievada, trijām daļām un bibliogrāfijas saraksta ar 125 nosaukumiem.

1. daļa ir ievaddaļa. Tajā atspoguļoti tālākajam iztirzājumam nepieciešamie zinātniskā vadītāja prof. J. Carkova un citu zinātnieku rezultāti, kurus šī darba autore vispārināja 2. un 3. daļās.

2. daļa sastāv no 3 nodaļām.

Pirmajā nodaļā aprakstīti analizējamie matemātiskie modeļi un ieviesti nepieciešamie apzīmējumi un definīcijas. Šajā nodaļā kā pārslēdzošo papildprocesu izmantosim homogēnu Markova procesu $\xi_\varepsilon(t)$ galīgā vai sanumurējamā telpā $\mathbb{U}$ ar infinitezimālo operatoru $Q_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(Q + \varepsilon Q_1)$, kur $\varepsilon \in (0, \delta)$ un operatori Q un Q_1

uzdoti ar formulām

$$(Qv)(z) = a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}[v(u) - v(z)]p(z,u) \tag{14}$$

$$(Q_1 v)(z) = a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}[v(u) - v(z)]p_1(z,u) \tag{15}$$

katrai ierobežotai funkcijai, kas definēta telpā $\mathbb{U}$. $\xi_\varepsilon(t)$ ir gabaliem konstants process [75] ar lēcienu intensitāti $\frac{a(z)}{\varepsilon}$ un iekļautu Markova ķēdi ar pārejas varbūtību $p(z,u)+\varepsilon p_1(z,u)$. Pieņemsim, ka $a(z)$ ir pozitīva funkcija, $p(z,u)$ ir Markova ķēdes pārejas varbūtība, $p_1(z,u)$ ir ierobežota funkcija, skaitlis δ ir pietiekami mazs.

Pieņemsim, ka minētais Markova process $\xi_\varepsilon(t)$ ir pārslēdzošais process dinamiskai sistēmai, uzdotai ar diferenciālvienādojumu telpā $\mathbb{R}^d$:

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} = \varphi(y_\varepsilon, \xi_\varepsilon(t)), \tag{16}$$

kur $\varphi(y,z)$ ir nepārtraukta un ierobežota funkcija ar diviem nepārtrauktiem un ierobežotiem attiecībā uz y atvasinājumiem. Tāpat pieņemsim, ka diskrētos laika momentos $t \in \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$, kad Markova procesam $\xi_\varepsilon(t)$ ir lēcieni, procesam $y_\varepsilon(t)$ arī ir lēcieni, kas uzdoti ar vienādojumu

$$y_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t-0) + \varepsilon g(y_\varepsilon(t-0), \xi_\varepsilon(t-0)). \tag{17}$$

Pieņemsim, ka operatoram Q no (14) ir īpašvērtība 0 ar kārtu $m > 1$ un infinitezimālajam operatoram Q atbilstošajam Markova procesam $\xi(t)$ ir m invarianti mēri μ_j disjunktās apakškopās $\mathbb{U}_j$, kur $j = \overline{1,m}$ un ka eksistē tāds fāzu telpas sadalījums $\mathbb{U} = \cup_{j=1}^m \mathbb{U}_j$, ka

$$p(z,\mathbb{U}_j) = \begin{cases} 1, & z \in \mathbb{U}_j \\ 0, & ja\ z \notin \mathbb{U}_j \end{cases} \tag{18}$$

un eksistē tāds pozitīvs skaitlis α, ka Markova procesa ar infinitezimālo operatoru Q pārejas varbūtība visiem $j = \overline{1,m}$ apmierina nevienādību:

$$\sup_{\substack{\|v\|=1 \\ z\in\mathbb{U}_j}} |\sum_{u\in\mathbb{U}}[P(t,z,u) - \mu_j(u)]v(u)| \le e^{-\alpha t} \tag{19}$$

Pētāmais objekts ir stohastisks process $x_\varepsilon(t)$, kurš apmierina
-lineāru diferenciālvienādojumu telpā R^n:

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = B(y_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t))x_\varepsilon, \tag{20}$$

ja $t \notin \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$,
-lēcienu vienādojumu

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t-0) + \varepsilon G(y_\varepsilon(t-0), \xi_\varepsilon(t-0))x_\varepsilon, \tag{21}$$

ja $t \in \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$, kur matricvērtīgas funkcijas $B(y,z)$ un $G(y,z)$ ir nepārtrauktas, ierobežotas funkcijas ar diviem nepārtrauktiem, ierobežotiem atvasinājumiem pēc y.

Balstoties uz V.Koroļuka rezultātiem, apskatīsim sabiezināto Markova procesu $\tilde{\xi}(t)$ ar fāzu telpu $\tilde{\mathbb{U}} = \{1, 2, ..., m\}$ un infinitezimālo matricu

$$Q_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{u \in \mathbb{U}} a(z)p_1(z, \mathbb{U}_j)\mu_j(z), \ ja\ i \neq j \\ -\sum\limits_{k \neq i}\sum\limits_{u \in \mathbb{U}} a(z)p_1(z, \mathbb{U}_k)\mu_k(z), \ ja\ i = j, \end{cases} \tag{22}$$

sabiezināto dinamisko sistēmu

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{\varphi}(\tilde{y}, \tilde{\xi}(t)), \tag{23}$$

sabiezināto kociklu

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{B}(\tilde{y}(t), \tilde{\xi}(t))x, \tag{24}$$

kur visiem $j = \overline{1, m}$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{y}, j) = \sum_{\mathbb{U}} (\varphi(y, z) + a(z)g(y, z))\mu_j(z),$$

$$\tilde{B}(y, j) = \sum_{u \in \mathbb{U}} (B(y, u) + a(u)G(y, u))\mu_j(u)$$

un $\tilde{y}(t)$ apmierina vienādojumu (23).

Otrās daļas otrajā nodaļā tiek izdarīts pieņēmums, ka $m = 1$, t.i., ka eksistē viens vienīgs invariants mērs μ. Apskatot arī vidējoto kociklu, kas uzdots ar diferenciālvienādojumu

$$\frac{dx}{dt} = \overline{B}(y(t))x, \tag{25}$$

kur $y(t)$ ir vidējotā vienādojuma

$$\frac{dy}{dt} = \overline{F}(y), \tag{26}$$

$$\overline{F}(y) = \sum_{u \in \mathbb{U}} (\varphi(y, u) + a(u)g(y, u))\mu(u),$$

atrisinājums un $\overline{B}(y)$ ir vidējotā matrica

$$\overline{B}(y) = \sum_{u \in \mathbb{U}} (B(y, u) + a(u)G(y, u))\mu(u), \tag{27}$$

tika pierādīti šāds rezultāts:

2.1.Teorēma. *Ja operators Q ir vienmērīgi ergodisks un vidējotais kocikls* (25) *ir eksponenciāli stabils, tad eksistē tāds pozitīvs skaitlis ε_0, ka kocikls* (20) – (21) *ir eksponenciāli stabils vidējā kvadrātiskā nozīmē visiem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Otrās daļas trešajā nodaļā tiek apskatīts gadījums, kad $m > 1$. Tad, izmantojot sabiezināto Markova procesu ar fāzu telpu $\tilde{U} = \{1, ...m\}$ un infinitezimālo matricu $\{Q_{ij}\}$, varam pētīt vienādojumu sistēmas (20) – (21) atrisinājuma stabilitāti ar sabiezinātā kocikla palīdzību.

2.2.Teorēma. *Ja operators Q apmierina nosacījumus* (18) – (19) *un sabiezinātais kocikls* (24) *ir eksponenciāli stabils vidējā kvadrātiskā nozīmē, tad eksistē tāds pozitīvs skaitlis ε_0, ka kocikls* (20) – (21) *ir eksponenciāli stabils vidējā kvadrātiskā nozīmē visiem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

3. daļā tika apskatīts iepriekš aprakstītais Markova process $\xi(t)$ kā lēcienu process dinamiskai sistēmai, kas uzdota ar singulāru diferenciālvienādojumu telpā $\mathbb{R}^d$:

$$\frac{dy^\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(y^\varepsilon(t), \xi(t/\varepsilon^2)) + \varphi_2(y^\varepsilon(t), \xi(t/\varepsilon^2)), \tag{28}$$

kur $\varphi_1(y,z)$ un $\varphi_2(y,z)$ ir nepārtrauktas, ierobežotas funkcijas ar diviem nepārtrauktiem un ierobežotiem atvasinājumiem pēc y. Diskrētos laika momentos $t \in \{\tau_{j-1},\, j \in \mathbb{N}\}$, kad Markova procesam $\xi(t)$ ir lēcieni, procesam $y^\varepsilon(t)$ arī ir lēcieni, kas uzdoti ar vienādojumu

$$y^\varepsilon(t) = y^\varepsilon(t_-) + \varepsilon g_1(y^\varepsilon(t_-),\, \xi(t_-/\varepsilon^2)) + \\ + \varepsilon^2 g_2(y^\varepsilon(t_-),\, \xi(t_-/\varepsilon^2)), \tag{29}$$

Pētāmais objekts ir process $x^\varepsilon(t)$, kas uzdots ar lineāru diferenciālvienādojumu telpā $\mathbb{R}^n$

$$\frac{dx^\varepsilon}{dt} = B(y^\varepsilon(t),\, \xi(t/\varepsilon^2))\, x^\varepsilon, \tag{30}$$

ja $t \notin \{\tau_{j-1},\, j \in \mathbb{N}\}$, un tā lēcienu vienādojums ir

$$x^\varepsilon(t) = x^\varepsilon(t_-) + \varepsilon^2 G(y^\varepsilon(t_-),\, \xi(t_-/\varepsilon^2))\, x^\varepsilon(t_-), \tag{31}$$

ja $t \in \{\tau_{j-1},\, j \in \mathbb{N}\}$, $y^\varepsilon \in \mathbb{R}^d$. $B(y,\, \xi)$ ir nepārtraukta un ierobežota matrica un tās divi atvasinājumi pēc y arī ir nepārtraukti un ierobežoti.

Trešās daļas pirmajā nodaļā izrakstīti (28)-(29)-(30)-(31) robežvienādojumi, ja $\varepsilon \to 0$. No Markova dinamisko sistēmu asimptotiskās teorijas zināms, ka ja $\varphi_1(y,\xi)$ un $\varphi_2(y,\xi)$ ir nepārtraukti diferencējamas attiecībā pret y un ja $D_y\varphi_1(y,\xi)$ un $D_y\varphi_2(y,\xi)$ ir vienmērīgi ierobežotas matricas,tad eksistē un pie tam viens vienīgs atrisinājums sistēmai (28)-(29)-(30)-(31) ar sākuma nosacījumiem

$$x^\varepsilon(s) = x, \quad y^\varepsilon(s) = y. \tag{32}$$

Šis atrisinājums $\{x^\varepsilon(t),\, y^\varepsilon(t),\, t \geq s\}$ ir stohastiski nepārtrauktu, no Markova procesa $\{\xi(t/\varepsilon^2), t \geq s\}$ atkarīgu procesu saime. Tātad abu procesu varbūtību raksturlielumi visiem $t \geq s$ ir definēti ar sākuma nosacījumu (32) un nosacījumu $\xi(s/\varepsilon^2) = \xi$. Šos atrisinājumus sistēmai (28)-(29)-(30)-(31) ar nosacījumiem $\xi(s/\varepsilon^2) = \xi$ un (32) apzīmēsim ar $x^\varepsilon(t,s,x,y,\xi)$, $y^\varepsilon(t,s,y,\xi)$.

No [8,23] seko, ka, ja ε tiecas uz 0, tad procesu $y^\varepsilon(\varepsilon t)$ saime konverģē uz vidējotā vienādojuma (26) atrisinājumu. Tad, ja $\bar{F}(y) \equiv$

0, sistēmas (28)-(29)-(30)-(31) atrisinājumi vāji konverģē, ja $\varepsilon \to 0$, uz atbilstošajiem vienādojuma (25) un difūziju aproksimācijas vienādojuma

$$dy = b(y)\,dt + \sigma(y)\,dw(t) \tag{33}$$

atrisinājumiem jebkurā galīgā intervālā $[0,T]$, kur $w(t)$ ir standarta Vīnera process telpā $\mathbb{R}^d$,

$$b(y) = \sum_{u\in\mathbb{U}} \varphi_2(y,u)\mu(u) + a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}} g_2(y,u)\mu(u) +$$

$$+\sum_{u\in\mathbb{U}} [\Pi D_y(\varphi_1(y,u) + a(z)g_1(y,u)](\varphi_1(y,u) + a(z)g_1(y,u))\mu(u) -$$

$$-\sum_{u\in\mathbb{U}} [D_y(\varphi_1(y,u) + a(z)g_1(y,u))]g_1(y,u)\mu(u),$$

un simetriskā nenegatīvi definitā matrica $\sigma(y)$ ir definēta ar formulu

$$|\sigma(y)h|^2 = 2\sum_{u\in\mathbb{U}} (\varphi_1(y,\xi),h)(\Pi\varphi_1(y,\xi),h)\mu(\xi)$$

patvaļīgam vektoram $h \in \mathbb{R}^d$.

Trešās daļas otrajā nodaļā pierādīti daži nepieciešami papildrezultāti:

Ja vienādojuma (25) *atrisinājums ir asimptotiski stohastiski stabils, tad tas ir eksponenciāli p-stabils visiem pietiekami maziem pozitīviem p un eksistē Ļapunova funkcija* $v(x,y)$, *kura apmierina nosacījumus*

$$c_1|x|^p \le v(x,y) \le c_2|x|^p, \quad c_1 > 0 \tag{34}$$

$$L_0 v(x,y) \le -c_3|x|^p, \quad c_3 > 0 \tag{35}$$

visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{Y}$ *kādam pozitīvam p, kur*

$$L_0\, v(x,\, y) = (\bar{B}(y)\, x,\, \nabla_x)\, v(x,\, y) + Q\, v(x,\, y),$$

Trešās daļas trešajā nodaļā apskatīts lineārs vienādojums (30) ar Markova procesu $\xi(t)$, kas apmierina minētos nosacījumus un y^ε, kas apmierina vienādojumus (28)-(29). Pāris $\{y^\varepsilon(t), \xi(\frac{t}{\varepsilon^2})\}$

ir homogēns Fellera Markova process telpā $\mathbb{R}^d \times \mathbb{U}$ ar vājo infinitezimālo operatoru $L(\varepsilon)$ [89], definētu diferencējamām attiecībā uz y funkcijām ar sakarību:

$$(L(\varepsilon)\,v)(y,\xi) = \frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1(y,\xi),\nabla_y)\,v(y,\,\xi) + (\varphi_2(y,\xi),\nabla_y)\,v(y,\,\xi) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}Q\,v(y,\,\xi) +$$

$$+\frac{a(z)}{\varepsilon^2}\sum_{\mathbb{U}}[v(y+\varepsilon g_1(y,z)+\varepsilon^2 g_2(y,\xi),z) - v(y,z)]\mu(z) \qquad (36)$$

kur ∇_y ir gradienta operators telpā $\mathbb{R}^d$ un operators Q darbojas attiecībā uz otro argumentu.

Ir zināms [8,23], ka $y^\varepsilon(t)$ kā procesu saime Skorohoda telpā $\mathbb{D}([0,T]\times\mathbb{R}^m)$ vāji konverģē uz stohastiskā diferenciālvienādojuma (33) atrisinājumu (pie sākuma nosacījuma $y(0) = y$) katram fiksētam $T > 0$ un $y^\varepsilon(0) = y$, $\xi(0) = \xi$, kur $b(y)$, $\sigma(y)$ ir nodefinēti agrāk. Vektors $b(y)$ un matrica $\sigma(y)$ ir nepārtraukti diferencējami attiecībā pret y un kopā ar atvasinājumiem vienmērīgi ierobežoti. Tas garantē vienādojuma (33) atrisinājuma unitāti un eksponenciālu augšanu ar varbūtību 1, kad $t \to \infty$ [4].

Tika pierādīta šāda

3.1.Teorēma: *Ja vienādojums* (25) *ar* $y(t)$ *no* (33) *ir asimptotiski stohastiski stabils, tad vienādojums* (30) *ar* y *no* (28) *ir eksponenciāli p-stabils visiem* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, *kādam* $\varepsilon_0 > 0$ *un pietiekami maziem* $p > 0$.

Promocijas darba rezultātu praktiskā nozīmība ir sarežģītu nedeterminētu dinamisku sistēmu ar trajektoriju pārrāvumiem aproksimācija ar

- vienkāršākiem, determinētiem, vidējotiem kocikliem pār dinamisko sistēmu,
- sabiezinātiem kocikliem pār sabiezinātām dinamiskām sistēmām ar nepārtrauktām trajektorijām,
- kocikliem pār difūziju procesu,

kā arī sarežģītu nedeterminētu dinamisku sistēmu ar trajektoriju pārrāvumiem atrisinājumu asimptotikas izpētes ar augstāk minēto vienkāršoto modeļu palīdzību iespējamības pierādījums.

Par promocijas darba rezultātiem tika referēts:

- seminārā *"Markova dinamisko sistēmu kvalitatīvās analīzes metodes"* (1994., 1995., 1996. un 1997. gados),
- 35. un 37. *RTU Zinātniskajās un tehniskajās konferencēs* (1994. un 1996. gados),
- 2. *Latvijas Matemātikas konferencē* (1997. gadā)

Ar promocijas darbu saistītās publikācijas:

1. E. Vanaga, J. Carkovs, *Dinamisko Markova impulsu sistēmu vidējošana un stabilitāte* (1994), 35.RTU Zinātniskās un tehn. konferences materiāli.
2. E. Vanaga, J. Carkovs, *Kociklu vi- dējošana un stabilitāte* (1996), 37.RTU Zinātniskās un tehn. konferences materiāli.
3. E. Vanaga, *Stability of cocycles* (1996), Proceedings of the Latvian Probability Seminar.
4. E. Liepa, *Stohastic Stability Based on Diffusion Aproximation* (1997), 2.Latvijas Matemātikas konferencēs tēžu krājums.
5. E. Liepa, *On stochastic stability of differential equations with Markov discrete component* (1998), Journ. Modern aspects of Management Science.

1. ASIMPTOTISKĀS METODES MARKOVA IMPULSU DINAMISKAJĀM SISTĒMĀM AR ĀTRIEM PĀRSLĒGUMIEM

1.1. MARKOVA IMPULSU DINAMISKĀS SISTĒMAS VĀJAIS INFINITEZIMĀLAIS OPERATORS

Lai iepazīstinātu ar pētāmo objektu, jāapraksta Markova lēcienu process. Pieņemsim,ka $\mathbb{U}$ ir kompakta, metriska telpa un ka operators Q ir uzdots telpā $\mathbb{C}(\mathbb{U})$ un definēts ar formulu

$$(Qv)(u) = a(u) \int_{\mathbb{U}} [v(z) - v(u)]p(u, dz), \tag{1.1.1}$$

kur $a(u)$ ir nepārtraukta funkcija $(0 < a(u) \leq c < \infty)$ un p(u,dz) ir pārejas varbūtība Markova ķēdei ar Fellera īpašību. Operators (1.1.1) var tikt apskatīts [72] kā C-infinitezimālais operators no labās puses nepārtrauktam Markova procesam $\{\xi(t), t \geq 0\}$ varbūtību telpā $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}^t, \mathbb{P})$, kur filtrācija $\mathcal{F}^t$ savieno $\{\xi(.)\}$ laikā t. Eksistē tāda mērojama kopa (θ, Σ), mērs $\pi(d\theta)$ telpā $\mathbb{U} \times \Theta$ un mērojama funkcija $r(\xi, \theta)$, ka iepriekš minētais Markova process $\xi(t)$ var tikt uzdots kā atrisinājums stohastiskajam vienādojumam

$$d\xi(t) = \int_{\Theta} r(\xi(t), \theta)\nu(d\theta, dt), \tag{1.1.2}$$

kur Puasona mēram $\nu(\theta, dt)$ ir parametrs $\pi(d\theta)dt$ [11, 75] (t.i., $\mathbb{E}\nu(d\theta, dt) = \pi(d\theta)dt$), kurš ir $\mathcal{F}^t$-adaptēts un apmierina nosacījumus

$$\pi(\{r(\xi, \theta) \neq 0\}) = a(\xi); \; \pi(\{r(\xi, \theta) \in A\}) = a(\xi)p(\xi, A) \tag{1.1.3}$$

visiem $\xi \in \mathbb{U}$ un $A \in \Sigma$, bez tam $O \notin A$. Iepriekšminētās funkcijas $r(\xi, \theta)$ konstrukcijas metode un mērs $\pi(d\xi)$ ir aprakstīti [22].

Pieņemsim, ka process $\xi(t)$ ir vienmērīgi ergodisks, t.i., eksistē tāds varbūtību mērs $\mu \in \mathbb{C}^*(\mathbb{U})$, ka $Q^*\mu = 0$ un

$$|P(t, \xi, A) - \mu(A)| \leq e^{-\rho t} \tag{1.1.4}$$

kādam $\rho > 0$, visiem $\xi \in \mathbb{U}$, $t \geq 0$ un mērojamai kopai A, kur $P(t, \xi, A)$ ir pārejas varbūtība Markova procesam $\xi(t)$. Tātad [72] vienādojumam

$$(Qf)(\xi) = -v(\xi) \tag{1.1.5}$$

eksistē atrisinājums tad un tikai tad, ja $\int\limits_{\mathbb{U}} v(\xi)\mu(d\xi) = 0$. Šis atrisinājums ir vienīgais (ar precizitāti līdz konstantei tāpēc, ka $Qc = 0$). Tālāk mēs lietosim (1.1.5) atrisinājumu, kurš uzdots ar formulu

$$f(\xi) := (\Pi v)(\xi) := \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{U}} (P(t, \xi, dz) - \mu(dz))v(z)dt \tag{1.1.6}$$

No vienmērīgās ergoditātes (1.1.4) izriet, ka potenciāloperators Π no (1.1.6) ir lineārs, nepārtraukts operators un visiem $v \in \mathbb{C}(\mathbb{U})$

$$(Q\Pi v)(\xi) = -v(\xi) + \bar{v}, \tag{1.1.7}$$

kur

$$\bar{v} = \int\limits_{\mathbb{U}} v(\xi)\mu(d\xi). \tag{1.1.8}$$

Tālakajā darba gaitā pielietosim operatorus Q un Π un vidējošanu (1.1.8) vektorfunkcijām vai matricfuncijām ne tikai argumentam ξ un pieņemsim, ka visi pārējie argumenti ir fiksēti.

Pieņemsim, ka $\varepsilon \in (0, 1)$ un ka $y(t) \in \mathbb{R}^d$ ir no labās puses nepārtraukta vektorfunkcija, kura apmierina
1) diferenciālvienādojumu

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon f(y(t), \xi(t), \varepsilon), \tag{1.1.9}$$

ja $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$;
2) lēciena vienādojumu

$$y(t) = y(t-) + \varepsilon g(y(t-), \xi(t-), \varepsilon), \tag{1.1.10}$$

ja $t = \tau_j$, visiem $j \in \mathbb{N}$
3)sākuma nosacījumu

$$y(0) = y. \tag{1.1.11}$$

Šeit un turpmāk $\tau_0 = 0$.

Tāpat pieņemsim, ka funkcijas $f(y, \xi, \varepsilon)$ un $g(y, \xi, \varepsilon)$ var tikt apskatītas veidā:

$$f(y, \xi, \varepsilon) = f_1(y, \xi) + \varepsilon f_2(y, \xi) + \varepsilon f_3(y, \xi, \varepsilon), \tag{1.1.12}$$

$$g(y, \xi, \varepsilon) = g_1(y, \xi) + \varepsilon g_2(y, \xi) + \varepsilon g_3(y, \xi, \varepsilon), \tag{1.1.13}$$

kur $f_1(y, \xi)$ un $g_1(y, \xi)$ ir nepārtrauktas funkcijas un to otrās kārtas atvasinājumi pēc y ir ierobežotas un nepārtrauktas funkcijas; $f_2(y/\xi)$, $f_3(y/\xi)$, $g_2(y/\xi)$, $g_3(y/\xi)$ ir nepārtrauktas funkcijas un to atvasinājumi pēc y ir nepārtrauktas un ierobežotas funkcijas. Visiem $y \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{U}$ un $\varepsilon \in (0, 1)$ ir spēkā nevienādība

$$||Df_3(y, \xi, \varepsilon)|| + ||Dg_3(y, \xi, \varepsilon)|| \leq \beta(\varepsilon), \tag{1.1.14}$$

kur $\beta(\varepsilon)$ ir bezgalīgi mazs lielums, ja $\varepsilon \to 0$. Šeit un turpmāk ar D^k apzīmēsim k-tās kārtas atvasinājumu. Viegli redzēt, ka no nevienādības (1.1.14) izriet sekojoša nevienādība:

$$|f_3(y, \xi, \varepsilon)| + |g_3(y, \xi, \varepsilon)| \leq \beta_1(\varepsilon)(1 + |y|), \tag{1.1.15}$$

visiem $y \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{U}$, $\varepsilon \in (0, 1)$ un kādam bezgalīgi mazam, ja $\varepsilon \to 0$, lielumam $\beta_1(\varepsilon)$.

1.1.Lemma . *Ņemot vērā augstāk minētos pieņēmumus, pāris $\{y(t), \xi(t)\}$ veido Markova procesu fāzu telpā $\mathbb{R}^d \times \mathbb{U}$ ar infinitezimālo ģeneratoru*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}v)(y, \xi) = {} & \varepsilon(f(y, \xi, \varepsilon), \nabla)v(y, \xi) + \\ & + Qv(y, \xi) + \varepsilon G^\varepsilon v(y, \xi),\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

ja

$$\begin{aligned}G^\varepsilon v(y, \xi) = {} & \frac{1}{\varepsilon} a(\xi) \int_{\mathbb{U}} [v(y + \varepsilon g(y, \xi, \varepsilon), z) - \\ & - v(y, z)] p(\xi, dz)\end{aligned}$$

kur (.,.) ir skalārais reizinājums un ∇ *ir gradients.*

1.2.Lemma. *Izpildoties augstāk minētajiem nosacījumiem, sistēmas (1.1.9)-(1.1.10)-(1.1.11) atrisinājums apmierina nevienādību*

$$\mathbb{E}_{y,\xi}|y(t)|^2 \le (1+|y|^2)e^{\varepsilon\alpha t} \tag{1.1.17}$$

kādam $\alpha > 0$ *un visiem* $t \ge 0$, $y \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{U}$ *un* $\varepsilon \in (0,1)$.

1.3.Lemma. *Pie minētajiem pieņēmumiem*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} |y(\frac{t}{\varepsilon}) - \tilde{y}(\frac{t}{\varepsilon})|^2 = 0 \tag{1.1.18}$$

visiem $T \ge 0$, $\xi \in \mathbb{U}$ *un* $y \in \mathbb{R}^d$.

Lai saīsinātu pierakstu, lietosim sekojošus apzīmējumus:

$\xi^\varepsilon(t)$ - stohastiska vienādojuma

$$d\xi^\varepsilon(t) = \int_\Theta r(\xi^\varepsilon(t),\theta)\nu_\varepsilon(d\theta,dt), \tag{1.1.19}$$

atrisinājums

$\xi_\varepsilon(t)$ - stohastiska vienādojuma

$$d\xi_\varepsilon(t) = \int_\Theta r(\xi^\varepsilon(t),\theta)\nu_{\varepsilon^2}(d\theta,dt), \tag{1.1.20}$$

atrisinājums

τ_j^ε - procesa $\xi^\varepsilon(t)$ lēcienu momenti,

$y^\varepsilon(t) = \tilde{y}(\frac{t}{\varepsilon})$,

$F_j(y,\xi) = f_j(y,\xi) + a(\xi)g_j(y,\xi)$;

$b_j(y) = \int_{\mathbb{U}} F_j(y,\xi)\mu(d\xi)$, j=1,2

$\mathbb{V}_p$ - telpa, sastāvoša no nepārtrauktiem attēlojumiem no $\mathbb{R}^d \times \mathbb{U}$ uz $\mathbb{R}$, kuri apmierina nosacījumu

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^d,\xi\in\mathbb{U}} |v(y,\xi)|\,(1+|y|)^{-p} = ||v||_p < \infty$$

$(D\nabla v)(y)$ - otro atvasinājumu pēc y matrica

tr A - matricas A pēda.

1.2. VIDĒJOŠANA UN STABILITĀTE

Apskatīsim impulsu sistēmu (1.1.9) - (1.1.10) formā

$$\frac{dy^\varepsilon}{dt} = f_1(y^\varepsilon, \xi^\varepsilon(t), \tag{1.2.1}$$

ja $t \in (\tau_{j-1}^\varepsilon, \tau_j^\varepsilon)$ un lēciena momentos

$$y^\varepsilon(\tau_j^\varepsilon - 0) = y^\varepsilon(\tau_j^\varepsilon) + \varepsilon g_1(y^\varepsilon(\tau_j^\varepsilon - 0), \xi^\varepsilon(\tau_j^\varepsilon - 0)), \tag{1.2.2}$$

$j \in \mathbb{N}$ ar sākuma nosacījumu

$$y^\varepsilon(0) = y. \tag{1.2.3}$$

Markova procesa $\{y^\varepsilon(t), \xi^\varepsilon(t)\}$ vājais infinitezimālais operators ir formā

$$(\mathcal{L}(\varepsilon)v)(y,\xi) = (f_1(y,\xi), \nabla)v(y,\xi) + \frac{1}{\varepsilon}Qv(y,\xi) + (G(\varepsilon)v)(y,\xi),$$

kur

$$(G(\varepsilon)v)(y,\xi) = \frac{a(\xi)}{\varepsilon}\int_{\mathbb{U}}[v(y+\varepsilon g_1(y,\xi),z) - v(y,z)]p(\xi,dz).$$

Kopā ar (1.1.1)-(1.1.2) apskatīsim vidējoto vienādojumu

$$\frac{du}{dt} = b_1(u), \tag{1.2.4}$$

kur $b_1(u)$ definēts iepriekš. Viegli redzams, ka attēlojumam $b_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ir divi nepārtraukti, ierobežoti atvasinājumi. Tātad [89], eksistē viens vienīgs vienādojuma (1.2.4) atrisinājums $u(t,u)$, kas apmierina sākuma nosacījumu

$$u(0) = 0. \tag{1.2.5}$$

Pēc definīcijas vienādojumam

$$(Qv)(y,\xi) = -F_1(y,\xi) + b_1(y) \tag{1.2.6}$$

ir atrisinājums formā

$$v(y,\xi) = (\Pi F_1)(y,\xi),$$

kur operators Π ir definēts ar formulu (1.1.6).Eksistē tāda pozitīva konstante h, ka

$$\sup_{\xi\in\mathbb{U}} |(\Pi F_1)(y,\xi)| \le h \sup_{\xi\in\mathbb{U}} |F_1(y,\xi)| \tag{1.2.7}$$

visiem $y \in \mathbb{R}^d$. Viegli pārliecināties, ka atvasinājums $(DF_1)(y,\xi)$ ir vienmērīgi ierobežots un apmierina sekojošus nosacījumus:

$$\int_{\mathbb{U}} (DF_1)(y,\xi)\mu(d\xi) = Db_1(y);$$

$$\begin{aligned} \sup_{\xi\in\mathbb{U}} ||(D\Pi F_1)(y,\xi)|| &= \sup_{\xi\in\mathbb{U}} ||(\Pi DF_1)(y,\xi)|| \le \\ &\le h \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{U} \\ y\in\mathbb{R}^d}} ||(DF_1)(y,\xi)|| = h_1 \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

1.1.Teorēma (vidējošanas princips). *Izpildoties augstāk minētajiem nosacījumiem, visiem $r > 0$ un $T > 0$ sistēmas (1.1.1) −(1.1.2) − (1.1.3) atrisinājums konverģē, ja $\varepsilon \to 0$, uz vidējotā vienādojuma (1.1.4) atrisinājumu u(t,y) vienmērīgi visiem $y \in \mathbb{U}_r = \{|y| < r\}$ un $t \in [0,T]$, t.i., visiem $\delta > 0$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{U} \\ y\in\mathbb{U}_r}} \mathbb{P}_{y,\xi}(\sup_{0\le t\le T} |y^\varepsilon(t) - u(t,y)| > \delta) = 0 \tag{1.2.9}$$

Tagad apskatīsim impulsu sistēmu (1.2.1)-(1.2.2), pieņemot, ka

$$f_1(0,\xi) = 0, \quad g_1(0,\xi) = 0 \tag{1.2.10}$$

Tad funkcija $b_1(u)$ apmierina nosacījumu $b_1(0) = 0$.

Definīcija. *Vienādojuma (27) triviālo atrisinājumu sauc par eksponenciāli stabilu, ja eksistē tādas pozitīvas konstantes M un γ, ka visiem $y \in \mathbb{R}^d$ un $t \ge 0$ izpildās nevienādība*

$$|u(t,y)| \le Me^{-\gamma t}\, |y|. \tag{1.2.11}$$

1.2.Teorēma . *Ja ievēro augstāk minētos pieņēmumus un ja* (1.2.4) *triviālais atrisinājums ir eksponenciāli stabils, tad eksistē tāds skaitlis* $\varepsilon_0 > 0$, *ka visiem* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *sistēmas* (1.2.1) – (1.2.2) *triviālais atrisinājums ir eksponenciāli stabils vidējā kvadrātiskā nozīmē, t.i., tad eksistēs tādas pozitīvas konstantes* M_1 *un* γ_1, *ka visiem* $y \in \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{U}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *un* $t \geq 0$ *izpildās nevienādība*

$$\mathbb{E}_{y,\xi}|y^\varepsilon(t)|^2 \leq M_1 e^{-\gamma_1 t}\,|y|^2. \qquad (1.2.12)$$

1.1.Secinājums . *Ja izpildās 1.2.Teorēmas nosacījumi, tad sistēmas* (1.2.1)–(1.2.2) *atrisinājumi konverģē uz nulli ar varbūtību viens, t tiecoties uz* ∞.

1.3. PĀREJA UZ LAIKU $\frac{t}{\varepsilon^2}$

Pieņemsim, ka $b_1(y) = 0$. Tad visi vidējotā vienādojuma (1.2.4) atrisinājumi ir konstantes un mums nav informācijas par sistēmas (1.1.9)-(1.1.10) atrisinājumu uzvedību. Tad [3,5] mēs varam pāriet uz laiku $\frac{t}{\varepsilon^2}$ un pārrakstīt sistēmu (1.1.9)-(1.1.10) formā

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f(y_\varepsilon, \xi_\varepsilon(t), \varepsilon)$$

visiem $t \in (\tau_{j-1}^{\varepsilon^2}, \tau_j^{\varepsilon^2})$ un

$$y_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t-0) + \varepsilon g(y_\varepsilon(t-0), \xi(t-0), \varepsilon)$$

visiem $t = \tau_j^{\varepsilon^2}$, $j \in \mathbb{N}$, kur $\tau_j^{\varepsilon^2}$ ir Markova procesa $y_\varepsilon(t)$, uzdota ar formulu (1.2.2), lēcienu momenti. Minētajai sistēmai īslaicīgi atmetīsim locekļus f_3 un g_3 funkcijām f un g un pārrakstīsim šo sistēmu formā

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f_1(y_\varepsilon), \xi_\varepsilon(t), \varepsilon) + f_2(y_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)), \tag{1.3.1}$$

ja $t \in (\tau_{j-1}^{\varepsilon^2}, \tau_j^{\varepsilon^2})$ un

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t-0) &+ \varepsilon g_1(y_\varepsilon(t-0), \xi_\varepsilon(t-0)) + \\ &+ \varepsilon^2 g_2(y_\varepsilon(t-0), \xi_\varepsilon(t-0)), \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

ja $t = \tau_j^{\varepsilon^2}$, $j \in \mathbb{N}$ ar sākuma nosacījumu

$$y_\varepsilon(0) = y \tag{1.3.3}$$

Markova procesa $\{y_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)\}$ vājais infinitezimālais ģenerators $\tilde{L}(\varepsilon)$ ir formā

$$\begin{aligned} (\tilde{L}(\varepsilon)v)(y,\xi) = \frac{1}{\varepsilon^2} Qv(y,\xi) &+ \frac{1}{\varepsilon}(\nabla v(y,\xi), f_1(y,\xi) + \varepsilon f_2(y,\xi)) + \\ &+ \tilde{G}(\varepsilon)v(y,\xi), \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

kur operators $\tilde{G}(\varepsilon)$ ir uzdots ar formulu

$$\tilde{G}(\varepsilon)v(y,\xi)=\frac{1}{\varepsilon^2}a(\xi)\int\limits_{\mathbb{U}}[v(y+\varepsilon g_1(y,\xi)+\varepsilon^2 g_2(y,\xi),z)-$$

$$-v(y,\xi)]p(\xi,dz). \qquad (1.3.5)$$

1.4.Lemma . *Ja $u(y,\xi)$ ir divi nepārtraukti atvasinājumi pēc $y\in\mathbb{R}^d$ un $u\in\mathbb{V}_p$, $|\nabla u|\in\mathbb{V}_{p-1}$ kādam $p\geq 1$, tad visiem $\varepsilon\in(0,1)$*

$$\varepsilon\tilde{L}(\varepsilon)u(y,\xi)-\frac{1}{\varepsilon}Qu(y,\xi)=(\nabla u(y,\xi),f_1(y,\xi))+$$

$$+a(\xi)\int\limits_{\mathbb{U}}(\nabla u(y,z),g_1(y,\xi))p(\xi,dz)+r_{1\varepsilon}(y,\xi), \qquad (1.3.6)$$

un visi labās puses locekļi un Qu pieder telpai $\mathbb{V}_p$, bez tam

$$\sup_{0<\varepsilon<1}||r_{1\varepsilon}||_p=\infty; \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}r_{1\varepsilon}(y,\xi)=0$$

visiem $y\in\mathbb{R}^d$ un $\xi\in\mathbb{U}$.

1.5.Lemma . *Ja $v_0(y)$ ir nepārtraukta funkcija ar diviem nepārtrauktiem atvasinājumiem un ja $v_0\in\mathbb{V}_p$, $|\nabla v_0|\in\mathbb{V}_{p-1}$, $||D\nabla v_0||\in\mathbb{V}_{p-2}$ kādam $p\geq 2$, tad visiem $\varepsilon\in(0,1)$*

$$\tilde{L}(\varepsilon)v_0(y)-\frac{1}{\varepsilon}(\nabla v_0(y),F_1(y,\xi))=$$

$$=(\nabla v_0(y),F_2(y,\xi))+$$

$$+\frac{1}{2}a(\xi)([D\nabla v_0(y)]g_1(y,\xi),g_1(y,\xi))+r_{2\varepsilon}(y,\xi) \qquad (1.3.7)$$

un (1.3.7) labās puses visi locekļi pieder telpai $\mathbb{V}_p$, bez tam

$$\sup_{0<\varepsilon<1}||r_{2\varepsilon}||_p<\infty; \quad \lim_{\varepsilon\to 0}r_{2\varepsilon}(y,\xi)=0$$

visiem $y\in\mathbb{R}^d$, $\xi\in\mathbb{U}$.

Ar $\tilde{y}(t)$ apzīmēsim sistēmas atrisinājumu, ja funkciju $f(y,\xi,\varepsilon)$ un $g(y,\xi,\varepsilon)$ vietā ir funkcijas $f(y,\xi,0)$ un $g(y,\xi,0)$.

1.6.Lemma. *Pie minētajiem pieņēmumiem*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E} \sup_{0\le t\le T} |y(\frac{t}{\varepsilon}) - \tilde{y}(\frac{t}{\varepsilon})|^2 = 0 \qquad (1.3.8)$$

visiem $T \geq 0$, $\xi \in \mathbb{U}$ *un* $y \in \mathbb{R}^d$.

Ieviesīsim funkcionāļus

$$\tilde{v}_\varepsilon(y,\xi) = |y + \varepsilon \Pi F_1(y,\xi)|^2$$

$$\check{v}_\varepsilon(y,\xi,c) = (y + \varepsilon \Pi F_1(y,\xi), c) \qquad (1.3.9)$$

kādam $c \in \mathbb{R}^d$

1.2.Secinājums . *Katram* $T > 0$ *eksistē tādas pozitīvas konstantes* ε_T *un* A_T, *ka*

$$|\mathbb{E}_{y,\xi} \tilde{v}_\varepsilon(y_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)) - \tilde{v}_\varepsilon(y,\xi)| < tA_T(1 + |y|)^2 \qquad (1.3.10)$$

visiem $t \in [0,T], \varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$, $y \in \mathbb{R}^d$ *un* $\xi \in \mathbb{U}$.

1.3.Secinājums . *Katram* $T > 0$ *un* $c \in \mathbb{R}^d$ *eksistē tādas pozitīvas konstantes* ε_T *un* A_T, *ka*

$$|\mathbb{E}_{y,\xi} \check{v}_\varepsilon(y_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t), c) - \check{v}_\varepsilon(y,\xi,c)| \le tA_T|c|(1 + |y|) \qquad (1.3.11)$$

visiem $t \in [0,T], \varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$, $y \in \mathbb{R}^d$ *un* $\xi \in \mathbb{U}$.

1.4.Secinājums . *Katram* $T > 0$ *eksistē tādas pozitīvas konstantes* ε_T *un* A_T, *ka*

$$\mathbb{E}_{y,\xi} |y_\varepsilon(t) + \varepsilon \Pi F_1(y_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)) - y - \varepsilon \Pi F_1(y,\xi)|^2 \le$$

$$\le tA_T(1 + |y|)^2 \qquad (1.3.12)$$

visiem $t \in [0,T], \varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$, $y \in \mathbb{R}^d$ *un* $\xi \in \mathbb{U}$.

1.5.Secinājums . *Katram* $T > 0$ *eksistē tādas pozitīvas konstantes* ε_T *un* A_T, *ka*

$$\mathbb{E}\{|y_\varepsilon(t) + \varepsilon \Pi F_1(y_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)) - y_\varepsilon(s) -$$

$$-\varepsilon \Pi F_1(y_\varepsilon(s), \xi_\varepsilon(s))|^2 | \mathcal{F}^{\frac{s}{\varepsilon^2}}\} \le (t-s)A_T(1 + |y_\varepsilon(s)|)^2 \qquad (1.3.13)$$

visiem $s \in [0,T]$, $t \in [s,T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$, $y \in \mathbb{R}^d$ *un* $\xi \in \mathbb{U}$.

Definēsim vektoru

$$b(y) = \int\limits_{\mathbb{U}} F_2(y,\xi)\mu(d\xi) + \int\limits_{\mathbb{U}} [\Pi D F_1(y,\xi)] F_1(y,\xi)\mu(d\xi) -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{U}} [DF_1(y,\xi)] g_1(y,\xi)\mu(d\xi)$$

un simetrisku matricu $A(y) = \{a_{ij}(y)\}, (i,j = 1, ..., n)$ ar formulu

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(y)\frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^i \partial y^j} = \frac{1}{2} tr[A(y) D\nabla v(y)] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{U}} ([D\nabla v(y)] F_1(y,\xi)), \Pi F_1(y,\xi))\mu(d\xi) -$$

$$- \int\limits_{\mathbb{U}} ([D\nabla v(y)] g_1(y,\xi), f_1(y,\xi) + \frac{1}{2} a(\xi) g_1(y,\xi))\mu(d\xi),$$

kur $v(y)$ ir patvaļīga pietiekami gluda skalāra funkcija. Pēc konstrukcijas:

$$b \in \mathbb{V}_1,\ |\nabla b| \in \mathbb{V}_1,\ a_{ij} \in \mathbb{V}_2,\ |\nabla a_{ij}| \in \mathbb{V}_1,\ ||D\nabla a_{ij}|| \in \mathbb{V}_1 \tag{1.3.14}$$

visiem $i,j = 1, ..., n$.

1.6.Secinājums . *Ja* $v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 u$ *ir funkcionālis no 1.6.Lemmas un* $u(y,\xi)$ *apmierina vienādojumu* $Qu + F = 0$, *kur*

$$F(y,\xi) = (\nabla v_0(y), F_2(y,\xi) + [\Pi D F_1(y,\xi)] F_1(y,\xi) -$$
$$- [DF_1(y,\xi) g_1(y,\xi) - b(y)) +$$

$$+ ([D\nabla v_0(y)] F_1(y,\xi), \Pi F_1(y,\xi)) -$$

$$- ([D\nabla v_0(y)] g_1(y,\xi)] g_1(y,\xi), f_1(y,\xi) + \frac{1}{2} a(\xi) g_1(y,\xi)) -$$

$$- \frac{1}{2} tr[A(y) D\nabla v_0(y)],$$

tad

$$\tilde{L}(\varepsilon)v \in \mathbb{V}_p, \qquad \sup_{0<\varepsilon<1} ||\tilde{L}(\varepsilon)v||_p < \infty$$

un visiem $\xi \in \mathbb{U}$, $y \in \mathbb{R}^d$*:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{L}(\varepsilon)v(y,\xi) = L_0 v_0(y),$$

kur $L_0 v_0(y) = \frac{1}{2} tr A(y) D \nabla v_0(y) + (\nabla v_0(y), b(y))$.

Matrica A(y) ir pozitīvi definita. No tā izriet, ka [24] operators L_0 ar koeficientiem, kas apmierina (1.3.14), var tikt lietots kā difūziju Markova procesa $\{\overline{y}(t), t \geq 0\}$ ģenerējošais operators kādā varbūtību telpā.

1.3.Teorēma. *Pie augstāk minētajiem pieņēmumiem process* $y_\varepsilon(t)$ *vāji konverģē, ja* $\varepsilon \to 0$, *uz difūziju Markova procesu* $\overline{y}(t)$ *ar ģenerējošo operatoru* L_0 .

2. KOCIKLU PĀR MARKOVA IMPULSU DINAMISKAJĀM SISTĒMĀM VIDĒJOŠANA UN STABILITĀTE

2.1. KOCIKLI PĀR MARKOVA IMPULSU DINAMISKAJĀM SISTĒMĀM

Apskatīsim homogēnu Markova procesu $\xi_\varepsilon(t)$ diskrētā fāzu telpā $\mathbb{U}$ ar infinitezimālo operatoru (matricu) $Q_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(Q + \varepsilon Q_1)$, kur $\varepsilon \in (0, \delta)$ un operatori Q un Q_1 uzdoti ar formulām

$$(Qv)(z) = a(z) \sum_{u \in \mathbb{U}} [v(u) - v(z)] p(z, u)$$

$$(Q_1 v)(z) = a(z) \sum_{u \in \mathbb{U}} [v(u) - v(z)] p_1(z, u)$$

katrai funkcijai telpā $\mathbb{U}$, kur $a(z)$ ir pozitīva funkcija un δ ir pietiekami mazs, pozitīvs skaitlis. Tas ir gabaliem konstants process [75] ar lēcienu diskrētos laika momentos $t \in \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$, ar intensitāti $\frac{a(z)}{\varepsilon}$ un iekļautu Markova ķēdi ar pārejas varbūtību $p(z, u) + \varepsilon p_1(z, u)$.

Pieņemsim, ka operatoram Q ir īpašvērtība 0 ar kārtu $m \geq 1$ un Markova procesam $\xi_\varepsilon(t)$ ir m invarianti mēri μ_j disjunktās apakškopās $\mathbb{U}_j$

$$p(z, \mathbb{U}_j) = \begin{cases} 1, & ja \ z \in \mathbb{U}_j \\ 0, & ja \ z \notin \mathbb{U}_j \end{cases}$$

kur $j = \overline{1, m}$, un eksistē tāds pozitīvs skaitlis α, ka Markova procesa pārejas varbūtība $P(t, z, u)$ visiem $j = \overline{1, m}$ apmierina nevienādību:

$$\sup_{\substack{\|v\|=1 \\ z \in \mathbb{U}_j}} \Big| \sum_{u \in \mathbb{U}_j} [P(t, z, u) - \mu_j(u)] v(u) \Big| \leq e^{-\alpha t}.$$

V.Koroļuka un viņa skolnieku darbos pierādīts, ka, ja $\varepsilon \to 0$, tad Markova procesu virkne vāji konverģē uz sabiezināto Markova

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX procesu $\tilde{\xi}$ ar fāzu telpu $\tilde{\mathbb{U}} = \{1, 2, ..., m\}$ un infinitezimālo matricu

$$Q_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{z \in \mathbb{U}_i} a(z) p_1(z, \mathbb{U}_j) \mu_j(z), \ ja \ i \neq j \\ -\sum\limits_{j \neq i} \sum\limits_{z \in \mathbb{U}_i} a(z) p_1(z, \mathbb{U}_j) \mu_j(z), \ ja \ i = j, \end{cases}$$

Pieņemsim, ka minētais Markova process $\tilde{\xi}_\varepsilon(t)$ ir pārslēdzošais process dinamiskai sistēmai, uzdotai ar

- diferenciālvienādojumu telpā $\mathbb{R}^d$:

$$\frac{dy_\varepsilon}{dt} = \varphi(y_\varepsilon, \tilde{\xi}_\varepsilon(t)), \tag{2.1.1}$$

kur $\varphi(y, z)$ ir nepārtraukta un ierobežota funkcija ar diviem nepārtrauktiem un ierobežotiem attiecībā uz y atvasinājumiem,

- diferenciālvienādojumu telpā R^n:

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = B(y_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)) x_\varepsilon, \tag{2.1.2}$$

kur matricvērtīga funkcija $B(y, z)$ ir nepārtraukta, ierobežota funkcija ar diviem nepārtrauktiem, ierobežotiem atvasinājumiem pēc y. Diferenciālvienādojums (2.1.2) definē Koši matricu $X_\varepsilon(t, s, y, \xi)$ saimi telpā $\mathbb{R}^n$ ar evolucionaritātes īpašību, t.i., visiem $s < \tau < t$ izpildās vienādība

$$X_\varepsilon(t, s, y, \xi) = X_\varepsilon(t, \tau, y(\tau), \xi(\tau)) \, X_\varepsilon(\tau, s, y, \xi).$$

Šī saime ir atkarīga no Markova procesa un dinamiskās sistēmas (2.1.1) ar sākuma nosacījumu $\xi_\varepsilon(s) = \xi$ un $y_\varepsilon(s) = y$.

Darbos [19] un [116] tiek analizētas kociklu (2.1.2) pār Markova dinamisko sistēmu (2.1.1) stabilitātes pētīšanas iespējas ar vidējošanas un fāzu sabiezināšanas metožu, kā arī robežteorēmu palīdzību. Atšķirībā no minētajiem darbiem, šīs daļas izpētes objekts ir no labās puses nepārtraukts gadījuma process, kurš apmierina diferenciālvienādojumu (2.1.2), ja $t \notin \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$, un lēcienu vienādojumu

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t-0) + \varepsilon G(y_\varepsilon(t-0), \xi_\varepsilon(t-0)) x_\varepsilon, \tag{2.1.3}$$

ja $t \in \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$, kur process $y_\varepsilon(t)$ arī ir nepārtraukts no labās puses un apmierina diferenciālvienādojumu (2.1.1), ja $t \notin \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$, un lēcienu vienādojumu

$$y_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t-0) + \varepsilon g(y_\varepsilon(t-0), \xi_\varepsilon(t-0)), \tag{2.1.4}$$

ja $t \in \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$.

Tagad apskatīsim sabiezināto dinamisko sistēmu

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \tilde{\varphi}(\tilde{y}, \tilde{\xi}(t)), \tag{2.1.5}$$

kur visiem $j = \overline{1,m}$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{y}, j) = \sum_{z \in \mathbb{U}_j} (\varphi(y,u) + a(u)g(y,u))\mu_j(u),$$

un sabiezināto kociklu

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{B}(\tilde{y}(t), \tilde{\xi}(t))x, \tag{2.1.6}$$

kur

$$\tilde{B}(y,j) = \sum_{u \in \mathbb{U}_j} (B(y,u) + a(u)G(y,u))\mu_j(u)$$

un $\tilde{y}(t)$ apmierina vienādojumu (2.1.5). Vienādojums (2.1.6) definē Košī operatoru $\tilde{X}(t,s,y)$, atbilstošu (2.1.5) (ar sākuma nosacījumu $\tilde{y}(s) = y$) atrisinājumam.

Nosacīto matemātisko cerību Markova procesam $\tilde{\xi}(t)$ ar sākuma nosacījumu $\tilde{\xi}(s) = j$ apzīmēsim ar $\tilde{\mathbb{E}}_{sj}$.

Gadījumā, kad $m = 1$, (t.i., procesam $\xi_\varepsilon(t)$ izpildās vienmērīgās ergoditātes nosacījums, tātad, eksistē tāds invariants mērs μ, ka

$$\sup_{||v||=1} |\sum_{u \in \mathbb{U}} [P(t,z,u) - \mu(u)]v(u)| \le e^{-\alpha t} \tag{2.1.7}$$

kādam pozitīvam skaitlim α un visiem $t \ge 0$, $z \in \mathbb{U}$) paralēli kociklam (2.1.2) apskatīsim arī vidējoto kociklu, kas uzdots ar diferenciālvienādojumu

$$\frac{dx}{dt} = \overline{B}(y(t))x, \tag{2.1.8}$$

kur $y(t)$ ir vidējotā vienādojuma

$$\frac{dy}{dt} = \overline{F}(y), \tag{2.1.9}$$

kur

$$\overline{F}(y) = \sum_{u \in \mathbb{U}} (\varphi(y,u) + a(u)g(y,u))\mu(u),$$

atrisinājums, un $\overline{B}(y)$ ir vidējotā matrica, uzdota ar sakarību

$$\overline{B}(y) = \sum_{u \in \mathbb{U}} (B(y,u) + a(u)G(y,u))\mu(u). \tag{2.1.10}$$

Definīcija. *Kociklu (2.1.2) sauc par eksponenciāli stabilu vidējā kvadrātiskā nozīmē, ja eksistē tādas pozitīvas konstantes M un γ, ka visiem $t \geq s$, $y \in \mathbb{R}^d$ un $u \in \mathbb{U}$ izpildās nevienādība*

$$\mathbb{E}_{s,u} ||X_\varepsilon(t,s,y)||^2 \leq Me^{-\gamma(t-s)} \tag{2.1.11}$$

pie sākuma nosacījuma $\xi_\varepsilon(s) = \xi$.

Definīcija. *Kociklu (2.1.8) sauc par eksponenciāli stabilu, ja eksistē tādas pozitīvas konstantes C un ρ, ka visiem $t \geq s$ un $y \in \mathbb{R}^d$ var uzrakstīt nevienādību*

$$||X(t,s,y)|| \leq Ce^{-\rho(t-s)}. \tag{2.1.12}$$

Ar $P(t,z,du)$ apzīmēsim pārejas varbūtību Markova procesam ar C-infinitezimālo operatoru Q.

Definēsim lineāru nepārtrauktu operatoru Π ar šādu sakarību

$$(\Pi v)(z) := \int_0^\infty \sum_{u \in \mathbb{U}} [P(t,z,u) - \mu(u)]v(u)dt. \tag{2.1.13}$$

Viegli ieraudzīt, ka visām ierobežotām funkcijām v ir spēkā sekojoša sakarība

$$Q\Pi v = -v + \overline{v}.$$

Šo operatoru Π sauksim par *potenciālu.*

Ar vidējotā kocikla palīdzību varam definēt argumenta x kvadrātisko formu:

$$V(x,y) := (q(y)x,x) := \int_0^T |X(t,0,y)x|^2 dt, \tag{2.1.14}$$

kur ar $(.,.)$ apzīmēts skalārais reizinājums telpā $\mathbb{R}^n$. Šīs kvadrātiskās formas matrica $q(y)$ ir atkarīga no $T = \frac{ln2+lnC}{2\rho}$, kur ρ un C ir konstantes no nevienādības (2.1.12).

Ja $\mu(u)$ ir vienīgais invariantais mērs attiecībā uz operatoru Q, tad procesu $y_\varepsilon(t)$ saime vāji konverģē [18], ja $\varepsilon \to 0$, uz vidējotā vienādojuma (2.1.9) atrisinājumu.

2.1.Teorēma. *Ja operators Q ir vienmērīgi ergodisks un vidējotais kocikls (2.1.8) ir eksponenciāli stabils, tad eksistē tāds pozitīvs skaitlis ε_0, ka kocikls (2.1.2) ir eksponenciāli stabils vidējā kvadrātiskā nozīmē visiem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Pierādījums. Ieviesīsim funkciju

$$V_\varepsilon(x, y, z) = V(x, y) + \varepsilon W(x, y, z),$$

kur

$$W(x, y, z) = \Pi((\nabla_y V(x, y), \varphi(y, z) + a(z)g(y, z))+$$

$$+([(B^*(y, z)+a(z)G(y, z))q(y)+q(y)(B(y, z)+a(z)G(y, z))]x, x))$$

(∇_y apzīmē operatora gradientu telpā $\mathbb{R}^n$ un indekss "*" apzīmē transponēšanu). Skaidri redzams, ka ievērojot pieņēmumus attiecībā uz funkciju F un matricu B, varam uzrakstīt nevienādības:

$$\sup_{y,u}(|\overline{F}(y)| + ||D\overline{F}(y)|| + ||D^2\overline{F}(y)||) \leq c_1 < \infty$$

$$\sup_{y,u}(|\overline{B}(y)| + ||D\overline{B}(y)|| + ||D^2\overline{B}(y)||) \leq c_2 < \infty$$

Tā kā eksistē tādas konstantes c_1 un c_2, tad visiem $x \in \mathbb{R}^n$ un $y \in \mathbb{R}^d$ ir spēkā nevienādības:

$$c_1|x|^2 \leq V(x, y) \leq c_2|x|^2, \ |\nabla_x V(x, y)| \leq c_2|x|, \ c_1 \leq ||q(y)|| \leq c_2,$$

$$|\nabla_y V(x, y)| \leq c_2|x|^2, \ ||Dq(y)|| \leq c_2, \ ||D^2 q(y)|| \leq c_2. \quad (2.2.1)$$

Izrakstīsim Ļapunova operatoru attiecībā uz sistēmu (2.1.9)-(2.1.8):

$$(L_0 G)(x, y) := (\nabla_y G(x, y), \overline{F}(y)) + (\nabla_x G(x, y), \overline{B}(y)x) \quad (2.2.2)$$

un Markova procesa $\{x_\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)\}$ vājo infinitezimālo operatoru L_ε, uzdotu ar $\xi_\varepsilon(t)$ un sistēmām (2.1.1)-(2.1.2):

$$L_\varepsilon H(x,y,z) =$$

$$= (\nabla_y H(x,y,z), \varphi(y,z)) + Q_\varepsilon H(x,y,z) +$$
$$+(\nabla_x H(x,y,z), B(y,z)x) +$$
$$+\frac{a(\xi)}{\varepsilon}\sum_{u\in\mathbb{U}}[H(x+\varepsilon G(y,z)x, y+\varepsilon g(y,z), u) - H(x,y,u)]p(z,u) =$$
$$= (\nabla_y H(x,y,z), \varphi(y,z)) + Q_\varepsilon H(x,y,z) +$$
$$+(\nabla_x H(x,y,z), B(y,z)x) +$$
$$+a(\xi)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_y H(x,y,u), g(y,z))p(z,u) +$$
$$+a(\xi)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_x H(x,y,u), G(y,z)x)p(z,u) + o(\varepsilon), \qquad (2.2.3)$$

kur funkcijas $G(x,y)$ un $H(x,y,z)$ ir pietiekami gludas.

Pēc definīcijas

$$L_0 V(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[V(X(t,0,y)x, y(t,0,y)) - V(x,y))] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\int_0^T |X(t+s,t,y(t,0,y))X(t,0,y)x|^2 ds -$$
$$- \int_0^T |X(s,0,y)x|^2 ds] =$$

$$= |X(T,0,y)x|^2 - |x|^2,$$

kur $y(t,0,y)$ ir vidējotās dinamiskās sistēmas ar sākuma nosacījumu $y(0)=y$ atrisinājums.

No T skaitliskā lieluma un (2.2.1) izriet nevienādība:

$$L_0V(x,y) \leq -\frac{1}{2}|x|^2 \tag{2.2.4}$$

Tā kā potenciāls Π ir ierobežots lineārs operators, un $|F(y,z)|$ un $||B(y,z)||$ ir vienmērīgi ierobežoti ar skaitli c, tad no (2.2.1.) var izvest:

$$\sup_{y,u}|W(x,y,z)| \leq 3||\Pi||cc_2|x|^2$$

visiem $x \in \mathbb{R}^n$ un

$$(c_1 - 3\varepsilon||\Pi||cc_2)|x|^2 \leq V_\varepsilon(x,y,z) \leq (c_2 + 3\varepsilon||\Pi||cc_2)|x|^2$$

visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{U}$, $\varepsilon \in (0,\delta)$. Tātad eksistē tāds pietiekami mazs skaitlis $\varepsilon_1 \leq \delta$, ka

$$\frac{1}{2}c_1|x|^2 \leq V_\varepsilon(x,y,z) \leq 2c_2|x|^2 \tag{2.2.5}$$

visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{U}$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$. Pēc konstrukcijas funkcija $V_\varepsilon(x,y,z)$ ir pietiekami gluda un mēs varam lietot Markova procesa $\{x_\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)\}$ vājo infinitezimālo operatoru L_ε no (2.2.3). No šīs funkcijas definīcijas iegūstam

$$(L_\varepsilon V_\varepsilon)(x,y,z) = (\nabla_y V_\varepsilon(x,y,z), \varphi(y,z)) + Q_\varepsilon V_\varepsilon(x,y,z) +$$

$$+(\nabla_x V_\varepsilon(x,y,z), B(y,z)x) +$$

$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_y V_\varepsilon(x,y,u), g(y,z))p(z,u) +$$

$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_x V_\varepsilon(x,y,u), G(y,z)x)p(z,u) + o(\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(Q+\varepsilon Q_1)V(x,y) + QW(x,y,z) +$$

$$+(\nabla_y V(x,y), \varphi(y,z) + a(z)g(y,z)) +$$

$$+(\nabla_x V(x,y), (B(y,z) + a(z)G(y,z))x) +$$

$$+\varepsilon[(\nabla_y W(x,y,z),\varphi(y,z))+(\nabla_x W(x,y,z),B(y,z))]+$$

$$+Q_1 W(x,y,z)+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_y W(x,y,u),g(y,z))p(z,u)+$$

$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_x W(x,y,u),G(y,z)x)p(z,u)+o(\varepsilon)=$$

$$=-[(\nabla_y V(x,y),\varphi(y,z)+a(z)g(y,z))+$$

$$+([(B^*(y,z)+a(z)G(y,z))q(y)+q(y)(B(y,z)+a(z)G(y,z)]x,x)]+$$

$$+(\nabla_y V(x,y),\overline{F}(y))+([\overline{B}^*(y)q(y)+q(y)\overline{B}(y)]x,x)+$$

$$+(\nabla_y V(x,y),\varphi(y,z)+a(z)q(y,z))+$$

$$+(\nabla_x V(x,y),(B(y,z))+a(z)G(y,z))x)+$$

$$+\varepsilon[(\nabla_y W(x,y,z),\varphi(y,z))+(\nabla_x W(x,y,z),B(y,z)x)+$$

$$+QW(x,y,z)]+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_y W(x,y,u),g(y,z))p(z,u)+$$

$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_x W(x,y,u),G(y,z)x)p(z,u)+o(\varepsilon)$$

jeb

$$(L_\varepsilon V_\varepsilon)(x,y,z)=(L_0 V)(x,y)+\varepsilon r(x,y,z), \tag{2.2.6}$$

kur

$$(L_0 V)(x,y)=-[(\nabla_y V(x,y),\varphi(y,z)+a(z)g(y,z))+$$

$$+([(B^*(y,z)+a(z)G(y,z))q(y)+$$

$$+q(y)(B(y,z)+a(z)G(y,z))]x,x)]+$$

$$+(\nabla_y V(x,y),\overline{F}(y))+([\overline{B}^*(y)q(y)+q(y)\overline{B}(y)]x,x)+$$

$$+(\nabla_x V(x,y),(B(y,z)+a(y)G(y,z))x);$$

$$r(x,y,z)=[(\nabla_y W(x,y,z),\varphi(y,z))+(\nabla_x W(x,y,z),B(y,z)x)]+$$

$$+Q_1W(x,y,z)+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_y W(x,y,u),g(y,z))p(z,u)+$$

$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_x W(x,y,u),G(y,z)x)p(z,u)+o(\varepsilon)$$

un

$$(\nabla_x V(x,y),B(y,z)x)=([B^*(y,z)q(y)+q(y)B(y,z)]x,x).$$

No izveduma izriet, ka

$$(L_0V)(x,y)=(\nabla_y V(x,y),\overline{F}(y))+(\nabla_x V(x,y),\overline{B}(y)x).$$

Lietojot $\varphi(y,z)$ un $B(y,z)$ vienmērīgo ierobežotību, lineārā operatora Π nepārtrauktību un nevienādību (2.2.1), varam iegūt:

$$\sup_{y,z}|r(x,y,z)|\leq c_3|x|^2$$

kādai pozitīvai konstantei c_3. Tātad no (2.2.4) un (2.2.5) esam ieguvuši nevienādību:

$$(L_\varepsilon V_\varepsilon)(x,y,z)\leq(-\frac{1}{2}+\varepsilon c_3)|x|^2\leq$$

$$\leq(-\frac{1}{2}+\varepsilon c_3)\frac{1}{2}c_2V_\varepsilon(x,y,z)\leq-\frac{1}{8}c_2V_\varepsilon(x,y,z) \tag{2.2.7}$$

visiem $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^d$, $z\in\mathbb{U}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$ un pietiekami mazam pozitīvam skaitlim ε_2.

Varam lietot formulu Markova semigrupām (Dinkina formulu) [22]:

$$\mathbb{E}_{s,z}V_\varepsilon(X_\varepsilon(t,s,y)x,y^\varepsilon(t,s,y),\xi_\varepsilon(t))=$$

$$=V_\varepsilon(x,y,z)+\int_s^t\mathbb{E}_{s,z}(L_\varepsilon V_\varepsilon)(X_\varepsilon(\tau,s,y)x,y^\varepsilon(\tau,s,y),\xi_\varepsilon(\tau))d\tau$$

un no (2.2.7) iegūt:

$$\mathbb{E}_{s,z}V_\varepsilon(X_\varepsilon(t,s,y)x,y^\varepsilon(t,s,y),\xi_\varepsilon(t))\leq$$

$$\leq V_\varepsilon(x,y,z) - \frac{1}{8}c_2 \int\limits_s^t \mathbb{E}_{s,z} V_\varepsilon(X_\varepsilon(\tau,s,y)x, y^\varepsilon(\tau,s,y), \xi_\varepsilon(\tau))d\tau$$

kur $y^\varepsilon(t,s,y)$ ir diferenciālvienādojuma (2.1.1) ar sākuma nosacījumu $y^\varepsilon(s) = y$ atrisinājums. No (2.2.5) un iepriekš minētās nevienādības seko:

$$\frac{1}{2}c_1 \mathbb{E}_{s,z}|X_\varepsilon(t,s,y)x|^2 \leq$$

$$\leq \mathbb{E}_{s,z} V_\varepsilon(X_\varepsilon(t,s,y)x, y^\varepsilon(t,s,y), \xi_\varepsilon(t)) \leq$$

$$\leq V_\varepsilon(x,y,z)e^{-\frac{1}{8}c_2(t-s)} \leq 2c_2|x|^2 e^{-\frac{1}{8}c_2(t-s)}$$

visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{U}$ un $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, kur $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Pierādījums pabeigts.

2.3. FĀZU VIDĒJOŠANA UN STABILITĀTE

2.2.Teorēma. *Ja operators Q apmierina augstāk minētos nosacījumus un sabiezinātais kocikls* (2.1.6) *ir eksponenciāli stabils vidējā kvadrātiskā nozīmē, tad eksistē tāds pozitīvs skaitlis ε_0, ka kocikls* (2.1.2) – (2.1.3) *ir eksponenciāli stabils vidējā kvadrātiskā nozīmē visiem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Pierādījums. Pieņemsim, ka P ir projektoroperators uz ierobežotu funkciju telpu $\mathbb{B}(\mathbb{U})$, uzdots ar vienādību

$$(Pv)(z) = \sum_{u \in \mathbb{U}_j} v(u)\mu_j(u), \text{ ja } z \in \mathbb{U}_j, j = \overline{1,m}$$

kur v ir ierobežota funkcija. Minētajam Q paplašinājumam atbilstošais potenciāls $\tilde{\Pi}$ var tikt definēts visiem $v \in \mathbb{B}(\mathbb{U})$ ar vienādību:

$$(\tilde{\Pi}v)(z) = \int_0^\infty \sum_{u \in \mathbb{U}_j} [P(t, z, u) - \mu_j(u)]v(u)dt, \text{ ja } z \in \mathbb{U}_j, j = \overline{1,m}.$$

Viegli ieraudzīt, ka $\tilde{\Pi}$ ir lineārs, nepārtraukts operators telpā $\mathbb{B}(\mathbb{U})$ un visiem $v \in \mathbb{B}(\mathbb{U})$ var tikt uzrakstīta vienādība

$$Q\tilde{\Pi}v = -v + Pv \tag{2.3.1}$$

sabiezinātais kocikls (2.1.6), sabiezinātā dinamiskā sistēma (2.1.5) un Markova process $\xi(t)$ definē fāzu telpā $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \tilde{\mathbb{U}}$ kādu jaunu Markova procesu ar vājo infinitezimālo operatoru $\tilde{L}$, kurš uzdots pietiekami gludām (attiecībā uz x un y) funkcijām:

$$(\tilde{L}v)(x, y, j) :=$$

$$:= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\tilde{\mathbb{E}}_{0j} v(\tilde{X}(t, 0, y)x, \tilde{y}(t, 0, y), \xi(t)) - v(x, y, j)] =$$

$$= (\nabla_x v(x, y, j), \tilde{B}(y, j)x) + (\nabla_y v(x, y, j), \tilde{\varphi}(y, j)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^m Q_{ji} v(x, y, i)) \tag{2.3.2}$$

visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^d$, $j = \overline{1, m}$.

Šeit un turpmāk ar $\tilde{y}(t, s, y)$ apzīmēsim atrisinājumu vienādojumam (2.1.5) ar sākuma nosacījumu $\tilde{y}(s) = y$.

Ieviesīsim kvadrātisko formu telpā $\mathbb{R}^n$:

$$\tilde{V}(x, y, j) := (\tilde{q}(y_j)x, x) := \int_0^T \tilde{\mathbb{E}}_{0j}|\tilde{X}(s, 0, y)x|^2 ds$$

Var pierādīt [19], ka kādām pozitīvām konstantēm c_1 un c_2 vienmērīgi attiecībā uz $T > 0$, $y \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^n$ un $j = \overline{1, m}$ izpildās novērtējumi:

$$c_1|x|^2 \leq \tilde{V}(x, y, j) \leq c_2|x|^2; \; |\nabla_y \tilde{V}(x, y, j)| \leq c_2|x|^2;$$

$$c_1 \leq ||\tilde{q}(y, j)|| \leq c_2; \; |\nabla_x \tilde{V}(x, y, j)| \leq c_2|x|;$$

$$||D_y \tilde{q}(y, j)|| \leq c_2; \; ||D_y^2 \tilde{q}(y, j)|| \leq c_2 \tag{2.3.3}$$

Saskaņā ar Markova procesa homogenitāti ir spēkā identitāte:

$$\tilde{\mathbb{E}}_{t,j}|\tilde{X}(s + t, t, y)\, x|^2 \equiv \tilde{\mathbb{E}}_{0,j}|\tilde{X}(s, 0, y)\, x|^2$$

Tātad

$$\tilde{\mathbb{E}}_{0,j}\tilde{\mathbb{E}}_{t,\xi(t)}|\tilde{X}(s + t, t, \tilde{y}(t, 0, y))\tilde{X}(t, 0, y)\, x|^2 =$$

$$= \tilde{\mathbb{E}}_{0,j}|\tilde{X}(s + t, 0, y)\, x|^2,$$

un pēc $\tilde{V}(x, y, j)$ definīcijas varam izvēlēties T tādu, ka ir spēkā nevienādība

$$(\tilde{L}\tilde{V}(x, y, j)) = \tilde{\mathbb{E}}_{0,j}|\tilde{X}(T, 0, y)\, x|^2 - |x|^2 \leq -\frac{1}{2}|x|^2 \tag{2.3.4}$$

vienmērīgi visiem $y \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^n$ un $j = \overline{1, m}$. Šo T vērtību lietosim, uzdodot Ļapunova funkciju

$$\tilde{V}_\varepsilon(x, y, z) = U(x, y, z) + \varepsilon \tilde{W}(x, y, z),$$

kur
$$\tilde{W}(x,y,z) = \tilde{\Pi}[G(x,y,z) + Q_1 U(x,y,z)],$$
$$G(x,y,z) = (\nabla_y U(x,y,z), \varphi(y)) + (\nabla_x U(x,y,z), B(y,z)x) +$$
$$+\frac{a(z)}{\varepsilon}\sum_{u\in\mathbb{U}}[U(x+\varepsilon G(y,z)x, y+\varepsilon g(y,z), u) - U(x,y,u)]p(z,u),$$
$$U(x,y,z) = \tilde{V}(x,y,j),$$
kur $z \in \mathbb{U}_j$, $j = \overline{1,m}$.

Pēc konstrukcijas funkcija $U(x,y,z)$ ir kvadrātiskā forma ar matricu $h(y,z)$, uzdotu ar vienādībām:
$$h(y,z) = \tilde{q}(y,j),$$
ja $z \in \mathbb{U}_j$, $j = \overline{1,m}$.

Šīs funkcija un matrica apmierina nosacījumus (2.3.3). Tātad pēc projektoroperatora definīcijas varam rakstīt $PU = U$, un, saskaņā ar (2.3.1),
$$QU(x,y,z) \equiv 0. \tag{2.3.5}$$
Saskaņā ar operatoru $\tilde{\Pi}$ un Q_1 ierobežotību, no (2.3.2) un (2.3.3) seko nevienādības
$$||\nabla_x \tilde{W}(x,y,z)|| \leq k_1|x|;$$
$$||\nabla_y \tilde{W}(x,y,z)|| + |\tilde{W}(x,y,z)| \leq k_1|x|^2 \tag{2.3.6}$$
kādai pozitīvai konstantei k_1.

Tad eksistē tāds pietiekami mazs skaitlis ε_1, ka
$$\frac{1}{2}c_1|x|^2 \leq \tilde{V}_\varepsilon(x,y,z) \leq 2c_2|x|^2 \tag{2.3.7}$$
visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$.

Pēc konstrukcijas funkcija $\tilde{V}_\varepsilon(x,y,z)$ ir pietiekami gluda un mēs varam lietot Markova procesa $\{x_\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)\}$ vājo infinitezimālo operatoru L_ε no (2.2.3). Pēc šīs funkcijas definīcijas varam izrakstīt:
$$(L_\varepsilon \tilde{V}_\varepsilon)(x,y,z) = (\nabla_y \tilde{V}_\varepsilon(x,y,z), \varphi(y,z)) +$$

$$+Q_\varepsilon \tilde{V}_\varepsilon(x,y,z) + (\nabla_x \tilde{V}_\varepsilon(x,y,z), B(y,z)x) +$$

$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_y \tilde{V}_\varepsilon(x,y,u), g(y,z))p(z,u) +$$

$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_x \tilde{V}_\varepsilon(x,y,u), G(y,z)x)p(z,u) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}QU(x,y,z) + Q_1U(x,y,z) + Q\tilde{W}(x,y,z) +$$

$$+(\nabla_y U(x,y,z), \varphi(y,z) + a(z)g(y,z)) +$$

$$+(\nabla_x U(x,y,z), B(y,z) + a(z)G(y,z)x) + \varepsilon R(x,y,z),$$

kur

$$R(x,y,z) = (\nabla_y \tilde{W}(x,y,z), \varphi(y,z)) + (\nabla_x \tilde{W}(x,y,z), B(y,z)x) +$$

$$+Q_1\tilde{W}(x,y,z) +$$

$$+\frac{a(z)}{\varepsilon}\sum_{u\in\mathbb{U}}[\tilde{W}(x+\varepsilon G(y,z)x, y+\varepsilon g(y,z), u) - \tilde{W}(x,y,u)]p(z,u).$$

Saskaņā ar formulām (2.1.6) un (2.3.2) varam rakstīt:

$$Q\tilde{W}(x,y,z) =$$

$$= -G(x,y,z) - Q_1U(x,y,z) + PG(x,y,z) + PQ_1U(x,y,z) =$$

$$= -G(x,y,z) - Q_1U(x,y,z) +$$

$$+\sum_{u\in\mathbb{U}_j}\{G(x,y,u) + a(z)\sum_{s\in\mathbb{U}}[U(x,y,s) - U(x,y,u)]p_1(u,s)\}\mu_j(u) =$$

$$= -G(x,y,z) - Q_1U(x,y,z) + (\nabla_x U(x,y,j), \tilde{B}(y.j)x) +$$

$$+(\nabla_y U(x,y,j), \tilde{\varphi}(y.j)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{u\in\mathbb{U}_j} a(z)p_1(u,\mathbb{U}_k)[\tilde{V}(x,y,k) - \tilde{V}(x,y,j)]\mu_j(u) =$$

$$= -G(x,y,z) - Q_1U(x,y,z) + (\tilde{L}\tilde{V})(x,y,j),$$

ja $z \in \mathbb{U}_j$, $j = \overline{1,m}$. No iepriekšuzrakstītajām vienādībām un formulas (2.3.5) izriet, ka

$$(L_\varepsilon \tilde{V}_\varepsilon)(x,y,z) = (\tilde{L}\tilde{V}_\varepsilon)(x,y,j) + \varepsilon R(x,y,z)$$

visiem $z \in \mathbb{U}_j$, $j = \overline{1,m}$ un tāpēc no (2.3.4), (2.3.6) un (2.3.7) seko nevienādība

$$(L_\varepsilon \tilde{V}_\varepsilon)(x,y,z) \leq -\frac{1}{2}|x|^2 + \varepsilon k_1 |x|^2 \leq -\frac{1}{4}|x|^2 \leq -\frac{1}{8}c_2 \tilde{V}_\varepsilon(x,y,z)$$

visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{U}$ un $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, kur $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ ir pietiekami mazs pozitīvs skaitlis. Tagad varam lietot formulu Markova semigrupām [22]:

$$\mathbb{E}_{sz}\tilde{V}_\varepsilon(X_\varepsilon(t,s,y)x, y^\varepsilon(t,s,y), \xi_\varepsilon(t)) =$$

$$= \tilde{V}_\varepsilon(x,y,z) + \int_s^t \mathbb{E}_{sz}(L_\varepsilon \tilde{V}_\varepsilon)(X_\varepsilon(\tau,s,y)x, y^\varepsilon(\tau,s,y), \xi_\varepsilon(\tau))d\tau$$

un no (2.2.7) iegūt nevienādību

$$\mathbb{E}_{sz}\tilde{V}_\varepsilon(X_\varepsilon(t,s,y)x, y^\varepsilon(t,s,y), \xi_\varepsilon(t)) \leq$$

$$\leq \tilde{V}_\varepsilon(x,y,z) - \frac{1}{8}c_2 \int_s^t \mathbb{E}_{sz}\tilde{V}_\varepsilon(X_\varepsilon(\tau,s,y)x, y^\varepsilon(\tau,s,y), \xi_\varepsilon(\tau))d\tau.$$

No (2.2.5) un iepriekšējās nevienādības seko, ka

$$\frac{1}{2}c_1 \mathbb{E}_{sz}|X_\varepsilon(t,s,y)x|^2 \leq \mathbb{E}_{sz}\tilde{V}_\varepsilon(X_\varepsilon(t,s,y)x, y^\varepsilon(t,s,y), \xi_\varepsilon(t)) \leq$$

$$\leq \tilde{V}_\varepsilon(x,y,z)e^{-\frac{1}{8}c_2(t-s)} \leq 2c_2|x|^2 e^{-\frac{1}{8}c_2(t-s)}$$

visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{U}$ un $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Teorēma ir pierādīta.

3. ROBEŽTEOREMAS SKOROHODA TELPĀ MARKOVA IMPULSU DINAMISKAJĀM SISTĒMĀM UN KOCIKLU STABILITĀTE

3.1. KOCIKLU PĀR ĀTRĀM MARKOVA IMPULSU DINAMISKAJĀM SISTĒMĀM ROBEŽTEORĒMAS

Pieņemsim, ka 2. daļas 1.nodaļā aprakstītais Markova process $\xi(t)$ ir lēcienu process dinamiskai sistēmai, kas uzdota ar diferenciālvienādojumu telpā $\mathbb{R}^d$:

$$\frac{dy^\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(y^\varepsilon(t), \xi(t/\varepsilon^2)) + \varphi_2(y^\varepsilon(t), \xi(t/\varepsilon^2)), \tag{3.1.1}$$

kur $\varphi_1(y,z)$ un $\varphi_2(y,z)$ ir nepārtrauktas, ierobežotas funkcijas ar diviem nepārtrauktiem un ierobežotiem atvasinājumiem pēc y. Diskrētos laika momentos $t \in \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$, kad Markova procesam $\xi(t)$ ir lēcieni, procesam $y^\varepsilon(t)$ arī ir lēcieni, kas uzdoti ar vienādojumu

$$y^\varepsilon(t) = y^\varepsilon(t_-) + \varepsilon g_1(y^\varepsilon(t_-), \xi(t_-/\varepsilon^2)) + \varepsilon^2 g_2(y^\varepsilon(t_-), \xi(t_-/\varepsilon^2)), \tag{3.1.2}$$

Pētāmais objekts ir process $x^\varepsilon(t)$, kas uzdots ar lineāru diferenciālvienādojumu telpā $\mathbb{R}^n$

$$\frac{dx^\varepsilon}{dt} = B(y^\varepsilon(t), \xi(t/\varepsilon^2))\, x^\varepsilon, \tag{3.1.3}$$

ja $t \notin \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$, un tā lēcienu vienādojums ir

$$x^\varepsilon(t) = x^\varepsilon(t_-) + \varepsilon^2 G(y^\varepsilon(t_-), \xi(t_-/\varepsilon^2))\, x^\varepsilon(t_-), \tag{3.1.4}$$

ja $t \in \{\tau_{j-1}, j \in \mathbb{N}\}$, $y^\varepsilon \in \mathbb{R}^d$. $B(y, \xi)$ ir nepārtraukta un ierobežota matrica un tās divi atvasinājumi pēc y arī ir nepārtraukti un ierobežoti.

No Markova dinamisko sistēmu asimptotiskās teorijas zināms, ka ja $\varphi_1(y,\xi)$ un $\varphi_2(y,\xi)$ ir nepārtraukti diferencējamas attiecībā pret y un ja $D_y\varphi_1(y,\xi)$ un $D_y\varphi_2(y,\xi)$ ir vienmērīgi ierobežotas

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX matricas,tad eksistē un pie tam viens vienīgs atrisinājums sistēmai (3.1.1)-(3.1.2)-(3.1.3)-(3.1.4) ar sākuma nosacījumiem

$$x^{\varepsilon}(s) = x, \quad y^{\varepsilon}(s) = y. \tag{3.1.5}$$

Šis atrisinājums $\{x^{\varepsilon}(t),\, y^{\varepsilon}(t),\, t \geq s\}$ ir stohastiski nepārtrauktu, no Markova procesa $\{\xi(t/\varepsilon^2), t \geq s\}$ atkarīgu procesu saime. Tātad abu procesu varbūtību raksturlielumi visiem $t \geq s$ ir definēti ar sākuma nosacījumu (3.1.5) un nosacījumu $\xi(s/\varepsilon^2) = \xi$. Šo atrisinājumu sistēmai (3.1.1)–(3.1.2)–(3.1.3)–(3.1.4) ar nosacījumiem $\xi(s/\varepsilon^2) = \xi$ un (3.1.5) apzīmēsim ar $x^{\varepsilon}(t, s, x, y, \xi)$ un $y^{\varepsilon}(t, s, y, \xi)$.

3.1.Lemma. *Pie minētajiem nosacījumiem trijnieks* $\{x^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t), \xi(t/\varepsilon^2)\}$ *ir Markova process fāzu telpā* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U}$ *ar infinitezimālo ģeneratoru*

$$\mathcal{A}(\varepsilon)v^{\varepsilon}(x,y,\xi) = (B(y,\xi)x, \nabla_x)v^{\varepsilon}(x,y,\xi) + \frac{1}{\varepsilon^2}Qv^{\varepsilon}(x,y,\xi) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1(y,\xi), \nabla_y v^{\varepsilon}(x,y,\xi)) + (\varphi_2(y,\xi), \nabla_y v^{\varepsilon}(x,y,\xi))$$

$$+\frac{a(z)}{\varepsilon^2}\sum_{u\in\mathbb{U}}[v^{\varepsilon}(x+\varepsilon^2 G(y,z), y+\varepsilon g_1(y,z)+\varepsilon^2 g_2(y,z), z)$$

$$- v^{\varepsilon}(x,y,z)]p(z,u).$$

Pierādījums ir analogs [18] pierādījumam, jo tāpēc, ka process $\phi = (y^{\varepsilon}, \xi)$ ir Markova process, atliek pierādīt, ka pāris $\{x^{\varepsilon}, \phi\}$ ir Markova process fāzu telpā $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{U})$.

Ja ε tiecas uz 0, tad procesu $y^{\varepsilon}(\varepsilon t)$ saime konverģē uz vidējotā vienādojuma

$$\frac{dy}{dt} = \bar{F}(y), \tag{3.1.6}$$

kur

$$\bar{F}(y) = \sum_{u\in\mathbb{U}}(\varphi_1(y,u) + a(z)g_1(y,u))\mu(u),$$

atrisinājumu. Ir zināms [8,23], ka pie minētajiem nosacījumiem un pie nosacījuma $\bar{F}(y) \equiv 0$ sistēmas (3.1.1)-(3.1.2)-(3.1.3)-(3.1.4) atrisinājumi vāji konverģē,ja $\varepsilon \to 0$,uz atbilstošajiem vienādojuma

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{B}(y)\,\bar{x}, \tag{3.1.7}$$

un difūziju aproksimācijas vienādojuma

$$dy = b(y)\,dt + \sigma(y)\,dw(t) \tag{3.1.8}$$

atrisinājumiem kādā galīgā intervālā $[0,T]$, kur $w(t)$ ir standarta Vīnera process telpā $\mathbb{R}^d$,

$$\bar{B}(y) = \sum_{u\in\mathbb{U}} (B(y,\,u) + a(z)G(y,u))\mu(u),$$

$$b(y) = \sum_{u\in\mathbb{U}} \varphi_2(y,u)\mu(u) + a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}} g_2(y,u)\mu(u) +$$

$$+\sum_{u\in\mathbb{U}} [\Pi D_y(\varphi_1(y,u) + a(z)g_1(y,u)](\varphi_1(y,u) + a(z)g_1(y,u))\mu(u) -$$

$$-\sum_{u\in\mathbb{U}} [D_y(\varphi_1(y,u) + a(z)g_1(y,u))]g_1(y,u)\mu(u),$$

un simetriskā nenegatīvi definitā matrica $\sigma(y)$ ir definēta ar formulu

$$|\sigma(y)h|^2 = 2\sum_{u\in\mathbb{U}} (\varphi_1(y,\xi),h)(\Pi\varphi_1(y,\xi),h)\mu(\xi)$$

patvaļīgam vektoram $h \in \mathbb{R}^d$.

Pierādīsim, ka šo difūziju aproksimāciju (3.1.7)-(3.1.8) varam sekmīgi lietot sākotnējās sistēmas (3.1.1)-(3.1.3) lokālās stohastiskās asimptotiskās stabilitātes analīzei.

2. Lineāru diferenciālvienādojumu ar Markova koeficientiem stohastiskā stabilitāte.

Šajā nodaļā darbosimies ar lineāru diferenciālvienādojumu telpā $\mathbb{R}^n$

$$\frac{dx}{dt} = \bar{B}(y(t))x, \tag{3.2.1}$$

kur $\bar{B}(y)$ ir nepārtraukta, ierobežota matricvērtīga funkcija un $y(t)$ ir stohastiski nepārtraukts Fellera Markova process ar vājo infinitezimālo operatoru Q.

Tā kā pāris $\{x(t),\, y(t)\}$ veido homogēnu, stohastiski nepārtrauktu Markova procesu ar vājo infinitezimālo operatoru L_0

$$L_0\, v(x,\, y) = (\bar{B}(y)\, x,\, \nabla_x)\, v(x,\, y) + Q\, v(x,\, y),$$

tad viegli redzams, ka eksistē $\{X(t,s,y), t \geq s \geq 0\}$ - tāda matricvērtīgu funkciju saime, uzdota ar vienādību $X(t,s,y)x = x(t,s,x,y)$, kur $x(t,s,x,y)$ ir Koši problēmas $x(s,s,x,y) = x$ atrisinājums pie nosacījuma $y(s) = y$. Matricas $X(t,s,y)$ apmierina arī vienādojumu (3.1.7) visiem $t > s$ un sākuma nosacījumu $X(s,s,y) = I$, kur I ir vienības matrica. Šai matricu saimei piemīt evolucionaritātes īpašība:

$$X(t,s,y) = X(t,\tau,y(\tau))X(\tau,s,y)$$

visiem $y \in \mathbb{Y}, t \geq \tau \geq s \geq 0$. Šī īpašība ļauj definēt *Ļapunova p-indeksu:*

$$\lambda^{(p)} = \sup_{x,y} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{pt} ln\mathbb{E}|X(t,s,y)x|^p.$$

Definīcija. *Diferenciālvienādojuma* (3.1.3) *atrisinājumu sauc par eksponenciāli p-stabilu, ja eksistē tādi pozitīvi skaitļi M un γ, ka visiem $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{Y}, \xi \in \mathbb{U}$ un $t > 0$ ir spēkā nevienādība*

$$\mathbb{E}|x^\epsilon(t,0,x,y,\xi)|^p \leq M|x|^p e^{-\gamma t}$$

Var pierādīt, ka eksponenciālā p-stabilitāte ir ekvivalenta nosacījumam $\lambda^{(p)} < 0$. Viegli saskatīt, ka visiem pozitīviem $p_1 \leq p_2$ var uzrakstīt sakarību

$$(\mathbb{E}|X(t,s,y)x|^{p_1})^{1/p_1} \leq (\mathbb{E}|X(t,s,y)x|^{p_2})^{1/p_2}.$$

Tādejādi nevienādība

$$\lambda^{(p_1)} \leq \lambda^{(p_2)}$$

seko no nevienādības $p_1 \leq p_2$ un $\lambda^{(p)}$ ir monotona funkcija.

Definīcija. *Sistēmu (3.1.3)-(3.1.4) sauc par :*

- lokāli stabilu gandrīz droši, ja visiem $\eta > 0$ un $\beta > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka nevienādība

$$\sup_{\substack{y \in \mathbb{Y} \\ \xi \in \mathbb{U}}} \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} |x(t, 0, x, y, \xi)| > \eta) < \beta,$$

seko no nosacījuma $x \in B_\delta(0)$, kur $B_\delta(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta\}$;

-asimptotiski stohastiski stabilu, ja tā ir lokāli stabila gandrīz droši un visiem $x \in \mathbb{R}^n$ un $c > 0$ izpildās vienādība

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{\substack{y \in \mathbb{Y} \\ \xi \in \mathbb{U}}} \mathbb{P}(\sup_{s > t} |x(s, o, x, y, \xi)| > c) = 0$$

Pierādīsim, ka (3.2.1) asimptotiskā stohastiskā stabilitāte ir ekvivalenta nosacījumam

$$\lim_{p \to 0} \lambda^{(p)} = \lambda < 0,$$

3.2.Lemma. *Ja vienādojums (3.2.1) ir asimptotiski stohastiski stabils, tad tas ir eksponenciāli p-stabils visiem pietiekami maziem pozitīviem p.*

Pierādījums. Ieliksim stabilitātes gandrīz droši izteiksmē

$$\eta = 1, \qquad \beta = \tfrac{1}{2}$$

un izvēlēsimies tik mazu, pozitīvu skaitli α, lai izpildītos sekojoša nevienādība:

$$\sup_{\substack{|x| \leq 2^{-\alpha} \\ y \in \mathbb{Y}}} \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} |X(t, 0, y)x| > 1) < \tfrac{1}{2}.$$

No vienādojuma (3.2.1) linearitātes un no iepriekšējās nevienādības izriet, ka

$$\sup_{\substack{|x|\le 2^{-\alpha(l-1)}\\ y\in\mathbb{Y}}} \mathbb{P}(\sup_{t\ge 0}|X(t,0,y)x| > 2^{l\alpha}) < \tfrac{1}{2}$$

visiem $l \in \mathbb{N}$. Apzīmēsim

$$g_l := \sup_{\substack{|x|\le 1\\ y\in\mathbb{Y}}} \mathbb{P}(\sup_{t\ge 0}|X(t,0,y)x| \ge 2^{l\alpha}).$$

Pāris $\{x(t),\, y(t)\}$ ir stohastiski nepārtraukts Markova process un tam piemīt Markova īpašība [22], laika momentā $\tau_1(x)$ trajektorijai $x(t,0,x,y)$ izejot no lodes $B_1(0)$, ja $x \in B_1(0)$. Tātad

$$g_{l+1} = \sup_{\substack{|x|\le 1\\ y\in\mathbb{Y}}} \mathbb{P}(\sup_{t\ge 0}|X(t,0,y)x| \ge 2^{(l+1)\alpha}) =$$

$$= \sup_{\substack{|x|\le 1\\ y\in\mathbb{Y}}} \int_{s=0}^{\infty} \int_{\substack{|u|=2^{l\alpha}\\ v\in\mathbb{Y}}} \mathbb{P}_{x,y}(\tau_1(x) \in ds, x(s) \in du, y(s) \in dv) \times$$

$$\times\, \mathbb{P}(\sup_{t\ge 0}|X(t,0,v)u| > 2^{(l+1)\alpha}) \le$$

$$\le \sup_{\substack{|x|\le 2^{l\alpha}\\ y\in\mathbb{Y}}} \mathbb{P}(\sup_{t\ge 0}|X(t,0,y)x| > 2^{(l+1)\alpha}) \times$$

$$\times \sup_{\substack{|x|\le 1\\ y\in\mathbb{Y}}} \int_{s=0}^{\infty} \int_{\substack{|u|=2^{l\alpha}\\ v\in\mathbb{Y}}} \mathbb{P}_{x,y}(\tau_1(x) \in ds, x(s) \in du, y(s) \in dv) \le$$

$$\le \sup_{\substack{|x|\le 1\\ y\in\mathbb{Y}}} \mathbb{P}(\sup_{t\ge 0}|X(t,0,y)x| \ge 2^{l\alpha}) = \tfrac{1}{2} g_l.$$

Tātad $g_l \leq \frac{1}{2^l}$ visiem $l \in \mathbb{N}$.

Apzīmēsim

$$\zeta := \sup_{t \geq 0} |x(t, 0, x, y)|^p.$$

Tad visiem $p > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{Y}$ var uzrakstīt

$$\mathbb{E}\zeta \leq |x|^p \sup_{|x| \leq 1} \mathbb{E}\zeta \leq \sum_{l=1}^{\infty} 2^{l\alpha p} \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} |x(t, 0, x, y)| \geq 2^{(l-1)\alpha}) \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{\infty} 2^{l\alpha p} 2^{-l} |x|^p := K_1 |x|^p.$$

Tātad gadījuma lielumam ζ eksistē matemātiskā cerība visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{Y}, p \in (0, \alpha^{-1})$. Saskaņā ar Lemmas nosacījumiem (3.2.1) atrisinājums $x(t, 0, x, y)$ tiecas uz 0 gandrīz droši, ja t tiecas uz bezgalību, vienmērīgi visiem $y \in \mathbb{Y}$, un pēc Lebega teorēmas varam rakstīt

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{E}|x(t + s, s, x, y)|^p = 0$$

visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in (0, \alpha^{-1})$. Bez tam var pārliecināties, ka šī konverģence ir vienmērīga pa x lodē $B_1(0)$ un $s \geq 0$, t.i.,

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{\substack{x \in B_1(0) \\ y \in \mathbb{Y}}} \mathbb{E}|x(t + s, s, x, y)|^p = 0.$$

Tagad varam izvēlēties skaitli T tik lielu, lai izpildītos nevienādība

$$\sup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{E}|x(t + s, s, x, y)|^p \leq |x|^p e^{-1},$$

un, lietojot nevienādību

$$\mathbb{E}|x(lT, 0, x, y)|^p =$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{P}(x, y, (l-1)T, u, v) \mathbb{E}|x(T, 0, u, v)|^p \leq$$

$$\leq e^{-1}\mathbb{E}|x((l-1)T, 0, x, y)|^p,$$

kur $\mathbb{P}(x, y, t, du, , dv)$ ir homogēnā Markova procesa $\{x(t), y(t)\}$ pārejas varbūtība, varam rakstīt, ka

$$\mathbb{E}|x(t, 0, x, y)|^p \leq K_1 e^{-[\frac{t}{T}]T}|x|^p,$$

kur $[a]$ ir skaitļa a veselā daļa. Pierādījums pabeigts.

Lai analizētu (3.2.1) atrisinājumu uzvedību, varam lietot Dinkina formulu [22]

$$\mathbb{E}^{(u)}_{x,y} v(x(\tau_r(t)), y(\tau_r(t))) =$$

$$= v(x, y) + \mathbb{E}^{(u)}_{x,y}\{\int_u^{\tau_r(t)} (L_0 v)(x(s), y(s))\, ds\}, \tag{3.2.2}$$

kur matemātiskās cerības indeksi apzīmē nosacījumus

$$x(u) = x,\ y(u) = y,\ \tau_r(t) = \min\{\tau_r,\ t\},$$

$$\tau_r = \inf\{t > u : x(t, u, x, y) \notin B_r(0)\}.$$

Ja $u = 0$, tad indeksu nerakstīsim.

Ja visiem $t \geq u \geq 0$ eksistē matemātiskās cerības $\mathbb{E}_{x,y} v(x(t), y(t))$ un $\mathbb{E}_{x,y}(L_0 v)(x(t), y(t))$, tad varam lietot [22] Dinkina formulu (3.2.2) vienkāršākā formā:

$$\mathbb{E}^{(u)}_{x,y} v(x(t), y(t)) =$$

$$= v(x, y) + \int_u^t \mathbb{E}^{(u)}_{x,y}(L_0 v)(x(s), y(s))\, ds. \tag{3.2.3}$$

Dažreiz ir nepieciešami lietot Ļapunova funkcijas, kas atkarīgas arī no argumenta t. Ja funkcija $v(t, x, y)$ pieder (kā funkcija no argumentiem x un y) infinitezimālā operatora L_0 definīcijas apgabalam un ja tai ir nepārtraukts atvasinājums pēc t, varam lietot Dinkina formulu (3.2.2) formā [27]

$$\mathbb{E}^{(u)}_{x,y} v(\tau_r(t), x(\tau_r(t)), y(\tau_r(t))) =$$

$$= v(u,x,y) + \mathbb{E}^{(u)}_{x,y}\{ \int\limits_u^{\tau_r(t)} (\tfrac{\partial}{\partial s} + L_0) v(s, x(s), y(s))\, ds \},$$

vai formulu (3.2.3) formā

$$\mathbb{E}^{(u)}_{x,y} v(t, x(t), y(t)) =$$

$$= v(u,x,y) + \int\limits_u^t \mathbb{E}^{(u)}_{x,y} (\frac{\partial}{\partial s} + L_0) v(s, x(s), y(s))\, ds. \qquad (3.2.4)$$

Bez Dinkina formulas un otrās Ļapunova metodes varam izmantot [8,27] arī supermartingālu nevienādību pozitīvam supermartingālam $\{\xi(t),\, \mathcal{F}^t\}$ ar filtrāciju $\mathcal{F}^t$ formā

$$\mathbb{P}(\sup_{t \geq u} \xi(t) \geq c) \leq \tfrac{1}{c} \mathbb{E}\xi(u). \qquad (3.2.5)$$

3.3.Lemma. *Vienādojums (3.2.1) ir eksponenciāli p-stabils tad un tikai tad, ja eksistē Ļapunova funkcija $v(x,y)$, kura apmierina nosacījumus*

$$c_1|x|^p \leq v(x,y) \leq c_2|x|^p, \quad c_1 > 0 \qquad (3.2.6)$$

$$L_0 v(x,y) \leq -c_3|x|^p, \quad c_3 > 0 \qquad (3.2.7)$$

visiem $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{Y}$ kādam pozitīvam p.

Pierādījums. Ja eksistē minētā Ļapunova funkcija, var pārliecināties, ka

$$(\tfrac{\partial}{\partial s} + L_0)(v(x,y) e^{\frac{c_3}{c_2} t}) \leq 0,$$

un, saskaņā ar formulu (3.2.4), var uzrakstīt nevienādību

$$\mathbb{E}_{x,y} v(x(t), y(t)) e^{\frac{c_3}{c_2} t} \leq v(x,y) \leq c_2 |x|^p$$

visiem $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ un $y \in \mathbb{Y}$. Tātad

$$\mathbb{E}_{x,y}|x(t)|^p \leq \tfrac{1}{c_1} e^{-\frac{c_3}{c_2} t} \mathbb{E}_{x,y} v(x(t), y(t)) e^{\frac{c_3}{c_2} t} \leq \tfrac{c_2}{c_1} e^{-\frac{c_3}{c_2} t} |x|^p$$

un vienādojums (3.2.1) ir eksponenciāli p-stabils.
Ar vienādojuma (3.2.1) atrisinājumu $x(t,0,x,y)$ palīdzību varam konstruēt funkciju

$$v(x,y) := \int_0^T \mathbb{E}|x(t,0,x,y)|^p \, dt \tag{3.2.8}$$

visiem $T > 0$. No matricas $B(y)$ vienmērīgās ierobežtības nosacījuma izriet, ka

$$\sup_{y \in \mathbb{Y}} ||B(y)|| := b < \infty.$$

Var pārliecināties, ka šī funkcija apmierina nosacījumus (3.2.6). Ja L_0 ir vājais infinitezimālais operators pārim $x(t)$, $y(t)$, tad no (3.2.1) eksponenciālās p-stabilitātes definīcijas izriet

$$\begin{aligned} L_0\, v(x,y) &= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}[\int_0^T \mathbb{E}_{x,y}\{\mathbb{E}_{x(\delta),y(\delta)}|x(t)|^p\}\, dt - \int_0^T \mathbb{E}_{x,y}|x(t)|^p\, dt] \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}[\int_0^T \mathbb{E}_{x,y}|x(t+\delta)|^p\, dt - \int_0^T \mathbb{E}_{x,y}|x(t)|^p\, dt] \\ &= \mathbb{E}_{x,y}|x(T)|^p \; - \; |x|^p \le (Me^{-\gamma T} - 1)|x|^p, \end{aligned}$$

Ievietojot $T = (ln2 + lnM)/\gamma$, pierādījums ir pabeigts.

3.1.Secinājums. *Izpildoties 3.2.Lemmas nosacījumiem, vienādojums* (3.2.1) *is asimptotiski stohastiski stabils.*

Pierādījums. Saskaņā ar formulu (3.2.4) funkcijai

$$\overline{v}(t,x,y) = v(x,y)e^{\frac{c_3}{c_2}t}$$

var secināt, ka gadījuma process

$$\psi(t) := v(x(t),y(t))e^{\frac{c_3}{c_2}t}$$

ir pozitīvs supermartingāls [8]. Tad

$$\sup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{P}(\sup_{t \ge 0} |x(t,0,x,y| > \varepsilon) = \sup_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{P}(\sup_{t \ge 0} |x(t,0,x,y|^p > \varepsilon^p) \le$$

$$\leq \sup_{y\in\mathbb{Y}} \mathbb{P}_{x,y}(\sup_{t\geq 0}\{\frac{1}{c_1}v(x(t),y(t))\} > \varepsilon^p) =$$

$$= \sup_{y\in\mathbb{Y}} \mathbb{P}_{x,y}(\sup_{t\geq 0}\{\frac{1}{c_1}\psi(t)e^{-\frac{c_3}{c_2}t}\} > \varepsilon^p) \leq$$

$$\leq \sup_{y\in\mathbb{Y}} \mathbb{P}_{x,y}(\sup_{t\geq 0}\psi(t) > \varepsilon^p c_1) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^p c_1}\mathbb{E}_{x,y}\xi(0) \leq \frac{c_2}{\varepsilon^p c_1}|x|^p$$

un (3.2.1) ir stabils gandrīz droši. Tagad jāpierāda vienādība (3.1.3). Šim mērķim lietosim supermartingālu nevienādību (3.2.5) un uzrakstīsim nevienādības

$$\sup_{y\in\mathbb{Y}} \mathbb{P}(\sup_{t\geq u}|x(t,u,x,y| > c) = \sup_{y\in\mathbb{Y}} \mathbb{P}(\sup_{t\geq u}|x(t,u,x,y|^p > c^p) \leq$$

$$\leq \sup_{y\in\mathbb{Y}} \mathbb{P}^{(u)}_{x,y}(\sup_{t\geq u}\{\frac{1}{c_1}v(x(t),y(t))\} > c^p) \leq$$

$$\leq \sup_{y\in\mathbb{Y}} \mathbb{P}^{(u)}_{x,y}(\sup_{t\geq u}\{\frac{1}{c_1})\xi(t)e^{-\frac{c_3}{c_2}t}\} > c^p) \leq$$

$$\leq \sup_{y\in\mathbb{Y}} \mathbb{P}^{(u)}_{x,y}(\sup_{t\geq u}\{\frac{1}{c_1})\xi(t)e^{-\frac{c_3}{c_2}u}\} > c^p) \leq$$

$$\leq \frac{1}{c^p c_1}\mathbb{E}\xi(u) \leq \frac{c_2}{c^p c_1}|x|^p e^{-\frac{c_3}{c_2}u}$$

Pierādījums pabeigts.

3.3. UZ MARKOVA IMPULSU DINAMISKAS SISTĒMAS STOHASTISKĀS APROKSIMĀCIJAS BĀZĒTA STABILITĀTE

Šajā nodaļā apskatīsim lineāru vienādojumu (3.1.3) ar Markova procesu $\xi(t)$, kas apmierina minētos nosacījumus un y^ε, kas apmierina vienādojumus (3.1.1)-(3.1.2). Pāris $\{y^\varepsilon(t), \xi(\frac{t}{\varepsilon^2})\}$ ir homogēns Fellera Markova process telpā $\mathbb{R}^d \times \mathbb{U}$ ar vājo infinitezimālo operatoru $L(\varepsilon)$ [88], definētu diferencējamām attiecībā uz y funkcijām ar sakarību:

$$(L(\varepsilon)\, v)(y,\xi) = \frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1(y,\xi), \nabla_y)\, v(y,\, \xi) + (\varphi_2(y,\xi), \nabla_y)\, v(y,\, \xi) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2} Q\, v(y,\, \xi) +$$

$$+\frac{a(z)}{\varepsilon^2} \sum_{\mathbb{U}} [v(y + \varepsilon g_1(y,z) + \varepsilon^2 g_2(y,\xi), z) - v(y,z)]\mu(z) \quad (3.3.1)$$

kur ∇_y ir gradienta operators telpā $\mathbb{R}^d$ un operators Q darbojas attiecībā uz otro argumentu.

Ir zināms [8,23], ka $y^\varepsilon(t)$ kā procesu saime Skorohoda telpā $\mathbb{D}([0,T] \times \mathbb{R}^m)$ vāji konverģē uz stohastiskā diferenciālvienādojuma (3.1.8) atrisinājumu (pie sākuma nosacījuma $y(0) = y$) katram fiksētam $T > 0$ un $y^\varepsilon(0) = y$, $\xi(0) = \xi$, kur $b(y)$, $\sigma(y)$ ir nodefinēti agrāk. Vektors $b(y)$ un matrica $\sigma(y)$ ir nepārtraukti diferencējami attiecībā pret y un kopā ar atvasinājumiem vienmē- rīgi ierobežoti. Tas garantē vienādojuma (3.1.8) atrisinājuma unitāti un eksponenciālu augšanu ar varbūtību 1, kad $t \to \infty$ [27].

Viegli ieraudzīt, ka pāris $\{x(t),\, y(t)\}$ ir homogēns Fellera Markova process telpā $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ ar vājo infinitezimālo operatoru $\bar{L}$, uzdotu pietiekami gludām funkcijām $v(x,y)$ ar formulu:

$$\bar{L}v(x,y) = (\bar{B}(y)\, x,\, \nabla_x)\, v(x,y) + (b(y),\, \nabla_y)\, v(x,y) +$$

$$+\frac{1}{2}(\sigma^2(y)\nabla_y, \nabla_y)\, v(x,y)$$

Uzdosim funkciju $v(x,y)$ ar formulu

$$v(x,y) = \int_0^T \mathbb{E}|x(t,0,x,y)|^p\, dt$$

ar $T = \frac{ln2+lnM}{\gamma}$.

Pirms novērtēt šo funkciju un tās atvasinājumus, iegūsim dažus novērtējumus sistēmas (3.1.7) atrisinājumu pie sākuma nosacījumiem $y(0) = y$ un $x(0) = x$ atvasinājumiem. Lai izvairītos no sarežģītas skaitļošanas un pieraksta formām, apskatīsim skalāru procesu $y(t)$, t.i., $d = 1$. Pēc pieņēmuma eksistē trīs nepārtraukti un vienmērīgi ierobežoti atvasinājumi pēc y funkcijām $\varphi_j(y, \xi)$, $j = 1, 2$. Saskaņā ar to Markova procesa $y(t)$ sanesei $b(y)$ un difūzijai $\sigma(y)$ ir vismaz trīs nepārtraukti un vienmērīgi ierobežoti atvasinājumi pēc y. Tas seko no potenciāla definīcijas un no iespējas atvasināt zem integrāļa zīmes. Pēc definīcijas matricai $\bar{B}(y)$ arī ir trīs nepārtraukti un vienmērīgi ierobežoti atvasinājumi pēc y. Tātad [27] Markova difūziju process $\{x(t), y(t)\}$ atļauj diferencēt attiecībā uz sākuma datiem $y(0) = y$. Varam analizēt šos atvasinājumus kā atbilstošo vienādojumu atrisinājumus.

3.1.Teorēma. *Ja vienādojums* (3.2.1) *ar* $y(t)$ *no* (3.1.8) *ir asimptotiski stohastiski stabils, tad vienādojums* (3.1.3) *ar* y *no* (3.1.1) *ir eksponenciāli p-stabils visiem* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *kādam* $\varepsilon_0 > 0$ *un pietiekami maziem* $p > 0$.

Pierādījums. Ir pietiekami pierādīt, ka pie šīs teorēmas nosacījumiem (3.1.3) lineārā aproksimācija ir asimptotiski stohastiski stabila. Vienādojums (3.2.1) ir eksponenciāli p-stabils pietiekoši mazam pozitīvam skaitlim p [49], un mēs varam lietot Ļapunova funkciju $v(y, \xi)$. No operatora $\mathcal{A}(\varepsilon)$ un funkcijas v^ε, kur

$$v^\varepsilon(x, y, \xi) = v_0(x, y) + \varepsilon v_1(x, y, \xi) + \varepsilon^2 v_2(x, y, \xi)$$

varam uzrakstīt sistēmu

$$Qv_1(x, y, \xi) = -[\nabla_y v_0(x, y), \varphi_1(y, \xi) + a(\xi) \sum_{z \in \mathbb{U}} g_1(y, z)\mu(z)],$$

$$\begin{aligned} Qv_2(x, y, \xi) = &-[(\nabla_y v_0(x, y), \varphi_2(y, \xi)) + (\nabla_y v_1(x, y, \xi), \varphi_1(y, \xi)) + \\ &+(\nabla_x v_0(x, y), B(y, \xi)x) + a(\xi) \sum_{z \in \mathbb{U}} (\nabla_y v_0(x, y), g_2(y, z))\mu(z) + \\ &+a(\xi) \sum_{z \in \mathbb{U}} (\nabla_y v_1(x, y, z), g_1(y, z))\mu(z) + \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

$$+a(\xi)\sum_{z\in\mathbb{U}}(\nabla_x v_0(x,y),G(y,z)x)\mu(z) \tag{3.3.3}$$

Šo vienādojumu labās puses ir vienādas ar 0 pēc integrēšanas pēc mēra $\mu(\xi)$. Tas nozīmē, ka abu vienādojumu atrisinājumi eksistē. Pēc potenciāla definīcijas varam rakstīt:

$$v_1(x,y,\xi)=\Pi[(\varphi_1(y,\xi)+a(\xi)\sum_{z\in\mathbb{U}}g_1(y,z)\mu(z),\nabla_y v_0(x,y))].$$

Šīs funkcijas un tās atvasinājumu novērtējumus varam iegūt no atbilstošajiem skalāro reizinājumu, pareizinātu ar $\|\Pi\|$, novērtējumiem. Tas izriet no (3.3.2) atrisinājuma diferencējamības un operatora Π definīcijas. Tātad eksistē konstante R_1, kas apmierina nevienādības:

$$|v_1(x,y,\xi)|\le R_1|x|^p,\quad |\nabla_x v_1(x,y,\xi)|\le R_1|x|^{p-1},$$

$$|\nabla_y v_1(x,y,\xi)|\le R_1|x|^p,\quad \|D_x\nabla_x v_1(x,y,\xi)\|\le R_1|x|^{p-2},$$

$$\|D_y\nabla_x v_1(x,y,\xi)\|\le R_1|x|^{p-1},\quad \|D_y\nabla_y v_1(x,y,\xi)\|\le R_1|x|^p,$$

$$\|D_yD_x\nabla_y v_1(x,y,\xi)\|\le R_1|x|^{p-1},\|D_x^2\nabla_y v_1(x,y,\xi)\|\le R_1|x|^{p-2}.$$

$$\|D_yD_x\nabla_y v_1(x,y,\xi)\|\le R_1|x|^{p-1},$$

Funkciju $v_2(x,y,\xi)$ arī var novērtēt no augšas. Tātad, pielietojot iegūtos rezultātus, varam uzrakstīt nevienādības:

$$\|\nabla_y v_2(x,y,\xi)\|\le R_2|x|^p,\qquad \|\nabla_x v_2(x,y,\xi)\|\le R_2|x|^{p-1}$$

visiem $y\in\mathbb{R}^m$, $x\in\mathbb{R}^n$ un kādam $R_2>0$.

$\mathcal{A}(\varepsilon)$ ir Markova procesa $\{x^\varepsilon,y^\varepsilon,\xi(t/\varepsilon^2)\}$ vājais infinitezimālais operators, uzdots ar formulu:

$$\mathcal{A}(\varepsilon)v^\varepsilon(x,y,\xi)=(B(y,\xi)x,\nabla_x)v^\varepsilon(x,y,\xi)+\frac{1}{\varepsilon}^2 Qv^\varepsilon(x,y,\xi)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1(y,\xi),\nabla_y v^\varepsilon(x,y,\xi))+(\varphi_2(y,\xi),\nabla_y v^\varepsilon(x,y,\xi))+$$

$$+\frac{a(z)}{\varepsilon^2}\sum_{u\in\mathbb{U}}[v^\varepsilon(x+\varepsilon^2 G(y,z),y+\varepsilon g_1(y,z)+\varepsilon^2 g_2(y,z),u)-$$
$$-v^\varepsilon(x,y,u)]p(z,u)$$

jeb, ievietojot funkcijas v^ε izteiksmi un interesējoties tikai par tiem locekļiem, kuriem ir reizinātāji ε^{-1} un ε^0 , jo $\varepsilon \to 0$, iegūstam:

$$\mathcal{A}(\varepsilon)v^\varepsilon(x,y,\xi) = \frac{1}{\varepsilon}[(\nabla_y v_0(x,y),\varphi_1(y,\xi)) + Qv_1(x,y,\xi)+$$
$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_y v_0(x,y),g_1(y,z))p(z,u)]+$$
$$+[(\nabla_x v_0(x,y),B(y,\xi)x) + (\nabla_y v_1(x,y,\xi),\varphi_1(y,\xi))+$$
$$+(\nabla_y v_0(x,y),\varphi_2(y,\xi)) + Qv_2(x,y,\xi)+$$
$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_x v_0(x,y),G(y,z)x)p(z,u)+$$
$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_y v_1(x,y,z),g_1(y,z))p(z,u)+$$
$$+a(z)\sum_{u\in\mathbb{U}}(\nabla_y v_0(x,y),g_2(y,z))p(z,u)]$$

Saskaitāmie katrā no kvadrātiskajām iekavām formulas labajā pusē ir vienādi ar 0. Tātad

$$\mathcal{A}(\varepsilon)v^\varepsilon(x,y,\xi) \le -c_3|x|^p.$$

Turklāt

$$|v_1(x,y,\xi)| \le \rho|x|^p, \quad |v_2(x,y,\xi)| \le \rho|x|^p$$

kādam $\rho > 0$. Visbeidzot varam uzrakstīt nevienādības

$$c_1|x|^p \le v^\varepsilon(x,y,\xi) \le c_2|x|^p \tag{3.3.4}$$

kādam $c_2 \ge c_1 > 0$. Vienādojuma (3.1.3) eksponenciālā p-stabilitāte seko no (3.3.3) un (3.3.4) visiem $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, ja ε_0 ir pietiekami mazs. Pierādījums pabeigts.

BIBLIOGRĀFIJA

1. Анисимов В. В. Переключающиеся процессы // Кибернетика. - 1977. - N 4. - С.111-115.
2. Анисимов В. В. Случайные процессы с дискретной компонентой. Предельные теоремы. - Киев: Вища шк., 1988. - 184 с.
3. Анисимов В. В. Принцип усреднения для процессов с прыжками // Теория вер. и мат. стат., 46: 2-12, -1992.
4. Анисимов В. В., Закусило О.К., Донченко В.С. Элементы теории массового обслуживания и асимтотического анализа систем. - Киев: Вища шк., 1987.- 248с.
5. Ball C., Roma A., A Jump diffusion model for the european monetary system, Journ. Int. Money And Finance 1993. 12, p. 475 - 492.
6. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.- 351с.
7. Бьорк Т. О временной структуре разрывных процентных ставок, обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. ТВП, Москва, 5 (4 с. 626.-657.)
8. Blankenship G.,Papanicolaou G.C. Stability and Control of Stohastic systems with wide-band noise disturbances.- 1978. -ISTAM *I.APPL. MATH.*,v.34: 437-476.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гл. ред. физико-мат. литературы изд-ва "Наука", Москва, 1974 г.
10. Царьков Е. Ф., Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига, Наука, 1989., 421 с.
11. Царьков Е. Ф., Ясинский В. К., Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. Рига, ОРТ, 1992. 322 с.
12. Carkov E. F. About parametric stohastic resonanse, Sbornik Zadova Filozofskog Fakulteta u Mishu. Ser. matematika, v. 5, Nish University 1991., p. 47 - 61.
13. Tsarkov Ye. On stability of differential equations with diffusion coefficients. Proc. of Latv. Prob. Sem. Section 1. Dynamical systems with Markov parameters. V. 1., Riga, RTU, 1992., p. 8-21.
14. Tsarkov Ye. Averaging and stability of linear differential equations with Markov coefficients. Proc. of Latv. Prob. Sem. Section 1. Dynamical systems with Markov parameters. V. 1., Riga, RTU, 1992., p. 3-7.

15. Tsarkov Ye. Stability of linear differential equations with small diffusion coefficients. Proc. of Sixth USSR-Japan Simposium "Probability Theory and Mathematical Statistics", Kiev, August 5-10, 1991. World Scientific, Singapore, 1992., p. 390-396.
16. Tsarkov Ye. Limit theorem for impulse systems with rapid Markov switchings. Proc. of Latv. Prob. Sem. Section 1. Dynamical systems with Markov parameters. V. 2. Riga, RTU, 1993., p. 78-100.
17. Tsarkov Ye. Averaging and stability of impulse systems with rapid Markov switchings. Proc. of Latv. Prob. Sem. Section 1. Dynamical systems with Markov parameters. V. 2. Riga RTU 1993., p. 49-63.
18. Tsarkov Ye. Averaging in dynamical systems with Markov jumps. 1993., Rep. number 282, Bremen University, FRG, April 1993, 41 p.
19. Tsarkov Ye. Averaging and stability of cocycles under dynamicals systems with rapid Markov switchings, Exploring Stohastic Laws, VSP, Utrech, The Netherlands, 1995. p.469-479.
20. Doob D. L. Martingals and one-dimentials diffusion // TAMS - 1955. - 78.- P.168-208.
21. Дуб Дж. Вероятностные процессы. - М. : Изд-во иностр. лит., 1956. - 605 с.
22. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. - М. : Государственное издательство физико- математической лит., 1963 - 850 с.
23. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов: В 3-х т. - М.: Наука. Т. 1.- 1971.- 664 с.; Т. 3.- 1975.- 604 с.
24. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.- Киев : Наук. думка, 1982. - 612 с.
25. Griego R., Hersh R. Random evolutions, Markov chains, an systems of partial differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. - 1969. - 62. - P. 305-308.
26. Griego R., Hersh R. Theory of random evolutions with applications to partial differential equations // TAMS. - 1971. - 156. - P. 405-418.
27. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М. : Наука, 1969. - 365 с.
28. Hersh R. Random evolutions : a survey of results and problems // Rocky Mount. J. Math. - 1974. - 4, N 3 - P.443-496.
29. Hersh R., Griego R. Random evolutions - theory and applications // Univ. New Mexico, Tech. Repts. - 1969. - 180. - P. 38.
30. Hersh R., Pinsky M. Random evolutions are asymtotically Gaussoan // Ibid. - 25, N 1. - P. 33-34.
31. Jacod J., Shirjajev A. N. Limit theorems for stohastic processes. - Berlin : Springer Verl., 1986. - 600 p.

32. Якубович В. А. , Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коефициентами и их приложения. - М. : Наука, 1972. - 720 с.
33. Kac M. A stohastic model related to the telegrapher's equation // Magnolia Petroleum Co. Colloq. Lectures (1956) repr. in : Rocky Mount. J. Math., 1974, 4, N 3 - P. 497-510.
34. Като Т. Интегрирование эволюционных уравнений в банаховом пространстве // Сб. перев. Математика. - 1965.- N 4. - С. 114-135.
35. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М. : Мир, 1972. - 740с.
36. Kertz R. Random evolutions with underlying semi-markov processes // Publ. Res. Inst. Math. Scien. - 1978. - 14, N 3. - 589-614.
37. Kertz R. Perturbed semigroup limit theorems with applications to discontinuous random evolutions // TAMS. - 1974. - 199, N 1. - P. 29-53.
38. Kertz R. Discontinuous random evolutions // Ann. Probab. - 1974. - 2, N 6. - P. 416-448.
39. Kertz R. Limit theorems for discontionuos random evolutions with applications to initial value problems and to Markov process on N-lines // Ann. Probab. - 1974. - 2. - P. 1054-1064.
40. Kertz R. Limit theorems for semigroups with pertubed generators, with applications to multi-scaled random evolutions // TAMS. - 1978. - 27. - P. 215-233.
41. Cogburn R., Hersh R. Two limit theorems for random differential equations // Ind. Univ. Math. J. - 1973. - 22. - P. 1067 - 1089.
42. Komatsu T. Markov processes associated with certain integro-differential equations // Osaka J. Math. - 1973. - 10. - P. 271-303.
43. Koroljuk V. S., Turbin A. F., Swishchuk A. V. Markov random evolutions // IV USSR - Japan symp. Probab. Th. Mat. Stat., Tbilisi, 1982 : Abstr Tbilisi, 1982. - Vol. 2. - P. 39-40.
44. Koroljuk V. S., Swishchuk A. V. Semi-Markov random evolutions. - Phase Agregations and Applications //Intern. Summer School on Prohab. Th. Math. Stat., Varna, Gold Sands, 1985. - Sofia, 1988. - P. 116-131.
45. Koroljuk V. S., Swishchuk A. V.Weak convergence of semi-Markov random evolutions (martingale aproach) // Prob. Th. Math. Stat. - 1990. - 1. - P. 1-9.
46. Koroljuk V. S., Turbin A. F. Limit theorems for Markov random evolutions in the scheme of asymptotic phase lumping // Lect. Not. Math. - 1983. - 1021. - P. 327-332.
47. Koroljuk V. S. CLT for semi-Markov random evolutions // Comp. Math. Applic. - 1990. - 19, N 1. - P. 83-88.

48. Королюк В. В. Стохастические системы с полумарковскими переключениями.- Киев, 1983. - 38 с.- (Препр./ АН УССР. Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова; 83, 35).
49. Korolyuk V.S. Averaging and stability of dynamic systems with rapid Markov switchings, University of Umea, S-90187, Umea, 1991.- Febr.-15 p.
50. Королюк В. С., Боровских Ю. В. Теория U-статистик. - Киев : Наук. думка, 1989.-384 с.
51. Королюк В. С., Королюк В. В. Центральная предельная теорема для однородных процессов с независимыми приращениями // Укр. мат. журн. - 1983. - 35, N 6. - С.760-763.
52. Королюк В. С. Эволюция систем в полумарковской случайной среде // Кибернетика. - 1987. - N 5. - С. 106-109.
53. Королюк В. С. Стохастические модели систем. - Киев : Наук. думка, 1989. - 208 с.
54. Королюк В. С., Свищук А. В. Предельные теоремы для полумарковских случайных эволюций в схеме асимптотического фазового укрупнения. - Киев, 1984. - 12 с. - (Препр./ АН УССР. Ин-т. математики; 84.16).
55. Королюк В. С., Свищук А. В. Центральная предельная теорема для полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн. - 1986. - 38, N 3. - С. 330-334.
56. Королюк В. С., Свищук А. В., Королюк В. В. Центральная предельная теорема в схеме фазового укрупнения для полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн. - 1987. - 39, N 3. - С. 314-319.
57. Королюк В. С., Свищук А. В. Фазовое усреднение неоднородных полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн. - 1989. - 41, N 2. - С. 163-170.
58. Королюк В. С., Свищук А. В. Центральная предельная теорема для неоднородных полумарковских случайных эволюций // Укр. мат. журн. - 1989. - 41 N 8. - С. 1064-1070.
59. Королюк В. С., Свищук А. В. Предельное представлеие полумарковских случайных эволюций в схеме серий // Укр. мат. журн. - 1989. - 41, N 11. - С. 1476-1482.
60. Королюк В. С., Свищук А. В. Слабая сходимость полумарковских случайных эволюций в схеме усреднения. // Теория вероятности и мат. статистика. - 1990. - Вып. 42 - С. 53-64.
61. Королюк В. С., Свищук А. В. Пркладные задачи теории случайных эволюций. - Киев : О-во “Знание” УССР, 1990. - 32 с.

62. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их применение. - Киев : Наук. думка, 1976. - 184 с.
63. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Математические основы фазового укрупнения сложных систем. - Киев : Наук. думка, 1978. - 217 с.
64. Kubo R. Stohastic Liouville equation // J. Math. Phys. - 1963. - 4, N 2. - P. 174-183.
65. Kurtz T. A limit theorem for pertubed operator semigroups with applications to random evolutions // J. Funct. Anal. - 1973. - 12. - P. 55-67.
66. Kurtz T. Diffusion approximations for branching processes // Branching Processes : Adv. in Prob. - New York : Marcel : Dekker, 1979. - P. 262-292.
67. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. - М. : Наука, 1987. - 512с.
68. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Мартингалы и предельные теоремы для случайных процессов // Итоги науки и техники : Соврем. пробл. математики. - 1989. - 45. - С.159-253.
69. Минулявичус Р. О проблеме мартингалов // Успехи мат. наук. - 1982.- 37, N 6. - С. 125-136.
70. Moran P. The theory of storage. - London, 1959. - 226 p.
71. Morrison J., Papanicolaou G., Keller J. Mean power transmission through a slab of random medium // Comm. Pure Appl. Math. - 1971. - 24. - P. 473-489.
72. Оселедец В.И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристики Ляпунова для динамических систем. -Статьи Московского мат. общества, 19. -1968. -197-231 с.
73. Papanicolaou G. Motion of a particle in a random field // J. Math. Phys. - 1971. - 12, N8. - P. 1494-1496.
74. Papanicolaou G. Wave propagation in a one-dimentional random medium // SIAM J.Appl. Math. - 1971. - 21. - P. 13-18.
75. Papanicolaou G. A kinetic theory for power transfer in stohastic systems // J. Math. Phys. - 1972. - 13. - P. 1912-1918.
76. Papanicolaou G., Hersch R. Some limit theorems for stohastic equations and applications // Ind. Univ. Math. J. - 1972. - 21. - P. 815-840.
77. Papanicolaou G., Keller J. Stohastic differential equations with application to random garmonic oscillators and wave propagations in random media // SIAM J. Appl. Math. - 1971. - 21, N 2. - P. 287-305.
78. Papanicolaou G. Asymptotic Analysis of Transport Processes // BAMS. - 1975. - 81. - P. 330 - 391.

79. Papanicolaou G., Strook D., Varadhan S. R. S. Martingale approach to some limit theorems. - Durham (N. C.), 1977. - 20 p. - (Stat. Mech. Dynam. Syst. Duke Univ. Math. Ser. Vol. 3).
80. Papanicolaou G., Kohler W. Asymptotic theory for mixing of stohastic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. - 1974. - 27, N 5. - P. 641-668.
81. Pinsky M. Random evolutions // Lect. Notes Math. - 1975. - 451. - P. 89-100.
82. Pinsky M. Multiplicative operator functionals and their asymptotical properties // Adv. in Prob. - 1975. - 3. P. 1- 100.
83. Pinsky M. Multiplicative operator functionals of a Markov processes // BAMS. - 1971.- 77. - P. 377-380.
84. Pinsky M. Stohastic integral represantation of multiplicative operator functionls of a Wiener process // TAMS. - 1972. - 167, N 1. - P. 89-104.
85. Портенко Н. И., Скороход А. В., Шуренков В. М. Марковские поцессы. - М. : ВИНИТИ, 1989. - 248 с. - (Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики; Т.46).
86. Скороход А. В. Предельные теоремы для случайных поцессов // Теория вероятности и ее применение. - 1956. - 1, вып. 3. - С. 289-195-319.
87. Скороход А. В. О существовании решения общей мартингальной задачи // Теория вероятности и мат. статистика. - 1976. - Вып. 14. - С. 137-147.
88. Скороход А. В. Операторные стохастические дифференциальные уравнения стохастические полугруппы // Успехи мат. наук. - 1982. - 37, вып. 6.- С. 157-183.
89. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. - Киев : Наук. думка, 1987.- 328 с.
90. Strook D., Varadhan S. R. S. Diffusion processes with continuous coeficients // Comm. Pure Appl. Math. - 1969. - 22, N 3. - P. 345-401; N 4. - P. 479-531.
91. Strook D. Varadhan S. R. S. Multidimentional diffusion processes. - Berlin : Springer Verl., 1979. - 338 p.
92. Свердан М. Л., Царьков Е. Ф., Устойчивость стохастических импульсных систем. Рига, РТУ, 1994., 300 с.
93. Свириденко М. Н. Мартингальный подход к предельным теоремам для марковских и полумарковских процессов : Дис. канд. физ.-мат. наук. - М., 1988. - 140 с. - Машинопись.
94. Свищук А. В. Предельные теоремы для марковских случайных эволюций // Асимптотические методы в теории вероятностей. - Киев, 1983. - С. 92-97.

95. Свищук А. В. Фазовое укрупнение в моделях теории запасов. - Киев, 1984. - 10 с. - (Препр./ АН УССР. Ин-т. математики; 84.60).
96. Свищук А. В. Предельные теоремы для полумарковских случайных эволюций в схеме асимптотического фазового укрупнения : Автореф. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Киев, 1985. - 21 с.
97. Свищук А. В. Предельная теорема для процесса накопления // Асимптотические методы в теории надежности. - Киев, 1985. - С. 115-118.
98. Свищук А. В., Муравейников Г. А. Закон больших чисел для случайных эволюций на группах Ли // Тез. докл. XIX шк. - Коллокв. по теории вероятности и мат. статистки, Бакуриани, 1985 г. - Тбилиси : Мецниереба, 1985. С. 69.
99. Свищук А. В. Фазовое укрупнение порядка d > 1 полумарковских случайных эволюций // Асимптотические методы в теории вероятностей. - Киев, 1986. - С. 110-114.
100. Свищук А. В. Предельные теоремы для марковских ветвящихся процессов в случайной среде. - Киев, 1986. - 16 с. - (Препр./ АН УССР. Ин-т. математики; 86.84).
101. Свищук А. В. Предельные теоремы для случайных движений на группах Ли // Асимптотические методы в задачах теории вероятностей. - Киев, 1987. - С. 103-109.
102. Свищук А. В. Мартингальный подход к полумарковским случайным эволюциям // Тр. науч. конф. молодых ученых и специалистов Ин-та математики АН УССР, Киев, 24-26 нояб. 1986 г. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987. - 2 с. - Деп. в ВИНИТИ 25.09.87, N 6907-В87.
103. Свищук А. В. Предельные теоремы для стохастических дифференциальных уравнений с полумарковскими переключениями // Аналитические методы в вероятностных задачах. - Киев. - 1988. - С. 82-90.
104. Свищук А. В. Марковские и эволюционные подгруппы // Тр. науч. конф. молодых ученых и специалистов Ин-та математики АН УССР, Киев, 15-17 июня 1988 г. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988. - 3 с. - Деп. в ВИНИТИ 20.01.89, N 487-В89.
105. Свищук А. В. Слабая сходимость полумарковских случайных эволюции в схеме усреднения (мартингальный подход) // Укр. мат. журн. - 1989. - 41, N 12. - С. 1680-1686.
106. Свищук А. В. Представление мултипликативных операторных функционалов от полумарковских процессов // Докл. АН УССР. - 1988. - N 10. - С. 27-28.

107.Свищук А. В. Диффузионная аппроксимация операторных марковских прцессов дискретными случайными эволюциями // Докл. АН УССР. - 1988. - N 11.-С.23-25.
108.Свищук А. В. Мартингальный подход к центральной предельной теореме в схеме усредненя для полумарковских случайных эволюции // Аналитические методы исследования эволюций стохастических систем. - Киев, 1989. - С. 95-107.
109.Свищук А. В. Оценки скорости сходимости в предельных теоремах для полумарковских случайных эволюции // Стхастческие системы и их применение. - Киев, 1990. - С. 86-92.
110.Свищук А. В. Решение мартингальной проблемы для полумарковских случайных эволюции // Асимптотические и прикладные задачи теории случайных эволюций. - Киев, 1990. - С. 98-107.
111.Свищук А. В. Предельные теоремы для *U*-статистик на цепях Маркова// Применение информационной и вычислительной техники при решении народно - хозяйственных задач : // Тез. докл. респ. конф. молодых ученых, Минск , 4-7 апр. 1989 г. - Минск Белорс. ун-та 1989. - С. 94.
112.Свищук А. В. Единственость решения мартингальной проблемы для полумарковских случайных эволюций // Тез. докл. второй Донец. конф. “Вероятностные модели процессов в управлении и надежности”, Донецк 23-25 мая 1990 г. - Донецк : Ин-т. прикл. математики и механики, 1990. - С. 1-58.
113.Swishchuk A. V. Stohastic integral represantation for semi-Markov random evolutions// III Hungary Coll. Limit Th. in Prob. and Stat., July 3-7, 1989. Pies’, Hungary; Abstr.- P. 59.
114. Swishchuk A. V. On the rates of convergence in the limit theorems for semi-Markov random evolutions // II-th Prague conference on inform theory, Stat. decis. func. and random proc : Abstracts. 1990. Prague, August 27-31, 1990. - Prague, 1990.- P. 150.
115. Swishchuk A. V. The solution of martingale problems for random evolution // 2nd World Congr. of the Bernoulli Soc. for Math. Stat. and Probab. : Uppsala, Sweden, 13-18 Aug. 1990, Uppsala Abstr. USA. - New York, 1990. - P. 190.
116. Shadurskis K., Tsarkov Ye., On diffusion approximation and stochastic stability, Theory of Stohastic Processes, 2 (18, 1996. p. 81-95).
117. Shadurskis K., Tsarkov Ye., Stability of linear differential systems with diffusion coefficient, 1993. - 4, Univ. of Umea, Sweden, March, 1993., 15 p.

118.Ширяев А. Н. Об основных принципах мартингальных методов в функциональных предельных теоремах // Тр. Тбил. мат. и-та им. Размадзе АН ГССР. - 1989. - С. 28-45.
119.Турбин А. Ф. Предельные теоремы для сингулярно-возмущенных слабо неоднородных марковских эволюций на группах Ли // Тез. докл. IV Междунар. Вильунус. конф. по теории вероятностей и мат. статистике. - Вильнюс, 1985. - 3. - С. 211-212.
120.Ватанабе С., Икеда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и дифузионные процессы. - М.: Наука, 1986. - 448 с.
121.Quiring D. Random evolutions of diffusion proccesses // Z. Wahr. verw. Geb. - 1972. - 23, N 3/4. - P. 230-244.
122.Watkins J. A CLT in random evolution // Ann Prol. - 1984. - 12, N 2. - P. 480-514.
123. Watkins J. Limit theorems for stationary random evolutions // Stoch. proc. their appl. - 1985. - 19. - P. 189-224.
124. Watkins J. Stohastic integral representations for the random evolutions // Ann. Prob. - 1985. - 13, N 2.- P. 531-557.
125. Yor M. Existence et unicite de difusions a valeurs dans un espace de Hilbert // Ann. Inst. Henri Poincare. - 1974. - 10, N 1. - P. 55-88.