

Вп/88
3454

**Прикладные задачи
математической физики**

Латвийский ордене Трудового Красного Знамени
государственный университет им. П. Стучки

Физико-математический факультет

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Межвузовский сборник научных трудов

Латвийский государственный университет им. П. Стучки

Рига 1968

2454
ББК 22.31.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Прикладные задачи математической физики: Межвузовский сборник научных трудов / Под ред. А.А.Буйкиса. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1988. 171 с.

Сборник "Прикладные задачи математической физики" содержит работы по математическому моделированию различных физических и технологических процессов. В работах рассматриваются технологические аспекты получения различных материалов, процессы тепло- и массопереноса.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов механико-математических и физико-математических специальностей.

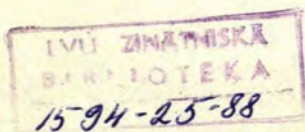
Редакционная коллегия: А.А.Буйкис (отв.ред.),
А.А.Земитис, Х.Э.Калис, И.Э.Пагодкина, Я.В.Цепитис

Печатается по решению Издательского
совета ЛГУ им. П.Стучки

П 20204-079
ИВТ2(11)-88 24.88.1702070000



Латвийский
государственный
университет
им. П.Стучки,
1988



ВВЕДЕНИЕ

Сборник "Прикладные задачи математической физики" отражает результаты исследований, полученные при выполнении научных тем кафедры дифференциальных уравнений и приближенных методов физико-математического факультета ЛГУ им. И. Стучки, Вычислительного центра при ЛГУ им. И. Стучки и других учреждений, с которыми упомянутые подразделения университета поддерживают постоянные научные связи.

В этот сборник включены в основном работы, посвященные численному решению задач математической физики, описывающих различные физические и технологические процессы. Большинство работ связано с моделированием процессов тепло- и массопереноса. Они описывают, в частности, управление технологическим и энергетическим режимом в процессе получения алюминия, температурные полчи и вытеснение нефти водой в нефтяных пластах, фильтрацию воды в окрестности мелиоративной дрены, колебательный режим конвекции при выращивании монокристаллов из расплава и др. Для эффективного моделирования таких процессов требуется разработка специальных методов или модификация известных методов. Ряд статей сборника посвящены изучению разностных схем для отдельных задач математической физики.

Работы сборника могут быть полезны широкому кругу специалистов, занимающихся математическим моделированием задач математической физики.

УДК 537.84:669.713.7

В. В. Болревич

АН Латвии ССР

Х. Э. Калис, Р. Г. Миллере, И. Э. Пагодкина

ЛГУ им. П. Стучки

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ДВИЖЕНИЯ РАСПЛАВА В АЛЮМИНЕВЫХ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРАХ

Одной из областей применения математических моделей МГД - явлений для исследования и управления технологических и энергетических режимов является процесс электролиза алюминия. Алюминий получается в электролизерах в результате электролитического разложения глинозема при прохождении электрического тока от графитных анодов через слой электролита, слой жидкого алюминия к графитному дну электролизной ванны.

Электромагнитные силы, возникающие в расплавленном металле и электролите, создают перекося (волнение поверхности металла) и циркуляцию металла и электролита, из-за чего размываются стенки электролизера и появляются нежелательные анодные эффекты. Поэтому очевидна необходимость построения математических моделей для расчетов электрических, магнитных и гидродинамических полей, а также для расчета скоростей течения металла.

В настоящей работе рассматривается модель всего процесса электролиза. В технологическом процессе получения алюминия, электролизные ванны расположены в два ряда. Электролизеры связаны между собой при помощи ошиновки в непрерывную электрическую цепь. В данной системе выбирается основной электролизер - ванна, в которой проводятся расчеты и измерения с учетом магнитных полей, создаваемых рядом стоящими ваннами и ваннами соседнего ряда. Схема модели одного электролизера - ванны показана на рис. 1.

1. Определение внешнего и внутреннего магнитного поля.

Условное внешнее магнитное поле создает токи ошинок основного электролизера, рядом стоящих электролизеров и второго ряда электролизеров, внутреннее - токи в расплавленном металле и электролите.

Схема электролизера

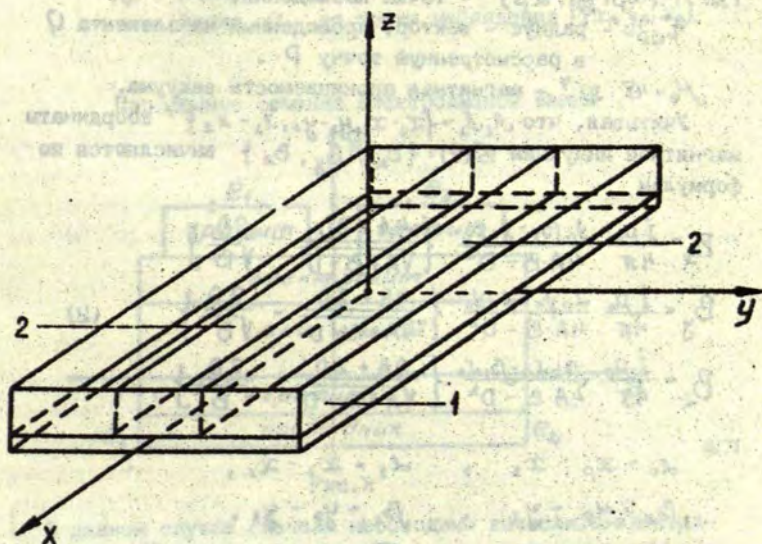


Рис. 1

1 - корпус электролизера

2 - графитовые аноды

В математической модели ошиновка электролизера - это совокупность разных групп проводников, образующих электрическую цепь: анодные шины, обводные шины, анододержатели, блансы, горизонтальные и вертикальные спуски и сто-

яки. Расположение проводников ошиновки задается координатами начала (x_1, y_1, z_1) и конца (x_2, y_2, z_2) провода. Вся ошиновка моделирована системой проводов.

Условное внешнее магнитное поле, создаваемое по прямому проводу $A_1 A_2$ протекающим током I вычисляется по закону Био-Саварра [1]

$$\vec{B}(P) = \frac{i \mu_0}{4\pi} \int_{A_1 A_2} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_{QP}}{r_{QP}^3}, \quad (1)$$

где $P(x_p, y_p, z_p)$ - точка наблюдения,

\vec{r}_{QP} - радиус - вектор, проведенный из элемента Q в рассмотренную точку P .

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ - магнитная проницаемость вакуума.

Учитывая, что $A_1 A_2 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ координаты магнитной индукции $B(P) = \{B_x, B_y, B_z\}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{i \mu_0}{4\pi} \frac{y_0 \beta_1 - \beta_1 y_0}{4A \cdot B - D^2} \left\{ \frac{4A + 2D}{\sqrt{A+B+D}} - \frac{2D}{\sqrt{B}} \right\} \\ B_y &= \frac{i \mu_0}{4\pi} \frac{z_0 \beta_1 - \beta_1 z_0}{4A \cdot B - D^2} \left\{ \frac{4A + 2D}{\sqrt{A+B+D}} - \frac{2D}{\sqrt{B}} \right\} \\ B_z &= \frac{i \mu_0}{4\pi} \frac{\beta_0 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_0}{4A \cdot B - D^2} \left\{ \frac{4A + 2D}{\sqrt{A+B+D}} - \frac{2D}{\sqrt{B}} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\alpha_0 = x_p - x_1, \quad \alpha_1 = x_2 - x_1,$$

$$\beta_0 = y_p - y_1, \quad \beta_1 = y_2 - y_1,$$

$$\gamma_0 = z_p - z_1, \quad \gamma_1 = z_2 - z_1,$$

$$A = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2, \quad B = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2, \quad D = -2(\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 + \gamma_0 \gamma_1)$$

Магнитное поле от всей ошиновки в точке $P(x_p, y_p, z_p)$ получается по принципу суперпозиции.

Расчет условного внутреннего поля, создаваемого в электролизере токами текущими от графитовых блоков - анодов через слой электролита, слой жидкого алюминия и отводящимися через графитное дно электролизной ванны, более сложный. Расчетная область состоит из слоев с различной электропроводностью σ (см. рис. 2)

Индукция внутреннего магнитного поля в точке наблюдения $P(x_p, y_p, z_p)$ также вычисляется по закону Био-Саварра

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}_{QP}}{r_{QP}^3} dV_Q,$$

где V - объем, по которому протекает ток \vec{j} , создающий магнитное поле,

\vec{r}_{QP} - радиус-вектор \vec{r} от точки интегрирования Q до точки наблюдения $P(x_p, y_p, z_p)$.

Поперечное сечение электролизной ванны

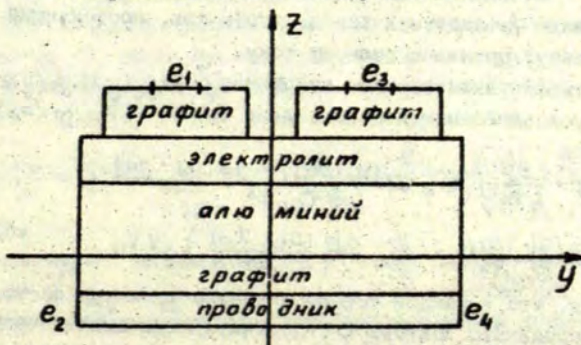


Рис. 2

В данном случае сначала необходимо вычислить электрический ток \vec{j} . Допуская, что $\vec{j} = \{0, j_y(y, z), j_x(y, z)\}$, расчеты проводятся в области отображенной на рис. 2, где ток приводят электроды e_1, e_3 отводят e_2 и e_4 .

Ток \vec{j} вычисляется при помощи электрического потенциала ψ , связанного с током соотношением

$$\vec{j} = -\sigma \text{grad } \psi \quad (3)$$

и удовлетворяющему уравнению

$$\text{div}(\sigma \text{grad } \psi) = 0 \quad (4)$$

с условиями: $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ - на непроводящей части границ,

$$\psi = 0 \quad \text{- на анодах } e_1 \text{ и } e_3,$$

$\psi = \psi_0 = \text{const}$ - на катодах e_2 и e_n ,
и с условиями непрерывности ψ и $\sigma \frac{\partial \psi}{\partial n}$ на границах между слоями различной проводимости.

Уравнение (4) с соответствующими условиями решается методом сетки в данной пятислойной области, после чего, учитывая (3), вычисляются дискретные значения тока

$$j_{y, i+1/2, k} = -\sigma_k \frac{\psi_{k+1, k} - \psi_{i, k}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ k = 1, 2, \dots, M$$

$$j_{x, k+1/2, i} = -\sigma_{k+1/2} \frac{\psi_{i, k+1} - \psi_{i, k}}{h_{k+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ k = 1, 2, \dots, M-1$$

Постоянная ψ_0 задается такой, чтобы ток, протекающий через ванну, равнялся полному току.

Учитывая, таким образом найденное, $\vec{j} = \{0, j_y(y, z), j_x(y, z)\}$ вектор условного магнитного поля в точке $P(x_p, y_p, z_p)$ равняется

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\vec{e}_x \frac{j_x(x_p - x_q) - j_x(y_p - y_q)}{|\vec{r}_{QP}|^3} + \\ + \vec{e}_y \frac{j_x(x_p - x_q)}{|\vec{r}_{QP}|^3} + \vec{e}_z \frac{-j_y(x_p - x_q)}{|\vec{r}_{QP}|^3}) dV_q. \quad (5)$$

Допуская, что в каждой сеточной клетке j_y и j_x постоянны, координаты вектора $\vec{B}(P)$ вычисляются аналитически или по кубатурным формулам.

Суммарное магнитное поле $\vec{B}(P) = \{B_x, B_y, B_z\}$ есть сумма условного внешнего и внутреннего магнитных полей

$$\vec{B}(P) = \vec{B}(P)_{\text{внешнее}} + \vec{B}(P)_{\text{внутреннее}}$$

после чего электрическая сила вычисляется по формуле

$$\vec{F} = j_x \vec{B} = \vec{e}_x (j_y B_z - j_z B_y) + \vec{e}_y (j_z B_x - j_x B_z) + \vec{e}_z (j_x B_y - j_y B_x) \quad (6)$$

2. Учет влияния ферромагнитной пластины

Магнитное поле создается намагничиванием стальных конструкций.

Магнитное поле с учетом ферромагнетика вычисляется

по формуле /2/

$$\vec{H}(P) = \vec{H}_0(P) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int_V \frac{(\mu-1)\vec{H}(Q)(\vec{r}_Q - \vec{r}_P)}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_P|^3} dV_Q, \quad (7),$$

где V - объем ферромагнетика,
 \vec{r}_P - радиус-вектор точки P ,
 \vec{H} - напряженность магнитного поля,
 \vec{H}_0 - напряженность магнитного поля, созданная токами,

В свою очередь

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \cdot \vec{H},$$

μ - относительная магнитная проницаемость.

Для вычисления магнитного поля в самом ферромагнетике уравнение (7) решается как сингулярное интегральное уравнение. Учитывая производные потенциала Ньютона, вместо (7) можно решать интегральное уравнение

$$\vec{H}(P) \frac{\mu+2}{3} = \vec{H}_0(P) + \frac{1}{4\pi} \int_{V-P} (\mu-1) \left(\frac{3\vec{H}(Q) \cdot \vec{r}_{PQ} \cdot \vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^5} - \frac{\vec{H}(Q)}{r_{PQ}^3} \right) dV_Q(B)$$

Ферромагнетик разделяется на сеточные параллелепипеды, в которых \vec{H} принимается постоянным. В результате для этих значений, как неизвестных, получается система линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которых есть аналитически проинтегрированный интеграл на каждой сеточной клетке с постоянной величиной \vec{H} .

Вне ферромагнетика вычисляется поле \vec{H} по (7) с уже найденным вектором напряжения \vec{H} в ферромагнетике.

Численное решение данной задачи усложняется, если

$\mu = \mu(\vec{H})$ по сравнению с $\mu = \text{const}$.

3. Расчет движения расплава и статистических переходов.

Нежелательным в производстве эффектом является волнение поверхности металла, так называемые перекосы, что вызывает большие лишние затраты электрической энергии.

Создание математической модели магнитной гидродинамики реального алюминиевого электролизера наталкивается

на значительные трудности. В настоящей работе математическая модель в системе уравнений МГД имеет следующие приближения [3]: горизонтальные составляющие электромагнитных сил уравновешены только вертикальными градиентами давления.

Пренебрегаются вертикальные скорости течения, уравнения движения осредняются по высоте слоя металла. В результате для расчета движения металла в прямоугольном сечении (x, y) корпуса электролизера Ω возникает следующая краевая задача

$$\Delta \psi = \frac{\partial}{\partial x} \langle f_y \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle f_x \rangle, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} + \kappa \psi = f_n, \quad (x, y) \in \partial \Omega, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial y} - \frac{\partial \psi^-}{\partial y} = \kappa (\psi^+ - \psi^-) - \langle f_x \rangle, \quad (x, y) \in L,$$

где f_n - нормальная составляющая вектора $\vec{f} = (\langle f_y \rangle, -\langle f_x \rangle)$ на границе $\partial \Omega$ прямоугольника Ω , $\langle f_x \rangle$, $\langle f_y \rangle$ - осредненные по x составляющие вектора силы \vec{F} .

$\kappa \in [0, \infty)$ - коэффициент сопротивления вертикальных каналов между анодами и стенками электролизера,

L - линия среднего канала между анодными блоками или линия раздела $y = 0$ области Ω на две области Ω^+ ($y > 0$) и Ω^- ($y < 0$),

$$\psi = \begin{cases} \psi^+ & \text{в } \Omega^+ \\ \psi^- & \text{в } \Omega^- \end{cases}$$

Можно показать, что при $\kappa \neq 0$ и $\kappa \neq \infty$, решение неклассической краевой задачи существует и единственно, причем также однозначно определяется скачек $\psi^+ - \psi^-$ на L в зависимости от величины параметра κ . Если $\kappa = \infty$ (т.е. когда вертикальные каналы не пропускают жидкий металл), то на границе $\partial \Omega$ $\psi = 0$.

Функция тока ψ определяется через осредненные составляющие вектора скорости u и v : где

$$\kappa_f u = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa_f v = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

κ_f - коэффициент трения горизонтальных слоев жидкости.

На тестовой задаче проводилось сравнение результатов расчета линейной краевой задачи (9) при $Re = \infty$ и нелинейной задачи Навье-Стокса

$$\frac{\partial}{\partial x}(u \cdot \omega) + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot \omega) = \frac{1}{Re} \Delta \omega + S \left(-\frac{\partial}{\partial x} \langle f_y \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle f_x \rangle \right),$$

$$\Delta \tilde{\psi} = -\omega, \quad (10)$$

где $u = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x}$,

Re - число Рейнольдса,

S - параметр взаимодействия электромагнитных сил,

$$\langle f_x \rangle = \frac{1}{4\pi h} \left\{ \frac{2\gamma_c y_0 - \gamma_c y_0}{h} \left(\operatorname{arctg} \frac{h - x_0}{y - y_0} - \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0 - y} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_c h - h - \gamma_c x_0}{2h} \ln \frac{(y - y_0)^2 + (h - x_0)^2}{(y - y_0)^2 + x_0^2} - \gamma_c y \right\},$$

$$\langle f_y \rangle = \frac{\gamma_c}{4} \left(\gamma_c - \frac{\gamma_c^2}{3} - 1 \right),$$

где h - высота осредняющего слоя по x ,

y_0 - параметр электрического тока,

y_c - расстояние до привода ($y_c = 11.5/4.2$).

При $Re = 1$ и $S = 1$ нелинейные слагаемые малы, а Re меняется на отрезке (45, 51).

В реальных алюминиевых электролизерах в электролите $Re \neq \infty$, а в слое алюминия $Re = \infty$.

Осредненное значение $\langle p \rangle$ определяется из уравнения Пуассона /3/:

$$\Delta \langle p \rangle = \operatorname{div} \langle \vec{F} \rangle \quad (11)$$

со следующими граничными условиями:

1) в слое алюминия

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} = \langle f_y \rangle \text{ при } y = \text{const}, \quad \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} = \langle f_x \rangle \text{ при } x = \text{const}.$$

2) в слое электролита

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \langle f_y \rangle \quad \text{при } y = \text{const},$$

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial j} + \langle f_x \rangle \quad \text{при } x = \text{const}$$

Решение определяется с точностью до произвольной постоянной ($\langle p \rangle(0,0) = 0$). Для вычисления деформации перекосов поверхности алюминия $x = h(x, y)$ используется уравнение движения

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_x - G,$$

где $f_x - G$ - составляющая вектора \vec{F} ,
 G - коэффициент силы тяжести.

Интегрируя данное уравнение по x в слое алюминия (индекс 1) и в слое электролита (индекс 2), учитывая, что давление на поверхности раздела этих слоев $p_1 = p_2$, получается

$$h(x, y) = \frac{1}{G_2 - G_1} [C_2 - C_1 - h_1 \langle f_{x1} \rangle] - \frac{1}{m_1 \Omega} \int_{\Omega} (C_2 - C_1 - h_2 \langle f_{x1} \rangle) dx dy$$

$$C_i(x, y) = \langle p_i \rangle = \left\langle \int_{h_{i-1}}^x f_{xi} dt \right\rangle + \frac{G_i}{\alpha} (h_i + h_{i-1}), \quad i = 1, 2.$$

x - координата начальных поверхностей,
 $h_0 = 0$, h_1, h_2 - граничные значения слоев алюминия и электролита

Для численных расчетов краевых задач для уравнений Пуассона (9), (11) использован метод Холицкого (программа ICCGO /3/), причем задача (9) при $\kappa \neq 0$, $\kappa \neq \infty$ решается итеративно, уточняя значения ψ на L . Численные расчеты показывают, что значения переносов уменьшаются с ростом числа K .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М.: Изд. иностранной литературы, 1961. 712 с.
2. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров - электриков. М.: Мир, 1986. 230 с.
3. ЕЦДЕС - комплекс программ для решения эллиптических краевых задач. Подпрограмма ICCGO. Отдел разностных методов НИИЦ МГУ, 1980, ч. 2. С. 13.1-13.26.

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ВЛАГОПЕРЕНОСА В ПОЛИЭТИЛЕНЕ

Широкое применение пленок, противокоррозионных покрытий, труб и других конструкций из гидрофобных полимерных материалов обуславливает необходимость прогнозирования их функциональной долговечности в реальных средах, неотъемлемой частью которых является вода. При исследовании долговечности полимерных изделий значительное значение имеет изучение процессов влагопереноса с помощью исследований сорбции и влагопроницаемости в пленках /1/, /2/.

Наиболее распространенным представителем гидрофобных полимеров является полиэтилен (ПЭ).

Анализ литературных данных показывает, что интерпретация процесса переноса влаги в ПЭ содержит множество противоречий. Так, для ПЭ высокого давления коэффициент диффузии воды при $t = 293^{\circ}\text{K}$ по /3/ имеет значение $2,4 \cdot 10^{-9} \text{ см}^2/\text{с}$, а по /4/ - $2,3 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2/\text{с}$.

Большинство авторов указывает на классический ход массопереноса влаги с постоянным D в ПЭ, однако в последнее время в некоторых работах /1/, /2/, /5/ указывается на концентрационную зависимость D .

Рассмотрим постановку прямой задачи для определения поля концентрации диффундирующей влаги при известном D (под концентрацией понимаем нормированную относительно равновесной n начальную ее величину).

Имеем

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial c}{\partial x} \right], \quad t > 0 \quad (1)$$

$$c|_{t=0} = C, \quad (2)$$

краевые условия для сорбции:

$$\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad c|_{x=2\ell} = 1, \quad (3)$$

для проницаемости

$$c|_{x=0} = 1, \quad c|_{x=2\ell} = 0, \quad (3')$$

где 2ℓ - толщина образца.

На сорбционных установках исследуется кинетика изменения усредненной по образцу концентрации НМВ (низкомолекулярных веществ) $\bar{c}_3(t_k) = \bar{c}_3^k$ (t_k - точки изменения, $k=I, K$). На установках проницаемости регистрируется кинетика установления стационарного потока $J(t)$, через мембрану из исследуемого материала и требуется определить величину коэффициента диффузии D .

Наши экспериментальные результаты подтвердили предположение о зависимости D от концентрации влаги для системы ПЭ - вода /6/. Для описания широкого класса изменений $D = D(c)$ использовалась закономерность

$$D(c) = D_p + (D_0 - D_p)(1-c)^\alpha, \quad 0 \leq \alpha < \infty, \quad (4)$$

где $D_0 = D(0)$, $D_p = D(1)$.

Обратная задача формулировалась как задача идентификации такого параметра α в (4), чтобы наилучшим образом аппроксимировать экспериментально полученные величины \bar{c}_3^k с точками теоретической кривой $\bar{c}_3^k(c)$, где

$$\bar{c}_3(t_k, \alpha) \equiv \bar{c}_3^k(\alpha) = \frac{1}{t} \int_0^t c(x, t_k, \alpha) dx.$$

Исходную информацию о D_0 , D_p , α можно получить из обработки экспериментальных данных сорбции /6/, /7/. Результаты исследований проницаемости обобщены в таблице.

$T^{\circ}(C)$	p/p_0	$\bar{D}_0 \cdot 10^7$ (cm^2/c)	$\bar{D}_p \cdot 10^7$ (cm^2/c)	α	$M_0 \cdot 10^3$
36°	0-0,78	1,7	0,4	1,4	4,9
40°	0-0,64	1,6	0,8	0,92	0,66
	0-0,67	1,5	0,5	1,1	0,8
50°	0-0,51	2,6	0,25	1,65	0,42

Чем больше увеличивается концентрация молекул воды в газе - носителе, тем более экспериментальная кинетика отклоняется от "классической", т.е. с ростом p/p_0 , начиная с 0,6 - 0,7, резко увеличивается величина минимизируемого квадратного функционала

$$M_0 \cdot K^{-1} \sum_{k=1}^K \alpha_k [\bar{c}_k - \bar{c}_k(t)]^2,$$

где $\alpha_k \in [0, 1]$ - достоверность k -того измерения.

С другой стороны, эксперимент сорбции, где p/p_0 меняется от 0,67 - 0,95 при $t = 30^{\circ}(C)$ дает $\bar{D}_0 = 1 \cdot 10^{-7} cm^2/c$;

$\bar{D}_p = 3,3 \cdot 10^{-7} cm^2/c$; $\alpha = 1,69$; $M_0 = 0,5 \cdot 10^{-3}$, т.е. в этом интервале влаперенос характеризуется классическими законами диффузии. Следовательно, при p/p_0 0,6 - 0,75 в полимере происходит процесс, который мы в модели (1) - (4) не учли. Это может быть связано с процессом локализации молекул воды в полимерной матрице /2/, /5/, /8/.

Математическая теория процессов диффузии, сопровождаемой локализацией некоторых из диффундирующих веществ, аналогична теории диффузии при химической реакции. Теория диффузии с одновременным протеканием химической реакции рассмотрена Кранком /9/. Особенность модели состоит в том, что диффузию с учетом локализации НМВ в полимере описывает уравнение

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (5)$$

где c - концентрация свободно диффундирующих молекул, u - концентрация локализованных молекул. Здесь и далее принимается, что скорость локализации значительно превышает

скорость диффузии. Тогда в (5) можно пренебречь членом $\frac{\partial c}{\partial t}$ и это уравнение запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (6)$$

Далее принимается, что локализация и концентрация связаны между собой соотношением

$$u = R \cdot c^m,$$

где R, m - постоянные величины ($R > 0, 0 < m \leq 1$).

Тогда (5) окончательно принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D^* \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (7)$$

$$D^* = D \frac{u^{1-m}}{m R} v_m.$$

Таким образом диффузию в сочетании с локализацией можно представить как простую диффузию с эффективным коэффициентом

D^* , зависящим от концентрации. Другие подобные модели отличаются от (5) членом $\frac{\partial u}{\partial t}$. Например, модель с прямой и обратной реакцией имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda c - \mu u,$$

где λ, μ - коэффициенты прямой и обратной реакций.

В [10] решена другая модель:

Более подробно эти вопросы (о диффузии газов в твердых телах) рассмотрены К.Н. Бекманом [11], [12]. В частности, он рассмотрел подстановку Х.Ганса.

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - k_1 c + k_2 u \\ \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 c - k_2 u, \end{cases} \quad (8)$$

которая по существу совпадает с (7). В системах вода - полимер эти вопросы рассмотрены в [2], [5]. Всем этим моделям присущ один недостаток, который не позволяет использовать их в системе вода - ПЭ:

c - пропорционален u , т.е. считается, что для всех $c \in [0, c_{\max}]$ сразу происходит локализация. Но экспериментально установлено, что локализация паров воды в ПЭ начинается с какой-то c_k , $c_k > \beta > 0$. Поэтому необходимо ввести

новую модель. Для этого введем следующие обозначения и понятия:

- 1) существует величина $c_k > c_0 > 0$ (концентрация "свободных" молекул), что при $c > c_k$, начинается локализация,
- 2) коэффициент диффузии молекул в зоне локализации D_3 и в свободной от локализации зоне ($c < c_k$) D_0 являются константами.

Обозначим общую концентрацию молекул НМВ в полимере через c . Она равна сумме концентраций свободных молекул c_0 и концентрации локализованных молекул c_3 , т.е. $c = c_0 + c_3$. Математическая модель при описанных предположениях имеет следующий вид (при рассмотрении диффузии в пластинке)

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = D_3 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, & \text{когда } c_k \leq c \\ \frac{\partial c}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, & \text{когда } c_k > c. \end{cases} \quad (9)$$

Начальное условие

$$c|_{t=0} = 0, \quad (11)$$

граничные условия

$$c|_{x=0} = c_{\max}, \quad (12)$$

$$-D_0 \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=2l} = f(t). \quad (13)$$

На разделах обоих участков (т.е. при $x = \xi$; $\xi \in [0; 2l]$) ставим следующие условия сопряжения:

$$c|_{x=\xi+0} = c_k, \quad c|_{x=\xi-0} = c_k, \quad (14)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_3 \frac{\partial c_0}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} = D_0 \frac{\partial c_0}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0}. \quad (15)$$

Решение задачи (9)-(15) осложняется условием сопряжения (15) из-за отсутствия информации о c_3 .

Очевидно, что $\xi \in \xi_0 < 2l$, где величина $\xi_0 < 2l$ обозначает рубеж фронта локализации в стационарном случае. Рассмотрим постановку и решим ее в стационарных условиях. Тогда, с одной стороны имеем

$$c|_{x=\xi_0+0} = c_k, \quad (16)$$

с другой стороны

$$D_0 \frac{dc(x)}{dx} = \mathcal{J}_0 \quad (17)$$

где \mathcal{J}_0 - стационарный поток на выходе. Отсюда, с учетом, что $c|_{t=0} = 0$ получаем

$$\mathcal{J}_0 = D_0 \frac{c_k}{2l - \xi_0}, \quad \text{т.е.}$$

$$\xi_0 = 2l - \frac{D_0 \cdot c_k}{\mathcal{J}_0} \quad (18)$$

Далее, для зоны $0 < x < \xi_0$ в силу стационарности т.е. уравнения $\frac{d^2c}{dx^2} = 0$ имеем

$$c = c_{\max} + \frac{x}{\xi_0} (c_k - c_{\max}) \quad (19)$$

Условие неразрывности потока при $x = \xi_0$ дает равенство

$$D_3 \frac{c_{\max} - c_k}{\xi_0} = D_0 \frac{c_k}{2l - \xi_0}$$

Это уравнение позволит найти коэффициент диффузии в зоне с локализацией

$$D_3 = \frac{D_0 \cdot c_k}{c_{\max} - c_k} \left(\frac{2l \mathcal{J}_0}{D_0 c_k} - 1 \right) \quad (20)$$

Определяя из эксперимента проницаемости и сорбции величины \mathcal{J}_0 , c_k и D_0 , можно найти месторасположение границы локализации ξ_0 и коэффициент диффузии D_3 в зоне с локализацией молекул воды. Намного сложнее получить объективную картину нестационарного распределения концентрации, т.к. из эксперимента мы получаем лишь интегральные величины $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{F}(t)$, а информация о скорости образования и роста зародышей отсутствует. Размеры зародышей из-за ограниченного свободного объема внутри полимерного материала могут состоять всего из нескольких молекул. Это ограничивает применение классической термодинамики фазовых превращений. В литературе однако имеются некоторые попытки оценки скорости образования центров конденсации \mathcal{J} . В основе метода лежит прием, согласно которому для объектов малой величины избыток свободной энергии связан не только с его поверхностью, но и

относится к объекту в целом, что позволяет рассматривать объекты, размеры которых не позволяют выделить в них объемную

и поверхностную часть.

Согласно такому подходу можно получить /13/

$$J = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \alpha^* \left(\frac{G_{\infty}}{m^*} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{P_{\infty}}{kT} \right)^2 \cdot V \cdot \delta \cdot e^{-\frac{A}{kT}}, \quad (21)$$

где V - объем одной молекулы,

G_{∞} - поверхностное натяжение для плоской поверхности,

α^* - коэффициент конденсации,

δ - пересыщение пара,

T - температура,

k - постоянная Больцмана,

P_{∞} - давление насыщенного пара над плоской поверхностью,

m^* - масса молекулы пара,

A - работа образования зародышей.

Локализация происходит за счет свободных молекул воды.

Тогда с учетом (15) и (21) следует

$$J = D_s \left. \frac{\partial c_b}{\partial x} \right|_{x=\xi_0} - D_b \left. \frac{\partial c_b}{\partial x} \right|_{x=\xi_0} \quad (22)$$

Следовательно, в задаче (9)-(15) условие (15) можно заменить на (22), что дает возможность получить кинетику распределения диффузанта в пленке с учетом локализации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зайков Г.Е., Иорданский А.Л., Маркин В.С. Диффузия электролитов в полимерах. М., 1984. 240 с.
2. Чалых А.Е. Диффузия в полимерных системах. М.: Химия, 1987. 312 с.
3. Mořáček M. Messung der Wasserdiffusion und permeabilität im Polyäthylen mit Hilfe von Radionukliden. Gummi, Asbest, Kunststoffe, 1979. Bd 32. № 11, S. 856-859.
4. Yasuda H., Stammety. Permeability, Solution and Diffusion on water in some high polymere. J. Polymer, Sci., 1962, Vol 57.. №. 165. P. 907-923.
5. Вода в полимерях /Под ред. С.Рауланда. М.. Мир, 1984. 555 с.

6. Аболтиньш А.Я., Яунроманс И.И. Решение обратной задачи для нахождения коэффициента диффузии из данных эксперимента проницаемости. // Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1985. С. 76-82.
7. Аболтиньш А.Я., Яунроманс И.И. Определение нулевого приближения для зависящего от концентрации коэффициента диффузии // Теплопроводность и диффузия. Рига: Риж. политехн. ин-т., 1985. С. 95-101.
8. Метра А.Я., Крейтус А.Э., Витере Э.Ф. Особенности проникновения и локализации воды в полиэтилене // Полимеры в мелиорации и водном хозяйстве. Елгава, 1976. С. 66-73.
9. Crank. J. The Mathematics of Diffusion.- Oxford: Clarendon Press, 1979.- P. 414.
10. Лыков А.В. Теплообмен. М.: Энергия, 1978. 479 с.
11. Бекман К.Н. Экспериментальные методы изучения диффузии радиоактивных газов и твердых тел // Радиотехника. 1981. Т. 23. № 2. С. 273-280.
12. Бекман К.Н. Экспериментальные методы изучения диффузии радиоактивных газов и в твердых телах // Радиохимия. 1983. № 2. С. 252-263.
13. Амелин А.Т. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара.- М.: Химия, 1972. С. 2-62.

УДК 621.382.323:519.63

А.А. Буйкис
Ин-т физики АН Латв ССР,
Г.Т. Дидрихсон
Инженерно-технологический
центр АН Латв ССР

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕВОГО ТРАНЗИСТОРА ШОТКИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНСЕРВАТИВНОГО ОСРЕДНЕНИЯ

Численное моделирование работы полевого транзистора с затвором Шоттки (ПТШ) в двумерном приближении связано с проблемами выбора физической (и математической) модели и методом ее решения. Последний должен обеспечить как достаточную точность, так и быстроту расчетов. Топология ПТШ (рис. 1) способствует выбору метода консервативного осреднения, основанному на использовании интерполирующих в среднем сплайнов /1/. Этот метод приспособлен к решению задач для слоистых сред (см., напр., /2/). Его использование поз-

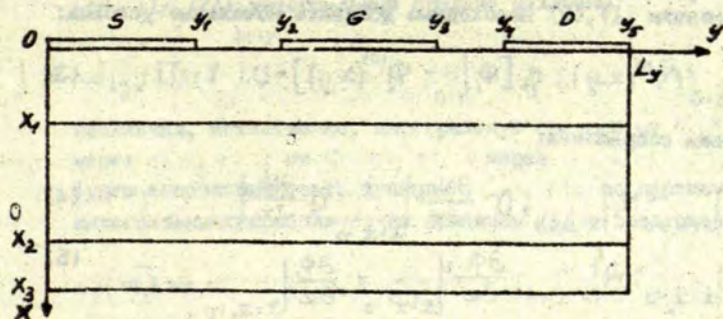


Рис. 1. Схема ПТШ S - исток, G - затвор, D - сток.

волило перейти от часто принимаемых одномерных моделей ПШ к двумерной /3/ путем сохранения достаточной скорости расчета характеристик прибора.

Дадим математическую формулировку двумерной задачи. Обозначим для этого через $N_i(x, y, t)$ концентрацию электронов в i -ом слое, через $\Phi_i(x, y, t)$ - потенциал (i - номер слоя). Тогда работа ПШ в дрейфово-диффузионном приближении уравнений неразрывности для электронов и Пуассона для потенциала может быть описана следующими дифференциальными уравнениями (напр., /3/):

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (D_i \frac{\partial N_i}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (D_i \frac{\partial N_i}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu_i N_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (\mu_i N_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}), \quad (1)$$

$$\eta_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} + Q_i (N^{(i)} - N_i), \quad \begin{matrix} x_i < x < x_{i+1} \\ 0 < y < L_y \\ i = \overline{0, 2} \end{matrix}, \quad (2)$$

Здесь μ_i - подвижность электронов, D_i - их коэффициент диффузии, причем имеет место связь $D_i = \mu_i kT / q$, где T - температура, k - постоянная Больцмана, q - заряд электрона (абсолютное значение). Далее, $N^{(i)}$ - концентрация легирующей примеси, $Q_i = Q - q / \epsilon \epsilon_0$, где ϵ - относительная диэлектрическая проницаемость, ϵ_0 - диэлектрическая постоянная. Параметр η_i определяет режим работы транзистора: $\eta_i = 1$ - динамический, $\eta_i = 0$ - статический. К уравнениям (1), (2) необходимо добавить начальные условия:

$$N_i|_{t=0} = N_i^{(0)}(x, y), \quad \eta_i [\Phi_i|_{t=0} - \Phi_i^{(0)}(x, y)] = 0, \quad i = \overline{0, 2}, \quad (3)$$

условия сопряжения:

$$N_{i-1}|_{x=x_{i-0}} = N_i|_{x=x_{i-0}}, \quad D_{i-1} \frac{\partial N_{i-1}}{\partial x} \Big|_{x=x_{i-0}} = D_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \Big|_{x=x_{i-0}}, \quad (4)$$

$$\Phi_{i-1}|_{x=x_{i-0}} = \Phi_i|_{x=x_{i-0}}, \quad \frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial x} \Big|_{x=x_{i-0}} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \Big|_{x=x_{i-0}}, \quad i = \overline{1, 2} \quad (5)$$

и крайние условия 2-го рода:

$$\frac{\partial N_i}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = 0, \quad (6)$$

(где n - нормаль) везде, кроме участков $y \in [y_{2j}, y_{2j+1}]$, $z \in [z_j, z_{j+1}]$ ($y_0 = 0, y_5 = L_y$) границы $x = 0$ (см. рис.1), на которых заданы неоднородные краевые условия I-го рода:

$$N_0 \Big|_{y \in [y_{2j}, y_{2j+1}]} = N_0^{(j)}(y, t), \quad \Phi_0 \Big|_{y \in [y_{2j}, y_{2j+1}]} = \Phi_0^{(j)}(y, t), \quad (7)$$

где $N_0^{(j)}$ ($\Phi_0^{(j)}$) задают концентрацию электронов (потенциал) на истоке для $j=0$, на затворе для $j=1$ и на стоке для $j=2$, причем $N_0^{(0)} = N_0^{(2)} = N_0, N_0^{(1)} = 0, \Phi_0^{(0)} = 0, \Phi_0^{(2)} = C_2 > 0$.

$\Phi_0^{(1)} = C_2 = U_0 \geq 0$. Мы задавали $N_D = N^{(0)}$ - концентрации легирующей примеси, а отсчет напряжения на затворе U_0 велся по формуле $U_0 = C_1 + \psi_{SH}$, где $\psi_{SH} = 0.8$ В - высота барьера Шоттки.

Для применения метода консервативного осреднения нам удобно краевые условия на границах $x = x_1 = 0$ и $x = x_2$ записать в единообразной форме [2], [7]:

$$\left(\nu_0 k_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} - \lambda_0 U_0 \right) \Big|_{x=x_1} = F_0(y, t), \quad \left(\nu_1 k_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \lambda_1 U_1 \right) \Big|_{x=x_2} = F_1(y, t), \quad (8)$$

где U_0 равно либо N_0 (тогда $k_0 = D_0$), либо Φ_0 (тогда $k_0 = 1$). Краевые условия 2-го рода (8) тогда определяются величинами $\nu_0 = 1$, $\lambda_0 = 0$, $F_0 = 0$ (соответственно $\nu_1 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $F_1 = 0$), а краевые условия (7) - величинами $\nu_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, при этом $F_0 = N_0^{(j)}$ для $U_0 = N_0$ и $F_0 = \Phi_0^{(j)}$ для $U_0 = \Phi_0$.

Введем, согласно методу консервативного осреднения (см. [1], [2]), интегральные средние величины

$$U(x, y, t) = N_0^{-1} \int_{x_1}^{x_2} U(x, y, t) dx, \quad N(x, y, t) = N_0^{-1} \int_{x_1}^{x_2} N(x, y, t) dx, \quad (9)$$

сбозначая, естественно, интегральную среднюю от $N(x, y, t)$ через $n(x, y, t)$, от $\Phi(x, y, t)$ - через $\varphi(x, y, t)$. Далее, будем аппроксимировать функции $U(x, y, t)$ по переменной x интегральным параболическим сплайном [1] в следующей форме:

$$U(x, y, t) = \bar{u} + m(x - \bar{x}) - \frac{1}{k_0 N_0} (x - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = x_1 + \alpha \Delta x, \quad (10)$$

в которой неизвестные коэффициенты сплайна \bar{u}_i , m_i могут зависеть, конечно, от i и j . Коэффициенты \bar{u}_i , m_i легко могут быть выражены через e_i /I/ для произвольного числа N слоев $i = 0, \bar{N}$ (у нас $N = 2$):

$$\bar{u}_i = u_i - \frac{G_i}{12} e_i, \quad G_i = \frac{h_i}{k_i}, \quad i = 0, \bar{N}.$$

$$m_i = \frac{1}{2k_i(G_i + G_{i+1})} [6(u_{i+1} - u_i) - e_i(G_i + 3G_{i+1}) - e_{i+1}2G_{i+1}], \quad i = 0, \bar{N}-1,$$

$$m_{\bar{N}} = \frac{1}{2k_{\bar{N}}(G_{\bar{N}} + G_{\bar{N}+1})} [6(u_{\bar{N}} - u_{\bar{N}-1}) + e_{\bar{N}}(G_{\bar{N}} + 3G_{\bar{N}+1}) + e_{\bar{N}-1}2G_{\bar{N}+1}], \quad i = \bar{N} \quad (II)$$

Далее, в /I/ показано, что коэффициенты e_i , в свою очередь, могут быть выражены через не зависящие от i коэффициенты $\alpha_{i,j}$ в следующем виде:

$$e_i = \sum_{j=0}^{N+1} \alpha_{i,j} (u_{j+1} - u_j) \operatorname{sign}(i-j+0.5), \quad i = 0, \bar{N}. \quad (12)$$

где u_{-1} и u_{N+1} зависят от конкретной формы краевых условий (8):

$$u_{-1} = \begin{cases} \lambda_0^{-1} F_0, & \lambda_0 \neq 0, \\ u_0 + F_0, & \lambda_0 = 0, \end{cases} \quad u_{N+1} = \begin{cases} \lambda_1^{-1} F_1, & \lambda_1 \neq 0, \\ u_N + F_1, & \lambda_1 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Наконец, матрица коэффициентов $(\alpha_{i,j})$ может быть вычислена методом прогонки из следующей системы уравнений /I/ для каждого фиксированного $j = 0, \bar{N}+1$:

$$\begin{cases} \alpha_{i-1,j} - \alpha_{i+1,j} = 0, \\ A_i \alpha_{i-1,j} + C_i \alpha_{i,j} + B_i \alpha_{i+1,j} = 0, \quad i = 0, \bar{N}, \quad i \neq j-1, i \neq j, \\ A_i \alpha_{i-1,j} + C_i \alpha_{i,j} - B_i \alpha_{i+1,j} = F_{i-1}, \quad i = j-1, \\ -A_i \alpha_{i-1,j} + C_i \alpha_{i,j} + B_i \alpha_{i+1,j} = F_i, \quad i = j. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $A_i = G_{i-1}(G_i + G_{i+1})$, $B_i = G_{i+1}(G_i + G_{i-1})$, $C_i = A_i + B_i + D_i$, $D_i = (G_i + G_{i-1})(G_i + G_{i+1})$, $F_i = 3(G_i + G_{i+1})$ причем при $\lambda_i = 0$ полагается $A_i = D_i$, при $\lambda_i = 0$ - $B_N = D_N$, а

$$G_{-1} = \begin{cases} 2\lambda_0^{-1} \gamma_0, & \lambda_0 \neq 0, \\ 2\gamma_0 - G_0, & \lambda_0 = 0, \end{cases} \quad G_{N+1} = \begin{cases} 2\lambda_1^{-1} \gamma_1, & \lambda_1 \neq 0, \\ 2\gamma_1 - G_N, & \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Перейдем после изложения этого вспомогательного материала по основным свойствам интегрального параболического сплайна-

на к осреднению уравнения (1), (2). Для этого $\sigma - \epsilon$ уравнение проинтегрируем по x от x_0 до x_1 . Имеем:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{D}{H} \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x_0, x_1} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D^* \frac{\partial n}{\partial y} \right) - \frac{u}{H} N \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x_0, x_1} - \frac{\partial}{\partial y} \left(N^* n \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad (15)$$

$$\eta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x_0, x_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + G_1 (N^{(0)} - n), \quad 0 < y < L_y, \quad (16)$$

В (1) допущена зависимость коэффициентов D и η от искомого решения. Тогда знак "х" у коэффициента обозначает его значение от средней величины. Далее, это же значение коэффициента D^* входит также в определение сплайна (10) для функции $N_1 = N_1^*$, т.е. $N_1 = D^*$. Значит, коэффициенты N_1, \dots , аппроксимирующие искомое решение σ , должны вычисляться лишь один раз ($k+1$), а коэффициенты \dots для N_1 надо будет вычислять итеративно, на каждом временном слое, при решении уравнения для n разностным методом. Аппроксимация функций N_1 и φ сплайном (10) с использованием его основных свойств позволяет преобразовать (15), (16) к виду:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D^* \frac{\partial n}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(N^* n \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{2\epsilon m_1}{H_1} - \eta \cdot \left[\epsilon_1 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\epsilon m_1}{3D^*} \cdot m_{x_0} m_{x_1} \right) \right], \quad (17)$$

$$\eta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{2\epsilon \epsilon_1}{H_1} + G_1 (N^{(0)} - n), \quad 0 < y < L_y, \quad (18)$$

В (17), (18) индекс N или φ у коэффициентов m_1, \dots сплайна показывает, который из сплайнов использован (т.е. либо в (10) $N_1 = D^*$ при аппроксимации N_1 либо $N_1 = \dots$ при аппроксимации φ). Остается лишь подставить в (17), (18) выражения (11) для m_1, \dots , после этого выражения (12) для ϵ_1 и мы получаем систему из шести нелинейных, но пространственно одномерных уравнений относительно n и φ . После вычисления n_1 и φ_1 при помощи сплайна (10) восстанавливаются приближенно исходные двумерные поля $N_1(x, y, t)$ и $\varphi_1(x, y, t)$.

*) Фактически два раза: один раз для краевых условий 1-го рода, второй — для 2-го рода, ибо от типа краевых условий зависят коэффициенты системы (14).

К уравнениям (17), (18) необходимо добавить начальные условия, получающиеся из (3) в виде:

$$n|_{y=0} = n^{(0)}(y), \quad \varphi|_{y=0} = \varphi^{(0)}(y); \quad 0 \leq y \leq 2, \quad (19)$$

где $n^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ — средние, согласно (9), величины от $n^{(0)}(x, y)$, $\varphi^{(0)}(x, y)$ и краевые условия:

$$\frac{\partial n}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial n}{\partial y} \Big|_{y=2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=2} = 0. \quad (20)$$

Ограниченный объем статьи позволяет нам дать лишь краткое описание разностной схемы (авторы предполагают опубликовать препринт по этой задаче с более подробным освещением вычислительной стороны вопроса). Для численного решения задачи (17)–(20) нами была использована разностная схема типа переменных направлений (напр., /4/ гл. IX) с итерациями по нелинейности на каждом слое. Использовался кусочно-постоянный шаг по y (постоянный для каждого $y^j \in [y_j, y_{j+1}]$, $j \in \overline{0, 4}$). Была построена (интегро-интерполяционным методом, см. /4/) консервативная схема 2-го порядка аппроксимации по y . На i -м этапе для фиксированного y решается система уравнений по i : прямым обращением матриц 3-го порядка. Разностные аппроксимации уравнений (17), (18) могут быть записаны в таком виде:

$$\frac{n_i - n_i^*}{0,5\tau} = \frac{2\bar{c}_i n_i}{H_i} - \bar{M}_i^* \left[\bar{c}_i \left(\frac{2\bar{c}_i}{H_i} + \frac{u_{i+1}}{3\bar{D}_i^*} \right) + \bar{m}_{i+1} \bar{m}_{i+1} \right] + (D_i^* n_i \bar{y})_y - (M_i^* n_i \varphi_i \bar{y})_y, \quad (21)$$

$$\eta_i \frac{\varphi_i - \varphi_i^*}{0,5\tau} = \frac{2\bar{c}_i \varphi_i}{H_i} + (\varphi_i \bar{y})_y + G_i (N_i^{(i)} - n_i)^{(6)} \quad (22)$$

Здесь нами использованы стандартные безиндексные обозначения из /4/. Напр.: $f^{(6)} = \sigma \bar{f} + (1 - \sigma) f$, $\sigma \in [0, 1]$.

$$(Kf)_y = \frac{1}{k} \left[\frac{\kappa(y+h_+) + \kappa(y)}{2} \frac{f(y+h_+) - f(y)}{h_+} - \frac{\kappa(y) + \kappa(y-h_-)}{2} \frac{f(y) - f(y-h_-)}{h_-} \right], \quad k = \frac{h_+ + h_-}{2}$$

Далее, \bar{f} обозначает искомую величину на верхнем (полу-)слое с последней итерации, \tilde{f} — на верхнем слое с предыдущей итерации.

На 2-м этапе методом прогонки последовательно с итерациями решались уравнения:

$$\frac{\hat{n}_c - \bar{n}_c}{0,5\tau} = \frac{2\bar{e}N_c}{N_c} \cdot \hat{j}_c^* \left[\bar{c}_{\text{ФЛ}} \left(\frac{2\bar{n}_c}{N_c} + \frac{\bar{e}N_c}{3D_c^*} \right) + \bar{m}_{\text{КЛ}} \bar{m}_{\text{ФЛ}} \right] + (\bar{D}_c^* \hat{n}_c \hat{j}_c) - (\hat{j}_c^* \bar{n}_c \bar{y}_c \bar{y}_c), \quad (23)$$

$$\eta_c \frac{\hat{y}_c - \bar{y}_c}{0,5\tau} = \frac{2\bar{e}N_c}{N_c} + (\hat{y}_c \bar{y}_c) \cdot G_c (N_c^{(1)} - \bar{n}_c)^{(1-\sigma)} \cdot (\bar{F} - (1-\sigma)\hat{f} + \sigma\bar{f}). \quad (24)$$

Перед анализом результатов расчетов приведем некоторые дополнительные физические характеристики модели. Скорость электронов в *GaAs* задавалась немонотонно зависящей от напряжения электрического поля (рис.2).

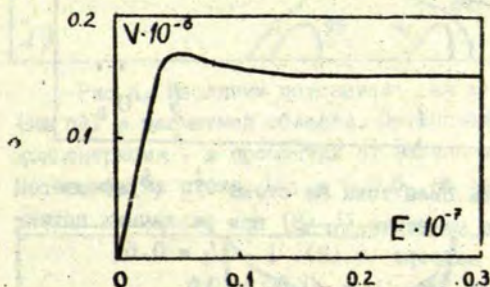


Рис.2. Зависимость скорости электронов V (м/с) от напряжения электрического поля E (В/м).

Отметим, что в расчетах E считалась векторной величиной. Далее, зависимость подвижности μ от напряжения электрического поля E задавалось выражением

$$\mu = \frac{\mu_0 E \cdot V_e \left(\frac{E}{E_T} \right)^4}{\left[1 + \left(\frac{E}{E_T} \right)^4 \right] E}, \quad (25)$$

где E_T - напряжение поля, при котором скорость электрона максимальна, V_e - скорость насыщения электрона, μ_0 - подвижность при $E=0$. В расчетах использовались следующие численные значения: $E_T = 4 \cdot 10^5$ В/м, $V_e = 1,5 \cdot 10^5$ м/с, $\mu_0 = 0,4$ м²/В·с. Другие параметры: $y_1 - y_0 = y_3 - y_2 = y_5 - y_4 = 10^{-6}$ м, $y_2 - y_1 = y_4 - y_3 = 10^{-6}$ м, толщина канала $x_1 - x_0 =$

$= 0,42 \cdot 10^{-6}$ м. Концентрация легирующей примеси $N^{(1)} = N^{(1)} = N^{(2)} = 10^{23}$ 1/м³. Скажем несколько слов о вычислительной стороне. В расчетах бралось 100 разностных точек по координате y . Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1045, при этом итерации на одном временном слое требуют менее 0,5 с машинного времени, а расчет каждой ветви вольт-ампер характеристики (ВАХ) занимает около 2-х минут.

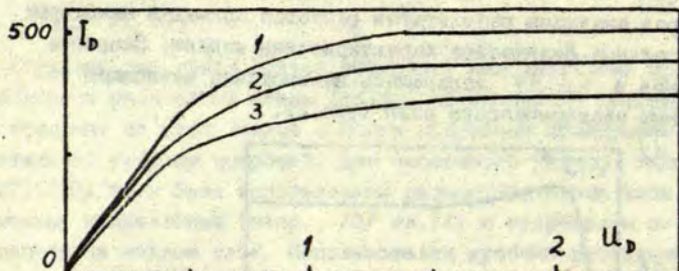


Рис.3. Зависимость силы тока на стоке I_D (А/м) от потенциала на стоке U_D (В) при различных потенциалах на затворе U_G (В). 1 - $U_G = 0,6$; 2 - $U_G = 0$; 3 - $U_G = -0,6$.

Проведенные расчеты (часть результатов представлена на рис.3-5) показывают, что предложенный метод консервативного осреднения может быть использован для моделирования работы ПТШ. Отметим, напр., что с увеличением U_D на изолиниях концентрации наблюдается появление дипольного слоя (рис.5). Это связано с немонотонной зависимостью скорости электронов от напряженности электрического поля, показанной на рис.2. Объяснение этого эффекта дано например в /5/. Проведенное сравнение наших расчетов с результатами работ /5/, /6/ показали достаточно хорошее совпадение. Все это позволяет утверждать, что метод консервативного осреднения может быть использован для расчета параметров эквивалентной схемы ПТШ и ВАХ. Этот метод дает удовлетворительные результаты как с точки зрения быстродействия, так и по точности результатов.

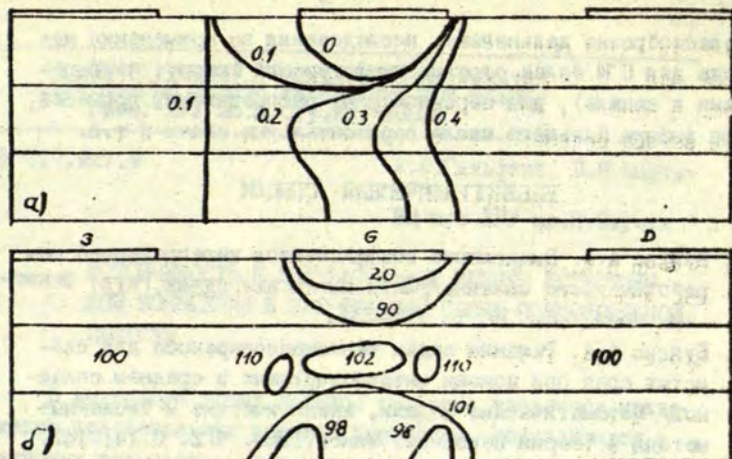


Рис.4. Изолинии потенциала (на а)) и концентрации (на б)) в расчетной области. Потенциал дан в вольтах, концентрация - в процентах от величины 10^{23} $\text{I}/\text{м}^3$. Потенциал на стоке $U_D = 0.5$ В, на затворе $U_G = -0.2$ В.

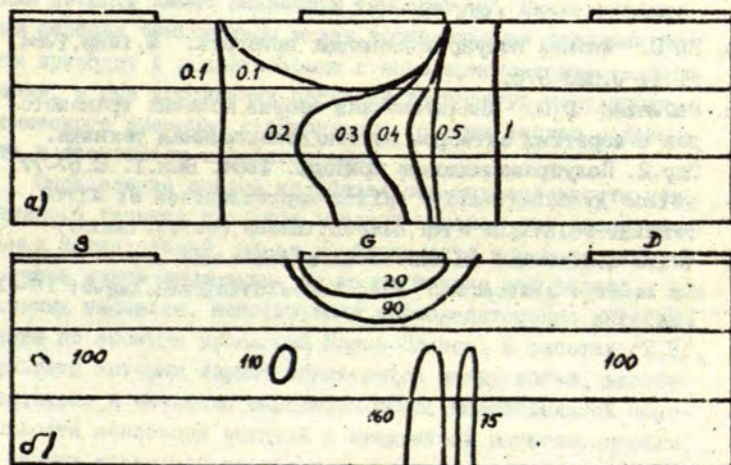


Рис.5. То же самое, что на рис.4, только для $U_D = 2$ В.

Целесообразно дальнейшие исследования по применению метода для ПШ более сложных конфигураций (напр., с вырезами в канале), для неравномерных распределений примесей, при выборе большего числа горизонтальных слоев и т.п.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Буйкис А.А. Вычисление коэффициентов интегрального параболического сплайна//Латв.матем.ежегодник.Рига: Зинатне. 1986.Вып. 30. С. 228-232.
2. Буйкис А.А. Решение задач тепломассопереноса для слоистых сред при помощи интерполирующих в среднем сплайнов//Математические модели, аналитические и численные методы в теории переноса. Минск,1986. Ч.2. С.141-147.
3. Миргородский Д.Н., Руденко А.А. Алгоритм расчета статических и импульсных характеристик полевых транзисторов с затвором Шоттки//Микроэлектроника и полупроводниковые приборы. 1982. Вып.7. С.263-267.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.:Наука,1983. 616 с.
5. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. М.:Мир,1984. Т.1. С.323-376.
6. Рябинкин Д.С. Аналитическая теория полевых транзисторов с коротким затвором Шоттки//Электронная техника. Сер.2. Полупроводниковые приборы. 1984. Вып.1. С.67-77.
7. Buikis A. Conservative spline-approximation of differential equations with discontinuous coefficients// Third conference on numerical methods and approximation theory. Abstracts. Niš, Yugoslavia,1987.August 18-21.

УДК 517.927.4

А. Д. Гельфгат, Б. Я. Марту-
зен

ВЦ при ЛГУ им. П. Стучки

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В НАГРЕВАЕМОЙ СБОКУ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию колебательных режимов конвекции, появляющихся в различных технологических процессах, в частности, при выращивании монокристаллов из расплава /1/. Одной из простейших моделей для экспериментального или численного моделирования естественноконвективных течений является задача о гравитационной конвекции в прямоугольной полости, боковые стенки которой имеют различную температуру. Сколь угодно малый перепад температуры между вертикальными стенками полости приводит к возникновению стационарного конвективного течения, а при достижении разницы температур некоторого критического значения стационарное течение теряет устойчивость и становится колебательным.

Определение порога колебательной неустойчивости конвективного течения является трудной задачей для экспериментальных исследований, из-за необходимости измерять пульсации очень малой амплитуды. Не менее трудна эта задача и для численных расчетов, использующих непосредственное интегрирование по времени уравнений Навье-Стокса. В работах /2,3/, результаты которых хорошо согласуются между собой, экспериментально и численно определен порог колебательной неустойчивости конвекции воздуха в квадратной полости. Однако для других жидкостей подобные результаты отсутствуют.

В настоящей работе для исследования устойчивости конвективного течения жидкости в квадратной полости используются метод Галеркина, описанный в /4/. Этот метод позволя-

ет свести систему уравнений Навье-Стокса к маломодовой системе обыкновенных дифференциальных уравнений (использовалось 72 уравнения), и исследовать устойчивость неподвижных точек полученной системы стандартными методами. В работе получена зависимость критического числа Грасгофа, при котором стационарное течение теряет устойчивость, от числа Прандтля, изменяющегося от 0 до ∞ . Для числа Прандтля, (равного 0,02) рассчитаны различные колебательные режимы конвекции. Полученное значение критического числа Грасгофа для конвекции воздуха хорошо согласуется с результатами работ /2,3/.

Течение описывается системой уравнений тепловой конвекции в приближении Обербека-Буссинеска

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} - \nabla p + \Delta \vec{v} + Gr T \vec{e}_y, \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T = \frac{1}{R} \Delta T,$$

с граничными условиями

$$\vec{v} \Big|_{y=0,1} = \vec{v} \Big|_{x=0,1} = 0, \quad (2)$$

$$T \Big|_{x=0} = 1, \quad T \Big|_{x=1} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0,1} = 0, \quad (3)$$

где $Gr = g \beta \Delta T \ell^3 / \nu^2$ - число Грасгофа, $R = \nu / \lambda$ - число Прандтля, g - ускорение свободного падения, β - коэффициент объемного расширения, ΔT - перепад температуры между боковыми стенками, ℓ - длина полости, ν - кинематическая вязкость, λ - коэффициент температуропроводности. За масштабы времени, скорости и давления выбраны соответственно величины ℓ^2 / ν , ν / ℓ , $\rho \nu / \ell^2$.

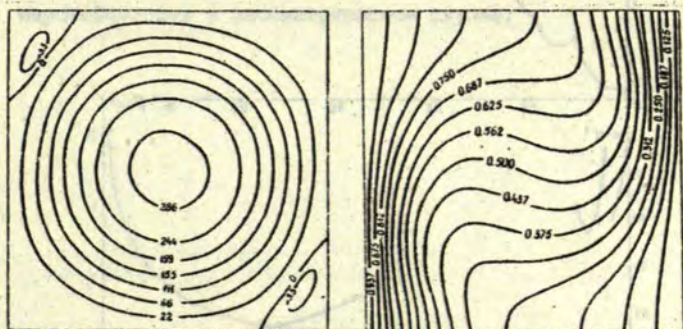
В результате применения метода Галеркина /4/ с шестью координатными функциями по каждому направлению задача (1-3) сводится к системе из 72-х обыкновенных дифференци-

альных уравнений первого порядка вида

$$\dot{X}_i(t) = a_{ij} X_j(t) + b_{ijk} X_j(t) X_k(t) + f_i, \quad (4)$$

в которой матрицы a_{ij} , f_i зависят от безразмерных параметров Gr и Pr .

Неподвижные точки системы (4), соответствующие стационарным решениям задачи (1-3), вычислялись методом Ньютона. На рис. I показан пример расчета стационарного течения при $Gr = 10^7$, $Pr = 0,02$.



линии тока

изотермы

Рис. I.

Исследование устойчивости неподвижных точек системы (4) сводится к определению критического значения числа Грасгофа, при котором хотя бы одно собственное значение матрицы Якоби динамической системы (4), вычисленной в неподвижной точке, имело неотрицательную действительную часть. Расчеты показывают, что такие собственные значения появляются комплексно сопряженными парами, т.е. в исследуемой динамической системе происходит бифуркация рождения цикла /5/.

Критические числа Грасгофа вычислялись для всего диапазона значений числа Прандтля, включая и предельные случаи $Pr \rightarrow 0$ и $Pr \rightarrow \infty$. На рис. 2а показана зависимость критического числа

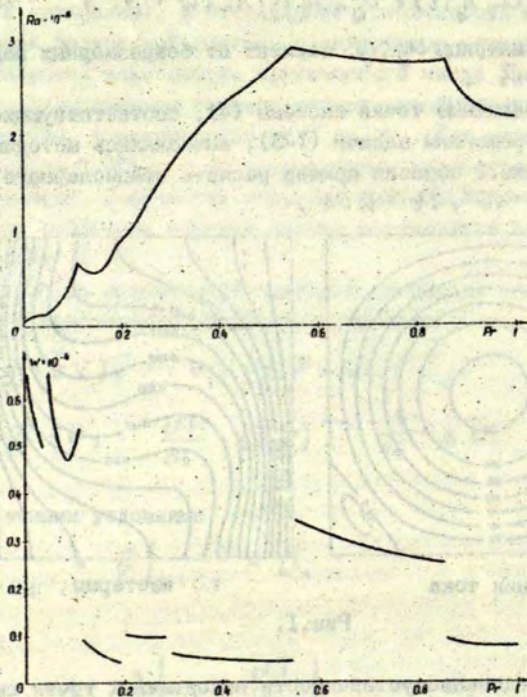


Рис.2.

Рэля от числа Прандтля (нейтральная кривая) для $Pr < 1$. Кривая состоит из нескольких частей, каждая из которых соответствует появлению неотрицательной вещественной части некоторого собственного значения. Соответствующие частоты колебаний течения в критической точке при тех же значениях Pr показаны на рис.2б. Скачки в частоте колебаний и вид нейтральной кривой позволяют предположить, что потеря устойчивости может быть вызвана различными механизмами. Природа этих механизмов пока неясна и нуждается в дополнительных исследованиях.

Для сравнения с результатами работ /2,3/ было вычислено критическое число Грасгофа при $Pr = 0,7$ для линейного распределения температуры на горизонтальных стенках полости. Рассчитанное значения критического числа Грасгофа равно $2,77 \cdot 10^6$. По результатам численного расчета в /3/ - $2,7 \cdot 10^6$, экспериментальные значения - $4 \cdot 10^6$ в /2/ и $3,2 \cdot 10^6$ в /3/. Все результаты хорошо согласуются между собой, что свидетельствует о наличии двумерного механизма неустойчивости в рассматриваемом случае.

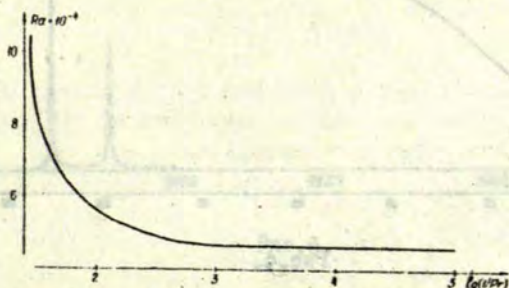


Рис.3.

Несколько большие по сравнению с расчетными значениями критического числа Грасгофа, получаемые в эксперименте, объясняются в /3/ зависимостью вязкости воздуха от температуры и недостаточно точным выполнением граничных условий. С другой стороны, численный расчет позволяет выявить колебания с очень малой амплитудой (в настоящей работе - даже с бесконечно малой), недоступные для экспериментальных измерений. Поэтому, рассчитанные критические значения параметра всегда должны быть меньше полученных в эксперименте.

На рис.3 изображен участок нейтральной кривой для малых чисел Прандтля $Pr \ll 1$. При $Pr \rightarrow 0$ число Рейля стремится к постоянной величине, примерно равной $4,6 \cdot 10^4$.

На рис. 4 и 5 показаны нейтральные кривые для $Pr > 1$.
 При $Pr \rightarrow \infty$ число Рэлея также стремится к постоянному
 значению, примерно равному $1,7 \cdot 10^7$.

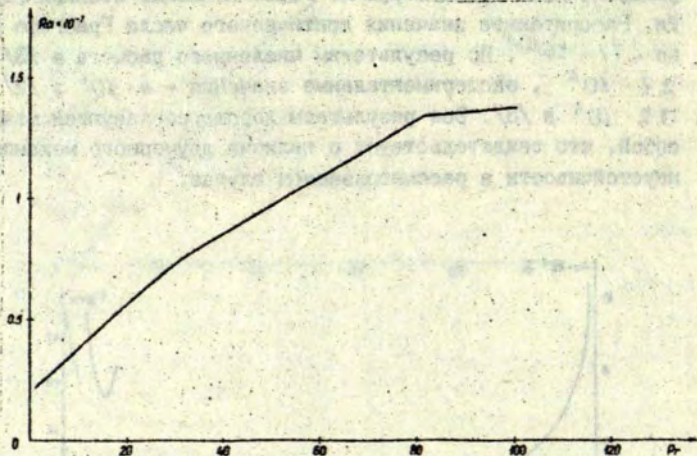


Рис. 4.

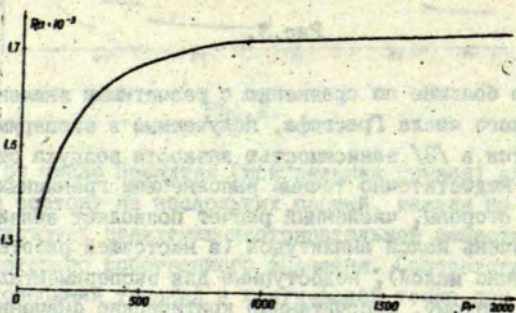


Рис. 5.

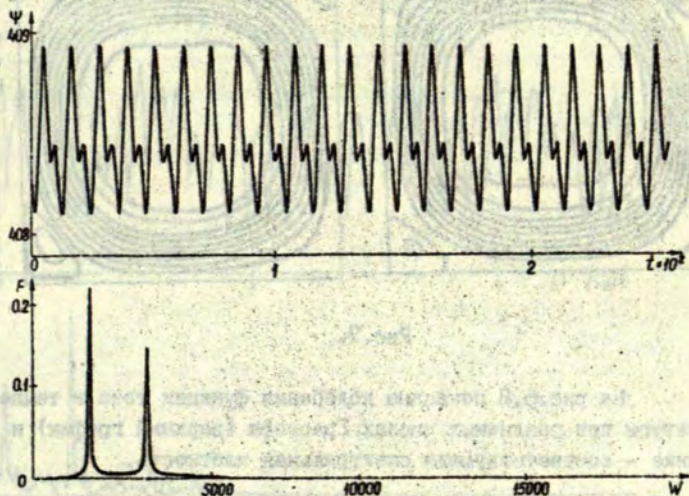


Рис. 6.

Расчет нестационарных течений требует высокой точности интегрирования по времени и занимает несколько часов на ЭВМ ЕС-1060. Более подробно изучались нестационарные течения для $R_t = 0,02$, значения, характерного для жидких металлов и полупроводников.

1. Вихрь Д., Дюва Д. Движение вращающегося нестационарного течения в цилиндрической геометрии // Ученые запiski Казанского университета. Сер. Физ.-математические науки. 1977. Т. 107. С. 93-98.
2. Вихрь Д., Дюва Д. Движение вращающегося нестационарного течения в цилиндрической геометрии // Ученые запiski Казанского университета. Сер. Физ.-математические науки. 1977. Т. 107. С. 93-98.

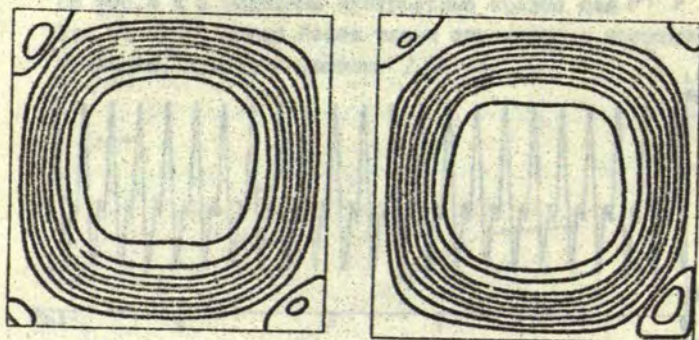


Рис.7.

На рис.6,8 показаны колебания функции тока и температуры при различных числах Грасгофа (верхний график) и ниже - соответствующая спектральная плотность.

$$F(\omega) = \left| \int_0^T f(t) e^{i\omega t} dt \right|, \quad (9)$$

где $f(\omega)$ - исследуемая функция.

На рис.6 показан двухчастотный режим при $Gr = 4 \cdot 10^6$. Вычисление спектральной плотности в различных точках области показали, что большая частота преобладает только вблизи центра полости, а основная часть течения колеблется с вдвое меньшей частотой (см. рис. 6). На рис.7 изображены линии тока этого режима в различные моменты времени. Стохастические колебания при $Gr = 10^7$ показаны на рис.8. Сравнение рисунков 6 и 7 показывает, что появление колебаний влечет за собой нарушение центральной симметрии стационарного течения. Из расчетов следует, что для чисел Прандтля, больших единицы, колебательная неустойчивость наступает без потери симметрии.

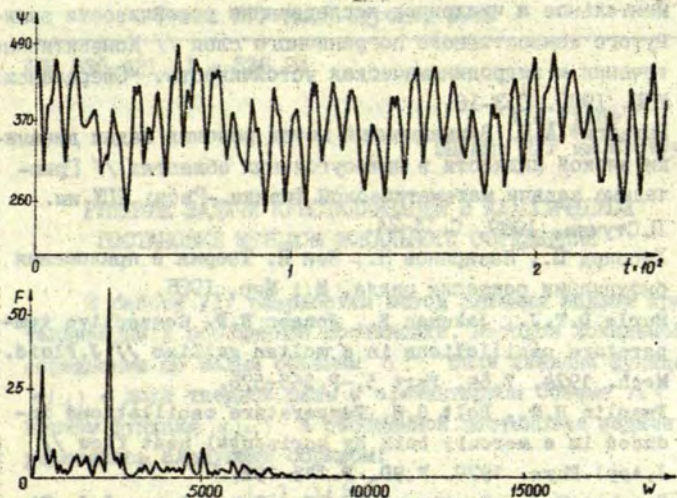


Рис.8.

Таким образом, метод Галеркина позволяет не только рассчитывать стационарные и нестационарные режимы тепловой конвекции, но и систематически исследовать устойчивость стационарных течений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Острач С. Влияние гидродинамики на рост кристаллов // Теоретические основы инженерных расчетов. 1983. Т.105. С.89-107
2. Бригс Д., Джонс Д. Двумерная периодическая естественная конвекция в замкнутой прямоугольной полости с отношением сторон, равным единице // Теплопередача. 1985. Т.107. № 1. С.93-98

3. Тарунин Е.Л., Шайдуров В.Г., Шарифулин А.Н. Экспериментальное и численное исследование устойчивости замкнутого конвективного пограничного слоя // Конвективные течения и гидродинамическая устойчивость. Свердловск: УНЦ, 1979. С.3-16.
4. Гельфгат А.Ю. Вариационный метод решения задач динамики вязкой жидкости в прямоугольных областях // Прикладные задачи математической физики.-Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1987, С.14-24.
5. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
6. Hurle D.T.J., Jakeman E., Jonson S.P. Convective temperature oscillations in a molten gallium // J.Fluid. Mech. -1974. V.64. Part 3.-P.565-576.
7. Pamplin B.R., Bolt G.H. Temperature oscillations induced in a mercury bath by horizontal heat flow // J.Appl.Phys. 1979. V.9D. P.145-152.
8. Crochet M.J., Geyling F.T., Van Schoffingen J.J. Finite element method for calculating the growth of semi-conductor crystals // Finite element methods in flow problems. Austin, 1984.-P.1-5.
9. Ozoe H., Mouri A., Ohmuro M., Churchill S.W., Lior H. Numerical calculation of laminar and turbulent natural convection in water in rectangular channels heated and cooled isothermally on the apposing vertical walls // Int.J.Heat Mass Transf. 1985. V.28. N°1. P.125-136.

М. Л. Гулбе
ВЦ при ЛГУ им. П. Стучки

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНОГО ОСРЕДНЕНИЯ

В работе /1/ разработан метод решения задачи кристаллизации в обобщенной постановке. Методом локального осреднения по малым объемам ΔV была введена функция $\eta(u)$ — доля твердой фазы в элементарном объеме ΔV , причем функция $\eta(u)$ в обобщенной постановке задачи определялась следующим образом:

$$\eta(u) = \begin{cases} 0, & u > 0 \\ 1, & u < 0 \end{cases} \quad (I)$$

В этом случае переохлаждение в жидкой зоне не допускается, что видно из определения функции $\eta(u)$. Однако, в классической постановке задачи, если допустить существование гладкого фронта кристаллизации (поверхности фазового перехода), переохлаждение в жидкой фазе возможно. Целью настоящей работы является построение численного метода решения задачи в классической постановке, допускающей переохлаждение и исследование устойчивости движения границы раздела фаз.

I. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о фазовом переходе в следующей постановке. Цилиндрический слятак движется со скоростью v_0 вдоль муфеля печи с температурой $T_0(x)$. Тогда уравнение, описывающее температурное поле $T(r, x, t)$ в жидкой

и твердой фазе в неподвижной системе координат записывается следующим образом:

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_i \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \alpha_0 (T - T_0) \cdot c_i \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \rho_i \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$$t > 0; \quad 0 \leq z \leq R; \quad 0 \leq z \leq l$$

$i=1$ относится к твердой фазе, $i=2$ - к жидкой фазе.
На границе фазового перехода $z = \varphi(z, t)$ выполняется условие Стефана:

$$\gamma \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\varphi(z,t)} - \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\varphi(z,t)}, \quad (3)$$

$$T = T_n.$$

На боковой поверхности слитка выполняется условие излучения по закону Стефана-Больцмана:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=R} = -\epsilon \sigma_0 (T^4 - T_0^4). \quad (4)$$

Кроме того выполняются условия:

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha_1 (T - T_1), \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = \alpha_2 (T - T_2), \quad (6)$$

$$T(z, z, 0) = T_H(z, z). \quad (7)$$

λ_1, λ_2 - коэффициенты теплопроводности жидкой и твердой фаз соответственно,

c_i - объемная теплоемкость,

ρ - плотность,

T_n - температура плавления,

γ - удельная скрытая теплота фазового перехода,

$T_0, i=0,1,2$ - температура окружающей среды,

T_H - начальная температура,

ϵ - степень черноты, σ_0 - постоянная Стефана-Больцмана.

Аналогично /I/ вводим осредненную функцию

$$T^{\sigma} = \frac{1}{\delta^2} \int_{x-\frac{1}{2}\delta}^{x+\frac{1}{2}\delta} \int_{z-\frac{1}{2}\delta}^{z+\frac{1}{2}\delta} T(s, \xi, t) ds d\xi \quad (8)$$

и получаем осредненное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial t} (\eta \lambda(\eta^{\sigma}) \frac{\partial T^{\sigma}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(\eta^{\sigma}) \frac{\partial T^{\sigma}}{\partial x}) - \rho_0 (T^{\sigma} - T_0) = \\ = c(\eta^{\sigma}) \left(\frac{\partial T^{\sigma}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial T^{\sigma}}{\partial x} \right) - \gamma^{\sigma} f(\eta^{\sigma}) \frac{\partial \eta^{\sigma}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Условия (4)-(7) остаются без изменений.

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda(\eta^{\sigma}) &= \lambda_1 \eta^{\sigma} + \lambda_2 (1 - \eta^{\sigma}), \\ c(\eta^{\sigma}) &= c_1 \eta^{\sigma} + c_2 (1 - \eta^{\sigma}), \\ \rho(\eta^{\sigma}) &= \rho_1 \eta^{\sigma} + \rho_2 (1 - \eta^{\sigma}). \end{aligned} \quad (10)$$

Средние значения коэффициентов теплопроводности, объемной теплоемкости и плотности.

Функция η^{σ} остается неопределенной. Ясно, что доля твердой фазы $\eta^{\sigma} = 1$ - в твердой фазе, $\eta^{\sigma} = 0$ - в жидкой фазе, однако в δ - окрестности границы раздела фаз она меняется от 0 до 1. Полагаем, что в этой окрестности η^{σ} меняется по закону

$$\frac{\partial \eta^{\sigma}}{\partial t} = \beta \Delta T^{\sigma}, \quad \Delta T^{\sigma} = T_n - T^{\sigma} \quad (11)$$

Вне δ - окрестности границы раздела фаз $\frac{\partial \eta^{\sigma}}{\partial t} = 0$.

Можно показать, что при $\delta \rightarrow 0$ решение осредненной задачи (9)-(11) стремится к решению задачи (2)-(7) в классической постановке.

2. Алгоритм численного решения

Для задачи (9), (II), (4)-(7) осуществляем конечно-разностную аппроксимацию. Для удобства выкладок мы в дальнейшем в (9) и (II) индекс \mathcal{F} опускаем. Вводим неравномерную сетку в пространстве

$$\omega_h = \{ (x_i, \tau_j) : 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M, x_{i+1} - x_i = h_i, \\ \tau_{j+1} - \tau_j = g_j, x_1 = x_N = 0, \tau_0 = 0, \tau_M = R \}$$

и дифференциальные уравнения (9), (II) заменяем разностными. В направлении t выбираем равномерный шаг τ ,

$t = t_0 + k\tau$. Тогда разностное уравнение записывается в виде

$$\frac{c_{ij}}{\lambda_{ij}} \cdot \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{h_i \cdot h_{i+1}} + \\ + \frac{u_{ij}^{k+1} - 2u_{ij}^{k+1} + u_{ij}^{k+2}}{g_j \cdot g_{j+1}} + \frac{1}{\tau_j} \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k-1}}{g_j + g_{j+1}} - \\ - \frac{c_{ij} \nu_0}{\lambda_{ij}} \cdot \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1}}{h_i + h_{i+1}} - \mathcal{L}_0 (u_{ij}^{k+1} - T_0) + \\ + \frac{\beta \rho_{ij}}{\lambda_{ij}} \beta \Delta u_{ij}^{k+1} \cdot \theta(\Delta u_{ij}^k) \cdot \theta(1 - \eta_{ij}^k) \cdot \theta_2(\eta_{i+1,j+1}^k - 1), \quad (I2)$$

$$c_{ij} = c_1 \eta_{ij}^k + c_2 (1 - \eta_{ij}^k),$$

$$\lambda_{ij} = \lambda_1 \eta_{ij}^k + \lambda_2 (1 - \eta_{ij}^k),$$

$$\rho_{ij} = \rho_1 \eta_{ij}^k + \rho_2 (1 - \eta_{ij}^k),$$

$$\frac{\eta_{ij}^{k+1} - \eta_{ij}^k}{\tau} = \beta \Delta u_{ij}^{k+1} \cdot \theta(\Delta u_{ij}^{k+1}) \cdot \theta(1 - \eta_{ij}^k) \cdot \theta_2(\eta_{i+1,j+1}^k - 1), \quad (I3)$$

где $\Delta u_{ij} = u_n - u_{ij}$.

$$\theta(s) = \begin{cases} 0, & s \leq 0 \\ 1, & s > 0. \end{cases} \quad \theta_2(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ 1, & s \geq 0. \end{cases} \quad (I4)$$

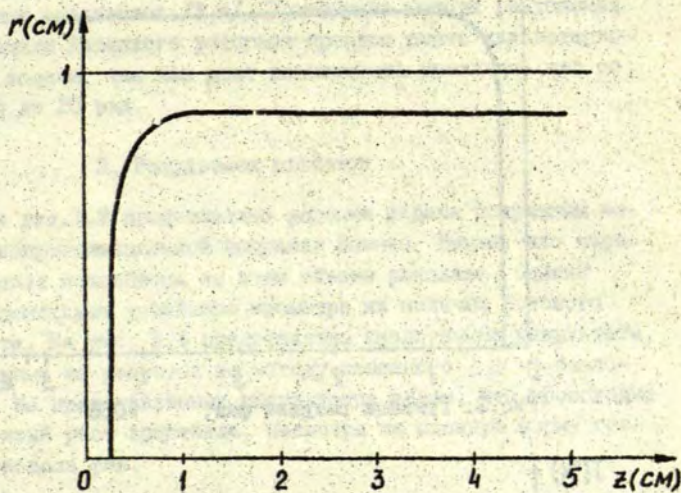


Рис.1. Граница раздела фаз, $\beta = 0.5$

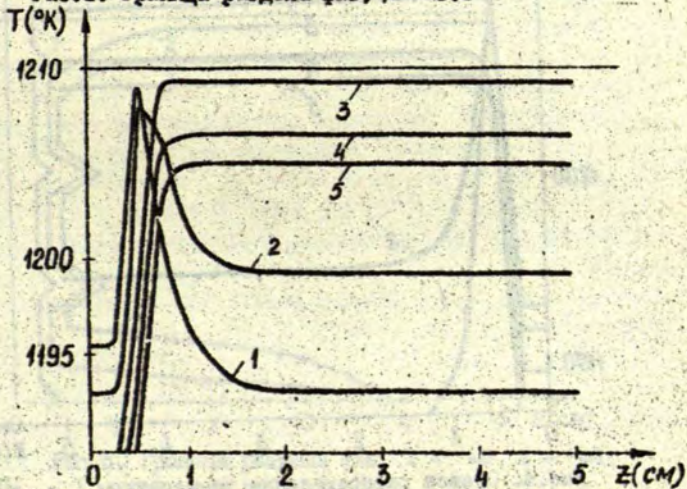


Рис.2. Осевое распределение температуры. 1 - $\gamma = 0.0$,
2 - $\gamma = 0.5$, 3 - $\gamma = 0.8$, 4 - $\gamma = 0.9$, 5 - $\gamma = 1$.

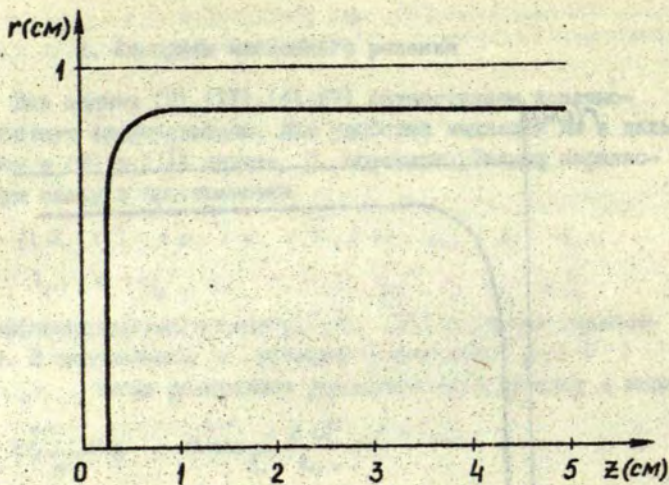


Рис.3. Граница раздела фаз, $\alpha=0.5$

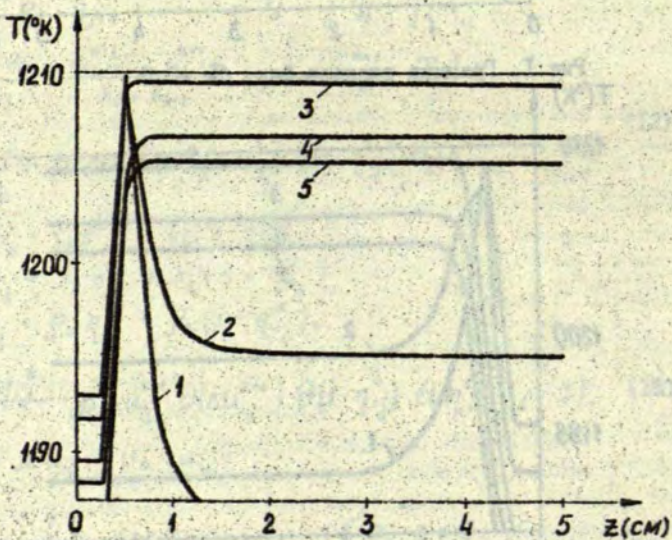


Рис.4. Осевое распределение температуры $\alpha=0.0$,
2 - $\alpha=0.5$, 3 - $\alpha=0.8$, 4 - $\alpha=0.9$, 5 - $\alpha=1$.

Для расчетов применялись итерационные методы. Использовались полувывный метод аппроксимационной поправки Яненко /2/ и эффективный метод неполного LU - разложения сопряженных градиентов /3,4/. Применение метода разложения по функциям Халецкого ускоряет процесс счета квазистационарной задачи, так как дает возможность увеличить шаг по времени до 20 раз.

3. Результаты расчетов

На рис. 1,2 представлено решение задачи полувывным методом аппроксимационной поправки Яненко. Видим, что переохлаждение появляется во всем объеме расплава, однако рост происходит устойчиво несмотря на наличие бокового дендрита. На рис. 3,4 представлены аналогичные результаты, полученные из расчетов по методу неполного LU -разложения. Из представленных результатов видим, что происходит устойчивый рост кристалла, несмотря на сложную форму границы раздела фаз.

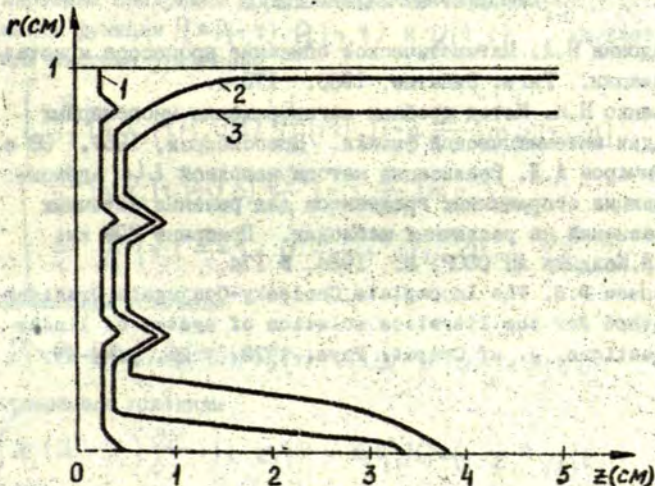


Рис.5. Граница раздела фаз. 1 - 0, 2 - -1, 3 - -1.2

Сравнивая рисунки 1,2 с рисунками 3,4 видим, что результаты, полученные двумя разными методами, качественно не отличаются, а количественное отличие не превышает 1%. На рис.5 представлены результаты расчетов, когда на границе раздела фаз в начальный момент заданы возмущения фронта кристаллизации. Как видим, и в этом случае происходит устойчивый рост кристалла, причем начальные возмущения сохраняют свою форму в процессе роста.

Задача численно решалась при следующих значениях физических констант:

объемная теплоемкость $c = c^0 \rho$, где c^0 - удельная теплоемкость,

$$\lambda_1 = 0,173 \text{ вт/(см град)}, \quad \lambda_2 = 0,412 \text{ вт/(см град)},$$

$$c_1^0 = c_2^0 = 0,34 \text{ вт с/(г град)}, \quad \rho_1 = \rho_2 = 5,6 \text{ г/см}^3,$$

$$T_n = 1210^\circ\text{К}, \quad \epsilon_1 = 0,6, \quad \epsilon_2 = 0,18, \quad v_0 = 0,02 \text{ см/с},$$

$$G_0 = 5,67 \cdot 10^{-12} \text{ вт/(см}^2 \text{ град)}, \quad l = 5 \text{ см}, \quad R = 1 \text{ см},$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_0 = 1, \quad T_0 = 1100^\circ\text{К}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинатне, 1980. 175 с.
2. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967. 88 с.
3. Гончаров А.Л. Реализация метода неполной LU-декомпозиции сопряженных градиентов для решения сеточных уравнений на различных шаблонах. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР. М. 1984. № 174.
4. Kershaw D.S. The Incomplete Cholesky-Conjugate Gradient Method for the Iterative solution of system of linear equations. J. of Comput. Phys. 1978. V.26. P.43-65.

УДК 532.546

С.О. Гусейн-заде, Г.М. Мусаев
 Ин-т кибернетики АН Азерб. ССР

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ
 ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

Настоящая работа, являющаяся продолжением исследований /1/, /2/, посвящена численному моделированию процессов вытеснения нефти горячей водой в рамках модели Рапопорта-Лиса.

1. Неизотермическая радиальная фильтрация двух несмешивающихся сжимаемых жидкостей в деформируемом горизонтальном пласте с учетом капиллярных эффектов может быть сформулирована следующим образом /1/: в области $G = \{(r, t) : r_0 < r < R, 0 < t < T\}$ найти функции $P_1 = P(r, t)$, $P_2 = P(r, t)$ и $U(r, t)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} [r X_1(r, P_1, U, S) \frac{\partial}{\partial r} (P_1, P_2)] = r \frac{\partial}{\partial t} [m \rho_1 (1-S)], \\ \frac{\partial}{\partial t} [r X_2(r, P_2, U, S) \frac{\partial P}{\partial r}] = r \frac{\partial}{\partial t} (m \rho_2 S), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda \frac{\partial U}{\partial r}) + V \frac{\partial U}{\partial r} + \alpha(U - \bar{U}) = c \frac{\partial U}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

начальным условиям

$$P(r, 0) = P^0(r), P_2(r, 0) = P_2^0(r), U(r, 0) = U^0(r), (r, 0) \in \bar{G}, \quad (2)$$

граничным условиям

$$\begin{cases} X_1(X_1 + X_2) \frac{\partial P}{\partial r} + (1 - X_1) P = X_2 q_1(t) + (1 - X_1) \psi_1(t) \\ \frac{\partial P_2}{\partial r} = 0, \frac{\partial U}{\partial r} = 0, r = r_0, 0 < t < T, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P_k}{\partial r} = 0, & U(r, t) = U^*(t), \\ \alpha_1 \mathcal{K}_1 \frac{\partial P}{\partial r} + (1 - \alpha_1) P = \alpha_2 q_2(t) - (1 - \alpha_2) \gamma_2(t), & r = R, 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\mathcal{K}_i = \kappa(r) \frac{P_i(P_i) f_i(s)}{M_i(P_i, U)}$, $\lambda = m[(1-\alpha) \lambda_1 + \alpha \lambda_2] + (1-m) \lambda_3$, $V = C_1 V_1 + C_2 V_2$,
 $P_1 = P_1(z)$, $C = m[(1-\alpha) c_1 \beta_1 + \alpha c_2 \beta_2] + (1-m) c_3 \beta_3$, $V_i = \mathcal{K}_i \frac{\partial P_i}{\partial r}$, $\gamma_i = \frac{Q_i(t)}{2\pi r H}$,
 $(i=1, 2)$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}$.

В (1)-(4) индекс 1 указывает на принадлежность несмачивающей фазе - нефти; индекс 2 - смачивающей фазе - воде; r - полярная координата; t - время; $\kappa(r)$ - абсолютная проницаемость пористой среды; m - пористость в долях единицы; U - температура; P_k - капиллярное давление; α - насыщенность вытесняющей фазы (воды); $Q_1(t)$ - массовый отбор; $Q_2(t)$ - массовый расход; H - мощность пласта; ρ_i , f_i , M_i , C_i , λ_i ($i=1, 2$) соответственно плотность, относительная фазовая проницаемость, динамическая вязкость, удельная теплоемкость и теплопроводность i -й фазы; индекс 3 относится к твердому скелету; \bar{U} - температура окружающей среды; \mathcal{L} - коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств среды.

Как было отмечено в /1/-/3/, значительные затруднения при численном решении задач двухфазной фильтрации с учетом капиллярных сил возникают из-за того, что нелинейные дифференциальные уравнения (1) описывают как конвективный, так и "диффузионный" процессы, происходящие в пласте.

В связи с этим в работах /1/, /4/ был предложен разностно-итерационный метод в подвижных сетках, который за счет использования консервативной разностной схемы на адаптирующейся подвижной сетке позволяет с высокой точностью учитывать одновременно оба процесса.

Следует отметить, что при моделировании процессов многофазной фильтрации возникает также необходимость в исследовании с определенной точностью некоторых других характеристик процессов (например, динамики различных изосат, изотерм и т.д.). Поэтому адаптирующаяся подвижная сетка должна учитывать и это обстоятельство. Сказанное с необходимостью при-

водит к разработке многокритериального способа построения подвижной сетки. Если структура решений задачи в априори неизвестна и определяется только в процессе счета, то такой способ построения подвижной адаптирующейся сетки является наиболее естественным.

Остановимся более подробно на многокритериальном способе построения узлов подвижной пространственной сетки.

Пусть на отрезке $[t_c, \mathcal{R}]$ построена неравномерная сетка узлов $\bar{\omega}_k$, учитывающая априорную информацию о свойствах искомых функций (например, наличие больших градиентов водонасыщенности и давления на концах области интегрирования) и содержащая M_k узлов $|\bar{\omega}|$. Введем неравномерную временную сетку узлов $\bar{\omega}_\tau$.

Пусть $\mathcal{A}_1(t), \dots, \mathcal{A}_p(t) (t \in \bar{\omega}_\tau)$ - критерии, определяющие узлы сетки $\tau_i^j (i = \bar{1}, \bar{p})$, вокруг которых необходимо произвести "измельчение" сетки, а $\bar{\sigma}_1(t), \bar{\sigma}_2(t), \dots, \bar{\sigma}_p(t) (\bar{\sigma}_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \bar{\sigma}_i(t) = 1, p \geq 1)$ - их весовые функции, причем для любого $i_0 (1 \leq i_0 \leq p)$ выполняется условие $[\bar{\sigma}_{i_0}(t)] \geq 1$, где $[\cdot]$ - целая часть, \mathcal{Z} - общее количество узлов, вводимых в $\bar{\omega}_k$. На каждом временном слое указанные критерии расположим последовательно по возрастанию значений их весовых функций. Будем полагать, что при любом $t \in \bar{\omega}_\tau$ количество критериев не больше p и в начальный момент времени $t = t_0$ заданы значения всех весовых функций, т.е. $\bar{\sigma}_1(t_0), \dots, \bar{\sigma}_p(t_0)$.

Критерии $\mathcal{A}_1(t), \dots, \mathcal{A}_p(t)$ и функции $\bar{\sigma}_1(t), \dots, \bar{\sigma}_p(t)$ могут задаваться исходя из априорной информации, результатов вычислительных экспериментов или же определяться непосредственно при проведении вычислений на ЭВМ.

Пусть при $t = t_j \in \bar{\omega}_\tau$ на неравномерной пространственной сетки $\bar{\omega}_{k,j}(t_j) = \{\tau_{i,j} : \tau_{i,j} = \tau_{i,j-1} + h_{i,j}, i = \bar{1}, \bar{M}-1, \tau_{0,j} = \tau_c, \tau_{M,j} = \mathcal{R}\}$, построенная на основе использования критериев $\mathcal{A}_1(t_j), \dots, \mathcal{A}_p(t_j) (1 \leq p \leq p)$, определены искомые сеточные функции. Для построения сетки на слое $t = t_{j+1}$ необходимо определить те критерии, которые должны быть учтены на новом слое, их веса, а также количество вводимых узловых точек по каждому из критериев. Допустим, что на новом слое должны быть использованы критерии $\mathcal{A}_1(t_{j+1}), \dots, \mathcal{A}_p(t_{j+1})$ и их веса $\bar{\sigma}_1(t_{j+1}), \dots, \bar{\sigma}_p(t_{j+1})$.

известны. Согласно этим критериям на сетке $\bar{w}_{h_i}(t_j)$ определяем точки $r_{1i}^*, r_{2i}^*, \dots, r_{\rho_i}^*$ и вводим, соответственно, слева и справа от точек $r_{i-1}^* (i = \overline{1, \rho_i})$ l_{2i-1} узловых точек с шагом h_{2i-1}^* и l_{2i} - с шагом h_{2i}^* . Очевидно, что $\sum_{i=1}^{\rho_i} (l_{2i-1} + l_{2i}) = \mathcal{L}$. Общее количество вводимых узлов \mathcal{L} можно представить в виде:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{\rho_i} [\mathcal{L} \cdot \sigma_i(t_{j+1})] + \mathcal{L}_1.$$

Если $\mathcal{L}_1 = 0$, то это означает, что в окрестности точки $r_{i-1}^* (i = \overline{1, \rho_i})$ строго по весу критерия $\mathcal{A}_i(t_{j+1})$ вводится $l_{2i-1} + l_{2i}$ узловых точек. В противном случае, дополнительно отводится по одной узловой точке первым \mathcal{L}_1 критериям ($\mathcal{L}_1 < \rho_i$).

Рассмотрим вариант, когда при переходе на новый слой уменьшается количество критериев. Пусть при $t = t_{j+1}$ отсутствуют критерии $\mathcal{A}_{\kappa_1}(t), \mathcal{A}_{\kappa_2}(t), \dots, \mathcal{A}_{\kappa_m}(t) (1 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_m \leq \rho_i)$ и, следовательно, необходимо перераспределить веса этих критериев так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\rho_i} \sigma_i(t_{j+1}) = 1.$$

Легко видеть, что последнее соотношение выполняется, если веса $\sigma_i(t_{j+1}) (i = \overline{1, \rho_i})$ определять по формуле

$$\sigma_i(t_{j+1}) = \begin{cases} \sigma_i \cdot [1 - \sum_{n=1}^m \sigma_{\kappa_n}(t_j)]^{-1}, & i = \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_m, \\ 0, & i = \kappa_0, \kappa_2, \dots, \kappa_m. \end{cases}$$

где σ_i равно $\sigma_i(t_j)$, если заранее неизвестны веса критериев на слое t_{j+1} , и равно заданному весу i -го критерия при $t = t_{j+1}$ в случае отсутствия одного или нескольких критериев $\mathcal{A}_{\kappa_n} (i = \overline{1, m})$, выявленных непосредственно в результате счета на слое t_j .

Пусть при переходе на новый слой за счет появления критериев $\mathcal{A}_{\kappa_1}(t), \mathcal{A}_{\kappa_2}(t), \dots, \mathcal{A}_{\kappa_n}(t) (\rho_i < \kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n \leq \rho)$ увеличилось их число. В этом случае веса действующих критериев можно определить по формуле:

$$\sigma_i(t_{j+1}) = \begin{cases} \sigma_i \cdot [1 + \sum_{m=1}^n \sigma_{\kappa_m}(t_j)]^{-1}, & i = \overline{1, \rho_i}, \\ \sigma_i(t_j) \cdot [1 + \sum_{m=1}^n \sigma_{\kappa_m}(t_j)]^{-1}, & i = \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n, \\ 0, & i > \rho_i \wedge i \neq \kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n. \end{cases}$$

Здесь $t_i (i > j)$ ближайший к t_j временной слой, при котором использовались все $p_0 + n$ критериев, а b_i - величина, которая принимает либо значение $b_i(t_j)$ (известны все критерии, но не заданы их веса; заданное число критериев на слое t_{j+1} меньше $p_0 + n$), либо $b_i(t_{j+1})$ (на новом слое заданы только первые p_0 критериев и их веса). После того, как известны критерии и их веса на сетке $\bar{\omega}_{h_j}(t_j)$ определяем узловые точки, вокруг которых необходимо осуществить "сгущение" сетки, и по изложенному выше алгоритму для каждого критерия находим число вводимых узловых точек.

Далее, поэтапно применяется алгоритм, приведенный в работе /4/. На первом этапе, используя неравномерную сетку $\bar{\omega}_h$, по алгоритму, изложенному в /4/, в окрестности точки τ_1^* введем $l_1 + l_2$ узловых точек (l_1 точек с шагом h_1^* слева и l_2 точек с шагом h_2^* справа). Затем, на базе полученной сетки $\bar{\omega}_h^1$ по тому же алгоритму в окрестности τ_2^* введем $l_3 + l_4$ узловых точек и тем самым получим сетку $\bar{\omega}_h^2$. Осуществляя аналогичную процедуру для других точек τ_i^* , в конечном итоге получим сетку $\bar{\omega}_{h_{j+1}}(t_{j+1})$. Тогда $\Omega_{h_{j+1}} = \bar{\omega}_{h_{j+1}} \times \bar{\omega}_t$ желаемая адаптирующаяся пространственно-временная сетка узлов.

Для численного решения задачи (I)-(4), существование и единственность которого предполагается, в области \bar{G}_T вводится пространственно-временная сетка $\bar{\Omega}_{h_j \tau}$, основанная на использовании критериев $A_1(t_{j+1}), A_2(t_{j+1}), A_3(t_{j+1}), A_4(t_{j+1})$. По критериям $A_1(t_{j+1}), A_2(t_{j+1})$ определяются узлы сетки $\bar{\Omega}_{h_j \tau}$, для которых, соответственно, выполняются условия:

$$\max_{0 \leq i \leq M-1} |h_{i+1}^{-1} (s_{i+1} - s_i)| - B_1 > 0, \quad \max_{0 \leq i \leq M-1} |h_{i+1}^{-1} (u_{i+1} - u_i)| - B_2 > 0,$$

где B_1, B_2 - заданные положительные константы.

Критерии $A_3(t_{j+1}), A_4(t_{j+1})$ характеризуют, соответственно, изосату S_4 и изотерму U_4 , положение которых необходимо определить с высокой точностью, то есть сгущение сетки производится в окрестности точек, определяемых по формулам:

$$\min_{0 \leq i \leq M} \{ \bar{\epsilon}_i : \bar{\epsilon}_i > 0 \} > 0, \quad \bar{\epsilon}_i = S_{i+1} - S_i, \quad \min_{0 \leq i \leq M} \{ \epsilon_i^* : \epsilon_i^* > 0 \} > 0, \quad \epsilon_i^* = U_{i+1} - U_i.$$

Вполне очевидно, что в зависимости от рассматриваемой задачи и временного слоя число критериев может изменяться.

Система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая процесс массопереноса в пористой среде, аппроксимируется на построенной сетке двухслойной неявной консервативной схемой, а нелинейное уравнение, описывающее теплоперенос, — монотонной разностной схемой /1/,/6/. Полученная система алгебраических уравнений решается методом последовательных прогонок с использованием итераций /1/.

2. Разработанный численный метод решения задач позволил перейти к следующему этапу вычислительного эксперимента — моделированию на ЭВМ процессов, связанных с разработкой и эксплуатацией месторождений посредством закачки воды. С помощью численного моделирования изучались следующие вопросы:

- оценка эффективности закачки горячей воды по сравнению с холодной при разработке нефтяных месторождений, содержащих средневязкие и высоковязкие нефти;
- влияние периодичности закачек горячей и холодной воды на нефтеотдачу пласта;
- изучение влияния начальной водонасыщенности на конечную нефтеотдачу при обработке пласта горячей водой;
- оценка влияния теплового воздействия на нефтеотдачу истощенного пласта.

При исследовании этих вопросов (теплообмен с окружающей средой не учитывается) были использованы данные, приведенные в /1/.

Следует отметить, что увеличение нефтеотдачи при использовании горячей воды наблюдается после определенного периода эксплуатации. Продолжительность этого периода, в основном, зависит от гидродинамических, теплофизических параметров пласта и жидкостей, а также от интенсивности и объема закачиваемого агента и может достигать нескольких лет. Поэтому для прогнозирования эффективности термовоздействий на основе численного моделирования целесообразно следить за количеством "вымываемой" горячей водой нефти. Исходя из этого, при анализе полученных результатов будем пользоваться

ся величинами

$$I_0 = \int_{r_c}^{a_0} r S_1(r, t) dr, \quad I_1 = \int_{a_0}^{a_1} r S_1(r, t) dr, \quad I_2 = \int_{0,9}^1 r S_1(r, t) dr, \quad \beta = 2\pi m h.$$

характеризующими это количество.

Для приводимых ниже результатов при $t = 0$ значения интегралов в размерном виде равны 51240 м^3 , 13620 м^3 и 15210 м^3 , соответственно.

I_0 . В таблице I приведены значения I_1 , I_2 и нефтеотдачи η в различные моменты времени при различных температурах закачиваемого агента, соответственно в микропористых ($\mu = 0,25$ Дарси) и макропористых коллекторах ($\mu = 3,02$ Дарси) со средне- и высоковязкими нефтями. Следует отметить, что в этих расчетах брались: $x_1 - x_2 = 0$, $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = 10 \text{ кг/с.м}^2$, $\varphi_2(t) = 100 \text{ кг/с.м}^2$, $U^*(t) = 40^\circ\text{C}$.

Из таблицы видно, что за три года закачки горячей воды ($U^*(t) = 100^\circ\text{C}$) в макропористый и микропористый пласты, содержащие средневязкую (высоковязкую) нефть, коэффициент нефтеотдачи по сравнению с закачкой холодной воды ($U^*(t) = 40^\circ\text{C}$) увеличивается на $5,31\%$ ($0,01\%$) и $0,02\%$ ($0,00\%$), соответственно. При этом в области $[0,9, 1]$ для макропористых коллекторов "вымывается" на 330 м^3 (660 м^3) нефтеносного объема больше, чем при закачке холодной воды, в то время как в микропористых коллекторах этот показатель равен 30 м^3 (30 м^3). Дальнейшее повышение температуры закачиваемого агента оказывает практическое влияние на нефтеотдачу только для пластов, содержащих высоковязкие нефти. Так, например, если в макропористый коллектор, содержащий высоковязкую нефть, закачивать воду с температурой 150°C , то значения величин I_1 и I_2 при $t = 3$ года (см. таблицу I) будут соответственно равны 6530 и 6100 м^3 , т.е. в области $0,8 \leq r \leq 1$ дополнительно "вымывается" 370 м^3 нефти.

Расчеты показали, что в приконтурных областях темп "вымывания" нефти по времени постепенно уменьшается (по мере увеличения температуры) и после некоторого момента времени практически прекращается.

2^0 . Отмеченное выше наталкивает на мысль, что обрабатывать пласт горячей водой длительное время нецелесообразно.

Таблица I.

K = 0,25 Д												
Средневязкая нефть						Высоковязкая нефть						
40°С			100°С			40°С			100°С			
† годы	$\eta, \%$	I_1	I_2	$\eta, \%$	I_1	I_2	$\eta, \%$	I_1	I_2	$\eta, \%$	I_1	I_2
I	5,74	12850	11700	5,74	12850	11700	1,58	13430	14210	1,58	13430	14210
2	11,34	10860	10190	11,35	10680	10160	3,09	13070	13560	3,09	13080	13540
3	16,92	9490	9270	16,94	9510	9200	4,60	12750	13020	4,60	12750	12990
K = 3,02 Д												
I	60,05	5490	5430	60,12	5490	5070	17,79	10210	10830	17,79	10220	10810
2	73,93	3830	3740	76,98	3280	3180	36,14	8600	9100	36,16	8610	8790
3	78,95	3230	3220	84,26	2630	2890	49,37	6870	7010	49,38	6650	6350

Поэтому для выяснения этого вопроса были проведены численные эксперименты. На рис. 1 показаны графики распределения температур, полученные при следующих вариантах: 1) пласт ($K = 3,02 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2$), содержащий средневязкую нефть, в течение 7 лет закачивается горячая вода ($U^*(t) = 100^\circ\text{C}$) с весовым расходом 100 тонн/сутки, 2) при тех условиях 4 года закачивается горячая вода, а 3 года - холодная ($U^*(t) = 40^\circ\text{C}$).

Как видно из рисунка при $t = 5$ лет и $t = 6$ лет температурные поля в обоих вариантах, за исключением приконтурных зон, мало отличаются друг от друга. Ввиду того, что при этом совпадают и значения нефтенасыщенностей на эксплуатационной скважине, то коэффициенты нефтеотдачи практически равны. На седьмой год при закачке горячей воды (первый вариант) $\eta = 80,07\%$, во втором варианте - $\eta = 79,90\%$, т.е. разница составляет всего $0,17\%$ (в случае изотермической фильтрации $\eta = 75,44\%$).

Аналогичная картина наблюдается и для высоковязких нефтей. Например, было установлено, что при закачке горячей воды с температурой 150°C в течение 18 лет (пласт с проницаемостью $0,25$ Дарси содержит высоковязкую нефть /7/) $I_1 = 3310 \text{ м}^3$. Если же после 14 лет закачивать не горячую, а холодную воду ($U^*(t) = 40^\circ\text{C}$), то в этом случае получим, что $I_1 = 3300 \text{ м}^3$. Таким образом, за четыре года "вымывается" всего 10 м^3 нефти.

3. Исследование связи между начальной водонасыщенностью пласта и эффективностью закачки горячей воды проводилось при изменении водонасыщенности породы от 15% до 35% . Результаты расчета представлены на рис. 2, где показано изменение по времени доли нефти, добываемой смеси (δ) при закачке холодной ($U^*(t) = 40^\circ\text{C}$) и горячей воды ($U^*(t) = 100^\circ\text{C}$) в пласты с различными начальными водонасыщенностями. Из приведенного рисунка видно, что эффект горячей воды начинает сказываться на величине только после определенного момента времени, который зависит от начальной водонасыщенности S_0 . Действительно, при $S_0 = 0,35$ влияние сказывается через $1,5$ года, а при $S_0 = 0,15$ - через $3,5$ года. Отметим, что при $S_0 = 0,15$ максимальная разница в значениях δ составляет $6,62\%$ ($t = 4$ года), а при $S_0 = 0,35$ - 5% (3 года).

В целом, можно сделать вывод, что при любой начальной водонасыщенности закачка в пласт горячей воды увеличивает по сравнению с холодной водой содержание нефти добываемой смеси.

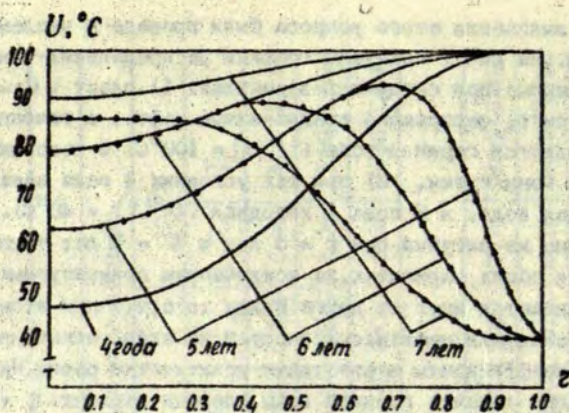


Рис.1. Распределение температуры вдоль пласта.
 — — закачка горячей воды, - - - закачка холодной воды.

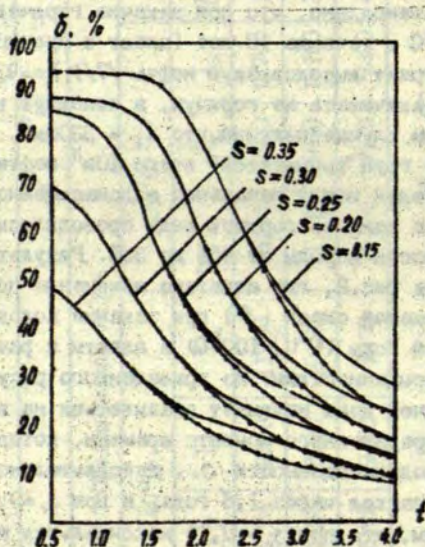


Рис.2. Изменение во времени доли нефти δ в добываемой смеси в зависимости от начальной водонасыщенности. Обозначения как на рис.1.

Таблица 2.

η	Состояние истощенного пласта		Состояние пласта после 4-х лет			
			Закачка холодной воды		Закачка горячей воды	
	p	s	p	s	p	s
0.001	0.8975	0.3732	0.9746	0.5581	0.9733	0.5502
0.10	0.9697	0.3753	0.9919	0.5587	0.9915	0.5506
0.15	0.9760	0.3777	0.9935	0.5595	0.9931	0.5510
0.20	0.9805	0.3812	0.9945	0.5606	0.9943	0.5517
0.25	0.9839	0.3854	0.9954	0.5620	0.9952	0.5525
0.30	0.9866	0.3902	0.9961	0.5638	0.9959	0.5535
0.35	0.9888	0.3956	0.9965	0.5660	0.9965	0.5547
0.40	0.9907	0.4023	0.9971	0.5685	0.9970	0.5563
0.45	0.9923	0.4101	0.9975	0.5714	0.9975	0.5582
0.50	0.9936	0.4172	0.9979	0.5747	0.9979	0.5609
0.55	0.9947	0.4242	0.9982	0.5785	0.9982	0.5648
0.60	0.9957	0.4314	0.9985	0.5827	0.9986	0.5706
0.65	0.9966	0.4389	0.9988	0.5874	0.9988	0.5787
0.70	0.9973	0.4467	0.9990	0.5927	0.9991	0.5887
0.75	0.9979	0.4570	0.9992	0.5986	0.9993	0.6006
0.80	0.9985	0.4691	0.9994	0.6056	0.9995	0.6150
0.85	0.9990	0.4816	0.9996	0.6138	0.9996	0.6295
0.90	0.9994	0.4948	0.9999	0.6231	0.9998	0.6433
0.95	0.9997	0.5125	0.9999	0.6339	0.9999	0.6563
1.00	1.0000	0.5335	1.0000	0.6464	1.0000	0.6685
I_0	34700		15290		15760	
I_1	8300		6180		5930	
I_2	8710		6540		6150	

Однако относительно высокая начальная водонасыщенность может предопределить экономическую неэффективность термовоздействия.

4⁰. Для изучения эффективности закачки горячей воды в истощенный пласт были рассмотрены случаи, когда в пласт закачивается холодная и горячая воды. Начальное распределение насыщенных и давлений истощенного пласта определялись следующим образом: из макропористого ($k = 3.02$ Дарси) нефтеносного пласта, содержащего высоковязкую нефть и связанную воду (15%), отбира-

лись жидкость в количестве $50 \text{ м}^3/\text{сутки}$ до установления насыщенности воды на стенке эксплуатационной скважины уровня 30%-го рубежа. Затем отбор жидкостей прекращался до тех пор, пока не установится стационарное распределение.

Результаты расчетов приведены в таблице 2. Как видно из этой таблицы, обработка пласта горячей водой и в этом случае приводит к более полному вытеснению. Если рассмотреть величину I_0 , то видим, что при изотермической фильтрации ее значение на 470 м^3 меньше, чем при неізотермической фильтрации. Это и характеризует полноту вытеснения, так как при обработке пласта горячей водой дополнительно "вымывает" нефть из области $0,8 \leq r \leq I$ накапливается в $r_0 \leq r < 0,8$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мусаев Г.М., Пирмамедов В.Г. Численное решение закачки неізотермической двухфазной фильтрации // Прикладные задачи математической физики. Рига: ДУ им. П.Стучки, 1983. С. 152-161.
2. Гусейнов С.И., Мусаев Г.М., Пирмамедов В.Г. Численное моделирование процесса неізотермической фильтрации и решение оптимальных задач. ИК АН Азерб. ССР, Баку, 1984. Рукопись деп. в ВИНТИ 17.00.1984 г. № 6273-84.
3. Коновалов А.Н. Задача фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1972. 128 с.
4. Пирмамедов В.Г. Об одном разностно-итерационном методе в подвижных сетках решения некоторых нелинейных задач теории фильтрации и теплопроводности. ИК АН Азерб. ССР, Баку, 1975. Рукопись деп. в ВИНТИ 11.07.1975 г. № 2027-75.
5. Мусаев Г.М. Численное исследование процесса нестационарной фильтрации газа в пористой среде при циклической работе газохранилищ. ИК АН Азерб. ССР, Баку, 1981. Рукопись деп. в ВИНТИ 10.07.1981 г. № 3448-81.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 653 с.
7. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975. 216 с.

Межвузовский сборник научных трудов
 ПРИЛОЖЕНИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
 Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1988.

УДК 519.6

А.А.Земитис
 ЛГУ им. П.Стучки

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ОДИН НЕКЛАССИЧЕСКОЮ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ

При математическом моделировании различных процессов в механике сплошной среды, нередко возникают ситуации, когда приходится решать задачи математической физики в областях со сложным строением. Иными словами, дифференциальные уравнения имеют скачкообразно меняющиеся коэффициенты. Опыт показывает, что встречаются задачи, когда к значительному упрощению и ускорению численного расчета приводят применение краевых условий типа сосредоточенной емкости /1/, /2/. В работе /3/ изучались существование и единственность решения одной такой задачи математической физики, содержащей старшие производные в краевых условиях. В настоящей работе проводится теоретическое исследование разностной задачи. Итак, пусть имеем задачу:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left(r \frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -f(r, x), \quad (r, x) \in \Omega_0, \quad (1)$$

$$\tilde{r}_1 \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{(\tilde{r}_1, x)} + E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(\tilde{r}_1, x)} = -\tilde{r}_1 \psi(x), \quad 0 < x < Z, \quad (2)$$

$$r \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(r, 0)} + \delta \frac{\partial}{\partial t} \left(r \frac{\partial U}{\partial t} \right) \Big|_{(r, 0)} = -\psi(r) r, \quad \tilde{r}_1 < r < R, \quad (3)$$

$$\delta \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{E}{\tilde{r}_1} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\beta}{\tilde{r}_1} (U - U_0) - A, \quad r = \tilde{r}_1, \quad x = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(r, Z)} = +\theta(r), \quad \tilde{r}_1 \leq r \leq R, \quad (5)$$

$$U \Big|_{(R, x)} = 0, \quad 0 \leq x \leq Z, \quad (6)$$

где $\Omega_0 = \{(r, z) | r < R, 0 < z < Z\}$, $f(r, z)$, $\psi(r)$, $\varphi(z)$ - достаточно гладкие функции, A - постоянная, ε , δ , β - положительные постоянные.

Построим разностную схему, аппроксимирующую дифференциальную задачу (I)-(6). В дальнейшем будем пользоваться обозначениями, принятыми в теории разностных схем [4], [5].

В области Ω_0 введем равномерную сетку $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{(x_{1,i}, x_{2,j}) | x_{1,i} = \bar{r}_i, i = 0, N_1, h_1 = R/N_1, x_{2,j} = jh_2, j = 0, N_2, h_2 = Z/N_2\}$. Через ω обозначим множество всех внутренних узлов сетки $\bar{\omega}$. $\omega_\alpha(x_\beta)$ - узлы сетки ω при фиксированном x_β . $\omega'_\alpha(x_\beta)$ - состоит из узлов $\omega_\alpha(x_\beta)$ и узловой точки с соответствующими координатами x_{α, N_α} , x_β . $\omega_\alpha(x_\beta)$ - множество узлов $\omega_\alpha(x_\beta)$ и узел с соответствующими координатами $x_{\alpha 0}$, x_β , где $\alpha = 1, 2$, $\beta = 3 - \alpha$.

Для функции из пространства H , состоящей из сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль при x_{1, N_1} , введем скалярные произведения:

$$(u, v)_{\omega'_\alpha(x_\beta)} = \sum_{\omega_\alpha(x_\beta)} uv h_\alpha,$$

$$(u, v)_{\bar{\omega}_\alpha(x_\beta)} = \sum_{\bar{\omega}_\alpha(x_\beta)} uv k_\alpha,$$

$$(u, v)_{\omega_\alpha(x_\beta)} = \sum_{\omega_\alpha(x_\beta)} uv k_\alpha,$$

где $k_\alpha = \frac{h_\alpha}{2}$, если узел, по которому суммируется, находится на границе $x_\alpha = x_{\alpha 0}$ или $x_\alpha = x_{\alpha, N_\alpha}$. После этого можно рассматривать и различные декартовы произведения одномерных сеток и ввести соответствующие скалярные произведения (мы здесь отметим лишь некоторые из возможных):

$$(u, v)_{\omega'_1 \times \bar{\omega}_2} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} u(x_{1,i}, x_{2,j}) v(x_{1,i}, x_{2,j}) h_1 k_2 =$$

$$= \sum_{\omega'_1 \times \bar{\omega}_2} uv h_1 k_2,$$

$$(u, v)_{\bar{\omega}_1 \times \omega'_2} = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} uv k_1 h_2.$$

Нам понадобятся и следующие скалярные произведения:

$$(u, v)_{\omega'_1, \omega'_2}^{\bar{1}} = \sum_{\omega'_1, \omega'_2} (x_1 - \frac{h_1}{2}) u v h_1 h_2,$$

$$(u, v)_{\bar{\omega}_1, \omega'_2}^{\bar{1}} = \sum_{\bar{\omega}_1, \omega'_2} \alpha_1 u v h_1 h_2.$$

Будем пользоваться также общепринятыми обозначениями разностных производных: $u_{\bar{x}_1}$ (u_{x_1}) - первая разностная производная в направлении x_1 назад (вперед), $u_{\bar{x}_1, \bar{x}_1}$ - разностная производная второго порядка в направлении x_1 .

Будем использовать различные нормы сеточных функций, которых мы обозначим:

$$\|Y\|_0^2 = (Y, Y)_{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2},$$

$$\|\nabla Y\|_0^2 = \|Y_{\bar{x}_1}\|_0^2 + \|Y_{\bar{x}_2}\|_0^2 + (Y_{\bar{x}_1}, Y_{\bar{x}_1})_{\omega'_1, \omega'_2} + (Y_{\bar{x}_2}, Y_{\bar{x}_2})_{\omega'_1, \omega'_2},$$

$$\|Y\|_1^2 = \|Y\|_0^2 + \|\nabla Y\|_0^2,$$

$$\|Y\|_{0, \bar{y}_1}^2 = (Y, Y)_{\bar{\omega}_1(x_{1,0})} + (Y, Y)_{\bar{\omega}_1(x_{1,0})},$$

$$\|Y\|_{0, \bar{y}_2}^2 = (Y, Y)_{\bar{\omega}_2(x_{2,0})},$$

$$\|\nabla Y\|_{0, \bar{y}_1}^2 = (Y_{\bar{x}_1}, Y_{\bar{x}_1})_{\omega'_1(x_{1,0})} + (Y_{\bar{x}_2}, Y_{\bar{x}_2})_{\omega'_1(x_{1,0})},$$

$$\|Y\|_{1, \bar{y}_1}^2 = \|Y\|_{0, \bar{y}_1}^2 + \|\nabla Y\|_{0, \bar{y}_1}^2.$$

Аналогично вводятся нормы с индексом $\bar{1}$ или $\bar{2}$ сверху, если используются скалярные произведения с индексом $\bar{1}$ или $\bar{2}$. Так, например,

$$\|Y_{\bar{x}_1}\|_0^{\bar{1}} = (Y_{\bar{x}_1}, Y_{\bar{x}_1})_{\omega'_1, \omega'_2}^{\bar{1}},$$

$$\|Y_{\bar{x}_2}\|_0^{\bar{1}} = (Y_{\bar{x}_2}, Y_{\bar{x}_2})_{\bar{\omega}_1, \omega'_2}^{\bar{1}}.$$

Для построения разностной схемы будем использовать метод аппроксимации интегрального тождества (/4). Обобщенное решение задачи (I)-(6) определяется из интегрального тождества:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_0} r \left(\frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) dx dt + E \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \Big|_{t=\bar{t}_1} dx \\ & + \delta \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} dx + \beta (U \sigma) \Big|_{(\bar{t}_1, 0)} = (\beta U_0 + A \bar{t}_1) \sigma \Big|_{(\bar{t}_1, 0)} + \\ & + \iint_{\Omega_0} \int_0^1 (r, x) \theta(z, z) z dz dx + \bar{t}_1 \int_0^1 \psi(x) \theta \Big|_{t=\bar{t}_1} dx + \int_0^1 \eta(x) \theta \Big|_{x=0} dx + \int_0^1 \theta(x) \theta \Big|_{x=\bar{t}_1} dx, \\ & \forall \theta \in \tilde{C}^2(\bar{\Omega}). \end{aligned} \quad (7)$$

Интегральное тождество (7) аппроксимируем сумматорным тождеством, которое получим, заменяя интегралы квадратурными формулами прямоугольников и трапеций.

В результате получим (вместо U теперь будем писать Y):

$$\begin{aligned} & (Y_{\bar{x}_1}, \vartheta_{\bar{x}_1})_{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2}^1 + (Y_{\bar{x}_2}, \vartheta_{\bar{x}_2})_{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2}^2 + E (Y_{x_1}, \vartheta_{x_1})_{\omega_1(x_{1,0})}^1 + \\ & + \delta (Y_{x_1}, \vartheta_{x_1})_{\omega_1(x_{1,0})}^1 + \beta Y(x_{1,0}, x_{2,0}) \theta(x_{1,0}, x_{2,0}) = (\beta U_0 + A \bar{t}_1) \theta(x_{1,0}, x_{2,0}) + \\ & + (f, \vartheta)_{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2}^1 + \bar{t}_1 (\psi, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{1,0})}^1 + (\eta, \vartheta)_{\omega_1(x_{1,0})}^1 + (\theta, \vartheta)_{\omega_1(x_{1,0}, x_2)}^1. \end{aligned} \quad (8)$$

Приближенным решением задачи (I)-(6) будем называть сеточную функцию Y , заданную на $\bar{\omega}$, которая при любой сеточной функции ϑ , определенной на $\bar{\omega}$ и обращающейся в нуль при $x_1 = x_{1,n}$, удовлетворяет интегральному тождеству (8). Явный вид сеточных уравнений, которым должна удовлетворять функция Y , получим, если выбирать сеточную функцию ϑ равной единице в каком либо одном узле сетки $\bar{\omega}$ и нулю в остальных узлах.

Легко проверить, что Y должна удовлетворять следующим разностным уравнениям:

$$\frac{1}{x_1} \left((x_1 - \frac{h_1}{2}) Y_{x_1} \right)_{x_2} + Y_{\bar{x}_2, x_1} = f, \quad i = 1, N_1 - 1, j = 1, N_2 - 1, \quad (9)$$

$$\frac{1}{x_1} \left(\delta + \frac{h_2}{2} \right) \left((x_1 - \frac{h_1}{2}) Y_{\bar{x}_1} \right)_{x_2} + Y_{x_1} = \psi + \frac{h_2}{2} f, \quad i = 1, N_1 - 1, j = 0. \quad (10)$$

$$\frac{1}{x_1} \frac{h_1}{2} ((x_1 - \frac{h_1}{2}) Y_{\bar{x}_1})_{x_1} - Y_{\bar{x}_2} = \theta - \frac{h_1}{2} f, \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, j = N_1, \quad (11)$$

$$(1 + \frac{h_1}{2x_1}) Y_{x_1} + (\frac{h_1}{2} + \frac{E}{x_1}) Y_{\bar{x}_1} = \psi - \frac{h_1}{2} f, \quad i = 0, j = \overline{1, N_1 - 1}, \quad (12)$$

$$\frac{h_2}{2} (1 + \frac{h_2}{2x_2}) Y_{x_2} - (\frac{h_2}{2} + \frac{E}{x_2}) Y_{\bar{x}_2} = -\frac{h_2}{2} \psi - \frac{h_2 h_2}{4} f - \frac{h_2}{2} \theta, \quad i = 0, j = \overline{1, N_2}, \quad (13)$$

$$(1 + \frac{h_2}{2x_2}) (\frac{h_2}{2} + \delta) Y_{x_2} + (\frac{h_2}{2} + \frac{E}{x_2}) Y_{\bar{x}_2} - \frac{h_2}{x_2} Y = -(\frac{h_2 h_2}{x_2} + \delta) f - \frac{h_2 h_2}{4} \psi - \frac{h_2}{2} \theta, \quad i = j = 0, \quad (14)$$

$$Y = 0, \quad i = N_1, \quad j = \overline{0, N_2}. \quad (15)$$

При условии, что решение U задачи (1)-(6) достаточно гладкое, разностные уравнения (9)-(15) аппроксимирует со вторым порядком дифференциальную задачу (1)-(6).

Оценим левую часть равенства (8) в случае, когда $Y = \theta$ - произвольная сеточная функция из H . Сначала отметим очевидное неравенство

$$\|\nabla \theta\|_0^2 \leq \frac{1}{x_1} \|\theta_{\bar{x}_1}\|_0^{2, \bar{x}_1} + \frac{1}{x_2} \|\theta_{\bar{x}_2}\|_0^{2, \bar{x}_2}. \quad (16)$$

Так как θ обращается в нуль, при $x_1 = x_{1, N_1}$, то справедлива оценка /4/:

$$\|\theta\|_0^2 \leq C_1 \|\nabla \theta\|_0^2, \quad \text{где} \quad C_1 = \frac{(R - \tau_1 + \tau)(R - \tau_1)^2 + \tau^2}{\tau},$$

или, учитывая (16), получим

$$\|\theta\|_0^2 \leq \frac{C_1}{x_1} \|\theta_{\bar{x}_1}\|_0^{2, \bar{x}_1} + \frac{C_1}{x_2} \|\theta_{\bar{x}_2}\|_0^{2, \bar{x}_2}.$$

Следовательно,

$$\|\theta\|_1^2 \leq \frac{1}{x_1} (1 + C_1) (\|\theta_{\bar{x}_1}\|_0^{2, \bar{x}_1} + \|\theta_{\bar{x}_2}\|_0^{2, \bar{x}_2}). \quad (17)$$

Оценим нормы разностных производных на части границы области $\|\nabla \theta\|_{0, \Gamma_1}^2$. Легко видеть, что

$$\|\nabla \theta\|_{0, \Gamma_1}^2 \leq \frac{1}{\min(\varepsilon, \varepsilon \tau_1)} (E(a_{\bar{x}_2}, a_{\bar{x}_1}) \omega_{\bar{x}_2}(x_{1, c}) + \delta(a_{\bar{x}_1}, a_{\bar{x}_2}) \omega_{\bar{x}_1}(x_{1, 0})). \quad (18)$$

Так как ψ обращается в нуль при $x_1 = x_{1,N_1}$, то можно оценить снизу разностные производные на границе через норму самой функции ψ :

$$\|\psi\|_{C, \bar{G}_1}^2 \leq \frac{(Z \cdot R \cdot \bar{\tau}_1)^2}{2} \|\psi\|_{C, \bar{G}_1}^2.$$

Учитывая (18), получим

$$\|\psi\|_{C, \bar{G}_1}^2 \leq \frac{(Z \cdot R \cdot \bar{\tau}_1)^2}{2 \min(E, \delta \bar{\tau}_1)} (E(\psi_{x_1}, \psi_{x_2}) \omega_{x_1}^2(x_{1,0}) + \delta(\psi_{x_1}, \psi_{x_2}) \omega_{x_1}^2(x_{1,0})). \quad (19)$$

Отсюда будем иметь

$$\|\psi\|_{C, \bar{G}_1}^2 \leq \frac{1}{\min(E, \delta \bar{\tau}_1)} \left(1 + \frac{(Z \cdot R \cdot \bar{\tau}_1)^2}{2}\right) (E(\psi_{x_1}, \psi_{x_2}) \omega_{x_1}^2(x_{1,0}) + \delta(\psi_{x_1}, \psi_{x_2}) \omega_{x_1}^2(x_{1,0})). \quad (20)$$

Обозначим

$$L = \max \left(\frac{1}{\bar{\tau}_1} \left(1 + \frac{(R \cdot \bar{\tau}_1 + Z)(R \cdot \bar{\tau}_1 + Z^*)}{Z}\right), \frac{1}{\min(E, \delta \bar{\tau}_1)} \left(1 + \frac{(Z \cdot R \cdot \bar{\tau}_1)^2}{2}\right) \right). \quad (21)$$

Тогда, складывая (17), (20), получим

$$\|\psi\|_{C, \bar{G}_1}^2 + \|\psi\|_{C, \bar{G}_2}^2 + L \beta \psi^2(x_{1,0}, x_{1,0}) \leq L (\beta \psi^2(x_{1,0}, x_{1,0}) + \|\psi\|_{C, \bar{G}_1}^2 + \|\psi\|_{C, \bar{G}_2}^2 + E(\psi_{x_1}, \psi_{x_2}) \omega_{x_1}^2(x_{1,0}) + \delta(\psi_{x_1}, \psi_{x_2}) \omega_{x_1}^2(x_{1,0})). \quad (22)$$

Так как неравенство (22) справедливо для любой сеточной функции ψ , обращаемой в нуль при $x_1 = x_{1,N_1}$, то следует справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. Решение задачи (9)-(15) существует и единственно при любых сеточных функциях f, φ, ψ, θ и постоянных \bar{U}, A .

Теперь оценим правую часть равенства (6) с целью получения априорной оценки решения задачи (9)-(15). Для этого нам понадобится норма

$$\|f\|_{L_1} = \sup_{\theta \neq 0} \frac{\int (f, \theta) \omega_{x_1} \cdot \bar{\tau}_1}{\|\theta\|_{L_1}}. \quad (23)$$

Используя это определение и пользуясь неравенством Коши

и ε -неравенством, будем иметь

$$(f, \vartheta)_{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2} \leq R(f, \vartheta)_{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2} \leq R(\varepsilon_1 \|\vartheta\|_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} \|f\|_1^2), \quad (24)$$

где $\varepsilon_1 > 0$.

Аналогично оценим остальные скалярные произведения в левой части (2):

$$|\tilde{\tau}_1(\psi, \vartheta)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})}| \leq R\left(\frac{(\psi, \varphi)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})}}{4\varepsilon} + \varepsilon(\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})}\right),$$

$$|(\varphi, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,0})}| \leq R(\varepsilon(\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,0})} + \frac{1}{4\varepsilon}(\varphi, \varphi)_{\bar{\omega}_1(x_{2,0})}),$$

$$|(\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,N_2})}| \leq R(\varepsilon(\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,N_2})} + \frac{1}{4\varepsilon}(\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,0})}), \quad (25)$$

где $\varepsilon > 0$.

В прямоугольной сеточной области можно оценить норму сечной функции на границе через норму самой функции и первых производных внутри области [4]:

$$(\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})} + (\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,0})} + (\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,N_2})} \leq \varepsilon_2 \|\nabla \vartheta\|_0^2 + M_2(\varepsilon_2) \|\vartheta\|_0^2, \quad (26)$$

$$\text{где } M_2(\varepsilon_2) = \frac{2(R - \tilde{\tau}_1 + Z)}{(R - \tilde{\tau}_1)Z} + \frac{8}{\varepsilon_2}.$$

Выберем ε_2^* таким, чтобы $\varepsilon_2^* = M_2(\varepsilon_2^*)$. Решив квадратное уравнение, получим, что

$$\varepsilon_2^* = \frac{R - \tilde{\tau}_1 + Z + \sqrt{(R - \tilde{\tau}_1 + Z)^2 + 8(R - \tilde{\tau}_1)^2 Z^2}}{(R - \tilde{\tau}_1)Z}.$$

Следовательно,

$$(\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})} + (\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,0})} + (\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,N_2})} \leq \varepsilon_2^* \|\vartheta\|_1^2.$$

Тогда из (25) следует

$$\begin{aligned} & |\tilde{\tau}_1(\psi, \vartheta)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})} + (\varphi, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,0})} + (\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,N_2})}| \leq \\ & \leq R\varepsilon \cdot \varepsilon_2^* \|\vartheta\|_1^2 + \frac{R}{4\varepsilon} ((\psi, \varphi)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})} + (\varphi, \varphi)_{\bar{\omega}_1(x_{2,0})} + (\vartheta, \vartheta)_{\bar{\omega}_1(x_{2,N_2})}). \end{aligned} \quad (27)$$

Наконец

$$|(\beta \bar{U}_0 + A \bar{z}_1) \theta(x_{1,0}, x_{2,0})| \leq \epsilon_3 \theta^2(x_{1,0}, x_{2,0}) + \frac{(\beta \bar{U}_0 + A \bar{z}_1)^4}{4 \epsilon_3} \quad (28)$$

Пусть Y - решение задачи (9)-(15), тогда Y удовлетворяет интегральное тождество (8) при любой сеточной функции ϑ , то есть, и при $\vartheta = Y$. При $\vartheta = Y$ неравенство (22) можно переписать:

$$\|Y\|_1^2 + \|Y\|_{1, \mathcal{I}_1}^2 + L \beta Y^2(x_{1,0}, x_{2,0}) \leq |L(\beta \bar{U}_0 + A \bar{z}_1) Y(x_{1,0}, x_{2,0}) + (f, Y)_{\bar{\omega}_1(x_{1,0})} + \bar{z}_1(\psi, Y)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})} + (\varphi, Y)_{\bar{\omega}_3(x_{2,0})} + (\theta, Y)_{\bar{\omega}_4(x_{2, N_2})}| \quad (29)$$

Для оценки правой части неравенства (29), будем использовать (24), (27), (28). Неравенство (29) тогда можно переписать

$$\|Y\|_1^2 + \|Y\|_{1, \mathcal{I}_1}^2 + L \beta Y^2(x_{1,0}, x_{2,0}) \leq L \epsilon_3 Y^2(x_{1,0}, x_{2,0}) + L \frac{(\beta \bar{U}_0 + A \bar{z}_1)^4}{4 \epsilon_3} + L R \epsilon_1 \|Y\|_1^2 + \frac{L R}{4 \epsilon_1} \|f\|_{-1}^2 + L R \epsilon_1^* \|Y\|_1^2 + \frac{L R}{4 \epsilon} ((\psi, \psi)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})} + (\varphi, \varphi)_{\bar{\omega}_3(x_{2,0})} + (\theta, \theta)_{\bar{\omega}_4(x_{2, N_2})}) \quad (30)$$

Остается выбрать конкретные значения параметров ϵ , ϵ_1 , ϵ_3 так, чтобы в результате получить оценку для решения Y .

Возьмем $\epsilon_3 = \beta$, $\epsilon_1 = \frac{1}{4LR}$, $\epsilon_1^* = \frac{1}{4\epsilon_1^2 LR}$, в результате получим

$$\|Y\|_1^2 + \|Y\|_{1, \mathcal{I}_1}^2 \leq \frac{L(\beta \bar{U}_0 + A \bar{z}_1)^4}{2\beta} + 2(LR)^2 \|f\|_{-1}^2 + 2\epsilon_1^* (LR)^2 ((\psi, \psi)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})} + (\varphi, \varphi)_{\bar{\omega}_3(x_{2,0})} + (\theta, \theta)_{\bar{\omega}_4(x_{2, N_2})}) \quad (31)$$

Итак, мы доказали лемму.

Л е м м а. Для решения разностной задачи (9)-(15) справедлива априорная оценка

$$\|Y\|_1^2 + \|Y\|_{1, \mathcal{I}_1}^2 \leq \frac{L(\beta \bar{U}_0 + A \bar{z}_1)^4}{2\beta} + 2(LR)^2 \|f\|_{-1}^2 + 2\epsilon_1^* (LR)^2 ((\psi, \psi)_{\bar{\omega}_2(x_{1,0})} + (\varphi, \varphi)_{\bar{\omega}_3(x_{2,0})} + (\theta, \theta)_{\bar{\omega}_4(x_{2, N_2})})$$

где $\epsilon_2 = \max \left(\frac{1}{\tilde{r}_1} \left(1 + \frac{(R - \tilde{r}_1 + Z)(R - \tilde{r}_1)^2 + Z^2}{Z} \right), \frac{1}{\min(\epsilon, \delta \tilde{r}_1)} \left(1 + \frac{(Z + R - \tilde{r}_1)^2}{2} \right) \right)$,

$$\epsilon_2^* = \frac{R - \tilde{r}_1 + Z + \sqrt{(R - \tilde{r}_1 + Z)^2 + 8(R - \tilde{r}_1)^2 Z^2}}{(R - \tilde{r}_1) Z}.$$

Теперь нужно отметить, что нас практически интересует случай задачи (I)-(6), когда $f(r, z) = 0$, $\psi(z) = \varphi(r) = \theta(r) = 0$. Справедлива теорема.

Т е о р е м а 2. Если решение задачи (I)-(6) достаточно гладкое, то решение Y задачи (9)-(15) при $f \equiv \varphi = \psi = \theta \equiv 0$, $A = 0$ сходится к U (в смысле нормы пространства H^1) внутри области, а также на части границы области, где граничные условия содержат старшие производные, со скоростью $O(|h|^2)$, где $|h| = \max(h_1, h_2)$. То есть

$$\|U - Y\|_{1, \Omega} + \|U - Y\|_{1, \gamma_1} \leq C|h|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость теоремы следует из того, что разностная схема аппроксимирует со вторым порядком дифференциальную задачу (I)-(6), если решение дифференциальной задачи достаточно гладкое. В таком случае $U - Y$ удовлетворяет уравнениям (I)-(6), где $\bar{U}_0 = 0$, а $f, \psi, \varphi, \theta, A$ - величины порядка $O(|h|^2)$. Из априорной оценки (3I) следует справедливость теоремы. Отметим, что аналогичные задачи рассмотрены в /6/, /7/, /8/, /9/.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Буйкис А.А., Земитис А.А., Шкиннис Ц.Н. Вычисление фильтрационного напора в придонной зоне и притока воды к щелям дрены // Водные ресурсы. 1986. № 6. С. 16-23.
2. Буйкис А.А., Шмите М.З. Разностные схемы для процессов переноса в многослойных пластах // Прикладные задачи математической физики / Отв. ред. Н.А.Авдонин. - Фига: ЛГУ им. П.Стучки, 1983. С. 53-66.

3. Земитис А.А. Об одной задаче содержащей старшие производные в краевых условиях // Прикладные задачи математической физики / Отв. ред. Н.А.Авдонин. Рига: ДГУ им. П.Стучки, 1967. С. 97-104.
4. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 352 с.
5. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями: Учеб. пособие для ун-тов. М.: Высш. шк., 1967. 296 с.
6. Агранович М.С., Билик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи математических наук. 1964. Т. 19. Вып. 3(117). С. 53-162.
7. Цейтлин Л.А. Об определении магнитных и электрических полей тонких слоев и оболочек // Журнал технической физики. 1957. Т. 28. Вып. 6. С. 1326-1329.
8. Буйкис А.А. Решение задач теплопереноса для слоистых сред при помощи интерполирующих в среднем сплайнов // Материалы международной школы семинара. Математические модели, аналитические и численные методы в теории переноса / Под рук. А.А.Самарского. Минск, 1966. Ч 2. С.141-147.
9. Буйкис А.А., Земитис А.А. Приближенное решение смешанной задачи для уравнения Лапласа в двухслойной среде // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦИТИМ СО АН СССР, 1985. Т. 16. № 4. С. 3-12.

УДК 518:517.949

В.Ф.Цемченко

Ин-т электросварки им.О.Е.
 Патона АН УССР,
 Л.И.Демченко, С.Н.Заболотный
 Киевский государственный
 университет

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ
 КОНВЕКТИВНОЙ ДИФфуЗИИ

1⁰. Постановка задачи. Решением задачи конвективной
 диффузии будем называть функцию $v(x) \in \dot{W}_2^1(0,1)$, удовлет-
 воряющую $\forall \eta(x) \in \dot{W}_2^1(0,1)$ интегральному соотношению

$$(kv' - v\eta)'_0 + (q, v\eta)_0 + (f, \eta)_0 = 0, \quad (I)$$

где $(\cdot, \cdot)_0$ - скалярное произведение в $L_2(0,1)$. Входящие
 в (I) производные понимаются в смысле С.Л.Соболева. Относи-
 тельно $k(x), q(x), v(x), f(x)$ предполагается следующее

$$k(x), q(x), v(x) \in L_\infty(0,1), f(x) \in L_2(0,1), \quad (2)$$

$$0 < c_1 \leq k(x) \leq c_2, |v(x)| < c_3, 0 \leq q(x) \leq c_4.$$

Выполним в (I) замену $P(x) = \xi(x) \cdot u(x)$, где

$$\xi(x) = \exp\left(-\int_0^x v(z) dz\right), \quad \sigma(x) = k^{-1}(x).$$

Имеем

$$A[P, \eta] = \ell(\eta), \quad P(x) \in \dot{W}_2^1(0,1), \quad (3)$$

где $A(P, \eta) = (kP', \eta)'_0 + (\tilde{q}, P\eta)_0$ - билинейная форма,
 $\ell(\eta) = -(f, \eta)_0$ - линейная форма, $\tilde{k}(x) = k(x)\xi^{-1}(x), \tilde{q}(x) = q(x)\xi^{-1}(x)$.
 Из неравенств

$$A[P, P] = (k, (P')^2)_0 \geq c_1 e^{-\frac{c_3}{c_1}} \|P'\|_0^2 \geq M_1 \|P\|_1^2,$$

$$A[\rho, \eta] \leq e^{C_2 h_1} (C_2 \|\rho\|_0 \|\eta\|_0 + C_4 \|\rho\|_1 \|\eta\|_1) \leq M_2 \|\rho\|_1 \|\eta\|_1,$$

где $\|\cdot\|_0$ - норма в $W_2(0,1)$, $\|\cdot\|_1$ - норма в $W_2^1(0,1)$, M_1, M_2 - некоторые постоянные, следует коэрцитивность и непрерывность билинейной формы. Непрерывность функционала $\ell(\eta)$ очевидна. Таким образом, выполнены все условия теоремы Лакса-Мильграма и существует единственная функция $P(x) \in W_2^1(0,1)$, удовлетворяющая (3). Отсюда следует однозначная разрешимость в $W_2^1(0,1)$ задачи (I) при входных данных из класса (2).

2°. Разностные схемы. Введем сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i, i = \overline{0, N}, h = N^{-1}\}$, через $\langle g \rangle_x$ будем обозначать осреднение по Стеклову функции $g(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Для построения разностной схемы рассмотрим систему функций $q_i(x) \in W_2^1(0,1)$:

$$q_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a}{h} \int_x^{x_i} \sigma(s) \tau(s) ds, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 1 - \frac{a_{i+1}}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma(s) \tau(s) ds, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}]. \end{cases}$$

где $a_i = \langle \sigma \tau \rangle_{x_i}^{-1}$, $\tau_i(x) = \exp(-\int_{x_i}^x \sigma(s) ds)$, $x(2) = \sigma$.

Обозначим $u_i = u(x_i)$, $\beta_i = q_i(x_i)$. Из равенства

$$h \langle (u' - \sigma u) \tau \rangle_{x_i} = \beta_i u_i - u_{i+1}$$

следует $h^{-1} \langle (u' - \sigma u) \tau \rangle_{x_i} = (a u_i)_{x_i} - (b u)_{x_i}$, $i = \overline{1, N-1}$.

где $b_i = h^{-1} (1 - \beta_i) u_i$.

С учетом этого из (3) получаем следующую систему

$$(a u_{\bar{x}} - b u)_{x_i} - h^{-1} \langle q u \rangle_{x_i} = h^{-1} \langle f \rangle_{x_i}, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (4)$$

Представим

$$h^{-1} \langle f \rangle_{x_i} = \varphi_i + (a f)_{x_i}$$

$$\Psi_k = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx, \quad M_k = \left\langle \sigma_k \cdot \int_{x_{i-0.5}}^x f(s) ds \right\rangle$$

и приближенно положим $h^{-1} \langle \psi_i, \eta_i \rangle = \psi_i d_i u_i$, где $d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} g(x) dx$.

Тогда из (4) получаем разностную схему

$$(a y_{\bar{x}} - b y)_{\bar{x}} - d y_{\bar{x}} = \psi, \quad y_0 = y_N = 0 \quad (5)$$

Можно указать эквивалентные формы записи разностной схемы (5)

$$(\bar{a} y_{\bar{x}})_{\bar{x}} - (\bar{b} y)_{\bar{x}} - d y = \psi, \quad y_0 = y_N = 0. \quad (6)$$

$$(\bar{a} y_{\bar{x}})_{\bar{x}} - 0.5((\bar{b} y)_{\bar{x}} + (\bar{b} y)_{\bar{x}}) - d y = \psi, \quad y_0 = y_N = 0. \quad (7)$$

где $\bar{a}_i = \beta_i a_i$, $\bar{b}_i = h^{-1}(\beta_{i+1} - 1) \bar{a}_{i+1}$, $\bar{a}_i = 0.5(a_i + \bar{a}_i)$

Заметим, что соотношения (4) при $g(x) \equiv 0$ совместно с граничными условиями $u_0 = u_N = 0$ определяют точную разностную схему.

3°. Априорная оценка. Погрешность численного решения

$\bar{x} = y - u$ схемы (5) является решением задачи

$$(a \bar{x}_{\bar{x}} - b \bar{x})_{\bar{x}} - d \bar{x} = -\psi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad \bar{x}_0 = \bar{x}_N = 0, \quad (8)$$

где $\psi = (a(\mu + \nu))x + \psi^i$ - погрешность аппроксимации,

$$\bar{x} = \left\langle \sigma_k \int_{x_{i-0.5}}^x f(s) u(s) ds \right\rangle, \quad \psi^i = d_i u_i, \quad \bar{x} = \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} g(x) dx.$$

Следуя методике /I/, представим \bar{x} в виде: $\bar{x} = \omega + \varepsilon$, где сеточные функции ω , ε являются решениями задач

$$(a \omega_{\bar{x}} - b \omega)_{\bar{x}} = \psi, \quad \omega_0 = \omega_N = 0, \quad (9)$$

$$(a \varepsilon_{\bar{x}} - b \varepsilon)_{\bar{x}} - d \varepsilon = d \omega, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_N = 0. \quad (10)$$

Преобразуем задачу (10) к виду

$$(\bar{a} \bar{\varepsilon}_{\bar{x}})_{\bar{x}} - \bar{a} \bar{\varepsilon} - \bar{d} \bar{\omega}, \quad 0 < x = ih < 1, \quad \bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_N = 0. \quad (11)$$

где $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i \bar{a}_i$, $\bar{a}_i = a_i \bar{a}_{i+1}^{-1}$, $\bar{d}_i = d_i \bar{a}_i^{-1}$, $\bar{\omega}_i = \omega_i \bar{a}_i$; $\bar{a}_i = \bar{a}_i(x_i)$

Нетрудно проверить, что в задаче (11) выполняются все условия леммы из /I/ (стр. 48), следовательно, имеет место оценка $\|\bar{\varepsilon}\|_c \leq \|\bar{\omega}\|_c$, из которой получается неравенство $\|\varepsilon\|_c \leq \|\omega\|_c$

и, далее, $\|z\|_C = \|u\|_C + \|v\|_C = 2M\|u\|_C$.

Задача (9) относительно функции \tilde{w} записывается в виде

$$(\tilde{w}\tilde{w}_x)_x = S_x, \quad 0 < x < 1, \quad \tilde{w}_0 = \tilde{w}_1 = 0, \quad (12)$$

где $S_x = \sigma(x)(\mu + v)_x + \sum_{m=1}^N k_m \psi_{0,m}$.

Для оценки решения задачи (12) воспользуемся неравенством из [1] (стр. 169)

$$\|\tilde{w}\|_1 \leq \sum_{k=1}^N \frac{1 + S_k}{c_k},$$

из которого следует априорная оценка решения задачи (6)

$$\|z\|_C \leq 2M \left\{ \sum_{k=1}^N k_m \|\mu + v\|_C + \frac{M}{c_1} \left| \sum_{m=1}^N k_m \psi_{0,m} \right| \right\}, \quad M = c \frac{c_1}{c_2}. \quad (13)$$

4°. Сходимость разностной схемы. Оценим порядок малости по h величин f_k , v_k и $\psi_{0,k}$. Так как функция $F(x) = \int_0^x g(s) ds$ при $g(x) \in C_2(0,1)$ является абсолютно непрерывной, то для нее справедливо условие Липшица:

$$|F(x) - F(x_{k-0.5})| \leq M_g |x - x_{k-0.5}|.$$

Тогда

$$|f_k| \leq \frac{M_f}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sigma(x) |x - x_{k-0.5}| dx \leq \frac{M_f}{c_1} h |v_k| \leq \frac{M_f}{c_2} h. \quad (14)$$

Учитывая, что $u(x) \in W_2^1(0,1)$ для ψ_0 имеем оценку

$$|\psi_{0,k}| \leq \frac{1}{h} \int_{x_{k-0.5}}^{x_{k+0.5}} \psi_0(x) |u(x) - u_k| dx \leq C M_u h. \quad (15)$$

Таким образом, из (13)–(15) следует

Т е о р е м а. При выполнении условий (2) разностная схема (5) равномерно сходится на обобщенном решении из $W_2^1(0,1)$ уравнения конвективной диффузии (1) имеет первый порядок точности.

З а м е ч а н и е 1. Вычисление коэффициентов разностной схемы (5) может оказаться обременительным, в связи с чем возникает проблема аппроксимации выражений для коэффици-

ентов α , d , φ более простыми, не требующими громоздких вычислений. Как известно /1/, в теоретическом плане эта проблема тесно связана с решением вопроса об ϵ -устойчивости разностной схемы.

Рассмотрим задачу с возмущенными коэффициентами

$$(\bar{a}y_x)_x - (\bar{b}y)_x - \bar{d}y = \varphi, \quad y_0 = y_N = 0.$$

Относительно коэффициентов \bar{a} , \bar{b} , \bar{d} будем предполагать следующее

$$\bar{a}_i^{-1} \leq \frac{M}{c_1}, \quad \bar{d}_i > 0, \quad \bar{b}_i = \frac{\bar{a}_i}{h} (1 - \beta).$$

Тогда для погрешности $x = y - \bar{y}$ справедлива оценка

$$\|x\|_{\infty} \leq \frac{\lambda M}{c_1} \left\{ (1 + |\varphi - \bar{\varphi}|) + \frac{\beta M}{c_1} \left(1 + \frac{c_2}{c_1} M \right) (1 + \varphi) \left[(1 + \bar{b} - \bar{a}) + (1 + \bar{a} - \bar{d}) \right] \right\}.$$

означающая ϵ -устойчивость схемы (5).

З а м е ч а н и е 2. Класс функций $f(x)$ и $q(x)$ можно расширить, приняв $f(x) \in W_2^1(0,1)$, $q(x) \in W_2^1(0,1)$, $q(x) \geq 0$. В этом случае сеточные функции φ , d в разностной схеме (5) будем вычислять следующим образом

$$\varphi_i = \langle\langle f, \eta_i \rangle\rangle h^{-1}, \quad d_i = \langle\langle q, \eta_i \rangle\rangle h^{-1},$$

где $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ имеет смысл билинейной формы, определенной /2/ над элементами пространств $W_2^1(0,1)$, $W_2^1(0,1)$. Получающаяся разностная схема имеет первый порядок точности на обобщенном решении из $W_2^1(0,1)$, которое при $\kappa(x) \in L_\infty(0,1)$, $0 < c_1 < \kappa(x) < c_2$ существует и единственно.

5°. Разностные схемы в классе постоянных коэффициентов.

Положим $\kappa(x)$, $f(x)$, $q(x)$, $v(x) = \text{const}$, $x \in (0,1)$, $R = 0.5h^{-1}v$. В этом случае схема (5) записывается в виде

$$\kappa R(1 + c_1 h R) y_{ix} - v y_x - d y = f, \quad y_0 = y_N = 0. \quad (16)$$

Эквивалентные формы записи этой схемы непосредственно получаются из (6), (7)

$$\kappa R(c_1 h R - 1) y_{ix} - v y_x = d y = f, \quad y_0 = y_N = 0. \quad (17)$$

$$\kappa R c_1 h R y_{ix} - v y_x = d y = f, \quad y_0 = y_N = 0. \quad (18)$$

последняя из них при $\lambda = 0$ совпадает со схемой А.М.Ильина /3/. При этом же условии схема (16) (соответственно - (17), (18)) является точной: $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$.

Используя разложение $R(\alpha h R)$ в ряд $(|R| < 1)$,

$$R(\alpha h R) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{R^{2k} B_k R^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{R^2}{3} - \frac{R^4}{48} + \frac{R^6}{345} + \dots \quad (19)$$

можно при $\lambda = 0$ построить семейство разностных схем с любым, наперед заданным порядком аппроксимации. В частности, полагая $R(\alpha h R) = 1$, получим схему центральной разности, монотонную, как известно /1/, при $|R| < 1$.

Пусть $A(R) = R(\alpha h R)$, $A_n(R) = 1 + P_n(R)$ - приближение соответствующее сумме n членов ряда (19). Тогда разностная схема

$$R(\alpha h R) y_{i+1} - \alpha y_i + f_i, \quad y_0 = y_n = 0 \quad (20)$$

имеет $2n$ -ый порядок аппроксимации. Условие монотонности схемы (20) можно записать в виде $1 + P_n(R) > |R|$. Учитывая, что $A(R) > |R|$ и $A_n(R) > A(R)$ при $n = 2m+1, m = 1, 2, \dots$, убеждаемся в безусловной монотонности схемы (20) для нечетных n . При $n = 2m$ условие монотонности имеет вид:

$|R| < R_n^*$, где R_n^* - монотонно возрастающая последовательность чисел $R_2^* = 1, R_4^* = 1,94, R_6^* = 2,26, \dots$.

В области $|R| > R_n^*$ с достаточной точностью можно положить $A(R) \approx R \operatorname{sign} R = |R|$. В этом случае получаем разностное уравнение первого порядка

$$-0,5\alpha [(1 - \operatorname{sign} R) y_{i+1} + (1 + \operatorname{sign} R) y_i] = f_i.$$

Другой подход к построению разностных схем на основе (16)-(18) базируется на представлениях

$$R(\alpha h R + 1) = Pe(1 - e^{-\alpha h R})^{-1}, \quad R(\alpha h R - 1) = R(e^{\alpha h R} - 1)^{-1},$$

где $Pe = 2R$ - разностное число Пекле (Рейнольдса). Раскладывая экспоненты в степенной ряд и ограничиваясь суммой членов, из (16), (17) получим

$$K C_m^+ y_{i+1} - \alpha y_i - \alpha y = f_i, \quad y_0 = y_n = 0. \quad (21)$$

$$K \bar{C}_m^- y_{i+1} - \alpha y_i - \alpha y = f_i, \quad y_0 = y_n = 0. \quad (22)$$

где

$$C_m = \sum_{k=1}^m (-1)^k g_k, \quad \bar{C}_m = \sum_{k=1}^m g_k, \quad g_k = \frac{P_k^m}{(k+1)!}.$$

Условия монотонности схем (21), (22) при $P_c < 0$ находятся из решения неравенств

$$\begin{cases} C_m P_c < 1 \\ C_m > 0 \end{cases} \quad \text{для схемы (21)}$$

$$\begin{cases} P_c \bar{C}_m > -1 \\ \bar{C}_m > 0 \end{cases} \quad \text{для схемы (22)}$$

Решение этих неравенств может быть записано в виде: $P_c < B_m$ (для схемы (21)) и $P_c > -B_m$ (для схемы (22)), где B_m — некоторые положительные числа: $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 \approx 1,596, \dots$. Комбинируя схемы (21), (22) так, чтобы области их монотонности соответственно составляли $P_c < 0$ и $P_c \geq 0$, можно выписать абсолютно монотонную схему $(n+1)$ -го порядка аппроксимации

$$k \bar{C}_m^{-1} (P_c) y_{i+1} = 0,5^m [(1 - \text{sign}(P_c)) y_i^+ + (1 + \text{sign}(P_c)) y_i^-] - \Delta y \cdot f.$$

Эта схема построена по образцу монотонной схемы А.А. Самарского /2/ и совпадает с ней при $m = 1$. Случай $m = 0$ соответствует аппроксимации конвективного члена односторонними разностями против потока.

Библиографический список

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
2. Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е. Фильтрация шумов. Киев: Наукова думка, 1979. 232 с.
3. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. Математич. заметки. 1969. Т.6. Вып.2. С.234-248.

УДК 517.958:537.84

Х.Э.Калис
ЛГУ им. П. Стучки,

А.Д.Османис
Ан ЛатССР

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПСТОКОВ СВИНЕЦСОДЕРЖАЩЕЙ СТЕКЛОМАССЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Многие вещества, в том числе жидкая свинецсодержащая стекломасса, в определенных условиях текут, проявляя свойства нелинейно-вязкой неньютоновской несжимаемой жидкости, когда тензор вязких напряжений τ нелинейно зависит от тензора скорости деформации $\dot{\epsilon}$ /1/, т.е.

$$\tau = \mu(\dot{\epsilon}) \dot{\epsilon}, \quad (1)$$

где $\xi = \text{tr} \dot{\epsilon}^2$ - след тензора $\dot{\epsilon}^2$ или второй инвариант тензора скорости деформации,

μ - функция динамической вязкости жидкости (для ньютоновской жидкости $\mu = \text{const}$).

Для решения конкретных задач экспериментальная зависимость $\mu = \mu(\xi)$ аппроксимируется гладкой кривой. При определенных условиях на функцию μ в работе /1/ доказано существование и единственность обобщенного решения соответствующих краевых задач для движения нелинейно вязкой жидкости.

В устройстве для варки свинецсодержащих стекол создаваемая электромагнитным полем объемная магнитная сила $\vec{j} \times \vec{B}$ приводит расплавленную стекломассу в движение. Плотность электрического тока в стекломассе $j_0 = 0,03 \text{ A/cm}^2$, величина индукции магнитного поля $B_0 = 0,1 - 0,5 \text{ T}$, диаметр стекломассы $R = 50 \text{ см}$, высота $H = 40 - 50 \text{ см}$. В расплавленной массе температура меняется в пределах от 1300 до 1500 C, соответственно динамическая вязкость стекла μ от 1000 до 100 Пуазов, а плотность $\rho = 2,27 \text{ г/см}^3$.

Так как решается изотермическая задача, то изменение вязкости μ от температуры приближенно учтено в зависимости /1/, где

$$\mu_0(\xi) = \mu_0 (1 + \gamma \text{th} \xi), \quad (\mu_0; \gamma = \text{const}). \quad (2)$$

Так как с повышением температуры течение жидкости становится более интенсивным (растет градиент скорости), а вязкость уменьшается, то в формуле (2) естественно предполагать, что формпараметр $\gamma < 0$.

Для численного моделирования предполагается также, что осредненная электромагнитная сила \vec{f} имеет только одну азимутальную составляющую $f_\theta = j_0 B_r((r, \theta, z))$ - цилиндрические координаты), которая создает в сосуде $\{r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq H\}$ вращение стекломассы вокруг вертикальной оси ($r = 0$) со составляющей скорости $V = V_\theta(r, z)$, причем $v_r = v_z = 0$, $j_x = j_0 r^2$, $B_r = B_0/r$. С учетом осесимметрии потока жидкости [2/

$$d = \begin{pmatrix} 0 & r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) & 0 \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = 2r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2,$$

$$\operatorname{div}_\theta \tau = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\mu r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial v}{\partial z})).$$

Следовательно, уравнение стационарного вращения жидкости имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} (\mu r^3 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu r^3 \frac{\partial u}{\partial z}) = -r^2 f_\theta, \quad (3)$$

где $u = \frac{v}{r}$ - момент вращения жидкости,

$$\xi = 2r^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4)$$

Граничные условия следующие: $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = u \Big|_{z=0} = u \Big|_{r=R} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0$.

т.е. поверхность стекломассы $z = H$ вращается без трения, а на стенках $r = R$, $z = 0$ ставятся условия прилипания жидкости. Введя безразмерные величины $r' = r/R$, $z' = z/R$, $f' = f_\theta / (j_0 B_0)$, $\mu' = \mu / \mu_0$, $u' = u / U_0$, $\xi' = \xi / U_0^2$ ($U_0 = R j_0 B_0 / \mu_0$) и отбрасывая верхний индекс имеем краевую задачу ($z' = H/R$):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r'} (\mu' r'^3 \frac{\partial u'}{\partial r'}) + \frac{\partial}{\partial z'} (\mu' r'^3 \frac{\partial u'}{\partial z'}) = -r'^2 f'(r', z'), \\ \frac{\partial u'}{\partial r'} \Big|_{r'=0} = u' \Big|_{z'=0} = u' \Big|_{r'=1} = \frac{\partial u'}{\partial z'} \Big|_{z'=z_0} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из-за нелинейности постановки краевой задачи (5), характерная скорость U_0 входит в зависимости (2)

$$\mu(\xi) = 1 + \gamma \ln(U^2 \xi) \quad (6)$$

Для конкретного устройства $U_0 = 0,1 + 6 \text{ сек}^{-1}$. Краевая задача (5) аппроксимировалась разностной на равномерной сетке $N \times M$:

$$\Omega_{i,j} = \{(r_i, z_j) : r_i = h_r(i-1/2), i=1,2,\dots,N; z_j = h_z(j-1), j=1,2,\dots,M\},$$

где $r_N = 1$, $h_r = (N-0,5)^{-1}$, $z_M = z_0 - h_z/2$, $h_z = z_0/(M-0,5)$.

Разностные уравнения со вторым порядком аппроксимации относительно сеточной функции y следующие:

$$a_{i,j} (y_{i-1,j} - y_{i+1,j}) - \alpha_{i,j} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) + b_{i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \beta_{i,j} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) - \varphi_{i,j} y_{i,j} = -\varphi_{i,j} \quad (1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M), \quad (7)$$

где

$$a_{i,j} = r_i^2 \mu_{i,j-1/2} h_r / h_r \quad (i=2,\dots,N), \quad \alpha_{i,j} = 0,$$

$$a_{N,j} = b_{N,j} = 0, \quad \varphi_{1,j} = \int_{z_j}^1 h_r h_z r_i, \quad \varphi_{1,1} = 0, \quad \varphi_{N,j} = 0,$$

$$b_{i,j} = r_i^2 \mu_{i,j-1/2} h_r / h_z \quad (j=2,\dots,M), \quad b_{i,1} = 0, \quad \varphi_{i,1} = 0, \quad \varphi_{N,j} = \varphi_{N,j},$$

$$\varphi_{N,j} = 1, \quad \varphi_{i,2} = b_{i,2}, \quad \varphi_{i,1} = 1; \quad \mu_{i,j-1/2} = \mu(\xi_{i,j-1/2}), \quad \mu_{i,j-1/2} = \mu(\xi_{i,j-1/2}).$$

Чтобы учесть граничные условия первого рода при $i=N, j=1$ надо коэффициенты $b_{N,j}$, $a_{N,j}$, $a_{i,1}$, $b_{i,2}$ обратить в нуль после определения величины $\varphi_{i,j}$. Для определения μ из (6) аргумент ξ вычисляется в точках $(r_{i-1/2}, z_j)$, $(r_i, z_{j-1/2})$ из (4), заменяя производные с центральными разностями и с учетом, что

$$y(0, z_j) = (\partial y_{1,j} - y_{2,j}) / \delta, \quad y(r_i, z_0) = (\partial y_{i,M} - y_{i,M-1}) / \delta.$$

Так как коэффициенты a, b, φ зависят от градиента решения, то схема (7) реализуется итеративно, пересчетом величин $\mu_{i-1/2,j}$, $\mu_{i,j-1/2}$ в зависимости от значений сеточной функции y на предыдущей итерации. На каждой итерации сеточные уравнения (7) решались методом Холлецкого [3], пока невязка не превышала 10^{-5} . Число итераций увеличивалось с ростом параметра $|\gamma|$ (от 3 до 50). Численные

расчеты проведены при $N = M = 11$, $\alpha_0 = 1$, $U_0 = 0,2; 1; 2; 5$, $\beta = -40 + 30$ и при относительной ошибке итерации 10^{-4} . Максимальное значение момента вращения (u_{max}) достигается при $r = 0$, $\alpha = \alpha_0$, скорости вращения (v_{max}) — при $r = 0,65$, $\alpha = \alpha_0$, а экстремальное значение вязкости (M_{crit}) достигается при $r = 1$, $\alpha = \alpha_0$ (см. табл. 1). Если функция не зависит от α ($\partial u / \partial \alpha = 0$), то при $\beta = 0$ имеем $u(r) = (1 - r^2)/8$. Для вычисления размерных величин u_{max} , v_{max} табличные данные надо умножить на U_0 . Профиль скорости v в зависимости от r параболический (см. табл. 2). Значения функций u, v возрастают с уменьшением параметра β .

Таблица 1.

Максимальные значения функций (k — число итераций)

U_0	β	u_{max}	v_{max}	M_{crit}	k
0,2	-10,0	0,128	0,054	0,96	3
	-40,0	0,137	0,057	0,73	9
1,0	30,0	0,095	0,035	1,86	40
	0	0,126	0,053	1,00	1
2,0	-1,6	0,137	0,060	0,73	9
	-0,4	0,135	0,059	0,79	6
	-0,6	0,156	0,074	0,43	17
	-0,8	0,291	0,184	0,20	45
5,0	-0,9	0,673	0,464	0,10	50
	-0,064	0,131	0,055	0,94	4
	-0,5	0,201	0,101	0,50	11
	-0,6	0,244	0,129	0,40	11
	-0,7	0,314	0,173	0,30	15
	-0,8	0,492	0,260	0,20	30
	-0,9	1,050	0,522	0,10	42
0,5	0,107	0,041	1,42	7	

Таблица 2.

Значения $10^2 \mu, (\mu)$ при $U_0 = 1, \gamma = -1,7$.

γ	α				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,05	0,33 (1,000)	0,52 (1,000)	0,62 (1,000)	0,67 (1,000)	0,69 (1,000)
0,25	1,63 (0,998)	2,53 (0,999)	3,01 (1,000)	3,25 (1,000)	3,35 (1,000)
0,45	2,69 (0,985)	4,09 (0,995)	4,83 (0,997)	5,21 (0,998)	5,35 (0,998)
0,65	3,22 (0,970)	4,75 (0,984)	5,55 (0,985)	5,97 (0,985)	6,14 (0,984)
0,85	2,72 (0,963)	3,83 (0,955)	4,47 (0,944)	4,83 (0,940)	4,98 (0,937)
1	0 (0,896)	0 (0,815)	0 (0,748)	0 (0,696)	0 (0,669)

Из таблицы I видно, что при $U_0 \geq 2, \mu_{\min} = 1 + \gamma$ и величины мало меняются при $U_0^2 \gamma = \text{const}$, например, $U_0^2 \gamma = -1,6$. В случае линейной зависимости (6), например, $\mu(\xi) = 1 + U_0^2 \gamma \xi$ такое свойство сохраняется при всех значениях $U_0^2 \gamma = \gamma_0 = \text{const}$. В данном случае, итерационный метод сходится для получения решения в области с переменной безразмерной вязкостью $\mu = 0,1 + 1$ только при $U_0 \geq 2, \gamma = -0,9$.

При $U_0 = 1$ метод сходится только для $\gamma \geq -1,7$ ($\mu_{\min} = 0,67$), а при $U_0 = 0,2$ - для $\gamma \geq -40$ ($\mu_{\min} = 0,73$).

Численный расчет показал, что в данном диапазоне изменения вязкости характер течения сохраняет свой вид, изменяется только интенсивность течения (V_{\max}, U_{\max}).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982. 376 с.
2. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.
3. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. М.: Мир, 1984. 264 с.

УДК 519.6

О.И. Лиетувиетис
ВЦ при ЛГУ им. П. Стучки

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ
В СМЫСЛЕ ЛЯПУНОВА КОНТУРОВ

На практике нередко встречаются задачи оптимизации, роль переменной в которых играет граница данной области. Такой, в частности, является задача оптимизации возмущения вносимого ферромагнитным телом в магнитном поле постоянных токов, рассмотренная в работах [1-3]. Переменной здесь является кусочно-гладкий в смысле Ляпунова контур Γ , определяющий форму поперечного сечения ферромагнитного тела. Контур Γ при этом предполагается заданным в параметрическом виде с помощью некоторой вектор-функции $u^* u(t) = (u^*(t), u^*(t))$, определенной и непрерывной на заданном отрезке $a \leq t \leq b$ числовой оси; удовлетворяющей равенству $u(a) = u(b)$ и имеющей при заданном разбиении этого отрезка $\xi_1 \cdot a < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = b$ на каждом из частичных отрезков $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$, непрерывную в смысле Гельдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$ производную $\dot{u} = \dot{u}(t) = (\dot{u}^*(t), \dot{u}^*(t))$.

В настоящей статье предлагается метод сплайн-интерполяции этой вектор-функции, позволяющий не только свести исходную бесконечномерную задачу оптимизации к конечномерной, но и удобно варьировать контур Γ в малой окрестности любой заданной его точки.

Построив на отрезке $[a, b]$ сетку

$$t_0 = a, \quad t_j = \xi_i + j \Delta_i, \quad \Delta_i = \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{m_i}, \quad (1)$$

$$j = 1, \dots, m_i, \quad m_i \geq 4, \quad i = 1, \dots, n.$$

введем в рассмотрение вектор-функцию \tilde{u} , имеющую на каждом из отрезков $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 1, \dots, N$, вид

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}_i^+ f_i^+(t) + \tilde{u}_{i+1}^- f_{i+1}^-(t) + \sum_{m=1}^{m_i} u_{i,m} F_{i,m}(t), \quad (2)$$

где f_i^+ , f_{i+1}^- , $F_{i,m}$ — некоторые простые непрерывно дифференцируемые на отрезке $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ функции; $u_{i,m}$ — значения вектор-функции u в узлах сетки (1), а \tilde{u}_i^+ , \tilde{u}_{i+1}^- — значения ее производной справа и слева в точках ξ_i и ξ_{i+1} соответственно.

Потребовав, чтобы

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,m} &= u_{i,m}, \quad m = 0, \dots, m_i, \\ \tilde{u}_i^+ &= \tilde{u}_i^-, \quad \tilde{u}_{i+1}^- = \tilde{u}_{i+1}^+, \end{aligned}$$

получим, что

$$\begin{aligned} f_i^+(t_{i,j}) &= f_{i+1}^-(t_{i,j}) = 0, \\ f_i^+(\xi_i) &= f_{i+1}^-(\xi_{i+1}) = 1, \\ f_i^+(\xi_{i+1}) &= f_{i+1}^-(\xi_i) = 0, \\ F_{i,m}(t_{i,j}) &= \begin{cases} 1 & \text{при } m=j, \\ 0 & \text{при } m \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

$$F_{i,m}(\xi_i) = F_{i,m}(\xi_{i+1}) = 0, \quad j, m = 0, 1, \dots, m_i.$$

В силу того, что вектор-функция u имеет на отрезке $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ непрерывную в смысле Гельдера с показателем $\lambda \in (0, 1]$ производную, имеем при любом $j = 1, \dots, m_i - 1$, что

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_{i,j}) &= \frac{u(t_{i,j+1}) - u(t_{i,j-1})}{2\Delta_i} + \int_0^1 [u(t_{i,j}) - u(t_{i,j} + \\ &+ (2p-1)\Delta_i)] dp = \frac{u(t_{i,j+1}) - u(t_{i,j-1})}{2\Delta_i} + O(\Delta_i^\lambda). \end{aligned}$$

Здесь $O(\Delta_i^2)$ — малая величина порядка Δ_i^2 и $O(\Delta_i^2) = 0$, как только составляющие вектор-функции u являются (как это часто бывает на практике) на отрезке $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ алгебраическими многочленами степени не выше второй.

Потребовав, чтобы

$$\tilde{u}(t_{ij}) = \frac{u(t_{j+1}) - u(t_{j-1})}{2\Delta_i}, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

получим, что

$$f_i^+(t_{ij}) = f_{i+1}^-(t_{ij}) = 0. \quad (4)$$

$$F_{im}(t_{ij}) = \begin{cases} -1/(2\Delta_i) & \text{при } m=j-1, \\ 1/(2\Delta_i) & \text{при } m=j+1, \\ 0 & \text{при } |m-j| \neq 1. \end{cases}$$

Таким образом, как вытекает из (3) и (4) каждая из функций f_i^+ , f_{i+1}^- , F_{im} , $m=0, \dots, m_i$, должна теперь удовлетворять на каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$, $j=1, \dots, m_i$, четырем заданным ограничениям (иметь заданные значения функции и ее первой производной на концах этих отрезков). Поэтому для однозначного определения этих функций естественно искать их на каждом из этих отрезков в виде некоторого многочлена третьей степени.

Положив, например,

$$F_{im}(t) = \mathcal{A}_{imj} \left(\frac{t-t_{im}}{\Delta_i} \right)^3 + \mathcal{B}_{imj} \left(\frac{t-t_{im}}{\Delta_i} \right)^2 + \mathcal{C}_{imj} \left(\frac{t-t_{im}}{\Delta_i} \right) + \mathcal{D}_{imj}$$

для всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j=1, \dots, m_i$, получим, что

$$\mathcal{A}_{imj} = 2[F_{im}(t_{j-1}) \cdot \dot{F}_{im}(t_j)] + [\dot{F}_{im}(t_{j-1}) + \dot{F}_{im}(t_j)] \Delta_i,$$

$$\mathcal{B}_{imj} = 3[1-2(j-m)][F_{im}(t_{j-1}) - F_{im}(t_j)] + \\ + [1-3(j-m)] \dot{F}_{im}(t_{j-1}) \Delta_i + [2-3(j-m)] \dot{F}_{im}(t_j) \Delta_i,$$

$$C_{mj} = G(j-m)(j-m-1)[F_{im}(t_{ij-1}) - F_{im}(t_{ij})] + \\ + (j-m)[3(j-m)-2]\dot{F}_{im}(t_{ij-1}) + (j-m-1)[3(j-m)-1]\dot{F}_{im}(t_{ij})\Delta_i, \\ D_{mj} = (j-m)^2[3-2(j-m)]F_{im}(t_{ij-1}) + (j-m-1)^2[1+2(j-m)]F_{im}(t_{ij}) - \\ - (j-m-1)(j-m)^2\dot{F}_{im}(t_{ij-1})\Delta_i - (j-m)(j-m-1)^2\dot{F}_{im}(t_{ij})\Delta_i.$$

Отсюда, в силу (3) и (4), следует, что

$$F_{im}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t - t_{im}| \geq 2\Delta_i, \\ -\frac{1}{2} \left| \frac{t - t_{im}}{\Delta_i} \right|^3 + \frac{5}{2} \left| \frac{t - t_{im}}{\Delta_i} \right|^2 - 4 \left| \frac{t - t_{im}}{\Delta_i} \right| + 2 & \text{при } \Delta_i \leq |t - t_{im}| \leq 2\Delta_i, \\ \frac{3}{2} \left| \frac{t - t_{im}}{\Delta_i} \right|^3 - \frac{5}{2} \left| \frac{t - t_{im}}{\Delta_i} \right|^2 + 1 & \text{при } |t - t_{im}| \leq \Delta_i \text{ и } m \neq 1, m-1, \\ 2 \left| \frac{t - t_{im}}{\Delta_i} \right|^3 - 3 \left| \frac{t - t_{im}}{\Delta_i} \right|^2 + 1 & \text{при } |t - t_{im}| \leq \Delta_i \text{ и } m = 1, m-1. \end{cases} \quad (5)$$

Точно так же находим, что

$$f_i^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t - \xi_i| \geq \Delta_i, \\ \Delta_i \left[\left(\frac{t - \xi_i}{\Delta_i} \right)^3 - 2 \left(\frac{t - \xi_i}{\Delta_i} \right)^2 + \left(\frac{t - \xi_i}{\Delta_i} \right) \right] & \text{при } |t - \xi_i| \leq \Delta_i, \end{cases} \quad (6)$$

$$f_i^-(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t - \xi_{i+1}| \geq \Delta_i, \\ \Delta_i \left[\left(\frac{t - \xi_{i+1}}{\Delta_i} \right)^3 + 2 \left(\frac{t - \xi_{i+1}}{\Delta_i} \right)^2 + \left(\frac{t - \xi_{i+1}}{\Delta_i} \right) \right] & \text{при } |t - \xi_{i+1}| \leq \Delta_i. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя теперь выражения (5), (6) и (7) в (2), получим на каждом из отрезков $[t_{j-1}, t_j]$, $j=1, \dots, m, \dots, N$, что

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{2} \left\{ [u_{j+1} - 3u_j + 3u_{j-1} - u_{j-2}] \left(\frac{t - t_{j-1}}{\Delta_i} \right)^3 + \right. \\ + [-4u_{j+1} + 4u_j - 5u_{j-1} + 2u_{j-2}] \left(\frac{t - t_{j-1}}{\Delta_i} \right)^2 + \\ \left. + (4u_j - u_{j-2}) \left(\frac{t - t_{j-1}}{\Delta_i} \right) + 2u_{j-1} \right\}, \quad (8)$$

где при $j=1$ вместо u_{j-2} ставится $u_{j-2} - 2u_{j-1} \Delta$, а при $j=m$ вместо u_{j+1} ставится $u_{m+1} + 2u_{m+2} \Delta$.

Вектор-функция \tilde{u} , определенная формулой (8), фактически представляет собой на отрезках $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i=1, \dots, N$, некоторый параметрический кубический сплайн дефекта два /4/, интерполирующий значения в узлах сетки (II) вектор-функции u . При этом важным свойством этого сплайна является свойство его локальности, заключающееся в том, что его поведение на каждом частичном отрезке $[t_{j-1}, t_j]$, $j=2, \dots, m-1$, не зависит от значений вектор-функции u в узлах сетки (I), отстоящих от концов этого отрезка более, чем на Δ .

Оценим теперь погрешность вышеописанного приближения. Положим

$$H_u \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq N} \left(\sup_{\xi_i \leq t \leq \xi_{i+1}} \frac{|\ddot{u}(t) - \ddot{u}(t)|}{|t - t|^2} \right).$$

Л е м м а. Вектор-функция \tilde{u} , определенная формулой (8), удовлетворяет при любом $t \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i=1, \dots, N$, оценкам

$$\begin{aligned} |\ddot{u}(t) - \ddot{u}(t)| &\leq 5 H_u \Delta^{3+\alpha}, \\ |\dot{\tilde{u}}(t) - \dot{u}(t)| &\leq \frac{21}{2} H_u \Delta^{2+\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив для краткости

$$\begin{aligned} a_{ij} &= u_{j+2} - 3u_j + 3u_{j-1} - u_{j-2}, \\ b_{ij} &= -u_{j+2} + 4u_j - 5u_{j-1} + 2u_{j-2}, \\ c_{ij} &= u_j - u_{j-2}, \end{aligned}$$

получим из (8) при любом $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j=1, \dots, m$, что

$$\begin{aligned} 2|\ddot{\tilde{u}}(t) - \ddot{u}(t)| &= |a_{ij}| + |b_{ij}| + |c_{ij}| \left(\frac{t-t_{j-1}}{\Delta} \right)^2 + 2|u_{j-1} - 2u(t)|, \\ 2\Delta|\dot{\tilde{u}}(t) - \dot{u}(t)| &\leq 3|a_{ij}| + 2|b_{ij}| + |c_{ij}| - 2\dot{u}(t)\Delta. \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны, в силу свойств производной вектор-функции u , имеет место оценка

$$|a_{ij}| = \Delta \int_0^1 \{ [\ddot{u}(t_j + p\Delta) - \ddot{u}(t_{j-2} + p\Delta)] -$$

$$- [\dot{u}(t_{j-1} + \rho \Delta_i) - \dot{u}(t_{j-2} + \rho \Delta_i)] \rho \Delta_i \leq 2 N_H \Delta_i^{1+2\alpha}, \quad j = 2, \dots, m-1,$$

$$|a_{i,2}| = |u_{i,2} - 4u_{i,1} + 3u_{i,0} + 2\dot{u}^* \Delta_i| = \\ = \Delta_i \left| \int_0^1 \{ [\dot{u}(t_{i,2} + \rho \Delta_i) - \dot{u}(t_{i,0} + \rho \Delta_i)] - \right. \\ \left. - 2 [\dot{u}(t_{i,0} + \rho \Delta_i) - \dot{u}(t_{i,0} + 0)] \} \rho \Delta_i \right| \leq 3 N_H \Delta_i^{1+2\alpha}.$$

Аналогичным образом находим, что

$$|a_{i,m}| \leq 3 N_H \Delta_i^{1+2\alpha}.$$

$$|b_{i,j}| \leq \begin{cases} 3 N_H \Delta_i^{1+2\alpha} & \text{при } j=1 \text{ и } j=m, \\ 3 N_H \Delta_i^{1+2\alpha} & \text{при } j=2, \dots, m-1 \end{cases}$$

и, что в каждой точке $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j=1, \dots, m$,

$$|c_{i,j}(\frac{t-t_{j-1}}{\Delta_i}) + 2u_{i,j-1} - 2u(t)| \leq 2 N_H \Delta_i^{1+2\alpha},$$

$$|c_{i,j} - 2u(t)\Delta_i| \leq \begin{cases} 2 N_H \Delta_i^{1+2\alpha} & \text{при } j=1 \text{ и } j=m, \\ 4 N_H \Delta_i^{1+2\alpha} & \text{при } j=2, \dots, m-1. \end{cases}$$

Подставляя эти оценки в (10), получим (9).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лиетувиетис О.И. Уравнение для плотности потенциала простого слоя на кусочно-гладком контуре. Латв.мат.ежегодник. 1978. Вып.22, С.52-61.
2. Лиетувиетис О.И. Дифференцируемость по Фреше одного функционала в задачах оптимизации плоскопараллельных магнитных полей. Латв.мат.ежегодник. 1979. Вып.23. С.112-118.
3. Лиетувиетис О.И. Существование решения в некоторых задачах оптимизации магнитного поля. Латв.мат.ежегодник. 1983. Вып.27. С.76-79.
4. Завялов Д.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.:Наука, 1980. 352 с.

УДК 519.6:532.546:626.862

А. Г. Мелгалвис

Ин-т физики АН Латв ССР

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРИТОКЕ К ЩЕЛИ ДРЕНЫ
 ОСРЕДНЕНИЕМ ПО ФИЛЬТРУ

Рассматривается следующая краевая задача математической физики /3/ для области $\bar{\Omega} = \{(r, z) | r \in [r_0, R], z \in [-\delta, Z]\}$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (r, z) \in \Omega \setminus \{r = r_1\}. \quad (1)$$

$$u|_{z=0} = u|_{r_1=0}, \quad \kappa \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_1=0} = \kappa \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_1=0}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-\delta} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=Z} = 0, \quad (3)$$

$$u|_{r_0} = u^0, \quad -\delta \leq z < 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad 0 < z < Z, \quad (4)$$

$$u|_{r=R} = u^1. \quad (5)$$

Эта задача возникла из приложений: она описывает фильтрацию несжимаемой жидкости к поперечной щели покрытой фильтром дрены. Так как физическое содержание ее дано в /3/, на этом вопросе мы здесь останавливаться не будем.

Особый интерес представляет величина притока жидкости к щели дрены:

$$Q = 2\pi\kappa r_0 \int_{-\delta}^0 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_0=0} dz = 2\pi\kappa r_1 \int_{-\delta}^Z \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_1=0} dz. \quad (6)$$

Так как для практических задач (напр. мелиорации) отношение параметров $\kappa = \kappa/\kappa_0$, $\delta = \delta/Z$, $\beta = (r_1 - r_0)/(R - r_0)$ мало, то численно решать полную задачу (1)-(5) затруднительно. Поэтому, наряду с задачей (1)-(5) сформулируем приближенные постановки, использующие осреднение по слову $\{r \in [r_0, r_1], z \in [-\delta, Z]\}$. Отметим, что в /3/, /4/ использовались осред-

нения по двум слоям. Решения этих задач будем обозначать через $u(r, z)$. Аппроксимацию для частей $\{r \in [r_0, r_1], z \in]0, Z]\}$ и $\{r \in [r_0, r_1], z \in [-\delta, 0]\}$ будем проводить отдельно.

Начнем с первой области, где решение будем аппроксимировать константой или полиномом 2-й степени. Для этого введем среднюю по слою функцию

$$\bar{u}(z) = \frac{2}{r_1^2 - r_0^2} \int_{r_0}^{r_1} r u \, dr,$$

умножим уравнение (1) на r и проинтегрируем по r :

$$\frac{2}{r_1^2 - r_0^2} r \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_0} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{2}{r_1^2 - r_0^2} \int_{r_0}^{r_1} r u \, dr \right) = 0.$$

Используя условие (4), мы можем тогда переписать полученное уравнение в форме:

$$r_1 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_1=0} + \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0, \quad r = r_1. \quad (7)$$

Аппроксимируя при $z \in]0, Z]$ функцию \bar{u} константой, принимая в силу (2), $\bar{u}(z) = u|_{r=r_1}$, мы получаем окончательную форму граничного условия на нижней границе для новой постановки задачи:

$$\frac{k}{k_0} r_1 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad r = r_1, \quad z \in]0, Z]. \quad (8)$$

Второй рассматриваемый вариант - это аппроксимация решения полиномом 2-ой степени в виде (обозначим ее через u_0):

$$u_0 = u|_{r_1} + m(r_1 - r) + d(r_1 - r)^2. \quad (9)$$

Для этой функции уже выполнено первое из условий (2). Используя второе из соотношений (4), мы можем получить

$$u_0 = u|_{r_1} + d((r_1 - r)^2 - 2(r_1 - r_0)(r_1 - r)).$$

Теперь вычислим среднюю по слою величину этой функции и найдем последний неизвестный коэффициент:

$$d = \frac{6(u|_{r_1} - \bar{u})(r_1 + r_0)}{(r_1 - r_0)^2(3r_1 + 5r_0)}.$$

Из непрерывности потока (2) получаем

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_1, 0} = \kappa_0 \frac{\delta(u|_{r_1} - \bar{u})(r_1 + r_0)}{(r_1 - r_0)^2 (3r_1 + 5r_0)} 2(r_1 - r_0).$$

Последнее соотношение вместе с (7) дает систему уравнений для слоя $\{r \in [r_0, r_1], z \in [0, Z]\}$:

$$\left\{ \frac{(r_1 - r_0)^2 (3r_1 + 5r_0)}{24r_1} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + u|_{r_1} - \bar{u} = 0, \right. \quad (10)$$

$$\left. \frac{\kappa(r_1 - r_0)(3r_1 + 5r_0)}{12\kappa_0(r_1 + r_0)} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_1, 0} = u|_{r_1} - \bar{u}. \right. \quad (11)$$

Краевое условие для (10) при $x = Z$ следует из 2-го условия (3) исходной задачи:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=Z} = 0. \quad (12)$$

Переддем к другой области $\{r \in [r_0, r_1], z \in [-\delta, 0]\}$. В ней рассмотрим аппроксимацию константой, линейной функцией и полиномом 2-й степени. При использовании константы мы получаем условие I-го рода на линии $r = r_1$:

$$u|_{r_1} = u^0. \quad (13)$$

При аппроксимации решения линейной функцией, эту функцию возьмем в виде: $u_s = u^0 + m(r - r_0)$ и из непрерывности давления на линии $r = r_1$ (2) получим

$$m = \frac{u|_{r_1} - u^0}{r_1 - r_0}$$

Вновь вычисляем среднюю по слою функцию

$$\bar{u}(z) = \frac{1}{3(r_1 + r_0)} [u^0(r_1 + 2r_0) + u|_{r_1}(2r_1 + r_0)]. \quad (14)$$

Остались еще два уравнения: непрерывность потока (2) и проинтегрированное основное уравнение для выбранного слоя:

$$r \frac{\partial u_0}{\partial r} \Big|_{r_0} + \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0, \quad r = r_1. \quad (15)$$

Это позволяет получить два различных уравнения для линии

$r = r_1$. Из (2) получаем I-ю форму краевого условия:

$$\frac{\kappa}{\kappa_0} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_1,0} = \frac{u|_{r_1} - u^0}{r_1 - r_0} \quad (16)$$

Подставляем в уравнение (15) полученное выражение для $\bar{u}(z)$:

$$r \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_2} + \frac{r_1^2 - r_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1}{3(r_1 + r_0)} (u^0(r_1 + 2r_0) + u|_{r_1}(2r_1 + r_0)) \right] = 0, \quad r = r_1.$$

Непрерывность потока (2) вместе с выражением для u_0 дает

$$r_1 \frac{\kappa}{\kappa_0} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_1,0} - r_0 \frac{u|_{r_1} - u^0}{r_1 - r_0} + \frac{(2r_1 + r_0)(r_1 - r_0)}{6} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad r = r_1. \quad (17)$$

Заметим, что если мы не пользуемся условием непрерывности потока, то

$$r \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_2} = r_1 \frac{u|_{r_1} - u^0}{r_1 - r_0} = r_0 \frac{u|_{r_1} - u^0}{r_1 - r_0} = u|_{r_1} - u^0$$

и условие на линии принимает вид

$$u|_{r_1} - u^0 + \frac{(2r_1 + r_0)(r_1 - r_0)}{6} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (17')$$

Эта форма нам кажется менее удобной, ибо при построении разностной схемы коэффициент при центральном члене будет состоять из двух слагаемых с разными знаками. При изменении толщины фильтра $\delta, r_1 - r_0$ и шага сетки коэффициент может менять знак, что может приводить к потере устойчивости разностной схемы.

Осталось рассмотреть аппроксимацию полиномом 2-й степени для области $\{r \in [r_0, r_1], z \in [-\delta, 0]\}$.

$$u_0 = u^0 + m(r - r_0) + d(r - r_0)^2.$$

Уравнение для непрерывности функции u на линии $r = r_1$ позволяет исключить m и получить

$$u_0 = u^0 + \frac{u|_{r_1} - u^0}{r_1 - r_0} (r - r_0) + d[(r - r_0)^2 - (r_1 - r_0)(r - r_0)].$$

Вычислим опять функцию

$$\bar{u}(z) = \frac{1}{3(r_1 + r_0)} [(r_1 + 2r_0)u^0 + (2r_1 + r_0)u|_{r_1}] - \frac{d}{6}(r_1 - r_0)^2,$$

выразим отсюда d через \bar{u} . Это дает:

$$u_0 = u^0 - \frac{r-r_0}{r_1-r_0} \left[\left(3 - \frac{2r_0}{r_1+r_0} \right) u^0 + \left(1 + \frac{2r_1}{r_1+r_0} \right) u \Big|_{r_1} - 6\bar{u} \right] + \\ + \frac{(r-r_0)^2}{(r_1-r_0)^2} \left[\left(1 + \frac{r_0}{r_1+r_0} \right) u^0 + \left(1 + \frac{r_1}{r_1+r_0} \right) u \Big|_{r_1} - 3\bar{u} \right].$$

Остается подставить $u_0(r)$ в условие непрерывности потока (2):

$$(r_1^2 - r_0^2) \frac{\kappa}{\kappa_0} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_1, r_0} = (r_1 + 3r_0) u^0 + (5r_1 + 3r_0) u \Big|_{r_1} - 6(r_1 + r_0) \bar{u}. \quad (18)$$

Используем (15) для получения уравнения относительно $\bar{u}(z)$, подставляя в него выражение $u_0(r)$:

$$\frac{(r_1 - r_0)^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \left[\left(1 + \frac{4r_1}{r_1+r_0} \right) u \Big|_{r_1} - 6\bar{u} + \left(1 + \frac{4r_0}{r_1+r_0} \right) u^0 \right] = 0 \quad (19)$$

Краевое условие для (19) при $z = -\delta$ вытекает из (3):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=-\delta} = 0. \quad (20)$$

Итак, новая постановка для функции $u(r, z)$ состоит из основного уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad r_1 < r < R, \quad -\delta < z < Z \quad (21)$$

вместе с условиями

$$u \Big|_R = u^1, \quad -\delta < z < Z, \quad (22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=Z} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=-\delta} = 0, \quad r_1 \leq r < R \quad (23)$$

и полученными выше условиями на нижней границе, т.е. имеем для $0 < z < Z$ (8) (или (10)-(12)) и для $-\delta < z < 0$ имеем (13) при аппроксимации константой, имеем (14), (16) или (14), (17) при линейной аппроксимации и имеем (18), (19), (20) при полиноме 2-я степени. Поток в щель определим по формуле

$$Q = 2\pi k r_1 \int_{-\delta}^Z \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_1, 0} dz. \quad (24)$$

Перейдем к получению разностных аппроксимаций осредненных задач, пользуясь при этом обозначениями из /1/ и /2/. Введем сетку:

$$\omega = \{ (r_i, z_j) | r_i = r_1 + (i-1)h_r, i = \overline{1, N_r}, z_j = \delta + (j-1)h_z, j = \overline{1, N_z}, z_j = (j - N_z)h_z, j = \overline{N_z + 1, N_z + N_z} \},$$

где $h_r = \frac{R - r_1}{N_r - 1}$, $h_z = \frac{\delta}{N_z - 1}$, $h_z = \frac{L}{N_z}$.

Искомую функцию $u(r, z)$ будем аппроксимировать сеточной функцией $y_{i,j}$, а функцию $\hat{u}(z) = y_{-1,j}$. Будем строить аппроксимации второго порядка $O(h_r^2 + h_z^2)$ для всех уравнений.

Уравнение (21) аппроксимируем по классической схеме /2/:

$$\frac{1}{r_i} \left((r_i - \frac{h_r}{2}) (y_{i,j})_r \right)_r + (y_{i,j})_{zz} = 0 \tag{25}$$

В качестве примера построения разностных уравнений для дополнительных условий рассмотрим аппроксимацию уравнения (8), для всех остальных уравнений напишем окончательные выражения.

Из ряда Тейлора имеем

$$r \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_i} = r \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_i + \frac{h_r}{2}} - \frac{h_r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r_i} + O(h_r^2).$$

С помощью уравнения (21) это можно переписать в виде:

$$r_i \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_i} = \left(r_i + \frac{h_r}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_i + \frac{h_r}{2}} + \frac{h_r r_i}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + O(h_r^2).$$

Подставляя это выражение в (8) мы можем легко его аппроксимировать с вторым порядком:

$$\left(r_i + \frac{h_r}{2} \right) (y_{i,j})_r + \left(\frac{h_r r_i}{2} + \frac{\kappa_0 (r_i^2 - r_1^2)}{2\kappa} \right) (y_{i,j})_{zz} = 0, \tag{26}$$

$N_z + 1 \leq j \leq N_z + N_z$.

Приведем остальные разностные уравнения. Условие (22):

$$y_{i,j} = u^i, \quad 1 \leq j \leq N_z + N_z, \tag{27}$$

уравнение (10):

$$\frac{(r_1 - r_2)^2 (3r_1 + 5r_2)}{24r_1^2} (y_{1,j})_{zz} - y_{0,j} - y_{2,j}, \quad N'_2 < j < N'_2 + N_2 \quad (28)$$

При аппроксимации (11) используем (21):

$$\frac{\kappa(r_1 - r_2)(3r_1 + 5r_2)}{12\kappa_0(r_1 + r_2)r_1} \left[(y_{1,j})_r + \frac{h_r}{2} r_1 (y_{1,j})_{zz} \right] = \quad (29)$$

$$= y_{1,j} - y_{0,j}, \quad N'_2 < j < N'_2 + N_2,$$

для (12) воспользуемся уравнением (10):

$$-\frac{(r_1 - r_2)^2 (3r_1 + 5r_2)}{24r_1^2} \frac{2}{h_1} (y_{1,j})_z + y_{1,j} - y_{0,j} = 0, \quad j = N'_2 + N_2 \quad (30)$$

Условие (13) аппроксимируется просто:

$$y_{1,j} = u^0, \quad 1 \leq j \leq N'_2 \quad (31)$$

Далее для уравнения (14):

$$y_{0,j} = \frac{1}{3(r_1 + r_2)} \left[(r_1 + 2r_2)u^0 + (2r_1 + r_2)y_{2,j} \right], \quad 1 < j \leq N'_2, \quad (32)$$

для уравнения (16):

$$\frac{\kappa_0 r_0}{\kappa(r_1 - r_2)} (y_{1,j} - u^0) - \left(1 + \frac{h_r}{2r_1}\right) (y_{1,j})_r + \frac{h_r}{2} (y_{1,j})_{zz}, \quad 1 < j \leq N'_2. \quad (33)$$

Разностное уравнение для (17) имеет вид:

$$\frac{\kappa_0 r_0}{\kappa(r_1 - r_2)} (y_{1,j} - u^0) + (r_1 + \frac{h_r}{2}) (y_{1,j})_r + \frac{h_r r_1}{2} + \quad (34)$$

$$+ \frac{(2r_1 + r_2)(r_1 - r_2)\kappa_0}{6\kappa} (y_{1,j})_{zz}, \quad 1 < j \leq N'_2,$$

для (18)

$$(r_1^2 - r_2^2) \frac{\kappa}{\kappa_0} \left[\left(1 + \frac{h_r}{2r_1}\right) (y_{1,j})_r + \frac{h_r}{2} (y_{1,j})_{zz} \right] = \quad (35)$$

$$= (r_1 + 3r_2)u^0 + (5r_1 + 3r_2)y_{2,j} - 6(r_1 + r_2)y_{0,j}, \quad 1 < j \leq N'_2,$$

а для (19):

$$\frac{(r_i - r_{i+1})^2}{2} (y_{i,j})_{i,j} + \left[\left(1 + \frac{4r_i}{r_i + r_{i+1}} \right) y_{i,j} - 6y_{i,j} + \left(1 + \frac{4r_{i+1}}{r_i + r_{i+1}} \right) u^0 \right] = 0, \quad (36)$$

$1 < j \leq N_2$

При аппроксимации (20) используем уравнение (19):

$$(y_{i,j})_{i,j} + \frac{h_x^2}{r_i - r_{i+1}} \left[(r_i + 5r_{i+1}) u^0 + (5r_i + r_{i+1}) y_{i,j} - 6(r_i + r_{i+1}) y_{i,j} \right] = 0, \quad (37)$$

Отметим, что не выписана аппроксимация условия (23). При численных расчетах для линий $j = 1$ и $j = N_2 + N_2$ ($1 \leq i < N_r$) мы использовали соответственно те же формулы, что при $j = 2$ и $j = N_2 + N_2 - 1$, но с учетом симметрии расширили область расчета:

$$y_{i,0} = y_{i,2} \quad \text{и} \quad y_{i,N_2+N_2+2} = y_{i,N_2+N_2-2}, \quad 1 \leq i < N_r. \quad (38)$$

Разностные уравнения решались методом верхней релаксации. Поток в щель определим по формуле являющейся аппроксимацией формулы (24):

$$Q(r_i + \frac{h_r}{2}) = 2\pi\alpha(r_i + \frac{h_r}{2}) \left[\frac{h_x^2}{2} \sum_{j=1}^{N_2-1} ((y_{i,j})_r + (y_{i,j+1})_r) + \frac{h_x^2}{2} \sum_{j=N_2}^{N_2+N_2-1} ((y_{i,j})_r + (y_{i,j+1})_r) \right], \quad 1 \leq i < N_r - 1. \quad (39)$$

Дело в том, что из формулы Грина и однородности условий (23) следует $Q(r_i + \frac{h_r}{2}) = \text{const}$ при всех i . При численных расчетах в связи с ошибкой аппроксимации и округления эти потоки при разных i могут отличаться. Поэтому окончательно величина потока определяется по такой формуле:

$$Q = \frac{1}{2} \left(Q(r_1 + \frac{h_r}{2}) + Q(r_{N_r} - \frac{h_r}{2}) \right).$$

Разностная аппроксимация исходной задачи (1)-(5) выписывается стандартным образом [2]. Но особое внимание требует аппроксимация в точке $(r, 0)$ смены типа краевого условия (4). Следуя работам [5], [6], аппроксимация для этой точки была записана в виде

$$\xi r_0 \frac{\partial u}{\partial r} = u - u^0$$

с неизвестным коэффициентом ξ . После численных расчетов (величина ξ варьировалась от 0 до 50) оказалось, что не одно из значений ξ особых преимуществ не дает, поэтому в расчетах мы используем простейший из этих случаев, когда

да $\dot{u} = 0$:

$$u|_{r=r_0} = u^0.$$

Рассмотрим теперь результаты численных расчетов. Все расчеты проводились с параметрами $r_0 = 0.04$, $r_1 = 0.041$ (или $r_1 = 0.045$), $\beta = 0.065$, $Z = 0.05$, $\delta = 0.902$, $\kappa_0 = 25$, $\kappa = 0.5$, $u^0 = 1$, $u^1 = 1.05$. Параметр релаксации всегда принимал значение $\omega = 1.9$. Для простоты представления результатов введем нумерацию постановок, присваивая I-й номер полной задаче. Осредненные задачи (в них всегда присутствуют уравнения (26), (27), (38)) будем нумеровать так. Постановка 2: уравнения (26), (31), постановка 3: (26), (32), (33), постановка 4: (26), (32), (34), постановка 5: (28)-(30), (31), постановка 6: - (28)-(30), (32), (34), постановка 7: (28)-(30), (35)-(37).

Для определения необходимого числа итераций I , мы сравнивали потоки после каждых M итераций:

$$|Q^{Mk} - Q^{M(k+1)}| < \varepsilon.$$

Отметим, что при решении полной задачи (I)-(5) величина потока Q не меняется монотонно при росте числа итераций, поэтому для этой задачи мы выбрали $M = 100$ и $\varepsilon = 10^{-6}$, а для всех остальных постановок $M = 10$, $\varepsilon = 10^{-7}$. Численные расчеты исходной задачи, а также всех осредненных постановок показаны в таблице.

Таблица I

Величина потока для разных постановок задачи

№ постановки	$r_1 = 0.041$		$r_1 = 0.045$	
	I	$Q \cdot 10^5$	I	$Q \cdot 10^5$
1	4300	1070	480	1808
2	160	1076	190	1865
3	130	1063	160	1767
4	140	1074	170	1852
5	700	1075	210	1863
6	630	1074	450	1855
7	600	1069	210	1799

Из приведенной таблицы видно, что при тонком фильтре ($\delta = 0.001$) ошибка в осредненных постановках не превышает 0.7% и число необходимых итераций уменьшается в 6-7 раз при аппроксимации полиномом 2-й степени по области $\{x \in [0, 1] \mid z \in [0, 2] \}$ и 30 раз при использовании константы. Если же толщина фильтра $\delta = 0.005$, то максимальная ошибка возрастает до 3%. Для аппроксимации полиномом 2-й степени она составляет 0.3%, а число необходимых итераций 2 раза меньше, чем для полной задачи. Эти результаты показывают целесообразность использования осреднения по тонким слоям. При этом отметим, что при тонких слоях выгодно использовать аппроксимацию константой, а если толщина фильтра увеличивается, то можно решение аппроксимировать полиномом 2-й степени. Итог: решение таких неклассических задач дает небольшую ошибку, но существенно уменьшает число необходимых итераций.

ЛИТЕРАТУРНЫЙ СПИСОК

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
2. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 302 с.
3. Буйкис А.А., Земитис А.А., Шкинчис Ц.Н. Вычисление фильтрационного напора в придренной зоне и притока воды к щелям дрены // Водные ресурсы. 1986. №6. С.16-23.
4. Буйкис А.А., Земитис А.А. Приближенное решение смешанной задачи для уравнения Лапласа в двухслойной среде // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, ИТМ, 1980. Т.16. №4. С.3-12.
5. Андреев В.Б. Смешанная задача для сеточного уравнения Лапласа в полуплоскости // ДАН СССР. 1977. 234. №5. С.997-1000.
6. Белухина И.Г. Сеточное решение модельной задачи о квазиточечном контакте // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1985. №4. С.58-61.

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ
ОДНОГО КЛАССА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть простая замкнутая кусочно-гладкая линия состоит из конечного числа кривых Ляпунова и описана на плоскости параметрически уравнениями $x = x(s), y = y(s), 0 \leq s \leq L$, где s - параметр (длина дуги), L - длина кривой Γ . Обозначим через $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, (0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = L)$ значения параметра s , соответствующие угловым точкам линии Γ . Предполагается, что угол наклона касательной к кривой Γ , как функция от s , в угловых точках имеет скачки ω_k , удовлетворяющие неравенству $0 < |\omega_k| < \pi$.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$\sigma(t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} G(s) [L(s,t)N(s,t) + M(s,t)] ds = f(t), \quad (I)$$

где $N(s,t) = \frac{(x(s) - x(t))y'(t) - (y(s) - y(t))x'(t)}{(x(s) - x(t))^2 + (y(s) - y(t))^2}$, $i'(t) = \frac{dx}{dt}$,

λ - параметр ($0 < \lambda < 1$), $f(t)$ - кусочно-непрерывная функция, которая в угловых точках контура Γ имеет скачки первого рода. Функция $L(s,t)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывные частные производные по s и t на множестве $[0, L] \times [0, L]$. При этом $L(s,s) = 1$. Функция $M(s,t)$ имеет вид $M_1(s,t) \cdot G_1(s-t)$, где $M_1(s,t)$ - гладкая функция при $0 < t, s < L$.

Уравнения вида (I) используются, например, при решении задач электростатики, магнитостатики и теории упругости (см., например, /1/ и /2/).

Гладкость известной функции $f(t)$ зависит от гладкости кривой Γ . В случае гладкого контура Γ , используя известные численные методы, можно найти приближенное решение

с высокой точностью /1/.

На практике в основном встречаются случаи, когда Γ является кусочно-гладкой линией. В этом случае решение уравнения (1) имеет особенности в угловых точках, а численные методы решения таких уравнений мало исследованы /1/. При этом функция $N(s, t)$ имеет в угловых точках неинтегрируемую особенность.

В данной работе предлагается видоизменить уравнение (1) с целью увеличения гладкости неизвестной функции.

Для натурального числа $m \geq 1$ и $u \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ рассмотрим Эрмитов сплайн

$$\varphi_m(u) = \sum_{j=0}^m \frac{|m+1-j|!}{m! j!} \left[(1-p)^{m+1} p^j \tau_i + p^{m+1} (1-p)^j \tau_{i+1} \right],$$

где $p = (u - \tau_i) / (\tau_{i+1} - \tau_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Эта функция удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \varphi_m(u) &\in C^{(m)}(\Gamma) & \varphi_m(\tau_i) &= \tau_i, \\ \varphi_m^{(k)}(\tau_i) &= 0, & k &= 1, 2, \dots, m, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

После замены переменных $v = \varphi_m(u)$, подстановки $t = \varphi_m(u)$ и умножения уравнения (1) на $\varphi_m'(u)$ приходим к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} f(u) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} f(v) \varphi_m'(u) [L(\varphi_m(v), \varphi_m(u)) N(\varphi_m(v), \varphi_m(u)) + \\ + M(\varphi_m(v), \varphi_m(u))] dv = \varphi_m'(u) g(\varphi_m(u)), \end{aligned} \quad (2)$$

где $f(u) = \sigma(\varphi_m(u)) \varphi_m'(u)$.

Так как $\varphi_m(\tau_i) = 0$, то правая часть уравнения (2) непрерывна при $u \in [0, L]$. Используя методику работы /3/, можно показать, что к уравнению (2) применима альтернатива Фредгольма в классе $C(\Gamma)$. При этом можно показать, что $f(\tau_i) = 0$. Из-за громоздкости доказательства этих фактов не приводим.

Будем использовать равномерное разбиение на каждом из отрезков $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$. На отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ рассмотрим множество точек $E_i = \{\theta_j^i, \theta_j^i, j = 0, 1, \dots, n_i\}$,

где $h_i = (\tau_i - \tau_{i-1})/n_i$, $n_i \geq 1$. Множество $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ содержит $\sum_{i=1}^n (n_i + 1)$ различных точек θ_j на отрезке $[0, L]$, где $n = \sum_{i=1}^n n_i$. Таким образом, $E = \{\theta_j, j = 0, 1, 2, \dots, n\}$.

Приближенное решение уравнения (2) ищем в виде кусочно-линейной функции

$$f_n(u) = \sum_{j=0}^n \eta_j \psi_j(u),$$

где ψ_j — непрерывные положительные на $[0, L]$ функции, линейные на каждом интервале (θ_i, θ_{i+1}) при $i = 0, 1, \dots, n$. В узловых точках функция ψ_j принимает значения $\psi_j(\theta_i) = \delta_{ji}$, $i = 0, 1, \dots, n$ (δ_{ji} — символ Кронекера). При этом $\sum_{j=0}^n \psi_j(u) \equiv 1$. Незвестные коэффициенты η_j определяются методом коллокации, т.е. из системы линейных алгебраических уравнений

$$f_n = \frac{\lambda}{\pi} \sum_{\theta_i \in \Gamma} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \psi_m'(\theta_i) [1, (\varphi_m(\theta), \varphi_m(\theta, \theta)) N(\varphi_m(\theta), \varphi_m(\theta, \theta)) + M(\varphi_m(\theta), \varphi_m(\theta, \theta))] \eta_j \psi_j(\theta) d\theta + \varphi_m'(\theta_i) f(\varphi_m(\theta_i)), \quad (3)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

где $f_n = f(\theta_i)$. Здесь учтено, что кривая Γ замкнута.

Приведенный алгоритм решения интегрального уравнения (1) можно использовать также в случаях, когда для линии Γ используется другая параметризация или кривая Γ состоит из нескольких замкнутых линий.

Для вычисления коэффициентов матрицы системы уравнений (3) приходится применять численное интегрирование.

При $n < 200$, для решения системы (3) используем метод Гаусса, а при $n > 200$ система линейных алгебраических уравнений решается методом верхней релаксации.

Рассмотрим пример, когда Γ представляет собой замкнутую линию, которая описывается уравнениями

$$x = R \sin t - 2t, \quad y = 2 - R \cos t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Данная линия имеет угловую точку при $t = \frac{\pi}{2} (t = \frac{\pi}{2})$. Функция $f(t)$ имеет вид $f(t) = J_0 \sin t / (2\sqrt{4t^2 - 4R \cos t})$.

Результаты приведены при $\lambda = \frac{1}{2}$, $M(s, t) = J_0 / L \cdot L(s, t)$.

$$L(s, t) = \left[(4 + s^2 - 4.3 \cos s) / (4 + s^2 - 4.3 \cos s) \right]^{1/2}$$

В таблице I приведены численные результаты для уравнения (1) с применением формулы прямоугольников в точках $t_i = -\frac{s}{2} + (i - \frac{1}{2})h$ и для уравнения (2) в точках $u_i = -\frac{s}{2} + ih$ при $m = 5$ и $h = s/10$.

Таблица I.

i	$\phi(t_i)$			$\psi(u_i)$		
	$i = 10^0$	$i = 30^0$	$i = 50^0$	$i = 50^0$	$i = 30^0$	$i = 10^0$
1	0.7175	0.6662	0.6616	0.1306	0.1017	0.1011
2	0.6245	0.6198	0.6191	0.4067	0.3952	0.3951
3	0.5983	0.5961	0.5958	0.8114	0.8076	0.8076
4	0.5107	0.5095	0.5093	1.1119	1.1104	1.1104
5	0.2357	0.2352	0.2351	0	0	0

При решении уравнения (2) наблюдается более быстрая сходимость приближенного решения к точному. Численные эксперименты показали, что не следует слишком увеличивать степень m , так как в этом случае растет производная неизвестной функции ψ в других точках. Предложенная замена переменных фактически приводит к неравномерной сетке по переменной s , которая сгущается около угловых точек.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.:Наука, 1985. 336 с.
2. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.:Наука, 1977. 317 с.
3. Лиетувиетис О.И. Уравнения для плотности потенциала простого слоя на кусочно-гладком контуре // Латв. мат. ежегодник, 1978. Вып.22. С.52-61.

УДК 519.6

М. К. Садыков

Ин-т кибернетики АН УзССР

РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
В ТРЕХСЛОЙНОМ ПЛАСТЕ

Как известно, большинство задач теории нелинейной фильтрации в многослойных пластах при известном начальном распределении давления и заданных режимах разработки в общей постановке являются трехмерными. Однако, трехмерные задачи с произвольной границей области весьма трудоемки для численного решения на ЭВМ, поэтому особую актуальность приобретает рассмотрение упрощенных моделей фильтрации в многослойных пластах путем сведения их к задачам меньшей размерности. Кроме того, важным моментом в постановке задач фильтрации является выбор закона движения флюида, т.е. зависимости скорости фильтрации от градиента давления. Во многих случаях эта зависимость является нелинейной. Отметим, что в некоторых случаях такого типа задачи изучались в работах /1/-/3/.

Настоящая работа посвящена построению и исследованию сходимости регуляризованной разностной схемы для решения краевой задачи нелинейной фильтрации в трехслойном пласте методом монотонных операторов и является продолжением и обобщением работ /4/-/5/.

Рассмотрим процесс фильтрации в трехслойном пласте, средний слой которого хорошопроницаемый, а две соседние слабопроницаемые перемычки. За основу математической модели этого процесса выбираем известную модель Хантуша, которая описывается системой из трех квазилинейных параболических уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями.

Сформулируем эту задачу в случае безразмерных переменных.

Требуется найти функции $u_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $u_2(x_1, x_2, t)$ и $u_3(x_1, x_2, x_3, t)$, удовлетворяющих следующей системе квазилинейных параболических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= 0, (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_1, t \in (0, T], \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_2 (\nabla u_2)^2 \right) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2 (\nabla u_2)^2 \right) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &+ \\ + k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} - k_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=1} &= f(x_1, x_2, t), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0, (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_2, t \in (0, T], (x_1, x_2) \in \Omega_2, \\ &\text{с начальными} \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_1(x_1, x_2, x_3, 0) = u_2(x_1, x_2, 0) = u_3(x_1, x_2, x_3, 0) = 0 \quad (2)$$

и граничными условиями

$$k_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=1} = k_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad (3)$$

$$u_1(x_1, x_2, 0, t) = u_2(x_1, x_2, t) = u_3(x_1, x_2, 1, t), \quad (4)$$

$$u_2(x_1, x_2, t) = 0, (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad (5)$$

где $\Omega_1 = \{0 < x_1, x_2, x_3 < 1\}$; $\Omega_2 = \{0 < x_1, x_2 < 1\}$;

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$; $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in [0, 1], x_2 = 0\}$;

$\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in [0, 1], x_2 = 1\}$; $\Gamma_3 = \{(x_1, x_2) | x_1 = 0, x_2 \in [0, 1]\}$;

$\Gamma_4 = \{(x_1, x_2) | x_1 = 1, x_2 \in [0, 1]\}$.

В дальнейшем предполагается, что функции $k_j(\xi^2)$ ($j = 1, 3$) абсолютно непрерывны по ξ и удовлетворяют следующим условиям

$$C_1 \leq k_j(\xi^2) \leq C_2, \quad (k_j(\xi^2) \xi)' \Big|_{\xi} \geq 0,$$

где C_1 и C_2 некоторые положительные константы.

Введем для удобства записи следующие обозначения:

$$x = (x_1, x_2, x_3);$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & x \in \Omega_1, \\ u_2(x, t), & x \in \Omega_2, \\ u_3(x, t), & x \in \Omega_3. \end{cases}$$

Определим пространство V как совокупность всех функций, получаемых в результате замыкания множества бесконечно дифференцируемых финитных в Γ функций в норме

$$\|u\|_V^2 = 2\|u\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \|u\|_{L_2(\Omega_2)}^2 + 2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L_2(\Omega_1)}^2 + \sum_{i=1}^2 \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega_2)}^2;$$

H - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v) = 2 \int_{\Omega_1} uv \, dx + \int_{\Omega_2} uv \, dx$$

и нормой

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)};$$

V^* - сопряженное пространство к V ;

$$W(0, T) = \left\{ u(x, t) \in L_2(0, T; V); \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, T; V^*), u(x, 0) = 0 \right\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Функцию $u(x, t) \in W(0, T)$ назовем обобщенным решением задачи (I)-(5), если для любой функции $q(x, t) \in L_2(0, T; V)$ справедливо следующее интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[2 \int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial t} q \, dx + \int_{\Omega_1} \frac{\partial u}{\partial t} q \, dx \right] dt + \int_0^T \int_{\Omega_1} \left[k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 \right] \frac{\partial u}{\partial x_1} + \\ & + k_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big| \frac{\partial q}{\partial x_1} \, dx + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_2} k_2 \left(\nabla u \right)^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} \, dx \Big| dt = \int_0^T \int_{\Omega_1} q \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Нетрудно показать, что имеет место следующая

Л е м м а 1. Оператор L , порождаемый формой $L(u, v)$

$$= \int_{\Omega_1} \left[k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial x_1} + k_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial x_3} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_1} \, dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_2} k_2 \left(\nabla u \right)^2 \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx$$

является ограниченным непрерывным оператором, действующим из V в V^* . Кроме того, L - монотонный и коэрцитивный оператор.

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы I в работе /4/. Следовательно, используя методы теории монотонных операторов легко установить сле-

ведливость следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. Задача (1)-(5) имеет единственное обобщенное решение при любых $f(x,t) \in L_2(0,T;V^*)$.

Переходим к построению и исследованию регуляризованной разностной схемы для решения задачи (1)-(5). Здесь и в дальнейшем используются обозначения, введенные в работе /5/. При построении разностной схемы, как обычно, будем исходить из интегрального тождества (7) и воспользуемся методом сумматорных тождеств /6/.

Пусть Δ - разностный оператор, действующий из H_h в H_h , определяемый выражением

$$[\Delta y, z] = \frac{1}{2} \sum_{j_1}^k (k_1(\nabla_{t_1}^2 y) + k_1(\nabla_{t_1}^2 y) | \partial_{t_1} y, \partial_{t_1} z)_{t_1} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j_2}^k \sum_{j_1}^k (k_2(\nabla_{t_1}^2 y) \partial_{t_1} y, \partial_{t_1} z)_{t_1}.$$

Рассмотрим следующую разностную схему:

$$(E + \tau \Delta Q) y_\tau + \Delta y \varphi, y(x, 0) = \psi, y(x, t) \Big|_\tau = 0, \quad (8)$$

где $Q: H_h \rightarrow H_h$ - линейный самосопряженный разностный оператор, удовлетворяющий условиям:

а) $[Q y, y] \geq \delta_1 \|y\|_{H_h}^2$, $\delta_1 = \text{const} > 0$,

б) если $\eta_{i,k}$ - след гладкой функции $\eta(x,t) \in C^1(C,T;C^2(\Omega_1))$,

то

$$[Q \eta_{i,k}, \eta_{i,k}] = N_1(\eta); [Q(\eta_{i,k})_t, (\eta_{i,k})_t] \leq N_2(\eta).$$

Заметим, что схема (8) включает в себя как частные случаи факторизованную схему при $Q = \sum_{j_1}^k R_{j_1} \cdot R_{j_1} y_{t_1, x}$ и явную схему при $Q = 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Функцию $y(x,t)$, принадлежащую при каждом $t \in \bar{\omega}_\tau$ пространству H_h , назовем решением регуляризованной разностной схемы (8), если она для любого $t \in \bar{\omega}_\tau$ и $\chi(x) \in H_h$ удовлетворяет следующему сумматорному тождеству

$$[(E + \tau \Delta Q) y_{t, x}] + [\Delta y, \chi] = [\chi, \chi]. \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что в силу неотрицательности оператора разностная схема (8) однозначно разрешима.

Следуя результатам работы /5/ докажем следующую

Л е м м а 2. Пусть $y(x, t)$ - решение разностной схемы (8). Тогда 1) если $c_1 > 0$, то для любых h и τ справедливы следующие оценки

$$\begin{aligned} \|y_1(t)\| &\leq c; \quad \tau \|\mathcal{R}y(t), y(t)\| \leq c, \quad t \in \bar{\omega}_\tau; \\ \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \|y_1(t)\|^2 &\leq c; \quad \sum_{t=0}^{T-1} \tau^2 \|y_1(t)\|^2 \leq c; \end{aligned} \quad (9)$$

2) если $\bar{c}_1 = 0$, то оценки (9) имеют место для h и τ , удовлетворяющих условию $\tau \leq c_1 h^2$, где c_1 - зависящая от исходных данных задачи.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая (8) скалярно в H_h на $2iy$, получим следующее тождество

$$\begin{aligned} 2\tau [y_t, \hat{y}] + 2\tau^2 \sigma [Qy_t, \hat{y}] + 2\tau [Ay, \hat{y}] - 2\tau [y, \hat{y}] \\ \text{или} \\ 2\tau [y_t, \hat{y}] + 2\tau^2 \sigma [Qy_t, \hat{y}] + 2\tau [Ay, y] - \\ - 2\tau [y, \hat{y}] = 2\tau^2 [Ay, y]. \end{aligned} \quad (10)$$

Каждое слагаемое в (10) преобразуем в отдельности:

$$\begin{aligned} 2\tau [y_t, \hat{y}] &= \tau \|\hat{y}\|^2 - \|y_t\|^2 + \tau^2 \|y_t\|^2; \\ 2\tau^2 \sigma [Qy_t, \hat{y}] - \tau \sigma [Qy, \hat{y}] - \tau \sigma [Qy, y] + \tau^2 \sigma [Ay_t, y_t] &\geq \\ &\geq \tau \sigma [Qy_t, \hat{y}] - \tau \sigma [Qy, y] + \tau^2 \sigma \varepsilon_2 \|y_t\|^2; \\ 2\tau [Ay, y] &\geq 2\tau (\sigma \|y_t\|^2 - c); \\ 2\tau [y, \hat{y}] - 2\tau [y, y] + 2\tau^2 [y, y_t] &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon_1} \tau \sum_i (y^2)_i + \varepsilon_1 \tau \|y_t\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon_2} \tau \sum_i (y^2)_i + \tau^2 \varepsilon_2 \|y_t\|^2 = \\ &\leq \varepsilon_1 \tau \|y_t\|^2 + \tau^2 \varepsilon_2 \|y_t\|^2 + \tau \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \frac{1}{2} \sum_i (y^2)_i \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \tau \frac{1}{2} \sum_i (y^2)_i + \varepsilon_1 \tau \|y_t\|^2 + c' \varepsilon_2 \|y_t\|^2; \end{aligned}$$

где c' - постоянная из разностного аналога неравенства Фридрихса;

$$\begin{aligned} 2\tau^2 [Ay, y_t] - 2\tau^2 c_2 \|y_t\| \|y_t\| &\leq \\ &\leq \tau^2 c_2^2 \varepsilon_3 \|y_t\|^2 + \tau^2 / \varepsilon_3 \|y_t\|^2. \end{aligned}$$

Подставляя эти неравенства в (10) и суммируя по t от 0 до $t = \tau$, после некоторых элементарных выкладок получим

$$\begin{aligned} & \|y(t')\|^2 + c\sigma [Qy(t'), y(t')] + \sum_0^t \tau^2 \|y_{\epsilon_1}\|^2 + \\ & + c^2(c_1\sigma - c^2/\epsilon_2) \sum_0^t \|y_{\epsilon_2}\|^2 + (2c - c_1^2\epsilon_3 - c\epsilon_1) \tau \\ & + \sum_0^t \|y_{\epsilon_3}\|^2 \leq \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}\right) \tau \frac{1}{2} \sum_0^t \sum_0^t (\varphi^2, 1)_{\Omega_1} + C. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как ϵ_1 и ϵ_2 произвольные константы, потребуем, чтобы

$$2c - c_1^2\epsilon_3 - c\epsilon_1 \geq \lambda > 0.$$

Пусть $\delta_1 > 0$. Выберем σ таким, чтобы

$$c_1\sigma - c^2/\epsilon_2 = \delta_1.$$

Тогда из (11) получим, что

$$\begin{aligned} & \|y(t')\|^2 + c\sigma [Qy(t'), y(t')] + \sum_0^t \tau^2 \|y_{\epsilon_1}\|^2 + c \sum_0^t \|y_{\epsilon_2}\|^2 \leq \\ & \leq c \left(\sum_0^t c \frac{1}{2} \sum_0^t (\varphi^2, 1)_{\Omega_1} + 1 \right) + c \left(\|f\|_{L_{\infty}(0, \tau, L_2(\Omega_1))}^2 + 1 \right), \end{aligned}$$

откуда следуют оценки (9).

Пусть теперь $\epsilon_2 = 0$. Воспользуемся разностным аналогом неравенства Фридрихса и неравенством //':

$$\|z_1\| \leq \frac{\tau}{2} \|z_2\|$$

из (11) получим, что

$$\begin{aligned} & \|y(t')\|^2 + c\sigma [Qy(t'), y(t')] + \tau^2 \sum_0^t \left[1 - \frac{4c}{h^2} (c^2\epsilon_1 + \right. \\ & \left. + 1/\epsilon_3) \right] \|y_{\epsilon_1}\|^2 = \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} \right) \|f\|_{L_{\infty}(0, \tau, L_2(\Omega_1))}^2 + C. \end{aligned} \quad (12)$$

Выбирая h и τ так, чтобы

$$\frac{4c}{h^2} (c^2\epsilon_1 + 1/\epsilon_3) \leq \eta < 1, \quad (13)$$

из (12) получим оценки (9). Условие (13) эквивалентно следующему условию:

$$\tau \leq ch^2 \quad \text{где} \quad c < \frac{1}{4(c^2\epsilon_1 + 1/\epsilon_3)}$$

Лемма доказана.

Далее через $y_{k\tau}$ обозначим решение разностной схемы (8). Тогда из оценок (9) следует, что существует такая функция $u(x,t) \in L_2(0,T;V)$, что при $\tau, h \rightarrow 0$ и $\tau/h^2 \rightarrow 0$ имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi_2 y_{k\tau} &\rightarrow u(x,t) \in L_2(0,T;L_2(\Omega_1)), \\ \varphi_1, \hat{c}_i y_{k\tau} &\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} (i=1,2) \in L_2(0,T;L_2(\Omega_2)), \\ \varphi_{12}, \hat{c}_{12} y_{k\tau} &\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_3} \in L_2(0,T;L_2(\Omega_3)). \end{aligned} \quad (14)$$

Теорема 2. Функция $u(x,t)$, определенная предельными соотношениями (14) является обобщенным решением задачи (1)-(5).

Доказательство. Пусть x_k и φ_τ - следы функций $x(x) \in C^\infty(\Omega_1)$ и $\varphi(t) \in C^\infty(0,T)$, $\varphi(0) = 0$ соответственно. Умножим скалярно в H_k равенство (8) при каждом $t \in \bar{\omega}_\tau$ на $\tau x_k \varphi_\tau$, просуммируем по t от 0 до $T-\tau$ и после применения формулы суммирования по частям, получим

$$\begin{aligned} & - \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau [\hat{y}_{k\tau}, x_k](\varphi_\tau)_t + \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^2 (k_{i1}(\nabla_{i1}^2 y_{k\tau}) \hat{c}_{i1} y_{k\tau}, \hat{c}_{i1} x_k)_{H_1} \right\} \varphi_\tau^2 \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_t (k_{i2}(\nabla_{i2}^2 y_{k\tau}) \partial_{i2} y_{k\tau}, \partial_{i2} x_k)_{H_2} \varphi_\tau + \\ & + \sum_{t=0}^{T-\tau} (k_{33}(\nabla_{33}^2 y_{k\tau}) \partial_{33} y_{k\tau}, \partial_{33} x_k)_{H_3} \varphi_\tau - \tau \sigma \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau [G \hat{y}_{k\tau}, x_k](\varphi_\tau)_t = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \sum_i (\varphi_t, x_k)_i \varphi_\tau. \end{aligned}$$

Заменяя последнее тождество с эквивалентным интегральным тождеством и переходя к пределу при $\tau, h \rightarrow 0$ также, как и в работе [5], получим

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \left[2 \int_{\Omega_1} u_x \frac{d\varphi}{dt} dx + \int_{\Omega_2} \frac{d\varphi}{dt} dx \right] dt + \int_0^T \left[\int_{\Omega_1} (x_1, x_2) \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} \varphi dx + \right. \\ & \left. + \int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^2 x_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} dx \right] dt = \lim_{\tau, h \rightarrow 0} \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau^2 \sigma [G \hat{y}_{k\tau}, x_k](\varphi_\tau)_t = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_1} f(x) \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{\tau, h \rightarrow 0} \left(- \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau^2 \sigma [G \hat{y}_{k\tau}, x_k](\varphi_\tau)_t \right) = 0$$

Следовательно, приходим к следующему интегральному

тождеству

$$-\int_0^T \left[2 \int_{\Omega_1} u_x \frac{dy}{dt} dx + \int_{\Omega_2} u_x \frac{dy}{dt} dx \right] dt + \int_0^T \left[\int_{\Omega_1} (x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} \eta dx + \int_{\Omega_2} x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} \eta dx \right] dt = \int_0^T \int_{\Omega_2} f z \eta dx dt.$$

Для проведения дальнейших рассуждений рассмотрим следующее легко проверяемое неравенство

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[(y_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau})_t, \hat{y}_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau} \right] + \tau \sigma \sum_{t=0}^{T-\tau} \left[G(y_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau})_t, \hat{y}_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau} \right], \quad (15)$$

$$+ \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[A y_{k\tau} - A \hat{v}_{k\tau}, y_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau} \right] \geq 0,$$

где $y_{k\tau}$ - решение разностной схемы (8), а $\hat{v}_{k\tau}$ - обычный шаг гладкой функции $v(x, t) \in C^{\infty}(0, T; C^{\infty}(M_2))$ в точки сетки $\tau \in \tau \times \bar{M}_2$ и $v(x, 0) = 0$.

После некоторых преобразований из (15) получим

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \frac{1}{2} \sum_{\tau} (y_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau})_t - \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[(v_{k\tau})_t, \hat{y}_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau} \right] - \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[A v_{k\tau}, \hat{y}_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau} \right] + J \geq 0,$$

где

$$J = -\tau \sigma \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[G(v_{k\tau})_t, \hat{y}_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau} \right] - \tau \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[A v_{k\tau}, (y_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau})_t \right] - \tau \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \left[A v_{k\tau}, (y_{k\tau} - \hat{v}_{k\tau})_t \right].$$

Оценим каждое слагаемое, входящее в J и учитывая условие $\tau^{1/2}/h \rightarrow 0$ при $\tau, h \rightarrow 0$, аналогично [7], получим

$$\lim_{\tau, h \rightarrow 0} J = 0.$$

Таким образом, можно утверждать, что теорема доказана, так как дальнейший ход доказательства теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2 из [5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абуталиев Ф.Б. Решение задач неустановившейся фильтрации. Ташкент: ФАН, 1972. 138 с.
2. Абуталиев Ф.Б., Абуталиев Э.Б. Методы решения задач подземной гидродинамики на ЭВМ. Ташкент: ФАН, 1968. 195 с.
3. Мухидинов Н. Газогидродинамическое исследование нелинейной фильтрации жидкости и газа. Ташкент: ФАН, 1977. 152 с.
4. Мухидинов Н., Садыков М.К. Исследование краевых задач нелинейной нестационарной фильтрации в многослойных пластах//Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: РИО АН УзССР, 1983. Вып.71. С.62-78.
5. Садыков М.К. Исследование неявной разностной схемы для решения задачи нелинейной нестационарной фильтрации в двухслойном пласте//Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент: РИО АН УзССР. 1983. Вып. 72. С.14-28.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
7. Карчевский М.М., Ляшко А.Д., Павлова М.Ф. О разностных схемах для уравнения нестационарной нелинейной фильтрации//Дифференциальные уравнения. 1968. Т.21. №9. С.1692-1708.

УДК 532.546:517.947

М.З.Шмите
 ЛГУ им. П.Стучки

ПОСТАНОВКА С ОСРЕДНЕНИЕМ В ПЕРЕМЫЧКАХ ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ МНОГОСЛОЙНОГО ПЛАСТА

В данной работе рассматривается процесс распространения тепла в среде, содержащей параллельные друг другу N слоев, в которые внедряется жидкость. Предполагаем как в /1/, что основные слои разделены перемычками ненулевой мощности. Допустим также и все остальные в /1/ принятые предположения. Тогда распределение температуры описывает следующая система. Уравнения для слоев ($k = 1, N$):

$$c_{1,k} \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial t} = \lambda_{1,k} \frac{\partial^2 \tilde{T}_k}{\partial x^2} - c_{0,k} \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial x}, \quad x_k < x < x_{k+1/2}, \quad (1)$$

для перемычек ($k = 0, N-1$):

$$\frac{\partial \tilde{T}_{k+1/2}}{\partial t} = a_{k+1/2}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_{k+1/2}}{\partial x^2}, \quad x_{k+1/2} < x < x_{k+1}, \quad (2)$$

уравнения для подстилающих и покрывающих пород

$$\frac{\partial \tilde{T}_{-1/2}}{\partial t} = a_{-1/2}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_{-1/2}}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < x_0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}_{N+1/2}}{\partial t} = c_{N+1/2}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_{N+1/2}}{\partial x^2}, \quad x_{N+1/2} < x < \infty. \quad (4)$$

Здесь $a_{k+1/2}^2 = \frac{\lambda_{1,k+1/2}}{c_{1,k+1/2}}$ — температуропроводность $k+1/2$ -ой перемычки, λ — теплопроводность, c — объемная теплоемкость (индекс "1" указывает на свойства скелета пропластков, "0" —

на свойства нагнетаемой в пропласток жидкости, полуцелый индекс отражает свойства соответствующей перемычки или окружающих пород).

Условия сопряжения на границах:

$$\tilde{T}_k|_{x=x_{k,0}} = \tilde{T}_{k-1/2}|_{x=x_{k,0}}, \quad \tilde{T}_k|_{x=x_{k+1/2,0}} = \tilde{T}_{k+1/2}|_{x=x_{k+1/2,0}}, \quad (5)$$

$$\lambda_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial x} \Big|_{x=x_{k,0}} = \lambda_{k-1/2} \frac{\partial \tilde{T}_{k-1/2}}{\partial x} \Big|_{x=x_{k,0}}, \quad \lambda_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial x} \Big|_{x=x_{k+1/2,0}} = \lambda_{k+1/2} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1/2}}{\partial x} \Big|_{x=x_{k+1/2,0}} \quad (6)$$

границные и начальные условия:

$$\tilde{T}_k|_{x_2=0} = \tilde{T}_k^{(1)}(x, t), \quad \tilde{T}_k|_{t=0} = \tilde{T}_k^{(0)}(x_2, x), \quad \tilde{T}_{k+1/2}|_{t=0} = \tilde{T}_{k+1/2}^{(0)}(x_2, x). \quad (7)$$

Приведем систему уравнений из /I/, в которой отдельные пропластки τ_k действуют как средоточенные теплоемкости, что равносильно аппроксимации температуры в них константой по мощности слоев. Как в /I/, введем

$$T_k(x_2, t) = \frac{1}{H_k} \int_{x_k}^{x_{k+1/2}} \tilde{T}_k(x_2, t) dx, \quad H_k = x_{k+1/2} - x_k.$$

Получаем следующую систему уравнений (аналог постановки Доверье для многослойного пласта):

$$\frac{\partial \tilde{T}_{k+1/2}}{\partial t} = a_{k+1/2}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_{k+1/2}}{\partial x^2}, \quad x_{k+1/2} < x < x_{k+1}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (8)$$

$$x_{1/2} = -\infty, \quad x_{N+1/2} = +\infty.$$

$$C_{1,k} \frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{1}{H_k} \left[\lambda_{2,k+1/2} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1/2}}{\partial x} \Big|_{x=x_{k+1/2,0}} - \lambda_{1,k-1/2} \frac{\partial \tilde{T}_{k-1/2}}{\partial x} \Big|_{x=x_{k,0}} \right] - c_{0,k} V_k \frac{\partial T_k}{\partial x_2} \quad (9)$$

$$x = x_k, \quad x = x_k,$$

$$T_k|_{t=0} = T_k^{(0)}(x_2), \quad T_k|_{x_2=0} = T^{(1)}(t), \quad k = \overline{0, N}, \quad (10)$$

$$\tilde{T}_{k+1/2}|_{t=0} = \tilde{T}_{k+1/2}^{(0)}(x_2, x), \quad k = \overline{1, N}. \quad (11)$$

В этой постановке $T_k(x_2, t)$ означает осредненную температуру пропластков, а $\tilde{T}_{k+1/2}(x_2, x, t)$ - температуру пере-

мычек для $\kappa = \overline{0, N-1}$ и окружающих пород.

Перейдем к получению новой постановки для которой температура в перемычках аппроксимируется полиномом 2-й степени по x (см. /2/):

$$\tilde{T}_{\kappa+1/2} = \bar{u}_{\kappa+1/2} + m_{\kappa+1/2} \left(x - \frac{x_{\kappa+1/2} + x_{\kappa+1}}{2} \right) + \frac{d_{\kappa+1/2}}{\lambda_{1,\kappa+1/2} H_{\kappa+1/2}} \left(x - \frac{x_{\kappa+1/2} + x_{\kappa+1}}{2} \right)^2 \quad (12)$$

имеем

$$\frac{\partial \tilde{T}_{\kappa+1/2}}{\partial x} = m_{\kappa+1/2} + \frac{2 d_{\kappa+1/2}}{\lambda_{1,\kappa+1/2} H_{\kappa+1/2}} \left(x - \frac{x_{\kappa+1/2} + x_{\kappa+1}}{2} \right) \quad (13)$$

Используя условия (5), из (12) получаем систему:

$$\tilde{T}_{\kappa+1/2} \Big|_{x=x_{\kappa+1/2}} = T_{\kappa} = \bar{u}_{\kappa+1/2} - \frac{m_{\kappa+1/2} H_{\kappa+1/2}}{2} + \frac{d_{\kappa+1/2} H_{\kappa+1/2}}{4 \lambda_{1,\kappa+1/2}}$$

$$\tilde{T}_{\kappa+1/2} \Big|_{x=x_{\kappa+1}} = T_{\kappa+1} = \bar{u}_{\kappa+1/2} + \frac{m_{\kappa+1/2} H_{\kappa+1/2}}{2} + \frac{d_{\kappa+1/2} H_{\kappa+1/2}}{4 \lambda_{1,\kappa+1/2}}$$

К этим уравнениям добавляем определение средней по мощности пропластков температуры:

$$T_{\kappa+1/2} = \frac{1}{H_{\kappa+1/2}} \int_{x_{\kappa+1/2}}^{x_{\kappa+1}} \tilde{T}_{\kappa+1/2} dx, \quad H_{\kappa+1/2} = x_{\kappa+1} - x_{\kappa+1/2}$$

откуда

$$T_{\kappa+1/2} = \bar{u}_{\kappa+1/2} + \frac{d_{\kappa+1/2} H_{\kappa+1/2}}{12 \lambda_{1,\kappa+1/2}}$$

Из этих трех уравнений можем найти коэффициенты представления (12):

$$m_{\kappa+1/2} = \frac{T_{\kappa+1} - T_{\kappa}}{H_{\kappa+1/2}}, \quad \bar{u}_{\kappa+1/2} = \frac{1}{H} (T_{\kappa+1} - 6 T_{\kappa+1/2} + T_{\kappa}),$$

$$d_{\kappa+1/2} = \frac{3 \lambda_{1,\kappa+1/2}}{H_{\kappa+1/2}} (T_{\kappa+1} - 2 T_{\kappa+1/2} + T_{\kappa}).$$

Проинтегрировав (8) по x для $\kappa = \overline{0, N-1}$, с использова-

нием условий (13) при $x = x_{k+1}$, $x = x_{k+1/2}$, получаем уравнение для перемычек ($k = \overline{0, N-1}$)

$$\frac{\partial T_{k+1/2}}{\partial t} = 6a_{k+1/2}^2 \frac{T_{k+1} - 2T_{k+1/2} + T_k}{H_{k+1/2}^2} \quad (14)$$

с начальными условиями (осреднением (II)):

$$T_{k+1/2} \Big|_{t=0} = T_{k+1/2}^{(0)}(x_k) \quad (15)$$

При практическом решении начальные условия (II) на бесконечности (при $x \rightarrow \pm \infty$) заменяются крайними условиями на достаточно отдаленных линиях $x = x^-$, $x = x^+$:

$$\tilde{T}_{-1/2} \Big|_{x=x^-} = T_{-1/2}^{(0)}(x_2, x^-) = T^-, \quad \tilde{T}_{N+1/2} \Big|_{x=x^+} = T_{N+1/2}^{(0)}(x_2, x^+) = T^+$$

Основываясь на /I/, каждую из окружающих пород будем делить на два слоя: $x^- = x_{-2} \leq x < x_{-1}$, $x_{-1} \leq x < x_0$ и $x_N < x \leq x_{N+1}$, $x_{N+1} < x \leq x_{N+2} = x^+$ и для каждого из них вновь применим осреднение полиномом 2-й степени. Поступая как выше для получения (14), в итоге придем к уравнениям:

$$c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{2e_i}{H_i}, \quad i = -2, -1, N+1, N+2, \quad (16)$$

где $H_i = x_{i+1} - x_i$ - мощности слоев, T_i - их средние температуры, а

$$e_{-2} = \frac{3\lambda_{1,-1/2}}{2(1 + \frac{H_{-2}}{H_{-1}})} \left[\frac{3T_{-1} - 4T_{-2} + 2T^- - T_0}{H_{-1}} + \frac{T^- - T_{-2}}{H_{-2}} \right],$$

$$e_{-1} = \frac{3\lambda_{1,-1/2}}{2(1 + \frac{H_{-1}}{H_{-2}})} \left[\frac{3T_{-2} - 4T_{-1} - T^- + 2T_0}{H_{-2}} + \frac{T_0 - T_{-1}}{H_{-1}} \right].$$

Выражения e_{N+1} , e_{N+2} выписываются аналогично e_{-1} , e_{-2} , только вместо T^- - и индексов "0", "-1", "-2" в выражениях требуется поставить T^+ и индексы "N", "N+1", "N+2". Остается получить уравнения продуктивных пропластов. Для этого необходимо лишь подставить в (13) конкретные выраже-

ния коэффициентов $-m_{k+1/2}$, $d_{k+1/2}$, $k = \overline{1, N}$ и подставить после этого (13) в (9). Это приводит к таким уравнениям для температуры внутренних пропластков ($k = \overline{1, N-1}$):

$$C_{1k} \frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{1}{H_k} \left[\lambda_{1,k+1/2} \frac{-2T_{k+1} + 6T_{k+1/2} - 4T_k}{H_{k+1/2}} - \lambda_{1,k-1/2} \frac{4T_k - 6T_{k-1/2} + 2T_{k-1}}{H_{k-1/2}} \right] - C_{0,k} V_k \frac{\partial T_k}{\partial x_2}, \quad (17)$$

и температуры крайних пропластков:

$$C_{1,0} \frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{1}{H_0} \left[\frac{-4T_0 + 6T_{1/2} - 2T_1}{G_{1/2}} + \frac{4T_1 - 3T_0 - 2T_0 + T_1}{G_{-1} + G_{-2}} + \frac{T_{-1} + T_0}{G_{-1}} \left(1 + \frac{G_{-1} G_{-2}}{G_{-1} + G_{-2}} \right) \right] - C_{0,0} V_0 \frac{\partial T_0}{\partial x_2}, \quad (18)$$

$$C_{1N} \frac{\partial T_N}{\partial t} = \frac{1}{H_N} \left[\frac{-4T_N + 6T_{N-1/2} - 2T_{N-1}}{G_{N-1/2}} + \frac{4T_{N+1} - 3T_{N+2} - 2T_N + T_{N+1}}{G_{N+1} + G_{N+2}} + \frac{T_{N+1} - T_N}{G_{N+1}} \left(1 + \frac{G_{N+1} G_{N+2}}{G_{N+1} + G_{N+2}} \right) \right] - C_{0,N} V_N \frac{\partial T_N}{\partial x_2}, \quad G_i = \frac{H_i}{\lambda_{1,i}}, \lambda_{1,-1} = \lambda_{1,-2} = \lambda_{1,-1/2}. \quad (19)$$

К этим уравнениям должны быть добавлены полученные выше начальные условия и условия на входах пропластков:

$$T_k \Big|_{t=0} = T_k^{(0)}(x_2), \quad T_k \Big|_{x_2=0} = T^{(1)}(l), \quad k = \overline{0, N}. \quad (20)$$

В итоге новая постановка состоит из уравнений (14)–(20). Эту постановку будем решать разностным методом. Кратко остановимся на разностной аппроксимации уравнений (подробное их выписывание заняло бы слишком много места). Конвективные члены аппроксимируются явной разностью назад, для членов, аппроксимирующих производные по x , используется аппроксимация с весами. При этом для (16) веса обозначаются как G^{+i} , $i = -2, -1, N+1, N+2$ для (17)–(19) – члены с большим индексом чем k с весом G^{k+} , с меньшим G^{k-} . Очевидно, что эта разностная схема аппроксимирует постановку (14)–(20) с порядком $O(\tau + h_2)$, где τ , h_2 – шаги по времени и

координате x_2 .

Опишем метод решения разностных уравнений: он подобен приведенному в /1/ алгоритму, отличие состоит в том, что используется прогонка для матрицы пятидиагонального вида. Точнее, берутся разностные уравнения для $\lambda_2 = h_2$ и проводится прогонка по номерам слоев k , после этого берется $x_2 = 2h_2$, процесс прогонки повторяется и т.д. Рассмотрим устойчивость этого алгоритма реализации разностной схемы, используя приведенный в /3/ критерий. Его применение к внутренним пропласткам дает следующие условия:

$$\tau \leq \frac{H_k C_{2,k} G_{k-1/2} G_{k+1/2}}{4(\sigma^{k+1} G_{k-1/2} + \sigma^k G_{k+1/2})}, \quad k = \overline{1, N-1}$$

к крайним слоям k условиям:

$$\tau \leq \frac{H_0 C_{2,0} G_{1/2} (G_{-1} + G_{-2})}{4\sigma^0 (G_{-1} + G_{-2}) + 5\sigma^0 G_{1/2}}, \quad \tau \leq \frac{H_N C_{2,N} G_{N-1/2} (G_{N+1} + G_{N+2})}{4\sigma^N (G_{N+1} + G_{N+2}) + 5\sigma^N G_{N-1/2}}$$

к подстилающим и покрывающим слоям:

$$\tau \leq \frac{C_{-1} H_{-1} (G_{-2} + G_{-1})}{3\sigma^{-1}}, \quad \tau \leq \frac{C_{N+1} H_{N+1} (G_{N+1} + G_{N+2})}{3\sigma^{N+1}}$$

Практические расчеты подтверждают достаточность этих условий устойчивости.

В заключении отметим, что постановка (14)–(20) может быть обобщена принятием предположения линейности распределения температуры по мощности пропластков а не постоянства, как выше. Уравнения (17)–(19) в таком случае сохраняют прежний тип, изменяются лишь числовые коэффициенты при членах, аппроксимирующих производные по x .

Скажем ещё в заключении несколько слов о других публикациях, авторы которых решения по сечению многослойного пласта аппроксимируют той или другой закономерностью. В /4/, /5/, как в пропластках, так и в перемычках, решение аппроксимировалось линейной функцией. При этом в них рассматривалась полная задача неэвтермической двухфазной

фильтрации. В /6/ дано аналитическое решение для температурного поля двухслойного пласта (симметричного трехмерного), где при аппроксимации температуры пропластков принималось предположение сосредоточенной емкости с использованием линейной аппроксимации температуры между серединами пропластков.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Буйкис А.А., Шмите М.З. Разностные схемы для процессов переноса в многослойных пластах // Прикладные задачи математической физики. 1983. Вып. 29. С. 53-66.
2. Буйкис А.А. Интерполяция интегральных средних кусочно-гладкой функции параболическим сплайном // Латв. мат. ежегодник. 1985, Вып. 29. С. 194-197.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
4. Волков Д.А., Плохова Ю.В., Чакалин А.Н. Численное моделирование двухфазной изо- и неизотермической фильтрации в слоистом пласте // Динамика многофазных сред. 1981. С. 124-128.
5. Волков Д.А. К вопросу о численном моделировании процессов неизотермического вытеснения нефти водой из пластов сложного строения / МВССО СССР Казанский госуниверситет им. В.И.Ленина-Ульянова. Казань, 1981. 27 с. Деп. в ВИНТИ 07.05.81. № 2609.
6. Антимиров М.Я., Панферова А.А. О расчете температурного поля в трехслойном пласте при нагнетании в него горячей жидкости // Теория и практика добычи нефти. 1968. С. 271-280.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ
ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ НЕОДНОРОДНЫХ КВАЗИДВУМЕРНЫХ СТРУКТУР

Представительный класс различного рода теплообменных устройств и аппаратов с регулируемым температурным режимом состоит из конструктивных единиц, представляющих собой квазидвумерные структуры, протяженность которых в направлении осей x и y значительно превышает поперечные размеры по оси z (см. рис. 1). В общем случае это теплофизически и геометрически неоднородные тела V с большим числом элементарных неоднородностей. Всегда можно считать плановые размеры таких структур единичными; тогда относительный масштаб отдельных неоднородностей $\varepsilon \ll 1$.

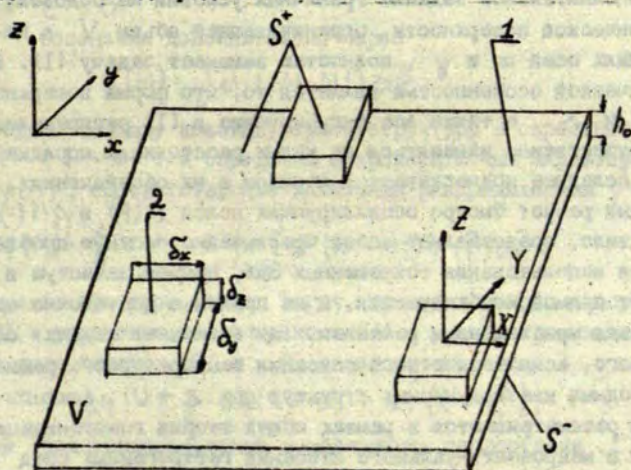


Рис. 1. Схема сегмента квазидвумерной структуры V . 1 - плоское основание, 2 - геометрические неоднородности.

Обозначим через P - произвольную точку пространства (тела V) с координатами x, y, z , а через M - ее проекцию на плоскость xy . Будем в дальнейшем знаками "+" и "-" помечать величины, характеризующие условия теплообмена рассматриваемой структуры на ее верхней и нижней (по направлению оси z) поверхностях S^+ и S^- , омываемых жидкой или газообразной средой с температурой $t_0^+(M)$ и $t_0^-(M)$. Общие уравнения, описывающие детальное стационарное температурное поле $t'(P)$ в теле V , имеют следующий вид:

$$\nabla \cdot q'(P) = f'(P), \quad q'(P) = -\lambda'(P) \nabla t'(P);$$

$$a) \left. q'_n(P) \right|_{P \in S^\pm} = \alpha'_\pm(P) (t'(P) - t_0^\pm(M)) \Big|_{P \in S^\pm} \quad (1)$$

Здесь $q'_n(q'_n)$ - вектор плотности теплового потока (проекция вектора на внешнюю нормаль n к поверхностям S^+ и S^-), λ' - коэффициент теплопроводности, f' - объемная плотность распределения тепловых источников, α'_+ и α'_- - локальные коэффициенты теплоотдачи, ∇ - дифференциальный оператор Гамильтона.

Дополнительное задание граничных условий на боковой, цилиндрической поверхности, ограничивающей объем V в направлениях осей x и y , полностью замыкает задачу (1). Ее специфической особенностью является то, что форма поверхностей S^+ и S^- , а также все фигурирующие в (1) распределения могут существенно изменяться на малых расстояниях порядка ε . Последнее подчеркивается штрихом в их обозначениях. Детальный расчет быстро осциллирующих полей $t'(P)$ и $q'(P)$, как правило, представляет собой чрезвычайно сложную проблему - даже при использовании современных ЭМ, причем зачастую в этом нет прямой необходимости, и на практике достаточно ограничиться приближенным решением. Так возникает задача осредненного, асимптотического описания температурного режима неоднородных квазидвумерных структур при $\varepsilon \rightarrow 0$, аналоги которой рассматриваются в рамках общей теории гомогенизации /1/-/4/ и макроконтинуального описания гетерогенных сред /5/, /6/. Ниже сформулированная задача исследуется на основе конкретной реализации одного из таких подходов /7/.

Введем операцию осреднения произвольного детального распределения $\psi'(P, \varepsilon)$, определенного в объеме V ,

$$\langle \psi' \rangle_{\varepsilon}(M) = \int_V \omega_{\varepsilon}(|M - \tilde{M}|) \psi'(\tilde{P}) d\tilde{P}, \quad (2)$$

где $\omega_{\varepsilon}(|M|)$ - бесконечно дифференцируемое усредняющее ядро /8/ с радиусом осреднения $\varepsilon > 0$. Естественно предположить, что осредненные поля $\langle \psi' \rangle_{\varepsilon}$ асимптотически регулярны /7/, /9/, а именно: существует зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon)$ такая, что ε и $\varepsilon/\varepsilon \rightarrow 0$, а пульсационная составляющая распределения $\langle \psi' \rangle_{\varepsilon}$ есть величина более высокого порядка малости по сравнению с его главной частью мало изменяющейся вместе со своими производными на расстояниях порядка ε . Такое допущение фактически равносильно /9/ условию G -сходимости /1/ (условию существования G -асимптотики /7/, /9/) исходной математической модели (I). Далее всегда будем считать, что радиус осреднения ε соответствующим образом согласован с микромасштабом неоднородностей ε и будем понимать под средними $\langle \psi' \rangle_{\varepsilon}(M)$ их регулярные асимптотические представления при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Обозначим дополнительно через

$$h(M) = \int_V \omega_{\varepsilon}(|M - \tilde{M}|) d\tilde{P}$$

среднюю толщину квазидвумерной структуры в окрестности точки M ($h \sim \varepsilon$) и определим макромасштабные характеристики $\varphi(M)$, соответствующие детальным распределениям $\psi'(P, \varepsilon)$,

$$\varphi(M) = \frac{1}{h} \langle \psi' \rangle_{\varepsilon} = \frac{1}{h} \int_V \omega_{\varepsilon}(|M - \tilde{M}|) \psi'(\tilde{P}) d\tilde{P} \quad (3)$$

опуская при этом штрих. Тогда, применяя операцию осреднения (2) к уравнению теплопереноса (I) с учетом граничных условий на поверхностях S^+ и S^- , найдем

$$\nabla \cdot (h q) = h f - \alpha_+ (t^+ - t_0^+) - \alpha_- (t^- - t_0^-), \quad (4)$$

где среднepoверхностные коэффициенты теплоотдачи α_{\pm} и температуры t^{\pm} задаются равенствами

$$\alpha_{\pm}(M) = \int_{S^{\pm}} \omega_{\varepsilon}(|M - \tilde{M}|) \alpha'_{\pm}(\tilde{P}) d\tilde{S}$$

$$t^{\pm}(M) = \frac{1}{\alpha_{\pm}} \int_{S^{\pm}} \omega_{\pm} (|M - \tilde{M}|) \alpha'_{\pm}(\tilde{P}) t'(\tilde{P}) d\tilde{S}.$$

Уравнение (4) записано в терминах искоемых регулярных, макромасштабных характеристик, описывающих стационарный температурный режим квазидвумерной структуры с большим числом локальных неоднородностей в среднем, без учета микромасштабных флуктуаций детальных полей. Однако для построения соответствующей замкнутой модели нужны дополнительные соотношения, связывающие q , t^+ и t^- с полем температур t . Эта проблема вывода так называемых конститутивных уравнений традиционно возникает при использовании методов осреднения /5/, /6/, и ее решение невозможно без дальнейшего более полного анализа исходной модели (I) и структуры макромасштабных распределений (3) /7/.

Последнее в свою очередь требует конкретизации формы и строения тела V . Исключительно из соображений простоты изложения ограничимся ниже рассмотрением типичного случая, когда квазидвумерная структура (см. рис. I) представляет собой пластину, на одной стороне которой (сверху), вообще говоря произвольно, расположены одинаковые неоднородности - прямоугольные параллелепипеды (выступы) со сторонами, параллельными координатным плоскостям. Их размеры по осям координат задает вектор $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$, $|\sigma| \sim \varepsilon$, а центры P^j имеют координаты x^j, y^j, z^j , $j = 1, 2, \dots$

Для анализа макромасштабных характеристик (3) и соотношений между ними по аналогии с методами теории гомогенизации периодических структур /2/-/4/ свяжем с каждой неоднородностью специальную систему так называемых "быстрых" координат X, Y, Z вида

$$x = x^j + \sigma_x X, \quad y = y^j + \sigma_y Y, \quad z = z^j + \sigma_z Z. \quad (5)$$

Пусть далее $\sigma(P)$ - характеристическая функция тела V ; тогда, очевидно,

$$\langle \sigma \rangle_z = h \equiv h_0 + h_r,$$

где h_0 - толщина пластины-основания, а h_r - средняя толщина прямоугольных выступов, рассчитанная на единицу площади основания.

Введем новый тип осредненных характеристик /7/, которые будем называть условными средними / σ /, отмечая их чертой снизу,

$$\underline{\sigma}(M; R) = h_+^{-1} \delta_x \delta_y \delta_z \sum_j \omega_j (|M - M^j|) \sigma(p^j + \delta R),$$

$$\underline{\sigma}(M; R) \varphi(M, R) = \quad (6)$$

$$= h_+^{-1} \delta_x \delta_y \delta_z \sum_j \omega_j (|M - M^j|) \sigma(p^j + \delta R) \varphi'(p^j + \delta R),$$

где R - вектор-точка с координатами X, Y, Z в пространстве быстрых переменных.

Поля условных средних описывают в среднем в окрестности точки M детальные процессы, происходящие вокруг отдельной неоднородности в масштабе быстрых координат R . Как и выше, полагая, что $\eta = \eta(\varepsilon)$ и $\varepsilon/\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, под φ будем понимать их регулярное асимптотическое представление. При достаточно общих предположениях /7/ можно считать, что величины (3) и (6) не зависят от выбора усредняющего ядра и непосредственной проверкой показать, что

$$\varphi(M) = \frac{\delta_z}{h_+} \int_{N/\varepsilon} (|N|) \underline{\sigma}(M, R) \varphi(M, R) dR, \quad (7)$$

где $N = (X, Y)$, $\varepsilon \rightarrow 0$;

это равенство предопределяет значение условных средних при построении конститутивных соотношений для различных макроконтинуальных характеристик, фигурирующих в (4), так как непосредственно сводит данную проблему к задаче нахождения соответствующих величин типа φ .

Заметим, что по определению (6) внутри выделяемой (пробной) неоднородности с центром в начале координат ($R = 0$) и в непосредственной близости от нее в плоском основании $\underline{\sigma}(R) \equiv 1$ так же, как и $\sigma(p^j + \delta R)$, $j = 1, 2, \dots$. Далее же с ростом $|R|$ величина $\underline{\sigma}(R)$ нетривиально изменяется в зависимости от характера взаимного расположения выступов. В связи с этим естественно возникают две типичные предельные ситуации (см. рис.2):

1. Квазидвумерная структура является периодической и может быть получена путем дублирования некоторой элемен-

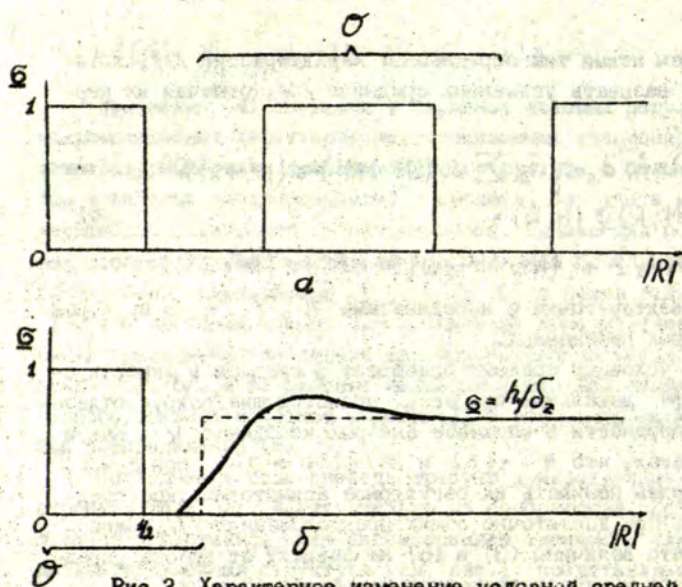


Рис.2. Характерное изменение условной средней концентрации неоднородностей $\sigma(R)$ при $|Z| < 1/2$ вдоль координатных осей с ростом $|R|$ в случае периодического (а) и хаотического (б) расположения выступов.

тарной ячейки периодичности по двум неколлинеарным направлениям в плоскости $x y$. Образ \mathcal{C} этой ячейки в пространстве быстрых переменных в плоскости $X Y$ будет так же областью периодичности функции $\sigma(R) = \sigma(P_j + \delta R)$ при любом j .

2. Неоднородности размещены на плоском основании хаотически, без дальнего порядка в положениях их центров, и на некотором расстоянии от пробного выступа при $|Z| < 1/2$ с ростом $|R|$ $\sigma(R)$ быстро изменяется от 0 до своего предельного значения h_1 / δ_2 .

В обоих случаях в пространстве быстрых переменных в окрестности пробной частицы, где $\sigma(R)$ совпадает с характеристической функцией структуры, уравнения для полей ус-

ловных средних является прямым следствием исходной детальной модели. Действительно, переходя в (I) и новым переменным (5), умножая полученные соотношения на $k_x^{-1} \delta_x \delta_y \delta_z \omega (IM - M^I)$ и суммируя по j , в соответствии с (6) найдем

$$\bar{\nabla} \cdot (\Lambda \cdot \bar{\nabla} \underline{t}) = \varepsilon^2 \underline{f}, \quad \underline{q} = -\varepsilon^2 \delta (\Lambda \cdot \bar{\nabla} \underline{t}); \quad (8)$$

$$a) \quad \underline{q}_n \Big|_{R \in \underline{S}^\pm} = \underline{d}_\pm (\underline{t} - t_0^\pm) \Big|_{R \in \underline{S}^\pm}.$$

Здесь \underline{S}^\pm - верхняя и нижняя поверхности структуры в окрестности пробной неоднородности, образы \mathcal{J}^\pm в пространстве быстрых переменных, $\bar{\nabla}$ - дифференциальный оператор Гамильтона, действующий по координатам X, Y, Z , Λ - диагональная матрица (тензор) с ненулевыми элементами на главной диагонали:

$$\Lambda_x = \varepsilon^2 \lambda / \delta_x^2, \quad \Lambda_y = \varepsilon^2 \lambda / \delta_y^2, \quad \Lambda_z = \varepsilon^2 \lambda / \delta_z^2.$$

При выводе уравнений (8) предполагалось, что $\lambda^i(\rho^j + \delta k)$, $\underline{d}_\pm^i(\rho^j + \delta k)$ не зависят от j и совпадают со своими условными средними $\lambda(R)$ и $\underline{d}_\pm(R)$, а $t_0^\pm(M) = t_0^\pm(M)$ и не зависят от R .

Подчеркнем еще раз, что уравнения (8) справедливы лишь в некоторой конечной окрестности начала координат ($R=0$) и не образуют замкнутой модели. Однако в зависимости от типа квазидвумерной структуры (характера расположения неоднородностей) при тех или иных дополнительных предположениях на их основе может быть сформулирована задача приближенного построения полей условных средних.

Рассмотрим вначале первую из выделенных выше предельных ситуаций - случай периодического расположения неоднородностей. При этом, исходя из физического смысла полей условных средних, нетрудно видеть [7], что их флуктуации относительно соответствующих макроконтинуальных распределений есть периодические функции по быстрым переменным. Таким образом, уравнения (8), действующие в ячейке θ , должны быть дополнены условиями типа:

$$\underline{t}(M; R) = t(x + \delta_x X, y + \delta_y Y) - \quad (9)$$

δ - периодическая функция по X и Y .

Одновременно равенства (7) переходят в условия нормировки

$$\begin{aligned} t(M) &= \frac{h_z}{h} \int dZ \int_{\sigma} \underline{\sigma}(R) \underline{t}(M; R) dx dy, \\ q(M) &= \frac{h_z}{h} \int dZ \int_{\sigma} \underline{\sigma}(R) q(M; R) dx dy, \\ t^{\pm}(M) &= \frac{1}{\alpha_{\pm}} \int_{\underline{\sigma}^{\pm}} \underline{\sigma}_{\pm}(M, R) \underline{t}^{\pm}(M; R) d\underline{\sigma}. \end{aligned} \quad (10)$$

Первое из этих соотношений является условием разрешимости задачи (8), (9), а два других представляют собой недостающие конститутивные уравнения, замыкающие (4).

Асимптотический анализ модели (4), (8)-(10) при $\epsilon \rightarrow 0$ позволяет найти главные члены асимптотических разложений всех входящих в нее макромасштабных и условных средних характеристик изучаемого процесса. Изложенная схема фактически совпадает с известными результатами теории гомогенизации периодических структур [2]-[4]. Этим, однако, не исчерпываются возможности применения методов осреднения.

Так в случае хаотического расположения центров неоднородностей в квазидвумерной структуре при приближенной постановке задачи для условных средних представляется целесообразным аппроксимировать условную среднюю концентрацию выступов $\underline{\sigma}(R)$ кусочно постоянной функцией, полагая, как показано на рис. 2, при $|Z| < 1/2$

$$\underline{\sigma}(R) = \begin{cases} 1, & |X|, |Y| < 1/2; \\ 0, & |X|, |Y| \geq 1/2, (X, Y) \in \theta; \\ h_z/\delta_x, & (X, Y) \notin \theta. \end{cases}$$

Наилучшее в среднем приближении такого вида реализуется [7] на ячейке θ с площадью $mes \theta = \delta_x/h_z$, граница $\partial\theta$, которой является линия равного уровня функции $\underline{\sigma}(R)$, зависящей только от переменных X и Y при $|Z| < 1/2$.

Флуктуации теплового потока и температурного поля в теле V обусловлены неоднородностями и, следовательно, поведение соответствующих условных средних характеристик должно коррелировать с видом $\underline{Q}(R)$. Последнее дает основание приближенно считать, что вне ячейки θ условные средние совпадают с макроконтинуальными распределениями,

$$\frac{\partial z}{h} \int \underline{Q}(R) \psi(M; R) dz = \varphi(x + \delta_x X, y + \delta_y Y), (X, Y) \notin \theta.$$

При этом остаются в силе условия нормировки (10), а недостающие граничные условия на $\partial\theta$, необходимые для замыкания задачи (8), (10), непосредственно вытекают из сделанного выше предположения и из непрерывности теплового потока на $\partial\theta$

$$\left. q_n \right|_{R \in \partial\theta} \approx \frac{h}{h_0} q_n(M). \quad (11)$$

Таким образом, осредненное описание температурного режима квазидвумерных структур в случае хаотического расположения неоднородностей оказывается модификацией так называемого метода самосогласованного поля и предлагавшихся ранее ячеечных моделей /5/, /6/.

Основное различие между двумя рассмотренными типами структур математически в первом приближении выражается в выборе ячейки θ и краевых условий (9) или (11) на ее границе.

Полученные результаты, в частности, могут быть использованы при разработке математических моделей для расчета температурных полей в радиоэлектронных устройствах /10/ и представляют собой одну из возможных реализаций системного подхода /11/ к тепловому проектированию подобных сложных иерархических структур со спектром пространственных масштабов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и ϵ -сходимость дифференциальных операторов // Успехи математических наук. 1979. Т. 34. № 15. С. 66-134.

2. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.:Наука,1984. 352 с.
3. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.:Мир,1984. 472 с.
4. Вепшошван А., Лионс П.-Л., Вараниселмон С. Asymptotic analysis for periodic structures. -North-Holland Publ. Comp., 1978. -297 p.
5. Буевич Ю.А., Щелчкова И.Н. Континуальная механика монодисперсных суспензий. Уравнения сохранения/Институт проблем механики АН СССР. М.,1976. Препр.№ 72.-57 с.
6. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука,1978. -336 с.
7. Саламатин А.И. Математические модели дисперсных потоков. Казань:Изд-во Казан.ун-та,1967. -172 с.
8. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.:Наука,1968. -576 с.
9. Саламатин А.Н. ϵ -асимптотика операторов и осреднение в механике многофазных сред//Изв.вузов. Математика. 1985. № 10. С.66-73.
10. Саламатин А.Н., Ярцев О.В., Чугунов В.А. Среднее описание температурных полей в квазирегулярных структурах//Механика машиностроения: Тезисы докл.науч.-техн. конф. Секция "Прикладные задачи механики сплошной среды". Брест: КамИ,1987. С.77-78.
11. Дульнев Г.Н. Тепло- и массообмен в радиэлектронной аппаратуре. М.:Высшая школа,1984. 247 с.

Межвузовский сборник научных трудов
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1988

УДК 517.947:536.33 : 621.798.14

Н.Л.Уланова

СКБ ЭП при Госплане ЛатвССР

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА
ПРИ НАЛИЧИИ ТОНКИХ СЛОЕВ

Большинство процессов, происходящих в вакуумных установках, предназначенных для нанесения покрытий на материалы или получения отделяемых конденсатов, связаны либо с нагревом, либо с охлаждением. Особенности таких задач применительно к вакуумной технологии являются:

а) сложные условия на поверхностях, включающие в себя условия теплообмена излучением с окружающими поверхностями, неидеального теплового контакта, теплообмена с жидкими теплоносителями, учёт теплоты конденсации и т.п.;

б) наличие тонких, иногда соприкасающихся поверхностей или слоёв различных толщин и теплофизических характеристик, что приводит к необходимости решать сопряжённые задачи теплообмена при наличии малых параметров. Эти задачи достаточно сложны в решении и часто при использовании аналитических методов приходится делать существенные упрощения, что может привести к большим погрешностям результатов. Поэтому для их реализации целесообразно пользоваться аппаратом численных методов, где сложность граничных условий не вызывает больших дополнительных трудностей.

Для облегчения решения сопряжённых задач предлагается использование методики из /1/, изменяющей постановку задач с помощью метода осреднения по тонким слоям: уравнение теплопроводности для слоя с соответствующими граничными условиями преобразуется в граничное условие для основной области.

Пример использования этой методики для задачи в декартовой системе координат с граничным условием Стефана-Больцмана на наружной поверхности осредняемого слоя показан в /2/. Здесь предлагается аналогичная методика для задач в цилиндрической системе координат с идеальным и неидеальным контактом между слоями.

Рассматривается вакуумная установка для получения фольг. Установка представляет собой многослойный цилиндр, поперечное сечение которого показано на рис. 1. Цилиндр состоит из металлического корпуса (1), слоя жидкого теплоносителя с внутренними источниками тепла (2) и металлического барабана (3), охлаждаемого водой (5). На наружную поверхность конструкции наносится слой отделяемого конденсата (6). Внутренняя поверхность барабана отделена от воды металлическими рёбрами, препятствующими быстроту стоку тепла от барабана. Совокупность этих рёбер, соединяющих между собой, назовём оребренным слоем, сопряжённым барабану (4).

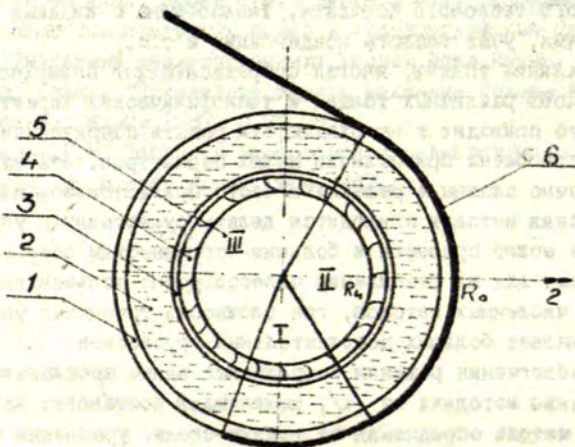


Рис. 1. Сечение цилиндра. Обозначения в тексте.

В зонах I, II необходимо учитывать влияние слоя конденсата.

Уравнение для слоя имеет вид:

$$\beta_0 c_0 \frac{\partial \bar{T}_0}{\partial t} = \lambda_0 \left(\frac{\partial^2 \bar{T}_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_0}{\partial \varphi^2} \right), \quad R < r < R_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (1)$$

На наружной поверхности слоя либо условие теплообмена с внешней поверхностью (зона II):

$$\lambda_0 \frac{\partial \bar{T}_0}{\partial r} = -\varepsilon_0 \sigma (\bar{T}_0^4 - T_{\text{вн}}^4), \quad r = R_0, \quad (2)$$

либо заданный тепловой поток (зона I):

$$\lambda_0 \frac{\partial \bar{T}_0}{\partial r} = Q.$$

На линии сопряжения слоёв условие равенства тепловых потоков:

$$\lambda_0 \frac{\partial \bar{T}_0}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}, \quad r = R. \quad (3)$$

Осредняя уравнение для слоя по толщине:

$$T_0(\varphi, t) = \frac{2}{R_0^2 - R^2} \int_R^{R_0} r \bar{T}_0(\varphi, r, t) dr$$

и используя (3), преобразуем его в граничное условие для уравнения (1) с учётом осреднённого слоя. Поскольку $\lambda_0 \gg \lambda_1$, то в случае идеального контакта слоёв можно считать, что $T_1/R = \bar{T}_0 = T_0$, и граничное условие принимает вид, $r = R$:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\frac{R_0 \varepsilon_0 \sigma}{R} (T_0^4 - T_{\text{вн}}^4) - \frac{\beta_0 c_0 (R_0^2 - R^2)}{2R} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\omega_1 |R_0|}{R} \lambda_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial \varphi^2}. \quad (4)$$

Если же между корпусом и наносимым слоем конденсата существует или газовый зазор, или слой защитной смазки, то между поверхностями ставится условие идеального контакта - скачок температур при равенстве тепловых потоков:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \alpha (T_1 - T_0), \quad r = R, \quad (5)$$

где T_0 - температура в слое конденсата. Тогда условие (4) принимает вид:

$$-\alpha (T_1 - T_0) = -\frac{R_0 \varepsilon_0 \sigma}{R} (T_0^4 - T_{\text{вн}}^4) - \frac{\beta_0 c_0 (R_0^2 - R^2)}{2R} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\omega_1 |R_0|}{R} \lambda_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial \varphi^2} \quad (6)$$

Для оребренного слоя также рассматривается уравнение теплопроводности:

$$\rho_4 c_4 \frac{\partial T_4}{\partial t} = \lambda_4 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_4}{\partial r}, \quad R_4 < r < R_3,$$

на внутренней поверхности - условие контактного теплообмена с водой:

$$-\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial r} = -\alpha_3 (T_4 - T_6), \quad r = R_4.$$

После осреднения по толщине оребренного слоя:

$$T(t) = \frac{\lambda}{R_3^2 - R_4^2} \int_{R_4}^{R_3} r T_4(r, t) dr,$$

граничное условие для барабана на внутренней поверхности принимает вид:

$$-\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} = -\frac{\rho_4 c_4 (R_3^2 - R_4^2)}{2R_3} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{R_4}{R_3} \alpha_3 (T - T_6), \quad r = R_3.$$

Предположим линейное распределение температуры по толщине осредненного слоя:

$$T = T_3 + \Delta T_3 / 2, \quad \text{где } \Delta T_3 = \frac{\lambda_3 (R_3 - R_4)}{\lambda_4} \frac{\partial T_3}{\partial r}.$$

Окончательный вид граничного условия для барабана при $r = R_3$:

$$-\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} = -\frac{\rho_4 c_4 (R_3^2 - R_4^2)}{2R_3} \frac{\partial (T_3 + \Delta T_3 / 2)}{\partial t} - \frac{R_4}{R_3} \alpha_3 (T_3 + \Delta T_3 / 2 - T_6).$$

Такой вид граничного условия позволяет учитывать и теплофизические и геометрические размеры осредненного слоя.

Во второй задаче изменение граничных условий по наружной поверхности корпуса приводит к необходимости рассмотреть двумерную задачу.

Уравнение теплопроводности для корпуса:

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varphi^2} \right), \quad R_1 < r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

с граничным условием на внутренней поверхности:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\alpha_2 (T_1 - T_2), \quad r = R_1.$$

На наружной поверхности в зоне III - условие теплообмена излучением с внешней стенкой установки:

Тепловая задача для этой установки состоит из двух подзадач:

1. Разогрев корпуса барабана до рабочей температуры с помощью подогреваемого теплоносителя. При этом необходимо оценить влияние оребренного слоя на изменение температуры как в теплоносителе, так и в корпусе. Для решения этой подзадачи используется одномерная постановка по радиальной координате, поскольку условия по всей окружности корпуса одинаковы.

2. Изменение температуры в слое конденсата на поверхности корпуса при идеальном и неидеальном контакте между нанесенным слоем и корпусом. Рассматривается двумерная постановка задачи в цилиндрической системе координат, с различными условиями по окружности корпуса: зона I - нанесение конденсата, зона II - остывание нанесенного слоя, зона III - стабилизация температуры на корпусе после отделения конденсата.

Для первой задачи рассчитываются распределения температуры по оси r в корпусе (1), барабане (3) и осредненное значение температуры в жидком теплоносителе (2), учитывая, что вещество теплоносителя интенсивно перемещивается. Уравнения теплопроводности для перечисленных слоев связаны граничными условиями контактного теплообмена. Между барабаном и оребренным слоем ставятся условия идеального сопряжения слоев, включающие в себя равенство температур и тепловых потоков.

Уравнение для барабана имеет вид:

$$\rho_3 c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \lambda_3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_3}{\partial r}, \quad R_3 < r < R_2.$$

На наружной поверхности - контактный теплообмен с теплоносителями:

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} = -\alpha_2 (T_3 - T_1), \quad r = R_2.$$

На внутренней поверхности условия идеального контакта:

$$T_3 = T_4, \quad \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} = \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial r}, \quad r = R_3.$$

Для повышения до 2-го порядка разностную аппроксимацию условия (5), используем разложение производной в ряд Тейлора:

$$\tau \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_R = \tau \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{R-h/2} + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\tau \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \Big|_{R-h/2}$$

откуда получаем условие при $\tau = R$:

$$\beta_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\lambda_1}{R^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} - \frac{2\lambda_1(R-h/2)}{Rh} \frac{\partial T_1}{\partial r} - \frac{2\alpha}{h} (T_1 - T_0) \quad (7)$$

При приведении уравнений (6) и (7) к виду $T_1 = \alpha T_0 + \beta$ из (7) и $T_1 = \gamma T_0 + \delta$ из (6), получаем такое выражение для

$$T_0 = (\delta - \beta) / (\alpha - \gamma), \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{2R\lambda h}{(R-h/2)(2\tau\lambda_1 + \beta_1 c_1 h^2)}; \quad \gamma = 1 + \frac{R_0 \epsilon_0 \sigma}{R\lambda} T_0^3 + \frac{\beta_0 c_0 (R_0^2 - R^2)}{2R\lambda\tau}$$

$$\beta = \frac{(R-h/2)^2 (2\tau\lambda_1 T_{h-1} + \beta_1 c_1 h^2 T_h) + \tau h^2 \lambda_1 (\partial^2 T_1 / \partial r^2)}{(R-h/2)^2 (2\tau\lambda_1 + \beta_1 c_1 h^2) + 2R\lambda h (R-h/2)}$$

$$\delta = \frac{R_0 \epsilon_0 \sigma}{\lambda R} T_0^4 + \frac{\beta_0 c_0 (R_0^2 - R^2)}{2R\lambda\tau} T_0 + \frac{\lambda_0 \ln |R_0/R|}{R\lambda} \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2}$$

Полученное из (8) значение T_0 используется в (7) при реализации граничного условия на наружной поверхности корпуса с учётом осреднённого по толщине нанесённого слоя, имеющего неидеальный контакт с поверхностью корпуса.

На рис. 2 показана зависимость температуры теплоносителя и на внутренней поверхности оребрённого слоя в зависимости от коэффициента теплопроводности слоя при различных мощностях тепловых источников Q_0 .

На рис. 3 показано изменение максимальной температуры конденсата в случае идеального контакта между слоями и неидеального контакта при различных значениях α .

Обозначения: R - радиус, λ - коэффициент теплопроводности, ρ - плотность, c - теплоёмкость, α - коэффициент теплоотдачи, ϵ - степень черноты материала, σ - постоянная Стефана-Больцмана, τ - шаг по времени, h - шаг по оси r .

В заключение хочется выразить благодарность Буйкису А.А. за полезные советы и помощь при выводе разностных схем.

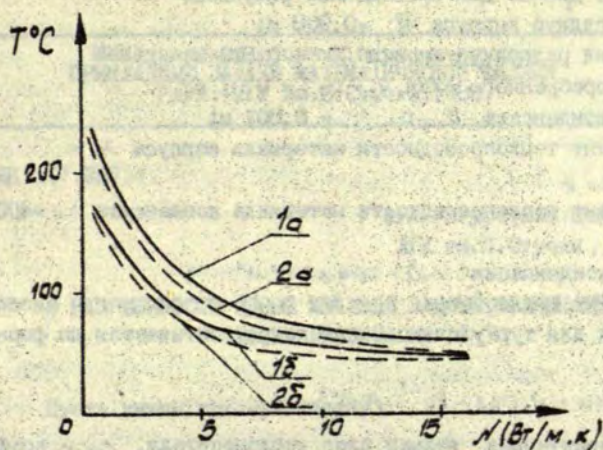


Рис. 2. Зависимость температуры в зависимости от коэффициента теплопроводности слоя. 1 - теплоноситель, 2 - внутренняя поверхность оребренного слоя, $\alpha \cdot Q_0 = 20$ кВт, $\beta \cdot Q_0 = 14$ кВт.

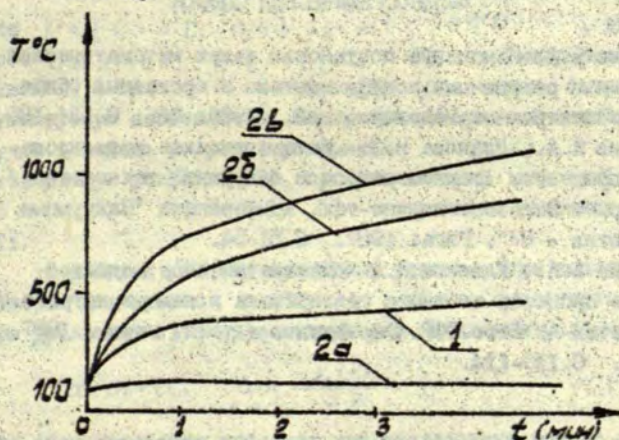


Рис. 3. Изменение во времени максимальной температуры конденсата. 1 - идеальный контакт, 2 - неидеальный контакт, $\alpha \cdot \alpha = 1$, $\sigma \cdot \alpha = 100$, $\beta \cdot \alpha = 775$.

Численные данные для приведенных рисунков:

Внешний радиус корпуса $R = 0,908$ м;

внутренний радиус установки $R_u = 0,820$ м;

толщина оребренного слоя $R_3 - R_u = 0,01$ м;

толщина конденсата $R_0 - R = 0,001$ м;

коэффициент теплопроводности материала корпуса $\lambda_1 = 15,5$ Вт/м К;

коэффициент теплопроводности материала конденсата $\lambda_0 = 400$ Вт/м К;

теплота конденсации $Q = 204$ кВт/м²;

коэффициент теплообмена $\alpha_x = Nu \cdot \lambda_1 / D$, где число

Нуссельта для турбулентного потока рассчитывается по формуле:

$$Nu = 0,021 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,43} \cdot \epsilon_k,$$

D - характерный размер слоя теплоносителя, ϵ_k - коэффициент, учитывающий изменение среднего коэффициента теплоотдачи по длине слоя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Буйкис А.А. Изменение постановки задач математической физики с разрывными коэффициентами в составных областях // Электронное моделирование. 1986. №6. С.131-136.
2. Буйкис А.А., Уланова Н.Л. Математическое моделирование процессов теплопереноса в вакуумной технологии // Матер. 4 Всесоюз. научно-тех. конференции "Вакуумные покрытия - 87". Рига: 1987. С.51-54.
3. Буйкис А.А., Уланова Н.Л. Математическое моделирование процесса сложного теплообмена в камере нагрева. // Известия АН Латв.ССР. Сер. Физич. и техн. наук. 1987. №5. С.110-114.

УДК 517.927.4

А. А. Унгуре, Я. В. Цепитис
ЛГУ им. П. Стучки

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКШЕЙ В
ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Пусть имеем краевую задачу

$$x'' + \frac{1-p+q}{t} x' - \frac{pq}{t^2} x = f(t, x, x'), \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = b. \quad (2)$$

где $p \in [1, +\infty[$, $q \in]-\infty, 2[$, $b \in \mathbb{R}$, для любого $\delta \in]0, 1[$, $f:]\delta, 1[\times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция, а при $t=0$ функция f имеет, быть может, не-суммируемую особенность. Под решением краевой задачи (1), (2) будем понимать непрерывную функцию $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям (2), сужение которой для любого $\delta \in]0, 1[$ на $[\delta, 1]$ является решением уравнения (1).

В работах /1/, /2/ приведены условия, при выполнении которых для любого $c \in \mathbb{R}$ локально существует решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t)}{t^p} = c. \quad (3)$$

Это обстоятельство побудило нас исследовать вопрос о применимости метода анализа фазовой плоскости (см., например, /3/) к изучению краевой задачи (1), (2).

Л е м м а 1. Пусть для всех $k \in]0, +\infty[$, $\alpha \in [0, k]$, $u, v \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$f(\tau k^{-1}, u k^{1-p}, v k^{2-p}) = k^{3-p} f(\tau, u, v), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\tau^{3-p} f(\tau, u \tau^{p-1}, v \tau^{p-2})) = 0. \quad (5)$$

Тогда разрешимость краевой задачи (1), (2) возможно изучить методом анализа фазовой плоскости.

Доказательство. Заменой переменных

$$u = x/|c|^{p-1}, \quad \tau = t/|c| \quad (6)$$

условия (3) преобразуются в следующей форме

$$u(0) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{u(\tau)}{\tau^p} = \operatorname{sign} c, \quad (7)$$

равенство (4) гарантирует, что уравнение (1) в новых переменных не содержит c . Далее введем переменные

$$\xi = u \tau^{1-p}, \quad \eta = u' \tau^{2-p}. \quad (8)$$

Дифференцируя выражения (8) и используя уже преобразованное уравнение (1) для исключения переменных u и u' , получаем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{(1-p)\xi + \eta}{\tau}, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{p q \xi + (1-q)\eta + \tau^{3-p} f(\tau, \xi \tau^{p-1}, \eta \tau^{p-2})}{\tau}. \end{cases}$$

Из равенства (5) следует, что существует непрерывная функция $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\tau^{3-p} f(\tau, \xi \tau^{p-1}, \eta \tau^{p-2}) = \psi(\xi, \eta).$$

и мы в (ξ, η) плоскости получаем уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{p q \xi + (1-q)\eta + \psi(\xi, \eta)}{(1-p)\xi + \eta}. \quad (9)$$

Условия (3) совместно с выражениями (6) и (8) дают

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \xi(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \eta(\tau) = 0,$$

а второе из условия (2), согласно сделанным заменам переменных, при $\tau = |c|$ дает $\xi(\eta) = b$, $\eta \in \mathbb{R}$.

Следовательно, число решений краевой задачи (1), (2) равно числу пересечений в (ξ, η) плоскости прямой $\xi = b$ с полутраекториями уравнения (9), выходящими из точки начала координат и соответствующими неотрицательным значениям параметра τ . Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. В частности, равенства (4) и (5) выполнены, если $\rho = 1$ и функция f имеет следующий вид

$$f(t, x, x') = x'^2 f_1(x) + \frac{x'}{t} f_2(x) + \frac{1}{t^2} f_3(x), \quad (10)$$

где $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемые функции, при этом имеем

$$\psi(\xi, \eta) = \eta^2 f_1(\xi) + \eta f_2(\xi) + f_3(\xi).$$

Далее, если $f_3(0) = 0$, то точка начала координат является особой точкой уравнения (9), тип которой определяется характеристическим уравнением соответствующей линеаризованной системы. Если $q > 0$ и $f_2(0) = 0, f_2'(0) > -q$, то эта особая точка является седлом. Следовательно, в этом случае разрешимость краевой задачи (1), (2) устанавливается пересечением прямой $\xi = b$ с неустойчивой сепаратрисой седла. Эта сепаратриса в точке начала координат касается вектора, компоненты которого положительны.

З а м е ч а н и е 2. Пусть выполнены условия леммы I и $\rho = 1$, тогда для численного решения краевой задачи (1), (2) удобно пользоваться методом преобразования (см. /4/). Действительно, решаем задачу Коши для уравнения

$$u'' + \frac{q}{\tau} u' - \frac{q}{\tau^2} u = f(\tau, u, u')$$

с условиями (7) да значения τ_0 , при котором выполняется $u(\tau_0) = b$. После этого остается полученное решение преобразовать формулами (6).

Сформулированный нами результат получил хорошее применение к краевой задаче, возникшей в связи с развитием нового подхода к описанию гравитационного взаимодействия в пространстве Минковского. Решая систему уравнений теории гравитации, предложенную в /5/, внутри статического сферически-симметрического гравитационного поля, в работе

/6/ получена краевая задача, которую после некоторых несложных преобразований запишем в следующей форме

$$\mathcal{L}x = q(t, x, x'), \quad (11)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 2, \quad (12)$$

$$0 \leq x(t) \leq 2, \quad t \in [0, 1], \quad (13)$$

где для краткости обозначено

$$\mathcal{L}x = x'' + \frac{2}{t}x' - \frac{2}{t^2}x,$$

$$q(t, x, x') = x'^2 q_1(x) + \frac{1}{t^2} q_2(x) + q_3(x),$$

$$q_1(x) = -\frac{x}{a^2 - x^2}, \quad q_2(x) = -\frac{2x^3}{a^2},$$

$$q_3(x) = \frac{3R^2 x}{a^2} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{R^2 x}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$R^2 = 2a^2, \quad a \geq 2.$$

Непосредственным изучением функций q_1, q_2, q_3 заключаем следующее. Функции q_1, q_2, q_3 на промежутке $] -a, a [$ непрерывно дифференцируемы, $q_1'(0) > -2 = -q_1$,

$$q_2(0) = q_3(0) = q_2'(0) = 0. \quad (14)$$

существует число $a_0 = \frac{27}{16} \sqrt{2}$ такое, что

$$q_3(x) \geq 0, \quad x \in [0, 2], \quad a \in [a_0, +\infty[, \quad (15)$$

при фиксированном $x \in [0, 2]$ монотонно возрастающей по a на $[2, a_0]$ является функция

$$q_4(x) = (1 - x^2) q_1(x) q_3(x), \quad x \in [0, 2].$$

и, следовательно, при фиксированных $t \in]0, 1[, x \in] -a, a [, x' \in \mathbb{R}$ функция q на $[2, a_0]$ минимальное значение принимает при $a = 2$. Для дальнейшего существенно будет и то, что для любого $a > 2$ имеем неравенство

$$2x + g_2(x) > 0, \quad x \in]0, 2[.$$

Мы, воспользуясь также методикой априорных оценок, докажем разрешимость краевой задачи (II)–(I3), указывая для решения этой задачи легко вычисляемые оценки, при этом ограничимся лишь значениями $a > 2$, так как случай $a = 2$ с этой точки зрения хорошо разобран в работе /7/. Так как функция f , определенная формулой (I0), удовлетворяет условию Бернштейна (см. /8/), и в операторе \mathcal{L} имеем $p = 1$, $q = 2$ то простым следствием теоремы из /2/ является следующая лемма.

Л е м м а 2. Пусть функция f определяется формулой (I0), $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ — непрерывная функция,

$$f_1(t, x, x') = f(t, x, x') + \varphi(x), \quad (I6)$$

и существуют дважды непрерывно дифференцируемые функции $\alpha, \beta:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \quad t \in]0, 1[, \quad \alpha(1) \leq \epsilon < \beta(1),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0 < \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha'(t) < +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \beta'(t) > -\infty.$$

$$\mathcal{L}\alpha \geq f_2(t, \alpha, \alpha'), \quad \mathcal{L}\beta \leq f_2(t, \beta, \beta'), \quad t \in]0, 1[.$$

Тогда краевая задача для уравнения $\mathcal{L}x = f_2(t, x, x')$ с условиями (2) имеет непрерывное решение $x:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее оценке

$$\mathcal{L}(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \quad t \in]0, 1[. \quad (I7)$$

Т е о р е м а. Краевая задача (II)–(I3) разрешима при всех значениях параметра $a > 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем два вспомогательных уравнения

$$\mathcal{L}x = \bar{g}(t, x, x'), \quad (I8)$$

где $\bar{g}(t, x, x') = x^2 g_1(x) + \frac{1}{2} g_2(x)$,

$$\mathcal{L}x = \tilde{g}(t, x, x'), \quad (19)$$

$$\text{где } \tilde{g}(t, x, x') = x'^2 + \frac{1}{t^2} g_1(x) + \frac{1}{t^2} g_0(x).$$

Пользуясь заменами переменных (6) и (8) эти уравнения соответственно сводятся к уравнениям в фазовой плоскости

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\xi - \eta + \eta^2 g_1(\xi) + g_0(\xi)}{\eta}, \quad (20)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\xi - \eta + \eta^2 g_1(\xi) + g_1(\xi) + g_0(\xi)}{\eta}.$$

Пусть $a \in [a_0, +\infty[$. В силу соотношения (14), замечания I и того, что уравнение (20) на полосе $\xi \in]0, 2]$, $\eta \in \mathbb{R}$ не имеет особых точек, существует монотонное решение $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ краевой задачи (18), (12), и следовательно, выполняется оценка

$$0 < \beta(t) \leq 2; \quad t \in [0, 1].$$

Из неравенства (15) следует, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\beta &= \tilde{g}(t, \beta, \beta') \leq g(t, \beta, \beta') \leq \\ &\leq \tilde{g}(t, \beta, \beta'), \quad t \in]0, 1]. \end{aligned}$$

Выбирая $\mathcal{L}(t) = 0$, $t \in [0, 1]$, по лемме 2 устанавливаем существование решения краевой задачи (19), (12), которое снова обозначим через \mathcal{L} . Для этого решения выполняется оценка

$$0 \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (21)$$

Заметим, что существование единственного решения \mathcal{L} краевой задачи (19), (12) обеспечивается и замечанием I, однако непосредственным применением этого замечания мы не можем установить оценку (21). Наконец, неравенство

$$\tilde{g}(t, \mathcal{L}, \mathcal{L}') \geq g(t, \mathcal{L}, \mathcal{L}'), \quad t \in]0, 1].$$

совместно с леммой 2 влечет разрешимость краевой задачи (II)-(I3), при этом для решения x этой задачи справедлива оценка (17).

Пусть теперь $a \in]2, a_0[$ и β решение краевой задачи (II)-(13) при $a=2$ которое согласно результатам работы /7/ удовлетворяет оценке

$$t \leq \beta(t) \leq 2 - 2 \left(\frac{2-t}{2} \right)^2, \quad t \in [0, 1].$$

В силу свойств функции g имеем

$$\lambda \beta \leq g(t, \beta, \beta'), \quad t \in]0, 1[.$$

Выбирая $\lambda(t) = 0, t \in [0, 1]$, и опять пользуясь леммой 2 окончательно убеждаемся в справедливости теоремы. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Из доказательства теоремы легко усмотреть схему установления разрешимости краевых задач с условиями (2) для уравнения

$$x'' + \frac{q}{t} x' - \frac{q_1}{t^2} x = f_2(t, x, x'), \quad (22)$$

где $q > -2$, функция f_2 определена формулами (10) и (16), ψ непрерывно дифференцируемая функция не меняющая знака на отрезке $[0, b]$ и такая, что

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) + f_2'(0) > -q.$$

Вместе с тем учитывая замечание 2 и решая краевые задачи с условиями (2) для вспомогательных уравнений, возможно получить хорошие оценки на решение x краевой задачи (22), (2). В частности, значение параметра преобразования в формулах (6) дает оценки на производную решения x при $t=0$.

Так, например, если $a = a_0$, то решение x краевой задачи (II)-(13) при $t=0$ имеет производную x' , которая оценивается следующим образом

$$2,427 \leq x'_0 \leq 2,519.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гризанс Г.П., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью // Латв.математический ежегодник. Рига:Зинатне, 1984. Вып.28.С.14-24.
2. Цепитис Я.В. О существовании ограниченного решения для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения:Сб.научн.тр.Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1988.С.59-68.
3. Гельфанд И.М. Задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи математических наук.1959.1.14.№1.С.87-108.
4. На Ц.Й. Вычислительные методы решения прикладных краевых задач.М.,1982.296 с.
5. Логунов А.А.,Власов А.А. Пространство Шанковского как основа физической теории гравитации // Теоретическая и математическая физика.1984.Т.60.№1.С.3-8)
6. Моисеев Е.И.,Садовничий В.А. Решение одной задачи для нелинейного уравнения теории гравитации // ДАН СССР. 1985.Т.284.№4.С.835-837.
7. Лепин Л.А. Метод нижних и верхних функций для дифференциальных уравнений второго порядка на открытых и полуоткрытых интервалах // Доклады расширенных заседаний семинара института прикладной математики им.И.Н.Векуа. Тбилиси: Изд.ГГУ,1985.Т.1.№3.С.81-84.
8. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.Рига: Зинатне,1978.183 с.

УДК 517.957:519.63

С.И. Федоров
ВЦ при ЛГУ им. П. Стучки

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ ДЛЯ
НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД

В настоящей работе рассматривается первая краевая задача и задача о жестком контакте для системы уравнений в частных производных, описывающей двумерный упругий несжимаемый материал, поведение которого носит геометрически-нелинейный характер. Такие задачи представляют непосредственный практический интерес, поскольку материалами подобного вида являются технические резины, полимеры и т.д. Кроме того, нелинейности рассматриваемой системы уравнений являются характерными для целого класса моделей несжимаемой теории упругости при конечных деформациях.

Пусть $u = (u^1, u^2)$ - вектор перемещений, p - функция гидростатического давления. Рассмотрим первую краевую задачу для системы уравнений

$$-\Delta u + \nabla p + \text{adj}(u) \nabla p = f, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\text{div } u + \text{det}(u) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma} = a, \quad \Gamma = \partial\Omega. \quad (3)$$

Здесь $f = (f^1, f^2)$, $a = (a^1, a^2)$ - заданные векторы внутренних сил и поверхностных перемещений соответственно; $\text{adj}(u) = (\text{det}(u)) (\nabla u)^{-1}$, где $\nabla u = (u^i_{x_j})$, а $\text{det}(u) = u^1_{x_1} u^2_{x_2} - u^1_{x_2} u^2_{x_1}$ - определитель ∇u .

Уравнение (1) является уравнением равновесия для упругого тела $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: $\partial/\partial x_j T_{ij}(\nabla u, p) = f^i$, $i = 1, 2$, с тензором напряжений в виде Пиола $T = F(u) - p G(u)$, где

$F_{ij} = \delta_{ij} + u^k x_j$, δ_{ij} - символ Кронекера, а $G = (\det F) F^{-1}$. Уравнение (2) является двумерным аналогом условия несжимаемости.

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1, x_2 < 1\}$. Аппроксимацию уравнений будем проводить на сдвинутых сетках, которые определим следующим образом. Пусть $\omega = \{x = (ih, jh) \mid i, j = 1, \dots, M-1; h = M^{-1}\}$, тогда $\Omega_1 = \{x \mid x + \frac{h}{2} e_2 \in \omega\}$, $\Omega_2 = \{x \mid x + \frac{h}{2} e_1 \in \omega\}$, $\bar{\Omega}' = \{x \mid x \pm \frac{h}{2} e_k \in \bar{\Omega}_k, k = 1, 2\}$, где e_k - единичный вектор в k -ом направлении, а $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$, γ - множество граничных узлов для области Ω . Через $H(\omega)$ будем обозначать множество сеточных функций на сетке ω , а через $\hat{H}(\omega)$ и $H_0(\omega)$ множества $\{u \in H(\omega) \mid u|_{\Gamma} = 0\}$ и $\{u \in H(\omega) \mid \sum_{x \in \omega} u(x) = 0\}$ соответственно.

Задаче (I)-(3) поставим в соответствие разностную: найти $u_k \in H(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, $p \in H_0(\bar{\Omega}')$ такие, что

$$\begin{aligned} -\Delta^k u^1 + \partial_{x_1}^k p + (u_{x_2}^2 p_{x_1} - u_{x_1}^2 p_{x_2})^k &= f^1, \quad x \in \Omega_1, \\ -\Delta^k u^2 + \partial_{x_2}^k p + (u_{x_1}^1 p_{x_2} - u_{x_2}^1 p_{x_1})^k &= f^2, \quad x \in \Omega_2, \\ \operatorname{div}^k u + (u_{x_1}^1 u_{x_2}^2 - u_{x_2}^1 u_{x_1}^2)^k &= 0, \quad x \in \bar{\Omega}', \end{aligned} \quad (4)$$

$$u|_{\gamma} = a_0. \quad (5)$$

Здесь Δ^k - пятиточечная аппроксимация оператора Лапласа, $\nabla^k = (\partial_{x_1}^k, \partial_{x_2}^k)$ и div^k определяются через центральные разности, а вектор $N^k(u, p) = ((u_{x_2}^2 p_{x_1} - u_{x_1}^2 p_{x_2})^k, (u_{x_1}^1 p_{x_2} - u_{x_2}^1 p_{x_1})^k, (u_{x_1}^1 u_{x_2}^2 - u_{x_2}^1 u_{x_1}^2)^k)$ аппроксимируется так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\forall (w^1, w^2) \in \hat{H}(\Omega_1) \times \hat{H}(\Omega_2)$$

$$\begin{aligned} [N_1^k(u^2, p), w^1]_{\Omega_1} &= -[N_0^k(w^1, u^2), p]_{\Omega_1}, \\ [N_2^k(u^1, p), w^2]_{\Omega_2} &= -[N_0^k(u^1, w^2), p]_{\Omega_2}, \\ [N_3^k(u^1, w^2), 1]_{\bar{\Omega}'} &= [N_3^k(w^1, u^2), 1]_{\bar{\Omega}'} = 0, \end{aligned}$$

где $[\psi, \psi]_{\omega} = \sum_{x \in \omega} (h^2 \psi(x) \psi(x))$, N_i^k - константы вектора $N^k(u, p)$, $i = 1, 2, 3$.

Решение задачи (4)-(5) будем искать, используя итерационный процесс для модифицированного метода Ньютона-Канторовича /2/ с начальным приближением $(u_0, p_0) = 0$. На каждом шаге этого процесса решается краевая задача:

$$\begin{aligned} -\Delta^k u_{n+1} + \nabla^k p_{n+1} &= f - \hat{N}^k(u_n, p_n), \\ \operatorname{div}^k u_{n+1} &= -N_3^k(u_n^1, u_n^2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$u_{n+1}|_{\Gamma} = a_0, \quad \sum_{x \in \bar{\Omega}} p_{n+1}(x) = 0,$$

где $\hat{N}^k(u, p) = (N_1^k(u^1, p), N_2^k(u^1, p))$. Реализация итерационного процесса осуществляется следующим образом

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^k (B \nabla^k p_{n+1}) &= \operatorname{div}^k (B(f - \hat{N}^k(u_n, p_n) - N_3^k(u_n^1, u_n^2))), \\ u_{n+1} &= B(f - \hat{N}^k(u_n, p_n) - \nabla^k p_{n+1}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $B = (B_{ij})$, B_{ij} - оператор обратный к оператору $(-\Delta^k)$ с краевыми условиями (5) на сетке Ω_h и $B_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Итерационные процессы подобного ряда применительно к краевым задачам для уравнений Навье-Стокса рассмотрены в работе /1/.

Рассмотрим теперь задачу о жестком контакте. В этом случае краевое условие имеет вид

$$u_n|_{\Gamma} = 0, \quad T_\nu|_{\Gamma} = 0, \quad (8)$$

где $u_n = u^i n_i$, $T_\nu = n_i T_{ij} \nu^j$. Здесь $n = (n^1, n^2)$ - вектор внешней нормали к точкам Γ , а $\nu = (\nu^1, \nu^2)$ - левый касательный вектор по отношению к n . Поскольку Ω - область прямоугольного вида, то условия (8) преобразуются к условиям

$$u^1(x) = 0, \quad x \in \Gamma_{2+} \cup \Gamma_{2-}, \quad u^2(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3,$$

$u_{x_2}^1(x) = 0, x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_1', u_{x_1}^1(x) = 0, x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_2'$,
 где $\Gamma_1 = \{(x, 1) | 0 < x < 1\}$, $\Gamma_2 = \{(x, 0) | 0 < x < 1\}$
 и аналогично для Γ_2', Γ_1' .

Пусть Γ_{κ}^k — соответствующие множества граничных узлов для сеток $\bar{\Omega}_{\kappa}$, $\kappa = 1, 2$. Тогда для дискретной задачи условия (8) имеют представление

$$\begin{aligned} u^1(x) = 0, x \in \Gamma_1^1 \cup \Gamma_{1'}^1, u^2(x) = 0, x \in \Gamma_2^2 \cup \Gamma_{2'}^2, \\ \partial_{x_2}^k u^1(x) = 0, x \in \Gamma_1^1 \cup \Gamma_{1'}^1, \partial_{x_1}^k u^2(x) = 0, x \in \Gamma_2^2 \cup \Gamma_{2'}^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\partial_{x_k}^k \psi = (\psi(x + \frac{h}{2} e_k) - \psi(x - \frac{h}{2} e_k)) / h$, $k = 1, 2$.

Продолжим (u, p) с сетки ω на $\bar{\omega}^c = \{(i, j) | i, j = -M, \dots, M\}$ по правилу:

$$(U^1, U^2, P) = \begin{cases} (u^1, u^2, p)(x_1, x_2), & 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ (-u^1, u^2, p)(-x_1, x_2), & -1 \leq x_1 \leq 0, 0 \leq x_2 \leq 1, \\ (u^1, -u^2, p)(x_1, -x_2), & 0 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 0, \\ (-u^1, -u^2, p)(-x_1, -x_2), & -1 \leq x_1, x_2 \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Несложно убедиться, что (U^1, U^2, P) на границе $\bar{\omega}^c$ удовлетворяют условиям периодичности и удовлетворяют уравнениям

$$-\Delta^k U + \nabla^k P = F, \quad \operatorname{div}^k U = R,$$

если этим уравнениям удовлетворяют (u, p) . Здесь (F, R) — продолженные по правилу (10) соответствующие правые части системы (6).

Для краевой задачи (6), (9) итерационный процесс (7) реализуется следующим образом

$$\begin{aligned} -p_{n+1} &= \operatorname{div}^k (B^k (f - \hat{N}^k(u_n, p_n)) - N_0^k(u_n^1, u_n^2)), \\ u_{n+1} &= B^k (f - \hat{N}^k(u_n, p_n) - \nabla^k p_{n+1}), \end{aligned} \quad (11)$$

где $B^* = (B^*_{ij})$ и B^*_{ij} — оператор обратный к оператору $(-\Delta^k)$ для краевой задачи с условиями (9) на сетке Ω_i , $i=1,2$. В этом случае $\text{chv}^k(B^* \nabla^k p) = -E p$, где E — тождественный оператор, что проверяется непосредственно Фурье-разложением для сеточных функций.

Т е о р е м а. Пусть $f \in H(\Omega_1) \times H(\Omega_2)$ и

$$\|f\|_{L_5} = \sum_{m=1}^2 \|f^m\|_{L_5(\Omega_m)} \leq C_0 < \frac{1}{2} (2C_5)^{-2}, \quad s > 2.$$

Тогда итерационный процесс (II) сходится к решению задачи (4), (9), и выполняется оценка

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 \|u_n^* - u^n\|_{W_5^k(\bar{\Omega}_n)} + \|p_n - p\|_{W_5^k(\bar{\Omega}')} &\leq \\ &\leq (4C_5)^{-1} (1 - \sqrt{1 - 2(2C_5)^2 C_5})^{n+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь C_5 — оценка нормы оператора перехода от n к $n+1$ слов итерационного процесса (II), а $L_5(\omega)$, $W_5^k(\omega)$ — дискретные аналоги соответствующих пространств непрерывных функций.

Так как решение задачи (6), (9) допускает периодическое продолжение с ω на $\mathbb{R}^k = \{(i, j, k) \mid (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$, то для получения C_5 применяется дискретное преобразование Фурье с последующим применением теорем Маджинкевича о мультипликаторах для сеточных функций [3]. Поскольку (7) является итерационным процессом для модифицированного метода Ньютона-Канторовича, то оценка (12) получается аналогично тому, как это сделано в [2].

Отметим, что в случае областей Ω_i с границей из класса C^k , подобное утверждение имеет место и для итерационного процесса (7), если

$$\|f\|_{L_5} + \sum_{m=1}^2 \|B_m^m\|_{W_5^k(\Omega_m)} \leq C_0 < \frac{1}{2} (2C_5)^{-2}, \quad s > 2,$$

где C_5 — норма оператора перехода от n к $n+1$ слов в (6), (5), а $B_m^m|_r = \alpha_m$.

Из выкладки остановимся на применении предложенного алгоритма для численной реализации на ЭВМ тестового

примера, в качестве которого возьмем функцию $(u, p) = (\varepsilon(x_1 - x_2)^2, \varepsilon(x_1 - x_2)^4, \varepsilon(2\pi)^{-1} \sin(2\pi x_1))$, где $\varepsilon > 0$ - контрольный параметр. В этом случае $\operatorname{div} u + \operatorname{det}(u) = 0$, $f = (-4\varepsilon + (\varepsilon + 2\varepsilon^2(x_1 - x_2)) \cos 2\pi x_1, -4\varepsilon - 2\varepsilon^2(x_1 - x_2) \cos(2\pi x_1))$.

Численный эксперимент проводился на ЭВМ ЕС-1060. В области Ω рассматривалась сетка с шагом $h = 2^{-5}$. Обращение оператора Лапласа осуществлялось при помощи быстрого преобразования Фурье и использовалась стандартная программа.

Первое уравнение в (7) решалось методом простой итерации.

$$p_{nm} = p_{n,m-1} - \tau (\operatorname{div}^k (B \nabla^k p_{n,m-1})) - g(p_n, \nabla u_n), \\ m = 1, 2, \dots, N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

где $p_n = p_n, p_{n+1} = p_{nm}, g(p_n, \nabla u_n) = \operatorname{div}^k (B(f - \hat{N}^k(u_n, p_n)) - N_1^k(u_n^1, u_n^2))$. Применение (13) обусловлено тем, что оператор $\operatorname{div}^k (B \nabla^k)$ эквивалентен по спектру единичному. Это гарантирует сходимость в $L_2(\bar{\Omega}')$ процесса (13).

Расчеты проводились для случая: $\varepsilon = 0.5, \tau = 0.4$. Результаты расчетов приведены на рис. 1, 2. На рис. 1 символами "x" отмечены смещения узлов сетки, т.е. если координаты узла (x_1, x_2) , то соответствующего смещенного $(x_1 + u^1, x_2 + u^2)$. На рис. 2 представлены некоторые профили графика функции гидростатического давления $p = p(x_1)$. Как видно из рисунка, наблюдаются некоторые его искажения около границы. Это можно связать с недостаточной аппроксимацией u в точках границы.

Сходимость процесса (7) и (8) контролировалась в норме пространства C по величине невязки, которая для первых двух уравнений в (4) обозначается через δ_u , а для третьего δ_p . Обозначим через NP - число итераций для внутреннего процесса (13), а через NU - общее число итераций для (7). Об оптимальном их отношении для данного примера можно судить по результатам численного эксперимента, представленного в таблице. ПВ - время работы процессора ЕС-1060 в секундах. Результаты этого эксперимента можно

Таблица I.

ПВ	δ_u	δ_p	NU	NP
36	0.01	0.0023	17	3
28	0.01	0.0032	18	2
28	0.01	0.0038	35	1

объяснить тем, что увеличение NP способствует более точному выполнению условия несжимаемости, но, в свою очередь, ведет к увеличению величины невязки δ_u . Для случая NP = 3 для первых итераций подобная ситуация отражена на графике (рис.3).

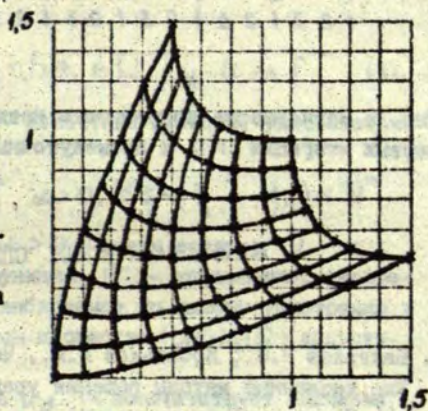


Рис.1 Характер перемещений узлов прямоугольной сетки. Результаты численного эксперимента для тестовой задачи.

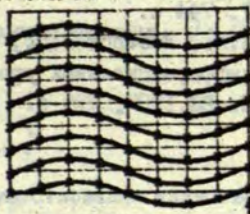


Рис.2 Профили функций p и $p(x)$. Результаты численного эксперимента

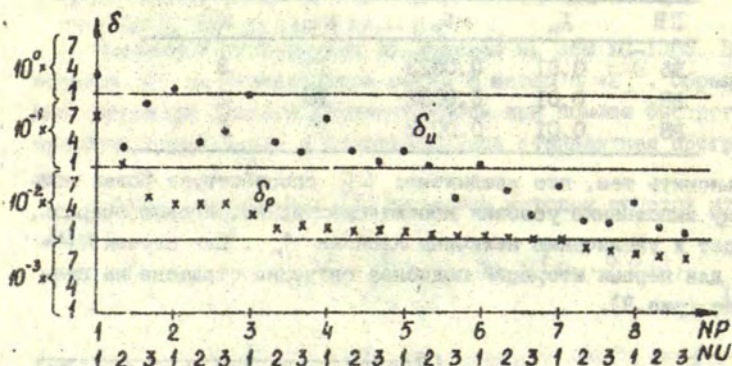


Рис. 3 Зависимость погрешности невязки (δ_u , δ_p) от первых итераций NU и промежуточных итераций NP .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Н.С., Кобельков Г.М., Чиконков Е.В. Эффективные численные методы решения уравнений Навье-Стокса. // Численное моделирование в аэрогидродинамике. М.: Наука, 1986. С.37-45.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
3. Семарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными производными. М.: ВШ, 1987. 296 с.

УДК 519.6:517.977.56

И. С. Федорченко
Киевский университет

РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО
РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Пусть Ω - ограниченная область в R^m с достаточно гладкой границей Γ и состояние $y \in W_2^1(\Omega)$ системы (физической, механической или др.) определяется как решение задачи Дирихле

$$-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}) + a_0 y = f + \psi \text{ в } \Omega, \quad y = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (1)$$

где $a_{ij}, a_0 \in L_\infty(\Omega)$ - известные функции, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in R^m$$

почти всюду в Ω , $a_0(x) \geq \alpha > 0$ почти всюду в Ω ;

$f \in L_2(\Omega)$ - заданная функция; ψ - управление, распределенное в области Ω и выбираемое по нашему усмотрению в некотором выпуклом замкнутом множестве $U \subset L_2(\Omega)$ допустимых управлений.

Каждому управлению $\psi \in U$ соответствует значение функции стоимости

$$J(\psi) = \int_{\Omega} ((y - z_D)^2 + \nu \psi^2) dx. \quad (2)$$

где $z_D \in L_2(\Omega)$ - заданная функция; $\nu > 0$ - заданное число.

Требуется найти

$$\inf \{ J(\psi), \psi \in U \}. \quad (3)$$

В работе [1] доказано существование единственного решения задачи (3), т.е. элемента $\psi \in U$, для которого

$$J(u) = \inf \{ J(v), v \in U_0 \}. \quad (4)$$

приведены необходимые и достаточные условия экстремума, изучены структура и свойства уравнений, выражающих эти условия.

Наша задача состоит в составлении алгоритмов, позволяющих численно находить аппроксимации управления u , и исследовании сходимости этих аппроксимаций к точному решению. Заметим, что аналогичные вопросы рассматривались в [2]-[4].

Разобьем пространство \mathbb{R}^m плоскостями $x_i = k_i h_i, i = \overline{1, m}$, где $k_i \in \mathbb{Z}_i$, $h_i > 0$, на элементарные ячейки

$$\omega_{(k_h)} = \{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, k_i h_i < x_i < (k_i + 1) h_i, i = \overline{1, m} \}$$

с вершинами $(k_h) = (k_1 h_1, \dots, k_m h_m)$. Обозначим $\bar{\Omega}_h$ -

замкнутая область, состоящая из ячеек $\bar{\omega}_{(k_h)} \subset \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$,

S_h - граница $\bar{\Omega}_h$, $\Omega_h = \bar{\Omega}_h - S_h$. Эти же символы $\bar{\Omega}_h$,

S_h и Ω_h будем употреблять и для обозначения множества точек сетки, принадлежащих $\bar{\Omega}_h$, S_h и Ω_h , соответственно.

Построим аппроксимацию функции стоимости (2) и тождества, определяющего обобщенное решение $y \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ задачи (I),

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + a_{ij} y \eta \right) dx = \int_{\Omega} (f + v) \eta dx, \forall \eta \in \dot{W}_2^1(\Omega), \quad (5)$$

Интегралы по Ω заменим суммами интегралов по ячейкам

$\omega_{(k_h)} \subset \Omega$ и в пределах каждой ячейки y , v и η заменим

кусочно-постоянными функциями \tilde{y}_h , \tilde{v}_h и $\tilde{\eta}_h$, а производные $\partial y / \partial x_i$ и $\partial \eta / \partial x_i$ - кусочно-постоянными

восполнениями каких-либо однотипных разностных отношений, их аппроксимирующих, например, y_{hx_i} и η_{ix_i} . Требование принадлежности y и η к $\dot{W}_2^1(\Omega)$ заменим естественным требованием, чтобы сеточные функции y_h и η_h обращались в нуль на S_h .

Будем считать также $\tilde{y}_h \cdot \tilde{\eta}_h = \tilde{v}_h = 0$ на $\bar{\Omega} \setminus \Omega_h$.

Итак, заменим функцию стоимости $J(v)$ на

$J_h(v_h) = \int_{\Omega_h} ((\tilde{y}_h - \tilde{v}_h)^2 + \tilde{v}_h^2) dx = \Delta_x \sum_{\Omega_h} ((y_h - \tilde{v}_h)^2 + v_h^2), \quad (6)$

а тождество (5) заменим следующим [5]

$\int_{\Omega_h} \left(\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \tilde{y}_{hx_j} \tilde{\eta}_{ix_i} + a_{ij} \tilde{y}_h \tilde{\eta}_h \right) dx = \int_{\Omega_h} (f + v) \tilde{\eta}_h dx$

или, что то же,

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h} \left(\sum_{i,j=1}^m a_{ijh} y_{hx_i} y_{hx_j} + a_{0h} y_h \eta_h \right) = \Delta_h \sum_{\Omega_h} (f_h + \psi_h) \eta_h, \quad (7)$$

где $\Delta_h = h_1 \dots h_m$; Ω_h^+ - множество вершин ячеек $\omega_{i,k} \subset \Omega_h$

$a_{ijh} = \frac{1}{\Delta_h} \int_{\omega_{ij}} a_{ij}(x) dx$ и аналогично определяются сеточные функции a_{0h} , f_h , ψ_h , $\tau_{\Delta h}$. Воспользовавшись формулой суммирования по частям и произволом в выборе η_h на Ω_h , приведем (7) к системе разностных уравнений /5/

$$A_h y_h = - \sum_{i,j=1}^m (a_{ijh} y_{hx_i})_{\bar{x}_i} + a_{0h} y_h = f_h + \psi_h \quad \text{на } \Omega_h, y_h = 0 \text{ на } S_h. \quad (8)$$

Заметим, что при заданном ψ система (8) однозначно разрешима относительно y_h , что следует из априорных оценок /5/

$$\left(\|y_h\|_{2,\Omega_h}^2 + \|y_{hx_i}\|_{2,\Omega_h}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{c}{\Delta_h} \left(\|f_h\|_{2,\Omega_h} + \|\psi_h\|_{2,\Omega_h} \right) \leq \frac{c}{\Delta_h} \left(\|f\|_{2,\Omega} + \|\psi\|_{2,\Omega} \right),$$

где $y_{hx_i}^2 = \sum_{j=1}^m y_{hx_j}^2$, $\|f_h\|_{2,\Omega_h} = \left(\Delta_h \sum_{\Omega_h} f_h^2 \right)^{1/2}$ и аналогично для других сеточных функций, c - некоторая положительная постоянная, зависящая от размеров области Ω .

Как и в /5/ убеждаемся, что имеет место

Т е о р е м а 1. Для любого заданного $\psi \in L_2(\Omega)$ разностная схема (8) устойчива в сеточной норме, соответствующей энергетической норме, и при $|h| = \left(\sum_{i=1}^m h_i^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0$ полилинейные интерполяции y_h^i (а значит и \bar{y}_h), построенные по решениям y_h систем (8) сходятся в $L_2(\Omega)$ к решению $y \in W_2^1(\Omega)$ задачи (1), а их производные $\partial y^i / \partial x_i$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к $\partial y / \partial x_i$, $i = 1, m$.

Заменим задачу (3) следующей

$$\inf_{\psi_h \in U_{\Delta h}} \{ y_h(\psi_h) : A_h y_h = f_h + \psi_h \text{ в } \Omega_h, y_h = 0 \text{ на } S_h \}, \quad (9)$$

где $U_{\Delta h} = N_h \cap U_{\Delta h}$; N_h - пространство кусочно-постоянных на Ω функций.

Очевидно, что существует единственный элемент для которого

$$J_h(u_h) = \inf \{ J_h(\psi_h), \psi_h \in U_{\Delta h} \}. \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть выполнены сделанные выше предположения. Тогда при $|h| \rightarrow 0$

$$\bar{u}_h \rightarrow 0 \quad \text{в } L_2(\Omega), \quad (II)$$

$$y'_h(u_h) \rightarrow y'(u), \quad \frac{\partial y'_h(u_h)}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial y'(u)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, m} \quad \text{в } L_2(\Omega), \quad (I2)$$

$$J_h(u_h) \rightarrow J(u). \quad (I3)$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, учитывая теорему I и предельную плотность подпространств N_h в $L_2(\Omega)$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: J_h(u_h) \leq J(u) + \varepsilon \quad \text{при } |h| < \delta. \quad (I4)$$

Отсюда следует, что

$$\limsup J_h(u_h) \leq J(u). \quad (I5)$$

С другой стороны $J_h(u_h) \geq \nu \|u_h\|_{2, \Omega_h}^2$, что вместе с (I5) доказывает ограниченность величины $\|u_h\|_{2, \Omega_h}$. Значит из последовательности $\{u_h\}$ можно выделить подпоследовательность, которую будем обозначать также $\{u_h\}$, такую, что $\bar{u}_h \rightarrow w$ слабо в $L_2(\Omega)$, $w \in U_0$. Отсюда и из теоремы I получаем, что $y'_h(u_h) \rightarrow y'(w)$ слабо в $L_2(\Omega)$,

$$\frac{\partial y'_h(u_h)}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial y'(w)}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{слабо в } L_2(\Omega). \quad \text{Значит}$$

$\liminf J_h(u_h) \geq J(w)$ откуда и из (I5) следует $w = u$ и выполняется (I3). Поэтому (I2) выполняются в смысле слабой сходимости.

Поскольку $J_h(u_h) = (\tilde{y}_h(u_h), \tilde{y}_h(u_h))_{2, \Omega} + \nu (\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)_{2, \Omega} - 2(\tilde{y}_h(u_h), \tilde{x}_{\Delta h})_{2, \Omega} + \|\tilde{x}_{\Delta h}\|_{2, \Omega}^2 \rightarrow J(u)$, $J_h(0) \rightarrow J(0)$ при $|h| \rightarrow 0$, то полагая

$$(\tilde{y}_h(u_h) - \tilde{y}_h(0), \tilde{y}_h(u_h) - \tilde{y}_h(0))_{2, \Omega} + \nu (\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)_{2, \Omega} = \|\tilde{u}_h\|_{2, \Omega}^2,$$

получим $\|\tilde{u}_h\|_{2, \Omega} \rightarrow \|u\|_{2, \Omega}$. Но $\|\cdot\|_{2, \Omega}^2 \sim \|\cdot\|_{2, \Omega}$, поэтому имеет место (II), откуда с учетом теоремы I следует (I2).

Для составления алгоритмов численного определения аппроксимации u_h оптимального управления u , рассмотрим 3 случая задания множества U_0 :

$$а) U_0 = L_2(\Omega);$$

$$б) U_0 = \{v \in L_2(\Omega) : v \geq 0 \text{ почти всюду в } \Omega\};$$

$$в) U_0 = \{v \in L_2(\Omega) : \xi \leq v \leq \eta \text{ почти всюду в } \Omega, \\ \xi, \eta \in L_\infty(\Omega) - \text{заданные в } \Omega \text{ функции}\}.$$

Пронумеровав точки сеточной области Ω_h определенным способом и отбрасывая множитель Δ_k в $T_k(\Delta_k)$, что не влияет на искомые значения v_k и y_k , перепишем (9) в виде

$$\inf \{ (\bar{y} - \bar{x}_\Delta, \bar{y} - \bar{x}_\Delta) + v(\bar{v}, \bar{v}); A\bar{y} = \bar{f} + \bar{v}, \bar{v} \in V \}, \quad (16)$$

где $\bar{y}, \bar{x}_\Delta, \bar{f}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ - векторы, компонентами которых являются значения $y_k, x_{k\Delta}, f_k, v_k$ в узлах сетки соответственно способу их нумерации; A - квадратная матрица n -го порядка, вид которой определяется разностным оператором задачи (8) и выбранным способом нумерации; n - число точек сетки Ω_h ($n \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$); $V \subset \mathbb{R}^n$ - множество, вид которого определяется множеством U_{0h} : например, в случае а) $V = \mathbb{R}^n$, в случае б) $V = \{\bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : v_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$, в случае в) $V = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : \xi_i \leq v_i \leq \eta_i, i = \overline{1, n}\}$, где ξ_i и η_i представляют собой значения сеточных функций ξ_k и η_k в узлах сетки, соответственно выбранному способу нумерации.

Используя методы выпуклого программирования [3], [6] можно получить совокупность соотношений, характеризующих оптимальное решение \bar{u} задачи (16) для указанных трех случаев в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 3. Элемент \bar{u} доставляет решение задачи (16) тогда и только тогда, когда выполняются соотношения в случае а):

$$A\bar{y} - \bar{u} = \bar{f}, \quad A^T \bar{p} - \bar{y} = -\bar{x}_\Delta, \quad (17)$$

$$\bar{u} = -\frac{1}{\nu} \bar{p}, \quad (18)$$

в случае б): (17) и

$$u_i = \frac{1}{\nu} p_i, \quad \text{если } p_i \leq 0 \text{ и } u_i = 0 \text{ если } p_i > 0, i = \overline{1, n}; \quad (19)$$

в случае в): (17) и

$$u_i = \xi_i, \quad \text{если } -\frac{1}{\nu} p_i < \xi_i, \quad u_i = -\frac{1}{\nu} p_i, \quad \text{если} \quad (20)$$

$$\xi_i \leq -\frac{1}{\nu} p_i \leq \eta_i \text{ и } u_i = \eta_i \text{ если } -\frac{1}{\nu} p_i > \eta_i, i = \overline{1, n},$$

где \bar{p} - вектор сопряженных переменных.

Соотношения (17), (18) представляют собой линейную, а (17), (19) и (17), (20) - нелинейные системы алгебраических уравнений относительно неизвестных компонент векторов \bar{u} и

\vec{y} и вектора сопряженных переменных \vec{p} . Таким образом, нахождение разностных аппроксимаций оптимального управления сводится к решению систем линейных или нелинейных алгебраических уравнений.

Подобным образом могут быть рассмотрены разностные аппроксимации задачи (3) с функцией стоимости (2), когда состояние системы $y \in W_{\alpha}^1(\Omega)$ описывается задачей Неймана

$$-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}) + \alpha y = f + \sigma \text{ в } \Omega, \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} \cos(n, x_i) = 0 \text{ на } \Gamma,$$
 где $\cos(n, x_i) = \delta$ - i -ый направляющий косинус внешней нормали n к границе Γ . Разностная аппроксимация задачи Неймана может быть построена как и в [5]. Интегралы в функции стоимости и интегральном тождестве, определяющем обобщенное решение задачи Неймана, заменяются суммами интегралов по ячейкам $\omega_{(k,h)} \subset \Omega_h^*$, где Ω_h^* - замкнутая область, состоящая из ячеек $\omega_{(k,h)}$, таких, что $\omega_{(k,h)} \cap \Omega \neq \emptyset$, в предположении, что коэффициенты и свободные члены уравнения продолжены на некоторую область $\Omega' \supset \Omega$ с сохранением их свойств.

ЛИТЕРАТУРНЫЙ СПИСОК

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
2. Воронцов И.М. О дискретной аппроксимации задач оптимального управления процессами, описываемыми эллиптическими уравнениями // Оптимизация процессов в авиационной технике. Казань. 1980. С. 109-116.
3. Федорченко И.С. Численное решение задач оптимизации систем, описываемых уравнениями эллиптического типа // Вычисл. и прикл. матем.: Респ. междувед. научн. сб. Киев. 1981. Вып. 44. С. 136-143.
4. Лубышев Ф.В. О точности разностных аппроксимаций и регуляризации задач оптимального управления на решениях эллиптических уравнений // Вычисл. матем. и матем. физики. 1987. Т. 27. № 4. С. 490-500.
5. Ладженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
6. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. М.: Наука, 1983. 136 с.

ДИНАМИКА НЕЙТРАЛИЗОВАННОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КОМПОНЕНТЫ В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Вопрос изучения взаимодействия электромагнитных полей с плазмой является актуальным и имеет широкий круг приложений /1/. С целью исследования ее устойчивости в работе рассмотрено поведение изотермической однородной разреженной плазмы как упругой среды, в которой произошло разделение зарядов за счет кулоновского поля. Объем с цилиндрической поверхностью, занимаемый системой заряженных частиц с концентрациями n^+ , n^- в начальный момент времени, разобьем на торообразные части, поверхности которых образованы вращением прямоугольников Π со сторонами k_z , k_\perp около оси цилиндра, лежащей в плоскости прямоугольников Π , и не пересекающей их. Заряженные частицы, находящиеся в каждой такой части, будем рассматривать как одну крупную частицу. Учитывая аксиальную симметрию кулоновского и внешнего электромагнитных полей, поведение крупных частиц будут описывать положения центров тяжести прямоугольников Π в плоскости r, z . Отметим, что в такой модели геометрические размеры крупных частиц в начальный момент времени различны, однако концентрация частиц в них одинакова. Отсюда следует, что переход крупной частицы вдоль радиуса цилиндра на место, занимаемое другой частицей, изменяет концентрацию входящих в нее частиц пропорционально отношению $r(t_0)/r(t_1)$, где $r(t_0)$, $r(t_1)$ — радиусы центров тяжести крупных частиц в моменты времени t_0 и t_1 . Поведение крупных релятивистских частиц в вакууме в принятой модели исследовано на основе следующей нестационарной нелинейной системы уравнений в ци-

лицирической системе координат (r, α, z) :

$$m \frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) = -e(\vec{\sigma} \cdot \vec{B} + \vec{E} + \gamma^{-2} \vec{E}^k), \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{e}{\epsilon} (n^e - n^i), \quad (3)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z, \quad \frac{d\alpha}{dt} = v_\alpha, \quad (4)$$

$$n^e(t_i) = n^e(t_{i-1}) \cdot r(t_{i-1}) / r(t_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

где \vec{E} , \vec{E}^k , \vec{B} , \vec{v} , n^e , n^i - соответственно, внешняя и кулоновская электрические напряженности, индукция магнитного поля, вектор скорости и концентрация электронов и ионов крупных частиц; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$; $\text{grad} \psi = -\vec{E}^k$. Здесь e , m , ϵ , c - соответственно, заряд и масса покоя электрона, электрическая постоянная и скорость света. Аксиальная симметрия позволяет решение уравнений (2) представить в виде:

$$E_x = E_{x0} J_0(k_r r) \cdot \sin(k_z z) \cdot \cos(\Omega t + \psi), \quad (6)$$

$$E_z = E_{z0} (k_z / k_r) J_1(k_r r) \cdot \cos(k_z z) \cdot \cos(\Omega t + \psi), \quad (7)$$

$$B_z = |\vec{B}| J_1(k_r r) \cdot \sin(k_z z) \cdot \sin(\Omega t + \psi), \quad (8)$$

где $\Omega = kc = 2\pi c / \lambda$ - циклическая частота колебаний, λ - длина волны; k , k_r , k_z - волновые числа; J_0 , J_1 - функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков. Введем основные характерные задаваемые величины: $t_0 = T = \lambda / c$, $r_0 = R$, $z_0 = L$, $E_0 = E_{z0}$, $n_0 = \beta m \epsilon \Omega^2 / c^2$ (учитывая соотношение для плазменной частоты $\Omega_{pl}^2 = n_0 e^2 / (m \epsilon)$ и полагая $\Omega^2 = \beta^{-1} \Omega_{pl}^2$), имеем при $\beta \neq 0,5$ неравенство $\Omega_{pl} < \Omega$, т.е. случай, когда ВЧ-поле проникает внутрь плазменного сгустка) и вспомогательные: $\beta_0 = E_0 \cdot \Omega / (k_r c^2)$, $\varphi_0 = E_0 L$, $v_0 = c$, где L , R - образующая и радиус резонатора, T - период высокочастотного поля. Для выполнения граничных условий:

$$E_x|_{z=R} = 0, E_x|_{z=L/2} = E_x|_{z=L/2} = 0, B_x|_{z=R} = 0 \quad (9)$$

(начало координат помещено в центр резонатора) достаточно положить $k_z = \beta_{nm}/R$, $k_z = p\pi/L$, где $p = 1, 2, 3, \dots$; β_{nm} — корни уравнения $J_n(x) = 0$. Следовательно, длина волны должна выбираться с учетом соотношения $\lambda = 2\pi / [(\beta_{nm}/R)^2 + (p\pi/L)^2]^{1/2}$. Перейдем к безразмерным переменным $t' = t/t_0$, $r' = r/r_0$, $x' = x/x_0$, $\bar{v}' = \bar{v}/v_0$, $\bar{E}' = \bar{E}/E_0$, $\bar{B}' = \bar{B}/B_0$, $n' = n/n_0$, $n'' = n''/n_0$, $\psi' = \psi/\psi_0$. В дальнейшем штрихи опустим, тогда уравнения (1), (3), (4) и выражения (6)–(8) примут вид

$$\frac{d\vartheta_2}{dt} = s[(1 - \vartheta_2^2)F_2 - \vartheta_2 \vartheta_2 F_2], \quad (10)$$

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = s[(1 - \vartheta_1^2)F_1 - \vartheta_1 \vartheta_1 F_1], \quad (11)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = P_3 \vartheta_2, \quad \frac{d\psi}{dt} = P_4 \vartheta_1, \quad (12)$$

$$P_3 \left(\frac{1}{n} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = P_6 (n' - n''), \quad (13)$$

$$E_x = P_7 J_1(\beta_{nm} r) \cos(p\pi x) \cos(2\pi t + \psi), \quad (14)$$

$$E_z = -J_0(\beta_{nm} r) \sin(p\pi x) \cos(2\pi t + \psi), \quad (15)$$

$$B_x = J_1(\beta_{nm} r) \sin(p\pi x) \sin(2\pi t + \psi), \quad (16)$$

где $s = (1 - \vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)^{1/2}$, $F_2 = -P_1 P_4 \vartheta_2 - P_2 (E_2 + \delta^2 E_2^*)$,
 $F_1 = P_3 \vartheta_1 \vartheta_1 - P_2 (E_1 + \delta^2 E_1^*)$, $E_2^* = -\frac{\partial}{\partial r} E_2 = -P_5^{-1/2} \partial \psi / \partial r$,
 $P_1 = e\omega_0 \lambda / (cm)$, $P_2 = eE_0 \lambda / (mc^2)$, $P_3 = \lambda / L$, $P_4 = \lambda / R$,
 $P_5 = (L/R)^2$, $P_6 = en_0 L / (E_0 \epsilon)$, $P_7 = p\pi R / (\beta_{nm} L)$.

Начальные условия определены исходя из того, что

плазменный сгусток выбран либо в виде со сглаженными углами цилиндра с радиусом $0,2R$, образующей $0,25L$ и центром помещенным в начало координат (условно первая зона устойчивости), либо с коаксиальным ему цилиндрическим слоем с образующей $0,2L$, внутренней границей с радиусом $0,56R$ и внешней границей с радиусом $0,84R$ (условно вторая зона устойчивости). При этом сгусток разбит на рассматриваемые как крупные частицы части, которые в начальный момент покислись и заполняли полностью пространство, занимаемое сгустком. Краевые условия с учетом симметрии относительно плоскости $x = 0$ следующие:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi|_{r=1} = \varphi|_{x=0,5} = 0. \quad (17)$$

Начальная задача для уравнений (10)–(12) решена численно методом Хемминга, при этом на каждом шаге по времени τ краевая задача (13), (17) решена методом полной редукции с шагами по пространству постоянным h_x и переменным $h_z = 2^{(i-1)/(M-1)} \cdot (2^{1/(M-1)} - 1)$, $i = 1, 2, \dots, M-1$. Для проверки достоверности результатов проведены расчеты с дроблением шагов по времени и по пространству, а также сравнение с результатами одномерной модели.

Определим условие устойчивости поведения нерелятивистской частицы, находящейся в одномерном ВЧ-поле при малых отклонениях из положения равновесия. Соответствующее этому случаю уравнение (10) с учетом первого уравнения в (12) при $\rho = 1$ примет вид $d^2x/dt^2 = P_3 P_2 \tau x \cos(2\pi t)$. После замены переменной $\tau t = \theta$ получим уравнение Матье следующего вида $\ddot{x} - [e E_0 \lambda^2 / (\pi m c^2 L)] \cdot x \cdot \cos(2\theta) = 0$. Отсюда следует, что условие устойчивости имеет вид /2/

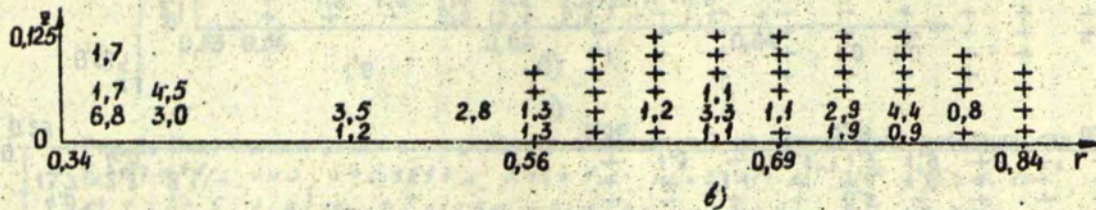
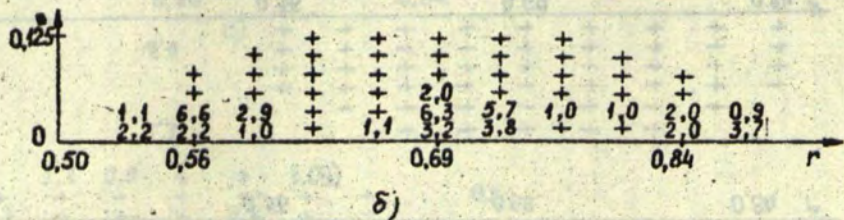
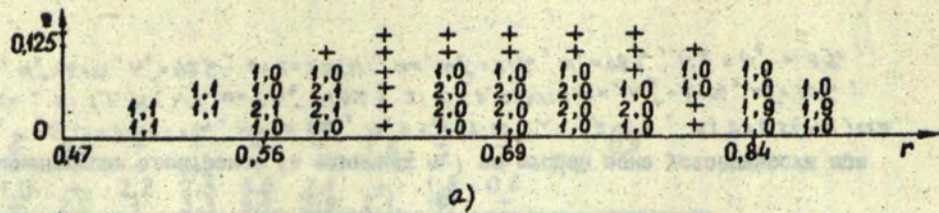
$$q_x = (e E_0 \lambda^2) / (2 \pi m c^2 L) < 0,9. \quad (18)$$

Условие (18) можно использовать с удовлетворительной точностью и для релятивистских частиц. Однако при значительных отклонениях заряженных частиц от положения равновесия оно нарушается. Поэтому двумерные расчеты для релятивистских частиц были проведены при меньших значениях верхней

границы параметра q_x .

Получена эволюционная картина распределения концентрации электронной компоненты в моменты времени, промежутки между которыми составляли 0,5 Т. Так во второй зоне устойчивости для крупных частиц с размерами $0,25L$ и $(n_e/n_{e0}) R$ и концентрацией $n_e = 57108 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}$ ($\beta = 0,5$) при $R = L = 3 \text{ см}$ и ВЧ-поле типа E_{021} с интенсивностями $E_0 = 2,7 \cdot 10^6 \text{ в/м}$ ($q_x = 0,2$); $2,0 \cdot 10^6 \text{ в/м}$ ($q_x = 0,61$); $8,5 \cdot 10^5 \text{ в/м}$ ($q_x = 0,23$); $5 \cdot 10^5 \text{ в/м}$ ($q_x = 0,15$); 10^4 в/м ($q_x = 0,003$) и $\lambda = 0,9893 \text{ м}$ эволюционная картина показала, что имеется осцилляция частиц вдоль осей x и z , причем с большей амплитудой колебаний по оси z . По мере уменьшения интенсивности ВЧ-поля увеличивается начальный интервал времени сравнительно слабых колебаний частиц и уменьшается затем последующий интервал времени, в течение которого частицы покидают резонатор. При этом на начальном участке времени отклонения частиц вдоль оси z происходят за область условной зоны устойчивости, а по оси x - внутрь ее. С уменьшением интенсивности ВЧ-поля процент вылетающих частиц из резонатора в направлении оси z (N_z^+) изменяется от $N_z^+ = 10\%$ до $N_z^+ = 10\%$ - против оси z (N_z^-) от $N_z^- = 70\%$ до $N_z^- = 90\%$, а в направлении и против оси x от $N_x^+ = N_x^- = 3\%$ ($E_0 = 2,7 \cdot 10^6 \text{ в/м}$), $N_x^+ = N_x^- = 12,5\%$ ($E_0 = 2,0 \cdot 10^6 \text{ в/м}$) до $N_x^+ = N_x^- = 0\%$ ($E_0 = 8,5 \cdot 10^5 \text{ в/м}$ и $5 \cdot 10^5 \text{ в/м}$). Максимальная V_m и средняя V_c скорости частиц и максимальная E_m и средняя E_c кулоновские электрические поля перед моментом времени t_1 , когда частицы начинают покидать резонатор, изменяются соответственно от $V_m = 0,38 \cdot c$, $V_c = 0,19 \cdot c$, $E_m = 0,16 \cdot E_0$, $E_c = 0,32 E_0$ ($t_1 = 1,0 \text{ Т}$, $t_2 = 3,3 \text{ Т}$) до $V_m = 0,61 \cdot c$, $V_c = 0,42 \cdot c$, $E_m = 3,7 \cdot E_0$, $E_c = 0,49 \cdot E_0$ ($t_1 = 5,0 \text{ Т}$, $t_2 = 5,6 \text{ Т}$), где t_2 - интервал времени от начального состояния до момента, когда все частицы покинули резонатор. Максимальную скорость приобретают внешние частицы, находящиеся на внутренней границе цилиндрического слоя. Исключением является случай при $E_0 = 10^4 \text{ в/м}$, когда колебания каждой крупной частицы происходят в окрестности своего неподвижного нейтрализующего положительного фона на протяжении всего интервала времени наблюдения ($\approx 40 \text{ Т}$).

Такое состояние, по-видимому, следует считать устойчивым. На рис. I приведена эволюционная картина поля концентрации при $E_0 = 2,7 \cdot 10^6 \text{ в/м}$, где значком плюс помечены с концентрацией n_0 положительно заряженные крупные частицы неподвижного нейтрализующего фона. Проведенные расчеты распределения концентрации крупных частиц при ВЧ-поле со сдвигом начальной фазы от 0 до 2π с интервалом в $\pi/4$ во второй зоне устойчивости для $E_0 = 2,7 \cdot 10^6 \text{ в/м}$ показали, что характер осцилляций крупных частиц в интервале времени от $t = 0$ до $t = 0,5T$ при ψ от $\pi/4$ до π изменяется по сравнению с соответствующими осцилляциями при ψ от $5\pi/4$ до 2π . В первом случае внешние частицы сгустка отклоняются из зоны устойчивости по оси x на расстояния от $0,025L$ до $0,076L$ и по оси z внутрь сгустка на расстояние от $0,03R$ до $0,1R$, а во втором случае имеют такой же порядок величины отклонений, но при замене осей x на z и z на x . Максимальное t_2 в первом случае имеем при $\psi = \pi$ ($t_2 = 2,86T$, $N_2^+ = N_2^- = 31,25\%$, $N_2^+ = 3,45\%$), а во втором случае при $\psi = 0$ ($t_2 = 3,325T$, $N_2^+ = N_2^- = 3\%$, $N_2^+ = 73\%$, $N_2^+ = 21\%$). Таким образом, для достижения большей устойчивости состояния плазменного сгустка следует выбирать начальную фазу ВЧ-поля в окрестности $\psi = 0$. Проведены расчеты во второй зоне устойчивости при различных концентрациях плазменного сгустка $n_0 = 5,7108 a \cdot \mu^{-3}$, где $a = 10^{14}, 10^{15}, 10^{12}, 10^{11}$ ($\beta = 0,5 + 5 \cdot 10^{-3}$) и фиксированных остальных параметрах $E_0 = 2,7 \cdot 10^6 \text{ в/м}$, $R = L = 1 \text{ м}$, $\lambda = 0,9893 \text{ м}$. Расчеты показали, что с уменьшением концентрации амплитуда колебаний крупных частиц падает. Для $\beta = 0,5$ имеем $t_2 = 3,325T$, $N_2^+ = 21\%$, $N_2^- = 73\%$, $N_2^+ = N_2^- = 3\%$, а для $\beta = 0,05$ - $t_2 = 9,265T$, $N_2^+ = 90\%$, $N_2^+ = N_2^- = 5\%$. При дальнейшем уменьшении концентрации небольшой процент частиц покидает резонатор $N_2^+ = 12,5\%$ ($\beta = 5 \cdot 10^{-3}$) и $N_2^- = 8\%$ ($\beta = 0$), создавая тем самым избыток положительного заряда нейтрализующего фона, что обеспечивает устойчивое состояние плазменного сгустка. Наблюдение за эволюционным процессом проводилось для $\beta = 5 \cdot 10^{-3}$ до $t = 30T$, для $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 0$ до $t = 35T$. При этом для



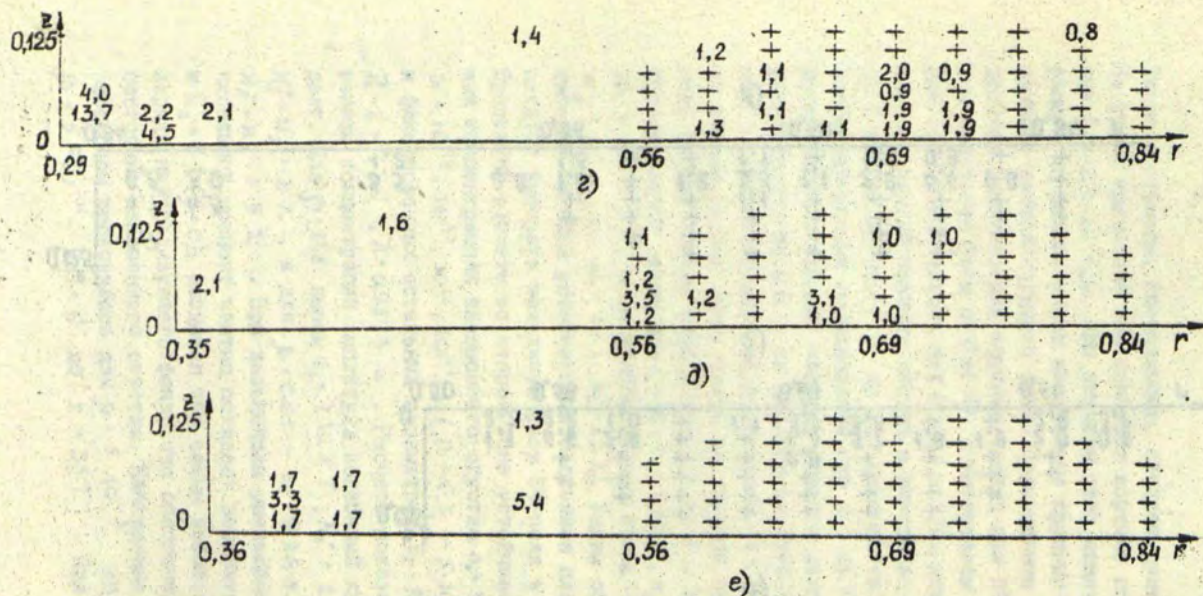
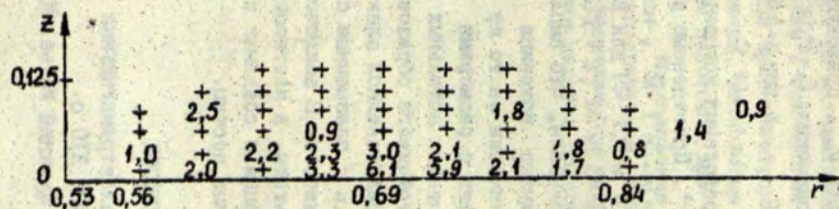
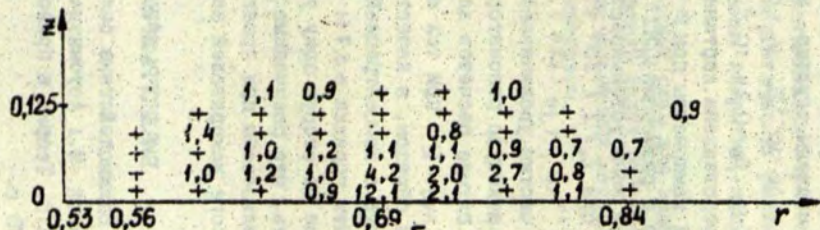


Рис.1. Поле концентрации электронов (в единицах n_0) во второй зоне устойчивости при $E_0 = 2.7 \cdot 10^6$ э/см, $\psi = 0$, $\lambda = 0.9893$ см, $R = L = 1$ см, $n_0 = 5.711 \cdot 10^{14}$ см $^{-3}$, $\beta = 0.5$, а) $t = 0.5(\lambda/c)$ сек, б) $t = 1.0(\lambda/c)$ сек; в) $t = 1.5(\lambda/c)$ сек, $N_2^+ = 19\%$; 2) $t = 2.0(\lambda/c)$ сек, $N_2^+ = 21\%$, $N_2^- = 10\%$; 3) $t = 2.5(\lambda/c)$ сек, $N_2^+ = 21\%$, $N_2^- = 42\%$; 4) $t = 3.0(\lambda/c)$ сек, $N_2^+ = 21\%$, $N_2^- = 48\%$, $N_2^+ = N_2^- = 3\%$.



a)



b)

Рис.2. Поле концентрации электронов (в единицах n_0) во второй зоне устойчивости при $E_0 = 2,7 \cdot 10^6$ В/м, $\psi = 0$, $\lambda = 0,9893$ м, $R = L = 1$ м, $n_0 = 5,711 \cdot 10^{12}$ м $^{-3}$, $\beta = 5 \cdot 10^{-3}$, а) $t = 29,5$ (λ/c) сек, $N_e^+ = 12,5\%$; б) $t = 30,0$ (λ/c) сек, $N_e^+ = 12,5\%$.

$\beta = 5 \cdot 10^{-3}$ максимальные отклонения частиц из зоны устойчивости составляли $0,07 \cdot R$ на внешней границе цилиндрического слоя и $0,03 R$ — на внутренней границе, а для $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$ максимальные отклонения внутрь зоны устойчивости на внешней границе цилиндрического слоя составляли $0,03 R$. При $\beta = 5 \cdot 10^{-5}$ среднее E_s и максимальное E_M кулоновские электрические поля, максимальная скорость V_M , приходящаяся на внешние частицы сгустка, имеют значения: $E_s = 0,35 \cdot 10^{-3} E_0$, $E_M = 0,36 \cdot 10^{-2} E_0$, $V_M = 0,18 c$, а при $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$ — $E_s = 0,24 \cdot 10^{-4} E_0$, $E_M = 0,24 \cdot 10^{-3} E_0$, $V_M = 0,17 c$. На рисунке 2 представлена картина распределения концентраций электронной компоненты при $\beta = 5 \cdot 10^{-3}$. Проведенные расчеты для частиц с размерами $0,0125 L$ и $(h_1 / m \cdot c^2) \cdot R$, находящихся в первой зоне устойчивости ($0,2 L$ и $0,1 \cdot R$) для ВЧ-поля типа E_{021} при $E_0 = 2,7 \cdot 10^6 \text{ в/м}$, $R = 0,94 \text{ м}$, $L = 1 \text{ м}$, $n_0 = 6,2918 \cdot 10^{14} \text{ м}^{-3}$ ($\beta = 0,5$), показали, что амплитуда колебаний частиц увеличивается. Однако половина крупных частиц покинуло резонатор практически за то же время, что и в случае расчетов для частиц с размерами $0,025 L$ и $(h_1 / m \cdot c^2) \cdot R$ при тех же значениях остальных параметров. Таким образом, в качестве устойчивого образования могут служить с концентрацией нейтрализованной электронной компоненты порядка $\leq 5,741 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$ плазменные сгустки, помещенные во вторую зону устойчивости. В заключение следует отметить, что полученные результаты, в частности, могут быть использованы при проектировании и создании в метровом диапазоне ускорителей заряженных частиц.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Геккер И.Р. Взаимодействие сильных электромагнитных полей с плазмой. — М.: Автоиздат, 1978. 310 с.
2. Мак-Лаклан Н.В. Теория и приложения функций Матье. М.: ИЛ, 1953. 475 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты опубликованных в настоящем сборнике работ по математическому моделированию могут быть использованы в технологии для оптимизации характеристик приборов микроэлектроники, энергетических режимов получения алюминия, технологии вакуумных покрытий, повышения нефтеотдачи пластов и др.

Исследования разностных схем для задач фильтрации, теплопереноса, гидродинамики будут полезны для повышения эффективности современных численных методов и для создания пакетов прикладных программ.

СОДЕРЖАНИЕ

БОЯРБВИЧ В.В., КАЛИС Х.Э., МИЛЛЬЕРЕ Р.П., ПАГОДКИНА И.Э. Численное моделирование магнитного поля и движения расплава в алюминиевых электролизерах.....	4
АБОЛТИНЫШ А.Я., ЯУНРОМАНС И.И. Особенности математического моделирования влагопереноса в полиэтилене....	13
БУЖИС А.А., ДИДРИХСОН Г.Т. Численное моделирование полевого транзистора Шоттки на основе метода консервативного осреднения.....	21
ГЕЛЬФГАТ А.Ю., МАРГУЗАН Б.Я. Устойчивость и колебательные режимы естественной конвекции в нагреваемой сбоку прямоугольной полости.....	31
ГУЛБЕ М.Л. Решение задачи кристаллизации в классической постановке методом локального осреднения.....	41
ГУСЕИН-ЗАДЕ С.О., МУСАЕВ Г.М. Численное моделирование процессов неизотермической фильтрации двухфазной жидкости.....	49
ЗЕМИТИС А.А. Исследование разностной схемы аппроксимирующей одну неклассическую краевую задачу.....	61
ДЕМЧЕНКО В.Ф., ДЕМЧЕНКО Л.И., ЗАБОЛОТНЫЙ С.Н. Разностные схемы на обобщенных решениях уравнения конвективной диффузии.....	71
КАЛИС Х.Э., ОСМАНИС А.Д. Численное моделирование потоков свинецсодержащей стекломассы в электромагнитном поле.....	78

ЛИЕТУВИЕТИС О.И. Об одном методе приближения кусочно-гладких в смысле Ляпунова контуров.....	83
МЕЛГАЛВИС А.Г. Решение задачи о поитоке к щели дрены осреднением по фильтру.....	89
РАДЗИНЫШ Г.А. Применение замены переменных при решении одного класса граничных интегральных уравнений....	99
САДЬКОВ М.К. Регуляризованная разностная схема для решения одной краевой задачи нелинейной фильтрации в трехслойном пласте.....	103
ЩИТИЕ М.З. Постановка с осреднением в перемычках для температурного поля многослойного пласта.....	112
САЛАМАТИН А.Н., ЧУГУНОВ В.А., ЯРЦЕВ О.В. Применение методов осреднения для описания тепловых режимов неоднородных квазидвумерных структур.....	119
УЛАНОВА Н.Л. Математическое моделирование процессов теплообмена при наличии тонких слоев.....	129
УНГУРЕ А.А., ЦЕШИТИС Я.В. О разрешимости одной краевой задачи, возникшей в теории гравитации.....	137
ФЕДОРОВ С.И. Об одном численном алгоритме решения задач геометрически нелинейной упругости для несжимаемых сред.....	145
ФЕДОРЧЕНКО И.С. Разностная аппроксимация задачи оптимального распределенного управления эллиптической системой.....	153
ЧЕРЕШАНОВ В.Ю., ОСМАНИС А.Д. Динамика нейтрализованной заряженной компоненты в высокочастотном электромагнитном поле.....	159

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Межвузовский сборник научных трудов

Рецензенты: Т.А.Черепанова, зав.лаб. Инженерно-технологического центра АН ЛатвССР,
доктор физ.-мат. наук;

У.Е.Райтумс, ст.науч.сотр. Вычислительного центра при ЛГУ им.П.Стучки;

Редакторы: А.Буйвис, Р.Паолова
Технический редактор С.Линия
Корректор И.Балоде

Подписано к печати 29 июня ЯТ 09220 ф/б 60x84/16.
Бумага М.П.0 физ.печ.л. 10,2 усл.изд.л. 8,4 уч.изд.л.
Тираж 500 экз. Зак. № 012 Цена I р. 70 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано на ротационной машине, 226050 Рига, ул.Вейденбаума, 5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

80388

LU bibliotēka



958002387

519

1 p. 70 k.