ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра математического анализа

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Межвузовский сборник научных трудов

Под ред. Е.Л.Энгельсона

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига I98I

УДК 5I3., 5I9., 5I7.

Настоящий сборник содержит результаты исследований, проведенных в I978-79 годах на математических кафедрах ЛГУ им. П.Стучки, РПИ, РКИИГА им. Ленинского комсомола, Университета Дружбы Народов им. П.Лумумбы и некоторых других вузов. Результаты, содержащиеся в статьях сборника, доложены на секции функционального анализа и теории функций 38-й и 39-й научных конференций ЛГУ им. П.Стучки в I979 и I980 годах и рекомендованы к опубликованию.

Сборник предназначен для научных работников в области теории функций, функционального анализа и топологии, а также для аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в этих областях.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
ЛГУ им. П.Стучки от 26 декабря I980 года

Т $\frac{20203-0I6у}{М\ 8I2(II)-8I}$ 46.8I.I702040000

Топологические пространства и их отображения. Рига, –

УДК

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧКАХ НА ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

А.А.Берзиньш
ЛГУ им.П.Стучки

Морделл в статье [5] высказал гипотезу о конечности ла рациональных точек на любой алгебраической кривой рода $g > 1$. Единственный общий результат в этом направлении - это доказательство Маниным аналога гипотезы Морделла для функциональных полей. В числовом случае известен лишь результат Шаботи [6] и некоторые результаты для частных кривых, имеющих большую группу рациональных отображений на одну эллиптическую кривую.

В данной статье показано, как гипотезу Морделла для гиперэллиптических кривых можно свести к кривым специального вида. В статье также содержатся некоторые результаты, относящиеся к этим кривым. Теорема 3 - некоторое косвенное подтверждение гипотезы Морделла.

Теорема I. Пусть k - конечное расширение поля Q, L - гиперэллиптическая кривая, заданная уравнением

$$y^2 = F(x) = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - A_i) \qquad A_i \in k \tag{I}$$

Если на кривой L бесконечное число k-точек, то бесконечное число k-точек содержит и некоторая кривая C, задаваемая системой уравнений

$$\{x - A_i = C_i v_i^2 \quad i = 1,2, \quad ,2g+1,\ C_i \in k\} \tag{2}$$

Доказательство. Множество k-точек на якобиане $J(L)$ кривой L - конечнопорожденная абелева группа $J(L)(k)$. Следовательно, $J(L)(k)/2J(L)(k)$ - конечная группа. Легко видеть, что $L(k) \subset J(L)(k) = \bigcup_{j=1}^{N} (2J(L)(k) + P_j)$

Так как множество $L(k)$ бесконечно, то найдется бесконечное множество вида $L(k) \cap (2J(L)(k) + P_j)$, причем $P_j \in L(k)$ Возьмем $P(x, y) \in L(k) \cap (2J(L)(k) + P_j)$ Тогда $P - P_j - 2T$, $T \in J(L)(k)$. Рассмотрим кольцо

A $k(x)/(F(x))$ $\mathbb{Z}^{2g+1}$ Имеется гомоморфизм групп φ $\mathcal{J}(L)(k) \rightarrow A^*/A^{*2}$, задаваемый следующим образом. Если $P \in L(k)$, то $\varphi(P)$ $(x - x(P))$, где – канонический гомоморфизм $A^* \rightarrow A^*/A^{*2}$ Естественным образом φ продолжается на весь якобиан. Имеем $\varphi(P-P_j) = \varphi(T)^2$ $/$ и $\varphi(P) = \varphi(P_j)$, $i(x-x(P)) = i(x-x(P_j)$, $x - x(P) = (x-x(P_j))f^2$, $f \in A^*$ равенство в кольце A Следовательно, $x - x(P) = (x-x(P_j))f^2 +$ g в кольце $k(x)$ Придавая x значения A_i $i = 1, 2,$ $2g+1$, получаем

$$A_i - x(P) = (A_i - x(P_j))f^2(A_i)$$

и координата $x(P)$ любой точки P из бесконечного множества удовлетворяет системе вида (2). Теорема доказана.

Эта теорема дает возможность свести доказательство гипотезы Морделла для гиперэллиптических кривых к доказательству гипотезы для класса кривых вида (2). Так как класс кривых вида (2) обладает большим количеством рациональных отображений, то доказательство гипотезы в классе (2) зависит от справедливости этого утверждения для кривых, являющихся образами этих рациональных отображений. В частности, гипотезу достаточно проверить только для кривых определенного вида, лежащих на прямом произведении эллиптических кривых. Такие кривые будут рассмотрены в конце статьи. Сейчас дадим более точное описание кривых класса (2).

<u>Теорема 2.</u> Пусть на кривой X действует группа автоморфизмов $G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ X/G рациональная кривая, и пусть $H_1, H_2,$ $, H_{2^n-1}$ – все подгруппы индекса 2 в G Тогда якобиан $\mathcal{J}(X)$ изогенен $\bigoplus_{i=1}^{2^n-1} \mathcal{J}(X/H_i)$

<u>Доказательство.</u> Будет использован следующий факт: пусть i $X \rightarrow X/G$ – накрытие Галуа с группой Галуа G, h h^* – индуцированные отображения якобианов. Тогда справедливы формулы

$$(h^* \circ h)x = \sum_{\sigma \in G} \sigma x \qquad (h \circ h^*)x \qquad |G|x \tag{3}$$

Пусть f_i – каноническое отображение $X \rightarrow X$ H_i, пусть $f = \sum f_i$ $\mathcal{J}(X) \rightarrow \oplus \mathcal{J}(X/H_i)$. Тогда ввиду формулы (3) и рациональности кривой X/G имеем $(f^* \circ f)x = \sum_{i=1}^{2^n-1} (f_i^* \circ f_i)x =$

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} \sum_{\sigma \in H_i} \sigma x = 2^{n-1}x + (2^{n-1} - 1)\sum_{\sigma \in G} \sigma x = 2^{n-1}x.$$

Так как для всех $(f_i \circ f_i^{*})x = |H_i|x = 2^{n-1}x$, то $(f \circ f^{*}$ ^{1}x
Из равенств $f^{*} \circ f$ 2^{n-1} и $f \circ f^{*} = 2^{n-1}$ следуют конеч
ядра и коядра отображения f Следовательно, f —изоген
Теорема доказана.

Применим теорему 2 для вычисления якобиана рода кри (2). Обозначим через $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ кривую, заданную уравнением $(x - A_{i_1})(x - A_{i_2})$ $(x - A_{i_k})$ C_{i_1} C_{i_2} C_{i_k} y^2.

<u>Предложение</u> $\mathcal{J}(C)$ изогенно $\oplus$ $\mathcal{J}(C_{i_1, i_2, \ldots, i_k})$ где сумма берется по всем различным наборам i_k из множества $\{1, 2, \quad, 2g+1\}$.

<u>Доказательство.</u> Для простоты ограничимся случаем $g = 2$. (Доказательство общего случая ничем принципиально не отличается, но требует большого разбора случаев). Рассмотрим группу автоморфизмов G кривой C порожденную автоморфизмам
σ_1 $v_1 \to - v_1$, σ_2 $v_2 \to - v_2$, σ_3 $v_3 \to$ v_3
Группа $G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ содержит 7 подгрупп индекса два $H_1 = (\sigma_2, \sigma_3)$, $H_2 = (\sigma_1, \sigma_3)$, $H_3 = (\sigma_1, \sigma_2)$, $H_4 = (\sigma_1, \sigma_2\sigma_3)$, $H_5 = (\sigma_2, \sigma_1\sigma_3)$, $H_6 = (\sigma_3, \sigma_1\sigma_2)$, $H_7 = (\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_3)$. Случай а) (H_1, H_2, H_3) X/H_i - эллиптическая кривая, изогенная кривой $C_{i,4,5}$

Случай б) (H_4, H_5, H_6) Для определенности X/H_4
Кривая $L \cong X/H_4$ задается системой уравнений

$$(x - A_2)(x - A_3) = C_2 C_3 u^2, \quad x - A_4 \quad C_4 v_4^2, \quad x - A_5 = C_5 v_5^2$$

Рассмотрим группу автоморфизмов F, порожденную автоморфизмами τ_1 $v_4 \to$ v_4, τ_2 $v_5 \to -v_5$. $F \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, L/F - рационально. F_1 (τ_1), $F_2 = (\tau_2)$, $F_3 = (\tau_1\tau_2)$ - подгруппы индекса два. L/F_1, L/F_2, L/F_3 - эллиптические кривые, изогенные кривым $C_{2,3,4}$, $C_{2,3,5}$ и $C_{2,3,4,5}$ соответственно. Случай в) (H_7) Кривая $L \cong X/H_7$ задается системой уравнений

$$(x - A_1)(x - A_2)(x - A_3) = C_1 C_2 C_3 u^2, \quad x - A_4 = C_4 v_4^2, \quad x - A_5 = C_5 v_5^2$$

Группа автоморфизмов F (τ_1, τ_2) τ_1 $u \to -u$, τ_2 $v_4 \to -v_4$. $F_1 = (\tau_1)$, $F_2 = (\tau_2)$, F_3 $(\tau_1\tau_2)$ Кривая L/F_1 - рациональна, $\mathcal{J}(L/F_2)$ изогенно $C_{1,2,3} \oplus C_{1,2,3,5}$ $\mathcal{J}(L/F_3)$ изогенно $C_{1,2,3,4} \oplus \mathcal{J}(C_{1,2,3,4,5})$.

Объединяя все случаи, получаем требуемое равенство.

<u>Следствие.</u> Род кривой (2) выражается формулой

$$g_{C_g} \quad C^{3}_{2g+1} + C^{4}_{2g+1} + 2\left(C^{5}_{2g+1} + C^{6}_{2g+1}\right) + \qquad + g\, C^{2g+1}_{2g+1}$$

В частности, $g_{C_2} \quad 17$

Кривая (2) при любом g имеет рациональные отображения на кривые, заданные системами

$\begin{cases} C_{1,2,3} \\ C_{1,2,4} \end{cases}$ или $\begin{cases} C_{1,2,3} \\ C_{1,2,4} \\ C_{1,2,5} \end{cases}$ Эти кривые

бирационально изоморфны следующим кривым, лежащим на абелевом многообразии - прямом произведении эллиптических кривых.

$$\begin{cases} y^2 = x^3 + Ax + B \\ v^2 = u^3 + ax + b \\ u \quad Dx + C \quad D \neq 0 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} y^2 = x^3 + Ax + B \\ v^2 = u^3 + au + b \\ z^2 = t^3 + \alpha t + \beta \\ u \quad Dx + C \quad D \neq 0 \\ t \quad dx + c \quad d \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим через C_1 кривую $y^2 = x^3 + Ax + B \quad C_2$ $v^2 = u^3 + au + b \quad C_3 \quad z^2 = t^3 + \alpha t + \beta$

$(C_1 \oplus C_2)(k) \cong C_1(k) \oplus C_2(k) \quad \mathbb{Z}^{r_1} \oplus \mathbb{Z}^{r_2} \oplus A_1 \oplus A_2$

где r_1, r_2 k- ранги C_1 и C_2, A_1 и A_2-конечные группы конечных k-точек на C_1 и C_2

<u>Лемма I.</u> Ни на какой прямой $\mathbb{Z}$-модуля $(C_1 \oplus C_2)(k)$ не лежит бесконечное число k-точек кривой (4).

<u>Доказательство.</u> Множество k-точек кривой (4), лежа на прямой модуля $(C_1 \oplus C_2)(k)$ задается формулой $(P, Q) = (P_0, Q_0) + N(P_1, Q_1)$ Фиксируем простое число p За счет выбора определенного смежного класса при отображении редукции по модулю p можем считать, что $\widetilde{P_1} \quad \widetilde{O}$ и $\widetilde{Q_1} = \widetilde{O}$, где $\widetilde{P}$ обозначает редукцию точки P по модулю p Пусть $\tau = -\frac{x}{y}$ и $\sigma = -\frac{u}{v}$ - локальные параметры на C_1 и C_2. Из формул оложения на C_1 и C_2 следуют равенства (p выбирается так, что $\widetilde{P_0} \neq \widetilde{O}$ и $\widetilde{Q_0} \neq \widetilde{O}$):

$$x(P) = x = x_0 - 2y_0\tau(NP_1) + \qquad \varphi(\tau(NP_1$$

и $$u(Q) = u = u_0 - 2v_0\sigma(NQ_1) + \qquad \psi(\sigma(NQ_1)),$$

где φ и ψ - аналитические функции, сходящиеся при $\tau, \sigma \in p\mathbb{Z}_p$

Пусть g_1 и g_2 – изоморфизмы формальных групп кривых C C_2 с группой $p\mathbb{Z}_p$ (с обычной операцией сложения).

Ввиду формулы $\tau(NP_1) = g_1^{-1} g_1 \tau(NP_1) = g_1^{-1} N g_1 \tau(P_1)$ функция $\tau(NP_1)$ – аналитическая и сходится при всех $N \in \mathbb{Z}_p$ Аналогично для кривой C_2 Из условия $Dx + C$ имеем $D\varphi(\tau(NP_1)) + C = \psi(\sigma(NQ))$, а следовательно, $F(N)$ где F – аналитическая функция, сходящаяся при всех $N \in$ Если уравнение $F(N)=0$ имеет бесконечно много решений, то F – тождественно нулевая функция, и все точки вида $(P_0, Q_0) + N(P_1, Q_1)$ принадлежат кривой (4). При регулярном отображении абелева многообразия на себя

k $C_1 \oplus C_2 \to C_1 \oplus C_2$, $k(P, Q)$ $(P, Q) + (P_1, Q_1)$

кривая (4) пересечется со своим образом в бесконечном числе точек и, следовательно, совпадает с ним. Но это невозможно, так как кривая (4) не эллиптична, а отображение k не периодично. Лемма доказана.

Применим лемму к кривым (4) и (5) в случае, если ранги кривых C_1, C_2 и C_3 равны I. Через $\hat{h}_x$ обозначим высоту Тэйта, соответствующую высоте $h_x(P) = h(x(P))$ [I] Пусть P_1, Q_1, T_1 – базисные точки на C_1, C_2, C_3.

<u>Предложение.</u> Если $\hat{h}_x(P_1) / \hat{h}_u(Q_1)$ – рациональное число, то число точек на кривой (4) конечно.

<u>Доказательство.</u> Пусть точек бесконечно много. Выбираем такие конечные точки P_0 и Q_0 на C_1 и C_2, что имеется бесконечное число точек кривой (4) вида $(nP_1 + P_0, mQ_1 + Q_0)$ Из равенства u $Dx + C$ следует $h_x(nP_1 + P_0) = h_u(mQ_1 + Q_0) + O(1)$. Переходя к высотам Тэйта, имеем $|\hat{h}_x(nP_1 + P_0) - \hat{h}_u(mQ_1 + Q_0)| < C$ Ввиду конечности точки P_0, $\hat{h}_x(nP_1 + P_0) = n^2 \hat{h}_x(P_1) + 2n f(P_1, P_0) + + \hat{h}_x(P_0)$ $n^2 \hat{h}_x(P_1)$, откуда следует неравенство

$$|n^2 \hat{h}_x(P_1) - m^2 \hat{h}_u(Q_1)| < C$$

Случай а) $\hat{h}_x(P_1) / \hat{h}_u(Q_1)$ – квадрат рационального числа τ^2. (Доказывается аналогично примеру в [2])

$\tau = \frac{M}{N}$ $|n^2 M^2 - m^2 N| < C'$

Полагая $n\ m > 0$ имеем $|nM \quad mN| < \dfrac{C}{nM + mN}$ и, не считая конечного числа n и m, получаем равенство $nM \quad mN \quad 0$, которое означает, что бесконечное число точек кривой (4) лежит на прямой модуля $(C_1 \oplus C_2)(k)$.

Случай б) $\hat{h}_x(P_1)/\hat{h}_u(Q_1)$ $\frac{M}{N}$ Имеем $|n^2M-m^2N|<C'$ Пары (n,m) лежат на конечном числе "кривых", задаваемых уравнениями n^2M m^2N C. Следуя доказательству леммы, имеем уравнение $D(x_0-2y_0\tau(nP_1)+\ldots)+C$ u_0 $2v_0\sigma(mQ_1)+\ldots$ из которого аналогично получаем, что n $F(m)$ – аналитическая функция, сходящаяся при $m\in\mathbb{Z}$, и, значит, $F^2(m)M-m^2N=C$ Легко проверить, что $F(m)$ не может тождественно удовлетворять этому уравнению, и, следовательно, существует лишь конечное число решений.

Теорема 3. Рассмотрим кривую (5) с рангами $r_1=r_2=r_3=1$ $\{\hat{h}_x(P_1)/\hat{h}_u(Q_1)\}=\alpha$, $\{\hat{h}_x(P_1)/\hat{h}_t(T_1)\}$ β. Для почти всех пар $(\alpha,\beta)\in[0,1)\times[0,1)$ на кривой (5) имеется лишь конечное число k-точек.

Доказательство. Пусть (P,Q,T) $(nP_1+P_0, mQ_1+Q_0, kT_1+T_0)$ k-точка кривой (5). Следуя доказательству предыдущего утверждения, имеем $|n^2\alpha-m^2|<C$, $|n^2\beta$ $k^2|<C$.

Выбираем некоторый октант для определенности $n>0$, $m>0$, $k>0$. Имеем $|n\sqrt{\alpha}-m|\leq\frac{C'}{n}$, $|n\sqrt{\beta}-k|<\frac{C'}{n}$

Так как интеграл $\int\frac{C'}{x}\frac{C'}{x}dx$ сходится, то для почти всех значений $(\{\sqrt{\alpha}\},\{\sqrt{\beta}\})$ и, значит, для почти всех значений $(\{\alpha\},\{\beta\})$ неравенства имеют лишь конечное число решений. Теорема доказана.

Следствие. В частности, по теореме Рота решений будет конечное число, если α и β алгебраичны.

Литература

1. Касселс Дж. Диофантовы уравнения со специальным [illegible] смотрением эллиптических [illegible] ивы [illegible] Математика. 1968 вып. 1, с.113-160; 1968, вып.12, 2, с.1-48

2. Манин Ю.И. Высота Тэйта точек на абелевом многообразии, ее варианты и приложения.- Изв.АН СССР. 1964, т.28, с.1363-1390.

3. Tate T. The Arithmetic of Elliptic Curves.—Inventiones math. 1974, N 23, p.179-206.
4. Lang S. Abelian varieties. Interscience, New York, 1959.
Mordell L.J. On the rational solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degrees.—Proc.Cambridge Philos Soc. 1922, N 21, p.179-192.

Поступила 18 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981.

УДК 515.33

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ТЕОРЕМЫ ЭРДЕША И РАДО

Ю.Х.Брегман
ЛГУ им. П.Стучки

В известной работе по комбинаторной теории множеств [1] венгерские математики Эрдеш и Радо доказали, что множество $\mathcal{P}$ бесконечных подмножеств любого бесконечного множества можно представить в виде такого объединения $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ где ни $\mathcal{P}_1$, ни $\mathcal{P}_2$ не содержат никакого множества $A \in \mathcal{P}$ вместе со всеми его бесконечными подмножествами. Мы рассмотрим более общую задачу. Пусть $B \subset A$ и $|A \setminus B| = \aleph_0$. Назовем тогда экспонентой A по модулю B множество $\{C \quad B \subseteq C \subseteq A\} \overset{def}{=} exp(A/B)$ Можно ли множество $\mathcal{D}$ бесконечных подмножеств любого множества представить в виде $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, где ни $\mathcal{P}_1$, ни $\mathcal{P}_2$ не содержат $exp(A/B)$ для любых множеств A и B если только $A \setminus B$ бесконечно? В общем случае ответ на этот вопрос нам неизвестен. Используя метод доказательства теоремы Эрдеша-Радо, решить такую задачу не удается. В данной заметке на основе топологических теорем о рамсеевских пространствах [2], [3] получены некоторые частные решения поставленной задачи.

Мы будем использовать следующие обозначения: $D = \{0, 1\}$ дискретное двоеточие, $|M|$ - мощность множества M, $exp\, M = \{A \subset M\}$ - множество всех подмножеств множества M, $exp_{\aleph_0} M = \{A \subset M \quad |A| \leq \aleph_0\}$ - множество не более чем счетных подмножеств множества M Для мощности континуум наряду с c мы будем использовать обозначение $\aleph_c$; при этом первый нерегулярный кардинал, превосходящий континуум, принимает обозначение $\aleph_{c+\omega_0}$

Теорема 1. Для множества M, мощность которого меньше $\aleph_{c+\omega_0}$, $exp_{\aleph_0} M$ представима в виде объединения $exp_{\aleph_0} M = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, где ни $\mathcal{P}_1$, ни $\mathcal{P}_2$ не содержат $exp(A/B)$ для любых множеств A и B, если только $A \setminus B$ бесконечно.

Доказательство. Пусть $A \subset M$ $x \in D^{|M|}$ смотрим биекцию $y \; \exp M \longrightarrow D^{|M|}$ которая определяется равенством $y(A) = x = (x_\alpha)_{\alpha \in M}$, где

$$x_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{если } \alpha \in A \\ 0 & \text{если } \alpha \notin A \end{cases}$$

заметить, что образ $y(\exp_{\aleph_0} M)$ есть Σ-произведение, лежащее в произведении $\prod_{\alpha \in M} D_\alpha$ с базисной точкой x_0, все координаты которой равны 0 1). Для любых $A, B \in \exp_{\aleph_0} M$ таких, что $|A \setminus B| = \aleph_0$, образ $y(\exp(A/B))$ есть множество $\Pi\{D_\alpha \;\; \alpha \in A \setminus B\} \times \times \{(0)_\beta \;\; \beta \in M \setminus A\} \times \{(1)_\gamma \;\; \gamma \in B\}$, которое, очевидно, гомеоморфно канторову дисконтинууму $D^{\aleph_0}$

В статье [2] доказано, что Σ-произведение дискретных двоеточий Σ^τ обобщенном канторовом дисконтинууме D^τ где $\tau < \aleph_{c+\omega_0}$ можно таким образом представить в виде $\Sigma^\tau = Y_1 \cup Y_2$, чтобы ни Y_1 ни Y_2 не содержали гомеоморфного образа $D^{\aleph_0}$ Определим множества $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ равенствами $\mathcal{P}_1 = y^{-1}(Y_1)$ и $\mathcal{P}_2 = y^{-1}(Y_2)$. Поскольку любых $A, B \in \exp_{\aleph_0} M$ $(|A \setminus B| = \aleph_0)$ $y(\exp(A/B))$ гомеоморфно $D^{\aleph_0}$, то ни $\mathcal{P}_1$ ни $\mathcal{P}_2$ не содержат целиком $\exp(A/B)$ Теорема доказана.

дальнейшем потребуется одно теоретико-множественное предположение. Назовем аксиомой NH утверждение "для любого кардинала τ меньшего $\aleph_{c+\omega_0}$, имеет место $2^\tau < \aleph_{c+\omega_0}$. Аксиома NH не противоречит аксиомам теории множеств, так как она следует из обобщенной континуум-гипотезы GCH.

Теорема [illegible]. $[NH]$ Для множества M, мощность которого меньше $\aleph_{c+\omega_0}$, $\exp M$ представима в виде объединения $\exp M = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, где ни $\mathcal{P}_1$, ни $\mathcal{P}_2$ не содержат $\exp(A/B)$ для любых множеств A и B для которых $A \setminus B$ бесконечно.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем рас-

---

1) Σ-произведением семейства пространств $\{E_\alpha \;\; \alpha \in A\}$ базисной точкой $e^0 = (e_\alpha)_{\alpha \in A} \in E = \Pi\{E_\alpha \;\; \alpha \in A\}$ (см., напр., [4]) называется подмножество в E, состоящее из точек e произведения E, отличающихся от точки e^0 не более чем на счетном числе координат.

сматривать только такие пары A B где $|A\setminus B|=\aleph_0$ действительно, $exp(A/B)$ где $|A\setminus B|>\aleph_0$, всегда целиком содержит некоторую $exp(A/C)$ где $|A\setminus C|=\aleph_0$ Поэтому если $\mathcal{P}_1$ не содержит $exp(A/C)$ для всех A и C, таких, что $|A\setminus C|=\aleph_0$, то $\mathcal{P}_1$ не содержит и $exp(A/B)$ для всех множеств A и B для которых $A\setminus B$ бесконечно.

Рассмотрим биекцию φ, определенную при доказательстве теоремы 1. Аналогично теореме 1 нетрудно заметить, что для $A, B\in exp M$ $(|A\setminus B|=\aleph_0)$ образ $\varphi(exp(A/B))$ лежащий в $D^{|M|}$ гомеоморфен канторову дисконтинууму $D^{\aleph_0}$ В.И.Малыхин [3] доказал, что любое топологическое хаусдорфово пространство X мощность которого не превосходит $\aleph_{c+\omega_0}$ может быть представимо в виде $X=Y_1\cup Y_2$ где ни Y_1, Y_2 не содержат гомеоморфного образа $D^{\aleph_0}$ В предположении NH $|D^{|M|}|=2^{|M|}<\aleph_{c+\omega_0}$ Поэтому $D^{|M|}$ может быть представлено в виде $D^{|M|}=Y_1\cup Y_2$, и ни Y_1, ни Y_2 не содержат канторов дисконтинуум. Осталось определить $\mathcal{P}_1=\varphi^{-1}(Y_1)$ и $\mathcal{P}_2=\varphi^{-1}(Y_2)$ и заметить, что ни $\mathcal{P}_1$ ни $\mathcal{P}_2$ не содержат $exp(A/B)$ для любых $A, B\in exp M$ таких, что $|A\setminus B|\geq\aleph_0$

Теорема доказана.

Заметим, что, полагая в формулировках теорем $B=\emptyset$ получим частные случаи теоремы Эрдеша-Радо.

В заключение автор приносит искренную благодарность А.П.Шостаку и В.И.Малыхину за помощь, внимание и поддержку.

Литература

1. Erdöš P., Rado Combinatorial theorems on classifications on subsets of a given set.—Proc.London th.Soc., **1952, vol.2, p.417-439.**

Брегман [illegible] Шостак [illegible] Некоторые топологические [illegible] мы Рамсея.–В кн.: Топологи [illegible] ото [illegible] ения

Рига, 197[illegible], с.3-13.

3. Малыхин В.И.О рамсеевских пространствах.-ДАН СССР, 1979, т.247, № 6,с.1312-1316

4. Engelking R. General topology. Warszawa, 1977.

Поступила 3 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981.

УДК [illegible].83+513.88.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ АЛАОГЛУ

М.А.Гольдман

ЛГУ им. П.Стучки

Напомним формулировку теоремы Алаоглу (см.,например, [1, с .80]): если $\mathcal{U}$ - окрестность нуля в топологическом векторном пространстве S над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), то множество $E:=\{x\in S^*\,|\,|x(s)|\leqslant 1$ для всех $s\in\mathcal{U}\}$ слабо* компактно.

Эта теорема допускает следующее обобщение.

<u>Теорема 1.</u> Пусть S топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\mathcal{Y}$ отделимое топологическое вектор- пространство над тем же полем, X - совокупность всех непрерывных линейных отображений S в $\mathcal{Y}$, и σ - топология поточечной сходимости на X Тогда каковы бы были открытое в S множество $\mathcal{U}$ и компактное в $\mathcal{Y}$ множество M множество $E:=\{x\in X\,|\,x(\mathcal{U})\subset M\}$ компактно в пространстве (X,σ)

Теорема Алаоглу соответствует тому случаю сформулированной сейчас теоремы 1, когда $\mathcal{Y}=\mathbb{K}$ $M=\{\lambda\in\mathbb{K}\,|\,|\lambda|\leqslant 1\}$ а $\mathcal{U}$ - окрестность нуля в S

Доказательство теоремы 1 опирается на следующее утверждение, легко вытекающее из теоремы А.Н.Тихонова о топологическом произведении компактных пространств.

Пусть $\{\mathcal{Y}_s\,|\,s\in S\}$ семейство топологических пространств и E - подмножество топологического произведения $\Pi\{\mathcal{Y}_s\,|\,s\in S\}$. Тогда E компактно в $\Pi\{\mathcal{Y}_s\,|\,s\in S\}$, если E замкнуто в $\Pi\{\mathcal{Y}_s\,|\,s\in S\}$ и для каждого $s\in S$ проекция $pr_s E$ относительно компактна в $\mathcal{Y}_s$ Эти условия также необходимы для компактности E если $\mathcal{Y}_s$ $\mathcal{T}_2$-пространствами.

Нам понадобится первая часть этого утверждения (с точности), притом [illegible] случае, когда все $\mathcal{Y}_s$

Доказательство теоремы 1.

В силу приведенного выше следствия теоремы А.Н.Тихонова достаточно показать, что:

(а) семейство $E:=\{x\in X \mid x(\mathcal{U})\subset M\}$ замкнуто в топологии поточечной сходимости пространства Y^S ;

(в) для каждого $s\in S$ множество $\{x(s) \mid x\in E\}$ относительно компактно в Y

Установим (а). Следует показать, если $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ — направленность в E $x_\alpha(s)\xrightarrow[A]{}x(s)$ для каждого $s\in S$ то $x\in E$ для этого надо проверить, что отображение x линейно, непрерывно и обладает свойством $x(\mathcal{U})\subset M$ Последнее вытекает из замкнутости множества M Линейность x следует из того, что все x_α — линейные отображения, области значений которых расположены в отделимом пространстве. Доказательство непрерывности x легко получить, опираясь на линейность x и на включение $x(\mathcal{U})\subset M$ Возьмем какую-либо окрестность $\mathcal{V}$ точки θ_y Поскольку множество M ограничено, множество $M-M$ тоже ограничено; поэтому существует такое число $a>0$, что $a(M-M)\subset\mathcal{V}$. Пусть s_0 - какая-нибудь точка множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_0:=a(\mathcal{U}-s_0)$. Множество $\mathcal{U}_0$ является окрестностью точки θ_s , причем $x(\mathcal{U}_0)=$ $=a[x(\mathcal{U})-x(s_0)]\subset a(M-M)\subset\mathcal{V}$ Этим непрерывность x доказана.

Остается показать, что E обладает свойством (в). Пусть s_1 — фиксированная точка множества $\mathcal{U}$, а s — какая-нибудь точка пространства S Так как $\mathcal{U}-s_1$ является окрестностью точки θ_s , то найдется такое $b>0$, что $bs\in\mathcal{U}-s_1$, следовательно, $bs+s_1\in\mathcal{U}$ и $x(bs+s_1)\in M$ для каждого $x\in E$ Отсюда получаем: $bx(s)+x(s_1)\in M$, $x(s)\in b^{-1}(M-M)$ для каждого $x\in E$ Поскольку множество M компактно, множество $b^{-1}(M-M)$ тоже компактно. Значит, множество $\{x(s) \mid x\in E\}$ относительно компактно в Y Теорема 1 доказана.

Замечание. При доказательстве непрерывности линейного отображения x удовлетворяющего условию $x(\mathcal{U})\subset M$ не используется компактность множества M ,а лишь его ограниченность; отделимость пространства Y при этом также не

тся.

Обобщенная теорема Алаоглу (теорема 1) позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 2. Пусть S - сепарабельное топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, Y метризуемое топологическое векторное пространство над тем же полем, X – совокупность всех непрерывных линейных отображений S в Y и σ – топология поточечной сходимости на X Тогда, каковы бы ни были открытое в S множество $\mathcal{U}$ и компактное в Y множество M , множество $E:=\{x\in X|x(\mathcal{U})\subset M\}$ секвенциально компактно в пространстве (X,σ).

o Теорема 2 является обобщением известного результата о секвенциальной компактности в слабой* топологии поляры окрестности нуля сепарабельного топологического векторного пространства [1, с. 82, теорема 3.17].

Доказательство теоремы 2 нетрудно получить с помощью следующей метризационной теоремы.

Теорема 3. Пусть (E,τ) - компактное топологическое пространство, (Y,d) – метрическое пространство. Если некоторая последовательность $(f_n)_{n\in N}$ непрерывных отображений E в Y разделяет точки в E то E метризуемо.

Формулировка и доказательство этой теоремы в случае, когда $Y=\mathbb{R}$, имеется в [1, с.75] В рассматриваемом нами случае, когда Y – произвольное метрическое пространство, доказательство в [1] необходимо несколько видоизменить.

Доказательство теоремы 3. Не ограничивая общности, можно считать, что $d(y,y')\leq 1$ для любых $y,y'\in Y$, так как каждое метрическое пространство гомеоморфно метрическому пространству, диаметр которого не превосходит единицы [2 , с.165, теорема 13]. Пусть τ_ρ – топология на E , индуцированная метрикой $\rho(p,q):=\sum_{n=1} 2^{-n}d(f_n(p),f_n(q))$ Докажем, что $\tau_\rho\subset\tau$ Для этого нужно показать, что для каждого шара $B(p,r)=$ $:=\{q\in E\mid\rho(p,q)<r\}$ существует множество $G\in\tau$ такое, что $p\in G\subset B(p,r)$. Возьмем $m\in N$ так, чтобы выполнялось неравенство $2^{-m}<r/2$, и пусть $y_n:=f_n(p)$, $n=1,\cdot\ ,m$ Так как f_n – непрерывные отображения, то существуют такие множества $\mathcal{U}_p^n\in\tau$, что $p\in\mathcal{U}_p^n$ и $f_n(\mathcal{U}_p^n)\subset B(y_n,r/2),n=1,\ldots,m$. Пусть $G:=\bigcap_{n=1}^{m}\mathcal{U}_p^n$,тогда

$p \in G \in \tau$ Если $q \in G$, то $d(f_n(p), f_n(q)) < r/2$, $n = 1, \ldots, m$. Отсюда следует, что $\sum_{n=1}^{m} 2^{-n} d(f_n(p), f_n(q)) + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} d(f_n(p), f_n(q)) < r/2 + 2^{-m} < r$, т.е. $\rho(p, q) < r$ для каждого $q \in G$ Значит, $G \subset B(p, r)$ Так как топология τ_ρ хаусдорфова, то $\tau_\rho = \tau$ [1, с.74].

Литература

1. Рудин У. Функциональный анализ. М., 1975.
2. Келли Дж.Л. Общая топология. М., 1968.

Поступила 20 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981.

УДК 513.83+519.21

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НЕГЛАДКИХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

А.И.Жданок

ЛГУ им.П.Стучки

Введение

Изучение марковских процессов обычно сводится к исследованию двух полугрупп линейных операторов в банаховых пространствах функций и мер. В случае однородных МП (марковских процессов) с дискретным временем эти полугруппы исчерпываются целыми степенями двух марковских операторов. Марковские операторы имеют достаточно общий Так, например, произвольный линейный ограниченный положительный оператор в пространстве непрерывных функций на компакте определяет некоторый МП на этом компакте, если он "правильно" отнормирован.

Задачу исследования асимптотического поведения МП (эргодические теоремы) можно существенно облегчить, накладывая на марковские операторы те или иные условия непрерывности, т.е. гладкости. Типичными предположениями являются феллеровость МП, либо существование инвариантной вероятностной меры для марковского оператора. Такие ограничения присутствуют в большинстве многочисленных работ по МП. Однако многие МП, описывающие реальные процедуры, в частности, некоторые стохастические вычислительные методы, указанными свойствами не обладают. Таким образом, кроме естественного желания рассмотреть более общие МП, существуют и практические потребности в таком рассмотрении.

В настоящей работе устанавливается ряд новых фактов об асимптотическом поведении МП, на марковские операторы которых априори никаких ограничений не накладывается. Методологической особенностью проводимых рассмотрений является продолжение марковских операторов на пространство конечно аддитивных мер, т.е. отказ от вероятностной трактовки промежуточных результатов.

Пусть X произвольное множество, Σ произвольная σ-алгебра его подмножеств, содержащая все одиночные множества из X Если X - топологическое пространство, то будем обозначать соответственно символами $\mathcal{A}=\mathcal{A}_X$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{N}=\mathcal{N}_X$ борелевскую алгебру, борельскую σ-алгебру и бэровскую σ-алгебру подмножеств из X соответственно.

Будем использовать также следующие обозначения:

$B(X,\Sigma)$, $C(X)$ - банаховы пространства ограниченных вещественных функций f на X с равномерной нормой, Σ-измеримых и непрерывных (в случае топологического X) соответственно;

$$ba(X,\Sigma),\ rba(X,\Sigma),\ ca(X,\Sigma),\ rca(X,\Sigma)\ -$$

банаховы пространства ограниченных вещественных мер на Σ, соответственно конечно-аддитивных, регулярных конечно-аддитивных, счетно-аддитивных и регулярных счетно-аддитивных. Пространства rba и rca могут рассматриваться лишь в случае топологического X Нормой во всех пространствах мер является полная вариация мер на X

Пусть на измеримом пространстве (фазовом) (X,Σ) задан однородный МП с дискретным временем и с переходной функцией $p(x,E)$ $x\in X$ $E\in\Sigma$ удовлетворяющий обычным условиям:

$$p: X\times\Sigma \longrightarrow [0,1]\ ;$$

$$\forall\, x\in X \qquad p(x,\cdot)\in ca(X,\Sigma),\ p(x,X)=1\ ;$$

$$\forall\, E\in\Sigma \qquad p(\cdot,E)\in B(X,\Sigma).$$

МП порождает пару марковских операторов:

$$T: B(X,\Sigma)\to B(X,\Sigma),\quad Tf(x)=\int_X f(y)\,p(x,dy)\ ,$$

$$A: ca(X,\Sigma)\to ca(X,\Sigma),\quad A\mu(E)=\int_X p(x,E)\,\mu(dx).$$

Операторы T и A являются линейными, непрерывными, с единичной нормой, положительными относительно конусов неотрицательных функций и мер соответственно. Оператор A изометричен, т.е., в частности, переводит вероятностные меры в вероятностные. Вероятностные меры μ определяются условиями $\mu \in ca(X,\Sigma)$, $\mu > 0$, $\mu(X) = 1$

Феллеровские операторы, соответствующие феллеровским МП и определяемые условием $T(C(X)) \subset C(X)$ (для топологического X), также обладают перечисленными свойствами, если их рассматривать как сужения на $C(X)$

Отметим, что конусы неотрицательных функций в $B(X,\Sigma)$ и $C(X)$ телесны и оператор T имеет неподвижную точку $f(x) \equiv 1$, принадлежащую внутренности как одного, так и другого конуса. Вопрос о существовании ненулевой неподвижной точки $\mu = A\mu$ в конусе неотрицательных мер в $ca(X,\Sigma)$, называемой инвариантной мерой, представляет собой проблему стационарного распределения вероятностей для марковского процесса.

Пусть $\mu_0 \in ca(X,\Sigma)$, $\mu_0 \geq 0$ $\mu_0(X) = 1$ и $\mu_n = A\mu_{n-1} = A^n\mu_0$ для $n = 1,2,\ldots$ МП обычно отождествляют с семейством последовательностей мер $\{\mu_n\}$ зависящих от начальной точки μ_0 как от параметра.

Кроме описания МП на языке мер, возможно также его описание в терминах случайных величин. При достаточно общих предположениях о фазовом пространстве каждой вероятностной мере μ соответствует случайная величина ξ со значениями в X. В этой терминологии МП отождествляется с последовательностью случайных величин ξ_n $n = 0,1,\ldots,$ соответствующих мерам μ_n

В настоящей работе изучается характер асимптотического поведения последовательностей мер $\{\mu_n\}$ Задача о существовании инвариантной вероятностной меры является здесь подчиненной.

§ I. Продолжение марковских процессов на пространство конечно-аддитивных мер

Пространства функций и мер находятся в определенной двойственной связи [I] для (X,Σ) произвольного – $B^*(X,\Sigma)=ba(X,\Sigma)$; для X нормального – $C^*(X)=rca(X,\mathcal{A})$, для X компактного хаусдорфового – $C^*(X)=rca(X,\mathcal{B})$, где знак равенства означает изометрический изоморфизм. Отсюда следует, [illegible] лишь для феллеровского процесса, заданного на хаусдорфовом компактном пространстве, оператор A является сопряженным оператору [illegible] что хорошо известно

Используя конструкцию интеграла по конечно-аддитивной мере [I], в рамках которой для любых $f\in B(X,\Sigma)$ и $\mu\in ba(X,\Sigma)$ существует интеграл $\int f d\mu$, продолжим оператор A с сохранением его аналитического вида на пространство $ba(X,\Sigma)$ Легко проверить, что такое продолжение определяет оператор $A': ba(X,\Sigma)\to ba(X,\Sigma)$, который является линейным, непрерывным и положительным. Подставляя для каждого $E\in\Sigma$ характеристическую функцию $f=\chi_E\in B(X,\Sigma)$ в тождество $f(T^*\mu)=\mu(Tf)$, верное для всех $\mu\in ba(X,\Sigma)$ $f\in B(x,\Sigma)$, получим $T^*=A'$

Лемма I. Для любого марковского процесса существует инвариантная конечно-аддитивная мера $\mu\in ba(x,\Sigma)$,т.е. $\mu(E)\quad\int p(x,E)\mu(dx)$ для любого $E\in\Sigma$ причем $\mu\geq 0,\ \mu(X)\quad 1$.

Доказательство. Положительный оператор T имеет в конусе пространства $B(x,\Sigma)$ внутреннюю неподвижную точку и $T^*=A'$ Отсюда и из теоремы Крейна-Рутмана ([2], с.26) следует утверждение леммы.

Итак, естественное продолжение A' оператора A на $ba(X,\Sigma)$ всегда имеет неподвижную неотрицательную точку, которая, в частности, может быть счетно-аддитивной, т.е. вероятностной мерой.

Далее символом A будем обозначать оба оператора A A'

Напомним, что чисто конечно-аддитивной мерой называется неотрицательная мера $\lambda \in ba(X,\Sigma)$, для которой из $0 \leq \mu \leq \lambda$ и $\mu \in ca(X,\Sigma)$ следует $\mu = 0$. Для любой $\lambda \in ba(X,\Sigma)$, $\lambda \geq 0$ существует единственное представление $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1 \in ca(X,\Sigma)$, а λ_2 - чисто конечно-аддитивна ([3], с.52).

Рассмотрим следующий пример. Пусть $X = [0, 1/2]$, $F: X \to X$ и на X определена рекурентная зависимость $x_n = F(x_{n-1})$. Функцию F опишем тремя способами:

1) $F(x) = x^2$ при $x \in [0, 1/2]$;

$$2)\quad F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \in (0, 1/2] \\ 1/2 & \text{при } x = 0 \end{cases};$$

$$3)\quad F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \in (0, 1/2) \\ 1/2 & \text{при } x \in \{0\} \cup \{1/2\} \end{cases}$$

Во всех трех случаях зависимость $x_n = F(x_{n-1})$, $x_0 \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ можно рассматривать как некоторый вырожденный МП (МП I, МП 2 и МП 3). Построив соответствующие переходные функции, нетрудно убедиться, что если $\mu_0([0, 1/2]) = \mu_0((0, 1/2)) = 1$, то во всех трех случаях $\{\mu_n\}$ сходится в топологии $\mathcal{T}_{C(X)}$ ($C(X)$ тотально на $ca(X,\mathcal{B})$ и порождает отделимую тихоновскую топологию в $ca(X,\mathcal{B})$) к вероятностной мере $\mu([0, 1/2]) = \mu(\{0\}) = 1$. Эта мера инвариантна для МП I и не инвариантна для МП 2 и МП 3. Кроме того, МП 2 вообще не имеет инвариантных вероятностных мер, а МП 3 имеет инвариантную меру $\mu([0, 1/2]) = \mu(\{1/2\}) = 1$. При этом МП I феллеровский, а МП 2 и МП 3 таковыми не являются. Таким образом, при достаточно широком классе начальных мер все три МП неразличимы и ведут себя в асимптотике одинаково "хорошо" независимо от наличия или отсутствия инвариантных вероятностных мер и связи их с предельными. Обрисованная ситуация иллюстрирует сложность изучения общих МП и объясняет, почему в соответствующих исследованиях традиционно ограничиваются достаточно гладкими

МП (например, феллеровскими).

Рассмотрим продолжения МП I, МП 2 и МП 3 на пространство $ba(X,\Sigma)$. Согласно лемме I все три МП имеют на $(X,\mathfrak{B})$ инвариантные конечно-аддитивные меры. Если для МП I и МП 3, на первый взгляд, они исчерпываются соответственно мерами $\mu(\{0\})=1$ и $\mu(\{1/2\})=1$, то для МП 2 инвариантная мера обязательно должна удовлетворять условию $\eta([0,1/2])=\eta((0,\varepsilon))=1$ для любого $\varepsilon>0$ и являться чисто конечно-аддитивной. При более внимательном рассмотрении оказывается, что и МП I, МП 3 также обладают инвариантными чисто конечно-аддитивными мерами этого класса. Более того, для $\mu_c([0\ 1/2])=\mu_c((0,1/2))=1$ последовательность $\{\mu_n\}$ сходится в топологии $\mathcal{T}_{c(x)}$ (которая в $ba(X,\mathfrak{B})$ неотделима) к инвариантной чисто конечно-аддитивной мере с указанным свойством для всех трех МП.

Рассмотренный пример позволяет ожидать, что для общих МП "ответственность"* за определенное асимптотическое поведение несут инвариантные конечно-аддитивные меры, а не вероятностные. Обоснованию этого предположения и служат доказываемые ниже результаты.

§ 2. Гельфандовское представление банаховой алгебры $B(X,\Sigma)$

Пространство $B(X,\Sigma)$ как банахова алгебра изоморфно алгебре $C(Y)$ всех непрерывных функций на некотором хаусдорфовом компакте Y (пространстве всех максимальных идеалов алгебры $B(X,\Sigma)$). Опишем подробнее это соответствие ([I], с.298-299, 338-341).

Существует взаимно однозначное плотное вложение $\gamma: X\to Y$, $\overline{\gamma(X)}=Y$. Каждая $f\in B(X,\Sigma)$ имеет единственное непрерывное продолжение с $\gamma(X)$ на Y. Это продолжение определяет алгебраический и изометрический положительный изоморфизм $\tau: B(X,\Sigma)\to C(Y)$. Пространство Y вполне несвязно. Существует алгебраический изоморфизм $\alpha: \Sigma\to\Sigma_Y$ σ-алгебры Σ и алгебры Σ_Y всех одновременно открытых и замкнутых множеств в Y. Алгебра Σ_Y

образует базис топологии в Y При этом σ-алгебра, порождаемая Σ_Y, совпадает с бэровской σ-алгеброй в Y т.е. $\mathcal{N}_Y = \sigma(\Sigma_Y)$ ([4], с.218).

Поскольку $B^*(X,\Sigma) = ba(X,\Sigma)$ и $C^*(Y) = rca(Y,\mathcal{B}_Y)$, то пространства $ba(X,\Sigma)$ и $rca(Y,\mathcal{B}_Y)$ также изоморфны и приводятся в эквивалентность отображением $\tau^*: rca(Y,\mathcal{B}_Y) \to ba(X,\Sigma)$, сопряженным с τ. Для $\eta \in rca(Y,\mathcal{B}_Y)$ и $E \in \Sigma$ выполняется $\tau^*\eta(E) = \eta(\alpha(E))$. Для $\mu \in ba(X,\Sigma)$ и $G \in \Sigma_Y$ получим $\tau^{*-1}\mu(G) = \mu(\alpha^{-1}(G))$. Мера $\tau^{*-1}\mu$, так определенная на Σ_Y однозначно продолжима до регулярной счетно-аддитивной меры на бэровской σ-алгебре $\mathcal{N}_Y$ и на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}_Y$ ([5], с.103). Это изометрическое продолжение определяет конструкцию изоморфизма τ^{*-1}

Марковские операторы T и A изоморфизмами τ и τ^* переводятся в пару операторов T_1 и A_1 для которых выполняется

$$T_1 = \tau T \tau^{-1}, \quad T_1 : C(Y) \to C(Y),$$

$$A_1 = \tau^{*-1} A \tau^*, \quad A_1 : rca(Y,\mathcal{B}_Y) \to rca(Y,\mathcal{B}_Y),$$

$$A_1 \quad T_1^*, \quad \|A_1\| = \|T_1\| = 1.$$

Операторы T_1 и A_1 линейны, непрерывны и положительны. Опираясь на теорему Бартла-Данфорда [1] об общем виде линейного оператора в $C(Y)$ (см. также [6], с. 295), нетрудно установить, что существует единственное ядро $q(y,E)$ удовлетворяющее условиям

$$q : Y \times \mathcal{B}_Y \to [0,1],$$

$$\forall y \in Y \quad q(y,\cdot) \in rca(Y,\mathcal{B}_Y) \sim rca(Y,\mathcal{N}_Y),$$

$$\forall y \in Y \quad q(y,Y) = 1,$$

$$\forall E \in \mathcal{N}_Y \quad q(\cdot,E) \in B(Y,\mathcal{N}_Y) \subset B(Y,\mathcal{B}_Y),$$

$$T_1 f(y) = \int_Y f(x)\, q(y,dx) \quad \forall f \in C(Y),\ \forall y \in Y,$$

$$A_1 \eta(E) = \int_Y q(y,E)\, \eta(dx) \quad \forall \mu \in rca(Y,\mathfrak{B}_Y),\ \forall E \in \mathfrak{B}_Y .$$

Таким образом, исходный МП на (X,Σ) изоморфен феллеровскому МП на $(Y,\mathfrak{B}_Y)$ с переходной функцией $q(y,E)$.

Очевидно, мера $\mu \in ba(X,\Sigma),\ \mu \geqslant 0$ является неподвижной точкой оператора A тогда и только тогда, когда мера $\eta = \tau^{*-1}\mu \in rca(Y,\mathfrak{B}_Y)$ является неподвижной точкой оператора A_1

Далее мы будем изучать асимптотическое поведение МП на (X,Σ), решая соответствующие задачи для изоморфного МП на $(Y,\mathfrak{B}_Y)$, что и составляет методологическую особенность данной работы.

Исследуем предварительно некоторые свойства отображений τ, α и γ Отметим сразу, что из определения α и γ следует:

$$E \subset F \Longleftrightarrow \alpha(E) \subset \alpha(F) \Longleftrightarrow \gamma(E) \subset \gamma(F);$$
$$E = \emptyset \Longleftrightarrow \alpha(E) = \emptyset \Longleftrightarrow \gamma(E) = \emptyset;$$
$$E = X \Longleftrightarrow \alpha(E) = Y;$$
$$E \neq F \Longleftrightarrow \alpha(E) \neq \alpha(F) \Longleftrightarrow \gamma(E) \neq \gamma(F).$$

Под $\gamma(E)$ понимается образ множества E при поточечном отображении γ

<u>Лемма 2</u>. Для любого $E \in \Sigma$ выполняется:

$$\gamma(E) \quad \overset{o}{\widehat{\gamma(E)}}, \quad \gamma(E) \subset \alpha(E), \quad \overline{\gamma(E)} = \alpha(E).$$

Для любого конечного $E \in \Sigma$ выполняется $\gamma(E) = \alpha(E)$; для любого бесконечного $E \in \Sigma$ выполняется $\gamma(E) \neq \alpha(E)$.

Доказательство. Покажем сначала, что для всех $x \in X$ будет $\gamma(x) = \alpha(\{x\})$ (по условию $\{x\} \in \Sigma$ для всех $x \in X$). Пусть $E = \alpha(\{x\})$. Предположим, что существуют $y_1, y_2 \in E$ такие, что $y_1 \neq y_2$. Поскольку X хаусдорфово и $\Sigma_Y = \alpha(\Sigma)$ - база его топологии, то существуют такие $E_1, E_2 \in \Sigma_Y$, что $E_1 \ni y_1$,

$E_2 \ni y_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. При этом $\alpha^{-1}(E_1), \alpha^{-1}(E_2) \in \Sigma$ и $\alpha^{-1}(E_1) \cap \alpha^{-1}(E_2) = \varnothing$. Однако $E_1 \cap E, E_2 \cap E \neq \varnothing$; $E_1 \cap E, E_2 \cap E \in \Sigma_Y$; $E_1 \cap E, E_2 \cap E \subset E \Rightarrow \alpha^{-1}(E_1 \cap E)$, $\alpha^{-1}(E_2 \cap E) \neq \varnothing$; $\alpha^{-1}(E_1 \cap E), \alpha^{-1}(E_2 \cap E) \subset \alpha^{-1} E = \{x\}$. Следовательно, $\alpha^{-1}(E_1) \cap \alpha^{-1}(E_2) = \{x\} \neq \varnothing$. Полученное противоречие доказывает, что множество $\alpha(\{x\})$ одноточечно.

Поскольку характеристические функции множеств $E \in \Sigma$ при изоморфизме τ переводятся в характеристические функции множеств $\alpha(E)$, то $\tau \chi_{\{x\}} = \chi_{\alpha(\{x\})} \in C(Y)$ Так как любая $f \in C(Y)$ является продолжением $\tau^{-1} f$ с $\gamma(X)$ на Y, то получаем, что $\gamma(x) = \alpha(\{x\})$ В силу аддитивности α равенство $\gamma(E) = \alpha(E)$ справедливо для любого конечного $E \subset X$ Из приведенных рассуждений следует также, что $\gamma(E) \subset \alpha(E)$ для всех $E \in \Sigma$.

Пусть существует такое бесконечное $E \in \Sigma$ что $\gamma(E) = \alpha(E)$. Тогда $\gamma(E) \in \Sigma_Y$ и является компактом в Y С другой стороны $\gamma(E) = \bigcup\limits_{x \in E} \gamma(x)$ где $\gamma(x) = \alpha(\{x\}) \in \Sigma_Y$ и $\overset{\circ}{\overline{\gamma(x)}} = \gamma(x)$ для каждого $x \in E$. Из открытого покрытия компакта $\gamma(E)$ можно выбрать конечное подпокрытие $\gamma(E) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \gamma(x_i)$, $x_i \in E$, т.е. $\gamma(E) = \gamma(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x_i\})$. Поскольку γ взаимно однозначно, то получаем противоречие.

Так как $\gamma(E) = \bigcup\limits_{x \in E} \gamma(x)$ где все $\gamma(x)$ открыты, то $\gamma(E)$ также открыто. Заметим, что $\gamma(E) = \overset{\circ}{\overline{\gamma(E)}} \in \mathcal{A}_Y \subset \mathcal{B}_Y$ для любого $E \subset X$, а не только измеримого E

Осталось доказать, что $\overline{\gamma(E)} = \alpha(E)$. Пусть это не так. Тогда $G = \alpha(E) \setminus \gamma(E) \neq \varnothing$ и $\overset{\circ}{G} = G$ Поскольку $\gamma(X)$ плотно в Y то существует такое $x \in X$, что $\gamma(x) \in G$ т.е. $\gamma(x) \in \alpha(E)$ и $\gamma(x) \notin \overline{\gamma(E)}$. Но тогда $x \in E$ и $x \notin E$ Противоречие доказывает равенство.

Лемма доказана.

Пусть X - топологическое пространство, и $\mu \in ca(X, \mathcal{B})$, $\mu \geqslant 0$. Множество $K_\mu = \overline{K_\mu} \subset X$ будем называть носителем меры μ, если $\mu(X\setminus K_\mu)=0$ и для любой открытой окрестности $U(x)$ каждого $x\in K_\mu$ выполняется $\mu(U(x))>0$. Носителем является дополнение к наибольшему открытому множеству μ-нулевой меры. Если X локально компактно, то для любой $\mu\in ca(X,\mathcal{B}),\mu\geq 0$ существует носитель ([7], с.48). В частности, существует носитель K_η для любой $\eta\in rca(Y,\mathcal{B}_Y)$, $\eta\geq 0$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть (X,Σ) - произвольно, $\mu\in ba(X,\Sigma)$, $\eta\in rca(Y,\mathcal{B}_Y)$, $\mu=\tau^*\eta$, $\mu,\eta\geq 0$, $\mu(X)=\eta(X)=1$.

Тогда

1. $\eta(\{y\})>0$ для любого $y\in K_\eta\cap\gamma(X)$.

2. Множество $K_\eta\cap\gamma(X)$ не более чем счетно.

3. Если μ чисто конечно-аддитивна, то $K_\eta\cap\gamma(X)=\emptyset$ и $E\notin\Sigma_Y$ для любого $E\subset K_\eta$.

4. Если $K\in\Sigma,\mu(K)=1$, то $K_\eta\subset\alpha(K)$.

5. Если $K\in\Sigma,\mu(K)=1$, $Z=\{x\in K:\mu(\{x\})=0\}$, то $\alpha(K)\setminus\alpha(Z)\subset K_\eta\subset\alpha(K)\setminus\gamma(Z)$.

6. Пусть любой атом меры $\mu\in ca(X,\Sigma)$ μ-эквивалентен одноточечному множеству. Если существует $y\in Y\setminus\gamma(X)$ такой, что $\eta(\{y\})>0$, то $\mu\notin ca(X,\Sigma)$.

7. $\eta(Y\setminus\gamma(X))=0$ тогда и только тогда, когда $\mu\in ca(X,\Sigma)$ и существует счетное $K\subset X$, для которого $\mu(K)=1$.

8. $K_\eta\in\Sigma_Y$ тогда и только тогда, когда существует счетное $K\subset X$ такое, что $\mu(K)=1$ и $\mu(\{x\})>0$ для любого $x\in K$. При этом $K_\eta=\alpha(K)$.

Доказательство. Утверждения пунктов 1-4 следуют из определений. Докажем 5. Пусть $x\in K\setminus Z$. Тогда $\eta(\alpha(\{x\}))=\mu(\{x\})>0$ и $\alpha(\{x\})\subset K_\eta$. Следовательно, $\gamma(K\setminus Z)\subset K_\eta$. Поскольку $\gamma(K\setminus Z)$ открыто и K_η замкнуто, то $\overline{\gamma(K\setminus Z)}\subset K_\eta$. Согласно лемме 2 $\overline{\gamma(K\setminus Z)}=$ $=\alpha(K\setminus Z)=\alpha(K)\setminus\alpha(Z)$. Первое включение доказано. Пусть $y\in K_\eta$. Согласно 4 $y\in\alpha(K)$. Если $\{y\}\in\Sigma_Y$, то $0<\eta(\{y\})=\mu(\alpha^{-1}(\{y\}))$, т.е. $\alpha^{-1}(\{y\})\notin Z$ и $y\notin\gamma(Z)$.

Если $\{y\} \notin \Sigma_Y$, то $y \notin \gamma(X)$ и тем более $y \notin \gamma(Z)$. Пункт 5 доказан.

Докажем 6. Пусть $y \in Y \setminus \gamma(X)$ и $\eta(\{y\}) = \tau > 0$. Множество $\{y\}$ замкнуто и не является открытым. В силу регулярности меры η для $n = 1, 2, \dots$ существуют такие $U_n \in \Sigma_Y$, что $y \in U_n$ и $\tau + \frac{1}{n} \geq \eta(U_n) \geq \tau$. Положим $V_n = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Тогда $V_1 \supset V_2 \supset \dots$, $y \in V_n$, $V_n \in \Sigma_Y$ и $\tau + \frac{1}{n} \geq \eta(V_n) \geq \tau$ для $n = 1, 2, \dots$. Если $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, то $y \in V$, и $\tau = \lim \eta(V_n) = \eta(V)$. Для $E_n = \alpha^{-1}(V_n)$ имеем $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $E_n \in \Sigma$ и $\tau + \frac{1}{n} \geq \mu(E_n) \geq \tau$. Если $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, то $\alpha(E) \subset \alpha(E_n) = V_n$, откуда $\alpha(E) \subset V$. Предположим, что μ счетно-аддитивна. Тогда $\mu(E) = \lim \mu(E_n) = \tau$. Следовательно, $\eta(\alpha(E)) = \tau$.

Воспользовавшись теоремой Сакса ([I], с.335) о разложении измеримого пространства (X, Σ) на атомическую и неатомическую части и предположением пункта 6, получим: либо существует $x \in E$, для которого $\mu(\{x\}) = \mu(E) = \tau$, либо существуют $\delta \in (0, \tau)$, $E_1 \in \Sigma$ такие, что $E_1 \subset E$ и $\mu(E_1) = \delta$ Пусть $x \in E$ и $\mu(\{x\}) = \tau$. Тогда $\alpha(\{x\}) \subset V$ и $\eta(\alpha(\{x\})) = \tau$. Следовательно, $\alpha(\{x\}) = y$, что противоречит условию. Если $\mu(E_1) = \delta$ и $E_1 \subset E$, то $\alpha(E_1) \subset V$ и $\eta(\alpha(E_1)) = \delta \in (0, \tau)$. Однако для любого $G \subset V$, $G \in \mathfrak{B}_Y$ либо $\eta(G) = 0$, либо $\eta(G) = \tau$ Противоречие доказывает утверждение.

Заметим, что если X – польское и $\Sigma = \mathfrak{B}$, то предположение пункта 6 выполнено для любой $\mu \in ca(X, \mathfrak{B})$.

Докажем 7. Пусть $\eta(Y \setminus \gamma(X)) = 0$. Тогда $\eta(K_\eta \cap \gamma(X)) = 1$, и в силу 2 множество $G = K_\eta \cap \gamma(X)$ счетно. Множество $K = \gamma^{-1}(G)$ также счетно и $0 \leq \mu(K) \leq 1$. В силу I $\mu(\alpha^{-1}(\{y\})) = \eta(\{y\}) > 0$ для любого $y \in G$ и, следовательно,

$$1 = \eta(G) = \sum_{y \in G} \eta(\{y\}) = \sum_{y \in G} \mu(\alpha^{-1}(\{y\})) = \sum_{x \in K} \mu(\{x\}) = \mu(K).$$

Очевидно, μ счетно-аддитивна. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Докажем 8. Пусть $K_\eta \in \Sigma_Y$. Тогда в силу предыдущих утверждений для $K = \alpha^{-1}(K_\eta)$ выполняется $\mu(K)=1$ и $\mu(\{x\})>0$ для любого $x \in K$ Следовательно, K счетно. Пусть K счетно, $\mu(K)=1$ и $\mu(\{x\})>0$ для любого $x \in K$ Из 5 получаем $\alpha(K) \subset K_\eta \subset \alpha(K)$, т.е. $K_\eta = \alpha(K) \in \Sigma_Y$.

Лемма доказана.

§ 3. Эргодические теоремы

Теорема I. Пусть на некотором измеримом пространстве (X,Σ) задан произвольный МП с переходной функцией $P(x,E)$ Тогда для любого $E \in \Sigma$ выполняется одно и только одно из следующих двух условий:

$$(A) \quad \sup_{x \in X} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P^k(x,E) \to 0, \quad n \to \infty.$$

$$(B) \quad \exists \mu = A\mu, \quad \mu \in ba(X,\Sigma), \quad \mu \geq 0, \quad \mu(E) > 0.$$

Доказательство. Пусть $E \in \Sigma$. Тогда $\alpha(E) \in \Sigma_Y \subset \mathcal{N}_Y$ является бэровским компактным множеством. Изоморфный МП задан на хаусдорфовом компактном пространстве и является феллеровским. Следовательно, применима теорема 2 [6], согласно которой для $\alpha(E)$ выполняется одно (и только одно) из двух условий:

$$(A') \quad \sup_{y \in Y} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A_1^k \eta_y(\alpha(E)) \to 0, \quad n \to \infty,$$

$$(B') \quad \exists \eta = A_1\eta \in rca(Y, \mathcal{B}_Y), \quad \eta \geq 0, \quad \eta(\alpha(E)) > 0,$$

где η_y - мера Дирака с носителем y .

Согласно лемме 3 для каждого $y \in \hat{\gamma}(X)$ выполняется $\eta_y = \tau^* \mu_{\gamma^{-1}(y)}$. Отсюда $A_1 \eta_y(\alpha(E)) =$
$= \tau^{*-1} A \tau^* \eta_y(\alpha(E)) = \tau^{*-1} A \mu_{\gamma^{-1}(y)}(\alpha(E)) = A\mu_{\gamma^{-1}(y)}(E)$.

Аналогично получаем $A_1^k \eta_y(\alpha(E)) = A^k \mu_{\gamma^{-1}(y)}(E)$ для

$k=1,2,\ldots$, что эквивалентно $q^k(y,\alpha(E)) = p^k(\gamma^{-1}(y),E)$.

Поскольку $\alpha(E)\in\Sigma_Y$, то характеристическая функция $\chi_{\alpha(E)}$ непрерывна на Y Оператор T_1 феллеровский. Следовательно,

$$T_1\chi_{\alpha(E)}(\cdot) = \int\limits_Y \chi_{\alpha(E)}(y)q(\cdot,dy) = q(\cdot,\alpha(E))\in C(Y)$$

Так как множество $\gamma(X)$ всюду плотно в Y и согласно лемме 2 $\overset{o}{\overline{Y\setminus\gamma(X)}} = \emptyset$, то

$$\sup_{y\in\gamma(X)} q(y,\alpha(E)) = \sup_{y\in Y} q(y,\alpha(E)).$$

Следовательно, для всех $E\in\Sigma$ $x\in X$ и $n=1,2,$ выполняются следующие равенства:

$$\sup_{x\in X}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p^k(x,E) = \sup_{x\in X}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q^k(\gamma(x),\alpha(E)) =$$

$$= \sup_{y\in\gamma(X)}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q^k(y,\alpha(E)) = \sup_{y\in Y}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q^k(y,\alpha(E)).$$

Итак, эквивалентность условий (А) и (А') доказана. Эквивалентность условий (В) и (В') следует из §

Теорема доказана.

Обозначим Δ множество всех инвариантных положительных мер оператора А:

$$\Delta = \{\mu\in ba(X,\Sigma):\ \mu\geq 0,\ \mu(X)=1,\ \mu=A\mu\}$$

Согласно лемме I $\Delta\neq\emptyset$ Для $E\in\Sigma$ будем писать $\Delta(E)=0$ если $\mu(E)=0$ для каждого $\mu\in\Delta$.

Следствие I. Для любого $E\in\Sigma$ такого, что $\Delta(E)=0$, выполняется условие (А).

Теорема 2. Пусть на некотором (X,Σ) задан произвольный МП с переходной функцией $p(x,E)$ Пусть множество Δ счетно и для каждого $\mu\in\Delta$ · существует счетное множество $K_\mu \subset X$ такое, что $\mu(K_\mu) = 1$ и $\mu(\{x\}) > 0$ для каждого $x \in K_\mu$

Тогда

(C) $\inf\limits_{x\in X} \rho^n(x, \bigcup\limits_{\mu\in\Delta} K_\mu) \to 1$, $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\eta = \tau^{*-1}\mu$, $\mu\in\Delta$. Согласно лемме 3 $K_\eta = \alpha(K_\mu) \in \Sigma_Y$ для каждого $\eta \in \tau^{*-1}(\Delta)$ Поскольку Δ счетно, то множество $K = \bigcup\limits_{\eta\in\tau^{*-1}(\Delta)} K_\eta$ открыто бэровское. Следовательно, $Y \setminus K \in \mathcal{N}_Y$ - компактное бэровское множество. Воспользовавшись теоремой 2 [8], получим $q^n(y, K) = 1$ $\forall y \in K$ $n = 1,2,\dots$

Отсюда

$$q^{n+1}(y, Y\setminus K) \quad \int\limits_Y q(x, Y\setminus K)\, q^n(y, dx) =$$

$$= \int\limits_K + \int\limits_{Y\setminus K} \quad \int\limits_{Y\setminus K} q(x, Y\setminus K)\, q^n(y, dx) \leq q^n(y, Y\setminus K)$$

для любого $y \in Y$ и $n = 1,2,\dots$

Для $Y\setminus K$ выполнено условие (A'), поскольку $\tau^{*-1}\Delta(Y\setminus K) = 0$. Монотонность $q^n(y, Y\setminus K)$ обеспечивает сходимость $\sup\limits_{y\in Y} q^n(y,E) \to 0$, $n\to\infty$ для $E = Y\setminus K$, а следовательно, и для любого $E \subset Y\setminus K$. Таковым является множество $\alpha(G)$, где $G = X \setminus \bigcup\limits_{\mu\in\Delta} K_\mu$ Действительно, $G \in \Sigma$, $\alpha(G) = Y \setminus \alpha(\bigcup\limits_{\mu\in\Delta} K_\mu)$. Так как очевидно $\alpha(\bigcup\limits_{\mu\in\Delta} K_\mu) \supset \bigcup\limits_{\mu\in\Delta} \alpha(K_\mu) = K$, то $\alpha(G) \subset Y\setminus K$.

После преобразований, аналогичных преобразованиям теоремы I, получим (C).

Теорема доказана.

Следующие утверждения легко проверяются непосредственно.

Следствие 2. Пусть выполнены условия (A), (C). Тогда выполнены соответственно условия:

(A1) для любого $\mu \in ba(X,\Sigma)$, $\mu \geq 0$, $\mu(X) = 1$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A^k\mu(E) \to 0,\quad n\to\infty;$$

(CI) для любого $\mu \in ba(X,\Sigma)$, $\mu \geq 0$, $\mu(X)=1$,

$$A^k\mu\Big(\bigcup_{\mu\in\Delta} K_\mu\Big) \to 1,\quad n\to\infty.$$

Следствие 3. Пусть МП имеет в $ba(X,\Sigma)$ единственную положительную инвариантную меру μ, и пусть эта мера обладает одноточечным носителем (такая мера счетно-аддитивна). Тогда для любой $\mu_0 \in ba(X,\Sigma)$, $\mu_0 \geq 0$, $\mu_0(X)=1$, марковская последовательность $\{\mu_n\}$ сходится к μ в норме пространства $ba(X,\Sigma)$, т.е. $\|\mu_n-\mu\| \to 0$.

Следствие 4. Пусть X - топологическое пространство, и на $(X,\mathfrak{B})$ определен некоторый МП. Пусть существует такая точка $z \in X$, что для любой $\mu_0 \in ca(X,\mathfrak{B})$, $\mu_0 \geq 0$, $\mu_0(X)=1$ последовательность $\{\mu_n\}$ сходится к мере μ_z в топологии $\mathcal{T}_c(x)$ (т.е. $\lim \int f d\mu_n = \int f d\mu$ для любой $f \in C(X)$) и существует μ_0, для которой $\|\mu_n-\mu_z\| \not\to 0$.

Тогда МП обладает инвариантной чисто конечно-аддитивной мерой η удовлетворяющей условию

$$\eta(X) = \eta(U(z)) = \eta(U(z)\setminus\{z\}) = 1$$

для любой окрестности $U(z)$ точки z При этом мера μ_z (счетно-аддитивная) может не быть инвариантной для данного МП.

В терминологии случайных величин условия (С), (СI) и условия следствия 3 почти наверное гарантируют сходимость при любом ξ_0 последовательности ξ_n за конечное число шагов к носителям инвариантных мер.

ЛИТЕРАТУРА

I. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., I962.

2. Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантными конус в пространстве Банаха. УМН, I948, т.3, вып.I, с.3-95.

3. Yosida K., Hewitt E. Finitely additive measures. Trans.American Math.Soc., 1952, vol.72, N1, p.46-66.

4. Халмош П. Теория меры. М., I953.

5. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М., I969.

6. Foguel S.R. Positive operators on C(X). Proc. American Math.Soc., 1969, vol.22, N1, p.295-297.

7. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально-компактных пространствах. М., I977.

8. Foguel S.R. Existence of invariant measures for Markov processes. II. Proc.American Math.Soc., 1966, vol.17, N2, p.387-389.

Поступила 14 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981.

УДК 513.88 + 519.21

О СВОЙСТВЕ ОБРАТИМОСТИ СЛУЧАЙНОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Т.А.Жданок
ЛГУ им. П.Стучки

Вопрос о существовании измеримого решения уравнения со случайным линейным взаимно-однозначным оператором тесно связан с проблемой измеримости обратного оператора. Хорошо известна теорема Ганша [6] об измеримости обратного к случайному линейному ограниченному обратимому оператору вида $T : \Omega \times X \to Y$, где (Ω, Σ, μ) - вероятностное пространство, а X и Y - сепарабельные банаховы пространства. Имеется, однако, ряд задач, приводящих к изучению случайного оператора, определенного не на всем произведении $\Omega \times X$, а на некоторой его части, порожденной случайным подмножеством из X (см. [3], [4], [5]). В настоящей работе рассматривается вопрос об измеримости обратного оператора к такому случайному линейному оператору.

Пусть (Ω, Σ, μ) - полное вероятностное пространство, X и Y - сепарабельные банаховы пространства над полем R вещественных чисел. Функцию на Ω (или на его измеримом подмножестве) со значениями в банаховом пространстве будем называть случайной величиной, если она измерима относительно борелевской σ-алгебры множеств этого пространства. Пусть $\{M_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ - семейство непустых подмножеств из X Его можно рассматривать также как многозначное отображение пространства Ω в X Семейство $\{M_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ назовем случайным множеством, если для любого $x \in X$ множество $\{\omega \mid x \in M_\omega\}$ принадлежит σ-алгебре Σ Оператор $T \; \{(\omega, x) \mid \omega \in \Omega, x \in M_\omega\} \to Y$, где $\{M_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ - случайное множество в X , называется случайным оператором, если $T(\omega, x)$ для каждого фиксированного $x \in X$ является случайной величиной на $\{\omega \mid x \in M_\omega\}$ со значениями в X Если $\{M_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ - случайное линейное подпространство в X , то говорят, что случайный оператор T п.н. (почти наверное) линеен, п.н. ограничен, п.н. обратим и т.д., если соответствующими свойствами с вероятностью 1 обладает детерминированный оператор T_ω $M_\omega \to Y$, определенный равенством $T_\omega(x) = T(\omega, x)$, $x \in M_\omega$ Символом $R(T_\omega)$ будем обозначать область значений оператора T_ω Используем также следующие обозначения: $O(x, r)$ и $B(x, r)$ - соответственно открытый и замкнутый шары радиуса $r > 0$ с центром в $x \in X$ $\tilde{V}$ - - некоторое счетное всюду плотное подмножество множества V из X .

Теорема 1. Пусть $\{M_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ - случайное замкнутое подпространство в X , T $\{(\omega, x) \mid \omega \in \Omega, x \in M_\omega\} \to Y$ - случайный п.н. линейный ограниченный оператор, такой, что п.н. $R(T_\omega) = \overline{R(T_\omega)}$ и почти для всех $\omega \in \Omega$ для оператора T_ω существует обратный оператор $T_\omega^{-1} : R(T_\omega) \to M_\omega$ Тогда для того, чтобы оператор T^{-1} $\{(\omega, y) \mid \omega \in \Omega, y \in R(T_\omega)\} \to X$, определенный равенством $T^{-1}(\omega, y) = T_\omega^{-1}(y)$, был случайным оператором, достаточно выполнения одного из следующих условий:

1. пространство X рефлексивно, оператор T является сужением некоторого случайного п.н. линейного ограниченного оператора T_1 $\Omega \times X \to Y$, и существует случайный п.н. линейный ограниченный оператор P $\Omega \times X \to X$ такой, что оператор P_ω является проектором на M_ω почти для всех $\omega \in \Omega$;

11. оператор T является сужением некоторого случайного п.н. линейного ограниченного оператора T_1 : $\Omega \times X \to Y$ с п.н. замкнутой областью значений, подпространство M_ω имеет конечную коразмерность почти

для всех $\omega \in \Omega$, и семейство $\{M_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ обладает свойствами

$$\{\omega \mid M_\omega \cap (x+N) \neq \emptyset\} \in \Sigma$$

$$\{\omega \mid M_\omega \cap O(x(\omega) \quad r(\omega)) \neq \emptyset\} \in \Sigma$$

для любых $x \in X$, конечномерного подпространства $N \subseteq X$, д.с.в. (действительной случайной величины) $r(\omega) > 0$ и случайной величины $x(\omega)$ из X;

III. оператор T является сужением некоторого случайного п.н. линейного ограниченного оператора $T_1 \colon \Omega \times X \to Y$, подпространство M_ω имеет конечную размерность почти для всех $\omega \in \Omega$, и семейство $\{M_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ обладает свойством

$$\{\omega \quad M_\omega \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma$$

для любого замкнутого множества $V \subseteq X$;

IУ. существует такое счетное плотное в X множество J, что $J \cap M_\omega$ плотно в M_ω почти для всех $\omega \in \Omega$

Более того, при выполнении одного из условий I – IУ можно утверждать, что для любой случайной величины $y(\omega)$ в Y такой, что п.н. $y(\omega) \in R(T_\omega)$, величина $x(\omega) = T^{-1}(\omega, y(\omega))$ является измеримым решением уравнения

$$\text{п.н.} \quad T(\omega, y(\omega)) = y(\omega) \qquad (1)$$

Доказательство. Нетрудно показать, что $\{R(T_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ является случайным замкнутым подпространством в Y. Действительно, фиксируем $y \in Y$ и положим $E_y = \{\omega \mid y \in R(T_\omega)\}$. Требуемое утверждение следует из равенств

$$\{\omega \mid y \in R(T_\omega)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid R(T_\omega) \cap O(y, \tfrac{1}{n}) \neq \emptyset\} =$$

$$\bigcap_{n\geq 1}^{\infty}\bigcup_{x\in X}\{\omega \mid T(\omega,x)\in O(y,\tfrac{1}{n})\},$$

поскольку в силу п.н. непрерывности T и открытости множества $O(y,\frac{1}{n})$ с вероятностью 1 справедливо соотношение

$$\bigcup_{x\in X}\{\omega \mid T(\omega,x)\in O(y,\tfrac{1}{n})\}=$$

$$=\bigcup_{x\in \tilde{X}}\{\omega \mid T(\omega,x)\in O(y,\tfrac{1}{n})\}.$$

Так как пространство X сепарабельно, то для доказательства измеримости $T^{-1}(\omega,y)$ на множестве E_y достаточно показать, что для любого замкнутого шара $B\subseteq X$

$$\{\omega\in E_y \mid T^{-1}(\omega,y)\in B\}\in\Sigma$$

Обозначим $F_x=\{\omega \mid x\in M_\omega\}$, где $x\in X$. Запишем следующее очевидное равенство:

$$\{\omega\in E_y \mid T^{-}(\omega,y)\in B\}=$$

$$=\bigcup_{x\in B}\{\omega\in E_y\cap F_x \mid T(\omega,x)=y\}$$

Итак, доказательства требует соотношение

$$\bigcup_{x\in B}\{\omega\in E_y\cap F_x \mid T(\omega,x)=y\}\in\Sigma \qquad (2)$$

1) Пусть выполнено условие 1. В этом случае имеем

$$\bigcup_{x\in B}\{\omega\in E_y\cap F_x \mid T(\omega,x)=y\}=$$

$$\bigcup_{x\in B}\{\omega\in E_y \mid P(\omega,x)=x,\ T_1(\omega,x)=y\}.$$

Далее докажем, что с вероятностью 1 справедливо следующее равенство:

$$\bigcup_{x\in B}\{\omega\in E_y \mid P(\omega,x)=x,\ T_1(\omega,x)\quad y\}$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{x\in B}\{\omega\in E_y \mid P(\omega,x)\in O(x,\tfrac{1}{n}),T_1(\omega,x)\in O(y,\tfrac{1}{n})\} \tag{3}$$

Пусть ω принадлежит множеству, стоящему в правой части равенства (3) , причем операторы $T_{1\omega}$ и P_ω непрерывны. Это означает, что найдется такая последовательность $\{x_n\}\subseteq B$, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_1(\omega;x_n)=y$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(P(\omega,x)-x_n)\quad 0$ Так как пространство X рефлексивно, то шар B слабо компактен (см. [2] , с. 461). Следовательно, некоторая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ слабо сходится к некоторому $x\in B$. Но тогда $T_1(\omega,x_{n_k})$ слабо сходится к $T_1(\omega,x)$, а $P(\omega,x_{n_k})-x_{n_k}$ слабо сходится к $P(\omega,x)-x$ (см. [2], с. 458). Отсюда заключаем, что $T_1(\omega,x)\quad y$ и $P(\omega,x)=x$, и, значит, ω принадлежит левой части равенства (3) Равенство (3) доказано.

Теперь для любого $n=1,2..$ получаем

$$\bigcup_{x\in B}\{\omega\in E_y \mid P(\omega,x)\in O(x,\tfrac{1}{n}),\ T_1(\omega,x)\in O(y,\tfrac{1}{n})\}=$$

$$=\bigcup_{x\in\tilde{B}}\{\omega\in E_y \mid P(\omega,x)\in O(x,\tfrac{1}{n}),\ T_1(\omega,x)\in O(y,\tfrac{1}{n})\}.$$

Это равенство (справедливое с точностью до множества вероятности 0) нетрудно проверить, используя непрерывность операторов T_1 и P и открытость множеств $O(y,\frac{1}{n})$ и $O(x,\frac{1}{n})$ Поскольку T_1 и P - случайные операторы, то множества из последнего равенства измеримы, а значит, выполняется и соотношение (2) .

2) Пусть выполнено одно из условий 11, 111. Требования, наложенные здесь на семейство $\{M_\omega\}$ $\omega\in\Omega$ обеспечивают согласно леммам 3 и 4 из [4] существование случайного п.н. линейного ограниченного оператора

$P \quad \Omega \times X \to X$ такого, что P_ω является проектором на M_ω почти для каждого $\omega \in \Omega$. Поэтому мы можем сослаться на приведенное выше доказательство соотношения (ω), с той только разницей, что, поскольку теперь не предполагается рефлексивность X, следует заново установить справедливость равенства (3)

Итак, пусть ω принадлежит множеству, стоящему в правой части равенства (3), причем операторы $T_{1\omega}$ и P_ω непрерывны и пространство M_ω имеет либо конечную коразмерность, либо конечную размерность. Это означает, что найдется такая последовательность $\{x_n\} \subseteq B$ что $\lim_{k\to\infty}(x_n - P(\omega, x_n)) = 0$ и $\lim_{k\to\infty} T_1(\omega, x_n) = y$ Если подпространство M_ω имеет конечную коразмерность, то, очевидно, ядро оператора $T_{1\omega}$ конечномерно. Так как область значений оператора $T_{1\omega}$ по предположению замкнута, то он представим в виде $T_{1\omega} \quad U_\omega + K_\omega$, где U_ω - непрерывно обратимый, а K_ω - конечномерный операторы /см. теорему 2 в [1] /. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то для некоторой ее подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ существует $\lim_{k\to\infty} K_\omega(x_{n_k}) \quad y_1$ Но тогда $\lim_{k\to\infty} U_\omega(x_{n_k} \quad y_1$ и, значит, последовательность (x_{n_k}) сходится к $x_1 = U_\omega^{-1}(y - y_1)$ При этом $x_1 \in B$, поскольку множество B замкнуто. Но тогда $P_\omega(x_1) = x_1$ и $T_1(\omega, x_1) = y$, что и доказывает равенство (3) Если же подпространство M_ω имеет конечную размерность, то оператор $I \quad P_\omega$, где I - тождественный оператор в X, имеет конечномерное ядро и замкнутую область значений. Поэтому в силу той же теоремы 2 из [1] он представим в виде $I - P_\omega = U_{1\omega} + K_{1\omega}$, где $U_{1\omega}$ - непрерывно обратимый, а $K_{1\omega}$ - конечномерный операторы. Опять убеждаемся, что некоторая подпоследовательность $\{x_{n_m}\}$ последовательности $\{x \quad\}$ сходится к $x_2 \quad U_\omega^{-1}(-y_2)$, где $y_2 \quad \lim_{m\to\infty} K_{1\omega}(x_{n_m})$. Следовательно, выполняются соотношения $P_\omega(x_x) = x_x$ и $T_{1\omega}(x_x) = y$, откуда и следует справедливость равенства (3) .

3) Пусть, наконец, выполнено условие 1У. Покажем, что с вероятностью 1 справедливо следующее равенство:

$$\bigcup_{x\in B}\{\omega\in E_y\cap F_x \mid T(\omega,x)=y\}=$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{x\in B}\{\omega\in E_y\cap F_x \mid T(\omega,x)\in O(y,\tfrac{1}{n})\}, \qquad (4)$$

Действительно, пусть ω принадлежит правой части равенства (4) , причем оператор T_ω линеен, ограничен и обратим. Это означает, что найдется такая последовательность $\{x_n\}\subseteq B\cap M_\omega$, что $T(\omega,x_n)\in O(y,\frac{1}{n})$
Но тогда

$$\|x_n-x_m\| = \|T^{-1}(\omega,T(\omega,x_n)) - T^{-1}(\omega,T(\omega,x_m))\| \leqslant$$

$$\leqslant \|T^{-1}_\omega\|\,\|T(\omega,x_n)-T(\omega,x_m)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|T^{-1}_\omega\|\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$$

Пространство X полное, и, значит, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \in B\cap M_\omega$, причем $T(\omega,x_0)=y$ Итак, ω принадлежит левой части равенства (4). Равенство доказано.

Теперь для любого $n=1,2,$ получаем

$$\bigcup_{x\in B}\{\omega\in E_y\cap F_x \mid T(\omega,x)\in O(y,\tfrac{1}{n})\}= \qquad (5)$$

$$=\bigcup_{x\in\tilde{B}}\{\omega\in E_y\cap F_x \mid T(\omega,x)\in O(y,\tfrac{1}{n})\},$$

где $\check{B} = B \cap J$, а J - это счетное всюду плотное множество в X, фигурирующее в условии 1У. Для доказательства равенства (5) возьмем произвольный элемент ω из его левой части. Если ω не принадлежит правой части равенства, то либо $\tilde{B} \cap M_\omega$ $\emptyset$ либо для всех x из множества $\check{B} \cap M_\omega$ точка $T(\omega, x)$ лежит вне шара $O(y, \frac{1}{k})$. Но если $\tilde{B} \cap M_\omega$ $\emptyset$, то, т.к. $J \cap M_\omega \neq \emptyset$, должно быть $B \cap M_\omega$ $\emptyset$ Это противоречит выбору элемента ω Второе предложение также приводит к противоречию. Действительно, возьмем любое x из множества $B \cap M_\omega$ Так как B - шар, то $\check{B}$ плотно в B По условию $J \cap M_\omega$ плотно в M_ω Поэтому существует такая последовательность $\{x_n\}$ точек из $\check{B} \cap M_\omega$ что $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ Поскольку тогда $\lim_{n \to \infty} T(\omega, x_n) = T(\omega, x$ то из нашего предложения следует, что $T(\omega, x)$ лежит вне шара $O(y, \frac{1}{k})$ что невозможно. Итак, равенство (5) доказано. Теперь для установления соотношения (2) остается воспользоваться измеримостью множеств E_y F_x и величины $T(\omega, x)$ при фиксированном $x \in \check{B}$

Мы показали, что T^{-1} является случайным оператором при выполнении одного из условий 1 - 1У. Если теперь $y(\omega)$ - случайная величина в Y, такая, что п.н. $y(\omega) \in R(T_\omega)$ то измеримость множества

$$\{\omega \mid T^{-1}(\omega, y(\omega)) \in B\}$$

доказывается с помощью тех же аргументов, что и свойство 2) с той только разницей, что вместо y надо писать $y(\omega)$ и учитывать измеримость $y(\omega)$

Теорема доказана.

Заметим, что требование, предъявленное к семейству $\{M_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ в условии 1У, является достаточно жестким. Семейство множеств, удовлетворяющее этому требованию, в работе [5] названо сепарабельным. Сепарабельным будет являться, очевидно, любое счетное семейство множеств в X

Теорема 1 дает ответ на вопрос о существовании измеримого решения уравнения (1) с п.н. обратимым оператором T. Однако мы не можем здесь утверждать, что решение $x(\omega) = T^{-1}(\omega, y(\omega))$ удовлетворяет также неравенству

$$\| x(\omega) \| \leq C(\omega) \quad y(\omega) \| \tag{6}$$

с некоторой д.с.в. $C(\omega)$, очевидному в детерминированном случае. В теореме 2 будут указаны достаточные условия для выполнения (6). Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. Пусть $\{N_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ - случайное замкнутое подпространство в Y, удовлетворяющее требованию: существует такое счетное плотное в Y множество J_c, что $J_c \cap N_\omega$ плотно в N_ω почти для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть $S \ \{(\omega, y) \mid \omega \in \Omega, y \in N_\omega\} \to X$ - случайный п.н. линейный ограниченный оператор. Тогда норма $\| S_\omega \|$ оператора S_ω есть д.с.в.

Доказательство. Для каждого $y \in Y$ положим $E_y = \{\omega \mid y \in N_\omega\} \in \Sigma$. Для любого $c > 0$ получаем

$$\{\omega \mid \| S\omega \| \leq c\} = \{\omega \mid \sup_{y \in B(0,1) \cap M_\omega} \| S(\omega, y) \| \leq c\}$$

$$= \Omega \setminus \bigcup_{y \in B(0,1)} \{\omega \in E_y \mid \| S(\omega, y) \| > c\} = \Omega \setminus \bigcup_{y \in \tilde{B}} \{\omega \in E_y \mid \| S(\omega, y) \| > c\},$$

где $\vec{B} = B(0,1) \cap J_0$. Доказательство последнего равенства проводится аналогично доказательству равенства 5 в пункте 9 теоремы 1. Теперь остается заметить, что $\| S(\omega, y) \|$ есть д.с.в. на E_y для каждого фиксированного $y \in Y$, поскольку $S(\omega, y)$ является случайной величиной в Y.

Теорема 2. Пусть T - оператор, фигурирующий в теореме 1, и выполнено одно из условий 1 - 1У этой теоремы. Тогда для того, чтобы для любой случайной величины $y(\omega)$ в Y такой, что п.н. $y(\omega) \in R(T_\omega)$, случайная величина $x(\omega) = T(\omega, y(\omega))$ удовлетворяла неравенству (6) с некоторой фиксированной для оператора T д.с.в. $c(\omega)$, достаточно выполнения одного из следующих условий:

1. существует случайный п.н. линейный ограниченный оператор $Q\ \Omega \times Y \to Y$ такой, что оператор Q_ω является проектором на $R(T_\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$;

11. существует такое счетное, плотное в Y множество J_ω, что $J_\omega \cap N_\omega$ плотно в N_ω почти для всех $\omega \in \Omega$

Доказательство. Пусть выполнено условие 1. Определим оператор $T^+\ \Omega \times Y \to X$ равенством

$$T^+(\omega, y) \quad T^{-1}(\omega, Q(\omega, y)), \ \omega \in \Omega, \ y \in Y.$$

Так как Q является случайным оператором, то для каждого фиксированного $y \in Y$ величина $x(\omega) = Q(\omega, y)$ является случайной величиной в Y, такой, что п.н. $x(\omega) \in R(T_\omega)$ Но тогда в силу теоремы 1 и $T^{-1}(\omega, x(\omega))$ будет случайной величиной в X Следовательно, T^+ является случайным оператором на $\Omega \times Y$ Но тогда его норма $\|T^+_\omega\|$ есть д.с.в. Этот факт хорошо известен, но он следует также и из доказанной выше леммы. Теперь достаточно положить

$$c(\omega) \quad \|T^+_\omega\| \quad \omega \in \Omega$$

Пусть выполнено условие 11. Положим

$$c(\omega) = \|T^{-1}_\omega\| \quad \omega \in \Omega.$$

В силу леммы $c(\omega)$есть д.с.в.

Теорема доказана.

Итак, как мы выяснили, наличие случайных операторов проектирования на область определения и область значений случайного п.н. линейного ограниченного обратимого оператора T обеспечивает (при выполнении некоторых дополнительных условий) существование измеримого решения уравнения (1) , удовлетворяющего неравенству (6) В общем случае приходится накладывать на семейства $\{M_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ и $\{R(T_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ требование их сепарабельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдман М.А. Об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных уравнений. - ДАН СССР, 1955, т. 100, № 2, с. 201-204.

2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, М., 1962, т. 1.

3. Жданок Т.А. Об измеримых решениях случайного операторного уравнения и его сопряженного. - В кн.: Теория случайных процессов, Киев, 1979, вып. 7, с. 13-22.

4. Жданок Т.А. Случайные линейные операторы с конечномерным ядром. - В кн.: Теория случайных процессов, 8. Киев, 1980.

5. Engl H.W. Some random fixed point theorems for strict contractions and nonexpansive mappings. - Nonlinear Anal.: Theory,Meth. and appl., 1978, vol.2, № 5, p.619-626.

6. Hanš O. Inverse and adjoint transforms of linear founded random transforms.- Trans.of the First Prague Conf. on Information Theory, Statist.Decision Functions, Random Processes. Publ.House of the Cžesh.of Sci. Prague, 1957, p. 127-133.

Поступила 14 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981

УДК 517.946

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Е.С.Козьмина

Рижский Краснознамённый институт
инженеров гражданской авиации

Система уравнений колебаний цилиндрических оболочек не относится к известным типам уравнений с частными производными, поэтому к ней не применимы разработанные приёмы доказательства существования локального решения. Если исключить из системы одну неизвестную функцию, то получится квазилинейное уравнение, главная линейная часть которого относится к уравнениям гиперболического типа. Однако в младших членах появляются операторные коэффициенты, что приводит к необходимости применения операторных методов, в частности методов теории полугрупп операторов.

В первой части работы доказывается локальная разрешимость операторного дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной правой частью. Вторая часть посвящена приложениям разработанной схемы к уравнениям нелинейных колебаний цилиндрических оболочек.

I. Локальная разрешимость задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения второго порядка с нелинейным оператором в правой части.

Пусть $w(t)$ – абстрактная функция со значениями в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(.,.)$ и нормой $|.|$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + A^2 w = F w \qquad (0 \le t \le T) \tag{I.I}$$

с неограниченным линейным самосопряжённым оператором A имеющим всюду плотную в H область определения $\mathcal{D}(A)$, и нелинейным оператором F, действующим в H, с областью определения $\mathcal{D}(F)$, плотной в H Присоединим к уравнению (I.I) начальные условия

$$w(0)=V, \qquad \frac{dw}{dt}(0)=W \tag{I.2}$$

и сформулируем достаточные условия разрешимости задачи Коши (I.I), (I.2).

Так как A – самосопряжённый оператор, то оператор iA является производящим оператором сильно непрерывной группы унитарных операторов $\mathcal{U}(t)$, $-\infty<t<\infty$ [I]. Пусть оператор A имеет ограниченный обратный, определённый на всём пространстве H Тогда задача Коши для линейного неоднородного уравнения

$$\frac{d^2w}{dt^2}+A^2w=g \tag{I.3}$$

имеет единственное решение при любых $V\in\mathcal{D}(A^2)$, $W\in\mathcal{D}(A)$, если функция $Ag(t)$ определена и непрерывна на $[0,T]$ [I]. Решение задаётся формулой

$$w(t)=\frac{1}{2}[\mathcal{U}(t)+\mathcal{U}(-t)]V+\frac{1}{2i}[\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(-t)]A^{-1}W+ \\ +\frac{1}{2i}\int_0^t[\mathcal{U}(t-s)-\mathcal{U}(s-t)]A^{-1}g(s)\,ds, \tag{I.4}$$

и является дважды непрерывно дифференцируемой функцией со значениями в $\mathcal{D}(A^2)$; при этом $w'(t)$ принимает значения в $\mathcal{D}(A)$ и функция $Aw(t)$ непрерывна на $[0,T]$. Кроме того

$$\|\mathcal{U}(t)\|\leq 1. \tag{I.5}$$

На множестве $\mathcal{D}(A)$ введём скалярное произведение $(u,v)_2=$ $=(Au,Av)$ для любых u, v из $\mathcal{D}(A)$, которому отвечает норма $\|u\|_2=\|Au\|$, превратив таким образом $\mathcal{D}(A)$ в гильбертово пространство H_2. Аналогично поступим с $\mathcal{D}(A^2)=H_4$ $(u,v)_4=(A^2u,\ A^2v)$ для произвольных u, v из $\mathcal{D}(A^2)$, $\|u\|_4=\|A^2u\|$. Пользуясь неравенством (I.5) и перестановочностью операторов A^2 и $\mathcal{U}(t)$ на $\mathcal{D}(A^2)$, можно получить оценку нормы решения (I.4) в пространстве H_4

$$\|w\|_4\leq\|V\|_4+\|W\|_2+\int_0^t\|g(s)\|_2\,ds. \tag{I.6}$$

Если ввести обозначение $L=\frac{d^2}{dt^2}+A^2$ с $\mathcal{D}(L)=\{(V,W,w): w(0)=V, w'(0)=$ $=W, w(t)\in C(0,T;H_4)\cap C^4(0,T;H)\}$, то выражение (I.4) может быть записано короче $w = L^{-1}g$, где оператор $L^{-1}: C(0,T,H_2) \to C(0,T;H_4) \cap C^2(0,T;H) \subset C^1(0,T;H_2)$ [3] порождает решение задачи Коши (I.3),(I.2), причём для $w_1 = L^{-1}g_1$, $w_2 = L^{-1}g_2$

$$\|w_1 - w_2\|_4 \leq \int_0^t \|g_1(s) - g_2(s)\|_2 \, ds. \qquad (I.7)$$

Таким образом задача Коши (I.I),(I.2) может быть заменена эквивалентным ей уравнением

$$w = L^{-1}F w \qquad (I.8)$$

при условии, что $F: C(0,T;H_4) \to C(0,T;H_2)$ непрерывно. Сформулируем ограничения, накладываемые на оператор F, при которых уравнение (I.8) может быть разрешено с помощью принципа сжатых отображений.

В пространстве $C(0,T;H_4)$ рассмотрим множество

$$M = \{u(t) \in C(0,T;H_4) \cap C^1(0,T;H_2),\ u(0) = V,\ u'(0) = W,\ \|u(t)\|_4 \leq R_0\ \forall t \in [0,T]\}, \qquad (I.9)$$

где $R_0 = const$, значение которой уточним позднее. Пусть оператор F на этом множестве обладает следующими свойствами: для всякого $t \in [0,T]$ и произвольных u, u_1, u_2 из M

$$\|Fu\|_2 \leq \varphi(R_0), \quad \|Fu_1 - Fu_2\|_2 \leq \varphi(R_0)\|u_1 - u_2\|_4, \qquad (I.10)$$

где φ-некоторая неубывающая неотрицательная функция. Учитывая неравенства (I.6),(I.7) и (I.10), для оператора $L^{-1}F$ получаем

$$\|L^{-1}Fu\|_4 \leq \|V\|_4 + \|W\|_2 + T\varphi(R_0),$$
$$\|L^{-1}Fu_1 - L^{-1}Fu_2\|_4 \leq T\varphi(R_0) \max_{t \in [0,T]} \|u_1 - u_2\|_4. \qquad (I.11)$$

Выражение $l = \|V\|_4 + \|W\|_2$ фиксировано. Выберем $R_0 = l + 1$ и подберём T так, чтобы

$$T\varphi(R_0) \leq q < 1. \qquad (I.12)$$

Тогда из (I.II) и (I.I2) следует, что $\|L^{-1}Fu\|_{C(0,T;H_4)} \leq l + 1 = R_0$, $\|L^{-1}Fu_1 - L^{-1}Fu_2\|_{C(0,T;H_4)} \leq q\|u_1 - u_2\|_{C(0,T;H_4)}$, т.е. оператор $L^{-1}F$ отображает множество M в себя и на этом множестве является сжатием с константой $q < 1$ Установленный факт означает, что к уравнению (I.8) применим принцип сжатых отображений, который доказывает существование единственного решения этого уравнения, а значит и задачи Коши (I.I), (I.2) на некотором локальном промежутке $[0,T]$. Тем самым доказано следующее утверждение

Теорема I. Пусть A – линейный самосопряжённый оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$ в некотором гильбертовом пространстве H, обладающий ограниченным обратным оператором, определённым на всём H; F – нелинейный непрерывный оператор, удовлетворяющий условиям (I.I0). Тогда задача Коши (I.I), (I.2) на некотором промежутке $[0,T]$ имеет единственное решение $w\in C(0,T;\mathcal{D}(A^2))\cap C^2(0,T;H)$ для любых $V\in\mathcal{D}(A^2)$, $W\in\mathcal{D}(A)$

2. Приложение к уравнениям нелинейных колебаний цилиндрических оболочек.

Срединная поверхность тонкой цилиндрической оболочки может быть развёрнута в прямоугольную область P, которую можно рассматривать как подмножество в пространстве R^2 точек $x=(x_1,x_2)$. Система уравнений нелинейных колебаний тонкой цилиндрической оболочки, находящейся под действием поверхностной нагрузки, имеет вид

$$\begin{cases} w_{tt}+a^2\Delta^2 w= b\,\mathcal{D}^2 w\cdot\mathcal{D}'^2\Phi+c\mathcal{D}_1^2\Phi+f \\ \Delta^2\Phi=-d\,\mathcal{D}^2 w\cdot\mathcal{D}'^2 w-e\,\mathcal{D}_1^2 w \end{cases} \qquad (2.I)$$

Здесь $\mathcal{D}_i$ – оператор дифференцирования по переменной x_i $(i=1,2)$, $\Delta=\mathcal{D}_1^2+\mathcal{D}_2^2$ – двумерный оператор Лапласа, $\mathcal{D}^2 w\cdot\mathcal{D}'^2\Phi=\mathcal{D}_1^2 w\cdot\mathcal{D}_2^2\Phi+$ $+\mathcal{D}_2^2 w\cdot\mathcal{D}_1^2\Phi-2\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2 w\cdot\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\Phi$; a, b, c, d, e – положительные константы, $f=f(t,x)$ – функция, определяемая поверхностной нагрузкой. Подробнее о системе (2.I) см.[2]. Присоединим к системе (2.I) начальные условия

$$w|_{t=0}=V(x),\quad w_t|_{t=0}=W(x). \qquad (2.2)$$

Граничные условия так же, как и в [2], выбираем периодическими, т.е. требуем, чтобы периодическими по каждой переменной были функции w и Φ и их частные производные до третьего порядка включительно. Этим требованием определяется выбор пространств: будем использовать пространства Соболева $H^s(P)=\{u\in L^2(P),\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}|k\omega|^{2s}|u_k|^2<\infty\}$, где $u_k=(u,e_k)$, $e_k=exp(ik\omega x)=$ $exp(ik_1\omega_1 x_1)exp(ik_2\omega_2 x_2)$; $k_1,k_2=0,\pm I,\pm 2,\ldots$; $\omega_1=2\pi/L$, $\omega_2=1/R$; $(.,.)$ – скалярное произведение в $L^2(P)$; s – целое, неотрицательное. В пространстве $H^s(P)$ введено скалярное произведение $(u,v)_s=u_0\cdot v_0+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k\omega|^{2s}u_k\cdot\bar{v}_k$ для любых u, v из $H^s(P)$, которому отвечает норма $\|u\|_s^2=|u_0|^2+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k\omega|^{2s}|u_k|^2$, эквивалентная обычной норме пространства Соболева.

Определим операторы $A^{s/2}$, действующие в $L^2(P)$, следующим образом: $A^{s/2}u=a^{s/2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k\omega|^s u_k e_k$ При каждом фиксированном s оператор $A^{s/2}$ имеет область определения $\mathfrak{D}(A^{s/2})=H^s(P)$, всюду плотную в $L^2(P)$, и является самосопряжённым положительным оператором с ядром, совпадающим с одномерным подпространством констант E^0 Разложим $H^s(P)$ в прямую сумму (по введённому скалярному произведению) $H^s(P)=E^0\oplus\bar{H}^s(P)$. Сужение оператора $A^{s/2}$ на подпространство $\bar{L}^2(P)=\bar{H}^0(P)$ является самосопряжённым положительно определённым оператором с плотной в $\bar{L}^2(P)$ областью определения $\bar{H}^s(P)$, и поэтому оператор $A^{s/2}$ обладает ограниченным обратным, определённым на $\bar{L}^2(P)$. Таким образом, построенный оператор $A=-a\Delta$ с $\mathfrak{D}(A)=\bar{H}^2(P)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к оператору A в п.I, при условии, что $H=\bar{L}^2(P)$. При этом $A^2=a^2\Delta^2$ с $\mathfrak{D}(A^2)=\bar{H}^4(P)$.

Лемма I. Отображение $(w,\Phi)\to D^2w\cdot D'^2\Phi$ является непрерывным билинейным отображением из $H^4(P)\times H^4(P)$ в $H^2(P)$.

Доказательство. Докажем сначала, что произведение произвольных функций u, v из $H^2(P)$ лежит в $H^2(P)$. Из определения пространства $H^2(P)$ следует, что $uv\in H^2(P)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(uv)\in L^2(P)$. Распишем подробнее $\Delta(uv)=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+2D_1u\cdot D_1v+2D_2u\cdot D_2v$ и рассмотрим отдельно каждое слагаемое. Если $u\in H^2(P)$, то $\Delta u\in L^2(P)$, а так как $H^2(P)$ вложено в пространство непрерывных на P функций $C(P)$, то $v\in C(P)$, и, следовательно, $\Delta u\cdot v\in L^2(P)$. Аналогично $u\cdot\Delta v\in L^2(P)$. Далее, так как $D_iu, D_iv\in H^1(P)$ и пространство $H^1(P)$ вложено в $L^p(P)$ для всех конечных p, то, выбирая $p\geq 4$, убеждаемся, что $D_iu\cdot D_iv\in L^2(P)$, $i=1,2$. При этом в силу указанных теорем вложения и непрерывности операторов $D_i: H^{s+1}(P)\to H^s(P)$ $(i=1,2$; s – целое неотрицательное) $\|uv\|_2\leq\leq c\|u\|_2\|v\|_2$, $c=const>0$

Если w, $\Phi\in H^4(P)$, то в выражении $D^2w\cdot D'^2\Phi=D_1^2w\cdot D_2^2\Phi+D_2^2w\cdot D_1^2\Phi-2D_1D_2w\cdot D_1D_2\Phi$ каждое слагаемое есть произведение функций из $H^2(P)$, поэтому $D^2w\cdot D'^2\Phi\in H^2(P)$, причём $\|D^2w\cdot D'^2\Phi\|_2\leq c_0\|w\|_4\|\Phi\|_4$,

$c_0 = const > 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. Для любых $w, \Phi \in H^4(P)$ $D^2 w \cdot D'^2 \Phi \in \bar{H}^2(P)$.

Эта лемма доказывается так же, как лемма 3 работы [2] с учётом того, что ортогональность некоторого элемента пространству E^0 в скалярном произведении пространства $L^2(P)$ влечёт за собой ортогональность этого элемента пространству E^0 и в скалярном произведении пространства $H^2(P)$.

Из системы уравнений (2.I) замечаем, что функция Φ может быть определена с точностью до Φ_0 . Фиксируем Φ условием $\Phi_0 = 0$. Проекция первого уравнения на подпространство E^0 (в силу леммы 2 и свойств операторов Δ^2, D_1^2) даёт уравнение $d^2 w_0(t)/dt^2 = f_0(t)$, для которого начальные условия определяются из условий (2.2). Этот факт позволяет в дальнейшем рассматривать систему (2.I) в подпространстве $\bar{L}^2(P)$.

Введём оператор Q с областью определения $\mathfrak{D}(Q) = \bar{H}^4(P)$ так: $Qw = -d\,\Delta^{-2}(D^2 v \cdot D'^2 w) - e\,\Delta^{-2} D_1^2 w$ Тогда из второго уравнения системы (2.I) можно выразить $\Phi = Qw$ и исключить Φ из первого уравнения:

$$w_{tt} + a^2 \Delta^2 w = b\, D^2 w \cdot D'^2 (Qw) + c\, D_1^2 (Qw) + f. \qquad (2.3)$$

Обозначая $Fw = b\, D^2 w \cdot D'^2 (Qw) + c D_1^2 (Qw) + f$, получим операторно-дифференциальное уравнение $w_{tt} + A^2 w = Fw$ с нелинейным оператором F в правой части, причём $\mathfrak{D}(F) = \bar{H}^4(P)$. Это уравнение эквивалентно уравнению (2.3), а следовательно, и системе (2.I).

Опишем схему действия оператора Q (каждая стрелка означает непрерывность соответствующего оператора):

$$\begin{tikzcd}
\bar{H}^4(P) \arrow[r, "D^2"] & \bar{H}^2(P) \arrow[r] & \bar{H}^2(P) \arrow[r, "\Delta^{-2}"] & \bar{H}^6(P) \arrow[dr] & \\
\bar{H}^4(P) \arrow[r, "D'^2"] & \bar{H}^2(P) \arrow[ur, "\Pi"] & & & \bar{H}^6(P) \hookrightarrow \bar{H}^4(P), \\
\bar{H}^4(P) \arrow[r, "D_1^2"] & \bar{H}^2(P) \arrow[r, "\Delta^{-2}"] & H^6(P) \arrow[urr, "\Sigma"'] & &
\end{tikzcd}$$

здесь Π - оператор взятия произведения, Σ - линейная комбинация элементов из указанных пространств, $\hookrightarrow$ означает вложение первого пространства во второе. Из этой схемы легко вытекают следующие свойства: для произвольных w, w_1, w_2 из M , где M есть (I.9) при условии $H_1 = \bar{H}^4(P)$,

$\|Qw\|_4 \le (\alpha_1 R_0 + \alpha_2)\|w\|_4$, $\|Qw_1 - Qw_2\|_4 \le (2\alpha_1 R_0 + \alpha_2)\|w_1 - w_2\|_4$, (2.4) где α_1, α_2 некоторые положительные константы.

Аналогичным образом можно описать схему действия оператора F

$$\begin{tikzcd}
\bar{H}^4(P) \arrow[r, "\mathcal{D}^2"] & \bar{H}^2(P) \arrow[rrd] & & & \\
\bar{H}^4(P) \arrow[r, "Q"] & \bar{H}^4(P) \arrow[r, "\mathcal{D}'^2"] & \bar{H}^2(P) \arrow[r, "\Pi"] & \bar{H}^2(P) \arrow[r, "\Sigma"] & \bar{H}^2(P) \\
\bar{H}^4(P) \arrow[r, "Q"] & \bar{H}^4(P) \arrow[r, "\mathcal{D}_1^2"] & \bar{H}^2(P) \arrow[rru] & &
\end{tikzcd},$$

и вытекающие из неё свойства: для любых w, w_1, w_2 из M

$$\|Fw\|_2 \leq \beta_1 R_0^3 + \beta_2 R_0^2 + \beta_3 R_0 + \|f\|_2,$$
$$\|Fw_1 - Fw_2\|_2 \leq (3\beta_1 R_0^2 + 2\beta_2 R_0 + \beta_3)\|w_1 - w_2\|_4, \qquad (2.5)$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – положительные константы. При выводе неравенств (2.5) использованы свойства (2.4) оператора Q. Обозначим $\varphi(R_0) = 3\beta_1 R_0^3 + 2\beta_2 R_0^2 + \beta_3 R_0 + \max\limits_{t\in[0,T]} \|f\|_2$ (считаем, что $R_0 > 1$), тогда из (2.5) следует, что для произвольных w, w_1, w_2 из M

$$\|Fw\|_2 < \varphi(R_0), \quad \|Fw_1 - Fw_2\|_2 \leq \varphi(R_0)\|w_1 - w_2\|_4 \quad \forall t \in [0,T],$$

т.е. описанный здесь оператор F обладает свойствами, достаточными для применения схемы п.I. Из теоремы I и рассуждений относительно w_0, Φ_0 следует такое утверждение.

Теорема 2. Для любых $V \in H^4(P)$, $W \in H^2(P)$ и $f \in C(0,T; H^0(P))$ задача (2.I), (2.2) на некотором промежутке $[0,T]$ имеет единственное решение $w(t) \in C(0,T; H^4(P)) \cap C^2(0,T; L^2(P))$, $\Phi(t) \in C(0,T; H^4(P))$.

Заметим, что теорема I не следует из теоремы X.72 [4], т.к. накладывает меньше ограничений на нелинейный оператор F Это стало возможным благодаря предположению об ограниченности оператора A^{-1}. Для случая нелинейных колебаний цилиндрических оболочек условия упомянутой теоремы X.72 не выполняются.

Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
2. Козьмина Е.С. Разрешимость уравнений нелинейных колебаний цилиндрических оболочек.-Латвийский математический ежегодник, 1979, т.23, с.82-97.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.,1971.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, М., 1978, т.2.

Поступило 5 октября 197[illegible]

Топологические пространства и их отображения, Рига,1981.

УДК 513.88.

УСТОЙЧИВОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ПУЧКА $A-\lambda B$ ПРИ СЕКВЕНЦИАЛЬНО-КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.И.Лабеев
ЛГУ им.П.Стучки

В предлагаемой статье рассматриваются спектральные свойства пучка линейных отображений $A-\lambda B$ и исследуется устойчивость этих свойств при секвенциально-компактной аппроксимации. Полученные результаты являются обобщением аналогичных теорем, доказанных автором для случая, когда $B=I$ (см.[2], [3]).

Пусть X и Y – банаховы пространства над полем $K(=R;=C)$. Через $LC(X,Y)$ и $LCC(X,Y)$ будем обозначать пространства всех линейных непрерывных и линейных компактных отображений X в Y, а через $LCl(\mathcal{D}(A)\subset X;Y)$ – множество всех замкнутых линейных отображений с $\mathcal{D}(A)\subset X$ и $R(A)\subset Y$ Резольвентным множеством пучка $A-\lambda B$ линейных отображений A и B называется множество всех таких $\lambda\in K$, что $A-\lambda B$ является биекцией $\mathcal{D}(A)$ на Y, $(\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(B)$ и $\overline{\mathcal{D}(A)}=X)$, причем $(A-\lambda B)^{-1}\in LC(Y,\mathcal{D}(A))$. Резольвентное множество A относительно B будем обозначать через $Res(A;B)$, а множество, дополнительное к $Res(A;B)$ в поле K, – через $S(A;B)$ и называть спектром. В [1] указано, что $S(A;B)$ является замкнутым (не обязательно ограниченным даже для $A,B\in LC(X,Y)$) множеством, а $Res(A;B)$ – открытым, причем резольвента $(A-\lambda B)^{-1}=Res(\lambda)$ является аналитической функцией аргумента λ на множестве $Res(A;B)$.

Покажем теперь компактность множества $S(A;B)$ если $A\in LCC(X,Y)$, а $B\in LC(X,Y)$.

<u>Теорема I.</u> Пусть $A\in LCC(X,Y)$ и $Res(A,B)\neq\emptyset$

Тогда: I. отображение B является фредгольмовым;

2. $S(A;B)$ – компактное множество, состоящее не более чем из счетного множества чисел, каждое из которых (за

возможным исключением нуля) является изолированным собственным числом конечной корневой кратности;

3. $\forall\lambda\in K\setminus\{0\}$ $ker(A-\lambda B)<+\infty$; $R(A-\lambda B)=\overline{R(A-\lambda B)}$, $ind(A-\lambda B)=0$;

4. если $dim X=+\infty$ то $0\in S(A;B)$;

5. если $ker(A-\lambda B)=\{0\}$ то $\lambda\in Res(A;B)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0\in Res(A;B)$ (мы ограничимся рассмотрением бесконечномерного пространства X, и поэтому $\lambda_0\neq 0$ (в противном олучае получаем, что $A\in Isom(X,Y)\cap LC(X,Y)=\emptyset$)). Тогда

$$B=\frac{1}{\lambda_0}[(A-\lambda_0 B)+A],$$

где $A-\lambda_0 B\in Isom(X,Y)$ Из последнего оледует фредгольмовость B

Далее, пусть $\lambda\neq 0$,

$$C=\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}-1\right)A \qquad \text{и} \qquad D=A-\lambda_0 B.$$

Тогда $C\in LCC(X,Y)$, $D\in Isom(X,Y)$ и $A-\lambda B=\frac{\lambda}{\lambda_0}[C-D]$

Рассмотрим теперь суперпозицию

$$D^{-1}(A-\lambda B)=\frac{\lambda}{\lambda_0}[D^{-1}C-I].$$

В силу соотношений

$ker(A-\lambda B)=ker[D^{-1}(A-\lambda B)]=ker[D^{-1}C-I]$; $D^{-1}C\in LCC(X,X)$

заключаем, что $ker(A-\lambda B)<+\infty$, и если $ker(A-\lambda B)=\{0\}$ то $A-\lambda B\in Isom(X,Y)$ т.е. $\lambda\in Res(A;B)$.

Аналогично устанавливаются равенства $R(A-\lambda B)=\overline{R(A-\lambda B)}$ и $ind(A-\lambda B)=0$.

Далее, для всех $\lambda\in K\setminus\{0\}$; $\lambda\neq\lambda_0$

$$A-\lambda B=\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda_0}\left[A-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_0}(A-\lambda_0 B)\right].$$

Поэтому
$$A-\lambda B=\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda_0}D\left[D^{-1}A-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_0}I\right].$$

В силу общей теории линейных компактных отображений спектр $D^{-1}A\in LC(X,X)$ является не более чем счетным компактным множеством, каждая точка которого, за возможным исключением нуля, изолирована и является собственным числом отображения $D^{-1}A$ конечной корневой кратности. Таким образом, нам осталось показать ограниченность множества $S(A;B)$ Пусть $\gamma=\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_0}$ Так как 1 может быть либо регулярным числом, либо изолированным собственным числом отображения $D^{-1}A$, то

$\exists\varepsilon>0$ $\forall\gamma$: $0<|\gamma-1|<\varepsilon$ $D^{-1}A-\gamma I\in Isom(X,X)$.

Отсюда, решая неравенство $0<\left|\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_0}-1\right|<\varepsilon$, получаем, что при всех λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda-\lambda_0| > \frac{|\lambda_0|}{\varepsilon}$, отображение $A-\lambda B = \frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda_0} D\left[D^{-1}A - \frac{\lambda}{\lambda-\lambda_0} I\right]$ является Isom

<u>Замечание.</u> Неограниченность $S(A;B)$ для отображений $A, B \in LC(\ell_2;\ell_2)$, заданных формулами

$$A = I \qquad , B = \frac{1}{n} e_n \qquad , \text{ где } (e_n) \text{ - стан-}$$

дартный базис в ℓ_2, показывает, что $S(A;B)$ не является ограниченным, если $A \in LC(X,Y)$ а $B \in LCC(X,Y)$.

<u>Определение.</u> Пусть $A, A_n \in L(X,Y)$ Будем говорить, что последовательность линейных отображений (A_n) секвенциально-компактно аппроксимирует линейное отображение A если

а) для любого вектора $x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$;

б) для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ последовательность векторов $(A_n x_n - A x_n)$ относительно компактна в Y В этой ситуации будем писать, что $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A \in L(X,Y)$.

В [2] доказана следующая

<u>Теорема 2.</u> Если $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A \in \mathrm{Isom}(X,Y)$, то существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$

$$A_n \in \mathrm{Isom}(X,Y);\ \|A_n^{-1}\| \leq c = const;\ A_n^{-1} \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A^{-1} \in L(Y,X).$$

<u>Теорема 3.</u> Пусть $A_n \xrightarrow{\text{о.к.а.}} A$ и $B_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} B$ Тогда для любого компактного множества $M \subset \mathrm{Res}(A;B)$ существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$

I. $M \subset \mathrm{Res}(A_n;B_n)$;

2. $\sup\limits_{n\geq n_0} \sup\limits_{\lambda\in M} \|(A_n-\lambda B_n)^{-1}\| \leq C = const$;

3. $\forall \lambda \in M \quad (A_n-\lambda B_n)^{-1} \xrightarrow{\text{о.к.а.}} (A-\lambda B)^{-1} \in LC(Y,X)$.

<u>Доказательство.</u> Предположим, что утверждение I неверно. Тогда, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно построить такую последовательность чисел $(\lambda_n) \subset M$, что

$$\forall n \in N \qquad \lambda_n \in S(A_n;B_n).$$

В силу компактности M существуют такая подпоследовательность (λ_{n_k}) и такое число $\lambda_0 \in M$, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k} = \lambda_0$. В силу свойств секвенциально-компактной аппроксимации [2]

$$A_{n_k} - \lambda_{n_k} B_{n_k} \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A - \lambda_0 B \in \mathrm{Isom}(X,Y).$$

В силу теоремы 2 для всех достаточно больших n_k: $A_{n_k}-\lambda_{n_k}B_{n_k}\in \mathrm{Isom}(X,Y)$, что противоречит предположению $\lambda_{n_k}\in S(A_{n_k}, B_{n_k})$.

Аналогично доказывается утверждение 2, а справедливость утверждения 3 получается из утверждения 1 и теоремы 2.

<u>Следствие.</u> Если $(\lambda_n)\subset K$ - такая последовательность чисел, что при всех $n\in N$ $\lambda_n\in S(A_n; B_n)$, то множество всех предельных точек последовательности (λ_n) содержится в $S(A, B)$

<u>Теорема 4.</u> Число $\lambda_0\in Res(A;B)$ в том и только в том случае, когда при всех достаточно больших $n\in N$ $\lambda_0\in Res(A_n;B_n)$ существует такое число $C>0$, что $\|A_n-\lambda B_n\|\le C$.

Данная теорема является частным случаем теоремы 17 из [2].

Пусть M компактное подмножество $Res(A;B)$, $C_M(X)$ банахово пространство всех непрерывных функций z $M\longmapsto X$ нормой

$$\|z\|_{C_M(X)}=\max_{\lambda\in K}\|z(\lambda)\|_X.$$

Определим линейное отображение $R_M(A)$ $X\longmapsto C_M(X)$ едующим образом: $\forall x\in X$ $R_M(A)x=(A-\lambda B)^{-1}Bx$

ее, в силу теоремы 3 для всех достаточно больших $n\in N$ определим последовательность отображений

$$R_M(A_n): X\longmapsto C_M(X)$$

следующим образом:

$$\forall x\in X\quad R_M(A_n)x=(A_n-\lambda B_n)^{-1}B_nx.$$

<u>Теорема 5.</u> $R_M(A_n)\xrightarrow{с.к.а.}R_M(A)\in LC(X,C_M(X))$.

Доказательство этой теоремы опирается на тождество

$$(A-\lambda_1B)^{-1}-(A-\lambda_2B)^{-1}=(\lambda_1\ \lambda_2)(A-\lambda_1B)^{-1}B(A-\lambda_2B)^{-1},$$

справедливое для любых $\lambda_1,\lambda_2\in Res(A;B)$ и аналогично доказательству теоремы 15 из [3].

Пусть $\lambda_0\neq 0$ -изолированное собственное значение отображения A относительно отображения B Тогда существует такое число $\delta>0$, что

$$B'_K(\lambda_0;\delta)=\{\lambda\in K \mid |\lambda-\lambda_0|\le\delta\}\cap S(A;B)=\{\lambda_0\}$$

Пусть $A_n\xrightarrow{о.к.а.}A$ и $B_n\xrightarrow{с.к.а.}B$, $A,B\in LC(X,Y)$. Тогда в силу теоремы 3 существует такое число $n_0\in N$, что для всех $n\geq n_0$ $S_K(\lambda_0;\delta)=\{\lambda\in K \mid |\lambda-\lambda_0|=\delta\}\subset Res(A_n,B_n)$. Далее, пусть $K=C$

Рассмотрим линейное непрерывное отображение

$$P(A,\lambda_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}(A-\lambda B)^{-1}B\,d\lambda \quad X\mapsto X$$

и последовательность линейных непрерывных отображений

$$P_n(A_n;\lambda_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}(A_n-\lambda B_n)^{-1}B_n\,d\lambda : X\mapsto X,$$

определение которых корректно при всех $n \geq n_0$

Совершенно аналогично можно определить последовательности линейных непрерывных отображений

$$Q_n(A_n;\lambda_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}(A_n-\lambda B_n)^{-1}d\lambda \quad Y\mapsto X$$

и

$$T_n(A_n;\lambda_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}B_n(A_n-\lambda B_n)^{-1}d\lambda . \, Y\mapsto Y,$$

а также линейные непрерывные отображения

$$Q(A;\lambda_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}(A-\lambda B)^{-1}d\lambda \quad Y\mapsto X,$$

$$T(A;\lambda_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}B(A-\lambda B)^{-1}d\lambda : Y\mapsto Y.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 6. $P_n(A_n;\lambda_0)\xrightarrow{\text{с.к.а.}}P(A,\lambda_0)\in LC(X;X);$

$$Q_n(A_n;\lambda_0)\xrightarrow{\text{о.к.а.}}Q(A;\lambda_0)\in LC(Y,X);$$

$$T_n(A_n;\lambda_0)\xrightarrow{\text{с.к.а.}}T(A;\lambda_0)\in LC(Y;Y).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству подобного соотношения при $B=I$ ([3], теорема 28).

В [1] доказано, что P, T ; P_n T_n являются проекторами в X и Y соответственно. Причем P проектирует X на корневое подпространство, соответствующее собственному числу λ_0 , а P_n - на линейную оболочку корневых подпространств, соответствующую всем собственным числам $\lambda \in B_c'(\lambda_0;\delta)\cap S(A_n;B_n)$.

В [2] доказана следующая теорема: если последовательность линейных непрерывных проекторов $p_n : X\mapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $p \in LC(X,X)$, то

1. p - линейный непрерывный проектор;

2. если $\dim pX < +\infty$, то существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $\dim p_n X = \dim pX$;

3. если для некоторой подпоследовательности (p_{n_k}) последовательности проекторов (p_n) $\dim p_{n_k}X < +\infty$, то $\dim pX < +\infty$.

Тогда из приведенной теоремы и из теоремы 6 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 7. Пусть $\lambda_0 \in S(A;B)\setminus\{0\}$ - изолированное собственное число. Тогда

1. существует такая последовательность чисел $\lambda_n \in S(A_n;B_n)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$;

2. если корневая кратность собственного числа λ_0 конечна, то для всех достаточно больших $n \in N$ корневая кратность собственных чисел λ_n конечна;

3. если корневая кратность собственного числа λ_0 равна 1, то в $B_c^1(\lambda_0, r)$ для всех достаточно больших $n \in N$ существует единственное собственное число λ_n отображения A_n относительно B_n единичной кратности и $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda_0$.

Как следствие теоремы I и теоремы 7 получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 8. Пусть $A_n \xrightarrow{\text{о.к.а.}} A \in LCC(X,Y)$, $B_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} B$, $B \in LC(X,Y)$ Тогда для любого числа $\lambda_0 \in S(A;B)\setminus\{0\}$ существует такая последовательность чисел $\lambda_n \in S(A_n, B_n)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$ и для всех $n \in N$ λ_n являются собственными числами конечной корневой кратности. Если корневая кратность λ_0 есть единица, то для всех достаточно больших $n \in N$ корневая кратность λ_0 есть 1 и выбор числа λ_n, однозначен.

Отметим также, что, используя переход к норме Б.Секефальви-Надя

$$\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_Y,$$

можно доказать аналогичные теоремам 3,5,6 утверждения для случая линейных замкнутых отображений A, A_n таких, что $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_n)$ и линейных непрерывных отображений B, $B_n \in LC(X,Y)$.

Литература

I. Диткин В.В. Некоторые спектральные свойства пучка линейных операторов в банаховых пространствах. - Математические записки, 1977, т.22, № 6, с.847-858.

2. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах. - Топологические пространства и их отображения. Рига, 1975, вып.I, с.39-58.

3. Лабеев В.И. Устойчивость свойств спектра линейных отображений при секвенциально-компактной аппроксимации в банаховых пространствах. - Топологические пространства и их отображения. Рига, 1975, вып.I, с.59-75.

4. Лабеев В.И. Об устойчивости секвенциальной предкомпактности отображений в топологических векторных пространствах при секвенциально-предкомпактной аппроксимации. - Топологические пространства и их отображения. Рига, 1975, вып.I, с.76-90.

Поступила 17 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига.1981.

УДК 513.88

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ ОБРАТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРИ СЕКВЕНЦИАЛЬНО-КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.С.Левченков

ЛГУ им.П.Стучки

В работе [1] доказано необходимое и достаточное условие регуляризуемости по Тихонову отображений, обратных к линейным непрерывным отображениям в терминах характеристики подпространства [1, теорема 4]. В данной работе используется это условие для доказательства устойчивости регуляризуемости по Тихонову отображений, секвенциально-компактно аппроксимирующих линейное непрерывное отображение.

Определение I. Пусть $f:(X,\|\cdot\|_X)\mapsto(Y,\|\cdot\|_Y)$ - линейное непрерывное биективное отображение нормированного векторного пространства $(X,\|\ \|_X)$ в нормированное векторное пространство $(Y,\|\cdot\|_Y)$. Нормой Б.Секефальви-Надя в пространстве $(Y,\|\ \|_Y)$, определяемой линейным отображением $f^{-1}:(Y,\|\cdot\|_Y)\mapsto(X,\|\cdot\|_X)$, называется функция $|\ |\ Y\mapsto\mathbb{R}$, определяемая равенством $|y| = \|f^{-1}y\|_X + \|y\|_Y$.

Замечание I. Если $(\lambda,\|\cdot\|_X)$ - полное нормированное векторное пространство, то $(Y,|\ |)$ - также полное нормированное векторное пространство.

Пусть (y_n) - произвольная последовательность Коши из пространства $(Y,|\ |)$. Так как для всех натуральных чисел n и m справедливо неравенство $\|f^{-1}y_n - f^{-1}y_m\|_X \leq |y_n - y_m|$, то $(f^{-1}y_n)$ является последовательностью Коши в пространстве $(X, \| \|_X)$, а следовательно, найдется такой вектор $x \in X$, что

$$\lim_{n \to \infty} \| f^{-1}y_n - x \|_X = 0$$

Так как f - непрерывное отображение, то $\lim_{n \to \infty} \| f(f^{-1}y_n) - fx \|_Y = 0$, и, следовательно, в силу биективности отображения f, $\lim_{n \to \infty} \| y_n - fx \|_Y = 0$ т.е. элемент fx является пределом последовательности Коши (y_n) в пространстве $(Y, |\cdot|)$. Таким образом, $(Y, |\cdot|)$ - полное пространство.

<u>Замечание 2.</u> Линейное отображение f^{-1} $(Y, |\,|) \mapsto (X, \|\cdot\|_X)$ непрерывно. Действительно, для каждого вектора $y \in Y$ справедливо неравенство $\| f^{-1}y \|_X \leq |y|$.

<u>Теорема 1.</u> Если $f : (X, \|\cdot\|_X) \mapsto (Y, \|\cdot\|_Y)$ - линейное непрерывное биективное отображение нормированного векторного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ на нормированное векторное пространство $(Y, \|\cdot\|_Y)$, то отображение $f : (X, \|\cdot\|_X) \longmapsto (Y, |\cdot|)$ есть изоморфизм в категории топологических векторных пространств

<u>Доказательство.</u> Ввиду замечания 2 осталось проверить непрерывность отображения f при наделении Y новой нормой $|\;|$ Но это немедленно вытекает из неравенства:
$|fx| = \|x\|_X + \|fx\|_Y \leq \|x\|_X + \|f\| \|x\|_X = (1 + \|f\|) \|x\|_X$,
справедливого для любого $x \in X$.

<u>Определение 2.</u> Будем говорить, что последовательность линейных непрерывных отображений f_n $(X, \|\cdot\|_X) \mapsto (Y, \|\cdot\|_Y)$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : (X, \|\cdot\|_X) \mapsto (Y, \|\cdot\|_Y)$, если

1)для любого вектора $x \in X$ $\lim_{n \to \infty} f_n x = fx$ в пространстве $(Y, \|\cdot\|_Y)$;

2)для любой ограниченной последовательности векторов (x_n) из пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ последовательность векторов $(f_n x_n - fx_n)$ относительно компактна в пространстве $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

В этой ситуации кратко будем писать

$$f_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f \in LC((X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y))$$

[2,определение 8].

<u>Теорема 2.</u> Пусть $f : (X, \|\cdot\|_X) \mapsto (Y, \|\cdot\|_Y)$ - линейное непрерывное биективное отображение и $f_n : (X, \|\cdot\|_X) \mapsto (Y, \|\cdot\|_Y)$ - по-

следовательность линейных непрерывных отображений. Если

$$f_n \xrightarrow{\text{с.к.а}} f \in LC((X,\|\cdot\|_X),(Y,|\;|)),$$

то $f_n \xrightarrow{\text{с.к.а}} f \in LC((X,\|\;\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y))$.

Доказательство. Для каждого вектора $x \in X$ справедливо неравенство $\|f_n x - fx\|_Y \leqslant \|f^{-1}(f_n x - fx)\|_X + \|f_n x - fx\|_Y = |f_n x - fx|$ и, следовательно, $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n x - fx\|_Y = 0$

Аналогично для ограниченной последовательности (x_n) из пространства X доказывается относительная компактность последовательности $(f_n x_n - f x_n)$ в пространстве $(Y,\|\;\|_Y)$, так как $\|\;\|_Y \leqslant |\;|$

Замечание I. Если $f:(X,\|\cdot\|_X) \mapsto (Y,\|\cdot\|_Y)$ - изоморфизм в категории топологических векторных пространств, то справедливо также и обратное утверждение, т.е. если $f_n \xrightarrow{\text{с.к.а}} f \in LC((X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y))$, то $f_n \xrightarrow{\text{с.к.а}} f \in LC((X,\|\cdot\|_X),(Y,|\;|))$. Действительно, так как отображение $f^{-1}:(Y,\|\cdot\|_Y) \mapsto (X,\|\cdot\|_X)$ линейно и непрерывно, то справедливо следующее неравенство: $|f_n x - fx| = \|f^{-1}(f_n x - fx)\|_X + \|f_n x - fx\|_Y \leqslant$

$$\|f^{-1}\|\|f_n x \;\; fx\|_Y + \|f_n x - fx\|_Y = (\|f^{-1}\| + 1)\|f_n x - fx\|_Y$$

Замечание 2. Если $(X,\|\cdot\|_X)$ и $(Y,\|\cdot\|_Y)$ - полные нормированные векторные пространства, в частности конечномерные, то по теореме Банаха отображение $f^{-1}:(Y,\|\cdot\|_Y) \mapsto (X,\|\cdot\|_X)$ непрерывно, и замечание I применимо к теореме 2.

Теорема 3. Пусть $(X,\|\;\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ - нормированные векторные пространства, причем $(X,\|\cdot\|_X)$ - полное, и $f:(X,\|\cdot\|_X) \mapsto (Y,\|\;\|_Y)$ - линейное непрерывное биективное отображение. Если $f_n:(X,\|\cdot\|_X) \mapsto (Y,\|\cdot\|_Y)$ - последовательность линейных непрерывных отображений такая, что $f_n \xrightarrow{\text{с.к.а}} f \in LC((X,\|\cdot\|_X),(Y,|\;|))$, то существует такое натуральное число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$ $f_n:(X,\|\cdot\|_X) \mapsto (Y,\|\cdot\|_Y)$ - линейное непрерывное биективное отображение.

Доказательство. В силу теоремы I отображение $f:(X,\|\cdot\|_X) \mapsto (Y,|\;|)$ - изоморфизм. В силу [2, теорема 26] для всех $n \geqslant n_0$ отображения $f_n:(X,\|\cdot\|_X) \mapsto (Y,|\;|)$ - изоморфизмы. Но биективность отображения f_n не зависит от выбора нормы пространства Y.

Теорема 4. Пусть $f:(X,\|\cdot\|_X)\mapsto(Y,\|\cdot\|_Y)$ – линейное непрерывное биективное отображение сепарабельного или рефлексивного банахова пространства $(X,\|\cdot\|_X)$ в нормированное векторное пространство $(Y,\|\cdot\|_Y)$ и $f_n:(X,\|\cdot\|_X)\mapsto(Y,\|\cdot\|_Y)$ – последовательность линейных непрерывных отображений такая, что выполнены условия:

I) $f_n \xrightarrow{\text{с.к.а}} f \in LC((X,\|\ \|_X),(Y,|\ |))$,

2) любая ограниченная последовательность векторов (x_n) из пространства $(X,\|\ \|_X)$ с относительно компактной последовательностью образов $(f_n x_n)$ в пространстве $(Y,\|\cdot\|_Y)$ является относительно компактной последовательностью в пространстве $(X,\|\cdot\|_X)$ (в более общей форме условие регулярности последовательности (f_n) сформулировано в работе [3, определение 2]. Если отображение $f^{-1}:(Y,\|\cdot\|_Y)\mapsto(X,\|\cdot\|_X)$ регуляризуемо по Тихонову, то существует натуральное число $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что для каждого натурального числа $n\geq n_0$ f_n^{-1}: $(Y,\|\cdot\|_Y)\mapsto(X,\|\cdot\|_X)$ регуляризуемое по Тихонову отображение.

Доказательство. Векторное подпространство $M\subset X'$, всюду плотное в слабой топологии $\sigma(X',X)$, называется подпространством с нулевой характеристикой, если норма

$$\|x\|_0 = \sup_{x'\in M\setminus\{0_{x'}\}} \frac{|x'(x)|}{\|x'\|}$$

не эквивалентна исходной норме пространства [4] В противном случае говорят, что характеристика подпространства M отлична от нуля. Пусть X_*' – топологически сопряженное с пространством X_*, где X_* – пространство X с новой нормой $\|x\|_* = \|fx\|_Y$ В случае сепарабельного банахова пространства X по теореме 4 из работы [1] отображение $f^{-1}:(Y,\|\cdot\|_Y)\to(X,\|\cdot\|_X)$ регуляризуемо по Тихонову тогда и только тогда, когда характеристика пространства X_*' не равна нулю. Но это условие эквивалентно ограниченности по норме пространства $(X,\|\cdot\|_X)$ замыкания единичного шара S в слабой топологии $\sigma(X,X_*')$, т.е. ограниченности $\bar{S}^{\sigma(X,X_*')}$ в $(X,\|\cdot\|_X)$. Обозначим через X топологически сопряженное пространство с пространством X_{*n}, где X_{*n} пространство X с новой нормой

$$\|x\|_{*n} = \|f_n x\|_Y \qquad (n\geq n_0)$$

Отображение $f_n^{-1}:(Y,\|\cdot\|_Y)\mapsto(X,\|\cdot\|_X)$, существующее для $n\geq n_0$ в силу теоремы 3, будет регуляризуемым по Тихонову тогда и толь-

ко тогда, когда характеристика пространства X'_{*} не равна нулю, что эквивалентно ограниченности $\bar{S}^{\sigma(X,X'_{*n})}$ в $(X, \| \|_X)$
Покажем, что для всех $n \geq n_1$ $\sigma(X, X'_{*n}) = \sigma(X, X'_{*})$
Для этого достаточно показать эквивалентность норм $\| \|_{*n}$ и $\| \|_{*}$ для всех $n \geq n_1$. Докажем, что существуют натуральное число $n_1 \in \mathbb{N}$ и постоянные числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что для всех $x \in X$ и для всех $n \geq n_1$ справедливы неравенства

$$C_1 \|x\|_{*} \leq \|x\|_{*n} \leq C_2 \|x\|_{*}$$

т.е. $$C_1 \|fx\|_Y \leq \|f_n x\|_Y \leq C_2 \|fx\|_Y$$

Предположим противное, т.е. пусть для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует вектор $x_k \in X$ и существует номер $n_k \geq k$ такие,
что $\|f_{n_k} x_k\|_Y > k \|f x_k\|_Y$ (I)
или $\|f_{n_k} x_k\|_Y < \frac{1}{k} \|f x_k\|_Y$, (2)
т.е. при $x_k^{\circ} = \frac{x_k}{\|x_k\|}$
$(x_k \neq 0_X$,иначе возникает противоречие $0>0)$
$(\forall k \in \mathbb{N}) : \|f_{n_k} x_k^{\circ}\|_Y > k \|f x_k^{\circ}\|_Y$ (3)
или $(\forall k \in \mathbb{N})$ $\|f_{n_k} x_k^{\circ}\|_Y < \frac{1}{k} \|f x_k^{\circ}\|_Y$.(4)

Из неравенства (3) следует, что $\|f x_k^{\circ}\|_Y < \frac{1}{k} \|f_{n_k} x_k^{\circ}\|_Y$
Так как $f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in LC((X, \|\cdot\|_X), (Y, |\cdot|))$,
то по теореме 2 $f_n \xrightarrow{c.k.a.} f \in LC((X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y))$
и, следовательно, существует такое $C > 0$, что для всех $n \geq n_0$
$\|f\| \leq C$ [5, теорема 3].
Тогда $\|f x_k^{\circ}\|_Y < \frac{1}{k} \|f_{n_k} x_k^{\circ}\|_Y \leq \frac{1}{k} \|f_{n_k}\| \|x_k^{\circ}\|_X \leq \frac{C}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$
Так как $f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in LC((X, \| \|_X), (Y, \| \|_Y))$,
то $(f_{n_k} x_k^{\circ} - f x_k^{\circ})$ – относительно компактная последовательность в $(Y, \| \|_Y)$. Из сходимости последовательности $f x_k^{\circ} \to 0_X$ следует, что $(f_{n_k} x_k^{\circ})$ – относительно компактная последовательность в пространстве $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Таким образом, в силу условия 2) теоремы следует существование подпоследовательности $(x_{k_i}^{\circ})$, которая сходится к некоторой точке $x \in X$. Тогда в силу непрерывности нормы $\|x_{k_i}^{\circ}\|_X \to \|x\|_X$ и, следовательно, $\|x\|_X = 1$.
Т.к. f – непрерывное отображение, то $f x_{k_i}^{\circ} \to f x$, следовательно, $f x = 0$. Так как f – инъекция, то $x = 0$, т.е. $\|x\|_X = 0$
Из полученного противоречия вытекает, что неравенство (I) ложно. Теперь докажем, что неравенство (4) и, следовательно, (2) также ложно. Действительно, из неравенства (4) следует, что $f_{n_k} x_k^{\circ} \to 0_X$. Так как сходящаяся последовательность относительно компактна, то в силу условия 2) теоремы

существует подпоследовательность $(x_{k_i}^{o})$ которая сходится к некоторой точке $x \in X$. Так как $f_{n_{k_i}} \xrightarrow{с.к.а.} f \in LC((X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y))$ и $x_{k_i}^{o} \to x$, то $f_{n_{k_i}} x_{k_i}^{o} \longrightarrow fx = 0$ [2, теорема 15] и, следовательно, $x = 0$. Но это противоречит тому, что $\|x\|_X = 1$. Следовательно, ложно и неравенство (2).

В случае рефлексивного банахова пространства $(X,\|\cdot\|_X)$ применима теорема 3 из данной работы и теорема 6 из 1 Теорема доказана.

Следствие. Пусть $f:(X,\|\cdot\|)\mapsto(Y,\|\cdot\|)$ - линейное непрерывное биективное отображение сепарабельного или рефлексивного банахова пространства $(X,\|\cdot\|)$ в банахово пространство $(Y,\|\cdot\|_Y)$ и $f_n:(X,\|\cdot\|_X)\mapsto(Y,\|\cdot\|_Y)$ - последовательность линейных непрерывных отображений такая, что выполнены условия:

I) $f_n \xrightarrow{с.к.а.} f \in LC((X,\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y))$,

2) любая ограниченная последовательность векторов (x_n) из пространства $(X,\|\cdot\|_X)$ с относительно компактной последовательностью образов $(f_n x_n)$ в пространстве $(Y,\|\cdot\|_Y)$ является относительно компактной последовательностью в пространстве $(X,\|\cdot\|_X)$. Если отображение $f^{-1}:(Y,\|\cdot\|_Y)\mapsto(X,\|\cdot\|_X)$ регуляризуемо по Тихонову, то существует натуральное число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого натурального числа $n \geqslant n_0$ $f_n^{-1}:(Y,\|\cdot\|_Y)\mapsto(X,\|\cdot\|_X)$ регуляризуемое по Тихонову отображение.

Доказательство. В силу замечания 2 к теореме 2 применима теорема 4.

Литература

1. Винокуров В.А., Петунин Ю.И., Пличко А.Н. Условия измеримости и регуляризуемости отображений, обратных к непрерывным линейным отображениям. - ДАН СССР, 1975, т.220, № 3, с.509-511.
2. Карклиньш И.В., Левченков В.С. Инвариантность индекса линейных гомеоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации. - Латвийский математический ежегодник, 1976, т.17, с.3-29.
3. Вайникко Г. Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
4. **Dixmier J. Duke Math.J., 1948, vol. 15, p. 1057.**
5. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенци[illegible]ьно-компактной

аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1975, вып.I, с.39-58.

Поступила 18 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981.

УДК 513.83.

ОТКРЫТО-КОМПАКТНАЯ ТОПОЛОГИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.Я.Ливчак
ЛГУ им. П.Стучки

В статье определяется и изучается топология на пространстве отображений, двойственная в некотором смысле хорошо известной компактно открытой топологии.

Пусть X и Y – топологические пространства, F некоторое семейство непрерывных отображений X в Y Каждому открытому множеству U в X и каждому компактному множеству K в Y сопоставим множество $W(U,K)$ в F определенное равенством $W(U,K)=\{f \mid f\in F, f(U)\subset K\}$.

Теорема 1.

Условия. Хотя бы одно из пространств X или Y локально компактно.

Утверждение. Семейство всевозможных множеств вида $W(U,K)$ образует предбазу некоторой топологии на F

Замечание. Здесь и в дальнейшем рассматриваемые пространства, вообще говоря, не удовлетворяют никаким аксиомам отделимости.

Доказательство. Покажем, что F является объединением всех $W(U,K)$, тогда теорема будет доказана. Пусть Y – локально-компактное пространство. Возьмем $f\in F$, $x\in X$. Существует открытая окрестность V точки $f(x)$, замыкание K которой компактно. Так как отображение f непрерывно, то $U=f^{-1}(V)$ – открытая окрестность точки x Так как $f(U)=V\subset K$ то $f\in W(U,K)$ Следовательно, $f\in \bigcup_{U,K} W(U,K)$

Пусть теперь X – локально-компактное пространство. Возьмем $f\in F$, $x\in X$ Существует открытая окрестность U точки x , такая, что множество $\bar{U}$ компактно в X . Так как f непрерывно, то множество $K=f(\bar{U})$ компактно в Y Таким образом, $f\in W(U,K)$ Теорема доказана.

Топологию, порожденную семейством множеств вида $W(U,K)$ в F , назовем открыто-компактной топологией и будем обозначать ее τ

Пусть C - семейство всех непрерывных отображений X в Y с заданной на нем топологией τ Заметим, что τ индуцирует открыто-компактную топологию на любом подсемействе $F\subset C$

Теорема 2.

Условия. Y - хаусдорфово локально-компактное пространство.

Утверждение. Пространство (C,τ) хаусдорфово.

Доказательство. Пусть $f_1, f_2 \in C$, $f_1 \neq f_2$ Тогда существует такая точка $x\in X$, что $f_1(x) \neq f_2(x)$ Следовательно, существуют непересекающиеся окрестности V_1 и V_2 точек $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. По теореме 5.17 из [1, с. 198] существуют компактные окрестности K_1 и K_2 точек $f_1(x)$ и $f_2(x)$ такие, что $K_1 \subset V_1$, $K_2 \subset V_2$ Так как отображения f_1, f_2 непрерывны на X то $U_1 = f_1^{-1}(\mathrm{Int}\, K_1)$ и $U_2 = f_2^{-1}(\mathrm{Int}\, K_2)$, где $\mathrm{Int}\, K$ означает внутренность K являются открытыми окрестностями точки x Таким образом, $f_1 \in W(U_1,K_1)$, $f_2 \in W(U_2,K_2)$ и при этом $W(U_1,K_1) \cap W(U_2,K_2) = \emptyset$

Теорема 3.

Условия. X регулярное локально-компактное пространст- Y хаусдорфово пространство.

Утверждение. Пространство (C,τ) хаусдорфово.

Доказательство. Пусть $f_1, f_2 \in C$, $f_1 \neq f_2$ Сустьует точка $x\in X$ такая, что $f_1(x) \neq f_2(x)$ Возь- м открытые непересекающиеся окрестности V_1 и V_2 точек $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Так как отображения f_1 и f_2 вны, то $f_1^{-1}(V_1)$ и $f_2^{-1}(V_2)$ - открытые окрестности точ- x По условию существуют открытые окрестности U_1 и U_2 x , замыкания которых компактны, и $\bar{U}_1 \subset f_1^{-1}(V_1)$, $\bar{U}_2 \subset f_2^{-1}(V_2)$ Множества $K_1 = f_1(\bar{U}_1)$ и $K_2 = f_2(\bar{U}_2)$ мпактны в Y и $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Таким образом, $f_1 \in W(U_1,K_1)$, $f_2 \in W(U_2,K_2)$ и при этом $W(U_1,K_1) \cap W(U_2,K_2) = \emptyset$.

Следующий пример показывает, что требование локальной компактности либо пространства X , либо пространства Y существенно для задания открыто-компактной топологии на семействе непрерывных отображений X в Y

Пример 1.

Пусть Q - пространство рациональных чисел. Поскольку ни одна окрестность в Q не имеет компактного замыкания, то Q не является локально-компактным. Рассмотрим тождественное отображение $i: Q \to Q$ Так как i переводит открытые множества в открытые, а ни одно открытое в Q множество не содержится в компактном, то не существует множества вида $W(U,K)$, содержащего i Таким образом, ни на одном семействе отображений F пространства Q в себя, содержащем i нельзя задать открыто компактную топологию.

Напомним, что топология на семействе F отображений X Y называется совместно непрерывной, если отображение $P: F\times X \to Y$, задаваемое равенством $P(f,x) = f(x)$ непрерывно [1, с. 294] Топология на F называется компактно-открытой, если ее предбазой является семейство всевозможных множеств вида $W(K,U)$, где K - компактное множество в X , а U - открытое множество в Y [1, с. 292]

Теорема 4.

Условия. Либо X либо Y - регулярное локально-компактное пространство.

Утверждение. Открыто-компактная топология на C совместно непрерывна.

Доказательство. В этой и следующих теоремах доказательство будем проводить только для случая локальной компактности пространства Y , оставив доказательство второго случая читателю.

Пусть $x \in X$, $f \in C$ Возьмем открытую окрестность V точки $f(x)$ Существует открытая окрестность V_1 точки $f(x)^-$ такая, что $K = \overline{V_1}$ компактное множество и $K \subset V$. Так как отображение f непрерывно, то $U = f^{-1}(V_1)$ - открытая окрестность точки x . Тогда $f \in W(U,K)$, и так как $P(W(U,K),U) \in K \subset V$, то P непрерывно, а следовательно, τ совместно непрерывна на C .

Так как по теореме 7.5 из [1, с. 294] любая совместно непрерывная топология на C мажорирует компактно открытую топологию σ на C , а по теореме 7.4 в [1, с. 292] σ мажорирует топологию поточечной сходимости β на C то в предположениях теоремы 4 $\beta \subset \sigma \subset \tau$

Лемма.

Условия. Либо X - регулярное локально-компактное пространство, либо Y - локально-компактное пространство; Y-

хаусдорфово пространство; F - некоторое подсемейство семейства C, компактное относительно τ

Утверждение. $\beta=\sigma=\tau$ на F.

<u>Доказательство.</u> Пространство (F,β) хаусдорфово как подпространство Y^X. Так как F компактно относительно τ и $\beta\subset\tau$, то $\beta=\tau$ [2, 3.8, стр. 74] Из того что $\beta\subset\sigma\subset\tau$, следует, что $\beta=\sigma=\tau$.

<u>Теорема 5.</u>

Условия. Либо X - регулярное локально-компактное пространство, либо Y - локально-компактное пространство; Y - хаусдорфово пространство; F - некоторое подсемейство семейства C.

Утверждение. Для того, чтобы семейство F было компактным относительно τ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три требования:

(1) F τ - замкнуто в C;

(2) замыкание множества $F(x)=\{y\mid y\in Y, \exists f\in F: y=f(x)\}$ компактно для каждой точки $x\in X$;

(3) топология β на β -замыкании множества F в Y^X совместно непрерывна и совпадает с τ

<u>Доказательство,</u> Необходимость. Если F компактно в C относительно τ то согласно лемме $\tau=\beta$ на F Из теоремы 7.1 в [1, с. 287] следует (2) и то, что F β-замнуто в Y^X По теореме 2 пространство (C,τ) хаусдорфово, ледовательно, F τ -замкнуто в C Из того что $\tau=\beta$ F и F β -замкнуто в Y^X следует (3).

Достаточность. Пусть выполняются требования (1), (2) и Обозначим через $\overline{F}$ β-замыкание множества F в Y^X ребование (2) означает, что $\overline{F(x)}$ компактно для каждой чки $x\in X$ Так как $\overline{F}$ -замкнутое подмножество β-омпактного множества $\Pi\{\overline{F(x)}\mid x\in X\}$, то $\overline{F}$ β-компактно. В силу (3) β совместно непрерывна на $\overline{F}$. Следовательно, каждое отображение семейства $\overline{F}$ непрерывно, то есть $\overline{F}\subset C$. Тогда утверждение о том, что $\tau=\beta$ на $\overline{F}$, имеет смысл. Из (1) следует, что F τ -замкнуто в $\overline{F}$ и, следовательно, β -замкнуто в $\overline{F}$ Значит, $F=\overline{F}$ и множество F τ -компактно.

Следующий пример показывает, что на семействе F о заданной на нем открыто-компактной топологией нельзя задать структуру топологического векторного пространства.

Пример 2.

Пусть Y - векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)с заданной на нем топологией; F - некоторое подсемейство семейства C являющееся нетривиальным векторным пространством с заданной на нем открыто-компактной топологией. Так как F -векторное пространство, то функция $f=\theta$ принадлежит F Возьмем $U=X$ $K=\{\theta\}$, тогда $W(U,K)=\{f\}$. Множество $W(U,K)$ есть окрестность нуля в F ,но не является поглощающим множеством, а следовательно, F не является топологическим векторным пространством, каковы бы ни были топологии на X и Y

Теорема 6.

Условия. Либо, X - регулярное локально-компактное пространство, либо Y - локально-компактное пространство; Y хаусдорфово пространство.

Утверждение. Множества $W(U,K)$ открыто-замкнуты в (C,τ)

Доказательство. Возьмем какое-либо множество $W(U,K)$. Пусть $f\in C\setminus W(U,K)$. Это означает, что существует точка $x\in U$ такая, что $f(x)\in Y\setminus K$. По условию Y хаусдорфово пространство, следовательно, K замкнуто. Так как $Y\setminus K$ является окрестностью точки $f(x)$, то существует компактное множество $K_1\subset Y$ такое, что $K_1\subset Y\setminus K$ $f(x)\in \mathrm{Int}\,K_1$. Поскольку f непрерывно, то множество $V=f^{-1}(\mathrm{Int}\,K_1)\cap U$ является открытой окрестностью точки x Таким образом, мы имеем $f\in W(V,K_1)$ и $W(V,K_1)\cap$ $\cap W(U,K)=\emptyset$. Следовательно, $W(U,K)$ замкнуто в C .

В предположениях теоремы 6 мы имеем $W(U,K)=\overline{W(U,K)}$ т.е. предбаза, а следовательно, и база открыто-компактной топологии на C образована открыто-замкнутыми множествами. Таким образом, C является нульмерным (в смысле ind) пространством. Очевидно, что (C,τ) регулярно. Поскольку (C,τ) - хаусдорфово пространство (теоремы 2,3), то оно и вполне несвязно.

Рассмотрим $CB(X)$ -пространство всех непрерывных ограниченных вещественных функций, определенных на некотором топологическом пространстве X. На $CB(X)$ задается топология равномерной сходимости при помощи нормы $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$.

Теорема 7.

Открыто-компактная топология на $CB(X)$ сильнее топологии равномерно. сходимости.

Доказательство. Возьмем функцию $\tilde{f}\in CB(X)$ и ее ε-окрестность $B_\varepsilon(\tilde{f}) = \{ f \mid f\in CB(X), |f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon, \forall x\in X \}$, $\varepsilon > 0$. Покажем, что $B_\varepsilon(\tilde{f})$ содержит некоторую окрестность функции $\tilde{f}$ в топологии τ. Так как $\tilde{f}$ -ограниченная функция, то существует $N\in \mathbb{R}$ такое, что $|\tilde{f}(x)| < N$ для всех $x\in X$. Возьмем $U_i = \tilde{f}^{-1}((-N + i\cdot\frac{\varepsilon}{8}, -N + i\cdot\frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4}))$, $i = 0,1,\dots,[\frac{16N}{\varepsilon}]-1$. Обозначим $N_1 = [\frac{16N}{\varepsilon}] - 1$. Очевидно, что $\bigcup_{i=1}^{N} U_i = X$. [illegible] рем каждого U_i некоторую точку $x_i\in U_i$, $i=1,\dots,N_1$ введем обозначения: $K_i = [\tilde{f}(x_i) - \frac{\varepsilon}{4}, \tilde{f}(x_i) + \frac{\varepsilon}{4}]$, $i = 1,\dots N_1$, $W = \bigcap_{i=1}^{N} W(U_i, K_i)$. Покажем, что $\tilde{f}\in W$. Пусть $x\in X$ и $i\in\{1,\dots,N_1\}$ такое, что $x\in U_i$. По определению U_i $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Следовательно, $\tilde{f}(x)\in K_i$, т.е. $\tilde{f}\in W$. окажем теперь, что $W\subset B_\varepsilon(\tilde{f})$. Пусть $f\in W$. Возьмем $x\in X$, существует $i'\in\{1,\dots,N_1\}$ такое, $x\in U_{i'}$. Поскольку $f(x), \tilde{f}(x)\in K_{i'}$, то $|f(x) - \tilde{f}(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{4} < \varepsilon$. Таким образом, $f\in B_\varepsilon(\tilde{f})$ а это [illegible] т, что $W\subset B_\varepsilon(\tilde{f})$. Заметим, что множество $W(X,\{c\})$ где $c\in\mathbb{R}$ открыто относительно τ [illegible] тся открытым в [illegible] гии равномерной сходимости на $CB(X)$. Теорема доказана.

[illegible] ема [illegible] ывает, что пространство $CB(\mathbb{R})$ [illegible] ологии τ

[illegible] ема .

[illegible] ждой функции $f\in CB(\mathbb{R})$ множество $\{f\}$ являет- [illegible] ым в τ тогда только тогда, когда $f = const$.

Доказательство. Допустим, что существует функция $f\in CB(\mathbb{R})$, равная константе, такая, что $\{f\}$ является открытым в τ множеством, т.е. $\{f\} = \bigcap_{i=1}^{n} W(U_i, K_i)$, $n\in N$. Обозначим $W = \bigcap_{i=1}^{n} W(U_i, K_i)$. Так как $f\neq const$, то существуют точки $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, $x_1 < x_1$ такие, что $f(x_1)\neq f(x_2)$. Пусть $f(x_1) < f(x_2)$. Рассмотрим два случая:

1) Существует промежуток $(y_1,y_2)\subset(x_1,x_2)$ такой, что $(y_1,y_2)\cap(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)=\emptyset$ Покажем, что в этом случае множество W содержит более одного элемента. Зададим функции f_1 и f_2 следующим образом:

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\mathbb{R}\setminus(y_1,y_2)\\ 0, & x=\frac{y_1+y_2}{2}\\ \text{линейна в } \left[y_1,\frac{y_1+y_2}{2}\right] & \text{и в } \left[\frac{y_1+y_2}{2},y_2\right]\end{cases},$$

$$f_2(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\mathbb{R}\setminus(y_1,y_2)\\ 1, & x=\frac{y_1+y_2}{2}\\ \text{линейна в} \left[y_1,\frac{y_1+y_2}{2}\right] & \text{и в } \left[\frac{y_1+y_2}{2},y_2\right]\end{cases}$$

Очевидно, что функции f_1 и f_2 содержатся в W Следовательно, W не является одноэлементным множеством.

2) Промежуток $(x_1,x_2)\subset\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ Тогда (x_1,x_2) содержится в замыкании объединения конечного числа множеств $V_I=((x_1,x_2)\cap(\bigcap_{i\in I} U_i))\setminus(\bigcup_{i\notin I}\bar{U}_i)$, где $I=\{i_1,\dots i_m\}\subset\{1,\dots,n\}$ Так как $f\neq const$ то по теореме Вейерштрасса функция f принимает (x_1,x_2) все значения из промежутка $(f(x_1),f(x_2))$ Если бы функция f принимала на каждом $V_{(i_1,\dots,i_m)}$ не более счетного числа значений, то f принимала бы на (x_1,x_2) также не более счетного числа значений, но $(f(x_1)\ ,f(x_2))$ имеет мощность континуума. Из полученного противоречия следует, что существует такое множество индексов $\{i'_1,\dots,i'_{m'}\}$ на множестве $V=V_{(i'_1,\dots,i'_{m'})}$ функция f принимает не более счетного числа значений. Так как множество V следовательно, состоит из счетного объединения промежутков, то существует такой промежуток $(y_1,y_2)\subset V$ и такие точки $x',x''\in(y_1,y_2)$, что $f(x')\neq f(x'')$ Допустим, что $x'<x''$ и $f(x')<f(x'')$ По теореме Вейерштрасса функция f принимает на (x',x'') все значения из промежутка, $(f(x')\quad f(x''))$ Это означает, что $(f(x'),f(x''))\subset\subset\bigcap_{l=1}^{k} K_{i'_l}$, т.е. на f наложено ограничение следующего вида $f((x',x''))\subset(f(x'),f(x''))$, но такому требованию удовлетворяет бесконечное число функций. Следовательно, и в этом случае множество W не является одноэлементным. Таким образом, если $f\neq const$, то множество $\{f\}$ не представ-

вить в виде $\{f\}=\prod_{i=1}^{n} W(U_i,K_i)$ если же $f=c$ $c\in\mathbb{R}$ то $\{f\}=W(\mathbb{R},\{c\})$

Теорема доказана.

Замечание. Утверждения теорем 3,4,5,6 остаются верными, если заменить в них требование регулярности и локальной компактности пространств требованием существования базы из компактных окрестностей (т.е. компактных открытых множеств) в каждой точке. В теореме 1 достаточно потребовать существование компактной окрестности для каждой точки пространства.

Следующий пример показывает, что существует нерегулярное пространство, не являющееся локально-компактным, которое, тем менее, обладает базой из компактных окрестностей в каждой точке.

Пример 3.

Пусть X - множество, состоящее из бесконечного числа точек. Возьмем какую-либо точку $x_0\in X$ Зададим на X топологию следующим образом: открытыми являются множества, торые содержат точку x_0, а также пустое множество. Легко видеть, что пространство X не удовлетворяет в заданной топологии никаким аксиомам отделимости, кроме аксиомы T_0 Замыкание любого непустого открытого множества в X совпадает со всем пространством, которое, очевидно, не является компактным. Тем не менее, каждая точка x из X имеет компактну окрестность $V=\{x,x_0\}$ содержащуюся в любой другой рестности. Следовательно, пространство X обладает базой из компактных окрестностей в каждой точке.

Пусть либо X - регулярное пространство и семейство F состоит из непрерывных замкнутых отображений, либо Y - регулярное пространство. Тогда аналогично тому, как это делалось теореме 1, доказывается, что семейство всевозможных множеств вида $W(U,K)$, где U открыто в X, а K замкнуто в Y, образует предбазу некоторой топологии на F Эту топологию будем называть открыто-замкнутой. Если Y - хаусдорфово пространство, то открыто-замкнутая топология на F сильнее открыто-компактной топологии.

Для семейства C с заданной на нем открыто-замкнутой топологией будут верны утверждения, аналогичные утверждениям теорем 2,3,4,5,6, если либо заменить в условиях теорем требование локальной компактности пространства Y требованием его регулярности, либо требование локальной компактности X заменить на требование регулярности X и вместо C рассматривать подсемейство $C_1 \subset C$, состоящее из всех непрерывных замкнутых отображений. В теореме 6 можно отказаться от требования хаусдорфовости пространства Y

Если в примере 2 предполагать, что пространство Y удовлетворяет аксиоме отделимости T_1, то на семействе F с заданной нем открыто-замкнутой топологией также нельзя задать структуру топологического векторного пространства.

Утверждения теорем 7 и 8 будут верны и в случае открыто-замкнутой топологии.

Автор выражает благодарность доценту М.А.Гольдману за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Келли Дж.Л. Общая топология. М.,1967.
2. Рудин У. Функциональный анализ. М.,1975.

Поступила 12 мая 1979 г.

Топологические пространства и их отображения, Рига, 1981.

УДК 513.88

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ КВАЗИНЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Х.Лиепиньш
ЛГУ им. П.Стучки

В предлагаемой работе приводятся необходимые и достаточные условия сходимости итерационных процессов квазинерастягивающих, строго квазинерастягивающих отображений, а также квазисжатий в метрических пространствах. Понятие квазинерастягивающего отображения было введено в [1] и получило существенное развитие в [2], [3] и [4]. В отличие от упомянутых работ сходимость итерационных процессов для этого класса отображений в предлагаемой работе исследуется без предположения непрерывности отображений на множествах определения. Отметим, что отображения, рассматриваемые в процессе приближенного решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах некоторыми классическими методами, при определенных условиях суть квазинерастягивающие, строго квазинерастягивающие отображения или квазисжатия [5], [6]. Таким образом, вопрос о сходимости итерационных процессов квазинерастягивающих отображений представляет собой интерес не только с теоретической, но и с прикладной точки зрения.

Результат предлагаемой работы о сходимости итерационных процессов квазисжатий применяется в [6], где результат из [5] о возможном выборе начального приближения, при котором сходится метод Ньютона-Канторовича для приближенного решения нелинейных уравнений распространяется с конечномерных на произвольные банаховы пространства.

Предлагаемая работа основывается на идеях, предложенных в [3] и [4].

Основные определения

Предположим, что метрическое пространство с расстоянием d Предположим, что множество $A \subset S$ не пусто, $A_0 \subset A$ и $f \; A \mapsto S$ Через $F(A_0, A)$ обозначим множество неподвижных точек отображения f во множестве $\overline{A_0} \cap A$ Множество $F(A, A)$ обозначим просто через $F(A)$

I.I. Определение (см. [4 , с.463]). Отображение $f \; A \mapsto S \; (A \subset S, \; A \neq \emptyset)$ называется квазинерастягивающим во множестве $A_0 \subset A$, если $F(A_0, A) \neq \emptyset$ и $\forall a \in F(A_0, A) \quad \forall s \in A_0$

$$d(f(s), a) \leq d(s, a)$$

I.2. Определение. Отображение $f \; A \mapsto S \; (A \subset S, A \neq$ называется строго квазинерастягивающим во множестве $A_0 \subset A$, если $F(A_0, A) \neq \emptyset$ и $\forall \quad F(A_0, A)$

$$\forall s \in A_0 \setminus \{a\} \quad d(f(s), a) < d(s, a)$$

I.3. Определение. Отображение $f \; A \mapsto S \; (A \subset S, A \neq$ называется квазисжатием во множестве $A_0 \subset A$ если

$$F(A_0, A) \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \exists t \in [0, 1[\; \forall a \in F(A_0,$$

$$\forall s \in A_0 \setminus \{a\} \quad d(f(s), a) \leq t \, d(\; , a)$$

Ясно, что квазисжатие $f \; A \mapsto S \; (A \subset S, \; A \neq \emptyset)$ во множестве $A_0 \subset A$ строго квазинерастягивает в A_0 и тем самым квазинерастягивает. Отметим, что неподвижную точку квазисжатие f во множестве $\overline{A_0} \cap A$ имеет лишь одну, что, вообще говоря, неверно уже в случае строго квазинерастягивающих отображений. Тем не менее ясно, что, если отображение f строго квазинерастягивающее и $F(A_0, A) \subset A_0$, то единственность неподвижной точки имеет место. Множество сжатий полного метрического пространства в себя, вообще говоря, является собственным подмножеством квазисжатий. Кроме того имеем: множество строго нерастягивающих отображений (см например, [4 с.473]) метрического пространства в себя, имеющих неподвижную точку, вообще говоря, является собственным подмножеством множества строго квазинерастягивающих отображений этого пространства в себя. То же справедливо относительно множеств нерастягивающих и квазинерастягивающих отображений (см. [4 I.I, с.463]).

Предположим, что отображение f $A \mapsto S$ квазинерастягивает во множестве . Тогда оно непрерывно в любой своей неподвижной точке. Тем не менее даже квазисжатие полного метрического пространства в себя может оказаться непрерывным лишь в своей единственной неподвижной точке. (Действительно, достаточно рассмотреть отображение f $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ в себя, для любого $x \in \mathbb{R}$ определяемое равенством $f(x) = t(1-\chi(x))$, где $t \in]0,1[$ и χ - функция Дирихле.)

2. Сходимость итерационных процессов квазисжатий

Предположим, что отображение f $A \mapsto S$ $(A \subset S, A \neq \emptyset)$ является квазисжатием во множестве $A_0 \subset A$. Таким образом, существует неподвижная точка $a \in \overline{A_0} \cap A$ отображения f которая единственна во множестве $\overline{A_0} \cap A$ и для которой выполнено $\exists t \in [0,1[\ \forall s \in A_0 \setminus \{a\}$ $d(f(s),a) \leqslant t\, d(s,a)$ Наименьшее из чисел $t \in [0,1[$ со свойством $\forall s \in A_0 \setminus \{a\}$ $d(f(s),a) \leqslant$ $\leqslant t\, d(s,a)$ условимся называть показателем квазисжатия f во множестве A_0

2.I. Теорема. Предположим, что отображение f $A \mapsto S$ $A \quad S \quad A \neq \emptyset)$ является квазисжатием во множестве $A_0 \quad A$ Рассмотрим последовательность $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A_0$. Предположим, что $s_0 \in A_0$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $s_n \quad f(s_{n-1})$.

Тогда последовательность $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к единственной неподвижной точке a отображения f во множестве $\overline{A_0} \cap A$ При этом быстрота сходимости дается неравенством $d(s_n,a) \leqslant t^n d(s_0,a)$, где показатель квазисжатия f в A_0, $n \in \mathbb{N}$. Кроме того справедлива следующая оценка: $d(s_n,a) \leqslant \frac{t^n}{1-t} d(s_1,s_0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. При произвольном $n \in N$ имеем
$d(s_n, a) \quad d(f(s_{n-1}), a) \leqslant t\, d(s_{n-1}, a)$
Путем индукции из этого следует, что $\forall n \in N$
$d(s_n, a) \leqslant t^n d(s_0, a)$. Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty} d(s_n, a) = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$ Одновременно имеем первую требуемую оценку быстроты сходимости. Установим вторую. Предположим, что $t \in]0,1[$. (В противном случае $t - 0$, т.е. отображение f постоянно в A_0 и доказательство завершено.) Допустим, что при некотором $n \in N$ имеет место

$$d(s_n, a) > \frac{t^n}{1-t}\, d(s_0, s_1)$$

Так как $d(s_n, a) \leqslant t^n d(s_0, a)$, то тогда $(1-t)\, d(s_0, a) >$

$$> d(s_0, s_1) \geqslant |\, d(s_0, a) - d(s_1, a) \,| \geqslant$$

$$\geqslant |\, d(s_0, a) - t\, d(s_0, a) | = (1-t)\, d(s_0, a),$$

что невозможно Таким образом справедлива и вторая оценка быстроты сходимости последовательности $(s_n)_{n\in N}$

Для отображений, определенных в замкнутых подмножествах метрических пространств, теорема 2.1 справедлива в следующей форме.

2.2. Теорема. Предположим, что S-метрическое пространство и отображение f $S \mapsto S$-квазисжатие в нем.

Тогда итерационный процесс $s_n = f(s_{n-1})$ сходится к единственному решению a уравнения $f(s) = s$ при любом выборе начального приближения $s_0 \in S$ При этом быстрота сходимости дается неравенством

$$d(s_n, a) \leqslant \frac{t^n}{1-t}\, d(s_0, s_1) \ ,$$ где

t - показатель квазисжатия f в S, $n \in N$

Если, кроме того, пространство S ограниченно, то справедлива оценка: $d(s_n, a) \leqslant t^n \delta(S)$ ($\delta(S)$ - диаметр пространства S), $n \in N$.

3. Сходимость итерационных процессов строго квазинерастягивающих отображений

3.1. Теорема. Предположим, что отображение $f\ A \mapsto S$ $(A \subset S,\ A \neq \emptyset)$ – строго квазинерастягивающее во ножестве A Рассмотрим последовательность $(s_n)_{n\in N} \subset A$ Предположим, что $s_0 \in A$ и $\forall n \in N\ s_n = f(s_{n-1})$ Тогда для того, чтобы последовательность $(s_n)_{n\in N}$ ходилась к единственной неподвижной точке отображения f, необходимо и достаточно, чтобы некоторая ее подпоследовательность сходилась к точке множества A в оторой отображение f непрерывно.

Доказательство. Действительно, если последовательность $(s_n)_{n\in N}$ сходится к неподвижной точке отображения f, то к ней сходится любая ее подпоследовательность. Потому следует лишь отметить, что строго квазинерастягивающее отображение (и даже только квазинерастягивающее) непрерывно в любой своей неподвижной точке (которая единственна в случае строгой квазинерастягиваемости). Установим остаточность. Имеем $(\exists' a \in A\ \ f(a) = a)\ \&$ $\&\ \forall s \in A \setminus \{a\}\ \ d(f(s), a) < d(s, a)$. Установим, что $\lim_{n\to\infty} = a$ Предположим, что $\forall n \in N \cup \{0\}$ $s_n \neq a$, т.е. что $A \setminus \{a\}$ и $(s_n)_{n\in N} \subset A$ противном случае, $\exists n_0 \in N \cup \{0\}\ s_{n_0}$ Тем самым $\lim_{n\to\infty}$ a

при произвольном $n \in N$ имеем

$$n \qquad (f(\qquad a) < d \qquad {}_{n-1}, a)$$

оследовательность $(d(s_n, a))_{n\in N}$ и ог нна $((d(s_n, a))_{n\in N} \quad]0, d(s_0, a)[)$ вательно, он сходится. Ее предел обозначим через δ тановим, что $\delta = 0$ Допустим, что это не так. В силу рерывности расстояния d имеем $\delta \quad d(s^*, a)$ $s^* \in A \quad s^* \quad \lim_{k\to\infty} s_{n_k}$ по условию последовательть $(s_n)_{n\in N}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества A в которой отображение f непрерывно). Таким образом, $d(s^*, a) \neq 0$, т.е. $s^* \neq a$ и тем самым $s^* \in A \setminus \{a\}$. Следовательно, $d(f(s^*), a) < d(s^*, a) = \delta$. В силу непрерывности отображения f в s^* имеем

$$f(s^*) = \lim_{k\to\infty} f(s_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} s_{n_k+1}$$

Следовательно, $\delta > d(f(s^*), a) = d(\lim_{k\to\infty} s_{n_k+1}, a) = \delta$, что невозможно. Таким образом, $\delta = 0$ т.е. $\lim_{n\to\infty} s_n = a = f(a)$, что требовалось.

В случае непрерывных отображений метрических пространств в себя теорема 3.1 дает известный результат [3 § 2.3 или 4.3.1, с.470, с.475]. Для отображений компактных и локально-компактных метрических пространств в себя из теоремы 3.1 следует справедливость теорем 3.2 и 3.3.

3.2. Теорема. Предположим, что S — компактное метрическое пространство и отображение $f: S \to S$ строго квазинерастягивающее в нем. Кроме того, предположим, что f непрерывно на множестве $\bigcap_{n=1} f^{(n)}(S)$

Тогда итерационный процесс $s_n = f(s_{n-1})$ сходится к единственному решению уравнения $f(s) = s$ при любом выборе начального приближения $s_0 \in S$.

3.3. Теорема. Предположим что метрическое пространство S локально-компактно. Предположим, что отображение $f: S \to S$ в некоторой окрестности решения уравнения $f(s) = s$ строго квазинерастягивающее и непрерывное.

Тогда в этой окрестности решение единственно, и для него существует такая окрестность, что при любом выборе начального приближения из нее итерационный процесс $s_n = f(s_{n-1})$ сходится к решению. ○

4. Сходимость итерационных процессов квазинерастягивающих отображений

4.I. Определение [4, I.I, с.464]. Отображение $f\ A \mapsto S\ (A \subset S,\ A \neq \emptyset)$ называется асимптотически-регулярным в точке $s_0 \in A$, если для последовательности $(s_n)_{n \in N} \subset A$, для которой $s_n = f(s_{n-1})$, $n \in N$, выполнено условие $\lim\limits_{n \to \infty} d(s_n, s_{n+1}) = 0$.

4.2. Теорема. Предположим, что отображение $f\ A \mapsto S$ $(A \subset S,\ A \neq \emptyset)$ – квазинерастягивающее во множестве A Рассмотрим последовательность $(s_n)_{n \in N} \subset A$ Предположим, что $s_0 \in A$ и $\forall n \in N$: $s_n = f(s_{n-1})$

Тогда следующие утверждения равносильны:

) последовательность $(s_n)_{n \in N}$ сходится к некоторой неподвижной точке отображения f

(ii) отображение f асимптотически-регулярно в точке , некоторая подпоследовательность последовательности $(s_n)_{n \in N}$ сходится к точке множества A и в этой точке отображение f непрерывно;

(iii) некоторая подпоследовательность $(s_{n_k})_{k \in N}$ последовательности $(s_n)_{n \in N}$ сходится к точке множества A, к этой же точке сходится последовательность $(s_{n_k+1})_{k \in N}$ и отображение f непрерывно в этой очке.

Доказательство. То, что (i) влечет за собой (ii), но. Действительно, если последовательность $(s_n)_{n \in N}$ ходится к неподвижной точке отображения f скажем, к очке a то в силу непрерывности расстояния d имеем $\lim\limits_{n \to \infty} d(s_n, s_{n+1})$ $d(a, a) = 0$. Таким образом, отображение f асимптотически регулярно в точке s_0 Естественно, точке a сходится и любая подпоследовательность последовательности $(s_n)_{n \in N}$. Поэтому остается лишь отметить, что квазинерастягивающее отображение непрерывно в любой своей неподвижной точке. Установим, что из (ii) следует (iii). Предположим, что подпоследовательность $(s_{n_k})_{k \in N}$ следовательности $(s_n)_{n \in N}$ сходится к точке $s^* \in A$.

Достаточно показать, что к ней же сходится последовательность $(s_{n_k+1})_{k\in N}$. В силу асимптотической регулярности отображения f в точке s_0 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} d(s_n, s_{n+1})=0$. Тем самым $\lim\limits_{k\to\infty} d(s_{n_k}, s_{n_k+1})=0$. Так как при произвольном $k\in N$ имеем $d(s_{n_k+1}, s^*)\leqslant d(s_{n_k+1}, s_{n_k}) + d(s_{n_k}, s^*)$, то в итоге

$$\lim_{k\to\infty} d(s_{n_k+1}, s^*)=0, \quad \text{т.е.}$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k+1} = s^*, \quad \text{что требуется.}$$

Наконец, установим, что (iii) влечет (i). Предположим, что подпоследовательность $(s_{n_k})_{k\in N}$ последовательности $(s_n)_{n\in N}$ сходится к точке $s^*\in A$. Таким образом, имеем $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} f(s_{n_k}) = s^*$. Но в силу непрерывности отображения f в точке s^* имеем также $\lim\limits_{k\to\infty} f(s_{n_k}) = f(s^*)$. В итоге: $f(s^*)=s^*$. Установим, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s^*$. В силу того, что отображение f-квазинерастягивающее во множестве A последовательность $(d(s_n, s^*))_{n\in N}$ монотонная и ограниченная. Следовательно, она сходится.

Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty} d(s_n, s^*) = \lim\limits_{k\to\infty} d(s_{n_k}, s^*)=0$. Таким образом, действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s^* = f(s^*)$. Доказательство завершено.

Отметим, что отображение $f: A\mapsto S$ $(A\subset S,\ A\neq\emptyset)$, квазинерастягивающее во множестве A может оказаться в некоторых точках множества A асимптотически-регулярным, а в некоторых нет. По поводу соответствующего примера см. [4, I.2, с.465].

Для непрерывных отображений метрических пространств в себя теорема 4.2 влечет справедливость утверждения, равносильного теореме, приводимой в [3, 3.I, с.481]. Напомним, что квазинерастягивающее отображение метрического пространства в себя, вообще говоря, не обязательно непрерывно.

Подчеркнем, что в теореме 4.2 рассматривается отобра-ение, действующее в произвольном метрическом пространстве. В случае отображений, действующих в полных метрических пространствах (отображения непрерывные), необходимое и достаточное условие сходимости итерационного процесса к неподвижной точке рассматриваемого отображения при некотором начальном приближении дает теорема, приводимая в [4, [.[, с.462] Теорема 4.5 ниже является прямым обобщением теоремы в [4].

4.3. <u>Определение</u> (см., например, [7]). Непустое подмножество A метрического пространства S называется рбитально полным в точке $s_0 \in A$, где $f \; A \mapsto S$, любая подпоследовательность последовательности $(\quad)_{n \in N} \subset A$, для которой $s_n = f(s_{n-1})$, $n \in N$, являющаяся последовательностью Коши, сходится к некоторой точке множества A.

что непустое полное подмножество A метрического пространства S f-орбитально полно для любого отображения $f \; A \mapsto S$ в любой своей точке. Если множество A $(A \subset S,\ A \neq \varnothing)$ f-орбитально полно в любой воей точке для некоторого отображения $f \; A \mapsto S$, оно, вообще говоря, не обязательно полно. Действительстаточно рассмотреть некоторое неполное метрическое остранство и, например, некоторое постоянное отображеэтого пространства в себя.

<u>Лемма</u>. Предположим что множество $A \subset S$ уто и непусто отображение $f \; A \mapsto S$ - квазинерастягивающее в нем.

огда множество $F(A)$-неподвижных точек отображе- f во множестве A замкнуто.

<u>Доказательство</u>. Выберем произвольно точку $a \in \overline{F(A)}$. силу замкнутости множества A имеем $a \in A$ (ибо $(A) \subset \overline{A} = A$). Установим, что $f(a) = a$, т.е. $\in F(A)$ Выберем некоторую последовательность $_n)_{n \in N}$ $F(A)$, сходящуюся к a По условию отображе- f-квазинерастягивающее во множестве A, поэтому ольном $n \in N$ имеем $d(f(a), a_n) \leqslant$

$\leq d(a, a_1)$ Следовательно, переходя к пределу, в силу непрерывности расстояния d $o'(f(a), a) = 0$, т.е. $f(a) = a$

4.5. <u>Теорема</u>. Предположим, что множество $A \subset S$ замкнуто и непусто и отображение $f \; A \mapsto S$ квазинерастягивающее в нем. Рассмотрим последовательность $(s_n)_{n\in N} \subset A$ Предположим, что $s_0 \in A$ и $\forall n \in N$ $s_n = f(s_{n-1})$ Кроме того, предположим, что множество A f-орбитально полно в точке s_0

Тогда для сходимости последовательности $(s_n)_{n\in N}$ некоторой неподвижной точке отображения f необходимо и достаточно, чтобы для некоторой подпоследовательности $(s_{n_k})_{k\in N}$ последовательности $(s_n)_{n\in N}$ было выполнено условие

$$\lim_{k\to\infty} d(s_{n_k}, F(A)) = 0$$

<u>Доказательство</u>. Необходимость очевидна. Проверим достаточность. Установим, что подпоследовательность $(s_{n_k})_{k\in N}$ последовательности $(s_n)_{n\in N}$ является последовательностью Коши при выполнении условия $\lim\limits_{k\to\infty} d(s_{n_k}, F(A)) = 0$ Выберем произвольно $\varepsilon \in R_+$ (R_+ - множество всех положительных чисел). Тогда $\exists k_0 \in N \; \forall k > k_0$ $d(s_{n_k}, F(A)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем произвольно точку $a \in F(A)$ Отображение f - квазинерастягивающее во множестве A Следовательно, при произвольных $i, j > k_0$ имеем $d(s_{n_i}, s_{n_j}) \leq$
$\leq d(s_{n_i}, a) + d(s_{n_j}, a) \leq 2d(s_{n_{k_0}+1}, a)$
Таким образом, в силу произвольности выбора точки $a \in F(A)$.

$$d(s_{n_i}, s_{n_j}) \leq 2d(s_{n_{k_0}+1}, F(A)) < \varepsilon$$

В итоге, действительно, последовательность $(s_{n_k})_{k\in N}$ - это последовательность Коши. По условию множество A является f-орбитально полным в точке s_0 Следовательно, последовательность $(s_{n_k})_{k\in N}$ сходится к некоторой точке $s^* \in A$ Установим, что $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k+1} = s^*$ и отображение f непрерывно в s^*. Тогда требуемое будет следовать согласно теореме 4.2. Сперва установим, что отображение f непрерывно в s^* Достаточно показать, что $s^* \in F(A)$, так как квазинерастягивающие отображения непрерывны в своих неподвижных точках. По предположению $\lim\limits_{k\to\infty} d(s_{n_k}, F(A)) = 0$, поэтому найдется такая последовательность $(a_n)_{n\in N} \subset F(A)$ что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s^*$ Но согласно лемме 4.4 множество $F(A)$ замкнуто. Таким образом, действительно $s^* \in F(A)$. Следовательно, в силу непрерывности отображения f в s^* имеем

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k+1} = \lim_{k\to\infty} f(s_{n_k}) = f(s^*) = s^*.$$

Доказательство завершено.

В теореме 4.6 (далее) по сравнению с аналогичной теоремой в [4, I.3, с.466] при том же утверждении ослаблены условия: во-первых, не предполагается полнота пространства, во-вторых, непрерывность отображения предполагается лишь в некоторой определенной точке.

4.6. Теорема. Предположим, что отображение $f: A \mapsto S$ $(A \subset S, A \neq \emptyset)$ - квазинерастягивающее во множестве A и $\forall s \in A \setminus F(A)$ $\exists a \in F(A)$: $d(f(s), a) < d(s, a)$ Рассмотрим последовательность $(s_n)_{n\in N} \subset A$ Предположим, что $s_0 \in A$ и $\forall n \in N$ $s_n = f(s_{n-1})$ Предположим, что $s^* \in A$ некоторая подпоследовательность $(s_{n_k})_{k\in N}$ последовательности $(s_n)_{n\in N}$ сходится к точке s^*. Наконец, предположим, что отображение f непрерывно в s^*.

Тогда $^* \in F(A)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s^*$.

Доказательство. Достаточно установить лишь то, что $s^* \in F(A)$ Действительно, если это так, то в силу непрерывности отображения f в s^* имеем

$$\lim_{k\to\infty} s_{n_k+1} = \lim_{k\to\infty} f(s_{n_k}) = f(s^*) = s^*.$$

Таким образом, требуемое следует согласно теореме 4.2. Установим, что $s^* \in F(A)$ Предположим противное, т.е. что $s^* \in A \setminus F(A)$. Тогда по условию найдется такая точка $a \in F(A)$ что $d(f(s^*), a) <$ $< d(s^*, a)$ Рассмотрим последовательность $(d(s_n, a))_{n \in N}$ Отображение f квазинерастягивающее в A Поэтому она монотонна и ограничена. Следовательно, она сходится. Ее предел обозначим через δ В итоге, пользуясь непрерывностью расстояния d и отображения f в s^*, имеем $d(f(s^*), a) < d(s^* a) = d(\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k}, a) =$

$$= \lim_{k\to\infty} d(s_{n_k}, a) = \delta = \lim_{k\to\infty} d(s_{n_{k+1}}, a) =$$

$$= d(\lim_{k\to\infty} s_{n_{k+1}}, a) = d(\lim_{k\to\infty} f(s_{n_k}), a) = d(f(s^*), a).$$

Это невозможно. Таким образом, $s^* \in F(A)$ что требовалось.

Условимся отображение метрического пространства в себя назвать асимптотически-регулярным в этом пространстве, если оно асимптотически-регулярно в любой его точке. Тогда согласно теореме 4.2 имеем следующую теорему, аналогичную теореме 3.2.

4.7. <u>Теорема</u>. Предположим, что S - компактное метрическое пространство и отображение f $S \to S$ - квазинерастягивающее и асимптотически-регулярное в нем. Кроме того, предположим, что f непрерывно на множестве

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(S)$$

Тогда итерационный процесс $s_n = f(s_{n-1})$ сходится к некоторому решению уравнения $f(s) = s$ при любом выборе начального приближения $s_0 \in S$

Литература

1. Tricomi F. Un teorema sulla convergenza delle successioni formate delle successive iterate di una funzione di una variabile reale. - Giorn.Mat.Battaglini,1916,vol. 54, p. 1-9.
2. Diaz J.B., Metcalf F.T. On the structure of the set of subsequential limit points of successive approximations.- Bull.Amer.Math.Soc., 1967, vol.73, p. 516-519.

3. Diaz J.B., Metcalf F.T. On the set of subsequential limit points of successive approximations. - Trans Amer.Math.Soc., 1969,vol. 135, p.459-485.
4. Petryshyn W.V., Williamson T.E., Jr. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings.- J.Math.Anal. Appl., 1973, vol.43, p.459-497.
5. Maruster St. Quasi-nonexpansivity and two classical methods for solving nonlinear equations.- Proc.Amer. Math.Soc., 1977, vol.62, p.119-123.
6. Лиепиньш А.Х. О сходимости метода Ньютона-Канторовича для приближенного решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах.- Наст.сб., с. 88-91.
7. Ćirić Lj.B. On contraction type mapping.- Math. Balkanica, 1971, vol. 1, p.52-57.

Поступила 17 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981

УДК 513.88

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Х.Лиепиньш

ЛГУ им. П.Стучки

В предлагаемой работе исследуется возможный выбор начальных приближений, при которых сходится метод Ньютона-Канторовича, примененный для приближенного решения уравнений вида $f(z)=0$ с дважды дифференцируемой левой часть в банаховых пространствах. Оказывается, что, заранее предполагая разрешимость исследуемых уравнений, выбор начальных приближений, при которых метод Ньютона-Канторовича сх дился, удается расширить по отношению к выбору, устанавливаемому классическими результатами Л.В.Канторовича [I]. Это указано в [2]. В предлагаемой работе результат из [2 о сходимости метода Ньютона-Канторовича распространяется конечномерных на произвольные банаховы пространства. При этом способ доказательства соответствующей теоремы аналогичен используемому в [2].

Предположим, что Z банахово пространство над полем K вещественных или комплексных чисел, множество $U\subset Z$ открыто и непусто и отображение $f\ U\mapsto Z$ дифференцируемо в смысле Фреше в U Пусть $a\in U$ и $B(a,r)\subset U$, где $B(a,r)$ - замкнутый шар с центр a радиуса $r\in R_+$ (R_+ - множество всех положительных чисел). Предположим, что при произвольном векторе $z\in B(a,r)$ существует обратное отображение $(f'(z))^{-1}$ к первой производной по Фреше отображения f Рассмотри отображение $F\ B(a,r)\mapsto Z$, определяемое для любого вектора $z\in B(a,r)$ равенством

$$F(z)=z-(f'(z))^{-1}(f(z))$$

Далее векторное пространство $L(Z)$ всех линейных непрерывных отображений банахова пространства Z в себя предполагается наделенным топологией равномерной сходимости на всех ограниченных подмножествах пространства Z, в которой оно само-банахово пространство. То же предполагается относительно пространства $L(Z, L(Z))$

В предположении, что отображение f имеет вторую производную по Фреше в открытом шаре $\overset{\circ}{B}(a,r)$ с центром a радиуса r (быть может, за исключением самого центра a), через c обозначим $\sup\limits_{z \in \overset{\circ}{B}(a,r)\setminus\{a\}} \| f''(z) \|$

(Предполагается, что c конечно.)

Наконец, предположим, что $f(a) = 0$

Лемма I. При сделанных предположениях для любого $z \in \overset{\circ}{B}(a,r)$ справедлива оценка

$$\| F(z) - a \| \leqslant c \, \| (f'(z))^{-1} \| \frac{\|z-a\|^2}{2}$$

Доказательство. Выберем произвольно вектор $z \in \overset{\circ}{B}(a,r)$. Установим требуемое непосредственно. Имеем $F(z) - a =$

$$z - a - (f'(z))^{-1}(f(z)) =$$

$$= (f'(z))^{-1}(f'(z)(z-a) - f(z)) =$$

$$(f'(z))^{-1}(f(a) - f(z) - f'(z)(a-z)).$$

Следовательно, $\| F(z) - a \| \leqslant$

$$\leqslant \| (f'(z))^{-1} \| \, \| f(a) - f(z) - f'(z)(a-z) \|$$

Таким образом, согласно формуле Тейлора (см., например, [3, 3.7.20, с.273]) $\| F(z) - a \| \leqslant c \| (f'(z))^{-1} \| \frac{\|z-a\|^2}{2}$ что требовалось.

Предположим, что $\sup\limits_{z \in \overset{\circ}{B}(a,r)} \| (f'(z))^{-1} \|$ конечно, и обозначим через c'

По поводу определения квазисжатия см. [4, I]

Лемма 2. При сделанных предположениях из неравенства $cc'r < 2$ следует, что отображение F является квазисжатием в $\overset{\circ}{B}(a,r)$

Доказательство. По предположению $f(a) = 0$ Следовательно, $F(a) = a$ и вектор a является для отображения F неподвижной точкой в шаре $\overset{\circ}{B}(a,r)$. Согласно лемме I

$\forall z\in B(a,r)$ $\|F(z)-a\|\leq$

$\leq c\|(f'(z))^{-1}\|\frac{\|z-a\|^2}{2}$ Следовательно, если $cc'r<2$ и $t\in\left]\frac{cc'r}{2},1\right[$, то для каждого $z\in B(a,r)$ $\|F(z)-a\|\leq\frac{cc'r}{2}\|z-a\|\leq t\|z-a$ и отображение F квазисжимает в $B(a,r)$

Таким образом, вследствие леммы 2 при соответствующих предположениях к отображению F можно применить теорему из [4] о сходимости итерационных процессов квазисжатий [4, 2.2]. Сохраняя предыдущие обозначения для $\sup\limits_{z\in B(a,r)\setminus\{a\}}\|f''(z)\|$ и $\sup\limits_{z\in B(a,r)}\|(f'(z))^{-1}\|$ сформулируем итог - теорему о сходимости метода Ньютона-—Канторовича.

Теорема. Предположим, что Z банахово пространство над полем K вещественных или комплексных чисел, множество $U\subset Z$ открыто и непусто и $f\;U\mapsto Z$ Предположим, что a является решением уравнения $f(z)=0$ и $B(a,r)\subset U$ $(r\in R_+)$. Предположим, что отображение f дифференцируемо в смысле Фреше в U, имеет вторую производную в открытом шаре $B(a,r)$ (за исключением, быть может, в a) и при любом векторе $z\in B(a,r)$ существует обратное отображение $(f'(z))^{-1}$ к первой производной отображения f Наконец, пусть выполняется неравенство $cc'r<2$

Тогда процесс Ньютона-Канторовича $z_n=z_{n-1}-(f'(z_{n-1}))^{-1}(f(z_{n-1}))$ сходится к решению a которое единственно в шаре $B(a,r)$, при любом выборе начального приближения $z_0\in B(a,r)$.

Литература

I. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.

2. Maruster St. Quasi-nonexpansivity and two classical methods for solving nonlinear equations.-Proc. Amer.Math.Soc.,1977, vol.62, p.119-123.

3. Шварц Л. Анализ. М.,1972,т.I.

4. Лиепиньш А.Х. О сходимости итерационных процессов квазинерастягивающих отображений в метрических пространствах. Наст.сб.,с.75

Поступила 17 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, I98I

УДК 513.45.

НЕКОТОРЫЕ РАДИКАЛЫ В АЛГЕБРАХ ЛИ

Р.С.Липянский
ЛГУ им. П.Стучки

I. Пусть Θ обозначает некоторое абстрактное свойство алгебр Ли. Алгебры Ли, обладающие свойством Θ, назовем Θ-алгебрами. Обозначим через $\Theta(L)$ сумму Θ-идеалов алгебры L (Θ идеал - это идеал, являющийся Θ -алгеброй). Если $\Theta(L)$ снова Θ -идеал алгебры L, то назовем его радикалом L, а свойство Θ радикальным.

Рассмотрим следующие свойства алгебр Ли: RA (соответственно NA) - свойство быть разрешимой (нильпотентной) алгеброй Ли линейных преобразований (л.п.) векторного пространства V, каждый элемент которой является алгебраическая л.п. пространства V, RN (соответственно NN) - свойство быть разрешимой (нильпотентной) алгеброй Ли л.п. векторного пространства V, каждый элемент которой является нильпотентным л.п. пространства V Свойства RA, RN, NA, NN не являются, вообще говоря, радикальными (хотя в алгебрах Ли л.п. конечномерного векторного пространства эти свойства дают разрешимый и нильпотентный радикалы).

Объектом изучения в пункте I являются алгебры Ли алгебраических л.п. фиксированного векторного пространства над полем P нулевой характеристики. В этом случае известно [2], что $RA(L)$ совпадает с разрешимым радикалом L, $NA(L)$ совпадает совокупностью энгелевых элементов из разрешимого радикала алгебры L, $RN(L)$ является множеством нильпотентных л.п. из разрешимого радикала L и $NN(L)$ - совокупность нильпотентных л.п. в $NA(L)$ Имеет место теорема.

Теорема I. Пусть L - действующая алгебра Ли из алгебраических л.п. векторного пространства V над полем P, и A - обертывающая ассоциативная алгебра. Тогда

I) если радикал Левицкого $\mathcal{L}(A) = 0$, то идеал $NA(L) = Z$, где Z - центр L;

2) если L - локально-конечная алгебра и $\mathcal{L}(A)=0$, то $L = L_0 \oplus RA(L)$, где L_0 - подалгебра в L, не содержащая ненулевых разрешимых идеалов (т.е. полупростая подалгебра) и $RA(L)= Z$.

Замечание. Второе утверждение теоремы I было доказано в [4] для алгебр Ли с полупростой в смысле Джекобсона [3] обертывающей алгеброй. Мы доказываем это утверждение для алгебр Ли с полупростой в смысле радикала Левицкого обертывающей алгеброй.

Доказательство I. Пусть $NA(L)\neq Z$. Так как $[NA(L), L]\subset NN(L)$ (см. [1]), то из нашего предположения следует, что $NN(L)\neq 0$. Поэтому в L имеется ненулевой локально-нильпотентный идеал J, каждый элемент которого является нильпотентным л.п. Так как центр $Z(J)$ алгебры J инвариантен относительно всех дифференцирований алгебры J, то $Z(J)$ - идеал в L, состоящий из нильпотентных л.п. Тогда согласно лемме 2 из [2] радикал Левицкого обертывающей алгебры $A(L)$ отличен от 0, что невозможно, а следовательно, $NA(L)=Z$.

2. Докажем вначале, что каждый элемент $a\in[L,L]\cap Z$ является нильпотентным л.п. Для этого проделаем редукцию к конечномерному случаю (ср [4, лемма 3]).

Пусть $a=\sum[a_i, b_i]$, где $a_i, b_i\in L$, $[a, a_i]=0$ для любого i Обозначим через L_0 подалгебру L, порожденную элементами $a, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2,$ Так как L алгебраическая алгебра Ли, а L_0 - конечномерная алгебра, то обертывающая алгебра $A(L_0)$ является конечномерной. Для любого целого k выполняются условия $[a^{k-1}, a_i]=0$. Следовательно,

$$a^k \quad \sum a^{k-1}(a_i b_i \quad b_i a_i)=\sum a_i(a^{k-1}b_i)-(a^{k-1}b_i)a_i$$

$$\sum[a_i, a^{k-1}b_i]$$

Рассмотрев регулярное представление алгебры $Z(L)$ в $A(L)$, мы видим, что $tr\, a^k=0$ для любого целого числа k. Поэтому a - нильпотентное л.п. Если $a\neq 0$, то согласно [2, лемма 2] $\mathcal{L}(A)\neq 0$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $[L,L]\cap Z(L)=0$. Поэтому можно найти такое подпространство $L_0\supseteq[L,L]$, что $L=L_0\oplus Z(L)$. Так как L_0 содержит $[L,L]$, то L_0 - идеал L Докажем, что идеал L_0 не содержит ненулевого разрешимого идеала. Для этого согласно [4] достаточно показать, что если J - идеал L, содержащий $Z(L)$ и

$\subset Z(L)$, то $J \subset Z(L)$. Но если $[J, J] \subset Z(L)$, то J - нильпотентный идеал L из алегебраических л.п. Рассуждая так же, как в пункте I, приходим к тому, что $J \subseteq Z$. Теорема доказана.

Из [2, лемма 2] немедленно следует

Предложение I. Пусть L - действующая локально разрешимая алгебра Ли из алегебраических л.п. Тогда производная алгебра L' является локально-нильпотентной алгеброй из нильпотентных л.п. Переходя к абстрактным алгебрам Ли, получаем утверждение о том, что производная алгебра любой конечномерной разрешимой алгебры Ли характеристики 0 нильпотентна.

Предложение 2. Пусть L - действующая локально разрешимая алгебра Ли над Р, состоящая из алгебраических л.п. Если обертывающая алгебра $A(L)$ полупроста в смысле радикала Левицкого, то L - абелева алгебра.

Доказательство. Если $[L, L] \neq 0$, то по предыдущей теореме в L имеется ненулевой нильпотентный элемент $a \in [L, L]$. Но тогда, согласно [2, предложение 2] радикал Левицкого $\mathcal{L}(A) \neq 0$, что противоречит условию. Следовательно, $[L, L] = 0$.

2. В предыдущем пункте мы рассматривали радикалы в локально-конечных алгебрах Ли из алгебраических л.п., в основе которых лежит свойство быть разрешимой или нильпотентной алгеброй Ли. Рассмотрим теперь строение локально разрешимого радикала в действующей локально-конечной алгебре Ли над полем нулевой характеристики.

Из теоремы Ли [6, теорема I, § 5] следует, что если алгебра Ли L действует в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, то матрицы из разрешимого радикала алгебры L могут быть приведены одновременно к треугольному виду. Рассмотрим аналог этого утверждения в классе локально-конечных алгебр Ли. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые определения из [I].

Действующая алгебра Ли L называется триангулируемой в области действия V, если в V имеется нормальная система из L-инвариантных подпространств с одномерными факторами. Пусть даны два L-инвариантных подпространства $H_1 \subset H_2 \subset V$. Если фактор-пространство H_2/H_1 не имеет L-инвариантных подпространств, то H_2/H_1 называется композиционным фактором алгебры Ли L.

Если каждый композиционный фактор алгебры Ли L является одномерным векторным пространством, то алгебра Ли L называется сильно триангулируемой. Ясно, что из сильной триангулируемости алгебры Ли следует ее триангулируемость. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места даже в одномерных алгебрах Ли. Действительно, существует линейное преобразование бесконечномерного векторного пространства, которое является триангулируемым, но не сильно триангулируемым [I].

По аналогии с [I, теорема 3.3] доказывается

Лемма I. В локально-конечной алгебре Ли, каждый элемент которой-локально-алгебраическое л.п. векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, локально разрешимый идеал является локально триангулируемым.

Рассмотрим теперь присоединенное представление алгебры Ли L.

Лемма 2. В локально-конечной алгебре Ли $ad L$ локально триангулируемый идеал локально разрешим.

Доказательство. Пусть B - конечнопорожденная подалгебра в $ad L$. Так как B-конечномерная алгебра, то любой элемент x из алгебры L лежит в конечномерной алгебре $A_x \subset L$, инвариантной относительно B. Покажем, что подалгебра B является триангулируемой на A_x.

Действительно, алгебра Ли B триангулируема на A_x, т.е. она обладает нормальной системой с одномерными факторами.

Если рассмотреть соответствующую нормальную систему в A_x, индуцированную первоначальной системой в L, то ее факторы как подалгебры одномерных факторов первоначальной системы являются либо одномерными, либо нулевыми. Отбросив повторения, мы получим, следовательно, что алгебра B триангулируема на A_x. Обозначим через B_x ядро представления алгебры Ли B на A_x. Очевидно, фактор-алгебра $\overline{B}_x = B/B_x$ триангулируема на A_x. Поэтому алгебра $\overline{B}_x$ как алгебра Ли треугольных матриц разрешима. Проделав аналогичные построения для любого $x \in L$, получим

$$B/\cap B_x \simeq \Sigma_s B/B_x$$

Ясно, что степень разрешимости алгебры B/B_x не превосходит размерности пространства B, и поэтому подпрямая сумма $\Sigma_s B/B_x$ алгебр B/B_x является разрешимой алгеброй Ли. Так как $\bigcap_{x\in A} B_x \subseteq Z(L)$, и фактор-алгебра $B/\cap B_x$ является разрешимой алгеброй, то алгебра B – разрешима. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь лиевскую пару (L, adL), где L – локально-конечная алгебра Ли. Покажем, что сумма всех локально триангулируемых идеалов алгебры Ли adL является локально триангулируемым идеалом. Действительно, по лемме 2 локально триангулируемый идеал локально разрешим. Согласно лемме I локально разрешимый идеал из локально-алгебраических л.п. локально триангулируем. Так как линейные преобразования из adL являются локально-алгебраическими, то доказана

Теорема 2. В локально-конечной алгебре Ли L над алгебраическим замкнутым полем нулевой характеристики локально триангулируемый радикал относительно присоединенного представления алгебры L совпадает с локально разрешимым радикалом adL.

Так как локально триангулируемая алгебра Ли L из локально алгебраических л.п. пространства V является сильно триангулируемой, то из теоремы 2 следует, что локально разрешимый радикал в adL является сильно триангулируемым.

3. Пусть A – ассоциативная алгебра над полем Р нулевой характеристики, A_L – коммутаторная алгебра Ли алгебры А. Естественно, возникает вопрос, как отрутура коммутаторной алгебры A_L влияет на свойства ассоциативной алгебры А? О том, что свойства алгебры A_L оказывают влияние на строение алгебры А, можно проиллюстрировать следующим примером: если A_L – разрешимая алгебра Ли и $\mathcal{L}(A)=\{0\}$, то А – коммутативная алгебр [3].

Предыдущую теорему можно переформулировать в следующем виде: если А не является коммутативной алгеброй и A_L – разрешимая алгебра Ли, то $\mathcal{L}(A)\neq\{0\}$. Следовательно, налагая те или иные требования на A_L , можно получить условия существования A нетривиального радикала Левицкого. Мы доказываем, что множество нильпотентных элементов из радикала Плоткина коммутаторной алгебры Ли A_L совпадает с радикалом Левицкого алгебры А, а также приводим необходимые и достаточные условия нетривиальности радикала $\mathcal{L}(A)$ в A.

С вопросом о существовании нетривиального радикала $\mathcal{L}(A)$ тесно связан вопрос о существовании характеристических лиевских радикалов в A_L. Из [2] вытекает, что в коммутаторной ал гебре Ли A_L существует максимальный локально разрешимый идеал из алгебраических элементов алгебры A (радикал $LRA(A_L)$) максимальный локально разрешимый идеал из нильпотентных элементов алгебры A (радикал $LRN(A_L)$), максимальный локально нильпотентный идеал из алгебраических элементов A (радикал $LNA(A_L)$) В этом пункте доказывается характеристичность этих радикалов для произвольной коммутаторной алгебры Ли.

Из [2, теорема I] следует, что в коммутаторной алгебре A_L совокупность нильпотентных элементов из радикала Плоткина $LN(A_L)$, совпадает с LRN- радикалом этой алгебры. Покажем теперь, что LRN- радикал алгебры A_L совпадает, в свою очередь, с радикалом Левицкого $\mathcal{L}(A)$ алгебры A.

<u>Теорема 3</u>. Пусть A - ассоциативная алгебра над K, $\mathcal{J}_L$ - локально-нильпотентный идеал в A_L, состоящий из нильпотентных элементов алгебры A. Тогда $\mathcal{L}(A)\neq 0$ и $LRN(A_L)=\mathcal{L}(A)$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим ассоциативную оболочку M лиевского идеала $\mathcal{J}_L$ алгебры Ли A_L. Так как каждый элемент из $\mathcal{J}_L$ является нильпотентным элементом в A, то M - локально-нильпотентная ассоциативная алгебра [I]. С помощью тождества Якоби легко проверяется, что M_L - идеал в A_L.

Из построения идеала M_L следует, что в M всегда найдется ненулевой элемент y, такой, что $y^2=0$. Покажем, что правый идеал R, порожденный в алгебре A элементом y, является локально-нильпотентным. Пусть $F=\{x_i\}$ - некоторое конечное подмножество элементов из R. Тогда каждый элемент $x_i\in F$ без ограничения общности можно представить в виде: $x_i = a_i y$, где $a_i\in A$, i $2,$ k. Пусть $C=\{a_i\}$ - множество всех элементов a_i, присутствующих в разложении для элементов x_i Обозначим через N класс нильпотентности лиевской подалгебры, порожденной элементами вида $[y, a_i]$, где $a_i\in C$, $i=1,2,\dots,k$ (элементы $[y,a_i]\in M$, ибо $y\in M$ и M - идеал в A_L). Рассмотрим элемент

$$x = \prod_{j=1}^{N+1}\bar{x}_j \qquad \text{где } \bar{x}_j\in F. \tag{I}$$

Так как $\bar{x}_j$ $\bar{a}_j y$, $(\bar{a}_j\in C)$ то

$$x \quad \prod_{j=1}^{N+1}\bar{a}_j y. \tag{2}$$

Используя равенство

$$y\bar{a}_j = \bar{a}_j y + [y, \bar{a}_j], \tag{3}$$

организуем собирательный процесс для группировки справа элементов y, начиная с самого левого вхождения y в выражение (2). Это значит, что мы в первую очередь используем равенство

$$y\bar{a}_2 \quad \bar{a}_2 y + [y, \bar{a}_2] \tag{4}$$

Подставив (4) в (2), получим

$$x = \bar{a}_1 [y, \bar{a}_2] y \prod_{j=3}^{N+1} \bar{a}_j y, \tag{5}$$

ибо $y^2=0$. Продолжая далее этот процесс, мы приходим к равенству

$$x \quad \bar{a}_1 \prod_{j=2}^{N+1} [y, \bar{a}_j] y$$

Но $\prod_{j=2}^{N+1} [y, \bar{a}_j] y = 0$ следовательно, X=0. Значит, R - локально-нильпотентный идеал. Отсюда вытекает, что радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ алгебры A отличен от нуля, ибо $R \subset \mathcal{L}(A)$ [3].

Покажем теперь, что $\mathcal{J}_L \subset \mathcal{L}(A)$. Предположим противное, т.е. $\mathcal{J}_L \not\subset \mathcal{L}(A)$. Тогда рассмотрим фактор-алгебру $\bar{A} = A/\mathcal{L}(A)$. Подалгебра $\mathcal{J}_L = \mathcal{J}_L + \mathcal{L}(A)/\mathcal{L}(A)$ алгебры A_L является нетривиальным локально-нильпотентным идеалом алгебры $\bar{A}_L$, состоящим из нильпотентных элементов алгебры A_L. Повторяя предыдущие рассуждения, мы получим, что $\mathcal{L}(\bar{A}_L) \neq 0$. Мы пришли к противоречию, ибо $\mathcal{L}(\bar{A}) = \mathcal{L}(A/\mathcal{L}(A)) = 0$. Следовательно, $\mathcal{J}_L \subset \mathcal{L}(A)$. Из этого включения непосредственно вытекает включение: $\mathcal{L}RN(A_L) \subseteq \mathcal{L}(A)$. Обратное включение очевидно. Теорема доказана. Из этой теоремы непосредственно вытекает

Теорема 4. Пусть A - ассоциативная алгебра над P. Радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ тогда и только тогда отличен от нуля, когда в A_L имеется локально-нильпотентный идеал, содержащий нетривиальный нильпотентный элемент.

Доказательство. В одну сторону утверждение теоремы очевидно. Пусть A_L обладает локально-нильпотентным идеалом $\mathcal{J}_L$, содержащим нетривиальный нильпотентный элемент x. Из [2] вытекает, что в $\mathcal{J}_L$, множество $\mathcal{J}_L$ всех нильпотентных элементов образует идеал в A_L. Так как $\bar{\mathcal{J}}_L \neq 0$, то для завершения доказательства теоремы достаточно применить теорему 3.

Следствие I. Пусть А - ассоциативная алгебра над Р. Радикал $\mathcal{L}$(А) тогда и только тогда отличен от нуля, когда в A_L имеется локально разрешимый идеал, содержащий нетривиальный нильпотентный элемент.

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству теоремы 4, ибо в локально разрешимой алгебре множество всех нильпотентных элементов образуют характеристический идеал.

Следствие 2. Пусть А - ассоциативная алгебра на К. Радикал $\mathcal{L}(A)$ тогда и только тогда отличен от нуля, когда в A_L имеется локально-нильпотентный идеал $\mathcal{J}$, содержащий ненулевой алгебраический элемент, который не лежит в центре $\mathcal{J}$.

<u>Доказательство</u>. Согласно [2, лемма I] в этом случае в $\mathcal{J}$ имеется нетривиальный нильпотентный элемент. Применив теорему 4, получим требуемое утверждение.

<u>Предложение 3</u>. Пусть А - ассоциативная алгебра над P и $\mathcal{L}(A)=0$. Если в локально разрешимом идеале $\mathcal{J}$ алгебры A_L содержится нетривиальный алгебраический элемент х, то х лежит в центре алгебры A.

Доказательство. Прежде всего из условия леммы вытекает, что $LNA(A_L) \neq 0$, ибо $x \in LNA(A_L)$. Так как $\mathcal{L}(A) = 0$, то, тывая теорему 3, в $\mathcal{J}$ нет нетривиальных нильпотентных элементов. Поэтому х принадлежит центру идеала $\mathcal{J}$, т.е. $LNA(A_L)$ является коммутативной алгеброй Ли. Из [2, теорема I] вытекает, что для любого $x \in A_L$, $[LNA(A_L), x] \subseteq LRN(A_L)$. Но так как $\mathcal{L}(A) = 0$, то $LRN(A_L)=0$. Следовательно, $[LNA(A_L), x]=0$ для любого $x \in A_L$, т.е. $LNA(A_L)$ лежит в центре алгебры А.

<u>Лемма 3</u>. Пусть $\mathcal{J}$ - локально разрешимый идеал в A_L, и х≠0 - алгебраический элемент в А. Тогда подалгебра $M=\{\mathcal{J}, x\}$, порожденная $\mathcal{J}$ и х, является локально разрешимой.

<u>Доказательство</u>. Легко видеть, что для доказательства леммы достаточно проверить, что подалгебра M_0, порожденная элементами $y_1, y_2, \ldots, y_m, x$, где $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathcal{J}$, является разрешимой. Так как х - алгебраический элемент в А, то $ad\,x$ является алгебраическим дифференцированием, т.е. существует такое n, что элементы $a_1 = [a, x]$, $a_2 = [a_1, x]$, . . . , $a_n = [a_{n-1}, x]$

линейно зависимы для любого $a \in A_L$. Рассмотрим подалгебру $M_I \subset M_0$, порожденную элементами y_1 и $y_2=[y_1,x]$, $y_3=[y_2,x]$, $y_4=[y_3,x]$, $y_n=[y_{n-1},x]$. Легко проверить, что M_I инвариантна относительно $ad\,x$. Так как $y \in J$ и J - локально разрешимый идеал, то M_I есть разрешимый идеал в M_0. Но M_0/M_I является коммутативной алгеброй Ли и, следовательно, алгебра M_0 разрешима. Аналогично доказывается

Лемма 4. Пусть J - локально разрешимый идеал в A_L и $x \neq 0$ - энгелевый элемент в A_L. Тогда подалгебра $M=\{J,x\}$, порожденная J и x, является локально разрешимой.

Теорема 5. Пусть A_L обладает локально разрешимым идеалом J и пусть $x \in A_L$ - алгебраический элемент в A. Тогда либо $x \in \mathfrak{z}(J)$ ($\mathfrak{z}(J)$ - централизатор y), либо $\mathfrak{L}(A) \neq 0$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{J}$ максимальный локально разрешимый идеал. Пусть $y \in \bar{J}$ и рассмотрим алгебру $M_0=\{x,y\}$ Согласно лемме 3 M_0 - разрешимая алгебра. Тогда возможны два случая: $[x, y] \neq 0$, либо $[x, y] = 0$. Если $[x, y] \neq 0$, то $[x, y]$ - нильпотентный элемент, лежащий в $\bar{J}$ (см. [2]). По следствию I $\mathfrak{L}(A) \neq 0$. Следовательно, $\mathfrak{L}(A) \neq 0$, если хотя бы для одного $y \in \bar{J}$, $[x,y] \neq 0$. Если же для любого $y \in \bar{J}$, $[x,y]=0$, то $x \in \mathfrak{z}'(\bar{J}) \subset \mathfrak{z}(J)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь дифференцирование ассоциативной алгебры A.

Лемма 5. Пусть D - дифферецирование ассоциативной алгебры A. Тогда $\mathfrak{L}(A)D \leq \mathfrak{L}(A)$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathfrak{L}(A)+\mathfrak{L}(A)D$ является идеалом в A. Покажем, что этот идеал нильпотентен. Пусть $F=\{b_1D, b_2D, \dots, b_nD\}$ - конечное множество элементов из $\mathfrak{L}(A)D$, причем $b_i \in \mathfrak{L}(A)$. Предположим, что алгебра F_0 порожденная $b_1, b_2, \dots, b_n$ и лежащая в $\mathfrak{L}(A)$, имеет класс нильпотентности N и покажем, что $\prod_{j=1}^{N} b_{i_j}D \in \mathfrak{L}(A)$, где $b_{i_j}D \in F$. Действительно, $0=(\prod_{j=1}^{N} b_{i_j})D^N=\alpha\prod_{j=1}^{N} b_{i_j}D+\sigma$, где σ есть сумма произведений, каждое из которых содержит хотя бы одно $b_{i_j} \in \mathfrak{L}(A)$. Следовательно, элемент $\sigma \in \mathfrak{L}(A)$ Но тогда $\prod_{j=1}^{N}(b_{i_j}D) \in \mathfrak{L}(A)$. Поэтому фактор-алгебра $\mathfrak{L}(A)+\mathfrak{L}(A)D/\mathfrak{L}(A)$ локально-нильпотентна. Отсюда вытекает локальная нильпотентность алгебры $\mathfrak{L}(A)+\mathfrak{L}(A)D$ [3] и, следовательно, включение $\mathfrak{L}(A)D \leq \mathfrak{L}(A)$

<u>Теорема 6</u>. Пусть A - ассоциативная алгебра над полем P. Тогда для всякого дифференцирования ассоциативной алгебры A имеем

а) $LRN(A_L)D \leq LRN(A_L)$;

б) $LRA(A_L)D \leq LRN(A_L)$.

<u>Доказательство.</u>

а) По теореме 3 $LRN(A_L)=\mathcal{L}(A)$. Тогда по лемме 5 имеем

$$LRN(A_L)D \leq LRN(A_L).$$

б) Рассмотрим алгебру $\bar{A}=A/\mathcal{L}(A)$. Так как согласно лемме 5 $\mathcal{L}(A)D \leq \mathcal{L}(A)$, то D индуцирует дифференцирование $\bar{D}$ ассоциативной алгебры $\bar{A}$. Тогда, учитывая предложение 3, получим, что идеал $LRA(A_L)/\mathcal{L}(A)$ лежит в центре алгебры $\bar{A}$ Но центр любой алгебры Ли инвариантен относительно дифференцирований. Поэтому $LRA(A_L)D \leq LRA(A_L)$. Так как $LRA(A_L)$ является локально разрешимой алгеброй, то из [2] мы и заключаем, что $LRA(A_L)D \leq LRN(A)$.

Алгебра Ли называется радикальной, если в L имеется возрастающий нормальный ряд

$$\{0\}=L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_\alpha = L,$$

где $L_i \triangleleft L_{i+1}$, L_{i+1}/L_i - локально разрешимая алгебра Ли.

<u>Лемма 6</u>. Пусть L - радикальная алгебра Ли, L_1 - максимальный локально разрешимый идеал, $\mathfrak{z}(L_1)$ - централизатор L_1 в L. Тогда $\mathfrak{z}(L_1) \leq L_1$.

Лемма доказывается аналогично соответствующему утверждению для групп [1].

<u>Предложение 4</u>. Пусть в ассоциативной алгебре A имеется ряд из подалгебр:

$$\{0\} \quad A_0 \subset A_1 \subset \ldots \quad \subset A_n \subset \ldots \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad A,$$

где $(A_i)_L \triangleleft (A_{i+1})_L$ Если $(A_1)_L$ является локально разрешимым идеалом в $(A_2)_L$ содержащим нильпотентный элемент x≠0, то $\mathcal{L}(A)\neq$ $\neq 0$.

<u>Доказательство</u>. Из следствия I вытекает, что $\mathcal{L}(A_1)\neq 0$ так как $x \in A_1$ Учитывая теорему 6, лемму 6, применяя индукцию можно показать, что для любого n радикал $\mathcal{L}(A_n)\neq 0$. Обозначим через $\bar{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{L}(A_n)$ Легко видеть, что $\mathcal{L}(A)=\bar{A}$.

Литература

1. Плоткин Б.Н. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.,1966.

2. Липянский Р.С. Некоторые радикалы линейных алгебр Ли. - УМН, 1966,т.29, № 3, с.211-212.

3. Джекобсон Н. Строение колец. М., 1961.

4. C.Curtis. On Lie algebras of Algebraic Transformation.-Pacif J.Math., 1956, vol.6, N 3, p.453-466.

5. Плоткин Б.Н. Об алгебраических множествах элементо в группах и алгебрах Ли. - УМН,1968,т.13,№ 6,с.133-138.

6. Серр Ж.П. Алгебры Ли и группа Ли. М.,1969.

Поступила 19 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981.

УДК 513.831

КАТЕГОРИЯ КОШЕЙПОВ И СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ

Ю.Т.Лисица
Московский энергетический институт

В работе [1] рассматривалась категория кошейпов, которая является двойственной известной категории Борсука-Мардешича [2],[3]. Эта категория кошейпов является продолжением гомотопической категории с категории $\mathcal{P}ol$ -пространств, имеющих гомотопический тип CW -комплексов, на категорию $\mathcal{T}op$ всех топологических пространств. Она тесно связана с сингулярными гомологическими группами и с конечно-порожденными когомологическими группами. В рамках этой категории будет показано:

1. Сингулярные гомологические и конечно-порожденные сингулярные когомологические группы являются кошейповыми инвариантами.
2. Между двумя гомотопными кошейповыми отображениями можно построить правую гомотопию.
3. Каждое расслоение в смысле Серра для кошейповых отображений является расслоением в смысле Гуревича.

В этой работе будет рассмотрено свойство коподвижности, являющееся кошейповым инвариантом, и при котором когомологические инварианты категории кошейпов изоморфны соответствующим инвариантам сильной категории кошейпов [4], [5].

§ I. $\mathcal{J}nj$ -категория топологических пространств

Определение I.I. Прямой гомотопической системой $(\mathbb{X}, \mathbb{A}) = \{(X_\alpha, A_\alpha), i_{\alpha\alpha'}, A\}$ по направленному частично упорядоченному множеству индексов A назовем совокупность пар (X_α, A_α) топологических пространств и отображений пар $i_{\alpha\alpha'}: (X_\alpha, A_\alpha) \to (X_{\alpha'}, A_{\alpha'})$, где $\alpha \leq \alpha'$ таких, что

1. $i_{\alpha\alpha}: (X_\alpha, A_\alpha) \to (X_\alpha, A_\alpha)$ тождество.
2. $i_{\alpha\alpha''}$ гомотопно $i_{\alpha'\alpha''} i_{\alpha\alpha'}$ для любых $\alpha \leq \alpha' \leq \alpha''$.

Объектами категории $inj\text{-}\mathcal{T}op$ будут прямые гомотопические системы $(\mathbb{X}, \mathbb{A}) = \{(X_\alpha, A_\alpha), i_{\alpha\alpha'}, A\}$.

<u>Определение I.2</u>. Морфизмами категории $inj\text{-}\mathcal{T}op$ назовем отображения $\underset{\wedge}{f}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ из прямой гомотопической системы $(\mathbb{X},\mathbb{A})$ в прямую гомотопическую систему $(\mathbb{Y},\mathbb{B})=\{(Y_\beta,B_\beta),j_{\beta\beta'},B\}$, состоящие из системы отображений $\{\varphi,f_\alpha\}$, где $\varphi:A\to B$, а $f_\alpha\ (X_\alpha,A_\alpha)\longrightarrow(Y_{\varphi(\alpha)},B_{\varphi(\alpha)})$ такие, что для любых $\alpha\leq\alpha'$ существует такой индекс $\beta\in B$, что $j_{\varphi(\alpha')\beta}f_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}\simeq j_{\varphi(\alpha)\beta}f_\alpha$

Последнее соотношение означает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
(X_\alpha,A_\alpha) \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d] & (Y_{\varphi(\alpha)},B_{\varphi(\alpha)}) \arrow[r] & (Y_\beta,B_\beta) \\
(X_{\alpha'},A_{\alpha'}) \arrow[r, "f_{\alpha'}"] & (Y_{\varphi(\alpha')},B_{\varphi(\alpha')}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Тождественный морфизм $\underset{\wedge}{1}_{(\mathbb{X},\mathbb{A})}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\longrightarrow(\mathbb{X},\mathbb{A})$ задается $1(\alpha)=\alpha$, $1_\alpha=1_{(X_\alpha,A_\alpha)}$

<u>Определение I.3</u>. Композицией морфизмов $\underset{\wedge}{f}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ и $\underset{\wedge}{g}:(\mathbb{Y},\mathbb{B})\to(\mathbb{Z},\mathbb{C})=\{(Z_\gamma,C_\gamma),\kappa_{\gamma\gamma'},\Gamma\}$ назовем систему отображений $\underset{\wedge}{h}=\{\phi,h_\alpha\}$ где $\phi=\psi\varphi:A\to\Gamma$ - композиция отображений φ и ψ а $h_\alpha=g_{\varphi(\alpha)}f_\alpha:(X_\alpha,A_\alpha)\longrightarrow(Z_{\phi(\alpha)},C_{\phi(\alpha)})$ - композиция отображений f_α и $g_{\varphi(\alpha)}$.

<u>Предложение I.I</u>. Композиция $\underset{\wedge}{h}=\underset{\wedge}{g}\circ\underset{\wedge}{f}$ является морфизмом категории $inj\text{-}\mathcal{T}op$.

Действительно, для любых $\alpha\leq\alpha'$ найдется такой индекс $\beta\in B$. что

$$j_{\varphi(\alpha')\beta}f_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}\simeq j_{\varphi(\alpha)\beta}f_\alpha \tag{I.I}$$

Для $\varphi(\alpha)\leq\beta$ найдется такой индекс $\gamma\in\Gamma$ что

$$\kappa_{\psi(\beta)\gamma}g_\beta j_{\varphi(\alpha)\beta}\simeq\kappa_{\psi\varphi(\alpha)\gamma}g_{\varphi(\alpha)}. \tag{I.2}$$

Для $\varphi(\alpha')\leq\beta$ найдется такой индекс $\gamma'\in\Gamma$ что

$$\kappa_{\psi(\beta)\gamma'}g_\beta j_{\varphi(\alpha')\beta}\simeq\kappa_{\psi\varphi(\alpha')\gamma'}g_{\varphi(\alpha')}. \tag{I.3}$$

В силу направленности множества индексов Γ существует такой индекс $\gamma''\in\Gamma$, что $\gamma''\geq\psi(\beta),\gamma,\gamma'$ Тогда по определению I.I верно

$$\kappa_{\gamma\gamma''}\kappa_{\psi(\beta)\gamma}\simeq\kappa_{\psi(\beta)\gamma''} \quad \text{и} \quad \kappa_{\psi(\beta)\gamma''}\simeq\kappa_{\gamma'\gamma''}\kappa_{\psi(\beta)\gamma'} \tag{I.4}$$

Из приведенных выше условий (I.I) - (I.4) следует:

$$k_{\gamma'\gamma''}k_{\psi\varphi(\alpha')\gamma'}g_{\varphi(\alpha')}f_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}\simeq k_{\gamma'\gamma''}k_{\psi(\beta)\gamma'}g_{\beta}j_{\varphi(\alpha')\beta}f_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}\simeq$$
$$\simeq k_{\psi(\beta)\gamma''}g_{\beta}j_{\varphi(\alpha')\beta}f_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}\simeq k_{\gamma'\gamma''}k_{\psi(\beta)\gamma}g_{\beta}j_{\varphi(\alpha')\beta}f_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}\simeq$$
$$\simeq k_{\gamma\gamma''}k_{\psi(\beta)\gamma}g_{\beta}j_{\varphi(\alpha)\beta}f_{\alpha}\simeq k_{\gamma\gamma''}k_{\psi\varphi(\alpha)\gamma}g_{\varphi(\alpha)}f_{\alpha}\quad .$$

что и требовалось доказать.

Доказательство предложения I.I легко проследить на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
(X_\alpha,A_\alpha) \arrow[r] \arrow[dd] & (Y_{\varphi(\alpha)},B_{\varphi(\alpha)}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (Z_{\psi\varphi(\alpha)},C_{\psi\varphi(\alpha)}) \arrow[rr] & & (Z_\gamma,C_\gamma) \arrow[dr] & \\
& & (Y_\beta,B_\beta) \arrow[rr] & & (Z_{\psi(\beta)},C_{\psi(\beta)}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & (Z_{\gamma''},C_{\gamma''}) \\
X_{\alpha'},A_{\alpha'}) \arrow[r] & (Y_{\varphi(\alpha')},B_{\varphi(\alpha')}) \arrow[rr] \arrow[ur] & & (Z_{\psi\varphi(\alpha')},C_{\psi\varphi(\alpha')}) \arrow[rr] & & (Z_{\gamma'},C_{\gamma'}) . \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Определение I.4. Два морфизма $\hat{f},\hat{g}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ назовем гомотопными, если для любого $\alpha\in\hat{A}$ существует такой индекс $\beta\geqslant\varphi(\alpha),\ \psi(\alpha)$, что $j_{\varphi(\alpha)\beta}f_\alpha\simeq j_{\psi(\alpha)\beta}g_\alpha$

Последнее соотношение означает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
& (Y_{\varphi(\alpha)},B_{\varphi(\alpha)}) \arrow[dr] & \\
(X_\alpha,A_\alpha) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (Y_\beta,B_\beta) \\
& (Y_{\psi(\alpha)},B_{\psi(\alpha)}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Предложение I.2. Отношение гомотопности / $\simeq$ на множестве морфизмов категории inj-$\mathcal{T}op$ является отношением эквивалентности.

Доказательство. Пусть $\hat{f},\hat{g},\hat{h}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ такие морфизмы, что $\hat{f}\simeq\hat{g}$ и $\hat{g}\simeq\hat{h}$. Из определения I.4 вытекает существование таких $\beta,\beta'\in B$ что выполнены следующие условия:

$$j_{\varphi(\alpha)\beta}f_\alpha\simeq j_{\psi(\alpha)\beta}g_\alpha \quad \text{a} \quad j_{\psi(\alpha)\beta'}g_\alpha\simeq j_{\phi(\alpha)\beta'}h_\alpha . \qquad (I.5)$$

В силу направленности множества индексов B существует такой индекс $\beta''\in B$ что $\beta''\geqslant\beta,\beta'$ Тогда в силу определения I.I имеем:

$$j_{\beta'\beta''}j_{\psi(\alpha)\beta'}\simeq j_{\psi(\alpha)\beta''} \quad \text{и} \quad j_{\psi(\alpha)\beta''}\simeq j_{\beta\beta''}j_{\psi(\alpha)\beta} . \qquad (I.6)$$

Тогда из условий (I.5) и (I.6) следует

$$j_{\beta\beta''}j_{\varphi(\alpha)\beta}f_\alpha\simeq j_{\beta\beta''}j_{\psi(\alpha)\beta}g_\alpha\simeq j_{\beta'\beta''}j_{\psi(\alpha)\beta'}g_\alpha\simeq j_{\beta'\beta''}j_{\phi(\alpha)\beta'}h_\alpha$$

Но $j_{\beta'\beta''}j_{\phi(\alpha)\beta'}\simeq j_{\phi(\alpha)\beta''}$, a $j_{\beta\beta''}j_{\varphi(\alpha)\beta}\simeq j_{\varphi(\alpha)\beta''}$, следовательно, $j_{\phi(\alpha)\beta''} h_\alpha \simeq j_{\varphi(\alpha)\beta''} f_\alpha$ что и требовалось доказать.

Доказательство предложения I.2 легко проследить на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
 & (Y_{\varphi(\alpha)}, B_{\varphi(\alpha)}) \arrow[dr] & & \\
 & & (Y_\beta, B_\beta) \arrow[dr] & \\
(X_\alpha, A_\alpha) \arrow[uur] \arrow[r] \arrow[ddr] & (Y_{\psi(\alpha)}, B_{\psi(\alpha)}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (Y_{\beta''}, B_{\beta''}) \\
 & & (Y_{\beta'}, B_{\beta'}) \arrow[ur] & \\
 & (Y_{\phi(\alpha)}, B_{\phi(\alpha)}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

<u>Теорема I.I</u>. Пусть имеются морфизмы $\hat{f}, \hat{f}' : (\mathbb{X},\mathbb{A}) \to (\mathbb{Y},\mathbb{B})$ и $\hat{g}, \hat{g}' : (\mathbb{Y},\mathbb{B}) \longrightarrow (\mathbb{Z},\mathbb{C})$ Если $\hat{f} \simeq \hat{f}'$ и $\hat{g} \simeq \hat{g}'$ тогда $\hat{g} \circ \hat{f} \simeq \hat{g}' \circ \hat{f}'$

Докажем сперва, что $\hat{g} \circ \hat{f}' \simeq \hat{g} \circ \hat{f}$ То есть найдем такой индекс $\gamma \in \Gamma$ зависящий от $\hat{\alpha}$, что $\gamma \geq \psi\varphi'(\alpha), \psi\varphi(\alpha)$ и выполнено условие $K_{\psi\varphi(\alpha)\gamma} g_{\varphi(\alpha)} f_\alpha \simeq K_{\psi\varphi'(\alpha)\gamma} g_{\varphi'(\alpha)} f'_\alpha$. Действительно, в силу условия теоремы для любого $\alpha \in A$ существует такой индекс $\beta \in B$ что выполнено

$$j_{\varphi(\alpha)\beta} f_\alpha \simeq j_{\varphi'(\alpha)\beta} f'_\alpha \qquad (I.7)$$

В силу того, что $\hat{g}$ - морфизм из $(\mathbb{Y},\mathbb{B})$, в $(\mathbb{Z},\mathbb{C})$, найдется такой индекс $\gamma' \in \Gamma$, что $\gamma' \geq \psi\varphi(\alpha), \psi(\beta)$ и такой индекс $\gamma'' \in \Gamma$ что $\gamma'' \geq \psi\varphi'(\alpha), \psi(\beta)$ и при этом выполнены следующие условия:

$$K_{\psi(\beta)\gamma'} g_\beta j_{\varphi(\alpha)\beta} \simeq K_{\psi\varphi(\alpha)\gamma'} g_{\varphi(\alpha)} , \qquad (I.8)$$

$$K_{\psi(\beta)\gamma'} g_\beta j_{\varphi'(\alpha)\beta} \simeq K_{\psi\varphi'(\alpha)\gamma''} g_{\varphi'(\alpha)} \qquad (I.9)$$

В силу направленности множества Γ и в силу определения I.I существует такой индекс $\gamma \in \Gamma$ что $\gamma \geq \gamma', \gamma''$ и выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} &K_{\psi(\beta)\gamma} \simeq K_{\gamma'\gamma} K_{\psi(\beta)\gamma'} \qquad K_{\psi\varphi(\alpha)\gamma} \simeq K_{\gamma'\gamma} K_{\psi\varphi(\alpha)\gamma'} , \\ &K_{\psi(\beta)\gamma} \simeq K_{\gamma''\gamma} K_{\psi(\beta)\gamma''} \qquad K_{\psi\varphi'(\alpha)\gamma} \simeq K_{\gamma''\gamma} K_{\psi\varphi'(\alpha)\gamma''} . \end{aligned} \qquad (I.10)$$

Из условий (I.7) - (I.10) вытекают следующие соотношечия:

$$K_{\psi\varphi(\alpha)\gamma} g_{\varphi(\alpha)} f_\alpha \simeq K_{\gamma'\gamma} K_{\psi\varphi(\alpha)\gamma'} g_{\varphi(\alpha)} f_\alpha \simeq K_{\gamma'\gamma} K_{\psi(\beta)\gamma'} g_\beta j_{\varphi(\alpha)\beta} f_\alpha \simeq$$

$$\simeq K_{\psi(\beta)\gamma} g_\beta j_{\varphi(\alpha)\beta} f_\alpha \simeq K_{\gamma''\gamma} K_{\psi(\beta)\gamma''} g_\beta j_{\varphi(\alpha)\beta} f_\alpha \simeq$$

$$\simeq K_{\gamma''\gamma} K_{\psi(\beta)\gamma''} g_\beta j_{\varphi'(\alpha)\beta} f'_\alpha \simeq K_{\gamma''\gamma} K_{\psi\varphi'(\alpha)\gamma''} g_{\varphi'(\alpha)} f'_\alpha \simeq$$

$$\simeq K_{\psi\varphi'(\alpha)\gamma} g_{\varphi'(\alpha)} f'_\alpha .$$

Что и следовало доказать.

Приведенное доказательство первой части теоремы I.I хорошо иллюстрирует следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & (Y_{\varphi(\alpha)}, B_{\varphi(\alpha)}) \arrow[r] \arrow[dd] & (Z_{\psi\varphi(\alpha)}, C_{\psi\varphi(\alpha)}) \arrow[dr] \arrow[ddrr] & & \\
 & & & (Z_{\gamma'}, C_{\gamma'}) \arrow[dr] & \\
(X_\alpha, A_\alpha) \arrow[uur] \arrow[ddr] & (Y_\beta, B_\beta) \arrow[r] & (Z_{\psi(\beta)}, C_{\psi(\beta)}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & (Z_\gamma, C_\gamma) \\
 & & & (Z_{\gamma''}, C_{\gamma''}) \arrow[ur] & \\
 & (Y_{\varphi'(\alpha)}, B_{\varphi'(\alpha)}) \arrow[r] \arrow[uu] & (Z_{\psi\varphi'(\alpha)}, C_{\psi\varphi'(\alpha)}) \arrow[ur] \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}$$

Докажем теперь, что $\underset{\wedge}{g}'\circ\underset{\wedge}{f} \simeq \underset{\wedge}{g}\circ\underset{\wedge}{f}$ То есть, для любого $\alpha\in A$ найдем такой индекс $\gamma\in\Gamma$, что $\gamma > \psi'\varphi(\alpha), \psi\varphi(\alpha)$ и выполнено условие $K_{\psi'\varphi(\alpha)\gamma}\, g'_{\varphi(\alpha)} f_\alpha \simeq K_{\psi\varphi(\alpha)\gamma}\, g_{\varphi(\alpha)} f_\alpha$ В силу условия теоремы найдется такой индекс $\gamma\in\Gamma$, что $\gamma \geqslant \psi'\varphi(\alpha), \psi\varphi(\alpha)$ и выполнено условие $K_{\psi'\varphi(\alpha)\gamma}\, g'_{\varphi(\alpha)} \simeq$ $\simeq K_{\psi\varphi(\alpha)\gamma}\, g_{\varphi(\alpha)}$ Но тогда верно и следующее соотношение: $K_{\psi'\varphi(\alpha)\gamma}\, g'_{\varphi(\alpha)} f_\alpha \simeq K_{\psi\varphi(\alpha)\gamma}\, g_{\varphi(\alpha)} f_\alpha$, что и нужно было доказать.

Доказательство второй части теоремы иллюстрирует диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & & (Z_{\psi\varphi(\alpha)}, C_{\psi\varphi(\alpha)}) \arrow[dr] & \\
(X_\alpha, A_\alpha) \arrow[r] & (Y_{\varphi(\alpha)}, B_{\varphi(\alpha)}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (Z_\gamma, C_\gamma) \\
 & & (Z_{\psi'\varphi(\alpha)}, C_{\psi'\varphi(\alpha)}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

В силу предложения I.2 вытекает, что $\underset{\wedge}{g}'\circ\underset{\wedge}{f}' \simeq \underset{\wedge}{g}\circ\underset{\wedge}{f}$ Доказательство теоремы I.I полностью закончено.

Предложение I.2 и теорема I.I позволяют определить следующую категорию, которую мы будем обозначать $inj\text{-}Ho(\mathcal{T}op)$. Объектами этой категории будут объекты категории $inj\text{-}\mathcal{T}op$, морфизмами $[\underset{\wedge}{f}]:(\mathbf{X},\mathbf{A})\to(\mathbf{Y},\mathbf{B})$ будут классы $[\underset{\wedge}{f}]$ гомотопных морфизмов $\underset{\wedge}{f}$ категории $inj\text{-}\mathcal{T}op$ Действительно, в силу предложения I.2 множество всех морфизмов $\{\underset{\wedge}{f}\}$ категории $inj\text{-}\mathcal{T}op$ распадается на непересекающиеся классы $[\underset{\wedge}{f}]$ гомотопных между собой морфизмов. В силу теоремы I.I можно определить композицию $[\underset{\wedge}{g}]\circ[\underset{\wedge}{f}]$, полагая ее равной $[\underset{\wedge}{g}\circ\underset{\wedge}{f}]$ Тождественный морфизм категории $inj\text{-}Ho(\mathcal{T}op)$ полагаем равным $[\underset{\wedge}{1}_{(\mathbf{X},\mathbf{A})}]$ Категория $inj\text{-}Ho(\mathcal{T}op)$ является гомотопической категорией категории $inj\text{-}\mathcal{T}op$, поэтому морфизм $\underset{\wedge}{f}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ будем называть гомотопической эквивалентностью, если существует морфизм $\underset{\wedge}{g}:(\mathbb{Y},\mathbb{B})\to(\mathbb{X},\mathbb{A})$ такой, что $\underset{\wedge}{g}\cdot\underset{\wedge}{f}\simeq\underset{\wedge}{1}_{(\mathbb{X},\mathbb{A})}$ и $\underset{\wedge}{f}\cdot\underset{\wedge}{g}\simeq\underset{\wedge}{1}_{(\mathbb{Y},\mathbb{B})}$

§ 2. Категория кошейпов Co-shape

Нас будет теперь интересовать категория inj-$\mathcal{P}o\ell$, где $\mathcal{P}o\ell$ - категория пространств, имеющих гомотопический тип конечных CW-комплексов. В этом случае категория inj-$Ho(\mathcal{P}o\ell)$ позволит построить гомотопическую категорию топологических пространств, которую мы назовем категорией кошейпов и которая совпадает на категории пространств, имеющих гомотопический тип конечных CW-комплексов, с обычной гомотопической категорией

Определение 2.I. Прямую гомотопическую систему $(\mathbb{X},\mathbb{A})=\{(X_\alpha,A_\alpha),i_{\alpha\alpha'},A\}$ из категории inj-$\mathcal{P}o\ell$ назовем ассоциированной с парой топологических пространств (X,A), если существуют такие отображения $i_\alpha:(X_\alpha,A_\alpha)\to(X,A)$, что

- для любых $\alpha\in\alpha'$ имеем $i_\alpha\simeq i_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}$; (2.I)
- для любого отображения $f:(P,Q)\to(X,A)$, где (P,Q) имеет гомотопический тип конечных CW-комплексов, найдется такое отображение $f_\alpha:(P,Q)\to(X_\alpha,A_\alpha)$, что $f\simeq i_\alpha f_\alpha$ (2.2)
- если для двух таких отображений $f_\alpha,f'_\alpha:(P,Q)\to(X_\alpha,A_\alpha)$ выполняется условие $i_\alpha f_\alpha\simeq i_\alpha f'_\alpha$, то найдется такой индекс $\alpha'\geqslant\alpha$, что $i_{\alpha\alpha'}f_\alpha\simeq i_{\alpha\alpha'}f'_\alpha$ (2.3)

Теорема 2.I. Для любой пары (X,A) топологических пространств существует прямая гомотопическая система $(\mathbb{X},\mathbb{A})=\{(X_\alpha,A_\alpha),i_{\alpha\alpha'},A\}$ из категории inj-$\mathcal{P}o\ell$, ассоциированная с ней.

Доказательство. В качестве прямой гомотопической системы $(\mathbb{X},\mathbb{A})$ возьмем систему, состоящую из конечных относительных подполиедров (X_α,A_α) геометрической реализации $|S(X,A)|$ относительного сингулярного комплекса Кана $S(X,A)$ а i_α состоит из ограничений на (X_α,A_α) естественной проекции $i:|S(X,A)|\to(X,A)$ Условие (2.I) вытекает из построения отображения i_α В силу того, что отображение i является слабой гомотопической эквивалентностью топологической пары $|S(X,A)|$ в топологическую пару (X,A), а также того, что образ компактной пары (P,Q)

при отображении f всегда лежит в конечном относительном подполиэдре полиэдра $|S(X,A)|$, выполнены условия (2.2) и (2.3) (см., например, [6] с. 443-444).

Определение 2.2. Морфизм $\underset{\wedge}{f}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ назовем ассоциированным с отображением $f:(X,A)\to(Y,B)$, если $(\mathbb{X},\mathbb{A})$ и $(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ соответственно ассоциированы с парами (X,A) и (Y,B) и, кроме того, для любого $\alpha\in A$ выполнено следующее условие:

$$j_\beta f_\alpha \simeq f i_\alpha . \qquad (2.4)$$

Теорема 2.2. Пусть $(\mathbb{X},\mathbb{A})$ и $(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ ассоциированы соответственно с парами (X,A) и (Y,B) Тогда для любого отображения $f:(X,A)\to(Y,B)$ существует морфизм $\underset{\wedge}{f}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$, ассоциированный с f.

Доказательство. Для любого $\alpha\in A$ определим $f_\alpha:(X_\alpha,A_\alpha)\to(Y_{\varphi(\alpha)},B_{\varphi(\alpha)})$ следующим образом: рассмотрим отображение $fi_\alpha:(X_\alpha,A_\alpha)\to(Y,B)$; в силу условия (2.2) существует такое отображение $f_\alpha:(X_\alpha,A_\alpha)\to(Y_{\beta=\varphi(\alpha)},B_{\beta=\varphi(\alpha)})$, что $fi_\alpha\simeq j_\beta f_\alpha$ Оно и будет искомым.

Докажем, что система $\{\varphi,f_\alpha\}$ составляет морфизм из $(\mathbb{X},\mathbb{A})$ в $(\mathbb{Y},\mathbb{B})$. Пусть $\alpha\leq\alpha'$. Рассмотрим два отображения $j_{\beta\beta'}f_\alpha$ и $f_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}$ из (X_α,A_α) в $(Y_{\beta'},B_{\beta'})$. Для них выполнены следующие соотношения:

$$j_{\beta'}f_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}\simeq f i_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}\simeq f i_\alpha\simeq j_\beta f_\alpha\simeq j_{\beta'}j_{\beta\beta'}f_\alpha$$

Следовательно, по условию (2.3) существует такой индекс $\beta''\geq\beta'$ что $j_{\beta'\beta''}f_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}\simeq j_{\beta\beta''}j_{\beta\beta'}f_\alpha$, а это и следовало доказать.

Теорема 2.3. Если два морфизма $\underset{\wedge}{f},\underset{\wedge}{g}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ ассоциированы соответственно с отображениями $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ и f гомотопно g тогда морфизм $\underset{\wedge}{f}$ гомотопен морфизму $\underset{\wedge}{g}$.

Доказательство. По условию (2.4) имеем $j_\beta f_\alpha\simeq f i_\alpha$, $j_{\beta'}g_\alpha\simeq g i_\alpha$ Тогда найдется такой индекс $\beta''\geq\beta',\beta$, что $j_{\beta''}j_{\beta'\beta''}\simeq j_{\beta'}$ и $j_{\beta''}j_{\beta\beta''}\simeq j_\beta$. Докажем, что $j_{\beta\beta''}f_\alpha\simeq j_{\beta'\beta''}g_\alpha$ Действительно, отображения $j_{\beta\beta''}f_\alpha$ и $j_{\beta'\beta''}g_\alpha$ такие, что

$$j_{\beta''}j_{\beta\beta''}f_\alpha\simeq j_\beta f_\alpha\simeq f i_\alpha\simeq g i_\alpha\simeq j_{\beta'}g_\alpha\simeq j_{\beta''}j_{\beta'\beta''}g_\alpha$$

Тогда по условию (2.3) существует такой индекс $\beta'''\geq\beta''$, что

$j_{\beta''\beta'''} j_{\beta\beta''} f_\alpha \simeq j_{\beta''\beta'''} j_{\beta'\beta''} g_\alpha$. Но из определения I.I следует, что $j_{\beta\beta'''} f_\alpha \simeq j_{\beta'\beta''} g_\alpha$. Следовательно, $\underset{\wedge}{f}$ гомотопно $\underset{\wedge}{g}$

Следствие. Если $(\mathbb{X},\mathbb{A})$ и $(\mathbb{X}',\mathbb{A}')$ ассоциированы с одной и той же парой (X,A) то тождественное отображение $1_{(X,A)}:(X,A)\to(X,A)$ порождает ассоциированный морфизм $\underset{\wedge}{1}_{(\mathbb{X},\mathbb{A})'}$ $:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{X}',\mathbb{A}')$, причем любые два такие ассоциированные морфизмы гомотопны между собой.

Определение 2.3. Кошейповым отображением $f:(X,A)\to$ $\to(Y,3)$ из (X,A) в (Y,B) назовем всякий морфизм $\underset{\wedge}{f}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to$ $\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$, где $(\mathbb{X},\mathbb{A})$ и $(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ - прямые гомотопические системы, ассоциированные соответственно с (X,A) и (Y,B) .

Оп еделение 2.4. Два кошейповых отображения $\underset{\wedge}{f},\underset{\wedge}{g}:$ $:(X,A)\to(Y,B)$ назовем гомотопными, если для морфизмов $\underset{\wedge}{f}:$ $(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ и $\underset{\wedge}{g}:(\mathbb{X}',\mathbb{A}')\to(\mathbb{Y}',\mathbb{B}')$ существуют морфизмы $\underset{\wedge}{1}_{(X,A)}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{X}',\mathbb{A}')$ и $\underset{\wedge}{1}_{(Y,B)}:(\mathbb{Y},\mathbb{B})\to(\mathbb{Y}',\mathbb{B}')$, ассоциированные соответственно с тождественными отображениями $1_{(X,A)}$ и $1_{(Y,B)}$ такие, что

$$\underset{\wedge}{1}_{(Y,B)}\circ\underset{\wedge}{f}\simeq\underset{\wedge}{g}\circ\underset{\wedge}{1}_{(X,A)} .$$

Определение 2.5. Пусть $\underset{\wedge}{f}:(X,A)\to(Y,B)$ и $\underset{\wedge}{g}:(Y,B)\to(Z,C)$ - два кошейповых отображения, определенные соответственно морфизмами $\underset{\wedge}{f}:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ и $\underset{\wedge}{g}:(\mathbb{Y}',\mathbb{B}')\to(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ Композицией $[g]\hat{\circ}[\underset{\wedge}{f}]$ гомотопических классов $[\underset{\wedge}{f}]$ и $[g]$ назовем класс $[\underset{\wedge}{g}\circ\underset{\wedge}{1}_{(Y,B)}\circ\underset{\wedge}{f}]$, где $\underset{\wedge}{1}_{(Y,B)}$ - морфизм, ассоциированный с тождественным отображением $1_{(Y,B)}$

Таким образом, все пары топологических пространств (X,A) и гомотопические классы $[\underset{\wedge}{f}]$ кошейповых отображений $\underset{\wedge}{f}$ образуют категорию. Эту категорию $Co\text{-}shape$ назовем кошейповой категорией. Из теорем 2.2 и 2.3 вытекает существование функтора Φ из категории $Ho(\mathcal{T}op)$ в гомотопическую категорию $Co\text{-}shape$ Покажем, что на полной подкатегории категории $\mathcal{T}ol$ состоящей из пространств, имеющих гомотопический тип конечных CW-комплексов, категории $Ho(\mathcal{T}ol)$ и $Co\text{-}shape$ совпадают.

Теорема 2.4. Если пара (X,A) имеет гомотопический тип конечного CW-комплекса, то для любого морфизма $f:(\mathbb{X},\mathbb{A})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$, определяющего кошейповое отображение $\underset{\wedge}{f}:(X,A)\to(Y,B)$, существует отображение $f:(X,A$ $B)$ такое, что $\underset{\wedge}{f}$ ассоциировано с f

Доказательство. Так как пара (X,A) имеет гомотопический тип конечного CW-комплекса, то прямая система $(\mathbf{X},\mathbf{A})=\{(X_\alpha,A_\alpha),i_{\alpha\alpha'},A\}$, состоящая из $(X_\alpha,A_\alpha)=(X,A)$ и тождественных отображений $i_{\alpha\alpha'}=1_{(X,A)}$, будет ассоциирована с (X,A) Пусть $\underset{\wedge}{f}:(\mathbf{X},\mathbf{A})\rightarrow(\mathbf{Y},\mathbf{B})$ - произвольный морфизм, определяющий кошейповое отображение $\underset{\wedge}{f}:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$, то есть $\underset{\wedge}{f}$ состоит из семейства отображений $f_\alpha:(X,A)\longrightarrow(Y_\beta,B_\beta)$ таких, что $f_{\alpha'}\simeq j_{\beta\beta'}f_\alpha$ Полагая $f=j_\beta f_\alpha$ для некоторого $\beta\in B$ Тогда для любого α' докажем, что $j_{\beta'}f_{\alpha'}\simeq f$ Действительно, в силу того что $\underset{\wedge}{f}$ - морфизм, то существует такой индекс β'' что $j_{\beta\beta''}f_\alpha\simeq j_{\beta'\beta''}f_{\alpha'}$. Но $j_\beta\simeq j_{\beta''}j_{\beta\beta''}$, следовательно, $f=j_\beta f_\alpha\simeq j_{\beta''}j_{\beta\beta''}f_\alpha\simeq j_{\beta''}j_{\beta'\beta''}f_{\alpha'}\simeq$ $\simeq j_{\beta'}f_{\alpha'}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.5. Если для любых гомотопных кошейповых отображений $\underset{\wedge}{f},\underset{\wedge}{g}:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ построить в предположениях теоремы 2.4 отображения $f,g:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ то f гомотопно g

Доказательство. В силу построения теоремы 2.4 для любого $\alpha\in\mathcal{A}$ имеем $f\simeq j_\beta f_\alpha$ и $g\simeq j_{\beta'}g_\alpha$. В силу гомотопности морфизмов $\underset{\wedge}{f}$ и $\underset{\wedge}{g}$ имеем $j_{\beta\beta''}f_\alpha\simeq j_{\beta'\beta''}g_\alpha$, а в силу ассоциативности с (Y,B) системы $(\mathbf{Y},\mathbf{B})$ имеем $j_\beta\simeq$ $\simeq j_{\beta''}j_{\beta\beta''}$ и $j_{\beta'}\simeq j_{\beta''}j_{\beta'\beta''}$ Учитывая сказанное, получим $\simeq j_\beta f_\alpha\simeq j_\beta\cdot j_{\beta\beta''}f_\alpha\simeq j_{\beta''}j_{\beta'\beta''}g_\alpha\simeq j_{\beta'}g_\alpha\simeq g$ что и требовалось доказать.

Замечание. Если в параграфах I и 2 рассматривать пунктированные пространства и отображения с фиксированной точкой, то получим пунктированную категорию кошейпов.

§ 3. Алгебраические инварианты в категории кошейпов

Любой прямой гомотопической системе $(\mathbf{X},\mathbf{A})=\{(X_\alpha,A_\alpha),i_{\alpha\alpha'},A\}$ естественно сопоставить прямой спектр $\mathbb{H}_n(\mathbf{X},\mathbf{A};G)=\{H_n(X_\alpha,A_\alpha;G),(i_{\alpha\alpha'})_*,A\}$ из гомологических групп, обратный спектр $\mathbb{H}^n(\mathbf{X},\mathbf{A};G)=\{H^n(X_\alpha A_\alpha;G),(i_{\alpha\alpha'})^*,A\}$ из когомологических групп, прямой спектр $\boldsymbol{\pi}_n(\mathbf{X},\mathbf{A},\nu)=\{\pi_n(X_\alpha,A_\alpha,a_\alpha),(i_{\alpha\alpha'})_\#,A\}$ из гомотопических групп и обратный спектр $\boldsymbol{\pi}^n(\mathbf{X},\mathbf{A})=\{\pi^n(X_\alpha,A_\alpha),(i_{\alpha\alpha'})^\#,A\}$ из когомотопических множеств.

Для любой пары (X,A) топологических пространств рассмотрим прямую гомотопическую систему $(\mathbb{X}, \mathbb{A})$, ассоциированную с (X,A) Тогда естественно рассмотреть гомологическую группу $\underset{\wedge}{H}_n(X,A;G)=\varinjlim \mathbb{H}_n$, когомологическую группу $\underset{\wedge}{H}^n(X,A;G)=\varprojlim \mathbb{H}^n(\mathbb{X},\mathbb{A};G)$, гомотопическую группу $\underset{\wedge}{\pi}_n(X,A,a)=$ $=\varinjlim \pi_n(\mathbb{X},\mathbb{A},\mathbb{a})$ и когомотопическое множество $\underset{\wedge}{\pi}^n(X,A)\hat{=}$ $=\varprojlim \pi^n(\mathbb{X},\mathbb{A})$ пары (X,A)

<u>Теорема 3.I</u>. Любое кошейповое отображение $f:(X,A)\to$ $\to(Y,B)$ индуцирует гомоморфизмы $\underset{\wedge}{f}_*:\underset{\wedge}{H}_n(X,A;G)\longrightarrow \underset{\wedge}{H}_n(Y,B;G)$ гомологических групп, $f^*: \underset{\wedge}{H}^n(Y,B;G)\longrightarrow \underset{\wedge}{H}^n(X,A;G)$ когомологических групп, $\underset{\wedge}{f}_\#:\underset{\wedge}{\pi}_n(X,A,a)\to\underset{\wedge}{\pi}_n(Y,B,b)$ гомотопических групп, а также, если это возможно, $\underset{\wedge}{f}^\#:\pi^n(Y,B)\longrightarrow\underset{\wedge}{\pi}^n(X,A)$ когомотопических групп. Причем, если $\underset{\wedge}{f}\simeq\underset{\wedge}{g}$ то $\underset{\wedge}{f}_*=\underset{\wedge}{g}_*$ $\underset{\wedge}{f}^*=\underset{\wedge}{g}^*$, $\underset{\wedge}{f}_\#=\underset{\wedge}{g}_\#$, $\underset{\wedge}{f}^\#=\underset{\wedge}{g}^\#$

Эта теорема вытекает из следующей теоремы.

<u>Теорема 3.2</u>. Морфизм $f:(\mathbb{X},\mathbb{A})\longrightarrow(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ из прямой гомотопической системы $(\mathbb{X},\mathbb{A})$ в прямую гомотопическую систему $(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ индуцирует гомоморфизмы f_* $\mathbb{H}_n(\mathbb{X},\mathbb{A};G)\longrightarrow$ $\to\mathbb{H}_n(\mathbb{Y},\mathbb{B};G)$ inj групп, $f^*:\mathbb{H}^n(\mathbb{Y},\hat{\mathbb{B}};G)\to\mathbb{H}^n(\mathbb{X},\mathbb{A};G)$ pro-групп, $f_\#:\pi_n(\mathbb{X},\mathbb{A},\mathbb{a})\to\pi_n(\mathbb{Y},\mathbb{B};\hat{\mathbb{b}})$ inj-групп, а также, если это возможно, $f^\#:\pi^n(\mathbb{Y},\mathbb{B})\to\pi^n(\mathbb{X},\mathbb{A})$ pro-групп. Причем, если $\underset{\wedge}{f}\simeq g$, то $f_*=g_*$, $f^*=g^*$, $f_\#=g_\#$, $f^\#=g^\#$

<u>Доказательство</u>. Пусть $\underset{\wedge}{f}:(\mathbb{X},\hat{\mathbb{A}})\to(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ морфизм из $(\mathbb{X},\mathbb{A})$ в $(\mathbb{Y},\mathbb{B})$ Тогда он определяет систему отображений $\{\varphi, f_{\alpha *}\}$ где $\varphi:A\to B$ а $f_{\alpha *}$ $H_n(X_\alpha,A_\alpha;G)\to H_n(Y_{\varphi(\alpha)},B_{\varphi(\alpha)};G)$

Аналогично определены системы $\{\varphi, f_\alpha^*\}$, $\{\varphi, f_{\alpha\#}\}$, $\{\varphi, f_\alpha^\#\}$, где φ $A\longrightarrow B$, а $f_\alpha^*: H^n(Y_{\varphi(\alpha)},B_{\varphi(\alpha)};G)\longrightarrow H^n(X_\alpha,A_\alpha;G)$, $f_{\alpha\#}:\pi_n(X_\alpha,A_\alpha,a_\alpha)\to\pi_n(Y_{\varphi(\alpha)},B_{\varphi(\alpha)},b_{\varphi(\alpha)})$, $f_\alpha^\#:\pi^n(Y_{\varphi(\alpha)},B_{\varphi(\alpha)})\to\pi^n(X_\alpha,A_\alpha)$.

При этом для любых $\alpha\leqslant\alpha'$ в силу того, что $j_{\varphi(\alpha')\beta}f_{\alpha'}i_{\alpha\alpha'}\simeq$ $\simeq j_{\varphi(\alpha)\beta}f_\alpha$ выполнено условие $(j_{\varphi(\alpha')\beta})_*(f_{\alpha'})_*(i_{\alpha\alpha'})_*=$ $=(j_{\varphi(\alpha)\beta})_*(f_\alpha)_*$ аналогично выполнены условия $(i_{\alpha\alpha'})^*(f_{\alpha'})^*$ $(j_{\varphi(\alpha')\beta})^*=(f_\alpha)^*(j_{\varphi(\alpha)\beta})^*$ $(j_{\varphi(\alpha')\beta})_\#(f_{\alpha'})_\#(i_{\alpha\alpha'})_\#=(j_{\varphi(\alpha)\beta})_\#(f_\alpha)_\#$, $(i_{\alpha\alpha'})^\#(f_{\alpha'})^\#(j_{\varphi(\alpha')\beta})^\#=(f_\alpha)^\#(j_{\varphi(\alpha)\beta})^\#$ Это означает, что семейства $\{\varphi, f_{\alpha*}\}$ $\{\varphi, f_\alpha^*\}$, $\{\varphi, f_{\alpha\#}\}$ и $\{\varphi, f_\alpha^\#\}$ определяют гомоморфизмы $\underset{\wedge}{f}_*$ $\underset{\wedge}{f}^*$ и $\underset{\wedge}{f}_\#$, $\underset{\wedge}{f}^\#$ соответственно inj-групп и pro-групп. Пусть теперь заданы гомотопные морфизмы

$\hat{f}, \hat{g} : (\mathbf{X}, \mathbf{A}) \longrightarrow (\mathbf{Y}, \mathbf{B})$ из $(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ в $(\mathbf{Y}, \mathbf{B})$ Для любого $\alpha \in A$ в силу того, что $j_{\psi(\alpha)\beta} f_\alpha \simeq j_{\psi(\alpha)\beta} g_\alpha$ выполняются условия $(j_{\varphi(\alpha)\beta})_* (f_\alpha)_* = (j_{\psi(\alpha)\beta})_* (g_\alpha)_*$, $(f_\alpha)^* (j_{\varphi(\alpha)\beta})^* = (g_\alpha)^* (j_{\psi(\alpha)\beta})^*$, $(j_{\varphi(\alpha)\beta})_\# (f_\alpha)_\# = (j_{\psi(\alpha)\beta})_\# (g_\alpha)_\#$, $(f_\alpha)^\# (j_{\varphi(\alpha)\beta})^\# = (g_\alpha)^\# (j_{\psi(\alpha)\beta})^\#$. Следовательно, гомоморфизмы равны $\hat{f}_* = \hat{g}_*$, $\hat{f}^* = \hat{g}^*$ $\hat{f}_\# = \hat{g}_\#$ и $\hat{f}^\# = \hat{g}^\#$ в inj - и pro-категориях групп.

Замечание. Нетрудно проверить, что при этом композиции $g \circ \hat{f}$ морфизмов $\hat{f}$ и $\hat{g}$ соответствуют равенства $(\hat{g} \circ \hat{f})_* = \hat{g}_* \circ \hat{f}_*$, $(\hat{g} \circ \hat{f})^* = \hat{f}^* \circ \hat{g}^*$, $(\hat{g} \circ \hat{f})_\# = \hat{g}_\# \circ \hat{f}_\#$ и $(\hat{g} \circ \hat{f})^\# = \hat{f}^\# \circ \hat{g}^\#$ а тождественному морфизму $\hat{1}(X, A)$ соответствуют тождественные гомоморфизмы $(\hat{1}(X, A))_*$, $(\hat{1}(X, A))^*$, $(\hat{1}(X, A))_\#$ и $(\hat{1}(X, A))^\#$ Тем самым мы построили функторы $\mathbb{H}_n$, $\mathbb{H}^n$ $\mathfrak{T}_n$ и $\mathfrak{T}^n$ из категории inj-$\mathcal{T}ol$ в категории inj-AG pro-AG

Теорема 3.1. вытекает из теоремы 3.2 и теорем 3.13 и .13 из [7].

Теорема 3.3. Группа $\hat{H}_n(X, A; G)$ изоморфна сингулярной гомологической группе $H_n(X, A; G)$.

Доказательство. Сингулярная гомологическая группа $H_n(X, A; G)$ изоморфна гомологической группе $H_n(S(X, A); G)$, где $S(X, A)$ — сингулярный комплекс Кана. Но $|S(X, A)| = \varinjlim \{(X_\alpha, A_\alpha), i_{\alpha\alpha'}, A\}$ где (X_α, A_α) — конечные его подкомплексы. Мы видели, что прямая гомотопическая система $(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \{(X_\alpha, A_\alpha), i_{\alpha\alpha'}, A\}$ ассоциирована с парой (X, A), следовательно, $\hat{H}_n(X, A; G) = \varinjlim \{H_n(X_\alpha, A_\alpha; G), (i_{\alpha\alpha'})_*, A\}$. Но гомологический функтор H_n коммутирует с функтором прямого предела. Следовательно, $H_n(S(X, A); G) = \varinjlim \{H_n(X_\alpha, A_\alpha; G), (i_{\alpha\alpha'})_*, A\}$. Но тогда $H_n(X, A; G) = \hat{H}_n(X, A; G)$.

Аналогичным образом можно получить следующую теорему.

Теорема 3.4. Обычная гомотопическая группа $\pi(X, A, a)$ изоморфна группе $\hat{\pi}_n(X, A, a)$.

Из теорем 3.1, 3.3 и 3.4 вытекает теорема 3.5.

Теорема 3.5. Группы $H_n(X, A; G)$, $\hat{H}^n(X, A; G)$, $\pi_n(X, A, a)$ и $\hat{\pi}^n(X, A)$ являются кошейповыми инвариантами.

§ 4. Коподвижность

<u>Определение 4.I</u>. Прямая гомотопическая система $(\mathbf{X},\mathbf{A})=\{(X_\alpha,A_\alpha), i_{\alpha\alpha'}, A\}$ называется коподвижной, если для любого $\alpha\in A$ существует такой индекс $\alpha'\geq\alpha$, что для любого индекса $\alpha''\geq\alpha'$ существует такое отображение $r_{\alpha'\alpha''}:(X_{\alpha''},A_{\alpha''})\to(X_{\alpha'},A_{\alpha'})$, что $r_{\alpha'\alpha''} i_{\alpha\alpha''}\simeq i_{\alpha\alpha'}$

<u>Определение 4.2</u>. Пара топологических пространств (X,A) называется коподвижной, если с ней можно ассоциировать коподвижную прямую гомотопическую систему $(\mathbf{X},\mathbf{A})=\{(X_\alpha,A_\alpha), i_{\alpha\alpha'}, A\}$

<u>Теорема 4.I</u>. Коподвижность является кошейповым инвариантом. Более того, если пара (X,A) кошейпово доминирует пару (Y,B) и пара (X,A) коподвижна, то пара (Y,B) также коподвижна.

<u>Доказательство</u>. Из условия кошейпового доминировани следует существование прямых гомотопических систем $(\mathbf{X},\mathbf{A})=\{(X_\alpha,A_\alpha), i_{\alpha\alpha'}, A\}$ и $(\mathbf{Y},\mathbf{B})=\{(Y_\beta,B_\beta), j_{\beta\beta'}, B\}$, ассоциированных соответственно с (X,A) и (Y,B), и таких морфизмов $\underline{f}:(\mathbf{X},\mathbf{A})\to(\mathbf{Y},\mathbf{B})$ и $\underline{g}:(\mathbf{Y},\mathbf{B})\to(\mathbf{X},\mathbf{A})$, что $\underline{f}\circ\underline{g}\simeq\underline{1}_{(Y,B)}$. Покажем, что для любого $\beta\in B$ существует $\beta'\geq\beta$, что для любого $\beta''\geq\beta'$ найдется такое отображение $s_{\beta'\beta''}:(Y_{\beta''},B_{\beta''})\to(Y_{\beta'},B$ что $s_{\beta'\beta''} j_{\beta\beta''}\simeq j_{\beta\beta'}$. Действительно, для любого $\beta\in B$ существует такое $\gamma\geq\beta, \varphi\psi(\beta)$, что

$$j_{\beta\gamma}\simeq j_{\varphi\psi(\beta)\gamma} f_{\psi(\beta)} g_\beta . \tag{4.I}$$

В силу подвижности пары (X,A) для $\psi(\beta)=\alpha$ существует т кое $\alpha'\geq\alpha$, что для любого $\alpha''\geq\alpha'$ найдется такое отображение $r_{\alpha'\alpha''}:(X_{\alpha''},A_{\alpha''})\to(X_{\alpha'},A_{\alpha'})$, что

$$r_{\alpha'\alpha''} i_{\alpha\alpha''}\simeq i_{\alpha\alpha'} . \tag{4.2}$$

В силу того, что $\underline{f}:(\mathbf{X},\mathbf{A})\to(\mathbf{Y},\mathbf{B})$ – морфизм, существует такое $\delta\in B$ что $\delta\geq\varphi(\alpha),\varphi(\alpha')$ и выполнено следующее условие:

$$j_{\varphi(\alpha)\delta} f_\alpha\simeq j_{\varphi(\alpha')\delta} f_{\alpha'} i_{\alpha\alpha'} . \tag{4.3}$$

Пусть $\beta'\geq\gamma,\delta$, а $\beta''\geq\beta'$. В силу того, что $\underline{g}:(\mathbf{Y},\mathbf{B})\to(\mathbf{X},\mathbf{A})$–морфизм, то существует такое $\alpha''\geq\alpha,\alpha',\psi(\beta'')$, что

$$i_{\alpha\alpha''} g_\beta\simeq i_{\psi(\beta'')\alpha''} j_{\beta\beta''} . \tag{4.4}$$

олагаем:

$$S_{p'p''} = j_{\delta p'} j_{\psi(\alpha'')\delta} f_{\alpha'} e_{\alpha'\alpha''} i_{\psi(p'')\alpha''} g_{p''} \qquad (4.5)$$

окажем, что $S_{p'p''} j_{pp''} \simeq j_{pp'}$ Действительно, из услоий (4.I) - (4.5) имеем следующую последовательность сотношений:

$$S_{p'p''} j_{pp''} = j_{\delta p'} j_{\psi(\alpha'')\delta} f_{\alpha'} e_{\alpha'\alpha''} i_{\psi(p'')\alpha''} g_{p''} j_{pp''} \simeq j_{\delta p'} j_{\psi(\alpha'')\delta} f_{\alpha'} e_{\alpha'\alpha''} i_{\alpha\alpha''} g_p \simeq$$
$$j_{\delta p'} j_{\psi(\alpha')\delta} f_{\alpha'} i_{\alpha\alpha'} g_p \simeq j_{\delta p'} j_{\psi(\alpha)\delta} f_\alpha g_p \simeq j_{\delta p'} j_{\psi(\alpha)\gamma} f_\alpha g_p \simeq j_{\gamma p'} j_{p\gamma} \simeq j_{pp'}.$$

ем самым теорема 4.I доказана.

Теорема 4,2. Если пара (X,A) коподвижна и с ней ожно ассоциировать счетную гомотопическую систему $(\mathfrak{X},\mathfrak{A}) = \{(X_k, A_k), i_{kk'}, N\}$, то сингулярная когомологическая группа $(X,A;G)$ изоморфна группе $\overset{o}{\underset{\wedge}{H}}{}^n(X,A;G)$

Доказательство. В силу счетности системы $(\mathfrak{X},\mathfrak{A}) = \{(X_k, A_k), i_{kk'}, N\}$ можно рассмотреть следующую точную оследовательность [8]:

$$\to \varprojlim{}^1 H^{n-1}(X_k, A_k; G) \to H^n(X,A;G) \to \varprojlim H^n(X_k, A_k; G) \to 0,$$

де $\varprojlim{}^1$ - первый приведенный функтор обратного преела [9].

окажем, что в силу коподвижности пары (X,A) обратная истема групп $\{H^{n-1}(X_k, A_k; G)\}$ удовлетворяет условию иттаг-Леффлера [10], т.е. для любого k существует акое $k' \geqslant k$, что для любого $k'' \geqslant k$ имеем $(i_{kk''})^*(H^{n-1}) = (i_{kk'})^*(H^{n-1})$ Действительно, для любого k существует акое $k' \geqslant k$ что для любого $k'' \geqslant k$ найдется такое ображение $e_{k'k''}:(X_{k''}, A_{k''}) \to (X_{k'}, A_{k'})$, что $e_{k'k''} i_{kk''} \simeq i_{kk'}$ ледовательно, $(i_{kk''})^*(e_{k'k''})^* = (i_{kk'})^*$ Но из условия $i_{kk''} \simeq i_{k'k''} i_{kk'}$ следует, что $(i_{kk''})^* = (i_{kk'})^*(i_{k'k''})^*$. Указанные раства влекут $(i_{kk''})^*(H^{n-1}) = (i_{kk'})^*(H^{n-1})$.

Так как обратная система групп $\{H^{n-1}(X_k, A_k; G)\}$ удовворяет условию Миттаг-Леффлера, то $\varprojlim{}^1 \{H^{n-1}(X_k, A_k; G)\} = 0$ 0] Но тогда из приведенной выше точной последоваталььи следует, что группа $H^n(X,A;G)$ изоморфна группе $X,A,G) = \varprojlim \{H^n(X_k, A_k; G)\}$, что и следовало доказать.

Приведем пример пространства X не являющегося кодвижным. Таким пространством будет дополнение $X = E^3 \setminus S$

в E^3 к диадическому соленоиду S Известно, что $\check{H}_0(S;Z) = Z$, а $\bar{H}_0(S;Z) = Z \oplus Ext(Q,Z)$ где Q - аддитивная группа двоично-рациональных чисел. По теореме двойственности Чогошвили [II] имеем следующий изоморфизм $\check{H}_0(S;Z) \approx \underset{\wedge}{H}^2(E^3 \setminus S;Z)$. По теореме двойственности Ситникова [II] $\bar{H}_0(S;Z) \approx \check{H}^2(E^3 \setminus S;Z)$. Так как $(E^3 \setminus S) \in ANR$ то $\check{H}^2(E^3 \setminus S;Z) \approx H^2(E^3 \setminus S;Z)$ Допустим теперь, что $X = E^3 \setminus S$ является коподвижным пространством, тогда по теореме 4.2 имеет место следующий изоморфизм $H^2(E^3 \setminus S;Z) \approx \underset{\wedge}{H}^2(E^3 \setminus S;Z)$. Но в силу приведенных выше изоморфизмов последний изоморфизм не возможен, следовательно, пространство $X = E^3 \setminus S$ не является коподвижным.

§ 5. Правые гомотопии и расслоения в категории кошейпов

Пусть $\underset{\wedge}{f}, \underset{\wedge}{g} : X \to Y$ - два кошейповых отображения из X в Y, причем $\underset{\wedge}{f} \simeq \underset{\wedge}{g}$ Тогда существует прямая гомотопическая система $\mathbf{X} = \{X_\alpha, i_{\alpha\alpha'}, A\}$, ассоциированная с X, и два морфизма $f, g : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, где $\mathbf{Y} = \{Y, 1_Y, 1\}$, что $\underset{\wedge}{f} \simeq \underset{\wedge}{g}$. Но тогда для любого $\alpha \in A$ имеем гомотопию отображений f_α и g_α, т.е. $f_\alpha \simeq g_\alpha$ Но известно [I2], что в этом случае для диагонального отображения $(f_\alpha, g_\alpha) : X_\alpha \to (Y \times Y)$ существует поднятие $k_\alpha : X_\alpha \dashrightarrow Y^I$, то есть $p_0 k_\alpha(x) = f_\alpha(x)$ и $p_1 k_\alpha(x) = g_\alpha(x)$, где $p_i \; Y^I \to Y$ - естественная проекция, которая каждому пути $\sigma : I \to Y$ ставит в соответствие образ $\sigma(i) \in Y$.

<u>Теорема 5.I.</u> Система отображений $\underset{\wedge}{k} = \{k_\alpha\}$ является морфизмом $k : \mathbf{X} \to Y^I$, определяющим кошейповое отображение $\underset{\wedge}{k} : X \to Y^I$, называемое нами правой гомотопией для $\underset{\wedge}{f}$ и $\underset{\wedge}{g}$

<u>Доказательство.</u> Покажем, что $k : \mathbf{X} \to Y^I$ морфизм из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}^I$, где $\mathbf{Y}^I = \{Y^I, 1_{Y^I}, 1\}$ Пусть $\alpha' \geqslant \alpha$ Покажем, что $k_\alpha \simeq k_{\alpha'} i_{\alpha\alpha'}$. Для этого нужно для отображения $(k_\alpha, k_{\alpha'} i_{\alpha\alpha'}) : X_\alpha \to Y^I$ найти поднятие $k : X_\alpha \to Y^{I \times I}$ для некоторой проекции $(\bar{p}_0, \bar{p}_1) : Y^{I \times I} \to (Y^I \times Y^I)$

В произведении $I \times I$ будем различать две пары отрезков $I \times \{0\}$, $I \times \{1\}$ и $\{0\} \times I$, $\{1\} \times I$ Так как $f_\alpha \simeq g_\alpha$ и $f_{\alpha'} \simeq g_{\alpha'}$, то для отображения $(f_\alpha, g_\alpha) \; X_\alpha \to (Y \times Y)$ сущевует поднятие $k_{\alpha'} X \to Y^{I\times\{0\}}$ а для отображения $\alpha', g_{\alpha'})\ X_{\alpha'} \longrightarrow (Y\times Y)$ существует поднятие $k_{\alpha'} : X_{\alpha'} \to Y^{I\times\{1\}}$. Так как $f_\alpha \simeq f_{\alpha'} i_{\alpha\alpha'}$, то для отображения $f_{\alpha'} i_{\alpha\alpha'}) \cdot X_\alpha \longrightarrow (Y\times Y)$ существует поднятие $\omega_\alpha : X_\alpha \to Y^{\{0\}\times I}$. Рассмотрим естественную проекцию $(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1)$: $Y^{I\cdot I} \longrightarrow (Y^{I\times\{0\}} \times Y^{I\times\{1\}})$ Поскольку подмножество $Z = (I\times\{0\} \cup \{0\}\times I \cup I\times\{1\})$ множества $I\times I$ является его деформационным ретрактом, то существует деформация d: $I \longrightarrow I\times\{0\} \cup \{0\}\times I \cup I\times\{1\}$ Отображение $(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1)$ можно представить как композицию $Y^{I\times I} \to (Y^{I\times\{0\}} \times Y^{\{0\}\times I} \times Y^{I\times\{1\}}) \to (Y^{I\times\{0\}} \times Y^{I\times\{1\}})$ причем пространство $(Y^{I\times\{0\}} \times Y^{\{0\}\times I} \times Y^{I\times\{1\}})$ гомеоморфно пространству Y^{Z} Теперь отображение $(k_\alpha, k_{\alpha'} i_{\alpha\alpha'})\ X_\alpha \to (Y^{I\times\{0\}} \times Y^{I\times\{1\}})$ поднимаем отображением $(k_\alpha, \omega_\alpha, k_{\alpha'} i_{\alpha\alpha'}) : X_\alpha \to (Y^{I\times\{0\}} \times Y^{\{0\}\times I} \times Y^{I\times\{1\}})$, отображение $(k_\alpha, \omega_\alpha, k_{\alpha'} i_{\alpha\alpha'}) : X_\alpha \to (Y^{I\times\{0\}} \times Y^{\{0\}\times I} \times Y^{I\times\{1\}})$

однимаем до отображения $k\ X_\alpha \to Y^{I\times I}$. аждой точке x пространства X_α ставим в соответствие омпозицию d и $(k_\alpha, \omega_\alpha, k_{\alpha'} i_{\alpha\alpha'})(x)$ Тем самым получим однятие k

<u>Определение 5.I</u>. Отображение $p : E \to B$ удовлетворя- относительно X аксиоме о накрывающей кошейповой гомоопии, если для любого кошейпового отображения $\hat{f}^* : X \to E$ любой кошейповой гомотопии $\hat{f}_t\ X \to B$ кошейпового ображения $\hat{f} = p \cdot \hat{f}^* : X \to B$ существует кошейповая гомопия $\hat{f}^*_t\ X \to E$ кошейпового отображения $\hat{f}^*\ X \to E$, акрывающая кошейповую гомотопию $\hat{f}_t$, то есть $\hat{f}_t = p \hat{f}^*_t$

<u>Теорема 5.2</u>. Каждое расслоение $p\ E \to B$ в смысе Серра удовлетворяет аксиоме о накрывающей кошейповой омотопии относительно любого топологического пространства X

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathbb{X} = \{X_\alpha, i_{\alpha\alpha'}, A\}$ – прямая гомотоическая система, ассоциированная с X а $f^* : \mathbb{X} \to E$ морзм, определяющий кошейповое отображение $\hat{f}^*$ По услою теоремы задана кошейповая гомотопия $\hat{f}_t : \mathbb{X} \to B$, т.е.

для любого t f_t представляет собой морфизм, определяющий кошейповое отображение $\hat{f}_t : X \to B$, причем $p\hat{f}^* = f$. Для любого α рассмотрим отображение $f_\alpha^* : X \to E$ и гомотопию $f_{\alpha t} : X_\alpha \times I \to B$ такую, что $p f_\alpha^* = f_{\alpha 0}$ В силу того что $p : E \to B$ является расслоением Серра, то существует поднятие $f_{\alpha t}^* : X_\alpha \times I \to E$, для которого $f_{\alpha 0}^* = f_\alpha^*$ и $p f_{\alpha t}^* = f_{\alpha t}$. Докажем, что для любого t система отображений $\{ f_{\alpha t}^* \}$ образует морфизм из $\mathbb{X}$ в E Действительно, пусть $\alpha' \geqslant \alpha$ тогда из определения морфизма $\hat{f}^*$ следует, что $f_\alpha^* \simeq f_{\alpha'}^* i_{\alpha\alpha'}$ Но по построению $f_\alpha^* \simeq f_{\alpha t}^*$, а $f_{\alpha'}^* \simeq f_{\alpha' t}^*$, следовательно, $f_{\alpha t}^* \simeq f_{\alpha' t}^* i_{\alpha\alpha'}$

Замечание 5.I. Теорема 5.2 является двойственной к известной теореме теории шейпов, утверждающей, что каждое замкнутое вложение является в категории шейпов корасслоением.

Замечание 5.2. В пятом параграфе для упрощения доказательств мы пользовались морфизмами из прямых гомотопических систем в топологические пространства, а не в прямые гомотопические системы, ассоциированные с этими пространствами. Аналогичные, но двойственные упрощения достигались в категории шейпов с помощью аппроксимационных последовательностей [13].

В заключение сформулируем несколько задач, возникающих в категории кошейпов.

Задача I. Что собой представляют корасслоения в категории кошейпов?

Задача 2. Можно ли гомотопные кошейповые отображения представить через цилиндрический объект; по-другому, существует ли между ними левая [12] гомотопия?

Литература

I. Лисица Ю.Т. Теория кошейпов и сингулярные гомологии.-В кн.:Труды конференции по геометрической топологии. Варшава, I978.

2. Borsuk K. Theory of shape.-Monografie Matematyczne. Warshawa, 1975.

3. Mardešić S. Shapes for topological spaces.-Gen.Top. and its applications, 1973, vol.3.

Лисица Ю.Т. Сильная теория шейпов и гомологии Стинро-
-Ситникова.-В кн.: Труды конференции по геометрической
пологии. Варшава, 1976.

Лисица Ю.Т. Сильная категория кошейпов.-В кн.: Тирас-
льский симпозиум по общей топологии и ее приложениям.
располь, 1979.

Рохлин В.А., Фукс Д,Б. Начальный курс топологии. М.,
77.

Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической то-
логии, Москва, 1958.

Milnor J. On axiomatic homology theory,-Pacif.J.of
th. 1962, N 12.

Bousfield A.K., Kan D.M. Homotopy limits,completions
d localisations.-Lecture Notes in Math. 1973, N

Edwards D.A., Hastings H.M. Čech and Steenrood homo-
py theories with applications to geometric topology.-
cture Notes in Math. 1976, N 542.

Александров П.С. Топологические теоремы двойственнос-
и, - УМН, 1972, т.27,вып.I, с.8I-I46.

. Quillen D. Homotopical algebra,-Lecture Notes in
th. 1967, N 43.

Лисица Ю.Т. Продолжение последовательностей, аппрокси-
рующих данный компакт,-Труды Московского математического
щества, 1975, т.32.

ступила 19 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига,1981.

УДК 513.83

Пример одной топологической группы

В.И.Малыхин

Московский институт управления им. Серго Орджоникидзе

Пример [CH]. Существует регулярная нормальная наследственно сепарабельная счетно-компактная топологическая группа, квадрат которой не счетно-компактен и имеет несчетную тесноту.

Этот результат был уже получен автором, когда он узнал из препринта Ван Дауэна [1], что тот в предположении аксиомы Мартина построил счетно-компактную группу без сходящихся последовательностей и доказал теорему о существовании в каждой такой группе двух счетно-компактных подгрупп, произведение которых не счетно-компактно.

Интерес к указанному выше примеру объясняется также и следующим. Как известно, А.В.Архангельский [2] построил два пространства счетной тесноты, произведение которых счетной тесноты не имеет. Ранее автор [3] доказал, что такого быть не может, если хотя бы одно из этих пространств-бикомпакт. Казалось возможным, что наложение столь же сильного, как и бикомпактность, условия на пространство,- быть топологической группой-способно дать такой же эффект. Однако приведенный выше пример показывает что это не так.

Построение примера использует конструкцию из работы А.Хайнала и И.Юхаса [4]. Построение довольно длинно, и ниже дается лишь его набросок.

Конструируемая группа будет подгруппой в 2^{ω_1} и будет иметь мощность $\aleph_1$. Сначала построим подходящую последовательность точек $\mathcal{X}=\{\varphi_\alpha : \alpha\in\omega_1\}$ из 2^{ω_1}, и затем на это множество натянем искомую группу G. Возьмем в $\mathcal{X}$ / т.е. пока $\mathcal{X}$ еще не построено, во множестве ω_1, элементами которого будем индексировать точки φ_α / два дизъюнктных несчетных подмножества $C_1=\{c^1_\alpha : \alpha\in\omega_1\}$ и $C_2=\{c^2_\alpha : \alpha\in\omega_1\}$. В G^2 множество $C=\{\bar{c}_\alpha=\langle c^1_\alpha,c^2_\alpha\rangle : \alpha\in\omega_1\}$, где $\bar{c}_\alpha$ понимается как точка в G^2 с координатами $\langle c^1_\alpha,c^2_\alpha\rangle$ будет иметь точку $\bar{0}=\langle 0,0\rangle$ своей предельной, но никакое счетное подмножество из C этим свойством обадать не будет.Это и есть нарушение счетной тесноты в G^*

В предположении CH множество всех счетных бесконечных емейств,состоящих из конечных подмножеств $\mathcal{K}$, занумеруем четными ординалами

$\{K_\mu : \mu \in \omega_1\}$, $|K_\mu| = \aleph_0$; если $k \in K_\mu$,то $|k| < \aleph_0$ и $k \subset \mathcal{K}$

Теперь предположим,что $\nu \in \omega_1$ и все точки φ_α с $\alpha \in \nu$ же определены для всякого $\gamma \in \nu$,т.е. являются точками 2^ν сли k есть конечное подмножество из $\mathcal{K}$,то через $\Sigma_\nu(k)$ бозначается сумма $\Sigma\{\varphi_\alpha : \alpha \in k\}$ в группе 2^ν .Пусть ϵ – акое-нибудь открыто-замкнутое множество в 2^ν ,а K –какое-ибудь семейство конечных подмножеств из $\mathcal{K}$,тогда пусть

$$L^\nu(K,\varepsilon) = \{k \in K \quad \Sigma_\nu(k) \in \varepsilon\}.$$

(Когда на $\mathcal{K}$ будет в конце концов натянута группа G ,то аждый ее элемент будет суммой конечного множества k элеентов из $\mathcal{K}$,а $L^\nu(K,\varepsilon)$ – подмножество из G ,каждый элеент которого лежит в ε, и есть сумма конечного множества лементов группы G)

Наконец,определим семейство $\mathcal{L}^\nu$,членами которого являются севозможные семейства $L^\nu(K,\varepsilon)$,где ε –открыто-замкнутое ножество в 2^ν K – счетное бесконечное семейство коечных подмножеств из $\mathcal{K}$ и K в нумерации $\{K_\mu : \mu \in \omega_1\}$ меет номер,меньший ν, и всякое конечное подмножество $k \in K$ оже состоит из φ_α с $\alpha \in \nu$.Ясно,что $\mathcal{L}^\nu$ счетно;пусть далее ножество C_ν состоит из точек $\bar{c}_\alpha = \langle c_\alpha^1, c_\alpha^2 \rangle$ из C ,таких, о все c_α^1, c_α^2 ,как точки из $\mathcal{K}$,имеют номер,меньший ν . но,что C_ν также счетно.

Сейчас все точки φ_α с $\alpha \in \nu$ будут определены на ν ,при- в G^2 точка 0 будет отделена от множества C_ν ,и при том для каждого $L \in \mathcal{L}^\nu$ и каждого $i \in 2$ в L найдется есконечно много точек,которые на ν принимают значение i

Самое главное-так определять значения точек φ_α на ν , тобы ни для одной пары $\bar{c}_\alpha = \langle c_\alpha^1, c_\alpha^2 \rangle \in C_\nu$ обе точки не приняли ν значение 0 .Этого можно добиться,определяя значения очек φ_α на ν постепенно;важно при этом знать,что в группе 2^ν замыкание до подгруппы $Cl[T]$ конечного множества T само конечно, в то время как каждое L из $\mathcal{L}^V$ бесконечно. Высказанные соображения позволяют определить значения точек φ_α на V нужным образом.

Описанное построение имеет своей целью обеспечить наследственную сепарабельность конструируемой группы G и отделить каждое множество C_V в G^1 от точки O. Теперь нужно позаботиться о накоплении в G^1 множества C к O. Для этого заметим, что $T_V = \mathcal{A}\ell[\{\varphi_\alpha : \alpha \in V\}]$ – счетная подгруппа в 2^V, поэтому в произвольной окрестности V точки O в 2^V найдутся точки c', c'' такие, что $c' \notin T_V$, $c'' \notin \mathcal{A}\ell[T_V \cup \{c'\}]$. Включим эти точки в $\mathcal{K}$, присвоив им подходящие номера.

Далее позаботимся о счетной компактности конструируемой группы G. Для этого достаточно обеспечить, чтобы $\pi_\alpha G = 2^\alpha$ для любого $\alpha \in \omega_1$ (что, очевидно, и необходимо). Это достигается включением в $\mathcal{K}$ все новых и новых точек из дополнения в 2^α к $\mathcal{A}\ell[\{\varphi_\beta : \beta \in \Gamma\}]$ для $\alpha \in \Gamma$.

По завершении трансфинитного процесса будет построено множество точек $\mathcal{K}$ в 2^{ω_1}. Натянутая на это множество группа G будет (регулярной) нормальной, наследственно сепарабельной, счетно-компактной (доказательства этого, более подробные, можно найти в [4]).

Далее из построения следует, что O есть предельная точка для множества C в G^1, но никакое счетное подмножество из C не имеет O своей предельной точкой, ибо отделено от O на некотором шаге трансфинитного процесса.

Примерно так же можно добиться того, чтобы в G^1 у множества C всякое счетное подмножество было замкнуто во всей группе G^1, откуда, в частности, будет следовать, что G^1 не счетно-компактно. Для этого надо отделять счетные подмножес из C не только от O, но и от других точек группы G^1, хотя принципиальной разницы здесь нет.

В заключение сформулируем несколько проблем.

1. Построить группу Фреше-Урысона, квадрат которой свойством Фреше-Урысона не обладает или даже не имеет счетной тесноты.

2. Аналогичный вопрос – о секвенциальной группе.

3. Построить секвенциальную группу индекса секвенциальнос-

ти, промежуточного между 1 - свойство Фреше-Урысона, - и ω_1 - таким индексом секвенциальности обладает свободная топологическая группа любого бесконечного компакта.

4. Поискать такие алгебраические группы, согласованная со структурой которых топология подчинялась бы некоторым ограничениям (например, чтобы квадрат такой топологической группы не повышал тесноту, сохранял свойство Фреше-Урысона и т.п.).

ЛИТЕРАТУРА

.Douwen E.K. The product of countably compact topological groups, preprint.

2.Архангельский А.В. Спектр частот топологического пространства и классификация пространств. - ДАН СССР, 1972, т.206, №2, с.265-268.

.Малыхин В.И. О тесноте и числе Суслина в $\exp X$ и в произведении пространств. - ДАН СССР, 1972, т.203, №5, с.1001-1003.

.Hajual A., Juhass I. A separable normal topological group need not be Lindelöf.-Gen.Top. and Appl, 1976, N 6, p. 199-205.

Поступила 7 февраля 1980 г.

Топологические пространства и их отображения, Рига, 1981

УДК 513.83

О ГОМОТОПИЧЕСКОМ ТИПЕ ANR ДЛЯ ПЕРИСТЫХ ФИНАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С.Мардешич, А.Шостак
Загребский университет (С Ф Р Ю)
ЛГУ им. П.Стучки

В своих предыдущих работах [5] и [6] авторы показали, что каждый ANR в классе перистых паракомпактов [1] и каждый ANR в классе $\mathcal{L}$-пространств [6] имеют гомотопические типы симплициальных комплексов. В этой заметке продолжается изучение классов пространств, каждый ANR которых имеет гомотопический тип некоторого симплициального комплекса. Основным результатом здесь является теорема 4, согласно которой каждый ANR в классе перистых финально-компактных пространств имеет гомотопический тип некоторого счётного локально-конечного симплициального комплекса.

Все пространства, встречающиеся в заметке, предполагаются хаусдорфовыми, все отображения - непрерывными. Мы используем следующие обозначения:

$\mathcal{P}$ - класс перистых паракомпактов (или, кратко, р-паракомпактов) [1]

$\mathcal{F}$ - клабс финально-компактных пространств

$\mathcal{PF} = \mathcal{P}\cap\mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{PF}$ - класс перистых финально-компактных пространств.

$\mathcal{M}$ - класс метрических пространств.

$\mathcal{MS}$ - класс пространств со счётной базой.

Через ANR($\mathcal{K}$) обозначается, как обычно, абсолютный окрестностный ретракт в классе $\mathcal{K}$ топологических пространств.

Напомним, что отображения f и g пространства X в пространство У называются $\mathcal{U}$-близкими, где $\mathcal{U}$ - некоторое открытое покрытие пространства У , если для любой точки $x \in X$ найдётся такой элемент $u \in \mathcal{U}$, что $f(x)$, $g(x) \in u$. Отображения $f, g : X \to \text{У}$ называются $\mathcal{U}$-гомотопными, если существует такая связывающая их гомотопия $H: X \times I \to \text{У}$ $(I = [0,1])$, что для каждой точки $x \in X$ множество $H(\{x\} \times I)$ целиком содержится в некотором $u \in \mathcal{U}$. Говорят, что пространство X $\mathcal{U}$-доминируется пространством У , если существуют отображения φ: $\text{У} \to X$ и $\psi : X \to \text{У}$ такие, что композиция $\varphi \cdot \psi$ $\mathcal{U}$-гомотопна тождественному отображению $id : X \to X$ [4 , с. 4.I] . Если при этом единственным элементом покрытия $\mathcal{U}$ является всё X, то говорят просто, что X доминируется пространством У

В [5] авторами рассматривались пространства класса $ANR(\mathcal{P})$ Начиная изучение класса абсолютных (окрестностных) ретрактов метристых финально-компактных пространств, установим прежде всего следующие простые соотношения, связывающие эти два класса

<u>Теорема I</u>. Имеют место равенства:

$$AR(\mathcal{P}) \cap \mathcal{PF} = AR(\mathcal{PF}) \quad \text{и}$$
$$ANR(\mathcal{P}) \cap \mathcal{PF} = ANR(\mathcal{PF})$$

<u>Доказательство</u>. Мы проведём доказательство только в абсолютном случае; доказательство окрестностного случая совершенно аналогично.

Включение $AR(\mathcal{P}) \cap \mathcal{PF} \subset AR(\mathcal{PF})$ очевидно. Обратно, предположим, что $\text{У} \in AR(\mathcal{PF})$. Согласно теореме Нагаты [7] каждый метристый паракомпакт вкладывается замкнутым образом в произведение вида $M \times I^{\tau}$ где $M \in \mathcal{M}$, $I = [0,1]$, а τ - некоторый кардинал. Поэтому, показав, что У является ретрактом каждого пространства вида $M \times I^{\tau}$, содержащего У замкнуто, мы сможем заключить, что $\text{У} \in AR(\mathcal{P}) \cap \mathcal{PF}$

Итак, предположим, что У - замкнутое подмножество в $M \times I^{\tau}$, и пусть π - проекция $M \times I^{\tau}$ на M . Будучи проекцией вдоль бикомпакта, π совершенно и, следовательно, $\pi(\text{У}) = M_0$ - замкнутое подмножество в M ; при этом M_0 , очевидно, финально-компактно, а следовательно, и сепарабельно [3 , теорема 4.I.I5] .

Воспользовавшись теоремой Куратовского - Войдыславского, погрузим M_0 в нормированное пространство L так, чтобы M_0 было замкнуто в своей выпуклой оболочке $C = \mathrm{Conv}(M_0) \subset L$ Покажем, что C сепарабельно. В самом деле, сепарабельность множества M_0 позволяет выбрать в нём счётное всюду плотное подмножество $\mathcal{D}$ Счётность $\mathcal{D}$ влечёт, как легко видеть, сепарабельность множества $\mathrm{Conv}(\mathcal{D})$; в свою очередь, плотность множества $\mathcal{D}$ в M_0 позволяет заключить о плотности множества $\mathrm{Conv}(\mathcal{D})$ в C Тем самым сепарабельность множества C доказана, и, следовательно, $C \times I^{\tau} \in \mathcal{P}\mathcal{F}$. Поскольку Y является, очевидно, замкнутым подмножеством в $C \times I^{\tau}$, отсюда немедленно следует, что существует ретракция $r_1 : C \times I^{\tau} \to Y$

Далее согласно теореме Ю.Лисицы [11] C является $AR(\mathcal{P}$ а следовательно, $AR(\mathcal{P})$ будет и произведение $C \times I^{\tau}$.

Рассмотрим присоединённое пространство $M' = M \cup_i C$, где i - тождественное отображение M_0 $(\subset M)$ на M_0 $(\subset C)$. Легко заметить, что M' метризуемо (это следует, например, из [3 , теорема 4.4.17]), а значит, $M' \times I^{\tau} \in \mathcal{P}$. Поскольку $C \times I$ очевидно, является замкнутым подмножеством в $M' \times I^{\tau}$, отсюда следует, что существует ретракция r_2 $M' \times I^{\tau} \to C \times I^{\tau}$. Для завершения доказательства теоремы нам достаточно определить ретракцию r $M \times I^{\tau} \to Y$ как ограничение композиции ретракций r_2 и r_1 на множество $M \times I^{\tau}$.

Теорема 2. Для каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства $Y \in ANR(\mathcal{P}\mathcal{F})$ существует такое открытое его покрытие $\mathcal{U}'$, что любые два $\mathcal{U}'$-близкие отображения f и g произвольного топологического пространства X в Y являются $\mathcal{U}$-гомотопными.

Доказательство. Рассуждая точно так же, как и в предыдуще теореме, можем погрузить Y замкнутым образом в произведение $C \times I^{\tau}$, где C - сепарабельное выпуклое подмножество нормирова ного пространства. Пусть O - окрестность множества Y в $C \times$ которая ретрагируется на Y, а r - соотвествующая ретракция. Рассмотрим произвольное покрытие $\mathcal{U}$ пространства Y, тогда $r^{-1}\mathcal{U} = \{r^{-1}U : U \in \mathcal{U}\}$ покрывает, очевидно, множество O. Впишем в $r^{-1}\mathcal{U}$ открытое покрытие $\mathcal{V}$ множества Y в $C \times I^{\tau}$, состояще из выпуклых множеств произведения $C \times I^{\tau}$, и положим $\mathcal{U}' = \{V \cap Y$

$V\in\mathcal{V}\}$ Ясно, что, если отображения f, g $X \to Y$ $\mathcal{U}'$-близки, то гомотопия $H: X\times I \to O$, заданная формулой $H(x,t)$ $t\cdot f(x) + (1-t)g(x)$, определяет $\mathcal{V}$-гомотопию, связывающую отображения f и g. Но тогда композиция $r\circ H$ является, как легко видеть, искомой $\mathcal{U}$-гомотопией, связывающей отображения f и g.

Теорема 3. Для каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства $Y\in ANR(\mathcal{PF})$ существует счётный симплициальный комплекс N, который $\mathcal{U}$-доминирует над пространством Y.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, вложим пространство Y замкнутым образом в произведение $C\times I^{\tau}$, где C – сепарабельное выпуклое подмножество нормированного пространства. Пусть O – окрестность множества Y в $C\times I^{\tau}$, которая ретрагируется на Y, и r – соответствующая ретракция. Воспользовавшись предыдущей теоремой, найдём такое открытое покрытие $\mathcal{U}'$ пространства Y, что любые два $\mathcal{U}'$-близких отображения в Y $\mathcal{U}$-гомотопны.

Для каждой точки $y\in Y$ зафиксируем некоторый содержащий её элемент $U'_y\in\mathcal{U}'$ и выберем выпуклую окрестность W_y этой точки, лежащую в $r^{-1}(U'_y)$. Поскольку Y финально-компактно, а следовательно, и паракомпактно, в его покрытие $\{W_y\cap Y: y\in Y\}$ можем вписать локально-конечное звёздное измельчение $\mathcal{V}$; при этом, очевидно, без ограничения общности можем считать $\mathcal{V}$ счётным, а все входящие в него множества – непустыми.

Рассуждая совершенно так же, как и при доказательстве утверждения 3.2 из [6], и с учётом предыдущей теоремы показываем, что нерв $N(\mathcal{V})$ покрытия $\mathcal{V}$ $\mathcal{U}$-доминирует пространство $Y\in ANR(\mathcal{PF})$ что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 4. Каждый $ANR(\mathcal{PF})$ имеет гомотопический тип некоторого счётного локально-конечного симплициального комплекса K.

Доказательство. Пусть $Y\in ANR(\mathcal{PF})$. Согласно теореме 2 пространство Y доминируется некоторым счётным комплексом N. Известно, что каждая компонента связности комплекса является подкомплексом и при этом открыто-замкнута; следовательно, N распадается в счётную прямую сумму своих связных подкомплексов $N = N_1\oplus N_2\oplus ,\dots \oplus N_k\oplus \dots$.

Поскольку X доминируется симплициальным комплексом N, найдутся отображения f $X \to N$ и $g : N \to X$ такие, что $g \cdot f \simeq id$. Отсюда легко заметить, что для каждого i множество $X_i = f^{-1}(N_i$ является открыто-замкнутой компонентой пространства X. Таким образом, X разлагается в прямую сумму $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_i +$. где каждое X_i гомотопически доминируется соответствующим счётным связным комплексом N Согласно теореме Лунделла – Уайнграма [10 теорема 6.1] отсюда следует, что X_i имеет гомотопический тип некоторого локально-конечного симплициального комплекса K_i. Более того, из доказательства теоремы Лунделла-Уайнграма нетрудно заметить, что комплекс K_i может быть выбран при этом локально-конечным. Но тогда и всё пространство X имеет гомотопический тип счетного локально-конечного симплициального комплекса $K = K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_i +$ что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. Каждый $ANR(\mathcal{PF})$ имеет гомотопический тип некоторого $ANR(\mathcal{MS})$

В самом деле, каждый локально-конечный симплициальный комплекс K является $ANR(\mathcal{M})$. Если при этом K счётен, то он и сепарабелен, а следовательно, $K \in ANR(\mathcal{MS})$

Замечание. Итак, мы показали, что каждый $ANR(\mathcal{PF})$ имеет гомотопический тип некоторого $ANR(\mathcal{MS})$. Отметим, что справедливо и обратное, в некотором смысле, утверждение, а именно:

каждый $ANR(\mathcal{MS})$ является $ANR(\mathcal{PF})$.

Действительно, если $X \in ANR(\mathcal{MS})$ то X является перистым финально-компактным пространством, т.е. $X \in \mathcal{PF}$. Кроме того, $X \in ANR(\mathcal{M})$ [9, следствие 5.6] Отсюда, воспользовавшись теоремой Ю.Лисицы [11], заключаем, что $X \in ANR(\mathcal{P})$, но тогда и тем более $X \in ANR(\mathcal{PF})$.

Воспользовавшись теоремой 4 и рассуждая так же, как и в доказательстве теоремы (3.4) из [6] легко убедиться в справедливости следующего утверждения:

Теорема 5. Каждый $AR(\mathcal{PF})$ имеет гомотопический тип точки т.е. стягиваем.

Литература

Архангельский А:В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально-бикомпактные пространства.- Матем.сб., 1965, т.67, № 1, с.55-88.

Борсук К. Теория ретрактов. М., 1972.

Engelking R. General Topology. Warszawa, PWN, 1978.

Mardešić S. Spaces having the homotopy type of CW-complexes. Univ.of Kentucky, Lexington, Kentucky, 1978.

Шостак А.П. О гомотопическом типе ANR в классе p-паракомпактов. - В кн.: Международная топологическая конференция. Тезисы докладов. М.,1979, с. 102.

Мардешич С., Шостак А. О совершенных прообразах кружевных пространств. - УМН, 1980, т.35, № 3, с. 84-91.

Nagata J. A note on M-spaces and topologically complete spaces.-Proc.Japan.Acad.,1969, vol.45, p.541-543.

Wall C.T.C. Finiteness conditions for CW-complexes. - Ann.Math., 1965, vol.81, p.56-69.

Hu S.T. Theory of retracts. Wayne State Univ.,Detroit,1965.

Lundell A.T., Weingram J. The topology of CW-complexes, van Nostrand-Reinhold, New York, 1969.

Лисица Ю.Т. Продолжение непрерывных отображений и факторизационная теорема. - Сибирский матем.журнал, 1973, т.14, №1, с. 128-139.

Поступила 10 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига,1981.

УДК 513.88

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ-ВИНЕРА ДЛЯ МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП ЛИ

Л.А.Севастьянов

Университет Дружбы Народов им. П.Лумумбы

С.Андо в работах [5,6] доказал аналог теоремы Пэли-Винера для некоторых классов нильпотентных групп Ли с устойчивыми поляризациями. В данной заметке конструкция Андо, несколько модифицированная, реализуется для класса метабелевых групп Ли (в том числе для групп с неустойчивыми поляризациями).

Предварительные сведения. Пусть G – связная односвязная вещественная метабелева группа Ли, – её алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ – векторное пространство, дуальное к $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*_c$ – комплексификация $\mathfrak{g}^*$

В $\mathfrak{g}^*$ существует линейное подмногообразие Q, имеющее ровно по одной точке пересечения с почти всеми G -орбитами (относительно коприсоединенного действия) в $\mathfrak{g}^*$, т. с орбитами, объединение которых открыто в топологии Зарисског В $\mathfrak{g}$ существует такой базис $\{e_1,\dots e_n\}$,что $e_1,\dots,e_l$ являются координатами на Q, а векторы e_{l+1}, e принадлежат аннулятору Q (см. [1,2]).

Пусть λ – произвольный элемент из $\mathfrak{g}^*_c$ G_λ стационарная подгруппа точки λ, $m = m(\lambda) = \dim G_\lambda$ тогда в $\mathfrak{g}$ существует [7] такой набор векторов $\{e_\lambda^{m+1}\dots, e_\lambda^{n}\}$, что отображение

$$(g_\lambda; t_1,\dots,t_{n-m}) \mapsto g = g_\lambda \cdot \exp(t_1 e_\lambda^{m+1}) \cdot \quad \exp(t_{n-m} e_\lambda^{n})$$

является гладким диффеоморфизмом многообразий $G_\lambda \times R^{n-m} \to G$

Определение представлений $e(\lambda$ Обозначим через $\|t\|_\lambda^i$ норму оператора $\mathrm{Ad}\exp(t e_\lambda^{m+i})$ в конечномерном пространстве $\mathfrak{g}$ На $\mathbb{R}^{n-m}$ зададим при любом $t \in \mathbb{R}$ меру

$$d\mu_{t,\lambda}(x) = \exp\{t \prod_{j=1}^{n-m} \|x_j\|_\lambda^1\} dx_1 \dots dx_{n-m}$$

рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_{t,\lambda} = L^2(\mathbb{R}^{n-m}, d\mu_{t,\lambda})$, снабженное гильбертовой нормой $\|\cdot\|_{t,\lambda}$:

$$\|\psi\|_{t,\lambda} = \{ \int_{\mathbb{R}^{n-m}} |\psi(x)|^2 d\mu_{t,\lambda}(x) \}^{1/2} \qquad \psi \in \mathcal{H}_{t,\lambda}$$

проективный предел гильбертовых пространств $\mathcal{H}_\lambda = \varprojlim_t \mathcal{H}_{t,\lambda}$ является полным счетно-гильбертовым пространством, лежащим в пространстве $\mathcal{H}'_\lambda = \varinjlim_t \mathcal{H}_{-t,\lambda}$, дуальном $\mathcal{H}_\lambda$ [3]

Одномерное представления χ_λ подгруппы G_λ

$$\chi_\lambda(g) = \exp\{i<\lambda, \ln g>\}, \; g \in G_\lambda$$

индуцирует в $\mathcal{H}_\lambda$ непрерывное представление $e(\lambda)$ группы G

$$e(\lambda, g)\psi(x) = \chi_\lambda(g_\lambda)\psi(y),$$

где

$$\exp(x_1 e_\lambda^{m+1}) \cdot \quad \exp(x_{n-m} e_\lambda^n) \cdot g = g_\lambda \cdot \exp(y_1 e_\lambda^{m+1}) \cdot \quad \cdot \exp(y_{n-m} e_\lambda^n).$$

В подпространстве Гординга $\mathcal{H}_\lambda^\infty$ действует [2] соответствующее представление $\varepsilon(\lambda)$ универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$

Определение алгебры B. Обозначим через B_α $(\alpha > 0)$ множество операторнозначных функций f на $\Lambda_c = \{\lambda \in \mathfrak{g}_c^* \; e_j(\lambda) = 0, \; j = l+1, \dots, n\}$, удовлетворяющих условиям:

а) при любых $f \in B_\alpha$ и $\lambda \in \Lambda_c$ значение $f(\lambda)$ является непрерывным линейным оператором в $\mathcal{H}_\lambda$, отображающим $\mathcal{H}_\lambda$ в подпространство Гординга $\mathcal{H}_\lambda^\infty$;

б) при любых $f \in B_\alpha$ и $\lambda \in \Lambda_c$ оператор $f(\lambda)'$ $\mathcal{H}_\lambda$, сопряженный с оператором $f(\lambda)$, отображает $\mathcal{H}_\lambda$ себя и непрерывен в топологии $\mathcal{H}_\lambda$; функция f^*, начения которой задаются равенством $f^*(\lambda) = f(\lambda)'|_{\mathcal{H}_\lambda}$, акже принадлежит B_α;

в) для любых $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ существует такая константа $C(u_1, u_2)$, что оценки

$$\varepsilon(\lambda, u_1) f(\lambda) \varepsilon(\lambda, u_2)\psi\|_{t,\lambda} \leq C(u_1, u_2)\|\psi\|_{\tau,\lambda} \qquad \tau = \tau(t, \lambda, \alpha) \in \mathbb{R}$$

справедливы для всех $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda_c$, $\psi \in \mathcal{H}_\lambda^\infty$;

г) при любых $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$, $\psi \in \mathcal{H}_\lambda^\infty$, $F \in (\mathcal{H}_\lambda^\infty)'$

билинейная форма $< F, \varepsilon(\lambda,u_1) f(\lambda) \varepsilon(\lambda,u_2)\psi >$ является целой аналитической функцией на Λ_c

На множестве $B = \bigcup \{B_\alpha\}_{\alpha>0}$ задаем структуру алгебры операциями поточечного сложения и умножения функций, алгёбру B снабжаем инволюцией * $f \mapsto f^*$

Основной результат. Рассматриваем $A = C_0^\infty(G)$ как алгебру с обычной инволюцией.

Теорема. Интегральное преобразование $A \to B$

$$f_{\varphi}(\lambda) = \int_G \varphi(g)\, e(\lambda_{,g} \cdot dg$$

является изоморфизмом алгебр с инволюцией.

Доказательство теоремы проводится по схеме, изложенной в [5,6], причем обратное преобразование $B \to A$ имеет вид:

$$\varphi_t(g) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_\Lambda \chi_\lambda(g_\lambda^{-1})\, K_+^\lambda(0,x)\, d\lambda$$

где $\Lambda = R_c \Lambda_c$, $l = \dim \Lambda$ $d\lambda$ — мера Лебега на Λ

$g = g_\lambda \exp(x_1 e_\lambda^{m+1}) \cdot \ldots \cdot \exp(x_{n-m} e_\lambda^{n})$, $K_+^\lambda(x,y)$ ядро оператора $f(\lambda)$

Замечание. Конструкцию Андо удается перенести на кл метабелевых групп Ли благодаря использованию приводимых представлений. При любом вещественном λ общего положения представление $e(\lambda)$ продолжается до унитарного представления, кратного неприводимому [2,4]

Автор глубоко благодарен Д.П.Желобенко за постоянное внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А.А. О мере Планшереля для нильпотентных групп Ли.-Функц. анализ, 1967, т.1, вып.4, с.84-85.
2. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М., 1978.
3. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. Обобщенные функции. М.,196
4. Кириллов А.А.- Унитарные представления нильпотентных групп Ли.- УМН,1962, т.7, вып.4, с.57-101.

Ando S. Аналог теоремы Пэли-Винера для группы линейных преобразований прямой линии. - J.Math. Kyoto Univ., 1974,vol.14, N 2, p.195-213.

Ando S. Аналог теоремы Пэли-Винера для некоторой матричной группы. - J.Math.Kyoto Univ. 1976,vol.16 , N 3 p.375-393.

Bernat P. et all. Representations des groupes de Lie resolubles Paris, 1972.

Поступила 13 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981.

УДК 513.88

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ-ВИНЕРА ДЛЯ ОДНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ ЛИ.

Л.А.Севастьянов
Университет Дружбы Народов им. П.Лумумбы

С.Андо в работах [3,4] доказал аналог теоремы Пэли-Вин для некоторых классов нильпотентных групп Ли с устойчивыми по ляризациями. В данной заметке конструкция Андо переносится на простейшую нильпотентную группу Ли G с неустойчивыми поляризациями общего положения (пример, предложенный А.А.Кирилловы

Описание группы G Пусть $\mathfrak{g}$ –шести мерная нильпотентная вещественная алгебра Ли с базисом e_1, ,e коммутационными соотношениями

$[e_i, e_{j+3}] = [e_{i+3}, e_{j+3}] = 0$ где 1 2

и $[e_i, e_j]$ e_{k+3} , где $(i, j, k$ – циклическая перестановка индексов $(1, 2, 3)$ Обозначим через G соответствующую связную односвязную группу Ли, через $\mathfrak{g}^*$ – векторное пространство, дуальное $\mathfrak{g}$ Функционал $\lambda \in \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ (комплексификация $\mathfrak{g}^*$) назовем ционалом общего положени если он неинвариантен относительно действия Ad^* групп G в $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ Если λ общего ложения, то легко казать, что в алгебре $\mathfrak{g}$ существуе пятимерная подалг ра $\mathfrak{g}_\lambda$, подчиненная λ , т.е. $<\lambda, [\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\lambda]>$ (здесь $<\cdot >$ – каноническая билинейная форма). Отсюда следует [2] однозначное диффеоморфное разложение

$$g = g_\lambda \exp (t e_\lambda)$$

для произвольного элемента $g \in G$, где $g_\lambda \in G_\lambda = \exp \mathfrak{g}_\lambda$ $t \in \mathbb{R}$ и e_λ – фиксированный вектор из $\mathfrak{g}$, не л жащий в $\mathfrak{g}_\lambda$.

Определение элементарных представлений $\mathcal{C}(\lambda)$. Для произвольного функционала λ общего положения определим пространство $\mathcal{H}_\lambda$ как проективный предел пространств $\mathcal{H}^t_\lambda = L^2(\mathbb{R}, \exp\{t\|x\|_\lambda\}dx)$ (здесь $t \in \mathbb{R}$ и $\|x\|_\lambda$ - норма оператора $Ad \exp(xe_\lambda)$ в конечномерном пространстве $\mathfrak{g}$), снабженных нормами $\|\cdot\|^t_\lambda$

$$\|\psi\|^t_\lambda = \{\int_R |\psi(x)|^2 \exp(t\|x\|_\lambda)dx\}^{1/2}, \quad \psi \in \mathcal{H}^t_\lambda$$

одномерное представление χ_λ группы G_λ

$$\chi_\lambda(g) = \exp\{i < \lambda, \ln g > \}, \quad g \in G_\lambda$$

индуцирует [1] в пространстве $\mathcal{H}_\lambda$ представление $e(\lambda)$

$$e(\lambda, g)\psi(t) = \chi_{t\cdot\lambda}(g_\lambda)\,\psi(t+s),$$

где $g = g_\lambda \exp(se_\lambda)$ $\qquad t\cdot\lambda = Ad^* \exp(te_\lambda)(\lambda)$

В пространстве Гординга $\mathcal{H}^\infty_\lambda$ действует [1] соответствующее представление $\mathcal{E}(\lambda)$ универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ алгебра Ли $\mathfrak{g}$

Определение алгебры A. Обозначим через $A_\alpha\ (\alpha > 0)$ множество функций f на $\mathfrak{g}^*_c$, принимающих в произвольной точке λ значения $f(\lambda)$ в алгебре непрерывных линейных операторов в пространстве $\mathcal{H}_\lambda$ и удовлетворяющих условиям:

1) при произвольном $t \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$L_t^{-1} f(\lambda) L_t = f(t\lambda)$$

где L_t - оператор сдвига на $\mathbb{R}$;

2) подпространство $\mathcal{H}^\infty_\lambda$ инвариантно относительно всех операторов $f(\lambda)$;

3) для произвольных $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$ существует такая константа $C(u_1, u_2)$, что оценки

$$(\lambda\ u_1)\, f(\lambda)\, \varepsilon(\lambda, u_2)\psi\|^t_\lambda \le C(u_1, u_2)\|\psi\|^\tau_\lambda \qquad \tau = \tau(t, \lambda, \alpha) \in \mathbb{R}$$

выполняются при любых $f \in A_\alpha$, $\lambda \in \mathfrak{g}^*_c$, $\psi \in \mathcal{H}^\infty_\lambda$;

4) билинейная форма $< F, \varepsilon(\lambda, u_1)\, f(\lambda)\, \varepsilon(\lambda, u_2)\psi >$ является целой аналитической функцией на $\mathfrak{g}^*_c$ при произвольных $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_c)$, $f \in A_\alpha$, $\psi \in \mathcal{H}^\infty_\lambda$, $F \in (\mathcal{H}^\infty_\lambda)'$

На множестве $A = \cup\{A_\alpha\}_{\alpha > 0}$ задаем структуру алгебры операциями поточечного сложения и умножения.

Основной результат. Мы рассматрива пространство $C_0^\infty(G)$ как алгебру относительно свертки.

Теорема. Преобразование Фурье

$$f(\lambda) = \int_G \varphi(g)\, e(\lambda, g)\, dg$$

осуществляет изоморфизм алгебр $C_0^\infty(G)$ и A

Схема доказательства, аналогичная [3,4], основана н следующих утверждениях:

а) при любых $f \in A$ и $\lambda \in \mathfrak{g}_c^*$ оператор $f(\lambda)$ явл ется интегральным оператором с ядром $K_f^\lambda(s,t)$

б) функция $K_f^\lambda(0,\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

в) функция $K_f^\lambda(0,t)$ является целой аналитическ функцией экспоненциального типа на $\mathfrak{g}_c^*$

г) формула обращения имеет вид

$$\varphi(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{g}_L^*} \pi_\lambda(g_\lambda^{-1})\, K_f^\lambda(0,t)\, d\lambda$$

где

- мера Лебега на $\mathfrak{g}_L^*$

Автор глубоко благодарен Д.П.Желобенко, под руководс вом которого выполнена эта работа, за постоянное внимание и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М. 1978.
2. Bernat P. et all. Representations des groupes de Lie resolubles. Paris, Dunod, 1972,№5.
3. Ando S. Аналог теоремы Пэли-Винера для группы линейных преобразований прямой линии. - J.Math.Kyoto Univ., 1974,vol.14, N 2, p.195-213.
4. Ando S. Аналог теоремы Пэли-Винера для некоторой матричной группы - J.Math.Kyoto Univ.,1976,vol.16, N 3, p.375-393.

Поступила 13 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981.

ДК 519.21

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Н.Царькова, Д.А.Калныня
ЛГУ им.П.Стучки
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

Целью настоящей работы является получение удобных для приложений условий устойчивости решений линейных стохастических разностных систем. Полученные условия в конечномерном омплексном пространстве в последнем пункте работы применяются для анализа простейших разностных схем в ℓ_2

1. Рассмотрим на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ разностное стохастическое уравнение

$$z_{n+1} = A z_n + B z_n \alpha_n \qquad (1)$$

при начальном условии $z_m = z_0$ Здесь z_n - вектор в -мерном унитарном пространстве C^N ; A, B - комплексные $(N \times N)$ -матрицы; $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ - последовательность одинаково аспределенных случайных величин, независимых в совокупности $E\alpha_n = 0$, $E\alpha_n^2 = 1$.

Обозначим $\mathcal{G}_n^m$ поток минимальных σ -алгебр, с которым согласована последовательность $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ т.е., $\{\alpha_k\}_{k=m}^{n}$ $\mathcal{G}_n^m$ -измеримы, $\mathcal{G}_{n_1}^{m_1}$ и $\mathcal{G}_{n_2}^{m_2}$ независимы, если $[m_1, n_1] \cap [m_2, n_2] = \phi$ где $[m_i, n_i]$ - множество целых чисел от m_i о n_i и $\mathcal{G}_{n_1}^{m_1} \subset \mathcal{G}_{n_2}^{m_2}$ если $m_2 \leq m_1 \leq n_1 \leq n_2$ Далее ведем в рассмотрение минимальную σ -алгебру $\mathcal{F}_{z_0}$, относительно которой измеримо начальное условие z_0, и потребуем е независимость от $\mathcal{G}_n^m$ при всех $0 \leq m \leq n$ Обозначим $\mathcal{F}_n^m = \mathcal{F}(\mathcal{F}_{z_0} \cup \mathcal{G}_n^m)$, где $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ - минимальная σ -алгебра, содержащая класс $\mathcal{G}$ Тогда решение уравнения (1) $z_n(m, z)$ при $n \geq m$ по начальным данным $z_m = z$ $\mathcal{F}_{n-1}^m$ измеримо и определяет меру

$$P(m, z, n, C) = P_{m,z}(z_n \in C),$$

где C - элемент σ -алгебры борелевских множеств в C^N При этом система $\{z_n, \mathcal{F}_n^m, P_{m,z}\}$ является комплексным марковским процессом с дискретным временем [2]

Обозначим через L пространство эрмитовых $(N\times N)$ матриц, а через K – конус неотрицательно определенных матриц из L

С системой (1) свяжем семейство операторов $T(n)$ определенных на L соотношением

$$(T(n)Mz, z) = E\{(Mz_n(0,z), z_n(0,z))\}. \qquad (2)$$

Легко показать, что $T(n)M \in K$, если $M \in K$ и $T(n): L \to L$

Лемма 1. Операторы $T(n)$ и $T(m)$ перестановочны, и $T(n+m) = T(n)T(m)$.

Доказательство. Учитывая марковское свойство и единственность решения, имеем:

$$(T(n+m)Mz, z) = E(Mz_{n+m}(0,z), z_{n+m}(0,z)) =$$
$$= E(Mz_{n+m}(m, z_m(0,z)), z_{n+m}(m, z_m(0,z))) =$$
$$= E\{E\{(Mz_{n+m}(m, z_m(0,z)), z_{n+m}(m, z_m(0,z)))|\mathcal{F}^0_{m-1}\}\} =$$
$$= E\{E\{Mz_n(0,y), z_n(0,y)\}|_{y=z_m(0,z)}\} = E\{(T(n)My, y)|_{y=z_m(0,z)}\} = (T(m)T(n)Mz, z$$

Лемма доказана.

Если обозначить $T(1)$ через $\mathcal{A}$ то $T(n) = \mathcal{A}^n$ Тогда для любого $M \in L$ имеем

$$(\mathcal{A}Mz, z) = E\{((A+B\alpha_0)^* M(A+B\alpha_0)z, z)\} = ((A^*MA + B^*MB)z, z)$$

или
$$\mathcal{A}M = A^*MA + B^*MB. \qquad (3)$$

Итак, с системой (1) связан оператор $\mathcal{A}$, который можно продолжить на все пространство L, используя (3). Поскольку L конечномерно, то этот оператор имеет спектр, состоящий из конечного числа точек.

Обозначим M_n -матрицу ковариации случайной величины $z_n(0,z)$ удовлетворяющей уравнению (1). Тогда

$$M_n = E\{z_n z_n^*\} = E\{(Az_{n-1} + Bz_{n-1}\alpha_{n-1})(Az_{n-1} + Bz_{n-1}\alpha_{n-1})^*\} =$$
$$= AE\{z_{n-1}z_{n-1}^*\}A^* + BE\{z_{n-1}z_{n-1}^*\}B^* = AM_{n-1}A^* + BM_{n-1}B^*$$

или $M_n = \tilde{\mathcal{A}}M_{n-1}$, где $\tilde{\mathcal{A}}M \overset{def}{=} AMA^* + BMB^*$

В пространстве эрмитовых матриц L определено скалярное произведение $(M, N) = Sp\, MN^*$, где $Sp\, M$ – след матрицы M.

Лемма 2. $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^*$.

Действительно, для любых комплексных матриц A и B имеем $(M, \mathcal{A}^*N) = (\mathcal{A}M, N) = Sp(A^*MAN + B^*MBN) = Sp(MANA^* + MBNB^*) = (M, \tilde{\mathcal{A}}N)$, и лемма 2 доказана. Отсюда спектры операторов $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}$ совпадают.

2. Тривиальное решение системы (1) называют экспоненциально-устойчивым в среднем квадратическом, если $E\{|z_n(0,z)|^2\} \le \gamma\lambda^n|z|^2$ при некотором $\gamma > 0$ и $\lambda < 1$

Теорема 1. Тривиальное решение системы (1) экспоненциально-устойчиво в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда спектр оператора $\mathcal{A}$ лежит внутри единичного круга $|z| < 1$, т.е., $\sigma(\mathcal{A}) \subset (z : |z| < 1)$.

Доказательство. Необходимость. Из условия теоремы следует существование таких положительных постоянных γ и $\lambda < 1$, что $E\{|z_n(0,z)|^2\} \le \gamma\lambda^n|z|^2$ для любых $z \in C^N$

Поскольку в конечномерном пространстве нормы топологически эквивалентны, то из неравенств

$$\|\mathcal{A}^n\| = \sup_{\|M\|=1} \|\mathcal{A}^n M\| = \sup_{\|M\|=1} \sup_{|z|=1} |(\mathcal{A}^n M z, z)| =$$

$$= \sup_{\|M\|=1} \sup_{|z|=1} |E\{(Mz_n(0,z), z_n(0,z))\}| \le \sup_{|z|=1} E|z_n(0,z)|^2 = \gamma\lambda^n$$

следует тот факт, что спектральный радиус $r(\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}^n\|^{\frac{1}{n}} < 1.$

Достаточность. Пусть $\sigma(\mathcal{A}) \subset (z : |z| < 1)$ Тогда $E|z_n(0,z)|^2 = E(z_n(0,z), z_n(0,z)) = (\mathcal{A}^n J z, z) \le \|\mathcal{A}^n\| |z|^2$, где J - единичная матрица. В условиях теоремы легко получить при некотором $\gamma > 0$, $\lambda \in (0,1)$ $\|\mathcal{A}^n\| < \gamma\lambda^n$, т.е. $E|z_n(0,z)|^2 \le \gamma\lambda^n|z|^2$, что и требовалось доказать.

Обозначим $\mathcal{G} = (J - \mathcal{A})^{-1}$. Очевидно, в условиях теоремы 1 область определения оператора $\mathcal{G}$ $D_{\mathcal{G}} \supset L$, так как резольвента $(Jz - \mathcal{A})^{-1}$ оператора $\mathcal{A}$ существует при $z \in \{z : |z| > 1\}$ на всем пространстве L

Лемма 3. Конус K - воспроизводящий. Действительно, учитывая, что для любой матрицы $C \in L$ можно указать $\beta > 0$ такое, что $(Cz, z) \ge -\beta(z, z)$ при всех $z \in C^N$ и, кроме того, $\beta J \in K$, где J - единичная матрица, находим $((C + \beta J)z, z) = (Cz, z) + \beta(z, z) > 0$, т е. матрица $B = C + \beta J \in K$. Тогда $C = B - \beta J$

Теорема 2. Для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы $D_\xi \supset \mathcal{K}$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как экспоненциальная устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения системы (1) означает, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{z: |z|<1\}$, и, следовательно, $(\mathcal{J}-\mathcal{A})^{-1}$ определен на всем пространстве $\mathcal{L}$

Для доказательства достаточности рассмотрим $R_z\mathcal{A} = (\mathcal{J}z-\mathcal{A})^{-1}$ и покажем, что она существует при $|z|>1$, т.е. представима в виде ряда $z^{-1}\sum_{n=0} z^{-n}\mathcal{A}^n$ сходящегося по операторной норме. Согласно лемме 3 любой элемент $C\in\mathcal{L}$ представим в виде $C=N_1-N_2$, где N_1, $N_2\in\mathcal{K}$. Тогда для любого $M\in\mathcal{L}$, записав $M=N_1-N_2$ $N_1, N_2\in\mathcal{K}$ при $|z|>1$ имеем

$$\|(\mathcal{J}-z^{-1}\mathcal{A})^{-1}M\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\mathcal{A}^n(N_1-N_2)\| \le \|\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\mathcal{A}^n N_1\| +$$

$$+\|\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\mathcal{A}^n N_2\| = \sup_{|a|=1}|(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\mathcal{A}^n N_1 a,a)| + \sup_{|a|=1}|(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\mathcal{A}^n N_2 a,a)| \le$$

$$\le \sup_{|a|=1}\sum_{n=0}^{\infty}|z^{-n}|(\mathcal{A}^n N_1 a,a) + \sup_{|a|=1}\sum_{n=0}^{\infty}|z^{-n}|(\mathcal{A}^n N_2 a,a) \le$$

$$\le \|\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}^n N_1\| + \|\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}^n N_2\| = \|(\mathcal{J}-\mathcal{A})^{-1}N_1\| + \|(\mathcal{J}-\mathcal{A})^{-1}N_2\| < \infty$$

Таким образом, при $|z|>1$ оператор $(\mathcal{J}-z^{-1}\mathcal{A})$ ограниченно обратим и, следовательно, $\sigma(\mathcal{A}) \subset (z\ |z|<1)$

Теорема 3. Для того, чтобы тривиальное решение системы (1) было экспоненциально устойчиво среднем квадратическом, необходимо и достаточно, чтобы при любом $a\in S=\{a\in R^N: |a|=1\}$ имело место $\sum_{n=0}^{\infty} E\{(z_n(0,z),a)^2\} \le c E\{|z|^2\}$ где z - случайный вектор, $c=const$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$E\{|z_n(0,z)|^2\} \le \gamma_1\lambda^n E|z|^2$$

, где $\gamma>0$, $0<\lambda<1$

Тогда $E\{(z_n(0,z),a)^2\} \le E\{|z_n(0,z)|^2\}|a|^2 \le \gamma_1\lambda^n E|z|^2$

Отсюда заключаем, что исходный ряд мажорируется числом

$$\gamma_1\frac{1}{1-\lambda}E|z|^2.$$

Для доказательства достаточности нужно показать, что $D_\xi \supset \mathcal{K}$, т.е. для любого $M\in\mathcal{K}$ существует положительная постоянная γ такая, что $\|\sum_{n=0}\mathcal{A}^n M\|\ \sup_{|a|=1}|(\sum_{n=0}\mathcal{A}^n Ma,a)|<\gamma$

оследнее вытекает из условия сходимости ряда. Действительно, ри любом $a \in S$ $\sum_{n=0}^{\infty} E\{(z_n(0,z),a)^2\} = \sum_{n=0}^{\infty}(M_n a, a) = \sum_{n=0}^{\infty}(\mathcal{A}^n M a, 1)$, де M_n – матрица ковариации $z_n(0,z)$, M – матрица ковариаии z [1]

Таким образом, получены условия устойчивости тривиально-о решения системы (1) в терминах работы [4]

3. Полученные результаты можно использовать при построении бласти экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном ривиального ения системы (1). Обозначим $\mathcal{L}$ – множество атриц B таких, что тривиальное решение (1) экспоненциально стойчиво в среднем квадратичном при всех B $\mathcal{L}$; $\partial\mathcal{L}$ – раница устойчивости, т.е. множество таких B, при которых $\mathcal{J}M = M$ имеет нетривиальное решение. Для определения области стойчивости $\mathcal{L}$ введем параметр β и, заменив B на βB уравнении (1) будем искать $\beta_0 > 0$ такое, что $\beta_0 B \in \partial\mathcal{L}$. огда аналогично тому, как это получено в [5] при всех $\beta \in \{|\beta| < \beta_0\}$ $\beta B \in \mathcal{L}$, при всех $\beta \in \{|\beta| > \beta_0\}$ $\beta B \overline{\in} \mathcal{L}$. спользуя тот факт, что на границе области устойчивости уравнение $\mathcal{A}M = M$ всегда имеет нетривиальное решение, принадлежащее конусу K, вычислим β_0 Условие $\beta_0 > 1$ и дает нам условие устойчивости в виде ограничений на коэффициенты истемы (1) при специальном виде матриц A и B

<u>Пример.</u> При решении уравнения в частных производных $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на ЭВМ методом сеток используется азностное уравнение

$$u(n+1,k) = b^2 u(n,k+1) + (1-2b^2)u(n,k) + b^2 u(n,k-1),$$

де $b^2 = \frac{a^2\Delta}{h^2}$, Δ, h – шаги по t, x соответственно, $n = [\frac{t}{\Delta}]$, $k = [\frac{x}{h}]$

Пусть $b^2 = b_0^2 + \sigma \alpha_n$, где $\overset{\circ}{\alpha}_n$ – последовательность лучайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией.

Тогда $u(n+1,k) = b_0^2 u(n,k+1) + (1-2b_0)^2 u(n,k) +$

$$+ b_0^2 u(n,k-1) + \sigma\alpha_n u(n,k+1) - 2\sigma\alpha_n u(n,k) + \sigma\alpha_n u(n,k-1),$$

ли, в более общем виде,

$$u(n+1,m) = \sum_{k=-M}^{M} a_k u(n,m+k) + \sum_{k=-M}^{M} b_k u(n,m+k)\alpha_n$$

лее, переходя от последовательностей в l_2 в $\mathcal{L}_{2(|z|=1)}$,

при помощи отображения, задаваемого соотношением
$u(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n,m+k)\, z^{-k}$ получаем уравнение
$u_{n+1}(z)=a(z)u_n(z)+b(z)u_n(z)\alpha_n$ где $z=e^{i\varphi}$
или

$$X_{n+1}(\varphi)=A(\varphi)X_n(\varphi)+B(\varphi)X_n(\varphi)\alpha_n\,. \qquad (4)$$

При $\varphi=\varphi_0$ полученное уравнение соответствует системе (1) в одномерном случае. Решая уравнение $\mathcal{A}M=M$, в силу системы (4) заменив $B(\varphi_0)$ на $\beta_0 B(\varphi_0)$ получаем

$$\left(|A(\varphi_0)|^2+\beta_0^2|B(\varphi_0)|^2\right)m_{11}=m_{11},$$

или

$$\left(|A(\varphi_0)|^2+\beta_0^2|B(\varphi_0)|^2-1\right)m_{11}=0,$$

т.е.

$$|A(\varphi_0)|^2+\beta_0^2|B(\varphi_0)|^2-1=0,$$

или

$$\beta_0^2=\frac{1-|A(\varphi_0)|^2}{|B(\varphi_0)|^2},$$

и граница устойчивости определяется неравенством

$$\frac{1-|A(\varphi_0)|^2}{|B(\varphi_0)|^2}>1$$

Взяв $\sup_{\varphi}\frac{1-|A(\varphi)|^2}{|B(\varphi)|^2}>1$ получаем область устойчивости для всех φ Полученное неравенство совпадает с неравенством, дающим достаточное условие устойчивости [3] полученны[illegible] при помощи другой методики исследования устойчивости

Литература

1. Дуб Дж. Вероятностные процессы. [illegible] 956,
2. Дынкин [illegible] Марковски[illegible] [illegible]сы. 1963
3. Сверлан [illegible] Царькова [illegible] [illegible]вость [illegible]ния лин[illegible]ных [illegible]ностных си[illegible]ем со [illegible]ми коэффицие[illegible]ми в пространстве $\mathcal{E}_2$.–В кн.:Топологические пространства отображения в них. Рига, 1976, вып [illegible] с. 68-75.

Сверлан [illegible], [illegible]ков [illegible] линейных [illegible] нос[illegible]ниях со слу[illegible] коэффициентами.–Изв. [illegible] Серия матем., 1972,№ 5, с.80-8[illegible]

Царькова В.Н., Эглит Д.А. Об экспоненциальной устойчивости решений линейных разностных уравнений со случайными коэффициентами в пространстве Гильберта.-Латв.матем.ежегодник, I980, т.24, с.I78-I84.

Поступила 9 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, [illegible]

УДК 517.929

О СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.Ф.Царьков,Л.Е.Энгельсон
РПИ
ВЦ ЛГУ им. П.Стучки

При исследовании устойчивости решений дифференциально-функциональных уравнений вторым методом Ляпунова уже в линейном случае построение функционалов Ляпунова представляет значительные трудности[1]. Так, например, авторам не был известен вид функционала Ляпунова, [illegible] обходимое и достаточное условие устойчивости: $a \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ для скалярного уравнения $\frac{dx}{dt} = a\,x(t-1)$. В настоящей работе [illegible]лагается методика исследования устойчивости линейных автономных систем дифференциально-функциональных уравнений, основанная на анализе так называемых статистических решений, определение которых приведено ниже. В частности, строится явное выражение функционала Ляпунова для вышеупомянутого скалярного уравнения.

Пусть C — пространство непрерывных [illegible]зке $[-1,0]$ n-мерных вектор-функций, f_j $(j=1,\dots,n)$ [illegible]емен[illegible]анства C^*, сопряженного к C, f — линейный непрерывный оператор, отображающий C в $\mathbb{R}^n$ по правилу $f\varphi$ $(\langle\varphi, f_1\rangle, \dots \langle\varphi\ f_n\rangle)$, где $\varphi \in C$ а $\langle\varphi, f_j\rangle$ есть [illegible]ачение функционала f_j на элементе φ. Для каждой непр[illegible]ции $x:[-1,\infty)\to\mathbb{R}^n$ и каждого $t \geq 0$ обозн[illegible] x_t элем[illegible] пространства C, определяем равенством $x_t(\theta)$ $x(t+\theta)$, $\theta\in[-1,0]$

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = f x_t \qquad (1)$$

любой начальной функции $\varphi \in C$ существует [1] единст-нное решение этого уравнения, то есть непрерывная век-р-функция, удовлетворяющая уравнению (I) при $t > 0$ и впадающая с φ при $-1 \leqslant t \leqslant 0$

Каждому $t \geqslant 0$ сопоставим оператор $S(t)$ отображаю-й C в C по правилу $S(t)\varphi = x_t$, где x_t вышеуказанным разом соответствует решению x уравнения (I) при началь-й функции φ. Пусть $\mathcal{F}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств остранства C, а $\mathcal{P}$ – семейство всех вероятностных мер, ределенных на $\mathcal{F}$, то есть неотрицательных счетно-адди-вных функций $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, для которых $\mu(C) = 1$. Для лю-х $\mu \in \mathcal{P}$, $t \geqslant 0$, $A \in \mathcal{F}$ определим $\mu^t(A) = \mu(\{\varphi \in C \; S(t)\varphi \in A\})$. но, что при всех $t \geqslant 0$ $\mu^t \in \mathcal{P}$ Семейство мер $\{\mu^t\}_{t \geqslant 0}$ зывают статистическим решением уравнения (I) при началь-й мере μ

Одной из основных характеристик элемента $\mu \in \mathcal{P}$ явля-тся его ковариационный оператор q, действующий из прос-анства C^* в пространство C^{**} и определенный для любых $, l_2 \in C^*$ равенством

$$\langle l_2, q l_1 \rangle = \int\limits_C \langle \varphi, l_1 \rangle \langle \varphi, l_2 \rangle \, d\mu(\varphi)$$

Если μ -гауссовская мера, то значения оператора q жат в C [1]. В этом случае оператор q можно отождествить положительно определенной симметричной матричной функ-ией, определенной на квадрате $Q = [-1,0] \times [-1,0]$ φ

Действительно, пусть E -пространство всех $n \times n$-атриц, элементы которых q_{ij} $Q \to \mathbb{R}$ являются непре-вными по совокупности аргументов функциями и удовлетво-ют условию $q_{ij}(\theta_1,\theta_2) = q_{ji}(\theta_2,\theta_1)$, $(\theta_1, \theta_2) \in Q$

Каждая такая матрица задает оператор $\bar{q} : C^* \to C$ по едующему правилу. Пусть $l \in C^*$, то есть $l = (l_1, \ldots l_n)$, е $l_i : [-1,0] \to \mathbb{R}$-функция ограниченной вариации. Следова-льно, для всякой $\varphi \in C_n$

$$\langle \varphi, l \rangle \quad \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{-1}^{0} \varphi_i(\theta) \, d l_i(\theta).$$

$q\ell$ есть вектор-функция из C, j-ая координата которой в каждой точке $\eta \in [-1,0]$ равна $\sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{0} \bar{q}_{ij}(\theta,\eta)\, d\ell_i(\theta)$. В дальнейшем мы отождествляем оператор $\bar{q}$ с матрицей q и опускаем черту.

Ковариационные операторы гауссовских мер образуют в E подмножество $\mathcal{K}$, элементы которого удовлетворяют условию $\langle q\ell,\ell\rangle \geqslant 0$ для любого $\ell \in C$.

Лемма I. $\mathcal{K}$ является конусом [4] в E, причем линейная оболочка $\mathcal{K}$ плотна в E.

Доказательство. Поскольку из $\lim_{m\to\infty} \| q_m - q \| = 0$ и $\langle q_m \ell,\ell\rangle \geqslant 0$, $m=1,2,\dots$ следует $\langle q\ell,\ell\rangle$, то первая часть утверждения леммы очевидна. Вторую часть утверждения докажем, используя приближение непрерывной на квадрате функции многочленами. Согласно теореме Стоуна-Вейерштрасса (см. [3]) в любой окрестности элементов q_{ij} $(i\neq j)$ матрицы q имеется сумма вида $g_{ij}(\theta_1,\theta_2)=\sum_{m,k=0}^{n} \alpha_{km}^{ij}\theta_1^k\theta_2^m$ Поокольку $g_{ij}(\theta_1,\theta_2)=g_{ji}(\theta_2,\theta_1)$, то мы можем считать $\alpha_{km}^{ij}=\alpha_{mk}^{jk}$ Обозначим P^{ijkm} $n\times n$-матрицу, у которой

$$P_{ii}^{ijkm}(\theta_1,\theta_2)=\theta_2^k\theta_2^k, \quad P_{ij}^{ijkm}(\theta_1,\theta_2)=\theta_1^k\theta_2^m$$

$$P_{ji}^{ijkm}(\theta_1,\theta_2)=\theta_1^m\theta_2^k, \quad P_{jj}^{ijkm}(\theta_1,\theta_2)=\theta_1^m\theta_2^m$$

а все остальные элементы равны 0 Легко проверить, что P^{ijkm}, а также матрица, которая получается из P^{ijkm}, если оставить в ней неравным нулю лишь P_{ii}^{ijkm} и $P_{..}^{ijkm}$, обе принадлежат $\mathcal{K}$ Следовательно, их разность $\tilde{P}^{ijkm}$, у которой не равны нулю лишь элементы $\tilde{P}_{ij}^{ijkm}(\theta_1,\theta_2)=\theta_1^k\theta_2^m$ и $\tilde{P}_{ji}^{ijkm}(\theta_1,\theta_2)=\theta_1^m\theta_2^k$, принадлежит линейной оболочке $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ конуса $\mathcal{K}$.

Семейство всех конечных линейных комбинаций функций вида $\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)$, где $\varphi\ [1,0] \to \mathbb{R}$ непрерывна, разделяет точки треугольника $Q_1=\{(\theta_1,\theta_2)\in Q\ \ \theta_1 \leqslant \theta_2\}$, содержит константы и является алгеброй, т.е. содержит линейную комбинацию и произведение любых двух своих элементов. Следовательно [3], это семейство функций плотно в $C(Q_1, \mathbb{R})$ Продолжая такие функции на все Q, получаем, что в любо окрестности элементов q_{ii} матрицы q имеются суммы вида

$$g_{ii}(\theta_1,\theta_2)=\sum_{\kappa=1}^{M}\beta_\kappa\varphi^i_\kappa(\theta_1)\varphi^i_\kappa(\theta_2).$$

Обозначим $R^{i\kappa}$ $n\times n$-матрицу, у которой единственный неравный нулю элемент $r^{i\kappa}_{ii}$ есть функция $r^{i\kappa}_{ii}(\theta_1,\theta_2)=\varphi^i_\kappa(\theta_1)\varphi^i_\kappa(\theta_2)$ Ясно, что $R^{i\kappa}\in\mathcal{K}$. Следовательно, для матрицы g, составленной из элементов g_{ij} имеем

$$g=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{m,\kappa=0}^{N}\alpha^{ij}_{\kappa m}\tilde{P}^{ij\kappa m}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{M}\beta_\kappa R^{i\kappa}\in\mathcal{L}(\mathcal{K}),$$

что и требовалось доказать.

При помощи ранее введенных операторов $S(t)$ определим при $t\geqslant 0$ операторы $T(t)$ равенством $T(t)q=S(t)qS^*(t)$ для любого $q\in E$, где в правой части стоит композиция трех операторов. Оператор $T(t)$ ставит в соответствие ковариационному оператору q гауссовской меры μ ковариационный оператор гауссовской меры μ^t.

Для любых $q\in E$, $\theta_1,\theta_2\in[-1,0]$, $i,j=1,\dots,n$ введем функции $\Pi^i_{\theta_1}q\in C$, $q\Pi^j_{\theta_2}\in C$ равенствами

$$\Pi^i_{\theta_1}q(\theta_2)=(q_{i1}(\theta_1,\theta_2),\quad ,q_{in}(\theta_1,\theta_2));$$

$$q\Pi^j_{\theta_2}(\theta_1)=(q_{1j}(\theta_1,\theta_2),\quad ,q_{nj}(\theta_1,\theta_2)).$$

<u>**Лемма 2.**</u> Семейство операторов $T(t)$ является полугруппой класса (C_0). Ее производящий оператор $\mathcal{A}$ задается равенством

$$\Pi^i_{\theta_1}\mathcal{A}q\Pi^j_{\theta_2}=\begin{cases}\dfrac{\partial q_{ij}(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}+\dfrac{\partial q_{ij}(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}, & \theta_1\in[-1,0),\theta_2\in[-1,0),\\ \dfrac{\partial q_{ij}(0,\theta_2)}{\partial\theta_2}+\langle q\Pi^j_{\theta_2},f_i\rangle, & \theta_1=0,\ \theta_2\in[-1,0),\\ \dfrac{\partial q_{ij}(\theta_1,0)}{\partial\theta_1}+\langle\Pi^i_{\theta_1}q,f_j\rangle, & \theta_1\in[-1,0),\theta_2=0,\\ \langle\Pi^i_0q,f_j\rangle+\langle q\Pi^j_0,f_i\rangle, & \theta_1=\theta_2=0.\end{cases}$$

При всех $t\geqslant 0$ оператор $T(t)$ оставляет инвариантным конус $\mathcal{K}$ и при всех $t\geqslant 1$ вполне непрерывен.

<u>Доказательство</u>. Равенство $T(t+\tau)=T(t)T(\tau)$ -

следует прямо из определения. Далее оператор $T(t)$ можно представить в виде композиции двух операторов

$$T(t)q = \mathcal{U}(t)\mathcal{V}(t)q; \quad \mathcal{U}(t), \mathcal{V}(t): E \to E, \text{ где}$$

$$(\mathcal{U}(t)q)_{ij}(\theta_1, \theta_2) = S(t)(\Pi^i_{\theta_1} q)(\theta_2);$$

$$(\mathcal{V}(t)q)_{ij}(\theta_1, \theta_2) = S(t)(q\,\Pi^j_{\theta_2})(\theta_1);$$

Пользуясь таким представлением, нетрудно показать, что $T(t)$ вполне непрерывен при $t \geq 1$ и $(T(t))_{t\geq 0}$ есть полугруппа класса (C_0), исходя из аналогичных свойств операторов $S(t)$. Из этого же представления получается вид оператора $\mathcal{A}$. Остается доказать включение $T(t)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ для любого $t \geq 0$ Пусть $q \in \mathcal{K}$, т.е. для любого $l \in C^*$ $\langle q\,l, l\rangle \geq 0.$ Тогда $\langle T(t)q\,l, l\rangle = \langle q\,S^*(t)l, S^*(t)l\rangle \geq 0$, т.е. $T(t)q \in \mathcal{K}$ Лемма доказана.

<u>Лемма 3.</u> Спектр оператора $\mathcal{A}$ исчерпывает его собственными значениями. Для любых вещественных γ_1, γ_2 таких, что $\gamma_1 \leq \gamma_2$, множество $\{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) : \gamma_1 \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq \gamma_2\}$ состоит из конечного числа точек или пусто.

<u>Доказательство</u>. Покажем сначала, что в каждой полосе вида $\{\lambda : \gamma_1 \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq \gamma_2\}$ содержится лишь конечное число собственных значений. Пусть $\{\lambda_j, j \in \mathcal{J}\}$ - собственные значения оператора $\mathcal{A}$, причем $\gamma_1 \leq \mathrm{Re}\,\lambda_j \leq \gamma_2$ $(j \in \mathcal{J})$

Пусть q_j $(j \in \mathcal{J})$ - соответствующие им собственные вектора. Из равенств $\frac{dT(t)q_j}{dt} = \mathcal{A}T(t)q_j$ (см.[5]) и $T(0) = I$ (тождественный оператор) следует, что $\exp \lambda_j$ $(j \in \mathcal{J})$ являются собственными значениями для $T(1)$ и $T(1)q_j = (\exp \lambda_j)\, q_j$ $(j \in \mathcal{J})$.
Поскольку $|\exp \lambda_j| \in [\exp \gamma_1, \exp \gamma_2]$ $(j \in \mathcal{J})$, а оператор $T(1)$ вполне непрерывен, то множество $\mathcal{J}$ может быть лишь конечным.

Остается доказать первое утверждение леммы Пусть $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0 \in \sigma(\mathcal{A}) \setminus P\sigma(\mathcal{A})$, где $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$, $P\sigma(\mathcal{A})$ - точечный спектр оператора $\mathcal{A}$ Согласно доказанному имеется лишь конечное число собственных значений оператор $\mathcal{A}$ с вещественной частью α_0. Обозначим их $\alpha_0 + i\beta_1, \ldots, \alpha_0 + i\beta_m$. Пусть $t_0 \geq 1$ таково, что $\frac{2\pi}{t_0}$ несоизмеримо ни с одним из чисел $\beta_1 - \beta_0, \ldots, \beta_m - \beta_0$. Множество всех собственных значений операто-

ра $T(t_0)$ с модулем $\exp(\alpha_0 t_0)$ есть $\{\exp(t_0(\alpha_0+i\beta_1)),\dots,\exp(t_0(\alpha_0+\beta_m))\}$, но $\exp(t_0(\alpha_0+i\beta_0))$ также принадлежит $P\sigma(T(t_0))$ (см. [5 ,п.I6.7]). Отсюда следует, что $t_0(\beta_0-\beta_k)=2\pi s$ для некоторых k, s ,что противоречит выбору t_0.
Лемма доказана.

Лемма 4. У операторе $\mathcal{A}$ существует действительное собственное значение $\omega_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\|$ такое, что все остальные точки спектра лежат в полуплоскости $\{\lambda \quad \operatorname{Re}\lambda < \omega_0\}$. В $\mathcal{K}$ существует собственный элемент оператора $\mathcal{A}$,соответствующий собственному значению ω_0 .

Доказательство. То,что тип полугруппы совпадает с максимумом вещественных частей собственных значений оператора $\mathcal{A}$,следует из цепочки равенств:

$$\omega_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|T(n)\| = \ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T(1)\|^n} =$$

$$= \ln \max_{\lambda\in\sigma(T(1))} |\lambda| = \max_{\alpha\in\sigma(\mathcal{A})} \operatorname{Re}\alpha.$$

Покажем, что $\omega_0 \in \sigma(\mathcal{A})$. Операторы $T(t)$ при $t \geqslant 1$ оставляют инвариантным конус $\mathcal{K}$ и являются вполне непрерывными. Поэтому по [4, теорема 6.I] имеем $\lambda_t = \max\limits_{\lambda\in\sigma(T(t))} |\lambda| \in \sigma(T(t))$ при $t \geqslant 1$. Отсюда по доказанному и используя [5 ,п.I6.7] ,получаем $\lambda_t = \exp(t\omega_0)$.
Предположим, что $\omega_0 \notin \sigma(\mathcal{A})$. Пусть $\{\omega_0+i\beta_1,\dots,\omega_0+i\beta_m\}$ - множество всех собственных значений оператора $\mathcal{A}$ с вещественной частью,равной ω_0 . Выбираем $t_0 \geqslant 0$,несоизмеримое с $\frac{2\pi}{\beta_k}$ при всех k, и получаем противоречие аналогично доказательству леммы 3.

Остается доказать существование в конусе $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ собственного вектора оператора $\mathcal{A}$,соответствующего собственному значению ω_0 . Теорема 6.I работы [4] гарантирует существование в $\mathcal{K}\setminus\{0\}$ при всех $t \geqslant 1$ вектора v_t , для которого $T(t)v_t = (\exp(\omega_0 t))v_t$.

Пусть $\{\omega_0, \omega_0+i\beta_1,\dots,\omega_0+i\beta_m\}$ - все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ с вещественной частью ω_0 , и $t_0 \geqslant 1$ несоизмеримо с $\frac{2\pi}{\beta_k}$ при всех k Покажем, что $v_{t_0} \in N(\omega_0 I - \mathcal{A})$, где $N(B)$ означает ядро оператора B .

Для этого используем равенство

$$N(exp(t_0 \omega_0)I - T(t_0)) = \overline{\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} N(\alpha_n I - \mathcal{A})},$$

где $\alpha_n = \omega_0 + t_0^{-1} \cdot 2\pi i n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. , которое следует из [5 , п.16.7] Для любого β_k . и любого целого n $2\pi n t_0^{-1} \neq \beta_k$. Следовательно, $N(\alpha_n I - \mathcal{A}) = \{0\}$ при $n \neq 0$, и имеем $N(exp(t_0 \omega_0)I - T(t_0) = N(\omega_0 I - \mathcal{A})$, откуда сразу следует утверждение леммы.

Доказанные предложения позволяют ответить на вопрос об устойчивости тривиального решения уравнения (I) в следующей форме.

ТЕОРЕМА. Следующие утверждения эквивалентны:

a)существуют положительные числа M и γ такие, что для всех $t \geqslant 0$ имеет место оценка $\|T(t)\| \leq M exp(-\gamma t)$

в)для любого $q \in \mathcal{K}$ существует потенциал $Uq = \int_0^\infty T(t) q\, dt$,

c)все вещественные собственные значения оператора $\mathcal{A}$ отрицательны;

d)спектр оператора $\mathcal{A}$ расположен в полуплоскости $\Re \lambda \leq -\alpha < 0$

e)существует $\nu \in \mathcal{K}^*$ (где $\mathcal{K}^* = \{\mu \in E^* : \forall q \in \mathcal{K}\ \langle q, \mu \rangle \geqslant 0\}$)такой, что функционал $V(\varphi) = \langle \varphi, \nu\varphi \rangle$ (для каждой $\varphi \in C$ $\langle \varphi, \nu\varphi \rangle$ равно значению функционала ν на элементе $q \in$ определяемом как матрица с элементами $q_{ij}(\theta_1, \theta_2) = \varphi_i(\theta_1)\varphi_j(\theta_2))]$, удовлетворяет неравенствам

$$V(\varphi) \geqslant |\varphi(0)|^2 \quad \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[V(S(t)\varphi) - V(\varphi)] \leqslant |\varphi(0)|^2;$$

f)тривиальное решение уравнения (I) асимптотически устойчиво.

<u>Доказательство</u>.В силу полноты E из оценки полугруппы в пункте a) следует в). Для доказательства импликации в) $\longrightarrow$ c) предположим, что утверждение c) не имеет места. Тогда существуют вещественное $\lambda \geqslant 0$ и $q \in E$ такие, что $\mathcal{A}q = \lambda q$, т.е. $T(t)q = q\, exp(\lambda t)$, $t \geqslant 0$.

Ясно, что q не лежит в области определения потенциала. Получим противоречие условию в). d)следует из c) по лемме 4.

Далее, из d)следует, что $\omega_0 < 0$ и, значит, (см.[ ])полугруппа $T(t)$ устойчива, то есть выполняется a).

Остается показать эквивалентность утверждений е) и) остальным утверждениям, входящим в теорему. е) следует из в), если в качестве ν рассмотреть функционал $\langle q,\nu\rangle = \sum_{i=1}^{n} [q_{ii}(0,0) + \langle (Uq)f_i, f_i\rangle + 2(Uq)_{ii}(0\ 0)]$, где $f_i \in C^{*}$ — компоненты оператора f из (I).

В самом деле, из лемы 2 и замкнутости $\mathcal{K}$ ледует $U\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$. Поэтому легко показать, что $\langle q,\nu\rangle \geqslant 0$, $\forall q\in\mathcal{K}$, .е. $\nu\in\mathcal{K}^{*}$ Отсюда же следует и неравенство

$$V(\varphi) \geqslant \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(0)|^2 = |\varphi(0)|^2.$$

дифференцируя $V(S(t)\varphi)$, необходимо учесть тождества $\frac{\varphi(0)]}{t}\Big|_{t=0} = f\varphi$ и $\mathcal{A}U_q = -q$. Тогда получим $\lim_{t\to 0} t^{-1}[V(S(t)\varphi - V(\varphi)] =$

$$= -|\varphi(0)|^2 - |f\varphi - \varphi(0)|^2 \leq -|\varphi(0)|^2,$$

о и требовалось доказать.

Для доказательства импликации е) $\longrightarrow$ f) можно воспользоваться $V(\varphi)$ как функционалом Ляпунова-Красовского [I].

Пусть теперь выполнено f). Известно [I], что в случае автономных линейных систем дифференциально-функциональных уравнений из асимптотической устойчивости следует экспоненциальная, т.е. существуют положительные константы M и γ такие, что $\|S(t)\| \leqslant M\exp(-\gamma t)$. Тогда $\|T(t)q\| \leqslant \|S(t)\|\,\|q\|\,\|S^{*}(t)\| \leq M^2\exp(-2\gamma t)\|q\|$, откуда следует а). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = a\,x(t-1). \qquad (3)$$

Известно, что при $a\in(-1,0)$ тривиальное решение уравнения (3) экспоненциально устойчиво. В доказательстве пункта е) теоремы построен функционал, который в случае уравнения (3) имеет вид

$$V(\Psi) = |\varphi(0)|^2 + a^2\Psi(-1,-1) + 2\Psi(\overset{\circ}{0},0),$$

где $\Psi(\theta_1,\theta_2)$ является решением задачи

$$\frac{\partial\Psi(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} + \frac{\partial\Psi(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2} = -\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2) \quad \text{при } -1\leqslant\theta_2\leq\theta_1\leq 0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\Psi(0,\theta_2)}{\partial\theta_2} + a\Psi(\alpha_2,-1) = -\varphi(0)\varphi(\theta_2) \quad \text{при } -1\leqslant\theta_2<0, \qquad (5)$$

$$2a\Psi(0,-1) \qquad |\varphi(0)|^2 \qquad (6)$$

$$\Psi(\theta_1,\theta_2) \quad \Psi(\theta_2,\theta_1) \qquad \text{при } -1\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant 0, \qquad (7)$$

Из (4) **имеем** $\Psi(\theta_1, \theta_2) = r(\theta_2 - \theta_1) + \int_{\theta_1}^{0} \varphi(\theta)\varphi(\theta_2 - \theta_1 + \theta)\,d\theta$

и (5) **принимает вид**

$$\frac{dr}{dt} + a r(-1-t) = g(t), \quad t \in (-1, 0) \qquad (8)$$

где $g(t) = -\varphi(0)\varphi(t) - a\int_{t}^{0} \varphi(\theta)\varphi(-1-t+\theta)\,d\theta.$

Найдя общее решение уравнения (8), потребуем выполнения условия (6) и получим:

$$r(t) = -\int_{t}^{0} g(-1-\tau)\sin a(t-\tau)\,d\tau + \int_{-1}^{t} g(\tau)\cos a(t-\tau)\,d\tau$$

$$+ \frac{1}{1+\sin a}\left[\int_{-1}^{0} g(t)\sin a\tau\,d\tau - \frac{\varphi^2(0)}{2a}\right]\left[\cos a(t+1) - \sin at\right]$$

Следовательно, имеем функционал Ляпунова

$$V(\varphi) = \varphi^2(0) + a^2\int_{-1}^{0} \varphi^2(\theta)\,d\theta +$$

$$+ (a^2+2)\left[\int_{-1}^{0} g(\tau)\cos a\tau\,d\tau + \frac{\cos a}{1+\sin a}\left(\int_{-1}^{0} g(\tau)\sin a\tau\,d\tau - \frac{\varphi^2(0)}{2a}\right)\right]$$

В работе [6], исходя из других соображений, был вычислен функционал $V(\varphi)$, для которого $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}[V(S(t)\varphi) - V(\varphi)] = -|\varphi(0)|^2$ Однако вопрос о его положительной определенности не рассматривался.

Литература

ale Jack Functional Differential Equations.—Lectures the University of California. Los Angeles, 1968-69

хания Н.Н О ковариации ементов в

ва Сообщен 196 т.5.

цоне Основы с 1964.

ные ещие

антным ус в простр ве 948, т. ,

Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

Репин Ю.М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием.-ПММ, 1965, т.29, вып.3, с. 564-566.

Поступила 13 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981.

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Л.Е.Энгельсон
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

Настоящая работа посвящена распространению результатов статьи [1] на случай уравнений льного типа. Уравнение исследуется при помощи полугруппы отобра в себя пространства непрерывных кторных функций.

Пусть пространство C функция x_t означает то же, что в [1]

Обозначим γ матрицу мерности $n\times n$ элем тами которой являются функции ограниченной вариации на $[-1,0]$ причем существует непрер на $[0,+\infty)$ функция ℓ с $\ell(0)=0$ такая, что для х $\varphi\in C$, $s\in[0,1]$

$$\left|\int_{-s}^{0}\varphi(\theta)\,d\gamma(\theta)\right|\leq \ell(s)\sup_{-s\leq\theta\leq 0}|\varphi(\theta)|.$$

Пусть f и D - линейные непрер е операторы из C в $\mathbb{R}^n$, причем $D\varphi=\varphi(0)-g\varphi$ $g\varphi=\int_{-1}^{0}\varphi(\theta)\,d\gamma(\theta)$ $(\varphi\in C)$ Уравнение

$$\frac{d}{dt}Dx_t=fx_t \qquad (1)$$

называется автономным линейным уравнением ейтрального типа [2].

Пусть $\varphi\in C$ ерывная функция $x:[-1,+\infty)\mapsto\mathbb{R}^n$ называется ением ура (1) ри начальном условии

$$x_0=\varphi, \qquad (2),$$

если сужение $x|_{[-1,0]}=\varphi$ Dx_t непрерывно дифференцируемо по t на $[0,+\infty)$ и имеет место равенство (1) при всех $t\geqslant 0$

В частности, когда $g=0$ мы имеем ункцио ьно-дифференциальное уравнение с паздыва ем, т. .случай, рассмотренный в [1] Мы будем считать, что $\|g\|<1$ этом случае при любой начальной функции $\varphi\in C$ твует и динственно ение задачи (1), (2), и мы можем, как и в [1], ссматривать полугруппу операторов сдвига $S(t)$ вдоль ре- ний уравнения (1). Операторы $S(t)$ в случае уравнений йтрального типа, вообще говоря, не являются вполне непре- ньми. днако существует $t_0>0$ такое, что при $t\geqslant t_0$ ератор $S(t)$ можно представить в виде суммы сжимающего полне непрерывного оператора [3]

Пусть $\tilde{C}$ -комплексификация C, $\tilde{S}(t)$ - комплексное сширение $S(t)$ Напомним, что оператор $B:\tilde{C}\mapsto\tilde{C}$ назы- ется фредгольмовым, если $\overline{B(\tilde{C})}=B(\tilde{C})$ и $\dim(\mathrm{Ker}(B))=\mathrm{codim}(B(\tilde{C}))<+\infty$ Радиусом Фредгольма оператора $S(t)$ зывается число $r_\varphi(S(t))=\sup\{|\lambda|:\lambda I-S(t)$ не фред льмов $\}$

Из представления $S(t)$ в виде суммы сжимающего и впол- е непрерывного операторов следует неравенство $r_\varphi(S(t))<1$ ри $t\geqslant t_0$ (см., например, [4]

Полугруппа операторов $T(t):E\mapsto E$, определяемая лугруппой $(S(t))_{t\geqslant 0}$, оставляет инвариантным конус $\mathcal{K}$ и принадлежит классу (C_0) [1]

Для оценки радиуса Фредгольма операторов $T(t)$ восполь- емся известной [5] формулой

$$r_\varphi(S(t))=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\|(S(t))^m\|_K}, \qquad (3)$$

де $\|B\|_K$ расстояние относительно операторной нормы т оператора B до подпространства всех операторов конечно- о ранга из C в C.

Лемма 1. Пусть $S:C\to C$ - линейный непрерывный опе- атор и $T:E\to E$ оператор, определяемый равенством $T_q=S\circ q\circ S^*$ для всякого $q\in E$ Тогда $r_\varphi(T)\leqslant$ $\leqslant r_\varphi(S)\,r(S)$ где $r(S)$ спектральный ра- иус оператора S

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ m - натуральное исло, и $K:C\mapsto C$ - оператор конечного ранга, для ко- орого $\|S^m-K\|<\|S^m\|_K+\varepsilon$, $\|S^m-K\|\leqslant\|S^m\|$. Определим ператор $D:E\mapsto E$ равенством $D_q=K\circ q\circ K^*$ Тогда $\dim D(E)<+\infty$.

Рассмотрим оператор $T^m_q=S^m\circ q\circ S^{*m}$ Имеем

$$\|(T^m-D)q\|\leqslant\|S^m\circ q\circ S^{*m}-K\circ q\circ S^{*m}\|+\|K\circ q\circ S^{*m}-K\circ q\circ K^*\|\leqslant$$

$$\leqslant\|S^m-K\|(\|S^m\|+\|K\|)\|q\|\leqslant 3\|S^m-K\|\,\|S^m\|\,\|q\|.$$

Отсюда $\|T^m-D\| \le 3\,\|S^m\|(\|S^m\|_k+\varepsilon)$. Поскольку D оператор конечного ранга и $\varepsilon>0$ произвольно, отсюда следует $\|T^m\|_k \le 3\,\|S^m\|\,\|S^m\|_k$ и из формулы (3) вытекает

$$r_\varphi(T)=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\|T^m\|_k} \le \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{3}\,\sqrt[m]{\|S^m\|_k}\,\sqrt[m]{\|S^m\|} = r_\varphi(S)\,r(S),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. Если оператор A (производящий оператор полугруппы T, см. [1]) не имеет неотрицательных вещественных собственных значений, то при некоторых $M>0$, $\gamma>0$ $\|S(t)\|\le Me^{-\gamma t}$ для всех $t\ge 0$.

Доказательство. Согласно [3, лемма 2.2] нам достаточно доказать, что при некотором $t_1>0$ $r(S(t_1))<1$. Предположим, что это неверно. Пусть $t\ge t_0$. Из равенства $r_\varphi(S(t))<1$ следует, что вне круга радиуса $\rho=\frac{1}{2}[r_\varphi(S(t)+1]$ с центром в нуле содержится лишь конечное число точек спектра оператора $S(t)$, причем все они являются собственными значениями оператора $S(t)$ [4]. Пусть $\lambda_t=\lambda'+i\lambda''$ - то из этих собственных значений, модуль которого равен $r(S(t))$ и φ_0 соответствующий λ_t собственный вектор, т.е. $\varphi_0=\varphi_1+i\varphi_2$, где $\varphi_1, \varphi_2\in C$, $S(t)\varphi_1=\lambda'\varphi_1-\lambda''\varphi_2$, $S(t)\varphi_2=\lambda''\varphi_1+\lambda'\varphi_2$. Рассмотрим оператор $q_0\in E$, определяемый равенством

$$(q_0\ell)(\theta)=\langle\varphi_1 \ell\rangle\varphi_1(\theta)+\langle\varphi_2 \ell\rangle\varphi_2(\theta)$$

для любых $\ell\in C^*$, $\theta\in[-1,0]$. Легко проверить, что $T(t)q_0=|\lambda_t|^2 q_0$, т.е. $|\lambda_t|^2$ есть собственное значение оператора $T(t)$. При этом $|\lambda_t|^2$ есть изолированная точка $\sigma(T(t))$ т.к. $r_\varphi(T(t))\le r_\varphi(S(t))\cdot r(S(t))<r(S(t))^2=|\lambda_t|^2$. Кроме того, $|\lambda_t|^2=r(T(t))$ т.к. $r(T(t))=\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{\|(T(t))^m\|}\le\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{\|(S(t))^{2m}\|}=(r(S(t)))^2=|\lambda_t|^2$. Поскольку точечный спектр

$$P_\sigma(T(t))=\exp(tP_\sigma(A)) \text{ и } P_\sigma(T(t))=\exp(tP_\sigma(A))\cup\{0\} \quad (4)$$

[7], то

$$|\lambda_t|^2=\exp(t\,r(A)) \quad (t\ge t_0).$$

Остается доказать, что $r(A)\in P_\sigma(A)$. Из равенства (5) следует, что при каждом $t\ge t_0$ существует вещественное ν_t такое, что $r(A)+\nu_t i$ является и ованным собственным значением и $exp(t\nu_t i)=1$ то множество $\mathcal{N}=\{\nu_t \mid t>t_0\}\setminus\{0\}$ не лее начит, и множество всех вещественных чисел, соиз х с ислами из $\mathcal{N}$, не более чем счетно. Пусть t' таково $t'>t_0$ и $\frac{2\pi}{t'}$ несоизмеримо ни с одним $\nu_t\in\mathcal{N}$ бы $\nu_{t'}\in\mathcal{N}$, то $exp(t'\nu_{t'}i)\neq 1$ значит, $\nu_{t'}=0$, .е. $\nu(A)\in P_G(A)$ Полученное противоречие с условием еммы завершает казательство.

Сформулируем теперь основную теорем

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

существуют такие $M>0$ и $\gamma>0$ о для всех $t\geqslant 0$ $\|T(t)\|\leq M\exp(-\gamma t)$;

для любого $q\in\mathcal{K}$ существует потенциал $U_q=\int_0 T(t)q\,dt$;

оператор A не имеет неотрицательных вещественных собственных значений;

оператор A является биекцией $\mathcal{D}(A)$ на E функционал $V(\varphi)=\sum_{i=1}^{n}[\langle\varphi,D_i\rangle^2-\langle A^{-1}(\varphi\otimes\varphi)f_i,f_i\rangle-2\langle A^{-1}(\varphi\otimes\varphi)D_i,D_i\rangle]$, где $\varphi\otimes\varphi\in E$ и $(\varphi\otimes\varphi)(\theta_1,\theta_2)=\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)$ для любой $(\theta_1,\theta_2)\in Q$, удовлетворяет неравенству

$$V(\varphi)\geqslant\|D(\varphi)\|^2 \tag{6}$$

для любой $\varphi\in C$ (здесь f_i и D_i компоненты операторов f и $D: C\mapsto\mathbb{R}^n$) ;

f) тривиальное решение уравнения (1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Импликации (a)→ (в)→ (c) и (f) → (a) доказаны в [1] Из (c) следует (a) по лемме Остается показать, что (в)→ (e) и (e)→ (f).

Пусть $q\in E$ Тогда $AU_q=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\int_t^0 T(t)q\,dt=-q$. Обратно, если $q\in\mathcal{D}(A)$ то $UAq=\int_0\lim\limits_{t\to0}\frac{T(t)-I}{t}T(t)\,dt=\lim\limits_{t\to0}\int_0\frac{T(t)-I}{t}T(t)q\,dt=AU_q=-q$ Таким образом доказано, что A есть биекция. Далее, имеем $\sum_{i=1}^{n}\langle\varphi,D_i\rangle^2=\|D\varphi\|^2$; $\langle A^{-1}(\varphi\otimes\varphi)f_i,f_i\rangle=-\int_0\langle T(t)(\varphi\otimes\varphi)f_i,f_i\rangle dt=-\int_0\langle(\varphi\otimes\varphi)S(t)^*f_i,S(t)^*f_i\rangle=-\int_0\langle\varphi,S(t)^*f_i\rangle^2dt\leq0$; аналогично $\langle A^{-1}(\varphi\otimes\varphi)D_i,D_i\rangle\leq0$ значит, $V(\varphi)\geqslant\|D\varphi\|^2$, (в) → (e).

Пусть теперь выполнено (e). Вычислим $\dot V(\varphi)=\lim\limits_{t\to0}\frac{V(S(t)\varphi)-V(\varphi)}{t}$.

При этом заметим, что $\lim\limits_{\tau\to 0} A^{-1}\tau^{-1}[S(\tau)\varphi\bullet S(\tau)\psi-\psi\bullet\psi]=\psi\bullet\varphi$ и $\lim\limits_{\tau\to 0}\langle\frac{S(\tau)-I}{\tau}\varphi, D_i\rangle=\langle\psi,f_i\rangle\ (i=1,\dots,n)$ Получаем

$$\dot V(\psi)=-\|D\varphi\|^2-\|f\psi+D\psi\|^2\le-\|D\psi\|^2$$

Из последнего неравенства и неравенства (6) по [2 ,следствие 5.2] следует утверждение (f).

Теорема доказана.

Автор благодарит Е.Ф.Царькова за постановку задачи и внимание к работе и Р.Р.Ахмерова за ценные советы.

Литература

Царьков Е.Ф., Энгельсон Л.Я. О статистических решениях линейных систем дифференциально-функциональных уравнений.- Наст.сборник, с. 144.

2. Cruz M.A., Hale J.K. Stability of Functional Differential Equations of Neutral Type.-Differential Equations.1970, N 7, p.334-355.
3. Hale J.K. A Class of Neutral Equations with the Fixed Point Property. Proceedings of the National Academy of Sciences, 67, 1, 1970, p. 136-137.
4. Садовский Б.Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы.- УМН, 1972, т.27, вып.I, с.81-146.
5. Гольденштейн Л.С., Гохберг И.Ц., Маркус А.С. Исследование некоторых свойств линейных ограниченных операторов в связи с их q -нормой.-Уч.зап.Кишиневского ун-та, 1957, т.29, с.29-36.
6. Hale J.K. Functional Differential Equations.-Lectures at the University of California, Los Angeles. 1968-69.
7. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

Поступила 20 октября 1979 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига,I98I

УДК 513.83

ДОМИНИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И УЗКИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

А.И.Векслер
Ленинградский институт текстильной и легкой
промышленности им.С.М.Кирова

§ I. Основные определения. Терминология и обозначения

(Главное) определение I. Пусть X - топологическое пространство. Последовательность $\{F_n\}$ замкнутых (з.) нигде не плотных (н.н.п.) множеств в X называется доминирующей последовательностью (д.п.) (на X), если

а) $\bigcup F_n$ плотно в X и

б) для любой последовательности $\{F'_n\}$ з.н.н.п. множеств в X такой что $F'_n \cap F_n = \emptyset$ обязательно $\bigcup F'_n$ н.н.п. в X .

Замечание I. В условии б) нельзя заменить равенства $F'_n \cap F_n = \emptyset$ $(n\in\omega)$ на $F'_n \cap F_k = \emptyset$ $(n, k\in\omega)$ новое условие существенно слабее, чем б).

Замечание 2. Пусть $\{F_n\}$ - д.п. в X , Φ_n - з.н.н.п. и $\Phi_n \supset F_n$ $(n\in\omega)$ Тогда, очевидно, $\{\Phi_n\}$ тоже является д.п. Отсюда следует, что для любой д.п. существует мажорирующая ее монотонно возрастающая д.п.

Определение 2. Объединение $\bigcup F_n$ элементов доминирующей последовательности $\{F_n\}$ называется стержнем. Топологическое пространство, обладающее доминирующей последовательностью, называется узким.

Очень хорошие пространства обычно не являются узкими. ак, метрические пространства не являются узкими; не может ыть узким и никакое бэровское (т.е. такое, в котором плотно ополнение до всякого множества I категории) пространство со четной π-базой [I]. В то же время существуют узкие биомпакты [2], [3], узкие линейно упорядоченные бикомпакты.

В качестве примера хорошо известного пространства, являющегося узким, можно привести пространство $u\omega_1$ всех равномерных ультрафильтров над ω_1 ([4],[5]).

Как правило, нахождение доминирующей последовательности в данном пространстве весьма непросто. Тем самым, понятие узкого пространства, как нам кажется, не лежит на поверхности. С другой стороны, имеются содержательные примеры д.п. и узких пространств. Все это позволяет считать целесообразным самостоятельное изучение доминирующих последовательностей и узких пространств. Приведем один относительно простой пример узкого пространства (являющегося нехаусдорфовым T_1- пространством).

<u>Пример I</u>. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - попарно дизъюнктные последовательности точек единичного отрезка I с плотными объединениями в I . Пусть, далее, I_α - копия I $(\alpha\in\omega_1)$. Положим $X=\{x_0\}\cup\bigcup\{I_\alpha:\alpha\in\omega_1\}$ и зададим топологию на X В качестве базиса окрестностей точки x_0 возьмем семейство всех дополнений к счетным объединениям вида $\bigcup\{I_{\alpha_n}\ n\in\omega\}$. Если же $x\neq x_0$, то пусть ее базис окрестностей состоит из всех множеств вида $\bigcup\{I_\alpha\setminus C_\alpha\ \alpha\in\omega_1\}$, где для счетного числа индексов $C_\alpha=I_\alpha$, а остальные C_α - з.н.н.п. в топологии отрезка I_α . Пусть $F_n=\bigcup\{x_\alpha^n\ \alpha\in\omega_1\}\cup\{x_0\}$, где x_α^n - образ $x_n\in I$ в I_α , $\Phi_n=\bigcup\{y_\alpha^n\ \alpha\in\omega_1\}\cup\{x_0\}$. Без большого труда можно проверить, что $\{F_n\}$ и $\{\Phi_n\}$ - д.п. на X

Мы будем пользоваться терминологией монографий [5] и [7], но замыкание множества A будем обозначать через $\mathrm{cl}\,A$. Буквой X будет обозначаться топологическое пространство. Запись „$A\,\mathrm{d}\,B$" следует рассматривать как сокращение более длинной „$A\cap B=\emptyset$" . Символы G, G_0 будут употребляться для обозначения открытых множеств, а символы F, Φ, F_n, F_n' - для обозначения з.н.н.п. множеств (или подмножеств). Под Θ-множеством будет пониматься з.н.н.п. нуль-множество (т.е. множество нулей некоторой непрерывной вещественной функции на X), для обозначения таких множеств будут использованы символы $\Theta, \Theta_n \ldots$. В нормальном пространстве класс Θ-множеств совпадает с классом з.н.н.п. G_δ - множеств. Если

$A \subset H \subset X$ то утверждение вида A - замкнутое (открытое, н.н.п., Θ-) подмножество (в H)" следует понимать так: A - замкнутое (открытое, н.н.п., Θ-) множество H в относительной топологии на H ". Запись вида $A_n \uparrow H$ расшифровывается так: $A_n \uparrow$ (т.е. $\{A_n\}$ монотонно возрастает) и $\bigcup A_n = H$ при этом под $\bigcup A_n$ всюду понимается $\bigcup\{A_n : n \in \omega\}$

§ 2. Доминирующие последовательности

Отметим несколько простых свойств д.п.

Предложение I. Пусть $\{F_n\}$ - доминирующая последовательность на X . Тогда

I) след $\{F_n\}$ на любом канонически замкнутом (к.з.) множестве X_0 есть д.п. на X_0

2) если X открыто и плотно в Y , а Φ_n - з.н.н.п. в Y и $\Phi_n \supset \mathrm{cl}_Y F_n$, то $\{\Phi_n\}$ - д.п. на Y ;

3) если $\bigcup F_n \subset H \subset X$, то $\{F_n\}$ - д.п. на H ;

4) если в 3) H является множеством I категории в X то H - стержень в X .

Доказательство. I) Так как X_0 - к.з. в X , то $F_n \cap X_0$ - н.н.п. в X_0 и $\bigcup(F_n \cap X_0)$ плотно в X_0 . Значит, для последовательности $\{F_n \cap X_0\}$ выполнено условие а) из определения д.п. Проверим б). Пусть F_n' - з.н.н.п. в X_0 и $F_n' \, d \, (F_n \cap X_0)$ $(n \in \omega)$ Тогда, очевидно, $F_n' \, d \, F_n$ и так как $\{F_n\}$ - д.п. на X то $\bigcup F_n'$ н.н.п. в X , следовательно, н.н.п. и в X_0 .

2) В силу замечания 2 к определению I достаточно показать, что $\{\mathrm{cl}_Y F_n\}$ - д.п. на Y . Надо проверить лишь выполнение б). Пусть F_n' - з.н.н.п. в Y и $F_n' \, d \, \mathrm{cl}_Y F_n$. Тогда $F_n' \cap X$ - з.н.н.п. в X и $(F_n' \cap X) \, d \, F_n$. Потому $\bigcup\{F_n' \cap X\}$ - н.н.п. X , откуда $\bigcup F_n'$ - н.н.п. в Y .

3) Очевидно, что F_n н.н.п. в H . Поэтому надо лишь проверить б). Пусть F_n' - з.н.н.п. подмножество в H и $F_n' \, d \, F_n$. Очевидно, $\mathrm{cl}_X F_n' \, d \, F_n$. Так как $\{F_n\}$ - д.п.

на X , то $\bigcup cl_X F'_n$ – н.н.п. в X. Отсюда $\bigcup F'_n$ – н.н.п. в H.

4) Сразу вытекает из 2) при $Y = X$.

Следствие. I) Канонически-замкнутое множество узкого пространства – узкое пространство.

2) Бикомпактификация узкого локально-бикомпактного пространства – узкое пространство.

3) Всякий стержень является узким (небэровским) пространством (в относительной топологии).

Очевидно также, что прямая сумма узких пространств – узкое пространство.

Предложение 2. Пусть φ $Y \longrightarrow X$ – замкнутая (непрерывная) сюръекция такая что образ и полный прообраз н.н.п. множеств-оами н.н.п. Тогда

I) если $\{F_n\}$ – д.п. на Y то $\{\varphi(F_n)\}$ – д.п. на X
2) если $\{F_n\}$ – д.п. на X то $\{\varphi^{-1}(F_n)\}$ – д.п. на Y

Доказательство. Ограничимся, к примеру, доказательством 2). В силу свойств φ а) выполнено для $\{\varphi^{-1}(F_n)\}$ и в проверке нуждается лишь условие б). Если F'_n – з.н.н.п. в Y и $F'_n \alpha \varphi^{-1}(F_n)$, то $\varphi(F'_n) \alpha F_n$. Значит, $\bigcup \varphi(F'_n)$ – н.н.п в X. Поэтому $\bigcup \varphi^{-1}\varphi(F'_n)$ – н.н.п. в Y. Тем более $\bigcup F'_n$ – н.н.п. в Y

Следствие. Соабсолютные пространства являются узкими лишь одновременно.

Наша ближайшая цель – выделить один большой класс д.п. и с его помощью соответствующий класс узких пространств. Напомним предварительно некоторые понятия.

Определение 3. Замкнутое множество H в X называется P'-множеством (соответственно P-множеством), если для любого G_δ-множества $C \supset H$ выполнено $cl\, int\, C \supset H$ (соответственно $int\, C \supset H$). P'-ядром множества A называется объединение $P'(A)$ всех P'-множеств (не P-подмножеств!), содержащихся в A .

Понятие P'-множества было введено в работе автора [8] и изучалось в [9], [IO] и др.; P-множества также изучались в [II], [I2]. Для удобства ссылок мы соберем все необходимые в альнейшем свойства P-множеств и P'-множеств в следующем помогательном предложении.

Лемма 3. В регулярном X имеют место следующие утверждения: I) к.з. множество в X есть P'-множество 2) $'$-подмножество P'-множества есть P'-множество в X 3) P'- ядро замкнутого множества замкнуто 4) в пространстве условием Суслина нет непустых н.н.п. P'-множеств; 5) след на P'-множестве любого Θ-множества н.н.п. подмножество; 6) если Φ - P'-множество, а G - открытое множество в X то $\mathrm{cl}(\Phi \cap G)$ - P'-подмножество в к.з. $\mathrm{cl}\, G$ а следовательно, P'-множество в X 7) объединение двух P'-множеств (P-множеств) есть P'-множество (P-множество) 8) пересечение двух P-множеств есть P-множество. В бикомпакте X имеют место следующие утверждения: 9) если X базисно несвязно [I3] (в частности, если X экстремально несвязно), то классы P'-множеств и P-множеств в X совпадают; I0) след н.н.п. P-множества на любом Θ-множестве - н.н.п. подмножество; II) всякое э.н.н.п. множество с пустым P'- ядром погружается в Θ-множество; I2) если Y - абсолют X, а $\psi: Y \to X$ - каноническое отображение, то полный прообраз всякого непустого P'-множества из X содержит непустое P-множество из Y.

Предложение 4. Всякая монотонно возрастающая последовательность $\{F_n\}$ н.н.п. P'-множеств с плотным объединением является доминирующей.

Доказательство. Пусть F'_n - э.н.н.п. и $F'_n \,d\, F_n$. Допустим, что $\mathrm{cl} \bigcup F'_n$ покрывает открытое $G \neq \emptyset$. Найдется F_n, пересекающееся с G. Не умаляя общности, можно считать, что $F_1 \cap G \neq \emptyset$. Так как $F'_n \,d\, F_n \supset F_1$, то $(\bigcup F'_n) \,d\, F_1$. Пусть $C = X \setminus \bigcup F'_n$ Тогда G_δ-множество $C \supset F_1$. Однако $\mathrm{cl}\, \mathrm{int}\, C \,d\, G$, т.е. $\mathrm{cl}\, \mathrm{int}\, C \not\supset F_1$. Это противоречит тому, что F_1 P'-множество.

Замечание. Существуют бикомпакты с такой последовательностью $\{F_n\}$ как в предложении 4. Так, В.А.Гейлер [2] построил базисно несвязный (квазиэкстремально несвязный) бикомпакт, в котором имеется последовательность н.н.п. P-множеств с плотным объединением. Из результатов Б.Балцара и П.Вопенки [4] следует, что такая же последовательность P-множеств имеется в пространстве $U\omega_1$ равномерных ультрафильтров на ω_1 (автор благодарен П.Симону, обратившему его внимание на работу [4]). Отметим еще, что д.п. $\{F_n\}$ и $\{\Phi_n\}$ из примера также состоят из P'-множеств.

Предложение 4 позволяет относительно несложно построить пример линейно упорядоченного узкого бикомпакта X (недостаток места не позволяет поместить его здесь).

Для получения содержательных результатов о д.п. и узких пространствах будем в дальнейшем, как правило, накладывать на рассматриваемые пространства некоторые ограничения.

Определение 4. Будем говорить, что в X существует π- база канонически замкнутых множеств (к.з.м.), если для любого открытого $G \neq \emptyset$ найдется к.з. $X_c \subset G$, $X_c \neq \emptyset$

В регулярном пространстве существует π- база к.з.м., в хаусдорфовом такой может и не быть.

Теорема 5. Пусть в X существует π- база канонически замкнутых множеств, $\{F_n\}$- д.п. в X . Тогда

I) всякая подпоследовательность $\{F_{n_k}\} \subset \{F_n\}$ $(n_1 < n_2 < \ )$ есть д.п. на X

2) если F_n' - з.н.н.п. и $\bigcup(F_n' \cap F_n)$ н.н.п., то и $\bigcup F_n'$ н.н.п.;

3) если $\{\Phi_n\}$- тоже д.п. на X то и $\{F_n \cap \Phi_n\}$- д.п. на X ;

4) если G открыто, то $\{F_n \cap G\}$ - д.п. на G

Доказательство. I) Условие б) из определения I выполнено для $\{F_{n_k}\}$ очевидным образом. Осталось проверить, что $H = cl \bigcup\{F_{n_k} : k \in \omega\} = X$. В предположении противного в открытом $X \setminus H$ найдется к.з. множество $X_0 \neq \emptyset$. Положим $F_n' = F_n \cap X_0$. Тогда $F_k' \, d \, F_{n_k}$, ибо $F_{n_k} \, d \, X_0$. Однако $\bigcup F_k' = (\bigcup F_k) \cap X_0$ плотно в X_0 вопреки б) для $\{F_{n_k}\}$

2) В предположении противеного существует непустое к.з. $X_0 \, d \, \bigcup(F_n' \cap F_n)$, на котором плотен след $\bigcup F_n'$ Тогда

$(F_n'\cap X_0)\ d\ F_n$, но $\bigcup(F_n'\cap X_0)$ плотно в X_0 Это противоречит тому, что $\{F_n\}$ – д.п. на X .

3) Сначала проверим, что для $\{F_n\cap\Phi_n\}$ выполнено а). предположении противного $\bigcup(F_n\cap\Phi_n)\ d\ X_0$ для некоторого .з. $X_0\neq\emptyset$. В силу предл.I.I) $\{F_n\cap X_0\}$– д.п. на X_0, и так как $(\Phi_n\cap X_0)\ d\ (F_n\cap X_0)$ то $\bigcup(\Phi_n\cap X_0)=(\bigcup\Phi_n)\cap X_c$ н.н.п. X_0 Но это противоречит доминируемости $\{\Phi_n\}$ Теперь проверим б).

Пусть F_n' з.н.н.п. в X и $F_n'\ d\ (F_n\cap\Phi_n)$. Тогда $(\Phi_n\cap F_n')\ d\ F_n$ Отсюда $\bigcup(\Phi_n\cap F_n')$ н.н.п. в X Но в силу 2) и доминируемости $\{\Phi_n\}$, $\bigcup F_n'$ н.н.п. в X

4) Надо проверить лишь б). Пусть F_n' – з.н.н.п. подмножество в G и $F_n'\ d\ (F_n\cap G)$. Если $\bigcup F_n'$ плотно в $G_0\neq\emptyset$, $G_0\subset G$, то пусть X_0 – к.з. в X и $\emptyset\neq X_0\subset G_0$ В силу предл.I.I) $\{F_n\cap X_0\}$ – д.п. на X_0 Далее $F_n'\cap X_0$– з.н.н.п. X_c , $(F_n'\cap X_0)\ d\ (F_n\cap X_0)$, но $\bigcup(F_n'\cap X_0)$ плотно в X_c.

Противоречие завершает доказательство.

Замечание. В узком T_1– пространстве из прим.I не выполнено ни одно из утверждений теоремы, в частности $F_n\cap\Phi_n=\{x_0\}$. Существует узкое хаусдорфово пространство, в котором не выполнены утверждения I), 3) и 4) теоремы.

§ 3. Классификация стержней

Естественным представляется следующий вопрос. Пусть M стержень. Можно ли утверждать, что любая $\Phi_n\uparrow M$ является д.п.?

Определение 5. Стержень, для которого ответ на предыдущий ответ положителен, называется твердым. Стержень M , для которого существуют последовательности з.н.н.п. множеств $\Phi_n\uparrow M$ и $F_n'\ d\ \Phi_n$, причем $\bigcup F_n'$ плотно в X называется мягким. Ясно, что мягкий стержень – антипод твердому.

Предложение 5. Пусть X – регулярное, наследственно бэровское по замкнутым множествам пространство и д.п. $\{F_n\}$ удовлетворяет условиям предложения 4. Тогда стержень $M=\bigcup F_n$ является твердым.

Доказательство. Пусть $\Phi_n \uparrow M$ В силу предл.4 достаточно проверить, что $\cup P'(\Phi_n)$ плотно в X В предположении противного найдется к.з.м. X_0 такое, что $\emptyset \neq X_0\, d\, \mathrm{cl} \cup P'(\Phi_n$ Пусть $F_{n_0} \cap \mathrm{int}\, X_0 \neq \emptyset$. В силу леммы 3.6) $F_0 = \mathrm{cl}\, (F_{n_0} \cap \mathrm{int}\, X$ P'-множество. Очевидно, $F_0 \subset (\cup \Phi_n) \cap X_0$ $\cup\, (\Phi_n \cap X_0)$ Докажем, что это невозможно.

Действительно, $\Phi_n \cap F_0$ - н.н.п. подмножество в F_0 В противном случае $\Phi \cap F_0$ содержало бы непустое к.з. подмножество Φ в F_0 ; тогда в силу леммы 3.1 и 2), Φ - P'-множество в X и в то же время $\Phi \subset \Phi_n$ и $\Phi\, d\, P'(\Phi_n)$ Так как F_0 -бэровское (по условию) - включение $F_0 \subset \cup \Phi_n$ невозможно.

Замечание. Без требования наследственной бэровости X по замкнутым множествам соответствующий стержень M может оказаться даже мягким.

Существование мягких стержней вытекает из следующего утверждения.

<u>Предложение 7</u>. Если $\{\Theta_n\}$ - л.п. Θ-множеств в произвольном X то стержень $M = \cup \Theta_n$ является мягким.

Сначала докажем следующую лемму.

<u>Лемма 9</u>. Пусть $\{\Theta_n\}$ - последовательность Θ-множеств. Тогда найдется последовательность $\{\Theta'_n\}$ Θ-множеств такая, что $\cup \Theta'_n = \cup \Theta_n$ и $\Theta'_n\, d\, \Theta'_m$ при $|n-m|>1$.

Доказательство леммы. Сначала установим, что для любых Θ-множеств $\Theta' \subset \Theta''$ найдется $\{\bar\Theta_n\}$ такая, что $\cup \bar\Theta_n = \Theta'' \setminus \Theta'$ и $\bar\Theta_n\, d\, \bar\Theta_m$ при $|n-m|>1$. Для этого достаточно заметить, что Θ' - есть множество нулей некоторой непрерывной функции f $X \longrightarrow [0,1]$, и положить

$$\bar\Theta_n = \Theta'' \cap \{x \in X \quad 1/n+1 \leq f(x) \leq 1/n\} \qquad (n \in \omega).$$

Далее, не умаляя общности, можно считать, что $\Theta_n \uparrow$ Пользуясь уже доказанным, построим последовательности $\{\Theta^n_k \quad k \in \omega\}$ такие, что $\cup \{\Theta^n_k \quad n \in \omega\} = \Theta_k \setminus \Theta_{k-1}$ $\Theta^n_k\, d\, \Theta^m_k$ при $|n-m| \geq 1$. Остается положить $\Theta'_n = \Theta^n_1 \cup \Theta^{n-1}_2 \cup \ldots \cup \Theta^1_n$

Доказательство предложения 7. Применяя лемму 8, положим $\Phi_n = \Theta_1' \cup \Theta_{n-2}'$ и $F_n' = \Theta_n'$ Тогда $F_n' \, d \, \Theta_n'$, $\Phi_n \uparrow M = \bigcup \Theta_n$ но и $\bigcup F_n'$ $M = \bigcup \Theta_n'$

Замечание. А.В.Колдунов (см.[3]) построил бикомпакт X с условием Суслина и д.п. Θ-множеств, следовательно, с мягким стержнем. Твердого стержня в X быть не может в силу леммы 3.4) и теор.12. В [5] было показано, что в $u\omega_1$ при некоторых теоретико-множественных предположениях, более слабых, чем гипотеза континуума CH (именно при наличии ω_1 - шкалы в ω^{ω}; как показал А.Шиманский [14], без этого условия обойтись нельзя), тоже существует д.п. $\{\Theta_n\}$ Θ-множеств (т.е. и мягкий стержень). Если $\{F_n\}$ - д.п. P-множеств в $u\omega_1$, о которой шла речь в замечании к предл.4 (объединение которой есть твердый стержень), то по теореме 5 $\{F_n \cap \Theta_n\}$ тоже есть д.п. в $u\omega_1$. При этом эта д.п. состоит из "крошечных" множеств, так как $F_n \cap \Theta_n$ н.н.п. как в F_n, так и в Θ_n (см. лемму 3.6) и [I))! Заметим еще, что всякий очетный стержень в пространстве, очевидно мягкий (В.И.Малыхин, как известно автору, помощью CH построил счетное регулярное узкое пространство [I]).

<u>Предложение 9</u>. Пусть X -пространство с π- базой к.з.м, M - стержень в X. Тогда в X найдется такая максимальная система $\{X_0, X_\gamma(\gamma \in \Gamma)\}$ попарно непересекающихся к.з.м., что $M_0 = M \cap X_0$ - твердый стержень в X_0 а $M_\gamma = M \cap X_\gamma$ - мягкий стержень в X_γ.

Доказательство. Назовем открытое $G \neq \emptyset$ отмеченным, если существуют последовательности з.н.н.п. множеств $\Phi_n \uparrow M$ и $\{F_n'\}$(зависящие от G) такие, что $G \, d \, \bigcup(F_n' \cap \Phi_n)$, а $\bigcup F_n'$ плотно на G Пусть G_0 - объединение всех отмеченных множеств, а $X_0 = X \setminus \mathrm{int}\,\mathrm{cl}\, G_0$. В силу предл.1.1), M_0 - стержень в X_0. Покажем, что он твердый. Пусть $F_n \uparrow M_0$, F_n' - н.н.п. в X_0, $F_n' \, d \, F_n$, но $\bigcup F_n'$ плотно на $G \neq \emptyset$. гда если $\bar{F}_n \uparrow M$ то $\Phi_n = (\bar{F}_n \cap \mathrm{cl}\, G_0) \cup F_n \uparrow M$, $d \bigcup(F_n' \cap \Phi_n)$(так как $F_n' \cap \Phi_n \subset \mathrm{Fr}\, X_0$) и $\bigcup F_n'$ плотно G. Но это означает, что G - отмеченное множество вопреки тому, что $G \, d \, G_0$ Итак, M_0 – твердый стержень в X_0.

Выберем теперь в G_0 максимальную систему $\{X_\gamma \ \gamma \in \Gamma\}$ к.з.м., каждое из которых лежит в некотором отмеченном множестве. В силу предл.I.I) M_γ – стержень в X_γ. Но если $\Phi_n \uparrow M$, $F_n' \, d \, \Phi_n$ и $\bigcup F_n'$ плотно на отмеченном $G \supset X_\gamma$ то $(\Phi_n \cap X_\gamma) \uparrow M_\gamma$, $(F_n' \cap X_\gamma) \, d \, (\Phi_n \cap X_\gamma)$ и $\bigcup (F_n' \cap X_\gamma)$ плотно в X_γ. А это значит, что стержень M_γ – мягкий в X_γ.

Замечание. Даже если $X_0 = \emptyset$ стержень M из предл.9 может не быть мягким (такой стержень естественно назвать <u>почти мягким</u>). В то же время, если все стержни M_0, M_γ твердые для максимальной системы $\{X_0, X_\gamma (\gamma \in \Gamma)\}$ к.з.м., то и стержень M – твердый.

Предл.9 показывает, что изучение стержней сводится, в известном смысле, к изучению твердых и мягких стержней.

<u>Предложение I0</u>. Пусть M – твердый стержень X Тогда

I) если в X имеется π – база к.з.м., а X_0 – к.з.м. то $M_0 = M \cap X_0$ – твердый стержень в X_0

2) если X открыто и плотно в Y, а M' F_σ множество I категории в Y и $M' \supset M$, то M' твердый стержень в Y;

3) если $M \subset H \subset X$, то M – твердый стержень в H

Доказательство. I) Положим X_1 $cl(X \setminus X_0)$, $M_1 = M \cap X_1$ Очевидно, $M_0 \cup M_1$ M а $M_0 \cap M_1 \subset \mathrm{Fr}\, X_0$ $\mathrm{Fr}\, X_1$ Пусть $F_n^{(0)} \uparrow M_0$, $F_n^{(1)} \uparrow M_1$ и $F_n' \, d \, F_n^{(0)}$, где F_n' з.н.н.п. в X_0. Тогда $F_n = (F_n^{(0)} \cup F_n^{(1)}) \uparrow M$. Так как M твердый стержень, то $\{F_n\}$ – д.п. на X Очевидно, $\bigcup (F_n' \cap F_n) \subset \mathrm{Fr}\, X_0$ т.е. н.н.п. в X По теор.5.2) отсюда $\bigcup F_n'$ н.н.п. в X и в X_0. Но это означает, что $\{F_n^{(0)}\}$ – д.п. на X_0 а M_0 твердый стержень в X_0.

2) Если $\Phi_n \uparrow M'$ в Y, то пусть $F_n = \Phi_n \cap X$. Тогда $F_n \uparrow$ и $\bigcup F_n \supset M$. Так как M – твердый стержень, то $\{F_n\}$ – д.п. на X Но $\Phi_n \supset cl_Y F_n$ В силу предл.I.2) $\{\Phi_n\}$ – д.п. на Y

3) Нужно проверить, что если F_n, F_n' з.н.н.п. в H, $F_n \uparrow M$ и $F_n' \, d \, F_n$, то $\bigcup F_n'$ н.н.п. в H.

Положим $\overline{F}_n = cl_X F_n$, $\overline{F}'_n = cl_X F'_n$. Пусть Φ_n - з.н.н.п. в X и $\Phi_n \uparrow M$ Имеем $F_n = \overline{F}_n \cap H = \overline{F}_n \cap M = \overline{F}_n \cap (\cup \Phi_i) = \cup \{\overline{F}_n \cap \Phi_i \ i \in \omega\}$ Очевидно, $F_{in} = \overline{F}_n \cap \Phi_i$ - з.н.н.п. в X и $F_{in} \uparrow F_n$. Так как $\overline{F}_n \uparrow$ и $F_n \uparrow M$, то и $F_{nn} \uparrow M$ причем F_{nn} - з.н.н.п. в X Ввиду того, что M - твердый стержень, - $\{F_{nn}\}$ - д.п. на X Но так как $F_n \supset F_{nn}$, то $F'_n \, d \, F_{nn}$. Отсюда, учитывая, что $F'_n = \overline{F}'_n \cap H$, получаем $\overline{F}'_n \, d \, F_{nn}$ Поэтому $\cup \overline{F}'_n$ н.н.п. в X и, значит, $\cup F'_n$ н.н.п. в H

Замечание. Предл.10.1) переносится и для мягких стержней (для любого X). Из 10.2) следует, что если $M_1 \subset M_2$ - стержни в X и M_1 - твердый, то и M_2 - твердый, нетрудно показать, что если M_2 - мягкий, то и M_1 - мягкий. Что же касается предл.10.3), то оно переносится на случай мягких стержней, если в X имеется π- база к.з.м.

Предл.10 и замечание к нему можно рассматривать в качестве добавлений к предл.1. Следующее утверждение сразу вытекает из предл.2 и может рассматриваться как добавление к нему.

Предложение 11. В условиях предложения 2:

1) если M - твердый стержень в Y то $\varphi(M)$ - твердый стержень в X ;

2) если M - мягкий стержень в X то $\varphi^{-1}(M)$ - мягкий Y .

Замечание. Предл.11.1) теряет силу для мягких стержней даже для бикомпактов X и Y. Ниже (в след.1 к теор.12) будет показано, что 11.2) переносится на случай твердых стержней для локальных бикомпактов X и Y

§ 4. Строение твердых и мягких стержней

Оказывается, твердый стержень, описанный в предл.5, является типическим для твердых стержней. Именно имеет место следующая

Теорема 12. Пусть M - плотное F_σ- множество 1 категории в локальном бикомпакте X. Равносильны следующие утверждения:

I) M - твердый стержень;

2) если $F_n \uparrow M$ то $\bigcup P'(F_n)$ плотно в X или, иначе говоря, $\{F_n\}$ мажорирует некоторую возрастающую д.п. P'-множеств;

3) $P'(M)$ плотно в X .

Доказательство. 2) $\Longrightarrow$ I) следует из предл.5 и IO.2) (при $Y = X$), 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидно.

I) $\Longrightarrow$ 2). Допустим, что $\bigcup P'(F_n)$ не плотно в X, и пусть непустое бикомпактное к.з.м. $X_c\ d\ \mathrm{cl} \bigcup P'(F_n)$. Никакое множество $F_n \cap X_0$ не содержит непустых P'-множеств из X , а значит, и непустых P'-подмножеств из X_c (лемма 3.2)). По лемме 3.II) $F_n \cap X_0$ погружается в некоторое Θ-подмножество Θ_n из X_0 Можно считать, что $\Theta_n \uparrow M' = \bigcup \Theta_n$ Тогда в силу предл.7 и замечания к предл.IO стержень $M \cap X_c$ мягкий в X_0 . Но это противоречит предл.IO.I).

3) $\Longrightarrow$ 2). В предположении противного возьмем предыдущее X_0 и P'-множество $\Phi \subset M$ такое, что $\Phi \cap \mathrm{int}\ {}_c \neq \emptyset$. По лемме 3.7) $\Phi_c = \mathrm{cl}(\Phi \cap \mathrm{int}\ X_c)$ P'-подмножество в X_0 При этом $\Phi_0 \subset \Phi \subset M$ Выше было показано, что $F_n \cap X_c \subset \Theta_n$ Отсюда $\emptyset \neq \Phi_0 \subset M \cap X_c \subset \bigcup \Theta_n$ А это невозможно в силу леммы 3.5) и бикомпактности X_0

Замечание. Уже для вполне регулярного X теорема теряет силу (ср. с замечанием к предл.5).

<u>Следствие I</u>. Пусть X и Y - локальные бикомпакты, а $\varphi\ Y \to X$ замкнутая неприводимая сюръекция. Тогда, если M твердый стержень в X то $\varphi^{-1}(M)$ - твердый стержень в Y

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что Y - экстремально несвязен. Действительно, если Z - абсолют Y, $\Psi\ Z \to Y$ - каноническая сюръекция, а $(\psi\varphi)^{-1}(M)$ твердый стержень в Z то $\varphi^{-1}(M) = \Psi[(\psi\varphi)^{-1}(M)]$ - твердый стержень в Y в силу предл.II.I).

По теор.I2 $P'(M)$ плотно в X В предположении неплотности $P'(\varphi^{-1}(M))$ найдется непустое открыто-замкнутое в Y бикомпактное $Y_0\ d\ P'(\varphi^{-1}(M))$. Теперь вместо Y, X, φ и M надо рассмотреть Y_0 , $X_0 = \varphi(Y_0)$, соответствующее сужение φ_0 отображения φ и $M_0 = M \cap X_0$. Тогда Y_0 и X_0 - бикомпакты, Y_0 - абсолют X_0, φ_0 - каноническое отображение, $P'(M_0) \neq \emptyset$ (хотя бы по лемме 3.5)), а $P'(\varphi^{-1}(M_0)) = \emptyset$ Это противоречит лемме 3.12).

Следствие 2. В локальном бикомпакте X пересечение двух твердых стержней M_1 и M_2 есть твердый стержень.

Доказательство. В силу предл.11.1) и замечания к предл.9 можно считать, не умаляя общности, что X - бикомпакт. Сначала рассмотрим случай экстремально несвязного бикомпакта X Тогда в силу теор.12 и леммы 3.9) можно дополнительно считать, что найдутся н.н.п. P-множества $F_n^1 \uparrow M_1$, $F_n^2 \uparrow M_2$ $F_n^1 \cap F_n^2$ P-множества (лемма 3.8)) и $(F_n^1 \cap F_n^2) \uparrow (M_1 \cap M_2)$ По теор.12 стержень $M_1 \cap M_2$ - твердый.

В случае любого бикомпакта X мы, используя след.1, переходим к абсолюту X далее пользуемся уже доказанным и предл.11.1).

Замечание. В примере 1 пересечение твердых стержней $\cup F_n$ $\cup \Phi_n$ состоит из одной точки. С другой стороны, можно показать, что в локальном бикомпакте X пересечение счетного числа твердых стержней плотно на X (но не обязано быть стержнем). Пользуясь этим, можно доказать, что если M - твердый стержень в локальном бикомпакте X, $\{F_n\}$ - д.п. (не обязательно возрастающая!) и $\cup F_n = M$ то в X найдется такое плотное множество E что всякая точка из E принадлежит бесконечному числу множеств F_n.

Перейдем к характеристикам мягких стержней. Здесь типическим является стержень из предл.7.

Теорема 13. Пусть X нормальное пространство, M - стержень в X Равносильны следующие утверждения:

1) M - мягкий стержень;

2) M допускает счетное покрытие Θ-множествами;

3) M допускает звездно-конечное счетное покрытие .н.н.п. множествами;

4) M допускает такое же покрытие кратности 3 (т.е.

каждый элемент покрытия пересекает не более двух других элементов покрытия).

Доказательство. Схема 1) $\Rightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 1). При этом 4) $\Longrightarrow$ 3) очевидно.

1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $F_n \uparrow M$, $F_n' \, d \, F_n$ и $\bigcup F_n'$ плотно в X. Положим $C_n = X \setminus \bigcup \{F_k' \ \ k \geq n\}$. Тогда C_n - G_δ-множество, $\operatorname{int} C_n = \emptyset$, $C_n \uparrow$ и $C_n \supset F_n$ (ибо $F_k' \, d \, F_n$ при $k \geq n$). В силу нормальности X найдется Θ-множество Θ_n, для которого $C_n \supset \Theta_n \supset F_n$. Очевидно, $\bigcup C_n \supset \bigcup F_n = M$

2) $\Longrightarrow$ 4). Если $M \subset \bigcup \Theta_n$, то в качестве искомого покрытия можно взять покрытие $\{\Theta_n'\}$ из леммы 9.

3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\{\Phi_n\}$ - данное покрытие. Положим

$F_n = \Phi_1 \cup \quad \cup \Phi_n$

$$F_n' = \bigcup \{\Phi_k : \Phi_k \cap \Phi_n \neq \emptyset \text{ и } \Phi_k \, d \, (\Phi_1 \cup \quad \cup \Phi_{n-1})\} \quad (n \in N)$$

В силу звездной конечности $\{\Phi_n\}$, каждое F_n' есть объединение конечного числа Φ_k т.е. F_n' - з.н.н.п. Далее, $F_n \uparrow$ и $F_n' \, d \, F_n$. Для завершения доказательства достаточно убедиться, что $\bigcup F_n' \supset M$.

Возьмем любое Φ_l. Пусть $n = n(l)$ - наименьшее, при котором $\Phi_l \cap \Phi_n \neq \emptyset$. По построению $F_n' \supset \Phi_l$. Значит, $\bigcup F_n' \supset \bigcup \Phi_l \supset M$

Следствие. В нормальном пространстве объединение счетного числа мягких стержней есть мягкий стержень.

Замечание. Пересечение счетного числа мягких стержней может быть пусто даже в случае бикомпакта (ср. с замечанием к след.2 теор.12).

Теорема 14. В бикомпакте X стержень M является мягким тогда и только тогда, когда $P'(M) = \emptyset$

Доказательство. Действительно, пусть $P'(M) = \emptyset$ и $F_n \uparrow M$. Тогда $P'(F_n) = \emptyset$. По лемме 3.1) $F_n \subset \Theta_n$. Значит, $M \subset \bigcup \Theta_n$ Обратно, если $M \subset \bigcup \Theta_n$, то $P'(M) = \emptyset$ по лемме 3.5). Теперь остается сослаться на теор.13.

Замечание 1. Существует локальный бикомпакт немягким стержнем M таким, что $P'(M) = \emptyset$. С другой стороны, уществует вполне регулярное пространство с мягким стержнем $P'(M)$.

Замечание 2. Еще одно условие равносильно мягкости стерж-я в бикомпакте: для всякой $F_n \uparrow M$ найдется мажорирующая оследовательность Θ -множеств.

<u>Определение 6.</u> Назовем стержень M <u>разложимым</u>, если уществуют такие плотные F_σ-множества I категории M_1 и M_2, то $M_1 d M_2$ и $M_1 \cup M_2 \supset M$ Стержень M будет называться <u>трого неразложимым,</u> если для любых F_σ-множеств категории M_1 и M_2 таких, что $M_1 d M_2$ и $M_1 \cup M_2 \supset M$ найдутся к.з.м. X_1 и X_2 для которых $X_1 \cup X_2$ X и множества $M_i \cap X_i$ $=1,2)$ н.н.п. в X

<u>Предложение 15.</u> Твердый стержень M в локально-бикомактном или нормальном пространстве строго неразложим.

Доказательство. Поскольку случай локального бикомпакта водится к случаю бикомпакта, достаточно рассмотреть слуай нормального X

Допустим, что следы указанных множеств M_1 и M_2 плотны а некотором к.з. $X_0 \neq \emptyset$ В этом случае предл.10.1) позволят дополнительно считать, что $X = X_0$ т.е. M_1 и M_2 плотны в X Далее в нормальном пространстве замкнутые дизъюнкные множества можно отделить нуль-множествами (в данном случае з. G_δ-множествами). Отсюда, если M_0 - плотное F_σ-множество и $F d M$ то найдется $\Theta \supset F$, $\Theta d' M_0$. Из этого рассуждения вытекает, что плотные F_σ-множества M_1 и M_2 можно отделить F_σ-множествами вида $\cup \Theta_n^1$ и $\cup \Theta_n^2$ Но тогда M допускает счетное покрытие Θ-множествами, начит, он мягкий по теор.14.

Замечание. Существуют и разложимые стержни.

Литература

Малыхин В.И. Об узких пространствах. - В настоящ.сб.

2. Гейлер В.А. Пример K_σ-пространства, не содержащего диничных элементов своего K-пополнения. - Уч.зап.

Ленингр.пед.ин-та им.А.И.Герцена, 1972,т.496, с.200-204.

3. Векслер А.И., Колдунов А.В. Решение одной топологической задачи. - В кн.: IУ Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям , Кишинев, 1979, с.22-23.

Balcar B., Vopenka On systems of almost disjoint sets.- Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astr., phys. vol.20, N6, p.421-424.

5. Векслер А.И. О разложимости последовательностей подмножеств топологического пространства. - Сиб.мат.ж., 1972, т.13, № 3, с.331-340.

6. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977, с.367.

7. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974, с.424.

8. Векслер А.И. P'-точки, P'-множества, P'-пространства. Новый класс порядково-непрерывных мер и функционалов. - ДАН СССР, 1973,т.212, №4, с.789-792.

9. Векслер А.И. P'-множества. - В кн.: Применение функционального анализа в теории приближений, Калинин 1977, вып.7,с.3-18.

10. Veksler A.I. P'-sets regular spaces.- Colloq. ath Soc. J. Bolyai. vol.23; Topology.Budapest, 978 1.

11. Векслер А.И., Диканова З.Т. P-множества в бикомпактах. В кн. Геометрия и топология. Л.,1974,вып.2 с.46-58.

12. Векслер А.И., Диканова З.Т. P-множества в бикомпактах. П. - В кн.: Функциональный анализ. Ульяновск, 1974, вып.2,с.152-170.

Gillman L., Jerison of continuous functions. rinceton, 1960

14. Szymanski A. Some Baire category type ems for u(ω).- Comment. math. Univ. Carolina vol.20,

АННОТАЦИИ

УДК 513.6

рациональных точках на гиперэллиптических кривых.
ерзиньш А.А., с.3-9.

В статье рассмотрены вопросы, связанные с гипотезой орделла для гиперэллиптических кривых. Указан способ, позволяющий свести эту гипотезу к аналогичному вопросу для кривых специального вида, лежащих на прямом произведении эллиптических кривых. Для них гипотеза доказывается в некоторых частных случаях. Библиогр. - 5 назв.

УДК 513.88

б одной модификации теоремы Эрдеша и Радо.
регман Ю.Х., с.10-13.

На основе топологических теорем о рамсеевских пространствах получены модификации комбинаторной теоремы Эрдеша и адо. Библиограф. - 4 назв.

УДК 513.83+513.88

б одном обобщении теоремы Алаоглу.
ольцман М.А. с.14-17.

Доказывается следующая теорема:

Пусть X - совокупность всех непрерывных линейных ото- ажений т.в. пространства F в отделимое т.в.пространство и σ - топология поточечной сходимости на X Тогда, каковы бы ни были открытое в F множество U и компактное в ожество M множество $\{x \in X \mid x(U) \subset M\}$ компактно в пространстве (X, σ) Библиогр. - 2 назв.

УДК 513.88+519.21

ргодические теоремы для негладких марковских процессов.
ок А.И., с.18-33.

работе изучается асимптотическое поведение однородных арковских процессов с дискретным временем без каких-либо граничений на переходную функцию и фазовое пространство. Полученные результаты показывают, что эргодические свойства марковских процессов общего вида определяются наличием инвариантных конечно-аддитивных мер, которые могут и не быть счетно-аддитивными, т.е. вероятностными. Библиогр. - 8 назв.

УДК 513.88+519.21

О свойстве обратимости случайного линейного операт

Жданок Т.А., с.34-44.

Рассматривается вопрос об измеримости оператора, обратного к случайному линейному ограниченному оператору, определенному на случайном подпространстве сепарабельного банахова пространства. Библиогр. - 6 назв.

УДК 517.946

Локальная разрешимость уравнений нелинейных колебаний цилиндрических оболочек.

Козьмина Е.С., с.45-51.

В работе с помощью теории полугрупп и принципа сжатых отображений доказывается локальная разрешимость операторно-дифференциального уравнения второго порядка с нелинейным оператором в правой части. Разработанная схема применяется к системе уравнений нелинейных колебаний цилиндрических оболочек. Библиогр. - 2 назв.

УДК 513.88

Устойчивость спектральных свойств пучка $A-\lambda B$ при секвенциально-компактной аппроксимации.

Лабеев В.И., с.52-58.

Исследуется устойчивость свойств спектра пучка операторов $A-\lambda B$ при секвенциально-компактной аппроксимации. Эти результаты обобщают ранее известные в случае, когда $B=I$ Библиогр. - 4 назв.

УДК 518:517.948

Устойчивость регуляризуемости обратного отображения при секвенциально-компактной аппроксимации.

Левченков В.С., с.59-65.

Доказывается устойчивость регуляризуемости по Тихонову отображений, обратных к линейным непрерывным отображениям при секвенциально-компактной аппроксимации. Библиогр. - 5 наз

УДК 513.83

ткрыто-компактная топология в пространствах отображений.
ивчак А.Я., с.66-74.

В статье изучается топология, заданная на пространстве
тображений, которая строится аналогично топологи.. равномерной
ходимости на некотором семействе подмножеств. Библиогр. 2 назв

УДК 513.88

сходимости итерационного процесса для квазинерастягивающего
тображения в метрическом пространстве.
иепиньш А.Х., с.75-87.

В работе исследуется сходимость итерационного процесса
ля квазинерастягивающего отображения в метрическом пространст-
е без предположения о непрерывности отображения на множестве
пределения. Библиогр. - 7 назв.

ДК 513.88

сходимости метода Ньютона-Канторовича для приближенного
ешения нелинейных уравнений в банаховых пространствах.
иепиньш А.Х., с.88-91.

Приведены достаточные условия для того, чтобы отображение,
арактеризующее метод Ньютона-Канторовича, было квазинерастя-
гивающим. Этот результат применяется к исследованию множества
тех начальных приближений, при которых метод Ньютона-Канторо-
ича сходится. Библиогр. - 4 назв.

УДК 513.45

екоторые радикалы в алгебрах Ли.
ипянский Р.С., с.92-102.

Доказывается инвариантность относительно дифференцирова-
ия радикалов LRN (A_L), LRA (A_L) для произвольной ассо-
иативной алгебры A над полем нулевой характеристики.

Рассматриваются также вопросы, связанные с отщеплением
тих радикалов в алгебраических алгебрах Ли. Библиогр. 6 назв.

УДК 513.83

Категория кошейпов и сингулярные гомологии.
Лисица Ю.Т., с.103-119.

Вводится новый кошейповый инвариант, т.н. коподвижность. При коподвижности негомологические инварианты изоморфны соответствующим инвариантам сильной категории кошейпов. Библиогр. - 13 назв.

УДК 513.83

Пример одной топологической группы
Малыхин В.И., с.

В предположении континуум гипотезы описывается построение примера регулярной нормальной наследственно сепарабельной счетно-компактной топологической группы, квадрат которой не счетно-компактен и не имеет счетной тесноты. Библ[illegible] назв.

УДК 513.83

О гомотопическом типе ANR для перистых финально-компактных пространств.
Мардешич С., Шостак А.П., с.124-129.

Основной результат: каждый ANR в классе перистых финально-компактных пространств имеет гомотопический тип некоторого счетного локально-конечного симплициального комплекса.

Библиогр. - 11 назв.

УДК 513.88

Аналог теоремы Пэли-Винера для метабелевых групп Ли.
Севастьянов Л.А., с.130-133.

В работе получен аналог классической теоремы Пэли-Винера для $C_0^\infty(G)$ в случае связных вещественных метабелевых групп Ли G Библиогр. - 7 назв.

УДК 513.88

Аналог теоремы Пэли-Винера для одной нильпотентной группы Ли.
Севастьянов Л.А., с.134-136.

В заметке приводится аналог теоремы Пэли-Винера для $C_0^\infty(G)$ в случае шестимерной нильпотентной группы Ли G (предложенной Кирилловым А.А.). Библиогр. - 4 назв.

УДК 519.21

К вопросу об устойчивости решений линейных стохастических систем разностных уравнений.

Царькова В.Н., Калниня Д.Д., с.137-143.

Получены условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом тривиального решения линейного стохастического разностного уравнения в конечномерном комплексном пространстве. Результаты применяются для анализа простейших разностных схем в l_2 Библиогр. - 5 назв.

УДК 517.929

О статистических решениях линейных систем дифференциально-функциональных уравнений.

Царьков Е.Ф., Энгельсон Л.Я., с.144-153.

Предлагается метод построения квадратичных функционалов Ляпунова для линейных систем дифференциально-функциональных уравнений, основанный на анализе полугруппы ковариационных операторов статистических решений. Библиогр. - 6 назв.

УДК 517.929

Об одном подходе к исследованию устойчивости дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа.

Энгельсон Л.Я., с.154-158.

Получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения линейной системы уравнений нейтрального типа в терминах функционалов Ляпунова и в терминах вещественного спектра некоторого замкнутого оператора. Библиогр. - 7 назв.

УДК 513.83

Доминирующие последовательности и узкие топологические пространства.

Векслер А.И., с.159-174.

Последовательность $\{F_n\}$ замкнутых нигде не плотных множеств называется доминирующей, если 1) $\cup F_n$ всюду плотно и 2) для любой другой последовательности $\{F_n'\}$ замкнутых нигде не плотных множеств такой, что $F_n' \cap F_n = \emptyset$ обязательно $\cup F_n'$ нигде не плотно. Объединение доминирующей последовательности называется стержнем, а пространство, имеющее доминирующую последовательность, называется узким. Примером известного пространства, оказывающегося узким, является пространство $u\omega_1$ всех равномерных ультрафильтров над ω_1 Изучаются доминирующие последовательности, выделяются стержни двух типов и даются их характеристики.

ANNOTATIONS

On rational points of hypereliptic curves.

Berziņš A.A. p.3-9.

The paper is concerned with Mordel's hypothesis for hypereliptic curves. A method how to reduce the solution of the hypothesis to a special case is given. In this case curves must have a special form and lie in the direct product of eliptic curves. In the concrete the hypothesis is proved. Bibl. - 5 names.

On a modification of Erdős-Rado theorem.

Bregman Ju.H., p. 10-13.

New modifications of a well-known combinatorical theorem of Erdos and Rado are obtained. The proof is based on a topological Ramsey-type theorem which belongs to the author. Bibl. - 4 names.

On a generalization of Alaoglu theorem.

Goldman M.A., p. 14-17.

Let X denote the family of all linear continuous mappings of a topological vector space F into a Hausdorff topological vector space Y Then for every open $U \subset F$ and every compact $M \subset Y$ the set $\{x : x \in X, x(U) \subset M\}$ is compact in X endowed with the topology of pointwise convergence. Bibl. - 2 names.

Ergodic theorems for nonsmooth Markov processes.

Ždanok A.I., p.18-33.

The asimptotic behaviour of homogenouos Markov processes with discrete time are investigated. No special assumptions are made on the transit function and faze space. The obtained results show, that the ergodic properties of general Markov processes depend on the existence of invariant finite-additive measures, which must be countably-additive, i.e. probabilic. Bibl. - 8 names.

On an inverse-property of a random linear operator.
Ždanok T.A., p. 34-44.T

The problem of the measurability of an operator, which is an inverse of a random linear bounded operator is investigated. The given operator is defined on a random subspace of a seperable Banach space. Bibl. - 6 names.

The local solvability of nonlinear oscillation equations of cylindrical shells.
Kozmina E.S., p. 45-51.

In the paper the local solvability of the second order operational-differential equation with nonlinear operator in the right part is proved by means of the theory of semigroups and the principle of contraction mappings. The obtained proof scheme is applied to the system of nonlinear oscillation equations of cylindrical shells.
Bibl. - 4 names.

The stability of spectral properties of a bundle $A - \lambda B$ under the sequentially compact approximation.
Labejev V.I., p. 52-58.

The stability of some spectral properties of an operator bundle $A - \lambda B$ under the sequentially compact approximation are studied. These results generalize the analogous theorems in the case $B = I$, obtained earlier by the author. Bibl. - 4 names.

The stability of regularization of an inverse mapping under the sequentially compact approximation.
Levčenkov V.S., p. 59-65.

It is proved, that the property of regularization of a mapping, whose inverse is linear and continuous, is stable under the sequentially compact approximation. Bibl.-5 names

Open-compact topology on the space of mappings.
Livčak A.J., p.66- 74.

A topology τ on the space of continuous mappings C(X,Y), where X and Y are topological spaces, is defined and studied. The construction of the topology τ is quite analogous to the definition of the topology of uniform convergence on a family of subsets. Bibl. - 2 names.

On the convergence of iteration process for quasi-nonexpansive mappings of metric spaces.
Liepiņš A.H., p.75-87.

The problem when the iteration process for a quasi-nonexpansive mapping of metric space converges is investigated. The continuity of a given mapping is not assumed. Bibl. 7 names.

On the convergence of Newton-Kantorovich's method for an approximative solution of nonlinear equations in Banach spaces.
Liepiņš A.H., p.88-91.

Some sufficient conditions for a mapping characterizing the Newton- Kantorovich's method to be quasi-nonexpansive are obtained. This result is used for the investigation of the set of those start-approximations, which make Newton-Kantorovich's method to converge.
Bibl. 4 names.

Some radicals in Lie algebras.
Lipjanskii R.S., p.92-102.

It is proved, that the radicals LRN(A) and LRA(A) are invariant under differentiation. (Here A denote an associative algebra over a field of Zero-characteristics). The splitting of these radicals in algebraic Lie algebras is also concerned. Bibl. - 6 names.

Co-shape category and singular homologies.

Lisica Ju.T., p.103-117.

A new co-shape invariant called co-movability, is defined and studied. Under the assumption of co-movability the co-homological invariants are izomorphic with the corresponding invariants for a strong shape theory. Bibl. -13 names.

An example of a topological group.

Malyhin V.I., p.120-123.

In the paper, assuming the continuum-hypothesis, it is constructed a regular hereditarily seperable countabl compact normal topological group, countable power of which is not countably compact and is of an uncountable tightness. Bibl. - 4 names.

On the homotopy type of ANR's for feather finally compact spaces.

Mardešiǒ S., Šostak A.P., p.124-129.

The main result Every ANR in the class of p-finally compact spaces has the homotopy type of a countable locally finite simplicial complex. Bibl. 11 names.

On analogue of Paley-Wiener theorem for metabelian Lie groups.

Sevastjanoff L.A., p.130-133.

In the paper is done an analogue of the classical Paley-Wiener theorem for $C_0^\infty(G)$ in the case of connected real metabelian Lie groups G Bibl. - 7 names

An analogue of Paley-Wiener theorem for a nilpotent Lie groups.

Sevastjanoff L.A., p.13 -13

In the paper is presented an analogue of the Paley-Wiener theorem for $C_0^\infty(G)$ in the case of sixdinensional nilpotent Lie group G (suggested by Kirillov A.A.) Bibl. 4 names.

A stability of solutions for linear stohastic systems of differential equations.

Carkova V.N., Kalninya D.D. p.137-143.

Some conditions for the exponential stability in the quadratic average of the trivial solution of a linear stohastic differential equation in a finite-dimensional complex space are obtained. The results are used to analyse some simple differential shemes in ℓ_2. Bibl. 5 names.

A statistic solutions of linear systems of differental-functional equations.

Carkov E.F., Engelson L.J. p. 144-153.

A method how to construct quadratic Ljapunov functionals for linear systems of differential-functional equations is given. This method is based on the investigation of the semigroup of all covariant operators of statistic solutions. Bibl. 6 names.

An a way how to investigate the stability of the differential-functional neutral type equations.

Engelson L.J. p.154-158.

Some necessary and sufficient conditions for the trivial solution of linear system of neutral type equations to be asimptotically stable are obtained. The conditions are formulated in terms of Ljapunov functionals and in terms of the real spectrum of a closed operator. Bibl. 7 names.

Dominant sequences and narrow topological spaces.
Veksler A.I., p. 159-174.

The sequence $\{F_n\}$ of closed nowhere dense sets in topological space X is called a dominant sequence if 1) $\bigcup F_n$ is dense in X and 2) $\bigcup F_n'$ is nowhere dense for any sequence $\{F_n'\}$ of closed nowhere dense sets with $F_n' \cap F_n = \emptyset$. The union of any dominant sequence is called a pivot. Any space with a dominant sequence is called a narrow space. The well-know space $u\omega_1$ of all uniform ultrafilters on ω_1 is an example of a narrow space. Dominant sequences and pivots are studied in this paper.

СОДЕРЖАНИЕ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Межвузовский сборник научных трудов

Редакторы: Е.Энгельсон, Н.Сарамонова
Технический редактор А.Шостак
Корректор А.Шостак

Подписано к печати I6.02.I98I. ЯТ I6060. Ф/б 60x84/I6.
Бум. №I. I2,0 физ.печ.л. II,2 усл.печ.л. 8,7 уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Зак.№ 171 Цена 87 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 226098, б. Райниса, I9
Отпечатано на ротапринте,Рига 226050,ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки