UNIVERSITĀTE RĪGĀ
MĀCĪBAS GRĀMATU SERIJA Nr. 21

IEVADS ANALIZĒ

Prof. J. CIZAREVIČS

INŽENIERZINĀTŅU UN MECHANIKAS FAKULTĀTES STUDENTIEM

RĪGĀ, 1942
UNIVERSITĀTES APGĀDS

UNIVERSITĀTE RĪGĀ
MĀCĪBAS GRĀMATU SERIJA Nr. 21

IEVADS ANALIZĒ

Prof. J. CIZAREVIČS

INŽENIERZINĀTŅU UN MECHANIKAS FAKULTĀTES STUDENTIEM

RĪGĀ, 1942
UNIVERSITĀTES APGĀDS

Latvijas vērtspapīru spiestuve, Rīgā. 51.142.

Priekšvārdi.

Šīs grāmatas saturs ir Universitātes inženierzinātņu un mechanikas fakultātes analizes kursa pirmā daļa.

Grāmata nodomāta minēto fakultāšu pirmā kursa studentiem kā līdzeklis priekšmeta piesavināšanas atvieglošanai.

J. Cizarevičs.

Rīgā, 1942. g. janvārī.

Satura rādītājs.

Pirmā nodaļa.

Skaitļi.

1. Vairums. Daudzums. Par *vairumu* sauc kaut kādu tādu objektu kopību, kuŗus var atšķirt vienu no otra. Katru tādu objektu sauc par vairuma vienību — *elementu*.

Vairums ir noteikts, ja objektu piederība pie tā ir, bez šaubām, saskatāma. Objekti var būt konkrēti un iedomājami.

Vairuma īpašības ir atkarīgas no dažādiem apstākļiem un tādēļ var daudzkārtīgi mainīties. Piemēram, ja vairums sastāv no krāsotām lodēm, tad vairuma īpašības ir atkarīgas no tā, kā sakopojam lodes telpā, vai arī no tā, kā sakopojam lodes attiecībā uz krāsām.

Vairumam, bez šīm mainīgām īpašībām, ir arī tāda īpašība, kas nav atkarīga no objektu dabas un to sakopojuma, kas nemainās arī tad, ja vairuma objektus katru atsevišķi aizstājam ar citiem atšķiŗamiem objektiem. Šo īpašību sauc par vairuma *daudzumu* (kvantitāti).

Lai vairumus A un B salīdzinātu daudzuma ziņā, tad vairuma A katram objektam piekārtojam vairuma B objektu. Ja piekārtojot abi vairumi izbeidzas, tad tie daudzuma ziņā ir vienlīdzīgi. Arī vairumi C, D, kas tāpat katrs atveidojami uz vairuma A, daudzuma ziņā ir vienlīdzīgi.

Ja šādi atveidojot vairumu B uz vairuma A, izrādās, ka visi vairuma B elementi — izlietoti, bet vairumā A vēl atrodas elementi, kas atveidojumā vēl nav piedalījušies, tad vairuma A daudzums ir lielāks par vairuma B daudzumu un vairuma B daudzums ir mazāks par vairuma A daudzumu. Daudzums, tātad, ir īpašība, kas var pieņemt dažādas pakāpes.

2. Dabiskie skaitļi. Daudzuma pakāpju apzīmēšanai lieto skaitļus. Skaitlis ir vairuma daudzuma pakāpes izteicējs. Lai daudzuma pakāpes veidotu kārtoti, izejam no vairuma, kas sastāv no vienības. Šim vairumam atkal pieliekot vienību, dabūjam jaunu vairumu u. t. t. Šādu vairumu veidošanu varam turpināt neierobežoti. Šādi veidotiem vairumiem ir daudzuma pakāpes, kam piekārtojam skaitļu vārdus un skaitļu zīmes. Dabūtos skaitļus sauc par *dabiskiem skaitļiem*, un tie augšējā kārtībā veido dabisko skaitļu rindu, vārdos: viens, divi, trīs u. t. t., un zīmēs: 1, 2, 3 u. t. t. Kamēr vairuma daudzums nav liels, skaitļu vārdus un zīmes var veidot kaut kā, bet ja jāizteic kaut kādu lielu vairumu daudzumi, rodas nepieciešamība veidot skaitļu vārdus un zīmes saskaņā ar kādu principu. Šāds princips atrodas dekadiskas skaitļu sistēmas pamatā.

3. Saskaitīšana. Ja dots vairums A ar daudzuma skaitli a un vairums B ar daudzuma skaitli b, tad, apvienojot vairumus A un B jaunā vairumā, rodas jautājums, kāds daudzums ir jaunajam vairumam. Jaunā vairuma daudzuma skaitli izteic ar vienu no simboliem:

$$a+b \text{ vai } b+a.$$

Darbību, ar kuŗu dabū šo meklēto, arvienu esošo un vienīgo skaitli, sauc par *saskaitīšanu*. Saskaitīšanu izdara, izejot dabiskā skaitļu rindā no skaitļa a un tur skaita par tikdaudz vienībām tālāk, cik tādu ir skaitlī b. Rezultātā dabū skaitli s. Skaitlis s nav atkarīgs no saskaitāmo sekošanas kārtības. Tātad

$$a+b=s \text{ un } a+b=b+a.$$

Beidzamā izteiksme ir saskaitīšanas *kommūtatīvais* likums. Skaitli s sauc par *summu* un skaitļus a, b par *summandiem.*

Ja jāsaņem kopā trīs vairumi: A, B, C, kam atbilst skaitļi: a, b, c, tad to izteic ar simbolu

$$a+b+c.$$

Augšējo prasību izdara: saņem kopā vairumus A un B un dabū skaitli $a+b$. Pēc tam pieņem klāt trešo vairumu C un dabū skaitli $(a+b)+c$. Izteiksmes

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$$

dod saskaitīšanas *asociātīvo* likumu.

4. Reizināšana. Prasību, vairuma B katrai vienībai piekārtot vairumu A un tad saskaitīt tādā kārtā dabūto vairumu A kopību, izteic ar simbolu

$$b \times a.$$

Darbību, ar kuŗu dabūjam šo jauno skaitli, sauc par *reizināšanu* un darbības rezultātu par *reizinājumu;* b sauc par *reizinātāju* un a par *reizināmo*

$$b \times a = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \; . \; . \; . \; . + \overset{b}{a}.$$

Augšējā izteiksme rāda, ka reizinājumu dabūjam kā kāda vienlīdzīgu saskaitāmo skaita summu, tātad, reizināšana pārvērsta saskaitīšanā. No vairumiem A sastāvošu vairumu varam saskaldīt vairumos B, izņemot no katra vairuma A pa vienībai un šās vienības sakopojot. Tādā kārtā izveidojas a skaita vairumi B, tātad,

$$b \times a = a \times b.$$

Augšējā izteiksme ir reizināšanas *kommūtatīvais* likums.

Tā kā

$$c(a+b)=(a+b)\,c=\overset{1}{(a+b)}+\overset{2}{(a+b)}+\; . \; . \; . \; . +\overset{c}{(a+b)}=$$

$$=\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\; . \; . \; . \; . +\overset{c}{a}+\overset{1}{b}+\overset{2}{b}+\; . \; . \; . \; . +\overset{c}{b},$$

tad

$$c(a+b)=(a+b)c=ca+cb=ac+bc.$$

Šī izteiksme dod reizināšanas *distribūtīvo* likumu. Vēlreizēja šī likuma lietošana dod:

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Tā kā

$\left(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\ .\ .\ .\ .\ +\overset{b}{a}\right)c=\left(\overset{1}{b}+\overset{2}{b}+\ .\ .\ .\ +\overset{a}{b}\right)c,$ tad lietojot šo distribūtīvo likumu, dabūjam:

$$(ab)\,c=(ac)\,b=(bc)\,a.$$

Beidzamā izteiksme dod reizināšanas *asociātīvo* likumu.

5. Kāpināšana. No vairuma A veidojam jaunu vairumu ar noteikumu: vairuma A katru elementu atvietojam ar vairumu A. Šinī jaunā vairumā atkal katru elementu aizstājam ar vairumu A. Šo procesu izdarām n reizes. Prasību, šādi dabūto vairumu skaitīt, izteic ar simbolu

$$a^n.$$

Darbību, ar kuŗu augšējo prasību izdara, sauc par *kāpināšanu,* darbības rezultātu par *pakāpi,* a par *pamatu* un n par *pakāpes rādītāju.* Izteiksme

$$a^n=\overset{1}{a}\,.\,\overset{2}{a}\,.\ .\ .\ .\,\overset{n}{a}$$

rāda kāpināšanas pārvēršanu reizināšanā. Saskaitīšanas, reizināšanas un kāpināšanas darbības arvienu dod vienu un tikai vienu rezultātu.

6. Atņemšana. Prasību no vairuma A atšķirt vairumu B un dabūt paliekošā vairuma skaitli, ja zināmi skaitļi a un b, apzīmē ar simbolu

$$a-b.$$

Darbību, ar kuŗu augšējo prasību izdara, sauc par *atņemšanu.* Šīs darbības rezultātu sauc par *starpību,* a par *mazināmo* un b par *mazinātāju.*

Ja simbolu $a-b$ lietojam arī kā atņemšanas rezultāta apzīmi, tad atņemšanas būtību, kas stāv sakarā ar saskaitīšanu, rāda izteiksme

$$b+(a-b)=(a-b)+b=a.$$

Šī jaunā darbība atšķiŗas no agrāk apskatītajām ar to, ka tā iespējama tikai tad, ja mazināmais ir lielāks par mazinātāju. Lai darbību padarītu par iespējamu arī, ja $a<b$, tad līdzšinējie jēdzieni jāpaplašina, ko izdara ar *Hankela permanences principa* palīdzību.

Hankela permanences princips.

Ja kāda matēmatikas darbība nav izdarāma ar pastāvošiem jēdzieniem un likumiem, tad, lai darbība būtu iespējama, izdara jēdzienu paplašināšanu, bet tādā kārtā, lai paplašinātie jēdzieni aptvertu arī pastāvošos jēdzienus un tos pārvaldošos likumus.

Dotajā gadījumā jēdzienu paplašinām ar to, ka uzskatām $a - b$ arī tad par skaitli, ja $a < b$ vai $a = b$.

Ar šādu noteikumu, simbolam $a - b$ ir piedota blakus kvantitātīvai nozīmei arī kvalitātīvā. Ja ar d apzīmējam lielākā no skaitļiem a un b pārpalikumu par mazāko, tad iespējami divi kvalitātes gadījumi: d atrodas mazināmā vai mazinātāja pusē. Lai izteiktu šo kvalitātes atšķirību, pārpalikumam jādod ne tikvien skaitļa-*kvantitātes* zīme, bet arī *kvalitātes* zīme. Par kvalitātes zīmi pirmajā gadījumā lieto zīmi $+$ un otrā zīmi $-$. Skaitļus ar $+$ zīmi sauc par *pozitīviem* un ar $-$ zīmi par *negātīviem* skaitļiem. Gadījumā, kad $a = b$, nav pārpalikuma, bet tad arī nav vajadzīga kvalitātes zīme. Skaitli, kam nav kvantitātes un kvalitātes, sauc par *nulli* un to apzīmē ar zīmi 0. Tātad:

$$a - b = + d \ (\text{ja } a > b)$$
$$a - b = - d \ (\text{ja } a < b)$$
$$a - b = 0 \ (\text{ja } a = b).$$

Ar šādu jēdziena paplašinājumu dabūtie skaitļi veido *relātīvo* skaitļu sistēmu, kur atņemšana arvienu izdarāma.

7. Absolūtā vērtība. Skaitļa x absolūto vērtību apzīmē ar simbolu

$$|x|.$$

Absolūto vērtību definē izteiksmes:

$$|x| = x, \text{ ja } x > 0 \ldots\ldots (1)$$
$$|x| = -x, \text{ ja } x < 0 \ldots. (1^a)$$
$$|0| = 0.$$

Tātad arvienu

$$|x| = \geqslant 0.$$

Izteiksmes par absolūto vērtību.

I. $|-x| = |x|$.

Ja $x > 0$, tad $-x = < 0$. Ievērojot (1^a), dabūjam:

$$|-x| = -(-x) = x.$$

Tā kā saskaņā ar (1)

$$|x| = x,$$

tad no augšējā redzams, ka:

$$|-x| = |x|.$$

Ja $x < 0$, tad $-x > 0$. Ievērojot (1), dabūjam:

$$|-x| = -x.$$

No (1^a) dabūjam:

$$|x| = -x.$$

No augšējā redzams, ka arī šinī gadījumā

$$|-x| = |x|.$$

II. Ja $a \geqslant 0$ un $|x| = a$, tad

$$x = a \text{ vai arī } x = -a.$$

Pierādījums.

Ja $x \geqslant 0$, tad $x = |x| = a$.

Ja $x < 0$, tad

$$x = -|x| = -a.$$

III. Ja $a > 0$ un $|x| < a$,

tad

$$-a < x < a.$$

Pierādījums.

Ja $x \geqslant 0$, tad $x = |x|$;

tādēļ

$$0 \leqslant x < a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\alpha).$$

Ja $x < 0$, tad $x = -|x|$, un tā kā

$$|x| < a, \text{ tad } -|x| > -a;$$

tādēļ

$$x = -|x| > -a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\beta).$$

Ievērojot (α) un (β), dabūjam:

$$-a < x < a.$$

Secinājums.

Ja $\varepsilon > 0$ un $|x - y| < \varepsilon$,

tad

$$-\varepsilon < x - y < \varepsilon$$

un

$$y - \varepsilon < x < y + \varepsilon.$$

IV. $-|x| \leqslant x \leqslant +|x|$.

Pierādījums.

Ja $x > 0$, tad

$$-|x| < x = +|x| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\alpha);$$

Ja $x < 0$, tad

$$-|x| = x < +|x| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\beta);$$

Ja $x = 0$, tad

$$-|x| = x = |x| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (\gamma).$$

Izteiksmes (α), (β), (γ) pierāda teōrēmu.

V. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Pierādījums.

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|,$$

$$-|y| \leqslant y \leqslant |y|,$$

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|.$$

Ievērojot III, dabūjam:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Paplašinot augšējo izteiksmi, dabūjam:

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Viegli ieskatāmas šādas izteiksmes:

VI. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

VII. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \cdot (y \neq 0)$.

8. D a l ī š a n a. Prasība vairumu A ar daudzumu a saskaldīt vairumos B, katru ar daudzumu b un skaitīt šādi dabūtos vairumus B, rada aritmētisku uzdevumu: dabisko skaitli a izteikt kā divu skaitļu reizinājumu, pie kam viens no reizinātājiem ir skaitlis b. Darbību, ar kuŗu atrodam otru reizinātāju, sauc par *dalīšanu*, darbības rezultātu par *kvocientu*, skaitli a par *dalāmo* un skaitli b par *dalītāju*. Ja apzīmējam augšējo prasību un rezultātu ar simbolu

$$\frac{a}{b},$$

tad šīs jaunās darbības būtība ieskatāma no izteiksmes:

$$b\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot b = a,$$

kas rāda šīs darbības sakaru ar reizināšanu. Dalīšanu varam izdarīt tikai tad, ja skaitlis a ir vairākkārtējs skaitlis b. Lai šo darbību varētu izdarīt visos gadījumos, permanences princips prasa jēdziena paplašināšanu. Dotajā gadījumā dalīšanas jēdzienu paplašinām, uzskatot simbolu $\frac{a}{b}$ arī tad par skaitli, ja a nav vairākkārtējs skaitlis b. Ar šo noteikumu dabūjam jaunus skaitļus, *lauztus* skaitļus vai *daļas* skaitļus. Agrāk apskatītos skaitļus, atšķirībā no daļas skaitļiem, sauc par *veseliem* skaitļiem.

Dalīšana $\frac{0}{b}$, ja $b \neq 0$, dod kvocientu 0, jo $b \cdot 0 = 0$.

Dalīšana $\frac{a}{0}$, ja $a \neq 0$ nav iespējama, jo nav tāda skaitļa, kas, ar 0 reizināts, dotu a.

Dalīšana $\frac{0}{0}$ var dot kā kvocientu katru skaitli q, jo $0 \cdot q = 0$. Rezultāts še nenoteikts.

No augšējā secinām, ka 0 kā dalītājs nav pielaižams.

Relātīvās daļas, kopā ar relātīviem veseliem skaitļiem, veido *racionālo skaitļu sistēmu*. Šajā sistēmā var izdarīt bez ierobežojuma saskaitīšanu, reizināšanu, kāpināšanu, atņemšanu un dalīšanu.

9. S a k n e s i z v i l k š a n a. Atņemšana un dalīšana ir saskaitīšanas un reizināšanas apgrieztas darbības. Apgriežot kāpināšanu, rodas darbība, ko sauc par *saknes izvilkšanu*. Še prasām, kāds ir tas pamats, kas, pacelts

dabiska skaitļa n pakāpē, dod pozitīvu racionālu skaitli a. Šo darbību apzīmē ar simbolu

$$\sqrt[n]{a}.$$

Skaitli a sauc par *radikandu* un n par *saknes rādītāju*. Šīs jaunās darbības būtību rāda izteiksme

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,$$

un tā izdarāma tikai ar tādiem skaitļiem a, kas ir racionālu skaitļu n-tās pakāpes. Ja ar dotajiem pieņēmumiem par skaitļiem a un n gribam panākt, lai saknes izvilkšana būtu izpildāma bez noteikumiem, jāizdara jauna skaitļa jēdziena paplašināšana, pieņemot, ka simbols

$$\sqrt[n]{a}$$

arī tad izteic skaitli, kad a nav pozitīva racionāla skaitļa *n-tā* pakāpe. Lai noskaidrotu, kādā attiecībā atrodas šie jaunie skaitļi ar racionāliem skaitļiem, apskatīsim konkrētu gadījumu: skaitli $\sqrt{2}$. Simbols $\sqrt{2}$ prasa noteikt tādu skaitli, kuŗa kvadrāts ir 2. Šāds meklētais skaitlis nav racionāls, kas redzams no sekojošā:

Tā kā $1^2 = 1$ un $2^2 = 4$, redzams, ka meklētajam skaitlim jāatrodas starp skaitļiem 1 un 2. (Meklēto skaitli varam pieņemt kā pozitīvu.) Pieņemam, ka:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ un } q \text{ racionāli skaitļi}),$$

kur $\frac{p}{q}$ reducēta daļa.

Tad

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

un

$$p^2 = 2q^2.$$

Redzams, ka p^2 še jābūt pāŗa skaitlim, un tādēļ arī p jābūt pāŗa skaitlim; tātad

$$p = 2p_1 \quad (p_1 \text{pozitīvs vesels}),$$
$$p^2 = 4p_1^2,$$
$$q^2 = 2p_1^2.$$

Skaitļiem q^2 un q še jābūt pāŗa skaitļiem, tātad $q = 2q_1$ (q_1 pozitīvs vesels). Saskaņā ar pieņēmumu skaitļiem p un q nav kopēja dalītāja, bet augšējā apskate rāda, ka 2 tiem būtu kopējs dalītājs. Tātad pieņēmums, ka $\frac{p}{q}$ ir racionāla daļa, rada pretrunas, tādēļ tas nav pareizs.

Ar simbolu $\sqrt{2}$ izteiktā prasība šķiŗ pozitīvos racionālos skaitļus divās klasēs, A un B, tādā kārtā, ka visu pirmajā klasē atrodošos skaitļu kvadrāti ir mazāki par 2 un visu otrās klases skaitļu kvadrāti ir lielāki par 2. Tādēļ arī katrs A klases skaitlis ir mazāks par katru B klases skaitli.

A klasē nav lielākā un B klasē nav mazākā skaitļa. Tas redzams no sekojošā:

Ja x ir skaitlis A klasē, tātad $x^2 < 2$, tad varam noteikt pozitīvu h tādu, ka arī $(x+h)^2 < 2$, jo no

$$2hx + h^2 < 2 - x^2$$

dabūjam, ja noteicam

$$h < \frac{2-x^2}{2x+1}.$$

tad katrs racionāls skaitlis starp x un $x + \frac{2-x^2}{2x+1} = \frac{2+x+x^2}{2x+1}$ pieder A klasei.

Ja skaitlis y atrodas B klasē, tātad $y^2 > 2$, tad varam noteikt pozitīvu skaitli k tādu, ka arī

$$(y-k)^2 > 2,$$

jo no

$$2ky < y^2 - 2 + k^2$$

dabūjam, ka noteicot

$$k < \frac{y^2-2}{2y},$$

katrs racionāls skaitlis starp y un $y - \frac{y^2-2}{2y} = \frac{y^2+2}{2y}$ tad pieder B klasei.

Tātad prasība $\sqrt{2}$ veido racionālo skaitļu sistēmā šķēlienu, ar kuŗu tiek definēts šai skaitļu sistēmai nepiederošs skaitlis $\sqrt{2}$.

10. Iracionāli skaitļi. Arī katrs racionāls skaitlis, piemēram 3, šķeļ racionālo skaitļu sistēmu divās klasēs A un B. Visi A klases skaitļi ir mazāki par B klases skaitļiem, un visi B klases skaitļi ir lielāki par A klases skaitļiem.

Ja skaitli 3 pieņemam par A klases skaitli, tad A klasē ir lielākais skaitlis, bet B klasē nevaram noteikt mazāko skaitli, jo starp B klasē esošo skaitli 4 un A klases lielāko skaitli 3 varam atrast bezgalīgi daudz skaitļu, kas dilstoši tuvinās skaitlim 3, bet mazāko no šiem skaitļiem nevaram noteikt.

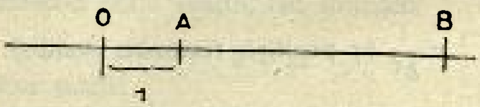
Ja skaitli 3 pieņemam B klasē, tad B klasē mazākais skaitlis ir 3, bet tad A klasē nevaram noteikt lielāko skaitli.

Racionālu skaitļu šķiršanu divās klasēs, A un B, tādā kārtā, ka katrs A klases skaitlis a ir mazāks par katru B klases skaitli b un katrs B klases skaitlis lielāks par katru A klases skaitli, sauc par *Dedekind'a šķēlienu.*

Skaitli, piemēram $\sqrt{2}$, kas šķeļ racionālo skaitļu sistēmu divās klasēs A un B ar Dedekind'a šķēlienu tā, ka A klasē nevar noteikt lielāko un B klasē mazāko skaitli, sauc par *iracionālu skaitli.*

Pozitīvie un negātīvie racionālie skaitļi, kopā ar pozitīviem un negātīviem irracionāliem skaitļiem, veido *reālo skaitļu sistēmu.*

Reālo skaitļu sistēmu atveido uz taisnes šādi:



1. zīm.

Neaprobežotu taisni dala ar punktu O divos staros, zīm. 1. Punktam O piekārto skaitli 0. Labās puses staru pieņemam par pozitīvo skaitļu nesēju un kreisās puses staru — par negātīvo skaitļu nesēju. Garumu OA pieņemam par vienību. Uz šīs taisnes pieņemtajam punktam B arvienu varam piekārtot šajā sistēmā skaitli. Atkārtoti nogriežot no O uz B pusi vienības garumu, var notikt, ka, a reizes nogriežot, beidzamā nogriezuma gala punkts sakrīt ar punktu B. Tādā gadījumā punktam B atbilst skaitlis $+a$ vai $-a$, atkarībā no tā, vai B atrodas pa labi vai pa kreisi no punkta O.

Ja augšējais pieņēmums neizpildās, bet ja varam norādīt tādu dabisku skaitli b, kuŗa vienības garuma b-tās daļas a-reizējā nogriešana sasniedz punktu B, tad punktam B atbilst daļas skaitlis $+\frac{a}{b}$ vai $-\frac{a}{b}$, atkarībā no B atrašanās pa labi vai pa kreisi no punkta O.

Ja arī ar šādu paņēmienu sasniegt punktu B nevaram, t. i., ja punkts B ir tāds, ka ne ar kādu vienības garuma dalījumu vienādās daļās to sasniegt nevaram, tad šādā gadījumā ar vienības garuma sistēmatisku iedalīšanu decimāldaļās varam šim punktam pieiet pēc patikas tuvu. Skaitlis, kas šādā gadījumā atbilst punktam B, ir irracionāls skaitlis, un, kā to vēlāk redzēsim, to nosaka racionālu skaitļu pamata sekojums.

No augšējā redzams, ka taisnes katram punktam ir piekārtots skaitlis, racionāls vai irracionāls. Tāpat ieskatāms, ka katram racionālam skaitlim uz taisnes ir piekārtots kāds punkts.

Ka katram irracionālam skaitlim uz taisnes arī atbilst attiecīgs punkts, pierādīt nevar. Tas, kā norādīja Kantors, jāpieņem kā aksiōma. Ar šo aksiōmu reālai skaitļu sistēmai ir jāpiešķiŗ nepārtrauktības īpašība, kas pieder taisnei attiecībā uz tās punktiem. Šī sistēma tad ir bez starpām.

11. L o g a r i t m ē š a n a. Ja prasām, kādā pakāpē jāpaceļ pozitīvs, reāls skaitlis b, lai dabūtu pozitīvu, reālu skaitli a, tad atbilde uz šo jautājumu ir darbība, ko sauc par *logaritmēšanu.* Šo darbību simboliski apzīmē

$$\log_b a.$$

Šīs darbības būtība redzama no izteiksmes

$$b^{\log_b a} = a.$$

Līdz šim pakāpes rādītājs bija dabisks skaitlis. Še ar permanences principu paplašināsim pakāpes jēdzienu šādi:

$$b^0 = 1; \quad b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{b^p}, \text{ (} p \text{ un } q \text{ dabiski skaitļi);}$$

$$b^{-\gamma} = \frac{1}{b^\gamma} \text{ (}\gamma \text{ pozitīvs, racionāls skaitlis).}$$

12. Kompleksi skaitļi. Līdz šim ierobežojām saknes izvilkšanu ar pozitīviem, racionāliem radikandiem. Še paplašināsim šo darbību, pielaižot to arī ar negātīviem, racionāliem radikandiem.

Ja n ir nepāŗu skaitlis, tātad $n = 2p + 1$, tad uzdevums dabūt

$$\sqrt[2p+1]{-b},$$

kur b absolūts, racionāls skaitlis, rada uzdevumu atrast

$$\sqrt[2p+1]{b},$$

kas arvienu dod reālu skaitli, jo

$$\sqrt[2p+1]{-b} = -\sqrt[2p+1]{b}.$$

Ja $n = 2p$, tad darbību

$$\sqrt[2p]{-b}$$

nevar izpildīt ar reāliem skaitļiem, jo ar pastāvošiem reizināšanas likumiem ne pozitīva, ne negātīva skaitļa pāŗu pakāpe nedod negātīvu skaitli. Uz permanences principa pamata, paplašinot jēdzienu, varam rakstīt:

$$\sqrt[2p]{-b} = \sqrt[p]{\sqrt{-b}}$$

un

$$\sqrt{-b} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}.$$

Faktors $\sqrt{b}$ ir reāls, pozitīvs skaitlis β. Faktors $\sqrt{-1}$ ir simbols.

Apzīmi

$$\sqrt{-1} = i$$

ievedam kā jaunu skaitli, tad

$$\sqrt{-b} = \beta \,.\, i.$$

Lai uzdevumu, izteiktu ar simbolu $\sqrt{B}$, atrisinātu visos gadījumos, kad B ir relātīvs, racionāls skaitlis, arī tad, ja B ir negātīvs, ievedam jaunu skaitļu veidu βi.

Šos skaitļus sauc par *imagināriem* un i par *imagināro vienību.* Skaitli β sauc par imaginārās vienības koeficientu.

Saskaņā ar permanences principu šai imaginārai vienībai jāizpilda pamata likums:

$$i^2 = -1.$$

Ja ar α apzīmējam reālu skaitli, tad simbolu

$$\alpha + \beta i$$

sauc par *kompleksu* skaitli.

Kompleksu skaitļu teōrija apskatīta autora grāmatā „Kompleksi skaitļi. Determinanti. Algebrisku nolīdzinājumu teōrija".

Otrā nodaļa.

Skaitļu sekojumi.

13. Skaitļu sekojums. Ja skaitļi

$$a_0, a_1, a_2, \ldots \ldots a_n, \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

veidoti zināmā likumībā, ar kuŗas palīdzību varam neaprobežoti turpināt šo skaitļu veidošanu, tad šādu skaitļu kopību sauc par *skaitļu sekojumu.*

Ja skaitļu sekojumam ir tāda īpašība, ka, pieņemot pēc patikas mazu pozitīvu skaitli ε, varam sekojumā atrast tādu vietas rādītāju n, ar kuŗu sākot

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

ar katru dabisku skaitli p, tad šo skaitļu sekojumu sauc par *pamata sekojumu.*

Ja var dabūt tādu racionālu skaitli a, ka ar pieņemtu pēc patikas mazu pozitīvu skaitli δ varam atrast sekojumā noteiktu vietas rādītāju m tādu, ka tiklīdz $n \geqslant m$

$$|a_n - a| < \delta, \ldots \ldots \ldots \ldots (3),$$

tad saka, ka sekojuma *locekļi tiecas uz* skaitli a kā *robežu.* Šo īpašību apzīmē ar simbolu

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

Še $n \to \infty$ nozīmē, ka n top un paliek lielāks par katru pēc patikas lielu dabisku skaitli. Ja skaitlis $a = 0$, tad dabūjam:

$$|a_n| < \delta, \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

ko raksta arī

$$\lim_{n \to \infty} a_n = o.$$

Sekojumu ar šādu īpašību sauc par *elementāru sekojumu.*

Ja nav tāda racionāla skaitļa, kas izpildītu noteikumu (3), tad pamata sekojumam piekārto jaunu skaitli, ko uzskata par sekojuma ideālo robežu. Tādu jaunu skaitli sauc par *irracionālu skaitli.*

Ja skaitļu sekojumam ir robeža a, tad tas ir pamata sekojums, kas izpilda izteiksmi

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Pierādījums.

Ja skaitļu sekojumam ir robeža, tad varam dabūt tādu vietas rādītāju m, ka, cik mazu arī izvēlētu pozitīvu ε, arvienu

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tiklīdz $n \geqslant m$, un tādēļ arī

$$|a_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tā kā

$$(a_{n+p}-a)-(a_n-a)=a_{n+p}-a_n,$$

tad, ievērojot izteiksmi V par absolūtiem lielumiem, dabūjam:

$$|a_{n+p}-a_n|=|(a_{n+p}-a)-(a_n-a)|\leqslant|a_{n+p}-a|+|a_n-a|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Tātad

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

Šī izteiksme rāda, ka dotais skaitļu sekojums, kuŗa robeža ir a, izpilda pamata sekojuma noteikumu, ir pamata sekojums.

Kā redzams, lai skaitļu sekojumam būtu robeža, jābūt izpildītai izteiksmei

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

Tas nozīmē, ka $|a_{n+p}-a_n|$ varam pēc patikas samazināt vienīgi ar n izvēli ar katru p vērtību. Šī izteiksme arī ir pietiekama, jo, ja tā izpildīta, tad

$$-\varepsilon<a_{n+p}-a_n<\varepsilon$$

un

$$a_n-\varepsilon<a_{n+p}<a_n+\varepsilon.$$

Augšējā izteiksme rāda, ka skaitļu sekojuma visi locekļi

$$a_{n+p}\,(p=1,2,3,\ldots\ldots)$$

atrodas intervallā

$$a_n-\varepsilon,\ a_n+\varepsilon.$$

Izvēlot n, šo intervallu varam pēc patikas samazināt. Tā kā visi locekļi a_{n+p} atrodas šinī pēc patikas mazajā intervallā, tad ar to ir pieradīts, ka sekojuma locekļiem pašiem ir robeža.

Piemērs.

Sekojums

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots\ldots$$

ir pamata sekojums, jo:

$$a_{n+p}-a_n=\frac{n+p}{n+p+1}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)(n+p)-n\,(n+p+1)}{(n+1)(n+p+1)}=$$

$$=\frac{1\,p}{(n+1)\,(n+p+1)}<\frac{1}{n+1}.$$

Izvēlot attiecīgu n, starpību $a_{n+p}-a_n$, kā tas redzams no augšējā, varam pēc patikas pamazināt; tātad, noteikums $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ ir izpildīts. Tā kā augšējā piemērā izteiksmi

$$1-a_n=1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

varam pēc patikas pamazināt, pieņemot attiecīgu n, redzams, ka skaitlis 1 ir dotā skaitļu sekojuma robeža. Saka, ka dotais skaitļu sekojums noteic skaitli 1, un to raksta:

$$1=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots\ldots\right).$$

Piemērs.

Sekojums

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\dots$$

ir pamata sekojums, jo še

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ un } \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Šis sekojums noteic skaitli 0. To raksta

$$0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\dots\right).$$

Piemērs.

Izvelkot kvadrātsakni no skaitļa 2, dabūjam skaitļu sekojumu:

1, 1.4, 1.41, 1.414, ...

Pieskaitot šiem skaitļiem beidzamajā vietā vienību, dabūjam skaitļu sekojumu:

2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422 . . . . .

Apzīmējot pirmā sekojuma skaitļus ar burtiem $a_0, a_1, a_2 \dots$ un otrā ar burtiem $b_0, b_1, b_2 \dots\dots$, dabūjam:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5 . . . . . .
1	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421 . . .
2	1.5	1.42	1.415	1.4143	1.41422
b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5 . . . . . .

Sekojumā a_n ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$) katra skaitļa kvadrāts ir mazāks par 2, bet sekojumā b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) katra skaitļa kvadrāts ir lielāks par 2.

Skaitļu sekojumu a_n var turpināt neaprobežoti, jo sekojuma locekļi ir dabūti ar sakņu izvilkšanas aritmētisku, bezgalīgi turpināmu, darbību. Sekojums b_n ir dabūts no sekojuma a_n, tādēļ arī tas ir turpināms bezgalīgi. Katrs b_n sekojuma skaitlis ir lielāks par $\sqrt{2}$, un katrs a_n sekojuma skaitlis ir mazāks par $\sqrt{2}$. Katrs a_n sekojuma skaitlis ir mazāks par katru b_n sekojuma skaitli.

Skaitļu sekojuma b_n veidošanas likums no skaitļu sekojuma a_n rāda, ka

$$b_n - a_n = \frac{1}{10^n},$$

tādēļ, ievērojot, ka še

$$a_{n+p} < b_n,$$

dabūjam:

$$a_{n+p} - a_n < \frac{1}{10^n}.$$

Apzīmējam

$$\frac{1}{10^n} = \varepsilon,$$

tad še

$$a_{n+p} - a_n < \varepsilon.$$

Šī izteiksme rāda, ka, pieņemot pēc patikas mazu pozitīvu skaitli ε, varam augšējā sekojumā atrast tādu vietas rādītāju n, ka ar katru $p = 1, 2, 3 \ldots$

$$a_{n+p} - a_n < \varepsilon.$$

Šī izteiksme rāda, ka skaitļu sekojums a_n ir pamata sekojums, un tam ir robeža. Šo robežu apzīmē ar simbolu $\sqrt{2}$.

Tad

$$\sqrt{2} = (1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414, \ldots\ldots).$$

Ja skaitļu sekojumā a_n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ } (a \text{ galīgs skaitlis}),$$

tad skaitļu sekojumu a_n sauc par *savirzāmu vai konverģentu*. Ja skaitļu sekojuma a_n locekļi ar augošu n pārsniedz katru pēc patikas pieņemtu lielu pozitīvu skaitli k vai paliek mazāki par $-k$, tad saka, pirmajā gadījumā, ka $a_n \to \infty$ vai arī $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, otrā gadījumā: $a_n \to -\infty$ vai $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Skaitļu sekojumu, ar norādīto īpašību, sauc par *nesavirzāmu* vai *diverģentu*.

Tikai savirzāms skaitļu sekojums noteic noteiktu skaitli. Skaitļu sekojumu sauc par *monotonu*, ja tā locekļi, vismaz no kādas vietas sākot, nekad nedilst vai nekad neaug. Pirmajā gadījumā skaitļu sekojumu sauc par *monotoni augošu*, otrā gadījumā par *monotoni dilstošu*.

Gadījumā, kad ar $n \to \infty$, a_n netiecas uz kādu robežu un arī netop bezgalīgs, skaitļu sekojumu sauc par *neīsti diverģentu*.

Ja skaitļu sekojums ir monotoni augošs, tad var būt šādi gadījumi:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Monotoni dilstoša skaitļu sekojuma gadījumi var būt:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Teōrēma.

Ja monotoni augoša skaitļu sekojuma locekļi arvienu paliek zem kāda noteikta skaitļa G, tad sekojumam ir robeža.

Ja monotoni dilstoša skaitļu sekojuma locekļi arvienu lielāki par kādu noteiktu skaitli g, tad sekojumam ir robeža.

Pierādījums.

Augošs skaitļu sekojums a_n ir savirzāms, ja:

$$a_{n+p} - a_n < \varepsilon.$$

Pieņemam, ka šis noteikums nav izpildīts, lai arī cik lielu n ņemtu, tad

$$a_{n+p} - a_n \geqq \varepsilon,$$

un arī

$$a_{n+2p} - a_{n+p} \leqq \varepsilon$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n+kp} - a_{n+(k-1)p} \leqq \varepsilon.$$

Saskaitot dabūjam:

$$a_{n+kp} - a_n > k\varepsilon$$

vai

$$a_{n+kp} > a_n + k\varepsilon.$$

Izvēlot attiecīgu k, izteiksmi $a_n + k\varepsilon$ varam pēc patikas palielināt, tātad, pataisīt lielāku par skaitli G. Šādā gadījumā a_{n+kp} būtu $> G$, kas nesaskan ar pieņēmumu, ka $a_{n+kp} < G$. Šī pretruna rāda, ka pieņēmums

$$a_{n+p} - a_n > \varepsilon$$

nepareizs. No augšējā secinām, ka jābūt

$$a_{n+p} - a_n < \varepsilon,$$

bet tad sekojums a_n ir savirzāms, t. i. sekojumam a_n ir robeža. Līdzīgs būtu pierādījums otrā gadījumā.

14. Darbības ar skaitļu sekojumiem.

Teorēma.

Ja skaitļu sekojumam

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ ir *robeža* a,

un *sekojumam*

$b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$ ir *robeža* b,

tad *sekojumam*

$$\left.\begin{array}{ll}(a_1+b_1), (a_2+b_2), (a_3+b_3), \ldots & \text{ir } robeža\ a+b \\ (a_1-b_1), (a_2-b_2), (a_3-b_3), \ldots & \text{ir } robeža\ a-b \\ a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3 \ldots\ldots & \text{ir } robeža\ ab \\ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \ldots\ldots & \text{ir } robeža\ \frac{a}{b}\ (b \neq 0)\end{array}\right\} (\alpha).$$

Lai pierādītu teorēmu, jāpierāda, ka starpības

$$(a_n + b_n) - (a + b)$$
$$(a_n - b_n) - (a - b)$$
$$a_n b_n - ab$$
$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}$$

varam pēc patikas pamazināt. Šīs starpības varam pārveidot šādi:

$$\left.\begin{array}{l}(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b) \\ (a_n - b_n) - (a - b) = (a_n - a) - (b_n - b) \\ a_n b_n - ab = (a_n - a)b + (b_n - b)a + (a_n - a)(b_n - b) \\ \dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{(a_n - a)\,b - (b_n - b)\,a}{b_n\, b}\end{array}\right\} (A)$$

Tā kā sekojumi a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$ ir savirzāmi, tad starpības

$$(a_n - a) \text{ un } (b_n - b)$$

varam pēc patikas pamazināt, izvēlot attiecīgu n. Ievērojot teikto, ieskatāms, ka izteiksmju (A) labās puses varam pēc patikas pamazināt, kas pierāda teōrēmu.

Secinājumi.

1) Ja sekojumi a_n un b_n ir pamata sekojumi, tad visi augšā ar α apzīmētie sekojumi arī ir pamata sekojumi. Lai sekojums $\frac{a_n}{b_n}$ būtu pamata sekojums, tad sekojums b_n nevar būt elementārsekojums.

2) Ja sekojumi a_n un b_n noteic irracionālus skaitļus, tad ar α apzīmētie sekojumi noteic divu irracionālu skaitļu attiecīgu summu, starpību, reizinājumu, dalījumu.

3) Pamata sekojumi a_n un b_n noteic to pašu skaitli, ja sekojums

$$(a_n - b_n)$$

ir elementārsekojums.

4) Ja sekojums a_n noteic skaitli a, tad sekojums $-a_n$ noteic skaitli $-a$.

5) Ar pamata sekojumu a_n noteiktais skaitlis a ir lielāks par skaitli b, kas noteikts ar pamata sekojumu b_n, ja sekojuma

$$(a_n - b_n)$$

locekļi ir pozitīvi skaitļi.

Ar augšējo ir noteikti likumi, kā ar pamata sekojumiem noteikti skaitļi salīdzināmi un kā ar tiem izdarāmi rēķini. Šie likumi aptver arī tos likumus, kas pastāv racionāliem skaitļiem.

Trešā nodaļa.

Mainīgi lielumi. Robeža.

15. Skaitļi un lielumi. Matēmatikas darbības un likumi nav attiecināmi tikai uz atsevišķiem skaitļiem, bet attiecināmi uz skaitļiem vispārīgi, tādēļ varam rīkoties ar nozīmēm, kas attēlo skaitļa tipu. Ja rakstām burtu „a" un ar šo simbolu apzīmējam kaut kādu reālu skaitli, tad tas, ko varam izteikt par a, ir arī derīgs katram reālam skaitlim.

Ja ar a, b, c . . . būtu domāti tikai veseli skaitļi, tad tas ir īpaši jāatzīmē. Visi likumi, ko dabūjam ar šo pieņēmumu, derīgi tikai veseliem skaitļiem.

Ar šādu kārtību visas darbības un likumi, kas derīgi skaitļa tipam, derīgi arī katram tipa individam.

Skaitļu attēlus, burtus a, b, c . . . sauc par *vispārīgiem skaitļiem.*

Ja mācību par skaitļiem gribam pielietot ģeometrijā, fizikā, technikā, tad rodas jautājums, kā būtu iespējams tur apskatāmo objektu īpašības padot skaitļu likumiem. To panākam, ja šo objektu īpašībām noteiktā un pielietošanai lietderīgā ziņā piekārtojam skaitļus.

Pielietojumos jāizteic objektu, parādību kvantitātīvās īpašības. To panākam, salīdzinot viendabīgas īpašības. Šāda salīdzināšana-mērīšana dod salīdzināšanas mēra skaitli, ko uzskatām par attiecīgās īpašības kvantitātes izteicēju, dotai īpašībai piekārtotu.

Šādi dabūto skaitli sauc par *lielumu.*

Lielums tā tad ir skaitlis, kas aizstāj kādas parādības noteiktu, vispārīgu kvantitātīvu īpašību. Šāds skaitlis-lielums tad ir *nosaukts skaitlis.*

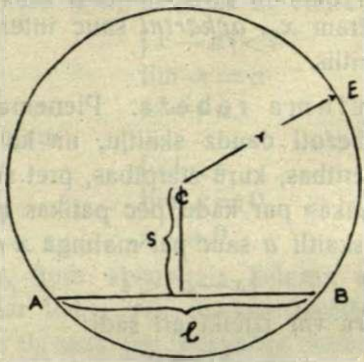
16. Pastāvīgi un mainīgi lielumi. Pieņemot vienības garumu, ar šo vienību izmērījot kāda dota riņķa radiusa CE, chordu AB un stateni CD no centra pret chordu, dabūjam šo līniju mēra skaitļus — lielumus, ko apzīmējam ar burtiem $r, l, s,$ zīm. 2.

Dotajā riņķī stateņa garumam s atbilst pilnīgi noteikts chordas garums l. Ja stateņa garumam dodam vērtības s_1, s_2 . . . , tad šīm vērtībām atbilst chordas garuma vērtības l_1, l_2 . . . .

Skaitļu sekojumu s_1, s_2, s_3 . . . un tam piekārtotu sekojumu l_1, l_2, l_3 . . . kopību sauc par *maiņas procesu.* Šajā maiņas procesā piedalās lielumi s un l. Šie lielumi ir *mainīgi lielumi.* Tā kā chordas garums l ir atkarīgs ne tikvien no s, bet arī no riņķa radiusa r, tad arī šis lielums ietilpst maiņas procesā. r nemainās, tas apskatītajā maiņas procesā ir *pastāvīgs lielums.*

Mainīgos lielumus parasti apzīmē ar alfabēta pēdējiem burtiem x, y, z u. t. t. Pastāvīgos lielumus parasti apzīmē ar alfabēta pirmajiem burtiem a, b, c u. t. t.

Mainīgā lieluma apzīmējums, piemēram x, aptveŗ visas tās skaitliskās vērtības, ko dotais mainīgais lielums dotajā maiņas procesā var pieņemt. Mainīgā lieluma, piemēram x, atsevišķas vērtības apzīmē: x_1, x_2, x_3 . . . .



Zīm. 2.

Mainīgā lieluma x visu atsevišķu vērtību kopību sauc par mainīgā lieluma x vērtību *apjomu*. Apskatītajā maiņas procesā mainīgā lieluma — chordus l vērtību apjoms ir visi skaitļi no 0 līdz $2r$, ieskaitot skaitļus 0 un $2r$.

Mainīgais lielums ir tad noteikts, ja par katru skaitli varam noteikt, vai tas pieder mainīgā lieluma apjomam vai ne.

Ja kāda mainīgā lieluma, piemēram x, apjomu veido visi reālie skaitļi, kas atrodas starp noteiktiem skaitļiem α un β ($\alpha < \beta$), ieskaitot apjomā arī α un β, tad lielumu x sauc par *nepārtrauktu* mainīgo slēgtā *intervallā* (α, β). To raksta

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

Skaitļus α un β tad sauc par mainīgā x vai arī intervalla (α, β) attiecīgo *apakš* un *virsrobežu.*

Ja mainīgais lielums x var pieņemt visas vērtības starp α un β, izņemot vērtības α un β, tad intervallu (α, β) sauc par *neslēgtu.* To raksta

$$\alpha < x < \beta.$$

Ja nepārtrauktais mainīgais var pieņemt tikai vērtības, kas algebriski lielākas par α un pie tam *katru šādu vērtību,* tad mainīgā intervalls ir (α, $+\infty$).

Ja nepārtrauktais mainīgais var pieņemt tikai vērtības, kas algebriski mazākas par β un pie tam katru šādu vērtību, tad mainīgā intervalls ir (β, $-\infty$).

Gadījumā, kad nepārtrauktais mainīgais var pieņemt katru vērtību, to sauc par *neierobežotu*. Tā intervalls tad ir $(-\infty, +\infty)$.

Ja mainīgais lielums nepieņem visas intervallā esošās vērtības, tad šo mainīgo sauc par *pārtrauktu*.

Mainīgais lielums x, piemēram, ir pārtraukts, ja x dotajā intervallā var pieņemt tikai veselu skaitļu vērtības.

Mainīgā x atsevišķu vērtību, piemēram x_n, sauc par *vietu* dotajā intervallā. Par vietas, piemēram x_o, *apkārtni* sauc intervallu (x_0-h, x_0+h), kur h pozitīvs, mazs skaitlis.

17. Mainīgā lieluma robeža. Pieņemam, ka mainīgā lieluma x apjoms aptveŗ neaprobežoti daudz skaitļu, un ka lielums x nepārtrauktā maiņā beidzot pieņem vērtības, kuŗu starpības, pret skaitli a absolūti ņemtas, tālākā maiņā paliek mazākas par kādu pēc patikas ņemtu pozitīvu skaitli ε un nekad nepazūd, tad skaitli a sauc par mainīgā x *robežvērtību*. To raksta:

$$|x-a|<\varepsilon$$

Augšējās izteiksmes saturu var izteikt arī šādi:

$$x \longrightarrow a$$

vai

$$\lim x = a.$$

Ja nosakām, ka mainīgais x var pieņemt sekojošā pamata sekojuma locekļu vērtības

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots,$$

tad, tā kā šī sekojuma robeža ir 1, arī mainīgā x robeža ir 1.

Ja x ir nepārtraukts mainīgais, kas, tiekdamies uz robežu a, pieņem visas vērtības kādā intervallā, kas var būt pēc patikas šaurs, bet nepieņem vērtību a, tad mainīgais x tiecas uz robežu a nepārtraukti.

Mainīgais lielums x var tuvoties robežai a dažādi. Ja x tiecas uz a un pieņem tikai vērtības, kas mazākas par a, tad x tuvojas robežai a *augoši*. To apzīmē

$$x \longrightarrow a-0; \ \lim x = a-0.$$

Ja x, tuvodamies robežai a, pieņem tikai vērtības, kas lielākas par a, tad x tiecas uz robežu a *dilstoši*. To apzīmē

$$x \longrightarrow a+0; \ \lim x = a+0.$$

Gadījumā, kad x, tiekdamies uz robežu a, var pieņemt kā mazākas, tā arī lielākas vērtības par a, tad to raksta

$$x \longrightarrow a \pm 0; \ \lim x = a \pm 0.$$

Ja x ir neaprobežots mainīgs lielums, un tas mainīdamies pieņem vērtības, kuŗu absolūtais lielums arvienu ir lielāks par kādu pēc patikas pieņemtu ļoti lielu pozitīvu skaitli K, saka, ka mainīgais x tiecas uz (neīstu) robežu ∞. Ja pie tam x arvienu ir pozitīvs, tad raksta:

$$x \to +\infty; \ \lim x = +\infty$$

Pretējā gadījumā, ja x arvienu ir negātīvs, raksta:

$$x \to -\infty; \ \lim x = -\infty.$$

18. Bezgalīgi mazi un bezgalīgi lieli lielumi. Kā redzējām, ja mainīgā x robeža ir a, to izteic ar vienu no sekojošiem simboliem:

$$|x - a| < \varepsilon$$
$$\lim x = a$$
$$x \longrightarrow a.$$

Liekot a vietā 0, dabūjam:

$$|x| < \varepsilon$$
$$\lim x = 0$$
$$x \longrightarrow 0.$$

Šādu mainīgu lielumu, kuŗa absolūtais lielums maiņas procesā top un arī talāk paliek mazāks par katru pēc patikas izvēlētu mazu pozitīvu skaitli ε vai arī kuŗa robeža ir 0, sauc par *bezgalīgi mazu.*

Mainīgu lielumu x, ja tā (neīsta) robeža ir ∞ (ar $+$ vai $-$ zīmi), sauc par *bezgalīgi lielu.* Tātad bezgalīgi liels lielums ir tāds mainīgs lielums, ka absolūtais lielums maiņas procesā top un arī tālāk paliek lielāks par katru pēc patikas izvēlētu pozitīvu lielu skaitli K.

Jāievēro, ka bezgalīgi mazs un bezgalīgi liels lielums ir mainīgs lielums.

Ja a ir mainīgā x robeža, tad

$$|x - a| < \varepsilon.$$

No augšējā redzams, ka

$$|x - a|$$

ir bezgalīgi mazs lielums Apzīmējot starpību $x - a$ ar α, dabūjam:

$$x - a = \alpha$$

un

$$x = a + \alpha.$$

Še α ir bezgalīgi mazs lielums; tā zīme var būt $+$ vai $-$.

Mainīgu lielumu x tātad varam izteikt kā mainīgā robežas a un bezgalīgi maza lieluma α algebrisku summu.

19. Teōrēmas par bezgalīgi maziem un bezgalīgi lieliem lielumiem.

Teōrēma I.

Bezgalīgi mazu lielumu summa ar galīgu saskaitāmo skaitu ir bezgalīgi mazs lielums.

Pierādījums.

Apzīmējam ar α_1, α_2, α_3, . . . α_n pozitīvus vai negātīvus bezgalīgi mazus lielumus, un ar ε pēc patikas izvēlētu mazu pozitīvu skaitli. Maiņas procesā būs moments, kad arī lielākā starp lielumiem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ absolūtā vērtība taps mazāka par $\frac{\varepsilon}{n}$, tādēļ varam rakstīt:

$$|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{n}$$

$$|\alpha_2| < \frac{\varepsilon}{n} \text{ (} n \text{ bezgalīgi mazo lielumu skaits)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Saskaitot, dabūjam:

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Tā kā

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|,$$

tad arī

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| < \varepsilon.$$

Šī izteiksme pierāda teorēmu.

Teorēma II.

Bezgalīgi mazu lielumu α_1 un α_2 starpība ir bezgalīgi mazs lielums.

Pierādījums.

Tā kā

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|,$$

bet, saskaņā ar teorēmu I,

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| < \varepsilon,$$

tad arī

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < \varepsilon,$$

kas teorēmu pierāda.

Teorēma III.

Bezgalīgi maza lieluma reizinājums vai dalījums ar pastāvīgu vai mainīgu galīgu lielumu ir bezgalīgi mazs lielums.

Pierādījums.

Pieņemot, ka α ir bezgalīgi mazs un ka x ir galīgs, pastāvīgs vai mainīgs lielums, varam dabūt galīgu, pozitīvu skaitli M un mazu pozitīvu skaitli ε tādus, ka

$$|x| < M$$

un

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Tad

$$|\alpha| \cdot |x| = |\alpha \cdot x| < \varepsilon.$$

Augšējā izteiksme teorēmu pierāda.

Dalījumu $\frac{\alpha}{x}$ var uzskatīt kā reizinājumu $\alpha \cdot \frac{1}{x}$. Tā kā $\alpha \cdot \frac{1}{x}$ ir bezgalīgi mazs, tad dalījums $\frac{\alpha}{x}$ arī ir bezgalīgi mazs.

Teorēma IV.

Bezgalīgi mazu lielumu reizinājums ir bezgalīgi mazs lielums.

Pierādījums.

Pieņemot, ka $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ir bezgalīgi mazi lielumi un ε pēc patikas izvēlēts mazs pozitīvs skaitlis, varam rakstīt:

$$|\alpha_1| < \varepsilon$$
$$|\alpha_2| < 1$$
$$|\alpha_3| < 1$$
$$\ldots\ldots$$
$$|\alpha_n| < 1.$$

Reizinot augšējās izteiksmes, dabūjam:

$$|\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot |\alpha_3| \ldots |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Šī izteiksme teorēmu pierāda.

Teorēma V.

Bezgalīgi maza lieluma α vesela pozitīva pakāpe α^n ir bezgalīgi mazs lielums.

Pierādījums.

$\alpha^n = \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \ldots \alpha_n$ (n vesels, pozitīvs skaitlis) šīs izteiksmes labā puse, saskaņā ar teorēmu IV, ir bezgalīgi mazs lielums, ar ko teorēma ir pierādīta.

Teorēma VI.

Pozitīva vesela n-tā sakne no bezgalīgi maza lieluma α ir bezgalīgi mazs lielums.

Pierādījums.

Pieņemam, ka ε ir pozitīvs pēc patikas izvēlēts mazs skaitlis, un α bezgalīgi mazs, tad:

$$|\alpha| < \varepsilon^n.$$

No augšējā secinām:

$$\sqrt[n]{|\alpha|} < \varepsilon.$$

Augšējā izteiksme teorēmu pierāda.

Tā kā

$$\sqrt[n]{|\alpha|} = |\alpha|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon,$$

tad

$$|\alpha|^{\frac{m}{n}} < \varepsilon^m \quad (m \neq 0;\ n \neq 0).$$

Šīs izteiksmes rāda, ka bezgalīgi maza lieluma pozitīva daļas pakāpe ir bezgalīgi mazs lielums.

Teorēma VII.

Galīga lieluma a dalījums ar bezgalīgi mazu lielumu α ir bezgalīgi liels lielums.

Pierādījums.

Izvēlot pēc patikas lielu pozitīvu skaitli k, dalījuma $\frac{|a|}{k}$ vērtību varam pēc patikas pamazināt, tādēļ

$$\frac{|a|}{k}=\varepsilon,$$

bet tā kā

$$|\alpha|<\varepsilon,$$

tad

$$|\alpha|<\frac{|a|}{k}$$

un

$$|\alpha|k<|a|.$$

Tātad

$$k<=\frac{|a|}{|\alpha|}$$

vai

$$\left|\frac{a}{\alpha}\right|>k.$$

Šī izteiksme teorēmu pierāda.

Teorēma VIII.

Galīga lieluma a dalījums ar bezgalīgi lielu lielumu k, ir bezgalīgi mazs lielums.

Pierādījums.

Ja ε ir pozitīvs pēc patikas izvēlēts mazs skaitlis, tad $\frac{|a|}{\varepsilon}$ ir pēc patikas liels galīgs skaitlis. Tā kā k ir bezgalīgi liels, tad jābūt:

$$|k|>\frac{|a|}{\varepsilon},$$

un

$$\varepsilon|k|>|a|,$$

vai

$$\varepsilon>\frac{|a|}{|k|}=\left|\frac{a}{k}\right|.$$

Tātad

$$\left|\frac{a}{k}\right|<\varepsilon,$$

Tas teorēmu pierāda.

Secinājums:

Izteiksmes α^{-n} un $\sqrt[-n]{\alpha}$ ar $\alpha \longrightarrow 0$ ir bezgalīgi lieli lielumi.

Teōrēma IX.

Bezgalīgi liela lieluma k reizinājums ar galīgu vai bezgalīgi lielu lieluma a ir bezgalīgi liels lielums.

Pierādījums.

Ar augšējiem pieņēmumiem

$\frac{1}{k}$ ir bezgalīgi mazs lielums,

$\frac{1}{a}$ ir galīgs vai bezgalīgi mazs lielums.

Reizinājums

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{ka}$$

ir bezgalīgi mazs lielums. Ievērojot teikto, izteiksme

$$\frac{1}{\frac{1}{ka}}$$

ir bezgalīgi liels lielums, bet tā kā

$$\frac{1}{\frac{1}{ka}} = ka,$$

tad

$$ka$$

ir bezgalīgi liels lielums.

20. Teōrēmas par robežām.

Teōrēma I.

Pastāvīga lieluma k robeža ir pats pastāvīgais lielums k.

Pierādījums.

Saskaņā ar robežas definīciju

$$|k - k| = 0 < \varepsilon,$$

kas pierāda teōrēmu.

Teōrēma II.

Ja mainīgie lielumi x un y visā maiņas procesā ir vienlīdzīgi, tad šo mainīgo robežas ir vienlīdzīgas.

Pierādījums.

Dots, ka

$$x = y.$$

Pieņemam, ka šo mainīgo robežas nav vienlīdzīgas, t. i., ka

$$\lim x = a \text{ un } \lim y = b; \quad (a \neq b).$$

Tā kā

$$x = a + \alpha; \ (\alpha \longrightarrow 0)$$

un

$$y = b + \beta; \ (\beta \longrightarrow 0),$$

tad, tā kā

$$x - y = 0,$$

jābūt

$$a - b + \alpha - \beta = 0.$$

Starpība $a - b$ ir galīgs pastāvīgs lielums, ko apzīmējam ar d. No augšējā secinām:

$$a - b = d = \beta - \alpha.$$

Lielums $\beta - \alpha$ ir divu bezgalīgi mazu lielumu starpība. Šis lielums ir mainīgs un bezgalīgi mazs. Tā ka mainīgs, bezgalīgi mazs lielums $\beta - \alpha$ nevar nolīdzināties galīgam, pastāvīgam lielumam d, tad

pieņēmums: $a \neq b$ rada pretrunu, tādēļ tas nav pareizs. Ja pieņēmums $a \neq b$ nav pareizs, tad jābūt, ka $a = b$. Teōrēma tātad pierādīta.

Teōrēma III.

Galīga skaita mainīgu lielumu summas robeža līdzinās mainīgo lielumu robežu summai.

Pierādījums.

Pieņemam, ka mainīgo $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ robežas ir $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$.

Tad

$x_1 - a_1 = \alpha_1$

$x_2 - a_2 = \alpha_2$; ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ bezgalīgi mazi lielumi). n galīgs skaitlis.

. . . . .

$x_n - a_n = \alpha_n$

Augšējās izteiksmes saskaitot, dabūjam:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) =$$
$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n.$$

Šis izteiksmes labajā pusē esošā summa ir bezgalīgi mazs lielums, tādēļ no augšējās izteiksmes secinām:

$$\lim (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

un, ievērojot, ka $\lim x_1 = a_1$, $\lim x_2 = a_2, \ldots \lim x_n = a_n$, dabūjam izteiksmi:

$\lim (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = \lim x_1 + \lim x_2 + \lim x_3 + \ldots + \lim x_n$, kas teōrēmu pierāda.

Teōrēma IV.

$$\lim (x-y) = \lim x - \lim y.$$

Pierādījums.

Pieņemam, ka:

$$\lim x = a \text{ un } \lim y = b.$$

Tad

$$\begin{matrix} x = a + \alpha, \\ y = b + \beta \end{matrix} \quad (\alpha \text{ un } \beta \text{ bezgalīgi mazi lielumi})$$

un

$$x - y = (a-b) + (\alpha - \beta).$$

Augšējā izteiksme rāda, ka $\lim (x-y)$ ir $(a-b)$, jo $\alpha - \beta$ ir bezgalīgi mazs lielums.

Tātad

$$\lim (x-y) = a - b = \lim x - \lim y,$$

ar ko teōrēma ir pierādīta.

Teōrēma V.

$$\lim (x \,.\, y) = \lim x \,.\, \lim y.$$

Pierādījums.

Pieņemam, ka:

$$\lim x = a \text{ un } \lim y = b.$$

Tad

$$x = a + \alpha \text{ un } y = b + \beta; \; (\alpha \text{ un } \beta \text{ bezgalīgi mazi lielumi}).$$

Šīs izteiksmes reizinot, dabūjam:

$$xy = (a+\alpha)(b+\beta) = ab + (a\beta + \alpha b + \alpha\beta).$$

Tā kā $(a\beta + \alpha b + \alpha\beta)$ ir bezgalīgi mazs lielums, tad no augšējās izteiksmes secinām:

$$\lim (x \,.\, y) = ab = \lim x \,.\, \lim y.$$

Šī izteiksme teōrēmu pierāda.

Ja $x = a$ pastāvīgs lielums, tad no augšējās izteiksmes secinām:

$$\lim (a \,.\, y) = \lim a . \lim y = a \lim y.$$

Teōrēma VI.

$$\lim \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\lim x}{\lim y}; \quad (y + 0).$$

Pierādījums.

Liekam

$$\frac{x}{y} = z,$$

tad

$$x = y \,.\, z$$

un

$$\lim x = \lim (y \,.\, z) = \lim y \,.\, \lim z.$$

No augšējās izteiksmes, dabūjam:

$$\lim z = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Ievērojot z vērtību, dabūjam izteiksmi:

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\lim x}{\lim y},$$

kas teōrēmu pierāda.

Secinājums.

Ja visā maiņas procesā

$$\frac{x}{y} = a \text{ (} a \text{ pastāvīgs)},$$

tad arī

$$\frac{\lim x}{\lim y} = a.$$

Pierādījums.

Tā kā

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right) = \lim a = a$$

un

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\lim x}{\lim y},$$

tad arī

$$\frac{\lim x}{\lim y} = a.$$

Teōrēma VII.

Ja visā maiņas procesā pastāvīgs lielums a atrodas starp mainīgiem x un y, kuru starpība ir bezgalīgi maza, tad a ir mainīgo x un y kopīgā robeža.

Pierādījums.

Tātad, ja

$$x > a > y$$

un

$$x - y < \varepsilon \text{ (} \varepsilon > 0 \text{ pēc patikas mazs lielums)},$$

tad

$$\lim x = \lim y = a.$$

Pierādījums.

Tā kā

$$|x - y| < \varepsilon,$$

tad arī

$$|x - a| < \varepsilon$$

un

$$|y - a| < \varepsilon.$$

Beidzamās divas izteiksmes rāda, ka

$$\lim x = a \text{ un arī } \lim y = a.$$

Teōrēma VIII.

Ja $\lim x = a$ un visā maiņas procesā

$$x > y > a, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

tad

$$\lim y = a.$$

Pierādījums.

Tā kā

$$|x - a| < \varepsilon,$$

tad, ievērojot (1) arī

$$|y - a| < \varepsilon.$$

Beidzamā izteiksme teōrēmu pierāda.

Teōrēma IX.

Ja x, y, z ir mainīgi lielumi ar $\lim x = a$, $\lim z = a$ un visā maiņas procesā

$$x > y > z,$$

tad

$$\lim y = a.$$

Pierādījums.

Tā kā ieskatāms no augšējā:

$$x - z > y - z > 0 \text{ un } \lim (x - z) = 0,$$

tad, ievērojot teōrēmu VIII, dabūjam:

$$\lim (y - z) = \lim y - \lim z = 0$$

un

$$\lim y = \lim z = a.$$

Teōrēma X.

$$\lim (x^n) = (\lim x)^n.$$

Pierādījums.

a) Ja n vesels pozitīvs skaitlis, tad

$$x^n = \overset{1}{x} \,.\, \overset{2}{x} \,.\, \overset{3}{x} \,.\,.\,.\, x_n^{\;n}$$

un

$$\lim (x^n) = \lim \overset{1}{x} \,.\, \lim \overset{2}{x} \,.\, \lim \overset{3}{x} \,.\,.\,.\, \lim \overset{n}{x} = (\lim x)^n.$$

b) Ja n vesels un negātīvs skaitlis $(n = -m)$,

tad

$$\lim (x^n) = \lim (x^{-m}) = (\lim x)^{-m}.$$

Pierādījums.

Tā kā

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m},$$

tad

$$\lim\,(x^{-m}) = \lim\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{1}{\lim\,(x^m)} = \frac{1}{(\lim\,x)^m} = (\lim\,x)^{-m}.$$

c) Ja $n = \frac{p}{q}$, tad

$$\lim\,(x^{\frac{p}{q}}) = (\lim\,x)^{\frac{p}{q}}.$$

Pierādījums.

Liekam

$$y = x^{\frac{p}{q}},$$

tad

$$y^q = x^p$$

un

$$\lim\,(y^q) = \lim\,(x^p).$$

No augšējā dabūjam:

$$(\lim\,y)^q = (\lim\,x)^p$$

un

$$\lim\,y = (\lim\,x)^{\frac{p}{q}}.$$

Tātad

$$\lim\,(x^{\frac{p}{q}}) = (\lim\,x)^{\frac{p}{q}}.$$

21. Dažu izteiksmju robežas.

$$1)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin\,x}{x} = 1.$$

Pierādījums.

Tā kā

$$\sin\,x < x < tg x,$$

tad

$$\frac{1}{\sin\,x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{tg x}.$$

Reizinot augšējās izteiksmes visus locekļus ar $\sin\,x$, dabūjam:

$$1 > \frac{\sin\,x}{x} > \cos\,x.$$

Tā kā $\lim\limits_{x\to 0} \cos\,x = 1$, tad, saskaņā ar teorēmu VIII,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\,x}{x} = 1.$$

2) Tādā pašā kārtā dabūjam:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = 1.$$

3) $\lim\limits_{\alpha \to 0} a^\alpha = 1 \qquad (a > 0;\ a \neq 1).$

Pierādījums.

Pieņemam, ka $a > 1$.

Maiņas procesā α, tiekdamies uz 0, pieņem arī vērtību $\frac{1}{n}$, kur n vesels pozitīvs, arvienu augošs skaitlis. Tad

$$a^\alpha = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = 1 + \omega \quad (w > 0, \text{ mazs skaitlis}).$$

Ja $n \longrightarrow \infty$, tad $\alpha \longrightarrow 0$.

Tā kā, saskaņā ar augšējo:

$$a = (1 + \omega)^n = (1 + n\omega + \ldots),$$

tad

$$1 + n\omega < a$$

un

$$\omega < \frac{a - 1}{n}.$$

Tā kā

$$\omega = a^{\frac{1}{n}} - 1,$$

tad

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

No augšējās izteiksmes redzams, ka, pieņemot pēc patikas lielu n, starpību

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = a^\alpha - 1$$

varam pēc patikas pamazināt, un tādēļ

$$\lim_{\alpha \to 0} a^\alpha = 1.$$

Ja $\alpha \to 0$ pieņemot racionālas vērtības $\frac{p}{q}$ $(p < q)$,

tad

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{q : p} = \frac{1}{n + \frac{\nu}{p}}. \quad (n \text{ vesels poz. skaitlis})$$

Tā kā $\frac{\nu}{p}$ ir īsta daļa, tad:

$$\frac{1}{n} > \frac{p}{q} \text{ un } \frac{p}{q} > \frac{1}{n+1};$$

tādēļ

$$a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{p}{q}} > a^{\frac{1}{n+1}}.$$

Ja $n \longrightarrow \infty$, tad

$$\lim a^{\frac{1}{n}} = \lim a^{\frac{1}{n+1}} = 1;$$

tādēļ arī

$$\lim a^{\frac{p}{q}} = \lim a^{\alpha} = 1.$$

Ja $\alpha \longrightarrow 0$ un pieņem irracionālas vērtības, tad šādu irracionālu vērtību α varam ieslēgt starp racionālām vērtībām

$$\frac{p}{q} \text{ un } \frac{\nu}{s} \cdot \left(\frac{p}{q} \to 0 \text{ un } \frac{\nu}{s} \to 0\right).$$

Tā tad

$$\frac{p}{q} < \alpha < \frac{\nu}{s}.$$

Tad

$$a^{\frac{p}{q}} < a^{\alpha} < a^{\frac{\nu}{s}}.$$

Redzams, ka arī še

$$\lim_{\alpha \to 0.} a^{\alpha} = 1.$$

Ja $\alpha = -\beta$, tad

$$a^{\alpha} = a^{-\beta} = \frac{1}{a^{\beta}}.$$

un

$$\lim_{\alpha \to 0} a^{\alpha} = \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{a^{\beta}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ja $a < 1$, tad, liekot $a = \frac{1}{b}$ $(b > 1)$,

dabūjam:

$$a^{\alpha} = \frac{1}{b^{\alpha}}$$

un

$$\lim_{\alpha \to 0} a^{\alpha} = \frac{1}{\lim\limits_{\alpha \to 0} b^{\alpha}} = \frac{1}{1} = 1.$$

4) $\lim A^x = A^{\lim x}$.

Pierādījums.

Ja

$$\lim x = a, \text{ tad } x = a + \alpha \quad (\alpha \longrightarrow 0)$$

un

$$A^x = A^{a+\alpha}.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$A^{a+\alpha} - A^a = A^a(A^{\alpha} - 1)$$

vai

$$A^x - A^a = A^a(A^{\alpha} - 1)$$

Ar $\alpha \longrightarrow 0$ augšējās izteiksmes labo pusi varam pēc patikas pamazināt, tādēļ,

$$|A^x - A^a| < \varepsilon$$

vai

$$\lim A^x = A^a.$$

Ievērojot, ka $a = \lim x$, dabūjam:

$$\lim A^x = A^{\lim x}.$$

5) $\lim \sin x = \sin (\lim x)$.

Pierādījums.

Ja $\lim x = a$, tad

$$x = a + \alpha \quad (\alpha \longrightarrow 0).$$

Tā kā

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2},$$

tad, liekot augšējās izteiksmes labajā pusē

$$x = a + \alpha,$$

dabūjam:

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(a + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ar $\alpha \longrightarrow 0$ augšējās izteiksmes labo pusi varam pēc patikas pamazināt, tādēļ

$$\lim (\sin x - \sin a) = 0$$

un

$$\lim \sin x = \sin a.$$

Ievērojot a nozīmi, dabūjam:

$$\lim \sin x = \sin (\lim x),$$

izteiksmi, kas bija jāpierāda.

6) $\lim \text{arc} \sin x = \text{arc} \sin (\lim x)$.

Pierādījums.

Ja

$$y = \text{arc} \sin x,$$

tad

$$x = \sin y$$

un

$$\lim x = \lim \sin y = \sin (\lim y).$$

No augšējās izteiksmes dabūjam:

$$\lim y = \text{arc} \sin (\lim x).$$

Liekot šajā izteiksmē $y = \text{arc} \sin x$, dabūjam:

$$\lim \text{arc} \sin x = \text{arc} \sin (\lim x).$$

Augšējā izteiksme teorēmu pierāda.

7) $\lim \log_a x = \log_a (\lim x)$.

Pierādījums.

Ja
$$y = \log_a x, \text{ tad } x = a^y.$$
Tā kā
$$\lim x = \lim a^y = a^{\lim y},$$
tad
$$\lim y = \log_a (\lim x).$$
Ievērojot, ka
$$y = \log_a x,$$
dabūjam:
$$\log_a x = \log_a (\lim x).$$
Augšējā izteiksme teorēmu pierāda.

Ievērojot še pierādīto punktos 4, 5, 6, 7 un pierādīto [20] teorēmās III IV, V, VI, X, varam izteikt sekojošo:

Robeža, uz kuru tiecas kādas darbības ar mainīgu vai mainīgiem lielumiem rezultāts, nolīdzinās rezultātam, kuru dabūjam, izdarot to pašu darbību ar mainīgā vai mainīgo lielumu robežvērtībām.

22. Bezgalīgi mazu lielumu kārta. Kāda maiņas procesa visi bezgalīgi mazie lielumi tiecas uz 0, bet savā starpā tie var atšķirties un to attiecības var pieņemt dažādas vērtības.

Apskatām kāda maiņas procesa bezgalīgi mazos lielumus
$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu, \omega.$$
Izvēlam starp tiem vienu, piemēram α, ar kuru salīdzinām pārējos. Šai gadījumā bezgalīgi mazo lielumu α sauc par *galveno, bezgalīgi mazo* lielumu.

Katru bezgalīgi mazo lielumu, piemēram β, kas vienā laikā ar α tiecas uz 0 tādā kārtā, ka attiecība $\frac{\beta}{\alpha}$ tiecas uz galīgu robežu, t. i.
$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k \quad (k \text{ galīgs, } k \neq 0),$$
sauc par *pirmās kārtas bezgalīgi mazu* lielumu.

Bezgalīgi mazu lielumu γ, kas vienā laikā ar α tiecas uz 0 tādā kārtā, ka
$$\lim \left(\frac{\gamma}{\alpha^2}\right) = l \quad (l \text{ galīgs, } l \neq 0),$$
sauc par otrās kārtas bezgalīgi mazu lielumu.

Vispārīgi, bezgalīgi mazu lielumu δ, kas ar α vienā laikā tiecas uz 0, sauc par $m^{\text{tās}}$ kārtas bezgalīgi mazu, ja
$$\lim \left(\frac{\delta}{\alpha^m}\right) = \nu \quad (\nu \neq 0;\ \nu \text{ galīgs}).$$
$$m > 0.$$

Tātad bezgalīgi maza lieluma kārtu noteic pozitīvs pakāpes rādītājs m, ar kuŗu jākāpina galvenais bezgalīgi mazais lielums α, lai attiecības $\frac{\delta}{\alpha^m}$ robeža dabūtu galīgu vērtību $\nu \neq 0$.

Ja

$$\lim\left(\frac{\mu}{\alpha^n}\right) = \nu_1 \quad (\nu_1 \text{ galīgs, } \nu_1 \neq 0)$$

un

$$\lim\left(\frac{\omega}{\alpha^m}\right) = \nu_2 \quad (\nu_2 \text{ galīgs, } \nu_2 \neq 0),$$

tad ar

$$n > m,$$

μ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs pret ω.

23. Bezgalīgi mazu lielumu vispārīgais veids. Ja

$$\alpha \longrightarrow 0;\ \beta \longrightarrow 0;\ \nu \text{ galīgs, } \nu \neq 0;\ m > 0$$

un

$$\lim\left(\frac{\beta}{\alpha^m}\right) = \nu, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

tad, ja α ir galvenais, bezgalīgi mazais lielums, β ir $m^{\text{tās}}$ kārtas bezgalīgi mazs. No (1) dabūjam:

$$\frac{\beta}{\alpha^m} = \nu + \omega \quad (\omega \longrightarrow 0, \text{ ja } \alpha \longrightarrow 0 \text{ un } \beta \longrightarrow 0)$$

un

$$\beta = \alpha^m(\nu + \omega) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Še $\nu + \omega$ ir galīgs, bet mainīgs lielums, ko apzīmējot ar R no (2), dabūjam:

$$\beta = \alpha^m \,.\, R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Tātad $m^{\text{tās}}$ kārtas bezgalīgi mazu lielumu izteic kā reizinājumu, kuŗa viens faktors ir galvenā bezgalīgi mazā lieluma $m^{\text{tā}}$ pakāpe un otrs faktors ir galīgs, bet mainīgs lielums.

Augšējā izteiksme (3) ir visu, kādā maiņas procesā ietilpstošo, bezgalīgi mazo lielumu vispārīgais veids.

No (2) dabūjam:

$$\beta = \alpha^m\nu + \alpha^m\omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Locekli $\alpha^m\nu$ sauc par bezgalīgi mazā lieluma β *galveno daļu.*

Pieņemam, ka α ir galvenais bezgalīgi mazais lielums, β $m^{\text{tās}}$ un γ $n^{\text{tās}}$ kārtas bezgalīgi mazi lielumi, tad

$$\lim\left(\frac{\beta}{\alpha^m}\right) = \nu \quad (\nu \text{ galīgs un } \neq 0)$$

un

$$\lim\left(\frac{\gamma}{\alpha^n}\right) = s \quad (s \text{ galīgs un } \neq 0).$$

No augšējām izteiksmēm dabūjam:

$$\beta = \alpha^m (\nu + \mu), \quad (\mu \longrightarrow 0)$$

un

$$\gamma = \alpha^n (s + \omega), \quad (\omega \longrightarrow 0).$$

Šīs izteiksmes dalot, dabūjam:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \alpha^{m-n} \frac{\nu + \mu}{s + \omega}.$$

Ja $m > n$, tad $m - n > 0$. Šādā gadījumā β ir pret γ augstākas kārtas, jo:

$$\lim \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) = \lim \alpha^{m-n} \cdot \frac{\lim (\nu + \mu)}{\lim (s + \omega)} = 0 \cdot \frac{\nu}{s} = 0.$$

Tā tad β ir pret γ bezgalīgi mazs.

Ja $m = n$, tad

$$\lim \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) = \alpha^0 \cdot \frac{\lim (\nu + \mu)}{\lim (s + \omega)} = 1 \cdot \frac{\nu}{s} = \frac{\nu}{s}.$$

Tā kā $\lim \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$ ir galīgs lielums $\frac{\nu}{s}$, kas nav 0, tad β un γ kārta ir vienāda.

Ja $m < n$, tad $m - n < 0$, un

$$\lim \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) = \lim \alpha^{m-n} \cdot \frac{\lim (\nu + \mu)}{\lim (s + \omega)} = \infty \cdot \frac{\nu}{s} = \infty.$$

Tā kā augšējais limes ir bezgalība, tad β kārta ir zemāka pret γ kārtu.

24. Bezgalīgi mazu lielumu summas un reizinājuma kārta. Pieņemam, ka α, β, γ ir bezgalīgi mazi un ka α ir galvenais bezgalīgi mazais lielums. Tad, kā zinām:

$$\beta = \alpha^m R; \quad \gamma = \alpha^n \cdot S. \quad \text{(Še } m < n, \ R \text{ un } S \text{ galīgi lielumi.)}$$

No izteiksmes

$$\lim \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha^m}\right) = \lim \frac{\alpha^m R + \alpha^n S}{\alpha^m} = \lim (R + \alpha^{n-m} S) = \lim R = \nu \quad (R = \nu + \mu)$$

redzam, ka bezgalīgi mazo lielumu β un γ summas $\beta + \gamma$ kārtu noteic zemākās kārtas saskaitāmā kārta. Šinī gadījumā saskaitāmā β kārta, kas ir m.

Tā kā

$$\lim \left(\frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha^{m+n}}\right) = \lim \left(\frac{\alpha^m R \cdot \alpha^n S}{\alpha^{m+n}}\right) = \lim \left(\frac{\alpha^{m+n} \cdot R S}{\alpha^{m+n}}\right) = \lim (R \cdot S) = \nu s$$

$$(R = \nu + \mu); \quad (S = s + \omega),$$

tad redzam, ka bezgalīgi mazu lielumu reizinājuma kārta nolīdzinās reizinātāju kārtas summai.

Teōrēma.

Ja meklējam robežu divu bezgalīgi mazu lielumu attiecībai, tad dotos bezgalīgi mazos lielumus varam aizstāt ar citiem bezgalīgi maziem lielumiem, bet tikai tādiem, kuŗu attiecības robeža pret attiecīgiem dotiem bezgalīgi maziem lielumiem ir 1.

Tātad, ja α un β ir bezgalīgi mazi lielumi un meklējam

$$\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

tad α varam aizstāt ar bezgalīgi mazu α_1, ja

$$\lim\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)=1,$$

un β varam aizstāt ar bezgalīgi mazu β_1, ja

$$\lim\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)=1.$$

Pierādījums.

Tā kā

$$\alpha_1=\alpha(1+\mu) \qquad (\mu\to 0)$$

un

$$\beta_1=\beta(1+\omega), \qquad (\omega\to 0)$$

tad

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1+\mu}{1+w}$$

un

$$\lim\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{\lim(1+\mu)}{\lim(1+\omega)}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Augšējā izteiksme teōrēmu pierāda.

Pierādītā teōrēma ir ļoti svarīga, to bieži lieto diferenciālrēķinos.

Apskatītā teōrēmā, kā redzams, varam izteikt:

$$\alpha_1=\alpha+\alpha\mu$$

un

$$\beta_1=\beta+\beta\omega.$$

Lielumi $\alpha\mu$ un $\beta\omega$ ir bezgalīgi mazi, salīdzinot tos attiecīgi ar α un β. Reizinājums $\alpha\mu$ ir augstākas kārtas pret α, un reizinājums $\beta\omega$ ir augstākas kārtas pret β.

Ievērojot teikto, augšējo teōrēmu varam izteikt arī šādi:

Ja meklējam divu bezgalīgi mazu lielumu attiecības robežu, tad dotos bezgalīgi mazos lielumus varam aizstāt ar citiem bezgalīgi maziem lielumiem, bet tikai tādiem, kas no attiecīgiem dotiem atšķiŗas ar augstākas kārtas bezgalīgi maziem lielumiem.

Piemērs.

Dabūt

$$\lim \frac{\sin^2 ax + bx^3}{c^2x^2 + dx^4},$$

ja x bezgalīgi mazs un a, b, c pastāvīgi lielumi. Še bx^3 pret $\sin^2 ax$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs un dx^4 ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs pret c^2x^2. Saskaņā ar augšējo teōrēmu, varam skaitītājā atmest bx^3 un saucējā dx^4. Tad dabūjam

$$\lim \frac{\sin^2 ax + bx^3}{c^2x^2 + dx^4} = \lim \frac{\sin^2 ax}{c^2x^2} = \lim \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}.$$

Ceturtā nodaļa.

Funkcija.

25. Funkcijas definīcija. Ja reāla mainīgā x katrai vērtībai, kas pieder pie mainīgā apjoma, piekārtota noteikta vērtība y, tad y vispārīgi ir mainīgs; to sauc par reālā mainīgā x *funkciju.*

Lai parādītu, ka y ir funkcija x, raksta simbolu:

$$y = f(x).$$

Ja jāapskata vairākas dažādas x funkcijas, tad lieto apzīmējumus:

$$F(x); \quad \varphi(x); \quad \Phi(x).$$

Apzīmējumi F, φ, Φ u. t. t. vispārīgi norāda, ka mainīgajam x, kuŗu sauc par *neatkarīgo mainīgo* vai *argumentu*, piekārtots *atkarīgais mainīgais* y vai funkcija ar likumu, ko varam dot dažādos veidos. Ja kādā pētījumā lietojam apzīmi f, tad katrreiz šis simbols norāda uz to pašu likumu, ar kādu argumentam x piekārtota funkcija y.

Piekārtošanas likumu dod:

1) ar kādu noteikumu vārdos, piemēram, y vērtība arvienu līdzinās divkāršai x vērtībai;

2) ar tabulu, kas dotajām argumenta vērtībām x piekārto funkcijas vērtību y.

Tā, piemēram, šāda tabula

y	1	2	3	4	4.8	5.1	5.4	5.5	5.55	5.60
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0

piekārto argumenta x vērtībām funkcijas y vērtības. Augšējā tabula rāda sakaru starp pagarinājumiem x milimetros un slodzi y tonnās, ko dabūjam, slodzējot uz stiepi dzelzs stieni, kuŗa gaŗums ir 40 cm un šķērsšķēlums 1 cm^2.

3) ar grafisku attēlojumu, kādus, piemēram, dod pašreģistrētāji aparāti;

4) ar kādu rēķinu darbības priekšrakstu analitiski, piemēram:

$$y = f(x) = x^2 - 9x + 14.$$

Ievērojot augšējo, dabūjam:

$$f(0) = 14$$
$$f(a) = a^2 - 9a + 14$$
$$f(b+1) = (b+1)^2 - 9\,(b+1) + 14 = b^2 - 7b + 6$$
$$f(-1) = (-1)^2 - 9\,(-1) + 14 = 24.$$

Ja kādā iecirknī katram mainīgo x un y vērtību pārim atbilst vērtība z, tad z sauc par divu mainīgo x, y funkciju.

To raksta:

$$z = F(x, y),$$

piemēram:

$$z = \frac{x^2}{x+y}.$$

Še tālāk apskatīsim viena mainīgā funkcijas.

Dabzinātnēs un technikā likumu, ar kuŗu neatkarīgam mainīgam x piekārto atkarīgo mainīgo y, daudzkārt dabū mērīšanas ceļā. Šādā gadījumā saka, ka y ir *empīriska* x funkcija.

Piekārtošanas likums ir vispilnīgāki dots, ja tas izteikts analitiski. Grafiski attēlota funkcija gan dod labu funkcijas norises pārredzamību, bet tai trūkst pilnīgas noteiktības, jo noteiktam x atbilstošu y varam no grafiskā attēlojuma dabūt tikai aptuveni.

Ar tabulu dotajai funkcijai trūkst pilnības, jo tabula dod y vērtības tikai tiem x, kas tabulā atrodas.

26. Funkciju veidi. Ievērojot funkciju dažādas īpašības, varam ieskatīt šādus funkciju veidus:

1) *Reāla* mainīgā x funkcijas, ja mainīgam x piešķiŗam tikai reālas vērtības un *kompleksa* mainīgā x funkcijas, ja argumentam x piešķiŗam kompleksas vērtības.

2) Mainīgā x *reālas un kompleksas funkcijas*, ja funkcija var pieņemt reālas, kā arī kompleksas vērtības.

3) *Vienvērtīgas* funkcijas x, ja funkcijas izteiksmē atrodas tikai vienvērtīgas darbības vai arī, ja ar kādu noteikumu nolemts, ka katrai x vērtībai atbilst tikai viena y vērtība.

Piemēri:

a) Funkcija

$$y = 3x^2 - 2x + 1$$

ar reālu x ir *vienvērtīga, reāla* x funkcija ar x intervallā $(-\infty, +\infty)$.

b) Funkcija

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

ir *divvērtīga* x funkcija, jo katram x atbilst divas y vērtības. Ja ņemam tikai $+$ zīmi, tad y ir *vienvērtīga* funkcija; tāpat tas ir arī tad, ja ņemam sakni tikai ar $-$ zīmi.

Izteiksmes

$$y = +\sqrt{1 - x^2} \quad \text{un} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

sauc par funkcijas $\sqrt{1 - x^2}$ *zariem*. Šī funkcija, tāpat arī tās zari, ir reāla tikai ar

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Ārpus šī intervalla y vērtība ir imagināra.

4) *Atklātas* x funkcijas, piemēram:

$$y = 3x^2 - 2x + 5$$

un *apslēptas* x funkcijas, piemēram:

$$ax^2 - bxy + 1 = 0$$

vai simboliski rakstot

$$F(x,y) = 0.$$

Ja katrai x vērtībai intervallā $a \leqslant x \leqslant b$ atbilst noteikta y vērtība, tad ar izteiksmi

$$F(x,y) = 0$$

mainīgais y dotajā intervallā ir definēts kā x funkcija.

Ja nolīdzinājumu $F(x,y) = 0$ vispārīgi varam bez speciālizēšanās atslēgt attiecībā uz y, tad varam dabūt y kā atklātu x funkciju. Augšējā piemērā tas izdarāms, še dabūjam:

$$y = \frac{ax^2 + 1}{bx}.$$

5) Funkciju $f(x)$ sauc par *pastāvīgu* intervallā (a, b), ja ar katrām divām vērtībām x_1 un x_2 šinī intervallā $f(x_1) = f(x_2)$. Tad arī ar katru x vērtību intervallā (a, b) arvienu būs

$$f(x) = k,$$

kur k kāds noteikts skaitlis.

6) Funcija $f(x)$ intervallā (a, b) ir *monotoni augoša,* ja ar $x_1 < x_2$ no šī intervalla, arvienu

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Funkcija $f(x)$ šajā intervallā ir *monotoni dilstoša,* ja ar $x_1 < x_2$ arvienu

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Abos apskatītos gadījumos katrai x vērtībai atbilst tikai viena vērtība

$$y = f(x),$$

un arī katrai y vērtībai atbilst tikai viena vērtība

$$x = \varphi(y).$$

Šādu sakaru starp x un y sauc par *vienvienvērtīgu.*

7) Divas funkcijas, kam ir šāds vienvienvērtīgs sakars, sauc par *inversām* vai *apvērstām* funkcijām.

Ja funkcijas:

$$y = f(x) \text{ un } x = \varphi(y)$$

ir apvērstas funkcijas, tad jābūt:

$$f[\varphi(y)] = y \text{ un } \varphi[f(x)] = x.$$

Tātad, divas funkcijas f un φ ir inversas, ja

$$f[\varphi(t)] = t \text{ un } \varphi[f(t)] = t.$$

Piemērs.

Ar pozitīvu x, ņemot sakni ar pozitīvu zīmi, funkcija

$$y = +\sqrt{x}$$

ir pozitīva, vienvērtīga, monotoni augoša funkcija.

Ar $y > 0$

$$x = y^2$$

ir augšējās funkcijas inversā funkcija, kas arī ir pozitīva, vienvērtīga un monotoni augoša. Viegli ieskatāms, ka še

$$+\sqrt{t^2} = (\sqrt{t})^2 = t.$$

8) Intervallā $(-a, a)$ noteikta funkcija ir *pāŗu* funkcija, ja

$$f(-x) = f(x),$$

un tā ir *nepāŗu* funkcija, ja

$$f(-x) = -f(x).$$

Tā kā

$$(-x)^2 = (+x)^2,$$

tad

$$y = x^2$$

ir pāŗu funkcija.

$$y = x^3$$

ir nepāŗu funkcija, jo

$$(-x)^3 = -(x)^3.$$

9) Ja x ir nepārtraukts mainīgs un ja ar katru x

$$f(x + p) = f(x),$$

tad funkciju $f(x)$ sauc par *periodisku* un p par šīs funkcijas *periodu*. Tādā gadījumā arī

$$f(x + kp) = f(x),$$

kur k var būt katrs pozitīvs vai negātīvs vesels skaitlis.

Tā:

sin x un cos x ir periodiskas funkcijas ar periodu 2π, jo

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \text{ un } \cos(x + 2k\pi) = \cos x.$$

Arī tg x un ctg x ir periodiskas funkcijas, bet ar periodu π, jo

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x \text{ un } \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x.$$

10) Elementāras matēmatikas izteiksmju veidi dod funkcijas, ko sauc par *elementārām* funkcijām. Šīs funkcijas iedala *algebriskās* un *transcendentās* funkcijās.

Algebriskas funkcijas.

27. Algebriskas funkcijas definīcija. Algebrisku funkciju iedalīšana. Ja funkcija izteikta atklātā veidā, tad par algebrisku sauc funkciju, kuŗas izteiksmi dabūjam, lietojot, attiecībā uz neatkarīgo mainīgo x, aprobežotā skaitā algebriskas darbības. Par algebriskām sauc šādas darbības:

Saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, dalīšanu, kāpināšanu un sakņu izvilkšanu.

Ja lietotas darbības, saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, kāpināšana, tad dabūto funkciju sauc par *veselu* algebrisku funkciju. Tās veids ir:

$$y = F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Skaitli n sauc par dotās funkcijas pakāpi. Ja bez minētajām darbībām lietota arī dalīšana un mainīgais x atrodas arī saucējā, tad tādu funkciju sauc par *lauztu* algebrisku funkciju. Tās veids ir:

$$y = F(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}.$$

Funkcija ir *īsti lauzta,* ja $m > n$, un *neīsti lauzta,* ja $m \leqslant n$.

Mainīgā x vērtības, ar kuŗām funkcija $F(x)$ dabū vērtību 0, sauc par funkcijas $F(x)$ 0 *vietām*. Mainīgā x vērtības, ar kuŗām funkcijas $F(x)$ saucējs dabū vērtību 0, sauc par funkcijas $F(x)$ *bezgalības vietām*. Apskatītās veselās un lauztās funkcijas sauc par *racionālām* funkcijām.

Ja ar mainīgo x izdara arī saknes izvilkšanu, tad funkciju sauc par *iracionālu.*

Lai iracionāla funkcija būtu reāla, tad mainīgā intervalls jānoteic, ievērojot funkcijas uzbūvi.

Tā, piemēram, funkcija:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}}$$

ir reāla un noteikta ar $|x| > |a|$.

Plašāka ir algebriskas funkcijas šāda definīcija: y ir x algebriska funkcija, ja piekārtotās x un y vērtības apmierina algebrisku nolīdzinājumu. Šāda nolīdzinājuma kreisā pusē ir summa ar locekļu veidu:

$$a_{\mu\nu}\, x^{\mu} \,.\, y^{\nu}.$$

Še μ un ν ir dabiski skaitļi. Koeficients $a_{\mu\nu}$ ir reāls skaitlis.

Lielākais skaitlis μ noteic nolīdzinājuma pakāpi attiecībā uz x; lielākais skaitlis ν noteic pakāpi attiecībā uz y. Lielākā summa $\mu + \nu$ vispārīgi noteic nolīdzinājuma pakāpi.

Ja šādu nolīdzinājumu sakārto attiecībā uz y pakāpēm, tad koeficienti pie y ir veselas x funkcijas.

Ja $\nu = 1$ un koeficients pie y pastāvīgs skaitlis, tad dabūjam veselu funkciju. Ja koeficients pie y atkarīgs no x, tad dabūjam lauztu funkciju.

Ja $\nu \geqslant 2$, tad vispārīgi dabūjam y kā iracionālu x funkciju.

Transcendentas funkcijas.

28. Transcendentas funkcijas definīcija. Transcendentu funkciju iedalīšana. Visas funkcijas, kas neatbilst algebrisku funkciju definīcijai, sauc par transcendentām funkcijām. No elementārās matēmatikas

jēdzieniem cēlušās transcendentās funkcijas sauc par *elementārām* transcendentām funkcijām.

1) Izteiksme

$$y = x^b$$

ir transcendenta funkcija, ja rādītājs b ir irracionāls skaitlis.

2) Funkcija

$$y = a^x \quad (a > 0;\ a \neq 1)$$

ir transcendenta funkcija, to sauc par *eksponentfunkciju*. Lai katrai x vērtībai atbilstu reāla y vērtība, pamatam a jābūt pozitīvam. Ja rādītājs x ir daļas skaitlis ar saucēju pāŗa skaitli, tad katram tādam x atbilst vairākas reālas y vērtības. Ja vienojamies ņemt y pozitīvu vērtību, tad eksponentfunkcija

$$y = a^x \quad (a > 0;\ a \neq 1)$$

ir vienvērtīga reāla funkcija.

3) Apgriežot augšējo funkciju, dabūjam:

$$x = \log_a y,$$

t. i. y logaritmu. Pamats a še ir pozitīvs, y atrodas intervallā $(0, +\infty)$.

4) Elementāras, transcendentas funkcijas ir arī trigonometriskās funkcijas

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x \text{ un } y = \operatorname{cotg} x,$$

un to inversās funkcijas

$$x = \arcsin y,\ x = \arccos y;\ x = \operatorname{arc\,tg} y \text{ un } x = \operatorname{arc\,ctg} y,$$

ko sauc par *arkus* vai *ciklometriskām* funkcijām.

29. Arkus funkcijas.

Ja

$$x = \sin y,$$

tad

$$y = \arcsin x.$$

Tātad y ir loks (arcus), kā sin ir x. Šī funkcija ir bezgalīgi daudzvērtīga.

Sin y, tātad x, ir vienvērtīga, monotoni augoša funkcija, ar

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Tad x dabū vērtības no -1 līdz $+1$. Ievērojot teikto par inversām funkcijām, secinām, ka

$$y = \arcsin x$$

arī ir vienvērtīga un monotoni augoša funkcija, ja pieņemam, ka x maiņai no -1 līdz $+1$ atbilst y maiņa no

$$-\frac{\pi}{2} \text{ līdz } +\frac{\pi}{2}.$$

y vērtību, kas atrodas šajā intervallā, sauc par arc sin *galveno vērtību.*

Līdzīgi ieskatāms, ka

arc cos x, arc tg x, arc ctg x ir bezgalīgi daudzvērtīgas funkcijas, bet ka šīs funkcijas ir vienvērtīgas, ja ņemam

$y = \operatorname{arc}\cos x$ loku slēgtā intervallā $(0, \pi)$

$y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ loku neslēgtā intervallā

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$y = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x$ loku neslēgtā intervallā $(0, \pi)$.

Šajos intervallos atrodas minēto funkciju *galvenās vērtības*. Bieži lietojam izteiksmes:

$$\operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Pie transcendentām funkcijām pieder arī hiperbolas un area funkcijas, kas tiks vēlāk apskatītas.

30. Funkcijas ģeometriska attēlošana. Funkcijas

$$y = f(x)$$

ģeometrisku attēlojumu dabūjam, ja taisnleņķa koordinātu sistēmā, mainīgā x katru pielaižamo vērtību uzskatām par kāda punkta P abscīzu un piekārtoto funkcijas vērtību y par šī punkta ordinātu.

Tādā kārtā dabūjam punktu kopību, ko uzskatām par funkcijas ģeometrisko attēlu. Daudzos gadījumos šis attēls ir nepārtraukta līka līnija—līkne. Izteiksmi

$$y = f(x)$$

sauc par šīs *līknes nolīdzinājumu*.

Sekojošā 2. zīmējumā attēlota funkcija

$$y = x^2.$$

Funkciju

$$z = F(x, y)$$

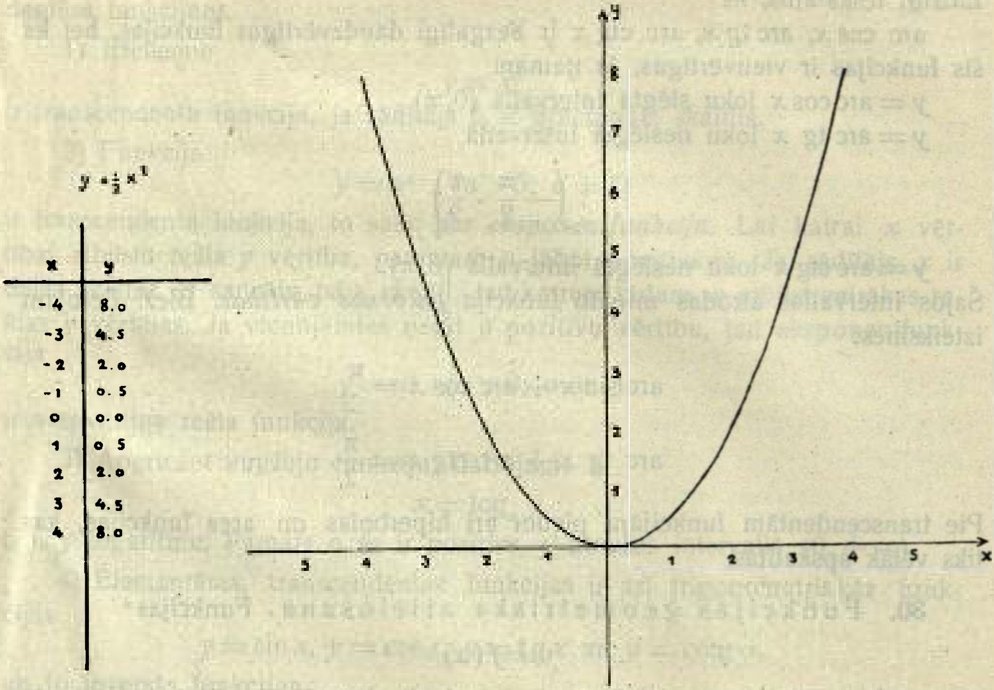
ar diviem neatkarīgiem mainīgiem varam attēlot taisnleņķa koordinātu sistēmā telpā. Vērtību pāŗiem (x_1, y_1), (x_2, y_2) u. t. t. mainīgo (x, y) maiņas iecirknī atbilst z vērtība

$$z_1 = F(x_1, y_1);\ z_2 = F(x_2, y_2) \text{ u. t. t.}$$

Vērtību kopībai (x_1, y_1, z_1) koordinātu sistēmā atbilst kāds punkts P_1. Vērtību kopībai (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) u. t. t. atbilst punktu kopība P_1, P_2 u. t. t., kas daudzos gadījumos veido virsmu, ko uzskatām par funkcijas

$$z = F(x, y)$$

ģeometrisko attēlu.



2. zīm.

31. D a ž a s f u n k c i j a s d a b z i n ā t n ē s u n t e c h n i k ā. Sekojošā sakopojumā parādīti piemēri, kuŗos redzam dažas funkcijas dabzinātnēs un technikā.

I. Pakāpes funkcija $y = ax^n$.

$$a)\ y = ax.$$

1) Materiālā punkta vienmērīgā kustība:

$$s = c\,.\,t.$$

s ceļš, c ātrums, t laiks.

2) Brīvā krišanā

$$v = gt.$$

v ātrums, t laiks, g paātrinājums.

3) Hūka (Hooke) likums:

$$\lambda = \frac{l}{EF}\,.\,P.$$

λ stieņa pagarinājums, P slodze, l stieņa gaŗums, F stieņa šķērsgriezums. E elastības moduls.

4) Oma likums $J = \frac{E}{R}$.

J strāvas stiprums, E spraigums, R pretestība, pastāvīga.

5) Gē-Lisaka likums: $V = \frac{V_0 \,.\, T}{T_0}$.

V ideālās gāzes tilpums, T absolūtā temperātūra.

b) $y = \frac{a}{x}$.

1) Mariota likums: $V = \frac{p_0 V_0}{p}$.

Ideālās gāzes tilpums V pretēji proporcionāls spiedienam p.

2) Leņķa ātrums $\omega = \frac{2\pi}{T}$ vienmērīgā rotācijā pretēji proporcionāls apgriešanās laikam T.

3) Komūnicējošās caurulēs ar šķidrumiem, kuŗu īpatnējais svars ir s un s_0, augstums

$$h = \frac{h_0 s_0}{s}$$

pretēji proporcionāls īpatnējam svaram s.

c) $y = ax^2$.

1) Brīvā krišanā:

$$s = \frac{g}{2} \,.\, t^2.$$

s ceļš, g paātrinājums, t laiks.

2) Centrifugālais spēks

$$Z = mr \,.\, \omega^2.$$

m masa, r punkta attālums no rotācijas ass, ω leņķa ātrums.

3) Gaisa pretestība:

$$R = \lambda s F \,.\, v^2.$$

F laukums m^2, s gaisa īpatnējais svars kg/m^3, v ātrums.

4) Kinētiska enerģija

$$E_k = \frac{m}{2} \,.\, v^2.$$

m masa, v ātrums.

d) $y = \frac{a}{x^2}$.

1) Masu m_1 un m_2 savstarpīgs pievilkšanas spēks

$$k = f\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

f koeficients, r masu attālums.

e) $y = ax^{\frac{1}{2}}$.

1) Svārstuļa svārstības laiks

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \,.\, l^{\frac{1}{2}}.$$

l svārstuļa gaŗums.

2) Šķidruma iztecēšanas ātrums

$$v = \varphi\sqrt{2g}\,.\,h^{\frac{1}{2}}.$$

h augstums, φ koeficients.

3) ātrums brīvā krišanā

$$v = \sqrt{2g}\,.\,h^{\frac{1}{2}}.$$

$f)\ y = ax^3.$

Dzelzceļa pārejas līkne no taisnes uz riņķi

$$y = \frac{x^3}{6lR}.$$

x un y pārejas līknes abscīza un ordināta, l pārejas līknes garums, R riņķa radiuss.

II. Eksponentfunkcija.

$$y = c\,.\,a^x.$$

1) virves stiepes spēku sakars, aptverot cilindru:

$$T = T_0 e^{k\varphi}.$$

T stiepes spēks, k berzes koeficients, φ aptveres leņķis.

2) Gausa kļūdas līkne

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,.\,e^{-h^2x^2}.$$

3) brīvā krišanā ar gaisa pretestību, ātrums

$$v = \frac{mg}{a}\,(1 - e^{-\frac{a}{m}t}),$$

ja gaisa pretestība proporcionāla ātrumam v.
m masa, g gravitācijas paātrinājums, a koeficients, t laiks.

III. Logaritmiska funkcija.

$$y = c\,.\,l_n x.$$

1) barometriskā augstuma formula

$$h = l\left(1 + \frac{t}{273}\right)(l_n b_0 - l_n b).$$

h = augstums virs jūŗas līmeņa, $l = 8000^m$. t temperātūra C^0, l_n dabiskais logaritms, b barometra stāvoklis.

IV. Trigonometriskas funkcijas.

No trigonometriskām funkcijām sevišķi ievērojamas ir sin un cos funkcijas, kam liela nozīme mechaniskās, elektriskās, optiskās svārstības kustībās. Tā, piemēram,

$$1)\quad x = A\cos kt + B\sin kt$$

izteic neslāpētu mechanisku svārstību. x ceļš, t laiks.

$$2) \quad x = e^{-\alpha x}(A \cos \beta t + B \sin \beta t)$$

izteic slāpētu mechanisku svārstību.

V. Ciklometriskas funkcijas.

$$T = \frac{1}{k\sqrt{g}} \operatorname{arc\,tg} \frac{kv_0}{\sqrt{g}}.$$

Še T ir laiks, kas paiet, kamēr ar sākuma ātrumu v_0 vertikāli uz augšu sviests materiāls punkts dabū ātrumu 0. k raksturo gaisa pretestību.

VI. Hiperboliskās un to apgrieztās area funkcijas, bieži sastopamās dabaszinātnēs un technikā.

$$1) \quad y = a \operatorname{Cos} \frac{x}{a}$$

ir ķēdes līnijas nolīdzinājums.

$$2) \quad v = \frac{\sqrt{g}}{k} \operatorname{Tg} (k\sqrt{g}\, t)$$

dod sakaru starp ātrumu v un laiku t brīvā krišanā ar gaisa pretestību.

$$3) \quad t = \frac{1}{k\sqrt{g}} \operatorname{Ar\,Cos} e^{k^2 s}$$

dod sakaru starp laiku t un ceļu s brīvā krišanā ar gaisa pretestību.

Lai pamatīgi iepazītos ar apskatītām funkcijām I—VI, nepieciešami šos, kā arī citus še neapskatītus, bet bieži sastopamus veidus, attēlot grafikās.

Vispārīgas izteiksmes par funkcijām.

32. Funkcijas robežvērtība. Ja funkcija noteikta intervallā (α, β), tad šajā intervallā katrai vietai $x = a$ atbilst noteikta funkcijas vērtība $f(a)$, ko sauc par *funkcijas definīcijas vērtību.* Šo vērtību dabūjam, ievietojot funkcijā $f(x)$, x vietā a un izdarot priekšā rakstītas rēķinu darbības.

Ja substitūcija $x = a$ funkcijā $f(x)$ dod nenoteiktu vērtību $\frac{0}{0}$, tad funkcija $f(x)$ vietā a nav noteikta.

Lai izpētītu funkciju, bieži argumentam x nevajaga dot pastāvīgu vērtību a, bet likt x tiekties uz robežvērtību a. To raksta: $x \to a$.

Ja $x \to a$ un pie tam funkcijas $f(x)$ vērtība tiecas uz skaitli G, tad G sauc par funkcijas $f(x)$ *robežvērtību* un raksta:

$$\lim_{x \to a} f(x) = G.$$

Augšējās izteiksmes saturu izteic arī šādi:

$$\text{ja } |x - a| \to 0, \text{ tad arī } |f(x) - G| \to 0,$$

vai arī pilnīgākā veidā:

Ja katram pēc patikas mazam pozitīvam skaitlim ε var piekārtot skaitli $\delta > 0$ tā, ka:

$$|f(x) - G| < \varepsilon$$

ar visiem

$$|x - a| < \delta,$$

tad funkcijas $f(x)$ robeža ir G. Še δ ir atkarīgs no ε, un ja $\varepsilon \to 0$, tad arī $\delta \to 0$.

Ja $x > a$ un $x \to a$, tad raksta:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = G_1$$

un sauc skaitli G_1 par funkcijas $f(x)$ *robežvērtību no labās puses.*

Ja $x < a$ un $x \to a$, tad raksta:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = G_2$$

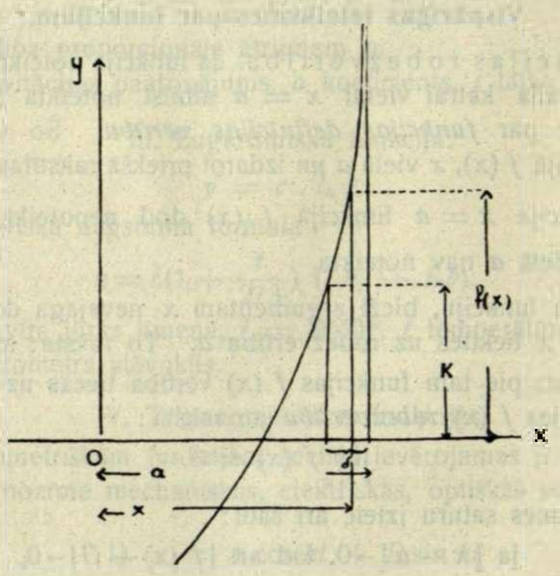
un sauc G_2 par funkcijas $f(x)$ *robežvērtību no kreisās puses.*

Ir gadījumi, kad G_1 nenolīdzinās G_2, tad, ja runājam par funkcijas $f(x)$ robežvērtību ar $x \to a$, jāatzīmē, vai tā ir pa kreisi vai pa labi no $x = a$.

Ja $G_1 = G_2$, tad, runājot par funkcijas $f(x)$ robežvērtību ar $x = a$, nav jāatzīmē, vai tā ir pa kreisi vai pa labi no $x = a$.

Gadījumā, ja $x \to a$ un funkcijas $f(x)$ vērtība top pēc patikas liela vai arī algebriski pēc patikas maza, raksta:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \text{ vai } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$



3. zīm.

Augšējo izteic arī šādi:

Ja, pieņemot pēc patikas lielu pozitīvu skaitli K, varam tam piekārtot pietiekami mazu skaitli $\delta > 0$ tā, ka:

$$f(x) > K \text{ (vai } f(x) < -K)$$

ar visiem

$$|x - a| < \delta,$$

tad funkcijas $f(x)$ robeža ar $x \to a$ ir $+\infty$, (vai $-\infty$). 3. zīmējumā $f(a) = \infty$. Redzams, ka δ ir noteikts ar pieņemtu K. Tāpat arī redzams, ka ar visiem

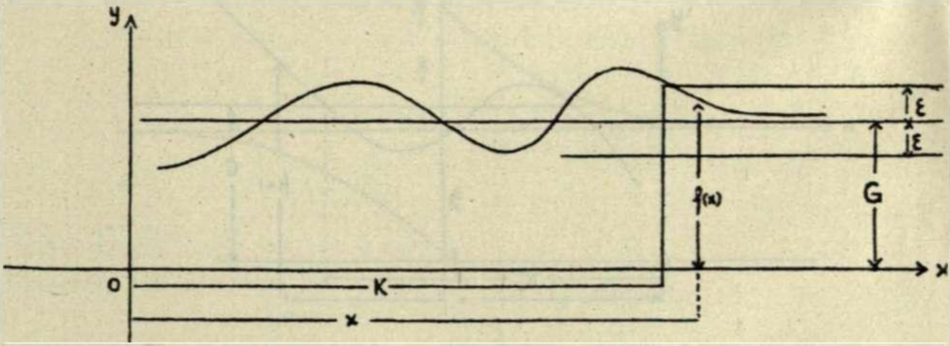
$$|x - a| < \delta$$

arvienu

$$f(x) > K.$$

Ja $x \to \infty$ un funkcijas $f(x)$ vērtības tiecas uz skaitli G, tad raksta:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = G,$$



4. zīm.

Augšējo varam izteikt arī šādi:

Ja pēc patikas mazam pozitīvam skaitlim ε varam piekārtot pietiekami lielu pozitīvu skaitli K (atkarīgu no ε) tā, ka:

$$|f(x) - G| < \varepsilon$$

ar visiem

$$x > K,$$

tad G ir funkcijas $f(x)$ robeža ar $x \to \infty$.

4. zīmējumā attēlota funkcija, kuŗas robeža ar $x \to \infty$ ir G. Redzams, ka ar visiem $x > K$ starpība

$$|f(x) - G| < \varepsilon.$$

Līdzīgi dabū, ka izteiksme

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = G$$

ir līdzvērtīga nevienādībām

$$|f(x) - G| < \varepsilon \text{ ar visiem } x < -K,$$

Ja $x \to \infty$ un arī funkcija $f(x) \to \infty$, tad raksta:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

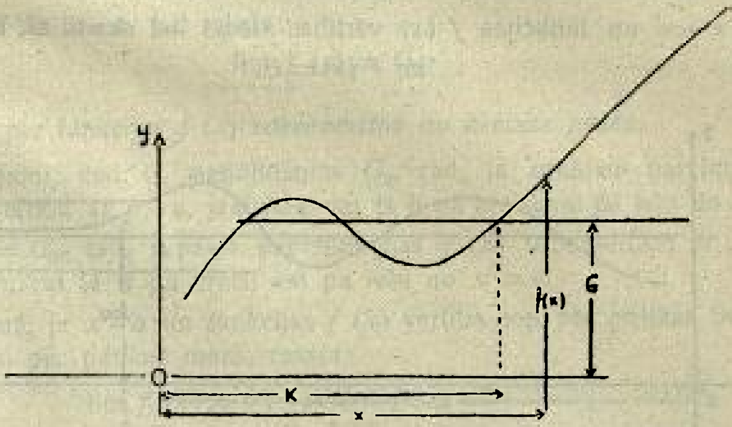
ko izteic arī šādi:

Ja, pieņemot pēc patikas lielu pozitīvu skaitli G, tam varam piekārtot pietiekami lielu pozitīvu skaitli K (atkarīgu no G) tā, ka

$$f(x) > G \text{ ar visiem } x > K,$$

tad funkcijas $f(x)$ robeža ir ∞ ar $x \to \infty$,

Ģeometriski tas ieskatāms no sekojošā 5. zīmējuma



5. zīm.

Piemēri:

a)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

jo, pieņemot pēc patikas mazu pozitīvu skaitli ε, tam varam piekārtot skaitli

$$K = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Tad ir

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \text{ ar visiem } x > K.$$

Tas pierāda, ka

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

b)

$$\lim_{x \to a+0} \frac{1}{x-a} = +\infty.$$

Ar $x > a$ liekam $x - a = \delta$. Ja $x \to a+0$, tad $\delta \to +0$ un

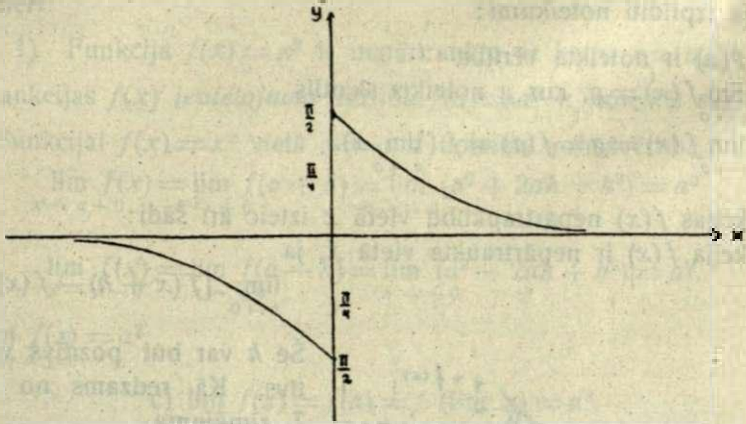
$$\lim_{x \to a+0} \frac{1}{x-a} = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\delta} = +\infty.$$

Ar $x < a$, $x - a = -\delta$. Tad

$$\lim_{x \to a-0} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{-\delta} = -\infty.$$

c)

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$



6. zīm.

Ar $x > 0$ un ar $x \to +0$ izteiksme

$$\frac{1}{x}$$

aug monotoni un neaprobežoti un ir pozitīva. Ar $x \to +0$ dabūjam

$$\lim \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{un} \quad \operatorname{arc\,tg} +\infty \ \text{ir} \ \frac{\pi}{2}.$$

Līdzīgi dabūjam, ka

$$\lim_{x \to -0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Līknes

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$$

attēlojumu redzam 6. zīmējumā

Ievērojot un lietojot agrāk pierādītās izteiksmes par robežvērtībām, dabūjam:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \,.\, \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} [c\, f(x)] = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}$ (Jābūt: $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \neq 0$).

33. Funkcijas nepārtrauktība. Funkcija $f(x)$ ar $x = a$ ir nepārtraukta, ja izpildīti noteikumi:

1) $f(a)$ ir noteikta vērtība
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g$, kur g noteikts skaitlis
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g = f(a) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$.

Funkcijas $f(x)$ nepārtrauktību vietā x izteic arī šādi:
Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta vietā x, ja

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)] = 0.$$

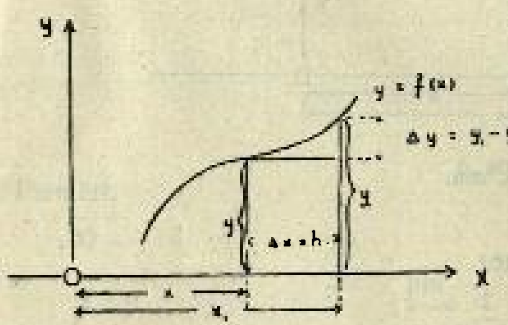
Še h var būt pozitīvs vai negātīvs. Kā redzams no sekojošā 7. zīmējuma

$$f(x+h) - f(x) = \Delta y \text{ un } \Delta x = h.$$

Ar šīm apzīmēm augšējo izteiksmi varam aizstāt ar izteiksmi:

Funkcija $f(x)$ vietā x ir nepārtraukta, ja ar

$$\Delta x \to 0 \quad \text{arī} \quad \Delta y \to 0.$$



7. zīm.

Tātad:

funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta vietā x, ja funkcijas pieaugums Δy top bezgalīgi mazs tad, kad argumenta x pieaugums Δx top bezgalīgi mazs.

Lielumus x un y fizikā dabū mērīšanas ceļā.

Izteiksmes

$$\Delta y \to 0, \text{ kad } \Delta x \to 0,$$

še jāaizstāj ar aptuvenām izteiksmēm

$$\Delta y \sim 0, \text{ ja } \Delta x \sim 0.$$

Nepārtrauktības noteikums še apzīmē aptuveni to, ka mazam argumenta x pieaugumam Δx atbilst mazs funkcijas y pieaugums Δy.

No augšējā ieskatāms, ka, ja funkcija $f(x)$ vieta $x=a$ ir nepārtraukta, tad, ievērojot funkcijas $f(x)$ robežvērtības definīciju, dabūjam:

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

ar visiem

$$|x-a|<\delta.$$

Ja funkcija $f(x)$ vietā $x=a$ neizpilda kaut arī tikai vienu no trijiem norādītajiem nepārtrauktības noteikumiem, tad to sauc par *pārtrauktu* šajā vietā.

Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervallā (α, β), ja tā ir nepārtraukta šī intervalla katrā vietā.

Piemēri:

1) Funkcija $f(x)=x^2$ ir nepārtraukta ar katru $x=a$, jo

a) funkcijas $f(x)$ *ievietojuma* vērtība $f(a)=a^2$ ir noteikts skaitlis.

b) Funkcijai $f(x)=x^2$ vietā $x=a$ ir noteikta robežvērtība

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{h\to +0} f(a+h)=\lim_{h\to +0}(a^2+2ah+h^2)=a^2$$

un

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{h\to +0} f(a-h)=\lim_{h\to +0}(a^2-2ah+h^2)=a^2.$$

Tātad $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=a^2$.

c) $$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)=f\,(\lim_{x\to a} x)=a^2.$$

Kā redzams, nepārtrauktības noteikumi ir izpildīti ar katru $x=a$, tātad $f(x)=x^2$ ir nepārtraukta funkcija ar katru x vērtību.

2) Funkcija

$$y=\frac{\sin x}{x}$$

ir pārtraukta vietā $x=0$, jo funkcijas *ievietojuma* vērtība šajā vietā, t. i. $f(0)$ ir nenoteikta vērtība $\frac{0}{0}$.

Vietā $x=0$ funkcija $\frac{\sin x}{x}$ neizpilda nepārtrauktības pirmo noteikumu.

3) Funkcija

$$y=\frac{1}{x} \quad \text{(8. zīm.).}$$

ir pārtraukta vietā $x=0$, jo šajā vietā $f(0)$ ir ∞, tātad nenoteikts skaitlis. Še dabūjam:

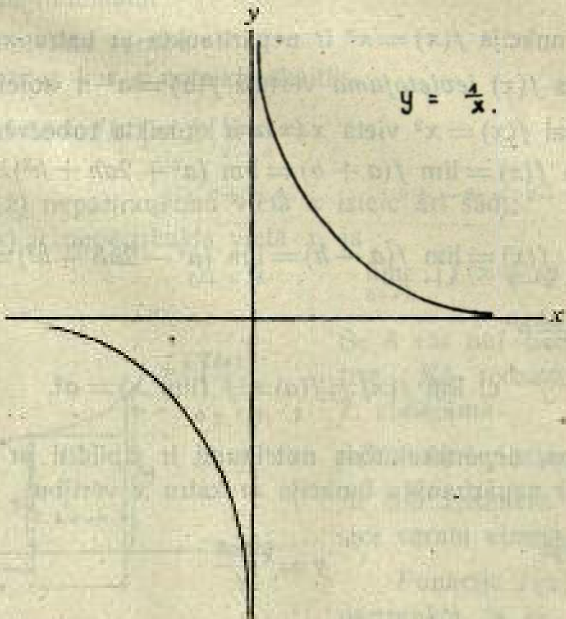
$$\lim_{x\to +0} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to -0} f(x)=-\infty.$$

Kā redzams, funkcijas robežvērtības pa kreisi un pa labi no $x=0$ nav vienlīdzīgas.

Gadījumā, ja vietā $x=a$ funkcijas ievietošanas vērtība $f(a)$ ir nenoteikta vērtība $\frac{0}{0}$, bet ja šajā vietā funkcijas robežvērtība ir noteikta, t. i. ja

$$\lim_{x \to a \pm 0} f(x) = g,$$

tad, pieņemot, ka vietā $x=a$ arī $f(a)$ ir g, varam uzskatīt $f(x)$ vietā $x=a$ par nepārtrauktu. Šādā gadījumā saka, ka funkcijas pārtrauktība vietā $x=a$ ir *novērsta.*



8. zīm.

Piemērs:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Ar $x=0$ dabūjam:

$$f(0) = \frac{0}{0}.$$

Tā kā

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

tad, pieņemot, ka arī $f(0)=1$, šo funkciju varam uzskatīt vietā $x=0$ par nepārtrauktu.

Funkcijas $f(x)$ pārtrauktība parādās dažādos veidos, tā, piemēram:

1) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ un tāpat $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ vērtības ir galīgas, bet nav vienlīdzīgas. Šādā gadījumā funkcijas pārtrauktība šajā vietā parādās kā galīgs lēciens, kā to redzējam funkcijas $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ gadījumā.

2) Funkcijai $f(x)$ vietā $x = a$ nav vienas no robežvērtībām, t. i. nav $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, vai $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, vai arī tai nav abas šīs robežvērtības.

Funkcijai
$$y = \sin \frac{1}{x}$$
nav robežvērtības $\lim\limits_{x \to \pm 0} \frac{1}{x}$.

3) Viena vai abas funkcijas $f(x)$ robežvērtības vietā $x = a$ ir ∞. Šādā gadījumā vietu $x = a$ sauc par funkcijas bezgalības vietu. Šāda funkcija parādīta 8. zīmējumā.

34. Izteiksmes par nepārtrauktām funkcijām.

1) Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervallā $a \leqslant x \leqslant b$, tad tā šajā intervallā ir galīga un pieņem tajā vismaz vienreiz savu mazāko vērtību m un lielāko vērtību M.

Tā kā saskaņā ar pieņēmumu $f(x)$ intervallā $a \leqslant x \leqslant b$ ir nepārtraukta, tad šajā intervallā funkcijas $f(x)$ visas ievietošanas vērtības ir noteiktas, un tāpēc neviena no tām nevar būt ∞. Tātad funkcija $f(x)$, ar augšējiem noteikumiem, ir galīga dotajā intervallā.

Ja (A, C), (C, D), . . . (K, B) ir intervalli, kuŗus funkcija $f(x)$ vienu pēc otra nepārtraukti notek, tad mazākais no skaitļiem $A, B, C, D, \ldots K, B$ ir $f(x)$ mazākā vērtība m un lielākais, $f(x)$ lielākā vērtība M.

Ja funkcija $f(x)$ nenoslēgtā intervallā $a < x < b$ ir nepārtraukta, tad tai šajā intervallā nav jābūt galīgai, bet ja

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \text{ un } \lim_{x \to b-0} f(x)$$

ir galīgi, tad arī funkcija $f(x)$ dotajā intervallā ir galīga.

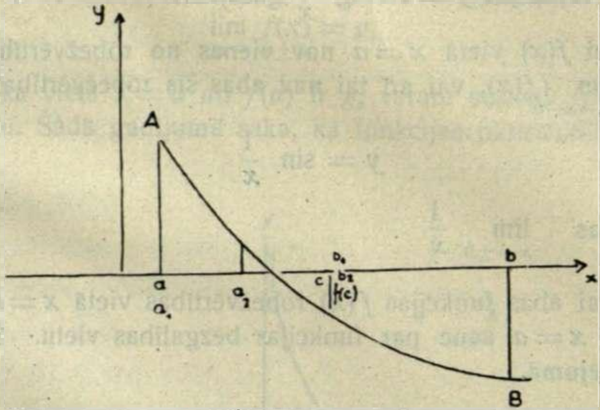
Starpību $M - m$ sauc par funkcijas $f(x)$ *svārstību* intervallā (a, b).

Šādi piemēri paskaidro augšējo.

$f(x) = 3x - 5$ ir nepārtraukta galīga funkcija intervallā $1 \leqslant x \leqslant 2$ ar $m = -2$ un $M = 1$ un svārstību $M - m = 3$. Tā pati funkcija nenoslēgtajā intervallā $1 < x < 2$ ir nepārtraukta galīga funkcija ar apakšrobežu $g = -2$, virsrobežu $G = 1$ un svārstību $G - g = 3$.

2) Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervallā (a, b) ar $b > a$, un ja $f(a)$ un $f(b)$ ir ar pretējām zīmēm, tad funkcija $f(x)$ dabū vērtību 0 vismaz vienā vietā dotajā intervallā.

Pārredzamības dēļ pieņemam, ka funkcijas $f(x)$ attēls ir līkne AB — 9. zīmējumā.



9. zīm.

Dalām gabalu $b - a$ uz pusēm un pieņemam, ka vidus punktā c dabūjam negātīvu ordinātu $f(c)$. Tad intervalla (a, c) gala punktos funkcijas vērtības $f(a)$ un $f(c)$ ir ar pretējām zīmēm. Apzīmējam intervalla sākuma punkta abscīzu ar a_1 un gala punkta abscīzu ar b_1. Kā redzams:

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}.$$

Intervallu $b_1 - a_1$ dalām uz pusēm un tālākai apskatei ņemam to intervallu, kuŗa gala punktos funkcijai $f(x)$ ir pretējas zīmes. Intervalla sākuma punktu apzīmējam ar a_2 un gala punktu ar b_2.

Tad

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}.$$

Tādā kārtā turpinot, dabūjam intervallus:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots (a_n, b_n), \text{ ar}$$

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

Ja starp skaitļiem a_1, b_1, a_2, b_2, . . . a_n, b_n atrodas tāds b_k vai a_k, ar kuŗu $f(a_k) = 0$ vai $f(b_k) = 0$, tad teōrēma pierādīta, bet ja šāda skaitļa nav, tad ievērojam:

α) skaitļu sekojums

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$$

ir augošs, un šī sekojuma locekļi visi ir mazāki par b, tādēļ šim sekojumam ir robeža $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \nu_1$.

β) skaitļu sekojums

$$b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$$

ir dilstošs, un visi šī sekojuma locekļi ir lielāki par a, tādēļ šim sekojumam ir robeža $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \nu_2$.

γ) $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0.$

Tātad

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} a_n,$$

vai

$$\nu_2 = \nu_1 = \nu.$$

Funkcijas $f(x)$ nepārtrauktības dēļ, ievērojot augšējo, jābūt:

$$f(\nu_2) = f(\nu_1),$$

bet tā kā $f(\nu_2)$ un $f(\nu_1)$ ir, kā redzējām, ar pretējām zīmēm, tad tas iespējams tikai, ja

$$f(\nu) = 0.$$

Ar to tad teōrēma ir pierādīta.

3) Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervallā $a \leqslant x \leqslant b$ ar $f(a) = A$, $f(b) = B$ un $A \neq B$, tad, ja μ ir skaitlis starp A un B, funkcija $f(x)$ dabū dotajā intervallā vismaz vienu reizi vērtību μ.

Pieņemam, ka $A > B$.

Tad

$$f(x) - \mu$$

ir tāda funkcija, kas ar $x = a$, t. i.

$$f(a) - \mu = A - \mu$$

ir pozitīva un ar $x = b$, t. i.

$$f(b) - \mu = B - \mu$$

ir negātīva. Saskaņā ar (2) jābūt:

$$f(\xi) - \mu = 0,$$

kur ξ atrodas intervallā (a, b). No augšējā secinām:

$$f(\xi) = \mu.$$

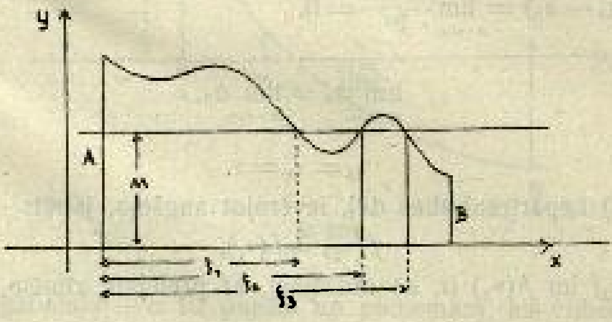
No augšējās izteiksmes dabūjam vienu vai vairākas vērtības ξ, ar kuŗām $f(x)$ vērtība ir μ. Ģeometriski augšējā izteiksme viegli ieskatāma no 10. zīmējuma.

Redzams, ka ar vērtībām ξ_1, ξ_2, ξ_3, funkcija $f(x)$ dabū vērtību μ. Ievērojot teorēmas par funkciju robežvērtībām, dabūjam:

Ja funkcijas $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir nepārtrauktas kādā intervallā, tad šajā intervallā nepārtrauktas ir arī funkcijas:

$$f(x) \pm \varphi(x),$$
$$f(x) \cdot \varphi(x),$$
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Dalījums $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tikai tad ir nepārtraukts dotajā intervallā, ja tajā $\varphi(x) \neq 0$.



10. zīm.

35. Apgrieztas funkcijas nepārtrauktība. Ja $y = f(x)$ ir kādā intervallā (a, b) vienvērtīga, nepārtraukta, monotona x funkcija, tad šīs funkcijas apgrieztā funkcija

$$x = \varphi(y)$$

arī ir vienvērtīga, nepārtraukta, monotona funkcija tajā intervallā, kurā atrodas y, kad x mainās intervallā (a, b).

Pieņemam, ka ar $x = a$ funkcija $f(a) = \alpha$ un ar $x = b$ funkcija $f(b) = \beta$.

Tā kā $y = f(x)$ ir vienvērtīga funkcija, tad katram x starp a un b atbilst tikai viens y starp α un β.

Pieņemtajam intervallā (α, β) y_0 atbilst intervallā (a, b) tikai viens x_0.

Intervallam $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ atbilst intervalls $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, tātad pēc patikas mazam pozitīvam skaitlim ε piekārtots pozitīvs skaitlis δ tādā kārtā, ka

$$|x - x_0| < \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

ar visiem

$$|y - y_0| < \delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Izteiksmē (1) varam ievietot $x = \varphi(y)$ un $x_0 = \varphi(y_0)$.

Tad

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$$

ar visiem

$$|y-y_0|<\delta.$$

Kā zināms, šīs izteiksmes rāda, ka funkcija $\varphi(y)$ ir nepārtraukta funkcija no y, un tā kā $\varphi(y)=x$, tad arī x ir nepārtraukta funkcija no y.

36. Funkcijas no funkcijas nepārtrauktība.

Pieņemam, ka

$$u=\varphi(x)$$

kādā intervallā ir nepārtraukta x funkcija, un ka x_0 ir kāda vieta dotajā intervallā. Tad

$$u_0=\varphi(x_0).$$

Pieņemam, ka funkcija

$$y=f(u)$$

vietā u_0 ir nepārtraukta. Tad funkcija

$$y=f[\varphi(x)]$$

ir nepārtraukta x funkcija vietā x_0.

Pierādījums.

Tā kā

$$y=f(u)$$

ir nepārtraukta funkcija vietā u_0, tad, kā zināms, pastāv izteiksmes

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$$

ar visiem

$$|u-u_0|<\delta.$$

Bet $u-u_0=\varphi(x)-\varphi(x_0)$, un tā kā funkcija $\varphi(x)$ ir nepārtraukta funkcija vietā x_0, tad

$$|u-u_0|=|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\delta$$

ar visiem

$$|x-x_0|<h.$$

Tātad pēc patikas mazam pozitīvam skaitlim ε piekārtots pozitīvs skaitlis h tādā kārtā, ka

$$|f(u)-f(u_0)|=|f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)]|<\varepsilon$$

ar visiem

$$|x-x_0|<h.$$

Šīs izteiksmes rāda, ka funkcijas funkcija

$$y=f[\varphi(x)]$$

ir nepārtraukta vietā x_0.

Ja funkcijas $f(u)$ un $\varphi(x)$, ar visiem zināmā gadījumā pielaižamiem argumentiem, ir nepārtrauktas, tad varam teikt, ka katra nepārtraukta funkcija no nepārtrauktas funkcijas arī ir nepārtraukta funkcija.

Piemērs:

$$y = e^{\sin x}.$$

Šo izteiksmi, liekot $\sin x = z$, rakstām:

$$y = e^z.$$

Kā to vēlāk redzēsim e^z ir nepārtraukta funkcija ar visām z vērtībām un $\sin x$ arī ir nepārtraukta funkcija ar visām x vērtībām.

Ievērojot augšējo, secinām, ka

$$y = e^{\sin x}$$

ir nepārtraukta funkcija ar visām x vērtībām.

37. Secinājumi no teōrēmām par funkcijas nepārtrauktību.

1) Ja pieņemam, ka x ir nepārtraukts neaprobežots mainīgais, tad nepārtraukto funkciju reizinājums

$$\overset{1}{x} \cdot \overset{2}{x} \cdot \overset{3}{x} \cdot \ldots \cdot \overset{n}{x} = x^n$$

ir nepārtraukta x funkcija. Tātad:

Katra x pakāpe ar veselu pozitīvu rādītāju n ir nepārtraukta x funkcija. Paplašinot varam izteikt: katra vesela racionāla algebriska x funkcija ir nepārtraukta ar visām x vērtībām. Tālāk arī varam secināt:

Katra mainīgā x racionāla algebriska sastādīta funkcija, kas veidota, pielietojot arī dalīšanu, ir nepārtraukta katrā intervallā, kuŗā dalītājs nav 0.

2) Eksponentfunkcija a^x ir nepārtraukta ar visām nepārtrauktā, neaprobežotā mainīgā x vērtībām, ja $a > 0$ un $a \neq 1$.

Kā pierādīts [21] (4)

$$\lim a^x = a^{\lim x}.$$

Augšējā izteiksme pierāda teōrēmu.

3) Trigonometriskās funkcijas $\sin x$ un $\cos x$ ir nepārtrauktā mainīgā x nepārtrauktas funkcijas.

Kā pierādīts [21], (5)

$$\lim \sin x = \sin \lim x$$

un

$$\lim \cos x = \cos \lim x.$$

Augšējās izteiksmes pierāda teōrēmu.

4) Trigonometriskā funkcija $\operatorname{tg} x$ ir nepārtraukta x funkcija katrā intervallā, kuŗā neatrodas ar nepāŗa skaitli reizināts $\frac{\pi}{2}$. Funkcija $\operatorname{ctg} x$ ir ne-

pārtraukta x funkcija katrā intervallā, kuŗā neatrodas ar pāŗa skaitli reizināts $\frac{\pi}{2}$.

Šo teōrēmu pierāda izteiksme par divu nepārtrauktu funkciju dalījuma nepārtrauktību.

5) Ja n vesels pozitīvs skaitlis un x arvienu pozitīvs, nepārtraukts mainīgais, tad

$$y = \sqrt[n]{x}$$

ir mainīgā x nepārtraukta funkcija.

Pierādījums.

Tā kā

$$x = y^n$$

ar veselu pozitīvu n ir nepārtraukta pozitīva mainīgā y, pozitīva, vienvērtīga monotoni augoša, nepārtraukta funkcija, tad šis funkcijas apgrieztā funkcija

$$y = \sqrt[n]{x}$$

arī ir pozitīvā, nepārtrauktā, mainīgā x nepārtraukta funkcija.

Tālāk secinām:

Katra atklāta, mainīgā x irracionāla algebriska funkcija ir nepārtraukta tajā intervallā, kuŗā arguments x var mainīties bez ierobežojumiem.

6) Logaritms

$$y = \log_a x \qquad (a > 0 \text{ un } a \neq 1)$$

ir pastāvīgi pozitīvā argumenta x nepārtraukta funkcija.

Pierādījums.

Tā kā

$$x = a^y \qquad (a > 0;\ a \neq 1)$$

ir nepārtrauktā, neierobežotā mainīgā y vienvērtīga nepārtraukta, monotoni augoša, arvienu pozitīva funkcija, tad šīs funkcijas apgrieztā funkcija

$$y = \log_a x$$

arī ir nepārtraukta, pozitīvā argumentā x funkcija intervallā

$$0 < x < \infty.$$

7) Funkcija

$$y = x^n$$

ir ar katru, pozitīvu vai negātīvu, racionālu vai irracionālu n intervallā $(0, \infty)$ nepārtraukta x funkcija. Ja n ir pozitīvs, tad nepārtrauktība ir arī vietā 0.

Pierādījums.

Tā kā

$$x = a^{\log_a x} \qquad (a > 0 \text{ un } a \neq 1),$$

tad ar katru pastāvīga n vērtību dabūjam:

$$x^n = a^{n \log_a x}.$$

Tā kā $z = n \log_a x$ ir nepārtraukta x funkcija, un a^z ir nepārtraukta z funkcija, tad ievērojot, ka katra nepārtrauktas funkcijas funkcija (ar vienu mainīgo) ir nepārtraukta funkcija, redzam, ka

$$y = x^n$$

ir nepārtraukta x funkcija ar katru n vērtību.

8) Ja funkcijas $u(x)$ un $v(x)$ ir kādā intervallā nepārtrauktas un $u(x)$ nekad nav negatīva, tad izteiksme

$$[u(x)]^{v(x)}$$

dotajā intervallā ir nepārtraukta x funkcija.

Pierādījums:

$$u(x) = a^{\log_a [u(x)]} \qquad (a > 0 \text{ un } a \neq 1)$$

un

$$[u(x)]^{v(x)} = a^{v(x) \log_a [u(x)]}.$$

Augšējā teorēma ir secinājums no šīs izteiksmes.

9) Funkciju arc sin x un arc cos x galvenās vērtības ir nepārtrauktas x funkcijas ar

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Pierādījums: tā kā

$$x = \sin y$$

ir nepārtraukta, vienvērtīga, monotoni augoša y funkcija, ja

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

un atrodas intervallā

$$-1 \leqslant x \leqslant 1,$$

tad šīs funkcijas apgrieztā funkcija

$$y = \text{arc sin } x \quad \left(\text{ar } -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

ir nepārtraukta x funkcija ar

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Līdzīgi dabūjam, ka

$$y = \text{arc cos } x \quad (\text{ar } 0 \leqslant y \leqslant \pi)$$

ir nepārtrauktā x funkcija ar x intervallā

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

10) Funkciju arc tg x un arc ctg x galvenās vērtības ir nepārtrauktās x funkcijas ar x intervallā $(-\infty, +\infty)$.

Pierādījums: tā kā

$$x = \operatorname{tg} y$$

ir nepārtraukta, vienvērtīga, monotoni augoša funkcija ar

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

ar x intervallā

$$-\infty \leqslant x \leqslant \infty.$$

Šīs funkcijas apgrieztās funkcijas galvenā vērtība:

$$y = \operatorname{arc\,tg} x$$

tādēļ arī ir nepārtraukta x funkcija ar x intervallā $(-\infty, +\infty)$. Līdzīgi dabūjam, ka funkcijas

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x$$

galvenā vērtība ir nepārtraukta x funkcija ar x intervallā $(-\infty, +\infty)$.

Piektā nodaļa.

Bezgalīgas rindas.

38. Bezgalīgas rindas jēdziens. Savirzāmība. Ģeometriskā un harmoniskā rinda. Ja

$$a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n \ldots .$$

ir bezgalīgs skaitļu sekojums, tad izteiksmes:

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

sauc par augšēja sekojuma *parciālām summām* un sekojumu

$$s_1, s_2, s_3, \ldots . s_n \ldots . \ldots\ldots\ldots (2)$$

par attiecīgu *parciālo summu sekojumu.*

Ja parciālā summa s_n ar augošu n tiecas uz kādu noteiktu galīgu robežvērtību, t. i. ja

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s, \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

tad izteiksmi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots\ldots (4)$$

sauc par *bezgalīgu savirzāmu rindu ar summu s.*

Ja $n \to \infty$ un arī $s_n \to \infty$, tad augšējo rindu sauc par *nesavirzāmu, diverģentu.*

Ja ar $n \to \infty$ nav $\lim s_n$, tad augšējo rindu sauc par *svārstīgu.*

Bezgalīgu rindu apzīmē ar simbolu

$$\sum_1^\infty a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots) \ldots\ldots (5)$$

No skaitļu sekojumu teōrijas zināms, ka sekojums

$$s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots$$

ir savirzāms, ja, pieņemot pēc patikas mazu pozitīvu skaitli ε, sekojumā varam atrast tādu vietas rādītāju m, ka

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, 3, \ldots .) \ldots\ldots\ldots (6)$$

tiklīdz

$$n \geqslant m.$$

Tā kā

$$s_{n+p} = a_1 + a_2 + \ldots . + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}$$

un

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots . + a_n,$$

tad jābūt

$$|s_{n+p}-s_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|<\varepsilon \quad \ldots\ldots (7)$$

Tātad, lai bezgalīga rinda būtu savirzāma, tajā vajaga varēt noteikt tādu vietas rādītāju n, ar kuŗu sākot pēc patikas ņemtas locekļu grupas summa ir pēc patikas pieņemts mazs skaitlis.

Ja noteikumā (7) liekam $p=1$, tad dabūjam:

$$|a_{n+1}|<\varepsilon \quad \ldots\ldots (8)$$

Augšējā izteiksme rāda, *lai bezgalīga rinda būtu savirzāma, rindas locekļu absolūtai vērtībai ar augošu vietas rādītāju n jātop pēc patikas mazai*, ko izteic ar simbolu

$$\lim a_n=0 \quad \ldots\ldots (8\text{-a})$$

Šis noteikums ir vajadzīgs, bet, kā to vēlāk redzēzim, tas nav pietiekams, lai rinda būtu savirzāma.

Tālāk apskatīsim tādas bezgalīgas rindas, kur noteikums (8) ir izpildīts.

Kā redzams, savirzāma bezgalīga rinda noteic noteiktu skaitli, rindas summu.

Secinājumi.

a) Parciālsummas s_n papildinājumu līdz bezgalīgai rindai,

$$r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots \quad \ldots\ldots (9)$$

sauc par parciālsummai s_n piekārtotu rindas *atlikumu*.

Šis atlikums arī veido rindu, kas ir savirzāma vai nesavirzāma, ja tāda ir dotā rinda (4), kā tas redzams no sekojošā.

Rindas (9) parciālsummas ir:

$$\begin{aligned} s_1' &= a_{n+1}=s_{n+1}-s_n \\ s_2' &= a_{n+1}+a_{n+2}=s_{n+2}-s_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_m' &= a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}=s_{n+m}-s_n\,. \end{aligned}$$

Rinda (9) ir savirzāma, ja:

$$\lim_{m\to\infty} s_m'=\lim_{m\to\infty}(s_{n+m}-s_n)=\lim_{m\to\infty} s_{n+m}-s_n \quad \ldots\ldots (10)$$

ir noteikts skaitlis.

Ja rinda (4) ir savirzāma, tad

$$\lim_{m\to\infty} s_{n+m}=s$$

ir galīgs skaitlis, tādēļ arī izteiksme (10) ir noteikts galīgs skaitlis. Ja rinda (4) nav savirzāma, tad $\lim\limits_{m\to\infty} s_{n+m}$ nav noteikts un tādēļ nav noteikts skaitlis izteiksmē (10).

Tātad, rindas (9) savirzāmību vai nesavirzāmību noteic rindas (4) savirzāmība vai nesavirzāmība.

No augšējā secinām, ka rindas savirzāmības pētīšanā var atmest pēc patikas galīgu skaitu rindas sākuma locekļu.

b) *Ja rinda ir savirzāma, tad izteiksmei* (7) *jābūt izpildītai arī ar* $p = \infty$. *Liekot izteiksmē* (7) $p = \infty$ *un ievērojot* (9), *dabūjam, ka rindas savirzāmības gadījumā jābūt:*

$$|r_n| < \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Tas nozīmē, ka savirzāmas rindas parciālsummu sekojumā varam iet tik tālu, kamēr attiecīgai parciālsummai piekārtotā atlikuma absolūtā vērtība atrodas zem iepriekš noteikta, pēc patikas pieņemta maza pozitīva skaitļa. Skaitli ε sauc par *slieksni*, zem kuŗa atrodas kļūda, ko izdarām, ja visas bezgalīgās rindas vietā ņemam tās parciālsummu s_n.

Izteiksmi (11) raksta arī šādi:

$$\lim_{n \to \infty} r_n = o.$$

c) *Ja rinda* $\sum\limits_1^\infty a_n$ *ir savirzāma, tad savirzāma ir arī rinda*

$$\sum_1^\infty k a_n \quad (k \neq 0).$$

Ja rinda $\sum\limits_1^\infty a_n$ ir savirzāma, tad

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

un

$$\lim_{n \to \infty} k s_n = k \lim_{n \to \infty} s_n = k s,$$

kas nozīmē, ka rinda

$$\sum_1^\infty k a_n$$

ir savirzāma.

Piemēri.

1) No bezgalīga skaitļu sekojuma

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots.$$

veidojam:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 \\ a_2 &= \alpha_2 - \alpha_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \alpha_n - \alpha_{n+1}. \end{aligned}$$

Saskaitot augšējās izteiksmes, dabūjam:

$$\sum_1^n a_n = \alpha_1 - \alpha_{n+1}.$$

Ja sekojums α_n ir savirzāms un α tā robeža, tad rinda

$$\sum_1^\infty a_n$$

ir savirzāma, un šīs rindas robeža ir

$$s = \alpha_1 - \alpha.$$

Gadījumā, ja $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha = 0$, tad

$$\sum_1^\infty a_n = s = \alpha_1.$$

Atsevišķi gadījumi.

1. No dotā sekojuma:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots.$$

kā robeža $\alpha = 0$, veidojam:

$$a_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \,.\, 2}$$

$$a_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \,.\, 3}$$

$$a_3 = \alpha_3 - \alpha_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \,.\, 4}.$$

. . . .

Tā kā dotais skaitļu sekojums ir savirzāms ar robežu $\alpha = 0$ un $\alpha_1 = 1$, tad, ievērojot augšējo, dabūjam:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \,.\, 2} + \frac{1}{2 \,.\, 3} + \frac{1}{3 \,.\, 4} + \ldots = 1.$$

2. Sekojuma

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots.$$

robeža $\alpha = 0$ un $\alpha_1 = 1$.

Še

$$a_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{1 \,.\, 3}$$

$$a_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{3 \,.\, 5}$$

$$a_3 = \alpha_3 - \alpha_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{5 \,.\, 7}$$

. . . .

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Še dabūjam rindu:

$$\frac{2}{1\,.\,3}+\frac{2}{3\,.\,5}+\frac{2}{5\,.\,7}+\ldots.$$

Šīs rindas robeža ir 1, tātad

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}.$$

3. No sekojuma

$$1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ldots.$$

norādītā kārtā dabūjam:

$$(1-q)+(1-q)q+(1-q)q^2+\ldots.$$

Dotais sekojums ir savirzāms, un tā robeža ir 0, ja $|q|<1$. Šinī gadījumā, tā kā $\alpha=0$ un $\alpha_1=1$, dabūjam:

$$1=(1-q)+(1-q)q+(1-q)q^2+\ldots.,$$

tātad

$$\sum_0^\infty q_n=\frac{1}{1-q}.$$

Ja $|q|>1$, tad dotais skaitļu sekojums ir īsti diverģents, tādēļ arī rinda

$$\sum_0^\infty q_n$$

ir īsti diverģenta.

Ar $q=1$ dabūjam:

$$\sum_0^\infty q_n = 1+1+1+\ldots$$

Šī rinda ir īsti diverģenta.

Ar $q=-1$ dabūjam:

$$\sum_0^\infty q_n = 1-1+1-1+\ldots$$

Šīs rindas parciālsummas mainīdamās ir 1 un 0; rinda ir neīsti diverģenta, tās summa *svārstās*, pieņemot vērtības 1 un 0.

Rindu

$$\sum_0^\infty q_n$$

sauc par *ģeometrisku rindu*; tā ir savirzāma ar summu

$$\frac{1}{1-q},$$

ja $|q|<1$. Ar $|q|\geqslant 1$ šī rinda ir diverģenta.

4. Rindu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_1^\infty\frac{1}{n}$$

sauc par *harmonisku*.

Še

$$a_n = \frac{1}{n}$$

un

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Harmoniskā rinda nav savirzāma, lai gan $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, kas redzams no sekojošā.

Apskatām locekļu grupu:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Liekot augšējā izteiksmē

$$\frac{1}{n+1}, \ \frac{1}{n+2} \text{ u. t. t. vietā } \frac{1}{n^2},$$

dabūjam:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Izteiksmes (α) summa ir lielāka par izteiksmes (β) summu, tātad:

$$\overset{0}{\frac{1}{n}} + \overset{1}{\frac{1}{n+1}} + \overset{2}{\frac{1}{n+2}} + \ldots + \overset{k}{\frac{1}{n^2}} > \overset{0}{\frac{1}{n}} + \overset{1}{\frac{1}{n^2}} + \overset{2}{\frac{1}{n^2}} + \ldots + \overset{k}{\frac{1}{n^2}}.$$

Tā kā

$$n + k = n^2, \text{ tad } k = n^2 - n.$$

Izteiksmes (β) summa ir

$$\frac{1}{n} + k\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = 1$$

Tātad

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

No augšējā redzams, ka arī ar pēc patikas lielu n arvienu varam veidot locekļu grupu

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n^2},$$

kuŗas summa ir lielāka par 1. Savirzāmības vispārīgais noteikums, tātad, nav izpildīts, tādēļ rinda nav savirzāma.

Rindas ar pozitīviem locekļiem

39. Vispārīgas izteiksmes. Teōrēmas. Ja rindas

$$\sum_{1}^{\infty} a_n$$

visi locekļi ir pozitīvi, tad tās parciālsummas

$$s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$$

veido monotoni augošu skaitļu sekojumu ar robežu, kas var būt galīgs, noteikts skaitlis vai ∞.

Tātad rinda, kuŗas visi locekļi ir pozitīvi, var būt savirzāma vai nesavirzāma ar robežu ∞.

Savirzāmība ir pierādīta, ja varam parādīt, ka rindas visas parciālsummas atrodas zem kāda noteikta skaitļa.

1. teōrēma

Ja rindas

$$\sum_1^\infty a_n$$

visi locekļi ir pozitīvi un ja rinda ir savirzāma, tad savirzāma ir arī katra rinda, ko dabūjam no dotās rindas, svītrojot tajā viscaur pamīšus locekļus (piemēram katru trešo).

Pierādījums.

Tā kā rinda

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

ir savirzāma, tātad ir izpildīts noteikums:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

Šis noteikums paliks izpildīts, ja augšējās izteiksmes kreisajā pusē būs svītroti locekļi.

2. teōrēma

Ja rinda

$$\sum_1^\infty a_n,$$

kuŗas visi locekļi pozitīvi, ir savirzāma, tad savirzāma ir katra rinda, kuŗu dabūjam no dotās rindas, tajā viscaur pamīšus mainot locekļiem zīmes.

Pierādījums.

Ja dotā rinda ir savirzāma, tad ir izpildīts noteikums

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

Šis noteikums paliek izpildīts arī tad, ja viscaur pamīšu maināam zīmes, jo

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon,$$

tādēļ ka

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

3. teōrēma

Ja rinda

$$\sum_1^\infty a_n,$$

kuŗas visi locekļi ir pozitīvi, savirzāma, tad savirzāma ir arī rinda, kuŗu dabūjam, dotajā rindā viscaur pamīšus pārkārtojot locekļus.

Locekļu pārkārtojums rindas summu nemaina.

Pierādījums.

Ka pārkārtotā rinda ir savirzāma, secinām no tā apstākļa, ka pārkārtotās rindas katra parciālsumma atrodas zem nepārkārtotās rindas summas s.

4. teōrēma

Ja savirzāmā rindā ar pozitīviem locekļiem viscaur veidojam sekojošo locekļu grupas, tad rinda, kas veidota no šo grupu summas, ir savirzāma, un tās robeža ir agrākā.

Pierādījums.

Rindas

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_i) + (a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_k) + (\ldots)$$

parciālsummas atrodas starp rindas

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

parciālsummām un tādēļ arī tiecas uz rindas summu s.

40. Savirzāmības pazīmes.

1) *Rindu salīdzināšana. Ja rinda ar pozitīviem locekļiem*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad (a_n > 0) \ldots\ldots\ldots (1)$$

ir savirzāma, tad katra rinda ar pozitīviem locekļiem

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \quad (b_n > 0) \ldots\ldots\ldots (2)$$

ir savirzāma, ja

$$b_n \leqslant a_n.$$

Tādā gadījumā rindu $\sum\limits_1^\infty a_n$ sauc par rindas $\sum\limits_1^\infty b_n$ *virsrindu* vai *majorantu.*

Pierādījums.

Apzīmējam rindas (1) parciālsummu ar s_n, rindas summu ar s un rindas (2) parciālsummu ar t_n. Tad, tā kā

$$0 < b_n \leqslant a_n$$

arī

$$0 < t_n \leqslant s_n.$$

Parciālsummas t_n un s_n veido monotoni augošus skaitļu sekojumus. Tā kā rinda (1) ir savirzāma, tad

$$\lim s_n = s.$$

Tā kā skaitļu sekojuma t_n locekļi katrs ir mazāks par attiecīgiem skaitļu sekojuma s_n robežu s, tad skaitļu sekojumam t_n arī ir robeža, un rinda (2) tādēļ ir savirzāma.

Ja noteikums

$$b_n \leqslant a_n$$

ir izpildīts, sākot ar kādu vietas rādītāju m, tad, kā to redzējām, varam atmest rindas sākumā locekļus līdz rādītājam m un apskatām tad saīsināto rindu, kuŗas locekļi izpilda noteikumu.

Secinājums.

Ja $b_n \geqslant a_n$ un rinda $\sum_1^\infty a_n$ nav savirzāma, tad rinda $\sum_1^\infty b_n$ arī nav savirzāma, jo, ja rinda $\sum_1^\infty b_n$ būtu savirzāma, tad, ievērojot augšējo, rindai $\sum_1^\infty a_n$ vajadzētu būt savirzāmai, kas pretēji pieņēmumam par rindu $\sum_1^\infty a_n$.

Piemēri.

a) Rindas

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots .$$

locekļi, sākot ar otru, ir mazāki par sekojošās rindas locekļiem

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot$$

Tā kā šī pēdējā rinda ir savirzāma, tad savirzāma ir arī augšējā rinda.

b) Rindas

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots .$$

locekļi ir lielāki, sākot ar otru, par harmoniskās rindas

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots .$$

locekļiem. Tā kā harmoniskā rinda nav savirzāma, tad nav savirzāma arī augšējā rinda.

2) *Ja rindas* $\sum_1^\infty a_n$ *lockļi ir pozitīvi un tās veidošanas likums ir tāds, ka*

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot a_n > 0,$$

tad rinda nav savirzāma.

Pierādījums.

Pieņemam, ka

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot a_n = A \quad (A > 0,)$$

un α ir skaitlis, kas izpilda noteikumu

$$0 < \alpha < A,$$

tad rindā jābūt tādam vietas rādītājam m, ka, ar to sākot, $n \cdot a_n$ arvienu ir lielāks par α, tātad

$$m a_m > \alpha$$
$$(m + 1)\, a_{m+1} > \alpha$$
$$(m + 2) \cdot a_{m+2} > \alpha$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

No augšējā secinām:

$$a_m > \frac{\alpha}{m},$$

$$a_{m+1} > \frac{\alpha}{m+1},$$

$$a_{m+2} > \frac{\alpha}{m+2} \quad \text{u. t. t.}$$

Tātad, rindas $\sum_1^\infty a_n$ locekļi ar $n = m$ sākot ir lielāki par attiecīgiem rindas $\sum_1^\infty \frac{\alpha}{n}$ locekļiem. Tā kā harmoniska rinda $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ nav savirzāma, tādēļ arī nesavirzāma ir arī rinda $\sum_1^\infty \frac{\alpha}{n}$. Ievērojot augšējo, ieskatām, ka rinda $\sum_1^\infty a_n$ nav savirzāma.

Ar šo pazīmi ieskatām, ka rinda

$$\sum_1^\infty \frac{\gamma}{\alpha n + \beta},$$

kur α, β, γ ir pozitīvi skaitļi, ir nesavirzāma, jo izteiksmes

$$na_n = \frac{n\gamma}{\alpha n + \beta} = \frac{\gamma}{\alpha + \frac{\beta}{n}}$$

robeža ar $n \to \infty$ ir $\frac{\gamma}{\alpha}$, kas lielāks par 0.

Rinda

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$$

ir nesavirzāma ar $0 < p < 1$, jo izteiksmes

$$na_n = \frac{n}{n^p} = n^{-p+1}$$

vērtība ar $n \to \infty$ top bezgalīgi liela. Ievērojot augšējo, redzams, ka rindas

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{n}}; \quad \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

ir nesavirzāmas.

3. *Ja rindas* $\sum_1^\infty a_n$ *ar pozitīviem locekļiem veidošanas likums ir tāds, ka attiecība*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ar augošu n tiecas uz robežu λ, tad rinda ir savirzāma ar $\lambda < 1$ un nesavirzāma ar $\lambda > 1$ (Dalambēra pazīme). Gadījumā, ja $\lambda < 1$, tad izvēlam skaitli q tādu, ka

$$\lambda < q < 1.$$

Attiecībai $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, no kāda vietas rādītāja $n = m$ sākot, jātop mazākai par q, lai tā varētu dabūt robežvērtību λ, kas atrodas zem q.

Tad no

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} < q, \quad \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} < q, \quad \frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} < q, \quad \ldots .$$

dabūjam:

$$a_{m+1} < a_m, \quad a_{m+2} < a_m q^2, \quad a_{m+3} < a_m q^3 \ldots ..$$

Kā redzams, rindas $\sum\limits_1^\infty a_n$ locekļi, no $n = m + 1$ sākot, ir mazāki par ar a_m reizinātiem ģeometriskās rindas $\sum\limits_1^\infty q^n$ locekļiem. Ģeometriskā rinda ir savirzāma ar $q < 1$, tātad savirzāma ir arī rinda $\sum\limits_1^\infty a_n$.

Gadījumā, kad $\lambda > 1$, izvēlam q tādu, ka $\lambda > q > 1$. Lai attiecība $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ dabūtu virs q atrodošos robežvērtību λ, tad ar kādu rādītāju m sākot jābūt:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} > q, \quad \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} > q, \quad \frac{a_{m+3}}{a_{m+2}} > q, \ldots .$$

no kā dabūjam:

$$a_{m+1} > a_m q, \quad a_{m+2} > a_m q^2, \quad a_{m+3} > a_m q^3, \ldots$$

Tā kā še rindas $\sum\limits_1^\infty a_n$ locekļi, ar $n = m + 1$ sākot, pārsniedz ar a_m reizinātus ģeometriskās rindas $\sum\limits_1^\infty q^n$ locekļus, un šī rinda ar $q > 1$ ir nesavirzāma, tad nesavirzāma ir arī rinda $\sum\limits_1^\infty a_n$.

Gadījums, kad

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

paliek neizšķirts.

Piemēri.

a) Rindā

$$1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots \ldots (\alpha > 0)$$

atmetot pirmo locekli ir:

$$a_n = \frac{\alpha^n}{n!}; \quad a_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha}{n+1}.$$

Kā redzams:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n+1}=0<1.$$

Augšējā rinda ir savirzāma ar katru galīgu α.

b) Rindā

$$\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}+\ldots\ldots(\alpha>0).$$

$$a_n=\frac{\alpha^n}{n},\quad a_{n+1}=\frac{\alpha^{n+1}}{n+1},\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}\cdot\alpha=\frac{\alpha}{1+\frac{1}{n}}.$$

Kā redzams:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{1+\frac{1}{n}}=\alpha.$$

Augšējā rinda, tātad, ir savirzāma, ja $a<1$. Ar $\alpha>1$ rinda ir diverģenta. Ar $\alpha=1$ rinda ir harmoniska, tātad, diverģenta.

c) Rindā

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\ldots(p>0)$$

ir

$$a_n=\frac{1}{n^p},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^p},\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^p$$

Še

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^p=1.$$

Še pazīme jautājumu par rindas savirzāmību atstāj atklātu. Agrāk redzējām, ka augšējā rinda nav savirzāma ar $p\leqslant 1$ un ir savirzāma ar $p=2$.

4. *Rinda ar pozitīviem locekļiem*

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots\ldots(a_{n+1}<a_n)\ldots\ldots(1)$$

ir savirzāma vai nesavirzāma, ja savirzāma vai nesavirzāma ir no augšējās rindas veidotā rinda

$$a_1+2a_2+4a_4+8a_8+16a_{16}+\ldots\ldots\ldots(2)$$

Pierādījums.

Tā kā

$$\begin{aligned}a_1&=a_1\\2a_2&>a_2+a_3\\4a_4&>a_4+a_5+a_6+a_7\\8a_8&>a_8+a_9+\ldots+a_{15}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

tad saskaitot dabūjam:

$$a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\ldots>a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots$$

Tātad, rindas (1) summa ir mazāka par rindas (2) summu. Ja rinda (2) ir savirzāma, tad savirzāma ir arī rinda (1).

Ja rinda (1) ir nesavirzāma, tad nesavirzāma ir arī rinda (2).

Tā kā

$$\begin{aligned} a_1 &< 2a_1 \\ 2a_2 &= 2a_2 \\ 4a_4 &< 2a_3 + 2a_4 \\ 8a_8 &< 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

tad

$$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots < 2(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots).$$

Šī izteiksme rāda, ja rinda (1) ir savirzāma, tad savirzāma ir arī rinda (2), un ja rinda (2) ir nesavirzāma, tad nesavirzāma ir arī rinda (1).

Ar šo pazīmi varam izšķirt jautājumu par rindas

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots.$$

savirzāmību. Veidojam rindu:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \ldots$$

ko pārveidojot, dabūjam:

$$1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} +$$

Pārveidotā rinda ir ģeometriska rinda ar kvocientu

$$\frac{1}{2^{p-1}}.$$

Šī rinda ir savirzāma, ja

$$\frac{1}{2^{p-1}} < 1.$$

No augšējās izteiksmes dabūjam, ka tad jābūt:

$$p > 1.$$

Tātad, rinda $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^p}$ ir savirzāma, ja $p > 1$. Šī rinda nav savirzāma, ja $p \leqslant 1$.

5. *Ja rinda* $\sum\limits_1^\infty a_n$ *ar pozitīviem locekļiem, no kādas noteiktas vietas sākot,* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant k$ *ar* $0 < k < 1$, *tad rinda ir savirzāma, bet ja* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, *tad rinda nav savirzāma.* (Koši pazīme.)

No augšējās pazīmes dabūjam $a_n \leqslant k^n$. Vienkāršības dēļ pieņemot, ka pazīme izpildīta jau rindas sākumā, dabūjam:

$$a_1 \leqslant k^1, \quad a_2 \leqslant k^2, \quad a_3 \leqslant k^3 \ldots.$$

No augšējā redzams, ka rinda:

$$k + k^2 + k^3 + \dots \dots \dots \quad (1)$$

ir rindas

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \dots \dots \quad (2)$$

virsrinda. Rinda (1) ir savirzāma ar $k < 1$. Šai gadījumā savirzāma arī rinda (2).

Ja $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, tad dabūjam, ka $a_n \geqslant 1$. Rindas $\sum\limits_1^{\infty} a_n$ locekļu mazākā vērtība tātad ir 1, kas nesaskan ar pamata prasību rindu savirzāmībā: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Šādā gadījumā rinda nav savirzāma.

Augšējo noteikumu var aizstāt ar izteiksmi

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

ja šāda robežvērtība pastāv.

Piemērs.

Rindā

$$\frac{1}{(\log 2)^2} + \frac{1}{(\log 3)^3} + \frac{1}{(\log 4)^4} + \dots,$$

pieņemot pirmo locekli $a_1 = 0$, dabūjam:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} = 0.$$

Rinda tātad savirzāma.

Pazīmi $\sqrt[n]{a_n} < k$ ar $0 < k < 1$ nevar aizstāt ar izteiksmi $\sqrt[n]{a_n} < 1$. Še k jābūt noteiktam skaitlim, tam pašam ar visiem n.

6) *Rinda ar pozitīviem locekļiem*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \dots$$

ir savirzāma, ja ar pēc patikas ņemtu skaitli $r > 1$ *un kādu galīgu skaitli* h *izpildīta izteiksme*

$$n^r a_n < h.$$

Rinda nav savirzāma, ja ar $r \leqslant 1$

$$n^r a_n > h.$$

Pierādījums.

Pirmajā gadījumā dabūjam:

$$a_n < \frac{h}{n^r}, \; a_{n+1} < \frac{h}{(n+1)^r}, \; a_{n+2} < \frac{h}{(n+2)^r} \dots \quad .$$

Tātad

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < h\left(\frac{1}{n^r} + \frac{1}{(n+1)^r} + \frac{1}{(n+2)^r} + \dots\right).$$

Labajā pusē atrodošās iekavas ir rindas

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \dots$$

atlikums. Šī atlikuma rinda, kā to redzējām, savirzāma ar $r>1$. Tātad savirzāma arī rinda $\sum_1^\infty a_n$, neatkarīgi no h vērtības.

Otrā gadījumā, dabūjam:

$$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots>h\left(\frac{1}{n^r}+\frac{1}{(n+1)^r}+\frac{1}{(n+2)^r}+\ldots\right)$$

Rinda iekavās nav savirzāma ar $r\leqslant 1$, tātad, arī nav savirzāma rinda $\sum_1^\infty a_n$.

Augšējo konverģences pazīmi var aizstāt ar izteiksmi:

Rinda $\sum_1^\infty a_n$ *ir savirzāma, ja ar pieņemtu* $r>1$

$$\lim_{n\to\infty} n^r a_n=0.$$

Šādā gadījumā, kā ieskatāms, izteiksmes $n^r a_n$ vērtība arvienu būs mazāka par kādu noteiktu skaitli h.

Piemērs.

Rindā:

$$2^\alpha+\frac{3^\alpha}{2^{\alpha+\beta}}+\frac{4^\alpha}{3^{\alpha+\beta}}+\frac{5^\alpha}{4^{\alpha+\beta}}+\ldots+\frac{(n+1)^\alpha}{n^{\alpha+\beta}}+\ldots,\ (\alpha>0;\ \beta>0)$$

dabūjam:

$$\lim_{n\to\infty} n^r a_n=\lim_{n\to\infty} n^r\cdot\frac{(n+1)^\alpha}{n^{\alpha+\beta}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{n^{\beta-r}}.$$

Šī robežvērtība ir 0, ja $\beta-r>0$. Tā kā savirzāmības gadījumā r jābūt lielākam par 1, tad arī β jābūt lielākam par 1. Dotā rinda, tātad, ir savirzāma, ja $\beta>1$.

Rindas ar pozitīviem un negātīviem locekļiem.

41. Absolūti savirzāmas rindas. Rinda ar pozitīviem un negātīviem locekļiem ir tāda, kuŗā nav nevienas, kaut arī pēc patikas tālas vietas, ar ko sākot rindas locekļiem ir tikai viena zīme.

Ja no rindas $\sum_1^\infty a_n$ ar pozitīviem un negātīviem locekļiem veidojam rindu $\sum_1^\infty |a_n|$, kuŗas locekļi visi ir pozitīvi, tad šī rinda var būt savirzāma vai nesavirzāma.

Ja rinda $\sum_1^\infty |a_n|$ ir savirzāma, tad savirzāma ir arī rinda $\sum_1^\infty a_n$, jo savirzāma rinda ar pozitīviem locekļiem paliek savirzāma, ja tajā viscaur pamīšus locekļiem mainām zīmes.

Šādā gadījumā rindas $\sum_{1}^{\infty} a_n$ summu dabūjam, no rindas $\sum_{1}^{\infty} a_n$ pozitīvo locekļu summas atņemot šīs rindas negātīvo locekļu absolūto vērtību summu.

Rindas $\sum_{1}^{\infty} a_n$ summa nav atkarīga no rindas locekļu sakārtojuma.

Rindas $\sum_{1}^{\infty} a_n$ pozitīvo locekļu summa ir savirzāmās rindas $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ locekļu summa, kad tajā viscaur pamīšus svītroti locekļi, kas rindā $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ir negātīvi. Kā pierādīts, šī summa ir galīga. Rindas $\sum_{1}^{\infty} a_n$ negātīvo locekļu absolūto vērtību summa ir savirzāmās rindas $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ to locekļu summa, kas paliek, kad tajā svītrojam locekļus, kas rindā $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ir pozitīvi. Arī šī summa, kā redzams, ir galīga.

Rindas $\sum_{1}^{\infty} a_n$ parciālsummu s_n dabūjam, no parciālsummā s_n ietilpstošo pozitīvo locekļu summas σ_l atņemot s_n ietilpstošo negātīvo locekļu absolūto vērtību summu τ_m, tātad

$$s_n = \sigma_l - \tau_m \qquad (l + m = n).$$

Ja $n \to \infty$, tad arī $l \to \infty$ un $m \to \infty$.

Šādā gadījumā $s_n \to s$, rindas $\sum_{1}^{\infty} a_n$ summu, σ_l tiecas uz rindas $\sum_{1}^{\infty} a_n$ pozitīvo locekļu summu σ un τ_m uz šīs rindas negatīvo locekļu absolūto vērtību summu τ. Tātad $s = \sigma - \tau$.

Ja rindā $\sum_{1}^{\infty} a_n$ viscaur pamīšus pārkārtojam locekļus, tad šāds pārkārtojums notiks kā rindas $\sum_{1}^{\infty} a_n$ pozitīvo, tā arī negātīvo locekļu rindās, bet tā kā šīs rindas ir savirzāmas, tad šis pārkārtojums nemaina to robežas σ un τ. Tātad rindas $\sum_{1}^{\infty} a_n$ robeža pēc pārkārtojuma ir agrākā, t. i. $s = \sigma - \tau$.

Rindas ar augšā apskatītām īpašībām sauc par *absolūti savirzāmām* rindām.

42. N e a b s o l ū t i   s a v i r z ā m a s   r i n d a s. Pieņemam, ka rindā $\sum_{1}^{\infty} a_n$ ir pozitīvi un negātīvi locekļi un ka no šīs rindas veidotā rinda $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ nav savirzāma. Šādā gadījumā, kā to redzēsim, rinda $\sum_{1}^{\infty} a_n$ var būt savirzāma vai nesavirzāma.

Tieši ieskatāms, ka rinda $\sum_1^\infty |a_n|$ var būt diverģenta tikai tad, ja ir diverģenta vismaz viena no rindām, kas veidota no rindas $\sum_1^\infty a_n$ pozitīviem vai negātīviem locekļiem.

Ja šīs rindas abas ir diverģentas, tad, kā Riemans to pierādīja, rindas $\sum_1^\infty a_n$ summa ir atkarīga no locekļu sakārtojuma. Rindas summa mainās ar locekļu sakārtojumu. Šī summa var būt galīga, tad rindu sauc par *neabsolūti konverģentu*. Gadījumos rindas summa var arī būt bezgalīga.

43. Alternējošas rindas. Rindu ar pozitīviem un negātīviem locekļiem, kuŗā pozitīvam loceklim seko negātīvs loceklis vai arī otrādi, sauc par *alternējošu rindu.*

Šādu rindu savirzāmību noteic teōrēma:

Ja alternējošas rindas locekļu absolūtā vērtība pastāvīgi dilst un ja izpildīts noteikums

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

tad alternējoša rinda ir konverģenta.

Pierādījums.

No pozitīvu skaitļu $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ dilstoša sekojuma veidojam rindu:

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots$$

Izteiksmes:

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$s_{2n+1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} \ldots \quad (2)$$

rāda, 1) ka nepāŗu parciālsummas s_1, s_3, s_5 u. t. t. veido dilstošu skaitļu sekojumu, jo no (1) redzams, ka:

$$s_{2n+1} < s_{2n-1}.$$

2) ka visas nepāŗu parciālsummas ir pozitīvas, tātad lielākas par 0. No augšējā secinām, ka skaitļu sekojumam $s_1, s_3, s_5 \ldots$ ir robeža $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$.

Izteiksmes:

$$s_{2n} = s_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \ldots \quad (4)$$

rāda, 1) ka pāŗu parciālsummas $s_2, s_4, s_6, \ldots$ veido augošu skaitļu sekojumu, jo no (3) redzams,

$$s_{2n} > s_{2n-2}$$

2) ka $s_2, s_4, \ldots$ ir pozitīvi skaitļi, un ka sekojuma $s_2, s_4, \ldots$ locekļi ir mazāki par a_1.

No augšējā secinām, ka skaitļu sekojumam $s_2, s_4, s_6, \ldots\ldots$ ir robežā $\lim\limits_{n \to \infty} s_{2n}$.

Tā kā

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1},$$

tad

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$$

un

$$\lim_{n \to \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = 0.$$

Tātad

$$\lim_{n \to \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} s_{2n} = s$$

t. i. nepāŗu un pāŗu parciālsummām ir viena un tā pati robeža s, kas arī ir rindas $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ robeža.

No augšējā arī ieskatām, ka ar katru n

$$s_{2n} < s < s_{2n+1}.$$

Tā kā

$$r_n = (-1)^n [a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \ldots],$$

tad

$$|r_n| = |s - s_n| < |a_{n+1}|.$$

Augšējā izteiksme rāda, ka, ja rindas summas s vietā ņemam parciālsummu s_n, tad kļūdas absolūtā vērtība ir mazāka par parciālsummas s_n pēdējam loceklim rindā sekojošā locekļa absolūto vērtību.

Piemēri.

1. Alternējošā rinda:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$$

ir savirzāma, jo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Šī rinda ir arī absolūti savirzāma, jo rinda, kas veidota ar augšējās rindas absolūtiem locekļiem, ir savirzāma.

2. Alternējošā rinda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

ir savirzāma, jo

$$\lim_{n \to \infty} |a_m| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Šī rinda ir neabsolūti savirzāma, jo rinda, kas veidota no augšējās rindas locekļu absolūtām vērtībām, ir harmoniska rinda, kas nav savirzāma.

3. Alternējošā rinda

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots$$

ir savirzāma ar katru $p>0$, jo

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0 \quad \text{ar } p>0.$$

Šī rinda ar pozitīviem locekļiem ir savirzāma ar $p>1$ un nav savirzāma ar $p\leqslant 1$. Augšējā alternējošā rinda, tātad, ar $p>1$ ir absolūti savirzāma, un ar $0<p\leqslant 1$ šī rinda ir neabsolūti savirzāma.

44. Abela konverģences teōrēma. *Ja*

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots,u_n\ldots.$$

ir skaitļu sekojums pēc patikas, kā parciālsummas s_n *ir aprobežotas, un ja*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots$$

ir pozitīvu uz nulli tiecošos skaitļu sekojums, tad rinda

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots \ldots \ldots \ldots \tag{1}$$

ir savirzāma.

Pierādījums.

Tā kā

$$u_1=s_1,\ u_2=s_2-s_1,\ldots,u_n=s_n-s_{n-1}.$$

tad

$$S_n=a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_nu_n=a_1s_1+a_2(s_2-s_1)+a_3(s_3-s_2)+$$
$$+\ldots+a_n(s_n-s_{n-1})=s_1(a_1-a_2)+s_2(a_2-a_3)+\ldots+$$
$$+s_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+s_na_n \quad \ldots\ldots\ldots \tag{2}$$

un

$$s_1(a_1-a_2)+s_2(a_2-a_3)+\ldots+s_{n-1}(a_{n-1}-a_n)=S_n-s_na_n \ \ldots \tag{3}$$

Tā kā, saskaņā ar pieņēmumu, $|s_n|$ ir aprobežots, t. i. atrodas zem noteikta skaitļa A un $a_\lambda>a_{\lambda+1}$, tad:

$$|s_n|(a_n-a_{n+1})\leqslant A(a_n-a_{n+1})$$

un tādēļ arī:

$$|s_1|(a_1-a_2)+|s_2|(a_2-a_3)+\ldots+|s_{n-1}|(a_{n-1}-a_n)\leqslant A\sum_{1}^{n-1}(a_\lambda-a_{\lambda+1})=$$
$$=A(a_1-a_n)<Aa_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4}$$

No augšējā, secinām:

1) izteiksmes (4) kreisajā pusē esošā rinda ir savirzāma, jo tās parciālsummas atrodas zem noteikta skaitļa Aa_1;

2) ievērojot teikto, redzams, ka izteiksmes (3) kreisajā pusē esošā rinda ir absolūti savirzāma, tādēļ šīs izteiksmes labā puse tiecas uz robežu S, t. i.

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-s_na_n)=S.$$

Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty}a_ns_n=0$, jo $a_n\to 0$,

tad

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S.$$

Šī izteiksme teorēmu pierāda.

45. Rindu saskaitīšana. *Ja bezgalīgas rindas*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \dots \dots \dots (1)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots \dots \dots \dots (2)$$

ir savirzāmas, tad no augšējām rindām veidotā rinda

$$(\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2) + \dots \dots \dots (3)$$

arī ir savirzāma.

Pierādījums.

Apzīmējot rindas (3) parciālsummu ar σ_n, dabūjam:

$$\sigma_n = (\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2) + \dots + (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\,(a_1 + a_2 + \\ + \dots + a_n) + \beta\,(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \dots \dots (4)$$

Apzīmējot

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n \text{ un } b_1 + b_2 + \dots + b_n = t_n,$$

dabūjam:

$$\sigma_n = \alpha s_n + \beta t_n \dots \dots \dots \dots (5)$$

Tā kā rindas (1) un (2) savirzāmas, tad:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s, \lim_{n \to \infty} t_n = t.$$

No (5) dabūjam:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \alpha \lim_{n\to\infty} s_n + \beta \lim_{n\to\infty} t_n,$$

t. i.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma = \alpha s + \beta t.$$

Ar šo izteiksmi rindas (3) savirzāmība pierādīta.

Rindas ar kompleksiem locekļiem.

46. Pamata jēdzieni. Teorēmas. *Ja rinda*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

ar kompleksiem locekļiem $a_n = \alpha_n + \beta_n i$, *reālās rindas* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots$ un $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots$ *tiecas uz summām* α un β, tad saka, ka rinda $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = (\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) + (\alpha_3 + \beta_3 i) + \dots$ ir savirzāma un ka šīs rindas summa ir $\alpha + \beta i$.

Teorēma.

Rinda ar kompleksiem locekļiem ir savirzāma, ja savirzāma ir rinda, kas veidota no dotās rindas locekļu absolūtām vērtībām.

Pierādījums.

No

$$|a_n| = |\alpha_n + \beta_n i| = +\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$$

secinām, ka:

$$|\alpha_n| \leqslant |a_n| \text{ un } |\beta_n| \leqslant |a_n|.$$

Saskaņā ar pieņēmumu, reālā rinda $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ ir savirzāma, šī rinda ir rindu $\sum_{1}^{\infty} |\alpha_n|$ un $\sum_{1}^{\infty} |\beta_n|$ virsrinda. Rindas $\sum_{1}^{\infty} |\alpha_n|$ un $\sum_{1}^{\infty} |\beta_n|$, tātad, ir savirzāmas, bet tad rindas $\sum_{1}^{\infty} \alpha_n$ un $\sum_{1}^{\infty} \beta_n$ arī ir savirzāmas, un tādēļ savirzāma ir arī rinda $\sum_{1}^{\infty} a_n$.

Piemērs.

Rinda
$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots . \quad (z = x + iy)$$
ir savirzāma ar katru kompleksu z vērtību, tādēļ ka rinda
$$1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \ldots . .$$
ir savirzāma ar katru $|z|$ vērtību.

Rindas ar mainīgiem locekļiem.

47. Pamata jēdzieni. Vienmērīgi un nevienmērīgi savirzāmas rindas. Savirzāma bezgalīga rinda, kuŗas locekļi ir pastāvīgi skaitļi, noteic racionālu vai irracionālu skaitli.

Ja rindas locekļi ir funkcijas no x, tad katra x vērtība dod rindu ar pastāvīgiem locekļiem. Ja šīs rindas ir savirzāmas, tad katra rinda noteic skaitli; šie skaitļi tad ir piekārtoti attiecīgām x vērtībām.

Pieņemam, ka nepārtraukti mainīgs x mainās kādā intervallā un ka ar kādu likumu noteiktas vienvērtīgas, nepārtrauktas funkcijas
$$u_0 = f_0(x),\ u_1 = f_1(x),\ u_2 = f_2(x) \quad \ldots\ldots . \quad (1)$$
Pieņemam, ka no šīm funkcijām veidotā bezgalīgā rinda
$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \quad \ldots\ldots\ldots . \quad (2)$$
ir savirzāma, netikvien ar kādu vienu x vērtību, bet ar visām x vērtībām intervallā (α, β), ja dotais x intervalls atrodas intervallā (α, β).

Šādā gadijumā rindas (2) summu vērtības veido funkciju no x, kas tad ir definēta ar rindu (2). Apzīmējam šo funkciju ar $f(x)$, tad ar katru x no intervalla (α, β)
$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} u_n = \sum_{0}^{\infty} f_n(x) \quad \ldots\ldots\ldots . \quad (3)$$

Tā kā rindu (2) pieņēmām par savirzāmu, tad, ar x no intervalla (α, β), pieņemot pēc patikas mazu pozitīvu skaitli ε, varam atrast rindā tādu rādītāju m, ka
$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots . + u_{n+p}| < \varepsilon,$$
tiklīdz $n \geqslant m$ ar katru dabisku skaitli p.

Apzīmējot rindas (2) parciālsummu ar $s_n(x)$ un tai piederošo atlikumu ar $r_n(x)$, rakstām:

$$s_n(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$r_n(x) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots$$

un

$$|r_n(x)| < \varepsilon \text{ ar } n \geqslant m.$$

Ja pieņemam, ka $s_n(x)$ izteic funkciju $f(x)$, tad izdarītā kļūda ir mazāka par ε.

Izteiksmi (3) tādēļ varam rakstīt:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

ar

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0.$$

Kā redzējām, dotam x ir piekārtots dabisks skaitlis m tādi, ka

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

ar katru $n \geqslant m$. Skaitļiem $x_1, x_2, x_3 \ldots$ tātad, būs piekārtoti dabiski skaitļi $m_1, m_2, m_3 \ldots$. Tas nozīmē to: lai dabūtu funkcijas $f(x)$ aptuvenu vērtību ar noteiktu precīzitātes pakāpi, skaitļiem $x_1, x_2, x_3 \ldots$ būs piekārtotas parciālsummas $s_{n_1}, s_{n_2}, s_{n_3} \ldots$, atbilstošas noteiktai precīzitātei.

Ja starp tiem m, kas piekārtoti vērtībām $x_1, x_2, x_3 \ldots$ no intervalla (α, β), ir kāds lielākais M, tad tas ar visām x vērtībām no intervalla (α, β) izpildīs noteikumu

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

ar katru $n \geqslant M$.

Šādā gadījumā rindu (2) sauc par *vienmērīgi* savirzāmu intervallā (α, β).

Ja šādu lielāko m nevaram atrast, ja, pieņemot kaut kādu lielu, pozitīvu dabisku skaitli k, intervallā (α, β) varam atrast tādu x, kam piekārtotais m, lai noteikums

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

būtu izpildīts, ir lielāks par k, tad šāda rinda ir intervallā (α, β) *nevienmērīgi* savirzāma. Tātad:

Rinda (2) ir intervallā (α, β) vienmērīgi savirzāma, ja, pieņemot kaut kādu mazu pozitīvu skaitli ε, varam rindā atrast rādītāju dabisku skaitli m, tādu, ka ar katru x no intervalla (α, β)

$$|r_n(x)| < \varepsilon,$$

tiklīdz $n \geqslant m$. Rinda (2) ar kādu x no intervalla (α, β) var būt absolūti vai neabsolūti savirzāma. Pirmajā gadījumā rindas locekļiem visiem ir tā pati zīme, bet ja zīmes ir pozitīvas un negātīvas, tad rindai

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots$$

jābūt savirzāmai. Tikai šādā gadījumā funkcijai $f(x)$ ir rindas (2) summas īpašība. Ja rinda (2) ir neabsolūti savirzāma, tad $f(x)$ vērtība ir atkarīga no rindas locekļu sakārtojuma.

Ja rinda (2) ir absolūti savirzāma ar katru x vērtību no intervalla (α, β), tad rindu sauc par *absolūti savirzāmu intervallā* (α, β).

48. Veierstrasa teōrēma. *Rinda*

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots,$$

kuŗas locekļi ir funkcijas no x, ir vienmērīgi savirzāma, ja rindai, kas veidota ar dotās rindas locekļu absolūtām vērtībām, varam uzrādīt konverģentu virsrindu ar pastāvīgiem pozitīviem locekļiem.

Pierādījums.

Pieņemam, ka rinda

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad (a_n > 0 \text{ un } a_n \text{ konst.})$$

ir savirzāma un ka ar kāda dota intervalla visiem x

$$|u_n(x)| \leqslant a_n.$$

Tad

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \\ + \ldots + |u_{n+p}(x)| \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}.$$

Tā kā rinda $\sum\limits_1^\infty a_n$ ir savirzāma, tad izteiksmi

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}$$

var pataisīt mazāku par katru kaut kādu pieņemtu mazu pozitīvu skaitli ε, ar visām pietiekami lielām vērtībām $n > N$ un ar katru $p \geqslant 0$. Tātad arī $|r_n(x)| < \varepsilon$ ar visiem $n > N$ un visām dotā intervalla x vērtībām. Rinda

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots,$$

tātad ir vienmērīgi savirzāma dotajā intervallā.

Piemēri:

Pieņemam, ka rinda

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ir savirzāma. Tad rinda

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots \ldots \quad (2)$$

ir vienmērīgi savirzāma, jo savirzāmā rinda (1) ar pozitīviem locekļiem ir rindas (2) virsrinda.

Rinda

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

ir vienmērīgi savirzāma, ja savirzāma ir rinda

$$|b_1| + |b_2| + |b_3| + \ldots$$

Rinda

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots$$

ir vienmērīgi savirzāma, jo šīs rindas virsrinda

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

ir savirzāma.

49. Vienmērīgi savirzāmas rindas summas nepārtrauktība.

Teōrēma.

Ja bezgalīga rinda, kuŗas locekļi ir nepārtrauktas funkcijas no x intervallā (α, β), *ir vienmērīgi savirzāma, tad šīs rindas robežvērtība šajā intervallā ir nepārtraukta funkcija no x.*

Starp rindas robežvērtību $f(x)$, rindas parciālsummu $s_n(x)$ un atlikumu pastāv sakars:

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x).$$

Tā kā, saskaņā ar pieņēmumu, rinda savirzāma, tad varam n izvēlēt tādu, ka ar katru x no intervalla (α, β)

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ tātad arī } |r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tā kā $s_n(x)$, kā nepārtrauktu funkciju galīga summa, ir nepārtraukta funkcija, tad varam pozitīvu skaitli δ tā noteikt, ka arī

$$|s_n(x) - s_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

tiklīdz $|x - x'| < \delta$, x un x' atrodas intervallā (α, β).

No augšējā dabūjam, ka:

$$|f(x) - f(x')| = |s_n(x) - s_n(x') + r_n(x) - r_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Augšējā izteiksme rāda, ka $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija intervallā (α, β).

Potencrindas.

50. Potencrindas definicija. Vispārīgas izteiksmes. Savirzāmības noteikumi.

Starp bezgalīgām rindām visbiežāk sastopam potencrindas. Šīm rindām ir svarīga nozīme.

Rindu

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

kuŗā $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ ir pastāvīgi, reāli skaitļi, x nepārtraukti mainīgs, sauc par *potencrindu.*

Pielietojot Dalambēra savirzāmības pazīmi attiecībā uz potencrindām, dabūjam izteiksmi:

Ja kvocients $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *ar pastāvīgi augošu n tiecas uz noteiktu robežu* λ (*kas var būt arī* 0 *vai* $+\infty$), *tad rinda* (1) *ir absolūti savirzāma ar visām x vērtībām, ar kuŗām* $|x| < \lambda$. Ja $x = -\lambda$ vai $x = \lambda$, tad jautājums par rindas (1) savirzāmību paliek neizšķirts.

Intervallu $(-\lambda, \lambda)$ sauc par *rindas savirzāmības intervallu* un λ par *konverģences radiusu.*

Ja rindu

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+|a_3x^3|+\ldots$$

apzīmējam ar

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots,$$

tad

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|.$$

Ja $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ar $n\to+\infty$ tiecas uz λ, tad

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{\lambda}$$

un

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x|}{\lambda}.$$

Tātad, rinda (1) ir absolūti savirzāma, ja

$$|x|<\lambda.$$

Ja $|x|=\lambda$, tad

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1.$$

Šādā gadījumā secinājums par rindas savirzāmību nav iespējams. Ja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=+\infty,$$

tad

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0.$$

Šādā gadījumā ar visām $|x|$ vērtībām

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=0.$$

Rinda (1), tātad, absolūti savirzāma ar katru x vērtību.

Šādā gadījumā rindu (1) sauc par *pastāvīgi savirzāmu.*

Ja $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=0$, tad $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$ un

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=+\infty$$

ar katru $|x|>0$.

Rinda (1) tad nav savirzāma ar visām x vērtībām, izņemot $x=0$, rindā tad paliek tikai loceklis a_0. Šādā gadījumā rindu (1) sauc par *pastāvīgi nesavirzāmu.*

Potencrindas, tātad, var iedalīt: *pastāvīgi nesavirzāmās, pastāvīgi savirzāmās un galīgā intervallā savirzāmās rindās.*

Rinda

$$1 + 1 \, . \, x + 1 \, . \, 2x^2 + 1 \, . \, 2 \, . \, 3x^3 + \, . \, . \, . \, . \, .$$

ir pastāvīgi nesavirzāma, jo še $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0$.

Rinda

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \, . \, 2} + \frac{x^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} + \, . \, . \, . \, . \, .$$

ir pastāvīgi savirzāma, jo še $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = + \infty$.

Rinda

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \, . \, . \, . \, .$$

ir savirzāma intervallā $-1 < x \leqslant 1$.

1. savirzāmības teōrēma.

Ja potencrinda bez $x = 0$ savirzāma arī ar kādu citu vērtību $x = \xi \neq 0$, tad šī rinda ir absolūti savirzāma arī vēl ar visām x vērtībām intervallā $(-\xi, \xi)$.

Pierādījums.

Tā kā rinda

$$a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \, . \, . \, . \, . \, . \, ,$$

saskaņā ar pieņēmumu, ir savirzāma, tad ar kādu noteiktu locekli sākot jābūt

$$|a_n \xi^n| < a \qquad (a \text{ dots noteikts skaitlis})$$

Tad, vismaz, ar kādu noteiktu n sākot:

$$|a_n x^n| = |a_n \xi^n| \, . \left|\frac{x}{\xi}\right|^n < a \, . \left|\frac{x}{\xi}\right|^n.$$

Šī izteiksme rāda, ka rinda

$$a\left|\frac{x}{\xi}\right| + a\left|\frac{x}{\xi}\right|^2 + a\left|\frac{x}{\xi}\right|^3 + \, . \, . \, . = a\left|\frac{x}{\xi}\right|\left(1 + \left|\frac{x}{\xi}\right| + \left|\frac{x}{\xi}\right|^2 + \, . \, . \, . \, .\right)$$

ir rindas

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \, . \, . \, . \, . \, . \, .$$

virsrinda un tā, kā ģeometriska rinda, ir savirzāma ar

$$\left|\frac{x}{\xi}\right| < 1, \text{ t. i. ar } -\xi < x < \xi.$$

2. savirzāmības teōrēma.

Potencrindas ir vienmērīgi savirzāmas konverģences intervallā katrā slēgtā daļas intervallā.

Pierādījums.

Apzīmējam konverģences radiusu ar r un ar ρ pastāvīgu skaitli, kas izpilda noteikumu

$$0 < \rho < r,$$

tad, ar visiem $|x| < \rho$

$$|a_n x^n| < |a_n| \rho^n.$$

Rindas

$$a_1 \rho + a_2 \rho^2 + a_3 \rho^3 + \ldots .$$

locekļi ir pozitīvi, un tā ir savirzāma. Šī rinda ir rindas

$$\sum_1^{\infty} a x^n$$

virsrinda. Tātad, saskaņā ar Veierstrasa teorēmu, rinda

$$\sum_1^{\infty} a x^n$$

ir vienmērīgi savirzāma ar visiem $|x| < \rho < r$.

51. Rindu reizināšana. Pieņemot, ka sekojošās bezgalīgās rindās (1) un (2) visi locekļi ir pozitīvi, rindas ir savirzāmas un rindu summas ir U un V, tad rakstām:

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Reizinot šo rindu locekļus, kā norāda likums, kas ieskatāms no izteiksmes (3), redzam, ka šī izteiksme ir bezgalīga rinda:

$$(u_1 v_1) + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \\ + (u_1 v_4 + u_2 v_3 + u_3 v_2 + u_4 v_1) + \ldots\ldots \quad (3)$$

Ar augšējiem pieņēmumiem rinda (3) ir savirzāma. Šīs rindas summa W ir rindu (1) un (3) summu U un V reizinājums UV.

Pierādījums.

Rindu (1), (2) un (3) parciālsummas ir:

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$
$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$$
$$W_n = (u_1 v_1) + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \ldots + \\ + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1).$$

Tā kā rindās (1) un (2) visi locekļi ir pozitīvi, tad pozitīvi ir arī locekļi rindā (3).

Redzams, ka

$$W_n < U_n \, . \, V_n,$$

jo parciālsummā W_n atrodas tikai tie parciālsummu U_n un V_n locekļu pāŗu reizinājumi, kuŗos rādītāju summa mainās no 2 līdz $n+1$, kamēr reizinājumā $U_n V_n$ atrodas ne tikai visi minētie reizinājumi, bet arī vēl reizinājumi, kuŗos rādītāju summa mainās no $n+2$ līdz $2n$, ka sekojošie:

$$(u_2 v_n + u_3 v_{n-1} + \ldots + u_n v_2) + (u_3 v_n + u_4 v_{n-1} + \ldots + u_n v_3) + \\ + \ldots + u_n v_n.$$

Apzīmējot ar k lielāko veselu skaitli, kas atrodas skaitlī $\frac{n}{2}$, varam rakstīt:

$$W_n > U_k \,.\, V_k,$$

jo, ja $n = 2k$, tad parciālsummā W_n atradīsies visi reizinājumu pāŗi ar rādītāju summu no 2 līdz $n+1$, t. i. no 2 līdz $2k+1$, bet reizinājumā $U_k V_k$ atradīsies tikai tie, kuŗos rādītāju summa mainās no 2 līdz $2k$, kas pierāda augšējo izteiksmi.

Ja $n = 2k+1$, tad parciālsummā W_n atradīsies reizinājumu pāŗi ar rādītāju summu līdz $n+1$, t. i. līdz $2k+2$, kamēr reizinājumā $U_k V_k$ atradīsies, kā agrāk, reizinājumu pāŗi ar rādītāju summu līdz $2k$, kas pierāda izteiksmi.

No augšējā redzams, ka:

$$U_k V_k < W_n < U_n V_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ja $n \to \infty$, tad arī $k \to \infty$. Reizinājumi $U_k V_k$ un $U_n V_n$ katrs tiecas uz vienu un to pašu robežu $U \,.\, V$.

Tā kā

$$\lim_{n\to\infty} U_k V_k = \lim_{n\to\infty} U_n V_n = UV,$$

tad ievērojot (4), secinām, ka:

$$\lim_{n\to\infty} W_n = U \,.\, V.$$

No augšējā secinām, ka:

$$\lim_{n\to\infty} (U_n V_n - W_n) = 0.$$

Tā kā rindas (1) un (2) pieņemtas ar pozitīviem locekļiem, tad starpībā

$$U_n V_n - W_n = (u_2 v_n + u_3 v_{n-1} + \ldots + u_n v_2) + \\ + (u_3 v_n + u_4 v_{n-1} + \ldots + u_n v_4) + \ldots + u_n v_n$$

atrodas tikai pozitīvi locekļi.

Ja, pielietojot agrāko paņēmienu, reizinām rindas ar pozitīviem un negātīviem locekļiem vai rindas ar kompleksiem locekļiem, tad augšējā starpībā atradīsies arī negātīvi vai kompleksi locekļi. Šādā gadījumā starpības modulis būs mazāks par tās agrāko absolūto lielumu. Tas nozīmē, ka arī šajā gadījumā $\lim\limits_{n\to\infty} (U_n V_n - W_n)$ ar $n \to \infty$ droši ir 0, tādēļ rindu reizināšanas paņēmiens, kas pierādīts rindām ar pozitīviem locekļiem, pielietojams arī rindām ar pozitīviem un negātīviem locekļiem vai arī rindām ar kompleksiem locekļiem.

Še jāievēro, ka rindu reizināšanas paņēmiens pierādīts tikai tām rindām ar pozitīviem un negātīviem locekļiem vai arī rindām ar kompleksiem locekļiem, kam atbilst savirzāmas rindas ar pozitīviem locekļiem.

Binoma rinda.

52. Binoma rindas definīcija. Elementārā algebra pierāda Ņūtona formulu binoma kāpināšanai tikai ar veselu pozitīvu rādītāju. Izvirzot izteiksmi $(1+z)^n$, kur n vesels un pozitīvs, ar Ņūtona formulu, dabūjam:

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} z^3 + \;.\;.\;.\;. \qquad (1)$$

Šīs izteiksmes labā puse ir binoma rindas vienkāršākais veids. Dotajā gadījumā rinda ir galīga un tajā ir $n+1$ locekļu. Šo locekļu koeficientus sauc par *binoma koeficientiem*, kas dotajā gadījumā visi ir veseli skaitļi.

Apskatot binoma koeficientu veidošanas likumu, redzam, ka tas nav atkarīgs no n skaitliskās vērtības, tāpēc izteiksmes (1) labo pusi varam apskatīt ar katru n vērtību.

Pēc tādas, rindas (1) jēdziena paplašināšanas, apzīmējot rindas nezināmo summu ar N, dabūjam izteiksmi, kas definē binoma rindas vispārīgo veidu,

$$N = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} z^2 + \;.\;.\;.\;.\;.$$

Skaitli n, no kā atkarīgas koeficientu skaitliskās vērtības, sauc par *rindas rādītāju.*

Šī rinda ir bezgalīga ar visām n vērtībām, izņemot gadījumu, kad n vesels un pozitīvs skaitlis. Rindas locekļa u_{k+1} izteiksmes

$$u_{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2) \;.\;.\;.\;.\;.\; (n-k+1)}{1 \,.\, 2 \;.\;.\;.\;.\;.\; k} z^k$$

skaitītāju veido starpības, ko mazināmie ir veseli pozitīvi skaitļi, kas var nenoteikti augt. Ja n vesels un pozitīvs, tad ar $k = n+1$, t. i. loceklī $n+2$ šī starpība ir 0. Tādēļ loceklis $n+2$ un visi tālākie locekļi ir 0. Šāds apstāklis nekad neparādās, ja n ir negātīvs vai daļas skaitlis. Šādā gadījumā rinda ir bezgalīga.

Rinda ir savirzāma neatkarīgi no n ar katru z vērtību, kā absolūtā vērtība ir mazāka par 1.

Tā kā

$$u_{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2) \;.\;.\;.\; (n-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \;.\;.\;.\; k} z^k \text{ un}$$

$$u_k = \frac{n(n-1)(n-2) \;.\;.\;.\; (n-k+2)}{1 \,.\, 2 \;.\;.\;.\; (k-1)} z^{k-1},$$

tad $$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n-k+1}{k} z = \left(\frac{n+1}{k} - 1\right) z$$

un $$\lim_{k\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{k} - 1\right) z \right| = |z|.$$

Rinda, tātad, savirzāma, ja
$$|z| < 1.$$

53. **Binoma rindu reizināšana.** Reizinot divas binoma rindas:

$$M = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} z^3 + \dots$$

$$N = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{1.2} z + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} z^3 + \dots,$$

kuŗās $|z| < 1$, pielietojot agrāk norādīto reizināšanas paņēmienu, dabūjam jaunu rindu:

$$MN = 1 + (m+n)z + \left[\frac{m(m-1)}{1.2} + mn + \frac{n(n-1)}{1.2}\right] z^2 +$$
$$+ \left[\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \frac{m(m-1)}{1.2} n + m\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right] + z^3 + \dots$$

Augšējā rindā pārveidojot trešo un ceturto locekli, vaŗam rakstīt:

$$MN = 1 + (m+n)z + \frac{(m+n)(m+n-1}{1.2} z^2 +$$
$$+ \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1.2.3} z^3 + \dots$$

Kā redzams, šī rinda arī ir binoma rinda ar rādītāju $m+n$, tātad: *Divu binoma rindu reizinājums arī ir binoma rinda, kuŗas rādītājs ir reizināto rindu rādītāju summa.*

Ja reizinām s binoma rindas, kam tas pats rādītājs, tad dabūjam rindu:

$$N^s = 1 + nsz + \frac{ns(ns-1)}{1.2} z^2 + \frac{ns(ns-1)(ns-2)}{1.2.3} z^3 + \dots,$$

t. i.:

Binoma rindas vesela pakāpe arī ir binoma rinda, kuŗas rādītājs ir dotās rindas rādītāja n reizinājums ar pakāpes rādītāju s.

54. **Ņūtona formulas paplašināšana negatīviem rādītājiem.** Veidojam binoma rindu ar veselu negatīvu rādītāju $n = -p$. Šīs rindas nezināmo summu apzīmējam ar N, tad:

$$N = 1 + (-p)z + \frac{(-p)(-p-1)}{1.2} z^2 + \frac{(-p)(-p-1)(-p-2)}{1.2.3} z^3 + \dots \quad (1)$$

Šī rinda ir bezgalīga. Reizinām šo rindu ar galīgu rindu, kuŗas rādītājs ir pozitīvs skaitlis p un kuŗas summa ir $(1+z)^p$, t. i. ar rindu

$$(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{1.2} z + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} z^3 + \dots$$

Kā reizinājumu dabūjam binoma rindu ar rādītāju $-p+p=0$. Šīs rindas veids ir:

$$1+0\,.\,z+\frac{0\,(0-1)}{1\,.\,2}z^2+\frac{0\,(0-1)\,(0-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3+\ldots$$

Šīs rindas visi locekļi, izņemot pirmo, ir nulles, tā tad reizinājuma vērtība ir 1.

Ievērojot teikto, dabūjam:

$$N\,(1+z)^p=1.$$

No šīs izteiksmes dabūjam nezināmo summu

$$N=(1+z)^{-p}.$$

Liekot N vērtību izteiksmē (1), dabūjam izteiksmi

$$(1+z)^{-p}=1+(-p)z+\frac{(-p)(-p-1)}{1\,.\,2}z^2+\frac{(-p)(-p-1)(-p-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3+\ldots,$$

kas pierāda, ka Ņūtona formula pielietojama arī ar veselu negātīvu rādītāju

55. Ņūtona formulas paplašināšana daļas un iracionāliem rādītājiem. Veidojam biskoma rindu ar daļas rādītāju $\frac{r}{s}$. Skaitītājs r var būt pozitīvs vai negātīvs vesels skaitlis, saucējs s vesels pozitīvs skaitlis. Apzīmējot šīs rindas nezināmo summu ar N, varam rakstīt:

$$N=1+\frac{r}{s}z+\frac{\frac{r}{s}\left(\frac{r}{s}-1\right)}{1\,.\,2}z^2+\frac{\frac{r}{s}\left(\frac{r}{s}-1\right)\left(\frac{r}{s}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3+\ldots\ldots(1).$$

Šī rinda ir bezgalīga. Kāpinot šo rindu ar veselu pozitīvu rādītāju s dabūjam:

$$N^s=1+rz+\frac{r(r-1)}{1\,.\,2}z^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3+\ldots$$

Šī rinda, atkarībā no r zīmes, var būt galīga vai bezgalīga, bet tā kā ar pozitīvu, tā arī negātīvu r, ir Ņūtona formula. Ievērojot teikto, dabūjam:

$$N^s=(1+z)^r$$

un

$$N=(1+z)^{\frac{r}{s}}.$$

Ievietojot N vērtību izteiksmē (1) dabūjam:

$$(1+z)^{\frac{r}{s}}=1+\frac{r}{s}z+\frac{\frac{r}{s}\left(\frac{r}{s}-1\right)}{1\,.\,2}z^2+\frac{\frac{r}{s}\left(\frac{r}{s}-1\right)\left(\frac{r}{s}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}z^3+\ldots,$$

kas pierāda, ka Ņūtona formulu varam pielietot arī tad, ja rādītājs ir pozitīvs vai negātīvs daļas skaitlis.

Ka Ņūtona formula lietojama arī tad, ja rādītājs ir pozitīvs vai negātīvs iracionāls skaitlis, ieskatāms no sekojošā. Pieņemam, ka x ir tāds rādītājs, un ka racionālās daļas

$$\frac{r}{s}, \frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \ldots$$

ir skaitļu sekojums, kā robeža ir x.

Tā kā Ņūtona formulu varam lietot ar katru no augšējām daļām kā rādītāju, tad, pamatojoties uz robežvērtību teōrijas principa, šo formulu varam lietot arī ar rādītāju x. Tātad:

$$(1+z)^x = 1 + xz + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \ldots,$$

kur x var būt vesels, daļas vai iracionāls pozitīvs vai negātīvs skaitlis.

56. Izteiksmes $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ robežvērtība ar $m \to \infty$. Šo robežvērtību parasti apzīmē ar burtu e, tātad

$$\lim_{m \to \infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Pieņemam pagaidām, ka mainīgais skaitlis m visā maiņā ir vesels un pozitīvs. Kamēr m ir vesels un galīgs, izteiksme

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

ir algebriska, tāpēc to var pārveidot saskaņā ar algebras likumiem. Pieņemam, ka m vesels, pozitīvs un galīgs, lai gan liels skaitlis, un apskatām izteiksmes $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ izvirzījumu ar Ņūtona formulu.

Šajā izvirzījumā atradīsies $m+1$ locekļu. Atdalot $k+1$ pirmos locekļus un pārējos apzīmējot kā atlikumu R, dabūsim:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{m^3} + \ldots + \\ + \frac{m(m-1) \ldots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \cdot \frac{1}{m^k} + R.$$

Še

$$R = \frac{m(m-1) \ldots (m-k)}{1 \cdot 2 \ldots (k+1)} \cdot \frac{1}{m^{k+1}} + \ldots + \\ + \frac{m(m-1) \ldots [m-(m-1)]}{1 \cdot 2 \ldots m} \cdot \frac{1}{m^m}.$$

Šīs izteiksmes pārveidojam, ievērojot, ka katra locekļa skaitītāja faktoru skaits ir tāds pats kā saucējā m pakāpes rādītājs. Dalot katru saucēja reizinātāju ar m, dabūjam:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1\,.\,2\ldots k}+R.$$

R pārveidojot iznesam iekavu priekšā $k+1$ locekļa izteiksmi. Tad

$$R=\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1\,.\,2\ldots k}\left[\frac{1-\frac{k}{m}}{k+1}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{k}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{(k+1)\ldots m}\right].$$

Tā kā ar $m\to\infty$ visas daļas $\frac{1}{m}, \frac{2}{m} \ldots \frac{k-1}{m}$ ir bezgalīgi mazi lielumi, tad, liekot $m\to\infty$, dabūjam:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e = 2+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{1}{1\,.\,2\ldots k}+\lim_{m\to\infty}R.$$

Apskatot $\lim\limits_{m\to\infty} R$, nav vajadzīga šī lieluma precīza noteikšana. Šī robežvērtība vajadzīga tikai tam nolūkam, lai noteiktu $k+1$ locekļu summas tuvošanās pakāpi īstajai e vērtībai.

Lai noteiktu $\lim\limits_{m\to\infty} R$, še atkal pieņemam m pirms kā galīgu, lai gan pēc patikas lielu.

Ja R izteiksmē atmetīsim mazinātājus, daļas $\frac{1}{m} \ldots \frac{m-1}{m}$, tad palielināsim reizinātāju iekavu priekšā, kā arī visus skaitītājus iekavās, tādēļ

$$R<\frac{1}{1\,.\,2\ldots k}\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\,(k+2)}+\ldots+\frac{1}{(k+1)\ldots m}\right].$$

Izteiksme iekavās ar katru m ir mazāka par $\frac{1}{k}$, kas redzams no sekojošā:

Iekavās esošā daļu summa palielināsies, ja saucējos katru reizinātāju aizstāsim ar vismazāko no tiem, t. i. ja iekavās rakstīsim summu

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)^{m-k}}.$$

Šī izteiksme ir dilstoša ģeometriska rinda, kuŗas summa vēl palielināsies, ja galīgās rindas vietā ņemsim bezgalīgu rindu, kuŗas summa tad ir $\frac{1}{k}$. Ievērojot augšējo, dabūjam, ka:

$$R<\frac{1}{1\,.\,2\ldots k}\cdot\frac{1}{k}.$$

Apzīmējot ar Θ skaitli, kas mazāks par vienību, varam rakstīt:

$$R = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k} \cdot \frac{\Theta}{k}.$$

Θ mainās ar m, bet arvienu $\Theta < 1$. Ja apzīmējam

$$\lim_{m\to\infty} \Theta = w, \qquad (w < 1),$$

tad

$$\lim_{m\to\infty} R = \frac{1}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k} \cdot \frac{w}{k}$$

Ar augošu k atlikums $R \to 0$. Rinda

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 2 + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots$$

tādēļ ir savirzāma. Šīs rindas summa ir $e = 2\,.\,7182818284\ldots$

57. Paplašinājums, kad m ir daļas skaitlis vai nēgatīvs skaitlis. Funkcijas $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ maiņas procesā pieņēmām, ka m ir pozitīvs un vesels skaitlis. Tagad pierādīsim, ka arī gadījumā, kad m ir daļas skaitlis vai irracionāls, vai negātīvs skaitlis, šīs funkcijas robeža ir skaitlis e.

Maiņas procesa katrā momentā, mainīgais pozitīvais skaitlis m atrodas starp diviem veseliem skaitļiem p un $p+1$, tātad arvienu:

$$p < m < p + 1.$$

Ar augošu daļas vai irracionālu skaitli m aug arī veselie skaitļi p un $p+1$, arvienu izpildot augšējo noteikumu.

Kā redzams

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

un

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p.$$

Tātad

$$\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^p < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1}$$

Augšējo izteiksmi varam rakstīt šādā veidā:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}}{\left(1+\frac{1}{p+1}\right)} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{p}\right)^p\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Tā kā

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}}{\left(1+\frac{1}{p+1}\right)} = e$$

un

$$\lim_{p\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{p}\right)^p \left(1+\frac{1}{p}\right)\right] = e,$$

tad arī

$$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Tātad arī ar m daļas vai irracionalu skaitli

$$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Tagad pieņemam, ka m ir negātīvs, liekam

$$m = -n \quad (n > 0).$$

Tad

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n =$$
$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1+\frac{1}{n-1}\right).$$

Tā kā ar $m = \infty$ arī $n - 1 = \infty$, tad

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1$$

un

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e.$$

Tātad

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} . 1 = e.$$

Alfabētisks rādītājs.