Saturs

Ievads.

039786

Ievads.

059787

Pieskaršanās un oskulācijas teorija klasiskā diferenciālģeometrijā jau no tās sākumiem ir svarīga nodaļa. ~~Varētu pat teikt, ka~~ Šī nodaļa savā ziņā ir vecāka par pašu diferenciālģeometriju, jo pieskaru konstrukcijas problēmas nodarbināja jau senatnē grieķu matemātiķus. Aplūkojot šīs nodaļas izveidojumu plašākās diferenciālģeometrijas un analītiskas ~~traktātos~~, uzkrīt zināma nevienmērība atsevišķo problēmu izstrādājumā. Kamēr divu līkņu vai līknes un virsas pieskaršanās palaikam tiek aplūkota visai pilnīgi, to pētot arī gadījumiem, kad pieskaršanās punkts ir singulārs, runājot par dotā tipa oskulācijas figūru, mēdz aprobežoties ar pieskaršanās kārtas konstatēšanu, kas šo figūru ~~...~~ noteic, eventuāli pieminot, ka atsevišķos ~~līknes~~ dotās līknes vai virsas punktos šī kārta var kļūt lielāka ~~noteic~~ t.i. notiek superoskulācija.

~~Gadījums, kad šī kārta dotai līknei pieskaršanās kārta ar oskulācijas figūru ir lielāka, nekā to vispārīgā gadījumā prasa šīs figūras noteikšana~~ Superoskulācijas ~~problēma~~ ~~gadījums katrā kādas līknes punktā~~ ~~līdz šim ir līdz aprobežots parasti tikai~~ skatīts laiskam ~~viensk. tām~~ Pavisam speciālām oskulācijas figūrām, kas ir viennozīmīgi ~~...~~ noteiktas: ~~...~~ taisnei, ~~...~~ riņķim, konikai utt. plaknē, taisnei, plaknei un lodei telpā. ~~Šai~~ ~~...~~ Laikam līdz šim vienīgajām ir pētīts superoskulācijas gadījums katrā dotas līknes punktā. → Radās tāpēc doma aplūkot arī vispārīgākus gadījumus, kad oskulācijas figūra nav viennozīmīgi noteikta, un kā speciālu piemēru aplūkot telpas līkņu oskulāciju ar cilindru.

~~Daļa no šajos pētījumos iegūtiem rezultātiem atklāj ienesta sekojošā rakstā.~~

Izrādījās, ka no ~~šādā kārtā~~ šāda vispārīgāka ~~gadījuma~~ viedokļa rangoties, pieminētās oskulācijas figūras ~~...~~ atklāsi kādam izņēmuma gadījumam, kam ~~...~~ pieņemt

Pirmā daļa. Kāpēc – vispār līnijas pielietot (?) un kur, ~~kas~~ resp., uz kādiem, tāpat kur praktiski.

~~Fizika~~ pārosculācija – el-tu stacionārās. Vispār ... līnijas ... ar attiec ... ar līn. ... ar dažādām ... līnijām un ... līnijas ... ... ar ... ...

Ievads: 1° vektorijās, Frenē formulas [Vēsture: Pitkiali N. Ann. 1904
Tamerle Fortsch. 1931, 57, p. 868–869

2° Lemma.

I daļa. Osculācija – nekustīgas normas

1 nod. Vispārīgā teorija

Osculācija un pārosculācija : 3. vispārīgā teorija, pārosculācija = ...

~~... ...~~).

Pārosculācija 4. Ja savienojas lineāras attiecībās pret param – stacionāra
~~nav~~ lineārās – ...!

5. Ja

II Līnijas osc. cilindrās.

1. nod. V-nas. (arī pārosculācijas)

~~2. nod. Saskaras~~ – ..., saskaras stāvs ~~3~~.

2. Trešās kārtas pieskaršanās

Schell'a cilindrs;

Ģeom. vietas – ... visu, ... , ... (kas ... kārtas ? saskaras ar citiem osc. el-tiem ?

Segment. Dal. ...

... ...

3. Plaknes līnijas.

4. Līnijas ar $\rho = c^{\ldots}$

5. Nekustīgi cilindri.

ξ ~~x~~ Saskaru stāvs ... nekust. el-tiem.

$\xi \times 1$ Cilindra līnijas

$\xi \times 2$ vispār. līnijas.

III. Cilindru saimes.

Lai raksturotu plaknes līnijas p.t.a ... , ... kas ... cilindrs ~~...~~ ~~osc. el-tus ... ...~~, ... tika ... (l) kas ~~...~~ ... plakni ... vispār ... ar ... ... līnijas ... ... ~~...~~ ... ... ~~...~~ ... ... ~~...~~ ... ~~...~~ ... ~~...~~ ... ~~...~~ Ja ... ... kas plakni ... ~~...~~ ... – ~~polinoms un ...~~ ... līn. (l), ~~...~~ ... un ... ... pārosculācija ~~...~~ ... līn. (l).

... ... līn. (l).

... ...

un : noteikt vienā pa…

Ka šis parallēlisms nav ticis izlietāts jau agrāk, ka…
sekas: pētot charakteristiskus punktus aplūko vienādojumu ar vienu para-
metru, pēc kā atvasina, un vairākiem nezināmiem – punkta koordinātām
oskulētājai figūrai tuvojoties dod vienādojumu arī ar vairā-
kiem noteicējiem parametriem – bet vienīgo parametru, no
~~nezināmiem~~ – vispār
kā šis vienādojums atkarīgs, tanī ietilpina tikai a posteriori, dodot
punkta koordinātas kā parametra funkcijas. ~~Aplūkot vispār~~
~~gadījumu~~, Pētīt ~~līknei~~ vai virsmai, kam vienādojums satur. vienu
vienīgu koordinātu un vairākus parametrus, ~~...~~ kamēr atbilstošā problēma-
liskas esam pasākums bez kādas jēgas, kamēr ~~palīgā~~ atbilstošā problēma-
pētīt punktus, ko nosacām izlietājot vienu vienādojumu ar vairākiem
koordinātām un vienu parametru, kā jau teikts, ~~...~~ palaižam
tiek likta ~~charakteristiskos~~ aplūcijas teorijas pamatā.

~~Dalla~~ Šis raksts ~~...~~ visumā ietverts klasiskās diferenciālģeometrijas
~~Dautas~~ ~~no~~ ~~...~~
garā, prasot, lai visām funkcijām eksistētu visi vajadzīgie
atvasinājumi, turklāt ar ~~...~~ līdzīgu ejot apkārt singulāriem
punktiem. ~~un~~ ~~...~~ Kamēr pieņēmums par atvasinājumu eksistē-
šo lietošai metodai ir fundamentāls, izvairīšanās no
singulāriem punktiem notiek lietderības labad, lai varētu kaut
cik izpētīt, kas notiek vispārīgos gadījumos. Tas darīts jo
sevišķi tāpēc, ka singularitāšu pētījumus tā kā tā nevar
pilnīgi veikt jau visai vienkāršos gadījumos, piemēram viena parame-
plāksnes līkņu saimes aploksnes problēmā. Kaut cik tuvāk
nodarbojoties ar singulāriem punktiem raksta apjoms būtu ļoti
ievērojami jāpaplašina.

039789

~~Darb~~

Raksta ~~sākumā~~, ~~lietoti pamat~~ pirmā daļā aplūkojuma pamatā lietota n-dimensiju ~~[illegible] punktu [illegible] koordinātēs~~ [illegible] raksturota telpa. ~~Raksturoja~~ ~~virsas un līknes pieskaršanās~~ Tiek raksturota virsas un līkņu, kā arī divu ~~līkņu~~ pieskaršanās [illegible] ~~veidā definēta bezgalīgi tuvu punktu palīdzību~~ ~~ar piemērotā~~ ~~arī līkņu kārta kādu telpas [illegible] ar atrasti kritērijs vispār divu~~ un definēta virsas un līknes oskulācija un ~~pieskaršanās~~ kārta; ~~kā arī minēti~~ ~~dažā speciālā piemērā~~ ~~Tāt~~ superoskulācija; noradīta arī iespēja raksturot divu kārtu kārtu, ~~[illegible]~~ pieskaršanās kārta un pārbaudīts, ka ~~[illegible] vispārīgā~~ [illegible] nosakot telpā metriku, iegūtie pieskaršanās kārtas raksturojumi ir ekvivalenti parastā literatūrā, ~~kas ir salīdzina bezgalīgi mazu attālumu~~ ~~kārtas~~. ~~Norādītas~~ Seko ~~dažas~~ dindas šķietami metriskas dabas teorēma, ~~kas attiecas~~ ~~telpa~~ vispārinājums.

Aplūkojot viena parametra virsu saimes, konstatēts jau ~~[illegible]~~ paralēlisms ar oskulācijas problēmu un aplūkotas charakteristisko punktu ģeometriskās vietas un to īpašības, kā arī noteikts supercharakteristiska punkta un tā kārtas jēdziens.

Trešā paragrafā aplūkots kāds kritērijs vienādojuma (kājlīnijām slēdzien) ~~tādas~~ vai vispārīgs sistēmas atrisinājuma kārtas noteikšanai, kas šaurā veidā literatūrā minēts ~~[illegible] kritērija atrast~~ ~~un to~~ kritēriju atrast.

Tālāk ~~ir~~ pētītas dažādas superoskulācijas realizācijas iespējas, ~~un~~ norādīts ~~iespēja~~ paņēmiens atrast līknes, kas iespējami augstā kārtā superoskulē dotas saimes virsas kā arī norādīts uz šīs problēmas sakaru ar diferenciālvienādojuma singulāriem atrisinājumiem. Pētā īpašības, kas invariantas attiecībā pret kādu transformāciju grupu. ~~[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]~~

Otrā nodaļā ir kā ilustrācija pirmās nodaļas slēdzieniem aplūkoti jautājumi, kas saistās ar trīs dimensiju Eiklida telpas līkņu oskulācijām, rotācijas tilināšanā.

Citētās literatūras saraksts.

1) Julia, p. 4.
2) Klein p. 18 - Erlang.
3) Klein p. 22 Math. Annalen
4) = 3
5) Zanth p. 40
6) Dubourdieu } 51
7) Lie
8) Crucial }52
Mammana
9). Cartan 60
10) Darboux } 61
11) Cesàro
12) Picciati 65
13) Hlavatý } 66
14) Cotton } 60
15) = 11).
16) = 11)
17) Tamarel p. 26.
18) ~~Cartan~~ 9.
19) Schefers p. 82.
20) = 9
21) Loria 96.

1) Cartan 60
2) Cesàro 61
3) Cotton 66
4) Darboux 61
5) Dubourdieu 51
6) Hlavatý 66
7) Julia 4
8) Klein 2 darbi 18
9) Klein 22
10) Lie 51
11) Loria 96
12) Mammana 52
13) Picciati 65
14) Schefers 82
15) Crucial 52
16) Tamarel 26
17) Zanth 40

osculētājās figūras un characteristiskus punktus, proti ~~telpas līknes~~ punktā ~~sakarus skap~~

s osculētājām plāksnēm, sasko parallelismu pilnīgs laikam nairāk vai

instinktīvi piedevē projektīvai dualitātei punkta un plāksnes skapos.

~~gan~~ Īstenībā ~~sakars skap līknes un~~ metriski projektīvās

formējās, bet vispār nepārtrauktās punktu vai pieskaršanās

uzglabā otras kārtas pieskaršanās sakaru

formējās ~~tos uzglabāts sakarus skap~~ līknes un plākšņu saimes

ei dotās figūrās skapos. ~~tiešas~~ otras ~~kārtas pieskaršanās sakars~~

~~uzglabāts~~ Šis fakts ir sen zināms, bet, liekas

tiek pietiekami ievērots.

039790

1 param. usu saimi, kam a_j ... ∞ ... para

$a_j = a(t)$

usas

V ... (1) ... x ... a ...

V ... $f(x, a) = 0$ ...

$F(x, y, z, a, b, c) = 0$
$a, b, c(s) \rightarrow F_s(\,) = 0$

$F(x, y, z, a, b, c) = 0$
$x, y, z(t) \quad F_t(\,) = 0$

∞ ... Izslēdzot t: ∞^2 usu saimes

1) 2 param. pl. saime
2) ... usu ...

(1) $F(x, y, z, a, b, c) = 0$
(2) $F_s(\,) = 0$
$a(s)$

... 1 ... $= \infty^1$ ... Izslēdzot s, ∞^2 ... F ...

(1) $F(x, a) = 0$
(2) $F_t(x, a) = 0 \quad x(t)$

... ∞^1 ... Izslēdzot s, ∞^2 usu saimes. Tai ... F ...

• (Aplūkojuma pamatā ņemsim kādu n dimensiju variētāti T,
s elementus sauksim par punktiem. ~~Turpmāk visam~~ Pieņemsim, ka
ētātes punktiem var viennozīmīgi piesaistīt savstarpēji neatkarīgas
ordinātas x_i $(i = 1, 2 \ldots n)$, un ka šīs koordinātas var iegūt visas vai kādas
omplesās vērtības. Ja diviem punktiem visas koordinātu starpības tiecas
, mēs teiksim, ka viens punkts tiecas uz otru, jeb arī, ka abi punkti ir
galīgi tuvi. Dodot visus x_i kā viena parametra t vienvērtīgas ~~turpinājas~~

$$(1) \qquad x_i = x_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

definētas vai nu visām t vērtībām, vai arī kādam t vērtību
intervallam, mēs nosakām variētātē T ietilpstošu 1 dimensijas punktu
..., ko sauksim par līkni L. (1) ir šīs līknes parametriskais vienādojums;
ts, kā koordinātas dabūjam ar sakarībām (1) speciālai t vērtībai, ir līknes punkts.
Dodot vienu sakaru ~~...~~ x_i starpā

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

nosakām variētātē T ietilpstošu n-1 dimensijas variētāti V, ko
sauksim par virsu. (2) ir šīs virsas vienādojums; punkts, kā koordinātas apmierina virsas vienādojumu, ir virsas punkts; virsa ir tam kādam ... punktu, punkti, kā koordinātas apmierina vairāku virsu vienādojumus, ir šo virsu šķēlšanās punkti. Ja $n = 2$, virsas jēdziens
identisks ar līknes jēdzienu. Turpmāk aplūkojot virsu saimes S,
vispārīgā virsa atkarīga no N būtiskiem neatkarīgiem parametriem
($j = 1, 2, \ldots, N$), pieņemsim, ka vispārīgai saimes virsai atbilst tikai
un kā katrai a_j vērtību sistēmai atbilst viena noteikta virsa.
a parametru a_j vērtību sistēma ~~...~~, Līkne L atrodas
ā V, ja visu līknes punktu koordinātas apmierina virsas
nādojumu.

Piemērs minētiem jēdzieniem: T afinā n dimensiju telpa, x_i šīs telpas
rseta afinās koordinātas, S otrās kārtas līkņu (ja $n=2$), virsu (ja $n=3$),
ratisko hipervirsu (ja $n>3$) saime.

Augšējie pieņēmumi par sakarības viennozīmību punktu un to
dinātu, kā arī virsu un atbilstošo parametru starpā, tāpat arī par
jamību koordinātām x_i un parametriem a_j piešķirt patvaļīgas vēr-
as nav nepieciešami, bet gan tikai noder tālāko slēdzienu
kāršošanai. Tos atmetot, būtu vai nu formulējumos jāmin zināmi
bežojumi, vai arī jārīkojas ar citāda tipa vienādojumiem (piem.
nogēnu koordinātu gadījumā). Tā kā būtībā aplūkojamā
rija tomēr nemainītos, mēs aprobežosimies ar vienkāršāko
pārskatāmāko gadījumu, kad visi pieņēmumi ir ~~vēl~~ spēkā.

Lai turpmākie spriedumi nebūtu jāatkārto, izdarām tos vispārīgajam gadījumam, kad $n > 2$. Ja $n = 2$, tie paliek spēkā, vienīgi izteicieni „virsa V", „likne uz virsas V" jāaizvieto ar „likne V".

Turpmāk lietāsim šādus apzīmējumus un saīsinātas izteiksmes: punktu, kam koordinātas ir x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sauksim par punktu X, tāpat ~~virsu~~, kam atbilst parametru vērtības a_j $(j = 1, 2, \ldots, N)$ par virsu A. Faktu, ka funkcija f ir atkarīga no visiem vai dažiem x_i un no visiem vai dažiem a_j, izteiksim ar rakstību $f(x, a)$. $f[x(t), a]$ un $f[x, a(t)]$ apzīmēs funkcijas, kurās pārvēršas $f(x, a)$ pēc visu x_i, respektīvi visu a_j aizvietošanas ar kāda parametra t funkcijām $x_i(t)$, respektīvi $a_j(t)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f[x(t), a]}{\partial t} = \sum_{i=1} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dt} = \frac{\partial f[x, a(t)]}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt}.}$$

B ~~Ja funkcijas $f, h, \ldots m$ ir skaitā n, respektīvi N, to funkcionāldeterminantu attiecībā pret x_i respektīvi a_i rakstīsim~~

$$\cancel{\frac{\partial(f, g, h, \ldots m)}{\partial(x)} = \frac{\partial(f, g, h, \ldots m)}{\partial(x_1, x_2 \ldots x_n)}}$$

$$\cancel{\frac{\partial(f, g, h, \ldots m)}{\partial(a)} = \frac{\partial(f, g, h, \ldots m)}{\partial(a_1, a_2, \ldots a_N)}}$$

039793

Viena parametra t funkcijas $f(t)$ atvasinājumus pēc t apzīmēsim ar parastajiem simboliem $f' = \frac{df}{dt}$, $f^{(k)} = \frac{d^{(k)}f}{dt^k}$. Mums nāksies vairākkārt ~~apt~~ lietot vienādojumus, kas rodas, kad kāda vienādojuma $f = 0$ kreisās puses ~~atvas~~ pielīdzinam nullei šādā gadījumā tie, kā atvasinātu vienādojumu $f = 0$. ~~Ja~~ Ja kāds vienādojums ir identiski apmierināts, visi tā atvasinājumi ir identitātes. Visas tālāk sastopamās funkcijas ir viennozīmīgas, ja nav teikts pretējais; ~~tām~~ p un nepārtrauktas; tām eksistē nepārtraukti atvasinājumi visās formulās sastopamās kārtās.

2. Saimes f vispārīgo ~~virsm~~ ~~~~ rakstīsim ~~kreisā~~ ar vienādojumu

$$(3) \qquad f(x, a) = 0.$$

Ar parametriskiem vienādojumiem

$$(4) \qquad x_i = x_i(t)$$

Γ noteiksim līkni L. Virsma A iet caur līknes L p punktiem $M_1, M_2 \ldots M_p$, kam atbilst parametra vērtības $t_1, t_2, \ldots t_p$, ja reizē pastāv sakarības

$$(5) \quad \begin{cases} F(t_1, a) = 0 \\ F(t_2, a) = 0 \\ \text{---} \\ F(t_p, a) = 0 \end{cases}$$

kur

$$(6) \qquad F(t, a) = f[x(t), a]$$

Ievērot: 1° ~~Iecelot~~ [illegible] funkcijas; 2° [illegible] [illegible]

$$(7)\quad \begin{cases} F'(t_0, a) = 0 \\ \cdots\cdots \\ F^{(p-1)}(t_0, a) = 0 \end{cases}$$

039794

Faktu, ka pastāv sakarības (7), bet turklāt

$$(8)\quad F^{(p)}(t_0, a) \neq 0$$

tās izteiksim trīs dažādos ekvivalentos veidos: a) virsa A iet caur liknes ... bezgalīgi tuviem punktiem, kas sakrīt ar punktu X_0; b) virsai A ... liknei L punktā X_0 ir p-1-mās kārtas pieskaršanās; c) atrisinot vienādojumu (3) un (4) sistēmu attiecībā pret nezināmiem x_i un t, ... p atrisinājumu sistēmas sakrīt ar punkta X_0 koordinātēm un t_0 ... veidoto sistēmu, t.i. šī sistēma ir vienādojumu sistēmas p-kāršs atrisinājums. Pēdējo formulējumu varēsim lietāt arī tad, ja aplūkotā punktā visi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ top par nulli. Ja likne L dota patvaļīgi, tās vispārīgam punktam X maksimāli iespējamā p vērtība ir N. Tiešām, ja $p = N$, liekot t_0 vietā t, sistēma

$$(9)\quad \begin{cases} F(t, a) = 0 \\ F'(t, a) = 0 \\ \cdots\cdots \\ F^{(N-1)}(t, a) = 0 \end{cases}$$

sastāv no N vienādojumiem ar N nezināmiem a_j. Ja identiski nepastāv

$$(10)\quad \frac{D(F, F', \ldots, F^{(N-1)})}{D(a_1, a_2, \ldots, a_N)} = 0$$

jebkurām a_j vērtībām, sistēmu (9) var atrisināt attiecībā pret parametriem a_j, tos iegūstot kā t funkcijas. Vispārīgā gadījumā, ja vienādojumi nav visi lineāri attiecībā pret visiem a_j, mēs iegūsim vairākas atrisinājumu sistēmas. Katrai sistēmai atbilstošo virsu A sauksim par liknes L oskulējošo virsu punktā X. Mēs esam nonākuši pie pazīstamā fakta (vārdiem punkts, virsa un likne piešķirot to parasto nozīmi): virsai, kam vienādojums atkarīgs no N parametriem, ar vispārīgu liknes tās vispārīgā punktā ir N-1-mās kārtas pieskaršanās.

5. Lai oskulētājā virsai A ar likni L punktā X būtu tieši N+2-1-mās kārtas pieskaršanās, sistēmas (9) noteiktām a_j vērtībām jāapmierina ...

Skat. piem. G. Julia, ~~19. un 20. l.p.~~ [~~Skat. literatūras saraksta darba beigās~~]. Eléments de Géométrie infinitésimale, Paris, (Gauthier-Villars) 1927, 19. un 20. l.p. 2 izd. L.p. 885.-970 ;

No sakaru (7) un (8) pastāvēšanas seko tāda pat sakaru pastāvēšana punktā, kur $s=s_0$, funkcijai G ~~un~~ tās ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ atvasinājumiem pēc s, un otrādi; arī vērtības abos gadījumos būs tās pašas, tā tad arī neatkarīgas no parametra izvēles. Tiešām, funkcijas G h-tais atvasinājums pēc s ir izsakāms kā summa locekļiem, kas satur kā faktorus F atvasinājumus pēc t līdz kārtai h un t atvasinājumus pēc $\mathfrak{Z}$; vienīgais loceklis, kas satur $F^{(h)}$ ir $F^{(h)}\left(\frac{dt}{ds}\right)^h$. Ja F un $F^{(h)}$, kur $h=1,2,\ldots,p-1$ ir vienlīdzīgi nulle un $F^{(p)} \neq 0$ kad $t=t_0$, šīs pašas sakarības pastāvēs arī lielumiem G, $G^{(h)}$ un $G^{(p)}$, kad $s=s_0$, un otrādi.

3. Virsas un līknes pieskaršanās kārtas jēdzienu var paplašināt, vispirms viena vienādojuma (3) vietā ņemot vairākus ~~[illegible]~~ vienādojumus x_i starpā skaitā $m<n$:

$$(11) \qquad f_k(x) = 0 \qquad k=1,2,\ldots,m$$

Tie raksturos vispārīgajā gadījumā $n-m$ dimensiju varietāti V'. No aplūkošanas izslēgsim eventuālos singulāros gadījumus, kur V' dimensiju skaits ir lielāks par $n-m$, un V' singulāros punktus prasot, lai aplūkojamā punktā x_0 matricai

$$(12) \qquad \left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right\| \qquad \begin{array}{l} k=1,2,\ldots,m \\ i=1,2,\ldots,n \end{array}$$

rangs ir m. Tad varam teikt: līknei L un varietātei V' ir tieši p-tās kārtas pieskaršanās punktā x_0, ja tai ir vismaz p-tās kārtas pieskaršanās nosaka kādu līkni L.

Noteiksim parocīgāku kritēriju divu līkņu p-tās kārtas pieskaršanās raksturošanai. Vajadzības gadījumā pārnummurējot koordinātas, saskaņā ar pieņēmumu par matricu (12) varam panākt, ka funkcionāldeterminants

$$(14) \qquad \Delta = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}$$

nav vienlīdzīgs nullei ne punktā X_0, ne arī tā tuvumā, t.i. punktiem, kam koordinātas pietiekami maz atšķiras no X_0 koordinātām. Tad sistēmu (13) var atrisināt attiecībā pret $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ tos iegūstot kā x_n viennozīmīgas funkcijas. Izsakot savukārt x_n kā kāda parametra s apgriežami viennozīmīgu funkciju, sistēmas (13) definētai līknei L' iegūstam punkta X_0 tuvumā parametrisku attēlu

$$(15) \qquad x_i = \psi_i(s) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

turklāt

$$\frac{d\psi_n}{ds} \neq 0$$

punktā X_0 un tā tuvumā. Līkni L nosakām ar tipa (4) vienādojumiem

$$(16) \qquad x_i = \varphi_i(t) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

Ja līknes L un L' punktā X_0 pieskaras, tās abas iet caur šo punktu. Tā tad pastāv tādas noteiktas s un t vērtības s_0 un t_0, ka

$$\psi_i(s_0) = \varphi_i(t_0) = x_{i0} \qquad i = 1, 2, \dots, n \quad ,$$

kur x_{i0} ir punkta X_0 koordinātas.

Ja līknei L ar līkni L' punktā X_0 ir tieši p-tās kārtas pieskaršanās, saskaņā ar mūsu definīciju ir apmierināti vienādojumi

$$(17) \qquad f_k[\varphi(t)] = 0 \qquad k = 1, 2, \dots, n-1$$

kā arī to atvasinājumi līdz kārtai p, ja $t = t_0$, bet vismaz vienam k

$$(18) \qquad f_k^{(p+1)}[\varphi(t_0)] \neq 0.$$

$$(20)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{d\varphi_i}{dt} = 0 \qquad k=1,2,\dots,n-1 \quad \text{ja } t=t_0.$$

Atvasinot vienādojumus (18) un liekot $s=s_0$, dabūjam

$$(21)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{d\psi_i}{ds} = 0 \qquad k=1,2,\dots,n-1 \quad \text{ja } s=s_0$$

Sistēmas (20) un (21) sastāv no $n-1$ lineāra ~~k~~homogēna vienādojuma attiecībā pret φ_i un ψ_i pirmo atvasinājumu vērtībām punktā X_0. Abās sistēmās koeficienti ir tie paši, jo tie ir x_i-o funkcijas. Tā kā šo koeficientu matricas rangs, saskaņā ar pieņēmumu par determinantu (17) ir $n-1$, seko, ka punktā X_0 funkciju φ un ψ pirmo atvasinājumu vērtības ir proporcionālas un turklāt

$$\frac{d\varphi_n}{dt} \neq 0$$

punktā X_0 un tā tuvumā, jo citādi šai punktā pazustu visi φ_i atvasinājumi pēc t un X_0 būtu L singulārs punkts. $\varphi_n(t)$ ir tā tad t apgriežami vienvērtīga funkcija $t=t_0$ tuvumā (t.i. pietiekami mazām $|t-t_0|$) ~~un~~ Vienādojums

$$\psi_n(s) = \varphi_n(t)$$

nosaka s kā t apgriežami vienvērtīgu funkciju atbilstošo vērtību s_0 t_0 tuvumā. Ievietojot šo s vērtību līknes L' parametriskos vienādojumos (15), dabūjam tai jaunu parametrisku attēlu, ko varam rakstīt veidā:

$$(22)\qquad x_i = \Psi_i(t),$$

pie kam

$$\Psi_n(t) = \varphi_n(t)$$

un

$$\begin{cases} \Psi_i(t_0) = \varphi_i(t_0) \\ \Psi_i'(t_0) = \varphi_i'(t_0) \end{cases} \qquad i=1,2,\dots,n$$

jo pēdējā rindā atzīmētie lielumi, kā mēs konstatējām, ir proporcionāli un indeksa vērtībai n tie ir vienlīdzīgi.

Konstatēsim, ka p-tās kārtas pieskaršanās gadījumā

$$(23)\qquad \Psi_i^{(k)}(t_0) = \varphi_i^{(k)}(t_0) \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,n \\ k=0,1,2,\dots,p \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \Psi_i^{(0)} = \Psi_i \\ \varphi_i^{(0)} = \varphi_i \end{matrix}$$

$$(24)\qquad \Psi_i^{(p+1)}(t_0) \neq \varphi_i^{(p+1)}(t_0) \quad \text{vismaz vienam } i.$$

Kā jau redzējām, nosacījumi (23) ir izpildīti k vērt. 0 un 1. Pieņemot, ka tie ... m vērtībām

$$\sum_{i=1} \frac{\partial f_k}{\partial x_{i0}} \psi_i^{(r+1)}(t_0) + H_k = 0 \qquad k = 1, 2, \dots, n-1$$

kur lielumi G_k un H_k ir aprēķināmi tādā pat veidā ar funkciju ... respektīvi ψ_i atvasinājumu līdz kārtai r vērtībām, ja $t = t_0$, un funkciju f_k parciālo atvasinājumu vērtībām punktā x_0. No otrās sistēmas k-tā vienādojuma atņemot pirmās sistēmas k-to vienādojumu, dabūjam

$$(25) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_k}{\partial x_{i0}} \left[\psi_i^{(r+1)}(t_0) - \varphi_i^{(r+1)}(t_0) \right] = 0 \qquad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

jo saskaņā ar mūsu pieņēmumiem visi pārējie locekļi savstarpēji iznīcinas. Tā kā sistēmas (25) determinants nav vienlīdzīgs nullei, seko, ka (23) ir spēkā arī, ja $h = r+1$.

Noteikumi (23) tā tad ir spēkā visām h vērtībām no 0 līdz p. Ja (24) nebūtu spēkā nevienam i, punktā x_0 visu vienādojumu (17) $p+1$-mie atvasinājumi būtu apmierināti, kas nozīmētu vismaz $p+1$-mās kārtas pieskaršanos, pretēji hipotezei.

Otrādi, ja noteikumi (23) un (24) ir izpildīti, līkne L pieskaras līknei L' punktā x_0 ar koordinātām

$$x_{i0} = \psi_i(t_0) = \varphi_i(t_0)$$

Tiešām, tad funkcijām $f_k(\varphi)$ un $f_k(\psi)$ līdz ar to atvasinājumiem līdz kārtai p ir tās pašas vērtības, tā tad pastāv (17). Ja (18) nebūtu spēkā, tad sekotu, ka sistēmai (25) ar $r = p$ apmierina ieskaņu vērtības, kas nav visas vienlīdzīgas nullei. Bet tas nav iespējams, jo šis sistēmas determinants nav vienlīdzīgs nullei.

Tā kā noteikumi (23) un (24) ir simmetriski attiecībā pret līkņu L un L' tekošām koordinātām un parametra t vietā tos varētu formulēt ar s palīdzību, p-tās kārtas pieskaršanās gadījumā abām līknēm ir simmetriska loma: arī līkne L' pieskaras līknei L punktā x_0 ar kārtu p, vai citādi izsakoties: līknes L un L' pieskaras viena otrai ~~ir p-tās kārtas pieskaršanās.~~ ar kārtu p

Saskopojot iepriekšējo, varam teikt:

ja divām līknēm punktā x_0 ir p-tās kārtas pieskaršanās, to parametriskos vienādojumus (16) un (22) var izvēlēties tā, ka tā pašā parametra vērtība to raksturo punktu x_0 uz abām līknēm un šai vērtībai ir izpildīti noteikumi (23) un (24), un otrādi.

polinomus.

039799

...K Nr. 4, skat. A 6

5. Izlietājot līkņu pieskaršanās kārtas jēdzienu, var (ņemot) vispārīgā veidā raksturot divu varietāšu T ietilpstošu ~~V~~ ... kaut kādu dimensiju m un m' varietāšu V un V' pieskaršanās kārtu: kopīgā punktā X_0 tā ir tieši p, ja katrai vienas varietātes līknei var atrast vismaz vienu otrās varietātes līkni L', kam ar L punktā X_0 ir vismaz p-tās kārtas pieskaršanās, un turklāt kaut vienā varietātē eksistē vismaz viena līkne L, kam ~~...~~ pieskaršanās kārta nevar būt augstāka par p. Līdzīgi, kā divu līkņu gadījumā, arī te var abu varietāšu tekošā punkta X koordinātas x_i izteikt kā m resp. m' parametru funkcijas, tā kā visi vienas varietātes punkta noteicēji parametri ietilpst otrās varietātes parametru starpā; p-tās kārtas pieskaršanās gadījumā visiem x_i parciāliem atvasinājumiem pie kopīgiem parametriem līdz kārtai p punktā X_0 ir tās pašas vērtības, bet no p+1-mās kārtas atvasinājumiem vismaz viens pāris nav vienlīdzīgi.

Tāpat varētu arī, dodot kādu varietāšu V saimi S', ... šīs saimes varietāti, kas iespējami augstā kārtā pieskaras dotai līknei vai dotai varietātei V tās punktā X. ~~Ta...~~ Pieskaršanās kārtas pieaugšana te vairs nav raksturojama ar vienu noteikumu, kā tas bija līknei un virsai ~~gadījumā~~, bet gan ar vairāku jaunu noteikumiem. Tāpēc vispārīgajā gadījumā te būs bezgalīgi daudz saimes S' varietāšu V ar maksimālo pieskaršanās kārtu. Lai to starpā raksturotu vienu (vai vairākas, galīgā skaitā), ko varētu saukt par oskulētāju varietāti, būtu jāņem palīgā kādi papildus noteikumi. Šādi gadījumi ir pazīstami jau no klasiskās trīs dimensiju Eiklīda telpas diferenciālģeometrijas: pastāv, piemēram, vienkārša bezgalība parasto skrūves līniju, kam ar dotu līkni tās dotā punktā ir otrās kārtas pieskaršanās, kamēr vispārīgajā gadījumā nevienai šī kārtā nav trīs.

noteiktās a_j vērtības apmierina vēl sakarus

$$(26) \qquad F^{(k)}(t,a) = 0 \qquad k = N, N+1, \dots, N+r-1$$

039800

$$F^{(N+r)}(t,a) \neq 0 \quad //,$$

līknei L ar virsu A ir tieši $N+r-1$-mās kārtas pieskarš[anās]. To raksturosim, sakot, ka virsai A un līknei L punktā X ir r-tās kārtas superoskulācija jeb arī, ka virs-a līkni superoskulē ar kārtu r.

[Pa]plašinājums sk. $\boxed{4_c}$

5! **6.** Piesaistot varietātei V kādu ļoti vispārīgu metriku, mēs varam pieskaršanās kārtu raksturot ar bezgalīgi mazu attālumu salīdzināšanu, kā to mēdz darīt metriskās ģeometrijās. Šim nolūkam pietiek p-ar divu bezgalīgi tuvu punktu ~~X~~ ar koordinātām x_i ~~t~~ mēs rakstīsim $X(x_i)$ — un igrers $Y(x_i+dx_i)$ attālumu ds ņemt kaut kādu x_i un dx_i funkciju, kam vienīgi jāpilda šāds noteikums: ds kārta (patvaļīgiem dx_i) ir vienlīdzīga ar vismazāko no dx_i kārtām. Citādi šī attālumu raksturojošā funkcija var būt pilnīgi patvaļīga. ~~pie tam tai nav jābūt~~ Par punkta attālumu no virsas nosauksim tā vismazāko attālumu [no virsas tuv]ākošā punkta. Noteiksim kārtu punkta $Y(y_i)$ attālumam no virsas

$$(27) \qquad f(x) = 0,$$

pieņemot, ka Y atrodas bezgalīgi tuvu virsai. Tad ir atrodamā punktam Y bezgalīgi tuvā punkts $X(y_i+dy_i)$, kas atrodas virsā. Ievietojot šāda punkta X koordinātas virsas vienādojumā un izvirzot pēc augošām dy_i pakāpēm, dabūjam

$$(28) \qquad f(y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dy_i + \cdots = 0 ,$$

kur parciālo atvasinājumu vērtības jāaprēķina, liekot $x_i = y_i$, un atmestie locekļi ir otrās un augstākas pakāpes attiecībā pret dy_i. Pieņemot, ka punkts Y neatrodas bezgalīgi tuvu virsas singulāram punktam, kur pazūd visi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, vismaz vienam no šiem lielumiem (ar) punktā Y ir galīga vērtība. Līdz ar to visu lielumu dy_i kārta nevar b[ūt]

…ulē ar kārtu r.

Nr. 4 turpinājums ↓

Ievietojot nosacījumos (26) sistēmas (9) dotās a_j vērtības, katrs tiem top par vienu vienādojumu attiecībā pret t. Tā kā patvaļīgi dota …nei pirmā vienādojuma (26) saknes neapmierinās otro vienādojumu, šīm saknēm atbilstošos punktos notiks tieši pirmās kārtas superoskulācija; augstākas kārtas superoskulācija nebūs iespējama.

Ja turpretim līknē L atrodas uz vienas vai vairākām (galīgā skaitā) …sām V, tām atbilstošās parametru a_j vērtības apmierinās nosacījumus … un (26) patvaļīgi augstam k. Šinī gadījumā mēs varam runāt par bezgalīgi …elu superoskulācijas kārtu.

Nav grūti arī konstruēt piemērus, kur superoskulācijas kārta ir …alīga un patvaļīgi augsta, vai nu atsevišķā punktā, ja dota saime S, …ai arī katrā dotas līknes L punktā. Pirmā gadījumā pietiek …emt līkni L, kam ir patvaļīgi augstas kārtas p pieskaršanās ar kādas virsas V patvaļīgu līkni L'. Otrā gadījumā vispirms konstruējam katram līknes L punktam X, otru lī… L', kam ir tieši p-tās kārtas pieskaršanās ar L šai punktā. Velkot caur katru līkni L' patvaļīgu virsu V, tai būs vismaz p-tās kārtas pieskaršanās ar līkni L, un varēs vienmēr panākt, ka šī kārta ir tieši p. Šādā veidā katrai dotai līknei L varam piesaistīt viena parametra virsu saimi S, kam atsevišķas virsas katrā L punktā tai pieskaras patvaļīgi augstā galīgā kārtā p. Ņemot ~~N-1 parametra~~ līkņu L saimi, kas atkarīga no $N-1$ parametra, un katrai piesaistot nupat aplūkotā veidā viena parametra virsu saimi, dabūjam virsu saimes ar patvaļīgi lielu parametru skaitu N, kam atsevišķās virsas patvaļīgi augstā kārtā p pieskaras līknēm L katrā to punktā.

Dabiski rodas jautājums: ja dota virsu V saime S, vai ir iespējams atra… tādas līknes L, kam katrā to punktā būtu kārtas r superoskulācija ar kādu no virsām V, pie kam $r \geq 1$ un ir galīgs. Šai problēmai pievērsīsimies 4. paragrāfā, iep… tai atrodot kādu citu formulējumu un iegūstamo rezultātu raksturošanai aplū… vienādojumu sistēmas atrisinājumu kārtu.

apskatījām līkni L, kam tekošās koordinātas dotas kā parametra t funkcijas

$$(29) \quad x_i = x_i(t) \quad ,$$

039802

punktus X_0 un X_1, kam atbilst parametra vērtības t_0 un t_0+dt, kur dt ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs lielums. Ja visi $x_i'(t_0)$ nav vienlīdzīgi nullei, punktu X_0 un X_1 attālums arī ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs lielums. Pieņemot, ka punkts X_0 atrodas virsā (27), noteiksim kārtu punkta X_1 attālumam no šīs virsas. To varam panākt, aizvietojot virsas vienādojuma kreisā pusē lielumus x_i ar to izteiksmēm (29) un nosakot kārtu šādi iegūtas t funkcijas $F(t)$ vērtībai, kad $t=t_0+dt$. Tā kā X_0 atrodas virsā,

$$F(t_0)=0$$

un izvirzot $F(t_0+dt)$ pēc augošām dt pakāpēm, šī lieluma kārta p būs vienlīdzīga vismazākam skaitlim k, kam

$$F^{(k)}(t_0)\neq 0 .$$

Salīdzinot ar līknes un virsas pieskaršanās kārtas raksturojumu, apzīmējot ar X_0 punktu, kas kopīgs līknei L un virsai V un nav singulārs ne vienai, ne otrai, un ar X_1 līknes punktu, kā attālums no X_0 ir pirmās kārtas ~~ja līknei L punktā X_0 ir p-1-mās kārtas pieskaršanās ar~~ bezgalīgi mazs lielums, redzam:

ja līknei L punktā X_0 ir $p-1$-mās kārtas pieskaršanās ar virsu V, punkta X_1 bezgalīgi mazs lielums attālumam no virsas V ir kārta p; ~~un otrādi~~

~~ja līknei L un virsai V ir kopīgs punkts X_0, kas nav singulārs ne līknei, ne virsai, un nupat definēta~~ otrādi, ja punkta X_1 attālumam no virsas V ir kārta p, līkne L punktā X_0 pieskaŗas ar kārtu $p-1$ virsai V.

Tālāk, apzīmējot ar X_0 punktu, kas kopīgs divām līknēm L un L' un nav singulārs nevienai no tām un ar X_1 punktu, kā attālums no X_0 ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs lielums:

ja līknes L un L' punktā X_0 ar kārtu $p-1$ pieskaŗas viena otrai, katras līknes punktam X_1, ~~kā attālums no X_0 ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs lielums,~~ attālums no otrās līknes ir p-tās kārtas bezgalīgi mazs lielums;

otrādi, ja vienas līknes punktam X_1, attālums no otrās līknes ir p-tās kārtas bezgalīgi mazs lielums, abām līknēm punktā X_0 ir $p-1$-mās kārtas pieskaršanās.

039803

Bezgalīgi maza attāluma jēdziens, kā redzams, ļauj raksturot pieskaršanās kārtu tīri ģeometriskā veidā, nelietājot problēmai šķietami svešus analītiskus elementus — parametru un funkciju atvasinājumus pēc tā. (Turklāt spriedumi un formulējumi top vienkāršāki.) Metrikas lietāšanai tomēr ir savi trūkumi. Ja mēs, piemēram, definējam ds pielīdzinot nullei kādu ds un dx_i homogēnu formu, katrā punktā rodas izotropi virzieni, t.i. ds var tapt par 0 arī tad, ja visi dx_i nav vienlīdzīgi nullei. Lietājot šādu metriku, augšējie formulējumi būs spēkā ar ierobežojumiem, ko rada izotropo virzienu pastāvēšana. Lai raksturotu pieskaršanos arī šajos izņēmuma gadījumos, vienā vai otrā veidā būs jāņem palīgā kāds parametrs. Otrkārt, metrika punktiem piešķir izcilu lomu pārējo ģeometrisko objektu starpā; nelietājot parametriskus attēlus, mēs ģeometriskos objektus dodam savā ziņā globālā veidā. Abi šie apstākļi var apslēpt dažāda veida analoģijas.

Lietājot parametriskus attēlus un nenosakot nekādu metriku, mums nav jārūpējas par izotropiem virzieniem, jo tāču nemaz nav. Līkne ir raksturota kā savu punktu ģeometriskā vieta, kas mums ļauj, mutatis mutandis, tās īpašības attiecināt arī uz viena parametra virsu saimēm. Šo iemeslu dēļ, aplūkojot pieskaršanos, pamatā likts līknes parametrisks attēls un nevis attāluma jēdziens. ~~Pieskaršanās elements.~~

~~7. Līkņu un virsu singulārie punkti no aplūkošanas izslēgti nevis parametra vainas dēļ, bet gan spriedumu vienkāršošanai. Arī šādiem punktiem var raksturot pieskaršanās kārtu. Pieņemsim, ka virsai V visi punkti nav singulāri, ko vienmēr varēs panākt ar piemērota virsas V vienādojuma~~

$$f(x) = 0$$

~~izvēli, ka līkne L dota ar~~

$$x_i = x_i(t) \quad ,$$

~~ka $t = t_0$ nosaka punktu X_0 un punkta X_0 tuvumā katram līknes punktam atbilst tikai viena t vērtība. Noteiksim, ka līknes un virsas pieskaršanās kārta ir vismaz 1 būs dabūjams, prasot lai $t = t_0$ padara par nulli pirmās kārtas funkcijas $f[x(t)]$ atvasinājumu pēc t, kas automātiski nav vienlīdzīgs nullei punkta X_0 singularitātes dēļ. Pielīdzinot nullei tālākos atvasinājumu vērtības, kad $t = t_0$, dabū nosacījumus augstākām pieskaršanās kārtām.~~

Atzīmējams, ka visas aplūkotās īpašības ir invariantas attiecībā pret katru nepārtrauktu viensviennozīmīgu un pietiekami daudzas reizes diferencējamu pamata varietātes T punktu transformāciju, ko raksturo sakari

$$(30) \qquad \bar{x}_i = \bar{x}_i(x_j)$$

starp kāda punkta $X(x_i)$ un pārveidotā punkta $\bar{X}(\bar{x}_i)$ koordinātām. Tiešām, dodot x_i kā viena parametra t vienvērtīgas funkcijas, arī $\bar{x}_i$ būs t vienvērtīgas funkcijas un otrādi — transformācija (30) līknes pārvērš līknēs un virsas virsās. Lielumu $x_i(t)$ un to ~~atvasinājumus~~ atvasinājumu līdz kārtai p ~~parametra vērtības~~ vērtības, ja $t = t_0$, noteic lielumu $\bar{x}_i(t)$ un to attiecīgo atvasinājumu vērtības tai pašai parametra vērtībai un otrādi. Ja divām līknēm pirmās serijas lielumi ir vienlīdzīgi, arī pārveidotām līknēm attiecīgie lielumi būs vienlīdzīgi un otrādi; tā tad divu līkņu un tāpēc arī ikkatru divu varietāšu pieskaršanās kārta tiek uzglabāta.

(V) $\quad f(x) = 0$

(V') $\quad g(x) = 0$

[illegible]

(L) $\quad x_i = x_i(t)$

[illegible] x_0 [illegible] p [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] (L) [illegible] (V') [illegible] $p + 1$ [illegible].

[illegible]

$$\begin{cases} f_x x' = 0 \\ f_{xx} x'^2 + f_x x'' + \dots \\ f_x x^{(p)} \end{cases}$$

$f - g = 0$ [illegible]

$f_x x' + f_y y' + f_z z' = 0$

$f_x x^{(p+1)}$

$f_x x' + f_y y' + f_z z' = g_x x' + g_y y' + g_z z'$

$f_x x'' + f_y y'' + f_z z'' + f_{xx} x'^2 + \dots = g_x x'' + g_y y'' + \dots \quad = 0$

$\dfrac{f_x}{g_x} = \dfrac{f_y}{g_y} = \dfrac{f_z}{g_z} = \dfrac{f_{xx} x'^2 + \dots}{g_{xx} x'^2 + \dots}$ $\quad \underline{2} \quad \underline{3} \quad \underline{4}$

[illegible] 1. [illegible] $\underline{2}$, [illegible] $\underline{\underline{4}}$

$f_x x' + f_y y' + f_z z'$ [illegible]

$\dfrac{\mathcal{L}}{1}$

[illegible] p

- 1

Pieskaršanās ar kārtu p ir tranzitīva īpašība: ja līknēm L un L' ar trešo līkni L'' punktā X ir p-tās kārtas pieskaršanās, līknēm L un L' šai punktā ir vismaz p-tās kārtas pieskaršanās. Tāpēc arī varam pieskaršanās kārtas raksturošanai izlietāt pieskaršanās elementa jēdzienu. To definējam sakot, ka divām līknēm, kam ir p-tās kārtas pieskaršanās punktā X, ir kopīgs p-tās kārtas pieskaršanās elements ar nesēju X. Transformācijas (30) katras kārtas pieskaršanās elementus pārvērš tādas pat kārtas pieskaršanās elementos. Saskaņā ar Kleina Erlangas programmu) varam teikt, ka ar pieskaršanās kārtu saistītās īpašības veido pieskaršanās elementu ģeometriju. Šajā ģeometrijā ir spēkā daudzas teorēmas, kam ~~klasiskā~~ Eiklīda diferenciālģeometrijā ir šķietami tīri metrisks raksturs. Minēsim dažas no tām.

Ja divas līknes (kādā n dimensiju varietātē ~~...~~

~~ir kopīgs p-tās kārtas pieskaršanās elements ar~~

) ~~Matemātiskās~~ iespiests Kleina, Gesammelte Abhandlungen Bd. 1 (1921) 460-497 lp., un ~~iespiests arī~~ Mathematische Annalen, Bd. 43 (1893).

A_8'''

tās punktā X, kas nav singulārs, ar kārtu p pieskaras (visām skaitā) $n-m-1$ ~~virsai~~, kuru izzelošanās varietāte nepieskaras varietātei (k) punktā X, abām līknēm ir kopīgs p-tās kārtas pieskaršanās elements// Šādā veidā formulētā teorēma ir ~~triviālas~~ ~~pirmās~~ divu līkņu p-tās kārtas pieskaršanās definīcijas (triviālas) sekas, jo hipotēzes izveido šīs definīcijas nosacījumu speciālu gadījumu. Specializējot Eiklida trīs dimensiju telpai, dabūjam (pazīstamo) teorēmu, ka divām virsas līknēm, kam tās punktā X sakrīt oskulējošās plaknes, sakrīt arī liekumi.

039806

Lai kādai virsai V' ~~būtu~~ $p+1$-mās kārtas pieskaršanās ar visām dotās virsas V līknēm, kas iet caur punktu X_0 ~~un~~ kam šai punktā ir kopīgs p-tās kārtas pieskaršanās elements, ~~kuru V ...~~ virsai V' ir jāpilda $p+n$ nosacījumu; citiem vārdiem: katrā ~~...~~ $p+n$ parametru virsu saimē (vispārīgā gadījumā) var atrast vienu vai vairākas (galīgā skaitā) virsas ar prasīto īpašību. Turklāt var V' pieskarsi? virsai V.

Visām, ~~kā redzējām 3. punktā~~, līknēm, caur punktu X_0 ar kopīgu p-tās kārtas pieskaršanās elementu šai punktā, kā redzējām 3. punktā, var izvilināt tādus parametrisko attēlus

$$x_i = x_i(t), \tag{31}$$

ka parametra vērtībai t_0, neatkarīgi no līknes izvēles, $x_i(t_0)$ ir punkta X_0 koordinātas un visu x_i atvasinājumiem pēc t līdz kārtai p ir tās pašas vērtības. Ja līkne L atrodas dotā virsā V ar vienādojumu

$$(32) \qquad f(x) = 0 ,$$

aizvietojot vienādojumā (32) lielumus x_i ar funkcijām (31), dabūtais vienādojums un tā atvasinājumi būs apmierināti ikkatrai t vērtībai. T.i. īpaši, ja $t = t_0$, pastāvēs

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0 \\ \text{--------} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{d^{p+1} x_i}{dt^{p+1}} + F_{p+1} = 0 , \end{array} \right.$$

039807

kur lielumu F_{p+1} ~~vērtības~~ nosaka f parciālo atvasinājumu pēc x_i līdz kārtai $p+1$ un x_i atvasinājumu pēc t līdz kārtai p vērtības.

No parametriem $a_j\,(j=1,2,\dots,N)$ atkarīgo virsu V' raksturojam ar vienādojumu

$$(34) \qquad g(x, a) = 0$$

Lai virsai V' ar līkni L būtu $p+1$-mās kārtas pieskaršanās, aizvietojot vienādojumā (34) x_i ar funkcijām (31) parametra vērtībai $t = t_0$ jāapmierina dabūtais vienādojums, kā arī tā $p+1$ pirmie atvasinājumi:

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0 \\ \text{--------} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{d^{p+1} x_i}{dt^{p+1}} + G_{p+1} = 0 \end{array} \right.$$

Lielums G_{p+1} nosakāms analogi lielumam F_{p+1}, funkcijas f vietā ņemot funkciju g.

Tā kā visām līknēm L punktā X_0 lielumiem x_i un to atvasinājumiem pēc t ir tās pašas vērtības, vienādojums (34) un pirmie p no vienādojumiem (35) katrs dod pa vienam noteikumam lielumiem a_j. Vispārīgā

A $\overline{\text{IV}}$ 8

A^{V}_{8}

gadījumā šie noteikumi būs savstarpēji neat-
karīgi, jo katrā ietilpst g parciāli atvasinājumi,
kas iepriekšējā neietilpst. Pēdējam vienādojumam
(35) jābūt apmierinātam visām tām $x_i^{(p+1)}(t_0)$ vērtībām, kas
apmierina pēdējo vienādojumu (33), tā tad punktā
X_0 abu šo vienādojumu koeficientiem jābūt proporcionāliem,
kas dod n noteikumus:

039808

$$(36) \qquad \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}} = \frac{G_{p+1}}{F_{p+1}} \qquad \text{punktā } x_0$$

Ja šie noteikumi ir izpildīti, ~~Pirmo~~ n attiecību vienlīdzība rāda, ka pirmie noteikumi sistēmās (33) un (35) ir viens otra sekas; tāpēc virsas V un V' punktā x_0 pieskaras viena otrai, jo ikkatra līkne kas pieskaras vienai no tām, pieskaras arī otrai. Tā kā visas līknes L apmierina noteikumus (33), virsas V' noteikšanai mums ~~vispārīgā gadījumā~~ paliek $n + p$ noteikumi: (34), (35), atskaitot pirmo, un (36). (vispārīgā gadījumā neatkarīgi)

Specializējot Eiklīda trīs dimensiju telpai ($n=3$), ņemot $p=1$ $n+p=4$. Par virsu V' varam tā tad ņemt lodi, kam ar katru līkni L ir otrās kārtas pieskaršanās. Lodes šķēlums ar līknes L oskulējošo plakni punktā x_0 ir L oskulējošais riņķis šai punktā, no kā seko Meusnier teorēma.

B_1

8. Pieskaršanās kārtu virsai V un līknei L punktā x_0 varam definēt arī tai gadījumā, ja x_0 ir singulārs ar algebriskas singularitātes raksturu, t.i. ja šai punktā vai nu pazūd ~~visi~~ virsas vienādojuma

$$f(x) = 0$$

kreisās puses visi parciālie atvasinājumi pēc x_i līdz zināmai kārtai, vai arī pazūd visu līknes tekošo koordinātu

$$x_i = x_i(t) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

atvasinājumi pēc t līdz zināmai kārtai, vai beidzot [illegible] [... A]

~~Piezīmējot, ka~~

~~tad~~ Tādēļ var aplūkot pieskarš. el-tu variētātes u.t.t.

B1

~~Blakus pieskarš. el-tiem, kas raksturoja līkņu pieskar., var pieņemt aplūkot arī tos, kas raksturo divu kaut kādu variētāšu pieskaršanos. Ar tām mēs arī pakāpeniski pieskarš. el-tu aplūkošanu, atzīmējot, ka šo teorijai ir ciešs sakars ar diferenc. teoriju [illegible] pieskaršanās [illegible]. Katrs diferenciālvien. [illegible] pieskar. el-tu variētāti. [illegible] diferenc. [illegible]~~

~~ar pieskar. Sofus Lie [illegible] un diferenciālvienādojumu teoriju: pēdējā jau tieši meklē šīs variētātes, kam atbilst diferenc. vien. to sistēmas raksturotās pieskar. el-tu variētātes.~~

B1

Blakus pieskaršanās elementiem, kas raksturoja līkņu pieskaršanos, var aplūkot arī tos, kā raksturo divu kaut kādu ~~[illegible]~~ ~~to~~ variētāšu pieskaršanās, (Ar šiem š-ādu elementu variētātes u.t.t. jautājumiem mēs speciāli nenodarbosimies.) Atzīmēsim tikai, ka šo teorijai ir ciešs sakars ar ~~Sofus~~ S. Lie pieskaršanās transformācijām, kas š-ādus elementus pārvērš vienu otrā, un diferenciālvienādojumu teoriju. Katrs diferenciālvienādojums vai to sistēma raksturo kādu pieskaršanās elementu variētāti¹). No ~~Sofus~~ S. Lie viedokļa diferenciālvienādojumu ~~integrēšana~~ integrēt nav nekas cits, kā no variētātes ¹ elementiem izveidot citas variētātes, kas pakļautas speciāliem noteikumiem.

¹) Sal. piem. F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, (Berlin, Springer) ~~Berlin~~ 1926, kur šie sakari aplūkoti vairākkārt. ~~[illegible]~~. Minētos S. Lie viedokļi

[illegible]

Šādā veidā formulētā teorēma ir divu līkņu p-tās kārtas pieskaršanās definīcijas triviālas sekas, jo hipotezes izveido šīs definīcijas noteikumu speciālu gadījumu. Specializējot Euklīda trīs dimensiju telpai, dabūjam pazīstamo teorēmu, ka divām virsas līknēm, kam tās punktā X sakrīt oskulētājas plāksnes, sakrīt arī liekumi.

Lai kādai virsai V' būtu p + 1-mās kārtas pieskaršanās ar visām dotas virsas V līknēm, kas iet caur punktu X_o un kam šai punktā ir kopīgs p-tās kārtas pieskaršanās elements, virsai V' ir jāpilda p + n noteikumi; citiem vārdiem: katrā p + n parametru virsu saimē vispārīgā gadījumā var atrast vienu vai vairākas (galīgā skaitā) virsas ar prasīto īpašību. Turklāt virsa V' pieskaŗas virsai V.

Visām līknēm L, kā redzējām 3. punktā, caur punktu X_o ar kopīgu p-tās kārtas pieskaršanās elementu

...ularitātes dēļ. Pielīdzinot nullei pirmo $F(t)$ atvasinājumu, automātiski nepazūd, ja $t = t_0$, mēs dabūjam noteikumu, ... līknes un virsas pieskaršanās kārta ir vismaz viens. Noteikum... augstākām pieskaršanās kārtām dabūsim pielīdzinot nullei, ja $t = t_0$, tālākos $F(t)$ atvasinājumus.

Cita veida singularitāte rodas, ja to pašu līknes punktu X_0 dod dažādas parametra vērtības $t_0, t_1, \dots, t_k$. Šājā gadījumā līknei ir vairāki zari, kas iet caur X_0; katra zara tekošā punkta koordinātas dabūjam, aplūkojot parametra vērtības atsevišķo t_h vērtību $(h = 0, 1, \dots, k)$ tuvumā. Tad varam katram atsevišķam zaram noteikt pieskaršanās kārtu ar virsu V, kas iet caur X_0. Vispārīgā gadījumā šīs kārtas var arī nebūt vienlīdzīgas, tāpēc te nevarēs runāt par līknes un virsas pieskaršanās kārtu – pieskaršanās veidu raksturo visu zaru pieskaršanās kārtu kopums.

Abos aplūkotos gadījumos punktā X_0 saskritušo virsas un līknes ~~...~~ arī to summa ...elšanās punktu skaits būs vairāk kā par vienu vienību lielāks par pieskaršanās kārtu, respektīvi atsevišķo zaru pieskaršanās kārtām. Lai vienkāršotu ...riedumus, mēs arī turpmāk, ja vien nebūs teikts pretējais, no aplūkošanas izslēgsim singulāros punktus.

§ 2. Par viena parametra virsu saimēm.

1. Aplūkojot līknes L un virsas pieskaršanos, mēs vispirms meklējām noteikumus, lai noteikta virsa ietu caur p bezgalīgi tuviem līknes punktiem. Šim nolūkam saimes S vispārīgās virsas A vienādojumā

$$(37) \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2 \dots a_N) = 0$$

mēs uzskatījām punkta X koordinātas x_i par viena parametra t funkcijām, piešķirām argumentam vērtības $t_1, t_2, \dots t_p$ un likām tām tiekties uz vienu vērtību t_0. Tagad rīkosimies otrādi: dosim lielumus a_j kā viena parametra funkcijas:

$$(38) \qquad a_j = a_j(t) \qquad j = 1, 2, \dots, N$$

Šādējādi noteikti a_j raksturo viena parametra virsu saimi R. Piešķirot parametram t vērtības $t_1, t_2, \dots, t_p$

$$(39) \quad \begin{cases} G(x, t_1) = 0 \\ G(x, t_2) = 0 \\ \dots \\ G(x, t_p) = 0 \end{cases}$$

$G^{(p+1)}(x, t_0) = 0$

Pēc analoģijas ar bezgalīgi tuvu punktu jēdzienu, arī virsas, kam parametru a_j starpības ir bezg[alīgi mazas,] varam saukt par bezgalīgi tuvām virsām. Kā pa[r]ādīt sakarības (41) un turklāt [illegible]

Vienādojumi (38) līdz (41) savā uzbūvē atbilst iepriekšējā paragrafa [vie]nādojumiem (9) līdz (1), vienīgi lomām ir mainītas abas lielumu serijas [x_i u]n a_j, t.i. punktu X un virsu A raksturotāji skaitļi. Izdarot šādu pat [pār]veidojumu un apmainot lomām arī skaitļus n un N, kas izteic x_i un a_j skaitu, [va]rētu pārrakstīt visus iepriekšējā paragrafa vienādojumus. Pārveidotie vienā[do]jumi izteiks īpašības, kas rodas no izejas vienādojumiem atbilstošām [īpa]šībām, tur apmainot lomām punktus X un virsas A. Mēs esam nonākuši [pie] zināma veida dualitātes principa: vispārīgiem sakariem, kas saista [b]ezgalīgi tuvus punktus saimes S virsas, atbilst duāli sakari, kur [p]unkti un virsas mainījušies lomām un kas tā tad saista [b]ezgalīgi tuvas virsas un punktus. Ja $n = N$, šī dualitāte ir [pi]lnīga – punktu varietātēm ar kādu dimensiju ir atbilstīs virsu [v]arietātes ar tādu pat dimensiju skaitu. Ja turpretim $n \neq N$, [d]ažādi veidi, kādos varam raksturot m dimensiju punktu varietā[tes,] var tai līdzt atbilst divām dažāda veida virsu varietātēm.

Tiešām, ① varam noteikt, dodot visus x_i kā m neatkarīgu parametr[u f]unkcijas, vai arī nosakot $n-m$ neatkarīgus sakarus x_i starpā. Aizv[ie]tojot x_i ar a_j, pirmā gadījumā dabūsim tāpat m parametru virsu [v]arietāti, bet otrā gadījumā – varietāti ar $N-n+m$ parametriem. Pi[rmais] attēlojums var dot triviālus rezultātus, ja $m \geq N$, tāpat arī otrais, ja $N-n+m = 0$; ja $N-n+m < 0$, otram attēlam vispār nebūs jēgas.

Minētais dualitātes princips būtībā nav nekas jauns. Integrējot Pfaffa vienā[dojumus,] [i]lojumus, piemēram, ne tikai punkti un virsas, bet vispār katra punktu [v]arietāte uzskatāma par līdzvērtīgu veidojumu.[1]) Bet kamēr pieminētā un tam analogos gadījumos mēdz aplūkot kādas noteiktas kārtas pieskaršanās elementus, mēs aplūkojam visas dotās problēmas noteikumos iespējamās pieskaršanās kārtas.

9. Pārveidosim dualistiskā dažus jēdzienus, ko sastapām iepriek[šē]jā paragrafa sākumā. Vienkāršākas izteiksmes dēļ virsas A noteicējus parametrus a_j sauksim par tās koordinātām; ja punkta X un virsas A

[1]) Skati piem. F. Klein, loc. cit. 240.–241. l.p.

No aplūkošanas izslēgtie virsas un līsnes singulārie punkti tad: punktam X incidento virsu saimes singulārās virsas, kam pazūd visi $\frac{\partial f}{\partial a_i}$ un saimes R singulārās virsas, kam pazūd visi $\frac{da_j}{dt}$, pie saukšim par stacionārām virsām.

~~Arī tās mēs no aplūkojuma vispār izslēgsim.~~

Arī te no aplūkojuma vispār izslēgsim abu veidu singulārās virsas.

Tālāk aplūkosim dažus jēdzienus, ko var saistīt ar saimi R un noteiksim to duālos pārveidojumus. Visām virsām (41) kopīgos punktus sauksim par virsas A_0 p-1-mās kārtas charakteristiskiem punktiem. Šo punktu veidoto varietāti sauksim p-ar virsas A_0 p-1-mās kārtas charakteristiku; vispārīgā gadījumā tai ir $n-p$ dimensiju, jo to nosaka p vienādojumi x_i starpā; dimensiju skaits būs lielāks, ja viens vai vairāki no vienādojumiem ir pārējo sekas. Konstatējot katrai saimes R virsai p-1-mās kārtas charakteristikas, to kopība vispārīgā gadījumā izveidos $n-p+1$ dimensijas varietāti, ko sauksim par p-1-mās kārtas saimes R aploksni $\mathcal{E}_{p-1}$. Konstatēsim, ka $\mathcal{E}_{p-1}$ ar kārtu vismaz p-1 pieskaras katrai saimes R virsai katrā tās p-1-mās kārtas charakteristiskā punktā; šis fakts ir neatkarīgs no $\mathcal{E}_{p-1}$ dimensiju skaita. Lai to pierādītu, pietiek konstatēt, ka katra līsne varietātē $\mathcal{E}_{p-1}$ caur kādu virsas A_0 p-1-mās kārtas charakteristisku punktu pieskaras šai punktā virsai A_0 ar kārtu vismaz p-1. Līsnes varietātē $\mathcal{E}_{p-1}$, kuŗu visiem punktiem atbilst tā pati t_0 vērtība, atrodas vienā virsā A_0. Atliek tā tad vienīgi aplūkot līsnes, kuŗu dažādiem punktiem atbilst dažādas t_0 vērtības. Apzīmējot šīs mainīgās vērtības ar t, varam uzskatīt līsnes L tekošā punkta X koordinātas x_i par t funkcijām. Šīs funkcijas, liekot $t=t_0$, katrai t_0 vērtībai apmierina vienādojumus (41) – mēs varam uzskatīt, ka tie dabūti no pirmā no tiem, kas atvasināts pēc t_0; ir jāpierāda, ka liekot $t=t_0$, ir apmierināti arī pirmā vienādojuma p-1 pirmie atvasinājumi pēc t. Tā kā mums jāatvasina kā pēc t, tā pēc t_0, vienkāršības labad dosim pēdējam lielumam jaunu apzīmējumu s.

Pierādāmā īpašībai iegūst šādu formulējumu, ja parciālos atvasinājumus apzīmējot ar attiecīgā argumenta pierakstu indeksā:

ja, liekot $t=s$, ir identiski apmierināti sakari

$$(42)\quad \begin{cases} G(t,s)=0 \\ G_s=0 \\ G_{s^2}=0 \\ \dots \\ G_{s^{p-1}}=0, \end{cases}$$

G_{s^2} G_{s^2}

tā pati t vērtība apmierina arī sistēmu

$$G=0$$
$$G_t=0$$

(45) $\left\{ \begin{array}{l} G_t = 0 \\ G_{st} = 0 \\ \ldots \\ G_{s^{p-2}t} = 0 \end{array} \right.$

039813

Atvasinot šos ar nosacījumu $t = s$ identiski ~~atvasinātos~~ apmierinātos vienādojumus, un
-mus ar (45), ~~[illegible]~~ vidzinot ~~ar vienu~~ ~~vienādojumiem~~, ~~[illegible]~~ neatkarīgi, ka identiski ir ~~apmierināti ar~~ top
nulli visi G parciālie atvasinājumi līdz kārtai $p-1$, kas rodas divas reizes
-ciāli atvasinot pēc t, un pārējās – pēc s u.t.t. Gala rezultātā konstatējam, //
~~ne tikai visi~~ $t = s$ pārvērš identiski par nulli ne tikai v-mu
bet arī visus pārējos G parciālos atvasinā-
3) kreisos locekļus,
-jumus līdz kārtai $p-1$ ieskaitot.

Iegūto rezultātu, ~~kas~~ ~~vispirms~~ pierāda ~~[illegible]~~ to ~~[illegible]~~ notikumus
varam nedaudz vispārināt: ja $t = s$ padara identiski
~~[illegible]~~ par nulli funkciju $G(s,t)$ un pa vienam no tās parciāliem atvasinā-
-jumiem katrā kārtā līdz $p-1$, tas padara identiski par
nulli visus G parciālos atvasinājumus līdz kārtai $p-1$. Tiešām, ja
$p = 2$, šī īpašība seko no pirmā vienādojuma (44). Ja tā ir spēkā
līdz kārtai $p = k$, atvasinot visus $k-1$-mās kārtas parciālos atvasi-
-nājumus, dabūjam k ~~vienādojumus~~ savstarpēji neatkarīgus ~~[illegible]~~
vienādojumus, kas izteic, ka divu k-tās kārtas parciālo atvasinājumu summa
ir nulle, ja $t = s$. Tā kā pēc hipotezes pastāv viens no šiem atvasi-
-nājumiem, pastāv arī pārējie, no kā seko minētā īpašība.

Izlietojot ģeometriski sistēmu (42) un (43) ekvivalenci,
aplūkosim līkni L ar tekošā punkta X koordinātēm $x_i(t)$
un virsu saimi R ar tekošās virsas A koordinātēm $a_j(s)$.
-aistām kopā punktu X un virsu A, kam $t = s$. Ja katrs
punkts X atrodas ~~A~~ p saimes R bezgalīgi tuvās virsās, kas
-saskaras ar virsu A, katra virsa A iet caur p līknes L bez-
-galīgi tuvām punktiem, kas saskaras ar punktu X.
Līdz ar to ir pierādīta arī
~~[illegible]~~ minētā apliecīgā īpašība, kas ir tiešas sekas nupat kon-
-statētam faktam.

Duāli pārveidojot, saime R un tās vispārīgā virsa A
-dot līkni L un tās vispārīgo punktu X. Virsas A p-tās kārtas charak-
-terīstiskiem punktiem atbilst virsas, ~~saimes~~ ko varam saukt par p-tās kārtas charakte-

nosacījumi (42): pirmais ~~[illegible]~~ neizteic neko citu, kā A un X_1 incidenci;

otrā pazīst virsu A_i atrasināājumu koeficienti. Punkts X_1 tā tad atrodas
jā tas nav singulārs
kārtas
[...]šās virsas A pirmās charakteristiskās. Virsa A šai punktā, tāpēc pieskaras

[...] virsu ~~[illegible]~~ saimes R, kas satur A, pirmās kārtas

[...]tras viena parametra [illegible]

[...]liecējai. ~~T~~Tiešām, no $G_s = 0$ seko $G_t = 0$; tā tad katra līkne L, ka[...]

[...]tiskai no aplūkotajiem punktiem X_1, katrā savā punktā pieskaras
[...] virsai A. Visu X_1 ģeometrisko vietu varam saukt par

[...] virsai A. Visu X_1 ~~[illegible]~~ punktos X_1 pieskaras

[...]aimes T kopīgo apliecēju $\bar{U}$, jo šī virsa

sistēmu (42) un (43),

[...]ttiecīgajām virsām A. Šī īpašība izriet no

kuram punktam X_1 ir izpildīti

[...] $p = 2$, ekvivalences. Kā mēs redzējām,

[...] viena parametra punktu X_1 saimi, t. i.

[...]nosacījumi (42). Ņemot Atsevišķ[...]

[...]virsas U līkni, (43) rāda, ka šī līkne pieskaras virsai A. ka šī līkne atbilst

[...]virsu A singulāriem punktiem X tā tad ar duālu transformāciju

~~[illegible]~~ singulāras virsas A, kas aplūkojamā punktā X_1 pieskaras saime[...]

T kopīgai apliecējai.

039814

3.

Ja virsu A saime R dota patvaļīgi, tās charakteristisko
Duāli pārveidojot, atkārtosim iepriekšējā paragrafa Nr. 2 minētos slēdzienus. ~~Tiešām~~,
punktu maksimālā kārta vispārīgā gadījumā ir $n-1$.

Pārraksot sistēmu (41) gadījumam $p = n$ un aizvietojot t ar s, dabūtā sistēma

$$
(46) \quad \begin{cases} G(x,s) = 0 \\ G'(x,s) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ G^{(n-1)}(x,s) = 0 \end{cases}
$$

satur n vienādojumus ar n nezināmiem x_i. Ja identiski nepastāv

$$
(47) \quad \frac{D(G, G', \dots, G^{(n-1)})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0
$$

jebkuŗām x_i vērtībām, sistēmu (46) varam atrisināt attiecībā pret x_i, [...]tos iegūstot kā s funkcijas. Ja vienādojumi (46) nav visi lineāri attiecībā pret visiem x_i, mēs iegūsim vairākas atrisinājumu ~~[illegible]~~ sistēmas. Katrai sistēmai atbilstošo punktu X sauksim īsāk par (nevis n-1-mās kārtas charakt. punktu) virsas A charakteristisko punktu; ~~Kā redzams, charakteristisko~~ ~~punkt~~ to vispārīgā gadījumā nosaka n bezgalīgi tuvas saimes R virsas.

ts. | Ievērojot sistēmas (46) ...

tiem dos vienu vienādojumu attiecībā pret S. Patvaļīgi dotai

...ināli R pirmā vienādojuma (48) saknes (48) neapmierinās otro, tāpēc

...ristiskām virsām varēs būt ~~...~~ pirmās kārtas supercharakte-

...istiski punkti; šādā veidā augstākās kārtas ~~š...~~ punktu ~~vispār~~ vispārīgā gadījumā nebūs.

~~Turpretim~~

Ja turpretim visas saimes R virsas A iet caur vienu vai

...irākiem (galīgā skaitā) punktiem X, tos varēs uzskatīt par

...atvaļīgi augstas kārtas supercharakteristiskiem punktiem.

...to Minētā iepriekšējā § 4. daļās būtu piemērs rāda, ka eksistē viena para-

...tra virsu saimes ar patvaļīgi augstas kārtas superharakteris-

...tiskiem punktiem.

Beidzot formulējam ~~...~~ ~~iep...~~ turpat minētās problēmas

...alo pārveidojumu: ~~vai ir iespējams~~ ja dota virsu A

...ime S, vai iespējams tās apvienot ~~t...~~ viena parametra

...imēs, kur katrai virsai ir ~~...~~ kārtas q supercharakt-

...istiskais punkts, ~~...~~ pie kam $q \geq 1$ un galīgs.

Pagaidām atliekot šo ~~problēmas~~ jautājuma sīkāku izšķiršanu,

~~...am ir~~ atrast lielākas maksimālo superoskulācijas kārtu ar vienu dotas saimes S

...zīmēsim, ka

~~...~~ virsām katrā tās punktā, ~~un ...~~ un

atrast saimē S ietilpstošas viena parametra virsu saimes R, kam

...sistē maksimālās kārtas supercharakteristiski punkti

... tie paši ja tie vispār eksistē. atrisinājumi, Tos dod līknes L un to oskulējošās

...irsu A saime R. Tiešām, kā rāda jau vairākkārt

...tiekšā sistēmas (42) un (43) ekvivalence; ~~j~~ kādas

...īknes L pieskaršanās kārta ar oskulējošo virsu A tās tekošā punktā X ~~...~~ ir vienlīdzīga

~~...kārtas saimes R virs...~~

punkta X, kā virsu A saimes charakteristiska punkta, kārtai

Ja viens no šiem skaitļiem iegūst vispār iespējamo

maksimālo vērtību, arī otrs top maksimāls.

ar [illegible]

...aj un punkta X un virsas A incidences nosacījumu

$$f(x, a) = 0 \qquad (49)$$

039816

Piemēros mēs minējām ~~proj~~ afīno un Eiklīda telpu, vārdiem „punkts" un „virsa" piešķirot parasto nozīmi. Tikpat labi mēs tomēr ar vārdiem „punkts" un „virsa" varētu apzīmēt kaut kādus divu veidu ģeometriskus objektus, ko katru var raksturot ar koordinātām un kam vienādojums šo koordinātu starpā izteic kādu ģeometrisku īpašību. Tā, piemēram, par „punktu" mēs varētu ņemt Eiklīda telpas taisni, par „virsu" lodi un ar „virsas vienādojumu" (49) izteikt, ka taisne šķeļ lodi zem kāda ~~noteikta leņķa~~ . Visas atrastās īpašības paliks spēkā, tās piemērotā veidā izteicot. ~~Šādā kārtā paverās ceļš [illegible]~~ Šādā kārtā aplūkotie pieskaršanās teorijas elementi paver ceļu ~~[illegible]~~ būtībā identiskiem, bet formā ļoti dažādiem ģeometrijas pētījumiem.

Pieminēto objektu nosaukuma maiņu mēs būtu varējuši izdarīt arī te, pārmainot vārdus objektiem, ko nosaucām par punktu un par virsu — ar šādu maiņu mēs būtu panākuši to pašu, kā ar duālās transformācijas lietošanu — abi pamata objekti būtu mainījušies lomām.

ājumu kārta ~~§ 2. Viena parametra virsu saimes.~~

§ 3. Vienādojumu sistēmas atrisinājuma kārtas noteikšana. 57

39
18

039817

1. Ja vienādojumam ar vienu nezināmo a

$$(50) \quad f(a) = 0$$

$= a_0$ ir n-tās kārtas sakne, kā zināms pastāv

$$(51) \quad \cancel{(14)} \quad f(a_0) = f'(a_0) = f''(a_0) = \dots = f^{(n-1)}(a_0) = 0, \quad f^{(n)}(a_0) \neq 0.$$

...ot a kā kāda cita lieluma t apgriežami ~~viennozīmīgu~~ funkciju

$$(52) \quad \cancel{(15)} \quad a = \varphi(t),$$

$$a_0 = \varphi(t_0) \quad \text{un} \quad \varphi'(t_0) \neq 0,$$

...m

... sistēmai, ko veido vienādojumi (50) un (52), ja pastāv (51), $t = t_0$, $a = \varphi(t_0)$ ir n-tās kārtas a... ...nājumu sistēma. Uzskatot a par vienas dimensijas varietātes punkta koordinātu, ie... ...~~...~~ valodā varam teikt, ka virsai (50) un līknei (52) ir n bezgalīgi tuvu kopīgu punktu ...gadīt ar punktu ~~$a_0 = \varphi(t_0)$.~~ kam koordināta ir

Meklēsim analogu kritēriju, kas ļaus noteikt kārtu vienādojumu sistēmas lielumu a_j noteicējas

$$\cancel{(16)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \cancel{f_1(a_1, a_2, \dots, a_N) = 0} \\ & \cancel{f_2(a_1, a_2, \dots, a_N) = 0} \\ & \cancel{\dots\dots\dots} \\ & \cancel{f_{N-1}(a_1, a_2, \dots, a_N) = 0} \\ & f_N(a_1, a_2, \dots, a_N) = 0 \end{aligned} \right. \qquad (53) \quad f_k(a_1, a_2, \dots a_N) = 0 \qquad k = 1, 2, \dots, N$$

~~nezināmiem a_j~~ atrisinājumam $a_j = a_{j0}$

Pieņemsim, ka pietiekami mazām $|a_j - a_{j0}|$ ir izpildīti šādi noteikumi:

a) a_{j0} veido vienīgo (53) atrisinājumu sistēmu (šis noteikums ir vienmēr izpildīts, ja (53) atrisinājumu kopskaits ir galīgs);

~~ka pietiekami mazām $|a_j - a_{j0}|$ ir izpildīti šādi noteikumi:~~

b) funkciju $f_1, f_2 \dots f_{N-1}$ parciālie atvasinājumi pēc visiem a_j veido ...ātricu ar rangu $N-1$. Ja šis noteikums ir izpildīts, vajadzības gadī...mā pārnumurējot lielumus a_j varēsim vienmēr panākt, ka

$$(54) \quad \Delta(a_j) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_{N-1})}{D(a_1, a_2, \dots, a_{N-1})} \neq 0$$

Lai raksturotu atrisinājuma $a_j = a_{j0}$ kārtu, izteiksim visus a_j kā ...a parametra t apgriežami ~~viennozīmīgas~~ funkcijas

$$(55) \quad \cancel{(18)} \quad \left\{ a_j = \varphi_j(t) \right.$$

kam kādai noteiktai t vērtībai t_0

$$(56) \quad \cancel{(19)} \qquad a_{j0} = \varphi_j(t_0), \qquad \text{visiem } j$$

$$(57) \quad \cancel{(20)} \qquad \varphi_j'(t_0) \neq 0. \qquad \text{vismaz vienam } j.$$

n kam šai punktā saskārt vismaz n bezgalīgi tuvi šķelšanās punkti ar … no virsām (53), pie kam vismaz vienai no virsām šis skaits ir tieši n, bet … nav iespējams atrast līkni, kam šie noteikumi būtu izpildīti kādam n', kas … lielāks par n, tad ir sistēmas (53) n-tās kārtas atrisinājums.

Pateicoties noteikumam (54) par līkni, kas dod maksimālo iespējamo … vērtību, varam ņemt ~~…~~ pirmo $N-1$ virsu (53) šķelšanās līkni L ko savienojam ar virsām V.
Tiešām (54) rāda, ka šo virsu vienādojumu veidoto sistēmu var atrisināt attiecībā … iegūstot pietiekami mazam $|a_j - a_{j0}|$ kā a_N viennozīmīgas funkcijas, kas top … $a_N = a_{N0}$ … a_N kā parametra t patvaļīgu apgriežami viennozīmīgu funkciju $\varphi_N(t)$, kam izpildīti noteikumi (56) un (57), … iegūstam sistēmu (55) ar prasītām īpašībām (56).

Iegūtās a_j vērtības identiski apmierina visus vienādojumus (53), izņemot pēdējo … kam saskne to pie hipotēzes ir izolēta un kas tāpēc nevar būt identiski apmierināts … kas dos kādu vienādojumu attiecībā pret t

$$(58).\quad F(t) = 0$$

039818

kur

$$(59)\quad F(t) = f_N(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$$

Vienādojumam (58) $t = t_0$ ~~…~~ saknē ar kārtu n, ja pašām

$$(60)\qquad F(t_0) = F'(t_0) = F''(t_0) = \ldots = F^{(n-1)}(t_0) = 0\,,\quad F^{(n)}(t_0) \neq 0$$

Konstatēsim, ka neviena cita līkne (L') nevar šķelt ~~…~~ katru no virsām (53) … kā n bezgalīgi tuvos punktos, kas saskrit ar punktu A_0. Pieņemsim pretējo: … virsām (53) vismaz tuvā punktā, kas saskrit ar A_0. Noteikumu (54) un (57) dēļ punkts A_0 nav singulārs ne kādai no virsām V, ne arī līknei L'. Līknei L' tā kā tad punktā A_0 ar kārtu vismaz n … katrai no virsām (V) un tāpēc arī to šķelšanās līknei L. Bet tad, pie noteikuma, var izvēlēties tādu līkņu L un L' parametru … attiecību, ka punktā A_0 kur $t = t_0$ tām attiecīgo koordinātu atvasinājumi pie parametra līdz kādam n … ir vienlīdzīgi. ~~…~~ Tad arī ~~…~~ saskaņā ar (59) definētai funkcijai $F(t)$, ja $t = t_0$, līdz … tās atvasinājumiem līdz kādai n ir tās pašas vērtības, vienalga, vai … tos nosakām ar līknes L vai L' parametrisko attēlojumu … tāpēc arī $F^{(n)}(t_0)$ abām līknēm būs ar to pašu vērtību un līknēm L … un L', pretēji pieņēmumam, atbilst tas pats ~~…~~ bezgalīgi tuvu ar A_0 … sakrītošu šķelšanās punktu skaits ar ~~virsu~~ pēdējo virsu (53).

~~Kreisās puses līdz ar to atvasinājumiem līdz kādai n ieskaitot, pie ir apmierināti top par nulli, ja~~

~~Tā kā vienādojumi~~

~~$$(26)\quad f_K(\varphi)\qquad K = 1, 2, \ldots N-1$$~~

~~(f_N …~~

$\varphi_j = \psi_j$ visiem j un funkcijas φ_N un ψ_N ir identiskas, secinām, ka šai punktā funkcijām φ_j un ψ_j un to atvasinājumiem līdz kārtai r ieskaitot būs tās pašas vērtības. Tad arī sakarības (29) definētai funkcijai $F(t)$ un funkcijai

$$G(t) = f_N(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_K)$$

līdz ar to atvasinājumiem pēc t līdz kārtai r ir tās pašas vērtības, t.i. p

$$G(t_0) = G'(t_0) = G''(t_0) = \dots = G^{(r-1)}(t_0) = 0, \quad G^{(r)}(t_0) \neq 0$$

un pretēji mūsu pieņēmumam vienādojumam

$$G(t) = 0$$

$t = t_0$ ir tikai r-tās kārtas sakne, pretrunā mūsu pieņēmumam.

Izteiksim tagad noteikumus (60) vienīgi ar funkciju f_K un līdz a_j palīdzību. Šim nolūkam vispirms aprēķinām kādas a_j funkcijas $H(a_1, a_2, \dots a_N)$ atvasinājumu pēc t, ja a_j ir doti ar sakarībām (55), kur φ_N patvaļīgs un pārējie φ noteikti ar sistēmas (53) pirmo $N-1$ vienādojumu palīdzību. Atvasinot identiski pastāvošos vienādojumus (53) dabūjam $N-1$ vienādojumu

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_K}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt} = 0 \qquad K = 1, 2, \dots, N-1$$

Atrisinot šo homogēno lineāro vienādojumu sistēmu attiecībā pret visiem $\frac{da_j}{dt}$, dabūjam

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \rho \frac{D(f_1, f_2, \dots f_{N-1})}{D(a_2, a_3, \dots a_N)} \\ &\dots \\ \frac{da_j}{dt} &= (-1)^{j+1} \rho \frac{D(f_1, f_2, \dots f_{N-1})}{D(a_1, a_2, \dots a_{j-1}, a_{j+1}, \dots a_N)} \\ &\dots \\ \frac{da_N}{dt} &= (-1)^{N+1} \rho \frac{D(f_1, f_2, \dots f_{N-1})}{D(a_1, a_2, \dots a_{N-1})} \end{aligned} \right.$$

Proporcionalitātes faktoru ρ noteiks pēdējais vienādojums, jo $\frac{da_N}{dt} = \frac{d\varphi_N}{dt}$ ir zināms. Vajadzības gadījumā mainot parametru, varēsim panākt, ka $\rho = (-1)^{N-1}$ Tad

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt} = \cancel{(-1)^{N+1} \frac{D(H, f_1, f_2, \dots f_{N-1})}{D(a_1, a_2, \dots a_N)}}$$

$$= \frac{D(f_1, f_2, \dots f_{N-1}, H)}{D(a_1, a_2, \dots a_N)}$$

ja izpildīti šī ~~...~~ paragrafa sākuma noteikumi un a_j vērtībām $a_j = a_{j0}$ apmierināti kā vienādojumi (53), tā arī noteikumi

(62) $$D_1 = D_2 = \dots = D_{r-1} = 0, \quad D_r \neq 0$$

jo vērtību sistēma ir vienādojumu (53) r-kārtīgs atrisinājums.
Noteikumi (62) raksturo r-kārtīgu atrisinājumu arī ja A_0 ir pēdējās virsmas (53) singulārs punkts, jo nesen ... tiek izlietota pretējā hipoteze. ~~Ja A_0 nav virsmai nav singulārs~~ ~~un ja pastāv noteikums (..), kur funkcionāldeterminantu apriekšinot, funkcijas f_N vietā atrasta kāda cita no funkcijām f, piemēram f_k, aprēķināt~~ izteiksmi D_{i+1}, ar D_i varētu aizvietot arī f_k un ne ... ~~noteikumi~~

§ 4. Par superoskulāciju katrā līknes punktā.

~~1. Meklēsim vispārīgus noteikumus, lai līknei L piederošā punktā X(x,t) dod~~

~~(63) $x_i = x_i(t) \qquad i = 1, 2, \dots, n$~~

~~punktā X ... ar virsmu A, kas atkarīga no parametriem a_j ($j = 1, 2, \dots N$) un ko rakstām~~

~~(64) $f(x, a) = 0$~~

~~būtu galīgas kārtas superoskulācija. Vienādojumus, kas nosaka virsmas un līknes oskulāciju, izteikt tajos iztilpstošos x' atvasinājumus mēs varam uzrakstīt veidā (vienkāršības dēļ f aizvietojam ar f_1)~~

~~(65)~~
$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x, a) = 0 \\ f_2(x, x', a) = 0 \\ \dots \\ f_N(x, x', x'', \dots x^{(N-1)}, a) = 0 \end{array}\right.$$

~~Katru no funkcijām f_i mēs dabūjām iepriekšējo atvasinot pēc t, ~~pie kam~~ x, un to atvasinājumi tiek uzskatīti par t funkcijām un a par konstantiem lielumiem, ko apzīmēsim ar rakstību~~

~~(66) $$f_{k+1} = \frac{\partial f_k}{\partial x}\frac{dx}{dt} \qquad (k \geq 1)$$~~

~~Vienādojumi (65) katrai t vērtībai dod vienu vai vairākas a_j vērtību sistēmas kā t funkcijas.~~
~~Lai ~~virsmai~~ attiecīgai A ar līkni L būtu pirmās kārtas superoskulācija, vēl jāpastāv~~

(67) ~~(22)~~ $$f_{N+1}(x, x', \dots x^{(N)}, a) = 0$$

Tā kā funkcijas x_i, to atvasinājumi un a_j identiski apmierina sakarības (65), varam tās atvasināt, kas dod, ievērojot (66)

$$f_{k+1} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt} = 0 \qquad \{k = 1, 2, \dots N\}$$

Tā tad, sakarību (65) un (67) dēļ

(68) ~~(33)~~ $$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt} = 0 \qquad k = 1, 2, \dots N$$

$A = X + a(n\cos\varphi + b\sin\varphi)$

$\vec{u} = t\cos\psi - n\sin\psi\sin\varphi + b\sin\psi\cos\varphi$

$A' \sim \vec{u} \quad t[1 - a\rho\cos\varphi] + a'(n\cos\varphi + b\sin\varphi) + a(\varphi' + \tau)[-n\sin\varphi + b\cos\varphi] = \lambda\vec{u}$

$\lambda\cos\psi \qquad 0 \qquad \lambda\sin\psi$

$a' = 0 \qquad \dfrac{1 - a\rho\cos\varphi}{\cos\psi} = \dfrac{a(\varphi' + \tau)}{\sin\psi}$

$\nu = -n\sin\varphi + b\cos\varphi \qquad \mu = n\cos\varphi + b\sin\varphi$

$\vec{u} = t\cos\psi + \sin\psi\,\nu$

$\nu' = t\rho\sin\varphi - (\varphi' + \tau)\mu \qquad n = \mu\cos\varphi - \nu\sin\varphi$

$\vec{u}' = \cancel{n\rho\cos\psi} + \sin\psi[t\rho\sin\varphi - (\varphi' + \tau)\mu] + \psi'[-t\sin\psi + \nu\cos\psi]$

$-\rho\cos\psi[\mu\cos\varphi - \nu\sin\varphi]$

$$\begin{array}{ll} t & \rho\sin\varphi\sin\psi \quad - \psi'\sin\psi \\ \mu & -\sin\psi(\varphi' + \tau) + \rho\cos\psi\cos\varphi \\ \nu & \psi'\cos\psi \quad - \rho\cos\psi\sin\varphi \end{array}$$

$\begin{cases} \psi' = \rho\sin\varphi \\ \sin\psi(\varphi' + \tau) = \rho\cos\psi\cos\varphi \end{cases}$

$\varphi' = \dfrac{\rho\cos\psi\cos\varphi}{\sin\psi} - \tau$

$(1 - a\rho\cos\varphi)\sin^2\psi = a\cos\psi\dfrac{[\rho\cos\psi\cos\varphi]}{\sin\psi}$

(1) $\sin^2\psi = a\rho\cos\varphi \qquad$ Kärla 3

$\sin^2\psi - a\rho\cos\varphi = 0; \quad \rho, \tau = 0!$ Kärla 3

$a\rho$

$\psi' = \rho\sin\varphi$

$~~2\sin\psi\cos\psi\left[\dfrac{\rho\cos\psi\cos\varphi}{\sin\psi} - \tau\right] = 0~~$

$2\sin\psi\cos\psi\,\rho\sin\varphi - a\rho'\cos\varphi + a\rho\sin\varphi\left[\dfrac{\rho\cos\psi\cos\varphi}{\sin\psi} - \tau\right] = 0$

$\rho\cos\varphi = \dfrac{\sin^2\psi}{a} \cdot \dfrac{\cos\psi}{\sin\psi}$

$2\rho\sin\psi\cos\psi\sin\varphi - a\rho'\cos\varphi - a\rho\tau\sin\varphi + \rho\dfrac{\sin\varphi\cos\psi}{\cancel{\sin\psi}}\sin\psi = 0$

$3\rho\sin\psi\cos\psi\sin\varphi - a\rho'\cos\varphi - a\rho\tau\sin\varphi = 0$

$t^4(t^2+1) - 9\rho^2 t^4 = 0 \qquad$ 4 sasnes $t = 0, \quad \tau^2(t^2+1) - 9\rho^2 = 0 \qquad$ 2 kohi

$\varphi = 0 \qquad a\rho = \sin^2\psi$

ohn ii

$-a\rho\tau^2 = 3\rho^2\cos^2\psi - 4\rho\tau\sin\psi\cos\psi = 0$

ψ' ahi 0, ...

$\sin\psi\,\tau = \cos\psi\,\rho$ - neslashojais.

$3\rho^2\cos^2\psi - 4\rho\tau\sin\cos + \tau^2\sin^2 = 0$

$\dfrac{\sin^2}{\rho^2} = \dfrac{\cos^2}{\tau^2} = \dfrac{1}{\rho^2+\tau^2} \quad$ neesmh. $\quad a\rho = \dfrac{\rho}{\rho^2+\tau^2}$

$(3\rho\cos - \tau\sin)(\rho\cos - \tau\sin) = 0$

$\dfrac{\sin^2}{9\rho^2} = \dfrac{\cos^2}{\tau^2} = \dfrac{1}{9\rho^2+\tau^2} \quad$ Kärla $\quad \boxed{a = \dfrac{9\rho}{9\rho^2+\tau^2}}$

$\rho \quad 3\rho\cos - \tau\sin = 0 \qquad$ ossklal.

$t = \dfrac{9\rho^2}{} \quad \sin = \dfrac{\tau^2}{} \quad 9\rho^2\sin^2 = \tau^2$

$\tau^2 \quad -a\rho\cos\varphi + \sin^2\psi = 0$

$-a\tau\boxed{\sin\varphi} + 3\rho\boxed{\sin\varphi}\sin\psi\cos\psi = 0 \qquad \sin\varphi = 0$ vai $a\tau = 3\rho\sin\psi\cos\psi$ $\quad$ chvl Kärla Kärla!

$3\rho\cos\psi = \tau\sin\psi$

(C)

šajos ~~Noteikumos~~ (62) ~~daļējām~~ funkcijām f_k tikai šķietami ir dažāda loma. Katrs noteikums izteic, ka matricai, kur ietilpināti visu funkciju f_k un iepriekšējā noteikuma kreisās puses pirmie parciālie atvasinājumi, rangs ir mazāks par N; katram turpmākam ir jāizteic jauns noteikums funkciju f koeficientiem un lielumiem a_{jo}. Ja punkts A_0 nav singulārs pēdējai virsai (53), par izteiksmi D_{i+1} var ņemt funkcionāldeterminantu, kas aprēķināts aizvietojot D_1 izteiksmē kaut kādu no funkcijām f_k ar D_i, vienīgi pāri palikušo f_k pirmo parciālo atvasinājumu matricai jābūt ar rangu N-1.

Ja punktā A_0 visu f_k pirmo parciālo atvasinājumu matricai rangs ir mazāks par N-1, mūsu kritērijs protams nav lietojams, jo visiem lielumiem D_i šai punktā ir vērtība nulle. Arī šajā gadījumā ar lietoto paņēmienu varētu atrast derīgus kritērijus, ko mēs tomēr nedarīsim, lai neaizsietos pārāk tālu no galvenā temata.

Definējot pieskaršanās kārtu ar bezgalīgi maza attāluma palīdzību, kā redzējām, dabūjam to pašu skaitli, kā lietājot atvasinājumus. Tāpēc arī kritērijs (62), ja izpildīti tā derīguma noteikumi, ir līdzvērtīgs sistēmu atrisinājumu daudzkārtības kritērijiem, kas izteikti bezgalīgi mazu attālumu jēdzienu. Tā kā šādā kārtā ir iespējams raksturot algebrisku vienādojumu sistēmu daudzkārtīgās saknes), arī mūsu kritērijs ir derīgs algebrisku vienādojumu gadījumā.

Būtu interesanti noskaidrot, vai kritērija (62) un ~~atbilsto~~ tā vispārinājums derīgumam algebrisku vienādojumu sistēmām ir iespējams pierādīt tīri algebriskā ceļā, nelietājot nepārtrauktības jēdzienu — domājams, ka atbildei jābūt pozitīvai.

039821

) Sk. piem. H. G. Zeuthen, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie

§ 4. Par superoskulācijas kārtas kritērijiem un superoskulācijas kārtā līknes punktā.

$\boxed{8''_c}$

D

1. Meklēsim vispirms noteikumus, lai līknei L ar tās oskulētāju virsu A kādā atsevišķā līknes punktā notiktu zināmas kārtas superoskulācija. Līkni L ar tekošo punktu $X(x_i)$ dodam ar vienādojumiem

$$(63) \qquad x_i = x_i(t) \qquad i=1,2,\dots,n$$

un virsu A, kas atkarīga no parametriem a_j $(j=1,2,\dots,N)$ ar tās vienādojumu

$$(64) \qquad f_1(x,a)=0.$$

Pārrakstām vienādojumus, kas izteic līknes un virsas oskulāciju, izceļot tajos ietilpstošo x_i atvasinājumu kārtas

$$(65) \qquad \begin{cases} f_1(x,a)=0 \\ f_2(x,x',a)=0 \\ \text{-------------} \\ f_N(x,x',\dots,x^{(N-1)},a)=0 \end{cases}$$

039822

atvasinot pēc t, pie kam

Katru no funkcijām f_k dabūjam iepriekšējo uzskatot x_i par (63) definētām funkcijām un a_j par konstantēm. Simboliski to varam izteikt ar

$$(66) \qquad f_{k+1} = \frac{\partial f_k}{\partial x}\frac{dx}{dt} \qquad k \geq 1.$$

Vienādojumi (65) vispārīgā gadījumā dod vienu vai vairākas a_j kā t funkciju vērtību sistēmas. Ņemam vienu no tām. Lai attiecīgai virsai A ar līkni L punktā X būtu vismaz pirmās kārtas superoskulācija, šajā punktā vēl jāpastāv

seko (67)

kārtas parosculātija, vai un šī virsa ir stacionāra, vai arī tās parametru vērtības a_j ir sistēmas (30) vismaz divkāršs atrisinājums, t.i. virsa V pārstāj vismaz divas sakritušas oskulējošas virsas.

Meklējot noteikumus, lai punktā X notiktu tieši r-1-mās kārtas superoskulācija, būs jāšķiro divi gadījumi: $D_1 \neq 0$ un $D_1 = 0$.

2. Aplūkosim vispirms gadījumu, kad $D_1 \neq 0$. Bez vienādojumiem (65), ja notiek tieši r-1-mās kārtas superoskulācija, punktā X vēl jāpastāv

$$(71)\ (\cancel{36})\quad \begin{cases} f_{N+1}(x, x', \dots x^{(N)}, a) = 0 \\ \dots \\ f_{N+r-1}(x, x', \dots x^{(N+r-2)}, a) = 0 \end{cases}$$

$$(72)\ (\cancel{37})\quad f_{N+r}(x, x', \dots x^{(N+r-1)}, a) \neq 0$$

039823

Atvasinot i reizes pēc parametra t identiski apmierinātos vienādojumus iegūstam vienādojumus ar veidu

$$(73)\ (\cancel{38})\quad f_{k+i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial a_j} \frac{d^{(i)} a_j}{dt^i} + F_{ki} = 0, \qquad k = 1, 2, \dots N.$$

Funkcijas F_{ki} ir summas monomiem, kas satur kā faktorus a_j atvasinājumus līdz kārtai i-1 un to reizinājumus. Tā kā $\frac{d^{(i)}a_j}{dt^i}$ koef. determinants N vienādojumiem (73) ir $D_1 \neq 0$, lietot pēc kārtas $i = 1, 2, \dots$ ievērojot (65) un (71), secinām, ka punktā X ?

$$(74)\ (\cancel{39})\quad \frac{d^{(i)} a_j}{dt^i} = 0 \qquad j = 1, 2, \dots N;\ i = 1, 2, \dots r-1.$$

un

$$(75)\ (\cancel{40})\quad \frac{d^{(r)} a_j}{dt^r} \neq 0 \quad \text{vismaz vienam } j.$$

Otrādi, ja ir izpildīti noteikumi (65) katrā līknes punktā un punktā X, sakarības (73) rāda, ka pastāv (71) un (72). Tā tad:

Lai oskulējošai virsai A ar līkni L tās punktā X būtu tieši r-1-mās kārtas superoskulācija, ir pietiekami, ka pastāv noteikumi (74) un (75) un nepastāv (70). ~~Ja katrā noteikumiem (74) ... a_j ir konstanti un L atrodas uz kādas virsas V.~~

~~katrā dotajā punktā M~~ punktā M

S. Ja mātikai

~~Aplūkosim tagad gadījumu kad~~

$$\cancel{(40)\quad \left\| \frac{\partial f_k}{\partial a_j} \right\| \quad k = 1, 2, \dots N-1;\ j = 1, 2, \dots N}$$

~~ir rangs N-1, kā mēs turpmāk pieņemsim, (35) izteic, ka pēdējais no vienādojumiem (33) ir pārējo sekas, tā tad arī (32) ir vienādojumu (30) sekas.~~

...tricai

0̶39824

$$(76)\quad (\cancel{71})\quad \left\| \frac{\partial f_k}{\partial a_j} \right\| \qquad \begin{matrix} k=1,2,\dots N-1 \\ j=1,2,\dots N \end{matrix}$$

...rangs $N-1$, kā mēs turpmāk pieņemsim, superoskulācijas kārta punktā X ... vismaz r, kur r ir skaitlis, kam pastāv (74) un (75). Tiešām ... vienādojumi (73) ar $k=N$ un $i=1,2,\dots r-1$ dod vienādojumus (71). Liekot $i=r$ ... $k=1,2,\dots N$, un ievērojot dabiskos vienādojumus (71), iegūstam ... sakarības

$$(77)(\cancel{72})\quad \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial a_j}\frac{d^r a_j}{dt^r}=0 \qquad k=1,2,\dots N-1$$

$$(78)(\cancel{73})\quad f_{N+r}+\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_N}{\partial a_j}\frac{d^r a_j}{dt^r}=0$$

Tā kā pastāv $D_1=0$ un mātricai (76) ir rangs $N-1$, no vienādojumiem (77) ... seko

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_N}{\partial a_j}\frac{d^r a_j}{dt^r}=0$$

... jo šis vienādojums ir vienādojumu (77) lineāra kombinācija, tā tad

$$(79)\quad f_{N+r}=0$$

Ja superoskulācija notiek liknes L atsevišķā punktā M, noteikumus, kas ļauj konstatēt tās precizo kārtu, nevar izteikt vienīgi ar vienādojumu (65) un a_j atvasinājumu palīdzību, bet jāņem palīgā arī vienādojumi (71) un (72) vai analoga tipa vienādojumi. Tāpēc šajā gadījumā paturēsim noteikumus (71) un (72).

4. Interesantākais par visiem iepriekšējiem ir gadījums, kad oskulējošā virsa nav stacionāra un tai katrā liknes L punktā ir $r-1$-mās kārtas superoskulācija. Šajā gadījumā vienādojumu (65) noteiktās a_j vērtības identiski apmierina pašām sakarības (71) un (72). Aizvietojot funkcijās a_j argumentu t ar s, kā redzējām 2. paragrāfa otrā daļā, visi funkcijas f_1 parciāli atvasinājumi pēc t, s vai abiem argumentiem līdz kārtai $N+r-2$ ieskaitot vienādojumi (65), (71) un (72) kreisās pusēs ir funkcija f_1 ~~...~~ un tās parciāli atvasinājumi pēc t līdz kārtai $N+r-1$. Visi šie lielumi, atskaitot pēdējo, identiski pazūd, jā $s=t$. Tad,

... (76) rangs un 039825

$$(80) \quad (\cancel{45}) \quad \frac{da_j}{ds} \neq 0 \quad \text{vismaz vienam } j$$

raksturo sistēmas (65) r-kārtīgu atrisinājumu. Otrādi, ja a_j ir sistēmas ... atrisinājums, ... ir spēkā noteikumi par matricu (76) un nepastāvīgu (69) vismaz vienam j, var secināt, ka ... (71) un (72). Tiešām no (65) seko, ka

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial a_j} \frac{da_j}{ds} = 0 \quad \text{ja } k = 1, 2, \ldots N-1;$$

(70) ~~(81) (46)~~ $\cancel{D_1 = 0}$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_N}{\partial a_j} \frac{da_j}{ds} = \frac{\partial f_N}{\partial s} = 0$$

..., ka ... ir iepriekšējo vienādojumu sekas, kas savukārt izsauc

$$(81) \quad (\cancel{47}) \quad \frac{\partial f_N}{\partial t} = f_{N+1} = 0$$

Lai izskatītu augstākas kārtas superoskulāciju, varam tā kā vienādojum... (71) un tā parciālos atvasinājumus pēc t aizvietot ar vienādojumu (70) un tā atvasinājumi... ir paskārt (65), pirmā ~~ir~~ atv... sekas. Ja arī

$$(82) \quad (\cancel{48}) \quad D_2 = 0,$$

vienādojuma (70) pirmais atvasinājums ir vienādojumu (65) sekas, tā kā (70) atvasinājumi ... varam aizstāt ar (82) un tā atvasinājumiem u. t. t. No

$$D_{r-1} = 0$$

secinām, ka D_i pazūd visi $(i = r-2, r-3, \ldots, 1)$ ~~...~~ parciālie atvasinājumi ar kārtu r-i ... kas dod

$$f_{N+r-1} = 0$$

Beidzot

$$D_r \neq 0$$

kopā ar (80) rāda, ka D_i $(i = r-1, r-2, \ldots 1)$ ~~...~~ parciālie atvasinājumi pēc t ar kārtu r-i nepazūd, kas dod

$$f_{N+r} \neq 0.$$

Tā kā: ja oskulētājā virsa A nav stacionāra un tās parametra vērtībām matricai (76) ir rangs N-1, lai ~~notiktu~~ vispārīgi punktā A tieši r-1-mās kārtas superoskulācija, ir nepieciešami un pietiekami, ka A ir tieši r-kārtīga oskulētāja virsa, (t. i. kā tās parametru vērtības ir sistēmas (65) r-kārtīgs atrisinājums). Speciālos punktos, kur virsa A top stacionāra vai arī pārstāj vairāk kā r oskulētājas virsas, superoskulācijas kārta vispār palielinās.

Vispārīgā gadījumā, ja sistēmai (65) var būt r-kārtīgi atrisinājumi, nav sagaidāms, ka attiecīgā virsa A ir nemainīga un ka attiecīgā līkne L vispār atrodas uz kādas nemainīgas ~~...~~ virsas A; ar konkrētiem 3-kārtas gadījumu piemēriem iepazīsimies ~~...~~ otrā nodaļā.

visām klasiskām oskulācijas [...] figūrām: taisnei, riņķim, ... plaknei, ... sfērai un lodei telpā:

$$(83) \qquad \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j(X) + \varphi_{N+1}(X) = 0$$ liekot $a_j = \frac{b_j}{b_{N+1}}$

uzrakstām ~~[illegible]~~ veidā ar homogēniem parametriem b_k visas A vienādojums

$$(84) \ (~~45~~) \qquad \sum_{k=1}^{N+1} b_k \varphi_k(x) = 0.$$

039826

Prasot, lai pastāvētu vismaz pirmās kārtas superoskulācija, bez vienādojuma (84), kur liknes L tekošā punkta koordinātas x_i aizvietotas ar attiecīgajām t funkcijām, jāpastāv vēl vienādojumiem, ko dabūjam (84) K reizes (K = 1, 2, ... N) atvasinot pēc t. Dabūtās lineārās homogēnās N+1 vienādojuma sistēmas attiecībā pret b_j determinantam, kas ir funkciju $\varphi_k[x(t)]$ Vronska determinants, jābūt vienlīdzīgam nullei. Ja šī determinanta rangs kādam t vērtību intervallam ir N_j seko sakars ar veidu

$$(85) \ (~~50~~) \qquad \sum_{k=1}^{N+1} c_k \varphi_k[x(t)] = 0 \quad ,$$

kam visas konstantes c_k nav vienlīdzīgas nullei; ja rangs ir N − 1, seko vairāki tipa (85) sakari u.t.t. Katrā gadījumā, ja vajadzīgs sadalot parametra t vērtības intervallos, katram intervallam ir ~~[illegible]~~ atbilst vismaz viens sakars (85); atbilstošais liknes L loks atrodas virsā (84), kam

$$b_k = c_k.$$

Ja funkcijas φ un x ir savu argumentu analītiskas funkcijas, katrs sakars (84) pastāv visam t vērtību intervallam, kam šīs funkcijas ir definētas, ja tas pastāv patvaļīgi mazai šī intervalla daļai. Turpretim prasot vienīgi, lai funkcijām x_i eksistētu patvaļīgi nepārtraukti atvasinājumi pēc t līdz galīgai, kaut arī patvaļīgi lielai kārtai p_j var notikt, ka dažādiem liknes L lokiem atbilst dažādas virsas (84). Kā piemēru varam minēt šādu likni: trīs dimensiju Euklida telpā ņemam divas lodes ar kopīgu reālu riņķi C un konstruējam katrā lodē loku, kas tai pašā punktā X_0 ~~patvaļīgi~~ ar ~~augstu~~ kārtā p pieskartos riņķim C, turklāt tā, lai punkts X gūt nemainītu ilustrācijas vērsumu; abi loki caur X_0 no viena loka otrā, nemainīta ilustrācijas vērsumu; abi loki kopā izveido likni L, kam tekošā punkta X koordinātām eksistē ~~patvaļīgi augsti~~ galīgas nepārtraukti atvasinājumi līdz kārtai p pēc piemērota parametra, piem. loka garuma, un kuras loki atrodas divās dažādās nemainīgās lodēs.

visām klasiskām oskulācijas figūrām: ...

lāsēsmi un lodei telpā:

$$(83)\qquad \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j(X) + \varphi_{N+1}(X) = 0$$

liekot $a_j = \frac{b_j}{b_{N+1}}$ uniesistēms ~~...~~ veidā ar homogēniem parametriem b_k virsas A vienādojums

$$(84)\ (\cancel{45})\qquad \sum_{k=1}^{N+1} b_k \varphi_k(x) = 0.$$

039826

Prasot, lai pastāvētu vismaz pirmās kārtas superoskulācija, bez vienādojuma (84), kur liknes L tekošā punkta koordinātas x_i aizvietotas ar attiecīgajām t funkcijām, jāpastāv vēl vienādojumiem, ko dabūjam (84) k reizes (k = 1, 2, ... N) atvasinot pēc t. Dabūtās lineārās homogēnās N+1 vienādojuma sistēmas attiecībā pret b_j determinantam, kas ir funkciju $\varphi_k[x(t)]$ Vronska determinants, jābūt vienlīdzīgam nullei. Ja šī determinanta rangs kādam t vērtību intervallam ir N, seko sakars ar veidu

$$(85)\ (\cancel{50})\qquad \sum_{k=1}^{N+1} c_k \varphi_k[x(t)] = 0,$$

kam visas konstantes c_k nav vienlīdzīgas nullei; ja rangs ir N−1, seko vairāki tipa (85) sakari u.t.t. Katrā gadījumā, ja vajadzīgs sadalot parametra t vērtības intervallos, katram intervallam ir ~~...~~ atbildīs vismaz viens sakars (85); atbilstošais liknes L loks atrodas virsā (84), kam

$$b_k = c_k.$$

Ja funkcijas φ un x ir savu argumentu analītiskas funkcijas, katrs sakars (84) pastāv visam t vērtību intervallam, kam šīs funkcijas ir definētas, ja tas pastāv patvaļīgi mazai šī intervalla daļai. Turpretim prasot vienīgi, lai funkcijām x_i eksistētu nepārtraukti atvasinājumi pēc t līdz galīgai, kaut arī patvaļīgi lielai kārtai p, var notikt, ka dažādiem liknes L lokiem atbilst dažādas virsas (84). Kā piemēru varam minēt šādu likni: trīs dimensiju Eiklīda telpā ņemam divas lodes ar kopīgu reālu riņķi C un konstruējam katrā lodē loku, kas tai pašā punktā X_0 ~~...~~ ar ~~augstākās~~ kārtas p pieskartos riņķim C, turklāt tā, lai punkts X ejot caur X_0 no viena loka otrā, nemainītu kustības virzienu; abi loki kopā izveido likni L, kam tekošā punkta X koordinātām eksistē nepārtraukti atvasinājumi līdz kārtai p pēc piemērota parametra, piem. loka garuma, un kuras loki atrodas divās dažādās nemainīgās lodēs.

Tā, piemēram, taisnes vienādojums plaknē polārās koordinātās

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = p$$

039827

nav lineārs attiecībā pret parametru α.

Dabiski rodas jautājums: kādam jābūt vienādojumam (86), lai tas būtu reducējams veidā (83) un ar kādu parametru transformāciju tas panākams; bez tam vēl būtu jāpārbauda, vai iegūtais vienādojums (83) attēlos to pašu saimi kā (86). Ka pēdējais ne vienmēr notiek, rāda triviālais viena parametra saimes piemērs: ja vienādojums (86) satur tikai vienu parametru c_1, to atrisinot attiecībā pret c_1 iegūstam

$$(87) \quad c_1 = f(y)$$

kas atbilst veidam (83), bet attēlo citu tipa saimi, kā (86): ja pirmās virsām [illegible] charakteristikas, otrās virsām tādu nekad nav. Starpība rodas tāpēc, ka vispārīgā gadījumā ir vienādojumu (86) un (87) attēlotajās saimēs kā zināms vienādojumā nav [illegible] vispārīgā gadījumā funkcija f. pēdējā argumenta y_i viennozīmīga funkcija.

Principiāli vienkāršā, bet aprēķinu garuma dēļ praktiski laikam neizpildāma ceļā kritērijus vienādojuma (86) redukcijai varam iegūt šādi: uzskatot vienādojumā (83) lielumus x_i par konstantēm, tas nosaka sakaru visu a_j starpā, proti viens no lielumiem a_j, piemēram a_N, ir visu pārējo a_j lineāra funkcija. Šo sakaru raksturojam ar sistēmu

$$(88) \quad \frac{\partial^2 a_N}{\partial a_j \partial a_k} = 0 \qquad j, k = 1, 2, \ldots N-1 \quad ,$$

kas satur $\frac{N(N-1)}{2}$ neatkarīgus vienādojumus. Ja eksistē transformācija

$$(89) \quad a_j = a_j(c)$$

kas kopā ar piemērotu pārējo no lielumiem y_i un x_i, ~~[illegible]~~ vienādojumu (86) pārvērš vienādojumā (83), uzskatot vienu no c_j, piemēram c_N, par pārējo c_j funkciju, noteikumus (88) varam aizvietot ar noteikumiem, kur ietilpst c_N abi pirmās kārtu parciāli atvasinājumi pie pārējiem c_j un lielumu a_j abu pirmo kārtu parciāli atvasinājumi pie c_j. Šiem noteikumiem jāraksturo sakars (86) starp lielumiem c_j, t.i. uzskatot šai vienādojumā lielumus y_i par konstantēm, to atvasinot dažādas reizes pēc visiem c_j un izslēdzot lielumus y_i dabūtām vienādojumu starpā, ~~[illegible]~~ mums jādabū līdzīvērtīga noteikumu sistēma. Identificējot abās atrastās sistēmās atbilstošos koeficientus dabūjam otrās kārtas parciālo diferenciālvienādojumu sistēmu nezināmo

$N-N$

funkciju (89) noteikšanai. Šīs sistēmas integrabilitātes noteikumi ir meklētie redukcijas iespējamības kritēriji.

No iepriekšējā apsvēruma iegūstam arī vienu vienkāršāku nepieciešamu noteikumu: ~~tā kā~~ izslēdzot lielumus y_i no vienādojuma (86) mums jāiegūst diferenciālvienādojumu sistēma, kam (88) ir sekas. Tātad lielumi y_i, ja to skaits ir lielāks par N, ~~...~~ vienādojumā (86) figurē ar augstākais N neatkarīgu funkciju starpniecību; ja šis noteikums nav izpildīts, pāreja no (86) uz (83) nav iespējama.

Otru nepieciešamu noteikumu dod vienādojumus (88) pārveidojot iegūto vienādojumu forma: tie ir veseli noteikta vienkāršā tipa (kas atkarīgs no N vērtības) algebriski vienādojumi attiecībā pret c_k atvasinājumiem. Ja no (86), izslēdzot lielumus y_i, neiegūstam attiecīgā tipa vienādojumus, meklētā redukcija nav iespējama.

Lietājot E. Cartan'a izveidoto Pfaffa formu teoriju, J. Dubourdieu[)] noteicis redukcijas kritērijus gadījumam $n = N = 2$. Ar šo pašu jautājumu, vai pareizāk problēmu: vienādojumu

$$y'' = f(x,y,y')$$

ar punktu transformāciju pārvērst veidā

039828

$$y'' = 0$$

ir nodarbojies S. Lie[)]. Nemeklējot integrabilitātes noteikumus, viņš ir parādījis, ka redukcija, ja tā vispār iespējama, prasa viena trešās kārtas lineāra parastā diferenciālvienādojuma integrēšanu.

Lai konstatētu, vai dotā virsu saime pieder aplūkojamam tipam, vai nē, praktiski vismoderīgākais līdzeklis šķiet esam oskulējošo virsu noteicošās sistēmas (65) aplūkošana: ja tā, neatkarīgi no līknes to rakstura, nosaka vienu vienīgu oskulējošo virsu, kaut arī tai atbilstu vairākas vai pat bezgalīgi daudzas parametru vērtības sistēmas (kā piem. taisnei

---

[)] J. Dubourdieu, Questions topologiques de géométrie différentielle. Mémor. d. Sc. Math. 78 (Paris, Gauthier-Villars) 1936 sk. 46-56 l.p.

[)] S. Lie, Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen ... III, Archiv for Math. og Naturw. 9 1883, 371-458 l.p. arī Gesammelte Abh...

plaknē, lietājot polārās koordinātas), saimes vienādojums ir reducējams uz veidu (83).

6. Mums atliek aplūkot vēl tikai gadījumu, kad sistēmas (65) dotās aj vērtības matricai (76) piešķir rangu mazāku par $N-1$. Šajā gadījumā ~~attiecīgai~~ osculējošai virsai atbilst sistēmas (65) vismaz divkārša atrisinājumu sistēma. Pieskaršanās kārta tomēr ne ikreizes būs lielāka par $N-1$; ja arī notiks superoskulācija, tās kārta vispārīgā gadījumā būs vairāk kā par vienu vienību mazāka par (65) atrisinājuma kārtu. Šis gadījums ir analogs līknes šķelšanai ar taisni, ja pēdējā iet caur vairākkārtīgu punktu: ja arī šķelšanas punkts top vairākkārtīgs, ne ikreizes taisne līknei pieskarsies. Precīzās eventuelās superoskulācijas kārtas noteikšanai te būs jālieto atkal pamata vienādojumi (71).

039829

7. Duāli pārveidojot šī paragrafa rezultātus, iegūsim attiecīgos rezultātus viena parametra virsu saimei un charakteristiskam punktam X. Ja matricai (76) atbilstošai matricai rangs ir $N-1$ un charakteristiskais punkts ir stacionārs vai vairākkārtīgs, tas būs supercharakteristisks punkts. Īpaši ja ir izpildīts noteikums par matricu un ja X koordinātas ir to noteicēja sistēmas ~~vairāk~~ r-kārtīgs atrisinājums, X būs $r-1$-mās kārtas supercharakteristisks punkts.

Beidzot šī paragrafa 5. daļā aplūkotām virsu saimēm atbilst punkti virsās, kam vienādojums ir lineārs/ attiecībā pret koordinātām. Ņemot ir par afinām koordinātām, aplūkotā problēma iegūst sekošu formulējumu: noteikt, kad N parametru virsu saimes var ar punktu transformācijām pārvērst par hiperplakņu saimi. Tas dod vēl jaunu kriteriju ... ir jāpastāv iespējamībai ar virsu šķelšanas ...

-1-mās kārtas super...

sistēmu (65) var atrisināt attiecībā ~~pret~~ a_j, tos dabūjot kā $x_i, \dot{x}_i \dots x_i^{(N-1)}$

funkcijas. Ievietojot šīs vērtības vienādojumos

$$D_1 = 0 \quad D_2 = 0 \dots \quad D_{n-1} = 0$$

039830

dabūjam diferenciālvienādojumu sistēmu, kas nesatur neatkarīgo mainīgo t un ir homogēna attiecībā pret dt. Atbrīvojoties no nenoteiktības parametra izvēlē, varam ņemt vienu no x_i kā patvaļīgu t funkciju. Tad rodas $n-1$ vienādojumu sistēma, kas saista ~~...~~ $n-1$ nezināmo un to atvasinājumu līdz kārtai $N-1$ ieskaitot. Vispārīgajā gadījumā, ja šī sistēma nesatur pretrunas un ja to iespējams atrisināt attiecībā pret visu nezināmo $N-1$-mās kārtas atvasinājumiem, tās atrisinājuma rakstnurotā līsne L_1 būs atkarīga no $(n-1)(N-1)$ patvaļīgām konstantēm, piemēram visu nezināmo un to atvasinājumu līdz kārtai $N-2$ sākuma vērtībām kādai parametra vērtībai $t = t_0$. Speciālos gadījumos] var protams notikt, ka iespējams izslēgt visus $N-1$-mās kārtas, eventuāli arī tālākos visu nezināmo atvasinājumus. Līsnes L_1 noteicēju konstantu skaits tad pazeminās, vai pat šādu konstantu nemaz nebūs.

Līsnes L_1, ~~kas~~ dod maksimālais sakārīgais nupat aplūkoto vienādojumu skaits, mēs saucsim par visu saimes S maksimālās kārtas aplicējām. Kā nupat redzējām, tai pieskaršanās kārta vispārīgā gadījumā ir $N+n-2$. Līdz ar to tās tekošais punkts X ~~ir~~ oskulētāji visu saimes R $n-1$-mās kārtas superharakteristiskos punkts. Līsnes L un saimes R konfigurāciju varētu iegūt arī uzskatot saimes S vienādojumā lielumus x_i par konstantēm, a_j par t funkcijām un atvasinot to $n-1$ reizi pēc t. Ja mēs izslēgtu ~~...~~ nav konstantes tāpat kā iepriekšējā paragrafā mēs konstantes lai dabūtu tās sistēmas ~~...~~ x_i ~~...~~ šīs vienādojumu sistēmas N-kārtas atrisinājumus. Izsakot šo īpašību ka x_i atvasinājumi ir ar jābūt, šīs vienādojumiem dabūjam vēl $N-1$ vienādojumu. No visiem iegūtiem vienādojumiem izslēdzot lielumus x_i, dabūsim $N-1$ vienādojumu, kas saista a_j un to atvasinājumus līdz kārtai $n-1$. Tie tāpat kā augšā aplūkotie diferenciālvienādojumi lielumiem x_i, taujā nosaka, ja tie ir sakārīgi, maksimālās kārtas aplicējātie ~~...~~ a_j vērtības tieši nosaka saimes R un ~~...~~ šīs līsnes L_1 ir šo saimju $n-1$-mās kārtas aplicējās. Līsnes tekošais punkts X pārstāj attiecīgās saimes N sakrītošos charakteristiskos punktus.

un atbilst $n-1$-mās kārtas superharakteristiskam punktam

~~...~~ trešās kārtas pieskaršanās. Maksimālā vispār iespējamā characte-
ristikā punkta ~~...~~ daudzkārtība 4 nav sasniedzama, bet saime
...n maksimālās kārtas aplicējā L_t ir atkarīgas no divām patvaļīgām
...kcijām.

039831

Ar citiem piemēriem iepazīsimies otrā nodaļā.

2. Maksimālās kārtas aplicēji un vispār superoskulācijas ...imai ir ciešs sakars ar ~~...~~ noteikta tipa diferenciālvienādojumu ...lāriem atrisinājumiem. Šai rakstā aplūkotajiem gadījumiem, ...maiņīgi lielumi ir viena parametra funkcijas, attiecīgi vienā- ...mi būs tie, kas ~~...~~ noteic šādas funkcijas, proti parastie (kad $n=2$) un speciāla veida Monge'a (kad $n>2$) diferenciālvienādojumi.

Aplūkosim vispirms gadījumu, kad $n=2$. Saime S tad ~~...~~ ir ...parametru līkņu saime; katru līknei A raksturo konstantes a_j ...tības, tā kad lielumi x_i, kas uzskatot kā t funkcijas, apmierina ...vienādojumus (65) un (67). No tiem izslēdzot lielumus a_j, ...ējam N-tās kārtas diferenciālvienādojumu lielumiem x_1, x_2:

$$(90) \quad g(x, x', \ldots, x^{(N)}) = 0.$$

Pirmais vienādojums (65), ar konstantiem a_j, dod ši vienādojuma vispārīgo atrisinājumu. Visām līknēm L, kam eksistē nestacio-nāras superoskulējošās līknes A, ~~arī~~ tekošās koordinātas arī apmierina vienādojumus (65) un (67), tā tad arī (90). ~~Bet~~ Tā kā šim līknēm atbilstoši lielumi a_j nav konstanti, tās ~~neatbilst~~ neietilpst vienādojuma (90) vispārīgā atrisinājumā. ~~Tās~~ ...līknes ~~...~~ tā tad attēlo ~~sistēmas~~ vienādojuma (90) singulārus atrisinājumus. Kā redzējām, vispārīgā gadījumā līknes L veido $N-1$ ...parametru līkņu saimi, kas katrā savā punktā X ar kārtu N pieskaras kādai līknei A.

~~Šīs~~ Līknes L varam noteikt arī, izejot tieši no vienādojuma (90). ...ā kā singulārus punktus mēs no aplūkošanas izslēdzam, vajadzības ...adījumā mainot koordinātas, varam panākt, ka aplūkojamai ...knei L tās aplūkojamā punktā $x_1'(t) \neq 0$; x_1 varam tāpēc ņemt par ...parametru t, x_2 apzīmēsim ar x. Tad vienādojums (67) ir lineārs attiecībā pret $x^{(N)}$. ...sistēmu (65), kur nezināmie ir a_j un (65) kopā ar (67), kur nezināmie ir a_j un $x^{(N)}$

vērtība ... kas raksturo ...
vienādojuma (90) locekļiem noteiksmu, kas ... N-1-mās kārtas diferenciāl-
... $x^{(N)}$ eksistenci, mēs dabūjam N-1-mās kārtas pieskar-
šanās vienādojumu, ko apmierina visi līknes L N-1-mās kārtas pieskar-
šanās elementi. Integrējot šo vienādojumu, tā vispārīgais integrāls attēlo ~~...~~ (Šis integrāls, kopā ar eventuāliem singulāriem integrāliem, līkņu saimi, ~~...~~) bez līknēm L var attēlot ~~...~~ N-1 parametru līknes, kas ir singulāri līknēm A, kur ~~...~~ ģeometriskās vietas punktiem, kas ~~...~~ dažādām līknēm A ir tā pati $x^{(N)}$ vērtība u.t.t. Katrā atsevišķā gadījumā ~~...~~ jāpārbauda, vai un kāda iegūtās saimes daļa saskan no līknēm L. Ja vienādojums (90) ir dots patvaļīgi, un nevis iegūts ar konstanšu izslēgšanu, kā tas ir vispārīgajā gadījumā singulāru integrālu un tā tad arī līkņu L nav.)

039832

Gadījumā, kad $n > 2$, no vienādojumiem (65) un (67) tāpat kā iepriekš var izslēgt visus lielumus a_j, iegūstot tipa (90) vienādojumu, kas tagad satur $n > 2$ lielumus x_i un to atvasinājumus pēc t, t. i. Monge'a diferenciālvienādojumu. Šim vienādojumam ~~vairāk~~ nav vispārīgā ~~vienād~~ attiecīgā tipa vienādojuma veids, kā tas bija gadījumā $n = 2$, jo vispārīgam Monge'a diferenciālvienādojumam pirmintegrālu nav. Iegūtam vienādojumam (90) turpretim ir N pirmintegrāli, ko dod a_j izteiksmes, kas aprēķinātas no vienādojumiem (65). Turklāt ~~...~~ šiem pirmintegrāliem ir speciāls raksturs, jo no tiem var izslēgt visus x_i atvasinājumus, iegūstot pie vienādojumu (65).

Arī te maksimālās kārtas aploksnes, ja tās eksistē, varam iegūt ar vienādojuma (90) palīdzību, izlietājot līdzīgus apsvērumus, kā gadījumā 2 (La ar nestacionāru N-1-mās kārtas ... līknes) N-1-mās kārtas pieskaršanās elementi vienādojumu sistēmas (65) noteikto a_j vērtību sistēmu padara par r-kāršu atrisinājumu. ~~Bet tad, kārtā~~ Vienādojums (67) ir lineārs attiecībā pret visiem $x_i^{(N)}$; izslēdzot vēl visus $x_i^{(N)}$ atskaitot vienu, piemēram $x_n^{(N)}$, vienādojumu (65) un (67) vietā sistēmai attiecīgās a_j un $x_n^{(N)}$ vērtības veidos r-kāršu atrisinājumu. Uzlūkojot vienādojumā (90) $x_n^{(N)}$ par nezināmo, arī šim vienādojumam

) Sīkākus pētījumus par iespējamiem singulāro atrisinājumu gadījumu ... piemēram skat.

В. А. Стеклов, Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва-Ленинград, 1927, 86-97. un 262.-

G. Mammana: Sugli inviluppi di ordine superiore dei sistemi di curve piane. Giornale di Matematiche 65, 1927, 1.-20. l.p.

(92) $D_1 = 0 \quad D_2 = 0 \quad \ldots, D_r = 0$

s arī raksturoja superpozīciju ar kārtu r-1. Katrā ziņā tomēr būs iespējams vienādojumu (90) un (91) starpā izslēgt visus $x_i^{(N)}$, iegūstot augstākais r neatkarīgus noteikumus, kas saista x_i un to atvasinājumus līdz kārtai N-1 vērtībās un i noteikumu (92) sekas. Uzrakstot noteikumus (91) maksimālai r vērtībai, tādu (90) un (91) veido atrisināmu sistēmu un šo sistēmu integrējot, mēs dabūsim līkņu saimi, kas katrā ziņā saturēs visas maksimālās kārtas aplicējošās, bet varēs saturēt arī dažādas citas līknes, līdzīgi kā gadījumā $n=2$. Tāpat kā iepriekš, arī te varietātes, kam katrā punktā pastāv (91) ar $r \geq 1$, atbilst vienādojuma (90) singulāriem integrāliem.

Gaŗāmejot mēs esam ieguvuši interesantu rezultātu: katrai N parametru visu saimi var raksturot ar Monge'a ~~tipa~~ (respektīvi parastā, ja $n=2$) diferenciālvienādojumu (90), ko apmierina katras saimes visas patvaļīgas līknes tekošās koordinātas un to atvasinājumi.

Rodas jautājums: kādi Monge'a vienādojumi (90) raksturo visu saimes? Neizdarot aprēķinus, minēsim dažus ceļus, kas var dot atbildi. Vispirms ievērosim, ka vienādojumam (90) jābūt homogēnam attiecībā pret visiem $x_i^{(N)}$, jo tas ir līdzvērtīgs šāda veida vienādojumam (67), kur a_j aizvietoti ar saviem vērtībām. Atrisinot vienādojumu (90) attiecībā pret vienu no $x_i^{(N)}$, ~~dabūsim~~ jādabū vienādojums, kas ir lineārs un homogēns attiecībā pret visiem $x_i^{(N)}$ – jā tādu vienādojumu nevaram dabūt, (90) ~~[illegible]~~ nav aplicējošā tipa. Tālāk jāievēro, ka dabūtam vienādojumam, kur visi locekļi pārnesti kreisā pusē, eksistē N integrējošu faktoru, kas tā kreiso pusi padara par N savstarpēji neatkarīgu funkciju eksaktu diferenciālu. Beidzot jāievēro, ka no dabūtiem N pirmintegrāliem

$$(93) \qquad g_k(x, x', \ldots x^{(N-1)}) = \text{const.} \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

var izslēgt visu x_i atvasinājumus.

Varētu arī uzmeklēt tiešai veida tipa (93) vienādojumu, to padarīt lineāru un homogēnu attiecībā pret $x_i^{(N-1)}$, meklēt pirmintegrāļu dabūtam vienādojumam utt.

Beidzot varētu arī vienādojumu (90) aizvietot ar attiecīgo

Grupas gadījumā.

T piesaistītām r parametriem S. Lie

~~Noskaidr~~ 1. Pamata variētātē kādu nepārtrauktu ~~galīgu~~ transformāciju grupu, kas ir elementāri tranzitīva, t.i. ļauj pārvest vienu otrā ~~par~~ divus patvaļīgi dotus pieskaršanās elementus, kas raksturojami ar augstākais r skaitļiem. Vispārīgu gadījumu pētīšanai nemainīgās koordinātu sistēmas vietā ir izdevīgi ņemt kādu mainīgu koordinātu sistēmu, kas saistīta ~~ar~~ pētītām figūrām, proti Cartan'a kustīgo references sistēmu („repère mobile")). Par šādu references sistēmu varam ņemt ikkatru pamata variētātes figūru ar sekojošām īpašībām:

a) to noteic r parametri;

b) Grupa ir vienkārši tranzitīva attiecībā uz šīm figūrām;

c) katru figūru F nemainīgu atstāj tikai identiskā transformācija.

Lai pētītu kādu punktu variētāti, katram tās punktam X viennozīmīgā kārtā piesaista kādu references sistēmu F. Raksturojot ar F palīdzību bezgalīgi mazo grupas transformāciju, kas F pārveido punktam X bezgalīgi tuvam punktam X_1 piesaistītā figūrā F. Šādi iegūtie skaitļi, ko Cartan's sauc par kustības relatīvām komponentēm, dod aplūkojamās grupas invariantas diferenciālformas un diferenciālinvariantus. Tās ļauj visai vienkāršā veidā izveidot grupai atbilstošo diferenciālģeometriju.

Piemērs: Eiklida trīsdimensiju telpas ģeometrijā par figūru F var ņemt trīs savstarpīgi ortogonālus vienības vektorus ar kopīgu sākuma punktu. Piesaistot iespējami cieši šo figūru līknes L tekošam punktam un nosakot F kustības relatīvās komponentes, dabūjam Freneta triedru un formulas un reizē arī loka elementu un abus līknes zemākos diferenciālinvariantus — liekumu un vērpi.

) Kustīgās references sistēmas plašu teoriju satur E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et la Géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile. (Paris, Gauthier-Villars) 1937.

invarianti, izteics kādu ģeometrisku īpašību. Šis paņēmiens jau pirms Cartan'a vispārīgās teorijas izveidošanas ir ticis lietots speciālos gadījumos, piemēram Eiklīda telpas un plaknes diferenciālģeometrijā to plaši izmantojuši Darboux[10] un Cesàro[11]. Pēdējā autora ~~...~~ teh... nesaistības noteikumu jēdziens, to attiecīgi vispārinot, ir ļoti noderīgs pētot pieskaršanos un bezgalīgi tuvu variētāšu saskaršanos.

Aplūkosim kritērijus, kas raksturo p-tās kārtas pieskaršanos ja koordinātu sistēma būtu nemainīga, un noteiksim, kā tie jāpārveido, ja references sistēma mainās. Ja dabiski pieņemt, ka aplūkojamā saime S ir invarianta attiecībā pret fundamentālo grupu; mēs to arī turpmāk darīsim.

Nemainīgu koordinātu gadījumā mēs uzrakstījām punkta $X(x_i)$ un virsas $A(a_j)$ incidences noteikumu un to p-1 reizi atvasinājām, uzskatot x_i par līknes L tekošā punkta koordinātām un a_j par konstantēm, t.i. izlietojot noteikumus

$$(94) \qquad \frac{da_j}{dt} = 0 \qquad j = 1, 2 \dots N$$

Lietojot mainīgu ~~koordinātu~~ references sistēmu F, kas saistīta ar kādas līknes L' tekošo punktu Y, ~~gadījumā~~ mēs tāpat p-1 reizi atvasināsim incidences vienādojumu, uzskatot x_i par līknes L tekošā punkta relatīvām koordinātām. Vienīgi tagad, lai raksturotu ka virsa A ir nemainīga, nederēs vairs noteikumi (94), bet gan nesaistības noteikumi ar veidu

$$(95) \qquad \frac{da_j}{ds} = f_j(a, Y) \qquad \boxed{\text{brīvais burts!}} \qquad j = 1, 2 \dots N.$$

Ar a_j tagad apzīmējam virsas relatīvās koordinātas attiecībā pret references sistēmu. Atvasināšanu mēs izdarīsim ne vairs pēc patvaļīga parametra t, bet pēc grupas loka garuma, ko noteic tā diferenciāls — zemākā ar līknes pieskaršanās elementu saistītā diferenciālforma. Bez ar rakstību $f_j(a, Y)$ mēs atzīmējām, ka funkcijas f_j ir atkarīgas ne tikai no a_j vērtībām, bet arī no līknes L' diferenciālinvariantiem punktā Y.

Ka nesaistīgas virsas relatīvām koordinātām a_j jāpilda (95) tipa noteikumi, rāda šādi apsvērumi: a_j un $a_j + da_j$ ir tās pašas virsas A relatīvās koordinātas, kas saistītas ar ~~references~~ līknes L' divu bezgalīgi tuvu punktu Y un Y_1 noteiktām references sistēmām F un F_1. Infinitezimālā transformācija, kas F_1 pārvērš par F, ir pamata grupas infinitezimāla transformācija (Y). Tā virsu A pārvērš kādā virsā A_1, kam sistēmā F ir tās pa

10) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces (Paris, Gauthier - Villars) 1887, I - IV, ediţii I un II. dată.
11) E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie (~~Leip~~zig, Teubner) 1926

līknēm;

atbūjim virsu, ar koordinātām

039836

$$c_j = a_j + \varphi_j(a, y)\,ds, \qquad j = 1, 2, \dots N$$

un simbolam y kā argumentam ir tā pati nozīme kā iepriekš. Tā kā b_j un c_j raksturo to pašu virsu A_1, seko sakars (95), kur $f_j = \varphi_j$.

Liekot līknei L' saskarties ar līkni L, punkta x koordinātas top konstantas un ~~līknes~~ šī punkta un virsas incidences vienādojums satur vairs tikai virsas relatīvās koordinātas. To atvasinot, dabūsim sakarus, kas bez šīm koordinātām satur vairs tikai ~~šīs koordinātas~~ līknes diferenciālinvariantus, kas ietilpst kustības relatīvās komponentēs, un pēdējo atvasinājumus pēc s. Ir skaidrs, ka šādā ~~veidā~~ iegūtie vienādojumi būs nesalīdzināmi vienkāršāki, kā lietojot nemainīgu koordinātu sistēmu. ~~Ja~~ D

2. Ja līknes a_j skaits ir N, izslēdzot a_j no incidences vienādojuma un ~~atvasinātiem~~ tā N pirmiem atvasinātiem vienādojumiem, iegūstam ~~vie~~ (Monge'a) vienādojumu, kas raksturo virsu saimi $\mathcal{S}$. ~~Tas tagad saturēs tikai diferenciāl-invariantus un to atvasinājumus pēc loka s~~ patvaļīgai ~~līknei, kas atrodas kādā saimes virsā~~. Kā redzējām 59. l. p., šis vienādojums satur koordinātu atvasinājumus līdz kārtai N – fundamentālās grupas gadījumā tas tātad saturēs diferenciālinvariantus līdz kārtai N.

Ja saimi $\mathcal{S}$ veido visas vienai virsai A kongruentās virsas, t. i. virsas, ko iegūstam no A izdarot visas fundamentālās grupas transformācijas, N maksimālā vērtība ir r. Tā ir tieši r, ja fundamentālai grupai nav nepārtrauktas apakšgrupas, kas virsu A pārvērš sevī; tā ir $r - r'$, ja eksistē šāda apakšgrupa ar r' parametriem. Aplūkotais vienādojums raksturos līknes, kas atrodas šādā virsā A.

Kā piemēru aplūkosim Eiklīda trīs dimensiju telpu. Fundamentālai grupai, kas ir pārvietojumu grupa, $r = 6$. Līknes diferenciālinvarianti ir: liekums – otrās kārtas – un tā atvasinājumi, vērpe – trešās kārtas – un tās atvasinājumi. Virsas līknēm raksturīgais vienādojums saturēs liekumu un tā atvasinājumus līdz kārtai $K+1$, vērpi un tās atvasinājumus līdz kārtai K, kur $K = 3 - r'$.

Patvaļīgai virsai $K = 3$; skrūves virsām, izņemot cilindrus un rotācijas virsas, $K = 2$; rotācijas cilindram $K = 1$, lodei un plaknei $K = 0$.

(D)

Oskulējošās ~~virsas~~ virsas parametrus iegūsim, atrisinot sistēmu, ko veido incidences vienādojums un tā $N-1$ pirmie atvasinājumi pēc s. Ievērojot ~~tās~~ dabūtās a_j vērtības tālākos atvasinājumos, dabūsim noteikumus superoskulācijai. Vienādojumi (95), agrāko (94) vietā raksturos stacionāras virsas. Ja pirmiem $N-1$ no vienādojumiem, kas nosaka oskulējošo virsu, kreiso pušu parciāli atvasinājumi pēc a_j veido matricu ar rangu $N-1$, p-tās kārtas superoskulējošai virsai, kas tad stacionāra, atbilst to ~~—~~ noteicējas sistēmas $p+1$ kārtas atrisinājums un otrādi. Atrisinājumu daudzkārtību noteikumi, kas saista diferenciālinvariantus un to atvasinājumus. Maksi-
simālais šo noteikumu skaits, kas veido atrisināmu sistēmu, noteic ~~—~~ augstākās kārtas raksturos
(Uzdevumu varam vēl sarežģīt, ierobežot ar aplicējas.

incidences noteikumu, kas izteica, ka virsa A iet caur līknes L punktu X, bet gan ņemot izejai kādu virsu A, kas punktā X jau pieskaras (ar kārtu p) līknei. Šādai virsai nezināmo patvaļīgo parametru skaits ir mazāks par N, jo pieskaršanās dēļ a_j starpā ir jau realizētas ~~vienādības~~ $p+1$ sakarības. Izsakot, ka šāda virsa A ir nemainīga bezgalīgi mazā transformācijā, kas F pārvērš par F_1, mēs reizē dabūjam nekustības noteikumus pāri palikušajiem brīviem parametriem un vienu sakaru to starpā, kas raksturo $p+1$-mās kārtas pieskaršanos. Šo sakaru atvasinot ar nekustības noteikumu palīdzību, dabūjam noteikumus, lai pieskaršanās kārta ir $p+2$, $p+3$ u.t.t. Konkrētus piemērus šim pazīmēm apskatīsim šī paragrāfa beigās.

039837

gan pirms pe...

vienādojumus, kā ka gala rezultātu labākā gadījumā varam dot ne eksplicīti ... determinanta veidā. Ir tāpēc domājams, ka meklētajam vienādojumam arī šim ir ~~[illegible]~~ sarežģīts veids.

Ar citādām metodēm, kas arī neļauj iet tālāk par determinantu, ... pozitīvi viena lieluma ~~[illegible]~~ izslēgšanu divu vienādojumu starpā, šī vienādojuma noteikšana tikusi neskaitāmkārt aplūkota ~~[illegible]~~ gadījumam ...

039838

~~Laikam pirmais~~

Abus vienādojumus ~~[illegible]~~ līknēm rotācijas cilindrā laikam pirmais ieguvis H. Piccioli[12], izmantojot taisnes momentus. Pēc ~~[illegible]~~ parastiem vienādojumiem salīdzinot, viņš dabū otrās pakāpes vienādojumu attiecībā pret taisnes [illegible] ... kam ~~[illegible]~~ koeficienti ir dažādu dimensiju locekļu summas. Viršuma eliminēšanai vienādojums esot jādiferencē 6 reizes; ~~[illegible]~~ dabūtās vienādojumu sistēmas determinants pielīdzināts nullei attēlojot meklēto sakarību, kaut gan pats autors aizrāda, ka tā izteiksmi var vienkāršot, ievērojot, ka tā kolonnu elementi ir lineāri atkarīgi. Ir domājams, ka Salkowski[12] ir rakstu atreferējot, ... nekā neredz ko ... ielikt.

V. Hlavatý[13], ~~ar tensoru rēķinu palīdzību~~ nosaka visu trīs dimensiju Rīmaņa telpā ar tās fundamentāliem tensoriem, ~~[illegible]~~ tensoru rēķinu palīdzību abus divus vienādojumus, kā starpā jāeliminē viens palīglielums.

E. Cotton's[14], pēc atreferējuma, kas neminē metodi, abus pareizās ir ... (pats [illegible] nebija pieejams).

(Eiklīda plaknes gadījumam E. Cesàro[15] līkņu saimi raksturo ar vienādojumu loka garumam un liekuma radiju starpā, kas satur vēl patvaļīgus parametrus:

$$(96)\quad f(s, \rho, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}) = 0$$

un apgalvo, ka šādas saimes oskulējošā līkne vispārīgai dotai līknei pieskaras ar kārtu n. Šis apgalvojums ir pareizs tikai tad, ja parametru starpā ~~[illegible]~~

12) H. Piccioli, Sur un procédé pour parvenir à l'équation intrinsèque des lignes du cylindre de rotation, Nouvelles Annales 4e s., 4, 1904, 402.-405. l.p. Atreferējums (Dr. Salkowski): Fortschritte der Mathematik 1904, 643. l.p.

13) V. Hlavatý, Natürliche Gleichung der Kurven auf einer allgemeinen Fläche im metrischen Raume. Mathematische Zeitschrift 30, 1929, 420.-480. l.p.

14) E. Cotton, Sur les courbes tracées sur une surface. Annales de la Soc. Polonaise de Mathématique ..., 1938, 32.-41. l.p. Atreferējums: Fortschritte der Mathematik 64_{I}, 1938, 711 l.p. ~~Pats darbs nav dab.~~

~~[illegible]~~ 15) turpat ... 69.-74. l.p. Vienādojumi (96) līdz (98) rakstīti ar Cesàro apzīmēj...

doch nicht, dass eine solche Berührung wegen einer der Curve (M) innewohnender Eigentümlichkeit thatsächlich eintreten kann" – šādas superoskulācijas iespējamība, kā liekas, tiek atzīta. Tālāk turpretim asām „... nur in besonderen Punkten von (M) kann es eintreten, dass die Ordnung der Berührung die Zahl n überschreitet", kas šādu iespējamību šķiet noliedzam.

Atvasināsim $n-1$ reizi vienādojumu (96) pēc loka ~~[illegible]~~ un izslēdzot s un konstantes a_j, lai varētu iegūt sakaru pirmo n liekumu starpā

$$(98)\quad F(\rho, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}) = 0$$

kas raksturojot līkņu saimi (96). Te atkal jāpiezīmē, ka šāda izslēgšana iespējama tikai tad, ja izpildīts noteikums par aditīvo konstanti. Otrkārt, kā redzējām, vienādojums (98) raksturo ne tikai saimi (96), bet arī visas līknes (L), kam katrā punktā eksistē superoskulētāja saimes līkne. Uzrakstot (98) kā diferenciālvienādojumu, saimes vispārīgo līkni dos kā vispārīgais atrisinājums, līknes (L) – singulārie atrisinājumi.

3. Aplūkojot viena parametra virsu saimes R atsevišķo virsu A charakteristiskos punktus, var aprēķinus iekārtot iepriekšējiem duāli, t.i. lietāt mainīgu references sistēmu, kas saistīta ar saimes vispārīgo virsu A. Lai nebūtu jāmeklē šīs jaunās references sistēmas relātīvās kustības komponentes p, var tomēr arī te lietāt references sistēmu, kas saistīta ar kādas palīga līknes L' tekošo punktu y. Šāda paņēmiena lietājot vienkāršojas punktu ģeometriskā vietu pētīšana, jo iegūtie rezultāti viegli salīdzināmi ar šī paragrāfa sākumā pieminēto pētījumu rezultātiem.

Aprēķinu princips visos gadījumos ir tas pats: uzraksta incidences noteikumu un to atvasina, ievērojot, ka tagad par nekustīgu uzskatāms punkts, tā

~~Aplūkosim tagad oskulācijas un pieoskulācijas problēmas~~

~~[illegible] problēma~~

Virsastūru līsmes L, ~~[illegible]~~ pieskaršanās aplūkojot, mēs meklējam nosacījumus, lai viena virsa V iet cauri p ∞ tuvām vienas līnes L-~~plaknes~~ cikliem vairākiem nepārtrauktas 1 param. ~~[illegible]~~ plkt. saimes — plaknēm.

~~Apl.~~ Primitīvi sakarīgi tagad pretējo problēmu: meklēsim nosacījumus, lai 1 pts P atrastos uz p ∞ tuvām virsām V, kas ietilpst kādā 1 param. virsu saimē. Ņemot vispirms $p \leq n$, aplūkosim vienparametra saimi S_1 ar vienādojumu

$$a_j = a_j(t)$$

~~Pieņemsim~~ Saimes S_1 virsas $V_1, V_2 \ldots V_p$, kas atbilst param. vērt. $t_1, t_2 \ldots t_p$ iet caur plkt. x_i, ja pastāv sekojošas sakarības

$$\begin{cases} G(x, t_1) = 0 \\ G(x, t_2) = 0 \\ \text{---} \\ G(x, t_p) = 0 \end{cases}$$

Kur

$$G(x,t) = f[x, a(t)].$$

No apl. izslēdzam t vērtības, kurām $a' = 0$ (stac. virsas).

Tātad sistēma $G=0$ ~~[illegible]~~ no [illegible] [illegible] atkarīgas [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] tikai ar to, ka t un x [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], plkt. un virsām ~~V[illegible]~~ [illegible] lomām.

Analogi kā tas iepriekš atradām dabisko vienādojumu kārtu, kas atrodas ~~kādā~~ kādā saimes $\mathcal{S}$ virsā, var arī te atrast dabisko vienādojumu viena parametra virsu saimēm R, kas iet caur kādu varietātes T punktu. ~~Tas saistās~~ Šis vienādojums saista saimes R diferenciālinvariantus līdz kārtai n.

Beidzot atzīmējams viens kustīgās references sistēmas F trūkums: paņēmiens, ar ko vispārīgas varietātes tekošam elementam piesaista noteiktu F, neder speciālām varietātēm, kam viens vai vairākiem zemākas kārtas diferenciālinvariantiem ir vērtība nulle. Tā, piemēram, Frenet formulas nav derīgas Euklida telpas izotropām līknēm un līknēm izotropās plāksnēs. Šādu varietāšu aplūkošanai ir jāņem citādi noteiktas references sistēmas F, kam arī kustības relatīvās komponentes izteiksies citādā veidā. Reizēm var tomēr izlīdzēties ar vienreizējiem aprēķiniem, fiksējot F un relatīvās kustības ~~kustības~~ komponentes izsakot pietiekami vispārīgi, lai ar piemērotu specializāciju gala rezultātus varētu attiecināt uz visiem vai vismaz vairākiem gadījumiem.

4. Minēsim dažus vienkāršus aprēķinu piemērus. Tā kā mēs viscaur aplūkojam viena parametra ~~virsu~~ punktu vai virsu saimes, relatīvās kustības komponentes raksturosim ne ar diferenciāļiem, kā to dara Cartan's, bet ar atvasinājumiem pēc attiecīgās grupas loka.

a) Euklida trīs dimensiju telpā aplūkojam līknes, kam spēkā Frenet formulas

$$(99)\quad\begin{cases} \vec{X}' = \vec{t} \\ \vec{t}' = \rho\,\vec{n} \\ \vec{n}' = -\rho\,\vec{t} + \tau\,\vec{b} \\ \vec{b}' = -\tau\,\vec{n} \end{cases}$$

strīpa: atvasināt, ? zeta uz loku; pārvietojumi

piezīmot, ka $\rho \neq 0$.

$$\cancel{(100) \quad \begin{aligned} x' &= -1 \quad + \xi y \\ y' &= \quad -\xi x \quad + \tau z \\ z' &= \quad -\tau y \end{aligned}}$$

Lai atrastu lodi, kas līkni oskulē, ņemam lodi, kas līknei pieskaras. Ja šīs lodes radiuss ir a, tās centru C dod

$$C = X + a[\cos\varphi\,\vec{n} + \sin\varphi\,\vec{b}],$$

kur φ, leņķis starp vektoriem $\vec{n}$ un $\vec{XC}$, ir otrs parametrs, kas nosaka lodi. Lai lode ~~jābūt saa~~ būtu nemainīga, a un C jābūt nemainīgiem, ~~jābūt $a'=0$, $C'=0$,~~ dod nekustības noteikumus

$$a' = 0$$

$$\varphi' = -\tau$$

un noteikumu, lai būtu otrās kārtas pieskaršanās

$$(100) \qquad 1 - a\xi\cos\varphi = 0$$

~~Šo noteikumu~~ Reizinot ar liekuma radiusu $R = \frac{1}{\xi}$ un atvasinot, dabūjam

$$(101) \qquad R' - a\tau\sin\varphi = 0$$

Noteikumi (100) un (101) viennozīmīgi nosaka oskulējošo lodi. Reizinot (101) ar vijes radiusu $T = \frac{1}{\tau}$ un atvasinot, dabūjam superoskulējošās noteikumu

$$(TR')' + a\tau\cos\varphi = 0$$

Izslēdzot a un φ, dabūjam lodes līkņu dabisko vienādojumu

$$(102) \qquad (TR')' + \frac{R}{T} = 0$$

Ja lodes radiuss a ir dots, (100) nosaka oskulējošo lodi, izslēdzot φ (100) un (101) starpā dabūjam dabisko vienādojumu līknēm lodē ar radiusu a:

$$(103) \qquad (R'T)^2 + R^2 = a^2$$

Vienādojumam (102) singulāru atrisinājumu nav, vienādojumam (103) tos dod

$$R = a,$$

kas raksturo maksimālās kārtas aplieces lodēm ar radiusu a.

b) Tai pašā telpā aplūkojam viena parametra ložu saimi. Par references sistēmu ņemot lodes centra ģeometriskās vietas

~~[illegible]~~ ir vienādojums nosaka divus characteristiskus punktus X, kas simmetriski attiecībā pret L^* oskulējošai plāksnei punktā. Supercharakteristisku punktu dabūsim, liekot abiem šiem punktiem sakrist, t.i. izsakot, ka punkts X atrodas oskulējošā plāksnē:

$$(aa')^2 + R^2\left[(aa')' - 1\right]^2 = a^2 \qquad (105)$$

Noteikumu (105) un tā interpretāciju viegli dabūt, atvasinot ~~[illegible]~~ iepriekšējās trīs pēdējos vienādojumus, pie kam par mainīgo uzskatām vienīgi X (28. un 29. l.p. aplūkotā parciālā atvasināšana pie t):

$$(106)\quad \begin{cases} \vec{X}'(X - Y) = 0 \\ \vec{X}'\vec{t} = 0 \\ \vec{X}'\vec{n} = 0 \end{cases}$$

Abi pēdējie noteikumi ir neatkarīgi. Lai punkts X nebūtu nekustīgs, vektoram X−Y jābūt komplanāram ar $\vec{t}$ un $\vec{n}$, t.i. punktam X jābūt oskulējošā plāksnē. Pārveidojot līkņu saimi tā, ka ne a, ne ƒ nemainās, bet līkne L^* top plakana, abi pēdējie noteikumi rāda, ka punkts X top nekustīgs[10].

Te mēs sastopamies arī ar singulārā gadījuma piemēru, ko no vispārīgā aplūkojuma izslēdzām, proti ~~[illegible]~~ kad abi pirmie vienādojumi (106)

Atvasinot vēlreiz punkta X noteicēju vienādojumu un izslēdzot vektora X−Y komponentes, dabūjam dabisko vienādojumu līknēm caur vienu punktu

$$(aa')^2 + R^2\left[(aa')' - 1\right]^2 + \frac{T^2}{R^2}\left\{RR'\left[(aa')' - 1\right] + R^2(aa')'' + aa'\right\}^2 = a^2$$

(105) ir šī vienādojuma singulārs atrisinājums. (55

nav neatkarīgi, t.i. $X-Y$ un $\vec{t}$ ir kollineāri. Tad izejas vienādojumi dod

$$X = Y + a\vec{t}$$

$$-1 = a'$$

Tā kad punkts X ~~atrodas~~ apraksta ~~[illegible]~~ līknes L filārevolventi ~~[illegible]~~, ~~X~~ arī supercharakteristisks punkts, kaut arī tas pārstāj divus sakritušus characteristiskus punktus, jo pēdējais vienādojums (106) ir apmierināts tikai triviālā gadījumā, kad L ir taisne un X − nekustīgs šīs taisnes punkts.

Šo interpretāciju dod jau Cesàro, loc. cit. 185 l.p., minot, ka ~~šo~~ problēmu: ~~formulējis Zamet.~~ atrast viena parametra līkņu saimi, kam dota centru ģeometriskā vieta un kas oskulē kādu līkni, formulējis Zamet.

kam vi~~r~~sas konstantes c_h nav vienlīdzīgas nullei; ja

rangs ir

c) Eiklīda plāknē, meklējam līknes L oskulējošo konisku, par references sistēmas asīm ņemot L ~~normāli~~ pieskari un normāli tās tekošā punktā X. ~~Konisku, kas pieskaras~~ Katru punktu Y varam ~~tās~~ izteikt veidā

$$Y = X + x\vec{t} + y\vec{n}.$$

Izsakot, ka $\vec{Y}' = 0$ un ~~...~~ ar Freneta formulas (kur $\tau = 0$) palīdzību dabūjam nekustības nosacījumus

$$x' = -1 + \rho y$$
$$y' = -\rho x$$

Konisku, kas pieskaras līknei L punktā X varam dot ar vienādojumu

$$(102) \quad ax^2 + 2hxy + cy^2 + 2y = 0$$

Meklējam tās koordinātu a, h, c nekustības nosacījumus. To panākam, atvasinot konikas vienādojumu, ievērojot punktu nekustības nosacījumus un izsakot, ka dabūtais vienādojums ~~apmierina~~

$$(a'-2h\rho)x^2 + 2(h'+a\rho-c\rho)xy + (c'+2h\rho)y^2 - 2(a+\rho)x - 2hy = 0$$

~~apmierina B~~ ir konikas vienādojuma (102) sekas. Tātad

$$a' = -ah + 2h\rho$$
$$h' = -h^2 + (c-a)\rho$$
$$c' = -hc - 2h\rho$$

un nosacījumu, kas pieskaršanās ir otrās kārtas

$$a + \rho = 0$$

~~$h' = -h^2 + (c-a)\rho$~~

~~$c' = -hc - 2h\rho$~~

un ~~trešās kārtas~~ pieskaršanās nos.

~~$h\rho = \rho'$~~

~~Ar šo tad aizvietot dabūjam nos., lai pierādītu ceturtās kārtas~~

Ievietojot šādi iegūto a vērtību augšējos nekustības nosacījumos, dabūjam: ~~trešās~~ kārtas pieskaršanās nosacījumu

$$h\rho = \rho'$$

un nekustības nosacījumus formā, ar pieskaršanās kārtas dēļ:

$$h' = -h^2 + \cancel{(c-a)}\rho + c\rho - \rho^2$$

$$c' = -hc - 2h\rho$$

Aizvietojot h vērtību, dabūjam ~~trešās~~ ceturtās kārtas pieskaršanās nosacījumu

$$\frac{\rho''}{\rho} - \frac{\rho'^2}{\rho^2} = -\frac{\rho'^2}{\rho^2} + c\rho - \rho^2$$

$$c\rho^2 - \rho^3 - \rho'' = 0$$

Kas ~~tagad~~ vienmērīgi nosaka c un tā tad arī oskulējošo koniku. Izsakot, ka arī c pilda nekustības nosacījumu, dabūjam konikas dabisko vienādojumu

Ievietojot šādi iegūto a vērtību augšējos nekustības nosacījumos, dabūjam: nekustības nosacījumus formā ar otrās kārtas pieskaršanos:

$$h' = -h^2 + c\rho + \rho^2$$

$$c' = -hc - 2h\rho$$

un nosacījumu

$$\rho' = 3h\rho$$

lai pieskaršanās kārta ir trīs. Aizvietojot h ar ~~šo vērtību~~ šādi noteikto vērtību, dabūjam ceturtās kārtas pieskaršanās nosacījumu.

$$9c\rho^3 = -3\rho\rho'' + 4\rho'^2 - 9\rho^4$$

Kas tagad vienmērīgi ~~atrast~~ noteikt c un tā tad arī oskulējošo koniku. Izsakot, ka arī c pilda nekustības nosacījumu, dabūjam konikas dabisko vienādojumu

$$9\rho^2\rho''' - 45\rho\rho'\rho'' + 40\rho'^3 - 36\rho^4\rho' = 0$$

(Šis noteikums ir vienmēr izpildīts, ja (53) atrisinājumu kopskaits ir galīgs);

b) funkciju $f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$ parciālie atvasinājumi pēc visiem a_j veido mātricu ar rangu N-1. Ja šis noteikums ir izpildīts, vajadzības gadījumā pārnumurējot lielumus a_j varēsim vienmēr panākt, ka

$$(54) \qquad (a_j) = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})}{D(a_1,}$$

1. ~~Aplūkosim~~ Eiklida trīs dimensiju telpā ~~...~~ ~~līkni L, ...am ir sfērā Freneta formulas (99).~~ Rotācijas cilindru (turpmāk teiksim vienkārši: cilindru) varam noteikt, dodot kādu tā ass punktu C, ass vienības vektoru $\vec{u}$ un rādiusu a; ~~pie tam~~ turpmāk pieņemsim, ka $a \neq 0$. Ja cilindra tekošais punkts ir X, tā vienādojums ir *)

$$(108)\quad (X-C)^2-\left[\vec{u}(X-C)\right]^2=a^2$$

Vienādojums (108) ir punkta X un cilindra incidences vienādojums. ~~To atvasinot un uzskatot par vienīgo mainīgo X, varētu dabūt cilindra un līknes pieskaršanās nosacījumus. Vienkāršāk būs tomēr noteikt cilindru ar koordinātām un atrast to nosacījumus~~ Uzskatot X par kādas līknes L tekošo punktu un pārējos vienādojuma (108) elementus par konstantiem, šo vienādojumu atvasinot pēc L loka s varētu iegūt līknes un cilindra pirmās un tālākās kārtas pieskaršanās nosacījumus. (Tā kā cilindru telpā nosaka 5 neatkarīgi parametri, oskulējošam cilindram būs ceturtās kārtas pieskaršanās.) Turpretim top vienkāršāki, ja ņemam cilindru, kas jau pieskaras līknei un to nosakām ar piemērotām koordinātām.

Ja cilindrs līknei pieskaras punktā X, cilindra normāle šai punktā ir arī līknes normāle. Norīkojot tās šķelšanās punktu ar cilindra asi ~~par punktu~~, būs

$$(109)\qquad C = X + a(\cos\vartheta\,\vec{n} + \sin\vartheta\,\vec{b}),$$

kur ϑ ir leņķis starp vektoriem $\vec{n}$ un $C-X$. Ass vienības vektors ir perpendikulārs vektoram $C-X$, kas iet pa cilindra normāli, tā kā to var izteikt veidā

$$(110)\qquad \vec{u} = \cos\varphi\,\vec{t} - \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{n} + \cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{b},$$

kur φ ir leņķis starp vektoriem $\vec{u}$ un $\vec{t}$.

Lai šādi noteiktais cilindrs būtu nekustīgs, a jābūt nemainīgam, vektoram $\vec{C}'$ jābūt kollineāram ar $\vec{u}$ un vektoram $\vec{u}$ jābūt nemainīgam. Atvasinot sakarības (109) un (110) pēc loka ar Freneta formulu palīdzību un izsakot minētos nosacījumus, dabūjam nekustības nosacījumus

*) Divu vektoru skalāro reizinājumu apzīmēsim, rakstot vektorus vienu otram ...

$$(113)\quad a(\rho'\cos\varphi + \rho\tau\sin\varphi) = 3\rho\sin\varphi\sin\psi\cos\psi$$

Vēlreiz atvasinot, ievērojot arī sakarību (112), iegūstam

$$(114)\quad a\left[(\rho'' - \rho\tau^2)\cos\varphi + (2\rho'\tau + \rho\tau')\sin\varphi\right] = 3\rho^2\cos^2\psi - 3\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\psi +$$
$$+ 4(\rho'\sin\varphi - \rho\tau\cos\varphi)\sin\psi\cos\psi$$

V.G. [illegible]

~~pēdējie~~ [illegible]. Tieši šos pašus vienādojumus mēs būtu arī ieguvuši, atvasinot (108) un ievietojot izteiksmes (109) un (110).

a, φ un ψ vērtības, kas apmierina pirmo, abus pirmos vai visus trīs vienādojumus (112) līdz (114), nosaka tos cilindrus, kam ir attiecīgi ~~otrās~~, trešās, ~~vai~~ un ceturtās kārtas pieskaršanās punktā X ar līkni L.

~~Abus pirmos~~ Vienādojumus (112) un (113) var atrisināt attiecībā pret a un ψ, iegūstot

$$(115)\quad a = \frac{9\rho^3\sin^2\varphi\cos\varphi}{(\rho'\cos\varphi + \rho\tau\sin\varphi)^2 + 9\rho^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$$

$$(116)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{3\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho'\cos\varphi + \rho\tau\sin\varphi}$$

Šīs sakarības viennozīmīgi nosaka a un $\operatorname{tg}\psi$, ja vismaz viens no noteikumiem

$$(117)\quad \begin{cases} \rho\sin\varphi\cos\varphi \neq 0 \\ \rho'\cos\varphi + \rho\tau\sin\varphi \neq 0 \end{cases}$$

ir izpildīts. Ievietojot a un $\operatorname{tg}\psi$ vērtības vienādojumā (114), iegūstam sestās pakāpes vienādojumu attiecībā pret $t = \operatorname{tg}\varphi$:

$$(118)\quad \left[\rho^2\tau^2 t^4 - 3\rho^2\tau' t^3 + (5\rho'^2 - 3\rho\rho'')t^2 - 2\rho\rho'\tau\, t + \rho'^2\right](t^2+1) - 9\rho^4 t^4 = 0$$

Vispārīgā gadījumā (118) noteiktās t vērtības ir dažādas [illegible] apmierina abus noteikumus (117); katrai no šīm t vērtībām [illegible] viens punkts C un divi pretēji vektori $\vec{u}$, kas nosaka tiešāi viensu noteiktu [illegible]. Tā tad vispārīgai telpas līknei tās vispārīgā punktā [illegible] seši dažādi oskulējošie cilindri. ~~[illegible]~~

Neizdarot pilnīgu vienādojuma (118) diskusiju, atzīmēsim [illegible] tā īpašības.

Vienādojuma (118) ~~viena~~ sakne neapmierina nevienu no noteikumiem (117) vienīgi tad, ja viens ~~kā~~ no lielumiem ρ, ρ', τ ir nulle. Šos izņēmuma gadījumus [illegible] aplūkosim vēlāk, pagaidām pieņemot, ka visi minētie lielumi atšķiras no nulles.

E

Pēdējo paņēmienu lieto A. Tamerl's,[17] kas laikam vienīgais līdz šim ~~plašāk~~ plašāk pētījis ~~oskulējošos~~ rotācijas cilindrus, kam ir augstākas kārtas pieskaršanās ar telpas līkni. Viņš galvenokārt pēta dažas ~~ass~~ cilindru asu konfigurācijas, punkta C ģeometrisko vietu, ja pieskaršanās kārtai trīs, un dažus speciālus gadījumus, ~~nosakot~~ dažādo oskulējošo cilindru skaitu, bet nepēta ne to daudzkārtību, nedz arī ievēro deģenerētos cilindrus. ~~Tālāk visur ir atzīmēts~~ Citētā ~~tālāk~~ iegūstamie rezultāti ~~pi~~ atrodami jau Tamerl'a rakstā, atzīmēts šīs nodaļas beigās.

039847

17) A. Tamerl, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, 140, 1931 1.-10. lpp.

(šis noteikums ir vienmēr izpildīts, ja (53) atrisinājumu kopskaits ir galīgs);

b) funkciju f_1, f_2, ..., f_{N-1} parciālie atvasinājumi pēc visiem a_j veido mātricu ar rangu N-1. Ja šis noteikums ir izpildīts, vajadzības gadījumā pārnummurējot lielumus a_j varēsim vienmēr panākt, ka

$$(54) \qquad (a_j) = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})}{D(a_1,}$$

(39) → (67)

(30) → (65)

$f_{N+1}(x_1 \ldots x^{(n)}, x) = 0$

$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = \\ f_N = 0 \end{cases}$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_6) = \frac{S_1 - S_3 + S_5}{1 - S_2 + S_4 - S_6} \quad)$$

kur S_j apzīmē summu visiem $\operatorname{tg}\varphi_i$ reizinājumiem pa j. Pieņemot labās puses izteiksmi ar vienādojuma (118) koeficientu palīdzību, tas ir vienlīdzīgs nullei un skaitītājs vispārīgā gadījumā atšķiras no nulles.

059848

§ 2. Aplūkosim tagad izņēmuma gadījumus, kad vismaz viens no lielumiem ϱ, ϱ', τ top par nulli atsevišķā punktā X.

a) Ja $\varrho = 0$, (112) dod $\psi = 0$: cilindra ass ir paralēla pieskarei punktā X. (113) un (114) top par

$$a\varrho' \cos\varphi = 0$$

$$a[\varrho'' \cos\varphi + 2\varrho'\tau \sin\varphi] = 0$$

Ja $\varrho'\tau \neq 0$, vienīgais atrisinājums ir $a = 0$, t.i. visi oskulējošie cilindri ir pārvērtušies ⊥ pieskarei punktā X. Ja $\tau = 0$, oskulējošais cilindrs top [illegible] nenoteikts: tā ass var būt ~~[illegible]~~ paralēla pieskarei, ja $\varrho' = \varrho'' = 0$ vai arī patvaļīga paralēle pieskarei, kas atrodas rektificējošā plāksnē, ja viens no lielumiem ϱ', ϱ'' nav nulle.

Pārējiem palikušajiem izņēmuma gadījumiem varam pieņemt, ka $\varrho \neq 0$.

b) Ja $\varrho' = 0$, vienādojums (113) ir apmierināms divējādā veidā: vai nu

$$\sin\varphi = 0$$

vai arī

$$a\tau = 3 \sin\psi \cos\psi$$

Pirmā gadījumā varam ņemt $\cos\varphi = +1$, (112) dod

$$a\varrho = \sin^2\psi$$

un šo vērtību ievietojot vienādojumā (114), kas dod

$$(119) \quad \frac{\varrho''}{\varrho} \sin^2\psi = (3\varrho\cos\psi - \tau\sin\psi)(\varrho\cos\psi - \tau\sin\psi)$$

Šai ψ vērtībai, kā rāda (119), atbilst divi ~~[illegible]~~ vispārīgā gadījumā dažādi oskulējošie cilindri. Ja ~~[illegible]~~ $\varrho'' = 0$, bet $\tau \neq 0$, tie divi ir dažādi, jo tos nosaka

$$(120) \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\varrho}{\tau} \quad \text{un} \quad \operatorname{tg}\psi = 3\,\frac{\varrho}{\tau}$$

F ~~Sakarā ar vispārīgo teoriju~~ Vienādojuma (118) koeficienti ir atkarīgi no lielumiem ξ un τ, kas var būt patvaļīgas s funkcijas. Tos ~~lielumus ir~~ koeficientus ir tāpēc iespējams pakļaut diviem noteikumiem, kas ir izpildīti visos līknes punktos, pirmkārt varam prasīt, lai vienādojumam (118) vis-caur būtu viena trīskārša vai divas divkāršas saknes, tāpat varam prasīt, lai kādam oskulējošam ~~lie~~ cilindram divi no lielumiem a, ψ, φ ir dotas s funkcijas, respektīvi ir konstanti u.t.t. Ja ~~ir~~ ar šādu noteikumu II palīdzību iegūtām ~~at~~ līknēm ~~noteikumi~~ kādām no oskulējošiem cilindriem ~~konstants~~ ~~a, ψ un~~ ~~konstants vai φ un φ vai vismaz viens no~~ vismaz viens no lielumiem a, ψ ~~vai~~ φ ~~neapmierina~~ ~~visi~~ ne apmierina nekustības noteikumus, līkne neatradīsies uz nemainīga cilindra. Dažas šādas līknes, kam oskulējošie cilindri pilda zināmus noteikumus, aplūkosim nākošā paragrafā.

Līdzīgā veidā, kā ~~mēs aplūkojām gadījumus~~ iepriekš, varētu aplūkot arī ~~kad viens no lielumiem ξ~~ singulāru punktu X gadījumus, kam kāds no vienādojuma (118) koeficientiem top bezgalīgs, ~~tad šie~~ ~~gadījumi kas~~ ko mēs te nedarīsim.

kem visas konstantes c_h nav vienlīdzīgas nullei; ja rangs ir

Alnes [illegible] $\delta x_{N(n-1)+1}$

$\delta x_2 dt - \delta\tau dx_2 = 0$

$\delta x_2 = x_3 \delta\tau$

$x_3 dt - dx_3 = 0$ u.

[illegible] $\delta x_N dt - dx_N \delta\tau$ → $x_{N(n-1)+1} dt - dx_N = 0$ ut

$\delta x_{2N} dt - dx_{2N} \delta\tau$ ut.

$\delta x_{N(n-1)} dt - \delta\tau dx_{N(n-1)} = 0$

$f \delta\tau - dx_n$ u.

$\begin{cases} dt = 0 \\ dy_{n-1} = 0 \end{cases}$

Pēdējā rinda [illegible]

$\delta x_{N(n-1)+1} dt - dx \delta\tau = 0$

$dt = 0 \quad dx_{N(n-1)+1} = 0$?

$dx_{N(n-1)+n-2} = 0$

[illegible] $n-1$

$\frac{\partial f}{\partial x_{N(n-1)}} dx_{N(n-1)} = 0 \quad 1$

[illegible] n!

[illegible] $dt = 0$, [illegible] $x = 0$, [illegible] 0!

[illegible]?

$\delta f dt - df \delta\tau = 0$

$\Sigma f_x \delta x dt - \Sigma f_x dx \delta\tau = 0$ [illegible]

[illegible]!

$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} x_{i+1} \delta t dt$ [illegible] $\delta\tau$!

[illegible]

$f_x dx = 0$

$dx = y dt$

$\delta x = y \delta t$

$\Sigma f_x \delta x dt - \Sigma f_x dx \delta\tau = 0$

$f_x y \delta\tau dt - f_x y dt \delta\tau = 0$

$f_x dt = 0 \quad \Sigma f_x dx = 0$

s atbilst vienādojuma (118) vienīgai bezgalīgi lielai saknei. Citām saknēm atsevišķi
er (115) un (116).

Ja $\tau = \tau' = 0$, vienādojumam (118) divas saknes ir bezgalīgi lielas,
ārējās vērtības ir galīgas un tām der (115) un (116). Šajā gadījumā bezgalīgi lielajām (118)
saknēm atbilst arī bezgalīgas a vērtības, t.i. divi oskulējošie cilindri ir
ēvietojušies līknes tā oskulējošā plāksnē punktā X. Līknei ar šo plāksni
kopīgi pieci bezgalīgi tuvi punkti, tā tad eksistē arī konika 5-ai plāksnē (kas iet pa divi šī simmetrijas ass)
kam ir ceturtās kārtas pieskaršanās ar līkni. Visi oskulējošie cilindri, ... tiek
un šo koniku, jo konikai ar katru no ~~oskulējošiem cilindriem~~ trim ir
kopīgi pieci punkti. No četriem oskulējošiem cilindriem, kas nesakrīt
ar oskulējošo plāksni, reālām līknēm divi (vispārīgā gadījumā) ~~...~~ ir imaginārie;
ārējie divi ir imaginārie, saskaņā ar oskulējošo plāksni vai ir reāli
atkarībā no tā, vai konika ir ~~hiperbola~~, parabola vai elipse.
...iņķa gadījumā visi šie četri oskulējošie cilindri saskaņā ar cilindru, kam
...ijs ir taisne 3 kārtas.

Ja prasām, lai katrā līknes punktā viens no lielumiem ϱ, τ, ϱ'
būtu vienādiski nullei, $\varrho = 0$ dod trivialo taisnes gadījumu, $\tau = 0$
dod plakanas līknes, kam katrā punktā eksistē oskulējošā konika
ar pieskaršanās kārtu četri un kam tā tad ir seksta visi punkti ...
stiklzieni. Atliek vienīgi vēl aplūkot interesanto gadījumu
$\varrho' = 0$, t.i. (3 kārtas vienādā līknes ar pastāvīgu liekuma radiju ~~(...)~~.

Lai vieglāk varētu raksturot to sakritošo oskulējošo cilindru
daudzkārtību, noteiksim vienādojumiem (112) līdz (114) līdzvērtīgus
vienādojumus piemērotā vispārīgā veidā, lai tie derētu arī citos
gadījumos, piemēram izotropām līknēm.

3. Frenet formulu vietā ņemam atvasināšanas formulas

$$(121) \qquad \vec{X}^{IV} = p\vec{X}' + q\vec{X}'' + r\vec{X}''',$$

ko varam lietāt izvērstā telpas līknes punktā, kur vēl $\vec{X}', \vec{X}''$ un $\vec{X}'''$ nav
komplanāri. Tā kā attiecīgos gadījumos līknēm, kam der Frenet formulas,
ir jau aplūkots, varam pieņemt, ka šis noteikums ir izpildīts.

(124) $\vec u \vec z = 0$

Atvasinot sakarības, kur ietilpst vektors $\vec z$, ja $\vec u$ un C ir nemainīgi, ir jāliek

(125) $\vec z\,' = \vec x\,' - \vec u(\vec u \vec x\,')$.

Izsakot vienādojumu (108) ar vektora $\vec z$ palīdzību, dabūjam

(126) $\vec z^{\,2} = a^2$

Lai raksturotu oskulējošo cilindru, šis vienādojums jāatvasina četras reizes, ievērojot atvasināšanas noteikumus (125) un (121), uzskatot a par konstanti. Pirmo reizi atvasinot, dabūjam

$$\vec z \vec x\,' - (\vec u \vec z)(\vec u \vec x\,') = 0$$

Ievērosim, ka pēdējo locekli varam atmest: (124) rāda, ka tā vērtība ir nulle un (125), ka to atvasinot identiski paliek $\vec u \vec z$ atvasinājums, tā tad arī visi šī locekļa atvasinājumi satur faktoru $\vec u \vec z$ un ir vienlīdzīgi nullei. Četrreiz atvasinot, dabūjam

$$\vec z \vec x\,' = 0 \qquad 7$$

$$\vec z \vec x\,'' - (\vec u \vec x\,')^2 + \vec x\,'^2 = 0 \qquad 17\text{-ev } 18$$

(127)

$$\vec z \vec x\,''' - 3(\vec u \vec x\,')(\vec u \vec x\,'') + 3\vec x\,'\vec x\,'' = 0 \qquad 26$$

$$\vec z(p\vec x\,' + q\vec x\,'' + r\vec x\,''') - 4(\vec u\vec x\,')(\vec u\vec x\,''') - 3(\vec u\vec x\,'')^2 + 4\vec x\,'\vec x\,''' + 3\vec x\,''^2 = 0$$

Pirmie trīs vienādojumi ~~nosaka~~ vienozīmīgi vektoru $\vec z$, ja zināms $\vec u$, ~~jo~~ jo pie pieņēmuma $\vec x\,'$, $\vec x\,''$, $\vec x\,'''$ nav komplanāri. Vienādojums (126) [illegible] $\vec z$ [illegible]. Vektora $\vec u$ noteikšanai izlietāsim vienādojumu (123) un abus vienādojumus, ko dabūjam izslēdzot $\vec z$ no (124) un (127). Liekot

$$\vec u = x\vec x\,' + y\vec x\,'' + z\vec x\,'''$$

$\vec z$ izslēgšanu no (124) un (127) varam izdarīt, saskaitot šos vienādojumus, kas iepriekš reizināti attiecīgi ar 1) +1, −x, −y, −z, 0 un 2) 0, p, q, r, −1. Kopā ar (123), iegūtie vienādojumi $\vec u$ noteikšanai dod sistēmu pa diviem vai pretēji. Tā kā divi pretēji vektori ir nosaka to pašu cilindru, redzam, ka visos gadījumos, kad var lietāt formulu (121), pastāv seši oskulējošie cilindri. Šķietamos izņēmuma gadījumus, kad sistēmai (128) visas atrisinājumu sistēmas nedod galīgas $\vec{u}$ komponentes, varēs interpretēt kā deģenerētu / cilindru gadījumus. Katrā gadījumā ja pirmo vienādojumu (128) ar piemērotiem faktoriem un to pieskaitot abiem pēdējiem, iegūstam divus homogēnus, kas vienmēr noteiks sešus x, y un z attiecību sistēmas. Šķērsa riņķa gadījumā varam izvēlēties gaņuma vienību (vai tādu homotētiju) tā, lai $\rho = 1$. Tad, ~~pieņemot~~ parastā riņķa gadījumā $\tau = 0$,

$$\vec{X}' = \vec{t}$$

$$\vec{X}'' = \vec{n}$$

$$\vec{X}''' = -\vec{t} + \tau\vec{b}$$

$$\vec{X}^{IV} = -(1+\tau^2)\vec{n} + \tau'\vec{b}$$

tad $q = -1-\tau^2$, $r = \frac{\tau'}{\tau}$. Liekot vēl $x = h+z$, (128) h, y un z

mai, ~~[illegible]~~

$$\cancel{h^2 + y^2 + \tau^2 z^2 = 1}$$

$$\cancel{y\left[-h^2 + 3hz - 1\right] = 0}$$

$$\cancel{h^2(\tau^2-3) + 3y^2 - 3\frac{\tau'}{\tau}hy + 4hz\tau^2 - \tau^2 = 0},$$

~~[illegible]~~ padarot piemērotā ~~veidā~~ abus pēdējos vienādojumus homogēnus, dod

$$(129)\quad \begin{cases} h^2 + y^2 + \tau^2 z^2 = 1 \\ y\left[3hz - y^2 - \tau^2 z^2\right] = 0 \\ -3h^2 + y^2(3-\tau^2) - 3\frac{\tau'}{\tau}hy + 4hz\tau^2 - \tau^4 z^2 = 0 \end{cases}$$

Abi veidi, kādos varam apmierināt ~~otro~~ vienādojumu, atbilst jau 78. l.p. beigās minētiem gadījumiem. Abi pēdējie vienādojumi (129) tad ir

$$(130)\quad \begin{cases} y = 0 \\ (3h - \tau^2 z)(h - \tau^2 z) = 0 \end{cases}$$

~~vai arī~~

$$(131)\quad \begin{cases} y^2 = 3hz - \tau^2 z^2 \\ 3\frac{\tau'}{\tau}hy + (3h - \tau^2 z)(h - 3z) = 0 \end{cases},$$

kas rāda, ka atrisinājums

$$(132)\quad \{ y = 0,\ 3h - \tau^2 z = 0 \}$$

vienmēr ir divkāršs. ~~Attiecīgais cilindrs [illegible] tomēr pārosk[illegible]lējošs cilindrs.~~ Šīm h, y, z vērtībām abu pirmo vienādojumu (129) parciāli atrisinājumi pat ir proporcionāli – esam atkal nonākuši pie gadījuma, kad nav izpildīts noteikums par parciālo atrisinājumu vērtību mātricu. Tāpēc arī

($\operatorname{tg}\psi = \frac{\rho}{\tau}$)

~~ka~~ kas atbilst atrisinājumam (132), jā ρ ir patvaļīgs un konstants, (apmierina ir ~~jau~~ nosacījumu (kur pirmās kārtas pieskaršanās līnija $y=0$)

$$(134)\qquad \rho\tau'[-3a\tau + 5\sin\psi\cos\psi] = 0$$

tikai, jā $\tau'=0$ (pieņemot $\rho\neq 0$). (133) raksturotais cilindrs ~~ar~~ kā tad superoskulē līkni L tikai punktos, kur $\tau'=0$. Ja gribam, lai superoskulācija notiktu katrā līknes L punktā, arī τ jābūt konstantam, tā tad līknei jābūt parastai skrūves līnijai.

Ja līkne L ir parastā skrūves līnija, cilindrs, uz kura tā atrodas un kas raksturo /

$$(135)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\rho}{\rho^2+\tau^2} \quad (\text{tā}) \\ y = 0 \\ \operatorname{tg}\psi = \dfrac{\rho}{\tau} \end{cases}$$

Saskaņā (132) atrisinājumu skaņā vienu vienīgu reizi, kamēr cilindrs, kam atbilst (133) ir trīskāršs vispārīgā gadījumā un piecskāršs, ja $\tau=3\rho$. Parastās skrūves līnijas ar $\tau=3\rho$ ir ~~[illegible]~~ cilindru maksimālās kārtas aplikcijas; superoskulācijas kārta tām ir 3 un nevis 4, kā varētu sagaidīt pēc saskaņotā cilindru skaita, jau pieminētās parciālo atrisinājumu īpašības dēļ.

Precīzās pieskaršanās kārtas konstatēšanai un iegūto rezultātu pārbaudei, ņemsim šādu parasto skrūves līniju uz cilindra ar rādiju 1. Apzīmējot ar x, y, z līknes L tekošā punkta koordinātas nemainīgā ortogonālā koordinātu sistēmā, varam ņemt

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 3t \end{cases}.$$

Šai līknei $\rho = \frac{1}{10}$, $\tau = \frac{3}{10}$, ~~$a = [illegible]$, $\operatorname{tg}\psi = 1$~~ un (133) dod $a=5$, $\operatorname{tg}\psi$

Attiecīgajam ~~oskulējošajam~~ cilindram, kas oskulē L, sākuma punktā ir vienādojums

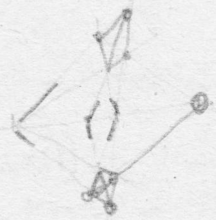
$$40(x-1) + 5z^2 - (y-2z)^2 = 0$$

Ievietojot ~~tā~~ šī vienādojuma kreisās puses izteiksmē L tekošā koordinātu vērtības un izvirzot pēc t augošām pakāpēm, dabūjam

$$40(\cos t - 1) + 45t^2 - (\sin t - 6t)^2 = \frac{9}{7!}t^8 + \dots$$

Līknei L ar cilindru ir kopīgi astoņi bezgalīgi tuvi punkti un pieci, kā vispārīgā gadījumā, tā tad superoskulācijas kārta ir tieši trīs.

$0 = 0$



pã lode

$y = X + xt + yn + zh$

$y' = t(1+x' - \xi y) + n(y' + \xi x - \tau z) + h(z' + \tau y)$

$x' = -1 \quad + \xi y$

$y' = \quad -\xi x \quad + \tau z$

$z' = \quad -\tau y$

$A = y + R(n \cos\varphi + h \sin\varphi)$ $\quad \xi n t$

$A' = 0 \quad R'(n\cos\varphi + h \sin\varphi) + \underbrace{(A - R\xi\cos\varphi)t}_{\xi\, n t} + R(\varphi' + \tau)[-n\sin\varphi + h\cos\varphi]$

$\varphi' = -\tau$

$R' = 0$

$1 - R\xi\cos\varphi = 0$

$n \cos\varphi = R$

$-n\sin\varphi\,\varphi' = R'$

$n \sin\varphi\,\tau = R'$

$n \sin\varphi = R'T$

$\boxed{\xi y = \dfrac{R'T}{R}}$

$\eta' = -\kappa x$

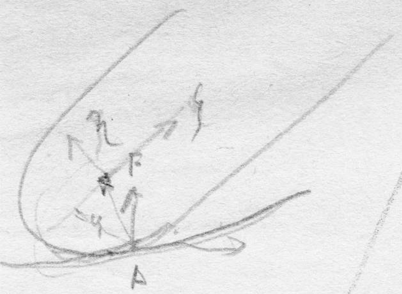
$\eta'' = -\kappa' x + \kappa$

Parab. na param p

$y^2 = 2px$

$(x \sin\alpha + y\cos\alpha + h)^2 = 2p(x\cos\alpha - y\sin\alpha + a)$

$x^2\sin^2 + 2xy\sin\cos + y^2\cos^2 + 2xh\sin + 2yh\cos$ $\underline{- 2px\cos} + 2py\sin$



Campo ... $h^2 - 2pa = 0$

prinsamos $\quad h\sin - p\cos = 0 \quad h = p\frac{\cos}{\sin}$

$x^2\sin^2 + 2xy\sin\cos + y^2\cos^2 + \frac{2yp}{\sin} = 0$

$2yp = -x^2\sin^3$

$y = \frac{\kappa}{2}x^2 + \cdots$

$\boxed{\kappa p + \sin^3 = 0}$

pã A $\quad \eta^2 = 2p\xi$

$x^2\sin^3 + 2xy\sin^2\cos + y^2\cos^2\sin + 2yp = 0$

$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2$

$2(-1 + \kappa y)(x\sin^3 + y\sin^2\cos) - \kappa x 2(x\sin^2\cos \ldots$

$+ y' \left\{ 3x^2\sin^2\cos + 2xy(2\sin\cos^2 - \sin^3) + y^2 \ldots \right.$

$$O = \ldots$$

$$\vec{I}_3' = -k\vec{I}_2$$

pie kam

$$\vec{I}_1\vec{I}_3 = 1 \quad , \quad \vec{I}_2^{\,2} = 1$$

un pārējie šo vektoru kvadrāti un skalārie reizinājumi ir vienlīdzīgi nullei. Ar šo formulu palīdzību dabūjam

$$p = k^2, \quad q = 2k, \quad r = 0$$

un no X pirmo trīs atvasinājumu kvadrātiem un skalāriem reizinājumiem no nulles atšķiras tikai

$$\vec{X}''^2 = 1 \qquad \vec{X}'\vec{X}''' = -1 \qquad \vec{X}'''^2 = -2k$$

Ievietojot sistēmā (128), un pieskaitot pēdējam vienādojumam pirmo, dabūjam

$$-2kz + y^2 - 2kz^2 = 1$$
$$yz^2 = 0$$
$$2kz + 4y^2 + 4kz^2 = 0$$

Abi pēdējie vienādojumi dod: pieskart $y = z = 0$ un vienu reizi $y = x + 2kz = 0$. Pēdējo vērtību sistēma izteic, ka vektors $\vec{u}$ ir kollineārs ar izotropo vektoru. Tam tā gan nevar būt garums 1; lai tomēr iegūtu interpretāciju šādam vektoram, varam iedomāties, ka izotropā līnija radusies deformējot kādu līkni, kas nav izotropa, un šai deformējamai līknei atbilstošā cilindra vienādojumā (108) aizvietot $\vec{u}$ ar $\frac{\vec{u}}{d}$, kur d ir garums vektoram $\vec{u}$, kas iet pa cilindra asi. Reizinot (108) ar d^2 un robežgadījumā, kad par $\vec{u}$ var ņemt $\vec{X}'$, liekot $d = 0$, dabūjam kā deģenerētā pieskaršā oskulējošā cilindra vienādojumu

$$[\vec{X}'(X - c)]^2 = 0 \quad ,$$

kas raksturo divkārši ņemto ~~os~~ līknes oskulējošo plāksni. Šī interpretācija ir saskaņā arī ar divkāršās plāksnes un līknes kopīgo bezgalīgi tuvo punktu skaitu, kas ir seši, tā tad pat par vienu vairāk, kā jā sakum oskulējošam cilindram.

E. Cartan, ~~(60. lp.)~~ skat. 34. lp.
loc. cit.

renciālinvarianta K inversā lieluma. Šo interpretāciju invariantam ~~dod~~ jau Scheffers [19] vienīgi viņa lietotais diferenciālinvariants ir 16 K un pārskatīšanās vai iespieduma// kļūdas dēļ ir saistīts par trešās kārtas („viespunktīg"), ~~pie~~ ne par ceturtās kārtas pieskaršanos.

E. Cartan's [20] konstatē, ka minimālās līknes ar nemainīgu $K \neq 0$ ir minimālās parastās skrūves līnijas; patvaļīgai minimālai līknei L katrā tās punktā X, kur $K \neq 0$, eksistē šāda skrūves līnija, kas tai pieskaras ar kārtu 4; šai skrūves līnijai „liekums" K ir tas pats, kā līknei L punktā X.

E. Cartan'a pirmo rezultātu var iegūt arī no mūsu vienādojumiem, izsakot, ka notiek superoskulācija, kas dod $K' = 0$. Tā kā nedeģenerētais oskulētājs cilindrs ir vienīgs, superoskulācija katrā punktā X var notikt vienīgi tad, ja līkne L atrodas uz cilindra. E. Cartan'a aplūkotā oskulētājā skrūves līnija atrodas uz oskulētāja cilindra.

[76 l.p. citētā darbā

5. No šai paragrāfā ~~minētiem~~ iegūtiem rezultātiem Tanner's, aplūkojot vienīgi līknes, kam spēkā Frenet formulas un ignorējot imagināros cilindrus, ~~kuri~~ [5]: ka eksistē augstākais seši oskulētāji cilindri, nedodot tomēr eksplicītus vienādojumus to noteikšanai; ka gadījumā, ja $\rho' = \rho'' = 0$, eksistē 2 līdz 5 oskulētāji cilindri, ka $\tau = 0$ tad ir nepieciešams noteikums, lai notiktu superoskulācija, kas ir pretišķams parastajām skrūves līnijām, kam ir 2 vai 4 oskulētāji cilindri, ieskaitot cilindru, uz kura tās atrodas.

---

[19] G. Scheffers, Besondere transcendente Kurven, Encykl. der Math. Wissenschaften III D 4, 1903, 256 l.p.

[20] loc. cit. 42. l.p.

...skulekaju ... Dodot vēl divus nolicikumus, kas saista šos ...
12) līdz (114). Dodot vēl divus nosacījumus, kas saista šos lie-
lumus un to atvasinājumus, mēs dabūsim kopskaitā
sešus diferenciālvienādojumus ar piecām nezināmām.
Ja vienādojumi nebūs nesaderīgi, to atrisinājumi vispārīgā
gadījumā būs atkarīgi no patvaļīgām konstantēm.
Ir, protams, arī iespējami gadījumi, kad vienādojumiem ir
kopīgs atrisinājums, kas atkarīgs no patvaļīgām
funkcijām. Prasot, piemēram, lai cilindra ass būtu
pieskare punktā C – līknes tekošā punkta X projekcijās
uz cilindra asi – ģeometriskai vietai, acīmredzot visas
līknes uz kāda nemainīga cilindra dod atrisi-
nājumu.

Atkarībā no dotiem nosacījumiem, var būt iz-
devīgi eliminēt (112) līdz (114) skaitā nevis a un t, lai
iegūtu sakarību (118) t, ϑ, τ un ~~abu~~ pēdējo atvasinājumu
skaitā, bet kādus citus divus lielumus, lai vispār izteiktu
sakarību palīglielumu palīdzību. Aplūkosim vienu
$a, \vartheta, t, \vartheta, \tau$ ar palīglielumu palīdzību. Aplūkosim vairākos gadījumos aplū-
cējām redukciju, ar ko iespējams vairākos gadījumos aplū-
kojamās problēmas ~~...~~ atrisināšanu reducēt uz vienā
pirmās kārtas diferenciālvienādojuma atrisināšanu.
Pieņemot, ka $\varrho\tau \neq 0$, liekam
līdz ar sekojošām kvadratūrām.

$$(136)\quad A = -\frac{\varrho'}{\varrho\tau}, \quad B = -3\frac{\tau'}{\tau^2}, \quad D = 3\frac{\varrho}{\tau}, \quad E = \frac{5\varrho'^2 - 3\varrho\varrho''}{\varrho^2\tau^2}$$

Tad vienādojums (118) iegūst veidu

$$(137)\qquad \left[t^4 + Bt^3 + Et^2 + 2At + A^2\right](t^2+1) - D^2t^4 = 0$$

kur lielumi A, B, D, E sanā skaitā saistīti ar sakarībā

(138) $(B-3A)\,dA = (AB+E-2A^2)\frac{dD}{D}$ 059857 (36)

Ja A, B, D, E ir iegūti kā viena parametra funkcijas, kas apmierina šo vienādojumu, līknes liekumu, vērpi un losenu s iegūstam ar divām kvadratūrām, jo

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{3A\,dD}{(3A-B)D} = \frac{3A\,dA}{-2A^2+AB+E}$$

kas dod liekumu. Vērpi dod

$$\tau = 3\frac{\rho}{D}$$

un losenu

$$ds = \frac{dD}{\rho(B-3A)} = \frac{\rho\,dD - D\,d\rho}{\rho^2 B}$$

Abas $\frac{d\rho}{\rho}$ un ds izteiksmes dod tās pašas vērtības.

~~Abas izteiksmes $\frac{d\rho}{\rho}$ un ds dod tās pašas vērtības~~

Patvaļīgā konstante, kas rodas nosakot ρ, ir dimensijas konstante — to mainot, mēs iegūstam līknes, kas viena otrai līdzīgas. Konstante, kas rodas nosakot s, vienīgi ~~nosaka~~ tēlo līknes punktu, no kura sākam skaitīt losenu.

Ienirosim vēl speciālās lielumu A, B, D, E vērtības speciālām līknēm. Vispārīgām skrūves līnijām D ir konstants un B = 3A; (ρ un s noteikšanai jāņem pēdējās diferenciālizteiksmes, jo pirmās ir nenoteiktas) ~~Cilindra~~ konusskām skrūves līnijām visi citi lielumi ir konstanti un turklāt

(139) $B = 3A, \quad E = -A^2$

~~Parastām skrūves līnijām D ir patvaļīga konstante, A = B = E = 0. Abām pēdējām līknēm~~ Augšējās formulas ρ un s noteikšanai pielāgojamas, te neder, tikai ja dotie B un D, ar viņu kvadrātsakņu dalījumu ~~...~~ un ρ, kā s funkciju.

Beidzot parastām skrūves līnijām D ir patvaļīga konstante, A = B = E = 0.

$$E(3t^4-t^2) = A^2(-3t^4-9t^2+6)+2A(-t^5-6t^3+3t)-\cancel{t^8}+3t^6$$

Meklēsim vispirms vai problēmas atrisinājumu starpā nav vispārīgas skrūves līnijas. Tām, kā minēts, D ir konstants un $B=3A$. Ievietojot pēdējo noteikumu pirmā vienādojumā (140), dabūjam

$$8A^2+A(9t^5-5t^3+6t)+8t^6=0$$

Kopā ar otro vienādojumu (140) mums ir divi vienādojumi ar konstantiem koeficientiem, kas saista A un t vērtības. V-ar pārliecināties, ka šie vienādojumi ir neatkarīgi; tie tā tad nosaka konstantus A un t. Bet tad līknē ir cilindrokoniska skrūves līnija vai parastā skrūves līnija. Tā kā pēdējai mūsu problēmā jau ir aplūkota, paliek vēl cilindrokoniskas skrūves līnijas gadījums. Tad noteikums $E=-A^2$ dod otru vienādojumu A un t starpā vienīgi

$$A^2(-10t^2+6)+2A(-t^5-6t^3+3t)-t^8+3t^6=0$$

Izslēdzot A abu pēdējo vienādojumu starpā, dabūjam

$$10\,t^4(3t^2-1)^2(t^2+1)(t^2-2)(t^4-5t^2-2)=0$$

Sakne $t=0$ dod jau aplūkoto gadījumu $\rho'=0$. $3t^2-1=0$ dod gadījumu, kad (140) gan ir apmierināti, bet šie noteikumi nav līdzvērtīgi ar trīsskārša saskares eksistences noteikumiem, kas vairs nav apmierināti. $t^2+1=0$ dod $\rho=0$. Pāri palikušās sešas t vērtības, dod imagināras cilindrokoniskas skrūves līnijas, kas ir problēmas atrisinājumi.

Pārējās līknes, kam katrā punktā eksistē trīsskāršs oskulējošs cilindrs, dabūjam pieņemot, ka $t(3t^2-1)\neq 0$, izsakot B, D, E ar formulu (140) palīdzību kā A un t funkcijas un ievietojot dabūtās izteiksmes vienādojumā (138), kas dod

$$(141)\qquad t^2(t^2+1)(3t^2-1)\,M\,dA+3(2A-t^3+t)[A(5t^2-1)+2t^2]\,N\,dt=0,$$

kur

$$M = A^3(-30t^2+26)+A^2(3t^5-43t^3+30t)+A(6t^8+10t^6-6t^4+6t^2)+7t^9+3t^7$$

$$N = 8A^3+A^2(9t^5+5t^3)+A(10t^6+12t^4-6t^2)+t^9-3t^7$$

(141) integrāļi, kam $dA\neq 0$, $dt\neq 0$ dod līknes, kas nav skrūves līnijas un kam katrā punktā eksistē trīsskāršs ~~super~~ oskulējošs cilindrs ar superoskulācijas kārtu 2. Šādus integrāļus

funkcijas. Atvasinājumi skaļpā ahsal ir kā cilindrokoniskās skrūves līnijās, tā līknes, kas nav skrūves līnijas un kās noteiksco integrējot vienu pirmās kārtas un pirmās pakāpes algebrisku diferenciālvienādojumu.

059859

Atzīmēsim vēl, ka prasība, lai vismaz trīs vienādojuma (137) saknes būtu konstantas, raksturo parastās un cilindro-koniskās skrūves līnijas, kam visas saknes ir konstantas.
Cilindrokoniskām skrūves līnijām vienādojums (137), to izrakstot, iegūst veidu:

3. Ja dotie noteikumi saista lielumus a, φ, ψ, ir parocīgi ņemt tos pašus par pamata mainīgiem, lai varētu viegli interpretēt dabūtās sakarības. Izteiksmju vienkāršošanai ņemam apzīmējumus

$$p = \sin\varphi \qquad x = \sin\psi$$
$$q = \cos\varphi \qquad y = \cos\psi$$

Nekustības noteikumus (111) tad varam rakstīt veidā

$$\begin{cases} a' = 0 \\ \psi' = \dfrac{px^2}{aq} \\ \varphi' = -\tau + \dfrac{xy}{a} \end{cases}.$$

Vienam oskulējošam cilindram atbilstošos lielumus a, φ, ψ un to atvasinājumus pēc līknes loka saista sakarība

$$(142)\qquad \frac{a''q}{ap^2} + a'\left[-2\psi'\frac{qy}{p^2x} - \frac{\varphi'}{p} + 3\frac{pxy}{a}\right] + \left(\psi' - \frac{px^2}{aq}\right)\left\{-2\frac{a'qy}{p^2x} + 4\psi'\frac{aqy^2}{p^2x^2} + 2\varphi'\frac{ay}{px} + 3p(x^2-y^2)\right\} = 0$$

35

Tā rāda, ka prasību, lai ~~cilindr~~ oskulējošam cilindram radiuss a ir konstants, var izpildīt divējādā veidā: vai nu lietot

$$(143)\qquad \psi' - \frac{px^2}{aq} = 0$$

Tad līkne atrodas uz nemainīga cilindra, vai arī

$$f = -\frac{3\tau'}{\tau} \quad g = \frac{5\rho'^2 - 3\rho\rho''}{\rho^2\tau^2} \quad h = -\frac{\rho'}{\rho\tau} \quad k = \frac{3\rho}{\tau^2},$$ $f\,g\,h\,j\,k$

vienādojumu (118) var uzrakstīt veidā

$$(119) \quad (t^4 + f t^3 + g t^2 + 2h t + k^2)(t^2+1) - k^2 = 0$$

Atsevišķā līknes punktā X lielumu f, g, h, k var iegūt patvaļīgas vērtības. So faktu izmantojot, var konstatēt, ka vienādojumam (119) reālo dažādo saknu skaits var iegūt visas iespējamas vērtības no 0 līdz 6.

Šādas f, g, h, k un attiecīgo (119) saknu vērtības ievietotas sekojošā tabulā

f	g	h	k	saknes	reālo sakņu skaits

$$t^6+3At^5+(1-A^2-D^2)t^4+5At^3+2At+A^2=0,$$

G

Tā kā trūkst kvadrātiskā locekļa, kā arī ~~un~~ t^3 un t koeficientiem, ja A un D ir reāli, ir tā pati zīme, secinām, ka vismaz viens sakņu pāris ir imaginārs; tā tad reālām cilindrokoniskām skrūves līnijām vismaz divi oskulējošie cilindri ir imagināri.

$$4\psi'\frac{aqy^2}{p^2x^2}+2\psi'\frac{ay}{\cancel{p}x}+3p^2(x^2-y^2)=0$$

$p=\cos\varphi$ $x=\sin\psi$

$q=-\cos\varphi$ $y=\cos\psi.$

$$\boxed{\psi'=\frac{3x^2}{ac}=\frac{\sin^2\psi}{a}\operatorname{tg}\psi!}$$

$$\operatorname{tg}\psi=\varepsilon\frac{a}{\beta}\cos^2\lambda$$

$$\psi'(1+\operatorname{tg}^2)=\frac{-2\varepsilon\frac{a}{\beta}\cos\lambda\sin\lambda}{\sqrt{a^2\cos^4+\beta^2}}$$

$\vec{t}s'(-\sin, \cos, 3)$

$\eta g s'^2(-\cos, -\sin, 0)$

$-\dot{t}g^3 s'^3 \quad tg\tau s'^3(\sin, -\cos, 0)$

$s'^2 = 10 \qquad g = \frac{1}{10} \qquad g^2\tau s'^6 = 3$

$\tau = 3.10^2.10^{-3} = \frac{3}{10}$

$\vec{t}\ t$

Sāk. pkt. $\vec{t}\left(0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\vec{n}(-1, 0, 0)$

$\vec{b}\left(0, -\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\vec{u}\left(0, \frac{-2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

$\vec{u}\left(0, \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$a = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{100}+\frac{9}{100}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{100}} = \frac{1}{\frac{2}{10}} = \frac{10}{2} = 5$

$a = 5$

$A = (-4, 0, 0)$

cilindrs $(x+4)^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{5}\left[-y+2z\right]^2 = 25$

$8x + z^2 + 17 - \frac{1}{5}(y-2z)^2 = 25$

$8x + z^2 - 8 - \frac{1}{5}(y-2z)^2 = 0$

$40[\cos t - 1] + 45t^2 - (\sin t - 6t)^2 = 0$

$40\left[-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + \frac{t^8}{8!}\right] + 45t^2 - \left(-5t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{7!}\right)^2 =$

$(\ )^2 = 25t^2 + \frac{5}{3}t^4 - \frac{1}{12}t^6 + \frac{10}{7!}t^8$

$+\frac{1}{36}t^6 - \frac{5}{5!}t^8$

$= \frac{1}{18}t^6 - \frac{9}{7!}$

$= -20t^2 + \frac{5}{3}t^4 - \frac{1}{18}t^6 + \frac{40t^8}{8!} \ldots$

$+45$

$-25 \quad -\frac{5}{3}t^4 + \frac{1}{18} \quad + \frac{4}{7!}$

$= \frac{9}{7!}t^8 + \ldots \qquad$ Pareizi sākas ar t^8, pieskaņas $\underline{\underline{3}}$

Sesuma nekustīgums: $A = x + a(n\cos\psi + b\sin\psi)$

$\vec{u} = t\cos\varphi - n\sin\varphi\sin\psi + b\sin\varphi\cos\psi$

Ja $g' = \tau' = g'' = 0$, $\quad ag\cos\psi = \sin^2\varphi$

$a g \tau \sin\psi = 3\sin\psi\sin\varphi\cos\varphi$

$a g \tau^2 \cos\psi = -3g^2\cos^2\varphi + 3g^2\sin^2\psi\sin^2\varphi + 4\tau\cos\psi\sin\varphi\cos\varphi$

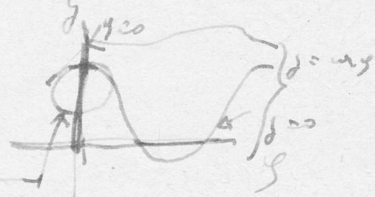
Matrica, ja $\psi = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & \psi & \varphi \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} g & 0 & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\tau^2 & 0 & 6g\sin\varphi\cos\varphi + 4\tau(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{array} \right\| \end{array}$$

$\Rightarrow$ Lineārs $y = \operatorname{tg}\varphi$ un ...; a ($\tau = 3g$)

$\sin\psi\, y(y - \cos\psi) = 0$

$y^2(3 - \sin^2\psi) - 4y\cos\psi + 1 = 0 \ \geq$



$\tilde{s}$ vienkārša darba 5, lineāri? ... 3 ... vēl.

Nekustīgums nekustīgumu: $a' = 0$

$\varphi' = g\sin\psi$

$\psi' = \frac{g\cos\varphi\cos\psi}{\sin\varphi} - \tau = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{a} - \tau$

H

I Noteikumi, kas faktiski raksturo cilindra neskustību, ir abi pirmie. g' izteiksme ir to sekas identiski pastāvošo sakarību (112.) un (113.) dēļ.

059861

... aplūko G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene u. im Raume, (Leipzig 1910) p.341-350.

$$g = \frac{x^2}{ac} \qquad \psi' = ,$$

$$\left(\psi' - \frac{sx^2}{ac}\right)\left\{3s(x^2-y^2) - 2\frac{acy}{sx}\left[\frac{a'}{as} - 2\frac{y}{sx}\psi' - \frac{y'}{c}\right]\right\} + \frac{a'^2c}{as^2} + a'\left\{-2\psi'\frac{cy}{s^2x} - \frac{y'}{s} + 3\frac{sxy}{a}\right\}$$

$$-2\frac{a'acy}{as^2x}$$

$$\frac{a'^2c}{as^2} + a\left[-2\frac{acy}{as^2x}\psi' + 2\frac{xy}{as}\right.$$

$$g + 1 + 2 \sim 12.$$

[illegible]

$$(145)\qquad 2c(1+c)\,db + (3bc+b+4)\,dc = 0,$$

kas rodas $b = tg^2\varphi$ un $c = tg^2\psi$ s-kaspā, eliminējot locekļus no sakarībām (143) un (144). Integrēšanu un tai sekojošo līknes noteikšanu var atvieglot ar ģeometriskiem apsvērumiem. Ja cilindram V, uz kura atrodas līkne L, ir izpildīts noteikums (144), to var uzskatīt par robežstāvokli kādam mainīgam oskulējošam cilindram ar radiju a_1, kam robežgadījumā $a_1 = a$ un $a_1' = 0$. Līdzīgi cilindram līknei L tad jābūt charakteristiskām līknēm viena parametra paskāvja radija a cilindru saimes atsevišķām virsām V.

Atrasim šādas saimes vispārīgā vienādojumu (108), kur par mainīgiem uzskatām vienīgi C un $\vec{u}$, dabūjam ~~[illegible]~~

$$(146)\qquad \vec{c}'(X-C) + [\vec{u}'(X-C)][\vec{u}(X-C) - \vec{u}\,\vec{c}'] = 0$$

Lai iespējami vienkārši raksturotu vienādojumu (108) un (146) noteikto līkni, cilindra (108) ass centrālo punktu ņemam par punktu C, asi uzskatot kā asu virsas veidotāji. Tad

$$\vec{c}'\vec{u}' = 0$$

Ņemot ortogonālu koordinātu sistēmu, kam sākuma punkts ir C, x un z ass iet attiecīgi vektoru $\vec{u}'$ un $\vec{u}$ virzienos, var parametra λ palīdzību izsakām līknes L tekošā punkta koordinātas veidā $X(a\cos\lambda,\ a\sin\lambda,\ k\,tg\,\lambda)$, kur k ir $\vec{c}'$ komponente, kas paralēla z asij. Aprēķinot šai līknei un nemainīgās cilindram atbilstošās b un c izteiksmes, atrodam

$$b = \frac{4k^2\,tg^2\lambda}{a^2\cos^2\lambda + k^2} \qquad c = \frac{a^2}{k^2}\cos^2\lambda$$

Izslēdzot λ, dabūjam

$$c(bc+b+4)^2 = 16\,\frac{a^2}{k^2} = \text{const},$$

kas ir (145) vispārīgais integrāls.

4. Par dabisko vienādojumu līknēm ~~uz~~ cilindra ar rādiju a var uzrakstīt vienādojumu (143) vai izvedot no abiem pie[illegible] vienādojumiem (111), ja φ un ψ ir vienādojumu (112) un (113) noteiktās s, s' un τ funkcijās. ~~T~~ Lai šo vienādojumu izteiktu vienīgi ar s, τ un to atvasinājumu palīdzību, būtu jāizslēdz φ vienādojumu (115) un (118) starpā. Nav grūti uzrakstīt ~~dabūjamo~~ vienādojumu, pielīdzinot kādu sestās kārtas determinantu nullei, bet ~~a~~ tā būtība ~~nav kas parādīts~~ mērīga: lai pārbaudītu, vai kāda ~~dota~~ līkne L atrodas uz ~~dot~~ rotācijas cilindra, ir katreiz jāpārbauda, vai attiecīgais determinants ir vai nav identiski vienlīdzīgs nullei. ~~Ta~~ Šo paņēmienu praktiski vēl var lietot, ja ~~dota~~ līkne L ir dota, jo tad pietiek konstatēt, ka ~~l~~ divu dažādu L punktiem ~~[illegible]~~ attiecīgās sestās pakāpes vienādojumiem, ~~ko~~ attiecībā pret a, ko dabūjam determinantu pielīdzinot nullei, ~~sak~~ nav kopīgu sakņu, lai secinātu, ka līkne uz cilindra neatrodas; ja turpretim līknes L dabiskais vienādojums ~~atkal~~ satur vēl kādus brīvi nosakāmus parametrus, atbildes iegūšanai nav praktiski ~~[illegible]~~ šis ~~posit~~ paņēmiens negātīvas atbildes iegūšanai ~~[illegible]~~ izpildāms. ~~Lai konstatētu, vai līkne L atrodas uz rotācijas~~

~~Praktiski derīgāks paņēmiens ir šāds.~~

~~Minēto iemeslu dēļ, šo vienādojumu [illegible]~~ ~~Tā~~ Tā kā rotācijas cilindrus aplūkojām galvenokārt ~~kā~~ pirmās nodaļas vispārīgo rezultātu ilustrācijai, ~~ilustrācija~~ lai ~~šo~~ darbu ~~[illegible]~~ šo ~~darbu~~ pārāk nepagarinātu, neaplūkosim arī dažādas citas interesantas īpašības, kā noteiktu cilindru un līkņu pieskaršanās, cerot pie tām atgriezties kādā turpmākā rakstā.

Diezgan plašu to aplūkojumu līdz ar literatūras norādījumiem dod G. Loria, Curve sghembe speciali, I (Bologna, Nicola Zanichelli), 1925, 169-173 l. p.