

Über die Bestimmung von zwei speziellen Klassen von Eiliniën.

Von

E. Grünbergs in Riga.

Herr P. Ganapathi hat in dieser Zeitschrift behauptet¹⁾, daß die Anzahl q der umschriebenen Quadrate einer Eilinie immer ungerade ist. Dasselbe gelte von der Anzahl s der Spitzen der Mediane (d. h. des Ortes der Mittelpunkte der Durchmesser). Wie Herr W. Fenchel bemerkt, ist der Beweis dieser Sätze nicht stichhaltig²⁾. Herr H. Gericke hat ferner Eiliniën angegeben, die genau zwei umschriebene Quadrate besitzen³⁾, nämlich ein bestimmtes Dreieck und dessen Parallelkurven. Einige einfache Betrachtungen werden uns gestatten, Eiliniën mit beliebigem (also auch geradem) q oder s herzustellen, die der strengeren Definition der Eiliniën genügen, nämlich deren Tangente und nie verschwindende Krümmung sich stetig mit dem laufenden Punkte ändern. Mit Herrn F. Severi nennen wir solche Kurven intuitiv.

Eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Herrn H. Gericke gibt eine erste Methode zur Herstellung von Eiliniën mit geradem q : In ein Quadrat beschreibe man eine Eilinie E ein, die eine Mittelsenkrechte D des Quadrates zur Symmetrieachse hat. E hat dann immer noch ein zweites umschriebenes Quadrat, dessen eine Diagonale mit D zusammenfällt. Falls noch andere umschriebene Quadrate in endlicher Anzahl vorhanden sind, so sind diese zu je zweien symmetrisch in bezug auf D und voneinander verschieden. Die Gesamtanzahl q der umschriebenen Quadrate ist also, falls endlich, immer gerade.

Im folgenden erhalten wir ein Verfahren zur effektiven Herstellung intuitiver Eiliniën mit vorher gegebenem q oder s ($q \geq 1$, $s \geq 3$). Der laufende Punkt, Punkt φ genannt, wird überall durch den Winkel φ bestimmt, den die betreffende orientierte Tangente mit einem festen Strahl bildet.

1. Es sei $\mu(\varphi)$ die Entfernung der Tangenten in den Punkten φ und $\varphi + \pi$. Diese Funktion hat offenbar die Periode π . Die Anzahl q

¹⁾ Math. Zeitschr. **38** (1934), S. 490—491.

²⁾ Zentralblatt f. Math. **9** (1934), S. 30.

³⁾ Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 201.

der umschriebenen Quadrate ist gleich der Nullstellenanzahl der Funktion

$$f(\varphi) = \mu(\varphi) - \mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

in jedem Intervall $\beta \leq \varphi < \beta + \frac{\pi}{2}$. In jedem solchen Intervalle hat $f(\varphi)$ die gleiche Anzahl q von Nullstellen, da $f(\varphi)$ die Periode π hat, nie unendlich groß wird und

$$(1) \quad f\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -f(\varphi)$$

ist. Die Anzahl der Nullstellen, in denen $f(\varphi)$ das Vorzeichen wechselt, ist wegen (1) stets ungerade, also $q \geq 1$ (der Fall $q = 1$ tritt auch wirklich ein, z. B. bei der Ellipse).

Da wir nur einige und nicht etwa alle Eiliniën mit gegebenem q bestimmen wollen, wählen wir $\mu(\varphi)$ und also auch $f(\varphi)$ in der Form eines Polynoms in $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$. Es seien α_i ($i = 1, 2, \dots, q$) die voneinander verschiedenen Nullstellen von $f(\varphi)$ im betrachteten Intervall und a_i ($i = 1, 2, \dots, q$) ihre respektiven Ordnungen. Durch Multiplikation der einzelnen Glieder mit geeigneten Potenzen von $\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi$ bringt man $f(\varphi)$ auf die Form

$$f(\varphi) = F(\sin 4\varphi, \cos 4\varphi) \prod_{i=1}^q (\cos 2\alpha_i \sin 2\varphi - \sin 2\alpha_i \cos 2\varphi)^{a_i},$$

wo F ein beliebiges Polynom seiner zwei Variablen ist, das keine reellen Nullstellen hat. Ferner ist, in Folge von (1)

$$(2) \quad \sum_{i=1}^q a_i = 2n + 1 \quad (n \geq 0 \text{ und ganz}).$$

$f(\varphi)$, etwas einfacher geschrieben, lautet:

$$(3) \quad f(\varphi) = F(\sin 4\varphi, \cos 4\varphi) \prod_{i=1}^q [\sin 2(\varphi - \alpha_i)]^{a_i}.$$

Um nun alle Eiliniën herzustellen, denen die so gebildete Funktion $f(\varphi)$ entspricht, beachten wir, daß der Vektorenbereich einer Eilinie in jeder Richtung die doppelte Breite der Eilinie hat. Es genügt also eine Eilinie E zu bilden, die ein Symmetriezentrum hat und der die Funktion $f_E = 2f(\varphi)$ entspricht. Alle anderen Eiliniën, deren Vektorenbereich E ist, stellt man dann nach einem von Herrn P. Vincensini angegebenen Verfahren her⁴⁾.

Es sei der Koordinatenanfangspunkt das Symmetriezentrum von E und $p(\varphi)$ sein Abstand von der Tangente im Punkte φ . Dann ist

$$p(\varphi) = \frac{1}{2} \mu_E(\varphi),$$

⁴⁾ P. Vincensini, Sur les corps convexes admettant un domaine vectoriel donné, Comptes Rendus **201** (1935), S. 761—763.

also muß man haben

$$(4) \quad p(\varphi) - p\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = f(\varphi).$$

Eine evidente Lösung von (4) ist

$$p_1(\varphi) = \frac{1}{2}f(\varphi),$$

und da $p(\varphi) - p_1(\varphi)$ die Periode $\frac{\pi}{2}$ hat, so ist die allgemeine Lösung der gesuchten Art

$$p(\varphi) = \frac{1}{2}f(\varphi) + P(\sin 4\varphi, \cos 4\varphi),$$

wo P ein beliebiges Polynom von $\sin 4\varphi, \cos 4\varphi$ ist. Folglich ist

$$(5) \quad p(\varphi) = \frac{1}{2}F(\sin 4\varphi, \cos 4\varphi) \prod_{i=1}^q [\sin 2(\varphi - \alpha_i)]^{a_i} + P(\sin 4\varphi, \cos 4\varphi).$$

Dann ist die Tangentengleichung von E

$$(6) \quad A(x, y, \varphi) \equiv x \sin \varphi - y \cos \varphi - p = 0,$$

und die Elimination von φ zwischen (6) und

$$(7) \quad \frac{\partial A}{\partial \varphi} \equiv x \cos \varphi + y \sin \varphi - p' = 0$$

gibt die Parameterdarstellung in Punktkoordinaten (die Akzente bedeuten Ableitungen nach φ):

$$x = -p \sin \varphi + p' \cos \varphi,$$

$$y = p \cos \varphi + p' \sin \varphi.$$

Die Kurve E hat alle ihre Punkte in einem endlichen Bereich und ist geschlossen. Ferner dreht sich die Tangente (6) im Punkte φ stets in derselben Richtung um 2π , wenn dieser Punkt die Kurve E einmal durchläuft. Damit E eine intuitive Eilinie ist, muß E in jedem Punkte einen endlichen, stetigen und nicht verschwindenden Krümmungshalbmesser ϱ haben. Da nun

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi} = p + p'',$$

so sind die zwei ersten Bedingungen immer erfüllt, und es bleibt

$$(8) \quad p(\varphi) + p''(\varphi) \neq 0 \quad \text{für jedes reelle } \varphi.$$

Diese Bedingung ist hinreichend, denn wegen der beständigen Richtung der Tangendrehung kann E keine Doppelpunkte haben, ohne Spitzen zu haben, da die Tangente sich um 2π dreht, wenn der Berührungspunkt die Kurve durchläuft.

Insbesondere, ist (8) erfüllt, so verschwindet p nie. Wir haben also den folgenden Satz: Hat das trigonometrische Polynom $p(\sin \varphi, \cos \varphi)$ (oder die Summe $p(\varphi) = \sum_{i=1}^n (a_i \cos i\varphi + b_i \sin i\varphi)$, was ja dasselbe ist)

reelle Nullstellen, so hat auch $p + k \frac{d^2 p}{d \varphi^2}$ reelle Nullstellen für $k = 4$. Genauere Untersuchungen, die nicht in den Rahmen dieser Schrift fallen, würden wahrscheinlich eine untere Grenze für die Werte von k geben, denn für jedes k gilt der Satz nicht (z. B. für $p = n + (n + 1) \cos \varphi$, $k = \frac{2n}{n+1}$ hat man $p + p'' = n - (n - 1) \cos \varphi$).

Der Bedingung (8) ist leicht zu genügen durch die Wahl eines konstanten Gliedes in P , dessen Verhältnis zu den anderen Koeffizienten genügend groß ist. F und P können sich auf zwei Konstanten reduzieren. Nehmen wir z. B. $F = ak$, $P = a$, so gibt (8)

$$(\Pi(\varphi) \equiv \prod_{i=1}^q [\sin 2(\varphi - \alpha_i)]^{a_i}):$$

$$a + ka [\Pi(\varphi) + \Pi''(\varphi)] \neq 0.$$

Nun ist aber

$$|\Pi(\varphi)| \leq 1,$$

$$|\Pi''(\varphi)| \leq 4 \left(\sum_{i=1}^q a_i \right)^2 = 4(2n + 1)^2$$

bei Beachtung von (2). Für

$$|k| < \frac{1}{4(2n + 1)^2 + 1}, \quad k \neq 0$$

stellt also

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi - a \left\{ 1 + k \prod_{i=1}^q [\sin 2(\varphi - \alpha_i)]^{a_i} \right\} = 0$$

eine Eilinie dar, die genau q umschriebene Quadrate hat.

In konkreten Fällen findet man natürlich für den Parameter k weitere Grenzen, z. B. muß bei $q = 2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$

$$0 < |k| < \frac{\sqrt{35}}{54}$$

sein, und es ist $\frac{\sqrt{35}}{54} > 0,1095$, während $\frac{1}{4(2n + 1)^2 + 1} = \frac{1}{37} < 0,0271$ ist.

Bei Beachtung der Bedingungen (2) und (8) gibt aber die Tangentengleichung (6), wo p die Form (5) hat, eine Eilinie mit genau q umschriebenen Quadraten, deren Seiten sie in den Punkten $\alpha_i + \frac{j\pi}{2}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) berühren. Die α_i können ganz beliebig gewählt werden unter der einzigen Bedingung

$$\alpha_i \equiv \alpha_l \pmod{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{wenn } i \neq l.$$

2. Betrachten wir als Tangente eines konvexen Vieleckes eine Minkowskische Stützgerade, d. h. eine Gerade, die durch eine Ecke geht,

ohne es in einem anderen Punkte zu schneiden, oder die mit einer Seite zusammenfällt (in welchem Falle jeder Punkt dieser Seite ein Berührungspunkt ist), so gibt uns jedes konvexe n -Eck, dessen keine zwei Seiten parallel sind, ein triviales Beispiel einer Eilinie, deren Mediankurve n Spitzen hat.

In ähnlicher Weise wie vorher, können wir jedoch auch intuitive Eiliniën mit beliebigem s ($s \geq 3$) herstellen.

Es sei $\varrho(\varphi)$ der Krümmungshalbmesser im Punkte φ . Die Zahl s ist gleich der Nullstellenanzahl von

$$(9) \quad R(\varphi) = \varrho(\varphi) - \varrho(\varphi + \pi)$$

in jedem Intervall $\beta \leq \varphi < \beta + \pi$, da $\frac{1}{2}R(\varphi)$ der Krümmungshalbmesser der Mediankurve in dem Punkte ist, der φ entspricht⁵⁾. Genau dieselben Betrachtungen wie im vorigen Paragraphen (nur ist hier die Periode gleich 2π) zeigen uns, daß in jedem solchen Intervall die gleiche Anzahl von Nullstellen liegt, wobei $R(\varphi)$ in einer ungeraden Anzahl von ihnen das Vorzeichen wechselt. $R(\varphi)$ hat aber noch Bedingungen zu erfüllen. Sind x_0, y_0 die Koordinaten des Punktes $\varphi = 0$ und ist die x -Achse parallel zu der betreffenden Tangente, so sind die Koordinaten des Punktes φ :

$$(10) \quad \begin{cases} x = x_0 + \int_0^\varphi \varrho(\varphi) \cos \varphi d\varphi, \\ y = y_0 + \int_0^\varphi \varrho(\varphi) \sin \varphi d\varphi, \end{cases}$$

Bei einer intuitiven Eikurve fallen die Punkte 0 und 2π zusammen. Die beiden Integrale, von 0 bis 2π genommen, müssen also verschwinden, das heißt es ist in Folge von (9)

$$(11) \quad \begin{cases} \int_0^\pi R(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0, \\ \int_0^\pi R(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0. \end{cases}$$

Diese Bedingungen zeigen, daß s nie 1 oder 2 sein kann, denn in diesen beiden Fällen würde $R(\varphi)$ nur in einer Stelle $\varphi = \alpha$ des Intervalles $0 \leq \varphi < \pi$ das Vorzeichen wechseln. Der Ausdruck

$$R(\varphi) \sin(\varphi - \alpha) = \cos \alpha R(\varphi) \sin \varphi - \sin \alpha R(\varphi) \cos \varphi$$

würde also in diesem Intervall ein konstantes Vorzeichen haben und von 0 bis π integriert eine von Null verschiedene Größe ergeben, was den Be-

⁵⁾ P. Ganapathi, Theorems on Ovals. Journal of the Annamalai Un. B I, 1 (1932), S. 67–71. Man erhält dieses Resultat noch einfacher durch Differenzieren nach φ .

dingungen (11) widerspricht. $R(\varphi)$ wechselt also in mindestens drei Nullstellen das Vorzeichen; folglich ist $s \geq 3$.

Wählen wir $R(\varphi)$ und $\varrho(\varphi)$ in der Form von trigonometrischen Polynomen, so erhalten wir wie vorher

$$R(\varphi) = F(\sin 2\varphi, \cos 2\varphi) \prod_{i=1}^s [\sin(\varphi - \alpha_i)]^{a_i}$$

mit

$$(12) \quad \prod_{i=1}^s a_i = 2n + 3 \quad (n \geq 0 \text{ und ganz})$$

und wenigstens drei a_i ungerade, ferner

$$\varrho(\varphi) = \frac{1}{2} R(\varphi) + P(\sin 2\varphi, \cos 2\varphi),$$

wobei F und P beliebige Polynome von $\sin 2\varphi, \cos 2\varphi$ sind, die für kein reelles φ verschwinden. Der so erhaltene Krümmungshalbmesser $\varrho(\varphi)$ ist beschränkt und stetig, und die Formeln (10) geben stets endliche Werte für x und y . Ist (11) erfüllt, so ist die Kurve (10) geschlossen, und jeder Tangentenrichtung φ entspricht ein und nur ein Punkt φ . Doppelpunkte können nicht auftreten, ohne daß Rückkehrpunkte auftreten. Damit also (10) eine intuitive Eilinie darstellt, ist neben (11) noch notwendig und hinreichend, daß ϱ nie verschwindet, was man durch die Wahl eines genügend großen konstanten Gliedes in P stets erreichen kann.

Den Bedingungen (11) genügt man am einfachsten dadurch, daß man zuerst F und die a_i beliebig wählt, mit Beachtung von (12). Dann gibt (11) zwei Gleichungen in $\sin \alpha_i$ und $\cos \alpha_i$, so daß man alle α_i , bis auf zwei, frei wählen kann. Es muß nur

$$\alpha_i \not\equiv \alpha_l \pmod{\pi} \quad \text{für } i \neq l \text{ sein,}$$

was man gegebenen Falles für die zwei letzten α_i durch eine eventuelle Abänderung der frei gewählten α_i wird erreichen können.

Als besonders einfaches Beispiel von Funktionen, die (11) und (12) erfüllen, haben wir:

$$R(\varphi) = 2ak \sin s\varphi$$

$s \geq 3$ und ungerade

$$\left(\text{d. i. } \alpha_i = (i-1) \frac{\pi}{s}, a_i = 1 \right)$$

und

$$R(\varphi) = 2ak \sin \varphi \sin s\varphi$$

$s \geq 4$ und gerade

$$\left(\text{d. i. } \alpha_i = (i-1) \frac{\pi}{s}, a_1 = 2, a_i = 1 \text{ für } i > 1 \right).$$

Wählen wir dann $P = a$, so geben uns diese Funktionen für

$$0 < |k| < 1$$

intuitive Eilinien, deren Mediankurven genau s Spitzen haben.

Nehmen wir in y_0 das bei der Integration von $\varrho \sin \varphi$ erscheinende konstante Glied a auf, so lautet die Parameterdarstellung der betreffenden Eiliniën

$$x = x_0 + a \left\{ \sin \varphi + \frac{k}{2} \left[\frac{1 - \cos (s+1) \varphi}{s+1} + \frac{1 - \cos (s-1) \varphi}{s-1} \right] \right\}$$

$$y = y_0 + a \left\{ -\cos \varphi + \frac{k}{2} \left[\frac{\sin (s-1) \varphi}{s-1} - \frac{\sin (s+1) \varphi}{s+1} \right] \right\}$$

für ungerades s und

$$x = x_0 + a \left\{ \sin \varphi + \frac{k}{2} \left[\frac{\sin (s-2) \varphi}{2(s-2)} - \frac{\sin (s+2) \varphi}{2(s+2)} \right] \right\}.$$

$$y = y_0 + a \left\{ -\cos \varphi + \frac{k}{2} \left[\frac{1 - \cos s \varphi}{s} - \frac{1 - \cos (s+2) \varphi}{2(s+2)} - \frac{1 - \cos (s-2) \varphi}{2(s-2)} \right] \right\}$$

für gerades s . Bezeichnen wir die Punkte φ und $\varphi + \pi$ mit M und M' , so ist der entsprechende Punkt N der Mediankurve der Mittelpunkt von MM' . Die Koordinaten von N sind

$$\xi = x_0 + a \frac{k}{2} [\quad],$$

$$\eta = y_0 + a \frac{k}{2} [\quad],$$

wobei in die Klammern die in den Quadratklammern der entsprechenden x und y enthaltene Ausdrücke zu setzen sind. Dann prüft man mühelos nach, daß $\frac{1}{2} R(\varphi)$ wirklich der Krümmungshalbmesser der Mediankurve im Punkte N ist. Da N diese Kurve einmal durchläuft, wenn φ von 0 bis π geht, hat die Kurve also genau s Spitzen.

(Eingegangen am 12. Februar 1936.)