LATVIJAS UNIVERSITATES MĀCĪBAS GRĀMATU SERIJA
Nr. 12

Novērojumu izlīdzināšana

pēc vismazāko kvadratu metodes

A. Buchholcs

RĪGĀ, 1940

LATVIJAS UNIVERSITATE

Priekšvārds.

Sī grāmata nodomāta pirmā kārtā kā mācības līdzeklis L. U. Inženierzinātņu fakultātes studentiem — priekšmetu „Izlīdzināšanas mācība I un II" (Kļūdu teorija I un II) klausītājiem. Šie priekšmeti tiek pasniegti viens otro koncentriski papildinošu kursu veidā. Tāpēc, sakopojot attiecīgo materialu vienā grāmatā, bij nepieciešami zinami pārkārtojumi. Bez tam izmantots gadijums, lai sīkāki iztirzātu dažus jautājumus, pie kuriem lekcijās un seminaros, laika trūkuma dēļ, var pakavēties tikai diezgan konspektivā veidā.

Sevišķa vērība piegriezta piemēriem; tie gandrīz visi smelti no L. U. Inženierzinātņu fakultātes studentu praktiskiem darbiem ģeodezijā un no Z. M. Mērniecības daļas laipni manā rīcībā nodotiem novērojumiem un aprēķiniem.

Iztirzātā materiala vispārējās iekārtas un arī dažu atsevišķu problemu atrisināšanai pielietoto paņēmienu ziņā esmu zinamā mērā sekojis pazīstamās grāmatas „Jordan-Eggert, Handbuch der Vermessungskunde, I. Band: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate" paraugam. Bet esmu uzskatījis par lietderīgu ietilpināt savā grāmatā arī uz poligonometriskiem darbiem un līmetņojumiem attiecīgas nodaļas, lai ievērotu visus galvenos ģeodetiskos darbus, kuri cieši saistīti ar novērojumu izlīdzināšanu.

Grāmatas pirmās divas nodaļas, kur iztirzāta novērojumu nejaušo kļūdu un novērojumu izlīdzināšanas vispārējā teorija, zīmējas ne tikai uz ģeodetiskiem, bet vispārīgi uz visiem novērojumiem, kuru rezultati izsakami skaitliskā veidā. Tāpēc varbūt drīkst cerēt, ka šī grāmata būs derīga ne tikai minētiem studentiem un praktiskā darbā stāvošiem ģeodetiem, inženieriem, topografiem un mērniekiem, bet arī visiem tiem, kas savā arodā mēdz taisīt minētā veida smalkākus novērojumus.

Uzskatu par patīkamu pienākumu arī šinī vietā izteikt pateicību Z. M. Mērniecības daļai par piemēriem izmantotā materiala piegādāšanu, savam ilggadīgam līdzdarbniekam Dr. ing. J. Biķa kungam par attēlu pagatavošanu, un vispārīgi visiem, kas veicinājuši šīs grāmatas izdošanu.

Asteros, 1937. gada vasarā.

A. Buchholcs.

Satura rādītājs.

Ievads.

Novērošanas ceļā nosakot lielumus un pie tam kontroles nolūkā taisot liekus novērojumus, rezultāti vispārīgi iznāk pretrunīgi. Ja dažreiz pretrunas neparādas, tad tas parasti izskaidrojams ar to, ka izsakot rezultatus zinamā apaļojumā, pretrunas nesniedz līdz sīkākām vērā ņemtām vienībām.

Tā tad jānāk pie slēdziena, ka vispārīgi novērojumi nenotiek absoluti pareizi, bet iznāk ar kļūdām, kuras zinamos apstākļos izpaužās minēto pretrunu veidā. Šīs kļūdas rodas no zinamiem cēloņiem — kļūdu avotiem, kuri, skatoties pēc novērošanas apstākļiem, var būt ļoti dažādi. Katra atsevišķa kļūdu avota ietekme izpaužas attiecīgas elementaras kļūdas veidā. Tā tad gadijumā, kad iedarbojas vairāki kļūdu avoti, novērojuma kopīgo kļūdu sastāda atbilstošās elementarās kļūdas, — parasti sakrājoties to algebraiskā sumā. Pie tam, saprotams, nav izslēgts, ka sastādoties no vairākām elementarām kļūdām ar dažādām zīmēm, kopīgā kļūda var iznākt arī vienāda ar nulli. Tomēr tas uzskatāms tikai par laimīgu nejaušu gadijumu, kurš — kā izņēmums — negroza uz praktiskiem piedzīvojumiem pamatoto atzinumu: ka vispārīgi novērojumi notiek ar kļūdām.

Uz novēroto lielumu īstām (absoluti pareizām) vērtībām attiecinātās īstās kļūdas vispareizāki raksturo novērojumu noteiktību. Tomēr īsto kļūdu nozīme šinī ziņā ne visai liela, jo tādas kļūdas nosakamas tikai tanīs ļoti retos gadijumos, kad zinamas novēroto lielumu īstās vērtības. Tāpēc uz novērojumu noteiktību attiecīgos atrisinājumos mēdz iziet no novērojumu pretrunām, jo tās, lai gan radušās no novērojumu īstām kļūdām, tomēr nosakamas arī tad, kad novēroto lielumu īstās vērtības nav zinamas.

Taisot bez nepieciešamiem vēl liekus novērojumus ar tādu aprēķinu, lai starp visiem novērojumiem būtu teoretiski noteikts sakars, iznākušās pretrunas var noderēt par pamatu novērojumu noteiktības pētīšanai. Bet līdz ar to arī rodas iespēja izdarīt novērojumu izlīdzināšanu, t. i. izlabot novērojumus tā, lai tie iznāktu bez pretrunām un pie tam ar lielāku noteiktību, neka pirms izlīdzināšanas.

Sakarā ar to piezīmēsim, ka tomēr izlīdzinātie novērojumi nav uzskatāmi par identiskiem ar novēroto lielumu īstām vērtībām. Tāpēc arī uz novēroto lielumu izlīdzinātām vērtībām attiecinātās novērojumu šķietamās kļūdas nav sajaucamas ar novērojumu īstām kļūdām.

Kā īstās, tā arī šķietamās novērojumu kļūdas skaita pozitivas vai negativas atkarībā no tā, vai novērojuma rezultats ir lielāks vai mazāks par novērotā lieluma īsto, resp. izlīdzināšanas ceļā atrasto vērtību.

I. Novērojumu nejaušo kļūdu teorija.

§ 1. Novērojumu kļūdu veidi.

Novērojumu kļūdas var būt: rupjas, sistematiskas un nejaušas.

Rupjās kļūdas ir tādas, kuru absolutais lielums ievērojami pārsniedz to robežu, zem kuras jābūt dotos apstākļos sagaidamām kārtīgi izdarītu novērojumu kļūdām. Tādu kļūdu avots parasti meklējams novērotāja neuzmanībā. Piem., nolasot limbu un nepiegriežot vajadzīgo uzmanību veseliem gradiem vai pat gradu desmitiem, var gadīties rupja kļūda šinīs lielās vienībās. Ar novērotāja neuzmanību bieži izskaidrojamas arī tādas rupjas kļūdas, kas rodas no lietotā aparata nepareizas regulēšanas. Piem., ja latas izvelkamā daļa nāv pareizi nostādīta, vai limbs, kuram jābūt nekustīgam, nav labi pieslēgts, novērojumi var iznākt ar atbilstošām rupjām kļūdām.

Kontrolējot ar liekiem novērojumiem, rupjas kļūdas parasti izpaužas uzkrītoši lielās pretrunās, tā tad viegli konstatējamas. Tādā gadijumā rupju kļūdu ziņā aizdomīgā novērojumu grupa, saprotams, jāpārtaisa. Tā tad var pieņemt, ka tādu kontroli izturējušie novērojumi brīvi no rupjām kļūdām.

Sistematiskās kļūdas ir tādas, kas pēc pazīstamiem likumiem atkarājas no svarā krītošiem novērošanas apstākļiem — šo kļūdu avotiem. Tā tad novērojumam atkārtojoties vienādos apstākļos, novērojuma sistematiskā kļūda iznāk vienmēr vienāda, kā pēc zīmes, tā arī pēc absolutās vērtības. Svarā krītošiem apstākļiem mainoties, novērojumu sistematiskās kļūdas arī mainās, bet noteiktā funkcionalā atkarībā no šiem apstākļiem.

Sistematisko kļūdu avoti var būt ārējie apstākļi, piem., temperatura, kas pēc fizikā izpētītā likuma izsauc novērošanas instrumentā zinamas deformacijas, kuras savukārt, arī pēc zinama likuma, izpaužas atbilstošās novērojumu kļūdās. Bieži sistematiskas novērojumu kļūdas arī rodas no t. s. instrumentālām kļūdām, t. i. no lietotā instrumenta nepareizas konstrukcijas, regulēšanas vai nostādīšanas. Tādas ir, piem., teodolita instrumentālās kļūdas attiecībā uz alidādes ekscentrību, vizuras un gāšanas asu nepareizo stāvokli, griešanas ass novirzi no vertikalās linijas. Atbilstošās novērojumu kļūdas ir funkcijas no minētām instrumentalām kļūdām un no svarā krītošiem novērošanas apstākļiem: alidādes orientējuma, resp. vizuras slīpuma, resp. šo abu apstākļu kombinācijas. Pie sistematiskām pieder arī t. s. *personīgās kļūdas*, kas pamatotas zinamās novērotāja personīgās īpatnībās. Tādas kļūdas gadās, piem., vērtējot rādītāja stāvokli nolasamas skalas intervalā, binokularā redzē nosakot stereoskopiskas parallakses, u. t. t.

Zinot svarā krītošos novērošanas apstākļus un funkcionalo sakarību starp tiem un novērojumu sistematiskām kļūdām, šīs kļūdas nosakamas un likvidējamas ar atbilstošiem labojumiem. Bieži arī iespējams *kompensēt* sistematiskās kļūdas, izdarot novērojumus tādā kārtībā, ka rezultatā sistematiskās kļūdas izkrīt. Tas zīmējas sevišķi uz tādām sistematiskām kļūdām, kas radušās no instrumentalu kļūdu ietekmes. Piem., nolasot limbu ar diviem nonijiem un veidojot abu nolasijumu aritmetisko vidējo, izkrīt alidades ekscentrības ietekme; ar planimetru apvedot figuru divreiz, simmetriski pretējos pola stāvokļos, nolasijumu starpību aritmetiskā vidējā izrādas kompensēta sistematiskā kļūda no velteņa ass un apvedamās sviras neparallelā stāvokļa ietekmes, u. t. t.

Nejaušās kļūdas ir tādas, kuru funkcionalā atkarība no novērošanas apstākļiem nav noteikti pazīstama. Tā tad, novērojumam atkārtojoties šķietami vienādos apstākļos, tādas kļūdas iznāk vispārīgi dažādas, kā pēc absolutās vērtības, tā arī pēc zīmes.

Nejaušo kļūdu avoti ļoti daudzi un dažādi. Tie var būt: *ārējie apstākļi* (piem., gaisa undulacijas, kas padara nemierīgu redzēto priekšmeta ainu), novērošanai lietotā *instrumenta techniskas nepilnības* (piem., tālskaša tīkliņa liniju resnums), novērotāja *sajūtas organu aprobežotais jūtīgums* (piem., nespēja izšķirt zem zinamas robežas paliekošus attālumus).

Bez šaubām, arī nejaušās kļūdas, tāpat kā sistematiskās, kādā nebūt noteiktā veidā atkarājas no apstākļiem, kas iedarbojas kā šo kļūdu avoti; tā tad nejaušās kļūdas pēc būtības arī ir sistematiskas. Bet šim atzinumam ir gan tikai teoretiska nozīme. Praktiski sakars starp novērojuma kļūdu un to izsaucošiem apstākļiem, saprotams, nav izmantojams, ja šis sakars nav pazīstams, vai novērošanas apstākļi nav nosakami tādam nolūkam vajadzīgos sīkumos. Nav izslēgts, ka zinatnei un technikai progresējot, izdosies pazīt un nosacīt kā sistematiskas dažas tādas novērojumu kļūdas, kuras tagad uzskata par nejaušām. Tomēr jādomā, ka tas nebūs panākams visos gadijumos, un ka tāpēc vienmēr būs jārēķinas ne tikai ar rupjām un sistematiskām, bet arī ar augšā minētā ziņā nejaušām novērojumu kļūdām.

Ievērojot teikto saprotams, ka nejaušās kļūdas nav nosakamas tā, kā tas iespējams attiecībā uz sistematiskām kļūdām. Vispārīgi nejaušās kļūdas noteikti nosakamas — pēc zīmes un absolutās vērtības — tikai tanīs ļoti retos un praktiski maz svarā krītošos gadijumos, kad zinamas novēroto lielumu īstās vērtības. Visos pārējos gadijumos nejaušo kļūdu zīmes paliek pilnīgi nezinamas. Kas zīmējas uz absolutām vērtībām, tad tās zinamā tuvinājumā nosakamas gan pēc turpmāk apskatītiem paņēmieniem.

Kā nejaušo kļūdu atsevišķu grupu pieminēsim vēl t. s. **vienpusīgās kļūdas**, kas no parastām nejaušām kļūdām atšķiras ar to, ka ir vienmēr ar vienu un to pašu zīmi. Piem., mērsloksnei izliecoties vai novirzoties no mērītās linijas, rodas tādas, vispārīgi nejauša rakstura, bet vienmēr pozitivas kļūdas. Zinamā mērā atgādinot sistematiskās kļūdas, vienpusīgās kļūdas tomēr nav nosakamas vai kompensējamas kā tās. No otras puses, saprotams, ar viņām arī nevar apieties kā ar parastām nejaušām kļūdām. Vispārīgi vienpusīgās kļūdas grūti padodas teoretiskām kalkulacijām. Tāpēc tādos novērojumos, kur zinamu apstākļu dēļ sagaidamas neizbēgamas vienpusīgas kļūdas, rūpīgi jāgādā, lai tās būtu pēc iespējas mazākas.

Par nejaušām kļūdām vispārīgi jāsaka, ka tās jāatzīst par novērojumos **neizbēgamām**. Bet lietderīgi izvēloties novērošanas apstākļus, lietojot precizus instrumentus un ar mākslīgiem līdzekļiem piepalīdzot novērotāja sajūtas organiem, var gan panākt neizbēgamo nejaušo kļūdu vairāk vai mazāk ievērojamu samazināšanu.

Novērojumu noteiktība izpaužas šo novērojumu kļūdās, — cik tās nav kompensētas vai noteikti nosacītas un likvidētas ar atbilstošiem izlabojumiem. Kā jau minēts, rupjas kļūdas nav neizbēgamas; tāpēc var pieņemt, ka uzmanīgi taisītiem un lietderīgi pārbaudītiem novērojumiem tādu kļūdu nav. Kas zīmējas uz sistematiskām kļūdām, tad rūpīgi izpētot un ievērojot visus svarā krītošos kļūdu avotus, šīs kļūdas likvidējamas vai nu kompensacijas ceļā, vai nosakot un ievedot atbilstošus izlabojumus. Ja tas nav iespējams, tad lietderīgi izvēloties novērošanas apstākļus un techniskos līdzekļus, parasti var panākt, ka palikušās nelikvidētas sistematiskās kļūdas ir ļoti mazas. Tas pats sakams arī par vienpusīgām kļūdām.

Tā tad var pieņemt, ka galīgā veidā novērojumi brīvi no rupjām un — vairāk vai mazāk pilnīgā mērā — arī no sistematiskām un-vienpusīgām kļūdām. Bet vispārīgi novērojumiem piemīt gan nejaušas kļūdas, un bieži tās galvenā kārtā nosaka novērojumu noteiktību. Lai atrastu šo nejaušo kļūdu samazināšanai — un līdz ar to novērojumu noteiktības uzlabošanai — derīgus metodiskus līdzekļus, jāzin šo kļūdu īpašības un likumi, — ar vārdu sakot: nejaušo kļūdu teorija. Uz šīs kļūdu teorijas arī pamatota novērojumu izlīdzināšana, ar kuru, kā jau minēts, panākama, starp citu, zinama novērojumu noteiktības uzlabošana.

§ 2. Daži varbūtības teorijas pamatjēdzieni.

Novērojumu nejaušās kļūdas pieder pie t. s. nejaušiem notikumiem. Tā sauc tādus notikumus, kas zināmos apstākļos var iestāties, pie kam tomēr nav nosakams, kuros gadijumos, tādiem apstākļiem realizējoties, notikums faktiski iestāsies. Tā tad nejauša notikuma iestāšanās zinamā gadijumā a priori nosakama nevis noteikti, bet tikai ar zinamu varbūtību.

Ar nejaušiem notikumiem un to iestāšanās varbūtību nodarbojas pie matemātiskām zinātnēm piederošā varbūtības teorija, kurā ar zinamiem jēdzieniem un likumiem izstrādāti vispārējie pamati, starp citu, šeit apskatamai novērojumu nejaušo kļūdu teorijai.

Runājot par nejauša notikuma varbūtību, vispirms jānoskaidro, ko saprot zem šī teikuma.

Vispārīgi „varbūtību" var definēt kā mēru iespējamībai, ar kuru sagaidama nejauša notikuma iestāšanās; viņu izsaka ar nenosauktu daļskaitli, kurš var būt starp robežām 0 un 1, tomēr nesasniedzot šīs robežas, jo tās uzskatamas par simboliem noteiktai drošībai, ka notikums neiestāsies (0), resp. iestāsies (1). Bet kad ir tāda drošība, tad vairs nevar būt runa par varbūtību.

T. s. matemātiskās varbūtības atsevišķais gadijums ir tad, kad iespējams a priori noteikti nosacīt, cik — N — ir pavisam kopā tādu atsevišķu gadijumu, kad svarā krītošais nejaušais notikums var iestāties, un cik — n — no tiem ir „labvēlīgi" tanī ziņā, ka notikums faktiski iestājas. Tad notikuma, resp. tā iestāšanās matemātiskā varbūtība w nosakama pēc formulas

$$w = \frac{n}{N} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Piemērs. Aizsegtā traukā atrodas 10 bumbas, kas atšķiras tikai ar savu krāsu; no tām 3 ir baltas, pārējās — citu krāsu. Jānosaka matematiskā varbūtība, ar kuru sagaidams, ka uz labu laimi izņemot no trauka vienu bumbu, tā gadisies balta.

Minētos apstākļos nejaušais notikums, ka iznāks balta bumba, var iestāties tikpat daudzos dažādos atsevišķos gadijumos, cik traukā ir pavisam kopā bumbu; tā tad $N = 10$. No tiem baltas bumbas iznākšanai labvēlīgo gadijumu ir tikpat daudz, cik traukā ir balto bumbu; tā tad $n = 3$. Tāpēc minētā nejaušā notikuma matematiskā varbūtība ir

$$w = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Turpmāk apskatot dažus uz nejaušo notikumu varbūtību attiecīgus vispārīgus likumus un teoremas, attiecināsim šos atrisinājumus tieši uz matematisko varbūtību. Bet piezīmēsim, ka šie likumi un teoremas ir spēkā arī vārda plašākā nozīmē saprastai varbūtībai.

Atkārtojumu skaitlis un lielo skaitļu likums.

Atkārtojumu skaitlis H izsaka, cik reizes sagaidama nejauša notikuma iestāšanās, ja šīs iestāšanās varbūtība ir w, un (N) gadijumos realizējas tādi apstākļi, kuros svarā krītošais notikums var iestāties. Tuvināti pieņemot, ka (N) atbilst N, un H — n, uz formulas (1) pamata iznāk

$$H = (N)\,w \qquad (2).$$

Rakstot šo formulu veidā

$$w = \frac{H}{(N)} \qquad (3),$$

atrodam t. s. lielo skaitļu likumu, pēc kura nejauša notikuma matematiskā varbūtība aptuveni nosakama empiriskā ceļā. Tādam nolūkam objektivi reģistrē pēc iespējas lielākā skaitā — (N) — tādus gadijumus, kur svarā krītošais notikums var iestāties, un saskaita, cik no tiem — H — izrādījušies par labvēlīgiem notikuma faktiskai iestāšanai. Saprotams, ka tādā veidā nosakot nejauša notikuma matematisko varbūtību, sagaidami jo drošāki rezultati, jo lielāks ievēroto gadijumu kopskaits (N).

Piemērs. Nosacīsim uz lielo skaitļu likuma pamata, kāda ir varbūtība, ka uz labu laimi izvēlētā skaitlī ar nejaušu ciparu kārtību pēdējās vietas cipars ir 5.

Tādam nolūkam caurskatot 5-zīmīgo logaritmu tabulā aizrādītās mantisas skaitļiem no 1000 līdz 4499, ievēroto mantisu (gadijumu) kopskaits (N) ir 3500, bet mantisas ar pēdējās vietas ciparu 5 (labvēlīgie gadijumi) atrastas skaitā $H = 373$. Tā tad pēc formulas (3) minētā nejaušā notikuma varbūtība ir

$$w = \frac{373}{3500} = 0{,}107.$$

Piezīmēsim, ka šinī piemērā meklētā varbūtība nosakama arī teoretiski pēc formulas (1), jo tādam nolūkam svarā krītošie argumenti N un n nosakami a priori: tie ir $N = 10$, $n = 1$. Atbilstošā matematiskā varbūtība ir

$$w = \frac{1}{10} = 0{,}100.$$

Teorema par varbūtību sumu.

Lai $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots$ ir vairāki nejauši notikumi, no kuriem katrs var iestāties tanīs pašos N gadijumos. Pie tam lai katrs notikums izslēdz visus pārējos tanī ziņā, ka vienam notikumam iestājoties, reizē ar to pārējie nevar iestāties. Pieņemot, ka minēto atsevišķo notikumu iestāšanai labvēlīgo gadijumu skaits ir $n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots$, attiecīgās „parcialās" varbūtības ir

$$w_1 = \frac{n_1}{N},\ w_2 = \frac{n_2}{N},\ w_3 = \frac{n_3}{N}, \ldots\ldots \qquad (4).$$

Nosacīsim varbūtību $w_{1,2,3,\ldots\ldots}$, ar kuru sagaidāma E_1, vai E_2, vai $E_3, \ldots\ldots$ iestāšanās.

Jebkura tāda notikuma iestāšanai vispārīgi svarā krītošo gadijumu kopskaits ir tas pats jau minētais N, bet labvēlīgo gadijumu skaits tagad ir $(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots)$.

Tā tad meklētā „totalā" varbūtība ir

$$w_{1,2,3,\ldots} = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N} + \ldots\ldots,$$

jeb, ievērojot (4),

$$w_{1,2,3,\ldots\ldots} = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots \qquad (5).$$

Ar to pierādīta šāda teorema: *varbūtība, ka iestāsies jebkurš no vairākiem notikumiem, no kuriem katrs izslēdz visus pārējos, vienāda ar attiecīgo atsevišķo notikumu varbūtību sumu.*

Piemērs. Traukā atrodas 10 dažādu krāsu bumbas; no tām 2 baltas un 5 sarkanas. Jānosaka varbūtība, ar kuru sagaidāms, ka izņemot vienu bumbu, tā gadisies balta vai sarkana.

Varbūtības (parcialās), ka iznāks tikai balta, vai tikai sarkana bumba, ir

$$w_b = \frac{2}{10} = 0{,}2, \text{ resp. } w_s = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

Tā tad varbūtība (totalā), ka iznāks balta vai sarkana bumba, ir $w_{b,s} = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$.

Teorema par varbūtību produktu.

Lai E_1, E_2, E_3, ... ir vairāki savā starpā neatkarīgi nejauši notikumi, kas var iestāties, katrs par sevi, N_1, N_2, N_3, ... gadijumos, no kuriem labvēlīgi attiecīgā notikuma iestāšanai n_1, n_2, n_3, ... gadijumi. Tā tad „vienkāršo" notikumu E_1, E_2, E_3 ..... „vienkāršās" varbūtības ir

$$w_1 = \frac{n_1}{N_1},\; w_2 = \frac{n_2}{N_2},\; w_3 = \frac{n_3}{N_3}, \;\ldots\ldots \qquad (6).$$

Nosacīsim varbūtību $w_{1\cdot2\cdot3\cdots}$, ar kuru sagaidams „saliktais" notikums, ka reizē iestāsies visi vienkāršie notikumi E_1 un E_2, un E_3, ...

Tādam nolūkam jānoskaidro, cik — $N_{1\cdot2\cdot3\cdots}$ — ir tādu gadijumu, kuros var reizē iestāties visi vienkāršie notikumi, un cik liels ir šī saliktā notikuma iestāšanai labvēlīgo gadijumu skaits $n_{1\cdot2\cdot3\cdots}$

Šinī ziņā ievērosim, ka katrs gadijums, kurā var iestāties kāds no atsevišķiem vienkāršiem notikumiem, var kombinēties ar katru gadijumu, kurā var iestāties jebkurš no pārējiem vienkāršiem notikumiem. Tā tad

$$N_{1\cdot2\cdot3\cdots} = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdots \qquad (7);$$

līdzīgā veidā iznāk, ka

$$n_{1\cdot2\cdot3\cdots} = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots \qquad (8).$$

Tā tad meklētā „saliktā" varbūtība ir

$$w_{1\cdot2\cdot3\cdots} = \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots}{N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdots} = \frac{n_1}{N_1} \cdot \frac{n_2}{N_2} \cdot \frac{n_3}{N_3} \cdots,$$

jeb, ievērojot (6),

$$w_{1\cdot2\cdot3\cdots} = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdots \qquad (9).$$

Ar to pierādīta šāda teorema: *no neatkarīgiem vienkāršiem notikumiem veidota salikta notikuma varbūtība vienāda ar atsevišķo vienkāršo notikumu varbūtību produktu.*

Piemērs. Vienā traukā atrodas pavisam kopā 10 dažādu krāsu bumbas, no tām 3 baltas; bet otrā traukā — pavisam kopā 20 bumbas, no tām 8 melnas. Jānosaka varbūtība, ar kuru sagaidams saliktais notikums, ka izņemot no katra trauka pa vienai bumbai, tās iznāks: no pirmā trauka — balta, no otrā trauka — melna.

Varbūtības, ar kurām sagaidami vienkāršie notikumi, ka no pirmā trauka iznāks balta, bet no otrā trauka — melna bumba, ir

$$w_b = \frac{3}{10} = 0{,}3 \text{ un } w_m = \frac{8}{20} = 0{,}4.$$

Tā tad meklētā saliktā varbūtība ir

$$w_{b \cdot m} = 0{,}3 \,.\, 0{,}4 = 0{,}12.$$

§ 3. Empiriskie atzinumi par novērojumu nejaušām kļūdām.

Ja novēroti lielumi, kuru īstās vērtības zinamas, tad attiecībā uz rupjām un sistematiskām kļūdām pārbaudītos un izlabotos novērojumus salīdzinot ar novēroto lielumu īstām vērtībām, var nosacīt atsevišķo novērojumu īstās nejaušās kļūdas. Ja tādi novērojumi izdarīti ļoti lielā skaitā un zīmējas vai nu uz vienu un to pašu lielumu, vai uz dažādiem, bet vienāda veida lielumiem, tad atrastās nejaušās kļūdas var noderēt par materialu, uz kura pamata, pēc lielo skaitļu likuma, nosakams, ar kādu varbūtību dotos apstākļos sagaidama novērojuma nejaušā kļūda ar zinamu zīmi un absoluto vērtību.

Izdarot tādus pētijumus, izrādijies, ka vienādos apstākļos taisītu novērojumu ļoti garā rindā:

1) apmēram vienāda absoluta lieluma kļūdas gadās apmēram vienādi bieži pozitivas un negativas;
2) zinama absoluta lieluma šķiras kļūdas gadās jo biežāk, jo mazāks šis absolutais lielums.

Uz lielo skaitļu likuma pamata šie atzinumi izsakami sekojošo, uz novērojumu nejaušo kļūdu varbūtību attiecīgo empiremu veidā:

1) apmēram vienāda absoluta lieluma pozitivas un negativas kļūdas vienādi varbūtīgas;
2) zinama absoluta lieluma šķiras kļūdu varbūtība jo lielāka, jo mazāka šīs šķiras absolutā vērtība.

Saprotams, ka pētijumi, uz kuriem pamatoti minētie atzinumi, nekādi nevar izsmelt visas iespējamības novērojumu veida un apstākļu ziņā. Tomēr šie pētijumi izdarīti lielā skaitā, pie tam ievērojot daudzus dažādus novērojumu veidus un novērošanas apstākļus. Tāpēc ir zināmas tiesības pieņemt, ka šiem atzinumiem un no tiem atvasinātām empiremām par novērojumu nejaušo kļūdu varbūtību ir vispārēja nozīme.

Pastrīposim, ka minētie empiriskā ceļā atrastie pamatlikumi zīmējas tikai uz nejaušām novērojumu kļūdām: elementarām vai no tām saliktām; bet nevis uz tādām kļūdām, kas satur citāda, piem., sistematiska, rakstura komponentas. Uz šī pamata zinamos gadijumos var pārbaudīt lielākā skaitā dotu novērojumu kļūdu raksturu, saskaitīšanas ceļā nosakot svarā krītošo šķiru kļūdu atkārtojumu skaitļus. Ja šie atkārtojumu skaitļi apmierinoši saskan ar varbūtībām, kuras sagaidamas uz minēto empiremu pamata, tad pārbaudītās kļūdas atzīstamas par nejaušām; pretējā gadijumā kļūdas uzskatamas par aizdomīgām citāda rakstura komponentu ziņā. Saprotams, ka no tādas pārbaudes vairāk vai mazāk droši rezultati sagaidami tikai tad, ja ievēroto kļūdu skaits ļoti liels.

§ 4. Kļūdu likums.

Lai vienādos apstākļos taisīti ļoti daudzi novērojumi, kuriem piemīt vispārīgi dažādas nejaušās kļūdas ε. Ignorējot zīmes, iedomāsimies šīs kļūdas sakārtotas pēc augošām vai dilstošām absolutām vērtībām ļoti šauros, vienādi lielos un nepārtrauktu rindu veidojošos intervalos $\Delta\varepsilon$. Visas viena un tā paša intervala kļūdas tad var uzskatīt par kļūdām ar apmēram vienādu absolutu vērtību, pieņemot par to attiecīgā intervala robežvērtību aritmetisko vidējo. Tā tad, apzīmējot kāda i-ta intervala vidējo absoluto vērtību ar ε_i, šis intervals aptver kļūdas, kuru absolutās vērtības ir starp robežām $(\varepsilon_i - \frac{1}{2}\Delta\varepsilon)$ un $(\varepsilon_i + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon)$.

Ievērojot iepriekšējā paragrafā minēto otro empiremu par nejaušo kļūdu varbūtību, un bez tam teoremu par varbūtību sumu, nākam pie slēdziena, ka zināma intervala kļūdas varbūtība ir šī intervala vidējās absolutās vērtības funkcija, un pie tam — jo lielāka, jo lielāks atsevišķo kļūdu skaits intervalā. Kas zīmējas uz kļūdu skaitu atsevišķos intervalos, tad var pieņemt, ka tas — intervaliem esot ļoti maziem — proporcionals intervala amplitudai $\Delta\varepsilon$. Tā tad zinama intervala kļūdas ε varbūtība vispārīgi izsakama veidā

$$w(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\,\Delta\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

kur $\varphi(\varepsilon)$ apzīmē intervala vidējai absolutai vērtībai atbilstošo varbūtības funkciju. Sakarā ar to piezīmēsim, ka zinama intervala kļūdas ε varbūtības funkcija $\varphi(\varepsilon)$, saprotams, atkarājas ne tikai no ε absolutās vērtības, bet arī no attiecīgo novērojumu noteiktības. Tā tad minētā varbūtības funkcijā jāieiet kādam parametram, kurš raksturo svarā krītošo novērojumu noteiktību.

Pārejot uz bezgalīgi šauriem intervaliem, atvietosim $\Delta\varepsilon$ ar atbilstošo diferencialu $d\varepsilon$; tā tad formulu (10) rakstīsim veidā

$$w(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots (11).$$

Uz šīs formulas pamata var nosacīt varbūtību kļūdai, kuras absolutā vērtība ir starp robežām a un b. Tāda kļūda var būt jebkurā no tiem intervaliem, kas atrodas starp minētām robežām. Tā tad, ievērojot teoremu par varbūtību sumu, meklētā varbūtība $w_a^b(\varepsilon)$ iznāk sumējoties šiem atsevišķiem intervaliem atbilstošām varbūtībām $w(\varepsilon)$, t. i.

$$w_a^b(\varepsilon) = \int_a^b \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots (12).$$

Kas zīmējas uz varbūtības funkcijas $\varphi(\varepsilon)$ veida noteikšanu, tad atrisinot šo uzdevumu nevar iztikt bez zinamiem hipotetiskiem pieņēmumiem. Piem., daži autori iziet no hipotezas, kas zīmējas uz novērojuma nejaušās kļūdas sastādīšanos no elementarām kļūdām. Nepakavējoties pie tādiem atrisinājumiem, apskatīsim vispārējos vilcienos slavenā matematiķa C. F. Gauss'a aizrādīto atrisinājumu, kurš pamatots uz hipotezas par aritmetisko vidējo.

Šī hipoteza izsaka, ka atkārtoti ar vienādu noteiktību novērota nezinama lieluma visvarbūtīgākā vērtība ir visu atsevišķo novērojumu aritmetiskais vidējais. Var parādīt, ka šī hipoteza labi saskan ar agrāk minētām empiremām par nejaušo kļūdu varbūtību.

Lai ar vienādu noteiktību taisītie novērojumi $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ zīmējas uz vienu un to pašu lielumu ar nezinamo īsto vērtību X. Tad starpības

$$\left.\begin{array}{l} l_1 - X = \varepsilon_1 \\ l_2 - X = \varepsilon_2 \\ l_3 - X = \varepsilon_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ l_n - X = \varepsilon_n \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

ir atsevišķo novērojumu īstās kļūdas, pie kam pieņemsim, ka tās ir tīri nejaušas. Sumējot izteiksmes (13) un izdalot ar novērojumu skaitu n, atrodam

$$\frac{l_1+l_2+l_3+\ldots\ldots+l_n}{n}-X=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots\ldots+\varepsilon_n}{n} \quad (14).$$

Šīs formulas kreisās puses pirmais loceklis — visu atsevišķo novērojumu aritmetiskais vidējais — no novērotā lieluma īstās vērtības X atšķiras par $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots\ldots+\varepsilon_n}{n}$. Bet tas ir lielums, kurš uz iepriekšējā paragrafā minētās pirmās empiremas pamata uzskatams par apmēram vienādu ar nulli. Tāpēc — sevišķi gadijumā, kad n ļoti liels, — ir zinams pamats uzskatīt visu atsevišķo novērojumu aritmetisko vidējo par novērotā lieluma visvarbūtīgāko vērtību.

Lai tagad minētie novērojumi $l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots, l_n$ pēc parauga (13) salīdzināti ar kādu vairāk vai mazāk patvaļīgi pieņemtu novērotā lieluma vērtību x. Tā kā x vispārīgi nav vienāds ar X, starpības, par kurām atsevišķie novērojumi atšķiras no x, vispārīgi arī nav vienādas ar novērojumu īstām kļūdām. Bet šīs starpības jo tuvākas atbilstošām īstām kļūdām, jo mazāk x atšķiras no X. Tas izsakams šādā formulējumā: varbūtība, ka minētās starpības vienādas ar atbilstošām īstām kļūdām, tikpat liela kā varbūtība, ka x vienāds ar X. Pēc hipotezas par aritmetisko vidējo, šī varbūtība vislielāka, ja

$$x=\frac{l_1+l_2+l_3+\ldots\ldots+l_n}{n} \quad \ldots\ldots (15).$$

Salīdzinot atsevišķos novērojumus ar tādu x, atrodam novērojumu šķietamās kļūdas*)

$$\left.\begin{array}{l} l_1-x=v_1 \\ l_2-x=v_2 \\ l_3-x=v_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ l_n-x=v_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (16).$$

Apzīmēsim ar $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_n$ parcialās varbūtības, ka atsevišķās šķietamās kļūdas $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n$ ir vienādas ar atbilstošām īstām kļūdām $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots, \varepsilon_n$. Bet w lai ir varbūtība saliktam notikumam, ka sistemas v visas kļūdas reizē ir vienādas ar sistemas ε atbilstošām kļūdām. Ievērojot teoremu par varbūtību produktu,

$$w=w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot \ldots\ldots \cdot w_n;$$

pie tam, šām varbūtībām zīmējoties uz kļūdām v, kuras attiecinātas

*) Nosaukums „šķietamās kļūdas" lietots saskaņā ar 2. lappusē teikto, jo x ir novērojumu l izlīdzināšanas rezultats.

uz visu novērojumu aritmetisko vidējo (15), saskaņā ar pieņemto hipotezu jābūt

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot \ldots\ldots \cdot w_n = \max. \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Kā jau minēts, uz novērojumu aritmetisko vidējo attiecinātās šķietamās kļūdas v maz atšķiras no atbilstošām īstām kļūdām ε. Tāpēc, atvietojot šķietamās kļūdas ar atbilstošām īstām un ievērojot (11), formulu (17) var rakstīt

$$w = \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon_3)\, d\varepsilon \cdot \ldots\ldots \cdot \varphi(\varepsilon_n)\, d\varepsilon = \max. \quad . \quad (18),$$

jeb, logaritmiskā veidā un atmetot maksimuma iestāšanās ziņā neitralo pastāvīgo faktoru $d\varepsilon$:

$$\log n\, \varphi(\varepsilon_1) + \log n\, \varphi(\varepsilon_2) + \log n\, \varphi(\varepsilon_3) + \ldots$$
$$\ldots + \log n\, \varphi(\varepsilon_n) = \max. \quad \ldots\ldots \quad (19).$$

Šī maksimuma iestāšanās atkarājas no argumenta x izvēles: tā tad jāprasa, lai būtu

$$\frac{d \log n\, \varphi(\varepsilon_1)}{dx} + \frac{d \log n\, \varphi(\varepsilon_2)}{dx} + \frac{d \log n\, \varphi(\varepsilon_3)}{dx} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{d \log n\, \varphi(\varepsilon_n)}{dx} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (20).$$

No (16) seko, ka

$$dx = -dv_1 = -dv_2 = -dv_3 = \ldots\ldots = -dv_n,$$

tā tad atvietojot šķietamās kļūdas v ar atbilstošām īstām ε,

$$dx = -d\varepsilon_1 = -d\varepsilon_2 = -d\varepsilon_3 = \ldots\ldots = -d\varepsilon_n \quad . \quad (21);$$

tāpēc nolīdzinājums (20) rakstams veidā

$$\frac{d \log n\, \varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} + \frac{d \log n\, \varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2} + \frac{d \log n\, \varphi(\varepsilon_3)}{d\varepsilon_3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{d \log n\, \varphi(\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (22).$$

Bez tam, ievērojot pirmo empiremu par novērojumu nejaušām kļūdām, var pieņemt, ka

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots\ldots + \varepsilon_n = 0 \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Tā tad dabūti divi nolīdzinājumi (22) un (23) ar nezinamiem ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n, pie kam šo nezinamo skaits pieņemts ļoti liels, un tāpēc pārsniedz nolīdzinājumu skaitu. Tādos apstākļos abi nolīdzinājumi izrādas izpildīti, ja izpildīti šādi jauni nolīdzinājumi

$$\left.\begin{aligned} \frac{d \log n \varphi(\varepsilon_1)}{d \varepsilon_1} &= k \varepsilon_1 \\ \frac{d \log n \varphi(\varepsilon_2)}{d \varepsilon_2} &= k \varepsilon_2 \\ \frac{d \log n \varphi(\varepsilon_3)}{d \varepsilon_3} &= k \varepsilon_3 \\ \cdots\cdots & \\ \frac{d \log n \varphi(\varepsilon_n)}{d \varepsilon_n} &= k \varepsilon_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24),$$

kur k apzīmē kādu, pagaidām nenoteiktu, konstantu koeficientu. Tā tad, uz nolīdzinājumu (24) pamata, vispārīgi var pieņemt, ka

$$\frac{d \log n \varphi(\varepsilon)}{d \varepsilon} = k \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

Intregrējot, atrodam

$$\log n \varphi(\varepsilon) = {}^1/_2 k \varepsilon^2 + C,$$

jeb

$$\varphi(\varepsilon) = e^{({}^1/_2 k \varepsilon^2 + C)} = e^C \cdot e^{{}^1/_2 k \varepsilon^2} \quad \ldots\ldots \quad (26),$$

kur e apzīmē naturalo logaritmu pamatskaitli.

Kā zinams, nejaušās kļūdas ε absolutai vērtībai pieaugot, ar funkciju $\varphi(\varepsilon)$ noteiktā kļūdas varbūtība samazinājas. Tāpēc konstantai k jābūt visādā ziņā negativai. Ievērojot to, pieņemsim ${}^1/_2 k = -h^2$. Tā tad, vienkāršības dēļ apzīmējot integrēšanas konstantu e^C ar A, formula (26) rakstama šādā veidā

$$\varphi(\varepsilon) = A e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27).$$

Kas zīmējas uz A, tad jāievēro, ka novērojuma nejaušās kļūdas iznākšana starp robežām $-\infty$ un $+\infty$ ir ar absolutu drošību sagaidams notikums.

Tas izsakams ar formulu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1,$$

jeb, ievērojot (27),

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28).$$

Bet no integralrēķina zinams, ka pieņemot $h\varepsilon = t$ un sakarā ar to $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$, formulu (28) var rakstīt veidā

$$\frac{A}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 1 \quad \ldots\ldots \quad (29),$$

pie kam

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Tā tad

$$\frac{A\sqrt{\pi}}{h} = 1,$$

un

$$A = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30).$$

Ieliekot šo izteiksmi formulā (27), atrodam izteiksmi

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31),$$

kuru sauc par Gauss'a kļūdu likumu.

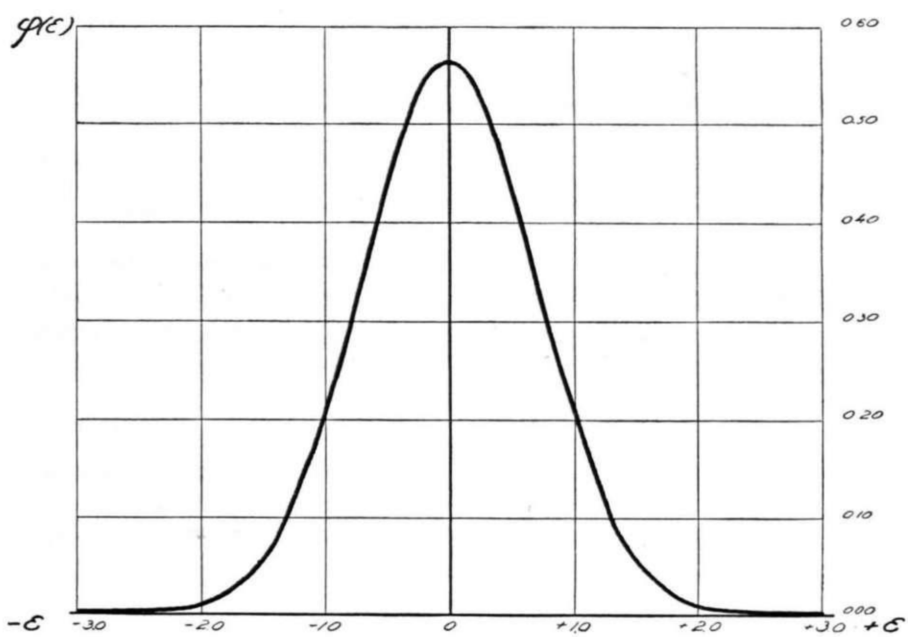
Šinī izteiksmē ieejošais h ir attiecīgo novērojumu noteiktību raksturojošais noteiktības skaitlis; pie viņa vēl būs jāatgriežas sakarā ar jautājumu par novērojumu noteiktības mēriem.

Daži autori, kritizējot Gauss'a kļūdu likumu, cēluši iebildumus pret zinamiem pieņēmumiem, uz kuriem šis likums pamatots. No otras puses bijuši arī dažādi mēģinājumi nostādīt šo likumu uz drošākiem teoretiskiem pamatiem, piem., izejot no funkciju teorijas, vai atvietojot aritmetiskā vidējā hipotezu ar vienkāršākiem pieņēmumiem. Bet visādā ziņā Gauss'a kļūdu likuma praktisko derīgumu pierāda tas fakts, ka uz šī likuma pamatotā „vismazāko kvadratu metode" novērojumu nejaušo kļūdu izlīdzināšanai tiek plaši pielietota praksē jau ļoti ilgu laiku un vienmēr devusi pilnīgi apmierinošus un ticamus rezultatus.

Izteiksmē (31) ieejošie π un e ir pazīstami pastāvīgi skaitļi ($\pi = 3{,}14159$, $e = 2{,}71828$). Tā tad zinot svarā krītošo novērojumu noteiktību raksturojošo parametru h, katrai kļūdai ε var aprēķināt pēc formulas (31) atbilstošās varbūtības funkcijas $\varphi(\varepsilon)$ skaitlisko vērtību. Piem., pieņemot $h = 1$, atrodam sekojošā tabulā atzīmētos skaitļus:

ε	φ (ε)	ε	φ (ε)
0,0	0,56419	1,0	0,20755
0,2	0,54207	1,2	0,13367
0,4	0,48077	1,4	0,07947
0,6	0,39362	1,6	0,04361
0,8	0,29749	1,8	0,02210
1,0	0,20755	2,0	0,01033
		3,0	0,00007
		∞	0

Atliekot ε kā abscisas, un atbilstošās φ (ε) kā ordinatas, var konstruēt Gauss'a kļūdu likumu grafiski attēlojošo līkni. 1. attēls rāda tādu līkni, kura konstruēta saskaņā ar augšā iespiestās tabulas skaitļiem, tā tad pieņemot h = 1.



1. attēls.

§ 5. Novērojumu noteiktības mēri.

Lai varētu spriest par novērojumu noteiktību, — cik tā atkarajas no novērojumiem piemītošām nejaušām kļūdām, — jāvienojas par kādu lietderīgi izvēlētu un matemātiski noteikti formulējamu šīs n o t e i k t ī b a s m ē r u.

Kā jau minēts, atkārtoti novērojot lielumu vienādos apstākļos, tā tad ar vienādu noteiktību, atsevišķo novērojumu nejaušās kļūdas tomēr ir vispārīgi dažādas. Tāpēc skaidrs, ka atsevišķa novērojuma nejaušā kļūda pati par sevi nevar noderēt par novērojuma noteiktības mēru, jo tādā atsevišķā kļūdā nejaušības ietekme padara pārāk neskaidru noteiktības ainu. Šinī ziņā skaidrāka noteiktības aina rodas, ja apskata v i s u m ā daudzu ar vienādu noteiktību taisītu novērojumu kļūdas, resp. šo kļūdu absolutās vērtības. Piem., par tādu novērojumu noteiktības mēru var noderēt visu atsevišķo novērojumu kļūdu absoluto vērtību vienādu kāpju aritmetiskā vidējā atbilstošās kāpes sakne.

Lai ar vienādu noteiktību taisītu n novērojumu īstās nejaušās kļūdas ε sakārtotas pēc augošām vai dilstošām absolutām vērtībām $/\varepsilon/$ un iedalītas intervalos ar bezgalīgi šauro konstanto amplitudu $d\varepsilon$. Tad, kā paskaidrots iepriekšējā paragrafā, zinama intervala kļūdas ε varbūtība ir

$$w(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Tai atbilst šīs kļūdas atkārtošanas skaitlis

$$H(\varepsilon) = n\, w(\varepsilon) = n\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (32),$$

kurš savukārt nosaka atsevišķo kļūdu skaitu apskatītā intervalā.

Tā kā intervali $d\varepsilon$ bezgalīgi šauri, var pieņemt, ka visām viena un tā paša intervala kļūdām ir vienāds, intervala vidējai absolutai vērtībai atbilstošs, absolutais lielums $/\varepsilon/$. Tā tad apskatītā intervala atsevišķo kļūdu i-to kāpju absoluto vērtību suma ir

$$\Sigma /\varepsilon^i/ = H(\varepsilon)\, /\varepsilon^i/ = n\, /\varepsilon^i/\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \ldots \quad (33);$$

bet visu intervalu kļūdu i-to kāpju absolutām vērtībām ir kopsuma

$$S\, /\varepsilon^i/ = n \int_{-\infty}^{+\infty} /\varepsilon^i/\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (34),$$

un aritmetiskais vidējais

$$\frac{S\, /\varepsilon^i/}{n} = \int_{-\infty}^{+\infty} /\varepsilon^i/\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

Ar šo formulu noteikta atsevišķo kļūdu i-to kāpju vidējā vērtība, kuras i-tā sakne var noderēt par meklēto noteiktības mēru. Šo lielumu

$$\sqrt[i]{\int_{-\infty}^{+\infty} /\varepsilon^i/ \; \varphi\,(\varepsilon)\; d\varepsilon}$$

sauc par attiecīgo novērojumu **vidējo kļūdu**. Tā pēc būtības ir zināma vidēja vērtība, ap kuru — ar varbūtības funkciju $\varphi\,(\varepsilon)$ noteiktā likumībā — svārstas atsevišķo novērojumu kļūdu ε absolutās vērtības $/\varepsilon/$, ja novērojumi notikuši ar vidējai kļūdai atbilstošo noteiktību. Pie tam atsevišķo novērojumu kļūdas var būt tikpat labi pozitivas, kā negativas. Sakarā ar to pati vidējā kļūda skaitama par lielumu ar nenoteiktu zīmi $\pm$.

Vidējās kļūdas izteiksmē ieejošā varbūtības funkcija $\varphi\,(\varepsilon)$ pieņemama, piem., Gauss'a kļūdu likuma veidā. Kas zīmējas uz eksponentu i, tad par to vispārīgi var pieņemt jebkādu skaitli, izņemot nulli. Parasti pieņem $i = 1$, vai $i = 2$. Pirmā gadijumā atrodam **vienkāršo vidējo kļūdu**

$$\vartheta = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} /\varepsilon/ \; \varphi\,(\varepsilon)\; d\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (36),$$

otrā — **kvadratisko vidējo kļūdu**

$$\mu = \pm \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \, \varphi\,(\varepsilon)\; d\varepsilon} \quad \ldots\ldots \quad (37).$$

Attiecībā uz šiem diviem vidējās kļūdas veidiem piezīmēsim sekojošo. Praksē parasti gadās tādi novērojumi, kas zīmējas uz lielumiem ar nezināmām īstām vērtībām. Tādā gadijumā novērojumu īstās kļūdas ε nav nosakamas, bet bieži nosakamas gan novērojumu izlīdzinātās vērtības un uz tām attiecinātās novērojumu šķietamās kļūdas. Kā savā vietā tiks parādīts, kvadratisko vidējo kļūdu var tieši nosacīt arī izejot no novērojumu šķietamām kļūdām; bet attiecībā uz vienkāršo vidējo kļūdu šinī ziņā ir zināmas grūtības. Bez tam tikai kvadratiskās vidējās kļūdas lietošana novērojumu noteiktības raksturošanai izrādas tieši saskaņota ar novērojumu izlīdzināšanu pēc vismazāko kvadratu metodes. Aiz šeit minētiem un vēl dažiem citiem iemesliem, raksturojot novērojumu noteiktību ar vidējo kļūdu, to parasti nosaka kvadratiskās vidējās kļūdas veidā. Sakarā ar to teikuma „kvadratiskā vidējā kļūda" vietā parasti lieto vienkāršāko nosaukumu „vidējā kļūda".

Kā noteiktības mēru minēsim vēl **varbūtējo kļūdu** ρ, definējot to kā robežu, virs un zem kuras dotā kļūdu rindā ir vienādā skaitā atsevišķas kļūdas ε ar lielākām resp. mazākām absolutām vērtībām. Tāpat kā vidējās kļūdas, arī varbūtējā kļūda skaitama par lielumu ar nenoteiktu zīmi $\pm$.

Iedomāsimies svarā krītošās kļūdas iedalītas divās grupās. Pirmā grupa lai aptver kļūdas starp robežām $-\rho$ un $+\rho$; šo kļūdu absolutās vērtības visas mazākas par ρ. Pie otrās grupas tad pieder kļūdas starp robežām $-\infty$ un $-\rho$, $+\rho$ un $+\infty$; šo kļūdu absolutās vērtības visas lielākas par ρ. Ja ρ ir augšā definētā varbūtējā kļūda, tad atsevišķo kļūdu skaits abās grupās vienāds. Tas nozīmē, ka pirmās un otrās grupas kļūdām ir vienādi atkārtojumu skaitļi, tā tad arī vienādas varbūtības $w_1 = w_2 = w$. Ievērojot, ka no varbūtības viedokļa pirmās un otrās grupas kļūdas uzskatamas par viens otro izslēdzošiem nejaušiem notikumiem, no teoremas par varbūtību sumu seko, ka pirmās vai otrās grupas kļūdas varbūtība ir

$$w_{1,2} = w_1 + w_2 = 2\,w.$$

No otras puses ievērojot, ka abu grupu kļūdām kopā ir robežas $-\infty$ un $+\infty$, ir zinams, ka

$$w_{1,2} = w_{-\infty}^{+\infty}(\varepsilon) = 1$$

Tā tad

$$w = w_{-\rho}^{+\rho}(\varepsilon) = \frac{1}{2}$$

Ievērojot (12), pēdējā izteiksme rakstama veidā

$$\int_{-\rho}^{+\rho} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \text{. . . . . (38),}$$

un ar to rādīts ceļš varbūtējās kļūdas matematiskai noteikšanai.

§ 6. Dažādu noteiktības mēru teoretiskās attiecības.

Ievērojot pirmo empiremu par novērojumu nejaušām kļūdām, formulas (36), (37), (38) var atvietot ar šādām

$$\vartheta = 2\int_0^{\infty} \varepsilon\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \text{. . . . . . . (39),}$$

$$\mu^2 = 2 \int_0^\infty \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40),$$

$$\int_0^\rho \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

Pieņemot varbūtības funkciju $\varphi(\varepsilon)$ Gauss'a kļūdu likuma veidā, pirmās divas formulas pāriet šādās:

$$\vartheta = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

un

$$\mu^2 = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon^2\, e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{1}{2\,h^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43),$$

jeb

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\,h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Formulā (43) ņemts vērā, ka izejot no pazīstamās formulas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi},$$

parciali integrējot un uzskatot t par pirmo faktoru, iznāk

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

Kas zīmējas uz (41), tad pieņemot $\varphi(\varepsilon)$ pēc Gauss'a kļūdu likuma, šī formula pāriet veidā

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\rho e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{1}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Pieņemot $h\varepsilon = t$ un, sakarā ar to, $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$, formulu (46) atvietojam ar

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\rho} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{4},$$

jeb

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\rho} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

No šī nolīdzinājuma atrodam

$$h\rho = 0{,}47694 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48),$$

jeb

$$\rho = \frac{0{,}47694}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49).$$

Kā rāda formulas (42), (44), (49), visi minētie noteiktības mēri ir Gauss'a kļūdu likumā ieejošā noteiktības skaitļa h funkcijas. Tā tad, kādā nebūt ceļā atraduši ϑ vai μ vai ρ, ar atbilstošās formulas (42) vai (44) vai (49) palīdzību varam nosacīt arī noteiktības skaitli h.

Salīdzinot formulas (42), (44), (49), redzam, ka noteiktības mēri ϑ, μ, ρ ir teoretiskās attiecībās

$$\vartheta : \mu : \rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \frac{1}{\sqrt{2}} : 0{,}47694$$

kuras labā tuvinājumā izsakamas šādā veidā:

$$\mu = \frac{5}{4}\vartheta = \frac{3}{2}\rho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50).$$

§ 7. Noteiktības mēru nosacīšana no galīgā skaitā dotām īstām kļūdām.

Definējot noteiktības mērus ϑ, μ, ρ un aizrādot attiecīgās formulas, līdz šim pieņēmām, ka svarā krītošo atsevišķo kļūdu ε skaits n bezgalīgi liels.

Galīga lieluma n gadijumā, ievērojot formulas (35) kreiso pusi, vidējo kļūdu ϑ un μ tuvinās vērtības t un m nosakamas pēc formulām

$$t = \pm \frac{/\varepsilon_1/ + /\varepsilon_2/ + /\varepsilon_3/ + \ldots\ldots + /\varepsilon_n/}{n} = \pm \frac{[/\varepsilon/]}{n} \quad . \; . \quad (51)$$

un

$$m^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots\ldots + \varepsilon^2_n}{n} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} \quad . \; . \; . \quad (52)$$

jeb

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53),$$

pie kam šinīs formulās zīme [ ] lietota kā vienāda veida elementu sumas simbols. Šo sumas simbolu plaši lietosim arī turpmākos iztirzājumos.

Lai nosacītu varbūtējās kļūdas ρ tuvino vērtību r, svarā krītošās atsevišķās kļūdas, neievērojot zīmes, sakārto pēc augošām vai dilstošām absolutām vērtībām. Tā dabūtās kļūdu rindas vidū esošo kļūdu (nepārskaitļa n gadijumā), vai šīs rindas vidū esošo divu kļūdu aritmetisko vidējo (pārskaitļa n gadijumā) pieņem par minēto r.

Atzīstot no bezgalīgi daudzām kļūdām ε atrastos ϑ, μ, ρ par teoretiski pareizi nosacītiem kļūdu mēriem, atbilstošie t, m, r uzskatami par šo noteiktības mēru tuvinām vērtībām, kurām pašām piemīt zinamas vidējas kļūdas μ_t, μ_m, μ_r.

Lai rastu vispārējos teoretiskos pamatus μ_t un μ_m noteikšanai, pieņemsim, ka ar vienādu noteiktību taisīti n novērojumi ar īstām nejaušām kļūdām $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Veidojot šo kļūdu i-to kāpju absoluto vērtību aritmetisko vidējo $\frac{S/\varepsilon^i/}{n}$, apzīmēsim to ar σ_i vai ar s_i, skatoties pēc tā, vai atsevišķo kļūdu ε skaits n ir bezgalīgi vai galīgi liels.

Tad σ_i nosakams pēc formulas (35), bet s_i ir

$$s_i = \frac{/\varepsilon_1^i/ + /\varepsilon_2^i/ + \ldots\ldots + /\varepsilon_n^i/}{n} = \frac{[/\varepsilon^i/]}{n} \quad . \; . \; . \quad (54).$$

Minētos novērojumus iedomāsimies atkārtotus bezgalīgi daudzas reizes. Atbilstošās nejaušo kļūdu sistemas un šo kļūdu i-to kāpju absoluto vērtību vidējos apzīmēsim ar $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)'$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)''$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)'''$, ..., resp. s_i', s_i'', s_i''', .. Katrai kļūdu sistemai iedomāsimies sastādītu nolīdzinājumu pēc parauga

$$(s_i - \sigma_i)^2 = \left(\frac{/\varepsilon_1^i/ + /\varepsilon_2^i/ + \ldots\ldots + /\varepsilon_n^i/}{n} - \sigma_i\right)^2 =$$

$$= \frac{\varepsilon_1^{2i} + \varepsilon_2^{2i} + \ldots\ldots + \varepsilon_n^{2i}}{n^2} +$$

$$+ 2\,\frac{/\varepsilon_1^i\varepsilon_2^i/ + /\varepsilon_1^i\varepsilon_3^i/ + \ldots\ldots + /\varepsilon_2^i\varepsilon_3^i/ + \ldots\ldots + /\varepsilon^i_{n-1}\varepsilon^i_n/}{n^2} -$$

$$- 2\sigma_i\,\frac{/\varepsilon_1^i/ + /\varepsilon_2^i/ + \ldots\ldots + /\varepsilon_n^i/}{n} + \sigma_i^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (55),$$

un veidosim no atbilstošiem locekļiem šo nolīdzinājumu aritmetiskos vidējos. Pie tam ievērosim, ka, zīmējoties uz bezgalīgi daudziem vienādas noteiktības novērojumiem, vidējais σ_i visos atsevišķos nolīdzinājumos paliek viens un tas pats.

Atsevišķo nolīdzinājumu kreiso pušu

$$\left.\begin{array}{l}(s'_i - \sigma_i)^2,\\ (s''_i - \sigma_i)^2,\\ (s'''_i - \sigma_i)^2,\\ \dots\dots\dots\end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (56)$$

vidējais izsaka jebkura atsevišķa s_i noteikšanas vidējās kļūdas kvadratu $\mu^2_{s_i}$.

Apskatīsim tagad pa atsevišķiem locekļiem nolīdzinājumu (55) labo pušu aritmetiskos vidējos.

Pirmo locekļu vidējo V_1 var izteikt veidā

$$V_1 = \frac{1}{n^2}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \quad \dots \quad (57),$$

kur $A_1, A_2, \dots, A_n$ apzīmē kļūdu funkciju grupu

$$\left.\begin{array}{l}\left\{(\varepsilon_1^{2i})', (\varepsilon_1^{2i})'', (\varepsilon_1^{2i})''', \dots\right\},\\ \left\{(\varepsilon_2^{2i})', (\varepsilon_2^{2i})'', (\varepsilon_2^{2i})''', \dots\right\},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left\{(\varepsilon_n^{2i})', (\varepsilon_n^{2i})'', (\varepsilon_n^{2i})''' \dots\right\}\end{array}\right\} \quad \dots \quad (58)$$

vidējos. Ievērojot, ka visi novērojumi taisīti ar vienādu noteiktību, un vidējie $A_1, A_2, \dots, A_n$ atrasti no bezgalīgi daudzām atsevišķām kļūdām, var pieņemt, ka

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = \sigma_{2i}$$

kur σ_{2i} apzīmē pēc parauga (35) veidoto attiecīgo kļūdu 2i-to kāpju vidējo

$$\sigma_{2i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{2i} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \dots\dots\dots \quad (59).$$

Tā tad atrodam

$$V_1 = \frac{1}{n^2} n\sigma_{2i} = \frac{\sigma_{2i}}{n} \quad \dots\dots\dots \quad (60),$$

pie kam σ_{2i} noteikts ar formulu (59).

Otro locekļu vidējais V_2 izsakams veidā

$$V_2 = \frac{2}{n^2}(B_{1.2} + B_{1.3} + \dots + B_{2.3} + \dots + B_{(n-1).n}) \quad (61),$$

kur $B_{1.2}, B_{1.3}, \dots, B_{2.3}, \dots, B_{(n-1).n}$ apzīmē kļūdu funkciju grupu

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{ /\varepsilon_1{}^1\varepsilon_2{}^1/', \ /\varepsilon_1{}^1\varepsilon_2{}^1/'', \ /\varepsilon_1{}^1\varepsilon_2{}^1/''', \ \ldots\ldots\ldots \right\}, \\
\left\{ /\varepsilon_1{}^1\varepsilon_3{}^1/', \ /\varepsilon_1{}^1\varepsilon_3{}^1/'', \ /\varepsilon_1{}^1\varepsilon_3{}^1/''', \ \ldots\ldots\ldots \right\}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left\{ /\varepsilon_2{}^1\varepsilon_3{}^1/', \ /\varepsilon_2{}^1\varepsilon_3{}^1/'', \ /\varepsilon_2{}^1\varepsilon_3{}^1/''', \ \ldots\ldots\ldots \right\}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left\{ /\varepsilon_{n-1}{}^1\varepsilon_n{}^1/', \ /\varepsilon_{n-1}{}^1\varepsilon_n{}^1/'', \ /\varepsilon_{n-1}{}^1\varepsilon_n{}^1/''', \ \ldots\ldots \right\}
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (62)$$

vidējos.

Lai atrastu šos vidējos, iztirzāsim principialo jautājumu par $/\varepsilon_q{}^1\varepsilon_r{}^1/$ vidējo $B_{q.r}$, ja novērojumi, uz kuriem zīmējas kļūdas ε_q un ε_r, taisīti ar vienādu noteiktību bezgalīgi daudzos atkārtojumos.

Veidojot atsevišķiem novērojumu pāriem atbilstošās kļūdu funkcijas $/\varepsilon_q{}^1\varepsilon_r{}^1/$ jeb $/\varepsilon_q{}^1/\cdot/\varepsilon_r{}^1/$, tās var sakārtot pa grupām tā, lai katrā grupā ieejošie $/\varepsilon_q{}^1/$ zīmētos uz viena un tā paša intervala $d\,\varepsilon$ kļūdām ε_q. Tā tad katrā tādā grupā $/\varepsilon_q{}^1/$ uzskatams par konstantu faktoru, kurš grupas atsevišķos elementos reizināts ar visādu intervalu $d\varepsilon$ kļūdu ε_r funkcijām $/\varepsilon_r{}^1/$. Tā kā, saskaņā ar šeit taisītiem pieņēmumiem, kļūdu funkciju $/\varepsilon_r{}^1/$ skaits uzskatams par bezgalīgi lielu, šo funkciju vidējais ir identisks ar nolīdzinājumā (55) ieejošo σ_1 un nosakams pēc formulas (35) parauga:

$$\sigma_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} /\varepsilon^1/\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (63).$$

No augšā teiktā seko, ka katras atsevišķas $/\varepsilon_q{}^1\varepsilon_r{}^1/$ grupas vidējais ir $/\varepsilon_q{}^1/\sigma_1$. Apskatot šīs grupas visumā, izrādās, ka visos grupu vidējos faktors σ_1 ir pastāvīgs, bet faktors $/\varepsilon_q{}^1/$, zīmējoties uz dažādu intervalu kļūdām, — mainīgs. Tā tad visu atsevišķo grupu vispārējais vidējais nosakams reizinot σ_1 ar visu atsevišķo $/\varepsilon_q{}^1/$ vidējo, kurš ir jau minētais ar formulu (63) nosacītais σ_1. Bet atsevišķo $/\varepsilon_q{}^1\varepsilon_r{}^1/$ grupu vispārējais vidējais ir nekas cits, kā meklētais vidējais $B_{q.r}$; tā tad

$$B_{q.r} = \sigma_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64),$$

pie kam σ_1 noteikts ar formulu (63).

Tā kā novērojumi, uz kuriem zīmējas $B_{q.r}$, taisīti ar tādu pat noteiktību, ka tie, uz kuriem zīmējas $B_{1\cdot 2}, B_{1\cdot 3}, \ldots, B_{2\cdot 3}, \ldots, B_{(n-1)\cdot n}$, var pieņemt, ka

$$B_{1.2} = B_{1.3} = \ldots\ldots = B_{2.3} = \ldots\ldots = B_{(n-1).n} = B_{q.r} = \sigma_1^2 \quad (65).$$

Atgriežoties pie (61), aizrādīsim, ka vidējo B skaits šinī formulā vienāds ar skaitu, kurā n elementi kombinējami pa 2, tā tad ir

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Ievērojot to un (65), atrodam, ka

$$V_2 = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \sigma_i^2 = \frac{n-1}{n} \sigma_i^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66).$$

T r e š o l o c e k ļ u v i d ē j a i s V_3 nosakams līdzīgā veidā, kā pirmo locekļu vidējais V_1. Tāpēc neatkārtojot attiecīgos atrisinājumus, aizrādīsim, ka

$$V_3 = -2\sigma_i^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67),$$

kur σ_i ir jau zinamā nozīme.

Beidzot, par c e t u r t o l o c e k ļ u v i d ē j o V_4 sakams, ka ceturtam loceklim σ_i^2 paliekot pastāvīgam visos, uz dažādām kļūdu sistemām attiecīgos tipa (55) nolīdzinājumos, tāds pats ir arī V_4; tā tad

$$V_4 = \sigma_i^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68).$$

Tā tad bezgalīgi daudzām novērojumu resp. to kļūdu sistemām atbilstošo nolīdzinājumu (55) vidējais ir

$$\begin{aligned} \mu_{s_i}^2 &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \\ &= \frac{\sigma_{2i}}{n} + \frac{n-1}{n} \sigma_i^2 - 2\sigma_i^2 + \sigma_i^2 = \\ &= \frac{\sigma_{2i}}{n} - \frac{\sigma_i^2}{n} = \\ &= \frac{\sigma_i^2}{n} \left(\frac{\sigma_{2i}}{\sigma_i^2} - 1 \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69), \end{aligned}$$

pie kam σ_{2i} un σ_i nosakami pēc formulām (59) un (63).

Uz šīs vispārējās formulas pamata nosakamas t un m^2 vidējās kļūdas μ_t un μ_{m^2}. Apskatot atsevišķos gadijumus, kad $i = 1$ un $i = 2$, vispirms konstatējam, ka pirmā gadijumā μ_{s_i} ir identisks ar μ_t, otrā — ar μ_{m^2}.

Pirmā gadijumā σ_i ir vienāds ar ϑ un σ_{2i} — ar μ^2. Otrā gadijumā σ_i ir vienāds ar μ^2, bet σ_{2i} — ar atsevišķo kļūdu ε ceturto kāpju aritmetisko vidējo, kuru apzīmēsim ar ν^4. Tā tad minētos atsevišķos gadijumos uz vispārējās formulas (69) pamata:

$$\mu_t^2 = \frac{\vartheta^2}{n} \left(\frac{\mu^2}{\vartheta^2} - 1 \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

$$\mu_{m^2}{}^2 = \frac{\mu^4}{n}\left(\frac{\nu^4}{\mu^4} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71).$$

Kas zīmējas uz ν^4, tad uz (35) pamata

$$\nu^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72),$$

un pieņemot varbūtības funkciju $\varphi(\varepsilon)$ pēc Gauss'a kļūdu likuma (31), atrodam

$$\nu^4 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^4 e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{3}{4h^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73).$$

Atgriežoties pie formulām (70) un (71), aizrādīsim, ka ievērojot § 6-ā atrasto μ un ϑ attiecību,

$$\frac{\mu^2}{\vartheta^2} = \frac{\pi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74);$$

bet no (44) un (73) seko, ka

$$\frac{\nu^4}{\mu^4} = 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75).$$

Tā tad

$$\mu_t{}^2 = \frac{\vartheta^2}{n}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0{,}57080 \frac{\vartheta^2}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

$$\mu_{m^2}{}^2 = \frac{\mu^4}{n}(3 - 1) = 2{,}00000 \frac{\mu^4}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77),$$

un

$$\mu_t = 0{,}75551 \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

$$\mu_{m^2} = 1{,}41421 \frac{\mu^2}{\sqrt{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79).$$

Ar pēdējo formulu noteiktā vidējā kļūda μ_{m^2} zīmējas uz m^2. Lai atrastu uz pašu m attiecīgo vidējo kļūdu μ_m, ievērosim, ka uzskatot μ_{m^2} par m^2 pieaugumu, var rakstīt

$$\sqrt{m^2 + \mu_{m^2}} = m \sqrt{1 + \frac{\mu_{m^2}}{m^2}} = m\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\mu_{m^2}}{m^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{\mu_{m^2}}{m^2}\right)^2 + \ldots\ldots\right\} =$$

$$= m + \left\{\frac{1}{2}\frac{\mu_{m^2}}{m} - \frac{1}{8}\frac{\mu_{m^2}{}^2}{m^3} + \ldots\ldots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80).$$

Šī formula saprotama tā, ka m^2 pieaugumam atbilstošais pašas vidējās kļūdas m pieaugums ir

$$\frac{1}{2}\frac{\mu_{m^2}}{m} - \frac{1}{8}\frac{\mu_{m^2}{}^2}{m^3} + \ldots\ldots$$

Tā tad

$$\mu_m = \frac{1}{2}\frac{\mu_{m^2}}{m} - \frac{1}{8}\frac{\mu_{m^2}{}^2}{m^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81).$$

Pieņemot, ka vidējās kļūdas m noteikšanai lietoto atsevišķo kļūdu ε skaits n ir liels, formulas (81) labās puses locekļi, sākot ar otro, iznāk tik mazi, ka tos var ignorēt. Bez tam var atvietot m ar μ, jo pieņemtos apstākļos tie maz atšķiras viens no otrā. Tad atrodam

$$\mu_m = \frac{\mu_{m^2}}{2\mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82),$$

jeb, ievērojot (79),

$$\mu_m = 0{,}70711\frac{\mu}{\sqrt{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (83).$$

No formulām (78) un (83) taisāmi šādi secinājumi.

Taisot n novērojumus ar vienādu noteiktību, kurai atbilst teoretiskās vidējās kļūdas ϑ un μ, un pēc formulām (51) un (53) nosakot šo kļūdu tuvinās vērtības t un m, tām ir relativās vidējās kļūdas

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mu_t}{\vartheta} &= \frac{0{,}75551}{\sqrt{n}}\\ \frac{\mu_m}{\mu} &= \frac{0{,}70711}{\sqrt{n}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (84).$$

Kā redzams, otrā mazliet mazāka par pirmo. Tas nozīmē, ka — pie dota novērojumu skaita n — m pareizāki nekā t raksturo attiecīgo noteiktību. Tāpēc, izvēloties novērojumu noteiktības mēru, no šī viedokļa priekšrocība dodama kvadratiskai vidējai kļūdai, jo praktiski novērojumu noteiktību raksturojošās vidējās kļūdas nosaka nevis no bezgālīgi daudzām, bet galīgā skaitā n dotām atsevišķām kļūdām.

No minētām formulām arī redzams, ka t un m abas ir jo tuvākas atbilstošām teoretiskām ϑ un μ, tā tad jo pareizāki raksturo attiecīgo novērojumu noteiktību, jo lielāks ir lietoto atsevišķo kļūdu skaits n. Tāpēc saprotams, ka no nedaudzām atsevišķām kļūdām atvasinātas vidējās kļūdas t un m tikai ļoti nedroši raksturo attiecīgo novērojumu noteiktību.

Kas zīmējas uz varbūtējo kļūdu ρ, tad tās tuvinā vērtība r nosakāma, starp citu, pēc šī paragrafa sākumā aizrādītā paņēmiena. Nepakavējoties pie attiecīgā pierādijuma, aizrādīsim, ka teoretiski pareizi nosacītai varbūtējai kļūdai ρ tuvāks rezultats tomēr atrodams netiešā ceļā, izejot no atbilstošās kvadratiskās vidējās kļūdas μ resp. tās tuvinās vērtības m, un ievērojot iepriekšējā paragrafa beigās aizrādītās dažādu noteiktības mēru teoretiskās attiecības.

Kā zinams, kļūdu mēri ϑ, μ, ρ resp. t, m, r pēc būtības ir no vairāku vienādas noteiktības novērojumu īstām kļūdām atvasinamas šo kļūdu vidējas vērtības. Tā tad bez sevišķiem paskaidrojumiem saprotams, ka minētos noteiktības mērus lieto novērojumu noteiktības raksturošanai gadijumos, kad šie novērojumi ar attiecīgo vienādu noteiktību notikuši lielākā skaitā. Bet bieži arī tādos gadijumos, kad — novērošanas vai citādā ceļā — atrasts tikai viens atsevišķs lielums un nosacīta tā noteiktība, šīs noteiktības raksturošanai aizrāda atbilstošo vidējo vai varbūtējo kļūdu. Ar to tad grib izteikt, ka minēto lielumu var iedomāties kā atsevišķa novērojuma rezultatu vairāku novērojumu rindā, kur visi novērojumi notikuši ar aizrādītai vidējai vai varbūtējai kļūdai atbilstošo noteiktību.

Ja kāds lielums l atrasts ar noteiktību, kurai atbilst kvadratiskā vidējā kļūda m, tad pieņemts uz to aizrādīt šādā saīsinātā veidā: $l \pm m$. Piem., lai aizrādītu, ka leņķis $l = 58^0 16' 34''$ atrasts ar vidējo kļūdu $m = \pm 5''$, raksta: $l = 58^0 16' 34'' \pm 5''$.

§ 8. Maksimalā kļūda.

Vienādas noteiktības novērojumiem notiekot lielākā skaitā, atsevišķo novērojumu īsto kļūdu absolutās vērtības svārstās starp 0 un kādu augstāko robežu, kuru sauc par novērošanas noteiktībai atbilstošo maksimalo kļūdu.

Maksimalās kļūdas tiešā noteikšana uz Gauss'a kļūdu likuma pamata nav iespējama. Šo likumu izteicošā formulā ieejošie pastāvīgie skaitļi atrasti izejot no pieņēmuma, ka dotā novērojumu rindā atsevišķās īstās kļūdas svārstās starp $-\infty$ un $+\infty$. Tā tad nav sagaidams, ka uz šī kļūdu likuma pamata varētu atrast kādu galīgu robežu, kuru nepārsniedz neviena atsevišķa novērojuma īstās kļūdas absolutā vērtība, ja svarā krītošo novērojumu skaits bezgalīgi liels.

No otras puses, uz tā paša Gauss'a kļūdu likuma pamata var aprēķināt, ar kādu varbūtību sagaidama atsevišķa novērojuma īstā kļūda, kuras absolutā vērtība pārsniedz zinamu robežu M. Zinot šo varbūtību w_M^∞, uz formulas (2) pamata var atrast atbilstošo atkārtojumu skaitli H_M^∞, kas izsaka, kādā skaitā (N) novērojumu īsto kļūdu starpā ir tādas kļūdas, kuru absolutās vērtības lielākas par M. Ja H_M^∞ iznāk mazāks par $1/2$, tad tas nozīmē, ka aprēķina pamatā liktā robežvērtība M praktiski uzskatama par dotiem apstākļiem atbilstošo maksimalo kļūdu.

Kā redzams no (2), H_M^∞ proporcionals diviem elementiem: w_M^∞ un (N). No tiem w_M^∞ — robežvērtību M pārsniedzošo kļūdu varbūtība — atkarīgs no svarā krītošo novērojumu noteiktības skaitļa h, kurš savukārt, uz formulas (44) pamata, izsakams caur atbilstošo vidējo kļūdu μ. Otrais elements (N) ir svarā krītošo novērojumu, resp. to īsto kļūdu, skaits.

Tā tad iznāk, ka dotiem apstākļiem atbilstošā maksimalā kļūda atkarīga no novērojumu noteiktības, resp. no atbilstošās vidējās kļūdas μ, un pie tam proporcionala novērojumu skaitam (N).

Kas zīmējas uz w_M^∞ noteikšanu, vispirms piezīmēsim sekojošo. Absoluto vērtību ziņā robežu M pārsniedzošās kļūdas ε iedalamas divās grupās: tādās, kas ir starp robežām $+M$ un $+\infty$, un tādās, kas ir starp $-M$ un $-\infty$. Apzīmējot atbilstošās varbūtības ar $w_{+M}^{+\infty}$ un $w_{-M}^{-\infty}$, un ievērojot formulas (12) un (31), atrodam, ka

$$w_{+M}^{+\infty} = w_{-M}^{-\infty} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_M^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \quad . \ . \ . \ . \ . \ (85),$$

kur M un ∞ apzīmē attiecīgo lielumu absolutās vērtības, bet h ir novērojumu noteiktības skaitlis.

Ievērojot teoremu par varbūtību sumu,

$$w_M^\infty = w_{+M}^{+\infty} + w_{-M}^{-\infty};$$

tā tad

$$w_M^\infty = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_M^\infty e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (86).$$

Pieņemsim apzīmējumu $h\varepsilon = t$; sakarā ar to tad jāliek $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$, integrala robeža M jāatvieto ar Mh, un formula (86) pāriet veidā

$$w_M^\infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{Mh}^\infty e^{-t^2} dt \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (87).$$

Ievērojot (44), galīgi atrodam

$$w_M^\infty = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{M}{\mu\sqrt{2}}}^\infty e^{-t^2} dt \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (88).$$

Uz šīs formulas pamata aprēķināti varbūtības w_M^∞ skaitļi, kas atbilst attiecības $\frac{M}{\mu}$ sekojošā tabulā minētām vērtībām.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Ja } \frac{M}{\mu} = 2, & \text{t. i. } M = 2\mu & w_M^\infty & = 0{,}046 \\
\text{„ „} = 3, & \text{„ „} = 3\mu & \text{„} & = 0{,}0027 \\
\text{„ „} = 4, & \text{„ „} = 4\mu & \text{„} & = 0{,}000063 \\
\text{„ „} = 5, & \text{„ „} = 5\mu & \text{„} & = 0{,}00000057.
\end{array}
$$

Uz formulas (2) pamata zinams, ka robežu M pārsniedzošas kļūdas (N) novērojumu starpā sagaidamas skaitā

$$H_M^\infty = (N)\, w_M^\infty \quad \ldots \ldots \ldots \quad (89).$$

Lai robežvērtība M būtu uzskatama par identisku ar maksimalo kļūdu, kā jau minēts, jāprasa, lai H_M^∞ būtu mazāks par $1/2$. Ievērojot to, ar formulas (89) palīdzību var nosacīt, kādu robežu nedrīkst sasniegt novērojumu skaits, lai zinamā attiecībā pret novērojumu vidējo kļūdu μ pieņemtā kļūda M būtu uzskatama par maksimalo. Tam nolūkam jāatslēdz pēc (N) pēc formulas (89) parauga veidotais nolīdzinājums

$$(N)\, w_M^\infty = 1/2.$$

No šī nolīdzinājuma atrodam

$$(N) = \frac{1}{2 w_M^\infty} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (90),$$

pie kam w_M^∞ jābūt saskaņā ar pieņemto attiecību $\frac{M}{\mu}$.

Tādā veidā, izejot no iepriekšējā tabulā minētiem datiem, var atrast, ka par maksimalo kļūdu var uzskatīt

$M = 2\mu$,	ja (N) apaļā skaitlī nesasniedz	10,
„ $= 3\mu$,	„ „ „ „ „	200,
„ $= 4\mu$,	„ „ „ „ „	8000,
„ $= 5\mu$,	„ „ „ „ „	1000000.

Tā tad gadijumos, kad svarā krītošo novērojumu skaits ne visai liels (nesasniedz 200), var pieņemt, ka maksimalā kļūda nepārsniedz trīskārtīgo vidējo kļūdu.

Saprotams, ka tāpat kā kvadratiskā vidējā kļūda un pārējie kļūdu mēri, arī maksimalā kļūda nosakama tikai pēc absolutā lieluma, zīmei paliekot nenoteiktai $\pm$.

Maksimalā kļūda spēlē lomu, starp citu, jautājumā par novērojumu pielaižamām pretrunām, resp. šo pretrunu maksimalās robežas noteikšanu.

Kontroles nolūkā, bez meklēto lielumu noteikšanai vajadzīgiem, mēdz taisīt vēl liekus novērojumus ar tādu aprēķinu, lai ar novērojumu rezultatiem varētu aprēķināt kādu kontrolfunkciju, kuras īstā vērtība teoretiski zinama. Piem., dubulti novērojot vienu un to pašu lielumu, abu novērojumu starpībai jābūt vienādai ar nulli, plakanā trijstūrī izmērot visus trīs leņķus, šo leņķu sumai jābūt vienādai ar 180^0, u. t. t.

Ar novērojumu rezultatiem aprēķinātā kontrolfunkcijas vērtība parasti atšķirās no atbilstošās īstās vērtības par kādu p r e t r u n u. Radusies no novērojumiem piemītošām īstām kļūdām, šī pretruna pati uzskatama par novērošanas ceļā atrastās kontrolfunkcijas vērtības īsto kļūdu. No otras puses, zinot kontrolfunkcijas aprēķinam lietoto novērojumu noteiktību, resp. to raksturojošo vidējo kļūdu, uz kļūdu sakrāšanas likuma (sk. § 11.) pamata var atrast novērošanas ceļā nosacītās kontrolfunkcijas vērtības vidējo kļūdu. Tai atbilstošā maksimalā kļūda tad nosaka to robežu, zem kuras teoretiski paliek novērošanas ceļā atrasto kontrolfunkcijas vērtību īstās kļūdas — tā tad arī augšā minētā pretruna.

Taisot novērojumus zinamam nolūkam un zinamos apstākļos, parasti iepriekš noskaidro, ar kādu noteiktību, t. i. ar kādu vidējo kļūdu šiem novērojumiem jānotiek. Izejot no šiem datiem var aprēķināt izraudzītās kontrolfunkcijas no novērojumiem atrastās vērtības vidējo kļūdu un atbilstošo maksimalo kļūdu. Tā tad nosaka robežu, kuru nedrīkst pārsniegt konstatētās novērojumu pretrunas, ja novērojumi notikuši ar tiem nozīmēto noteiktību.

Pieminēsim vēl vienu citu maksimalās kļūdas praktisko nozīmi ilustrējošu piemēru.

Stājoties pie liekā skaitā taisītu un attiecībā uz sistematiskām kļūdām izlabotu novērojumu izlīdzināšanas, jāuzmeklē novērojumi, kuri eventuali notikuši ar rupjām kļūdām. Skatoties pēc apstākļiem, tādi novērojumi jāpārtaisa, vai vienkārši atmetami un ignorējami izlīdzināšanā. Tādos gadijumos paceļās jautājums, kādu maksimalu robežu nedrīkst pārsniegt novērojuma kļūda, lai tā būtu uzskatama par nejaušu, bet nevis par rupju. Šo robežu nosaka novērojumu noteiktībai atbilstošā maksimalā kļūda. Tā tad varētu domāt, ka uz šī atzinuma pamata rupjas kļūdas viegli pazīstamas.

Faktiski šis jautājums izšķirams ne tik vienkārši. Parasti novērojumu noteiktība, resp. atbilstošā vidējā un maksimalā kļūda, a priori nav noteikti zinama. Arī nav zinamas atsevišķo novērojumu īstās kļūdas. Viss tas vairāk vai mazāk labā tuvinājumā nosakams tikai pašas izlīdzināšanas ceļā. Tāpēc, stājoties pie izlīdzināšanas, ieteicams pagaidām pārtaisīt vai atmest tikai tādus novērojumus, kur nav šaubu, ka tie notikuši ar rupjām kļūdām. Kad izlīdzināšanas rezultatā, starp citu, atrasta neizlīdzināta novērojuma vidējā kļūda, tad izejot no tās var aptuveni nosacīt atbilstošo maksimalo kļūdu. Bez tam atrastās novērojumu šķietamās kļūdas aptuveni pieņemamas par novērojumu īstām kļūdām. Ar to tad iegūts materials, uz kura pamata var sīkāki spriest par novērojumiem eventuali piemītošām rupjām kļūdām un pārtaisīt vai atmest attiecīgos novērojumus. Kad tas noticis, tad par brīviem no rupjām kļūdām atzītie novērojumi jāizlīdzina par jaunu. Visādā ziņā pie novērojumu atmešanas uz tādas pārbaudes pamata jāpieiet ar lielu piesardzību.

§ 9. Gauss'a kļūdu likumam sekojošo kļūdu pazīmes.

Dažādiem nolūkiem vēlams zināt, vai dotu novērojumu kļūdas ir nejaušas Gauss'a kļūdu likuma ziņā, t. i. vai tās seko šim likumam. Tāpēc, pa daļai atkārtojot jau agrāk teikto, pārskaitīsim galvenās šinī ziņā svarā krītošās pazīmes, vienmēr pieņemot, ka pārbaudamo kļūdu resp. attiecīgo novērojumu rinda ļoti gara, kļūdas ir īstas, t. i. attiecinātas uz novēroto lielumu īstām vērtībām, un visi novērojumi izdarīti ar vienādu noteiktību.

Tādos apstākļos kļūdām ar mazām absolutām vērtībām jābūt jo lielākā pārsvarā, jo mazākas šīs absolutās vērtības. Pie tam vienāda absoluta lieluma kļūdām jābūt apmēram vienādā skaitā pozitivām un negativām; tā tad kļūdu algebraiskai kopsumai jābūt apmēram vienādai ar nulli.

Neatkarīgi vienu no otras pēc attiecīgām formulām vai paņēmieniem nosakot noteiktības mēru ϑ, μ, ρ tuvinās vērtības t, m, r, atrastiem skaitļiem jābūt ar formulu (50) noteiktās attiecībās. Bez tam faktiski konstatētā maksimalā kļūda nedrīkst pārsniegt saskaņā ar vidējo kļūdu un novērojumu skaitu teoretiski sagaidamo.

Praksē nekad negadās bezgalīgi garas novērojumu resp. to kļūdu rindas; bieži interesējošo kļūdu skaits pat diezgan neliels. Tāpēc, saprotams, nav sagaidams, ka tādas kļūdas — pat ja tās būtu tīri nejaušas — izpildīs minētos noteikumus pilnā stingrībā. Ievērojot to, pārbaudes rezultats uzskatams par pozitivu, ja minētie noteikumi izrādas izpildīti zinamā tuvinājumā, kurš sagaidams jo labāks, jo garāka apskatīto kļūdu rinda. Ja, turpretim, kļūdu skaits neliels, tad pēc šīs kontroles rezultatiem nevar kaut necik droši spriest par pārbaudīto kļūdu raksturu.

Ja izdarot augšā minēto pārbaudi tai izdevīgos apstākļos izrādas, ka kļūdas neseko apmierinoši Gauss'a kļūdu likumam, tad ir pamatotas aizdomas, ka šo kļūdu starpā ir rupjas vai tādas, kas satur sistematiskas komponentas. Kas zīmējas uz rupjām kļūdām, tad tās pazīstamas vadoties ar iepriekšējā paragrafā dotiem aizrādijumiem, un attiecīgie novērojumi, skatoties pēc apstākļiem, jāpārtaisa vai jāatmet. Lai atrastu eventualas sistematiskas komponentas, piegriežot vērību visiem svarā krītošiem novērošanas apstākļiem, jānoskaidro, kuri no tiem varēja iedarboties kā sistematisku kļūdu avoti. Šo kļūdu avotu ietekme tad jānosaka un jālikvidē ar atbilstošiem izlabojumiem. Bieži pašas kļūdas, kas izrādijušās par neapmierinoši sekojošām Gauss'a kļūdu likumam, dod vērtīgus aizrādijumus, kādā virzienā meklējami sistematisko kļūdu komponentu avoti.

Praksē reti gadās novērojumi ar noteikti zinamām īstām kļūdām. Bet bieži, izlīdzinot liekā skaitā taisītus novērojumus, var nosacīt šo novērojumu šķietamās kļūdas. Pieņemot tās par aptuveni vienādām ar atbilstošām īstām kļūdām, var izdarīt to pašu augšā minēto pārbaudi, pie kam gan tādos apstākļos šīs pārbaudes rezultati vēl mazāk droši.

Ja pārbaudot izlīdzināšanas ceļā atrastās šķietamās kļūdas, novērojumi izrādijušies par notikušiem ar rupjām vai sistematiskām kļūdām, tad pēc tādu kļūdu likvidēšanas novērojumi par jaunu jāizlīdzina, jo izlīdzināšanas paņēmieni pamatoti uz pieņēmuma, ka attiecīgiem novērojumiem piemīt tikai nejaušas, Gauss'a kļūdu likumam sekojošas kļūdas.

§ 10. Svari.

Iepriekšējos paragrafos apskatītie noteiktības mēri, starp citu, kvadratiskā vidējā kļūda μ resp. m, raksturo attiecīgo novērojumu noteiktību absolutā veidā. Jo lielāks tāds noteiktības mērs, jo mazāka attiecīgo novērojumu noteiktība, un otrādi.

Bieži, salīdzinot dažādu novērojumu noteiktību, tā lietderīgāki izsakama relativā veidā ar t. s. svariem. Par svariem sauc skaitļus, kuri pretēji proporcionali atbilstošo kvadratisko vidējo kļūdu kvadratiem.

Tā tad lielākas noteiktības novērojumiem ir lielāki svari, un otrādi.

Lai kādā novērojumu grupā atsevišķo novērojumu vidējās kļūdas ir

$$m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_n.$$

Apzīmējot atbilstošos svarus ar

$$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n,$$

tiem jābūt tādiem skaitļiem, lai izpildītos proporcija

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots\ldots : p_n = \frac{c}{m_1^2} : \frac{c}{m_2^2} : \frac{c}{m_3^2} : \ldots\ldots : \frac{c}{m_n^2} \quad . \quad (91),$$

kur c apzīmē kādu patvaļīgi pieņemamu skaitli. Tā tad novērojumu svari aprēķinami pēc parauga

$$p = \frac{c}{m^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (92).$$

Tā kā skaitlis c vispārīgi izvēlams pilnīgi brīvi, ir saprotams, ka dotu novērojumu relativo noteiktību var izteikt ne tikai ar vienu, bet ar bezgalīgi daudzām dažādām svaru sistemām. Citiem vārdiem: no kādas dotas vai atrastas svaru sistemas var pāriet uz citu, reizinot vai dalot visus svarus ar kādu pastāvīgu koeficientu.

Formulas (91) un (92) rāda, kādā veidā svari nosakami izejot no novērojumu vidējām kļūdām, kuras līdz šim uzskatījām par dotām vai iepriekš atrastām.

Dažreiz ir iespējams nosacīt svarus neatkarīgi no attiecīgo novērojumu vidējām kļūdām. Tādā gadijumā pietiek nosacīt viena novērojuma vidējo kļūdu, lai uz proporcijas (91) pamata atrastu arī visu pārējo novērojumu vidējās kļūdas. Lai, piem., zinami visi svari p_1, p_2, $p_3, \ldots\ldots, p_n$, bet tikai viena novērojuma vidējā kļūda m_1. Tad pārējo novērojumu vidējās kļūdas ir:

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= \frac{m_1}{\sqrt{p_2}}\sqrt{p_1} \\ m_3 &= \frac{m_1}{\sqrt{p_3}}\sqrt{p_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n &= \frac{m_1}{\sqrt{p_n}}\sqrt{p_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (93).$$

Otrādi, zinot visas vidējās kļūdas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$, un pieņemot viena novērojuma svaru p_1, var aprēķināt atbilstošos pārējos svarus:

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= \frac{m_1^2}{m_2^2}p_1 \\ p_3 &= \frac{m_1^2}{m_3^2}p_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= \frac{m_1^2}{m_n^2}p_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (94).$$

Vidējo kļūdu noteikšana ar formulām (93) aizrādītā kārtā izdarama sevišķi ērti, ja dota vai atrasta vidējā kļūda m tādam novērojumam, kuram lietotā svaru sistemā ir svars 1. Šo m sauc par s v a r a v i e n ī b a s (novērojuma) v i d ē j o k ļ ū d u. Pie tam nav nepieciešams, lai svara vienības vidējā kļūda zīmētos uz kādu apskatītās grupas realu novērojumu; tas var būt arī kāds iedomāts novērojums, ja tikai iespējams nosacīt tam atbilstošo vidējo kļūdu.

Lai, piem., ir jānosaka vidējās kļūdas $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ novērojumiem, kuriem lietotā svaru sistemā pienākas svari $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Lai kādā nebūt veidā atrasta šai svaru sistemai atbilstošā svara vienības vidējā kļūda m, t. i. vidējā kļūda tādam (eventuali iedomātam) novērojumam, kuram lietotā svaru sistemā pienākas svars $p = 1$. Tad, pēc formulu (93) parauga, meklētās vidējās kļūdas ir:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{m}{\sqrt{p_1}}\sqrt{1} = \frac{m}{\sqrt{p_1}} \\ m_2 &= \frac{m}{\sqrt{p_2}}\sqrt{1} = \frac{m}{\sqrt{p_2}} \\ m_3 &= \frac{m}{\sqrt{p_3}}\sqrt{1} = \frac{m}{\sqrt{p_3}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n &= \frac{m}{\sqrt{p_n}}\sqrt{1} = \frac{m}{\sqrt{p_n}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (95).$$

§ 11. Kļūdu sakrāšanas likums.

Bieži gadas aprēķināt funkcijas ar argumentu novērotiem lielumiem, kuri atrasti ar zinamām vidējām kļūdām. Tādos gadijumos paceļas jautājums par sakaru starp argumentu vidējām kļūdām un aprēķinātās funkcijas vidējo kļūdu.

Lai ir dota funkcija

$$F = f(X_1, X_2, X_3, \ldots.., X_r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96),$$

kur $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_r$ apzīmē argumentu īstās vērtības. Pieņemsim, ka neatkarīgi vienu no otra novērojot vai nosakot šos argumentus, atrasti rezultati $l_1, l_2, l_3, \ldots.., l_r$ ar īstām kļūdām $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots.., \varepsilon_r$. Tad

$$X_1 = l_1 - \varepsilon_1,\ X_2 = l_2 - \varepsilon_2,\ X_3 = l_3 - \varepsilon_3, \ldots.., X_r = l_r - \varepsilon_r,$$

un funkciju F var rakstīt veidā

$$F = f(l_1 - \varepsilon_1,\ l_2 - \varepsilon_2,\ l_3 - \varepsilon_3, \ldots.., l_r - \varepsilon_r) \quad . \quad . \quad (97).$$

Kļūdas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots.., \varepsilon_r$ uzskatamas par attiecīgo argumentu ļoti maziem pieaugumiem. Tāpēc, izvirzot funkciju F Taylor'a rindā, var ignorēt tos locekļus, kur šie pieaugumi ieiet augstākās par pirmo kāpēs.

Tādā veidā atrodam

$$F = f(l_1, l_2, l_3, \ldots.., l_r) - \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0 \varepsilon_1 -$$
$$- \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)_0 \varepsilon_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial l_3}\right)_0 \varepsilon_3 - \ldots.. - \left(\frac{\partial f}{\partial l_r}\right)_0 \varepsilon_r \quad . \quad . \quad . \quad (98),$$

pie kam simbols $(\ )_0$ apzīmē, ka attiecīgie atvasinājumi aprēķinami ar argumentu tuvinām vērtībām. Apzīmējot šos atvasinājumus ar $k_1, k_2, k_3, \ldots.., k_r$, formulu (98) var pārrakstīt veidā

$$f(l_1, l_2, l_3, \ldots.., l_r) - F = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3 +$$
$$+ \ldots.. + k_r\varepsilon_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99),$$

kur k ir no kļūdām ε neatkarīgi koeficienti.

Tā kā F ir funkcijas īstā vērtība, formulas kreisā puse izteic ar argumentu novērotām vērtībām aprēķinātās funkcijas īsto kļūdu. Apzīmējot to ar E, rakstam

$$E = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3 + \ldots.. + k_r\varepsilon_r \quad . \quad . \quad . \quad (100).$$

Tālāk iedomāsimies, ka atkārtoti novērojot visus funkcijas F argumentus, atrastas šādas novērojumu sistemas

$$({}_1l_1,\ {}_1l_2,\ {}_1l_3,\ \ldots\ldots,\ {}_1l_r)$$
$$({}_2l_1,\ {}_2l_2,\ {}_2l_3,\ \ldots\ldots,\ {}_2l_r)$$
$$({}_3l_1,\ {}_3l_2,\ {}_3l_3,\ \ldots\ldots,\ {}_3l_r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$({}_nl_1,\ {}_nl_2,\ {}_nl_3,\ \ldots\ldots,\ {}_nl_r)$$

ar atbilstošām īstu nejaušu kļūdu sistemām

$$({}_1\varepsilon_1,\ {}_1\varepsilon_2,\ {}_1\varepsilon_3,\ \ldots\ldots,\ {}_1\varepsilon_r)$$
$$({}_2\varepsilon_1,\ {}_2\varepsilon_2,\ {}_2\varepsilon_3,\ \ldots\ldots,\ {}_2\varepsilon_r)$$
$$({}_3\varepsilon_1,\ {}_3\varepsilon_2,\ {}_3\varepsilon_3,\ \ldots\ldots,\ {}_3\varepsilon_r)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$({}_n\varepsilon_1,\ {}_n\varepsilon_2,\ {}_n\varepsilon_3,\ \ldots\ldots,\ {}_n\varepsilon_r)$$

Ar šīm argumentu novērojumu sistemām aprēķinātām funkcijas F vērtībām lai ir pēc parauga E atrastas īstās kļūdas ${}_1E$, ${}_2E$, ${}_3E, \ldots$ $\ldots, {}_nE$. Tad pēc parauga (100) var veidot izteiksmes

$$\left.\begin{aligned}
{}_1E &= k_1\,{}_1\varepsilon_1 + k_2\,{}_1\varepsilon_2 + k_3\,{}_1\varepsilon_3 + \ldots\ldots + k_r\,{}_1\varepsilon_r \\
{}_2E &= k_1\,{}_2\varepsilon_1 + k_2\,{}_2\varepsilon_2 + k_3\,{}_2\varepsilon_3 + \ldots\ldots + k_r\,{}_2\varepsilon_r \\
{}_3E &= k_1\,{}_3\varepsilon_1 + k_2\,{}_3\varepsilon_2 + k_3\,{}_3\varepsilon_3 + \ldots\ldots + k_r\,{}_3\varepsilon_r \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_nE &= k_1\,{}_n\varepsilon_1 + k_2\,{}_n\varepsilon_2 + k_3\,{}_n\varepsilon_3 + \ldots\ldots + k_r\,{}_n\varepsilon_r
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (101),$$

kur ar vienādiem indeksiem apzīmētie koeficienti k visās formulās vienādi, jo, kā jau minēts, šie koeficienti aprēķinami ar attiecīgo argumentu tuvinām vērtībām. Paceļot izteiksmes (101) kvadratā, sumējot un izdalot sumu ar n, atrodam

$$\begin{aligned}
{}_1E^2 &= k_1^2\,{}_1\varepsilon_1^2 + k_2^2\,{}_1\varepsilon_2^2 + k_3^2\,{}_1\varepsilon_3^2 + \ldots\ldots + k_r^2\,{}_1\varepsilon_r^2 + 2\,(k_1 k_2\,{}_1\varepsilon_1\,{}_1\varepsilon_2 + \\
&\quad + k_1 k_3\,{}_1\varepsilon_1\,{}_1\varepsilon_3 + \ldots\ldots + k_2 k_3\,{}_1\varepsilon_2\,{}_1\varepsilon_3 + \ldots\ldots) \\
{}_2E^2 &= k_1^2\,{}_2\varepsilon_1^2 + k_2^2\,{}_2\varepsilon_2^2 + k_3^2\,{}_2\varepsilon_3^2 + \ldots\ldots + k_r^2\,{}_2\varepsilon_r^2 + 2\,(k_1 k_2\,{}_2\varepsilon_1\,{}_2\varepsilon_2 + \\
&\quad + k_1 k_3\,{}_2\varepsilon_1\,{}_2\varepsilon_3 + \ldots\ldots + k_2 k_3\,{}_2\varepsilon_2\,{}_2\varepsilon_3 + \ldots\ldots) \\
{}_3E^2 &= k_1^2\,{}_3\varepsilon_1^2 + k_2^2\,{}_3\varepsilon_2^2 + k_3^2\,{}_3\varepsilon_3^2 + \ldots\ldots + k_r^2\,{}_3\varepsilon_r^2 + 2\,(k_1 k_2\,{}_3\varepsilon_1\,{}_3\varepsilon_2 + \\
&\quad + k_1 k_3\,{}_3\varepsilon_1\,{}_3\varepsilon_3 + \ldots\ldots + k_2 k_3\,{}_3\varepsilon_2\,{}_3\varepsilon_3 + \ldots\ldots) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_nE^2 &= k_1^2\,{}_n\varepsilon_1^2 + k_2^2\,{}_n\varepsilon_2^2 + k_3^2\,{}_n\varepsilon_3^2 + \ldots\ldots + k_r^2\,{}_n\varepsilon_r^2 + 2\,(k_1 k_2\,{}_n\varepsilon_1\,{}_n\varepsilon_2 + \\
&\quad + k_1 k_3\,{}_n\varepsilon_1\,{}_n\varepsilon_3 + \ldots\ldots + k_2 k_3\,{}_n\varepsilon_2\,{}_n\varepsilon_3 + \ldots\ldots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{[EE]}{n} &= k_1^2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{n} + k_2^2\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{n} + k_3^2\frac{[\varepsilon_3\varepsilon_3]}{n} + \ldots\ldots + k_r^2\frac{[\varepsilon_r\varepsilon_r]}{n} + 2(k_1 k_2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_2]}{n} + \\
&\quad + k_1 k_3\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_3]}{n} + \ldots\ldots + k_2 k_3\frac{[\varepsilon_2\varepsilon_3]}{n} + \ldots\ldots) \quad . \quad . \quad (102).
\end{aligned}$$

Kas zīmējas uz kļūdu produktu rindām $({}_1\varepsilon_1{}_1\varepsilon_2, {}_2\varepsilon_1{}_2\varepsilon_2, {}_3\varepsilon_1{}_3\varepsilon_2, \ldots$ $\ldots {}_n\varepsilon_1{}_n\varepsilon_2)$, $({}_1\varepsilon_1{}_1\varepsilon_3, {}_2\varepsilon_1{}_2\varepsilon_3, {}_3\varepsilon_1{}_3\varepsilon_3, \ldots\ldots, {}_n\varepsilon_1{}_n\varepsilon_3), \ldots\ldots, ({}_1\varepsilon_2{}_1\varepsilon_3, {}_2\varepsilon_2{}_2\varepsilon_3,$ ${}_3\varepsilon_2{}_3\varepsilon_3, \ldots\ldots, {}_n\varepsilon_2{}_n\varepsilon_3), \ldots\ldots$, tad var pierādīt, ka tās sēko līdzīgiem pamatlikumiem, kā atsevišķu īstu nejaušu kļūdu rindas. Tāpēc sumas $[\varepsilon_1\varepsilon_2], [\varepsilon_1\varepsilon_3], \ldots\ldots, [\varepsilon_2\varepsilon_3], \ldots\ldots$, un visu izteiksmes (102) pēdējo locekli var pieņemt par vienādu ar nulli un atmest.

Ievērojot (52), atrodam, ka $\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{n}, \frac{[\varepsilon_2\varepsilon_2]}{n}, \frac{[\varepsilon_3\varepsilon_3]}{n}, \ldots\ldots, \frac{[\varepsilon_r\varepsilon_r]}{n}$ izteic funkcijas atsevišķo argumentu novērojumu vidējo kļūdu kvadratus $m_1^2, m_2^2, m_3^2, \ldots\ldots, m_r^2$, bet $\frac{[EE]}{n}$ — ar argumentu novērotām vērtībām aprēķinātās funkcijas vidējās kļūdas kvadratu m_f^2.

Tā tad sakars starp argumentu novērojumu vidējām kļūdām m_1, m_2, $m_3, \ldots\ldots, m_r$ un ar argumentu novērotām vērtībām aprēķinātās funkcijas vidējo kļūdu m_f izrādās noteikts ar formulu

$$m_f^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + k_3^2 m_3^2 + \ldots\ldots + k_r^2 m_r^2 \quad . \quad (103)$$

jeb

$$m_f = \pm \sqrt{k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + k_3^2 m_3^2 + \ldots\ldots + k_r^2 m_r^2} \quad (104).$$

Ieliekot simbolu $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots k_r$ vietā ar tiem līdz šim apzīmētos funkcijas parcialos atvasinājumus, galīgā veidā rakstam

$$m_f = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)_0^2 m_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_3}\right)_0^2 m_3^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_r}\right)_0^2 m_r^2} \quad (105).$$

Šī formula izteic t. s. kļūdu sakrāšanas likumu, pēc kura nosakama aprēķinātās funkcijas vidējā kļūda kā argumentu novērojumu vidējo kļūdu funkcija. Piezīmēsim, ka šis likums zīmējas tikai uz neatkarīgi atrastu argumentu funkcijām.

Apskatīsim vēl dažus svarīgākus atsevišķus gadijumus.

Lai ar argumentu novērotām vērtībām $l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots, l_r$, kuras atrastas ar vidējām kļūdām $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_r$, aprēķināta linearā funkcija

$$F = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots\ldots + a_r l_r \quad . \quad . \quad . \quad (106),$$

kur $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_r$ ir bez kļūdām, vai ar svarā nekrītošām kļūdām, doti koeficienti. Uz vispārējās formulas (105) pamata šīs funkcijas vidējā kļūda ir

$$m_f = \pm \sqrt{a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + a_3 m_3^2 + \ldots\ldots + a_r^2 m_r^2} = \pm \sqrt{[a^2 m^2]} \quad (107).$$

Ar $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_r = \overset{+}{\underset{-}{\text{vai}}} 1$ linearai funkcijai (106) pārejot algebraiskā sumā

$$F = \underset{-}{\overset{+}{\text{vai}}}\, l_1 \underset{-}{\overset{+}{\text{vai}}}\, l_2 \underset{-}{\overset{+}{\text{vai}}}\, l_3 \underset{-}{\overset{+}{\text{vai}}} \ldots\ldots \underset{-}{\overset{+}{\text{vai}}}\, l_r \quad \ldots\ldots \quad (108),$$

formula (107) pāriet veidā

$$m_f = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots\ldots + m_r^2} = \pm \sqrt{[mm]} \quad (109).$$

Ja pēdējā gadijumā visi argumenti atrasti ar vienādu noteiktību, t. i. $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots\ldots = m_r = m$, tad formulas (109) vietā iznāk vēl vienkāršākā

$$m_f = \pm m \sqrt{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (110).$$

Beidzot, ja linearai funkcijai (106) ir tikai viens arguments l, kurš novērots ar vidējo kļūdu m un ieiet aprēķinātā funkcijā ar koeficientu a, tad tādas funkcijas

$$F = a l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (111)$$

vidējā kļūda ir

$$m_f = \pm a m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (112).$$

Nosakot n e l i n e a r a s f u n k c i j a s vidējo kļūdu, daudzos gadijumos izrādas par izdevīgu pielietot kļūdu sakrāšanas likumu nevis pašai oriģinalfunkcijai, bet tās logaritmam, ja šim logaritmam ir argumentu logaritmu linearas funkcijas veids.

Tādā gadijumā kļūdu sakrāšanas likums pielietojams vienkāršākā veidā (107); bet par to, zinot pašu argumentu l vidējās kļūdas m, iepriekš jāaprēķina argumentu logaritmu log l vidējās kļūdas ${}_{\log}m$. Pielietojot kļūdu sakrāšanas likumu funkcijai log F, tieši atrod, saprotams, nevis pašas oriģinalfunkcijas F vidējo kļūdu m_f, bet log F vidējo kļūdu ${}_{\log}m_f$, no kuras beidzot jāpāriet uz meklēto m_f.

Pāreja no dotām argumentu l vidējām kļūdām m uz atbilstošām log l vidējām kļūdām ${}_{\log}m$ izdarama ar logaritmu tabulu palīdzību šādā veidā. Uzšķiram tabulā log l un izrakstam mantisu vienībās izteikto logaritma pieaugumu (tabulas diferenci) Δ, kurš atbilst vidējās kļūdas m vienībai. Uzskatot šo vidējo kļūdu m par argumenta l pietiekoši mazu pieaugumu, lai varētu pieņemt atbilstošo log l pieaugumu, t. i. meklēto logaritmisko kļūdu ${}_{\log}m$ par proporcionalu minētam m, praktiski pietiekošā tuvinājumā atrodam

$${}_{\log}m = \Delta \cdot m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (113).$$

Līdzīgā veidā nosakams sakars starp meklēto vidējo kļūdu m_f un atbilstošo uz kļūdu sakrāšanas likuma pamata tieši atrasto logaritmisko vidējo kļūdu ${}_{\log}m_f$. Šim nolūkam, saprotams, vajadzīgs uz aprēķinamās kļūdas m_f vienību attiecinātais log F pieaugums Δ_f, un sakarā ar to parastā kārtā jānosaka un jāuzmeklē tabulā log F.

Pāreja no m uz atbilstošiem $_{\log}m$ un no $_{\log}m_f$ uz atbilstošo m_f vispārīgi nepadara nopietnas grūtības, jo funkcijas vidējās kļūdas noteikšana parasti notiek līdztekus pašas funkcijas aprēķināšanai. Pašu funkciju aprēķinot logaritmiskā ceļā, šim nolūkam izrakstītie logaritmi, resp. to pieaugumi tieši lietojami funkcijas vidējās kļūdas noteikšanai.

Vēl piezīmēsim, ka pielietojot kļūdu sakrāšanas likumu skaitliskā rēķinā, visiem zem saknes esošiem locekļiem jābūt izteiktiem vienādās, pie tam tādās vienībās, kas atbilst meklētās vid. kļūdas vienībai. Tāpēc gadijumā, kad jāaprēķina vidējā kļūda garumam, kurš ir garumu un leņķu funkcija, svarā krītošo leņķu vidējās kļūdas jāieliek formulā nenosauktā veidā — radianos. Saprotams, tas vajadzīgs tikai tad, kad nosaka vidējo kļūdu tieši pašai funkcijai, jo pielietojot logaritmisko paņēmienu, argumentu logaritmiskās vidējās kļūdas visas tiek izteiktas vienādās nenosauktās vienībās, neatkarīgi no tā, vai paši argumenti ir garumi vai leņķi.

Lai paskaidrotu kļūdu sakrāšanas likuma praktisko pielietošanu, apskatīsim dažus skaitliskus piemērus.

1. piemērs. Plakanā trijstūrī izmērīti: mala b un piegulošie leņķi α un γ. Šo elementu novērotās vērtības ar atbilstošām vidējām kļūdām ir

$$b = 138{,}27 \pm 0{,}06 \text{ m}$$
$$\alpha = 83^0 15' 20'' \pm 15''$$
$$\gamma = 44^0 32' 10'' \pm 15''.$$

Jānosaka leņķim α pretējās malas garums a un atbilstošā vidējā kļūda m_a.

Meklētais malas garums, kā argumentu b, α, γ funkcija, nosacīts ar pazīstamo formulu

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin (\alpha + \gamma)}.$$

Tā kā a skaitliskais aprēķins uz šīs formulas pamata izdarams parastā kārtā, pie tā nepakavēsimies, bet tūliņ pāriesim pie vidējās kļūdas m_a aprēķina.

Ievērojot šinī gadijumā (nelineara funkcija) svarā krītošo vispārējo formulu (105), ar argumentu apaļotām skaitliskām vērtībām aprēķinam svarā krītošos parcialos atvasinājumus:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)_0 = \left(\frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \gamma)}\right)_0 = 1{,}257$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right)_0 = \left(b\,\frac{\sin(\alpha+\gamma)\cos\alpha - \cos(\alpha+\gamma)\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\gamma)}\right)_0 =$$

$$= \left(\frac{b\sin\gamma}{\sin^2(\alpha+\gamma)}\right)_0 = 155{,}3 \text{ m}$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \gamma}\right)_0 = \left(-\frac{b\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\gamma)}\cdot\cos(\alpha+\gamma)\right)_0 = 134{,}8 \text{ m.}$$

Ieliekot argumentu vidējo kļūdu skaitliskās vērtības, jāievēro, ka argumenti ir dažādas dabas lielumi: garums (b) un leņķi (α, γ); tāpēc leņķu α un γ vidējās kļūdas jāieliek radianos ($\rho = 206265''$). Tā tad

$$m_a = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)_0^2 m_b^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \alpha}\right)_0^2 m_\alpha^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \gamma}\right)_0^2 m_\gamma^2} =$$

$$= \pm\sqrt{1{,}257^2\cdot 0{,}06^2 + 155{,}3^2\cdot\left(\frac{15}{206265}\right)^2 + 134{,}8^2\cdot\left(\frac{15}{206265}\right)^2} =$$

$$= \pm\sqrt{0{,}0059} = \pm 0{,}07_7 \text{ m.}$$

Šo pašu uzdevumu atrisināsim vēl reizi, tagad pielietojot logaritmisko paņēmienu.

Lai malas garumu a noteicošā izteiksme būtu piemērota šī paņēmiena pielietošanai, par argumentiem uzskatīsim b, α un $(\alpha+\gamma)$. Tā tad iepriekš jānosaka $(\alpha+\gamma)$ un atbilstošā vidējā kļūda $m_{\alpha+\gamma}$. Ievērojot, ka leņķi α un γ abi novēroti ar vidējo kļūdu $\pm 15''$, pēc formulas (110) atrodam

$$m_{\alpha+\gamma} = \pm 15''\sqrt{2} = \pm 21''.$$

Tā tad svarā krītošie argumenti un to vidējās kļūdas ir

$$b = 138{,}27 \pm 0{,}06 \text{ m}$$
$$\alpha = 83^0 15'\ 20'' \pm 15''$$
$$(\alpha+\gamma) = 127^0 47'\ 30'' \pm 21''$$

un funkcijas a logaritmiskā izteiksme —

$$\log a = \log b + \log\sin\alpha - \log\sin(\alpha+\gamma).$$

Logaritmiskā ceļā aprēķinot pašu funkciju a, sakarā ar to izrakstam uz 1 m resp. uz 1″ attiecinātos atrasto logaritmu pieaugumus Δ un pēc formulas (113) aprēķinam logaritmiskās vidējās kļūdas ${}_{\log}m$:

$$\log b = 2{,}14\,073, \quad \Delta_b = 313, \quad {}_{\log}m_b = \pm 313 \times 0{,}06 = \pm 18{,}8$$

$$\log \sin \alpha = 9{,}99\,698, \quad \Delta_{\sin\alpha} = 0{,}017, \quad {}_{\log}m_{\sin\alpha} = \pm 0{,}017 \times 15 = \pm 0{,}3$$

$$-\log \sin(\alpha + \gamma) = 0{,}10\,227, \quad \Delta_{\sin(\alpha+\gamma)} = 0{,}17, \quad {}_{\log}m_{\sin(\alpha+\gamma)} = \pm 0{,}17 \times 21 = \pm 3{,}6$$

$$\log a = 2{,}23\,998, \quad \Delta_a = 249, \quad {}_{\log}m_a = \pm 249 \; m_a$$

$$a = 173{,}77 \text{ m}$$

Ar tādā veidā iegūtiem skaitliskiem datiem pēc formulas (109) aprēķinam

$${}_{\log}m_a = \pm 249\, m_a = \pm \sqrt{{}_{\log}m_b{}^2 + {}_{\log}m_{\sin\alpha}{}^2 + {}_{\log}m_{\sin(\alpha+\gamma)}{}^2} =$$

$$= \pm \sqrt{18{,}8^2 + 0{,}3^2 + 3{,}6^2} = \pm \sqrt{366{,}49} = \pm 19{,}1$$

un atrodam

$$m_a = \pm \frac{19{,}1}{249} = \pm 0{,}07_7 \text{ m}.$$

Atrastos rezultatus rakstam veidā

$$a = 173{,}77 \pm 0{,}07_7 \text{ m}.$$

2. piemērs. Trīs punkti P_1, P_2, P_3 dabā atrodas uz vienas taisnes. P_1 un P_2 uzmeklēti vienā, mērogā 1 : 5000 sastādītā planā, bet P_2 un P_3 — otrā, mērogā 1 : 4000 sastādītā planā. Attiecīgos planos mērogā 1 : 1 izmērot atstatumus starp P_1 un P_2, resp. P_2 un P_3 atbilstošiem punktiem, atrasti rezultati $86{,}5 \pm 0{,}2$ mm un $75{,}2 \pm 0{,}3$ mm. Uz šo datu pamata, pieņemot, ka plani sastādīti absoluti pareizi minētos mērogos, jānosaka atstatums s starp P_1 un P_3 dabā un atbilstošā vidējā kļūda m_s.

Ievērojot planu mērogus,

$$s = 5000 \times 86{,}5 + 4000 \times 75{,}2 = 733300 \text{ mm} = 733{,}3 \text{ m}.$$

Tā kā mērogu saucēji 5000 un 4000 uzskatami par absoluti pareizi dotiem koeficientiem, bet funkcijas s argumentu novērojumi 86,5 mm un 75,2 mm notikuši ar augšā minētām vidējām kļūdām, meklētā vidējā kļūda m_s nosakama pēc linearai funkcijai piemērotās formulas (107):

$$m_s = \pm \sqrt{5000^2 \times 0{,}2^2 + 4000^2 \times 0{,}3^2} = \pm \sqrt{2\,440\,000} = \pm 1\,562 \text{ mm} = \pm 1{,}6\text{m}$$

tā tad

$$s = 733{,}3 \pm 1{,}6 \text{ m}.$$

3. piemērs. Plakanā trijstūrī novēroti divi leņķi:

$$\alpha = 48^0 23'00'' \pm 30''$$
$$\beta = 73^0 16'40'' \pm 20''.$$

Jānosaka trešais leņķis γ un atbilstošā vidējā kļūda m_γ.

Meklētais leņķis nosakams pēc formulas

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) = 180^0 - (48^0 23'00'' + 73^0 16'40'') = 58^\circ 20'20''.$$

Šeit ir algebraiskas sumas gadijums; tā tad vidējā kļūda m_γ aprēķinama pēc formulas (109) parauga. Pie tam jāievēro, ka teoretisko leņķu sumu plakanā trijstūrī izteicošais skaitlis 180^0 uzskatams par zinamu bez kļūdas.

Tā tad

$$m_\gamma = \pm \sqrt{30^2 + 20^2} = \pm 36'',$$

un

$$\gamma = 58^0 20'20'' \pm 36''.$$

4. piemērs. Līmetņošanas gājienā ar 16 stacijām visās atsevišķās stacijās līmetņots ar vienādu noteiktību, kurai atbilst stacijas vidējā kļūda ± 1 mm. Ar kādu vidējo kļūdu m_h nosakama gājiena gala punktu augstumu starpība h, aprēķinot to ar šī līmetņojuma novērojumiem?

Apzīmējot atsevišķo staciju augstumu starpības ar $h_1, h_2, h_3, \ldots$ $\ldots, h_{16}$,

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots + h_{16},$$

pie kam šis algebraiskās sumas visi 16 sumandi doti ar vienu un to pašu vidējo kļūdu $m = \pm 1$ mm. Tā tad uz atbilstošās formulas (110) pamata atrodam

$$m_h = \pm 1 \sqrt{16} = \pm 4 \text{ mm}.$$

5. piemērs. Lietojot Porro tālmēru, kuram ar praktiski svarā nekrītošām kļūdām atrastas konstantas $k = 100$ un $c = 0$, novērots tālmēra parallaktiskam leņķim atbilstošais latas nogrieznis $l = 0{,}735 \pm$ $\pm 0{,}002$ m. Jānosaka atstatums d no instrumenta līdz latai un atbilstošā vidējā kļūda m_d.

Minētos apstākļos

$$d = k\,l = 100 \times 0{,}735 = 73{,}5 \text{ m},$$

pie kam k ir bez kļūdas dots koeficients, bet l — ar vidējo klūdu $m = \pm 0{,}002$ m taisīts novērojums. Tā tad uz formulas (112) pamata

$$m_d = \pm 100 \times 0{,}002 = \pm 0{,}20 \text{ m},$$

un

$$d = 73{,}5 \pm 0{,}20 \text{ m}.$$

§ 12. Dažādu kļūdu avotu ietekmes un to sakrāšanās.

Analizējot kļūdu sakrāšanas likumu izteicošo formulu (105) redzam, ka zem saknes zīmes esošā izteiksmē ieiet tik atsevišķu locekļu, cik ir funkcijas argumentu, kas atrasti ar zinamām vidējām kļūdām. Pie tam katra tāda argumenta vidējā kļūda m ieiet tikai vienā loceklī, neatkārtojoties pārējos. Tā tad atsevišķos locekļos izpaužās attiecīgo novērojumu vidējo kļūdu kvadratā paceltās ietekmes uz aprēķinātās funkcijas vidējo kļūdu. Apzīmējot argumentu vidējo kļūdu m_1, m_2, $m_3, \ldots$, m_r ietekmes uz funkcijas vidējo kļūdu ar M_1, M_2, $M_3, \ldots$ .., M_r, atrodam, ka

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \pm \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0 m_1 \\ M_2 &= \pm \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)_0 m_2 \\ M_3 &= \pm \left(\frac{\partial f}{\partial l_3}\right)_0 m_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_r &= \pm \left(\frac{\partial f}{\partial l_r}\right)_0 m_r \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (113a).$$

Ievērojot to, formula (105) rakstama veidā

$$m_f = \pm \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \ldots\ldots + M_r^2} \quad . \; . \quad (114).$$

Ar šo formulu parādīts, pēc kāda likuma atsevišķo argumentu novērojumiem piemītošo vidējo kļūdu ietekmes sakrājas aprēķinātās funkcijas vidējā kļūdā.

Līdzīgā veidā, kā aprēķināta funkcija sastādas no saviem argumentiem — ar zinamām vidējām kļūdām izdarītiem novērojumiem, bieži arī kāds komplicētāks novērojums savukārt aptver vairākus elementarus darbus, kuri katrs par sevi notiek ar zinamu noteiktību resp. atbilstošu vidēju kļūdu, un ar to ietekmē novērojuma vidējo kļūdu. Piem., taisot novērojumu, kuru saucam par leņķa mērīšanu, instruments jācentrē un jāhorizontē, tālskatis jāuzved uz skatamiem punktiem, jānolasa limbs, u. t. t., un katrs tāds atsevišķs elementars darbs notiek ar savu vidējo kļūdu, kas, ar pārējām kopā sakrājoties, veido leņķa mērijuma vidējo kļūdu.

Tas pats sakams arī par dažādiem apstākļiem, kas, iedarbojoties kā novērojuma kļūdu avoti, katrs par sevi ietekmē un kopā veido novērojuma vidējo kļūdu.

Jādomā, ka novērojuma atsevišķo elementaro darbu kļūdu vai kļūdu avotu ietekmes sakrājas pēc tā paša ar formulu (114) izteiktā likuma, pie kam tādā gadijumā lielumi M jāsaprot kā atsevišķo elementaro darbu noteiktības, resp. atsevišķo kļūdu avotu ietekmes uz novērojuma vidējo kļūdu m_f.

Kas zīmējas uz šī iztirzājuma praktisko nozīmi, aizrādīsim uz sekojošo.

Bieži novērojumus taisa nevis tāpēc, ka būtu vajadzīgi novērojumu rezultati paši par sevi, bet lai ar šiem rezultatiem aprēķinātu citus lielumus, kas izsakami kā novēroto lielumu funkcijas. Tādos gadijumos ļoti vēlams a priori zināt, kuri novērojumi jātaisa ar sevišķu noteiktību, un kuri drīkst būt arī mazāk precizi, lai ar novērojumu rezultatiem aprēķinātais lielums iznāktu ar vēlamo noteiktību.

Šinī ziņā vērtīgas formulas (113a). Tās rāda, ka katra atsevišķa novērojuma vidējās kļūdas ietekme M ir divu faktoru produkts. Viens — $\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_0$ tipa — faktors ir no svarā krītošās aprēķinātās funkcijas veida atkarīgs koeficients, otrais — attiecīgā novērojuma vidējā kļūda. Ja viens faktors mazs, tad otrais var būt atbilstoši lielāks, lai attiecīgā ietekme M tomēr paliktu vēlamās robežās. Tā tad tādos apstākļos, kad kādam novērojumam atbilstošais koeficients $\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_0$ ir mazs, attiecīgo novērojumu drīkst taisīt ar lielāku vidēju kļūdu, t. i. ar mazāku noteiktību. Otrādi, liels koeficients $\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_0$ norāda, ka attiecīgais novērojums jātaisa precizi, lai rezultatam būtu vajadzīgā noteiktība.

Bieži gadās, ka zinamos apstākļos taisot novērojumu, kurš aptver vairākus elementarus darbus, zinamas šo elementaro darbu vidējās kļūdas resp. to ietekmes uz novērojuma vidējo kļūdu. Arī gadās, ka zinami svarā krītošie kļūdu avoti un to ietekmes. Tādos gadijumos uz formulas (114) pamata a priori nosakama novērojuma rezultatā sagaidamā vidējā kļūda.

1. piemērs. Lai nosacītu dabā horizontalu garumu s_0, bieži izmēra atbilstošo slīpo garumu s un slīpuma leņķi α. Jānoskaidro, kādos apstākļos jāizmēra precizi slīpais garums s, bet drīkst ar mazāku noteiktību nosacīt slīpuma leņķi α, un kad jādara otrādi.

Meklētais horizontalais garums, kā argumentu s un α funkcija, nosakams pēc formulas

$$s_0 = s \cos \alpha.$$

Apzīmējot s un α novērojumu vidējās kļūdas ar m_s un m_α, atbilstošās ietekmes uz aprēķinātā horizontalā garuma s_0 vidējo kļūdu pēc formulām (113a) ir

$$M_s = \pm \left(\frac{\partial s_0}{\partial s}\right)_0 m_s = \pm (\cos \alpha)_0 m_s$$

$$M_\alpha = \pm \left(\frac{\partial s_0}{\partial \alpha}\right)_0 m_\alpha = \mp (s \sin \alpha)_0 m_\alpha.$$

Šīs formulas var rakstīt veidā

$$\frac{M_s}{s} = \pm (\cos \alpha)_0 \frac{m_s}{s}$$

$$\frac{M_\alpha}{s} = \mp (\sin \alpha)_0 m_\alpha.$$

Pēdējās formulas izsaka sekojošo. Maza slīpuma leņķa α gadijumā $\cos \alpha$ tuvs skaitlim 1, bet $\sin \alpha$ — tuvs nullei. Tā tad uz s attiecinātā kļūdas m_s relativā ietekme $\frac{M_s}{s}$ gandrīz sasniedz pašu slīpā garuma s mērīšanas relativo vidējo kļūdu $\frac{m_s}{s}$; bet kļūdas m_α relativā ietekme $\frac{M_\alpha}{s}$ ir tikai neliela leņķa α kļūdas m_α daļa, pie kam jāievēro, ka šī kļūda jāieliek nenosauktā veidā — radianos. Tā tad minētos apstākļos slīpais garums s jāmēra precizi, bet slīpuma leņķi α drīkst nosacīt ar mazāku noteiktību, neriskējot, ka tas varētu manamā mērā pazemināt galīgā rezultata noteiktību. Līdzīgā veidā viegli izpētams, ka liela slīpuma leņķa α gadijumā, otrādi, sevišķa vērība jāpiegriež šī slīpuma leņķa precizai noteikšanai, bet slīpo garumu s var nosacīt ar mazāku noteiktību.

2. piemērs. Mērot horizontalu leņķi abos tālskaša stāvokļos un pie katras vizuras nolasot limbu ar abiem nonijiem, katra vizura notiek ar vidējo kļūdu $m_v = \pm 5''$, bet katrs atsevišķs nolasijums — ar vidējo kļūdu $m_n = \pm 10''$.

Jānosaka vizuru un nolasijumu vidējo kļūdu ietekmes M_v un M_n uz leņķa mērijuma vidējo kļūdu m_ω, un — ignorējot pārējos kļūdu avotus — pati m_ω.

Katrā atsevišķā tālskaša stāvoklī izmērīto leņķi var saprast kā kreisam un labam skatamam punktam atbilstošo tālskaša vizuras ass virzienu starpību. Pirmā un otrā tālskaša stāvoklī novēroto šo virzienu starpību vidējais izsaka leņķa mērīšanas rezultatu. Katrs tālskaša vizuras ass virziens noteikts ar attiecīgo vizuru V, bet tiek izteikts ar atbilstošo nolasijumu N, kurš savukārt ir ar pirmo un otro noniju taisīto nolasijumu I un II vidējais. Minētos elementus apzīmēsim ar indeksiem k un l, skatoties pēc tā, vai tie atbilst kreisam vai labam skatamam punktam, un bez tam ar ′ un ″, skatoties pēc tā, vai tie zīmējas uz pirmo vai otro tālskaša stāvokli.

Lai nosacītu ietekmi M_v, apskatīsim leņķa mērīšanas rezultatu tādā veidā, kā tas noteikts ar notikušām atsevišķām vizurām, pagaidam ignorējot taisītos nolasijumus. Šis rezultats ir

$$\omega_v = \frac{(V_l' - V_k') + (V_l'' - V_k'')}{2},$$

un tā vidējā kļūda uzskatama par identisku ar meklēto vizuru kļūdu ietekmi M_v. Ievērojot to, un zinot, ka katra atsevišķa vizura V notiek ar vidējo kļūdu m_v, uz kļūdu sakrāšanas liķuma pamata atrodam

$$M_v = \pm \frac{m_v}{2}\sqrt{4} = \pm m_v.$$

Lai nosacītu ietekmi M_n, apskatīsim leņķa mērīšanas rezultatu tādā veidā, kā tas izsakams ar taisītiem atsevišķiem nolasijumiem, tagad ignorējot notikušās vizuras. Tad leņķis izsakams nolasijumu funkcijas

$$\omega_n = \frac{(N_l' - N_k') + (N_l'' - N_k'')}{2} =$$

$$= {}^1/_2\left\{\left(\frac{I_l' + II_l'}{2} - \frac{I_k' + II_k'}{2}\right) + \left(\frac{I_l'' + II_l''}{2} - \frac{I_k'' + II_k''}{2}\right)\right\}$$

veidā, un šīs funkcijas vidējā kļūda uzskatama par identisku ar meķlēto nolasijumu kļūdu ietekmi M_n. Ievērojot to un zinot, ka katrs atsevišķs nolasijums notiek ar vidējo kļūdu m_n, uz kļūdu sakrāšanas likuma pamata atrodam

$$M_n = \pm \frac{m_n}{4}\sqrt{8} = \pm \frac{m_n}{\sqrt{2}}.$$

Tā tad meklētās vizuru un nolasijumu kļūdu ietekmes ir

$$M_v = \pm m_v = \pm 5''$$

$$M_n = \pm \frac{m_n}{\sqrt{2}} = \pm \frac{10''}{\sqrt{2}};$$

tām sakrājoties pēc formulas (114) veidā izteiktā likuma, leņķa mērījuma vidējā kļūda iznāk

$$m_\omega = \pm\sqrt{m_v^2 + \frac{m_n^2}{2}} = \pm\sqrt{5^2 + \frac{10^2}{2}} = \pm 8{,}7''.$$

§ 13. Nejaušu un regularu kļūdu kopīgā ietekme.

Apskatīsim tagad gadijumu, kad novērojuma noteiktību ietekmējošo atsevišķo darbu vai kļūdu avotu starpā ir tāds, no kura rodas r e g u l a r a s, sistematiskas vai zīmes ziņā vienpusīgas, kļūdas.

Līdzšinējie uz kļūdu ietekmju sakrāšanos attiecīgie iztirzājumi zīmējas uz pilnīgi neregularām, t. i. kā absolutā lieluma, tā arī zīmes ziņā nejaušām, kļūdām, jo attiecīgā formula (114) atrasta kā tiešs secinājums no kļūdu sakrāšanas likuma (105).

Atgriežoties pie iztirzājuma, kura rezultatā atrasta formula (105), pieņemsim tagad, ka vienādos apstākļos atkārtojoties kāda funkcijas argumenta novērojumiem, šie novērojumi, piem., ${}_1l_1, {}_2l_1, {}_3l_1, \ldots, {}_nl_1$, visi notikuši ar vienādu sistematisku kļūdu σ_1. Tad absolutā lieluma un zīmes ziņā dažādo nejaušo kļūdu ${}_1\varepsilon_1, {}_2\varepsilon_1, {}_3\varepsilon_1, \ldots, {}_n\varepsilon_1$ vietā jāliek vienmēr viena un tā pati sistematiskā kļūda σ_1. Sakarā ar to formulā (102) locekļa $k_1^2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_1]}{n}$ vietā stājas $k_1^2\frac{n\sigma_1^2}{n} = k_1^2\sigma_1^2$. Bez tam locekļi $k_1k_2\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_2]}{n}$, $k_1k_3\frac{[\varepsilon_1\varepsilon_3]}{n}\ldots\ldots$, jāatvieto ar atbilstošiem $k_1k_2\sigma_1\frac{[\varepsilon_2]}{n}$, $k_1k_3\sigma_1\frac{[\varepsilon_3]}{n}, \ldots\ldots$, kuri, tāpat kā viņos ieejošās sumas $[\varepsilon_2], [\varepsilon_3], \ldots\ldots$, konverģē pret nulli.

Tā tad šeit apskatītā gadijumā kļūdu sakrāšanas likums (105) pāriet šādā, attiecībā uz vienu, pirmo, locekli grozītā veidā

$$m_f = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0^2\sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)_0^2 m_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_3}\right)_0^2 m_3^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial l_r}\right)_0^2 m_r^2} \quad (115).$$

Tas nozīmē, ka ar formulu (114) izteiktais kļūdu ietekmju sakrāšanas likums paliek spēkā arī tad, ja starp atsevišķām kļūdu ietekmēm M ir tāda, piem., M_1, kas vispārējā veidā $M_1 = \pm\left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)_0\sigma_1$ izsaka ietekmi no attiecīgam argumentam, resp. atsevišķam darbam piemītošās sistematiskās kļūdas σ_1.

Līdzīgā veidā pierādams, ka likums (114) paliek spēkā arī tad, ja kāda ietekme M radusies no t. s. vienpusīgas kļūdas, kura gan nejauša absolutā lieluma ziņā, bet vienmēr gadās ar vienu un to pašu zīmi.

Piemērs. Mērot dabā garumu ar mērsloksni, gadās daži tādi atsevišķi darbi, kā piem., mērsloksnes garumam atbilstošo posmu apzīmēšana dabā, kas notiek ar absolutā lieluma un zīmes ziņā neregularām nejaušām kļūdām. Bet ir arī tādi atsevišķi darbi vai apstākļi, kā, piem., mērsloksnes orientēšana mērītās linijas virzienā, mērsloksnes garuma noteikšanas kļūda, u. t. l., no kuriem rodas vienpusīgas vai sistematiskas kļūdas mērītās linijas atsevišķos posmos.

Kas zīmējas uz neregularām kļūdām, kas piemīt mērsloksnes garumam atbilstošiem mērītās linijas posmiem, tad var pieņemt, ka atbilstošā vidējā nejaušā kļūda m_ε ir vienāda visos posmos. Tāpēc, apzīmējot atlikto posmu skaitu ar n, darba nejaušo kļūdu ietekme M_ε uz mērīšanas rezultatu pēc kļūdu sakrāšanas likuma ir

$$M_\varepsilon = \pm m_\varepsilon \sqrt{n}.$$

Turpretim atsevišķiem atliktiem posmiem piemītošās sistematiskās un vienpusīgās kļūdas vienkārši algebraiski sumējas kā katrā atsevišķā posmā, tā arī visā mērijumā. Tāpēc, ja zem atsevišķa atlikta posma regularās kļūdas σ sapratīsim atbilstošo regularo — sistematisko un vienpusīgo — kļūdu pa atsevišķiem posmiem veidoto sumu vidējo vērtību, šīs vidējās regularās kļūdas σ ietekme M_σ uz mērīšanas rezultatu ir

$$M_\sigma = \sigma n.$$

Šīm ietekmēm sakrājoties pēc likuma (114), atrodam mērīšanas rezultata vidējo kļūdu

$$m = \pm \sqrt{(m_\varepsilon \sqrt{n})^2 + (\sigma n)^2} = \pm \sqrt{m_\varepsilon^2 n + \sigma^2 n^2}.$$

§ 14. Linearas funkcijas svars.

Apskatīsim linearu funkciju

$$F = a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \dots + a_r l_r \quad . \quad . \quad . \quad (116),$$

kur $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ ir bez kļūdām doti koeficienti, bet argumenti $l_1, l_2, l_3, \dots, l_r$ — ar svariem $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ notikuši novērojumi.

Apzīmējot atbilstošās vidējās kļūdas ar m_1, m_2, m_3, , , , . ., m_r, funkcijas F vidējā kļūda m_f uz kļūdu sakrāšanas likuma pamata ir

$$m_f = \pm \sqrt{a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + a_3^2 m_3^2 + \ldots\ldots + a_r^2 m_r^2};$$

tā tad

$$m_f^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + a_3^2 m_3^2 + \ldots\ldots + a_r^2 m_r^2 \quad . \quad (117).$$

Lai pieņemtā svaru sistemā funkcijai F atbilstošais svars ir p_f, bet svara vienības vidējā kļūda — m. Tad visas minētās vidējās kļūdas, pēc formulu (95) parauga, var izteikt šādā veidā:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{m}{\sqrt{p_1}} \\ m_2 &= \frac{m}{\sqrt{p_2}} \\ m_3 &= \frac{m}{\sqrt{p_3}} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ m_r &= \frac{m}{\sqrt{p_r}} \\ m_f &= \frac{m}{\sqrt{p_f}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (118).$$

Ieliekot šīs izteiksmes formulā (117), atrodam

$$\frac{1}{p_f} m^2 = \frac{a_1^2}{p_1} m^2 + \frac{a_2^2}{p_2} m^2 + \frac{a_3^2}{p_3} m^2 + \ldots\ldots + \frac{a_r^2}{p_r} m^2,$$

un, saīsinot ar m^2,

$$\frac{1}{p_f} = \frac{a_1^2}{p_1} + \frac{a_2^2}{p_2} + \frac{a_3^2}{p_3} + \ldots\ldots + \frac{a_r^2}{p_r} = \left[\frac{aa}{p}\right] \quad . \; . \quad (119).$$

Tā tad funkcijas svars ir

$$p_f = \frac{1}{\left[\frac{aa}{p}\right]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (120).$$

Piezīmēsim, ka, tāpat kā kļūdu sakrāšanas likums, arī šis uz linearas funkcijas svaru attiecīgais likums zīmējas tikai uz neatkarīgi atrastu argumentu funkcijām.

Apskatīsim vēl dažus atsevišķus gadijumus.

1) $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots\ldots = p_r = p$;

tad

$$p_f = \frac{1}{\frac{[aa]}{p}} = \frac{p}{[aa]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (121).$$

Ja pie tam $p = 1$, tad

$$p_f = \frac{1}{[aa]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (122).$$

2) $/a_1/ = /a_2/ = /a_3/ = \ldots\ldots = /a_r/ = 1$ *) (algebraiskas sumas gadijums); tad

$$p_f = \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (123).$$

Ja pie tam $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots\ldots = p_r = p$, tad

$$p_f = \frac{1}{r\frac{1}{p}} = \frac{p}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (124).$$

3) $F = a\,l$, pie kam funkcijas vienīgam argumentam l ir svars p; tad

$$p_f = \frac{1}{\frac{a^2}{p}} = \frac{p}{a^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (125).$$

Piemērs. Plakanā trijstūrī izmērīti divi leņķi, pie kam rezultati α un β atrasti ar svariem $p_\alpha = 2$ un $p_\beta = 3$. Jānosaka ar α un β aprēķinātā trešā leņķa γ svars p_γ.

Aprēķinātais trešais leņķis

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

ir argumentu α un β lineara funkcija, kur abiem argumentiem ir koeficients -1. Tā tad pēc formulas (123) meklētais svars ir

$$p_\gamma = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{6}{5}.$$

§ 15. Novērojumu vidējās kļūdas praktiskā noteikšana.

Bieži vēlams nosacīt zinamos apstākļos notiekošu novērojumu noteiktību, resp. atbilstošo vidējo kļūdu. Tas padarams pēc dažādiem paņēmieniem.

---

*) Apzīmējums // lietots kā absolutās vērtības simbols.

Dažreiz ir iespējams atrast novērojumu raksturam atbilstošu lielumu, kura īstā vērtība zinama. Tādā gadijumā, atkārtoti novērojot šo lielumu un salīdzinot rezultatus ar novērotā lieluma īsto vērtību, var nosacīt atsevišķo novērojumu īstās kļūdas ε un pēc formulas (53) aprēķināt novērojumu vidējo kļūdu m.

Bet lielumi, kuru īstās vērtības noteikti zinamas, sastopami tikai ļoti reti. Tāpēc minēto paņēmienu bieži pielieto šādā grozijumā. Kā novērošanas objektu lietojot lielumu ar nezinamu īstu vērtību, šo lielumu novēro pēc tāda paņēmiena un ar tādiem instrumentaliem līdzekļiem, lai atrastā rezultata noteiktība būtu daudz augstāka par interesējošo novērojumu noteiktību. Piem., nosakot vidējo kļūdu, ar kuru notiek horizontala leņķa mērīšana ar $^1/_2$-minutes teodolitu, var lietot leņķi, kurš vairākos atkārtojumos izmērīts ar 1-sekundes instrumentu. Tādos apstākļos precizi atrastais rezultats, salīdzinot ar interesējošo novērojumu rezultatiem, uzskatams par praktiski identisku ar novērotā lieluma īsto vērtību.

Var iet vēl vienu soli tālāk un, lietojot tos pašus novērojumus, kuriem jānosaka vidējā kļūda, nosacīt pietiekošā tuvinājumā šim nolūkam novēroto lielumu īstās vērtības. Tādā gadijumā novērojumi jātaisa lielākā skaitā, neka tas nepieciešams novēroto lielumu noteikšanai, lai būtu iespējams izdarīt novērojumu izlīdzināšanu. Pēc notikušās izlīdzināšanas salīdzinot atrastās novērojumu izlīdzinātās vērtības ar neizlīdzinātiem novērojumiem, nosakamas novērojumu šķietamās kļūdas, un, izejot no tām, tad var atrast novērojumu vidējo kļūdu. Kā redzams, šis paņēmiens saistīts ar novērojumu izlīdzināšanu. Tāpēc pagaidām nepakavējoties pie šī paņēmiena sīkumiem, atliksim to līdz novērojumu izlīdzināšanas teorijas iztirzāšanai.

Beidzot, minēsim vēl ceturtu paņēmienu, pēc kura novērojumu vidējā kļūda nosakama izejot no īstām kļūdām un pielietojot kļūdu sakrāšanas likumu, pat ja novēroto lielumu īstās vērtības nav zinamas. Tādam nolūkam taisa t. s. dubultnovērojumus, kurus apskatīsim nākošā paragrafā.

§ 16. Dubultnovērojumi.

Dubultnovērojumu gadijums ir, kad vienādas dabas lielumi novēroti dubulti, katrs divreiz ar vienādu noteiktību. Skatoties pēc tā, vai uz atsevišķiem lielumiem attiecīgie dubultnovērojumi taisīti visi ar vienādu, vai ar dažādu noteiktību, izšķir vienādas un dažādas noteiktības dubultnovērojumus. Apskatīsim atsevišķi šos abus gadijumus.

1) Vienādas noteiktības dubultnovērojumi.

Lai, ar vienādu noteiktību dubulti novērojot n lielumus X_1, X_2, $X_3, \ldots, X_n$, dabūti rezultati

$$\left.\begin{array}{l} l_1' \text{ un } l_1'' \text{ ar pretrunu } l_1''-l_1'=\Delta_1 \\ l_2' \;\; „ \;\; l_2'' \;\; „ \;\; „ \;\; l_2''-l_2'=\Delta_2 \\ l_3' \;\; „ \;\; l_3'' \;\; „ \;\; „ \;\; l_3''-l_3'=\Delta_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_n' \;\; „ \;\; l_n'' \;\; „ \;\; „ \;\; l_n''-l_n'=\Delta_n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (126).$$

Ja visi novērojumi l būtu notikuši absoluti pareizi, bez kļūdām, tad visas pretrunas Δ būtu vienādas ar nulli. Tā tad katrai pretrunai Δ ir īstā vērtība 0, un tāpēc šo pretrunu īstās kļūdas ir

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1=\Delta_1-0=\Delta_1 \\ \varepsilon_2=\Delta_2-0=\Delta_2 \\ \varepsilon_3=\Delta_3-0=\Delta_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n=\Delta_n-0=\Delta_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (127).$$

Ievērojot formulu (53), pretrunas vidējā kļūda ir

$$m_\Delta=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (128).$$

Izejot no tās un pielietojot kļūdu sakrāšanas likumu, var atrast atsevišķa novērojuma l vidējo kļūdu. Kā zinams, katra pretruna Δ ir atbilstošo novērojumu l' un l'' starpība:

$$\Delta=l''-l' \quad \ldots\ldots \quad (129).$$

Tā kā visi novērojumi l'' un l' pēc pieņēmuma taisīti ar vienādu noteiktību, tā tad ar vienādu vidējo kļūdu m, tad pēc formulas (110)

$$m_\Delta=\pm m\sqrt{2} \quad \ldots\ldots \quad (130),$$

pie kam m_Δ apzīmē pretrunas Δ vidējo kļūdu, kura savukārt pēc formulas (128) nosakama kā visu dubultnovērojumu pretrunu funkcija.

No formulām (130) un (128) seko, ka atsevišķa novērojuma vidējā kļūda ir

$$m=\pm\frac{m_\Delta}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{2n}} \quad \ldots\ldots \quad (131).$$

Sakarā ar to piezīmēsim, ka dubultnovērojuma abu atsevišķo novērojumu l' un l'' aritmetiskā vidējā

$$l=\frac{l'+l''}{2} \quad \ldots\ldots \quad (132)$$

vidējā kļūda m_v, atkal uz kļūdu sakrāšanas likuma pamata, ir

$$m_v = \pm \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (133).$$

Piemērs. Ar vienādu noteiktību dubulti novērojot 10 leņķus, dabūti apakšā atzīmētie rezultati l′ un l″ (atbilstošiem novērojumiem neatšķiroties grados, novērojumiem l″ atzīmētas tikai minutas). Jānosaka atsevišķa novērojuma vidējā kļūda m un dubultnovērojuma yidēja l vidējā kļūda m_v.

	l′	l″	Δ=l″−l		ΔΔ
1)	197° 25,5′	24,7′		−0,8′	0,64
2)	179 04,6	04,4		−0,2	0,04
3)	147 01,0	01,7	+0,7		0,49
4)	245 10,2	11,3	+1,1		1,21
5)	202 01,0	01,0	0,0		0,00
6)	179 59,9	59,3		−0,6	0,36
7)	193 51,8	51,2		−0,6	0,36
8)	181 16,0	16,6	+0,6		0,36
9)	171 08,0	08,9	+0,9		0,81
10)	199 41,9	41,6		−0,3	0,09
	219,9	220,7	+3,3	−2,5	4,36 = [ΔΔ].
		220,7′ − 219,9′	= +0,8′		

(aritmetikas kontrole.)

$$m = \pm \sqrt{\frac{4{,}36}{2 \times 10}} = \pm 0{,}5'; \qquad m_v = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4{,}36}{10}} = \pm 0{,}3'.$$

2) Dažādas noteiktības dubultnovērojumi.

Lai atkal, dubulti novērojot n lielumus X_1, X_2, X_3 ....., X_n, dabūti rezultati

$$\left.\begin{array}{llll} l_1' & \text{un } l_1'' & \text{ar pretrunu} & l_1'' - l_1' = \Delta_1 \\ l_2' & \text{,, } l_2'' & \text{,,} \quad \text{,,} & l_2'' - l_2' = \Delta_2 \\ l_3' & \text{,, } l_3'' & \text{,,} \quad \text{,,} & l_3'' - l_3' = \Delta_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_n' & \text{,, } l_n'' & \text{,,} \quad \text{,,} & l_n'' - l_n' = \Delta_n \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (134),$$

un lai atkal katrā dubultnovērojumā abi atsevišķie novērojumi taisīti ar vienādu noteiktību. Bet tagad pieņemsim, ka dažādiem dubultnovērojumiem ir dažāda noteiktība, kura relativā veidā izteikta ar svariem $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Izejot no dubultnovērojumu pretrunām Δ un ievērojot minētos svarus, nosacīsim svara vienības vidējo kļūdu m.

Tādam nolūkam iedomāsimies katru tipa

$$l'' - l' = \Delta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (135)$$

izteiksmi reizinātu ar $\sqrt{p}$, kur p apzīmē attiecīgā izteiksmē ieejošo novērojumu l' un l'' svaru. Tādā veidā rodas tipa

$$\sqrt{p}\, l'' - \sqrt{p}\, l' = \sqrt{p}\, \Delta \quad \ldots \ldots \quad (136)$$

jauna izteiksme, kura no (135) atšķiras ar to, ka l' un l'' vietā stājušās šo novērojumu funkcijas $\sqrt{p}\, l'$ un $\sqrt{p}\, l''$, bet pretrunas Δ vietā — minēto novērojumu funkciju pretruna $\sqrt{p}\, \Delta$.

Ievērojot, ka funkciju $\sqrt{p}\, l'$ un $\sqrt{p}\, l''$ kopīgais koeficients ir attiecīgo novērojumu l' un l'' svara kvadratsakne, minēto funkciju svars, pēc formulas (125), ir

$$p_f = \frac{p}{(\sqrt{p})^2} = 1 \quad \ldots \ldots \quad (136a).$$

Tā tad funkcijas $\sqrt{p}\, l'$ un $\sqrt{p}\, l''$ uzskatamas par novērojumiem l' un l'' atbilstošiem iedomātiem novērojumiem, kas radušies novērojumus l' un l'' itkā reducējot uz svaru 1.

Pēc augšā minētā parauga veidojam dubultnovērojumiem (134) atbilstošos uz svaru 1 reducētos dubultnovērojumus

$$\left.\begin{array}{llll}
\sqrt{p_1}\, l_1' & \text{un } \sqrt{p_1}\, l_1'' & \text{ar pretrunu} & \sqrt{p_1}\, l_1'' - \sqrt{p_1}\, l_1' = \sqrt{p_1}\, \Delta_1 \\
\sqrt{p_2}\, l_2' & \text{,, } \sqrt{p_2}\, l_2'' & \text{,, \quad ,,} & \sqrt{p_2}\, l_2'' - \sqrt{p_2}\, l_2' = \sqrt{p_2}\, \Delta_2 \\
\sqrt{p_3}\, l_3' & \text{,, } \sqrt{p_3}\, l_3'' & \text{,, \quad ,,} & \sqrt{p_3}\, l_3'' - \sqrt{p_3}\, l_3' = \sqrt{p_3}\, \Delta_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\sqrt{p_n}\, l_n' & \text{,, } \sqrt{p_n}\, l_n'' & \text{,, \quad ,,} & \sqrt{p_n}\, l_n'' - \sqrt{p_n}\, l_n' = \sqrt{p_n}\, \Delta_n
\end{array}\right\} \quad (137).$$

Šinī sistemā katram atsevišķam iedomātam novērojumam ir svars 1, ja svarus skaita dubultnovērojumiem (134) pieņemtā sistemā. Tā tad jebkurš sistemas (137) atsevišķs novērojums ir pieņemtai svaru sistemai atbilstošs svara vienības novērojums, un šī iedomātā novērojuma vidējā kļūda — meklētā svara vienības vidējā kļūda m.

Ievērojot, ka visiem iedomātiem dubultnovērojumiem (137) ir vienāda noteiktība, sistemas (137) atsevišķa novērojuma vidējā kļūda, tā tad dubultnovērojumu sistemai (134) atbilstošā svara vienības vidējā kļūda, nosakama pēc formulas (131) parauga:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (138).$$

Svara vienības vidējā kļūda kopā ar attiecīgo novērojumu svariem izsmeļoši raksturo šo novērojumu noteiktību, jo zinot minētos elementus, atsevišķo novērojumu l' resp. l'' vidējās kļūdas nosakamas pēc formulām (95).

Svara vienības dubultnovērojuma atsevišķo novērojumu aritmetiskā vidējā

$$l = \frac{l' + l''}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (139)$$

vidējā kļūda uz kļūdu sakrāšanas likuma pamata ir

$$m_v = \pm \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (140).$$

Piemērs. Dubulti līmetņojot 10 dažāda garuma gājienus un pieņemot svarus vienādus ar kilometros izteikto gājienu garumu pretējām vērtībām, atrastas apakšā atzīmētās augstumu starpības l' un l'' ar atbilstošiem svariem p. Jānosaka svara vienības vidējā kļūda m un atbilstošā dubultlīmetņojuma vidējā kļūda m_v (pieņemtā svaru sistēmā tās identiskas ar vienkārša resp. dubulta līmetņojuma t. s. vidējo kilometra kļūdu).

	l'	l''	Δ	$\Delta\Delta$	p	$p\Delta\Delta$
1)	+ 0,225 m	+ 0,225 m	0 mm	0	0,50	0,00
2)	+ 2,810	+ 2,807	− 3	9	0,50	4,50
3)	+ 1,063	+ 1,061	− 2	4	0,50	2,00
4)	− 0,672	− 0,670	+ 2	4	0,50	2,00
5)	+ 0,454	+ 0,449	− 5	25	0,33	8,33
6)	− 0,070	− 0,072	− 2	4	0,50	2,00
7)	− 2,716	− 2,715	+ 1	1	1,00	1,00
8)	− 0,856	− 0,856	0	0	1,00	0,00
9)	− 0,211	− 0,205	+ 6	36	0,33	12,00
10)	− 0,031	− 0,025	+ 6	36	0,33	12,00
	− 0,004	− 0,001	+ 15 − 12			43,83 = [pΔΔ]
	− 1 mm	− (− 4 mm)	= + 3			

(aritmetikas kontrole)

$$m = \pm \sqrt{\frac{43,83}{2 \times 10}} = \pm 1,5 \text{ mm}; \quad m_v = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{43,83}{10}} = \pm 1,0 \text{ mm}$$

II. Novērojumu izlīdzināšana pēc vismazāko kvadratu metodes.

(Vispārējā teorija).

§ 17. Vismazāko kvadratu princips.

Meklētu lielumu noteikšanai vajadzīgos novērojumus bieži taisa lielākā skaitā, nekā tas dotam nolūkam nepieciešams. Pat pēc eventuali notikušu rupju un sistematisku kļūdu uzmeklēšanas un likvidēšanas, piemītošo neizbēgamo nejaušo kļūdu dēļ, novērojumi parasti ir pretrunīgi, t. i. neizpilda apstākļiem atbilstošos teoretiskos noteikumus. Piem., atkārtoti novērojot vienu un to pašu lielumu, atsevišķie rezultati nav pavisam vienādi; trijstūrī vai vispārīgi slēgtā poligonā izmērīto leņķu suma atšķiras no šīs sumas teoretiskās vērtības, u. t. t.

Lai likvidētu šīs pretrunas, jāizdara novērojumu izlīdzināšana, t. i. novērojumiem jāpieliek tādi izlabojumi, lai izlabotie jeb izlīdzinātie novērojumi būtu, starp citu, bez pretrunām.

Ja izlīdzināšanas vienīgais nolūks būtu augšā minētais — pretrunu likvidēšana, tad izlīdzināšanas uzdevums būtu pavisam nenoteikts, jo, saprotams, var atrast ne tikai vienu, bet bezgalīgi daudzas izlabojumu sistemas, kas apmierina šo prasību. Bez tam ar šo vienīgo nolūku notikušā izlīdzināšana neapmierinātu tanī ziņā, ka nekādi nenodrošinātu novērojumu noteiktības uzlabošanu. Pat nebūtu izslēgts, ka no tādas izlīdzināšanas rastos zaudējumi novērojumu noteiktības ziņā.

No lietderīgas izlīdzināšanas jāprasa, lai tās rezultatā atrastie izlīdzinātie novērojumi būtu bez pretrunām, bet līdz ar to arī noteiktāki, t. i. tuvāki novēroto lielumu īstām vērtībām, nekā tas bij pirms izlīdzināšanas.

Tā tad izlīdzināšanas rēķinā no vienas puses jāievēro noteikumi, kas nodrošina pretrunu likvidēšanu, bet no otras puses — vēl kāds vispārējs noteikums vai princips, uz kura pamata no bezgalīgi daudzām pretrunu likvidēšanai derīgām izlabojumu sistemām izvēlama tā, kas nodrošina noteiktības ziņā vislabākos izlīdzināšanas rezultatus.

Izlīdzināšanai zīmējoties tikai uz tādām pretrunām, kas radušās no svarā krītošo novērojumu nejaušām kļūdām, saprotams, ka izlīdzināšanas vispārējam principam jābūt saskaņā ar likumu, kuram seko novērojumu nejaušās kļūdas. Kā jau minēts, šis likums formulējams vairākos, vairāk vai mazāk droši pamatotos variantos, no kuriem gan neviens nav uzskatams par pavisam neapšaubami pierādītu. Visvairāk ieviesies praksē Gauss'a kļūdu likums (sk. § 4), un uz šī likuma arī pamatota novērojumu izlīdzināšanas metode, kuru pielieto jau kopš ilgāka par gadusimteni laiku. Fakts, ka pēc šīs izlīdzināšanas metodes atrastie rezultati vienmēr izrādijušies par ļoti apmierinošiem, uzskatams par svarīgu netiešu pierādijumu, ka Gauss'a kļūdu likums, neskatoties uz dažādiem kritiskiem iebildumiem, praktiski ļoti apmierinošā veidā ievēro un izteic novērojumu nejaušo kļūdu īpatnības.

Atvasinot no Gauss'a kļūdu likuma tam atbilstošo izlīdzināšanas vispārējo principu, pieņemsim, ka ar zinamu, vispārīgi dažādu, noteiktību taisīti novērojumi

$$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n,$$

kuriem piemīt tikai nejaušas dabas īstās kļūdas

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n.$$

Šo kļūdu dēļ novērojumi ir pretrunīgi, t. i. neapmierina tos teoretiskos noteikumus, kurus izpilda novēroto lielumu īstās vērtības

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n.$$

Tā tad šie X uzskatami par novērojumu l izlīdzināšanas idealiem rezultatiem, un ar pretējām zīmēm skaitītās īstās kļūdas ε — par novērojumu idealiem izlabojumiem, jo

$$\left.\begin{array}{l} l_1 - X_1 = \varepsilon_1 \\ l_2 - X_2 = \varepsilon_2 \\ l_3 - X_3 = \varepsilon_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n - X_n = \varepsilon_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (141),$$

un tāpēc

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = l_1 + (-\varepsilon_1) \\ X_2 = l_2 + (-\varepsilon_2) \\ X_3 = l_3 + (-\varepsilon_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = l_n + (-\varepsilon_n) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (142).$$

Šie idealie izlīdzināšanas rezultati praksē gan nav panākami. Apzīmējot novērojumu izlīdzinātās vērtības ar $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, un uz tām attiecinātās novērojumu šķietamās kļūdas ar $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$,

$$\left.\begin{array}{l} l_1 - x_1 = v_1 \\ l_2 - x_2 = v_2 \\ l_3 - x_3 = v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n - x_n = v_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (143)$$

un

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = l_1 + (-v_1) \\ x_2 = l_2 + (-v_2) \\ x_3 = l_3 + (-v_3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = l_n + (-v_n) \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (144).$$

Šie x vispārīgi nav pilnīgi identiski ar atbilstošiem X, un sakarā ar to novērojumu šķietamās kļūdas v arī ne pavisam vienādas ar atbilstošām īstām kļūdām ε.

Katrai x sistemai ir zinama varbūtība w (x), kura identiska ar atbilstošo v sistemas varbūtību w (v), t. i. ar varbūtību, ka novērojumiem $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ ir ar $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vienādas kļūdas. Tā tad ir apstākļi, uz kuriem zīmējas teorēma par varbūtību produktu. Tāpēc, apzīmējot atsevišķo šķietamo kļūdu $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ varbūtības ar $w(v_1), w(v_2), w(v_3), \dots, w(v_n)$, uz formulas (9) pamata

$$w(x) = w(v) = w(v_1) \cdot w(v_2) \cdot w(v_3) \cdot \dots\dots \cdot w(v_n) \quad . \quad (145).$$

Jo labāk novērojumu izlīdzinātās vērtības saskan ar novēroto lielumu īstām vērtībām, jo lielāka ir varbūtība w (x). Tā tad no noteiktības viedokļa par vislabāko uzskatama tā izlīdzināto novērojumu sistema, kurai ir maksimalā varbūtība

$$w(x) = w(v) = w(v_1) \cdot w(v_2) \cdot w(v_3) \cdot \dots\dots \cdot w(v_n) = \max. \quad . \quad (146).$$

Šī varbūtības maksimuma iestāšanās gadijumā šķietamās kļūdas v maz atšķiras no atbilstošām īstām kļūdām ε. Tāpēc formulā (146) ieejošās atsevišķo šķietamo kļūdu varbūtības pieņemamas saskaņā ar Gauss'a kļūdu likumu, tā tad, pēc formulu (11) un (31) parauga, izsakamas šādā veidā:

$$\left.\begin{array}{l} w(v_1) = \dfrac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 v_1^2} dv \\ w(v_2) = \dfrac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 v_2^2} dv \\ w(v_3) = \dfrac{h_3}{\sqrt{\pi}} e^{-h_3^2 v_3^2} dv \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w(v_n) = \dfrac{h_n}{\sqrt{\pi}} e^{-h_n^2 v_n^2} dv \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (147),$$

kur $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ apzīmē novērojumu $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ noteiktību raksturojošus parametrus.

Ieliekot šīs izteiksmes formulā (146), atrodam

$$w(x) = \frac{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot \dots\dots \cdot h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \dots\dots + h_n^2 v_n^2)} (dv)^n = \\ = \max. \quad \dots\dots\dots \quad (148).$$

Šinī formulā tikai šķietamās kļūdas $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ atkarīgas no novērojumu izlīdzināto vērtību izvēles; tā tad varbūtības $w(x)$ maksimums atkarīgs tikai no e eksponenta

$$-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2).$$

Tas visādā ziņā negativs; tā tad ar formulu (148) izteiktā prasība identiska ar prasību, lai būtu

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots + h_n^2 v_n^2 = \min. \quad . \quad . \quad (149).$$

Kas zīmējas uz noteiktības skaitļiem h, tad pēc formulas (44) tie pretēji proporcionali attiecīgo novērojumu vidējām kļūdām μ resp. m, kuras savukārt, uz formulas (92) pamata, pretēji proporcionalas novērojumu svaru p kvadratsaknēm. Tā tad $h_1^2, h_2^2, h_3^2, \ldots, h_n^2$ proporcionali atbilstošiem novērojumu svariem $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$; un tāpēc, pēc būtības nekā negrozot, noteikumu (149) var izteikt veidā

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \ldots + p_n v_n^2 = [p\,v^2] = \min. \quad . \quad (150).$$

Uz šīs vispārējās prasības pamatota novērojumu izlīdzināšana pēc v i s m a z ā k o k v a d r a t u m e t o d e s, kuru apmēram vienā laikā (1794. gadā), bet neatkarīgi viens no otra, atraduši divi slaveni matematiķi — C. F. G a u s s's Vācijā un A. M. L e g e n d r e Francijā.

Izteiksmē (150) visiem v ieejot kvadratā, saprotams, ka minētā pamatprasība zīmējas arī uz šķietamām kļūdām v atbilstošiem izlabojumiem — v. Sakarā ar to piezīmēsim, ka turpmākos iztirzājumos dažreiz ar v apzīmēsim nevis šķietamās kļūdas, bet atbilstošos izlabojumus.

Tā tad, izlīdzinot pēc vismazāko kvadratu metodes, novērojumu izlabojumi v jānosaka tā, lai tie likvidētu pirms izlīdzināšanas bijušās pretrunas, un līdz ar to apmierinātu ar formulu (150) izteikto pamatprasību.

Ļoti svarīgā atsevišķā gadijumā, kad visi novērojumi taisīti ar vienādu noteiktību, tā tad $h_1 = h_2 = h_3 = \ldots = h_n = h$, izteiksme (149) rakstama veidā

$$h^2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2) = \min. \quad . \quad . \quad (151).$$

Sakarā ar to, prasības (150) vietā tad stājās šāda:

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = [v^2] = \min. \quad . \quad . \quad (152).$$

Tā tad vismazāko kvadratu metodes pamatprasība formulējama veidā

$$\left.\begin{array}{l}[v^2] = [vv] = \min. \\ \text{vai} \\ [pv^2] = [pvv] = \min.\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153),$$

skatoties pēc tā, vai izlīdzinamiem novērojumiem ir vienāda, vai dažāda noteiktība.

Kas zīmējas uz izlīdzināšanas sīkumiem, tad tie atkarājas, starp citu, no svarā krītošo novērojumu veida.

§ 18. Novērojumu veidi.

No izlīdzināšanas viedokļa izšķir trīs veidu novērojumus: tiešus, netiešus un noteikumu novērojumus.

T i e š u n o v ē r o j u m u gadijums ir, kad tieši novērots pats meklētais lielums. Piem., ja leņķa noteikšanas nolūkā šis leņķis novērots vairākas reizes, tad notikušie novērojumi uzskatami par tiešiem.

N e t i e š u n o v ē r o j u m u gadijums ir, kad, meklējot kādus lielumus, novēroti nevis paši meklētie lielumi, bet to funkcijas, lai, izejot no tām, matematiskā ceļā atrastu pašus meklētos lielumus. Piem., punkta koordinatu noteikšanas nolūkā var izmērīt šī punkta horizontalos atstatumus no diviem vai vairākiem punktiem, kuru koordinatas zinamas. Tā kā katrs tāds atstatums izsakams kā meklēto koordinatu funkcija, šie novērojumi uzskatami par netiešiem.

N o t e i k u m u n o v ē r o j u m u gadijums ir, kad tieši novēroti tādi meklēti lielumi, kuru īstās vērtības apmierina zinamus matematiski izsakamus noteikumus. Piem., slēgtā līmetņojuma poligonā atsevišķo posmu uz vienu un to pašu līmetņošanas virzienu attiecinātās augstumu starpības padotas teoretiskam noteikumam, ka to sumai jābūt vienādai ar nulli. Tā tad šo augstumu starpību novērojumi uzskatami par noteikumu novērojumiem.

Kāds arī nebūtu novērojumu veids, izlīdzināšana iespējama tikai tad, kad novērojumi taisīti lielākā skaitā, nekā tas nepieciešams meklēto lielumu noteikšanai.

Tā tad tiešiem novērojumiem jābūt visādā ziņā vairākiem par vienu, jo ar vienu novērojumu pietiek viena meklēta lieluma noteikšanai. Netiešu novērojumu gadijumā, katrs atsevišķs novērojums izmantojams viena nolīdzinājuma sastādīšanai, kur kā nezinamie ieiet meklētie lielumi. Tā tad meklēto lielumu noteikšanai bez izlīdzināšanas pietiktu ar tikpat nolīdzinājumiem, t. i. ar tikpat novērojumiem, cik ir meklēto lielumu. Bet, lai meklēto lielumu noteikšana varētu notikt ar izlīdzināšanu, novērojumiem jābūt lielākā skaitā, nekā ir meklēto lielumu.

Noteikumu novērojumu skaits vienmēr vienāds ar meklēto lielumu skaitu. Tā tad, ja meklēto lielumu īstās vērtības nebūtu padotas nekādiem teoretiskiem noteikumiem, novērojumu skaits nepārsniegtu vajadzīgo un izlīdzināšana nebūtu iespējama. Bet katrs noteikums padara iespējamu sastādīt vienu nolīdzinājumu, no kura, neatkarīgi no attiecīgā novērojuma, nosakams viens meklēts lielums, ja pārējie meklētie lielumi vai nu novēroti, vai nosakami kādā nebūt citā ceļā. Tā tad katrs noteikums, resp. tam atbilstošais nolīdzinājums itkā padara lieku vienu novērojumu. Tāpēc noteikumu skaits nosaka lieko novērojumu skaitu, kurš nedrīkst būt mazāks par vienu.

Vēl piezīmēsim, ka novērojumu iedalijums minētos trīs veidos ir zinamā mērā mākslīgs, sevišķi kas zīmējas uz t. s. tiešiem novērojumiem. Faktiski tiešo novērojumu definējumam atbilstošie novērojumi uzskatami arī par netiešu vai noteikumu novērojumu atsevišķu gadijumu. Ievērojot, ka katrs lielums uzskatams par viņa paša funkciju, t. s. tiešus novērojumus var uzlūkot par netiešiem, kas zīmējas uz vienu vienīgu meklētu lielumu. Var apskatīt lietu arī no šāda viedokļa: t. s. tiešu novērojumu gadijumā visiem atsevišķiem novērojumiem zīmējoties uz vienu un to pašu meklēto lielumu, šiem novērojumiem teoretiski jābūt savā starpā visiem vienādiem. Tā tad t. s. tiešus novērojumus var arī uzskatīt par noteikumu novērojumu atsevišķu gadijumu.

Bet tā kā ar minēto atsevišķo gadijumu praksē sastopas ļoti bieži, tad no ērtības viedokļa izrādas par lietderīgu izcelt tiešus novērojumus kā atsevišķu novērojumu veidu.

Visu minēto trīs veidu novērojumi var būt vienādas vai dažādas noteiktības — ar vienādiem vai dažādiem svariem. Saprotams, ka pirmais gadijums uzskatams par vispārīgākā otrā atsevišķo gadijumu. Tomēr, atkal no ērtības viedokļa, būs lietderīgi apskatīt atsevišķi izlīdzināšanu kā vienā, tā otrā gadijumā, pat sevišķi izceļot praktiski svarīgāko vienādas noteiktības gadijumu.

Izlīdzināšanas gaitā nosakamas, starp citu, arī uz novērojumu izlīdzinātām vērtībām attiecinātās neizlīdzināto novērojumu šķietamās kļūdas. Tās savukārt var noderēt kā neizlīdzināto, tā arī izlīdzināto novērojumu vidējo kļūdu noteikšanai. Arī šis, parasti par izlīdzināšanas integrējošu sastāvdaļu uzskatītais, noteiktības aprēķins zinamos sīkumos atkarīgs no tā, vai attiecīgie novērojumi ir vienādas vai dažādas noteiktības.

Pēc šiem vispārējiem aizrādijumiem apskatīsim tagad sīkāki novērojumu izlīdzināšanu pēc vismazāko kvadratu metodes. To darīsim pa atsevišķiem novērojumu veidiem, katrreiz apskatot kā vienādas, tā arī dažādas noteiktības gadijumu un atbilstošo noteiktības aprēķinu.

§ 19. Vienādas noteiktības tiešu novērojumu izlīdzināšana.

Lai, ar vienādu noteiktību atkārtoti novērojot vienu un to pašu meklētu lielumu, dabūti rezultati l_1, l_2, $l_3, \ldots\ldots$, l_n un jānosaka šo novērojumu izlīdzinātā vērtība.

Tā kā visi novērojumi zīmējas uz vienu un to pašu lielumu, skaidrs, ka visiem novērojumiem ir arī viena un tā pati izlīdzinātā vērtība. Apzīmējot to ar x, atsevišķo novērojumu šķietamās kļūdas ir

$$\left.\begin{array}{l} l_1 - x = v_1 \\ l_2 - x = v_2 \\ l_3 - x = v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n - x = v_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (154).$$

Tie paši v, tikai ar pretējām zīmēm, izsaka atbilstošo novērojumu izlīdzināšanai vajadzīgos izlabojumus.

Izlīdzinot pēc vismazāko kvadratu metodes, x jāizvēlas tā, lai atbilstošā v sistema apmierinātu pirmās formulas (153) veidā izteikto pamatprasību. Ievērojot šo pamatprasību un arī sakarus (154), jābūt

$$[vv] = (l_1 - x)^2 + (l_2 - x)^2 + (l_3 - x)^2 + \ldots\ldots + (l_n - x)^2 = \min. \quad \ldots\ldots \quad (155).$$

Šī izteiksme ir viena vienīga argumenta — nezināmā x — funkcija. Tā tad, lai būtu apmierināts noteikums (155), x jāizvēlas tā, lai izpildītos nolīdzinājums

$$\frac{d\,[vv]}{dx} = -2\,(l_1 - x) - 2\,(l_2 - x) - 2\,(l_3 - x) - \ldots\ldots - 2\,(l_n - x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (156).$$

Atslēdzot šo nolīdzinājumu, atrodam

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots\ldots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \quad \ldots \quad (157),$$

kur n apzīmē novērojumu skaitu.

Tā tad atrasts, ka vienādas noteiktības tiešu novērojumu gadidijumā, novērotā lieluma izlīdzinātā vērtība ir visu atsevišķo novērojumu a r i t m e t i s k a i s v i d ē j a i s.

Tas arī nebij citādi sagaidams, jo pielietotās izlīdzināšanas metodes pamatprasība ir secinājums no Gauss'a kļūdu likuma, kurš savukārt pamatots, starp citu, uz aritmetiskā vidējā principa, t. i. uz a priori pieņemtā šī iztirzājuma rezultata.

Lai atrastu neizlīdzināta novērojuma l vidējo kļūdu m, veidosim uz novērotā lieluma nezināmo īsto vērtību X attiecinātās atsevišķo novērojumu īstās nejaušās kļūdas ε. Tās ir

$$\left.\begin{array}{l} l_1 - X = \varepsilon_1 \\ l_2 - X = \varepsilon_2 \\ l_3 - X = \varepsilon_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ l_n - X = \varepsilon_n \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (158).$$

Šīm īstām kļūdām zīmējoties uz vienādas noteiktības novērojumiem, jebkura atsevišķa novērojuma vidējā kļūda m nosakama pēc formulas (53), tā tad ir

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \quad \dots\dots\dots \quad (159).$$

Tādā kārtā meklētā vidējā kļūda izteikta novērojumu īsto kļūdu ε funkcijas veidā. Bet šīs īstās kļūdas, tāpat kā novērotā lieluma īstā vērtība X, nav zinamas. Nosakamas gan uz novērotā lieluma izlīdzināto vērtību x attiecinātās atsevišķo novērojumu šķietamās kļūdas v. Tā tad jāmeklē pāreja no īstām kļūdām ε uz atbilstošām šķietamām v, resp. no $[\varepsilon\varepsilon]$ uz [vv].

Veidojuši atbilstošo izteiksmju (158) un (154) starpības, un no tām atvasinājuši izteiksmes

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = v_1 + (x - X) \\ \varepsilon_2 = v_2 + (x - X) \\ \varepsilon_3 = v_3 + (x - X) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n = v_n + (x - X) \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (160),$$

tās paceļam kvadratā un sumējam:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1^2 = v_1^2 + 2\,v_1\,(x - X) + (x - X)^2 \\ \varepsilon_2^2 = v_2^2 + 2\,v_2\,(x - X) + (x - X)^2 \\ \varepsilon_3^2 = v_3^2 + 2\,v_3\,(x - X) + (x - X)^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_n^2 = v_n^2 + 2\,v_n\,(x - X) + (x - X)^2 \\ \hline [\varepsilon\varepsilon] = [vv] + 2\,[v]\,(x - X) + n\,(x - X)^2 \end{array} \quad . \; . \quad (161).$$

Attiecībā uz šīs formulas labās puses vidējā loceklī ieejošo sumu [v] pierādīsim sekojošo. Sumējot izteiksmes (154), atrodam, ka

$$[v] = [l] - n\,x \quad \dots\dots\dots \quad (162).$$

Bet no (157) seko, ka

$$[l] - n\,x = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (163).$$

Tā tad

$$[v] = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (164).$$

Tā tad, formulas (161) labās puses vidējam loceklim izkrītot, šī formula rakstama veidā

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + n\,(x - X)^2 \quad \dots\dots \quad (165).$$

Šinī formulā ieejošā suma $[\varepsilon\varepsilon]$, uz (159) pamata, atvietojama ar $n\,m^2$. Kas zīmējas uz $(x - X)$, tad šī starpība, kas izsaka novērotā lieluma izlīdzinātās vērtības x īsto kļūdu, gan nav noteikti nosakama. Bet tās vietā var pieņemt atbilstošo vidējo kļūdu m_x. Šī novērotā lieluma izlīdzinātās vērtības x vidējā kļūda m_x izsakama kā neizlīdzināto novērojumu l vidējās kļūdas m funkcija, jo x ir ar formulu (157) noteikta atsevišķo l funkcija. Ievērojot minēto formulu, uz kļūdu sakrāšanas likuma pamata,

$$m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (166).$$

Tā tad formula (165) atvietojama ar šādu

$$n\,m^2 = [vv] + n\,\frac{m^2}{n} = [vv] + m^2 \quad \ldots \quad (167),$$

un no tās atrodam

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (168).$$

Tā tad pēc šīs formulas neizlīdzināta novērojuma vidējā kļūda nosakama atsevišķo novērojumu šķietamo kļūdu v funkcijas veidā.

Kas zīmējas uz izlīdzinātās vērtības x vidējo kļūdu m_x, tad tā nosakama pēc formulas (166), izejot no iepriekš atrastās vidējās kļūdas m. Bet viņa nosakama arī tieši izejot no šķietamām kļūdām v. Attiecīgo formulu atrodam ieliekot izteiksmi (168) formulā (166):

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \quad \ldots \ldots \quad (169).$$

Attiecībā uz svariem piezīmēsim sekojošo. Pieņemot, ka vienādas noteiktības neizlīdzinātiem novērojumiem l ir svars 1, un ievērojot (157), uz formulas (122) pamata novērotā lieluma izlīdzinātās vērtības x svars ir

$$p_x = \frac{1}{n\left(\frac{1}{n}\right)^2} = n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (170).$$

Uz šī pamata novērojuma svaru var definēt — neatkarīgi no vidējām kļūdām — kā skaitli, kas izsaka, no cik iedomātiem „svara vienības novērojumiem" jāveido aritmetiskais vidējais, lai tam būtu tāda pat noteiktība, kā attiecīgam novērojumam.

Piemērs. Lai nosacītu noteiktību, ar kuru Bamberga universalinstrumenta Nr. 24299 limbs nolasams ar instrumenta mikroskop-mikrometru A, atstājot pieslēgtu alidadi, mikroskopa pavedienu atkārtoti uzveda uz vienu un to pašu limba strīpiņu, pie kam dabūti apakšā atzīmētie nolasijumi l. Jānosaka atsevišķa neizlīdzināta nolasijuma vidējā kļūda m, un novērošanas apstākļiem atbilstošais izlīdzinātais nolasijums x un tā vidējā kļūda m_x. Bez tam, pieņemot, ka katrs atsevišķs nolasijums noticis ar svaru 1, jānosaka izlīdzinātā nolasijuma svars p_x.

Atsevišķie novērojumi atšķiras tikai sekundās. Tāpēc izlīdzināšanas un kļūdu aprēķinā ievērotas tikai nolasijumu sekundas.

	l	$v = l - x$		v^2
1)	156°32′07,0″		— 2,1″	4,41
2)	09,8	+ 0,7″		0,49
3)	06,0		— 3,1	9,61
4)	06,0		— 3,1	9,61
5)	11,0	+ 1,9		3,61
6)	05,6		— 3,5	12,25
7)	10,0	+ 0,9		0,81
8)	08,4		— 0,7	0,49
9)	08,1		— 1,0	1,00
10)	11,0	+ 1,9		3,61
11)	10,0	+ 0,9		0,81
12)	09,8	+ 0,7		0,49
13)	08,8		— 0,3	0,09
14)	09,0		— 0,1	0,01
15)	10,4	+ 1,3		1,69
16)	12,7	+ 3,6		12,96
17)	09,5	+ 0,4		0,16
18)	11,0	+ 1,9		3,61
19)	06,6		— 2,5	6,25
20)	11,0	+ 1,9		3,61
	$[l] = 181{,}7''$	+ 16,1	— 16,4	$75{,}57 = [vv]$

$$x = \frac{181{,}7}{20} = 09{,}1''$$

$$[v] = -0{,}3''$$

(jābūt 0; pretruna izskaidrojama ar notikušiem apaļojumiem.)

$$m = \pm\sqrt{\frac{75{,}57}{20-1}} = \pm 2{,}0''$$

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{75{,}57}{20(20-1)}} = \pm 0{,}45''$$

Tā tad atsevišķie neizlīdzinātie nolasījumi notikuši ar vidējo kļūdu

$$m = \pm 2{,}0'';$$

nolasījumu izlīdzinātā vērtība ar atbilstošo vidējo kļūdu ir

$$156^0 32' 09{,}1'' \pm 0{,}45'';$$

pieņemtā svaru sistemā iznāk svars

$$p_x = 20.$$

§ 20. Novērojumu vidējās kļūdas noteikšana no vairākām tiešu novērojumu sistemām.

Tiešus novērojumus bieži lieto zinamos apstākļos notiekošu novērojumu noteiktības resp. vidējās kļūdas noteikšanai. Tādam nolūkam šos novērojumus taisa pēc iespējas lielākā skaitā, aprēķina novērotā lieluma izlīdzināto vērtību un uz to attiecinātās atsevišķo novērojumu šķietamās kļūdas, un, beidzot, nosaka meklēto vidējo kļūdu kā šo šķietamo kļūdu funkciju.

Tas notiek iepriekšējā paragrafā aizrādītā kārtā, ja visi novērojumi veido vienu sistemu, t. i. visi zīmējas uz vienu un to pašu lielumu.

Bet ir arī tādi gadījumi, kad lietotie vienādas noteiktības novērojumi veido dažādas sistemas, t. i. pa grupām zīmējas uz dažādiem lielumiem. Piem., var gadīties, ka nosakot zinamos apstākļos notiekošās leņķa mērīšanas noteiktību, šim nolūkam ar vienādu noteiktību atkārtoti novēroti vairāki leņķi.

Tādā gadijumā katrā, uz vienu un to pašu lielumu attiecīgā, novērojumu sistemā tās atsevišķa novērojuma vidējā kļūda nosakama iepriekšējā paragrafā aizrādītā kārtā.

Tā kā atsevišķās sistemās novērojumu skaits nekad nav bezgalīgi liels, bet bieži mēdz būt pat ne visai liels, tad pa atsevišķām sistemām atrasto „parcialo" vidējo kļūdu vērtības iznāk ne pavisam vienādas, lai gan novērojumi visās sistemās notikuši ar vienādu noteiktību. Tā tad paceļas jautājums, kāda meklētās vidējās kļūdas vērtība pieņemama par „vispārējo" — uz visu sistemu novērojumiem attiecīgo.

Lai ar vienādu noteiktību notikušas r novērojumu sistemas

$$\begin{array}{llll}
(l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots, l_{n_1})_1 & \text{ar novērojumu} & \text{skaitu} & n_1 \\
(l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots, l_{n_2})_2 & \text{„} & \text{„} & n_2 \\
(l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots, l_{n_3})_3 & \text{„} & \text{„} & n_3 \\
\ldots\ldots\ldots & & & \\
(l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots, l_{n_r})_r & \text{„} & \text{„} & n_r
\end{array}$$

un pieņemsim, ka šīm novērojumu sistemām atbilstošās īsto nejaušo kļūdu sistemas ir

$$\left.\begin{array}{ll}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots, \varepsilon_{n_1})_1 \text{ ar parcialo vidējo kļūdu} & m_1 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]_1}{n_1}} \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots, \varepsilon_{n_2})_2 \ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & m_2 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]_2}{n_2}} \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots, \varepsilon_{n_3})_3 \ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & m_3 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]_3}{n_3}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots, \varepsilon_{n_r})_r \ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & m_r = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]_r}{n_r}} \end{array}\right\} \quad (171).$$

Meklētās vispārējās vidējās kļūdas m noteikšanai izejot no atsevišķo novērojumu īstām kļūdām ε, nekrīt svarā, vai novērojumi zīmējas visi uz vienu un to pašu lielumu, vai, pa grupām, uz dažādiem lielumiem. Tā tad, apzīmējot ar $[\varepsilon\varepsilon]$ visu ε^2 kopsumu, un ar n visu novērojumu kopskaitu, pēc formulas (53) parauga

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]_1 + [\varepsilon\varepsilon]_2 + [\varepsilon\varepsilon]_3 + \ldots\ldots + [\varepsilon\varepsilon]_r}{n}} \quad (172),$$

kur $[\varepsilon\varepsilon]_1$, $[\varepsilon\varepsilon]_2$, $[\varepsilon\varepsilon]_3$, ..., $[\varepsilon\varepsilon]_r$ apzīmē pa atsevišķām sistemām veidotās kļūdu ε kvadratu parcialās sumas.

Bet ievērojot (171),

$$\left.\begin{array}{l}[\varepsilon\varepsilon]_1 = n_1 m_1^2 \\ [\varepsilon\varepsilon]_2 = n_2 m_2^2 \\ [\varepsilon\varepsilon]_3 = n_3 m_3^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\varepsilon\varepsilon]_r = n_r m_r^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (173).$$

Ieliekot šīs izteiksmes formulā (172), tā pāriet veidā

$$m = \pm \sqrt{\frac{n_1 m_1^2 + n_2 m_2^2 + n_3 m_3^2 + \ldots\ldots + n_r m_r^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[n\,m^2]}{n}} \quad (174).$$

Šī formula rāda, kādā veidā no atsevišķu novērojumu grupu parcialām vidējām kļūdām atvasinama novērojuma vispārējā vidējā kļūda. Kas zīmējas uz parcialām vidējām kļūdām, tad tās pa attiecīgām atsevišķām novērojumu sistemām nosakamas parastā kārtā.

Atsevišķā gadijumā, kad novērojumu skaits visās sistemās vienāds n_i, t. i.

$$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots\ldots = n_r = n_i$$

un sakarā ar to

$$n = r\, n_i$$

formula (174) pāriet veidā

$$m = \pm \sqrt{\frac{n_i m_1^2 + n_i m_2^2 + n_i m_3^2 + \ldots\ldots + n_i m_r^2}{r\, n_i}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots\ldots + m_r^2}{r}} = \pm \sqrt{\frac{[mm]}{r}} \quad (175).$$

Piemērs. Vienādos apstākļos atkārtoti apvedot ar planimetru 3 dažādas figuras, novērotas šādas nolasijumu starpības Δu:

1. figura $(\Delta u)_1$	2. figura $(\Delta u)_2$	3. figura $(\Delta u)_3$
1) 1442	1) 1544	1) 1490
2) 1443	2) 1543	2) 1491
3) 1440	3) 1545	3) 1491
4) 1443	4) 1544	4) 1491
5) 1440	5) 1546	5) 1494
6) 1440	6) 1546	6) 1490
7) 1439	7) 1546	
8) 1443	8) 1546	
9) 1442		
10) 1439		

Ievērojot visus novērojumus, jānosaka šo novērojumu vispārējā vidējā kļūda m.

Iepriekšējā paragrafā aizrādītā kārtā nosakot atsevišķām figurām atbilstošo novērojumu grupu parcialās vidējās kļūdas m_1, m_2, m_3, var neievērot novērojumu rezultatus izteicošo skaitļu augstākās vienības, līdz kurām nesniedz novērojumu pretrunu ietekme. Ar atrastām parcialām vidējām kļūdām, un ievērojot, ka $n_1 = 10$, $n_2 = 8$, $n_3 = 6$, tad nosakama meklētā vispārējā vidējā kļūda m.

1. grupa

	$(\Delta u)_1$	$(v)_1 = (\Delta u)_1 - x_1$		$(v^2)_1$
1)	1442	$+0,9$		0,81
2)	43	$+1,9$		3,61
3)	40		$-1,1$	1,21
4)	43	$+1,9$		3,61
5)	40		$-1,1$	1,21
6)	40		$-1,1$	1,21
7)	39		$-2,1$	4,41
8)	43	$+1,9$		3,61
9)	42	$+0,9$		0,81
10)	39		$-2,1$	4,41
	$[\Delta u]_1 = 411$	$+7,5$	$-7,5$	$24,90 = [vv]_1$
	$x_1 = \frac{411}{10} = 41,1$	$[v]_1 = 0,0$		

$$m_1 = \pm\sqrt{\frac{24,90}{10-1}} = \pm 1,7$$

2. grupa

	$(\Delta u)_2$	$(v)_2 = (\Delta u)_2 - x_2$		$(v^2)_2$
1)	1544		$-1,0$	1,00
2)	3		$-2,0$	4,00
3)	5		0,0	0,00
4)	4		$-1,0$	1,00
5)	6	$+1,0$		1,00
6)	6	$+1,0$		1,00
7)	6	$+1,0$		1,00
8)	6	$+1,0$		1,00
	$[\Delta u]_2 = 40$	$+4,0$	$-4,00$	$10,00 = [vv]_2$
	$x_2 = \frac{40}{8} = 5,0$	$[v]_2 = 0,00$		

$$m_2 = \pm \sqrt{\frac{10,00}{8-1}} = \pm 1,2$$

3. grupa

	$(\Delta u)_3$	$(v)_3 = (\Delta u)_3 - x_3$		$(v^2)_3$	
1)	1490		$-1,2$	1,44	
2)	1		$-0,2$	0,04	
3)	1		$-0,2$	0,04	
4)	1		$-0,2$	0,04	$n_1 m_1^2 = 27,70$
5)	4	$+2,8$		7,84	$n_2 m_2^2 = 11,44$
6)	0		$-1,2$	1,44	$n_3 m_3^2 = 13,02$
	$[\Delta u]_3 = 7$	$+2,8$	$-3,0$	$10,84 = [vv]_3$	$[n m^2] = 52,16$
	$x_3 = \frac{7}{6} = 1,2$	$[v]_3 = -0,2$			$n = 24$

$$m_3 = \pm \sqrt{\frac{10,84}{6-1}} = \pm 1,5 \qquad m = \pm \sqrt{\frac{52,16}{24}} = \pm 1,5.$$

§ 21. Dažādas noteiktības tiešu novērojumu izlīdzināšana.

Ja tiešie novērojumi $l_1, l_2, l_3, \ldots\ldots, l_n$ notikuši ar dažādu noteiktību, tā tad ar dažādiem svariem $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n$, tad novērotā lieluma izlīdzinātā vērtība x jāizvēlas tā, lai uz to attiecinātās novērojumu šķietamās kļūdas

$$\left.\begin{array}{l} l_1 - x = v_1 \\ l_2 - x = v_2 \\ l_3 - x = v_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ l_n - x = v_n \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (176)$$

izpildītu vismazāko kvadratu metodes pamatprasību ar otro formulu (153) izteiktā veidā. Tā tad jāprasa, lai būtu

$$[pvv] = p_1 (l_1 - x)^2 + p_2 (l_2 - x)^2 + p_3 (l_3 - x)^2 + \dots$$
$$\dots + p_n (l_n - x)^2 = \min. \quad \dots\dots \quad (177).$$

Šim noteikumam atbilstošais x nosakams, veidojot un atslēdzot nolīdzinājumu

$$\frac{d[pvv]}{dx} = -2 p_1 (l_1 - x) - 2 p_2 (l_2 - x) - 2 p_3 (l_3 - x) -$$
$$- \dots\dots - 2 p_n (l_n - x) = 0 \quad \dots\dots \quad (178).$$

Tādā veidā atrodam

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \dots\dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots\dots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]} \quad . \quad . \quad (179);$$

šo izteiksmi sauc par novērojumu vispārējo aritmetisko vidējo.

Atsevišķā gadijumā, kad visi novērojumi notikuši ar vienādu noteiktību, t. i. $p_1 = p_2 = p_3 = \dots\dots = p_n = p$, vispārējais aritmetiskais vidējais pāriet vienkāršā aritmetiskā vidējā (157).

Kas zīmējas uz noteiktības aprēķinu, tad dažādas noteiktības novērojumu gadijumā sevišķi interesē svara vienības vidējā kļūda m. Ja tā atrasta, tad zinot atsevišķo neizlīdzināto novērojumu svarus, šo novērojumu vidējās kļūdas nosakamas pēc formulām (95). Pēc šo pašu formulu parauga nosakama arī novērotā lieluma izlīdzinātās vērtības x vidējā kļūda m_x, ja iepriekš atrasts atbilstošais svars p_x. Šis svars nosakams uz formulas (119) pamata, jo, kā rāda formula (179), x ir atsevišķo neizlīdzināto novērojumu l lineara funkcija, kura rakstama veidā

$$x = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \frac{p_3}{[p]} l_3 + \dots\dots + \frac{p_n}{[p]} l_n \quad . \quad . \quad (180).$$

Tā kā novērojumiem $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ ir svari $p_1, p_2, p_3, \dots\dots, p_n$, pēc formulas (119)

$$\frac{1}{p_x} = \frac{p_1^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_1} + \frac{p_2^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_2} + \frac{p_3^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_3} + \ldots\ldots + \frac{p_n^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_n} = \frac{[p]}{[p]^2} = \frac{1}{[p]},$$

tā tad

$$p_x = [p] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (181).$$

Lai nosacītu svara vienības vidējo kļūdu m, veidojam — tāpat, kā vienādas noteiktības gadijumā —

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 = v_1 + (x - X) \\ \varepsilon_2 = v_2 + (x - X) \\ \varepsilon_3 = v_3 + (x - X) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n = v_n + (x - X) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (182).$$

Atsevišķās izteiksmes (182) paceļam kvadratā, reizinam ar atbilstošiem svariem, un sumējam. Tad atrodam

$$\begin{array}{l} p_1\varepsilon_1^2 = p_1v_1^2 + 2\,p_1v_1\,(x - X) + p_1\,(x - X)^2 \\ p_2\varepsilon_2^2 = p_2v_2^2 + 2\,p_2v_2\,(x - X) + p_2\,(x - X)^2 \\ p_3\varepsilon_3^2 = p_3v_3^2 + 2\,p_3v_3\,(x - X) + p_3\,(x - X)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{p_n\varepsilon_n^2 = p_nv_n^2 + 2\,p_nv_n\,(x - X) + p_n\,(x - X)^2} \\ [p\varepsilon\varepsilon] = [pvv] + 2\,[pv]\,(x - X) + [p]\,(x - X)^2 \end{array} \quad . \; . \quad (183).$$

Attiecībā uz šinī formulā ieejošo sumu [pv] piezīmēsim sekojošo. Reizinot atsevišķās izteiksmes (176) ar atbilstošiem svariem un pēc tam sumējot, atrodam

$$[pv] = [pl] - [p]x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (184).$$

Bet no formulas (179) seko, ka

$$[pl] - [p]x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (185).$$

Tā tad

$$[pv] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (186).$$

Ievērojot to, formulas (183) labās puses vidējais loceklis izkrīt, un minētā formula pāriet veidā

$$[p\varepsilon\varepsilon] = [pvv] + [p]\,(x - X)^2 \quad \ldots\ldots \quad (187).$$

Tipa $p\,\varepsilon^2$ locekļi, kuru suma veido šīs formulas kreiso pusi, ir tipa p un ε^2 faktoru produkti. Atsevišķās īstās kļūdas ε, tā tad arī atbilstošie ε^2 nav nosakami. Bet atsevišķos ε^2 var atvietot ar šo lielumu caurmēra vērtībām, pieņemot par tām atbilstošo novērojumu l_1, l_2, $l_3, \ldots\ldots, l_n$ vidējo kļūdu kvadratus m_1^2, m_2^2, $m_3^2, \ldots\ldots, m_n^2$. Kas zīmējas uz svariem p_1, p_2, $p_3, \ldots\ldots, p_n$, tad, kā zinams, tie izsaka attiecības $\frac{m^2}{m_1^2}, \frac{m^2}{m_2^2}, \frac{m^2}{m_3^2}, \ldots\ldots, \frac{m^2}{m_n^2}$.

Ievērojot to, var pieņemt, ka

$$\begin{aligned}
p_1\varepsilon_1^2 &= \frac{m^2}{m_1^2} m_1^2 = m^2 \\
p_2\varepsilon_2^2 &= \frac{m^2}{m_2^2} m_2^2 = m^2 \\
p_3\varepsilon_3^2 &= \frac{m^2}{m_3^2} m_3^2 = m^2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_n\varepsilon_n^2 &= \frac{m^2}{m_n^2} m_n^2 = m^2 \\
\hline
[p\varepsilon\varepsilon] &= \qquad\quad = n\,m^2 \quad \ldots\ldots \quad (188).
\end{aligned}$$

Tālāk, — tāpat kā vienādas noteiktības gadijumā — noteikti nenosakamo lielumu $(x - X)^2$, t. i. izlīdzinātās vērtības x īstās kļūdas kvadratu, atvietojam ar atbilstošo caurmēra vērtību m_x^2. Ievērojot, ka

$$m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{p_x}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (189),$$

un p_x savukārt noteikts ar formulu (181), var pieņemt, ka

$$[p](x - X)^2 = [p]\frac{m^2}{[p]} = m^2 \quad \ldots\ldots \quad (190).$$

Tā tad, ievērojot (188) un (190), formula (187) rakstama veidā

$$n\,m^2 = [pvv] + m^2 \quad \ldots\ldots \quad (191),$$

un no šīs izteiksmes atrodam

$$m = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (192).$$

Kā jau minēts, zinot svara vienības vidējo kļūdu m un neizlīdzināto novērojumu l_1, l_2, $l_3, \ldots\ldots, l_n$ svarus p_1, p_2, $p_3, \ldots\ldots, p_n$, atsevišķo novērojumu vidējās kļūdas nosakamas pēc formulām (95); tā tad

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = \pm\dfrac{m}{\sqrt{p_1}} \\ m_2 = \pm\dfrac{m}{\sqrt{p_2}} \\ m_3 = \pm\dfrac{m}{\sqrt{p_3}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ m_n = \pm\dfrac{m}{\sqrt{p_n}} \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (193).$$

Kas zīmējas uz novērotā lieluma izlīdzinātās vērtības x vidējo kļūdu m_x, tad tā noteikta ar formulu (189), kura, ievērojot (181) un (192), rakstama veidā

$$m_x = \pm\frac{m}{\sqrt{[p]}} \quad \dots\dots\dots \quad (194)$$

jeb

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} \quad \dots\dots \quad (195).$$

Piemērs. Lai nosacītu nogriežņa garumu, tas izmērīts trīs reizes: 1) vienā gabalā, 2) divos gabalos, 3) trīs gabalos, pie kam visi atsevišķie mērijumi notikuši ar vienādu noteiktību. Dabūti šādi rezultati:

1)		124,8 mm
2)	(54,9 + 69,8)	= 124,7
3)	(35,0 + 49,8 + 39,8)	= 124,6

Jānosaka nogriežņa garuma izlīdzinātā vērtība x un tās vidējā kļūda.

Uzskatot par meklēto lielumu nogriežņa kopgarumu, tas pirmā novērojumā nosacīts ar vienu mērijumu, bet otrā un trešā novērojumā — ar divu resp. trīs atsevišķu mērijumu rezultatu sumu. Pieņemot katram atsevišķam mērijumam svaru 1, pēc formulas (124) pirmam novērojumam pienākas svars $p_1 = 1$, otram — $p_2 = \frac{1}{2} = 0{,}50$, trešam — $p_3 = \frac{1}{3} = 0{,}33$.

Pārejot pie skaitliskā aprēķina, ievērosim, ka minēto novērojumu rezultati atšķiras tikai milimetra desmitdaļās (dmm); tāpēc skaitliskā rēķinā pietiek ievērot tikai šīs zemākās šķiras vienības.

l	p	pl	v	pv	pvv
1) 124,8 mm = = 124 mm + 8 dmm	1,00	8,00	+ 0,6	+ 0,600	0,36
2) 124,7 mm = = 124 mm + 7 dmm	0,50	3,50	− 0,4	− 0,200	0,08
3) 124,6 mm = = 124 mm + 6 dmm	0,33	1,98	− 1,4	− 0,462	0,65
	1,83 = = [p]	13,48 = = [pl]		+ 0,600 − 0,662 [pv] = − 0,062 (jābūt 0; pretruna izskaidrojama ar apaļojumiem.)	1,09 = = [pvv]

$$x = \frac{13{,}48}{1{,}83} = 7{,}4 \text{ dmm}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{1{,}09}{3-1}} = \pm 0{,}7 \text{ dmm}$$

$$m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{1{,}83}} = \pm 0{,}5 \text{ dmm}$$

Tā tad nogriežņa garuma izlīdzinātā vērtība ar atbilstošo vidējo kļūdu ir

$$x = 124 \text{ mm} + 7{,}4 \text{ dmm} \pm 0{,}5 \text{ dmm} = 124{,}74 \pm 0{,}05 \text{ mm}.$$

Pieņemtā svaru sistemā piešķirot atsevišķiem mērijumiem svaru 1, atrastā svara vienības vidējā kļūda

$$m = \pm 0{,}7 \text{ dmm} = \pm 0{,}07 \text{ mm}$$

identiska ar atsevišķa mērijuma vidējo kļūdu.

§ 22. Netiešu novērojumu izlīdzināšanas vispārējā kārtība.

Ar netiešiem novērojumiem nosakot meklētus lielumus, novēro šo lielumu dažādas funkcijas tādā skaitā, kurš ne mazāks par meklēto lielumu skaitu. Salīdzinot novēroto funkciju matematiskās izteiksmes ar atbilstošiem novērojumiem, rodas nolīdzinājumu sistema, kuras nezinamie ir meklētie lielumi. Tā tad atslēdzot šos nolīdzinājumus, var atrast meklētos lielumus.

Ja novēroto funkciju skaits vienāds ar meklēto lielumu skaitu, tad minēto nolīdzinājumu atslēgšana izdarama parastā kārtā. Atrastās nezinamo vērtības ir pilnīgā saskaņā ar lietoto funkciju novērojumiem, bet nav nekādas kritikas par lietoto novērojumu, tā tad arī par meklēto lielumu atrasto vērtību noteiktību. Novērojumiem piemītošās kļūdas, atbilstoši lietoto funkciju veidam sadaloties uz meklēto lielumu atrastām vērtībām, paliek nezinamas; tā tad nav nekādu aizrādījumu, kādā veidā jāizlabo funkciju novērojumi, lai paaugstinātu meklēto lielumu atrasto vērtību noteiktību.

Ja turpretim novēroto funkciju skaits lielāks par meklēto nezinamo skaitu, tad salīdzinot funkciju izteiksmes ar atbilstošiem novērojumiem, rodas nolīdzinājumu sistema, kur nolīdzinājumu skaits pārsniedz nezinamo skaitu. Novērojumiem piemītošo kļūdu dēļ, šī nolīdzinājumu sistema vispārīgi ir pretrunīga, t. i. nav iespējams atrast tādas nezinamo vērtības, kas apmierina visus nolīdzinājumus. Lai novērstu šīs pretrunas, nolīdzinājumi jāveido ar izlīdzinātiem funkciju novērojumiem, t. i. pieliekot novērojumiem kādus lietderīgi izvēlētus izlabojumus. No tādā kārtā veidotās nolīdzinājumu sistemas atrastās nezinamo vērtības uzskatamas par meklēto lielumu izlīdzinātām vērtībām tādā ziņā, ka starp tām un novēroto funkciju izlīdzinātām vērtībām nav nekādu pretrunu.

Kas zīmējas uz minēto pretrunu likvidēšanai derīgiem novērojumu izlabojumiem, tad šo izlabojumu sistemas var būt ļoti daudzas un dažādas. No visām šīm izlabojumu sistemām jāizvēlas tā, kurai atbilst noteiktības ziņā vislabākās meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības. Izlīdzinot pēc vismazāko kvadratu metodes, par šim noteikumam atbilstošo izlabojumu sistemu uzskatama tā, kas apmierina minētās izlīdzināšanas metodes pamatprasību. Pie tam šī pamatprasība jāievēro ar pirmo, vai ar otro formulu (153) izteiktā veidā, skatoties pēc tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības novērojumu gadijums.

Lai i meklētu lielumu izlīdzināto vērtību $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_i$ noteikšanas nolūkā izdarīti meklēto lielumu n funkciju novērojumi $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$, pie kam

$$n > i.$$

Izlīdzināšanas nolūkam vajadzīgos funkciju novērojumu izlabojumus apzīmējot ar $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$, funkciju izlīdzinātie novērojumi ir

$$\left.\begin{array}{c} l_1 + v_1 \\ l_2 + v_2 \\ l_3 + v_3 \\ \ldots\ldots \\ l_n + v_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (196).$$

Tiem atbilst ar meklēto lielumu izlīdzinātām vērtībām aprēķinātās novēroto funkciju vērtības

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (197).$$

Salīdzinot atbilstošās izteiksmes (196) un (197), veidojam nolīdzinājumu sistemu

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) = l_1 + v_1 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) = l_2 + v_2 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) = l_3 + v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) = l_n + v_n \end{array}$$

jeb

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) - l_1 = v_1 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) - l_2 = v_2 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) - l_3 = v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i) - l_n = v_n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (198).$$

Tāda tipa nolīdzinājumus sauc par k ļ ū d u n o l ī d z i n ā j u m i e m. Šis nosaukums izskaidrojams ar to, ka ar pretējām zīmēm skaitītie funkciju novērojumu izlabojumi v izsaka šo novērojumu šķietamās kļūdas. Pēc būtības pareizāki būtu šī nosaukuma vietā lietot „izlabojumu nolīdzinājumi", kā to arī darījuši daži autori; bet tas nav ieviesies praksē.

Meklēto lielumu izlīdzināto vērtību x atrašanai no kļūdu nolīdzinājumiem pēc vismazāko kvadratu metodes vajadzīgs, lai tieši lietotie kļūdu nolīdzinājumi būtu lineari. Tāpēc gadijumā, ja augšā minētā oriģinalveidā sastādīto kļūdu nolīdzinājumu starpā ir daži vai pat visi nelineari, visi kļūdu nolīdzinājumi j ā p ā r v ē r š lineārā veidā.

Tādam nolūkam jāzin vai jānosaka meklēto nezinamo tuvinās vērtības (x_1), (x_2), (x_3), ..., (x_{i-1}), (x_i), kuras izlīdzināšanas rēķinā uzskatamas par kļūdu ziņā neitralām. Tad meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}, x_i$ izsakamas šādā veidā:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = (x_1) + \xi_1 \\ x_2 = (x_2) + \xi_2 \\ x_3 = (x_3) + \xi_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{i-1} = (x_{i-1}) + \xi_{i-1} \\ x_i = (x_i) + \xi_i \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (199),$$

kur ξ apzīmē turpmākā izlīdzināšanas rēķinā ieejošus jaunus nezinamus. Kad tie izlīdzināšanas rezultātā atrasti, tad pāreja no meklēto lielumu pieņemtām tuvinām vērtībām (x) uz atbilstošām izlīdzinātām vērtībām x izdarama uz formulu (199) pamata.

Kas zīmējas uz tuvinām vērtībām (x), tad pieņemot vai nosakot tās jāievēro, ka atbilstošiem jauniem nezinamiem, minētiem pieaugumiem ξ, jābūt nelieliem. Dažreiz šinī ziņā apmierinošas meklēto lielumu tuvinas vērtības a priori zinamas. Pretējā gadijumā tās nosakamas pēc šāda vispārīgi derīga paņēmiena. No visiem n oriģinalveidā sastādītiem kļūdu nolīdzinājumiem (198) izvēlas tik daudzus i, cik ir meklēto nezinamo. Šinīs izvēlētos nolīdzinājumos atvietojot atbilstošos v ar nulli, un ignorējot pārējos kļūdu nolīdzinājumus, parastā kārtā atslēdz tādā veidā dabūto nolīdzinājumu sistemu. Ja visi novērojumi taisīti ar apmierinošu noteiktību, tad izlabojumi v mēdz būt nelieli, un pilnīgā kļūdu nolīdzinājumu sistema — ne visai pretrunīga. Tāpēc tādā gadijumā no izvēlētiem i kļūdu nolīdzinājumiem atrastās nezinamo vērtības uzskatamas par augšā minētai prasībai atbilstošām tuvinām vērtībām (x).

Nolīdzinājumos (198) atvietojot $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_i$ ar atbilstošām izteiksmēm (199), atrodam

$$\left.\begin{array}{l} f_1\{(x_1)+\xi_1, (x_2)+\xi_2, (x_3)+\xi_3, \dots, (x_{i-1})+ \\ \qquad\qquad + \xi_{i-1}, (x_i)+\xi_i\} - l_1 = v_1 \\ f_2\{(x_1)+\xi_1, (x_2)+\xi_2, (x_3)+\xi_3, \dots, (x_{i-1})+ \\ \qquad\qquad + \xi_{i-1}, (x_i)+\xi_i\} - l_2 = v_2 \\ f_3\{(x_1)+\xi_1, (x_2)+\xi_2, (x_3)+\xi_3, \dots, (x_{i-1})+ \\ \qquad\qquad + \xi_{i-1}, (x_i)+\xi_i\} - l_3 = v_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n\{(x_1)+\xi_1, (x_2)+\xi_2, (x_3)+\xi_3, \dots, (x_{i-1})+ \\ \qquad\qquad + \xi_{i-1}, (x_i)+\xi_i\} - l_n = v_n \end{array}\right\} \quad \dots \quad (200).$$

Šo nolīdzinājumu kreisās puses izvirzam Taylor'a rindās, uzskatot jaunos nezinamos ξ par meklēto lielumu x tuvino vērtību (x) ļoti maziem pieaugumiem. Pie tam, šo pieaugumu mazuma dēļ, ignorējam tos locekļus, kur ξ ieiet augstākās par pirmo kāpēs.

Tad nolīdzinājumi pāriet veidā

$$f_1\{(x_1),(x_2),(x_3),\ldots,(x_{i-1}),(x_i)\}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0\xi_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0\xi_2+$$
$$+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)_0\xi_3+\ldots+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}}\right)_0\xi_{i-1}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)_0\xi_i-l_1=v_1$$

$$f_2\{(x_1),(x_2),(x_3),\ldots,(x_{i-1}),(x_i)\}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0\xi_1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0\xi_2+$$
$$+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)_0\xi_3+\ldots+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}}\right)_0\xi_{i-1}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)_0\xi_i-l_2=v_2$$

$$f_3\{(x_1),(x_2),(x_3),\ldots,(x_{i-1}),(x_i)\}+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)_0\xi_1+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)_0\xi_2+$$
$$+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)_0\xi_3+\ldots+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_{i-1}}\right)_0\xi_{i-1}+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_i}\right)_0\xi_i-l_3=v_3$$

. . . .

$$f_n\{(x_1),(x_2),(x_3),\ldots,(x_{i-1}),(x_i)\}+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0\xi_1+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_0\xi_2+$$
$$+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_3}\right)_0\xi_3+\ldots+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}\right)_0\xi_{i-1}+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)_0\xi_i-l_n=v_n$$

jeb, citādā locekļu iekārtojumā,

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0\xi_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0\xi_2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)_0\xi_3+\ldots\ldots+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}}\right)_0\xi_{i-1}+\\
\qquad+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)_0\xi_i+\left\{f_1\{(x_1),(x_2),(x_3),\ldots\ldots,(x_{i-1}),(x_i)\}-l_1\right\}=v_1\\
\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0\xi_1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0\xi_2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)_0\xi_3+\ldots+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}}\right)_0\xi_{i-1}+\\
\qquad+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)_0\xi_i+\left\{f_2\{(x_1),(x_2),(x_3),\ldots,(x_{i-1}),(x_i)\}-l_2\right\}=v_2\\
\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)_0\xi_1+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)_0\xi_2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)_0\xi_3+\ldots+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_{i-1}}\right)_0\xi_{i-1}+\\
\qquad+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_i}\right)_0\xi_i+\left\{f_3\{(x_1),(x_2),(x_3),\ldots,(x_{i-1}),(x_i)\}-l_3\right\}=v_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_0\xi_1+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right)_0\xi_2+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_3}\right)_0\xi_3+\ldots+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}\right)_0\xi_{i-1}+\\
\qquad+\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)_0\xi_i+\left\{f_n\{(x_1),(x_2),(x_3),\ldots,(x_{i-1}),(x_i)\}-l_n\right\}=v_n
\end{array}\right\}(201).$$

Ar simboliem $(\,)_0$ aizrādīts, ka tipa $\frac{\partial f}{\partial x}$ diferencialkoeficienti aprēķinami ar meklēto lielumu x tuvinām vērtībām. Tā tad šie diferencialkoeficienti ir no jauniem nezinamiem ξ neatkarīgi lielumi. Tas pats sakams par tipa $f\left\{(x_1), (x_2), (x_3), \ldots\ldots, (x_{i-1}), (x_i)\right\}$ locekļiem, kas izsaka ar meklēto lielumu tuvinām vērtībām (x) aprēķinātās novērotās funkcijas un, kopā ar atskaitamo atbilstošo funkcijas novērojumu l, veido nolīdzinājumu (201) brīvos locekļus.

Sistemas (201) atsevišķo nolīdzinājumu koeficientus un brīvos locekļus apzīmējot ar

$$\begin{array}{l}
a_1, b_1, c_1, \ldots\ldots, (i-l)_1, i_1 \text{ un } -\lambda_1\\
a_2, b_2, c_2, \ldots\ldots, (i-l)_2, i_2 \text{ un } -\lambda_2\\
a_3, b_3, c_3, \ldots\ldots, (i-l)_3, i_3 \text{ un } -\lambda_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n, b_n, c_n, \ldots\ldots, (i-l)_n, i_n, \text{ un } -\lambda_n,
\end{array}$$

šie nolīdzinājumi rakstami vispārējā veidā

$$\left.\begin{array}{l}
a_1\xi_1 + b_1\xi_2 + c_1\xi_3 + \ldots + (i-l)_1\xi_{i-1} + i_1\xi_i - \lambda_1 = v_1\\
a_2\xi_1 + b_2\xi_2 + c_2\xi_3 + \ldots + (i-l)_2\xi_{i-1} + i_2\xi_i - \lambda_2 = v_2\\
a_3\xi_1 + b_3\xi_2 + c_3\xi_3 + \ldots + (i-l)_3\xi_{i-1} + i_3\xi_i - \lambda_3 = v_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n\xi_1 + b_n\xi_2 + c_n\xi_3 + \ldots + (i-l)_n\xi_{i-1} + i_n\xi_i - \lambda_n = v_n
\end{array}\right\} \quad (202).$$

Šie oriģinalveidā (198) dotiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošie p ā r v ē r s t i e k ļ ū d u n o l ī d z i n ā j u m i (202) ir lineari. Viņos ieiet oriģinalnolīdzinājumu nezinamo x un brīvo locekļu $-l$ vietā jaunie nezinamie ξ un brīvie locekļi $-\lambda$. Sakarā ar to piezīmēsim, ka pārvērsto kļūdu nolīdzinājumu brīvos locekļus vispārējā veidā apzīmējošam burtam pierakstītā zīme „—" nav vis jāsaprot tā, itkā aprēķinātais brīvais loceklis būtu jāieliek nolīdzinājumā ar pretējo zīmi; $-\lambda$ vienkārši apzīmē nolīdzinājuma brīvo locekli ar to zīmi, kura tam pienākas.

Ja kļūdu nolīdzinājumi gadās jau oriģinalveidā visi lineari, t. i. tipa

$$\left.\begin{array}{l}
a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \ldots\ldots + (i-l)_1x_{i-1} + i_1x_i - l_1 = v_1\\
a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots\ldots + (i-l)_2x_{i-1} + i_2x_i - l_2 = v_2\\
a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + \ldots\ldots + (i-l)_3x_{i-1} + i_3x_i - l_3 = v_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_nx_1 + b_nx_2 + c_nx_3 + \ldots\ldots + (i-l)_nx_{i-1} + i_nx_i - l_n = v_n
\end{array}\right\} \quad (203),$$

kur a, b, c,....., (i — l), i un — l apzīmē no nezinamiem x neatkarīgus koeficientus resp. brīvus locekļus, tad šo nolīdzinājumu pārveršana vispārīgi nav nepieciešama. Tomēr arī tādos apstākļos pārveršana bieži ir lietderīga, sevišķi tad, kad oriģinalveidā sastādīto kļūdu nolīdzinājumu brīvie locekļi ir lieli, aritmetiskās darbībās neparocīgi skaitļi, piem., gradi ar minutām un sekundām. Pēc parauga (199) atvietojot nolīdzinājumu (203) nezinamos x ar to tuvinām vērtībām (x) un atbilstošiem pieaugumiem ξ, pārvērstos kļūdu nolīdzinājumos ar nezinamiem ξ koeficienti gan paliek tie paši kā oriģinalnolīdzinājumos. Bet brīvie locekļi $-\lambda$, izsakot starpības, par kurām ar meklēto lielumu tuvinām vērtībām aprēķinātās funkcijas atšķiras no atbilstošiem novērojumiem, tad iznāk parocīgākos nelielos skaitļos.

Šos uz kļūdu nolīdzinājumu sastādīšanu un eventuali vajadzīgo resp. ieteicamo pārvēršanu attiecīgos aizrādijumus noslēgsim ar piezīmi, ka šinī netiešu novērojumu izlīdzināšanas darba pirmā posmā nekrīt svarā, vai lietotie funkciju novērojumi notikuši ar vienādu, vai ar dažādu noteiktību. Bet sekojošos izlīdzināšanas darba posmos, pie kuru apskatīšanas tagad pāriesim, novērojumu vienādā vai dažādā noteiktība gan jāievēro.

a) Vienādas noteiktības gadijums.

Kā jau agrāk minēts, izlīdzinot pēc vismazāko kvadratu metodes, meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības x, resp. tās noteicošie pieaugumi ξ jānosaka tā, lai novērojumus l resp. atbilstošos lielumus λ izlīdzinošie izlabojumi v apmierinātu vismazāko kvadratu metodes pamatprasību.

Vienādas noteiktības novērojumu gadijumā šai pamatprasībai jābūt izpildītai ar pirmo formulu (153) izteiktā veidā, pie kam jāievēro, ka atsevišķie v ir ar nolīdzinājumiem (202) noteiktās nezinamo pieaugumu ξ funkcijas. Tā tad jāprasa, lai būtu

$$\begin{aligned}[vv] = & (a_1 \xi_1 + b_1 \xi_2 + c_1 \xi_3 + \ldots + (i-l)_1 \xi_{i-1} + i_1 \xi_i - \lambda_1)^2 + \\ & + (a_2 \xi_1 + b_2 \xi_2 + c_2 \xi_3 + \ldots + (i-l)_2 \xi_{i-1} + i_2 \xi_i - \lambda_2)^2 + \\ & + (a_3 \xi_1 + b_3 \xi_2 + c_3 \xi_3 + \ldots + (i-l)_3 \xi_{i-1} + i_3 \xi_i - \lambda_3)^2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + (a_n \xi_1 + b_n \xi_2 + c_n \xi_3 + \ldots + (i-l)_n \xi_{i-1} + i_n \xi_i - \lambda_n)^2 = \min. \quad (204).\end{aligned}$$

Lai atrastu šo prasību izpildošās nezinamo ξ vērtības, jāveido funkcijas (204) parcialie atvasinājumi pa atsevišķiem nezinamiem ξ, un katrs atvasinājums jāpielīdzina nullei. Tādā veidā rodas vispārējā tipa

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\,[vv]}{\partial\,\xi_1} &= 0\\
\frac{\partial\,[vv]}{\partial\,\xi_2} &= 0\\
\frac{\partial\,[vv]}{\partial\,\xi_3} &= 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial\,[vv]}{\partial\,\xi_{i-1}} &= 0\\
\frac{\partial[vv]}{\partial\xi_i} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (205)$$

jauni nolīdzinājumi, kuru skaits vienāds ar šo nolīdzinājumu nezinamo ξ skaitu. Tā tad šie nolīdzinājumi atslēdzami noteiktā veidā, pie kam atrastās nezinamo vērtības, nosakot vismazāko kvadratu metodes pamatprasību apmierinošus novērojumu izlabojumus v, uzskatamas par pieaugumu ξ izlīdzinātām vērtībām. Ar tām, ievērojot (199), tad arī nosakamas pašu meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības x.

Ja kļūdu nolīdzinājumi jau oriģinalveidā visi ir lineari un netiek pārvērsti, formulā (204) izlabojumi v izsakami kā pašu meklēto lielumu x funkcijas, izejot no oriģinalveidā dotiem kļūdu nolīdzinājumiem (203). Tādā gadijumā atbilstošos tipa (205) nolīdzinājumos nolīdzinājumu (202) nezinamo ξ un brīvo locekļu $-\lambda$ vietā ieiet nolīdzinājumu (203) nezinamie x un brīvie locekļi $-l$. Tādos apstākļos, atslēdzot nolīdzinājumus (205), tieši atrodam meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības x.

Pagaidām pavisam vispārējā veidā rakstītos nolīdzinājumus (205) sauc par n o r m a l n o l ī d z i n ā j u m i e m. Apskatīsim tagad sīkāki, kādi ir šo normalnolīdzinājumu koeficienti un brīvie locekļi.

Piem., pirmais normalnolīdzinājums, ievērojot (202), ir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[vv]}{\partial\,\xi_1} = {} & 2a_1(a_1\xi_1 + b_1\xi_2 + c_1\xi_3 + \ldots\ldots + (i-1)_1\xi_{i-1} + i_1\xi_i - \lambda_1) + \\
& + 2a_2(a_2\xi_1 + b_2\xi_2 + c_2\xi_3 + \ldots\ldots + (i-1)_2\xi_{i-1} + i_2\xi_i - \lambda_2) + \\
& + 2a_3(a_3\xi_1 + b_3\xi_2 + c_3\xi_3 + \ldots\ldots + (i-1)_3\xi_{i-1} + i_3\xi_i - \lambda_3) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + 2a_n(a_n\xi_1 + b_n\xi_2 + c_n\xi_3 + \ldots\ldots + (i-1)_n\xi_{i-1} + i_n\xi_i - \lambda_n) \quad =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & 2(a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 + \ldots\ldots + a_na_n)\xi_1 + \\
& + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots\ldots + a_nb_n)\xi_2 + \\
& + 2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \ldots\ldots + a_nc_n)\xi_3 + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + 2\,(a_1(i-l)_1 + a_2(i-l)_2 + a_3(i-l)_3 + \ldots + a_n(i-l)_n)\xi_{i-1} + \\
& + 2(a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + \ldots\ldots + a_ni_n)\xi_i - \\
& - 2(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + \ldots\ldots + a_n\lambda_n) \quad =
\end{aligned}
$$

$$
= 2\,[aa]\xi_1 + 2[ab]\xi_2 + 2[ac]\xi_3 + \ldots + 2[a(i-l)]\xi_{i-1} + 2[ai]\xi_i - 2[a\lambda] = 0,
$$

jeb, izdalot ar 2, galīgā veidā,

$$
[aa]\xi_1 + [ab]\xi_2 + [ac]\xi_3 + \ldots + [a(i-l)]\xi_{i-1} + [ai]\xi_i - [a\lambda] = 0 \quad (206).
$$

Līdzīgā veidā izvirzot arī pārējos nolīdzinājumus (205), atrodam pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem (202) atbilstošo normalnolīdzinājumu sistemu:

$$
\left.
\begin{aligned}
&[aa]\xi_1 + [ab]\xi_2 + [ac]\xi_3 + \ldots + \\
&\qquad + [a(i-l)]\xi_{i-1} + [ai]\xi_i - [a\lambda] = 0 \\
&[ab]\xi_1 + [bb]\xi_2 + [bc]\xi_3 + \ldots + \\
&\qquad + [b(i-l)]\xi_{i-1} + [bi]\xi_i - [b\lambda] = 0 \\
&[ac]\xi_1 + [bc]\xi_2 + [cc]\xi_3 + \ldots + \\
&\qquad + [c(i-l)]\xi_{i-1} + [ci]\xi_i - [c\lambda] = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[a(i-l)]\xi_1 + [b(i-l)]\xi_2 + [c(i-l)]\xi_3 + \ldots + \\
&\qquad + [(i-l)(i-l)]\xi_{i-1} + [(i-l)i]\xi_i - [(i-l)\lambda] = 0 \\
&[ai]\xi_1 + [bi]\xi_2 + [ci]\xi_3 + \ldots + \\
&\qquad + [(i-l)i]\xi_{i-1} + [ii]\xi_i - [i\lambda] = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (207).
$$

Izejot nevis no pārvērstiem, bet no linearā oriģinalveidā (203) dotiem kļūdu nolīdzinājumiem, atbilstošos normalnolīdzinājumos nezinamo ξ_1, ξ_2, $\xi_3, \ldots\ldots, \xi_{i-1}, \xi_i$ vietā stājas x_1, x_2, $x_3, \ldots\ldots, x_{i-1}$, x_i, bet brīvo locekļu $-[a\lambda]$, $-[b\lambda]$, $-[c\lambda]$, ..., $-[(i-l)\lambda]$, $-[i\lambda]$ vietā — atbilstošie $-[al]$, $-[bl]$, $-[cl]$, ..., $-[(i-l)l]$, $-[il]$.

Lai būtu iespējamas ļoti vērtīgas aritmetisko darbu kontroles normalnolīdzinājumu skaitliskā sastādīšanā un sevišķi nākošā paragrafā apskatamā šo nolīdzinājumu reducēšanā un atslēgšanā, ieteicams veidot šādas kļūdu nolīdzinājumu koeficientu sumas:

$$\left.\begin{array}{l}
s_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \ldots\ldots + (i-l)_1 + i_1 \\
s_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \ldots\ldots + (i-l)_2 + i_2 \\
s_3 = a_3 + b_3 + c_3 + \ldots\ldots + (i-l)_3 + i_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_n = a_n + b_n + c_n + \ldots\ldots + (i-l)_n + i_n
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (208).$$

Ar tām aprēķinam

$$\left.\begin{array}{l}
[as] = a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + \ldots + a_ns_n \\
[bs] = b_1s_1 + b_2s_2 + b_3s_3 + \ldots + b_ns_n \\
[cs] = c_1s_1 + c_2s_2 + c_3s_3 + \ldots + c_ns_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[(i-l)s] = (i-l)_1s_1 + (i-l)_2s_2 + (i-l)_3s_3 + \ldots + (i-l)_ns_n \\
[is] = i_1s_1 + i_2s_2 + i_3s_3 + \ldots + i_ns_n \\
-[\lambda s] = -\lambda_1s_1 - \lambda_2s_2 - \lambda_3s_3 - \ldots - \lambda_ns_n \\
\text{un} \\
[ss] = s_1s_1 + s_2s_2 + s_3s_3 + \ldots + s_ns_n
\end{array}\right\} \quad (209).$$

Ievērojot (208), pierādams, ka

$$[as] + [bs] + [cs] + \ldots\ldots + [(i-l)s] + [is] = [ss] \quad . \quad (210),$$

kas var noderēt par kontroli pašu sumu (209) aprēķinam. Ar šīm pēc formulām (209) aprēķinātām un uz formulas (210) pamata pārbaudītām sumām tad veidojams t. s. **sumu nolīdzinājums**

$$[as]\xi_1 + [bs]\xi_2 + [cs]\xi_3 + \ldots + [(i-l)s]\xi_{i-1} + [is]\xi_i - [\lambda s] = 0 \quad (211),$$

ar kuru ieteicams papildināt normalnolīdzinājumu sistemu (207), rakstot sumu nolīdzinājumu zem šīs sistemas nolīdzinājumiem.

Ievērojot (208), pierādams, ka normalnolīdzinājumu un sumu nolīdzinājuma koeficienti un brīvie locekļi ir šādos teoretiskos sakaros:

$$\left.\begin{array}{l}
[aa] + [ab] + [ac] + \ldots + \\
\quad + [a(i-l)] + [ai] = [as] \\
[ab] + [bb] + [bc] + \ldots + \\
\quad + [b(i-l)] + [bi] = [bs] \\
[ac] + [bc] + [cc] + \ldots + \\
\quad + [c(i-l)] + [ci] = [cs] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (212)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[a(i-1)]+[b(i-1)]+[c(i-1)]+\ldots+\\
&\qquad+[(i-1)(i-1)]+[(i-1)i]=[(i-1)s]\\
&[ai]+[bi]+[ci]+\ldots+\\
&\qquad+[(i-1)i]+[ii]=[is]\\
&-[a\lambda]-[b\lambda]-[c\lambda]-\ldots-\\
&\qquad-[(i-1)\lambda]-[i\lambda]=-[\lambda s]
\end{aligned}\right|\quad(212)$$

jeb

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]+[ab]+[ac]+\ldots+\\
&\qquad+[a(i-1)]+[ai]-[as]=0\\
&[ab]+[bb]+[bc]+\ldots+\\
&\qquad+[b(i-1)]+[bi]-[bs]=0\\
&[ac]+[bc]+[cc]+\ldots+\\
&\qquad+[c(i-1)]+[ci]-[cs]=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[a(i-1)]+[b(i-1)]+[c(i-1)]+\ldots+\\
&\qquad+[(i-1)(i-1)]+[(i-1)i]-[(i-1)s]=0\\
&[ai]+[bi]+[ci]+\ldots+\\
&\qquad+[(i-1)i]+[ii]-[is]=0\\
&-[a\lambda]-[b\lambda]-[c\lambda]-\ldots-\\
&\qquad-[(i-1)\lambda]-[i\lambda]+[\lambda s]=0
\end{aligned}\right\}\quad(213).$$

Uz formulu (212) vai (213) pamata ērti pārbaudams dotai kļūdu nolīdzinājumu sistemai atbilstošo normalnolīdzinājumu koeficientu un brīvo locekļu skaitliskais aprēķins. Skatoties pēc tā, vai šo pārbaudi nodomāts izdarīt pēc parauga (212), vai pēc parauga (213), normalnolīdzinājumu sistemu papildinošā sumu nolīdzinājuma koeficienti un brīvais loceklis rakstami ar taisnām, vai ar pretējām zīmēm.

Īsumā minēsim vēl šīs „sumu kontroles" variantu, pēc kura pa atsevišķiem kļūdu nolīdzinājumiem veido to koeficientu un brīvo locekļu sumas pēc parauga

$$\sigma=a+b+c+\ldots\ldots+(i-1)+i-\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (214),$$

un ar tām aprēķina sumas $[a\sigma]$, $[b\sigma]$, $[c\sigma]$, ..., $[(i-1)\sigma]$, $[i\sigma]$, $-[\lambda\sigma]$ un $[\sigma\sigma]$ pēc (209) parauga, atvietojot sumas s ar atbilstošām σ.

Var pierādīt, ka $[a\sigma]$, $[b\sigma]$, $[c\sigma]$, ..., $[(i-l)\sigma]$, $[i\sigma]$, $-[\lambda\sigma]$ un $[\sigma\sigma]$, normalnolīdzinājumu koeficienti un brīvie locekļi un brīvo locekļu λ kvadratu suma $[\lambda\lambda]$ ir šādos teoretiskos sakaros:

$$[a\sigma]+[b\sigma]+[c\sigma]+\ldots\ldots+[(i-l)\sigma]+[i\sigma]-[\lambda\sigma]=[\sigma\sigma] \tag{215}$$

un

$$\left.\begin{array}{l}
[aa]+[ab]+[ac]+\ldots\ldots+ \\
\qquad +[a(i-l)]+[ai]-[a\lambda]=[a\sigma] \\
[ab]+[bb]+[bc]+\ldots\ldots+ \\
\qquad +[b(i-l)]+[bi]-[b\lambda]=[b\sigma] \\
[ac]+[bc]+[cc]+\ldots\ldots+ \\
\qquad +[c(i-l)]+[ci]-[c\lambda]=[c\sigma] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[a(i-l)]+[b(i-l)]+[c(i-l)]+\ldots\ldots+ \\
\qquad +[(i-l)(i-l)]+[(i-l)i]-[(i-l)\lambda]=[(i-l)\sigma] \\
[ai]+[bi]+[ci]+\ldots\ldots+ \\
\qquad +[(i-l)i]+[ii]-[i\lambda]=[i\sigma] \\
-[a\lambda]-[b\lambda]-[c\lambda]-\ldots\ldots- \\
\qquad -[(i-l)\lambda]-[i\lambda]+[\lambda\lambda]=-[\lambda\sigma]
\end{array}\right\} \tag{216}$$

jeb

$$\left.\begin{array}{l}
[aa]+[ab]+[ac]+\ldots\ldots+ \\
\qquad +[a(i-l)]+[ai]-[a\lambda]-[a\sigma]=0 \\
[ab]+[bb]+[bc]+\ldots\ldots+ \\
\qquad +[b(i-l)]+[bi]-[b\lambda]-[b\sigma]=0 \\
[ac]+[bc]+[cc]+\ldots\ldots+ \\
\qquad +[c(i-l)]+[ci]-[c\lambda]-[c\sigma]=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[a(i-l)]+[b(i-l)]+[c(i-l)]+\ldots\ldots+ \\
\qquad +[(i-l)(i-l)]+[(i-l)i]-[(i-l)\lambda]-[(i-l)\sigma]=0 \\
[ai]+[bi]+[ci]+\ldots\ldots+ \\
\qquad +[(i-l)i]+[ii]-[i\lambda]-[i\sigma]=0 \\
-[a\lambda]-[b\lambda]-[c\lambda]-\ldots\ldots- \\
\qquad -[(i-l)\lambda]-[i\lambda]+[\lambda\lambda]+[\lambda\sigma]=0
\end{array}\right\} \tag{217}$$

Arī šīs formulas var noderēt normalnolīdzinājumu koeficientu un brīvo locekļu un arī sumas $[\lambda\lambda]$ skaitliskā aprēķina pārbaudei.

b) Dažādas noteiktības gadijums.

Dažādas noteiktības novērojumu gadijumā vismazāko kvadratu metodes pamatprasība jāievēro ar otro formulu (153) izteiktā veidā. Tā tad, apzīmējot ar $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ novērojumu $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ svarus, meklētie pieaugumi ξ pārvērstos kļūdu nolīdzinājumos (202), resp. paši meklētie x lineارā oriģinalveidā dotos kļūdu nolīdzinājumos (203) jānosaka tā, lai atbilstošās šķietamās kļūdas v apmierinātu prasību

$$\begin{aligned}[pvv] = {} & p_1(a_1\xi_1 + b_1\xi_2 + c_1\xi_3 + \ldots + (i-l)_1\xi_{i-1} + i_1\xi_i - \lambda_1)^2 + \\ & + p_2(a_2\xi_1 + b_2\xi_2 + c_2\xi_3 + \ldots + (i-l)_2\xi_{i-1} + i_2\xi_i - \lambda_2)^2 + \\ & + p_3(a_3\xi_1 + b_3\xi_2 + c_3\xi_3 + \ldots + (i-l)_3\xi_{i-1} + i_3\xi_i - \lambda_3)^2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + p_n(a_n\xi_1 + b_n\xi_2 + c_n\xi_3 + \ldots + (i-l)_n\xi_{i-1} + i_n\xi_i - \lambda_n)^2 = \min. \quad (218).\end{aligned}$$

Tādā veidā rakstītā formula (218) zīmējas uz gadijumu, kad kļūdu nolīdzinājumus lieto pārvērstā veidā (202). Ja kļūdu nolīdzinājumi jau oriģinalveidā ir lineari un tiek lietoti bez pārvēršanas, tad, saskaņā ar (203), formulā (218) ξ jāatvieto ar atbilstošiem x, bet $-\lambda$ — ar atbilstošiem $-l$. Tas pats jāievēro arī turpmākos iztirzājumos, kurus, vienkāršības dēļ, attiecināsim tikai uz veidā (218) rakstīto minimuma noteikumu.

Lai izpildītos šis minimuma noteikums, nezinamie ξ jānosaka tā, lai apmierinātos vispārējā tipa

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial[pvv]}{\partial\xi_1} &= 0 \\ \frac{\partial[pvv]}{\partial\xi_2} &= 0 \\ \frac{\partial[pvv]}{\partial\xi_3} &= 0 \\ \ldots&\ldots\ldots \\ \frac{\partial[pvv]}{\partial\xi_{i-1}} &= 0 \\ \frac{\partial[pvv]}{\partial\xi_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (219)$$

normalnolīdzinājumi. Ievērojot (202), līdzīgā kārtā, kā tas padarīts vienādas noteiktības gadijumā, šos normalnolīdzinājumus var dabūt šādā galīgā vispārējā veidā:

$$\left.\begin{aligned}
&[paa]\xi_1 + [pab]\xi_2 + [pac]\xi_3 + \ldots + \\
&\quad + [pa(i-l)]\xi_{i-1} + [pai]\xi_i - [pa\lambda] = 0 \\
&[pab]\xi_1 + [pbb]\xi_2 + [pbc]\xi_3 + \ldots + \\
&\quad + [pb(i-l)]\xi_{i-1} + [pbi]\xi_i - [pb\lambda] = 0 \\
&[pac]\xi_1 + [pbc]\xi_2 + [pcc]\xi_3 + \ldots + \\
&\quad + [pc(i-l)]\xi_{i-1} + [pci]\xi_i - [pc\lambda] = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[pa(i-l)]\xi_1 + [pb(i-l)]\xi_2 + [pc(i-l)]\xi_3 + \ldots + \\
&\quad + [p(i-l)(i-l)]\xi_{i-1} + [p(i-l)i]\xi_i - [p(i-l)\lambda] = 0 \\
&[pai]\xi_1 + [pbi]\xi_2 + [pci]\xi_3 + \ldots + \\
&\quad + [p(i-l)i]\xi_{i-1} + [pii]\xi_i - [pi\lambda] = 0
\end{aligned}\right\} \quad (220).$$

Atslēdzot šo normalnolīdzinājumu sistemu, atrodamas nezinamo ξ izlīdzinātās vērtības.

Kas zīmējas uz sumu kontrolēm, tad, tāpat kā vienādas noteiktības gadijumā, jāveido sumas s resp. σ.

Aprēķinot

$$\left.\begin{aligned}
[pas] &= p_1a_1s_1 + p_2a_2s_2 + p_3a_3s_3 + \ldots + p_na_ns_n \\
[pbs] &= p_1b_1s_1 + p_2b_2s_2 + p_3b_3s_3 + \ldots + p_nb_ns_n \\
[pcs] &= p_1c_1s_1 + p_2c_2s_2 + p_3c_3s_3 + \ldots + p_nc_ns_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[p(i-l)s] &= p_1(i-l)_1s_1 + p_2(i-l)_2s_2 + p_3(i-l)_3s_3 + \ldots + p_n(i-l)_ns_n \\
[pis] &= p_1i_1s_1 + p_2i_2s_2 + p_3i_3s_3 + \ldots + p_ni_ns_n \\
-[p\lambda s] &= -p_1\lambda_1s_1 - p_2\lambda_2s_2 - p_3\lambda_3s_3 - \ldots - p_n\lambda_ns_n \\
\text{un}\quad & \\
[pss] &= p_1s_1s_1 + p_2s_2s_2 + p_3s_3s_3 + \ldots + p_ns_ns_n
\end{aligned}\right\} \quad (221),$$

var pierādīt, ka

$$[pas] + [pbs] + [pcs] + \ldots + [p(i-l)s] + [pis] = [pss] \quad . \quad . \quad (222).$$

Arī var pierādīt, ka t. s. s u m u n o l ī d z i n ā j u m s

$$[pas]\xi_1 + [pbs]\xi_2 + [pcs]\xi_3 + \ldots + [p(i-l)s]\xi_{i-1} + [pis]\xi_i - [p\lambda s] = 0 \quad (223)$$

teoretiski ir vienāds ar normalnolīdzinājumu (220) sumu, kas var noderēt normalnolīdzinājumu koeficientu un brīvo locekļu skaitliskā aprēķina pārbaudei.

Lietojot sumas σ un pēc parauga (221) veidojot $[pa\sigma]$, $[pb\sigma]$, $[pc\sigma]$, ..., $[p(i-l)\sigma]$, $[pi\sigma]$, $-[p\lambda\sigma]$ un $[p\sigma\sigma]$, pierādams, ka

$$[pa\sigma]+[pb\sigma]+[pc\sigma]+\ldots..+[p(i-l)\sigma]+[pi\sigma]-[p\lambda\sigma]=[p\sigma\sigma] \quad (224)$$

un

$$\left.\begin{array}{l}
[paa]+[pab]+[pac]+\ldots..+ \\
\quad +[pa(i-l)]+[pai]-[pa\lambda]=[pa\sigma] \\
[pab]+[pbb]+[pbc]+\ldots..+ \\
\quad +[pb(i-l)]+[pbi]-[pb\lambda]=[pb\sigma] \\
[pac]+[pbc]+[pcc]+\ldots..+ \\
\quad +[pc(i-l)]+[pci]-[pc\lambda]=[pc\sigma] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[pa(i-l)]+[pb(i-l)]+[pc(i-l)]+\ldots..+ \\
\quad +[p(i-l)(i-l)]+[p(i-l)i]-[p(i-l)\lambda]=[p(i-l)\sigma] \\
[pai]+[pbi]+[pci]+\ldots..+ \\
\quad +[p(i-l)i]+[pii]-[pi\lambda]=[pi\sigma] \\
-[pa\lambda]-[pb\lambda]-[pc\lambda]-\ldots..- \\
\quad -[p(i-l)\lambda]-[pi\lambda]+[p\lambda\lambda]=-[p\lambda\sigma]
\end{array}\right\} \quad (225)$$

jeb

$$\left.\begin{array}{l}
[paa]+[pab]+[pac]+\ldots+ \\
\quad +[pa(i-l)]+[pai]-[pa\lambda]-[pa\sigma]=0 \\
[pab]+[pbb]+[pbc]+\ldots+ \\
\quad +[pb(i-l)]+[pbi]-[pb\lambda]-[pb\sigma]=0 \\
[pac]+[pbc]+[pcc]+\ldots+ \\
\quad +[pc(i-l)]+[pci]-[pc\lambda]-[pc\sigma]=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[pa(i-l)]+[pb(i-l)]+[pc(i-l)]+\ldots+ \\
\quad +[p(i-l)(i-l)]+[p(i-l)i]-[p(i-l)\lambda]-[p(i-l)\sigma]=0 \\
[pai]+[pbi]+[pci]+\ldots+ \\
\quad +[p(i-l)i]+[pii]-[pi\lambda]-[pi\sigma]=0 \\
-[pa\lambda]-[pb\lambda]-[pc\lambda]-\ldots- \\
\quad -[p(i-l)\lambda]-[pi\lambda]+[p\lambda\lambda]+[p\lambda\sigma]=0
\end{array}\right\} \quad (226).$$

Arī šie teoretiskie sakari var noderēt normalnolīdzinājumu skaitlisko elementu aprēķina pārbaudei.

§ 23. Normalnolīdzinājumu atslēgšana. Gauss'a algoritms.

Lai atrastu pieaugumu ξ resp. pašu meklēto lielumu x izlīdzinātās vērtības, jāatslēdz tam nolūkam veidotie normalnolīdzinājumi. Tas padarams pēc dažādiem nolīdzinājumu sistemu atslēgšanai pazīstamiem paņēmieniem. Bet vislietderīgāki tas notiek pēc normalnolīdzinājumu veidam sevišķi piemērotā Gauss'a aizrādītā paņēmiena (Gauss'a algoritma), kurš pamatots uz nezinamo izslēgšanas normalnolīdzinājumu reducēšanas ceļā.

Normalnolīdzinājumu sistemas atslēgšana padara diezgan lielu aritmetisku darbu, kur skaitliskā rēķinā viegli var gadīties kļūdas. Tāpēc ļoti vēlams, lai šis rēķins būtu pa atsevišķiem posmiem ērti un droši pārbaudams, jo tad eventuali konstatētas aritmetiskas kļūdas viegli uzmeklējamas, un viņu izlabošana nav saistīta ar sevišķi lieliem grozijumiem jau izdarītā rēķina daļā. Starp citu, arī šinī ziņā ļoti izdevīgs minētais Gauss'a paņēmiens, jo tas plašā mērā pielaiž t. s. sumu kontroles, uz kurām jau aizrādīts iepriekšējā paragrafā.

Tagad apskatīsim sīkāki normalnolīdzinājumu atslēgšanu pēc Gauss'a algoritma ar attiecīgām sumu kontrolēm.

a) Vienādas noteiktības gadijums.

Lai ir dota ar attiecīgo sumu nolīdzinājumu un locekli $[\lambda\lambda]$ papildinātā normalnolīdzinājumu sistema

$$\left.\begin{array}{lll|l}
(1) & = & [aa]\xi_1 + [ab]\xi_2 + [ac]\xi_3 + \ldots\ldots + & \\
 & & + [a(i-1)]\xi_{i-1} + [ai]\xi_i - [a\lambda] = 0 & [a\sigma] \\
(2) & = & [ab]\xi_1 + [bb]\xi_2 + [bc]\xi_3 + \ldots\ldots + & \\
 & & + [b(i-1)]\xi_{i-1} + [bi]\xi_i - [b\lambda] = 0 & [b\sigma] \\
(3) & = & [ac]\xi_1 + [bc]\xi_2 + [cc]\xi_3 + \ldots\ldots + & \\
 & & + [c(i-1)]\xi_{i-1} + [ci]\xi_i - [c\lambda] = 0 & [c\sigma] \\
\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
(i-1) & = & [a(i-1)]\xi_1 + [b(i-1)]\xi_2 + [c(i-1)]\xi_3 + \ldots\ldots + & \\
 & & + [(i-1)(i-1)]\xi_{i-1} + [(i-1)i]\xi_i - [(i-1)\lambda] = 0 & [(i-1)\sigma] \\
(i) & = & [ai]\xi_1 + [bi]\xi_2 + [ci]\xi_3 + \ldots\ldots + & \\
 & & + [(i-1)i]\xi_{i-1} + [ii]\xi_i - [i\lambda] = 0 & [i\sigma] \\
\hline
(S) & = & [as]\xi_1 + [bs]\xi_2 + [cs]\xi_3 + \ldots\ldots + & \\
 & & + [(i-1)s]\xi_{i-1} + [is]\xi_i - [\lambda s] = 0 & \\
(L) & & \overline{[\lambda\lambda]} & -[\lambda\sigma]
\end{array}\right\} \quad (227),$$

pie kam aiz vertikalās strīpas, attiecīgo normalnolīdzinājumu galā un aiz locekļa [λλ], arī atzīmēti no σ tipa sumām atvasinātie kontrol-lielumi.

Kā jau minēts, normalnolīdzinājumu koeficienti un brīvie locekļi pārbaudami kā pa vertikaliem stabiņiem, tā arī pa horizontalām rindiņām. Katrā stabiņā normalnolīdzinājumu koeficientu resp. brīvo locekļu sumai jābūt vienādai ar sumu nolīdzinājuma atbilstošo elementu. Katrā rindiņā, t. i. katrā nolīdzinājumā, koeficientu un brīvā locekļa sumai jābūt vienādai ar nolīdzinājuma galā atzīmēto kontrollielumu; bez tam normalnolīdzinājumu brīvo locekļu un [λλ] sumai jābūt vienādai ar apakšējā labajā stūrī atzīmēto kontrollielumu — [λσ].

Tā tad sumu kontroles izdaramas divos variantos. Izšķirsim s-kontroles un σ-kontroles, un piezīmēsim, ka pietiek taisīt sumu kontroles tikai vienā — pirmā vai otrā — variantā.

Tagad apskatīsim normalnolīdzinājumu reducēšanu un atslēgšanu pēc Gauss'a paņēmiena, pie kam pagaidam pieņemsim, ka sumu kontroles notiek s-kontroļu veidā.

Tādā gadijumā normalnolīdzinājumu sistemu papildina ar atbilstošo sumu nolīdzinājumu un ar atsevišķo locekli [λλ], kā tas parādīts sistemā (227), izlaižot aiz vertikalās strīpas atzīmētos uz σ-kontrolēm attiecīgos locekļus. Atsevišķos normalnolīdzinājumus apzīmēsim ar simboliem (1), (2), (3), ..., (i — 1), (i), un sumu nolīdzinājumu ar (S). Kas zīmējas uz [λλ], tad to var saprast kā iedomātas, pēc normalnolīdzinājumu parauga veidotas izteiksmes

$$(L) = -[a\lambda]\xi_1 - [b\lambda]\xi_2 - [c\lambda]\xi_3 - \ldots\ldots - [(i-1)\lambda]\xi_{i-1} - \\ - [i\lambda]\xi_i + [\lambda\lambda] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (228)$$

brīvo locekli.

Pirmā nezinamā ξ_1 izslēgšanai no visiem minētiem nolīdzinājumiem vajadzīgā šo nolīdzinājumu **pirmā reducēšana** notiek šādā veidā. Apzīmējot reducētos nolīdzinājumus un izteiksmi (L) ar (2.1), (3.1), ..., ((i — 1).1), (i.1), (S.1), (L.1), tos veido pēc vispārējās schemas

$$\left.\begin{aligned} (2.1) &= (2) - \frac{[ab]}{[aa]}(1) \\ (3.1) &= (3) - \frac{[ac]}{[aa]}(1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right| \quad \ldots \quad (229).$$

$$\left.\begin{aligned}((i-1).1) &= (i-1)) - \frac{[a(i-1)]}{[aa]}(1)\\ (i.1) &= (i) - \frac{[ai]}{[aa]}(1)\\ \hline (S.1) &= (S) - \frac{[as]}{[aa]}(1)\\ (L.1) &= (L) - \frac{-[a\lambda]}{[aa]}(1)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (229).$$

Attiecībā uz pēdējo izteiksmi (L. 1) piezīmēsim, ka tā visumā neinteresē, — vajadzīgs tikai tās brīvais loceklis; tāpēc turpmāk izteiksmi (L . 1) lietosim tikai atbilstošā izvilkumā.

Tā kā $(1) = 0$, un tāpēc arī $\frac{[ab]}{[aa]}(1) = 0, \frac{[ac]}{[aa]}(1) = 0, \ldots\ldots,$ $\frac{[a(i-1)]}{[aa]}(1) = 0, \frac{[ai]}{[aa]}(1) = 0, \frac{[as]}{[aa]}(1) = 0, \frac{-[a\lambda]}{[aa]}(1) = 0$, minētā reducētā sistema (229) ekvivalenta oriģinalsistemai (227), bet trūkst pirmam normalnolīdzinājumam (227) atbilstošais nolīdzinājums. Viegli pierādams, ka līdz ar to izkritis arī pirmais nezinamais ξ_1. Ieliekot simbolu (1), (2), (3), ..., (i — 1), (i), (S), (L) vietā attiecīgās izteiksmes (227) un (228), atrodam, ka

$$\left.\begin{aligned}(2.1) = &\left([ab] - \frac{[ab]}{[aa]}[aa]\right)\xi_1 + \left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)\xi_2 + \\ &+ \left([bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac]\right)\xi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \left([b(i-1)] - \frac{[ab]}{[aa]}[a(i-1)]\right)\xi_{i-1} + \\ &\qquad + \left([bi] - \frac{[ab]}{[aa]}[ai]\right)\xi_i - \left([b\lambda] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\lambda]\right) = 0\\ (3.1) = &\left([ac] - \frac{[ac]}{[aa]}[aa]\right)\xi_1 + \left([bc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ab]\right)\xi_2 + \\ &+ \left([cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac]\right)\xi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \left([c(i-1)] - \frac{[ac]}{[aa]}[a(i-1)]\right)\xi_{i-1} + \\ &\qquad + \left([ci] - \frac{[ac]}{[aa]}[ai]\right)\xi_i - \left([c\lambda] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\lambda]\right) = 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right| \quad (230).$$

$$
\left.\begin{aligned}
((i-l).l) = &\left([a(i-l)] - \frac{[a(i-l)]}{[aa]}[aa]\right)\xi_1 + \\
&+\left([b(i-l)] - \frac{[a(i-l)]}{[aa]}[ab]\right)\xi_2 + \\
&+\left([c(i-l)] - \frac{[a(i-l)]}{[aa]}[ac]\right)\xi_3 + \ldots\ldots + \\
&+\left([(i-l)(i-l)] - \frac{[a(i-l)]}{[aa]}[a(i-l)]\right)\xi_{i-1} + \\
&+\left([(i-l)i] - \frac{[a(i-l)]}{[aa]}[ai]\right)\xi_i - \\
&\qquad -\left([(i-l)\lambda] - \frac{[a(i-l)]}{[aa]}[a\lambda]\right) = 0 \\
(i.l) = &\left([ai] - \frac{[ai]}{[aa]}[aa]\right)\xi_1 + \left([bi] - \frac{[ai]}{[aa]}[ab]\right)\xi_2 + \\
&+\left([ci] - \frac{[ai]}{[aa]}[ac]\right)\xi_3 + \ldots\ldots + \\
&+\left([(i-l)i] - \frac{[ai]}{[aa]}[a(i-l)]\right)\xi_{i-1} + \\
&+\left([ii] - \frac{[ai]}{[aa]}[ai]\right)\xi_i - \left([i\lambda] - \frac{[ai]}{[aa]}[a\lambda]\right) = 0 \\
\hline
(S.l) = &\left([as] - \frac{[as]}{[aa]}[aa]\right)\xi_1 + \left([bs] - \frac{[as]}{[aa]}[ab]\right)\xi_2 + \\
&+\left([cs] - \frac{[as]}{[aa]}[ac]\right)\xi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+\left([(i-l)s] - \frac{[as]}{[aa]}[a(i-l)]\right)\xi_{i-1} + \\
&+\left([is] - \frac{[as]}{[aa]}[ai]\right)\xi_i - \left([\lambda s] - \frac{[as]}{[aa]}[a\lambda]\right) = 0 \\
(L.l) = &-\left([a\lambda] - \frac{[a\lambda]}{[aa]}[aa]\right)\xi_1 - \left([b\lambda] - \frac{[a\lambda]}{[aa]}[ab]\right)\xi_2 - \\
&-\left([c\lambda] - \frac{[a\lambda]}{[aa]}[ac]\right)\xi_3 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \\
&-\left([(i-1)\lambda] - \frac{[a\lambda]}{[aa]}[a(i-l)]\right)\xi_{i-1} - \\
&-\left([i\lambda] - \frac{[a\lambda]}{[aa]}[ai]\right)\xi_i + \left([\lambda\lambda] - \frac{[a\lambda]}{[aa[}[a\lambda]\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (230).
$$

Kā redzams, pirmā nezinamā ξ_1 koeficienti visos reducētos nolīdzinājumos vienādi ar nulli. Pārējos koeficientus un brīvos locekļus apzīmēsim ar šādiem jau paša Gauss'a lietotiem simboliem:

$$
\left.
\begin{aligned}
[bb.1] &= \left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)\\
[bc.1] &= \left([bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac]\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[b(i-1).1] &= \left([b(i-1)] - \frac{[ab]}{[aa]}[a(i-1)]\right)\\
[bi.1] &= \left([bi] - \frac{[ab]}{[aa]}[ai]\right)\\
-[b\lambda.1] &= -\left([b\lambda] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\lambda]\right)\\
[cc.1] &= \left([cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac]\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[c(i-1).1] &= \left([c(i-1)] - \frac{[ac]}{[aa]}[a(i-1)]\right)\\
[ci.1] &= \left([ci] - \frac{[ac]}{[aa]}[ai]\right)\\
-[c\lambda.1] &= -\left([c\lambda] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\lambda]\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[(i-1)(i-1).1] &= \left([(i-1)(i-1)] - \frac{[a(i-1)]}{[aa]}[a(i-1)]\right)\\
[(i-1)i.1] &= \left([(i-1)i] - \frac{[a(i-1)]}{[aa]}[ai]\right)\\
-[(i-1)\lambda.1] &= -\left([(i-1)\lambda] - \frac{[a(i-1)]}{[aa]}[a\lambda]\right)\\
[ii.1] &= \left([ii] - \frac{[ai]}{[aa]}[ai]\right)\\
-[i\lambda.1] &= -\left([i\lambda] - \frac{[ai]}{[aa]}[a\lambda]\right)\\
[bs.1] &= \left([bs] - \frac{[as]}{[aa]}[ab]\right)\\
[cs.1] &= \left([cs] - \frac{[as]}{[aa]}[ac]\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[(i-1)s.1] &= \left([(i-1)s] - \frac{[as]}{[aa]}[a(i-1)]\right)
\end{aligned}
\right\}\quad (231).
$$

$$\left.\begin{aligned}
[is.1] &= \left([is] - \frac{[as]}{[aa]}[ai]\right) \\
-[\lambda s.1] &= -\left([\lambda s] - \frac{[as]}{[aa]}[a\lambda]\right) \\
[\lambda\lambda.1] &= \left([\lambda\lambda] - \frac{[a\lambda]}{[aa]}[a\lambda]\right)
\end{aligned}\right| \quad (231).$$

Ar šiem simboliem apzīmētās izteiksmes visas veidotas pēc vienādas, viegli atminamas schemas. Pie tam vēl piezīmēsim sekojošo: ja uzskata minētās izteiksmēs lietotās zīmes [ ] nevis par sumu simboliem, kā tās faktiski domātas, bet par parastā veidā matemātikā lietotām iekavām, katra izteiksme pāriet nullē.

Lietojot simbolus (231), pirmo reizi reducētā normalnolīdzinājumu sistema ar atbilstošo sumu nolīdzinājumu un izteiksmes (L.l) brīvo locekli rakstama šādā vispārējā veidā:

$$\left.\begin{aligned}
(2.1) &= [bb.1]\xi_2 + [bc.1]\xi_3 + \ldots + \\
&\quad + [b(i-1).1]\xi_{i-1} + [bi.1]\xi_i - [b\lambda.1] = 0 \\
(3.1) &= [bc.1]\xi_2 + [cc.1]\xi_3 + \ldots + \\
&\quad + [c(i-1).1]\xi_{i-1} + [ci.1]\xi_i - [c\lambda.1] = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
((i-1).1) &= [b(i-1).1]\xi_2 + [c(i-1).1]\xi_3 + \ldots + \\
&\quad + [(i-1)(i-1).1]\xi_{i-1} + [(i-1)i.1]\xi_i - [(i-1)\lambda.1] = 0 \\
(i.1) &= [bi.1]]\xi_2 + [ci.1]\xi_3 + \ldots + \\
&\quad + [(i-1)i.1]\xi_{i-1} + [ii.1]\xi_i - [i\lambda.1] = 0 \\
\hline
(S.1) &= [bs.1]\xi_2 + [cs.1]\xi_3 + \ldots + \\
&\quad + [(i-1)s.1]\xi_{i-1} + [is.1]\xi_i - \underline{[\lambda s.1]} = 0 \\
(L.1) &\qquad\qquad [\lambda\lambda.1]
\end{aligned}\right\} (232).$$

Ievērojot (231), pierādams, ka

$$\left.\begin{aligned}
[bs.1] &= [bb.1] + [bc.1] + \ldots\ldots + \\
&\quad + [b(i-1).1] + [bi.1] \\
[cs.1] &= [bc.1] + [cc.1] + \ldots\ldots + \\
&\quad + [c(i-1).1] + [ci.1] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[(i-1)s.1] &= [b(i-1).1] + [c(i-1).1] + \ldots\ldots + \\
&\quad + [(i-1)(i-1).1] + [(i-1)i.1]
\end{aligned}\right\} (233).$$

$$\left.\begin{array}{l}[is.1] = [bi.1] + [ci.1] + \ldots\ldots + [(i-1)i.1] + [ii.1] \\ -[\lambda s.1] = -[b\lambda.1] - [c\lambda.1] - \ldots\ldots - [(i-1)\lambda.1] - [i\lambda.1]\end{array}\right| \quad (233).$$

Tā tad sumējot sistemas (232) nolīdzinājumus pa atsevišķiem nezinamiem resp. brīviem locekļiem atbilstošiem vertikaliem stabiņiem, teoretiski jāiznāk sistemas sumu nolīdzinājumam. Tas var noderēt par sistemas (232) koeficientu un brīvo locekļu skaitliskā aprēķina kontroli. Pirms šīs kontroles eventuali veidojams, pēc (231) parauga,

$$[ss.1] = ([ss] - \frac{[as]}{[aa]}[as]) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (234),$$

lai pārbaudītu paša reducētā sumu nolīdzinājuma skaitlisko aprēķinu, jo ievērojot (234) un svarā krītošās izteiksmes (231), pierādams, ka

$$[ss.1] = [bs.1] + [cs.1] + \ldots\ldots + [(i-1)s.1] + [is.1] \quad . \quad (235).$$

Lai izslēgtu nākošo, otro, nezinamo ξ_2, atkal reducē sistemu (232) veidojošos nolīdzinājumus un izteiksmi (L. 1), resp. tās brīvo locekli $[\lambda\lambda.1]$. Šīs otrās reducēšanas rezultati veidojami pēc vispārējās schemas

$$\left.\begin{array}{lcl}(3.2) & = & (3.1) - \dfrac{[bc.1]}{[bb.1]}(2.1) \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ ((i-1).2) & = & ((i-1).1) - \dfrac{[b(i-1).1]}{[bb.1]}(2.1) \\ (i.2) & = & (i.1) - \dfrac{[bi.1]}{[bb.1]}(2.1) \\ \hline (S.2) & = & (S.1) - \dfrac{[bs.1]}{[bb.1]}(2.1) \\ (L.2) & = & (L.1) - \dfrac{-[b\lambda.1]}{[bb.1]}(2.1)\end{array}\right\} \quad . \; . \quad (236).$$

Kā redzams, nolīdzinājumu skaits atkal samazinājies par vienu; ievērojot (232), var pārliecināties, ka līdz ar to izkritis arī otrais nezinamais ξ_2.

Ar (236) norādītā kārtā veidojot otro reizi reducētās sistemas nolīdzinājumus un izteiksmes, attiecīgie koeficienti un brīvie locekļi atvasinami no atbilstošiem elementiem (231) līdzīgā kārtā, kā tie atvasināti no sistemas (227) koeficientiem un brīviem locekļiem; otro reizi reducētās sistemas koeficientus un brīvos locekļus apzīmēsim ar šādiem simboliem:

$$\left.\begin{aligned}
[cc.2] &= \left([cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[c(i-1).2] &= \left([c(i-1).1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[b(i-1).1]\right) \\
[ci.2] &= \left([ci.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bi.1]\right) \\
-[c\lambda.2] &= -\left([c\lambda.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[b\lambda.1]\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[(i-1)(i-1).2] &= \left([(i-1)(i-1).1] - \frac{[b(i-1).1]}{[bb.1]}[b(i-1).1]\right) \\
[(i-1)i.2] &= \left([(i-1)i.1] - \frac{[b(i-1).1]}{[bb.1]}[bi.1]\right) \\
-[(i-1)\lambda.2] &= -\left([(i-1)\lambda.1] - \frac{[b(i-1).1]}{[bb.1]}[b\lambda.1]\right) \\
[ii.2] &= \left([ii.1] - \frac{[bi.1]}{[bb.1]}[bi.1]\right) \\
-[i\lambda.2] &= -\left([i\lambda.1] - \frac{[bi.1]}{[bb.1]}[b\lambda.1]\right) \\
[cs.2] &= \left([cs.1] - \frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bc.1]\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[(i-1)s.2] &= \left([(i-1)s.1] - \frac{[bs.1]}{[bb.1]}[b(i-1).1]\right) \\
[is.2] &= \left([is.1] - \frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bi.1]\right) \\
-[\lambda s.2] &= -\left([\lambda s.1] - \frac{[bs.1]}{[bb.1]}[b\lambda.1]\right) \\
[\lambda\lambda.2] &= \left([\lambda\lambda.1] - \frac{[b\lambda.1]}{[bb.1]}[b\lambda.1]\right)
\end{aligned}\right\} \quad (237).$$

Arī uz šīm, un vispārīgi uz visām līdzīgām normalnolīdzinājumu reducēšanā pēc Gauss'a paņēmiena lietotām izteiksmēm zīmējas attiecībā uz izteiksmēm (231) taisītā piezīme, ka tās visas veidotas pēc vienādas schemas, un katra pāriet nullē, ja zīmes „[ ]" un „." uzskata par parastām matemātiskām iekavām, resp. par reizinājuma zīmi.

Lietojot simbolus (237), otro reizi reducētā normalnolīdzinājumu sistema ar atbilstošo sumu nolīdzinājumu un izteiksmes (L.2) brīvo locekli rakstama šādā vispārējā veidā:

$$\left.\begin{array}{l}
(3.2) = [cc.2]\xi_3 + \ldots\ldots + [c(i-l).2]\xi_{i-1} + \\
\qquad\qquad + [ci.2]\xi_i - [c\lambda.2] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
((i-l).2) = [c(i-l).2]\xi_3 + \ldots\ldots + [(i-l)(i-l).2]\xi_{i-1} + \\
\qquad\qquad + [(i-l)i.2]\xi_i - [(i-l)\lambda.2] = 0 \\
(i.2) = [ci.2]\xi_3 + \ldots\ldots + [(i-l)i.2]\xi_{i-1} + \\
\qquad\qquad + [ii.2]\xi_i - [i\lambda.2] = 0 \\
\hline
(S.2) = [cs.2]\xi_3 + \ldots\ldots + [(i-l)s.2]\xi_{i-1} + \\
\qquad\qquad + [is.2]\xi_i - [\lambda s.2] = 0 \\
(L.2) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\lambda\lambda.2]
\end{array}\right\} \quad (238).$$

Ievērojot (237), pierādams, ka

$$\left.\begin{array}{l}
[cs.2] = [cc.2] + \ldots\ldots + \\
\qquad + [c(i-l).2] + [ci.2] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[(i-l)s.2] = [c(i-l).2] + \ldots\ldots + \\
\qquad + [(i-l)(i-l).2] + [(i-l)i.2] \\
[is.2] = [ci.2] + \ldots\ldots + \\
\qquad + [(i-l)i.2] + [ii.2] \\
-[\lambda s.2] = -[c\lambda.2] - \ldots\ldots - \\
\qquad - [(i-l)\lambda.2] - [i\lambda.2]
\end{array}\right\} \quad . \quad (239).$$

Tā tad sistemā (238), līdzīgā veidā, kā sistemā (232), sumu nolīdzinājums lietojams pa vertikaliem stabiņiem izdaramai koeficientu un brīvo locekļu skaitliskā aprēķina kontrolei. Pilnības deļ vēl pieminēsim, ka pēc (237) parauga veidojot

$$[ss.2] = ([ss.1] - \frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bs.1]) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (240),$$

šo $[ss.2]$ var lietot paša sumu nolīdzinājuma koeficientu pārbaudei, jo ievērojot (235) un svarā krītošās formulas (237), pierādams, ka

$$[ss.2] = [cs.2] + \ldots\ldots + [(i-l)s.2] + [is.2] \quad . \quad . \quad (241).$$

Tā turpinot normalnolīdzinājumu reducēšanu, pēc (i — 2)-ās reducēšanas ir izkrituši (i — 2) pirmie nezinamie un ir atbilstoši samazinājies nolīdzinājumu skaits. Tā tad ir palikuši divi normalnolīdzinājumi $((i-1).(i-2))$ un $(i.(i-2))$ ar nezinamiem ξ_{i-1} un ξ_i, un šo sistemu papildinošie — sumu nolīdzinājums $(S.(i-2))$ un izteiksme $(L.(i-2))$ resp. tās brīvais loceklis $[\lambda\lambda.(i-2)]$. Sistemas koeficienti un brīvie locekļi nosakami pēc (231) un (237) parauga. Apzīmējot šos koeficientus un brīvos locekļus ar simboliem

$$\left.\begin{array}{ccc}
[(i-1)(i-1).(i-2)], & [(i-1)i.(i-2)], & -[(i-1)\lambda.(i-2)] \\
[(i-1)i.(i-2)], & [ii.(i-2)], & -[i\lambda.(i-2)] \\
\hline
[(i-1)s.(i-2)], & [is.(i-2)], & -[\lambda s.(i-2)] \\
 & & \overline{[\lambda\lambda.(i-2)]}
\end{array}\right\} \quad (242),$$

kuri veidoti pēc atbilstošo simbolu (231) un (237) parauga, $(i-2)$-o reizi reducētā normalnolīdzinājumu sistema ar atbilstošo sumu nolīdzinājumu un izteiksmes $(L.(i-2))$ brīvo locekli rakstama šādā vispārējā veidā:

$$\left.\begin{array}{lcl}
((i-1).(i-2)) & = & [(i-1)(i-1).(i-2)]\xi_{i-1} + \\
 & & +[(i-1)i.(i-2)]\xi_i - [(i-1)\lambda.(i-2)] = 0 \\
(i.(i-2)) & = & [(i-1)i.(i-2)]\xi_{i-1} + \\
 & & + [ii.(i-2)]\xi_i - [i\lambda.(i-2)] = 0 \\
\hline
(S.(i-2)) & = & [(i-1)s.(i-2)]\xi_{i-1} + \\
 & & + [is.(i-2)]\xi_i - [\lambda s.(i-2)] = 0 \\
(L.(i-2)) & & \overline{[\lambda\lambda.(i-2)]}
\end{array}\right\} \quad (243).$$

Normalnolīdzinājumu skaitlisko elementu aprēķina kontrole ar sumu nolīdzinājumu izdarama līdzīgā veidā, kā tas sīkāki paskaidrots attiecībā us pirmo un otro reizi reducēto normalnolīdzinājumu sistemu.

Turpinot reducēšanu, pēc nākošās, $(i-1)$-ās reducēšanas izkrīt arī priekšpēdējais nezinamais ξ_{i-1} un līdz ar to atkrīt vēl viens normalnolīdzinājums. Tā tad paliek tikai viens normalnolīdzinājums $(i.(i-1))$ ar vienu, pēdējo, nezinamo ξ_i, atbilstošais sumu nolīdzinājums $(S.(i-1))$ un izteiksmes $(L.(i-1))$ brīvais loceklis $[\lambda\lambda.(i-1)]$. Šinī sistemā koeficienti un brīvie locekļi ir

$$\left.\begin{aligned}
[ii.(i-1)] &= \left([ii.(i-2)] - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{[(i-1)i.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}[(i-1)i.(i-2)]\right) \\
-[i\lambda.(i-1)] &= -\left([i\lambda.(i-2)] - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{[(i-1)i.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}[(i-1)\lambda.(i-2)]\right) \\
[is.(i-1)] &= \left([is.(i-2)] - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{[(i-1)s.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}[(i-1)i.(i-2)]\right) \\
-[\lambda s.(i-1)] &= -\left([\lambda s.(i-2)] - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{[(i-1)s.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}[(i-1)\lambda.(i-2)]\right) \\
[\lambda\lambda.(i-1)] &= \left([\lambda\lambda.(i-2)] - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{[(i-1)\lambda.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}[(i-1)\lambda.(i-2)]\right)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (244).$$

Lietojot augšā minētos simbolus, (i — 1)-o reizi reducētā normalnolīdzinājumu sistema ar atbilstošo sumu nolīdzinājumu un izteiksmes (L . (i — 1)) brīvo locekli rakstama šādā vispārējā veidā:

$$\left.\begin{array}{l}
(i.(i-1)) = [ii.(i-1)]\xi_i - [i\lambda.(i-1)] = 0 \\
\hline
(S.(i-1)) = [is.(i-1)]\xi_i - \underline{[\lambda s.(i-1)]} = 0 \\
(L.(i-1)) \qquad\qquad\qquad\qquad [\lambda\lambda.(i-1)]
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (245).$$

Sumu kontrolei notiekot parastā veidā, šīs sistemas vienīgam normalnolīdzinājumam jābūt identiskam ar atbilstošo sumu nolīdzinājumu.

Reducējot vēl i-to reizi, izkrīt pēdējais nezinamais ξ_i un līdz ar to pazūd arī pēdējais normalnolīdzinājums un tam atbilstošais sumu nolīdzinājums. Bet izteiksmei (L . (i — 1)) reducējoties ar nolīdzinājuma (i . (i — 1)) palīdzību, paliek i-to reizi reducētais loceklis $[\lambda\lambda]$. Apzīmējot to ar simbolu $[\lambda\lambda . i]$, parastā reducēšanas kārtībā atrodam

$$[\lambda\lambda.i] = \left([\lambda\lambda.(i-1)] - \frac{[i\lambda.(i-1)]}{[ii.(i-1)]}[i\lambda.(i-1)]\right) \quad . \quad . \quad (246).$$

Šis $[\lambda\lambda . i]$ normalnolīdzinājumu atslēgšanai nav vajadzīgs. Bet zinamos, ar netiešu novērojumu izlīdzināšanu sakarā esošos jautājumos tam ir svarīga nozīme. Tāpēc reducējot pašus normalnolīdzinājumus un tiem atbilstošo sumu nolīdzinājumu, parasti līdztekus reducē arī iedomātās izteiksmes (228) brīvo locekli $[\lambda\lambda]$, lai pēc visu nezinamo izslēgšanas atrastu minēto $[\lambda\lambda . i]$.

Līdz šim pieņēmām, ka sumu kontroles notiek s-kontroļu veidā. Apskatīsim tagad vēl σ-kontroļu variantu.

Tādā gadijumā sistemā (227) sumu nolīdzinājums (S) atkrīt; tā vietā stājas labā pusē aiz vertikalās strīpas atzīmētie σ kontrollocekļi. Aizrādītā veidā reducējot pašus normalnolīdzinājumus, līdztekus notiek arī šo kontrollocekļu reducēšana, pie tam tādā kārtā, itkā šie kontrollocekļi būtu attiecīgo normalnolīdzinājumu brīvie locekļi. Tā tad, pēc (231), (237), ..., (244) parauga, reducētiem normalnolīdzinājumiem atbilstošie reducētie kontrollocekļi ir

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{lcl}
[b\sigma . 1] & = & \left([b\sigma] - \dfrac{[ab]}{[aa]}[a\sigma]\right) \\
[c\sigma . 1] & = & \left([c\sigma] - \dfrac{[ac]}{[aa]}[a\sigma]\right) \\
\multicolumn{3}{l}{\dotfill} \\
[(i-1)\sigma . 1] & = & \left([(i-1)\sigma] - \dfrac{[a(i-1)]}{[aa]}[a\sigma]\right) \\
[i\sigma . 1] & = & \left([i\sigma] - \dfrac{[ai]}{[aa]}[a\sigma]\right) \\
-[\lambda\sigma . 1] & = & -\left([\lambda\sigma] - \dfrac{[a\lambda]}{[aa]}[a\sigma]\right)
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{lcl}
[c\sigma . 2] & = & \left([c\sigma . 1] - \dfrac{[bc . 1]}{[bb . 1]}[b\sigma . 1]\right) \\
\multicolumn{3}{l}{\dotfill} \\
[(i-1)\sigma . 2] & = & \left([(i-1)\sigma . 1] - \dfrac{[b(i-1) . 1]}{[bb . 1]}[b\sigma . 1]\right) \\
[i\sigma . 2] & = & \left([i\sigma . 1] - \dfrac{[bi . 1]}{[bb . 1]}[b\sigma . 1]\right) \\
-[\lambda\sigma . 2] & = & -\left([\lambda\sigma . 1] - \dfrac{[b\lambda . 1]}{[bb . 1]}[b\sigma . 1]\right)
\end{array}\right. \\
\dotfill
\end{array}\right\} \quad (247).$$

$$\left.\begin{aligned}
[i\sigma.(i-1)] &= \Big([i\sigma.(i-2)] - \\
&\quad - \frac{[(i-1)i.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}[(i-1)\sigma.(i-2)]\Big) \\
-[\lambda\sigma.(i-1)] &= -\Big([\lambda\sigma.(i-2)] - \\
&\quad - \frac{[(i-1)\lambda.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}[(i-1)\sigma.(i-2)]\Big) \\
-[\lambda\sigma.i] &= -\Big([\lambda\sigma.(i-1)] - \\
&\quad - \frac{[i\lambda.(i-1)]}{[ii.(i-1)]}[i\sigma.(i-1)]\Big)
\end{aligned}\right| \quad (247).$$

Ievērojot sistemas (227) koeficientu un σ-kontrollocekļu nozīmi un arī (231), (237),....., (244), pierādams, ka visās reducētās sistemās katra normalnolīdzinājuma koeficientu un brīvā locekļa suma teorētiski vienāda ar atbilstošo σ-kontrollocekli. Tas pats zīmējas arī uz atsevišķās sistemas papildinošām (L) tipa izteiksmēm, kuru koeficienti identiski ar attiecīgo sistemu normalnolīdzinājumu brīviem locekļiem.

Ar to tad pēc būtības apskatīta normalnolīdzinājumu reducēšana pēc Gauss'a paņēmiena. Pie šī paņēmiena praktiskās pielietošanas dažiem sīkumiem vēlāk vēl būs jāatgriežas. Pagaidam, lai dotu pārskatu par reducēšanas vispārējo kārtību, schematiski aizrādīsim atsevišķās reducēšanas pakāpēs veidojamās normalnolīdzinājumu sistemas ar atbilstošiem sumu nolīdzinājumiem, (L) tipa izteiksmju brīviem locekļiem un σ-kontrollocekļiem, pie tam vienmēr lietojot agrākajos iztirzājumos pieņemtos un paskaidrotos simboliskos apzīmējumus. Kā jau minēts, sumu kontroles pietiek taisīt tikai vienā — s vai σ — variantā.

A. Nereducētā sistema.

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]\xi_1+[ab]\xi_2+[ac]\xi_3+\ldots+ \\
&\qquad +[a(i-1)]\xi_{i-1}+[ai]\xi_i-[a\lambda]=0 \quad \Big| \quad [a\sigma] \\
&[ab]\xi_1+[bb]\xi_2+[bc]\xi_3+\ldots+ \\
&\qquad +[b(i-1)]\xi_{i-1}+[bi]\xi_i-[b\lambda]=0 \quad \Big| \quad [b\sigma] \\
&[ac]\xi_1+[bc]\xi_2+[cc]\xi_3+\ldots+ \\
&\qquad +[c(i-1)]\xi_{i-1}+[ci]\xi_i-[c\lambda]=0 \quad \Big| \quad [c\sigma] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right| \quad (248).$$

$$
\begin{array}{l|l}
[a(i-1)]\xi_1+[b(i-1)]\xi_2+[c(i-1)]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[(i-1)(i-1)]\xi_{i-1}+[(i-1)i]\xi_i-[(i-1)\lambda]=0 & [(i-1)\sigma] \\
[ai]\xi_1+[bi]\xi_2+[ci]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[(i-1)i]\xi_{i-1}+[ii]\xi_i-[i\lambda]=0 & [i\sigma] \\
\hline
[as]\xi_1+[bs]\xi_2+[cs]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[(i-1)s]\xi_{i-1}+[is]\xi_i-\underline{[\lambda s]}=0 & \\
\qquad\qquad [\lambda\lambda] & -[\lambda\sigma]
\end{array}
$$

B. Pirmo reizi reducētā sistema.

$$
\left.
\begin{array}{l|l}
[bb.1]\xi_2+[bc.1]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[b(i-1).1]\xi_{i-1}+[bi.1]\xi_i-[b\lambda.1]=0 & [b\sigma.1] \\
[bc.1]\xi_2+[cc.1]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[c(i-1).1]\xi_{i-1}+[ci.1]\xi_i-[c\lambda.1]=0 & [c\sigma.1] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
[b(i-1).1]\xi_2+[c(i-1).1]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[(i-1)(i-1).1]\xi_{i-1}+[(i-1)i.1]\xi_i-[(i-1)\lambda.1]=0 & [(i-1)\sigma.1] \\
[bi.1]\xi_2+[ci.1]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[(i-1)i.1]\xi_{i-1}+[ii.1]\xi_i-[i\lambda.1]=0 & [i\sigma.1] \\
\hline
[bs.1]\xi_2+[cs.1]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[(i-1)s.1]\xi_{i-1}+[is.1]\xi_i-\underline{[\lambda s.1]}=0 & \\
\qquad\qquad [\lambda\lambda.1] & -[\lambda\sigma.1] \\
 & \\
\text{C. Otro reizi reducētā sistema.} & \\
[cc.2]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[c(i-1).2]\xi_{i-1}+[ci.2]\xi_i-[c\lambda.2]=0 & [c\sigma.2] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
[c(i-1).2]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[(i-1)(i-1).2]\xi_{i-1}+[(i-1)i.2]\xi_i-[(i-1)\lambda.2]=0 & [(i-1)\sigma.2] \\
[ci.2]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[(i-1)i.2]\xi_{i-1}+[ii.2]\xi_i-[i\lambda.2]=0 & [i\sigma.2] \\
\hline
[cs.2]\xi_3+\ldots\ldots+ & \\
\quad +[(i-1)s.2]\xi_{i-1}+[is.2]\xi_i-\underline{[\lambda s.2]}=0 & \\
\qquad\qquad [\lambda\lambda.2] & -[\lambda\sigma.2] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}
\right\} \quad (248).
$$

I—2. (i — 2)-o reizi reducētā sistema. (248).

$$
\begin{array}{l|l}
[(i-1)(i-1).(i-2)]\xi_{i-1}+[(i-1)i.(i-2)]\xi_i-[(i-1)\lambda.(i-2)]=0 & [(i-1)\sigma.(i-2)] \\
[(i-1)i.(i-2)]\xi_{i-1}+[ii.(i-2)]\xi_i-[i\lambda.(i-2)]=0 & [i\sigma.(i-2)] \\
\hline
[(i-1)s.(i-2)]\xi_{i-1}+[is.(i-2)]\xi_i-[\lambda s.(i-2)]=0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad [\lambda\lambda.(i-2)] & -[\lambda\sigma.(i-2)]
\end{array}
$$

I—1. (i — 1)-o reizi reducētā sistema.

$$
\begin{array}{l|l}
[ii.(i-1)]\xi_i-[i\lambda.(i-1)]=0 & [i\sigma.(i-1)] \\
\hline
[is.(i-1)]\xi_i-[\lambda s.(i-1)]=0 & \\
\qquad\qquad [\lambda\lambda.(i-1)] & -[\lambda\sigma.(i-1)]
\end{array}
$$

I. i-to reizi reducētā sistema.

$$
[\lambda\lambda.i] \quad | \quad -[\lambda\sigma.i]
$$

Beidzot, no katras nezinamos saturošās sistemas izvēloties vienu, piem., pirmo normalnolīdzinājumu, veido šādu galējo nolīdzinājumu sistemu:

$$
\left.\begin{array}{llll}
(A)=[aa]\xi_1+[ab]\xi_2+[ac]\xi_3+\ldots+ & [a(i-1)]\xi_{i-1} & + & \\
\qquad +[ai]\xi_i - & [a\lambda] & & =0 \\
(B)=\qquad [bb.1]\xi_2+[bc.1]\xi_3+\ldots+ & [b(i-1).1]\xi_{i-1} & + & \\
\qquad +[bi.1]\xi_i - & [b\lambda.1] & & =0 \\
(C)=\qquad [cc.2]\xi_3+\ldots+ & [c(i-1).2]\xi_{i-1} & + & \\
\qquad +[ci.2]\xi_i - & [c\lambda.2] & & =0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
(I-1)= & [(i-1)(i-1).(i-2)]\xi_{i-1} & + & \\
\qquad +[(i-1)i.(i-2)]\xi_i - & [(i-1)\lambda.(i-2)] & & =0 \\
(I)=\qquad [ii.(i-1)]\xi_i - & [i\lambda.(i-1)] & & =0
\end{array}\right\} (249).
$$

Šī sistema viegli atslēdzama, jo pirmam nolīdzinājumam saturot visus nezinamos, katrā nākošā nolīdzinājumā trūkst iepriekšējā nolīdzinājuma pirmais nezinamais, kamēr pēdējā nolīdzinājumā ieiet tikai viens vienīgais — pēdējais nezinamais. Sistemas atslēgšanu iesākot no pēdējā nolīdzinājuma, no tā nosaka pēdējo nezinamo ξ_i. Atrasto vērtību ieliekot priekšpēdējā nolīdzinājumā, no tā nosaka priekšpēdējo nezinamo ξ_{i-1}. Tā turpinot, beidzot nonāk pie pirmā nolīdzinājuma, no kura nosaka pirmo nezinamo ξ_1. Atbilstošās formulas ir:

$$
\left.\begin{aligned}
\xi_i &= -\frac{-[i\lambda.(i-1)]}{[ii.(i-1)]} \\
\xi_{i-1} &= -\frac{1}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}\left\{[(i-1)i.(i-2)]\xi_i - [(i-1)\lambda.(i-2)]\right\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_3 &= -\frac{1}{[cc.2]}\left\{\ldots\ldots + [c(i-1).2]\xi_{i-1} + [ci.2]\xi_i - [c\lambda.2]\right\} \\
\xi_2 &= -\frac{1}{[bb.1]}\left\{[bc.1]\xi_3 + \ldots\ldots + [b(i-1).1]\xi_{i-1} + [bi.1]\xi_i - [b\lambda.1]\right\} \\
\xi_1 &= -\frac{1}{[aa]}\left\{[ab]\xi_2 + [ac]\xi_3 + \ldots\ldots + [a(i-1)]\xi_{i-1} + [ai]\xi_i - [a\lambda]\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (250).
$$

Ar atrastām nezinamo skaitliskām vērtībām jābūt apmierinātiem sistemas (227) visiem normalnolīdzinājumiem. Lai to pārbaudītu, parasti uzskata par pietiekošu ielikt atrastās nezinamo vērtības sumu nolīdzinājumā (S). Tā kā sumu nolīdzinājums (S) ir visu normalnolīdzinājumu suma, var pieņemt, ka nezinamo skaitliskās vērtības, kas apmierina šo nolīdzinājumu, apmierina arī visus normalnolīdzinājumus.

b) Dažādas noteiktības gadijums.

Dažādas noteiktības novērojumu gadijumā normalnolīdzinājumiem ir ar (220) noteiktais veids. Šo normalnolīdzinājumu reducēšana un atslēgšana pēc Gauss'a paņēmiena ar attiecīgām sumu kontrolēm notiek pavisam līdzīgā veidā, kā vienādas noteiktības gadijumā.

Tāpēc bez sīkākiem paskaidrojumiem aizrādam, ka dažādas noteiktības gadijumā reducējot normalnolīdzinājumus, pakāpeniski veido šādas sistemas:

A. Nereducētā sistema.

$$
\left.\begin{array}{llllll|l}
[paa]\xi_1 & + [pab]\xi_2 & + [pac]\xi_3 & + \ldots + & & & \\
+ & [pa(i-1)]\xi_{i-1} & + [pai]\xi_i & -[pa\lambda] & = 0 & & [pa\sigma] \\
[pab]\xi_1 & + [pbb]\xi_2 & + [pbc]\xi_3 & + \ldots + & & & \\
+ & [pb(i-1)]\xi_{i-1} & + [pbi]\xi_i & -[pb\lambda] & = 0 & & [pb\sigma] \\
[pac]\xi_1 & + [pbc]\xi_2 & + [pcc]\xi_3 & + \ldots + & & & \\
+ & [pc(i-1)]\xi_{i-1} & + [pci]\xi_i & -[pc\lambda] & = 0 & & [pc\sigma] \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & &
\end{array}\right\} \quad (251).
$$

$$
\begin{array}{l|l}
[pa(i-1)]\xi_1 + [pb(i-1)]\xi_2 + [pc(i-1)]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [p(i-1)(i-1)]\xi_{i-1} + [p(i-1)i]\xi_i - [p(i-1)\lambda] = 0 & [p(i-1)\sigma] \\
[pai]\xi_1 + [pbi]\xi_2 + [pci]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [p(i-1)i]\xi_{i-1} + [pii]\xi_i - [pi\lambda] = 0 & [pi\sigma] \\
\hline
[pas]\xi_1 + [pbs]\xi_2 + [pcs]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [p(i-1)s]\xi_{i-1} + [pis]\xi_i - \underline{[p\lambda s]} = 0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [p\lambda\lambda] & -[p\lambda\sigma]
\end{array}
$$

B. Pirmo reizi reducētā sistema.

$$
\left.
\begin{array}{l|l}
[pbb.1]\xi_2 + [pbc.1]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [pb(i-1).1]\xi_{i-1} + [pbi.1]\xi_i - [pb\lambda.1] = 0 & [pb\sigma.1] \\
[pbc.1]\xi_2 + [pcc.1]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [pc(i-1).1]\xi_{i-1} + [pci.1]\xi_i - [pc\lambda.1] = 0 & [pc\sigma.1] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
[pb(i-1).1]\xi_2 + [pc(i-1).1]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [p(i-1)(i-1).1]\xi_{i-1} + [p(i-1)i.1]\xi_i - [p(i-1)\lambda.1] = 0 & [p(i-1)\sigma.1] \\
[pbi.1]\xi_2 + [pci.1]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [p(i-1)i.1]\xi_{i-1} + [pii.1]\xi_i - [pi\lambda.1] = 0 & [pi\sigma.1] \\
\hline
[pbs.1]\xi_2 + [pcs.1]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [p(i-1)s.1]\xi_{i-1} + [pis.1]\xi_i - \underline{[p\lambda s.1]} = 0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [p\lambda\lambda.1] & -[p\lambda\sigma.1]
\end{array}
\right\} \quad (251).
$$

C. Otro reizi reducētā sistema.

$$
\begin{array}{l|l}
[pcc.2]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [pc(i-1).2]\xi_{i-1} + [pci.2]\xi_i - [pc\lambda.2] = 0 & [pc\sigma.2] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
[pc(i-1).2]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [p(i-1)(i-1).2]\xi_{i-1} + [p(i-1)i.2]\xi_i - [p(i-1)\lambda.2] = 0 & [p(i-1)\sigma.2] \\
[pci.2]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [p(i-1)i.2]\xi_{i-1} + [pii.2]\xi_i - [pi\lambda.2] = 0 & [pi\sigma.2] \\
\hline
[pcs.2]\xi_3 + \ldots + & \\
\quad + [p(i-1)s.2]\xi_{i-1} + [pis.2]\xi_i - \underline{[p\lambda s.2]} = 0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [p\lambda\lambda.2] & -[p\lambda\sigma.2] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

I—2. (i — 2)-o reizi reducētā sistema. (251).

$$\begin{array}{l|l}
[p(i-1)(i-1).(i-2)]\xi_{i-1}+[p(i-1)i.(i-2)]\xi_i-[p(i-1)\lambda.(i-2)]=0 & [p(i-1)\sigma.(i-2)]\\
[p(i-1)i.(i-2)]\xi_{i-1}+[pii.(i-2)]\xi_i-[pi\lambda.(i-2)]=0 & [pi\sigma.(i-2)]\\ \hline
[p(i-1)s.(i-2)]\xi_{i-1}+[pis.(i-2)]\xi_i-[p\lambda s.(i-2)]=0 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad [p\lambda\lambda.(i-2)] & -[p\lambda\sigma.(i-2)]
\end{array}$$

I—1. (i — 1)-o reizi reducētā sistema.

$$\begin{array}{l|l}
[pii.(i-1)]\xi_i-[pi\lambda.(i-1)]=0 & [pi\sigma.(i-1)]\\ \hline
[pis.(i-1)]\xi_i-[p\lambda s.(i-1)]=0 & \\
\qquad\qquad [p\lambda\lambda.(i-1)] & -[p\lambda\sigma.(i-1)]
\end{array}$$

I. i-to reizi reducētā sistema.

$$\begin{array}{l|l}
[p\lambda\lambda.i] & -[p\lambda\sigma.i]
\end{array}$$

Atbilstošā galējo nolīdzinājumu sistema ir

$$\left.\begin{array}{ll}
(A)= & [paa]\xi_1+[pab]\xi_2+[pac]\xi_3+\ldots+[pa(i-1)]\xi_{i-1}+\\
 & \qquad +[pai]\xi_i-[pa\lambda]=0\\
(B)= & \qquad [pbb.1]\xi_2+[pbc.1]\xi_3+\ldots+[pb(i-1).1]\xi_{i-1}+\\
 & \qquad +[pbi.1]\xi_i-[pb\lambda.1]=0\\
(C)= & \qquad +[pcc.2]\xi_3+\ldots+[pc(i-1).2]\xi_{i-1}+\\
 & \qquad +[pci.2]\xi_i-[pc\lambda.2]=0\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(I\text{-}1)= & \qquad [p(i-1)(i-1).(i-2)]\xi_{i-1}+\\
 & \qquad +[p(i-1)i.(i-2)]\xi_i-[p(i-1)\lambda.(i-2)]=0\\
(I)= & \qquad [pii.(i-1)]\xi_i-[pi\lambda.(i-1)]=0
\end{array}\right\}(252),$$

un nezinamie ξ nosakami pēc formulām

$$\left.\begin{array}{l}
\xi_i=-\dfrac{-[pi\lambda.(i-1)]}{[pii.(i-1)]}\\
\xi_{i-1}=-\dfrac{1}{[p(i-1)(i-1).(i-2)]}\{[p(i-1)i.(i-2)]\xi_i-[p(i-1)\lambda.(i-2)]\}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_3=-\dfrac{1}{[pcc.2]}\{\ldots+[pc(i-1).2]\xi_{i-}+[pci.2]\xi_i-[pc\lambda.2]\}
\end{array}\right\}(253).$$

$$\left.\begin{aligned}\xi_2 &= -\frac{1}{[pbb.1]}\{[pbc.1]\xi_3+\ldots+[pb(i-l).1]\xi_{i-1}+[pbi.1]\xi_i-[pb\lambda.1]\}\\ \xi_1 &= -\frac{1}{[paa]}\{[pab]\xi_2+[pac]\xi_3+\ldots+[pa(i-l)]\xi_{i-1}+[pai]\xi_i-[pa\lambda]\}\end{aligned}\right| \quad (253).$$

§ 24. Suma [vv] resp. [pvv].

Dažādiem nolūkiem ir vajadzīgs nosacīt novērojumu šķietamo kļūdu kvadratu sumu [vv] vai atbilstošo sumu [pvv], skatoties pēc tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības gadijums.

Pieņemot vienādas noteiktības gadijumu, paceļam kvadratā kļūdu nolīdzinājumus (202), un, grupējot pa nezinamiem, rakstam atsevišķiem v atbilstošās izteiksmes:

$$\left.\begin{aligned}
v_1^2 = \{ & a_1^2\xi_1^2 + 2a_1b_1\xi_1\xi_2 + 2a_1c_1\xi_1\xi_3 + \ldots + 2a_1(i-l)_1\xi_1\xi_{i-1} + \\
& + 2a_1i_1\xi_1\xi_i - 2a_1\lambda_1\xi_1 \} + \\
& + \{ b_1^2\xi_2^2 + 2b_1c_1\xi_2\xi_3 + \ldots + 2b_1(i-l)_1\xi_2\xi_{i-1} + \\
& + 2b_1i_1\xi_2\xi_i - 2b_1\lambda_1\xi_2 \} + \\
& + \{ c_1^2\xi_3^2 + \ldots + 2c_1(i-l)_1\xi_3\xi_{i-1} + \\
& + 2c_1i_1\xi_3\xi_i - 2c_1\lambda_1\xi_3 \} + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + \{ (i-l)_1^2\xi_{i-1}^2 + \\
& + 2(i-l)_1i_1\xi_{i-1}\xi_i - 2(i-l)_1\lambda_1\xi_{i-1} \} + \\
& + \{ i_1^2\xi_i^2 - 2i_1\lambda_1\xi_i \} + \\
& + \lambda_1^2 \\
v_2^2 = \{ & a_2^2\xi_1^2 + 2a_2b_2\xi_1\xi_2 + 2a_2c_2\xi_1\xi_3 + \ldots + 2a_2(i-l)_2\xi_1\xi_{i-1} + \\
& + 2a_2i_2\xi_1\xi_i - 2a_2\lambda_2\xi_1 \} + \\
& + \{ b_2^2\xi_2^2 + 2b_2c_2\xi_2\xi_3 + \ldots + 2b_2(i-l)_2\xi_2\xi_{i-1} + \\
& + 2b_2i_2\xi_2\xi_i - 2b_2\lambda_2\xi_2 \} + \\
& + \{ c_2^2\xi_3^2 + \ldots + 2c_2(i-l)_2\xi_3\xi_{i-1} + \\
& + 2c_2i_2\xi_3\xi_i - 2c_2\lambda_2\xi_3 \} + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +
\end{aligned}\right| \quad (254).$$

$$
\left.
\begin{array}{rl}
 & +\{\ (i-l)_2{}^2\xi_{i-1}{}^2\ + \\
 & +2(i-l)_2 i_2\xi_{i-1}\xi_i - 2(i-l)_2\lambda_2\xi_{i-1}\} + \\
 & +\{\ i_2{}^2\xi_i{}^2 \ - \ 2i_2\lambda_2\xi_i\ \} + \\
 & +\lambda_2{}^2 \\
 & \\
v_3{}^2 = & \{a_3{}^2\xi_1{}^2 + 2a_3b_3\xi_1\xi_2 + 2a_3c_3\xi_1\xi_3 + \ldots + 2a_3(i-l)_3\xi_1\xi_{i-1} + \\
 & +\ 2a_3i_3\xi_1\xi_i \ - \ 2a_3\lambda_3\xi_1\ \} + \\
 & +\{b_3{}^2\xi_2{}^2 + 2b_3c_3\xi_2\xi_3 + \ldots + 2b_3(i-l)_3\xi_2\xi_{i-1} + \\
 & +\ 2b_3i_3\xi_2\xi_i \ - \ 2b_3\lambda_3\xi_2\ \} + \\
 & +\{c_3{}^2\xi_3{}^2 + \ldots + 2c_3(i-l)_3\xi_3\xi_{i-1} + \\
 & +\ 2c_3i_3\xi_3\xi_i \ - \ 2c_3\lambda_3\xi_3\ \} + \\
 & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
 & +\{\ (i-l)_3{}^2\xi_{i-1}{}^2\ + \\
 & +2(i-l)_3 i_3\xi_{i-1}\xi_i - 2(i-l)_3\lambda_3\xi_{i-1}\} + \\
 & +\{\ i_3{}^2\xi^2{}_i \ - \ 2i_3\lambda_3\xi_i\ \} + \\
 & +\lambda_3{}^2 \\
 & \\
 \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n{}^2 = & \{a_n{}^2\xi_1{}^2 + 2a_nb_n\xi_1\xi_2 + 2a_nc_n\xi_1\xi_3 + \ldots + 2a_n(i-l)_n\xi_1\xi_{i-1} + \\
 & +\ 2a_ni_n\xi_1\xi_i \ - \ 2a_n\lambda_n\xi_1\ \} + \\
 & +\{\ b_n{}^2\xi_2{}^2 + 2b_nc_n\xi_2\xi_3 + \ldots + 2b_n(i-l)_n\xi_2\xi_{i-1} + \\
 & +\ 2b_ni_n\xi_2\xi_i \ - \ 2b_n\lambda_n\xi_2\ \} + \\
 & +\{\ c_n{}^2\xi_3{}^2 + \ldots + 2c_n(i-l)_n\xi_3\xi_{i-1} + \\
 & +\ 2c_ni_n\xi_3\xi_i \ - \ 2c_n\lambda_n\xi_3\ \} + \\
 & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
 & +\ \{(i-l)_n{}^2\xi^2{}_{i-1} + \\
 & +2(i-l)_n i_n\xi_{i-1}\xi_i - 2(i-l)_n\lambda_n\xi_{i-1}\} + \\
 & +\{\ i_n{}^2\xi_i{}^2 \ - \ 2i_n\lambda_n\xi_i\ \} + \\
 & +\lambda_n{}^2
\end{array}
\right\} \quad (254).
$$

Sumējot šīs izteiksmes, atrodam

$$
\begin{aligned}
[vv] = \{&[aa]\xi_1^2 + 2[ab]\xi_1\xi_2 + 2[ac]\xi_1\xi_3 + \ldots + 2[a(i-l)]\xi_1\xi_{i-1} + \\
&+ 2[ai]\xi_1\xi_i - 2[a\lambda]\xi_1 \} + \\
&+ \{[bb]\xi_2^2 + 2[bc]\xi_2\xi_3 + \ldots + 2[b(i-l)]\xi_2\xi_{i-1} + \\
&+ 2[bi]\xi_2\xi_i - 2[b\lambda]\xi_2 \} + \\
&+ \{[cc]\xi_3^2 + \ldots + 2[c(i-l)]\xi_3\xi_{i-1} + \\
&+ 2[ci]\xi_3\xi_i - 2[c\lambda]\xi_3 \} + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ \{[(i-l)(i-l)]\xi_{i-1}^2 + \\
&+ 2[(i-l)i]\xi_{i-1}\xi_i - 2[(i-l)\lambda]\xi_{i-1} \} + \\
&+ \{[ii]\xi_i^2 - 2[i\lambda]\xi_i \} + \\
&+ [\lambda\lambda] \qquad (255).
\end{aligned}
$$

Lai izslēgtu nezinamos ξ, lietojam pēc kārtas sistemas (249) atsevišķos nolīdzinājumus (A), (B), (C), ..., (I—1), (I), sākot ar pirmo (A).

Grupējot locekļus pa atsevišķiem nezinamiem, veidojam

$$
\begin{aligned}
\frac{(A)(A)}{[aa]} = \{&[aa]\xi_1^2 + 2[ab]\xi_1\xi_2 + 2[ac]\xi_1\xi_3 + \ldots + \\
&+ 2[a(i-l)]\xi_1\xi_{i-1} + 2[ai]\xi_1\xi_i - 2[a\lambda]\xi_1 \} + \\
&+ \left\{\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\xi_2^2 + 2\frac{[ab]}{[aa]}[ac]\xi_2\xi_3 + \ldots + \right. \\
&\left. + 2\frac{[ab]}{[aa]}[a(i-l)]\xi_2\xi_{i-1} + 2\frac{[ab]}{[aa]}[ai]\xi_2\xi_i - 2\frac{[ab]}{[aa]}[a\lambda]\xi_2\right\} + \\
&+ \left\{\frac{[ac]}{[aa]}[ac]\xi_3^2 + \ldots + \right. \\
&\left. + 2\frac{[ac]}{[aa]}[a(i-l)]\xi_3\xi_{i-1} + 2\frac{[ac]}{[aa]}[ai]\xi_3\xi_i - 2\frac{[ac]}{[aa]}[a\lambda]\xi_3\right\} + \\
&+ \ldots\ldots\ldots + \\
&+ \left\{\frac{[a(i-l)]}{[aa]}[a(i-l)]\xi^2_{i-1} + 2\frac{[a(i-l)]}{[aa]}[ai]\xi_{i-1}\xi_i - 2\frac{[a(i-l)]}{[aa]}[a\lambda]\xi_{i-1}\right\} + \\
&+ \left\{\frac{[ai]}{[aa]}[ai]\xi_i^2 - 2\frac{[ai]}{[aa]}[a\lambda]\xi_i\right\} + \\
&+ \frac{[a\lambda]}{[aa]}[a\lambda] \qquad (256)
\end{aligned}
$$

un atņemam to no (255). Tad, izkrītot formulas labās puses pirmo grupu veidojošiem locekļiem, kas satur pirmo nezinamo ξ_1, formula (255) pāriet veidā

$$
\begin{aligned}
[vv]-\frac{(A)(A)}{[aa]} = & \Big\{([bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab])\xi_2^2+2([bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac])\xi_2\xi_3+\ldots+ \\
& +2([b(i-l)]-\frac{[ab]}{[aa]}[a(i-l)])\xi_2\xi_{i-1}+ \\
& +2([bi]-\frac{[ab]}{[aa]}[ai])\xi_2\xi_i-2([b\lambda]-\frac{[ab]}{[aa]}[a\lambda])\xi_2\Big\}+ \\
& +\Big\{([cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac])\xi_3^2+\ldots+ \\
& +2([c(i-l)]-\frac{[ac]}{[aa]}[a(i-l)])\xi_3\xi_{i-1}+ \\
& +2([ci]-\frac{[ac]}{[aa]}[ai])\xi_3\xi_i-2([c\lambda]-\frac{[ac]}{[aa]}[a\lambda])\xi_3\Big\}+ \\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\
& +\Big\{([(i-l)(i-l)]-\frac{[a(i-l)]}{[aa]}[a(i-l)])\xi_{i-1}^2+ \\
& +2([(i-l)i]-\frac{[a(i-l)]}{[aa]}[ai])\xi_{i-1}\xi_i-2([(i-l)\lambda]-\frac{[a(i-l)]}{[aa]}[a\lambda])\xi_{i-1}\Big\}+ \\
& +\Big\{([ii]-\frac{[ai]}{[aa]}[ai])\xi_i^2-2([i\lambda]-\frac{[ai]}{[aa]}[a\lambda])\xi_i\Big\}+ \\
& +([\lambda\lambda]-\frac{[a\lambda]}{[aa]}[a\lambda])
\end{aligned}
\qquad (257),
$$

jeb, ievērojot (231),

$$
\begin{aligned}
[vv]-\frac{(A)(A)}{[aa]} = & \{[bb.1]\xi_2^2+2[bc.1]\xi_2\xi_3+\ldots+ \\
& +2[b(i-l).1]\xi_2\xi_{i-1}+2[bi.1]\xi_2\xi_i-2[b\lambda.1]\xi_2\}+ \\
& +\{[cc.1]\xi_3^2+\ldots+ \\
& +2[c(i-l).1]\xi_3\xi_{i-1}+2[ci.1]\xi_3\xi_i-2[c\lambda.1]\xi_3\}+ \\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots+ \\
& +\{[(i-l)(i-l).1]\xi^2_{i-1}+2[(i-l)i.1]\xi_{i-1}\xi_i-2[(i-l)\lambda.1]\xi_{i-1}\}+ \\
& +\{[ii.1]\xi_i^2-2[i\lambda.1]\xi_i\}+ \\
& +[\lambda\lambda.1]
\end{aligned}
\qquad (258).
$$

Otrā nezinamā ξ_2 izslēgšanai lietojot galējo nolīdzinājumu (B), veidojam

$$\begin{aligned}\frac{(B)(B)}{[bb.1]} = \Big\{ & [bb.1]\xi_2^2 + 2[bc.1]\xi_2\xi_3 + \ldots + 2[b(i-1).1]\xi_2\xi_{i-1} + \\ & + 2[bi.1]\xi_2\xi_i - 2[b\lambda.1]\xi_2 \Big\} + \\ + \Big\{ & \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]\xi_3^2 + \ldots + 2\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[b(i-1).1]\xi_3\xi_{i-1} + \\ & + 2\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bi.1]\xi_3\xi_i - 2\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[b\lambda.1]\xi_3 \Big\} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + \Big\{ \frac{[b(i-1).1]}{[bb.1]}[b(i-1).1]\xi_{i-1}^2 + \\ & + 2\frac{[b(i-1).1]}{[bb.1]}[bi.1]\xi_{i-1}\xi_i - 2\frac{[b(i-1).1]}{[bb.1]}[b\lambda.1]\xi_{i-1} \Big\} + \\ & + \Big\{ \frac{[bi.1]}{[bb.1]}[bi.1]\xi_i^2 - 2\frac{[bi.1]}{[bb.1]}[b\lambda.1]\xi_i \Big\} + \\ & + \frac{[b\lambda.1]}{[bb.1]}[b\lambda.1] \end{aligned} \qquad (259)$$

un atņemam to no (258). Tad atrodam izteiksmi, kuru, ievērojot (237), var rakstīt veidā

$$\begin{aligned}[vv] - \frac{(A)(A)}{[aa]} - \frac{(B)(B)}{[bb.1]} = \{ & [cc.2]\xi_3^2 + \ldots\ldots + 2[c(i-1).2]\xi_3\xi_{i-1} + \\ & + 2[ci.2]\xi_3\xi_i - 2[c\lambda.2]\xi_3 \} + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + \{[(i-1)(i-1).2]\xi_{i-1}^2 + \\ & + 2[(i-1)i.2]\xi_{i-1}\xi_i - 2[(i-1)\lambda.2]\xi_{i-1}\} + \\ & + \{[ii.2]\xi_i^2 - 2[i\lambda.2]\xi_i \} + \\ & + [\lambda\lambda.2] \end{aligned} \qquad (260).$$

Tā turpinot, un ar galējo nolīdzinājumu (C), …., (I — 1), (I) palīdzību izslēdzot nākošos nezinamos $\xi_3, \ldots., \xi_{i-1}, \xi_i$, nonākam līdz izteiksmei

$$\begin{aligned} & [vv] - \frac{(A)(A)}{[aa]} - \frac{(B)(B)}{[bb.1]} - \frac{(C)(C)}{[cc.2]} - \ldots - \\ & - \frac{(I-1)(I-1)}{[(i-1)(i-1).(i-2)]} - \frac{(I)(I)}{[ii.(i-1)]} = \\ & = [\lambda\lambda.(i-1)] - \frac{[i\lambda.(i-1)]}{[ii.(i-1)]}[i\lambda.(i-1)] \end{aligned} \qquad (261).$$

Bet ar simboliem (A), (B), (C),....., (I — 1), (I) apzīmētās galējo nolīdzinājumu (249) kreisās puses visas vienādas ar nulli; tā tad formulas (261) kreisā puse ir identiska ar [vv]. Ievērojot to un (246), šī iztirzājuma galīgais rezultats ir

$$[vv] = [\lambda\lambda . i] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (262).$$

Dažādas noteiktības gadijumā, līdzīgā kārtā, lietojot sumas [pvv] atrašanai tos pašus kļūdu nolīdzinājumus (202), bet nezinamo izslēgšanai — galējos nolīdzinājumus (252), pierādams, ka

$$[pvv] = [p\lambda\lambda . i] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (263).$$

Ar formulu (262) resp. (263) izteiktais sakars, starp citu, var noderēt par kontroli pārejai no oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumiem uz atbilstošiem pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem. Sumu kontroles šinī ziņā nekrīt svarā, jo tās nodrošina tikai pareizo pāreju no pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem uz atbilstošiem normalnolīdzinājumiem, un šo normalnolīdzinājumu pareizo reducēšanu un atslēgšanu.

Kad, atslēdzot normalnolīdzinājumus, atrasti šo nolīdzinājumu nezinamie ξ, kuri ir uz meklēto lielumu x pieņemtām tuvinām vērtībām (x) attiecīgie izlīdzinātie pieaugumi, pēc formulām (199) nosakami arī paši meklētie lielumi x. Ieliekot atrastās x vērtības oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumos, no tiem nosakamas atsevišķo novērojumu l šķietamās kļūdas v, kuras, kā zinams, identiskas ar pārvērsto kļūdu nolīdzinājumu (202) labās puses veidojošiem lielumiem. Tā tad veidojot tādā kārtā atrasto v kvadratu sumu [vv], resp. atbilstošo sumu (pvv), tai jābūt vienādai ar simbolam $[\lambda\lambda . i]$ resp. $[p\lambda\lambda . i]$ atbilstošo skaitli, kurš augšā aizrādītā veidā nosakams sakarā ar normalnolīdzinājumu reducēšanu pēc Gauss'a paņēmiena. Tā tad uz formulas (262) resp. (263) pamatotā kontrole, sniedzot no oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumiem līdz atrastām meklēto lielumu izlīdzinātām vērtībām, ļoti izsmeļoši nodrošina visa izlīdzināšanas rēķina pareizību.

Aizrādīsim vēl uz sekojošo. Iepriekšējā paragrafā parādītā veidā reducējot normalnolīdzinājumu sistemu, līdz ar to atbilstoši reducē arī papildu locekli $[\lambda\lambda]$ resp. $[p\lambda\lambda]$. Atsevišķās reducēšanas pakāpēs nosaka šādus lielumus:

$$\left.\begin{aligned}
[\lambda\lambda . 1] &= [\lambda\lambda] - \frac{[a\lambda]}{[aa]}[a\lambda] \\
[\lambda\lambda . 2] &= [\lambda\lambda . 1] - \frac{[b\lambda . 1]}{[bb . 1]}[b\lambda . 1] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (264)$$

$$\left.\begin{aligned}
[\lambda\lambda.(i-1)] &= [\lambda\lambda.(i-2)] - \\
&\quad - \frac{[(i-1)\lambda.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}[(i-1)\lambda.(i-2)] \\
[\lambda\lambda.i] &= [\lambda\lambda.(i-1)] - \frac{[i\lambda.(i-1)]}{[ii.(i-1)]}[i\lambda.(i-1)]
\end{aligned}\right\} \tag{264}$$

resp.

$$\left.\begin{aligned}
[p\lambda\lambda.1] &= [p\lambda\lambda] - \frac{[pa\lambda]}{[paa]}[pa\lambda] \\
[p\lambda\lambda.2] &= [p\lambda\lambda.1] - \frac{[pb\lambda.1]}{[pbb.1]}[pb\lambda.1] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[p\lambda\lambda.(i-1)] &= [p\lambda\lambda.(i-2)] - \\
&\quad - \frac{[p(i-1)\lambda.(i-2)]}{[p(i-1)(i-1).(i-2)]}[p(i-1)\lambda.(i-2)] \\
[p\lambda\lambda.i] &= [p\lambda\lambda.(i-1)] - \frac{[pi\lambda.(i-1)]}{[pii.(i-1)]}[pi\lambda.(i-1)]
\end{aligned}\right\} \tag{265}$$

Formulas (231), (237), (244) rāda, ka no kvadratiska tipa koeficientiem [aa], [bb], ..., [(i—1) (i—1)], [ii]', resp. [paa], [pbb], ..., [p(i — 1)(i — 1)], [pii] atvasinātie koeficienti [bb.1], ..., [(i—1)(i—1).(i—2)], [ii.(i—1)], resp. [pbb.1], ..., [p(i-1)(i-1).(i-2)], [pii.(i — 1)], arī būdami kvadratiska tipa, visi ir pozitivi skaitļi. Tāpēc, ievērojot formulas (264) resp. (265), nākam pie slēdziena, ka [λλ] resp. [pλλ], pati būdama pozitiva suma, reducējoties pakāpeniski samazinājas līdz minimumam [λλ.i] resp. [pλλ.i]. Tā kā ir ar formulu (262) resp. (263) noteiktais sakars, un suma [vv] resp. [pvv] var būt tikai pozitiva, ir skaidrs, ka arī [λλ.i] resp. [pλλ.i] var būt tikai pozitivs skaitlis.

§ 25. Svara vienības resp. neizlīdzināta novērojuma vidējā kļūda.

Izlīdzinot netiešus novērojumus, parasti nosaka ne tikai meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības, bet arī vidējās kļūdas, ar kurām tās atrastas. Šim nolūkam jānosaka meklēto lielumu izlīdzināto vērtību svari un, bez tam, svara vienības vidējā kļūda m, jo zinot šos elementus, meklētās vidējās kļūdas nosakamas pēc pazīstamām formulām (95).

Pagaidam nepakavējoties pie jautājuma par meklēto lielumu izlīdzināto vērtību svariem, apskatīsim svara vienības vidējās kļūdas m noteikšanu. Pie tam piezīmēsim, ka vienādas noteiktības netiešu novērojumu gadijumā, kad visiem novērojumiem pienākas vienāds svars, to var pieņemt par vienādu ar 1. Tādā gadijumā svara vienības vidējā kļūda ir identiska ar neizlīdzināta novērojuma vidējo kļūdu.

Pieņemot šo gadijumu, vispirms pieminēsim, ka apzīmējot notikušo novērojumu īstās kļūdas ar ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots\ldots, \varepsilon_n$, neizlīdzināta novērojuma vidējā kļūda, t. i. svara vienības vidējā kļūda, ir

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (266).$$

Minētās īstās kļūdas izsaka pretrunas starp novērojumiem l_1, l_2, $l_3, \ldots\ldots, l_n$ un atbilstošo funkciju īstām vērtībām, kuras savukārt aprēķinamas ar meklēto lielumu īstām vērtībām X_1, X_2, $X_3, \ldots\ldots, X_{i-1}$, X_i. Lietojot jau agrākajos iztirzājumos pieņemtās tuvinās vērtības (x_1), (x_2), $(x_3), \ldots\ldots, (x_{i-1})$, (x_i), meklēto lielumu īstās vērtības izsakamas, pēc (199) parauga, šādā veidā:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= (x_1) + \overline{\xi}_1 \\
X_2 &= (x_2) + \overline{\xi}_2 \\
X_3 &= (x_3) + \overline{\xi}_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{i-1} &= (x_{i-1}) + \overline{\xi}_{i-1} \\
X_i &= (x_i) + \overline{\xi}_i
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (267),$$

kur $\overline{\xi}_1$, $\overline{\xi}_2$, $\overline{\xi}_3, \ldots\ldots, \overline{\xi}_{i-1}$, $\overline{\xi}_i$ apzīmē meklēto lielumu īstām vērtībām atbilstošos pieaugumus.

Īstām kļūdām ε atbilstošie novērojumu „īstie izlabojumi" $-\varepsilon$ tad izsakami ar šādām formulām

$$\left.\begin{aligned}
& f_1\{(x_1)+\overline{\xi}_1, (x_2)+\overline{\xi}_2, (x_3)+\overline{\xi}_3, \ldots, (x_{i-1})+\overline{\xi}_{i-1}, \\
&\qquad\qquad (x_i)+\overline{\xi}_i\} - l_1 = -\varepsilon_1 \\
& f_2\{(x_1)+\overline{\xi}_1, (x_2)+\overline{\xi}_2, (x_3)+\overline{\xi}_3, \ldots, (x_{i-1})+\overline{\xi}_{i-1}, \\
&\qquad\qquad (x_i)+\overline{\xi}_i\} - l_2 = -\varepsilon_2 \\
& f_3\{(x_1)+\overline{\xi}_1, (x_2)+\overline{\xi}_2, (x_3)+\overline{\xi}_3, \ldots, (x_{i-1})+\overline{\xi}_{i-1}, \\
&\qquad\qquad (x_i)+\overline{\xi}_i\} - l_3 = -\varepsilon_3 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& f_n\{(x_1)+\overline{\xi}_1, (x_2)+\overline{\xi}_2, (x_3)+\overline{\xi}_3, \ldots, (x_{i-1})+\overline{\xi}_{i-1}, \\
&\qquad\qquad (x_i)+\overline{\xi}_i\} - l_n = -\varepsilon_n
\end{aligned}\right\} \quad (268).$$

Šīs formulas no nolīdzinājumiem (200) atšķiras tikai tuvino vērtību (x) pieaugumos un izteiksmju labās puses veidojošos lielumos.

Tāpēc nolīdzinājumi

$$\left.\begin{array}{l} a_1\bar{\xi}_1 + b_1\bar{\xi}_2 + c_1\bar{\xi}_3 + \ldots + (i-l)_1\bar{\xi}_{i-1} + i_1\bar{\xi}_i - \lambda_1 = -\varepsilon_1 \\ a_2\bar{\xi}_1 + b_2\bar{\xi}_2 + c_2\bar{\xi}_3 + \ldots + (i-l)_2\bar{\xi}_{i-1} + i_2\bar{\xi}_i - \lambda_2 = -\varepsilon_2 \\ a_3\bar{\xi}_1 + b_3\bar{\xi}_2 + c_3\bar{\xi}_3 + \ldots + (i-l)_3\bar{\xi}_{i-1} + i_3\bar{\xi}_i - \lambda_3 = -\varepsilon_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\bar{\xi}_1 + b_n\bar{\xi}_2 + c_n\bar{\xi}_3 + \ldots + (i-l)_n\bar{\xi}_{i-1} + i_n\bar{\xi}_i - \lambda_n = -\varepsilon_n \end{array}\right\} \quad (269),$$

kurus atrodam pārveidojot sistemu (268) līdzīgā kārtā, kā sistemu (200), no atbilstošiem (202) atšķiras arī tikai minētos elementos, bet koeficienti un brīvie locekļi ir tie paši.

No nolīdzinājumiem (202) atņemot atbilstošos (269), veidojam jaunu nolīdzinājumu sistemu:

$$\left.\begin{array}{l} a_1(\xi_1 - \bar{\xi}_1) + b_1(\xi_2 - \bar{\xi}_2) + c_1(\xi_3 - \bar{\xi}_3) + \ldots + \\ \qquad + (i-l)_1(\xi_{i-1} - \bar{\xi}_{i-1}) + i_1(\xi_i - \bar{\xi}_i) - \varepsilon_1 = v_1 \\ a_2(\xi_1 - \bar{\xi}_1) + b_2(\xi_2 - \bar{\xi}_2) + c_2(\xi_3 - \bar{\xi}_3) + \ldots + \\ \qquad + (i-l)_2(\xi_{i-1} - \bar{\xi}_{i-1}) + i_2(\xi_i - \bar{\xi}_i) - \varepsilon_2 = v_2 \\ a_3(\xi_1 - \bar{\xi}_1) + b_3(\xi_2 - \bar{\xi}_2) + c_3(\xi_3 - \bar{\xi}_3) + \ldots + \\ \qquad + (i-l)_3(\xi_{i-1} - \bar{\xi}_{i-1}) + i_3(\xi_i - \bar{\xi}_i) - \varepsilon_3 = v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n(\xi_1 - \bar{\xi}_1) + b_n(\xi_2 - \bar{\xi}_2) + c_n(\xi_3 - \bar{\xi}_3) + \ldots + \\ \qquad + (i-l)_n(\xi_{i-1} - \bar{\xi}_{i-1}) + i_n(\xi_i - \bar{\xi}_i) - \varepsilon_n = v_n \end{array}\right\} \quad (270).$$

Arī šinīs nolīdzinājumos koeficienti un nolīdzinājumu labās puses veidojošās novērojumu šķietamās kļūdas v neatšķiras no nolīdzinājumu (202) atbilstošiem elementiem. Tikai ir citādi — turpmākos iztirzājumos neinteresējoši — nezinami un arī citādi brīvi locekļi: nolīdzinājumu (202) brīvo locekļu $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3, \ldots\ldots, -\lambda_n$ vietā nolīdzinājumos (270) stājušies atbilstošie $-\varepsilon_1$, $-\varepsilon_2$, $-\varepsilon_3, \ldots\ldots, -\varepsilon_n$.

Neveidojot pilnībā sistemai (270) atbilstošos normalnolīdzinājumus, tikai piezīmēsim, ka tiem ir tie paši koeficienti, kā normalnolīdzinājumiem (207) resp. (227), bet brīvo locekļu $-[a\lambda]$, $-[b\lambda]$, $-[c\lambda]$, $\ldots\ldots$, $-[(i-l)\lambda]$, $-[i\lambda]$ vietā ir brīvie locekļi $-[a\varepsilon]$, $-[b\varepsilon]$, $-[c\varepsilon]$, $\ldots\ldots$, $-[(i-l)\varepsilon]$, $-[i\varepsilon]$.

Sakarā ar normalnolīdzinājumu (227) reducēšanu tika pierādīts, ka

$$[vv] = [\lambda\lambda . i] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (271),$$

kas, saprotams, pēc būtības zīmējas uz ikkatru kļūdu nolīdzinājumu resp. atbilstošo normalnolīdzinājumu sistemu. Zīmējoties uz kļūdu nolīdzinājumiem (270) atbilstošo normalnolīdzinājumu sistemu, kur $-\lambda$ vietā stājušies atbilstošie $-\varepsilon$, formula (271) rakstama šādā, tikai pēc ārējā izskata citādā veidā

$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon . i] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (272).$$

Ar simbolu $[\varepsilon\varepsilon . i]$ apzīmētā izteiksme veidojama ar nolīdzinājumu (270) koeficientiem un brīviem locekļiem līdzīgā kārtā, kā simbolam $[\lambda\lambda . i]$ atbilstošā izteiksme veidota ar nolīdzinājumu (202) koeficientiem un brīviem locekļiem.

Ievērojot (264),

$$[vv] = [\lambda\lambda . i] = [\lambda\lambda] - \frac{[a\lambda]}{[aa]}[a\lambda] - \frac{[b\lambda . 1]}{[bb . 1]}[b\lambda . 1] - \ldots\ldots -$$

$$- \frac{[(i-1)\lambda . (i-2)]}{[(i-1)(i-1) . (i-2)]}[(i-1)\lambda . (i-2)] - \frac{[i\lambda . (i-1)]}{[ii . (i-1)]}[i\lambda . (i-1)] \quad (273).$$

Pēc šī parauga, atvietojot $-\lambda$ ar $-\varepsilon$, veidojam

$$[vv] = [\varepsilon\varepsilon . i] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{[a\varepsilon]}{[aa]}[a\varepsilon] - \frac{[b\varepsilon . 1]}{[bb . 1]}[b\varepsilon . 1] - \ldots\ldots -$$

$$- \frac{[(i-1)\varepsilon . (i-2)]}{[(i-1)(i-1) . (i-2)]}[(i-1)\varepsilon . (i-2)] - \frac{[i\varepsilon . (i-1)]}{[ii . (i-1)]}[i\varepsilon . (i-1)] \quad (274).$$

Lai šī formula noderētu pārejai no $[\varepsilon\varepsilon]$ uz $[vv]$, jānoskaidro, kāda ir nozīme formulas labās puses otram un nākošiem locekļiem.

Otrais loceklis

$$\frac{[a\varepsilon]}{[aa]}[a\varepsilon]$$

satur

$$\begin{aligned} [a\varepsilon]^2 &= (a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + \ldots + a_n\varepsilon_n)^2 = \\ &= (a_1^2\varepsilon_1^2 + a_2^2\varepsilon_2^2 + a_3^2\varepsilon_3^2 + \ldots + a_n^2\varepsilon_n^2) + \\ &\quad + 2\,(a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + a_1a_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \ldots + a_1a_n\varepsilon_1\varepsilon_n + \\ &\qquad + a_2a_3\varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + a_2a_n\varepsilon_2\varepsilon_n + \\ &\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &\qquad + a_{n-1}a_n\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n) \quad (275). \end{aligned}$$

Šinī izteiksmē ieejošie īsto kļūdu ε kvadrati un tipa $\varepsilon_r\varepsilon_s$ produkti nav nosakami. Bet šo elementu pa atsevišķiem novērojumiem mainīgās vērtības var atvietot ar attiecīgām caurmēra vērtībām. Par mainīgo kvadratu ε^2 caurmēra vērtību var pieņemt atsevišķa novērojuma vidējās kļūdas kvadratu m^2. Kas zīmējas uz tipa $\varepsilon_r\varepsilon_s$ produktiem, tad var pierādīt, ka to caurmēra vērtība ir vienāda ar nulli; tāpēc izteiksmes (275) otrā locekļu grupa atmetama. Tā tad formula (275) atvietojama ar šādu

$$[a\varepsilon]^2 = a_1^2m^2 + a_2^2m^2 + a_3^2m^2 + \ldots + a_n^2m^2 = [aa]m^2 \qquad (276),$$

un no tās atrodam, ka

$$\frac{[a\varepsilon]}{[aa]}[a\varepsilon] = \frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]} = m^2 \quad \ldots\ldots \quad (277).$$

Formulas (274) trešā loceklī

$$\frac{[b\varepsilon.1]}{[bb.1]}[b\varepsilon.1]$$

ieiet $-[b\varepsilon.1]$, pie kam šim simbolam atbilstošā izteiksme veidojama pēc attiecīgās formulas (231), atvietojot $-\lambda$ ar $-\varepsilon$. Tā tad

$$[b\varepsilon.1]^2 = \left\{-\left([b\varepsilon] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\varepsilon]\right)\right\}^2 =$$

$$= [b\varepsilon]^2 - 2\frac{[ab]}{[aa]}[a\varepsilon][b\varepsilon] + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}[a\varepsilon]^2 =$$

$$= (b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3 + \ldots + b_n\varepsilon_n)^2 -$$

$$- 2\frac{[ab]}{[aa]}(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + \ldots +$$

$$+ a_n\varepsilon_n)(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + b_3\varepsilon_3 + \ldots + b_n\varepsilon_n) +$$

$$+ \frac{[ab]^2}{[aa]^2}(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + \ldots + a_n\varepsilon_n)^2 =$$

$$= \{(b_1^2\varepsilon_1^2 + b_2^2\varepsilon_2^2 + b_3^2\varepsilon_3^2 + \ldots + b_n^2\varepsilon_n^2) +$$

$$+ 2(b_1b_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + b_1b_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \ldots + b_1b_n\varepsilon_1\varepsilon_n +$$

$$+ b_2b_3\varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + b_2b_n\varepsilon_2\varepsilon_n +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ b_{n-1}b_n\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n)\} -$$

$$
\begin{aligned}
-2\frac{[ab]}{[aa]}\Big\{&(a_1b_1\varepsilon_1^2 + a_2b_2\varepsilon_2^2 + a_3b_3\varepsilon_3^2 + \ldots + a_nb_n\varepsilon_n^2) + \\
&+(a_1b_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + a_1b_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \ldots + a_1b_n\varepsilon_1\varepsilon_n + \\
&+ a_2b_1\varepsilon_2\varepsilon_1 + a_2b_3\varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + a_2b_n\varepsilon_2\varepsilon_n + \\
&+ a_3b_1\varepsilon_3\varepsilon_1 + a_3b_2\varepsilon_3\varepsilon_2 + \ldots + a_3b_n\varepsilon_3\varepsilon_n + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ a_nb_1\varepsilon_n\varepsilon_1 + a_nb_2\varepsilon_n\varepsilon_2 + a_nb_3\varepsilon_n\varepsilon_3 + \ldots\ldots)\Big\} + \\
+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}\Big\{&(a_1^2\varepsilon_1^2 + a_2^2\varepsilon_2^2 + a_3^2\varepsilon_3^2 + \ldots + a_n^2\varepsilon_n^2) + \\
&+2(a_1a_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + a_1a_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \ldots + a_1a_n\varepsilon_1\varepsilon_n + \\
&\qquad + a_2a_3\varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + a_2a_n\varepsilon_2\varepsilon_n + \\
&\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\qquad\qquad + a_{n-1}a_n\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n)\Big\} \quad (278).
\end{aligned}
$$

Atkal pārejot uz caurmēra vērtībām un ievērojot attiecīgos agrāk dotos aizrādijumus, redzam, ka formulā (278) tās locekļu grupas, kur visiem atsevišķiem locekļiem ir tipa $\varepsilon_r\varepsilon_s$ faktori, ignorējamas. Bet tanīs grupās, kur visi atsevišķie locekļi satur tipa ε^2 faktoru, šis mainīgais ε^2 visur atvietojams ar m^2.

Tā tad formula (278) atvietojama ar šādu:

$$
\begin{aligned}
[b\varepsilon.1]^2 = &\quad (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2)m^2 - \\
&- 2\frac{[ab]}{[aa]}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n)m^2 + \\
&+ \frac{[ab]^2}{[aa]^2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)m^2 = \\
&= \left([bb] - 2\frac{[ab]}{[aa]}[ab] + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa]\right)m^2 = \\
&= \left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)m^2 \quad (279),
\end{aligned}
$$

jeb, ievērojot (231),

$$[b\varepsilon.1]^2 = [bb.1]\, m^2 \quad \ldots\ldots \quad (280).$$

Tā tad

$$\frac{[b\varepsilon.1]^2}{[bb.1]} = \frac{[b\varepsilon.1]}{[bb.1]}\,[b\varepsilon.1] = m^2 \quad \ldots\ldots \quad (281),$$

t. i. arī trešais formulas (274) labās puses loceklis izrādijies par vienādu ar m^2. Tas pats līdzīgā veidā pierādams arī attiecībā uz katru nākošo formulas (274) locekli.

Minētās formulas labās puses locekļu skaits, neskaitot pirmo $[\varepsilon\varepsilon]$, vienāds ar meklēto nezinamo skaitu i; bez tam jāievēro, ka uz (266) pamata

$$[\varepsilon\varepsilon] = nm^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (282).$$

Tā tad formulas (274) galīgais veids ir

$$[vv] = nm^2 - im^2 \quad \ldots\ldots \quad (283),$$

un tāpēc

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-i}} \quad \ldots\ldots \quad (284).$$

Dažādas noteiktības gadijumā kļūdu nolīdzinājumus (198) resp. (200) var iedomāties reizinātus ar attiecīgo novērojumu svaru kvadratsaknēm. Tad ar svariem $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ notikušo novērojumu $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ vietā stājas iedomātie, uz svara vienību reducētie novērojumi $\sqrt{p_1}l_1, \sqrt{p_2}l_2, \sqrt{p_3}l_3, \ldots, \sqrt{p_n}l_n$, (sk. § 16) ar atbilstošām šķietamām kļūdām $\sqrt{p_1}v_1, \sqrt{p_2}v_2, \sqrt{p_3}v_3, \ldots, \sqrt{p_n}v_n$. Pārvērstie kļūdu nolīdzinājumi tad ir

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{p_1}a_1\xi_1 + \sqrt{p_1}b_1\xi_2 + \sqrt{p_1}c_1\xi_3 + \ldots + \\
&\qquad + \sqrt{p_1}(i-l)_1\xi_{i-1} + \sqrt{p_1}i_1\xi_i - \sqrt{p_1}\lambda_1 = \sqrt{p_1}v_1 \\
&\sqrt{p_2}a_2\xi_1 + \sqrt{p_2}b_2\xi_2 + \sqrt{p_2}c_2\xi_3 + \ldots + \\
&\qquad + \sqrt{p_2}(i-l)_2\xi_{i-1} + \sqrt{p_2}i_2\xi_i - \sqrt{p_2}\lambda_2 = \sqrt{p_2}v_2 \\
&\sqrt{p_3}a_3\xi_1 + \sqrt{p_3}b_3\xi_2 + \sqrt{p_3}c_3\xi_3 + \ldots + \\
&\qquad + \sqrt{p_3}(i-l)_3\xi_{i-1} + \sqrt{p_3}i_3\xi_i - \sqrt{p_3}\lambda_3 = \sqrt{p_3}v_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\sqrt{p_n}a_n\xi_1 + \sqrt{p_n}b_n\xi_2 + \sqrt{p_n}c_n\xi_3 + \ldots + \\
&\qquad + \sqrt{p_n}(i-l)_n\xi_{i-1} + \sqrt{p_n}i_n\xi_i - \sqrt{p_n}\lambda_n = \sqrt{p_n}v_n
\end{aligned}\right\} \quad (285).$$

Starp citu, piezīmēsim, ka rīkojoties ar šiem kļūdu nolīdzinājumiem tāpat, kā tas vienādas noteiktības gadijumā darīts ar nolīdzinājumiem (202), iznāk tie paši, agrāk citādā ceļā atrastie normalnolīdzinājumi (220), kuri zīmējas uz dažādas noteiktības gadijumu.

Kā jau minēts, nolīdzinājumu (285) labās puses veidojošie $\sqrt{p}v$ ir uz svara vienību reducēto novērojumu šķietamās kļūdas. Tā tad šiem

$\sqrt{p}\,v$ ir tāda pat nozīme, kā kļūdu nolīdzinājumu (202) locekļiem v. Tāpēc, taisot no nolīdzinājumiem (285) tos pašus secinājumus, kā vienādas noteiktības gadijumā no nolīdzinājumiem (202), bet atvietojot [vv] ar [pvv], un dažādās pakāpēs reducēto normalnolīdzinājumu (227) koeficientu vietā lietojot atbilstošos svarus p saturošos koeficientus, pierādams, ka dažādas noteiktības gadijumā svara vienības vidējā kļūda ir

$$m = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-i}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (286).$$

Salīdzinot formulas (284) un (286) ar atbilstošām (168) un (192), kuras agrāk atrastas nosakot svara vienības vidējo kļūdu tiešu novērojumu gadijumā, redzam, ka atbilstošās formulas atšķiras tikai zem kvadratsaknes zīmes esošās izteiksmes dalītājā. Tiešu novērojumu gadijumā tas ir (n — 1), bet netiešu novērojumu gadijumā — (n — i), pie kam abos gadijumos n apzīmē svarā krītošo novērojumu kopskaitu.

Tiešu novērojumu gadijumā ir tikai viens meklētais lielums, kura noteikšanai — bez kontroles un izlīdzināšanas iespējas — pietiek ar vienu novērojumu. Tā tad šinī gadijumā dalītājs (n — 1) izsaka lieko novērojumu skaitu.

Netiešu novērojumu gadijumā ar katru atsevišķu novērojumu veidojams viens neatkarīgs nolīdzinājums, kurā meklētie lielumi ieiet kā nezinamie. Tāpēc, ja meklēto lielumu skaits ir i, pietiek ar tikpat daudziem, t. i. i novērojumiem, lai — bez kontroles un izlīdzināšanas iespējas — noteiktu visus meklētos lielumus. Tā tad arī šinī gadijumā dalītājs (n — i) izsaka lieko novērojumu skaitu.

Ievērojot augšā teikto, atsevišķi atrastās uz tiešiem un uz netiešiem novērojumiem attiecīgās formulas (168) un (284), resp. (192) un (286) apvienojamas šādās, tiešu un netiešu novērojumu gadijumā derīgās, vispārējās formulās:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{r}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (287)$$

resp.

$$m = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (288).$$

Pirmā zīmējas uz vienādas, otrā — uz dažādas noteiktības novērojumiem, bet abās formulās r apzīmē lieko novērojumu skaitu.

Apskatot kļūdu mēru noteikšanu no galīgā skaitā n notikušu novērojumu īstām kļūdām ε, 7. paragrafā pierādīts, ka pēc formulas

(53) aprēķinātā vidējā kļūda raksturo attiecīgo novērojumu noteiktību jo pareizāki, jo lielāks novērojumu skaits n. Formulas (287) resp. (288) vispārīgi atgādina (53), bet atšķiras no šīs formulas ar to, ka īsto kļūdu ε vietā lietotas šķietamās v resp. $\sqrt{p}\,v$, un sakarā ar to novērojumu kopskaita n vietā stājies lieko novērojumu skaits r. Arī attiecībā uz formulām (287) resp. (288) var pierādīt, ka pēc tām nosacītā svara vienības vidējā kļūda raksturo attiecīgo novērojumu noteiktību jo pareizāki, jo lielāks lieko novērojumu skaits r.

§ 26. Meklēto lielumu izlīdzināto vērtību svari.

Kā jau minēts, izlīdzinot netiešus novērojumus, normalnolīdzinājumi atvasinami, skatoties pēc apstākļiem, dažreiz tieši no oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumiem, bet dažreiz no iepriekš pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem. Pirmā gadijumā normalnolīdzinājumos kā nezinamie ieiet un atslēdzot normalnolīdzinājumus tiek tieši atrastas pašu meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības x. Otrā gadijumā šo x vietā stājas atbilstošie uz meklēto lielumu pieņemtām tuvinām vērtībām (x) attiecinātie izlīdzinātie pieaugumi ξ. Kad tie atrasti, pašu meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības nosakamas pēc formulām (199). Visādā ziņā eventuali lietotās meklēto lielumu tuvinās vērtības (x) uzskatamas par noteiktības ziņā neitralām. Tā tad katram x ir tas pats svars, kā atbilstošam ξ. Tāpēc jautājums par meklēto lielumu izlīdzināto vērtību svariem vispārīgi izsmeļas ar jautājumu par svariem, kuri pienākas normalnolīdzinājumu sistemu apmierinošām šīs sistemas nezinamo vērtībām.

Reducējot un atslēdzot normalnolīdzinājumus pēc Gauss'a algoritma, vienādas noteiktības gadijumā nezinamo izlīdzinātās vērtības noteiktas ar formulām (250). Ievērojot šinīs formulās lietoto simbolu nozīmi paskaidrojošās formulas (231), (237), ..., (244), redzams, ka katrs nezinamais ξ ir lielumu λ lineara funkcija. Šie λ savukārt atrasti atņemot no atsevišķiem novērojumiem atbilstošo novēroto funkciju vērtības, kuras aprēķinātas ar pieņemtām meklēto lielumu tuvinām vērtībām (x) un tāpēc — tāpat kā pašas (x) — uzskatamas par noteiktības ziņā neitralām. Tā tad, pieņemot, ka lietotiem vienādas noteiktības novērojumiem ir svars 1, atbilstošie λ uzskatami par lielumiem, kuriem ir tas pats svars 1.

Ievērojot augšā teikto un formulas (250), vispārējā veidā var rakstīt:

$$\left.\begin{array}{l}
\xi_1 = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3 + \ldots + \alpha_n\lambda_n \\
\xi_2 = \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \beta_3\lambda_3 + \ldots + \beta_n\lambda_n \\
\xi_3 = \gamma_1\lambda_1 + \gamma_2\lambda_2 + \gamma_3\lambda_3 + \ldots + \gamma_n\lambda_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_{i-1} = (\iota-1)_1\lambda_1 + (\iota-1)_2\lambda_2 + (\iota-1)_3\lambda_3 + \ldots + (\iota-1)_n\lambda_n \\
\xi_i = \iota_1\lambda_1 + \iota_2\lambda_2 + \iota_3\lambda_3 + \ldots + \iota_n\lambda_n
\end{array}\right\} \quad (289),$$

kur visi λ ir svara vienības argumenti, bet α, β, γ, ..., $(\iota-1)$, ι — no šiem argumentiem neatkarīgi koeficienti, kuri vispārīgi izsakami kā dažādās pakāpēs reducēto normalnolīdzinājumu koeficientu funkcijas.

Tā kā visi novērojumi, pēc pieņēmuma, ir savā starpā neatkarīgi, un tas pats zīmējas arī uz atbilstošiem λ, nezinamo ξ_1, ξ_2, ξ_3, ..., ξ_{i-1}, ξ_i svari p_1, p_2, p_3, ..., p_{i-1}, p_i nosakami pēc formulas (122):

$$\left.\begin{array}{l}
p_1 = \dfrac{1}{[\alpha\alpha]} \\
p_2 = \dfrac{1}{[\beta\beta]} \\
p_3 = \dfrac{1}{[\gamma\gamma]} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_{i-1} = \dfrac{1}{[(\iota-1)(\iota-1)]} \\
p_i = \dfrac{1}{[\iota\iota]}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (290).$$

Apzīmējot minēto svaru pretējās vērtības ar atbilstošiem **svaru koeficientiem** Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_{i-1}, Q_i, formulas (290) atvietojamas ar šādām

$$\left.\begin{array}{l}
Q_1 = \dfrac{1}{p_1} = [\alpha\alpha] \\
Q_2 = \dfrac{1}{p_2} = [\beta\beta] \\
Q_3 = \dfrac{1}{p_3} = [\gamma\gamma] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_{i-1} = \dfrac{1}{p_{i-1}} = [(\iota-1)(\iota-1)] \\
Q_i = \dfrac{1}{p_i} = [\iota\iota]
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (291).$$

Piemēra veidā apskatīsim tagad sīkāki, kādā kārtā nosakama pēdējā nezinamā ξ_i svaru p_i resp. svara koeficientu Q_i noteicošā kvadratu suma $[\iota\iota]$.

Šim nolūkam sistemas (227) atsevišķos normalnolīdzinājumus reizinam ar pagaidām nenoteiktiem koeficientiem $Q_{1.i}$, $Q_{2.i}$, $Q_{3.i}$, ..., $Q_{(i-1).i}$, $Q_{i.i}$:

$$\left.\begin{array}{l}
Q_{1.i}[aa]\xi_1 + Q_{1.i}[ab]\xi_2 + Q_{1.i}[ac]\xi_3 + \ldots + \\
\quad + Q_{1.i}[a(i-l)]\xi_{i-1} + Q_{1.i}[ai]\xi_i - Q_{1.i}[a\lambda] = 0 \\
Q_{2.i}[ab]\xi_1 + Q_{2.i}[bb]\xi_2 + Q_{2.i}[bc]\xi_3 + \ldots + \\
\quad + Q_{2.i}[b(i-l)]\xi_{i-1} + Q_{2.i}[bi]\xi_i - Q_{2.i}[b\lambda] = 0 \\
Q_{3.i}[ac]\xi_1 + Q_{3.i}[bc]\xi_2 + Q_{3.i}[cc]\xi_3 + \ldots + \\
\quad + Q_{3.i}[c(i-l)]\xi_{i-1} + Q_{3.i}[ci]\xi_i - Q_{3.i}[c\lambda] = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Q_{(i-1).i}[a(i-l)]\xi_1 + Q_{(i-1).i}[b(i-l)]\xi_2 + Q_{(i-1).i}[c(i-l)]\xi_3 + \ldots + \\
\quad + Q_{(i-1).i}[(i-l)(i-l)]\xi_{i-1} + Q_{(i-1).i}[(i-l)i]\xi_i - Q_{(i-1).i}[(i-l)\lambda] = 0 \\
Q_{i.i}[ai]\xi_1 + Q_{i.i}[bi]\xi_2 + Q_{i.i}[ci]\xi_3 + \ldots + \\
\quad + Q_{i.i}[(i-l)i]\xi_{i-1} + Q_{i.i}[ii]\xi_i - Q_{i.i}[i\lambda] = 0
\end{array}\right\} \quad (292).$$

Minētos nenoteiktos koeficientus izvēlamies tā, lai tie apmierinātu šādus nolīdzinājumus:

$$\left.\begin{array}{l}
Q_{1.i}[aa] + Q_{2.i}[ab] + Q_{3.i}[ac] + \ldots + \\
\quad + Q_{(i-1).i}[a(i-l)] + Q_{i.i}[ai] = 0 \\
Q_{1.i}[ab] + Q_{2.i}[bb] + Q_{3.i}[bc] + \ldots + \\
\quad + Q_{(i-1).i}[b(i-l)] + Q_{i.i}[bi] = 0 \\
Q_{1.i}[ac] + Q_{2.i}[bc] + Q_{3.i}[cc] + \ldots + \\
\quad + Q_{(i-1).i}[c(i-l)] + Q_{i.i}[ci] = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Q_{1.i}[a(i-l)] + Q_{2.i}[b(i-l)] + Q_{3.i}[c(i-l)] + \ldots + \\
\quad + Q_{(i-1).i}[(i-l)(i-l)] + Q_{i.i}[(i-l)i] = 0 \\
Q_{1.i}[ai] + Q_{2.i}[bi] + Q_{3.i}[ci] + \ldots + \\
\quad + Q_{(i-1).i}[(i-l)i] + Q_{i.i}[ii] = 1
\end{array}\right\} \quad (293).$$

Tad, sumējot nolīdzinājumus (292) un ievērojot (293), atrodam

$$\xi_i - Q_{1.i}[a\lambda] - Q_{2.i}[b\lambda] - Q_{3.i}[c\lambda] - \ldots - Q_{(i-1).i}[(i-l)\lambda] - Q_{i.i}[i\lambda] = 0 \quad (294).$$

Tā tad

$$
\begin{aligned}
\xi_i = {} & Q_{1.i}\,[a\lambda] + Q_{2.i}[b\lambda] + Q_{3.i}[c\lambda] + \ldots + Q_{(i-1).i}[(i-1)\lambda] + Q_{i.i}[i\lambda] = \\
= {} & Q_{1.i}\,(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + \ldots + a_n\lambda_n) + \\
& + Q_{2.i}\,(b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + \ldots + b_n\lambda_n) + \\
& + Q_{3.i}\,(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 + \ldots + c_n\lambda_n) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + Q_{(i-1).i}((i-1)_1\lambda_1 + (i-1)_2\lambda_2 + (i-1)_3\lambda_3 + \ldots + (i-1)_n\lambda_n) + \\
& + Q_{i.i}\,(i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + i_3\lambda_3 + \ldots + i_n\lambda_n) = \\
= {} & (Q_{1.i}a_1 + Q_{2.i}b_1 + Q_{3.i}c_1 + \ldots + Q_{(i-1).i}(i-1)_1 + Q_{i.i}\,i_1)\lambda_1 + \\
& + (Q_{1.i}a_2 + Q_{2.i}b_2 + Q_{3.i}c_2 + \ldots + Q_{(i-1).i}(i-1)_2 + Q_{i.i}\,i_2)\lambda_2 + \\
& + (Q_{1.i}a_3 + Q_{2.i}b_3 + Q_{3.i}c_3 + \ldots + Q_{(i-1).i}(i-1)_3 + Q_{i.i}\,i_3)\lambda_3 + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + (Q_{1.i}a_n + Q_{2.i}b_n + Q_{3.i}c_n + \ldots + Q_{(i-1).i}(i-1)_n + Q_{i.i}\,i_n)\lambda_n
\end{aligned}
\qquad (295).
$$

Salīdzinot šo izteiksmi ar pēdējo (289), izrādas, ka

$$
\left.
\begin{aligned}
\iota_1 &= Q_{1.i}a_1 + Q_{2.i}b_1 + Q_{3.i}c_1 + \ldots + Q_{(i-1).i}(i-1)_1 + Q_{i.i}\,i_1 \\
\iota_2 &= Q_{1.i}a_2 + Q_{2.i}b_2 + Q_{3.i}c_2 + \ldots + Q_{(i-1).i}(i-1)_2 + Q_{i.i}\,i_2 \\
\iota_3 &= Q_{1.i}a_3 + Q_{2.i}b_3 + Q_{3.i}c_3 + \ldots + Q_{(i-1).i}(i-1)_3 + Q_{i.i}\,i_3 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\iota_n &= Q_{1.i}a_n + Q_{2.i}b_n + Q_{3.i}c_n + \ldots + Q_{(i-1).i}(i-1)_n + Q_{i.i}\,i_n
\end{aligned}
\right\} \quad (296).
$$

Šos nolīdzinājumus reizinam, pirmo — ar a_1, otro — ar a_2, trešo — ar a_3, ..., n-to — ar a_n, un sumējam; ievērojot (293), tad atrodam

$$
\begin{aligned}
[a\iota] = [aa]Q_{1.i} + [ab]Q_{2.i} + [ac]Q_{3.i} + \ldots + & \\
+ [a(i-1)]Q_{(i-1).i} + [ai]Q_{i.i} = 0 &
\end{aligned}
\qquad (297).
$$

Līdzīgā veidā, reizinot nolīdzinājumus (296) ar $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, resp. $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$, resp. $(i-1)_1$, $(i-1)_2$, $(i-1)_3, \ldots$, $(i-1)_n$, resp. $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$, katrreiz sumējot un ievērojot (293), pierādams, ka

$$
\left.
\begin{aligned}
[b\iota] &= [ab]Q_{1.i} + [bb]Q_{2.i} + [bc]Q_{3.i} + \ldots + \\
&\qquad + [b(i-1)]Q_{(i-1).i} + [bi]Q_{i.i} = 0 \\
[c\iota] &= [ac]Q_{1.i} + [bc]\,Q_{2.i} + [cc]Q_{3.i} + \ldots + \\
&\qquad + [c(i-1)]Q_{(i-1).i} + [ci]Q_{i.i} = 0 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[(i-1)\iota] &= [a(i-1)]Q_{1.i} + [b(i-1)]Q_{2.i} + [c(i-1)]Q_{3.i} + \ldots + \\
&\qquad + [(i-1)(i-1)]Q_{(i-1).i} + [(i-1)i]Q_{i.i} = 0 \\
[i\iota] &= [ai]Q_{1.i} + [bi]Q_{2.i} + [ci]Q_{3.i} + \ldots + \\
&\qquad + [(i-1)i]Q_{(i-1).i} + [ii]Q_{i.i} = 1
\end{aligned}
\right\} \quad (298).
$$

Tādā veidā, resp. pēc šī parauga pierādams, ka

$$\left.\begin{array}{llllll}
[a\alpha]=1, & [b\alpha]=0, & [c\alpha]=0, & \ldots, & [(i-1)\alpha]=0, & [i\alpha]=0\\
[a\beta]=0, & [b\beta]=1, & [c\beta]=0, & \ldots, & [(i-1)\beta]=0, & [i\beta]=0\\
[a\gamma]=0, & [b\gamma]=0, & [c\gamma]=1, & \ldots, & [(i-1)\gamma]=0, & [i\gamma]=0\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
[a(\iota-1)]=0, & [b(\iota-1)]=0, & [c(\iota-1)]=0, & \ldots, & [(i-1)(\iota-1)]=1, & [i(\iota-1)]=0\\
[a\iota]=0, & [b\iota]=0, & [c\iota]=0, & \ldots, & [(i-1)\iota]=0, & [i\iota]=1
\end{array}\right\} \quad (299).$$

Tālāk, reizinot nolīdzinājumus (296) ar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots.., \alpha_n$, resp. $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots.., \beta_n$, resp. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots.., \gamma_n, \ldots..$, resp. $(\iota-1)_1$, $(\iota-1)_2, (\iota-1)_3, \ldots.., (\iota-1)_n$, resp. $\iota_1, \iota_2, \iota_3, \ldots.., \iota_n$, un katrreiz sumējot, atrodam

$$\left.\begin{array}{l}
[\alpha\iota] = [a\alpha]Q_{1.i} + [b\alpha]Q_{2.i} + [c\alpha]Q_{3.i} + \ldots + \\
\qquad\qquad + [(i-1)\alpha]Q_{(i-1).i} + [i\alpha]Q_{i.i}\\
[\beta\iota] = [a\beta]Q_{1.i} + [b\beta]Q_{2.i} + [c\beta]Q_{3.i} + \ldots + \\
\qquad\qquad + [(i-1)\beta]Q_{(i-1).i} + [i\beta]Q_{i.i}\\
[\gamma\iota] = [a\gamma]Q_{1.i} + [b\gamma]Q_{2.i} + [c\gamma]Q_{3.i} + \ldots + \\
\qquad\qquad + [(i-1)\gamma]Q_{(i-1).i} + [i\gamma]Q_{i.i}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[(\iota-1)\iota] = [a(\iota-1)]Q_{1.i} + [b(\iota-1)]Q_{2.i} + [c(\iota-1)]Q_{3.i} + \ldots + \\
\qquad\qquad + [(i-1)(\iota-1)]Q_{(i-1).i} + [i(\iota-1)]Q_{i.i}\\
[\iota\iota] = [a\iota]Q_{1.i} + [b\iota]Q_{2.i} + [c\iota]Q_{3.i} + \ldots + \\
\qquad\qquad + [(i-1)\iota]Q_{(i-1).i} + [i\iota]Q_{i.i}
\end{array}\right\} \quad (300).$$

No šiem nolīdzinājumiem, ievērojot (299), seko, ka

$$\left.\begin{array}{l}
[\alpha\iota] = Q_{1.i}\\
[\beta\iota] = Q_{2.i}\\
[\gamma\iota] = Q_{3.i}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[(\iota-1)\iota] = Q_{(i-1).i}\\
[\iota\iota] = Q_{i.i}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (301).$$

Šie $Q_{1.i}, Q_{2.i}, Q_{3.i}, \ldots, Q_{(i-1).i}, Q_{i.i}$, kurus vispārīgi ārī sauc par svaru koeficientiem, ieiet kā nezinamie nolīdzinājumu sistemā (293), tā tad nosakami atslēdzot šo nolīdzinājumu sistemu. Līdz ar to tad izrādas nosacīts nezinamā ξ_i svara koeficients Q_i, jo salīdzinot pēdējo formulu (301) ar pēdējo (291), redzams, ka

$$Q_{i.i} = Q_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (302).$$

Pēc parauga (301) veidojamas vēl šādas svaru koeficientu grupas:

$$\left.\begin{array}{llll}
[\alpha\alpha] = Q_{1.1}, & [\alpha\beta] = Q_{1.2}, & [\alpha\gamma] = Q_{1.3}, & \ldots \\
 & & \ldots, [\alpha(\iota-1)] & = Q_{1.(i-1)} \\
[\alpha\beta] = Q_{1.2}, & [\beta\beta] = Q_{2.2}, & [\beta\gamma] = Q_{2.3}, & \ldots \\
 & & \ldots, [\beta(\iota-1)] & = Q_{2.(i-1)} \\
[\alpha\gamma] = Q_{1.3}, & [\beta\gamma] = Q_{2.3}, & [\gamma\gamma] = Q_{3.3}, & \ldots \\
 & & \ldots, [\gamma(\iota-1)] & = Q_{3.(i-1)} \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots \\
 & & \ldots, \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
[\alpha(\iota-1)] = Q_{1.(i-1)}, & [\beta(\iota-1)] = Q_{2.(i-1)}, & [\gamma(\iota-1)] = Q_{3.(i-1)}, & \ldots \\
 & & \ldots, [(\iota-1)(\iota-1)] & = Q_{(i-1).(i-1)}
\end{array}\right\} \quad (303),$$

pie kam, salīdzinot (303) ar (291), izrādas, ka

$$\left.\begin{array}{l}
Q_{1.1} = Q_1 \\
Q_{2.2} = Q_2 \\
Q_{3.3} = Q_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q_{(i-1)(i-1)} = Q_{i-1}
\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (304).$$

Līdzīgā veidā, kā tas padarīts attiecībā uz svaru koeficientu grupu (301), pierādams, ka arī pārējie svaru koeficienti pa attiecīgām grupām ieiet kā nezinami atbilstošās nolīdzinājumu sistemās, kuras visas ļoti līdzīgas sistemai (293), atšķiroties no tās tikai brīvos locekļos. Šīs nolīdzinājumu sistemas, no kurām nosakami grupu (301) un (303) svaru koeficienti, sauc par s v a r u n o l ī d z i n ā j u m u sistemām. Tās ir šādas:

1. s i s t e m a (svara koeficienta $Q_{1.1} = Q_1$ noteikšanai):

$$\left.\begin{array}{llll}
[aa]Q_{1.1} + & [ab]Q_{1.2} + & [ac]Q_{1.3} & + \ldots + \\
+ & [a(i-1)]Q_{1.(i-1)} + & [ai]Q_{1.i} & -1=0 \\
[ab]Q_{1.1} + & [bb]Q_{1.2} + & [bc]Q_{1.3} & + \ldots + \\
+ & [b(i-1)]Q_{1.(i-1)} + & [bi]Q_{1.i} & -0=0 \\
[ac]Q_{1.1} + & [bc]Q_{1.2} + & [cc]Q_{1.3} & + \ldots + \\
+ & [c(i-1)]Q_{1.(i-1)} + & [ci]Q_{1.i} & -0=0 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right| \quad (305).$$

$$
\begin{aligned}
&[a(i-1)]Q_{1.1} + [b(i-1)]Q_{1.2} + [c(i-1)]Q_{1.3} + \ldots + \\
&\qquad + [(i-1)(i-1)]Q_{1.(i-1)} + [(i-1)i]Q_{1.i} - 0 = 0 \\
&[ai]Q_{1.1} + [bi]Q_{1.2} + [ci]Q_{1.3} + \ldots + \\
&\qquad + [(i-1)i]Q_{1.(i-1)} + [ii]Q_{1.i} - 0 = 0
\end{aligned}
$$

. . . .

2. s i s t e m a (svara koeficienta $Q_{2.2} = Q_2$ noteikšanai):

$$
\begin{aligned}
&[aa]Q_{1.2} + [ab]Q_{2.2} + [ac]Q_{2.3} + \ldots + \\
&\qquad + [a(i-1)]Q_{2.(i-1)} + [ai]Q_{2.i} - 0 = 0 \\
&[ab]Q_{1.2} + [bb]Q_{2.2} + [bc]Q_{2.3} + \ldots + \\
&\qquad + [b(i-1)]Q_{2.(i-1)} + [bi]Q_{2.i} - 1 = 0 \\
&[ac]Q_{1.2} + [bc]Q_{2.2} + [cc]Q_{2.3} + \ldots + \\
&\qquad + [c(i-1)]Q_{2.(i-1)} + [ci]Q_{2.i} - 0 = 0
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
&[a(i-1)]Q_{1.2} + [b(i-1)]Q_{2.2} + [c(i-1)]Q_{2.3} + \ldots + \\
&\qquad + [(i-1)(i-1)]Q_{2.(i-1)} + [(i-1)i]Q_{2.i} - 0 = 0 \\
&[ai]Q_{1.2} + [bi]Q_{2.2} + [ci]Q_{2.3} + \ldots + \\
&\qquad + [(i-1)i]Q_{2.(i-1)} + [ii]Q_{2.i} - 0 = 0
\end{aligned}
$$

3. s i s t e m a (svara koeficienta $Q_{3.3} = Q_3$ noteikšanai):

$$
\begin{aligned}
&[aa]Q_{1.3} + [ab]Q_{2.3} + [ac]Q_{3.3} + \ldots + \\
&\qquad + [a(i-1)]Q_{3.(i-1)} + [ai]Q_{3.i} - 0 = 0 \\
&[ab]Q_{1.3} + [bb]Q_{2.3} + [bc]Q_{3.3} + \ldots + \\
&\qquad + [b(i-1)]Q_{3.(i-1)} + [bi]Q_{3.i} - 0 = 0 \\
&[ac]Q_{1.3} + [bc]Q_{2.3} + [cc]Q_{3.3} + \ldots + \\
&\qquad + [c(i-1)]Q_{3.(i-1)} + [ci]Q_{3.i} - 1 = 0
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
&[a(i-1)]Q_{1.3} + [b(i-1)]Q_{2.3} + [c(i-1)]Q_{3.3} + \ldots + \\
&\qquad + [(i-1)(i-1)]Q_{3.(i-1)} + [(i-1)i]Q_{3.i} - 0 = 0 \\
&[ai]Q_{1.3} + [bi]Q_{2.3} + [ci]Q_{3.3} + \ldots + \\
&\qquad + [(i-1)i]Q_{3.(i-1)} + [ii]Q_{3.i} - 0 = 0
\end{aligned}
\qquad (305).
$$

. . . .

(i — 1)-ā s i s t e m a (svara koeficienta $Q_{(i-1).(i-1)} = Q_{i-1}$ noteikšanai):

$$
\begin{aligned}
&[aa]Q_{1.(i-1)} + [ab]Q_{2.(i-1)} + [ac]Q_{3.(i-1)} + \ldots + \\
&\qquad + [a(i-1)]Q_{(i-1).(i-1)} + [ai]Q_{(i-1).i} - 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{aligned}
&[ab]Q_{1.(i-1)}+[bb]Q_{2.(i-1)}+[bc]Q_{3.(i-1)}+\ldots+\\
&\qquad+[b(i-1)]Q_{(i-1).(i-1)}+[bi]Q_{(i-1).i}-0=0\\
&[ac]Q_{1.(i-1)}+[bc]Q_{2.(i-1)}+[cc]Q_{3.(i-1)}+\ldots+\\
&\qquad+[c(i-1)]Q_{(i-1).(i-1)}+[ci]Q_{(i-1).i}-0=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[a(i-1)]Q_{1.(i-1)}+[b(i-1)]Q_{2.(i-1)}+[c(i-1)]Q_{3.(i-1)}+\ldots+\\
&\qquad+[(i-1)(i-1)]Q_{(i-1).(i-1)}+[(i-1)i]Q_{(i-1).i}-1=0\\
&[ai]Q_{1.(i-1)}+[bi]Q_{2.(i-1)}+[ci]Q_{3.(i-1)}+\ldots+\\
&\qquad+[(i-1)i]Q_{(i-1).(i-1)}+[ii]Q_{(i-1).i}-0=0
\end{aligned}\right\rvert \quad (305).$$

i-tā sistema (svara koeficienta $Q_{i.i}=Q_i$ noteikšanai):

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]Q_{1.i}+[ab]Q_{2.i}+[ac]Q_{3.i}+\ldots+\\
&\qquad+[a(i-1)]Q_{(i-1).i}+[ai]Q_{i.i}-0=0\\
&[ab]Q_{1.i}+[bb]Q_{2.i}+[bc]Q_{3.i}+\ldots+\\
&\qquad+[b(i-1)]Q_{(i-1).i}+[bi]Q_{i.i}-0=0\\
&[ac]Q_{1.i}+[bc]Q_{2.i}+[cc]Q_{3.i}+\ldots+\\
&\qquad+[c(i-1)]Q_{(i-1).i}+[ci]Q_{i.i}-0=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[a(i-1)]Q_{1.i}+[b(i-1)]Q_{2.i}+[c(i-1)]Q_{3.i}+\ldots+\\
&\qquad+[(i-1)(i-1)]Q_{(i-1).i}+[(i-1)i]Q_{i.i}-0=0\\
&[ai]Q_{1.i}+[bi]Q_{2.i}+[ci]Q_{3.i}+\ldots+\\
&\qquad+[(i-1)i]Q_{(i-1).i}+[ii]Q_{i.i}-1=0
\end{aligned}\right\rvert$$

Kā aizrādīts attiecīgos virsrakstos, no katras svaru nolīdzinājumu sistemas nosakams vienam izlīdzinātam ξ atbilstošais svara koeficients $Q_{1.1}$, resp. $Q_{2.2}$, resp. $Q_{3.3}$, ..., resp. $Q_{(i-1).(i-1)}$, resp. $Q_{i.i}$. Pārējie nolīdzinājumos (305) nezinamo veidā ieejošie svaru koeficienti izlīdzināto ξ svaru noteikšanai nav vajadzīgi. Bet viņi spēlē gan lomu zinamos turpmāk apskatamos jautājumos. Bez tam piezīmēsim, ka šie svaru koeficienti, katrs ieejot divās svaru nolīdzinājumu sistemās, no tām dubulti nosakami, kas var noderēt par kontroli svaru nolīdzinājumu skaitliskai atslēgšanai.

Salīdzinot svaru nolīdzinājumu sistemas (305) ar normalnolīdzinājumu sistemu (227), redzam, ka visām sistemām ir tie paši koeficienti, bet atšķirības ir tikai brīvos locekļos. Katrā svaru nolīdzinājumu sistemā ir viens nolīdzinājums ar brīvo locekli -1; pie tam šī nolīdzinājuma numurs dotā sistemā atbilst no sistemas nosakamā uz izlīdzinātu ξ attiecīgā svara koeficienta numuram. Visos pārējos svaru nolīdzinājumos brīvie locekļi vienādi ar nulli.

Ievērojot augšā teikto par svaru nolīdzinājumu veidu, redzams, ka šo nolīdzinājumu sistemas sevišķi ērti reducējamas un atslēdzamas līdztekus normalnolīdzinājumu reducēšanai un atslēgšanai. Tādā gadijumā, pielietojot Gauss'a paņēmienu, svaru nolīdzinājumu reducēšana izsmeļas ar šo nolīdzinājumu brīvo locekļu reducēšanu, kura izdarama līdzīgā veidā, kā atbilstošos normalnolīdzinājumos.

Pēc notikušās visu svaru nolīdzinājumu sistemu reducēšanas katras sistemas nezinamie, t. i. sistemā ieejošie svaru koeficienti, nosakami līdzīgā veidā, kā nosaka normalnolīdzinājumu nezinamos pēc šo nolīdzinājumu reducēšanas. Attiecībā uz šo jautājumu piezīmēsim vēl sekojošo.

Pēdējā svaru nolīdzinājumu sistemā, no kuras nosakams, starp citu, pēdējā izlīdzinātā meklētā lieluma ξ_i svara koeficients $Q_{i.i}$, brīvie locekļi visos nolīdzinājumos ir vienādi ar nulli, izņemot pēdējo nolīdzinājumu, kur brīvais loceklis ir -1. Ievērojot savā vietā teikto par normalnolīdzinājumu reducēšanu — kas, kā minēts, zīmējas arī uz svaru nolīdzinājumu reducēšanu, — pierādams, ka tādos apstākļos pēdējā svaru nolīdzinājuma brīvais loceklis visās reducēšanas pakāpēs paliek negrozīts tas pats -1. Tā tad pēc pēdējās — $(i-1)$-ās reducēšanas paliekot vienam vienīgam nolīdzinājumam ar vienu nezinamo — pēdējo svara koeficientu $Q_{i.i}$, šis nolīdzinājums ir

$$[ii.(i-1)]\,Q_{i.i}-1=0 \qquad \ldots \ldots \quad (306);$$

no tā atrodam

$$Q_{i.i}=Q_i=-\frac{-1}{[ii.(i-1)]} \qquad \ldots \ldots \quad (307),$$

un

$$p_i=\frac{1}{Q_i}=[ii.(i-1)] \qquad \ldots \ldots \quad (308).$$

Bet koeficients $[ii.(i-1)]$ ieiet pēdējā galējā nolīdzinājumā (249), kuru veido pēc Gauss'a paņēmiena reducējot un atslēdzot normalnolīdzinājumus (227). Tā tad šis koeficients, resp. pēdējā meklētā lieluma ξ_i svars p_i nosakams pavisam bez svaru nolīdzinājumu lietošanas.

Agrāk aizrādijām paņēmienu meklēto lielumu izlīdzināto vērtību svaru koeficientu Q resp. svaru p noteikšanai ar svaru nolīdzinājumu palīdzību. Formula (308) norāda citu, no svaru nolīdzinājumiem neatkarīgu ceļu minēto svaru noteikšanai. Lai nosacītu visus vajadzīgos svarus uz formulas (308) pamata, normalnolīdzinājumu sistema jāreducē tikpat daudzos, locekļu kārtības ziņā dažādos, variantos, cik ir nezinamo ξ. Pie tam jāgādā, lai katrs ξ vienā variantā ieietu kā vienīgais nezinamais pēc (i — 1)-ās reducēšanas paliekošā pēdējā galējā nolīdzinājumā. Atbilstošais koeficients [ii.(i — 1)] tad nosaka šī nezināmā svaru. Pielietojot šo paņēmienu, nav vajadzīgs katrā atsevišķā variantā grozīt locekļu kārtību jau pašos nereducētos normalnolīdzinājumos un sakarā ar to izdarīt par jaunu normalnolīdzinājumu reducēšanu no paša sākuma. Pietiek grozīt locekļu kārtību kādā nebūt reducēšanas pakāpē dabūtā normalnolīdzinājumu sistemā un izdarīt par jaunu reducēšanu tikai nākošās pakāpēs. Lai, piem., kādā reducēšanas variantā pēc (i — 2)-ās reducēšanas palikušos divos normalnolīdzinājumos pirmā vietā bij nezinamais ξ_2, bet otrā, pēdējā, vietā — nezinamais ξ_3. Tad, lai nākošā variantā nosacītu nezinamā ξ_2 svaru, pietiek minētos abos reducētos normalnolīdzinājumos pārstādīt nezinamos saturošos locekļus tā, lai nezinamais ξ_2 nokļūtu pēdējā vietā. Pēc tam izdarot šo normalnolīdzinājumu reducēšanu, kura, no sākuma skaitot, ir (i — 1)-ā, paliek viens normalnolīdzinājums ar vienu vienīgo nezinamo ξ_2; tā tad tā svars noteikts ar atbilstošo koeficientu.

Uz formulas (308) pamatotais svaru noteikšanas paņēmiens ērtības ziņā sevišķi izdevīgs tad, kad normalnolīdzinājumu skaits neliels. Turpretim daudzu normalnolīdzinājumu gadijumā šo normalnolīdzinājumu reducēšana visos vajadzīgos variantos, pat notiekot augšā aizrādītā saīsinātā veidā, padara lielāku darbu, neka svaru noteikšana ar svaru nolīdzinājumu palīdzību.

Atliekas vēl īsumā apskatīt meklēto lielumu izlīdzināto vērtību svaru noteikšanu dažādas noteiktības novērojumu gadijumā.

Pie attiecīgo atrisinājumu vispārējās idejas un matematiskiem sīkumiem nebūs jāpakavējas, jo pēc būtības viss notiek līdzīgā veidā, kā vienādas noteiktības novērojumu gadijumā. Ievērojot formulas (253) un to elementu nozīmi, atkal redzams, ka meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības ξ ir novērojumu l resp. atbilstošo λ linearas funkcijas un tāpēc izsakamas ar formulām (289) aizrādītā veidā. Turpmākos iztirzājumos, vienādas noteiktības gadijumā lietoto normalnolīdzinājumu (227) vietā, jālieto dažādas noteiktības novērojumiem atbilstošie nereducētie normalnolīdzinājumi (251). Apzīmējot svaru koeficientus ar tiem pašiem vienādas noteiktības gadijumā lietotiem simboliem, atrodam, ka šo svaru koeficientu noteikšanai veidojamas un līdzīgi pašiem normalnolīdzinājumiem reducējamas un atslēdzamas šādas svaru nolīdzinājumu sistemas:

1\. s i s t e m a (svara koeficienta $Q_{1.1} = Q_1$ noteikšanai):

$$
\begin{array}{llll}
[paa]\,Q_{1.1} & +[pab]\,Q_{1.2} & +[pac]\,Q_{1.3} & +\ldots+ \\
 & +[pa(i-l)]Q_{1.(i-1)} & +[pai]Q_{1.i} & -1=0 \\
[pab]\,Q_{1.1} & +[pbb]Q_{1.2} & +[pbc]\,Q_{1.3} & +\ldots+ \\
 & +[pb(i-l)]Q_{1.(i-1)} & +[pbi]Q_{1.i} & -0=0 \\
[pac]\,Q_{1.1} & +[pbc]Q_{1.2} & +[pcc]\,Q_{1.3} & +\ldots+ \\
 & +[pc(i-l)]Q_{1.(i-1)} & +[pci]Q_{1.i} & -0=0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
[pa(i-l)]\,Q_{1.1} & +[pb(i-l)]Q_{1.2} & +[pc(i-l)]Q_{1.3} & +\ldots+ \\
 & +[p(i-l)(i-l)]Q_{1.(i-1)} & +[p(i-l)i]Q_{1.i} & -0=0 \\
[pai]\,Q_{1.1} & +[pbi]Q_{1.2} & +[pci]\,Q_{1.3} & +\ldots+ \\
 & +[p(i-l)i]Q_{1.(i-1)} & +[pii]Q_{1.i} & -0=0
\end{array}
$$

2\. s i s t e m a (svara koeficienta $Q_{2.2} = Q_2$ noteikšanai):

$$
\begin{array}{llll}
[paa]\,Q_{1.2} & +[pab]Q_{2.2} & +[pac]\,Q_{2.3} & +\ldots+ \\
 & +[pa(i-l)]Q_{2.(i-1)} & +[pai]Q_{2.i} & -0=0 \\
[pab]\,Q_{1.2} & +[pbb]Q_{2.2} & +[pbc]Q_{2.3} & +\ldots+ \\
 & +[pb(i-l)]Q_{2.(i-1)} & +[pbi]Q_{2.i} & -1=0 \\
[pac]\,Q_{1.2} & +[pbc]Q_{2.2} & +[pcc]Q_{2.3} & +\ldots+ \\
 & +[pc(i-l)]Q_{2.(i-1)} & +[pci]Q_{2.i} & -0=0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
[pa(i-l)]\,Q_{1.2} & +[pb(i-l)]Q_{2.2} & +[pc(i-l)]Q_{2.3} & +\ldots+ \\
 & +[p(i-l)(i-l)]Q_{2.(i-1)} & +[p(i-l)i]Q_{2.i} & -0=0 \\
[pai]\,Q_{1.2} & +[pbi]Q_{2.2} & +[pci]Q_{2.3} & +\ldots+ \\
 & +[p(i-l)i]Q_{2.(i-1)} & +[pii]Q_{2.i} & -0=0
\end{array}
$$

3\. s i s t e m a (svara koeficienta $Q_{3.3} = Q_3$ noteikšanai):

$$
\begin{array}{llll}
[paa]\,Q_{1.3} & +[pab]Q_{2.3} & +[pac]Q_{3.3} & +\ldots+ \\
 & +[pa(i-l)]Q_{3.(i-1)} & +[pai]Q_{3.i} & -0=0 \\
[pab]\,Q_{1.3} & +[pbb]Q_{2.3} & +[pbc]Q_{3.3} & +\ldots+ \\
 & +[pb(i-l)]Q_{3.(i-1)} & +[pbi]Q_{3.i} & -0=0 \\
[pac]\,Q_{1.3} & +[pbc]Q_{2.3} & +[pcc]Q_{3.3} & +\ldots+ \\
 & +[pc(i-l)]Q_{3.(i-1)} & +[pci]Q_{3.i} & -1=0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
\qquad (309).
$$

$$
\begin{aligned}
&[pa(i-1)]\,Q_{1.3} &&+[pb(i-1)]Q_{2.3} &&+[pc(i-1)]Q_{3.3} &&+\ldots+ \\
& &&+[p(i-1)(i-1)]Q_{3.(i-1)} &&+[p(i-1)i]\,Q_{3.i} &&-0=0 \\
&[pai]\,Q_{1.3} &&+[pbi]Q_{2.3} &&+[pci]Q_{3.3} &&+\ldots+ \\
& &&+[p(i-1)i]Q_{3.(i-1)} &&+[pii]Q_{3.i} &&-0=0
\end{aligned}
\qquad (309).
$$

....

$(i-1)$-ā sistema (svara koeficienta $Q_{(i-1).(i-1)} = Q_{i-1}$ noteikšanai):

$$
\begin{aligned}
&[paa]\,Q_{1.(i-1)} &&+[pab]Q_{2.(i-1)} &&+[pac]Q_{3.(i-1)} &&+\ldots+ \\
& &&+[pa(i-1)]Q_{(i-1).(i-1)} &&+[pai]Q_{(i-1).i} &&-0=0 \\
&[pab]\,Q_{1.(i-1)} &&+[pbb]Q_{2.(i-1)} &&+[pbc]Q_{3.(i-1)} &&+\ldots+ \\
& &&+[pb(i-1)]Q_{(i-1).(i-1)} &&+[pbi]Q_{(i-1).i} &&-0=0 \\
&[pac]\,Q_{1.(i-1)} &&+[pbc]Q_{2.(i-1)} &&+[pcc]Q_{3.(i-1)} &&+\ldots+ \\
& &&+[pc(i-1)]Q_{(i-1).(i-1)} &&+[pci]Q_{(i-1).i} &&-0=0
\end{aligned}
$$

....

$$
\begin{aligned}
&[pa(i-1)]Q_{1.(i-1)} &&+[pb(i-1)]Q_{2.(i-1)} &&+[pc(i-1)]Q_{3.(i-1)} &&+\ldots+ \\
& &&+[p(i-1)\,(i-1)]Q_{(i-1).(i-1)} &&+[p(i-1)i]Q_{(i-1).i} &&-1=0 \\
&[pai]\,Q_{1.(i-1)} &&+[pbi]Q_{2.(i-1)} &&+[pci]Q_{3.(i-1)} &&+\ldots+ \\
& &&+[p(i-1)i]Q_{(i-1).(i-1)} &&+[pii]Q_{(i-1).i} &&-0=0
\end{aligned}
$$

i-tā sistema (svara koeficienta $Q_{i.i} = Q_i$ noteikšanai):

$$
\begin{aligned}
&[paa]\,Q_{1.i} &&+[pab]Q_{2.i} &&+[pac]Q_{3.i} &&+\ldots+ \\
& &&+[pa(i-1)]Q_{(i-1).i} &&+[pai]Q_{i.i} &&-0=0 \\
&[pab]\,Q_{1.i} &&+[pbb]Q_{2.i} &&+[pbc]Q_{3.i} &&+\ldots+ \\
& &&+[pb(i-1)]Q_{(i-1).i} &&+[pbi]Q_{i.i} &&-0=0 \\
&[pac]\,Q_{1.i} &&+[pbc]Q_{2.i} &&+[pcc]Q_{3.i} &&+\ldots+ \\
& &&+[pc(i-1)]Q_{(i-1).i} &&+[pci]Q_{i.i} &&-0=0
\end{aligned}
$$

....

$$
\begin{aligned}
&[pa(i-1)]\,Q_{1.i} &&+[pb(i-1)]Q_{2.i} &&+[pc\,(i-1)]Q_{3.i} &&+\ldots+ \\
& &&+[p(i-1)\,(i-1)]Q_{(i-1).i} &&+[p(i-1)i]Q_{i.i} &&-0=0 \\
&[pai]\,Q_{1.i} &&+[pbi]Q_{2.i} &&+[pci]Q_{3.i} &&+\ldots+ \\
& &&+[p(i-1)i]Q_{(i-1).i} &&+[pii]Q_{i.i} &&-1=0
\end{aligned}
$$

Līdzīgā veidā, kā vienādas noteiktības gadijumā, pierādams, ka dažādas noteiktības gadijumā

$$p_i = [pii\,.\,(i-1)] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (309a),$$

un uz šīs formulas pamata nezinamo ξ svari nosakami bez svaru nolīdzinājumu palīdzības agrāk aizrādītā kārtā.

Beidzot, vēl piezīmēsim, ka sakarā ar normalnolīdzinājumu reducēšanu un atslēgšanu aprakstītās sumu kontroles attiecinamas arī uz svaru nolīdzinājumiem. Pielietojot sumu kontroles, piem., s-kontroļu veidā, katra svaru nolīdzinājumu sistema papildinama ar atbilstošo sumu nolīdzinājumu.

Kā zinams, visām svaru nolīdzinājumu sistemām ir tie paši koeficienti, kā atbilstošai normalnolīdzinājumu sistemai, tikai nezinamie un brīvie locekļi ir citādi. Tāpēc uz svaru nolīdzinājumu sistemām attiecīgiem sumu nolīdzinājumiem ir tie paši koeficienti, kā normalnolīdzinājumu sistemas sumu nolīdzinājumam. Kas zīmējas uz brīviem locekļiem, tad ievērojot (305) resp. (309), redzams, ka katrā uz svaru nolīdzinājumu sistemu attiecīgā sumu nolīdzinājumā brīvais loceklis ir -1.

Tā tad svaru nolīdzinājumu sistemām (305) resp. (309) atbilstošie sumu nolīdzinājumi ir

$$\left.\begin{array}{llll}
[as]Q_{1.1} & +[bs]Q_{1.2} & +[cs]Q_{1.3} & +\ldots+ \\
 & & +[(i-1)s]Q_{1.(i-1)} & +[is]Q_{1.i} \quad -1=0 \\
[as]Q_{1.2} & +[bs]Q_{2.2} & +[cs]Q_{2.3} & +\ldots+ \\
 & & +[(i-1)s]Q_{2.(i-1)} & +[is]Q_{2.i} \quad -1=0 \\
[as]Q_{1.3} & +[bs]Q_{2.3} & +[cs]Q_{3.3} & +\ldots+ \\
 & & +[(i-1)s]Q_{3.(i-1)} & +[is]Q_{3.i} \quad -1=0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
[as]Q_{1.(i-1)} & +[bs]Q_{2.(i-1)} & +[cs]Q_{3.(i-1)} & +\ldots+ \\
 & & +[(i-1)s]Q_{(i-1).(i-1)} & +[is]Q_{(i-1).i} \quad -1=0 \\
[as]Q_{1.i} & +[bs]Q_{2.i} & +[cs]Q_{3.i} & +\ldots+ \\
 & & +[(i-1)s]Q_{(i-1).i} & +[is]Q_{i.i} \quad -1=0
\end{array}\right\} \quad (310)$$

resp.

$$\left.\begin{array}{llll}
[pas]Q_{1.1} & +[pbs]Q_{1.2} & +[pcs]Q_{1.3} & +\ldots+ \\
 & & +[p(i-1)s]Q_{1.(i-1)} & +[pis]Q_{1.i} \quad -1=0 \\
[pas]Q_{1.2} & +[pbs]Q_{2.2} & +[pcs]Q_{2.3} & +\ldots+ \\
 & & +[p(i-1)s]Q_{2.(i-1)} & +[pis]Q_{2.i} \quad -1=0 \\
[pas]Q_{1.3} & +[pbs]Q_{2.3} & +[pcs]Q_{3.3} & +\ldots+ \\
 & & +[p(i-1)s]Q_{3.(i-1)} & +[pis]Q_{3.i} \quad -1=0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (311).$$

$$\left.\begin{aligned}&[pas]Q_{1.(i-1)}+[pbs]Q_{2.(i-1)}+[pcs]Q_{3.(i-1)}+\ldots+\\&\qquad+[p(i-1)s]Q_{(i-1).(i-1)}+[pis]Q_{(i-1).i}-1=0\\&[pas]Q_{1.i}+[pbs]Q_{2.i}+[pcs]Q_{3.i}+\ldots+\\&\qquad+[p(i-1)s]Q_{(i-1).i}+[pis]Q_{i.i}-1=0\end{aligned}\right\} \quad (311).$$

Pa atsevišķām svaru nolīdzinājumu sistemām (305) resp. (309) atrastos svaru koeficientus ieliekot attiecīgos atsevišķos sumu nolīdzinājumos (310) resp. (311), var izdarīt svaru koeficientu skaitliskā aprēķina kontroli.

Tādā veidā kontrole notiek pa atsevišķām svaru nolīdzinājumu sistemām. Bet var pārbaudīt arī uz reizi visus no visām svaru nolīdzinājumu sistemām atrastos svaru koeficientus. Tam nolūkam atrastās svaru koeficientu skaitliskās vērtības ieliek atbilstošā vispārējā sumu nolīdzinājumā, kurš veidojams sumējot atsevišķos sumu nolīdzinājumus (310) resp. (311). Šie vispārējie sumu nolīdzinājumi ir

$$[as][Q_{1.}]+[bs][Q_{2.}]+[cs][Q_{3.}]+\ldots+\\+[(i-1)s][Q_{(i-1).}]+[is][Q_{i.}]=i \quad (312)$$

resp.

$$[pas][Q_{1.}]+[pbs][Q_{2.}]+[pcs][Q_{3.}]+\ldots+\\+[p(i-1)s][Q_{(i-1).}]+[pis][Q_{i.}]=i \quad (313).$$

Šeit i apzīmē atsevišķo svaru nolīdzinājumu sistemu skaitu, kurš, kā zinams, vienāds ar nezinamo ξ skaitu; bet $[Q_{1.}]$, $[Q_{2.}]$, $[Q_{3.}]$, ..., $[Q_{(i-1).}]$, $[Q_{i.}]$ — sistemu (310) resp. (311) atbilstošos vertikalos stabiņos ieejošo svaru koeficientu sumas.

§ 27. Meklēto lielumu izlīdzināto vērtību funkcijas svars un vidējā kļūda.

Ar netiešiem novērojumiem nosakot meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības x, šie x tiek atrasti visi no vienas un tās pašas novērojumu resp. atbilstošo normalnolīdzinājumu sistemas, tā tad nevis neatkarīgi viens no otra. Tāpēc nosakot x-u funkcijas svaru vai vidējo kļūdu nevar pielietot 11. un 14. paragrafā atrastos likumus, jo tie, kā jau minēts, zīmējas tikai uz neatkarīgi nosacītu argumentu funkcijām.

Bet, kā zinams, katris x ir visu novērojumu l funkcija, tā tad arī katra x-u funkcija izsakama šo novērojumu funkcijas veidā, pie kam visi l ir savā starpā neatkarīgi argumenti. Tāpēc zinot šīs funkcijas veidu un argumentu, t. i. novērojumu l, svarus vai vidējās kļūdas, funkcijas svaru vai vidējo kļūdu var gan nosacīt pēc attiecīgiem augšā minētiem likumiem.

Sīkāki iztirzājot šo jautājumu, pietiek apskatīt tikai linearas funkcijas gadijumu, jo oriģinalveidā nelineara funkcija pazīstamā kārtā pārveršama linearā. Skatoties pēc apstākļiem, linearā veidā dotās vai pārverstās funkcijas argumenti var būt vai nu paši meklētie x, vai uz atbilstošām tuvinām vērtībām (x) attiecinātie pieaugumi ξ, pie kam pēdējā gadijumā novērojumu l vietā stājas atbilstošie lielumi λ. Kā šinī ziņā vispārīgāko, apskatīsim tipa

$$F = f_1\xi_1 + f_2\xi_2 + f_3\xi_3 + \ldots + f_{i-1}\xi_{i-1} + f_i\xi_i + f \quad . \; . \quad (314)$$

funkciju, pieņemot, ka $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_{i-1}, f_i$ un f ir no argumentiem $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\ldots, \xi_{i-1}, \xi_i$ neatkarīgi koeficienti un turpmākos iztirzājumos neinteresējošais brīvais loceklis.

Pārejot no argumentiem ξ uz argumentiem λ, vienādas noteiktības novērojumu gadijumā atvietojam $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\ldots, \xi_{i-1}, \xi_i$ ar atbilstošām izteiksmēm (289). Tad funkcija (314) pāriet veidā

$$\begin{aligned}
F = \; & f_1\{\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3 + \ldots + \alpha_n\lambda_n\} + \\
& + f_2\{\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \beta_3\lambda_3 + \ldots + \beta_n\lambda_n\} + \\
& + f_3\{\gamma_1\lambda_1 + \gamma_2\lambda_2 + \gamma_3\lambda_3 + \ldots + \gamma_n\lambda_n\} + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + f_{i-1}\{(\iota-1)_1\lambda_1 + (\iota-1)_2\lambda_2 + (\iota-1)_3\lambda_3 + \ldots + (\iota-1)_n\lambda_n\} + \\
& + f_i\{\iota_1\lambda_1 + \iota_2\lambda_2 + \iota_3\lambda_3 + \ldots + \iota_n\lambda_n\} + f = \\
= \; & \{f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1 + \ldots + f_{i-1}(\iota-1)_1 + f_i\iota_1\}\lambda_1 + \\
& + \{f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2 + \ldots + f_{i-1}(\iota-1)_2 + f_i\iota_2\}\lambda_2 + \\
& + \{f_1\alpha_3 + f_2\beta_3 + f_3\gamma_3 + \ldots + f_{i-1}(\iota-1)_3 + f_i\iota_3\}\lambda_3 + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + \{f_1\alpha_n + f_2\beta_n + f_3\gamma_n + \ldots + f_{i-1}(\iota-1)_n + f_i\iota_n\}\lambda_n + f \quad (315).
\end{aligned}$$

Ievērojot, ka šinī izteiksmē ieejošie λ ir, tāpat kā atbilstošie novērojumi l, viens no otra neatkarīgi atrasti lielumi ar vienādiem svariem 1, funkcijas (315) svars p_F nosakams pēc formulas (122). Tā tad šī svara pretējo vērtību izteicošais funkcijas svara koeficients Q_F ir

$$\begin{aligned}
Q_F = \frac{1}{p_F} = & \{f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1 + \ldots + f_{i-1}(\iota-1)_1 + f_i\iota_1\}^2 + \\
& + \{f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2 + \ldots + f_{i-1}(\iota-1)_2 + f_i\iota_2\}^2 + \\
& + \{f_1\alpha_3 + f_2\beta_3 + f_3\gamma_3 + \ldots + f_{i-1}(\iota-1)_3 + f_i\iota_3\}^2 + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +
\end{aligned}$$

$$+\{f_1\alpha_n + f_2\beta_n + f_3\gamma_n + \ldots + f_{i-1}(\iota-1)_n + f_i\iota_n\}^2 =$$
$$= f_1^2[\alpha\alpha] + 2f_1f_2[\alpha\beta] + 2f_1f_3[\alpha\gamma] + \ldots + 2f_1f_{i-1}[\alpha(\iota-1)] + 2f_1f_i[\alpha\iota] +$$
$$+ f_2^2[\beta\beta] + 2f_2f_3[\beta\gamma] + \ldots + 2f_2f_{i-1}[\beta(\iota-1)] + 2f_2f_i[\beta\iota] +$$
$$+ f_3^2[\gamma\gamma] + \ldots + 2f_3f_{i-1}[\gamma(\iota-1)] + 2f_3f_i[\gamma\iota] +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ f_{i-1}^2[(\iota-1)(\iota-1)] + 2f_{i-1}f_i[(\iota-1)\iota] +$$
$$+ f_i^2[\iota\iota] \quad (316).$$

Šinī formulā ieiet, bez funkcijas F koeficientiem f, faktori $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, ..., $[\alpha(\iota-1)]$, $[\alpha\iota]$, $[\beta\beta]$, $[\beta\gamma]$, ..., $[\beta(\iota-1)]$, $[\beta\iota]$, $[\gamma\gamma]$, ..., $[\gamma(\iota-1)]$, $[\gamma\iota]$, ..., $[(\iota-1)(\iota-1)]$, $[(\iota-1)\iota]$, $[\iota\iota]$. Tie ir t. s. svaru koeficienti, kuri jau minēti iepriekšējā paragrafā uz meklēto lielumu izlīdzināto vērtību svariem attiecīgos iztirzājumos. Ieliekot formulā (316) attiecīgos simbolus (301) un (303), šī formula pāriet veidā:

$$Q_F = f_1^2 Q_{1.1} + 2f_1f_2Q_{1.2} + 2f_1f_3Q_{1.3} + \ldots + 2f_1f_{i-1}Q_{1.(i-1)} + 2f_1f_iQ_{1.i} +$$
$$+ f_2^2Q_{2.2} + 2f_2f_3Q_{2.3} + \ldots + 2f_2f_{i-1}Q_{2.(i-1)} + 2f_2f_iQ_{2.i} +$$
$$+ f_3^2Q_{3.3} + \ldots + 2f_3f_{i-1}Q_{3.(i-1)} + 2f_3f_iQ_{3.i} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ f_{i-1}^2Q_{(i-1).(i-1)} + 2f_{i-1}f_iQ_{(i-1).i} +$$
$$+ f_i^2Q_{i.i} \quad (317).$$

Nosakot funkcijas svara koeficientu Q_F pēc šīs formulas, iepriekš — agrāk aizrādītā veidā — jābūt atrastiem visiem vajadzīgiem svaru koeficientiem $Q_{1.1}$, ..., $Q_{i.i}$. Bet svara koeficients Q_F nosakams arī citādā ceļā.

Formulu (317) var rakstīt:

$$Q_F = f_1\,(f_1Q_{1.1} + f_2Q_{1.2} + f_3Q_{1.3} + \ldots + f_{i-1}Q_{1.(i-1)} + f_iQ_{1.i}) +$$
$$+ f_2\,(f_1Q_{1.2} + f_2Q_{2.2} + f_3Q_{2.3} + \ldots + f_{i-1}Q_{2.(i-1)} + f_iQ_{2.i}) +$$
$$+ f_3\,(f_1Q_{1.3} + f_2Q_{2.3} + f_3Q_{3.3} + \ldots + f_{i-1}Q_{3.(i-1)} + f_iQ_{3.i}) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ f_{i-1}(f_1Q_{1.(i-1)} + f_2Q_{2.(i-1)} + f_3Q_{3.(i-1)} + \ldots + f_{i-1}Q_{(i-1).(i-1)} + f_iQ_{(i-1).i}) +$$
$$+ f_i\,(f_1Q_{1.i} + f_2Q_{2.i} + f_3Q_{3.i} + \ldots + f_{i-1}Q_{(i-1).i} + f_iQ_{i.i}) \quad (318).$$

Tad, lietojot apzīmējumus

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= f_1Q_{1.1} + f_2Q_{1.2} + f_3Q_{1.3} + \ldots + f_{i-1}Q_{1.(i-1)} + f_iQ_{1.i}\\
q_2 &= f_1Q_{1.2} + f_2Q_{2.2} + f_3Q_{2.3} + \ldots + f_{i-1}Q_{2.(i-1)} + f_iQ_{2.i}\\
q_3 &= f_1Q_{1.3} + f_2Q_{2.3} + f_3Q_{3.3} + \ldots + f_{i-1}Q_{3.(i-1)} + f_iQ_{3.i}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
q_{i-1} &= f_1Q_{1.(i-1)} + f_2Q_{2.(i-1)} + f_3Q_{3.(i-1)} + \ldots + f_{i-1}Q_{(i-1).(i-1)} + f_iQ_{(i-1).i}\\
q_i &= f_1Q_{1.i} + f_2Q_{2.i} + f_3Q_{3.i} + \ldots + f_{i-1}Q_{(i-1).i} + f_iQ_{i.i}
\end{aligned}\right\} \quad (319),$$

atrodam

$$Q_F = f_1q_1 + f_2q_2 + f_3q_3 + \ldots + f_{i-1}q_{i-1} + f_iq_i \quad (320).$$

Tālāk, reizinot sistemu (305) pirmos nolīdzinājumus ar f_1, f_2, f_3, ..., f_{i-1}, f_i un sumējot, veidojam izteiksmi

$$\begin{aligned}
&([aa]Q_{1.1}f_1 + [ab]Q_{1.2}f_1 + [ac]Q_{1.3}f_1 + \ldots +\\
&\qquad + [a(i-l)]Q_{1.(i-1)}f_1 + [ai]Q_{1.i}f_1 - f_1) +\\
+ &([aa]Q_{1.2}f_2 + [ab]Q_{2.2}f_2 + [ac]Q_{2.3}f_2 + \ldots +\\
&\qquad + [a(i-l)]Q_{2.(i-1)}f_2 + [ai]Q_{2.i}f_2 - 0) +\\
+ &([aa]Q_{1.3}f_3 + [ab]Q_{2.3}f_3 + [ac]Q_{3.3}f_3 + \ldots +\\
&\qquad + [a(i-l)]Q_{3.(i-1)}f_3 + [ai]Q_{3.i}f_3 - 0) +\\
+ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +\\
+ &([aa]Q_{1.(i-1)}f_{i-1} + [ab]Q_{2.(i-1)}f_{i-1} + [ac]Q_{3.(i-1)}f_{i-1} + \ldots +\\
&\qquad + [a(i-l)]Q_{(i-1).(i-1)}f_{i-1} + [ai]Q_{(i-1).i}f_{i-1} - 0) +\\
+ &([aa]Q_{1.i}f_i + [ab]Q_{2.i}f_i + [ac]Q_{3.i}f_i + \ldots +\\
&\qquad + [a(i-l)]Q_{(i-1).i}f_i + [ai]Q_{i.i}f_i - 0) = 0,
\end{aligned}$$

jeb

$$\begin{aligned}
&[aa](f_1Q_{1.1} + f_2Q_{1.2} + f_3Q_{1.3} + \ldots + f_{i-1}Q_{1.(i-1)} + f_iQ_{1.i}) +\\
+ &[ab](f_1Q_{1.2} + f_2Q_{2.2} + f_3Q_{2.3} + \ldots + f_{i-1}Q_{2.(i-1)} + f_iQ_{2.i}) +\\
+ &[ac](f_1Q_{1.3} + f_2Q_{2.3} + f_3Q_{3.3} + \ldots + f_{i-1}Q_{3.(i-1)} + f_iQ_{3.i}) +\\
+ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +\\
+ &[a(i\text{-}l)](f_1Q_{1.(i-1)} + f_2Q_{2.(i-1)} + f_3Q_{3.(i-1)} + \ldots + f_{i-1}Q_{(i-1).(i-1)} + f_iQ_{(i-1).i}) +\\
+ &[ai](f_1Q_{1.i} + f_2Q_{2.i} + f_3Q_{3.i} + \ldots + f_{i-1}Q_{(i-1).i} + f_iQ_{i.i}) = f_1 \quad (321).
\end{aligned}$$

Ievērojot (319), šī izteiksme rakstama veidā

$$[aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3 + \ldots + [a(i\text{-}l)]q_{i-1} + [ai]q_i = f_1 \quad (322).$$

Šī izteiksme, kopā ar līdzīgā veidā atrastām pārējām, veido sekojošo nolīdzinājumu sistemu:

$$\left.\begin{array}{l}
[aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3 + \ldots + [a(i-l)]q_{i-1} + [ai]q_i - f_1 = 0 \\
[ab]q_1 + [bb]q_2 + [bc]q_3 + \ldots + [b(i-l)]q_{i-1} + [bi]q_i - f_2 = 0 \\
[ac]q_1 + [bc]q_2 + [cc]q_3 + \ldots + [c(i-l)]q_{i-1} + [ci]q_i - f_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[a(i-l)]q_1 + [b(i-l)]q_2 + [c(i-l)]q_3 + \ldots + [(i-l)(i-l)]q_{i-1} + [(i-l)i]q_i - f_{i-1} = 0 \\
[ai]q_1 + [bi]q_2 + [ci]q_3 + \ldots + [(i-l)i]q_{i-1} + [ii]q_i - f_i = 0
\end{array}\right\} \quad (323).$$

No tās atrodami koeficienti q, ar kuriem svara koeficients Q_F nosakams pēc formulas (320).

Beidzot, aizrādīsim vēl vienu paņēmienu svara koeficienta Q_F noteikšanai — nolīdzinājumu sistemas (323) brīvo locekļu reducēšanas ceļā.

Izsakot $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{i-1}, f_i$ no attiecīgiem nolīdzinājumiem (323), atrastās izteiksmes

$$\left.\begin{array}{l}
f_1 = [aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3 + \ldots + [a(i-l)]q_{i-1} + [ai]q_i \\
f_2 = [ab]q_1 + [bb]q_2 + [bc]q_3 + \ldots + [b(i-l)]q_{i-1} + [bi]q_i \\
f_3 = [ac]q_1 + [bc]q_2 + [cc]q_3 + \ldots + [c(i-l)]q_{i-1} + [ci]q_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_{i-1} = [a(i-l)]q_1 + [b(i-l)]q_2 + [c(i-l)]q_3 + \ldots + [(i-l)(i-l)]q_{i-1} + [(i-l)i]q_i \\
f_i = [ai]q_1 + [bi]q_2 + [ci]q_3 + \ldots + [(i-l)i]q_{i-1} + [ii]q_i
\end{array}\right\} \quad (324)$$

ieliekam formulā (320), kura tad pēc zināmiem pārveidojumiem rakstama

$$\begin{aligned}
Q_F = [aa]q_1^2 + 2[ab]q_1q_2 + 2[ac]q_1q_3 + \ldots + 2[a(i-l)]q_1q_{i-1} + 2[ai]q_1q_i &+ \\
+ [bb]q_2^2 + 2[bc]q_2q_3 + \ldots + 2[b(i-l)]q_2q_{i-1} + 2[bi]q_2q_i &+ \\
+ [cc]q_3^2 + \ldots + 2[c(i-l)]q_3q_{i-1} + 2[ci]q_3q_i &+ \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &+ \\
+ [(i-l)(i-l)]q_{i-1}^2 + 2[(i-l)i]q_{i-1}q_i &+ \\
+ [ii]q_i^2 & \quad (325).
\end{aligned}$$

Tagad atgriežamies pie agrāk atrastām formulām (255) un (261), kuras abas zīmējas uz kļūdu nolīdzinājumu sistemai (202) atbilstošo kvadratu sumu [vv].

Atsevišķā gadijumā, kad minēto kļūdu nolīdzinājumu brīvie locekļi $-\lambda$ visi vienādi ar nulli, formulās (255) un (261) izkrīt visi locekļi, kuros ieiet šie $-\lambda$. Tā tad minētās formulas pāriet veidā:

$$
\begin{aligned}
[vv]=[aa]\xi_1^2&+2[ab]\xi_1\xi_2+2[ac]\xi_1\xi_3+\ldots+2[a(i\text{-}l)]\xi_1\xi_{i-1}+2[ai]\xi_1\xi_i+\\
&+[bb]\xi_2^2+2[bc]\xi_2\xi_3+\ldots+2[b(i\text{-}l)]\xi_2\xi_{i-1}+2[bi]\xi_2\xi_i+\\
&+[cc]\xi_3^2+\ldots+2[c(i\text{-}l)]\xi_3\xi_{i-1}+2[ci]\xi_3\xi_i+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
&+[(i\text{-}l)(i\text{-}l)]\xi_{i-1}^2+2[(i\text{-}l)i]\xi_{i-1}\xi_i+\\
&+[ii]\xi_i^2 \qquad (326)
\end{aligned}
$$

un

$$
[vv]-\frac{(A)(A)}{[aa]}-\frac{(B)(B)}{[bb.1]}-\frac{(C)(C)}{[cc.2]}-\ldots-\frac{(I-l)(I-l)}{[(i\text{-}l)(i\text{-}l).(i\text{-}2)]}-\frac{(I)(I)}{[ii.(i\text{-}l)]}=0 \quad (327).
$$

Šeit pieņemtā atsevišķā gadijumā, kad visi $-\lambda$ vienādi ar nulli, simboliem (A), (B), (C),....., (I — 1), (I) atbilstošās izteiksmēs (249) izkrīt no $-\lambda$ atkarīgie pēdējie locekļi. Ievērojot to, no formulām (326) un (327) seko, ka

$$
\begin{aligned}
[aa]\xi_1^2&+2[ab]\xi_1\xi_2+2[ac]\xi_1\xi_3+\ldots+2[a(i-l)]\xi_1\xi_{i-1}+2[ai]\xi_1\xi_i+\\
&+[bb]\xi_2^2+2[bc]\xi_2\xi_3+\ldots+2[b(i-l)]\xi_2\xi_{i-1}+2[bi]\xi_2\xi_i+\\
&+[cc]\xi_3^2+\ldots+2[c(i-l)]\xi_3\xi_{i-1}+2[ci]\xi_3\xi_i+\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
&+[(i\text{-}l)(i\text{-}l)]\xi_{i-1}^2+2[(i\text{-}l)i]\xi_{i-1}\xi_i+\\
&+[ii]\xi_i^2=\\
=\frac{(A)(A)}{[aa]}&+\frac{(B)(B)}{[bb.1]}+\frac{(C)(C)}{[cc.2]}+\ldots+\frac{(I-l)(I-l)}{[(i\text{-}l)(i\text{-}l).(i\text{-}2)]}+\frac{(I)(I)}{[ii.(i-l)]}=\\
=\frac{\{[aa]\xi_1+[ab]\xi_2+[ac]\xi_3+\ldots+[a(i-l)]\xi_{i-1}+[ai]\xi_i\}^2}{[aa]}&+\\
+\frac{\{[bb.l]\xi_2+[bc.l]\xi_3+\ldots+[b(i-l).l]\xi_{i-1}+[bi.l]\xi_i\}^2}{[bb.l]}&+\\
+\frac{\{[cc.2]\xi_3+\ldots+[c(i-l).2]\xi_{i-1}+[ci.2]\xi_i\}^2}{[cc:2]}&+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&+\\
+\frac{\{[(i\text{-}l)(i\text{-}l).(i\text{-}2)]\xi_{i-1}+[(i\text{-}l)i.(i\text{-}2)]\xi_i\}^2}{[(i-l)(i-l).(i-2)]}&+\\
+\frac{\{[ii.(i-l)]\xi_i\}^2}{[ii.(i-l)]} \quad (328).
\end{aligned}
$$

Šai formulai ir vispārēja nozīme. T. i., tā ir spēkā vienmēr, ja nosakot ieejošos nezinamos, normalnolīdzinājumi reducēti pēc Gauss'a algoritma, un pēc šī paņēmiena nosacīti ar pazīstamiem simboliem apzīmētie koeficienti.

Nolīdzinājumiem (323) ir tie paši koeficienti, kā normalnolīdzinājumiem (227). Tā tad, iedomājoties nolīdzinājumus (323) reducētus pēc Gauss'a paņēmiena, formula (328) tieši attiecinama arī uz šo nolīdzinājumu nezinamiem q. Atvietojot nezinamos ξ ar minētiem q, izrādas, ka formulas (328) pirmā daļa identiska ar izteiksmi (325), un tāpēc

$$
\begin{aligned}
Q_F = & \frac{\{[aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3 + \dots + [a(i-1)]q_{i-1} + [ai]q_i\}^2}{[aa]} + \\
& + \frac{\{[bb.1]q_2 + [bc.1]q_3 + \dots + [b(i-1).1]q_{i-1} + [bi.1]q_i\}^2}{[bb.1]} + \\
& + \frac{\{[cc.2]q_3 + \dots + [c(i-1).2]q_{i-1} + [ci.2]q_i\}^2}{[cc.2]} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + \frac{\{[(i-1)(i-1).(i-2)]q_{i-1} + [(i-1)i.(i-2)]q_i\}^2}{[(i-1)(i-1).(i-2)]} + \\
& + \frac{\{[ii.(i-1)]q_i\}^2}{[ii.(i-1)]} \qquad (329).
\end{aligned}
$$

Pēc Gauss'a paņēmiena reducējot nolīdzinājumus (323), atbilstošie galējie nolīdzinājumi ir

$$
\left.
\begin{aligned}
& [aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3 + \dots + \\
& \qquad + [a(i-1)]q_{i-1} + [ai]q_i - f_1 = 0 \\
& [bb.1]q_2 + [bc.1]q_3 + \dots + \\
& \qquad + [b(i-1).1]q_{i-1} + [bi.1]q_i - [f_2.1] = 0 \\
& [cc.2]q_3 + \dots + \\
& \qquad + [c(i-1).2]q_{i-1} + [ci.2]q_i - [f_3.2] = 0 \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& [(i-1)(i-1).(i-2)]q_{i-1} + [(i-1)i.(i-2)]q_i - [f_{i-1}.(i-2)] = 0 \\
& [ii.(i-1)]q_i - [f_i.(i-1)] = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (330);
$$

tie no normalnolīdzinājumu sistemai (227) atbilstošiem (249) atšķiras tikai nezinamos un brīvos locekļos. Kas zīmējas uz brīviem locekļiem $-[f_2.1]$, $-[f_3.2]$, ..., $-[f_{i-1}.(i-2)]$, $-[f_i.(i-1)]$, tad tie atvasinami no nolīdzinājumu (323) brīviem locekļiem $-f_1$, $-f_2$, $-f_3$, $-f_{i-1}$, $-f_i$ Gauss'a algoritma pazīstamā kārtībā.

Izsakot no galējiem nolīdzinājumiem (330) to brīvos locekļus un ieliekot attiecīgās izteiksmes formulā (329), tā pāriet šādā galīgā veidā

$$Q_F = \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[f_3.2]^2}{[cc.2]} + \ldots + \frac{[f_{i-1}.(i-2)]^2}{[(i-1)(i-1).(i-2)]} + \frac{[f_i.(i-1)]^2}{[ii.(i-1)]} \quad (331).$$

Šīs formulas atsevišķo locekļu saucēji ir koeficienti, kuri zinami no funkcijas F argumentu noteikšanai lietoto normalnolīdzinājumu reducēšanas, tā tad nav atsevišķi jānosaka. Skaitītāji ir galējo nolīdzinājumu (330) brīvie locekļi, kuri nosakami pēc Gauss'a paņēmiena reducējot nolīdzinājumus (323). Tas vislietderīgāki notiek līdztekus funkcijas argumentu noteikšanai lietoto normalnolīdzinājumu reducēšanai, tad izsmeļoties ar nolīdzinājumu (323) brīvo locekļu reducēšanu.

Dažādas noteiktības gadijumā apskatītā jautājuma atrisinājumā grozas tikai tas, ka normalnolīdzinājumu (227) vietā stājas dažādas noteiktības novērojumiem atbilstošie nereducētie normalnolīdzinājumi (251). Sakarā ar to formulas (317) pielietošanas gadijumā vajadzīgie svaru koeficienti nosakami no svaru nolīdzinājumu sistemām (309); formula (320) paliek bez pārmaiņām, bet nolīdzinājumu sistemas (323) un formulas (331) vietā stājas:

$$\left.\begin{array}{l}
[paa]q_1 + [pab]q_2 + [pac]q_3 + \ldots + \\
\qquad + [pa(i-1)]q_{i-1} + [pai]q_i - f_1 = 0 \\
[pab]q_1 + [pbb]q_2 + [pbc]q_3 + \ldots + \\
\qquad + [pb(i-1)]q_{i-1} + [pbi]q_i - f_2 = 0 \\
[pac]q_1 + [pbc]q_2 + [pcc]q_3 + \ldots + \\
\qquad + [pc(i-1)]q_{i-1} + [pci]q_i - f_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[pa(i-1)]q_1 + [pb(i-1)]q_2 + [pc(i-1)]q_3 + \ldots + \\
\qquad + [p(i-1)(i-1)]q_{i-1} + [p(i-1)i]q_i - f_{i-1} = 0 \\
[pai]q_1 + [pbi]q_2 + [pci]q_3 + \ldots + \\
\qquad + [p(i-1)i]q_{i-1} + [pii]q_i - f_i = 0
\end{array}\right\} \quad (332)$$

un

$$Q_F = \frac{f_1^2}{[paa]} + \frac{[f_2.1]^2}{[pbb.1]} + \frac{[f_3.2]^2}{[pcc.2]} + \ldots + \frac{[f_{i-1}.(i-2)]^2}{[p(i-1)(i-1).(i-2)]} + \frac{[f_i.(i-1)]^2}{[pii.(i-1)]} \quad (333).$$

§ 28. Normalnolīdzinājumu un svaru nolīdzinājumu reducēšanas schemas.

Pēc Gauss'a algoritma reducējot normalnolīdzinājumus un eventuali līdz ar tiem arī atbilstošos svaru nolīdzinājumus, parasti pieturaş pie kādas schemas, lai padarītu rēķinu ērtāku un pārskatamāku. Tādas schemas pazīstamas vairākos variantos.

Piemēra veidā šeit aizrādot dažas schemas, piezīmēsim, ka tās pilnībā zīmējas uz normalnolīdzinājumu un atbilstošo svaru nolīdzinājumu kopīgo reducēšanu. Bet ar atbilstošiem izlaidumiem tās lietojamas arī tad, kad atsevišķi reducējami vai nu tikai normalnolīdzinājumi, vai tikai svaru nolīdzinājumi. Vienkāršības dēļ schemās sagrupēto elementu vispārējie apzīmējumi piemēroti vienādas noteiktības novērojumu gadijumam. Dažādas noteiktības gadijumā šiem apzīmējumiem atbilstoši grozoties, schemu iekārta paliek bez pārmaiņām. Sumu kontroles aizrādītas divos — s- un σ- tipa — variantos; bet, kā jau agrāk minēts, pietiek sumu kontroles taisīt tikai vienā variantā, neaprēķinot uz otro variantu attiecīgos locekļus.

Schemas 1 (piel. I) kreisās puses stabiņos ar virsrakstiem $\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_i$, — λ un σ schemas attiecīgā pirmā nodaļā atzīmēti nereducētās normalnolīdzinājumu sistemas (227) koeficienti un brīvie locekļi ar atbilstošiem sumu nolīdzinājuma elementiem, papildu locekli $[\lambda\lambda]$ un σ-tipa kontrollocekļiem. Schemas labās puses stabiņos ar virsrakstiem $Q_1, \ldots\ldots, Q_i$ un $F, \ldots\ldots$ atzīmēti uz meklētiem nezinamiem ξ un pēc parauga (314) veidotām argumentu ξ funkcijām F attiecīgo svaru nolīdzinājumu sistemu (305) un (323) brīvie locekļi. Tiem atbilstošie s- un σ-tipa kontrollocekļi, kuri ierakstīti sumu nolīdzinājuma rindiņā resp. stabiņā ar virsrakstu Σ, veidoti sumējot minētos svaru nolīdzinājumu brīvos locekļus pa vertikaliem stabiņiem resp. pa horizontalām rindiņam.

Tādā kārtā schemas pirmā nodaļā augšā minētie elementi sagrupēti pa attiecīgiem normalnolīdzinājumiem atbilstošām rindām. Atsevišķu rindu veido papildu loceklis $[\lambda\lambda]$ un tam atbilstošais kontrolloceklis — $[\lambda\sigma]$.

Reducējot pēc Gauss'a algoritma, no katras tādas rindas — izņemot pirmo, ar (A) apzīmēto — jāatņem atbilstošā „redukcijas locekļu" rinda. Ievērojot uz reducēšanu pēc Gauss'a algoritma attiecīgās formulas, redzam, ka katrā atsevišķā redukcijas locekļu rindā tās atsevišķie locekļi veidojami reizinot atbilstošos rindas (A) elementus ar visai redukcijas locekļu rindai pastāvīgu „redukcijas faktoru", kurš schemā apzīmēts ar r.

Pirmā stabiņā (ar virsrakstu ξ_1) attiecīgie redukcijas locekļi nav atzīmēti; kā zinams, tie ir vienādi ar atbilstošiem nezinamā ξ_1 koeficientiem, un sakarā ar to pirmās reducēšanas rezultatā šis pirmais nezinamais ξ_1 visos nolīdzinājumos izkrīt. Šo izlaisto redukcijas locekļu vietā atzīmēti atbilstošie redukcijas faktori r.

No katras reducējamo elementu rindas atņemot atbilstošo redukcijas locekļu rindu, atrodam pirmo reizi reducētās sistemas, kas aptver normalnolīdzinājumu koeficientus un brīvos locekļus un atbilstošos svaru nolīdzinājumu brīvos locekļus, kontrollocekļus un papildu locekli. Šie elementi atzīmēti schemas otrā nodaļā, un tās kreisā pusē pilnīgi atbilst otrai (pirmo reizi reducētai) sistemai (248).

Pirmo reizi reducēto sistemu reducēšanai notiekot līdzīgā veidā, kā tas augšā sīkāki aprakstīts attiecībā uz nereducētām sistemām, veidojas otro reizi reducētās sistemas, u. t. t. Pēc (i — 1)-ās reducēšanas, kad palicis tikai viens normalnolīdzinājums ar pēdējo nezinamo ξ_i, reducējot vēl i-to reizi, izkrīt arī šis pēdējais nezinamais, un paliek tikai pilnīgi reducētais papildu loceklis $[\lambda\lambda.i]$ ar atbilstošo kontrollocekli $-[\lambda\sigma.i]$.

Attiecībā uz aprakstīto schemu vēl piezīmēsim, ka no svaru nolīdzinājumu brīviem locekļiem un Σ-tipa kontrollocekļiem atvasināto reducēto elementu apzīmēšanai lietoti simboli, kuri veidoti pēc Gauss'a algoritmā parasto parauga. Ar līdzīgiem simboliem apzīmēti reducētām sistemām atbilstošie redukcijas faktori. Redukcijas locekļu rindās simbols $\times$ apzīmē atbilstošo redukcijas faktoru.

Pēc sistemas (227) parauga schemā 1 atzīmējot pilnībā atsevišķo normalnolīdzinājumu visus koeficientus, katras sistemas nākošās rindās atkārtojas zinami iepriekšējo rindu koeficienti resp. tiem atbilstošie redukcijas locekļi. Jaunu, iepriekšējās rindās neatrodamu, koeficientu rindas sistemu atsevišķos nolīdzinājumos iesākas ar attiecīgiem „kvadratiska tipa" koeficientiem:

$$
\begin{array}{llllll}
[aa], & [bb], & [cc], & \ldots, & [(i-1)(i-1)], & [ii], \\
 & [bb.1], & [cc.1], & \ldots, & [(i-1)(i-1).1], & [ii.1], \\
 & & [cc.2], & \ldots, & [(i-1)(i-1).2], & [ii.2], \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & & [(i-1)(i-1).(i-2)], & [ii.(i-2)], \\
 & & & & & [ii.(i-1)]
\end{array}
$$

Ievērojot to, pa sistemām rakstot resp. nosakot atsevišķo nolīdzinājumu koeficientus un atbilstošos redukcijas locekļus, pietiek iesākt katru rindu ar tās kvadratiska tipa koeficientu, jo izlaistie iepriekšējie koeficienti atrodami virs attiecīgā kvadratiska tipa koeficienta tam atbilstošā vertikalā stabiņā. Kas zīmējas uz normalnolīdzinājumu nezinamiem atbilstošo svaru nolīdzinājumu brīviem locekļiem, tad katrā nereducēto svaru nolīdzinājumu sistemā resp. schemas 1 atbilstošā vertikalā stabiņā viens brīvais loceklis ir — 1, bet visi pārējie — vienādi ar nulli. Sakarā ar to nereducētās svaru nolīdzinājumu sistemās attiecīgie s-tipa kontrollocekļi visi vienādi ar — 1. Bez tam katrā minēto brīvo locekļu stabiņā, kuram augšējā galā ir nulle, attiecīgie redukcijas locekļi arī visi vienādi ar nulli. Tas nozīmē, ka tādos stabiņos ieejošie svaru nolīdzinājumu brīvie locekļi un atbilstošie s-tipa kontrollocekļi bez pārmaiņām pāriet sistemas nākošā reducēšanas pakāpē, — tikai atkrīt stabiņa augšējā galā bijušais, ar nulli vienādais, brīvais loceklis. No tā secinam, ka reducēšanas atsevišķās pakāpēs pietiek ievērot tikai tos svaru nolīdzinājumu brīvo locekļu stabiņus, kur pirmais no augšas brīvais loceklis atšķiras no nulles.

Ievērojot šos aizrādijumus, schemu 1 parasti lieto atbilstošā saīsinājumā, izlaižot ar treknām linijām apvilktās daļas.

Atzīmējot nolīdzinājumu koeficientus ar minētiem izlaidumiem, atsevišķiem kontrollocekļiem atbilstošo sumu elementi nav vis atrodami visi vienā vertikalā stabiņā resp. vienā horizontalā rindiņā, kā tas ir pilnīgā veidā rakstītā schemā 1. Bet tie pa atsevišķiem kontrollocekļiem atbilstošām grupām atrodami vertikalos stabiņos un horizontalās rindiņās ar kopīgu attiecīgu kvadratiska tipa koeficientu. Piem., kontrollocekļiem [cs] un [iσ.1] atbilstošā vertikalā stabiņā resp. horizontalā rindiņā kvadratiska tipa koeficienti ir [cc] resp. [ii.1]. Sakarā ar to, minētiem kontrollocekļiem atbilstošo sumu elementi saīsinātā schemā 1 atrodami šādā sagrupējumā:

[ac]
[bc]
...
[cc] ... [c(i—1)] [ci]

resp.

[bi.1]
[ci.1]
.....
....
[(i—1)i.1]
....
[ii.1] —[iλ.1]

Kas zīmējas uz izlaidumiem, kuri taisīti uz svaru nolīdzinājumiem attiecīgā schemas labā pusē, tad šie izlaidumi netraucē sumu kontroles pēc s-varianta; bet tie padara gan nepārskatamu un neērtu Σ-tipa locekļu lietošanu sumu kontrolēm. Tāpēc, lietojot schemu 1 šeit aizrādītā saīsinātā veidā, ieteicams taisīt sumu kontroles — cik tās zīmējas uz svaru nolīdzinājumu brīvo locekļu reducēšanu — pēc s-varianta.

Kā redzams, schemas 1 saīsinātā variantā, līdz ar augšā minēto iemeslu dēļ izlaistiem normalnolīdzinājumu koeficientiem un tiem atbilstošiem redukcijas locekļiem, izlaisti arī visi pilnīgā schemā atzīmētie redukcijas faktori. Sakarā ar to piezīmējam, ka vispārīgi redukcijas nolūkā veidoto redukcijas faktoru atzīmēšanai ir reala nozīme tikai tad, kad ir nodomāts lietot šos faktorus galējo nolīdzinājumu atslēgšanā, t. i. aprēķinot nezinamos ξ un tiem atbilstošos svaru koeficientus Q. Ja tas nav nodomāts, tad vispārīgi pietiek atzīmēt ar minēto redukcijas faktoru palīdzību veidotos redukcijas locekļus, neatzīmējot pašus redukcijas faktorus.

Reducējot ar schemu 1 vai tās saīsināto variantu noteiktā kārtībā, katrā reducēšanas pakāpē tiek veidoti visu attiecīgo nolīdzinājumu koeficienti un brīvie locekļi. Bet, kā zinams, meklēto ξ un Q noteikšanai pietiek zināt tikai atbilstošos galējos nolīdzinājumus. Tāpēc bieži reducēšanu izdara tādā kārtībā, lai izejot no pilnīgām nereducētām nolīdzinājumu sistemām, pakāpeniski veidotu pa atsevišķām reducēšanas pakāpēm tikai atbilstošos galējos nolīdzinājumus. Tādai reducēšanas kārtībai piemērota schema 2 (piel. II).

Reducējot pēc schemas 2, tādā pat kārtībā, kā saīsinātā schemā 1, atzīmē nereducēto sistemu visus elementus un no tiem atvasina pirmo reizi reducētās sistemas pirmo rindu, kas satur galējā nolīdzinājuma (B) elementus. Lai atrastu nākošo galējo nolīdzinājumu (C), schemā aizrādītā kārtībā no rindām (A) un (B) atvasina atbilstošas divas redukcijas locekļu rindas, kuras atzīmētas zem tās rindas, kas iesākas ar koeficientu [cc]. Atņemot šo divu redukcijas rindu sumu no trešām nereducētam normalnolīdzinājumam atbilstošās rindas, kura iesākas ar minēto koeficientu [cc], atrodam galējo nolīdzinājumu (C). Tā turpinot, zem katras nereducētam normalnolīdzinājumam atbilstošas rindas ar kvadratiska tipa koeficientu sākumā raksta tik redukcijas locekļu rindas, cik ir jau veidoto galējo nolīdzinājumu, pie tam ievērojot, ka rinda (A) atbilst pirmam galējam nolīdzinājumam. Atsevišķās redukcijas rindas schemā aizrādītā kārtā veido ar attiecīgo, jau atrastiem galējiem nolīdzinājumiem atbilstošo, rindu elementiem. Sumējot šīs redukcijas un rindas atņemot sumu no rindas ar kvadratiska tipa koeficientu, zem kuras attiecīgās redukcijas rindas rakstītas, veidojas atbilstošais galējais nolīdzinājums resp. tam atbilstošā rinda.

Reducējot ar šo schemu norādītā kārtībā, ieteicams visus redukcijas locekļus skaitīt ar pretējām zīmēm: tad katra rinda ar kvadratiska tipa koeficientu sākumā algebraiski jāsumē ar visām zem tās rakstītām atbilstošām redukcijas rindām. Sakarā ar to piezīmējam, ka schemā 2 vispārīgi lietojot tos pašus apzīmējumus un simbolus, kā schemā 1, simbols $\times$ apzīmē ar pretējo zīmi skaitīto atbilstošo redukcijas faktoru.

Kas zīmējas uz sumu kontrolēm, tad reducējot pēc schemas 2, s-tipa kontroļu pielietošana saistīta ar zinamām tehniskām grūtībām, bet σ-tipa sumu kontroles viegli izdaramas parastā veidā. Tāpēc schemas vispārējā paraugā atzīmēti tikai σ- un Σ-tipa kontrollocekļi.

Vispārīgi, salīdzinot ar s-tipa kontrolēm, σ-tipa sumu kontrolēm ir zinamas priekšrocības. Starp citu, tanī ziņā, ka uz papildu locekli $[\lambda\lambda]$ attiecīgā reducēšanas pārbaude izdarama tikai ar σ-tipa kontrollocekļu palīdzību. No otras puses, s-tipa sumu kontroles ļoti derīgas nezinamo un to svaru koeficientu atrasto vērtību pārbaudei, kura, kā zinams, notiek ieliekot pārbaudamās vērtības attiecīgos sumu nolīdzinājumos. Tāpēc arī gadijumos, kad reducēšana notiek ar σ-tipa sumu kontrolēm, tomēr ieteicams, veidojot nereducētos normalnolīdzinājumus ar attiecīgiem papildu locekļiem, sakarā ar to nosacīt arī atbilstošo sumu nolīdzinājumu koeficientus un brīvos locekļus.

Reducējot pēc schemas 2, sumu kontroles ir diezgan retas. Tā tad pie šīm kontrolēm eventuali konstatētas aritmetiskā aprēķinā notikušas kļūdas jāmeklē lielākā aprēķina posmā.

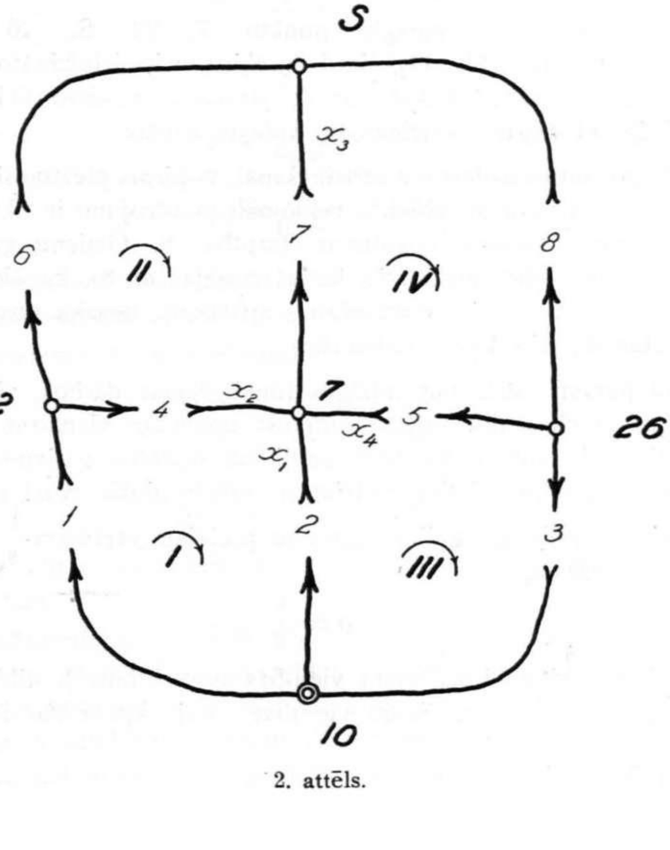
Šinī ziņā ir izdevīgāki izdarīt reducēšanu pēc schemas 3 (piel. III). Tā savas vispārējās iekārtas ziņā atgādina schemu 2; bet, tāpat kā saīsinātā schemā 1, tiek veidoti visi atsevišķām redukcijas pakāpēm atbilstošie normalnolīdzinājumi un svaru nolīdzinājumu brīvie locekļi, pie kam katrai reducēto elementu rindai ir atbilstošā σ- tipa sumas kontrole.

Šeit aizrādītās reducēšanas schemas tiek lietotas arī dažādos variantos. Piem., bieži sumu kontroļu locekļus ieliek ar pretējām zīmēm; tādā gadijumā sumu kontroles notiek pēc parauga (213) resp. (217). Sakarā ar to tad parasti papildina reducēšanas schemu ar atbilstošām rindiņām resp. stabiņu sumu kontroļu rezultatu atzīmēšanai. Piem., nākošā paragrafā apskatītā skaitliskā piemērā reducējot normalnolīdzinājumus un svaru nolīdzinājumus schemas 2 vispārējā kārtībā, σ-tipa sumu kontroļu locekļi skaitīti ar pretējām zīmēm un kontroļu rezultati atzīmēti atsevišķos stabiņos ar virsrakstiem k un K. Turpat parādīts, kādā kārtā nezinamo ξ un Q aprēķins izdarams ar redukcijas faktoru palīdzību, kas gan ieteicams tikai tad, ja šo redukcijas faktoru skaitliskais aprēķins izdarīts ar šim nolūkam pietiekošo noteiktību.

§ 29. Skaitlisks piemērs.

Lai sīkāki paskaidrotu iepriekšējos paragrafos iztirzātās uz netiešu novērojumu izlīdzināšanu attiecīgās teorijas praktisko pielietošanu, apskatīsim skaitlisku piemēru, kas zīmējas uz L. U. Inženierzinātņu fakultates studentu 1935. gadā Brīvdabas Muzejā izdarītiem līmetņošanas darbiem.

Dažu pamatpunktu augstumu noteikšanas nolūkā tika veidots šos pamatpunktus ietverošs līmetņojuma tīkls, kurš ar zinamiem izlaidumiem schematiski parādīts 2. attēlā.



2. attēls.

Dubulti līmetņojot tīklu veidojošos gājienus 1—8, atsevišķiem gājieniem atrastās augstumu starpības h attiecinātas uz attēlā ar bultiņām atzīmētiem līmetņošanas virzieniem. Arī nosacīti līmetņoto gājienu garumi s. Elementu h un s novērotās skaitliskās vērtības ir:

$h_1 = + 1{,}069$ m	„ $+ 1069$ mm	$s_1 = 1{,}05$ km
$h_2 = + 2{,}648$	„ $+ 2648$	$s_2 = 0{,}34$
$h_3 = + 7{,}078$	„ $+ 7078$	$s_3 = 0{,}53$
$h_4 = + 1{,}571$	„ $+ 1571$	$s_4 = 0{,}36$
$h_5 = + 9{,}724$	„ $+ 9724$	$s_5 = 0{,}30$
$h_6 = + 9{,}946$	„ $+ 9946$	$s_6 = 0{,}96$
$h_7 = + 8{,}375$	„ $+ 8375$	$s_7 = 0{,}53$
$h_8 = + 18{,}103$	„ $+ 18103$	$s_8 = 0{,}89$

Uz šo datu pamata jānosaka gājieniem 2, 4, 7, 5 atbilstošās izlīdzinātās augstumu starpības x_1, x_2, x_3, x_4, lai ar tām, zinot punkta 10 absoluto augstumu

$$H_{10} = 10{,}7750\ \text{m} \pm 5{,}0\ \text{mm}$$

nosacītu pārējo tīkla mezglu punktu 7, 22, S, 26 absolutos augstumus H_7, H_{22}, H_s, H_{26}, kuri aprēķinami kā izlīdzināto augstumu starpību x funkcijas. Sakarā ar to jānosaka meklēto lielumu x un to funkciju H svaru koeficienti un vidējās kļūdas.

Piegriežoties uzdevuma atrisināšanai, vispirms piezīmēsim, ka dotā gadijumā izlīdzināšanas objektu veidojošie novērojumi ir tikai līmetņošanas rezultatā atrastās augstumu starpības h. Gājienu garumiem s izlīdzināšanas rēķinā piekrītošā loma izsmeļas ar to, ka šie elementi, zinamā mērā raksturojot novērošanas apstākļus, nosaka novēroto augstumu starpību h relativo noteiktību.

Kā parasti mēdz būt līdzīgos līmetņošanas darbos, visu gājienu atsevišķās stacijās novērojumi notikuši apmēram vienādos apstākļos. Vēlāk tiks pierādīts*), ka tādā gadijumā dažādos gājienos novēroto augstumu starpību relativo noteiktību raksturojošie svari p jāpieņem proporcionali attiecīgo gājienu garumu pretējām vērtībām $\frac{1}{s}$. Pieņemot svarus pēc parauga

$$p = \frac{1}{s}$$

un ieliekot s kilometros, svara vienības novērojums h atbilst 1 kilometru garam gājienam. Svara vienības vidējā kļūda tad ir identiska

*) Sk. § 81.

ar t. s. līmetņojuma vidējo nejaušo „kilometra kļūdu", kuru parasti lieto līmetņojuma noteiktības raksturošanai.

Apskatītā piemērā tīklu veidojošiem atsevišķiem gājieniem ir dažādi garumi s. Tā tad attiecīgie līmetņojuma rezultati h uzskatami par dažādas noteiktības novērojumiem. Pieņemot svarus tādā sistemā, lai svara vienības vidējā kļūda būtu identiska ar minēto kilometra kļūdu, novērotām augstumu starpībām atbilstošie svari p ir

$$p_1 = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}95$$

$$p_2 = \frac{1}{0{,}34} = 2{,}94$$

$$p_3 = \frac{1}{0{,}53} = 1{,}89$$

$$p_4 = \frac{1}{0{,}36} = 2{,}78$$

$$p_5 = \frac{1}{0{,}30} = 3{,}33$$

$$p_6 = \frac{1}{0{,}96} = 1{,}04$$

$$p_7 = \frac{1}{0{,}53} = 1{,}89$$

$$p_8 = \frac{1}{0{,}89} = 1{,}12$$

Atliekās vēl noskaidrot, kādos sakaros ir novērojumi h resp. to izlīdzinātās vērtības un meklētie lielumi x.

Gājieniem 1—8 atbilstošās izlīdzinātās augstumu starpības ir

$$\begin{array}{ll} h_1 + v_1 & h_5 + v_5 \\ h_2 + v_2 & h_6 + v_6 \\ h_3 + v_3 & h_7 + v_7 \\ h_4 + v_4 & h_8 + v_8 \end{array}$$

pie kam šinīs izteiksmēs $v_1, \ldots, v_8$ apzīmē attiecīgos novērojumu izlabojumus.

Izlīdzinātie novērojumi $(h_2 + v_2)$, $(h_4 + v_4)$, $(h_7 + v_7)$, $(h_5 + v_5)$ identiski ar atbilstošiem meklētiem lielumiem x_1, x_2, x_3, x_4. Pārējie izlīdzinātie novērojumi zīmējas uz gājieniem, kuri kopā ar meklētiem lielumiem x atbilstošiem veido slēgtos poligonus I, II, III, IV. Katrā tādā poligonā to veidojošo gājienu izlīdzināto augstumu starpību suma vienāda ar nulli, ja atsevišķo gājienu virzieni, uz kuriem attiecinātas šīs augstumu starpības, visi saskan ar pieņemto poligona perimetra virzienu. Tā tad veidojot minēto, ar nulli vienādo, augstumu starpību sumu, tās augstumu starpības, kuras attiecinātas uz poligona perimetra virzienam pretējiem gājienu virzieniem, jāieliek ar pretējām zīmēm*).

Ievērojot augšā teikto, sakars starp izlīdzinātiem novērojumiem $(h+v)$ un meklētiem lielumiem x izsakams ar šādām formulām:

$$
\begin{aligned}
(h_1+v_1)+x_2-x_1 &= 0 \quad \text{(poligons I)}\\
(h_2+v_2) &= x_1\\
(h_3+v_3)+x_1-x_4 &= 0 \quad \text{(poligons III)}\\
(h_4+v_4) &= x_2\\
(h_5+v_5) &= x_4\\
(h_6+v_6)-x_3-x_2 &= 0 \quad \text{(poligons II)}\\
(h_7+v_7) &= x_3\\
-(h_8+v_8)+x_3+x_4 &= 0 \quad \text{(poligons IV)}
\end{aligned}
$$

jeb

$$
\begin{aligned}
(h_1+v_1) &= x_1-x_2\\
(h_2+v_2) &= x_1\\
(h_3+v_3) &= -x_1+x_4\\
(h_4+v_4) &= x_2\\
(h_5+v_5) &= x_4\\
(h_6+v_6) &= x_2+x_3\\
(h_7+v_7) &= x_3\\
(h_8+v_8) &= x_3+x_4
\end{aligned}
$$

Kā redzams, katrs izlīdzinātais novērojums $(h+v)$ izsakams meklēto lielumu x funkcijas veidā.

Tā tad novērojumi h uzskatami par netiešiem; un tā kā viņu skaits pārsniedz meklēto lielumu x skaitu, tad šie x nosakami ar izlīdzināšanu. Pie tam izlīdzināšana izdarama dažādas noteiktības gadijumam atbilstošā veidā, ievērojot jau minētos novērojumu svarus.

Stājoties pie paša izlīdzināšanas rēķina, vispirms jāveido kļūdu nolīdzinājumi. Tie pēc būtības identiski ar jau atrastām formulām, kuras izsaka sakarus starp izlīdzinātiem novērojumiem $(h+v)$ un meklētiem lielumiem x. Pietiek šinīs formulās grozīt locekļu kārtību, lai dabūtu kļūdu nolīdzinājumus vispārējam paraugam (198) atbilstošā

*) sk. § 83.

veidā ar novērojumu h skaitliskās vērtības (milimetros) izteicošiem brīviem locekļiem:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 \qquad\qquad & - 1069 = v_1 \\
x_1 \qquad\qquad\qquad & - 2648 = v_2 \\
- x_1 \qquad\qquad + x_4 & - 7078 = v_3 \\
x_2 \qquad\qquad & - 1571 = v_4 \\
x_4 & - 9724 = v_5 \\
x_2 + x_3 \qquad & - 9946 = v_6 \\
x_3 \qquad & - 8375 = v_7 \\
x_3 + x_4 & - 18103 = v_8
\end{aligned}
$$

Šie oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumi ir lineari. Tomēr, ievērojot, ka brīvie locekļi ir lieli skaitļi, veidosim atbilstošos pārvērstos kļūdu nolīdzinājumus. Tam nolūkam vajadzīgās nezinamo x tuvinās vērtības viegli atrodamas no otrā, ceturtā, piektā un septītā nolīdzinājuma, pielīdzinot nullei šo nolīdzinājumu kreisās puses. Ar tādā veidā atrastām tuvinām vērtībām

$$
\begin{aligned}
(x_1) &= 2648 \text{ mm} \\
(x_2) &= 1571 \\
(x_3) &= 8375 \\
(x_4) &= 9724
\end{aligned}
$$

un atbilstošiem pieaugumiem ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 veidojam izteiksmes

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2648 + \xi_1 \\
x_2 &= 1571 + \xi_2 \\
x_3 &= 8375 + \xi_3 \\
x_4 &= 9724 + \xi_4
\end{aligned}
$$

Ieliekot tās oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumos, atrodam atbilstošos pārvērstos kļūdu nolīdzinājumus

$$
\begin{aligned}
\xi_1 - \xi_2 \qquad\qquad & + 8 = v_1 \\
\xi_1 \qquad\qquad\qquad & + 0 = v_2 \\
- \xi_1 \qquad\qquad + \xi_4 & - 2 = v_3 \\
\xi_2 \qquad\qquad & + 0 = v_4 \\
\xi_4 & + 0 = v_5 \\
\xi_2 + \xi_3 \qquad & + 0 = v_6 \\
\xi_3 \qquad & + 0 = v_7 \\
\xi_3 + \xi_4 & - 4 = v_8
\end{aligned}
$$

Vispārējā veidā apzīmējot nezinamo ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 koeficientus ar a, b, c, d, to sumas ar s, brīvos locekļus ar $-\lambda$, sumas $(a+b+ +c+d-\lambda)=s-\lambda$ ar σ, un atsevišķiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošo novērojumu h svarus ar p, izrakstam tabulā minēto elementu skaitliskās vērtības. Ar tām aprēķinam un sagrupējam tabulās pa atsevišķiem pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem veidotos produktus, lai pa tabulu stabiņiem sumējot šos produktus, nosacītu sastādamo 4 normalnolīdzinājumu koeficientus un brīvos locekļus, un arī attiecīgos kontrol- un papildu locekļus.

Kļūdu nol—mi	p	a	b	c	d	s	-λ	σ
1.	0,95	+1	—1	0	0	0	+8	+8
2.	2,94	+1	0	0	0	+1	0	+1
3.	1,89	—1	0	0	+1	0	—2	—2
4.	2,78	0	+1	0	0	+1	0	+1
5.	3,33	0	0	0	+1	+1	0	+1
6.	1,04	0	+1	+1	0	+2	0	+2
7.	1,89	0	0	+1	0	+1	0	+1
8.	1,12	0	0	+1	+1	+2	—4	—2

paa	pab	pac	pad	pas	-paλ	paσ
+0,95	—0,95	0,00	0,00	0,00	+ 7,60	+ 7,60
+2,94	0,00	0,00	0,00	+2,94	0,00	+ 2,94
+1,89	0,00	0,00	—1,89	0,00	+ 3,78	+ 3,78
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
+5,78	—0,95	0,00	—1,89	+2,94	+11,38	+14,32

pbb	pbc	pbd	pbs	-pbλ	pbσ
+0,95	0,00	0,00	0,00	—7,60	—7,60
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
+2,78	0,00	0,00	+2,78	0,00	+2,78
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
+1,04	+1,04	0,00	+2,08	0,00	+2,08
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
+4,77	+1,04	0,00	+4,86	—7,60	—2,74

pcc	pcd	pcs	-pcλ	pcσ
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
+1,04	0,00	+2,08	0,00	+2,08
+1,89	0,00	+1,89	0,00	+1,89
+1,12	+1,12	+2,24	—4,48	—2,24
+4,05	+1,12	+6,21	—4,48	+1,73

pdd	pds	-pdλ	pdσ
0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00
+1,89	0,00	—3,78	—3,78
0,00	0,00	0,00	0,00
+3,33	+3,33	0,00	+3,33
0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00
+1,12	+2,24	—4,48	—2,24
+6,34	+5,57	—8,26	—2,69

$p\lambda\lambda$	$-p\lambda s$	$-p\lambda\sigma$
+60,80	0,00	+60,80
0,00	0,00	0,00
+ 7,56	0,00	+ 7,56
0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00
+17,92	−8,96	+8,96
+86,28	−8,96	+77,32

Tā tad normalnolīdzinājumi ar atbilstošiem σ-tipa kontrollocekļiem, sumu nolīdzinājumu un $[p\lambda\lambda]$ tipa papildu locekli ir šādi:

$$
\begin{array}{rcl|r}
+5{,}78\,\xi_1 - 0{,}95\,\xi_2 + 0{,}00\,\xi_3 - 1{,}89\,\xi_4 + 11{,}38 & = & 0 & +14{,}32 \\
-0{,}95\,\xi_1 + 4{,}77\,\xi_2 + 1{,}04\,\xi_3 + 0{,}00\,\xi_4 - 7{,}60 & = & 0 & -2{,}74 \\
0{,}00\,\xi_1 + 1{,}04\,\xi_2 + 4{,}05\,\xi_3 + 1{,}12\,\xi_4 - 4{,}48 & = & 0 & +1{,}73 \\
-1{,}89\,\xi_1 + 0{,}00\,\xi_2 + 1{,}12\,\xi_3 + 6{,}34\,\xi_4 - 8{,}26 & = & 0 & -2{,}69 \\
\hline
+2{,}94\,\xi_1 + 4{,}86\,\xi_2 + 6{,}21\,\xi_3 + 5{,}57\,\xi_4 - 8{,}96 & = & 0 & \\
+86{,}28 & & & +77{,}32
\end{array}
$$

Kas zīmējas uz punktu 7, 22, S, 26 augstumiem H_7, H_{22}, H_s, H_{26}, tad līmetņojuma tīkla schematiskā attēlā redzams, ka

$$
\begin{aligned}
H_7 &= H_{10} + x_1 \\
H_{22} &= H_{10} + x_1 - x_2 \\
H_s &= H_{10} + x_1 + x_3 \\
H_{26} &= H_{10} + x_1 - x_4
\end{aligned}
$$

Lietojot apzīmējumus

$$
\begin{aligned}
F_7 &= x_1 &&= +2648 + \xi_1 \\
F_{22} &= x_1 - x_2 = (2648 + \xi_1) - (1571 + \xi_2) &&= +\ 1077 + \xi_1 - \xi_2 \\
F_s &= x_1 + x_3 = (2648 + \xi_1) + (8375 + \xi_3) &&= +\ 11023 + \xi_1 + \xi_3 \\
F_{26} &= x_1 - x_4 = (2648 + \xi_1) - (9724 + \xi_4) &&= -\ 7076 + \xi_1 - \xi_4
\end{aligned}
$$

meklētos augstumus var izteikt šādā veidā

$$\begin{aligned} H_7 &= H_{10} + F_7 \\ H_{22} &= H_{10} + F_{22} \\ H_s &= H_{10} + F_s \\ H_{26} &= H_{10} + F_{26} \end{aligned}$$

Šinīs izteiksmēs H_{10} ir no nezinamiēm x resp. ξ, tā tad arī no šo nezinamo funkcijām F_7, F_{22}, F_s, F_{26} neatkarīgs lielums. Tāpēc ar H_{10} un funkciju F vidējām kļūdām $m_{H_{10}}$, m_{F_7}, $m_{F_{22}}$, m_{F_S}, $m_{F_{26}}$ augstumu H_7, H_{22}, H_s, H_{26} vidējās kļūdas m_{H_7}, $m_{H_{22}}$, m_{H_S}, $m_{H_{26}}$ veidojamas pēc parastā kļūdu sakrāšanas likuma. Bet kas zīmējas uz minēto funkciju F vidējām kļūdām, tad to noteikšanai jānosaka funkciju F_7, F_{22}, F_s, F_{26} svaru koeficienti Q_{F_7}, $Q_{F_{22}}$, Q_{F_S}, $Q_{F_{26}}$.

Ievērojot, ka $F_7 = x_1 = 2648 + \xi_1$, saprotams, ka Q_{F_7} ir identisks ar nezinamā x_1 resp. ξ_1 svara koeficientu Q_{11}, tā tad nav atsevišķi jānosaka. Pārējo funkciju F svaru koeficienti nosakami § 27-ā aizrādītā kārtā. Tam nolūkam sekojošā tabulā sagrupēti pa atsevišķām funkcijām F_{22}, F_s, F_{26} nezinamo ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 koeficienti f_1, f_2, f_3, f_4:

	F_{22}	F_s	F_{26}
f_1	+1	+1	+1
f_2	−1	0	0
f_3	0	+1	0
f_4	0	0	−1

Lai līdztekus nezinamo ξ noteikšanai atrastu arī visus vajadzīgos svaru koeficientus, līdz ar normalnolīdzinājumu reducēšanu izdaram arī visu attiecīgo svaru nolīdzinājumu sistemu resp. to brīvo locekļu reducēšanu. Nākošās lappusēs parādītais reducēšanas rēķins izdarīts pēc schemas 2. Pie tam lietotie σ-tipa kontrollocekļi ielikti ar pretējām zīmēm; tā tad alģebraiski sumējot šos kontrollocekļus ar attiecīgiem normal- vai svaru nolīdzinājumu elementiem, vienmēr teoretiski jāiznāk 0. Šinī ziņā dažās vietās iznākušās nelielas pretrunas izskaidrojamas ar skaitliskā rēķinā notikušiem apaļojumiem.

(Turp. 160. lapp.)

ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	$-\lambda$	$-\sigma$	k	Q_1	Q_2	Q_3
+5,78	−0,95	0,00	−1,89	+11,38	−14,32	0,00	−1,000		
	+4,77	+1,04	0,00	− 7,60	+ 2,74	0,00	0,000	−1,000	
−0,164	−0,16	0,00	−0,31	+ 1,87	− 2,35		−0,164		
	+4,61	+1,04	−0,31	− 5,73	+ 0,39	0,00	−0,164	−1,000	
		+4,05	+1,12	− 4,48	− 1,73	0,00	0,000	0,000	−1,000
0,000		0,00	0,00	0,00	0,00		0,000		
	+0,226	−0,235	+0,07	+ 1,295	− 0,09		+0,037	+0,226	
		+3,815	+1,19	− 3,185	− 1,82	0,000	+0,037	+0,226	−1,000
			+6,34	− 8,26	+ 2,69	0,00	0,000	0,000	0,000
−0,327			−0,618	+ 3,721	− 4,683		−0,3270		
	−0,067		−0,021	− 0,384	+ 0,026		−0,0110	−0,0670	
		+0,312	−0,371	+ 0,994	+ 0,568		−0,0115	−0,0705	+0,3120
			+5,330	− 3,929	− 1,399	+0,002	−0,3495	−0,1375	+0,3120
				+86,280	−77,320	+0,000			
+1,9689				−22,406	+28,195		−0,1730		
	−1,2430			− 7,112	+ 0,485		−0,0356	−0,2169	
		−0,8349		− 2,659	− 1,520		+0,0097	+0,0592	−0,2621
			−0,7371	− 2,896	− 1,031		−0,0656	−0,0258	+0,0585
				+51,207	−51,191	+0,016			
+0,1895							+0,0656	+0,0258	−0,0585
0,0000	−0,1367						$=Q_{1.4}$	$=Q_{2.4}$	$=Q_{3.4}$
+0,2410	+0,0494	−0,2300					−0,0204	−0,0080	+0,0183
−1,9689	+1,2430	+0,8349	+0,7371				−0,0097	+0,0592	+0,2621
−1,5384	+1,1557	+0,6049	+0,7371				−0,0301	−0,0672	+0,2804
$=\xi_1$	$=\xi_2$	$=\xi_3$	$=\xi_4$				$=Q_{1.3}$	$=Q_{2.3}$	$=Q_{3.3}$
				$2{,}94\xi_1=-4{,}5229$			+0,0068	+0,0152	
				$4{,}86\xi_2=+5{,}6167$			+0,0044	+0,0017	
				$6{,}21\xi_3=+3{,}7564$			+0,0356	+0,2169	
				$5{,}57\xi_4=+4{,}1056$			+0,0468	+0,2338	
				−8,9600			$=Q_{1.2}$	$=Q_{2.2}$	
				−0,0042			+0,0077		
							0,0000		
							+0,0215		
							+0,1730		
							+0,2022		
							$=Q_{1.1}$		

$Q_{4.}$	F_{22}	F_s	F_{26}	$-\Sigma$	K	$Q_{F_{22}}$	Q_{F_s}	$Q_{F_{26}}$
	+1,000	+1,000	+1,000	−2,000	0,000	+0,1730	+0,1730	+0,1730
	−1,000	0,000	0,000	+2,000	0,000			
	+0,164	+0,164	+0,164	−0,328				
	−0,836	+0,164	+0,164	+1,672	0,000	+0,1516	+0,0058	+0,0058
	0,000	+1,000	0,000	0,000	0,000			
	0,000 +0,189	0,000 −0,037	0,000 −0,037	0,000 −0,378				
	+0,189	+0,963	−0,037	−0,037	0,000	+0,0094	+0,2431	+0,0004
−1,000	0,000	0,000	−1,000	+2,000	0,000			
	+0,3270 −0,0560 −0,0590	+0,3270 +0,0110 −0,3005	+0,3270 +0,0110 +0,0115	−0,6540 +0,1120 +0,1179				
−1,0000	+0,2120	+0,0375	−0,6505	+1,5759	−0,0001	+0,0084	+0,0003	+0,0794
−0,1876	+0,1730 −0,1813 +0,0495 +0,0398	+0,1730 +0,0356 +0,2524 +0,0070	+0,1730 +0,0356 −0,0097 −0,1220			+0,3424 $=Q_{F_{22}}$	+0,4222 $=Q_{F_s}$	+0,2586 $=Q_{F_{26}}$
+0,1876 $=Q_{4.4}$								

$[Q_{1.}]=+0{,}2845 \qquad 2{,}94[Q_{1.}]=+0{,}8364$

$[Q_{2.}]=+0{,}2392 \qquad 4{,}86[Q_{2.}]=+1{,}1625$

$[Q_{3.}]=+0{,}1246 \qquad 6{,}21[Q_{3.}]=+0{,}7738$

$[Q_{4.}]=+0{,}2205 \qquad 5{,}57[Q_{4.}]=+1{,}2282$

$+4{,}0009$

$2{,}94Q_{1.1}=+0{,}5945$	$2{,}94Q_{1.2}=+0{,}1376$	$2{,}94Q_{1.3}=-0{,}0885$	$2{,}94Q_{1.4}=+0{,}1928$
$4{,}86Q_{1.2}=+0{,}2274$	$4{,}86Q_{2.2}=+1{,}1363$	$4{,}86Q_{2.3}=-0{,}3266$	$4{,}86Q_{2.4}=+0{,}1254$
$6{,}21Q_{1.3}=-0{,}1869$	$6{,}21Q_{2.3}=-0{,}4173$	$6{,}21Q_{3.3}=+1{,}7413$	$6{,}21Q_{3.4}=-0{,}3633$
$5{,}57Q_{1.4}=+0{,}3654$	$5{,}57Q_{2.4}=+0{,}1437$	$5{,}57Q_{3.4}=-0{,}3258$	$5{,}57Q_{4.4}=+1{,}0449$
+1,0004	+1,0003	+1,0004	+0,9998

Turpat aprēķināti nezinamie ξ un visi svaru koeficienti Q, un arī taisītas šī aprēķina kontroles ar atbilstošiem sumu nolīdzinājumiem. Tas izdarīts šādā kārtībā.

ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 stabiņu turpinājumos atzīmētas

$$
\begin{array}{llll}
-\, r_b\xi_2 & & & \\
-\, r_c\xi_3 & -\,[r_c.1]\xi_3 & & \\
-\, r_d\xi_4 & -\,[r_d.1]\xi_4 & -\,[r_d.2]\xi_4 & \\
-\, r_\lambda & -\,[r_\lambda.1] & -\,[r_\lambda.2] & -\,[r_\lambda.3]
\end{array}
$$

skaitliskās vērtības; to pa attiecīgiem stabiņiem veidotās sumas izteic meklētos ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Šis aprēķins izdarīts sākot ar pēdējo stabiņu (ξ_4) un beidzot ar pirmo (ξ_1).

$Q_{1.}$, $Q_{2.}$, $Q_{3.}$, $Q_{4.}$ stabiņu turpinājumos atzīmētas pēc redukcijas faktoru r parauga veidoto

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{A}{[paa]} \\
[R.1] &= \frac{[B.1]}{[pbb.1]} \\
[R.2] &= \frac{[C.2]}{[pcc.2]} \\
[R.3] &= \frac{[D.3]}{[pdd.3]}
\end{aligned}
$$

tipa faktoru skaitliskās vērtības. Zemāk pa atsevišķām svaru nolīdzinājumu sistemām tām atbilstošos stabiņos aprēķināti svaru koeficienti $Q_{1.1}$, $Q_{2.2}$, $Q_{3.3}$, $Q_{4.4}$. Tam notiekot pēc ξ aprēķina parauga,

	sist. $Q_{1.}$	sist. $Q_{2.}$	sist. $Q_{3.}$	sist. $Q_{4.}$
ξ_1 vietā stājušies	$Q_{1.1}$			
ξ_2 „ „	$Q_{1.2}$	$Q_{2.2}$		
ξ_3 „ „	$Q_{1.3}$	$Q_{2.3}$	$Q_{3.3}$	
ξ_4 „ „	$Q_{1.4}$	$Q_{2.4}$	$Q_{3.4}$	$Q_{4.4}$

un r_λ, $[r_\lambda.1]$, $[r_\lambda.2]$, $[r_\lambda.3]$ vietā—atbilstošie R, $[R.1]$, $[R.2]$, $[R.3]$.

Blakus ξ un atbilstošo Q aprēķiniem taisītas attiecīgās kontroles, ieliekot atrastās skaitliskās vērtības atbilstošos sumu nolīdzinājumos.

Vēl aizrādam, ka pēc trešās reducēšanas atrastā normalnolīdzinājumā ar vienu vienīgo, pēdējo nezinamo ξ_4 attiecīgais koeficients $+5{,}330$ nosaka pēdējā nezinamā svaru $p_4 = \frac{1}{Q_{4.4}}$. Kā zinams, līdzīgā veidā atrodami arī pārējo nezinamo svari resp. svaru koeficienti, ja lietderīgi grozītā nezinamo kārtībā atkārto normalnolīdzinājumu reducēšanu (sk. § 26). Šinī piemērā tas nav padarīts.

Šinī piemērā ξ un atbilstošo Q aprēķins izdarīts lietojot reducēšanas nolūkā veidotos r-tipa redukcijas faktorus, un sakarā ar to šie faktori arī atzīmēti reducēšanas schemā 2 aizrādītās vietās.

Bet minētā galējo nolīdzinājumu atslēgšanas rēķinā var arī iztikt bez redukcijas faktoriem r un pēc to parauga veidotiem R. Piem., nosakot ξ_1, varam izrakstīt stabiņā

$$\begin{aligned} &-[pab]\,\xi_2 \\ &-[pac]\,\xi_3 \\ &-[pad]\,\xi_4 \\ &-(-[pa\lambda]) \end{aligned}$$

un veidot šo locekļu sumu, kura — uz pēdējās formulas (253) pamata — vienāda ar $[paa]\,\xi_1$. Tā tad izdalot šo sumu ar [paa], atrodam meklēto ξ_1. Tādā veidā aprēķinot ξ un atbilstošos Q, parasti pavisam neatzīmē reducēšanas rēķinā veidotos redukcijas faktorus r, un, saprotams, arī neveido augšā minētos faktorus R.

Funkciju F_{22}, F_s, F_{26} svaru koeficienti nosacīti uz formulas (333) pamata. Tam nolūkam F_{22}, F_s, F_{26} stabiņu turpinājumos atzīmēti

$$\frac{F_1}{[paa]}$$
$$\frac{[F_2.1]}{[pbb.1]}$$
$$\frac{[F_3.2]}{[pcc.2]}$$
$$\frac{[F_4.3]}{[pdd.3]}$$

tipa izteiksmēm atbilstošie skaitļi. To reizinājumi ar atbilstošiem F_1, $[F_2.1]$, $[F_3.2]$, $[F_4.3]$ tipa faktoriem atzīmēti stabiņos ar virsrakstiem $Q_{F_{22}}$, Q_{F_S}, $Q_{F_{26}}$. Šo stabiņu sumas tad nosaka meklētos svaru koeficientus $Q_{F_{22}}$, Q_{F_S}, $Q_{F_{26}}$.

Šie paši svaru koeficienti nosakami arī uz formulas (317) pamata, lietojot sakarā ar nezinamo ξ svaru koeficientu noteikšanu atrastos $Q_{1.}$, $Q_{2.}$, $Q_{3.}$, $Q_{4.}$ tipu svaru koeficientus. Pēc šī paņēmiena atrodam

$$
\begin{aligned}
Q_{F_{22}} = & +1 \times 0{,}2022 - 2 \times 0{,}0468 + 0 + 0 + \\
& + 1 \times 0{,}2338 + 0 + 0 + \\
& + 0 + 0 + \\
& + 0 \qquad = +0{,}3424
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{F_{5}} = & +1 \times 0{,}2022 + 0 - 2 \times 0{,}0301 + 0 + \\
& + 0 \quad + 0 \quad + 0 + \\
& + 1 \times 0{,}2804 + 0 + \\
& + 0 \qquad = +0{,}4224
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{F_{26}} = & +1 \times 0{,}2022 + 0 + 0 - 2 \times 0{,}0656 + \\
& + 0 \quad + 0 \quad + 0 + \\
& + 0 \quad + 0 + \\
& + 1 \times 0{,}1876 \qquad = +0{,}2586
\end{aligned}
$$

kas apmierinoši saskan ar agrāk pēc cita paņēmiena atrastiem rezultatiem.

Ar pieņemtām tuvinām vērtībām (x) un atbilstošiem izlīdzinātiem pieaugumiem ξ aprēķinam *)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2648 - 1{,}5384 = 2646{,}4616 \text{ mm} \\
x_2 &= 1571 + 1{,}1557 = 1572{,}1557 \\
x_3 &= 8375 + 0{,}6049 = 8375{,}6049 \\
x_4 &= 9724 + 0{,}7371 = 9724{,}7371
\end{aligned}
$$

Ieliekot šīs skaitliskās vērtības oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumos, nosakam atsevišķo novērojumu h izlabojumus v un atbilstošo sumu [pvv]:

	v	v^2	p	pvv
1) 2646,4616 — 1572,1557 — — 1069,0000 =	+ 5,3059	28,1526	0,95	26,7450
2) 2646,4616 — 2648,0000 =	— 1,5384	2,3667	2,94	6,9581
3) —2646,4616 + 9724,7371 — — 7078,0000 =	+ 0,2755	0,0759	1,89	0,1435

*) Atrasto skaitļu sikākām decimaldaļām, saprotams, nav nekādas realas nozīmes. Ja tās tomēr ievērotas līdz izlīdzināšanas rēķina vispārējai kontrolei, tad tikai tāpēc, lai samazinātu apaļojumu ietekmi uz šīs kontroles rezultatu.

4) 1572,1557 —				
— 1571,0000 = + 1,1557	1,3356	2,78	3,7130	
5) 9724,7371 —				
— 9724,0000 = + 0,7371	0,5433	3,33	1,8092	
6) 1572,1557 + 8375,6049 —				
— 9946,0000 = + 1,7606	3,0997	1,04	3,2237	
7) 8375,6049 —				
— 8375,0000 = + 0,6049	0,3659	1,89	0,6916	
8) 8375,6049 + 9724,7371 —				
—18103,0000 = — 2,6580	7,0650	1,12	7,9128	
			51,1969	=[pvv]

Izdarītā izlīdzināšanas rēķina vispārējās kontroles nolūkā sumas [pvv] atrasto skaitlisko vērtību salīdzinam ar pēdējā reducētā locekļa [pλλ.4] skaitlisko vērtību. Attiecīgā pretruna 0,0101 izskaidrojama ar notikušiem apaļojumiem.

Šeit apskatītā piemērā, un vispārīgi gadijumos, kad novērojumi zīmējas uz līmetņojuma tīkla gājienu augstumu starpībām, ir vēl šāda izlīdzināšanas rezultatu kontrole, kas pamatota uz jau minētā, kļūdu nolīdzinājumu veidošanai lietotā noteikuma attiecībā uz atsevišķo līmetņošanas gājienu izlīdzināto augstumu starpību $(h + v)$ sumu tīkla slēgtā poligonā.

Lai izdarītu arī šo kontroli, ar atrastiem izlabojumiem v aprēķinam visas izlīdzinātās augstumu starpības. Vienmēr apaļojot milimetra desmitdaļās, izlīdzinātās augstumu starpības ir:

$$
\begin{array}{llll}
h_1 + v_1 = 1069 + 5{,}3 = 1074{,}3 \text{ mm jeb} & 1{,}074_3 \text{ m} & \\
h_2 + v_2 = 2648 - 1{,}5 = 2646{,}5 \quad " & 2{,}646_5 & = x_1 \\
h_3 + v_3 = 7078 + 0{,}3 = 7078{,}3 \quad " & 7{,}078_3 & \\
h_4 + v_4 = 1571 + 1{,}2 = 1572{,}2 \quad " & 1{,}572_2 & = x_2 \\
h_5 + v_5 = 9724 + 0{,}7 = 9724{,}7 \quad " & 9{,}724_7 & = x_4 \\
h_6 + v_6 = 9946 + 1{,}8 = 9947{,}8 \quad " & 9{,}947_8 & \\
h_7 + v_7 = 8375 + 0{,}6 = 8375{,}6 \quad " & 8{,}375_6 & = x_3 \\
h_8 + v_8 = 18103 - 2{,}7 = 18100{,}3 \quad " & 18{,}100_3 &
\end{array}
$$

Pa atsevišķiem poligoniem veidojot šo izlīdzināto augstumu starpību sumas, atrodam:

poligonā I:

$$
\begin{aligned}
(h_1+v_1) &= +1074{,}3 \text{ mm} \\
(h_4+v_4) &= +1572{,}2 \\
-(h_2+v_2) &= \underline{-2646{,}5} \\
[(h+v)]_{\mathrm{I}} &= \quad 0{,}0
\end{aligned}
$$

poligonā II:

$$
\begin{aligned}
-(h_4+v_4) &= -1572{,}2 \text{ mm} \\
(h_6+v_6) &= +9947{,}8 \\
-(h_7+v_7) &= \underline{-8375{,}6} \\
[(h+v)]_{\mathrm{II}} &= \quad 0{,}0
\end{aligned}
$$

poligonā III:

$$
\begin{aligned}
(h_2+v_2) &= +2646{,}5 \text{ mm} \\
-(h_5+v_5) &= -9724{,}7 \\
(h_3+v_3) &= \underline{+7078{,}3} \\
[(h+v)]_{\mathrm{III}} &= \quad +0{,}1
\end{aligned}
$$

poligonā IV:

$$
\begin{aligned}
(h_7+v_7) &= +8375{,}6 \text{ mm} \\
-(h_8+v_8) &= -18100{,}3 \\
(h_5+v_5) &= \underline{+9724{,}7} \\
[(h+v)]_{\mathrm{IV}} &= \quad 0{,}0
\end{aligned}
$$

Ievērojot taisītos apaļojumus, šis kontroles rezultati atzīstami par apmierinošiem.

Ar punkta 10 doto augstumu H_{10} un atrastām izlīdzinātām augstumu starpībām x aprēķinātie punktu 7, 22, S, 26 augstumi ir

$$
\begin{aligned}
H_7 &= 10{,}775_0 + 2{,}646_5 &&= 13{,}421_5 \text{ m} \\
H_{22} &= 10{,}775_0 + 2{,}646_5 - 1{,}572_2 &&= 11{,}849_3 \\
H_s &= 10{,}775_0 + 2{,}646_5 + 8{,}375_6 &&= 21{,}797_1 \\
H_{26} &= 10{,}775_0 + 2{,}646_5 - 9{,}724_7 &&= 3{,}696_8
\end{aligned}
$$

Kas zīmējas uz vidējām kļūdām, tad lietotā svaru sistemā ar vidējo nejaušo kilometra kļūdu identiskā svara vienības vidējā kļūda ir

$$m = \pm\sqrt{\frac{51{,}1969}{8-4}} = \pm 3{,}6 \text{ mm}$$

Izejot no tās, ar attiecīgiem atrastiem svaru koeficientiem nosakam:

nezinamo ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, resp. x_1, x_2, x_3, x_4 vidējās kļūdas

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \pm 3{,}6\sqrt{0{,}2022} = \pm 1{,}6 \text{ mm} \\
m_2 &= \pm 3{,}6\sqrt{0{,}2338} = \pm 1{,}7 \\
m_3 &= \pm 3{,}6\sqrt{0{,}2804} = \pm 1{,}9 \\
m_4 &= \pm 3{,}6\sqrt{0{,}1876} = \pm 1{,}5
\end{aligned}
$$

šo nezinamo funkciju F_7, F_{22}, F_s, F_{26} vidējās kļūdas

$$m_{F_7} = m_1 \qquad = \pm 1{,}6 \text{ mm}$$
$$m_{F_{22}} = \pm 3{,}6 \sqrt{0{,}3424} = \pm 2{,}1$$
$$m_{F_S} = \pm 3{,}6 \sqrt{0{,}4222} = \pm 2{,}3$$
$$m_{F_{26}} = \pm 3{,}6 \sqrt{0{,}2586} = \pm 1{,}8$$

un augstumu H_7, H_{22}, H_s, H_{26} vidējās kļūdas

$$m_{H_7} = \pm \sqrt{5{,}0^2 + 1{,}6^2} = \pm 5{,}3 \text{ mm}$$
$$m_{H_{22}} = \pm \sqrt{5{,}0^2 + 2{,}1^2} = \pm 5{,}4$$
$$m_{H_S} = \pm \sqrt{5{,}0^2 + 2{,}3^2} = \pm 5{,}5$$
$$m_{H_{26}} = \pm \sqrt{5{,}0^2 + 1{,}8^2} = \pm 5{,}3$$

Tā tad izlīdzināšanas galīgie rezultati ar atbilstošām vidējām kļūdām ir:

$x_1 = 2{,}646_5$ m	$\pm 1{,}6$ mm	$H_7 = 13{,}421_5$ m	$\pm 5{,}3$ mm
$x_2 = 1{,}572_2$	$\pm 1{,}7$	$H_{22} = 11{,}849_3$	$\pm 5{,}4$
$x_3 = 8{,}375_6$	$\pm 1{,}9$	$H_s = 21{,}797_1$	$\pm 5{,}5$
$x_4 = 9{,}724_7$	$\pm 1{,}5$	$H_{26} = 3{,}696_8$	$\pm 5{,}3$

§ 30. Divu nezinamu atsevišķais gadijums.

Apskatīsim vēl atsevišķo gadijumu, kad netieši novērojumi taisīti divu meklētu lielumu noteikšanas nolūkā, kas praksē notiek diezgan bieži. Lai gan arī tādā atsevišķā gadijumā izlīdzināšana vispārīgi notiek parastā veidā, tomēr dažos sīkumos par lietderīgiem izrādas zinami apstākļiem atbilstoši grozijumi. Tas zīmējas galvenā kārtā uz normalnolīdzinājumu reducēšanu un atslēgšanu un sakarā ar to notiekošo svaru noteikšanu.

Minētā atsevišķā gadijumā parastā kārtā veidotiem un pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošā normalnolīdzinājumu sistema sastāv tikai no diviem nolīdzinājumiem. Apzīmējot pirmatnējiem nezinamiem x un y atbilstošos pārvērsto kļūdu nolīdzinājumu nezinamos ar ξ un η, bet koeficientus un brīvos locekļus apzīmējot tāpat, kā uz vispārējo gadijumu attiecīgos nolīdzinājumos, apskatītā atsevišķā gadijumā svarā krītošā normalnolīdzinājumu sistema ar atbilstošo papildu locekli ir

$$\left.\begin{array}{l}[aa]\xi + [ab]\eta - [a\lambda] = 0\\ [ab]\xi + [bb]\eta - [b\lambda] = 0\\ \qquad\qquad\qquad [\lambda\lambda]\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (334)$$

resp.

$$\left.\begin{array}{l}[paa]\xi + [pab]\eta - [pa\lambda] = 0\\ [pab]\xi + [pbb]\eta - [pb\lambda] = 0\\ \qquad\qquad\qquad [p\lambda\lambda]\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (335),$$

skatoties pēc tā, vai novērojumi taisīti ar vienādu, vai ar dažādu noteiktību.

Šai sistemai sastāvot tikai no diviem nolīdzinājumiem, tā bez grūtībām reducējama divos variantos, sakarā ar to atslēdzot nolīdzinājumus vienu reizi pēc viena, otro — pēc otrā nezinamā.

Vienā variantā lietojot sistemu veidā (334) resp. (335), pēc pirmās reducēšanas izkrīt pirmais nezinamais ξ, un paliek viens nolīdzinājums ar vienu nezinamo η, kurš no šī nolīdzinājuma viegli nosakams. Bez tam šī nolīdzinājuma koeficients, kā zinams, tieši nosaka nezinamā η svaru. Turpinot reducēšanu nākošā, otrā pakāpē, atrodam divreiz reducēto sistemas papildu locekli, kuru apzīmēsim ar $[\lambda\lambda.2]_\eta$ resp. $[p\lambda\lambda.2]_\eta$, ar indeksu η aizrādot, ka šis loceklis aprēķināts sakarā ar sistemas atslēgšanu pēc nezinamā η.

Reducējot otrā variantā, sistemas abos nolīdzinājumos locekļu kārtību groza tā, lai nezinamo η saturošais loceklis būtu pirmā vietā. Līdz ar to arī noliek otro nolīdzinājumu pirmā vietā un pirmo — otrā. Ar šiem grozijumiem sistemu tad lieto veidā:

$$\left.\begin{array}{l}[bb]\eta + [ab]\xi - [b\lambda] = 0\\ [ab]\eta + [aa]\xi - [a\lambda] = 0\\ \qquad\qquad\qquad [\lambda\lambda]\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (336)$$

resp.

$$\left.\begin{array}{l}[pbb]\eta + [pab]\xi - [pb\lambda] = 0\\ [pab]\eta + [paa]\xi - [pa\lambda] = 0\\ \qquad\qquad\qquad [p\lambda\lambda]\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (337).$$

Parastā kārtā reducējot šo sistemu, pēc pirmās reducēšanas izkrīt tagadējais pirmais nezinamais η, un paliek viens nolīdzinājums ar vienu nezinamo ξ, kurš no šī nolīdzinājuma viegli nosakams. Atbilstošais svars noteikts ar nolīdzinājuma koeficientu. Līdzīgā kārtā, kā pirmā variantā, veidojams arī divreiz reducētais sistemas papildu loceklis, kuru apzīmēsim ar $[\lambda\lambda.2]_\xi$ resp. $[p\lambda\lambda.2]_\xi$, ar indeksu ξ aizrādot uz sakaru ar sistemas atslēgšanu pēc nezinamā ξ.

Tādā veidā nosakot nezinamos ξ un η, līdz ar to, bez kāda atsevišķa rēķina, atrodami arī atbilstošie svari $p_\xi = p_x$ un $p_\eta = p_y$.

Kas zīmējas uz skaitliskā rēķina pārbaudi, tad, saprotams, var izdarīt parastā veidā pazīstamās sumu kontroles. Bet ievērojot reducēšanas vienkāršību, var iztikt ar šādu vispārējo kontroli. Tā kā abos variantos reducēta viena un tā pati normalnolīdzinājumu sistema, uz formulas (262) resp. (263) pamata zinams, ka

$$[\lambda\lambda.2]_\xi = [vv] \text{ resp. } [p\lambda\lambda.2]_\xi = [pvv] \quad \ldots \quad (338),$$

un tāpat

$$[\lambda\lambda.2]_\eta = [vv] \text{ resp. } [p\lambda\lambda.2]_\eta = [pvv] \quad \ldots \quad (339).$$

Salīdzinot atbilstošās formulas (338) un (339), atrodam, ka jābūt

$$\left.\begin{array}{l} [\lambda\lambda.2]_\xi = [\lambda\lambda.2]_\eta \\ \text{resp.} \\ [p\lambda\lambda.2]_\xi = [p\lambda\lambda.2]_\eta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (340),$$

kas var noderēt par kontroli abos variantos izdarītam reducēšanas rēķinam.

Zīmējoties tikai uz normalnolīdzinājumu sistemas reducēšanu, šī kontrole neka neizsaka par to, vai normalnolīdzinājumi atbilst pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem, un vai tie savukārt pareizi atvasināti no oriģinalveidā sastādītiem. Saprotams, ka šī kontrole arī neattiecas uz nezinamo ξ un η resp. x un y noteikšanu no reducētiem normalnolīdzinājumiem.

Lai izsmeļoši kontrolētu visu izlīdzināšanas rēķinu, ar atrastiem ξ un η nosaka x un y, ieliek tos oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumos, aprēķina novērojumu izlabojumus v un veido sumu [vv] resp. [pvv]. Tad uz formulas (338) vai (339) pamata izdarama visu izlīdzināšanas rēķinu aptverošā kontrole.

Ja ar atrastām x un y vērtībām jāaprēķina kāda šo lielumu funkcija un jānosaka atbilstošais svara koeficients, tad tas padarams parastā kārtā uz formulas (331) resp. (333) pamata, nosakot $[f_2.1]$ sakarā ar normalnolīdzinājumu sistemas reducēšanu.

Attiecībā uz normalnolīdzinājumu sistemas reducēšanu piezīmēsim sekojošo. Veidā (334) resp. (335) rakstītās sistemās koeficientu vispārējie apzīmējumi pilnīgi saskan ar sistemās (227) resp. (251) lietotiem. Tā tad reducējot atslēgšanai pēc nezinamā η atbilstošā variantā, reducēšanas gaitu noteicošās izteiksmes (231) un (237) resp. tām līdzīgās uz dažādas noteiktības gadijumu attiecīgās izteiksmes apstākļiem atbilstošā izvilkumā lietojamas tieši oriģinalveidā. Turpretim pēc būtības ar sistemām (334) resp. (335) identiskās, bet citādā nolīdzinājumu un to locekļu kārtībā rakstītās sistemās (336) resp. (337) pirmam un otram nezinamam atbilstošie koeficienti apzīmēti citādi, neka sistemās (227) resp. (251). Salīdzinot atbilstošos koeficientus un brīvos locekļus, redzams, ka apzīmējums „a" apmainīts pret „b" un otrādi. Ievērojot to, saprotams, ka arī reducējot atslēgšanai pēc nezinamā ξ atbilstošā variantā var vadīties ar tām pašām minētām izteiksmēm; tikai apzīmējums „a" jāatvieto ar „b" un otrādi.

Lai sīkāki paskaidrotu šeit apskatītā atsevišķā gadijumā divos variantos notiekošās normalnolīdzinājumu reducēšanas un atslēgšanas kārtību, izrakstīsim, līdz ar pašiem, vajadzīgā kārtībā sastādītiem, normalnolīdzinājumiem, visas svarā krītošās formulas. Vienkāršības dēļ to darīsim ievērojot tikai vienādas noteiktības gadijumu, jo viegli saprotams, kādi grozijumi notiek dažādas noteiktības gadijumā.

$$
\left.\begin{array}{l|l}
\text{Atslēdzot pēc } \xi: & \text{Atslēdzot pēc } \eta: \\
[bb]\eta + [ab]\xi - [b\lambda] = 0 & [aa]\xi + [ab]\eta - [a\lambda] = 0 \\
[ab]\eta + [aa]\xi - [a\lambda] = 0 & [ab]\xi + [bb]\eta - [b\lambda] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad [\lambda\lambda] & \qquad\qquad\qquad\qquad [\lambda\lambda] \\
[aa.1] = [aa] - \frac{[ab]}{[bb]}[ab] & [bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] \\
-[a\lambda.1] = -\left\{[a\lambda] - \frac{[ab]}{[bb]}[b\lambda]\right\} & -[b\lambda.1] = -\left\{[b\lambda] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\lambda]\right\} \\
\xi = -\frac{-[a\lambda.1]}{[aa.1]} & \eta = -\frac{-[b\lambda.1]}{[bb.1]} \\
p_\xi = p_x = [aa.1] & p_\eta = p_y = [bb.1] \\
[\lambda\lambda.1]_\xi = [\lambda\lambda] - \frac{[b\lambda]}{[bb]}[b\lambda] & [\lambda\lambda.1]_\eta = [\lambda\lambda] - \frac{[a\lambda]}{[aa]}[a\lambda] \\
[\lambda\lambda.2]_\xi = [\lambda\lambda.1]_\xi - \frac{[a\lambda.1]}{[aa.1]}[a\lambda.1] & [\lambda\lambda.2]_\eta = [\lambda\lambda.1]_\eta - \frac{[b\lambda.1]}{[bb.1]}[b\lambda.1] \\
\multicolumn{2}{c}{[\lambda\lambda.2]_\xi = [\lambda\lambda.2]_\eta =} \\
\multicolumn{2}{c}{= [vv]}
\end{array}\right\} \quad (341).
$$

Attiecībā uz nezinamo ξ un η noteikšanu piezīmēsim vēl sekojošo. Ievērojot attiecīgās formulas (341), atrodam:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -\frac{-[a\lambda.1]}{[aa.1]} = -\frac{-\left\{[a\lambda]-\dfrac{[ab]}{[bb]}[b\lambda]\right\}}{[aa]-\dfrac{[ab]}{[bb]}[ab]} = \frac{[bb][a\lambda]-[ab][b\lambda]}{[aa][bb]-[ab]^2}\\ \eta &= -\frac{-[b\lambda.1]}{[bb.1]} = -\frac{-\left\{[b\lambda]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[a\lambda]\right\}}{[bb]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[ab]} = \frac{[aa][b\lambda]-[ab][a\lambda]}{[aa][bb]-[ab]^2}\end{aligned}\right\} \quad (342).$$

Lietojot apzīmējumu

$$D = [aa][bb] - [ab]^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (343),$$

formulas (342) rakstamas veidā

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{[bb][a\lambda]-[ab][b\lambda]}{D}\\ \eta &= \frac{[aa][b\lambda]-[ab][a\lambda]}{D}\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (344).$$

Nezinamo tiešā noteikšana no nereducētiem normalnolīdziņājumiem ar šo determinantu formulu palīdzību izdevīga sevišķi tad, kad nav jānosaka nezinamo vai to funkciju vidējās kļūdas un tam nolūkam vajadzīgie svari resp. svaru koeficienti.

Nākošās lappusēs rādītas divas schemas normalnolīdzinājumu reducēšanai un atslēgšanai un līdz ar to notiekošai

$$F = f_1\xi + f_2\eta + f \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (345)$$

tipa funkcijas svara koeficienta Q_F noteikšanai. Šīs schemas savas vispārējās iekārtas ziņā atbilst pielikumos I un II iespiestām; tikai izlaistas uz sumu kontrolēm un nezinamo svaru koeficientiem attiecīgās nodaļas; arī nav atzīmēti redukcijas faktori. Attiecībā uz schemu 2 piezīmēsim, ka visi redukcijas locekļi ielikti ar pretējām zīmēm; tā tad atsevišķos stabiņos ar punktētām linijām atdalītie locekļi algebraiski jāsumē, lai atrastu zem attiecīgās locekļu grupas atzīmēto reducēto locekli.

Kā jau minēts, visa izlīdzināšanas rēķina galīgās kontroles nolūkā jāaprēķina suma [vv] resp. — dažādas noteiktības gadijumā — [pvv]. Ar šo sumu parastā kārtā nosakama svara vienības vidējā kļūda m. Tā kā apskatītā atsevišķā gadijumā nezinamo skaits ir $i = 2$, attiecīgā formula rakstama veidā

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} \quad \text{resp.} \quad m = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-2}} \quad . \quad . \quad (346).$$

Kas zīmējas uz atrasto nezinamo un to funkcijas vidējām kļūdām, tad jāievēro, ka rēķinot šeit aizrādītā veidā, nezinamiem x un y tiek nosacīti svari $p_x = p_\xi$ uu $p_y = p_\eta$, bet funkcijai F — tās svara koeficients Q_F. Sakarā ar to, atbilstošās vidējās kļūdas ir:

$$\left.\begin{array}{ll} m_x = \pm \dfrac{m}{\sqrt{p_x}} & m_y = \pm \dfrac{m}{\sqrt{p_y}} \\ \multicolumn{2}{c}{m_F = \pm m \sqrt{Q_F}} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (347).$$

Schema 1.

Atslēdzot pēc ξ			Atslēdzot pēc η						
η	ξ	$-\lambda$	ξ	η	$-\lambda$	F	....	Q_F	....
[bb]	[ab]	$-[b\lambda]$	[aa]	[ab]	$-[a\lambda]$	f_1	....	$\frac{f_1^2}{[aa]}$	....
	[aa]	$-[a\lambda]$		[bb]	$-[b\lambda]$	f_2	....		
	$\frac{[ab]}{[bb]}[ab]$	$-\frac{[ab]}{[bb]}[b\lambda]$		$\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[a\lambda]$	$\frac{[ab]}{[aa]}f_1$	....		
		$[\lambda\lambda]$			$[\lambda\lambda]$				
		$\frac{[b\lambda]}{[bb]}[b\lambda]$			$\frac{[a\lambda]}{[aa]}[a\lambda]$				
	[aa.1]	$-[a\lambda.1]$		[bb.1]	$-[b\lambda.1]$	$[f_2.1]$	....	$\frac{[f_2.1]^2}{[bb.1]}$	....
$p_\xi=[aa.1]$		$[\lambda\lambda.1]_\xi$	$p_\eta=[bb.1]$		$[\lambda\lambda.1]_\eta$			Q_F	....
$\xi = -\frac{-[a\lambda.1]}{[aa.1]}$		$\frac{[a\lambda.1]}{[aa.1]}[a\lambda.1]$	$\eta = -\frac{-[b\lambda.1]}{[bb.1]}$		$\frac{[b\lambda.1]}{[bb.1]}[b\lambda.1]$				
		$[\lambda\lambda.2]_\xi$			$[\lambda\lambda.2]_\eta$				

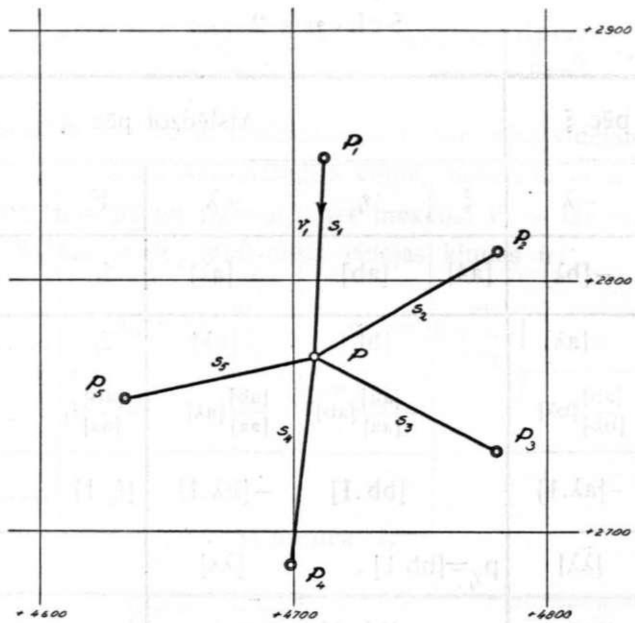
Schema 2.

Atslēdzot pēc ξ			Atslēdzot pēc η						
η	ξ	$-\lambda$	ξ	η	$-\lambda$	F	.....	Q_F	.....
[bb]	[ab]	−[bλ]	[aa]	[ab]	−[aλ]	f_1	.....	$\frac{f_1^2}{[aa]}$	.....
	[aa]	−[aλ]		[bb]	−[bλ]	f_2	.....		
	$-\frac{[ab]}{[bb]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[bb]}[b\lambda]$		$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}[a\lambda]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}f_1$	.....		
	[aa.1]	−[aλ.1]		[bb.1]	−[bλ.1]	$[f_2.1]$	.....	$\frac{[f_2.1]^2}{[bb.1]}$	.....
$p_\xi=[aa.1]$		[λλ]	$p_\eta=[bb.1]$		[λλ]			Q_F	.....
$\xi=-\frac{-[a\lambda.1]}{[aa.1]}$		$-\frac{[b\lambda]}{[bb]}[b\lambda]$	$\eta=-\frac{-[b\lambda.1]}{[bb.1]}$		$-\frac{[a\lambda]}{[aa]}[a\lambda]$				
		$-\frac{[a\lambda.1]}{[aa.1]}[a\lambda.1]$			$-\frac{[b\lambda.1]}{[bb.1]}[b\lambda.1]$				
		$[\lambda\lambda.2]_\xi$			$[\lambda\lambda.2]_\eta$				

§ 31. Skaitlisks piemērs.

No punkta P līdz punktiem P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (3. att.) ar koordinātām

$$x_1=+2849{,}12 \text{ m} \qquad y_1=+4712{,}30 \text{ m}$$
$$x_2=+2812{,}24 \qquad y_2=+4780{,}15$$
$$x_3=+2731{,}51 \qquad y_3=+4780{,}14$$
$$x_4=+2685{,}93 \qquad y_4=+4699{,}05$$
$$x_5=+2753{,}14 \qquad y_5=+4633{,}18$$



3. attēls.

ar vienādu noteiktību izmērīti horizontalie atstatumi

$$s_1 = 78{,}91 \text{ m}$$
$$s_2 = 83{,}30$$
$$s_3 = 81{,}76$$
$$s_4 = 84{,}83$$
$$s_5 = 76{,}90$$

Pieņemot, ka punktu P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 koordinātas atrastas ar praktiski svarā nekrītošām kļūdām, jānosaka punkta P koordinatas x, y, virzienam no P_1 uz P atbilstošais azimuts ν_1 un šo lielumu vidējās kļūdas m_x, m_y un m_{ν_1}.

Tā kā azimuts ν_1 ir doto koordinatu x_1, y_1 un meklēto koordinatu x, y funkcija, uzdevuma tiešie nezinamie ir divi — x un y. Šo nezinamo noteikšanai bez izlīdzināšanas pietiek ar diviem s tipa novērojumiem. Bet ir taisīti pieci tādi novērojumi; tā tad uzdevums atrisinams ar izlīdzināšanu.

Apzīmējot atsevišķiem novērojumiem s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 atbilstošos izlabojumus ar v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, izlīdzinātie novērojumi $(s_1 + v_1)$, $(s_2 + v_2)$, $(s_3 + v_3)$, $(s_4 + v_4)$, $(s_5 + v_5)$ izsakami kā šādas nezinamo x un y funkcijas:

$$s_1 + v_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$
$$s_2 + v_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$
$$s_3 + v_3 = \sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2}$$
$$s_4 + v_4 = \sqrt{(x_4 - x)^2 + (y_4 - y)^2}$$
$$s_5 + v_5 = \sqrt{(x_5 - x)^2 + (y_5 - y)^2}$$

Tā tad novērojumi uzskatami par netiešiem, un oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumi ir

$$\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} - s_1 = v_1$$
$$\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} - s_2 = v_2$$
$$\sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2} - s_3 = v_3$$
$$\sqrt{(x_4 - x)^2 + (y_4 - y)^2} - s_4 = v_4$$
$$\sqrt{(x_5 - x)^2 + (y_5 - y)^2} - s_5 = v_5$$

Tā kā šie nolīdzinājumi ir nelineari, jāveido atbilstošie pārvērstie kļūdu nolīdzinājumi. Tam nolūkam, pieņemot tuvinās vērtības (x), (y) un atbilstošos nezinamos pieaugumus ξ, η, ieliekam

$$x = (x) + \xi$$
$$y = (y) + \eta$$

un izvirzam oriģinalnolīdzinājumu kreisās puses Taylor'a rindās, pie kam ignorējam tos locekļus, kur mazie pieaugumi ξ un η ieiet par pirmo augstākās kāpēs.

Lietojot apzīmējumus

$$(s_1) = \sqrt{\{x_1 - (x)\}^2 + \{y_1 - (y)\}^2}$$
$$(s_2) = \sqrt{\{x_2 - (x)\}^2 + \{y_2 - (y)\}^2}$$
$$(s_3) = \sqrt{\{x_3 - (x)\}^2 + \{y_3 - (y)\}^2}$$
$$(s_4) = \sqrt{\{x_4 - (x)\}^2 + \{y_4 - (y)\}^2}$$
$$(s_5) = \sqrt{\{x_5 - (x)\}^2 + \{y_5 - (y)\}^2}$$

vispārējā veidā rakstītie pārvērstie kļūdu nolīdzinājumi tad ir

$$-\frac{x_1-(x)}{(s_1)}\xi-\frac{y_1-(y)}{(s_1)}\eta+\{(s_1)-s_1\}=v_1$$

$$-\frac{x_2-(x)}{(s_2)}\xi-\frac{y_2-(y)}{(s_2)}\eta+\{(s_2)-s_2\}=v_2$$

$$-\frac{x_3-(x)}{(s_3)}\xi-\frac{y_3-(y)}{(s_3)}\eta+\{(s_3)-s_3\}=v_3$$

$$-\frac{x_4-(x)}{(s_4)}\xi-\frac{y_4-(y)}{(s_4)}\eta+\{(s_4)-s_4\}=v_4$$

$$-\frac{x_5-(x)}{(s_5)}\xi-\frac{y_5-(y)}{(s_5)}\eta+\{(s_5)-s_5\}=v_5$$

Pieņemot, ka par meklētām koordinatām x, y nekas nav zinams, tuvinās vērtības (x), (y) nosakam no oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumiem, tam nolūkam lietojot — saskaņā ar nezinamo skaitu — divus tādus nolīdzinājumus. Šos divus nolīdzinājumus izvēlamies tā, lai atbilstošie izmērītie atstatumi s būtu izdevīgi punkta P stāvokļa noteikšanai. Vadoties ar visu svarā krītošo punktu savstarpējo stāvokli aptuveni rādošo 3. attēlu, izvēlamies 1. un 5. kļūdu nolīdzinājumu. Šinīs nolīdzinājumos ieliekot x_1, y_1, s_1 un x_5, y_5, s_5 dotās skaitliskās vērtības, atvietojot v_1 un v_5 ar 0, bet x un y ar (x) un (y), veidojam divus parastus nolīdzinājumus ar nezinamiem (x) un (y):

$$\sqrt{\{2849,12-(x)\}^2+\{4712,30-(y)\}^2}-78,91=0$$

$$\sqrt{\{2753,14-(x)\}^2+\{4633,18-(y)\}^2}-76,90=0$$

Atslēdzot šo nolīdzinājumu sistemu, atrodam

$$(x)=+2770,32 \text{ m}$$
$$(y)=+4708,14 \text{ m}$$

un ar tām, ievērojot agrāk vispārējā veidā rakstītās attiecīgās izteiksmes, nosakam (s) tipa lielumu skaitliskās vērtības:

$$(s_1)=78,910 \text{ m}$$
$$(s_2)=83,323$$
$$(s_3)=81,794$$
$$(s_4)=84,878$$
$$(s_5)=76,904$$

Ieliekot vispārējā veidā rakstītos pārvērstos kļūdu nolīdzinājumos attiecīgās dotās resp. līdz šim nosacītās skaitliskās vērtības, atrodam šādus pārvērstos kļūdu nolīdzinājumus ar nezinamiem ξ un η:

$$-\frac{+78{,}80}{78{,}910}\xi-\frac{+\ 4{,}16}{78{,}910}\eta+0{,}000=v_1$$
$$-\frac{+41{,}92}{83{,}323}\xi-\frac{+72{,}01}{83{,}323}\eta+0{,}023=v_2$$
$$-\frac{-38{,}81}{81{,}794}\xi-\frac{+72{,}00}{81{,}794}\eta+0{,}034=v_3$$
$$-\frac{-84{,}39}{84{,}878}\xi-\frac{-\ 9{,}09}{84{,}878}\eta+0{,}048=v_4$$
$$-\frac{-17{,}18}{76{,}904}\xi-\frac{-74{,}96}{76{,}904}\eta+0{,}004=v_5$$

jeb, rakstot koeficientus galīgā veidā,

$$-0{,}999\,\xi-0{,}053\,\eta+0{,}000=v_1$$
$$-0{,}503\,\xi-0{,}864\,\eta+0{,}023=v_2$$
$$+0{,}474\,\xi-0{,}880\,\eta+0{,}034=v_3$$
$$+0{,}994\,\xi+0{,}107\,\eta+0{,}048=v_4$$
$$+0{,}223\,\xi+0{,}975\,\eta+0{,}004=v_5$$

Izrakstot šo nolīdzinājumu koeficientus a un b un brīvos locekļus $-\lambda$, nosakam veidojamo divu normalnolīdzinājumu atbilstošos elementus un arī papildu locekli $[\lambda\lambda]$:

a	b	$-\lambda$	aa	ab	$-a\lambda$	bb	$-b\lambda$	$\lambda\lambda$
-0,999	-0,053	0,000	+0,9980	+0,0529	0,0000	+0,0028	0,0000	0,0000
-0,503	-0,864	+0,023	+0,2530	+0,4346	-0,0116	+0,7465	-0,0199	+0,0005
+0,474	-0,880	+0,034	+0,2247	-0,4171	+0,0161	+0,7744	-0,0299	+0,0012
+0,994	+0,107	+0,048	+0,9880	+0,1064	+0,0477	+0,0114	+0,0051	+0,0023
+0,223	+0,975	+0,004	+0,0497	+0,2174	+0,0009	+0,9506	+0,0039	0,0000
			+2,5134	+0,3942	+0,0531	+2,4857	-0,0408	+0,0040

Tā tad ar locekli $[\lambda\lambda]$ papildinātie normalnolīdzinājumi ir: atslēdzot pēc ξ:

$$+2{,}4857\,\eta+0{,}3942\,\xi-0{,}0408=0$$
$$+0{,}3942\,\eta+2{,}5134\,\xi+0{,}0531=0$$
$$+0{,}0040$$

atslēdzot pēc η:

$$\begin{aligned} &+2{,}5134\,\xi + 0{,}3942\,\eta + 0{,}0531 = 0 \\ &+0{,}3942\,\xi + 2{,}4857\,\eta - 0{,}0408 = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 0{,}0040 \end{aligned}$$

Pirms normalnolīdzinājumu reducēšanas izteiksim vēl azimutu ν_1 nezinamo ξ un η linearas funkcijas veidā. Lietojot kā argumentus x un y, atrodam

$$\nu_1 = \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)\rho$$

Parastā kārtā ar tuvino vērtību (x) un (y) palīdzību pārejot uz argumentiem ξ un η, šī funkcija vispārējā veidā rakstama

$$\nu_1 = (\nu_1)\rho + \left(\frac{\partial\nu_1}{\partial x}\right)_0 \rho\xi + \left(\frac{\partial\nu_1}{\partial y}\right)_0 \rho\eta$$

pie kam $(\nu_1)\rho$ apzīmē šeit neinteresējošo brīvo locekli — ar x un y pieņemtām tuvinām vērtībām aprēķināto azimutu. Kas zīmējas uz ξ un η koeficientiem, tad apzīmējot tos ar f_1 un f_2, atrodam

$$f_1 = \left(\frac{\partial\nu_1}{\partial x}\right)_0 \rho = \left\{\frac{1}{1 + \left\{\frac{(y) - y_1}{(x) - x_1}\right\}^2}\left\{-\frac{(y) - y_1}{\{(x) - x_1\}^2}\right\}\right\}\rho =$$

$$= -\frac{(y) - y_1}{\{(x) - x_1\}^2 + \{(y) - y_1\}^2}\rho = -\frac{(y) - y_1}{(s_1)^2}\rho$$

un

$$f_2 = \left(\frac{\partial\nu_1}{\partial y}\right)_0 \rho = \left\{\frac{1}{1 + \left\{\frac{(y) - y_1}{(x) - x_1}\right\}^2}\left\{+\frac{1}{(x) - x_1}\right\}\right\}\rho =$$

$$= +\frac{(x) - x_1}{\{(x) - x_1\}^2 + \{(y) - y_1\}^2}\rho = +\frac{(x) - x_1}{(s_1)^2}\rho$$

Ieliekot koordinatu (x), (y), x_1, y_1 un atbilstošā atstatuma (s_1) skaitliskās vērtības, aprēķinam

$$\begin{aligned} f_1 &= +0{,}0007\,\rho \\ f_2 &= -0{,}0127\,\rho \end{aligned}$$

Reducējot un atslēdzot normalnolīdzinājumus, sakarā ar to arī reducējam f_2 un nosakam funkcijas ν_1 svara koeficientu Q_{ν_1}. To daram pēc schemas 1, atbilstoši apstākļiem atvietojot uz aprēķināto funkciju attiecīgos apzīmējumus F un Q_F ar ν_1 un Q_{ν_1}.

Atslēdzot pēc ξ			Atslēdzot pēc η				
η	ξ	$-\lambda$	ξ	η	$-\lambda$	ν_1	Q_{ν_1}
+2,4857	+0,3942	−0,0408	+2,5134	+0,3942	+0,0531	+0,0007ρ	+0,000000ρ^2
	+2,5134	+0,0531		+2,4857	−0,0408	−0,0127ρ	
	+0,0625	−0,0065		+0,0618	+0,0083	+0,0001ρ	
		+0,0040			+0,0040		
		+0,0007			+0,0011		
	+2,4509	+0,0596		+2,4239	−0,0491	−0,0128ρ	+0,000068ρ^2
		+0,0033			+0,0029		+0,000068ρ^2
		+0,0014			+0,0010		
		+0,0019			+0,0019		

$p_\xi = 2,4509$

$$\xi = -\frac{+0,0596}{+2,4509} = -0,0243$$

$p_\eta = 2,4239$

$$\eta = -\frac{-0,0491}{+2,4239} = +0,0203$$

Ar atrastiem ξ un η nosacītās koordinatas

$$x = (x) + \xi = +2770,32 - 0,0243 = +2770,2957 \text{ m}$$
$$y = (y) + \eta = +4708,14 + 0,0203 = +4708,1603 \text{ m}$$

ieliekot oriģinalveida kļūdu nolīdzinājumos, aprēķinam atsevišķos v un kvadratu sumu [vv]:

	v	v^2
$\sqrt{(2849,1200-2770,2957)^2+(4712,3000-4708,1603)^2}-$ $-78,91=$	+0,0229	0,0005
$\sqrt{(2812,2400-2770,2957)^2+(4780,1500-4708,1603)^2}-$ $-83,30=$	+0,0177	0,0003
$\sqrt{(2731,5100-2770,2957)^2+(4780,1400-4708,1603)^2}-$ $-81,76=$	+0,0043	0,0000
$\sqrt{(2685,9300-2770,2957)^2+(4699,0500-4708,1603)^2}-$ $-84,83=$	+0,0262	0,0007
$\sqrt{(2753,1400-2770,2957)^2+(4633,1800-4708,1603)^2}-$ $-76,90=$	+0,0179	0,0003
		0,0018 =[vv]

Pretruna 0,0001, par kuru [vv] atšķiras no [λλ.2], izskaidrojama ar notikušiem apaļojumiem.

Ar izlīdzinātām koordinatām x, y parastā kārtā aprēķinam

$$\nu_1 = 183^0\ 00{,}4'$$

Kas zīmējas uz vidējām kļūdām, tad uz neizlīdzinātu novērojumu s attiecīgā svara vienības vidējā kļūda ir

$$m = \pm \sqrt{\frac{0{,}0018}{5-2}} = \pm 0{,}024 \text{ m}$$

Izejot no tās un ievērojot attiecīgo lielumu svarus resp. svara koeficientu, aprēķinam izlīdzināto koordinatu x un y vidējās kļūdas

$$m_x = m_\xi = \pm \sqrt{\frac{0{,}0006}{2{,}4509}} = \pm 0{,}016 \text{ m}$$

$$m_y = m_\eta = \pm \sqrt{\frac{0{,}0006}{2{,}4239}} = \pm 0{,}016 \text{ m}$$

un azimuta ν_1 vidējo kļūdu

$$m_{\nu_1} = \pm \sqrt{0{,}0006 \times 0{,}000068\, \rho^2} = \pm 0{,}7'$$

Tā tad, noapaļojot atrastās koordinatu vērtības milimetros, galīgie rezultati ir

$$x = +2770{,}296 \pm 0{,}016 \text{ m}$$
$$y = +4708{,}160 \pm 0{,}016 \text{ m}$$

un

$$\nu_1 = 183^0\ 00{,}4' \pm 0{,}7'$$

§ 32. Kļūdu nolīdzinājumu reducēšana.

Zināmos apstākļos izrādās par lietderīgu izslēgt vienu, vai pat vairākus nezinamus jau no pašiem linearā veidā dotiem vai pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem. Tas panākams, starp citu, ar kļūdu nolīdzinājumu reducēšanu, kas notiek līdzīgā kārtā kā normalnolīdzinājumu reducēšana.

Pieņemsim uz vienādas noteiktības netiešiem novērojumiem attiecīgo linearo kļūdu nolīdzinājumu sistemu

$$\left.\begin{array}{l} a_1\xi_1+b_1\xi_2+c_1\xi_3+\ldots+(i-1)_1\xi_{i-1}+i_1\xi_i-\lambda_1=v_1 \\ a_2\xi_1+b_2\xi_2+c_2\xi_3+\ldots+(i-1)_2\xi_{i-1}+i_2\xi_i-\lambda_2=v_2 \\ a_3\xi_1+b_3\xi_2+c_3\xi_3+\ldots+(i-1)_3\xi_{i-1}+i_3\xi_i-\lambda_3=v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\xi_1+b_n\xi_2+c_n\xi_3+\ldots+(i-1)_n\xi_{i-1}+i_n\xi_i-\lambda_n=v_n \end{array}\right\} \quad (348).$$

Lai no tās izslēgtu pirmo nezinamo ξ_1, veidojam atbilstošās normalnolīdzinājumu sistemas pirmo nolīdzinājumu

$$[aa]\xi_1+[ab]\xi_2+[ac]\xi_3+\ldots+[a(i-1)]\xi_{i-1}+[ai]\xi_i-[a\lambda]=0 \quad (349).$$

No šī nolīdzinājuma nosakam ξ_1 pārējo nezinamo funkcijas veidā, un atrasto izteiksmi

$$\xi_1=-\frac{[ab]}{[aa]}\xi_2-\frac{[ac]}{[aa]}\xi_3-\ldots-\frac{[a(i-1)]}{[aa]}\xi_{i-1}-\frac{[ai]}{[aa]}\xi_i+\frac{[a\lambda]}{[aa]} \quad (350)$$

ieliekam kļūdu nolīdzinājumos (348). Tie tad pāriet veidā

$$\left.\begin{array}{l} \left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)\xi_2+\left(c_1-\frac{[ac]}{[aa]}a_1\right)\xi_3+\ldots+\left((i\text{-}1)_1-\frac{[a(i\text{-}1)]}{[aa]}a_1\right)\xi_{i-1}+ \\ \qquad\qquad +\left(i_1-\frac{[ai]}{[aa]}a_1\right)\xi_i-\left(\lambda_1-\frac{[a\lambda]}{[aa]}a_1\right)=v_1 \\ \left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)\xi_2+\left(c_2-\frac{[ac]}{[aa]}a_2\right)\xi_3+\ldots+\left((i\text{-}1)_2-\frac{[a(i\text{-}1)]}{[aa]}a_2\right)\xi_{i-1}+ \\ \qquad\qquad +\left(i_2-\frac{[ai]}{[aa]}a_2\right)\xi_i-\left(\lambda_2-\frac{[a\lambda]}{[aa]}a_2\right)=v_2 \\ \left(b_3-\frac{[ab]}{[aa]}a_3\right)\xi_2+\left(c_3-\frac{[ac]}{[aa]}a_3\right)\xi_3+\ldots+\left((i\text{-}1)_3-\frac{[a(i\text{-}1)]}{[aa]}a_3\right)\xi_{i-1}+ \\ \qquad\qquad +\left(i_3-\frac{[ai]}{[aa]}a_3\right)\xi_i-\left(\lambda_3-\frac{[a\lambda]}{[aa]}a_3\right)=v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(b_n-\frac{[ab]}{[aa]}a_n\right)\xi_2+\left(c_n-\frac{[ac]}{[aa]}a_n\right)\xi_3+\ldots+\left((i\text{-}1)_n-\frac{[a(i\text{-}1)]}{[aa]}a_n\right)\xi_{i-1}+ \\ \qquad\qquad +\left(i_n-\frac{[ai]}{[aa]}a_n\right)\xi_i-\left(\lambda_n-\frac{[a\lambda]}{[aa]}a_n\right)=v_n \end{array}\right\} \quad (351),$$

jeb, apzīmējot koeficientus un brīvos locekļus ar attiecīgiem simboliem $B', C', \ldots, (I-1)', I'$ un Λ':

$$\left.\begin{array}{l} B_1'\xi_2 + C_1'\xi_3 + \ldots + (I-1)_1'\xi_{i-1} + I_1'\xi_i - \Lambda_1' = v_1 \\ B_2'\xi_2 + C_2'\xi_3 + \ldots + (I-1)_2'\xi_{i-1} + I_2'\xi_i - \Lambda_2' = v_2 \\ B_3'\xi_2 + C_3'\xi_3 + \ldots + (I-1)_3'\xi_{i-1} + I_3'\xi_i - \Lambda_3' = v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n'\xi_2 + C_n'\xi_3 + \ldots + (I-1)_n'\xi_{i-1} + I_n'\xi_i - \Lambda_n' = v_n \end{array}\right\} \quad (352).$$

Šai vienu reizi reducētai kļūdu nolīdzinājumu sistemai atbilstošie normalnolīdzinājumi ir

$$\left.\begin{array}{l} [B'B']\xi_2 + [B'C']\xi_3 + \ldots + [B'(I-1)']\xi_{i-1} + \\ \qquad + [B'I']\xi_i - [B'\Lambda'] = 0 \\ [B'C']\xi_2 + [C'C']\xi_3 + \ldots + [C'(I-1)']\xi_{i-1} + \\ \qquad + [C'I']\xi_i - [C'\Lambda'] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [B'(I-1)']\xi_2 + [C'(I-1)']\xi_3 + \ldots + [(I-1)'(I-1)']\xi_{i-1} + \\ \qquad + [(I-1)'I']\xi_i - [(I-1)'\Lambda'] = 0 \\ [B'I']\xi_2 + [C'I']\xi_3 + \ldots + [(I-1)'I']\xi_{i-1} + \\ \qquad + [I'I']\xi_i - [I'\Lambda'] = 0 \end{array}\right\} \quad (353).$$

Lai pazītu šo normalnolīdzinājumu koeficientu nozīmi, veidojam, piem., atsevišķo B' kvadratus un to sumu $[B'B']$:

$$(B_1')^2 = \left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)^2 = b_1^2 - 2\frac{[ab]}{[aa]}a_1b_1 + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_1^2$$

$$(B_2')^2 = \left(b_2 - \frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)^2 = b_2^2 - 2\frac{[ab]}{[aa]}a_2b_2 + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_2^2$$

$$(B_3')^2 = \left(b_3 - \frac{[ab]}{[aa]}a_3\right)^2 = b_3^2 - 2\frac{[ab]}{[aa]}a_3b_3 + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_3^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(B_n')^2 = \left(b_n - \frac{[ab]}{[aa]}a_n\right)^2 = b_n^2 - 2\frac{[ab]}{[aa]}a_nb_n + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_n^2$$

$$[B'B'] = [bb] - 2\frac{[ab]}{[aa]}[ab] + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa] =$$

$$= [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb.1] \quad . \quad . \quad (354).$$

Līdzīgā veidā pierādams, ka $[B'C'] = [bc.1]$, ..., $[B'(I-1)'] = [b(i-1).1]$, $[B'I'] = [bi.1]$, $-[B'\Lambda'] = -[b\lambda.1]$, $[C'C'] = [cc.1]$, ..., $[C'(I-1)'] = [c(i-1).1]$, $[C'I'] = [ci.1]$, $-[C'\Lambda'] = -[c\lambda.1]$, u. t. t.

Tā tad sistema (353) ir identiska ar sistemu

$$\left.\begin{array}{l}
[bb.1]\xi_2+[bc.1]\xi_3+\ldots+[b(i\text{-}1).1]\xi_{i-1}+[bi.1]\xi_i-[b\lambda.1]=0\\
[bc.1]\xi_2+[cc.1]\xi_3+\ldots+[c(i\text{-}1).1]\xi_{i-1}+[ci.1]\xi_i-[c\lambda.1]=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[b(i\text{-}1).1]\xi_2+[c(i\text{-}1).1]\xi_3+\ldots+[(i\text{-}1)(i\text{-}1).1]\xi_{i-1}+[(i\text{-}1)i.1]\xi_i-[(i\text{-}1)\lambda.1]=0\\
[bi.1]\xi_2+[ci.1]\xi_3+\ldots+[(i\text{-}1)i.1]\xi_{i-1}+[ii.1]\xi_i-[i\lambda.1]=0
\end{array}\right\} \quad (355),$$

kura, kā zinams, rodas pirmo reizi reducējot kļūdu nolīdzinājumiem (348) atbilstošo normalnolīdzinājumu sistemu. Tā tad: kļūdu nolīdzinājumu pirmā reducēšana un reducētiem nolīdzinājumiem atbilstošo normalnolīdzinājumu veidošana atvieto nereducētiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošo normalnolīdzinājumu veidošanu un pirmo reducēšanu.

Reducētiem kļūdu nolīdzinājumiem (351) resp. (352) atbilstošie normalnolīdzinājumi savukārt parastā kārtā reducējami un atslēdzami, pie kam no šiem normalnolīdzinājumiem nosakami visi nezinamie, izņemot pirmo ξ_1, kurš minētos nolīdzinājumos neieiet. Šis pirmais nezinamais ξ_1 pēc pārējo nezinamo noteikšanas nosakams no kļūdu nolīdzinājumu reducēšanai lietotā normalnolīdzinājuma (349) resp. pēc atbilstošās formulas (350).

Turpinot kļūdu nolīdzinājumu reducēšanu, var izslēgt arī vēl nākošos nezinamos.

Ja ir nodomāts izslēgt vēl otro nezinamo ξ_2, tad veido nevis pilnīgo normalnolīdzinājumu sistemu (353), bet tikai tās pirmo nolīdzinājumu, un no šī nolīdzinājuma nosaka ξ_2 pārējo nezinamo funkcijas veidā. Attiecīgo izteiksmi

$$\xi_2=-\frac{[B'C']}{[B'B']}\xi_3-\ldots-\frac{[B'(I\text{-}1)']}{[B'B']}\xi_{i-1}-\frac{[B'I']}{[B'B']}\xi_i+\frac{[B'\Lambda']}{[B'B']} \quad (356)$$

ieliekot nolīdzinājumos (352), šie nolīdzinājumi tad pāriet veidā

$$\left.\begin{array}{l}
\left(C_1'-\frac{[B'C']}{[B'B']}B_1'\right)\xi_3+\ldots+\left((I-1)_1'-\frac{[B'(I-1)']}{[B'B']}B_1'\right)\xi_{i-1}+\\
\qquad+\left(I_1'-\frac{[B'I']}{[B'B']}B_1'\right)\xi_i-\left(\Lambda_1'-\frac{[B'\Lambda']}{[B'B']}B_1'\right)=v_1\\
\left(C_2'-\frac{[B'C']}{[B'B']}B_2'\right)\xi_3+\ldots+\left((I-1)_2'-\frac{[B'(I-1)']}{[B'B']}B_2'\right)\xi_{i-1}+\\
\qquad+\left(I_2'-\frac{[B'I']}{[B'B']}B_2'\right)\xi_i-\left(\Lambda_2'-\frac{[B'\Lambda']}{[B'B']}B_2'\right)=v_2
\end{array}\right| \quad (357),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(C_3'-\frac{[B'C']}{[B'B']}B_3'\right)\xi_3+\ldots+\left((I-1)_3'-\frac{[B'(I-1)']}{[B'B']}B_3'\right)\xi_{i-1}+\\
&\qquad+\left(I_3'-\frac{[B'I']}{[B'B']}B_3'\right)\xi_i-\left(\Lambda_3'-\frac{[B'\Lambda']}{[B'B']}B_3'\right)=v_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left(C_n'-\frac{[B'C']}{[B'B']}B_n'\right)\xi_3+\ldots+\left((I-1)_n'-\frac{[B'(I-1)']}{[B'B']}B_n'\right)\xi_{i-1}+\\
&\qquad+\left(I_n'-\frac{[B'I']}{[B'B']}B_n'\right)\xi_i-\left(\Lambda_n'-\frac{[B'\Lambda']}{[B'B']}B_n'\right)=v_n
\end{aligned}\right\} \quad (357),$$

jeb, apzīmējot koeficientus un brīvos locekļus ar attiecīgiem simboliem $C'', \ldots, (I-1)'', I''$ un Λ'':

$$\left.\begin{aligned}
C_1''\xi_3+\ldots+(I-1)_1''\xi_{i-1}+I_1''\xi_i-\Lambda_1''&=v_1\\
C_2''\xi_3+\ldots+(I-1)_2''\xi_{i-1}+I_2''\xi_i-\Lambda_2''&=v_2\\
C_3''\xi_3+\ldots+(I-1)_3''\xi_{i-1}+I_3''\xi_i-\Lambda_3''&=v_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
C_n''\xi_3+\ldots+(I-1)_n''\xi_{i-1}+I_n''\xi_i-\Lambda_n''&=v_n
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (358).$$

Šiem otro reizi reducētiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošie normalnolīdzinājumi ir

$$\left.\begin{aligned}
&[C''C'']\xi_3+\ldots+[C''(I-1)'']\xi_{i-1}+[C''I'']\xi_i-[C''\Lambda'']=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[C''(I-1)'']\xi_3+\ldots+[(I-1)''(I-1)'']\xi_{i-1}+[(I-1)''I'']\xi_i-[(I-1)''\Lambda'']=0\\
&[C''I'']\xi_3+\ldots+[(I-1)''I'']\xi_{i-1}+[I''I'']\xi_i-[I''\Lambda'']=0
\end{aligned}\right\} \quad (359).$$

Var pierādīt, ka šī sistema identiska ar sistemu

$$\left.\begin{aligned}
&[cc.2]\xi_3+\ldots+[c(i-1).2]\xi_{i-1}+[ci.2]\xi_i-[c\lambda.2]=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[c(i-1).2]\xi_3+\ldots+[(i-1)(i-1).2]\xi_{i-1}+[(i-1)i.2]\xi_i-[(i-1)\lambda.2]=0\\
&[ci.2]\xi_3+\ldots+[(i-1)i.2]\xi_{i-1}+[ii.2]\xi_i-[i\lambda.2]=0
\end{aligned}\right\} \quad (360),$$

kura rodas otro reizi reducējot kļūdu nolīdzinājumiem (348) atbilstošo normalnolīdzinājumu sistemu. Tā tad kļūdu nolīdzinājumu reducēšana minētās divās pakāpēs un divreiz reducētiem nolīdzinājumiem atbilstošo normalnolīdzinājumu veidošana atvieto nereducētiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošo normalnolīdzinājumu veidošanu un divas pirmās reducēšanas.

Tā turpinot kļūdu nolīdzinājumu reducēšanu nākošās pakāpēs, var izslēgt vienu pēc otra arī nākošos nezinamos, pie kam katrā reducēšanas pakāpē iespējama pāreja uz atbilstošiem normalnolīdzinājumiem. Katrreiz šie normalnolīdzinājumi ir identiski ar atbilstošā pakāpē reducētiem uz pirmatnējiem kļūdu nolīdzinājumiem attiecīgiem normalnolīdzinājumiem.

Līdz šim pieņēmam, ka reducētie kļūdu nolīdzinājumi zīmējas uz vienādas noteiktības novērojumiem. Dažādas noteiktības gadijumā lietojams tas pats paņēmiens, tikai, saprotams, ar apstākļiem atbilstošiem grozijumiem dažos sīkumos. Piem., normalnolīdzinājuma (349), izteiksmes (350) un sistemas (353) vietā stājas:

$$[paa]\xi_1+[pab]\xi_2+[pac]\xi_3+\ldots+[pa(i\text{-}1)]\xi_{i-1}+[pai]\xi_i-[pa\lambda]=0 \qquad (361),$$

$$\xi_1=-\frac{[pab]}{[paa]}\xi_2-\frac{[pac]}{[paa]}\xi_3-\ldots-\frac{[pa(i\text{-}1)]}{[paa]}\xi_{i-1}-\frac{[pai]}{[paa]}\xi_i+\frac{[pa\lambda]}{[paa]}\quad . \quad . \qquad (362),$$

un

$$\left.\begin{aligned}
&[pB'B']\xi_2 + [pB'C']\xi_3 +\ldots+ [pB'(I-1)']\xi_{i-1} + \\
&\qquad + [pB'I']\xi_i - [pB'\Lambda'] = 0 \\
&[pB'C']\xi_2 + [pC'C']\xi_3 +\ldots+ [pC'(I-1)']\xi_{i-1} + \\
&\qquad + [pC'I']\xi_i - [pC'\Lambda'] = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[pB'(I-1)']\xi_2+[pC'(I-1)']\xi_3+\ldots+[p(I-1)'(I-1)']\xi_{i-1}+ \\
&\qquad +[p(I-1)'I']\xi_i-[p(I-1)'\Lambda']=0 \\
&[pB'I']\xi_2 + [pC'I']\xi_3 +\ldots+ [p(I-1)'I']\xi_{i-1} + \\
&\qquad + [pI'I']\xi_i - [pI'\Lambda'] = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (363);$$

līdzīgā veidā, ievērojot novērojumu svarus p, grozami nolīdzinājumi resp. formulas (354) — (360), u. t. t.

Attiecībā uz nezinamo svaru koeficientu noteikšanu piezīmēsim sekojošo. No paņēmiena apraksta saprotams, ka kļūdu nolīdzinājumu reducēšanu var nobeigt jebkurā vēlamā pakāpē, lai, pārejot uz atbilstošiem normalnolīdzinājumiem, tālāk reducētu un atslēgtu tos. Kā zinams, sakarā ar to nosakami arī šo normalnolīdzinājumu nezinamo svaru koeficienti. Bet minētos normalnolīdzinājumos trūkst tie nezinamie, kuri izslēgti jau no pašiem kļūdu nolīdzinājumiem to reducēšanas ceļā. Tā tad šo trūkstošo nezinamo svaru koeficienti arī nav nosakami sakarā ar veidoto normalnolīdzinājumu reducēšanu. Tāpēc no kļūdu nolīdzinājumiem izslēgto nezinamo svaru koeficientu noteikšanas nolūkā atsevišķi jāizdara vēl atbilstošo svaru nolīdzinājumu sistemu reducēšana un atslēgšana.

Spriežot par kļūdu nolīdzinājumu reducēšanas praktisko nozīmi, jāievēro, ka pielietojot šo paņēmienu, normalnolīdzinājumu reducēšanas pirmās pakāpes lielākā vai mazākā skaitā atvietojamas ar kļūdu nolīdzinājumu reducēšanu atbilstošās pakāpēs; bet visu vajadzīgo reducēšanas pakāpju kopskaits paliek, kā vienmēr, noteikts ar nosakamo nezinamo skaitu. Arī jāapsver, ka, salīdzinot ar normalnolīdzinājumu reducēšanu, kļūdu nolīdzinājumu reducēšana vispārīgi nav vieglāka, un pie tam vēl padara vajadzīgu dažu svaru nolīdzinājumu sistemu atsevišķo reducēšanu un atslēgšanu. Tāpēc jānāk pie slēdziena, ka kļūdu nolīdzinājumu reducēšana var būt izdevīga tikai zinamos, šī paņēmiena praktiskai pielietošanai sevišķi labvēlīgos apstākļos.

Tādi apstākļi ir, kad vienādas noteiktības gadijumā kāds nezinamais visos kļūdu nolīdzinājumos ieiet ar vienādu koeficientu 1. Pieņemot, ka šis nezinamais ξ_1 visos nolīdzinājumos atrodas pirmā vietā, izslēgsim ξ_1 no atbilstošās kļūdu nolīdzinājumu sistemas

$$\left.\begin{aligned}
1\xi_1 + b_1\xi_2 + c_1\xi_3 + \ldots + (i-1)_1\xi_{i-1} + i_1\xi_i - \lambda_1 &= v_1\\
1\xi_1 + b_2\xi_2 + c_2\xi_3 + \ldots + (i-1)_2\xi_{i-1} + i_2\xi_i - \lambda_2 &= v_2\\
1\xi_1 + b_3\xi_2 + c_3\xi_3 + \ldots + (i-1)_3\xi_{i-1} + i_3\xi_i - \lambda_3 &= v_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
1\xi_1 + b_n\xi_2 + c_n\xi_3 + \ldots + (i-1)_n\xi_{i-1} + i_n\xi_i - \lambda_n &= v_n
\end{aligned}\right\} \quad (364),$$

reducējot šo sistemu augšā aizrādītā kārtībā.

Šai reducēšanai lietojamais normalnolīdzinājums ir

$$n\xi_1+[b]\xi_2+[c]\xi_3+\ldots+[(i-1)]\xi_{i-1}+[i]\xi_i-[\lambda]=0 \quad . \quad . \quad (365);$$

tā tad izslēdzamais nezinamais ξ_1 visos nolīdzinājumos (364) jāatvieto ar izteiksmi

$$\xi_1 = -\frac{[b]}{n}\xi_2 - \frac{[c]}{n}\xi_3 - \ldots - \frac{[(i-1)]}{n}\xi_{i-1} - \frac{[i]}{n}\xi_i + \frac{[\lambda]}{n} \quad (366).$$

Tad veidā (352) rakstīto reducēto kļūdu nolīdzinājumu koeficienti un brīvie locekļi ir:

$$\left.\begin{aligned}
B_1' = b_1 - \frac{[b]}{n}; C_1' = c_1 - \frac{[c]}{n}; \ldots; (I-1)_1' = (i-1)_1 - \frac{[(i-1)]}{n};\\
I_1' = i_1 - \frac{[i]}{n}; -\Lambda_1' = -\lambda_1 - \frac{-[\lambda]}{n}
\end{aligned}\right| \quad (367),$$

$$\left.\begin{aligned}
&B_2'=b_2-\frac{[b]}{n};C_2'=c_2-\frac{[c]}{n};\ldots;(I-1)_2'=(i-1)_2-\frac{[(i-1)]}{n};\\
&\qquad I_2'=i_2-\frac{[i]}{n};-\Lambda_2'=-\lambda_2-\frac{-[\lambda]}{n}\\
&B_3'=b_3-\frac{[b]}{n};C_3'=c_3-\frac{[c]}{n};\ldots;(I-1)_3'=(i-1)_3-\frac{[(i-1)]}{n};\\
&\qquad I_3'=i_3-\frac{[i]}{n};-\Lambda_3'=-\lambda_3-\frac{-[\lambda]}{n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B_n'=b_n-\frac{[b]}{n};C_n'=c_n-\frac{[c]}{n};\ldots;(I-1)_n'=(i-1)_n-\frac{[(i-1)]}{n};\\
&\qquad I_n'=i_n-\frac{[i]}{n};-\Lambda_n'=-\lambda_n-\frac{-[\lambda]}{n}
\end{aligned}\right\} \quad (367),$$

pie kam viegli pierādams, ka tādā gadijumā

$$[B']=0,[C']=0,\ldots,[(I-1)']=0,[I']=0,-[\Lambda']=0 \quad . \quad . \quad (368),$$

kas var noderēt reducēto koeficientu un brīvo locekļu aprēķina kontrolei.

Ar šiem reducēto kļūdu nolīdzinājumu koeficientiem un brīviem locekļiem veidojami atbilstošie (353) tipa normalnolīdzinājumi.

Ar to izbeidzot kļūdu nolīdzinājumu reducēšanu, un tālāk parastā kārtā reducējot un atslēdzot minēto normalnolīdzinājumu sistemu, no tās atrodami visi nezinamie, izņemot iepriekš izslēgto pirmo ξ_1, un sakarā ar to arī nosakami šo nezinamo svaru koeficienti.

Kas zīmējas uz nezinamo ξ_1, tad, iepriekš atraduši pārējos nezinamos, to varam nosacīt pēc formulas (366). Atbilstošā svara koeficienta noteikšana padara gan jau minētās neērtības. Bet bieži gadās, ka visos kļūdu nolīdzinājumos ar vienādu koeficientu 1 ieejošais nezinamais ir tādas dabas, ka var iztikt bez tā svara koeficienta resp. vidējās kļūdas noteikšanas. Tādos apstākļos šī nezinamā izslēgšana no kļūdu nolīdzinājumiem ir sevišķi izdevīga.

Tas pats sakams par apskatītā atsevišķā gadijuma variantu, kad nezinamais ξ_1 visos kļūdu nolīdzinājumos ieiet ar koeficientu -1. Tādā gadijumā normalnolīdzinājuma (365) un izteiksmes (366) vietā stājas:

$$n\xi_1-[b]\xi_2-[c]\xi_3-\ldots-[(i-1)]\xi_{i-1}-[i]\xi_i+[\lambda]=0 \quad (369)$$

un

$$\xi_1=+\frac{[b]}{n}\xi_2+\frac{[c]}{n}\xi_3+\ldots+\frac{[(i-1)]}{n}\xi_{i-1}+\frac{[i]}{n}\xi_i-\frac{[\lambda]}{n} \quad (370).$$

Ieliekot šo izteiksmi dotos kļūdu nolīdzinājumos, reducēto kļūdu nolīdzinājumu koeficienti un brīvie locekļi iznāk tie paši (367).

Beidzot, vēl piezīmēsim, ka tikai aiz tīri ārējiem iemesliem šinīs iztirzājumos vienmēr pieņemts, ka no dotās kļūdu nolīdzinājumu sistemas izslēdzamais nezinamais ir šinīs nolīdzinājumos pēc kārtas pirmais. Pēc būtības nekas negrozas, ja izslēdzamais nezinamais dotos kļūdu nolīdzinājumos ieņem kādu citu vietu. Tikai jāievēro, ka vispārīgi šo kļūdu nolīdzinājumu reducēšanai jālieto tas tiem atbilstošais normalnolīdzinājums, kur izslēdzamais nezinamais ieiet ar kvadratiska tipa koeficientu.

Kas zīmējas uz nereducēto kļūdu nolīdzinājumu labās puses veidojošiem izlabojumiem v, tad tie bez grozījumiem pāriet atbilstošos reducētos kļūdu nolīdzinājumos. Tā tad sumas [vv] veidošanai vajadzīgie atsevišķie v nosakami tikpat labi no reducētiem, kā no nereducētiem kļūdu nolīdzinājumiem. Bet pēc formulas (284) nosakot svara vienības vidējo kļūdu, jāievēro, ka i visādā ziņā nozīmē nereducēto kļūdu nolīdzinājumu nezinamo kopskaitu.

Piemērs. Lai nosacītu mikrometriskas skrūves vītnes kāpumu, taisīts skrūves nospiedums uz papira, un, pie šī nospieduma pieliekot milimetru skalu, tā nolasīta pret vairākām skrūves nospieduma strīpiņām. Apzīmējot šo strīpiņu numurus ar o, bet atbilstošos nolasijumus ar λ, dabūti šādi rezultati:

o:	0	16	32	48	64
λ:	3,50	8,85	14,15	19,50	24,80 mm

Pieņemot, ka visi novērojumi λ taisīti ar vienādu noteiktību, jānosaka skrūves vītnes kāpuma izlīdzinātā vērtība η ar atbilstošo vidējo kļūdu m_η.

Stājoties pie uzdevuma atrisināšanas, vispirms jānoskaidro, kādi ir svarā krītošie nezinamie. Katrs nolasijums λ izsaka novēroto atstatumu no milimetru skalas nulles līdz attiecīgai skrūves nospieduma strīpiņai, tā tad atkarājas, starp citu, no skrūves nospieduma un pieliktās milimetru skalas savstarpējā stāvokļa. Šis savstarpējais stāvoklis noteikts ar kādai brīvi izvēlētai nospieduma strīpiņai atbilstošā nolasijuma izlīdzināto vērtību ξ, kura uzdevumā spēlē nezinama lomu. Otrais nezinamais ir meklētais vītnes kāpums, resp. tā izlīdzinātā vērtība η. Attiecinot pirmo nezinamo ξ uz skrūves nospieduma 0-to strīpiņu, katrs izlīdzinātais novērojums $(\lambda + v)$ izsakams minēto divu nezinamo ξ un η funkcijas veidā:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + v_1 &= 3{,}50 + v_1 = \xi + 0\,\eta \\
\lambda_2 + v_2 &= 8{,}85 + v_2 = \xi + 16\,\eta \\
\lambda_3 + v_3 &= 14{,}15 + v_3 = \xi + 32\,\eta \\
\lambda_4 + v_4 &= 19{,}50 + v_4 = \xi + 48\,\eta \\
\lambda_5 + v_5 &= 24{,}80 + v_5 = \xi + 64\,\eta
\end{aligned}$$

Tā tad novērojumi uzskatami par netiešiem; un tā kā viņu skaits 5 lielāks par nosakamo nezinamo skaitu 2, uzdevums atrisinams ar izlīdzināšanu. Oriģinalveidā linearie kļūdu nolīdzinājumi ir:

$$\begin{aligned}
\xi + 0\,\eta - 3{,}50 &= v_1 \\
\xi + 16\,\eta - 8{,}85 &= v_2 \\
\xi + 32\,\eta - 14{,}15 &= v_3 \\
\xi + 48\,\eta - 19{,}50 &= v_4 \\
\xi + 64\,\eta - 24{,}80 &= v_5
\end{aligned}$$

Tā kā nezinamais ξ visos nolīdzinājumos ieiet ar koeficientu 1, un nav jānosaka šī nezinamā vidējā kļūda resp. svara koeficients, apstākļi izdevīgi nezinamā ξ izslēgšanai no kļūdu nolīdzinājumiem to reducēšanas ceļā.

Apzīmējot koeficientus un brīvos locekļus nereducētos kļūdu nolīdzinājumos ar a, b, $-\lambda$, bet reducētos kļūdu nolīdzinājumos ar B, $-\Lambda$, izrakstam resp. aprēķinam šo elementu skaitliskās vērtības. Sakarā ar to veidojam atbilstošā normalnolīdzinājuma koeficientu un brīvo locekli [BB] un $-$ [BΛ], un arī papildu locekli [ΛΛ]:

b	$-\lambda$	B	$-\Lambda$	BB	$-$ BΛ	ΛΛ
0	− 3,50	−32,00	+10,66	+1024,0000	−341,1200	+113,6356
+16	− 8,85	−16,00	+ 5,31	+ 256,0000	− 84,9600	+ 28,1961
+32	−14,15	0,00	+ 0,01	0,0000	0,0000	+ 0,0001
+48	−19,50	+16,00	− 5,34	+ 256,0000	− 85,4400	+ 28,5156
+64	−24,80	+32,00	−10,64	+1024,0000	−340,4800	+113,2096
[b]=+160	−[λ]=−70,80	0,00	0,00	+2560,0000	−852,0000	+283,5570
$\frac{[b]}{n}$=+32,00	$\frac{-[\lambda]}{n}$=−14,16					

Tā tad reducētie kļūdu nolīdzinājumi ir:

$$\begin{aligned} -32{,}00\,\eta + 10{,}66 &= v_1 \\ -16{,}00\,\eta + 5{,}31 &= v_2 \\ 0{,}00\,\eta + 0{,}01 &= v_3 \\ +16{,}00\,\eta - 5{,}34 &= v_4 \\ +32{,}00\,\eta - 10{,}64 &= v_5 \end{aligned}$$

Atbilstošais normalnolīdzinājums ar $[\Lambda\Lambda]$ tipa papildu locekli ir

$$\begin{aligned} +2560{,}0000\,\eta - 852{,}0000 &= 0 \\ &+283{,}5570 \end{aligned}$$

Atslēdzot šo normalnolīdzinājumu un reducējot papildu locekli, atrodam

$$\eta = -\frac{-852{,}0000}{+2560{,}0000} = 0{,}333 \text{ mm}$$

$$[\Lambda\Lambda.1] = +283{,}5570 - \frac{-852{,}0000}{+2560{,}0000}(-852{,}0000) = 0{,}0008$$

Ar atrasto η, pēc formulas (366), aprēķinam

$$\xi = -32{,}00 \times 0{,}333 + 14{,}160 = 3{,}504 \text{ mm}$$

un ieliekot nezinamo skaitliskās vērtības nereducētos kļūdu nolīdzinājumos, nosakam atsevišķos v un to kvadratu sumu [vv]:

	v	v^2
$3{,}504 + 0 \times 0{,}333 - 3{,}50 =$	$+0{,}004$	0,0000
$3{,}504 + 16 \times 0{,}333 - 8{,}85 =$	$-0{,}018$	0,0003
$3{,}504 + 32 \times 0{,}333 - 14{,}15 =$	$+0{,}010$	0,0001
$3{,}504 + 48 \times 0{,}333 - 19{,}50 =$	$-0{,}012$	0,0001
$3{,}504 + 64 \times 0{,}333 - 24{,}80 =$	$+0{,}016$	0,0003
		0,0008 = [vv]

Viegli pārliecināties, ka tas pats iznāk, ieliekot nezinamo atrastās vērtības reducētos kļūdu nolīdzinājumos. Šis aprēķins šeit nav izdarīts, jo kontrole, ka [vv] un $[\Lambda\Lambda.1]$ atrastās vērtības ir vienādas, pietiekošā mērā nodrošina visa izlīdzināšanas rēķina pareizību.

Ar neizlīdzināta novērojuma λ vidējo kļūdu identiskā svara vienības vidējā kļūda ir

$$m = \pm\sqrt{\frac{0{,}0008}{5-2}} = \pm\, 0{,}017 \text{ mm}$$

Ievērojot, ka reducētiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošā normalnolīdzinājuma vienīgā nezinamā η koeficients nosaka šī nezinamā svaru, atbilstošā vidējā kļūda iznāk

$$m_\eta = \pm \sqrt{\frac{0{,}0008}{(5-2)\times 2560}} = \pm\ 0{,}0003 \text{ mm}$$

Tā tad galīgais rezultats ir

$$\eta = 0{,}333 \pm 0{,}0003 \text{ mm}$$

§ 33. Schreiber'a paņēmiens nezinamo izslēgšanai no kļūdu nolīdzinājumiem.

Lai ir dota linearu kļūdu nolīdzinājumu sistema

$$\left.\begin{array}{l} a_1\xi_1 + b_1\xi_2 + c_1\xi_3 + \ldots + i_1\xi_i - \lambda_1 = v_1 \\ a_2\xi_1 + b_2\xi_2 + c_2\xi_3 + \ldots + i_2\xi_i - \lambda_2 = v_2 \\ a_3\xi_1 + b_3\xi_2 + c_3\xi_3 + \ldots + i_3\xi_i - \lambda_3 = v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\xi_1 + b_n\xi_2 + c_n\xi_3 + \ldots + i_n\xi_i - \lambda_n = v_n \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (371),$$

kas zīmējas uz vienādas noteiktības novērojumiem ar svaru 1*). Tad, kā zinams, atbilstošā normalnolīdzinājumu sistema ir

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\xi_1 + [ab]\xi_2 + [ac]\xi_3 + \ldots + [ai]\xi_i - [a\lambda] = 0 \\ [ab]\xi_1 + [bb]\xi_2 + [bc]\xi_3 + \ldots + [bi]\xi_i - [b\lambda] = 0 \\ [ac]\xi_1 + [bc]\xi_2 + [cc]\xi_3 + \ldots + [ci]\xi_i - [c\lambda] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ai]\xi_1 + [bi]\xi_2 + [ci]\xi_3 + \ldots + [ii]\xi_i - [i\lambda] = 0 \end{array}\right\} \quad (372).$$

Lai no minētiem kļūdu nolīdzinājumiem izslēgtu pirmo nezinamo ξ_1 pēc Schreiber'a paņēmiena, sistemu (371) papildinot ar pirmo normalnolīdzinājumu (372), visos nolīdzinājumos atmet pirmo nezinamo ξ_1 saturošos locekļus, un līdz ar to nolīdzinājumu labās puses veidojošos elementus atvieto ar v_1', v_2', v_3', ..., v_n' un v_a'.

---

*) Nepakavējoties pie sīkumiem, aizrādam, ka iztirzātais paņēmiens ar atbilstošiem grozijumiem pielietojams arī dažādas noteiktības gadijumā (sk. § 46).

Tā veidotiem fiktiviem kļūdu nolīdzinājumiem resp. to brīviem locekļiem piešķir svarus 1, izņemot pēdējo nolīdzinājumu, kuram piešķir svaru $-\frac{1}{[aa]}$.

Tā tad pēc Schreiber'a paņēmiena no sistemas (371) atvasinātā fiktivo kļūdu nolīdzinājumu sistema ir

$$\left.\begin{array}{llll}
b_1\xi_2 + c_1\xi_3 + \ldots + i_1\xi_i - \lambda_1 = v_1' & \text{ar svaru} & 1 \\
b_2\xi_2 + c_2\xi_3 + \ldots + i_2\xi_i - \lambda_2 = v_2' & \text{"} \quad \text{"} & 1 \\
b_3\xi_2 + c_3\xi_3 + \ldots + i_3\xi_i - \lambda_3 = v_3' & \text{"} \quad \text{"} & 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
b_n\xi_2 + c_n\xi_3 + \ldots + i_n\xi_i - \lambda_n = v_n' & \text{"} \quad \text{"} & 1 \\
[ab]\xi_2 + [ac]\xi_3 + \ldots + [ai]\xi_i - [a\lambda] = v_a' & \text{"} \quad \text{"} & -\frac{1}{[aa]}
\end{array}\right\} \quad (373).$$

Lietojot šos nolīdzinājumus kā dažādas noteiktības novērojumiem atbilstošus kļūdu nolīdzinājumus un ievērojot augšā minētos svarus, no sistemas (373) parastā kārtā atvasinama normalnolīdzinājumu sistema

$$\left.\begin{array}{l}
[bb.1]\xi_2 + [bc.1]\xi_3 + \ldots + [bi.1]\xi_i - [b\lambda.1] = 0 \\
[bc.1]\xi_2 + [cc.1]\xi_3 + \ldots + [ci.1]\xi_i - [c\lambda.1] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[bi.1]\xi_2 + [ci.1]\xi_3 + \ldots + [ii.1]\xi_i - [i\lambda.1] = 0
\end{array}\right\} \quad (374),$$

kur koeficientu un brīvo locekļu apzīmēšanai lietotiem simboliem ir pazīstamā, Gauss'a algoritmā parastā nozīme.

Kā zinams, tie paši nolīdzinājumi (374) atrodami parastā kārtā veidojot un vienreiz reducējot kļūdu nolīdzinājumiem (371) atbilstošos normalnolīdzinājumus (372). Tā tad kļūdu nolīdzinājumu sistemas atvietošana ar Schreiber'a fiktivo kļūdu nolīdzinājumu sistemu un tai atbilstošo normalnolīdzinājumu veidošana iznākuma ziņā līdzvērtīga dotai kļūdu nolīdzinājumu sistemai atbilstošo normalnolīdzinājumu veidošanai un pirmai reducēšanai.

Līdzīgā veidā var izslēgt arī nākošo, otro nezinamo ξ_2. Tam nolūkam, sistemu (373) papildinot ar pirmo normalnolīdzinājumu (374), visos nolīdzinājumos atmet nezinamo ξ_2 saturošos locekļus, bet labās puses veidojošos elementus atvieto ar v_1'', v_2'', v_3'', ..., v_n'', v_a'' un v_b''. Kas zīmējas uz svariem, tad no sistemas (373) atvasinātiem nolīdzinājumiem atbilstošie svari paliek tie paši, kā sistemā (373); bet klāt pienākušam pēdējam nolīdzinājumam piešķir svaru $-\frac{1}{[bb.1]}$.

Tādā veidā rodas šāda jauna fiktivu kļūdu nolīdzinājumu sistema:

$$\left.\begin{array}{llllll}
c_1\xi_3 + \ldots + i_1\xi_i & - & \lambda_1 & = v_1'' & \text{ar svaru} & 1 \\
c_2\xi_3 + \ldots + i_2\xi_i & - & \lambda_2 & = v_2'' & ,, \quad ,, & 1 \\
c_3\xi_3 + \ldots + i_3\xi_i & - & \lambda_3 & = v_3'' & ,, \quad ,, & 1 \\
\multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
c_n\xi_3 + \ldots + i_n\xi_i & - & \lambda_n & = v_n'' & ,, \quad ,, & 1 \\
[ac]\xi_3 + \ldots + [ai]\xi_i & - & [a\lambda] & = v_a'' & ,, \quad ,, & -\dfrac{1}{[aa]} \\
[bc.1]\xi_3 + \ldots + [bi.1]\xi_i & - & [b\lambda.1] & = v_b'' & ,, \quad ,, & -\dfrac{1}{[bb.1]}
\end{array}\right\} \quad (375).$$

Lietojot šos nolīdzinājumus kā dažādas noteiktības novērojumu kļūdu nolīdzinājumus, atbilstošie normalnolīdzinājumi

$$\left.\begin{array}{l}
[cc.2]\xi_3 + \ldots + [ci.2]\xi_i - [c\lambda.2] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[ci.2]\xi_3 + \ldots + [ii.2]\xi_i - [i\lambda.2] = 0
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (376)$$

ir identiski ar divreiz reducētiem normalnolīdzinājumiem (372).

Tā turpinot, var izslēgt arī nākošos nezinamos, pie kam atbilstoši pieaug fiktivo kļūdu nolīdzinājumu skaits.

Kas zīmējas uz fiktivo kļūdu nolīdzinājumu sistemu elementiem v', v'', ..., tad tie nav identiski ar kļūdu nolīdzinājumu (371) atbilstošiem elementiem v. Piem., salīdzinot sistemu (373) ar (371) un ar pirmo normalnolīdzinājumu (372), atrodam, ka

$$\left.\begin{array}{l}
v_1' = v_1 - a_1\xi_1 \\
v_2' = v_2 - a_2\xi_1 \\
v_3' = v_3 - a_3\xi_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n' = v_n - a_n\xi_1 \\
v_a' = \quad -[aa]\xi_1
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (377).$$

Vispārējā veidā apzīmējot ar p' sistemas (373) atsevišķiem nolīdzinājumiem atbilstošos svarus, veidojam sumu

$$[p'v'v'] = p_1'(v_1')^2 + p_2'(v_2')^2 + p_3'(v_3')^2 + \ldots + p_n'(v_n')^2 + p_a'(v_a')^2 =$$
$$= (v_1')^2 + (v_2')^2 + (v_3')^2 + \ldots + (v_n')^2 - \frac{1}{[aa]}(v_a')^2 \quad (378).$$

Ievērojot (377), šīs sumas atsevišķie locekļi izsakami šādā veidā:

$$\left.\begin{aligned} (v_1')^2 &= v_1^2 - 2a_1v_1\xi_1 + a_1^2\xi_1^2 \\ (v_2')^2 &= v_2^2 - 2a_2v_2\xi_1 + a_2^2\xi_1^2 \\ (v_3')^2 &= v_3^2 - 2a_3v_3\xi_1 + a_3^2\xi_1^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (v_n')^2 &= v_n^2 - 2a_nv_n\xi_1 + a_n^2\xi_1^2 \\ -\frac{1}{[aa]}(v_s')^2 &= \qquad\qquad - [aa]\xi_1^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (379).$$

Sumējot šīs izteiksmes un ievērojot (378), atrodam, ka

$$\begin{aligned} [p'v'v'] &= [vv] - 2[av]\xi_1 + \{[aa] - [aa]\}\xi_1^2 = \\ &= [vv] - 2[av]\xi_1 \quad \ldots \quad (380). \end{aligned}$$

Lai pazītu šīs formulas pēdējā locekļa nozīmi, reizinot nolīdzinājumus (371) ar a_1, a_2, $a_3, \ldots$, a_n, veidojam sekojošās izteiksmes un to sumu [av]:

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1 &= a_1a_1\xi_1 + a_1b_1\xi_2 + a_1c_1\xi_3 + \ldots + a_1i_1\xi_i - a_1\lambda_1 \\ a_2v_2 &= a_2a_2\xi_1 + a_2b_2\xi_2 + a_2c_2\xi_3 + \ldots + a_2i_2\xi_i - a_2\lambda_2 \\ a_3v_3 &= a_3a_3\xi_1 + a_3b_3\xi_2 + a_3c_3\xi_3 + \ldots + a_3i_3\xi_i - a_3\lambda_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nv_n &= a_na_n\xi_1 + a_nb_n\xi_2 + a_nc_n\xi_3 + \ldots + a_ni_n\xi_i - a_n\lambda_n \\ \hline [av] &= [aa]\xi_1 + [ab]\xi_2 + [ac]\xi_3 + \ldots + [ai]\xi_i - [a\lambda] \end{aligned}\right\} \quad (381).$$

Salīdzinot atrasto sumas [av] izteiksmi ar pirmo normalnolīdzinājumu (372), redzams, ka

$$[av] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (382);$$

no tā seko, ka

$$[p'v'v'] = [vv] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (383).$$

Apzīmējot vispārējā veidā ar p″ sistemas (375) atsevišķiem nolīdzinājumiem atbilstošos svarus, līdzīgā veidā pierādams, ka arī [p″v″v″] = [vv], u. t. t. Tā tad, pēc nezinamo atrašanas, sumas [vv] skaitliskā vērtība nosakama ne tikai no pašu kļūdu nolīdzinājumu sistemas, bet arī no katras atbilstošas fiktivo kļūdu nolīdzinājumu sistemas (373), (375), u. t. t., kas, starp citu, var noderēt attiecīgā skaitliskā rēķina kontrolei.

Izslēdzot nezinamos pēc Schreiber'a paņēmiena, nezinamo noteikšana notiek šādā kārtā.

Kad pēc minētā paņēmiena izslēdzot tam nozīmētos nezinamos, veidota attiecīgo fiktivo kļūdu nolīdzinājumu sistema, tad sastāda visus tai atbilstošos normalnolīdzinājumus, kur, saprotams, trūkst izslēgtie nezinamie. Pazīstamā kārtā reducējot un atslēdzot šos normalnolīdzinājumus, nosaka tur ieejošos nezinamos; vajadzības gadijumā sakarā ar to arī nosaka parastā kārtā šo nezinamo svaru koeficientus. Minētos normalnolīdzinājumos trūkstošie nezinamie pēc tam nosakami no tiem atsevišķiem normalnolīdzinājumiem, kuri tika lietoti fiktivo kļūdu nolīdzinājumu sistemu veidošanai. Lai noteiktu šo nezinamo svaru koeficientus, atsevišķi jāizdara attiecīgo svaru nolīdzinājumu sistemu reducēšana tanīs pirmās pakāpēs, kurās faktiskiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošo normalnolīdzinājumu reducēšana atvietota ar fiktivo kļūdu nolīdzinājumu veidošanu. Minēto svaru nolīdzinājumu reducēšanas turpināšana pārējās pakāpēs izdarama sakarā ar lietotās normalnolīdzinājumu sistemas reducēšanu.

Tāpat kā ar kļūdu nolīdzinājumu reducēšanu, arī ar nezinamo izslēgšanu pēc Schreiber'a paņēmiena vispārīgi nav panākams ievērojams atvieglojums netiešu novērojumu izlīdzināšanas darbā. Tas tomēr neizslēdz, ka šī paņēmiena pielietošana var būt izdevīga zinamos tai sevišķi labvēlīgos apstākļos.

Tādi labvēlīgi apstākļi ir, kad kādam nezinamam, piem., pirmam ξ_1, visos kļūdu nolīdzinājumos ir vienāds koeficients $+1$ vai -1. Pieņemot, ka kļūdu nolīdzinājumu sistemā (371)

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_n = +1 \\ \text{vai} \\ a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_n = -1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (384),$$

fiktivo kļūdu nolīdzinājumu sistemas (373) pēdējais nolīdzinājums pāriet veidā

$$\left.\begin{array}{l} [b]\xi_2 + [c]\xi_3 + \ldots + [i]\xi_i - [\lambda] = \quad v_a{}' \\ \text{vai} \\ [b]\xi_2 + [c]\xi_3 + \ldots + [i]\xi_i - [\lambda] = -v_a{}' \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (385),$$

pie kam svars $p_a{}'$ abos gadijumos ir

$$p_a{}' = -\frac{1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (386).$$

Kā redzams, nolīdzinājuma (385) kreisā puse ir sistemas (373) pārējo nolīdzinājumu kreiso pušu suma. Tā tad apskatītā atsevišķā gadijumā pirmā nezinamā ξ_1 izslēgšana pēc Schreiber'a paņēmiena izdarama ļoti viegli. Pēc tam veidojot fiktivo kļūdu nolīdzinājumu sistemai atbilstošos normalnolīdzinājumus un tos parastā kārtā reducējot un atslēdzot, no šiem nolīdzinājumiem atrodami visi pārējie nezinamie, eventuali sakarā ar to nosakot arī atbilstošos svaru koeficientus. No kļūdu nolīdzinājumiem izslēgtais nezinamais ξ_1 nosakams no pirmā normalnolīdzinājuma (372), kurš šeit pieņemtos apstākļos pāriet veidā

$$\left.\begin{array}{l} n\xi_1 + [b]\xi_2 + [c]\xi_3 + \ldots + [i]\xi_i - [\lambda] = 0 \\ \text{vai} \\ n\xi_1 - [b]\xi_2 - [c]\xi_3 - \ldots - [i]\xi_i + [\lambda] = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (387).$$

Ja ir šeit pieņemtie labvēlīgie apstākļi, un pie tam nav jānosaka no kļūdu nolīdzinājumiem izslēgtā nezinamā svara koeficients, tad Schreiber'a paņēmiena pielietošana jāatzīst par noteikti izdevīgu.

Vēl piezīmējam, ka pēc būtības nekas negrozas, ja šeit apskatītos atsevišķos apstākļos, vai arī vispārējā gadījumā, izslēdzamais nezinamais nav vis pēc kārtas pirmais dotos kļūdu nolīdzinājumos. Tikai jāievēro, ka vispārīgi fiktivo kļūdu nolīdzinājumu veidošanai jālieto tas normalnolīdzinājums, kur izslēdzamais nezinamais ieiet ar kvadratiska tipa koeficientu.

Schreiber'a paņēmiena pielietošanai labvēlīgi apstākļi ir arī tad, kad dotie kļūdu nolīdzinājumi iedalami grupās pa „vietējiem nezinamiem", no kuriem katrs, ar vienādu koeficientu $+1$ vai -1 ieejot vienas grupas visos atsevišķos nolīdzinājumos, trūkst visās pārējās nolīdzinājumu grupās. Bez šiem vietējiem nezinamiem var būt neaprobežotā skaitā un ar visādiem koeficientiem „vispārēji nezinami", kas ieiet vairākās, vai pat visās kļūdu nolīdzinājumu grupās.

Tādos apstākļos fiktivos kļūdu nolīdzinājumus var veidot tā, lai reizē izslēgtos visi vietējie nezinamie.

Lai ir dota minētiem noteikumiem atbilstošā kļūdu nolīdzinājumu sistema ar vietējiem nezinamiem $\tau_1, \tau_2, \ldots\ldots, \tau_r$ un vispārējiem nezinamiem $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_i$:

$$1) \left\{\begin{array}{llllllll} \tau_1 + {}_1b_1\xi_1 & + {}_1c_1\xi_2 & + \ldots + {}_1i_1\xi_i & - {}_1\lambda_1 & = {}_1v_1 & \text{ar svaru} & 1 \\ \tau_1 + {}_1b_2\xi_1 & + {}_1c_2\xi_2 & + \ldots + {}_1i_2\xi_i & - {}_1\lambda_2 & = {}_1v_2 & \text{,,} \quad \text{,,} & 1 \\ \tau_1 + {}_1b_3\xi_1 & + {}_1c_3\xi_2 & + \ldots + {}_1i_3\xi_i & - {}_1\lambda_3 & = {}_1v_3 & \text{,,} \quad \text{,,} & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ \tau_1 + {}_1b_{n_1}\xi_1 & + {}_1c_{n_1}\xi_2 & + \ldots + {}_1i_{n_1}\xi_i & - {}_1\lambda_{n_1} & = {}_1v_{n_1} & \text{,,} \quad \text{,,} & 1 \end{array}\right| \quad (388).$$

$$
\left.\begin{array}{l}
2)\left\{\begin{array}{lr}
\tau_2 + {}_2b_1\xi_1 + {}_2c_1\xi_2 + \ldots + {}_2i_1\xi_i - {}_2\lambda_1 = {}_2v_1 & \text{ar svaru } 1 \\
\tau_2 + {}_2b_2\xi_1 + {}_2c_2\xi_2 + \ldots + {}_2i_2\xi_i - {}_2\lambda_2 = {}_2v_2 & \text{,, ,, } 1 \\
\tau_2 + {}_2b_3\xi_1 + {}_2c_3\xi_2 + \ldots + {}_2i_3\xi_i - {}_2\lambda_3 = {}_2v_3 & \text{,, ,, } 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\tau_2 + {}_2b_{n_2}\xi_1 + {}_2c_{n_2}\xi_2 + \ldots + {}_2i_{n_2}\xi_i - {}_2\lambda_{n_2} = {}_2v_{n_2} & \text{,, ,, } 1
\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r)\left\{\begin{array}{lr}
\tau_r + {}_rb_1\xi_1 + {}_rc_1\xi_2 + \ldots + {}_ri_1\xi_i - {}_r\lambda_1 = {}_rv_1 & \text{,, ,, } 1 \\
\tau_r + {}_rb_2\xi_1 + {}_rc_2\xi_2 + \ldots + {}_ri_2\xi_i - {}_r\lambda_2 = {}_rv_2 & \text{,, ,, } 1 \\
\tau_r + {}_rb_3\xi_1 + {}_rc_3\xi_2 + \ldots + {}_ri_3\xi_i - {}_r\lambda_3 = {}_rv_3 & \text{,, ,, } 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\tau_r + {}_rb_{n_r}\xi_1 + {}_rc_{n_r}\xi_2 + \ldots + {}_ri_{n_r}\xi_i - {}_r\lambda_{n_r} = {}_rv_{n_r} & \text{,, ,, } 1
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (388).
$$

Šīs sistemas pa atsevišķiem vietējiem nezinamiem τ veidotās grupas uzskatot par parcialām kļūdu nolīdzinājumu sistemām, var veidot atbilstošās normalnolīdzinājumu un fiktivo kļūdu nolīdzinājumu parcialās sistemas. Sumējot pēdējām atbilstošās normalnolīdzinājumu sistemas pa korespondējošiem nolīdzinājumiem, rodas uz visu sistemu (388) attiecīgā vispārējā normalnolīdzinājumu sistema.

Minēto parcialo normalnolīdzinājumu sistemu pirmie nolīdzinājumi ir

$$
\left.\begin{array}{l}
n_1\tau_1 + {}_1[b]\xi_1 + {}_1[c]\xi_2 + \ldots + {}_1[i]\xi_i - {}_1[\lambda] = 0 \\
n_2\tau_2 + {}_2[b]\xi_1 + {}_2[c]\xi_2 + \ldots + {}_2[i]\xi_i - {}_2[\lambda] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n_r\tau_r + {}_r[b]\xi_1 + {}_r[c]\xi_2 + \ldots + {}_r[i]\xi_i - {}_r[\lambda] = 0
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (389).
$$

Pēc piederības lietojot atsevišķos nolīdzinājumus (389), veidojamas parcialām sistemām (388) atbilstošās parcialās fiktivo kļūdu nolīdzinājumu sistemas:

$$
1)\left\{\begin{array}{lr}
{}_1b_1\xi_1 + {}_1c_1\xi_2 + \ldots + {}_1i_1\xi_i - {}_1\lambda_1 = {}_1v_1' & \text{ar svaru } 1 \\
{}_1b_2\xi_1 + {}_1c_2\xi_2 + \ldots + {}_1i_2\xi_i - {}_1\lambda_2 = {}_1v_2' & \text{,, ,, } 1 \\
{}_1b_3\xi_1 + {}_1c_3\xi_2 + \ldots + {}_1i_3\xi_i - {}_1\lambda_3 = {}_1v_3' & \text{,, ,, } 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
{}_1b_{n_1}\xi_1 + {}_1c_{n_1}\xi_2 + \ldots + {}_1i_{n_1}\xi_i - {}_1\lambda_{n_1} = {}_1v_{n_1}' & \text{,, ,, } 1 \\
{}_1[b]\xi_1 + {}_1[c]\xi_2 + \ldots + {}_1[i]\xi_i - {}_1[\lambda] = {}_1v_a' & \text{,, ,, } -\dfrac{1}{n_1}
\end{array}\right| \quad (390).
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
2)\left\{
\begin{array}{lr}
{}_2b_1\xi_1 + {}_2c_1\xi_2 + \ldots + {}_2i_1\xi_i - {}_2\lambda_1 = {}_2v_1' \text{ ar svaru} & 1 \\
{}_2b_2\xi_1 + {}_2c_2\xi_2 + \ldots + {}_2i_2\xi_i - {}_2\lambda_2 = {}_2v_2' \quad \text{„} \quad \text{„} & 1 \\
{}_2b_3\xi_1 + {}_2c_3\xi_2 + \ldots + {}_2i_3\xi_i - {}_2\lambda_3 = {}_2v_3' \quad \text{„} \quad \text{„} & 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
{}_2b_{n_2}\xi_1 + {}_2c_{n_2}\xi_2 + \ldots + {}_2i_{n_2}\xi_i - {}_2\lambda_{n_2} = {}_2v_{n_2}' \quad \text{„} \quad \text{„} & 1 \\
{}_2[b]\xi_1 + {}_2[c]\xi_2 + \ldots + {}_2[i]\xi_i - {}_2[\lambda] = {}_2v_a' \quad \text{„} \quad \text{„} & -\frac{1}{n_2}
\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r)\left\{
\begin{array}{lr}
{}_rb_1\xi_1 + {}_rc_1\xi_2 + \ldots + {}_ri_1\xi_i - {}_r\lambda_1 = {}_rv_1' \quad \text{„} \quad \text{„} & 1 \\
{}_rb_2\xi_1 + {}_rc_2\xi_2 + \ldots + {}_ri_2\xi_i - {}_r\lambda_2 = {}_rv_2' \quad \text{„} \quad \text{„} & 1 \\
{}_rb_3\xi_1 + {}_rc_3\xi_2 + \ldots + {}_ri_3\xi_i - {}_r\lambda_3 = {}_rv_3' \quad \text{„} \quad \text{„} & 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
{}_rb_{n_r}\xi_1 + {}_rc_{n_r}\xi_2 + \ldots + {}_ri_{n_r}\xi_i - {}_r\lambda_{n_r} = {}_rv_{n_r}' \quad \text{„} \quad \text{„} & 1 \\
{}_r[b]\xi_1 + {}_r[c]\xi_2 + \ldots + {}_r[i]\xi_i - {}_r[\lambda] = {}_rv_a' \quad \text{„} \quad \text{„} & -\frac{1}{n_r}
\end{array}\right.
\end{array}
\right\} \quad (390).
$$

Atbilstošās parcialās normalnolīdzinājumu sistemas ir

$$
\left.
\begin{array}{l}
1)\left\{
\begin{array}{l}
{}_1[bb.1]\xi_1 + {}_1[bc.1]\xi_2 + \ldots + {}_1[bi.1]\xi_i - {}_1[b\lambda.1] = 0 \\
{}_1[bc.1]\xi_1 + {}_1[cc.1]\xi_2 + \ldots + {}_1[ci.1]\xi_i - {}_1[c\lambda.1] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_1[bi.1]\xi_1 + {}_1[ci.1]\xi_2 + \ldots + {}_1[ii.1]\xi_i - {}_1[i\lambda.1] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}_1[\lambda\lambda.1]
\end{array}\right. \\
2)\left\{
\begin{array}{l}
{}_2[bb.1]\xi_1 + {}_2[bc.1]\xi_2 + \ldots + {}_2[bi.1]\xi_i - {}_2[b\lambda.1] = 0 \\
{}_2[bc.1]\xi_1 + {}_2[cc.1]\xi_2 + \ldots + {}_2[ci.1]\xi_i - {}_2[c\lambda.1] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_2[bi.1]\xi_1 + {}_2[ci.1]\xi_2 + \ldots + {}_2[ii.1]\xi_i - {}_2[i\lambda.1] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}_2[\lambda\lambda.1]
\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r)\left\{
\begin{array}{l}
{}_r[bb.1]\xi_1 + {}_r[bc.1]\xi_2 + \ldots + {}_r[bi.1]\xi_i - {}_r[b\lambda.1] = 0 \\
{}_r[bc.1]\xi_1 + {}_r[cc.1]\xi_2 + \ldots + {}_r[ci.1]\xi_i - {}_r[c\lambda.1] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_r[bi.1]\xi_1 + {}_r[ci.1]\xi_2 + \ldots + {}_r[ii.1]\xi_i - {}_r[i\lambda.1] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad {}_r[\lambda\lambda.1]
\end{array}\right.
\end{array}
\right\} \quad (391).
$$

Šo parcialo sistemu normalnolīdzinājumus pēc piederības sumējot, rodas vispārējā normalnolīdzinājumu sistema

$$\left.\begin{array}{l}
[bb.1]\xi_1 + [bc.1]\xi_2 + \ldots + [bi.1]\xi_i - [b\lambda.1] = 0 \\
[bc.1]\xi_1 + [cc.1]\xi_2 + \ldots + [ci.1]\xi_i - [c\lambda.1] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[bi.1]\xi_1 + [ci.1]\xi_2 + \ldots + [ii.1]\xi_i - [i\lambda.1] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\lambda\lambda.1]
\end{array}\right\} \quad (392),$$

kur trūkst visi vietējie nezinamie τ.

Attiecībā uz nolīdzinājumos (391) un (392) lietotiem Gauss'a algoritma simboliem piezīmēsim, ka tiem ir parastā nozīme, ja ievēro, ka katrā parciālā kļūdu nolīdzinājumu sistemā (388) attiecīgais τ skaitas par pirmo nezinamo un tāpēc visi a-tipa koeficienti ir vienādi ar 1.

Parastā kārtā reducējot un atslēdzot vispārējo normalnolīdzinājumu sistemu (392), nosakami visi vispārējie nezinamie ξ, un sakarā ar to arī atrodami šo nezinamo svaru koeficienti. Ieliekot atrastos ξ normalnolīdzinājumos (389), no tiem nosakami arī vietējie nezinamie τ.

Šeit pieņemtos apstākļos pielietojot Schreiber'a paņēmienu, skaitliskā rēķinā rodas zinamas ērtības, ja nolīdzinājumu (388) katrā grupā brīvo locekļu suma ir vienāda ar nulli. Tas viegli panākams, ja nolīdzinājumi (388) paši pazīstamā kārtā tiek atvasināti no citiem, arī lineārā veidā dotiem kļūdu nolīdzinājumiem ar citiem vietējiem nezinamiem $t_1, t_2, \ldots, t_r$ un vispārējiem nezinamiem $x_1, x_2, \ldots, x_i$, kur vietējo nezinamo koeficienti visi vienādi ar 1.

Piemēra veidā apskatīsim tādu pirmatnēju kļūdu nolīdzinājumu pirmo grupu

$$\left.\begin{array}{l}
t_1 + {}_1b_1x_1 + {}_1c_1x_2 + \ldots + {}_1i_1x_i - {}_1l_1 = {}_1v_1 \\
t_1 + {}_1b_2x_1 + {}_1c_2x_2 + \ldots + {}_1i_2x_i - {}_1l_2 = {}_1v_2 \\
t_1 + {}_1b_3x_1 + {}_1c_3x_2 + \ldots + {}_1i_3x_i - {}_1l_3 = {}_1v_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t_1 + {}_1b_{n_1}x_1 + {}_1c_{n_1}x_2 + \ldots + {}_1i_{n_1}x_i - {}_1l_{n_1} = {}_1v_{n_1}
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (393).$$

Veidojot atbilstošos pārvērstos kļūdu nolīdzinājumus ar nezinamiem $\tau_1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi^i$, kā zinams, nolīdzinājumu (393) nezinamos atvieto ar izteiksmēm

$$\left.\begin{array}{l}
t_1 = (t_1) + \tau_1 \\
x_1 = (x_1) + \xi_1 \\
x_2 = (x_2) + \xi_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_i = (x_i) + \xi_i
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (394),$$

kur (t_1), (x_1), (x_2), ..., (x_i) ir pieņemtās attiecīgo nezinamo tuvinās vērtības. Tad rodas nolīdzinājumu (388) pirmā grupa ar šādiem brīviem locekļiem $-_1\lambda$ un to sumu $-_1[\lambda]$:

$$\left.\begin{aligned}
-_1\lambda_1 &= (t_1) + \{_1b_1(x_1) + {_1c_1}(x_2) + \ldots + {_1i_1}(x_i) - {_1l_1}\} \\
-_1\lambda_2 &= (t_1) + \{_1b_2(x_1) + {_1c_2}(x_2) + \ldots + {_1i_2}(x_i) - {_1l_2}\} \\
-_1\lambda_3 &= (t_1) + \{_1b_3(x_1) + {_1c_3}(x_2) + \ldots + {_1i_3}(x_i) - {_1l_3}\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-_1\lambda_{n_1} &= (t_1) + \{_1b_{n_1}(x_1) + {_1c_{n_1}}(x_2) + \ldots + {_1i_{n_1}}(x_i) - {_1l_{n_1}}\} \\
\hline
-_1[\lambda] &= n_1(t_1) + \{_1[b](x_1) + {_1[c]}(x_2) + \ldots + {_1[i]}(x_i) - {_1[l]}\} = \\
&= n_1(t_1) - \{_1[l] - {_1[b]}(x_1) - {_1[c]}(x_2) - \ldots - {_1[i]}(x_i)\}
\end{aligned}\right\} \quad (395).$$

Tā tad, lai $-_1[\lambda]$ būtu vienāds ar nulli, grupas vietējā nezinamā tuvinā vērtība jāizvēlas

$$(t_1) = \frac{_1[l] - {_1[b]}(x_1) - {_1[c]}(x_2) - \ldots - {_1[i]}(x_i)}{n_1} \quad . \quad . \quad (396).$$

Pēc šīs formulas parauga nosakamas arī pārējo vietējo nezinamo tuvinās vērtības, lai visās nolīdzinājumu (388) grupās attiecīgo brīvo locekļu sumas būtu vienādas ar nulli.

Piemērs. Dota sekojošā, uz vienādas noteiktības novērojumiem attiecīgā kļūdu nolīdzinājumu sistema:

$$1)\left\{\begin{array}{llllr}
t_1 & & & - & 0^0 00'00{,}0'' = {_1v_1} \\
t_1 + x_1 & & & - & 48\ 24\ 35{,}5 = {_1v_2} \\
t_1 & + x_2 & & - & 107\ 33\ 07{,}5 = {_1v_3} \\
t_1 & & + x_3 & - & 215\ 41\ 22{,}0 = {_1v_4}
\end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{llllr}
t_2 & & & - & 0^0 00'00{,}0'' = {_2v_1} \\
t_2 + x_1 & & & - & 48\ 24\ 31{,}0 = {_2v_2} \\
t_2 & & + x_3 & - & 215\ 41\ 22{,}5 = {_2v_3}
\end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{llllr}
t_3 & & & - & 0^0 00'00{,}0'' = {_3v_1} \\
t_3 & + x_2 & & - & 107\ 33\ 06{,}0 = {_3v_2} \\
t_3 & & + x_3 & - & 215\ 41\ 25{,}5 = {_3v_3}
\end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{llllr}
t_4 & & & - & 0^0 00'00{,}0'' = {_4v_1} \\
t_4 & + x_2 & & - & 107\ 33\ 01{,}5 = {_4v_2}
\end{array}\right.$$

$$5)\begin{cases} t_5 & & - & 0^0\,00'00{,}0'' = {}_5v_1 \\ t_5 + x_1 & & - & 48\;24\;33{,}0 = {}_5v_2 \\ t_5 & + x_3 & - & 215\;41\;20{,}0 = {}_5v_3 \end{cases}$$

$$6)\begin{cases} t_6 & & - & 0^0\,00'00{,}0'' = {}_6v_1 \\ t_6 & + x_2 & - & 107\;33\;04{,}5 = {}_6v_2 \\ t_6 & + x_3 & - & 215\;41\;21{,}5 = {}_6v_3 \end{cases}$$

Jānosaka vispārējo nezinamo x_1, x_2, x_3 izlīdzinātās vērtības un atbilstošās vidējās kļūdas m_1, m_2, m_3.

Tā kā doto kļūdu nolīdzinājumu brīvie locekļi ir lieli, skaitliskā rēķinā neparocīgi skaitļi, veidojam atbilstošos pārvērstos kļūdu nolīdzinājumus ar jauniem nezinamiem τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5, τ_6 un ξ_1, ξ_2, ξ_3. Vadoties ar dotiem nolīdzinājumiem, izvēlamies vispārējo nezinamo ξ tuvinās vērtības un pieņemam

$$\begin{aligned} x_1 &= 48^0 24' 30{,}0'' + \xi_1 \\ x_2 &= 107\;33\;00{,}0 + \xi_2 \\ x_3 &= 215\;41\;20{,}0 + \xi_3 \end{aligned}$$

Lai pārvērsto kļūdu nolīdzinājumu atsevišķās grupās brīvo locekļu sumas būtu vienādas ar nulli, vietējo nezinamo tuvinās vērtības (t_1), (t_2), (t_3), (t_4), (t_5), (t_6) nosakam pēc formulas (396) parauga. Ievērojot doto kļūdu nolīdzinājumu attiecīgo grupu brīvos locekļus, koeficientus un nolīdzinājumu skaitu, un arī pieņemtās vispārējo nezinamo tuvinās vērtības, atrodam

$$\begin{aligned} (t_1) &= 3{,}75'' \\ (t_2) &= 1{,}16_7 \\ (t_3) &= 3{,}83_3 \\ (t_4) &= 0{,}75 \\ (t_5) &= 1{,}00 \\ (t_6) &= 2{,}00 \end{aligned}$$

Lietojot minētās nezinamo tuvinās vērtības un pieņemot nezinamos un brīvos locekļus izteiktus sekundās, pārvērstie kļūdu nolīdzinājumi ir:

$$1)\begin{cases} \tau_1 & & & + 3{,}75_0 = {}_1v_1 \\ \tau_1 + \xi_1 & & & - 1{,}75_0 = {}_1v_2 \\ \tau_1 & + \xi_2 & & - 3{,}75_0 = {}_1v_3 \\ \tau_1 & & + \xi_3 & + 1{,}75_0 = {}_1v_4 \end{cases}$$

$$2)\left\{\begin{array}{l}\tau_2 + 1{,}16_7 = {}_2v_1\\ \tau_2 + \xi_1 + 0{,}16_7 = {}_2v_2\\ \tau_2 + \xi_3 - 1{,}33_3 = {}_2v_3\end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{l}\tau_3 + 3{,}83_3 = {}_3v_1\\ \tau_3 + \xi_2 - 2{,}16_7 = {}_3v_2\\ \tau_3 + \xi_3 - 1{,}66_7 = {}_3v_3\end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{l}\tau_4 + 0{,}75_0 = {}_4v_1\\ \tau_4 + \xi_2 - 0{,}75_0 = {}_4v_2\end{array}\right.$$

$$5)\left\{\begin{array}{l}\tau_5 + 1{,}00_0 = {}_5v_1\\ \tau_5 + \xi_1 - 2{,}00_0 = {}_5v_2\\ \tau_5 + \xi_3 + 1{,}00_0 = {}_5v_3\end{array}\right.$$

$$6)\left\{\begin{array}{l}\tau_6 + 2{,}00_0 = {}_6v_1\\ \tau_6 + \xi_2 - 2{,}50_0 = {}_6v_2\\ \tau_6 + \xi_3 + 0{,}50_0 = {}_6v_3\end{array}\right.$$

Pēc Schreiber'a paņēmiena izslēdzot vietējos nezinamos, atbilstošie fiktivie kļūdu nolīdzinājumi ar attiecīgiem svariem p' un koeficientu sumām s ir:

$$\begin{array}{lrcc} & & p' & s\\ 1)\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{r}+3{,}75_0 = {}_1v_1'\\ \xi_1 \qquad -1{,}75_0 = {}_1v_2'\\ \xi_2 \qquad -3{,}75_0 = {}_1v_3'\\ \xi_3 + 1{,}75_0 = {}_1v_4'\\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + 0{,}00_0 = {}_1v_a'\end{array} & \begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\-\frac{1}{4}\end{array} & \begin{array}{c}0\\+1\\+1\\+1\\+3\end{array}\\[2ex] 2)\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{r}+1{,}16_7 = {}_2v_1'\\ \xi_1 \qquad +0{,}16_7 = {}_2v_2'\\ \xi_3 - 1{,}33_3 = {}_2v_3'\\ \xi_1 + \xi_3 + 0{,}00_1 = {}_2v_a'\end{array} & \begin{array}{c}1\\1\\1\\-\frac{1}{3}\end{array} & \begin{array}{c}0\\+1\\+1\\+2\end{array}\\[2ex] 3)\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{r}+3{,}83_3 = {}_3v_1'\\ \xi_2 \qquad -2{,}16_7 = {}_3v_2'\\ \xi_3 - 1{,}66_7 = {}_3v_3'\\ \xi_2 + \xi_3 - 0{,}00_1 = {}_3v_a'\end{array} & \begin{array}{c}1\\1\\1\\-\frac{1}{3}\end{array} & \begin{array}{c}0\\+1\\+1\\+2\end{array}\end{array}$$

$$
4)\left\{\begin{array}{lcrrr}
 & & +0{,}75_0 = {}_4v_1' & 1 & 0 \\
\xi_2 & & -0{,}75_0 = {}_4v_2' & 1 & +1 \\
\xi_2 & & +0{,}00_0 = {}_4v_a' & -\frac{1}{2} & +1
\end{array}\right.
$$

$$
5)\left\{\begin{array}{lcrrr}
 & & +1{,}00_0 = {}_5v_1' & 1 & 0 \\
\xi_1 & & -2{,}00_0 = {}_5v_2' & 1 & +1 \\
 & & \xi_3 + 1{,}00_0 = {}_5v_3' & 1 & +1 \\
\xi_1 & & +\xi_3 + 0{,}00_0 = {}_5v_a' & -\frac{1}{3} & +2
\end{array}\right.
$$

$$
6)\left\{\begin{array}{lcrrr}
 & & +2{,}00_0 = {}_6v_1' & 1 & 0 \\
 & \xi_2 & -2{,}50_0 = {}_6v_2' & 1 & +1 \\
 & & \xi_3 + 0{,}50_0 = {}_6v_3' & 1 & +1 \\
 & \xi_2 & +\xi_3 + 0{,}00_0 = {}_6v_a' & -\frac{1}{3} & +2
\end{array}\right.
$$

Atbilstošos normalnolīdzinājumus un sumu nolīdzinājumu veidojam pa fiktivo kļūdu nolīdzinājumu atsevišķām parcialām sistemām.

1. normalnolīdzinājums:

$$
\begin{array}{lrrrr}
1) & +0{,}750\ \xi_1 & -0{,}250\ \xi_2 & -0{,}250\ \xi_3 & -1{,}750 = 0 \\
2) & +0{,}666_7\ \xi_1 & & -0{,}333_3\ \xi_3 & +0{,}167 = 0 \\
3) & & & & \\
4) & & & & \\
5) & +0{,}666_7\ \xi_1 & & -0{,}333_3\ \xi_3 & -2{,}000 = 0 \\
6) & & & & \\
\hline
\text{1. normalnolīdzinājums:} & +2{,}083\ \xi_1 & -0{,}250\ \xi_2 & -0{,}917\ \xi_3 & -3{,}583 = 0
\end{array}
$$

2. normalnolīdzinājums:

$$
\begin{array}{lrrrr}
1) & -0{,}250\ \xi_1 & +0{,}750\ \xi_2 & -0{,}250\ \xi_3 & -3{,}750 = 0 \\
2) & & & & \\
3) & & +0{,}666_7\ \xi_2 & -0{,}333_3\ \xi_3 & -2{,}167 = 0 \\
4) & & +0{,}500\ \xi_2 & & -0{,}750 = 0 \\
5) & & & & \\
6) & & +0{,}666_7\ \xi_2 & -0{,}333_3\ \xi_3 & -2{,}500 = 0 \\
\hline
\text{2. normalnolīdzinājums:} & -0{,}250\ \xi_1 & +2{,}583\ \xi_2 & -0{,}917\ \xi_3 & -9{,}167 = 0
\end{array}
$$

3. normalnolīdzinājums:

$$\begin{array}{lrrrrl}
1) & -0{,}250\ \xi_1 & -0{,}250\ \xi_2 & +0{,}750\ \xi_3 & +\ 1{,}750 & =0 \\
2) & -0{,}333_3\ \xi_1 & & +0{,}666_7\ \xi_3 & -\ 1{,}333 & =0 \\
3) & & -0{,}333_3\ \xi_2 & +0{,}666_7\ \xi_3 & -\ 1{,}667 & =0 \\
4) & & & & & \\
5) & -0{,}333_3\ \xi_1 & & +0{,}666_7\ \xi_3 & +\ 1{,}000 & =0 \\
6) & & -0{,}333_3\ \xi_2 & +0{,}666_7\ \xi_3 & +\ 0{,}500 & =0 \\
\hline
\text{3. normalnolīdzinājums:} & -0{,}917\ \xi_1 & -0{,}917\ \xi_2 & +3{,}417\ \xi_3 & +\ 0{,}250 & =0
\end{array}$$

Sumu nolīdzinājums:

$$\begin{array}{lrrrrl}
1) & +0{,}250\ \xi_1 & +0{,}250\ \xi_2 & +0{,}250\ \xi_3 & -\ 3{,}750 & =0 \\
2) & +0{,}333_3\ \xi_1 & & +0{,}333_3\ \xi_3 & -\ 1{,}167 & =0 \\
3) & & +0{,}333_3\ \xi_2 & +0{,}333_3\ \xi_3 & -\ 3{,}833 & =0 \\
4) & & +0{,}500\ \xi_2 & & -\ 0{,}750 & =0 \\
5) & +0{,}333_3\ \xi_1 & & +0{,}333_3\ \xi_3 & -\ 1{,}000 & =0 \\
6) & & +0{,}333_3\ \xi_2 & +0{,}333_3\ \xi_3 & -\ 2{,}000 & =0 \\
\hline
\text{Sumu nolīdzinājums:} & +0{,}917\ \xi_1 & +1{,}417\ \xi_2 & +1{,}583\ \xi_3 & -12{,}500 & =0
\end{array}$$

Arī veidojam, ievērojot svarus p', fiktivo kļūdu nolīdzinājumu brīvo locekļu $-\lambda'$ kvadratu locekli $[p'\lambda'\lambda']$:

$$\begin{array}{rr}
1) & 34{,}250 \\
2) & 3{,}167 \\
3) & 22{,}167 \\
4) & 1{,}125 \\
5) & 6{,}000 \\
6) & 10{,}500 \\
\hline
[p'\lambda'\lambda'] = & 77{,}209
\end{array}$$

Tas identisks ar veidotās (392) tipa normalnolīdzinājumu sistemas papildu locekli $[\lambda\lambda.1]$.

Tā tad normalnolīdzinājumu sistema ar atbilstošo sumu nolīdzinājumu un papildu locekli ir:

$$
\begin{array}{r}
+2{,}083\,\xi_1 - 0{,}250\,\xi_2 - 0{,}917\,\xi_3 - 3{,}583 = 0 \\
-0{,}250\,\xi_1 + 2{,}583\,\xi_2 - 0{,}917\,\xi_3 - 9{,}167 = 0 \\
-0{,}917\,\xi_1 - 0{,}917\,\xi_2 + 3{,}417\,\xi_3 + 0{,}250 = 0 \\
\hline
+0{,}917\,\xi_1 + 1{,}417\,\xi_2 + 1{,}583\,\xi_3 - 12{,}500 = 0 \\
+77{,}209
\end{array}
$$

Nelielās pretrunas normalnolīdzinājumu un sumu nolīdzinājuma koeficientos izskaidrojamas ar notikušiem apaļojumiem.

Nākošās lappusēs izdarīta normalnolīdzinājumu un svaru nolīdzinājumu reducēšana un atslēgšana pielikumā aizrādītās saīsinātās schemas 1 vispārējā kārtībā. Lietojot s-tipa sumu kontroles, σ-tipa kontrollocekļi un uz tiem attiecīgie daži svaru nolīdzinājumu brīvie locekļi izlaisti. Sumu kontrolēs iznākušās pretrunas izskaidrojamas ar notikušiem apaļojumiem.

Ieliekot atrastos vispārējos nezinamos ξ_1, ξ_2, ξ_3 pēc parauga (389) veidotās formulās, iznāk:

$$\tau_1 = -\frac{1}{4}(1\times3{,}1459 + 1\times4{,}5618 + 1\times1{,}9954 + 0{,}000) = -2{,}426''$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{3}(1\times3{,}1459 \qquad + 1\times1{,}9954 + 0{,}001) = -1{,}714$$

$$\tau_3 = -\frac{1}{3}(\qquad 1\times4{,}5618 + 1\times1{,}9954 - 0{,}001) = -2{,}186$$

$$\tau_4 = -\frac{1}{2}(\qquad 1\times4{,}5618 \qquad + 0{,}000) = -2{,}281$$

$$\tau_5 = -\frac{1}{3}(1\times3{,}1459 \qquad + 1\times1{,}9954 + 0{,}000) = -1{,}714$$

$$\tau_6 = -\frac{1}{3}(\qquad 1\times4{,}5618 + 1\times1{,}9954 + 0{,}000) = -2{,}186$$

Ievērojot pieņemtās tuvinās vērtības (t_1), (t_2), (t_3), (t_4), (t_5), (t_6), (x_1), (x_2), (x_3), ar atrastiem pieaugumiem τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5, τ_6, ξ_1, ξ_2, ξ_3 aprēķinam meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības:

(Turpinājums 206. lappusē.)

Normalnolīdzin. sistema				Svaru nol. sistemas		
ξ_1	ξ_2	ξ_3	$-\lambda$	Q_1.	Q_2.	Q_3.
Nereducētās sistemas						
+2,083	−0,250	−0,917	− 3,583	−1,000		
	+2,583	−0,917	− 9,167	0,000		
−0,1200	+0,030	+0,110	+ 0,430	+0,120		
		+3,417	+ 0,250	0,000		
−0,4402		+0,404	+ 1,577	+0,440		
+0,917	+1,417	+1,583	−12,500	−1,000		
+0,4402	−0,110	−0,404	− 1,577	−0,440		
			+77,209			
−1,7201			+ 6,163	−0,4801		
	1-o reizi reducētās sistemas					
	+2,553	−1,027	− 9,597	−0,120	−1,000	
		+3,013	− 1,327	−0,440	0,000	
	−0,4023	+0,413	+ 3,861	+0,048	+0,402	
	+1,527	+1,987	−10,923	−0,560	−1,000	
	+0,5981	−0,614	− 5,740	−0,072	−0,598	
			+71,046			
	−3,7591		+36,076	−0,0470	−0,3917	
		2-o reizi reducētās sistemas				
		+2,600	−5,188	−0,488	−0,402	−1,000
		+2,601	−5,183	−0,488	−0,402	−1,000
			+34,970			
		−1,9954	+10,352	−0,1877	−0,1546	−0,3846
			3-o r. r. s.			
			+24,618			

+0,5474	+0,8027	+1,9954
+0,8784	+3,7591	$=\xi_3$
+1,7201	+4,5618	
+3,1459	$=\xi_2$	
$=\xi_1$		

+0,1877	+0,1546	+0,3846
$=Q_{1.3}$	$=Q_{2.3}$	$=Q_{3.3}$
+0,0755	+0,0622	
+0,0470	+0,3917	
+0,1225	+0,4539	
$=Q_{1.2}$	$=Q_{2.2}$	
+0,0147		
+0,0826		
+0,4801		
+0,5774		
$=Q_{1.1}$		

$$0{,}917\xi_1 = +\ 2{,}8848$$
$$1{,}417\xi_2 = +\ 6{,}4641$$
$$1{,}583\xi_3 = +\ 3{,}1587$$
$$-12{,}5000$$
$$+\ 0{,}0076$$

$$[Q_{1.}] = +0{,}8876 \qquad 0{,}917[Q_{1.}] = +0{,}8139$$
$$[Q_{2.}] = +0{,}7310 \qquad 1{,}417[Q_{2.}] = +1{,}0358$$
$$[Q_{3.}] = +0{,}7269 \qquad 1{,}583[Q_{3.}] = +1{,}1507$$
$$+3{,}0004$$

$0{,}917Q_{1.1} = +0{,}5295$	$0{,}917Q_{1.2} = +0{,}1123$	$0{,}917Q_{1.3} = +0{,}1721$
$1{,}417Q_{1.2} = +0{,}1736$	$1{,}417Q_{2.2} = +0{,}6432$	$1{,}417Q_{2.3} = +0{,}2191$
$1{,}583Q_{1.3} = +0{,}2971$	$1{,}583Q_{2.3} = +0{,}2447$	$1{,}583Q_{3.3} = +0{,}6088$
+1,0002	+1,0002	+1,0000

$$
\begin{aligned}
t_1 &= 3{,}750'' - 2{,}426'' = +1{,}324'' \\
t_2 &= 1{,}167 - 1{,}714 = -0{,}547 \\
t_3 &= 3{,}833 - 2{,}186 = +1{,}647 \\
t_4 &= 0{,}750 - 2{,}281 = -1{,}531 \\
t_5 &= 1{,}000 - 1{,}714 = -0{,}714 \\
t_6 &= 2{,}000 - 2{,}186 = -0{,}186
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 48^0\,24'30{,}000'' + 3{,}146'' = 48^0\,24'33{,}146'' \\
x_2 &= 107\;33\;00{,}000 + 4{,}562 = 107\;33\;04{,}562 \\
x_3 &= 215\;41\;20{,}000 + 1{,}995 = 215\;41\;21{,}995
\end{aligned}
$$

Ieliekot tās pirmatnējos kļūdu nolīdzinājumos, nosakami novērojumu izlabojumi v un atbilstošā kvadratu suma [vv]. Attiecībā uz šo aprēķinu piezīmējam sekojošo. Kā zinams, tie paši minētie v ieiet arī pārvērstos kļūdu nolīdzinājumos ar nezinamiem τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5, τ_6, ξ_1, ξ_2, ξ_3. Bet šo nolīdzinājumu atsevišķām grupām atbilstošie (389) tipa normalnolīdzinājumi ir vienādi ar attiecīgo grupu pārvērsto kļūdu nolīdzinājumu sumām. Tā tad katrai kļūdu nolīdzinājumu grupai atbilstošo v sumai jābūt vienādai ar nulli, kas var noderēt kontrolei. Ievērojot to, aprēķinam un kontrolējam izlabojumus v pa atsevišķām pirmatnējo kļūdu nolīdzinājumu grupām.

1. grupa:

					v	v²
+1,324''				− 0°00'00,0''	=+1,324''	1,7530
+1,324	+48°24'33,146''			− 48 24 35,5	=−1,030	1,0609
+1,324		+107°33'04,562''		− 107 33 07,5	=−1,614	2,6050
+1,324			+215°41'21,995''	− 215 41 22,0	=+1,319	1,7398
					−0,001	

2. grupa:

				v	v²
+0,547''			− 0°00'00,0''	=−0,547''	0,2992
+0,547	+48°24'33,146''		− 48 24 31,0	=+1,599	2,5568
−0,547		+215°41'21,995''	−215 41 22,5	=−1,052	1,1067
				0,000	

3. grupa:

+1,647″			− 0°00′00,0″	=+1,647″	2,7126
+1,647	+107°33′04,562″		−107 33 06,0	=+0,209	0,0437
+1,647		+215°41′21,995″	−215 41 25,5	=−1,858	3,4522
				−0,002	

4. grupa:

−1,531″		− 0°00′00,0″	=−1,531″	2,3440
−1,531	+107°33′04,562″	−107 33 01,5	=+1,531	2,3440
			0,000	

5. grupa:

−0,714″			− 0°00′00,0″	=−0,714″	0,5098
−0,714	+48°24′33,146″		− 48 24 33,0	=−0,568	0,3226
−0,714		+215°41′21,995″	−215 41 20,0	=+1,281	1,6410
				−0,001	

6. grupa:

−0,186″			− 0°00′00,0″	=−0,186″	0,0346
−0,186	+107°33′04,562″		−107 33 04,5	=−0,124	0,0154
−0,186		+215°41′21,995″	−215 41 21,5	=+0,309	0,0955
				−0,001	24,6368= =[vv]

Izlīdzināšanas rēķina vispārējās kontroles nolūkā atrasto [vv] vērtību salīdzinam ar normalnolīdzinājumu sistemas pilnīgi reducēto papildu locekli. Ievērojot sumu [vv] veidojošo sumandu lielo skaitu un notikušos apaļojumus, jāatzīst, ka abi minētie skaitļi apmierinoši saskan.

Svara vienības, t. i. atsevišķa neizlīdzināta novērojuma vidējā kļūda ir

$$m = \pm \sqrt{\frac{24{,}6368}{18-(6+3)}} = \pm 1{,}65''$$

un izlīdzināto leņķu x_1, x_2, x_3 vidējās kļūdas:

$$m_1 = \pm m \sqrt{Q_{1.1}} = \pm \sqrt{\frac{24{,}6368}{9} \cdot 0{,}5774} = \pm 1{,}26''$$

$$m_2 = \pm m \sqrt{Q_{2.2}} = \pm \sqrt{\frac{24,6368}{9} \cdot 0,4539} = \pm 1,11$$

$$m_3 = \pm m \sqrt{Q_{3.3}} = \pm \sqrt{\frac{24,6368}{9} \cdot 0,3846} = \pm 1,03$$

Tā tad, izteicot visus skaitļus ar noteiktību līdz 0,01", galīgie rezultati ir

$$\begin{aligned} x_1 &= 48^0 24' 33,15'' \pm 1,26'' \\ x_2 &= 107\ 33\ 04,56 \pm 1,11 \\ x_3 &= 215\ 41\ 22,00 \pm 1,03 \end{aligned}$$

§ 34. Noteikumu novērojumu izlīdzināšanas vispārējie pamati.

Noteikumu novērojumu gadijums ir, kad tieši novēroti lielumi, kuru izlīdzinātās vērtības padotas zinamiem matematiski formulējamiem noteikumiem. Apzīmējot novēroto lielumu nezinamās izlīdzinātās vērtības ar $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$, minētie noteikumi vispārīgi izsakami ar šādiem noteikumu nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_r(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (397),$$

kur $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_r$ apzīmē kādas — linearas vai nelinearas — meklēto lielumu x funkcijas.

Zinot, ka noteikumu novērojumu vienmēr ir tikpat daudz, cik meklēto lielumu x, iztirzāsim jautājumu, kādā sakarā jābūt novērojumu skaitam i un uz šiem novērojumiem attiecīgo noteikumu resp. noteikumu nolīdzinājumu skaitam r, lai meklētie lielumi būtu nosakami ar izlīdzināšanu.

Pats par sevi saprotams, ka visiem noteikumu nolīdzinājumiem jābūt neatkarīgiem. Bet neatkarīgu noteikumu nevar būt vairāk par tiem lielumiem, uz kuriem šie noteikumi zīmējas. Tā tad i nevar būt mazāks par r. Ja i vienāds ar r, tad sistemā (397) ir tikpat daudz nezinamu, cik nolīdzinājumu; tādā gadijumā meklēto lielumu teoretiski pareizās, īstās vērtības nosakamas tīri matematiskā ceļā, atslēdzot minētos nolīdzinājumus. Tādos apstākļos taisītie novērojumi gan ir visi lieki; bet „izlīdzināšana" izsmeļas ar novērojumu rezultatu atvietošanu ar novēroto lielumu īstām vērtībām, kuras atrastas no noteikumu nolīdzinājumiem. Turpretim izlīdzināšana vārda parastā nozīmē iespējama gan, ja novērojumu — un, līdz ar to, meklēto lielumu — skaits i ir lielāks par noteikumu nolīdzinājumu skaitu r. Tādā gadijumā meklēto lielumu īsto vērtību noteikšana no noteikumu nolīdzinājumiem nav iespējama. Nosakot meklētos lielumus vienkārši, bez izlīdzināšanas, pietiek novērot tos skaitā $(i - r)$; ieliekot attiecīgos novērojumus noteikumu nolīdzinājumos, no šiem nolīdzinājumiem tad nosakami pārējie r meklētie lielumi. Tā tad tiem atbilstošie r novērojumi ir lieki, un tāpēc meklētie lielumi nosakami attiecīgo novērojumu izlīdzināšanas kārtā.

Ievērojot augšā teikto, uz noteikumu novērojumu izlīdzināšanu attiecīgos iztirzājumos vienmēr pieņemsim, ka

$$i > r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (398).$$

Meklēto lielumu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ noteikšanas nolūkā taisītie novērojumi $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_i$ vispārīgi neapmierina svarā krītošos noteikumus izteicošos nolīdzinājumus (397). Lai likvidētu attiecīgās pretrunas, novērojumi jāizlabo par kādiem lielumiem $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i$; tā tad meklēto lielumu izlīdzinātās vērtības izsakamas šādā veidā:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = l_1 + v_1 \\ x_2 = l_2 + v_2 \\ x_3 = l_3 + v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = l_i + v_i \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (399).$$

Ieliekot šīs izteiksmes sistemā (397), rodas pārvērstie noteikumu nolīdzinājumi, kur nezinamo $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ vietā ir stājušies $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i$:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i) = 0 \\ \varphi_2 (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i) = 0 \\ \varphi_3 (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_i) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (400).$$

Izlīdzināšanas tiešais nolūks ir minēto izlabojumu v noteikšana, jo ar tiem, pēc formulām (399), nosakami arī paši meklētie lielumi x. Ievērojot tikai noteikumu nolīdzinājumus, izlabojumi v nav nosakami noteiktā veidā, jo šo nolīdzinājumu skaits r, pēc taisītā pieņēmuma (398), ir mazāks par nezinamo izlabojumu v skaitu i. Tā tad ir bezgalīgi daudzas izlabojumu v sistemas, kas apmierina nolīdzinājumu sistemu (400), resp. atbilstošos noteikumus (397). Bet izlīdzinot pēc vismazāko kvadratu metodes, jāprasa, lai meklētie izlabojumi v ne tikai apmierinātu noteikumus (400) resp. (397), kuru skaits un veids atkarājas no esošiem apstākļiem, bet arī izpildītu vismazāko kvadratu metodes vispārējo noteikumu. Tas, kā zinams, formulējams veidā

$$\left.\begin{aligned} &[vv] = \min. \\ \text{vai} \quad &\\ &[pvv] = \min. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (401),$$

skatoties pēc tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības novērojumu gadijums. Nosakot izlabojumus tādā veidā, ir tikai viena vienīga visus svarā krītošos noteikumus apmierinoša izlabojumu v sistema.

Kas zīmējas uz pāreju no noteikumu nolīdzinājumu sistemas (397) uz atbilstošo pārvērsto (400), tad tā vispārīgi notiek atvietojot argumentus x ar izteiksmēm (399) un izvirzot funkcijas (397) Taylor'a rindās. Uzskatot novērojumus l par atbilstošo argumentu x tuvinām vērtībām, uz kurām zīmējas ar meklētiem izlabojumiem v identiskie pieaugumi, un pieņemot, ka šie pieaugumi ir ļoti mazi, var ignorēt tos locekļus, kas satur v augstākās par pirmo kāpēs.

Tā tad pārvērstie noteikumu nolīdzinājumi (400) ir:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 v_2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)_0 v_3 + \ldots + &\\
+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)_0 v_i + f_1(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_i) = 0 &\\
\varphi_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 v_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)_0 v_3 + \ldots + &\\
+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)_0 v_i + f_2(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_i) = 0 &\\
\varphi_3 = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)_0 v_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)_0 v_3 + \ldots + &\\
+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_i}\right)_0 v_i + f_3(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_i) = 0 &\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
\varphi_r = \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_1}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_2}\right)_0 v_2 + \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_3}\right)_0 v_3 + \ldots + &\\
+ \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_i}\right)_0 v_i + f_r(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_i) = 0 &
\end{aligned}\right\} \quad (402).$$

Šo nolīdzinājumu koeficienti ir attiecīgo funkciju f parcialie atvasinājumi pa atsevišķiem argumentiem, pie kam šie atvasinājumi aprēķinami ar argumentiem x atbilstošiem novērojumiem l. Tā tad, koeficientiem nesaturot nezinamos v, pārvērstie noteikumu nolīdzinājumi ir lineari. Brīvie locekļi $f(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_i)$ izsaka uz noteikumiem (397) attiecīgās novērojumu l pretrunas, par kurām ar novērojumiem aprēķinātās funkciju f vērtības atšķiras no nulles. Apzīmējot atsevišķo nolīdzinājumu koeficientus ar $a, b, c, \ldots, r$, bet brīvos locekļus ar $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_r$, sistema (402) rakstama veidā:

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_i v_i + w_1 = 0 \\
\varphi_2 = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + b_i v_i + w_2 = 0 \\
\varphi_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_i v_i + w_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_r = r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + \ldots + r_i v_i + w_r = 0
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (403).$$

Pakavēsimies vēl pie atsevišķā gadijuma, kad kāda funkcija f ir tāda veida, ka logaritmējot pēc brīvā locekļa atdalīšanas palikušo funkcijas daļu, iznāk atsevišķo argumentu x vai to trigonometrisku funkciju logaritmu algebraiska suma. Tādā gadijumā attiecīgā pirmatnējā noteikuma nolīdzinājuma pārvēršana ērti izdarama pēc šāda l o g a r i t m i s k ā s d i f e r e n c ē š a n a s paņēmiena.

Pārnesot brīvo locekli labā pusē un atvietojot funkcijas argumentus x ar izteiksmēm (399), logaritmē tā pārveidoto nolīdzinājumu. Dabūtā logaritmiskā nolīdzinājuma kreisā pusē argumentu $(l + v)$ resp. to iekšējo funkciju logaritmus izsaka šādā veidā. Uzskatot katru v par attiecīgā l ļoti mazu pieaugumu, katrreiz parastā kārtā atrasto uz l attiecināto logaritmu papildina ar argumenta pieaugumam atbilstošo logaritma pieaugumu. Šis pieaugums nosakams reizinot argumenta pieaugumu v ar atrastam logaritmam atbilstošo tabulas diferenci. Šī tabulas diference, saprotams, jāattiecina uz pieauguma v vienību; pie tam, ja logaritms zīmējas uz argumenta trigonometrisku funkciju, tabulas diference jāskaita požitiva vai negativa, skatoties pēc tā, vai, argumentam pieaugot, tā svarā krītošās trigonometriskās funkcijas absolutā vērtība palielinas vai samazinas.

Tā rodas linears nolīdzinājums ar nezinamiem v, pie kam visi koeficienti izteikti logaritmu mantisu vienībās. Tādās pat vienībās jāizsaka arī nolīdzinājuma brīvais loceklis, kurš sastādas no funkcijas f brīvā locekļa logaritma un argumentu $(l + v)$ resp. to trigonometrisko funkciju logaritmu uz l attiecīgām komponentām.

Piemērs. Novērojumi

$$l_1 = 49^0 38{,}0' \qquad l_3 = 143^0 25{,}2'$$
$$l_2 = 152\ 44{,}4 \qquad l_4 = 51\ 33{,}6$$

zīmējas uz lielumiem, kuru izlīdzinātās vērtības x_1, x_2, x_3, x_4 padotas noteikumam

$$f = \frac{\sin x_1}{\sin x_2} \cdot \frac{\sin x_3}{\sin x_4} - \frac{366{,}21}{287{,}93} = 0$$

Jāveido atbilstošais lineārais pārvērstais noteikuma nolīdzinājums φ.

Atrisināsim šo uzdevumu divos variantos, vienu reizi pielietojot izvirzīšanu Taylor'a rindā, bet otro reizi — logaritmiskās diferencēšanas paņēmienu.

1) Aprēķinam

$$f(l_1, l_2, l_3, l_4) = \frac{\sin\ 49^0 38{,}0'}{\sin 152^0 44{,}4'} \cdot \frac{\sin 143^0 25{,}2'}{\sin\ 51^0 33{,}6'} - \frac{366{,}21}{287{,}93} = -0{,}00617$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 = \frac{\sin l_3}{\sin l_2 \sin l_4} \cos l_1 = +1{,}076$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 = -\frac{\sin l_1 \sin l_3}{\sin^2 l_2 \sin l_4} \cos l_2 = +2{,}457$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_0 = \frac{\sin l_1}{\sin l_2 \sin l_4} \cos l_3 = -1{,}705$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_0 = -\frac{\sin l_1 \sin l_3}{\sin l_2 \sin^2 l_4} \cos l_4 = -1{,}005$$

Ar šiem skaitliskiem datiem veidojot lineāro pārvērsto noteikuma nolīdzinājumu, jāievēro, ka šī nolīdzinājuma koeficienti un brīvais loceklis ir nenosaukti skaitļi. Tāpēc arī nezinamie — meklētie novērojumu izlabojumi — jāizteic nenosauktā veidā, radianos. Pieņemot, ka v_1, v_2, v_3, v_4 apzīmē vecās minūtās izteiktos izlabojumus, pārvērstā noteikuma nolīdzinājumā šie izlabojumi jāieliek veidā $\frac{v_1}{\rho}$, $\frac{v_2}{\rho}$, $\frac{v_3}{\rho}$, $\frac{v_4}{\rho}$, pie kam $\rho = 3438'$. Tā tad pārvērstais noteikuma nolīdzinājums ir

$$\varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \frac{v_1}{\rho} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \frac{v_2}{\rho} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_0 \frac{v_3}{\rho} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)_0 \frac{v_4}{\rho} + f(l_1, l_2, l_3, l_4) =$$
$$= +0{,}00031\, v_1 + 0{,}00071\, v_2 - 0{,}00050\, v_3 - 0{,}00029\, v_4 - 0{,}00617 =$$
$$= +31\, v_1 + 71\, v_2 - 50\, v_3 - 29\, v_4 - 617 = 0$$

2) Rakstot doto noteikuma nolīdzinājumu veidā

$$\frac{\sin x_1 \sin x_3}{\sin x_2 \sin x_4} = \frac{366{,}21}{287{,}93}$$

un logaritmējot, atrodam

$$\log \sin x_1 - \log \sin x_2 + \log \sin x_3 - \log \sin x_4 = \log \frac{366{,}21}{287{,}93}$$

jeb

$$\log \sin x_1 - \log \sin x_2 + \log \sin x_3 - \log \sin x_4 - \log \frac{366{,}21}{287{,}93} = 0$$

Lietojot pieczīmīgas logaritmu tabulas, svarā krītošos logaritmus izsakam šādā veidā:

$$\log \sin x_1 = \log \sin (l_1 + v_1) = 9{,}88\,191 + 10\, v_1$$
$$\log \sin x_2 = \log \sin (l_2 + v_2) = 9{,}66\,089 - 24\, v_2$$
$$\log \sin x_3 = \log \sin (l_3 + v_3) = 9{,}77\,521 - 17\, v_3$$
$$\log \sin x_4 = \log \sin (l_4 + v_4) = 9{,}89\,391 + 10\, v_4$$
$$\log \frac{366{,}21}{287{,}93} = 0{,}10\,444$$

Ieliekot šos datus un izsakot brīvo locekli logaritmu mantisu vienībās, pārvērstais noteikuma nolīdzinājums iznāk

$$\varphi = +\,10\, v_1 + 24\, v_2 - 17\, v_3 - 10\, v_4 - 212 = 0$$

Lai padarītu šo nolīdzinājumu ērtāki salīdzinamu ar agrāk pēc cita paņēmiena atrasto, reizinam ar brīvo locekļu attiecību $\frac{617}{212}$; tad logaritmiskās diferencēšanas kārtā dabūtais nolīdzinājums pāriet veidā:

$$\varphi = +\,29 v_1 + 70 v_2 - 49 v_3 - 29 v_4 - 617 = 0$$

Kā redzams, atrisinot uzdevumu minētos divos variantos, dabūtie rezultati mazliet atšķiras koeficientos. Tas izskaidrojams galvenā kārtā ar to, ka pieņemot izlabojumus v izteiktus diezgan lielās vienībās — minutās, log sin pieaugumi izrādas manami neproporcionali argumentu l pieaugumiem v, tā tad apstākļi ne pavisam tādi, uz kuriem zīmējas logaritmiskās diferencēšanas paņēmiens. Sakarā ar to piezīmējam, ka arī pēc pirmā paņēmiena atrastais pārvērstais nolīdzinājums φ ne pavisam pilnīgā stingrībā atbilst uz meklētiem lielumiem x attiecīgam noteikuma nolīdzinājumam, ja izlabojumi v ir lieli, jo tādos apstākļos, izvirzot funkciju f Taylor'a rindā, nepietiek ievērot locekļus tikai līdz pirmai pieaugumu v kāpei.

§ 35. Noteikumu novērojumu lietošana netiešu novērojumu veidā.

Visus i meklētos lielumus x, uz kuriem zīmējas novērojumi l, var iedomāties iedalītus divās grupās, no kurām viena aptver (i — r) meklētus lielumus, bet otrā — pārējos r. Lai pie pirmās grupas pieder, piem., x_1, x_2, x_3, ..., x_{i-r}; tad kā otro grupu veidojošie meklētie lielumi paliek x_{i-r+1}, x_{i-r+2}, x_{i-r+3}, ..., x_i.

Ar noteikumu nolīdzinājumu (397) palīdzību katru otrās grupas meklēto lielumu x var izteikt kā pirmās grupas x-u funkciju. Apzīmējot šīs funkcijas vispārējā veidā ar f'_{i-r+1}, f'_{i-r+2}, f'_{i-r+3}, ..., f'_i, no nolīdzinājumiem (397) var atvasināt sekojošos:

$$\left.\begin{array}{l} x_{i-r+1} = f'_{i-r+1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) \\ x_{i-r+2} = f'_{i-r+2}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) \\ x_{i-r+3} = f'_{i-r+3}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i \quad = f'_i \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (404).$$

Šo nolīdzinājumu kreisās puses veidojošos x atvietojam, pēc parauga (399), ar atbilstošām (l + v) tipa izteiksmēm. Bez tam sistemu (404) papildinam ar (i — r) nolīdzinājumiem, kurus veidojam pielīdzinot katru pirmās grupas x atbilstošam veidā (l + v) izteiktam izlīdzinātam novērojumam. Tad rodas šāda nolīdzinājumu sistema:

$$\left.\begin{array}{lll} l_1 & + v_1 & = x_1 \\ l_2 & + v_2 & = x_2 \\ l_3 & + v_3 & = x_3 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ l_{i-r} & + v_{i-r} & = x_{i-r} \\ l_{i-r+1} & + v_{i-r+1} & = f'_{i-r+1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) \\ l_{i-r+2} & + v_{i-r+2} & = f'_{i-r+2}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) \\ l_{i-r+3} & + v_{i-r+3} & = f'_{i-r+3}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_i & + v_i & = f'_i \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (405),$$

kas rāda, ka visi novērojumi l_1, l_2, l_3, ..., l_{i-r}, l_{i-r+1}, l_{i-r+2}, l_{i-r+3}, ..., l_i izsakami kā pirmās grupas meklēto lielumu x funkcijas.

Tas nozīmē, ka vispārīgi noteikumu novērojumi uzskatami un izlīdzinami kā netieši novērojumi. Attiecīgie kļūdu nolīdzinājumi (405) parastā locekļu iekārtojumā rakstami:

$$\left.\begin{array}{lll}
x_1 & -l_1 & = v_1 \\
x_2 & -l_2 & = v_2 \\
x_3 & -l_3 & = v_3 \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
x_{i-r} & -l_{i-r} & = v_{i-r} \\
f'_{i-r+1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) & -l_{i-r+1} & = v_{i-r+1} \\
f'_{i-r+2}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) & -l_{-r+2} & = v_{i-r+2} \\
f'_{i-r+3}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) & -l_{i-r+3} & = v_{i-r+3} \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
f'_i\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-r}) & -l_i & = v_i
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (406).$$

Pati izlīdzināšana notiek pazīstamā kārtībā. Tāpēc, nepakavējoties pie attiecīgiem sīkumiem, tikai piezīmēsim, ka tādā veidā izlīdzinot i noteikumu novērojumus, kuri padoti r neatkarīgiem noteikumiem, nezinamo lomā lietoto meklēto lielumu skaits ir $(i-r)$. Šo nezinamo noteikšanai lietojot i novērojumus, lieko novērojumu skaits ir

$$i-(i-r)=r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (407).$$

Tā tad, parastā kārtā nosakot svara vienības vidējo kļūdu, attiecīgā formula ir

$$\left.\begin{array}{l}
m = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{r}} \\
\text{resp.} \\
m = \pm\sqrt{\dfrac{[pvv]}{r}}
\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (408),$$

pie kam r apzīmē uz lietotiem novērojumiem attiecīgo neatkarīgo noteikumu resp. noteikumu nolīdzinājumu skaitu.

Sakarā ar šo iztirzājumu aizrādam uz § 29-ā apskatīto skaitlisko piemēru. Šinī piemērā par netiešiem uzskatītie novērojumi h pēc būtības ir noteikumu novērojumi, jo tie padoti 4 neatkarīgiem noteikumiem, kuri izsaka, ka katrā tīkla slēgtā poligonā to veidojošiem atsevišķiem līmetņojuma gājieniem atbilstošo izlīdzināto augstumu starpību sumai jābūt vienādai ar nulli. No attiecīgiem noteikumu nolīdzinājumiem šeit aprakstītā veidā atvasināti atbilstošie kļūdu nolīdzinājumi.

§ 36. Noteikumu novērojumu izlīdzināšana pēc korrelatu paņēmiena.

Kā paskaidrots iepriekšējā paragrafā, noteikumu novērojumus var izlīdzināt uzskatot tos par netiešiem. Zinamos apstākļos tas arī ir izdevīgs; bet parasti gan noteikumu novērojumus izlīdzina pēc cita, t. s. korrelatu paņēmiena.

Lai pēc vismazāko kvadratu metodes atrastās novērojumu l izlīdzinātās vērtības apmierinātu svarā krītošos noteikumus (397), novērojumu izlabojumi v jānosaka tā, lai tie līdz ar pārvērstiem noteikumu nolīdzinājumiem (400) apmierinātu arī vismazāko kvadratu metodes vispārējo noteikumu, kurš jāievēro pirmās vai otrās izteiksmes (401) veidā, skatoties pēc tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības novērojumu gadijums.

No augstākās analizes zinams, ka noteikumus (400) un apstākļiem atbilstošo (401) reizē apmierinošie izlabojumi v atrodami, nosakot tos tā, lai būtu izpildīts noteikums, kurš formulējams veidā

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= [vv] - 2k_1\varphi_1 - 2k_2\varphi_2 - 2k_3\varphi_3 - \ldots\ldots - 2k_r\varphi_r = \min. \\ &\text{resp.} \\ \Omega &= [pvv] - 2k_1\varphi_1 - 2k_2\varphi_2 - 2k_3\varphi_3 - \ldots\ldots - 2k_r\varphi_r = \min. \end{aligned}\right\} \quad (409).$$

Šinīs izteiksmēs φ apzīmē pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu (400) kreisās puses, bet k — atbilstošus pagaidām nenoteiktus faktorus — uz atsevišķiem noteikumu nolīdzinājumiem attiecīgās korrelatas.

Lai atrastu apstākļiem atbilstošā veidā formulēto noteikumu (409) apmierinošos izlabojumus v, minētā izteiksme (409) jāatvasina pēc atsevišķiem argumentiem v, un katrs parcialais atvasinājums jāpielīdzina nullei. Tādā veidā rodas jauni nolīdzinājumi, kuri vispārējā veidā rakstami

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial v_1} &= 0 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial v_2} &= 0 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial v_3} &= 0 \\ &\ldots\ldots \\ \frac{\partial\Omega}{\partial v_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (410).$$

Šo nolīdzinājumu skaits ir vienāds ar meklēto izlabojumu v skaitu i. Viņos ieiet minētie izlabojumi v, un bez tam atsevišķiem noteikumu nolīdzinājumiem atbilstošās r korrelatas k. Tā tad no nolīdzinājumiem (410) var izteikt visus v kā korrelatu k funkcijas. Ievērojot, ka bez izlabojumiem v ir nezinamas arī korrelatas k, nezinamo kopskaits ir $(i + r)$. Šie nezinamie ieiet nolīdzinājumos (400) un (410), kas kopā veido vienu sistemu, kur nolīdzinājumu skaits vienāds ar nezinamo skaitu. Tā tad atslēdzot šo sistemu nosakami visi nezinamie, — to starpā arī novērojumu izlīdzināšanai vajadzīgie izlabojumi v.

Pieņemot, ka pārvērstie noteikumu nolīdzinājumi doti veidā (403), nolīdzinājumi (410) iznāk

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial\Omega}{\partial v_1} = 2v_1 - 2k_1a_1 - 2k_2b_1 - 2k_3c_1 - \ldots - 2k_rr_1 = 0 \\
\frac{\partial\Omega}{\partial v_2} = 2v_2 - 2k_1a_2 - 2k_2b_2 - 2k_3c_2 - \ldots - 2k_rr_2 = 0 \\
\frac{\partial\Omega}{\partial v_3} = 2v_3 - 2k_1a_3 - 2k_2b_3 - 2k_3c_3 - \ldots - 2k_rr_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial\Omega}{\partial v_i} = 2v_i - 2k_1a_i - 2k_2b_i - 2k_3c_i - \ldots - 2k_rr_i = 0
\end{array}\right\} \qquad (411)$$

jeb

$$\left.\begin{array}{l}
v_1 = a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 + \ldots + r_1k_r \\
v_2 = a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 + \ldots + r_2k_r \\
v_3 = a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3 + \ldots + r_3k_r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_i = a_ik_1 + b_ik_2 + c_ik_3 + \ldots + r_ik_r
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (412),$$

resp.

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial\Omega}{\partial v_1} = 2p_1v_1 - 2k_1a_1 - 2k_2b_1 - 2k_3c_1 - \ldots - 2k_rr_1 = 0 \\
\frac{\partial\Omega}{\partial v_2} = 2p_2v_2 - 2k_1a_2 - 2k_2b_2 - 2k_3c_2 - \ldots - 2k_rr_2 = 0 \\
\frac{\partial\Omega}{\partial v_3} = 2p_3v_3 - 2k_1a_3 - 2k_2b_3 - 2k_3c_3 - \ldots - 2k_rr_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial\Omega}{\partial v_i} = 2p_iv_i - 2k_1a_i - 2k_2b_i - 2k_3c_i - \ldots - 2k_rr_i = 0
\end{array}\right\} \qquad (413)$$

jeb

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{p_1}(a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 + \ldots + r_1k_r) \\ v_2 &= \frac{1}{p_2}(a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 + \ldots + r_2k_r) \\ v_3 &= \frac{1}{p_3}(a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3 + \ldots + r_3k_r) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_i &= \frac{1}{p_i}(a_ik_1 + b_ik_2 + c_ik_3 + \ldots + r_ik_r) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (414).$$

Nolīdzinājumus (412) resp. (414) mēdz saukt par izlabojumu formulām. Lai pēc šīm formulām varētu aprēķināt izlabojumus v, iepriekš jānosaka visas korrelatas k. Tam nolūkam ieliekam izteiksmes (412) resp. (414) pārvērstos noteikumu nolīdzinājumos (403), tādā veidā atvietojot šo nolīdzinājumu nezinamos v ar korrelatām k. Tad pēc dažiem vienkāršiem pārveidojumiem rodas šādi nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{aligned} &[aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + \ldots + [ar]k_r + w_1 = 0 \\ &[ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + \ldots + [br]k_r + w_2 = 0 \\ &[ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + \ldots + [cr]k_r + w_3 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[ar]k_1 + [br]k_2 + [cr]k_3 + \ldots + [rr]k_r + w_r = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (415)$$

resp.

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right]k_r + w_1 = 0 \\ &\left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right]k_r + w_2 = 0 \\ &\left[\frac{ac}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{cr}{p}\right]k_r + w_3 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\left[\frac{ar}{p}\right]k_1 + \left[\frac{br}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cr}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{rr}{p}\right]k_r + w_r = 0 \end{aligned}\right\} \quad (416).$$

No šiem korrelatu normalnolīdzinājumiem nosakamas visas korrelatas.

No šī iztirzājuma redzams, ka noteikumu novērojumu izlīdzināšana pēc korrelatu metodes notiek šādā kārtībā.

Vispirms, saskaņā ar noteikumiem (397), kuriem padoti meklētie lielumi x, veido atbilstošos linearos pārvērstos noteikumu nolīdzinājumus ar nezinamiem novērojumu l izlabojumiem v; pie tam šinī pirmā darbā nekrīt svarā, vai novērojumi l notikuši ar vienādu vai ar dažādu noteiktību.

Ar pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu koeficientiem aprēķina atbilstošo korrelatu normalnolīdzinājumu koeficientus un veido šos normalnolīdzinājumus, kuru brīvie locekļi ir vienādi ar atbilstošo pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu brīviem locekļiem. Korrelatu normalnolīdzinājumi veidojami pēc parauga (415) vai (416) atkarībā no tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības gadijums.

Atslēdzot korrelatu normalnolīdzinājumus atrastās korrelatu vērtības ieliekot pēc parauga (412) resp. (414) veidotās izlabojumu formulās, pēc tām aprēķina visus izlabojumus v. Beidzot, pieliekot šos izlabojumus attiecīgiem novērojumiem l, nosaka novēroto lielumu izlīdzinātās vērtības x.

Attiecībā uz svara vienības vidējās kļūdas noteikšanu aizrādam, ka pārvērstos noteikumu nolīdzinājumos ieejošie, pēc izlabojumu formulām aprēķinamie izlabojumi v ir tie paši, kas ieiet kļūdu nolīdzinājumos, kurus veido un lieto, ja izlīdzinot noteikumu novērojumus, tos uzskata par netiešiem. No tā seko, ka arī izlīdzinot pēc korrelātu paņēmiena, svara vienības vidējā kļūda nosakama pēc apstākļiem atbilstošās formulas (408). Vienādas noteiktības gadijumā svara vienības vidējā kļūda m ir identiska ar jebkura atsevišķa neizlīdzināta novērojuma vidējo kļūdu. Dažādas noteiktības gadijumā, zinot svara vienības vidējo kļūdu un atsevišķo novērojumu svarus, atsevišķo neizlīdzināto novērojumu vidējās kļūdas nosakamas pēc formulām (95). Līdzīgā veidā nosakamas arī izlīdzināto novērojumu vidējās kļūdas, ja iepriekš atrasti atbilstošie svari, kas padarams pēc turpmāk aizrādītiem paņēmieniem.

Attiecībā uz noteikumu nolīdzinājumu veidošanu piezīmējam, ka nepieciešams, lai ar šiem nolīdzinājumiem būtu ievēroti bez izņēmuma visi svarā krītošie noteikumi; pretējā gadijumā galīgā rezultatā atrastie izlīdzinātie novērojumi izrādas izlīdzināti nepilnīgi, t. i. apmierina gan izlīdzināšanas rēķinā ievērotos noteikumus, bet paliek pretrunīgi attiecībā uz ignorētiem noteikumiem. Šinī ziņā kontrolei var noderēt tas apstāklis, ka vienmēr ar katru lieku novērojumu rodas viens jauns, no pārējiem neatkarīgs, uz taisītiem novērojumiem attiecīgs noteikums: tā tad svarā krītošo noteikumu resp. noteikumu nolīdzinājumu skaits ir vienāds ar lieko novērojumu skaitu.

Arī nepieciešams, lai visi izlīdzināšanas rēķinā lietotie noteikumu nolīdzinājumi būtu neatkarīgi, t. i. lai neviens nebūtu matemātiski atvasinams no pārējiem. Ja tikuši lietoti kādi no pārējiem atkarīgi noteikumu nolīdzinājumi, tad atslēdzot normalnolīdzinājumus iznāk nenoteikta veida $\frac{0}{0}$ korrelatas. Ja tas noticis, tad pārbaudot lietotos noteikumu nolīdzinājumus, jāuzmeklē no pārējiem atkarīgie, lai tos atvietotu ar neatkarīgiem. Pēc tam, izejot no jaunās, pareizi veidotās pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu sistemas, viss izlīdzināšanas rēķins jātaisa par jaunu.

Veidojot pārvērstos noteikumu nolīdzinājumus (403), ieteicams aprēķināt sumas

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \ldots\ldots + r_1 \\ s_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \ldots\ldots + r_2 \\ s_3 = a_3 + b_3 + c_3 + \ldots\ldots + r_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_i = a_i + b_i + c_i + \ldots\ldots + r_i \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (417).$$

No pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu koeficientiem atvasinot korrelatu normalnolīdzinājumu koeficientus, tad arī veido sumas

$$\left.\begin{array}{l} [as] = a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + \ldots + a_i s_i \\ [bs] = b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 + \ldots + b_i s_i \\ [cs] = c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + \ldots + c_i s_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [rs] = r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 + \ldots + r_i s_i \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (418).$$

Viegli pierādams, ka

$$\left.\begin{array}{l} [as] = [aa] + [ab] + [ac] + \ldots + [ar] \\ [bs] = [ab] + [bb] + [bc] + \ldots + [br] \\ [cs] = [ac] + [bc] + [cc] + \ldots + [cr] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [rs] = [ar] + [br] + [cr] + \ldots + [rr] \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (419).$$

Tas var noderēt korrelātu normalnolīdzinājumu koeficientu aprēķina kontrolei, kas izdarama sumējot pa vertikaliem stabiņiem sistemas (415) koeficientus un salīdzinot rezultatus ar atbilstošām kontrolsumām (418).

Formulas (418) un (419) zīmējas uz vienādas noteiktības gadijumu. Dažādas noteiktības gadijumā, lietojot tās pašas koeficientu sumas (417), veido

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{as}{p}\right] &= \frac{a_1 s_1}{p_1} + \frac{a_2 s_2}{p_2} + \frac{a_3 s_3}{p_3} + \ldots + \frac{a_i s_i}{p_i} \\
\left[\frac{bs}{p}\right] &= \frac{b_1 s_1}{p_1} + \frac{b_2 s_2}{p_2} + \frac{b_3 s_3}{p_3} + \ldots + \frac{b_i s_i}{p_i} \\
\left[\frac{cs}{p}\right] &= \frac{c_1 s_1}{p_1} + \frac{c_2 s_2}{p_2} + \frac{c_3 s_3}{p_3} + \ldots + \frac{c_i s_i}{p_i} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left[\frac{rs}{p}\right] &= \frac{r_1 s_1}{p_1} + \frac{r_2 s_2}{p_2} + \frac{r_3 s_3}{p_3} + \ldots + \frac{r_i s_i}{p_i}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (420),$$

pie kam pierādams, ka

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{as}{p}\right] &= \left[\frac{aa}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{ac}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right] \\
\left[\frac{bs}{p}\right] &= \left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{bb}{p}\right] + \left[\frac{bc}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right] \\
\left[\frac{cs}{p}\right] &= \left[\frac{ac}{p}\right] + \left[\frac{bc}{p}\right] + \left[\frac{cc}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{cr}{p}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left[\frac{rs}{p}\right] &= \left[\frac{ar}{p}\right] + \left[\frac{br}{p}\right] + \left[\frac{cr}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{rr}{p}\right]
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (421).$$

Uz šo formulu pamata dažādas noteiktības gadijumam atbilstošie korrelatu normalnolīdzinājumi (416) kontrolējami līdzīgā veidā, kā tas aizrādīts attiecībā uz vienādas noteiktības gadijumu.

Taisot minētās s-tipa sumu kontroles, korrelatu normalnolīdzinājumu sistemu (415) resp. (416) papildina ar sumu nolīdzinājumu, kur koeficienti ir sumas (418) resp. (420). Kas zīmējas uz brīvo locekli, tad tas — kā vienādas, tā arī dažādas noteiktības gadijumā — ir visu atsevišķo korrelatu normalnolīdzinājumu brīvo locekļu suma [w]. Tā tad sumu nolīdzinājums ir

$$\left.\begin{aligned}
&[as]\,k_1 + [bs]\,k_2 + [cs]\,k_3 + \ldots + [rs]\,k_r + [w] = 0 \\
\text{resp.}\quad &\left[\frac{as}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bs}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cs}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{rs}{p}\right]k_r + [w] = 0
\end{aligned}\right\} \quad (422).$$

Šo sumu nolīdzinājumu reducējot līdz ar korrelatu normalnolīdzinājumiem, s-tipa sumu kontroles izdaramas pazīstamā kārtā. Tas pats sumu nolīdzinājums lietojams arī atrasto korrelatu skaitlisko vērtību kontrolei, kura izdarama ieliekot šīs skaitliskās vērtības sumu nolīdzinājumā.

Taisot σ-tipa sumu kontroles, uz atsevišķiem nereducētiem korrelatu normalnolīdzinājumiem attiecīgie kontrollocekļi $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3 \ldots \ldots, \sigma'_r$, kā zinams, izsaka šo nolīdzinājumu koeficientu un brīvo locekļu sumas. Tā tad, ievērojot formulas (419) resp. (421), šie kontrollocekļi nosakami šādā veidā:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma'_1 = [as] + w_1 \\ \sigma'_2 = [bs] + w_2 \\ \sigma'_3 = [cs] + w_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma'_r = [rs] + w_r \\ \text{resp.} \\ \sigma'_1 = \left[\frac{as}{p}\right] + w_1 \\ \sigma'_2 = \left[\frac{bs}{p}\right] + w_2 \\ \sigma'_3 = \left[\frac{cs}{p}\right] + w_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma'_r = \left[\frac{rs}{p}\right] + w_r \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (423),$$

pie kam s apzīmē ar formulām (417) noteiktās koeficientu sumas.

Arī šie σ-tipa kontrollocekļi reducējami līdz ar korrelatu normalnolīdzinājumiem un vispārīgi lietojami pazīstamā veidā.

§ 37. Suma [vv] resp. [pvv].

Pēc Gauss'a algoritma reducējot korrelatu normalnolīdzinājumus, nezinamo korrelatu k noteikšanai veido galējo nolīdzinājumu sistemu

$$\left.\begin{array}{llllll} (A) = [aa]k_1 + & [ab]k_2 + & [ac]k_3 + \ldots + & [ar]k_r & + \quad w_1 & = 0 \\ (B) = & [bb.1]k_2 + & [bc.1]k_3 + \ldots + & [br.1]k_r & + [w_2.1] & = 0 \\ (C) = & & [cc.2]k_3 + \ldots + & [cr.2]k_r & + [w_3.2] & = 0 \\ & & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ (R) = & & & [rr.(r-1)]k_r & + [w_r.(r-1)] & = 0 \end{array}\right\} \quad (424)$$

resp.

$$\left.\begin{array}{ll}
(A) = \left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right]k_r + w_1 = 0 \\
(B) = \left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]k_2 + \left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{br}{p}\cdot 1\right]k_r + [w_2.1] = 0 \\
(C) = \left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{cr}{p}\cdot 2\right]k_r + [w_3.2] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(R) = \left[\frac{rr}{p}\cdot(r-1)\right]k_r + [w_r.(r-1)] = 0
\end{array}\right\} \quad (425).$$

No galējo nolīdzinājumu sistemas atrastās korrelatu vērtības ieliekot atbilstošās izlabojumu formulās (412) resp. (414), nosakami novērojumu izlabojumi v un veidojama šo izlabojumu kvadratu suma [vv] resp. suma [pvv]. Šī suma vajadzīga svara vienības vidējās kļūdas noteikšanai; bez tam viņa arī var noderēt izlīdzināšanas rēķina kontrolei.

Vienādas noteiktības gadijumā, paceļot kvadratā atsevišķās izlabojumu formulas (412), veidojam izteiksmes

$$\left.\begin{array}{l}
v_1^2 = a_1^2k_1^2 + 2a_1b_1\,k_1\,k_2 + 2a_1c_1\,k_1\,k_3 + \ldots + 2a_1r_1\,k_1\,k_r + \\
\qquad + b_1^2k_2^2 + 2b_1c_1\,k_2\,k_3 + \ldots + 2b_1r_1\,k_2\,k_r + \\
\qquad\qquad + c_1^2k_3^2 + \ldots + 2c_1r_1\,k_3\,k_r + \\
\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + r_1^2k_r^2 \\
v_2^2 = a_2^2k_1^2 + 2a_2b_2\,k_1\,k_2 + 2a_2c_2\,k_1\,k_3 + \ldots + 2a_2r_2\,k_1\,k_r + \\
\qquad + b_2^2k_2^2 + 2b_2c_2\,k_2\,k_3 + \ldots + 2b_2r_2\,k_2\,k_r + \\
\qquad\qquad + c_2^2k_3^2 + \ldots + 2c_2r_2\,k_3\,k_r + \\
\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + r_2^2k_r^2 \\
v_3^2 = a_3^2k_1^2 + 2a_3b_3\,k_1\,k_2 + 2a_3c_3\,k_1\,k_3 + \ldots + 2a_3r_3\,k_1\,k_r + \\
\qquad + b_3^2k_2^2 + 2b_3c_3\,k_2\,k_3 + \ldots + 2b_3r_3\,k_2\,k_r + \\
\qquad\qquad + c_3^2k_3^2 + \ldots + 2c_3r_3\,k_3\,k_r + \\
\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + r_3^2k_r^2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (426).$$

$$
\left.\begin{aligned}
v_i^2 = a_i^2 k_1^2 &+ 2a_i b_i\, k_1\, k_2 + 2a_i c_i\, k_1\, k_3 + \ldots + 2a_i r_i\, k_1\, k_r + \\
&+ b_i^2 k_2^2 + 2b_i c_i\, k_2\, k_3 + \ldots + 2b_i r_i\, k_2\, k_r + \\
&\qquad + c_i^2 k_3^2 + \ldots + 2c_i r_i\, k_3\, k_r + \\
&\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\qquad\qquad\qquad + r_i^2 k_r^2
\end{aligned}\right\}
$$

Sumējot atrodam

$$
\begin{aligned}
[vv] = [aa]k_1^2 &+ 2[ab]k_1k_2 + 2[ac]k_1k_3 + \ldots + 2[ar]k_1k_r + \\
&+ [bb]k_2^2 + 2[bc]k_2k_3 + \ldots + 2[br]k_2k_r + \\
&\qquad + [cc]k_3^2 + \ldots + 2[cr]k_3k_r + \\
&\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\qquad\qquad\qquad + [rr]k_r^2 \qquad (427).
\end{aligned}
$$

Lietojot pirmā galējā nolīdzinājuma (424) kreiso pusi, veidojam

$$
\begin{aligned}
\frac{(A)(A)}{[aa]} = [aa]k_1^2 &+ 2[ab]k_1k_2 + 2[ac]k_1k_3 + \ldots + 2[ar]k_1k_r + 2k_1w_1 + \\
&+ \frac{[ab]}{[aa]}[ab]k_2^2 + 2\frac{[ab]}{[aa]}[ac]k_2k_3 + \ldots + 2\frac{[ab]}{[aa]}[ar]k_2k_r + 2\frac{[ab]}{[aa]}k_2w_1 + \\
&\qquad + \frac{[ac]}{[aa]}[ac]k_3^2 + \ldots + 2\frac{[ac]}{[aa]}[ar]k_3k_r + 2\frac{[ac]}{[aa]}k_3w_1 + \\
&\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\qquad\qquad + \frac{[ar]}{[aa]}[ar]k_r^2 + 2\frac{[ar]}{[aa]}k_rw_1 + \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{w_1^2}{[aa]} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= 2\frac{w_1}{[aa]}\{[aa]k_1 &+ [ab]k_2 + [ac]k_3 + \ldots + [ar]k_r\} + \frac{w_1^2}{[aa]} + \\
+ [aa]k_1^2 &+ 2[ab]k_1k_2 + 2[ac]k_1k_3 + \ldots + 2[ar]k_1k_r + \\
&+ \frac{[ab]}{[aa]}[ab]k_2^2 + 2\frac{[ab]}{[aa]}[ac]k_2k_3 + \ldots + 2\frac{[ab]}{[aa]}[ar]k_2k_r + \\
&\qquad + \frac{[ac]}{[aa]}[ac]k_3^2 + \ldots + 2\frac{[ac]}{[aa]}[ar]k_3k_r + \\
&\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{[ar]}{[aa]}[ar]k_r^2
\end{aligned}
$$

jeb, ievērojot galējo nolīdzinājumu (A),

$$\begin{aligned}\frac{(A)(A)}{[aa]} = \frac{w_1^2}{[aa]} &+ \\ &+ [aa]k_1^2 + 2[ab]k_1k_2 + 2[ac]k_1k_3 + \ldots + 2[ar]k_1k_r + \\ &+ \frac{[ab]}{[aa]}[ab]k_2^2 + 2\frac{[ab]}{[aa]}[ac]k_2k_3 + \ldots + 2\frac{[ab]}{[aa]}[ar]k_2k_r + \\ &+ \frac{[ac]}{[aa]}[ac]k_3^2 + \ldots + 2\frac{[ac]}{[aa]}[ar]k_3k_r + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \frac{[ar]}{[aa]}[ar]k_r^2 \end{aligned} \qquad (428).$$

Šo izteiksmi atņemot no (427), veidojam jaunu izteiksmi, kura, lietojot Gauss'a algoritmā pieņemtos simbolus, rakstama

$$\begin{aligned}[vv] - \frac{(A)(A)}{[aa]} = \frac{w_1^2}{[aa]} &+ [bb.1]k_2^2 + 2[bc.1]k_2k_3 + \ldots + 2[br.1]k_2k_r + \\ &+ [cc.1]k_3^2 + \ldots + 2[cr.1]k_3k_r + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ [rr.1]k_r^2 \end{aligned} \qquad (429).$$

Tālāk, lietojot otrā galējā nolīdzinājuma (424) kreiso pusi, veidojam

$$\begin{aligned}\frac{(B)(B)}{[bb.1]} &= [bb.1]k_2^2 + 2[bc.1]k_2k_3 + \ldots + 2[br.1]k_2k_r + 2k_2[w_2.1] + \\ &+ \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]k_3^2 + \ldots + 2\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[br.1]k_3k_r + 2\frac{[bc.1]}{[bb.1]}k_3[w_2.1] + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \frac{[br.1]}{[bb.1]}[br.1]k_r^2 + 2\frac{[br.1]}{[bb.1]}k_r[w_2.1] + \\ &+ \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} = \\ &= 2\frac{[w_2.1]}{[bb.1]}\{[bb.1]k_2 + [bc.1]k_3 + \ldots + [br.1]k_r\} + \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} + \\ &+ [bb.1]k_2^2 + 2[bc.1]k_2k_3 + \ldots + 2[br.1]k_2k_r + \\ &+ \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]k_3^2 + \ldots + 2\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[br.1]k_3k_r + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \frac{[br.1]}{[bb.1]}[br.1]k_r^2 \end{aligned}$$

jeb, ievērojot galējo nolīdzinājumu (B),

$$\frac{(B)(B)}{[bb.1]} = -\frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} + [bb.1]k_2^2 + 2[bc.1]k_2k_3 + \ldots + 2[br.1]k_2k_r +$$
$$+ \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]k_3^2 + \ldots + 2\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[br.1]k_3k_r +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{[br.1]}{[bb.1]}[br.1]k_r^2 \quad (430).$$

Šo izteiksmi atņemam no (429); tad iznāk

$$[vv] - \frac{(A)(A)}{[aa]} - \frac{(B)(B)}{[bb.1]} = \frac{w_1^2}{[aa]} + \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} +$$
$$+ [cc.2]k_3^2 + \ldots + 2[cr.2]k_3k_r +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ [rr.2]k_r^2 \quad (431).$$

Tā turpinot un pakāpeniski atņemot no (431) ar pārējo galējo nolīdzinājumu (424) kreisām pusēm veidotās izteiksmes $\frac{(C)(C)}{[cc.2]}, \ldots$ $\ldots, \frac{(R)(R)}{[rr.(r-1)]}$, beidzot atrodam

$$[vv] - \frac{(A)(A)}{[aa]} - \frac{(B)(B)}{[bb.1]} - \frac{(C)(C)}{[cc.2]} - \ldots - \frac{(R)(R)}{[rr.(r-1)]} =$$
$$= \frac{w_1^2}{[aa]} + \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[w_3.2]^2}{[cc.2]} + \ldots + \frac{[w_r.(r-1)]^2}{[rr.(r-1)]} \quad . \quad . \quad (432).$$

Ievērojot galējos nolīdzinājumus (424), no kuriem seko, ka

$$\frac{(A)(A)}{[aa]} = 0$$
$$\frac{(B)(B)}{[bb.1]} = 0$$
$$\frac{(C)(C)}{[cc.2]} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{(R)(R)}{[rr.(r-1)]} = 0$$

izteiksme (432) pāriet galīgā veidā

$$[vv] = \frac{w_1^2}{[aa]} + \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[w_3.2]^2}{[cc.2]} + \ldots + \frac{[w_r.(r-1)]^2}{[rr.(r-1)]} \qquad (433).$$

Dažādas noteiktības gadijumā līdzīgā kārtā, bet izejot no izlabojumu formulām (414) un lietojot galējos nolīdzinājumus (425), pierādams, ka

$$[pvv] = \frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{[w_2.1]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]} + \frac{[w_3.2]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]} + \ldots + \frac{[w_r.(r-1)]^2}{\left[\frac{rr}{p}.(r-1)\right]} \qquad (434).$$

Šīs formulas var noderēt izlīdzināšanas rēķina kontrolei; tam nolūkam no vienas puses, pēc izlabojumu formulām aprēķinot atsevišķos v, ar tiem tieši veido sumu [vv] resp. [pvv], bet no otras puses ar korrelatu normalnolīdzinājumu koeficientiem un brīviem locekļiem veido izteiksmes (433) resp. (434) labo pusi.

Kontrolformulas (433) resp. (434) labo pusi veidojošās izteiksmes skaitliskā vērtība viegli nosakama sakarā ar korrelatu normalnolīdzinājumu reducēšanu pēc Gauss'a algoritma. Līdzīgā veidā, kā netiešu novērojumu gadijumā normalnolīdzinājumu sistemu papildina ar locekli [λλ], korrelatu normalnolīdzinājumu sistemu papildina ar 0, un to pēc korrelatu normalnolīdzinājumu brīvo locekļu parauga reducē līdz visu nezinamo izslēgšanas no korrelatu normalnolīdzinājumiem, t. i. r reizes. Apzīmējot no minētās nulles atvasinātos dažādām reducēšanas pakāpēm atbilstošos papildu locekļus ar simboliem [0.1], [0.2], [0.3], ..., [0.r], šie papildu locekļi ir

$$\left.\begin{aligned}
[0.1] &= 0 - \frac{w_1^2}{[aa]} \\
[0.2] &= [0.1] - \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} = 0 - \left\{\frac{w_1^2}{[aa]} + \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]}\right\} \\
[0.3] &= [0.2] - \frac{[w_3.2]^2}{[cc.2]} = 0 - \left\{\frac{w_1^2}{[aa]} + \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[w_3.2]^2}{[cc.2]}\right\} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[0.r] &= [0.(r-1)] - \frac{[w_r.(r-1)]^2}{[rr.(r-1)]} = \\
&= 0 - \left\{\frac{w_1^2}{[aa]} + \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[w_3.2]^2}{[cc.2]} + \ldots\ldots + \frac{[w_r.(r-1)]^2}{[rr.(r-1)]}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (435)$$

resp.

$$[0.1] = 0 - \frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$$

$$\left.\begin{aligned}
[0.2] &= [0.1] - \frac{[w_2 . 1]^2}{\left[\frac{bb}{p} . 1\right]} = 0 - \left\{\frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{\left[\frac{bb}{p} . 1\right]}\right\} \\
[0.3] &= [0.2] - \frac{[w_3 . 2]^2}{\left[\frac{cc}{p} . 2\right]} = 0 - \left\{\frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{\left[\frac{bb}{p} . 1\right]} + \frac{[w_3 . 2]^2}{\left[\frac{cc}{p} . 2\right]}\right\} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[0 . r] &= [0 . (r-1)] - \frac{[w_r . (r-1)]^2}{\left[\frac{rr}{p} . (r-1)\right]} = \\
&= 0 - \left\{\frac{w_1^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{\left[\frac{bb}{p} . 1\right]} + \frac{[w_3 . 2]^2}{\left[\frac{cc}{p} . 2\right]} + \ldots\ldots + \frac{[w_r . (r-1)]^2}{\left[\frac{rr}{p} . (r-1)\right]}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (436).$$

Salīdzinot šīs izteiksmes ar (433) resp. (434), atrodam, ka

$$\left.\begin{aligned}
-[0 . r] &= [vv] \\
\text{resp.} \qquad -[0 . r] &= [pvv]
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (437).$$

No izteiksmes (427) atvasinama arī vēl viena cita kontrolformula. Rakstot minēto izteiksmi veidā

$$\begin{aligned}
[vv] = \; & ([aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + \ldots + [ar]k_r)k_1 + \\
& + ([ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + \ldots + [br]k_r)k_2 + \\
& + ([ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + \ldots + [cr]k_r)k_3 + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + ([ar]k_1 + [br]k_2 + [cr]k_3 + \ldots + [rr]k_r)k_r \quad . \; . \quad (438)
\end{aligned}$$

un ievērojot korrelatu normalnolīdzinājumus (415), atrodam

$$[vv] = -w_1k_1 - w_2k_2 - w_3k_3 - \ldots - w_rk_r = -[wk] \quad (439).$$

Šī formula zīmējas uz vienādas noteiktības gadijumu. Dažādas noteiktības gadijumā, izejot no izlabojumu formulām (414) un ievērojot atbilstošos korrelatu normalnolīdzinājumus (416), līdzīgā veidā pierādams, ka

$$[pvv] = -[wk] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (440).$$

§ 38. Izlīdzināto novērojumu funkcijas svara koeficients.

Nosakot izlīdzinātu noteikumu novērojumu funkcijas svaru, jāievēro, ka šinīs izlīdzinātos novērojumos ieiet izlabojumi v; bet tie visi atrasti no vienas un tās pašas noteikumu nolīdzinājumu sistemas un tāpēc nav uzskatami par neatkarīgi nosacītiem argumentiem. Tā tad tādos apstākļos funkcijas svars nav nosakams pēc § 14-ā atrastām formulām, jo tās zīmējas tikai uz neatkarīgu argumentu funkcijām.

Izlīdzinot noteikumu novērojumus pēc korrelatu paņēmiena, izlabojumus v tieši nosaka pēc izlabojumu formulām (412) resp. (414), tā tad korrelatu k linearu funkciju veidā. Kas zīmējas uz šīm korrelatām, tad tās, nosacītas no reducēto korrelatu normalnolīdzinājumu galējiem nolīdzinājumiem (424) resp. (425), savukārt ir noteikumu nolīdzinājumu (403) brīvo locekļu w linearas funkcijas. Beidzot šie brīvie locekļi w, kuros izpaužas uz noteikumiem (397) attiecīgās novērojumu l pretrunas, ir šo argumentu l funkcijas. Tā tad izlabojumi v ir novērojumu l funkcijas, kuru vispārējais veids noteikts ar funkciju w veidu.

Ja noteikumu nolīdzinājumu (397) kreisās puses ir attiecībā uz meklētiem lielumiem x linearas izteiksmes, tad viegli saprotams, ka atvietojot šos x ar izteiksmēm (399), atbilstošo pārversto noteikumu nolīdzinājumu (403) brīvie locekļi w ir novērojumu l linearas funkcijas. Piem., ja pirmais nolīdzinājums (397) ir

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_ix_i + a_0 = 0 \quad . \; . \; . \quad (441),$$

tad ieliekot izteiksmes (399), atbilstošais pārverstais noteikuma nolīdzinājums iznāk

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_iv_i + \{a_0 + (a_1l_1 + a_2l_2 + \\ &\qquad + a_3l_3 + \ldots + a_il_i)\} = \\ &= a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_iv_i + \{a_0 + [al]\} = 0 \qquad (442).\end{aligned}$$

Apskatīsim tagad gadijumu, kad kāds sistemas (397) noteikuma nolīdzinājums, piem., pirmais, dots nelineārā veidā

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (443).$$

Var iedomāties, ka pirms novērojumu l un atbilstošo izlabojumu v ielikšanas šinī nolīdzinājumā, tas pārveidots atvietojot nezinamos x ar no l vispārīgi neatkarīgām izteiksmēm

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (x_1) + \xi_1 \\ x_2 &= (x_2) + \xi_2 \\ x_3 &= (x_3) + \xi_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i &= (x_i) + \xi_i \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (444),$$

kur (x) apzīmē nezinamo x tuvinas vērtības, un ξ — atbilstošos pieaugumus. Tad parastā kārtā, izvirzot Taylor'a rindā, veidojams pārvērstais noteikuma nolīdzinājums

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + \ldots + a_i\xi_i + a'_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (445),$$

kur $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i$ apzīmē funkcijas (443) parcialos atvasinājumus pēc attiecīgiem argumentiem, bet a'_0 — ar šo argumentu tuvinām vērtībām (x) aprēķināto funkciju. Aprēķinot minētos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i$ un a'_0 ar tuvinām vērtībam (x), nolīdzinājuma (445) visi elementi, to starpā arī brīvais loceklis a'_0, pēc būtības uzskatami par neatkarīgiem no novērojumiem l, — pat tad, ja lietotās tuvinās vērtības (x) pieņemtas identiskas ar atbilstošiem l.

Neatkarīgi no minētā pārveidojuma, pieņemsim tagad, ka nolīdzinājuma (443) nezinamie x atvietoti ar izteiksmēm

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_1 + v_1 \\ x_2 &= l_2 + v_2 \\ x_3 &= l_3 + v_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_i &= l_i + v_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (446).$$

Salīdzinot tās ar atbilstošām (444), veidojam jaunas izteiksmes

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= l_1 - (x_1) + v_1 \\ \xi_2 &= l_2 - (x_2) + v_2 \\ \xi_3 &= l_3 - (x_3) + v_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_i &= l_i - (x_i) + v_i \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (447).$$

Ieliekot tās nolīdzinājumā (445), tas pāriet veidā

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_iv_i + \{(a'_0 - [a(x)]) + [al]\} \qquad (448,)$$

jeb, lietojot apzīmējumu

$$a_0 = a'_0 - [a(x)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (449),$$

$$\varphi_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_iv_i + \{a_0 + [al]\} = 0 \qquad (450).$$

Salīdzinot šo nolīdzinājumu ar pirmo (403), ievērojam, ka vienādi apzīmētiem koeficientiem $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i$ abos nolīdzinājumos ir vienāda nozīme. Abos nolīdzinājumos šie koeficienti izsaka funkcijas (443) parcialos atvasinājumus pēc tiem pašiem attiecīgiem argumentiem. Ja aprēķinot šos atvasinājumus ar argumentu tuvinām vērtībām, nolīdzinājumā (403) kā tādas tuvinas vērtības lietoti novērojumi l, bet nolīdzinājumā (450) — minētie (x), tad jāievēro jau taisītā piezīme, ka var pieņemt šos (x) identiskus ar atbilstošiem l. Pie tam arī tādā gadijumā loceklis a'_0 resp. a_0, tāpat kā koeficienti a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_i$, ir neatkarīgs no novērojumiem l, jo šim aprēķinam lietotie l uzskatami nevis par novērojumiem ar zinamiem galīgiem svariem, bet par svaru ziņā neitralām nezinamo x tuvinām vērtībām.

Tā tad nākam pie slēdziena, ka sistemas (403) pirmais nolīdzinājums un nolīdzinājums (450) ir identiski, un tāpēc ir vienādi šo nolīdzinājumu brīvie locekļi w_1 un $\{a_0 + [al]\}$.

Līdzīgā veidā nosakama brīvo locekļu w nozīme arī pārējos pārvērstos noteikumu nolīdzinājumos. Izrādas, ka

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= a_0 + [al] \\ w_2 &= b_0 + [bl] \\ w_3 &= c_0 + [cl] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_r &= r_0 + [rl] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (451),$$

pie kam locekļiem $b_0, c_0, \ldots, r_0$ ir līdzīga nozīme, kā šeit sīkāki apskatītam a_0; t. i. šie locekļi visi neatkarīgi no novērojumiem l.

Ar to pierādīts, ka pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu (403) brīvie locekļi vienmēr ir novērojumu l linearas funkcijas; tādas pat funkcijas arī ir izlabojumi v. Ievērojot (451), pārvērstos noteikumu nolīdzinājumus (403) var rakstīt šādā veidā:

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \ldots + a_iv_i + \{a_0 + [al]\} &= 0 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + \ldots + b_iv_i + \{b_0 + [bl]\} &= 0 \\ c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \ldots + c_iv_i + \{c_0 + [cl]\} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 + \ldots + r_iv_i + \{r_0 + [rl]\} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (452).$$

Tagad apskatīsim svara koeficienta noteikšanu linearai funkcijai, kuras argumenti ir izlīdzināti noteikumu novērojumi. Lai ir dota funkcija

$$F = f_0 + f_1(l_1 + v_1) + f_2(l_2 + v_2) + f_3(l_3 + v_3) + \ldots + \\ + f_i(l_i + v_i) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (453),$$

kur v apzīmē novērojumu l izlabojumus, kuri atrasti pēc korrelatu paņēmiena izejot no pārvērstiem noteikumu nolīdzinājumiem (403) resp. (452).

Zinot, ka izlabojumi v ir novērojumu l linearas funkcijas, funkciju F var rakstīt veidā

$$F = F_0 + F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + \ldots + F_i l_i \quad . \quad . \quad . \quad (454),$$

pie kam brīvais loceklis F_0 un koeficienti F_1, F_2, $F_3, \ldots\ldots, F_i$ ir no novērojumiem l neatkarīgi lielumi. Tā kā novērojumi l uzskatami par viens no otra neatkarīgiem argumentiem, funkcijas F svara koeficients Q_F nosakams pēc pazīstamās formulas

$$Q_F = \frac{1}{p_F} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3} + \ldots + \frac{F_i^2}{p_i} = \left[\frac{FF}{p}\right] \quad (455),$$

kur p_F un p_1, p_2, $p_3, \ldots\ldots, p_i$ apzīmē funkcijas F resp. atsevišķo neizlīdzināto novērojumu l svarus. Vienādas noteiktības gadijumā pieņemsim ka

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_i = 1;$$

tad formula (455) pāriet veidā

$$Q_F = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_i^2 = [FF] \quad . \quad . \quad . \quad (456).$$

Atgriežoties pie izteiksmes (453), ievērojam, ka izlabojumi v nosacīti pēc noteikumu nolīdzinājumiem (403) resp. (452) atbilstošām izlabojumu formulām

$$\left.\begin{array}{l}
v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots + r_1 k_r \\
v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots + r_2 k_r \\
v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots + r_3 k_r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_i = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + \ldots + r_i k_r
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (457).$$

Korrelatas k savukārt atrastas no korrelatu normalnolīdzinājumiem, kuri, ievērojot (451), rakstami veidā

$$\left.\begin{array}{l}
[aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + \ldots + [ar]k_r + \{[al] + a_0\} = 0 \\
[ab]k_1 + [bb]k_2 + [bc]k_3 + \ldots + [br]k_r + \{[bl] + b_0\} = 0 \\
[ac]k_1 + [bc]k_2 + [cc]k_3 + \ldots + [cr]k_r + \{[cl] + c_0\} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[ar]k_1 + [br]k_2 + [cr]k_3 + \ldots + [rr]k_r + \{[rl] + r_0\} = 0
\end{array}\right\} (458).$$

Ieliekot izteiksmes (457) funkcijā (453), atrodam

$$\begin{aligned}
F = f_0 + f_1 l_1 + a_1 f_1 k_1 + b_1 f_1 k_2 + c_1 f_1 k_3 + \ldots + r_1 f_1 k_r + \\
+ f_2 l_2 + a_2 f_2 k_1 + b_2 f_2 k_2 + c_2 f_2 k_3 + \ldots + r_2 f_2 k_r +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ f_3 l_3 + a_3 f_3 k_1 + b_3 f_3 k_2 + c_3 f_3 k_3 + \ldots + r_3 f_3 k_r + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ f_i l_i + a_i f_i k_1 + b_i f_i k_2 + c_i f_i k_3 + \ldots + r_i f_i k_r \quad = \\
&= f_0 + [fl] + [af]k_1 + [bf]k_2 + [cf]k_3 + \ldots + [rf]k_r \quad \ldots \quad (459).
\end{aligned}
$$

Tālak, reizinot atsevišķos korrelatu normalnolīdzinājumus (458) ar pagaidām nenoteiktiem koeficientiem $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_r$, tā pārveidoto korrelatu normalnolīdzinājumu sistemu pieskaitam izteiksmei (459). Tā tad pāriet šādā veidā:

$$
\begin{aligned}
F = f_0 &+ [fl] + [af]k_1 + [bf]k_2 + [cf]k_3 + \ldots + [rf]k_r + \\
&+ a_0 q_1 + [al]q_1 + [aa]k_1 q_1 + [ab]k_2 q_1 + [ac]k_3 q_1 + \ldots + [ar]k_r q_1 + \\
&+ b_0 q_2 + [bl]q_2 + [ab]k_1 q_2 + [bb]k_2 q_2 + [bc]k_3 q_2 + \ldots + [br]k_r q_2 + \\
&+ c_0 q_3 + [cl]q_3 + [ac]k_1 q_3 + [bc]k_2 q_3 + [cc]k_3 q_3 + \ldots + [cr]k_r q_3 + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ r_0 q_r + [rl]q_r + [ar]k_1 q_r + [br]k_2 q_r + [cr]k_3 q_r + \ldots + [rr]k_r q_r \quad \ldots (460).
\end{aligned}
$$

Līdz šim brīvā rīcībā palikušos koeficientus q izvēlamies tā, lai tie apmierinātu nolīdzinājumu sistemu

$$
\left.
\begin{aligned}
&[aa]q_1 + [ab]q_2 + [ac]q_3 + \ldots + [ar]q_r + [af] = 0 \\
&[ab]q_1 + [bb]q_2 + [bc]q_3 + \ldots + [br]q_r + [bf] = 0 \\
&[ac]q_1 + [bc]q_2 + [cc]q_3 + \ldots + [cr]q_r + [cf] = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[ar]q_1 + [br]q_2 + [cr]q_3 + \ldots + [rr]q_r + [rf] = 0
\end{aligned}
\right\} \quad (461).
$$

Tādos apstākļos, pa stabiņiem sumējot izteiksmes (460) locekļus, funkcija F pāriet veidā

$$
\begin{aligned}
F = f_0 + [fl] + \{a_0 + [al]\} q_1 + \{b_0 + [bl]\} q_2 + \{c_0 + [cl]\} q_3 + \ldots + \\
+ \{r_0 + [rl]\} q_r \quad = \\
= \quad f_0 + a_0 q_1 + b_0 q_2 + c_0 q_3 + \ldots + r_0 q_r \quad + \\
+ (f_1 + a_1 q_1 + b_1 q_2 + c_1 q_3 + \ldots + r_1 q_r)\, l_1 + \\
+ (f_2 + a_2 q_1 + b_2 q_2 + c_2 q_3 + \ldots + r_2 q_r)\, l_2 + \\
+ (f_3 + a_3 q_1 + b_3 q_2 + c_3 q_3 + \ldots + r_3 q_r)\, l_3 + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ (f_i + a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 + \ldots + r_i q_r)\, l_i \quad \ldots \quad (462).
\end{aligned}
$$

Salīdzinot šo izteiksmi ar (454), izrādas, ka funkcijas F brīvam loceklim un koeficientiem ir šāda nozīme:

$$\left.\begin{array}{l} F_0 = f_0 + a_0 q_1 + b_0 q_2 + c_0 q_3 + \ldots + r_0 q_r \\ F_1 = f_1 + a_1 q_1 + b_1 q_2 + c_1 q_3 + \ldots + r_1 q_r \\ F_2 = f_2 + a_2 q_1 + b_2 q_2 + c_2 q_3 + \ldots + r_2 q_r \\ F_3 = f_3 + a_3 q_1 + b_3 q_2 + c_3 q_3 + \ldots + r_3 q_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_i = f_i + a_i q_1 + b_i q_2 + c_i q_3 + \ldots + r_i q_r \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (463).$$

Tā tad, zinot pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu (452) un funkcijas (453) koeficientus un brīvos locekļus, un no nolīdzinājumiem (461) nosakot koeficientus q, pēc formulām (463) var aprēķināt koeficientus F. Ar tiem tad pēc formulas (456) nosakams meklētais svara koeficients Q_F.

Bet nav vajadzīgs tādā veidā nosacīt atsevišķos koeficientus F, jo, tiešā sakarā ar novērojumu izlīdzināšanas nolūkā veidoto korrelatu normalnolīdzinājumu reducēšanu pēc Gauss'a algoritma, atrodama meklēto svara koeficientu Q_F noteicošā suma [FF].

Salīdzinot uz F_1, F_2, F_3, ..., F_i attiecīgās izteiksmes (463) ar netiešu novērojumu gadijumā veidotiem kļūdu nolīdzinājumiem (202), redzams, ka abām nolīdzinājumu sistemām ir vienāds raksturs. Tā tad minētās izteiksmes (463) uzskatamas itkā par kļūdu nolīdzinājumiem ar nezinamiem q_1, q_2, q_3, ..., q_r, pie kam šo nolīdzinājumu brīvie locekļi ir f_1, f_2, f_3, ..., f_i, bet $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_i$ — atbilstošās novērojumu šķietamās kļūdas. Citiem vārdiem: sistemā (463) elementi f un F spēlē līdzīgu lomu, kā elementi $-\lambda$ resp. v sistemā (202). Tā tad elementiem f un F jābūt tādā pat sakarā, kādā netiešu novērojumu gadijumā ir $-\lambda$ un v. Kas zīmējas uz sakaru starp $-\lambda$ un v, tad to nosaka agrāk atrastā attiecīgā formula (262). Tāpēc, ievērojot augšā teikto, var uzskatīt par pierādītu arī analogo formulu

$$[FF] = [ff.r] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (464).$$

Lai atrastu simbolam [ff.r] atbilstošo izteiksmi, jāveido „kļūdu nolīdzinājumiem" (463) atbilstošie normalnolīdzinājumi, papildinot tos ar locekli [ff]. Reducējot ar šo locekli papildināto normalnolīdzinājumu sistemu līdz visu r nezinamo izslēgšanai, t. i. r reizes, paliek sistemas pilnīgi reducētais papildu loceklis, kurš ir nekas cits, kā meklētais [ff.r].

Bet salīdzinot nolīdzinājumus (461) ar minētiem „kļūdu nolīdzinājumiem" (463), redzams, ka (461) ir šiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošā normalnolīdzinājumu sistema. Tā tad papildinot šo sistemu ar locekli [ff] un izdarot reducēšanu pēc Gauss'a algoritma, nosakams [FF] noteicošais loceklis [ff.r].

No otras puses, salīdzinot sistemu (461) ar korrelatu normalnolīdzinājumiem (458) resp. (415), izrādas, ka šīs sistemas atšķiras tikai brīvos locekļos. Tā tad sistemas (461) brīvie locekļi un papildu loceklis [ff] reducējami sakarā ar korrelatu normalnolīdzinājumu (415) reducēšanu līdzīgā veidā, kā netiešu novērojumu gadijumā sakarā ar normalnolīdzinājumu reducēšanu reducējami atbilstošo svaru nolīdzinājumu brīvie locekļi. Pakāpeniski reducējot korrelatu normalnolīdzinājumu sistemas papildu locekli [ff], Gauss'a algoritma parastā kārtībā tiek veidotas izteiksmes

$$\left.\begin{aligned}
[ff.1] &= [ff] - \frac{[af]}{[aa]}[af] \\
[ff.2] &= [ff.1] - \frac{[bf.1]}{[bb.1]}[bf.1] \\
[ff.3] &= [ff.2] - \frac{[cf.2]}{[cc.2]}[cf.2] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[ff.r] &= [ff.(r-1)] - \frac{[rf.(r-1)]}{[rr.(r-1)]}[rf.(r-1)]
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (465).$$

Tā tad pielietojot šeit iztirzāto paņēmienu, svara koeficients Q_F nosakams pēc formulas

$$Q_F = [ff.r] = [ff] - \left\{\frac{[af]^2}{[aa]} + \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[cf.2]^2}{[cc.2]} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{[rf.(r-1)]^2}{[rr.(r-1)]}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (466).$$

Dažādas noteiktības gadijumā līdzīgā kārtā pierādams, ka

$$Q_F = \left[\frac{ff}{p}.r\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \left\{\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{bf}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]} + \frac{\left[\frac{cf}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{\left[\frac{rf}{p}.(r-1)\right]^2}{\left[\frac{rr}{p}.(r-1)\right]}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (467).$$

Kas zīmējas uz pašu izlīdzināto noteikumu novērojumu svaru koeficientu noteikšanu, tad piezīmējam, ka katrs izlīdzinātais novērojums izsakams visu izlīdzināto novērojumu linearas funkcijas veidā. Šinī funkcijā pats attiecīgais izlīdzinātais novērojums ieiet ar koeficientu 1, bet visu pārējo argumentu koeficienti ir vienādi ar nulli. Attiecīgā svara koeficienta noteikšana notiek šeit aizrādītā kārtā.

§ 39. Noteikumu novērojumu izlīdzināšanas kārtība.

Stājoties pie noteikumu novērojumu izlīdzināšanas, vispirms jānoskaidro, cik ir svarā krītošo noteikumu; to skaits, kā zinams, ir vienāds ar novērojumu nolūkam lieko novērojumu skaitu. Atbilstošos noteikumu nolīdzinājumos izsakot novēroto lielumu izlīdzinātās vērtības ar neizlīdzināto novērojumu un to izlabojumu v sumām, veido linearos pārvērstos noteikumu nolīdzinājumus ar nezinamiem v. Izsakot uz atsevišķiem noteikumiem attiecīgās novērojumu pretrunas, šo pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu brīvie locekļi var noderēt par zinamu kriteriju novērojumu noteiktībai. Spriežot pēc šiem brīviem locekļiem, jau pašā izlīdzināšanas darba sākumā var noskaidrot, vai atmaksājas turpināt izlīdzināšanu, vai nepietiekošas noteiktības dēļ novērojumi pirms izlīdzināšanas jāpārtaisa.

Sakarā ar pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu veidošanu ieteicams aprēķināt sumu kontrolēm vajadzīgās koeficientu sumas. Arī jāsastāda linearā veidā izteiktās izlīdzināto novērojumu funkcijas, kurām jānosaka vidējās kļūdas resp. tam nolūkam vajadzīgie svaru koeficienti.

Veidojot korrelatu normalnolīdzinājumus, aprēķina šo svaru koeficientu noteikšanai vajadzīgās [ff] resp. $\left[\frac{ff}{p}\right]$ tipa sumas un šo sumu reducēšanā lietojamos no attiecīgo funkciju koeficientiem atkarīgos locekļus. Arī veido sumu kontrolēm vajadzīgos s- vai σ-tipa kontrollocekļus. Attiecībā uz šiem kontrollocekļiem piezīmējam sekojošo.

Lai vienādas noteiktības gadijumā līdz ar korrelatu normalnolīdzinājumiem (415) tiek reducēti arī kādai (453) tipa funkcijai F atbilstošo nolīdzinājumu (461) brīvie locekļi. Tad veidojot sumu nolīdzinājumu, tas jāpapildina ar šiem brīviem locekļiem atbilstošo locekli. Tam nolūkam pēc (418) parauga aprēķina

$$[fs] = f_1 s_1 + f_2 s_2 + f_3 s_3 + \ldots\ldots + f_i s_i \quad . \; . \; . \; . \quad (468),$$

kur s_1, s_2, s_3, ..., s_i ir pēc formulām (417) veidotās koeficientu sumas. Ievērojot minētās formulas (417), pierādams, ka

$$[fs] = [af] + [bf] + [cf] + \ldots\ldots + [rf] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (469).$$

Ja ir vairākas funkcijas F, tad, saprotams, nosakot (468) tipa kontrollocekli katrai funkcijai atsevišķi, katrreiz jālieto attiecīgās funkcijas koeficienti f, bet sumas s vienmēr paliek tās pašas.

Kontrolloceklis (468) nekā neizsaka par funkcijas koeficientu kvadratu sumu [ff], no kuras, reducējot, pēc formulas (466) atvasinams funkcijas svara koeficients Q_F. Lai pārbaudītu arī šo [ff], jāveido sumas

$$\left.\begin{array}{l}
(s_1) = a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + r_1 + f_1 = s_1 + f_1 \\
(s_2) = a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + r_2 + f_2 = s_2 + f_2 \\
(s_3) = a_3 + b_3 + c_3 + \ldots + r_3 + f_3 = s_3 + f_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(s_i) = a_i + b_i + c_i + \ldots + r_i + f_i = s_i + f_i
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (470),$$

kur f_1, f_2, f_3, ..., f_i ir attiecīgās funkcijas koeficienti. Atbilstošais kontrolloceklis tad ir

$$[f(s)] = f_1(s_1) + f_2(s_2) + f_3(s_3) + \ldots + f_i(s_i) \quad . \quad . \quad . \quad (471),$$

jo, ievērojot (470),

$$[f(s)] = [af] + [bf] + [cf] + \ldots + [rf] + [ff] \quad . \quad . \quad . \quad (472).$$

Formulas (468) — (472) zīmējas uz s-tipa kontrollocekļiem. Veidojot σ-tipa kontrollocekļus, pieņemsim, ka ir dotas vairākas funkcijas F′, F″, F‴, ... ar koeficientiem

$$\left.\begin{array}{l}
f_1', f_2', f_3', \ldots\ldots, f_i' \\
f_1'', f_2'', f_3'', \ldots\ldots, f_i'' \\
f_1''', f_2''', f_3''', \ldots\ldots, f_i''' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (473).$$

Tad veido sumas

$$\left.\begin{array}{l}
(s_1') = a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + r_1 + f_1' + f_1'' + f_1''' + \ldots \\
(s_2') = a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + r_2 + f_2' + f_2'' + f_2''' + \ldots \\
(s_3') = a_3 + b_3 + c_3 + \ldots + r_3 + f_3' + f_3'' + f_3''' + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(s_i') = a_i + b_i + c_i + \ldots + r_i + f_i' + f_i'' + f_i''' + \ldots
\end{array}\right\} \quad (474),$$

un ar tām aprēķina izteiksmes

$$\left.\begin{array}{l}[a(s')] = a_1(s_1') + a_2(s_2') + a_3(s_3') + \ldots + a_i(s_i') \\ [b(s')] = b_1(s_1') + b_2(s_2') + b_3(s_3') + \ldots + b_i(s_i') \\ [c(s')] = c_1(s_1') + c_2(s_2') + c_3(s_3') + \ldots + c_i(s_i') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [r(s')] = r_1(s_1') + r_2(s_2') + r_3(s_3') + \ldots + r_i(s_i')\end{array}\right\} \quad (475).$$

Beidzot veido sumas

$$\left.\begin{array}{l}(\sigma_1) = [a(s')] + w_1 \\ (\sigma_2) = [b(s')] + w_2 \\ (\sigma_3) = [c(s')] + w_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\sigma_r) = [r(s')] + w_r\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (476).$$

Ievērojot (474), pierādams, ka

$$\left.\begin{array}{l}(\sigma_1) = [aa] + [ab] + [ac] + \ldots + [ar] + w_1 + [af'] + [af''] + [af'''] + \ldots \\ (\sigma_2) = [ab] + [bb] + [bc] + \ldots + [br] + w_2 + [bf'] + [bf''] + [bf'''] + \ldots \\ (\sigma_3) = [ac] + [bc] + [cc] + \ldots + [cr] + w_3 + [cf'] + [cf''] + [cf'''] + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\sigma_r) = [ar] + [br] + [cr] + \ldots + [rr] + w_r + [rf'] + [rf''] + [rf'''] + \ldots\end{array}\right\} (477).$$

Ar šiem σ-tipa kontrollocekļiem pa atsevišķiem korrelatu normalnolīdzinājumiem un atbilstošiem (461) tipa nolīdzinājumiem pārbaudams, vai šie nolīdzinājumi pareizi atvasināti no pārvērstiem noteikumu nolīdzinājumiem un funkciju F', F'', F''',..... koeficientiem.

Dažādas noteiktības gadijumā veidojamas tās pašas sumas (417), (470), (474). Bet kontrollocekļu un kontrolformulu (468) un (469), (471) un (472), (475), (476) un (477) vietā stājas:

$$\left[\frac{fs}{p}\right] = \frac{f_1 s_1}{p_1} + \frac{f_2 s_2}{p_2} + \frac{f_3 s_3}{p_3} + \ldots + \frac{f_i s_i}{p_i} \quad \ldots \quad (478)$$

un

$$\left[\frac{fs}{p}\right] = \left[\frac{af}{p}\right] + \left[\frac{bf}{p}\right] + \left[\frac{cf}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{rf}{p}\right] \quad \ldots \quad (479),$$

$$\left[\frac{f(s)}{p}\right] = \frac{f_1(s_1)}{p_1} + \frac{f_2(s_2)}{p_2} + \frac{f_3(s_3)}{p_3} + \ldots + \frac{f_i(s_i)}{p_i} \quad \ldots \quad (480)$$

un

$$\left[\frac{f(s)}{p}\right]=\left[\frac{af}{p}\right]+\left[\frac{bf}{p}\right]+\left[\frac{cf}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{rf}{p}\right]+\left[\frac{ff}{p}\right] \quad . \; . \quad (481),$$

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{a(s')}{p}\right]&=\frac{a_1(s_1')}{p_1}+\frac{a_2(s_2')}{p_2}+\frac{a_3(s_3')}{p_3}+\ldots+\frac{a_i(s_i')}{p_i}\\
\left[\frac{b(s')}{p}\right]&=\frac{b_1(s_1')}{p_1}+\frac{b_2(s_2')}{p_2}+\frac{b_3(s_3')}{p_3}+\ldots+\frac{b_i(s_i')}{p_i}\\
\left[\frac{c(s')}{p}\right]&=\frac{c_1(s_1')}{p_1}+\frac{c_2(s_2')}{p_2}+\frac{c_3(s_3')}{p_3}+\ldots+\frac{c_i(s_i')}{p_i}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left[\frac{r(s')}{p}\right]&=\frac{r_1(s_1')}{p_1}+\frac{r_2(s_2')}{p_2}+\frac{r_3(s_3')}{p_3}+\ldots+\frac{r_i(s_i')}{p_i}
\end{aligned}\right\} \quad (482),$$

$$\left.\begin{aligned}
(\sigma_1)&=\left[\frac{a(s')}{p}\right]+w_1\\
(\sigma_2)&=\left[\frac{b(s')}{p}\right]+w_2\\
(\sigma_3)&=\left[\frac{c(s')}{p}\right]+w_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\sigma_r)&=\left[\frac{r(s')}{p}\right]+w_r
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (483)$$

un

$$\left.\begin{aligned}
(\sigma_1)&=\left[\frac{aa}{p}\right]+\left[\frac{ab}{p}\right]+\left[\frac{ac}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{ar}{p}\right]+w_1+\left[\frac{af'}{p}\right]+\left[\frac{af''}{p}\right]+\left[\frac{af'''}{p}\right]+\ldots\\
(\sigma_2)&=\left[\frac{ab}{p}\right]+\left[\frac{bb}{p}\right]+\left[\frac{bc}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{br}{p}\right]+w_2+\left[\frac{bf'}{p}\right]+\left[\frac{bf''}{p}\right]+\left[\frac{bf'''}{p}\right]+\ldots\\
(\sigma_3)&=\left[\frac{ac}{p}\right]+\left[\frac{bc}{p}\right]+\left[\frac{cc}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{cr}{p}\right]+w_3+\left[\frac{cf'}{p}\right]+\left[\frac{cf''}{p}\right]+\left[\frac{cf'''}{p}\right]+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\sigma_r)&=\left[\frac{ar}{p}\right]+\left[\frac{br}{p}\right]+\left[\frac{cr}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{rr}{p}\right]+w_r+\left[\frac{rf'}{p}\right]+\left[\frac{rf''}{p}\right]+\left[\frac{rf'''}{p}\right]+\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (484).$$

Ar attiecīgiem kontrollocekļiem papildinātās korrelatu normalnolīdzinājumu sistemas reducēšana pēc Gauss'a algoritma notiek līdzīgā veidā, kā normalnolīdzinājumu sistemas reducēšana netiešu novērojumu gadijumā. Ar apstākļiem atbilstošiem nelieliem grozijumiem paliek spēkā arī agrāk aizrādītās reducēšanas schemas.

Ar atrastām korrelatām pēc izlabojumu formulām nosakami izlabojumi v. Sakarā ar to veidotā suma [vv] resp. (pvv), starp citu, lietojama izlīdzināšanas rēķina vispārējai kontrolei, kura izdarama uz formulas (433) resp. (434) jeb (437), vai arī uz formulas (439) resp. (440) pamata.

Beidzot, pieliekot atrastos izlabojumus v attiecīgiem novērojumiem l, nosakamas to izlīdzinātās vērtības. Ieliekot tās noteikumu nolīdzinājumos, šiem nolīdzinājumiem jābūt izpildītiem, ja nerunāt par eventualām ļoti nelielām, ar notikušiem apaļojumiem izskaidrojamām pretrunām.

Kas zīmējas uz noteiktības aprēķinu, tad svara vienības vidējā kļūda nosakama pēc pirmās vai otrās formulas (408), skatoties pēc tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības gadijums. Vienādas noteiktības gadijumā šī kļūda ir identiska ar jebkura atsevišķa neizlīdzināta novērojuma vidējo kļūdu. Dažādas noteiktības gadijumā, zinot atsevišķo neizlīdzināto novērojumu svarus, pēc formulām (95), izejot no atrastās svara vienības vidējās kļūdas, var nosacīt atbilstošās vidējās kļūdas. Kas zīmējas uz izlīdzinātiem novērojumiem vai to funkcijām, tad ar atrastiem attiecīgiem svaru koeficientiem Q_F atbilstošās vidējās kļūdas m_F nosakamas pēc formulas

$$m_F = \pm m \sqrt{Q_F} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (485),$$

kur m apzīmē svara vienības vidējo kļūdu.

§ 40. Skaitlisks piemērs.

Atgriežoties pie § 29-ā atrisinātā uzdevuma, atrisināsim to vēl reiz, tagad uzskatot līmetņojuma rezultātā atrastās augstumu starpības h par noteikumu novērojumiem.

Kā jau minēts § 29-ā, šo novērojumu $h_1 - h_8$ izlīdzinātās vērtības, kuras šeit apzīmēsim ar $x_1 - x_8$, padotas šādiem, uz slēgtiem poligoniem I, II, III, IV attiecīgiem noteikumiem:

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 \quad\quad + x_4 \quad\quad\quad\quad\quad\quad &= 0 \\
- x_4 \quad + x_6 - x_7 &= 0 \\
x_2 + x_3 \quad\quad - x_5 \quad\quad\quad\quad &= 0 \\
x_5 \quad\quad + x_7 - x_8 &= 0
\end{aligned}$$

Apzīmējot novērojumu $h_1 - h_8$ izlabojumus ar $v_1 - v_8$, atvietojam šinīs nolīdzinājumos meklētos lielumus $x_1 - x_8$ ar izteiksmēm

$$
\begin{aligned}
x_1 &= h_1 + v_1 = 1069 + v_1 \\
x_2 &= h_2 + v_2 = 2648 + v_2 \\
x_3 &= h_3 + v_3 = 7078 + v_3 \\
x_4 &= h_4 + v_4 = 1571 + v_4 \\
x_5 &= h_5 + v_5 = 9724 + v_5 \\
x_6 &= h_6 + v_6 = 9946 + v_6 \\
x_7 &= h_7 + v_7 = 8375 + v_7 \\
x_8 &= h_8 + v_8 = 18103 + v_8
\end{aligned}
$$

Tad rodas pārvērstie noteikumu nolīdzinājumi

$$
\begin{array}{llllr}
v_1 - v_2 & + v_4 & & & - 8 = 0 \\
 & - v_4 & + v_6 - v_7 & & + 0 = 0 \\
v_2 + v_3 & & - v_5 & & + 2 = 0 \\
 & & v_5 & + v_7 - v_8 & - 4 = 0
\end{array}
$$

kur visi elementi izteikti milimetros.

Pieņemot, ka vidējās kļūdas jānosaka ar izlīdzinātiem novērojumiem aprēķinātiem punktu 7, 22, S, 26 augstumiem H_7, H_{22}, H_s, H_{26}, izsakam šos augstumus izlīdzināto novērojumu funkciju veidā. Ievērojot, ka punkta 10 augstums H_{10} un tā vidējā kļūda ir neatkarīgi no notikušiem novērojumiem doti elementi, vidējās kļūdas resp. svaru koeficienti jānosaka tikai funkcijām

$$
\begin{aligned}
F_7 &= x_2 &&= (h_2 + v_2) &&= + \ 2648 + v_2 \\
F_{22} &= x_2 - x_4 &&= (h_2 + v_2) - (h_4 + v_4) &&= + \ 1077 + v_2 - v_4 \\
F_s &= x_2 + x_7 &&= (h_2 + v_2) + (h_7 + v_7) &&= + \ 11023 + v_2 + v_7 \\
F_{26} &= x_2 - x_5 &&= (h_2 + v_2) - (h_5 + v_5) &&= - \ 7076 + v_2 - v_5
\end{aligned}
$$

ar kurām meklētie augstumi nosakami pēc formulām

$$
\begin{aligned}
H_7 &= H_{10} + F_7 \\
H_{22} &= H_{10} + F_{22} \\
H_s &= H_{10} + F_s \\
H_{26} &= H_{10} + F_{26}
\end{aligned}
$$

Nākošās lappuses pirmā tabulā sagrupēti pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu un funkciju F koeficienti a, b, c, d un f, § 29-ā minēto svaru p pretējās vērtības, un sumu kontrolēm vajadzīgās sumas (s) un (s'). Pārējās tabulās atzīmēts uz korrelatu normalnolīdzinājumu

(Turp. 244. lapp.)

	$\frac{1}{p}$	a	b	c	d	s	$_7f$	$_7(s)$	$_{22}f$	$_{22}(s)$	$_sf$	$_s(s)$	$_{26}f$	$_{26}(s)$	(s')
1.	1,05	+1	0	0	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	+1
2.	0,34	−1	0	+1	0	0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+4
3.	0,53	0	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	+1
4.	0,36	+1	−1	0	0	0	0	0	−1	−1	0	0	0	0	−1
5.	0,30	0	0	−1	+1	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	−1
6.	0,96	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	+1
7.	0,53	0	−1	0	+1	0	0	0	0	0	+1	+1	0	0	+1
8.	0,89	0	0	0	−1	−1	0	−1	0	−1	0	−1	0	−1	−1

	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{ac}{p}$	$\frac{ad}{p}$	$\frac{af}{_7p}$	$\frac{af}{_{22}p}$	$\frac{af}{_sp}$	$\frac{af}{_{26}p}$
1.	+1,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2.	+0,34	0,00	−0,34	0,00	−0,34	−0,34	−0,34	−0,34
3.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4.	+0,36	−0,36	0,00	0,00	0,00	−0,36	0,00	0,00
5.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	+1,75	−0,36	−0,34	0,00	−0,34	−0,70	−0,34	−0,34

	$\frac{bb}{p}$	$\frac{bc}{p}$	$\frac{bd}{p}$	$\frac{bf}{_7p}$	$\frac{bf}{_{22}p}$	$\frac{bf}{_sp}$	$\frac{bf}{_{26}p}$
1.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4.	+0,36	0,00	0,00	0,00	+0,36	0,00	0,00
5.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6.	+0,96	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7.	+0,53	0,00	−0,53	0,00	0,00	−0,53	0,00
8.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	+1,85	0,00	−0,53	0,00	+0,36	−0,53	0,00

	$\frac{cc}{p}$	$\frac{cd}{p}$	$\frac{cf}{{}^{7}p}$	$\frac{cf}{{}^{22}p}$	$\frac{cf}{{}^{s}p}$	$\frac{cf}{{}^{26}p}$
1.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2.	+0,34	0,00	+0,34	+0,34	+0,34	+0,34
3.	+0,53	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5.	+0,30	−0,30	0,00	0,00	0,00	+0,30
6.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	+1,17	−0,30	+0,34	+0,34	+0,34	+0,64

	$\frac{dd}{p}$	$\frac{df}{{}^{7}p}$	$\frac{df}{{}^{22}p}$	$\frac{df}{{}^{s}p}$	$\frac{df}{{}^{26}p}$
1.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5.	+0,30	0,00	0,00	0,00	−0,30
6.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7.	+0,53	0,00	0,00	+0,53	0,00
8.	+0,89	0,00	0,00	0,00	0,00
	+1,72	0,00	0,00	+0,53	−0,30

	$\frac{ff}{{}^{7}p}$	$\frac{ff}{{}^{22}p}$	$\frac{ff}{{}^{s}p}$	$\frac{ff}{{}^{26}p}$
1.	0,00	0,00	0,00	0,00
2.	+0,34	+0,34	+0,34	+0,34
3.	0,00	0,00	0,00	0,00
4.	0,00	+0,36	0,00	0,00
5.	0,00	0,00	0,00	+0,30
6.	0,00	0,00	0,00	0,00
7.	0,00	0,00	+0,53	0,00
8.	0,00	0,00	0,00	0,00
	+0,34	+0,70	+0,87	+0,64

	${}_{7}\frac{f(s)}{p}$	${}_{22}\frac{f(s)}{p}$	${}_{s}\frac{f(s)}{p}$	${}_{26}\frac{f(s)}{p}$	$\frac{a(s')}{p}$	$\frac{b(s')}{p}$	$\frac{c(s')}{p}$	$\frac{d(s')}{p}$
1.	0,00	0,00	0,00	0,00	+1,05	0,00	0,00	0,00
2.	+0,34	+0,34	+0,34	+0,34	—1,36	0,00	+1,36	0,00
3.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+0,53	0,00
4.	0,00	+0,36	0,00	0,00	—0,36	+0,36	0,00	0,00
5.	0,00	0,00	0,00	+0,30	0,00	0,00	+0,30	—0,30
6.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+0,96	0,00	0,00
7.	0,00	0,00	+0,53	0,00	0,00	—0,53	0,00	+0,53
8.	0,00	0 00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+0,89
	+0,34	+0,70	+0,87	+0,64	— 0,67	+0,79	+2,19	+1,12
				w	—8,00	0,00	+2,00	— 4,00
				(σ)	—8,67	+0,79	+4,19	—2,88

	F_7	F_{22}	F_s	F_{26}
$\left[\frac{af}{p}\right]$	— 0,34	— 0,70	— 0,34	— 0,34
$\left[\frac{bf}{p}\right]$	0,00	+ 0,36	— 0,53	0,00
$\left[\frac{cf}{p}\right]$	+ 0,34	+ 0,34	+ 0,34	+ 0,64
$\left[\frac{df}{p}\right]$	0,00	0,00	+ 0,53	— 0,30
$\left[\frac{ff}{p}\right]$	+ 0,34	+ 0,70	+ 0,87	+ 0,64
	+ 0,34	+ 0,70	+ 0,87	+ 0,64

un svaru nolīdzinājumu koeficientiem un brīviem locekļiem un uz atbilstošiem σ-tipa kontrollocekļiem attiecīgais skaitliskais materials.

Korrelatu normalnolīdzinājumi un atbilstošie, uz atsevišķām funkcijām F_7, F_{22}, F_s, F_{26} attiecīgo (461) tipa svaru nolīdzinājumu brīvie locekļi ir šādi:

$$
\begin{aligned}
&+1{,}75k_1 - 0{,}36k_2 - 0{,}34k_3 + 0{,}00k_4 - 8 = 0; \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -0{,}34; \; -0{,}70; \; -0{,}34; \; -0{,}34; \\[1ex]
&-0{,}36k_1 + 1{,}85k_2 + 0{,}00k_3 - 0{,}53k_4 + 0 = 0; \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}00; \; +0{,}36; \; -0{,}53; \; 0{,}00; \\[1ex]
&-0{,}34k_1 + 0{,}00k_2 + 1{,}17k_3 - 0{,}30k_4 + 2 = 0; \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +0{,}34; \; +0{,}34; \; +0{,}34; \; +0{,}64; \\[1ex]
&0{,}00k_1 - 0{,}53k_2 - 0{,}30k_3 + 1{,}72k_4 - 4 = 0; \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}00; \; 0{,}00; \; +0{,}53; \; -0{,}30.
\end{aligned}
$$

Šo sistemu reducējot pēc Gauss'a algoritma ar σ-tipa sumu kontrolēm, kontrollocekļus (σ) ieliekam ar pretējām zīmēm; tā tad veidojot kontrolformulām atbilstošo locekļu sumas, vienmēr jāiznāk nullei. Sakarā ar korrelatu normalnolīdzinājumu reducēšanu, pakāpeniski izdarīts arī kontrollocekļa [0.4] un funkciju F_7, F_{22}, F_s, F_{26} svaru koeficientus noteicošo locekļu $\left[\frac{ff}{p}.4\right]_7$, $\left[\frac{ff}{p}.4\right]_{22}$, $\left[\frac{ff}{p}.4\right]_s$, $\left[\frac{ff}{p}.4\right]_{26}$ aprēķins. Pēc korrelatu k noteikšanas kontroles nolūkā veidota suma [kw], lai, salīdzinot to ar minēto kontrollocekli [0.4], pārbaudītu korrelatu noteikšanu no reducētiem normalnolīdzinājumiem.

Nākošā lappusē parādītais reducēšanas un korrelatu normalnolīdzinājumu atslēgšanas rēķins izdarīts § 28-ā minētās saīsinātās schemas 1 vispārējā kārtībā.

Ieliekot atrastās korrelatu vērtības izlabojumu formulās, nosakam izlabojumus

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 1{,}05(+1\times 5{,}0504 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;) = +5{,}3029 \text{ mm} \\
v_2 &= 0{,}34(-1\times 5{,}0504 \qquad +1\times 0{,}5208 \qquad) = -1{,}5401 \\
v_3 &= 0{,}53(\qquad\qquad\qquad\qquad +1\times 0{,}5208 \qquad) = +0{,}2760
\end{aligned}
$$

(Turp. 248. lapp.)

	k_1	k_2	k_3	k_4	w	F_7	F_{22}	F_s
					Nereducētā sistema			
	+1,750	$-0,36_0$	$-0,34_0$	$0,00_0$	$-8,00_0$	$-0,34_0$	$-0,70_0$	$-0,34_0$
		$+1,85_0$	$0,00_0$	$-0,53_0$	$0,00_0$	$0,00_0$	$+0,36_0$	$-0,53_0$
−0,206		+0,074	−0,070	0,000	+1,648	+0,070	+0,144	+0,070
			$+1,17_0$	$-0,30_0$	$+2,00_0$	$+0,34_0$	$+0,34_0$	$+0,34_0$
−0,194			+0,066	0,000	+1,552	+0,066	+0,136	+0,066
				$+1,72_0$	$-4,00_0$	$0,00_0$	$0,00_0$	$+0,53_0$
0,000 −4,5710				0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
					1-o reizi reducētā sistema			
		$+1,77_6$	$-0,07_0$	$-0,53_0$	$-1,64_8$	$-0,07_0$	$+0,21_6$	$-0,60_0$
			$+1,10_4$	$-0,30_0$	$+0,44_8$	$-0,27_4$	$+0,20_4$	$+0,27_4$
	−0,039		+0,003	+0,021	+0,064	+0,003	−0,008	+0,023
				$+1,72_0$	$-4,00_0$	$0,00_0$	$0,00_0$	$+0,53_0$
	−0,298 −0,9279			+0,158	+0,491	+0,021	−0,064	+0,179
					2-o reizi reducētā sistema			
			$+1,10_1$	$-0,32_1$	$+0,38_4$	$+0,27_1$	$+0,21_2$	$+0,25_1$
				$+1,56_{20}$	$-4,49_{10}$	$+0,02_{10}$	$+0,06_{40}$	$+0,35_{10}$
		−0,2916 +0,3488		+0,0936	−0,1120	−0,0790	−0,0618	−0,0732
					3-o reizi reducēta sis-			
		−2,9822		$+1,46_{8}$[illegible]	$-4,37_{90}$	$+0,05_{80}$	$+0,12_{58}$	$+0,42_{42}$

$+0,37_{84}$			
$+0,10_{10}$	$+0,02_{03}$		
$0,00_{00}$	$+0,88_{87}$	$+0,86_{96}$	
$+4,57_{10}$	$+0,92_{79}$	$-0,34_{88}$	$+2,98_{22}$
$+5,05_{04}$ $=k_1$	$+1,83_{69}$ $=k_2$	$-0,52_{08}$ $=k_3$	$+2,98_{22}$ $=k_4$

$$k_1w_1 = -40,40_{32}$$
$$k_2w_2 = 0,00_{00}$$
$$k_3w_3 = +1,04_{16}$$
$$k_4w_4 = -11,92_{88}$$
$$[kw] = -51,29_{04}$$

F_{26}	$-(\sigma)$	K	O	Q_7	Q_{22}	Q_s	Q_{26}
			0,00$_{00}$	+0,34$_{00}$	+0,70$_{00}$	+0,87$_{00}$	+0,64$_{00}$
−0,34$_0$	+8,67$_6$	0,00$_0$	+36,5714	+0,0661	+0,2800	+0,0661	+0,0661
0,00$_0$	−0,79$_0$	0,00$_0$					
+0,070	−1,786						
+0,64$_0$	−4,19$_6$	0,00$_0$					
+0,066	−1,682						
−0,30$_0$	+2,88$_0$	0,00$_0$					
0,000	0,000						
			−36,57$_{14}$	+0,27$_{39}$	+0,42$_{00}$	+0,80$_{39}$	+0,57$_{39}$
−0,07$_0$	+0,99$_6$	0,00$_0$	+1,5292	+0,0028	+0,0263	+0,2027	+0,0028
+0,57$_0$	−2,50$_8$	0,00$_0$					
+0,003	−0,039						
−0,30$_0$	+2,88$_0$	0,00$_0$					
+0,021	−0,297						
			−38,10$_{06}$	+0,27$_{11}$	+0,39$_{37}$	+0,60$_{12}$	+0,57$_{11}$
+0,57$_1$	−2,46$_9$	0,00$_0$	+0,1339	+0,0667	+0,0408	+0,0572	+0,2961
−0,32$_{10}$	+3,17$_{70}$	0,00$_0$					
−0,1665	+0,7200						
tema			−38,23$_{45}$	+0,20$_{44}$	+0,35$_{29}$	+0,54$_{40}$	+0,27$_{50}$
−0,15$_{45}$	+2,45$_{70}$	−0,00$_{01}$	+13,0589	+0,0023	+0,0108	+0,1225	+0,0163
			−51,29$_{34}$	+0,20$_{21}$	+0,34$_{21}$	+0,42$_{15}$	+0,25$_{87}$
			= [0. 4]	$=\left[\frac{ff}{p}\cdot 4\right]_7 = Q_7$	$=\left[\frac{ff}{p}\cdot 4\right]_{22} = Q_{22}$	$=\left[\frac{ff}{p}\cdot 4\right]_s = Q_s$	$=\left[\frac{ff}{p}\cdot 4\right]_{26} = Q_{26}$

$$
\begin{aligned}
v_4 &= 0{,}36(+1\times5{,}0504-1\times1{,}8369 &&) = +1{,}1569\\
v_5 &= 0{,}30(&&-1\times0{,}5208+1\times2{,}9822) = +0{,}7384\\
v_6 &= 0{,}96(\quad +1\times1{,}8369 &&) = +1{,}7634\\
v_7 &= 0{,}53(\quad -1\times1{,}8369 &&+1\times2{,}9822) = +0{,}6070\\
v_8 &= 0{,}89(&&-1\times2{,}9822) = -2{,}6542
\end{aligned}
$$

un veidojam sumu [pvv]

v	v^2	p	pvv
+ 5,3029	28,1207	0,95	26,7147
— 1,5401	2,3719	2,94	6,9734
+ 0,2760	0,0762	1,89	0,1440
+ 1,1569	1,3384	2,78	3,7208
+ 0,7384	0,5452	3,33	1,8155
+ 1,7634	3,1096	1,04	3,2340
+ 0,6070	0,3684	1,89	0,6963
— 2,6542	7,0448	1,12	7,8902
			51,1889 = [pvv]

Salīdzinot sumas [pvv] un kontrollocekļu [0.4] resp. [kw] atrastās skaitliskās vērtības, konstatējama apmierinoša saskaņa; tā tad izlīdzināšanas rēķins jāatzīst par pareizi izdarītu.

Pieliekot novērojumiem mm desmitdaļās noapaļotos izlabojumus, atrodam izlīdzinātos novērojumus

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1069 + 5{,}3 = 1074{,}3 \text{ mm} = 1{,}0743 \text{ m}\\
x_2 &= 2648 - 1{,}5 = 2646{,}5 = 2{,}6465\\
x_3 &= 7078 + 0{,}3 = 7078{,}3 = 7{,}0783\\
x_4 &= 1571 + 1{,}2 = 1572{,}2 = 1{,}5722\\
x_5 &= 9724 + 0{,}7 = 9724{,}7 = 9{,}7247\\
x_6 &= 9946 + 1{,}8 = 9947{,}8 = 9{,}9478\\
x_7 &= 8375 + 0{,}6 = 8375{,}6 = 8{,}3756\\
x_8 &= 18103 - 2{,}7 = 18100{,}3 = 18{,}1003
\end{aligned}
$$

Ieliekot šīs vērtības noteikumu nolīdzinājumos, resp. veidojot pa atsevišķiem slēgtiem poligoniem izlīdzināto augstumu starpību sumas, iznāk:

poligonā I:

$$x_1 = +1074{,}3 \text{ mm}$$
$$-x_2 = -2646{,}5$$
$$\underline{x_4 = +1572{,}2}$$
$$0{,}0$$

poligonā II:

$$-x_4 = -1572{,}2 \text{ mm}$$
$$x_6 = +9947{,}8$$
$$\underline{-x_7 = -8375{,}6}$$
$$0{,}0$$

poligonā III:

$$x_2 = +2646{,}5 \text{ mm}$$
$$x_3 = +7078{,}3$$
$$\underline{-x_5 = -9724{,}7}$$
$$+0{,}1$$

poligonā IV:

$$x_5 = +9724{,}7 \text{ mm}$$
$$x_7 = +8375{,}6$$
$$\underline{-x_8 = -18100{,}3}$$
$$0{,}0$$

Ar izlīdzinātām augstumu starpībām nosakam funkcijas

$$F_7 = x_2 = +2646{,}5 \text{ mm}$$
$$F_{22} = x_2 - x_4 = +2646{,}5 - 1572{,}2 = +1074{,}3$$
$$F_s = x_2 + x_7 = +2646{,}5 + 8375{,}6 = +11022{,}1$$
$$F_{26} = x_2 - x_5 = +2646{,}5 - 9724{,}7 = -7078{,}2$$

un, zinot augstumu $H_{10} = 10{,}7750$ mm, aprēķinam augstumus

$$H_7 = H_{10} + F_7 = 10{,}7750 + 2{,}6465 = 13{,}4215 \text{ m}$$
$$H_{22} = H_{10} + F_{22} = 10{,}7750 + 1{,}0743 = 11{,}8493$$
$$H_s = H_{10} + F_s = 10{,}7750 + 11{,}0221 = 21{,}7971$$
$$H_{26} = H_{10} + F_{26} = 10{,}7750 - 7{,}0782 = 3{,}6968$$

Kas zīmējas uz noteiktības aprēķinu, tad lietotā svaru sistēmā ar nejaušo vidējo kilometra kļūdu identiskā svara vienības vidējā kļūda ir

$$m = \pm\sqrt{\frac{51{,}1889}{4}} = \pm 3{,}6 \text{ mm}$$

Izejot no tās, nosakam funkciju F_7, F_{22}, F_s, F_{26} vidējās kļūdas

$$m_{F_7} = \pm m\sqrt{Q_7} = \pm 3{,}6\sqrt{0{,}2021} = \pm 1{,}6 \text{ mm}$$
$$m_{F_{22}} = \pm m\sqrt{Q_{22}} = \pm 3{,}6\sqrt{0{,}3421} = \pm 2{,}1$$
$$m_{F_s} = \pm m\sqrt{Q_s} = \pm 3{,}6\sqrt{0{,}4215} = \pm 2{,}3$$
$$m_{F_{26}} = \pm m\sqrt{Q_{26}} = \pm 3{,}6\sqrt{0{,}2587} = \pm 1{,}8$$

un, ievērojot, ka augstuma H_{10} vidējā kļūda ir $m_{H_{10}} = \pm 5{,}0$ mm, aprēķinam augstumu H_7, H_{22}, H_s, H_{26} vidējās kļūdas

$$
\begin{aligned}
m_{H_7} &= \pm \sqrt{5{,}0^2 + 1{,}6^2} = \pm 5{,}3 \text{ mm} \\
m_{H_{22}} &= \pm \sqrt{5{,}0^2 + 2{,}1^2} = \pm 5{,}4 \\
m_{H_s} &= \pm \sqrt{5{,}0^2 + 2{,}3^2} = \pm 5{,}5 \\
m_{H_{26}} &= \pm \sqrt{5{,}0^2 + 1{,}8^2} = \pm 5{,}3
\end{aligned}
$$

Tā tad

$$
\begin{aligned}
H_7 &= 13{,}4215 \text{ m} \pm 5{,}3 \text{ mm} \\
H_{22} &= 11{,}8493 \quad \pm 5{,}4 \\
H_s &= 21{,}7971 \quad \pm 5{,}5 \\
H_{26} &= 3{,}6968 \quad \pm 5{,}3
\end{aligned}
$$

Kā redzams, šie augstumi, un tāpat arī atrastās izlīdzinātās augstumu starpības un vidējās kļūdas, pilnīgi saskan ar atbilstošiem § 29-ā minētiem rezultatiem, kuri atrasti izlīdzinot tos pašus novērojumus pēc cita paņēmiena.

§ 41. Izlīdzināšanas uzdevuma vispārīgākais veids.

Izlīdzināšanas uzdevuma vispārīgākais veids ir, kad uz meklētiem lielumiem attiecīgos atsevišķos kļūdu nolīdzinājumos ieiet vairāki novērojumi resp. to izlabojumi. Tos pašus nolīdzinājumus var arī uzskatīt par noteikumu nolīdzinājumiem ar atkarībā no attiecīgiem novērojumiem nosakamiem nezinamiem. Ievērojot agrāk teikto par kļūdu nolīdzinājumu resp. noteikumu nolīdzinājumu pārvēršanu, varam pieņemt, ka izlīdzināšanas uzdevuma vispārīgākam veidam atbilstošie nolīdzinājumi ir doti attiecībā uz novērojumu izlabojumiem v un meklētiem nezinamiem ξ lineară veidā

$$
\left.
\begin{array}{l}
\varphi_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_n v_n + A_1 \xi_1 + B_1 \xi_2 + C_1 \xi_3 + \ldots + I_1 \xi_i + w_1 = 0 \\
\varphi_2 = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + b_n v_n + A_2 \xi_1 + B_2 \xi_2 + C_2 \xi_3 + \ldots + I_2 \xi_i + w_2 = 0 \\
\varphi_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_n v_n + A_3 \xi_1 + B_3 \xi_2 + C_3 \xi_3 + \ldots + I_3 \xi_i + w_3 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_r = r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + \ldots + r_n v_n + A_r \xi_1 + B_r \xi_2 + C_r \xi_3 + \ldots + I_r \xi_i + w_r = 0
\end{array}
\right\} (486),
$$

kur a, b, c,..., r, A, B, C,..., I, w ir no izlabojumiem v un nezinamiem ξ brīvi elementi.

Rakstot šo sistemu vispārīgākā veidā, pieņemts, ka visi n izlabojumi v atkārtojas visos nolīdzinājumos. Tas, saprotams, neizslēdz, ka daži koeficienti a, b, c,..., r var būt vienādi ar nulli, t. i. ka daži izlabojumi v var iztrūkt atsevišķos nolīdzinājumos. Bet ievērojot taisīto pieņēmumu, ka atsevišķos nolīdzinājumos ieiet vispārīgi vairāki izlabojumi, arī jāpieņem, ka izlabojumu kopskaits n ir lielāks par nolīdzinājumu skaitu r. Kas zīmējas uz nolīdzinājumu skaitu r, tad tam savukārt, kā zinams, jābūt lielākam par nezinamo ξ skaitu i, lai nezinamie būtu nosakami ar izlīdzināšanu.

Nosakot izlabojumus v un nezinamos ξ ar izlīdzināšanu pēc vismazāko kvadratu metodes, jāprasa, lai v un ξ atrastās vērtības, izpildot nolīdzinājumus (486), līdz ar to arī apmierinātu vismazāko kvadratu metodes pamatnoteikumu. Pieņemot, kā vispārīgāko, dažādas noteiktības gadījumu, kad atsevišķie novērojumi, uz kuriem zīmējas izlabojumi v, notikuši ar dažādiem svariem p, minētais pamatnoteikums jāievēro atbilstošā veidā

$$[pvv] = \min. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (487).$$

Kā zinams, noteikumi (486) un (487) ir izpildīti ar tām v un ξ vērtībām, kas apmierina noteikumu

$$\Omega = [pvv] - 2k_1\varphi_1 - 2k_2\varphi_2 - 2k_3\varphi_3 - \ldots - 2k_r\varphi_r = \min. \quad (488),$$

kur k ir no noteikumu novērojumu izlīdzināšanas jau pazīstamās korrelatas. Šis noteikums, savu kārt, ir izpildīts, ja v un ξ apmierina nolīdzinājumus

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Omega}{\partial v_1} = 0 \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial v_2} = 0 \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial v_3} = 0 \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial v_n} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (489)$$

un

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Omega}{\partial \xi_1} = 0 \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial \xi_2} = 0 \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial \xi_3} = 0 \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial \xi_i} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (490).$$

Ievērojot (486), nolīdzinājumi (489) izsakami šādā veidā:

$$\left.\begin{array}{l} 2p_1v_1 - 2a_1k_1 - 2b_1k_2 - 2c_1k_3 - \ldots - 2r_1k_r = 0 \\ 2p_2v_2 - 2a_2k_1 - 2b_2k_2 - 2c_2k_3 - \ldots - 2r_2k_r = 0 \\ 2p_3v_3 - 2a_3k_1 - 2b_3k_2 - 2c_3k_3 - \ldots - 2r_3k_r = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2p_nv_n - 2a_nk_1 - 2b_nk_2 - 2c_nk_3 - \ldots - 2r_nk_r = 0 \end{array}\right\} \quad (491)$$

jeb

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \frac{a_1}{p_1}k_1 + \frac{b_1}{p_1}k_2 + \frac{c_1}{p_1}k_3 + \ldots + \frac{r_1}{p_1}k_r \\ v_2 = \frac{a_2}{p_2}k_1 + \frac{b_2}{p_2}k_2 + \frac{c_2}{p_2}k_3 + \ldots + \frac{r_2}{p_2}k_r \\ v_3 = \frac{a_3}{p_3}k_1 + \frac{b_3}{p_3}k_2 + \frac{c_3}{p_3}k_3 + \ldots + \frac{r_3}{p_3}k_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = \frac{a_n}{p_n}k_1 + \frac{b_n}{p_n}k_2 + \frac{c_n}{p_n}k_3 + \ldots + \frac{r_n}{p_n}k_r \end{array}\right\} \quad . \; . \; (492);$$

bet nolīdzinājumi (490) ir

$$\left.\begin{array}{l} A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + \ldots\ldots + A_rk_r = 0 \\ B_1k_1 + B_2k_2 + B_3k_3 + \ldots\ldots + B_rk_r = 0 \\ C_1k_1 + C_2k_2 + C_3k_3 + \ldots\ldots + C_rk_r = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_1k_1 + I_2k_2 + I_3k_3 + \ldots\ldots + I_rk_r = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (493).$$

Ieliekot izteiksmes (492) nolīdzinājumos (486), no tiem izslēdzam izlabojumus v. Ar tā pārveidotiem nolīdzinājumiem (486) un nolīdzinājumiem (493) veidojam šādu jaunu nolīdzinājumu sistemu:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{aa}{p}\right]k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right]k_r + \\ \qquad + A_1\xi_1 + B_1\xi_2 + C_1\xi_3 + \ldots + I_1\xi_i + w_1 = 0 \\ \left[\frac{ab}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right]k_r + \\ \qquad + A_2\xi_1 + B_2\xi_2 + C_2\xi_3 + \ldots + I_2\xi_i + w_2 = 0 \\ \left[\frac{ac}{p}\right]k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right]k_3 + \ldots + \left[\frac{cr}{p}\right]k_r + \\ \qquad + A_3\xi_1 + B_3\xi_2 + C_3\xi_3 + \ldots + I_3\xi_i + w_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (494).$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{ar}{p}\right]k_1+\left[\frac{br}{p}\right]k_2+\left[\frac{cr}{p}\right]k_3+\ldots+\left[\frac{rr}{p}\right]k_r+ \\ \qquad\qquad + A_r\xi_1 + B_r\xi_2 + C_r\xi_3 + \ldots + I_r\xi_i + w_r = 0 \\ A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + \ldots + A_rk_r = 0 \\ B_1k_1 + B_2k_2 + B_3k_3 + \ldots + B_rk_r = 0 \\ C_1k_1 + C_2k_2 + C_3k_3 + \ldots + C_rk_r = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_1k_1 + I_2k_2 + I_3k_3 + \ldots + I_rk_r = 0 \end{array}\right\}$$

Šinī sistemā nezinamo k un ξ kopskaits ir vienāds ar nolīdzinājumu skaitu $(i + r)$; tā tad no šiem nolīdzinājumiem nosakami visi minētie nezinamie. Ieliekot atrastās korrelatas k nolīdzinājumos (492), nosakami arī visi izlabojumi v.

Svara vienības vidējā kļūda m nosakama parastā kārtā kā sumas [pvv] un lieko novērojumu skaita funkcija. Attiecībā uz lieko novērojumu skaitu piezīmējam sekojošo. Izvēloties sistemā (486) kādus nebūt i nolīdzinājumus, ar šo nolīdzinājumu palīdzību var izteikt visus ξ-tipa nezinamos kā izlabojumu v funkcijas. Pēc tādā veidā notikušās nezinamo ξ izslēgšanas tad paliek $(r - i)$ nolīdzinājumi, kuros kā nezinamie ieiet tikai izlabojumi v. Tā tad šie nolīdzinājumi veido uz izlabojumiem v attiecīgo noteikumu nolīdzinājumu sistemu. Bet no noteikumu novērojumu izlīdzināšanas teorijas zinams, ka noteikumu nolīdzinājumu skaits vienāds ar lieko novērojumu skaitu. Tā tad lieko novērojumu skaits ir $(r - i)$, un pēc parastā parauga veidotā svara vienības vidējo kļūdu noteicošā formula ir

$$m = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r-i}} \quad \ldots\ldots \quad (495).$$

Kas zīmējas uz meklēto lielumu ξ un izlīdzināto novērojumu funkciju svaru koeficientiem, tad aizrādam, ka pēc Gauss'a algoritma reducējot sistemu (494), zinamā reducēšanas pakāpē izrādas izslēgtas visas sistemas nezinamo pirmo grupu veidojošās korrelatas k, un paliek reducēta nolīdzinājumu sistema, kur ieiet tikai ξ-tipa nezinamie. Šinī sistemā ir tikpat daudz nolīdzinājumu, cik nezinamo, un vispārīgi šī sistema uzskatama par nezinamo ξ noteikšanai veidoto normalnolīdzinājumu sistemu. Ievērojot to, sakarā ar šo normalnolīdzinājumu reducēšanu, parastā kārtā nosakami svaru koeficienti visiem ξ-tipa nezinamiem un šo nezinamo funkcijām. Attiecībā uz novērojumiem, uz kuriem zīmējas nolīdzinājumu (486) vienu nezinamo grupu veidojošie izlabojumi v, jau tika minēts, ka ar sistemas (486) i nolīdzinājumu palīdzību izslēdzot visus ξ-tipa nezinamos, paliek (r — i) uz izlabojumiem v attiecīgi noteikumu nolīdzinājumi. Tā tad, izejot no šiem noteikumu nolīdzinājumiem, parastā kārtā nosakami uz izlīdzinātiem novērojumiem resp. to funkcijām attiecīgie svaru koeficienti.

Apskatīsim vēl atsevišķo gadijumu, kad katrs atsevišķs novērojums resp. tam atbilstošais izlabojums v ieiet tikai vienā sistemas (486) nolīdzinājumā φ.

Lai atsevišķos nolīdzinājumos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots, \varphi_r$ ieejošās izlabojumu grupas ir $(v_1, v'_1, v''_1, \ldots\ldots)$, $(v_2, v'_2, v''_2, \ldots\ldots)$ $(v_3, v'_3, v''_3, \ldots\ldots)$, $\ldots\ldots$, $(v_r, v'_r, v''_r, \ldots\ldots)$, pie kam vienas grupas izlabojumi neatkārtojas pārējās grupās.

Tādos apstākļos nolīdzinājumiem (486) ir šāds atsevišķs veids:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= a_1v_1+a_1'v_1'+a_1''v_1''+\ldots+\\
&\qquad +A_1\xi_1+B_1\xi_2+C_1\xi_3+\ldots+I_1\xi_i+w_1=0\\
\varphi_2 &= \qquad b_2v_2+b_2'v_2'+b_2''v_2''+\ldots+\\
&\qquad +A_2\xi_1+B_2\xi_2+C_2\xi_3+\ldots+I_2\xi_i+w_2=0\\
\varphi_3 &= \qquad\qquad c_3v_3+c_3'v_3'+c_3''v''_3+\ldots+\\
&\qquad +A_3\xi_1+B_3\xi_2+C_3\xi_3+\ldots+I_3\xi_i+w_3=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_r &= \qquad\qquad\qquad r_rv_r+r_r'v_r'+r_r''v_r''+\ldots+\\
&\qquad +A_r\xi_1+B_r\xi_2+C_r\xi_3+\ldots+I_r\xi_i+w_r=0
\end{aligned}\right\}(496).$$

Attiecībā uz sistemu (486) aizrādītā kārtā veidojot atbilstošos (494) tipa nolīdzinājumus, izrādas, ka, izņemot kvadratiska tipa koeficientus $\left[\frac{aa}{p}\right]$, $\left[\frac{bb}{p}\right]$, $\left[\frac{cc}{p}\right]$, ..., $\left[\frac{rr}{p}\right]$, visi korrelatu k koeficienti ir vienādi ar nulli. Tā tad (494) tipa nolīdzinājumiem ir veids

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+ && A_1\xi_1+B_1\xi_2+C_1\xi_3+\ldots+I_1\xi_i+w_1=0\\
&\qquad\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+ && A_2\xi_1+B_2\xi_2+C_2\xi_3+\ldots+I_2\xi_i+w_2+0\\
&\qquad\qquad\left[\frac{cc}{p}\right]k_3+ && A_3\xi_1+B_3\xi_2+C_3\xi_3+\ldots+I_3\xi_i+w_3=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}(497).$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left[\frac{rr}{p}\right]k_r + A_r\xi_1 + B_r\xi_2 + C_r\xi_3 + \ldots + I_r\xi_i + w_r = 0 \\
A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + \ldots + A_rk_r = 0 \\
B_1k_1 + B_2k_2 + B_3k_3 + \ldots + B_rk_r = 0 \\
C_1k_1 + C_2k_2 + C_3k_3 + \ldots + C_rk_r = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
I_1k_1 + I_2k_2 + I_3k_3 + \ldots + I_rk_r = 0
\end{array}\right\}$$

No šīs sistemas pirmiem nolīdzinājumiem, kur ieiet nezinamie ξ, atsevišķās korrelatas k viegli izsakamas kā nezinamo ξ funkcijas:

$$\left.\begin{array}{l}
k_1 = -\frac{A_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\xi_1 - \frac{B_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\xi_2 - \frac{C_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\xi_3 - \ldots - \frac{I_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\xi_i - \frac{w_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]} \\
k_2 = -\frac{A_2}{\left[\frac{bb}{p}\right]}\xi_1 - \frac{B_2}{\left[\frac{bb}{p}\right]}\xi_2 - \frac{C_2}{\left[\frac{bb}{p}\right]}\xi_3 - \ldots - \frac{I_2}{\left[\frac{bb}{p}\right]}\xi_i - \frac{w_2}{\left[\frac{bb}{p}\right]} \\
k_3 = -\frac{A_3}{\left[\frac{cc}{p}\right]}\xi_1 - \frac{B_3}{\left[\frac{cc}{p}\right]}\xi_2 - \frac{C_3}{\left[\frac{cc}{p}\right]}\xi_3 - \ldots - \frac{I_3}{\left[\frac{cc}{p}\right]}\xi_i - \frac{w_3}{\left[\frac{cc}{p}\right]} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_r = -\frac{A_r}{\left[\frac{rr}{p}\right]}\xi_1 - \frac{B_r}{\left[\frac{rr}{p}\right]}\xi_2 - \frac{C_r}{\left[\frac{rr}{p}\right]}\xi_3 - \ldots - \frac{I_r}{\left[\frac{rr}{p}\right]}\xi_i - \frac{w_r}{\left[\frac{rr}{p}\right]}
\end{array}\right\} \quad (498).$$

Lietojot apzīmējumus

$$\left.\begin{array}{l}
P_1 = \frac{1}{\left[\frac{aa}{p}\right]} \\
P_2 = \frac{1}{\left[\frac{bb}{p}\right]} \\
P_3 = \frac{1}{\left[\frac{cc}{p}\right]} \\
\cdots\cdots \\
P_r = \frac{1}{\left[\frac{rr}{p}\right]}
\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (499),$$

izteiksmes (498) rakstamas

$$\left.\begin{array}{l}
k_1 = -P_1A_1\xi_1 - P_1B_1\xi_2 - P_1C_1\xi_3 - \ldots - P_1I_1\xi_i - P_1w_1 \\
k_2 = -P_2A_2\xi_1 - P_2B_2\xi_2 - P_2C_2\xi_3 - \ldots - P_2I_2\xi_i - P_2w_2 \\
k_3 = -P_3A_3\xi_1 - P_3B_3\xi_2 - P_3C_3\xi_3 - \ldots - P_3I_3\xi_i - P_3w_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k_r = -P_rA_r\xi_1 - P_rB_r\xi_2 - P_rC_r\xi_3 - \ldots - P_rI_r\xi_i - P_rw_r
\end{array}\right\} \quad (500).$$

Ieliekot šīs izteiksmes pēdējos, formulu (498) atvasināšanai nelietotos, sistemas (497) nolīdzinājumos, veidojama šāda nolīdzinājumu sistema:

$$\left.\begin{array}{l}
[PAA]\xi_1 + [PAB]\xi_2 + [PAC]\xi_3 + \ldots + [PAI]\xi_i + [PAw] = 0 \\
[PAB]\xi_1 + [PBB]\xi_2 + [PBC]\xi_3 + \ldots + [PBI]\xi_i + [PBw] = 0 \\
[PAC]\xi_1 + [PBC]\xi_2 + [PCC]\xi_3 + \ldots + [PCI]\xi_i + [PCw] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[PAI]\xi_1 + [PBI]\xi_2 + [PCI]\xi_3 + \ldots + [PII]\xi_i + [PIw] = 0
\end{array}\right\} \quad (501).$$

Tā ir tipiska normalnolīdzinājumu sistema dažādas noteiktības netiešu novērojumu gadijumā. Viegli pierādams, ka tā atbilst šādai kļūdu nolīdzinājumu sistemai:

$$\left.\begin{array}{l}
A_1\xi_1 + B_1\xi_2 + C_1\xi_3 + \ldots + I_1\xi_i + w_1 = V_1 \\
A_2\xi_1 + B_2\xi_2 + C_2\xi_3 + \ldots + I_2\xi_i + w_2 = V_2 \\
A_3\xi_1 + B_3\xi_2 + C_3\xi_3 + \ldots + I_3\xi_i + w_3 = V_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_r\xi_1 + B_r\xi_2 + C_r\xi_3 + \ldots + I_r\xi_i + w_r = V_r
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (502),$$

kur brīvie locekļi w zīmējas uz novērojumiem, kuriem ir ar formulām (499) noteiktie svari P_1, P_2, P_3, ..., P_r.

Izejot no šiem kļūdu nolīdzinājumiem, parastā kārtā nosakami visi nezinamie ξ, un arī šo nezinamo un to funkciju svaru koeficienti.

Kas zīmējas uz svara vienības vidējās kļūdas noteikšanu, tad, spēkā paliekot attiecīgai vispārējai formulai (495), jānosaka suma [pvv], kura zīmējas uz nolīdzinājumos (496) ieejošiem izlabojumiem v.

Minētie izlabojumi v nosakami pēc formulām (492), kuras šeit apskatītā atsevišķā gadijumā pāriet šādā vienkāršākā veidā:

$$\left.\begin{array}{l}
v_1 = \dfrac{a_1}{p_1} k_1 \,;\; v_1' = \dfrac{a_1'}{p_1'} k_1 \,;\; v_1'' = \dfrac{a_1''}{p_1''} k_1 \,;\; \ldots \\[2ex]
v_2 = \dfrac{b_2}{p_2} k_2 \,;\; v_2' = \dfrac{b_2'}{p_2'} k_2 \,;\; v_2'' = \dfrac{b_2''}{p_2''} k_2 \,;\; \ldots
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (503),$$

$$\left.\begin{array}{l} v_3 = \frac{c_3}{p_3} k_3 \,;\; v_3' = \frac{c_3'}{p_3'} k_3 \,;\; v_3'' = \frac{c_3''}{p_3''} k_3 \,;\; \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_r = \frac{r_r}{p_r} k_r \,;\; v_r' = \frac{r_r'}{p_r'} k_r \,;\; v_r'' = \frac{r_r''}{p_r''} k_r \,;\; \ldots \end{array}\right|$$

pie kam korrelatas k savukārt noteiktas ar formulām (500). Tā tad

$$\left.\begin{array}{l} [pvv]_1 = p_1 v_1 v_1 + p_1' v_1' v_1' + p_1'' v_1'' v_1'' + \ldots\ldots = \left[\frac{aa}{p}\right] k_1^2 \\ [pvv]_2 = p_2 v_2 v_2 + p_2' v_2' v_2' + p_2'' v_2'' v_2'' + \ldots\ldots = \left[\frac{bb}{p}\right] k_2^2 \\ [pvv]_3 = p_3 v_3 v_3 + p_3' v_3' v_3' + p_3'' v_3'' v_3'' + \ldots\ldots = \left[\frac{cc}{p}\right] k_3^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pvv]_r = p_r v_r v_r + p_r' v_r' v_r' + p_r'' v_r'' v_r'' + \ldots\ldots = \left[\frac{rr}{p}\right] k_r^2 \end{array}\right\} \quad (504).$$

Sumējot šīs izteiksmes un ievērojot (499), atrodam

$$[pvv] = [pvv]_1 + [pvv]_2 + [pvv]_3 + \ldots + [pvv]_r = \\ = \frac{k_1^2}{P_1} + \frac{k_2^2}{P_2} + \frac{k_3^2}{P_3} + \ldots + \frac{k_r^2}{P_r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (505).$$

No otras puses, no formulām (500), ievērojot nolīdzinājumus (502), seko, ka

$$\left.\begin{array}{l} \frac{k_1}{P_1} = -(A_1\xi_1 + B_1\xi_2 + C_1\xi_3 + \ldots + I_1\xi_i + w_1) = -V_1 \\ \frac{k_2}{P_2} = -(A_2\xi_1 + B_2\xi_2 + C_2\xi_3 + \ldots + I_2\xi_i + w_2) = -V_2 \\ \frac{k_3}{P_3} = -(A_3\xi_1 + B_3\xi_2 + C_3\xi_3 + \ldots + I_3\xi_i + w_3) = -V_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{k_r}{P_r} = -(A_r\xi_1 + B_r\xi_2 + C_r\xi_3 + \ldots + I_r\xi_i + w_r) = -V_r \end{array}\right\} \quad (506).$$

Tā tad

$$\left.\begin{aligned}\frac{k_1^2}{P_1} &= P_1\left(\frac{k_1}{P_1}\right)^2 = P_1V_1V_1 \\ \frac{k_2^2}{P_2} &= P_2\left(\frac{k_2}{P_2}\right)^2 = P_2V_2V_2 \\ \frac{k_3^2}{P_3} &= P_3\left(\frac{k_3}{P_3}\right)^2 = P_3V_3V_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{k_r^2}{P_r} &= P_r\left(\frac{k_r}{P_r}\right)^2 = P_rV_rV_r\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (507),$$

un sumējot šīs izteiksmes, atrodam

$$\frac{k_1^2}{P_1}+\frac{k_2^2}{P_2}+\frac{k_3^2}{P_3}+\ldots+\frac{k_r^2}{P_r} = P_1V_1V_1+P_2V_2V_2+$$
$$+P_3V_3V_3+\ldots+P_rV_rV_r = [PVV] \quad \ldots\ldots \quad (508).$$

Salīdzinot formulas (505) un (508), redzams, ka

$$[pvv] = [PVV] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (509).$$

Ar to pierādīts, ka nosakot svara vienības vidējo kļūdu m, formula (495) atvietojama ar šādu

$$m = \pm\sqrt{\frac{[PVV]}{r-i}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (510).$$

Šie iztirzājumi zīmējas uz dažādas noteiktības gadijumu. Bet, saprotams, viņi paliek spēkā arī vienādas noteiktības gadijumā; tikai jāievēro, ka tad visi p-tipa svari ir vienādi ar 1.

Izlīdzināšanas uzdevuma vispārīgākais gadijums ir, starp citu, tad, kad, nosakot meklētos lielumus ar netiešiem novērojumiem, svarā krītošām funkcijām ir novērošanas ceļā atrasti parametri. Tādos apstākļos salīdzinot netiešos novērojumus ar attiecīgo funkciju izteiksmēm, ne tikai paši netiešie novērojumi, bet arī novērošanas ceļā atrastie parametri jāieliek izlīdzinātā veidā, t. i. pieliekot šo elementu novērotām vērtībām attiecīgus nezinamus izlabojumus v. Bez tam, kā parasti, meklēto lielumu x vietā ieliek to tuvinās vērtības (x) ar atbilstošiem nezinamiem pieaugumiem ξ. Tādā veidā rodas vispārīgi nelineari nolīdzinājumi ar nezinamiem v un ξ. Uzskatot šos nezinamos par attiecīgo argumentu ļoti maziem pieaugumiem, novēroto funkciju izteiksmes izvirza Taylor'a rindā, ignorējot locekļus, kur minētie nezinamie ieiet augstākās par pirmo kāpēs. Šīs pārvēršanas rezultātā tad iznāk (486) resp. (496) tipa nolīdzinājumi, kur v-tipa nezinamo grupās ieiet, saprotams, arī uz funkcijām attiecīgo netiešo novērojumu izlabojumi. No šiem nolīdzinājumiem šinī paragrafā aizrādītā kārtā nosakami visi nezinamie ξ un izlabojumi v.

§ 42. Piemērs.

Piemēra veidā apskatīsim Reichenbach'a tālmēra konstantu noteikšanu pēc parastā paņēmiena, t. i. izmērot, neatkarīgi no tālmēra, vairākus horizontalus atstatumus s un novērojot ar tālmēru atbilstošos, no instrumenta parallaktiskā leņķa atkarīgos latas nogriežņus l.

Kā zinams, katrā atsevišķā gadijumā sakars starp atbilstošiem elementiem l un s un lietotā tālmēra konstantām k un c ir noteikts ar pazīstamo formulu

$$kl + c = s$$

Uz šīs formulas pamata katrs novērotais atstatums s uzskatams par netiešu novērojumu, kurš zīmējas uz tipa

$$lk + c$$

meklēto lielumu k un c funkciju.

Ja šīs funkcijas koeficienti būtu teoretiski noteikti zinami elementi, tad meklētie lielumi k un c būtu nosakami netiešu novērojumu izlīdzināšanas parastā kārtā. Bet tā kā koeficients l ir novērošanas ceļā nosacīts elements, tad uz tālmēra formulas pamata veidotā kļūdu nolīdzinājumā ne tikai s, bet tāpat arī l jāieliek izlīdzinātā veidā, t. i. ar atbilstošiem nezinamiem izlabojumiem v un v'. Tā tad rodas tipa

$$(l + v')k + c = s + v$$

jeb

$$(l + v')k + c - s - v = 0$$

nolīdzinājums.

Pieņemot

$$k = (k) + \xi$$
$$c = (c) + \eta$$

kur (k) un (c) apzīmē meklēto lielumu tuvinās vērtības, bet ξ un η — atbilstošos pieaugumus, minētais nolīdzinājums pāriet veidā

$$(1+v')\{(k)+\xi\}+(c)+\eta-s-v=0$$

Izvirzot šo izteiksmi Taylor'a rindā, rodas pārvērstais nolīdzinājums

$$-v+(k)\,v'+l\,\xi+\eta+\{(k)\,l+(c)-s\}=0$$

Tas atbilst sistemas (496) nolīdzinājumiem, jo katrā pēc šī parauga veidotā nolīdzinājumā ieiet tādi novērojumi l un s, resp. tiem atbilstoši izlabojumi v′ un v, kas neatkārtojas pārējos nolīdzinājumos. Lietojot sistemā (496) pieņemtos apzīmējumus, izrādas, ka šeit apskatītā piemērā

$$a_1=-1;\; a_1'=(k);\; A_1=l_1;\; B_1=1;\; \xi_1=\xi;$$
$$\xi_2=\eta;\; w_1=(k)\,l_1+(c)-s_1;$$
$$b_2=-1;\; b_2'=(k);\; A_2=l_2;\; B_2=1;\; \xi_1=\xi;$$
$$\xi_2=\eta;\; w_2=(k)\,l_2+(c)-s_2;$$
$$c_3=-1;\; c_3'=(k);\; A_3=l_3;\; B_3=1;\; \xi_1=\xi;$$
$$\xi_2=\eta;\; w_3=(k)\,l_3+(c)-s_3;$$

. . . .

Pēc šī vispārējā iztirzājuma pārejot uz skaitliskiem datiem, pieņemsim, ka tālmēra konstantu noteikšanai izmērīti 8 dažādi atstatumi s un novēroti atbilstošie latas nogriežņi l, a priori nosakot arī šo novērojumu vidējās kļūdas. Izejot no šīm vidējām kļūdām, aprēķināti novērojumu s un l svari p un p′, pieņemot svara vienības vidējo kļūdu $m=\pm 4{,}00$ cm. Novērojumi ar attiecīgām vidējām kļūdām un atbilstošiem svariem ir:

1)	$s_1 = 2500 \pm 0{,}2$ cm,	$p_1 = 400$;	$l_1 = 24{,}69 \pm 0{,}03$ cm,	$p_1' = 17777$
2)	$s_2 = 5000 \pm 0{,}3$	, $p_2 = 178$;	$l_2 = 49{,}79 \pm 0{,}03$	, $p_2' = 17777$
3)	$s_3 = 7500 \pm 0{,}6$	, $p_3 = 44$;	$l_3 = 74{,}77 \pm 0{,}07$	, $p_3' = 3265$
4)	$s_4 = 10000 \pm 0{,}9$	, $p_4 = 20$;	$l_4 = 99{,}75 \pm 0{,}06$	, $p_4' = 4444$
5)	$s_5 = 12500 \pm 1{,}5$	, $p_5 = 7$;	$l_5 = 124{,}75 \pm 0{,}13$	, $p_5' = 947$
6)	$s_6 = 15000 \pm 1{,}5$	, $p_6 = 7$;	$l_6 = 149{,}77 \pm 0{,}18$	, $p_6' = 494$
7)	$s_7 = 17500 \pm 1{,}7$	, $p_7 = 6$;	$l_7 = 174{,}85 \pm 0{,}25$	, $p_7' = 256$
8)	$s_8 = 20000 \pm 1{,}7$	, $p_8 = 6$;	$l_8 = 200{,}01 \pm 0{,}34$	, $p_8' = 138$

Meklēto konstantu tuvinās vērtības pieņemam

$$(k) = 100$$
$$(c) = 35 \text{ cm}$$

Tad

1) $a_1 = -1,\ a_1' = 100,\ A_1 = 24{,}69,\ B_1 = 1,\ w_1 = +\ 4$
2) $b_2 = -1,\ b_2' = 100,\ A_2 = 49{,}79,\ B_2 = 1,\ w_2 = +14$
3) $c_3 = -1,\ c_3' = 100,\ A_3 = 74{,}77,\ B_3 = 1,\ w_3 = +12$
4) $d_4 = -1,\ d_4' = 100,\ A_4 = 99{,}75,\ B_4 = 1,\ w_4 = +10$
5) $e_5 = -1,\ e_5' = 100,\ A_5 = 124{,}75,\ B_5 = 1,\ w_5 = +10$
6) $f_6 = -1,\ f_6' = 100,\ A_6 = 149{,}77,\ B_6 = 1,\ w_6 = +12$
7) $g_7 = -1,\ g_7' = 100,\ A_7 = 174{,}85,\ B_7 = 1,\ w_7 = +20$
8) $h_8 = -1,\ h_8' = 100,\ A_8 = 200{,}01,\ B_8 = 1,\ w_8 = +36$

un ar formulām (499) noteiktie svari ir

$$P_1 = \frac{1}{\frac{(-1)^2}{400} + \frac{100^2}{17777}} = 1{,}77$$

$$P_2 = \frac{1}{\frac{(-1)^2}{178} + \frac{100^2}{17777}} = 1{,}76$$

$$P_3 = \frac{1}{\frac{(-1)^2}{44} + \frac{100^2}{3265}} = 0{,}324$$

$$P_4 = \frac{1}{\frac{(-1)^2}{20} + \frac{100^2}{4444}} = 0{,}435$$

$$P_5 = \frac{1}{\frac{(-1)^2}{7} + \frac{100^2}{947}} = 0{,}093$$

$$P_6 = \frac{1}{\frac{(-1)^2}{7} + \frac{100^2}{494}} = 0{,}049$$

$$P_7 = \frac{1}{\frac{(-1)^2}{6} + \frac{100^2}{256}} = 0{,}0255$$

$$P_8 = \frac{1}{\frac{(-1)^2}{6} + \frac{100^2}{138}} = 0{,}0138$$

Pēc parauga (502) veidojam kļūdu nolīdzinājumus

$$
\begin{array}{lll}
1) & 24{,}69\,\xi + 1{,}00\,\eta + 4 = V_1 & \text{ar svaru } P_1 = 1{,}77 \\
2) & 49{,}79\,\xi + 1{,}00\,\eta + 14 = V_2 & \text{„ „ } P_2 = 1{,}76 \\
3) & 74{,}77\,\xi + 1{,}00\,\eta + 12 = V_3 & \text{„ „ } P_3 = 0{,}324 \\
4) & 99{,}75\,\xi + 1{,}00\,\eta + 10 = V_4 & \text{„ „ } P_4 = 0{,}435 \\
5) & 124{,}75\,\xi + 1{,}00\,\eta + 10 = V_5 & \text{„ „ } P_5 = 0{,}093 \\
6) & 149{,}77\,\xi + 1{,}00\,\eta + 12 = V_6 & \text{„ „ } P_6 = 0{,}049 \\
7) & 174{,}85\,\xi + 1{,}00\,\eta + 20 = V_7 & \text{„ „ } P_7 = 0{,}0255 \\
8) & 200{,}01\,\xi + 1{,}00\,\eta + 36 = V_8 & \text{„ „ } P_8 = 0{,}0138
\end{array}
$$

un aprēķinam atbilstošo normalnolīdzinājumu koeficientus un brīvos locekļus, un bez tam arī papildu locekli [Pww]:

	A	B	w	P	PAA	PAB	PAw	PBB	PBw	Pww
1.	+ 24,69	+1	+ 4	1,77	+ 1078,99	+ 43,70	+ 174,81	+1,7700	+ 7,08	+ 28,32
2.	+ 49,79	+1	+14	1,76	+ 4363,11	+ 87,63	+1226,83	+1,7600	+24,64	+344,96
3.	+ 74,77	+1	+12	0,324	+ 1811,34	+ 24,23	+ 290,71	+0,3240	+ 3,89	+ 46,66
4.	+ 99,75	+1	+10	0,435	+ 4328,28	+ 43,39	+ 433,91	+0,4350	+ 4,35	+ 43,50
5.	+124,75	+1	+10	0,093	+ 1447,32	+ 11,60	+ 116,02	+0,0930	+ 0,93	+ 9,30
6.	+149,77	+1	+12	0,049	+ 1099,12	+ 7,34	+ 88,06	+0,0490	+ 0,59	+ 7,06
7.	+174,85	+1	+20	0,0255	+ 779,60	+ 4,46	+ 89,17	+0,0255	+ 0,51	+ 10,20
8.	+200,01	+1	+36	0,0138	+ 552,06	+ 2,76	+ 99,36	+0,0138	+ 0,50	+ 17,88
					+15459,82	+225,11	+2518,87	+4,4703	+42,49	+507,88

Tā tad normalnolīdzinājumi ar papildu locekli [Pww] ir

$$
\begin{array}{rrrl}
+\,15459{,}82\,\xi & +\,225{,}11\,\eta & +\,2518{,}87 & = 0 \\
+\,225{,}11\,\xi & +\,4{,}47\,\eta & +\,42{,}49 & = 0 \\
 & & +\,507{,}88 &
\end{array}
$$

Tos reducējam un atslēdzam pēc schemas 2 (171. lpp.):

Atslēdzot pēc ξ			Atslēdzot pēc η		
η	ξ	w	ξ	η	w
+ 4,47	+ 225,11	+ 42,49	+ 15459,82	+ 225,11	+ 2518,87
	+ 15459,82	+ 2518,87		+ 4,47	+ 42,49
	− 11336,58	− 2139,80		− 3,28	− 36,68
$p_\xi = 4123,24$	+ 4123,24	+ 379,07	$p_\eta = 1,19$	+ 1,19	+ 5,81
$\xi = -\dfrac{+379,07}{+4123,24} = -0,092$		+ 507,88	$\eta = -\dfrac{+5,81}{+1,19} = -4,88$ cm		+ 507,88
		− 403,89			− 410,40
		− 34,85			− 28,37
		+ 69,14			+ 69,11

Ieliekot atrastos ξ un η svariem P atbilstošos kļūdu nolīdzinājumos, nosakam pretrunas V un aprēķinam sumu [PVV]:

$$
\begin{aligned}
V_1 &= -\ \ 24,69 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + \ \ 4 = -\ \ 3,15; & P_1V_1V_1 &= 17,56 \\
V_2 &= -\ \ 49,79 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + 14 = +\ \ 4,54; & P_2V_2V_2 &= 36,28 \\
V_3 &= -\ \ 74,77 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + 12 = +\ \ 0,24; & P_3V_3V_3 &= \ \ 0,02 \\
V_4 &= -\ \ 99,75 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + 10 = -\ \ 4,06; & P_4V_4V_4 &= \ \ 7,17 \\
V_5 &= -124,75 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + 10 = -\ \ 6,36; & P_5V_5V_5 &= \ \ 3,76 \\
V_6 &= -149,77 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + 12 = -\ \ 6,66; & P_6V_6V_6 &= \ \ 2,20 \\
V_7 &= -174,85 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + 20 = -\ \ 0,97; & P_7V_7V_7 &= \ \ 0,02 \\
V_8 &= -200,01 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + 36 = +12,72; & P_8V_8V_8 &= \ \ \underline{2,29} \\
& & [PVV] &= 69,30
\end{aligned}
$$

Bez tam pēc formulām (500) aprēķinam korrelatas

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -1,77 \ \ (-\ \ 24,69 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + \ \ 4) = +5,58 \\
k_2 &= -1,76 \ \ (-\ \ 49,79 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + 14) = -7,99 \\
k_3 &= -0,324 \ (-\ \ 74,77 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + 12) = -0,08 \\
k_4 &= -0,435 \ (-\ \ 99,75 \times 0,092 - 1 \times 4,88 + 10) = +1,77
\end{aligned}
$$

$$k_5 = -0{,}093\ (-124{,}75 \times 0{,}092 - 1 \times 4{,}88 + 10) = +0{,}59$$
$$k_6 = -0{,}049\ (-149{,}77 \times 0{,}092 - 1 \times 4{,}88 + 12) = +0{,}33$$
$$k_7 = -0{,}0255\,(-174{,}85 \times 0{,}092 - 1 \times 4{,}88 + 20) = +0{,}025$$
$$k_8 = -0{,}0138\,(-200{,}01 \times 0{,}092 - 1 \times 4{,}8{:} + 36) = -0{,}18$$

un ar tām pēc formulām (503) nosakam novērojumu izlabojumus

$$v_1 = +\frac{-1}{400}5{,}58 = -0{,}014 \qquad v_1' = +\frac{100}{17777}5{,}58 = +0{,}031$$
$$v_2 = -\frac{-1}{178}7{,}99 = +0{,}045 \qquad v_2' = -\frac{100}{17777}7{,}99 = -0{,}045$$
$$v_3 = -\frac{-1}{44}0{,}08 = +0{,}002 \qquad v_3' = -\frac{100}{3265}0{,}08 = -0{,}002$$
$$v_4 = +\frac{-1}{20}1{,}77 = -0{,}089 \qquad v_4' = +\frac{100}{4444}1{,}77 = +0{,}040$$
$$v_5 = +\frac{-1}{7}0{,}59 = -0{,}084 \qquad v_5' = +\frac{100}{947}0{,}59 = +0{,}062$$
$$v_6 = +\frac{-1}{7}0{,}33 = -0{,}047 \qquad v_6' = +\frac{100}{494}0{,}33 = +0{,}067$$
$$v_7 = +\frac{-1}{6}0{,}025 = -0{,}004 \qquad v_7' = +\frac{100}{256}0{,}025 = +0{,}010$$
$$v_8 = -\frac{-1}{6}0{,}18 = +0{,}030 \qquad v_8' = -\frac{100}{138}0{,}18 = -0{,}130$$

Tālāk, veidojam

$$\begin{array}{ll}
p_1v_1v_1 = 0{,}08 & p_1'v_1'v_1' = 17{,}08 \\
p_2v_2v_2 = 0{,}36 & p_2'v_2'v_2' = 36{,}00 \\
p_3v_3v_3 = 0{,}00 & p_3'v_3'v_3' = 0{,}01 \\
p_4v_4v_4 = 0{,}16 & p_4'v_4'v_4' = 7{,}11 \\
p_5v_5v_5 = 0{,}05 & p_5'v_5'v_5' = 3{,}64 \\
p_6v_6v_6 = 0{,}02 & p_6'v_6'v_6' = 2{,}22 \\
p_7v_7v_7 = 0{,}00 & p_7'v_7'v_7' = 0{,}03 \\
p_8v_8v_8 = \underline{0{,}01} & p_8'v_8'v_8' = \underline{2{,}33} \\
\ 0{,}68 & \ 68{,}42
\end{array}$$

un kopsumu

$$[pvv] + [p'v'v'] = 69{,}10$$

kas apmierinoši saskan ar [PVV] un [Pww.2].

Svara vienības vidējā kļūda ir

$$m = \pm \sqrt{\frac{69,10}{8-2}} = \pm 3,4 \text{ cm}^{*)}$$

Izejot no tās un ievērojot sakarā ar normalnolīdzinājumu reducēšanu atrastos nezinamo ξ un η svarus, nosakam arī šo nezinamo vidējās kļūdas

$$m_\xi = \pm \frac{m}{\sqrt{4123,24}} = \pm 0,053$$

$$m_\eta = \pm \frac{m}{\sqrt{1,19}} = \pm 3,1 \text{ cm}$$

kuras ir identiskas ar izlīdzināto k un c vidējām kļūdām.

Pašas nezinamo k un c un arī novērojumu s un l izlīdzinātās vērtības nosakam pieliekot attiecīgām tuvinām vērtībām resp. neizlīdzinātiem novērojumiem atbilstošos pieaugumus ξ un η resp. izlabojumus v un v′. Apzīmējot izlīdzinātos novērojumus ar $\bar{s}$ un $\bar{l}$ un dažos gadījumos apaļojot atrastos skaitļus, aprēķinam

$$k = 100 + \xi = 99,908$$
$$c = 35 + \eta = 30 \text{ cm}$$

un

$$\bar{s}_1 = 2500 + v_1 = 2500,0 \text{ cm} \qquad \bar{l}_1 = 24,69 + v_1' = 24,721 \text{ cm}$$
$$\bar{s}_2 = 5000 + v_2 = 5000,0 \qquad \bar{l}_2 = 49,79 + v_2' = 49,745$$
$$\bar{s}_3 = 7500 + v_3 = 7500,0 \qquad \bar{l}_3 = 74,77 + v_3' = 74,768$$
$$\bar{s}_4 = 10000 + v_4 = 9999,9 \qquad \bar{l}_4 = 99,75 + v_4' = 99,790$$
$$\bar{s}_5 = 12500 + v_5 = 12499,9 \qquad \bar{l}_5 = 124,75 + v_5' = 124,812$$
$$\bar{s}_6 = 15000 + v_6 = 15000,0 \qquad \bar{l}_6 = 149,77 + v_6' = 149,837$$
$$\bar{s}_7 = 17500 + v_7 = 17500,0 \qquad \bar{l}_7 = 174,85 + v_7' = 174,860$$
$$\bar{s}_8 = 20000 + v_8 = 20000,0 \qquad \bar{l}_8 = 200,01 + v_8' = 199,880$$

Salīdzinot šos skaitļus uz tālmēra formulas pamata, iznāk

$$99,908 \times 24,721 + 30,1 - 2500,0 = -0,1 \text{ cm}$$
$$99,908 \times 49,745 + 30,1 - 5000,0 = 0,0$$
$$99,908 \times 74,768 + 30,1 - 7500,0 = 0,0$$

*) Salīdzinot šo rezultatu ar svaru p un p′ aprēķinam pieņemto svara vienības vidējo kļūdu ($\pm$ 4,00 cm), var spriest par novērojumu a priori nosacīto vidējo kļūdu pareizību.

$$99,908 \times 99,790 + 30,1 - 9999,9 = 0,0$$
$$99,908 \times 124,812 + 30,1 - 12499,9 = -0,1$$
$$99,908 \times 149,837 + 30,1 - 15000,0 = 0,0$$
$$99,908 \times 174,860 + 30,1 - 17500,0 = 0,0$$
$$99,908 \times 199,880 + 30,1 - 20000,0 = -0,3$$

Nelielās pēc izlīdzināšanas palikušās pretrunas izskaidrojamas ar notikušiem apaļojumiem. Tā tad izlīdzināšana izdarīta pareizi, un galīgie rezultati ir

$$k = 99,908 \pm 0,053$$
$$c = 30 \pm 3,1 \text{ cm}$$

§ 43. Dažas uz novērojumu izlīdzināšanu attiecīgas piezīmes.

Kā jau paskaidrots 35-ā paragrafā, noteikumu novērojumus var izlīdzināt kā netiešus. Arī otrādi, var pierādīt, ka netiešus novērojumus var izlīdzināt kā noteikumu novērojumus.

Kā zinams, netiešu novērojumu gadijumā meklētie lielumi nosakami ar izlīdzināšanu tikai tad, kad novērojumu skaits n ir lielāks par meklēto lielumu skaitu i. Veidojot atsevišķiem novērojumiem atbilstošos kļūdu nolīdzinājumus, šo nolīdzinājumu skaits ir vienāds ar novērojumu skaitu. Kļūdu nolīdzinājumu nezinamie ir: minētie meklētie lielumi — i gabali, un netiešos novērojumus izlīdzinošie izlabojumi — n gabali. Tā tad ir n nolīdzinājumi ar — pavisam kopā — (i+n) nezinamiem. Izvēloties no šīs sistemas i nolīdzinājumus un atslēdzot tos pēc meklētiem lielumiem, visus šīs grupas nezinamos var izteikt kā novērojumu izlabojumu funkcijas, kuru brīvos locekļos ieiet neizlīdzinātie novērojumi. Ieliekot atrastās izteiksmes pārējos (n—i) nolīdzinājumos, no tiem izslēdzas visi pirmās grupas nezinamie, un paliek tikai otrās grupas nezinamie, t. i. n novērojumu izlabojumi v. Minētie nolīdzinājumi izsaka noteikumus, kuriem padoti novērojumu izlabojumi; pie tam nezinamo izlabojumu skaits ir lielāks par šo nolīdzinājumu skaitu. Tā tad ir radušies uz novērojumu izlabojumiem attiecīgi noteikumu nolīdzinājumi, uz kuru pamata šie izlabojumi resp. izlīdzinātie novērojumi nosakami noteikumu novērojumu izlīdzināšanas parastā kārtā. Ieliekot šos izlabojumus resp. izlīdzinātos novērojumus attiecīgās agrāk veidotās izteiksmēs, beidzot nosakami arī pirmās grupas nezinamie — meklētie lielumi, uz kuru funkcijām zīmējas taisītie netiešie novērojumi.

Tā tad kā noteikumu novērojumus, tā arī netiešus novērojumus var izlīdzināt pēc dažādiem paņēmieniem, pie kam izlīdzināšanas rezultati, saprotams, nav atkarīgi no lietotā paņēmiena. Kas zīmējas uz jautājumu, kuram izlīdzināšanas paņēmienam ir priekšrocība no ērtības viedokļa, tad šis jautājums izšķirams katrā gadijumā atsevišķi, ievērojot visus šinī ziņā svarā krītošos apstākļus. Piezīmējam tikai to, ka netiešu vai noteikumu novērojumu izlīdzināšanas aritmetiskā darbā samērā lielas grūtības padara normalnolīdzinājumu resp. korrelatu normalnolīdzinājumu veidošana, reducēšana un atslēgšana, pie kam šīs grūtības pieaug ar normalnolīdzinājumu skaitu. Tā tad — ja tam nerunā pretim citi iemesli — priekšroka dodama tam izlīdzināšanas paņēmienam, kurš dotos apstākļos noved pie mazākā normalnolīdzinājumu skaita. No šī viedokļa apskatot, piem., netiešus novērojumus, kad i meklētu lielumu noteikšanai taisīti n novērojumi, jāievēro sekojošais. Izlīdzinot šos novērojumus kā netiešus, jāveido i normalnolīdzinājumi, bet pielietojot noteikumu novērojumu izlīdzināšanas korrelatu paņēmienu, korrelatu normalnolīdzinājumu skaits ir $(n-i)$. Tā tad normalnolīdzinājumu veidošanas, reducēšanas un atslēgšanas ziņā mazākas grūtības sagaidamas no pirmā vai otrā paņēmiena pielietošanas skatoties pēc tā, vai $i < n-i$, vai $i > n-i$, t. i. vai $2i < n$, vai $2i > n$.

Kas zīmējas uz tiešiem novērojumiem, tad tos parasti uzskata par atsevišķa veida novērojumiem un izlīdzina pēc sevišķiem paņēmieniem. Bet tos var uzskatīt arī par netiešiem novērojumiem, kas zīmējas uz viena vienīga meklētā lieluma funkciju — pašu meklēto lielumu. No šī viedokļa (154) tipa izteiksmes bieži sauc par „kļūdu nolīdzinājumiem". No tiem netiešu novērojumu izlīdzināšanas parastā kārtā atvasinams viens normalnolīdzinājums ar vienu vienīgo nezinamo — meklēto lielumu x. Atslēdzot šo normalnolīdzinājumu, iznāk pazīstamā izteiksme (157) resp. (179), skatoties pēc tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības gadijums. Tiešus novērojumus var uzskatīt arī par noteikumu novērojumiem, jo ir attiecīgi noteikumi, kas izsaka, ka izlīdzinātā veidā visiem novērojumiem jābūt vienādiem. Salīdzinot pa diviem atsevišķos izlīdzinātos novērojumus, veidojami $(n-1)$ neatkarīgi noteikumu nolīdzinājumi, ja novērojumu kopskaits ir n. Izsakot izlīdzinātos novērojumus pēc parauga $(l+v)$, minēto noteikumu nolīdzinājumu nezinamie ir novērojumu izlabojumi v, kuru skaits n pārsniedz noteikumu nolīdzinājumu skaitu, kā arī jābūt, lai izlabojumi būtu nosakami ar izlīdzināšanu. Parastā kārtā veidojot un atslēdzot atbilstošos korrelatu normalnolīdzinājumus un ieliekot atrastās korrelatas izlabojumu formulās, nosakami visi izlabojumi, un — pieliekot tos atbilstošiem neizlīdzinātiem novērojumiem — izlīdzinātie novērojumi, kuriem, saprotams, jābūt vienādiem. Nepakavējoties pie viegli izdaramā pierādijuma, aizrādam, ka pēc tāda paņēmiena izlīdzinot 19-ā un 21-ā paragrafā pieņemtās novērojumu sistemas, iznāk jau citā ceļā atrastais, ar formulu (157) resp. (179) izteiktais rezultats.

Tā tad nākam pie slēdziena, ka no praktiskā viedokļa bez šaubām lietderīgais vispārīgi pieņemtais novērojumu iedalijums tiešos, netiešos un noteikumu novērojumos ir zinamā mērā mākslīgs, bet nevis principialas dabas. Pēc būtības, kā šeit paskaidrots, nav principialas atšķirības starp netiešiem un noteikumu novērojumiem, bet tiešie novērojumi uzskatami par šī vispārējā veida novērojumu atsevišķu gadijumu. Sakarā ar to atgriežoties pie 41-ā paragrafā apskatītā izlīdzināšanas uzdevuma vispārīgākā veida, aizrādam, ka (486) tipa nolīdzinājumi uzskatami par vispārīgākiem izlīdzināšanas pamatnolīdzinājumiem, jo šie nolīdzinājumi zinamos tipiskos apstākļos pāriet parastos kļūdu resp. noteikumu nolīdzinājumos. Ja atsevišķos nolīdzinājumos (486) ieiet — bez meklētiem lielumiem ξ — tikai pa vienam novērojumam resp. atbilstošam izlabojumam v, tad ir netiešu novērojumu gadijums, un nolīdzinājumi (486) neatšķiras no parastiem kļūdu nolīdzinājumiem. Ja pie tam visā nolīdzinājumu sistemā ir tikai viens vienīgais meklētais lielums, un tas visos nolīdzinājumos ieiet ar koeficientu 1, tad ir tiešu novērojumu atsevišķais gadijums. Beidzot, var gadīties, ka nav nekādu tieši nenovērotu meklētu lielumu ξ, bet vienīgie nezinamie ir novērojumu izlabojumi v. Tad ir noteikumu novērojumu gadijums, un nolīdzinājumi (486) pāriet parastos noteikumu nolīdzinājumos.

Kas zīmējas uz svaru pieņemšanu dažādas noteiktības gadijumā, tad tam nolūkam vispārīgi pietiek zināt novērojumu relativo noteiktību, kura bieži nosakama atkarībā no novērošanas apstākļiem. Piem., ja novērojumi ir pēc atkārtojumu metodes izmērīti leņķi, pie kam atkārtojumi notikuši lielākā skaitā, atsevišķo novērojumu relativo noteiktību raksturojošie svari pieņemami proporcionali atkārtojumu skaitam; līmetņojuma tīklā, kur visās atsevišķās stacijās līmetņojumi notikuši vienādos apstākļos, atsevišķiem gājieniem atbilstošo augstumu starpību svari pretēji proporcionali gājienu garumiem, u. t. t.

Dažreiz gadas, ka izlīdzinamiem novērojumiem a priori zinamas to noteiktību absolutā veidā noteicošās vidējās kļūdas. Tāds gadijums ir, piem., tad, kad dotos apstākļos sagaidamās novērojumu kļūdas nosakamas uz notikušu attiecīgu pētijumu pamata; vai arī tad, kad izlīdzināšanas objektu veidojošie elementi nav vis oriģinalnovērojumi, bet savukārt atrasti no citiem novērojumiem to izlīdzināšanas ceļā. A priori zinot novērojumu vidējās kļūdas, atbilstošie svari nosakami pēc formulām (95), patvaļīgi pieņemot svara vienības vidējo kļūdu. Bet, kā zinams, svara vienības vidējā kļūda nosakama arī no paša izlīdzināšanas rēķina. Bieži gadas, ka tādā veidā atrastā svara vienības vidējā kļūda vairāk vai mazāk manami atšķiras no tās, ar kuru aprēķināti izlīdzināšanas rēķinā lietotie svari, izejot no a priori zinamām novērojumu vidējām kļūdām. Sakarā ar to tad no izlīdzināšanas rēķina atrastās atsevišķo neizlīdzināto novērojumu vidējās kļūdas gan ir proporcionalas atbilstošām a priori pieņemtām, bet nav vienādas ar tām. Šī parādība izskaidrojama ar to, ka abas minētās vidējo kļūdu sistemas ir atrastas praktiski viena no otras neatkarīgi. Vienīgais tiešais sakars starp abām sistemām ir svari, jo tie pieņemti atkarībā no a priori dotām vidējām kļūdām, un savukārt nosaka no izlīdzināšanas rēķina atrasto vidējo kļūdu attiecības. Tāpēc saprotams, ka no izlīdzināšanas rēķina atrastās vidējās kļūdas visādā ziņā proporcionalas atbilstošām a priori pieņemtām. Ja ir nesaskaņas šo kļūdu absoluto lielumu ziņā, tad no tā jāsecina, ka izlīdzināšanas rēķinā lietoto novērojumu pretrunas neatbilst šo novērojumu a priori atrastām vidējām kļūdām.

Par piemēru var noderēt iepriekšējā paragrafā atrisinātais uzdevums, kur izejot no a priori dotām vidējām kļūdām pieņemtie svari attiecināti uz svara vienības vidējo kļūdu $\pm 4{,}0$ cm, bet no izlīdzināšanas rēķina atrasta svara vienības vidējā kļūda $\pm 3{,}4$ cm.

III. Triangulacijas.

Kā zinams, triangulacija ir paņēmiens, pēc kura, nosakamos punktus savienojot trijstūru sistemā, novēro tās horizontalās projekcijas ģeometrisko formu, linearos izmērus, orientējumu un stāvokli noteicošos elementus, lai ar tiem aprēķinātu nosakamo punktu koordinatas.

Ģeometrisko formu noteicošie elementi ir trijstūru sistemas malu ieslēgtie leņķi, vai malu virzieni. Linearo izmēru noteikšanai vajadzīgs, lai sistemā būtu zinama vai izmērīta vismaz viena **baze**, t. i. horizontalais atstatums starp sistemas diviem punktiem. Sistemas orientēšanai pietiek zināt vai novērot vienas malas **azimutu**, vai vispārīgi vienas malas orientējumu tieši vai netieši noteicošu elementu. Sistemas stāvoklis pietiekošā mērā noteikts ar sistemas viena punkta stāvokli horizontalā projekcijā raksturojošiem datiem — ģeografiskām vai uz kādu vietēju koordinatu sistemu attiecinātām koordinatām.

Ja minētie elementi novēroti vai zinami triangulacijas nolūkam pietiekošā, bet nepieciešamo nepārsniedzošā skaitā, tad ar tiem gan pietiek trijstūru sistemu veidojošo punktu stāvokļa noteikšanai; bet nav iespējams kontrolēt un izlīdzināt tam nolūkam lietotos novērojumus. Tāpēc parasti novērojumus taisa lielākā skaitā, neka tas nepieciešams, un sakarā ar to rodas vajadzība izlīdzināt šos novērojumus.

Uz triangulacijām attiecīgos novērojumos kvantitativi noteiktā pārsvarā ir leņķu resp. virzienu novērojumi, bet pārējie novērojumi notiek samērā nelielā skaitā. Tāpēc, nepalielinot pārmērīgi triangulacijas kopdarba techniskās grūtības un izmaksu, trijstūru sistemas linearos izmērus, orientējumu un stāvokli noteicošos elementus var novērot pēc sevišķi preciziem paņēmieniem. Ar to panākams, ka šo novērojumu rezultatiem piemitošās kļūdas ir vairāk vai mazāk niecīgas.

Tas lielā mērā nāk par labu triangulacijas noteiktībai, jo taisni šo novērojumu kļūdas, nelabvēlīgi sakrājoties, sevišķi ievērojami ietekmē trijstūru sistemas punktu stāvokļa nosacīšanas noteiktību. Bez tam tādos apstākļos arī vienkāršojas novērojumu izlīdzināšana, jo minētiem novērojumiem piemitošo kļūdu niecīgā lieluma dēļ, šos novērojumus izlīdzināšanas rēķinā var uzskatīt par absoluti pareiziem pat tad, kad leņķu resp. virzienu novērojumi notikuši ar triangulacijas darbos parasto augsto noteiktību. Tā tad var pieņemt, ka izlīdzināšanas kārtā likvidējamās pretrunas radušās tikai no leņķu resp. virzienu novērojumu kļūdām; un tāpēc izlīdzināšanu mēdz attiecināt tikai uz šiem novērojumiem, uzskatot pārējo novērojumu rezultatus par negrozamā veidā dotiem elementiem.

Trijstūru sistemā novērotie leņķi vai virzieni padoti dažādiem noteikumiem, kuri pa daļai izrietē no sistemas ģeometriskā veida, pa daļai zīmējas uz teoretiskiem sakariem starp minētiem leņķiem vai virzieniem un ar praktiski ignorējamām kļūdām dotiem vai novērotiem citiem sistemas elementiem. Tā tad izmērītos leņķus vai virzienus var izlīdzināt kā noteikumu novērojumus, lai pēc tam ar atrastām šo novērojumu izlīdzinātām vērtībām aprēķinātu trijstūru sistemas punktu koordinatas un eventuali vajadzīgus citus elementus.

Bet ievērojot trijstūru sistemas punktu koordinatu funkcionalos sakarus ar sistemas leņķiem resp. virzieniem, šo leņķu vai virzienu novērojumus var arī uzskatīt par atbilstošiem meklēto koordinatu funkcijām, t. i. par netiešiem novērojumiem. Izlīdzinot minētos novērojumus kā netiešus, kā zinams, starp citu, arī nosakami atsevišķiem novērojumiem atbilstošie izlabojumi un paši izlīdzinātie novērojumi; bet izlīdzināšanas tiešā rezultatā tiek atrastas pašas meklētās punktu koordinatas.

Tā tad trijstūru sistemā izmērītos leņķus vai virzienus var izlīdzināt vai nu kā noteikumu novērojumus, bez tieša sakara ar meklētām koordinatām („leņķu vai virzienu izlīdzināšanas" gadijums), vai kā netiešus novērojumus, ietilpinot izlīdzināšanas rēķinā, kā nezinamos, meklētās koordinatas („koordinatu izlīdzināšanas" gadijums). Pirmais izlīdzināšanas veids, kā vispārīgi izdevīgākais, ir praksē visplašāki pielietotais. Otrais atzīstams par izdevīgu tikai zinamos apstākļos, sevišķi tad, kad nosakamo punktu skaits ļoti neliels.

Bieži gadas, ka trijstūru sistemas atsevišķos novērošanas punktos jeb s t a c i j ā s ne tikai izmērīti savā starpā neatkarīgi leņķi, bet arī novēroti vai zinami šo leņķu funkcijas veidojoši leņķi. Tad stacijā notikušie novērojumi, starp citu, padoti zinamiem vietējiem noteikumiem, kas zīmējas tikai uz šinī stacijā izmērītiem leņķiem. Tādi „stacijas noteikumi" rodas katrā stacijā, kur s malu kūlī izmērīto leņķu skaits ir lielāks par (s-l), jo s malu savstarpējā orientējuma noteikšanai pietiek ar (s-l) leņķu novērojumiem; tā tad ar katru šinī ziņā lieku novērojumu rodas atbilstošs, uz stacijas novērojumiem attiecīgs noteikums.

Visās stacijās izmērītos leņķus aptverošā vispārējā trijstūru sistemas izlīdzināšanā līdz ar noteikumiem, kas saista dažādās stacijās notikušos novērojumus, saprotams, var ievērot arī minētos staciju noteikumus. Tas tomēr ieteicams un nepadara nopietnas grūtības tikai tad, ja noteikumu kopskaits ne visai liels. Bet gadijumos, kad ir daudz noteikumu, parasti uzskata par lietderīgāku izdalīt no vispārējās izlīdzināšanas minētos vietējos staciju noteikumus. Tam nolūkam pirms vispārējās izlīdzināšanas izdara atsevišķo **staciju izlīdzināšanu**, t. i. katru vienā stacijā novēroto leņķu grupu, kas padota stacijas noteikumiem, atsevišķi izlīdzina attiecībā uz šiem noteikumiem, rezultatā atrodot stacijas neatkarīgiem leņķiem atbilstošos izlīdzinātos novērojumus. Tie, saprotams, nav uzskatami par galīgi izlīdzinātiem, jo dotās stacijas izlīdzināšanā nav ievēroti vispārējie noteikumi, kas saista šīs stacijas novērojumus ar citu staciju novērojumiem. Bet ar stacijas izlīdzināšanas rezultatiem var gan pēc zinamiem paņēmieniem vispārējā izlīdzināšanā atvietot stacijā faktiski notikušo novērojumu grupu. Līdz ar to vispārējā izlīdzināšanā atkrīt attiecīgie stacijas noteikumi.

Ja novērošanas objekts ir nevis leņķi, bet virzieni, un tie stacijā izmērīti pilnīgos paņēmienos, t. i., katrā atsevišķā paņēmienā atkārtojoties visiem, bez izņēmuma, svarā kritošiem stacijas virzieniem, tad oriģinalnovērojumi nav neatkarīgi tikai tanī ziņā, ka uz vienu un to pašu sākuma virzienu attiecinātiem atbilstošiem virzienu novērojumiem teoretiski jābūt vienādiem visos paņēmienos. Tā tad tādā gadijumā stacijas izlīdzināšana izsmeļas ar atsevišķiem virzieniem atbilstošo novērojumu aritmetisko vidējo veidošanu pa visiem paņēmieniem.

Ja virzienu mērīšana notikusi nepilnīgos paņēmienos, t. i. ir tādi virzieni, kas novēroti nevis visos, bet tikai dažos paņēmienos, tad stacijas izlīdzināšanas uzdevums ir: atvasināt no šiem nepilnīgiem virzienu paņēmieniem vienu tiem ekvivalentu pilnīgu virzienu paņēmienu, kurš vispārējā izlīdzināšanā var atvietot stacijā faktiski notikušos virzienu novērojumus.

Visādā ziņā, kā vienā tā arī otrā gadijumā, atsevišķās stacijās izlīdzinātie virzienu novērojumi nav uzskatami par galīgi izlīdzinātiem, jo notikušā vietējā izlīdzināšanā nav ievēroti noteikumi, kas zīmējas uz dažādu staciju virzienu savstarpējiem sakariem.

Nākošos paragrafos sīkāki iztirzājot dažus uz triangulaciju izlīdzināšanu attiecīgus jautājumus, iesāksim ar staciju izlīdzināšanu, uzskatot to pagaidām par patstāvīgu, no triangulacijas vispārējās izlīdzināšanas neatkarīgu uzdevumu.

§ 44. Leņķu novērojumu izlīdzināšana atsevišķās stacijās.

Lai no stacijas izejošo s staru kūlī novēroti n leņķi, pie kam pieņemsim, ka $n > s - 1$. Tad ir lieki novērojumi, un tāpēc iespējama stacijas izlīdzināšana.

No šiem novērojumiem izvēlamies $(s-1)$ neatkarīgus $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_{s-1}$ ar atbilstošiem izlabojumiem $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{s-1}$. Pārējie $(n-s+1)$ novērojumi $l_1', l_2', l_3', \ldots, l_{n-s+1}'$ ar izlabojumiem $v_1', v_2', v_3', \ldots, v_{n-s+1}'$ tad attiecinami uz l-tipa novērojumiem atbilstošo meklēto leņķu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1}$ funkcijām $f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1})$, $f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1})$, $f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1})$, $\ldots, f_{n-s+1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1})$. Attiecībā uz šīm funkcijām piezīmējam, ka tām vienmēr ir argumentu algebraisku sumu veids, un ka nav vajadzīgs, lai katrā funkcijā ieietu visi argumenti.

Izlīdzināšanu var izdarīt divos variantos, uzskatot novērojumus par netiešiem, vai par noteikumu novērojumiem.

Pirmā gadijumā, izlīdzinot novērojumus kā netiešus, pieņemam par nezinamiem minētos izlīdzinātos neatkarīgos leņķus $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1}$, un veidojam atsevišķiem novērojumiem l un l' atbilstošos kļūdu nolīdzinājumus

$$
\begin{array}{lll}
x_1 & = l_1 & + v_1 \\
x_2 & = l_2 & + v_2 \\
x_3 & = l_3 & + v_3 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
x_{s-1} & = l_{s-1} & + v_{s-1} \\
f_1\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1}) & = l_1' & + v_1' \\
f_2\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1}) & = l_2' & + v_2' \\
f_3\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1}) & = l_3' & + v_3' \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
f_{n-s+1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1}) & = l_{n-s+1}' & + v_{n-s+1}'
\end{array}
$$

jeb

$$\left.\begin{array}{lll}
x_1 & -l_1 & = v_1 \\
x_2 & -l_2 & = v_2 \\
x_3 & -l_3 & = v_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
x_{s-1} & -l_{s-1} & = v_{s-1} \\
f_1\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1}) & -l_1' & = v_1' \\
f_2\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s-1}) & -l_2' & = v_2' \\
f_3\ (x_1, x_2, x_3, \ldots\ x_{s-1}) & -l_3' & = v_3' \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
f_{n-s+1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{-1}) & -l_{n-s+1}' & = v_{n-s+1}'
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (511).$$

Izejot no šiem kļūdu nolīdzinājumiem, parastā kārtā nosakami meklētie leņķi x un arī atsevišķo novērojumu l un l′ izlabojumi v resp. v′. Kas zīmējas uz svara vienības vidējās kļūdas noteikšanu, tad jāievēro, ka lieko novērojumu skaits ir (n—s+1). Tā tad svara vienības vidējo kļūdu noteicošā formula ir

$$\left.\begin{array}{l}
m = \pm \sqrt{\dfrac{[vv] + [v'v']}{n - s + 1}} \\
\text{resp.} \\
m = \pm \sqrt{\dfrac{[pvv] + [p'v'v']}{n - s + 1}}
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (512),$$

skatoties pēc tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības gadijums, pie kam otrā formulā p un p′ apzīmē novērojumu l resp. l′ svarus.

Var gadīties, ka minēto s staru veidoto leņķu starpā ir tādi, kas a priori doti kā praktiski absoluti pareizi lielumi. Uzskatot tos par piederošiem neatkarīgo leņķu grupai, tad, saprotams, trūkst attiecīgie novērojumi l, un sakarā ar to sistemā (511) izkrīt atbilstošie kļūdu nolīdzinājumi. Līdz ar to pārējos kļūdu nolīdzinājumos izkrīt dotiem leņķiem atbilstošie nezinamie x, un to vietā stājas paši dotie leņķi kā funkciju f brīvie locekļi.

Tādā gadijumā, s staru savstarpējā orientējuma noteikšanai vajadzīgo neatkarīgo leņķu skaitam paliekot (s—1), un pieņemot, ka no tiem i ir a priori doti, izlīdzināšanas rēķina nezinamo skaits ir (s—1—i). Ja ir taisīti n novērojumi, tad lieko novērojumu skaits ir n—(s—1—i)= =n—s+i+1; tā tad svara vienības vidējo kļūdu noteicošās formulas (512) pāriet šādās:

$$\left.\begin{aligned} m &= \pm\sqrt{\frac{[vv]+[v'v']}{n-s+i+1}} \\ \text{resp.} \\ m &= \pm\sqrt{\frac{[pvv]+[p'v'v']}{n-s+i+1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (513).$$

Izlīdzinot izmērītos leņķus kā noteikumu novērojumus, lieko novērojumu skaitā veidojamie neatkarīgie noteikumu nolīdzinājumi atvasinami no kļūdu nolīdzinājumiem (511). Tam nolūkam uz novērojumiem l' attiecīgos nolīdzinājumos nezinamie x jāatvieto ar $(l+v)$ tipa izteiksmēm, kuras noteiktas ar novērojumiem l atbilstošiem tās pašas sistemas nolīdzinājumiem. Tādā veidā rodas noteikumu nolīdzinājumi

$$\begin{aligned} &f_1 \{(l_1+v_1),(l_2+v_2),(l_3+v_3),\ldots,(l_{s-1}+v_{s-1})\}-l_1' &&=v_1' \\ &f_2 \{(l_1+v_1),(l_2+v_2),(l_3+v_3),\ldots,(l_{s-1}+v_{s-1})\}-l_2' &&=v_2' \\ &f_3 \{(l_1+v_1),(l_2+v_2),(l_3+v_3),\ldots,(l_{s-1}+v_{s-1})\}-l_3' &&=v_3' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{n-s+1}\{(l_1+v_1),(l_2+v_2),(l_3+v_3),\ldots,(l_{s-1}+v_{s-1})\}-l_{n-s+1}' &&=v_{n-s+1}' \end{aligned}$$

jeb

$$\left.\begin{aligned} &f_1 \{(l_1+v_1),(l_2+v_2),(l_3+v_3),\ldots \\ &\qquad \ldots,(l_{s-1}+v_{s-1})\}-\{l_1' + v_1'\}=0 \\ &f_2 \{(l_1+v_1),(l_2+v_2),(l_3+v_3),\ldots \\ &\qquad \ldots,(l_{s-1}+v_{s-1})\}-\{l_2' + v_2'\}=0 \\ &f_3 \{(l_1+v_1),(l_2+v_2),(l_3+v_3),\ldots \\ &\qquad \ldots,(l_{s-1}+v_{s-1})\}-\{l_3' + v_3'\}=0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_{n-s+1} \{(l_1+v_1),(l_2+v_2),(l_3+v_3),\ldots \\ &\qquad \ldots,(l_{s-1}+v_{s-1})\}-\{l_{n-s+1}' + v_{n-s+1}'\}=0 \end{aligned}\right\} (514).$$

Šo noteikumu nolīdzinājumu ir tikpat daudz, cik ir l'-tipa, tā tad lieko, novērojumu. Ka šie nolīdzinājumi visi neatkarīgi, redzams jau no tā, ka katrā ieiet viens l'-tipa novērojums ar atbilstošo izlabojumu v', kurš neatkārtojas pārējos nolīdzinājumos.

Izejot no šiem noteikumu nolīdzinājumiem, noteikumu novērojumu izlīdzināšanas parastā kārtā nosakami visi izlabojumi v un v' un izlīdzinātie novērojumi $\bar{l}$ un $\bar{l}'$, no kuriem tad triangulacijas vispārējā izlīdzināšanā lietojami tikai stacijas neatkarīgiem leņķiem atbilstošie l. Svara vienības vidējā kļūda nosakama pēc pirmās vai otrās formulas (512), skatoties pēc tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības gadijums.

Ja svarā krītošo staru ieslēgto leņķu starpā ir i tādi, kas a priori doti kā praktiski absoluti pareizi lielumi, tad noteikumu nolīdzinājumos (514) attiecīgie novērojumi ar atbilstošiem izlabojumiem jāatvieto ar šo leņķu dotām vērtībām, tām ieejot nolīdzinājumu brīvos locekļos. Svara vienības vidējā kļūda tādā gadijumā nosakama pēc apstākļiem atbilstošās formulas (513).

Stacijas izlīdzināšanas tipisks atsevišķs gadijums ir, kad izmērītie leņķi „pilda horizontu", t. i. kopā veido 360^0. Tādā gadijumā izmērītie leņķi sevišķi ērti izlīdzinami kā noteikumu novērojumi, kas padoti tikai vienam vienīgam noteikumam. Apzīmējot novērojumus ar l_1, l_2, l_3, ..., l_n, un atbilstošos izlabojumus ar v_1, v_2, v_3, ..., v_n, minētais noteikums izsakams ar šādu nolīdzinājumu

$$(l_1 + v_1) + (l_2 + v_2) + (l_3 + v_3) + \ldots + (l_n + v_n) = 360^0,$$

jeb

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (515),$$

kur $w = [l] - 360^0$.

Atbilstošais korrelatas normalnolīdzinājums ir

$$\left.\begin{aligned} n\,k + w &= 0 \\ \text{resp.} \qquad \left[\frac{1}{p}\right] k + w &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (516),$$

skatoties pēc tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības gadijums, pie kam otrā formulā p apzīmē novērojumu svarus.

Tā tad korrelata ir

$$\left.\begin{aligned} k &= -\frac{w}{n} \\ \text{resp.} \qquad k &= -\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (517);$$

un ievērojot, ka noteikuma nolīdzinājumā (515) visi koeficienti vienādi ar $+1$, atrodam šādus novērojumu izlabojumus:

vienādas noteiktības gadijumā

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = -\dfrac{w}{n} \\ v_2 = -\dfrac{w}{n} \\ v_3 = -\dfrac{w}{n} \\ \dots\dots\dots \\ v_n = -\dfrac{w}{n} \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (518),$$

dažādas noteiktības gadijumā

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = -\dfrac{1}{p_1}\dfrac{w}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} \\ v_2 = -\dfrac{1}{p_2}\dfrac{w}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} \\ v_3 = -\dfrac{1}{p_3}\dfrac{w}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} \\ \dots\dots\dots\dots \\ v_n = -\dfrac{1}{p_n}\dfrac{w}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (519).$$

Šīs formulas izsaka, ka pretruna w sadalama uz atsevišķiem novērojumiem: vienādas noteiktības gadijumā — vienmērīgi, bet dažādas noteiktības gadijumā — pretēji proporcionali attiecīgo novērojumu svariem.

Tā kā šinī atsevišķā gadijumā ir tikai viens lieks novērojums, svara vienības vidējā kļūda nosakama pēc formulas

$$\left.\begin{array}{l} m = \pm\sqrt{\dfrac{[vv]}{1}} = \pm\sqrt{[vv]} \\ \text{resp.} \\ m = \pm\sqrt{\dfrac{[pvv]}{1}} = \pm\sqrt{[pvv]} \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (520),$$

pie kam, ievērojot (518) resp. (519),

$$\left.\begin{array}{l}[vv] = n\dfrac{w^2}{n^2} = \dfrac{w^2}{n} \\ \text{un} \\ [pvv] = \left[\dfrac{1}{p}\right]\dfrac{w^2}{\left[\dfrac{1}{p}\right]^2} = \dfrac{w^2}{\left[\dfrac{1}{p}\right]}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (521).$$

Ieliekot šīs izteiksmes formulās (520), tās pāriet veidā

$$\left.\begin{array}{l}m = \pm\dfrac{w}{\sqrt{n}} \\ \text{resp.} \\ m = \pm\dfrac{w}{\sqrt{\left[\dfrac{1}{p}\right]}}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (522).$$

Izlīdzināto novērojumu svaru koeficienti $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots, Q_n$ nosakami § 38-ā aizrādītā kārtā, piem., pēc formulas (466) resp. (467), pie kam katrs izlīdzinātais novērojums $(l_i + v_i)$ uzskatams par (453) tipa funkciju. Šinī funkcijā pats $(l_i + v_i)$ ieiet ar koeficientu $f_i = 1$, bet visi pārējie koeficienti f ir vienādi ar nulli.

Apskatītā atsevišķā gadijumā ir tikai viens noteikuma nolīdzinājums, kura koeficienti atbilst formulu (466) un (467) koeficientiem a. Tādos apstākļos krīt svarā tikai pirmie divi minēto formulu locekļi un tos veidojošās sumas [ff], [af], [aa], resp. $\left[\dfrac{ff}{p}\right], \left[\dfrac{af}{p}\right], \left[\dfrac{aa}{p}\right]$. Ievērojot augšā teikto par koeficientiem f un a, atrodam, ka

$$\left.\begin{array}{l}[ff] = 1, \quad [af] = 1, \; [aa] = n \\ \text{resp.} \\ \left[\dfrac{ff}{p}\right] = \dfrac{1}{p_i} \quad \left[\dfrac{af}{p}\right] = \dfrac{1}{p_i}, \left[\dfrac{aa}{p}\right] = \left[\dfrac{1}{p}\right]\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (523).$$

Tā tad izlīdzinātā novērojuma $(l_i + v_i)$ svara koeficients ir

$$\left.\begin{array}{l}Q_i = [ff] - \dfrac{[af]^2}{[aa]} = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n} \\ \text{resp.} \\ Q_i = \left[\dfrac{ff}{p}\right] - \dfrac{\left[\dfrac{af}{p}\right]^2}{\left[\dfrac{aa}{p}\right]} = \dfrac{1}{p_i} - \dfrac{\dfrac{1}{p_i^2}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} = \dfrac{1}{p_i}\,\dfrac{\left[\dfrac{1}{p}\right] - \dfrac{1}{p_i}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]}\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (524).$$

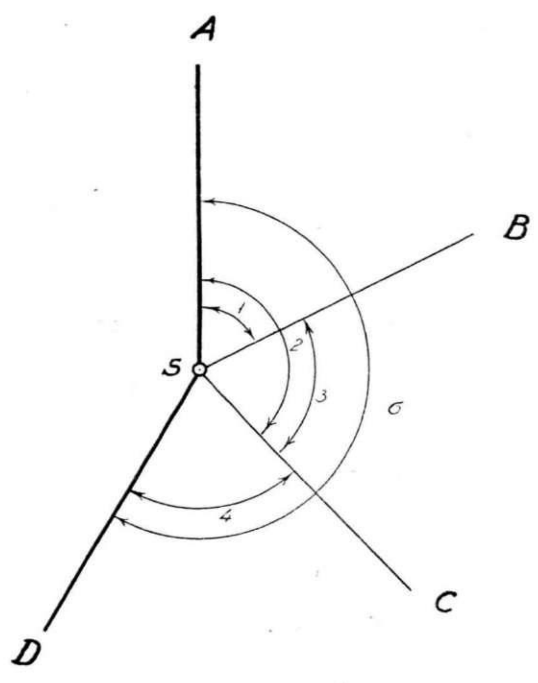
Ievērojot (522), tam atbilst vidējā kļūda

$$\left.\begin{aligned} \overline{m}_i &= \pm m\sqrt{Q_i} = \pm \frac{w}{n}\sqrt{n-1} \\ \text{resp.} \quad \overline{m}_i &= \pm m\sqrt{Q_i} = \pm \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]}\sqrt{\frac{1}{p_i}\left(\left[\frac{1}{p}\right]-\frac{1}{p_i}\right)} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (525).$$

Tā tad vienādas noteiktības gadijumā visiem atsevišķiem izlīdzinātiem novērojumiem ir vienāda, ar pirmo formulu (525) noteiktā vidējā kļūda. Dažādas noteiktības gadijumā atsevišķo izlīdzināto novērojumu vidējās kļūdas nosakamas pēc otrās formulas (525), pie kam p_i apzīmē attiecīgā neizlīdzinātā novērojuma svaru.

§ 45. Piemēri.

1. piemērs. Stacijā S (4. att.) punktiem A, B, C, D atbilstošo staru savstarpējā orientējuma noteikšanai novēroti leņķi



4. attēls.

$(1) = 62^0\ 47'\ 18{,}6''$ ar svaru $p_1 = 18$

$(2) = 137\ \ 18\ \ 21{,}5$ „ „ $p_2 = 24$

$$(3) = 74^0\,31'\,04{,}8'' \qquad \text{ar svaru } p_3 = 20$$
$$(4) = 75\;05\;44{,}5 \qquad ,, \quad ,, \quad p_4 = 20$$

Bez tam dots ar praktiski ignorējamu kļūdu atrastais leņķis

$$\sigma = 212^0\,24'\,07{,}6''$$

Šinī gadijumā

$$s = 4 \qquad \text{un} \qquad i = 1$$

sakarā ar to nepieciešamo novērojumu skaits ir

$$s - i - 1 = 2$$

Bet taisīto novērojumu ir

$$n = 4$$

tā tad ir divi lieki novērojumi, un tāpēc iespējama stacijas izlīdzināšana.

Atbilstoši nepieciešamo novērojumu skaitam izvēlamies divus neatkarīgus leņķus, kas kopā ar doto σ nosaka svarā krītošo staru savstarpējo orientējumu. Kā tādus pieņemam leņķus, uz kuriem zīmējas novērojumi (1) un (2). Apzīmējot šos izlīdzinātos leņķus ar x un y, bet izlīdzinātos novērojumus ar

$$\bar{1} = (1) + v_1$$
$$\bar{2} = (2) + v_2$$
$$\bar{3} = (3) + v_3$$
$$\bar{4} = (4) + v_4$$

izsakam visus izlīdzinātos novērojumus kā argumentu x, y un σ funkcijas:

$$\bar{1} = (1) + v_1 = x$$
$$\bar{2} = (2) + v_2 = y$$
$$\bar{3} = (3) + v_3 = y - x$$
$$\bar{4} = (4) + v_4 = \sigma - y$$

Ieliekot novērojumu (1), (2), (3), (4) un dotā leņķa σ skaitliskās vērtības un pārgrupējot locekļus, atrodam

$$x \quad - \;\; 62^0\,47'\,18{,}6'' = v_1$$
$$y - 137\;18\;21{,}5 = v_2$$
$$-x + y - \;\; 74\;31\;04{,}8 = v_3$$
$$-y + 137\;18\;23{,}1 = v_4$$

Izlīdzinot novērojumus kā netiešus, šīs izteiksmes tieši lietojamas kā kļūdu nolīdzinājumi. Lai samazinātu brīvos locekļus, uz divu pirmo nolīdzinājumu pamata pieņemam tuvinās vērtības

$$(x) = 62^0\,47'\,18{,}6''$$
$$(y) = 137\;\;18\;\;21{,}5$$

un atvietojam nezinamos ar izteiksmēm

$$x = (x) + \xi = 62^0\,47'\,18{,}6'' + \xi$$
$$y = (y) + \eta = 137\;\;18\;\;21{,}5 + \eta$$

Tādā kārtā nonākam pie pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem

$$\begin{aligned} \xi \quad\; - 0{,}0 &= v_1 & &\text{ar svaru } p_1 = 18 \\ \eta - 0{,}0 &= v_2 & &\text{„ „ } p_2 = 24 \\ -\xi + \eta - 1{,}9 &= v_3 & &\text{„ „ } p_3 = 20 \\ -\eta - 1{,}6 &= v_4 & &\text{„ „ } p_4 = 20 \end{aligned}$$

Atbilstošie normalnolīdzinājumi ar papildu locekli $[\lambda\lambda]$ ir

$$+38{,}0\,\xi - 20{,}0\,\eta + 38{,}0 = 0$$
$$-20{,}0\,\xi + 64{,}0\,\eta - \underline{70{,}0} = 0$$
$$+123{,}4$$

Šo sistemu reducējam pēc Gauss'a algoritma

Atslēdzot pēc ξ			Atslēdzot pēc η		
η	ξ	$-\lambda$	ξ	η	$-\lambda$
+ 64,0	− 20,0	− 70,0	+ 38,0	− 20,0	+ 38,0
	+ 38,0	+ 38,0		+ 64,0	− 70,0
	− 6,25	− 21,9		− 10,5	+ 20,0
$p_\xi = 31{,}75$	+ 31,75	+ 16,1	$p_\eta = 53{,}5$	+ 53,5	− 50,0
$\xi = -\dfrac{+16{,}1}{+31{,}75} = -0{,}5''$		+ 123,4	$\eta = -\dfrac{-50{,}0}{+53{,}5} = +0{,}9''$		+ 123,4
		− 76,6			− 38,0
		− 8,2			− 46,7
		+ 38,6			+ 38,7

Ar atrastiem ξ un η nosakam

$$x = 62^0\,47'\,18{,}6'' - 0{,}5'' = 62^0\,47'\,18{,}1''$$
$$y = 137\ 18\ 21{,}5 + 0{,}9 = 137\ 18\ 22{,}4$$

Ieliekot šīs vērtības atbilstošos kļūdu nolīdzinājumos, aprēķinam atsevišķos v un sumu [pvv]:

$$\begin{array}{ll} v_1 = -0{,}5'' & p_1v_1v_1 = 4{,}5 \\ v_2 = +0{,}9 & p_2v_2v_2 = 19{,}4 \\ v_3 = -0{,}5 & p_3v_3v_3 = 5{,}0 \\ v_4 = +0{,}7 & p_4v_4v_4 = \underline{9{,}8} \\ & [pvv] = 38{,}7 \end{array}$$

Svara vienības vidējā kļūda ir

$$m = \pm\sqrt{\frac{38{,}7}{4 - 4 + 1 + 1}} = \pm 4{,}4''$$

Izejot no tās un ievērojot, ka x un y svari ir vienādi ar ξ un η atbilstošiem atrastiem svariem p_ξ un p_η, aprēķinam izlīdzināto leņķu x un y vidējās kļūdas

$$m_x = \pm\frac{4{,}4''}{\sqrt{31{,}75}} = \pm 0{,}8''$$

$$m_y = \pm\frac{4{,}4''}{\sqrt{53{,}5}} = \pm 0{,}6''$$

Tā tad izlīdzinātie neatkarīgie leņķi ir

$$x = 62^0\,47'\,18{,}1'' \pm 0{,}8''$$
$$y = 137\ 18\ 22{,}4 \pm 0{,}6$$

Pieliekot atrastos izlabojumus atbilstošiem izmērītiem leņķiem, nosakam arī atsevišķos izlīdzinātos novērojumus

$$\bar{1} = 62^0\,47'\,18{,}6'' - 0{,}5'' = 62^0\,47'\,18{,}1''$$
$$\bar{2} = 137\ 18\ 21{,}5 + 0{,}9 = 137\ 18\ 22{,}4$$
$$\bar{3} = 74\ 31\ 04{,}8 - 0{,}5 = 74\ 31\ 04{,}3$$
$$\bar{4} = 75\ 05\ 44{,}5 + 0{,}7 = 75\ 05\ 45{,}2$$

2. piemērs. Atrisinam to pašu uzdevumu vēlreiz, tagad uzskatot izmērītos leņķus par noteikumu novērojumiem.

Dotos apstākļos ir divi lieki novērojumi, tā tad arī divi neatkarīgi noteikumu nolīdzinājumi. Tos iepriekšējā paragrafā aizrādītā kārtā atvasinam no 1-ā piemērā lietotās uz x un y attiecīgās kļūdu nolīdzinājumu sistemas, tās divos pēdējos nolīdzinājumos atvietojot x un y ar atbilstošām no diviem pirmiem nolīdzinājumiem atrastām izteiksmēm. Šie noteikumu nolīdzinājumi ir

$$
\begin{aligned}
-v_1 + v_2 - v_3 \qquad & - 1{,}9 = 0 \\
-v_2 \qquad - v_4 & + 1{,}6 = 0
\end{aligned}
$$

Lai sakarā ar atbilstošo korrelatu normalnolīdzinājumu reducēšanu nosacītu arī uz neatkarīgiem leņķiem attiecīgo izlīdzināto novērojumu $\overline{1}$ un $\overline{2}$ svaru koeficientus, uzskatam $\overline{1}$ un $\overline{2}$ kā izlīdzināto leņķu funkcijas

$$F' = \overline{1} \qquad \text{un} \qquad F'' = \overline{2}$$

pie kam katrai funkcijai ir tikai viens koeficients

$$f_1' = +1 \qquad \text{resp.} \qquad f_2'' = +1$$

Veidojot noteikumu nolīdzinājumiem atbilstošos korrelatu normalnolīdzinājumus

$$
\begin{aligned}
+0{,}147k_1 - 0{,}042k_2 - 1{,}900 &= 0 \\
-0{,}042k_1 + 0{,}092k_2 + 1{,}600 &= 0
\end{aligned}
$$

aprēķinam arī minēto svaru koeficientu Q_1 un Q_2 noteikšanai vajadzīgos locekļus

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{f'f'}{p}\right] &= +0{,}055 & \left[\frac{f''f''}{p}\right] &= +0{,}042 \\
\left[\frac{af'}{p}\right] &= -0{,}055 & \left[\frac{af''}{p}\right] &= +0{,}042 \\
\left[\frac{bf'}{p}\right] &= 0{,}000 & \left[\frac{bf''}{p}\right] &= -0{,}042
\end{aligned}
$$

Korrelatu normalnolīdzinājumus reducējam un atslēdzam pēc Gauss'a algoritma, līdz ar to arī nosakot izlīdzināto novērojumu $\overline{1}$ un $\overline{2}$ resp. funkciju F' un F'' svaru koeficientus Q_1 un Q_2.

k_1	k_2	w	F′	F″	−(σ)	K	O	Q_1	Q_2
Nereducētā sistema							0,000	+0,055	+0,042
+0,147	−0,042	−1,900	−0,055	+0,042	+1,808	0,000	+24,558	+0,021	+0,012
	+0,092	+1,600	0,000	−0,042	−1,608	0,000			
− 0,286 12,925	+0,012	+0,543	+0,016	−0,012	−0,517				
	1-o reizi reducētā sistema						−24,588	+0,034	+0,030
+13,215	+0,080	+1,057	−0,016	−0,030	−1,091	0,000	+13,966	+0,003	+0,011
							−38,454	+0,031	+0,019
− 3,779			$k_1w_1 = -17,377$				$=[0.2]$	$=\left[\frac{f'f'}{p}\cdot 2\right]$ $=Q_1$	$=\left[\frac{f''f''}{p}\cdot 2\right]$ $=Q_2$
+12,925	−13,215		$k_2w_2 = -21,144$						
+ 9,146 $=k_1$	−13,215 $=k_2$		$[kw] = -38,521$						

Ar atrastām korrelatām aprēķinam atsevišķo novērojumu izlabojumus v un veidojam sumu [pvv]:

$$v_1 = \frac{1}{18}(-9,146 \qquad) = -0,508; \qquad p_1v_1v_1 = 4,645$$

$$v_2 = \frac{1}{24}(+9,146 + 13,215) = +0,932; \qquad p_2v_2v_2 = 20,847$$

$$v_3 = \frac{1}{20}(-9,146 \qquad) = -0,457; \qquad p_3v_3v_3 = 4,177$$

$$v_4 = \frac{1}{20}(\qquad + 13,215) = +0,661; \qquad p_4v_4v_4 = \underline{8,738}$$

$$[pvv] = 38,407$$

Atrastās [0.2], [kw], [pvv] vērtības apmierinoši saskan; tā tad izlīdzināšanas rēķins izdarīts pareizi.

Apaļojot izlabojumus 0,1″ vienībās, nosakam atsevišķos izlīdzinātos novērojumus:

$$\overline{1} = 62^0\,47'\,18,6'' - 0,5'' = 62^0\,47'\,18,1''$$

$$\overline{2} = 137\ \ 18\ \ 21,5\ + 0,9\ = 137\ \ 18\ \ 22,4$$

$$\bar{3} = 74^0 31' \, 04{,}8'' - 0{,}5'' = 74^0 31' \, 04{,}3''$$
$$\bar{4} = 75 \; 05 \; 44{,}5 + 0{,}7 = 75 \; 05 \; 45{,}2$$

Svara vienības vidējā kļūda ir

$$m = \pm \sqrt{\frac{38{,}407}{4 - 4 + 1 + 1}} = \pm 4{,}4''$$

Izejot no tās un ievērojot atrastos svaru koeficientus, nosakam izlīdzināto neatkarīgo leņķu $\bar{1}$ un $\bar{2}$ vidējās kļūdas

$$\bar{m}_1 = \pm 4{,}4'' \sqrt{0{,}031} = \pm 0{,}8''$$
$$\bar{m}_2 = \pm 4{,}4'' \sqrt{0{,}019} = \pm 0{,}6''$$

Tā tad izlīdzinātie neatkarīgie leņķi ir

$$\bar{1} = 62^0 47' \, 18{,}1'' \pm 0{,}8''$$
$$\bar{2} = 137 \; 18 \; 22{,}4 \pm 0{,}6$$

Kā redzams, šie rezultati pilnīgi saskan ar tiem, kuri atrasti atrisinot šo pašu uzdevumu citā variantā — uzskatot izmērītos leņķus par netiešiem novērojumiem.

3. piemērs. Jāizlīdzina stacija „Mangaļciems", kur ar vienādu noteiktību izmērīti punktiem Z, M, „Baltā baznīca", „Cietokšņa baznīca" atbilstošo staru ieslēgtie leņķi (5. att.)

$$(1) = 57^0 14' \, 10{,}1''$$
$$(2) = 46 \; 50 \; 27{,}6$$
$$(3) = 136 \; 41 \; 00{,}1$$
$$(4) = 119 \; 14 \; 13{,}4$$

Izmērītie leņķi pilda horizontu; tā tad novērojumu sumai jābūt vienādai ar 360^0. Šinī ziņā ir pretruna

$$w = \{(1) + (2) + (3) + (4)\} - 360^0 = -8{,}8''$$

Izejot no tās, pēc iepriekšējā paragrafā atrastām formulām nosakam: atsevišķo novērojumu izlabojumus

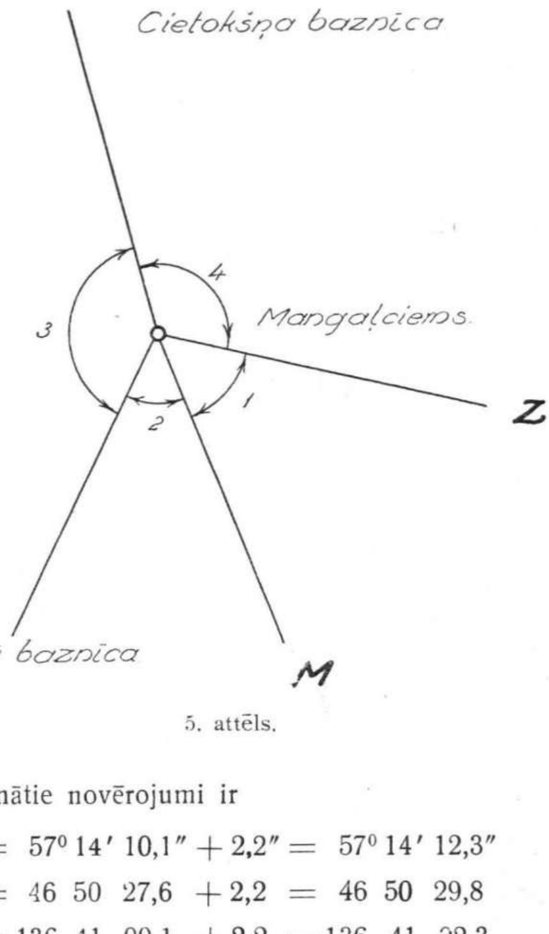
$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = -\frac{-8{,}8''}{4} = +2{,}2''$$

svara vienības vidējo kļūdu

$$m = \pm \frac{-8{,}8''}{\sqrt{4}} = \pm 4{,}4''$$

atsevišķo izlīdzināto leņķu vidējās kļūdas

$$\overline{m}_1 = \overline{m}_2 = \overline{m}_3 = \overline{m}_4 = \pm \frac{-8{,}8''}{4} \sqrt{4-1} = \pm 3{,}8''$$



5. attēls.

Paši izlīdzinātie novērojumi ir

$$\begin{aligned}
\overline{1} &= 57^0\,14'\,10{,}1'' + 2{,}2'' = 57^0\,14'\,12{,}3'' \\
\overline{2} &= 46\;\;50\;\;27{,}6\;\; + 2{,}2\;\; = 46\;\;50\;\;29{,}8 \\
\overline{3} &= 136\;\;41\;\;00{,}1\;\; + 2{,}2\;\; = 136\;\;41\;\;02{,}3 \\
\overline{4} &= 119\;\;14\;\;13{,}4\;\; + 2{,}2\;\; = 119\;\;14\;\;15{,}6
\end{aligned}$$

to suma, kā jābūt, ir vienāda ar 360^0.

Pieņemot par neatkarīgiem leņķiem, piem., 1, 2, 3, izlīdzināšanas galīgie rezultati ir

$$\overline{1} = 57^0\,14'\,12{,}3'' \pm 3{,}8''$$
$$\overline{2} = 46\;\;50\;\;29{,}8\;\; \pm 3{,}8$$
$$\overline{3} = 136\;\;41\;\;02{,}3\;\; \pm 3{,}8$$

§ 46. Virzienu paņēmienu izlīdzināšana.

No stacijas izejošo staru savstarpējo orientējumu bieži nosaka ar atbilstošiem „virzieniem", t. i. no kāda vairāk vai mazāk patvaļīgi pieņemta „nulles virziena" līdz attiecīgiem stariem skaitītiem horizontaliem leņķiem. Katra tādu leņķu sistema veido t. s. virzienu paņēmienu, kur atsevišķo staru savstarpējo orientējumu noteicošie elementi ir ne tik paši minētie virzieni, cik to starpības, jo tās nosaka atbilstošo staru ieslēgtos horizontalos leņķus. Šīs starpības, saprotams, nemainas, ja virzienu paņēmienu „pagriež", t. i. visus atsevišķos virzienus izmaina par vienu un to pašu, vispārīgi brīvi izvēlamu, „pagrieziena leņķi", resp. ja par šo, ar pretējo zīmi skaitīto leņķi pagriež paņēmiena nulles virzienu.

Pazīstamā kārtā ar leņķu mēramu instrumentu novēroto virzienu paņēmienu parasti pagriež tā, lai nulles virziens atbilstu vienam no novērotiem stariem, t. i. lai attiecīgais virziens būtu vienāds ar nulli. Pie tam, ja novēroti vairāki virzienu paņēmieni, parasti visos paņēmienos par nulles virzienu pieņem vienu un to pašu staru. To dara atsevišķo virzienu paņēmienu ērtākās salīdzināšanas dēļ; bet jāievēro, ka ar nulli vienādam virzienam, salīdzinot ar pārējiem, pēc būtības nav nekādas sevišķas priekšrocības.

Virzienu paņēmiena novērošana, kā zinams, notiek šādā kārtā. Dotā staru kūļa virsotnē centrētā leņķu mēramā instrumenta limbam paliekot pieslēgtam, griežot alidadi uzved tālskati pēc kārtas uz atsevišķos starus noteicošiem skatamiem punktiem, pie kam beidzot, pēc notikušā alidades pilnā apgrieziena, vēl reiz novēro sākumā kā pirmo novēroto skatamo punktu. Apzīmējot s dotos starus noteicošos skatamos punktus ar $P_0, P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{s-1}$, pieņemsim, ka atbilstošie nolasijumi no limba ir $l_0, l_1', l_2', \ldots\ldots, l_{s-1}'$ un l_0', pie kam l_0 un l_0' zīmējas uz sākumā un beigās notikušiem skatamā punkta P_0 novērojumiem. Šiem abiem nolasijumiem teoretiski jābūt vienādiem; bet praktiski viņi var atšķirties par kādu nelielu pretrunu δ. Tāpēc pieņemsim, ka vispārīgi

$$l_0' = l_0 + \delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (526).$$

Tā tad skatamam punktam P_0 atbilstošais novērojums taisīts dubulti, pie kam attiecīgie atsevišķie novērojumi ir l_0 un $(l_0+\delta)$. Pieņemot, ka abi novērojumi notikuši ar vienādu noteiktību, skatamam punktam P_0 atbilstošais izlīdzinātais novērojums ir

$$\bar{l}_0 = \frac{l_0 + l_0'}{2} = l_0 + \frac{\delta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (527);$$

tas kopā ar novērojumiem $l_1', l_2', \ldots\ldots, l_{s-1}'$ veido virzienu paņēmienu

$$\left(l_0 + \frac{\delta}{2}\right), l_1', l_2', \ldots, l_{s-1}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (528).$$

Pagriežot par $-\frac{\delta}{2}$, šis virzienu paņēmiens pāriet veidā

$$l_0, \left(l_1' - \frac{\delta}{2}\right), \left(l_2' - \frac{\delta}{2}\right), \ldots, \left(l_{s-1}' - \frac{\delta}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (529)$$

jeb

$$l_0, l_1, l_2, \ldots\ldots, l_{s-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (530),$$

kur

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = l_1' - \dfrac{\delta}{2} \\ l_2 = l_2' - \dfrac{\delta}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{s-1} = l_{s-1}' - \dfrac{\delta}{2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (531).$$

Tā tad, ievērojot kontrolnovērojumu l_0' resp. atbilstošo pretrunu δ, šī pretruna likvidējama tādā kārtā, ka, atstājot negrozītu novērojumu l_0, katram novērojumam $l_1', l_2', \ldots\ldots, l_{s-1}'$ pieliek izlabojumu $-\frac{\delta}{2}$. Ar šīs izlabošanas rezultatiem tad veidojams notikušiem novērojumiem atbilstošais virzienu paņēmiens (529) jeb (530).

Iztirzāsim vēl jautājumu par svariem. Apzīmējot novērojumu l_0, $l_1', l_2', \ldots\ldots, l_{s-1}'$ un l_0' svarus ar $p_0, p_1', p_2', \ldots\ldots, p_{s-1}'$ un p_0', var pieņemt, ka $p_0 = p_0'$. Tā tad ievērojot (527), paņēmiena (528) sākuma virzienam $(l_0 + \frac{\delta}{2})$ pienākas svars $2p_0$, bet pārējiem virzieniem $l_1', l_2', \ldots\ldots, l_{s-1}'$ ir atbilstošo novērojumu svari $p_1', p_2', \ldots\ldots, p_{s-1}'$. Tie paši svari pa iek arī paņēmiena (530) virzieniem, jo tas ir tas pats, tikai par leņķi $-\frac{\delta}{2}$ pagrieztais virzienu paņēmiens (528).

Praksē parastajā gadijumā, kad visi novērojumi notikuši ar vienādu noteiktību, pieņemot

$$p_0 = p_1' = p_2' = \ldots\ldots = p_{s-1}' = p_0' = p \quad . \quad . \quad . \quad (532).$$

atrodam, ka paņēmiena (530) atsevišķo virzienu svari ir

$$2p,\ p,\ p, \ldots\ldots, p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (533),$$

Attiecībā uz virzienu paņēmiena atvasināšanu no novērojumiem $l_0, l_1', l_2', \ldots\ldots, l_{s-1}'$ un l_0' vēl piezīmējam, ka bieži novērojumu l_0' lieto tikai kontroles, bet nevis izlabošanas nolūkam. Tādā gadijumā minētiem novērojumiem atbilstošais virzienu paņēmiens ir

$$l_0,\ l_1'\ l_2', \ldots\ldots, l_{s-1}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (534),$$

pie kam pats par sevi saprotams, ka visiem atsevišķiem virzieniem, neizņemot arī sākuma virzienu l_0, ir tie paši svari, kā atbilstošiem novērojumiem.

Ja novērots tikai viens vienīgs uz doto staru kūli attiecīgs virzienu paņēmiens, tad ar to pietiek atsevišķo staru ieslēgto horizontalo leņķu noteikšanai, bet nav nekādu lieku novērojumu. Tā tad tādos apstākļos staru kūļa iekšējais orientējums gan nosakams, bet bez kontroles un izlīdzināšanas iespējas.

Parasti dotā staru kūļa iekšējā orientējuma noteikšanai novēro ne tikai vienu, bet vairākus virzienu paņēmienus. Tad ir lieki novērojumi, un tāpēc iespējama izlīdzināšana, kuras rezultatā atrodami novērotiem virzienu paņēmieniem atbilstošie izlīdzinātie virzienu paņēmieni. Tie veidojami, ja izlīdzināšanas kārtā atrasti atsevišķo staru ieslēgtie leņķi, un bez tam vēl atsevišķo virzienu paņēmienu orientējumu noteicošie leņķi, kurus kāds no dotiem stariem ieslēdz ar attiecīgo izlīdzināto virzienu paņēmienu nulles virzieniem.

Lai stacijā novēroti s skatamiem punktiem $P_0, P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{s-1}$ atbilstošie n virzienu paņēmieni

$$\left.\begin{array}{llll}
{}_1l_0,\ {}_1l_1,\ {}_1l_2,\ \ldots,\ {}_1l_{s-1} & \text{ar svariem} & {}_1p_0,\ {}_1p_1,\ {}_1p_2,\ \ldots,\ {}_1p_{s-1} \\
{}_2l_0,\ {}_2l_1,\ {}_2l_2,\ \ldots,\ {}_2l_{s-1} & \text{„} \quad \text{„} & {}_2p_0,\ {}_2p_1,\ {}_2p_2,\ \ldots,\ {}_2p_{s-1} \\
{}_3l_0,\ {}_3l_1,\ {}_3l_2,\ \ldots,\ {}_3l_{s-1} & \text{„} \quad \text{„} & {}_3p_0,\ {}_3p_1,\ {}_3p_2,\ \ldots,\ {}_3p_{s-1} \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
{}_nl_0,\ {}_nl_1,\ {}_nl_2,\ \ldots,\ {}_nl_{s-1} & \text{„} \quad \text{„} & {}_np_0,\ {}_np_1,\ {}_np_2,\ \ldots\ {}_np_{s-1}
\end{array}\right\} (535).$$

Kā dotā staru kūļa iekšējo orientējumu noteicošos neatkarīgos leņķus pieņemsim tos, kurus punktam P_0 atbilstošais stars ieslēdz ar visiem pārējiem stariem, un apzīmēsim šos leņķus ar $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{s-1}$. Bez tam pieņemsim, ka no atsevišķo izlīdzināto virzienu paņēmienu nulles virzieniem līdz punktam P_0 atbilstošam staram skaitītie leņķi ir $t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots, t_n$. Ar šiem leņķiem veidotie novērotiem virzienu paņēmieniem atbilstošie izlīdzinātie virzienu paņēmieni ir

$$\left.\begin{array}{l}
t_1,\ (t_1+x_1),\ (t_1+x_2),\ \ldots,\ (t_1+x_{s-1}) \\
t_2,\ (t_2+x_1),\ (t_2+x_2),\ \ldots,\ (t_2+x_{s-1}) \\
t_3,\ (t_3+x_1),\ (t_3+x_2),\ \ldots,\ (t_3+x_{s-1}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t_n,\ (t_n+x_1),\ (t_n+x_2),\ \ldots,\ (t_n+x_{s-1})
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (536).$$

No otras puses, apzīmējot novērojumu l izlabojumus ar atbilstošiem v, tos pašus izlīdzinātos virzienu paņēmienus var izteikt arī šādā veidā:

$$\left.\begin{array}{l}
({}_1l_0+{}_1v_0),\ ({}_1l_1+{}_1v_1),\ ({}_1l_2+{}_1v_2),\ \ldots,\ ({}_1l_{s-1}+{}_1v_{s-1}) \\
({}_2l_0+{}_2v_0),\ ({}_2l_1+{}_2v_1),\ ({}_2l_2+{}_2v_2),\ \ldots,\ ({}_2l_{s-1}+{}_2v_{s-1}) \\
({}_3l_0+{}_3v_0),\ ({}_3l_1+{}_3v_1),\ ({}_3l_2+{}_3v_2),\ \ldots,\ ({}_3l_{s-1}+{}_3v_{s-1}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
({}_nl_0+{}_nv_0),\ ({}_nl_1+{}_nv_1),\ ({}_nl_2+{}_nv_2),\ \ldots,\ ({}_nl_{s-1}+{}_nv_{s-1})
\end{array}\right\} (537).$$

Salīdzinot sistemas (536) un (537), redzam, ka katru izlīdzinātu novērojumu $(l+v)$ var izteikt kā argumentu t un x funkciju. Tā tad izmērītos virzienus l var uzskatīt par netiešiem novērojumiem, kas zīmējas uz nezinamo $t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots, t_n$ un $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{s-1}$ funkcijām. Ievērojot to, veidojam pa atsevišķiem virzienu paņēmieniem šādus kļūdu nolīdzinājumus:

$$\begin{array}{llll}
1.\ \text{paņēmiens:} & t_1 & -\,{}_1l_0 & = {}_1v_0 \\
& t_1+x_1 & -\,{}_1l_1 & = {}_1v_1 \\
& t_1 \qquad +x_2 & -\,{}_1l_2 & = {}_1v_2 \\
& \ldots\ldots\ldots & &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{llll}
 & t_1 + x_{s-1} & - {}_1l_{s-1} & = {}_1v_{s-1} \\
\text{2. paņēmiens:} & t_2 & - {}_2l_0 & = {}_2v_0 \\
 & t_2 + x_1 & - {}_2l_1 & = {}_2v_1 \\
 & t_2 + x_2 & - {}_2l_2 & = {}_2v_2 \\
 & \dots\dots\dots\dots & & \dots \\
 & t_2 + x_{s-1} & - {}_2l_{s-1} & = {}_2v_{s-1} \\
\text{3. paņēmiens:} & t_3 & - {}_3l_0 & = {}_3v_0 \\
 & t_3 + x_1 & - {}_3l_1 & = {}_3v_1 \\
 & t_3 + x_2 & - {}_3l_2 & = {}_3v_2 \\
 & \dots\dots\dots\dots & & \dots \\
 & t_3 + x_{s-1} & - {}_3l_{s-1} & = {}_3v_{s-1} \\
\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \dots \\
\text{n. paņēmiens:} & t_n & - {}_nl_0 & = {}_nv_0 \\
 & t_n + x_1 & - {}_nl_1 & = {}_nv_1 \\
 & t_n + x_2 & - {}_nl_2 & = {}_nv_2 \\
 & \dots\dots\dots\dots & & \dots \\
 & t_n + x_{s-1} & - {}_nl_{s-1} & = {}_nv_{s-1}
\end{array}\right\} \quad (538).$$

Pieņemot nezinamo t un x tuvinās vērtības (t) un (x) un atbilstošos pieaugumus τ un ξ, atvietojam nezinamos ar izteiksmēm

$$\left.\begin{array}{ll}
t_1 = (t_1) + \tau_1 & x_1 = (x_1) + \xi_1 \\
t_2 = (t_2) + \tau_2 & x_2 = (x_2) + \xi_2 \\
t_3 = (t_3) + \tau_3 & \dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots & x_{s-1} = (x_{s-1}) + \xi_{s-1} \\
t_n = (t_n) + \tau_n &
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (539).$$

Tādā kārtā rodas pārvērstie kļūdu nolīdzinājumi ar nezinamiem τ un ξ un brīviem locekļiem $-\lambda$:

$$\begin{array}{lllll}
\text{1. paņēmiens:} & \tau_1 & - {}_1\lambda_0 & = {}_1v_0 & \text{ar svaru } {}_1p_0 \\
 & \tau_1 + \xi_1 & - {}_1\lambda_1 & = {}_1v_1 & \text{„ „ } {}_1p_1 \\
 & \tau_1 + \xi_2 & - {}_1\lambda_2 & = {}_1v_2 & \text{„ „ } {}_1p_2 \\
 & \dots\dots\dots\dots & & & \dots
\end{array}$$

$$
\left.
\begin{array}{llll}
 & \tau_1 + \xi_{s-1} - {}_1\lambda_{s-1} = {}_1v_{s-1} & \text{ar svaru} & {}_1p_{s-1} \\
\text{2. paņēmiens:} & \tau_2 - {}_2\lambda_0 = {}_2v_0 & \text{"} \quad \text{"} & {}_2p_0 \\
 & \tau_2 + \xi_1 - {}_2\lambda_1 = {}_2v_1 & \text{"} \quad \text{"} & {}_2p_1 \\
 & \tau_2 + \xi_2 - {}_2\lambda_2 = {}_2v_2 & \text{"} \quad \text{"} & {}_2p_2 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
 & \tau_2 + \xi_{s-1} - {}_2\lambda_{s-1} = {}_2v_{s-1} & \text{"} \quad \text{"} & {}_2p_{s-1} \\
\text{3. paņēmiens:} & \tau_3 - {}_3\lambda_0 = {}_3v_0 & \text{"} \quad \text{"} & {}_3p_0 \\
 & \tau_3 + \xi_1 - {}_3\lambda_1 = {}_3v_1 & \text{"} \quad \text{"} & {}_3p_1 \\
 & \tau_3 + \xi_2 - {}_3\lambda_2 = {}_3v_2 & \text{"} \quad \text{"} & {}_3p_2 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
 & \tau_3 + \xi_{s-1} - {}_3\lambda_{s-1} = {}_3v_{s-1} & \text{"} \quad \text{"} & {}_3p_{s-1} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
\text{n. paņēmiens:} & \tau_n - {}_n\lambda_0 = {}_nv_0 & \text{"} \quad \text{"} & {}_np_0 \\
 & \tau_n + \xi_1 - {}_n\lambda_1 = {}_nv_1 & \text{"} \quad \text{"} & {}_np_1 \\
 & \tau_n + \xi_2 - {}_n\lambda_2 = {}_nv_2 & \text{"} \quad \text{"} & {}_np_2 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
 & \tau_n + \xi_{s-1} - {}_n\lambda_{s-1} = {}_nv_{s-1} & \text{"} \quad \text{"} & {}_np_{s-1}
\end{array}
\right\} \quad (540).
$$

Kā redzams, katrs τ - tipa nezinamais ieiet tikai vienam virzienu paņēmienam atbilstošā nolīdzinājumu grupā, neatkārtojoties pārējās grupās. Bez tam visiem τ - tipa nezinamiem ir koeficients 1.

Tādos apstākļos „vietējie" nezinamie τ viegli izslēdzami no kļūdu nolīdzinājumiem, piem., pēc Schreiber'a paņēmiena. Tam nolūkam pa kļūdu nolīdzinājumu (540) atsevišķām grupām veidojam tos normalnolīdzinājumus, kur τ - tipa nezinamiem ir „kvadratiska" veida koeficienti. Ievērojot atsevišķiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošo novērojumu svarus, šie normalnolīdzinājumi ir:

$$
\left.
\begin{array}{l}
[{}_1p]\tau_1 + {}_1p_1\xi_1 + {}_1p_2\xi_2 + \ldots + {}_1p_{s-1}\xi_{s-1} - [{}_1p_1\lambda] = 0 \\
[{}_2p]\tau_2 + {}_2p_1\xi_1 + {}_2p_2\xi_2 + \ldots + {}_2p_{s-1}\xi_{s-1} - [{}_2p_2\lambda] = 0 \\
[{}_3p]\tau_3 + {}_3p_1\xi_1 + {}_3p_2\xi_2 + \ldots + {}_3p_{s-1}\xi_{s-1} - [{}_3p_3\lambda] = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[{}_np]\tau_n + {}_np_1\xi_1 + {}_np_2\xi_2 + \ldots + {}_np_{s-1}\xi_{s-1} - [{}_np_n\lambda] = 0
\end{array}
\right\} \quad (541).
$$

Lietojot tos, veidojam sistemai (540) atbilstošos Schreiber'a fiktivos kļūdu nolīdzinājumus:

$$
\left.
\begin{array}{lrll}
\text{1. paņēmiens:} & & & \\
 & -{}_1\lambda_0 = {}_1v_0' & \text{ar svaru} & {}_1p_0 \\
\xi_1 & -{}_1\lambda_1 = {}_1v_1' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_1p_1 \\
\quad\quad \xi_2 & -{}_1\lambda_2 = {}_1v_2' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_1p_2 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \\
\xi_{s-1} & -{}_1\lambda_{s-1} = {}_1v_{s-1}' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_1p_{s-1} \\
{}_1p_1\xi_1 + {}_1p_2\xi_2 + \dots + {}_1p_{s-1}\xi_{s-1} & -[{}_1p_1\lambda] = {}_1v_a' & \text{,,} \quad \text{,,} & -\frac{1}{[{}_1p]} \\
\text{2. paņēmiens:} & & & \\
 & -{}_2\lambda_0 = {}_2v_0' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_2p_0 \\
\xi_1 & -{}_2\lambda_1 = {}_2v_1' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_2p_1 \\
\quad\quad \xi_2 & -{}_2\lambda_2 = {}_2v_2' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_2p_2 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \\
\xi_{s-1} & -{}_2\lambda_{s-1} = {}_2v_{s-1}' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_2p_{s-1} \\
{}_2p_1\xi_1 + {}_2p_2\xi_2 + \dots + {}_2p_{s-1}\xi_{s-1} & -[{}_2p_2\lambda] = {}_2v_a' & \text{,,} \quad \text{,,} & -\frac{1}{[{}_2p]} \\
\text{3. paņēmiens:} & & & \\
 & -{}_3\lambda_0 = {}_3v_0' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_3p_0 \\
\xi_1 & -{}_3\lambda_1 = {}_3v_1' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_3p_1 \\
\quad\quad \xi_2 & -{}_3\lambda_2 = {}_3v_2' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_3p_2 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \\
\xi_{s-1} & -{}_3\lambda_{s-1} = {}_3v_{s-1}' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_3p_{s-1} \\
{}_3p_1\xi_1 + {}_3p_2\xi_2 + \dots + {}_3p_{s-1}\xi_{s-1} & -[{}_3p_3\lambda] = {}_3v_a' & \text{,,} \quad \text{,,} & -\frac{1}{[{}_3p]} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \\
\text{n. paņēmiens:} & & & \\
 & -{}_n\lambda_0 = {}_nv_0' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_np_0 \\
\xi_1 & -{}_n\lambda_1 = {}_nv_1' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_np_1 \\
\quad\quad \xi_2 & -{}_n\lambda_2 = {}_nv_2' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_np_2 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots \\
\xi_{s-1} & -{}_n\lambda_{s-1} = {}_nv_{s-1}' & \text{,,} \quad \text{,,} & {}_np_{s-1} \\
{}_np_1\xi_1 + {}_np_2\xi_2 + \dots + {}_np_{s-1}\xi_{s-1} & -[{}_np_n\lambda] = {}_nv_a' & \text{,,} \quad \text{,,} & -\frac{1}{[{}_np]}
\end{array}
\right\} \quad (542).
$$

Atbilstošie vispārējie normalnolīdzinājumi ir:

$$\left.\begin{array}{l}
\{[{}_ip_1[{}_ip]] - [{}_ip_1{}_ip_1]\}\xi_1 \qquad - [{}_ip_1{}_ip_2]\xi_2 - \ldots - \\
\qquad - [{}_ip_1{}_ip_{s-1}]\xi_{s-1} \qquad - [{}_ip_1[{}_ip]{}_i\lambda_1] + [{}_ip_1[{}_ip_i\lambda]] = 0 \\
\qquad - [{}_ip_1{}_ip_2]\xi_i \quad + \{[{}_ip_2[{}_ip]] - [{}_ip_2{}_ip_2]\}\xi_2 - \ldots - \\
\qquad - [{}_ip_2{}_ip_{s-1}]\xi_{s-1} \qquad - [{}_ip_2[{}_ip]{}_i\lambda_2] + [{}_ip_2[{}_ip_i\lambda]] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad - [{}_ip_1{}_ip_{s-1}]\xi_1 \qquad - [{}_ip_2{}_ip_{s-1}]\xi_2 - \ldots + \\
+ \{[{}_ip_{s-1}[{}_ip]] - [{}_ip_{s-1}{}_ip_{s-1}]\}\xi_{s-1} \qquad - [{}_ip_{s-1}[{}_ip]{}_i\lambda_{s-1}] + [{}_ip_{s-1}[{}_ip_i\lambda]] = 0
\end{array}\right\} \quad (543),$$

pie kam kreisais indekss i nozīmē, ka attiecīgie svari p resp. brīvie locekļi — λ zīmējas uz vienu un to pašu virzienu paņēmienu.

Atslēdzot šo normalnolīdzinājumu sistemu, atrodam nezinamos ξ_1, $\xi_2, \ldots\ldots, \xi_{s-1}$, un ieliekot tos normalnolīdzinājumos (541), nosakam arī pārējos nezinamos τ_1, τ_2, $\tau_3, \ldots\ldots, \tau_n$. Tad pēc formulām (539) aprēķinam leņķus t_1, t_2, $t_3, \ldots\ldots, t_n$ un x_1, $x_2, \ldots\ldots, x_{s-1}$, un ar tiem veidojam izlīdzinātos virzienu paņēmienus (536). Salīdzinot tos pa atbilstošiem virzieniem ar novērotiem virzienu paņēmieniem, resp. ieliekot nezinamo atrastās vērtības kļūdu nolīdzinājumos (538), nosakam atsevišķo novēroto virzienu izlabojumus v un aprēķinam svara vienības vidējās kļūdas noteikšanai vajadzīgo sumu [pvv].

Attiecībā uz svara vienības vidējās kļūdas noteikšanu piezīmējam, ka izlīdzināšanas rēķina nezinamo t un x kopskaits ir $n + (s - 1)$. Tā tad, apzīmējot visos paņēmienos novēroto virzienu kopskaitu ar N, lieko novērojumu skaits ir

$$N - n - s + 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (544),$$

un svara vienības vidējā kļūda nosakama pēc formulas

$$m = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{N - n - s + 1}} \quad \ldots\ldots \quad (545).$$

Ar dotiem resp. apstākļiem atbilstošā veidā atrastiem novēroto un izlīdzināto virzienu svariem, beidzot, nosakamas arī šo virzienu vidējās kļūdas.

Minēto aprēķinu sīkumi atkarājas no apstākļiem, — starp citu, no novēroto virzienu paņēmienu veida. Kā jau minēts, virzienu paņēmieni var būt „pilnīgi“ vai „nepilnīgi“, skatoties pēc tā, vai atsevišķiem stariem atbilstošie virzieni atkārtojas bez izņēmuma visos, vai tikai dažos atsevišķos paņēmienos.

Kas zīmējas uz novēroto virzienu svariem, tad praksē par normalo uzskatamā gadijumā katrā atsevišķā paņēmienā visiem novērojumiem ir vienāds svars, eventuali izņemot to virzienu, kurš atrasts no dubultnovērojuma. Arī vienas sistemas dažādos paņēmienos svari mēdz būt vienādi; tomēr tie var gadīties arī dažādi, piem., ja atsevišķie virzienu paņēmieni novēroti ar dažādiem instrumentiem, vai atsevišķie paņēmieni savukārt ir vairāku novērotu virzienu paņēmienu izlīdzināšanas rezultati.

Sistemas (535) — (543) zīmējas uz pilnīgiem virzienu paņēmieniem, pie tam uz vispārīgāko gadijumu, kad visiem atsevišķiem novērotiem virzieniem ir dažādi svari. Nepilnīgu virzienu paņēmienu gadijumā, dažiem virzienu novērojumiem trūkstot, veidojamas tās pašas minētās sistemas, tikai ar atbilstošiem izlaidumiem resp. grozijumiem.

§ 47. Pilnīgu virzienu paņēmienu gadijums.

Apskatīsim tagad sīkāki pilnīgu virzienu paņēmienu izlīdzināšanu praksē parastajos apstākļos, kad visi novērojumi notikuši ar vienādu noteiktību. Tad sistemas (535) visos atsevišķos paņēmienos novērotiem virzieniem l_1, l_2, ..., l_{s-1} var piešķirt vienādu svaru 1. Kas zīmējas uz virzieniem l_0, tad ievērojot iepriekšējā paragrafā dotos attiecīgos aizrādijumus, tiem piešķirams svars 2 vai 1 atkarībā no tā, vai atvasinot virzienu paņēmienus no atbilstošiem novērojumiem, novērojumi l_0' lietoti izlīdzināšanas vai tikai kontroles nolūkam.

Atrisinot virzienu paņēmienu (535) izlīdzināšanas uzdevumu pirmā minētā variantā, pieņemsim šādus novēroto virzienu svarus:

$$\left.\begin{array}{l}
{}_1p_0 = {}_2p_0 = {}_3p_0 = \ldots\ldots = {}_np_0 = 2 \\
{}_1p_1 = {}_2p_1 = {}_3p_1 = \ldots\ldots = {}_np_1 = 1 \\
{}_1p_2 = {}_2p_2 = {}_3p_2 = \ldots\ldots = {}_np_2 = 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
{}_1p_{s-1} = {}_2p_{s-1} = {}_3p_{s-1} = \ldots\ldots = {}_np_{s-1} = 1
\end{array}\right\} \quad . \; . \; (546).$$

Tad normalnolīdzinājumu sistemas (541) un (543) pāriet šādā veidā:

$$\left.\begin{array}{l}
(s+1)\tau_1 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{s-1} - \{[{}_1\lambda] + {}_1\lambda_0\} = 0 \\
(s+1)\tau_2 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{s-1} - \{[{}_2\lambda] + {}_2\lambda_0\} = 0 \\
(s+1)\tau_3 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{s-1} - \{[{}_3\lambda] + {}_3\lambda_0\} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(s+1)\tau_n + \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{s-1} - \{[{}_n\lambda] + {}_n\lambda_0\} = 0
\end{array}\right\} \quad (547)$$

un

$$\left.\begin{array}{l} n(s+1)\xi_1 - n\xi_1 - n\xi_2 - \ldots - n\xi_{s-1} - (s+1)[\lambda_1] + \\ \qquad\qquad + \{[\lambda] + [\lambda_0]\} = 0 \\ n(s+1)\xi_2 - n\xi_1 - n\xi_2 - \ldots - n\xi_{s-1} - (s+1)[\lambda_2] + \\ \qquad\qquad + \{[\lambda] + [\lambda_0]\} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n(s+1)\xi_{s-1} - n\xi_1 - n\xi_2 - \ldots - n\xi_{s-1} - (s+1)[\lambda_{s-1}] + \\ \qquad\qquad + \{[\lambda] + [\lambda_0]\} = 0 \end{array}\right\} \quad (548).$$

Ievērojot, ka sistemas (548) atsevišķiem nolīdzinājumiem visiem ir kopīgā locekļu grupa

$$-n\xi_1 - n\xi_2 - \ldots - n\xi_{s-1} + \{[\lambda] + [\lambda_0]\} \quad . \quad . \quad . \quad (549),$$

šī sistema viegli atslēdzama. Atslēgšanas rezultati ir

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 = \dfrac{[\lambda_1]}{n} - \dfrac{[\lambda_0]}{n} \\ \xi_2 = \dfrac{[\lambda_2]}{n} - \dfrac{[\lambda_0]}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{s-1} = \dfrac{[\lambda_{s-1}]}{n} - \dfrac{[\lambda_0]}{n} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (550).$$

Ieliekot tos normalnolīdzinājumos (547), atrodam

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1 = \dfrac{[_1\lambda]}{s+1} - \dfrac{[\lambda]}{n(s+1)} + \dfrac{s[\lambda_0] + n\,_1\lambda_0}{n(s+1)} \\ \tau_2 = \dfrac{[_2\lambda]}{s+1} - \dfrac{[\lambda]}{n(s+1)} + \dfrac{s[\lambda_0] + n\,_2\lambda_0}{n(s+1)} \\ \tau_3 = \dfrac{[_3\lambda]}{s+1} - \dfrac{[\lambda]}{n(s+1)} + \dfrac{s[\lambda_0] + n\,_3\lambda_0}{n(s+1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_n = \dfrac{[_n\lambda]}{s+1} - \dfrac{[\lambda]}{n(s+1)} + \dfrac{s[\lambda_0] + n\,_n\lambda_0}{n(s+1)} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (551).$$

Otrā variantā, pieņemot visus svarus p vienādus ar 1, pēc vispārējā parauga (541) uu (543) veidotās normalnolīdzinājumu sistemas ir

$$\left.\begin{array}{l} s\tau_1 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{s-1} - [{}_1\lambda] = 0 \\ s\tau_2 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{s-1} - [{}_2\lambda] = 0 \\ s\tau_3 + \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{s-1} - [{}_3\lambda] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s\tau_n + \xi_1 + \xi_2 + \ldots\ldots + \xi_{s-1} - [{}_n\lambda] = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (552)$$

un

$$\left.\begin{array}{l} ns\xi_1 \;\; - n\xi_1 - n\xi_2 - \ldots - n\xi_{s-1} - s[\lambda_1] \;\; + [\lambda] = 0 \\ ns\xi_2 \;\; - n\xi_1 - n\xi_2 - \ldots - n\xi_{s-1} - s[\lambda_2] \;\; + [\lambda] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ns\xi_{s-1} - n\xi_1 - n\xi_2 - \ldots - n\xi_{s-1} - s[\lambda_{s-1}] + [\lambda] = 0 \end{array}\right\} \quad (553).$$

Atslēdzot sistemu (553), atrodam

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 \;\; = \dfrac{[\lambda_1]}{n} - \dfrac{[\lambda_0]}{n} \\ \xi_2 \;\; = \dfrac{[\lambda_2]}{n} - \dfrac{[\lambda_0]}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{s-1} = \dfrac{[\lambda_{s-1}]}{n} - \dfrac{[\lambda_0]}{n} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (554),$$

un ieliekot šīs izteiksmes normalnolīdzinājumos (552), no tiem nosakam

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1 = \dfrac{[{}_1\lambda]}{s} - \dfrac{[\lambda]}{ns} + \dfrac{[\lambda_0]}{n} \\ \tau_2 = \dfrac{[{}_2\lambda]}{s} - \dfrac{[\lambda]}{ns} + \dfrac{[\lambda_0]}{n} \\ \tau_3 = \dfrac{[{}_3\lambda]}{s} - \dfrac{[\lambda]}{ns} + \dfrac{[\lambda_0]}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_n = \dfrac{[{}_n\lambda]}{s} - \dfrac{[\lambda]}{ns} + \dfrac{[\lambda_0]}{n} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (555).$$

Kā redzams, abos variantos izlīdzinātos leņķus ξ noteicošās formulas (550) un (554) ir vienādas.

Ar atrastiem leņķiem τ un ξ resp. atbilstošiem t un x izlīdzinātie virzienu paņēmieni (536) veidojami tādā orientējumā, uz kuru jāattiecina vidējo kļūdu aprēķinam vajadzīgie izlabojumi v. Savā starpā šie izlīdzinātie virzienu paņēmieni atšķiras tikai ar savu orientējumu resp. to noteicošiem nulles virzieniem. Bet atbilstošo virzienu starpību ziņā visi izlīdzinātie virzienu paņēmieni ir identiski. Tā tad uzskatot izlīdzinātos virzienu paņēmienus tikai par staru kūļa iekšējo orientējumu noteicošām sistemām, izlīdzināšanas rezultats ir viens vienīgais izlīdzinātais virzienu paņēmiens. Tas, kā katrs virzienu paņēmiens, pagriežams par patvaļīgi izvēlētu leņķi, nemainot ar to savu nozīmi.

Ievērojot to, parādīsim, kādā veidā izlīdzinātais virzienu paņēmiens atvasinams tieši no novērotiem virzienu paņēmieniem.

Pagriežot atsevišķos paņēmienus tā, lai vienam un tam pašam staram atbilstošie virzieni visos paņēmienos būtu apmēram vienādi, pieņemam virzienu tuvinās vērtības

$$(l_0),\ (l_1),\ (l_2), \ldots\ldots, (l_{s-1}) \quad \ldots\ldots \quad (556).$$

Tad katrs atsevišķais novērotais virzienu paņēmiens ${}_i l_0$, ${}_i l_1$, ${}_i l_2, \ldots\ldots$, ${}_i l_{s-1}$ pārveidojams pēc parauga

$$\begin{aligned} &{}_i l_0,\ {}_i l_1,\ {}_i l_2,\ \ldots\ldots,\ {}_i l_{s-i} = \\ &= (l_0) + {}_i\lambda_0,\ (l_1) + {}_i\lambda_1,\ (l_2) + {}_i\lambda_2,\ \ldots\ldots,\ (l_{s-1}) + {}_i\lambda_{s-1} \quad \ldots \quad (557). \end{aligned}$$

Bez tam pieņemam

$$\left.\begin{aligned} (x_1) &= (l_1) - (l_0) \\ (x_2) &= (l_2) - (l_0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_{s-1}) &= (l_{s-1}) - (l_0) \\ (t_0) = (t_1) = (t_2) = \ldots\ldots &= (t_n) = (l_0) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (558).$$

Tad viegli pierādams, ka izteiksmes (557) pieaugumi λ identiski ar kļūdu nolīdzinājumu (540) atbilstošās grupas brīviem locekļiem.

Tālāk, ar izlīdzinātiem leņķiem x veidoto izlīdzināto virzienu paņēmienu iedomājamies pagrieztu tā, lai skatamam punktam P_0 atbilstošais virziens būtu 0. Tad, ievērojot (539), (557) un (550) resp. (554), šis izlīdzinātais virzienu paņēmiens ir

$$\begin{aligned} &0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_{s-1} = \\ &= 0,\ (x_1) + \xi_1,\ (x_2) + \xi_2,\ \ldots\ldots,\ (x_{s-1}) + \xi_{s-1} = \end{aligned}$$

$$= 0, \left\{(1_1) - (1_0) + \frac{[\lambda_1]}{n} - \frac{[\lambda_0]}{n}\right\}, \left\{(1_2) - (1_0) + \frac{[\lambda_2]}{n} - \frac{[\lambda_0]}{n}\right\}, \ldots$$

$$\ldots, \left\{(1_{s-1}) - (1_0) + \frac{[\lambda_{s-1}]}{n} - \frac{[\lambda_0]}{n}\right\} \quad (559),$$

un, pagriezts par leņķi $\left\{(1_0) + \frac{[\lambda_0]}{n}\right\}$:

$$(1_0) + \frac{[\lambda_0]}{n}, (1_1) + \frac{[\lambda_1]}{n}, (1_2) + \frac{[\lambda_2]}{n}, \ldots., (1_{s-1}) + \frac{[\lambda_{s-1}]}{n} \quad . \quad . \quad (560).$$

Tā tad atsevišķie izlīdzinātie virzieni ir

$$\left.\begin{array}{l} \overline{1}_0 \;\; = (1_0) \;\; + \frac{[\lambda_0]}{n} \\ \overline{1}_1 \;\; = (1_1) \;\; + \frac{[\lambda_1]}{n} \\ \overline{1}_2 \;\; = (1_2) \;\; + \frac{[\lambda_2]}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{1}_{s-1} = (1_{s-1}) + \frac{[\lambda_{s-1}]}{n} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (561).$$

Lai nosacītu izlabojumus v, katrs novērotais virzienu paņēmiens pa atsevišķiem virzieniem jāsalīdzina ar atbilstošo izlīdzināto virzienu paņēmienu. Ja tas notiek lietojot novērotos paņēmienus oriģinalveidā (535), tad izlīdzinātiem paņēmieniem jābūt orientētiem pēc sistemas (536) parauga. Tad izlabojumi v nosakami tā, kā to rāda kļūdu nolīdzinājumi (538).

Bet var arī lietot izlīdzināto virzienu paņēmienu katrreiz vienā un tanī pašā orientējumā, piem. (560) veidā. Tādā gadijumā, lai atrastu ar kļūdu nolīdzinājumiem (538) noteiktos izlabojumus, atbilstoši jāpagriež atsevišķie novērotie virzienu paņēmieni.

Lai, piem., kādam i - tam novērotam virzienu paņēmienam (557) atbilstošais izlīdzinātais virzienu paņēmiens ir

$$t_i, (t_i + x_1), (t_i + x_2), \ldots.., (t_i + x_{s-1}) \quad . \quad . \quad . \quad (562).$$

Paņēmienu (557) un (562) korrespondējošo virzienu starpības, t. i. paņēmiena (557) atsevišķo virzienu izlabojumi, negrozas, ja abus paņēmienus pagriež par vienu un to pašu leņķi ω_i. Tad paņēmieni (557) un (562) pāriet šādā veidā:

$$\left.\begin{array}{l} ({}_i l_0 + \omega_i),\ ({}_i l_1 + \omega_i),\quad ({}_i l_2 + \omega_i),\quad \ldots\ldots,\quad ({}_i l_{s-1} + \omega_i) \\ \text{un} \\ (t_i + \omega_i),\quad (t_i + \omega_i + x_1),\ (t_i + \omega_i + x_2),\ \ldots\ldots,\ (t_i + \omega_i + x_{s-1}) \end{array}\right\} \quad (563).$$

Pagrieziena leņķi ω_i izvēlamies tā, lai būtu

$$t_i + \omega_i = (l_0) + \frac{[\lambda_0]}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (564),$$

t. i. lai dabūtu izlīdzināto virzienu paņēmienu orientējumā (560).

Ievērojot (539) un (558), nolīdzinājumu (564) rakstam veidā

$$\begin{aligned} t_i + \omega_i &= (t_i) + \tau_i + \omega_i = \\ &= (l_0) + \tau_i + \omega_i = (l_0) + \frac{[\lambda_0]}{n} \quad \ldots\ldots \quad (565). \end{aligned}$$

Tad atrodam

$$\omega_i = \frac{[\lambda_0]}{n} - \tau_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (566),$$

pie kam, pēc parauga (551) resp. (555),

$$\tau_i = \frac{[{}_i\lambda]}{s+1} - \frac{[\lambda]}{n(s+1)} + \frac{s[\lambda_0] + n\,{}_i\lambda_0}{n(s+1)} \quad \ldots\ldots \quad (567)$$

resp.

$$\tau_i = \frac{[{}_i\lambda]}{s} - \frac{[\lambda]}{ns} + \frac{[\lambda_0]}{n} \quad \ldots\ldots \quad (568).$$

Ieliekot izteiksmi (567) resp. (568) formulā (566), atrodam

$$\omega_i = \frac{[\lambda] + [\lambda_0]}{n(s+1)} - \frac{[{}_i\lambda] + {}_i\lambda_0}{s+1} \quad \ldots\ldots \quad (569)$$

resp.

$$\omega_i = \frac{[\lambda]}{ns} - \frac{[{}_i\lambda]}{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (570).$$

Uz šī iztirzājuma pamata pilnīgu virzienu paņēmienu izlīdzināšana izdarama šādā kārtā.

Orientējot novērotos virzienu paņēmienus tā, lai sākuma staram atbilstošais virziens l_0 būtu visos paņēmienos vienāds, un pieņemot virzienu tuvinās vērtības (l_0), (l_1), (l_2), ..., (l_{s-1}), visus paņēmienus veido pēc parauga (557). Tad veido:

„virzienu vidējos"

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{[\lambda_0]}{n} \\ A_1 &= \frac{[\lambda_1]}{n} \\ A_2 &= \frac{[\lambda_2]}{n} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A_{s-1} &= \frac{[\lambda_{s-1}]}{n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (571),$$

„paņēmienu vidējos"

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{[{}_1\lambda] + {}_1\lambda_0}{s+1} & \text{resp.} \quad B_1 &= \frac{[{}_1\lambda]}{s} \\ B_2 &= \frac{[{}_2\lambda] + {}_2\lambda_0}{s+1} & B_2 &= \frac{[{}_2\lambda]}{s} \\ B_3 &= \frac{[{}_3\lambda] + {}_3\lambda_0}{s+1} & B_3 &= \frac{[{}_3\lambda]}{s} \\ &\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ B_n &= \frac{[{}_n\lambda] + {}_n\lambda_0}{s+1} & B_n &= \frac{[{}_n\lambda]}{s} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (572),$$

un

„vispārējo vidējo"

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{[\lambda] + [\lambda_0]}{n(s+1)} \\ \text{resp.} \quad C &= \frac{[\lambda]}{ns} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (573).$$

Kontroles nolūkā ieteicams „vispārējo vidējo" C aprēķināt divējādi: vienu reizi — izejot tieši no pašiem λ, otro reizi — lietojot „paņēmienu vidējos" B.

Ar pieņemtām virzienu tuvinām vērtībām un atrastiem „virzienu vidējiem" A pēc formulām (561) nosakami atsevišķie izlīdzinātie virzieni un ar tiem veidojams izlīdzinātais virzienu paņēmiens (560).

Lai atrastu novēroto virzienu izlabojumus v, ar apstākļiem atbilstošā veidā aprēķinātiem elementiem B un C nosaka atsevišķo paņēmienu pagrieziena leņķus

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= C - B_1 \\ \omega_2 &= C - B_2 \\ \omega_3 &= C - B_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \omega_n &= C - B_n \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (574),$$

un par tiem pagriež attiecīgos novērotos virzienu paņēmienus. Pagrieztos novērotos virzienu paņēmienus pa korrespondējošiem virzieniem salīdzinot ar izlīdzināto virzienu paņēmienu, nosaka visus izlabojumus v un veido sumu [pvv] resp. [vv].

Novērojumu kopskaits pilnīgu virzienu paņēmienu gadījumā ir $N = ns$; tā tad lieko novērojumu ir

$$N - n - s + 1 = ns - n - s + 1 = (n-1)(s-1) \quad . \quad . \quad (575)$$

Tāpēc svara vienības vidējo kļūdu noteicošā formula (545) rakstama

$$\left.\begin{aligned} m &= \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{(n-1)(s-1)}} \\ \text{resp.} \qquad & \\ m &= \pm\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)(s-1)}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (576).$$

Tādos apstākļos, kad piešķirot novērotiem virzieniem $l_1, l_2, \dots, l_{s-1}$ svaru 1, no dubultnovērojumiem atrastiem sākuma virzieniem l_0 atbilstošais svars ir 2, pēc pirmās formulas (576) nosacītā svara vienības vidējā kļūda m ir identiska ar novēroto virzienu $l_1, l_2, \dots, l_{s-1}$ vidējo kļūdu; bet sākuma virziena l_0 vidējā kļūda ir

$$m_0 = \pm\frac{m}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{2(n-1)(s-1)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (577).$$

Gadijumā, kad visi virzieni novēroti ar vienādu noteiktību, pēc otrās formulas (576) atrastā vidējā kļūda m zīmējas uz visiem, bez izņēmuma, novērotiem virzieniem.

Attiecībā uz izlīdzināto virzienu vidējo kļūdu noteikšanu piezīmējam sekojošo. Izteiksmēs (561) pirmie locekļi ir noteiktības ziņā neitralās novēroto virzienu tuvinās vērtības, bet otrie locekļi — aritmetiskie vidējie no n elementiem λ, kuriem ir tās pašas vidējās kļūdas, kā atbilstošiem novērojumiem l. Tā tad ar minētām formulām noteikto izlīdzināto novērojumu $\bar{l}_0, \bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_{s-1}$ vidējās kļūdas ir

$$
\left.\begin{aligned}
&\bar{m}_0 = \pm\frac{m_0}{\sqrt{n}} = \pm\frac{m}{\sqrt{2n}} \\
&\qquad \bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \ldots = \bar{m}_{s-1} = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} \\
\text{resp.}\quad & \\
&\bar{m}_0 = \bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \ldots = \bar{m}_{s-1} = \pm\frac{m}{\sqrt{n}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (578).
$$

Aizrādam vēl uz dažām rēķina kontrolēm.

Sumējot izteiksmes (574) un ievērojot formulas (572) un (573), atrodam

$$
\left.\begin{aligned}
&[\omega] = nC - [B] = \frac{[\lambda]+[\lambda_0]}{s+1} - \frac{[\lambda]+[\lambda_0]}{s+1} = 0 \\
\text{resp.}\quad & \\
&[\omega] = nC - [B] = \frac{[\lambda]}{s} - \frac{[\lambda]}{s} = 0
\end{aligned}\right\} \; . \; . \; (579).
$$

Tas nozīmē, ka no atsevišķo novēroto paņēmienu pagriešanas par atbilstošiem leņķiem ω nemainas „virzienu vidējie", tā tad arī nemainas izlīdzinātie virzieni $\bar{l}$.

Ķas zīmējas uz elementu $(\lambda+\omega)$ sumām Σ atsevišķos pagrieztos virzienu paņēmienos, tad ievērojot (569) resp. (570),

$$
\left.\begin{aligned}
&\Sigma_i = [{}_i\lambda] + s\omega_i = [{}_i\lambda] + \frac{s[\lambda]+s[\lambda_0]}{n(s+1)} - \frac{s[{}_i\lambda]+s\,{}_i\lambda_0}{s+1} = \\
&\qquad = \frac{n[{}_i\lambda]+s[\lambda]+s[\lambda_0]-ns\,{}_i\lambda_0}{n(s+1)} \\
\text{resp.}\quad & \\
&\Sigma_i = [{}_i\lambda] + s\omega_i = [{}_i\lambda] + \frac{s[\lambda]}{ns} - \frac{s[{}_i\lambda]}{s} = \frac{[\lambda]}{n}
\end{aligned}\right\} \quad (580).
$$

Attiecībā uz pirmo formulu (580) piezīmējam, ka šeit pieņemtos novēroto virzienu paņēmienu orientējuma apstākļos elementi λ_0 visos paņēmienos ir vienādi, un tāpēc

$$
n\,{}_i\lambda_0 = [\lambda_0] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (581).
$$

Ievērojot to, formulas (580) pāriet veidā

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_i &= \frac{n[\lambda] + s[\lambda]}{n(s+1)} \\ \text{resp.}\quad \Sigma_i &= \frac{[\lambda]}{n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (582).$$

Pa visiem pagrieztiem paņēmieniem veidojot virzienu kopsumu S, atrodam

$$\left.\begin{aligned} S &= [\Sigma] = \frac{n[\lambda] + ns[\lambda]}{n(s+1)} = [\lambda] \\ \text{resp.}\quad S &= [\Sigma] = n\frac{[\lambda]}{n} = [\lambda] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (583).$$

Beidzot vēl piezīmējam, ka gadijumā, kad visiem novērotiem virzieniem ir vienāds svars, no atbilstošām formulām (571), (572), (573) seko, ka

$$C = \frac{[A]}{s} = \frac{[B]}{n} \quad \ldots\ldots\ldots (584).$$

§ 48. Piemēri.

1. Stacijā novēroti skatamiem punktiem P_0, P_1, P_2, P_3 atbilstošie 6 pilnīgi virzienu paņēmieni. Visiem atsevišķiem novērojumiem notiekot ar vienādu noteiktību, sākuma punktam P_0 atbilstošais virziens katrā paņēmienā novērots divreiz — sākumā un beigās, un par sākuma virzienu pieņemts abu novērojumu vidējais. Sakarā ar to visos paņēmienos sākuma virzienam pienākas svars 2, ja visiem pārējiem virzieniem piešķir svaru 1.

Stājoties pie izlīdzināšanas, visi novērotie paņēmieni orientēti tā, lai sākuma punktam P_0 atbilstošais virziens būtu $359^0 59' 60{,}00''$. Par virzienu tuvinām vērtībām (1) pieņemtas visos paņēmienos veselos grados un minutās izteiktās novēroto virzienu vienādās sastāvdaļas; sīkākās vienībās izteiktās virzienu sastāvdaļas tad veido attiecīgos elementus λ.

Iepriekšējā paragrafā aizrādītā kārtā izdarītais izlīdzināšanas rēķins parādīts sekojošā tabulā, kuras sākumā atzīmēti minētie novērotie virzienu paņēmieni.

Skat. punkti	(l)	$_1\lambda$	$_2\lambda$	$_3\lambda$	$_4\lambda$	$_5\lambda$	$_6\lambda$	Šķērs-sumas	A
P_0	359°59′	60,00″	60,00″	60,00″	60,00″	60,00″	60,00″	360,00″	60,00″
P_1	48 24	35,50	31,00	38,00	36,50	33,00	31,50	205,50	34,25
P_2	107 33	07,50	04,50	06,00	01,50	01,00	04,50	25,00	04,17
P_3	215 41	22,00	22,50	25,50	19,00	20,00	21,50	130,50	21,75
	$[_i\lambda]$ =	125,00	118,00	129,50	117,00	114,00	117,50	721,00	= $[\lambda]$
	$_i\lambda_0$ =	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	60,00	360,00	= $[\lambda_0]$
	$[_i\lambda]+{}_i\lambda_0$ =	185,00	178,00	189,50	177,00	174,00	177,50	1081,00	$=[\lambda]+[\lambda_0]$
	B_i =	37,00	35,60	37,90	35,40	34,80	35,50	216,20	36,03″=C
	ω_i =	− 0,97	+ 0,43	− 1,87	+ 0,63	+ 1,23	+ 0,53	− 0,02	= $[\omega]$
		$_1\lambda+\omega_1$	$_2\lambda+\omega_2$	$_3\lambda+\omega_3$	$_4\lambda+\omega_4$	$_5\lambda+\omega_5$	$_6\lambda+\omega_6$		
P_0		59,03	60,43	58,13	60,63	61,23	60,53	359,98	60,00
P_1		34,53	31,43	36,13	37,13	34,23	32,03	205,48	34,25
P_2		06,53	04,93	04,13	02,13	02,23	05,03	24,98	04,17
P_3		21,03	22,93	23,63	19,63	21,23	22,03	130,48	21,75
	Σ_i =	121,12	119,72	122,02	119,52	118,92	119,62	720,92	= S
		$_1V$	$_2V$	$_3V$	$_4V$	$_5V$	$_6V$		
P_0		+ 0,97	− 0,43	+ 1,87	− 0,63	− 1,23	− 0,53	+ 0,02	
P_1		− 0,28	+ 2,82	− 1,88	− 2,88	+ 0,02	+ 2,22	+ 0,02	
P_2		− 2,36	− 0,76	+ 0,04	+ 2,04	+ 1,94	− 0,86	+ 0,04	
P_3		+ 0,72	− 1,18	− 1,88	+ 2,12	+ 0,52	− 0,28	+ 0,02	
	$[_iV]$ =	− 0,95	+ 0,45	− 1,85	+ 0,65	+ 1,25	+ 0,55	+ 0,10	
	Σ_i =	121,12	119,72	122,02	119,52	118,92	119,62		
	[A] =	120,17	120,17	120,17	120,17	120,17	120,17		

		${}_1v^2$	${}_2v^2$	${}_3v^2$	${}_4v^2$	${}_5v^2$	${}_6v^2$		
P_0	v_0^2	0,94	0,18	3,50	0,40	1,51	0,28	6,81	
	v_0^2	0,94	0,18	3,50	0,40	1,51	0,28	6,81	
P_1	v_1^2	0,08	7,95	3,53	8,29	0,00	4,93	24,78	
P_2	v_2^2	5,57	0,58	0,00	4,16	3,76	0,74	14,81	
P_3	v_3^2	0,52	1,39	3,53	4,49	0,27	0,08	10,28	
	$[{}_iv^2] =$	8,05	10,28	14,06	17,74	7,05	6,31	63,49	$= [pvv]$

$$m = \pm \sqrt{\frac{63,49}{(6-1)(4-1)}} = \pm 2,06''$$

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{63,49}{2(6-1)(4-1)}} = \pm 1,46''$$

$$\overline{m}_0 = \frac{m_0}{\sqrt{6}} = \pm 0,59''$$

$$\overline{m}_1 = \overline{m}_2 = \overline{m}_3 = \frac{m}{\sqrt{6}} = \pm 0,84''$$

Izlīdzinātie virzieni ir:

$$\overline{l}_0 = \quad 0^0 00' 00,00'' \pm 0,59''$$
$$\overline{l}_1 = \ \ 48\ 24\ 34,25 \ \pm 0,84$$
$$\overline{l}_2 = 107\ 33\ 04,17 \ \pm 0,84$$
$$\overline{l}_3 = 215\ 41\ 21,75 \ \pm 0,84$$

2. Stacijā „Universitate“ (novērošanas pīlars uz L. Universitates vecās ēkas jumta platformas) novēroti skatamiem punktiem

Doma baznīca (D)

Jēkaba baznīca (Jk)

V. Ģertrudes baznīca (G)

Pāvila baznīca (P)

Jēzus baznīca (Jz)

atbilstošie 6 pilnīgi virzienu paņēmieni. Visi novērojumi notikuši ar vienādu noteiktību, un ignorējot uz sākuma punktu D attiecīgos kontrolnovērojumus, visiem novērotiem virzieniem piešķirts vienāds svars 1.

Līdzīgā veidā, kā 1-mā piemērā, izdarītā novēroto virzienu paņēmienu izlīdzināšana parādīta sekojošā tabulā.

Skat. punkti	(l)	$_1\lambda$	$_2\lambda$	$_3\lambda$	$_4\lambda$	$_5\lambda$	$_6\lambda$	Šķērs-sumas	A
D	359°59′	60,0″	60,0″	60,0″	60,0″	60,0″	60,0″	360,0″	60,0″
Jk	14 47	30,0	37,5	45,0	22,5	37,5	30,0	202,5	33,7$_5$
G	127 45	75,0	60,0	60,0	67,5	60,0	60,0	382,5	63,7$_5$
P	182 23	60,0	30,0	52,5	22,5	30,0	30,0	225,0	37,5
Jz	258 34	67,5	60,0	60,0	52,5	60,0	45,0	345,0	57,5
	$[_i\lambda] =$	292,5	247,5	277,5	225,0	247,5	225,0	1515,0	$= [\lambda]$
	$B_i =$	58,5	49,5	55,5	45,0	49,5	45,0	303,1	50,5 = C
	$\omega_i =$	− 8,0	+ 1,0	− 5,0	+ 5,5	+ 1,0	+ 5,5	0,0	$= [\omega]$
		$_1\lambda+\omega_1$	$_2\lambda+\omega_2$	$_3\lambda+\omega_3$	$_4\lambda+\omega_4$	$_5\lambda+\omega_5$	$_6\lambda+\omega_6$		
D		52,0	61,0	55,0	65,5	61,0	65,5	360,0	60,0
Jk		22,0	38,5	40,0	28,0	38,5	35,5	202,5	33,7$_5$
G		67,0	61,0	55,0	73,0	61,0	65,5	382,5	63,7$_5$
P		52,0	31,0	47,5	28,0	31,0	35,5	225,0	37,5
Jz		59,5	61,0	55,0	58,0	61,0	50,5	345,0	57,5
	Σ_i	252,5	252,5	252,5	252,5	252,5	252,5	1515,0	= S
		$_1v$	$_2v$	$_3v$	$_4v$	$_5v$	$_6v$		
D		+ 8,0	− 1,0	+ 5,0	− 5,5	− 1,0	− 5,5	0,0	
Jk		+ 11,7	− 4,8	− 6,3	+ 5,7	− 4,8	− 1,8	+ 0,3	
G		− 3,2	+ 2,8	+ 8,8	− 9,2	+ 2,8	− 1,7	− 0,3	
P		− 14,5	+ 6,5	− 10,0	+ 9,5	+ 6,5	+ 2,0	0,0	
Jz		− 2,0	− 3,5	+ 2,5	− 0,5	− 3,5	+ 7,0	0,0	
	$[_iv] =$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
	$\Sigma_i =$	252,5	252,5	252,5	252,5	252,5	252,5		
	$[A] =$	252,5	252,5	252,5	252,5	252,5	252,5		

		$_1v^2$	$_2v^2$	$_3v^2$	$_4v^2$	$_5v^2$	$_6v^2$		
D	v_0^2	64,00	1,00	25,00	30,25	1,00	30,25	151,50	
Jk	v_1^2	136,89	23,04	39,69	32,49	23,04	3,24	258,39	
G	v_2^2	10,24	7,84	77,44	94,64	7,84	2,89	200,89	
P	v_3^2	210,25	42,25	100,00	72,25	42,25	4,00	471,00	
Jz	v_4^2	4,00	12,25	6,25	0,25	12,25	49,00	84,00	
	$[_iv^2] =$	425,38	86,38	248,38	229,88	86,38	89,38	1165,78	$= [vv]$

$$m = \pm \sqrt{\frac{1165{,}78}{(6-1)(5-1)}} = \pm 7{,}6''$$

$$\overline{m}_0 = \overline{m}_1 = \overline{m}_2 = \overline{m}_3 = \overline{m}_4 = \frac{m}{\sqrt{6}} = \pm 3{,}2''$$

Izlīdzinātie virzieni ir

$$\overline{l}_0 = \quad 0^0 00'\ 00{,}0''\ \pm 3{,}2''$$
$$\overline{l}_1 = \quad 14\ 47\ 33{,}7_5\ \pm 3{,}2$$
$$\overline{l}_2 = 127\ 46\ 03{,}7_5\ \pm 3{,}2$$
$$\overline{l}_3 = 182\ 23\ 37{,}5\ \pm 3{,}2$$
$$\overline{l}_4 = 258\ 34\ 57{,}5\ \pm 3{,}2$$

§ 49. Nepilnīgu virzienu paņēmienu gadijums.

Virzienu paņēmienus sauc par nepilnīgiem, ja ne visi novērotie virzieni ieiet visos atsevišķos paņēmienos. Tas gadas, piem., tad, kad no stacijas izejošo staru kopskaits ir ļoti liels, jo tādos apstākļos aiz zinamiem techniskiem iemesliem nav ieteicams novērot vienā paņēmienā visus starus. Vai arī tad, kad apgaismošanas apstākļu dēļ dažus skatamus punktus nav iespējams novērot visos paņēmienos.

Arī nepilnīgu virzienu paņēmienu gadijumā izlīdzināšana vispārīgi izdarama 46-ā paragrafā aizrādītā veidā. Bet, dažiem virzienu novērojumiem trūkstot, izkrīt atbilstošie kļūdu nolīdzinājumi. Tāpēc normalnolīdzinājumiem nav tāda simetriska veida, kā pilnīgu virzienu paņēmienu gadijumā, un nav iespējams atvasināt vienkāršas vispārējas formulas meklēto elementu tiešai noteikšanai.

Tāpat kā pilnīgu virzienu paņēmienu gadijumā, vienā un tanī pašā paņēmienā atsevišķie virzieni parasti mēdz būt novēroti visi ar vienādu noteiktību, eventuali izņemot sākuma virzienu, ja tas atrasts no dubultnovērojuma. Kas zīmējas uz korrespondējošo virzienu noteiktību resp. svariem dažādos paņēmienos, tad šinī ziņā var būt dažādi gadijumi. Ja visi paņēmieni ir atbilstošo novērojumu tiešie rezultati, un šie novērojumi izdarīti ar vienu un to pašu instrumentu un vispārīgi vienādos apstākļos, tad korrespondējošo virzienu svari arī ir vienādi visos paņēmienos. Turpretim šie svari ir dažādi, ja atsevišķie paņēmieni novēroti dažādos apstākļos, piem., ar dažādiem instrumentiem. Dažreiz arī gadas, ka visu novēroto nepilnīgo virzienu paņēmienu starpā ir daži tādi, kur ir uz vieniem un tiem pašiem stariem attiecīgi izlaidumi, bet pārējiem stariem atbilstošie virzieni novēroti attiecīgās grupas visos atsevišķos paņēmienos. Tādu grupu veidojošie virzienu paņēmieni savā starpā uzskatami par pilnīgiem, tā tad arī šīs grupas robežās izlīdzinami kā tādi. Vispārējā virzienu paņēmienu sistemā šī grupa tad atvietojama ar atbilstošo vienu izlīdzināto virzienu paņēmienu, pie kam šim izlīdzinātam paņēmienam, saprotams, ir citādi svari, nekā tiem tieši novērotiem paņēmieniem, no kuriem tas atvasināts.

Visus novērotos, resp. no novērotu paņēmienu grupām atvasinātos virzienu paņēmienus ieteicams pirms izlīdzināšanas orientēt vienādi, t. i. pagriezt tā, lai atsevišķiem stariem atbilstošie virzieni būtu apmēram vienādi visos paņēmienos. Pie tam parasti orientē tā, lai vienam par sākuma staru pieņemtam, staram atbilstošie virzieni būtu vienādi ar nulli. Tas visvieglāk padarams tad, kad ir tāds virziens, kas atkārtojas visos paņēmienos. Pieņemot to par nulles virzienu visos atsevišķos paņēmienos, tie tad dabūjami vēlamā saskaņotā orientējumā. Ja neviens virziens neatkārtojas visos paņēmienos, tad par nulles virzienu ieteicams pieņemt tādu, kas atkārtojas pēc iespējas daudzos paņēmienos, lai, izejot no šī virziena, vienmērīgi orientētu attiecīgo paņēmienu grupu. Vadoties ar šīs paņēmienu grupas virzieniem, tad nosakami leņķi, par kuriem jāpagriež pārējie paņēmieni, lai panāktu vēlamo vienmērīgo orientējumu.

Attiecībā uz noteiktības aprēķinu piezīmējam, ka praktiski interesējošie izlīdzināšanas rezultati ir izlīdzinātais virzienu paņēmiens resp. atsevišķie izlīdzinātie virzieni un to vidējās kļūdas. Kas zīmējas uz pagrieziena leņķiem t, tad tie praktiski interesē tikai kā minēto izlīdzināšanas rezultatu atrašanai vajadzīgi elementi; tāpēc šo leņķu vidējo kļūdu noteikšanu parasti neuzskata par vajadzīgu.

Ar atrastiem leņķiem t un x pēc parauga (536) veidojami atsevišķiem novērotiem virzienu paņēmieniem atbilstošie izlīdzinātie virzienu paņēmieni. Salīdzinot novērotos virzienu paņēmienus ar atbilstošiem izlīdzinātiem, tos var lietot visos gadījumos vienādā veidā

$$0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_{s-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (585),$$

ja atsevišķos novērotos paņēmienus pagriež par atbilstošiem leņķiem $-t_1,\ -t_2,\ -t_3,\ \ldots\ldots,\ -t_n$. Tā pagrieztā veidā novērotie paņēmieni uzskatami par tiešiem novērojumiem, no kuriem izlīdzinātais paņēmiens (585) atvasināts parastā kārtā, veidojot korrespondējošo novēroto virzienu vienkāršos vai vispārējos aritmetiskos vidējos, skatoties pēc tā, vai attiecīgie virzieni novēroti ar vienādu vai ar dažādu noteiktību. Ievērojot to, r paņēmienos novērota virziena izlīdzinātās vērtības $\bar{l}_i$ svars $\bar{p}_i$ vienādas vai dažādas noteiktības gadījumā ir

$$\bar{p}_i = r \qquad \text{resp.} \qquad \bar{p}_i = [p]' \quad \ldots\ldots \quad (586),$$

pie kam $[p]'$ apzīmē attiecīgo novēroto virzienu svaru sumu. Tā tad minētā izlīdzinātā virziena $\bar{l}_i$ vidējā kļūda ir

$$\left.\begin{array}{l} \bar{m}_i = \pm \dfrac{m}{\sqrt{r}} \\ \text{resp.} \\ \bar{m}_i = \pm \dfrac{m}{\sqrt{[p]'}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (587),$$

kur m apzīmē parastā kārtā nosakamo svara vienības vidējo kļūdu.

Piemērs. Stacijā novēroti skatamiem punktiem P_0, P_1, P_2, P_3 atbilstoši 6 nepilnīgi virzienu paņēmieni, pie kam visu atsevišķo novēroto virzienu noteiktība ir vienāda, un skatamam punktam P_0 atbilstošais virziens novērots visos paņēmienos. Tā tad orientējot tā, lai katrā paņēmienā punktam P_0 atbilstošais virziens būtu vienāds ar nulli, novērotie virzienu paņēmieni ir:

	P_0	P_1	P_2	P_3
1)	0°00′00,00″	48°24′35,50″	107°33′07,50″	215°41′22,00″
2)	00,00	31,00	.....	22,50
3)	00,00	.....	06,00	25,50
4)	00,00	.....	01,50	.....
5)	00,00	33,00	.....	20,00
6)	00,00	.....	04,50	21,50

Pēc (538) parauga veidojam kļūdu nolīdzinājumus:

1. paņēmiens:
$$
\begin{aligned}
&t_1 && - \;\; 0^0\,00'00{,}00'' = {}_1v_0\\
&t_1 + x_1 && - \;\; 48\;24\;35{,}50 = {}_1v_1\\
&t_1 \quad + x_2 && -107\;33\;07{,}50 = {}_1v_2\\
&t_1 \qquad + x_3 && -215\;41\;22{,}00 = {}_1v_3
\end{aligned}
$$

2. paņēmiens:
$$
\begin{aligned}
&t_2 && - \;\; 0^0\,00'00{,}00'' = {}_2v_0\\
&t_2 + x_1 && - \;\; 48\;24\;31{,}00 = {}_2v_1
\end{aligned}
$$
. . . .
$$
t_2 \qquad + x_3 -215\;41\;22{,}50 = {}_2v_3
$$

3. paņēmiens:
$$
t_3 \qquad - \;\; 0^0\,00'00{,}00'' = {}_3v_0
$$
. . . .
$$
\begin{aligned}
&t_3 \quad + x_2 && -107\;33\;06{,}00 = {}_3v_2\\
&t_3 \qquad + x_3 && -215\;41\;25{,}50 = {}_3v_3
\end{aligned}
$$

4. paņēmiens:
$$
t_4 \qquad - \;\; 0^0\,00'00{,}00'' = {}_4v_0
$$
. . . .
$$
t_4 \quad + x_2 \quad -107\;33\;01{,}50 = {}_4v_2
$$
. . . .

5. paņēmiens:
$$
\begin{aligned}
&t_5 && - \;\; 0^0\,00'00{,}00'' = {}_5v_0\\
&t_5 + x_1 && - \;\; 48\;24\;33{,}00 = {}_5v_1
\end{aligned}
$$
. . . .
$$
t_5 \qquad + x_3 -215\;41\;20{,}00 = {}_5v_3
$$

6. paņēmiens:
$$
t_6 \qquad - \;\; 0^0\,00'00{,}00'' = {}_6v_0
$$
. . . .
$$
\begin{aligned}
&t_6 \quad + x_2 && -107\;33\;04{,}50 = {}_6v_2\\
&t_6 \qquad + x_3 && -215\;41\;21{,}50 = {}_6v_3
\end{aligned}
$$

Uz šīs kļūdu nolīdzinājumu sistemas pamata izdarītais izlīdzināšanas rēķins visos sīkumos parādīts 33-ā paragrafa piemērā. Tā tad varam šeit tieši pārņemt tur atrastos izlīdzināšanas rezultatus, t. i.

$$
\begin{aligned}
t_1 &= +1{,}32''\\
t_2 &= -0{,}55\\
t_3 &= +1{,}65\\
t_4 &= -1{,}53\\
t_5 &= -0{,}71\\
t_6 &= -0{,}19
\end{aligned}
$$

$$x_1 = 48^0 24'33{,}15'' \pm 1{,}26''$$
$$x_2 = 107\ 33\ 04{,}56 \pm 1{,}11$$
$$x_3 = 215\ 41\ 22{,}00 \pm 1{,}03$$

un

$$m = \pm 1{,}65''$$

Ar atrastiem leņķiem x veidojam pēc parauga (585) orientēto izlīdzināto virzienu paņēmienu

P_0: $0^0 00'00{,}00''$
P_1: 48 24 33,15
P_2: 107 33 04,56
P_3: 215 41 22,00

To pašu izlīdzināto paņēmienu resp. tā atsevišķos izlīdzinātos virzienus var atrast arī citādi, pagriežot atsevišķos novērotos paņēmienus par atbilstošiem leņķiem —t un veidojot atsevišķo virzienu (vienkāršos) aritmetiskos vidējos:

	$_1l-t_1$	$_2l-t_2$	$_3l-t_3$	$_4l-t_4$	$_5l-t_5$	$_6l-t_6$	Šķērs-sumas	r	Izlīdz. virzieni $\bar{l}$
P_0: $359^0 59'$	58,68″	60,55″	58,35″	61,53″	60,71″	60,19″	360,01″	6	$0^0 00'00{,}00''$
P_1: 48 24	34,18	31,55	......	......	33,71	......	99,44	3	48 24 33,15
P_2: 107 33	06,18	......	04,35	03,03	......	04,69	18,25	4	107 33 04,56
P_3: 215 41	20,68	23,05	23,85	......	20,71	21,69	109,98	5	215 41 22,00

Tādā kārtā atrastais izlīdzinātais virzienu paņēmiens

P_0: $0^0 00'00{,}00''$
P_1: 48 24 33,15
P_2: 107 33 04,56
P_3: 215 41 22,00

pilnīgi saskan ar to, kuru veidojam ar leņķiem x.

Pēc pirmās formulas (587) aprēķinātās izlīdzināto virzienu $\bar{l}_0$, $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$, $\bar{l}_3$ vidējās kļūdas ir

$$\bar{m}_0 = \pm \frac{1{,}65}{\sqrt{6}} = \pm 0{,}67''$$

$$\bar{m}_1 = \pm \frac{1{,}65}{\sqrt{3}} = \pm 0{,}95$$

$$\bar{m}_2 = \pm \frac{1{,}65}{\sqrt{4}} = \pm 0{,}82$$

$$\bar{m}_3 = \pm \frac{1{,}65}{\sqrt{5}} = \pm 0{,}74$$

Tā tad atrasti galīgie rezultati:

P_0:	0^0	00′	00,00″	$\pm 0{,}67''$
P_1:	48	24	33,15	$\pm 0{,}95$
P_2:	107	33	04,56	$\pm 0{,}82$
P_3:	215	41	22,00	$\pm 0{,}74$

§ 50. Nepilnīgu virzienu paņēmienu tuvinā izlīdzināšana.

Apskatīsim vēl vienu tuvinu metodi, pēc kuras nepilnīgi virzienu paņēmieni izlīdzinami līdzīgā veidā, kā pilnīgi, bet pakāpenisku tuvinājumu ceļā.

Kā parasti, lietojot novērotos virzienu paņēmienus apmēram vienādā orientējumā, pa visiem paņēmieniem veido „virzienu vidējos" — kā vienkāršos vai vispārējos aritmetiskos vidējos, skatoties pēc tā, vai ir vienādas vai dažādas noteiktības gadijums.

Kā zinams, pilnīgu paņēmienu gadijumā „virzienu vidējie" A tieši nosaka meklēto izlīdzināto virzienu paņēmienu. Turpretim nepilnīgu paņēmienu „virzienu vidējie" uzskatami tikai par pirmā tuvinājumā atrastiem izlīdzinātiem virzieniem. Ar tiem var aprēķināt leņķus, par kuriem jāpagriež atsevišķie novērotie paņēmieni, lai, salīdzinot tos ar pirmā tuvinājumā atrasto izlīdzināto paņēmienu, nosacītu — arī pirmā tuvinājumā — novēroto virzienu izlabojumus.

Pēc novēroto paņēmienu pagriešanas par minētiem leņķiem atkal veido „virzienu vidējos", kuri, vispārīgi atšķiroties no pirms paņēmienu pagriešanas atrastiem, uzskatami par otrā tuvinājumā nosacītiem izlīdzinātiem virzieniem. Ar tiem atkal aprēķina paņēmienu pārorientēšanai vajadzīgos leņķus, u. t. t. Tā turpinot, pēc katras jaunas paņēmienu pagriešanas atrastie „virzienu vidējie" un arī pa atsevišķiem paņēmieniem veidotie „paņēmienu vidējie" vairāk un vairāk tuvojas tām teoretiski pareizām vērtībām, kuras atrodamas izlīdzinot pēc iepriekšējā paragrafā aizrādītā stingrā paņēmiena.

Attiecībā uz novēroto paņēmienu lietderīgai orientēšanai nosakamiem leņķiem piezīmējam, ka pilnīgu paņēmienu gadijumā tie aprēķinami pēc formulas (569) resp. (570). Bet, kā parādīsim, tie nosakami arī citādā ceļā, tieši izejot no pretrunām (v) starp nepagrieztiem novērotiem paņēmieniem un to „virzienu vidējiem" A, kuri, kā zinams, pilnīgu paņēmienu gadijumā ir vienādi ar atbilstošiem izlīdzinātiem virzieniem $\bar{l}$.

Lai i-tā paņēmienā novērotie virzieni ir

$$\left.\begin{array}{l} {}_i l_0 = (l_0) + {}_i\lambda_0 \\ {}_i l_1 = (l_1) + {}_i\lambda_1 \\ {}_i l_2 = (l_2) + {}_i\lambda_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ {}_i l_{s-1} = (l_{s-1}) + {}_i\lambda_{s-1} \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots (588).$$

Pieņemot vienādas noteiktības gadijumu, tos salīdzinam ar izlīdzinātiem virzieniem

$$\left.\begin{array}{l} \bar{l}_0 = (l_0) + \dfrac{[\lambda_0]}{n} \\ \bar{l}_1 = (l_1) + \dfrac{[\lambda_1]}{n} \\ \bar{l}_2 = (l_2) + \dfrac{[\lambda_2]}{n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{l}_{s-1} = (l_{s-1}) + \dfrac{[\lambda_{s-1}]}{n} \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots (589),$$

veidojot starpības

$$\left.\begin{array}{l} ({}_i v_0) = \bar{l}_0 - {}_i l_0 = \dfrac{[\lambda_0]}{n} - {}_i\lambda_0 \\ ({}_i v_1) = \bar{l}_1 - {}_i l_1 = \dfrac{[\lambda_1]}{n} - {}_i\lambda_1 \\ ({}_i v_2) = \bar{l}_2 - {}_i l_2 = \dfrac{[\lambda_2]}{n} - {}_i\lambda_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ({}_i v_{s-1}) = \bar{l}_{s-1} - {}_i l_{s-1} = \dfrac{[\lambda_{s-1}]}{n} - {}_i\lambda_{s-1} \end{array}\right\} \quad \dots (590).$$

Šo starpību jeb pretrunu aritmetisko vidējo

$$\frac{[({}_i v)]}{s_i} = \frac{[\lambda]}{n s_i} - \frac{[{}_i\lambda]}{s_i} \quad \dots\dots\dots (591)$$

salīdzinot ar (570), atrodam, ka

$$\omega_i = \frac{[({}_i v)]}{s_i} \quad \dots\dots\dots (592).$$

Bez tam no tām pašām formulām (590) vēl seko, ka pa visiem virzieniem un paņēmieniem veidotā minēto pretrunu kopsuma ir

$$[(v)] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (593).$$

Dažādas noteiktības gadijumā formulu (592) un (593) vietā stājas

$$\omega_i = \frac{[_ip(_iv)]}{[_ip]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (594)$$

un

$$[p(v)] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (595),$$

kur p apzīmē pretrunām (v) atbilstošo novēroto virzienu svarus.

Ievērojot šo iztirzājumu, aprakstīsim tagad sīkāki 1858. gada pārskatā „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland“ aizrādīto metodi nepilnīgu virzienu paņēmienu tuvinai izlīdzināšanai.

Vienādi orientējot novērotos virzienu paņēmienus, pa atsevišķiem paņēmieniem veido „virzienu vidējos“ A′; salīdzinot tos ar atbilstošiem novērotiem virzieniem 1′, aprēķina pretrunas

$$(v)' = A' - 1' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (596)$$

un pa atsevišķiem paņēmieniem veido šo pretrunu vidējos

$$\left.\begin{array}{l} \omega_i' = \dfrac{[(_iv)']}{s_i} \\[2ex] \text{resp.} \quad \omega_i' = \dfrac{[_ip(_iv)']}{[_ip]} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (597).$$

Par tādā veidā atrastiem leņķiem ω′ pagriežot attiecīgos novērotos virzienu paņēmienus, ar to tad pāriet pie izlīdzināšanas otrās pakāpes.

Apzīmējot pagriezto paņēmienu virzienus ar 1″, pa atsevišķiem paņēmieniem veido jaunus „virzienu vidējos“ A″; ar tiem aprēķina atbilstošās pretrunas

$$(v)'' = A'' - 1'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (598)$$

un veido vidējos

$$\left.\begin{array}{l} \omega_i'' = \dfrac{[(_iv)'']}{s_i} \\[2ex] \text{resp.} \quad \omega_i'' = \dfrac{[_ip(_iv)'']}{[_ip]} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (599).$$

Par atrastiem leņķiem ω″ pagriežot pirmā izlīdzināšanas pakāpē jau pagrieztos virzienu paņēmienus, pāriet pie nākošās, trešās izlīdzināšanas pakāpes.

Tā turpinot, „virzienu vidējie“ pakāpeniski vairāk un vairāk tuvojas meklētiem izlīdzinātiem virzieniem. Šie „virzienu vidējie“ pieņemami par izlīdzinātiem virzieniem, ja leņķi, par kuriem jāpagriež atbilstošie virzienu paņēmieni, lai pārietu pie nākošās izlīdzināšanas pakāpes, iznāk tik mazi, ka tiem nav praktiskas nozīmes. Pēdējā izlīdzināšanas pakāpē atrastās pretrunas starp pagrieztiem novērotiem virzieniem un atbilstošiem izlīdzinātiem virzieniem resp. „virzienu vidējiem“ tad arī uzskatamas par praktiski vienādām ar novēroto virzienu izlabojumiem v. Tā tad izdarot noteiktības aprēķinu pēc iepriekšējā paragrafā aizrādītām atbilstošām formulām, šīs pretrunas lietojamas minēto izlabojumu v vietā.

Aiz viegli saprotamiem iemesliem pēc šīs tuvinās metodes notiekošās izlīdzināšanas galīgie rezultati atrodami jo ātrāk, jo mazāk nepilnīgie virzienu paņēmieni atšķiras no pilnīgiem, t. i. jo mazākā skaitā ir virzienu izlaidumi atsevišķos paņēmienos.

Piemērs. Pēc aprakstītās tuvinās metodes atrisināsim vēlreiz iepriekšējā paragrafa piemērā jau atrisināto nepilnīgu virzienu paņēmienu izlīdzināšanas uzdevumu. Skaitliskais aprēķins parādīts sekojošā tabulā, kuras sākumā atzīmēti vienādi orientētie un ar vienādu noteiktību novērotie 6 nepilnīgie virzienu paņēmieni.

Paņēmienu №№	Ia. Novērotie virzienu paņēmieni					
	Skat. p. P_0	Skat. p. P_1	Skat. p. P_2	Skat. p. P_3		
	l_0'	l_1'	l_2'	l_3'	ω_i'	
1.	359°59′60,00″	48°24′35,50″	107°33′07,50″	215°41′22,00″	−1,16″	pārrakstīti no Ib
2.	60,00	31,00	.....	22,50	+0,66	
3.	60,00	.....	06,00	25,50	−1,44	
4.	60,00	.....	01,50	.....	+1,69	
5.	60,00	33,00	.....	20,00	+0,82	
6.	60,00	.....	04,50	21,50	+0,39	
[l′]	360,00″	99,50″	19,50″	111,50″	N = [r] =	
r	6	3	4	5	= 6+3+4+5 = 18	
A′	359°59′60,00″	48°24′33,17″	107°33′04,88″	215°41′22,30″		

	Ib. Pretrunas $(v)' = A' - l'$				$[({}_iv)']$	s_i	ω_i'
1.	0,00"	− 2,33"	− 2,62"	+ 0,30"	−4,65"	4	−1,16"
2.	0,00	+ 2,17	.....	− 0,20	+1,97	3	+0,66
3.	0,00	.....	− 1,12	− 3,20	−4,32	3	−1,44
4.	0,00	.....	+ 3,38	.....	+3,38	2	+1,69
5.	0,00	+ 0,17	.....	+ 2,30	+2,47	3	+0,82
6.	0,00	.....	+ 0,38	+ 0,80	+1,18	3	+0,39
Σ'	0,00"	+ 0,01"	+ 0,02"	0,00"	+0,03	18	
	IIa. Pirmo reizi pagrieztie virzienu paņēmieni						
	$l_0'' = l_0' + \omega_i'$	$l_1'' = l_1' + \omega_i'$	$l_2'' = l_2' + \omega_i'$	$l_3'' = l_3' + \omega_i'$	ω_i''		
1.	359°59'58,84"	48°24'34,34"	107°33'06,34"	215°41'20,84"	−0,01"	pārrakstīti no IIb	
2.	60,66	31,66	.....	23,16	+0,03		
3.	58,56	.....	04,56	24,06	−0,04		
4.	61,69	.....	03,19	.....	+0,01		
5.	60,82	33,82	.....	20,82	+0,04		
6.	60,39	.....	04,89	21,89	−0,04		
[l'']	360,96"	99,82"	18,98"	110,77"			
r	6	3	4	5			
A''	359°59'60,16"	48°24'33,27"	107°33'04,74"	215°41'22,15"			
	IIb. Pretrunas $(v)'' = A'' - l''$				$[({}_iv)'']$	s_i	ω_i''
1.	+ 1,32"	− 1,07"	− 1,60"	+ 1,31"	−0,04"	4	−0,01"
2.	− 0,50	+ 1,61	.....	− 1,01	+0,10	3	+0,03
3.	+ 1,60	.....	+ 0,18	− 1,91	−0,13	3	−0,04
4.	1,53	.....	+ 1,55	.....	+0,02	2	+0,01
5.	− 0,66	− 0,55	.....	+ 1,33	+0,12	3	+0,04
6.	− 0,23	.....	− 0,15	+ 0,26	−0,12	3	−0,04
Σ''	0,00"	− 0,01"	− 0,02"	− 0,02"	−0,05"	18	

	IIIa. Otro reizi pagrieztie virzienu paņēmieni						
	$l_0''' = l_0'' + \omega_i''$	$l_1''' = l_1'' + \omega_i''$	$l_2''' = l_2'' + \omega_i''$	$l_3''' = l_3'' + \omega_i''$			
1.	359°59'58,83"	48°24'34,33"	107°33'06,33"	215°41'20,83"			
2.	60,69	31,69	.....	23,19			
3.	58,52	.....	04,52	24,02			
4.	61,70	.....	03,20	.....			
5.	60,86	33,86	.....	20,86			
6.	60,35	.....	04,85	21,85			
[l''']	360,95"	99,88"	18,90"	110,75"			
r	6	3	4	5			
A'''	359°59'60,16"	48°24'33,29"	107°33'04,72"	215°41'22,15"			
	IIIb. Pretrunas $(v)''' = A''' - l'''$				$[(_iv)''']$	s_i	ω_i'''
1.	+ 1,33"	− 1,04"	− 1,61"	+ 1,32"	0,00"	4	0,00"
2.	− 0,53	+ 1,60	.....	− 1,04	+0,03	3	+0,01
3.	+ 1,64	.....	+ 0,20	− 1,87	−0,03	3	−0,01
4.	− 1,54	.....	+ 1,52	.....	−0,02	2	−0,01
5.	− 0,70	− 0,57	.....	+ 1,29	+0,02	3	+0,01
6.	− 0,19	.....	− 0,13	+ 0,30	−0,02	3	−0,01
Σ'''	+ 0,01"	− 0,01"	− 0,02"	0,00"	−0,02"	18	
	IIIc. $(v)'''(v)'''$				Šķērssumas		
1.	1,77	1,08	2,59	1,74	7,18		
2.	0,28	2,56	.....	1,08	3,92		
3.	2,69	.....	0,04	3,50	6,23		
4.	2,37	.....	2,31	.....	4,68		
5.	0,49	0,32	.....	1,66	2,47		
6.	0,04	.. ..	0,02	0,09	0,15		
Σ	7,64	3,96	4,96	8,07	24,63 = $= [(v)'''(v)''']$		

Kā redzams, leņķi ω_i''' ir tik mazi, ka izlīdzināšanas rēķina turpināšanai aiz trešās pakāpes nav praktiskas nozīmes; pat pietiktu ar otro pakāpi, jo arī tai atbilstošie leņķi ω_i'' nav sevišķi lieli.

Izbeidzot izlīdzināšanas rēķinu trešā pakāpē, tabulas pēdējā nodaļā IIIc aprēķināti pretrunu $(v)'''$ kvadrati un veidota to suma $[(v)'''(v)''']$. Šī suma tikai ļoti maz atšķiras no atbilstošās $[vv]$, kuru atradam iepriekšējā resp. 33-ā paragrafa piemērā atrisinot šo pašu uzdevumu pēc stingrās metodes. Uzskatot $[(v)'''(v)''']$ par praktiski vienādu ar $[vv]$, parastā kārtā nosakam svara vienības vidējo kļūdu un atsevišķo izlīdzināto virzienu vidējās kļūdas

$$m = \pm\sqrt{\frac{24{,}63}{18-4-6+1}} = \pm 1{,}66''$$

un

$$\overline{m}_0 = \pm\frac{1{,}66''}{\sqrt{6}} = \pm 0{,}68''$$

$$\overline{m}_1 = \pm\frac{1{,}66''}{\sqrt{3}} = \pm 0{,}96''$$

$$\overline{m}_2 = \pm\frac{1{,}66''}{\sqrt{4}} = \pm 0{,}83''$$

$$\overline{m}_3 = \pm\frac{1{,}66''}{\sqrt{5}} = \pm 0{,}74''$$

Par izlīdzināto virzienu paņēmienu uzskatot to, kuru veido „virzienu vidējie" A''', šo paņēmienu pagriežam par — 0,16″, lai pielīdzinātu nullei sākuma punktam P_0 atbilstošo virzienu. Tā tad izlīdzināšanas rēķina galīgie rezultati ir

P_0:	0^0	$00'$	$00{,}00''$	$\pm 0{,}68''$
P_1:	48	24	33,13	$\pm 0{,}96$
P_2:	107	33	04,56	$\pm 0{,}83$
P_3:	215	41	21,99	$\pm 0{,}74$

Kā redzams, šie rezultati gandrīz neatšķiras no iepriekšējā paragrafa piemērā pēc stingrās metodes atrastiem.

§ 51. Visās kombinacijās izmērītu leņķu izlīdzināšana.

Vispārējā gadijumā, kad, stacijā novērojot ne tikai nepieciešamos, bet arī liekus leņķus, novērojumi notikuši bez sevišķas sistemas, izlīdzinātiem leņķiem parasti ir dažādi svari arī tad, kad visi novērojumi notikuši ar vienādu noteiktību. Tā kā atsevišķās stacijās izlīdzinātie leņķi savukārt ieiet trigonometriskā tīkla vispārējā izlīdzināšanā, tās vienkāršošanas nolūkā vēlams, lai atsevišķās stacijās izlīdzinātiem leņķiem visiem būtu vienādi svari. Tas, starp citu, panākams mērot katrā stacijā leņķus „visās kombinacijās“, t. i. kombinējot pa diviem no stacijas izejošos virzienus un mērot attiecīgos leņķus ar vienādu noteiktību. Šo metodi, uz kuras teoretiskām priekšrocībām aizrādijuši jau Gauss's un daži citi ievērojami zinātnieki, visos techniskos sīkumos izstrādājis ģeneralis Schreiber's.

Lai no stacijas iziet s virzieni 1, 2, 3, ..., (s—1), s. To savstarpējā orientējuma noteikšanai pietiek ar (s—1) neatkarīgiem leņķiem, piem., ar tiem, kurus virziens 1 veido ar visiem pārējiem 2, 3, ..., (s—1), s. Šo leņķu sistemu

$$l_{1.2},\ l_{1.3},\ \ldots..,\ l_{1.(s-1)},\ l_{1.s} \quad \ldots\ldots \quad (600)$$

var uzskatīt par pilnīgu virzienu paņēmienu ar nulles virzienu 1. Bet kombinējot pa diviem stacijas visus s virzienus, pavisam var veidot $\frac{s(s-1)}{2}$ šādus leņķus:

$$\left.\begin{array}{r} l_{1.2},\ l_{1.3},\ \ldots,\ l_{1.(s-1)},\ l_{1.s} \\ l_{2.3},\ \ldots,\ l_{2.(s-1)},\ l_{2.s} \\ \ldots,\ l_{3.(s-1)},\ l_{3.s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{(s-1).s} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (601).$$

Uzskatot šos l par attiecīgo leņķu novērojumiem un pieņemot, ka tie visi notikuši ar vienādu noteiktību, ar vienādiem svariem 1, no šiem novērojumiem atvasināsim sistemai (600) atbilstošos izlīdzinātos leņķus

$$x_{1.2},\ x_{1.3},\ \ldots,\ x_{1.(s-1)},\ x_{1.s} \quad \ldots\ldots \quad (602).$$

Uzskatot izmērītos leņķus (601) par netiešiem novērojumiem, un pieņemot meklētos izlīdzinātos leņķus (602) par neatkarīgiem nezinamiem, veidojam šādus $\frac{s(s-1)}{2}$ kļūdu nolīdzinājumus:

$$\left.\begin{array}{llll} x_{1.2} & & -\,l_{1.2} & = v_{1.2} \\ & x_{1.3} & -\,l_{1.3} & = v_{1.3} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ & x_{1.(s-1)} & -\,l_{1.(s-1)} & = v_{1.(s-1)} \\ & x_{1.s} & -\,l_{1.s} & = v_{1.s} \\ -\,x_{1.2} + x_{1.3} & & -\,l_{2.3} & = v_{2.3} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ -\,x_{1.2} & +\,x_{1.(s-1)} & -\,l_{2.(s-1)} & = v_{2.(s-1)} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (603).$$

$$\left.\begin{array}{l}
-x_{1.2} \qquad\qquad + x_{1.s} - l_{2.s} = v_{2.s} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-x_{1.3} + x_{1.(s-1)} \quad - l_{3.(s-1)} = v_{3.(s-1)} \\
-x_{1.3} \qquad\qquad + x_{1.s} - l_{3.s} = v_{3.s} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-x_{1.(s-1)} + x_{1.s} - l_{(s-1).s} = v_{(s-1).s}
\end{array}\right\}$$

Atbilstošie normalnolīdzinājumi ir

$$\left.\begin{array}{l}
(s-1)\,x_{1.2} - x_{1.3} \quad - \dots - x_{1.(s-1)} \quad - x_{1.s} \quad - \\
\quad - \{l_{1.2} \quad - l_{2.3} \quad - \dots \quad - l_{2.(s-1)} - l_{2.} \quad \} = 0 \\
-x_{1.2} + (s\text{-}1)x_{1.3} - \dots - x_{1.(s-1)} \quad - x_{1.s} \quad - \\
\quad - \{l_{1.3} \quad + l_{2.3} \quad - \quad \dots - l_{3.(s-1)} - l_{3.s} \quad \} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-x_{1.2} - x_{1.3} \quad - \dots + (s\text{-}1)\,x_{1.(s-1)} - x_{1.s} \quad - \\
\quad - \{l_{1.(s-1)} + l_{2.(s-1)} + l_{3.(s-1)} + \dots \quad - l_{(s-1).s}\} = 0 \\
-x_{1.2} - \quad x_{1.3} \quad - \dots - x_{1.(s-1)} \quad + (s\text{-}1)x_{1.} - \\
\quad - \{l_{1.s} \quad + l_{2.} \quad + l_{3.} \quad + \dots \quad + l_{(s-1).s}\} = 0
\end{array}\right\} \quad (604)$$

ar sumu nolīdzinājumu

$$x_{1.2}+x_{1.3}+\dots+x_{1.(s-1)}+x_{1.} - \{l_{1.2}+l_{1.3}+\dots+l_{1.(s-1)}+l_{1.s}\} = 0 \qquad (605).$$

Pieskaitot šo sumu nolīdzinājumu atsevišķiem normalnolīdzinājumiem, veidojam nolīdzinājumus, no kuriem atvasinamas šādas meklēto leņķu tiešai noteikšanai derīgās vispārējās formulas

$$\left.\begin{array}{l}
x_{1.2} \;= \dfrac{2\,l_{1.2} \;+(l_{1.3}-l_{2.3}) \;+\dots+(l_{1.(s-1)}-l_{2.(s-1)})+(l_{1.s} \;-l_{2.s})}{s} \\[2ex]
x_{1.} \;\;= \dfrac{2\,l_{1.3} \;+(l_{1.2}+l_{2.3}) \;+\dots+(l_{1.(s-1)}-l_{3.(s-1)})+(l_{1.s} \;-l_{3.s})}{s} \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[1ex]
x_{1.(s-1)} = \dfrac{2\,l_{1.(s-1)}+(l_{1.2}+l_{2.(s-1)})+(l_{1.3}+l_{3.(s.1)})+\dots+(l_{1.s} \;-l_{(s-1).s})}{s} \\[2ex]
x \quad\;\; = \dfrac{2\,l_{1.s} \;+(l_{1.2}+l_{2.s}) \;+(l_{1.3}+l_{3.s}) \;+\dots+(l_{1.(s-1)}+l_{(s-1).s})}{s}
\end{array}\right\} (606).$$

Attiecībā uz šīm formulām piezīmējam sekojošo. Katrs sistemas (600) leņķis ir nosacīts ar vienu uz to attiecīgo tiešo novērojumu, bet bez tam vēl (s—2) dažādos variantos izsakams pārējo novērojumu sumu vai starpību veidā. Kā rāda formulas (606), atbilstošais izlīdzinātais leņķis nosakams veidojot minētā tiešā novērojuma un uz to pašu leņķi attiecīgo novērojumu sumu un starpību vispārējo aritmetisko vidējo, pie kam, pieņemot šīm sumām un starpībām svarus 1, tiešam novērojumam piešķirams svars 2.

Kas zīmējas uz noteiktības aprēķinu, tad pēc izlīdzināto leņķu x atrašanas, ar kļūdu nolīdzinājumiem (603) aizrādītā veidā nosakami izlabojumi v, lai ar tiem aprēķinātu sumu [vv].

Tā kā s virzienu savstarpējā orientējuma noteikšanai visās kombinacijās izmērīto leņķu kopskaits ir $\frac{s(s-1)}{2}$, bet neatkarīgo leņķu skaits ir $(s-1)$, lieko novērojumu paliek

$$\frac{s(s-1)}{2} - (s-1) = \frac{(s-1)(s-2)}{2} \quad \ldots\ldots \quad (607).$$

Tā tad svara vienības novērojuma, t. i. mērīta leņķa, vidējā kļūda nosakama pēc formulas

$$(m) = \pm \sqrt{\frac{2[vv]}{(s-1)(s-2)}} \quad \ldots\ldots \quad (608).$$

Katrs ar attiecīgo formulu (606) noteiktais izlīdzinātais leņķis uzskatams par 2s mērītu leņķu linearu funkciju ar visiem argumentiem vienādo koeficientu $\frac{1}{s}$. Tā tad, pieņemot, ka novērojumi 1 notikuši ar svaru 1, izlīdzināta leņķa x svars ir

$$(p_x) = \frac{1}{2s\left(\frac{1}{s}\right)^2} = \frac{s}{2} \quad \ldots\ldots \quad (609);$$

tam atbilst izlīdzināta leņķa vidējā kļūda

$$(m_x) = \pm \frac{(m)}{\sqrt{\frac{s}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{4[vv]}{s(s-1)(s-2)}} \quad \ldots \quad (610).$$

No izlīdzinātiem leņķiem var pāriet uz stariem 1, 2, 3, ..., $(s-1)$, s atbilstošiem izlīdzinātiem virzieniem resp. šo virzienu paņēmienu

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots,\ x_{s-1},\ x_s \quad \ldots\ldots \quad (611).$$

Izsakot atsevišķos izlīdzinātos leņķus (602) kā attiecīgo virzienu (611) starpības, veidojam izteiksmes

$$\left.\begin{array}{ll} x_{1.2} & = x_2 - x_1 \\ x_{1.3} & = x_3 - x_1 \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ x_{1.(s-1)} & = x_{s-1} - x_1 \\ x_{1.s} & = x_s - x_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (612).$$

No otras puses, novērotos leņķus (601) var iedomāties papildinātus ar šādiem

$$\left.\begin{array}{llll} l_{1.1} = 0 & & & \\ l_{2.1} = -l_{1.2}, & l_{2.2} = 0 & & \\ l_{3.1} = -l_{1.3}, & l_{3.2} = -l_{2.3}, & l_{3.3} = 0 & \\ \dots\dots & & & \\ l_{(s-1).1} = -l_{1.(s-1)}, & l_{(s-1).2} = -l_{2.(s-1)}, & l_{(s-1).3} = -l_{3.(s-1)}, \dots & \\ & \dots, l_{(s-1).(s-1)} = 0 & & \\ l_{s.1} = -l_{1.s}, & l_{s.2} = -l_{2.s}, & l_{s.3} = -l_{3.s}, & \dots \\ & \dots, l_{s.(s-1)} = -l_{(s-1).s}, & l_{s.s} = 0 & \end{array}\right\} \quad (613).$$

Tad formulas (606) rakstamas šādā pārveidojumā:

$$\left.\begin{array}{l} x_{1.2} = \dfrac{l_{1.1} + l_{1.2} + l_{1.3} + \dots + l_{1.(s-1)} + l_{1.s}}{s} - \dfrac{l_{2.1} + l_{2.2} + l_{2.3} + \dots + l_{2.(s-1)} + l_{2.s}}{s} \\ x_{1.3} = \dfrac{l_{1.1} + l_{1.2} + l_{1.3} + \dots + l_{1.(s-1)} + l_{1.s}}{s} - \dfrac{l_{3.1} + l_{3.2} + l_{3.3} + \dots + l_{3.(s-1)} + l_{3.s}}{s} \\ \dots\dots \\ x_{1.(s-1)} = \dfrac{l_{1.1} + l_{1.2} + l_{1.3} + \dots + l_{1.(s-1)} + l_{1.s}}{s} - \dfrac{l_{(s-1).1} + l_{(s-1).2} + l_{(s-1).3} + \dots + l_{(s-1).(s-1)} + l_{(s-1).s}}{s} \\ x_{1.s} = \dfrac{l_{1.1} + l_{1.2} + l_{1.3} + \dots + l_{1.(s-1)} + l_{1.s}}{s} - \dfrac{l_{s.1} + l_{s.2} + l_{s.3} + \dots + l_{s.(s-1)} + l_{s.s}}{s} \end{array}\right\} (614).$$

Kā redzams, šīs formulas izsaka katru izlīdzinātu leņķi kā leņķu (601) un (613) divu funkciju starpību, pie kam pirmā funkcija ir visās formulās vienāda. Ievērojot to un salīdzinot atbilstošās izteiksmes (612) un (614), nākam pie slēdziena, ka

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{l_{1.1} + l_{1.2} + l_{1.3} + \dots + l_{1.(s-1)} + l_{1.s}}{s} \\ x_2 = -\dfrac{l_{2.1} + l_{2.2} + l_{2.3} + \dots + l_{2.(s-1)} + l_{2.s}}{s} \\ x_3 = -\dfrac{l_{3.1} + l_{3.2} + l_{3.3} + \dots + l_{3.(s-1)} + l_{3.s}}{s} \end{array}\right\} \quad (615).$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{s-1} &= -\frac{l_{(s-1).1}+l_{(s-1).2}+l_{(s-1).3}+\dots+l_{(s-1).(s-1)}+l_{(s-1).s}}{s}\\
x_s &= -\frac{l_{s.1}+l_{s.2}+l_{s.3}+\dots+l_{s.(s-1)}+l_{s.s}}{s}
\end{aligned}\right\}
$$

Ar šiem virzieniem veidotais pilnīgais virzienu paņēmiens (611) uzskatams par stacijā visās kombinacijās izmērīto leņķu izlīdzināšanas rezultatu.

Minētos virzienus kā leņķu l funkcijas noteicošās formulas (615) visas veidotas pēc viena parauga. Tā tad šeit pieņemtos apstākļos, kad visi leņķu mērijumi notikuši ar vienādu svaru 1, arī visiem atrastiem virzieniem ir vienāds svars. Ievērojot to, no formulām (612) seko, ka izlīdzināta virziena svars ir

$$p_x = 2\,(p_x) \quad \dots\dots\dots \quad (616),$$

kur (p_x) apzīmē ar formulu (609) noteikto izlīdzināta leņķa svaru. Ieliekot izteiksmi (609), atrodam

$$p_x = s \quad \dots\dots\dots \quad (617).$$

Sakarā ar to izlīdzināta virziena vidējā kļūda ir

$$m_x = \pm\frac{(m)}{\sqrt{s}} = \pm\sqrt{\frac{2\,[vv]}{s(s-1)(s-2)}} \quad \dots\dots \quad (618).$$

Jāievēro, ka arī šinī formulā, tāpat kā formulās (608) nn (610), suma [vv] zīmējas nevis uz virzieniem, bet uz atbilstošiem leņķiem. Tā tad gadijumā, kad, izlīdzinot stacijā visās kombinacijās izmērītos leņķus, no tiem atvasināts pilnīgais virzienu paņēmiens (611), sumas [vv] noteikšanas nolūkā jānosaka atrastam virzienu paņēmienam atbilstošie izlīdzinātie leņķi, veidojot ar formulām (612) noteiktās virzienu starpības. Izejot no šiem izlīdzinātiem leņķiem, tad parastā kārtā nosakami atsevišķo novēroto leņķu izlabojumi v un veidojama suma [vv].

Šo pašu sumu [vv] var atrast arī citā ceļā. Lai atvasinātu attiecīgo formulu, iedomājamies kļūdu nolīdzinājumu (603) nezinamos atvietotus ar atbilstošām virzienu starpībām (612). Tad kļūdu nolīdzinājumi (603) pāriet šādā veidā:

$$
\left.\begin{aligned}
&-x_1+x_2 && -l_{1.2} = v_{1,2}\\
&-x_1 \quad +x_3 && -l_{1.3} = v_{1.3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-x_1 \qquad +x_{s-1} && -l_{1.(s-1)} = v_{1.(s-1)}\\
&-x_1 \qquad\qquad +x_s && -l_{1.s} = v_{1.s}
\end{aligned}\right|
$$

$$\left.\begin{aligned}
-x_2 + x_3 \qquad\qquad & - l_{2.3} = v_{2.3} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
-x_2 \qquad + x_{s-1} \qquad & - l_{2.(s-1)} = v_{2.(s-1)} \\
-x_2 \qquad\qquad + x_s & - l_{2.s} = v_{2.s} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
-x_3 + x_{s-1} \qquad & - l_{3.(s-1)} = v_{3.(s-1)} \\
-x_3 \qquad\qquad + x_s & - l_{3.s} = v_{3.s} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
-x_{s-1} + x_s & - l_{(s-1).s} = v_{(s-1).s}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (619).$$

Atbilstošie normalnolīdzinājumi ir

$$\left.\begin{aligned}
(s-1)x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_{s-1} - x_s - L_1 &= 0 \\
-x_1 + (s-1)x_2 - x_3 - \dots - x_{s-1} - x_s - L_2 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + (s-1)x_3 - \dots - x_{s-1} - x_s - L_3 &= 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
-x_1 - x_2 - x_3 - \dots + (s-1)x_{s-1} - x_s - L_{s-1} &= 0 \\
-x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_{s-1} + (s-1)x_s - L_s &= 0
\end{aligned}\right\} (620),$$

kur

$$\left.\begin{aligned}
-L_1 &= l_{1.2} + l_{1.3} + \dots + l_{1.(s-1)} + l_{1.s} = \\
&= l_{1.1} + l_{1.2} + l_{1.3} + \dots + l_{1.(s-1)} + l_{1.s} \\
-L_2 &= -l_{1.2} + l_{2.3} + \dots + l_{2.(s-1)} + l_{2.s} = \\
&= l_{2.1} + l_{2.2} + l_{2.3} + \dots + l_{2.(s-1)} + l_{2.s} \\
-L_3 &= -l_{1.3} - l_{2.3} + \dots + l_{3.(s-1)} + l_{3.s} = \\
&= l_{3.1} + l_{3.2} + l_{3.3} + \dots + l_{3.(s-1)} + l_{3.s} \\
\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-L_{s-1} &= -l_{1.(s-1)} - l_{2.(s-1)} - l_{3.(s-1)} - \dots + l_{(s-1).s} = \\
&= l_{(s-1).1} + l_{(s-1).2} + l_{(s-1).3} + \dots + l_{(s-1).(s-1)} + l_{(s-1).s} \\
-L_s &= -l_{1.s} - l_{2.s} - l_{3.s} - \dots - l_{(s-1).s} = \\
&= l_{s.1} + l_{s.2} + l_{s.3} + \dots + l_{s.(s-1)} + l_{s.s}
\end{aligned}\right\} (621).$$

Katrā kļūdu nolīdzinājumā (619) ieiet divi nezinami, pie tam ar savu starpību. Šīs starpības nemainas, ja visus nezinamos izmaina par kādu brīvi izvēlētu vienādu lielumu. Tas nozīmē, ka ir ne tikai viena, bet bezgalīgi daudzas minētiem nolīdzinājumiem atbilstošas nezinamu sistemas, pie kam tomēr visās sistemās atbilstošās nezinamo starpības ir vienādas. Tā tad izlīdzinātā virzienu paņēmiena noteikšana uz kļūdu nolīdzinājumu (619) pamata ir tanī ziņā nenoteikts uzdevums, ka nav nosakams meklētā virzienu paņēmiena orientējums. Šī uzdevu-

Sakarā ar to tad formulu (615) un (628) vietā stājas šādas:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= -\frac{\lambda_{1.1} + \lambda_{1.2} + \lambda_{1.3} + \ldots + \lambda_{1.(s-1)} + \lambda_{1.s}}{s} \\
\xi_2 &= -\frac{\lambda_{2.1} + \lambda_{2.2} + \lambda_{2.3} + \ldots + \lambda_{2.(s-1)} + \lambda_{2.s}}{s} \\
\xi_3 &= -\frac{\lambda_{3.1} + \lambda_{3.2} + \lambda_{3.3} + \ldots + \lambda_{3.(s-1)} + \lambda_{3.s}}{s} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_{s-1} &= -\frac{\lambda_{(s-1).1} + \lambda_{(s-1).2} + \lambda_{(s-1).3} + \ldots + \lambda_{(s-1).(s-1)} + \lambda_{(s-1).s}}{s} \\
\xi_s &= -\frac{\lambda_{s.1} + \lambda_{s.2} + \lambda_{s.3} + \ldots + \lambda_{s.(s-1)} + \lambda_{s.s}}{s}
\end{aligned}\right\} \quad (630),$$

$$[vv] = \left\{\begin{aligned}
\lambda_{1.2}^2 + \lambda_{1.3}^2 + \ldots + \lambda_{1.(s-1)}^2 + \lambda_{1.s}^2 + \\
+ \lambda_{2.3}^2 + \ldots + \lambda_{2.(s-1)}^2 + \lambda_{2.s}^2 + \\
+ \ldots + \lambda_{3.(s-1)}^2 + \lambda_{3.s}^2 + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ \lambda_{(s-1).s}^2
\end{aligned}\right\} - s\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \ldots + \xi_{s-1}^2 + \xi_s^2\} \quad (631);$$

un meklētie izlīdzinātie virzieni ir

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= (x_1) + \xi_1 \\
x_2 &= (x_2) + \xi_2 \\
x_3 &= (x_3) + \xi_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{s-1} &= (x_{s-1}) + \xi_{s-1} \\
x_s &= (x_s) + \xi_s
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (632).$$

Pāreja no izmērītiem leņķiem l uz atbilstošiem elementiem λ izdarama šādā veidā. Izrakstam rindās 1), 2), 3), ..., (s — l)), s) izteiksmēs (615) ieejošos leņķus l, pie kam $l_{1.1}$, $l_{2.2}$, $l_{3.3}$, $l_{(s-1).(s-1)}$, $l_{s.s}$ atvietojam ar nullēm, bet $l_{2.1}$, $l_{3.1}$, $l_{3.2}$, ..., $l_{(s-1).1}$, $l_{(s-1).2}$, $l_{(s-1).3}$, ..., $l_{s.1}$, $l_{s.2}$, $l_{s.3}$, ..., $l_{s.(s-1)}$ ar $-l_{1.2}$, $-l_{1.3}$, $-l_{2.3}$, ..., $-l_{1.(s-1)}$, $-l_{2.(s-1)}$, $-l_{3.(s-1)}$, ..., $-l_{1.s}$, $-l_{2.s}$, $-l_{3.s}$, ..., $-l_{(s-1).s}$:

$$\left.\begin{array}{llllllll}
1) & 0 & , l_{1.2} & , l_{1.3} & , \ldots, & l_{1.(s-1)}, & l_{1.} \\
2) & -l_{1.2} & , 0 & , l_{2.3} & , \ldots, & l_{2.(s-1)}, & l_{2.s} \\
3) & -l_{1.3} & , -l_{2.3} & , 0 & , \ldots, & l_{3.(s-1)}, & l_{3.s} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(s-l)) & -l_{1.(s-1)}, & -l_{2.(s-1)}, & -l_{3.(s-1)}, & \ldots, & 0 & , l_{(s-1).s} \\
s) & -l_{1.s} & , -l_{2.s} & , -l_{3.s} & , \ldots, & -l_{(s-1).s}, & 0
\end{array}\right\} \quad (633).$$

Katrā rindā visiem locekļiem pieskaitam attiecīgo apakšā minēto pastāvīgo leņķi

$$\left.\begin{array}{ll} \text{rindā } 1) & (x_1) \\ \text{,, } \quad 2) & (x_2) \\ \text{,, } \quad 3) & (x_3) \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \text{rindā } (s-1)) & (x_{s-1}) \\ \text{,, } \quad s) & (x_s) \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (634),$$

pie kam šie leņķi ir meklēto izlīdzināto virzienu $x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_{s-1}$, x_s tuvinās vērtības. Tad sistema (633) pāriet veidā:

$$\left.\begin{array}{lllll}
1) & (x_1) + 0, & (x_1) + l_{1.2}, & (x_1) + l_{1.3}, & \dots \\
 & \dots, (x_1) + l_{1.(s-1)}, & (x_1) + l_{1.s} & & \\
2) & (x_2) - l_{1.2}, & (x_2) + 0, & (x_2) + l_{2.3}, & \dots \\
 & \dots, (x_2) + l_{2.(s-1)}, & (x_2) + l_{2.s} & & \\
3) & (x_3) - l_{1.3}, & (x_3) - l_{2.3}, & (x_3) + 0, & \dots \\
 & \dots, (x_3) + l_{3.(s-1)}, & (x_3) + l_{3.s} & & \\
\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \\
(s-1)) & (x_{s-1}) - l_{1.(s-1)}, & (x_{s-1}) - l_{2.(s-1)}, & (x_{s-1}) - l_{3.(s-1)}, & \dots \\
 & \dots, (x_{s-1}) + 0, & (x_{s-1}) + l_{(s-1).s} & & \\
s) & (x_s) - l_{1.s}, & (x_s) - l_{2.s}, & (x_s) - l_{3.s}, & \dots \\
 & \dots, (x_s) - l_{(s-1).s}, & (x_s) + 0 & &
\end{array}\right\} (635).$$

Ievērojot (629), izrādas, ka šī sistema identiska ar sekojošo:

$$\left.\begin{array}{lllll}
1) & (x_1) - \lambda_{1.1}, & (x_2) - \lambda_{2.1}, & (x_3) - \lambda_{3.1}, & \dots \\
 & \dots, (x_{s-1}) - \lambda_{(s-1).1}, & (x_s) - \lambda_{s.1} & & \\
2) & (x_1) - \lambda_{1.2}, & (x_2) - \lambda_{2.2}, & (x_3) - \lambda_{3.2}, & \dots \\
 & \dots, (x_{s-1}) - \lambda_{(s-1).2}, & (x_s) - \lambda_{s.2} & & \\
3) & (x_1) - \lambda_{1.3}, & (x_2) - \lambda_{2.3}, & (x_3) - \lambda_{3.3}, & \dots \\
 & \dots, (x_{s-1}) - \lambda_{(s-1).3}, & (x_s) - \lambda_{s.3} & & \\
\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \\
(s-1)) & (x_1) - \lambda_{1.(s-1)}, & (x_2) - \lambda_{2.(s-1)}, & (x_3) - \lambda_{3.(s-1)}, & \dots \\
 & \dots, (x_{s-1}) - \lambda_{(s-1).(s-1)}, & (x_s) - \lambda_{s.(s-1)} & & \\
s) & (x_1) - \lambda_{1.s}, & (x_2) - \lambda_{2.s}, & (x_3) - \lambda_{3.s}, & \dots \\
 & \dots, (x_{s-1}) - \lambda_{(s-1).s}, & (x_s) - \lambda_{s.s} & &
\end{array}\right\} (636).$$

Salīdzinot šīs sistemas vertikalos stabiņus veidojošos locekļus ar izteiksmēm (630), redzam, ka sistemas (636) vertikalo stabiņu aritmetiskie vidējie ir

$$(x_1) + \xi_1, (x_2) + \xi_2, (x_3) + \xi_3, \ldots\ldots, (x_{s-1}) + \xi_{s-1}, (x_s) + \xi_s \quad (637);$$

tā tad, ievērojot formulas (632), izrādas, ka tādā veidā atrasti meklētie izlīdzinātie virzieni x_1, x_2, x_3, ..., x_{s-1}, x_s.

Beidzot vēl piezīmējam, ka sumējot elementus $-\lambda$ pa sistemas (636) vertikaliem stabiņiem un horizontalām rindām, tām sumām, kur ieiet viens un tas pats $-\lambda_{i.i}$ tipa elements, ir vienādas absolutas vērtības, bet pretējas zīmes.

§ 52. Piemērs.

Visās kombinacijās izmērīti skatamiem punktiem P_1, P_2, P_3, P_4 atbilstošo virzienu ieslēgtie leņķi

	P_2	P_3	P_4
P_1	62°43'18,7"	141°15'09,2"	202°06'24,0"
P_2		78 31 52,8	139 23 08,3
P_3			60 51 13,6

Uzskatot par meklētiem lielumiem no punktam P_1 atbilstošā virziena skaitītos izlīdzinātos leņķus $x_{1.2}$, $x_{.3}$, $x_{.4}$, nosakam tos pēc formulām (606):

$$\begin{aligned}
l_{1.2} &= 62^0 43' 18{,}7'' \\
,, &= 18{,}7 \\
l_{1.3} - l_{2.3} &= 16{,}4 \\
l_{1.4} - l_{2.4} &= \underline{15{,}7} \\
& \quad 69{,}5'' \qquad s = 4 \\
& \qquad x_{1.2} = 62^0 43' 17{,}38''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{1.3} &= 141^0 15' 09{,}2'' \\
,, &= 09{,}2 \\
l_{1.4} - l_{3.4} &= 10{,}4 \\
l_{1.2} + l_{2.3} &= \underline{11{,}5} \\
& \quad 40{,}3'' \qquad s = 4 \\
& \qquad x_{1.3} = 141^0 15' 10{,}08''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{1.4} &= 202^0 06' 24{,}0'' \\
,, &= 24{,}0 \\
l_{1.2} + l_{2.4} &= 27{,}0 \\
l_{1.3} + l_{3.4} &= \underline{22{,}8} \\
& \quad 97{,}8'' \qquad s = 4 \\
& \qquad x_{1.4} = 202^0 06' 24{,}45''
\end{aligned}$$

Ar atrastiem $x_{1.2}$, $x_{1.3}$, $x_{1.4}$ aprēķinam pārējo izmērīto leņķu izlīdzinātās vērtības

$$x_{2.3} = x_{1.3} - x_{1.2} = 78^0 31' 52{,}70''$$
$$x_{2.4} = x_{1.4} - x_{1.2} = 139 \quad 23 \quad 07{,}07$$
$$x_{3.4} = x_{1.4} - x_{1.3} = 60 \quad 51 \quad 14{,}37$$

Salīdzinot izlīdzinātos leņķus ar atbilstošiem izmērītiem, nosakam atsevišķo izmērīto leņķu izlabojumus v un veidojam sumu [vv]:

$$\begin{array}{ll} v_{1.2} = x_{1.2} - l_{1.2} = -1{,}32'' & v_{1.2}^2 = 1{,}742 \\ v_{1.3} = x_{1.3} - l_{1.3} = +0{,}88 & v_{1.3}^2 = 0{,}774 \\ v_{1.4} = x_{1.4} - l_{1.4} = +0{,}45 & v_{1.4}^2 = 0{,}203 \\ v_{2.3} = x_{2.3} - l_{2.3} = -0{,}10 & v_{2.3}^2 = 0{,}010 \\ v_{2.4} = x_{2.4} - l_{2.4} = -1{,}23 & v_{2.4}^2 = 1{,}513 \\ v_{3.4} = x_{3.4} - l_{3.4} = +0{,}77 & \underline{v_{3.4}^2 = 0{,}593} \\ & [vv] = 4{,}835 \end{array}$$

Tā tad pēc formulām (608) un (610) atrodam:
svara vienības novērojuma (neizlīdzināta izmērīta leņķa) vidējo kļūdu

$$(m) = \pm \sqrt{\frac{2 \times 4{,}835}{(4-1)(4-2)}} = \pm 1{,}27''$$

un izlīdzināto leņķu $x_{1.2}$, $x_{1.3}$, $x_{1.4}$ vidējo kļūdu

$$(m_x) = \pm \sqrt{\frac{4 \times 4{,}835}{4(4-1)(4-2)}} = \pm 0{,}90''$$

Pieņemot skatamam punktam P_1 atbilstošo nulles virzienu, ar atrastiem leņķiem $x_{1.2}$, $x_{1.3}$, $x_{1.4}$ veidojam izlīdzināto pilnīgo virzienu paņēmienu:

P_1	P_2	P_3	P_4
0°00'00''	62°43'17,38''	141°15'10,08''	202°06'24,45''

Atrisināsim šo pašu uzdevumu vēl otrā variantā, veidojot izlīdzināto virzienu paņēmienu bez iepriekšējas izlīdzināto leņķu noteikšanas, bet tieši izejot no izmērītiem leņķiem. Tam nolūkam pēc sistemas (633) parauga veidojam šādus četrus no izmērītiem leņķiem atvasinātos pilnīgos virzienu paņēmienus:

P_1	P_2	P_3	P_4
0°00'00,0''	62°43'18,7''	141°15'09,2''	202°06'24,0''
— 62 43 18,7	0 00 00,0	78 31 52,8	139 23 08,3
— 141 15 09,2	— 78 31 52,8	0 00 00,0	60 51 13,6
— 202 06 24,0	— 139 23 08,3	— 60 51 13,6	0 00 00,0

Tos ar (635) aizrādītā kārtā pagriežam par meklēto izlīdzināto virzienu tuvinās vērtības izteicošiem leņķiem, pieņemot tos

$$(x_1) = 0^0 00'$$
$$(x_2) = 62\ 43$$
$$(x_3) = 141\ 15$$
$$(x_4) = 202\ 06$$

Tādā veidā dabūtos pagrieztos virzienu paņēmienus rakstot sistemai (636) atbilstošā veidā, katra vertikala stabiņa augšā atzīmējam to tuvino vērtību (x), kas ieiet šī stabiņa visos atsevišķos locekļos. Neatkārtojot šīs tuvinās vērtības pārējās horizontalās rindās, tur rakstam tikai $-\lambda$ tipa locekļus, sumējam tos pa horizontalām rindām un pa vertikaliem stabiņiem, un veidojam vertikalo stabiņu vidējos ξ. Tos pieskaitot atbilstošām pieņemtām virzienu tuvinām vērtībām, beidzot atrodam izlīdzinātos virzienus. Minētie aprēķini parādīti sekojošā tabulā:

	P_1	P_2	P_3	P_4	$-\Sigma$
(x):	$0^0 00'$	$62^0 43'$	$141^0 15'$	$202^0 06'$	
	00,0″	+18,7″	+09,2″	+24,0″	+51,9″
	−18,7	00,0	−07,2	+08,3	−17,6
	−09,2	+07,2	00,0	+13,6	+11,6
	−24,0	−08,3	−13,6	00,0	−45,9
Σ:	−51,9″	+17,6″	−11,6″	+45,9″	00,0″
ξ:	−12,98″	+04,40″	−02,90″	+11,47″	
x:	$359^0 59' 47{,}02''$;	$62^0 43' 04{,}40''$;	$141^0 14' 57{,}10''$;	$202^0 06' 11{,}47''$	

Lai pārietu uz skatamam punktam P_1 atbilstošo nulles virzienu, atrasto izlīdzināto virzienu paņēmienu pagriežam par $+12{,}98''$, un rakstam galīgā veidā:

P_1	P_2	P_3	P_4
$0^0 00' 00{,}00''$	$62^0 43' 17{,}38''$	$141^0 15' 10{,}08''$	$202^0 06' 24{,}45''$

Kā redzams, šis rezultats pilnīgi saskan ar agrāk pēc citāda paņēmiena atrasto.

Veidojot atrasto izlīdzināto virzienu starpības, nosakami izlīdzinātie leņķi

$$x_{1.2} = x_2 - x_1 = 62^0 43' 17{,}38''$$
$$x_{1.3} = x_3 - x_1 = 141\ 15\ 10{,}08$$
$$x_{1.4} = x_4 - x_1 = 202\ 06\ 24{,}45$$

$$x_{2.3} = x_3 - x_2 = 78^0\ 31'\ 52{,}70''$$
$$x_{2.4} = x_4 - x_2 = 139\ \ 23\ \ 07{,}07$$
$$x_{3.4} = x_4 - x_3 = 60\ \ 51\ \ 14{,}37$$

un ar tiem tad agrāk aizrādītā kārtā nosakama noteiktības aprēķinam vajadzīgā suma [vv]. Parādīsim vēl, kā šī suma [vv] aprēķinama pēc formulas (631), tieši izejot no izmērītiem leņķiem atbilstošiem elementiem λ un to aritmetiskiem vidējiem ξ. Smeļot tam nolūkam vajadzīgos datus no izlīdzinātā virzienu paņēmiena noteikšanai veidotās tabulas, izrakstam un aprēķinam:

$$\begin{array}{llll}
\lambda_{1.2} = +18{,}7'' & \lambda_{1.2}^2 = 349{,}69 & \xi_1 = -12{,}98'' & \xi_1^2 = 168{,}480 \\
\lambda_{1.3} = +09{,}2 & \lambda_{1.3}^2 = 84{,}64 & \xi_2 = +04{,}40 & \xi_2^2 = 19{,}360 \\
\lambda_{1.4} = +24{,}0 & \lambda_{1.4}^2 = 576{,}00 & \xi_3 = -02{,}90 & \xi_3^2 = 8{,}410 \\
\lambda_{2.3} = -07{,}2 & \lambda_{2.3}^2 = 51{,}84 & \xi_4 = +11{,}47 & \xi_4^2 = \underline{131{,}561} \\
\lambda_{2.4} = +08{,}3 & \lambda_{2.4}^2 = 68{,}89 & & [\xi\xi] = 327{,}811 \\
\lambda_{3.4} = +13{,}6 & \lambda_{3.4}^2 = \underline{184{,}96} & & s = 4 \\
 & [\lambda\lambda] = 1316{,}02 & & s\,[\xi\xi] = 1311{,}244
\end{array}$$

Tā tad pēc formulas (631)

$$[vv] = 1316{,}02 - 1311{,}244 = 4{,}776$$

kas apmierinoši saskan ar agrāk citā ceļā atrasto atbilstošo rezultatu.

Beidzot vēl aprēķinam pēc formulas (618) izlīdzināta virziena vidējo kļūdu

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{2 \times 4{,}776}{4(4-1)(4-2)}} = \pm 0{,}63''$$

§ 53. Triangulacija pēc Schreiber'a metodes.

Mēs redzējām, ka visās kombinacijās novērojot no stacijas izejošo staru ieslēgtos leņķus, šo novērojumu izlīdzināšanas rezultatā veidojams viens uz novērotiem stariem attiecīgs pilnīgs virzienu paņēmiens. Triangulacijas tīkla vispārējā izlīdzināšanā tas tad lietojams kā stacijā tieši novērots virzienu paņēmiens. Tā tad gadijumā, kad tīkla visās stacijās svarā krītošie leņķi izmērīti visās kombinacijās, tīkls izlīdzināms kā tāds ar izmērītiem virzieniem. Pagaidam nepakavējoties pie tādos apstākļos pielietojamā izlīdzināšanas paņēmiena, iztirzāsim jautājumu par svariem, kuri piešķirami no visās kombinacijās novērotiem leņķiem atvasinātam pilnīgam virzienu paņēmienam resp. tā atsevišķiem virzieniem.

51-ā paragrafā iztirzājot visās kombinacijās izmērītu leņķu izlīdzināšanu, atradam, ka stacijas izlīdzinātiem virzieniem visiem ir vienāds svars s, pie kam pieņēmam tādu svaru sistemu, kur ar vienādu noteiktību notikušiem leņķu novērojumiem pienākas svars 1.

Pārejot uz citu svaru sistemu, kur novērotiem leņķiem piešķiram svaru (p), visi pārējie svari jāreizina ar attiecību (p) : 1. Tā tad tādā svaru sistemā izlīdzinātam virzienam atbilstošais svars ir

$$p_x = (p)s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (638).$$

Ja tīkla visās stacijās atsevišķo leņķu novērojumi notikuši ar vienādu noteiktību, t. i. ar vienādu svaru (p), tad izlīdzināto virzienu svaru noteicošās izteiksmes (638) pirmais faktors ir visām stacijām vienāds. Kas zīmējas uz otro faktoru s, tad tas gan ir vienāds katras atsevišķas stacijas visiem virzieniem, bet dažādām stacijām ir vispārīgi dažāds. Tā tad nākam pie slēdziena, ka mērot atsevišķos leņķus visā tīklā ar vienādu noteiktību un atvasinot no leņķu novērojumiem atsevišķām stacijām atbilstošos izlīdzinātos pilnīgos virzienu paņēmienus, katra tāda paņēmiena atsevišķiem virzieniem ir gan vienādi svari, bet dažādu staciju virzienu paņēmienos šie svari ir vispārīgi dažādi.

Lai izvairītos no tīkla vispārējā izlīdzināšanā nevēlamās virzienu paņēmienu svaru dažādības, pēc Schreiber'a metodes novēroto leņķu noteiktību regulē tā, lai novēroto leņķu svari (p) būtu katrā atsevišķā stacijā vienādi, bet dažādās stacijās dažādi — pretēji proporcionali stacijas virzienu skaitam s. Ar to panākams, lai ar formulu (638) noteiktais izlīdzināta virziena svars p_x būtu visām stacijām vienāds.

Attiecībā uz leņķa novērojumam piešķiramo svaru (p) piezīmējam sekojošo. Leņķa atsevišķs novērojums uzskatams par leņķa abām malām atbilstošo virzienu atsevišķo novērojumu starpību, pie kam var pieņemt, ka abi virzienu novērojumi notikuši ar vienādu svaru p_0. Tad uz formulas (124) pamata leņķa atsevišķa novērojuma svars ir

$$(p_0) = \frac{p_0}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (639).$$

Ja, katram atsevišķam novērojumam notiekot ar minēto svaru (p_0), leņķis novērots 2n reizes, un par novērojuma rezultatu uzskata šo 2n atsevišķo novērojumu aritmetisko vidējo, tad šim novērojuma rezultatam ir svars

$$(p) = 2n\,(p_0) = 2n\,\frac{p_0}{2} = n\,p_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (640).$$

Uzskatot par leņķa resp. virziena atsevišķu novērojumu tādu, kas noticis tikai vienā tālskaša stāvoklī, pieņemsim virziena atsevišķa novērojuma svaru $p_0 = 1$. Tad ar formulu (640) noteiktais no 2n atsevišķiem novērojumiem atrasta novērota leņķa svars ir

$$(p) = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (641),$$

un izlīdzināta virziena svaru noteicošā formula (638) pāriet veidā

$$p_x = n\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (642).$$

Kas zīmējas uz leņķa atsevišķo novērojumu skaitu 2n, tad aiz pazīstamiem iemesliem katru leņķa novērojumu mēdz taisīt kā vienā, tā arī otrā tālskaša stāvoklī. Katrs abos tālskaša stāvokļos taisīts novērojums aptver divus šeit pieņemtā definējumā „vienkāršus" novērojumus. Tā tad n abos tālskaša stāvokļos taisīti leņķa novērojumi to aritmetiskā vidējā svara ziņā uzskatami par līdzvērtīgiem 2n vienkāršiem, tikai vienā tālskaša stāvoklī notikušiem novērojumiem. Sakarā ar to piezīmējam, ka abos tālskaša stāvokļos izdarītam leņķa novērojumam ir tas pats svars, kā tikai vienā tālskaša stāvoklī notikušam virziena novērojumam.

Šī iztirzājuma rezultatā nākam pie šāda slēdziena. Lai tīkla atsevišķo staciju virzienu paņēmieniem visiem būtu vienāds svars p_x, šo virzienu paņēmienu veidošanai vajadzīgos leņķus nosakot kā vairāku abos tālskaša stāvokļos notikušu atsevišķu novērojumu aritmetiskos vidējos, jāievēro sekojošais. Leņķu atsevišķie novērojumi izdarami visā tīklā ar vienādu noteiktību. Bet katrā atsevišķā stacijā leņķa noteikšanai abos tālskaša stāvokļos taisīto atsevišķo novērojumu skaits n jāpieņem ar formulu (642) noteiktā atkarībā no vēlamā, visā tīklā vienādā virzienu paņēmienu svara p_x un stacijas virzienu skaita s. Pie tam minētais svars p_x skaitams tādā sistemā, kur svars 1 zīmējas uz vienā tālskaša stāvoklī notikušu virziena novērojumu, resp. uz abos tālskaša stāvokļos notikušu leņķa novērojumu.

Pats par sevi saprotams, ka n jābūt veselam skaitlim. Tāpēc, sevišķi gadijumā, kad virzienu skaits s dažādās stacijās ļoti dažāds, dažreiz grūti panākams, lai tīkla izlīdzināšanā lietoto virzienu paņēmienu svari p_x būtu visās stacijās pilnīgi vienādi. Bet praktiski pietiek, ja šie svari tikai apmēram vienādi. Tādu svaru ievērošana izlīdzināšanas rēķinā nepadara nopietnas grūtības, vai pat var uzskatīt attiecīgos virzienu paņēmienus par atrastiem ar vienādiem svariem. Piem., nepalielinot pārmērīgi leņķu atsevišķo novērojumu skaitu n, panākams, lai svars p_x būtu visās stacijās apmēram vienāds ar 24, ja leņķu atsevišķo novērojumu skaitu n atkarībā no stacijas virzienu skaita s pieņem pēc sekojošās tabulas, kur svari p_x aprēķināti pieņemot par svara vienības novērojumu $\frac{\text{vienā}}{\text{abos}}$ tālskaša stāvok$\frac{\text{lī}}{\text{ļos}}$ notikušu $\frac{\text{virziena}}{\text{leņķa}}$ atsevišķu mērijumu:

s	n	$p_x = ns$
2	12	**24**
3	8	**24**
4	6	**24**
5	5	**25**
6	4	**24**
7	4	**28**
8	3	**24**

Leņķu mēramā instrumenta limba iedalijuma sistematisko kļūdu ietekmes mazināšanas nolūkā novērojumus iekārto tā, lai uz stacijas leņķiem attiecīgos atsevišķos novērojumos vienam un tam pašam virzienam atbilstošais nolasijums neatkārtotos vienā un tanī pašā limba vietā. Tāpēc atsevišķos novērojumus taisa dažādos limba stāvokļos, kurus turpmākos iztirzājumos apzīmēsim ar novērojumu sākuma virzienam atbilstošiem nolasijumiem. Pie tam jāievēro, ka taisot katru nolasijumu limba divās diametrali pretējās vietās (ar pirmo un otro mikroskopu), dotam virzienam atbilstošie nolasijumi notiek tanī pašā limba diametrā, ja šos nolasijumus taisa divos limba stāvokļos, kas atšķiras viens no otra par 180^0. Tāpēc tādi limba stāvokļi iedalijuma sistematisko kļūdu mazināšanas ziņā nav uzskatami par dažādiem.

Ievērojot visu to, leņķu mērīšana visās kombinacijās pēc Schreiber'a metodes notiek šādā kārtībā.

Stacijas s virzienu ieslēgtos $\frac{s(s-1)}{2}$ leņķus iedala grupās ar tādu aprēķinu, lai vienu grupu veidojošiem leņķiem nebūtu kopīgas malas: un lai tādu grupu skaits būtu stacijas virzienu skaitam s atbilstošais minimalais, t. i. (s — 1) vai s, skatoties pēc tā, vai s ir pārskaitlis vai nepārskaitlis.

Tā kā katrā atsevišķā grupā nav leņķu ar kopīgām malām, visus vienas grupas leņķus var novērot tanīs pašos limba stāvokļos; bet lai attiecīgie atsevišķie novērojumi nenotiktu vienādās limba vietās, šo novērojumu n serijas jātaisa tikpat daudzos dažādos limba stāvokļos. Ievērojot, ka tādi limba stāvokļi, kas atšķiras par 180^0, šinī ziņā nav uzskatami par dažādiem, uz vienas grupas leņķiem attiecīgo atsevišķo novērojumu serijas taisa limba stāvokļos, kurus izvēlas pēc šāda parauga

$$N,\ (N+1\omega),\ (N+2\omega),\ \ldots,\ (N+(n-2)\omega),\ (N+(n-1)\omega) \qquad (643),$$

kur

$$\omega = \frac{180^0}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (644).$$

Tālāk, apsverot, ka dažādu grupu leņķiem ir kopīgas malas, jāgādā, lai pēc parauga (643) nosacītās limba stāvokļu sistemas būtu dažādām leņķu grupām dažādas. Tāpēc (s — 1) resp. s leņķu grupu gadijumā atbilstošo atsevišķo novērojumu serijas taisa šādos limba stāvokļos:

$$\left.\begin{array}{l}
N_1,\ (N_1+1\omega), (N_1+2\omega), \ldots, (N_1+(n\text{-}2)\omega), (N_1+(n\text{-}1)\omega) \\
N_2,\ (N_2+1\omega), (N_2+2\omega), \ldots, (N_2+(n\text{-}2)\omega), (N_2+(n\text{-}1)\omega) \\
N_3,\ (N_3+1\omega), (N_3+2\omega), \ldots, (N_3+(n\text{-}2)\omega), (N_3+(n\text{-}1)\omega) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
N_{s-2},\ (N_{s-2}+1\omega), (N_{s-2}+2\omega), \ldots, (N_{s-2}+(n\text{-}2)\omega), (N_{s-2}+(n\text{-}1)\omega) \\
N_{s-1},\ (N_{s-1}+1\omega), (N_{s-1}+2\omega), \ldots, (N_{s-1}+(n\text{-}2)\omega), (N_{s-1}+(n\text{-}1)\omega) \\
\text{resp.} \\
N_1,\ (N_1+1\omega), (N_1+2\omega), \ldots, (N_1+(n\text{-}2)\omega), (N_1+(n\text{-}1)\omega) \\
N_2,\ (N_2+1\omega), (N_2+2\omega), \ldots, (N_2+(n\text{-}2)\omega), (N_2+(n\text{-}1)\omega) \\
N_3,\ (N_3+1\omega), (N_3+2\omega), \ldots, (N_3+(n\text{-}2)\omega), (N_3+(n\text{-}1)\omega) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
N_{s-1},\ (N_{s-1}+1\omega), (N_{s-1}+2\omega), \ldots, (N_{s-1}+(n\text{-}2)\omega), (N_{s-1}+(n\text{-}1)\omega) \\
N_s,\ (N_s+1\omega), (N_s+2\omega), \ldots, (N_s+(n\text{-}2)\omega), (N_s+(n\text{-}1)\omega)
\end{array}\right\} (645),$$

pie kam

$$\left.\begin{array}{l}
N_2 - N_1 = N_3 - N_2 = \ldots = N_{s-1} - N_{s-2} = \delta = \dfrac{\omega}{s-1} = \dfrac{180^0}{n(s-1)} \\
\text{resp.} \\
N_2 - N_1 = N_3 - N_2 = \ldots = N_s - N_{s-1} = \delta = \dfrac{\omega}{s} = \dfrac{180^0}{ns}
\end{array}\right\} (646).$$

Lai kompensētu zinamu sistematisku kļūdu avotu ietekmi, atsevišķos novērojumus taisa dubultnovērojumu veidā, novērojot „turp" un „atpakaļ", t. i. griežot alidadi no kreisā skatamā punkta uz labo, un pretējā virzienā. Bez tam vienā aritmetiskā vidējā apvienojamos n dubultnovērojumus taisa vienādā skaitā pirmā un otrā tālskaša stāvoklī. Ja n ir pārskaitlis, tad tam nolūkam pietiek taisīt $\frac{n}{2}$ dubultnovērojumus pirmā, un pārējos $\frac{n}{2}$ — otrā tālskaša stāvoklī, katrreiz novērojot „turp" un „atpakaļ" vienā un tanī pašā tālskaša stāvoklī. Turpretim nepārskaitļa n gadijumā katras grupas atsevišķie dubultnovērojumi vismaz vienā limba stāvoklī jātaisa tā, lai novērojumi „turp" un „atpakaļ" notiktu dažādos tālskaša stāvokļos.

Pēc šī metodes vispārējā iztirzājuma parādīsim dažas uz praksē parastiem gadijumiem attiecīgas Schreiber'a sastādītas limba stāvokļu tabulas, kur lietoti šādi apzīmējumi:

s — stacijas virzienu skaits,
n — veidojamo aritmetisko vidējo komponentu resp. atbilstošo limba stāvokļu skaits,
$S = \frac{s(s-1)}{2}$ — leņķu skaits,
$G = (s-1)$ resp. $G = s$ — leņķu grupu skaits,
$A = nG$ — leņķu grupu novērojumu skaits,
ω un δ — ar formulām (644) un (646) noteiktie leņķi,
l un g — leņķu un to grupu nosaukumi,
I un II — tālskaša stāvokļi.

Tabula 1.

$s = 2$ $S = 1$ $A = 12$ $\omega = 15^0$
$n = 12$ $G = 1$ $\delta = 15^0$

g_1: $l_{1,2}$

leņķi	I	I	I	I	I	I	II	II	II	II	II	II
$l_{1.2}$	0^0	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0	105^0	120^0	135^0	150^0	165^0

Tabula 2.

$s = 3$ $S = 3$ $A = 24$ $\omega = 22{,}5^0$
$n = 8$ $G = 3$ $\delta = 7{,}5^0$

g_1: $l_{1.2}$
g_2: $l_{1.3}$
g_3: $l_{2.3}$

leņķi	I	I	I	I	II	II	II	II
$l_{1.2}$	0^0	$22{,}5^0$	45^0	$67{,}5^0$	90^0	$112{,}5^0$	135^0	$157{,}5^0$
$l_{1.3}$	7,5	30	52,5	75	97,5	120	142,5	165
$l_{2.3}$	15	37,5	60	82,5	105	127,5	150	172,5

Tabula 3.

$s = 4 \quad S = 6 \quad A = 18 \quad \omega = 30^0$

$n = 6 \quad G = 3 \quad \delta = 10^0$

g_1: $l_{1.2}$, $l_{3.4}$

g_2: $l_{1.3}$, $l_{2.4}$

g_3: $l_{1.4}$, $l_{2.3}$

leņķi	I	I	I	II	II	II
$l_{1.2}$	0^0	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0
$l_{1.3}$	10	40	70	100	130	160
$l_{1.4}$	20	50	80	110	140	170
$l_{2.3}$	20	50	80	110	140	170
$l_{2.4}$	10	40	70	100	130	160
$l_{3.4}$	0	30	60	90	120	150

Tabula 4.

$s = 5 \quad S = 10 \quad A = 25 \quad \omega = 36^0$

$n = 5 \quad G = 5 \quad \delta = 7{,}2^0$

g_1: $l_{1.2}$, $l_{3.5}$ g_3: $l_{1.4}$, $l_{2.3}$

g_2: $l_{1.3}$, $l_{4.5}$ g_4: $l_{1.5}$, $l_{2.4}$

g_5: $l_{2.5}$, $l_{3.4}$

leņķi	I	I	I	II	II	II
$l_{1.2}$	0^0	36^0	72^0		108^0	144^0
$l_{1.3}$	7,2	43,2	79,2		115,2	151,2
$l_{1.4}$	14,4	50,4	86,4		122,4	158,4
$l_{1.5}$	21,6	57,6	93,6		129,6	165,6
$l_{2.3}$	14,4	50,4	86,4		122,4	158,4
$l_{2.4}$	21,6	57,6		$93{,}6^0$	129,6	165,6
$l_{2.5}$	28,8	64,8		100,8	136,8	172,8

leņķi	I	I	I	II	II	II
$l_{3.4}$	28,8^0	64,8^0		100,8^0	136,8^0	172,8^0
$l_{3.5}$	0	36		72	108	144
$l_{4.5}$	7,2	43,2		79,2	115,2	151,2

Tabula 5.

$s = 6$ $S = 15$ $A = 20$ $\omega = 45^0$
$n = 4$ $G = 5$ $\delta = 9^0$

g_1: $l_{1.2}$, $l_{3.4}$, $l_{5.6}$ g_3: $l_{1.4}$, $l_{2.6}$, $l_{3.5}$
g_2: $l_{1.3}$, $l_{2.5}$, $l_{4.6}$ g_4: $l_{1.5}$, $l_{2.4}$, $l_{3.6}$
g_5: $l_{1.6}$, $l_{2.3}$, $l_{4.5}$

leņķi	I	I	II	II
$l_{1.2}$	0^0	45^0	90^0	135^0
$l_{1.3}$	9	54	99	144
$l_{1.4}$	18	63	108	153
$l_{1.5}$	27	72	117	162
$l_{1.6}$	36	81	126	171
$l_{2.3}$	36	81	126	171
$l_{2.4}$	27	72	117	162
$l_{2.5}$	9	54	99	144
$l_{2.6}$	18	63	108	153
$l_{3.4}$	0	45	90	135
$l_{3.5}$	18	63	108	153
$l_{3.6}$	27	72	117	162

leņķi	I	I	II	II
$l_{4.5}$	36^0	81^0	126^0	171^0
$l_{4.6}$	9	54	99	144
$l_{5.6}$	0	45	90	135

Tabula 6.

$s = 7$ $S = 21$ $A = 28$ $\omega = 45^0$

$n = 4$ $G = 7$ $\delta = 6{,}4286^0$

$g_1: l_{1.2}, l_{3.7}, l_{4.6}$ $g_4: l_{1.5}, l_{2.4}, l_{6.7}$

$g_2: l_{1.3}, l_{4.7}, l_{5.}$ $g_5: l_{1.6}, l_{2.5}, l_{3.4}$

$g_3: l_{1.4}, l_{2.3}, l_{5.7}$ $g_6: l_{1.7}, l_{2.6}, l_{3.5}$

$g_7: l_{2.7}, l_{3.6}, l_{4.5}$

leņķi	I	I	II	II
$l_{1.2}$	0^0	45^0	90^0	135^0
$l_{1.3}$	6,4	51,4	96,4	141,4
$l_{1.4}$	12,9	57,9	102,9	147,9
$l_{1.5}$	19,3	64,3	109,3	154,3
$l_{1.6}$	25,7	70,7	115,7	160,7
$l_{1.7}$	32,1	77,1	122,1	167,1
$l_{2.3}$	12,9	57,9	102,9	147,9
$l_{2.4}$	19,3	64,3	109,3	154,3
$l_{2.5}$	25,7	70,7	115,7	160,7
$l_{2.6}$	32,1	77,1	122,1	167,1
$l_{2.7}$	38,6	83,6	128,6	173,6
$l_{3.4}$	25,7	70,7	115,7	160,7
$l_{3.5}$	32,1	77,1	122,1	167,1

leņķi	I	I	II	II
$l_{3.6}$	38,6⁰	83,6⁰	128,6⁰	173,6⁰
$l_{3.7}$	0	45	90	135
$l_{4.5}$	38,6	83,6	128,6	173,6
$l_{4.6}$	0	45	90	135
$l_{4.7}$	6,4	51,4	96,4	141,4
$l_{5.6}$	6,4	51,4	96,4	141,4
$l_{5.7}$	12,9	57,9	102,9	147,9
$l_{6.7}$	19,3	64,3	109,3	154,3

§ 54. Noteikumu nolīdzinājumi trigonometriskā tīklā.

Kā jau minēts šīs nodaļas sākumā, trigonometriskā tīklā nepieciešamo pārsniedzošā skaitā novērotie leņķi vai virzieni padoti zinamiem noteikumiem, kas izrietē kā no paša tīkla ģeometriskā veida, tā arī no minēto novērojumu un tīklā doto elementu funkcionaliem sakariem. Šos noteikumus izteicošie nolīdzinājumi pēc būtības vienmēr zīmējas uz leņķiem, — ne tikai leņķu, bet ar virzienu novērojumu izlīdzināšanas gadijumā. Virzienu gadijumā noteikumu nolīdzinājumus attiecinot uz novēroto virzienu veidotiem leņķiem, šos leņķus izsaka ar atbilstošām virzienu starpībām, tādā veidā pārejot uz izlīdzināšanas tiešo objektu veidojošiem elementiem.

Vispārīgi uz trigonometriskiem tīkliem attiecīgie noteikumi resp. tos izteicošie nolīdzinājumi ir diezgan dažāda veida. Bet ja pagaidam apskatīsim tikai vienkāršākus patstāvīgus trigonometriskus tīklus, tad izrādas, ka tur parasti gadas tikai tādi noteikumu nolīdzinājumi, kas zīmējas vai nu uz leņķu algebraiskām sumām (leņķu sumu nolīdzinājumi), vai uz tīklā a priori zinamām malu attiecībām atbilstošām leņķu trigonometriskām funkcijām (malu nolīdzinājumi). Pie tam katra grupa savukārt aptver vairākus noteikumu nolīdzinājumu atsevišķus veidus.

Leņķu sumu nolīdzinājumi.

Šai grupai pieder figuru (trijstūru un citu slēgtu poligonu) nolīdzinājumi, kuri izsaka, ka katrā tīkla malu veidotā trijstūrī vai citā slēgtā poligonā leņķu sumai jābūt vienādai ar tās no attiecīgās figuras virsotņu skaita atkarīgo teoretisko vērtību, t. i. $180^0(n-2)+\varepsilon$, kur n ir virsotņu skaits, bet ε — t. s. sfēriskais ekscess. Šis sfēriskais ekscess savukārt atkarīgs no figuras platības un ģeografiskā platuma resp. tam atbilstošā zemes sferoida radija. Zemāko šķiru triangulacijās, kur tīkla figuru platības nelielas, ekscess ε, salīdzinot ar novēroto leņķu resp. virzienu kļūdām, ir tik niecīgs, ka to var praktiski ignorēt, uzskatot figuras par plakanām un pieņemot par leņķu sumas teoretisko vērtību $180^0(n-2)$.

Otrs leņķu sumu nolīdzinājumu veids ir jau agrāk minētie staciju nolīdzinājumi resp. horizonta nolīdzinājumi. Ja tādu nolīdzinājumu skaits trigonometriskā tīklā neliels, tad šo nolīdzinājumu tiešā ievērošana tīkla vispārējā izlīdzināšanā nepadara grūtības. Pretējā gadijumā pirms tīkla vispārējās izlīdzināšanas mēdz izdarīt pa atsevišķām stacijām tikai uz staciju noteikumiem attiecīgo izlīdzināšanu, lai tās rezultatus tīkla vispārējā izlīdzināšanā lietotu kā ar atbilstošiem svariem novērotus elementus. Vispārīgi staciju nolīdzinājumi gadas tikai tad, kad tīklā novērotie elementi ir leņķi. Virzienu novērojumu gadijumā, kad katrā stacijā notikušo novērojumu rezultats ir viens pilnīgs virzienu paņēmiens, nav lieku novērojumu, kas zīmējas uz stacijas virzienu iekšējo orientējumu, tā tad arī nav staciju nolīdzinājumu.

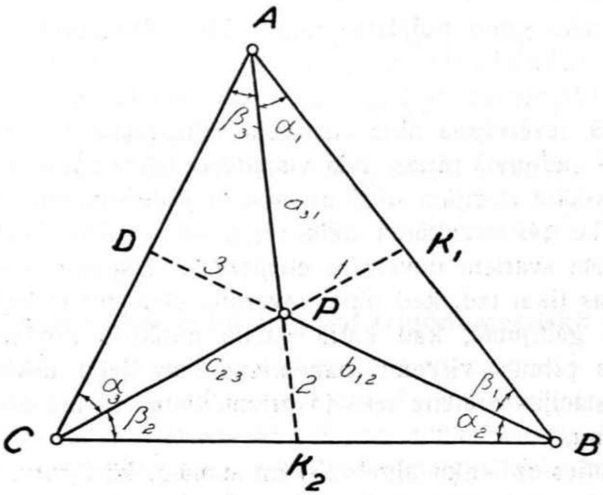
Zīmējoties uz leņķu algebraiskām sumām, kā figuru, tā arī staciju nolīdzinājumi vienmēr ir lineari, ar koeficientiem 1.

Malu nolīdzinājumi.

Ja trigonometriskā tīklā ir dotas vai izmērītas divas vai vairākas bazes, tad katra baze izsakama citas bazes un tīkla leņķu funkcijas veidā. Citiem vārdiem, katru divu bazu attiecība izsakama kā tīkla leņķu funkcija. Pielīdzinot šo funkciju atbilstošai bazu attiecībai, veidojams bazes nolīdzinājums. Ievērojot samērā ar leņķu resp. virzienu novērojumu noteiktību parasti ļoti lielo bazu mērījumu noteiktību, šinīs nolīdzinājumos minētās bazu attiecības uzskatamas par praktiski bez kļūdām dotiem brīviem locekļiem.

Trigonometriski atvasinot no vienas bazes otru, bieži var lietot ne tikai vienu, bet vairākas šīs bazes savienojošas trijstūru virknes resp. tām atbilstošās leņķu grupas. Tā tad var veidot vairākus uz vienu un to pašu bazu pāri attiecīgus bazu nolīdzinājumus. Bet tādos apstākļos tīkla leņķi vienmēr padoti vēl citiem noteikumiem, un ievērojot tos, pierādams, ka no visiem uz vienu un to pašu bazu pāri attiecīgiem bazu nolīdzinājumiem tikai viens ir neatkarīgs, jo no viņa, ar cita veida noteikumu nolīdzinājumu palīdzību, atvasinami visi pārējie bazu nolīdzinājumi.

Bieži trigonometriskos tīklos gadas trijstūru sistemas ar kopīgu virsotni, pie kam atsevišķie trijstūri veido nepārtrauktu sevī slēgtu virkni, kur katram iepriekšējam trijstūrim ir ar nākošo kopīga mala. Tādas sistemas trijstūru kopīgo virsotni sauc par sistemas **polu**. Ja sistemas katrā trijstūrī novēroti ne mazāk kā divi leņķi resp. tos noteicošie virzieni, tad iesākot no jebkuras no pola izejošas malas un trigonomet-



6. attēls.

riski aprēķinot vienu pēc otra visus sistemas trijstūrus, var atrast visu no pola izejošo malu garumus, šī aprēķina beigās nosakot pieņemto sākuma malu kā tās pašas un sistemas trijstūru leņķu funkciju. Salīdzinot sākuma malas pieņemto garumu ar atbilstošo no sistemas aprēķināto garumu, abiem jābūt vienādiem. Šo noteikumu izteicošo nolīdzinājumu sauc par **pola nolīdzinājumu**. Katrā tādā nolīdzinājumā ir divi locekļi, no kuriem viens ir sākuma malas pieņemtais garums, bet otrais — šī paša garuma un attiecīgās leņķu funkcijas produkts. Tā tad, saīsināts ar sākuma malas pieņemto garumu, pola nolīdzinājums izsaka, ka minētai leņķu funkcijai jābūt vienādai ar 1.

Lai, piem., dota 6-ā attēlā parādītā sistema, kur trijstūriem 1, 2, 3 ir kopīgā virsotne P, bet malas $a_{3.1}$, $b_{1.2}$, $c_{2.3}$ ir kopīgas trijstūriem 3 un 1, 1 un 2, 2 un 3, kur novēroti leņķi α_1 un β_1, α_2 un β_2, α_3 un β_3. Tad kopīgai virsotnei P ir pola īpašības, un, izejot, piem., no malas $a_{3.1}$, var veidot šādas izteiksmes:

$$\triangle 1: \quad b_{1.2} = a_{3.1} \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}$$

$$\triangle 2: \quad c_{2.3} = b_{1.2} \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = a_{3.1} \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}$$

$$\triangle 3: \quad a_{3.1} = c_{2.3} \frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_3} = a_{3.1} \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_3}$$

Saīsinot pēdējo izteiksmi ar $a_{3.1}$, atrodam pola nolīdzinājumu

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_3} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (647).$$

Viegli saprotams, ka pola nolīdzinājumā ieejošā sistemas leņķu funkcija vienmēr ir šo leņķu sinus'u attiecību produkts, kur atsevišķo attiecību skaits ir vienāds ar polā sanākošo malu skaitu. Kas zīmējas uz polu, tad nav vajadzīgs, lat tas būtu tāds punkts, kur notikuši leņķu resp. virzienu novērojumi. Tā tad par polu var noderēt arī kāds iedomāts punkts, piem., malu krustpunkts, ja tikai tas savienots ar kāda slēgta poligona virsotnēm, un ja katrā šī punkta ar minētā slēgtā poligona malu veidotā trijstūrī novēroti ne mazāk kā divi leņķi vai tos noteicošie virzieni.

Attiecībā uz pola nolīdzinājuma veidošanu piezīmējam vēl sekojošo. Skaitot no pola izejošās trijstūru malas zinamā, piem., pulksteņa rādītāja, virziena, veidojam katras nākošās malas attiecību pret atbilstošo iepriekšējo. Šo attiecību skaits atbilst no pola izejošo malu skaitam, un šo attiecību produkts ir vienāds ar 1, jo katra mala ir vienu reizi par skaitītāju un vienu reizi par saucēju. Pielīdzinot minēto attiecību produktu skaitlim 1, veidojam identisku nolīdzinājumu, no kura viegli atvasinams atbilstošais pola nolīdzinājums, ja atvietojam malu attiecības ar atbilstošām leņķu sinus'u attiecībām.

Lai paskaidrotu šo paņēmienu ar piemēru, atgriežamies vēlreiz pie 6-ā attēlā parādītās trijstūru sistemas. Skaitot no virsotnes P izejošās malas kārtībā $a_{3.1}$, $b_{1.2}$, $c_{2.3}$, $a_{3.1}$, veidojam attiecības

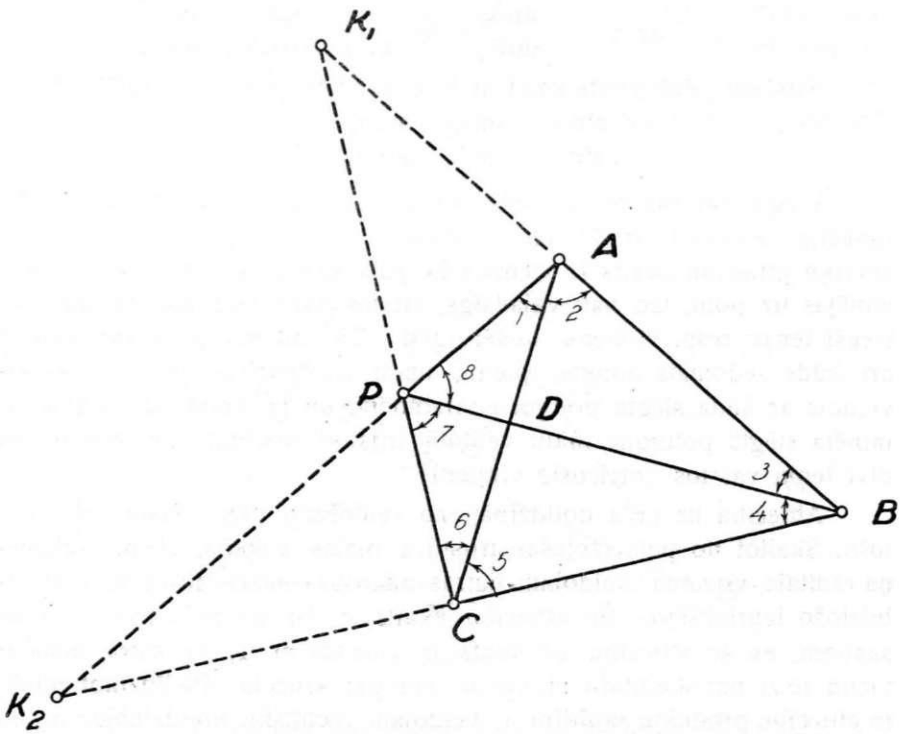
$$\frac{b_{1.2}}{a_{3.1}}, \frac{c_{2.3}}{b_{1.2}}, \frac{a_{3.1}}{c_{2.3}}$$

un identisko nolīdzinājumu

$$\frac{b_{1.2}}{a_{3.1}} \cdot \frac{c_{2.3}}{b_{1.2}} \cdot \frac{a_{3.1}}{c_{2.3}} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (648).$$

Atvietojot pa atbilstošiem trijstūriem 1, 2, 3 atsevišķās malu attiecības ar šīm malām pretējo leņķu sinus'u attiecībām, nolīdzinājums (648) pāriet agrāk citādā ceļā atrastā pola nolīdzinājumā (647).

Šeit apskatītās trijstūru sistemas, kur kāds punkts savienots ar slēgta poligona virsotnēm, sauc par trijstūru centralām sistemām. Kā paskaidrots, katrā tādā sistemā ir pols, tā tad ir iespējams veidot atbilstošo pola nolīdzinājumu. Pie tam nav vajadzīgs, lai ar minētā slēgtā poligona virsotnēm savienotais punkts atrastos iekšpus šī poli-



7. attēls.

gona. Ievērojot to, par centralas sistemas atsevišķu gadījumu var uzskatīt četrstūri ar divām diagonalām (7. att.), jo tas pēc būtības ir nekas cits, kā 6-ā attēlā parādītā centralā sistema, tikai punktam P krītot ārpus trijstūra ABC. Ja tāda četrstūra katrā virsotnē novēroti tai pieguļošo malu un diagonalas ieslēgtie leņķi resp. tos noteicošie virzieni, tad šo trijstūru sistemu sauc par ģeodetisku četrstūri.

Katram ģeodetiskam četrstūrim ir ne tikai viens, bet 7 poli, jo pola īpašības ir ne tikai katrai četrstūra virsotnei P, A, B, C, bet arī diagonalu krustpunktam D un četrstūra pretējo malu krustpunktiem K_1 un K_2. Attiecībā uz punktiem D, K_1, K_2 piezīmējam, ka katrs no tiem uzskatams par savienotu ar četrstūra PABC visām četrām virsotnēm, pie kam savienojošās līnijas ir

punktam D : DP, DA, DB, DC

punktam K_1: K_1P, K_1A, K_1B, K_1C

„ K_2: K_2P, K_2A, K_2B, K_2C

Tā tad, skatoties pēc tā, kuru no minētiem 7 punktiem uzskata par ģeodetiskā četrstūra polu, var veidot šādus 7 pola nolīdzinājumus:

$$\left.\begin{aligned}
&(P): \frac{PA}{PC}\cdot\frac{PB}{PA}\cdot\frac{PC}{PB}=\frac{\sin 6}{\sin 1}\cdot\frac{\sin(1+2)}{\sin 3}\cdot\frac{\sin 4}{\sin(5+6)}=1\\
&(A): \frac{AB}{AP}\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AP}{AC}=\frac{\sin 8}{\sin 3}\cdot\frac{\sin(3+4)}{\sin 5}\cdot\frac{\sin 6}{\sin(7+8)}=1\\
&(B): \frac{BA}{BP}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{BP}{BC}=\frac{\sin 8}{\sin(1+2)}\cdot\frac{\sin 2}{\sin 5}\cdot\frac{\sin(5+6)}{\sin 7}=1\\
&(C): \frac{CA}{CP}\cdot\frac{CB}{CA}\cdot\frac{CP}{CB}=\frac{\sin(7+8)}{\sin 1}\cdot\frac{\sin 2}{\sin(3+4)}\cdot\frac{\sin 4}{\sin 7}=1\\
&(D): \frac{DA}{DP}\cdot\frac{DB}{DA}\cdot\frac{DC}{DB}\cdot\frac{DP}{DC}=\\
&\qquad=\frac{\sin 8}{\sin 1}\cdot\frac{\sin 2}{\sin 3}\cdot\frac{\sin 4}{\sin 5}\cdot\frac{\sin 6}{\sin 7}=1\\
&(K_1): \frac{K_1A}{K_1C}\cdot\frac{K_1P}{K_1A}\cdot\frac{K_1B}{K_1P}\cdot\frac{K_1C}{K_1B}=\\
&\qquad=\frac{\sin 6}{\sin 2}\cdot\frac{\sin(1+2)}{\sin(7+8)}\cdot\frac{\sin 7}{\sin 3}\cdot\frac{\sin(3+4)}{\sin(5+6)}=1\\
&(K_2): \frac{K_2P}{K_2B}\cdot\frac{K_2C}{K_2P}\cdot\frac{K_2A}{K_2C}\cdot\frac{K_2B}{K_2A}=\\
&\qquad=\frac{\sin 4}{\sin 8}\cdot\frac{\sin(7+8)}{\sin(5+6)}\cdot\frac{\sin 5}{\sin 1}\cdot\frac{\sin(1+2)}{\sin(3+4)}=1
\end{aligned}\right\} \quad (649).$$

Bet šie nolīdzinājumi nav neatkarīgi, jo katrs nolīdzinājums (649) atvasinams no pārējiem ar sekojošām formulām aizrādītā kārtā:

$$\left.\begin{aligned}
(P) &= \frac{(A)(C)}{(B)}\\
(A) &= \frac{(B)(P)}{(C)}\\
(B) &= \frac{(C)(A)}{(P)}\\
(C) &= \frac{(P)(B)}{(A)}\\
(D) &= (P)(B) = (A)(C)\\
(K_1) &= \frac{(P)}{(C)} = \frac{(A)}{(B)}\\
(K_2) &= \frac{(P)}{(A)} = \frac{(C)}{(B)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (650).$$

Līdzīgi apstākļi, kā ģeodetiskā četrstūrī, ir arī centralā sistemā, kur iekšējais punkts P savienots ar trijstūra ABC virsotnēm (6. att.). Viegli pārliecināties, ka arī tādā sistemā pola īpašības ir ne tikai punktam P, bet arī virsotnēm A, B, C, un bez tam vēl punktiem D, K_1, K_2, kur malas AC, AB, BC krustojas ar malu BP, CP, AP pagarinājumiem, ja bez 6-ā attēlā atzīmētiem leņķiem α un β izmērīti arī punktā P no šī punkta izejošo malu savstarpējo orientējumu noteicošie leņķi vai virzieni. Arī tādā sistemā veidojami 7 pola nolīdzinājumi, kuri tomēr, tāpat kā ģeodetiskā četrstūra gadijumā, nav neatkarīgi.

Vispārīgi var pierādīt, ka katrā centralā sistemā vai ģeodetiskā četrstūrī novērotie leņķi vai virzieni padoti tikai vienam neatkarīgam pola noteikumam. Tas, saprotams, neizslēdz, ka bez tam var būt arī vēl cita veida uz tiem pašiem leņķiem vai virzieniem attiecīgi noteikumu nolīdzinājumi.

Leņķiem ieejot malu nolīdzinājumos ar savu sinus'u attiecību produktiem, šie nolīdzinājumi oriģinalveidā vienmēr ir nelineari. Pāreja uz atbilstošiemineariem pārvērstiem nolīdzinājumiem parasti notiek 34-ā paragrafā aizrādītās logaritmiskās diferencēšanas ceļā. Sakarā ar to piezīmējam, ka izlīdzināšanas skaitliskā rēķinā izdevīgāki tādi noteikumu nolīdzinājumi, kur koeficientiem ir lielākas absolutas vērtības. Šinī ziņā jāievēro, ka pola nolīdzinājumam atbilstošā pārvērstā nolīdzinājuma koeficienti jo lielāki, jo mazāki attiecīgie leņķi. Tāpēc no dotai trijstūru sistemai atbilstošiem vairākiem savā starpā atkarīgiem polu nolīdzinājumiem izlīdzināšanas rēķinā lietojot tikai vienu vienīgu, ieteicams tam nolūkam izvēlēties to, kur ieiet vismazākie leņķi.

Trīs trijstūru veidotā centralā sistemā ne tikai šinī, bet arī citā ziņā par izdevīgāku izrādas tīkla izlīdzināšanā lietot uz sistemas iekšējo punktu P (6. att.) attiecīgo pola nolīdzinājumu. Ģeodetiskā četrstūrī vislielākie koeficienti ir uz diagonalu krustpunktu D (7. att.) attiecīgā pola nolīdzinājumā. Bet ja no skaitliskā rēķina asuma viedokļa šis nolīdzinājums jāatzīst par izdevīgu, tad no ērtības viedokļa ir tas trūkums, ka šinī nolīdzinājumā ieejošo leņķu sinus'u attiecību skaits ir lielāks nekā tanīs nolīdzinājumos, kas zīmējas uz virsotnēs P, A, B, C pieņemtiem poliem. Tāpēc ģeodetiska četrstūra gadijumā izlīdzināšanas rēķinā mēdz lietot uz četrstūra virsotni attiecinātu pola nolīdzinājumu. Pie tam no skaitliskā rēķina noteiktības viedokļa priekšroka dodama tai virsotnei, kura pretējā vislielākam trijstūrim, jo pierādams, ka šai virsotnei atbilstošā pola nolīdzinājumā ir lielāki koeficienti nekā uz pārējām četrstūra virsotnēm attiecīgos nolīdzinājumos.

Attiecībā uz malu nolīdzinājumiem vēl piezīmējam, ka tie vispārīgi pamatoti uz pazīstamās „sinus'u teoremas", kas izsaka, ka trijstūra malu attiecības ir vienādas ar šīm malām pretējo leņķu sinus'u attiecībam. Šī teorema zīmējas kā uz plakaniem, tā arī uz sfēriskiem trijstūriem. Tā tad malu nolīdzinājumi veidojami pēc viena un tā paša parauga neatkarīgi no tā, vai ir plakanu vai sfērisku trijstūru gadijums.

Kas zīmējas uz trigonometriska tīkla noteikumu nolīdzinājumu kopību, tad, kā jau minēts, parasti mēdz būt kā leņķu sumu, tā arī malu nolīdzinājumi. Aiz dažādiem iemesliem vēlams, lai atsevišķo noteikumu nolīdzinājumu koeficienti būtu nevisai dažādi. Šinī ziņā vēlamie apstākļi ir leņķu sumu nolīdzinājumu grupā, jo tur visi koeficienti bez izņēmuma vienādi ar 1. Turpretim malu nolīdzinājumu grupā logaritmiskā ceļā pārvērsto nolīdzinājumu koeficientu skaitliskās vērtības atkarājas, starp citu, no lietotās logaritmu tabulas mantisu zīmju skaita, un arī no nolīdzinājumu koeficientu un brīvo locekļu izteikšanai lietotās vienības. Tāpēc pārvērsto malu nolīdzinājumu koeficienti bieži stipri atšķiras no leņķu sumu nolīdzinājumu koeficientiem. Lai panāktu vēlamo koeficientu vienādību visos nolīdzinājumos, tādā gadijumā malu nolīdzinājumus var dalīt vai reizināt ar kādu lietderīgi izvēlētu, parasti apaļu, skaitli, piem., 10, 100, u. t. t. Ar to nolīdzinājumi netiek pēc būtības grozīti; bet lai neietekmētos resp. nesamazinātos izlīdzināšanas rēķina noteiktība, dalot pārvērstos noteikumu nolīdzinājumus, līdz ar to nedrīkst taisīt nekādus apaļojumus. Kas zīmējas uz pārvērsto malu nolīdzinājumu koeficientu un brīvo locekļu aprēķinam lietotās logaritmu tabulas noteiktību resp. mantisu zīmju skaitu, tad vēlams, lai šinī ziņā būtu tādi pat apstākļi, kā pēc notikušās izlīdzināšanas izdaramā tīkla galīgā aprēķinā.

§ 55. Noteikumu nolīdzinājumu skaits trigonometriskā tīklā

Pirms noteikumu nolīdzinājumu veidošanas jānoskaidro šo nolīdzinājumu kopskaits un parcialais skaits pa noteikumu nolīdzinājumu atsevišķiem veidiem. Stājoties pie šī jautājuma iztirzāšanas, aizrādam, ka tā zīmējas uz tādiem trigonometriskiem tīkliem, kur, bez novērotiem leņķiem vai virzieniem, ar praktiski ignorējamām kļūdām doti vai atrasti ne vairāk ka viena baze, viens azimuts un viena punkta koordinatas. Tādā tīklā nav neviena bazes nolīdzinājuma; bet var gan būt apstākļiem atbilstošā skaitā figuru, staciju un polu nolīdzinājumi.

Pieņemsim, ka minētā veida trigonometriskā tīklā ir:

p virsotņu, un no tām

p′ tādu, kur nav novēroti nekādi leņķi vai virzieni;

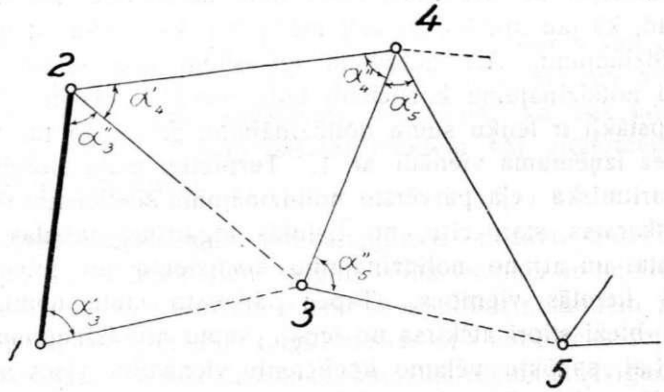
l malu, un no tām

l′ tādu, kur leņķi vai virzieni izmērīti tikai vienā galā;

un lai šinī tīklā novēroti pavisam kopā

w leņķi, vai

r virzieni.



8. attēls.

Nosakot neatkarīgo noteikumu kopskaitu, ievērojam, ka tas, kā vispārīgi noteikumu novērojumu gadijumā, vienāds ar dotam nolūkam lieko novērojumu skaitu N. Tas savukārt šeit pieņemtos apstākļos ir

$$\left.\begin{aligned} N &= w - N_w \\ N &= r - N_r \end{aligned}\right\} \quad \text{resp.} \quad \ldots\ldots \quad (651),$$

kur N_w un N_r apzīmē p punktu savstarpējā stāvokļa noteikšanai bez kontroles iespējas vajadzīgo leņķu resp. virzienu skaitu.

Nosakot minēto punktu savstarpējo stāvokli pēc triangulacijas principa, pēc garuma un orientējuma dotā vai nosacītā baze, savienojot divus punktus 1 un 2 (8. att.), nosaka to savstarpējo stāvokli pavisam neatkarīgi no novērotiem leņķiem vai virzieniem. Bez šiem diviem, paliek vēl (p — 2) punkti, kuriem jānosaka uz bazi resp. tās gala punktiem attiecīgais relativais stāvoklis. Tam nolūkam, izejot no bazes, jāveido (p — 2) trijstūri, pie tam tā, lai katrs nākošais trijstūris savienotu vienu jaunu punktu ar iepriekš jau veidotās trijstūru sistemas divām virsotnēm. Piem., var pakāpeniski veidot

$\triangle$ 1 2 3 ar jauno punktu 3

$\triangle$ 2 3 4 „ „ „ 4

$\triangle$ 3 4 5 „ „ „ 5

. . . .

Katra atsevišķa trijstūra veidošanai nepieciešami divi leņķi; un tā kā $(p-2)$ punktu trigonometriskai savienošanai ar bazi nepieciešami $(p-2)$ trijstūri, nākam pie slēdziena, ka visus p punktus aptveroša trigonometriska tīkla veidošanai vajadzīgo leņķu minimalais skaits ir

$$N_w = 2(p-2) = 2p-4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (652).$$

Šī formula tieši zīmējas uz gadijumu, kad tīklā novērotie elementi ir leņķi. Bet uz tās pašas formulas pamata nosakams arī p punktu savienošanai trigonometriskā tīklā vajadzīgais minimalais virzienu skaits N_r. Atvasinot attiecīgo formulu, jāievēro sekojošais. Lai nosacītu no atsevišķas stacijas izejošo s virzienu savstarpējo orientējumu, šinī stacijā jānovēro vai nu $(s-1)$ leņķi, vai s virzieni. Tā tad virzienu novērojumu gadijumā katrā stacijā jātaisa par vienu novērojumu vairāk, nekā leņķu novērojumu gadijumā. Pie tam jāievēro, ka šeit pieņemtos apstākļos staciju, t. i. novērojumu stāvamo punktu skaits ir $(p-p')$. Tā tad N_r un N_w ir sakarā

$$N_r = N_w + (p-p') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (653).$$

Ievērojot (652), atrodam

$$N_r = 2p - 4 + (p-p') = 3p - p' - 4 \quad . \quad . \quad . \quad (654).$$

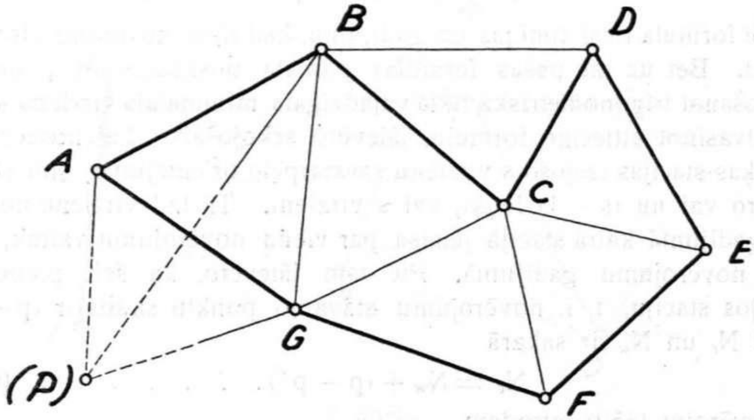
Ievērojot (652) un (654), trigonometriskā tīklā notikušo lieko novērojumu, un līdz ar to veidojamo neatkarīgo noteikumu nolīdzinājumu kopskaitu noteicošās formulas (651) pāriet šādā galīgā veidā:

$$\left.\begin{array}{l} N = w - 2p + 4 \\ \text{resp.} \\ N = r - 3p + p' + 4 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (655).$$

Ar apstākļiem atbilstošo formulu (655) noteiktā kopskaitā N veidoto neatkarīgo noteikumu nolīdzinājumu sistema aptver figuru, staciju un polu nolīdzinājumus. Bazu nolīdzinājumi nav ievēroti, jo tika pieņemts, ka tīklā dota vai izmērīta tikai nepieciešamā viena baze.

Lai nosacītu neatkarīgo figuru nolīdzinājumu skaitu N_f, iedomājamies savienotus slēgtā poligonā A-B-C-D-E-F-G-A (9. att.) visus tos tīkla punktus A, B, C, D, E, F, G, kur notikuši leņķu vai virzienu novērojumi, nepiegriežot nekādu vērību tiem punktiem, kā, piem., (P), kur nav izdarīti leņķu vai virzienu novērojumi. Šī slēgtā poligona virsotņu skaits ir $(p-p')$, un tik pat liels ir malu skaits, pie kam visām šīm malām ir abos galos novēroti leņķi vai virzieni. Tā kā minētā slēgtā poligonā ir izmērīti visi leņķi resp. malu virzieni, var veidot vienu uz šo poligonu attiecīgo figuru nolīdzinājumu.

Bet tādu malu, kurām abos galos novēroti leņķi vai virzieni, ir pavisam kopā $(l - l')$; tā tad no tām minētā slēgtā poligona veidošanai nav lietoti $(l - l') - (p - p')$ gabali. Katra tāda vēl nelietota mala var būt tikai šī poligona diagonala, jo leņķu vai virzienu novērojumi notikuši tikai minētā poligona virsotnēs. Bet ar katru diagonalu, piem.,



9. attēls.

B-G, B-D, C-E, C-F, C-G, no slēgtā pamatpoligona nogrieztā daļā savukārt ir slēgts poligons, kur novēroti visi leņķi resp. tos noteicošie virzieni. Katram parcialam poligonam ir leņķi, kas neatkārtojas pārējos parcialos poligonos vai pamatpoligonā. Tā tad visiem šiem poligoniem atbilstošie figuru nolīdzinājumi ir neatkarīgi, un tāpēc neatkarīgo figuru nolīdzinājumu skaits ir vienāds ar pamatpoligona un tā parcialo poligonu kopskaitu, t. i.

$$N_f = (l - l') - (p - p') + 1 \quad . \quad . \quad . \quad (656).$$

Kas zīmējas uz staciju nolīdzinājumiem, tad tīkla izlīdzināšanā tie gadas tikai tad, kad šīs izlīdzināšanas objekts ir leņķi. Virzienu izlīdzināšanas gadijumā novērojumi notiek vai nu pa virzienu paņēmieniem, vai mērot visās kombinacijās leņķus pēc Schreiber'a metodes. Kā vienā, tā arī otrā gadijumā katrai atsevišķai stacijai no tur notikušiem novērojumiem atvasina vienu pilnīgu virzienu paņēmienu, kurš tīkla izlīdzināšanā tiek lietots kā stacijā notikušo novērojumu rezultats. Bet katrs tāds pilnīgs virzienu paņēmiens ir tikai pietiekošs no stacijas izejošo malu savstarpējā orientējuma noteikšanai, t. i. neietver nekādus šinī ziņā liekus novērojumus. Tā tad tādos apstākļos tīkla izlīdzināšanā nevar būt staciju nolīdzinājumu.

Turpretim gadijumā, kad tīkla izlīdzināšana zīmējas uz novērotiem leņķiem un nav notikusi šo leņķu iepriekšēja izlīdzināšana atsevišķās stacijās, tīkla izlīdzināšanā var gan būt staciju nolīdzinājumi. Šo nolīdzinājumu skaits viegli nosakams pa atsevišķām stacijām. Ja stacijā s_i staru kūlī novēroti w_i leņķi, tad, ievērojot, ka s_i staru savstarpējā orientējuma noteikšanai pietiek ar $(s_i - 1)$ leņķiem, šinī ziņā lieko novērojumu skaits ir

$$n_i = w_i - (s_i - 1) \quad \ldots \ldots \quad (657),$$

un tikpat liels ir šīs stacijas nolīdzinājumu skaits. Tā tad staciju nolīdzinājumu kopskaits visā tīklā ir

$$N_s = [n] \quad \ldots \ldots \quad (658).$$

Lai nosacītu neatkarīgo polu nolīdzinājumu skaitu N_p trigonometriskā tīklā, noskaidrosim, kāds ir nepieciešamais un pietiekošais malu skaits, lai p punktus savienotu tādā trijstūru sistemā, kur no viena trijstūra līdz kādam citam var nokļūt tikai vienā ceļā, t. i. tikai pa vienu trijstūru virkni. Tādu trijstūru sistemu var iedomāties attīstītu no kādas divus punktus A un B savienojošās malas, trigonometriski saistot ar to pārējos punktus G, H, C, D, E, F, ... (10. att.) ar pakāpeniski veidotiem atbilstošiem trijstūriem $\triangle$ABG, $\triangle$AGH, $\triangle$BGC, $\triangle$BCD, $\triangle$CDE, $\triangle$CEF, ..., no kuriem katrs savieno vienu jaunu punktu ar iepriekš ar izejas malu AB jau savienotiem diviem punktiem. Tā tad p punktu savienošanai augšā minētā veida trijstūru sistemā jāveido (p — 2) trijstūri, pie kam ar katru atsevišķu trijstūri pie pieņemtās vienas izejas malas nāk klāt divas jaunas malas. No tā seko, ka minētās trijstūru sistemas veidošanai vajadzīgas

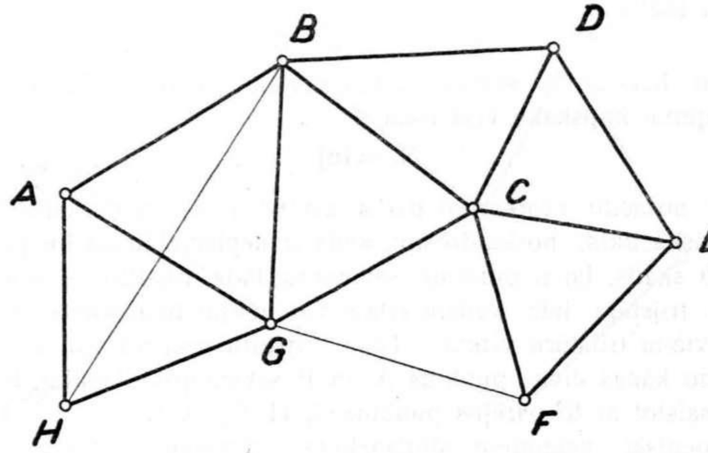
$$N_l = 1 + 2(p - 2) = 2p - 3 \quad \ldots \ldots \quad (659)$$

malas; pie tam nekrīt svarā, vai tām ir abos galos, vai tikai vienā galā novēroti leņķi resp. virzieni.

Minētā trijstūru sistemā no viena trijstūra līdz kādam citam var nokļūt tikai vienā ceļā; tā tad nav iespējams atrast pāreju no kādas malas līdz tai pašai pa tādu trijstūru virkni, kur neatkārtojas atsevišķie trijstūri. Tas nozīmē, ka šinī trijstūru sistemā nav neviena pola; tā tad arī nav neviena pola nolīdzinājuma.

Sakarā ar to piezīmējam, ka atkarībā no tā, vai trijstūru sistemā trūkst vai ir poli, izšķir trijstūru virknes un trijstūru tīklus. Trijstūru tīkla gadijums vienmēr ir tad, kad ir malu krustpunkti, kas atrodas starp attiecīgo malu gala punktiem, jo katram tādam krustpunktam ir pola īpašības. Bet ar to nav teikts, ka trijstūru sistema bez tādiem krustojumiem vienmēr ir trijstūru virkne; piem., t. s. centralā sistemā malām nekrustojoties, tomēr ir pols, tā tad ir trijstūru tīkla gadijums.

Ja p punktus savienojošā trijstūru virknē, kur malu skaits atbilst ar formulu (659) noteiktam, iedomājamies bez minēto virkni veidojošām malām novilktas vēl kādas citas šīs sistemas punktus savienojošas malas, tad rodas tikpat daudz neatkarīgu polu resp. atbilstošu polu



10. attēls.

nolīdzinājumu. Piem., papildinot 10-ā attēlā ar treknām līnijām izcelto trijstūru virkni ar malām BH un FG, veidojas ģeodetiskais četrstūris ABGH ar vienu neatkarīgu pola nolīdzinājumu, un centralā sistema C(BDEFG) ar polu C resp. atbilstošo pola nolīdzinājumu.

Ja p punktus ietverošā trigonometriskā tīklā ir l malas, tad atskaitot no tām minēto punktu savienošanai trijstūru virknē vajadzīgās N_l, paliek $(l - N_l)$ šīs virknes punktus savienojošas malas, un katrai tādai malai atbilst viens neatkarīgs pola nolīdzinājums. Tā tad, ievērojot (659), neatkarīgo polu noteikumu skaitu noteicošā formula ir

$$N_p = l - N_l = l - 2p + 3 \quad \ldots\ldots \quad (660).$$

Šis uz neatkarīgo noteikumu nolīdzinājumu skaitu trigonometriskā tīklā attiecīgais iztirzājums zīmējas uz vienkāršākos patstāvīgos tīklos parastiem apstākļiem, kad no tīkla ģeometriskā veida izrietējošie noteikumi izpaužas tikai figuru, staciju un polu nolīdzinājumu veidā, un pie tam tīkla izmērus, orientējumu un stāvokli noteicošie elementi ir doti resp. novēroti tikai nepieciešamā skaitā. Tādos apstākļos

$$N = N_f + N_s + N_p \quad \ldots \ldots \quad (661),$$

kas var noderēt kontrolei aprēķinot neatkarīgo noteikumu nolīdzinājumu skaitu pēc attiecīgām formulām (655), (656), (657), (658), (660).

Ja tīkla izmērus, orientējumu un stāvokli noteicošie elementi doti vai novēroti lielākā skaitā, nekā tas nepieciešams, tad katram liekam elementam atbilst viens papildu noteikuma nolīdzinājums, kurš nāk klāt pie skaitā N veidotiem formulā (661) ievērotiem noteikumu nolīdzinājumiem.

Pat vienkāršākos patstāvīgos trigonometriskos tīklos vai virknēs dažreiz gadas ne tikai viena, bet vairākas bazes. Ievērojot, ka tīkla vai virknes izmēru noteikšanai pietiek ar vienu bazi, visas pārējās bazes tad ir šinī ziņā lieki elementi, kuriem atbilst tikpat daudzi bazu nolīdzinājumu veidā izsakami papildu noteikumi. Tā tad, apzīmējot ar b bazu skaitu, bazu nolīdzinājumu skaits ir

$$N_b = b - 1 \quad \ldots \ldots \quad (662),$$

pie kam tas neietilpst ar formulu (655) nosacītā noteikumu nolīdzinājumu skaitā.

Veidojot noteikumu nolīdzinājumus, jāgādā, lai tie būtu pa atsevišķām grupām apstākļiem atbilstošā skaitā un pie tam visi neatkarīgi. Tam nolūkam ieteicams veidot tīkla skici, pakāpeniski attīstot to no vienas dotas vai pieņemtas bazes ar tīklā novērotiem leņķiem resp. virzieniem, un ievērojot tīkla izmērus, orientējumu un stāvokli noteicošos dotos vai novērotos elementus. Līdztekus veidojot atbilstošos noteikumu nolīdzinājumus, tie tad iznāk visvienkāršākā veidā un visi neatkarīgi.

§ 56. Vienkāršāku patstāvīgu trigonometrisku tīklu izlīdzināšana.

Kā jau minēts, trigonometriska tīkla izlīdzināšanai veidotie noteikumu nolīdzinājumi savā pirmatnējā veidā vienmēr attiecinami uz izlīdzinātiem leņķiem. Leņķu novērojumu gadijumā šie izlīdzinātie leņķi izsakami pēc parauga

$$\overline{l}_{i'.i''} = l_{i'.i''} + v_{i'.i''} \quad \ldots \ldots \quad (663),$$

kur $\overline{l}_{i'.i''}$ apzīmē izlīdzināto leņķi, $l_{i'.i''}$ — novēroto leņķi, un $v_{i'.i''}$ — atbilstošo izlabojumu. Pārvērstos linearos noteikumu nolīdzinājumos tad izlabojumi $v_{i'.i''}$ ir nezinamie, bet novērotie leņķi $l_{i'.i''}$ kopā ar zinamiem teoretiski nosacītiem lielumiem veido brīvos locekļus.

Virzienu izlīdzināšanas gadijumā izlīdzinātie leņķi izsakami pēc parauga

$$\overline{l}_{i'.i''} = l_{i'.i''} + v_{i'.i''} = (l_{i''} + v_{i''}) - (l_{i'} + v_{i'}) \quad . \; . \; . \quad (664),$$

kur $l_{i'}$ un $l_{i''}$ apzīmē leņķa malu novērotos virzienus, bet $v_{i'}$ un $v_{i''}$ – atbilstošos izlabojumus. Pārvēršot noteikumu nolīdzinājumus, novēroto virzienu starpība $(l_{i''} - l_{i'})$ lietojama tāpat, kā atbilstošais novērotais leņķis $l_{i'.i''}$ leņķu izlīdzināšanas gadijumā, bet izlabojumu starpība $(v_{i''} - v_{i'})$ — kā leņķim $l_{i'.i''}$ atbilstošais izlabojums $v_{i'.i''}$. Noteikumu nolīdzinājumiem pēc būtības zīmējoties uz leņķiem, virzienu izlabojumi pārvērstos noteikumu nolīdzinājumos vienmēr ieiet pa atsevišķiem leņķiem atbilstošiem pāriem, pie kam katrā pārī abu izlabojumu koeficientiem ir vienādas absolutās vērtības, bet pretējas zīmes. No tā seko, ka virzienu izlīdzināšanas gadijumā katrā pārvērstā noteikuma nolīdzinājumā, neatkarīgi no tā veida, visu koeficientu suma vienāda ar nulli.

Tālāk, lai v_p, v_q, v_r, ... ir vienā stacijā novēroto virzienu izlabojumi. No noteikumu novērojumu izlīdzināšanas vispārējās teorijas ir zinams, ka pēc formulas (412)

$$\left.\begin{array}{l} v_p = a_p k_1 + b_p k_2 + c_p k_3 + \ldots \\ v_q = a_q k_1 + b_q k_2 + c_q k_3 + \ldots \\ v_r = a_r k_1 + b_r k_2 + c_r k_3 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (665),$$

kur k ir korrelatas, bet a_p, b_p, c_p ....., a_q, b_q, c_q, ..., a_r, b_r, c_r, ..., ... — izlabojumu v_p, v_q, v_r, ... koeficienti atbilstošos pārvērstos noteikumu nolīdzinājumos.

Sumējot izteiksmes (665), atrodam

$$[v] = [a]k_1 + [b]k_2 + [c]k_3 + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (666)$$

Bet mēs redzējam, ka visas koeficientu sumas [a], [b], [c], ... vienādas ar nulli; tā tad arī visa izteiksme (666) vienāda ar nulli. Ar to pierādīta šāda teorema: izlīdzinot trigonometriskā tīklā vai virknē novērotos virzienus, pa atsevišķām stacijām veidotās novēroto virzienu izlabojumu sumas visas vienādas ar nulli. Saprotams, ka tas pats zīmējas arī uz visā tīklā novēroto virzienu izlabojumu kopsumu.

Minētā teorema var noderēt izlīdzināšanas skaitliskā rēķina kontrolei; bet jāievēro, ka šī kontrole nekā neizsaka par korrelatu k pareizo noteikšanu.

Pats izlīdzināšanas rēķins notiek parastā kārtībā. Kā vienmēr, sakarā ar pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu veidošanu ieteicams aprēķināt sumu kontrolēm vajadzīgās sumas, un arī veidot un eventuali pārvērst linearā veidā visas izlīdzināto leņķu vai virzienu funkcijas, kurām jānosaka vidējās kļūdas. Šo vidējo kļūdu aprēķinam vajadzīgie svaru koeficienti parastā kārtā nosakami no atbilstošiem svaru nolīdzinājumiem, reducējot un atslēdzot tos līdz ar korrelatu normalnolīdzinājumiem.

Šinī ziņā interesējošās izlīdzināto leņķu vai virzienu funkcijas mēdz būt: paši izlīdzinātie leņķi vai virzieni, ar tiem aprēķinātie tīkla malu garumi, un eventuali arī tīkla punktu koordinatas.

Kas zīmējas uz izlīdzinātā tīkla malu garumiem, tad to vidējās kļūdas m_F ir divu neatkarīgu komponentu rezultējošās. Viena komponenta m_F' ir t. s. triangulacijas kļūda, kurā izpaužas tīkla izlīdzināto leņķu vai virzienu kļūdu ietekme uz aprēķināto malas garumu. Šī triangulacijas kļūda nosakama augšā minētā kārtā tiešā sakarā ar tīkla izlīdzināšanu. Otrā komponentā m_F'' izpaužas tīkla bazes noteikšanas vidējās kļūdas m_b ietekme. Nosakot šo bazes kļūdas ietekmi m_F'', tīkla izlīdzinātie leņķi vai virzieni uzskatami par noteiktības ziņā neitraliem elementiem. Tā tad, uz kļūdu sakrāšanas likuma pamata,

$$m_F'' = \frac{s}{b} m_b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (667),$$

kur s un b apzīmē attiecīgās malas un bazes garumu, bet m_b — bazes garuma noteikšanas vidējo kļūdu.

Tā kā abas komponentas m_F' un m_F'' ir neatkarīgu argumentu vidējo kļūdu ietekmes, no tām rezultējošā aprēķinātās malas vidējā kļūda nosakama pēc formulas

$$m_F = \pm\sqrt{(m_F')^2 + (m_F'')^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (668).$$

Tādā veidā atrasto aprēķinātās malas vidējo kļūdu bieži izsaka reducētu uz garuma vienību, piem., uz 1 kilometru.

Atkarībā no tīkla ģeometriskā veida bieži gadas, ka kādas parcialas trijstūru sistemas leņķu vai virzienu izlabojumi ieiet kā vienīgie nezinamie tikai dažos noteikumu nolīdzinājumos, neatkārtojoties pārējos. Tādā gadījumā šī parcialā trijstūru sistema izlīdzinama atsevišķi, neatkarīgi no pārējām tīkla daļām.

Beidzot, attiecībā uz trigonometriskā tīklā novēroto virzienu izlīdzināšanu piezīmējam vēl sekojošo.

Atsevišķās stacijās notikušo novērojumu rezultatus izteicošie virzienu paņēmieni mēdz būt orientēti tā, ka to nulles virzieni atbilst kādām no attiecīgām stacijām izejošām tīkla malām. Tādā orientējumā dotie atsevišķām stacijām atbilstošie virzienu paņēmieni nav saskaņoti sava ārējā orientējuma ziņā: attiecībā uz stacijas savienojošām malām pretējie virzieni pa atbilstošiem pāriem neatšķiras par 180^0. Tas nav par šķērsli tādā nesaskaņotā orientējumā doto virzienu paņēmienu lietošanai tīkla izlīdzināšanā. Tomēr aiz dažādiem iemesliem bieži uzskata par lietderīgu dotos virzienu paņēmienus pirms lietošanas izlīdzināšanas rēķinā pagriezt tā, lai tie sava ārējā orientējuma ziņā būtu kaut apmēram saskaņoti. Sevišķi vēlams, lai visi virzieni būtu apmēram vienādi ar atbilstošiem azimutiem resp. direkcionaliem leņķiem. Tas panākams šādā kārtā.

Iesākot ar staciju, no kuras iziet mala ar zinamu azimutu vai direkcionalu leņķi, šīs stacijas virzienu paņēmienu pagriež tā, lai minētai malai atbilstošais virziens izteiktu šīs malas absoluto orientējumu. Pēc tādā veidā notikušās pirmās stacijas virzienu paņēmiena orientēšanas pēc meridiana pāriet pie tādas otras stacijas, kas ar kādu tīkla malu savienota ar pirmo staciju. No pirmās stacijas pēc meridiana orientētā virzienu paņēmiena zinot abas stacijas savienojošās malas absoluto orientējumu, otrās stacijas virzienu paņēmienu tad var pagriezt tā, lai arī tas būtu orientēts pēc meridiana. Tā turpinot un pakāpeniski pārejot pie visām pārējām stacijām, beidzot visi virzienu paņēmieni iznāk saskaņotā orientējumā pēc meridiana. Saprotams, ka lietojot neizlīdzinātus, tā tad pretrunīgus, novērojumus, šī saskaņa nevar būt pilnīga. Attiecībā uz atsevišķām tīkla malām pretējie virzieni, piederot dažādām stacijām, vispārīgi atšķiras pilnā stingrībā par teoretiski vajadzīgo leņķi tikai tad, ja attiecīgā mala tieši lietota abu virzienu paņēmienu orientējuma saskaņošanai. Pārējām tīkla malām atbilstošos pretējos virzienos parasti parādas zinamas pretrunas; pēc šīm pretrunām jau pirms izlīdzināšanas var spriest par lietoto novērojumu noteiktību.

§ 57. Trigonometriskā tīklā novēroto leņķu izlīdzināšana. (Piemērs.)

Siguldas trigonometriskā tīklā (11. att.) ar vienādu noteiktību novēroti šādi leņķi:

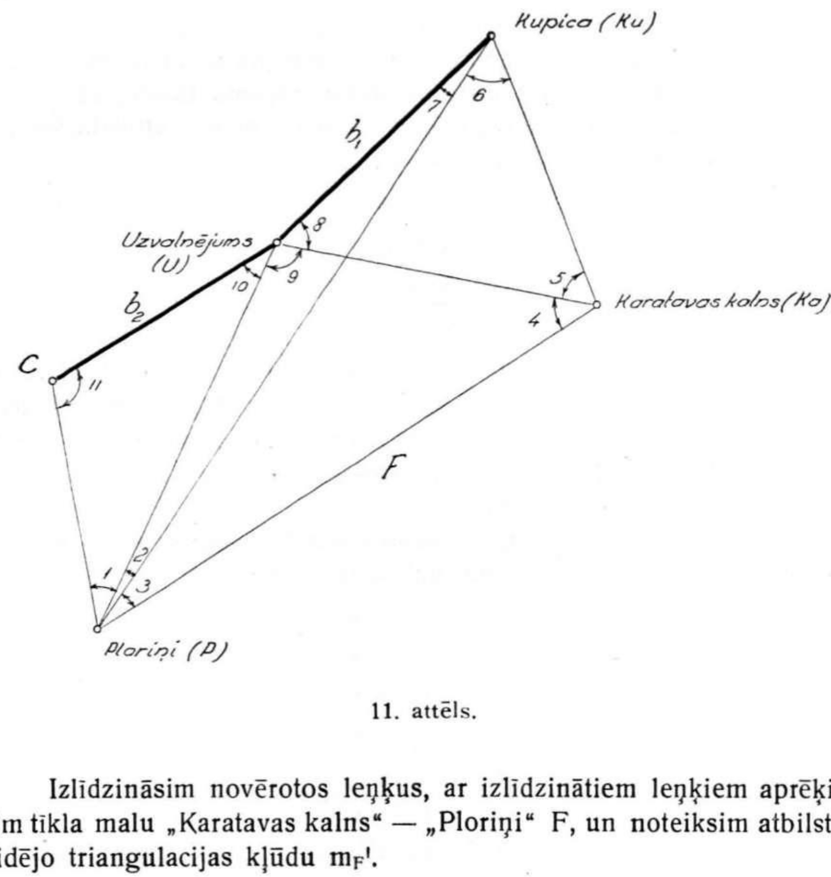
stacijā „Ploriņi" (P):	$l_1 = 34^0 31' 50{,}0''$
	$l_2 = 7\ 07\ 06{,}0$
	$l_3 = 17\ 31\ 12{,}5$
stacijā „Karatavas kalns" (Ka):	$l_4 = 51\ 37\ 24{,}0$
	$l_5 = 58\ 54\ 08{,}5$
stacijā „Kupica" (Ku):	$l_6 = 51\ 57\ 13{,}0$
	$l_7 = 14\ 26\ 22{,}5$
stacijā „Uzvalnējums" (U):	$l_8 = 54\ 42\ 30{,}0$

$l_9 = 103\ 44\ 07{,}0$

$l_{10} = 33\ 42\ 19{,}0$

stacijā „C“ (C): $l_{11} = 111\ 45\ 44{,}0$

Bez tam ar praktiski ignorējamām kļūdām dotas divas bazes:
„Uzvalnējums“ — „Kupica“: $b_1 = 868{,}017$ m, $\log b_1 = 2{,}938\ 5282$
„Uzvalnējums“ — „C“: $b_2 = 1066{,}123$ m, $\log b_2 = 3{,}027\ 8073$



11. attēls.

Izlīdzināsim novērotos leņķus, ar izlīdzinātiem leņķiem aprēķināsim tīkla malu „Karatavas kalns“ — „Ploriņi“ F, un noteiksim atbilstošo vidējo triangulacijas kļūdu m_F'.

Šinī tīklā ir divas parcialas trijstūru sistemas, ģeodetiskais četrstūris U - Ku - Ka - P un trijstūris U - P - C ar kopīgo malu UP. Šīs parcialās sistemas tomēr nav izlīdzinamas neatkarīgi, jo katrā ieiet viena baze, un tāpēc abu sistemu leņķi saistīti ar atbilstošo bazu nolīdzinājumu.

Lietojot 55-ā paragrafā pieņemtos apzīmējumus, atzīmējam, ka dotā piemērā

$$
\begin{aligned}
p &= 5 \\
p' &= 0 \\
l &= 8 \\
l' &= 0 \\
w &= 11 \\
b &= 2
\end{aligned}
$$

Kā rāda tīkla skice, nevienā stacijā nav novēroti leņķi lielākā skaitā, nekā tas nepieciešams no stacijas izejošo malu savstarpējā orientējuma noteikšanai; tā tad nav neviena stacijas nolīdzinājuma. Ievērojot to un nosakot figuru un polu nolīdzinājumu skaitu, kā arī visu minēto veidu noteikumu nolīdzinājumu kopskaitu pēc atbilstošām formulām (656), (660) un (655), atrodam:

$$
\begin{aligned}
N_f &= 4 \\
N_s &= 0 \\
\underline{N_p} &\underline{= 1} \\
N &= 5
\end{aligned}
$$

bez tam, ievērojot doto bazu skaitu, pēc formulas (662) atrodam, ka vēl ir viens bazu nolīdzinājums. Tā tad veidojami pavisam 6 neatkarīgi noteikumu nolīdzinājumi. Veidojot tos, ievērojam, ka tīkla trijstūru nelielo platību dēļ, visi sfēriskie ekscesi pavisam niecīgi, un tāpēc trijstūri uzskatami par plakaniem.

Apzīmējot atsevišķo leņķu novērojumu l izlabojumus ar atbilstošiem v, izlīdzinātie leņķi x izsakami šādā veidā:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= l_1 + v_1 \\
x_2 &= l_2 + v_2 \\
x_3 &= l_3 + v_3 \\
x_4 &= l_4 + v_4 \\
x_5 &= l_5 + v_5 \\
x_6 &= l_6 + v_6 \\
x_7 &= l_7 + v_7 \\
x_8 &= l_8 + v_8 \\
x_9 &= l_9 + v_9 \\
x_{10} &= l_{10} + v_{10} \\
x_{11} &= l_{11} + v_{11}
\end{aligned}
$$

Sumējot izlīdzinātos leņķus pa 4 neatkarīgiem trijstūriem un ievērojot šīs izteiksmes, veidojam sekojošos pārvērstos figuru (trijstūru) nolīdzinājumus φ:

1) trijstūrim U - P - C:

$$\begin{aligned}
x_1 &= l_1 + v_1 = 34^0 31' 50{,}0'' + v_1 \\
x_{10} &= l_{10} + v_{10} = 33\ 42\ 19{,}0 + v_{10} \\
x_{11} &= l_{11} + v_{11} = 111\ 45\ 44{,}0 + v_{11} \\
\hline
x_1 + x_{10} + x_{11} &= 179^0 59' 53{,}0'' + v_1 + v_{10} + v_{11} = 180^0 00' 00{,}0'' \\
\varphi_1 &= v_1 + v_{10} + v_{11} - 7{,}0'' = 0
\end{aligned}$$

2) trijstūrim U - Ka - P:

$$\begin{aligned}
x_2 &= l_2 + v_2 = 7^0 07' 06{,}0'' + v_2 \\
x_3 &= l_3 + v_3 = 17\ 31\ 12{,}5 + v_3 \\
x_4 &= l_4 + v_4 = 51\ 37\ 24{,}0 + v_4 \\
x_9 &= l_9 + v_9 = 103\ 44\ 07{,}0 + v_9 \\
\hline
x_2 + x_3 + x_4 + x_9 &= 179^0 59' 49{,}5'' + v_2 + v_3 + v_4 + v_9 = 180^0 00' 00{,}0'' \\
\varphi_2 &= v_2 + v_3 + v_4 + v_9 - 10{,}5'' = 0
\end{aligned}$$

3) trijstūrim U - Ku - Ka:

$$\begin{aligned}
x_8 &= l_8 + v_8 = 54^0 42' 30{,}0'' + v_8 \\
x_7 &= l_7 + v_7 = 14\ 26\ 22{,}5 + v_7 \\
x_6 &= l_6 + v_6 = 51\ 57\ 13{,}0 + v_6 \\
x_5 &= l_5 + v_5 = 58\ 54\ 08{,}5 + v_5 \\
\hline
x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 180^0 00' 14{,}0'' + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = 180^0 00' 00{,}0'' \\
\varphi_3 &= v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + 14{,}0'' = 0
\end{aligned}$$

4) trijstūrim U - Ku - P:

$$\begin{aligned}
x_2 &= l_2 + v_2 = 7^0 07' 06{,}0'' + v_2 \\
x_7 &= l_7 + v_7 = 14\ 26\ 22{,}5 + v_7 \\
x_8 &= l_8 + v_8 = 54\ 42\ 30{,}0 + v_8 \\
x_9 &= l_9 + v_9 = 103\ 44\ 07{,}0 + v_9 \\
\hline
x_2 + x_7 + x_8 + x_9 &= 180^0 00' 05{,}5'' + v_2 + v_7 + v_8 + v_9 = 180^0 00' 00{,}0'' \\
\varphi_4 &= v_2 + v_7 + v_8 + v_9 + 5{,}5'' = 0
\end{aligned}$$

Uz ģeodetisko četrstūri U - Ku - Ka - P attiecīgais pola nolīdzinājums veidojams vairākos variantos, skatoties pēc tā, kuru punktu pieņem par polu. Ievērojot agrāk dotos attiecīgos aizrādijumus, lietosim kā polu virsotni „Uzvalnējums", jo tā minētā ģeodetiskā četrstūrī ir pretējā vislielākam trijstūrim Ku - Ka - P. Pēc parauga (649) veidojam

$$\frac{U\,Ku}{U\,Ka}\cdot\frac{U\,Ka}{U\,P}\cdot\frac{U\,P}{U\,Ku}=\frac{\sin x_5}{\sin(x_6+x_7)}\cdot\frac{\sin(x_2+x_3)}{\sin x_4}\cdot\frac{\sin x_7}{\sin x_2}=1$$

jeb, logaritmējot,

$$\log\sin x_5+\log\sin(x_2+x_3)+\log\sin x_7=$$
$$=\log\sin(x_6+x_7)+\log\sin x_4+\log\sin x_2$$

Pārejot uz skaitļiem, aprēķinam

$$\log\sin x_5 = \log\sin(l_5+v_5) = 9{,}932\,6201+12{,}8\,v_5$$
$$\log\sin(x_2+x_3) = \log\sin(l_2+v_2+l_3+v_3) = 9{,}620\,0227+45{,}9\,v_2+45{,}9\,v_3$$
$$\log\sin x_7 = \log\sin(l_7+v_7) = 9{,}396\,8250+81{,}7\,v_7$$

$$\log\sin x_5+\log\sin(x_2+x_3)+\log\sin x_7 = 8{,}949\,4678+12{,}8\,v_5+$$
$$+45{,}9\,v_2+45{,}9\,v_3+81{,}7\,v_7$$

un

$$\log\sin(x_6+x_7) = \log\sin(l_6+v_6+l_7+v_7) = 9{,}962\,0449+\ 9{,}2\,v_6+9{,}2\,v_7$$
$$\log\sin x_4 = \log\sin(l_4+v_4) = 9{,}894\,2863+\ 16{,}6\,v_4$$
$$\log\sin x_2 = \log\sin(l_2+v_2) = 9{,}093\,1379+168{,}6\,v_2$$

$$\log\sin(x_6+x_7)+\log\sin x_4+\log\sin x_2 = 8{,}949\,4691+\ 9{,}2\,v_6+$$
$$+9{,}2\,v_7+16{,}6\,v_4+168{,}6\,v_2$$

Tā tad pārvērstais pola nolīdzinājums ir

$$8{,}949\,4678+12{,}8\,v_5+45{,}9\,v_2+45{,}9\,v_3+81{,}7\,v_7=8{,}949\,4691+9{,}2\,v_6+$$
$$+9{,}2\,v_7+16{,}6\,v_4+168{,}6\,v_2$$

jeb

$$-122{,}7\,v_2+45{,}9\,v_3-16{,}6\,v_4+12{,}8\,v_5-9{,}2\,v_6+72{,}5\,v_7-13=0$$

Tā kā šī nolīdzinājuma koeficienti daudz lielāki par figuru nolīdzinājumu koeficientiem, izdalam ar 10 un rakstam pārvērsto pola nolīdzinājumu šādā galīga veidā:

$$\varphi_5=-12{,}27\,v_2+4{,}59\,v_3-1{,}66\,v_4+1{,}28\,v_5-0{,}92\,v_6+7{,}25\,v_7-$$
$$-1{,}30=0$$

Veidojot bazu nolīdzinājumu, uz $\triangle$U-Ku-P un $\triangle$U-P-C attiecīgās proporcijas

$$\frac{\sin x_7}{\sin x_2}=\frac{U\,P}{U\,Ku}$$

un

$$\frac{\sin x_1}{\sin x_{11}}=\frac{U\,C}{U\,P}$$

reizinam, un tādā kārtā atrodam

$$\frac{\sin x_1 \cdot \sin x_7}{\sin x_2 \cdot \sin x_{11}} = \frac{UC}{UKu} = \frac{b_2}{b_1}$$

jeb, logaritmējot,

$$(\log \sin x_1 + \log \sin x_7) - (\log \sin x_2 + \log \sin x_{11}) = \log b_2 - \log b_1$$

Šo nolīdzinājumu rakstot veidā

$$\log \sin x_1 + \log \sin x_7 + \log b_1 = \log \sin x_2 + \log \sin x_{11} + \log b_2$$

un pārejot uz skaitļiem, aprēķinam

$$\begin{array}{ll}
\log \sin x_1 = \log \sin (l_1 + v_1) & = 9{,}753\,4648 + 30{,}6\,v_1 \\
\log \sin x_7 = \log \sin (l_7 + v_7) & = 9{,}396\,8250 + 81{,}7\,v_7 \\
\log b_1 \quad = & = 2{,}938\,5282 \\
\hline
\log \sin x_1 + \log \sin x_7 + \log b_1 & = 2{,}088\,8180 + 30{,}6\,v_1 + 81{,}7\,v_7
\end{array}$$

un

$$\begin{array}{ll}
\log \sin x_2 = \log \sin (l_2 + v_2) & = 9{,}093\,1379 + 168{,}6\,v_2 \\
\log \sin x_{11} = \log \sin (l_{11} + v_{11}) & = 9{,}967\,8897 - 8{,}4\,v_{11} \\
\log b_2 \quad = & = 3{,}027\,8073 \\
\hline
\log \sin x_2 + \log \sin x_{11} + \log b_2 & = 2{,}088\,8349 + 168{,}6\,v_2 - 8{,}4\,v_{11}
\end{array}$$

Tā tad pārvērstais bazu nolīdzinājums ir

$$2{,}088\,8180 + 30{,}6\,v_1 + 81{,}7\,v_7 = 2{,}088\,8349 + 168{,}6\,v_2 - 8{,}4\,v_{11}$$

jeb

$$+ 30{,}6\,v_1 - 168{,}6\,v_2 + 81{,}7\,v_7 + 8{,}4\,v_{11} - 169{,}0 = 0$$

Izdalot ar 10, rakstam galīgā veidā:

$$\varphi_6 = + 3{,}06\,v_1 - 16{,}86\,v_2 + 8{,}17\,v_7 + 0{,}84\,v_{11} - 16{,}90 = 0$$

Atrastos pārvērstos noteikumu nolīdzinājumus sagrupējam sekojošā sistemā:

$$\begin{array}{l}
\varphi_1 = + v_1 + v_{10} + v_{11} - 7{,}00 = 0 \\
\varphi_2 = + v_2 + v_3 + v_4 + v_9 - 10{,}50 = 0 \\
\varphi_3 = + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + 14{,}00 = 0 \\
\varphi_4 = + v_2 + v_7 + v_8 + v_9 + 5{,}50 = 0 \\
\varphi_5 = -12{,}27v_2 + 4{,}59v_3 - 1{,}66v_4 + 1{,}28v_5 - 0{,}92v_6 + 7{,}25v_7 - 1{,}30 = 0 \\
\varphi_6 = + 3{,}06v_1 - 16{,}86v_2 + 8{,}17v_7 + 0{,}84v_{11} - 16{,}90 = 0
\end{array}$$

Lai sakarā ar izlīdzināšanas rēķinu atrastu ar izlīdzinātiem leņķiem aprēķinātās malas „Karatavas kalns" – „Ploriņi" F vidējo triangulacijas kļūdu m_F', izsakam šo malu kā bazes b_2 un izlīdzināto leņķu funkciju.

Trijstūros U - P - C un U - Ka - P

$$\frac{UP}{UC} = \frac{\sin x_{11}}{\sin x_1}$$

un

$$\frac{Ka\,P}{UP} = \frac{\sin x_9}{\sin x_4}$$

Reizinot šīs izteiksmes, atrodam

$$\frac{Ka\,P}{UC} = \frac{F}{b_2} = \frac{\sin x_9}{\sin x_1} \cdot \frac{\sin x_{11}}{\sin x_4}$$

jeb

$$F = b_2 \frac{\sin x_9}{\sin x_1} \cdot \frac{\sin x_{11}}{\sin x_4}$$

un logaritmiskā veidā

$$\log F = (\log b_2 + \log \sin x_9 + \log \sin x_{11}) - (\log \sin x_1 + \log \sin x_4)$$

Pārejot uz skaitļiem, aprēķinam

$$\begin{array}{llll}
\log b_2 & = & & = 3{,}027\,8073 \\
\log \sin x_9 & = & \log \sin (l_9 + v_9) & = 9{,}987\,3995 - 5{,}2\,v_9 \\
\log \sin x_{11} & = & \log \sin (l_{11} + v_{11}) & = 9{,}967\,8897 - 8{,}4\,v_{11} \\
\hline
\end{array}$$

$$\log b_2 + \log \sin x_9 + \log \sin x_{11} = 2{,}983\,0965 - 5{,}2\,v_9 - 8{,}4\,v_{11}$$

un

$$\begin{array}{llll}
\log \sin x_1 & = & \log \sin (l_1 + v_1) & = 9{,}753\,4648 + 30{,}6\,v_1 \\
\log \sin x_4 & = & \log \sin (l_4 + v_4) & = 9{,}894\,2863 + 16{,}6\,v_4 \\
\hline
\log \sin x_1 & + & \log \sin x_4 & = 9{,}647\,7511 + 30{,}6\,v_1 + 16{,}6\,v_4
\end{array}$$

Tā tad

$$\log F = (2{,}983\,0965 - 5{,}2\,v_9 - 8{,}4\,v_{11}) - (9{,}647\,7511 + 30{,}6\,v_1 + $$
$$+ 16{,}6\,v_4) = 3{,}335\,3454 - 30{,}6\,v_1 - 16{,}6\,v_4 - 5{,}2\,v_9 - 8{,}4\,v_{11}$$

Lietojot 39-ā paragrafā pieņemtos vispārējos apzīmējumus, sekojošās tabulās izrakstam pārvērsto noteikumu nolīdzinājumu un funkcijas log F koeficientus ar atbilstošām sumām, un aprēķinam korrelatu normalnolīdzinājumu koeficientus un svaru nolīdzinājumu brīvos locekļus ar attiecīgām sumu kontrolēm.

	a	b	c	d	e	g		(s)=(s')
1.	+1	0	0	0	0	+ 3,06	−30,6	−26,54
2.	0	+1	0	+1	−12,27	−16,86	0	−27,13
3.	0	+1	0	0	+ 4,59	0	0	+ 5,59
4.	0	+1	0	0	− 1,66	0	−16,6	−17,26
5.	0	0	+1	0	+ 1,28	0	0	+ 2,28
6.	0	0	+1	0	− 0,92	0	0	+ 0,08
7.	0	0	+1	+1	+ 7,25	+ 8,17	0	+17,42
8.	0	0	+1	+1	0	0	0	+ 2,00
9.	0	+1	0	+1	0	0	− 5,2	− 3,20
10.	+1	0	0	0	0	0	0	+ 1,00
11.	+1	0	0	0	0	+ 0,84	− 8,4	− 6,56

	aa	ab	ac	ad	ae	ag	af	a(s')
1.	+1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+3,06	−30,60	−26,54
2.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10.	+1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+ 1,00
11.	+1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+0,84	− 8,40	− 6,56
	+3,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+3,90	−39,00	−32,10
							w_1	− 7,00
							(σ_1)	−39,10

	bb	bc	bd	be	bg	bf	b(s')
1.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2.	+1,00	0,00	+1,00	−12,27	−16,86	0,00	−27,13
3.	+1,00	0,00	0,00	+ 4,59	0,00	0,00	+ 5,59
4.	+1,00	0,00	0,00	− 1,66	0,00	−16,60	−17,26
5.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
8.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
9.	+1,00	0,00	+1,00	0,00	0,00	− 5,20	− 3,20
10.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
11.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	+4,00	0,00	+2,00	− 9,34	−16,86	−21,80	−42,00
						w_2	−10,50
						(σ_2)	−52,50

	cc	cd	ce	cg	cf	c(s')
1.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5.	+1,00	0,00	+ 1,28	0,00	0,00	+ 2,28
6.	+1,00	0,00	− 0,92	0,00	0,00	+ 0,08
7.	+1,00	+1,00	+ 7,25	+ 8,17	0,00	+ 17,42
8.	+1,00	+1,00	0,00	0,00	0,00	+ 2,00
9.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
11.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	+4,00	+2,00	+ 7,61	+ 8,17	0,00	+ 21,78
					w_3	+ 14,00
					(σ_3)	+ 35,78

	dd	de	dg	df	d(s')
1.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2.	+1,00	− 12,27	− 16,86	0,00	− 27,13
3.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7.	+1,00	+ 7,25	+ 8,17	0,00	+ 17,42
8.	+1,00	0,00	0,00	0,00	+ 2,00
9.	+1,00	0,00	0,00	− 5,20	− 3,20
10.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
11.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	+4,00	− 5,02	− 8,69	− 5,20	− 10,91
				w_4	+ 5,50
				(σ_4)	− 5,41

	ee	eg	ef	e(s')
1.	0,00	0,00	0,00	0,00
2.	+150,55	+206,87	0,00	+ 332,89
3.	+ 21,07	0,00	0,00	+ 25,66
4.	+ 2,76	0,00	+ 27,56	+ 28,65
5.	+ 1,64	0,00	0,00	+ 2,92
6.	+ 0,85	0,00	0,00	− 0,07
7.	+ 52,56	+ 59,23	0,00	+ 126,29
8.	0,00	0,00	0,00	0,00
9.	0,00	0,00	0,00	0,00
10.	0,00	0,00	0,00	0,00
11.	0,00	0,00	0,00	0,00
	+229,43	+266,10	+ 27,56	+ 516,34
			w_5	− 1,30
			(σ_5)	+ 515,04

	gg	gf	g(s')
1.	+ 9,36	− 93,64	− 81,21
2.	+284,26	0,00	+ 457,41
3.	0,00	0,00	0,00
4.	0,00	0,00	0,00
5.	0,00	0,00	0,00
6.	0,00	0,00	0,00
7.	+ 66,75	0,00	+ 142,32
8.	0,00	0,00	0,00
9.	0,00	0,00	0,00
10.	0,00	0,00	0,00
11.	+ 0,70	− 7,05	− 5,51
	+361,07	− 100,69	− 513,01
		w_6	− 16,90
		(σ_6)	+ 496,11

	ff	f(s')
1.	+ 939,36	+ 812,12
2.	0,00	0,00
3.	0,00	0,00
4.	+ 275,56	+ 286,52
5.	0,00	0,00
6.	0,00	0,00
7.	0,00	0,00
8.	0,00	0,00
9.	+ 27,04	+ 16,64
10.	0,00	0,00
11.	+ 70,56	+ 55,10
	+1309,52	+1170,38

	F
[af]	− 39,00
[bf]	− 21,80
[cf]	0,00
[df]	− 5,20
[ef]	+ 27,56
[gf]	− 100,69
[ff]	+1309,52
	+1170,39

Tā tad ar svaru nolīdzinājumu brīviem locekļiem, sumu [ff] un kontrollocekļiem — (σ) papildinātā korrelatu normalnolīdzinājumu sistema ir:

$+3{,}00k_1 + 3{,}90k_6 - 7{,}00 = 0$	− 39,00	+ 39,10
$+4{,}00k_2 + 2{,}00k_4 - 9{,}34k_5 - 16{,}86k_6 - 10{,}50 = 0$	− 21,80	+ 52,50
$+4{,}00k_3 + 2{,}00k_4 + 7{,}61k_5 + 8{,}17k_6 + 14{,}00 = 0$	0,00	− 35,78
$+2{,}00k_2 + 2{,}00k_3 + 4{,}00k_4 - 5{,}02k_5 - 8{,}69k_6 + 5{,}50 = 0$	− 5,20	+ 5,41
$-9{,}34k_2 + 7{,}61k_3 - 5{,}02k_4 + 229{,}43k_5 + 266{,}10k_6 - 1{,}30 = 0$	+ 27,56	− 515,04
$+3{,}90k_1 - 16{,}86k_2 + 8{,}17k_3 - 8{,}69k_4 + 266{,}10k_5 + 361{,}07k_6 - 16{,}90 = 0$	− 100,69	− 496,11
	+1309,52	−1170,38

Šo sistemu reducējam un atslēdzam Gauss'a algoritma parastā kārtībā (sk. piel. II, schema 2):

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	w	F	−(σ)	K
+3,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+ 3,90	− 7,00	− 39,00	+ 39,10	0,00
	+4,00	0,00	+2,00	− 9,34	− 16,86	− 10,50	− 21,80	+ 52,50	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	+4,00	0,00	+2,00	− 9,34	− 16,86	− 10,50	− 21,80	+ 52,50	0,00
		+4,00	+2,00	+ 7,61	+ 8,17	+ 14,00	0,00	− 35,78	0,00
0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
		+4,00	+2,00	+ 7,61	+ 8,17	+ 14,00	0,00	− 35,78	0,00
			+4,00	− 5,02	− 8,69	+ 5,50	− 5,20	+ 5,41	0,00
0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	− 0,50		− 1,00	+ 4,67	+ 8,43	+ 5,25	+ 10,90	− 26,25	
		− 0,50	− 1,00	− 3,80	− 4,08	− 7,00	0,00	+ 17,89	
			+2,00	− 4,15	− 4,34	+ 3,75	+ 5,70	− 2,95	+0,01
				+229,43	+ 266,10	− 1,30	+ 27,56	− 515,04	0,00
0,00				0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
	+ 2,335			− 21,81	− 39,37	− 24,52	− 50,90	+ 122,59	
		− 1,902		− 14,47	− 15,54	− 26,63	0,00	+ 68,05	
			+ 2,075	− 8,61	− 9,01	+ 7,78	+ 11,83	− 6,12	
				+184,54	+ 202,18	− 44,67	− 11,51	− 330,52	+0,02
					+ 361,07	− 16,90	− 100,69	− 496,11	−0,01
− 1,300					− 5,07	+ 9,10	+ 50,70	− 50,83	
	+ 4,215				− 71,06	− 44,26	− 91,89	+ 221,29	

		−2,042			− 16,68	− 28,59	0,00	+ 73,06	
			+2,170		− 9,42	+ 8,14	+ 12,37	− 6,40	
				− 1,0956	− 221,51	+ 48,94	+ 12,61	+ 362,12	
					+37,33	− 23,57	− 116,90	+ 103,13	−0,01
						0,00	+1309,52	−1170,38	+0,01
+ 2,333						− 16,33	− 507,00		
	+ 2,625					− 27,56	− 118,81		
		−3,500				− 49,00	0,00		
			−1,875			− 7,03	− 16,24		
				+ 0,242		− 10,81	− 0,72		
					+ 0,6314	− 14,88	− 366,08		
						− 125,61	+ 300,67		

0,000						$k_1w_1 = -10{,}584$
0,000	0,000					$k_2w_2 = -52{,}017$
0,000	+0,719	+0,719				$k_3w_3 = -44{,}996$
0,000	−1,051	+0,856	−0,934			$k_4w_4 = -7{,}915$
−0,821	+2,661	−1,289	+1,370	−0,692		$k_5w_5 = +0{,}585$
+2,333	+2,625	−3,500	−1,875	+0,242	+ 0,6314	$k_6w_6 = -10{,}671$
+1,512 $= k_1$	+4,954 $= k_2$	−3,214 $= k_3$	−1,439 $= k_4$	−0,450 $= k_5$	+ 0,6314 $= k_6$	$[kw] = -125{,}598$

Ar atrastām korrelatām aprēķinam novērojumu izlabojumus un veidojam šo izlabojumu kvadratu sumu [vv]:

							v	vv
1)	+1,00×1,512					+ 3,06×0,6314	=+3,444	11,861
2)		+1,00×4,954		−1,00×1,439	+12,27×0,450	−16,86×0,6314	=−1,609	2,589
3)		+1,00×4,954			− 4,59×0,450		=+2,889	8,346
4)		+1,00×4,954			+ 1,66×0,450		=+5,701	32,501
5)			−1,00×3,214		− 1,28×0,450		=−3,790	14,364
6)			−1,00×3,214		+ 0,92×0,450		=−2,800	7,840
7)			−1,00×3,214	−1,00×1,439	− 7,25×0,450	+ 8,17×0,6314	=−2,757	7,601
8)			−1,00×3,214	−1,00×1,439			=−4,653	21,650
9)		+1,00×4,954		−1,00×1,439			=+3,515	12,355
10)	+1,00×1,512						=+1,512	2,286
11)	+1,00×1,512					+ 0,84×0,6314	=+2,042	4,170
								125,563= =[vv]

Tā tad, noapaļojot izlabojumus 0,01″ vienībās, izlīdzinātie leņķi ir

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
x_1 & = & 34^0\,31'\,50{,}0'' & + 3{,}44'' & = & 34^0\,31'\,53{,}44'' \\
x_2 & = & 7\;\;07\;\;06{,}0 & - 1{,}61 & = & 7\;\;07\;\;04{,}39 \\
x_3 & = & 17\;\;31\;\;12{,}5 & + 2{,}89 & = & 17\;\;31\;\;15{,}39 \\
x_4 & = & 51\;\;37\;\;24{,}0 & + 5{,}70 & = & 51\;\;37\;\;29{,}70 \\
x_5 & = & 58\;\;54\;\;08{,}5 & - 3{,}79 & = & 58\;\;54\;\;04{,}71 \\
x_6 & = & 51\;\;57\;\;13{,}0 & - 2{,}80 & = & 51\;\;57\;\;10{,}20 \\
x_7 & = & 14\;\;26\;\;22{,}5 & - 2{,}76 & = & 14\;\;26\;\;19{,}74 \\
x_8 & = & 54\;\;42\;\;30{,}0 & - 4{,}65 & = & 54\;\;42\;\;25{,}35 \\
x_9 & = & 103\;\;44\;\;07{,}0 & + 3{,}52 & = & 103\;\;44\;\;10{,}52 \\
x_{10} & = & 33\;\;42\;\;19{,}0 & + 1{,}51 & = & 33\;\;42\;\;20{,}51 \\
x_{11} & = & 111\;\;45\;\;44{,}0 & + 2{,}04 & = & 111\;\;45\;\;46{,}04
\end{array}
$$

Kontroles nolūkā ieliekam izlīdzinātos leņķus noteikumu nolīdzinājumos, pie kam pola un bazes nolīdzinājumus lietojam logaritmiskā veidā:

1) trijstūris U P C:

$$
\begin{array}{lcr}
x_1 & = & 34^0\,31'\,53{,}44'' \\
x_{10} & = & 33\;\;42\;\;20{,}51 \\
x_{11} & = & \underline{111\;\;45\;\;46{,}04} \\
 & & 179^0\,59'\,59{,}99''
\end{array}
$$

2) trijstūris U Ka P:

$$\begin{aligned} x_2 &= 7^0\,07'04{,}39'' \\ x_3 &= 17\ \ 31\ \ 15{,}39 \\ x_4 &= 51\ \ 37\ \ 29{,}70 \\ x_9 &= \underline{103\ \ 44\ \ 10{,}52} \\ & \ 180^0\,00'00{,}00'' \end{aligned}$$

3) trijstūris U Ku Ka:

$$\begin{aligned} x_5 &= 58^0\,54'04{,}71'' \\ x_6 &= 51\ \ 57\ \ 10{,}20 \\ x_7 &= 14\ \ 26\ \ 19{,}74 \\ x_8 &= \underline{54\ \ 42\ \ 25{,}35} \\ & \ 180^0\,00'00{,}00'' \end{aligned}$$

4) trijstūris U Ku P:

$$\begin{aligned} x_2 &= 7^0\,07'04{,}39'' \\ x_7 &= 14\ \ 26\ \ 19{,}74 \\ x_8 &= 54\ \ 42\ \ 25{,}35 \\ x_9 &= \underline{103\ \ 44\ \ 10{,}52} \\ & \ 180^0\,00'00{,}00'' \end{aligned}$$

5) pola nolīdzinājums:

$$\begin{aligned} \log\sin x_5 &= \log\sin 58^0\,54'04{,}71'' = 9{,}932\,6152 \\ \log\sin(x_2+x_3) &= \log\sin 24\ \ 38\ \ 19{,}78 = 9{,}620\,0286 \\ \log\sin x_7 &= \log\sin 14\ \ 26\ \ 19{,}74 = \underline{9{,}396\,8025} \\ & \phantom{= \log\sin 14\ \ 26\ \ 19{,}74 ''=\ } 8{,}949\,4463 \\ \log\sin(x_6+x_7) &= \log\sin 66^0\,23'29{,}94'' = 9{,}962\,0398 \\ \log\sin x_4 &= \log\sin 51\ \ 37\ \ 29{,}70 = 9{,}894\,2958 \\ \log\sin x_2 &= \log\sin\ \ 7\ \ 07\ \ 04{,}39 = \underline{9{,}093\,1107} \\ & \phantom{= \log\sin 14\ \ 26\ \ 19{,}74 ''=\ } 8{,}949\,4463 \end{aligned}$$

6) bazes nolīdzinājums:

$$\begin{aligned} \log\sin x_1 &= \log\sin 34^0\,31'53{,}44'' = 9{,}753\,4753 \\ \log\sin x_7 &= \log\sin 14\ \ 26\ \ 19{,}74 = 9{,}396\,8025 \\ \log b_1 &= \log 868{,}017 = \underline{2{,}938\,5282} \\ & \phantom{= \log\sin 14\ \ 26\ \ 19{,}74 ''=\ } 2{,}088\,8060 \\ \log\sin x_2 &= \log\sin\ \ 7^0 07'04{,}39'' = 9{,}093\,1107 \\ \log\sin x_{11} &= \log\sin 111\ \ 45\ \ 46{,}05 = 9{,}967\,8880 \\ \log b_2 &= \log 1066{,}123 = \underline{3{,}027\,8073} \\ & \phantom{= \log\sin 14\ \ 26\ \ 19{,}74 ''=\ } 2{,}088\,8060 \end{aligned}$$

Ar atrasto sumu [vv] nosakam svara vienības, t. i. neizlīdzināta leņķa novērojuma, vidējo kļūdu

$$m = \pm \sqrt{\frac{125{,}563}{6}} = \pm 4{,}57''$$

Beidzot, vēl aprēķinam malu F un atbilstošo vidējo triangulacijas kļūdu m_F'.

$$\begin{array}{rcrcl}
\log b_2 & = & & = & 3{,}027\,8073 \\
\log \sin x_{11} & = & \log \sin 111^0 45' 46{,}04'' & = & 9{,}967\,8880 \\
\log \sin x_9 & = & \log \sin 103\ \ 44\ \ 10{,}52 & = & 9{,}987\,3976 \\
-\log \sin x_1 & = & -\log \sin 34\ \ 31\ \ 53{,}44 & = & 0{,}246\,5247 \\
-\log \sin x_4 & = & -\log \sin 51\ \ 37\ \ 29{,}70 & = & 0{,}105\,7042 \\
\hline
\log F & = & & = & 3{,}335\,3218
\end{array}$$

tā tad

$$F = 2164{,}322 \text{ m}$$

arī atzīmējam atrastam log F atbilstošo, uz 1 mm attiecināto, logaritmu tabulas diferenci

$$\Delta = 2{,}0$$

Sakarā ar korrelatu normalnolīdzinājumu reducēšanu atraduši funkcijas log F svara koeficientu

$$Q_{\log F} = 300{,}67$$

nosakam septiņzīmīgo logaritmu mantisu vienībās izteikto funkcijas vidējo triangulacijas kļūdu

$$m_{\log F}' = \pm 4{,}57 \sqrt{300{,}67} = \pm 79{,}1$$

Tā tad

$$m_F' = \pm \frac{m_{\log F}'}{\Delta} = \pm \frac{79{,}1}{2{,}0} = \pm 40 \text{ mm}$$

kas iztaisa apmēram $\pm \frac{1}{54000}$ F jeb $\pm$ 18 mm uz 1 kilometru.

§ 58. Trigonometriskā tīklā novēroto virzienu izlīdzināšana. (Piemērs.)

No Jaunlatgales bazes tīklā (12. att.) visās kombinacijās pēc Schreiber'a metodes novērotiem leņķiem atvasināti šādi uz attiecīgiem centriem reducētie vienādas noteiktības pilnīgie virzienu paņēmieni:

1) stacija „Kangari" (K):

$l_1 = 0^0 00' 00{,}00''$

$l_2 = 15\ 53\ 43{,}38$

$l_3 = 37\ 17\ 40{,}44$

2) stacija „Jemilova" (J):

$l_4 = 0^0 00' 00{,}00''$

$l_5 = 25\ 40\ 39{,}71$

$l_6 = 43\ 03\ 21{,}90$

3) stacija „Punduri" (P):

$l_7 = 0^0 00' 00{,}00''$

$l_8 = 46\ 56\ 11{,}69$

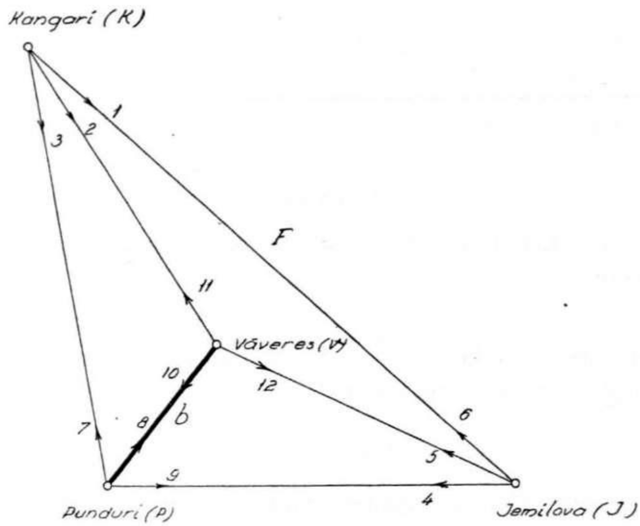
$l_9 = 99\ 38\ 59{,}23$

4) stacija „Vāveres" (V):

$l_{10} = 0^0 00' 00{,}00''$

$l_{11} = 111\ 39\ 52{,}45$

$l_{12} = 258\ 23\ 26{,}62$



12. attēls.

Bez tam dota novērotā baze

„Vāveres" — „Punduri": $b = 7067{,}875_5 \pm 0{,}005_3$ m

ar atbilstošo

$$\log b = 3{,}849\ 28889$$

Izlīdzināsim novērotos virzienus, un, izejot no minētās bazes, ar atrastiem izlīdzinātiem virzieniem aprēķināsim valsts I klases trigonometriskā tīklā tieši ieejošo malu „Kangari" — „Jemilova" F un atbilstošo vidējo kļūdu m_F.

Neatkarīgo noteikumu nolīdzinājumu skaitu noteicošie elementi ir

$$p = 4$$

$$p' = 0$$

$$l = 6$$

$$l' = 0$$
$$r = 12$$
$$b = 1$$

Tā tad, staciju un bazu nolīdzinājumiem trūkstot,

$$N_f = 3$$
$$N_p = 1$$
$$\overline{N = 4}$$

Apzīmējot virzienu novērojumu l izlabojumus ar v, izlīdzinātie virzieni x izsakami šādā vispārējā veidā:

$$\begin{array}{ll} x_1 = l_1 + v_1 & x_7 = l_7 + v_7 \\ x_2 = l_2 + v_2 & x_8 = l_8 + v_8 \\ x_3 = l_3 + v_3 & x_9 = l_9 + v_9 \\ x_4 = l_4 + v_4 & x_{10} = l_{10} + v_{10} \\ x_5 = l_5 + v_5 & x_{11} = l_{11} + v_{11} \\ x_6 = l_6 + v_6 & x_{12} = l_{12} + v_{12} \end{array}$$

Izejot no attiecīgo virzienu ieslēgtiem izlīdzinātiem leņķiem $x_{i'.i''}$ un izsakot tos ar atbilstošo izlīdzināto virzienu starpībām, veidojam šādus 3 figuru un 1 pola nolīdzinājumu:

1) trijstūrim KJV (sfēr. ekscess $\varepsilon = 0{,}25_5''$):

$$\begin{array}{l} x_{1\cdot2} = x_2 - x_1 = l_2 + v_2 - l_1 - v_1 = 15^0 53'43{,}38'' - v_1 + v_2 \\ x_{5\cdot6} = x_6 - x_5 = l_6 + v_6 - l_5 - v_5 = 17\ 22\ 42{,}19 - v_5 + v_6 \\ \underline{x_{11\cdot12} = x_{12} - x_{11} = l_{12} + v_{12} - l_{11} - v_{11} = 146\ 43\ 34{,}17 - v_{11} + v_{12}} \\ x_{1\cdot2} + x_{5\cdot6} + x_{11\cdot12} = 179^0 59'59{,}74'' - v_1 + v_2 - \\ \qquad - v_5 + v_6 - v_{11} + v_{12} = 180^0 00'00{,}00'' + 0{,}25_5'' \end{array}$$

$$\varphi_1 = -v_1 + v_2 - v_5 + v_6 - v_{11} + v_{12} - 0{,}51_5'' = 0$$

2) trijstūrim KPV (sfēr. ekscess $\varepsilon = 0{,}23_5''$):

$$\begin{array}{l} x_{2\cdot3} = x_3 - x_2 = l_3 + v_3 - l_2 - v_2 = 21^0 23'57{,}06'' - v_2 + v_3 \\ x_{7\cdot8} = x_8 - x_7 = l_8 + v_8 - l_7 - v_7 = 46\ 56\ 11{,}69 - v_7 + v_8 \\ \underline{x_{10\cdot11} = x_{11} - x_{10} = l_{11} + v_{11} - l_{10} - v_{10} = 111\ 39\ 52{,}45 - v_{10} + v_{11}} \\ x_{2\cdot3} + x_{7\cdot8} + x_{10\cdot11} = 180^0 00'01{,}20'' - v_2 + v_3 - \\ \qquad - v_7 + v_8 - v_{10} + v_{11} = 180^0 00'00{,}00'' + 0{,}23_5'' \end{array}$$

$$\varphi_2 = -v_2 + v_3 - v_7 + v_8 - v_{10} + v_{11} + 0{,}96_5'' = 0$$

3) trijstūrim J P V (sfēr. ekscess $\varepsilon = 0{,}22_7''$):

$$x_{4\cdot5} = x_5 - x_4 = l_5 + v_5 - l_4 - v_4 = 25^0\,40'\,39{,}71'' - v_4 + v_5$$
$$x_{8\cdot9} = x_9 - x_8 = l_9 + v_9 - l_8 - v_8 = 52\;42\;47{,}54 - v_8 + v_9$$
$$x_{12\cdot10} = x_{10} - x_{12} = l_{10} + v_{10} - l_{12} - v_{12} = 101\;36\;33{,}38 + v_{10} - v_{12}$$

$$x_{4\cdot5} + x_{8\cdot9} + x_{12\cdot10} = 180^0\,00'\,00{,}63'' - v_4 + v_5 -$$
$$- v_8 + v_9 + v_{10} - v_{12} = 180^0\,00'\,00{,}00'' + 0{,}22_7''$$

$$\varphi_3 = -v_4 + v_5 - v_8 + v_9 + v_{10} - v_{12} + 0{,}40_3'' = 0$$

4) polam V:

$$\frac{VP}{VK}\cdot\frac{VK}{VJ}\cdot\frac{VJ}{VP} = \frac{\sin x_{2\cdot3}}{\sin x_{7\cdot8}}\cdot\frac{\sin x_{5\cdot6}}{\sin x_{1\cdot2}}\cdot\frac{\sin x_{8\cdot9}}{\sin x_{4\cdot5}} = 1$$

jeb

$$\log\sin x_{2\cdot3} + \log\sin x_{5\cdot6} + \log\sin x_{8\cdot9} =$$
$$\log\sin x_{7\cdot8} + \log\sin x_{1\cdot2} + \log\sin x_{4\cdot5}$$

Pārejot uz skaitļiem, aprēķinam

$$\log\sin x_{2\cdot3} = \log\sin(l_3 + v_3 - l_2 - v_2) =$$
$$= \log\sin(21^0 23'57{,}06'' - v_2 + v_3) = 9{,}562\;13043_3 - 538v_2 + 538v_3$$
$$\log\sin x_{5\cdot6} = \log\sin(l_6 + v_6 - l_5 - v_5) =$$
$$= \log\sin(17^0 22'42{,}19'' - v_5 + v_6) = 9{,}475\;20730_7 - 672v_5 + 672v_6$$
$$\log\sin x_{8\cdot9} = \log\sin(l_9 + v_9 - l_8 - v_8) =$$
$$= \log\sin(52^0 42'47{,}54'' - v_8 + v_9) = 9{,}900\;70193_9 - 161v_8 + 161v_9$$

$$\log\sin x_{2\cdot3} + \log\sin x_{5\cdot6} + \log\sin x_{8\cdot9} = 8{,}938\;03967_9 - 538v_2 + 538v_3 -$$
$$- 672v_5 + 672v_6 - 161v_8 + 161v_9$$

un

$$\log\sin x_{7\cdot8} = \log\sin(l_8 + v_8 - l_7 - v_7) =$$
$$= \log\sin(46^0 56'11{,}69'' - v_7 + v_8) = 9{,}863\;67869_9 - 197v_7 + 197v_8$$
$$\log\sin x_{1\cdot2} = \log\sin(l_2 + v_2 - l_1 - v_1) =$$
$$= \log\sin(15^0 53'43{,}38'' - v_1 + v_2) = 9{,}437\;56305_2 - 740v_1 + 740v_2$$
$$\log\sin x_{4\cdot5} = \log\sin(l_5 + v_5 - l_4 - v_4) =$$
$$= \log\sin(25^0 40'39{,}71'' - v_4 + v_5) = 9{,}636\;79701_0 - 438v_4 + 438v_5$$

$$\log\sin x_{7\cdot8} + \log\sin x_{1\cdot2} + \log\sin x_{4\cdot5} = 8{,}938\;03876_1 - 197v_7 + 197v_8 -$$
$$- 740v_1 + 740v_2 - 438v_4 + 438v_5$$

Salīdzinot šīs izteiksmes, veidojam nolīdzinājumu

$$- 538v_2 + 538v_3 - 672v_5 + 672v_6 - 161v_8 + 161v_9 + 8{,}938\;03967_9 =$$
$$= - 197v_7 + 197v_8 - 740v_1 + 740v_2 - 438v_4 + 438v_5 + 8{,}938\;03876_1$$

jeb, pārgrupējot locekļus un izdalot ar 100:

$$\varphi_4 = + 7{,}40v_1 - 12{,}78v_2 + 5{,}38v_3 + 4{,}38v_4 - 11{,}10v_5 + 6{,}72v_6 +$$
$$+ 1{,}97v_7 - 3{,}58v_8 + 1{,}61v_9 + 0{,}91_8 = 0$$

Tā tad ir veidota šāda neatkarīgu noteikumu nolīdzinājumu sistema:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= -1{,}00v_1+1{,}00v_2 \quad -1{,}00v_5+1{,}00v_6 \quad -1{,}00v_{11}+1{,}00v_{12}-0{,}515=0\\
\varphi_2 &= -1{,}00v_2+1{,}00v_3 \quad -1{,}00v_7+1{,}00v_8 \quad -1{,}00v_{10}+1{,}00v_{11} \quad +0{,}965=0\\
\varphi_3 &= -1{,}00v_4+1{,}00v_5 \quad -1{,}00v_8+1{,}00v_9+1{,}00v_{10} \quad -1{,}00v_{12}+0{,}403=0\\
\varphi_4 &= +7{,}40v_1-12{,}78v_2+5{,}38v_3+4{,}38v_4-11{,}10v_5+6{,}72v_6+1{,}97v_7-3{,}58v_8+1{,}61v_9 \quad +0{,}918=0
\end{aligned}
$$

pie kam, kā jābūt, katrā nolīdzinājumā koeficientu suma ir vienāda ar nulli.

Sakarā ar noteikumu nolīdzinājumu veidošanu, izsakam malu F kā bazes b un izlīdzināto virzienu funkciju. No $\triangle$ V P K un $\triangle$ V K J

$$\frac{VK}{VP}=\frac{\sin x_{7\cdot 8}}{\sin x_{2\cdot 3}}$$

un

$$\frac{KJ}{VK}=\frac{\sin x_{11\cdot 12}}{\sin x_{5\cdot 6}}$$

Reizinot šīs izteiksmes, atrodam

$$\frac{KJ}{VP}=\frac{F}{b}=\frac{\sin x_{7\cdot 8}\cdot\sin x_{11\cdot 12}}{\sin x_{2\cdot 3}\cdot\sin x_{5\cdot 6}}$$

tā tad

$$F=b\,\frac{\sin x_{7\cdot 8}\cdot\sin x_{11\cdot 12}}{\sin x_{2\cdot 3}\cdot\sin x_{5\cdot 6}}$$

jeb

$$
\begin{aligned}
\log F = (\log b + \log\sin x_{7\cdot 8} + \log\sin x_{11\cdot 12}) -\\
- (\log\sin x_{2\cdot 3} + \log\sin x_{5\cdot 6})
\end{aligned}
$$

Pārejot uz skaitļiem, aprēķinam

$$
\begin{aligned}
&\log b && =3{,}849\,28889\\
&\log\sin x_{7\cdot 8} = \log\sin(l_8+v_8-l_7-v_7) && =9{,}863\,67870-197v_7+197v_8\\
&\underline{\log\sin x_{11\cdot 12} = \log\sin(l_{12}+v_{12}-l_{11}-v_{11}) = 9{,}739\,28841-321v_{11}+321v_{12}}\\
&\log b+\log\sin x_{7\cdot 8}+\log\sin x_{11\cdot 12} && =3{,}452\,25600-197v_7+197v_8-\\
& && -321v_{11}+321v_{12}
\end{aligned}
$$

un

$$
\begin{aligned}
&\log\sin x_{2\cdot 3} = \log\sin(l_3+v_3-l_2-v_2) && =9{,}562\,13043-538v_2+538v_3\\
&\underline{\log\sin x_{5\cdot 6} = \log\sin(l_6+v_6-l_5-v_5) = 9{,}475\,20731-672v_5+672v_6}\\
&\log\sin x_{2\cdot 3}+\log\sin x_{5\cdot 6} && =9{,}037\,33774-538v_2+538v_3-\\
& && -672v_5+672v_6
\end{aligned}
$$

Tā tad, pārejot uz sešzīmīgiem logaritmiem:

$$\log F = (3{,}452\,256 - 1{,}97v_7 + 1{,}97v_8 - 3{,}21v_{11} + 3{,}21v_{12}) -$$
$$- (9{,}037\,338 - 5{,}38v_2 + 5{,}38v_3 - 6{,}72v_5 + 6{,}72v_6) =$$
$$= 4{,}414\,918 + 5{,}38v_2 - 5{,}38v_3 + 6{,}72v_5 - 6{,}72v_6 -$$
$$- 1{,}97v_7 + 1{,}97v_8 - 3{,}21v_{11} + 3{,}21v_{12}$$

Šīs isteiksmes koeficientus lietojam funkcijas log F svara koeficienta atrašanai vajadzīgo elementu noteikšanai.

Līdzīgā kārtā, kā iepriekšējā piemērā, veidojam noteikumu nolīdzinājumiem atbilstošo korrelatu normalnolīdzinājumu sistemu, papildinot to ar funkcijas log F svaru nolīdzinājumu brīviem locekļiem, minētās funkcijas koeficientu kvadratu sumu [ff] un kontrollocekļiem — (σ). Šī sistema ir

$+6{,}00k_1 - 2{,}00k_2 - 2{,}00k_3 - 2{,}36k_4 - 0{,}515 = 0$	$-$ 1,64	$+$ 2,515
$-2{,}00k_1 + 6{,}00k_2 - 2{,}00k_3 + 12{,}61k_4 + 0{,}965 = 0$	$-$ 10,03	$-$ 5,545
$-2{,}00k_1 - 2{,}00k_2 + 6{,}00k_3 - 10{,}29k_4 + 0{,}403 = 0$	$+$ 1,54	$+$ 6,347
$-2{,}36k_1 + 12{,}61k_2 - 10{,}29k_3 + 453{,}87k_4 + 0{,}918 = 0$	$-$228,38	$-$226,358
	$+$176,56	$+$ 61,94

Reducējot un atslēdzot šo sistemu Gauss'a algoritma parastā kārtībā, atrodam korrelatas

$$k_1 = -0{,}0421,\quad k_2 = -0{,}2281,\quad k_3 = -0{,}1563,\quad k_4 = +0{,}00055$$

un funkcijas log F svara koeficientu

$$Q_{\log F} = 44{,}405$$

Ar atrastām korrelatām aprēķinam novēroto virzienu izlabojumus v, kontrolējot tos pa atsevišķām stacijām atbilstošām sumām, un arī veidojam sumu [vv]:

			vv
Stacija „Kangari":	v_1	$= + 0{,}046''$	0,002116
	v_2	$= + 0{,}179$	0,032041
	v_3	$= - 0{,}225$	0,050625
		0,000	
Stacija „Jemilova":	v_4	$= + 0{,}159$	0,025281
	v_5	$= - 0{,}120$	0,014400
	v_6	$= - 0{,}038$	0,001444
		$+$ 0,001	
Stacija „Punduri":	v_7	$= + 0{,}229$	0,052441
	v_8	$= - 0{,}074$	0,005476

$$v_9 = \underline{-0{,}156''} \qquad 0{,}024336$$

$$-0{,}001$$

Stacija „Vāveres“: $v_{10} = +0{,}072 \qquad 0{,}005184$

$$v_{11} = -0{,}186 \qquad 0{,}034596$$

$$v_{12} = \underline{+0{,}114} \qquad \underline{0{,}012996}$$

$$0{,}000 \qquad 0{,}260936 = [vv]$$

Tālāk, veidojam atsevišķām stacijām atbilstošos tīklā izlīdzinātos virzienu paņēmienus un pagriežam tos tā, lai būtu tie paši nulles virzieni, kā pirms izlīdzināšanas:

Stacija „Kangari“: $x_1 = 0^0 00' 00{,}00'' + 0{,}046'' = 0^0 00' 00{,}046''$

$x_2 = 15\ 53\ 43{,}38 + 0{,}179 = 15\ 53\ 43{,}559$

$x_3 = 37\ 17\ 40{,}44 - 0{,}225 = 37\ 17\ 40{,}215$

un pēc pagriešanas

$x_1 = 0^0 00' 00{,}000''$

$x_2 = 15\ 53\ 43{,}513$

$x_3 = 37\ 17\ 40{,}169$

Stacija „Jemilova“: $x_4 = 0^0 00' 00{,}00'' + 0{,}159'' = 0^0 00' 00{,}159''$

$x_5 = 25\ 40\ 39{,}71 - 0{,}120 = 25\ 40\ 39{,}590$

$x_6 = 43\ 03\ 21{,}90 - 0{,}038 = 43\ 03\ 21{,}862$

un pēc pagriešanas

$x_4 = 0^0 00' 00{,}000''$

$x_5 = 25\ 40\ 39{,}431$

$x_6 = 43\ 03\ 21{,}703$

Stacija „Punduri“: $x_7 = 0^0 00' 00{,}00'' + 0{,}229'' = 0^0 00' 00{,}229''$

$x_8 = 46\ 56\ 11{,}69 - 0{,}074 = 46\ 56\ 11{,}616$

$x_9 = 99\ 38\ 59{,}23 - 0{,}156 = 99\ 38\ 59{,}074$

un pēc pagriešanas

$x_7 = 0^0 00' 00{,}000''$

$x_8 = 46\ 56\ 11{,}387$

$x_9 = 99\ 38\ 58{,}845$

Stacija „Vāveres“: $x_{10} = 0^0 00' 00{,}00'' + 0{,}072'' = 0^0 00' 00{,}072''$

$x_{11} = 111\ 39\ 52{,}45 - 0{,}186 = 111\ 39\ 52{,}264$

$x_{12} = 258\ 23\ 26{,}62 + 0{,}114 = 258\ 23\ 26{,}734$

un pēc pagriešanas

$$x_{10} = 0^0 00'00{,}000''$$
$$x_{11} = 111\ 39\ 52{,}192$$
$$x_{12} = 258\ 23\ 26{,}662$$

Lai kontrolētu izlīdzināšanas rēķinu, pa atsevišķiem trijstūriem veidojam to leņķus noteicošās izlīdzināto virzienu starpības. Sakarā ar to no sfēriskiem leņķiem pārejam uz trijstūru aprēķinam vajadzīgiem atbilstošiem plakaniem leņķiem, uz Legendre'a teoremas pamata katrā trijstūri sadalot sfērisko ekscesu vienmērīgi uz visiem trīs leņķiem. Šo plakano leņķu sumai katrā trijstūrī jābūt vienādai ar 180°; bet kas zīmējas uz pola nolīdzinājumu, tad, kā zinams, tam jābūt apmierinātam tāpat ar plakaniem, kā ar sfēriskiem leņķiem. Arī atzīmējam plakano leņķu log sin un ar tiem un dotās bazes logaritmu aprēķinātos trijstūru malu logaritmus.

Trijstūri	Izlīdzinātie leņķi		log sin	Malu logaritmi
	sfēriskie	plakanie		
Kangari	21°23′56,656″	21°23′56,578″	9,562 127844	3,849 288890
Vāveres	111 39 52,192	111 39 52,113	9,968 184745	4,255 345791
Punduri	46 56 11,387	46 56 11,309	9,863 677949	4,150 838995
ε = 0,235″		180°00′00,000″		
Jemilova	17°22′42,272″	17°22′42,187″	9,475 207287	4,150 838995
Vāveres	146 43 34,470	146 43 34,385	9,739 287704	4,414 919412
Kangari	15 53 43,513	15 53 43,428	9,437 563403	4,113 195111
ε = 0,255″		180°00′00,000″		
Punduri	52°42′47,458″	52°42′47,382″	9,900 701685	4,113 195111
Vāveres	101 36 33,338	101 36 33,263	9,991 023424	4,203 516850
Jemilova	25 40 39,431	25 40 39,355	9,636 795455	3,849 288881
ε = 0,227″		180°00′00,000″		
Kangari	37°17′40,169″	37°17′39,930″	9,782 408836	4,203 516850
Jemilova	43 03 21,703	43 03 21,464	9,834 237769	4,255 345783
Punduri	99 38 58,845	99 38 58,606	9,993 811398	4,414 919412
ε = 0,717″		180°00′00,000″		

Šinī tabulā uz atsevišķiem leņķiem attiecīgās rindiņās atzīmētie malu logaritmi zīmējas uz šiem leņķiem pretējām malām. Kā redzams, pretrunas aprēķinātos malu logaritmos izpaužas tikai mantisu devītās zīmēs, tā tad praktiski ignorējamas. Tas nozīmē, ka polu nolīdzinājumu veidā formulējamie noteikumi ar izlīdzinātiem virzieniem resp. tiem atbilstošiem leņķiem ir praktiski pietiekošā mērā izpildīti. Kas zīmējas uz figuru noteikumiem, tad parādīts, ka tie izpildīti ne tikai attiecībā uz tiem 3 trijstūriem, kuri lietoti neatkarīgo figuru nolīdzinājumu veidošanai, bet arī attiecībā uz ceturto tīkla trijstūri K J P.

Ar atrasto sumu [vv] aprēķinam svara vienības, t. i. stacijas izlīdzināšanas rezultātā atrasta, bet tīklā neizlīdzināta virziena vidējo kļūdu

$$m = \pm \sqrt{\frac{0{,}260936}{4}} = \pm 0{,}255''$$

Lai atrastu ar izlīdzinātiem leņķiem resp. virzieniem aprēķinātās malas F vidējo triangulacijas kļūdu m_F', nosakam atbilstošo logaritmisko kļūdu

$$m_{\log F}' = \pm m \sqrt{Q_{\log F}} = \pm 0{,}255 \sqrt{44{,}405} = \pm 1{,}699$$

Ievērojot, ka šī kļūda izteikta sešzīmīgu logaritmu mantisu vienībās, tādās pat vienībās izsakam arī log F argumenta pārmaiņai par 1 mm atbilstošo logaritma pārmaiņu Δ, kura vajadzīga pārejai no $m_{\log F}$, uz m_F'. Atraduši

$$\Delta = 0{,}0167$$

aprēķinam

$$m_F' = \pm \frac{m_{\log F}'}{\Delta} = \pm \frac{1{,}699}{0{,}0167} = \pm 102\,\text{mm}$$

Ar log F atbilstošo malas „Kangari“—„Jemilova“ garumu

$$F = 25997\,\text{m}$$

nosakam bazes b vidējās kļūdas $m_b = \pm 5{,}3$ mm ietekmi uz šo aprēķināto malu:

$$m_F'' = \pm \frac{F}{b} m_b = \pm \frac{25997}{7068} 5{,}3 = \pm 19{,}5\,\text{mm}$$

Tā tad aprēķinātās malas F vidējā kļūda ir

$$m_F = \pm \sqrt{(m_F')^2 + (m_F'')^2} = \pm \sqrt{102^2 + 19{,}5^2} = \pm 104\,\text{mm}$$

kas iztaisa apmēram $\pm \frac{1}{250\,000}$ F jeb $\pm$ 4 mm uz 1 kilometru.

§ 59. Pieslēgtu tīklu izlīdzināšana.

Izlīdzinot patstāvīgus tīklus ar vienu bazi, šī baze krīt svarā tikai kā sfēriskos ekscesus noteicošais elements; tā tad izlīdzināšanas nolūkam pietiek ar bazes garuma tuvinās vērtības zināšanu. Izlīdzināšanas rēķinā tieši ieejošie tīkla elementi ir tikai novērotie leņķi resp. virzieni, pie kam tie padoti tikai no tīkla ģeometriskā veida izrietējošiem „ģeometriskiem" noteikumiem. Kā zinams, šie noteikumi formulējami figuru, staciju un polu nolīdzinājumu veidā.

Patstāvīgos tīklos ar vairākām bazēm šo bazu savstarpējais orientējums un stāvoklis bieži nav zinams. Tādos apstākļos pie minētiem ģeometriskiem noteikumiem nāk klāt tikai bazu nolīdzinājumi, kas izsaka sakarus starp tīklā novērotiem leņķiem resp. virzieniem un bazu garumiem resp. to attiecībām.

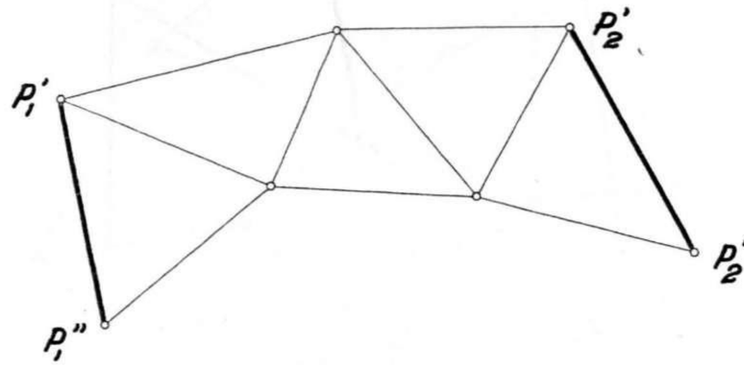
Apskatīsim tagad vēl pieslēgtus tīklus, kur ieiet ne mazāk kā divi augstākas šķiras punkti. Šo punktu stāvoklis a priori zinams; līdz ar to zinami ar šiem punktiem noteiktie elementi, kuri, skatoties pēc apstākļiem, var būt leņķi resp. virzienu starpības, garumi resp. to attiecības, koordinatas resp. to starpības. Būdami zinamos sakaros ar pieslēgtā tīklā novērotiem leņķiem vai virzieniem, minētie augstākas šķiras elementi šī tīkla izlīdzināšanā ieiet kā negrozamā veidā doti lielumi. Citiem vārdiem: pieslēgta tīkla izlīdzināšanā jāievēro, starp citu, noteikumi, kas izsaka, ka ar izlīdzinātiem leņķiem vai virzieniem aprēķinātā tīklā augstākas šķiras punktiem jābūt a priori dotā savstarpējā stāvoklī.

Sīkāki apskatot pieslēgtu tīklu izlīdzināšanu, vispirms atzīmējam, ka tikai divus augstākas šķiras punktus saturošs pieslēgts tīkls no izlīdzināšanas viedokļa neatšķiras no patstāvīga. Tādā gadijumā augstākas šķiras punkti tikai nosaka tīkla bazi, kurai izlīdzināšanas rēķinā ir tāda pat nozīme, kā neatkarīgi no augstākas šķiras punktiem nosacītai bazei patstāvīgā tīklā.

Ja pieslēgtā tīklā ieejošie augstākas šķiras punkti veido nepārtrauktu trijstūru sistemu, tad šīs sistemas forma un izmēri izsmeļoši noteikti ar vienu malu un atsevišķo trijstūru leņķiem. Tā tad atkal ir līdzīgi apstākļi, kā patstāvīgā tīklā. Tikai bez tīklā novērotiem, izlabošanai padotiem leņķiem vai virzieniem, ir vēl negrozamā veidā doti augstākas šķiras leņķi. Visus šos, pa daļai novērotos, pa daļai dotos, elementus saistošie noteikumi ir līdzīga veida, kā patstāvīgā tīklā.

Tālāk apskatīsim gadijumu, kad pieslēgtā tīklā ieiet nevis nepārtraukta augstākas šķiras trijstūru sistema, bet gan augstākas šķiras malas, kas veido nepārtrauktu poligongājienu. Tad, līdz ar augstākas šķiras punktu savstarpējo stāvokli, zinami arī šī poligongājiena leņķi un malu garumi, pie kam katra tāda mala uzskatama par pieslēgtā tīkla bazi. Tā tad ir līdzīgi apstākļi, kā patstāvīgā tīklā ar vairākām bazēm, pie kam izlīdzināšanā jāievēro arī negrozamā veidā dotie augstākas šķiras malu ieslēgtie leņķi.

Komplicētāks gadijums ir, kad pieslēgtā tīklā ieiet augstākas šķiras malas $P_1'P_1''$ un $P_2'P_2''$ (13. att.), kas, neveidojot nepārtrauktu poligonalu līniju, tomēr noteiktas pēc garuma, savstarpējā orientē-

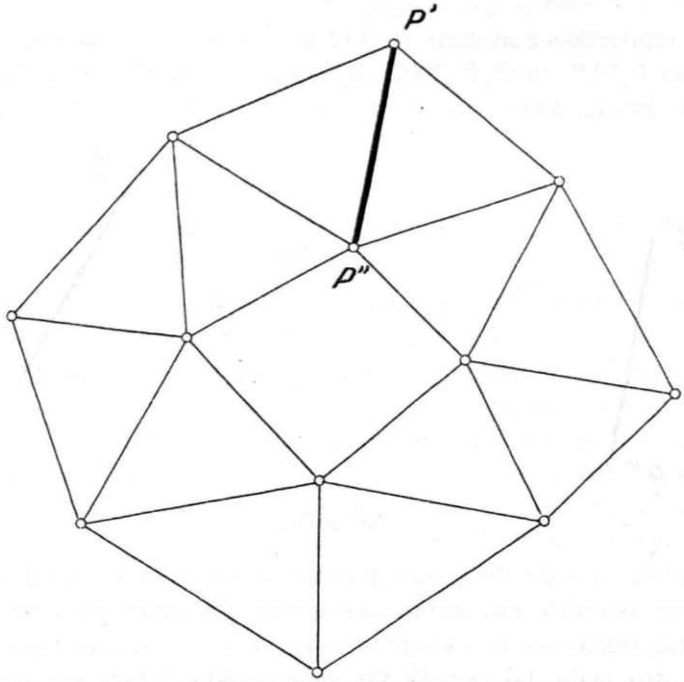


13. attēls.

uma un stāvokļa ar savu gala punktu koordinatām. Tādā gadijumā, starp citu, jāievēro noteikumi, kas izsaka, ka izejot no vienas augstākas šķiras malas un ar tīklā izlīdzinātiem leņķiem resp. virzieniem aprēķinot otro malu, tai jāiznāk tās gala punktu dotām koordinatām atbilstošā garumā, orientējumā un stavoklī. Lai formulētu šos noteikumus ar atbilstošiem nolīdzinājumiem, iedomājamies augstākas šķiras malas $P_1'P_1''$ un $P_2'P_2''$ ar pieslēgtā tīkla malu palīdzību savienotas nepārtrauktā poligonalā līnijā. Ziņot šīs poligonalās līnijas vienas malas $P_1'P_1''$ gala punktu koordinatas, ar tīklā izlīdzinātiem leņķiem vai virzieniem tad var trigonometriski aprēķināt malas $P_2'P_2''$ garumu un orientējumu un arī gala punkta P_2' vai P_2'' koordinatas, — resp. var izteikt minēto leņķu vai virzienu funkcijas veidā malu $P_1'P_1''$ un $P_2'P_2''$ garumu attiecību un orientējumu starpību, un arī punktu P_1' vai P_1'' un P_2' vai P_2'' koordinatu starpības. Attiecīgiem rezultatiem jābūt saskaņā ar punktu P_1', P_1'', P_2', P_2'' dotām koordinatām. Tas izsakams ar atbilstošiem poligona nolīdzinājumiem: vienu bazu nolīdzinājumu, vienu virzienu nolīdzinājumu, un diviem koordinatu nolīdzinājumiem.

Veidojot poligona nolīdzinājumus, var lietot svarā krītošo doto punktu sfēriskās koordinatas. Bet parasti uzskata par lietderīgāku pāriet uz konformām plakanām koordinatām, lai varētu pielietot vienkāršākos plakanās trigonometrijas paņēmienus.

Poligona nolīdzinājumi ir arī t. s. vaiņagu sistemās, t. i. zinamu laukumu aptverošās, nepārtrauktu vaiņagu veidojošās trijstūru



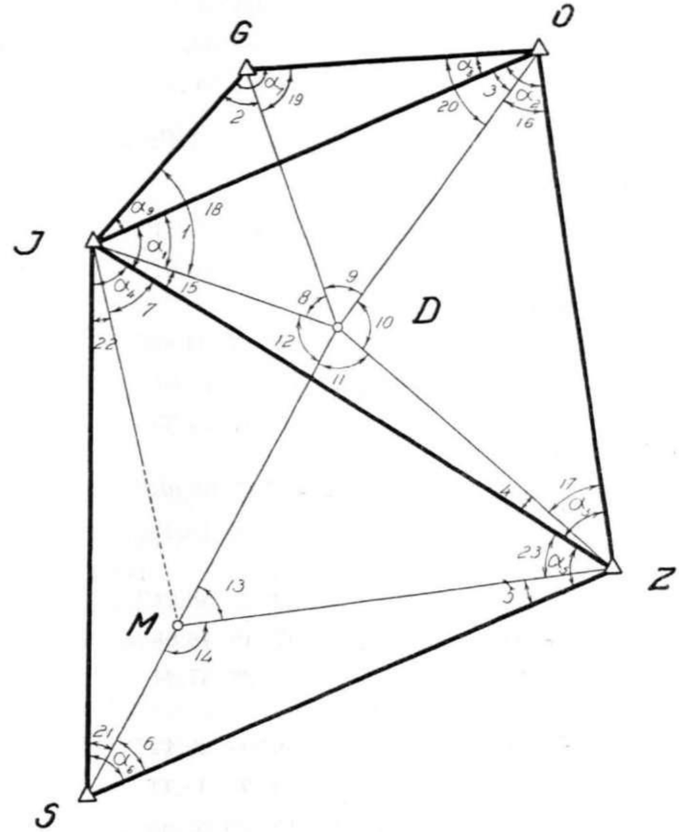
14. attēls.

virknēs (14. att.). Tādu sistemu var uzskatīt par 13-ā attēlā parādītā tīkla atsevišķo gadijumu, kad punkti P_1' un P_2'' sakrīt vienā P', un P_1'' un P_2' — vienā P''. Tādā gadijumā pieņemot P'P'' par trijstūru vaiņaga sākuma malu, tā pati ir arī sistemas gala mala; tā tad poligona nolīdzinājumos ieejošās garumu attiecības, orientējuma un koordinatu starpību teoretiskās vērtības ir 1 resp. 0.

§ 60. Piemērs.

Punktu „Daudzeva" (D) un „Mūrmuiža" (M) noteikšanai veidotais trešās klases tīkls pieslēgts pirmās resp. otrās klases trigonometriskiem punktiem „Orļi" (O), „Zalve" (Z), „Spunde" (S), „Jaunjelgava" (J) un „Grebļukalns" (G) (15. att.). Šinī pieslēgtā tīklā tieši ieiet minēto augstākas šķiras punktu veidoto trijstūru △ JOZ, △ JZS un

△ GOJ nepārtrauktā sistema, kur negrozamā veidā doti augstākas šķiras punktu koordinatām atbilstošie sfēriskie leņķi:



15. attēls.

1) trijstūrī JOZ

ar sfēr. ekscesu

$\varepsilon = 1,97''$ $\qquad \alpha_1 = 55^0\,50'\,19,49''$

$\alpha_2 = 74\;\;26\;\;02,56$

$\alpha_3 = 49\;\;43\;\;39,92$

2) trijstūrī JZS

ar sfēr. ekscesu

$\varepsilon = 2,37''$ $\qquad \alpha_4 = 58^0\,59'\,52,76''$

$\alpha_5 = 56\;\;11\;\;27,72$

$\alpha_6 = 64\;\;48\;\;41,89$

3) trijstūrī GOJ
ar sfēr. ekscesu

$\varepsilon = 0{,}37''$	$\alpha_7 = 136^0\,04'\,16{,}16''$
	$\alpha_8 = 18\;53\;34{,}15$
	$\alpha_9 = 25\;02\;10{,}06$

Izlīdzināšanas objektu veidojošie pieslēgtā tīklā novērotie leņķi ir:

1) trijstūrī DZJ	
$\varepsilon = 0{,}28''$	$l_4 = 9^0\,06'\,25{,}33''$
	$l_{15} = 13\;02\;46{,}81$
2) trijstūrī DOZ	
$\varepsilon = 1{,}01''$	$l_{10} = 95^0\,27'\,04{,}83''$
	$l_{16} = 43\;55\;43{,}54$
	$l_{17} = 40\;37\;14{,}35$
3) trijstūrī DJO	
$\varepsilon = 0{,}68''$	$l_1 = 42^0\,47'\,36{,}36''$
	$l_3 = 30\;30\;18{,}49$
4) trijstūrī DJG	
$\varepsilon = 0{,}43''$	$l_8 = 50^0\,41'\,38{,}21''$
	$l_{18} = 67\;49\;46{,}96$
	$l_2 = 61\;28\;37{,}24$
5) trijstūrī DGO	
$\varepsilon = 0{,}62''$	$l_9 = 56^0\,00'\,28{,}42''$
	$l_{19} = 74\;35\;39{,}34$
	$l_{20} = 49\;23\;52{,}45$
6) trijstūrī MZS	
$\varepsilon = 0{,}59''$	$l_{14} = 123^0\,49'\,41{,}08''$
	$l_5 = 16\;35\;50{,}14$
	$l_6 = 39\;34\;27{,}29$
7) trijstūrī MSJ	
$\varepsilon = 0{,}38''$	$l_{21} = 25^0\,14'\,14{,}45''$
	$l_{22} = 12\;33\;19{,}23$
8) trijstūrī MJZ	
$\varepsilon = 1{,}40''$	$l_7 = 46^0\,26'\,33{,}68''$
	$l_{23} = 39\;35\;38{,}44$
9) trijstūrī MDZ	
$\varepsilon = 0{,}98''$	$l_{13} = 53^0\,37'\,12{,}32''$
	$l_{11} = 77\;40\;47{,}43$

10) trijstūrī MJD

$\varepsilon = 0{,}70''$ $\quad l_{12} = 80^0\,10'01{,}11''$

Teoretiskie sakari starp augstākas šķiras trijstūru dotiem un pieslēgtā tīklā izlīdzinātiem leņķiem izpaužas, starp citu, šādos staciju nolīdzinājumos:

stacijā J: 1) $(l_{18}) - (l_1) - \alpha_9 = 0$

2) $(l_{15}) + (l_1) - \alpha_1 = 0$

3) $(l_{22}) + (l_7) - \alpha_4 = 0$

stacijā G: 4) $(l_{19}) + (l_2) - \alpha_7 = 0$

stacijā O: 5) $(l_{20}) - (l_3) - \alpha_8 = 0$

6) $(l_{16}) + (l_3) - \alpha_2 = 0$

stacijā Z: 7) $(l_{17}) + (l_4) - \alpha_3 = 0$

8) $(l_{23}) + (l_5) - \alpha_5 = 0$

stacijā S: 9) $(l_{21}) + (l_6) - \alpha_6 = 0$

kur ar (l) apzīmētas pieslēgtā tīklā novēroto, attiecīgās stacijās izlīdzināto leņķu vērtības. Uz šo noteikumu nolīdzinājumu pamata izdarīta attiecīgo leņķu iepriekšējā izlīdzināšana minētās stacijās, lai pēc tam notiekošā tīkla vispārējā izlīdzināšanā lietotu tikai atsevišķās stacijās neatkarīgos dotos resp. stacijās izlīdzinātos leņķus α un (l). Šinī ziņā svarā krītošie staciju izlīdzināšanas rezultati ir

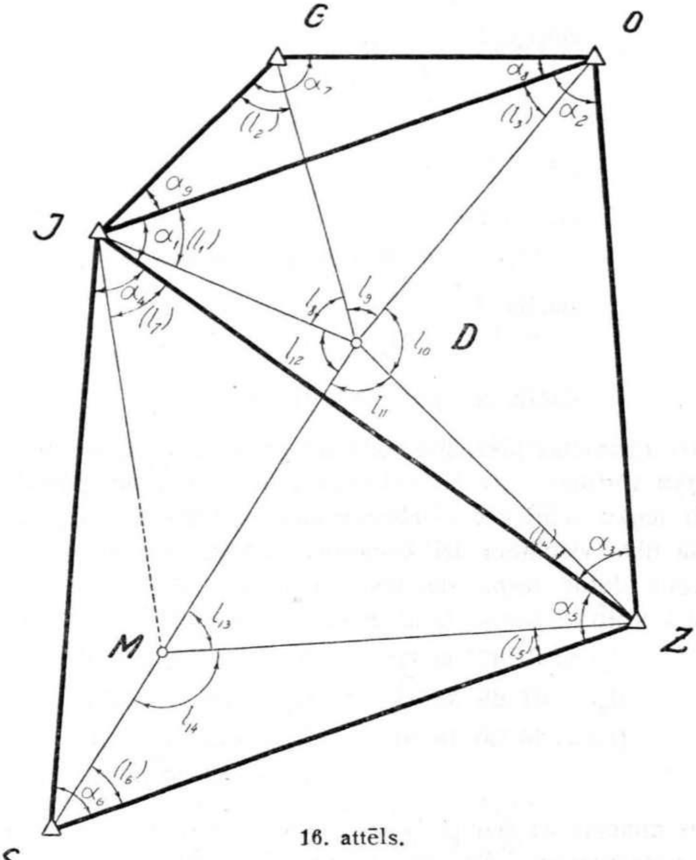
$(l_1) = 42^0\,47'\,35{,}31''$	$(l_4) = 9^0\,06'\,25{,}45''$
$(l_2) = 61\ \ 28\ \ 37{,}03$	$(l_5) = 16\ \ 35\ \ 49{,}71$
$(l_3) = 30\ \ 30\ \ 18{,}60$	$(l_6) = 39\ \ 34\ \ 27{,}36$
	$(l_7) = 46\ \ 26\ \ 33{,}60$

Kas zīmējas uz stacijā D novērotiem leņķiem, tad tie arī padoti stacijas noteikumam. Attiecībā uz to izlīdzinātie leņķi tīkla vispārējā izlīdzināšanā lietoti kā tieši novēroti. Sakarā ar to stacijas D horizonta noteikums ievērots arī tīkla vispārējā izlīdzināšanā.

Paša pieslēgtā tīkla izlīdzināšanā kā negrozamā veidā doti elementi lietoti sākumā minētie augstākas šķiras trijstūru leņķi α. Bet par izlīdzināšanas objektu uzskatīti šādi — pa daļai no iepriekšējās staciju izlīdzināšanas atrastie, pa daļai tieši novērotie — leņķi:

$(l_1) = 42^0\,47'\,35{,}31''$	$l_8 = 50^0\,41'\,38{,}21''$
$(l_2) = 61\ \ 28\ \ 37{,}03$	$l_9 = 56\ \ 00\ \ 28{,}42$
$(l_3) = 30\ \ 30\ \ 18{,}60$	$l_{10} = 95\ \ 27\ \ 04{,}83$

$(l_4) = 9^0 06' 25{,}45''$	$l_{11} = 77^0 40' 47{,}43''$
$(l_5) = 16\ 35\ 49{,}71$	$l_{12} = 80\ 10\ 01{,}11$
$(l_6) = 39\ 34\ 27{,}36$	$l_{13} = 53\ 37\ 12{,}32$
$(l_7) = 46\ 26\ 33{,}60$	$l_{14} = 123\ 49\ 41{,}08$



16. attēls.

16-ais attēls, kur atzīmēti tikai tīkla vispārējā izlīdzināšanā tieši ievērotie leņķi, rāda, ka izlīdzināšanas objektu veidojošie leņķi padoti desmit neatkarīgiem noteikumiem, kuri formulējami piecu figuru, viena stacijas (horizonta) un četru polu nolīdzinājumu veidā. Bazu nolīdzinājumu nav, jo augstākas šķiras malas, veidojot nepārtrauktu trijstūru sistemu, kur šo malu garumu attiecības ir minēto leņķu α funkcijas, nav uzskatamas par neatkarīgi nosacītām tīkla bazēm.

Apzīmējot leņķu (l) un l izlabojumus ar v un atbilstošos izlīdzinātos leņķus ar x, un ievērojot attiecīgos sfēriskos ekscesus, veidojam šādus 5 neatkarīgus figuru nolīdzinājumus:

1) trijstūrim DJG ($\varepsilon = 0{,}43''$)

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1_1) + v_1 = 42^0 47' 35{,}31'' + v_1 \\
x_2 &= (1_2) + v_2 = 61\ 28\ 37{,}03 + v_2 \\
x_8 &= 1_8 + v_8 = 50\ 41\ 38{,}21 + v_8 \\
\alpha_9 &= \qquad = 25\ 02\ 10{,}06
\end{aligned}
$$

$$x_1 + x_2 + x_8 + \alpha_9 = 180^0 00' 00{,}61'' + v_1 + v_2 + v_8 = 180^0 00' 00{,}43''$$

$$\varphi_1 = v_1 + v_2 + v_8 + 0{,}18 = 0$$

2) trijstūrim DGO ($\varepsilon = 0{,}62''$)

$$
\begin{aligned}
-x_2 &= -(1_2) - v_2 = -61^0 28' 37{,}03'' - v_2 \\
x_3 &= (1_3) + v_3 = 30\ 30\ 18{,}60 + v_3 \\
x_9 &= 1_9 + v_9 = 56\ 00\ 28{,}42 + v_9 \\
\alpha_7 &= \qquad = 136\ 04\ 16{,}16 \\
\alpha_8 &= \qquad = 18\ 53\ 34{,}15
\end{aligned}
$$

$$-x_2 + x_3 + x_9 + \alpha_7 + \alpha_8 = 180^0 00' 00{,}30'' - v_2 + v_3 + v_9 = 180^0 00' 00{,}62''$$

$$\varphi_2 = -v_2 + v_3 + v_9 - 0{,}32 = 0$$

3) trijstūrim DOZ ($\varepsilon = 1{,}01''$)

$$
\begin{aligned}
-x_3 &= -(1_3) - v_3 = -30^0 30' 18{,}60'' - v_3 \\
-x_4 &= -(1_4) - v_4 = -9\ 06\ 25{,}45 - v_4 \\
x_{10} &= 1_{10} + v_{10} = 95\ 27\ 04{,}83 + v_{10} \\
\alpha_2 &= \qquad = 74\ 26\ 02{,}56 \\
\alpha_3 &= \qquad = 49\ 43\ 39{,}92
\end{aligned}
$$

$$-x_3 - x_4 + x_{10} + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^0 00' 03{,}26'' - v_3 - v_4 + v_{10} = 180^0 00' 01{,}01''$$

$$\varphi_3 = -v_3 - v_4 + v_{10} + 2{,}25 = 0$$

4) trijstūrim MDZ ($\varepsilon = 0{,}98''$)

$$
\begin{aligned}
x_4 &= (1_4) + v_4 = 9^0 06' 25{,}45'' + v_4 \\
-x_5 &= -(1_5) - v_5 = -16\ 35\ 49{,}71 - v_5 \\
x_{11} &= 1_{11} + v_{11} = 77\ 40\ 47{,}43 + v_{11} \\
x_{13} &= 1_{13} + v_{13} = 53\ 37\ 12{,}32 + v_{13} \\
\alpha_5 &= \qquad = 56\ 11\ 27{,}72
\end{aligned}
$$

$$x_4 - x_5 + x_{11} + x_{13} + \alpha_5 = 180^0 00' 03{,}21'' + v_4 - v_5 + v_{11} + v_{13} = 180^0 00' 00{,}98''$$

$$\varphi_4 = v_4 - v_5 + v_{11} + v_{13} + 2{,}23 = 0$$

5) trijstūrim MZS ($\varepsilon = 0{,}59''$)

$$
\begin{aligned}
x_5 &= (l_5)+v_5 = 16^0 35'49{,}71''+v_5\\
x_6 &= (l_6)+v_6 = 39\ 34\ 27{,}36\ +v_6\\
x_{14} &= l_{14}+v_{14} = 123\ 49\ 41{,}08\ +v_{14}\\
\hline
x_5+x_6+x_{14} &= 179^0 59'58{,}15''+v_5+v_6+v_{14} = 180^0 00'00{,}59''
\end{aligned}
$$

$$\varphi_5 = v_5+v_6+v_{14}-2{,}44=0$$

6) Stacijas D horizonta nolīdzinājums ir

$$
\begin{aligned}
x_8 &= l_8 + v_8 = 50^0 41'38{,}21''+v_8\\
x_9 &= l_9 + v_9 = 56\ 00\ 28{,}42\ +v_9\\
x_{10} &= l_{10} + v_{10} = 95\ 27\ 04{,}83\ +v_{10}\\
x_{11} &= l_{11} + v_{11} = 77\ 40\ 47{,}43\ +v_{11}\\
x_{12} &= l_{12} + v_{12} = 80\ 10\ 01{,}11\ +v_{12}\\
\hline
x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} &= 360^0 00'00{,}00''+v_8+v_9+v_{10}+v_{11}+v_{12} =\\
&= 360^0 00'00{,}00''
\end{aligned}
$$

$$\varphi_6 = v_8+v_9+v_{10}+v_{11}+v_{12}+0{,}00=0$$

Veidojot polu nolīdzinājumus, no sfēriskiem leņķiem pārejam uz atbilstošiem plakaniem. To daram uz Legendre'a teoremas pamata pēc parauga

$$\omega' = \omega - \frac{1}{3}\varepsilon$$

kur ω apzīmē sfērisko, ω' — atbilstošo plakano leņķi, un ε — attiecīgā trijstūra sfērisko ekscesu.

7) Polarā sistema G(DJO):

$$\frac{GO}{GJ}\cdot\frac{GJ}{GD}\cdot\frac{GD}{GO} = \frac{\sin\alpha_9'}{\sin\alpha_8'}\cdot\frac{\sin x_8'}{\sin(x_1+\alpha_9)'}\cdot\frac{\sin(x_3+\alpha_8)'}{\sin x_9'} = 1$$

jeb

$$
\begin{aligned}
&\{\log\sin\alpha_9' + \log\sin x_8' + \log\sin(x_3+\alpha_8)'\} -\\
&-\{\log\sin\alpha_8' + \log\sin(x_1+\alpha_9)' + \log\sin x_9'\} = 0
\end{aligned}
$$

Ieliekot skaitļus, aprēķinam

$$\log\sin\alpha_9' = \log\sin(25^0 02'10{,}06'' - \frac{1}{3}\,0{,}37'') = 9{,}626\,5345_8$$

$$\log\sin x_8' = \log\sin(50^0 41'38{,}21'' - \frac{1}{3}\,0{,}43''+v_8) = 9{,}888\,6134_8 + $$
$$+\,17{,}2 v_8$$

$$\log\sin(x_3+\alpha_8)'=\log\sin(49^0 23'52{,}75''-\frac{1}{3}\,0{,}62''+v_3)=9{,}880\,3835_0+$$
$$+\,18{,}1v_3$$

$$\log\sin\alpha_9'+\log\sin x_8'+\log\sin(x_3+\alpha_8)' \quad =9{,}395\,5315_6+$$
$$+\,17{,}2v_8+18{,}1v_3$$

$$\log\sin\alpha_8' \quad =\log\sin(18^0 53'34{,}15''-\frac{1}{3}\,0{,}37'') \quad =9{,}510\,2745_8$$

$$\log\sin(x_1+\alpha_9)'=\log\sin(67^0 49'45{,}37''-\frac{1}{3}\,0{,}43''+v_1)=9{,}966\,6406_5+$$
$$+\,8{,}5\,v_1$$

$$\log\sin x_9' \quad =\log\sin(56^0 00'28{,}42''-\frac{1}{3}\,0{,}62''+v_9)=9{,}918\,6142_6+$$
$$+\,14{,}2v_9$$

$$\log\sin\alpha_8'+\log\sin(x_1+\alpha_9)'+\log\sin x_9' \quad =9{,}395\,5294_9+$$
$$+\,8{,}5v_1+14{,}2v_9$$

Tā tad

$$(9{,}395\,5315_6+17{,}2v_8+18{,}1v_3)-(9{,}395\,5294_9+8{,}5v_1+14{,}2v_9)=$$
$$=-\,8{,}5v_1+18{,}1v_3+17{,}2v_8-14{,}2v_9+20{,}7=0$$

jeb

$$\varphi_7=-\,0{,}85\,v_1+1{,}81\,v_3+1{,}72\,v_8-1{,}42\,v_9+2{,}07=0$$

8) Polarā sistema D(JOZ):

$$\frac{DO}{DJ}\cdot\frac{DJ}{DZ}\cdot\frac{DZ}{DO}=\frac{\sin x_1'}{\sin x_3'}\cdot\frac{\sin x_4'}{\sin(\alpha_1-x_1)'}\cdot\frac{\sin(\alpha_2-x_3)'}{\sin(\alpha_3-x_4)'}=1$$

jeb

$$\{\log\sin x_1'+\log\sin x_4'+\log\sin(\alpha_2-x_3)'\}-$$
$$-\{\log\sin x_3'+\log\sin(\alpha_1-x_1)'+\log\sin(\alpha_3-x_4)'\}=0$$

$$\log\sin x_1' \quad =\log\sin(42^0 47'35{,}31''-\frac{1}{3}\,0{,}68''+v_1)=9{,}832\,0952_8+$$
$$+\,22{,}8v_1$$

$$\log\sin x_4' \quad =\log\sin(\ 9^0 06'25{,}45''-\frac{1}{3}\,0{,}28''+v_4)=9{,}199\,4245_8+$$
$$+\,131{,}3v_4$$

$$\log\sin(\alpha_2-x_3)'=\log\sin(43^0 55'43{,}96''-\frac{1}{3}\,1{,}01''-v_3)=9{,}841\,2115_9-$$
$$-\,21{,}8v_3$$

$$\log\sin x_1'+\log\sin x_4'+\log\sin(\alpha_2-x_3)' \quad =8{,}872\,7314_5+$$
$$+\,22{,}8v_1+131{,}3v_4-21{,}8v_3$$

$$\log\sin x_3' \quad =\log\sin(30^0 30'18{,}60''-\frac{1}{3}\,0{,}68''+v_3)=9{,}705\,5345_6+$$
$$+\,35{,}8v_3$$

$$\log\sin(\alpha_1-x_1)'=\log\sin(13^0 02'44{,}18''-\frac{1}{3}\,0{,}28''-v_1)=9{,}353\,5818_4-$$
$$-\,90{,}8v_1$$

$$\log\sin(\alpha_3-x_4)'=\log\sin(40^0 37'14{,}47''-\frac{1}{3}\,1{,}01''-v_4)=9{,}813\,6123_6-$$
$$-\,24{,}6v_4$$

$$\log\sin x_3'+\log\sin(\alpha_1-x_1)'+\log\sin(\alpha_3-x_4)'=8{,}872\,7287_6+$$
$$+\,35{,}8v_3-90{,}8v_1-24{,}6v_4$$

Tā tad

$$(8{,}872\,7314_5+22{,}8v_1+131{,}3v_4-21{,}8v_3)-(8{,}872\,7287_4+35{,}8v_3-90{,}8v_1-$$
$$-\,24{,}6v_4)=$$
$$=113{,}6v_1-57{,}6v_3+155{,}9v_4+27{,}1=0$$

jeb

$$\varphi_8=11{,}36v_1-5{,}76v_3+15{,}59v_4+2{,}71=0$$

9) Polarā sistema M(JZS):

$$\frac{MS}{MZ}\cdot\frac{MZ}{MJ}\cdot\frac{MJ}{MS}=\frac{\sin x_5'}{\sin x_6'}\cdot\frac{\sin x_7'}{\sin(\alpha_5-x_5)'}\cdot\frac{\sin(\alpha_6-x_6)'}{\sin(\alpha_4-x_7)'}=1$$

jeb

$$\{\log\sin x_5'+\log\sin x_7'+\log\sin(\alpha_6-x_6)'\}-$$
$$-\{\log\sin x_6'+\log\sin(\alpha_5-x_5)'+\log\sin(\alpha_4-x_7)'\}=0$$

$$\log\sin x_5'=\log\sin(16^0 35'49{,}71''-\frac{1}{3}\,0{,}59''+v_5)=9{,}455\,8184_4+$$
$$+\,70{,}6v_5$$

$$\log\sin x_7'=\log\sin(46^0 26'33{,}60''-\frac{1}{3}\,1{,}40''+v_7)=9{,}860\,1484_6+$$
$$+\,20{,}0v_7$$

$$\log\sin(\alpha_6-x_6)'=\log\sin(25^0 14'14{,}53''-\frac{1}{3}\,0{,}38''-v_6)=9{,}629\,7853_7-$$
$$-\,44{,}7v_6$$

$$\log\sin x_5'+\log\sin x_7'+\log\sin(\alpha_6-x_6)'=8{,}945\,7522_7+$$
$$+\,70{,}6v_5+20{,}0v_7-44{,}7v_6$$

$$\log\sin x_6'=\log\sin(39^0 34'27{,}36''-\frac{1}{3}\,0{,}59''+v_6)=9{,}804\,1919_9+$$
$$+\,25{,}4v_6$$

$$\log\sin(\alpha_5-x_5)'=\log\sin(39^0 35'38{,}01''-\frac{1}{3}\,1{,}40''-v_5)=9{,}804\,3712_3-$$
$$-\,25{,}5v_5$$

$$\log\sin(\alpha_4-x_7)'=\log\sin(12^0 33'19{,}16''-\frac{1}{3}\,0{,}38''-v_7)=9{,}337\,2227_2-$$
$$-\,94{,}6v_7$$

$$\log\sin x_6'+\log\sin(\alpha_5-x_5)'+\log\sin(\alpha_4-x_7)'=8{,}945\,7859_4+$$
$$+\,25{,}4v_6-25{,}5v_5-94{,}6v_7$$

Tā tad

$$(8{,}945\,7522_7 + 70{,}6v_5 + 20{,}0v_7 - 44{,}7v_6) - (8{,}945\,7859_4 + 25{,}4v_6 - 25{,}5v_5 - 94{,}6v_7) =$$
$$= 96{,}1\mathbf{v}_5 - 70{,}1\mathbf{v}_6 + 114{,}6\mathbf{v}_7 - 336{,}7 = 0$$

jeb

$$\varphi_9 = 9{,}61\mathbf{v}_5 - 7{,}01\mathbf{v}_6 + 11{,}46\mathbf{v}_7 - 33{,}67 = 0$$

10) Polarā sistema D (MJZ):

$$\frac{DM}{DZ}\cdot\frac{DZ}{DJ}\cdot\frac{DJ}{DM} =$$
$$= \frac{\sin(\alpha_5 + x_4 - x_5)'}{\sin x_{13}'}\cdot\frac{\sin(\alpha_1 - x_1)'}{\sin x_4'}\cdot\frac{\sin(180^0 + 0{,}70'' - \alpha_1 + x_1 - x_7 - x_{12})'}{\sin(\alpha_1 - x_1 + x_7)'} = 1$$

jeb

$$\{\log\sin(\alpha_5 + x_4 - x_5)' + \log\sin(\alpha_1 - x_1)' + \log\sin(180^0 + 0{,}70'' - \alpha_1 + x_1 - x_7 - x_{12})'\} -$$
$$-\{\log\sin x_{13}' + \log\sin x_4' + \log\sin(\alpha_1 - x_1 + x_7)'\} = 0$$

$$\log\sin(\alpha_5 + x_4 - x_5)' = \log\sin(48^0 42' 03{,}46'' - \frac{1}{3}0{,}98'' + \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_5) = 9{,}875\,7984_9 + 18{,}5\mathbf{v}_4 - 18{,}5\mathbf{v}_5$$

$$\log\sin(\alpha_1 - x_1)' = \log\sin(13^0 02' 44{,}18'' - \frac{1}{3}0{,}28'' - \mathbf{v}_1) = 9{,}353\,5818_4 - 90{,}8\mathbf{v}_1$$

$$\log\sin(180^0 + 0{,}70'' - \alpha_1 + x_1 - x_7 - x_{12})' = \log\sin(40^0 20' 41{,}81'' - \frac{1}{3}0{,}70'' + \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_7 - \mathbf{v}_{12}) = 9{,}811\,1640_2 + 24{,}8\mathbf{v}_1 - 24{,}8\mathbf{v}_7 - 24{,}8\mathbf{v}_{12}$$

$$\log\sin(\alpha_5 + x_4 - x_5)' + \log\sin(\alpha_1 - x_1)' + \log\sin(180^0 + 0{,}70'' - \alpha_1 + x_1 - x_7 - x_{12})' = 9{,}040\,5443_5 - 66{,}0\mathbf{v}_1 + 18{,}5\mathbf{v}_4 - 18{,}5\mathbf{v}_5 - 24{,}8\mathbf{v}_7 - 24{,}8\mathbf{v}_{12}$$

$$\log\sin x_{13}' = \log\sin(53^0 37' 12{,}32'' - \frac{1}{3}0{,}98'' + \mathbf{v}_{13}) = 9{,}905\,8502_8 + 15{,}5\mathbf{v}_{13}$$

$$\log\sin x_4' = \log\sin(9^0 06' 25{,}45'' - \frac{1}{3}0{,}28'' + \mathbf{v}_4) = 9{,}199\,4245_8 + 131{,}3\mathbf{v}_4$$

$$\log\sin(\alpha_1 - x_1 + x_7)' = \log\sin(59^0 29' 17{,}78'' - \frac{1}{3}0{,}70'' - \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_7) = 9{,}935\,2677_6 - 12{,}4\mathbf{v}_1 + 12{,}4\mathbf{v}_7$$

$$\log\sin \mathbf{x}_{13}' + \log\sin x_4' + \log\sin(\alpha_1 - x_1 + x_7)' = 9{,}040\,5426_2 + 15{,}5\mathbf{v}_{13} + 131{,}3\mathbf{v}_4 - 12{,}4\mathbf{v}_1 + 12{,}4\mathbf{v}_7$$

Tā tad

$$(9{,}040\,5443_5 - 66{,}0\mathbf{v}_1 + 18{,}5\mathbf{v}_4 - 18{,}5\mathbf{v}_5 - 24{,}8\mathbf{v}_7 - 24{,}8\mathbf{v}_{12}) -$$
$$- (9{,}040\,5426_2 + 15{,}5\mathbf{v}_{13} + 131{,}3\mathbf{v}_4 - 12{,}4\mathbf{v}_1 + 12{,}4\mathbf{v}_7) =$$
$$= -53{,}6\mathbf{v}_1 - 112{,}8\mathbf{v}_4 - 18{,}5\mathbf{v}_5 - 37{,}2\mathbf{v}_7 - 24{,}8\mathbf{v}_{12} - 15{,}5\mathbf{v}_{13} + 17{,}3 = 0$$

jeb

$$\varphi_{10} = -5{,}36\mathbf{v}_1 - 11{,}28\mathbf{v}_4 - 1{,}85\mathbf{v}_5 - 3{,}72\mathbf{v}_7 - 2{,}48\mathbf{v}_{12} - 1{,}55\mathbf{v}_{13} + 1{,}73 = 0$$

Tā tad veidoti šādi neatkarīgi pārvērstie noteikumu nolīdzinājumi:

$$\varphi_1 = +1{,}00\mathbf{v}_1 + 1{,}00\mathbf{v}_2 + 1{,}00\mathbf{v}_8 + 0{,}18 = 0$$

$$\varphi_2 = -1{,}00\mathbf{v}_2 + 1{,}00\mathbf{v}_3 + 1{,}00\mathbf{v}_9 - 0{,}32 = 0$$

$$\varphi_3 = -1{,}00\mathbf{v}_3 - 1{,}00\mathbf{v}_4 + 1{,}00\mathbf{v}_{10} + 2{,}25 = 0$$

$$\varphi_4 = +1{,}00\mathbf{v}_4 - 1{,}00\mathbf{v}_5 + 1{,}00\mathbf{v}_{11} + 1{,}00\mathbf{v}_{13} + 2{,}23 = 0$$

$$\varphi_5 = +1{,}00\mathbf{v}_5 + 1{,}00\mathbf{v}_6 + 1{,}00\mathbf{v}_{14} - 2{,}44 = 0$$

$$\varphi_6 = +1{,}00\mathbf{v}_8 + 1{,}00\mathbf{v}_9 + 1{,}00\mathbf{v}_{10} + 1{,}00\mathbf{v}_{11} + 1{,}00\mathbf{v}_{12} + 0{,}00 = 0$$

$$\varphi_7 = -0{,}85\mathbf{v}_1 + 1{,}81\mathbf{v}_3 + 1{,}72\mathbf{v}_8 - 1{,}42\mathbf{v}_9 + 2{,}07 = 0$$

$$\varphi_8 = +11{,}36\mathbf{v}_1 - 5{,}76\mathbf{v}_3 + 15{,}59\mathbf{v}_4 + 2{,}71 = 0$$

$$\varphi_9 = +9{,}61\mathbf{v}_5 - 7{,}01\mathbf{v}_6 + 11{,}46\mathbf{v}_7 - 33{,}67 = 0$$

$$\varphi_{10} = -5{,}36\mathbf{v}_1 - 11{,}28\mathbf{v}_4 - 1{,}85\mathbf{v}_5 - 3{,}72\mathbf{v}_7 - 2{,}48\mathbf{v}_{12} - 1{,}55\mathbf{v}_{13} + 1{,}73 = 0$$

Uz šo nolīdzinājumu pamata izlīdzināšana izdarīta parastā kārtā. Tāpēc nepakavēsimies pie attiecīgiem sīkumiem; tikai piezīmējam, ka aiz zinamiem šeit sīkāki neiztirzājamiem iemesliem visi izlīdzināšanas objektu veidojošie leņķi — kā tieši novērotie 1, tā arī staciju izlīdzināšanas rezultatā atrastie (1) — pieņemti par vienādas noteiktības novērojumiem ar svaru 1.

Tīkl a vispārējās izlīdzināšanas rezultatā atrasti šādi leņķu izlabojumi:

$$v_1 = -0{,}65'' \qquad v_8 = -0{,}17''$$
$$v_2 = +0{,}64 \qquad v_9 = +1{,}26$$
$$v_3 = -0{,}30 \qquad v_{10} = -2{,}36$$
$$v_4 = +0{,}19 \qquad v_{11} = +1{,}43$$
$$v_5 = +2{,}43 \qquad v_{12} = -0{,}16$$
$$v_6 = -0{,}95 \qquad v_{13} = -1{,}42$$
$$v_7 = +0{,}32 \qquad v_{14} = +0{,}96$$

Ar atbilstošo

$$[vv] = 20{,}0626$$

aprēķināta svara vienības vidējā kļūda

$$m = \pm \sqrt{\frac{20{,}0626}{10}} = \pm 1{,}42''$$

Tīklā izlīdzinātie sfēriskie leņķi ir

$$x_1 = 42^0\,47'\,35{,}31'' - 0{,}65'' = 42^0\,47'\,34{,}66''$$
$$x_2 = 61\ 28\ 37{,}03 + 0{,}64 = 61\ 28\ 37{,}67$$
$$x_3 = 30\ 30\ 18{,}60 - 0{,}30 = 30\ 30\ 18{,}30$$
$$x_4 = 9\ 06\ 25{,}45 + 0{,}19 = 9\ 06\ 25{,}64$$
$$x_5 = 16\ 35\ 49{,}71 + 2{,}43 = 16\ 35\ 52{,}14$$
$$x_6 = 39\ 34\ 27{,}36 - 0{,}95 = 39\ 34\ 26{,}41$$
$$x_7 = 46\ 26\ 33{,}60 + 0{,}32 = 46\ 26\ 33{,}92$$
$$x_8 = 50\ 41\ 38{,}21 - 0{,}17 = 50\ 41\ 38{,}04$$
$$x_9 = 56\ 00\ 28{,}42 + 1{,}26 = 56\ 00\ 29{,}68$$
$$x_{10} = 95\ 27\ 04{,}83 - 2{,}36 = 95\ 27\ 02{,}47$$
$$x_{11} = 77\ 40\ 47{,}43 + 1{,}43 = 77\ 40\ 48{,}86$$
$$x_{12} = 80\ 10\ 01{,}11 - 0{,}16 = 80\ 10\ 00{,}95$$
$$x_{13} = 53\ 37\ 12{,}32 - 1{,}42 = 53\ 37\ 10{,}90$$
$$x_{14} = 123\ 49\ 41{,}08 + 0{,}96 = 123\ 49\ 42{,}04$$

§ 61. Trigonometrisku tīklu tuvinā izlīdzināšana.

Kā zinams, lietderīgi izdarītas izlīdzināšanas nolūks ir ne tikai novērojumu pretrunu likvidēšana, bet arī novērojumu noteiktības paaugstināšana. Tomēr izlīdzināšanas rezultatu noteiktība atkarājas ne tik no šīs izlīdzināšanas, cik no tās objektu veidojošo novērojumu noteiktības.

Trigonometrisku tīklu stingrā izlīdzināšana pēc vismazāko kvadratu metodes vispārīgi padara diezgan lielu darbu, pie kam šī darba apjoms strauji pieaug ar svarā krītošo noteikumu nolīdzinājumu resp. lieko novērojumu skaitu.

Tāpēc nevar atzīt par lietderīgu, ja, nepiegriežot vajadzīgo vērību novērojumu noteiktībai, pārāk palielina lieko novērojumu skaitu, jo ar to izlīdzināšanas darbu komplicē lielākā mērā, nekā tas attaisnojams ar šī darba rezultatu noteiktību. Pirmā kārtā jāgādā par darba nolūkam atbilstošo novērojumu noteiktību. Bet kas zīmējas uz liekiem novērojumiem, tad tie rūpīgi jāizvēlas tā, lai bez šo novērojumu skaita pārmērīgas palielināšanas panāktu pietiekošu drošību un noteiktības manamu uzlabošanu izlīdzināšanas rezultatā.

Augstāku šķiru triangulacijās novērojumus taisa ar ļoti lielu noteiktību, un tāpēc novērojumu pretrunas un izlīdzināšanas ceļā nosakamie izlabojumi ir atbilstoši mazi. Tā tad izlīdzināšanas paņēmienam jābūt tam piemērotam — stingram, lai nepaliktu neizmantoti visi līdzekļi galīgo rezultatu noteiktības manamai paaugstināšanai. Citādi apstākļi ir zemāku šķiru triangulacijās, kur novērojumi notiek ar mazāku noteiktību. Tādā gadijumā pretrunas un izlabojumi mēdz būt atbilstoši lieli, bet no izlīdzināšanas — pat ja tā notiek pēc stingra paņēmiena — nav sagaidams ievērojams noteiktības uzlabojums. Pie tam taisni zemāku šķiru triangulacijās, tīklam sastāvot no daudziem nelieliem trijstūriem, svarā krītošie noteikumi bieži mēdz būt daudzi un komplicēti, un tāpēc izlīdzināšana pēc stingra paņēmiena padara — samērā ar rezultatu noteiktību — parmērīgu darbu. Tādos apstākļos pelna ievērību dažādi tuvini izlīdzināšanas paņēmieni, kuri vispārīgi gan pamatoti uz vismazāko kvadratu principa, bet zinamos sīkumos ievēro to nevis pilnīgā stingrībā.

Tie parasti mēdz būt pakāpeniskās izlīdzināšanas paņēmieni: attiecīgos noteikumus ievēro ne visus reizē, bet pa atsevišķām grupām; piem., pirmai grupai aptverot tikai leņķu sumu (figuru un staciju) noteikumus, bet otrai — tikai malu (polu un bazu) noteikumus. Pirmā izlīdzināšanas pakāpē nosaka izlabojumus v', kas apmierina tikai pirmās grupas noteikumus, un aprēķina šinī ziņā parciali izlīdzinātos novērojumus. Uzskatot šos parciali izlīdzinātos novērojumus par otrā pakāpē izdaramās izlīdzināšanas objektu, izlīdzināšanas otrā pakāpē tad nosaka izlabojumus v'', kas apmierina otrās grupas noteikumus. Pie tam jāgādā, lai otrā pakāpē izdarītā izlīdzināšana nepadarītu tās rezultatus pretrunīgus attiecībā uz pirmās grupas noteikumiem, t. i. lai izlīdzināšanas otrā pakāpē netiktu izjaukts pirmā pakāpē jau panāktais. Tāpēc izlīdzinot otrā pakāpē, jāievēro ne tikai otrās grupas noteikumi, bet vēl zinami **papildu noteikumi**, kas nodrošina, ka izlabojumi v'' paliek neitrali attiecībā uz pirmās grupas noteikumiem. Ja tas ievērots, tad atbilstošo parcialo izlabojumu v' un v'' sumas $v = v' + v''$ ir novērojumu galīgie izlabojumi, jo par šiem v izlabotie novērojumi apmierina visus svarā krītošos noteikumus.

Kas zīmējas uz minētiem papildu noteikumiem, tad tos var formulēt diezgan dažādi. Starp citu, pēc zinamiem paņēmieniem var panākt, ka galīgie izlabojumi v izpilda vismazāko kvadratu metodes pamatprasību, lai būtu $[vv] = \min$. Neiztirzājot sīkāki šo jautājumu, tikai piezīmējam, ka tādā veidā izdarītā pakāpeniskā izlīdzināšana galīgo rezultatu ziņā neatšķiras no parastās izlīdzināšanas, kas reizē ievēro visus svarā krītošos noteikumus. Bet, no otras puses, tādai stingrai pakāpeniskai izlīdzināšanai vispārīgi arī nav sevišķu priekšrocību izlīdzināšanas darba vienkāršošanas un atvieglošanas ziņā.

Tuvinos paņēmienos apmierinājas ar to, ka katras izlīdzināšanas pakāpes parcialie izlabojumi izpilda vismazāko kvadratu pamatprasību, t. i. ka $[v'v'] = \min.$ un $[v''v''] = \min.$, bet galīgie izlabojumi v, neizpildot gan stingrībā vismazāko kvadratu pamatprasību, likvidē visas pretrunas. Tādos apstākļos minētie papildu noteikumi formulējami ļoti vienkāršā veidā, un šo noteikumu ievērošana ne tikai nekomplicē, bet pat vienkāršo otrā pakāpē izdaramo izlīdzināšanas rēķinu.

Zīmējoties tikai uz vienmēr ļoti vienkāršiem leņķu sumu noteikumiem, izlīdzināšanas pirmā pakāpe vispārīgi nepadara nopietnas grūtības. Zinamos tipiskos gadijumos pat var atvasināt vispārējas formulas, pēc kurām parcialie izlabojumi v' tieši nosakami kā attiecīgo pretrunu funkcijas. Tā tad no tuvinā paņēmiena pielietošanas gūtie atvieglojumi zīmējas galvenā kārtā uz izlīdzināšanas otro pakāpi.

Skatoties pēc tīkla ģeometriskā veida un citiem svarā krītošiem apstākļiem, tuvinā izlīdzināšana pēc aizrādītā principa izdarama dažādos variantos. Paņēmiena technisko sīkumu paskaidrošanai apskatīsim uz ģeodetisko četrstūri un uz centralo sistemu attiecīgos atsevišķos gadijumus.

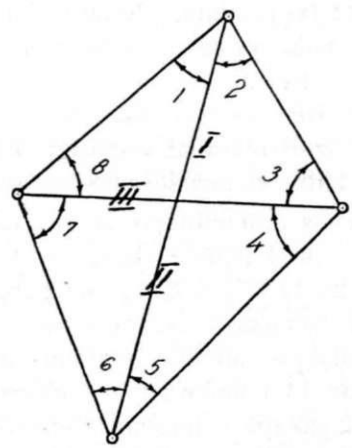
Ģeodetiskais četrstūris.

Kā zinams, ģeodetiskā četrstūrī novērotie leņķi 1, 2, ..., 7, 8 (17. att.) padoti 4 neatkarīgiem noteikumiem, kuri formulējami 3 figuru nolīdzinājumu un 1 pola nolīdzinājuma veidā. Pirmā izlīdzināšanas pakāpē ievērojot tikai figuru noteikumus, nosakam atbilstošos izlabojumus v', un tos pieliekot uz leņķiem 1, 2, ..., 7, 8 attiecīgiem novērojumiem l_1, l_2, ..., l_7, l_8, atrodam attiecībā uz figuru noteikumiem parciali izlīdzinātos novērojumus l_1', l_2', ..., l_7', l_8'.

Pa trijstūriem I, II, III parastā kārtā veidojam pārvērstos figuru nolīdzinājumus

$$\left.\begin{aligned} v_1' + v_2' + v_3' + v_8' + w_I &= 0 \\ v_4' + v_5' + v_6' + v_7' + w_{II} &= 0 \\ v_1' + v_6' + v_7' + v_8' + w_{III} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (669),$$

kur w_I, w_{II}, w_{III} apzīmē novēroto leņķu 1 pretrunas attiecīgos trijstūros. Atbilstošie korrelatu normalnolīdzinājumi ir



17. attēls.

$$\left.\begin{aligned} 4k_1 \qquad\quad + 2k_3 + w_I &= 0 \\ 4k_2 + 2k_3 + w_{II} &= 0 \\ 2k_1 + 2k_2 + 4k_3 + w_{III} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (670).$$

Atslēdzot tos, atrodam

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= -\frac{3w_I}{8} - \frac{w_{II}}{8} + \frac{w_{III}}{4} \\ k_2 &= -\frac{w_I}{8} - \frac{3w_{II}}{8} + \frac{w_{III}}{4} \\ k_3 &= +\frac{w_I}{4} + \frac{w_{II}}{4} - \frac{w_{III}}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (671),$$

un ar šīm korrelatām parastā kārtā aprēķinam pirmās pakāpes izlabojumus

$$\left.\begin{aligned} v_1' = v_8' = k_1 + k_3 &= -\frac{w_I}{8} + \frac{w_{II}}{8} - \frac{w_{III}}{4} \\ v_2' = v_3' = k_1 \qquad &= -\frac{3w_I}{8} - \frac{w_{II}}{8} + \frac{w_{III}}{4} \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} v_4' = v_5' = k_2 \quad &= -\frac{w_I}{8} - \frac{3w_{II}}{8} + \frac{w_{III}}{4} \\ v_6' = v_7' = k_2 + k_3 &= +\frac{w_I}{8} - \frac{w_{II}}{8} - \frac{w_{III}}{4} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (672).$$

Šīs izteiksmes var noderēt par vispārējām formulām izlabojumu: v' noteikšanai tieši izejot no pretrunām w_I, w_{II}, w_{III}.

Pieliekot atrastos izlabojumus atbilstošiem leņķu novērojumiem 1, aprēķinam pirmā pakāpē izlīdzinātos leņķus

$$\left.\begin{aligned} 1_1' &= 1_1 + v_1' & 1_5' &= 1_5 + v_5' \\ 1_2' &= 1_2 + v_2' & 1_6' &= 1_6 + v_6' \\ 1_3' &= 1_3 + v_3' & 1_7' &= 1_7 + v_7' \\ 1_4' &= 1_4 + v_4' & 1_8' &= 1_8 + v_8' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (673).$$

Uzskatot šos leņķus par otrā pakāpē izdaramās izlīdzināšanas objektu, tagad jānosaka pola nolīdzinājumu apmierinošie leņķi

$$\left.\begin{aligned} 1_1'' &= 1_1' + v_1'' & 1_5'' &= 1_5' + v_5'' \\ 1_2'' &= 1_2' + v_2'' & 1_6'' &= 1_6' + v_6'' \\ 1_3'' &= 1_3' + v_3'' & 1_7'' &= 1_7' + v_7'' \\ 1_4'' &= 1_4' + v_4'' & 1_8'' &= 1_8' + v_8'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (674).$$

Veidojot pola nolīdzinājumu, to attiecinam uz diagonalu krustpunktā pieņemto polu. Šis nolīdzinājums ir

$$\frac{\sin 1_1''}{\sin 1_8''} \cdot \frac{\sin 1_3''}{\sin 1_2''} \cdot \frac{\sin 1_5''}{\sin 1_4''} \cdot \frac{\sin 1_7''}{\sin 1_6''} =$$

$$= \frac{\sin(1_1'+v_1'')}{\sin(1_8'+v_8'')} \cdot \frac{\sin(1_3'+v_3'')}{\sin(1_2'+v_2'')} \cdot \frac{\sin(1_5'+v_5'')}{\sin(1_4'+v_4'')} \cdot \frac{\sin(1_7'+v_7'')}{\sin(1_6'+v_6'')} = 1 \quad (675),$$

jeb lineari pārvērstā veidā

$$\begin{aligned} &(\Delta_1 v_1'' + \Delta_3 v_3'' + \Delta_5 v_5'' + \Delta_7 v_7'') - \\ &- (\Delta_8 v_8'' + \Delta_2 v_2'' + \Delta_4 v_4'' + \Delta_6 v_6'') + w_p = 0 \quad . \quad . \quad (676), \end{aligned}$$

kur Δ apzīmē pirmā pakāpē izlīdzinātiem leņķiem $1'$ atbilstošās log sin tabulas diferences, bet w_p — uz pola noteikumu attiecīgo leņķu $1'$ pretrunu.

Lai izlabojumi v'' būtu neitrali attiecībā uz figuru nolīdzinājumiem, nosakam šos izlabojumus ievērojot sekojošos papildu noteikumus:

$$\left.\begin{aligned} v_1'' &= -v_8'' & v_5'' &= -v_4'' \\ v_3'' &= -v_2'' & v_7'' &= -v_6'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (677).$$

Tad pola nolīdzinājums (676) pāriet veidā

$$(\Delta_1+\Delta_8)v_1''+(\Delta_3+\Delta_2)v_3''+(\Delta_5+\Delta_4)v_5''+(\Delta_7+\Delta_6)v_7''+w_p = 0 \quad (678).$$

Atbilstošais korrelatas normalnolīdzinājums ir

$$\{(\Delta_1+\Delta_8)^2+(\Delta_3+\Delta_2)^2+(\Delta_5+\Delta_4)^2+(\Delta_7+\Delta_6)^2\}k_p + w_p = 0 \quad . \quad . \quad (679).$$

No tā atrodam

$$k_p = -\frac{w_p}{(\Delta_1+\Delta_8)^2+(\Delta_3+\Delta_2)^2+(\Delta_5+\Delta_4)^2+(\Delta_7+\Delta_6)^2} \quad . \quad . \quad (680),$$

un parastā kārtā aprēķinam

$$\left.\begin{aligned} v_1'' &= -v_8'' = (\Delta_1+\Delta_8)k_p \\ v_3'' &= -v_2'' = (\Delta_3+\Delta_2)k_p \\ v_5'' &= -v_4'' = (\Delta_5+\Delta_4)k_p \\ v_7'' &= -v_6'' = (\Delta_7+\Delta_6)k_p \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (681).$$

Tā tad otrā pakāpē — un līdz ar to arī galīgi — izlīdzinātie leņķi ir

$$\left.\begin{aligned} l_1'' &= l_1' + v_1'' = l_1 + v_1' + v_1'' \\ l_2'' &= l_2' + v_2'' = l_2 + v_2' + v_2'' \\ l_3'' &= l_3' + v_3'' = l_3 + v_3' + v_3'' \\ l_4'' &= l_4' + v_4'' = l_4 + v_4' + v_4'' \\ l_5'' &= l_5' + v_5'' = l_5 + v_5' + v_5'' \\ l_6'' &= l_6' + v_6'' = l_6 + v_6' + v_6'' \\ l_7'' &= l_7' + v_7'' = l_7 + v_7' + v_7'' \\ l_8'' &= l_8' + v_8'' = l_8 + v_8' + v_8'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (682).$$

Centralā sistema.

Lai n trijstūru centralā sistemā ar vienādu noteiktību novēroti leņķi

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n$$
$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_n$$
$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \ldots,\ \gamma_n$$

(18. att.). Tie padoti n figuru, vienam stacijas (horizonta) un vienam pola noteikumam.

Pirmā izlīdzināšanas pakāpē ievērojot tikai figuru un horizonta noteikumus, aprēķināsim šos noteikumus apmierinošos izlabojumus

$$v\alpha_1',\ v\alpha_2',\ v\alpha_3',\ldots,\ v\alpha_n'$$
$$v\beta_1',\ v\beta_2',\ v\beta_3',\ldots,\ v\beta_n'$$
$$v\gamma_1',\ v\gamma_2',\ v\gamma_3',\ldots,\ v\gamma_n'$$

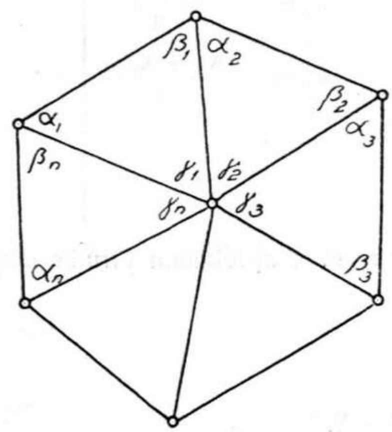
Apzīmējot uz figuru un horizonta noteikumiem attiecīgās novēroto leņķu pretrunas ar

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ \ldots,\ w_n$$

un $$w_h$$

parastā kārtā veidojami šādi noteikumu nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{array}{l} v_{\alpha_1}' + v_{\beta_1}' + v_{\gamma_1}' + w_1 = 0 \\ v_{\alpha_2}' + v_{\beta_2}' + v_{\gamma_2}' + w_2 = 0 \\ v_{\alpha_3}' + v_{\beta_3}' + v_{\gamma_3}' + w_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{\alpha_n}' + v_{\beta_n}' + v_{\gamma_n}' + w_n = 0 \\ \text{un} \\ v_{\gamma_1}' + v_{\gamma_2}' + v_{\gamma_3}' + \dots + v_{\gamma_n}' + w_h = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (683).$$



18. attēls.

Tiem atbilst korrelatu normalnolīdzinājumu sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3k_1 \qquad\qquad\qquad + k_{n+1} + w_1 = 0 \\ \quad 3k_2 \qquad\qquad + k_{n+1} + w_2 = 0 \\ \qquad 3k_3 \qquad + k_{n+1} + w_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad 3k_n + k_{n+1} + w_n = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n + n\,k_{n+1} + w_h = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; (684).$$

Lietojot apzīmējumus

$$[k] = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$

un

$$[w] = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$$

veidojam sistemas (684) pirmo n nolīdzinājumu sumu

$$3\,[k] + n\,k_{n+1} + [w] = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (685).$$

bet pēdējo nolīdzinājumu rakstam veidā

$$[k] + n\,k_{n+1} + w_h = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (686).$$

No nolīdzinājumiem (685) un (686) atrodam

$$k_{n+1} = \frac{[w] - 3w_h}{2n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (687),$$

un, lietojot sistemas (684) pirmos n nolīdzinājumus, pārējās korrelatas $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ izsakam šādā veidā:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= -\frac{w_1 + k_{n+1}}{3} \\ k_2 &= -\frac{w_2 + k_{n+1}}{3} \\ k_3 &= -\frac{w_3 + k_{n+1}}{3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n &= -\frac{w_n + k_{n+1}}{3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (688).$$

Ar atrastām korrelatām aprēķinam pirmās izlīdzināšanas pakāpes izlabojumus

$$\left.\begin{aligned} v_{\alpha_1}' = v_{\beta_2}' &= k_1 &&= -\frac{w_1 + k_{n+1}}{3} \\ v_{\alpha_2}' = v_{\beta_2}' &= k_2 &&= -\frac{w_2 + k_{n+1}}{3} \\ v_{\alpha_3}' = v_{\beta_3}' &= k_3 &&= -\frac{w_3 + k_{n+1}}{3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{\alpha_n}' = v_{\beta_n}' &= k_n &&= -\frac{w_n + k_{n+1}}{3} \\ v_{\gamma_1}' &= k_1 + k_{n+1} &&= \frac{2k_{n+1} - w_1}{3} \\ v_{\gamma_2}' &= k_2 + k_{n+1} &&= \frac{2k_{n+1} - w_2}{3} \\ v_{\gamma_3}' &= k_3 + k_{n+1} &&= \frac{2k_{n+1} - w_3}{3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{\gamma_n}' &= k_n + k_{n+1} &&= \frac{2k_{n+1} - w_n}{3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (689).$$

Pieliekot šos izlabojumus attiecīgiem novērotiem leņķiem 1α, 1β, 1γ, pirmā pakāpē parciali izlīdzinātos leņķus $1\alpha'$, $1\beta'$, $1\gamma'$ aprēķinam pēc parauga

$$\left.\begin{array}{l} l_\alpha' = l_\alpha + v_\alpha' \\ l_\beta' = l_\beta + v_\beta' \\ l_\gamma' = l_\gamma + v_\gamma' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (690).$$

Otrā izlīdzināšanas pakāpē nosakam izlabojumus v″, kuri jāpieliek atrastiem leņķiem l_α', l_β', lai otrā pakāpē izlīdzinātie leņķi

$$\left.\begin{array}{ll} l_{\alpha_1}'' = l_{\alpha_1}' + v_{\alpha_1}'' & l_{\beta_1}'' = l_{\beta_1}' + v_{\beta_1}'' \\ l_{\alpha_2}'' = l_{\alpha_2}' + v_{\alpha_2}'' & l_{\beta_2}'' = l_{\beta_2}' + v_{\beta_2}'' \\ l_{\alpha_3}'' = l_{\alpha_3}' + v_{\alpha_3}'' & l_{\beta_3}'' = l_{\beta_3}' + v_{\beta_3}'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{\alpha_n}'' = l_{\alpha_n}' + v_{\alpha_n}'' & l_{\beta_n}'' = l_{\beta_n}' + v_{\beta_n}'' \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (691)$$

apmierinātu pola noteikumu

$$\frac{\sin l_{\alpha_1}''}{\sin l_{\beta_1}''} \cdot \frac{\sin l_{\alpha_2}''}{\sin l_{\beta_2}''} \cdot \frac{\sin l_{\alpha_3}''}{\sin l_{\beta_3}''} \cdots\cdots \frac{\sin l_{\alpha_n}''}{\sin l_{\beta_n}''} = 1 \quad (692).$$

Ievērojot (691), veidojam atbilstošo lineari pārvērsto noteikuma nolīdzinājumu

$$(\Delta_{\alpha_1} v_{\alpha_1}'' + \Delta_{\alpha_2} v_{\alpha_2}'' + \Delta_{\alpha_3} v_{\alpha_3}'' + \ldots + \Delta_{\alpha_n} v_{\alpha_n}'') -$$
$$-(\Delta_{\beta_1} v_{\beta_1}'' + \Delta_{\beta_2} v_{\beta_2}'' + \Delta_{\beta_3} v_{\beta_3}'' + \ldots + \Delta_{\beta_n} v_{\beta_n}'') + w_p = 0 \quad (693),$$

kur Δ_α un Δ_β apzīmē leņķiem 1′ atbilstošās log sin tabulas diferences, un w_p — parastā kārtā atrasto brīvo locekli.

Lai izlabojumi v″, apmierinot noteikumu (693), būtu neitrali attiecībā uz pirmās izlīdzināšanas pakāpes nolīdzinājumiem, nosakam šos izlabojumus ievērojot sekojošos papildu noteikumus:

$$\left.\begin{array}{l} v_{\alpha_1}'' = - v_{\beta_1}'' \\ v_{\alpha_2}'' = - v_{\beta_2}'' \\ v_{\alpha_3}'' = - v_{\beta_3}'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{\alpha_n}'' = - v_{\beta_n}'' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (694).$$

Tad nolīdzinājums (693) pāriet veidā

$$(\Delta_{\alpha_1} + \Delta_{\beta_1}) v_{\alpha_1}'' + (\Delta_{\alpha_2} + \Delta_{\beta_2}) v_{\alpha_2}'' + (\Delta_{\alpha_3} + \Delta_{\beta_3}) v_{\alpha_3}'' + \ldots +$$
$$+ (\Delta_{\alpha_n} + \Delta_{\beta_n}) v_{\alpha_n}'' + w_p = 0 \quad (695).$$

Atbilstošais korrelatas normalnolīdzinājums ir

$$\{(\Delta_{\alpha_1} + \Delta_{\beta_1})^2 + (\Delta_{\alpha_2} + \Delta_{\beta_2})^2 + (\Delta_{\alpha_3} + \Delta_{\beta_3})^2 + \ldots +$$
$$+ (\Delta_{\alpha_n} + \Delta_{\beta_n})^2\} k_p + w_p = [(\Delta_\alpha + \Delta_\beta)^2]\, k_p + w_p = 0 \quad . \quad . \quad (696).$$

No tā atrodam korrelatu

$$k_p = -\frac{w_p}{[(\Delta\alpha + \Delta\beta)^2]} \quad \ldots\ldots \quad (697),$$

un tad, ievērojot (694), aprēķinam izlabojumus

$$\left.\begin{array}{l}
v\alpha_1'' = -v\beta_1'' = (\Delta\alpha_1 + \Delta\beta_1)\,k_p \\
v\alpha_2'' = -v\beta_2'' = (\Delta\alpha_2 + \Delta\beta_2)\,k_p \\
v\alpha_3'' = -v\beta_3'' = (\Delta\alpha_3 + \Delta\beta_3)\,k_p \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v\alpha_n'' = -v\beta_n'' = (\Delta\alpha_n + \Delta\beta_n)\,k_p
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (698).$$

Tā tad galīgi izlīdzinātie leņķi ir

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
l\alpha_1'' = l\alpha_1' + v\alpha_1'' = l\alpha_1 + v\alpha_1' + v\alpha_1'' \\
l\alpha_2'' = l\alpha_2' + v\alpha_2'' = l\alpha_2 + v\alpha_2' + v\alpha_2'' \\
l\alpha_3'' = l\alpha_3' + v\alpha_3'' = l\alpha_3 + v\alpha_3' + v\alpha_3'' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l\alpha_n'' = l\alpha_n' + v\alpha_n'' = l\alpha_n + v\alpha_n' + v\alpha_n''
\end{array} \\
\begin{array}{l|l}
l\beta_1'' = l\beta_1' + v\beta_1'' = l\beta_1 + v\beta_1' + v\beta_1'' & l\gamma_1'' = l\gamma_1' = l\gamma_1 + v\gamma_1' \\
l\beta_2'' = l\beta_2' + v\beta_2'' = l\beta_2 + v\beta_2' + v\beta_2'' & l\gamma_2'' = l\gamma_2' = l\gamma_2 + v\gamma_2' \\
l\beta_3'' = l\beta_3' + v\beta_3'' = l\beta_3 + v\beta_3' + v\beta_3'' & l\gamma_3'' = l\gamma_3' = l\gamma_3 + v\gamma_3' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l\beta_n'' = l\beta_n' + v\beta_n'' = l\beta_n + v\beta_n' + v\beta_n'' & l\gamma_n'' = l\gamma_n' = l\gamma_n + v\gamma_n'
\end{array}
\end{array}\right\} \quad (699).$$

§ 62. Skaitlisks piemērs.

Atgriežoties pie 57-ā paragrafā jau pēc stingrās metodes izlīdzinātā Siguldas trigonometriskā tīkla, izdarīsim šī tīkla izlīdzināšanu vēlreiz, tagad pielietojot iepriekšējā paragrafā aizrādīto pakāpenisko tuvino paņēmienu.

Izlīdzināšanas pirmā pakāpē ievērojot tikai figuru noteikumus, parastā kārtā (sk. § 57) veidojam sekojošos 4 pārvērstos noteikumu nolīdzinājumus:

1) uz trijstūri U-P-C attiecīgo nolīdzinājumu

$$v_1' + v_{10}' + v_{11}' - 7{,}0'' = 0$$

un

2) uz ģeodetisko četrstūri U-Ku-Ka-P attiecīgo nolīdzinājumu sistemu

$$\begin{array}{l}
v_2' + v_3' + v_4' + v_9' - 10{,}5'' = 0 \\
v_5' + v_6' + v_7' + v_8' + 14{,}0 \;\; = 0 \\
v_2' + v_7' + v_8' + v_9' + \;\; 5{,}5 \;\; = 0
\end{array}$$

Tā kā figuru noteikumu ziņā trijstūris U-P-C un ģeodetiskais četrstūris U-Ku-Ka-P viens no otra neatkarīgi, izlīdzināšanas pirmā pakāpē apskatam atsevišķi augšā minētās divas figuru nolīdzinājumu resp. tur ieejošo izlabojumu v' sistemas.

Uz trijstūri U-P-C attiecīgam noteikuma nolīdzinājumam atbilstošais korrelatas normalnolīdzinājums ir

$$3k - 7{,}0'' = 0$$

No tā atrodam korrelatu

$$k = +\frac{7{,}0}{3} = +2{,}33_3''$$

un aprēķinam izlabojumus

$$v_1' = v_{10}' = v_{11}' = k = +2{,}33_3''$$

Kas zīmējas uz ģeodetisko četrstūri U-Ku-Ka-P, tad uzskatot attiecīgos figuru nolīdzinājumus par atbilstošiem sistemai (669), pēc formulu (672) parauga veidojam izteiksmes

$$v_2' = v_9' = +\frac{10{,}5}{8} + \frac{14{,}0}{8} - \frac{5{,}5}{4} = +1{,}68''$$

$$v_3' = v_4' = +\frac{3\times 10{,}5}{8} - \frac{14{,}0}{8} + \frac{5{,}5}{4} = +3{,}57$$

$$v_5' = v_6' = +\frac{10{,}5}{8} - \frac{3\times 14{,}0}{8} + \frac{5{,}5}{4} = -2{,}57$$

$$v_7' = v_8' = -\frac{10{,}5}{8} - \frac{14{,}0}{8} - \frac{5{,}5}{4} = -4{,}43$$

Tā tad pirmā pakāpē parciali izlīdzinātie leņķi ir

$$\begin{array}{lcrcr}
l_1' & = & 34^0\,31'\,50{,}00'' + 2{,}34'' & = & 34^0\,31'\,52{,}34'' \\
l_2' & = & 7\ 07\ 06{,}00 + 1{,}68 & = & 7\ 07\ 07{,}68 \\
l_3' & = & 17\ 31\ 12{,}50 + 3{,}57 & = & 17\ 31\ 16{,}07 \\
l_4' & = & 51\ 37\ 24{,}00 + 3{,}57 & = & 51\ 37\ 27{,}57 \\
l_5' & = & 58\ 54\ 08{,}50 - 2{,}57 & = & 58\ 54\ 05{,}93 \\
l_6' & = & 51\ 57\ 13{,}00 - 2{,}57 & = & 51\ 57\ 10{,}43 \\
l_7' & = & 14\ 26\ 22{,}50 - 4{,}43 & = & 14\ 26\ 18{,}07 \\
l_8' & = & 54\ 42\ 30{,}00 - 4{,}43 & = & 54\ 42\ 25{,}57 \\
l_9' & = & 103\ 44\ 07{,}00 + 1{,}68 & = & 103\ 44\ 08{,}68 \\
l_{10}' & = & 33\ 42.\ 19{,}00 + 2{,}33 & = & 34\ 42\ 21{,}33 \\
l_{11}' & = & 111\ 45\ 44{,}00 + 2{,}33 & = & 111\ 45\ 46{,}33
\end{array}$$

Otrā izlīdzināšanas pakāpē jāievēro divi malu noteikumi: viens pola un viens bazu noteikums. Pieņemot attiecībā uz šiem noteikumiem izlīdzinātos leņķus pēc parauga $1'' = 1' + v''$, minētie malu nolīdzinājumi rakstamį šādā pirmātnējā veidā (sk. § 57):

$$\frac{\sin 1_5''}{\sin(1_6'' + 1_7'')} \cdot \frac{\sin(1_2'' + 1_3'')}{\sin 1_4''} \cdot \frac{\sin 1_7''}{\sin 1_2''} = 1$$

$$\frac{\sin 1_1''}{\sin 1_{11}''} \cdot \frac{\sin 1_7''}{\sin 1_2''} = \frac{b_2}{b_1}$$

Šos nolīdzinājumus parastā kārtā pārvēršam linearā veidā.

Pola nolīdzinājums:

$$\begin{aligned}
\log\sin 1_5'' &= \log\sin(58^0 54' 05{,}93'' + v_5'') &&= 9{,}932\,6168 + 12{,}8 v_5''\\
\log\sin(1_2'' + 1_3'') &= \log\sin(24\ 38\ 23{,}75 + v_2'' + v_3'') &&= 9{,}620\,0468 + 45{,}9 v_2'' + 45{,}9 v_3''\\
\log\sin 1_7'' &= \log\sin(14\ 26\ 18{,}07 + v_7'') &&= 9{,}396\,7888 + 81{,}8 v_7''
\end{aligned}$$

$$\log\sin 1_5'' + \log\sin(1_2'' + 1_3'') + \log\sin 1_7'' = 8{,}949\,4524 + 12{,}8 v_5'' + 45{,}9 v_2'' + 45{,}9 v_3'' + 81{,}8 v_7''$$

$$\begin{aligned}
\log\sin(1_6'' + 1_7'') &= \log\sin(66^0 23' 28{,}50'' + v_6'' + v_7'') &&= 9{,}962\,0384 + 9{,}2 v_6'' + 9{,}2 v_7''\\
\log\sin 1_4'' &= \log\sin(51\ 37\ 27{,}57 + v_4'') &&= 9{,}894\,2923 + 16{,}6 v_4''\\
\log\sin 1_2'' &= \log\sin(\ 7\ 07\ 07{,}68 + v_2'') &&= 9{,}093\,1662 + 168{,}6 v_2''
\end{aligned}$$

$$\log\sin(1_6'' + 1_7'') + \log\sin 1_4'' + \log\sin 1_2'' = 8{,}949\,4969 + 9{,}2 v_6'' + 9{,}2 v_7'' + 16{,}6 v_4'' + 168{,}6 v_2''$$

Tā tad

$$(12{,}8 v_5'' + 45{,}9 v_2'' + 45{,}9 v_3'' + 81{,}8 v_7'' + 8{,}949\,4524) - (9{,}2 v_6'' + 9{,}2 v_7'' + 16{,}6 v_4'' + 168{,}6 v_2'' + 8{,}949\,4969) = 0$$

jeb

$$-12{,}27 v_2'' + 4{,}59 v_3'' - 1{,}66 v_4'' + 1{,}28 v_5'' - 0{,}92 v_6'' + 7{,}26 v_7'' - 44{,}5 = 0$$

Bazu nolīdzinājums:

$$\begin{aligned}
\log\sin 1_1'' &= \log\sin(34^0 31' 52{,}34'' + v_1'') &&= 9{,}753\,4720 + 30{,}6 v_1''\\
\log\sin 1_7'' &= \log\sin(14\ 26\ 18{,}07 + v_7'') &&= 9{,}396\,7888 + 81{,}8 v_7''\\
\log b_1 &= &&= 2{,}938\,5282
\end{aligned}$$

$$\log\sin 1_1'' + \log\sin 1_7'' + \log b_1 = 2{,}088\,7890 + 30{,}6 v_1'' + 81{,}8 v_7''$$

$$
\begin{aligned}
\log\sin l_2'' &= \log\sin(\ \ 7^0 07' 07{,}68'' + v_2''\ ) = 9{,}093\,1662 + 168{,}6 v_2'' \\
\log\sin l_{11}'' &= \log\sin(111\ 45\ 46{,}33\ \ + v_{11}'') = 9{,}967\,8878 - \ \ 8{,}4 v_{11}'' \\
\log b_2 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 3{,}027\,8073 \\
\hline
\log\sin l_2'' + \log\sin l_{11}'' + \log b_2 &\qquad\qquad = 2{,}088\,8613 + 168{,}6 v_2'' - \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 8{,}4 v_{11}''
\end{aligned}
$$

Tā tad

$$(30{,}6 v_1'' + 81{,}8 v_7'' + 2{,}088\,7890) - (168{,}6 v_2'' - 8{,}4 v_{11}'' + 2{,}088\,8613) = 0$$

jeb

$$+ 3{,}06 v_1'' - 16{,}86 v_2'' + 8{,}18 v_7'' + 0{,}84 v_{11}'' - 72{,}3 = 0$$

Lai meklētie izlabojumi v″, apmierinot minētos malu nolīdzinājumus, būtu neitrali attiecībā uz figuru nolīdzinājumiem, pieņemam sekojošos papildu noteikumus:

$$
\begin{aligned}
v_5'' &= -(v_6'' + v_7'') &\qquad v_7'' &= -v_2'' \\
v_2'' + v_3'' &= -v_4'' &\qquad v_1'' &= -v_{11}''
\end{aligned}
$$

jeb

$$
\begin{aligned}
v_2'' &= -v_7'' &\qquad v_6'' &= -v_5'' - v_7'' \\
v_4'' &= -v_3'' + v_7'' &\qquad v_{11}'' &= -v_1''
\end{aligned}
$$

Tad atrastie malu nolīdzinājumi pāriet veidā

$$
\begin{aligned}
+ 6{,}25 v_3'' + 2{,}20 v_5'' + 18{,}79 v_7'' - 44{,}5 &= 0 \\
+ 2{,}22 v_1'' \qquad\qquad\qquad\qquad + 25{,}04 v_7'' - 72{,}3 &= 0
\end{aligned}
$$

Atbilstošie korrelatu normalnolīdzinājumi ir

$$
\begin{aligned}
+ 397{,}0\, k_1 + 470{,}5\, k_2 - 44{,}5 &= 0 \\
+ 470{,}5\, k_1 + 631{,}9\, k_2 - 72{,}3 &= 0
\end{aligned}
$$

atslēdzot tos, atrodam korrelatas

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -0{,}1998 \\
k_2 &= +0{,}2633
\end{aligned}
$$

un aprēķinam izlabojumus

$$
\begin{aligned}
v_1'' &= \qquad\qquad\qquad\qquad + \ 2{,}22 \times 0{,}2633 = + 0{,}585'' \\
v_3'' &= - \ \ 6{,}25 \times 0{,}1998 \qquad\qquad\qquad\quad = - 1{,}249 \\
v_5'' &= - \ \ 2{,}20 \times 0{,}1998 \qquad\qquad\qquad\quad = - 0{,}440 \\
v_7'' &= - 18{,}79 \times 0{,}1998 + 25{,}04 \times 0{,}2633 = + 2{,}839
\end{aligned}
$$

Ievērojot pieņemtos papildu noteikumus, aprēķinam arī pārējos izlabojumus v″ un veidojam sekojošo izlabojumu tabulu:

$$
\begin{aligned}
v_1'' &= + 0{,}58_5'' &\qquad v_7'' &= + 2{,}83_9'' \\
v_2'' &= - 2{,}83_9 &\qquad v_8'' &\quad -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
v_3'' = -\,1{,}24_9'' & & v_9'' & - \\
v_4'' = +\,4{,}08_8 & & v_{10}'' & - \\
v_5'' = -\,0{,}44_0 & & v_{11}'' & = -\,0{,}58_5'' \\
v_6'' = -\,2{,}39_9 & & &
\end{array}
$$

Tā tad otrā pakāpē, un līdz ar to galīgi izlīdzinātie leņķi ir

$$
\begin{array}{lllll}
l_1'' = l_1' + v_1'' & = 34^0\,31'52{,}34'' + 0{,}58_5'' & = & 34^0\,31'52{,}92_5'' \\
l_2'' = l_2' + v_2'' & = 7\;07\;07{,}68\; -2{,}84 & = & 7\;07\;04{,}84 \\
l_3'' = l_3' + v_3'' & = 17\;31\;16{,}07\; -1{,}25 & = & 17\;31\;14{,}82 \\
l_4'' = l_4' + v_4'' & = 51\;37\;27{,}57\; +4{,}09 & = & 51\;37\;31{,}66 \\
l_5'' = l_5' + v_5'' & = 58\;54\;05{,}93\; -0{,}44 & = & 58\;54\;05{,}49 \\
l_6'' = l_6' + v_6'' & = 51\;57\;10{,}43\; -2{,}40 & = & 51\;57\;08{,}03 \\
l_7'' = l_7' + v_7'' & = 14\;26\;18{,}07\; +2{,}84 & = & 14\;26\;20{,}91 \\
l_8'' = l_8' & = & = & 54\;42\;25{,}57 \\
l_9'' = l_9' & = & = & 103\;44\;08{,}68 \\
l_{10}'' = l_{10}' & = & = & 33\;42\;21{,}33 \\
l_{11}'' = l_{11}' + v_{11}'' & = 111\;45\;46{,}33\; -0{,}58_5 & = & 111\;45\;45{,}74_5
\end{array}
$$

Kontroles nolūkā ar atrastiem izlīdzinātiem leņķiem veidojam lietotiem figuru nolīdzinājumiem atbilstošās leņķu sumas un malu nolīdzinājumiem atbilstošās logaritmiskās izteiksmes:

$\triangle$ U - P - C:

$$
\begin{array}{ll}
l_1'' = & 34^0\,31'52{,}92_5'' \\
l_{10}'' = & 33\;42\;21{,}33 \\
l_{11}'' = & \underline{111\;45\;45{,}74_5} \\
 & 180^0\,00'00{,}00''
\end{array}
$$

$\triangle$ U - Ka - P:

$$
\begin{array}{ll}
l_2'' = & 7^0\,07'04{,}84'' \\
l_3'' = & 17\;31\;14{,}82 \\
l_4'' = & 51\;37\;31{,}66 \\
l_9'' = & \underline{103\;44\;08{,}68} \\
 & 180^0\,00'00{,}00''
\end{array}
$$

$\triangle$ U - Ku - Ka:

$$
\begin{array}{ll}
l_5'' = & 58^0\,54'05{,}49'' \\
l_6'' = & 51\;57\;08{,}03 \\
l_7'' = & 14\;26\;20{,}91 \\
l_8'' = & \underline{54\;42\;25{,}57} \\
 & 180^0\,00'00{,}00''
\end{array}
$$

$\triangle$ U - Ku - P:

$$
\begin{array}{ll}
l_2'' = & 7^0\,07'04{,}84'' \\
l_7'' = & 14\;26\;20{,}91 \\
l_8'' = & 54\;42\;25{,}57 \\
l_9'' = & \underline{103\;44\;08{,}68} \\
 & 180^0\,00'00{,}00''
\end{array}
$$

Pola nolīdzinājums:

$$
\begin{array}{lll}
\log\sin l_5'' & = \log\sin\; 58^0\,54'05{,}49'' & = 9{,}932\,6162 \\
\log\sin(l_2'' + l_3'') & = \log\sin\; 24\;38\;19{,}66 & = 9{,}620\,0280 \\
\underline{\log\sin l_7''} & = \log\sin\; 14\;26\;20{,}91 & = 9{,}396\,8120 \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\log\sin l_5'' + \log\sin(l_2'' + l_3'') + \log\sin l_7''} & = 8{,}949\,4562
\end{array}
$$

$$\log\sin(1_6''+1_7'') = \log\sin\ 66^0\,23'\,28{,}94'' = 9{,}962\,0388$$
$$\log\sin 1_4'' = \log\sin\ 51\ 37\ 31{,}66 = 9{,}894\,2991$$
$$\log\sin 1_2'' = \log\sin\ 7\ 07\ 04{,}84 = 9{,}093\,1183$$
$$\log\sin(1_6''+1_7'') + \log\sin 1_4'' + \log\sin 1_2'' = 8{,}949\,4562$$

Bazu nolīdzinājums:

$$\log\sin 1_1'' = \log\sin\ 34^0\,31'\,52{,}92_5'' = 9{,}753\,4737$$
$$\log\sin 1_7'' = \log\sin\ 14\ 26\ 20{,}91 = 9{,}396\,8120$$
$$\log b_1 = \quad = 2{,}938\,5282$$
$$\log\sin 1_1'' + \log\sin 1_7'' + \log b_1 = 2{,}088\,8139$$
$$\log\sin 1_2'' = \log\sin\ 7^0\,07'\,04{,}84'' = 9{,}093\,1183$$
$$\log\sin 1_{11}'' = \log\sin\ 111\ 45\ 45{,}74_5 = 9{,}967\,8883$$
$$\log b_2 = \quad = 3{,}027\,8073$$
$$\log\sin 1_2'' + \log\sin 1_{11}'' + \log b_2 = 2{,}088\,8139$$

Tā tad atrastie izlīdzinātie leņķi apmierina visus uz tiem attiecīgos noteikumus.

Beidzot veidojam vēl no parcialiem izlabojumiem v' un v'' rezultējošos vispārējos izlabojumus v ar atbilstošo sumu [vv], un aprēķinam svara vienības (neizlīdzināta novērota leņķa) vidējo kļūdu:

	v'	v''		v	vv
1)	+ 2,34''	+ 0,58₅''	=	+ 2,92₅''	8,56
2)	+ 1,68	− 2,84	=	− 1,16	1,35
3)	+ 3,57	− 1,25	=	+ 2,32	5,38
4)	+ 3,57	+ 4,09	=	+ 7,66	58,68
5)	− 2,57	− 0,44	=	− 3,01	9,06
6)	− 2,57	− 2,40	=	− 4,97	24,70
7)	− 4,43	+ 2,84	=	− 1,59	2,53
8)	− 4,43		=	− 4,43	19,62
9)	+ 1,68		=	+ 1,68	2,82
10)	+ 2,33		=	+ 2,33	5,43
11)	+ 2,33	− 0,58₅	=	+ 1,74₅	3,05
					141,18 = [vv]

Salīdzinot ar tā paša tīkla stingrās izlīdzināšanas atbilstošo rezultatu ([vv] = 125,563), sumas [vv] atrastā vērtība ir ievērojami lielāka. Tas bij sagaidams, jo šeit pielietotā izlīdzināšanas paņēmienā nav stingri ievērots princips, ka izlabojumu v kvadratu sumai jābūt minimalai.

No atrastās sumas [vv] atvasinot svara vienības (neizlīdzināta novērota leņķa) vidējo kļūdu, jāievēro, saprotams, visu attiecīgo noteikumu kopskaits, neatkarīgi no šo noteikumu iedalījuma izlīdzināšanas atsevišķām pakāpēm atbilstošās grupās. Tā tad svara vienības vidējā kļūda ir

$$m = \pm \sqrt{\frac{141,18}{6}} = \pm 4,85''$$

Salīdzinot pēc tuvinā paņēmiena atrastos izlīdzinātos leņķus 1'' ar stingrās izlīdzināšanas atbilstošiem rezultatiem x (sk. § 57), konstatējam starpības līdz 2,17'', kas tomēr paliek svara vienības vidējās kļūdas robežās.

§ 63. Koordinatu izlīdzināšana. Virzienu koeficienti.

Izlīdzinot trigonometriskā tīklā novērotos virzienus kā noteikumu novērojumus, izlīdzināšanas tiešā rezultatā atrodam šo virzienu izlīdzinātās vērtības. Ar tām tad aprēķinam tīkla virsotņu koordinatas, pie kam šis koordinatu aprēķins notiek kā atsevišķs, ar pašu izlīdzināšanu tieši nesaistīts darbs.

Bet var arī koordinatu aprēķinu tieši ietilpināt pašā novēroto virzienu izlīdzināšanā. Tādā gadijumā tīklā nosakamo punktu galīgās koordinatas uzskata par izlīdzināšanas rēķina neatkarīgiem nezinamiem, bet novērotos virzienus — par netiešiem novērojumiem, kas zīmējas uz šo nezinamo funkcijām. Tāda koordinatu izlīdzināšana vispārīgi iespējama, ja tīklā ir ne mazāk kā divi punkti ar dotām vai a priori pieņemtām koordinatām. Šim izlīdzināšanas veidam izdevīgākie apstākļi ir tad, kad tīklā ir daudz dotu (augstākas šķiras) punktu, bet maz nosakamu punktu. Tādi apstākļi ir, starp citu, tad, kad jānosaka izlīdzinātās koordinatas punktam, kurš augstākas šķiras punktiem pieslēgts pēc krustojumu metodes, pie kam tam nolūkam notikušie novērojumi taisīti nepieciešamo pārsniedzošā skaitā.

Novēroto virzienu paņēmienu mērīšanas centri var atrasties kā dotos, tā arī nosakamos tīkla punktos. Vispārīgi katrs tāds virzienu paņēmiens jāpagriež par izlīdzināšanas gaitā nosakamu leņķi; šie pagriezienu leņķi, kopā ar nosakamo punktu izlīdzinātām koordinatām, ieiet izlīdzināšanas rēķinā kā neatkarīgie nezinamie. Bet zinamos gadijumos, kas var iestāties, ja virzienu paņēmiena mērīšanas centrs atrodas tīkla dotā punktā, virzienu paņēmiena galīgais orientējums nosakams jau pirms koordinatu izlīdzināšanas; tādā gadijumā atbilstošais pagrieziena leņķis, kā izlīdzināšanas rēķina nezinamais, atkrīt.

Piegriežoties jautājumam par koordinatu izlīdzināšanas rēķina kļūdu nolīdzinājumu vispārējo veidu, pieņemsim, ka bez doto punktu a priori pazīstamām koordinatām zinamas arī nosakamo punktu meklēto koordinatu tuvinās vērtības, kuras vispārīgi aprēķinamas ar tīklā novērotiem neizlīdzinātiem virzieniem.

Lai mērīšanas centrā S novērots skatamam punktam G atbilstošais virziens r, kurš pieder a priori galīgā veidā neorientētam virzienu paņēmienam un tāpēc kopā ar to jāpagriež par pagaidam nezinamo leņķi z. Tad šis novērotais virziens galīgā orientējumā ir $(z+r)$.

Bez tam pieņemsim, ka minētie S un G abi ir tīkla nosakami punkti ar tuvinām koordinatam (x_S), (y_S) un (x_G), (y_G). Tad novērotam un pagrieztam virzienam $(z+r)$ atbilstošais ar punktu S un G tuvinām koordinatām aprēķinātais virziens ir

$$(\varphi) = \operatorname{arc\,tg} \frac{(y_G) - (y_S)}{(x_G) - (x_S)} \quad \ldots \ldots \quad (700),$$

pie kam šis (φ), minētās tuvinās koordinatas un tām atbilstošo punktu savstarpējais atstatums (s) ir sakarā, kurš noteikts ar formulām

$$\left.\begin{aligned} (y_G) - (y_S) &= (s) \sin(\varphi) \\ (x_G) - (x_S) &= (s) \cos(\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (701).$$

Pārejot uz izlīdzinātām koordinatām, minētām tuvinām koordinatām jāpieliek atbilstošie, izlīdzināšanas kārtā nosakamie pieaugumi ξ_S, η_S un ξ_G, η_G. Tā tad punktu S un G izlīdzinātās koordinatas ir

$$\left.\begin{aligned} x_S &= (x_S) + \xi_S \\ y_S &= (y_S) + \eta_S \\ &\text{un} \\ x_G &= (x_G) + \xi_G \\ y_G &= (y_G) + \eta_G \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (702);$$

tām atbilstošais izlīdzinātais virziens noteikts ar formulu

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\{(y_G) + \eta_G\} - \{(y_S) + \eta_S\}}{\{(x_G) + \xi_G\} - \{(x_S) + \xi_S\}} \quad \ldots \quad (703).$$

Pēc šīs formulas aprēķinātais izlīdzinātais virziens salīdzinams ar pagriezto novēroto virzienu; pieliekot tam atbilstošo izlabojumu v, abiem rezultatiem jābūt vienādiem. Tas izsakams ar kļūdu nolīdzinājumu

$$\varphi = (z + r) + v$$

jeb

$$\varphi - z - r = v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (704).$$

Šis attiecībā uz funkciju φ nelinearais nolīdzinājums jāpārvērš linearā veidā. Tam nolūkam, lietojot ξ un η kā atbilstošo argumentu (x) un (y) parcialos diferencialus, ar formulu (703) noteikto funkciju izvirzam Taylor'a rindā, pie tam ignorējot locekļus, kur minētie pieaugumi ξ un η ieiet augstākās par pirmo kāpēs. Tādā kārtā veidojam izteiksmi

$$\varphi = (\varphi) + \frac{\partial\varphi}{\partial(x_S)}\xi_S + \frac{\partial\varphi}{\partial(y_S)}\eta_S + \frac{\partial\varphi}{\partial(x_G)}\xi_G + \frac{\partial\varphi}{\partial(y_G)}\eta_G \quad (705),$$

kur (φ) noteikts ar formulu (700), bet

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial(x_S)} &= \frac{\partial \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\{(y_G)+\eta_G\}-\{(y_S)+\eta_S\}}{\{(x_G)+\xi_G\}-\{(x_S)+\xi_S\}}}{\partial(x_S)} = \frac{1}{1+\left\{\dfrac{(y_G)-(y_S)}{(x_G)-(x_S)}\right\}^2}\cdot\frac{(y_G)-(y_S)}{\{(x_G)-(x_S)\}^2} = \\
&= \frac{(y_G)-(y_S)}{\{(x_G)-(x_S)\}^2+\{(y_G)-(y_S)\}^2} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial(y_S)} &= \frac{\partial \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\{(y_G)+\eta_G\}-\{(y_S)+\eta_S\}}{\{(x_G)+\xi_G\}-\{(x_S)+\xi_S\}}}{\partial(y_S)} = \frac{1}{1+\left\{\dfrac{(y_G)-(y_S)}{(x_G)-(x_S)}\right\}^2}\left\{-\frac{1}{(x_G)-(x_S)}\right\} = \\
&= -\frac{(x_G)-(x_S)}{\{(x_G)-(x_S)\}^2+\{(y_G)-(y_S)\}^2} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial(x_G)} &= \frac{\partial \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\{(y_G)+\eta_G\}-\{(y_S)+\eta_S\}}{\{(x_G)+\xi_G\}-\{(x_S)+\xi_S\}}}{\partial(x_G)} = \frac{1}{1+\left\{\dfrac{(y_G)-(y_S)}{(x_G)-(x_S)}\right\}^2}\left\{-\frac{(y_G)-(y_S)}{\{(x_G)-(x_S)\}^2}\right\} = \\
&= -\frac{(y_G)-(y_S)}{\{(x_G)-(x_S)\}^2+\{(y_G)-(y_S)\}^2} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial(y_G)} &= \frac{\partial \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\{(y_G)+\eta_G\}-\{(y_S)+\eta_S\}}{\{(x_G)+\xi_G\}-\{(x_S)+\xi_S\}}}{\partial(y_G)} = \frac{1}{1+\left\{\dfrac{(y_G)-(y_S)}{(x_G)-(x_S)}\right\}^2}\cdot\frac{1}{(x_G)-(x_S)} = \\
&= \frac{(x_G)-(x_S)}{\{(x_G)-(x_S)\}^2+\{(y_G)-(y_S)\}^2}
\end{aligned}\right| \quad (706),$$

jeb, ievērojot (701),

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial(x_S)} &= +\frac{(y_G)-(y_S)}{(s)^2} = +\frac{\sin(\varphi)}{(s)} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial(y_S)} &= -\frac{(x_G)-(x_S)}{(s)^2} = -\frac{\cos(\varphi)}{(s)} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial(x_G)} &= -\frac{(y_G)-(y_S)}{(s)^2} = -\frac{\sin(\varphi)}{(s)} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial(y_G)} &= +\frac{(x_G)-(x_S)}{(s)^2} = +\frac{\cos(\varphi)}{(s)}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (707).$$

Ar šīm formulām attiecīgie parcialie atvasinājumi, kuri ir leņķu dabas lielumi, nosacīti nenosauktā veidā — radianos ρ. Pārejot uz grada mēru, šīs formulas rakstamas

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial(x_S)} &= +\frac{\rho\sin(\varphi)}{(s)} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial(y_S)} &= -\frac{\rho\cos(\varphi)}{(s)} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial(x_G)} &= -\frac{\rho\sin(\varphi)}{(s)} \\
\frac{\partial\varphi}{\partial(y_G)} &= +\frac{\rho\cos(\varphi)}{(s)}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (708).$$

Ar tām noteiktos virziena koeficientus ieliekot izteiksmē (705) un to savukārt nolīdzinājumā (704), šis nolīdzinājums pāriet veidā

$$+\frac{\rho\sin(\varphi)}{(s)}\xi_S - \frac{\rho\cos(\varphi)}{(s)}\eta_S - \frac{\rho\sin(\varphi)}{(s)}\xi_G + \frac{\rho\cos(\varphi)}{(s)}\eta_G - z + \{(\varphi) - r\} = v$$

jeb, apzīmējot virzienu koeficientus ar a_S, b_S, a_G, b_G:

$$a_S\xi_S + b_S\eta_S + a_G\xi_G + b_G\eta_G - z + \{(\varphi) - r\} = v \qquad (709).$$

Aprēķinot šī nolīdzinājuma virziena koeficientus a un b pēc atbilstošām formulām (708), koordinatu pieaugumi ξ un η un atstatums (s) jāskaita vienādās vienībās. Tas praktiski nav izdevīgs, jo parasti koordinatu pieaugumi ξ un η mēdz būt mazi, bet atstatumi (s) — lieli. Tāpēc, rēķina ērtības labad, pieņemts skaitīt ξ un η sīkākās, bet (s) lielākās vienībās. Tādā gadijumā, saprotams, lietoto vienību dažādība jākompensē ar atbilstošiem grozijumiem virzienu koeficientos. Parasti ξ un η skaita decimetros, bet (s) — kilometros. Tad virziena koeficientus noteicošās formulas (708) jāatvieto ar šādām:

$$\left.\begin{aligned} a_S &= \frac{1}{10\,000} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (x_S)} = + \frac{\rho \sin (\varphi)}{10\,000\,(s)} \\ b_S &= \frac{1}{10\,000} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (y_S)} = - \frac{\rho \cos (\varphi)}{10\,000\,(s)} \\ a_G &= \frac{1}{10\,000} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (x_G)} = - \frac{\rho \sin (\varphi)}{10\,000\,(s)} \\ b_G &= \frac{1}{10\,000} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial (y_G)} = + \frac{\rho \cos (\varphi)}{10\,000\,(s)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (710).$$

Kas zīmējas uz nezinamo z, tad nav vēlams, lai tā skaitliskā vērtība būtu liela. Lai novērstu neērtības šinī ziņā, attiecīgais virzienu paņēmiens jau pirms kļūdu nolīdzinājumu veidošanas jāpagriež tā, lai atsevišķie virzieni būtu tuvinā saskaņā ar atbilstošiem (φ). Uzskatot tam nolūkam lietoto pagrieziena leņķi (z) par nezinamā z tuvino vērtību, šis nezinamais izsakams veidā

$$z = (z) + \zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (711),$$

kur ζ ir atbilstošais pieaugums. Ieliekot izteiksmi (711) nolīdzinājumā (709), šo pārvērsto kļūdu nolīdzinājumu rakstam galīgā veidā

$$a_S \xi_S + b_S \eta_S + a_G \xi_G + b_G \eta_G - \zeta - \lambda = v \quad \ldots\ldots \quad (712)$$

ar brīvo locekli

$$-\lambda = (\varphi) - \{(z) + r\} \quad \ldots\ldots \quad (713).$$

Kas zīmējas uz virzienu koeficientu noteikšanas technisko pusi, tad šie koeficienti viegli aprēķinami tieši pēc formulām (710), piem., logaritmiskā ceļā. Bet izdevīgi lietojami arī dažādi speciali palīglīdzekļi, tabulas, diagramas, logaritmiski lineali u. t. t. Nekavējoties pie sīkumiem, visā īsumā minēsim Jordan'a — Eggert'a „Handbuch der Vermessungskunde" I. sējumā iespiesto tabulu, kur tieši atrodamas pa 10′ intervaliem mainīgām argumenta (φ) vērtībām atbilstošās funkciju

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= -\,20{,}6265 \sin (\varphi) \\ \mathfrak{y} &= +\,20{,}6265 \cos (\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (714)$$

skaitliskās vērtības. Salīdzinot šīs funkcijas ar izteiksmēm (710), redzams, ka $\mathfrak{x}$ un $\mathfrak{y}$ ir uz $\rho = 206265''$ un $(s) = 1$ km attiecinātie virzienu koeficienti a_G un b_G. Atstatumiem (s) vispārīgi atšķiroties no 1 km, atbilstošie virzienu koeficienti viegli nosakami pēc formulām

$$\left.\begin{aligned} a_S &= -\frac{\mathfrak{x}}{(s)} \\ b_S &= -\frac{\mathfrak{y}}{(s)} \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} a_G &= + \frac{\mathfrak{x}}{(s)} \\ b_G &= + \frac{\mathfrak{y}}{(s)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (715).$$

Atgriežoties pie koordinatu izlīdzināšanas kļūdu nolīdzinājumu tipiskā parauga (712), minēsim vēl dažus svarīgus atsevišķus gadijumus.

1) Ja S ir nosakamais, bet G — dotais punkts, tad tuvino koordinatu (x_G), (y_G) vietā stājoties punkta G dotām koordinatām, un sakarā ar to atkrītot nezinamiem pieaugumiem ξ_G, η_G, kļūdu nolīdzinājums (712) pāriet veidā

$$a_S\xi_S + b_S\eta_S - \zeta - \lambda = v \quad \ldots \ldots \quad (716).$$

2) Ja G ir nosakamais, bet S — dotais punkts, tad tuvino koordinatu (x_S), (y_S) vietā stājoties punkta S dotām koordinatām, un sakarā ar to atkrītot nezinamiem pieaugumiem ξ_S, η_S, kļūdu nolīdzinājums (712) pāriet veidā

$$a_G\xi_G + b_G\eta_G - \zeta - \lambda = v \quad \ldots \ldots \quad (717).$$

Ja pie tam šī kļūdu nolīdzinājuma veidošanai lietotā virziena r orientējums noteikts galīgā veidā jau pirms koordinatu izlīdzināšanas, tad, atkrītot arī (z) un ζ, kļūdu nolīdzinājuma veids ir vēl vienkāršākais

$$a_G\xi_G + b_G\eta_G + \{(\varphi) - r\} = v \quad \ldots \ldots \quad (718).$$

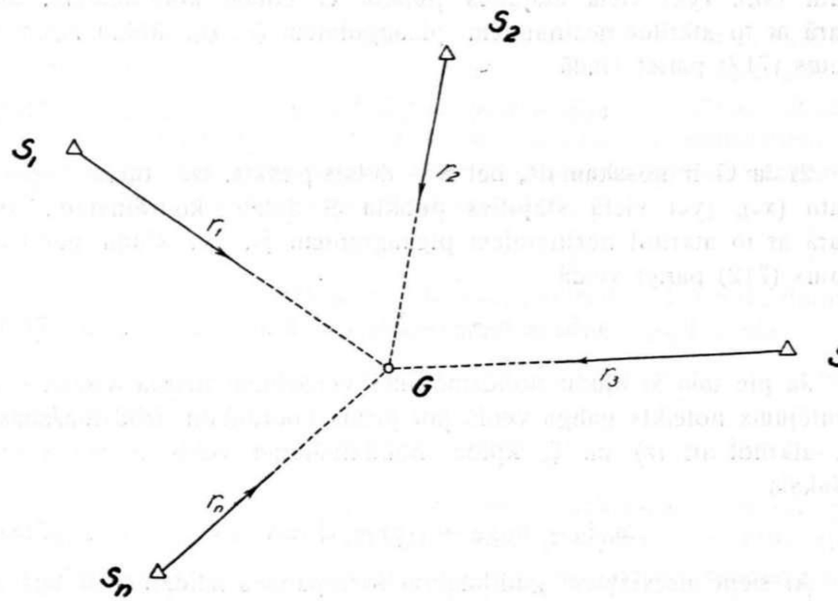
Ar šiem atsevišķiem gadijumiem sastopamies izlīdzinot ar taisnu vai pretēju krustojumu nosacītus punktus.

§ 64. Taisnais krustojums.

Kā zinams, punkta G noteikšana ar taisnu krustojumu notiek tādā kārtā, ka ne mazāk kā divos augstākas šķiras punktos S_1, S_2, $S_3, \ldots, S_n$ ar dotām koordinatām x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, $y_3, \ldots, x_n$, y_n novēro punktam G atbilstošos orientētos virzienus r_1, r_2, $r_3, \ldots, r_n$ (19. att.). Tad punkta G koordinatas x_G, y_G nosakamas kā minēto virzienu r funkcijas, pie kam gadijumā, kad šo virzienu skaits lielāks par 2, rodas izlīdzināšanas uzdevums. Pirms šī uzdevuma sīkākās atrisināšanas būs jāpakavējas pie jautājuma, kādā veidā notiek orientēto virzienu r noteikšana.

Praksē parastais gadijums ir, kad augstākas šķiras stāvamā punktā S_i novērots virzienu paņēmiens, kurš aptver, bez nosakamam punktam G atbilstošā virziena (r_i), arī kādiem augstākas šķiras punktiem P_1', P_2', P_3', ..., P_k' atbilstošos virzienus (r_1'), (r_2'), (r_3'), ..., (r_k') (20. att.).

Ar punktu P' un virzienu paņēmiena mērīšanas centra S_i dotām koordinatām pazīstamā kārtā aprēķinami punktiem P_1', P_2', P_3', ..., P_k' atbilstošie absolutie virzieni φ_1', φ_2', φ_3', ..., φ_k'. Salīdzinot tos ar korrespondējošiem novērotiem virzieniem (r_1'), (r_2'), (r_3'), ..., (r_k'), veidojam starpības



19. attēls.

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= \varphi_1' - (r_1') \\ z_2' &= \varphi_2' - (r_2') \\ z_3' &= \varphi_3' - (r_3') \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_k' &= \varphi_k' - (r_k') \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (719).$$

No tām atvasinams leņķis z_i, par kuru jāpagriež punktā S_i novērotais virzienu paņēmiens, lai dabūtu to ar absolutiem virzieniem φ' vislabāk saskaņošā galīgā orientējumā. Pēc vismazāko kvadratu metodes nosacītais attiecīgais pagrieziena leņķis ir

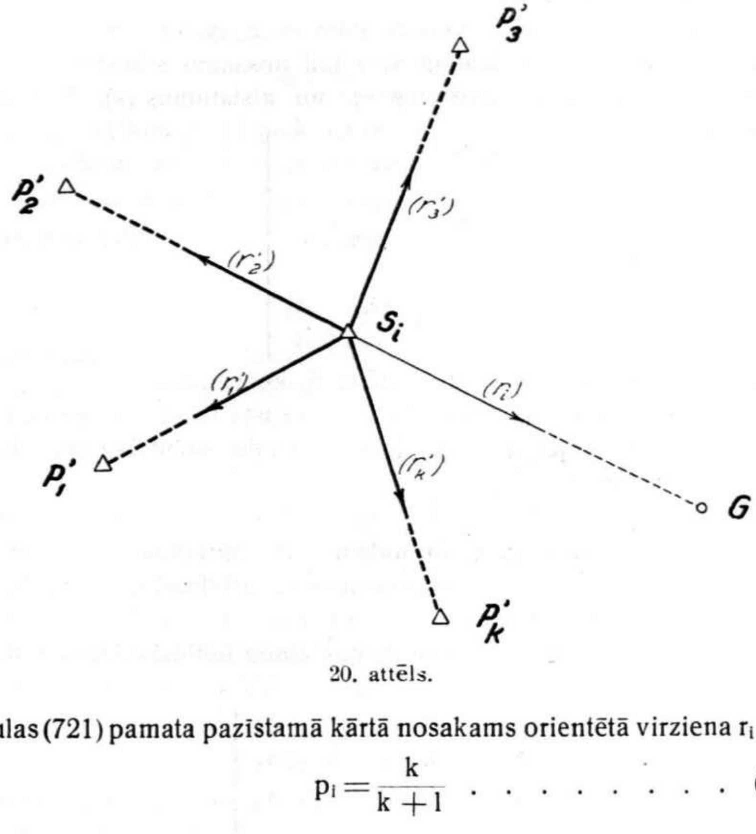
$$z_i = \frac{z_1' + z_2' + z_3' + \ldots + z_k'}{k} \quad \ldots\ldots \quad (720);$$

Par šo leņķi pagriežot novēroto virzienu paņēmienu, nosakam galīgi orientēto punktam G atbilstošo novēroto virzienu

$$r_i = (r_i) + z_i = (r_i) + \frac{z_1' + z_2' + z_3' + \ldots + z_k'}{k} =$$

$$= (r_i) + \frac{\varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3' + \ldots + \varphi_k'}{k} - \frac{(r_1') + (r_2') + (r_3') + \ldots + (r_k')}{k} \quad (721).$$

Uzskatot absolutos virzienus φ' par atrastiem bez praktiski svarā krītošām kļūdām, un pieņemot, ka virzieni (r_i) un (r_1'), (r_2'), (r_3'),... ..., (r_k') ir vienādas noteiktības un ar svaru 1 notikuši novērojumi, uz



20. attēls.

formulas (721) pamata pazīstamā kārtā nosakams orientētā virziena r_i svars

$$p_i = \frac{k}{k+1} \quad \ldots \ldots \quad (722).$$

Kā redzams, tas ir atkarīgs no virzienu paņēmiena orientēšanai lietoto augstākas šķiras punktu P′ skaita. Tā tad gadijumā, kad atsevišķos stāvamos punktos ir šinī ziņā dažādi apstākļi, bet visi virzienu paņēmieni novēroti ar vienādu noteiktību, atrastie orientētie virzieni r, stingri ņemot, koordinatu izlīdzināšanas rēķinā jālieto kā dažādas noteiktības elementi. Tomēr, ja attiecīgos svarus noteicošie apstākļi ne visai dažādi, parasti uzskata par praktiski pielaižamu lietot minētos r kā vienādas noteiktības novērojumus.

Piegriežoties tagad pašam koordinatu izlīdzināšanas uzdevumam, vispirms piezīmējam, ka taisna krustojuma gadijumā ir tādi apstākļi, uz kuriem zīmējas kļūdu nolīdzinājumu paraugs (718).

Lai pēc šī parauga veidotu punktos S novērotiem orientētiem virzieniem r atbilstošos n kļūdu nolīdzinājumus, iesākam ar punkta G tuvino koordinatu (x_G), (y_G) noteikšanu. Ja tās nav zinamas no kādiem citiem novērojumiem un aprēķiniem, tad tās nosakamas pazīstamā kārtā, lietojot tikai divus orientētus virzienus r un attiecīgo stāvamo punktu S dotās koordinatas.

Ar punkta G tuvinām koordinatām (x_G), (y_G) un atsevišķo doto punktu S zinamām koordinatām x, y tad nosakam atbilstošos **tuvinos aprēķinātos virzienus** (φ) un atstatumus (s). Tas notiek pēc parauga

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi_i) &= \frac{(y_G) - y_i}{(x_G) - x_i} \\ \text{un} \quad (s_i) &= \frac{(y_G) - y_i}{\sin(\varphi_i)} \\ \text{jeb} \quad (s_i) &= \frac{(x_G) - x_i}{\cos(\varphi_i)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (723),$$

kur x_i, y_i apzīmē attiecīgā dotā punkta S_i koordinatas.

Salīdzinot šos (φ) ar atbilstošiem **orientētiem novērotiem virzieniem** r, aprēķinam veidojamo kļūdu nolīdzinājumu brīvos locekļus pēc parauga

$$-\lambda_i = (\varphi_i) - r_i \quad \ldots \ldots \ldots \quad (724).$$

Bez tam pēc attiecīgām formulām (710) aprēķinam resp. ar speciāliem palīglīdzekļiem nosakam atrastiem (φ) atbilstošos a_G un b_G tipa virzienu koeficientus a un b.

Ar to tad viss sagatavots sekojošās kļūdu nolīdzinājumu sistemas veidošanai:

$$\left.\begin{aligned} a_1\xi_G + b_1\eta_G - \lambda_1 &= v_1 \\ a_2\xi_G + b_2\eta_G - \lambda_2 &= v_2 \\ a_3\xi_G + b_3\eta_G - \lambda_3 &= v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n\xi_G + b_n\eta_G - \lambda_n &= v_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (725).$$

Atbilstošā normalnolīdzinājumu sistema ir

$$\left.\begin{aligned} [aa]\xi_G + [ab]\eta_G - [a\lambda] &= 0 \\ [ab]\xi_G + [bb]\eta_G - [b\lambda] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (726).$$

Reducējot un atslēdzot to pēc Gauss'a algoritma, atrodam nezinamos ξ_G un η_G. Ar tiem aprēķinam meklētās izlīdzinātās koordinatas

$$\left.\begin{aligned} x_G &= (x_G) + \xi_G \\ y_G &= (y_G) + \eta_G \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (727);$$

arī nosakam atbilstošos svarus

$$\left.\begin{aligned} p_x = p_\xi = [aa\,.\,1] \\ p_y = p_\eta = [bb\,.\,1] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (728).$$

Ieliekot atrastos ξ_G un η_G kļūdu nolīdzinājumos (725), nosakam izlabojumus v un, pieliekot tos attiecīgiem orientētiem novērotiem virzieniem r, aprēķinam izlīdzinātos novērotos virzienus (r + v). No otras puses, ar atrastām punkta G izlīdzinātām koordinatām x_G, y_G pēc parauga

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{y_G - y_i}{x_G - x_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (729)$$

nosakam atsevišķos galīgos aprēķinātos virzienus φ; tiem jābūt vienādiem ar atbilstošiem izlīdzinātiem novērotiem virzieniem (r + v), kas var noderēt izlīdzināšanas rēķina gala kontrolei.

Beidzot, veidojot sumu [vv], aprēķinam svara vienības vidējo kļūdu

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (730),$$

kura šeit pieņemtā vienādas noteiktības gadijumā identiska ar orientēta novērota virziena r vidējo kļūdu; arī nosakam izlīdzināto koordinatu x_G, y_G vidējās kļūdas

$$\left.\begin{aligned} m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \pm \frac{m}{\sqrt{[aa\,.\,1]}} \\ m_y = \pm \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \pm \frac{m}{\sqrt{[bb\,.\,1]}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (731).$$

Vēl piezīmējam, ka aprēķinot virzienu koeficientus pēc formulām (710) ar kilometros izteiktiem atstatumiem (s), nezinamos ξ_G un η_G un izlīdzināto koordinatu vidējās kļūdas atrodam decimetros.

§ 65. Piemērs.

Rīgas pilsētas triangulacijas darbos punkta „Tērauda lietuve" koordinatu noteikšanai novēroti šim punktam atbilstošie orientētie virzieni r augstākas šķiras stāvamos punktos „Adatu fabrika", „Cementa fabrika", „Voleri", „Valdšleschens". Minēto punktu dotās koordinatas x_S, y_S un attiecīgie orientētie novērotie virzieni ir:

		x_S	y_S	r
1)	Adatu fabrika	−1766,966 m	−1765,699 m	192°51′33,81″
2)	Cementa fabrika	−2716,725	+1879,958	262 27 00,88
3)	Voleri	−4624,411	+1838,860	289 17 29,98
4)	Valdšleschens	−6028,116	− 403,499	328 35 36,77

Lietojot stāvamos punktos „Cementa fabrika" un „Valdšleschens" novērotos virzienus, atrastas nosakamā punkta tuvinās koordinatas

$$(x_G) = -3244{,}609 \text{ m}$$
$$(y_G) = -2102{,}988 \text{ m}$$

Izejot no minētām dotām resp. iepriekš aprēķinātām koordinatām un orientētiem novērotiem virzieniem, uz meklēto koordinatu x_G un y_G noteikšanu attiecīgo izlīdzināšanas rēķinu izdaram šādā kārtībā.

1) Tuvino aprēķināto virzienu (φ) noteikšana.

Punkts G	(y_G).......	(x_G).......	$\log\{(y_G)-y_S\}$	$\log\{(y_G)-y_S\}$
Punkts S	y_S........	x_S........	$\log\{(x_G)-x_S\}$	$\log\sin(\varphi)$
	$(y_G)-y_S$ ...	$(x_G)-x_S$...	$\log\operatorname{tg}(\varphi)$	$\log(s)$
			(φ)	(s)
Tērauda l.	–2102,988	–3244,609	2,528 0022	2,528 0022
1) Adatu f.	–1765,699	–1766,966	3,169 5695	9,347 4035
	– 337,289	–1477,643	9,358 4327	3,180 5987
			192°51′29,25″	1516 m
Tērauda l.	–2102,988	–3244,609	3,600 2044	3,600 2044
2) Cementa f.	+1879,958	–2716,725	2,722 5384	9,996 2187
	–3982,946	– 527,884	0,877 6660	3,603 9857
			262°27′00,88″	4018 m
Tērauda l.	–2102,988	–3244,609	3,595 6999	3,595 6999
3) Voleri	+1838,860	–4624,411	3,139 8167	9,974 9015
	–3941,848	+1379,802	0,455 8832	3,620 7984
			289°17′31,39″	4176 m
Tērauda l.	–2102,988	–3244,609	3,230 3185	3,230 3185
4) Valdšlesch.	– 403,499	–6028,116	3,444 5922	9,716 9258
	–1699,489	+2783,507	9,785 7263	3,513 3927
			328°35′36,79″	3261 m

2) **Kļūdu nolīdzinājumu brīvie locekļi un koeficienti.**

№	Stāv. punkti	Nosak. punkts	Orientētie novērotie virzieni r	Tuvinie aprēķinātie virzieni (φ)	$-\lambda=$ $=(\varphi)-r$	λ^2
1.	Adatu fabr.	Tērauda liet.	192°51′33,81″	192°51′29,25″	−4,56″	20,79
2.	Cementa f.	„	262 27 00,88	262 27 00,88	0,00	0,00
3.	Voleri	„	289 17 29,98	289 17 31,39	+1,41	1,99
4.	Valdšlesch.	„	328 35 36,77	328 35 36,79	+0,02	0,00
			101,44″	98,31″	−3,13″	22,78

№	(φ)	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	(s) km	$\frac{\mathfrak{x}}{(s)}=a$	$\frac{\mathfrak{y}}{(s)}=b$	$-\lambda$	a^2	b^2	ab	$-a\lambda$	$-b\lambda$
1.	192°51′	+ 4,59	−20,11	1,516	+3,03	−13,27	−4,56	9,18	176,09	−40,21	−13,82	+60,51
2.	262 27	+20,45	− 2,70	4,018	+5,09	− 0,67	0,00	25,91	0,45	− 3,41	0,00	0,00
3.	289 18	+19,46	+ 6,82	4,176	+4,66	+ 1,64	+1,41	21,72	2,69	+ 7,64	+ 6,57	+ 2,31
4.	328 36	+10,75	+17,61	3,261	+3,30	+ 5,40	+0,02	10,89	29,16	+17,82	+ 0,07	+ 0,11
								67,70	208,39	−18,16	− 7,18	+62,93

3) **Normalnolīdzinājumi, to reducēšana un atslēgšana.**

$$
\begin{aligned}
+67{,}7\xi_G - 18{,}2\eta_G - 7{,}2 &= 0 \\
-18{,}2\xi_G + 208{,}4\eta_G + 62{,}9 &= 0 \\
&\overline{+22{,}8}
\end{aligned}
$$

Atslēdzot pēc ξ_G			Atslēdzot pēc η_G		
η_G	ξ_G	$-\lambda$	ξ_G	η_G	$-\lambda$
+208,4	−18,2	+62,9	+67,7	− 18,2	− 7,2
	+67,7	− 7,2		+208,4	+62,9
	+ 1,6	− 5,1		+ 4,9	+ 1,9
		+22,8			+ 22,8
		+19,0			+ 0,8
	+66,6	− 2,1		+203,5	+61,0
		+ 3,8			+22,0
		+ 0,1			+18,3
		+ 3,7			+ 3,7

$p_\xi = 66,6$ $\qquad$ $p_\eta = 203,5$

$\xi_G = +0,032 \text{ dm} = + \quad 0,003 \text{ m}$ $\qquad$ $\eta_G = -0,300 \text{ dm} = - \quad 0,030 \text{ m}$

$(x_G) = -3244,609 \text{ m}$ $\qquad$ $(y_G) = -2102,988 \text{ m}$

$x_G = -3244,606 \text{ m}$ $\qquad$ $y_G = -2103,018 \text{ m}$

4) **Galīgo aprēķināto virzienu φ noteikšana.**

Punkts G Punkts S	y_G ..... y_S ..... $y_G - y_S$	x_G ..... x_S ..... $x_G - x_S$	$\log \{y_G - y_S\}$ $\log \{x_G - x_S\}$ $\log \operatorname{tg} \varphi$ φ
Tērauda l. 1) Adatu f.	− 2103,018 − 1765,699 − 337,319	− 3244,606 − 1766,966 − 1477,640	2,528 0408 3,169 5687 9,358 4721 192°51′33,31″
Tērauda l. 2) Cementa f.	− 2103,018 + 1879,958 − 3982,976	− 3244,606 − 2716,725 − 527,881	3,600 2077 2,722 5360 0,877 6717 262°27′01,23″

Tērauda 1.	$-2103{,}018$	$-3244{,}606$	3,595 7032
3) Voleri	$+1838{,}860$	$-4624{,}411$	3,139 8177
	$-3941{,}878$	$+1379{,}805$	0,455 8855
			$289^0 17' 31{,}05''$
Tērauda 1.	$-2103{,}018$	$-3244{,}606$	3,230 3260
4) Valdšlesch.	$-403{,}499$	$-6028{,}116$	3,444 5928
	$-1699{,}519$	$+2783{,}510$	9,785 7332
			$328^0 35' 35{,}32''$

5) **Izlabojumu v un vidējo kļūdu noteikšana; galīgie rezultati.**

№	$a\xi_G + b\eta_G - \lambda$	v	Orientētie novērotie virzieni r	Izlīdzinātie novērotie virzieni r+v	Galigie aprēķinātie virzieni φ	v^2
1.	+0,10+3,98−4,56	−0,48″	$192^0 51' 33{,}81''$	$192^0 51' 33{,}33''$	$192^0 51' 33{,}31''$	0,23
2.	+0,18+0,20+0,00	+0,38	262 27 00,88	262 27 01,26	262 27 01,23	0,14
3.	+0,15−0,49+1,41	+1,07	289 17 29,98	289 17 31,05	289 17 31,05	1,14
4.	+0,11−1,62+0,02	−1,49	328 35 36,77	328 35 35,28	328 35 35,32	2,22
		−0,52″	11′ 41,44″	11′ 40,92″	11′ 40,91″	3,73

$$m = \pm \sqrt{\frac{3{,}73}{4-2}} = \pm 1{,}36''$$

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{3{,}73}{2 \times 66{,}6}} = \pm 0{,}167\,\mathrm{dm} = \pm 0{,}017\,\mathrm{m}$$

$$m_y = \pm \sqrt{\frac{3{,}73}{2 \times 203{,}5}} = \pm 0{,}096\,\mathrm{dm} = \pm 0{,}010\,\mathrm{m}$$

$$x_G = -3244{,}606 \pm 0{,}017\,\mathrm{m}$$

$$y_G = -2103{,}018 \pm 0{,}010\,\mathrm{m}$$

Piezīme. Minētās koordinatas skaitītas Rīgas vecās uzmērīšanas koordinatu sistemā, kuras nulpunkts pieņemts L. Universitates vecās ēkas (bij. Rīgas Politechniskā Instituta) jumta platformas novērošanas pīlara centrā; bet x- un y-asis virzītas pozitīvi uz dienvidiem resp. vakariem.

§ 66. Pretējais krustojums.

Pieņemsim, ka punkta S noteikšanas nolūkā šinī punktā novērots virzienu paņēmiens, kura atsevišķie virzieni (r_1), (r_2), (r_3), . . . , (r_n) atbilst augstākas šķiras punktiem G_1, G_2, G_3, ... , G_n ar dotām koordinatām x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, ... , x_n, y_n, pie kam minēto punktu G skaits ir lielāks par 3. Tad ir pretēja krustojuma gadijums, kur novērotā virzienu paņēmiena mērīšanas centra koordinatas nosakamas ar izlīdzināšanu.

Lai atrastu novērotā virzienu paņēmiena tuvinai orientēšanai vajadzīgo pagrieziena leņķi (z) un atsevišķiem novērotiem virzieniem atbilstošo kļūdu nolīdzinājumu koeficientus un brīvos locekļus, vispirms jānosaka punkta S tuvinās koordinatas, ja tās nav zinamas no kādiem citiem darbiem. Tās nosakamas parastā kārtā, lietojot tikai 3 lietderīgi izvēlētus novērotus virzienus.

Ar punkta S atrastām tuvinām koordinatām (x_S), (y_S) un atsevišķo doto punktu G zinamām koordinatām x, y nosakam atbilstošos tuvinos aprēķinātos virzienus (φ) un atstatumus (s), kas notiek pēc parauga

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi_i) &= \frac{y_i - (y_S)}{x_i - (x_S)} \\ \text{un} \quad (s_i) &= \frac{y_i - (y_S)}{\sin(\varphi_i)} \\ \text{jeb} \quad (s_i) &= \frac{x_i - (x_S)}{\cos(\varphi_i)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (732),$$

kur x_i, y_i apzīmē attiecīgā dotā punkta G_i koordinatas.

Kas zīmējas uz pagrieziena leņķi (z), tad tas viegli nosakams salīdzinot novērotos virzienus (r) ar atbilstošiem tuviniem aprēķinātiem (φ). Zinot šo pagrieziena leņķi un novērotos un tuvinos aprēķinātos virzienus (r) un (φ), pēc formulas (713) veidojam (716) tipa kļūdu nolīdzinājumu brīvos locekļus.

Bez tam parastā kārtā pēc attiecīgām formulām (710) aprēķinam atrastiem (φ) un (s) atbilstošos a_S un b_S tipa virzienu koeficientus a un b.

Ar atrastiem koeficientiem un brīviem locekļiem pēc (716) parauga veidotā kļūdu nolīdzinājumu sistemā

$$\left.\begin{aligned} a_1 \xi_S + b_1 \eta_S - \zeta - \lambda_1 &= v_1 \\ a_2 \xi_S + b_2 \eta_S - \zeta - \lambda_2 &= v_2 \\ a_3 \xi_S + b_3 \eta_S - \zeta - \lambda_3 &= v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_n \xi_S + b_n \eta_S - \zeta - \lambda_n &= v_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (733)$$

nezinamais ζ visos nolīdzinājumos ieiet ar koeficientu -1. Tādos apstākļos izdevīgi izdarama kļūdu nolīdzinājumu reducēšana, lai izslēgtu minēto nezinamo ζ un tādā kārtā samazinātu normalnolīdzinājumu skaitu. Izdarot šo reducēšanu 32-ā paragrafā aizrādītā kārtā, kļūdu nolīdzinājumu sistemu (733) atvietojam ar šādu:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \xi_S + B_1 \eta_S - \Lambda_1 = v_1 \\ A_2 \xi_S + B_2 \eta_S - \Lambda_2 = v_2 \\ A_3 \xi_S + B_3 \eta_S - \Lambda_3 = v_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n \xi_S + B_n \eta_S - \Lambda_n = v_n \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (734),$$

kur

$$\left.\begin{array}{lll} A_1 = a_1 - \frac{[a]}{n} & B_1 = b_1 - \frac{[b]}{n} & -\Lambda_1 = -\lambda_1 - \frac{-[\lambda]}{n} \\ A_2 = a_2 - \frac{[a]}{n} & B_2 = b_2 - \frac{[b]}{n} & -\Lambda_2 = -\lambda_2 - \frac{-[\lambda]}{n} \\ A_3 = a_3 - \frac{[a]}{n} & B_3 = b_3 - \frac{[b]}{n} & -\Lambda_3 = -\lambda_3 - \frac{-[\lambda]}{n} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n = a_n - \frac{[a]}{n} & B_n = b_n - \frac{[b]}{n} & -\Lambda_n = -\lambda_n - \frac{-[\lambda]}{n} \end{array}\right\} \quad (735).$$

Kļūdu nolīdzinājumiem (734) atbilstošie normalnolīdzinājumi ir

$$\left.\begin{array}{l} [AA]\xi_S + [AB]\eta_S - [A\Lambda] = 0 \\ [AB]\xi_S + [BB]\eta_S - [B\Lambda] = 0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (736).$$

Reducējot un atslēdzot šos normalnolīdzinājumus pēc Gauss'a algoritma, atrodam nezinamos ξ_S un η_S, ar kuriem tad aprēķinam meklētās izlīdzinātās koordinatas

$$\left.\begin{array}{l} x_S = (x_S) + \xi_S \\ y_S = (y_S) + \eta_S \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (737);$$

arī nosakam atbilstošos svarus

$$\left.\begin{array}{l} p_x = p_\xi = [AA.1] \\ p_y = p_\eta = [BB.1] \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (738).$$

Kas zīmējas uz nezinamo ζ, tad pēc formulas (370) parauga atrodam

$$\zeta = \frac{[a]}{n}\xi_S + \frac{[b]}{n}\eta_S - \frac{[\lambda]}{n} \quad \dots\dots \quad (739).$$

Ieliekot atrastos nezinamos ξ_S, η_S, ζ kļūdu nolīdzinājumos (733), nosakam izlabojumus v, un pieliekot tos attiecīgiem orientētiem novērotiem virzieniem $r = (r) + (z)$, aprēķinam izlīdzinātos novērotos virzienus $(r+v)$. No otras puses, ar atrastām punkta S izlīdzinātām koordinatām x_S, y_S pēc parauga

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{y_i - y_S}{x_i - x_S} \qquad (740)$$

nosakam atsevišķos galīgos aprēķinātos virzienus φ; tiem jābūt vienādiem ar atbilstošiem izlīdzinātiem novērotiem virzieniem $(r+v)$, kas var noderēt izlīdzināšanas rēķina gala kontrolei.

Ar veidoto sumu $[vv]$ aprēķinam svara vienības vidējo kļūdu

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-3}} \qquad (741),$$

kura šeit pieņemtā vienādas noteiktības gadijumā identiska ar novērota virziena vidējo kļūdu. Izlīdzināto koordinatu x_S, y_S vidējās kļūdas ir

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \pm\frac{m}{\sqrt{p_x}} = \pm\frac{m}{\sqrt{[AA.1]}} \\ m_y &= \pm\frac{m}{\sqrt{p_y}} = \pm\frac{m}{\sqrt{[BB.1]}} \end{aligned}\right\} \qquad (742).$$

Aprēķinot virzienu koeficientus pēc formulām (710) ar kilometros izteiktiem atstatumiem (s), jāievēro, ka nezinamie ξ_S un η_S un izlīdzināto koordinatu vidējās kļūdas iznāk decimetros.

§ 67. Piemērs.

Rīgas pilsētas triangulacijas darbos punkta S. P. № 30 koordinatu noteikšanai šinī punktā novērots augstākas šķiras punktiem „Trīsvienības baznīca, lut.", „Citemans", „Eksportosta", „Lopu kautuve", „Provodņiks" atbilstošais virzienu paņēmiens. Minēto punktu dotās koordinatas x_G, y_G un atbilstošie novērotie virzieni (r) ir

		x_G	y_G	(r)
1)	Trīsvien. bazn., lut.	— 5258,857 m	— 535,414 m	0°00′00,00″
2)	Citemans	— 3130,990	— 1211,290	212 24 05,83
3)	Eksportosta	— 2693,044	+ 905,884	273 26 09,17
4)	Lopu kautuve	— 3125,582	— 234,883	276 49 37,50
5)	Provodņiks	— 4513,169	— 222,227	338 27 16,04

Lietojot punktiem „Trīsvienības baznīca, lut.", „Eksportosta" un

„Provodŋiks" atbilstošos novērotos virzienus, atrastas nosakamā punkta tuvinās koordinatas

$$(x_S) = -3389{,}914 \text{ m}$$
$$(y_S) = -1262{,}334 \text{ m}$$

Izejot no minētām dotām resp. tuvinām aprēķinātām koordinatām un novērotiem virzieniem, uz meklēto koordinatu x_S un y_S noteikšanu attiecīgo izlīdzināšanas rēķinu izdaram sekojošā kārtībā.

1) Tuvino aprēķināto virzienu (φ) noteikšana.

Punkts G Punkts S	y_G ..... (y_S) ..... $y_G-(y_S)$	x_G ..... (x_S) ..... $x_G-(x_S)$	$\log\{y_G-(y_S)\}$ $\log\{x_G-(x_S)\}$ $\log \operatorname{tg}(\varphi)$ (φ)	$\log\{y_G-(y_S)\}$ $\log \sin(\varphi)$ $\log(s)$ (s)
1) Trīsv. b., l. S. P. № 30	— 535,414 — 1262,334 + 726,920	— 5258,857 — 3389,914 — 1868,943	2,861 4866 3,271 5960 9,589 8906 158°44′47,73″	2,861 4866 9,559 3002 3,302 1864 2005 m
2) Cītemans S. P. № 30	— 1211,290 — 1262,334 + 51,044	— 3130,990 — 3389,914 + 258,924	1,707 9447 2,413 1723 9,294 7724 11°09′08,01″	1,707 9447 9,286 4931 2,421 4516 264 m
3) Eksport-osta S. P. № 30	+ 905,884 — 1262,334 + 2168,218	— 2693,044 — 3389,914 + 696,870	3,336 1029 2,843 1520 0,492 9509 72°10′56,90″	3,336 1029 9,978 6533 3,357 4496 2277 m
4) Lopu kaut. S. P. № 30	— 234,883 — 1262,334 + 1027,451	— 3125,582 — 3389,914 + 264,332	3,011 7611 2,422 1498 0,589 6113 75°34′20,66″	3,011 7611 9,986 0828 3,025 6783 1060 m
5) Provod-ŋiks S. P. № 30	— 222,227 — 1262,334 + 1040,107	— 4513,169 — 3389,914 — 1123,255	3,017 0780 3,050 4784 9,966 5996 137°12′03,81″	3,017 0780 9,832 1433 3,184 9347 1531 m

2) Novērotā virzienu paņēmiena tuvinā orientēšana.

Salīdzinot punktam „Trīsvienības baznīca, lut." atbilstošos virzienus

$$(\mathrm{r}) = 0^0 00'00{,}00''$$

un

$$(\varphi) = 158^0 44'47{,}73''$$

pagrieziena leņķi (z) izvēlamies tā, lai būtu

$$(\mathrm{r}) + (\mathrm{z}) = (\varphi)$$

t. i.

$$0^0 00'00{,}00'' + (\mathrm{z}) = 158^0 44'47{,}73''$$

Tā tad pieņemam

$$(\mathrm{z}) = 158^0 44'47{,}73''$$

Pieliekot šo leņķi atsevišķiem novērotiem virzieniem (r), aprēķinam atbilstošos orientētos novērotos virzienus r:

	(r)		(z)		r
1) Trīsvien. bazn., lut.	$0^0 00'00{,}00''$	+	$158^0\ 44'47{,}73''$	=	$158^0 44'47{,}73''$
2) Cītemans	212 24 05,83	+	158 44 47,73	=	11 08 53,56
3) Eksportosta	273 26 09,17	+	158 44 47,73	=	72 10 56,90
4) Lopu kautuve	276 49 37,50	+	158 44 47,73	=	75 34 25,23
5) Provodņiks	338 27 16,04	+	158 44 47,73	=	137 12 03,77

3) Pirmatnējo un reducēto kļūdu nolīdzinājumu brīvie locekļi un koeficienti.

№	Stāv. punkts	Skat. punkti	Orientētie novērotie virzieni r	Tuvinie aprēķinātie virzieni (φ)	$-\lambda = (\varphi) - r$	$-\Lambda = -\lambda - \frac{-[\lambda]}{n}$	Λ^2
1.	S. P. № 30	Trīsv.bazn., lut.	$158^0 44'47{,}73''$	$158^0 44'47{,}73''$	0,00"	— 1,98"	3,92
2.	„	Cītemans	11 08 53,56	11 09 08,01	+14,45	+12,47	155,50
3.	„	Eksportosta	72 10 56,90	72 10 56,90	0,00	— 1,98	3,92
4.	„	Lopu kautuve	75 34 25,23	75 34 20,66	— 4,57	— 6,55	42,90
5.	„	Provodņiks	137 12 03,77	137 12 03,81	+ 0.04	— 1,94	3,76
			187,19"	197,11"	+ 9,92"	+ 0,02"	210,00
					+ 1,98" $= \frac{-[\lambda]}{n}$		

№	(φ)	𝔵	𝔶	(s) km	$\frac{𝔵}{(s)}=a$	$\frac{𝔶}{(s)}=b$	$a-\frac{[a]}{n}=A$	$b-\frac{[b]}{n}=B$	$-\Lambda$	A^2	B^2	AB	$-A\Lambda$	$-B\Lambda$
1.	158° 45′	− 7,48	−19,22	2,005	+ 3,73	+ 9,59	−7,36	+22,55	− 1,98	54,17	508,50	−165,97	+14,57	− 44,65
2.	11 09	− 3,99	+20,24	0,264	+15,11	−76,67	+4,02	−63,71	+12,47	16,16	4058,96	−256,11	+50,13	−794,46
3.	72 11	−19,64	+ 6,32	2,277	+ 8,63	− 2,78	−2,46	+10,18	− 1,98	6,05	103,63	− 25,04	+ 4,87	− 20,16
4.	75 34	−19,97	+ 5,14	1,060	+18,82	− 4,84	+7,73	+ 8,12	− 6,55	59,75	65,93	+ 62,77	−50,63	− 53,19
5.	137 12	−14,01	−15,14	1,531	+ 9,15	+ 9,89	−1,94	+22,85	− 1,94	3,76	522,12	− 44,33	+ 3,76	− 44,33
					+55,44	−64,81	−0,01	− 0,01	+ 0,02	139,89	5259,14	−428,68	+22,70	−956,79
					+11,09	−12,96								
					$=\frac{[a]}{n}$	$=\frac{[b]}{n}$								

4) Normalnolīdzinājumi, to reducēšana un atslēgšana.

$$+139{,}9\,\xi_s - 428{,}7\,\eta_s + 22{,}7 = 0$$

$$-428{,}7\,\xi_s + 5259{,}1\,\eta_s \underline{- 956{,}8} = 0$$

$$+210{,}0$$

Atslēdzot pēc ξ_s			Atslēdzot pēc η_s		
η_s	ξ_s	$-\Lambda$	ξ_s	η_s	$-\Lambda$
+5259,1	−428,7	−956,8	+ 139,9	− 428,7	+ 22,7
	+139,9	+ 22,7		+5259,1	−956,8
	+ 34,9	+ 78,0		+ 1313,7	− 69,6
		+210,0			+210,0
		+ 174,7			+ 3,6
	+105,0	− 55,3		+3945,4	−887,2
		+ 35,3			+206,4
		+ 29,1			+ 199,5
		+ 6,2			+ 6,9

$p_\xi = 105{,}0$ $\qquad$ $p_\eta = 3945{,}4$

$\xi_s = +0{,}527\,\mathrm{dm} = +0{,}053\,\mathrm{m}$ $\qquad$ $\eta_s = +0{,}224\,\mathrm{dm} = +0{,}022\,\mathrm{m}$

$(x_s) = -3389{,}914\,\mathrm{m}$ $\qquad$ $(y_s) = -1262{,}334\,\mathrm{m}$

$x_s = -3389{,}861\,\mathrm{m}$ $\qquad$ $y_s = -1262{,}312\,\mathrm{m}$

5) Galīgo aprēķināto virzienu φ noteikšana.

Punkts G Punkts S	y_G ..... y_S ..... $y_G - y_S$	x_G ..... x_S ..... $x_G - x_S$	$\log \{y_G - y_S\}$ $\log \{x_G - x_S\}$ $\log \operatorname{tg} \varphi$ φ
1) Trīsv. b., l. S. P. № 30	— 535,414 — 1262,312 + 726,898	— 5258,857 — 3389,861 — 1868,996	2,861 4735 3,271 6084 9,589 8651 158°44′51,83″
2) Cītemans S. P. № 30	— 1211,290 — 1262,312 + 51,022	— 3130,990 — 3389,861 + 258,871	1,707 7575 2,413 0834 9,294 6741 11°08′59,14″
3) Eksportosta S. P. № 30	+ 905,884 — 1262,312 + 2168,196	— 2693,044 — 3389,861 + 696,817	3,336 0985 2,843 1187 0,492 9798 72°11′00,90″
4) Lopu kaut. S. P. № 30	— 234,883 — 1262,312 + 1027,429	— 3125,582 — 3389,861 + 264,279	3,011 7518 2,422 0627 0,589 6891 75°34′29,58″
5) Provodņiks S. P. № 30	— 222,227 — 1262,312 + 1040,085	— 4513,169 — 3389,861 — 1123,308	3,017 0688 3,050 4989 9,966 5699 137°12′10,86″

6) Nezināmā ζ, izlabojumu v un vidējo kļūdu noteikšana; galīgie rezultati.

$$\zeta = +11{,}09 \times 0{,}527 - 12{,}96 \times 0{,}224 + 1{,}98 = +4{,}92''$$

№	$a\xi_s + b\eta_s - \zeta - \lambda$	v	Galīgi orient. novēr. virzieni $r+\zeta$	Izlīdzinātie novērotie virzieni $r+\zeta+v$	Galīgie aprēķinātie virzieni φ	v^2
1.	+1,97+ 2,15−4,92+ 0,00	−0,80″	158°44′52,65″	158°44′51,85″	158°44′51,83″	0,64
2.	+7,96−17,17−4,92+14,45	+0,32	11 08 58,48	11 08 58,80	11 08 59,14	0,10
3.	+4,55− 0,62−4,92+ 0,00	−0,99	72 11 01,82	72 11 00,83	72 11 00,90	0,98
4.	+9,92− 1,08−4,92− 4,57	−0,65	75 34 30,15	75 34 29,50	75 34 29,58	0,42
5	+4,82+ 2,22−4,92+ 0,04	+2,16	137 12 08,69	137 12 10,85	137 12 10,86	4,67
		+0,04″ jābūt 0,00	151,79″	151,83″		6,81

$$m = \pm\sqrt{\frac{6{,}81}{5-3}} = \pm 1{,}84''$$

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{6{,}81}{2 \times 105{,}0}} = \pm 0{,}18\ \mathrm{dm} = \pm 0{,}018\ \mathrm{m}$$

$$m_y = \pm\sqrt{\frac{6{,}81}{2 \times 3945{,}4}} = \pm 0{,}03\ \mathrm{dm} = \pm 0{,}003\ \mathrm{m}$$

$$x_s = -3389{,}861 \pm 0{,}018\ \mathrm{m}$$

$$y_s = -1262{,}312 \pm 0{,}003\ \mathrm{m}$$

Lielās pretrunas starp izlīdzinātiem novērotiem un atbilstošiem galīgiem aprēķinātiem virzieniem $(r + \zeta + v)$ un φ izskaidrojamas ar notikušiem apaļojumiem. To ietekme uz galīgiem aprēķinātiem virzieniem φ ļoti liela, jo attiecīgie atstatumi ir mazi. Ievērojot izlīdzināto koordinatu x_s un y_s skaitliskās vērtībās arī vēl ceturto decimalzīmi, un ar vērtībām

$$x_s = -3389{,}8613\ \mathrm{m}$$

$$y_s = -1262{,}3116\ \mathrm{m}$$

aprēķinot atsevišķiem dotiem punktiem atbilstošos virzienus φ, atrodam

1) Trīsvienības baznīcai, lut. 158°44′51,85″
2) Cītemanam 11 08 58,79

3) Eksportostai	$72^0 11' 00{,}86''$
4) Lopu kautuvei	75 34 29,52
5) Provodņikam	137 12 10,86

kas diezgan apmierinoši saskan ar atbilstošiem izlīdzinātiem novērotiem virzieniem $(r + \zeta + v)$.

Piezīme. Arī šeit minētās koordinatas, tāpat kā 65-ā paragrafa piemērā, skaitītas Rīgas pilsētas vecās uzmērīšanas koordinatu sistemā (sk. § 65, piez.).

§ 68. Punkta stāvokļa vidējā kļūda.

Izdarot ar taisnu krustojumu noteikta punkta koordinatu izlīdzināšanu, tiek veidoti no 64-ā paragrafa pazīstamie kļūdu nolīdzinājumi

$$\left.\begin{array}{l} a_1\xi_G + b_1\eta_G - \lambda_1 = v_1 \\ a_2\xi_G + b_2\eta_G - \lambda_2 = v_2 \\ a_3\xi_G + b_3\eta_G - \lambda_3 = v_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n\xi_G + b_n\eta_G - \lambda_n = v_n \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (743),$$

kuriem atbilst normalnolīdzinājumi

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\xi_G + [ab]\eta_G - [a\lambda] = 0 \\ [ab]\xi_G + [bb]\eta_G - [b\lambda] = 0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (744).$$

Reducējot un atslēdzot tos pēc Gauss'a algoritma, atrodam

$$\left.\begin{array}{l} \xi_G = -\dfrac{-[a\lambda.1]}{[aa.1]} = -\dfrac{-[a\lambda] - \dfrac{[ab]}{[bb]}(-[b\lambda])}{[aa] - \dfrac{[ab]}{[bb]}[ab]} = \\ \qquad = \dfrac{[bb][a\lambda] - [ab][b\lambda]}{[aa][bb] - [ab]^2} \\ \eta_G = -\dfrac{-[b\lambda.1]}{[bb.1]} = -\dfrac{-[b\lambda] - \dfrac{[ab]}{[aa]}(-[a\lambda])}{[bb] - \dfrac{[ab]}{[aa]}[ab]} = \\ \qquad = \dfrac{[aa][b\lambda] - [ab][a\lambda]}{[aa][bb] - [ab]^2} \end{array}\right\} \quad \dots \quad (745).$$

Ar nezinamo ξ_G, η_G svariem identiskie izlīdzināto koordinatu x_G, y_G svari ir

$$\left.\begin{aligned} p_x = p_\xi = [aa.1] = [aa] - \frac{[ab]}{[bb]}[ab] = \\ = \frac{[aa][bb] - [ab]^2}{[bb]} \\ p_y = p_\eta = [bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = \\ = \frac{[aa][bb] - [ab]^2}{[aa]} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (746).$$

Tā tad izlīdzināto koordinatu x_G, y_G vidējās kļūdas ir

$$\left.\begin{aligned} m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \pm \sqrt{\frac{[bb]}{[aa][bb] - [ab]^2}}\, m \\ m_y = \pm \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \pm \sqrt{\frac{[aa]}{[aa][bb] - [ab]^2}}\, m \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (747),$$

kur m apzīmē ar formulu

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (748)$$

noteikto svara vienības vidējo kļūdu.

Lietojot apzīmējumu

$$D = [aa][bb] - [ab]^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (749),$$

formulas (745) un (747) rakstamas šādā veidā:

$$\left.\begin{aligned} \xi_G = \frac{[bb][a\lambda] - [ab][b\lambda]}{D} \\ \eta_G = \frac{[aa][b\lambda] - [ab][a\lambda]}{D} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (750)$$

un

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 = \frac{[bb]}{D}\, m^2 \\ m_y^2 = \frac{[aa]}{D}\, m^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (751).$$

Lai ar nezinamo ξ_G, η_G īstām kļūdām identiskās izlīdzināto koordinatu x_G, y_G īstās kļūdas ir ε_x, ε_y. Tās ir attiecīgā punkta īstās „stāvokļa kļūdas" ε x- un y-asu virzienos skaitītās komponentas. Tā tad

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (752).$$

Meklējot pāreju uz atbilstošām vidējām kļūdām, atgriežamies pie formulām (750). Ievērojot Gauss'a algoritmā lietoto simbolu nozīmi, šīs formulas rakstam veidā

$$\left.\begin{aligned}
\xi_G = \frac{1}{D}\{[bb]\ (\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + \ldots\ldots + a_n\lambda_n) - \\
-[ab]\ (\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + \ldots\ldots + b_n\lambda_n)\} = \\
= \frac{1}{D}\{(a_1[bb] - b_1[ab])\lambda_1 + (a_2[bb] - b_2[ab])\lambda_2 + (a_3[bb] - b_3[ab])\lambda_3 + \\
+ \ldots\ldots + (a_n[bb] - b_n[ab])\lambda_n\} \\
\eta_G = \frac{1}{D}\{[aa]\ (\ b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + \ldots\ldots + b_n\lambda_n) - \\
-[ab]\ (\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + \ldots\ldots + a_n\lambda_n)\} = \\
= \frac{1}{D}\{(b_1[aa] - a_1[ab])\lambda_1 + (b_2[aa] - a_2[ab])\lambda_2 + (b_3[aa] - a_3[ab])\lambda_3 + \\
+ \ldots\ldots + (b_n[aa] - a_n[ab])\lambda_n\}
\end{aligned}\right\} \quad (753).$$

Ievērojot (724), redzam, ka brīvie locekļi $-\lambda$, un līdz ar to arī izteiksmes (753), ir orientēto novēroto virzienu r funkcijas. Lai šo virzienu r, un līdz ar to atbilstošo elementu λ īstās kļūdas ir ε_1, ε_2, ε_3, ..., ε_n. Uzskatot tās un jau minētās ε_x, ε_y par atbilstošo elementu λ resp. funkciju ξ_G, η_G diferencialiem, no izteiksmēm (753) atvasinam šādas

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x = \frac{1}{D}\{(a_1[bb] - b_1[ab])\varepsilon_1 + (a_2[bb] - b_2[ab])\varepsilon_2 + (a_3[bb] - b_3[ab])\varepsilon_3 + \\
+ \ldots + (a_n[bb] - b_n[ab])\varepsilon_n\} \\
\varepsilon_y = \frac{1}{D}\{(b_1[aa] - a_1[ab])\varepsilon_1 + (b_2[aa] - a_2[ab])\varepsilon_2 + (b_3[aa] - a_3[ab])\varepsilon_3 + \\
+ \ldots + (b_n[aa] - a_n[ab])\varepsilon_n\}
\end{aligned}\right\} \quad (754).$$

Paceļot kvadratā un ignorējot kļūdu produktus $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_3$, ..., $\varepsilon_1\varepsilon_n$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$, ..., $\varepsilon_2\varepsilon_n$, ..., $\varepsilon_3\varepsilon_n$, ... saturošo locekļu algebraiskās sumas, atrodam

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x^2 = \frac{1}{D^2}\ \{(a_1^2[bb]^2 + b_1^2[ab]^2 - 2a_1b_1[bb]\,[ab])\varepsilon_1^2 + \\
+ (a_2^2[bb]^2 + b_2^2[ab]^2 - 2a_2b_2[bb]\,[ab])\varepsilon_2^2 + \\
+ (a_3^2[bb]^2 + b_3^2[ab]^2 - 2a_3b_3[bb]\,[ab])\varepsilon_3^2 + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ (a_n^2[bb]^2 + b_n^2[ab]^2 - 2a_nb_n[bb]\,[ab])\varepsilon_n^2\} \\
\varepsilon_y^2 = \frac{1}{D^2}\ \{(b_1^2[aa]^2 + a_1^2[ab]^2 - 2a_1b_1[aa]\,[ab])\varepsilon_1^2 + \\
+ (b_2^2[aa]^2 + a_2^2[ab]^2 - 2a_2b_2[aa]\,[ab])\varepsilon_2^2 + \\
+ (b_3^2[aa]^2 + a_3^2[ab]^2 - 2a_3b_3[aa]\,[ab])\varepsilon_3^2 + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ (b_n^2[aa]^2 + a_n^2[ab]^2 - 2a_nb_n[aa]\,[ab])\varepsilon_n^2\}
\end{aligned}\right\} \quad (755).$$

Tā tad

$$\varepsilon^2=\frac{1}{D^2}\Big\{\{a_1^2([bb]^2+[ab]^2)+b_1^2([aa]^2+[ab]^2)-2a_1b_1[ab]([bb]+[aa])\}\varepsilon_1^2+$$
$$+\{a_2^2([bb]^2+[ab]^2)+b_2^2([aa]^2+[ab]^2)-2a_2b_2[ab]([bb]+[aa])\}\varepsilon_2^2+$$
$$+\{a_3^2([bb]^2+[ab]^2)+b_3^2([aa]^2+[ab]^2)-2a_3b_3[ab]([bb]+[aa])\}\varepsilon_3^2+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\{a_n^2([bb]^2+[ab]^2)+b_n^2([aa]^2+[ab]^2)-2a_nb_n[ab]([bb]+[aa])\}\varepsilon_n^2\Big\} \quad (756).$$

Pārejot uz kļūdu vidējām vērtībām, ε_1^2, ε_2^2, $\varepsilon_3^2, \ldots\ldots, \varepsilon_n^2$ atvietojam ar novērota virziena r (svara vienības) vidējās kļūdas kvadratu m^2; sakarā ar to tad ε^2 jāatvieto ar attiecīgā punkta stāvokļa vidējās kļūdas kvadratu M^2. Tādā kārtā no izteiksmes (756) atvasinam sekojošo

$$M^2=\frac{1}{D^2}\{[aa]([bb]^2+[ab]^2)+[bb]([aa]^2+[ab]^2)-2[ab]^2([bb]+[aa])\}\,m^2=$$
$$=\frac{1}{D^2}\{[aa][bb]([bb]+[aa])-[ab]^2([bb+[aa])\}\,m^2=$$
$$=\frac{1}{D^2}\,([bb]+[aa])([aa][bb]-[ab]^2)\,m^2=$$
$$=\frac{1}{D^2}\,([bb]+[aa])\,D\,m^2=\frac{[bb]+[aa]}{D}\,m^2=$$
$$=\frac{[bb]}{D}\,m^2+\frac{[aa]}{D}\,m^2 \quad \ldots\ldots \quad (757).$$

Salīdzinot šo izteiksmi ar (751), atrodam, ka

$$M^2=m_x^2+m_y^2$$

jeb

$$M=\pm\sqrt{m_x^2+m_y^2} \quad \ldots\ldots \quad (758).$$

Formulās (743)—(758) ieejošie a un b ir pazīstamie virzienu koeficienti, kuri nosakami atkarībā no attiecīgo virzienu tuvinām vērtībām. Bet šie virzieni savukārt atkarīgi no pieņemtās koordinatu sistemas. Tā tad ar minēto virzienu koeficientu palīdzību atrastās koordinatu vidējās kļūdas m_x, m_y arī atkarīgas no pieņemtās koordinatu sistemas. Bet var pierādīt, ka pēc formulas (758) no m_x un m_y atvasinātā vidējā kļūda M ir šinī ziņā neatkarīga.

Ievērojot attiecīgos virzienu koeficientus noteicošās formulas (710), atrodam

$$[aa]+[bb]=\left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^2\left\{\frac{\sin^2(\varphi_1)+\cos^2(\varphi_1)}{(s_1)^2}+\frac{\sin^2(\varphi_2)+\cos^2(\varphi_2)}{(s_2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin^2(\varphi_3)+\cos^2(\varphi_3)}{(s_3)^2}+\ldots\ldots+\frac{\sin^2(\varphi_n)+\cos^2(\varphi_n)}{(s_n)^2}\right\}=$$

$$=\left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^2\left\{\frac{1}{(s_1)^2}+\frac{1}{(s_2)^2}+\frac{1}{(s_3)^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{(s_n)^2}\right\}\ldots \quad (759).$$

Bez tam, izejot no formulas (749) un ievērojot (710), veidojam izteiksmi

$$D=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots\ldots+b_n^2)-$$
$$-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots\ldots+a_nb_n)^2=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\ldots\ldots+(a_1b_n-a_nb_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+$$
$$+\ldots\ldots+(a_2b_n-a_nb_2)^2+\ldots\ldots+(a_3b_n-a_nb_3)^2+\ldots\ldots=$$
$$=\left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^4\left\{\left\{\frac{-\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1)}{(s_1)(s_2)}\right\}^2+\right.$$
$$+\left\{\frac{-\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_3)+\sin(\varphi_3)\cos(\varphi_1)}{(s_1)(s_3)}\right\}^2+\ldots\ldots+$$
$$+\left\{\frac{-\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_n)+\sin(\varphi_n)\cos(\varphi_1)}{(s_1)(s_n)}\right\}^2+$$
$$+\left\{\frac{-\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_3)+\sin(\varphi_3)\cos(\varphi_2)}{(s_2)(s_3)}\right\}^2+\ldots\ldots+$$
$$+\left\{\frac{-\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_n)+\sin(\varphi_n)\cos(\varphi_2)}{(s_2)(s_n)}\right\}^2+\ldots\ldots+$$
$$\left.+\left\{\frac{-\sin(\varphi_3)\cos(\varphi_n)+\sin(\varphi_n)\cos(\varphi_3)}{(s_3)(s_n)}\right\}^2+\ldots\ldots\right\}=$$
$$=\left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^4\left\{\frac{\sin^2\{(\varphi_2)-(\varphi_1)\}}{(s_1)^2(s_2)^2}+\frac{\sin^2\{(\varphi_3)-(\varphi_1)\}}{(s_1)^2(s_3)^2}+\ldots\ldots+\right.$$
$$+\frac{\sin^2\{(\varphi_n)-(\varphi_1)\}}{(s_1)^2(s_n)^2}+\frac{\sin^2\{(\varphi_3)-(\varphi_2)\}}{(s_2)^2(s_3)^2}+\ldots\ldots+$$
$$\left.+\frac{\sin^2\{(\varphi_n)-(\varphi_2)\}}{(s_2)^2(s_n)^2}+\ldots\ldots+\frac{\sin^2\{(\varphi_n)-(\varphi_3)\}}{(s_3)^2(s_n)^2}+\ldots\ldots\right\} \quad (760).$$

Tā tad izrādas, ka izteiksme (759) pavisam neatkarīga no virzieniem (φ), bet izteiksmē (760) ieiet tikai šo virzienu starpības. Tāpēc, ievērojot priekšpēdējo izteiksmi (757), nākam pie slēdziena, ka punkta stāvokļa vidējā kļūda M ir neatkarīga no koordinatu sistemas, uz kuru attiecinātas M noteikšanai lietotās koordinatu vidējās kļūdas m_x, m_y.

Iztirzājuši jautājumu par punkta stāvokļa vidējo kļūdu tiešā attiecībā uz koordinatu izlīdzināšanu taisna krustojuma gadijumā, piezīmējam, ka formulai (758) ir vispārēja nozīme, t. i. pēc šīs formulas punkta stāvokļa vidējā kļūda nosakama neatkarīgi no tā, pēc kāda paņēmiena atrastas attiecīgās koordinatu kļūdas m_x, m_y.

§ 69. Kļūdu ellipse.

Punkta izlīdzināto koordinatu noteikšanai lietotiem novērojumiem piemītošo kļūdu dēļ, šīm koordinatām atbilstošais punkta stāvoklis nav vis absoluti pareizais, bet atšķiras no tā par atstatumu, kura vidējo absoluto lielumu nosaka punkta stāvokļa vidējā kļūda M. Šo kļūdu M var iedomāties kā divu savstarpēji stateniskos virzienos skaitītu komponentu rezultējošo, pie kam šīs komponentas atkarājas, starp citu, no tā, uz kādiem virzieniem tās attiecinātas. Sakarā ar izlīdzināto koordinatu noteikšanu aprēķinātās koordinatu vidējās kļūdas m_x, m_y veido vienu tādu komponentu sistemu, kas zīmējas uz lietotās koordinatu sistemas asu virzieniem. Bet bieži vēlams zināt arī citos virzienos skaitītās vidējās kļūdas M komponentas, pie kam sevišķi interesē šo komponentu maksimalā un minimalā vērtība un atbilstošie virzieni.

Iztirzājot šo jautājumu, atkal iziesim no koordinatu izlīdzināšanas taisnā krustojuma gadijumā.

Atgriežoties pie iepriekšējā paragrafā atrastām formulām (751) un ievērojot izteiksmi (760), atrodam, ka minēto formulu saucējs D ir no pieņemtās koordinatu sistemas neatkarīgs lielums. Tā tad pārejot uz citu koordinatu sistemu, resp. attiecinot kļūdas M komponentas uz citām savstarpēji stateniskām asīm, nekā tas darīts nosakot m_x, m_y, elements D paliek bez pārmaiņām. Tāpat negrozas svara vienības vidējā kļūda m. Bet mainas gan no pieņemtās koordinatu sistemas atkarīgās sumas [bb] un [aa].

Pieņemsim, ka koordinatu sistema, kurā skaitas kļūdu m_x, m_y noteikšanai lietotie virzieni (φ), pulksteņa rādītāja virzienā pagriezta par leņķi ψ. Tad virzienu (φ) vietā stājas atbilstošie $\{(\varphi)-\psi\}$, un sakarā ar to arī ir citādi virzienu koeficienti

$$\left.\begin{aligned} a' &= -\frac{\rho}{10\,000}\cdot\frac{\sin\{(\varphi)-\psi\}}{(s)} \\ b' &= +\frac{\rho}{10\,000}\cdot\frac{\cos\{(\varphi)-\psi\}}{(s)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (761).$$

Uz pagriezto koordinatu sistemu attiecīgās vidējās koordinatu kļūdas μ_x, μ_y nosakamas parastā kārtā, tikai [aa] un [bb] vietā stājas [a'a'] un [b'b']. Tā tad pēc parauga (751)

$$\left.\begin{aligned} \mu_x^2 &= \frac{[b'b']}{D} m^2 \\ \mu_y^2 &= \frac{[a'a']}{D} m^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (762).$$

Kas zīmējas uz šinīs formulās ieejošām sumām [a'a'] un [b'b'], tad, ievērojot (761),

$$
\left.
\begin{aligned}
[a'a'] &= \left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^2 \left\{ \frac{\sin^2\{(\varphi_1)-\psi\}}{(s_1)^2} + \frac{\sin^2\{(\varphi_2)-\psi\}}{(s_2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sin^2\{(\varphi_3)-\psi\}}{(s_3)^2} + \ldots\ldots + \frac{\sin^2\{(\varphi_n)-\psi\}}{(s_n)^2} \right\} = \\
&= \left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^2 \left\{ \left[\frac{\sin^2(\varphi)}{(s)^2}\right]\cos^2\psi + \left[\frac{\cos^2(\varphi)}{(s)^2}\right]\sin^2\psi - \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{(s)^2}\right]\sin 2\psi \right\} \\
&\text{un} \\
[b'b'] &= \left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^2 \left\{ \frac{\cos^2\{(\varphi_1)-\psi\}}{(s_1)^2} + \frac{\cos^2\{(\varphi_2)-\psi\}}{(s_2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos^2\{(\varphi_3)-\psi\}}{(s_3)^2} + \ldots\ldots + \frac{\cos^2\{(\varphi_n)-\psi\}}{(s_n)^2} \right\} = \\
&= \left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^2 \left\{ \left[\frac{\cos^2(\varphi)}{(s)^2}\right]\cos^2\psi + \left[\frac{\sin^2(\varphi)}{(s)^2}\right]\sin^2\psi + \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{(s)^2}\right]\sin 2\psi \right\}
\end{aligned}
\right\} \quad (763).
$$

Bet

$$
\left.
\begin{aligned}
\left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^2 \left[\frac{\sin^2(\varphi)}{(s)^2}\right] &= [aa] \\
\left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^2 \left[\frac{\cos^2(\varphi)}{(s)^2}\right] &= [bb] \\
\left(\frac{\rho}{10\,000}\right)^2 \left[\frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{(s)^2}\right] &= -[ab]
\end{aligned}
\right\} \quad . \ . \ . \ (764).
$$

Tā tad izteiksmes (763) pāriet veidā

$$
\left.
\begin{aligned}
[a'a'] &= [aa]\cos^2\psi + [bb]\sin^2\psi + [ab]\sin 2\psi \\
[b'b'] &= [bb]\cos^2\psi + [a\,a]\sin^2\psi - [ab]\sin 2\psi
\end{aligned}
\right\} \ . \ . \ (765).
$$

Kā jau minēts, formulās (762) m un D ir no pagrieziena leņķa ψ neatkarīgi elementi. Tā tad ar formulām (765) noteiktā funkcionalā atkarībā no ψ pieaugot vai dilstot sumām [a'a'] un [b'b'], atbilstoši pieaug vai dilst arī μ_x^2, μ_y^2 resp. μ_x, μ_y absolutās vērtības. Ievērojot to, uz formulu (765) pamatā nosakama tā leņķa ψ vērtība, kurai atbilst minēto kļūdu μ_x, μ_y maksimums un minimums. Tam nolūkam atvasinot funkcijas (765) pēc argumenta ψ un pielīdzinot atvasinājumus nullei, veidojam nolīdzinājumus

$$\left.\begin{aligned}\frac{d[a'a']}{d\psi} &= -([aa]-[bb])\sin 2\psi + 2[ab]\cos 2\psi = 0\\ \frac{d[b'b']}{d\psi} &= +([aa]-[bb])\sin 2\psi - 2[ab]\cos 2\psi = 0\end{aligned}\right\} \quad (766)$$

un no tiem sekojošo

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2[ab]}{[aa]-[bb]} \quad \ldots\ldots \quad (767).$$

Šim nolīdzinājumam ir divas saknes: 2ψ un $2\psi \pm 180^0$, resp. ψ un $\psi \pm 90^0$. Tām atbilst μ_x maksimums un μ_y minimums, vai, otrādi, μ_x minimums un μ_y maksimums.

Ieliekot izteiksmes (765) formulās (762), tās pāriet veidā

$$\left.\begin{aligned}\mu_x^2 &= \frac{[aa]\sin^2\psi + [bb]\cos^2\psi - [ab]\sin 2\psi}{D} m^2\\ \mu_y^2 &= \frac{[aa]\cos^2\psi + [bb]\sin^2\psi + [ab]\sin 2\psi}{D} m^2\end{aligned}\right\} \quad (768).$$

Ja šinīs formulās ieliekam no nolīdzinājuma (767) atrasto leņķi ψ resp. $\psi \pm 90^0$, tad atbilstošās μ_x, μ_y vērtības ir maksimalās vai minimalās.

Ar nolīdzinājuma (767) palīdzību varam minētās formulās izslēgt leņķi ψ, resp. izteikt $\sin^2\psi$, $\cos^2\psi$, $\sin 2\psi$ ar atbilstošām virzienu koeficientu a un b funkcijām.

Tam nolūkam, ievērojot (767), veidojam izteiksmi

$$\cos 2\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4[ab]^2}{([aa]-[bb])^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2}{([aa]-[bb])^2}}} \quad (769),$$

un, lietojot apzīmējumu

$$\sqrt{([aa]-[bb])^2 + 4[ab]^2} = W \quad \ldots\ldots \quad (770),$$

šo izteiksmi rakstam veidā

$$\cos 2\psi = \frac{[aa]-[bb]}{W} \quad \ldots\ldots \quad (771).$$

Tā tad

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\psi &= \frac{1-\cos 2\psi}{2} = \frac{W-[aa]+[bb]}{2W}\\ \cos^2\psi &= \frac{1+\cos 2\psi}{2} = \frac{W+[aa]-[bb]}{2W}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (772).$$

Bez tam, reizinot (767) ar (771), atrodam

$$\sin 2\psi = \frac{2[ab]}{W} \quad \ldots\ldots \quad (773).$$

Ieliekot šīs izteiksmes formulās (768), tās pāriet veidā

$$\left.\begin{aligned} \mu_x^2 &= \frac{[aa]+[bb]-W}{2D} m^2 = B^2 \\ \mu_y^2 &= \frac{[aa]+[bb]+W}{2D} m^2 = A^2 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (774).$$

Šīs formulas nosaka kļūdu μ_x, μ_y maksimalo un minimalo vērtību, kuras tiek sasniegtas, ja, atbilstoši pagriežot koordinatu sistemu, kļūda μ_x skaitas virzienā ψ. Skaitot ar formulu (770) noteikto elementu W vienmēr pozitivu, leņķa 2ψ un līdz ar to leņķa ψ kvadrants parastā kārtā noteikts ar izteiksmju (771) un (773) skaitītāju zīmēm. Bez tam no formulām (774) tieši redzams, ka A ir atbilstošās kļūdas μ maksimums, bet B — minimums. Tā tad iestājas virzienā ψ skaitītās kļūdas μ_x minimums, bet virzienā $\psi \pm 90^0$ skaitītās kļūdas μ_y maksimums.

Ja koordinatu sistemu pagriežam par leņķi

$$\Theta = \psi + 90^0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (775),$$

tad formulās (774) kļūdas μ_x, μ_y apmainas; t. i. tad iestājas virzienā Θ skaitītās kļūdas μ_x maksimums A, bet virzienā $\Theta \pm 90^0$ skaitītās kļūdas μ_y minimums B.

Minēto leņķi Θ tieši noteicošās formulas viegli atrodamas ievērojot atbilstošās uz leņķi ψ attiecīgās formulas (767), (771) un (773):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\Theta &= \operatorname{tg}(2\psi + 180^0) = \frac{-2[ab]}{-([aa]-[bb])} \\ \cos 2\Theta &= \cos(2\psi + 180^0) = \frac{-([aa]-[bb])}{W} \\ \sin 2\Theta &= \sin(2\psi + 180^0) = \frac{-2[ab]}{W} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (776).$$

Tā tad

$$\left.\begin{aligned} \mu_x^2 &= \frac{[aa]+[bb]+W}{2D} m^2 = A^2 \ \text{virzienā}\ \Theta \\ \mu_y^2 &= \frac{[aa]+[bb]-W}{2D} m^2 = B^2 \ \text{virzienā}\ \Theta \pm 90^0 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (777),$$

pie kam Θ noteikts ar formulām (776), bet ar (770) noteiktais elements W skaitas pozitivs.

Sumējot izteiksmes (777), atrodam

$$\mu_x^2 + \mu_y^2 = A^2 + B^2 = \frac{[aa]+[bb]}{D} m^2 =$$

$$= \frac{[aa]}{D} m^2 + \frac{[bb]}{D} m^2 = m_y^2 + m_x^2 = M^2 \quad (778).$$

Tas saskan ar iepriekšējā paragrafā pierādīto attiecībā uz punkta stāvokļa vidējās kļūdas M neatkarību no koordinatu sistemas, uz kuru zīmējas M aprēķinam lietotās koordinatu vidējās kļūdas, jo A un B uzskatami par koordinatu vidējām kļūdām par leņķi Θ pagrieztā koordinatu sistemā.

Ievērojot (776) un (777), veidojam izteiksmes

$$\left.\begin{aligned}
A^2\cos^2\Theta + B^2\sin^2\Theta &= A^2\frac{1+\cos 2\Theta}{2} + B^2\frac{1-\cos 2\Theta}{2} = \\
&= \left\{\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}m^2\right\}\left\{\frac{1+\frac{-([aa]-[bb])}{W}}{2}\right\} + \\
&+ \left\{\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}m^2\right\}\left\{\frac{1-\frac{-([aa]-[bb])}{W}}{2}\right\} = \\
&= \left\{\frac{\{([aa]+[bb])+W\}\{W-([aa]-[bb])\}}{4DW} + \right. \\
&+ \left.\frac{\{([aa]+[bb])-W\}\{W+([aa]-[bb])\}}{4DW}\right\}m^2 = \\
&= \frac{[bb]}{D}m^2 \\
\text{un}\qquad & \\
A^2\sin^2\Theta + B^2\cos^2\Theta &= A^2\frac{1-\cos 2\Theta}{2} + B^2\frac{1+\cos 2\Theta}{2} = \\
&= \left\{\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}m^2\right\}\left\{\frac{1-\frac{-([aa]-[bb])}{W}}{2}\right\} + \\
&+ \left\{\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}m^2\right\}\left\{\frac{1+\frac{-([aa]-[bb])}{W}}{2}\right\} = \\
&= \left\{\frac{\{([aa]+[bb])+W\}\{W+([aa]-[bb])\}}{4DW} + \right. \\
&+ \left.\frac{\{([aa]+[bb])-W\}\{W-([aa]-[bb])\}}{4DW}\right\}m^2 = \\
&= \frac{[aa]}{D}m^2
\end{aligned}\right\} \quad (779).$$

Salīdzinot šīs izteiksmes ar (751), atrodam, ka

$$\left.\begin{array}{l} m_x^2 = A^2\cos^2\Theta + B^2\sin^2\Theta \\ m_y^2 = A^2\sin^2\Theta + B^2\cos^2\Theta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (780).$$

Šinīs formulās ieejošās koordinatu kļūdas m_x, m_y ir tās pašas, no kurām atvasinājam stāvokļa vidējās kļūdas M komponentu maksimumu un minimumu A un B atbilstošos virzienos Θ un $\Theta \pm 90^0$. Bet šīm formulām ir vispārēja nozīme: zinot minētos A un B un patvaļīgi pieņemot leņķi Θ, pēc šīm formulām nosakamas vidējās koordinatu kļūdas m_x, m_y tanī koordinatu sistemā, kur elementiem A un B ir virzieni Θ un $\Theta \pm 90^0$. Tā tad uz formulu (780) pamata nosakamas visādiem virzieniem atbilstošās kļūdas M komponentas.

Apsverot to, formu'as (780) rakstam veidā

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1^2 = A^2\cos^2\vartheta + B^2\sin^2\vartheta \\ \mu_2^2 = A^2\sin^2\vartheta + B^2\cos^2\vartheta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (781),$$

kur μ_1 un μ_2 apzīmē attiecīgā punkta vidējās kļūdas savstarpēji statenīskos virzienos, kuri ar maksimuma A un minimuma B virzieniem ieslēdz leņķi ϑ. Ievērojot vēl to, ka leņķim ϑ mainoties par 90^0, pirmā formula (781) pāriet otrā, un otrādi, šīs divas formulas atvietojam ar vienu vienīgo

$$\mu^2 = A^2\cos^2\vartheta + B^2\sin^2\vartheta \quad \ldots\ldots \quad (782),$$

kur ϑ apzīmē no maksimuma A virziena skaitīto mainīgo virzienu, un μ — attiecīgā punkta vidējo kļūdu šinī virzienā.

No formulas (782) redzams, ka virzieniem ϑ, $\vartheta + 180^0$, $-\vartheta$, $-(\vartheta + 180^0)$ atbilstošās μ vērtības ir vienādas. Tā tad no kāda centra novilktie mainīgam virzienam ϑ atbilstošie vektori veido slēgtu „vidējo kļūdu līkni", kura simetriska attiecībā uz vidējās kļūdas maksimumam A un minimumam B atbilstošām asīm.

Sīkāki nosakot šīs līknes veidu, pieņemsim punktu P (21. att.) ar vidējās kļūdas μ maksimumu A un minimumu B un attiecīgo virzienu orientējumu lietotā koordinatu sistemā (x, y) noteicošo leņķi Θ.

Ap centru P aprakstot ellipsi E ar pusasīm A un B, no tās atvasinam līkni L, kas ir centra P projekciju uz ellipses E pieskarēm ģeometriskā vieta. Pieņemot vietēju koordinatu sistemu ar nulpunktu P un ar ellipses E lielai un mazai asīm atbilstošām abscisu ξ un ordinatu η asīm, līknes L nolīdzinājums ir

$$A^2\xi^2 + B^2\eta^2 - (\xi^2 + \eta^2)^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (783).$$

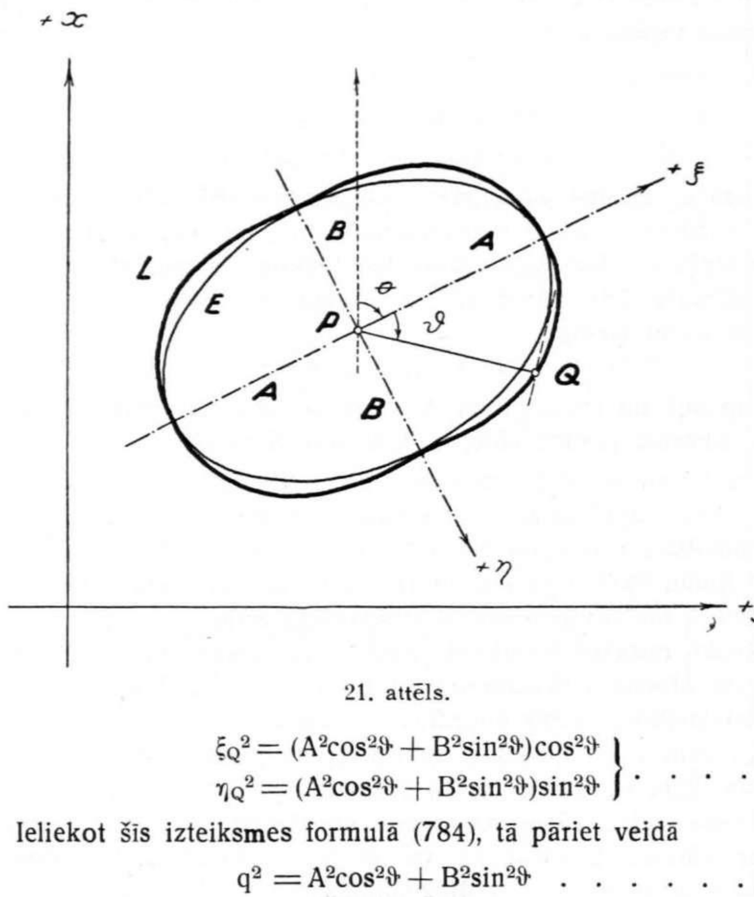
Lai minētā koordinatu sistemā no tās pozitivās abscisu ass skaitītā virzienā ϑ pieņemtā vektora PQ gala punkta Q koordinatas ir ξ_Q, η_Q; tad, apzīmējot vektora garumu ar q,

$$q^2 = \xi_Q^2 + \eta_Q^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (784).$$

Ievērojot, ka Q ir ar nolīdzinājumu (783) noteiktās līknes L punkts, un centra P koordinatas vienādas ar nulli, veidojami šādi divi nolīdzinājumi ar nezinamiem ξ_Q, η_Q:

$$\left.\begin{aligned} A^2\xi_Q{}^2 + B^2\eta_Q{}^2 - (\xi_Q{}^2 + \eta_Q{}^2)^2 = 0 \\ \frac{\eta_Q}{\xi_Q} = \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (785).$$

Atslēdzot šo nolīdzinājumu sistemu, un ievērojot tikai šeit interesējošās realās saknes, atrodam



21. attēls.

$$\left.\begin{aligned} \xi_Q{}^2 = (A^2\cos^2\vartheta + B^2\sin^2\vartheta)\cos^2\vartheta \\ \eta_Q{}^2 = (A^2\cos^2\vartheta + B^2\sin^2\vartheta)\sin^2\vartheta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (786).$$

Ieliekot šīs izteiksmes formulā (784), tā pāriet veidā

$$q^2 = A^2\cos^2\vartheta + B^2\sin^2\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (787).$$

Salīdzinot šo formulu ar (782), redzam, ka

$$q = \mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (788).$$

Tā tad L ir meklētā vidējo kļūdu līkne; kā redzams, tā viegli atvasināma no atbilstošās ellipses E, kuru sauc par vidējo kļūdu ellipsi. Ar leņķi Θ noteiktā orientējumā konstruējot vidējo kļūdu ellipsi un no tās atvasināto vidējo kļūdu līkni, šīs līknes vektori tieši nosaka attiecīgā punkta P vidējo kļūdu μ atbilstošos virzienos.

Atgriežoties pie formulām (776) un (777), pārveidosim tās tā, lai elementi Θ, A, B būtu nosakami kā sakarā ar izlīdzināto koordinatu aprēķinu atrasto svaru koeficientu Q funkcijas.

Šeit apskatītā gadijumā netiešu novērojumu izlīdzināšanas ceļā nosacīti divi nezinami — iekrustotā punkta G izlīdzinātās koordinatas x_G, y_G. Šo nezinamo svaru koeficientu $Q_{1.1}$ un $Q_{2.2}$ noteikšanai, pēc vispārējā parauga (305), veidojamas divas svaru nolīdzinājumu sistemas, kur bez minētiem $Q_{1.1}$ un $Q_{2.2}$ ieiet vēl svara koeficients $Q_{1.2}$. Šīs svaru nolīdzinājumu sistemas ir:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]Q_{1.1} + [ab]Q_{1.2} - 1 = 0 \\ [ab]Q_{1.1} + [bb]Q_{1.2} - 0 = 0 \\ \text{un} \\ [aa]Q_{1.2} + [ab]Q_{2.2} - 0 = 0 \\ [ab]Q_{1.2} + [bb]Q_{2.2} - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (789).$$

Atslēdzot tās un ievērojot (749), atrodam

$$\left.\begin{array}{l} Q_{1.1} = \dfrac{1}{[aa] - \dfrac{[ab]}{[bb]}[ab]} = \dfrac{[bb]}{[aa][bb] - [ab]^2} = \dfrac{[bb]}{D} \\[3ex] Q_{2.2} = \dfrac{1}{[bb] - \dfrac{[ab]}{[aa]}[ab]} = \dfrac{[aa]}{[aa][bb] - [ab]^2} = \dfrac{[aa]}{D} \\[3ex] Q_{1.2} = \left\{\begin{array}{c} \dfrac{-\dfrac{[ab]}{[aa]}}{[bb] - \dfrac{[ab]}{[aa]}[ab]} \\[3ex] \dfrac{-\dfrac{[ab]}{[bb]}}{[aa] - \dfrac{[ab]}{[bb]}[ab]} \end{array}\right\} = \dfrac{-[ab]}{[aa][bb] - [ab]^2} = \dfrac{-[ab]}{D} \end{array}\right\} \quad (790).$$

Tā tad

$$\left.\begin{array}{l} [aa] = Q_{2.2}D \\ [bb] = Q_{1.1}D \\ [ab] = -Q_{1.2}D \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (791).$$

Ievērojot to un formulu (770), veidojam

$$Q = \frac{W}{D} = \sqrt{\frac{(Q_{2.2}D - Q_{1.1}D)^2 + 4Q_{1.2}{}^2D^2}{D^2}} =$$

$$= \sqrt{(Q_{1.1} - Q_{2.2})^2 + 4Q_{1.2}{}^2} \quad \ldots\ldots \quad (792).$$

Lietojot atrastās izteiksmes (791) un (792), pirmā formula (776) un formulas (777) rakstamas veidā

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\Theta &= \frac{2Q_{1.2}}{Q_{1.1}-Q_{2.2}} \\ A^2 &= \frac{Q_{1.1}+Q_{2.2}+Q}{2}\, m^2 \\ B^2 &= \frac{Q_{1.1}+Q_{2.2}-Q}{2}\, m^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (793).$$

Šīs formulas, tāpat kā atbilstošās (776) un (777), tieši zīmējas uz atsevišķo gadijumu, kad koordinatu izlīdzināšanas rēķina nezinamie ir tikai viena punkta izlīdzinātās koordinatas. Bet pēc šo formulu parauga punkta vidējo kļūdu līknes konstruēšanai vajadzīgie elementi Θ, A, B nosakami arī (šinī grāmatā sīkāki neapskatītā) koordinatu izlīdzināšanas vispārīgākā gadijumā, kad izlīdzināšana zīmējas ne tikai uz vienu, bet uz vairākiem punktiem resp. to koordinatām. Tādā gadijumā $Q_{1.1}$ un $Q_{2.2}$ vietā stājas attiecīgā punkta izlīdzināto koordinatu x un y svaru koeficienti; apzīmējot tos ar $Q_{x.x}$ un $Q_{y.y}$, formulās (793) ieejošais $Q_{1.2}$ tad jāatvieto ar atbilstošo $Q_{x.y}$.

Lietojot šos svaru koeficientu vispārīgākos apzīmējumus, formulas (792) un (793) rakstam veidā

$$\left.\begin{aligned} Q &= \sqrt{(Q_{x.x}-Q_{y.y})^2+4\,Q_{x.y}{}^2} \\ \operatorname{tg} 2\Theta &= \frac{2\,Q_{x.y}}{Q_{x.x}-Q_{y.y}} \\ A^2 &= \frac{Q_{x.x}+Q_{y.y}+Q}{2}\, m^2 \\ B^2 &= \frac{Q_{x.x}+Q_{y.y}-Q}{2}\, m^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (794).$$

Attiecībā uz svara koeficientu $Q_{x.y}$ piezīmējam vēl sekojošo. Lai ir dota funkcija

$$F = x + y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (795),$$

kuras argumenti x, y ir netiešu novērojumu izlīdzināšanas kārtā atrastās punkta izlīdzinātās koordinatas ar atbilstošiem svaru koeficientiem $Q_{x.x}$, $Q_{y.y}$.

Pēc formulas (317) parauga, atvietojot $Q_{1.1}$, $Q_{2.2}$, $Q_{1.2}$ ar atbilstošiem $Q_{x.x}$, $Q_{y.y}$, $Q_{x.y}$, un ievērojot, ka $f_1 = f_2 = 1$, atrodam, ka

$$Q_F = Q_{x+y} = Q_{x.x} + Q_{y.y} + 2\,Q_{x.y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (796).$$

Pats par sevi saprotams, ka formulas (794) un (796) paliek spēkā neatkarīgi no tā, pēc kāda paņēmiena atrasti svaru koeficienti $Q_{x.x}$, $Q_{y.y}$, $Q_{x.y}$, Q_{x+y}. Tā tad minētās formulas tieši lietojamas arī tad, kad attiecīgā punkta koordinatas x, y atrastas nevis koordinatu izlīdzināšanas ceļā, bet aprēķinātas kā funkcijas, kuru argumenti ir noteikumu novērojumu izlīdzināšanas kārtā nosacīti trigonometriska tīkla leņķi vai virzieni.

Sīkāki apskatot šo gadijumu, iedomājamies izlīdzinātās koordinatas x, y izteiktas pēc (453) parauga šādu funkciju veidā:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_0 + f_1(l_1 + v_1) + f_2(l_2 + v_2) + f_3(l_3 + v_3) + \ldots + f_i(l_i + v_i) \\ y &= f_0' + f_1'(l_1 + v_1) + f_2'(l_2 + v_2) + f_3'(l_3 + v_3) + \ldots + f_i'(l_i + v_i) \end{aligned}\right\} \quad (797),$$

kur l un v apzīmē tīklā novērotos leņķus resp. virzienus un atbilstošos izlabojumus, bet f un f' ir funkciju koeficienti.

Sumējot abas izteiksmes (797), vēl veidojam funkciju

$$\begin{aligned} x + y = (f_0 + f_0') + (f_1 + f_1')(l_1 + v_1) + (f_2 + f_2')(l_2 + v_2) + \\ + (f_3 + f_3')(l_3 + v_3) + \ldots + (f_i + f_i')(l_i + v_i) \quad (798). \end{aligned}$$

Funkcijām (797) un (798) atbilstošos svaru koeficientus $Q_{x.x}$, $Q_{y.y}$, Q_{x+y} nosakot pēc formulas (466) parauga, atrodam

$$\left.\begin{aligned} Q_{x.x} &= [ff] - \left\{\frac{[af]^2}{[aa]} + \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[cf.2]^2}{[cc.2]} + \ldots\ldots + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{[rf.(r-1)]^2}{[rr.(r-1)]}\right\} \\ Q_{y.y} &= [f'f'] - \left\{\frac{[af']^2}{[aa]} + \frac{[bf'.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[cf'.2]^2}{[cc.2]} + \ldots\ldots + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{[rf'.(r-1)]^2}{[rr.(r-1)]}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (799)$$

un

$$\begin{aligned} Q_{x+y} = [(f + f')(f + f')] - \left\{\frac{[af + af']^2}{[aa]} + \frac{[(bf + bf').1]^2}{[bb.1]} + \right. \\ \left. + \frac{[(cf + cf').2]^2}{[cc.2]} + \ldots\ldots + \frac{[(rf + rf').(r-1)]^2}{[rr.(r-1)]}\right\} \quad (800), \end{aligned}$$

kur a, b, c, ..., r ir izlīdzināšanas rēķinā lietoto noteikumu nolīdzinājumu koeficienti.

Bet

$$\left.\begin{aligned} [(f + f')(f + f')] &= [ff] + [f'f'] + 2[ff'] \\ [af + af']^2 &= [af]^2 + [af']^2 + 2[af][af'] \\ [(bf + bf').1]^2 &= [bf.1]^2 + [bf'.1]^2 + 2[bf.1][bf'.1] \\ [(cf + cf').2]^2 &= [cf.2]^2 + [cf'.2]^2 + 2[cf.2][cf'.2] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [(rf + rf').(r-1)]^2 &= [rf.(r-1)]^2 + [rf'.(r-1)]^2 + \\ &\quad + 2[rf.(r-1)][rf'.(r-1)] \end{aligned}\right\} \quad (801).$$

Tā tad

$$Q_{x+y}=\left\{[ff]-\left\{\frac{[af]^2}{[aa]}+\frac{[bf.1]^2}{[bb.1]}+\frac{[cf.2]^2}{[cc.2]}+\ldots\ldots+\frac{[rf.(r-l)]^2}{[rr.(r-l)]}\right\}\right\}+$$
$$+\left\{[f'f']-\left\{\frac{[af']^2}{[aa]}+\frac{[bf'.1]^2}{[bb.1]}+\frac{[cf'.2]^2}{[cc.2]}+\ldots\ldots+\frac{[rf'.(r-l)]^2}{[rr.(r-l)]}\right\}\right\}+$$
$$+2\left\{[ff']-\left\{\frac{[af][af']}{[aa]}+\frac{[bf.1][bf'.1]}{[bb.1]}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{[cf.2][cf'.2]}{[cc.2]}+\ldots\ldots+\frac{[rf.(r-1)][rf'.(r-1)]}{[rr.(r-1)]}\right\}\right\}\quad\ldots\quad(802),$$

jeb, ievērojot (799),

$$Q_{x+y}=Q_{x.x}+Q_{y.y}+2\left\{[ff']-\left\{\frac{[af][af']}{[aa]}+\frac{[bf.1][bf'.1]}{[bb.1]}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{[cf.2][cf'.2]}{[cc.2]}+\ldots\ldots+\frac{[rf.(r-l)][rf'.(r-l)]}{[rr.(r-l)]}\right\}\right\}\quad(803).$$

Salīdzinot formulas (796) un (803), nākam pie slēdziena, ka

$$Q_{x.y}=[ff']-\left\{\frac{[af][af']}{[aa]}+\frac{[bf.1][bf'.1]}{[bb.1]}+\right.$$
$$\left.+\frac{[cf.2][cf'.2]}{[cc.2]}+\ldots\ldots+\frac{[rf.(r-l)][rf'.(r-l)]}{[rr.(r-l)]}\right\}\quad(804).$$

Tā tad ar formulām (799) un (804) nosacīti visi svaru koeficienti, kuri vajadzīgi elementu Θ, A, B noteikšanai pēc formulām (794).

Piemērs. Nosakot punkta „Tērauda lietuve" izlīdzinātās koordinatas (sk. § 65), atrastas to vidējās kļūdas

$$m_x=\pm 0{,}167\ \text{dm}$$
$$m_y=\pm 0{,}096\ \text{dm}$$

Tā tad minētā punkta stāvokļa vidējā kļūda ir

$$M=\pm\sqrt{0{,}167^2+0{,}096^2}=\pm 0{,}193\ \text{dm}$$

Lai atrastu vidējo kļūdu ellipsi noteicošos elementus Θ, A, B pēc attiecīgām formulām (776) un (777), lietojot no izlīdzināšanas rēķina pazīstamos elementus

$$m=\pm 1{,}36''$$
$$[aa]=+67{,}7\quad [ab]=-18{,}2\quad [bb]=+208{,}4$$

nosakam

$$\operatorname{tg} 2\Theta=\frac{-(-2\times 18{,}2)}{-(67{,}7-208{,}4)}=\frac{+\ 36{,}4}{+140{,}7}\qquad 2\Theta=14^0 30'$$

$$D = +67{,}7 \times 208{,}4 - 18{,}2^2 = 13777 \qquad 2D = 27554$$

$$W^2 = (67{,}7 - 208{,}4)^2 + 4 \times 18{,}2^2 = 21121 \qquad W = 145{,}3$$

$$\frac{[aa] + [bb] + W}{2D} = \frac{+67{,}7 + 208{,}4 + 145{,}3}{27554} = \frac{421{,}4}{27554} = 0{,}015\,294$$

$$\frac{[aa] + [bb] - W}{2D} = \frac{+67{,}7 + 208{,}4 - 145{,}3}{27554} = \frac{130{,}8}{27554} = 0{,}004\,747$$

Ar šiem elementiem aprēķinam

$$\Theta = 7^0 15'$$

$$A = \sqrt{0{,}015\ 294} \times 1{,}36 = 0{,}168 \text{ dm}$$

$$B = \sqrt{0{,}004\ 747} \times 1{,}36 = 0{,}094 \text{ dm}$$

Izdarot to pašu aprēķinu vēl citā variantā — pēc formulām (794), nosakam vajadzīgos svaru koeficientus

$$Q_{x.x} = \frac{1}{p_x} = \frac{1}{66{,}6} = 0{,}015\ 015$$

$$Q_{y.y} = \frac{1}{p_y} = \frac{1}{203{,}5} = 0{,}004\ 914 \qquad Q_{x.x} - Q_{y.y} = +0{,}010\ 101$$

$$Q_{x.y} = \frac{-[ab]}{D} = \frac{+18{,}2}{13777} = +0{,}001\ 321 \qquad 2\,Q_{x.y} = +0{,}002\ 642$$

un aprēķinam

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{+0{,}002\ 642}{+0{,}010\ 101} \qquad 2\Theta = 14^0 39'$$

$$Q = \sqrt{0{,}010\ 101^2 + 0{,}002\ 642^2} = 0{,}010\ 441$$

$$\frac{Q_{x.x} + Q_{y.y}}{2} = \frac{0{,}015\ 015 + 0{,}004\ 914}{2} = 0{,}009\ 964$$

$$\frac{Q}{2} = \underline{0{,}005\ 220}$$

$$\frac{Q_{x.x} + Q_{y.y} + Q}{2} = 0{,}015\ 184$$

$$\frac{Q_{x.x} + Q_{y.y} - Q}{2} = 0{,}004\ 744$$

Ar šiem elementiem atrodam

$$\Theta = 7^0 20'$$

$$A = \sqrt{0{,}015\ 184} \times 1{,}36 = \pm 0{,}168 \text{ dm}$$

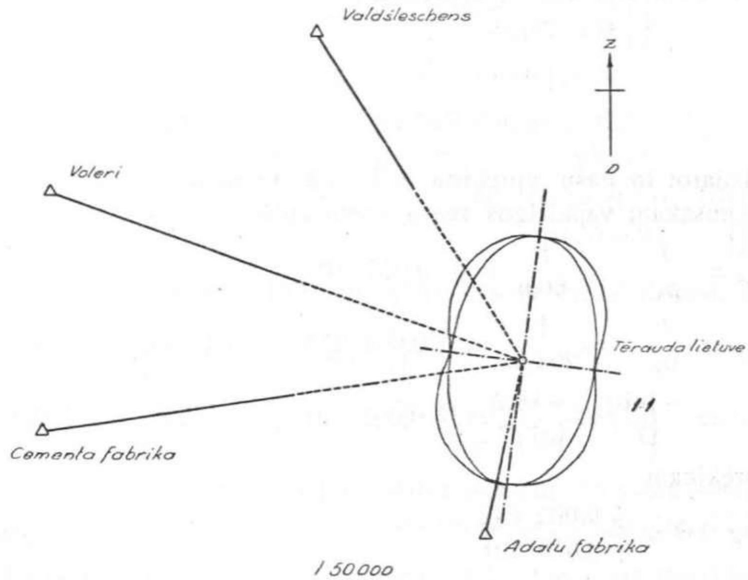
$$B = \sqrt{0{,}004\ 744} \times 1{,}36 = \pm 0{,}094 \text{ dm}$$

Ievērojot attiecīgā izlīdzināšanas rēķinā taisītos apaļojumus, saskaņa starp pirmā un otrā variantā atrastiem atbilstošiem rezultatiem atzīstama par apmierinosu.

Kontroles nolūkā vēl aprēķinam

$$M = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{0{,}168^2 + 0{,}094^2} = \pm 0{,}193 \text{ dm}$$

kas arī saskan ar M vērtību, kuru atradam izejot no izlīdzināto koordinatu vidējām kļūdām m_x, m_y.



22. attēls.

Atrastiem elementiem Θ, A, B atbilstošā vidējo kļūdu ellipse un vidējo kļūdu līkne 22. attēlā parādīta dabīgā lielumā, bet atstatumi starp attiecīgo punktu „Tērauda lietuve" un tā noteikšanai lietotiem augstākas šķiras punktiem atlikti mērogā 1 : 50 000.

IV. Poligongājieni un poligontīkli.

§ 70. Vispārējas piezīmes par poligongājieniem un to izlīdzināšanu.

Skatoties pēc tā, vai poligongājienā, bez malu horizontaliem garumiem, izmērīti atbilstošie virzieni (parasti magnetisko azimutu veidā), vai malu ieslēgtie leņķi, izšķir t. s. busoles gājienus un teodolita gājienus.

Busoles gājienā izmērītie elementi nosaka virsotņu savstarpējo stāvokli, un bez tam arī gājiena resp. tā atsevišķo malu absoluto orientējumu. Tā tad virsotņu absolutā stāvokļa noteikšanai pietiek, ja gājienam ir pieslēgums vienam dotam punktam, t. i. ja ir zinams vienas virsotnes stāvoklis.

Teodolita gājienā izmērītie elementi nosaka gan malu savstarpējo orientējumu un virsotņu savstarpējo stāvokli, bet nevis gājiena resp. tā atsevišķo malu absoluto orientējumu un virsotņu absoluto stāvokli. Tāpēc, bez pieslēguma vienam dotam punktam, vēl nepieciešams pieslēgums vienam dotam virzienam, t. i. tieši vai netieši jānosaka vienas malas absolutais virziens. Parasti šo virzienu nosaka netieši, izmērot vienas gājiena malas ar kādu pēc absolutā orientējuma zinamu liniju veidoto pieslēgleņķi.

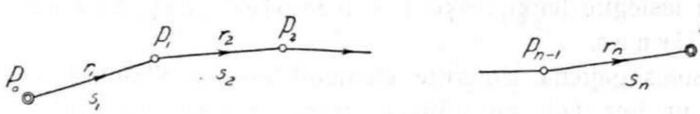
Tā tad poligongājiena aprēķinam vajadzīgie atsevišķo malu virzieni busoles gājiena gadijumā tiek tieši un neatkarīgi izmērīti; bet teodolita gājiena gadijumā tie tiek nosacīti netieši, kā gājienā izmērīto leņķu funkcijas.

Ja poligongājienam ir tikai nepieciešamais uz absoluto orientējumu un stāvokli attiecīgais pieslēgums, tad — lieku novērotu vai dotu elementu trūkuma dēļ — gājiens gan aprēķinams, bet bez novērojumu kontroles un izlīdzināšanas iespējas. Turpretim, ja pieslēgelementu (dotu koordinatu vai dotu virzienu resp. tiem atbilstošu pieslēgleņķu) ir vairāk, nekā tas nepieciešams, tad ar katru lieku pieslēgelementu rodas viens neatkarīgs uz gājienā notikušiem novērojumiem attiecīgs noteikums. Uz šo noteikumu pamata tad iespējams izdarīt novērojumu kontroli un izlīdzināšanu. Lai noskaidrotu minēto noteikumu veidu, apskatīsim dažus praktiski svarīgākus poligongājiena pieslēguma ziņā tipiskus gadijumus.

a) Busoles gājiens ar pieslēgumu abos galos dotiem punktiem.

Lai busoles gājienā $P_0 - P_1 - P_2 - \ldots\ldots - P_{n-1} - P_n$ (23. att.) izmērīti malu garumi $s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n$ un atbilstošie virzieni $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$, un lai ir dotas abu gala punktu P_0 un P_n koordinatas $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ un $\bar{x}_n, \bar{y}_n$.

Šinī gadijumā ir divi lieki pieslēgelementi — viena gala punkta koordinatas $\bar{x}$ un $\bar{y}$. Tā tad ir divi uz gājienā notikušiem novērojumiem attiecīgi neatkarīgi noteikumi.



23. attēls.

Ar neizlīdzinātiem novērojumiem s un r pazīstamā kārtā aprēķinam atsevišķām malām atbilstošos koordinatu pieaugumus (malu projekcijas uz lietotās koordinatu sistemas x-un y-asīm):

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta x_1 = s_1 \cos r_1 & \Delta y_1 = s_1 \sin r_1 \\ \Delta x_2 = s_2 \cos r_2 & \Delta y_2 = s_2 \sin r_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta x_n = s_n \cos r_n & \Delta y_n = s_n \sin r_n \end{array}\right\} \ldots \quad (805).$$

Pieskaitot sumas $[\Delta x]$ un $[\Delta y]$ sākuma punkta P_0 dotām koordinatām $\bar{x}_0$ un $\bar{y}_0$, atrodam ar neizlīdzinātiem novērojumiem aprēķinātās gala punkta P_n koordinatas

$$\left.\begin{array}{l} x_n = \bar{x}_0 + [\Delta x] \\ y_n = \bar{y}_0 + [\Delta y] \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (806).$$

Novērojumiem s un r piemītošo kļūdu dēļ, šīs koordinatas parasti atšķiras no gala punkta P_n dotām koordinatām $\bar{x}_n$ un $\bar{y}_n$ par koordinatu pretrunām

$$\left.\begin{array}{l} f_x = x_n - \bar{x}_n \\ f_y = y_n - \bar{y}_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (807).$$

Šo pretrunu likvidēšanas nolūkā novērojumiem s un r jāpieliek atbilstošie izlabojumi v_s un v_r. Tie izlīdzināšanas kārtā jānosaka tā, lai ar izlīdzinātiem novērojumiem $(s + v_s)$ un $(r + v_r)$ aprēķinātie koordinatu pieaugumi

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\Delta x}_1 = (s_1 + v_{s_1}) \cos (r_1 + v_{r_1}) \\ \overline{\Delta x}_2 = (s_2 + v_{s_2}) \cos (r_2 + v_{r_2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\Delta x}_n = (s_n + v_{s_n}) \cos (r_n + v_{r_n}) \\ \text{un} \\ \overline{\Delta y}_1 = (s_1 + v_{s_1}) \sin (r_1 + v_{r_1}) \\ \overline{\Delta y}_2 = (s_2 + v_{s_2}) \sin (r_2 + v_{r_2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{\Delta y}_n = (s_n + v_{s_n}) \sin (r_n + v_{r_n}) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (808)$$

apmierinātu noteikumus

$$\left.\begin{array}{l} [\overline{\Delta x}] - (\overline{x}_n - \overline{x}_0) = 0 \\ [\overline{\Delta y}] - (\overline{y}_n - \overline{y}_0) = 0 \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (809).$$

Ievērojot izteiksmes (808), noteikumi (809) rakstami šādā, tieši uz novērojumiem s un r resp. to izlabojumiem v_s un v_r attiecīgā veidā:

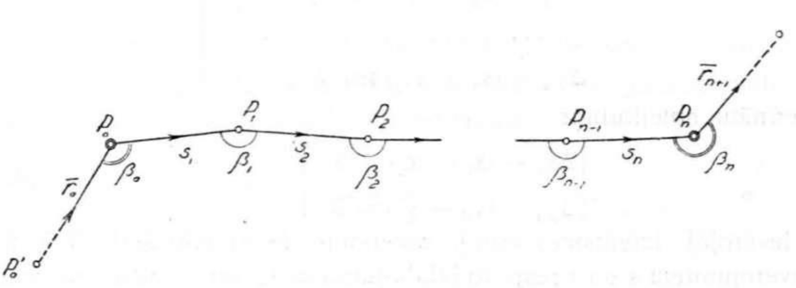
$$\left.\begin{array}{l} (s_1 + v_{s_1}) \cos (r_1 + v_{r_1}) + (s_2 + v_{s_2}) \cos (r_2 + v_{r_2}) + \ldots \\ \quad \ldots + (s_n + v_{s_n}) \cos (r_n + v_{r_n}) - (\overline{x}_n - \overline{x}_0) = 0 \\ \text{un} \\ (s_1 + v_{s_1}) \sin (r_1 + v_{r_1}) + (s_2 + v_{s_2}) \sin (r_2 + v_{r_2}) + \ldots \\ \quad \ldots + (s_n + v_{s_n}) \sin (r_n + v_{r_n}) - (\overline{y}_n - \overline{y}_0) = 0 \end{array}\right\} \quad (810).$$

Pazīstamā kārtā pārvēršot šos nolīdzinājumus linearā veidā un ievērojot (805), (806) un (807), nonākam pie šādiem noteikumu nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{array}{l} \{(\cos r_1)\, v_{s_1} + (\cos r_2)\, v_{s_2} + \ldots\ldots + (\cos r_n)\, v_{s_n}\} - \\ - \{(s_1 \sin r_1)\, v_{r_1} + (s_2 \sin r_2)\, v_{r_2} + \ldots\ldots + (s_n \sin r_n) v_{r_n}\} + \\ + \quad \{s_1 \cos r_1 + s_2 \cos r_2 + \ldots + s_n \cos r_n\} - (\overline{x}_n - \overline{x}_0) = \\ = \quad [(\cos r)\, v_s] - [(s \sin r)\, v_r] + \{[\Delta x] - (\overline{x}_n - \overline{x}_0)\} = \\ = \quad [(\cos r)\, v_s] - [(s \sin r)\, v_r] + f_x = 0 \\ \\ \{(\sin r_1)\, v_{s_1} + (\sin r_2)\, v_{s_2} + \ldots\ldots + (\sin r_n)\, v_{s_n}\} + \\ + \{(s_1 \cos r_1)\, v_{r_1} + (s_2 \cos r_2)\, v_{r_2} + \ldots\ldots + (s_n \cos r_n) v_{r_n}\} + \\ + \quad \{s_1 \sin r_1 + s_2 \sin r_2 + \ldots + s_n \sin r_n\} - (\overline{y}_n - \overline{y}_0) = \\ = \quad [(\sin r)\, v_s] + [(s \cos r)\, v_r] + \{[\Delta y] - (\overline{y}_n - \overline{y}_0)\} = \\ = \quad [(\sin r)\, v_s] + [(s \cos r)\, v_r] + f_y = 0 \end{array}\right\} \quad (811).$$

b) Teodolita gājiens ar pieslēgumu dotiem virzieniem abos galos, bet ar pieslēgumu dotam punktam tikai vienā vietā.

Lai teodolita gājienā $P_0 - P_1 - P_2 - \ldots\ldots - P_{n-1} - P_n$ (24. att.), bez šinī iztirzājumā neinteresējošiem malu garumiem s, izmērīti leņķi $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{n-1}$, un arī pieslēgleņķi β_0 un β_n, kurus pirmā un pēdējā mala ieslēdz ar linijām $P_0{}' P_0$ un $P_n P_n{}'$ resp. atbilstošiem dotiem virzieniem $\bar{r}_0$ un $\bar{r}_{n+1}$. Bez tam lai ir dotas sākuma punkta P_0 koordinatas $\bar{x}_0, \bar{y}_0$.



24. attēls.

Šinī gadijumā gājiena orientējuma noteikšanas ziņā ir viens lieks pieslēgums virzienam. Kas zīmējas uz gājiena stāvokli, tad tas ar viena punkta dotām koordinatām noteikts tikai nepieciešamā mērā. Tā tad ir tikai viens lieks pieslēgelements, un tāpēc arī tikai viens uz gājienā notikušiem novērojumiem attiecīgs noteikums.

Izejot no gājiena sākumā dotā virziena $\bar{r}_0$, ar izmērītiem leņķiem $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{n-1}, \beta_n$ pazīstamā kārtā aprēķinātais linijas $P_n P_n{}'$ virziens ir

$$r_{n+1} = \bar{r}_0 + i \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots\ldots + \beta_{n-1} + \beta_n) =$$
$$= \bar{r}_0 + i \times 180^0 - [\beta] \quad \ldots\ldots \quad (812),$$

kur i apzīmē a priori nenosakamu, no gājiena formas atkarīgu, bet visādā ziņā veselu skaitli.

Leņķu β novērojumiem piemītošo kļūdu dēļ, aprēķinātais virziens r_{n+1} parasti atšķiras no attiecīgās linijas $P_n P_n{}'$ dotā virziena $\bar{r}_{n+1}$ par leņķu pretrunu

$$f_\beta = \bar{r}_{n+1} - r_{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (813),$$

kura, ievērojot (812), izsakama veidā

$$f_\beta = [\beta] - (\bar{r}_0 - \bar{r}_{n+1} + i \times 180^0) \quad \ldots\ldots \quad (814).$$

Tās likvidēšanas nolūkā izmērītiem leņķiem β jāpieliek izlabojumi v_β, kuri izlīdzināšanas kārtā jānosaka tā, lai izpildītos noteikums

$$\{(\beta_0 + v_{\beta_0}) + (\beta_1 + v_{\beta_1}) + (\beta_2 + v_{\beta_2}) + \ldots\ldots +$$

$$+(\beta_{n-1} + v_{\beta_{n-1}}) + (\beta_n + v_{\beta_n})\} - (\overline{r}_0 - \overline{r}_{n+1} + i \times 180^0) =$$

$$= [v_\beta] + \{[\beta] - (\overline{r}_0 - \overline{r}_{n+1} + i \times 180^0)\} = 0 \quad . \quad . \quad (815),$$

jeb, ievērojot (814),

$$[v_\beta] + f_\beta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (816).$$

Saprotams, ka šis pats noteikums paliek spēkā arī gadijumā, kad teodolita gājienam ir tikai pieslēgums abos galos dotiem virzieniem, bet nav nekāda pieslēguma dotam punktam, t. i. kad gājiens ir noteikts tikai formas un orientējuma, bet nevis stāvokļa ziņā.

c) Teodolita gājiens ar pieslēgumu abos galos dotiem virzieniem un punktiem.

Šis gadijums no iepriekš apskatītā atšķiras tikai ar to, ka bez sākuma punkta P_0 koordinatām $\overline{x}_0, \overline{y}_0$ dotas arī gala punkta P_n koordinatas $\overline{x}_n$, $\overline{y}_n$.

Tā kā gājiena orientējuma ziņā ir tie paši apstākļi, kā iepriekš apskatītā gadijumā, bez grozijuma paliek spēkā uz leņķiem β attiecīgais noteikums (816). Bet sakarā ar to, ka šinī gadijumā ir arī viens lieks pieslēgums ar divām koordinatām dotam punktam, gājienā notikušie novērojumi padoti vēl diviem noteikumiem, kuri ir līdzīgas dabas, kā uz gadijumu „a" attiecīgie (809).

Veidojot šos noteikumu nolīdzinājumus tiešā attiecībā uz gājienā notikušiem novērojumiem, jāievēro, ka šeit apskatītā gadijumā novēroti malu garumi s un leņķi β.

Ja, izejot no sākumā dotā virziena $\overline{r}_0$, ar šiem neizlīdzinātiem novērojumiem aprēķinam gājiena malu virzienus r un atbilstošos koordinatu pieaugumus Δx, Δy, tad atrodam:

$$\left.\begin{array}{l}
r_1 = \overline{r}_0 + 180^0 - \beta_0 \\
r_2 = r_1 + 180^0 - \beta_1 = \overline{r}_0 + 2 \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_n = r_{n-1} + 180^0 - \beta_{n-1} = \overline{r}_0 + n \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1})
\end{array}\right\} \quad (817)$$

un

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x_1 &= s_1 \cos r_1 = s_1 \cos\{\overline{r}_0 + 180^0 - \beta_0\}\\
\Delta x_2 &= s_2 \cos r_2 = s_2 \cos\{\overline{r}_0 + 2 \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1)\}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta x_n &= s_n \cos r_n = s_n \cos\{\overline{r}_0 + n \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{n-1})\}\\
\Delta y_1 &= s_1 \sin r_1 = s_1 \sin\{\overline{r}_0 + 180^0 - \beta_0\}\\
\Delta y_2 &= s_2 \sin r_2 = s_2 \sin\{\overline{r}_0 + 2 \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1)\}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta y_n &= s_n \sin r_n = s_n \sin\{\overline{r}_0 + n \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{n-1})\}
\end{aligned}\right\} \quad (818).$$

Šiem Δx un Δy atbilstošās koordinatu pretrunas f_x un f_y nosakamas pēc formulām

$$\left.\begin{aligned}
f_x &= [\Delta x] - (\overline{x}_n - \overline{x}_0)\\
f_y &= [\Delta y] - (\overline{y}_n - \overline{y}_0)
\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (819),$$

kuras atvasinātas no gadijumā „a" minētām (806) un (807) un, saprotams, zīmējas arī uz to gadijumu.

Lai likvidētu visas pretrunas f_β, f_x, f_y, novērojumiem s un β jāpieliek atbilstošie izlabojumi v_s un v_β. Ar tādā veidā izlīdzinātiem novērojumiem pēc (817) un (818) parauga aprēķinot gājiena malu virzienus un koordinatu pieaugumus, atrodam:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{r}_1 &= \overline{r}_0 + 180^0 - (\beta_0 + v_{\beta_0})\\
\overline{r}_2 &= \overline{r}_1 + 180^0 - (\beta_1 + v_{\beta_1}) = \overline{r}_0 + 2 \times 180^0 - \{(\beta_0 + v_{\beta_0}) +\\
&\qquad + (\beta_1 + v_{\beta_1})\}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\overline{r}_n &= \overline{r}_{n-1} + 180^0 - (\beta_{n-1} + v_{\beta_{n-1}}) = \overline{r}_0 + n \times 180^0 - \{(\beta_0 + v_{\beta_0}) +\\
&\qquad + (\beta_1 + v_{\beta_1}) + \dots + (\beta_{n-1} + v_{\beta_{n-1}})\}
\end{aligned}\right\} \quad (820)$$

un

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta x}_1 &= (s_1 + v_{s_1}) \cos \overline{r}_1 = (s_1 + v_{s_1}) \cos\{\overline{r}_0 + 180^0 - (\beta_0 + v_{\beta_0})\}\\
\overline{\Delta x}_2 &= (s_2 + v_{s_2}) \cos \overline{r}_2 = (s_2 + v_{s_2}) \cos\{\overline{r}_0 + 2 \times 180^0 -\\
&\qquad - \{(\beta_0 + v_{\beta_0}) + (\beta_1 + v_{\beta_1})\}\}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\overline{\Delta x}_n &= (s_n + v_{s_n}) \cos \overline{r}_n = (s_n + v_{s_n}) \cos\{\overline{r}_0 + n \times 180^0 -\\
&\qquad - \{(\beta_0 + v_{\beta_0}) + (\beta_1 + v_{\beta_1}) + \dots + (\beta_{n-1} + v_{\beta_{n-1}})\}\}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\Delta y_1} &= (s_1 + v_{s_1}) \sin \overline{r_1} = (s_1 + v_{s_1}) \sin \{\overline{r}_0 + 180^0 - (\beta_0 + v_{\beta_0})\} \\
\overline{\Delta y_2} &= (s_2 + v_{s_2}) \sin \overline{r_2} = (s_2 + v_{s_2}) \sin \{\overline{r_0} + 2 \times 180^0 - \\
&\qquad - \{(\beta_0 + v_{\beta_0}) + (\beta_1 + v_{\beta_1})\}\} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\overline{\Delta y_n} &= (s_n + v_{s_n}) \sin \overline{r_n} = (s_n + v_{s_n}) \sin \{\overline{r_0} + n \times 180^0 - \\
&\qquad - \{(\beta_0 + v_{\beta_0}) + (\beta_1 + v_{\beta_1}) + \dots + (\beta_{n-1} + v_{\beta_{n-1}})\}\}
\end{aligned}\right\} \quad (821).$$

Šie koordinatu pieaugumi apmierina noteikumus

$$\left.\begin{aligned}
&[\overline{\Delta x}] - (\overline{x}_n - \overline{x}_0) = \\
&= (s_1 + v_{s_1}) \cos \{\overline{r_0} + 180^0 - (\beta_0 + v_{\beta_0})\} + (s_2 + v_{s_2}) \cos \{\overline{r_0} + \\
&+ 2 \times 180^0 - \{(\beta_0 + v_{\beta_0}) + (\beta_1 + v_{\beta_1})\}\} + \dots + (s_n + v_{s_n}) \cos \{\overline{r_0} + \\
&+ n \times 180^0 - \{(\beta_0 + v_{\beta_0}) + (\beta_1 + v_{\beta_1}) + \dots + (\beta_{n-1} + v_{\beta_{n-1}})\}\} - \\
&\qquad\qquad - (\overline{x}_n - \overline{x}_0) = 0 \\
&\text{un} \\
&[\overline{\Delta y}] - (\overline{y}_n - \overline{y}_0) = \\
&= (s_1 + v_{s_1}) \sin \{\overline{r_0} + 180^0 - (\beta_0 + v_{\beta_0})\} + (s_2 + v_{s_2}) \sin \{\overline{r_0} + \\
&+ 2 \times 180^0 - \{(\beta_0 + v_{\beta_0}) + (\beta_1 + v_{\beta_1})\}\} + \dots + (s_n + v_{s_n}) \sin \{\overline{r_0} + \\
&+ n \times 180^0 - \{(\beta_0 + v_{\beta_0}) + (\beta_1 + v_{\beta_1}) + \dots + (\beta_{n-1} + v_{\beta_{n-1}})\}\} - \\
&\qquad\qquad - (\overline{y}_n - \overline{y}_0) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (822).$$

Pārvēršot šos nolīdzinājumus lineārā veidā un ievērojot (818) un (819), atrodam

$$\begin{aligned}
&\cos \{\overline{r_0} + 180^0 - \beta_0\} v_{s_1} + \\
&+ \cos \{\overline{r_0} + 2 \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1)\} v_{s_2} + \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
&+ \cos \{\overline{r_0} + n \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{n-1})\} v_{s_n} + \\
&+ \{s_1 \sin \{\overline{r_0} + 180^0 - \beta_0\} + s_2 \sin \{\overline{r_0} + 2 \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1)\} + \\
&\quad + \dots + s_n \sin \{\overline{r_0} + n \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{n-1})\}\} v_{\beta_0} + \\
&\qquad + \{s_2 \sin \{\overline{r_0} + 2 \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1)\} + \\
&\quad + \dots + s_n \sin \{\overline{r_0} + n \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{n-1})\}\} v_{\beta_1} + \\
&\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
&\qquad + s_n \sin \{\overline{r_0} + n \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_{n-1})\} v_{\beta_{n-1}} + \\
&\qquad\qquad + f_x = 0
\end{aligned}$$

un

$$
\left.\begin{aligned}
&\sin\{\bar{r}_0 + 180^0 - \beta_0\}\, v_{s_1} + \\
&+ \sin\{\bar{r}_0 + 2 \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1)\}\, v_{s_2} + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ \sin\{\bar{r}_0 + n \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_{n-1})\}\, v_{s_n} - \\
&- \{s_1 \cos\{\bar{r}_0 + 180^0 - \beta_0\} + s_2 \cos\{\bar{r}_0 + 2\times 180^0 - (\beta_0+\beta_1)\} + \\
&+ \ldots + s_n \cos\{\bar{r}_0 + n\times 180^0 - (\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{n-1})\}\}\, v_{\beta_0} - \\
&- \{s_2 \cos\{\bar{r}_0 + 2\times 180^0 - (\beta_0+\beta_1)\} + \\
&+ \ldots + s_n \cos\{\bar{r}_0 + n\times 180^0 - (\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{n-1})\}\}\, v_{\beta_1} - \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \\
&- s_n \cos\{\bar{r}_0 + n\times 180^0 - (\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_{n-1})\}\, v_{\beta_{n-1}} + \\
&+ f_y = 0
\end{aligned}\right\} \quad (823).
$$

Salīdzinot atsevišķiem apskatītiem gadijumiem atbilstošos noteikumu nolīdzinājumus, redzam, ka visvienkāršākie izlīdzināšanas apstākļi ir teodolita gājienā, kuram, bez eventuali ietilpstoša viena dota punkta, ir tikai pieslēgums abos galos dotiem virzieniem (gadijums „b"). Šinī gadijumā ir viens vienīgais noteikums, pie kam tas zīmējas tikai uz gājienā novērotiem leņķiem β resp. to izlabojumiem v_β. Viegli pierādams, ka uz šī noteikuma pamata normalā kārtā izdarot izlīdzināšanu, praksē parastājā vienādas noteiktības gadijumā

$$
v_{\beta_0} = v_{\beta_1} = v_{\beta_2} = \ldots\ldots = v_{\beta_{n-1}} = v_{\beta_n} = -\frac{f_\beta}{n+1} \quad . \quad . \quad (824),
$$

t. i. leņķu pretruna f_β ar pretējo zīmi jāsadala vienmērīgi uz visiem leņķiem.

Pārējos gadijumos „a" un „c" stingrā izlīdzināšana komplicējas, ne tikai lielākā noteikumu skaita dēļ, bet arī tāpēc, ka attiecīgos noteikumu nolīdzinājumos ieiet dažādas dabas lielumu — garumu un virzienu resp. leņķu — novērojumi resp. to izlabojumi. Tāpēc šinīs gadijumos izlīdzināšanu parasti izdara pēc pazīstamā vienkāršotā paņēmiena. Teodolita gājiena gadijumā izmērītos leņķus tieši izlīdzina tikai attiecībā uz noteikumu (816), un ar šinī ziņā izlīdzinātiem leņķiem aprēķina atsevišķo malu virzienus. Savā turpmākā gaitā izlīdzināšana notiek sekojošā, teodolita gājienam un busoles gājienam kopīgā veidā. Ar (teodolita gājienā) minētā kārtā aprēķinātiem, vai (busoles gājienā) tieši novērotiem malu virzieniem un (abos gadijumos) tieši izmērītiem malu garumiem aprēķina koordinatu pieaugumus. Pēc tam ar formulām (819) aizrādītā kārtā salīdzinot tos ar gājiena gala punktu dotām koordinatām, nosaka koordinatu pretrunas f_x un f_y. Šīs pretrunas ar pretējām zīmēm sadala uz attiecīgiem atsevišķiem koordinatu pieaugumiem proporcionali atbilstošo malu garumiem, un ar tādā veidā izlīdzinātiem koordinatu pieaugumiem aprēķina virsotņu koordinatas.

Šis, vai tam līdzigi vienkāršoti izlīdzināšanas paņēmieni bez šaubām ir pilnīgi vietā busoles gājiena gadijumā. Tādos gājienos virzienu novērojumu noteiktība nekad nav tik augsta, ka varētu attaisnot diezgan lielo darbu, kuru padara stingrā izlīdzināšana pēc vismazāko kvadratu metodes. Arī teodolita gājienu izlīdzināšana pēc parastā vienkāršotā paņēmiena jāatzīst par vispārīgi lietderīgu un apstākļiem atbilstošu. Tomēr šeit var gadīties tādi apstākļi, kuros vēlama stingra izlīdzināšana.

Beidzot vēl piezīmējam, ka apskatītos gadijumos attiecīgie noteikumi formulēti veidā, kas tieši zīmējas uz neslēgtiem, t. i. tādiem poligongājieniem, kur gala virsotne P_n nav identiska ar sākuma virsotni P_0. Slēgtā poligongājienā, kur gala virsotne identiska ar sākuma virsotni, noteikumi (809) pāriet veidā

$$\left.\begin{aligned} [\Delta x] &= 0 \\ [\Delta y] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (825),$$

un koordinatu pretrunas ir

$$\left.\begin{aligned} f_x &= [\Delta x] \\ f_y &= [\Delta y] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (826).$$

Kas zīmējas uz noteikumu (816), tad slēgtā poligongājienā bez malu krustojumiem iekšējo leņķu teoretiskā suma ir $180^0(n-2)$, kur n apzīmē leņķu skaitu. Tā tad noteikumā (816) ieejošā leņķu pretruna f_β aprēķinama pēc formulas

$$f_\beta = [\beta] - 180^0\,(n-2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (827).$$

§ 71. Abos galos dotiem virzieniem un punktiem pieslēgta teodolita gājiena stingrā izlīdzināšana.

Aprakstīsim šeit ar nelieliem grozijumiem Eggert'a aizrādīto paņēmienu abos galos dotiem virzieniem un punktiem pieslēgta teodolita gājiena stingrai izlīdzināšanai.

Kā zinams no iepriekšējā paragrafa, tādā gājienā izdarītie leņķu un malu novērojumi resp. atbilstošie izlabojumi padoti noteikumiem (816) un (823).

Ievērojot izteiksmes (817) un pazīstamās formulas

$$\left.\begin{array}{ll}
\cos r_1 = \frac{\Delta x_1}{s_1} = \frac{x_1 - \bar{x}_0}{s_1} & \sin r_1 = \frac{\Delta y_1}{s_1} = \frac{y_1 - \bar{y}_0}{s_1} \\
\cos r_2 = \frac{\Delta x_2}{s_2} = \frac{x_2 - x_1}{s_2} & \sin r_2 = \frac{\Delta y_2}{s_2} = \frac{y_2 - y_1}{s_2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\cos r_n = \frac{\Delta x_n}{s_n} = \frac{x_n - x_{n-1}}{s_n} & \sin r_n = \frac{\Delta y_n}{s_n} = \frac{y_n - y_{n-1}}{s_n}
\end{array}\right\} \quad (828),$$

kur $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n$ un $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n-1}, y_n$ apzīmē ar neizlīdzinātiem novērojumiem aprēķinātās gājiena virsotņu koordinatas, noteikumu nolīdzinājumi (823) rakstami veidā

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Delta x_1}{s_1} v_{s_1} + \frac{\Delta x_2}{s_2} v_{s_2} + \ldots + \frac{\Delta x_n}{s_n} v_{s_n} + \\
&+ \{(y_1 - \bar{y}_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1})\} v_{\beta_0} + \\
&\qquad + \{(y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1})\} v_{\beta_1} + \\
&\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&\qquad\qquad\qquad + (y_n - y_{n-1}) v_{\beta_{n-1}} + f_x = \\
&= \frac{\Delta x_1}{s_1} v_{s_1} + \frac{\Delta x_2}{s_2} v_{s_2} + \ldots + \frac{\Delta x_n}{s_n} v_{s_n} + \\
&+ (y_n - \bar{y}_0) v_{\beta_0} + (y_n - y_1) v_{\beta_1} + \ldots + (y_n - y_{n-1}) v_{\beta_{n-1}} + f_x = 0 \\
&\text{un} \\
&\frac{\Delta y_1}{s_1} v_{s_1} + \frac{\Delta y_2}{s_2} v_{s_2} + \ldots + \frac{\Delta y_n}{s_n} v_{s_n} - \\
&- \{(x_1 - \bar{x}_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\} v_{\beta_0} - \\
&\qquad - \{(x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})\} v_{\beta_1} - \\
&\qquad\qquad - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \\
&\qquad\qquad\qquad - (x_n - x_{n-1}) v_{\beta_{n-1}} + f_y = \\
&= \frac{\Delta y_1}{s_1} v_{s_1} + \frac{\Delta y_2}{s_2} v_{s_2} + \ldots + \frac{\Delta y_n}{s_n} v_{s_n} - \\
&- (x_n - \bar{x}_0) v_{\beta_0} - (x_n - x_1) v_{\beta_1} - \ldots - (x_n - x_{n-1}) v_{\beta_{n-1}} + f_y = 0
\end{aligned}\right\} \quad (829).$$

Šinīs nolīdzinājumos ieejošie izlabojumi ir pa daļai garumi (v_s), pa daļai leņķi (v_β). Lai katrā nolīdzinājumā visi locekļi būtu vienādas dabas lielumi, no nosauktā veidā izteiktiem leņķu izlabojumiem v_β jāpāriet uz atbilstošiem nenosauktā veidā izteiktiem izlabojumiem $v_{\beta}^{\smile} = \frac{v_\beta}{\rho}$. Nolīdzinājumā (816), kur visi locekļi ir leņķu dabas lielumi, tas nav vajadzīgs. Tā tad attiecīgie 3 noteikumu nolīdzinājumi rakstami veidā

$$\left.\begin{aligned}
&v_{\beta_0}+v_{\beta_1}+\ldots\ldots+v_{\beta_{n-1}}+v_{\beta_n}+f_\beta=0\\
&\frac{\Delta x_1}{s_1}v_{s_1}+\frac{\Delta x_2}{s_2}v_{s_2}+\ldots\ldots+\frac{\Delta x_n}{s_n}v_{s_n}+\\
&+\frac{y_n-\bar{y}_0}{\rho}v_{\beta_0}+\frac{y_n-y_1}{\rho}v_{\beta_1}+\ldots\ldots+\frac{y_n-y_{n-1}}{\rho}v_{\beta_{n-1}}+f_x=0\\
&\frac{\Delta y_1}{s_1}v_{s_1}+\frac{\Delta y_2}{s_2}v_{s_2}+\ldots\ldots+\frac{\Delta y_n}{s_n}v_{s_n}-\\
&-\frac{x_n-\bar{x}_0}{\rho}v_{\beta_0}-\frac{x_n-x_1}{\rho}v_{\beta_1}-\ldots\ldots-\frac{x_n-x_{n-1}}{\rho}v_{\beta_{n-1}}+f_y=0
\end{aligned}\right\}\quad(830).$$

Vēl izdaram šādu pārveidojumu. Aprēķinam koordinatu $\bar{x}_0, x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n$ un $\bar{y}_0, y_1, \ldots\ldots, y_{n-1}, y_n$ aritmetiskos vidējos (gājiena virsotņu sistemas smaguma centra S koordinatas)

$$\left.\begin{aligned}
x_s&=\frac{\bar{x}_0+x_1+\ldots\ldots+x_{n-1}+x_n}{n+1}\\
y_s&=\frac{\bar{y}_0+y_1+\ldots\ldots+y_{n-1}+y_n}{n+1}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(831),$$

un reizinot pirmo nolīdzinājumu (830) ar $\frac{y_s-y_n}{\rho}$ resp. ar $-\frac{x_s-x_n}{\rho}$, veidojam nolīdzinājumus

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{y_s-y_n}{\rho}v_{\beta_0}+\frac{y_s-y_n}{\rho}v_{\beta_1}+\ldots+\frac{y_s-y_n}{\rho}v_{\beta_{n-1}}+\frac{y_s-y_n}{\rho}v_{\beta_n}+\\
&\qquad+\frac{y_s-y_n}{\rho}f_\beta=0\\
&-\frac{x_s-x_n}{\rho}v_{\beta_0}-\frac{x_s-x_n}{\rho}v_{\beta_1}-\ldots-\frac{x_s-x_n}{\rho}v_{\beta_{n-1}}-\frac{x_s-x_n}{\rho}v_{\beta_n}-\\
&\qquad-\frac{x_s-x_n}{\rho}f_\beta=0
\end{aligned}\right\}\quad(832).$$

Tos pieskaitot otram resp. trešam nolīdzinājumam (830), tie pāriet veidā

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x_1}{s_1}v_{s_1}+\frac{\Delta x_2}{s_2}v_{s_2}+\ldots+\frac{\Delta x_n}{s_n}v_{s_n}+\\
&+\frac{y_s-\bar{y}_0}{\rho}v_{\beta_0}+\frac{y_s-y_1}{\rho}v_{\beta_1}+\ldots+\frac{y_s-y_{n-1}}{\rho}v_{\beta_{n-1}}+\frac{y_s-y_n}{\rho}v_{\beta_n}+\\
&\qquad+\left\{f_x+\frac{y_s-y_n}{\rho}f_\beta\right\}=0
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\Delta y_1}{s_1}v_{s_1}+\frac{\Delta y_2}{s_2}v_{s_2}+\ldots+\frac{\Delta y_n}{s_n}v_{s_n}-\\ -\frac{x_s-\bar{x}_0}{\rho}v_{\beta_0}-\frac{x_s-x_1}{\rho}v_{\beta_1}-\ldots-\frac{x_s-x_{n-1}}{\rho}v_{\beta_{n-1}}-\frac{x_s-x_n}{\rho}v_{\beta_n}+\\ \qquad+\{f_y-\frac{x_s-x_n}{\rho}f_\beta\}=0\end{array}\right\}(833).$$

Piezīmējam, ka

$$\left.\begin{array}{llll}\xi_0 & =\bar{x}_0-x_s & \eta_0 & =\bar{y}_0-y_s\\ \xi_1 & =x_1-x_s & \eta_1 & =y_1-y_s\\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \\ \xi_{n-1} & =x_{n-1}-x_s & \eta_{n-1} & =y_{n-1}-y_s\\ \xi_n & =x_n-x_s & \eta_n & =y_n-y_s\end{array}\right\}\ldots\ (834)$$

ir ar neizlīdzinātiem novērojumiem aprēķinātās no nulpunkta S skaitītās gājiena virsotņu $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$ koordinatas.

Ievērojot (834) un lietojot apzīmējumus

$$\left.\begin{array}{l}F_x=f_x+\frac{y_s-y_n}{\rho}f_\beta=f_x-\frac{\eta_n}{\rho}f_\beta\\ F_y=f_y-\frac{x_s-x_n}{\rho}f_\beta=f_y+\frac{\xi_n}{\rho}f_\beta\end{array}\right\}\ldots\ldots\ (835),$$

nolīdzinājumi (833) rakstami

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\Delta x_1}{s_1}v_{s_1}+\frac{\Delta x_2}{s_2}v_{s_2}+\ldots+\frac{\Delta x_n}{s_n}v_{s_n}-\\ -\frac{\eta_0}{\rho}v_{\beta_0}-\frac{\eta_1}{\rho}v_{\beta_1}-\ldots-\frac{\eta_{n-1}}{\rho}v_{\beta_{n-1}}-\frac{\eta_n}{\rho}v_{\beta_n}+F_x=0\\ \frac{\Delta y_1}{s_1}v_{s_1}+\frac{\Delta y_2}{s_2}v_{s_2}+\ldots+\frac{\Delta y_n}{s_n}v_{s_n}+\\ +\frac{\xi_0}{\rho}v_{\beta_0}+\frac{\xi_1}{\rho}v_{\beta_1}+\ldots+\frac{\xi_{n-1}}{\rho}v_{\beta_{n-1}}+\frac{\xi_n}{\rho}v_{\beta_n}+F_y=0\end{array}\right\}(836),$$

un noteikumu nolīdzinājumu sistema (830) pāriet galīgā veidā

$$\left.\begin{array}{l}v_{\beta_0}+v_{\beta_1}+\ldots+v_{\beta_{n-1}}+v_{\beta_n}+f_\beta=0\\ \frac{\Delta x_1}{s_1}v_{s_1}+\frac{\Delta x_2}{s_2}v_{s_2}+\ldots+\frac{\Delta x_n}{s_n}v_{s_n}-\\ -\frac{\eta_0}{\rho}v_{\beta_0}-\frac{\eta_1}{\rho}v_{\beta_1}-\ldots-\frac{\eta_{n-1}}{\rho}v_{\beta_{n-1}}-\frac{\eta_n}{\rho}v_{\beta_n}+F_x=0\\ \frac{\Delta y_1}{s_1}v_{s_1}+\frac{\Delta y_2}{s_2}v_{s_2}+\ldots+\frac{\Delta y_n}{s_n}v_{s_n}+\\ +\frac{\xi_0}{\rho}v_{\beta_0}+\frac{\xi_1}{\rho}v_{\beta_1}+\ldots+\frac{\xi_{n-1}}{\rho}v_{\beta_{n-1}}+\frac{\xi_n}{\rho}v_{\beta_n}+F_y=0\end{array}\right\}(837).$$

Piegriežoties atbilstošo korrelatu normalnolīdzinājumu veidošanai, jānoskaidro jautājums par svariem p_s un p_β, kuri piešķirami izlabojumiem v_s un v_β atbilstošiem novērojumiem s un β.

Tā kā nav teoretiska likuma, kas nosaka gājienā notikušo garumu un leņķu novērojumu relativo noteiktību, atliekas tikai a priori nosacīt minēto novērojumu vidējās kļūdas, lai no tām pazīstamā kārtā pārietu uz atbilstošiem svariem.

Poligongājienu malu garumi parasti nepārsniedz dažus metru simtus un tiek izmērīti ar mērsloksni, vai līdzīgā kārtā. Tāpēc var pieņemt, ka garuma s malas mērijuma vidējā kļūda ir

$$m_s = \pm m\sqrt{s} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (838),$$

kur m apzīmē uz s izteikšanai lietoto garuma vienību attiecīgo vidējo kļūdu. Tā tad, pieņemot m par svara vienības vidējo kļūdu, garuma s malas mērijumam piešķiramais svars ir

$$p_s = \frac{m^2}{m_s^2} = \frac{1}{s}$$

jeb

$$\frac{1}{p_s} = s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (839).$$

Kas zīmējas uz leņķiem, tad var pieņemt, ka normala veida teodolita gājienā leņķu novērojumi notiek visi vienādos apstākļos, tā tad ar vienādu vidējo kļūdu m_β. Sakars starp šo m_β, atbilstošo svaru p_β un svaru sistemu noteicošo svara vienības vidējo kļūdu m noteikts ar pazīstamo formulu

$$p_\beta = \frac{m^2}{m_\beta^2}$$

jeb

$$\frac{1}{p_\beta} = \frac{m_\beta^2}{m^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (840).$$

Svaru koeficientu $\frac{1}{p_s}, \frac{1}{p_\beta}$ noteikšanai pēc formulām (839), (840) vajadzīgās vidējās kļūdas m un m_β nosakamas, skatoties pēc apstākļiem, tiem piemērotā kārtā. Piem., ja visi malu garumi un visi leņķi novēroti dubulti, minētās vidējās kļūdas pazīstamā kārtā atvasinamas no šo dubultnovērojumu pretrunām.

Rakstot noteikumu nolīdzinājumus (837) vispārējā veidā

$$\left.\begin{aligned}
&a_{\beta_0} v_{\beta_0} + a_{\beta_1} v_{\beta_1} + \ldots\ldots + a_{\beta_{n-1}} v_{\beta_{n-1}} + a_{\beta_n} v_{\beta_n} + f_\beta = 0\\
&b_{s_1} v_{s_1} + b_{s_2} v_{s_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_{s_n} v_{s_n} +\\
&+ b_{\beta_0} v_{\beta_0} + b_{\beta_1} v_{\beta_1} + \ldots\ldots + b_{\beta_{n-1}} v_{\beta_{n-1}} + b_{\beta_n} v_{\beta_n} + F_x = 0\\
&c_{s_1} v_{s_1} + c_{s_2} v_{s_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_{s_n} v_{s_n} +\\
&+ c_{\beta_0} v_{\beta_0} + c_{\beta_1} v_{\beta_1} + \ldots\ldots + c_{\beta_{n-1}} v_{\beta_{n-1}} + c_{\beta_n} v_{\beta_n} + F_y = 0
\end{aligned}\right\} \quad (841),$$

koeficientiem a, b, c ir šāda nozīme:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{\beta_0} = a_{\beta_1} = \ldots\ldots = a_{\beta_{n-1}} = a_{\beta_n} = +1 \\
&b_{s_1} = \frac{\Delta x_1}{s_1},\ b_{s_2} = \frac{\Delta x_2}{s_2}, \ldots, b_{s_n} = \frac{\Delta x_n}{s_n} \\
&b_{\beta_0} = -\frac{\eta_0}{\rho},\ b_{\beta_1} = -\frac{\eta_1}{\rho}, \ldots, b_{\beta_{n-1}} = -\frac{\eta_{n-1}}{\rho},\ b_{\beta_n} = -\frac{\eta_n}{\rho} \\
&c_{s_1} = \frac{\Delta y_1}{s_1},\ c_{s_2} = \frac{\Delta y_2}{s_2}, \ldots, c_{s_n} = \frac{\Delta y_n}{s_n} \\
&c_{\beta_0} = \frac{\xi_0}{\rho},\ c_{\beta_1} = \frac{\xi_1}{\rho}, \ldots, c_{\beta_{n-1}} = \frac{\xi_{n-1}}{\rho},\ c_{\beta_n} = \frac{\xi_n}{\rho}
\end{aligned}\right\} \quad (842).$$

Veidojot atbilstošos korrelatu normalnolīdzinājumu koeficientus, jāievēro, ka, sakarā ar agrāk taisīto pieņēmumu par leņķu novērojumu vienādo noteiktību,

$$p_{\beta_0} = p_{\beta_1} = \ldots\ldots = p_{\beta_{n-1}} = p_{\beta_n} = p_\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (843);$$

bez tam no izteiksmēm (831) un (834) seko

$$\left.\begin{aligned}
[\xi] &= 0 \\
[\eta] &= 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (844).$$

Tā tad korrelatu normalnolīdzinājumu koeficienti ir

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right] &= \frac{n+1}{p_\beta} \\
\left[\frac{ab}{p}\right] &= -\frac{[\eta]}{p_\beta \rho} = 0 \\
\left[\frac{ac}{p}\right] &= \frac{[\xi]}{p_\beta \rho} = 0 \\
\left[\frac{bb}{p}\right] &= \left[\frac{\Delta x \Delta x}{p_s s^2}\right] + \frac{[\eta\eta]}{p_\beta \rho^2} \\
\left[\frac{bc}{p}\right] &= \left[\frac{\Delta x \Delta y}{p_s s^2}\right] - \frac{[\xi\eta]}{p_\beta \rho^2} \\
\left[\frac{cc}{p}\right] &= \left[\frac{\Delta y \Delta y}{p_s s^2}\right] + \frac{[\xi\xi]}{p_\beta \rho^2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (845),$$

un pašiem korrelatu normalnolīdzinājumiem ir vispārējais veids

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right] k_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &+ f_\beta = 0 \\
\left[\frac{bb}{p}\right] k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_3 &+ F_x = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (846).$$

$$\left[\frac{bc}{p}\right]k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right]k_3 + F_y = 0$$

Kā redzams, pirmais nolīdzinājums (846) atslēdzams pavisam neatkarīgi no pārējiem diviem; no tā atrodam pirmo korrelatu

$$k_1 = -\frac{f_\beta}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$$

jeb, ievērojot pirmo izteiksmi (845),

$$k_1 = -\frac{f_\beta}{n+1} p_\beta \quad \ldots \ldots \quad (847).$$

Korrelatu k_2 un k_3 noteikšanai atliekas atslēgt otrā un trešā nolīdzinājuma (845) veidoto sistemu. No šīs sistemas atrodam:

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= \frac{1}{\left[\frac{bb}{p}\right]\left[\frac{cc}{p}\right] - \left[\frac{bc}{p}\right]^2}\left\{\left[\frac{bc}{p}\right]F_y - \left[\frac{cc}{p}\right]F_x\right\} \\ k_3 &= \frac{1}{\left[\frac{bb}{p}\right]\left[\frac{cc}{p}\right] - \left[\frac{bc}{p}\right]^2}\left\{\left[\frac{bc}{p}\right]F_x - \left[\frac{bb}{p}\right]F_y\right\} \end{aligned}\right\} \quad (848).$$

Ievērojot (845), (839), (840) un lietojot apzīmējumu

$$q = \frac{1}{p_\beta\, \rho} = \frac{m_\beta^{\ 2}}{m^2\, \rho} \quad \ldots \ldots \quad (849),$$

veidojam izteiksmi

$$N = \left[\frac{bb}{p}\right]\left[\frac{cc}{p}\right] - \left[\frac{bc}{p}\right]^2 =$$

$$= \left\{\left[\frac{\Delta x \Delta x}{p_s\, s^2}\right] + \frac{[\eta\eta]}{p_\beta\, \rho^2}\right\}\left\{\left[\frac{\Delta y \Delta y}{p_s\, s^2}\right] + \frac{[\xi\xi]}{p_\beta\, \rho^2}\right\} - \left\{\left[\frac{\Delta x \Delta y}{p_s\, s^2}\right] - \frac{[\xi\eta]}{p_\beta\, \rho^2}\right\}^2 =$$

$$= \left\{\left[\frac{\Delta x \Delta x}{s}\right] + [\eta\eta]\frac{q}{\rho}\right\}\left\{\left[\frac{\Delta y \Delta y}{s}\right] + [\xi\xi]\frac{q}{\rho}\right\} - \left\{\left[\frac{\Delta x \Delta y}{s}\right] - [\xi\eta]\frac{q}{\rho}\right\}^2 \quad (850),$$

un atrodam korrelatas k_2 un k_3 noteicošās formulas

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= \frac{1}{N}\left\{\left\{\left[\frac{\Delta x \Delta y}{s}\right] - [\xi\eta]\frac{q}{\rho}\right\}F_y - \left\{\left[\frac{\Delta y \Delta y}{s}\right] + [\xi\xi]\frac{q}{\rho}\right\}F_x\right\} \\ k_3 &= \frac{1}{N}\left\{\left\{\left[\frac{\Delta x \Delta y}{s}\right] - [\xi\eta]\frac{q}{\rho}\right\}F_x - \left\{\left[\frac{\Delta x \Delta x}{s}\right] + [\eta\eta]\frac{q}{\rho}\right\}F_y\right\} \end{aligned}\right\} \quad (851).$$

Ar atrastām korrelatām aprēķinam malu s un leņķu β izlabojumus:

$$\left.\begin{aligned}
v_{s_1} &= \frac{1}{p_{s_1}}(a_{s_1}k_1 + b_{s_1}k_2 + c_{s_1}k_3) = s_1\left(\frac{\Delta x_1}{s_1}k_2 + \frac{\Delta y_1}{s_1}k_3\right) = \\
&= k_2\Delta x_1 + k_3\Delta y_1 \\
v_{s_2} &= \frac{1}{p_{s_2}}(a_{s_2}k_1 + b_{s_2}k_2 + c_{s_2}k_3) = s_2\left(\frac{\Delta x_2}{s_2}k_2 + \frac{\Delta y_2}{s_2}k_3\right) = \\
&= k_2\Delta x_2 + k_3\Delta y_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{s_n} &= \frac{1}{p_{s_n}}(a_{s_n}k_1 + b_{s_n}k_2 + c_{s_n}k_3) = s_n\left(\frac{\Delta x_n}{s_n}k_2 + \frac{\Delta y_n}{s_n}k_3\right) = \\
&= k_2\Delta x_n + k_3\Delta y_n
\end{aligned}\right\} \quad (852)$$

un

$$\left.\begin{aligned}
v_{\beta_0} &= \frac{1}{p_{\beta_0}}(a_{\beta_0}k_1 + b_{\beta_0}k_2 + c_{\beta_0}k_3) = -\frac{f_\beta}{n+1} - \frac{\eta_0}{p_\beta \rho}k_2 + \frac{\xi_0}{p_\beta \rho}k_3 = \\
&= -\frac{f_\beta}{n+1} + (-\eta_0 k_2 + \xi_0 k_3)\,q \\
v_{\beta_1} &= \frac{1}{p_{\beta_1}}(a_{\beta_1}k_1 + b_{\beta_1}k_2 + c_{\beta_1}k_3) = -\frac{f_\beta}{n+1} - \frac{\eta_1}{p_\beta \rho}k_2 + \frac{\xi_1}{p_\beta \rho}k_3 = \\
&= -\frac{f_\beta}{n+1} + (-\eta_1 k_2 + \xi_1 k_3)\,q \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{\beta_{n-1}} &= \frac{1}{p_{\beta_{n-1}}}(a_{\beta_{n-1}}k_1 + b_{\beta_{n-1}}k_2 + c_{\beta_{n-1}}k_3) = -\frac{f_\beta}{n+1} - \frac{\eta_{n-1}}{p_\beta \rho}k_2 + \\
&+ \frac{\xi_{n-1}}{p_\beta \rho}k_3 = -\frac{f_\beta}{n+1} + (-\eta_{n-1}k_2 + \xi_{n-1}k_3)\,q \\
v_{\beta_n} &= \frac{1}{p_{\beta_n}}(a_{\beta_n}k_1 + b_{\beta_n}k_2 + c_{\beta_n}k_3) = -\frac{f_\beta}{n+1} - \frac{\eta_n}{p_\beta \rho}k_2 + \frac{\xi_n}{p_\beta \rho}k_3 = \\
&= -\frac{f_\beta}{n+1} + (-\eta_n k_2 + \xi_n k_3)\,q
\end{aligned}\right\} \quad (853).$$

Pieminam vēl Eggert'a aizrādīto pusgrafisko paņēmienu izlabojumu v_s un v_β noteikšanai pēc formulām (852) un (853).

Sakarā ar to piezīmējam, ka formulas (852) arī rakstamas veidā

$$\left.\begin{aligned}
v_{s_1} &= s_1(k_2\cos r_1 + k_3\sin r_1) \\
v_{s_2} &= s_2(k_2\cos r_2 + k_3\sin r_2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{s_n} &= s_n(k_2\cos r_n + k_3\sin r_n)
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (854),$$

kur r apzīmē ar neizlīdzinātiem leņķiem β aprēķinātos attiecīgo malu virzienus.

Pieņemot ar formulām

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_3}{k_2} \quad \text{jeb} \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{k_3}{k_2} \\ t = \frac{k_2}{\cos\varphi} = \frac{k_3}{\sin\varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (855)$$

noteiktos palīgelementus φ un t, korrelatas k_2 un k_3 izsakamas veidā

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= t\cos\varphi \\ k_3 &= t\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (856).$$

Ieliekot šīs izteiksmes formulās (854) un (853), tās pāriet veidā

$$\left.\begin{aligned} v_{s_1} &= t\,s_1(\cos\varphi\cos r_1 + \sin\varphi\sin r_1) = t\,s_1\cos(r_1 - \varphi) \\ v_{s_2} &= t\,s_2(\cos\varphi\cos r_2 + \sin\varphi\sin r_2) = t\,s_2\cos(r_2 - \varphi) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{s_n} &= t\,s_n(\cos\varphi\cos r_n + \sin\varphi\sin r_n) = t\,s_n\cos(r_n - \varphi) \end{aligned}\right\} \quad (857)$$

un

$$\left.\begin{aligned} v_{\beta_0} &= -\frac{f_\beta}{n+1} - t(\eta_0\cos\varphi - \xi_0\sin\varphi)\,q \\ v_{\beta_1} &= -\frac{f_\beta}{n+1} - t(\eta_1\cos\varphi - \xi_1\sin\varphi)\,q \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{\beta_{n-1}} &= -\frac{f_\beta}{n+1} - t(\eta_{n-1}\cos\varphi - \xi_{n-1}\sin\varphi)\,q \\ v_{\beta_n} &= -\frac{f_\beta}{n+1} - t(\eta_n\cos\varphi - \xi_n\sin\varphi)\,q \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (858).$$

Šinīs formulās ieejošās

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i &= s_i\cos(r_i - \varphi) \\ e_i &= \eta_i\cos\varphi - \xi_i\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (859)$$

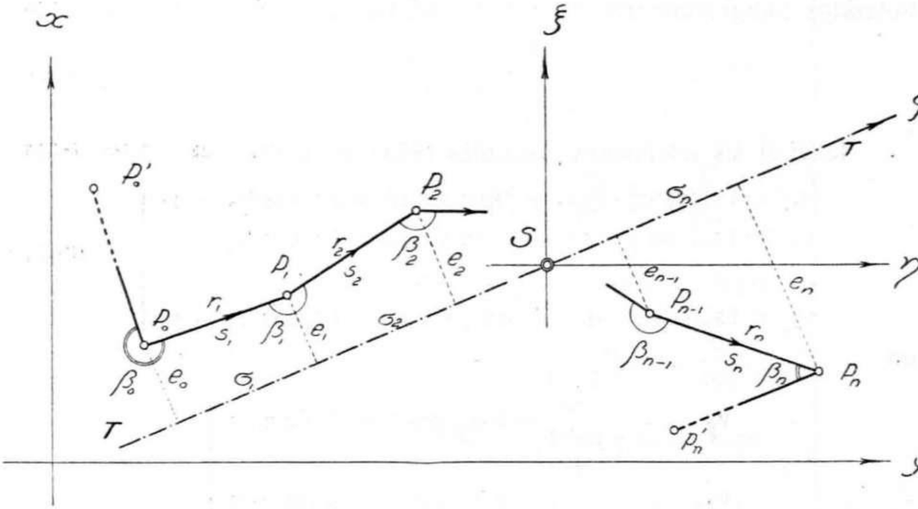
tipa izteiksmes nosakamas grafiski šādā kārtā.

Ar neizlīdzinātiem leņķiem un malu garumiem veido gājiena skici, tur atzīmējot arī virsotņu sistemas smaguma centru S. Caur šo punktu novelk taisni T (25. att.) pēc pirmās formulas (855) aprēķinātā virzienā φ. No šīs linijas T skaitītie gājiena atsevišķo malu virzieni tad ir $(r_1 - \varphi)$, $(r_2 - \varphi)$, ..., $(r_n - \varphi)$. Tā tad gājiena malu ortogonalās projekcijas uz taisni T ir

$$\left.\begin{array}{l} s_1 \cos(r_1 - \varphi) = \sigma_1 \\ s_2 \cos(r_2 - \varphi) = \sigma_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_n \cos(r_n - \varphi) = \sigma_n \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (860).$$

Bez tam viegli pierādams, ka virsotnes P_i atstatums no taisnes T ir

$$\eta_i \cos\varphi - \xi_i \sin\varphi = e_i \quad \dots\dots\dots \quad (861),$$



25. attēls.

kur ξ_i un η_i apzīmē no sākuma punkta S skaitītās virsotnes P_i koordinatas. Pēc šī parauga nosakami visām atsevišķām virsotnēm atbilstošie elementi

$$\left.\begin{array}{l} \eta_0 \cos\varphi - \xi_0 \sin\varphi = e_0 \\ \eta_1 \cos\varphi - \xi_1 \sin\varphi = e_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \eta_{n-1} \cos\varphi - \xi_{n-1} \sin\varphi = e_{n-1} \\ \eta_n \cos\varphi - \xi_n \sin\varphi = e_n \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (862),$$

izmērot attiecīgo virsotņu atstatumus no taisnes T.

Tādā kārtā, ar minētās gājiena skices palīdzību, grafiski ar pietiekošo noteiktību nosakami visām malām resp. visām virsotnēm atbilstošie elementi σ un e. Sakarā ar to, ievērojot (859), formulas (857) un (858) rakstam izlabojumu v_s un v_β noteikšanai pēc minētā pusgrafiskā paņēmiena piemērotā veidā:

$$\left.\begin{array}{l} v_{s_1} = t\,\sigma_1 \\ v_{s_2} = t\,\sigma_2 \\ \cdots\cdots \\ v_{s_n} = t\,\sigma_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (863)$$

un

$$\left.\begin{array}{l} v_{\beta_0} = -\frac{f_\beta}{n+1} - t\,q\,e_0 \\ v_{\beta_1} = -\frac{f_\beta}{n+1} - t\,q\,e_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{\beta_{n-1}} = -\frac{f_\beta}{n+1} - t\,q\,e_{n-1} \\ v_{\beta_n} = -\frac{f_\beta}{n+1} - t\,q\,e_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (864).$$

Ar malu garumu un leņķu izlīdzinātām vērtībām atkārtojot gājiena aprēķinu, virsotņu koordinatas nosakamas saskaņā ar pieslēgpunktu dotām koordinatām.

Var arī, neatkārtojot pilnībā gājiena aprēķinu, nosacīt izlabojumus, kuri jāpieliek ar neizlīdzinātiem novērojumiem atrastām virsotņu koordinatām, lai tās atbilstu izlīdzinātiem novērojumiem. Šie izlabojumi v_x, v_y nosakami kā izlīdzināšanas tiešā rezultatā atrasto izlabojumu v_s, v_β funkcijas, pakāpeniski atvasinot no v_s, v_β atbilstošos virzienu r un koordinatu pieaugumu $\Delta x, \Delta y$ izlabojumus v_r resp. $v_{\Delta x}$, $v_{\Delta y}$, un, beidzot, minētos koordinatu x, y izlabojumus v_x, v_y.

Ievērojot (817), virzienu izlabojumi ir

$$\left.\begin{array}{l} v_{r_1} = -v_{\beta_0} \\ v_{r_2} = v_{r_1} - v_{\beta_1} = -(v_{\beta_0} + v_{\beta_1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{r_n} = v_{r_{n-1}} - v_{\beta_{n-1}} = -(v_{\beta_0} + v_{\beta_1} + \ldots\ldots + v_{\beta_{n-1}}) \end{array}\right\} \quad (865).$$

Tālāk, argumentu r un s funkciju

$$\begin{array}{c} \log\cos r \\ \log\sin r \\ \log s \end{array}$$

izlabojumi nosakami pēc parauga

$$\left.\begin{array}{l} v_{\log\cos r_i} = D_{\log\cos r_i}\, v_{r_i} \\ v_{\log\sin r_i} = D_{\log\sin r_i}\, v_{r_i} \\ v_{\log s_i} = D_{\log s_i}\, v_{s_i} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (866),$$

kur $D_{\log \cos r_i}$, $D_{\log \sin r_i}$, $D_{\log s_i}$ apzīmē attiecīgās logaritmu tabulas diferences. Funkciju

$$\log \Delta x_i = \log s_i + \log \cos r_i$$
$$\log \Delta y_i = \log s_i + \log \sin r_i$$

izlabojumi ir

$$\left.\begin{aligned} v_{\log \Delta x_i} &= v_{\log s_i} + v_{\log \cos r_i} \\ v_{\log \Delta y_i} &= v_{\log s_i} + v_{\log \sin r_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (867).$$

Beidzot, apzīmējot attiecīgās logaritmu tabulas diferences ar $D_{\log \Delta x_i}$, $D_{\log \Delta y_i}$, atrodam koordinatu pieaugumu Δx_i, Δy_i izlabojumus

$$\left.\begin{aligned} v_{\Delta x_i} &= \frac{v_{\log \Delta x_i}}{D_{\log \Delta x_i}} \\ v_{\Delta y_i} &= \frac{v_{\log \Delta y_i}}{D_{\log \Delta y_i}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (868),$$

un ar tiem aprēķinam meklētos

$$\left.\begin{aligned} v_{x_1} &= v_{\Delta x_1} \\ v_{x_2} &= v_{x_1} + v_{\Delta x_2} = v_{\Delta x_1} + v_{\Delta x_2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{x_n} &= v_{x_{n-1}} + v_{\Delta x_n} = v_{\Delta x_1} + v_{\Delta x_2} + \ldots\ldots + v_{\Delta x_n} \\ &\text{un} \\ v_{y_1} &= v_{\Delta y_1} \\ v_{y_2} &= v_{y_1} + v_{\Delta y_2} = v_{\Delta y_1} + v_{\Delta y_2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{y_n} &= v_{y_{n-1}} + v_{\Delta y_n} = v_{\Delta y_1} + v_{\Delta y_2} + \ldots\ldots + v_{\Delta y_n} \end{aligned}\right\} \quad (869).$$

§ 72. Piemērs.

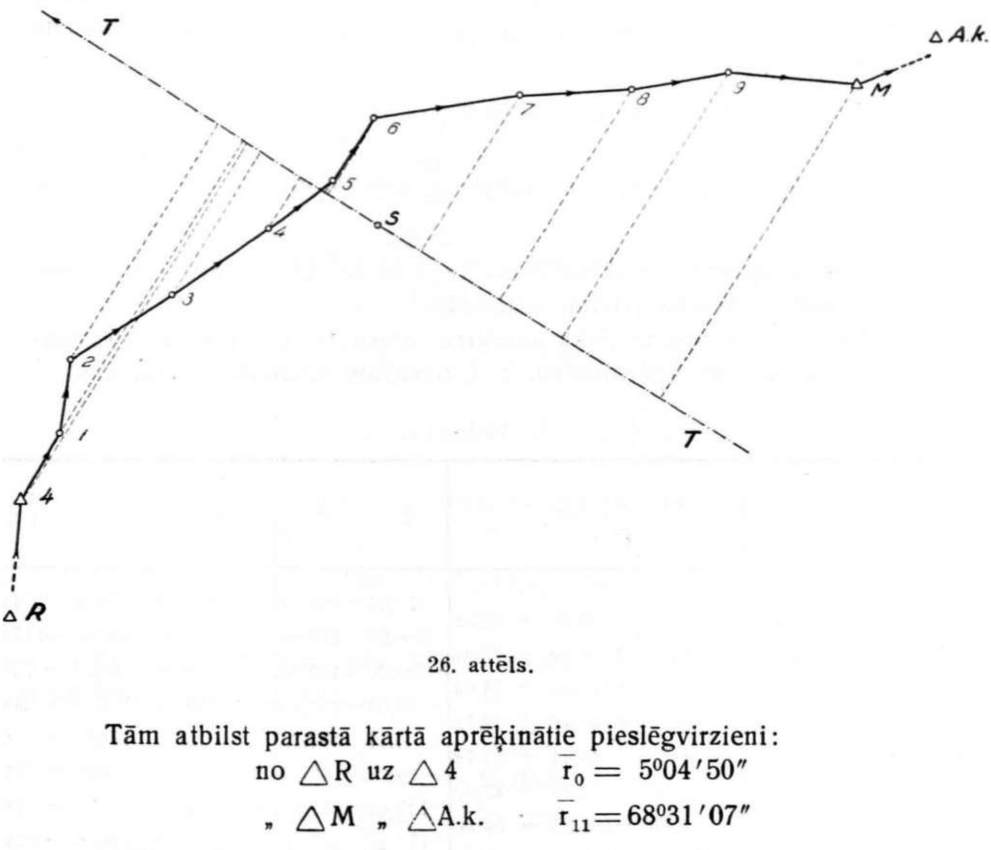
Izlīdzināsim pēc iepriekšējā paragrafā aizrādītā paņēmiena L.U. Inženierzinātņu fakultates Ģeodezijas nozares studentu 1937. gada pavasarī uzmērīto teodolita gājienu △4 — ⊙1 — ⊙2 — ⊙3 — ⊙4 — ⊙5 — — ⊙6 — ⊙7 — ⊙8 — ⊙9 — △M (26. att.), kurš savieno trigonometriskos punktus „Z. M. № 4“ (△4) un „Mežmala“ (△M), pie kam no minētiem punktiem △4 un △M redzami trigonometriskie punkti „Rinuži“ (△R) resp. „Augstā kāpa“ (△A.k.). Šo trigonometrisko punktu dotās koordinatas ir

$x_4 \quad = + 13312{,}95$ m $\qquad y_4 \quad = - 602{,}51$ m

$x_M \quad = + 13865{,}86 \qquad y_M \quad = + 523{,}17$

$x_R \quad = + 10212{,}67 \qquad y_R \quad = - 878{,}14$

$x_{A.k.} = + 14011{,}11 \qquad y_{A.k.} = + 892{,}26$



26. attēls.

Tām atbilst parastā kārtā aprēķinātie pieslēgvirzieni:

no $\triangle$R uz $\triangle$4 $\quad \bar{r}_0 = 5^0 04'50''$

„ $\triangle$M „ $\triangle$A.k. $\quad \bar{r}_{11} = 68^0 31'07''$

Gājienā izmērītie malu garumi s un labie poligona leņķi resp. minētiem pieslēgvirzieniem atbilstošie pieslēgleņķi β atzīmēti koordinatu aprēķina (piel. IV) stabiņos 2 un 8. Ar šiem neizlīdzinātiem novērojumiem izdarītais virsotņu koordinatu x, y aprēķins parādīts stabiņos 11, 14, 17, 19, 23, 25. Sakarā ar šo aprēķinu atrastas un atzīmētas attiecīgo stabiņu apakšā pretrunas f_β, f_x, f_y; arī aprēķinātas virsotņu sistemas smaguma centra S koordinatas x_s, y_s un no šī smaguma centra S skaitītās virsotņu koordinatas ξ, η (stabiņi 27 un 28).

Ievērojot līdzīgos apstākļos notikušu poligonometrisku darbu noteiktības aprēķina rezultatus, svaru aprēķinam a priori pieņemtas šādas vidējās kļūdas:

$$m_\beta = \pm 9''$$
$$m = \pm 0{,}0108 \text{ m}$$

pie kam vidējā kļūda m attiecināta uz 1 metru, t. i. uz to vienību, kura lietota novēroto resp. gājiena provizoriskā aprēķinā nosacīto garumu izteikšanai. Minētām a priori pieņemtām vidējām kļūdām atbilstošie svari ir

$$p_s = \frac{1}{s}$$

bez tam

$$p_\beta = \frac{m^2}{m_\beta^2} = 143 \times 10^{-8}$$
$$q = 3{,}385$$

pie kam pieņemts $\rho = 206265''$ saskaņā ar to, ka pretruna f_β un leņķu izlabojumi v_β skaitas izteikti sekundās.

Ar gājiena provizoriskā aprēķinā atrastiem koordinatu pieaugumiem Δx, Δy un koordinatām ξ, η nosakam sekojošos elementus:

1. tabula.

Δx	Δy	s	$\frac{\Delta x \Delta x}{s}$	$\frac{\Delta y \Delta y}{s}$	$\frac{\Delta x \Delta y}{s}$	ξ	η	$\xi\xi$	$\eta\eta$	$\xi\eta$
						−373,01	−466,77	+139137	+ 217874	+174110
+92,08	+ 49,88	104,72	+ 80,96	+ 23,76	+ 43,86	−280,93	−416,89	+ 78922	+ 173797	+117117
+97,93	+ 16,05	99,24	+ 96,65	+ 2,59	+ 15,84	−183,00	−400,84	+ 33489	+ 160673	+ 73354
+89,36	+135,75	162,52	+ 49,13	+113,39	+ 74,64	− 93,64	−265,09	+ 8768	+ 70273	+ 24823
+88,67	+132,82	159,70	+ 49,24	+110,46	+ 73,75	− 4,97	−132,27	+ 25	+ 17495	+ 657
+64,60	+ 86,60	108,04	+ 38,63	+ 69,41	+ 51,78	+ 59,63	− 45,67	+ 3556	+ 2086	− 2723
+83,98	+ 57,29	101,66	+ 69,37	+ 32,29	+ 47,33	+143,61	+ 11,62	+ 20624	+ 135	+ 1669
+29,84	+195,88	198,14	+ 4,49	+193,65	+ 29,50	+173,45	+207,50	+ 30085	+ 43056	+ 35991
+ 5,70	+153,51	153,62	+ 0,21	+153,41	+ 5,70	+179,15	+361,01	+ 32095	+ 130328	+ 64675
+20,78	+127,00	128,69	+ 3,35	+125,34	+ 20,51	+199,93	+488,01	+ 39972	+ 238154	+ 97568
−20,12	+171,34	172,52	+ 2,35	+170,17	− 19,99	+179,81	+659,35	+ 32332	+ 434742	+118558
			+394,38	+994,47	+342,92			+419005	+1488613	+705799
			$= \left[\frac{\Delta x \Delta x}{s}\right]$	$= \left[\frac{\Delta y \Delta y}{s}\right]$	$= \left[\frac{\Delta x \Delta y}{s}\right]$			$=[\xi\xi]$	$=[\eta\eta]$	$=[\xi\eta]$
								$\frac{q}{\rho} = 164 \times 10^{-7}$		
								$[\xi\xi]\frac{q}{\rho} =$	$[\eta\eta]\frac{q}{\rho} =$	$[\xi\eta]\frac{q}{\rho} =$
								+ 6,88	+ 24,43	+ 11,58

Ar tiem aprēķinam

$$\left\{\left[\frac{\Delta x \Delta x}{s}\right] + [\eta\eta]\,\frac{q}{\rho}\right\} = +\,394{,}38 + 24{,}43 = +\;\;418{,}81$$

$$\left\{\left[\frac{\Delta y \Delta y}{s}\right] + [\xi\xi]\,\frac{q}{\rho}\right\} = +\,994{,}47 + \;\;6{,}88 = +\,1001{,}35$$

$$\left\{\left[\frac{\Delta x \Delta y}{s}\right] - [\xi\eta]\,\frac{q}{\rho}\right\} = +\,342{,}92 - 11{,}58 = +\;\;331{,}34$$

$$F_x = f_x - \frac{\eta_n}{\rho} f_\beta = -\;\;0{,}09 + \;0{,}12 = +\;\;0{,}03$$

$$F_y = f_y + \frac{\xi_n}{\rho} f_\beta = +\;\;0{,}44 - \;0{,}03 = +\;\;0{,}41$$

Tā tad pēc formulām (850) un (851)

$$N = 418{,}81 \times 1001{,}35 - 331{,}34^2 = 419375 - 109786 = 309589$$

$$k_2 = \frac{1}{N}(331{,}34 \times 0{,}41 - 1001{,}35 \times 0{,}03) =$$

$$= \frac{1}{N}(135{,}85 - 30{,}04) = +\,342 \times 10^{-6}$$

$$k_3 = \frac{1}{N}(331{,}34 \times 0{,}03 - 418{,}81 \times 0{,}41) =$$

$$= \frac{1}{N}(9{,}94 - 171{,}71) = -\,523 \times 10^{-6}$$

Ar šīm korrelatām pēc formulām (852) un (853) nosakam malu s un leņķu β izlabojumus:

$$
\begin{aligned}
v_{s_1} &= +\,92{,}08\,k_2 + \;\;49{,}88\,k_3 = +\,0{,}01 \text{ m}\\
v_{s_2} &= +\,97{,}93\,k_2 + \;\;16{,}05\,k_3 = +\,0{,}02\\
v_{s_3} &= +\,89{,}36\,k_2 + 135{,}75\,k_3 = -\,0{,}04\\
v_{s_4} &= +\,88{,}67\,k_2 + 132{,}82\,k_3 = -\,0{,}04\\
v_{s_5} &= +\,64{,}60\,k_2 + \;\;86{,}60\,k_3 = -\,0{,}02\\
v_{s_6} &= +\,83{,}98\,k_2 + \;\;57{,}29\,k_3 = -\,0{,}00\\
v_{s_7} &= +\,29{,}84\,k_2 + 195{,}88\,k_3 = -\,0{,}09\\
v_{s_8} &= +\;\;5{,}70\,k_2 + 153{,}51\,k_3 = -\,0{,}08\\
v_{s_9} &= +\,20{,}78\,k_2 + 127{,}00\,k_3 = -\,0{,}06\\
v_{s_{10}} &= -\,20{,}12\,k_2 + 171{,}34\,k_3 = -\,0{,}10
\end{aligned}
$$

un

$$v_{\beta_0} = -\,\frac{f_\beta}{11} + (+466{,}77\,k_2 - 373{,}01\,k_3)q = +\,3{,}5'' + 1{,}2'' = +\;\;5''$$

$$v_{\beta_1} = -\frac{f_\beta}{11} + (+416,89\,k_2 - 280,93\,k_3)q = +3,5'' + 1,0'' = +\ 4''$$

$$v_{\beta_2} = -\frac{f_\beta}{11} + (+400,84\,k_2 - 183,00\,k_3)q = +3,5 + 0,8 = +\ 4$$

$$v_{\beta_3} = -\frac{f_\beta}{11} + (+265,09\,k_2 - 93,64\,k_3)q = +3,5 + 0,5 = +\ 4$$

$$v_{\beta_4} = -\frac{f_\beta}{11} + (+132,27\,k_2 - 4,97\,k_3)q = +3,5 + 0,2 = +\ 4$$

$$v_{\beta_5} = -\frac{f_\beta}{11} + (+45,67\,k_2 + 59,63\,k_3)q = +3,5 - 0,0 = +\ 4$$

$$v_{\beta_6} = -\frac{f_\beta}{11} + (-11,62\,k_2 + 143,61\,k_3)q = +3,5 - 0,3 = +\ 3$$

$$v_{\beta_7} = -\frac{f_\beta}{11} + (-207,50\,k_2 + 173,45\,k_3)q = +3,5 - 0,5 = +\ 3$$

$$v_{\beta_8} = -\frac{f_\beta}{11} + (-361,01\,k_2 + 179,15\,k_3)q = +3,5 - 0,7 = +\ 3$$

$$v_{\beta_9} = -\frac{f_\beta}{11} + (-488,01\,k_2 + 199,93\,k_3)q = +3,5 - 0,9 = +\ 3$$

$$v_{\beta_{10}} = -\frac{f_\beta}{11} + (-659,35\,k_2 + 179,81\,k_3)q = +3,5 - 1,1 = \underline{+\ 2}$$

$$+39''$$

Parādīsim arī vēl izlabojumu v_s un v_β noteikšanu pēc pusgrafiskā paņēmiena. Ar atrastām korrelatām k_2 un k_3 aprēķinam

$\log k_3 = 6,71\,850_n$	$\log k_2 = 6,53\,403$	$\log k_3 = 6,71\,850_n$
$\log k_2 = \underline{6,53\,403}$	$\log \cos\varphi = \underline{9,73\,822}$	$\log \sin\varphi = \underline{9,92\,269_n}$
$\log \mathrm{tg}\,\varphi = 0,18\,447_n$	$\log t = 6,79\,581$	$\log t = 6,79\,581$
$\varphi = 303^0 11'$	$t = 635 \times 10^{-6}$	

Pagatavotā gājiena skicē atzīmējam virsotņu sistemas smaguma centru S, un caur šo punktu aprēķinātā virzienā φ novelkam taisni T. No visām virsotnēm novelkot stateņus šai taisnei, skicē izmēram elementus σ un e, skaitot tos pozitivus virzienā φ resp. pa labi no šī virziena (26. att.). Atrodam

	$e_0 = -572$ m
$\sigma_1 = +\ 8$ m	$e_1 = -465$
$\sigma_2 = +\ 40$	$e_2 = -375$
$\sigma_3 = -\ 69$	$e_3 = -226$
$\sigma_4 = -\ 63$	$e_4 = -\ 80$
$\sigma_5 = -\ 38$	$e_5 = +\ 20$

$$\sigma_6 = -\ \ 2\,\text{m} \qquad e_6 = +122\,\text{m}$$
$$\sigma_7 = -148 \qquad e_7 = +251$$
$$\sigma_8 = -121 \qquad e_8 = +338$$
$$\sigma_9 = -\ \ 95 \qquad e_9 = +425$$
$$\sigma_{10} = -153 \qquad e_{10} = +502$$

Bez tam aprēķinam

$$\frac{f_\beta}{11} = -3{,}5''$$
$$tq = +0{,}00212$$

Ieliekot šos skaitļus formulās (863) un (864), atrastie v_s un v_β centimetros resp. veselās sekundās noapaļotā veidā neatšķiras no atbilstošiem agrāk pēc formulām (852) un (853) aprēķinātiem izlabojumiem.

Atraduši izlabojumus v_s un v_β, no tiem iepriekšējā paragrafa beigās aizrādītā veidā atvasinam atbilstošos s un β funkciju izlabojumus, kā tas parādīts koordinatu aprēķina (piel. IV) stabiņos 3, 6, 9, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 24, 26. Beidzot, ievērojot attiecīgos izlabojumus, aprēķinam izlīdzinātos leņķus $\overline{\beta}$, malu garumus $\overline{s}$ un atbilstošos virzienus $\overline{r}$, koordinatu pieaugumus $\overline{\Delta x}$, $\overline{\Delta y}$ un virsotņu koordinatas $\overline{x}$, $\overline{y}$; un izlīdzināšanas rēķina galīgās kontroles nolūkā pārbaudam, vai šie rezultati ir vajadzīgā saskaņā ar dotiem pieslēgelementiem.

Svara vienības vidējās kļūdas aprēķins notiek parastā kārtā: ievērojot pieņemtos svarus

$$p_s = \frac{1}{s}$$
$$p_\beta = \frac{m^2}{m_\beta^2} = \frac{0{,}0108^2}{9^2} = 143\times10^{-8}$$

aprēķinam

	v_s	v_s^2	p_s	$10^8 p_s v_s v_s$
s_1	+0,01	0,0001	0,0095	95
s_2	+0,02	0,0004	0,0101	404
s_3	−0,04	0,0016	0,0061	976
s_4	−0,04	0,0016	0,0062	992
s_5	−0,02	0,0004	0,0093	372
s_6	−0,00	0,0000	0,0098	0
s_7	−0,09	0,0081	0,0051	4131

	v_β	v_β^2
β_0	+5	25
β_1	+4	16
β_2	+4	16
β_3	+4	16
β_4	+4	16
β_5	+4	16
β_6	+3	9

	v_s	v_s^2	p_s	$10^8 p_s v_s v_s$
s_8	$-0,08$	0,0064	0,0065	4160
s_9	$-0,06$	0,0036	0,0078	2808
s_{10}	$-0,10$	0,0100	0,0058	5800
				19738

	v_β	v_β^2
β_7	$+3$	9
β_8	$+3$	9
β_9	$+3$	9
β_{10}	$+2$	4
		145

$$10^8[p_\beta v_\beta v_\beta] = 10^8 p_\beta [v_\beta v_\beta] = 20735$$

$$[pvv] = \frac{10^8[p_s v_s v_s] + 10^8[p_\beta v_\beta v_\beta]}{10^8} = \frac{19738 + 20735}{10^8} = \frac{40473}{10^8}$$

Tā tad

$$m = \pm \sqrt{\frac{40473}{3 \times 10^8}} = \pm 0,0116\,m$$

$$m_\beta = \pm \frac{0,0116}{\sqrt{143 \times 10^{-8}}} = \pm 9,7''$$

Kā redzams, šie rezultati apmierinoši saskan ar a priori pieņemtām vidējām kļūdām m un m_β.

Salīdzināšanas nolūkā tas pats teodolita gājiens aprēķināts resp. izlīdzināts arī pēc parastā paņēmiena, izlīdzinot leņķus tikai attiecībā uz noteikumu (816), ar tādā ziņā izlīdzinātiem leņķiem aprēķinot koordinatu pieaugumus, un iznākušās koordinatu pretrunas sadalot uz attiecīgiem koordinatu pieaugumiem proporcionali atbilstošo malu garumiem. Atrastiem koordinatu pieaugumu izlabojumiem sagrozot ar „izlīdzinātiem" leņķiem un izmērītiem malu garumiem aprēķinātos koordinatu pieaugumus, rodas zinamas nesaskaņas starp izlīdzinātiem koordinatu pieaugumiem un atbilstošām koordinatām no vienas puses, un izmērītiem malu garumiem un attiecībā uz noteikumu (816) parciali izlīdzinātiem leņķiem no otrās puses. Tāpēc salīdzinot pēc parastā paņēmiena izlīdzinātā gājiena malu garumus un leņķus ar atbilstošiem elementiem stingri izlīdzinātā gājienā, parastā kārtā izlīdzinātā gājienā šie elementi jālieto ar izlīdzinātiem koordinatu pieaugumiem saskaņotā, t. i. no tiem pazīstamā kārtā atvasinātā veidā. Tādā veidā aprēķināti 2. tabulā atzīmētie leņķi $\bar{\beta}$, virzieni $\bar{r}$ un malu garumi $\bar{s}$; tā tad šie elementi saskan ar tabulā atzīmētiem koordinatu pieaugumiem $\overline{\Delta x}$, $\overline{\Delta y}$ resp. koordinatām $\bar{x}$, $\bar{y}$ pēc parastā paņēmiena izlīdzinātā gājienā. Ar δ apzīmētas starpības, par kurām pēc parastā paņēmiena izlīdzinātā gājiena elementi $\bar{\beta}$, $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\overline{\Delta x}$, $\overline{\Delta y}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ atšķiras no atbilstošiem elementiem stingri izlīdzinātā gājienā.

2. tabula.

Punkti	Leņķi $\bar{\beta}$	δ_β	Virzieni $\bar{r}$	δ_r	Malu garumi $\bar{s}$	δ_s	Koordinatu pieaugumi $\overline{\Delta x}$	$\delta_{\Delta x}$	$\overline{\Delta y}$	$\delta_{\Delta y}$	Koordinatas $\bar{x}$	δ_x	$\bar{y}$	δ_y
	° ′ ″	″	° ′ ″	″	m	cm	m	cm	m	cm	m	cm	m	cm
△R														
			5 04 50											
△4	156 39 02	+60									+13312,95		−602,51	
			28 25 48	−60	104,71	−2	+ 92,08	−1	+ 49,85	−3				
⊙1	199 08 43	+ 5									+13405,03	−1	−552,66	− 3
			9 17 05	−65	99,23	−3	+ 97,93	−2	+ 16,01	−4				
⊙2	132 39 07	−35									+13502,96	−3	−536,65	− 7
			56 37 58	−30	162,47	−1	+ 89,36	+1	+135,69	−2				
⊙3	180 22 21	− 5									+13592,32	−2	−400,96	− 9
			56 15 37	−25	159,66	0	+ 88,68	+2	+132,77	−1				
⊙4	182 59 55	+11									+13681,00	0	−268,19	−10
			53 15 42	−36	108,01	−1	+ 64,61	+1	+ 86,56	−2				
⊙5	198 58 44	+10									+13745,61	+1	−181,63	−12
			34 16 58	−46	101,64	−2	+ 83,98	0	+ 57,25	−3				
○6	132 57 10	−47									+13829,59	+1	−124,38	−15
			81 19 48	+ 1	198,08	+3	+ 29,86	+1	+195,82	+3				
⊙7	173 27 52	− 5									+13859,45	+2	+ 71,44	−12
			87 51 56	+ 6	153,58	+4	+ 5,72	0	+153,47	+4				
⊙8	187 10 11	+17									+13865,17	+2	+224,91	− 8
			80 41 45	−11	128,65	+2	+ 20,80	+1	+126,96	+2				
⊙9	164 00 01	−36									+13885,97	+3	+351,87	− 6
			96 41 44	+25	172,48	+6	− 20,11	−3	+171,30	+6				
△M	208 10 37	+25									+13865,86		+523,17	
			68 31 07											
△Ak														
	1916 33 43	0					+552,91	0	+ 1125,68	0				

§ 73. Stieptā poligongājiena garenkļūda un šķērskļūda.

Lai ar izmērītiem resp. iepriekš pēc parastā paņēmiena parciali izlīdzinātiem elementiem, malu garumiem un virzieniem resp. malu ieslēgtiem leņķiem, aprēķinātās poligongājiena virsotnes koordinatas ir x_i, y_i. Tās no šīs virsotnes pareizām koordinatām $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$ vispārīgi atšķiras par kādām pieņemtās koordinatu sistemas asu virzienos skaitītām koordinatu pretrunām

$$\left.\begin{array}{l} f_{x_i} = x_i - \overline{x}_i \\ f_{y_i} = y_i - \overline{y}_i \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (870).$$

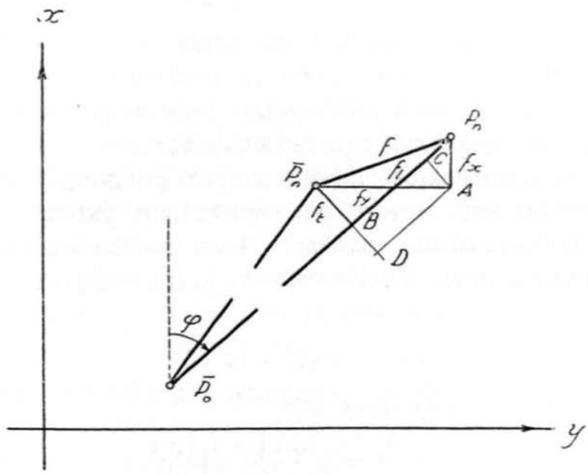
Lai P_i un $\overline{P}_i$ ir koordinatām x_i, y_i un $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$ atbilstošie punkti. Tad atstatums f_i starp šiem punktiem izsaka poligongājiena l i n e a r o p r e t r u n u attiecīgā vietā, pie kam koordinatu pretrunas f_{x_i}, f_{y_i} uzskatamas par šī atstatuma ortogonalām projekcijām uz koordinatu asīm. Tā tad

$$f_i = \sqrt{f_{x_i}^{\,2} + f_{y_i}^{\,2}} \quad \ldots \ldots \quad (871).$$

Pretrunās f_{x_i}, f_{y_i}, f_i izpaužas koordinatu x_i, y_i noteikšanai lietoto malu garumu un virzienu resp. malu ieslēgto leņķu kļūdu kopīgā ietekme. Uzskatot to par rezultējošo no divām komponentām — garumu mērijumu kļūdu ietekmes un virzienu resp. leņķu novērojumu kļūdu ietekmes, vispārīgi nav iespējams nosacīt atsevišķi šīs abas komponentas. Tas iespējams tikai tanī gadijumā, kad ir t. s. s t i e p t s p o l i g o n g ā j i e n s ar apmēram vienādiem malu virzieniem resp. 180^0 tuviem leņķiem. Tādā gadijumā pretrunu f_i var iedomāties saliktu divās komponentās — gājiena garenvirzienā skaitītā g a r e n k ļ ū d ā f_{l_i} un tai stateniskā š ķ ē r s k ļ ū d ā f_{t_i}. Praktiski pietiekošā tuvinājumā var pieņemt, ka garenkļūdā f_{l_i} izpaužas tikai garumu mērijumu kļūdu, bet šķērskļūdā f_{t_i} — tikai virzienu resp. leņķu novērojumu kļūdu ietekme. Attiecinot sekojošo iztirzājumu uz stiepta poligongājiena gala virsotni, parādīsim, kādā veidā minētā garenkļūda un šķērskļūda atvasinama no atbilstošām, pieņemtā koordinatu sistemā skaitītām, koordinatu pretrunām.

Lai $\overline{P}_0$ (27.att.) ir ar dotām koordinatām $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$ noteiktais poligongājiena sākuma punkts, bet P_n tas iedomātais punkts, kurš atbilst ar neizlīdzinātiem resp. parciali izlīdzinātiem novērojumiem aprēķinātām gala virsotnes koordinatām x_n, y_n. Šeit pieņemtā stiepta gājiena gadijumā no $\overline{P}_0$ uz P_n novilktās taisnes no koordinatu pozitivās x-ass skaitītais virziens φ tad uzskatams par gājiena vispārējo virzienu. Kā zinams,

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x_n - \bar{x}_0}{\sqrt{(x_n-\bar{x}_0)^2 + (y_n - \bar{y}_0)^2}} = \frac{[\Delta x]}{\sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}} \\ \sin\varphi &= \frac{y_n - \bar{y}_0}{\sqrt{(x_n-\bar{x}_0)^2 + (y_n - \bar{y}_0)^2}} = \frac{[\Delta y]}{\sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}} \end{aligned}\right\} \quad (872).$$



27. attēls.

Pieņemot, ka $\bar{P}_n$ ir gala virsotnes pareizam stāvoklim atbilstošais punkts, atstatums $\bar{P}_n P_n$ izsaka linearo pretrunu f gājiena galā. Projicējot šo atstatumu uz koordinatu asīm, atrodam atbilstošās koordinatu pretrunas f_x un f_y, bet projicējot uz $\bar{P}_0 P_n$ un tai statenisku asi — garenkļūdu f_l un šķērskļūdu f_t. Lai parādītu f_x, f_y un f_l, f_t 27. attēlā, tur novilktas taisnes $P_n A$ un $\bar{P}_n A$ paralleli x- resp. y- asij, $\bar{P}_n D \perp \bar{P}_0 P_n$, $AD \parallel \bar{P}_0 P_n$ un $AC \perp \bar{P}_0 P_n$. Tad

$$\left.\begin{aligned} f_x &= P_n A \\ f_y &= \bar{P}_n A \\ \text{un} \quad f_l &= P_n B = P_n C + CB = P_n C + AD \\ f_t &= \bar{P}_n B = \bar{P}_n D - BD = \bar{P}_n D - AC \end{aligned}\right\} \quad (873).$$

No taisnleņķu trijstūriem $\triangle P_n AC$ un $\triangle \bar{P}_n AD$ ar leņķiem $\measuredangle A P_n C = \varphi$ un $\measuredangle A \bar{P}_n D = \varphi$

$$\left.\begin{aligned} P_n C &= P_n A \cos\varphi = f_x \cos\varphi \\ AC &= P_n A \sin\varphi = f_x \sin\varphi \\ \text{un} \quad \bar{P}_n D &= \bar{P}_n A \cos\varphi = f_y \cos\varphi \\ AD &= \bar{P}_n A \sin\varphi = f_y \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (874).$$

Tā tad, ievērojot (872) — (874), atrodam

$$\left.\begin{aligned} f_l = f_x \cos\varphi + f_y \sin\varphi = \frac{f_x [\Delta x] + f_y [\Delta y]}{\sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}} \\ f_t = f_y \cos\varphi - f_x \sin\varphi = \frac{f_y [\Delta x] - f_x [\Delta y]}{\sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}} \end{aligned}\right\} \quad (875).$$

Stieptā gājiena garenkļūda f_l un šķērskļūda f_t var noderēt par zinamu noteiktības mēru attiecīgiem garumu resp. virzienu vai leņķu mērijumiem. Tāpēc dažas techniskas instrukcijas nosaka uz šīm kļūdām attiecīgās maksimalās pielaižamās normas. Bez tam pēc apmēram vienādos apstākļos mērītu stieptu poligongājienu garenkļūdām zinamā mērā var spriest par notikušiem garumu mērijumiem piemītošām sistematiskām kļūdām. Tam nolūkam katram gājienam nosaka uz garuma vienību attiecināto r e l a t i v o g a r e n k ļ ū d u, dalot garenkļūdu f_l ar gājiena perimetru

$$S = \sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2} \quad \ldots\ldots \quad (876).$$

Tā tad relativā garenkļūda ir

$$e = \frac{f_l}{S} = \frac{f_x [\Delta x] + f_y [\Delta y]}{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2} \quad \ldots\ldots \quad (877).$$

Lai n gājieniem atrastas relativās garenkļūdas $e_1, e_2, e_3, \ldots\ldots, e_n$. Pieņemsim, ka atsevišķos gājienos notikušiem uz garuma vienību attiecinātiem garumu mērijumiem ir nejaušās kļūdas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$, un bez tam visiem vienādā sistematiskā kļūda σ. Tad

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_1 + \sigma \\ e_2 &= \varepsilon_2 + \sigma \\ e_3 &= \varepsilon_3 + \sigma \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= \varepsilon_n + \sigma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (878).$$

Sumējot šīs izteiksmes, atrodam

$$[e] = [\varepsilon] + n\sigma \quad \ldots\ldots \quad (879).$$

Ja gājienu skaits n pietiekoši liels, var pieņemt, ka $[\varepsilon] = 0$; tad formulai (879) pārejot veidā

$$[e] = n\sigma \quad \ldots\ldots \quad (880),$$

no tās seko

$$\sigma = \frac{[e]}{n} \quad \ldots\ldots \quad (881).$$

Jāpiezīmē, ka tādā veidā notiekošā garumu mērijumu sistematiskās kļūdas atvasināšana no vairāku poligongājienu relativām garenkļūdām pamatota uz pieņēmuma, ka garenkļūdas f_l resp. e noteikšanai lietotās gājienu gala punktu dotās koordinatas ir absoluti pareizas, vai vismaz bez praktiski svarā krītošām sistematiskām kļūdām. Praksē tomēr bieži gadas, ka poligongājienu galos doto trigonometrisko punktu koordinatām ir kļūdas ar sistematiskām komponentām (piem., no trigonometriskā tīkla bazes kļūdas ietekmes), kas poligongājienu garenkļūdās izpaužas šķietamu sistematisku komponentu veidā. Tā tad bieži nevar noteikti zināt, cik pēc formulas (881) aprēķinātā sistematiskā kļūda σ zīmējas uz poligongājienos notikušiem garumu mērijumiem, vai radusies no pieslēgpunktu dotām koordinatām piemītošām sistematiskām kļūdām. Tomēr vispārīgi ieteicams aizrādītā kārtā nosacīt sistematisko kļūdu σ, un, pirms poligongājienos izmērīto malu garumu s lietošanas gājienu izlīdzināšanai un aprēķinam, izdarīt uz kļūdas σ ietekmi attiecīgos iepriekšējos izlabojumus, reizinot katru izmērīto malas garumu s ar $(1-\sigma)$.

Piemērs. Iepriekšējā paragrafā, aprēķinot teodolita gājienu $\triangle 4 - \odot 1 - \odot 2 - \odot 3 - \odot 4 - \odot 5 - \odot 6 - \odot 7 - \bigcirc 8 - \bigcirc 9 - \triangle M$ ar neizlīdzinātiem leņķiem un malu garumiem, atradam

$$f_x = -0{,}09 \text{ m} \qquad [\Delta x] = +\ 552{,}82 \text{ m}$$
$$f_y = +0{,}44 \text{ m} \qquad [\Delta y] = +1126{,}12 \text{ m}$$

Ar šiem elementiem aprēķinam

$$f_x[\Delta x] = -\ 49{,}75 \qquad f_y[\Delta x] = +243{,}24$$
$$f_y[\Delta y] = +495{,}49 \qquad f_x[\Delta y] = -101{,}35$$
$$f_x[\Delta x] + f_y[\Delta y] = +445{,}74 \qquad f_y[\Delta x] - f_x[\Delta y] = +344{,}59$$

$$[\Delta x]^2 = 305609{,}95$$
$$[\Delta y]^2 = 1269146{,}25$$
$$[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2 = 1574756{,}20$$
$$\sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2} = 1254{,}9 \text{ m}$$

Tā tad

$$f_l = \frac{+445{,}74}{1254{,}9} = +0{,}36 \text{ m}$$

$$f_t = \frac{+344{,}59}{1254{,}9} = +0{,}27 \text{ m}$$

un

$$e = \frac{+\ 445{,}74}{1574756} = +\ 0{,}00028$$

Kontroles nolūkā dubulti aprēķinam linearo pretrunu f, vienu reizi izejot no koordinatu pretrunām f_x un f_y, otro — no garenkļūdas f_l un šķērskļūdas f_t:

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{0{,}0081 + 0{,}1936} = \sqrt{0{,}2017} = 0{,}45 \text{ m}$$

$$f = \sqrt{f_l^2 + f_t^2} = \sqrt{0{,}1296 + 0{,}0729} = \sqrt{0{,}2025} = 0{,}45 \text{ m}$$

§ 74. Stieptā poligongājiena kļūdu teorija.

Kā jau minēts, stieptā poligongājiena īstā garenkļūda f_l rezultē no malu garumu s mērijumu īstām kļūdām, bet šķērskļūda f_t — no virzienu r resp. leņķu β mērijumu īstām kļūdām. Līdzīgā veidā garumu s vidējās kļūdas μ_s sakrājas vidējā garenkļūdā m_l, bet virzienu r vai leņķu β vidējās kļūdas μ_r resp. μ_β — vidējā šķērskļūdā m_t. Parasti šīs kļūdas m_l un m_t attiecina uz gājiena gala virsotni; bet, saprotams, tās var attiecināt arī uz jebkuru citu virsotni. No kļūdām m_l un m_t savukārt veidojas attiecīgās virsotnes stāvokļa vidējā kļūda

$$m = \pm \sqrt{m_l^2 + m_t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (882).$$

Lai atrastu likumu, pēc kura stieptā poligongājienā notikušo malu garumu un virzienu resp. leņķu mērijumu vidējās kļūdas sakrājas uz zinamu virsotni attiecīgā vidējā garenkļūdā un šķērskļūdā, apskatam stiepto poligongājienu $P_0 - P_1 - P_2 - \ldots - P_{i-1} - P_i - P_{i+1} - - \ldots - P_{n-1} - P_n$ (28. att.) ar apmēram vienāda garuma s malām, kur tieši novēroti vai ar tieši izmērītiem leņķiem β aprēķināti malu virzieni r. Vienkāršības dēļ, šo gājienu iedomājamies orientētu apmēram lietotās koordinatu sistemas x-ass virzienā. Tad katras gājiena virsotnes koordinatu x un y īstās kļūdas identiskas ar īsto garenkļūdu f_l un šķērskļūdu f_t gājiena attiecīgā vietā.

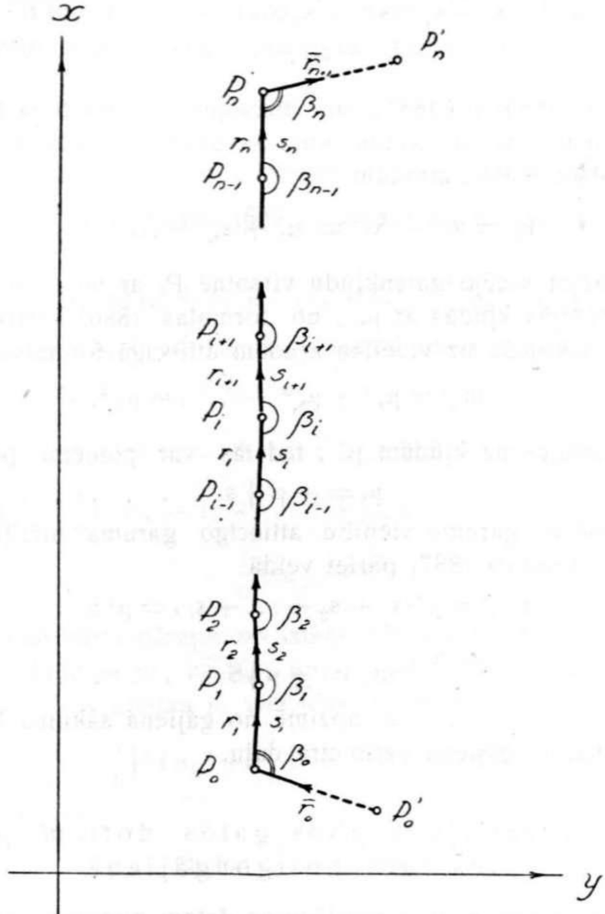
Minētais poligongājiens var būt busoles gājiens ar tieši izmērītiem elementiem s un r, vai teodolita gājiens ar tieši izmērītiem elementiem s un β. Bez tam kā vienā, tā arī otrā gadijumā var būt dažādi pieslēguma apstākļi. Tāpēc būs atsevišķi jāapskata daži svarīgāki, poligongājiena veida vai pieslēguma apstākļu ziņā dažādi, gadijumi.

a) Vidējā garenkļūda tikai vienā galā dotam punktam pieslēgtā poligongājienā.

Ar neizlīdzinātiem malu garumiem s un neizlīdzinātiem vai izlīdzinātiem, tieši izmērītiem vai netieši atrastiem virzieniem r aprēķinot virsotnes P_i koordinatu x_i, veidojam pazīstamo izteiksmi

$$x_i = \bar{x}_0 + s_1 \cos r_1 + s_2 \cos r_2 + \ldots + s_i \cos r_i \quad . \quad . \quad (883),$$

kur $\bar{x}_0$ apzīmē sākuma virsotnes P_0 doto, praktiski par absoluti pareizu uzskatīto koordinatu.



28. attēls.

Pieņemsim, ka funkcijas (883) argumentiem s un r ir atbilstošās īstās kļūdas ε_s un ε_r. Tad, veidojot $(s-\varepsilon_s)$ un $(r-\varepsilon_r)$ tipa starpības, atrodam īstos malu garumus un virzienus. Atvietojot izteiksmē (883) argumentus s un r ar to minētām īstām vērtībām, atrodam virsotnes P_i īsto koordinatu

$$\bar{x}_i = \bar{x}_0 + (s_1 - \varepsilon_{s_1}) \cos (r_1 - \varepsilon_{r_1}) + (s_2 - \varepsilon_{s_2}) \cos (r_2 - \varepsilon_{r_2}) + \ldots$$
$$\ldots + (s_i - \varepsilon_{s_i}) \cos (r_i - \varepsilon_{r_i}) \qquad (884).$$

Ievērojot, ka kļūdas ε_s un ε_r ir ļoti mazi lielumi, un ka šeit pieņemtos apstākļos visi virzieni r ļoti tuvi 0^0 jeb 360^0, izteiksme (884) praktiskiem nolūkiem pietiekošā tuvinājumā rakstama veidā

$$\bar{x}_i = \bar{x}_0 + s_1 \cos r_1 + s_2 \cos r_2 + \ldots + s_i \cos r_i - \\ - (\varepsilon_{s_1} + \varepsilon_{s_2} + \ldots + \varepsilon_{s_i}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (885).$$

Atņemot (885) no (883), un ievērojot, ka starpība $x_i - \bar{x}_i$ izsaka koordinatas x_i īsto kļūdu, kura savukārt identiska ar īsto garenkļūdu f_{l_i} virsotnē P_i, atrodam

$$f_{l_i} = x_i - \bar{x}_i = \varepsilon_{s_1} + \varepsilon_{s_2} + \ldots + \varepsilon_{s_i} \quad . \quad . \quad . \quad (886).$$

Apzīmējot vidējo garenkļūdu virsotnē P_i ar m_{l_i}, un garumu s mērijumu vidējās kļūdas ar μ_s, no formulas (886) pazīstamā kārtā atvasinama sekojošā uz vidējām kļūdām attiecīgā formula:

$$m_{l_i}^2 = \mu_{s_1}^2 + \mu_{s_2}^2 + \ldots\ldots + \mu_{s_i}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (887).$$

Kas zīmējas uz kļūdām μ_s, tad tās var pieņemt pēc parauga

$$\mu_s = \pm \mu \sqrt{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (888),$$

kur μ apzīmē uz garuma vienību attiecīgo garuma mērijuma vidējo kļūdu. Tad formula (887) pāriet veidā

$$m_{l_i}^2 = \mu^2 (s_1 + s_2 + \ldots + s_i) = \mu^2 S_i$$

jeb

$$m_{l_i} = \pm \mu \sqrt{S_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (889),$$

kur $S_i = s_1 + s_2 + \ldots\ldots + s_i$ apzīmē no gājiena sākuma P_0 līdz virsotnei P_i skaitīto gājiena perimetra daļu.

b) Vidējā garenkļūda abos galos dotiem punktiem pieslēgtā poligongājienā.

Ja poligongājienam ir pieslēgums dotam punktam ne tikai sākumā P_0, bet arī galā P_n, tad pēc (883) parauga aprēķinot gala virsotnes P_n koordinatu x_n un salīdzinot to ar šīs virsotnes doto koordinatu $\bar{x}_n$, nosakama koordinatas x_n īstā kļūda, kura šeit pieņemtos apstākļos identiska ar īsto garenkļūdu f_{l_n} gājiena gala virsotnē P_n. Pēc (886) parauga atrodam, ka šī garenkļūda ir

$$f_{l_n} = \varepsilon_{s_1} + \varepsilon_{s_2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{s_i} + \varepsilon_{s_{i+1}} + \ldots\ldots + \varepsilon_{s_n} \qquad (890).$$

Izlīdzinot gājienu pēc parastā paņēmiena, šo kļūdu sadala uz atsevišķiem koordinatu pieaugumiem Δx proporcionali atbilstošiem malu garumiem s. Tas nozīmē, ka ar neizlīdzinātiem koordinatu pieaugumiem aprēķinātā virsotnes P_i koordinata x_i tiek izlabota par

$-\frac{S_i}{S} f_{l_n}$, kur S_i un S ir gar gājiena perimetru skaitītie virsotņu P_i un P_n atstatumi no sākuma virsotnes P_0. Tā kā pēc taisītā pieņēmuma visām malām ir vienāds garums s, izteiksme $-\frac{S_i}{S} f_{l_n}$ identiska ar $-\frac{i}{n} f_{l_n}$. Tā tad pēc parastā kārtā notikušās koordinatu pretrunu likvidēšanas virsotnes P_i izlīdzinātā koordinata ir $x_i' = x_i - \frac{i}{n} f_{l_n}$, pie kam x_i nosacīta ar izteiksmi (883). Sakarā ar to garenkļūdas (886) vietā stājas

$$f_{l_i}' = \varepsilon_{s_1} + \varepsilon_{s_2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{s_i} - \frac{i}{n} f_{l_n} \quad \ldots\ldots \quad (891).$$

Ievērojot (890), šī izteiksme rakstama veidā

$$\begin{aligned} f_{l_i}' &= \varepsilon_{s_1} + \varepsilon_{s_2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{s_i} - \\ &- \frac{i}{n} (\varepsilon_{s_1} + \varepsilon_{s_2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{s_i} + \varepsilon_{s_{i+1}} + \ldots\ldots + \varepsilon_{s_n}) = \\ &= \left(1 - \frac{i}{n}\right) (\varepsilon_{s_1} + \varepsilon_{s_2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{s_i}) - \\ &- \frac{i}{n} (\varepsilon_{s_{i+1}} + \ldots\ldots + \varepsilon_{s_n}) \quad \ldots\ldots \quad (892). \end{aligned}$$

Pazīstamā kārtā pārejot no īstām kļūdām f_{l_i}' un ε_s uz atbilstošām vidējām kļūdām m_{l_i} un μ_s, un ievērojot, ka, malu vienādā garuma dēļ, arī visas kļūdas μ_s vienādas, atrodam

$$m_{l_i}^2 = \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 i \mu_s^2 + \left(\frac{i}{n}\right)^2 (n - i) \mu_s^2 = \frac{(n-i)\, i}{n} \mu_s^2$$

jeb, ievērojot (888),

$$m_{l_i}^2 = \frac{(n-i)\, i}{n} s \mu^2 \quad \ldots\ldots \quad (893).$$

Tā tad

$$m_{l_i} = \pm \mu \sqrt{\frac{(n-i)\, i}{n} s} \quad \ldots\ldots \quad (894),$$

jeb, atvietojot s ar $\frac{S}{n}$, kur S apzīmē perimetra kopgarumu,

$$m_{l_i} = \pm \frac{\mu}{n} \sqrt{(n-i)\, i\, S} \quad \ldots\ldots \quad (895).$$

c) Vidējā šķērskļūda tikai vienā galā dotam punktam pieslēgtā busoles gājienā.

Ar neizlīdzinātiem malu garumiem un virzieniem aprēķinot virsotnes P_i koordinatu y_i, atrodam

$$y_i = \bar{y}_0 + s_1 \sin r_1 + s_2 \sin r_2 + \ldots\ldots + s_i \sin r_i \quad . \quad . \quad (896),$$

kur $\bar{y}_0$ apzīmē sākuma virsotnes P_0 doto, praktiski par absoluti pareizu uzskatīto koordinatu. Iedomājoties funkcijas (896) argumentus izlabotus par tiem piemītošām īstām kļūdām, un ievērojot gadijumā „a" jau minētos šinī ziņā svarā krītošos apstākļus, nonākam pie šādas, virsotnes P_i īsto koordinatu noteicošās izteiksmes

$$\bar{y}_i = \bar{y}_0 + s_1 \sin r_1 + s_2 \sin r_2 + \ldots\ldots + s_i \sin r_i -$$

$$- \left(s_1 \frac{\varepsilon_{r_1}}{\rho} + s_2 \frac{\varepsilon_{r_2}}{\rho} + \ldots\ldots + s_i \frac{\varepsilon_{r_i}}{\rho}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (897).$$

Atņemot (897) no (896) un ievērojot, ka visi malu garumi pieņemti vienādi s, atrodam īsto šķērskļūdu f_{t_i} virsotnē P_i noteicošo koordinatu y_i un $\bar{y}_i$ starpību

$$f_{t_i} = y_i - \bar{y}_i = s_1 \frac{\varepsilon_{r_1}}{\rho} + s_2 \frac{\varepsilon_{r_2}}{\rho} + \ldots\ldots + s_i \frac{\varepsilon_{r_i}}{\rho} =$$

$$= \frac{s}{\rho} (\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{r_i}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (898).$$

Apzīmējot vidējo šķērskļūdu virsotnē P_i ar m_{t_i}, un visām malām par vienādu pieņemto virziena r vidējo kļūdu ar μ_r, no formulas (898) pazīstamā kārtā atvasinam sekojošo uz vidējām kļūdām attiecīgo formulu

$$m_{t_i}{}^2 = \frac{s^2}{\rho^2}\, i\, \mu_r{}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (899)$$

jeb

$$m_{t_i} = \pm \frac{\mu_r}{\rho} s \sqrt{i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (900).$$

d) Vidējā šķērskļūda abos galos dotiem punktiem pieslēgtā busoles gājienā.

Ja ir pieslēgums dotam punktam ne tikai sākumā P_0, bet arī galā P_n, tad pēc (896) parauga aprēķinot gala virsotnes P_n koordinatu y_n un salīdzinot to ar šīs virsotnes doto koordinatu $\bar{y}_n$, nosakama koordinatas y_n īstā kļūda, kura šeit pieņemtos apstākļos identiska ar īsto šķērskļūdu f_{t_n} gājiena gala virsotnē P_n. Nosakot to pēc (898) parauga, atrodam

$$f_{t_n} = \frac{s}{\rho} (\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{r_i} + \varepsilon_{r_{i+1}} + \ldots\ldots + \varepsilon_{r_n}) \quad (901).$$

Izlīdzinot gājienu pēc parastā paņēmiena, šo kļūdu sadala uz atsevišķiem koordinatu pieaugumiem Δy proporcionali atbilstošiem malu garumiem s, tā tad šeit pieņemtos apstākļos — vienmērīgi. Tādā veidā likvidējot īsto šķērskļūdu f_{t_n} gājiena gala virsotnē, izlīdzinātā gājienā virsotnes P_i attiecīgā koordinata ir $y_i' = y_i - \frac{i}{n} f_{t_n}$ (sal. gad. „b"), pie kam y_i nosacīta ar izteiksmi (896). Sakarā ar to izlīdzinātā gājiena virsotnē P_i paliek īstā šķērskļūda

$$f_{t_i}' = \frac{s}{\rho}(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{r_i}) - \frac{i}{n} f_{t_n} \quad . \quad . \quad . \quad (902).$$

Ievērojot (901), šī izteiksme rakstama veidā

$$\begin{aligned} f_{t_i}' &= \frac{s}{\rho}(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{r_i}) - \frac{s}{\rho}\frac{i}{n}(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2} + \\ &\quad + \ldots\ldots + \varepsilon_{r_i} + \varepsilon_{r_{i+1}} + \ldots\ldots + \varepsilon_{r_n}) = \\ &= \frac{s}{\rho}\left\{\left(1 - \frac{i}{n}\right)(\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{r_i}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{n}(\varepsilon_{r_{i+1}} + \ldots\ldots + \varepsilon_{r_n})\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (903). \end{aligned}$$

Pārejot uz vidējām kļūdām, no šīs izteiksmes atvasinam atbilstošo sekojošo:

$$\begin{aligned} m_{t_i}^2 &= \frac{s^2}{\rho^2}\left\{\left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 i \mu_r^2 + \left(\frac{i}{n}\right)^2 (n - i) \mu_r^2\right\} = \\ &= \frac{\mu_r^2}{\rho^2}\frac{(n - i)\, i}{n} s^2 \quad . \quad . \quad (904) \end{aligned}$$

jeb

$$m_{t_i} = \pm \frac{\mu_r}{\rho} s \sqrt{\frac{(n - i)\, i}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (905).$$

e) Vidējā šķērskļūda tikai vienā galā dotam punktam un virzienam pieslēgtā teodolita gājienā.

Teodolita gājienā malu virzieni tiek nosacīti kā tieši izmērīto leņķu funkcijas. Kā zinams, ar neizlīdzinātiem leņķiem β aprēķinātie virzieni r ir

$$\left.\begin{array}{lll} r_1 &= \bar{r}_0 + & 180^0 - \beta_0 \\ r_2 &= \bar{r}_0 + & 2 \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_i &= \bar{r}_0 + & i \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_{i-1}) \\ r_{i+1} &= \bar{r}_0 + & (i+1) \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_{i-1} + \beta_i) \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_n &= \bar{r}_0 + & n \times 180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_{i-1} + \beta_i + \ldots + \beta_{n-1}) \end{array}\right\} \quad (906),$$

kur $\bar{r}_0$ apzīmē gājiena sākumā doto, praktiski par absoluti pareizu uzskatīto pieslēgvirzienu.

Apzīmējot izmērītiem leņķiem β un ar tiem aprēķinātiem virzieniem r piemītošās īstās kļūdas ar atbilstošiem ε_β un ε_r, minēto leņķu un virzienu īstās vērtības ir $(\beta - \varepsilon_\beta)$ un $(r - \varepsilon_r)$.

Tās ir šādos sakaros:

$$\left.\begin{array}{ll}
(r_1 - \varepsilon_{r_1}) = \bar{r}_0 + & 180^0 - \beta_0 + \varepsilon_{\beta_0} \\
(r_2 - \varepsilon_{r_2}) = \bar{r}_0 + & 2\times180^0 - (\beta_0 + \beta_1) + (\varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1}) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
(r_i - \varepsilon_{r_i}) = \bar{r}_0 + & i\times180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_{i-1}) + \\
 & + (\varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1} + \cdots + \varepsilon_{\beta_{i-1}}) \\
(r_{i+1} - \varepsilon_{r_{i+1}}) = \bar{r}_0 + & (i+1)\times180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_{i-1} + \beta_i) + \\
 & + (\varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1} + \cdots + \varepsilon_{\beta_{i-1}} + \varepsilon_{\beta_i}) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
(r_n - \varepsilon_{r_n}) = \bar{r}_0 + & n\times180^0 - (\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_{i-1} + \beta_i + \ldots + \beta_{n-1}) + \\
 & + (\varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1} + \cdots + \varepsilon_{\beta_{i-1}} + \varepsilon_{\beta_i} + \cdots + \varepsilon_{\beta_{n-1}})
\end{array}\right\} \quad (907).$$

No izteiksmēm (906) atņemot atbilstošās (907), atrodam

$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon_{r_1} = -\varepsilon_{\beta_0} \\
\varepsilon_{r_2} = -(\varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1}) \\
\cdots\cdots \\
\varepsilon_{r_i} = -(\varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1} + \ldots\ldots + \varepsilon_{\beta_{i-1}}) \\
\varepsilon_{r_{i+1}} = -(\varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1} + \ldots\ldots + \varepsilon_{\beta_{i-1}} + \varepsilon_{\beta_i}) \\
\cdots\cdots \\
\varepsilon_{r_n} = -(\varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1} + \ldots\ldots + \varepsilon_{\beta_{i-1}} + \varepsilon_{\beta_i} + \ldots\ldots + \varepsilon_{\beta_{n-1}})
\end{array}\right\} \quad (908).$$

Teodolita gājienā sakars starp īsto šķērskļūdu f_t un malu virzienu īstām kļūdām ir tas pats, kā busoles gājienā; tā tad arī šeit apskatītā gadijumā ir spēkā attiecīgā formula (898). Tikai tagad kļūdas ε_r jāatvieto ar atbilstošām izteiksmēm (908). Ieliekot tās formulā (898), atrodam

$$f_{t_i} = -\frac{s}{\rho}\{\varepsilon_{\beta_0} + (\varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1}) + \ldots + (\varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1} + \ldots + \varepsilon_{\beta_{i-1}})\} =$$

$$= -\frac{s}{\rho}\{i\,\varepsilon_{\beta_0} + (i-1)\,\varepsilon_{\beta_1} + \ldots + 1\,\varepsilon_{\beta_{i-1}}\} \quad . \quad . \quad . \quad (909).$$

Pārejot no īstām kļūdām f_{t_i} un ε_β uz atbilstošām vidējām kļūdām m_{t_i} un visiem leņķiem par vienādu pieņemto μ_β, no formulas (909) atvasinam atbilstošo sekojošo

$$m_{t_i}^2 = \frac{\mu_\beta^2}{\rho^2} s^2 \{i^2 + (i-1)^2 + \cdots + 1^2\} =$$

$$= \frac{\mu_\beta^2}{\rho^2} s^2 \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} \quad \ldots\ldots \quad (910)$$

jeb

$$m_{t_i} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} s \sqrt{\frac{i(i+1)(2i+1)}{6}} \quad \ldots . \quad (911).$$

f) Vidējā šķērskļūda abos galos dotiem virzieniem, bet tikai vienā galā dotam punktam pieslēgtā teodolita gājienā.

Ja gājienam ir pieslēgums abos galos dotiem virzieniem, tad pazīstamā kārtā nosakama leņķu pretruna f_β, kura pēc būtības ir visu izmērīto leņķu $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n$ īsto kļūdu ε_β suma:

$$f_\beta = \varepsilon_{\beta_0} + \varepsilon_{\beta_1} + \ldots + \varepsilon_{\beta_{i-1}} + \varepsilon_{\beta_i} + \varepsilon_{\beta_{i+1}} + \ldots + \varepsilon_{\beta_{n-1}} + \varepsilon_{\beta_n} \quad . \quad . \quad (912).$$

Izlīdzinot leņķus, šo pretrunu f_β vienmērīgi sadala uz visiem leņķiem. Ar izlīdzinātiem leņķiem aprēķinātie malu virzieni ir

$$\left.\begin{aligned}
r_1 &= \bar{r}_0 + 180^0 - (\beta_0 - \frac{f_\beta}{n+1}) \\
r_2 &= \bar{r}_0 + 2 \times 180^0 - \{(\beta_0 - \frac{f_\beta}{n+1}) + (\beta_1 - \frac{f_\beta}{n+1})\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_i &= \bar{r}_0 + i \times 180^0 - \{(\beta_0 - \frac{f_\beta}{n+1}) + (\beta_1 - \frac{f_\beta}{n+1}) + \ldots + \\
&\qquad + (\beta_{i-1} - \frac{f_\beta}{n+1})\} \\
r_{i+1} &= \bar{r}_0 + (i+1) \times 180^0 - \{(\beta_0 - \frac{f_\beta}{n+1}) + (\beta_1 - \frac{f_\beta}{n+1}) + \ldots + \\
&\qquad + (\beta_{i-1} - \frac{f_\beta}{n+1}) + (\beta_i - \frac{f_\beta}{n+1})\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_n &= \bar{r}_0 + n \times 180^0 - \{(\beta_0 - \frac{f_\beta}{n+1}) + (\beta_1 - \frac{f_\beta}{n+1}) + \ldots +
\end{aligned}\right\} \quad (913).$$

$$+(\beta_{i-1}-\frac{f_\beta}{n+1})+(\beta_i-\frac{f_\beta}{n+1})+\ldots+$$
$$+(\beta_{n-1}-\frac{f_\beta}{n+1})\}$$

Bet sakaru starp leņķu un virzienu īstām vērtībām noteicošās formulas ir jau iepriekšējā gadijumā „e" minētās (907).

No izteiksmēm (913) atņemot atbilstošās (907), atrodam

$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon_{r_1}=-\varepsilon_{\beta_0}+\dfrac{f_\beta}{n+1}\\
\varepsilon_{r_2}=-(\varepsilon_{\beta_0}+\varepsilon_{\beta_1})+2\dfrac{f_\beta}{n+1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon_{r_i}=-(\varepsilon_{\beta_0}+\varepsilon_{\beta_1}+\ldots+\varepsilon_{\beta_{i-1}})+i\dfrac{f_\beta}{n+1}\\
\varepsilon_{r_{i+1}}=-(\varepsilon_{\beta_0}+\varepsilon_{\beta_1}+\ldots+\varepsilon_{\beta_{i-1}}+\varepsilon_{\beta_i})+(i+1)\dfrac{f_\beta}{n+1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon_{r_n}=-(\varepsilon_{\beta_0}+\varepsilon_{\beta_1}+\ldots+\varepsilon_{\beta_{i-1}}+\varepsilon_{\beta_i}+\ldots+\varepsilon_{\beta_{n-1}})+n\dfrac{f_\beta}{n+1}
\end{array}\right\} \quad (914).$$

Šīs izteiksmes ieliekot formulā (898), tā pāriet veidā

$$f_{t_i}=-\frac{s}{\rho}\Big\{\{i\,\varepsilon_{\beta_0}+(i-1)\,\varepsilon_{\beta_1}+\ldots+1\,\varepsilon_{\beta_{i-1}}\}-$$
$$-(1+2\quad+\ldots+i)\frac{f_\beta}{n+1}\Big\}=$$
$$=-\frac{s}{\rho}\Big\{\{i\,\varepsilon_{\beta_0}+(i-1)\,\varepsilon_{\beta_1}+\ldots+1\,\varepsilon_{\beta_{i-1}}\}-\frac{i\,(i+1)}{2\,(n+1)}f_\beta\Big\}\ .\ \ (915),$$

jeb, ievērojot (912),

$$f_{t_i}=-\frac{s}{\rho}\Big\{\{i\,\varepsilon_{\beta_0}+(i-1)\,\varepsilon_{\beta_1}+\ldots+1\,\varepsilon_{\beta_{i-1}}\}-$$
$$-\frac{i\,(i+1)}{2(n+1)}(\varepsilon_{\beta_0}+\varepsilon_{\beta_1}+\ldots+\varepsilon_{\beta_{i-1}}+\varepsilon_{\beta_i}+\varepsilon_{\beta_{i+1}}+\ldots+\varepsilon_{\beta_{n-1}}+\varepsilon_{\beta_n})\Big\}=$$
$$=-\frac{s}{\rho}\Big\{\Big\{i-\frac{i\,(i+1)}{2(n+1)}\Big\}\varepsilon_{\beta_0}+\Big\{(i-1)-\frac{i\,(i+1)}{2(n+1)}\Big\}\varepsilon_{\beta_1}+\ldots+$$
$$+\Big\{1-\frac{i\,(i+1)}{2(n+1)}\Big\}\varepsilon_{\beta_{i-1}}-\frac{i\,(i+1)}{2(n+1)}(\varepsilon_{\beta_i}+\varepsilon_{\beta_{i+1}}+\ldots+\varepsilon_{\beta_{n-1}}+\varepsilon_{\beta_n})\Big\}\ (916).$$

Pārejot no īstām kļūdām uz atbilstošām vidējām, un pieņemot, ka visiem leņķiem ir vienādas vidējās kļūdas, no (916) atvasinam sekojošo formulu:

$$m_{t_i}{}^2 = \frac{s^2}{\rho^2}\Big\{\Big\{\{i^2 + (i-1)^2 + \ldots + 1^2\} - \{i + (i-1) + \ldots$$

$$\ldots + 1\}\frac{i(i+1)}{n+1}\Big\}\mu_\beta{}^2 + \frac{i^2(i+1)^2}{4(n+1)^2}(n+1)\mu_\beta{}^2\Big\} =$$

$$= \frac{\mu_\beta{}^2}{\rho^2}s^2\left\{\frac{i(i+1)(2i+1)}{6} - \frac{i^2(i+1)^2}{2(n+1)} + \frac{i^2(i+1)^2}{4(n+1)}\right\} =$$

$$= \frac{\mu_\beta{}^2}{\rho^2}s^2\frac{i(i+1)}{12(n+1)}\{2(2i+1)(n+1) - 3i(i+1)\} \quad \ldots \quad (917),$$

jeb

$$m_{t_i} = \pm\frac{\mu_\beta}{\rho}s\sqrt{\frac{i(i+1)\{2(2i+1)(n+1) - 3i(i+1)\}}{12(n+1)}} \quad \ldots \quad (918).$$

g) Vidējā šķērskļūda abos galos dotiem virzieniem un punktiem pieslēgtā teodolita gājienā.

Iepriekšējā gadijumā pieņemtos pieslēguma apstākļos aprēķināta gājiena gala virsotnē P_n rodas īstā šķērskļūda f_{t_n}, kura pēc (916) parauga, atvietojot i ar n, izsakama šādā veidā:

$$f_{t_n} = -\frac{s}{\rho}\Big\{\Big\{n - \frac{n}{2}\Big\}\varepsilon_{\beta_0} + \Big\{(n-1) - \frac{n}{2}\Big\}\varepsilon_{\beta_1} + \ldots +$$

$$+\Big\{1 - \frac{n}{2}\Big\}\varepsilon_{\beta_{n-1}} - \frac{n}{2}\varepsilon_{\beta_n}\Big\} =$$

$$= -\frac{s}{\rho}\left\{\frac{n}{2}\varepsilon_{\beta_0} + \frac{n-2}{2}\varepsilon_{\beta_1} + \ldots\ldots - \frac{n-2}{2}\varepsilon_{\beta_{n-1}} - \frac{n}{2}\varepsilon_{\beta_n}\right\} \quad (919).$$

Pieņemtos apstākļos šī kļūda identiska ar pretrunu f_y, kuru, izlīdzinot gājienu parastā kārtā, sadala uz atsevišķiem koordinatu pieaugumiem Δy proporcionali atbilstošiem malu garumiem s, tā tad šeit pieņemtā vienāda garuma malu gadijumā — vienmērīgi. Sakarā ar to īstā šķērskļūda virsotnē P_i, kura iepriekš apskatītā gadijumā nosacīta ar izteiksmi (916), abos galos dotiem virzieniem un punktiem pieslēgtā gājienā samazinas par $\frac{i}{n}f_y = \frac{i}{n}f_{t_n}$. Ievērojot izteiksmes (916) un (919), atrodam, ka šī šķērskļūda ir

$$f_{t_i} = -\frac{s}{2\rho}\Big\{\Big\{-\frac{i(i+1)}{n+1} + i\Big\}\varepsilon_{\beta_0} + \Big\{-\frac{i(i+1)}{n+1} + i - \frac{2(n-i)}{n}\Big\}\varepsilon_{\beta_1} +$$

$$+\Big\{-\frac{i(i+1)}{n+1} + i - 2\frac{2(n-i)}{n}\Big\}\varepsilon_{\beta_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+\left\{-\frac{i(i+1)}{n+1}+i-(i-1)\frac{2(n-i)}{n}\right\}\varepsilon_{\beta_{i-1}}+$$
$$+\left\{-\frac{i(i+1)}{n+1}+i-(n-i)\frac{2i}{n}\right\}\varepsilon_{\beta_i}+$$
$$+\left\{-\frac{i(i+1)}{n+1}+i-(n-i-1)\frac{2i}{n}\right\}\varepsilon_{\beta_{i+1}}+\ldots\ldots\ldots+$$
$$+\left\{-\frac{i(i+1)}{n+1}+i-\frac{2i}{n}\right\}\varepsilon_{\beta_{n-1}}+\left\{-\frac{i(i+1)}{n+1}+i\right\}\varepsilon_{\beta_n}\Bigg\} \quad (920).$$

Pārejot no īstām kļūdām f_{t_i} un ε_β uz atbilstošām vidējām kļūdām m_{t_i} un visiem leņķiem vienādo μ_β, no šīs formulas atvasinama tai atbilstošā

$$m_{t_i}{}^2=\frac{\mu_\beta{}^2}{4\rho^2}s^2\left\{\left\{-\frac{i(i+1)}{n+1}+i\right\}^2(n+1)-\right.$$
$$-2\left\{-\frac{i(i+1)}{n+1}+i\right\}\frac{2(n-i)}{n}\{1+2+\ldots+(i-1)\}-$$
$$-2\left\{-\frac{i(i+1)}{n+1}+i\right\}\frac{2i}{n}\{1+2+\ldots\ldots+(n-i)\}+$$
$$+\frac{4(n-i)^2}{n^2}\{1^2+2^2+\ldots\ldots+(i-1)^2\}+$$
$$\left.+\frac{4i^2}{n^2}\{1^2+2^2+\ldots\ldots+(n-i)^2\}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (921).$$

Pēc dažiem pārveidojumiem šo formulu rakstam:

$$m_{t_i}{}^2=\frac{\mu_\beta{}^2}{\rho^2}s^2\,\frac{i(n-i)\{i(n-i)(n+4)+2(n+1)\}}{12n(n+1)} \quad (922)$$

jeb

$$m_{t_i}=\pm\frac{\mu_\beta}{\rho}s\sqrt{\frac{i(n-i)\{i(n-i)(n+4)+2(n+1)\}}{12n(n+1)}} \quad (923).$$

§ 75. Daži praktiski secinājumi no stieptā poligongājiena kļūdu teorijas.

Tikai vienā galā dotam punktam pieslēgtā poligongājienā sagaidamās vidējās garenkļūdas noteicošā formula (889) rāda, ka garumu mērijumu vidējās kļūdas tādā gājienā sakrājas līdzīgā veidā, kā atsevišķu malu garumu mērijumos. Salīdzinot minēto formulu ar formulu (895), kas zīmējas uz abos galos dotiem punktiem pieslēgto gājienu, redzam, ka tādā gājienā, pateicoties liekiem pieslēgelementiem, vidējās garenkļūdas vispārīgi mazākas, nekā perimetra garuma un novērojumu noteiktības ziņā tam vienādā, bet tikai vienā galā dotam punktam pieslēgtā gājienā. Abos galos dotiem punktiem pieslēgtā gājiena sākuma un gala virsotnēs P_0 un P_n, kurām atbilst $i = 0$ resp. $i = n$, vidējā garenkļūda m_l vienāda ar nulli. No gājiena abiem galiem tā simetriski pieaug pret vidējo virsotni $P_{\frac{n}{2}}$, kur sasniedz savu maksimumu — ar $i = \frac{n}{2}$ pēc formulas (895) aprēķināto vidējo garenkļūdu

$$m_{l_{\frac{n}{2}}} = \pm \mu \frac{\sqrt{S}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (924).$$

Atbilstošo vidējo garenkļūdu tikai vienā galā dotam punktam pieslēgtā poligongājiena vidū atrodam, formulā (889) pieņemot $S_i = \frac{S}{2}$:

$$m_{l_{\frac{n}{2}}} = \pm \mu \sqrt{\frac{S}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (925).$$

Ar to noslēdzot uz stieptā poligongājiena garenkļūdām attiecīgos iztirzājumus, vēl piezīmējam, ka šie iztirzājumi un atbilstošās atrastās formulas zīmējas tāpat uz busoles gājieniem, kā uz teodolita gājieniem, jo stieptos poligongājienos garenkļūdas atkarājas tikai no garumu mērijumiem, bet nevis no malu virzieniem resp. to noteikšanas veida.

Piegriežoties tagad uz gadijumiem „c" — „g" attiecīgām vidējo šķērskļūdu m_{t_i} noteicošām formulām (907), (915), (923), (933), (938), tās pārveidojam, atvietojot s ar $\frac{S}{n}$. Tad atrodam:

busoles gājienā

$$\left.\begin{aligned} &\text{gadijumā c:} \quad m_{t_i} = \pm \frac{\mu_r}{\rho} S \sqrt{\frac{i}{n^2}} \\ &\quad\text{,, \quad d:} \quad m_{t_i} = \pm \frac{\mu_r}{\rho} S \sqrt{\frac{(n-i)\, i}{n^3}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (926),$$

teodolita gājienā

$$\left.\begin{aligned} &\text{gadijumā e:} \quad m_{t_i} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S \sqrt{\frac{i\,(i+1)\,(2\,i+1)}{6\,n^2}} \\ &\quad\text{,, \quad f:} \quad m_{t_i} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S \sqrt{\frac{i(i+1)\{2(2i+1)(n+1)-3i(i+1)\}}{12\,n^2\,(n+1)}} \\ &\quad\text{,, \quad g:} \quad m_{t_i} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S \sqrt{\frac{i\,(n-i)\,\{i\,(n-i)\,(n+4)+2(n+1)\}}{12\,n^3\,(n+1)}} \end{aligned}\right\} (927).$$

Pieņemot $i = 0$, t. i. attiecinot vidējo šķērskļūdu uz sākuma virsotni P_0, visas izteiksmes (926) un (927) pāriet nullē, kas saskan ar to, ka visos gadijumos sākuma virsotnes stāvoklis skaitas par absoluti pareizi dotu. Aiz līdzīgiem iemesliem saprotams, ka gadijumiem „d" un „g" atbilstošās izteiksmes pāriet nullē arī tad, kad pieņem $i = n$, t. i. attiecina vidējo šķērskļūdu uz minētos gadijumos absoluti pareizā stāvoklī pieņemto gala virsotni P_n. Pārējos gadijumos vidējā šķērskļūda gala virsotnē P_n, kur $i = n$, ir:

busoles gājienā

gadijumā c: $$m_{t_n} = \pm \frac{\mu_r}{\rho} S \sqrt{\frac{1}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (928),$$

teodolita gājienā

$$\left.\begin{aligned} &\text{gadijumā e:} \quad m_{t_n} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}} \\ &\quad\text{„} \quad \text{f:} \quad m_{t_n} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{12n}} \end{aligned}\right\} \ldots \quad (929).$$

Ja, visos gadijumos attiecinot vidējo šķērskļūdu uz vidējo virsotni $P_{\frac{n}{2}}$, formulās (926) un (927) pieņemam $i = \frac{n}{2}$, tad:

busoles gājienā

$$\left.\begin{aligned} &\text{gadijumā c:} \quad m_{t_{\frac{n}{2}}} = \pm \frac{\mu_r}{\rho} S \sqrt{\frac{1}{2n}} \\ &\quad\text{„} \quad \text{d:} \quad m_{t_{\frac{n}{2}}} = \pm \frac{\mu_r}{\rho} S \sqrt{\frac{1}{4n}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (930),$$

teodolita gājienā

$$\left.\begin{aligned} &\text{gadijumā e:} \quad m_{t_{\frac{n}{2}}} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{24n}} \\ &\quad\text{„} \quad \text{f:} \quad m_{t_{\frac{n}{2}}} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S \sqrt{\frac{(n+2)(5n^2+10n+8)}{192n(n+1)}} \\ &\quad\text{„} \quad \text{g:} \quad m_{t_{\frac{n}{2}}} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S \sqrt{\frac{n^3+4n^2+8n+8}{192n(n+1)}} \end{aligned}\right\} \quad (931).$$

Pēc šīm izteiksmēm var spriest, kādā veidā dažādi šeit apskatītie pieslēguma apstākļi atsaucas uz vidējo šķērskļūdu poligongājiena vidējā virsotnē. Šinī ziņā uz busoles gājienu attiecīgās izteiksmes (930) pietiekoši skaidri runā pašas par sevi. Kas zīmējas uz teodolita gājienam atbilstošām izteiksmēm (931), tad ar tām noteikto vidējo šķērskļūdu attiecības ilustrēsim ar dažiem skaitliskiem datiem. Rakstot minētās izteiksmes sekojošā veidā:

$$\left.\begin{aligned} \text{gadijumā e:}\quad & m_{t_{\frac{n}{2}}} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S A_e \\ \text{,,}\quad \text{f:}\quad & m_{t_{\frac{n}{2}}} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S A_f \\ \text{,,}\quad \text{g:}\quad & m_{t_{\frac{n}{2}}} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S A_g \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (932),$$

kur

$$\left.\begin{aligned} A_e &= \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{24n}} \\ A_f &= \sqrt{\frac{(n+2)(5n^2+10n+8)}{192n(n+1)}} \\ A_g &= \sqrt{\frac{n^3+4n^2+8n+8}{192n(n+1)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (933),$$

aprēķinam argumenta n dažādām vērtībām atbilstošās minēto koeficientu A skaitliskās vērtības; tās atzīmētas sekojošā tabulā:

n	A_e	A_f	A_g
2	0,50	0,41	0,20
4	0,56	0,45	0,21
6	0,62	0,50	0,23
8	0,68	0,54	0,25
10	0,74	0,62	0,27

Ieliekot šos skaitļus izteiksmēs (932) un pieņemot $S = 1000$ m, $\mu_\beta = \pm 1'$ un sakarā ar to $\rho = 3438'$, aprēķinam dažādiem pieslēguma apstākļiem un dažādām argumenta n vērtībām atbilstošās vidējās šķērskļūdas gājiena vidējā virsotnē:

n	Vid. šķērskļūda $m_{t_{\frac{n}{2}}}$ gadijumā		
	e	f	g
	cm		
2	±14,6	±11,9	±5,8
4	±16,3	±13,1	±6,1
6	±18,0	±14,6	±6,7
8	±19,8	±15,7	±7,3
10	±21,5	±18,0	±7,9

No praktiskā viedokļa zinamu vērību pelna arī īsto šķērskļūdu f_{t_i} virsotnē P_i noteicošās formulas (898), (903), (909), (916), (920), jo šinīs formulās kļūdu ε koeficienti raksturo attiecīgiem novērojumiem piemītošo vidējo kļūdu ietekmi uz vidējo šķērskļūdu m_{t_i}. Piemēra veidā šinī ziņā analizējot tikai praktiski vissvarīgākam gadijumam „g" atbilstošo formulu (920), no atsevišķo leņķu β kļūdām rezultējošo šķērskļūdu attiecinam uz vidējo virsotni $P_{\frac{n}{2}}$. Sakarā ar to pieņemot $i=\frac{n}{2}$, formula (920) pāriet veidā

$$f_{t_i}=-\frac{s}{2\rho}\Big\{c\,\varepsilon_{\beta_0}+(c-1)\,\varepsilon_{\beta_1}+(c-2)\,\varepsilon_{\beta_2}+\ldots\ldots+$$

$$+\left\{c-\left(\frac{n}{2}-1\right)\right\}\varepsilon_{\beta_{\frac{n}{2}-1}}+\left(c-\frac{n}{2}\right)\varepsilon_{\beta_{\frac{n}{2}}}+$$

$$+\left\{c-\left(\frac{n}{2}-1\right)\right\}\varepsilon_{\beta_{\frac{n}{2}+1}}+\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+(c-2)\,\varepsilon_{\beta_{n-2}}+(c-1)\,\varepsilon_{\beta_{n-1}}+c\,\varepsilon_{\beta_n}\Big\}=$$

$$=-\frac{s}{2\rho}\Big\{q_0\varepsilon_{\beta_0}+q_1\varepsilon_{\beta_1}+q_2\varepsilon_{\beta_2}+\ldots\ldots+q_{\frac{n}{2}-1}\,\varepsilon_{\beta_{\frac{n}{2}-1}}+q_{\frac{n}{2}}\,\varepsilon_{\beta_{\frac{n}{2}}}+$$

$$+q_{\frac{n}{2}-1}\,\varepsilon_{\beta_{\frac{n}{2}+1}}+\ldots\ldots+q_2\varepsilon_{\beta_{n-2}}+q_1\varepsilon_{\beta_{n-1}}+q_0\varepsilon_{\beta_n}\Big\}\quad(934),$$

kur

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= c \\ q_1 &= c - 1 \\ q_2 &= c - 2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ q_{\frac{n}{2}-1} &= c - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \\ q_{\frac{n}{2}} &= c - \frac{n}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (935)$$

un

$$c = \frac{n^2}{4(n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (936).$$

Kā redzams, koeficienti q, kuru absolutās vērtības raksturo atbilstošo leņķu kļūdu ietekmes uz šķērskļūdu gājiena vidējā virsotnē $P_{\frac{n}{2}}$, grupējas simetriski ap $q_{\frac{n}{2}}$. Tas nozīmē, ka vienādos atstatumos no $P_{\frac{n}{2}}$ izmērīto leņķu kļūdas vienādi ietekmē šķērskļūdu vidējā virsotnē. Sekojošā tabulā atzīmētas dažām argumenta n vērtībām atbilstošās koeficientu q skaitliskās vērtības.

n	q										
2	+0,33	—0,66	+0,33	—	—	—	—	—	—	—	—
4	+0,80	—0,20	—1,20	—0,20	+0,80	—	—	—	—	—	—
6	+1,29	+0,29	—0,71	—1,71	—0,71	+0,29	+1,29	—	—	—	—
8	+1,78	+0,78	—0,22	—1,22	—2,22	—1,22	—0,22	+0,78	+1,78	—	—
10	+2,27	+1,27	+0,27	—0,73	—1,73	—2,73	—1,73	—0,73	+0,27	+1,27	+2,27

Šie skaitļi rāda, ka uz vidējo virsotni attiecīgās šķērskļūdas palielināšanas ziņā sevišķi bīstamas gājiena galos un vidū mērīto leņķu kļūdas. Tāpēc ieteicams šinīs gājiena vietās mērīt leņķus ar sevišķu noteiktību.

Beidzot, kas zīmējas uz poligongājiena galā un vidū sagaidamās vidējās šķērskļūdas atkarību no malu skaita n, tad šinī ziņā uz busoles gājienu attiecīgās formulas (928) un (930) rāda principiali citādu ainu, nekā uz teodolita gājienu attiecīgās (929) un (931). Busoles gājienā, pie dotā perimetra kopgaruma S, minētās vidējās šķērskļūdas jo mazākas, jo lielāks malu skaits. Tas nozīmē, ka šo šķērskļūdu samazināšanas nolūkā ieteicams samazināt malu garumus s. Praktiski tam, saprotams, ir zinamas robežas, jo, pārmērīgi samazinoties malu garumiem un, līdz ar to, palielinoties malu skaitam, atbilstoši pavairojas virzienu mērīšanas darbs; bez tam, īso vizuru dēļ, cieš virzienu mērīšanas noteiktība, t. i. pieaug vidējā kļūda μ_r. Teodolita gājienā, taisni otrādi, malu skaitam n samazinoties, arī samazinas minētās šķērskļūdas. Tā tad ieteicams teodolita gājienos pēc iespējas palielināt malu garumus, cik tas neizsauc neērtības citā ziņā.

Vispārīgi, malu skaitam pieaugot, virzienu mērijumu kļūdas busoles gājienā sakrājas labvēlīgāk, nekā leņķu mērijumu kļūdas teodolita gājienā. Ar to zinamā mērā kompensējas tas trūkums, ka virzienu (magnetisko azimutu) tiešā mērīšana busoles gājienā notiek ar mazāku noteiktību, nekā leņķu mērīšana teodolita gājienā. Tā tad pietiekoši liela malu skaita gadijumā var notikt, ka busoles gājiena zinamā vietā, piem., galā vai vidū, sagaidamā vidējā šķērskļūda nepārsniedz atbilstošo šķērskļūdu tāda pat veida teodolita gājienā, — neskatoties uz to, ka virzienu mērijumu vidējā kļūda ievērojami pārsniedz leņķu mērijumu vidējo kļūdu.

Piemērs. Aprēķināsim, kādam jābūt malu skaitam n divos vienāda garuma $S = 1000$ m poligongājienos, no kuriem viens ir busoles gājiens, bet otrais — teodolita gājiens, lai tikai sākumā dotam punktam pieslēgto gājienu galos būtu sagaidamas vienādas vidējas šķērskļūdas, ja pirmā gadijumā virzieni, un otrā — leņķi izmēriti ar vidējām kļūdām $\mu_r = \pm 10'$ resp. $\mu_\beta = \pm 1'$.

Lietojot attiecīgās izteiksmes (928) un pirmo (929), veidojam nolīdzinājumu

$$\pm \frac{\mu_r}{\rho} S \sqrt{\frac{1}{n}} = \pm \frac{\mu_\beta}{\rho} S \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}}$$

jeb

$$\mu_r^2 \frac{1}{n} = \mu_\beta^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

Atslēdzot to pēc nezinamā n, atrodam

$$n = \frac{1}{4}\left\{\pm \sqrt{1 + 48\frac{\mu_r^2}{\mu_\beta^2}} - 3\right\}$$

jeb, ignorējot praktiski neinteresējošo negativo sakni,

$$n = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{1 + 48\frac{\mu_r^2}{\mu_\beta^2}} - 3\right\}$$

Ieliekot μ_r un μ_β minētās skaitliskās vērtības un noapaļojot rezultatu veselā skaitlī, atrodam

$$n = 17$$

Ieliekot šo skaitli un elementu S, μ_r, μ_β pieņemtās skaitliskās vērtības attiecīgās formulās (928) un (929), aprēķinam gājienu galos sagaidamās vidējās šķērskļūdas; tās izrādas abos gadijumos apmēram vienādas — ap $\pm$ 0,7 m.

§ 76. Vispārējas piezīmes par poligontīklu izlīdzināšanu.

Vairākiem poligongājieniem sanākot kopīgās virsotnēs, veidojas t. s. poligontīkls ar minētām vairākiem atsevišķiem gājieniem kopīgām virsotnēm — poligontīkla mezglu punktiem.

No teodolita gājieniem veidotā poligontīklā izvēloties katrā pēc stāvokļa a priori nezinamā mezglā vienu tam pieguļošu tīkla malu, šīs „mezgla malas" virzienu var aprēķināt no katra atsevišķa gājiena vai no katras atsevišķu gājienu virknes, kas šo malu savieno ar kādu tīkla pieslēgšanai lietotu dotu virzienu. Tāpat katra mezgla punkta koordinatas var aprēķināt no katra atsevišķa gājiena vai no katras atsevišķu gājienu virknes, kas šo mezgla punktu savieno ar kādu tīkla pieslēgšanai lietotu, pēc stāvokļa zinamu, augstākas šķiras punktu.

Izdarot šos aprēķinus ar neizlīdzinātiem leņķiem un malu garumiem, šiem elementiem piemītošo kļūdu dēļ, rezultati vispārīgi iznāk pretrunīgi. Lai likvidētu šīs pretrunas, poligontīklā izmērītie leņķi un malu garumi jāizlīdzina tā, lai aprēķinot attiecīgās mezgla malas virzienu vai attiecīgā mezgla punkta koordinatas, rezultati būtu neatkarīgi no tā, no kāda gājiena vai no kādas gājienu virknes tie atrasti. Tā tad formulējami atbilstoši noteikumi, kuriem jābūt apmierinātiem ar tīklā izmērīto elementu izlīdzinātām vērtībām.

Poligontīklā izmērītos leņķus un malu garumus var izlīdzināt parastā kārtā un pilnīgā stingrībā kā netiešus vai kā noteikumu novērojumus, pie kam svari nosakami 71-ā paragrafā aizrādītā kārtā. Bet, noteikumu lielā kopskaita dēļ, tāda stingra izlīdzināšana padara ar poligonometrisko darbu noteiktību nesamērīgas grūtības. Tāpēc parasti iztiek ar poligontīklu tuvino izlīdzināšanu pēc līdzīga principa, pie kura pieturas izlīdzinot atsevišķus poligongājienus pēc parastā paņēmiena.

Teodolita gājienu veidota poligontīkla tuvinās izlīdzināšanas pirmā daļā, kas zīmējas tikai uz tīklā izmērītiem leņķiem, ievēro tikai uz mezglu malu virzieniem attiecīgos noteikumus. Izlīdzināšanas otrā daļā tad ievēro tikai uz mezglu punktu koordinatām attiecīgos noteikumus, pie kam par izlīdzināšanas objektu uzskata ar izlīdzinātiem leņķiem un izmērītiem malu garumiem aprēķinātos koordinatu pieaugumus. Izlīdzināšanas rēķina vienkāršošanas nolūkā, izlīdzināšanu attiecina nevis tieši uz atsevišķiem leņķiem resp. koordinatu pieaugumiem, bet uz atsevišķiem gājieniem atbilstošām šo elementu sumām, kuras tiek lietotas nosakot no attiecīgiem gājieniem svarā krītošo mezglu malu virzienus resp. mezglu punktu koordinatas. Attiecīgās izlīdzināšanas daļas beigās atrastos izlabojumus, kas zīmējas uz leņķu resp. koordinatu pieaugumu sumām, pa atbilstošiem gājieniem sadala uz atsevišķiem leņķiem resp. uz atsevišķiem koordinatu pieaugumiem.

Busoles gājienu veidota poligontīkla izlīdzināšana notiek līdzīgā kārtā. Tikai, saprotams, atkrīt uz leņķiem attiecīgā izlīdzināšanas pirmā daļa, jo izlīdzināšanas otrās daļas objektu veidojošo koordinatu pieaugumu aprēķinam vajadzīgie malu virzieni busoles gājiena gadijumā ir tieši novēroti elementi, kuri paši par sevi nav padoti nekādiem atsevišķiem noteikumiem.

Kas zīmējas uz šeit vispārējos vilcienos aizrādītās izlīdzināšanas sīkumiem, tad šinī ziņā pazīstami vairāki paņēmieni. Starp citu, katrā izlīdzināšanas daļā nosakamos izlabojumus var atrast no visus gājienus un visus mezglus kopīgi aptverošās tīkla izlīdzināšanas vienā gabalā, pie tam uzskatot izmērītos leņķus resp. ar izmērītiem malu garumiem aprēķinātos koordinatu pieaugumus par netiešiem vai par noteikumu novērojumiem. Bet zinamos vienkāršākos gadijumos izlīdzināšanu var arī izdarīt nevis vienā gabalā, bet pakāpeniski pa poligontīkla atsevišķiem mezgliem.

Visādā gadijumā, izlīdzinot teodolita gājienu veidotu poligontīklu, katrā mezglā jāizvēlas viena tam pieguļoša mezgla mala. Šīs malas, kopā ar dotiem virzieniem atbilstošām malām, tad skaitas par noteicošām atsevišķo gājienu pieslēgvirzienus. Sakarā ar to pa atsevišķiem gājieniem jānoskaidro, kuri leņķi šinīs gājienos jālieto, lai, izejot no vienā galā dotā vai pieņemtā pieslēgvirziena, nosacītu otrā galā esošo pieslēgvirzienu. Šo leņķu sumas B veido izlīdzināšanas pirmās daļas objektu; pie tam svari p_B pieņemami pretēji proporcionali attiecīgās sumās B ieejošo izmērīto leņķu skaitam n. Piem., ar vienādu noteiktību izmērītu leņķu gadijumā, uzskatot atsevišķa leņķa mērijumu par svara vienības novērojumu, svari p_B pieņemami pēc parauga

$$p_B = \frac{1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (937).$$

Kad izlīdzināšanas pirmās daļas rezultatā atrasti uz leņķu sumām B attiecīgie izlabojumi un tie pa atbilstošiem gājieniem sadalīti uz šo gājienu atsevišķiem leņķiem, tad ar izlīdzinātiem leņķiem parastā kārtā aprēķina tīkla visu malu virzienus. Ar šiem virzieniem un izmērītiem malu garumiem aprēķina visām malām atbilstošos koordinatu pieaugumus, kuri veido izlīdzināšanas otrās daļas objektu.

Izlīdzināšanas otrā daļā pa atsevišķiem gājieniem veido minēto neizlīdzināto koordinatu pieaugumu sumas X un Y. Izlīdzinot šos elementus, tiem piešķir svarus pretēji proporcionali atbilstošo gājienu perimetru garumiem S. Piem., uzskatot garuma vienības mērijumam atbilstošo koordinatas pieaugumu par svara vienības novērojumu, elementu X un Y svari p_X un p_Y pieņemami pēc parauga

$$p_X = p_Y = \frac{1}{S} \quad \dots\dots\dots \quad (938).$$

Nākošos paragrafos apskatīsim sīkāki poligontīkla izlīdzināšanu pēc dažādiem šeit minētiem paņēmieniem.

§ 77. Poligontīkla izlīdzināšana vienā gabalā.

Netiešu un noteikumu novērojumu gadijums.

Uzskatot novērojumu veidā lietotos elementus B resp. X un Y izlīdzināšanas attiecīgās daļās par netiešiem novērojumiem, jāizvēlas izlīdzināšanas rēķina nezinamie un jāveido atsevišķiem novērojumiem atbilstošās šo nezinamo funkcijas.

Uz leņķiem attiecīgā izlīdzināšanas pirmā daļā par nezinamiem pieņem mezglu malu izlīdzinātos virzienus. Ievērojot pazīstamo sakaru starp poligongājiena leņķu sumu un abos galos esošo pieslēgvirzienu starpību, kļūdu nolīdzinājumi veidojami parastā kārtā, pa atsevišķiem gājieniem salīdzinot par $i \times 180^0$ izmainītās un ar izlabojumiem v_B papildinātās leņķu sumas B ar atbilstošo pieslēgvirzienu starpībām. Kā zinams, minētais i ir kāds a priori nezinams, bet visādā ziņā vesels skaitlis.

Pārvērsto kļūdu nolīdzinājumu veidošanas nolūkā jānosaka izlīdzināšanas rēķina nezinamo — mezglu malu virzienu — tuvinās vērtības. Tas padarams, aprēķinot šos virzienus ar neizlīdzinātiem leņķiem tā, lai katru virzienu atrastu vismaz no diviem, vai pat no vairākiem gājieniem. Tam nolūkam papriekš aprēķina atbilstošo mezglu malu virzienus tikai no tiem gājieniem, kas savieno nosakamos mezglus ar dotiem pieslēgvirzieniem; un tanīs mezglos, kur sanāk vairāki tādi gājieni, veido atrasto rezultatu $(r)_i$ aritmetiskos vidējos (r). Šie vidējie (r) tad lietojami kā attiecīgo virzienu tuvinās vērtības. Izejot no šiem virzieniem, pārējo mezglu malu virzienus nosaka no gājieniem, kas savieno attiecīgos mezglus ar tiem, kur jau atrasti vidējie virzieni (r). Pēc tam arī tām mezglu malām, kur beidzas dotiem pieslēgvirzieniem nepieguļoši gājieni, veido no visiem attiecīgiem gājieniem atrasto virzienu $(r)_i$ vidējos (r). Ar to tad atrastas tuvinās vērtības (r) visiem izlīdzināšanas pirmās daļas nezinamiem; pārvēršot kļūdu nolīdzinājumus, šie nezinamie, t. i. mezglu malu izlīdzinātie virzieni $\bar{r}$, atvietojami ar

$$\bar{r} = (r) + \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (939)$$

tipa izteiksmēm. Ja tuvino vērtību (r) noteikšana izdarīta pirmatnējiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošā kārtībā, tad izrādas, ka pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem ir

$$f_\beta = (r)_i - (r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (940)$$

tipa brīvie locekļi, pie kam $(r)_i$ zīmējas uz attiecīgo gājienu, bet (r) — uz to mezglu, kur šis gājiens beidzas. Kā redzams, elementi f_β viegli nosakami sakarā ar tuvino vērtību (r) aprēķinu.

Veidojot pārvērstiem kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošos normalnolīdzinājumus, svari jāpieņem iepriekšējā paragrafā aizrādītā kārtā. Ja tas notiek pēc (937) parauga, tad par svara vienības novērojumu skaitas leņķu suma B tādā gājienā, kur leņķu skaits ir $n = 1$; tā tad tādā gadijumā svara vienības vidējā kļūda identiska ar neizlīdzināta leņķa vidējo kļūdu.

Normalnolīdzinājumu reducēšana un atslēgšana, izlīdzināto virzienu $\bar{r}$, sumu B izlabojumu v_B un svara vienības resp. neizlīdzināta leņķa vidējās kļūdas m_β noteikšana notiek pazīstamā kārtā.

Kā jau minēts iepriekšējā paragrafā, izlīdzināšanas pirmā daļa izbeidzas ar to, ka katrā atsevišķā gājienā attiecīgās leņķu sumas B izlabojumu v_B vienmērīgi sadala uz visiem atsevišķiem leņķiem. Ar izlīdzinātiem leņķiem tad aprēķina atbilstošos virzienus un koordinatu pieaugumus, kuri, kā zinams, veido izlīdzināšanas rēķina otrās daļas objektu.

Izlīdzināšanas otrā daļā par meklētiem nezinamiem skaita mezglu punktu izlīdzinātās koordinatas $\bar{x}, \bar{y}$, bet novērojumu veidā lieto pa atsevišķiem gājieniem veidotās koordinatu pieaugumu sumas $X = [\Delta x]$, $Y = [\Delta y]$. Pati izlīdzināšana notiek paralleli divās nodaļās, no kurām viena zīmējas uz sumām X resp. atsevišķiem Δx, otrā — uz sumām Y resp. atsevišķiem Δy. Pie tam abās nodaļās viss notiek pavisam līdzīgā kārtā, un arī lietojot tos pašus, no gājienu perimetru garumiem atkarīgos svarus. Tāpēc apskatīsim tikai uz sumām X attiecīgo izlīdzināšanas nodaļu.

Ievērojot pazīstamo sakaru starp poligongājiena koordinatu pieaugumu Δx sumu X un gala punktu koordinatām, kļūdu nolīdzinājumi veidojami parastā kārtā, pa atsevišķiem gājieniem salīdzinot ar atbilstošiem izlabojumiem v_X papildinātās sumas X ar attiecīgo pieslēgpunktu doto resp. izlīdzināto koordinatu starpībām.

Pārvērsto kļūdu nolīdzinājumu veidošanai vajadzīgās mezglu punktu koordinatu tuvinās vērtības (x) nosakamas līdzīgā kārtā, kā tuvinās vērtības (r) izlīdzināšanas rēķina pirmā daļā. Atvietojot kļūdu nolīdzinājumos mezglu punktu izlīdzinātās koordinatas $\bar{x}$ ar atbilstošām

$$\bar{x} = (x) + \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (941)$$

tipa izteiksmēm, veidojam pārvērstos kļūdu nolīdzinājumus; to brīvie locekļi ir

$$-f_X = -\{(x)_i - (x)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (942)$$

tipa izteiksmes, pie kam $(x)_i$ zīmējas uz attiecīgo gājienu, bet (x) — uz to mezgla punktu, kur šis gājiens beidzas.

Kļūdu nolīdzinājumiem atbilstošo normalnolīdzinājumu reducēšana un atslēgšana, mezglu punktu izlīdzināto koordinatu $\bar{x}$, sumu X izlabojumu v_X un svara vienības vidējās kļūdas m_X noteikšana notiek pazīstamā kārtā. Attiecībā uz svara vienības vidējo kļūdu m_X piezīmējam, ka pieņemot svarus pēc (938) parauga, m_X nosaka garuma vienības malai atbilstošā koordinatu pieauguma Δx vidējo kļūdu.

Izlīdzināšana izbeidzas ar to, ka katrā atsevišķā gājienā attiecīgās sumas X izlabojumu v_X sadala uz atsevišķiem koordinatu pieaugumiem Δx proporcionali atbilstošo malu garumiem.

Līdzīgā kārtā izlīdzinot sumas Y resp. koordinatu pieaugumus Δy, sakarā ar to aprēķinātā svara vienības vidējā kļūda m_Y nosaka garuma vienības malai atbilstošā koordinatu pieauguma Δy vidējo kļūdu.

Aprēķinot svara vienības vidējās kļūdas m_β, m_X, m_Y, jāievēro, ka lieko novērojumu skaits ir (t — u), kur t apzīmē gājienu skaitu, bet u — izlīdzināto mezglu skaitu poligontīklā.

Ja elementus B, X un Y uzskata par noteikumu novērojumiem, tad, izlīdzināšanai atkal notiekot minētās divās daļās, katrreiz ar liekiem novērojumiem noteiktā skaitā (t—u) jāveido uz svarā krītošiem novērojumiem attiecīgie noteikumu nolīdzinājumi. Šos noteikumus var formulēt, piem., tādā veidā, ka ar izlīdzinātiem novērojumiem $(B + v_B)$ resp. $(X + v_X)$ un $(Y + v_Y)$ no dažādiem gājieniem vai dažādām gājienu virknēm nosakot tiem kopīgās mezgla malas virzienu resp. kopīgā mezgla punkta koordinatas, atbilstošiem rezultatiem jābūt vienādiem. Bet parasti pa tīkla slēgtām vai dotos pieslēgpunktus savienojošām neslēgtām gājienu virknēm veido izlīdzināto elementu B resp. X un Y sumas, kurām jābūt vienādām ar attiecīgām teoretiski zinamām vai ar pieslēgelementiem noteiktām vērtībām.

Noteikumu nolīdzinājumiem atbilstošo korrelatu normalnolīdzinājumu veidošana, reducēšana un atslēgšana, izlabojumu v_B, v_X, v_Y un vidējo kļūdu noteikšana notiek pazīstamā kārtā.

Izlīdzinot poligontīklā izmērītos elementus resp. sumas B, X un Y kā noteikumu novērojumus, mezglu malu virzienu un mezglu punktu koordinatu tuvino vērtību aprēķins nav vajadzīgs. Tomēr derīgs izdarīt šo aprēķinu līdzīgā veidā, kā iepriekš apskatītā netiešu novērojumu variantā. Ar neizlīdzinātiem leņķiem aprēķinot mezglu malu virzienus $(r)_i$, viegli nosakami atsevišķos noteikumu nolīdzinājumos ieejošie $i \times 180^0$ tipa locekļi. Šie paši locekļi ieiet arī izteiksmēs, kuras veido ar neizlīdzinātiem leņķiem aprēķinot no atsevišķiem gājieniem to galā esošos virzienus $(r)_i$. Kā zinams, šīs izteiksmes ir

$$r_{o_i} - B_i + i \times 180^0 = (r)_i \quad \ldots\ldots \quad (943)$$

tipa, kur r_{o_i} apzīmē gājiena doto vai tuvino atrasto sākuma virzienu, B_i — labo leņķu sumu, un $(r)_i$ — gājiena gala virzienu. Kas zīmējas uz i, tad tas ir vesels skaitlis, kurš jāizvēlas tā, lai atbilstošais $(r)_i$ būtu starp robežām 0 un 360^0; pie tam i ir pārskaitlis vai nepārskaitlis atkarībā no tā, vai $(r)_i$ aprēķinam lietoto leņķu skaits n ir pārskaitlis vai nepārskaitlis.

Izlīdzināšanas rezultats, saprotams, neatkarājas no tā, vai attiecīgos elementus izlīdzina kā netiešus, vai kā noteikumu novērojumus. Bet darba apjoma ziņā, skatoties pēc apstākļiem, šie izlīdzināšanas paņēmieni var būt diezgan dažādā mērā izdevīgi. Jāievēro, ka izlīdzinot poligontīklu ar t gājieniem un u nosakamiem mezgliem pēc netiešo novērojumu paņēmiena, katrā izlīdzināšanas daļā vai nodaļā ir u normalnolīdzinājumu; bet izlīdzinot to pašu poligontīklu pēc noteikumu novērojumu paņēmiena, ir (t — u) korrelatu normalnolīdzinājumu.

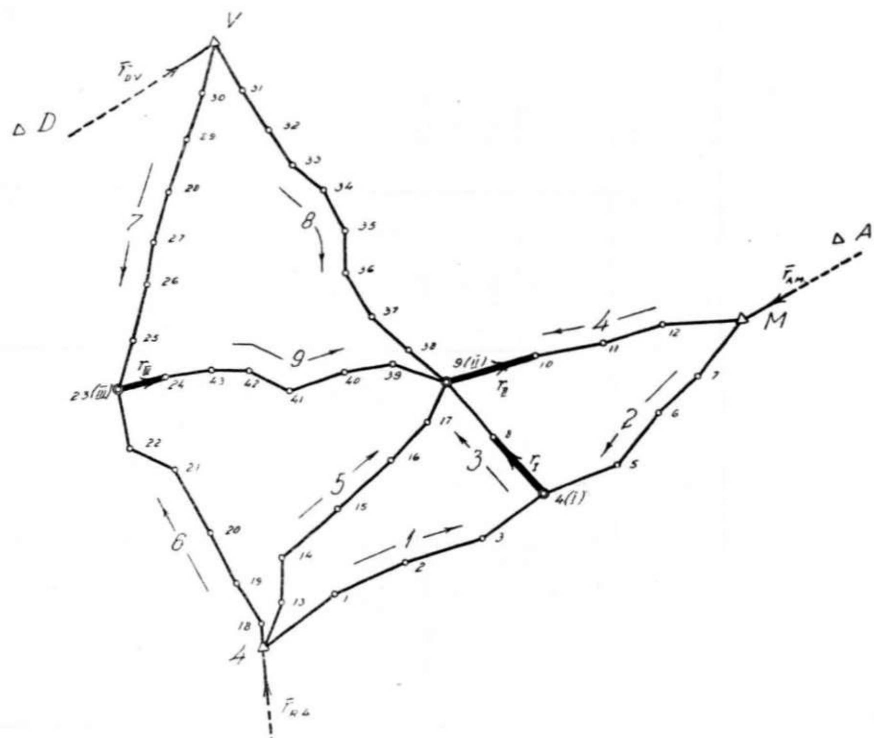
§ 78. Piemērs.

L. U. Inženierzinātņu fakultātes Ģeodezijas nozares studentu praktiskos darbos 1937. gadā uzmērīts 9 teodolita gājienus saturošs poligontīkls (29. att.). Gājieni 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 vienā galā pieslēgti dotiem augstākas šķiras punktiem Z M № 4 (△ 4), Mežmala (△ M), Vecdaugava (△ V) ar koordinatām

$$\bar{x}_4 = +13312{,}95 \text{ m} \qquad \bar{y}_4 = -602{,}51 \text{ m}$$
$$\bar{x}_M = +13865{,}86 \qquad \bar{y}_M = +523{,}17$$
$$\bar{x}_V = +14628{,}70 \qquad \bar{y}_V = -506{,}22$$

un dotiem virzieniem Rinuži (△R) ⟶ Z M № 4 (△4), Augstā kāpa (△A) ⟶ Mežmala (△M), Daugavgrīvas bāka (△D) ⟶ Vecdaugava (△V), kuru sekundu desmitos noapaļotās vērtības ir

$$\bar{r}_{R.4} = \;\; 5^0 04' 50''$$
$$\bar{r}_{A.M} = 248\ 31\ 10$$
$$\bar{r}_{D.V} = \;\; 65\ 51\ 20$$



29. attēls.

Minētie gājieni savienoti mezglos ◌ 4 (I), ◌ 9 (II), ◌ 23 (III); kā atbilstošās mezglu malas pieņemtas sekojošās: ◌ 4 ⟶ ⊙ 8, ◌ 9 ⟶ ⊙ 10, ◌ 23 ⟶ ⊙ 24.

Tabulās I—IX pa atsevišķiem gājieniem atzīmēti ar vienādu noteiktību izmērītie gājienu labie leņķi β un ar, uz garuma vienību attiecīgo, vienādu noteiktību izmērītie malu garumi s.

Šī poligontīkla izlīdzināšanu izdarīsim divos variantos, pirmā uzskatot novērojumu veidā lietotās leņķu resp. koordinatu pieaugumu sumas par netiešiem, otrā — par noteikumu novērojumiem.

(Turp. 515. lapp·)

Tabula I.

1. gājiens.

$n_1 = 5;\ p_{B_1} = \frac{1}{5} = 0{,}20$ $\qquad$ $S_1 = 701\text{ m};\ p_{X_1} = p_{Y_1} = \frac{1000}{701} = 1{,}43$

Punktu apzim.	β ° ′ ″	v_β ″	$\bar\beta$ ° ′ ″	$\bar r$ ° ′ ″	s m	Δx m	$v_{\Delta x}$ cm	ΔY m	$v_{\Delta y}$ cm	$\overline{\Delta x}$ m	$\overline{\Delta y}$ m	$\bar x$ m	$\bar y$ m
△R													
				5 04 50									
△4	124 48 50		124 48 50									+13312,95	−602,51
				60 16 00	198,22	+ 98,31	− 4	+172,12	−1	+ 98,27	+172,11		
⊙1	165 55 30	+10	165 55 40									+13411,22	−430,40
				72 20 20	165,21	+ 44,60	− 4	+159,08	−1	+ 44,56	+159,07		
⊙2	173 50 40		173 50 40									+13455,78	−271,33
				80 29 40	174,62	+ 28,84	− 4	+172,22	−1	+ 28,80	+172,21		
⊙3	198 52 40		198 52 40									+13484,58	− 99,12
				61 37 00	163,19	+ 77,58	− 4	+143,57	−1	+ 77,54	+143,56		
⊙4	273 43 00		273 43 00									+13562,12	+ 44,44
				327 54 00									
⊙8		+10			701,24		−16		−4				
B_1	937 10 40	$\overline{B}_1$	937 10 50		X_1	+ 249,33	Y_1	+646,99		+249,17	+646,95		
$\bar r_{R.4}$	5 04 50				$\bar x_4$	+13312,95	$\bar y_4$	−602,51		$= \overline{X}_1$	$= \overline{Y}_1$		
$\bar r_{R.4} - B_1$	− 932 05 50				$(x_I)_1$	+13562,28	$(y_I)_1$	+ 44,48					
7×180^0	1260				(x_I)	+13562,22	(y_I)	+ 44,43					
$(r_I)_1$	327 54 10				f_{x_1}	+ 0,06	f_{Y_1}	+ 0,05					
(r_I)	327 54 10												
f_{β_1}	00												

Tabula II.

2. gājiens.

$n_2 = 5;\ p_{B_2} = \frac{1}{5} = 0{,}20$

$S_2 = 583\ \text{m};\ p_{X_2} = p_{Y_2} = \frac{1000}{583} = 1{,}71$

Punktu apzīm.	β	v_β	$\bar\beta$	$\bar r$	s	Δx	$v_{\Delta x}$	Δy	$v_{\Delta y}$	$\overline{\Delta x}$	$\overline{\Delta y}$	$\bar x$	$\bar y$
	° ′ ″	″	° ′ ″	° ′ ″	m	m	cm	m	cm	m	m	m	m
△A				248 31 10									
△M	201 21 30		201 21 30	227 09 40	152,06	− 103,39	− 1	−111,50	+2	−103,40	−111,48	+13865,86	+523,17
⊙7	172 49 50		172 49 50	234 19 50	118,79	− 69,27	− 1	− 96,50	+1	− 69,28	− 96,49	+13762,46	+411,69
⊙6	187 14 30		187 14 30	227 05 20	142,80	− 97,23	− 1	−104,59	+1	− 97,24	−104,58	+13693,18	+315,20
⊙5	148 35 20		148 35 20	258 30 00	169,60	− 33,81	− 1	−166,20	+2	− 33,82	− 166,18	+13595,94	+210,62
◌4	110 35 50	+10	110 36 00	327 54 00								+13562,12	+ 44,44
⊙8		+10			583,25		− 4		+6				
B_2	820 37 00	$\bar B_2$	820 37 10		X_2	− 303,70	Y_2	−478,79		−303,74	−478,73		
$\bar r_{A.M}$	248 31 10				$\bar x_M$	+ 13865,86	$\bar y_M$	+523,17		$=\bar X_2$	$=\bar Y_2$		
$\bar r_{A.M} - B_2$	−572 05 50				$(x_1)_2$	+ 13562,16	$(y_1)_2$	+ 44,38					
5×180^0	900				(x_1)	+ 13562,22	(y_1)	+ 44,43					
$(r_1)_2$	327 54 10				f_{X_2}	−0,06	f_{Y_2}	−0,05					
(r_1)	327 54 10												
f_{β_2}	00												

Tabula III.

3. gājiens.

$n_3 = 2$; $p_{B_3} = \frac{1}{2} = 0{,}50$ $S_3 = 316\,m$; $p_{X_3} = p_{Y_3} = \frac{1000}{316} = 3{,}16$

Punktu apzīm.	β	v_β	$\overline{\beta}$	$\overline{r}$	s	Δx	$v_{\Delta x}$	Δy	$v_{\Delta y}$	$\overline{\Delta x}$	$\overline{\Delta y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$
	° ′ ″	″	° ′ ″	° ′ ″	m	m	cm	m	cm	m	m	m	m
◌ 4												+13562,12	+ 44,44
				337 54 00	159,00	+ 134,69	− 5	− 84,49	+1	+134,64	− 84,48		
⊙ 8	180 17 50	+10	180 18 00									+13696,76	− 40,04
				327 36 00	157,25	+ 132,77	− 4	− 84,26	+1	+132,73	− 84,25		
◌ 9	66 16 10		66 16 10									+13829,49	−124,29
				81 19 50									
⊙10		+10			316,25		− 9		+2				
B_3	246 34 00	$\overline{B}_3$	246 34 10		X_3	+ 267,46	Y_3	−168,75		+267,37	−168,73		
(r_I)	327 54 10				(x_I)	+ 13562,22	(y_I)	+ 44,43		$= \overline{X}_3$	$= \overline{Y}_3$		
$(r_I) - B_3$	81 20 10				$(x_{II})_3$	+ 13829,68	$(y_{II})_3$	−124,32					
$(r_{II})_3$	81 20 10				(x_{II})	+ 13829,46	(y_{II})	−124,26					
(r_{II})	81 19 50				f_{X_3}	+ 0,22	f_{Y_3}	− 0,06					
f_{β_3}	+ 20												

Tabula IV.

4. gājiens.

$n_4 = 4;\ p_{B_4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ $\qquad S_4 = 653\ \text{m};\ p_{X_4} = p_{Y_4} = \frac{1000}{653} = 1{,}75$

Punktu apzīm.	β	v_β	$\bar\beta$	$\bar r$	s	Δx	$v_{\Delta x}$	Δy	$v_{\Delta y}$	$\overline{\Delta x}$	$\overline{\Delta y}$	$\bar x$	y
	° ′ ″	″	° ′ ″	° ′ ″	m	m	cm	m	cm	m	m	m	m
△A				248 31 10									
△M	151 49 50		151 49 50	276 41 20	172,52	+ 20,09	− 2	−171,35	+ 7	+ 20,07	−171,28	+13865,86	+523,17
⊙12	195 59 30	−10	195 59 20	260 42 00	128,69	− 20,80	− 1	−127,00	+ 6	− 20,81	−126,94	+13885,93	+351,89
⊙11	172 50 10		172 50 10	267 51 50	153,62	− 5,73	− 1	−153,51	+ 6	− 5,74	−153,45	+13865,12	+224,95
⊙10	186 32 10	−10	186 32 00	261 19 50	198,14	− 29,87	− 2	−195,88	+ 9	− 29,89	−195,79	+13859,38	+ 71,50
⊙ 9	(360)		(360)	81 19 50								+13829,49	−124,29
⊙10		−20			652,97		− 6		+28				
B_4	1067 11 40	$\bar B_4$	1067 11 20		X_4	− 36,31	Y_4	−647,74		− 36,37	−647,46		
$\bar r_{A.M}$	248 31 10				$\bar x_M$	+ 13865,86	$\bar y_M$	+523,17		$=\bar X_4$	$=\bar Y_4$		
$\bar r_{A.M} - B_4$	−818 40 30				$(x_{II})_4$	+ 13829,55	$(y_{II})_4$	−124,57					
5×180^0	900				(x_{II})	+ 13829,46	(y_{II})	−124,26					
$(r_{II})_4$	81 19 30				f_{X_4}	+0,09	f_{Y_4}	−0,31					
(r_{II})	81 19 50												
f_{β_4}	− 20												

Tabula V.

5. gājiens.

$n_5 = 7;\ p_{B_5} = \frac{1}{7} = 0{,}14$ $\qquad S_5 = 736\,\mathrm{m};\ p_{X_5} = p_{Y_5} = \frac{1000}{736} = 1{,}36$

Punktu apzīm.	β	v_β	$\bar\beta$	$\bar r$	s	Δx	$v_{\Delta x}$	Δy	$v_{\Delta y}$	$\overline{\Delta x}$	$\overline{\Delta y}$	$\bar x$	$\bar y$
	° ′ ″	″	° ′ ″	° ′ ″	m	m	cm	m	cm	m	m	m	m
△R													
				5 04 50									
△ 4	156 38 00		156 38 00									+13312,95	−602,51
				28 26 50	104,72	+ 92,08	− 2	+ 49,88	− 2	+ 92,06	+ 49,86		
⊙13	199 08 30	+10	199 08 40									+13405,01	−552,65
				9 18 10	99,24	+ 97,93	− 2	+ 16,04	− 2	+ 97,91	+ 16,02		
⊙14	132 39 40		132 39 40									+13502,92	−536,63
				56 38 30	162,52	+ 89,37	− 3	+135,74	− 2	+ 89,34	+135,72		
⊙15	180 22 20	+10	180 22 30									+13592,26	−400,91
				56 16 00	159,70	+ 88,69	− 2	+132,81	− 2	+ 88,67	+132,79		
⊙16	182 59 40	+10	182 59 50									+13680,93	−268,12
				53 16 10	108,04	+ 64,61	− 2	+ 86,59	− 2	+ 64,59	+ 86,57		
⊙17	198 58 30		198 58 30									+13745,52	−181,55
				34 17 40	101,66	+ 83,99	− 2	+ 57,28	− 2	+ 83,97	+ 57,26		
◌ 9	132 57 50		132 57 50									+13829,49	−124,29
				81 19 50									
⊙10		+30			735,88		−13		−12				
B_5	1183 44 30	$\bar B_5$	1183 45 00		X_5	+ 516,67	Y_5	+478,34		+516,54	+478,22		
$\bar r_{R.4}$	5 04 50				$\bar x_4$	+13312,95	$\bar y_4$	−602,51		$= \bar X_5$	$= \bar Y_5$		
$\bar r_{R.4} - B_5$	−1178 39 40				$(x_{II})_5$	+13829,62	$(y_{II})_5$	−124,17					
7×180^0	1260				(x_{II})	+13829,46	(y_{II})	−124,26					
$(r_{II})_5$	81 20 20				f_{X_5}	+ 0,16	f_{Y_5}	+ 0,09					
(r_{II})	81 19 50												
f_{β_5}	+ 30												

Tabula VI.

6. gājiens.

$n_6 = 7;\ p_{B_6} = \frac{1}{7} = 0{,}14$

$S_6 = 675\,m;\ p_{X_6} = p_{Y_6} = \frac{1000}{675} = 1{,}48$

Punktu apzīm.	β	v_β	$\overline{\beta}$	$\overline{r}$	s	Δx	$v_{\Delta x}$	Δy	$v_{\Delta y}$	$\overline{\Delta x}$	$\overline{\Delta y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$
	° ′ ″	″	° ′ ″	° ′ ″	m	m	cm	m	cm	m	m	m	m
△R													
				5 04 50									
△4	184 08 00		184 08 00	0 56 50	52,74	+ 52,73	— 1	+ 0,87		+ 52,72	+ 0,87	+13312,95	−602,51
⊙18	204 33 40		204 33 40	336 23 10	106,04	+ 97,16	— 3	— 42,48	—1	+ 97,13	— 42,49	+13365,67	−601,64
⊙19	176 26 10	+10	176 26 20	339 56 50	120,03	+ 112,75	— 4	— 41,16	—1	+112,71	— 41,17	+13462,80	−644,13
⊙20	181 52 00		181 52 00	338 04 50	155,62	+ 144,37	— 5	— 58,09	—2	+144,32	— 58,11	+13575,51	−685,30
⊙21	215 06 00		215 06 00	302 58 50	109,80	+ 59,77	— 3	92,11	—1	+ 59,74	— 92,12	+13719,83	−743,41
⊙22	124 28 40	+10	124 28 50	358 30 00	131,10	+ 131,06	— 4	— 3,43	— 2	+131,02	— 3,45	+13779,57	−835,53
⊙23	96 53 30		96 53 30	81 36 30								+13910,59	−838,98
⊙24		+20			675,33		—20		—7				

B_6	1183 28 00	$\overline{B}_6$	1183 28 20		X_6	+ 597,84	Y_6	—236,40		+597,64	—236,47
$\overline{r}_{R.4}$	5 04 50				$\overline{x}_4$	+13312,95	$\overline{y}_4$	—602,51		$=\overline{X}_6$	$=\overline{Y}_6$
$\overline{r}_{R.4} - B_6$	—1178 23 10				$(x_{III})_6$	+13910,79	$(y_{III})_6$	—838,91			
7×180^0	1260				(x_{III})	+13910,56	(y_{III})	—838,91			
$(r_{III})_6$	81 36 50				f_{X_6}	+ 0,23	f_{Y_6}	0,00			
(r_{III})	81 36 30										
f_{β_6}	+ 20										

Tabula VII.

7. gājiens.

$n_7 = 8;\ p_{B_7} = \frac{1}{8} = 0{,}12$ $\qquad$ $S_7 = 792\ \text{m};\ p_{X_7} = p_{Y_7} = \frac{1000}{792} = 1{,}26$

Punktu apzīm.	β	v_β	$\bar\beta$	$\bar r$	s	Δx	$v_{\Delta x}$	Δy	$v_{\Delta y}$	$\overline{\Delta x}$	$\overline{\Delta y}$	$\bar x$	$\bar y$
	° ′ ″	″	° ′ ″	° ′ ″	m	m	cm	m	cm	m	m	m	m
△ D				65 51 20									
△ V	39 49 40		39 49 40	206 01 40	112,60	— 101,18	+ 4	— 49,41	— 1	—101,14	— 49,42	+14628,70	—506,22
⊙30	178 12 10		178 12 10	207 49 30	109,18	— 96,56	+ 3	— 50,96	— 1	— 96,53	— 50,97	+14527,56	—555,64
⊙29	180 57 00	—10	180 56 50	206 52 40	120,71	— 107,67	+ 5	— 54,58	— 1	—107,62	— 54,59	+14431,03	—606,61
⊙28	182 16 50		182 16 50	204 35 50	118,14	— 107,42	+ 4	— 49,17	— 1	—107,38	— 49,18	+14323,41	—661,20
⊙27	183 08 10		183 08 10	201 27 40	96,72	— 90,01	+ 3	— 35,39	— 1	— 89,98	— 35,40	+14216,03	—710,38
⊙26	178 34 30		178 34 30	202 53 10	125,90	— 115,99	+ 5	— 48,96	— 1	—115,94	— 48,97	+14126,05	—745,78
⊙25	178 56 30	—10	178 56 20	203 56 50	108,93	— 99,55	+ 3	— 44,22	— 1	— 99,52	— 44,23	+14010,11	—794,75
⊙ 23	302 20 20		302 20 20	81 36 30								+13910,59	—838,98
⊙24		—20			792,18		+27		— 7				

B_7	1424 15 10	$\bar B_7$	1424 14 50	X_7	— 718,38	Y_7	—332,69		—718,11	—332,76
$\bar r_{D.V}$	65 51 20			$\bar x_V$	+ 14628,70	$\bar y_V$	—506,22		$=\bar X_7$	$=\bar Y_7$
$\bar r_{D.V} - B_7$	1358 23 50			$(x_{III})_7$	+ 13910,32	$(y_{III})_7$	—838,91			
8×180^0	1440			(x_{III})	+ 13910,56	(y_{III})	—838,91			
$(r_{III})_7$	81 36 10			f_{X_7}	—0,24	f_{Y_7}	0,00			
(r_{III})	81 36 30									
f_{β_7}	—20									

8. gājiens.

$n_8 = 10;\ p_{B_8} = \frac{1}{10} = 0,10$

$S_8 = 914\,m;\ p_{X_8} = p_{Y_8} = \frac{1000}{914} = 1,09$

Punktu apzīm.	β	v_β	$\bar\beta$	$\bar r$	s	Δx	$v_{\Delta x}$	Δy	$v_{\Delta y}$	$\overline{\Delta x}$	$\overline{\Delta y}$	$\bar x$	$\bar y$
	° ′ ″	″	° ′ ″	° ′ ″	m	m	cm	m	cm	m	m	m	m
△ D				65 51 20									
△ V	85 33 20		85 33 20	160 18 00	116,91	− 110,07	+ 5	+ 39,41	− 2	−110,02	+ 39,39	+14628,70	- 506,22
⊙31	184 21 00		184 21 00	155 57 00	98,55	− 89,99	+ 5	+ 40,16	− 1	− 89,94	+ 40,15	+14518,68	−466,83
⊙32	183 41 40		183 41 40	152 15 20	91,24	− 80,75	+ 5	+ 42,47	− 1	− 80,70	+ 42,46	+14428,72	−426,68
⊙33	194 21 50		194 21 50	137 53 30	86,82	− 64,41	+ 5	+ 58,22	− 1	− 64,36	+ 58,21	+14348,04	−384,22
⊙34	157 14 50	−10	157 14 40	160 38 50	101,92	− 96,16	+ 5	+ 33,77	− 1	− 96,11	+ 33,76	+14283,68	−326,01
⊙35	151 26 10	−10	151 26 00	189 12 50	90,82	− 89,65	+ 5	− 14,54	− 1	− 89,60	− 14,55	+14187,57	292,25
⊙36	213 04 50		213 04 50	156 08 00	113,44	− 103,74	+ 5	+ 45,90	− 2	−103,69	+ 45,88	+14097,97	−306,80
⊙37	193 47 40	−10	193 47 30	142 20 30	103,74	− 82,13	+ 5	+ 63,38	− 1	− 82,08	+ 63,37	+13994,28	−260,92
⊙38	183 52 00		183 52 00	138 28 30	110,54	82,76	+ 5	+ 73,28	− 2	− 82,71	+ 73,26	+13912,20	−197,55
⊙ 9	237 08 40		237 08 40	81 19 50								+13829,49	−124,29
⊙10		−30			913,98		+ 45		−12				

B_8	1784 32 00	$\bar B_8$	1784 31 30	X_8	− 799,66	Y_8	+382,05	−799,21	+381,93
$\bar r_{D.V}$	65 51 20			$\bar x_V$	+ 14628,70	$\bar y_V$	−506,22	$=\bar X_8$	$=\bar Y_8$
$r_{D.V} - B_8$	−1718 40 40			$(x_{II})_8$	+ 13829,04	$(y_{II})_8$	−124,17		
10×180^0	1800			(x_{II})	+ 13829,46	(y_{II})	−124,26		
$(r_{II})_8$	81 19 20			f_{X_8}	− 0,42	f_{Y_8}	+ 0,09		
(r_{II})	81 19 50								
f_{β_8}	− 30								

Piemērs.

Tabula IX.

9. gājiens.

$n_9 = 7;\ p_{B_9} = \frac{1}{7} = 0{,}14$ $\qquad S_9 = 751\ \text{m};\ p_{x_9} = p_{y_9} = \frac{1000}{751} = 1{,}33$

Punktu apzīm.	β	v_β	$\bar\beta$	$\bar r$	s	Δx	$v_{\Delta x}$	Δy	$v_{\Delta y}$	$\overline{\Delta x}$	$\overline{\Delta y}$	$\bar x$	$\bar y$
	° ′ ″	″	° ′ ″	° ′ ″	m	m	cm	m	cm	m	m	m	m
☼ 23												+13910,59	—838,98
				81 36 30	110,86	+ 16,18	+ 1	+109,67	— 2	+16,19	+109,65		
⊙24	172 34 30		172 34 30									+13926,78	—729,33
				89 02 00	100,90	+ 1,70		+100,89	— 2	+ 1,70	+100,87		
⊙43	168 38 50	—10	168 38 40									+13928,48	—628,46
				100 23 20	82,78	— 14,93		+ 81,42	— 2	—14,93	+ 81,40		
⊙42	157 27 50		157 27 50									+13913,55	—547,06
				122 55 30	97,06	— 52,76		+ 81,47	— 2	—52,76	+ 81,45		
⊙41	224 22 10		224 22 10									+13860,79	—465,61
				78 33 20	125,70	+ 24,98	+ 1	+123,19	— 3	+24,99	+123,16		
⊙40	170 02 50		170 02 50									+13885,78	—342,45
				88 30 30	109,28	+ 2,84	+ 1	+109,24	— 2	+ 2,85	+109,22		
⊙39	150 00 40		150 00 40									+13888,63	—233,23
				118 29 50	123,98	— 59,15	+ 1	+108,96	— 2	—59,14	+108,94		
☼ 9	217 10 00		217 10 00									+13829,49	—124,29
				81 19 50									
⊙10													
		—10			750,56		+ 4		—15				
B_9	1260 16 50	$\bar B_9$	1260 16 40		X_9	— 81,14	Y_9	+714,84		—81,10	+714,69		
(r_{III})	81 36 30				(x_{III})	+13910,56	(y_{III})	—838,91		$=\bar X_9$	$=\bar Y_9$		
$(r_{III})—B_9$	—1178 40 20				$(x_{II})_9$	+13829,42	$(y_{II})_9$	—124,07					
7×180^0	1260				(x_{II})	+13829,46	(y_{II})	—124,26					
$(r_{II})_9$	81 19 40				f_{x_9}	—0,04	f_{y_9}	+ 0,19					
(r_{II})	81 19 50												
f_{β_9}	— 10												

1. variants: netieši novērojumi.

Izlīdzināšanas pirmā daļā veidojam tabulās atzīmētās leņķu sumas B, un ar tām aprēķinam mezglu malu tuvinos virzienus (r_I), (r_{II}), (r_{III}) šādā kārtībā.

No gājieniem 1 un 2 tabulās parādītā veidā aprēķinam mezglā I pieņemtās mezgla malas ☼ 4 ⟶ ⊙ 8 virzienus $(r_I)_1$ un $(r_I)_2$ un veidojam šo elementu vienkāršo aritmetisko vidējo (r_I). Apaļojot sekundu desmitos, atrodam

$$\begin{array}{l} (r_I)_1 = 327^0 54' 10'' \\ (r_I)_2 = 10 \\ \hline (r_I) = 327^0 54' 10'' \end{array}$$

Līdzīgā veidā no gājieniem 6 un 7 aprēķinam mezglā III pieņemtās mezgla malas ☼ 23 ⟶ ⊙ 24 virzienus $(r_{III})_6$ un $(r_{III})_7$ un šo rezultatu vienkāršo aritmetisko vidējo (r_{III}):

$$\begin{array}{l} (r_{III})_6 = 81^0 36' 50'' \\ (r_{III})_7 = 10 \\ \hline (r_{III}) = 81^0 36' 30'' \end{array}$$

Vidējos (r_I) un (r_{III}) tieši lietojam izlīdzināšanas rēķinā kā attiecīgo mezglu malu virzienu tuvinās vērtības. Kas zīmējas uz mezglā II pieņemtās mezgla malas ☼ 9 ⟶ ⊙ 10 virzienu, tad to aprēķinam no gājieniem 4, 5 un 8, izejot no šo gājienu sākumā dotiem pieslēgvirzieniem. Bez tam tās pašas mezgla malas virzienu nosakam arī no gājieniem 3 un 9, uzskatot par šo gājienu sākumā dotiem pieslēgvirzieniem iepriekš atrastos vidējos (r_I) un (r_{III}). No visiem tādā veidā atrastiem rezultatiem $(r_{II})_3$, $(r_{II})_4$, $(r_{II})_5$, $(r_{II})_8$, $(r_{II})_9$ veidojam vienkāršo aritmetisko vidējo (r_{II}):

$$\begin{array}{l} (r_{II})_3 = 81^0 20' 10'' \\ (r_{II})_4 = 19\ 30 \\ (r_{II})_5 = 20\ 20 \\ (r_{II})_8 = 19\ 20 \\ (r_{II})_9 = 19\ 40 \\ \hline (r_{II}) = 81^0 19' 50'' \end{array}$$

Pēc tam pa visiem atsevišķiem gājieniem veidojam atbilstošās starpības f_β.

Apzīmējot pieņemto mezglu malu izlīdzinātos virzienus ar $\overline{r}_I$, $\overline{r}_{II}$, $\overline{r}_{III}$, pa atsevišķiem gājieniem veidojam atbilstošos kļūdu nolīdzinājumus:

$$1)\ \overline{r}_{R.4} + 7\times180^0 - (B_1 + v_{B_1}) = \overline{r}_{I}$$

$$2)\ \overline{r}_{A.M} + 5\times180^0 - (B_2 + v_{B_2}) = \overline{r}_{I}$$

$$3)\ \overline{r}_{I} - (B_3 + v_{B_3}) = \overline{r}_{II}$$

$$4)\ \overline{r}_{A.M} + 4\times180^0 - (B_4 + v_{B_4}) = \overline{r}_{II}$$

$$5)\ \overline{r}_{R.4} + 7\times180^0 - (B_5 + v_{B_5}) = \overline{r}_{II}$$

$$6)\ \overline{r}_{R.4} + 7\times180^0 - (B_6 + v_{B_6}) = \overline{r}_{III}$$

$$7)\ \overline{r}_{D.V} + 8\times180^0 - (B_7 + v_{B_7}) = \overline{r}_{III}$$

$$8)\ \overline{r}_{D.V} + 10\times180^0 - (B_8 + v_{B_8}) = \overline{r}_{II}$$

$$9)\ \overline{r}_{III} + 7\times180^0 - (B_9 + v_{B_9}) = \overline{r}_{II}$$

Atvietojot $\overline{r}_I$, $\overline{r}_{II}$, $\overline{r}_{III}$ ar izteiksmēm

$$\overline{r}_I = (r_I) + \zeta_1$$

$$\overline{r}_{II} = (r_{II}) + \zeta_2$$

$$\overline{r}_{III} = (r_{III}) + \zeta_3$$

veidojam pārvērstos kļūdu nolīdzinājumus

$$\begin{aligned} 1)\ -\zeta_1 - (r_I) + (\overline{r}_{R.4} - B_1 + 7\times180^0) &= -\zeta_1 + \{(r_I)_1 - (r_I)\} = \\ &= -\zeta_1 + f_{\beta_1} = v_{B_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\ -\zeta_1 - (r_I) + (\overline{r}_{A.M} - B_2 + 5\times180^0) &= -\zeta_1 + \{(r_I)_2 - (r_I)\} = \\ &= -\zeta_1 + f_{\beta_2} = v_{B_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3)\ +\zeta_1 - \zeta_2 - (r_{II}) + \{(r_I) - B_3\} &= +\zeta_1 - \zeta_2 + \{(r_{II})_3 - (r_{II})\} = \\ &= +\zeta_1 - \zeta_2 + f_{\beta_3} = v_{B_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4)\ -\zeta_2 - (r_{II}) + (\overline{r}_{A.M} - B_4 + 4\times180^0) &= -\zeta_2 + \{(r_{II})_4 - (r_{II})\} = \\ &= -\zeta_2 + f_{\beta_4} = v_{B_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5)\ -\zeta_2 - (r_{II}) + (\overline{r}_{R.4} - B_5 + 7\times180^0) &= -\zeta_2 + \{(r_{II})_5 - (r_{II})\} = \\ &= -\zeta_2 + f_{\beta_5} = v_{B_5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6)\ -\zeta_3 - (r_{III}) + (\overline{r}_{R.4} - B_6 + 7\times180^0) &= -\zeta_3 + \{(r_{III})_6 - (r_{III})\} = \\ &= -\zeta_3 + f_{\beta_6} = v_{B_6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7)\ -\zeta_3 - (r_{III}) + (\overline{r}_{D.V} - B_7 + 8\times180^0) &= -\zeta_3 + \{(r_{III})_7 - (r_{III})\} = \\ &= -\zeta_3 + f_{\beta_7} = v_{B_7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8)\ -\zeta_2 - (r_{II}) + (\overline{r}_{D.V} - B_8 + 10\times180^0) &= -\zeta_2 + \{(r_{II})_8 - (r_{II})\} = \\ &= -\zeta_2 + f_{\beta_8} = v_{B_8} \end{aligned}$$

$$9)\quad -\zeta_2+\zeta_3-(r_{II})+\{(r_{III})-B_9+7\times180^0\} = -\zeta_2+\zeta_3+\{(r_{II})_9-(r_{II})\} =$$
$$= -\zeta_2+\zeta_3+f_{\beta_9} = v_{B_9}$$

jeb, ieliekot f_β skaitliskās vērtības:

1)	$-\zeta_1 + 0 = v_{B_1}$	$p_{B_1} = 0{,}20$
2)	$-\zeta_1 + 0 = v_{B_2}$	$p_{B_2} = 0{,}20$
3)	$+\zeta_1 - \zeta_2 + 20 = v_{B_3}$	$p_{B_3} = 0{,}50$
4)	$-\zeta_2 - 20 = v_{B_4}$	$p_{B_4} = 0{,}25$
5)	$-\zeta_2 + 30 = v_{B_5}$	$p_{B_5} = 0{,}14$
6)	$-\zeta_3 + 20 = v_{B_6}$	$p_{B_6} = 0{,}14$
7)	$-\zeta_3 - 20 = v_{B_7}$	$p_{B_7} = 0{,}12$
8)	$-\zeta_2 - 30 = v_{B_8}$	$p_{B_8} = 0{,}10$
9)	$-\zeta_2 + \zeta_3 - 10 = v_{B_9}$	$p_{B_9} = 0{,}14$

Atbilstošie normalnolīdzinājumi ir

$$\begin{aligned}
+0{,}90\,\zeta_1 - 0{,}50\,\zeta_2 + 0{,}00\,\zeta_3 + 10{,}00 &= 0\\
-0{,}50\,\zeta_1 + 1{,}13\,\zeta_2 - 0{,}14\,\zeta_3 - 4{,}80 &= 0\\
0{,}00\,\zeta_1 - 0{,}14\,\zeta_2 + 0{,}40\,\zeta_3 - 1{,}80 &= 0\\
+634{,}00 &
\end{aligned}$$

Atslēdzot šos normalnolīdzinājumus, atrodam

$\zeta_1 = -11{,}1''$ jeb, apaļojot $10''$ vienībās, $\zeta_1 = -10''$

$\zeta_2 = -\ 0{,}1$ „ „ „ „ $\zeta_2 = 0$

$\zeta_3 = +\ 4{,}4$ „ „ „ „ $\zeta_3 = 0$

Tā tad

$$\begin{aligned}
\bar{r}_I &= 327^0 54' 10'' - 10'' = 327^0 54' 00''\\
\bar{r}_{II} &= 81\ 19\ 50 + 0 = 81\ 19\ 50\\
\bar{r}_{III} &= 81\ 36\ 30 + 0 = 81\ 36\ 30
\end{aligned}$$

Ieliekot šīs vērtības kļūdu nolīdzinājumos, no tiem atrodam izlabojumus

$$\begin{aligned}
v_{B_1} &= +11{,}1''\\
v_{B_2} &= +11{,}1\\
v_{B_3} &= +\ 9{,}0\\
v_{B_4} &= -19{,}9\\
v_{B_5} &= +30{,}1
\end{aligned}$$

$$v_{B_6} = +15{,}6''$$
$$v_{B_7} = -24{,}4$$
$$v_{B_8} = -29{,}9$$
$$v_{B_9} = -\ \ 5{,}5$$

un veidojam

$$[p_B\, v_B\, v_B] = 514{,}78$$

Pieliekot 10″ vienībās noapaļotos izlabojumus v_B atbilstošām leņķu sumām B, aprēķinam šo sumu izlīdzinātās vērtības

$$\begin{aligned}
\overline{B}_1 &= 937^0 10' 40'' + 10'' = 937^0 10' 50''\\
\overline{B}_2 &= 820\ 37\ 00\ + 10\ = 820\ 37\ 10\\
\overline{B}_3 &= 246\ 34\ 00\ + 10\ = 246\ 34\ 10\\
\overline{B}_4 &= 887\ 11\ 40\ - 20\ = 887\ 11\ 20\\
\overline{B}_5 &= 1183\ 44\ 30\ + 30\ = 1183\ 45\ 00\\
\overline{B}_6 &= 1183\ 28\ 00\ + 20\ = 1183\ 28\ 20\\
\overline{B}_7 &= 1424\ 15\ 10\ - 20\ = 1424\ 14\ 50\\
\overline{B}_8 &= 1784\ 32\ 00\ - 30\ = 1784\ 31\ 30\\
\overline{B}_9 &= 1260\ 16\ 50\ - 10\ = 1260\ 16\ 40
\end{aligned}$$

Atrastos izlabojumus v_B apmēram vienmērīgi sadalot uz attiecīgo gājienu atsevišķiem leņķiem, nosakam šo leņķu izlabojumus v_β un aprēķinam izlīdzinātos leņķus $\overline{\beta}$, atbilstošos izlīdzinātos malu virzienus $\overline{r}$ un koordinatu pieaugumus $\overline{\Delta x}$, $\overline{\Delta y}$, kā tas parādīts tabulu I—IX attiecīgos stabiņos. Noslēdzot izlīdzināšanas rēķina pirmo daļu, vēl nosakam neizlīdzināta izmērīta leņķa vidējo kļūdu

$$m_\beta = \pm\sqrt{\frac{[p_B\, v_B\, v_B]}{t-u}} = \pm\sqrt{\frac{514{,}78}{9-3}} = \pm\, 9{,}3''$$

Izlīdzināšanas rēķina otrā daļā tabulās I—IX pa atsevišķiem gājieniem veidojam koordinatu pieaugumu Δx un Δy sumas X un Y. Līdzīgā kārtā, kā tas izlīdzināšanas pirmā daļā darīts attiecībā uz mezglu malu virzieniem, aprēķinam no atsevišķiem gājieniem mezglu punktu koordinatas un veidojam attiecīgos vienkāršos aritmetiskos vidējos:

$(x_I)_1 = +\,13562{,}28$ m	$(y_I)_1 = +\ 44{,}48$ m
$(x_I)_2 =\ \ \ ,16$	$(y_I)_2 = +\ \ ,38$
$(x_I) = +\,13562{,}22$ m	$(y_I) = +\ 44{,}43$ m
$(x_{III})_6 = +\,13910{,}79$ m	$(y_{III})_6 = -\ 838{,}91$ m

$(x_{III})_7 = + 13910{,}32$ m	$(y_{III})_7 = - 838{,}91$ m
$(x_{III}) = + 13910{,}56$ m	$(y_{III}) = - 838{,}91$ m
$(x_{II})_3 = + 13829{,}68$ m	$(y_{II})_3 = - 124{,}32$ m
$(x_{II})_4 =$,55	$(y_{II})_4 =$,57
$(x_{II})_5 =$,62	$(y_{II})_5 =$,17
$(x_{II})_8 =$,04	$(y_{II})_8 =$,17
$(x_{II})_9 =$,42	$(y_{II})_9 =$,07
$(x_{II}) = + 13829{,}46$ m	$(y_{II}) = - 124{,}26$ m

Pēc tam pa atsevišķiem gājieniem veidojam atbilstošās starpības f_X un f_Y.

Apzīmējot mezglu punktu izlīdzinātās koordinatas ar $\bar{x}_I$, $\bar{x}_{II}$, $\bar{x}_{III}$ resp. $\bar{y}_I$, $\bar{y}_{II}$, $\bar{y}_{III}$, pa atsevišķiem gājieniem veidojam atbilstošos kļūdu nolīdzinājumus:

Izlīdzinot X:	Izlīdzinot Y:
1) $\bar{x}_4 + (X_1 + v_{X_1}) = \bar{x}_I$	1) $\bar{y}_4 + (Y_1 + v_{Y_1}) = \bar{y}_I$
2) $\bar{x}_M + (X_2 + v_{X_2}) = \bar{x}_I$	2) $\bar{y}_M + (Y_2 + v_{Y_2}) = \bar{y}_I$
3) $\bar{x}_I + (X_3 + v_{X_3}) = \bar{x}_{II}$	3) $\bar{y}_I + (Y_3 + v_{Y_3}) = \bar{y}_{II}$
4) $\bar{x}_M + (X_4 + v_{X_4}) = \bar{x}_{II}$	4) $\bar{y}_M + (Y_4 + v_{Y_4}) = \bar{y}_{II}$
5) $\bar{x}_4 + (X_5 + v_{X_5}) = \bar{x}_{II}$	5) $\bar{y}_4 + (Y_5 + v_{Y_5}) = \bar{y}_{II}$
6) $\bar{x}_4 + (X_6 + v_{X_6}) = \bar{x}_{III}$	6) $\bar{y}_4 + (Y_6 + v_{Y_6}) = \bar{y}_{III}$
7) $\bar{x}_V + (X_7 + v_{X_7}) = \bar{x}_{III}$	7) $\bar{y}_V + (Y_7 + v_{Y_7}) = \bar{y}_{III}$
8) $\bar{x}_V + (X_8 + v_{X_8}) = \bar{x}_{II}$	8) $\bar{y}_V + (Y_8 + v_{Y_8}) = \bar{y}_{II}$
9) $\bar{x}_{III} + (X_9 + v_{X_9}) = \bar{x}_{II}$	9) $\bar{y}_{III} + (Y_9 + v_{Y_9}) = \bar{y}_{II}$

Atvietojot $\bar{x}_I$, $\bar{x}_{II}$, $\bar{x}_{III}$ un $\bar{y}_I$, $\bar{y}_{II}$, $\bar{y}_{III}$ ar izteiksmēm

$\bar{x}_I = (x_I) + \xi_1$	$\bar{y}_I = (y_I) + \eta_1$
$\bar{x}_{II} = (x_{II}) + \xi_2$	$\bar{y}_{II} = (y_{II}) + \eta_2$
$\bar{x}_{III} = (x_{III}) + \xi_3$	$\bar{y}_{III} = (y_{III}) + \eta_3$

veidojam pārvērstos kļūdu nolīdzinājumus

1) $\xi_1 - \left\{ (\bar{x}_4 + X_1) - (x_I) \right\} =$	1) $\eta_1 - \left\{ (\bar{y}_4 + Y_1) - (y_I) \right\} =$
$= \xi_1 - \left\{ (x_I)_1 - (x_I) \right\} =$	$= \eta_1 - \left\{ (y_I)_1 - (y_I) \right\} =$
$= \xi_1 \quad - f_{X_1} = v_{X_1}$	$= \eta_1 \quad - f_{Y_1} = v_{Y_1}$

$$2)\ \xi_1 - \left\{ (\bar{x}_M + X_2) - (x_I) \right\} = $$
$$= \xi_1 - \left\{ (x_I)_2 - (x_I) \right\} = $$
$$= \xi_1 \qquad - f_{X_2} = v_{X_2}$$

$$3)\ \xi_2 - \xi_1 - \left\{ \left\{ (x_I) + X_3 \right\} - (x_{II}) \right\} = $$
$$= -\xi_1 + \xi_2 - \left\{ (x_{II})_3 - (x_{II}) \right\} = $$
$$= -\xi_1 + \xi_2 \qquad - f_{X_3} = v_{X_3}$$

$$4)\ \xi_2 - \left\{ (\bar{x}_M + X_4) - (x_{II}) \right\} = $$
$$= \xi_2 - \left\{ (x_{II})_4 - (x_{II}) \right\} = $$
$$= \xi_2 \qquad - f_{X_4} = v_{X_4}$$

$$5)\ \xi_2 - \left\{ (\bar{x}_4 + X_5) - (x_{II}) \right\} = $$
$$= \xi_2 - \left\{ (x_{II})_5 - (x_{II}) \right\} = $$
$$= \xi_2 \qquad - f_{X_5} = v_{X_5}$$

$$6)\ \xi_3 - \left\{ (\bar{x}_4 + X_6) - (x_{III}) \right\} = $$
$$= \xi_3 - \left\{ (x_{III})_6 - (x_{III}) \right\} = $$
$$= \xi_3 \qquad - f_{X_6} = v_{X_6}$$

$$7)\ \xi_3 - \left\{ (\bar{x}_V + X_7) - (x_{III}) \right\} = $$
$$= \xi_3 - \left\{ (x_{III})_7 - (x_{III}) \right\} = $$
$$= \xi_3 \qquad - f_{X_7} = v_{X_7}$$

$$8)\ \xi_2 - \left\{ (\bar{x}_V + X_8) - (x_{II}) \right\} = $$
$$= \xi_2 - \left\{ (x_{II})_8 - (x_{II}) \right\} = $$
$$= \xi_2 \qquad - f_{X_8} = v_{X_8}$$

$$9)\ \xi_2 - \xi_3 - \left\{ \left\{ (x_{III}) + X_9 \right\} - (x_{II}) \right\} = $$
$$= \xi_2 - \xi_3 - \left\{ (x_{II})_9 - (x_{II}) \right\} = $$
$$= \xi_2 - \xi_3 \qquad - f_{X_9} = v_{X_9}$$

$$2)\ \eta_1 - \left\{ (\bar{y}_M + Y_2) - (y_I) \right\} = $$
$$= \eta_1 - \left\{ (y_I)_2 - (y_I) \right\} = $$
$$= \eta_1 \qquad - f_{Y_2} = v_{Y_2}$$

$$3)\ \eta_2 - \eta_1 - \left\{ \left\{ (y_I) + Y_3 \right\} - (y_{II}) \right\} = $$
$$= -\eta_1 + \eta_2 - \left\{ (y_{II})_3 - (y_{II}) \right\} = $$
$$= -\eta_1 + \eta_2 \qquad - f_{Y_3} = v_{Y_3}$$

$$4)\ \eta_2 - \left\{ (\bar{y}_M + Y_4) - (y_{II}) \right\} = $$
$$= \eta_2 - \left\{ (y_{II})_4 - (y_{II}) \right\} = $$
$$= \eta_2 \qquad - f_{Y_4} = v_{Y_4}$$

$$5)\ \eta_2 - \left\{ (\bar{y}_4 + Y_5) - (y_{II}) \right\} = $$
$$= \eta_2 - \left\{ (y_{II})_5 - (y_{II}) \right\} = $$
$$= \eta_2 \qquad - f_{Y_5} = v_{Y_5}$$

$$6)\ \eta_3 - \left\{ (\bar{y}_4 + Y_6) - (y_{III}) \right\} = $$
$$= \eta_3 - \left\{ (y_{III})_6 - (y_{III}) \right\} = $$
$$= \eta_3 \qquad - f_{Y_6} = v_{Y_6}$$

$$7)\ \eta_3 - \left\{ (\bar{y}_V + Y_7) - (y_{III}) \right\} = $$
$$= \eta_3 - \left\{ (y_{III})_7 - (y_{III}) \right\} = $$
$$= \eta_3 \qquad - f_{Y_7} = v_{Y_7}$$

$$8)\ \eta_2 - \left\{ (\bar{y}_V + Y_8) - (y_{II}) \right\} = $$
$$= \eta_2 - \left\{ (y_{II})_8 - (y_{II}) \right\} = $$
$$= \eta_2 \qquad - f_{Y_8} = v_{Y_8}$$

$$9)\ \eta_2 - \eta_3 - \left\{ \left\{ (y_{III}) + Y_9 \right\} - (y_{II}) \right\} = $$
$$= \eta_2 - \eta_3 - \left\{ (y_{II})_9 - (y_{II}) \right\} = $$
$$= \eta_2 - \eta_3 \qquad - f_{Y_9} = v_{Y_9}$$

jeb, ieliekot f_X un f_Y skaitliskās vērtības:

1)	$\xi_1 - 6 = v_{X_1}$	1)	$\eta_1 - 5 = v_{Y_1}$	$p_{X_1} = p_{Y_1} = 1{,}43$
2)	$\xi_1 + 6 = v_{X_2}$	2)	$\eta_1 + 5 = v_{Y_2}$	$p_{X_2} = p_{Y_2} = 1{,}71$
3)	$-\xi_1 + \xi_2 - 22 = v_{X_3}$	3)	$-\eta_1 + \eta_2 + 6 = v_{Y_3}$	$p_{X_3} = p_{Y_3} = 3{,}16$
4)	$\xi_2 - 9 = v_{X_4}$	4)	$\eta_2 + 31 = v_{Y_4}$	$p_{X_4} = p_{Y_4} = 1{,}53$
5)	$\xi_2 - 16 = v_{X_5}$	5)	$\eta_2 - 9 = v_{Y_5}$	$p_{X_5} = p_{Y_5} = 1{,}36$
6)	$\xi_3 - 23 = v_{X_6}$	6)	$\eta_3 + 0 = v_{Y_6}$	$p_{X_6} = p_{Y_6} = 1{,}48$

7) $\xi_3 + 24 = v_{x_7}$	7) $\eta_3 + 0 = v_{y_7}$	$p_{x_7} = p_{y_7} = 1,26$
8) $\xi_2 + 42 = v_{x_8}$	8) $\eta_2 - 9 = v_{y_8}$	$p_{x_8} = p_{y_8} = 1,09$
9) $\xi_2 - \xi_3 + 4 = v_{x_9}$	9) $\eta_2 - \eta_3 - 19 = v_{y_9}$	$p_{x_9} = p_{y_9} = 1,33$

Atbilstošie normalnolīdzinājumi ir

$+6,30\,\xi_1 - 3,16\,\xi_2 + 0,00\,\xi_3 + 71,20 = 0$	$+6,30\,\eta_1 - 3,16\,\eta_2 + 0,00\,\eta_3 - 17,56 = 0$
$-3,16\,\xi_1 + 8,47\,\xi_2 - 1,33\,\xi_3 - 53,95 = 0$	$-3,16\,\eta_1 + 8,47\,\eta_2 - 1,33\,\eta_3 + 19,07 = 0$
$0,00\,\xi_1 - 1,33\,\xi_2 + 4,07\,\xi_3 - 9,12 = 0$	$0,00\,\eta_1 - 1,33\,\eta_2 + 4,07\,\eta_3 + 25,27 = 0$
$+5567,29$	$+2341,17$

Atšķiroties tikai brīvos locekļos, abas normalnolīdzinājumu sistemas ērti reducējamas paralleli. Atslēdzot atrodam

$\xi_1 = -9,6$ cm	$\eta_1 = +1,3$ cm
$\xi_2 = +3,3$	$\eta_2 = -2,9$
$\xi_3 = +3,3$	$\eta_3 = -7,2$

Tā tad, apaļojot centimetros,

$\bar{x}_{I} = +13562,22 - 0,10 = +13562,12$ m	$\bar{y}_{I} = +44,43 + 0,01 = +44,44$ m
$\bar{x}_{II} = +13829,46 + 0,03 = +13829,49$	$\bar{y}_{II} = -124,26 - 0,03 = -124,29$
$\bar{x}_{III} = +13910,56 + 0,03 = +13910,59$	$\bar{y}_{III} = -838,91 - 0,07 = -838,98$

Ieliekot atrastos $\bar{x}$ un $\bar{y}$ kļūdu nolīdzinājumos, no tiem aprēķinam izlabojumus

$v_{x_1} = -15,6$ cm	$v_{y_1} = -3,7$ cm
$v_{x_2} = -3,6$	$v_{y_2} = +6,3$
$v_{x_3} = -9,1$	$v_{y_3} = +1,8$
$v_{x_4} = -5,7$	$v_{y_4} = +28,1$
$v_{x_5} = -12,7$	$v_{y_5} = -11,9$
$v_{x_6} = -19,7$	$v_{y_6} = -7,2$
$v_{x_7} = +27,3$	$v_{y_7} = -7,2$
$v_{x_8} = +45,3$	$v_{y_8} = -11,9$
$v_{x_9} = +4,0$	$v_{y_9} = -14,7$

un veidojam

$$[p_x v_x v_x] = +4672,40 \quad | \quad [p_y v_y v_y] = +2082,17$$

Pieliekot centimetros noapaļotos izlabojumus v_x un v_y atbilstošām koordinatu pieaugumu sumām X un Y, nosakam šo sumu izlīdzinātās vērtības

$\bar{X}_1 = +249,33 - 0,16 = +249,17$ m	$\bar{Y}_1 = +646,99 - 0,04 = +646,95$ m
$\bar{X}_2 = -303,70 - 0,04 = -303,74$	$\bar{Y}_2 = -478,79 + 0,06 = -478,73$
$\bar{X}_3 = +267,46 - 0,09 = -267,37$	$\bar{Y}_3 = -168,75 + 0,02 = -168,73$
$\bar{X}_4 = -36,31 - 0,06 = -36,37$	$\bar{Y}_4 = -647,74 + 0,28 = -647,46$
$\bar{X}_5 = +516,67 - 0,13 = +516,54$	$\bar{Y}_5 = +478,34 - 0,12 = +478,22$
$\bar{X}_6 = +597,84 - 0,20 = +597,64$	$\bar{Y}_6 = -236,40 - 0,07 = -236,47$
$\bar{X}_7 = -718,38 + 0,27 = -718,11$	$\bar{Y}_7 = -332,69 - 0,07 = -332,76$
$\bar{X}_8 = -799,66 + 0,45 = -799.21$	$\bar{Y}_8 = +382,05 - 0,12 = +381,93$
$\bar{X}_9 = -81,14 + 0,04 = -81,10$	$\bar{Y}_9 = +714,84 - 0,15 = +714,69$

Atrastos izlabojumus v_X un v_Y sadalot uz attiecīgo gājienu atsevišķiem koordinatu pieaugumiem Δx un Δy proporcionali atbilstošiem malu garumiem, nosakam izlabojumus v_{Δ_x} un v_{Δ_y}. Ar tiem aprēķinam izlīdzinātos koordinatu pieaugumus $\overline{\Delta x}$ un $\overline{\Delta y}$, un tad parastā kārtā nosakam pa atsevišķiem gājieniem visu virsotņu izlīdzinātās koordinatas $\bar{x}$ un $\bar{y}$, kā tas parādīts tabulās I—IX.

Beidzot, aprēķinam uz $s = 1000$ m attiecinātās svara vienības vidējās kļūdas

$$m_X = \pm \sqrt{\frac{[p_X v_X v_X]}{t-u}} = \pm \sqrt{\frac{4672,40}{9-3}} = \pm 27,9 \text{ cm}$$

$$m_Y = \pm \sqrt{\frac{[p_Y v_Y v_Y]}{t-u}} = \pm \sqrt{\frac{2082,17}{9-3}} = \pm 18,6 \text{ cm}$$

2. variants: noteikumu novērojumi.

Izlīdzinot atsevišķiem gājieniem atbilstošos elementus B, X, Y kā noteikumu novērojumus, katrā izlīdzināšanas daļā resp. nodaļā jāveido noteikumu nolīdzinājumi lieko novērojumu skaitā.

Ievērojot, ka tīklā ir $t = 9$ atsevišķi gājieni un $u = 3$ nosakami mezgli, atrodam, ka lieku „novērojumu", tā tad arī neatkarīgu noteikumu, ir

$$t - u = 9 - 3 = 6$$

Atbilstošos noteikumu nolīdzinājumus attiecinam uz:

1) neslēgto gājienu virkni	△4 — ⊙ 4 — △M	(gājieni	1, 2),
2) slēgto poligonu	△4 — ⊙ 9 — ⊙ 4	„	1, 3, 5),
3) „ „	△M — ⊙ 4 — ⊙ 9	„	2, 3, 4),
4) neslēgto gājienu virkni	△4 — ⊙ 23 — △V	„	6, 7),
5) slēgto poligonu	△V — ⊙ 9 — ⊙ 23	„	7, 8, 9),
6) „ „	△4 — ⊙ 23 — ⊙ 9	„	5, 6, 9).

Izlīdzināšanas pirmā daļā, veidojot uz elementiem B attiecīgos noteikumu nolīdzinājumus, tam nolūkam aprēķinam

1) $\bar{r}_I$ no gājieniem 1 un 2,

2) $\bar{r}_{II}$ „ „ (1, 3) un 5,

3) $\bar{r}_{II}$ „ „ (2, 3) un 4,

4) $\bar{r}_{III}$ „ „ 6 un 7,

5) $\bar{r}_{II}$ „ „ (7, 9) un 8,

6) $\bar{r}_{II}$ „ „ (6, 9) un 5.

Kā jau minēts, arī gadijumā, kad sumas B uzskata par noteikumu novērojumiem, pirms noteikumu nolīdzinājumu veidošanas ieteicams nosacīt no dažādiem gājieniem mezglu malu virzienu tuvinās vērtības, tā tad izdarīt tabulās I—IX parādītos attiecīgos aprēķinus. Lietojot šo aprēķinu datus, veidojam šādus noteikumu nolīdzinājumus:

1) $(\bar{r}_{R.4}-B_1+7\times180^0)-v_{B_1}=(\bar{r}_{A.M}-B_2+5\times180^0)-v_{B_2}$

2) $(\bar{r}_{R.4}-B_1+7\times180^0)-v_{B_1}-B_3-v_{B_3}=(\bar{r}_{R.4}-B_5+7\times180^0)-v_{B_5}$

3) $(\bar{r}_{A.M}-B_2+5\times180^0)-v_{B_2}-B_3-v_{B_3}=(\bar{r}_{A.M}-B_4+4\times180^0)-v_{B_4}$

4) $(\bar{r}_{R.4}-B_6+7\times180^0)-v_{B_6}=(\bar{r}_{D.V}-B_7+8\times180^0)-v_{B_7}$

5) $(\bar{r}_{D.V}-B_7+8\times180^0)-v_{B_7}-B_9+7\times180^0-v_{B_9}=(\bar{r}_{D.V}-B_8+10\times180^0)-v_{B_8}$

6) $(\bar{r}_{R.4}-B_6+7\times180^0)-v_{B_6}-B_9+7\times180^0-v_{B_9}=(\bar{r}_{R.4}-B_5+7\times180^0)-v_{B_5}$

Ieliekot skaitliskās vērtības, atrodam

1) $327^054'10''-v_{B_1}=327^054'10''-v_{B_2}$

2) $327^054'10''-v_{B_1}-246^034'00''-v_{B_3}=81^020'20''-v_{B_5}$

3) $327^054'10''-v_{B_2}-246^034'00''-v_{B_3}=81^019'30''-v_{B_4}$

4) $81^036'50''-v_{B_6}=81^036'10''-v_{B_7}$

5) $81^036'10''-v_{B_7}-1260^016'50''+1260^000'00''-v_{B_9}=81^019'20''-v_{B_8}$

6) $81^036'50''-v_{B_6}-1260^016'50''+1260^000'00''-v_{B_9}=81^020'20''-v_{B_5}$

jeb, galīgā veidā, atzīmējot arī svaru pretējās vērtības,

1) $-v_{B_1}+v_{B_2} \qquad +0=0$

2) $-v_{B_1}-v_{B_3}+v_{B_5} \qquad -10=0$

3) $-v_{B_2}-v_{B_3}+v_{B_4} \qquad +40=0$

4) $-v_{B_6}+v_{B_7} \qquad +40=0$

5) $\qquad -v_{B_7}+v_{B_8}-v_{B_9}+0=0$

6) $\qquad +v_{B_5}-v_{B_6}-v_{B_9}-20=0$

$\frac{1}{p_B}$	5	5	2	4	7	7	8	10	7

Atbilstošie korrelatu normalnolīdzinājumi ir

$$+10{,}0\,k_1+5{,}0\,k_2-5{,}0\,k_3+0{,}0\,k_4+0{,}0\,k_5+0{,}0\,k_6+0{,}0=0$$
$$+5{,}0\,k_1+14{,}0\,k_2+2{,}0\,k_3+0{,}0\,k_4+0{,}0\,k_5+7{,}0\,k_6-10{,}0=0$$
$$-5{,}0\,k_1+2{,}0\,k_2+11{,}0\,k_3+0{,}0\,k_4+0{,}0\,k_5+0{,}0\,k_6+40{,}0=0$$
$$0{,}0\,k_1+0{,}0\,k_2+0{,}0\,k_3+15{,}0\,k_4-8{,}0\,k_5+7{,}0\,k_6+40{,}0=0$$
$$0{,}0\,k_1+0{,}0\,k_2+0{,}0\,k_3-8{,}0\,k_4+25{,}0\,k_5+7{,}0\,k_6+0{,}0=0$$
$$0{,}0\,k_1+7{,}0\,k_2+0{,}0\,k_3+7{,}0\,k_4+7{,}0\,k_5+21{,}0\,k_6-20{,}0=0$$

No šīs nolīdzinājumu sistemas atraduši korrelatas

$$k_1=-2{,}72$$
$$k_2=+0{,}49$$
$$k_3=-4{,}96$$
$$k_4=-6{,}04$$
$$k_5=-3{,}00$$
$$k_6=+3{,}81$$

ar tām aprēķinam izlabojumus

$$v_{B_1}=+11{,}1''$$
$$v_{B_2}=+11{,}2$$
$$v_{B_3}=+8{,}9$$
$$v_{B_4}=-19{,}8$$
$$v_{B_5}=+30{,}1$$
$$v_{B_6}=+15{,}5$$
$$v_{B_7}=-24{,}3$$
$$v_{B_8}=-30{,}0$$
$$v_{B_9}=-5{,}7$$

un veidojam

$$[p_B\, v_B\, v_B]=513{,}20$$

Noapaļojot izlabojumus 10″ vienībās, aprēķinam izlīdzinātās leņķu sumas

$$\overline{B}_1=937^0 10' 40''+10''=937^0 10' 50''$$
$$\overline{B}_2=820\ 37\ 00+10=820\ 37\ 10$$

$$\bar{B}_3 = 246^0 34'00'' + 10'' = 246^0 34'10''$$
$$\bar{B}_4 = 887\ 11\ 40\ \ -20\ \ = 887\ 11\ 20$$
$$\bar{B}_5 = 1183\ 44\ 30\ \ +30\ \ = 1183\ 45\ 00$$
$$\bar{B}_6 = 1183\ 28\ 00\ \ +20\ \ = 1183\ 28\ 20$$
$$\bar{B}_7 = 1424\ 15\ 10\ \ -20\ \ = 1424\ 14\ 50$$
$$\bar{B}_8 = 1784\ 32\ 00\ \ -30\ \ = 1784\ 31\ 30$$
$$\bar{B}_9 = 1260\ 16\ 50\ \ -10\ \ = 1260\ 16\ 40$$

Atrastos izlabojumus v_B apmēram vienmērīgi sadalot uz attiecīgo gājienu atsevišķiem leņķiem, nosakam šo leņķu izlabojumus v_β un aprēķinam izlīdzinātos leņķus $\bar{\beta}$, atbilstošos izlīdzinātos malu virzienus $\bar{r}$ un koordinatu pieaugumus Δx, Δy, kā tas parādīts tabulu I—IX attiecīgos stabiņos. Bez tam nosakam neizlīdzināta izmērīta leņķa vidējo kļūdu

$$m_\beta = \pm \sqrt{\frac{[p_B v_B v_B]}{t-u}} = \pm \sqrt{\frac{513{,}20}{9-3}} = \pm 9{,}2''$$

Izlīdzināšanas otrā daļā pa atsevišķiem gājieniem veidojam tabulās I—IX atzīmēto koordinatu pieaugumu Δx un Δy sumas X un Y. Ar šo sumu izlīdzinātām vērtībām $(X + v_X)$ un $(Y + v_Y)$ no dažādiem gājieniem vai gājienu virknēm aprēķinot mezglu punktu koordinatas, veidojam divas neatkarīgas noteikumu nolīdzinājumu sistemas, no kurām viena zīmējas uz sumām X resp. atbilstošiem v_X, otrā — uz sumām Y resp. atbilstošiem v_Y. Veidojot šos noteikumu nolīdzinājumus līdzīgā kārtā, kā tas izlīdzināšanas pirmā daļā darīts attiecībā uz mezglu malu virzieniem, rodas šādas noteikumu nolīdzinājumu sistemas:

izlīdzinot sumas X:

1) $\bar{x}_4 + X_1 + v_{X_1} = \bar{x}_M + X_2 + v_{X_2}$

2) $\bar{x}_4 + X_1 + v_{X_1} + X_3 + v_{X_3} = \bar{x}_4 + X_5 + v_{X_5}$

3) $\bar{x}_M + X_2 + v_{X_2} + X_3 + v_{X_3} = \bar{x}_M + X_4 + v_{X_4}$

4) $\bar{x}_4 + X_6 + v_{X_6} = \bar{x}_V + X_7 + v_{X_7}$

5) $\bar{x}_V + X_7 + v_{X_7} + X_9 + v_{X_9} = \bar{x}_V + X_8 + v_{X_8}$

6) $\bar{x}_4 + X_6 + v_{X_6} + X_9 + v_{X_9} = \bar{x}_4 + X_5 + v_{X_5}$

izlīdzinot sumas Y:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \bar{y}_4 + Y_1 + v_{Y_1} = \bar{y}_M + Y_2 + v_{Y_2}\\
&2)\quad \bar{y}_4 + Y_1 + v_{Y_1} + Y_3 + v_{Y_3} = \bar{y}_4 + Y_5 + v_{Y_5}\\
&3)\quad \bar{y}_M + Y_2 + v_{Y_2} + Y_3 + v_{Y_3} = \bar{y}_M + Y_4 + v_{Y_4}\\
&4)\quad \bar{y}_4 + Y_6 + v_{Y_6} = \bar{y}_V + Y_7 + v_{Y_7}\\
&5)\quad \bar{y}_V + Y_7 + v_{Y_7} + Y_9 + v_{Y_9} = \bar{y}_V + Y_8 + v_{Y_8}\\
&6)\quad \bar{y}_4 + Y_6 + v_{Y_6} + Y_9 + v_{Y_9} = \bar{y}_4 + Y_5 + v_{Y_5}
\end{aligned}
$$

Ieliekot tabulās I—IX aprēķinātās skaitliskās vērtības, atrodam

$$
\begin{aligned}
&1)\ + 13562{,}28 + v_{X_1} &&= + 13562{,}16 + v_{X_2}\\
&2)\ + 13562{,}28 + v_{X_1} + 267{,}46 + v_{X_3} &&= + 13829{,}62 + v_{X_5}\\
&3)\ + 13562{,}16 + v_{X_2} + 267{,}46 + v_{X_3} &&= + 13829{,}55 + v_{X_4}\\
&4)\ + 13910{,}79 + v_{X_6} &&= + 13910{,}32 + v_{X_7}\\
&5)\ + 13910{,}32 + v_{X_7} - 81{,}14 + v_{X_9} &&= + 13829{,}04 + v_{X_8}\\
&6)\ + 13910{,}79 + v_{X_6} - 81{,}14 + v_{X_9} &&= + 13829{,}62 + v_{X_5}
\end{aligned}
$$

resp.

$$
\begin{aligned}
&1)\ + 44{,}48 + v_{Y_1} &&= + 44{,}38 + v_{Y_2}\\
&2)\ + 44{,}48 + v_{Y_1} - 168{,}75 + v_{Y_3} &&= - 124{,}17 + v_{Y_5}\\
&3)\ + 44{,}38 + v_{Y_2} - 168{,}75 + v_{Y_3} &&= - 124{,}57 + v_{Y_4}\\
&4)\ - 838{,}91 + v_{Y_6} &&= - 838{,}91 + v_{Y_7}\\
&5)\ - 838{,}91 + v_{Y_7} + 714{,}84 + v_{Y_9} &&= - 124{,}17 + v_{Y_8}\\
&6)\ - 838{,}91 + v_{Y_6} + 714{,}84 + v_{Y_9} &&= - 124{,}17 + v_{Y_5}
\end{aligned}
$$

jeb, galīgā veidā, atzīmējot arī svaru pretējās vērtības,

$$
\begin{aligned}
&1)\quad v_{X_1} - v_{X_2} + 12 = 0\\
&2)\quad v_{X_1} + v_{X_3} - v_{X_5} + 12 = 0\\
&3)\quad v_{X_2} + v_{X_3} - v_{X_4} + 7 = 0\\
&4)\quad v_{X_6} - v_{X_7} + 47 = 0\\
&5)\quad v_{X_7} - v_{X_8} + v_{X_9} + 14 = 0\\
&6)\quad - v_{X_5} + v_{X_6} + v_{X_9} + 3 = 0
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{px}$	0,70	0,58	0,32	0,65	0,74	0,68	0,79	0,91	0,75

resp.

$$
\begin{array}{llllllllll}
1)\; v_{Y_1} - v_{Y_2} & & & & & & & & & +10=0 \\
2)\; v_{Y_1} & + v_{Y_3} & & - v_{Y_5} & & & & & & -10=0 \\
3)\; & v_{Y_2} + v_{Y_3} - v_{Y_4} & & & & & & & & +20=0 \\
4)\; & & & & v_{Y_6} - v_{Y_7} & & & & & +\;\;0=0 \\
5)\; & & & & & v_{Y_7} - v_{Y_8} + v_{Y_9} & & & & +10=0 \\
6)\; & & & - v_{Y_5} + v_{Y_6} & & & + v_{Y_9} & & & +10=0
\end{array}
$$

$\frac{1}{p_Y}$ 0,70 0,58 0,32 0,65 0,74 0,68 0,79 0,91 0,75

Atbilstošie korrelatu normalnolīdzinājumi ir

$$
\begin{array}{l}
+1{,}28k_1' + 0{,}70k_2' - 0{,}58k_3' + 0{,}00k_4' + 0{,}00k_5' + 0{,}00k_6' + 12 = 0 \\
+0{,}70k_1' + 1{,}76k_2' + 0{,}32k_3' + 0{,}00k_4' + 0{,}00k_5' + 0{,}74k_6' + 12 = 0 \\
-0{,}58k_1' + 0{,}32k_2' + 1{,}55k_3' + 0{,}00k_4' + 0{,}00k_5' + 0{,}00k_6' + \;\;7 = 0 \\
\;\;0{,}00k_1' + 0{,}00k_2' + 0{,}00k_3' + 1{,}47k_4' - 0{,}79k_5' + 0{,}68k_6' + 47 = 0 \\
\;\;0{,}00k_1' + 0{,}00k_2' + 0{,}00k_3' - 0{,}79k_4' + 2{,}45k_5' + 0{,}75k_6' + 14 = 0 \\
\;\;0{,}00k_1' + 0{,}74k_2' + 0{,}00k_3' + 0{,}68k_4' + 0{,}75k_5' + 2{,}17k_6' + \;\;3 = 0
\end{array}
$$

resp.

$$
\begin{array}{l}
+1{,}28k_1'' + 0{,}70k_2'' - 0{,}58k_3'' + 0{,}00k_4'' + 0{,}00k_5'' + 0{,}00k_6'' + 10 = 0 \\
+0{,}70k_1'' + 1{,}76k_2'' + 0{,}32k_3'' + 0{,}00k_4'' + 0{,}00k_5'' + 0{,}74k_6'' - 10 = 0 \\
-0{,}58k_1'' + 0{,}32k_2'' + 1{,}55k_3'' + 0{,}00k_4'' + 0{,}00k_5'' + 0{,}00k_6'' + 20 = 0 \\
\;\;0{,}00k_1'' + 0{,}00k_2'' + 0{,}00k_3'' + 1{,}47k_4'' - 0{,}79k_5'' + 0{,}68k_6'' + \;\;0 = 0 \\
\;\;0{,}00k_1'' + 0{,}00k_2'' + 0{,}00k_3'' - 0{,}79k_4'' + 2{,}45k_5'' + 0{,}75k_6'' + 10 = 0 \\
\;\;0{,}00k_1'' + 0{,}74k_2'' + 0{,}00k_3'' + 0{,}68k_4'' + 0{,}75k_5'' + 2{,}17k_6'' + 10 = 0
\end{array}
$$

Paralleli reducējot un atslēdzot, atrodam korrelatas

$k_1' = +\,15{,}41$	$k_1'' = -\,54{,}20$
$k_2' = -\,37{,}85$	$k_2'' = +\,48{,}93$
$k_3' = +\;\;9{,}02$	$k_3'' = -\,43{,}32$
$k_4' = -\,84{,}44$	$k_4'' = +\,22{,}31$
$k_5' = -\,49{,}92$	$k_5'' = +\,13{,}21$
$k_6' = +\,55{,}43$	$k_6'' = -\,32{,}88$

Ar tām aprēķinam izlabojumus

$v_{X_1} = -\,15{,}7$ cm	$v_{Y_1} = -\;\;3{,}7$ cm
$v_{X_2} = -\;\;3{,}7$	$v_{Y_2} = +\;\;6{,}3$

$v_{X_3} = -\ 9{,}2$ cm	$v_{Y_3} = +\ 1{,}8$ cm
$v_{X_4} = -\ 5{,}9$	$v_{Y_4} = +28{,}2$
$v_{X_5} = -13{,}0$	$v_{Y_5} = -11{,}9$
$v_{X_6} = -19{,}7$	$v_{Y_6} = -\ 7{,}2$
$v_{X_7} = +27{,}3$	$v_{Y_7} = -\ 7{,}2$
$v_{X_8} = +45{,}4$	$v_{Y_8} = -12{,}0$
$v_{X_9} = +\ 4{,}1$	$v_{Y_9} = -14{,}8$

un veidojam

$$[p_X v_X v_X] = 4708{,}91 \qquad\qquad [p_Y v_Y v_Y] = 2097{,}32$$

Pieliekot centimetros noapaļotos izlabojumus v_X un v_Y atbilstošām sumām X un Y, nosakam šo sumu izlīdzinātās vērtības

$\bar{X}_1 = +249{,}33 - 0{,}16 = +249{,}17$ m	$\bar{Y}_1 = +646{,}99 - 0{,}04 = +646{,}95$ m
$\bar{X}_2 = -303{,}70 - 0{,}04 = -303{,}74$	$\bar{Y}_2 = -478{,}79 + 0{,}06 = -478{,}73$
$\bar{X}_3 = +267{,}46 - 0{,}09 = +267{,}37$	$\bar{Y}_3 = -168{,}75 + 0{,}02 = -168{,}73$
$\bar{X}_4 = -\ 36{,}31 - 0{,}06 = -\ 36{,}37$	$\bar{Y}_4 = -647{,}74 + 0{,}28 = -647{,}46$
$\bar{X}_5 = +516{,}67 - 0{,}13 = +516{,}54$	$\bar{Y}_5 = +478{,}34 - 0{,}12 = +478{,}22$
$\bar{X}_6 = +597{,}84 - 0{,}20 = +597{,}64$	$\bar{Y}_6 = -236{,}40 - 0{,}07 = -236{,}47$
$\bar{X}_7 = -718{,}38 + 0{,}27 = -718{,}11$	$\bar{Y}_7 = -332{,}69 - 0{,}07 = -332{,}76$
$\bar{X}_8 = -799{,}66 + 0{,}45 = -799{,}21$	$\bar{Y}_8 = +382{,}05 - 0{,}12 = +381{,}93$
$\bar{X}_9 = -\ 81{,}14 + 0{,}04 = -\ 81{,}10$	$\bar{Y}_9 = +714{,}84 - 0{,}15 = +714{,}69$

Izlabojumus v_X un v_Y sadalot uz attiecīgo gājienu atsevišķiem koordinatu pieaugumiem Δx un Δy proporcionali atbilstošiem malu garumiem, nosakam izlabojumus $v_{\Delta x}$ un $v_{\Delta y}$. Ar tiem aprēķinam izlīdzinātos koordinatu pieaugumus $\overline{\Delta x}$ un $\overline{\Delta y}$, un tad parastā kārtā nosakam pa atsevišķiem gājieniem visu virsotņu izlīdzinātās koordinatas $\bar{x}$ un $\bar{y}$, kā tas parādīts tabulās I — IX.

Beidzot, pēc izlīdzināšanas pirmā variantā minētām attiecīgām formulām aprēķinam uz $s = 1000$ m attiecinātās svara vienības vidējās kļūdas

$$m_X = \pm\ 28{,}0 \text{ cm} \qquad m_Y = \pm\ 18{,}7 \text{ cm}$$

Kā redzams, abos izlīdzināšanas variantos atrastie atbilstošie rezultati atšķiras tikai par niecīgiem, ar notikušiem apaļojumiem izskaidrojamiem lielumiem.

§ 79. Poligontīkla izlīdzināšana pa atsevišķiem mezgliem.

Atkal izdarot izlīdzināšanu divās daļās, no kurām pirmā zīmējas tikai uz leņķiem, bet otrā — uz koordinatu pieaugumiem, pirmā daļā nosaka izvēlēto mezglu malu izlīdzinātos virzienus, bet otrā — mezglu punktu izlīdzinātās koordinatas. Kad tas noticis, tad katram atsevišķam gājienam abos galos ir doti resp. izlīdzināšanas ceļā atrasti pieslēgvirzieni un punkti ar dotām resp. izlīdzinātām koordinatām. Tā tad pēc mezglu malu virzienu un mezglu punktu koordinatu izlīdzināto vērtību atrašanas katra atsevišķa gājiena izlīdzināšana izdarama parastā kārtā.

Poligontīkla mezglu izlīdzināšanas katrā daļā katru meklēto elementu — mezgla malas virzienu resp. mezgla punkta koordinatu — aprēķina no visiem gājieniem ar atbilstošām sumām B resp. X vai Y, lai ievērotu visus attiecīgos novērojumus, kā to prasa pazīstamais izlīdzināšanas teorijas princips. Pieņemot svarus 76-ā paragrafā aizrādītā kārtā, meklētos elementus nosaka kā attiecīgo no atsevišķiem gājieniem atrasto rezultatu vispārējos aritmetiskos vidējos.

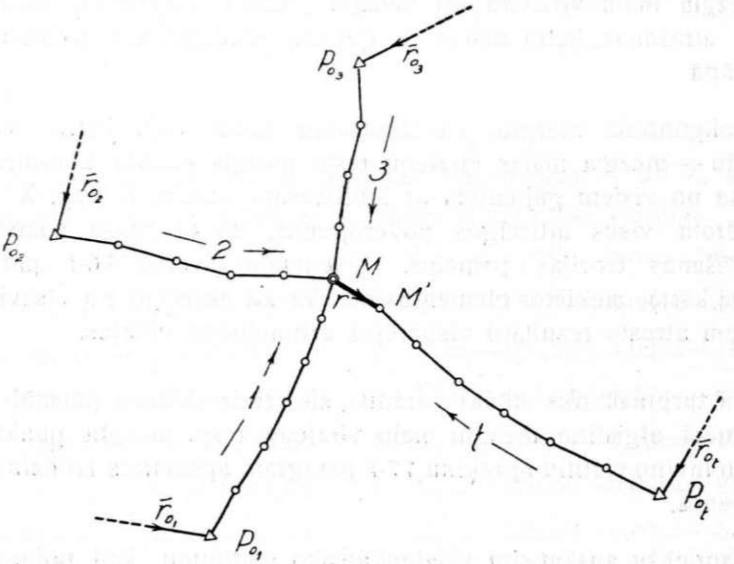
Kā turpmāk tiks sīkāki parādīts, šis izlīdzināšanas paņēmiens zināmā mērā atgādina mezglu malu virzienu resp. mezglu punktu koordinatu tuvino vērtību aprēķinu 77-ā paragrafā apskatītos izlīdzināšanas paņēmienos.

Papriekšu apskatīsim visvienkāršāko gadījumu, kad poligontīklu veidojošie atsevišķie gājieni sākumā pieslēgti dotiem virzieniem un punktiem, bet savos galos visi sanāk vienā punktā — poligontīkla vienīgā mezglā.

Lai tādu poligontīklu veidojošiem gājieniem 1, 2, 3,...., t (30. att.) sākumā ir dotie pieslēgvirzieni $\bar{r}_{0_1}$, $\bar{r}_{0_2}$, $\bar{r}_{0_3}$,....., $\bar{r}_{0_t}$ un virsotnes $P_{0_1}, P_{0_2}, P_{0_3}, \ldots\ldots, P_{0_t}$ ar dotām koordinatām $\bar{x}_{0_1}$ un $\bar{y}_{0_1}$, $\bar{x}_{0_2}$ un $\bar{y}_{0_2}$, $\bar{x}_{0_3}$ un $\bar{y}_{0_3}$,....., $\bar{x}_{0_t}$ un $\bar{y}_{0_t}$, un lai visi gājieni sanāk kopīgā gala virsotnē — mezgla punktā M.

Pieņemot par mezgla malu, piem., $M \rightarrow M'$, izlīdzināšanas pirmā daļā pa atsevišķiem gājieniem veidojam izmērīto labo leņķu sumas $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots, B_t$. Ar tām no šiem gājieniem, izejot no sākumā dotiem pieslēgvirzieniem, aprēķinam mezgla malas virziena r atbilstošās neizlīdzinātās vērtības (r). Attiecīgās formulas ir pazīstamās

$$\left.\begin{array}{l}(r)_1 = \bar{r}_{0_1} - B_1 + i_1 \times 180^0 \\ (r)_2 = \bar{r}_{0_2} - B_2 + i_2 \times 180^0 \\ (r)_3 = \bar{r}_{0_3} - B_3 + i_3 \times 180^0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r)_t = \bar{r}_{0t} - B_t + i_t \times 180^0 \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (944).$$



30. attēls.

Piešķirot šiem rezultatiem, pēc (937) parauga, svarus

$$\left.\begin{array}{l}p_{B_1} = \dfrac{1}{n_1} \\ p_{B_2} = \dfrac{1}{n_2} \\ p_{B_3} = \dfrac{1}{n_3} \\ \dots\dots\dots \\ p_{B_t} = \dfrac{1}{n_t}\end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (945),$$

kur n apzīmē attiecīgās sumās ieejošo izmērīto leņķu skaitu, veidojam vispārējo aritmetisko vidējo

$$\bar{r} = \frac{p_{B_1}(r)_1 + p_{B_2}(r)_2 + p_{B_3}(r)_3 + \ldots\ldots + p_{B_t}(r)_t}{p_{B_1} + p_{B_2} + p_{B_3} + \ldots\ldots + p_{B_t}} \quad . \quad . \quad (946),$$

kurš nosaka mezgla malas $M \rightarrow M'$ izlīdzināto virzienu.

Salīdzinot atsevišķos (r) ar šo $\bar{r}$, nosakam attiecīgo sumu B izlabojumus

$$\left.\begin{array}{l} v_{B_1} = (r)_1 - \bar{r} \\ v_{B_2} = (r)_2 - \bar{r} \\ v_{B_3} = (r)_3 - \bar{r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{B_t} = (r)_t - \bar{r} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (947).$$

Tos pazīstamā kārtā sadalot uz attiecīgo gājienu atsevišķiem leņķiem, aprēķinam izlīdzinātos leņķus, un ar tiem — malu izlīdzinātos virzienus un izlīdzināšanas otrās daļas objektu veidojošos koordinatu pieaugumus Δx un Δy. Bez tam, veidojot sumu $[p_B v_B v_B]$, nosakam ar neizlīdzināta izmērīta leņķa vidējo kļūdu identisko svara vienības vidējo kļūdu

$$m_\beta = \pm \sqrt{\frac{[p_B v_B v_B]}{t-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (948).$$

Izlīdzināšanas otrā daļā pa atsevišķiem gājieniem veidojam mezgla punkta koordinatu noteikšanai vajadzīgās Δx resp. Δy sumas X_1, X_2, $X_3, \ldots\ldots, X_t$ un $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots\ldots, Y_t$. Ar tām, izejot no gājienu sākuma punktu dotām koordinatām, no atsevišķiem gājieniem aprēķinam neizlīdzinātās mezgla punkta koordinatas

$$\left.\begin{array}{l|l} (x)_1 = \bar{x}_{0_1} + X_1 & (y)_1 = \bar{y}_{0_1} + Y_1 \\ (x)_2 = \bar{x}_{0_2} + X_2 & (y)_2 = \bar{y}_{0_2} + Y_2 \\ (x)_3 = \bar{x}_{0_3} + X_3 & (y)_3 = \bar{y}_{0_3} + Y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x)_t = \bar{x}_{0_t} + X_t & (y)_t = \bar{y}_{0_t} + Y_t \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (949).$$

Pieņemot svarus pēc (938) parauga, tā tad

$$\left.\begin{array}{l} p_{X_1} = p_{Y_1} = \dfrac{1}{S_1} \\ p_{X_2} = p_{Y_2} = \dfrac{1}{S_2} \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} p_{x_3} = p_{Y_3} = \frac{1}{S_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{x_t} = p_{Y_t} = \frac{1}{S_t} \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (950),$$

kur S apzīmē gājienu garumus, veidojam vispārējos aritmetiskos vidējos

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = \frac{p_{x_1}(x)_1 + p_{x_2}(x)_2 + p_{x_3}(x)_3 + \dots + p_{x_t}(x)_t}{p_{x_1} + p_{x_2} + p_{x_3} + \dots + p_{x_t}} \\ \bar{y} = \frac{p_{Y_1}(y)_1 + p_{Y_2}(y)_2 + p_{Y_3}(y)_3 + \dots + p_{Y_t}(y)_t}{p_{Y_1} + p_{Y_2} + p_{Y_3} + \dots + p_{Y_t}} \end{array}\right\} \quad \dots \quad (951),$$

kuri nosaka mezgla punkta M izlīdzinātās koordinatas.

Salīdzinot atsevišķos (x) un (y) ar $\bar{x}$ resp. $\bar{y}$, nosakam atbilstošo sumu X un Y izlabojumus

$$\left.\begin{array}{l|l} v_{x_1} = \bar{x} - (x)_1 & v_{Y_1} = \bar{y} - (y)_1 \\ v_{x_2} = \bar{x} - (x)_2 & v_{Y_2} = \bar{y} - (y)_2 \\ v_{x_3} = \bar{x} - (x)_3 & v_{Y_3} = \bar{y} - (y)_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ v_{x_t} = \bar{x} - (x)_t & v_{Y_t} = \bar{y} - (y)_t \end{array}\right\} \quad \dots \quad (952).$$

Tos pazistamā kārtā sadalot uz attiecīgo gājienu atsevišķiem koordinatu pieaugumiem, aprēķinam šo koordinatu pieaugumu izlīdzinātās vērtības, un ar tām — gājienu atsevišķo virsotņu izlīdzinātās koordinatas.

Beidzot, veidojot sumas $[p_X v_X v_X]$ un $[p_Y v_Y v_Y]$, nosakam svara vienības vidējās kļūdas

$$\left.\begin{array}{l} m_X = \pm \sqrt{\frac{[p_X v_X v_X]}{t-1}} \\ m_Y = \pm \sqrt{\frac{[p_Y v_Y v_Y]}{t-1}} \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (953).$$

Vairāku mezglu gadijumā mezglu malu virzienus un mezglu punktu koordinatas nosaka vienam mezglam pēc otra līdzīgā kārtā, kā tas notiek aprēķinot šo elementu tuvinās vērtības, ja poligontīklā izdarītos novērojumus izlīdzina kā netiešus. Šinī aprēķinā katra mezgla noteikšanai lieto visus atsevišķos gājienus, kas šo mezglu savieno ar iepriekšējo un ar dotiem pieslēgpunktiem, un, pēc (937) resp. (938)

parauga pieņemot svarus, ar formulām (944) — (946) resp. (949) — (951) noteiktā kārtā veido atbilstošo rezultatu vispārējos aritmetiskos vidējos. Pie tam katrā mezglā visus gājienus, kas šo mezglu savieno ar iepriekšējo, un arī tos, kas tieši vai netieši lietoti iepriekšējā mezgla noteikšanai, iedomājas atvietotus ar vienu ekvivalentu gājienu.

Leņķu skaits ekvivalentā gājienā nosakams atkarībā no leņķu skaita atsevišķos atvietotos gājienos.

Lai kādā mezglā M sanāk no dotiem pieslēgvirzieniem izejošie atsevišķie gājieni 1, 2, 3,....., t, kur leņķu skaits ir n_1, n_2, n_3,....., n_t. Tad ar formulām (944) — (946) noteiktā kārtā nosakot mezglā M pieņemtās mezgla malas vidējo virzienu, tam atbilstošais svars ir

$$(p_r) = [p_B] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (954).$$

Lai minētais mezgla malas vidējais virziens būtu uzskatams par atrastu ar to pašu svaru no gājienu 1, 2, 3, ..., t grupu atvietojošā ekvivalentā gājiena g, šī gājiena leņķu skaitam n_g jābūt ar svaru (p_r) pazīstamā sakarā

$$(p_r) = \frac{1}{n_g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (955);$$

tā tad jābūt

$$n_g = \frac{1}{(p_r)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (956).$$

Ja g atvieto tādu gājienu grupu, kas mezglu M savieno nevis ar a priori dotiem pieslēgvirzieniem, bet ar kādu citu mezglu, kur iepriekš jau izdarīts mezgla malas virziena aprēķins, tad svars (p_r) zīmējas uz mezglā M un iepriekšējā mezglā pieņemto mezglu malu virzienu starpību.

Līdzīgā kārtā, aprēķinot mezglu punktu koordinatas, nosakams ekvivalentā gājiena g garums S_g. Tikai tad, ar formulām (949) — — (951) noteiktā kārtā nosakot mezgla punkta M koordinatas resp. no iepriekšējā mezgla punkta skaitītos koordinatu pieaugumus, vidējiem rezultatiem ir svars

$$(p_{X,Y}) = [p_X] = [p_Y] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (957).$$

Ievērojot sakaru

$$(p_{X,Y}) = \frac{1}{S_g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (958),$$

atrodam

$$S_g = \frac{1}{(p_{X,Y})} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (959).$$

Aizrādītā kārtā aprēķinot, vienu pēc otra, visus mezglus, tikai pēdējā mezglā ir tieši vai netieši lietoti visi gājieni. Tā tad arī tikai pēdējās mezgla malas vidējo virzienu resp. pēdējā mezgla punkta vidējās koordinatas var uzskatīt par galīgi izlīdzinātā veidā atrastiem elementiem. Tos salīdzinot ar atbilstošiem rezultatiem no priekšpēdējo un pēdējo mezglu saturošā ekvivalentā gājiena, no atrastām starpībām atvasinami izlabojumi, kuri jāpieliek atbilstošiem iepriekšējam mezglam aprēķinātiem elementiem, lai arī tos dabūtu galīgi izlīdzinātā veidā. Tas notiek uz tā pamata, ka attiecīgie izlabojumi pretēji proporcionali atbilstošiem svariem.

Pēc tādā veidā notikušās priekšpēdējā mezgla galīgās izlīdzināšanas, šī mezgla izlīdzinātos elementus salīdzina ar atbilstošiem rezultatiem no ekvivalentā gājiena, kas satur priekšpēdējo un tam iepriekšējo mezglu. Ievērojot augšā teikto, no atrastām pretrunām atvasina atbilstošos uz trešo no gala skaitīto mezglu attiecīgos izlabojumus, un izlīdzina arī šo mezglu. Tā turpinot, vienu pēc otra galīgi izlīdzina visus iepriekš šeit aizrādītā kārtībā aprēķinātos mezglus, sākot ar pēdējo un beidzot ar pirmo.

Skatoties pēc apstākļiem, poligontīkla mezglu izlīdzināšanu var izdarīt arī citādā mezglu resp. tos savienojošo gājienu kārtībā. Piem., var veidot vairākus ekvivalentus gājienus, kas iet pa dažādām nosakamo mezglu rindām, bet visi sanāk vienā kopīgā gala mezglā. Nosakot gala mezgla elementus no visiem tur sanākošiem gājieniem un veidojot atbilstošo rezultatu vispārējos aritmetiskos vidējos, arī tādā gadijumā vispirms tiek galīgi izlīdzināts visiem ekvivalentiem gājieniem kopīgais gala mezgls. Izejot no šī mezgla, pārējo mezglu galīgā izlīdzināšana tad notiek pa attiecīgiem ekvivalentiem gājieniem augšā aizrādītā kārtā.

Pēc notikušās mezglu izlīdzināšanas katram atsevišķam gājienam abos galos ir a priori doti vai izlīdzināšanas ceļā nosacīti pieslēgelementi. Ar šo pieslēgelementu atbilstošām funkcijām salīdzinot atsevišķos gājienos aprēķinātās sumas B resp. X un Y, nosakami atbilstošie izlabojumi v_B resp. v_X un v_Y. Beidzot, tie pazīstamā kārtā sadalami uz attiecīgo gājienu izmērītiem leņķiem resp. neizlīdzinātiem koordinatu pieaugumiem. Izejot no minētiem v_B resp. v_X un v_Y, parastā kārtā nosakamas poligontīklā notikušo novērojumu noteiktību raksturojošās svara vienības vidējās kļūdas.

§ 80. Piemērs.

Izlīdzināsim vēlreiz — tagad pa atsevišķiem mezgliem — to pašu poligontīklu, kura izlīdzināšana vienā gabalā, netiešu un noteikumu novērojumu variantos, jau izdarīta 78-ā paragrafā.

Par sākuma mezglu pieņemot I, tā elementus provizoriski aprēķinam un parciali izlīdzinam, ievērojot tikai gājienus 1 un 2. Rezultatus iedomājamies atrastus no gājienu 1 un 2 sistemai ekvivalentā gājiena I. Izejot no provizoriski atrastiem mezgla I elementiem, nākošā mezgla II atbilstošos elementus aprēķinam no gājiena 3, bet uzskatam šos rezultatus par atrastiem no gājienu I un 3 virknes, kuru apzīmējam ar I.3. Bez tam mezgla II elementus aprēķinam arī no atsevišķiem gājieniem 4, 5, 8, kuri minēto mezglu tieši savieno ar dotiem pieslēgelementiem. Visu šo rezultatu atbilstošos vispārējos aritmetiskos vidējos uzskatam par atrastiem no gājienu I.3, 4, 5, 8 sistemai ekvivalentā gājiena II, kurš, pagarināts ar gājienu 9, kopā ar to veido līdz pēdējam mezglam III sniedzošo gājienu II.9. Izejot no mezgla II provizoriski atrastiem elementiem, no gājiena 9 aprēķinam itkā no minētā gājiena II.9 atrastos atbilstošos mezgla III elementus; tos bez tam nosakam arī no mezglu III tieši ar dotiem pieslēgelementiem savienojošiem atsevišķiem gājieniem 6 un 7. No visiem šiem rezultatiem veidotie atbilstošie vispārējie aritmetiskie vidējie ir pēdējā mezgla III izlīdzinātie elementi, jo aizrādītā kārtā izdarijuši šī mezgla aprēķinu, esam ievērojuši un lietojuši visus atsevišķos gājienus un tur notikušos novērojumus.

Lai galīgi izlīdzinātu arī pārējos mezglus, no mezgla III izlīdzinātiem elementiem atņemam atbilstošos rezultatus, kuri aprēķināti no gājiena II.9, kur ieiet priekšpēdējais mezgls II. No atrastām starpībām atvasinam mezgla II provizoriski aprēķinātiem elementiem pieliekamos izlabojumus; to daram ievērojot, ka gājienā II.9 uz mezgliem II un III attiecīgie izlabojumi pretēji proporcionali šiem mezgliem atbilstošiem svariem.

Atraduši uz mezglu II attiecīgos izlabojumus un šī mezgla izlīdzinātos elementus, salīdzinam tos ar atbilstošiem rezultatiem no gājiena I.3, kur ieiet arī mezgls I. No atrastām pretrunām, t. i. uz gājienu I.3 un mezglu II attiecīgiem izlabojumiem, atvasinam atbilstošos izlabojumus mezglā I; korespondējošie izlabojumi pretēji proporcionali attiecīgo mezglu svariem gājienā I.3.

Stājoties pie izlīdzināšanas pirmās daļas, kas zīmējas uz mezglu malu virzieniem r_I, r_{II}, r_{III}, vispirms veidojam šo virzienu provizorisko vērtību (r_I), (r_{II}), (r_{III}) aprēķinam vajadzīgās atsevišķos gājienos izmērīto leņķu sumas B un $i \times 180^0$ tipa locekļus; tas padarams līdzīgā kārtībā, kā 78-ā paragrafa tabulās I—IX. Pats uz mezglu malu izlīdzināto virzienu noteikšanu attiecīgais skaitliskais aprēķins parādīts tabulā I (piel. V). Šinī tabulā $(p_r)_I$, $(p_r)_{I.3}$, $(p_r)_{II}$, $(p_r)_{II.9}$, $(p_r)_{III}$ apzīmē no ekvivalentiem gājieniem I, I.3, II, II.9, III atrasto mezglu malu virzienu svarus, bet n_I, $n_{I.3}$, n_{II}, $n_{II.9}$ — leņķu skaitu attiecīgos gājienos. Tabulas apakšējā daļā parādīts visu mezglu malu galīgi izlīdzināto virzienu $\overline{r}_{I}$, $\overline{r}_{II}$, $\overline{r}_{III}$ aprēķins.

Salīdzinot atsevišķos gājienos izmērīto leņķu sumas B ar atbilstošām mezglu malu izlīdzināto virzienu funkcijām, aprēķinam sekojošos uz minētām sumām B attiecīgos izlabojumus:

$$v_{B_1} = +11''$$
$$v_{B_2} = +11$$
$$v_{B_3} = +9$$
$$v_{B_4} = -20$$
$$v_{B_5} = +30$$
$$v_{B_6} = +15$$
$$v_{B_7} = -25$$
$$v_{B_8} = -30$$
$$v_{B_9} = -5$$

un veidojam sumu

$$[p_B v_B v_B] = 514{,}90$$

Noapaļojot 10″ vienībās un sadalot atrastos v_B uz attiecīgo gājienu atsevišķiem leņķiem ar atbilstošiem izlabojumiem v_β, nosakam izlīdzinātos leņķus $\overline{\beta}$. Ar tiem aprēķinam malu izlīdzinātos virzienus $\overline{r}$ un izlīdzināšanas otrās daļas objektu veidojošos koordinatu pieaugumus Δx, Δy, kā tas parādīts 78-ā paragrafa tabulās I—IX.

Izlīdzināšanas otrā daļā, kas zīmējas uz mezglu punktu koordinatām, ar iepriekš veidotām koordinatu pieaugumu Δx un Δy sumām X un Y nosakam mezglu punktu parciali izlīdzinātās koordinatas (x_I) un (y_I), (x_{II}) un (y_{II}), (x_{III}) un (y_{III}), un no tām ar atbilstošiem izlabojumiem pārejam uz galīgi izlīdzinātām koordinatām $\overline{x}_I$ un $\overline{y}_I$, $\overline{x}_{II}$ un $\overline{y}_{II}$, $\overline{x}_{III}$ un $\overline{y}_{III}$. Tādā pat kārtībā, kā izlīdzināšanas pirmā daļā, izdarītais skaitliskais aprēķins parādīts tabulā II (piel. VI), kur $(p_{X,Y})_I$, $(p_{X,Y})_{I.3}$, $(p_{X,Y})_{II}$, $(p_{X,Y})_{II.9}$, $(p_{X,Y})_{III}$ apzīmē no ekvivalentiem gājieniem I, I.3, II, II.9, III atrasto mezglu punktu koordinatu svarus, bet S_I, $S_{I.3}$, S_{II}, $S_{II.9}$ — attiecīgo gājienu garumus.

Pa atsevišķiem gājieniem salīdzinot koordinatu pieaugumu sumas X un Y ar atbilstošām izlīdzināto mezglu punktu koordinatu starpībām, jprēķinam sekojošos uz minētām sumām X un Y attiecīgos izlaboaumus:

$$
\begin{aligned}
v_{X_1} &= -16 \text{ cm} & v_{Y_1} &= -\ 4 \text{ cm} \\
v_{X_2} &= -\ 4 & v_{Y_2} &= +\ 6 \\
v_{X_3} &= -\ 9 & v_{Y_3} &= +\ 2 \\
v_{X_4} &= -\ 6 & v_{Y_4} &= +28 \\
v_{X_5} &= -13 & v_{Y_5} &= -12 \\
v_{X_6} &= -20 & v_{Y_6} &= -\ 7 \\
v_{X_7} &= +27 & v_{Y_7} &= -\ 7 \\
v_{X_8} &= +45 & v_{Y_8} &= -12 \\
v_{X_9} &= +\ 4 & v_{Y_9} &= -15
\end{aligned}
$$

un veidojam sumas

$$[p_X v_X v_X] = 4673{,}39 \qquad [p_Y v_Y v_Y] = 2082{,}91$$

Pazīstamā kārtā sadalot šos v_X un v_Y ar atbilstošiem izlabojumiem $v_{\Delta x}$ un $v_{\Delta y}$ uz attiecīgos gājienos aprēķinātiem koordinatu pieaugumiem, nosakam izlīdzinātos koordinatu pieaugumus $\overline{\Delta x}$ un $\overline{\Delta y}$, kā tas parādīts 78-ā paragrafa tabulās I—IX.

Beidzot, aprēķinam novērojumu noteiktību raksturojošās svara vienības vidējās kļūdas

$$m_\beta = \pm \sqrt{\frac{514{,}90}{9-3}} = \pm 9{,}3''$$

$$m_X = \pm \sqrt{\frac{4673{,}39}{9-3}} = \pm 27{,}9 \text{ cm} \qquad m_Y = \pm \sqrt{\frac{2082{,}91}{9-3}} = \pm 18{,}6 \text{ cm}$$

Kā redzams, šeit izdarītās izlīdzināšanas rezultati saskan ar tiem, kuri atrasti 78-ā paragrafā, izlīdzinot to pašu poligontīklu vienā gabalā netiešu un noteikumu novērojumu variantos.

V. Līmetņojumi.

§ 81. Ģeometriskā līmetņojuma kļūdas un to sakrāšanās līmetņojuma gājienos.

Ģeometriski līmetņojot divus punktus savienojošu gājienu, šo punktu augstumu starpība h nosakama kā atsevišķo staciju pakaļējo un priekšējo punktu augstumu starpību Δh algebraiskā suma. Pieņemot, ka gājienā ir n staciju, un atbilstošās augstumu starpības Δh novērotas ar vienādu noteiktību, tā tad ar vienādu vidējo nejaušo kļūdu $\Delta\mu$, uz nejaušo kļūdu sakrāšanas likuma pamata gājiena gala punktu augstumu starpība h iznāk ar vidējo nejaušo kļūdu

$$\mu = \pm \Delta\mu \sqrt{n} \quad \dots\dots\dots \quad (960).$$

Līmetņojot visās stacijās ar vienādu noteiktību, visās stacijās mēdz būt vienāda garuma vizuras. Pieņemot, ka tiek līmetņots vairāk vai mazāk noteikti no vidus ar garuma z vizurām, katras stacijas vizuru virzienā skaitītais garums ir 2z. Tā tad, apzīmējot gājiena kopgarumu ar s,

$$n = \frac{s}{2\,z} \quad \dots\dots\dots \quad (961).$$

Ieliekot šo izteiksmi formulā (960), tā pāriet veidā

$$\mu = \pm \frac{\Delta\mu}{\sqrt{2\,z}} \sqrt{s} \quad \dots\dots\dots \quad (962).$$

Tā tad, ievērojot, ka $\Delta\mu$ un z ir līmetņojuma noteiktību un techniskos apstākļus raksturojoši parametri, nākam pie slēdziena, ka pieņemtos apstākļos notikušā līmetņojuma rezultata h vidējā nejaušā kļūda proporcionala $\sqrt{s}$.

Ja — atsevišķās stacijās vienmēr novērojot ar vienādu noteiktību un vispārīgi vienādos apstākļos — līmetņoti vairāki gājieni ar garumiem $s_1, s_2, s_3, \dots$, tad šie garumi un gājienu līmetņojumu rezultatu $h_1, h_2, h_3, \dots$ vidējās nejaušās kļūdas $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ ir attiecībā

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \dots = \sqrt{s_1} : \sqrt{s_2} : \sqrt{s_3} : \dots \quad \dots\dots \quad (963).$$

Tā tad augstumu starpībām h resp. attiecīgo gājienu līmetņojumiem atbilstošie svari $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$ jāpieņem attiecībā

$$p_1 : p_2 : p_3 : \ldots\ldots = \frac{1}{s_1} : \frac{1}{s_2} : \frac{1}{s_3} : \ldots\ldots \quad . \; . \; . \quad (964),$$

t. i. pretēji proporcionali gājienu garumiem.

Kā redzams no formulas (962), gājiena līmetņojuma vidējā kļūda μ atkarājas ne tikai no elementa $\frac{\Delta\mu}{\sqrt{2z}}$, kurš — no gājiena garuma neatkarīgā veidā — raksturo paša līmetņošanas darba noteiktību, bet arī no līmetņotā gājiena garuma s. Tāpēc par dažādu gājienu līmetņojumu relativo noteiktību nevar spriest vienkārši salīdzinot attiecīgo rezultatu vidējās kļūdas μ. Šīs kļūdas μ par līmetņojumu noteiktības mērogu var noderēt tikai tad, ja visas zīmējas uz vienāda garuma gājieniem.

Ievērojot to, līmetņojumu vidējās nejaušās kļūdas μ mēdz attiecināt uz garumu s vienību. Parasti par šo garumu vienību pieņem 1 kilometru, un nosaka atbilstošo kilometra (līmetņojuma) vidējo nejaušo kļūdu μ_{km}.

Pāreja no s km gara gājiena līmetņojuma vidējās kļūdas μ uz atbilstošo kilometra vidējo kļūdu μ_{km} izdarama uz attiecības (963) pamata. Ievērojot, ka μ_{km} zīmējas uz gājiena garumu 1 km, uz (963) pamata veidojam proporciju

$$\mu_{km} : \mu = \sqrt{1} : \sqrt{s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (965),$$

no kuras atrodam

$$\mu_{km} = \pm \frac{\mu}{\sqrt{s}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (966).$$

Piemērs. Lai līmetņojot divus gājienus, kuru garumi ir $s_1 = 4$ km un $s_2 = 9$ km, rezultati atrasti ar vidējām kļūdām $\mu_1 = \pm 5$ mm un $\mu_2 = \pm 6$ mm.

Pēc formulas (966) pārejot uz atbilstošām kilometra vidējām kļūdām, atrodam

pirmā gadijumā

$$\mu_{km} = \pm \frac{5}{\sqrt{4}} = \pm 2{,}5 \text{ mm}$$

otrā gadijumā

$$\mu_{km} = \pm \frac{6}{\sqrt{9}} = \pm 2{,}0 \text{ mm}$$

Salīdzinot šīs kļūdas, redzam, ka līmetņojums noticis pirmā gājienā ar mazāku, otrā — ar lielāku noteiktību.

Pēc formulas (966) nosakams, ar kādu vidējo kļūdu μ sagaidams s km gara gājiena līmetņojuma rezultats, ja līmetņojums notiek ar kilometra vidējo kļūdu μ_{km}.

Sakarā ar līmetņojuma izlīdzināšanu aprēķinātā svara vienības vidējā kļūda identiska ar kilometra vidējo kļūdu, ja atsevišķo gājienu līmetņojumiem atbilstošie svari pieņemti pēc parauga

$$p = \frac{1}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (967);$$

tad svars 1 un atbilstošā svara vienības vidējā kļūda zīmējas uz 1 km garu gājienu.

Līmetņojumi notiek ne tikai ar nejaušām, bet arī ar sistematiskām kļūdām. Dotos apstākļos notikuša līmetņojuma visās stacijās būdamas ar vienādu zīmi, šīs sistematiskās kļūdas visa gājiena līmetņojumā sakrājas vienkārši sumējoties. Atsevišķo staciju līmetņojumiem notiekot apmēram vienādos apstākļos, atbilstošās sistematiskās kļūdas arī ir apmēram vienādas. Tā tad var pieņemt, ka visās stacijās līmetņojumi notikuši ar vienādu sistematisku kļūdu $\Delta\sigma$, kura ir atsevišķām stacijām atbilstošo sistematisko kļūdu aritmetiskais vidējais. Tad visa gājiena līmetņojuma sistematiskā kļūda ir

$$\sigma = \Delta\sigma \times n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (968),$$

jeb, ievērojot (961),

$$\sigma = \frac{\Delta\sigma}{2z} s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (969);$$

tā tad vienādos apstākļos notikušu gājienu līmetņojumu sistematiskās kļūdas proporcionalas attiecīgo gājienu garumiem s.

Lai raksturotu līmetņojuma noteiktību sistematisko kļūdu ziņā, mēdz nosacīt **kilometra** (līmetņojuma) **vidējo sistematisko kļūdu** σ_{km}, kura zīmējas uz 1 km gara gājiena līmetņojumu.

Ievērojot agrāk minēto sistematisko kļūdu sakrāšanās veidu, visa gājiena līmetņojuma sistematiskā kļūda σ un atbilstošā kilometra vidējā sistematiskā kļūda σ_{km} ir sakarā

$$\sigma = \sigma_{km}\, s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (970),$$

kur s ir gājiena garums kilometros.

Ģeometriskā līmetņojuma sistematisko kļūdu avoti ir daudzi un dažādi: līmetņa un latu grimšana, nevienmērīgais apgaismojums, atmosferiskās dabas ietekmes, līmetņa un latu trūkumi, u. t. t. Tomēr lietpratīgi un rūpīgi izdarītos līmetņojumos sistematiskās kļūdas $\Delta\sigma$ un

σ_{km} mēdz būt daudz mazākas par atbilstošām nejaušām $\Delta\mu$ un μ_{km}. No otrās puses, no formulām (962) un (969) redzams, ka līmetņojumu gājienos sistematiskās kļūdas sakrājas nelabvēlīgākā veidā, nekā nejaušās kļūdas. Tā tad, neskatoties uz $\Delta\sigma$ un σ_{km} samērā niecīgo lielumu, sistematisko kļūdu ietekme uz garāku līmetņojumu rezultatiem var būt ļoti ievērojama.

Kā zinams, izlīdzināšanai zīmējoties uz novērojumu nejaušām kļūdām, jāprasa, lai pirms izlīdzināšanas novērojumi būtu atbrīvoti no tiem piemītošām cita veida, tā tad arī sistematiskām, kļūdām. Šinī ziņā jāievēro, ka — augšā minēto iemeslu dēļ — īsu līmetņojumu gadijumā, tiem piemītošās sistematiskās kļūdas, salīdzinot ar nejaušām, parasti ir ļoti mazas un tāpēc praktiski ignorējamas; tā tad tādus līmetņojumus var uzskatīt par notikušiem tikai ar nejaušām kļūdām. Bez tam aizrādam vēl uz vienu citu šinī ziņā svarīgu apstākli. Vienādos apstākļos līmetņojot gājienu turp un atpakaļ, abu rezultatu sistematiskām kļūdam ir apmēram vienādas absolutās vērtības, bet pretējas zīmes. No tā seko, ka abu rezultatu aritmetiskais vidējais ir diezgan pilnīgi brīvs no sistematisko kļūdu ietekmes. Tā tad, lietojot kā izlīdzināšanas objektu turp un atpakaļ izdarītu dubultlīmetņojumu vidējos rezultatus, ir zinams pamats tos uzskatīt par tikai ar nejaušām kļūdām notikušiem novērojumiem.

§ 82. Atsevišķu līmetņojuma gājienu izlīdzināšana.

Turp un atpakaļ līmetņojot gājienu, atbilstošiem rezultatiem h_t un h_a ir pretējas zīmes; tā tad, attiecinot abus rezultatus uz līmetņojuma virzienu „turp“, h_a vietā jāliek $-h_a$. Piemītošo nejaušo un sistematisko kļūdu dēļ, šie rezultati atšķiras par pretrunu

$$d = h_t - (-h_a) = h_t + h_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (971).$$

Ar nejaušām kļūdām notikušu novērojumu izlīdzināšanas kārtā veidotais vidējais

$$h = \frac{h_t + (-h_a)}{2} = \frac{h_t - h_a}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (972),$$

agrāk minēto iemeslu dēļ, uzskatams par brīvu no līmetņojuma sistematiskām kļūdām. Tā tad — kā nejaušo, tā arī sistematisko kļūdu ziņā — šis vidējais uzskatams par līmetņotā gājiena gala punktu izlīdzināto augstumu starpību.

Kas zīmējas uz noteiktības aprēķinu, tad, pieņemot, ka pretruna d radusies tikai no līmetņojuma nejaušām kļūdām, pēc dubultnovērojumu kļūdu teorijas, vidējā nejaušā kļūda ir:

turp vai atpakaļ notikušā „atsevišķa līmetņojuma" rezultatam h_t vai h_a

$$\mu' = \pm \frac{d}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots\dots \quad (973),$$

bet turp un atpakaļ notikušā „dubultlīmetņojuma" rezultatam h

$$\mu = \pm \frac{d}{2} \quad \dots\dots\dots \quad (974).$$

Atbilstošās uz 1 km attiecinātās vidējās kļūdas ir

$$\mu_{km}' = \pm \frac{d}{\sqrt{2s}} \quad \dots\dots\dots \quad (975)$$

un

$$\mu_{km} = \pm \frac{d}{2\sqrt{s}} \quad \dots\dots\dots \quad (976),$$

kur s apzīmē kilometros izteikto gājiena garumu.

Atrastas tikai no viena vienīga dubultnovērojuma un pie tam ignorējot novērojumiem piemītošās sistematiskās kļūdas, pēc šīm formulām aprēķinātās vidējās kļūdas, saprotams, ļoti nedroši raksturo attiecīgā līmetņojuma noteiktību. Tas zīmējas sevišķi uz garākiem gājieniem, jo tādos gājienos, kā jau minēts, formulās (973)—(976) ignorētā sistematisko kļūdu ietekme uz pretrunu d var būt ļoti ievērojama; bet no viena vienīga gājiena šī ietekme nav nosakama.

Pretrunu d analīzei attiecībā uz to sistematiskām un nejaušām komponentām, jeb līmetņojuma noteiktību raksturojošās kilometra vidējās sistematiskās un nejaušās kļūdas noteikšanai izdevīgāki apstākļi ir tad, kad ar vienādu noteiktību dubulti līmetņoti vairāki gājieni. Šis jautājums turpmāk tiks sīkāki iztirzāts. Bet pagaidām apskatīsim abos galos dotiem reperiem pieslēgta atsevišķa līmetņojuma gājiena izlīdzināšanu.

Lai punktu P_1, P_2, P_3, ..., P_{n-1} augstumu noteikšanas nolūkā līmetņots gājiens, kurš, ejot pa šiem punktiem, iesākas un beidzas punktos (reperos) P_0 un P_n ar dotiem augstumiem H_0 un H_n.

Nosakamie punkti šo gājienu sadala posmos $P_0 - P_1$, $P_1 - P_2$, $P_2 - P_3$, ..., $P_{n-1} - P_n$, kuriem lai atbilst gājiena līmetņojumā novērotās augstumu starpības h_1, h_2, h_3, ..., h_n; šo posmu garumus apzīmēsim ar s_1, s_2, s_3, ..., s_n, bet gājiena kopgarumu — ar $S = [s]$.

Pieņemsim, ka no gājiena līmetņojuma atrastā gala punktu P_0 un P_n augstumu starpība

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n \quad \dots\dots \quad (977)$$

no šo punktu doto augstumu starpības $(H_n - H_0)$ atšķiras par gājiena līmetņojuma pretrunu

$$w = h - (H_n - H_0) \quad \dots\dots \quad (978).$$

Izlīdzinot gājiena līmetņojumu, atsevišķo posmu novērotām augstumu starpībām h_1, h_2, h_3, ..., h_n atbilstošie izlabojumi v_1, v_2, v_3, ..., v_n jānosaka tā, lai izpildītos noteikums

$$(h_1+v_1)+(h_2+v_2)+(h_3+v_3)+\ldots\ldots+(h_n+v_n)=H_n-H_0 \quad (979).$$

Ievērojot (977) un (978), šis noteikums formulējams veidā

$$v_1+v_2+v_3+\ldots\ldots+v_n+(h_1+h_2+h_3+\ldots\ldots+h_n)=h-w$$

jeb

$$v_1+v_2+v_3+\ldots\ldots+v_n+w=0 \quad \ldots\ldots \quad (980).$$

Uzskatot līmetņojumā atrastās augstumu starpības par tikai ar nejaušām kļūdām notikušiem noteikumu novērojumiem, pazīstamā kārtā veidojam šim noteikuma nolīdzinājumam atbilstošo korrelatas normalnolīdzinājumu

$$\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{p_n}\right)k+w=$$

$$=\left[\frac{1}{p}\right]k+w=0 \quad \ldots\ldots \quad (981),$$

kur p_1, p_2, p_3, ..., p_n ir izlabojumiem v_1, v_2, v_3, ..., v_n atbilstošo novēroto augstumu starpību h_1, h_2, h_3, ..., h_n svari. Tos pēc (967) parauga pieņemam

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{s_1} \\ p_2 &= \frac{1}{s_2} \\ p_3 &= \frac{1}{s_3} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= \frac{1}{s_n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (982).$$

Atslēdzot korrelatas normalnolīdzinājumu (981), atrodam

$$k=-\frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (983),$$

un aprēķinam izlabojumus

$$v_1=\frac{1}{p_1}k=-\frac{\frac{1}{p_1}}{\left[\frac{1}{p}\right]}w=-\frac{s_1}{[s]}w=-\frac{s_1}{S}w$$

$$\left.\begin{aligned}
v_2 &= \frac{1}{p_2}\,k = -\frac{\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\,w = -\frac{s_2}{[s]}\,w = -\frac{s_2}{S}\,w \\
v_3 &= \frac{1}{p_3}\,k = -\frac{\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\,w = -\frac{s_3}{[s]}\,w = -\frac{s_3}{S}\,w \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_n &= \frac{1}{p_n}\,k = -\frac{\frac{1}{p_n}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\,w = -\frac{s_n}{[s]}\,w = -\frac{s_n}{S}\,w
\end{aligned}\right\} \quad \dots (984).$$

Šie izlabojumi atrasti pieņemot, ka attiecīgie novērojumi notikuši tikai ar nejaušām kļūdām, kā tas arī mēdz būt, ja novērotās augstumu starpības h_1, h_2, h_3, ..., h_n ir pretējos virzienos izdarītu dubultlīmetņojumu rezultati.

Ja augstumu starpības atrastas no tikai vienā virzienā izdarītiem līmetņojumiem, un vispārīgi, ja novērojumiem h_1, h_2, h_3, ..., h_n piemīt ne tikai nejaušas, bet arī sistematiskas kļūdas, pretruna w uzskatama par divu komponentu w' un w'' sumu, kur w' radusies tikai no nejaušām, bet w'' — tikai no sistematiskām kļūdām. Sakarā ar to tad arī izlabojumi v jāveido pēc parauga

$$v = v' + v'' \quad \dots\dots\dots \quad (985),$$

kur v' un v'' ir uz atbilstošām pretrunām w' un w'' attiecīgās komponentas.

Komponentas v' nosakamas augšā aizrādītā kārtā, tā tad pēc formulām (984) atbilstošā parauga

$$v' = -\frac{s}{S}\,w' \quad \dots\dots\dots \quad (986).$$

Kas zīmējas uz komponentām v'', tad jāievēro, ka augstumu starpību h_1, h_2, h_3, ..., h_n sistematiskās kļūdas, sumā veidojot pretrunu w'', proporcionalas gājiena attiecīgo posmu garumiem. Šīs kļūdas likvidējošiem izlabojumiem v'' jābūt vienādiem ar pretējo zīmi skaitītām atbilstošām kļūdām; tā tad šie izlabojumi nosakami pēc parauga

$$v'' = -\frac{s}{S}\,w'' \quad \dots\dots\dots \quad (987).$$

Ieliekot izteiksmes (986) un (987) formulā (985), atrodam

$$v = -\frac{s}{S}(w' + w'') = -\frac{s}{S}w \quad . \quad . \quad . \quad (988).$$

Tā tad nākam pie slēdziena, ka gājiena līmetņojuma pretruna w — neatkarīgi no tā, kādā mērā tā radusies no nejaušām vai no sistematiskām kļūdām, — jāsadala uz gājiena atsevišķo posmu augstumu starpībām proporcionali attiecīgo posmu garumiem.

Vēl atgriežoties pie izlabojumus v noteicošām formulām (984), ievērojot tās veidojam sumu

$$[pvv] = \frac{1}{s_1}\frac{s_1^2}{S^2}w^2 + \frac{1}{s_2}\frac{s_2^2}{S^2}w^2 + \frac{1}{s_3}\frac{s_3^2}{S^2}w^2 + \cdots\cdots +$$

$$+ \frac{1}{s_n}\frac{s_n^2}{S^2}w^2 = \frac{S}{S^2}w^2 = \frac{w^2}{S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (989).$$

Pazīstamā kārtā nosakot svara vienības vidējo kļūdu, kura pieņemtā svaru sistemā identiska ar kilometra vidējo nejaušo kļūdu μ_{km}, atrodam

$$\mu_{km} = \pm \frac{w}{\sqrt{S}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (990),$$

kur gājiena kopgarums S pieņemts kilometros.

Par tādā veidā nosacīto kļūdu μ_{km}, kā attiecīgā līmetņojuma noteiktības mēru, sakams tas pats, kas jau teikts par formulām (973)—(976): aizrādītā veidā nosakot vidējo kļūdu μ_{km}, tiek ignorēta līmetņojuma rezultatam eventuali piemītošā sistematiskā kļūda; bez tam, pat tādai sistematiskai kļūdai neesot, tikai no viena vienīga gājiena aprēķinātā kļūda μ_{km} ļoti nedroši raksturo attiecīgā līmetņojuma noteiktību.

§ 83. Līmetņojuma tīklu izlīdzināšana.

Vairākiem līmetņojuma gājieniem sanākot trīs vai vairākiem gājieniem kopīgos mezglu punktos, veidojas **līmetņojuma tīkls**. Izejot no viena vai vairāku gājienu sākuma vai gala punktu dotiem augstumiem, pa tīkla atsevišķiem gājieniem vai gājienu virknēm var nonākt līdz katram tīkla mezgla punktam un nosacīt tā augstumu. Izdarot šo augstumu aprēķinu ar neizlīdzinātām augstumu starpībām, un izejot no dažādiem pieslēgpunktiem ar dotiem augstumiem, vai ejot pa dažādām gājienu virknēm, rezultati vispārīgi mēdz būt vairāk vai mazāk pretrunīgi. Lai novērstu šīs pretrunas, jāizdara tīkla resp. tīklā novēroto atsevišķiem gājieniem atbilstošo augstumu starpību izlīdzināšana.

Izlīdzinot līmetņojuma tīklu, minētās augstumu starpības var uzskatīt par netiešiem vai par noteikumu novērojumiem. Abos gadijumos, veidojot kļūdu nolīdzinājumus resp. noteikumu nolīdzinājumus, jāievēro zinami noteikumi, kuriem jābūt izpildītiem ar attiecīgiem gājieniem atbilstošām izlīdzinātām augstumu starpībām.

Šie noteikumi izsaka, ka katrā gājienu virknē, kas savieno divus a priori zinamu augstumu vai augstumu starpības ziņā dotus punktus, virkni veidojošiem gājieniem atbilstošo augstumu starpību sumai jābūt vienādai ar virknes gala punktu a priori zinamo augstumu starpību. Pie tam tiek pieņemts, ka atsevišķo gājienu virzieni, uz kuriem attiecinātas atbilstošās augstumu starpības, saskan ar pieņemto virknes perimetra virzienu, uz kuru attiecināta virknes gala punktu augstumu starpība. Pretējā gadijumā, t. i. ja kāda virknes atsevišķa gājiena virziens ir pretējs virknes vispārējam virzienam, šim gājienam atbilstošā augstumu starpība jāskaita ar apgriezto zīmi.

Minētā veida noteikumi zīmējas uz gājienu virknēm, kas savieno tīkla pieslēgpunktus, t. i. augstuma ziņā dotus reperus. Tie paši noteikumi zīmējas arī uz tādām gājienu virknēm, kas — gala punktam sakrītot ar sākuma punktu — veido slēgtu poligonu. Pēdējā gadijumā virknes sākuma un gala punktu augstumu starpība vienāda ar nulli.

Parasti līmetņojuma tīkla visos slēgtos poligonos perimetrus mēdz skaitīt vienā un tanī pašā virzienā, piem., pa pulksteņa rādītāju. Tādos apstākļos, ievērojot augšā teikto par gājienu virknes vispārējo virzienu un virkni veidojošo atsevišķo gājienu virzieniem, diviem slēgtiem poligoniem kopīgā gājiena augstumu starpība vienā poligonā skaitama ar gājiena virzienam atbilstošo zīmi, bet otrā poligonā — ar pretējo zīmi.

Sakarā ar to vēl piezīmējam, ka bieži visos atsevišķos gājienos tiem atbilstošo augstumu starpību zīmes noteicošos virzienus skaita no zemākā gala punkta pret augstāko. Tad attiecīgo gājienu pieņemtos virzienos skaitītās atbilstošās augstumu starpības visas ir pozitivas. Tādā gadijumā katrā gājienu virknē to veidojošo atsevišķo gājienu augstumu starpības skaitamas pozitivas (kāpumi) vai negativas (kritumi) skatoties pēc tā, vai attiecīgā atsevišķā gājiena virziens saskan ar virknes vispārējo virzienu, vai ir tam pretējs.

Lai atvieglotu kļūdu nolīdzinājumu resp. noteikumu nolīdzinājumu veidošanu, ieteicams pirms izlīdzināšanas pagatavot attiecīgā līmetņojuma tīkla skici. Šinī skicē atzīmējami: doto pieslēgpunktu, nosakamo mezglu punktu un gājienu nosaukumi, pieslēgpunktu dotie augstumi, gājienu garumi un novērotās augstumu starpības, atsevišķo gājienu un to veidoto virkņu un slēgto poligonu perimetru pieņemtie virzieni, augstumu starpību pretrunas slēgtos poligonos, u. t. t.

Atsevišķiem gājieniem atbilstošo novēroto augstumu starpību svari pieņemami 81-ā paragrafā aizrādītā kārtā — pretēji proporcionali attiecīgo gājienu garumiem s. Ja, skaitot šos garumus s kilometros, svarus pieņem pēc parauga (967), tad tādā svaru sistemā aprēķinātā svara vienības vidējā kļūda identiska ar kilometra vidējo nejaušo kļūdu. Sakarā ar to piezīmējam, ka praksē parastajā gadijumā, kad izlīdzināšanas objektu veidojošās augstumu starpības atrastas kā attiecīgo gājienu savstarpēji pretējos virzienos izdarītu dubultlīmetņojumu vidējie rezultati, var pieņemt, ka šiem novērojumiem piemīt tikai nejaušas kļūdas.

Izlīdzinot tīklu netiešu novērojumu kārtā, kā zinams, kļūdu nolīdzinājumi veidojami salīdzinot atsevišķos gājienos novērotās un ar attiecīgiem izlabojumiem papildinātās augstumu starpības ar atbilstošām meklēto nezinamo funkcijām. Kas zīmējas uz minētiem nezinamiem, tad par tiem var pieņemt tādas atsevišķiem gājieniem atbilstošas izlīdzinātas augstumu starpības, ar kurām pietiek, lai, izejot no pieslēgpunktu dotiem augstumiem, nosacītu visu mezglu punktu augstumus. Viegli saprotams, ka tādu augstumu starpību skaits vienāds ar nosakamo mezglu punktu skaitu.

Tie kļūdu nolīdzinājumi, kas zīmējas uz pieņemtiem nezinamiem atbilstošiem gājieniem, veidojami tieši salīdzinot šinīs gājienos novērotās un ar izlabojumiem papildinātās augstumu starpības ar atbilstošiem nezinamiem. Pārējie kļūdu nolīdzinājumi veidojami pamatojoties uz agrāk minētiem noteikumiem, kas zīmējas uz sakaru starp gājienu virknes un to veidojošo atsevišķo gājienu augstumu starpībām.

Uz šo pašu noteikumu pamata veidojami noteikumu nolīdzinājumi, ja gājienu līmetņojumu rezultatus izlīdzina kā noteikumu novērojumus. Neatkarīgie noteikumu nolīdzinājumi veidojami pa atsevišķiem slēgtiem poligoniem un dotos pieslēgpunktus pa pāriem savienojošām gājienu virknēm. Dotus pieslēgpunktus tieši savienojošie atsevišķie gājieni izlīdzinami iepriekšējā paragrafā aizrādītā kārtā, — pavisam neatkarīgi no tīkla izlīdzināšanas. Tīkla izlīdzināšanai svarā krītošo neatkarīgo noteikumu nolīdzinājumu skaits ir

$$N = t - u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (991),$$

kur t apzīmē vismaz vienam nosakamam mezgla punktam piegulošo gājienu skaitu, bet u — nosakamo mezglu punktu skaitu tīklā.

Izejot no augšā minētā kārtā veidotiem kļūdu nolīdzinājumiem resp. noteikumu nolīdzinājumiem, tīkla izlīdzināšana un sakarā ar to izdaramais noteiktības aprēķins notiek parastā kārtā; tā tad pie attiecīgiem sīkumiem nebūs jāpakavējas. Tikai piezīmējam, ka izlīdzinot tīklu netiešu novērojumu kārtā, normalnolīdzinājumu skaits ir

$$N' = u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (992),$$

bet izlīdzinot noteikumu novērojumu kārtā, korrelatu normalnolīdzinājumu skaits ir

$$N'' = N = t - u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (993),$$

kur N, t un u ir sakarā ar formulu (991) minētā nozīmē.

Uz formulu (992) un (993) pamata, ievērojot uz t un u attiecīgos apstākļus dotā līmetņojuma tīklā, zinamā mērā var spriest, vai, izlīdzinot šo tīklu, gājienu līmetņojumu rezultati izdevīgāki uzskatami par netiešiem vai par noteikumu novērojumiem.

Par skaitlisku piemēru līmetņojuma tīkla izlīdzināšanai abos šeit apskatītos variantos var noderēt 29-ā paragrafā atrisinātais uzdevums

Vispārīgi līmetņojuma tīklu izlīdzināšana notiek līdzīgos apstākļos, un tāpēc arī izdarama līdzīgā veidā, kā poligontīklu izlīdzināšana savā uz koordinatu pieaugumiem attiecīgā otrā daļā. Gājienu koordinatu pieaugumu sumu un mezglu punktu koordinatu vietā stājoties gājienu augstumu starpībām un mezglu punktu augstumiem, izlīdzināšana izdarama 77—80-ā paragrafā aizrādītā kārtā, — vai nu visam tīklam vienā gabalā, vai pa atsevišķiem nosakamiem mezgliem. Izlīdzinot augstumu starpības kā netiešus novērojumus pēc 77-ā paragrafā aizrādītā paņēmiena parauga, par meklētiem nezinamiem pieņemami nosakamo mezglu punktu izlīdzinātie augstumi. Kas zīmējas uz izlīdzināšanu pa atsevišķiem mezgliem, tad, tāpat kā poligontīkla gadijumā, šis paņēmiens derīgs tikai zinamos apstākļos, — kad tīkla atsevišķos slēgtos poligonos ieejošo nosakamo mezglu punktu skaits nav lielāks par diviem.

§ 84. Kilometra vidējās nejaušās un sistematiskās kļūdas noteikšana.

Gājiena turp un atpakaļ izdarīto līmetņojumu rezultatiem h′ un h″ ir pretējas zīmes; bet absolutām vērtībām teoretiski jābūt vienādām. Tā tad jābūt

$$h' = -h''$$

jeb

$$h' - (-h'') = h' + h'' = 0 \quad \ldots\ldots \quad (994).$$

Praktiski tomēr mēdz būt

$$h' + h'' = d \quad \ldots\ldots \quad (995),$$

kur d apzīmē pretrunu, kas rodas pa daļai no nejaušām, pa daļai no sistematiskām līmetņojuma kļūdām.

Kā jau aizrādīts 81-ā paragrafā, var pieņemt, ka dubulti līmetņojot vienu un to pašu gājienu vienādos apstākļos, bet savstarpēji pretējos virzienos, abu līmetņojumu sistematiskām kļūdām ir vienādas absolutās vērtības, bet pretējas zīmes. Tā tad, ievērojot (970), nākam pie slēdziena, ka pretrunas d sistematiskā komponenta ir

$$d_\sigma = 2\,\sigma_{km}\,s \quad \ldots\ldots \quad (996),$$

kur σ_{km} apzīmē kilometra vidējo sistematisko kļūdu, bet s — līmetņotā gājiena garumu kilometros. Atņemot d_σ no d, atlikumā paliek pretrunas d nejaušā komponenta

$$(d) = d - d_\sigma = d - 2\,\sigma_{km}\,s \quad \ldots\ldots \quad (997).$$

Lai dubulti, turp un atpakaļ, līmetņojot vairākus gājienus ar garumiem $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$, atrasti rezultati h_1' un h_1'', h_2' un h_2'', h_3' un h_3'', ..., h_n' un h_n'', kuriem ir pēc (995) parauga aprēķinātās pretrunas $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$.

Tad pēc (997) parauga veidojamas izteiksmes

$$\begin{aligned}
(d)_1 &= d_1 - 2\,\sigma_{km}\,s_1 \\
(d)_2 &= d_2 - 2\,\sigma_{km}\,s_2 \\
(d)_3 &= d_3 - 2\,\sigma_{km}\,s_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(d)_n &= d_n - 2\,\sigma_{km}\,s_n
\end{aligned}$$

jeb

$$\left.\begin{aligned}
d_1 &= (d)_1 + 2\,\sigma_{km}\,s_1 \\
d_2 &= (d)_2 + 2\,\sigma_{km}\,s_2 \\
d_3 &= (d)_3 + 2\,\sigma_{km}\,s_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d_n &= (d)_n + 2\,\sigma_{km}\,s_n
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (998),$$

kur (d) apzīmē attiecīgo pretrunu d nejaušās komponentas.

Paceļot izteiksmes (998) kvadratā, dalot ar atbilstošiem garumiem s un sumējot, atrodam

$$\frac{d_1^2}{s_1} = \frac{(d)_1^2}{s_1} + 4\,\sigma_{km}(d)_1 + 4\,\sigma_{km}^2\,s_1$$

$$\frac{d_2^2}{s_2} = \frac{(d)_2^2}{s_2} + 4\,\sigma_{km}(d)_2 + 4\,\sigma_{km}^2\,s_2$$

$$\frac{d_3^2}{s_3} = \frac{(d)_3^2}{s_3} + 4\,\sigma_{km}(d)_3 + 4\,\sigma_{km}^2\,s_3$$

. . . .

$$\frac{d_n^2}{s_n} = \frac{(d)_n^2}{s_n} + 4\,\sigma_{km}(d)_n + 4\,\sigma_{km}^2\,s_n$$

$$\left[\frac{d^2}{s}\right] = \left[\frac{(d)^2}{s}\right] + 4\sigma_{km}\,[(d)] + 4\sigma_{km}^2[s] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (999).$$

Attiecībā uz šīs izteiksmes locekli $\left[\frac{(d)^2}{s}\right]$ piezīmējam sekojošo. Kā zinams, (d) ir atbilstošo dubultnovērojumu h′ un h″ pretrunas, kas radušās tikai no šo novērojumu nejaušām kļūdām. Ja apzīmējam ar m_v svara vienības līmetņojumu h′ un h″ vidējā rezultata vidējo kļūdu, tad pēc dubultnovērojumu teorijas

$$m_v = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[p(d)^2]}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1000),$$

jeb

$$[p(d)^2] = 4\,n\,m_v^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1001).$$

Ja svarus pieņemam pēc (967) parauga, tad formula (1001) pāriet veidā

$$\left[\frac{(d)^2}{s}\right] = 4\,n\,m_v^2 = 4\,n\,\mu_{km}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1002),$$

jo m_v identiska ar dubulti, turp un atpakaļ, līmetņota kilometra vidējo nejaušo kļūdu μ_{km}.

Ievērojot (1002), formula (999) rakstama veidā

$$\left[\frac{d^2}{s}\right] = 4\,n\,\mu_{km}^2 + 4\,\sigma_{km}\,[(d)] + 4\,\sigma_{km}^2\,[s] \quad . \quad . \quad (1003).$$

Šinī formulā ieejošās sumas [(d)] atsevišķie locekļi (d) ir nejaušu īstu kļūdu dabas elementi. Pieņemot, ka visu gājienu garumi apmēram vienādi un gājienu skaits n pietiekoši liels, sumu [(d)] var uzskatīt par praktiski vienādu ar nulli. Tāpēc ignorējot locekli $4\,\sigma_{km}\,[(d)]$, formulu (1003) rakstam galīgā veidā

$$\left[\frac{d^2}{s}\right] = 4\,n\,\mu_{km}^2 + 4\,\sigma_{km}^2\,[s] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1004).$$

Kā turpmāk tiks parādīts, uz šīs formulas pamata, izejot no vairāku gājienu turp un atpakaļ izdarīto dubultlīmetņojumu pretrunām d, var nosacīt līmetņojuma noteiktību raksturojošās vidējās kļūdas μ_{km} un σ_{km}.

Lai kādā lielākā līmetņojumā ar vienādu noteiktību dubulti, turp un atpakaļ, līmetņoti vairāki gari gājieni, kuri ar droši nostiprinātiem starppunktiem sadalīti arī dubulti, turp un atpakaļ, līmetņotos īsākos posmos. Lai tādā īsākos posmos sadalītu garāku gājienu sistemā apzīmē

L — gājienu garumus kilometros,

S — „ dubultlīmetņojumu pretrunas,

n_L — „ skaitu,

un

r — posmu garumus kilometros,

Δ — „ dubultlīmetņojumu pretrunas,

n_r — „ kopskaitu visos gājienos.

Tad, atsevišķi ievērojot vienu reizi tikai gājienu, bet otro — tikai posmu līmetņojumus, pēc (1004) parauga veidojamas izteiksmes

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{S^2}{L}\right] &= 4\, n_L\, \mu_{km}^2 + 4\, \sigma_{km}^2[L] \\ \text{un} \qquad \left[\frac{\Delta^2}{r}\right] &= 4\, n_r\, \mu_{km}^2 + 4\sigma_{km}^2[r]\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1005).$$

Abas formulas nosaka uz 1 kilometru attiecīnāto gājienu resp. posmu līmetņojumu pretrunu sumu (kvadratā), kas rodas no līmetņojumam atbilstošās kilometra vidējās nejaušās kļūdas μ_{km} un sistematiskās kļūdas σ_{km} kopīgās ietekmes, pie kam abās formulās labās puses pirmais un otrais loceklis nosaka minēto kļūdu μ_{km} un σ_{km} atsevišķās ietekmes.

Kā jau minēts, garākos līmetņojuma gājienos nejaušo kļūdu ietekme, salīdzinot ar sistematisko kļūdu ietekmi, mēdz būt maza. Uz šī pamata pirmā formulā (1005) ignorējot labās puses pirmo locekli, šo formulu rakstam veidā

$$\left[\frac{S^2}{L}\right] = 4\, \sigma_{km}^2[L] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1006),$$

un no tās, tā tad ievērojot tikai veselo gājienu līmetņojumus, atrodam

$$\sigma_{km}^2 = \frac{1}{4[L]}\left[\frac{S^2}{L}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1007).$$

Tālāk, ievērojot, ka īsākos gājienu posmu līmetņojumos dominējošā ietekme ir nejaušām kļūdām, vidējās kļūdas μ_{km} noteikšanai lietojam tikai otro formulu (1005); no tās atrodam

$$\mu_{km}^2 = \frac{\left[\frac{\Delta^2}{r}\right]}{4n_r} - \frac{[r]}{n_r}\sigma_{km}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1008).$$

Šīs formulas labās puses pirmais loceklis ir

$$\frac{\left[\frac{\Delta^2}{r}\right]}{4n_r} = \frac{1}{4\,n_r}\left\{\frac{\Delta_1^2}{r_1} + \frac{\Delta_2^2}{r_2} + \frac{\Delta_3^2}{r_3} + \ldots\ldots + \frac{\Delta_{n_r}^2}{r_{n_r}}\right\} \; . \; . \; . \quad (1009).$$

Tā kā posmu garumi r mēdz būt ne visai dažādi, praktiski pielaižamā tuvinājumā mainīgos saucējus $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_{n_r}$ var atvietot ar to aritmetisko vidējo

$$r_v = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + \ldots\ldots + r_{n_r}}{n_r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1010).$$

Tā tad izteiksme (1009) rakstama veidā

$$\frac{\left[\frac{\Delta^2}{r}\right]}{4n_r} = \frac{1}{4n_r} \cdot \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots\ldots + \Delta_{n_r}^2}{r_v} \quad . \; . \; . \; . \quad (1011),$$

jeb, ievērojot (1010),

$$\frac{\left[\frac{\Delta^2}{r}\right]}{4n_r} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots\ldots + \Delta_{n_r}^2}{r_1 + r_2 + r_3 + \ldots\ldots + r_{n_r}} = \frac{[\Delta^2]}{4\,[r]} \quad . \; . \quad (1012).$$

Kas zīmējas uz formulas (1008) labās puses otro locekli, tad tas rakstams veidā

$$\frac{[r]}{n_r}\sigma_{km}^2 = \frac{r_v\,[r]}{r_v\,n_r}\sigma_{km}^2 = \frac{r_v r_1 + r_v r_2 + r_v r_3 + \ldots\ldots + r_v r_{n_r}}{r_v\,n_r}\sigma_{km}^2 \quad (1013).$$

Atvietojot mainīgo produktu $r_v r_1, r_v r_2, r_v r_3, \ldots\ldots, r_v r_{n_r}$ sumu ar atbilstošo kvadratu $r_1^2, r_2^2, r_3^2, \ldots\ldots, r_{n_r}^2$ sumu $[r^2]$ un ievērojot (1010), izteiksme (1013) rakstama šādā pārveidojumā:

$$\frac{[r]}{n_r}\sigma_{km}^2 = \frac{[r^2]}{[r]}\sigma_{km}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1014).$$

Ieliekot izteiksmes (1012) un (1014) vidējo kļūdu μ_{km} noteicošā formulā (1008), tā pāriet veidā

$$\mu_{km}^2 = \frac{[\Delta^2]}{4\,[r]} - \frac{[r^2]}{[r]}\sigma_{km}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1015).$$

Ievērojot, ka

$$[r] = [L] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1016),$$

formulu (1015) var rakstīt

$$\mu_{km}^2 = \frac{[\Delta^2]}{4[L]} - \frac{[r^2]}{[L]} \sigma_{km}^2 \quad \ldots\ldots \quad (1017).$$

Šinī formulā ieejošais σ_{km}^2 nosakams pēc formulas (1007).

Šī iztirzājuma rezultātā esam atraduši Lallemand formulas

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{km}^2 &= \frac{1}{4[L]}\left[\frac{S^2}{L}\right] \\ \mu_{km}^2 &= \frac{[\Delta^2]}{4[L]} - \frac{[r^2]}{[L]} \sigma_{km}^2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (1018),$$

kuras tiek starptautiski lietotas kilometra vidējās sistematiskās un nejaušās kļūdas atvasināšanai no turp un atpakaļ izdarītu vairāku gājienu un to īsāku posmu dubultlīmetņojumu pretrunām.

Kā redzējam, šīs formulas atrastas ignorējot garo gājienu dubultlīmetņojumu pretrunu nejaušās komponentas. Sakarā ar to no dažām pusēm celti iebildumi pret šīm formulām. Neiztirzājot sīkāki šo iebildumu motivus, aizrādam tikai uz sekojošo. Pats par sevi saprotams, ka no viena vienīga, posmos nesadalīta gājiena dubultlīmetņojuma pretrunas nav iespējams atrast tās sistematisko un nejaušo komponentu resp. nosacīt līmetņojuma vidējās kļūdas σ_{km} un μ_{km}. Tā tad aprēķinot šīs kļūdas pēc attiecīgām formulām, kas zīmējas uz vairākiem, atsevišķos posmos sadalītiem gājieniem, šinī gadijumā sagaidami rezultati $\sigma_{km}^2 = \frac{0}{0}$ un $\mu_{km}^2 = \frac{0}{0}$. Šinī ziņā pārbaudot Lallemand formulas, vispirms piezīmējam, ka viena vienīga dubultlīmetņojuma gadijumā tās objekts uzskatams tikpat labi par gājienu ar garumu L, kā par posmu ar garumu $r = L$. Tāpat arī dubultlīmetņojuma pretrunu ar vienādām tiesībām var uzskatīt par gājienam atbilstošo S, vai par posmam atbilstošo Δ. Minētā atsevišķā gadijumā pieņemot, piem.,

$$[L] = L \qquad \left[\frac{S^2}{L}\right] = \frac{S^2}{L}$$

$$r = L \quad [r^2] = L^2 \quad \Delta = S \quad [\Delta^2] = [S^2] = S^2$$

pēc Lallemand formulām (1018) atrodam

$$\sigma_{km}^2 = \frac{S^2}{4\,L^2}$$

$$\mu_{km}^2 = 0$$

kas nesaskan ar pieņemtos apstākļos sagaidamiem rezultatiem.

No formulām (1005) atvasinot vidējās kļūdas σ_{km} un μ_{km} noteicošās izteiksmes, var arī abos gadijumos ievērot kā veselo gājienu, tā arī atsevišķo posmu dubultlīmetņojumus resp. atbilstošās pretrunas.

Tādā gadijumā, uzskatot formulas (1005) par nolīdzinājumu sistemu ar nezinamiem σ_{km}^2 un μ_{km}^2, atslēdzot šo sistemu, atrodam

$$\sigma_{km}^2 = \frac{1}{4\{n_r[L] - n_L[r]\}}\left\{n_r\left[\frac{S^2}{L}\right] - n_L\left[\frac{\Delta^2}{r}\right]\right\} \quad . \quad . \quad (1019)$$

un

$$\mu_{km}^2 = \frac{1}{4}\frac{\left[\frac{\Delta^2}{r}\right][L] - \left[\frac{S^2}{L}\right][r]}{n_r[L] - n_L[r]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1020),$$

jeb

$$\sigma_{km}^2 = \frac{\frac{1}{n_L n_r}}{4\left\{\frac{[L]}{n_L} - \frac{[r]}{n_r}\right\}}\left\{n_r\left[\frac{S^2}{L}\right] - n_L\left[\frac{\Delta^2}{r}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\left\{\frac{[L]}{n_L} - \frac{[r]}{n_r}\right\}}\left\{\frac{1}{n_L}\left[\frac{S^2}{L}\right] - \frac{1}{n_r}\left[\frac{\Delta^2}{r}\right]\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1021)$$

un

$$\mu_{km}^2 = \frac{1}{4}\frac{\frac{[L]}{n_L\, n_r}\left[\frac{\Delta^2}{r}\right] - \frac{[r]}{n_L\, n_r}\left[\frac{S^2}{L}\right]}{\frac{[L]}{n_L} - \frac{[r]}{n_r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1022).$$

Lietojot gājienu garumu L un posmu garumu r aritmetiskos vidējos

$$\left.\begin{aligned} L_v &= \frac{[L]}{n_L} \\ r_v &= \frac{[r]}{n_r} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1023),$$

formulas (1019) un (1020) jeb (1021) un (1022) arī rakstamas

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{km}^2 &= \frac{\frac{1}{4n_L}\left[\frac{S^2}{L}\right] - \frac{1}{4n_r}\left[\frac{\Delta^2}{r}\right]}{L_v - r_v} \\ \mu_{km}^2 &= \frac{L_v\frac{1}{4n_r}\left[\frac{\Delta^2}{r}\right] - r_v\frac{1}{4n_L}\left[\frac{S^2}{L}\right]}{L_v - r_v} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1024).$$

Lietojot palīglielumus

$$\left.\begin{aligned} m_1^2 &= \frac{1}{4n_r}\left[\frac{\Delta^2}{r}\right] \\ m_3^2 &= \frac{1}{4n_L}\left[\frac{S^2}{L}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1025),$$

šīs formulas pāriet galīgā veidā

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{km}^2 &= \frac{m_3^2 - m_1^2}{L_v - r_v} \\ \mu_{km}^2 &= \frac{L_v m_1^2 - r_v m_3^2}{L_v - r_v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1026).$$

Tās ir Rune formulas, kuras to autors 1934. g. Ļeņingradā notikušā Baltijas Ģeodetiskās komisijas konferencē ieteicis lietošanai Lallemand formulu vietā.*)

Pārbaudot šīs formulas līdzīgā veidā, kā tas darīts ar Lallemand formulām, attiecībā uz vienu vienīgu dubultlīmetņojumu, pieņemam

$$n_L = n_r = 1 \qquad \left[\frac{S^2}{L}\right] = \left[\frac{\Delta^2}{r}\right] = \frac{S^2}{L}$$

$$L_v = r_v$$

tad atrodam

$$m_1^2 = m_3^2 = 0$$

un

$$\sigma_{km}^2 = \mu_{km}^2 = \frac{0}{0}$$

kas saskan ar pieņemtā atsevišķā gadijumā sagaidamiem rezultatiem, tā tad runā par labu Rune formulām.

Ja dubulti, turp un atpakaļ, līmetņotie gājieni resp. to posmi veido līmetņojuma tīklu, tad kilometra dubultlīmetņojuma vidējā sistematiskā kļūda $\bar{\sigma}_{km}$ nosakama pēc Lallemand aizrādītās formulas

$$\bar{\sigma}_{km}^2 = \frac{1}{[L^2]}\left\{\frac{1}{2}[f^2] - \mu_{km}^2[L]\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1027),$$

kur f apzīmē pretrunas tīkla atsevišķos poligonos, bet μ_{km} — pēc formulām (1018) aprēķināto kilometra vidējo nejaušo kļūdu.

Atbilstošā Rune formula ir

$$\bar{\sigma}_{km}^2 = \frac{m_4^2 - m_1^2}{L_v - r_v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1028),$$

*) Sal. Fr. Seidel, Referat über das geschlossene Präzisionsnivellement rings um die Ostsee. Verhandl. d. Balt. Geod. Komm., Helsinki 1935.

kur m_4 apzīmē sakarā ar tīkla izlīdzināšanu atrasto kilometra vidējo kļūdu.

Beidzot, attiecībā uz Lallemand un Rune formulām (1018) un (1026) vēl piezīmējam, ka ar tām noteiktā vidējā kļūda μ_{km} zīmējas uz savstarpēji pretējos virzienos izdarītā kilometra dubultlīmetņojuma vidējo rezultatu, bet vidējā kļūda σ_{km} — uz tikai vienā virzienā izdarīto kilometra vienkāršo līmetņojumu. Formulas (1027) un (1028) lietojamas tikai liela, vismaz no 10 poligoniem sastāvoša tīkla gadijumā.

§ 85. Piemērs.

Sekojošās lappusēs tabulās I—XI atzīmēti Z. M. Mērniecības daļas smalklīmetņošanas darbos izdarītu 10 gājienu atsevišķo posmu dubultlīmetņojumu pretrunas Δ un garumi r, un no tiem atvasinātie elementi, kuri vajadzīgi minēto līmetņojumu vidējo kļūdu σ_{km} un μ_{km} aprēķinam pēc Lallemand un Rune formulām. Pēdējā tabulā Σ lietots kā atsevišķo gājienu posmiem atbilstošo vienādas dabas elementu parcialo sumu simbols.

Tabulās aprēķinātās skaitliskās vērtības ieliekot attiecīgās formulās, atrodam:

pēc Lallemand formulām

$$\sigma_{km}^2 = \frac{1}{4[L]}\left[\frac{S^2}{L}\right] = \frac{1}{4\times 78{,}00}\times 2{,}1753 = 0{,}0070$$

$$\mu_{km}^2 = \frac{[\Delta^2]}{4[L]} - \frac{[r^2]}{[L]}\sigma_{km}^2 = \frac{15{,}4162}{4\times 78{,}00} - \frac{122{,}06}{78{,}00}\times 0{,}0070 =$$

$$= 0{,}0494 - 0{,}0110 = 0{,}0384$$

tā tad

$$\sigma_{km} = \pm\, 0{,}08 \text{ mm}$$

$$\mu_{km} = \pm\, 0{,}20 \text{ mm}$$

pēc Rune formulām

$$m_1^2 = \frac{1}{4n_r}\left[\frac{\Delta^2}{r}\right] = \frac{1}{4\times 52}\times 10{,}5155 = 0{,}0506$$

$$m_3^2 = \frac{1}{4n_L}\left[\frac{S^2}{L}\right] = \frac{1}{4\times 10}\times 2{,}1753 = 0{,}0544$$

un

$$\sigma_{km}^2 = \frac{m_3^2 - m_1^2}{L_v - r_v} = \frac{0{,}0544 - 0{,}0506}{7{,}80 - 1{,}50} = 0{,}0006$$

$$\mu_{km}^2 = \frac{L_v m_1^2 - r_v m_3^2}{L_v - r_v} = \frac{7{,}80\times 0{,}0506 - 1{,}50\times 0{,}0544}{7{,}80 - 1{,}50} = 0{,}0497$$

tā tad

$$\sigma_{km} = \pm\, 0{,}02 \text{ mm}$$

$$\mu_{km} = \pm\, 0{,}22 \text{ mm}$$

Tabula I.

1. gājiens, M 334 — M 335 (posmu skaits — 4).

Posmi	Δ	Δ^2	r	r^2	$\frac{\Delta^2}{r}$
	mm	mm^2	km	km^2	mm^2/km
1_1	+1,08	1,1664	1,2	1,44	0,9720
1_2	−0,70	0,4900	1,5	2,25	0,3267
1_3	+0,64	0,4096	1,5	2,25	0,2731
1_4	+0,20	0,0400	1,9	3,61	0,0211
	+1,22 $=S_1$	2,1060	6,1 $=L_1$	9,55	1,5929

$$\frac{S_1^2}{L_1} = 0,2440$$

Tabula II.

2. gājiens, M 335 — M 0067 (posmu skaits — 8).

Posmi	Δ	Δ^2	r	r^2	$\frac{\Delta^2}{r}$
	mm	mm^2	km	km^2	mm^2/km
2_1	−0,48	0,2304	1,4	1,96	0,1646
2_2	+0,30	0,0900	1,5	2,25	0,0600
2_3	+0,08	0,0064	1,5	2,25	0,0043
2_4	+0,15	0,0255	1,4	1,96	0,0161
2_5	+0,68	0,4624	1,5	2,25	0,3083
2_6	−0,07	0,0049	1,5	2,25	0,0033
2_7	+0,70	0,4900	1,7	2,89	0,2882
2_8	+1,00	1,0000	1,5	2,25	0,6667
	+2,36 $= S_2$	2,3096	12,0 $= L_2$	18,06	1,5115

$$\frac{S_2^2}{L_2} = 0,4641$$

Tabula III.

3. gājiens, M 0067 — M 0068 (posmu skaits — 3).

Posmi	Δ	Δ^2	r	r^2	$\frac{\Delta^2}{r}$
	mm	mm^2	km	km^2	mm^2/km
3_1	−0,18	0,0324	1,3	1,69	0,0249
3_2	−0,52	0,2704	1,2	1,44	0,2253
3_3	−0,15	0,0225	1,1	1,21	0,0205
	−0,85 $= S_3$	0,3253	3,6 $= L_3$	4,34	0,2707

$$\frac{S_3^2}{L_3} = 0,2007$$

Tabula IV.

4. gājiens, M 0068 — Krilova marka (posmu skaits — 5).

Posmi	Δ	Δ^2	r	r^2	$\frac{\Delta^2}{r}$
	mm	mm^2	km	km^2	mm^2/km
4_1	+0,20	0,0400	1,0	1,00	0,0400
4_2	−0,28	0,0784	1,5	2,25	0,0522
4_3	−0,74	0,5476	1,4	1,96	0,3911
4_4	−0,38	0,1444	1,3	1,69	0,1111
4_5	+0,22	0,0484	1,2	1,44	0,0403
	−0,98 $= S_4$	0,8588	6,4 $= L_4$	8,34	0,6347

$$\frac{S_4^2}{L_4} = 0,1501$$

Tabula V.

5. gājiens, Krilova marka — M 0069 (posmu skaits — 6).

Posmi	Δ	Δ^2	r	r^2	$\frac{\Delta^2}{r}$
	mm	mm^2	km	km^2	mm^2/km
5_1	+0,20	0,0400	1,4	1,96	0,0286
5_2	—0,77	0,5929	1,5	2,25	0,3953
5_3	—0,74	0,5476	1,5	2,25	0,3651
5_4	—0,08	0,0064	1,5	2,25	0,0043
5_5	+0,20	0,0400	1,7	2,89	0,0235
5_6	—0,62	0,3844	1,6	2,56	0,2402
	—1,81 $= S_5$	1,6113	9,2 $= L_5$	14,16	1,0570

$$\frac{S_5^2}{L_5} = 0{,}3561$$

Tabula VI.

6. gājiens, M 0069 — M 0070 (posmu skaits — 5).

Posmi	Δ	Δ^2	r	r^2	$\frac{\Delta^2}{r}$
	mm	mm^2	km	km^2	mm^2/km
6_1	+0,64	0,4096	1,4	1,96	0,2926
6_2	+0,44	0,1936	1,5	2,25	0,1291
6_3	—0,21	0,0441	1,9	3,61	0,0232
6_4	+0,03	0,0009	1,7	2,89	0,0005
6_5	—0,16	0,0256	1,7	2,89	0,0151
	+0,74 $= S_6$	0,6738	8,2 $= L_6$	13,60	0,4605

$$\frac{S_6^2}{L_6} = 0{,}0668$$

Tabula VII.

7. gājiens, M 0070 — M 0072 (posmu skaits — 3).

Posmi	Δ	Δ^2	r	r^2	$\frac{\Delta^2}{r}$
	mm	mm^2	km	km^2	mm^2/km
7_1	—0,80	0,6400	2,1	4,41	0,3048
7_2	—0,14	0,0196	2,0	4,00	0,0098
7_3	—0,18	0,0324	0,5	0,25	0,0648
	—1,12 $= S_7$	0,6920	4,6 $= L_7$	8,66	0,3794

$$\frac{S_7^2}{L_7} = 0,2727$$

Tabula VIII.

8. gājiens, M 0072 — M 0071 (posmu skaits — 4).

Posmi	Δ	Δ^2	r	r^2	$\frac{\Delta^2}{r}$
	mm	mm^2	km	km^2	mm^2/km
8_1	—0,66	0,4356	1,1	1,21	0,3960
8_2	—0,39	0,1521	1,6	2,56	0,0951
8_3	+1,30	1,6900	1,5	2,25	1,1267
8_4	+0,89	0,7921	2,0	4,00	0,3960
	+1,14 $= S_8$	3,0698	6,2 $= L_8$	10,02	2,0138

$$\frac{S_8^2}{L_8} = 0,2096$$

Tabula IX.

9. gājiens, M0071 — M0073 (posmu skaits — 5).

Posmi	Δ	Δ^2	r	r^2	$\frac{\Delta^2}{r}$
	mm	mm²	km	km²	mm²/km
9_1	+0,44	0,1936	1,7	2,89	0,1139
9_2	+0,56	0,3136	1,4	1,96	0,2240
9_3	+0,26	0,0676	2,0	4,00	0,0338
9_4	−0,25	0,0625	2,5	6,25	0,0250
9_5	−0,08	0,0064	1,5	2,25	0,0043
	+0,93 $=S_9$	0,6437	9,1 $=L_9$	17,35	0,4010

$$\frac{S_9^2}{L_9} = 0{,}0950$$

Tabula.

10. gājiens, M0073 — M0074 (posmu skaits — 9).

Posmi	Δ	Δ^2	r	r^2	$\frac{\Delta^2}{r}$
	mm	mm²	km	km²	mm²/km
10_1	+0,27	0,0729	1,3	1,69	0,0561
10_2	−0,64	0,4096	1,7	2,89	0,2409
10_3	−0,06	0,0036	1,4	1,96	0,0026
10_4	−0,19	0,0361	1,2	1,44	0,0301
10_5	−1,08	1,1664	1,3	1,69	0,8972
10_6	−0,50	0,2500	1,1	1,21	0,2273
10_7	−0,40	0,1600	1,4	1,96	0,1143
10_8	+0,52	0,2704	1,5	2,25	0,1803
10_9	+0,87	0,7569	1,7	2,89	0,4452
	−1,21 $=S_{10}$	3,1259	12,6 $=L_{10}$	17,98	2,1940

$$\frac{S_{10}^2}{L_{10}} = 0{,}1162$$

Tabula XI.

Gājieni	$L = \Sigma r$	$\frac{S^2}{L}$	$\Sigma\Delta^2$	Σr^2	$\Sigma\frac{\Delta^2}{r}$
1	6,1	0,2440	2,1060	9,55	1,5929
2	12,0	0,4641	2,3096	18,06	1,5115
3	3,6	0,2007	0,3253	4,34	0,2707
4	6,4	0,1501	0,8588	8,34	0,6347
5	9,2	0,3561	1,6113	14,16	1,0570
6	8,2	0,0668	0,6738	13,60	0,4605
7	4,6	0,2727	0,6920	8,66	0,3794
8	6,2	0,2096	3,0698	10,02	2,0138
9	9,1	0,0950	0,6437	17,35	0,4010
10	12,6	0,1162	3,1259	17,98	2,1940
	$[L]=[r]=78,0$	$\left[\frac{S^2}{L}\right]=2,1753$	$[\Delta^2]=15,4162$	$[r^2]=122,06$	$\left[\frac{\Delta^2}{r}\right]=10,5155.$

$$n_L = 10$$

$$n_r = 4 + 8 + 3 + 5 + 6 + 5 + 3 + 4 + 5 + 9 = 52$$

$$L_v = \frac{[L]}{n_L} = \frac{78,0}{10} = 7,80 \text{ km}$$

$$r_v = \frac{[r]}{n_r} = \frac{78,0}{52} = 1,50 \text{ km}$$

Pamanītās iespieduma kļūdas.

Lappuse	Rindiņa no augšas (au.) no apakšas (ap.)	Iespiests	Jābūt
51	1 au.	$m_1, m_2, m_3, , , , . . , m_r,$	$m_1, m_2, m_3, ... , m_r,$
73	1 au.	p^x	p_x
100	8 ap.	us	uz
143	12 ap.	pab] q_1	[pab] q_1
147	1 ap.	un rindas	rindas un
161	6—11 ap.	F_1, F_2, F_3, F_4	f_1, f_2, f_3, f_4
214	14 au.	x_{-r+1}	$x_{i-\cdot r+1}$
246	5 au.	—0,070	+0,070
	2 ap.	$-0{,}52_{08}$	$+0{,}52_{08}$
321	9 au.	$l_{2.}$	$l_{2.s}$
	15 au.	$(s-l)\ x_{1.}$	$(s-l)\ x_{1.s}$
	16 au.	$l_{2.}+l_{3.}$	$l_{2.s}+l_{3.s}$
	18 au.	$x_{1.}$	$x_{1.s}$
	6 ap.	x	$x_{1.s}$
	9 ap.	$x_{1.}$	$x_{1.3}$
325	18 ap.	$l_{.s}$	$l_{1.s}$
327	9 ap.	λ	$\lambda_{2.3}$
	13 ap.	$l_{1.}$	$l_{1.3}$
328	6 ap.	$l_{1.}$	$l_{1.s}$

Tabula II.

Mezglu punktu koordinatu aprēķins.

Mezglā I:

no gājiena 1: $(x_I)_1 = +13562{,}28$ m

„ „ 2: $(x_I)_2 = \quad ,16$

$$(x_I) = +13562\text{ m} + \frac{1{,}43\times 28 + 1{,}71\times 16}{3{,}14}\text{ cm} =$$
$$= +13562{,}21 \text{ m}$$

no gājiena 1: $(y_I)_1 = +44{,}48$ m

„ „ 2: $(y_I)_2 = \quad ,38$

$$(y_I) = +44\text{m} + \frac{1{,}43\times 48 + 1{,}71\times 38}{3{,}14}\text{ cm} =$$
$$= +44{,}43 \text{ m}$$

$p_{x_1} = p_{y_1} = 1{,}43$

$p_{x_2} = p_{y_2} = 1{,}71$

$(p_{x,y})_I = 3{,}14 \qquad S_I = \frac{1}{3{,}14} = 0{,}32\text{ km}$

gājienā 3: $S_3 = \; = 0{,}32$

$S_{I.3} = \; = 0{,}64\text{ km}$

$(p_{x,y})_{I.3} = \frac{1}{0{,}64} = 1{,}56$

Mezglā II:

no gājiena I. 3 : $(x_{II})_{I.3} = +13829{,}67$ m

„ „ 4 : $(x_{II})_4 = \quad ,55$

„ „ 5 : $(x_{II})_5 = \quad ,62$

„ „ 8 : $(x_{II})_8 = \quad ,04$

$$(x_{II}) = +13829\text{m} + \frac{1{,}56\times 67 + 1{,}53\times 55 + 1{,}36\times 62 + 1{,}09\times 4}{5{,}54}\text{ cm} =$$
$$= +13829{,}50 \text{ m}$$

no gājiena I. 3: $(y_{II})_{I.3} = -124{,}32$ m

„ „ 4: $(y_{II})_4 = \quad ,57$

„ „ 5: $(y_{II})_5 = \quad ,17$

„ „ 8: $(y_{II})_8 = \quad ,17$

$$(y_{II}) = -124\text{m} - \frac{1{,}56\times 32 + 1{,}53\times 57 + 1{,}36\times 17 + 1{,}09\times 17}{5{,}54}\text{ cm} =$$
$$= -124{,}32 \text{ m}$$

$(p_{x,y})_{I.3} = 1{,}56$

$p_{x_4} = p_{y_4} = 1{,}53$

$p_{x_5} = p_{y_5} = 1{,}36$

$p_{x_8} = p_{y_8} = 1{,}09$

$(p_{x,y})_{II} = 5{,}54 \qquad S_{II} = \frac{1}{5{,}54} = 0{,}18\text{km}$

gājienā 9: $S_9 = \; = 0{,}75$

$S_{II.9} = \; = 0{,}93\text{ km}$

$(p_{x,y})_{II.9} = \frac{1}{0{,}93} = 1{,}08$

Mezglā III:

no gājiena II. 9: $(x_{III})_{II.9} = +13910{,}64$ m

„ „ 6: $(x_{III})_6 = \quad ,79$

„ „ 7: $(x_{III})_7 = \quad ,32$

$$(x_{III}) = +13910\text{m} + \frac{1{,}08\times 64 + 1{,}48\times 79 + 1{,}26\times 32}{3{,}82}\text{ cm} =$$
$$= +13910{,}59 \text{ m}$$

no gājiena II. 9: $(y_{III})_{II.9} = -839{,}16$ m

„ „ 6: $(y_{III})_6 = \quad 8{,}91$

„ „ 7: $(y_{III})_7 = \quad 8{,}91$

$$(y_{III}) = -838\text{m} - \frac{1{,}08\times 116 + 1{,}48\times 91 + 1{,}26\times 91}{3{,}82}\text{ cm} =$$
$$= -838{,}98 \text{ m}$$

$(p_{x,y})_{II.9} = 1{,}08$

$p_{x_6} = p_{y_6} = 1{,}48$

$p_{x_7} = p_{y_7} = 1{,}26$

$(p_{x,y})_{III} = 3{,}82$

$$\bar{x}_{III} = +13910{,}59 \text{ m}$$

$$\bar{x}_{III} - (x_{III})_{II.9} = -5\text{ cm};\; \bar{x}_{II} = (x_{II}) + \frac{(p_{x,y})_{II.9}}{(p_{x,y})_{II}}\{\bar{x}_{III} - (x_{III})_{II.9}\} = +13829{,}50\text{ m} - \frac{1{,}08}{5{,}54}\times 5\text{ cm} = +13829{,}49\text{ m}$$

$$\bar{x}_{II} - (x_{II})_{I.3} = -18\text{ cm};\; \bar{x}_I = (x_I) + \frac{(p_{x,y})_{I.3}}{(p_{x,y})_I}\{\bar{x}_{II} - (x_{II})_{I.3}\} = +13562{,}21\text{ m} - \frac{1{,}56}{3{,}14}\times 18\text{ cm} = +13562{,}12\text{ m}$$

$$\bar{y}_{III} = -838{,}98 \text{ m}$$

$$\bar{y}_{III} - (y_{III})_{II.9} = +18\text{ cm};\; \bar{y}_{II} = (y_{II}) + \frac{(p_{x,y})_{II.9}}{(p_{x,y})_{II}}\{\bar{y}_{III} - (y_{III})_{II.9}\} = -124{,}32\text{ m} + \frac{1{,}08}{5{,}54}\times 18\text{ cm} = -124{,}29\text{ m}$$

$$\bar{y}_{II} - (y_{II})_{I.3} = +3\text{ cm};\; \bar{y}_I = (y_I) + \frac{(p_{x,y})_{I.3}}{(p_{x,y})_I}\{\bar{y}_{II} - (y_{II})_{I.3}\} = +44{,}43\text{ m} + \frac{1{,}56}{3{,}14}\times 3\text{ cm} = +44{,}44\text{ m}$$

Pielikums V.

Tabula I.

Mezglu malu virzienu aprēķins.

Mezglā I:

no gājiena 1: $(r_{\mathrm{I}})_1 = 327^0 54' 10''$ $\quad p_{B_1} = 0{,}20$

„ „ 2: $(r_{\mathrm{I}})_2 = \quad 10$ $\quad p_{B_2} = 0{,}20$

$(p_r)_{\mathrm{I}} = 0{,}40$ $\qquad n_{\mathrm{I}} = \frac{1}{0{,}40} = 2{,}50$

gājienā 3: $\qquad n_3 = \quad = 2$

$$(r_{\mathrm{I}}) = 327^0 54' + \frac{0{,}20 \times 10'' + 0{,}20 \times 10''}{0{,}40} = 327^0 54' 10''$$

$n_{\mathrm{I.3}} = \quad = 4{,}50$

$(p_r)_{\mathrm{I.3}} = \frac{1}{4{,}50} = 0{,}22$

Mezglā II:

no gājiena I.3: $(r_{\mathrm{II}})_{\mathrm{I.3}} = 81^0 20' 10''$ $\quad (p_r)_{\mathrm{I.3}} = 0{,}22$

„ „ 4: $(r_{\mathrm{II}})_4 = \quad 19 \; 30$ $\quad p_{B_4} = 0{,}25$

„ „ 5: $(r_{\mathrm{II}})_5 = \quad 20 \; 20$ $\quad p_{B_5} = 0{,}14$

„ „ 8: $(r_{\mathrm{II}})_8 = \quad 19 \; 20$ $\quad p_{B_8} = 0{,}10$

$(p_r)_{\mathrm{II}} = 0{,}71$ $\qquad n_{\mathrm{II}} = \frac{1}{0{,}71} = 1{,}41$

gājienā 9: $\qquad n_9 = \quad = 7$

$$(r_{.\mathrm{I}}) = 81^0 19' + \frac{0{,}22 \times 70'' + 0{,}25 \times 30'' + 0{,}14 \times 80'' + 0{,}10 \times 20''}{0{,}71} =$$

$$= 81^0 19' 51''$$

$n_{\mathrm{II.9}} = \quad = 8{,}41$

$(p_r)_{\mathrm{II.9}} = \frac{1}{8{,}41} = 0{,}12$

Mezglā III:

no gājiena II.9: $(r_{\mathrm{III}})_{\mathrm{II.9}} = 81^0 36' 41''$ $\quad (p_r)_{\mathrm{II.9}} = 0{,}12$

„ „ 6: $(r_{\mathrm{III}})_6 = \quad 50$ $\quad p_{B_6} = 0{,}14$

„ „ 7: $(r_{\mathrm{III}})_7 = \quad 10$ $\quad p_{B_7} = 0{,}12$

$(p_r)_{\mathrm{III}} = 0{,}38$

$$(r_{\mathrm{III}}) = 81^0 36' + \frac{0{,}12 \times 41'' + 0{,}14 \times 50'' + 0{,}12 \times 10''}{0{,}38} = 81^0 36' 35''$$

$\bar{r}_{\mathrm{III}} = 81^0 36' 35''$

$$\bar{r}_{\mathrm{III}} - (r_{\mathrm{III}})_{\mathrm{II.9}} = -\;6''; \quad \bar{r}_{\mathrm{II}} = (r_{\mathrm{II}}) + \frac{(p_r)_{\mathrm{II.9}}}{(p_r)_{\mathrm{II}}} \left\{ \bar{r}_{\mathrm{III}} - (r_{\mathrm{III}})_{\mathrm{II.9}} \right\} = 81^0 19' 51'' - \frac{0{,}12}{0{,}71} \times 6'' = 81^0 19' 50''$$

$$\bar{r}_{\mathrm{II}} - (r_{\mathrm{II}})_{\mathrm{I.3}} = -20''; \quad \bar{r}_{\mathrm{I}} = (r_{\mathrm{I}}) + \frac{(p_r)_{\mathrm{I.3}}}{(p_r)_{\mathrm{I}}} \left\{ \bar{r}_{\mathrm{II}} - (r_{\mathrm{II}})_{\mathrm{I.3}} \right\} = 327^0 54' 10'' - \frac{0{,}22}{0{,}40} \times 20'' = 327^0 53' 59''$$

Koordinatu aprēķins.

Punkti	Izmērītie leņķi β	v_β	Izlīdzinātie leņķi $\bar{\beta}$	Aprēķin. virzieni r	v_r	Izlabotie virzieni $\bar{r}$	Izmēr. malu gar. s	v_s	Izlīdz. malu gar. $\bar{s}$	log cos r log s log sin r	D	Dv	log Δx log Δy	D	v
	° ′ ″	″	° ′ ″	° ′ ″	″	° ′ ″	m	cm	m						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
△ R				5 04 50											
△ 4	156 37 57	+5	156 38 02												
				28 26 53	−5	28 26 48	104,72	+1	104,73	9,944 112 2,020 030 9,677 937	−1,1 +41,5 +3,9	+5,5 +41,5 −19,5	1,964 142 1,697 967	47,2 87,0	+47,0 +22,0
⊙ 1	199 08 34	+4	199 08 38												
				9 18 19	−9	9 18 10	99,24	+2	99,26	9,994 247 1,996 687 9,208 696	−0,3 +43,7 +12,9	+2,7 +87,4 −116,1	1,990 934 1,205 383	44,3 270,6	+90,1 −28,7
○ 2	132 39 38	+4	132 39 42												
				56 38 41	−13	56 38 28	162,52	−4	162,48	9,740 228 2,210 907 9,921 831	−3,2 +26,7 +1,4	+41,6 −106,8 −18,2	1,951 134 2,132 738	48,6 32,0	−65,2 −125,0
⊙ 3	180 22 22	+4	180 22 26												
				56 16 19	−17	56 16 02	159,70	−4	159,66	9,744 490 2,203 305 9,919 958	−3,2 +27,2 +1,4	+54,4 −108,8 −23,8	1,947 795 2,123 262	49,0 32,7	−54,4 −132,6
⊙ 4	182 59 40	+4	182 59 44												
				53 16 39	−21	53 16 18	108,04	−2	108,02	9,776 658 2,033 585 9,903 926	−2,8 +40,2 +1,6	+58,8 −80,4 −33,6	1,810 242 1,937 510	67,3 50,1	−21,6 −114,0
○ 5	198 58 30	+4	198 58 34												
				34 18 09	−25	34 17 44	101,66	−0	101,66	9,917 019 2,007 150 9,750 942	−1,4 +42,7 +3,1	+35,0 −0,0 −77,5	1,924 169 1,758 092	51,7 75,8	+35,0 −77,5
⊙ 6	132 57 54	+3	132 57 57												
				81 20 15	−28	81 19 47	198,14	−9	198,05	9,177 865 2,296 972 9,995 017	−13,8 +21,9 +0,3	+386,4 −197,1 −8,4	1,474 837 2,291 990	145,5 22,2	+189,3 −205,5
⊙ 7	173 27 54	+3	173 27 57												
				87 52 21	−31	87 51 50	153,62	−8	153,54	8,569 647 2,186 448 9,999 701	−56,6 +28,2 +0,1	+1754,6 −225,6 −3,1	0,756 095 2.186 148	760,8 28,3	+1529,0 −228,7
⊙ 8	187 09 51	+3	187 09 54												
				80 42 30	−34	80 41 56	128,69	−6	128,63	9,208 066 2,109 545 9,994 264	−12,9 +33,7 +0,3	+438,6 −202,2 −10,2	1,317 611 2,103 809	209,0 34,2	+236,4 −212,4
⊙ 9	164 00 34	+3	164 00 37												
				96 41 56	−37	96 41 19	172,52	−10	172,42	9,066 890n 2,236 839 9,997 025	−17,9 +25,2 −0,2	−662,3 −252,0 +7,4	1,303 730n 2,233 864	215,8 25,3	−914,3 −244,6
△ M	208 10 10	+2	208 10 12												
△ A. k				68 31 46	−39	68 31 07									
Σ	1916 33 04	+39	1916 33 43												
jāb.	1916 33 43			68 31 07											
pretr.	−39			−39											
	$= f_\beta$			$= f_\beta$											

Aprēķ. koord. pieaug. Δx	$v_{\Delta x}$	Aprēķ. koord. pieaug. Δy	$v_{\Delta y}$	Izlabotie koordinatu pieaugumi $\overline{\Delta x}$	$\overline{\Delta y}$	Aprēķin. koordin. x	v_x	Aprēķin. koordin. y	v_y	No S skaitītās koordinatas ξ	η	Izlabotās koordinatas $\bar{x}$	$\bar{y}$	Punkti
m	cm	m	cm	m	m	m	cm	m	cm	m	m	m	m	
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
						+13312,95		−602,51		−373,01	−466,77	+13312,95	+602,51	△ 4
+92,08	+1	+49,88	+0	+92,09	+49,88									
						+13405,03	+1	−552,63	+0	−280,93	−416,89	+13405,04	−552,63	⊙ 1
+97,93	+2	+16,05	−0	+97,95	+16,05									
						+13502,96	+3	−536,58	0	−183,00	−400,84	+13502,99	−536,58	⊙ 2
+89,36	−1	+135,75	−4	+89,35	+135,71									
						+13592,32	+2	−400,83	−4	−93,64	−265,09	+13592,34	−400,87	⊙ 3
+88,67	−1	+132,82	−4	+88,66	+132,78									
						+13680,99	+1	−268,01	−8	−4,97	−132,27	+13681,00	−268,09	⊙ 4
+64,60	−0	+86,60	−2	+64,60	+86,58									
						+13745,59	+1	−181,41	−10	+59,63	−45,67	+13745,60	−181,51	⊙ 5
+83,98	+0	+57,29	−1	+83,98	+57,28									
						+13829,57	+1	−124,12	−11	+143,61	+11,62	+13829,58	−124,23	⊙ 6
+29,84	+1	+195,88	−9	+29,85	+195,79									
						+13859,41	+2	+71,76	−20	+173,45	+207,50	+13859,43	+71,56	○ 7
+5,70	+2	+153,51	−8	+5,72	+153,43									
						+13865,11	+4	+225,27	−28	+179,15	+361,01	+13865,15	+224,99	⊙ 8
+20,78	+1	+127,00	−6	+20,79	+126,94									
						+13885,89	+5	+352,27	−34	+199,93	+488,01	+13885,94	+351,93	⊙ 9
−20,12	+4	+171,34	−10	−20,08	+171,24									
						+13865,77	+9	+522,61	−44	+179,81	+659,35	+13865,86	+523,17	△ M
+552,82	+9	+1126,12	−44	+552,91	+1125,68	+150545,59		−1493,18		+0,03	−0,04			
+552,91		+1125,68				$x_s =$		$y_s =$						
−0,09		+0,44				= +13685,96		= −135,74						
$= f_x$		$= f_y$												

Schema 3.

Pielikums III.

	Normalnolīdzinājumi								Svaru nolīdzinājumi								
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	…	ξ_{i-1}	ξ_i	$-\lambda$	σ	Q_1	Q_2	Q_3	…	Q_{i-1}	Q_i	F	…	Σ
(A)	[aa]	[ab]	[ac]	…	[a(i-1)]	[ai]	$-[a\lambda]$	$[a\sigma]$	$-1=A_1$	$0=A_2$	$0=A_3$	…	$0=A_{i-1}$	$0=A_i$	$-f_1$	…	Σ_a
		[bb]	[bc]	…	[b(i-1)]	[bi]	$-[b\lambda]$	$[b\sigma]$	$0=B_1$	$-1=B_2$	$0=B_3$	…	$0=B_{i-1}$	$0=B_i$	$-f_2$	…	Σ_b
$r_b=\frac{[ab]}{[aa]}$		×[ab]	×[ac]	…	×[a(i-1)]	×[ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	×(−1)						$\times(-f_1)$	…	$\times\Sigma_a$
(B)		[bb.1]	[bc.1]	…	[b(i-1).1]	[bi.1]	$-[b\lambda.1]$	$[b\sigma.1]$	$[B_1.1]$	−1	0	…	0	0	$-[f_2.1]$	…	$[\Sigma_b.1]$
			[cc]	…	[c(i-1)]	[ci]	$-[c\lambda]$	$[c\sigma]$	$0=C_1$	$0=C_2$	$-1=C_3$	…	$0=C_{i-1}$	$0=C_i$	$-f_3$	…	Σ_c
$r_c=\frac{[ac]}{[aa]}$			×[ac]	…	×[a(i-1)]	×[ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	×(−1)						$\times(-f_1)$	…	$\times\Sigma_a$
			[cc.1]	…	[c(i-1).1]	[ci.1]	$-[c\lambda.1]$	$[c\sigma.1]$	$[C_1.1]$	0	−1	…	0	0	$-[f_3.1]$	…	$[\Sigma_c.1]$
$[r_c.1]=\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$			×[bc.1]	…	×[b(i-1).1]	×[bi.1]	$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$	$\times[B_1.1]$	×(−1)					$\times(-[f_2.1])$	…	$\times[\Sigma_b.1]$
(C)			[cc.2]	…	[c(i-1).2]	[ci.2]	$-[c\lambda.2]$	$[c\sigma.2]$	$[C_1.2]$	$[C_2.2]$	−1	…	0	0	$-[f_3.2]$	…	$[\Sigma_c.2]$
				………	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………
					[(i-1)(i-1)]	[(i-1)i]	$-[(i-1)\lambda]$	$[(i-1)\sigma]$	$0=(I-1)_1$	$0=(I-1)_2$	$0=(I-1)_3$	…	$-1=(I-1)_{i-1}$	$0=(I-1)_i$	$-f_{i-1}$	…	Σ_{i-1}
$r_{i-1}=\frac{[a(i-1)]}{[aa]}$					×[a(i-1)]	×[ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	×(−1)						$\times(-f_1)$	…	$\times\Sigma_a$
					[(i-1)(i-1).1]	[(i-1)i.1]	$-[(i-1)\lambda.1]$	$[(i-1)\sigma.1]$	$[(I-1)_1.1]$	0	0	…	−1	0	$-[f_{i-1}.1]$	…	$[\Sigma_{i-1}.1]$
$[r_{i-1}.1]=\frac{[b(i-1).1]}{[bb.1]}$					×[b(i-1).1]	×[bi.1]	$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$	$\times[B_1.1]$	×(−1)					$\times(-[f_2.1])$	…	$\times[\Sigma_b.1]$
					[(i-1)(i-1).2]	[(i-1)i.2]	$-[(i-1)\lambda.2]$	$[(i-1)\sigma.2]$	$[(I-1)_1.2]$	$[(I-1)_2.2]$	0	…	−1	0	$-[f_{i-1}.2]$	…	$[\Sigma_{i-1}.2]$
$[r_{i-1}.2]=\frac{[c(i-1).2]}{[cc.2]}$					×[c(i-1).2]	×[ci.2]	$\times(-[c\lambda.2])$	$\times[c\sigma.2]$	$\times[C_1.2]$	$\times[C_2.2]$	×(−1)				$\times(-[f_3.2])$	…	$\times[\Sigma_c.2]$
					…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…	…..	…..	…..	…	…..
(I-1)					[(i-1)(i-1).(i-2)]	[(i-1)i.(i-2)]	$-[(i-1)\lambda.(i-2)]$	$[(i-1)\sigma.(i-2)]$	$[(I-1)_1.(i-2)]$	$[(I-1)_2.(i-2)]$	$[(I-1)_3.(i-2)]$	…	−1	0	$-[f_{i-1}.(i-2)]$	…	$[\Sigma_{i-1}.(i-2)]$
						[ii]	$-[i\lambda]$	$[i\sigma]$	$0=I_1$	$0=I_2$	$0=I_3$	…	$0=I_{i-1}$	$-1=I_i$	$-f_i$	…	Σ_i
$r_i=\frac{[ai]}{[aa]}$						×[ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	×(−1)						$\times(-f_1)$	…	$\times\Sigma_a$
						[ii.1]	$-[i\lambda.1]$	$[i\sigma.1]$	$[I_1.1]$	0	0	…	0	−1	$-[f_i.1]$	…	$[\Sigma_i.1]$
$[r_i.1]=\frac{[bi.1]}{[bb.1]}$						×[bi.1]	$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$	$\times[B_1.1]$	×(−1)					$\times(-[f_2.1])$	…	$\times[\Sigma_b.1]$
						[ii.2]	$-[i\lambda.2]$	$[i\sigma.2]$	$[I_1.2]$	$[I_2.2]$	0	…	0	−1	$-[f_i.2]$	…	$[\Sigma_i.2]$
$[r_i.2]=\frac{[ci.2]}{[cc.2]}$						×[ci.2]	$\times(-[c\lambda.2])$	$\times[c\sigma.2]$	$\times[C_1.2]$	$\times[C_2.2]$	×(−1)				$\times(-[f_3.2])$	…	$\times[\Sigma_c.2]$
						…..	….	…..	…..	…..	…..	…	…..	…..	…..	…	…..
						[ii.(i-2)]	$-[i\lambda.(i-2)]$	$[i\sigma.(i-2)]$	$[I_1.(i-2)]$	$[I_2.(i-2)]$	$[I_3.(i-2)]$	…	0	−1	$-[f_i.(i-2)]$	…	$[\Sigma_i.(i-2)]$
$[r_i.(i-2)]=\frac{[(i-1)i.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}$						×[(i-1)i.(i-2)]	$\times(-[(i-1)\lambda.(i-2)])$	$\times[(i-1)\sigma.(i-2)]$	$\times[(I-1)_1.(i-2)]$	$\times[(I-1)_2.(i-2)]$	$\times[(I-1)_3.(i-2)]$	…	×(−1)		$\times(-[f_{i-1}.(i-2)])$	…	$\times[\Sigma_{i-1}.(i-2)]$
(I)						[ii.(i-1)]	$-[i\lambda.(i-1)]$	$[i\sigma.(i-1)]$	$[I_1.(i-1)]$	$[I_2.(i-1)]$	$[I_3.(i-1)]$	…	$[I_{i-1}.(i-1)]$	−1	$-[f_i.(i-1)]$	…	$[\Sigma_i.(i-1)]$
							$[\lambda\lambda]$	$-[\lambda\sigma]$									
$r_\lambda=\frac{-[a\lambda]}{[aa]}$							$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$									
							$[\lambda\lambda.1]$	$-[\lambda\sigma.1]$									
$[r_\lambda.1]=\frac{-[b\lambda.1]}{[bb.1]}$							$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$									
							$[\lambda\lambda.2]$	$-[\lambda\sigma.2]$									
$[r_\lambda.2]=\frac{-[c\lambda.2]}{[cc.2]}$							$\times(-[c\lambda.2])$	$\times[c\sigma.2]$									
							…..	…..									
							$[\lambda\lambda.(i-2)]$	$-[\lambda\sigma.(i-2)]$									
$[r_\lambda.(i-2)]=\frac{-[(i-1)\lambda.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}$							$\times(-[(i-1)\lambda.(i-2)])$	$\times[(i-1)\sigma.(i-2)]$									
							$[\lambda\lambda.(i-1)]$	$-[\lambda\sigma.(i-1)]$									
$[r_\lambda.(i-1)]=\frac{-[i\lambda.(i-1)]}{[ii.(i-1)]}$							$\times(-[i\lambda.(i-1)])$	$\times[i\sigma.(i-1)]$									
							$[\lambda\lambda.i]$	$-[\lambda\sigma.i]$									

Schema 2.

	Normalnolīdzinājumi								Svaru nolīdzinājumi								
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_{i-1}	ξ_i	$-\lambda$	σ	Q_1	Q_2	Q_3	...	Q_{i-1}	Q_i	F	...	Σ
(A)	[aa]	[ab]	[ac]	...	[a(i−1)]	[ai]	$-[a\lambda]$	$[a\sigma]$	$-1=A_1$	$0=A_2$	$0=A_3$	...	$0=A_{i-1}$	$0=A_i$	$-f_1$	...	Σ_a
		[bb]	[bc]	...	[b(i−1)]	[bi]	$-[b\lambda]$	$[b\sigma]$	$0=B_1$	$-1=B_2$	$0=B_3$	...	$0=B_{i-1}$	$0=B_i$	$-f_2$	...	Σ_b
$r_b=\frac{[ab]}{[aa]}$		×[ab]	×[ac]	...	×[a(i−1)]	×[ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	×(−1)						$\times(-f_1)$	...	$\times\Sigma_a$
(B)		[bb.1]	[bc.1]	...	[b(i−1).1]	[bi.1]	$-[b\lambda.1]$	$[b\sigma.1]$	$[B_1.1]$	−1	0	...	0	0	$-[f_2.1]$	...	$[\Sigma_b.1]$
			[cc]	...	[c(i−1)]	[ci]	$-[c\lambda]$	$[c\sigma]$	$0=C_1$	$0=C_2$	$-1=C_3$	...	$0=C_{i-1}$	$0=C_i$	$-f_3$	...	Σ_c
$r_c=\frac{[ac]}{[aa]}$			×[ac]	...	×[a(i−1)]	×[ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	×(−1)						$\times(-f_1)$	...	$\times\Sigma_a$
		$[r_c.1]=\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	×[bc.1]	...	×[b(i−1).1]	×[bi.1]	$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$	$\times[B_1.1]$	×(−1)					$\times(-[f_2.1])$	...	$\times[\Sigma_b.1]$
(C)			[cc.2]	...	[c(i−1).2]	[ci.2]	$-[c\lambda.2]$	$[c\sigma.2]$	$[C_1.2]$	$[C_2.2]$	−1	...	0	0	$-[f_3.2]$	...	$[\Sigma_c.2]$
				...	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	...	.....	.....	.....	...	.....
					[(i−1)(i−1)]	[(i−1)i]	$-[(i-1)\lambda]$	$[(i-1)\sigma]$	$0=(I-1)_1$	$0=(I-1)_2$	$0=(I-1)_3$	...	$-1=(I-1)_{i-1}$	$0=(I-1)_i$	$-f_{i-1}$	...	Σ_{i-1}
$r_{i-1}=\frac{[a(i-1)]}{[aa]}$					×[a(i−1)]	×[ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	×(−1)						$\times(-f_1)$	...	$\times\Sigma_a$
		$[r_{i-1}.1]=\frac{[b(i-1).1]}{[bb.1]}$			×[b(i−1).1]	×[bi.1]	$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$	$\times[B_1.1]$	×(−1)					$\times(-[f_2.1])$	...	$\times[\Sigma_b.1]$
			$[r_{i-1}.2]=\frac{[c(i-1).2]}{[cc.2]}$		×[c(i−1).2]	×[ci.2]	$\times(-[c\lambda.2])$	$\times[c\sigma.2]$	$\times[C_1.2]$	$\times[C_2.2]$	×(−1)				$\times(-[f_3.2])$	...	$\times[\Sigma_c.2]$
					.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	...	.....	.....	.....	...	.....
(I − 1)					[(i−1)(i−1).(i−2)]	[(i−1)i.(i−2)]	$-[(i-1)\lambda.(i-2)]$	$[(i-1)\sigma.(i-2)]$	$[(I-1)_1.(i-2)]$	$[(I-1)_2.(i-2)]$	$[(I-1)_3.(i-2)]$	...	−1	0	$-[f_{i-1}.(i-2)]$	...	$[\Sigma_{i-1}.(i-2)]$
						[ii]	$-[i\lambda]$	$[i\sigma]$	$0=I_1$	$0=I_2$	$0=I_3$		$0=I_{i-1}$	$-1=I_i$	$-f_i$	...	Σ_i
$r_i=\frac{[ai]}{[aa]}$						×[ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	×(−1)						$\times -f_1)$	...	$\times\Sigma_a$
		$[r_i.1]=\frac{[bi.1]}{[bb.1]}$				×[bi.1]	$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$	$\times[B_1.1]$	×(−1)					$\times(-[f_2.1])$	...	$\times[\Sigma_b.1]$
			$[r_i.2]=\frac{[ci.2]}{[cc.2]}$			×[ci.2]	$\times(-[c\lambda.2])$	$\times[c\sigma.2]$	$\times[C_1.2]$	$\times[C_2.2]$	×(−1)				$\times(-[f_3.2])$	...	$\times[\Sigma_c.2]$
						.....	.....	.....	.....	.....	.....	...	.....	.....	.....	...	.....
					$[r_i.(i-2)]=\frac{[(i-1)i.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}$	×[(i−1).i.(i−2)]	$\times(-[(i-1)\lambda.(i-2)])$	$\times[(i-1)\sigma.(i-2)]$	$\times[(I-1)_1.(i-2)]$	$\times[(I-1)_2.(i-2)]$	$\times[(I-1)_3.(i-2)]$	...	×(−1)		$\times(-[f_{i-1}.(i-2)])$	...	$\times[\Sigma_{i-1}.(i-2)]$
(I)						[ii.(i−1)]	$-[i\lambda.(i-1)]$	$[i\sigma.(i-1)]$	$[I_1.(i-1)]$	$[I_2.(i-1)]$	$[I_3.(i-1)]$	...	$[I_{i-1}.(i-1)]$	−1	$-[f_i.(i-1)]$	...	$[\Sigma_i.(i-1)]$
							$[\lambda\lambda]$	$-[\lambda\sigma]$									
$r_\lambda=\frac{-[a\lambda]}{[aa]}$							$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$									
		$[r_\lambda.1]=\frac{-[b\lambda.1]}{[bb.1]}$					$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$									
			$[r_\lambda.2]=\frac{-[c\lambda.2]}{[cc.2]}$				$\times(-[c\lambda.2])$	$\times[c\sigma.2]$									
							.....	.....									
					$[r_\lambda.(i-2)]=\frac{-[(i-1)\lambda.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}$		$\times(-[(i-1)\lambda.(i-2)])$	$\times[(i-1)\sigma.(i-2)]$									
						$[r_\lambda.(i-1)]=\frac{-[i\lambda.(i-1)]}{[ii.(i-1)]}$	$\times(-[i\lambda.(i-1)])$	$\times[i\sigma.(i-1)]$									
							$[\lambda\lambda.i]$	$-[\lambda\sigma.i]$									

Schema I.

	Normalnolīdzinājumi								Svaru nolīdzinājumi								
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_{i-1}	ξ_i	$-\lambda$	σ	Q_1	Q_2	Q_3	...	$Q_{(i-1)}$	Q_i	F	...	Σ
	Nereducētās sistemas																
(A)	[aa]	[ab]	[ac]	...	[a(i-1)]	[ai]	$-[a\lambda]$	$[a\sigma]$	$-1 = A_1$	$0 = A_2$	$0 = A_3$	...	$0 = A_{i-1}$	$0 = A_i$	$-f_1$	...	Σ_a
	[ab]	[bb]	[bc]	...	[b(i-1)]	[bi]	$-[b\lambda]$	$[b\sigma]$	$0 = B_1$	$-1 = B_2$	$0 = B_3$	...	$0 = B_{i-1}$	$0 = B_i$	$-f_2$	...	Σ_b
	$r_b = \frac{[ab]}{[aa]}$	× [ab]	× [ac]	...	× [a(i-1)]	× [ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	× (-1)						$\times(-f_1)$	...	$\times\Sigma_a$
	[ac]	[bc]	[cc]	...	[c(i-1)]	[ci]	$-[c\lambda]$	$[c\sigma]$	$0 = C_1$	$0 = C_2$	$-1 = C_3$	...	$0 = C_{i-1}$	$0 = C_i$	$-f_3$	...	Σ_c
	$r_c = \frac{[ac]}{[aa]}$	× [ab]	× [ac]	...	× [a(i-1)]	× [ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	× (-1)						$\times(-f_1)$	...	$\times\Sigma_a$
	....	....	....	...	....	....	....	....	....	....	....	...	....	....	....	...	....
	[a(i-1)]	[b(i-1)]	[c(i-1)]	...	[(i-1)(i-1)]	[(i-1)i]	$-[(i-1)\lambda]$	$[(i-1)\sigma]$	$0 = (I-1)_1$	$0 = (I-1)_2$	$0 = (I-1)_3$	...	$-1 = (I-1)_{i-1}$	$0 = (I-1)_i$	$-f_{i-1}$	...	Σ_{i-1}
	$r_{i-1} = \frac{[a(i-1)]}{[aa]}$	× [ab]	× [ac]	...	× [a(i-1)]	× [ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	× (-1)						$\times(-f_1)$	...	$\times\Sigma a$
	[ai]	[bi]	[ci]	...	[(i-1)i]	[ii]	$-[i\lambda]$	$[i\sigma]$	$0 = I_1$	$0 = I_2$	$0 = I_3$	...	$0 = I_{i-1}$	$-1 = I_i$	$-f_i$	...	Σ_i
	$r_i = \frac{[ai]}{[aa]}$	× [ab]	× [ac]	...	× [a(i-1)]	× [ai]	$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$	× (-1)						$\times(-f_1)$	...	$\times\Sigma a$
	[as]	[bs]	[cs]	...	[(i-1)s]	[is]	$-[\lambda s]$		$-1 = S_1$	$-1 = S_2$	$-1 = S_3$	...	$-1 = S_{i-1}$	$-1 = S_i$	$-S_f$	...	
	$r_s = \frac{[as]}{[aa]}$	× [ab]	× [ac]	...	× [a(i-1)]	× [ai]	$\times(-[a\lambda])$		× (-1)						$\times(-f_1)$	...	
							$[\lambda\lambda]$	$-[\lambda\sigma]$									
	$r_\lambda = \frac{-[a\lambda]}{[aa]}$						$\times(-[a\lambda])$	$\times[a\sigma]$									
		1.-o reizi reducētās sistemas															
(B)		[bb.1]	[bc.1]	...	[b(i-1).1]	[bi.1]	$-[b\lambda.1]$	$[b\sigma.1]$	$[B_1.1]$	-1	0	...	0	0	$-[f_2.1]$	...	$[\Sigma_b.1]$
		[bc.1]	[cc.1]	...	[c(i-1).1]	[ci.1]	$-[c\lambda.1]$	$[c\sigma.1]$	$[C_1.1]$	0	-1	...	0	0	$-[f_3.1]$	...	$[\Sigma_c.1]$
		$[r_c.1] = \frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	× [bc.1]	...	× [b(i-1).1]	× [bi.1]	$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$	$\times[B_1.1]$	× (-1)					$\times(-[f_2.1])$	...	$\times[\Sigma_b.1]$
		....	....	...	....	....	....	....	....	....	....	...	....	....	....	...	....
		[b(i-1).1]	[c(i-1).1]	...	[(i-1)(i-1).1]	[(i-1)i.1]	$-[(i-1)\lambda.1]$	$[(i-1)\sigma.1]$	$[(I-1)_1.1]$	0	0	...	-1	0	$-[f_{i-1}.1]$	...	$[\Sigma_{i-1}.1]$
		$[r_{i-1}.1] = \frac{[b(i-1).1]}{[bb.1]}$	× [bc.1]	...	× [b(i-1).1]	× [bi.1]	$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$	$\times[B_1.1]$	× (-1)					$\times(-[f_2.1])$	...	$\times[\Sigma_b.1]$
		[bi.1]	[ci.1]	...	[(i-1)i.1]	[ii.1]	$-[i\lambda.1]$	$[i\sigma.1]$	$[I_1.1]$	0	0	...	0	-1	$-[f_i.1]$	...	$[\Sigma_i.1]$
		$[r_i.1] = \frac{[bi.1]}{[bb.1]}$	× [bc.1]	...	× [b(i-1).1]	× [bi.1]	$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$	$\times[B_1.1]$	× (-1)					$\times(-[f_2.1])$	...	$\times[\Sigma_b.1]$
		[bs.1]	[cs.1]	...	[(i-1)s.1]	[is.1]	$-[\lambda s.1]$		$[S_1.1]$	-1	-1	...	-1	-1	$-[S_f.1]$	...	
		$[r_s.1] = \frac{[b.s1]}{[bb.1]}$	× [bc.1]	...	× [b(i-1).1]	× [bi.1]	$\times(-[b\lambda.1])$		$\times[B_1.1]$	× (-1)					$\times(-[f_2.1])$	...	
							$[\lambda\lambda.1]$	$-[\lambda\sigma.1]$									
		$[r_\lambda.1] = \frac{-[b\lambda.1]}{[bb.1]}$					$\times(-[b\lambda.1])$	$\times[b\sigma.1]$									
			2.-o reizi reducētās sistemas														
(C)			[cc.2]	...	[c(i-1).2]	[ci.2]	$-[c\lambda.2]$	$[c\sigma.2]$	$[C_1.2]$	$[C_2.2]$	-1	...	0	0	$-[f_3.2]$	...	$[\Sigma_c.2]$
			....	...	....	....	....	....	....	....	....	...	....	....	....	...	....
			[c(i-1).2]	...	[(i-1)(i-1).2]	[(i-1)i.2]	$-[(i-1)\lambda.2]$	$[(i-1)\sigma.2]$	$[(I-1)_1.2]$	$[(I-1)_2.2]$	0	...	-1	0	$-[f_{i-1}.2]$	...	$[\Sigma_{i-1}.2]$
			$[r_{i-1}.2] = \frac{[c(i-1).2]}{[cc.2]}$	...	× [c(i-1).2]	× [ci.2]	$\times(-[c\lambda.2])$	$\times[c\sigma.2]$	$\times[C_1.2]$	$\times[C_2.2]$	× (-1)				$\times(-[f_3.2])$	...	$\times[\Sigma_c.2]$
			[ci.2]	...	[(i-1)i.2]	[ii.2]	$-[i\lambda.2]$	$[i\sigma.2]$	$[I_1.2]$	$[I_2.2]$	0	...	0	-1	$-[f_i.2]$	...	$[\Sigma_i.2]$
			$[r_i.2] = \frac{[ci.2]}{[cc.2]}$	...	× [c(i-1).2]	× [ci.2]	$\times(-[c\lambda.2])$	$\times[c\sigma.2]$	$\times[C_1.2]$	$\times[C_2.2]$	× (-1)				$\times(-[f_3.2])$	...	$\times[\Sigma_c.2]$
			[cs.2]	...	[(i-1)s.2]	[is.2]	$-[\lambda s.2]$		$[S_1.2]$	$[S_2.2]$	-1	...	-1	-1	$-[S_f.2]$	...	
			$[r_s.2] = \frac{[cs.2]}{[cc.2]}$	...	× [c(i-1).2]	× [ci.2]	$\times(-[c\lambda.2])$		$\times[C_1.2]$	$\times[C_2.2]$	× (-1)				$\times(-[f_3.2])$	...	
							$[\lambda\lambda.2]$	$-[\lambda\sigma.2]$									
			$[r_\lambda.2] = \frac{-[c\lambda.2]}{[cc.2]}$				$\times(-[c\lambda.2])$	$\times[c\sigma.2]$									
	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......	......
					(i—2).-o reizi reducētās sistemas												
(I-1)					[(i-1)(i-1).(i-2)]	[(i-1)i.(i-2)]	$-[(i-1)\lambda.(i-2)]$	$[(i-1)\sigma.(i-2)]$	$[(I-1)_1.(i-2)]$	$[(I-1)_2.(i-2)]$	$[(I-1)_3.(i-2)]$	...	-1	0	$-[f_{i-1}.(i-2)]$	...	$[\Sigma_{i-1}.(i-2)]$
					[(i-1)i.(i-2)]	[ii.(i-2)]	$-[i\lambda.(i-2)]$	$[i\sigma.(i-2)]$	$[I_1.(i-2)]$	$[I_2.(i-2)]$	$[I_3.(i-2)]$	...	0	1	$-[f_i.(i-2)]$	...	$[\Sigma_i.(i-2)]$
					$[r_i.(i-2)] = \frac{[(i-1)i.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}$	× [(i-1)i.(i-2)]	$\times(-[(i-1)\lambda.(i-2)])$	$\times[(i-1)\sigma.(i-2)]$	$\times[(I-1)_1.(i-2)]$	$\times[(I-1)_2.(i-2)]$	$\times[(I-1)_3.(i-2)]$	...	× (-1)		$\times(-[f_{i-1}.(i-2)])$	...	$\times[\Sigma_{i-1}.(i-2)]$
					[(i-1)s.(i-2)]	[is.(i-2)]	$-[\lambda s.(i-2)]$		$[S_1.(i-2)]$	$[S_2.(i-2)]$	$[S_3.(i-2)]$	...	-1	-1	$-[S_f.(i-2)]$	...	
					$[r_s.(i-2)] = \frac{[(i-1)s.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}$	× [(i-1)i.(i-2)]	$\times(-[(i-1)\lambda.(i-2)])$		$\times[(I-1)_1.(i-2)]$	$\times[(I-1)_2.(i-2)]$	$\times[(I-1)_3.(i-2)]$	...	× (-1)		$\times(-[f_{i-1}.(i-2)])$	...	
							$[\lambda\lambda.(i-2)]$	$-[\lambda\sigma.(i-2)]$									
					$[r_\lambda.(i-2)] = \frac{-[(i-1)\lambda.(i-2)]}{[(i-1)(i-1).(i-2)]}$		$\times(-[(i-1)\lambda.(i-2)])$	$\times[(i-1)\sigma.(i-2)]$									
									(i—1).-o reizi reducētās sistemas								
(I)						[ii.(i-1)]	$-[i\lambda.(i-1)]$	$[i\sigma.(i-1)]$	$[I_1.(i-1)]$	$[I_2.(i-1)]$	$[I_3.(i-1)]$	...	$[I_{i-1}.(i-1)]$	-1	$[f_i.(i-1)]$	...	$[\Sigma_i.(i-1)]$
						[is.(i-1)]	$-[\lambda s.(i-1)]$		$[S_1.(i-1)]$	$[S_2.(i-1)]$	$[S_3.(i-1)]$	...	$[S_{i-1}.(i-1)]$	-1	$[S_f.(i-1)]$	...	
							$[\lambda\lambda.(i-1)]$	$-[\lambda\sigma.(i-1)]$									
						$[r_\lambda.(i-1)] = \frac{-[i\lambda.(i-1)]}{[ii.(i-1)]}$	$\times(-[i\lambda.(i-1)])$	$\times[i\sigma.(i-1)]$									
							i.-o reizi red. sist.										
							$[\lambda\lambda.i]$	$-[\lambda\sigma.i]$									