J. C I Z A R E V I Č S

Latvijas ūniversitātes docents.

GRĀFISKA INTEGRĒŠANA UN DIFERENCĒŠANA.

NEPERIODISKAS LĪKNES NOLĪDZINĀJUMA ATRAŠANA.

6.—

Priekšlasijumi Latvijas Būvinženieru
biedrībā.

1931.

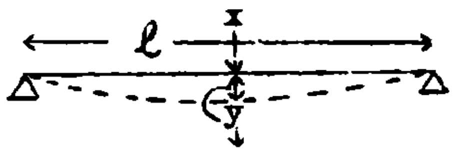
Latvijas ūniversitātes studentu padomes
grāmatnīcas izdevums.

S a t u r s.

----- oOo -----

I. FUNKCIONĀLS SAKARS. LĪKNES RACIONĀLS UN EMPIRISKS NOLĪDZINĀJUMS.

Novērojot kādas parādības gaitu redzam, ka tanī ņem dalību mainīgi un pastāvīgi lielumi. Piemēram, ja slodzējam siju ar spēku x un novērojam sijas izlieci y, tad pie mainīga x dabū-



jam arī mainīgus y. Pastāvīgie lielumi šinī parādībā ir sijas garums ℓ, tās šķērsgriezienс

$F = bh$ un materiāla īpašības.

Katrai x vērtībai atbilst viena noteikta y vērtība, kuŗa, tā tad atkarīga no x vērtības un tādēļ saka: y ir funkcija no x un raksta

$$y = f(x)$$

Bet y vērtība ir arī atkarīga no šinī parādībā pastāvīgiem lielumiem ℓ, b, h un no kāda, materiālu raksturojoša pastāvīga lieluma E, tādēļ varam rakstīt

$$y = f(x, b, h, \ell, E)$$

x sauc par neatkarīgo mainīgo, y par atkarīgo, un pastāvīgos lielumus ℓ, b, h, E par funkcijas parametriem. Šie lielumi raksturo parādības fizikālos apstākļus.

Ja noskaidrots funkcionālais sakars starp x un y, tad parādības gaita noskaidrota.

Parādības funkcionālo sakaru starp y un x dabūjam divos ceļos: teoretiskā un empiriskā.

Teoretiskā ceļā parādības funkcionālo sakaru dabūjam sekojošā kārtā. Noskaidrojam, kādi dabas likumi novērojāmo parādību iespaido un tad, ar mēchanikas teorēmu palīdzību, izteicam šo iespaidu matemātikas valodā analitiskā izteiksmē, kuŗu, vajadzības gadījumā pārveidojot saskaņā ar matemātikas likumiem, dabūjam formulu, meklēto funkcionālo sakaru. Šādā kārtā daudzkārt rīkojās, piemēram, stiprības mācībā un hidraulikā.

Tomēr daudzos gadījumos, ja parādību iespaidojošie dabas likumi gan zināmi, bet kādu apstākļu dēļ to iespaidu nevaram izteikt analitiski vai arī, ja šie likumi nav ieskatāmi, funkcionālo sakaru mēģinam gūt empiriskā ceļā.

Ejot empirisko ceļu, novērojam parādībā atbilstošus vērtību pārus $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2) \ldots (x_n y_n)$, tad šo vērtību pāru kopība dod funkcionālo sakaru starp y un x.

Šo sakaru varam attēlot grāfiski, iezīmējot koordinātu sistēmā novērotos x kā abscisas un y kā ordinātas, tad katram vērtību pārim $x_n y_n$ zīmējumā atbilst punkts. Savienojot šos punktus dabūjam līkni, kuŗa tad novērojumu robežās dod meklēto funkcionālo sakaru starp y un x. Šīs līknes nolīdzinājums nav zināms.

Izejot no teoretiskā ceļā dabūtā funkcionālā sakara

$$y = f(x)$$

arī varam uzzīmēt līkni, bet šīs līknes nolīdzinājums tad ir zināms, tas ir meklētais, teoretiskā ceļā dabūtais $y = f(x)$.

Funkcionālā sakara izteiksmes, teorētiskā ceļā iegūtā formula $y = f(x)$ un empiriskā ceļā dabūtā līkne, nav līdzvērtīgas, kas ieskatams no sekojošās konkrētas problēmas, kuŗa apskatīta zīmējumā Nr.1.

Cilindru C aptver virve, aptveres leņķis φ. Virves vienā galā iedarbojās spēks M = 50 kg. Lai tik ko ievadītu kustību virzienā MN, virves otrā galā jāpieliek spēks N. Šis spēks līdzsvaro spēku M un starp cilindru un virvi iedarbojošos berzes spēku. Eksperiments rāda, ka pie pastāvīga M un augoša φ, spēks N aug un tādēļ aug arī attiecība $\frac{M}{N}$. Tā tad

$$\frac{M}{N} = f(\varphi)$$

Šī funkcionālā sakara attiecīgi vērtību pāri, redzami zīmējuma tabulā un iezīmēti koordinātu sistēmā, dod līkni AB. Šī līkne attēlo grafiski, empiriskā ceļā dabūto funkcionālo sakaru $\frac{M}{N} = f(\varphi)$.

Šo pašu problemu mēchanikā atrisina teorētiski un dabū formulu

$$\frac{M}{N} = e^{\mu\varphi}$$

Šeit parametrs μ ir berzes koeficients starp cilindru un virvi.

Salīdzinot problemas funkcionālā sakara izteiksmes, teorētisko - formulu un empirisko - līkni, redzams, ka formulai ir ievērojamas priekšrocības pret līkni. Formula lietojāma arī pie leņķiem φ, kuŗi neatrodās novērojuma robežās un ar parametru μ, rāda arī berzes iespaidu uz parādības gaitu, kamēr līkne raksturo parādības gaitu tikai novērojuma robežās un pie tam tikai pie eksperimentā noteiktā berzes koeficienta vērtības.

Kā redzams, teorētiskā formulā dod daudz vairāk, nekā empiriskā līkne.

Tā kā parādības gaita tiek izteikta ar nolīdzinājumu

$$\frac{M}{N} = e^{\mu\varphi} \qquad .(1)$$

un tāpat arī ar empirisko līkni AB, tad nolīdzinājumam (1) vajadzētu būt šīs līknes nolīdzinājumam. Vēlāk redzēsim, ka tas tā arī ir.

Pieņemot, ka nolīdzinājums (1) nav zināms, tad līkni AB varētu arī izteikt ar nolīdzinājumu

$$\frac{M}{N} = y = a + b\varphi + c\varphi^2 + d\varphi^3 \qquad ....(2)$$

Parametrus a,b,c,d varam dabūt no nolīdzinājumiem

$$1.6 = a + b\pi + c\pi^2 + d\pi^3$$
$$3.0 = a + b(2\pi) + c(2\pi)^2 + d(2\pi)^3$$
$$5.1 = a + b(3\pi) + c(3\pi)^2 + d(3\pi)^3$$
$$8.0 = a + b(4\pi) + c(4\pi)^2 + d(4\pi)^3$$

Kā zinams, līkne (2) ar šādā kārtā noteiktiem parametriem pilnīgi atbilst tabulas novērojumu pāriem, līknes AB četriem punktiem.

Nolīdzinājumu (2) sauc par līknes empirisku nolīdzinājumu, kamēr nolīdzinājums (1) ir līknes racionāls nolīdzinājums.

Tā tad matemātiska izteiksme, kuŗa izteic empirisku līkni, var būt racionāls vai empirisks nolīdzinājums. Nolīdzinājums ir racionāls, ja tādu var dabūt kā slēdzienu no kāda dabas likuma vai arī kā dabas likuma tuvinājumu, vai arī, ja nolīdzinājumu pārveidojam, pielietojot dabas likumus, dabūjam kā rezultātu, kāda cita dabas likuma izteiksmi. Racionāla nolīdzinājuma parametriem ir fizikāla nozīme, un tās derīgs kā novērojuma robežās, tā arī ārpus tām. Empirisks nolīdzinājums šīs pazīmes neizpilda un var tikt pielietots tikai novērojuma robežās.

Kā redzams, racionālam nolīdzinājumam jādod priekšrocība pret empirisko.

Apskatītā konkretā gadijumā, racionālais nolīdzinājums (1) pamatots uz dabas likuma, parametram μ ir berzes koeficienta nozīme, nolīdzinājums derīgs arī ārpus novērojuma robežām.

Empiriskais nol-ms (2) derīgs tikai novērojuma robežās, parametriem b,c,d nav ieskatamas fizikālas nozīmes.

Attiecībā uz novērojumu precizu attēlošanu jāsaka, ka dažkārt empirisks nol-ms tos attēlo novērojuma robežās labāk,nekā racionāls nol-ms, jo racionālais nol-ms izteic parādības gaitu, neievērojot novērojumu kļūdas un pieņemot, ka parādību iespaidojošie apstākļi dotā eksperimentā pastāvīgi, kas dažkārt nav pilnīgi izpildīts.

Šeit jāpiezīmē, ka ne katru empirisku nol-mu,kurš precizi attēlo novērojuma punktus $(x_n y_n)$, var uzskatīt par dotās līknes nol-mu novērojuma robežās.Nol-ms jāpārbauda arī, vai tas izteic līknes punktus pietiekoši arī starp novērojuma punktiem.

Zīmējumā Nr.2 līknes I nol-ms pieņemts

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Parametri a,b,c,d dabūti, izlietojot līknes I punktus

x	y
0.15	0.55
0.3	0.825
0.4	1.42
0.45	2.7

$a = -5.89$, $b = 80.5$, $c = -308$, $d = 381.8$

Nolīdzinājums ar šiem parametriem

$$y = -5.89 + 80.5\,x - 308\,x^2 + 381.8\,x^3$$

dod līkni II,kura gan iet caur dotiem līknes I četriem punktiem,bet ievērojāmi atšķirās no līknes I starp šiem punktiem un tādēļ augšējais nol-ms nevar tikt uzskatīts par līknes I nol-mu, ja parādības gaita dod iemeslu pieņemt, ka tai atbilst līkne I.

Ja dabūts empirisks nol-ms, kurš pietiekoši precizi attēlo doto līkni, tad dažkārt ar šāda nolīdzinājuma palīdzību var atrast līknes racionālo nol-mu.

II. GRĀFISKAS OPERĀCIJAS AR LĪKNI.

Ja parādības gaitas funkcionāls sakars dots līknes veidā, tad dažkārt gūstam pietiekošas atbildes uz prakses jautājumiem ar tiem datiem, kurus dod līkne arī bez nol-ma.

No zīmējuma Nr.3 līknes varam dabūt

1) y vērtības priekš katra x intervalā a, e t.i. varam izdarīt interpolaciju. Eksterpolacija nedroša un pielaižāma tikai punktu A un E īsā tuvumā, pieskares virzienā.Jo tālāka eksterpolacija, jo tā nedrošāka.
2) līknes ektremu punktus M_1 un M_2 un inflekeijas punktu.Tā kā līknes ekstrēmu punktu abscisas dabūjam no nol-ma $f'(x) = 0$, tad zīmējumā tās dabūjam, vedot pie līknes pieskares,paralēli x asij un atrodot pieskāršanās punktus un to abscisas.

Infleksijas punktu J abscisas dabūjam no nol-ms $f''(x) = 0$, zīmējumā tās dabujam meklējot $f(x)$ atvasinātās līknes $f'(x) = 0$ ekstremos punktus.

3)dotas līknes atvasinātās līkni $f'(x)$. Lai izvestu šīs darbības, vajadzīgas konstrukcijas: vest pie līknes pieskari dotā virzienā un atrast pieskāršanās punktu, un arī vest pie līknes pieskari dotā punktā. Šīs konstrukcijas tālāk apskatīsim.

4)līknes laukumu $AM_1 JM_2 E_1 eaA$, t.i.

$$\int_a^e f(x)dx$$

vai arī laukumu no abscisas a līdz kādai abscisai x, dotās līknes intervalā.

Apskatīsim attiecošās konstrukcijas.

a. Pieskares konstrukcija.

Zīmējumā Nr.4^{α} parādīta pieskares konstrukcija, parallēli dotam virzienam.
Ar zīmēšanā pazīstāmu paņēmienu vedam t un vairākas līkni krustojošas taisnes, parallēli virzienam m. Chordu vidus punktus savienojam ar līkni, šīs līknes pagarinājums līdz dotai līknei dod krustpunktu a, pieskares t pieskara punktu.

Zīmējumā Nr.4^{β} parādīts pieskares t pieskara punkta a atrašana.
Pieskara punkta a abās pusēs vedam pieskares 1,2,3,4,5; dabūjam krustpunktus ar t a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, no šiem punktiem arvien uz to pašu pusi nogriežot pēc patikas izvēlētu gabalu m, dabūjam punktus b_1, b_2, b_3, b_4, b_5. Savienojam šos punktus ar līkni. Šī līkne krusto pieskari t punktā b. Nogriežot uz t no punkta b gabalu m, dabūjam pieskāršanās punktu a.

Zīmējumā Nr.5^{α} parādīta pieskares konstrukcija dotā punktā a. Vedam chordas 1,2,3,4, dabūjam krustpunktus ar līkni a_1, a_2, a_3, a_4 Nogriežot uz chordām vienā virzienā pēc patikas izvēlētu gabalu m, dabūjam punktus b_1, b_2, b_3, b_4, kuŗus savienojam ar līkni. Riņķis ar radiusu m no punkta a, krusto līkni b_1, b_2, b_3, b_4 punktā b.
Pieskare punktā a iet caur šo punktu b.
Zīmējumā Nr.5^{β} parādīta pieskares konstrukcija dotās līknes punktā a, ar pieskaru lineāla palīdzību.
Pieskaru lineāls ir prizma, kuŗas malas NKLS un KMRL stateniskas, pie kam mala KMRL ir spogulis. Prizmu novietojam tā, lai spogulis būtu statenisks uz zīmējuma plāknes un šķautneKL ietu caur pieskara punktu B. Grozam prizmu, kamēr līknes atspoguļojums spoguļa plāknē izskatās kā līknes AB pagarinājums punktā B bez lūzuma. Tad, saskaņā ar refleksijas likumu, spogulis ir statenisks uz līknes pieskares punktā B un šķautne KL ir līknes normale, kuŗu atzīmējam zīmējumā. Statenis uz šīs normales punktā B, tad ir līknes pieskare šinī punktā.

b. Grāfiska integrēšana.

Palīga konstrukcija.

Zīmējumā Nr.6, strīpotā parallēlograma laukums no abscisas a līdz abscisai x tiek izteikts

$$L_a^x = \int_a^x y dx = \int_a^x c dx = c(x - a)$$

liekot $L_a^x = Y.1$, dabūjem

$$Y.1 = c(x - a)$$

$$\frac{Y}{c} = \frac{x - a}{1}$$

$$Y = \frac{c}{1}(x - a) \qquad .(1)$$

Kā redzams, Y ir taisnes ordināta, taisnes virziena koeficients $m = \frac{c}{1}$, taisne krusto x asi attālumā a no koordinātu sākuma. Taisnes virziena koeficients $m = tg\ \alpha$. Leņķi α dabūjam šādi: pagarinam taisni y c līdz A, no koordinātu sākuma nogriežam uz x ases pa kreisi garumu 1. Tad leņķis $\angle$ OPA = α un taisne no d, parallēla PA, tad ir ar nol-mu (1) dotā taisne.

No augšējā redzams, ka Y.1 dod meklēto strīpotā laukuma vērtību.

Zīmējumā Nr.7 augšējā konstrukcija pielietota, lai dabūtu parallēlogramu I un II laukumu summu.

Nogriežot OP = 1 pa kreisi no O, dabūjam polu P. Pagarinot taisni $y = c_1$ līdz ordinātu asij, dabūjam punktu c_1 un staru PC_1. Vedam $\alpha d \parallel PC_1$, tad laukums $I = Y_1.1$. Vedot $\beta f \parallel PC_2$, dabūjam laukumu $II = Y_2.1$. Laukumu I un II summa ir $(Y_1 + Y_2).1$. Šo summu $Y_1 + Y_2$ kā redzams dabūjam, vedot $dg \parallel PC_2$, kā ordinātu eg un tādēļ taisne βf, izvedot darbību, netiek zīmēta.

Mērogs.

Kā redzējam, ja OP = 1, tad, saskaņā ar zīmējumu Nr.6

$$\frac{L_a^x}{1} = Y = \frac{c}{1}(x - a) = tg\alpha(x - a)$$

Bet ja

$$OP' = p$$

tad

$$\eta = \frac{c}{p}(x - a)$$

un laukums

$$\frac{L_a^x}{1} = \frac{c}{1}(x - a) = \frac{c.p}{p}(x - a) = p.\eta$$

Tā tad, šādā gadijienā integrāltaisnes df ordinātas jāreizina ar pola distanci p.

Ja zīmējums izvests uz x ass 1:m, uz y ass 1:n un pola distance OP' = p, tad šādā gadijienā

$$\text{laukums } L_a^x = \eta.p.m.n.1$$

Piemērs.

Zīmējuma vienība: 1^{cm}. Ja zīmējums izvests uz x ases 1:5, uz y ases 1:3, tad zīmējuma katra cm^2 laukums ir īstenībā 5 cm . 3 cm = 15 cm^2. Ja pola distance būtu 1 cm, tad zīmējuma laukums būtu

Y cm . 1 cm

bet ja pola distance $OF' = p = 2$, tad zīmējuma laukums ir η cm 2 cm

un īstenībā

$$L_a^x = \eta \text{cm} \quad 2\text{cm} \quad 5 \quad 3 = 30 . \eta \text{ cm}^2$$

η tad jāmēro zīmējuma vienībā, t.i. centimetros.

Apskatītās konstrukcijas pielietojam vispārējā gadījienā, kad jādabū $\int_a^x f(x)dx$, un $f(x)$ dota grāfiski līknes veidā.

Zīmējumā Nr.8 $f(x)$ dota kā līkne $A_1LA_2A_3A_4$ un $\int_a^x f(x)dx$ dabujam, aprēķinot laukumu $B_1A_1A_2A_3A_4B_1$. Šo laukumu sadalam ar ordinātām A_2F un A_3G daļas laukumos, kuŗu skaits pēc patikas, bet dalošās ordinātas jāved arī caur līknes ekstremu punktiem, dotā gadijienā arī caur punktu A_2.

Pirmo daļas laukumu $B_1A_1A_2FB_1$ dalam divos laukumos: B_1LHB_1 un HLA_2FH, bet tādā kārtā, lai strīpotais laukums AKL nolīdzinātos strīpotam laukumam LMA_2. Tad parallēlogramu $B_1A_1KHB_1$ un HMA_2FH summa dod precizi laukuma $B_1A_1LA_2FB_1$ vērtību un tādēļ šī laukuma vērtību dabūjam, atrodot minēto parallēlogramu summu. Pielietojot agrāk norādītās konstrukcijas, šo summu dabūjam zīmējumā Nr.8 kā ordinātu B_2F. Ar laukumu A_2A_3GF rīkojamies tāpat, kā ar pirmo daļas laukumu un dabūjam ordinātu B_3G, kuŗa izteic laukuma $B_1A_1A_2A_3GB_1$ vērtību. Beidzot tādā pat ceļā dabūjam ordinātu B_4A_4, kuŗa dod visa laukuma $B_1A_1A_2A_3A_4B_1$ vērtību.

Šeit jāpiezīmē, ka laukumu AKL un LMA_2 vienlīdzību, t.i. ordinātas MH vietu, noteic pēc acumēra, kas, kā rezultāts to rāda, ir pilnīgi pietiekoši precizi izdarams. Jāievēro, ka visa laukuma iedalijums daļas laukumos jāizdara tā, lai laukumi AKL un LMA nebūtu ne ļoti lieli un ne ļoti mazi. Abos gadijienos viņu vienlīdzību grūti ar aci apsvērt. Zīmējuma Nr.8 laukumi apmēram atbilst minētam aprobežojumam.

Poligona $B_1T_1T_2T_3$ ordinātas dod trepes poligona $B_1A_1KMNRST$ laukumus līdz attiecīgām abscisām. Punktos $B_1B_2B_3B_4$ trepes poligona laukumi ir taisni vienlīdzīgi ar līknes laukumiem pie abscisām OB_1, OF, OG, OA_4. Ja starp punktiem B_1 un B_4 iezīmējam līkni, kuŗas pieskares ir poligona $B_1T_1T_2T_3$ malas un pieskāršanās punkti $B_1B_2B_3B_4$, tad viegli ieskatams, ka šīs līknes ordinātas dod ar līkni ieslēgtos laukumus līdz attiecīgām abscisām. Šo līkni $B_1B_2B_3B_4$ sauc par dotās līknes $A_1A_2A_3A_4$ integrāllīkni.

Ja integrāllīknes nol-mu apzīmējam ar $F(x)$ un dotās līknes nol-mu ar $f(x)$, tad

$$1. \; F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

un

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x)$$

No šīs izteiksmes redzams, ka $F(x)$ ir ekstrema vērtība tanīs vietās, kur $F'(x) = f(x) = 0$, t.i. punktā B_4 ir integrāllīknes maksimums, jo pie $x = OA_4$ funkcija $f(x) = 0$.

$F(x)$ ir infleksijas punkti tanīs vietās, kur

$$F''(x) = f'(x) = 0$$

t.i. punktā B_2, integrāllīknei ir infleksijas punkts, jo pie $x = OF$ funkcija $f'(x) = 0$.

Vēlākai pielietošanai jāievēro, ka caur T_1, t.i. integrāllīknes pieskaru krustpunktu, iet ordināta, kuŗa nolīdzina laukumus AKL un L M A_2.

c. Grāfiska diferencēšana.

Ja dota f(x) kā līkne, tad kā zinams f'(x) pie x = a, t.i. $f'(\alpha) = tg\, \tau_a$ (zīmējums Nr.9). Leņķis τ_a tiek veidots starp x asi un līknes pieskari t punktā A pie x = a. Tang τ_a dabūjam ar sekojošu konstrukciju,

Nogriežot uz x ases pa kreisi no O vienību, dabūjam polu P, no P vedam PC $\|$ t, tad $OC = tg\, \tau_a$,
jo

$$\frac{OC}{1} = tg\, \tau_a$$

nogriežot OC uz līknes punkta A ordinātas, dabūjam punktu B, kuŗa ordināta tad ir f'(a).

Šo konstrukciju pielietojam, lai dabūtu zīmējumā Nr.10, līknes $A_1A_2A_3 \ldots A_6$ atvasināto līkni.

Līknes punktos $A_1A_2 \ldots A_6$ pievedam pieskares un atkārtoti pielietojot augšā norādīto konstrukciju, dabūjam atvasinātās līknes f'(x) punktus $B_1B_2 \ldots B_6$. Ja atkārtotu šo konstrukciju ar līkni $B_1B_2 \ldots B_n$, tad dabūtu atkal līkni, dotās līknes f(x) otro atvasināto f"(x). Tā kā līknei f(x), t.i. $A_1A_2 \ldots A_6$ ir ekstrems punktā A_3, tad atvasinātai f'(x) vajaga iet caur O punktā B_3.

Līkne f(x) ir līknes f'(x) integrāllīkne un tādēļ, ievērojot agrāk norādīto, caur T_1 iet ordināta, kuŗa nolīdzina laukumus $B_1M_1N_1$ un $B_2M_2N_1$. Izlietojot šo īpašību, dabūjam līknes f'(x) punktu N_1, vedot starp punktiem B_1 un B_2 līkni f'(x) tā, lai $B_1M_1N_1 = B_2M_2N_1$

Ja dotai līknei $A_1A_2 \ldots A_6$ ir infleksijas punkts, tad pie attiecoša x diferenciāllīknei f'(x) vajaga būt ekstremam, jo tad

$$f''(x) = \varphi'(x) = 0$$

t.i. diferenciāllīknei $\varphi(x) = 0$ tai vietā vajaga būt ekstrēmam.

Mērogs.

Ja mērogs priekš abscisām un ordinātām tas pats, tad leņķis τ_a zīmējumā Nr.9 ir īstenais un ja pola distance OP = 1, tad $OC = f'(x) = tg\, \tau_a$. Bet ja pola distance OP' = p, tad

$$tg\, \alpha = \frac{OC'}{p} = \frac{DB'}{p}$$

Ja abscisas līknei f(x) zīmētas 1 m un ordinātas ar 1:n, tad zīmējuma leņķa tg reizinams ar $\frac{n}{m}$ un tādēļ galīgi

ja pola distance p

abscisas 1 m

ordinātas 1 n

un B' līknes ordinātas apzīmējam ar η, tad

$$f'(x) = \eta \cdot \frac{n}{p.m}$$

Piemēram, ja $p = 2^{cm}$ abscisas 1:5, ordinātas 1:3

tad $f'(x) = \eta \cdot \frac{3}{2.5}$, pie kam tad η jāmēro zīmējuma vienībā.

III. LĪKNES NOLĪDZINĀJUMA ATRAŠANA.

Atrast līknes nol-mu ir daudz grūtāks darbs, nekā uzzīmēt līkni, ja nol-ms dots. Šis darbs tiek stipri apgrūtināts ar to apstākli, ka novērojumi dod funkcionālo sakaru starp y un x tikai zināmās x robežās, tā tad līknes veids ārpus šīm robežām vispārējā gadījienā nav zināms, kā arī nav zināmi funkcionālā sakara zari, kuŗi funkcionālam sakaram teoretiski varētu būt.

Vispārīgi var teikt, ka līknes nol-ma atrašana tiek izdarīta mēģinājuma ceļā. Šie mēģinājumi tiek ievērojami atvieglotī, ja zinam dažādu līkņu veidus un to nol-mus.

a. Dažu līkņu veidi un to nolīdzinājumi.

Izšķiram neperiodiskas un periodiskas līknes. Še apskatīsim tikai neperiodiskas līknes, no tām tikai tos veidus, kuŗi praksē, novērojumus attēlojot, bieži sastopāmi.

1. Vispārēja augstākās kārtības parabola.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \qquad .(1)$$

Šeit rādītājs n vesels pozitīvs skaitlis.

Līkne ar kāpes rādītāju $n = 3$

$$y = 5 - 9x + x^3$$

attēlota zīmējumā Nr.31.

Kā zināms, novērojuma punktu pārus teoretiski var izteikt arvien ar augšējo augstākās kārtības parabolas nol-mu (1), bet praksē šis nol-ma veids lietojams tikai tad, ja

α) parametri $a_0, a_1, a_2 \qquad a_n$ seko pēc kāda noteikta likuma, ja tie veido savirzamu rindu, kuŗa izteic eksponenciālu, trigonometrisku vai kādu citu funkciju.

β) ja parametri $a_0, a_1, a_2 \qquad a_n$ tik ātri dilst, ka tie pie x augstākām pakāpēm top ļoti mazi un uzskatāmi kā sekundaru iespaidu sekas.

γ) ja parametri $a_0, a_1, a_2 \qquad a_n$ ļoti mazi lielumi, izņemot tikai dažus, tad ievērojami locekļi tikai ar šiem pēdējiem parametriem.

2. Paraboliskas un hiperboliskas līknes.

Šo līkņu nol-ms ir

$$y = \alpha x^n \qquad ....(2)$$

Pie $n > 0$ līknes tiek sauktas par paraboliskām un pie $n < 0$ par hiperboliskām.

Paraboliskas līknes ar nol-mu (2) ($n > 0$) iet caur koordinātu sākumu.

Zīmējumā Nr.11 attēlotas līknes, kuŗu nol-mi ir

$$y = \frac{1}{2} x^2$$

$$y = \frac{1}{2} x^3$$

Zīmējumā Nr.12 attēlotas līknes ar nol-miem

$$y = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = 2x^{\frac{1}{3}}$$

Ar nol-mu (2) izteiktās hiperboliskās līknes ($n < o$) tuvojās asimptotiski x un y asīm.

Zīmējumā Nr.13 attēlotas līknes ar nol-miem

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Zīmējums Nr.14 rāda līknes ar nol-miem

$$y = \frac{1}{\pm x^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

Zīmējumā Nr.15 attēlota līkne

$$y = \frac{3x}{1 + 2x}$$

Zīmējumā Nr.16 attēlota trešās kārtības līkne

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

3. Eksponenciālas un logaritmiskas līknes.

Zīmējumā Nr.17 attēlotas eksponenciāllīknes

$$y = e^{-x}$$
$$y = e^{x}$$

un logaritmiskas līknes

$$y = \ell_{nat}\ x$$
$$y = \log_{10} x$$

Zīmējumā Nr.18 parādīts, kādus dažādus veidus pieņem līknes, kuŗu nolīdzinājumi sastāv no eksponenciālfunkciju sakopojumiem.

4. Hiperbolisku funkciju līknes.

Zīmējumā Nr.19 attēlotas līknes

$$y = \mathrm{Sin}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y = \mathrm{Cos}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \mathrm{Tg}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$y = \mathrm{Ctg}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

b. Līkņu nolīdzinājumi pārveidotā koordinātu sistēmā.

Apskatītie līkņu nol-mi, īpaši paraboliskām, hiperboliskām, eksponenciāl un logaritmiskām līknēm ir ļoti vienkārša veida, bet tas ir tikai tādēļ, ka šīs līknes attiecinātas uz katrai [illegible] īpatnēju koordinātu sistēmu. Kā redzējam, paraboliskas līknes

$$y = \alpha x^n$$

iet caur koordinātu sākumu. Ja n ir vesels un pāra skaitlis, tad y ass ir simmetrijas ass, ja n pāra skaitla daļa, tad x ass ir simmetrijas ass. Ja n nepāra skaitlis, tad koordinātu sākums ir līknes centrs.

Pie hiperboliskām līknēm koordinātu asis ir līknes asimptotas. Pie eksponenciāllīknēm x ass ir līknes asimptota, līknes iet caur punktu P = 0|1.

Logaritmiskas līknes iet caur punktu P = 1|0 un y ass ir asimptota.

Kā redzams, katrā gadijumā, koordinātu sistēmas stāvoklis pret līkni ir īpatnējs un šajā īpatnējā koordinātu sistemā, līknes nol-ms dabū augšā norādīto vienkāršo veidu. Ja koordinātu sistēma neieņem pret līkni šo īpatnējo stāvokli, tad līknes nol-ms nav vairs tik vienkāršs.

Zīmējumā Nr.20 attēlotās parabolas nol-ms, īpatnējā koordinātu sistēmā ξ, η ir

$$\eta = \pm (2p\xi)^{\frac{1}{2}} \qquad .(1)$$

Bet ja pārvietojam koordinātu sākumu punktu 0 negatīvā virzienā uz ξ ases, atstatumā a, tad, kā redzams, šīs parabolas nol-ms ir

$$y = \eta = \pm [2p(x-a)]^{\frac{1}{2}}$$

Tādēļ, ja novērojumu pāri izdarīti koordinātu sistēmā xy, t.i. novēroti $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ $(x_n y_n)$, tad parabolas nol-mu (1) neapmierinās augšējie vērtību pāri, bet gan $(x_1 - a), y_1; (x_2 - a) y_2$ $(x_n - a) y_n$ un novērotās parabolas nol-ms tad ir

$$\eta = y = \pm \left[2p\ (x - a) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Zīmējumā Nr.21 koordinātu sākuma punkts pārvietots uz y ass negatīvā virzienā par b un parabolas nol-ms novērojumu sistemā xy tad ir

$$y - b = \eta = \pm (2px)^{\frac{1}{2}}$$

Zīmējumā Nr.22 koordinātu sākums pārvietots negatīvā virzienā uz x ass par a un uz y ass par b, un tādēļ līknes nol-ms novērojumu sistemā xy tad ir

$$y - b = \left[2p(x - a) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Analogi jārīkojās, ja koordinātu sākums pārnests pozitīvā virzienā.

Vispārīgi

$$y \pm b = f(x \pm a)$$

izteic to pašu līkni, kā nol-ms

$$y = f(x)$$

bet koordinātu sistēmā, kuŗa x un y asu virzienā pārbīdīta pret īpatnējo koordinātu sistemu. Šeit jāņem + zīme, ja koordinātu sākums pret īpatnējas koordinātu sistemas sākumu pabīdīts + virzienā un - zīme, ja negatīvā virzienā.

Gadijienu, kad novērojumu koordinātu sistemas asis grieztas pret īpatnējas sistemas asīm, šeit vispārīgi neapskatīsim, jo šī gadijiena pielietošana būtu ļoti sarežģīta.

c. Dēformācija.

Pie novērojumu vērtību pāru $(x_1 y_1), (x_2 y_2) \ldots (x_n y_n)$ grāfiskas attēlošanas dauzkārt esam spiesti izdarīt dēformāciju, t.i. pielietot uz koordinātu asīm nevienādus mērogus.

Kā redzams no zīmējuma Nr.23, ja dēformējam līkni I y ass virzienā, dabūjam līkni II un šo līkni dēformējot x ass virzienā, dabūjam līkni III. Līkne I ir parabola, bet arī līknes II un III ir parabolas.

Vispārīgi, ja

$$y = f(x)$$

ir kādas saimes līkne, tad arī

$$k_2 y = f(k_1 x)$$

ir tās pašas saimes līkne.

d. Līkņu pazīmes.

1. Vispārēja augstākā parabola.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad .. + a_n x^n$$

Šīs līknes īpašības ir sekojošas

1) Līkne tiek no taisnes krustota n punktos, tādēļ, ja taisne krusto doto līkni lielākais, piemēram, trīs punktos, tad līknes nol-ms vismaz ir trešās kāpes.

2) Ja n pāra skaitlis, tad pie $x = \pm \infty$, $y = + \infty$, līkne nāk otrā kvadrantā no bezgalības un aiziet bezgalībā pirmā kvadrantā. $(a_n > 0)$ Ja n nepāra skaitlis, tad pie $x = - \infty$ arī $y = - \infty$ un pie $x = + \infty$ arī $y = + \infty$. Līkne nāk no bezgalības trešā kvadrantā un aiziet bezgalībā pirmā kvadrantā. $(a_n > 0)$

3) Ja $f(x)$ ir n-tās kāpes, tad $f'(x)$ ir (n-1) kāpes un $f'(x)=0$, no kurienes dabūjam ekstremu vietu abscisas, dod (n-1) saknes. Tādēļ, ja līknei ir k ekstremi, tad līknes nol-ms vismaz ir (k+1) kāpes.

4) $f(x)$ infleksijas punkts dabū no nol-ma $f''(x)=0$. Tādēļ, ja līknei ir k infleksijas punkti, tad līknes nol-ms ir vismaz (k+2) kāpes. Piemēram, ja līknei ir viens infleksijas punkts, tad tās nol-ms ir vismaz trešās kāpes.

5) Katram x atbilst tikai viens y.

2. Paraboliskas un hiperboliskas līknes.

$$y = \alpha x^n$$

Pirmā pazīme.

Diferencējot dabūjam

$$dy = \alpha \; n.x^{n-1} dx$$

dalot ar $y = \alpha x^n$

$$\frac{dy}{y} = n \cdot \frac{dx}{x}$$

vai arī

$$\frac{\frac{dy_1}{y_1}}{\frac{dx_1}{x_1}} = \frac{\frac{dy_2}{y_2}}{\frac{dx_2}{x_2}} = \quad = \frac{\frac{dy_n}{y_n}}{\frac{dx_n}{x_n}} = n$$

Augšējais nol-ms izteic: parabolisko vai hiperbolisko līkņu y procentuālais pieaugums dalīts ar x procentuālo pieaugumu, dod pastāvīgu skaitli n – līknes nol-ma kāpi. Ja pie dotās līknes atrodam šo īpašību izpildītu, tad līkne ir paraboliska ($n>0$) vai hiperboliska ($n<0$).

Otrā pazīme.

Kā zinams, līknes apakšpieskari S_t izteic:

$$S_t = \frac{y}{y'},$$

tā tad

$$S_t = \frac{\alpha x^n}{\alpha n x^{n-1}} = \frac{x}{n}$$

un

$$\frac{S_{t_1}}{x_1} = \frac{S_{t_2}}{x_2} = \ldots\ldots = \frac{S_{t_n}}{x_n} = \frac{1}{n} = \text{konst.}$$

Nol-ms izteic, ka pie paraboliskam vai hiperboliskam līknēm attiecība: apakšpieskare pret attiecīgo x dod pastāvīgu skaitli. Ja pie dotās līknes atrodam šo īpašību izpildītu, tad līkne ir paraboliska vai hiperboliska, atkarībā no n zīmēm.

So pazīmi varētu pielietot, ja mūsu rīcībā atrodās pieskaru lineāls.

Trešā pazīme.

$$y = \alpha x^n$$

$$Y = \alpha.(cx)^n = \alpha.c^n x^n$$

$$\frac{Y}{y} = c^n = \text{konst.}$$

vai arī

$$\frac{Y_1}{y_1} = \frac{Y_2}{y_2} = \ldots\ldots \frac{Y_n}{y_n} = \text{konst.}$$

Še ordinātām $y_1, y_2, \ldots y_n$ piekārtotas abscisas $x_1, x_2 \ldots x_n$ un ordinātām $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ piekārtotas abscisas $cx_1, cx_2 \ldots cx_n$.

Ja pie dotās līknes atrodam šo īpašību izpildītu, tad līkne ir paraboliska vai hiperboliska, atkarībā no n zīmes.

Ceturtā pazīme.

Šī pazīme visērtāk pielietojama.

Ja nolīdzinājumu

$$y = \alpha x^n$$

logaritmējam, tad dabūjam

$$\log y = \log \alpha + n \log x$$

Liekot $\log y = Y$ un $\log x = X$, $\log \alpha = A$, dabūjam

$$Y = A + nX \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Šis nol-ms tulkojams šādi: ja uz paraboliskas vai hiperboliskas līknes ņemam vērtību pārus $(x_1 y_1), (x_2 y_2) \ldots (x_n y_n)$ un parastā koordinātu sistēmā veidojam punktus $P_1 = \log x_1 | \log y_1$; $P_2 = \log x_2 | \log y_2$ ... $P_n = \log x_n | \log y_n$, tad šie punkti atrodās uz taisnes. Tādēļ ja kādā novērojumā vērtību pāru logaritmi dod parastā koordinātu sistēmā taisni, tad novērojumu punktu pāru līknes nol-ms ir

$$y = \alpha x^n$$

Kā redzams no nol-ma (1) šīs taisnes virziena koeficients n ir līknes nol-ma kāpes rūdītājs. Taisnes nogrieznis A uz Y ass ir līknes nol-ma parametra logaritms.

Šīs pazīmes pielietošana ir ļoti ērta, ja lietojam divkāršu logaritmisku tīklu, kurā uz abām asīm atrodās logaritmisks iedalijums, pie kam iedalījuma punktos uz asīm rakstīti ne skaitļu logaritmi, bet paši skaitļi. Piemēram, tai vietā, kurā uz x vai y ases tīklā stāv 2, nogriezums ir log 2.

Apskatītās pazīmes tikai tad derīgas, ja novērojumu koordinātu sistema ir līknes īpatnējā. Ja novērojumu koordinātu sistēma nesakrīt ar īpatnējo un iemesls pieņemt, ka līkne varētu būt paraboliska vai hiperboliska, tad jāskata vai pazīmes tiek izpildītas ar vērtību pāriem:

$$\begin{array}{c|c} x_1 \pm a & y_1 \\ x_2 \pm a & y_2 \\ \cdots & \cdots \\ x_n \pm a & y_n \end{array} \quad \text{vai} \quad \begin{array}{c|c} x_1 & y_1 \pm b \\ x_2 & y_2 \pm b \\ \cdots & \cdots \\ x_n & y_n \pm b \end{array} \quad \text{vai arī} \quad \begin{array}{c|c} x_1 \pm a_1 & y_1 \pm b \\ x_2 \pm a_2 & y_2 \pm b \\ \cdots & \cdots \\ x_n \pm a_n & y_n \pm b \end{array}$$

Pirmā gadijienā līknes nolīdzinājums ir

$$y = \alpha(x \pm a)^n$$

otrā

$$y \pm b = \alpha x^n$$

trešā

$$y \pm b = \alpha(x \pm a)^n$$

Lielumi a un b, kā arī viņu zīmes jāatrod mēģinājumu ceļā. Šeit problemas fizikalie apstākļi dažkārt var dot attiecošus norādijumus.

3. Eksponenciāllīknes.

Pirmā pazīme.

Diferencējot nol-mu

$$y = \alpha\, \varepsilon^{nx}$$

dabūjam

$$dy = \alpha . \varepsilon^{nx} \ell\varepsilon . ndx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\alpha\varepsilon^{nx} \ell\varepsilon\, n . dx}{\alpha\varepsilon^{nx}} = \ell\varepsilon . n . dx$$

Pieņemot pieaugumu dx kā konstantu lielumu, dabūjam

$$\frac{dy}{y} = \text{konst.}$$

tā tad

$$\frac{dy_1}{y_1} = \frac{dy_2}{y_2} = \qquad \frac{dy_n}{y_n} = \text{konst.(pie konst.dx)}$$

Tādēļ, ja pie kādas dotas līknes atrodam šo īpašību izpildītu, tad līkne ir eksponenciāla.

Otrā pazīme.

$$S_t = \frac{y}{y'} = \frac{\alpha\, \varepsilon^{nx}}{\alpha\, \varepsilon^{nx} \ell\varepsilon . n} = \frac{1}{n\, \ell\varepsilon} = \text{konst.}$$

tā tad eksponenciāllīknes apakšpieskare ir pastāvīgs lielums un ja pie kādas līknes šī pazīme izpildīta, tad līkne ir eksponenciāllīkne.

Trešā pazīme.

$$y = \alpha\, \varepsilon^{nx}$$

$$Y = \alpha .\ \varepsilon^{n(x+a)} = \alpha . \varepsilon^{na} . \varepsilon^{nx}$$

$$\frac{Y}{y} = \frac{\alpha\, \varepsilon^{na}\ \varepsilon^{nx}}{\alpha\, \varepsilon^{nx}} = \varepsilon^{na} = \text{konst.}$$

tā tad

$$\frac{Y_1}{y_1} = \frac{Y_2}{y_2} = \qquad \frac{Y_n}{y_n} = \text{konst.}$$

Šeit $y_1, y_2, \ldots y_n$ ordinātas, piekārtotas abscisām $x_1, x_2, \ldots x_n$ un $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ ordinātas, piekārtotas abscisām $x_1 + a$ $x_n + a$.

Ja pie dotās līknes atrodām šo īpašību izpildītu, tad līkne ir eksponenciāllīkne.

Ceturtā pazīme.

Šī pazīme ir ļoti ērta pielietošanā.
Logaritmējot nolīdzinājumu

$$y = \alpha\, \varepsilon^{nx}$$

dabūjam

$$\log y = \log\alpha + n \log\varepsilon\ \ x$$

Liekot

$$\log y = Y\ ,\ \log \alpha = A \text{ un } n \log \varepsilon = B$$

dabūjam

$$Y = A + Bx$$

Nol-ms tulkojams šādi:
Ja eksponenciāllīknes vērtību pārus $(x_1 y_1), (x_2 y_2), \ldots (x_n y_n)$ attēlojam parastā koordinātu sistemā kā punktus ar koordinātām $(x_1 \log y_1), (x_2 \log y_2) \ldots (x_n \log y_n)$, tad šie punkti atrodās uz taisnes un tādēļ, ja novērojuma vērtību pārus šādā kārtā attēlojot dabūjam taisni, tad funkcionālā sakara nol-ms ir eksponenciāllīkne

$$y = \alpha\, \varepsilon^{nx}$$

Šīs taisnes nogriezums uz Y ases $A = \log\alpha$ un tās virziena koeficients $B = n \log\varepsilon$

Šī pazīme ļoti ērti pielietojama, ja lietojam vienkāršu logaritmisku tīklu, kuŗa Y ass logaritmiski iedalīta, bet x ass ar parasto dalijumu.

4. Logaritmiskā līkne.

Pirmā pazīme.

Diferencējot nolīdzinājumu

$$y = \pm b + \alpha \log_\varepsilon x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

dabūjam

$$dy = \alpha \frac{dx}{x . \ell\varepsilon}$$

$$x\, dy = \frac{\alpha}{\ell\varepsilon} \quad dx$$

Pieņemot $dx =$ konst., dabūjam

$$x\, dy = \text{konst.}$$

tā tad

$$x_1 dy_1 = x_2 dy_2 = \ldots = x_n dy_n = \text{konst.}$$

Ja dotā līkne rāda šo īpašību, tad tā ir logaritmiska līkne.

Otrā pazīme.

Liekot nolīdzinājumā (1)

$$\log_\varepsilon x = X$$

dabūjam

$$y = \pm b + \alpha X$$

Nol-mu tulkojam šādi:

Ja logaritmiskās līknes punktus $P_1 = x_1 | y_1$; $P_2 = x_2 | y_2$ $P_n = x_n | y_n$ attēlojam parastā koordinātu sistēmā kā punktus ar koordinātām $\log x_1 | y_1$; $\log x_2 | y_2$ ... $\log x_n | y_n$, tad šie punkti atrodās uz taisnes un tādēļ, ja kāda novērojuma vērtību pāri $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ $x_n | y_n$ šādā kārtā attēloti dod taisni, tad funkcionāla sakara nol-ms ir logaritmiska līkne

$$y = \pm b + \alpha \log_\varepsilon x$$

Augšējās taisnes nogrieznis uz y ass ir nol-ma (1) lielums b un taisnes virziena koeficients ir nol-ma (1) parametrs α .

Šī pazīme ļoti ērti pielietojama, ja lietojam vienkāršu logaritmisku tīklu, kurā x ase ar logaritmisku dalījumu un y ase ar parasto.

Attiecībā uz eksponenciālām un logaritmiskām līknēm arī piezīmējams, ka to apskatītās pazīmes tikai tad derīgas, ja šīs līknes apskatam to īpatnējā koordinātu sistemā.

Ja novērojuma koordinātu sistema nesakrīt ar līkņu īpatnējo sistemu, tad vērtību pāru attēlošana attiecīgos logaritmiskos tīklos nedod taisni. Atsevišķos gadījienos jāievēro sekojošais.

Pie eksponenciāllīknēm koordinātu sākuma pārvietošana uz x ass to attēlošanu taisnes veidā neiespaido, kā tas redzams no sekojošā:

$$y = \alpha\varepsilon^{n(x+a)} = \alpha\, \varepsilon^{na}.\, \varepsilon^{nx} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\log y = \log\alpha + \log(\varepsilon^{na}) + n \log\varepsilon . x$$

Pie pārvietotā koordinātu sākuma uz x ases attēlojums vienkāršā logaritmiskā tīklā arī dod taisni, bet ar citu nogriezni uz y ass.

Pie logaritmiskām līknēm koordinātu sākuma pārvietojums uz y ases neiespaido attēlojumu taisnes veidā, kā tas redzams no nol-ma (1).

Ievērojot augšējo, pie eksponenciāllīknēm vajadzības gadījumā jāizdara mēģinājumi ar $y \pm b$, (koordinātu sākuma pārvietojums uz y ass) atrodot b un tā zīmi un pie logaritmiskām līknēm mēģinājumi ar $x \pm a$ (koordinātu sākuma pārvietojums uz x ass), atrodot a un tā zīmi.

5. Daži atsevišķi nolīdzinājumu veidi.

Ja dotās līknes, vai arī novērojuma, vērtību pāri $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ $x_n | y_n$ nedod taisni, ne divkāršā logaritmiskā tīklā ne arī vienkāršā, ar logaritmisku dalījumu uz y ases, un arī ar logaritmisku dalījumu uz x ases, kā arī ar mēģinājumiem nav iespējams minētos tīklos dabūt tādu koordinātu sākuma pārvietojumu ar a vai b, vai arī ar a un b, pie kuŗa vērtību pāru attēlojums būtu taisne; tā tad tas nozīmē, ka līknes nol-mu nevar izteikt ar hiperbolisku, parabolisku, eksponenciālu un logaritmisku līkņu norādītiem vienkāršiem nol-miem vai arī no tiem dabūtiem paplašinātiem nol-miem, ievedot lielumus a un b. Zīmējumā tas parādās, ka līknes attēlojums logaritmiskos tīklos dabū S veidu, attēlojumā parādās infleksijas punkts. Līkne tomēr var piederēt pie vienas no apskatītām saimēm, bet novērojumu koordinātu sistema var būt pagriezta pret līknes īpatnējo sistemu par nezināmu leņķi φ. Tādā gadījumā minēto līkņu saimju vienkāršie nol-mi būtu izpildīti un līknes attēlojums vienā no attiecīgiem logaritmiskiem tīkliem dotu taisni, ja novērojumu koordinātu pāru (x,y) vietā ievestu koordinātu pārus (ξ,η), kur, kā zinams no analitiskās geometrijas

$$\xi = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$

$$\eta = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

Griešanas leņķis φ nav zinams un būtu jāatrod mēginājumu ceļā, kas teoretiski gan iespējams, bet praktiski saistīts ar lielu darbu. Šis darbs vēl palielinātos, ja koordinātu sistema būtu pie tam parallēli pārbīdīta un tad būtu jāatrod arī vēl lielumi a vai b, vai gadijumā arī abi. Šādos gadijumos, iekams izdarītu šo grūto darbu, ievēlams mēgināt dažus atsevišķus nolīdzinājumu veidus, kuŗi dažkārt izteic praksē sastopamas līknes un kuŗu pazīmes praktiski viegli pielietojamas.

Apskatīsim dažus tādus algebrāisku nolīdzinājumu veidus. Pieņemam, ka izteiksmē $f(x,y)$ koeficienti pie x un y ir 1, un ka tanī nav absolūtā locekļa. Tad $f(x,y)$ pielīdzinot lineārai funkcijai no x vai y, dabūjam

1) $\quad f(x,y) = A + Bx$

2) $\quad f(x,y) = C + Dy$ vai arī $y = E + F.f(x,y)$

liekot pirmā gadijienā $f(x,y) = Y$ un otrā $f(x,y) = X$, dabūjam

1a) $\quad Y = A + Bx$

2a) $\quad y = E + FX$

Abos gadijienos dabūjam parastā tīklā taisnes ar mainīgiem parametriem A,B vai E un F.

Kā redzams, šinī gadijienā funkcionāls sakars starp y un x pieņemts tāds, ka parādības fizikalie apstākļi tiek noteikti ar diviem parametriem.

Apskatīsim dažus veidus, kad nol-mi (1) un (2) izteic otrās kārtības līknes.

Otrās kāpes pilnīgs nol-ms ir

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad ..(3)$$

No analitiskās geometrijas zinams, ka ja ar

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

apzīmējam nol-ma (3) visu koeficientu determinantu, tad

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}^2 \quad ....(5)$$

noteic, kāda līkne dota ar nol-mu (3).

$$\text{pie} \quad A_{33} \begin{matrix} > 0 & \text{ellipse} \\ = 0 & \text{parabola} \\ < 0 & \text{hiperbola} \end{matrix} \qquad ..(6)$$

Jāpiezīmē, ka šinīs izteiksmēs $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{31}$

Tālāk

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \qquad .(7)$$

Šeit α ir leņķis starp koordinātu sistemas x asi un līknes asi. Nol-mos (1) un (2) $f(x,y)$ jāpieņem tāda, lai koeficienti pie x un y būtu 1 un tā kā apskatam otrās kārtības līknes, tad ja $f(x,y)$ ir vesela funkcija, viņai vajaga būt augstākais otrās kāpes un ja tā ir lauzta, tad skaitītājiem vajaga būt augstākais otrās kāpes, un saucējam pirmās.

Ievērojot šos ierobežojumus, $f(x,y)$ tomēr var dot dažādus veidus, kuŗi visi izteic otrās kārtības līknes, un ievēro arī novērojumu koordinātu sistemas stāvokli pret dotās līknes asīm.

Kā redzams no (7), ja kādā no augšā norādītiem nol-mu veidiem atrodās a_{12}, tad tanī ir loceklis ar xy. Novērojuma koordinātu asis tad grieztas pret līknes asīm.

Līknes veidu noteic determinants A_{33}. Šeit iespējamas dažādas kombinācijas, izteicot $f(x,y)$. Tā, piemēram, ja no dotiem vērtību pāriem $(x_1 y_1), (x_2 y_2), \ldots (x_n y_n)$ veidojam vērtību pārus

$$\left(x_1 \; \frac{x_1}{y_1} = Y_1\right), \; \left(x_2 \; \frac{x_2}{y_2} = Y_2\right) \qquad \ldots \left(x_n \; \frac{x_n}{y_n} = Y_n\right)$$

un šo vērtību pārus attēlojot parastā koordinātu tīklā dabūjam punktus, kuŗi atrodās uz taisnes, tad, saskaņā ar (1) līknes nol-ms, kuŗa veidota ar $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_n y_n)$ ir

$$Y = \frac{x}{y} = A + Bx \qquad \ldots(8)$$

Parametrs A ir šīs taisnes nogrieznis uz Y ases un B tās virziena koeficients.

Nol-mu (8) varam arī rakstīt

$$Bxy + Ay - x = 0$$

Šeit $2a_{12} = B$ un tā tad $a_{12} = \frac{B}{2}$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{B^2}{4}$$

līkne tā tad hiperbola.

Tāļāk, ja no dotiem vērtību pāriem

$$(x_1 y_1), (x_2 y_2) \qquad (x_n y_n)$$

veidojam

$$\left(x_1 \; \frac{y_1}{x_1} = Y_1\right), \; \left(x_2 \; \frac{y_2}{x_2} = Y_2\right) \ldots \left(x_n \; \frac{y_n}{x_n} = Y_n\right)$$

un šos vērtību pārus attēlojot parastā tīklā, dabūjam taisni, tad līknes nol-ms, kuŗa attēlota ar vērtību pāriem (xy), ir

$$Y = \frac{y}{x} = A + Bx$$

vai arī

$$Bx^2 + Ax - y = 0$$

Tā kā še $a_{11} = B$, $a_{22} = 0$ un $a_{12} = 0$, tad

$$A_{33} = \begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Līkne tad ir parabola.

$f(x,y)$ veidu var arī pieņemt $\frac{x^2+y^2}{x}$, $\frac{x^2+y^2}{y}$ u.t.t.

Vajadzības gadijienā var ievest arī $x + a$, $y + b$ un mēģināt šos paplašinātos funkciju veidus, tādā kārtā palielinot parametru skaitu.

Viegli ieskatams, ka nol-mos (1) un (2) var $f(x,y)$ dot tādu veidu, lai tie, paturot labā pusē lineāru veidu, izteiktu trešās kārtības un augstākas kārtības līknes.

Piemēram, ja

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2} = Y$$

un parastā koordinātu tīklā attēlojot $(x_1Y_1),(x_2Y_2)\dots(x_nY_n)$ vērtības, dabūjam taisni, līknes nol-ms, kuŗa zīmēta ar vērtībām (xy) ir

$$\frac{x}{y^2} = A + Bx$$

vai arī

$$Bxy^2 + Ay^2 - x = 0$$

Arī šeit var ievest $x + a$ un $y + b$ un izdarīt attiecīgus mēģinājumus, atrodot a vai b, vai arī abus. Par $f(x,y)$ veida izvēli tiks tālāk norādīts.

e. Dotās līknes nolīdzinājuma atrašanas metode.

Šeit apskatāmi divi gadijieni: 1)dots līknes zars, 2)dota līkne ar visiem zariem un īpašiem punktiem.

Pirmais gadijiens praksē bieži sastopams un nol-ma atrašana dažkārt grūtāki izdarama, nekā otrā gadijienā.

Pieņemam, ka novērojuma vērtību pāri uzzīmēti parastā koordinātu tīklā. Lai attēlojumu dabūtu noteiktā formātā, dažkārt jāizdara deformācija, tikpat uz x ass, kā uz y ass. Deformācijas uz asīm parasti pieņem tādas, lai līknes vidējā pieskare veidotu ar x asi leņķi, apmēram 45°.

Tā kā līknes zars nedod pilnīgu ieskatu par līknes gaitu, tad, cik iespējams par šo gaitu jānoskaidro, ņemot vērā ar līkni attēlotās problemas fizikālos apstākļus.

Šeit jānoskaidro jautājieni

1)vai līkne neperiodiska vai periodiska,
2)vai līknei var būt ekstremi un infleksijas punkti,
3)vai līkne monotona, augoša vai dilstoša,
4)kāds y, kad $x = 0$ un $x = \infty$,
5)vai līknes likums novērojuma robežās viens jeb tas mainās,
6)ņemot vērā iegūtos datus, salīdzinam uzzīmēto līkni ar pazīstamām līknēm. Salīdzinājums daudzkārt rāda, pie kādas līkņu saimes dotā līkne varētu piederēt un arī vai līknes nolīdzinājumā varētu atrasties pastāvīgie lielumi a un b,
7)ja augšējie dati dod iemeslu pieņemt, ka dotā līkne varētu piederēt kādai saimei, piemēram eksponenciāllīknēm, tad pārbaudam, vai tā izpilda saimes pazīmes. Tādā gadijienā attēlojam līknes vērtību pārus (x,y) vienkāršā logaritmu tīklā, kuŗā uz y ass logaritmisks dalījums. Ja attēlojums še dod taisni, tad dotā līkne ir eksponenciāllīkne, un tā tad tā nolīdzinājums atrasts. Kā dabū nol-ma parametru vērtības, tiks apskatīts sekojošā piemērā.

Ja attēlojums nedotu taisni, tad pārbaudam, vai līkne pieder varbūt pie parabolisku-hiperbolisku līkņu saimes, vai arī pie logaritmiskām līknēm, pirmā gadijienā attēlojot dotās līknes vērtību pārus (x,y) divkāršā logaritmu tīklā, otrā gadijienā vienkāršā, kuŗā uz x ass logaritmisks iedalījums.

Visos šinīs gadijumos, ja taisni nedabūjam, jāizdara arī mēģinājumi, pieņemot a un b. Bet ja arī tad attēlojums nedod taisni, tad mēģinam atsevišķus nol-mu veidus, kuŗi, kā redzējam, dod attēlojumus taisnes veidā parastā tīklā.

No augšējā ieskatams, ka dotās līknes nol-ma atrašana lielā mērā atkarīga no intuicijas un mēģinājumiem, kuŗos vadamies no līknes veida un salīdzinājumiem ar līknēm, kuŗu nol-mi zināmi. Tādos apstākļos darba izvešanai var dot tikai augšējos vispārējos norādijumus, kuŗu pielietošanu apskatīsim sekojošos piemēros.

Piemērs 1.

Zīmējuma Nr.24 tabulā atzīmēti, 118 voltu tungstena kvēllampas novērotie: voltažs x un strāvas stiprums y. Tabulas vērtību pāri (x,y), uzzīmēti vienkāršā tīklā, dod attēlojumu - līkni. Parādības fizikalie apstākļi dod, ka pie x = o arī y=o.

Līknes veids dod iemeslu pieņemt, ka tā varētu būt paraboliska. Šo pieņēmumu pārbaudam, uzzīmējot tabulas vērtību pārus (x,y) divkāršā logaritmu tīklā. Kā redzams no zīmējuma Nr.25, attēlotie punkti visi atrodās uz taisnes un tādēļ pieņēmums, ka dotā līkne paraboliska, ir pareizs. Šīs paraboliskās līknes nol-ms tad ir

$$y = \alpha x^m$$

Parametru α un rādītāju m dabūjam sekojošā kārtā

$$\log y = \log \alpha + m \log x$$

Logaritmiskā tīklā izdarītā dēformācija, nogriezti

$$\xi = \frac{x}{2}$$

$$\eta = 50y$$

tādēļ augšējā nol-mā jāieved

$$x = 2\xi$$

$$y = \frac{\eta}{50}$$

tā tad

$$\log \frac{\eta}{50} = \log \alpha + m \log(2\xi)$$

$$\log\eta - \log 50 = \log \alpha + m \log 2 + m \log\xi$$

$$\log\eta = \underbrace{(\log 50 + \log \alpha + m \log 2)}_{A} + m \log\xi$$

Kā redzams, taisnes nogrieznis uz y ases ir A un no zīmējuma dabūjam A = log 1.2 .Taisnes virziena koeficientu m dabūjam no zīmējuma

$$m = \operatorname{tg}\tau = 0.62$$

Pielīdzinot iekavas A vērtībai log 1.2 un ievērojot, ka m=0.62 dabūjam

$$\log 50 + \log \alpha + m \log 2 = \log 1.2$$

$$\log \alpha = \log 1.2 - (\log 50 + 0.62 \log 2)$$

$$\alpha = 0.016$$

Tā tad dotās līknes nol-ms ir

$$y = 0.016\ x^{0.62}$$

Parametra α un kāpes rādītāja m vērtības dabūjam precizāki, tos aprēķinot, pielietojot analitisku paņēmienu, ar prof Dr. Steinmeca ieteikto "$\Sigma\Delta$" metodi.

Šis paņēmiens parādīts zīmējumā Nr.24 un dod $m = 0.6$ un $\alpha = 0.01625$, un tā tad

$$y = 0.01625\ x^{0.6}$$

ir dotās līknes nolīdzinājums.

No beidzamā nol-me dabūtās y vērtības atšķirās no novērotiem y ar vidējo kļūdu $\pm$ o.oo3.

Rakstot

$$y = i \quad \text{strāvas stiprums}$$
$$x = e \quad \text{voltu skaits}$$

dabūjam

$$i = 0.01625\ e^{0.6}$$

Kā zinams, ja w = watti, tad

$$w = ei$$

un ja r = pretestība, tad

$$e = ri$$

Ievērojot šīs izteiksmes, dabūjam

$$w = e.i = e.0{,}01625\ e^{0.6} = 0.01625\ e^{1.6}$$

$$r = \frac{e}{i} = \frac{e}{0.01625\ e^{0.6}} = \frac{e^{0.4}}{0.01625}$$

Izslēdzot e starp pēdējiem nol-miem, dabūjam

$$w = 0.01625^{6}.r^{4} = 11.35\ r^{4}\ 10^{-10}$$

Pieņemot, ka r proporcionēls absolūtai temperatūrai T un ievērojot, ka lampā ievadītā energija tiek no tās izstarota, tad apzīmējot izstarošanu ar R, dabūjam

$$R = k\ T^{4} \quad (k = \text{konst.})$$

Nol-ms izteic, ka radiacija proporcionāla absolūtās temperatūras ceturtai kāpei. Šī izteiksme ir melnu ķermeņu radiacijas likums. Tā tad tungstena lampas volt-amperu raksturojuma nol-ms stāv sakarā ar radiacijas likumu un tādēļ uzskatams par racionālu nol-mu.

Piemērs 2.

Zīmējumā Nr.26 un piederošā tabulā attēlota jau agrāk apskatītā problema par spēka N noteikšanu, kad dots spēks M un virve aptver cilindru ar leņķi φ.

Problemas fizikalie apstākļi norāda, ka pie $\varphi = o$, $y = \frac{N}{M} = 1$ un pie $\varphi = \infty$ arī $y = \infty$.

Līknes veids rada iespaidu, ka tā varētu būt paraboliska vai arī eksponenciāla līkne. Pirmā gadijienā līknes nol-ms varētu būt

$$y - 1 = \alpha.\varphi^{m} \qquad \text{jo pie } \varphi = o\ ,\ y = 1.$$

otrā gadijienā

$$y = \alpha\varepsilon^{m\varphi}$$

Abi šie gadijieni būtu jāapskata.

Apskatam otru gadijienu kā vienkāršāko, t.i. pieņemam, ka līkne eksponenciāla un tādēļ attēlojam tabulas vērtību pārus vienkāršā logaritmiskā tīklā, ar logaritmisku dalijumu uz y ass. Attēlojums parādīts zīmējumā Nr.27 un redzams, ka to var pieņemt par taisni. Tas norāda, ka dato līkni var uzskatīt par eksponenciāllīkni. Līknes nolīdzinājums tādēļ ir

$$y = \alpha\varepsilon^{m\varphi}$$

Logaritmējot dabūjam

$$\log y = \log \alpha + m \log \varepsilon . \varphi$$

Tā kā zīmējumā Nr.27 līkne iet caur koordinātu sākumu, tad viņas nogrieznis uz y ass $\log \alpha = 0$ un tādēļ $\alpha = 1$.

Taisnes virziena koeficientu dabūjam no zīmējuma

$$\operatorname{tg} \tau = 2.05$$

Šeit jāievēro, ka attēlojums logaritmiskā tīklā izdarīts ar dēformācijām 1) y ases virzienā iedalījuma vienība ir 9 reizes lielāka nekā φ ases virzienā, kuŗā katra vienība attēlo π, tādēļ taisnes īstais virziens ir

$$\frac{2.05}{9 \cdot 3.14}$$

No nol-ma redzams, ka taisnes īstais virziens ir

$$m \log \varepsilon$$

un tādēļ

$$m \log \varepsilon, = \frac{2.05}{9 \cdot 3.14}$$

Pieņemot, ka $\varepsilon = e = 2.71\ldots$ dabūjam

$$m = \frac{2.05}{9 \cdot 3.14 \cdot \log 2.71} = \sim 0.166$$

Pie šāda pieņēmuma dabūtā m vērtība taisni izteic problēmu iespaidojošās berzes koeficientu. Līknes nol-ms ar šīm vērtībām tad ir

$$y = \frac{N}{M} = e^{m\varphi}$$

Šeit

$e = 2.71\ldots$; m = berzes koeficients starp virvi un cilindru, φ = aptveres leņķis.

Beidzamais nol-ms ir tas pats, kādu dabū teoretiskā ceļā, tādēļ tas uzskatams par racionālu.

Piemērs 3.

Zīmējuma Nr.28 tabulas vērtības y apzīmē voltus un x amperus. Tabulas vērtību pāri dod magnetita loka volt-amperu raksturojumu. Tabulas vērtību pāri dod vienkāršā parastā tīklā zīmējuma Nr.28 līkni.

Problemas fizikalie apstākļi pielaiž, ka varētu būt pastāvīgs lielums b.

Līknes veids dod iemeslu pieņemt, ka tā hiperboliska. Šo pieņēmumu pārbaudam, attēlojot tabulas vērtību pārus divkāršā logaritmiskā tīklā.

Zīmējumā Nr.29 šis attēlojums nedod taisni, bet gan līkni I, kuŗa sākumā nedaudz atšķirās no taisnes. Ievērojot norādīto, ka y ases virzienā pielaižama konstanta locekļa b varbūtība, pieņemam līknes nol-ma veidā

$$y - b = \alpha x^m$$

Ja līkne hiperboliska, tad mēģinājumu ceļā vajag varēt atrast tādu b vērtību, pie kuŗas vērtību pāru $[x,(y-b)]$ attēlojumi divkāršā logaritmu tīklā dod taisni.

Pieņemam, ka b = 40 un attēlojam vērtību pārus

x	y - b
0.5	160-40=120
1	120-40= 80
2	94-40= 54

u.t.t.

divkāršā logaritmiskā tīklā. Attēlojums dod zīmējumā Nr.29 līkni II. Līkne I pret augšu konkava, līkne II pret augšu konveksa. Šis apstāklis norāda, ka pie kādas b vērtības starp 0 un 40 attēlojums varētu būt taisne. Pieņemam b = 30 un attēlojam vērtību pārus [x,(y-30)]. Šis attēlojums dod zīmējumā Nr.29 taisni III. Tā tad līkne ir hiperboliska ar nol-mu

$$y - 30 = \alpha\, x^{m}$$

Parametru α un kāpes rādītāju m dabūjam no zīmējuma sekojošā kārtā.

Pie attēlošanas, zīmējumā Nr.29 uz x ases nav izdarīta deformācija, bet uz y ases attēloti $\frac{1}{10}$ y , tā tad

$$\eta = \frac{y - 30}{10}$$

$$y - 30 = 10\eta$$

$$10\eta = \alpha\, x^{m}$$

$$\eta = \frac{\alpha}{10}\, x^{m}$$

$$\log\eta = \log\frac{\alpha}{10} + m \log x$$

Kā redzams, taisnes III virziena koeficients ir $tg\tau = m$ un šo vērtību dabūjam no zīmējuma

$$m = - 0.5$$

Taisnes III nogrieznis uz y ases ir $\frac{\alpha}{10}$ un no zīmējuma dabūjam

$$\frac{\alpha}{10} = 9.1 \quad , \text{ tā tad } \quad \alpha = 91.$$

Tā tad dotās līknes nolīdzinājums ir

$$y - 30 = 91\, x^{-0.5}$$

vai arī

$$y = 30 + \frac{91}{\sqrt{x}}$$

Analitiskā ceļā ar "$\Sigma\Delta$" metodes palīdzību dabūjam α = 90.4 un m = 0.5.

Piemērs 4.

Zīmējuma Nr.30 tabulas vērtību pāri, H un B, attēloti parastā tīklā, dod līkni I, kuras veids dod paraboliskas līknes iespaidu.

Attēlojums divkāršā logaritmiskā tīklā nedod taisni, tāpat, ievedot a un b, nevar atrast tādas šo lielumu vērtības, pie kurām attēlojums būtu taisne. Arī mēģinājumi vienkāršā logaritmiskā tīklā nedod taisni, bet ievedot kā ordinātas $\frac{H}{B}$ vērtības un kā abscisas H, dabūjam vienkāršā parastā tīklā taisni, izņemot trīs pirmos punktus. Tas norāda, ka ar vērtību pāriem (H,B) dotās parādības gaita, novērojumu robežās nav izteicāma ar vienu likumu. Līknes nol-ms, sākot ar ceturto punktu, ir

$$\frac{H}{B} = b + mH$$

Kāds likums, t.i. kāds nol-ms līknei starp pirmo un ceturto punktu, būtu atsevišķi izpētams. Parametrus b un m dabūjam no zīmējuma. b ir taisnes nogrieznis uz y ases

$$b = 0.2$$

m dabūjam kā taisnes virziena koeficientu

$$m = 0.0506$$

Analitiskš paņēmiens dod

$$b = 0.211$$
$$m = 0.0507$$

Tā tad līknes nol-ms, sākot ar ceturto punktu, ir

$$\frac{H}{B} = 0.211 + 0.0507\ H$$

vai arī

$$B = \frac{H}{0.211 + 0.0507}$$

Tabulā parādīts B_1, kas aprēķināts ar šīs formulas palīdzību. Redzams, ka B_1 maz atšķiras no B, sākot ar ceturto punktu.
Sinī gadijienā līknes nol-ma atrašanai pielietots agrāk norādītais paņēmiens, mēginot atsevišķu nol-ma veidu.

Līknes nolīdzinājuma atrašana, kad doti visi līknes zari un īpaši punkti.

Šinī gadijienā pielietojam sekojošas izteiksmes, secinājumus no līkņu teorijas:

1) Ja ar taisni varam krustot doto līkni lielākais n punktos, tad līknes kārtība ir vismaz n.
2) Ja līknei ir n ekstremi, tad līknes kārtība ir vismaz n+1.
3) Ja līknei ir n infleksijas punkti, tad līknes kārtība ir vismaz n + 2.
4) Ja līkne simmetriska pret x asi, tad līknes nol-mā nevar būt locekļi ar y pirmā kāpē un arī, ja līkne simmetriska pret y asi, tad tās nol-mā nevar būt locekļi ar x pirmā kāpē.
5) Ja līkne simmetriska pret mediānu, tad tās nol-mam vajaga būt tādam, ka tas nemainās, kad x vietā liekam y un y vietā x.
6) Ja līknei ir centrs koordinātu sākumā, tad tās nol-mam vajaga būt tādam, kā tas nemainās, kad x vietā liekam -x un y vietā -y.
7) Ja līkne iet caur koordinātu sākumu, tad tās nol-mā nav absolūtā locekļa.
8) Ja līknei dubultpunkts koordinātu sākumā, tad tās nol-mā nav pirmās dimenzijas locekļu.
9) Līknes asimptotas $y = \alpha x + \beta$ virziena koeficientu α un nogriezni uz y ass β dabūjam šādi:
Ievedot līknes nol-mā $y = \alpha x + \beta$ dabūjam n-tās kāpes nolīdzinājumu attiecībā uz x. Pielīdzinot nullei koeficientu pie x^n un x^{n-1}, dabūjam divus nol-mus, no kuŗiem dabūjam α un β.
10) līknes apoksimaciju pie bezgalīgi maziem x dabūjam, atmetot augstākās dimenzijas locekļus, atstājot nol-mā zemākās dimenzijas locekļus.

Piemērs 1.

Pieņemam, ka dota līkne zīmējumā Nr.31 un ka tabulā atzīmētie vērtību pāri atrodās uz dotās līknes. Pieņemsim arī, ka trešā kvadrantā līkne nāk no bezgalības un pirmā kvadrantā iet bezgalībā.

1) Tā kā līkni ar taisni var krustot trijos punktos un līknei ir viens infleksijas punkts un divi ekstremi, tad pēc augšējā tas norāda, ka līknes nol-ms ir trešās kāpes.
2) Zīmējums rāda, ka katram x atbilst tikai viens y, tā tad šim trešās kāpes nol-mam vajag dabūt veidu

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Parametru a_0 dabūjam ievērojot, ka pie x o, y 5, tā tad

$$a_0 = 5$$

No nol-ma

$$y'' = 0$$

dabūjam infleksijas punktu x koordinātas, šinī gadijienā infleksijas punkta koordināta x = o, tā tad

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 . 0 = 0$$

seko

$$a_2 = 0$$

Tā tad līknes nol-ms dabū veidu

$$y = 5 + a_1 x + a_3 x^3$$

Parametrus a_1 un a_3 dabūjam, ievedot nol-mā vērtību pārus (1,-3) un (2,-5)

$$-3 = 5 \quad a_1 1 + a_3 1^3$$

$$-5 = 5 + a_1 2 + a_3 2^3$$

No šiem nol-miem dabūjam

$$a_1 = -9 \quad \text{un} \quad a_3 = 1$$

Tā tad galīgi līknes nol-ms ir

$$y = 5 - 9x + x^3$$

Šo nol-mu pārbaudam, ievietojot tanī pārējās tabulas x vērtības. Ja attiecošās y vērtības dabūjem tādas, kādas atrodās tabulā, tad atrastais nol-ms novērojuma robežās ir dotās līknes nol-ms. Šinī gadijienā pārbaudē, redzams, dos apstiprinājušos rezultātus, jo tabulas vērtības sastādītas, izejot no nol-ma, kuŗš ir tāds pats, kā atrastais.

Piemērs 2.

Zīmējums Nr.32 rāda ellipsi ar pusesīm a un b. Pieņeram, ka šīs līknes nol-ms nav zinams, bet jāatrod.

1)Taisne krusto līkni divos punktos, tā tad līknes nol-ms ir vismaz otrās kāpes.

2)Līkne simmetriska pret x un y asīm, tādēļ tās nol-mā nevar atrasties locekļi ar x un y pirmā kāpē.

Pieņemot, ka līknes nol-ms otrās kāpes, ievērojot augšējo, tas dabū veidu

$$Ax^2 + By^2 + C = 0$$

Liekam

$$y = \alpha x$$

$$x^2 (A + B\alpha^2) + C = 0$$

No

$$A + B\alpha^2 = C$$

dabūjam virziena koeficientu α uz bezgalīgi tālo punktu, bet tā kā dotai līknei nav reālu bezgalīgi tālo punktu, tad vērtībai

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{A}{B}}$$

vajaga būt imaginārai; seko, ka A un B vajaga būt arvienādām zīmēm Pieņemam, ka A un B lielāki par 0, bet tad līknes nolīdzinājums rāda, ka C $<$ 0.

Līknes nol-mu varam rakstīt

$$\frac{A}{-C}x^2+\frac{B}{-C}y^2 \quad 1=0$$

tad

$$\frac{A}{-C}>0 \text{ un arī } \frac{B}{-C}>0$$

Ievietojam nol-mā $x = o$, $y \quad b$,
tad

$$\frac{B}{-C}=\frac{1}{b^2}$$

Ievietojot $x = a$, $y = 0$, dabūjam

$$\frac{A}{-C}=\frac{1}{a^2}$$

Tā tad galīgi līknes nol-ms ir

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

Šo nol-mu pārbaudam, ievietojot tanī no zīmējuma ņemtus vērtību pārus, ja tie nol-mu izpilda, kā tas notiktu pie šīs līknes, tad augšējais nol-ms ir dotās līknes nol-ms.

Piemērs 3.

Atrast zīmējumā Nr.33 dotās līknes nol-mu

1)Taisne krusto līkni lielākais trijos punktos,tādēļ līknes nol-ms vismaz trešās kāpes.

Pieņemam, ka nol-ms trešās kāpes, tad tas dabū veidu

$$Ax^3+By^3+Cx^2y+Dxy^2+Ex^2+Fy^2+Gxy+Hx+Ky+L=0 \quad ..(1)$$

2)Līkne iet caur koordinātu sākumu, tādēļ $L = 0$.

3)Tā kā līkne simmetriska pret mediānu, tad nol-ms nevar mainīties, ja x vietā liekam y un y vietā x. Seko

$$A = B \quad , \quad C = D \quad , \quad E = F \quad , \quad H = K$$

4)Tā kā līknei koordinātu sākumā dubultpunkts, tad līknes nol-mā nevar būt pirmās dimenzijas locekļi. Seko

$$H = K = 0$$

Ievērojot augšējo, nol-ms (1) dabū veidu

$$Ax^3+Ay^3+Cx^2y+Cxy^2+Ex^2+Ey^2+Gxy=0$$

Nodalot nol-mu ar A,dabūjam

$$x^3+\ y^3+\frac{C}{A}x^2y+\frac{C}{A}xy^2+\frac{E}{A}x^2+\frac{E}{A}y^2+\frac{G}{A}xy=0$$

Ievedot attiecību vietā apzīmes P,Q,R, dabūjam nol-ma veidu

$$x^3+\ y^3+Px^2y+Pxy^2+Qx^2+Qy^2+Rxy=0 \qquad ....(2)$$

Parametrus P,Q,R dabūjam sekojošā ceļā. Līknes aproksimacija pie bezgalīgi maziem x ir divas taisnes - koordinātu asis,ar virziena koeficientiem

$$\frac{y}{x}=0 \quad \text{un} \quad \frac{y}{x}=\infty$$

Šo aproksimaciju dabūjam, atmetot nol-mā trešās dimenzijas locekļus, tad dabūjam

$$Qx^2+Qy^2+Rxy=0$$

Pārveidojot dabūjam

$$Q(\frac{y}{x})^2+R(\frac{y}{x}) \quad + \quad Q=0$$

Tā kā pēc augšējā vajag būt $\frac{y}{x} = 0$ tad redzams, ka

$$Q = 0$$

bet ja $Q = 0$, tad saskaņā ar nol-mu teoriju augšējā otrās kāpes nol-ma arī viena sakne $\frac{y}{x} = \infty$.

Tā tad, ja $Q = 0$, tad izpildīti augšējie no līknes veida sekojošie vajadzīgie noteikumi

$$\frac{y}{x} = 0 \quad \text{un} \quad \frac{y}{x} = \infty$$

Ievērojot, ka $Q = 0$, nol-ms (2) dabū veidu

$$x^3 + y^3 + P(x^2 y \quad xy^2) + Rxy = 0$$

Lai dabūtu koeficientus P un Q vajadzīgi divi noteikumi,kuŗus dabūjam, ievērojot, ka dotai līknei ir viena reāla asimptota. Pieņemot asimptotas nol-mu

$$y = \alpha x + \beta$$

un ievietojot šo izteiksmi augšējā nol-mā, dabūjam

$$x^3 [1 + \alpha^3 + P(\alpha + \alpha^2)] + x^2 [3\alpha^2 \beta + P(\beta + 2\alpha\beta) + R\alpha] + x[\ldots] = 0$$

Asimptota pieskarās līknei bezgalīgi tālā punktā, tādēļ augšējam nol-mam vajaga būt divām saknēm $x_1 = x_2 = \infty$. Kā zinams no nol-mu teorijas, noteikumus, kas nol-mam ir divas saknes bezgalīgas dabūjam, nolīdzinot nullei koeficientus pie x^3 un x^2, tā tad

$$1 + \alpha^3 + P(\alpha + \alpha^2) = 0$$

$$3\alpha^2 \beta + P(\beta + 2\alpha\beta) + R\alpha = 0$$

Ja pirmā nol-mā $P = 0$, tad $\alpha = -1$, un tad līknei, kuŗas nol-ms

$$x^3 + y^3 + Rxy = 0$$

asimptotas virziena koeficients ir -1, kā tas arī ir pie dotās līknes.

Liekot otrā nol-mā $P = 0$, dabūjam

$$3\alpha^2 \beta + R\alpha = 0$$

vai arī

$$3\alpha\beta + R = 0$$

$$R = -3\alpha\beta$$

Tā kā dotai līknei $\alpha = -1$ un $\beta = -1$, tad

$$R = -(3 \cdot -1 \cdot -1) = -3$$

un dotās līknes nol-ms dabū veidu

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

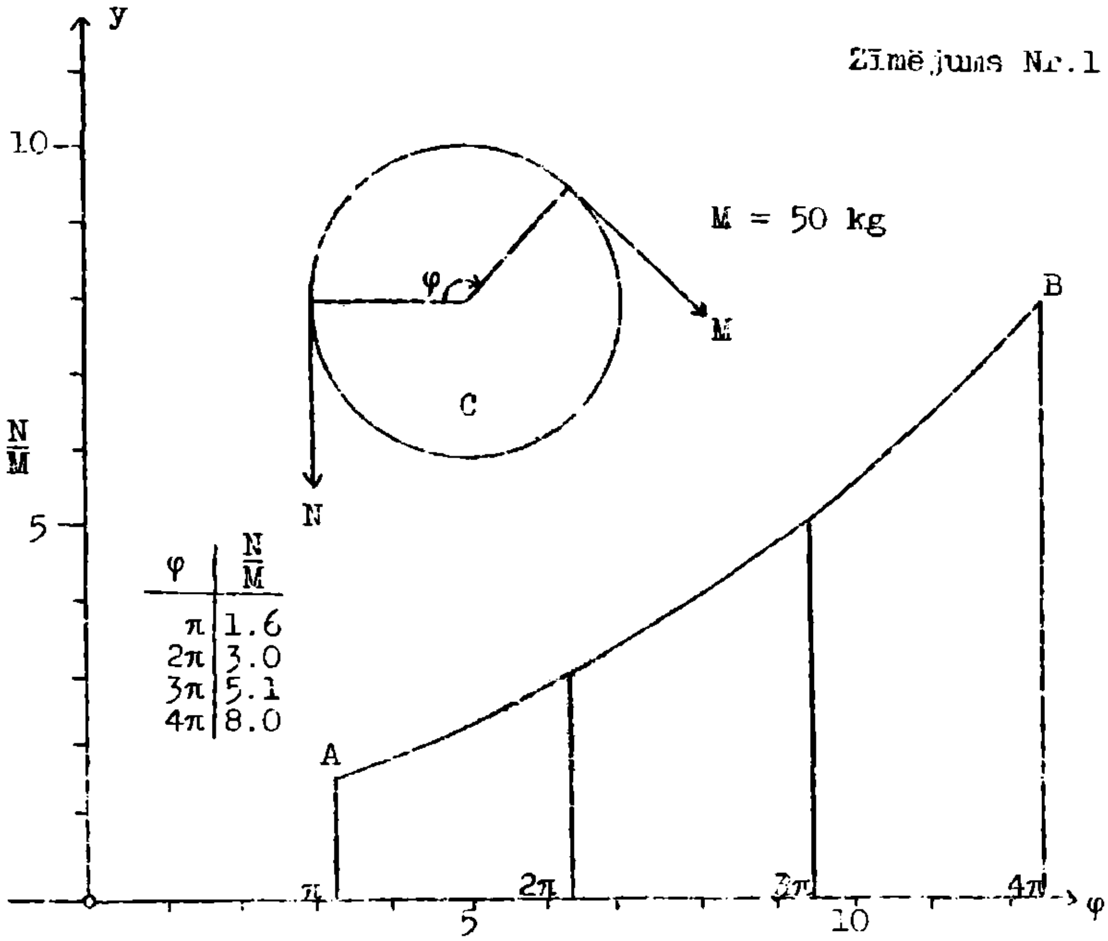
Šo nol-mu pārbaudam, tajā ievietojot vērtību pārus no zīmējuma, ja tie nol-mu apmierina, tad tas uzskatams par dotās līknes nolīdzinājumu.

Zīmējums dod, ka pie $x = \sqrt[3]{2}$, $y = \sqrt[3]{4}$. Ievietojot nol-mā šīs vērtības redzams, ka tas apmierināts.

Augšējos piemēros pieņemts, ka līknes gaitā ir tikai viens likums.

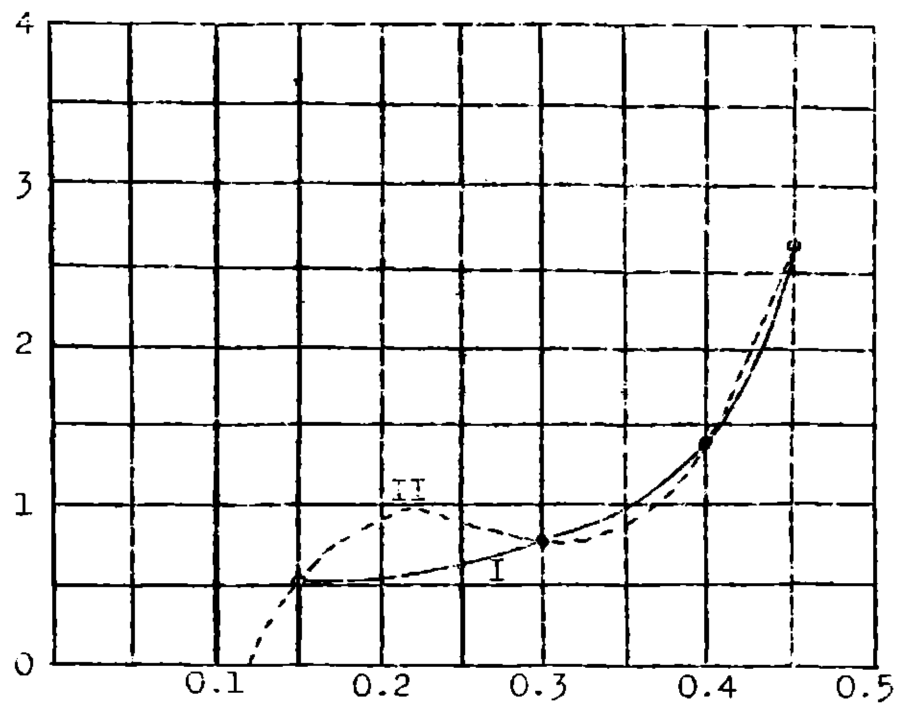
------ oOo ------

Zīmējums Nr.1.

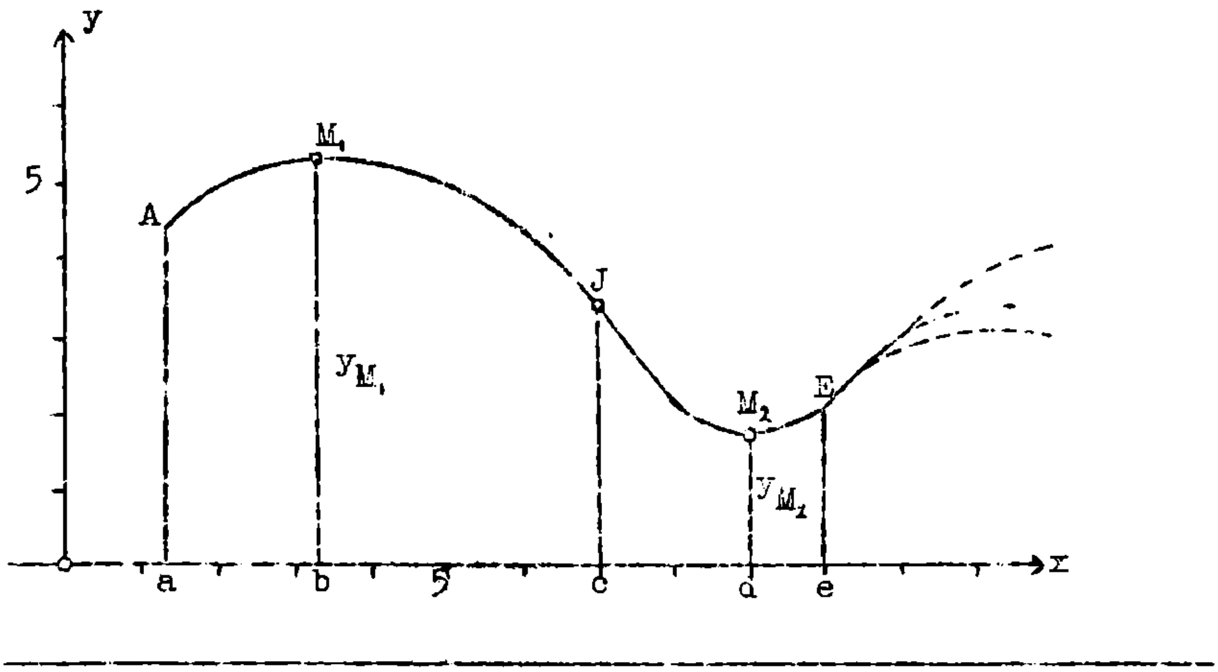


$$y = \frac{N}{M} = e^{\mu\varphi} \qquad .(\beta); \quad y = a + b\varphi + c\varphi^2 + d\varphi^3 \qquad .(\alpha)$$

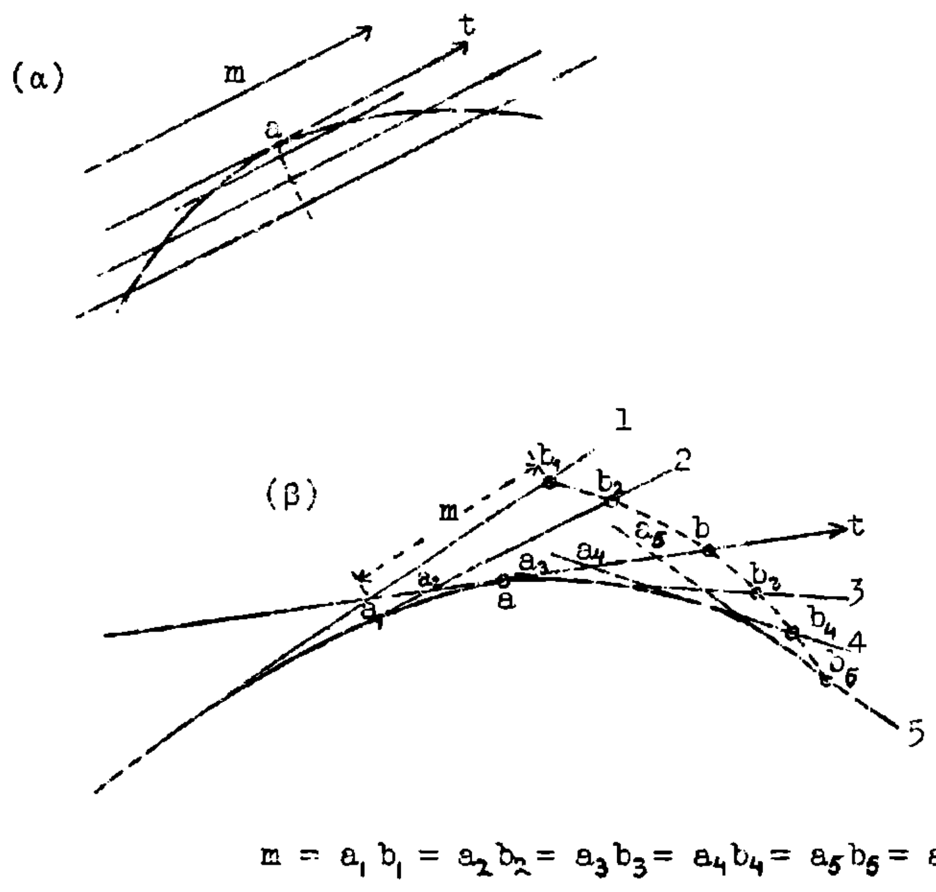
Zīmējums Nr.2.



Zīmējums Nr.3.

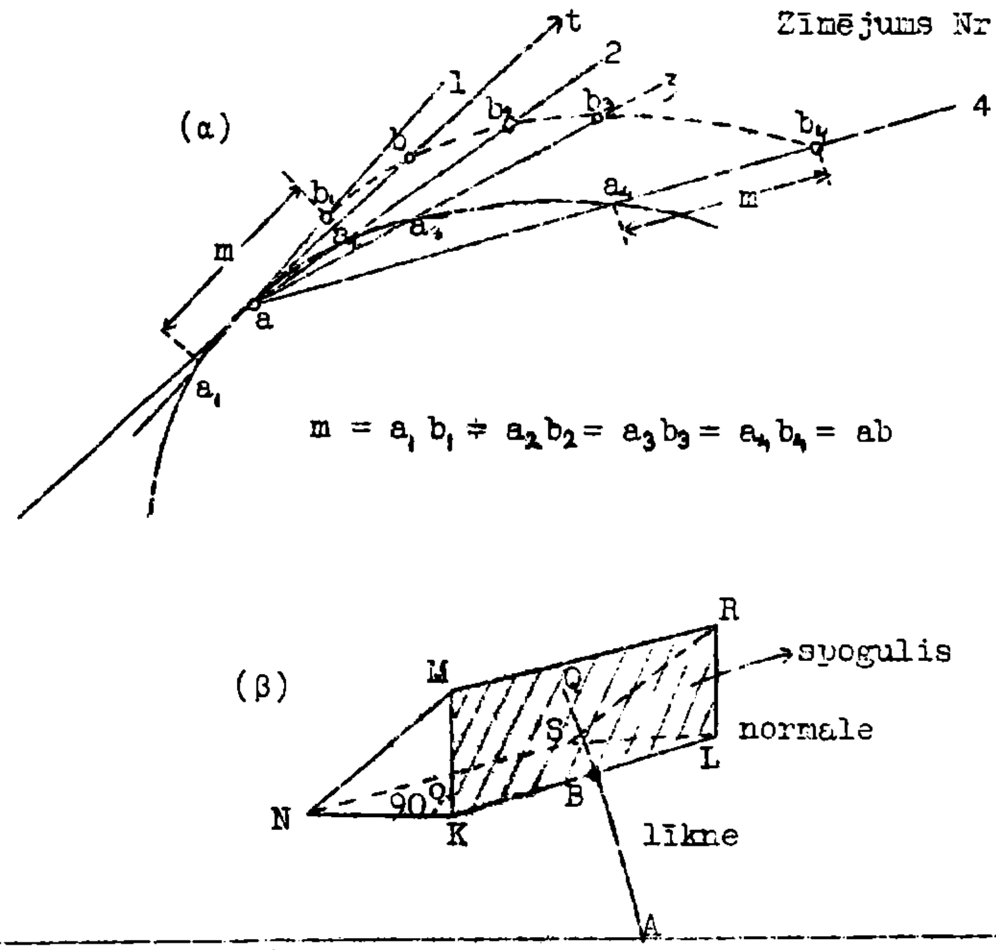


Zīmējums Nr.4.

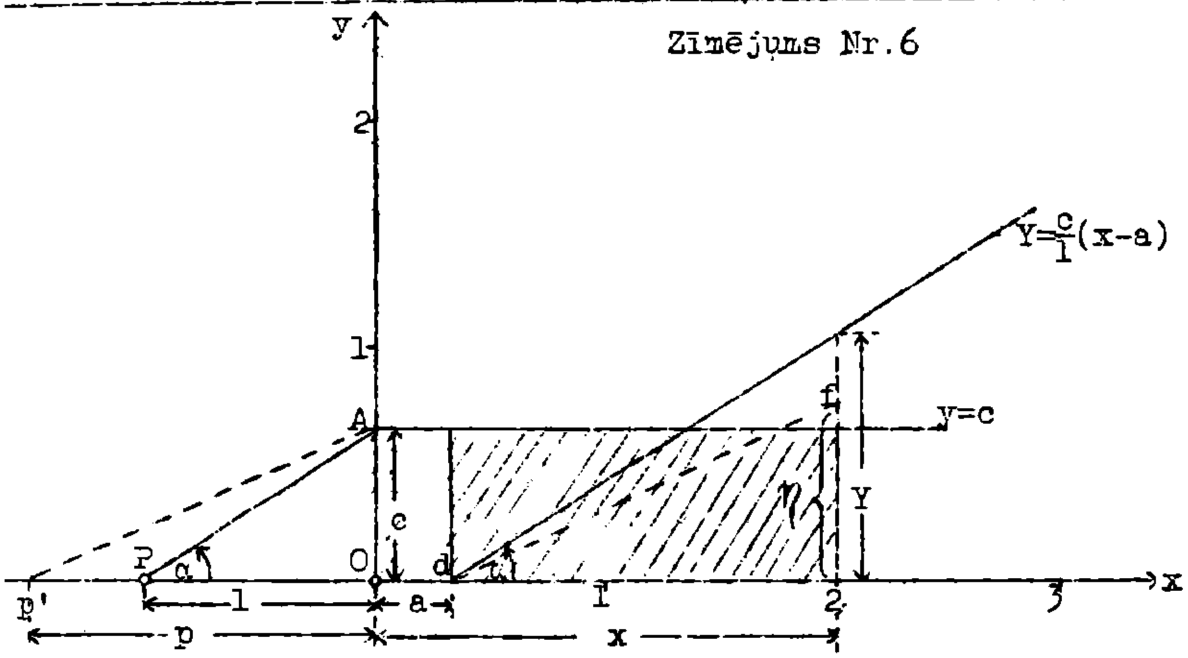


$$m = a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = a_4 b_4 = a_5 b_5 = ab$$

Zīmējums Nr.5



Zīmējums Nr.6



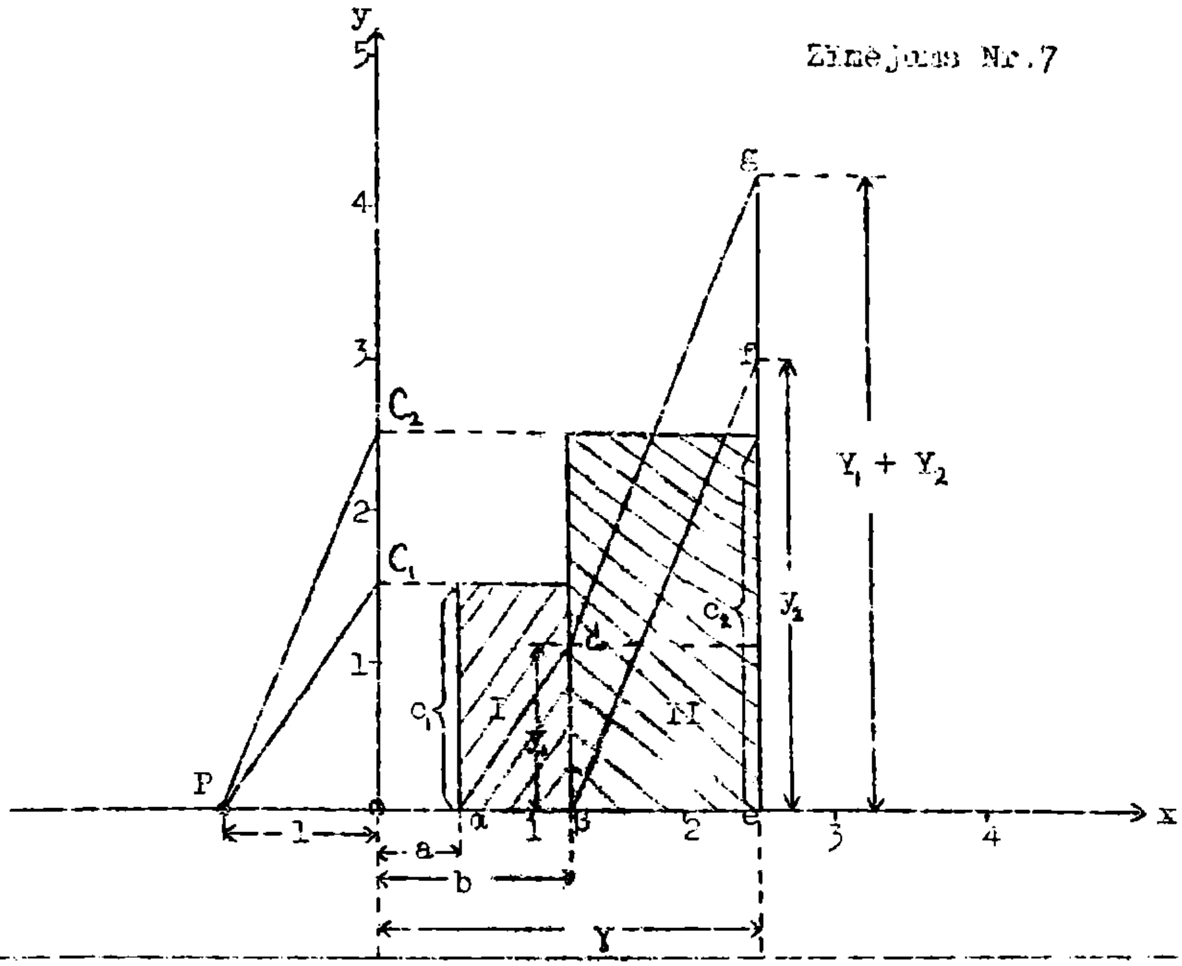
$$L_a^x = \int_a^x y\,dx = \int_a^x c\,dx = c|x|_a^x = c(x - a)$$

$$\frac{Y}{c} = \frac{x - a}{l}$$

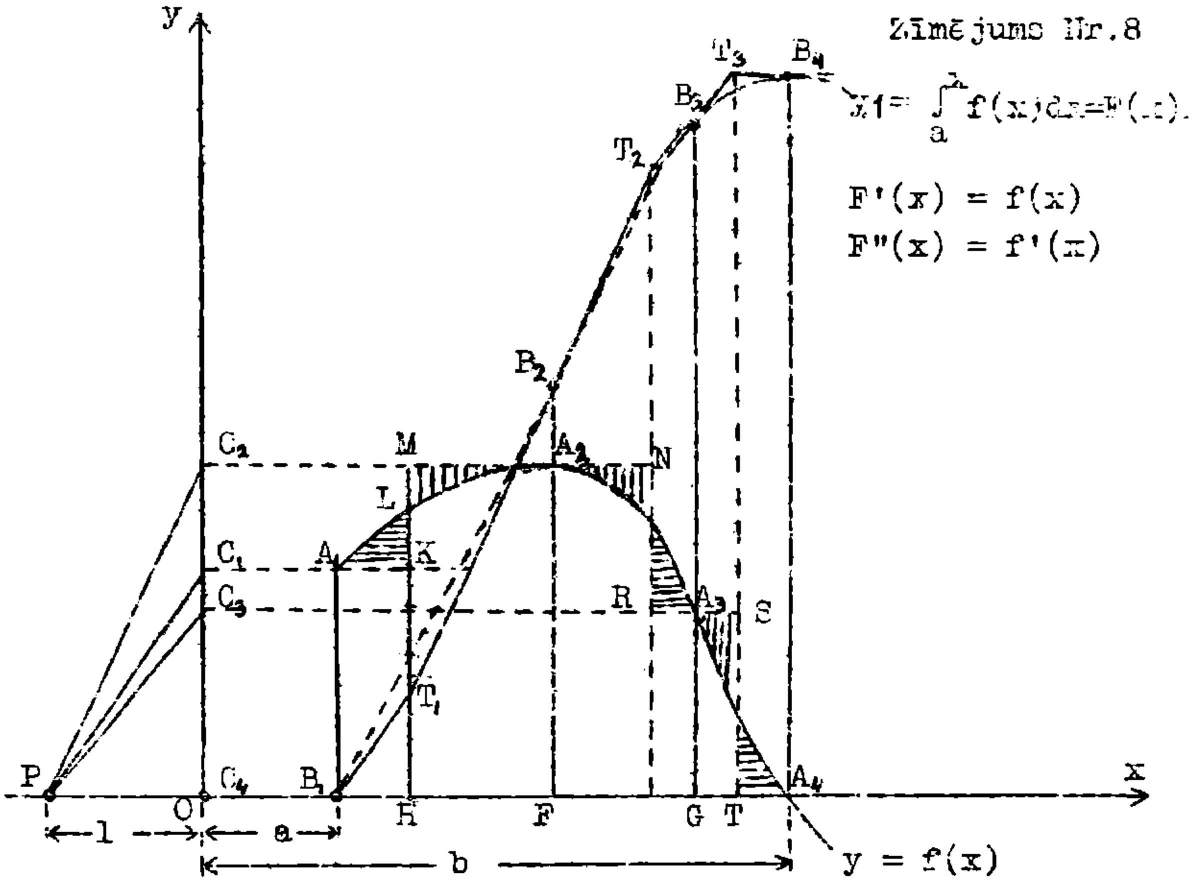
$$l.Y = c(x - a) = \int_a^x y\,dx$$

P - pols.
PO - pola distance.
PA - virziena stars

Zīmējums Nr.7



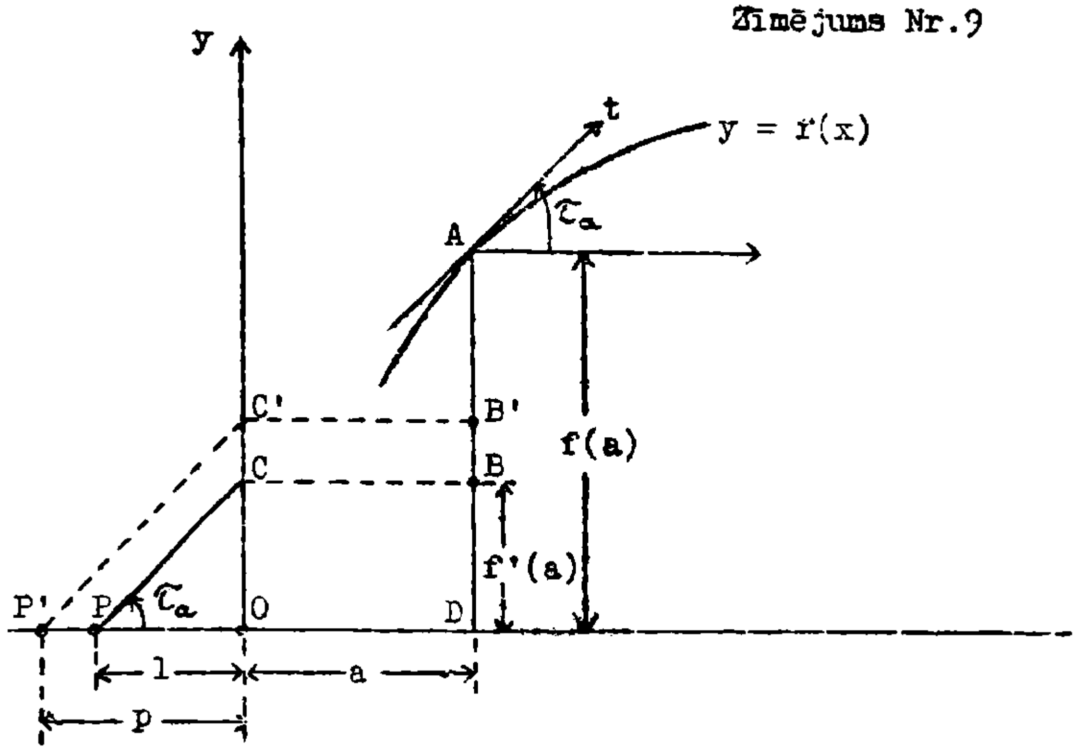
Zīmējums Nr.8



Punktā B_2 integrāllīknei ir infleksijas punkts.

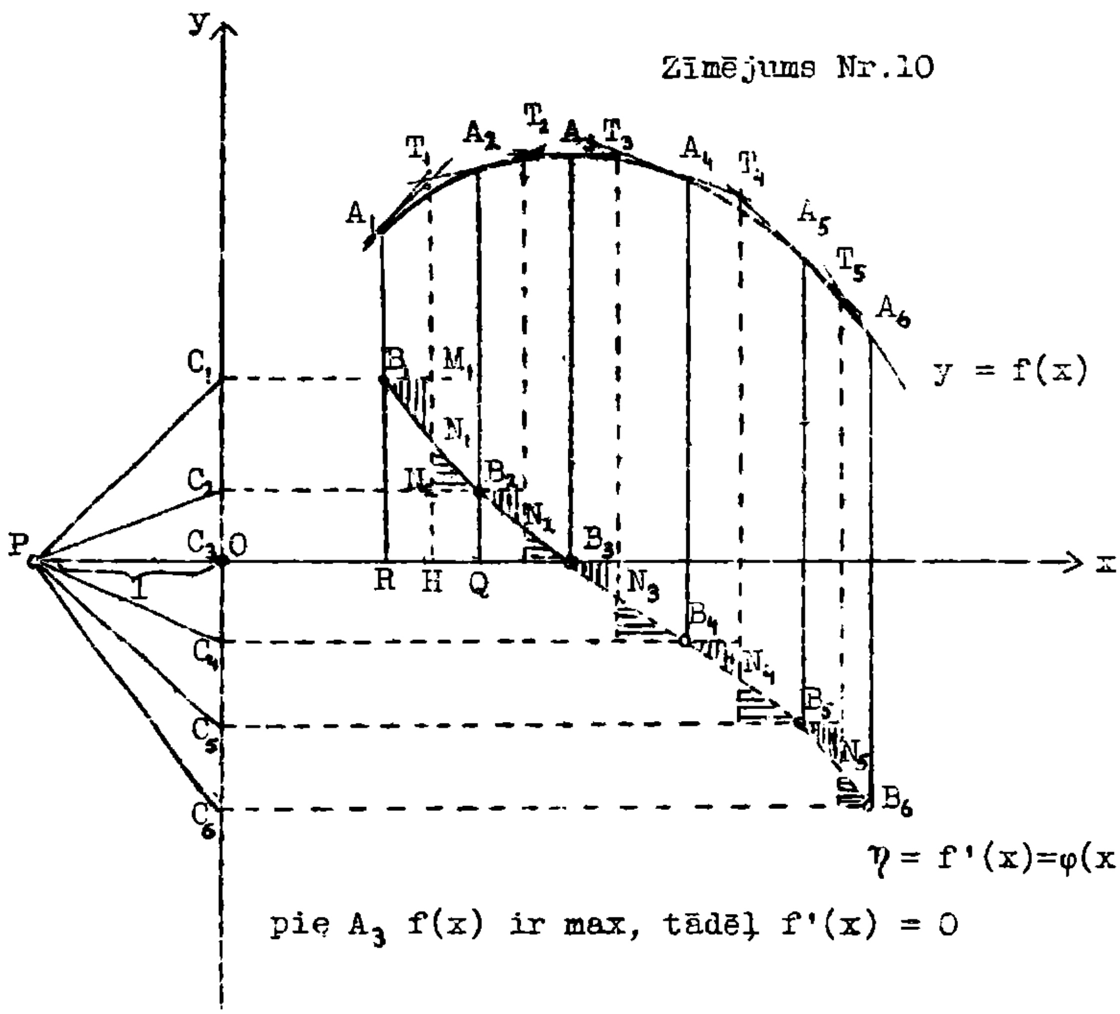
" B_4 " " maksimuma "

Zīmējums Nr.9



$\frac{OC}{l} = \tan \tau_a = f'(a)$

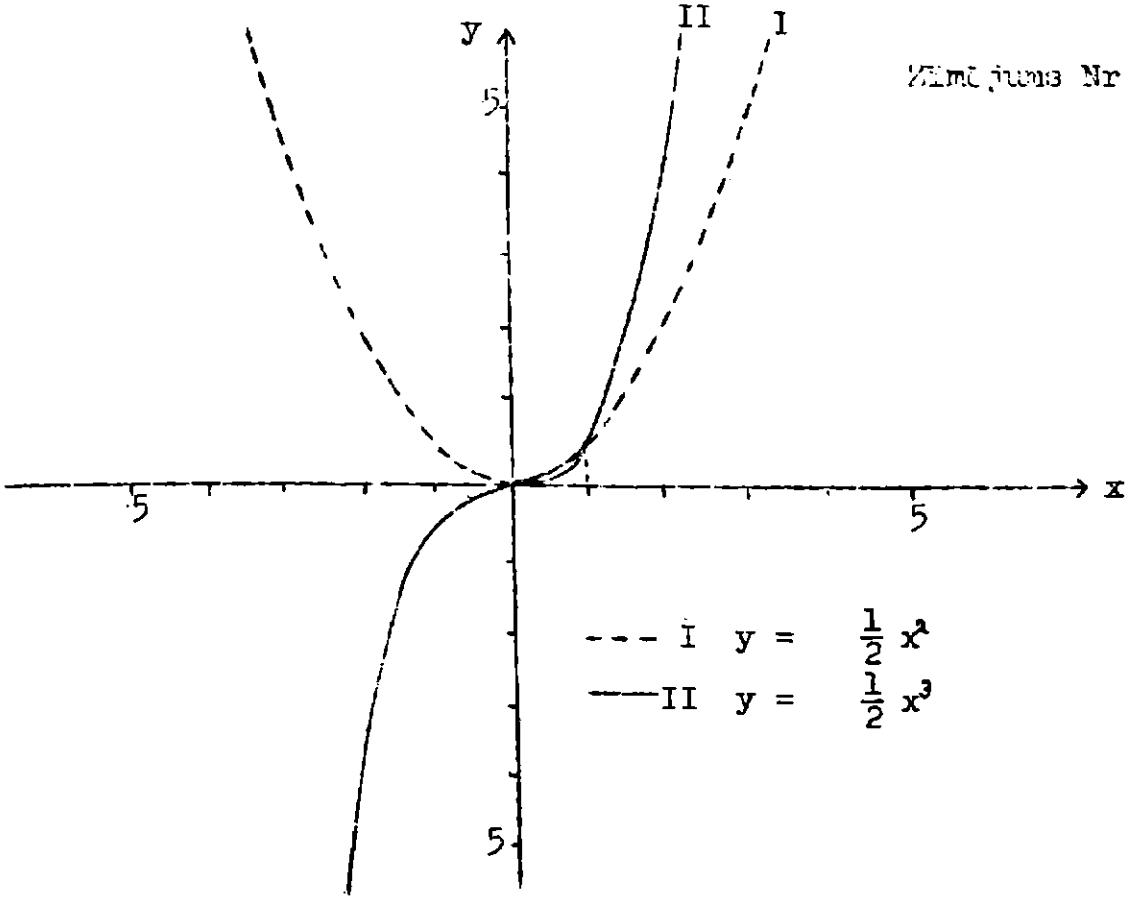
Zīmējums Nr.10



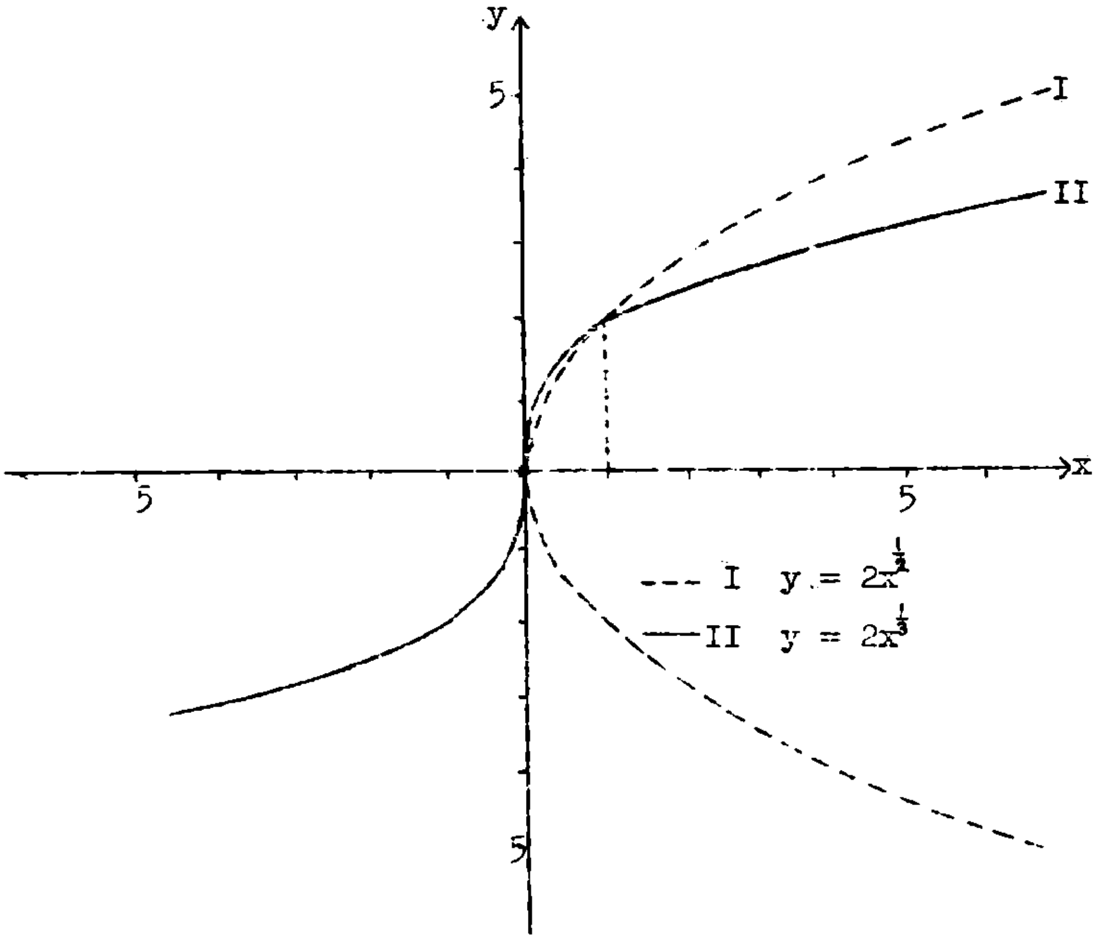
$\eta = f'(x) = \varphi(x)$

pie A_3 f(x) ir max, tādēļ f'(x) = 0

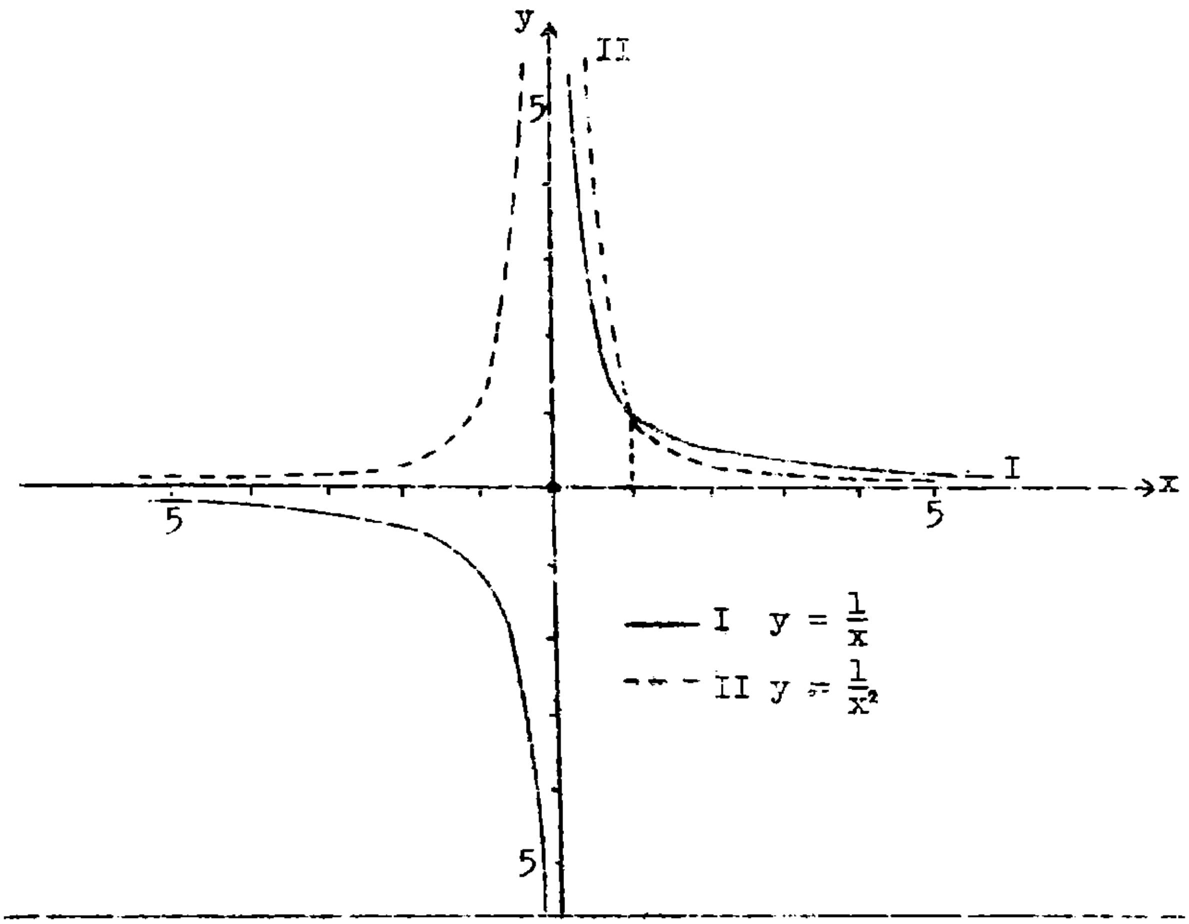
Zīmējums Nr.11.



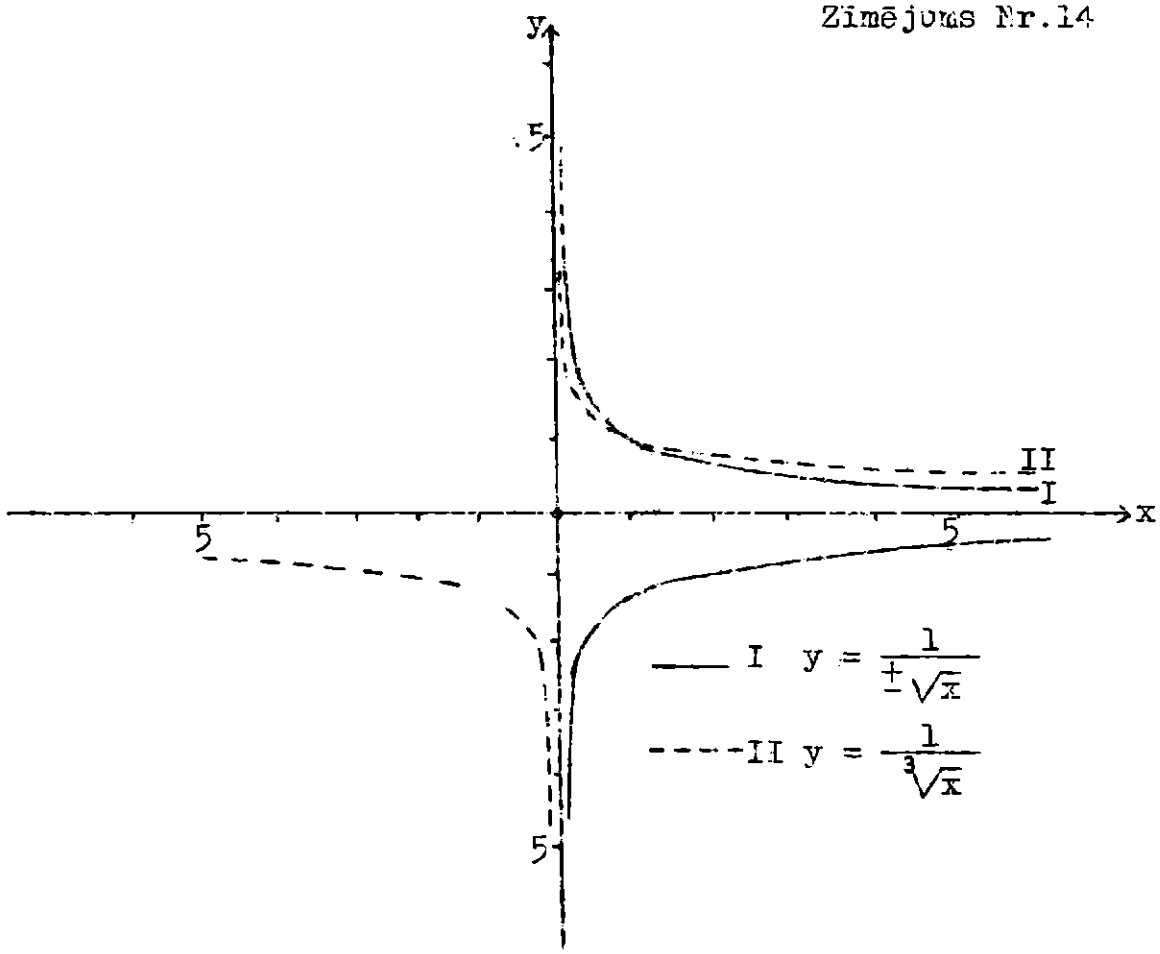
Zīmējums Nr.12



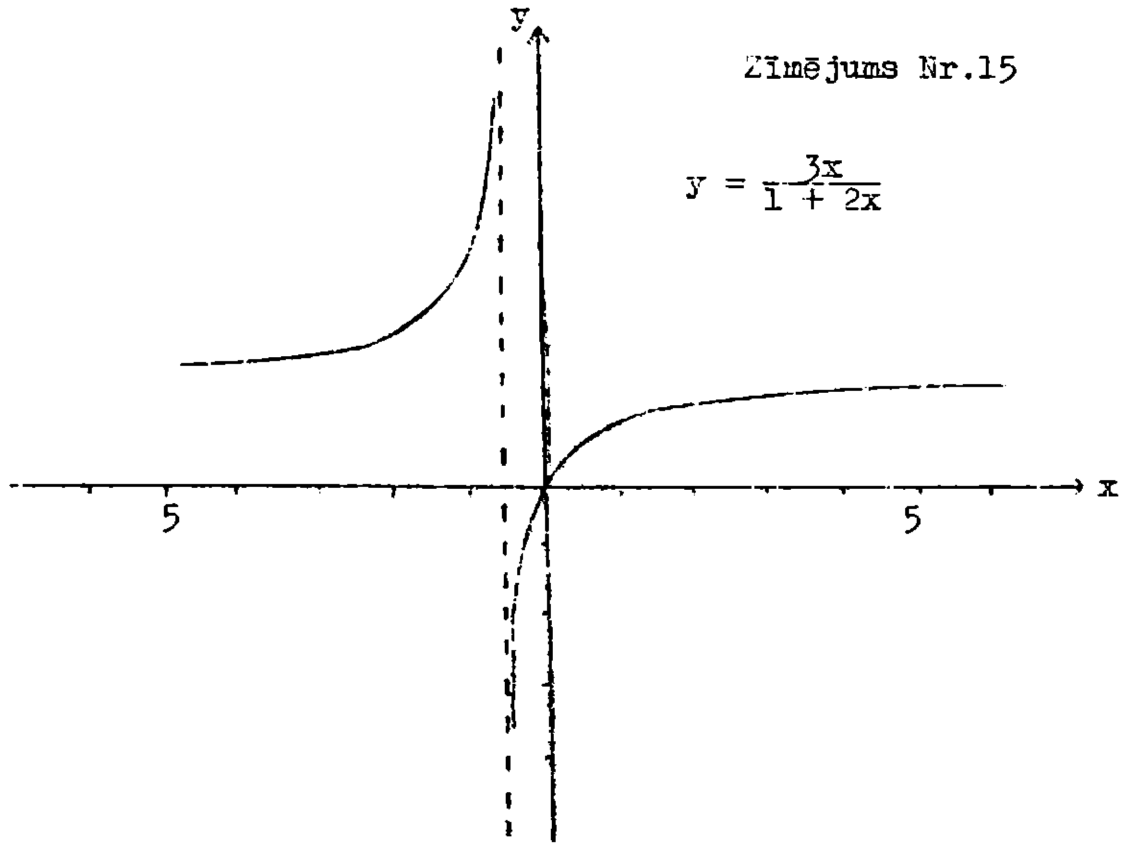
Zīmējums Nr.13



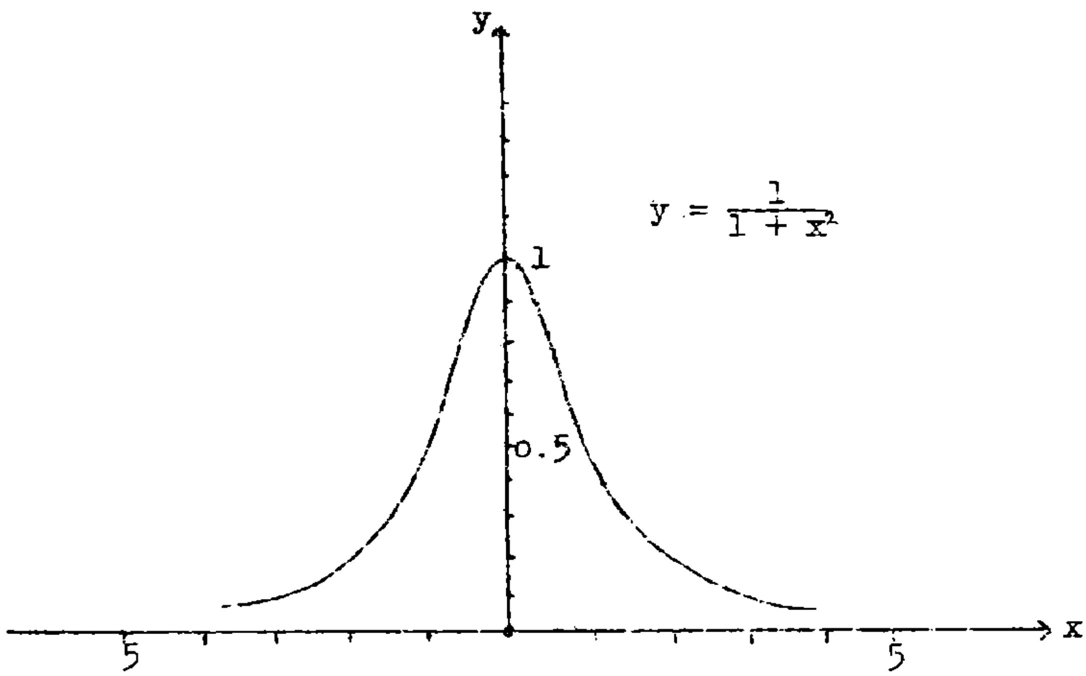
Zīmējums Nr.14



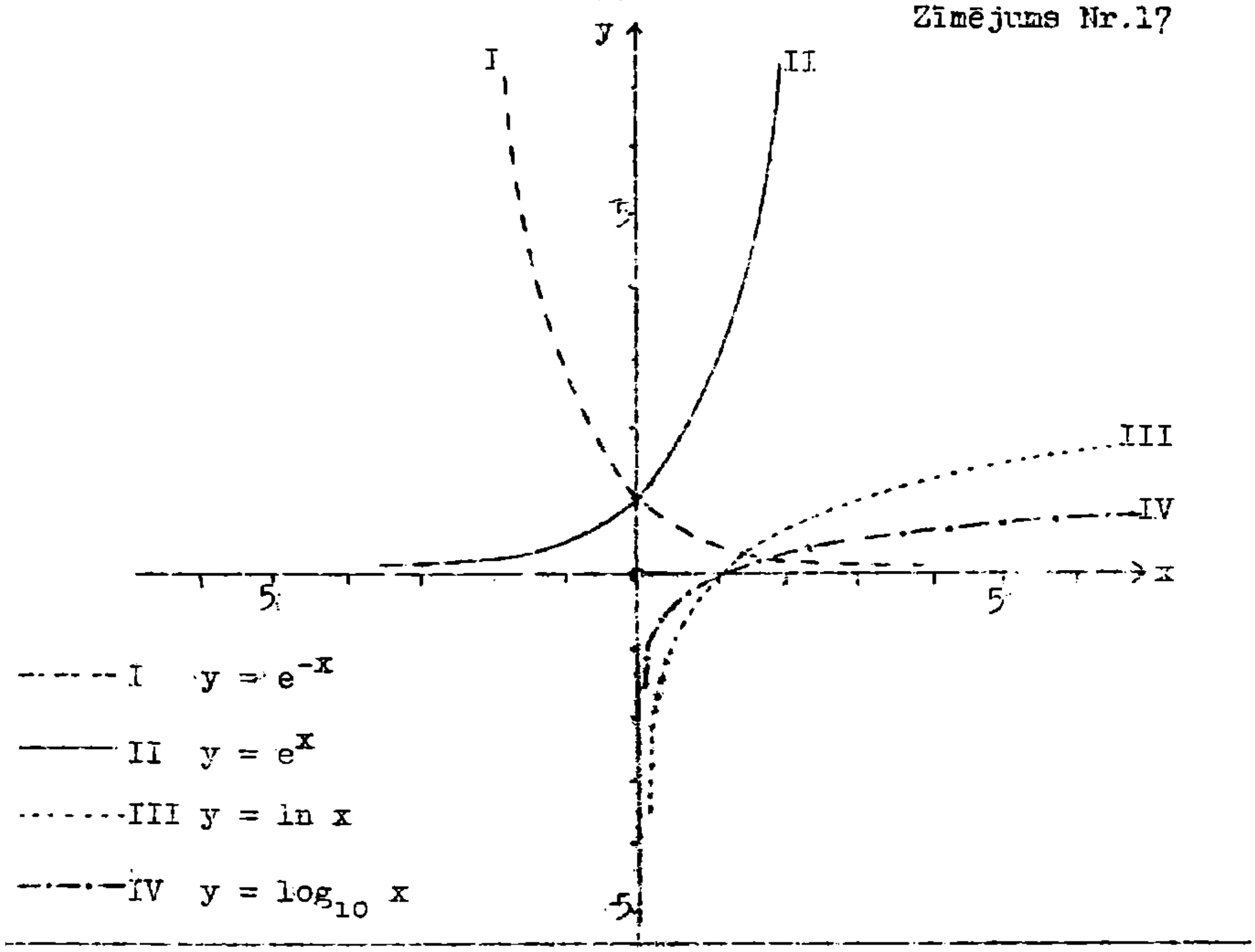
Zīmējums Nr.15



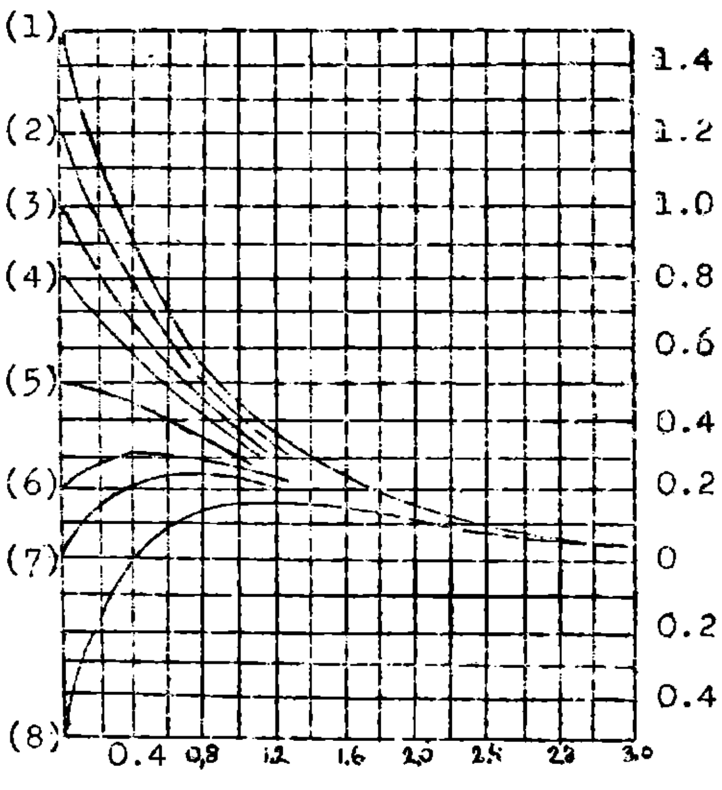
Zīmējums Nr.16



Zīmējums Nr.17

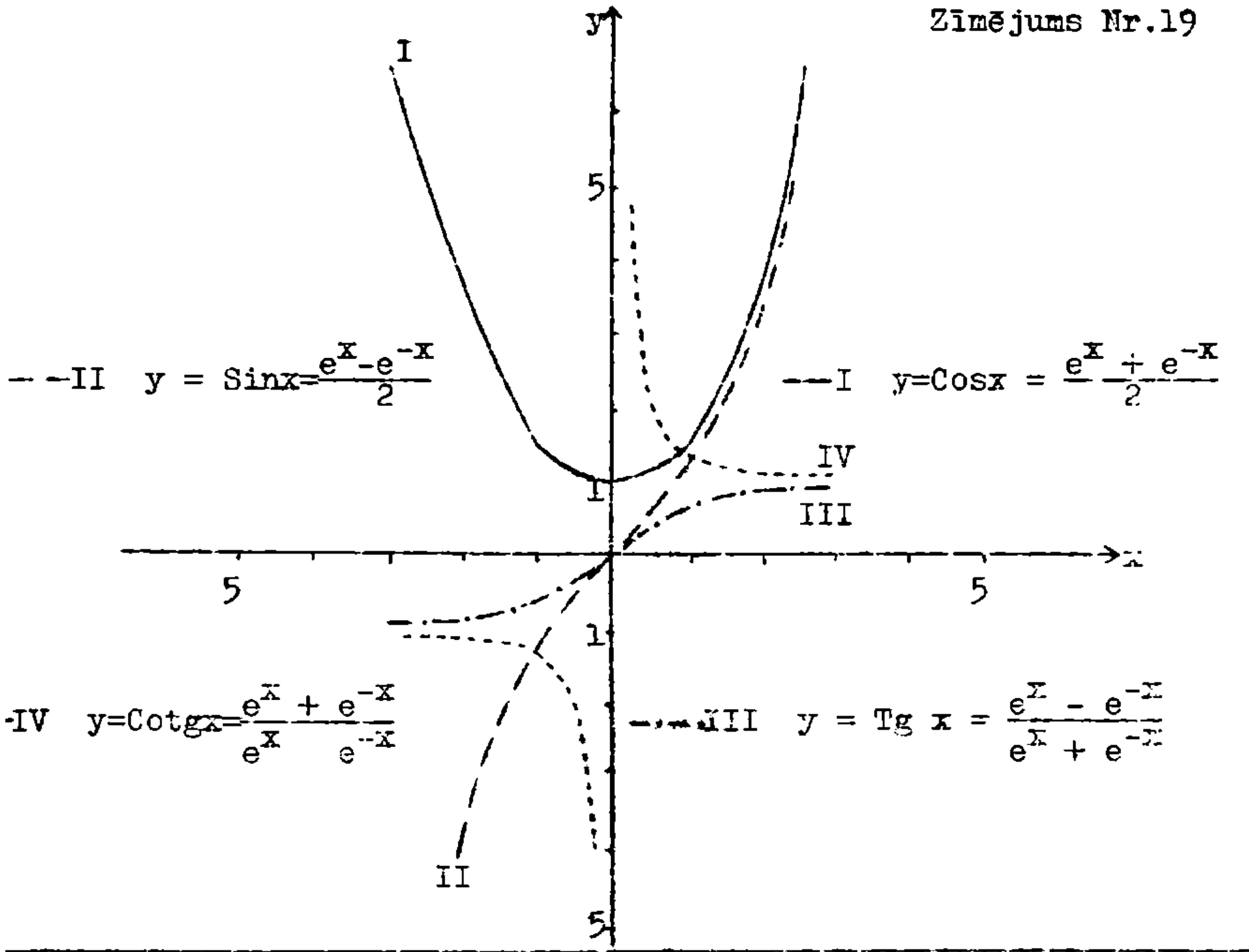


Zīmējums Nr.18

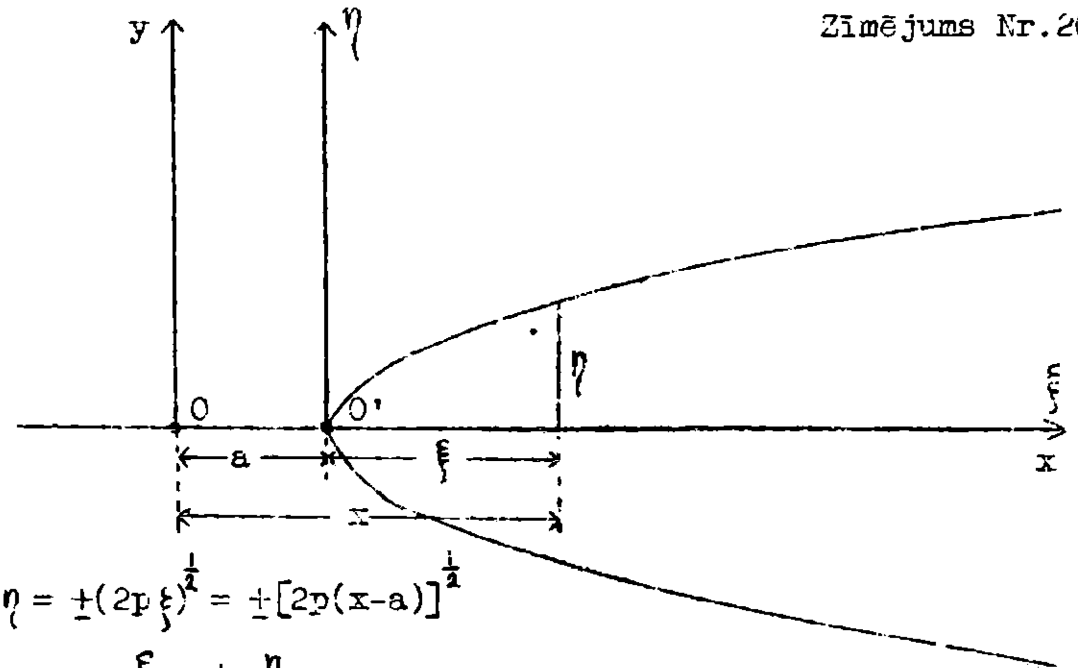


1) $y = e^{-x} + 0.5e^{-2x}$
2) $y \quad e^{-x} + 0.2e^{-2x}$
3) $y \quad e^{-x}$
4) $y = e^{-x} - 0.2e^{-2x}$
5) $y = e^{-x} - 0.5e^{-2x}$
6) $y = e^{-x} - 0.6e^{-2x}$
7) $y = e^{-x} \quad e^{-2x}$
8) $y = e^{-x} - 1.5e^{-2x}$

Zīmējums Nr.19



Zīmējums Nr.20

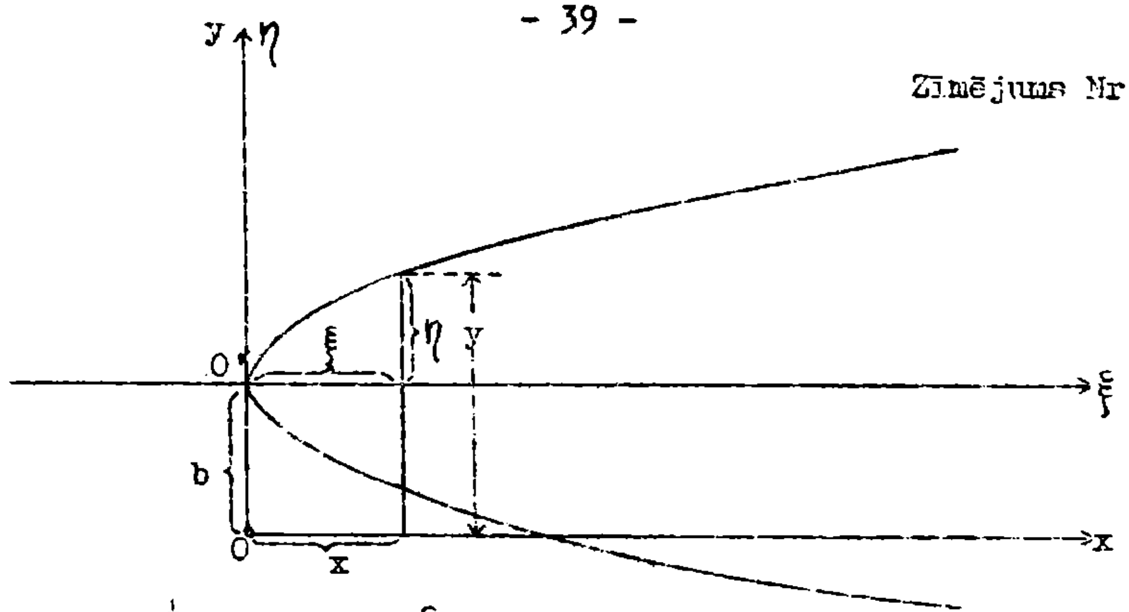


$$y = \eta = \pm(2p\xi)^{\frac{1}{2}} = \pm[2p(x-a)]^{\frac{1}{2}}$$

ξ	η
$x_1 - a$	y_1
$x_2 - a$	y_2
$x_3 - a$	y_3
$x_n - a$	y_n

$$y = f(\xi)$$
$$y = f(x - a)$$

Zīmējums Nr.21



$$\eta = \pm(2p\xi)^{\frac{1}{2}}$$

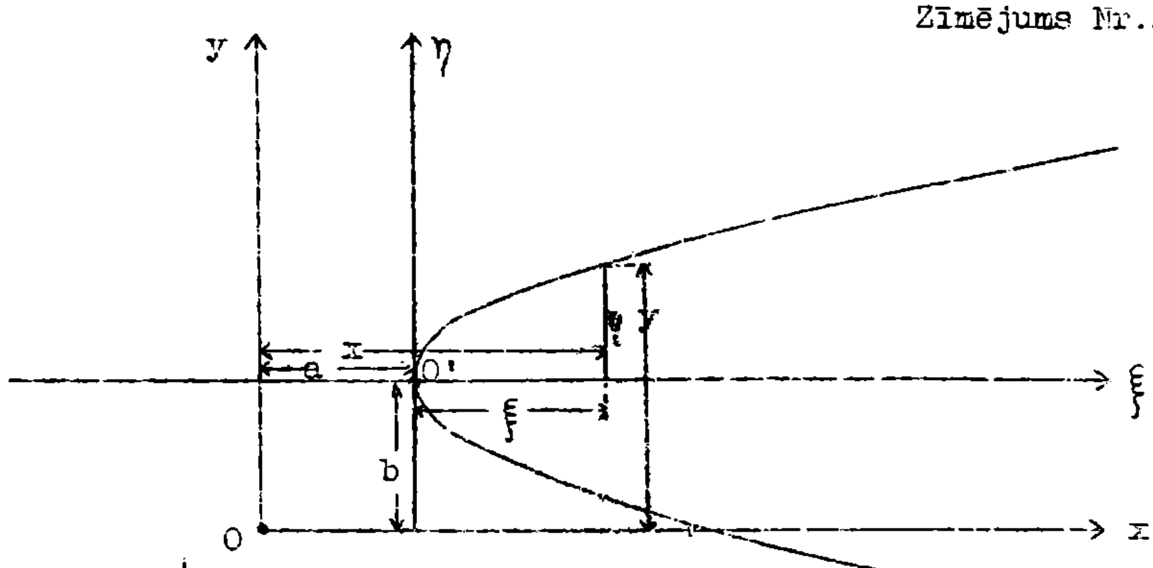
$$y - b = \pm(2px)^{\frac{1}{2}}$$

ξ	η
x_1	$y_1 - b$
x_2	$y_2 - b$
x_3	$y_3 - b$
.	....
x_n	$y_n - b$

$$\eta = f(x)$$

$$(y-b) = f(x)$$

Zīmējums Nr.22



$$\eta = \pm(2p\xi)^{\frac{1}{2}}$$

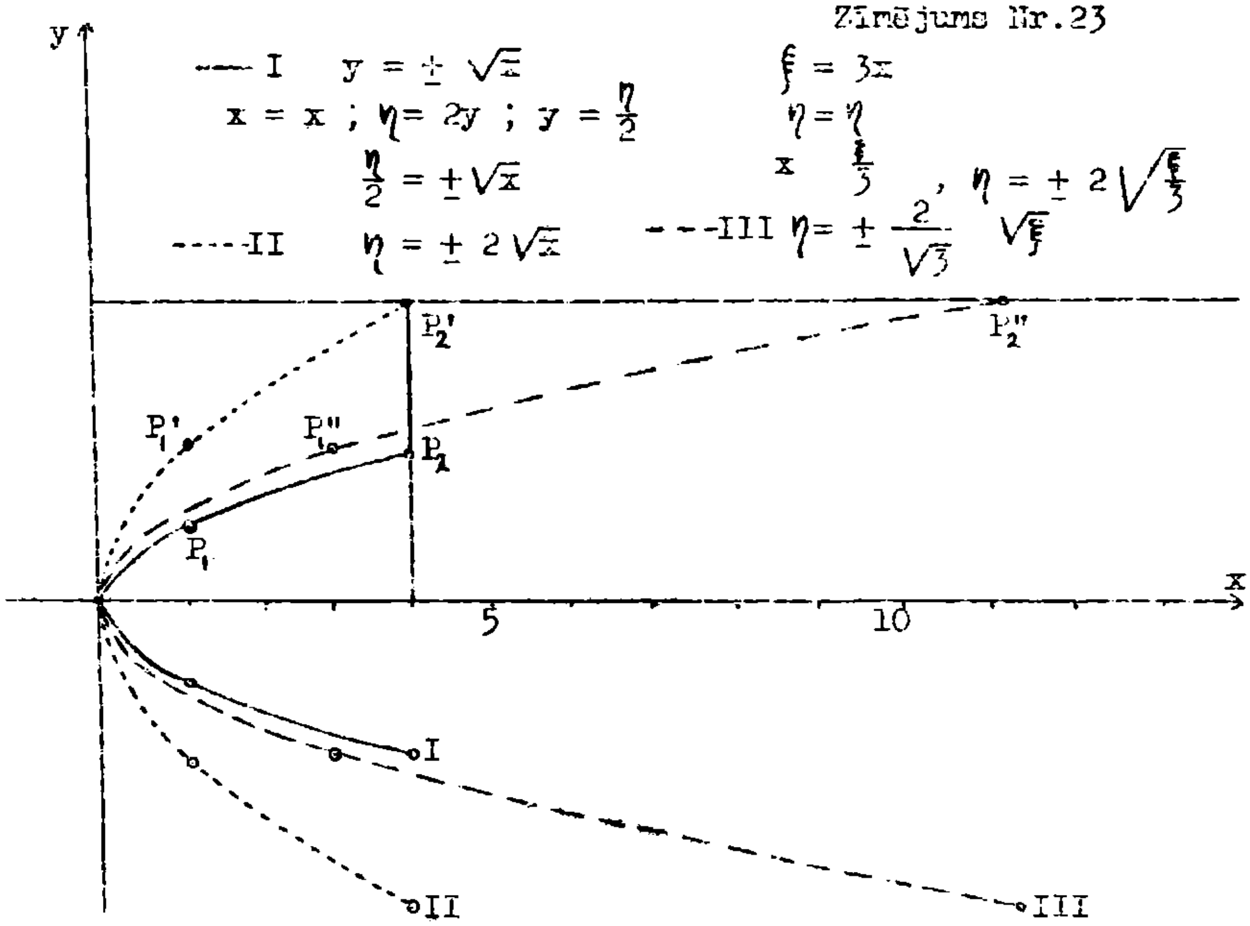
$$y-b = \pm[2p(x-a)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\eta = f(\xi)$$

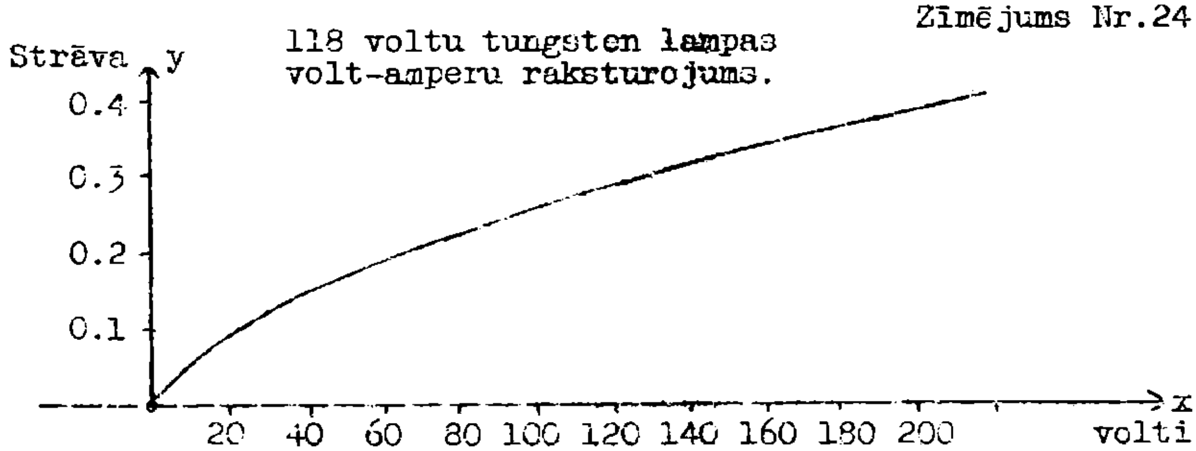
$$(y-b) = f(x - a)$$

ξ	η
$x_1 - a$	$y_1 - b$
$x_2 - a$	y_2 b
....	.....
$x_n - a$	$y_n - b$

Zīmējums Nr.23



Zīmējums Nr.24



x	y	log x	log y
2	0.0245	0.301	0.392-2
4	0.037	0.602	0.568-2
8	0.0568	0.903	0.754-2
16	0.0855	1.204	0.932-2
25	0.1125	1.398	0.051-1
32	0.1295	1.505	0.112-1
50	0.1715	1.699	0.234-1
...	.....	.....	....
64	0.200	1.806	0.301-1
100	0.2605	2.000	0.416-1
125	0.2965	2.097	0.472-1
150	0.3295	2.176	0.518-1
180	0.3635	2.255	0.561-1
200	0.3865	2.301	0.587-1
218	0.407	2.338	0.610-1

$$y = \alpha x^{m}$$

$$\log y = \log \alpha + m \log x$$

$$\sum_{1}^{7} \log y = 7 \log \alpha + m \sum_{1}^{7} \log x$$

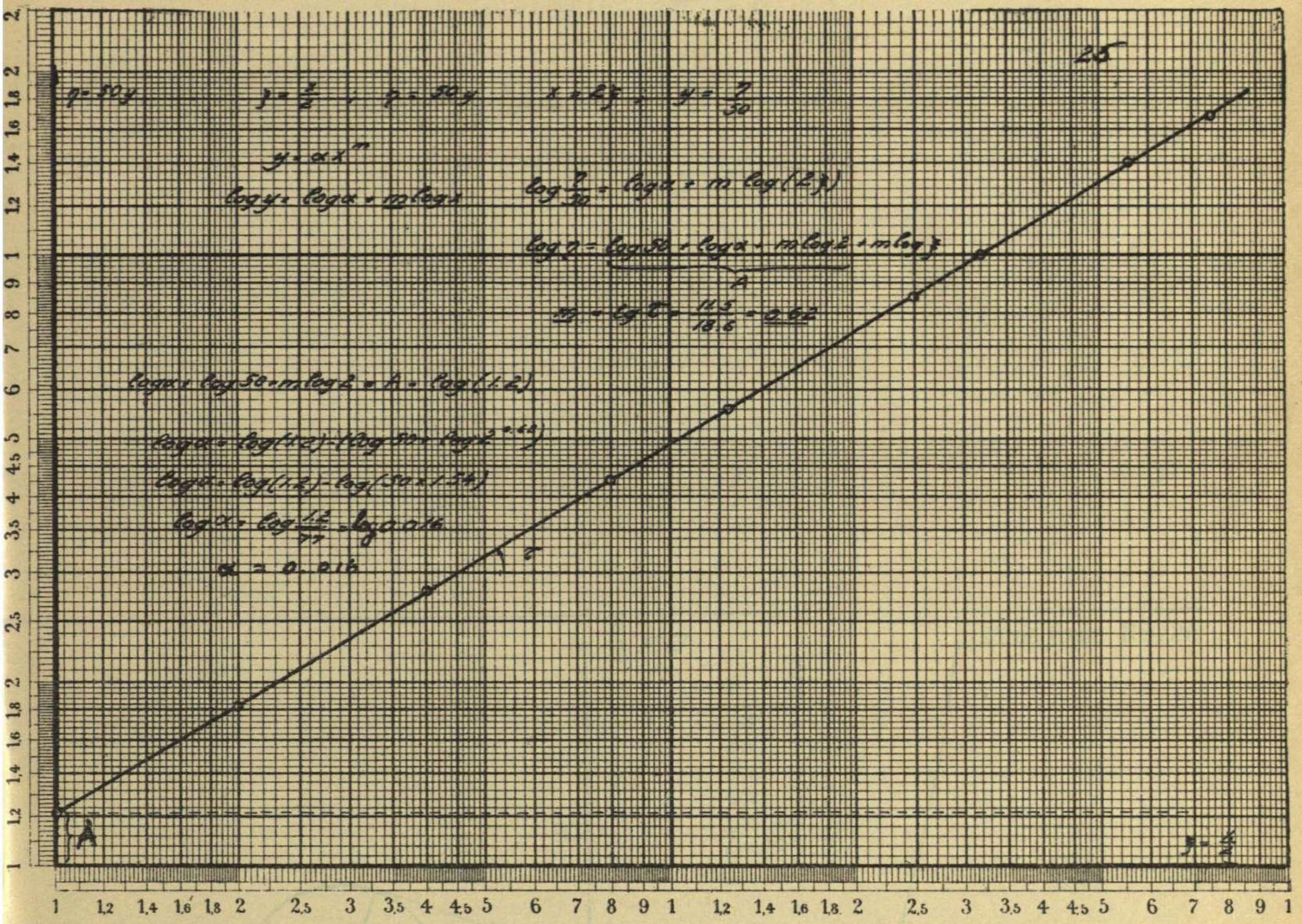
$$\sum_{8}^{14} \log y = 7 \log \alpha \quad m \sum_{8}^{14} \log x$$

$$\sum_{8}^{14} \log y - \sum_{1}^{7} \log y = m\left(\sum_{8}^{14} \log x - \sum_{1}^{7} \log x \right)$$

$$m = \frac{\sum_{8}^{14} \log y - \sum_{1}^{7} \log y}{\sum_{8}^{14} \log x - \sum_{1}^{7} \log x} = 0.6$$

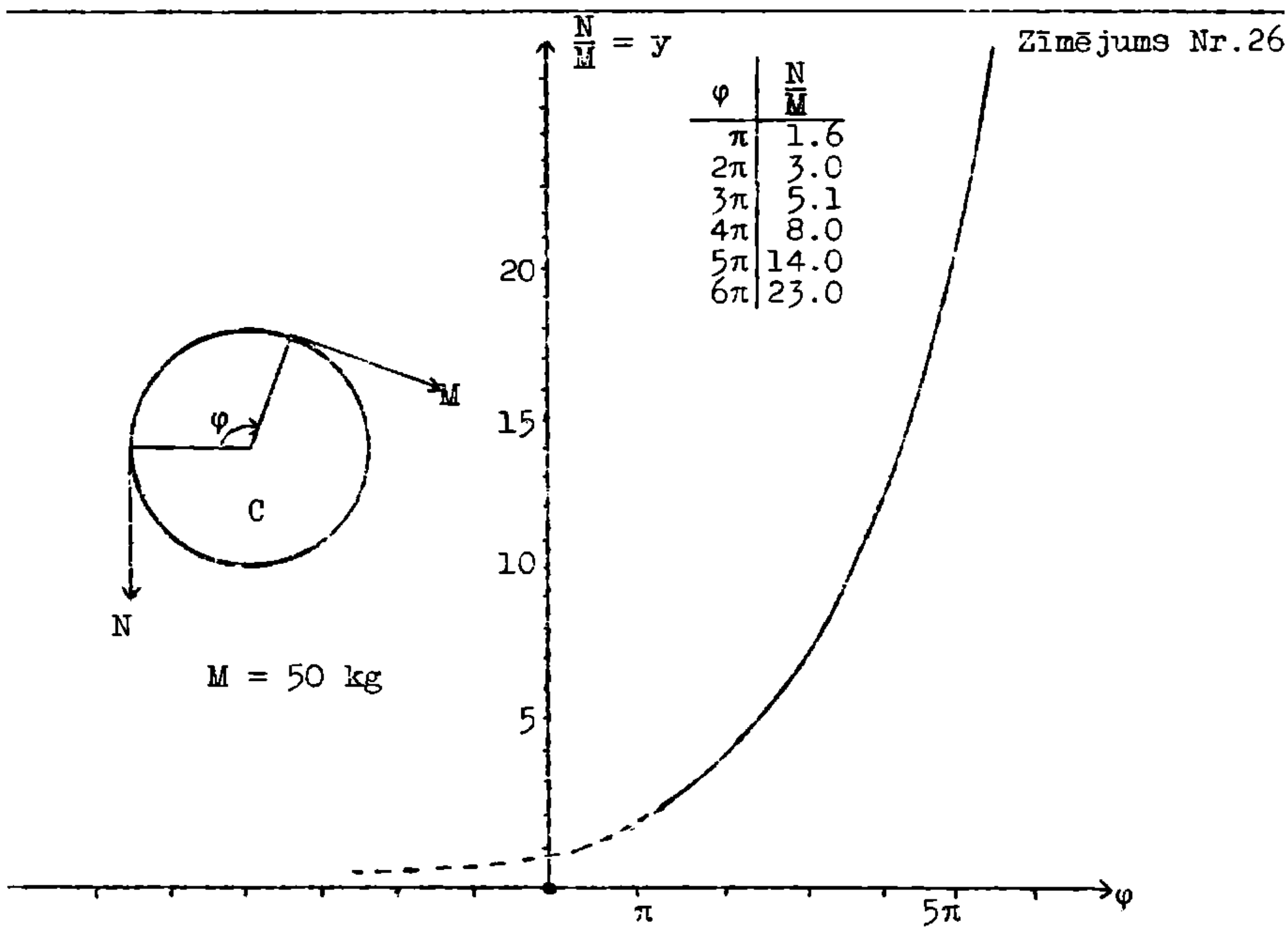
$$\log \alpha = \frac{\sum_{1}^{14} \log y - m \sum_{1}^{14} \log x}{14} \ ; \quad \alpha = 0.01625$$

$y = 0.01625x^{0.6}$ (vidējā kļūda ± 0.003)


25
q = 50y
ζ = x/2 ; q = 50y
x = 2ζ ; y = q/50
y = αx^m
log y = log α + m log x
log q/50 = log α + m log(2ζ)
log q = log 50 + log α + m log 2 + m log ζ
A
m = tg τ = 11.5/18.6 = 0.62
log α + log 50 + m log 2 = A = log(1.2)
log α = log(1.2) − (log 50 + log 2^0.62)
log α = log(1.2) − log(50 × 1.54)
log α = log 1.2/77 = log 0.016
α = 0.016
τ
A
ζ = x/2
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
6
7
8
9
1

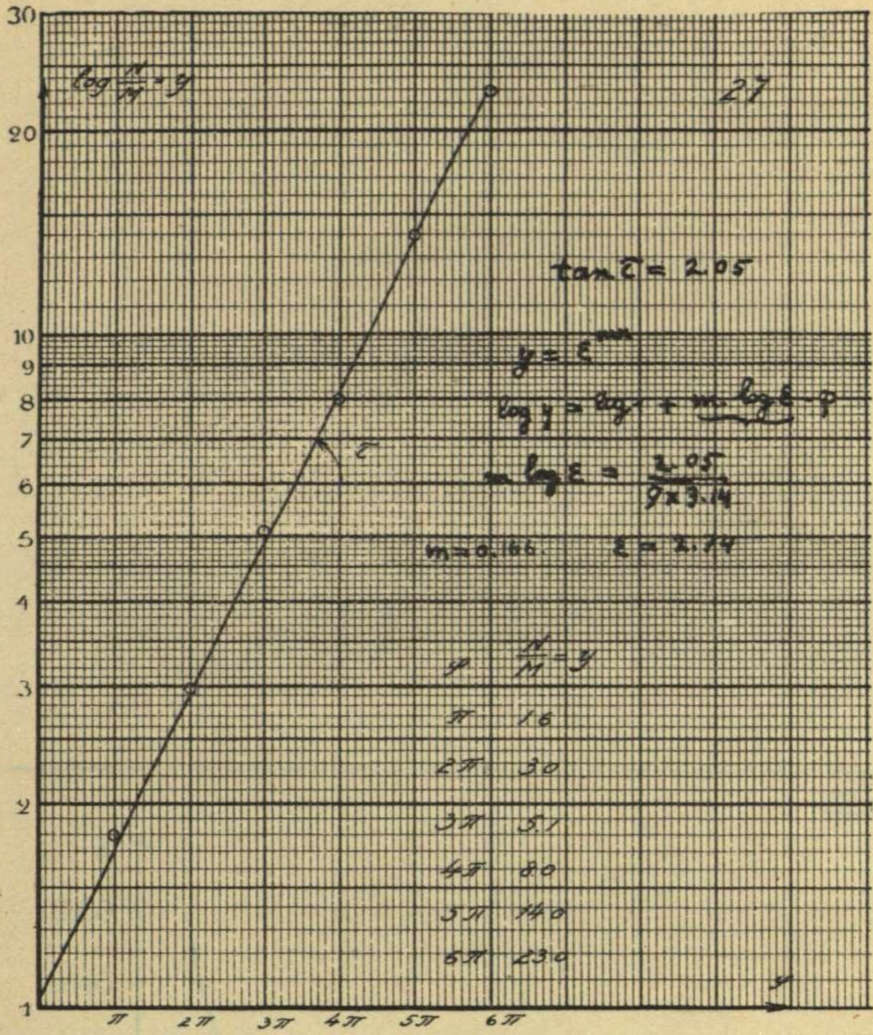
Zīmējums Nr.25

Zīmējums Nr.26



φ	$\frac{N}{M}$
π	1.6
2π	3.0
3π	5.1
4π	8.0
5π	14.0
6π	23.0

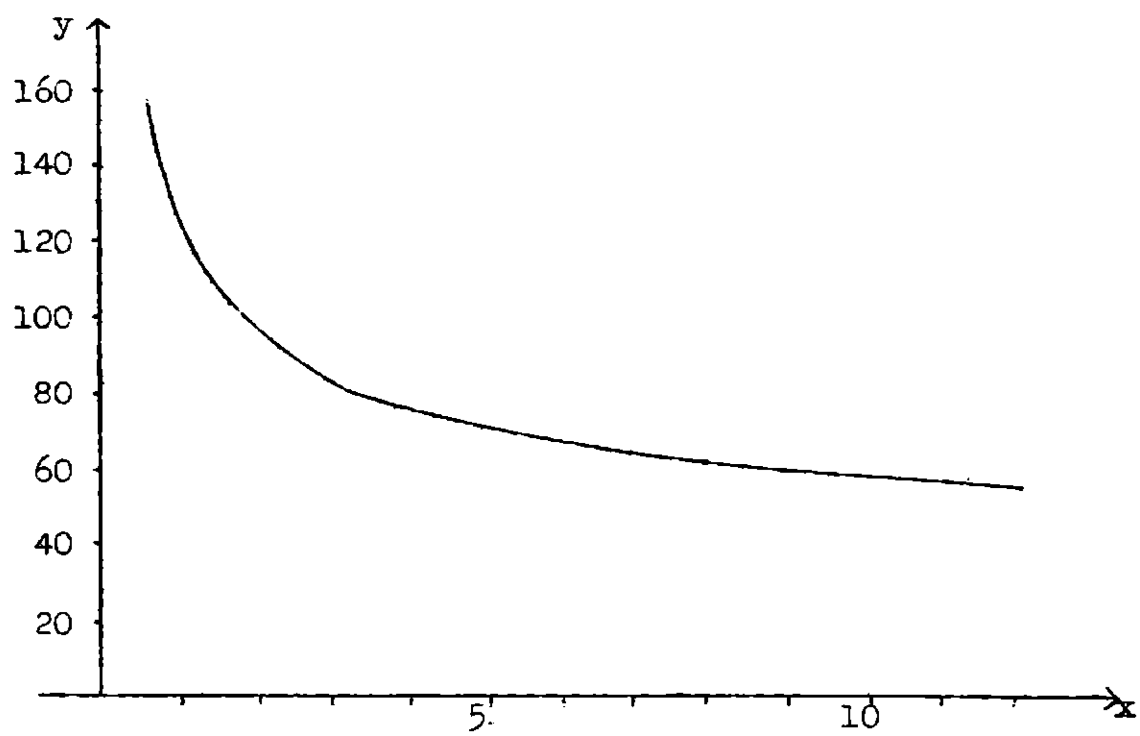
$$y = \frac{N}{M} = e^{\mu\varphi}$$



30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
log N/M = y
27
tan τ = 2.05
y = ε^{mφ}
log y = log + m log ε · φ
m log ε = 2.05 / (9 × 3.14)
m = 0.166
ε = 2.14
τ
φ N/M = y
π 1.6
2π 3.0
3π 5.1
4π 8.0
5π 14.0
6π 23.0
φ
π
2π
3π
4π
5π
6π

Zīmējums Nr.27

Zīmējums Nr.28



x	y	$\bar{y}$
0.5	160	158
1	120	120.4
2	94	94
4	75	75.2
8	62	62
12	56	56.2

$\bar{y}$ dabūts no formulas

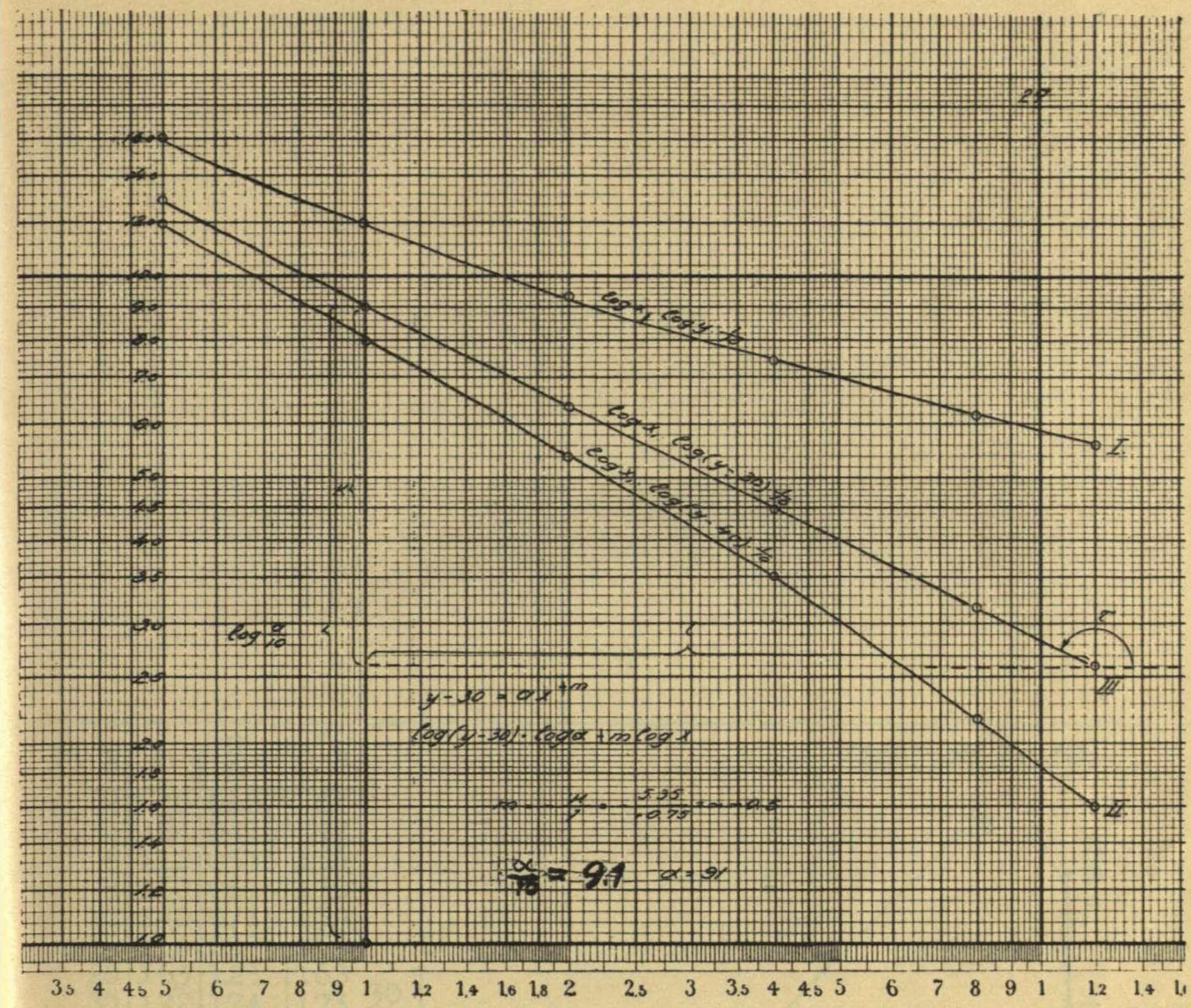
$$\log(y - 30) = \log\alpha + n \log x$$

$$n = \sim -0.5$$

$$\alpha = 90.4$$

$$y - 30 = 90.4\ x^{-0.5}$$

$$y = 30 + \frac{90.4}{\sqrt{x}}$$



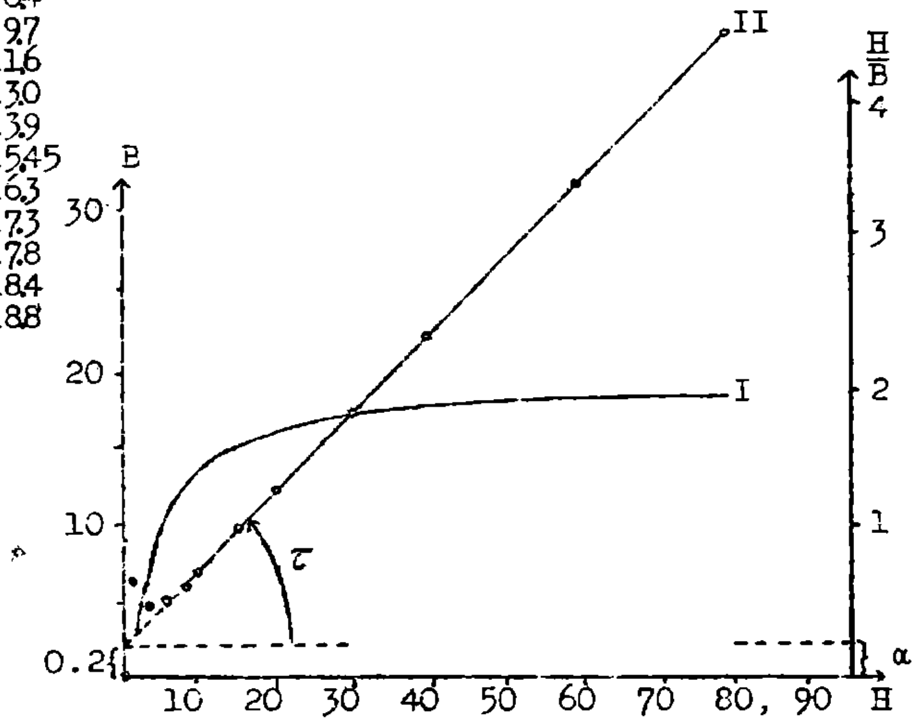
27
log x, log y $\frac{1}{10}$
log x, log(y − 30) $\frac{1}{10}$
log x, log(y − 40) $\frac{1}{10}$
I
II
III
$\log\frac{a}{10}$
y − 30 = ax^{+m}
log(y − 30) = log a + m log x
m = $\frac{\mu}{1}$ = $\frac{5.35}{-0.75}$ = −0.5
$\frac{a}{10}$ = 9.1 a = 91
3.5 4 4.5 5 6 7 8 9 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 6 7 8 9 1 1.2 1.4

Zīmējums Nr.29

Zīmējums Nr.30

H	B	$\frac{H}{B}$	$B_{,}$
2	3,0	0,667	6,4
4	8,4	0,476	9,7
6	11,2	0,536	11,6
8	13,0	0,614	13,0
10	14,0	0,715	13,9
15	15,4	0,974	15,45
20	16,3	1,23	16,3
30	17,2	1,74	17,3
40	17,8	2,25	17,8
60	18,5	3,25	18,4
80	18,8	4,25	18,8

$B_{,}$ dabūts no formulas



$$\frac{H}{B} = b + mH$$

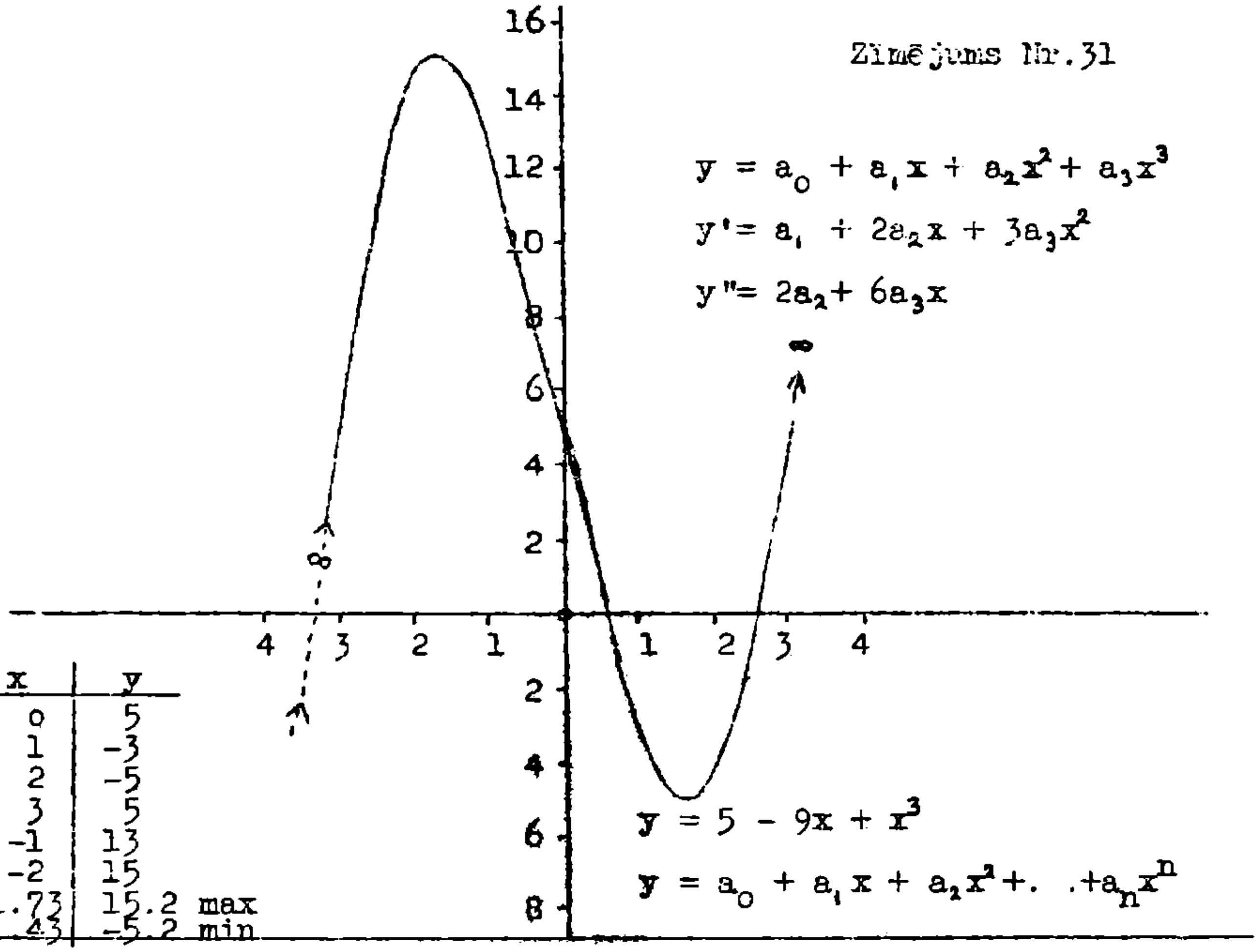
$$\frac{H}{B} = 0.211 + 0.0507H$$

$$B = \frac{H}{0.211 + 0.0507H}$$

$$b = 0.2$$

$$m = tg\,\tau = \frac{4.25 - 0.2}{80} = 0.0506$$

Zīmējums Nr.31



$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

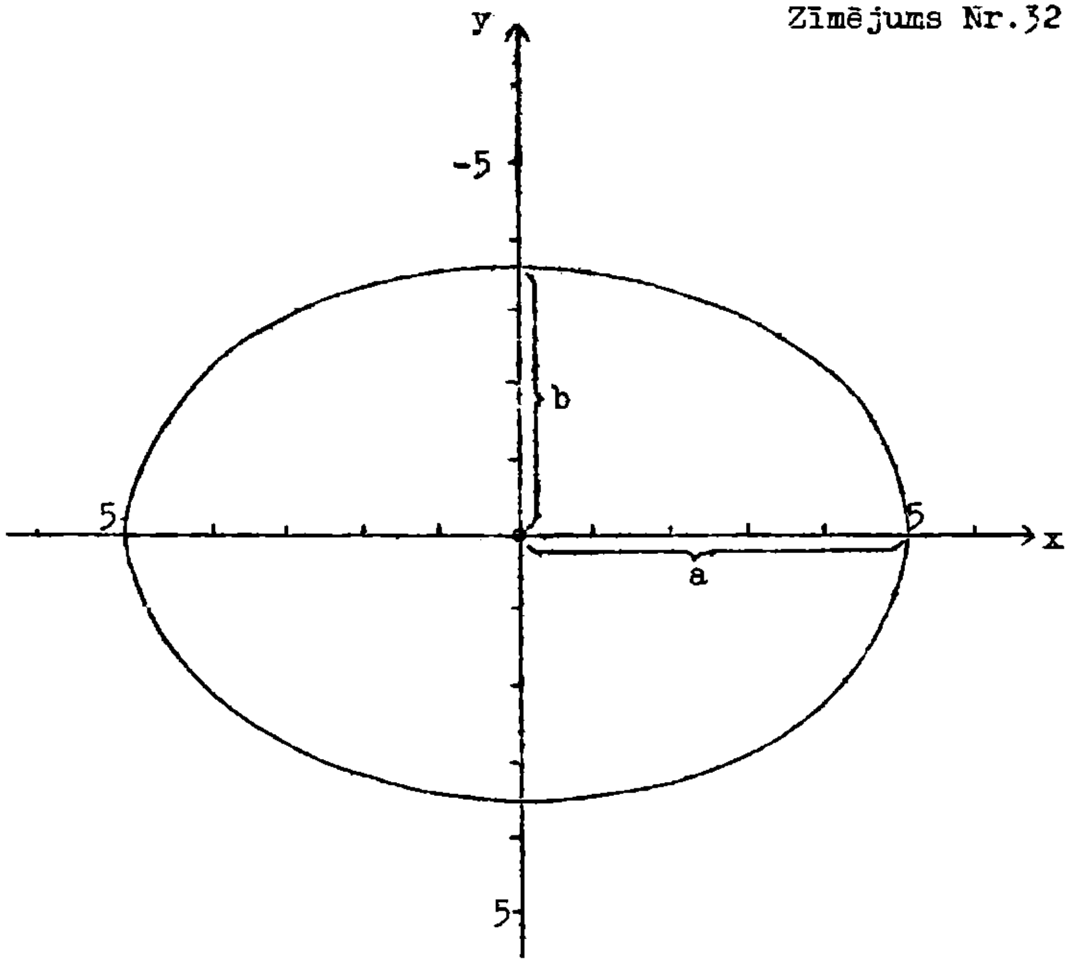
$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x$$

$$y = 5 - 9x + x^3$$

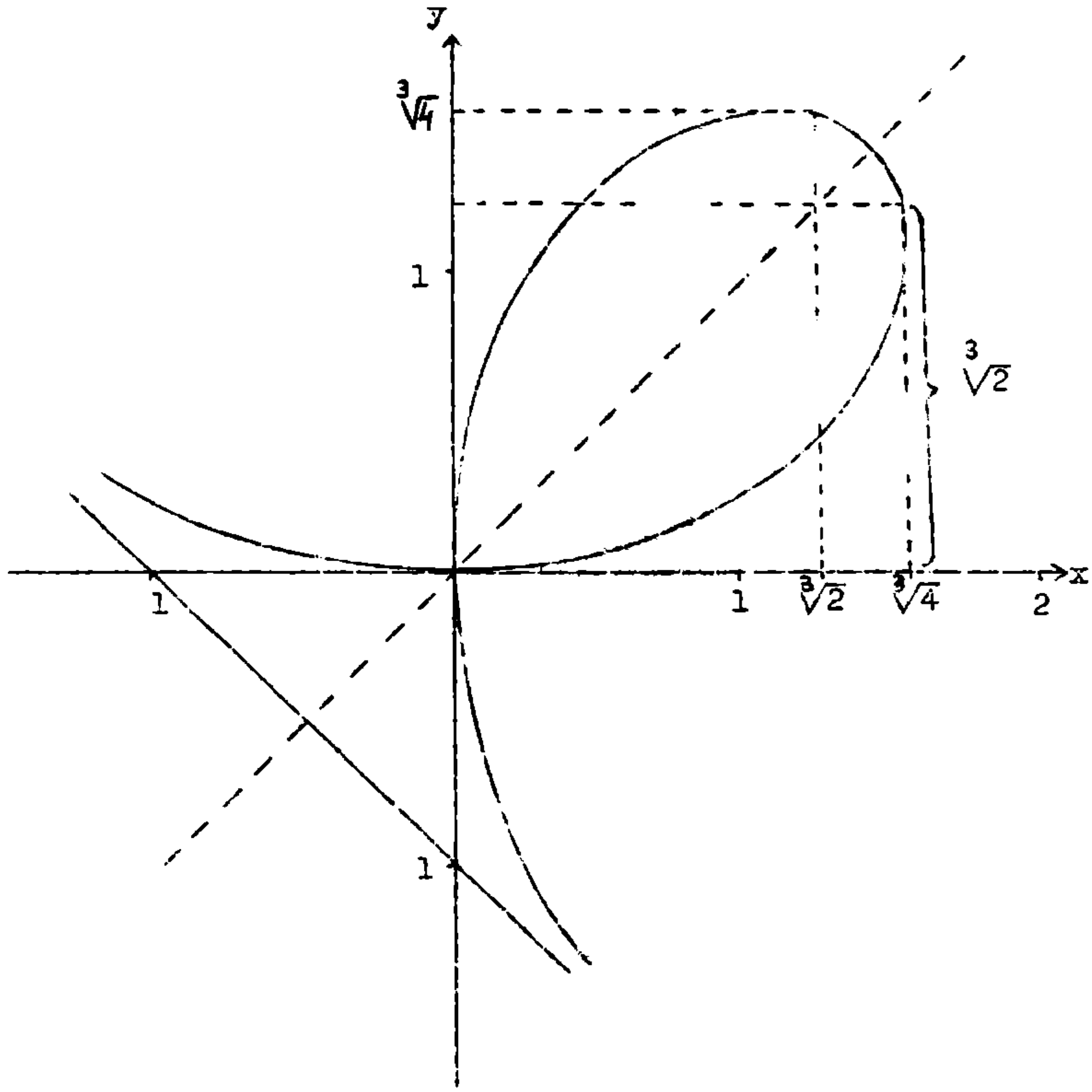
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + . \; . + a_n x^n$$

x	y
0	5
1	-3
2	-5
3	5
-1	13
-2	15
-1.73	15.2 max
1.43	-5.2 min

Zīmējums Nr.32



Zīmējums Nr.33.



J. CIZAREVIČS
LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES DOCENTS

GRAFISKA INTEGRĒŠANA UN DIFERENCĒŠANA

NEPERIODISKAS LĪKNES NOLĪDZINĀJUMA ATRAŠANA

1 9 3 1.

Latvijas ūniversitātes studentu padomes grāmatnīcas izdevums