UNIVERSITĀTE RĪGĀ
MĀCĪBAS GRĀMATU SERIJA Nr. 23

VEKTORU RĒĶINI

Kārlis Zalts
docents

RĪGĀ 1942
UNIVERSITĀTES APGĀDS

UNIVERSITĀTE RĪGĀ
MĀCĪBAS GRĀMATU SERIJA Nr. 23.

VEKTORU RĒĶINI

Kārlis Zalts
docents

RĪGĀ, 1942
UNIVERSITĀTES APGĀDS

Priekšvārdi.

Vektoru rēķinus bieži lietā pētījumos par fizikas vai technikas problēmām. Arī ģeometrijā tīri teōrētiskos jautājumos vektoriālām metodēm ir labi panākumi. Tāpat tās ir vērtīgas no paidagōģijas viedokļa, jo ar tām dabū īsas, izteiksmīgas, viegli atminamas formulas un skaidrus, labi pārskatāmus pierādījumus. Šo cēloņu dēļ vektoru rēķini aizvien vairāk kļūst par nepieciešamu sastāvdaļu inženieŗa matēmatiskā izglītībā.

Šinī grāmatā apskatītā viela atbilst tai, kas nepieciešama studentiem L. U. mechanikas un inženieŗzinātņu fakultātēs. Nodaļām (I—VI) pievienoti atrisināti un neatrisināti uzdevumi, lai iesācējiem atvieglinātu vektoriālās metodes piesavināšanos.

Darba pamatā ir šapirografēts izdevums, ko nelielā eksemplāru skaitā izgatavoja zinātnisko darbinieku grupa Valsts Elektrotechniskajā Fabrikā, kur 1936./37. māc. g. lasīju lekcijas par dažādām inženieŗmatēmatikas nozarēm.

1941. g. maijā.

Autors.

Saturs.

Ievads.

Vektoru rēķinu vēsture iesākas ar novērojumiem, ka dabā sastopami tādi lielumi, kuŗiem ir virziens. Pazīstamais holandiešu fiziķis Stevins ap 1600. g. atrada spēku parallēlograma principu un šinī sakarā pirmoreiz attēloja fizikālus lielumus ar virzītiem nogriežņiem. Apmēram 100 gadus vēlāk darbojās Ņūtons: viņa otrai kustības aksiōmai ir vektoriāls saturs, jo tā māca starp citu, ka spēkam un spēka radītam paātrinājumam ir viens virziens.

Analitiskās ģeometrijas attīstība (Dekarts, 1596—1650) atļāva pētīt virzītus lielumus, sadalot tos komponentēs koordinātu asu virzienos. Ar šo paņēmienu zinātnieki, kas 17. un 18. g. s. lika pamatus mēchanikai, atrada daudz vektoriālu sakarību, kaut viņi arī nerunāja par vektoriem. Iesākumā pētīja ar plaknes ģeometriju, bet apm. 18. g. s. vidū (Eilers) attīstās telpas ģeometrijas metodes. Nākošā 19. g. s. iesākumā, kad nodibinājās potenciālteōrija, noskaidrojās diferenciāloperāciju nozīme virzītu lielumu pētīšanā.

Jau ļoti agri radās vajadzība rēķināt nevis ar lielumu komponentēm, bet ar pašiem lielumiem. Leibnics (1679) mēģināja šo vajadzību apmierināt, bet neguva panākumus. Argāns (Argand, 1806) parādīja, ka kompleksu skaitli var attēlot ar vektoru. Šim atradumam bija liela nozīme kompleksu skaitļu teōrijā, bet tas reizē ar to nelabi ietekmēja vektoru teōrijas attīstību, jo radīja iespaidu, ka reālais vektors neatšķiŗami saistīts ar kompleksiem skaitļiem.

1835. g. Bellavitis publicē grāmatu par ekvipollenču rēķiniem (Calcolo delle Equipollenze), kur sistēmatiski apskata vektoru ģeometrisku saskaitīšanu un vektoru vienādību. Tagad saka, ka divi vektori ir vienādi, ja tie neatšķiŗas ne lieluma, ne virziena, ne virziena puses ziņā. Bellavitis bij uzmanīgāks, viņš sauca tos par ekvipollentiem un šīs īpašības izteikšanai lietāja īpašu simbolu.

Arī Mēbius savā Debess mēchanikā (F. Möbius, Mechanik des Himmels, 1843) izveido virzītu lielumu ģeometrisku saskaitīšanu. Bet arī viņš baidās lietot vienkāršo vienādības zīmi (=) un tās vietā raksta $\equiv$.

Tai pašā laikā (1843—44) vektoru teōrijas attīstība ievērojami pavirzās uz priekšu, pateicoties Hamiltona un Grasmaņa darbiem.

Hamiltons (dz. Dublinā 1805., miris 1865.), skots, 1824. g. iestājās Trinity koledžā, Dublinā. Viņa spējas bija tik ievērojamas, ka jau 1827. g., pirms kursa pabeigšanas, viņam piedāvāja astronomijas profesora vietu Dublinas universitātē. Ievērojot zinātniskos nopelnus, 1837. g. viņu ievēlēja par Īrijas karaliskās akadēmijas priekšsēdētāju. Viņš ievērojams kā kvaterniona teōrijas autors. Kādā savā vēstulē viņš pastāsta, ka kvaterniona ideja viņam galvā radusies 1843. g. 16. okt. ceļā uz akadēmijas sēdi, ejot gar karaliskā kanāļa malu un pārdomājot kādu problēmu, kas pašreiz nodarbināja viņa prātu. Akadēmijas sēdē viņš pieteica savu atradumu un lūdza atļauju nolasīt kādā nākamā sēdē priekšlasījumu par kvaternioniem, ko arī tiešām dabūja un izpildīja 13. nov. Nākamos gados viņš tematu apstrādāja dziļāk un publicēja „Lectures on Quaternions" (1853), bet viņa galīgais darbs par šo jautājumu („Elements of Quaternions") nāca klajā tikai 1866. g., neilgi pēc autora nāves.

Neatkarīgi no Hamiltona tādā pašā virzienā darbojās Vācijā Grasmanis (dz. Stetīnā 1809., miris turpat 1877.), kas bija matēmatikas skolotājs savas dzimtās pilsētas ģimnazijā. Viņa darbs „Lineale Ausdehnungslehre" (I izdevumā pāri par 300 lp.) parādījās atklātībā 1844. g. augustā.

Starp Hamiltona skolniekiem visievērojamākais ir Tēts (P. G. Tait, dz. 1831., mir. 1901. g.), kas, sākot ar 1860. g. ieņēma dabas filozofijas katedru Edinburgas universitātē. Viņš publicēja „Elementary Treatise on Quaternions" (I izd. 1867., II izd. 1873.).

Ne Hamiltona, ne Grasmaņa sistēmas neapmierināja fizikas un lietājamās matēmatikas prasības, jo bija pārāk vispārīgas un sarežģītas parasto rēķinu vajadzībām. Hamiltona teōrijā imāgināriem skaitļiem ir liela loma, vektoriem un skālāriem nav patstāvīgu tiesību, bet tie ir tikai kvaternionu speciālizējumi. Tūliņ pēc Hamiltona un Grasmaņa darbu publicēšanas dažādu zemju matēmatiķi sāka pielāgot minētos pētījumus vienkāršākām prasībām.

Amerikā vektoru teōrijas izkopšanā lieli nopelni ir Gibsam (I. W. Gibbs, dz. 1839., miris 1903.). Viņš studēja papriekš Amerikā, vēlāk Parīzē (ziemā 1866/67) un nākamos divi gados Berlīnē un Heidelbergā. Atgriezies Amerikā ieņem līdz mūža beigām matēmatiskās fizikas profesora vietu Jēlas (Yale) universitātē. Pazina Grasmaņa un Hamiltona darbus un centās tos lietāt fizikas jautājumu pētīšanā. Tā radās vajadzība padarīt šo smago matēmatisko aparātu ērtāku. Savu skolnieku vajadzībām privāti iespieda 1881. un 1884. g. rakstu „Elements of Vector Analysis", kas tikai pēc 20 gadiem kļuva pieejams plašākām lasītāju aprindām. Pārāk nodarbināts ar citiem jautājumiem, viņš vēlāk nekad nebija pierunājams uzrakstīt un sīkāk izstrādāt savu vektoru teōrijas kursu. Šo darbu izdarīja viņa bijušais skolnieks Vilsons (E. B. Wilson, Vector Analysis, New Haven, pirmais izd. 1901. g.).

Kā Gibss Amerikā, līdzīgā virzienā Anglijā darbojās Olivers Hevisaids (Heaviside). Viņa darbs par elektromagnētisko gaismas teōriju spieda meklēt derīgus matēmatiskus palīglīdzekļus. Viņš izmēģināja kvaternionu teōriju, bet vēlāk atmeta kā nederīgu. Viņš izveidoja vienkāršākus rēķināšanas paņēmienus, kas būtībā neatšķīrās no Gibsa vektoru algebras, nerunājot par sīkākām izšķirībām apzīmējumos.

Īpašu vektoru teōrijas skolu Italijā nodibināja Neapoles universitātes prof. R. Markolongo un Turinas kaŗa akad. prof. C. Burali-Forti. Viņu vektoralgebra ir tāda pati kā citiem, nerunājot par darbību apzīmējumiem; augstākās nozarēs saskatāma Grasmaņa un Hamiltona ietekme. Viņu sistēmas vienkāršākie elementi atrodami kopīgi sarakstītā grāmatā „Eléments de Calcul Vectoriel" (Paris, 1910., tulk.); lielāks darbs, tāpat kopīgs, ir „Analyse vectorielle générale" (t. I 1912.; t. II 1913.).

I

Vektoru saskaitīšana un atņemšana.

1. Skālāri un vektoriāli lielumi.

Par skālāriem lielumiem jeb, īsāk, skālāriem sauc tādus lielumus, ko pilnīgi apraksta ar lieluma vienību skaitu, bet kas nav saistīti ar virzienu telpā.

Skālāru lielumu piemēri: garums, tilpums, leņķis, laiks, masa, blīvums, temperātūra, siltuma daudzums, elektriskā pretestība, kapācitāte, elektrības daudzums, spēka darbs, mēchaniskā enerģija u. c. Gribot ar kādu tādu lielumu nodarboties, vajadzīga tam atbilstoša vienība un mērošanas metodes, ar kurām var noteikt, cik vienību ir kādā noteiktā lielumā. Atbilde uz šo jautājumu skālāru lielumu pilnīgi apraksta; tā, garums ir pilnīgi noteikts (izmērots), ja zina, ka tas līdzinās tik un tik, teiksim — a centimetriem.

Tātad, skālārs lielums (quantity) var būt tikai lielāks vai mazāks, tam ir tikai lielums (magnitude) jeb intensitāte, ko mēro (izteic, apraksta, raksturo) ar vienību skaitu, bet tam nav virziena.

Turpretim, vektoriāli lielumi ir tādi, kuriem ir nevien lielums jeb intensitāte, bet arī virziens. Piemēram, pārvietojums, ātrums, paātrinājums, spēks, elektriskais vai magnētiskais lauks u. c. Arī šeit vajadzīgas vienības lielumu intensitātes mērošanai, bet ar to nepietiek. Piem., punkta pārvietojums nebūt nav pietiekami aprakstīts, sakot, ka tas līdzinās tik un tik, teiksim, a centimetriem; ar to ir izteikts tikai pārvietojuma lielums, bet pārvietošanās virziens paliek nezināms. Lai vektoriāls lielums būtu pilnīgi noteikts, jāzina nevien tā lielums jeb intensitāte, bet arī virziens.

Apzīmējumus „skālārs" (no lat. scalae = trepes jeb kāpnes) un „vektoriāls" (vektors, no vehere = vest) iesāka lietot Hamiltons (1843). Pirmais ierosina pakāpenības, otrais — pārvietošanās ideju.

2. Skālārā un vektoriālā rēķināšana. Vektori.

Skālāru lielumu pilnīgi raksturo lieluma vienību skaits, tātad, abstrakts reāls skaitlis. Bet reāls skaitlis arī ir skālārs lielums. Tas var būt lielāks vai mazāks, atkarībā no tā, cik vienību vai vienības daļu tanī ietilpst; virziena tam nav. No citiem skālāriem lielumiem tas atšķiras ar to, ka tam nav dimensijas.

Kā visvienkāršākie skālāri, reālie skaitļi teicami derīgi citu skālāru aizvietošanai. Tādas aizvietošanas piemērs ir visa rēķināšana ar reāliem abstraktiem skaitļiem aritmētikā un algebrā (skālārā rēķināšana). Tur māca darboties (darbības) ar skaitļiem un tā sagatavo dzīvei, kur jādarbojas ar lietām.

Modernā zinātne un technika spiež nodarboties ar vektoriāliem lielumiem. Skaidrs, ka arī šinī gadījumā ļoti derīga iepriekšēja vingrināšanās ar kādu domu objektu, kam jābūt apveltītam ar vektoriālo lielumu raksturīgām īpašībām — ar lielumu un virzienu. Vajadzīgi „virzīti skaitļi" (Weatherburn) jeb „ekstensīvi skaitļi" (Lagally). Vēlams tomēr arī, ka šis domu objekts būtu iespējami vienkāršs un uzskatāms, lai vektoriālā rēķināšana neprasītu tikpat ilgu mācīšanos kā skālārā.

Šī beidzamā prasība noteic vajadzīgā objekta izvēli. Par tādu visērtāks ir izrādījies virzīts nogrieznis, tātad, divu telpas punktu savienojums, kam vēl pierakstīts virziens; tādu nogriezni sauc īsi par vektoru. Rakstot vektoru attēlo ar taisnes gabalu, kam pievieno bultas atkāšus kā virziena rādītājus.

3. Vektora elementi un apzīmējumi.

Vektora elementi, kas to pilnīgi noteic (raksturo), ir šādi: 1) taisne, uz kuŗas ir vektors (vektora atbalsts); 2) šīs taisnes punkts, kuŗā ir vektora iesākums; no šī punkta pa atbalstu var iet uz divi pusēm, tāpēc jāzina 3) puse, kas atbilst vektora virzienam; 4) vektora gaŗums jeb modulis.

Apzīmējumos valda liela dažādība.

Vektoru, kam iesākums ir punktā A un gals punktā B, visbiežāk apzīmē:

$$\overline{AB} \text{ vai } \overrightarrow{AB},$$

bet vektora gaŗumu (moduli) izteic, ieslēdzot vektora nosaukumu starp vertikālām švīciņām:

$$|\overline{AB}| \text{ vai } |\overrightarrow{AB}|.$$

Īsuma ziņā priekšroka jādod apzīmējumam ar vienu burtu. Ja vektoru apzīmē ar švīku vai bultu virs burta, tad tā moduli apzīmē ar to pašu burtu bez švīkas (bultas); vektors $\vec{a}$, tā modulis $a: |\vec{a}| = a$.

Tā kā bultas pievienošana burtam saistīta ar tipografiskām grūtībām, lieto arī divējāda izskata burtus vektora un tā lieluma apzīmēšanai. Piemēram, vektors $\mathbf{a}$, tā modulis a: $|\mathbf{a}| = a$.

Vācu literātūrā pieņemts vektorus apzīmēt ar gotu burtiem ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}, \ldots$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$), bet to moduļus ar attiecīgiem latīņu burtiem: $|\mathfrak{A}| = A$.

4. Dažas definīcijas.

Definīcija I:

Par nulles vektoru sauc tādu, kam lielums ir vienāds ar nulli.

Visi nulles vektori jāuzskata par vienādiem, neatkarīgi no virziena, jo ģeometriski nulles vektors ir virzīts nogrieznis, kam garums ir nulle, tātad, tas ir punkts, bet punktam nav virziena. Raksta

$$\mathbf{a} = 0, \text{ ja } a = 0.$$

Definīcija II:

Par vienības vektoru sauc tādu, kam lielums ir garuma vienība.

Saskaņā ar definīciju vektors $\mathbf{a}$ ir vienības vektors, ja $a = 1$.

Definīcija III:

Par kolīneāriem vektoriem sauc tādus, kuru atbalsti ir paralleli.

Divi kolīneāri vektori var būt virzīti uz vienu un to pašu pusi vai arī uz pretējām pusēm; pirmā gadījumā tos var saukt par tieši parallēliem, otrā — par pretēji parallēliem.

5. Vektoru iedalījums.

Ikviens vektors ir virzīts nogrieznis. Atkarībā no tā, kādi noteikumi ir spēkā papildus par vektoru iesākuma punktu, jāizšķir vairāki vektoru veidi:

1) Saistītie vektori ir tādi, kuru iesākuma punkts ir noteikts. Saistītu vektoru var definēt kā nogriezni starp divi punktiem A un B, kur A — iesākums, B — gals. Tādam vektoru veidam atbilst: ātrums, paātrinājums, elektriskais vai magnētiskais lauks u. c.

Bieži ir vajadzība vektorus skaitīt no kopīga uzdota iesākuma punkta, piem., no koordinātu asu iesākuma. Tādus vektorus sauc par vietas vektoriem: tie noteic savus gala punktus.

2) Slīdošie jeb aksiālie vektori ir tādi, kuru iesākums drīkst slīdēt pa taisni, uz kuras ir vektors. Piem., statikā spēka iedarbība uz cietu ķermeni nemainās, ja spēka pielikšanas punktu pārvieto gar taisni, pa kuru spēks darbojas. Divi spēki ir līdzvērtīgi, ja tie neatšķiras lieluma ziņā, ja tiem vienāds virziens un virziena puse un ja tie ir uz kopīgas taisnes.

Divi slīdošie vektori ir vienādi, ja tie ir uz vienas taisnes, virzīti uz vienu pusi, un ja to garumi ir vienādi.

3) Brīvie vektori ir tādi, kuru iesākums drīkst atrasties ikvienā vietā. Piemērs: pārvietojums taisnā translācijas kustībā, kad visi cieta ķer-

meņa punkti pārvietojas pa taisnēm vienādā virzienā un ar vienādu ātrumu. Visu ķermeņa punktu pārvietojumi ir vienādi lieluma un virziena ziņā; ikkuŗa punkta pārvietojums pilnīgi apraksta un noteic visa ķermeņa pārvietojumu. Pārvietojumu var attēlot ar vektoru, kuŗa iesākumu brīv izvēlēt ikvienā ķermeņa punktā.

Visur, kur būs runa par vektoriem, sapratīsim, ja nav paskaidrots kas cits, brīvus vektorus.

6. Vektoru vienādība.

Definīcija:

Par vienādiem (ekvipollentiem) sauc tādus vektorus, kuŗu atbalsti ir paralleli, kas virzīti uz vienu pusi un neatšķiŗas lieluma ziņā.

Vektoru vienādību izteic ar parasto vienādības simbolu (=). Izteiksme $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ (vektoriāla vienādība) apzīmē, ka vektori **a** un **b** neatšķiŗas ne lieluma, ne virziena, ne virziena puses ziņā. Vektoriālām vienādībām ir tādas pašas īpašības kā skaitļu, figūru u. t. t. vienādībām: ja $\mathbf{a}=\mathbf{b}$, tad $\mathbf{b}=\mathbf{a}$; ja $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ un $\mathbf{b}=\mathbf{c}$, tad $\mathbf{a}=\mathbf{c}$.

7. Kolīneāru vektoru saskaitīšana. Vektoru reizināšana ar skālāru.

Uzdoti vektori **a**, **b**, **c**, . . . , kuŗu atbalsti paralleli (kolīneāri vektori); pieņemsim, ka tie ir virzīti uz vienu pusi. Šinī gadījumā vektoru summa ir vektors

$$\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots\ldots,$$

kas kolīneārs ar uzdotiem vektoriem, virzīts uz to pašu pusi kā tie, un kuŗa lielums ir vienāds ar uzdoto vektoru moduļu summu:

$$s=a+b+c+\ldots\ldots$$

Konstrukcijas ceļā vektoru **s** atrod, atliekot vienu pakaļ otram nogriežņus $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD}=\mathbf{c}$ un t. t. un savienojot pirmā vektora iesākumu A ar beidzamā vektora galu E. Kā lieluma, tā virziena ziņā $\overrightarrow{AE}=\mathbf{s}$. (1. att.)

Acīm redzot, iznākums nav atkarīgs no summandu kārtības; tātad attiecībā pret parallelu vektoru summēšanu ir spēkā kommūtātīvais likums.

Konstrukcija paliek spēkā arī tai gadījumā, kad kolīneārie vektori **a**, **b**, **c**, ... vērsti uz dažādām pusēm. Tāpat paliek spēkā summas vektora moduļa formula, ja summandu moduļus saskaita algebriski, ņemot tos ar + zīmi vektoriem, kas vērsti uz vienu pusi, un ar — zīmi vektoriem, kas vērsti uz otru pusi.

Piemērā, kas parādīts 2. att., $b+d>a+c$. Ja vektoriem **b** un **d** moduļus ņemam ar +, tad vektoriem **a** un **c** tie jāņem ar —:

$$s = -a + b - c + d.$$

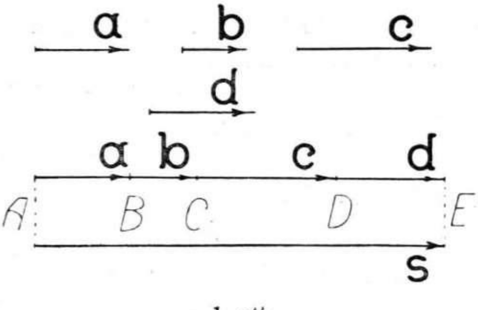
Summas konstrukcija jāiedomājas uz vienas taisnes, lai gan uzskatāmības labad vektori attēlā pabīdīti sāņus.

Arī šinī gadījumā summēšanas iznākums nav atkarīgs no summandu kārtības. Kolīneāru vektoru saskaitīšana ir pakļauta kommūtātīvam likumam.

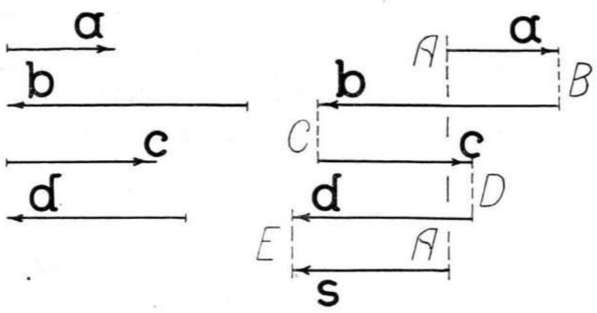
Īpašā gadījumā uzdotie kolīneārie vektori var būt vienādi: $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{c}=\mathbf{d}=\ldots$ Ja vektoru skaits ir m ($m>0$), seko, kā to summa, vektors

$$\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{a}+\ldots+\mathbf{a}=m\mathbf{a},$$

kuŗš kolīneārs vektoram **a**, tāpat virzīts kā tas, un m reiz lielāks.



1. att.



2. att.

Saka, ka vektors **a** ir pareizināts ar pozitīvu skālāru m, ja tā lielums ir pareizināts ar šo skālāru un virziens atstāts bez pārmaiņas.

Ikvienu vektoru **a** var uzskatīt kā sastāvošu no a vienības vektoriem $\mathbf{e}$ ($e=1$.) No tā seko:

$$\mathbf{a}=a\mathbf{e}, \qquad \mathbf{e}=\frac{\mathbf{a}}{a}=\frac{1}{a}\mathbf{a}.$$

L a i d a b ū t u v i e n ī b a s v e k t o r u, d o t a i s v e k t o r s j ā p a r e i z i n a a r a p g r i e z t o m o d u l i (j e b: j ā i z d a l a a r m o d u l i).

Negātīvās zīmes (—) pievienošana vektoram apgriež tā virzienu, atstājot bez pārmaiņas tā lielumu. Tātad, — **a** apzīmē vektoru, kas pretēji paralēls vektoram **a** un tikpat liels kā tas.

Pareizināt vektoru ar negātīvu skaitli nozīmē pareizināt tā moduli ar skaitļa absolūto lielumu un apgriezt virzienu. Tātad, $-m\mathbf{a}\,(m>0)$ apzīmē vektoru, kas pretēji parallēls vektoram **a** un m reiz lielāks par to.

Vispārīga kārtula:

Reizinājums $m\mathbf{a}$ apzīmē vektoru **s**, kam lielums $|m|$ reiz lielāks kā vektoram **a**, bet virziens tieši vai pretēji parallēls, atkarībā no tā, vai $m>0$, vai $m<0$.

Vektora reizināšana ar skālāriem pakļauta reizinātāju asociācijas un kommūtācijas likumiem:

$$m(n\mathbf{a}) = n(m\mathbf{a}) = (nm)\mathbf{a}\,, \qquad (1)$$

un distribūtīvam likumam

$$(m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a} \qquad (2)$$

Pierādīt (1).

Pieņemsim apzīmējumus: $\mathbf{A} = m(n\mathbf{a})$, $\mathbf{B} = n(m\mathbf{a})$, $\mathbf{C} = (nm)\mathbf{a}$. Vektora reizināšana ar skālāru nemaina atbalsta virzienu, bet var mainīties virziena puse, ja reizina ar negātīvu skālāru. Tāpēc vektori **A**, **B**, **C** ir tieši parallēli **a**, ja reizuļiem m un n ir vienādas zīmes, bet pretēji parallēlli **a**, ja tās ir dažādas.

No tā redzams, ka vektori **A**, **B**, **C** ir savā starpā tieši parallēli, to virzieni (ieskaitot virziena pusi) ir vienādi. To lielums:

$$A = mna, \quad B = nma, \quad C = nma$$

ir visiem vienāds. Tas nozīmē

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C},$$

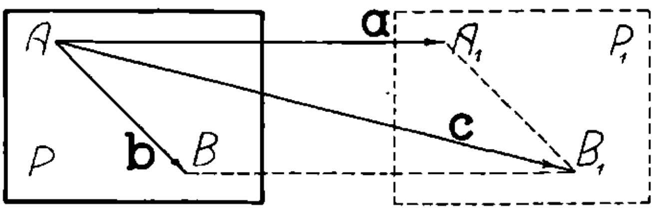
ko vajadzēja pierādīt.

8. Vektoru saskaitīšana un atņemšana vispārīgā gadījumā.

Vairāku kolīneāru vektoru apvienošana neprasa vairāk kā algebrisku saskaitīšanu, uzskatot uz noteiktu vienu pusi vērstu vektoru lielumus par pozitīviem, bet pretēji vērstu — par negātīviem. Tāpat nevar darīt, ja vektoru virzieni dažādi, jo vektoru summai jābūt atkarīgai nevien no to lieluma, bet arī no virziena. Kas jāsaprot zem divu dažādi virzītu vektoru summas, tas jānoteic ar definīciju.

Piemērs mechanikā, kas paskaidro dažādi virzītu vektoru saskaitīšanu, ir saliktā kustība. Iedomāsimies mazu ķermeni, kas kustības iesākumā ir uz platformas punktā A.

Attiecībā pret platformu punkts var pārvietoties ar vienmērīgu ātrumu pa taisni AB līdz gala punktam B. Tikpat garā laika sprīdī platforma var pārvietoties attiecībā pret apkārtni no stāvokļa P līdz stāvoklim P_1, tāpat ar vienmērīgu ātrumu taisnā translācijas kustībā. Platformas pārvietojums attiecībā pret savu apkārtni (pārnesums) ir $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a}$. Ķermeņa pārvietojums attiecībā pret platformu (relātīvais pārvietojums) ir $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. Tie abi noteic ķermeņa (absolūto) pārvietojumu attiecībā pret apkārtni; kā to atrast?



3. att.

Ja platforma kustas pa priekšu un pēc tam ķermenis, tā pārvietojums ir AA_1B_1; simboliski: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Ja ķermenis kustas pa priekšu un pēc tam platforma, tā pārvietojums ir ABB_1; simboliski: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Ja abi kustas reizē, tas pārvietojas pa trajektoriju AB_1, un vektoru $\overrightarrow{AB_1} = \mathbf{s}$ uzskata par abu pārvietojumu summu. Raksta:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Tāpat no piedzīvojuma zināms, ka divu spēku iedarbība uz kādu punktu ir līdzvērtīga viena vienīga spēka iedarbībai. Pēdējo spēku lieluma un virziena ziņā dabū kā parallēlograma diagonāli, kuŗa malas lielumā un virzienā atbilst uzdotiem spēkiem.

Definīcijas:

Savietojot divi vektoru iesākumus un konstruējot ar tiem parallēlogramu, dabūjam vektoru summu, kā to diagonāli, kas iesākas vektoru kopīgā punktā.

Divu vektoru summa ir vektors, kas sniedzas no pirmā vektora iesākuma līdz otrā vektora galam, ja pirmā vektora gals savietots ar otrā iesākumu.

Saskaņā ar beidzamo definīciju, lai atrastu grafiski divu uzdotu vektoru **a** un **b** summu, konstruē no kāda izejas punkta A vienu pakaļ otram vektorus:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \mathbf{b},$$

tad pirmā un beidzamā punkta savienojums

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{s}.$$

Varēja par pirmo uzskatīt vektoru **b** un par otro **a**. Konstruējot $\overrightarrow{AB_1} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \mathbf{a}$, pārliecināmies, ka C_1 ir tas pats punkts C; tātad

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{s}.$$

Tas rāda, ka

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

t. divu vektoru summēšana ir pakļauta kommūtātīvam likumam.

Saskaņā ar šo likumu summa nav atkarīga no summandu kārtības. Konstruējot summas vektoru, ir vienalga, kuŗu no summandiem ņem papriekš.

Definīcijas:

Savietojot trīs vektoru iesākumus un konstruējot parallēlepipedu, kam vektoru iesākumi ir vienā stūrī un paši vektori šķautnēs, dabūjam vektoru summu, kā to galveno diagōnāli, kas iesākas vektoru kopīgā punktā.

Trīs vektoru summa ir vektors, kas sniedzas no pirmā vektora iesākuma līdz beidzamā vektora galam, ja viena vektora iesākums ir savietots ar iepriekšējā galu.

Uzdoti trīs vektori **a**, **b**, **c**; jāatrod to summa **s**. Tā kā vektori ir brīvi, var ņemt to iesākumus kopā. Pieņemsim, ka vektori nesavietojas atbalstiem, kā arī, ka tie nenovietojas vienā plaknē. Tad tie veido triedru un var, kā definīcijā aprakstīts, konstruēt parallēlepipedu. Tā diagōnāle $\overrightarrow{OO_1} = \mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. To pašu gala punktu dabūtu, konstruējot $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{C_1O_1} = \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, tātad, konstruējot vektorus vienu pakaļ otram.

No 4. att. nolasām:

$$\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1O_1} = \overrightarrow{OO_1} = \mathbf{s},$$
$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1O_1} = \overrightarrow{OO_1} = \mathbf{s},$$
$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1O_1} = \overrightarrow{OO_1} = \mathbf{s};$$

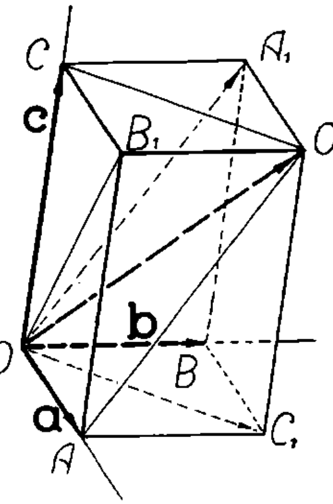
un tāpat:

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO_1} = \overrightarrow{OO_1} = \mathbf{s},$$
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{OO_1} = \mathbf{s},$$
$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO_1} = \overrightarrow{OO_1} = \mathbf{s}.$$

No tā seko:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{s},$$
$$(\mathbf{b}+\mathbf{c})+\mathbf{a}=\mathbf{s},$$
$$(\mathbf{c}+\mathbf{a})+\mathbf{b}=\mathbf{s},$$

un vēl 3 formulas, kas no iepriekšējām atšķiras tikai tai ziņā, ka pirmie divi locekļi apmainījuši vietu ar beidzamo locekli. Iekava, kā parasts, apzīmē to, ka darbība tās iekšienē jāizdara papriekšu. Saskaņā ar agrāk pierādīto, locekļu kārtībai iekavu iekšienē (divu vektoru saskaitīšanā) nav nozīmes.



4. att.

Tātad:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=(\mathbf{b}+\mathbf{c})+\mathbf{a}=(\mathbf{c}+\mathbf{a})+\mathbf{b}=$$
$$=\mathbf{c}+(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{b}+(\mathbf{c}+\mathbf{a})=\mathbf{s}.$$

Tas ir trīs vektoru sakaitīšanas asociātīvais un kommūtātīvais likums. Saskaņā ar to, lai saskatītu trīs vektorus, drīkst tos ņemt kādā patīk kārtībā, saskaitot divus un iznākumu saskaitot ar trešo vektoru; iznākums visos gadījumos ir viens un tas pats.

Ja vajadzīgs atrast lielākam vektoru skaitam **a**, **b**, **c**, **d**,   **k** summu:

$$\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\quad\quad+\mathbf{k},$$

konstruē, tāpat kā līdzšinējos gadījumos, vektoru poligōnu, t. i. vienu pakaļ otram vektorus:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{AB}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{BC}=\mathbf{c},\quad\quad \overrightarrow{JK}=\mathbf{k},$$

un savieno pirmā vektora iesākumu ar beidzamā vektora galu. Tā dabū vektoru $\overrightarrow{OK}$, kuru, saskaņā ar definīciju, uzskata par uzdoto vektoru summu:

$$\overrightarrow{OK}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\quad\quad+\mathbf{k}=\mathbf{s}.$$

Vektoru summa ir vektors, kas noslēdz vektoru poligōnu un iet no poligōna iesākuma līdz beigām.

Arī lielāka summandu skaita gadījumā iznākums nav atkarīgs no tā, kādā kārtībā vektorus ņem un kā tos apvieno. (Kommūtātīvais un asociātīvais likumi.)

Teōrēma:

Vektoru saskaitīšana ir pakļauta kommūtātīvam un asociātīvam likumam. Summa nav atkarīga no locekļu kārtības un grupējuma.

Pierādījums pamatojas uz to, ka ikvienā vektoru summā divi locekļi līdzās drīkst savstarpēji apmainīties. Vairākkārtīgi atkārtojot apmaiņu, ikvienu summas locekli var nogādāt tanī vietā, kur gribam. Atkārtojot šo procedūru, varam sasniegt ikvienu locekļu grupējumu.

Definīcija:

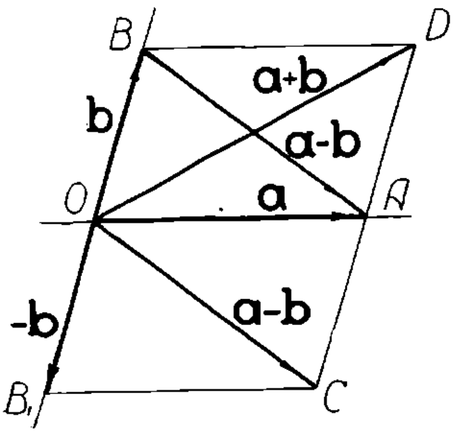
Atņemt vektoru nozīmē pieskaitīt tāda paša lieluma pretēji vērstu vektoru:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Šī definīcija vektoru atņemšanu noved pie to saskaitīšanas.

Uzdevums:

Atrast divu uzdotu vektoru starpību: $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.



5. att.

Dots:

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a},$$
$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b},$$
$$\overrightarrow{OB_1} = -\mathbf{b}.$$

Jāatrod:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OC}.$$

Bet:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA},$$

tātad:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{BA}.$$

Divu vektoru starpība ir vektors, kas savieno abu vektoru galus un virzīts no atskaitāmā vektora gala pret tā vektora galu, kuŗam jāatskaita:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

9. Vektoru salikšana komponentēs.

Katru vektoru var uzskatīt kā vairāku citu vektoru summu; pēdējos tad sauc par **komponentēm**, bet to summu (uzdoto vektoru) par **rezultējošo vektoru** jeb **rezultanti**. Uzdota vektora salikšana komponentēs, ja nav nekādu papildu nosacījumu, ir pilnīgi nenoteikts uzdevums; komponenšu skaits, virziens un lielums ir ierobežoti tikai ar vienīgo noteikumu, ka komponenšu poligōnam jāiesākas uzdotā vektora iesākumā un jānobeidzas tā beigās. Uzdevums top noteikts, ja uzdod komponenšu skaitu un to virzienus.

Vektoru salikšana plaknē. — Uzdoto vektoru **a** salikt komponentēs virzienos O_x, O_y, ko noteic vienības vektori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Dots, ka $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — koplanāri.

Pārnesīsim vienības vektorus un uzdoto vektoru vienā plaknē. Projecējot vektoru **a** slīpi uz uzdotiem virzieniem, dabū tā komponentes $\mathbf{a}_x$ un $\mathbf{a}_y$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \ .$$

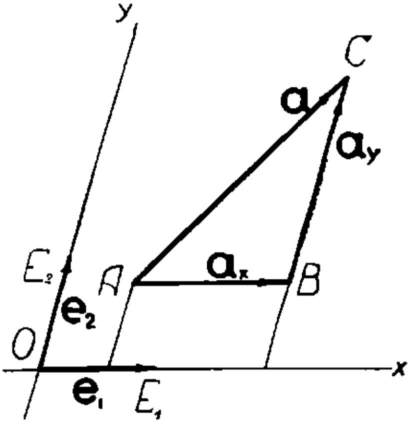
Vektori $\mathbf{a}_x$ un $\mathbf{e}_1$ ir kolīneāri, tāpat $\mathbf{a}_y$ un $\mathbf{e}_2$ $(e_1 = e_2 = 1)$.

Tāpēc:

$$\mathbf{a}_x = a_x \mathbf{e}_1, \ \mathbf{a}_y = a_y \mathbf{e}_2;$$

tātad:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2.$$



6. att.

Še a_x ir garuma vienību skaits nogrieznī AB, tātad skaitlis, ko dabū, izmērojot AB ar OE_1 un ņemot to ar „+", ja $\mathbf{a}_x$ tieši parallēls $\mathbf{e}_1$, bet ar "—", ja $\mathbf{a}_x$ pretēji parallēls $\mathbf{e}_1$. Līdzīgi par a_y.

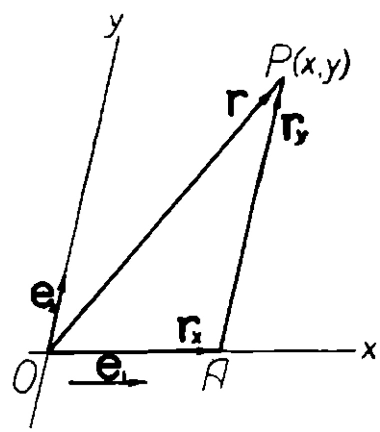
Uzdotas plaknē asis xOy ar vienības vektoriem $\mathbf{e}_1$ un $\mathbf{e}_2$ un stāvokļa vektors **r**. Tas noteic plaknē punktu $P(x,y)$. Šinī gadījumā:

$$\mathbf{r}_x = \overrightarrow{OA} = x\mathbf{e}_1 \, ,$$

$$\mathbf{r}_y = \overrightarrow{AP} = y\mathbf{e}_2 \, ,$$

tātad:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 .$$



7. att.

Ja koordinātu asis ortogōnālas, $\sphericalangle$ xOy = taisns, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, un tad šos vienības vektorus mēdz apzīmēt ar **i** un **j**. $(\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j})$.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \, ,$$

izdalot ar r:

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} \, ,$$

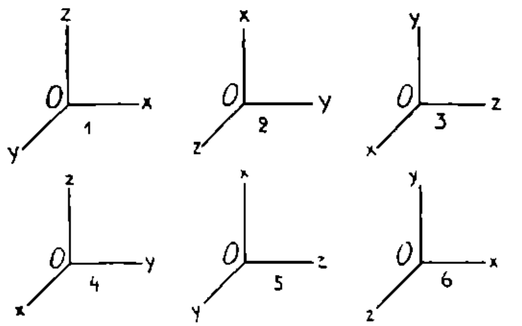
tātad:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} \cos\alpha + \mathbf{j} \sin\alpha,$$

kur $\mathbf{r}_1$ — vienības vektors $(r_1 = 1)$.

Vektoru salikšana telpā. — Vajadzīgi trīs virzieni, kas veido triedru. Virzienus uzdod ar nekoplanāriem vektoriem e_1, e_2, e_3. Taisnes, kas vilktas no kāda punkta O paralēli šiem virzieniem, ir references triedrs O_x, O_y, O_z.

Izšķiŗ divējādus triedrus. Apskatīsim figūru, kas sastāv no taisna leņķa papīra plaknē un stateniska stara, kas virzīts uz lasītāja pusi. Numerējot starus visiem iespējamiem paņēmieniem dabū 6 triedrus:



8. att.

Triedrus 1, 2, 3 var savietot tā, ka vienvārdīgās asis ir kopā ar vienvārdīgām; tāpat var savietot triedrus 4, 5, 6. Bet nevienu triedru no 1, 2, 3 nevar savietot ar kādu no 4, 5, 6. Pietiek apskatīt vienu no katra veida.

Triedrs 1 („kreisās rokas triedrs"). Daudz lietāts Francijā analitiskās ģeometrijas un mēchanikas kursos. Novērotājs, kam kājas punktā *O* un galva pa *Oz*, raugoties uz kvadrantu *xOy*, redz *Ox* pa kreisi, *Oy* — pa labi. Ja staru *Ox* griež ap *O* un tuvina visīsākā ceļā staram *Oy*, vajaga griezt pulksteņa rādītāja virzienā. Kreiso vītņu skrūve uz *z* ass, ja skrūvi griež virzienā *Ox*→ *Oy*, pārvietojas virzienā *Oz*. Ja kreisās rokas īkšķi noliek virzienā *Ox*, rādītāju pirkstu virzienā *Oy* un vidējo pirkstu stateniski pret abiem, tas rāda virzienā *Oz*.

Triedrs 4 („labās rokas triedrs"). Lietā astronomijā un elektrības mācībā. Novērotājs, kam kājas ir punktā *O* un galva virzīta pa *Oz*, aplūkojot kvadrantu *xOy*, redz *Ox* labā pusē, *Oy*—kreisā. Ja staru *Ox* tuvina īsākā ceļā staram *Oy*, jāgriež pretēji pulksteņa rādītājam, ko trigonometrijā pieņem par pozitīvo rotācijas virzienu. Parastā labo vītņu skrūve (viļķis) pārvietojas pa *Oz*, ja to griež *Ox*→ *Oy*. Ja labās rokas īkšķi noliek virzienā *Ox*, rādītāju — virzienā *Oy*, vidējais novietojas gar *Oz*.

Šādā virzienā griežas zeme ap savu asi, ja asi virza no *S* uz *N*. Tāpat riņķo planētas pa ekliptiku ap sauli. Tas ir arī spēka līniju rotācijas virziens magnētiskā laukā, ko rada elektriskā strāva ap taisnu elektrības vadītāju.

Mēs lietāsim labās rokas triedru, izņemot gadījumus, kur tieši pieminēts pretējais.

Uzdots references triedrs ar vienības vektoriem e_1, e_2, e_3 (nekoplanāri vektori) un kāds vektors **a**. Caur tā galiem velkam plaknes, kas paralēlas triedra plaknēm. Katrs parallēlu plakņu pāris nošķeļ koordinātu asīm Ox, Oy, Oz vektora komponentes $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z,$$

tātad:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_1 + a_y\mathbf{e}_2 + a_z\mathbf{e}_3.$$

Skaitļi a_x, a_y, a_z dabūti, izmērojot vektoru $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ garumu un dabūto skaitli ņemot ar + vai —, atkarībā no tā, vai vektora virziens tāds pats kā attiecīgajam vienības vektoram, vai pretējs.

Ja uzdotais vektors ir stāvokļa vektors $\mathbf{r}$, tā iesākums jānovieto punktā O. Gals noteic punktu P (x, y, z). Šinī gadījumā $a_x = x$, $a_y = y$, $a_z = z$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Ja vienības vektori, kas noteic references triedru, savstarpēji stateniski, tos apzīmē ar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Šinī gadījumā, ja vektoram $\mathbf{a}$ projekcijas uzdotas ar skaitļiem a_x, a_y, a_z un vietas vektoram $\mathbf{r}$ gala punkta koordinātas ir x, y, z, seko

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k};$$

attiecīgi

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Vingrinājumi un papildinājumi.

1. Uzdots četrstūris $ABCD$. Uz stūri A darbojas spēki $\vec{AB}$ un $\vec{AD}$, uz stūri C spēki $\vec{CB}$ un $\vec{CD}$. Parādīt, ka to rezultējošā ir $4\vec{PQ}$, kur P un Q ir attiecīgi AC un BD viduspunkti.

CQ ir mediāna, tāpat AQ:

$$\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AQ},$$

$$\vec{CB} + \vec{CD} = 2\vec{CQ}.$$

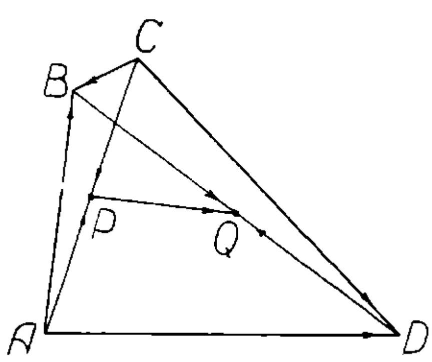
Saskaitot dabūn:

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD} = 2(\vec{AQ} + \vec{CQ}).$$

$$\vec{AQ} = \vec{AP} + \vec{PQ},$$

$$\vec{CQ} = \vec{CP} + \vec{PQ}.$$

$$\vec{AQ} + \vec{CQ} = 2\vec{PQ} + (\vec{AP} + \vec{CP}).$$



9. att.

Punkts P dala nogriezni AC uz pusēm.

Tāpēc

$$\vec{AP}+\vec{CP}=0,$$

tātad,

$$\vec{AQ}+\vec{CQ}=2\,\vec{PQ},$$

un

$$\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{CB}+\vec{CD}=2 \quad 2\,\vec{PQ}=4\,\vec{PQ}.$$

2. Atrast punktu, kas divu punktu savienojumu sadala uzdotā attiecībā.

Divi punkti A un B uzdoti ar saviem stāvokļa vektoriem **a** un **b**. Jāatrod stāvokļa vektors punktam M ar tādu īpašību, ka attiecība:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{m}{1}=m$$

jeb

$$\vec{AM}=m\,.\,\vec{MB}.$$

Punktam M stāvokļa vektors ir **x**:

$$\left.\begin{aligned}\vec{AM}&=\mathbf{x}-\mathbf{a}\\ \vec{MB}&=\mathbf{b}-\mathbf{x}\end{aligned}\right\}\ \mathbf{x}-\mathbf{a}=m\,(\mathbf{b}-\mathbf{x}).$$

Tātad:

$$\mathbf{x}-\mathbf{a}=m\mathbf{b}-m\mathbf{x},$$
$$\mathbf{x}+m\mathbf{x}=m\mathbf{b}+\mathbf{a},$$

$$\mathbf{x}=\frac{m\mathbf{b}+\mathbf{a}}{m+1}.$$

Ja

$$m=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{AM}{MB},$$

tad

$$\mathbf{x}=\frac{\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{a}}{\lambda+\mu}.$$

Definīcijas:

Uzdoti n punkti, kuŗu stāvokļa vektori attiecībā pret iesākumu O ir **a**, **b**, **c**, Punkts P, kuŗa stāvokļa vektors

$$\vec{OP}=\frac{1}{n}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} \qquad)$$

ir uzdoto punktu centroīds.

Ja punktiem atbilst n reāli skaitļi $p, q, r,$, tad punktu P tādu ka

$$\vec{OP}=\frac{p\mathbf{a}+q\mathbf{b}+r\mathbf{c}+\ \ .\ .\ .}{p+q+r}$$

sauc par punktu centroīdu ar saistītiem skaitļiem $p, q, r, \ldots$

Piemērs:

Punktos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3,$ ir attiecīgi masas $m_1, m_2, m_3,$ Masu centrs ir noteikts ar vietas vektoru

$$\mathbf{r} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 +}.$$

Teōrēma:

Centroīds nav atkarīgs no vektoru iesākuma.

Centroīds attiecībā pret iesākumu O:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c} + }{p_1 + p_2 + p_3 +}.$$

Ņemam citu iesākumu O_1. Centroīds attiecībā pret jauno iesākumu:

$$\overrightarrow{O_1P} = \frac{p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{b}_1 + p_3\mathbf{c}_1 + }{p_1 + p_2 + p_3 +}.$$

$$\overrightarrow{O_1O} = \mathbf{k}.$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c} + \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{O_1P_1} = \frac{p_1(\mathbf{a}+\mathbf{k}) + p_2(\mathbf{b}+\mathbf{k}) + p_3(\mathbf{c}+\mathbf{k}) +}{p_1 + p_2 + p_3 +}$$

$$= \frac{p_1\mathbf{a} + p_2\mathbf{b} + p_3\mathbf{c} + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 +} + \mathbf{k} = \overrightarrow{OP} + \mathbf{k}.$$

Tas nozīmē, ka punkti P un P_1 ir kopā.

3. Vienības kuba stūros novietotas masas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grami: pirmās četras viena sāna stūros A, B, C, D, beidzamās četras attiecīgi šo punktu projekcijās uz pretējo sānu A_1, B_1, C_1, D_1. Atrast masu centroīdu.

Punkts	Vietas vektors	Masa	Reizinājums		
A	$\mathbf{i}$	1	$\mathbf{i}$		
B	$\mathbf{i}+\mathbf{k}$	2	$2\mathbf{i}$		$2\mathbf{k}$
C	$\mathbf{k}$	3			$3\mathbf{k}$
D	0	4			
A_1	$\mathbf{i}+\mathbf{j}$	5	$5\mathbf{i}$	$5\mathbf{j}$	
B_1	$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$	6	$6\mathbf{i}$	$6\mathbf{j}$	$6\mathbf{k}$
C_1	$\mathbf{j}+\mathbf{k}$	7		$7\mathbf{j}$	$7\mathbf{k}$
D_1	$\mathbf{j}$	8		$8\mathbf{j}$	
Kopā		36	$14\mathbf{i}$	$26\mathbf{j}$	$18\mathbf{k}$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{14\mathbf{i} + 26\mathbf{j} + 18\mathbf{k}}{36} = \frac{7}{18}\mathbf{i} + \frac{13}{18}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}.$$

4. Atrast centroīdu $3n$ punktiem:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{i}, 2\mathbf{i}, 3\mathbf{i}, & n\mathbf{i}; \\ \mathbf{j}, 2\mathbf{j}, 3\mathbf{j}, & n\mathbf{j}; \\ \mathbf{k}, 2\mathbf{k}, 3\mathbf{k}, & n\mathbf{k}. \end{array}$$

Saskaņā ar definīciju jāatrod vektoru summa un jāizdala ar vektoru skaitu.

Vektoru summu var dabūt, saskaitot vienādi virzītos vektorus:

$$\mathbf{i} + 2\mathbf{i} + 3\mathbf{i} + \qquad + n\mathbf{i} = (1 + 2 + 3 + \qquad + n)\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{S}_I = \frac{n(n+1)}{2}\mathbf{i},$$

$$\mathbf{S}_{II} = \frac{n(n+1)}{2}\mathbf{j},$$

$$\mathbf{S}_{III} = \frac{n(n+1)}{2}\mathbf{k}.$$

Saskaitot

$$\mathbf{S} = \sum_{n=I}^{III} \mathbf{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Centroīds

$$\vec{OP} = \frac{1}{3n}\mathbf{S} = \frac{n+1}{6}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Centroīda modulis:

$$|\vec{OP}| = \frac{n+1}{6}\sqrt{1+1+1} = \frac{n+1}{2\sqrt{3}},$$

tā virziena koeficienti:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{n+1}{6} : \frac{n+1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. Uzdots regulārs n—stūris, kam visos stūros, izņemot divus, ir vienādas masas. Atrast masu centroīdu.

Centroīds nav atkarīgs no iesākuma punkta izvēles. Iesākumu ņemsim aprakstītā riņķa centrā. No centra jāvelk vektori uz visiem poligōna stūriem, izņemot divus; jāatrod vektoru summa un jāizdala ar vektoru skaitu ($n-2$).

Vilksim paprlekš vektorus uz visiem stūriem, atradīsim to summu un tai atskaitīsim divus vektorus, kuŗus mēs pleņēmām līdz tukšiem stūriem.

No regulāra poligōna centra līdz stūŗiem vilktu vektoru summa $= 0$. Tas skaidrs pats no sevis, kad poligōna sānu skaits ir pārskaitlis. Pretējā gadījumā pierādām, ka vektoru poligōns ir slēgts. Vektoru poligōna malām ir vienāds lielums, un tās veido vienādus iekšējos leņķus:

$$2\alpha = \pi - \frac{2\pi}{n}.$$

Virs katras poligōna malas konstruēsim vienādsānu trijstūri, kam pie pamata leņķi ir α:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

Leņķis $\triangle$-ŗa virsotnē ir

$$\frac{2\pi}{n}$$

Skaidrs, ka visiem trijstūŗiem virsotnes ir kopējā punktā C_1 un ka visi leņķi pie virsotnes iztaisa kopā 2π, t. i. poligōna gala punkts nonāk atpakaļ iesākuma punktā. Tātad vektoru summa ir 0.

Visu vektoru summai, kas $= 0$, jāatskaita divi vektori no to kopīgā punkta līdz tukšiem stūŗiem. Tātad, jāsaskaita vektori no tukšiem stūŗiem līdz poligōna centram un summa jāizdala ar $n-2$.

6. Pieci spēki darbojas uz rēgulāra sešstūŗa stūri A virzienā uz pārējiem stūŗiem. Lieluma ziņā spēki proporcionāli stūŗa A atstatumiem līdz pārējiem stūŗiem. Atrast rezultējošo spēku.

Stūŗus apzīmēsim ar A, B, C, D, E, F. Attiecīgi izvēlot gaŗumu spēku vienības attēlošanai, var sasniegt to, ka punktā A pielīktos spēkus attēlo vektori

$$\vec{AB},\ \vec{AC},\ \vec{AD},\ \vec{AE},\ \vec{AF}.$$

Jāatrod šo vektoru summa.

$$\begin{aligned}
\vec{AB} &= & &= \vec{AB} \\
\vec{AC} &= & &= \vec{AB} + \vec{BC} \\
\vec{AD} &= \vec{AC} + \vec{CD} & &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} \\
\vec{AE} &= \vec{AF} + \vec{FE} & &= \vec{CD} + \vec{BC} \\
\vec{AF} &= & &= \vec{CD}
\end{aligned}$$

$$\text{Kopā} = 3\,(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}) = 3\quad \vec{AD}.$$

7. Punktu A un B stāvokļa vektori ir **a** un **b**. Atrast stāvokļa vektorus punktiem C un D, ja $\vec{AC} = 3\,\vec{AB}$ un $\vec{BD} = 2\,\vec{BA}$.

$$\vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a},$$

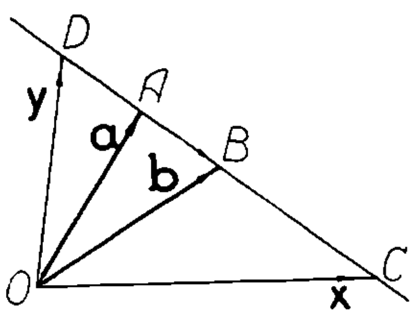
$$\vec{AB} = 3\vec{AB} = 3\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

$$\vec{BD} = 2\vec{BA} = 2\,(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Tātad:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \vec{AC} = 3(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + \vec{BD} = 2\,(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$



10. att.

8. Trijstūrim ABC apvilktā riņķa centrs ir O un ortocentrs (augstumu krustpunkts) O_1. Pierādīt, ka:

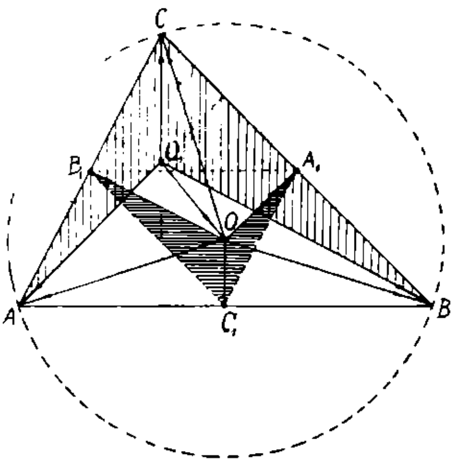
$$1)\quad \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OO_1}$$

$$2)\quad \vec{O_1A} + \vec{O_1B} + \vec{O_1C} = 2\,\vec{O_1O}$$

un

$$3)\quad \vec{AO_1} + \vec{O_1B} + \vec{O_1C} = \vec{AD},$$

kur AD ir apvilktā riņķa caurmērs.



11. att.

Savienojot apvilktā riņķa centru ar A, B, C, sadalām uzdoto trijstūri vienādsānu trijstūŗos:

$$\vec{OA} + \vec{OB} = 2\,\vec{OC_1}$$

$$\vec{OB} + \vec{OC} = 2\,\vec{OA_1}$$

$$\vec{OC} + \vec{OA} = 2\,\vec{OB_1}$$

$$2\,(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = 2\,(\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1})$$

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1}. \quad (1)$$

Figūra $OA_1C_1B_1$ ir līdzīga fig. O_1ACB, bet homologās dimensijas pēdējai divreiz lielākas.

Tāpēc:

$$2\,\vec{OA_1} = -\,\vec{O_1A}$$

$$2\,\vec{OB_1} = -\,\vec{O_1B}$$

$$2\,\vec{OC_1} = -\,\vec{O_1C}$$

$$2\,(\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1}) + (\vec{O_1A} + \vec{O_1B} + \vec{O_1C}) = 0 \quad (2)$$

No (1) un (2) seko:

$$2\,(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) + (\vec{O_1A} + \vec{O_1B} + \vec{O_1C}) = 0 \quad . (3)$$

Cita sakarība starp šīm summām:

$$\vec{O_1A} = \vec{O_1O} + \vec{OA}$$

$$\vec{O_1B} = \vec{O_1O} + \vec{OB}$$

$$\vec{O_1C} = \vec{O_1O} + \vec{OC},$$

tātad:

$$(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) - (\vec{O_1A} + \vec{O_1B} + \vec{O_1C}) = 3\,\vec{OO_1} \quad . \; . \; . \; . \; (4)$$

No (3) un (4), saskaitot:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OO_1} \tag{5}$$

to ievietojot (3):

$$\vec{O_1A} + \vec{O_1B} + \vec{O_1C} = -2\,\vec{OO_1} = 2\,\vec{O_1O} \tag{6}$$

Tas ir tas, ko vajadzēja pierādīt.

Lai pierādītu uzdevuma beidzamo daļu, izejam no jau pierādītas sakarības (6), kuru pārrakstām šādi:

$$-\vec{AO_1} + \vec{O_1B} + \vec{O_1C} = 2\,\vec{OO_1}.$$

Abām pusēm pieskaitām $2\,\vec{AO_1}$:

$$\begin{aligned}\vec{AO_1} + \vec{O_1B} + \vec{O_1C} &= 2\,(\vec{O_1O} + \vec{AO_1})\\ &= 2\,(\vec{AO_1} + \vec{O_1O})\\ &= 2\,(\vec{AO}) = \vec{AD}.\end{aligned}$$

9. Uzdots trijstūris ABC. Punkti $A_1B_1C_1$ ir tā malu viduspunkti. Parādīt, ka ikvienam punktam O spēku sistēma, ko attēlo vektori,

$$\vec{OA},\ \vec{OB},\ \vec{OC},$$

ir ekvivalenta sistēmai

$$\vec{OA_1},\ \vec{OB_1},\ \vec{OC_1}.$$

Turpinot OA_1, OB_1, OC_1 par tādu pašu gabalu, dabūjam parallēlogramus:

$$\vec{OA} + \vec{OC} = 2\,\vec{OB_1}$$

$$\vec{OC} + \vec{OB} = 2\,\vec{OA_1}$$

$$\vec{OB} + \vec{OA} = 2\,\vec{OC_1}.$$

Saskaitot:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1}.$$

Uzdevumi I.

1. Uzdoti vektori:

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k},$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 8\mathbf{k},$$
$$\mathbf{v}_3 = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}.$$

Aprēķināt to modulus un virziena koeficientus. Atrast vektoru summu.

2. No koordinātu asu iesākuma O iziet divi vektori:

$$\vec{OP} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k},$$

$$\vec{OQ} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Atrast vektoru $\vec{PQ}$ un aprēķināt tā virziena kosinu.

3. Tris vektori:

$$\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{v}_2 = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{v}_3 = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k},$$

kas iziet no koordinātu asu iesākuma, noteic trijstūŗa virsotnes. Uzrakstīt vektorus, kuŗus noteic trijstūŗa malas un atrast malu gaŗumus.

4. Četru punktu A, B, C, D stāvokļa vektori:

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \qquad \overrightarrow{OC} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b},$$
$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{OD} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}.$$

Atrast vektorus $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BC}$ un $\overrightarrow{CA}$.

5. Regulārā sešstūrī divas malas pēc kārtas noteic vektorus $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$. Atrast vektorus, kuŗus noteic turpmākās malas.

6. Punkts riņķo ar vienmērīgu ātrumu $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ plaknē, apgriezdamies 12 sekundēs vienreiz apkārt. Ja iesākuma punktam stāvokļa vektors attiecībā pret griešanās centru ir $\mathbf{i}$ un riņķošana virzīta no $\mathbf{i}$ pret $\mathbf{j}$, atrast stāvokļa vektorus pēc 1, 3, 5, 7 sek., tāpat pēc 1,5 un 4,5 sek.

7. Iepriekšējā uzdevumā atrast kustošā punkta ātruma vektorus pēc 1, 5, 3 un 7 sek.

8. Laivas ātrumu attiecībā pret ūdeni izteic vektors $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ un ūdens ātrumu attiecībā pret zemi vektors $\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. Kāds ir laivas ātrums attiecībā pret zemi, ja $\mathbf{i}$ un $\mathbf{j}$ apzīmē ātrumus 1 km stundā uz rītiem un ziemeļiem respektīvi.

9. Divi ķermeņi kustas ar vienu un to pašu ātrumu v m/sek.; viens pa noteiktu riņķa caurmēru, otrs pa tā aploci. Atrast pirmā ātrumu attiecībā pret otru, ja beidzamā radiusam ir leņķis θ ar pirmā virzienu (θ — pieaug).

10. Divi ķermeņi, kuŗi pašlaik ir punktos A un B, atstatumā 15 m viens no otra, pārvietojas ar vienmērīgu ātrumu, pirmais no A pret B ar ātrumu 5 m/sek., otrs statenīski pret AB ar ātrumu $3^3/_4$ m/sek. Atrast to relātivo ātrumu, īsāko atstatumu starp abiem un momentu, kad tie būs viens otram vistuvāk.

11. Atrast 3 vektoru summu, kuŗus noteic kuba kvadrātu diagonāles, kas iet caur vienu kuba stūri; vektoru iesākums ir šinī stūrī.

12. Uz kuba stūri darbojas spēki 1, 2, 3 kg stūrī saejošo 3 diagonāļu virzienos. Atrast to summu.

II.

Lineāri vektoru nolīdzinājumi. Lietājumi ģeometrijā.

1. Lineāri atkarīgi un neatkarīgi vektori.

Vektorus sauc par kolīneāriem, ja to atbalsti ir paralleli kopīgai taisnei; tādu vektoru atbalsti ir savā starpā paralleli. (Sk. 13. lp. p. definīcija III). Tādus vektorus, pārnesot iesākumus, var novietot vienā taisnē.

Vektorus sauc par nekolīneāriem, ja to atbalsti nav paralleli vienai kopīgai taisnei; tādus nevar novietot vienā taisnē.

Vektorus sauc par koplanāriem, ja tie ir paralleli kopīgai plaknei, tā ka tos, attiecīgi pārnesot iesākumus, var novietot vienā plaknē.

Ja nevar vilkt tādu plakni, kas parallela visiem vektoriem, tad tos sauc par nekoplanāriem.

Vektorus $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots \mathbf{k}$ sauc par lineāri atkarīgiem, ja iespējama sakarība:

$$A\mathbf{a} + B\mathbf{b} + C\mathbf{c} + \ldots K\mathbf{k} = 0,$$

kur $A, B, C, \ldots K$ ir kādi skālāri, kas nav nulles. Vektorus sauc par lineāri neatkarīgiem, ja tāda sakarība ir neiespējama, t. i. ja vienmēr

$$A\mathbf{a} + B\mathbf{b} + C\mathbf{c} + \ldots K\mathbf{k} \neq 0,$$

kad skālārie reizuļi nav nulles.

Teōrēma I.

Divi lineāri atkarīgi vektori ir kolīneāri; tāpat otrādi, divi kolīneāri vektori ir lineāri atkarīgi.

Uzdots, ka divus vektorus $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ saista sakarība:

$$A\mathbf{a} + B\mathbf{b} = 0,$$

kur $A, B \neq 0$. To var rakstīt arī tā:

$$\mathbf{b} = -\frac{A}{B}\,\mathbf{a}, \quad -\frac{A}{B} = m, \quad \mathbf{b} = m\mathbf{a}.$$

Tas izteic, ka vektoriem $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ ir paralleli atbalsti, t. i., ka tie ir kolīneāri.

Otrādi, pieņemsim, ka uzdoti divi kolīneāri vektori: **a** un **b**. Izvēlēsim vienības vektoru $\mathbf{e} \parallel \mathbf{a}$. Tad seko:

$$\mathbf{a} = a\mathbf{e},\ \mathbf{b} = \pm b\mathbf{e};$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{a} = \pm \frac{\mathbf{b}}{b},$$

$$\pm b\mathbf{a} + a\mathbf{b} = 0,$$

t. vektorus saista līneāra sakarība. (Jāņem +, ja **a** un **b** ir uz vienu pusi virzīti, bet „—" zīme, ja uz pretējām.)

Piezīme.

Caur ikvienu telpas punktu var vilkt bezgalīgi daudz plakņu, attiecībā pret kuŗām kolīneāri vektori **a**, **b**, **c**; . ir koplanāri.

Ja divi vektori **a** un **b** ir līneāri neatkarīgi, t. i., ja vienmēr:

$$A\mathbf{a} + B\mathbf{b} \neq 0,\quad \mathbf{b} \neq -\frac{A}{B}\mathbf{a},\ \mathbf{b} \neq m\mathbf{a},$$

tad vektori ir nekolīneāri. Ja to atbalstu virzieni ir vienādi, vienmēr var sameklēt tādu m, lai $\mathbf{b} = m\mathbf{a}$; bet ja virzieni ir dažādi, nekāds m nevar nevienlīdzību novērst.

Otrādi, ja vektori **a** un **b** nav kolīneāri, starp tiem ir leņķis $\varphi \neq 0$ vai π. Vektors $A\mathbf{a}$ ir kolīneārs ar **a**, $B\mathbf{b}$ ar **b**; skaidrs, ka $A\mathbf{a} + B\mathbf{b} = \mathbf{s}$, un $s = 0$ vienīgi tad, ja $A = 0$, $B = 0$. Ja $A \neq 0$, $B \neq 0$, tad arī $s \neq 0$, tā ka

$$A\mathbf{a} + B\mathbf{b} \neq 0,$$

t. nekolīneāri vektori **a** un **b** ir līneāri neatkarīgi.

Divi vektori vienmēr ir koplanāri. Ja tie ir kolīneāri, tad ir bezgala daudz plakņu ikvienā telpas punktā, kuŗām tie ir paralēli. Ja tie nav kolīneāri, var caur telpas punktu vilkt tikai vienu plakni, kuŗai tie ir paralēli.

Teōrēma II.

Trīs dažādi virzīti koplanāri vektori ir līneāri atkarīgi; otrādi, ja trīs dažādi virzīti vektori ir līneāri atkarīgi, tad tie ir koplanāri.

Uzdoti 3 koplanāri vektori **a**, **b**, **c**. Caur kādu punktu O konstruēsim tādus pašus vektorus; tie visi novietosies kopīgā plaknē. Kolīneāru vektoru, saskaņā ar pieņēmumu, nav, tāpēc konstruēto vektoru atbalsti nesavietosies. Vienu vektoru saliekam komponentēs pārējo vektoru virzienos, piem., vektoru **c**.

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_a + \mathbf{c}_b.$$

Vektors $\mathbf{c}_a$ kolīneārs ar $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}_b$ ar $\mathbf{b}$. Tātad:

$$\mathbf{c}_a = m\mathbf{a},$$
$$\mathbf{c}_b = n\mathbf{b}.$$

No tā seko:

$$\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}.$$

Tāda sakarība ir starp uzdotiem koplanāriem vektoriem, tā ir līneāra:

$$m\mathbf{a} + n\mathbf{b} - \mathbf{c} = 0.$$

Otrādi, ja 3 vektorus $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ saista līneārā sakarība:

$$A\mathbf{a} + B\mathbf{b} + C\mathbf{c} = 0,$$
$$\mathbf{c} = -\frac{A}{C}\mathbf{a} - \frac{B}{C}\mathbf{b},$$
$$\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$$

un vektoru virzieni ir dažādi, var konstruēt vektoru trijstūri $\overrightarrow{OA} = m\mathbf{a}$ $\overrightarrow{AB} = n\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{c}$. Visas trijstūŗa malas ir vienā plaknē, kas parallēla vektoriem $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Ar to ir pierādīts, ka trīs līneāri atkarīgi vektori ir koplanāri.

Pieņemsim, ka vektori a, b, c ir līneāri neatkarīgi, t. i., ka

$$A\mathbf{a} + B\mathbf{b} + C\mathbf{c} \neq 0.$$

Tādā gadījumā tie nav koplanāri. Savietojot to iesākumus, nedabū trīs starus plaknē, bet trīs starus telpā, t. i. triedru.

Kādu ceturto, pilnīgi patvaļīgi izvēlētu vektoru $\overrightarrow{OC} = \mathbf{d}$ var salikt komponentēs šinīs virzienos:

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{d}_a,$$
$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{d}_b,$$
$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{d}_c.$$

Tā kā vektori $\mathbf{d}_a$ $\mathbf{d}_b$, $\mathbf{d}_c$, ir kolīneāri attiecīgi ar $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, tad seko:

$$\mathbf{d}_a = m\mathbf{a},\ \mathbf{d}_b = n\mathbf{b},\ \mathbf{d}_c = p\mathbf{c}.$$

Tālāk:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b + \mathbf{d}_c = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c},$$

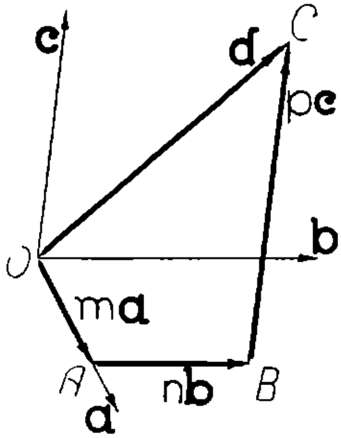
tātad, četri vektori ir līneāri atkarīgi.

Otrādi, pieņemsim, ka 4 vektorus $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ saista līneāra sakarība:

$$A\mathbf{a} + B\mathbf{b} + C\mathbf{c} + D\mathbf{d} = 0$$

No šejienes atrodam ($D \neq 0$):

$$\mathbf{d} = -\frac{A}{D}\mathbf{a} - \frac{B}{D}\mathbf{b} - \frac{C}{D}\mathbf{c},$$
$$\mathbf{d} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}.$$



12. att.

Lai dabūtu **d**, jākonstruē:

$$\overrightarrow{OA} = m\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{AB} = n\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{BC} = p\mathbf{c},$$

Mala, kas vektoru poligōnu noslēdz,

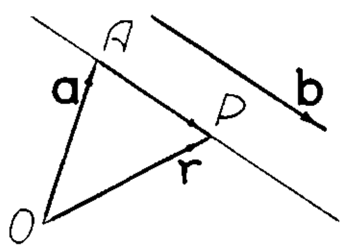
$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{d}.$$

Vektors **d** nav koplanārs ar **a**, **b**, **c**, ja tie ir lineāri neatkarīgi.

2. Vektoriāls taisnes nolīdzinājums.

Uzrakstīt nolīdzinājumu taisnei caur uzdotu punktu uzdotā virzienā.

Uzdots punkts A ar stāvokļa vektoru **a**, un kāds vektors **b** noteic taisnes virzienu caur A. Caur A vilksim taisni, kas parallēla vektora **b** atbalstam, un ņemsim uz taisnes kādu punktu P, kam stāvokļa vektors ir **r**. Vektori $\overrightarrow{AP}$ un **b** ir kolineāri:



13. att.

$$\overrightarrow{AP} = t\mathbf{b},$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AP},$$

tātad

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}. \qquad (1)$$

Kad koeficients t mainās no $-\infty$ līdz $+\infty$, vektora **r** gals apraksta visus taisnes punktus, tāpēc nolīdzinājumu (1) var uzskatīt par taisnes nolīdzinājumu.

Blakus iznākums:

Taisnei caur iesākuma punktu, kas parallēla uzdotam vektoram, ir nolīdzinājums, ko dabū no (1), liekot tur $\mathbf{a} = 0$

$$\mathbf{r} = t\mathbf{b} \qquad (2)$$

No (1) viegli dabūt taisnes analitisko nolīdzinājumu. Visus vektorus **a**, **b**, **r** iedomājamies pārnestus punktā O un izteiktus koordinātās.

Uzdevums I.

Uzrakstīt ar vektoru teōrijas palīdzību analitisko nolīdzinājumu taisnei caur p. A (x_1, y_1, z_1), kuŗas virziena koeficienti ir proporcionāli l, m, n.

Vienības vektori:

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}.$$

Uzdotā punkta A stāvokļa vektors:

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}.$$

Virzienu nosaka vektors:

$$\mathbf{b} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}.$$

Mainīgam punktam $P\ (x, y, z)$ stāvokļa vektors

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Sakarība:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b},$$

kad tur ievieto vektoru izteiksmes, dod:

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} + t(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}),$$

tātad:

$$x = x_1 + lt,\ y = y_1 + mt,\ z = z_1 + nt,$$

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = t.$$

Uzdevums II.

Uzrakstīt vektoriālo un analitisko nolīdzinājumu taisnei caur divi uzdotiem punktiem A un B.

Vektoriāli divi punktus A un B noteic to attiecīgie $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ stāvokļa vektori. Reizē ar to ir noteikts punktu savienojums $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Vajadzīgo taisni dabūsim, velkot caur A vai B parallēli vektoram $\overrightarrow{AB}$. Uz (1) pamata:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

vai:

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \tag{3}$$

Tikpat labi varēja rakstīt, uzskatot B par uzdoto punktu:

$$\mathbf{r} = s\mathbf{a} + (1 - s)\mathbf{b} \tag{4}$$

Šī formula seko no (3), pieņemot tur $1 - t = s$, tātad $t = 1 - s$.

Raksturīgais formulās, (3) un (4) ir tas, ka koeficientu summa labā pusē ir tāda pati, kā kreisā.

Divu uzdoto punktu koordinātas: $A\ (x_1, y_1, z_1)$ un $B\ (x_2, y_2, z_2)$. Mainīgais savienojuma taisnes punkts $P\ (x, y, z)$. Punktu stāvokļa vektori:

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

No formulas (3)

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

seko:

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (1 - t)(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) + t(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k});$$

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2,$$
$$y = (1 - t)y_1 + ty_2,$$
$$z = (1 - t)z_1 + tz_2.$$

Tātad:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t,$$
$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t,$$
$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t,$$

no kurienes galīgi:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t.$$

Teōrēma.

Lai trīs vietas vektoru **a**, **b**, **c** gali būtu uz vienas taisnes, nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam ir tas, ka starp vektoriem jābūt spēkā līneārai sakarībai:

$$s_1\mathbf{a}+s_2\mathbf{b}+s_3\mathbf{c}=0,$$

kur koeficientu summa ir nulle:

$$s_1+s_2+s_3=0.$$

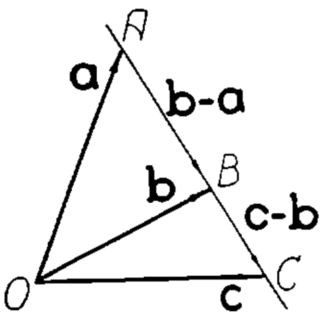
Noteikums ir nepieciešams: ja trīs vektoru **a**, **b**, **c** gali ir uz vienas taisnes, starp tiem ir spēkā nolīdzinājums ar tādu īpašību.

No iesākuma punkta O konstruējam vektorus $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$. Tad seko: $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$. Dots, ka vektoru gala punkti A, B, C ir uz vienas taisnes, tātad, vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BC}$ ir kolīneāri, t. i.

$$\overrightarrow{AB}=t.\overrightarrow{BC},$$

jeb:

$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=t(\mathbf{c}-\mathbf{b}),$$
$$\mathbf{a}-(1+t)\mathbf{b}+t\mathbf{c}=0.$$



14. att.

Tas ir līneārs nolīdzinājums, un koeficientu summa ir nulle. Tas bija jāpierāda teōrēmas pirmā pusē.

Noteikums ir pietiekams: ja trīs vektorus **a**, **b**, **c** saista līneāra sakarība $s_1\mathbf{a}+s_2\mathbf{b}+s_3\mathbf{c}=0$, turklāt $s_1+s_2+s_3=0$, tad šo vektoru gala punkti A, B, C ir uz vienas taisnes. No $s_1+s_2+s_3=0$ seko:

$$s_2=-(s_1+s_3).$$

To ievieto nolīdzinājumā, kas saista vektorus:

$$s_1\mathbf{a}-(s_1+s_3)\,\mathbf{b}+s_3\mathbf{c}=0,$$

jeb:

$$s_1\,(\mathbf{a}-\mathbf{b})+s_3\,(\mathbf{c}-\mathbf{b})=0,$$

$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=\frac{s_3}{s_1}(\mathbf{c}-\mathbf{b})$$

Tas izteic, ka vektori $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ un $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$ ir kolīneāri. Bet tā kā tiem ir kopīgs punkts B, tas nozīmē, ka tie ir uz kopīgas taisnes. Tādā gadījumā visi to punkti, arī A, B, C, ir uz vienas taisnes, un tas ir tas, ko vajadzēja pierādīt.

3. Plaknes nolīdzinājums vektoriālā veidā.

I) Uzrakstīt plaknes nolīdzinājumu, kas vilkta iet caur iesākuma punktu O un parallēla vektoriem **a** un **b**.

Vektoru iesākumus var pārnest p. O; divi taisnes caur kopīgu punktu noteic plakni. (Sk. 15. att.)

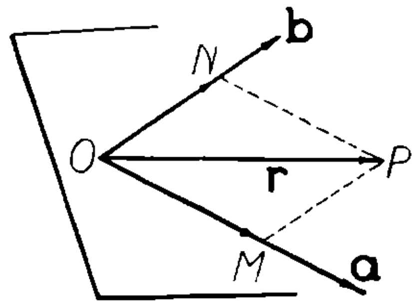
Teiksim, P ir kāds šīs plaknes punkts, un tā vietas vektors $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$. Saliekam to komponentēs uzdoto vektoru **a** un **b** virzienos:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$

Vektors $\overrightarrow{OM}$ ir kolineārs ar **a**, vektors $\overrightarrow{ON}$ — kolineārs ar **b**:

$$\overrightarrow{OM} = s\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{ON} = t\mathbf{b}.$$

$$\mathbf{r} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}. \qquad (1)$$



15. att.

Še s un t ir skālāri, kas atkarīgi no punkta P vietas plaknē. Attiecīgi tos izvēlot, var ar tādu nolīdzinājumu izteikt ikviena plaknes punkta vietas vektoru. Kādu citu punktu, kas ir ārpus plaknes, ar to izteikt nevar.

II) Uzrakstīt plaknes nolīdzinājumu, kas vilkta caur uzdotu punktu A, ko noteic vietas vektors **a**, un kas parallēla vektoriem **b** un **c**.

Vektoru **b** un **c** iesākumus var pārnest p. A; to atbalsti, iedami caur kopīgu punktu, noteic plakni. Teiksim, P ir kāds plaknes punkts. Tā vietas vektors

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AP}$$

Vektoru $\overrightarrow{AP}$ saliekam komponentēs vektoru **b** un **c** virzienos:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = s\mathbf{b} + t\mathbf{c}.$$

Tātad:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}. \qquad (2)$$

III) Uzrakstīt nolīdzinājumu plaknei, kas vilkta caur trīs vietas vektoru gala punktiem.

Savienojot vektoru gala punktus, dabūjam trijstūri ABC, kur $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$. Jāuzraksta nolīdzinājums plaknei caur A, kas parallēla $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{AC}$. Uz (2) pamata

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t(\mathbf{c} - \mathbf{a}), \qquad (3)$$

vai arī:

$$\mathbf{r} = (1 - s - t)\,\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nolīdzinājuma veids ir tāds, ka koeficientu summa labā pusē ir vienāda ar koeficientu kreisā pusē, bet ja visus locekļus pārnes vienā pusē, tad koeficientu summa ir nulle.

Teōrēma.

Lai četru vietas vektoru **a**, **b**, **c**, **r** gali būtu vienā plaknē, nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam ir tas, ka

$$s_1\mathbf{a} + s_2\mathbf{b} + s_3\mathbf{c} + s_4\mathbf{r} = 0,$$

kur koeficientu summa ir nulle:

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0.$$

Ka noteikums ir nepieciešams, to jau redzējām. Ja tas izpildīts, vai punkti A, B, C, P ir vienā plaknē? No papildu noteikuma seko:

$$s_1 = -(s_2 + s_3 + s_4).$$

To ievietojam uzdotā vektoru nolīdzinājumā:

$$-(s_2 + s_3 + s_4)\mathbf{a} + s_2\mathbf{b} + s_3\mathbf{c} + s_4\mathbf{r} = 0,$$

$$\mathbf{r} = \left(1 + \frac{s_2}{s_4} + \frac{s_3}{s_4}\right)\mathbf{a} - \frac{s_2}{s_4}\mathbf{b} - \frac{s_3}{s_4}\mathbf{c}.$$

Pieņemot apzīmējumus

$$-\frac{s_2}{s_4} = s, \quad -\frac{s_3}{s_4} = t,$$

dabū:

$$\mathbf{r} = (1 - s - t)\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c},$$

jeb:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t(\mathbf{c} - \mathbf{a}),$$

jeb:

$$\mathbf{r} - \mathbf{a} = s(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

Tas izteic, ka vektori $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{AC}$ ir koplanāri, t. i. punkti A, B, C, P ir vienā plaknē.

4. Līneāra sakarība, kas nav atkarīga no vektoru iesākuma.

Teōrēma.

Nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam, ka sakarība, kas saista uzdotu punktu vietas vektorus, nav atkarīga no iesākuma punkta izvēles, ir tas, ka koeficientu algebriskā summa ir nulle.

Uzdoti punkti $A_1, A_2, A_3, \quad A_n$, kuru vietas vektori ir $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_n$ (attiecībā pret centru O). Tos saista lineāra formula:

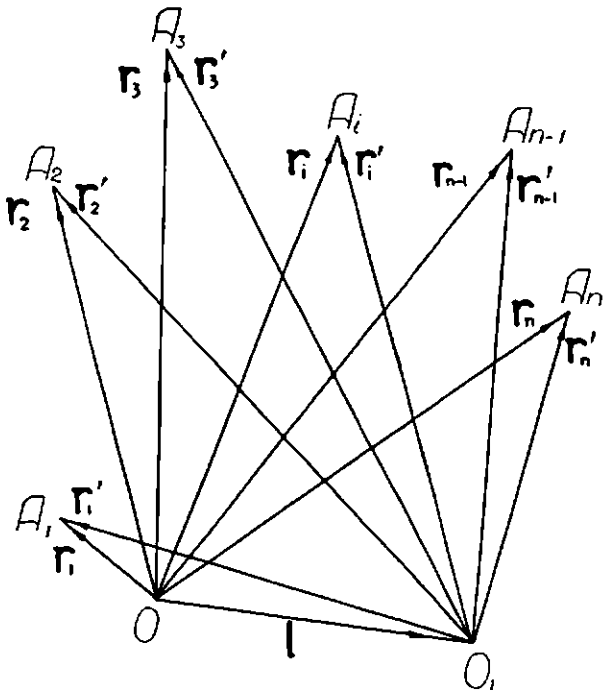
$$k_1\mathbf{r}_1 + k_2\mathbf{r}_2 + k_3\mathbf{r}_3 + \ldots + k_n\mathbf{r}_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Jāpierāda:

1) ja formula spēkā arī tad, kad iesākumu ņem citā vietā, tad

$$k_1 + k_2 + k_3 + \qquad + k_n = 0, \tag{2}$$

2) ja tāda sakarība starp koeficientiem ir spēkā, tad formula (1) derīga neatkarīgi no iesākuma punkta izvēles.



16. att.

Noteikums ir nepieciešams: ja (1) ir spēkā neatkarīgi no iesākuma izvēles, tad seko (2). Uzdoti punkti $A_1, A_2, A_3, \qquad A_n$. To vietas vektori attiecībā pret iesākumu O ir $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \qquad \mathbf{r}_n$, bet attiecībā pret iesākumu O_1 ir $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_3 \qquad \mathbf{r}'_n$. Neatkarīgi no iesākuma punkta izvēles:

$$\text{(I)}\ k_1\mathbf{r}_1 + k_2\mathbf{r}_2 + k_3\mathbf{r}_3 + \qquad + k_n\mathbf{r}_n = 0,$$

$$\text{(II)}\ k_1\mathbf{r}'_1 + k_2\mathbf{r}'_2 + k_3\mathbf{r}'_3 + \qquad + k_n\mathbf{r}'_n = 0;$$

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i = \overrightarrow{OO_1} = \mathbf{l},$$

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{l},$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{l},$$

$$\mathbf{r}'_3 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{l},$$

$$\mathbf{r}'_n = \mathbf{r}_n - \mathbf{l}.$$

Vienā laikā ir spēkā:

$$(\text{I})\quad k_1\mathbf{r}_1 + k_2\mathbf{r}_2 + k_3\mathbf{r}_3 + \qquad + k_n\mathbf{r}_n = 0, \text{ un:}$$

$$(\text{II})\quad k_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{l}) + k_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{l}) + k_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{l}) + \qquad + k_n(\mathbf{r}_n - \mathbf{l}) = 0.$$

Otrā formulā attaisām iekavas:

$$k_1\mathbf{r}_1 + k_2\mathbf{r}_2 + k_3\mathbf{r}_3 + \qquad + k_n\mathbf{r}_n - (k_1 + k_2 + k_3 + \qquad + k_n)\mathbf{l} = 0$$

Ievērojot (I), seko:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \qquad k_n = 0.$$

Otrādi, noteikums ir pietiekams: ja (1) un (2) ir spēkā, tad iesākumu var izvēlēt patvaļīgi. Patiešām, ja

$$k_1\mathbf{r}_1 + k_2\mathbf{r}_2 + k_3\mathbf{r}_3 + \qquad + k_n\mathbf{r}_n = 0,$$

un tai pašā laikā:

$$k_1 + k_2 + k_3 + \qquad + k_n = 0,$$

tad seko, ka arī sakombinētā formula ir spēkā, proti:

$$k_1\mathbf{r}_1 + k_2\mathbf{r}_2 + k_3\mathbf{r}_3 + \qquad + k_n\mathbf{r}_n - (k_1 + k_2 + \qquad k_n)\mathbf{l} = 0$$

kur $\mathbf{l}$ kāds pilnīgi patvaļīgs vektors. Pārkārtojot, atrodam:

$$k_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{l}) + k_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{l}) + \qquad + k_n(\mathbf{r}_n - \mathbf{l}) = 0$$

Tas izteic, ka formula (1) ir spēkā attiecībā pret patvaļīgi (ar vektoru $\mathbf{l}$) izvēlētu iesākumu.

Vingrinājumi.

1. Pierādīt vektoros, ka trijstūŗa mediānas krustojas kopīgā punktā, kas katrai mediānai atšķeļ vienu trešdaļu, skaitot no malas, ko mediāna dala.

Pirmais atrisinājums.

Iesākuma punktu O ņemam ārpus trijstūŗa plaknes. Trijstūŗa virsotnes noteicam ar vektoriem

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$$

Malu viduspunkti, kas attiecīgi pretim virsotnēm A, B, C ir A_1, B_1, C_1; to stāvokļa vektori:

$$\overrightarrow{OA}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{b}), \quad \overrightarrow{OB}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \quad \overrightarrow{OC}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Mediānu nolīdzinājumi:

$$AA_1 \qquad (OA,\ OA_1) \qquad \mathbf{r} = s\mathbf{a} + \frac{1}{2}(1 - s)(\mathbf{c} + \mathbf{b})$$

$$BB_1 \qquad (OB,\ OB_1)\,. \qquad \mathbf{r} = t\mathbf{b} + \frac{1}{2}(1 - t)(\mathbf{a} + \mathbf{c})$$

$$CC_1\ .\ .\ .\ (OC,\ OC_1)\ .\ .\ .\ \mathbf{r} = u\mathbf{c} + \frac{1}{2}(1 - u)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Ja mediānas krustojas kopīgā punktā, tad ir tādas vērtības s, t, u, ka no visiem nolīdzinājumiem seko viens un tas pats vektors $\mathbf{r}$.

Jābūt spēkā:

$$s = \frac{1}{2}(1-t) = \frac{1}{2}(1-u),$$

$$\frac{1}{2}(1-s) = t = \frac{1}{2}(1-u),$$

$$\frac{1}{2}(1-s) = \frac{1}{2}(1-t) = u.$$

No tā seko:

$$s = t = u = \frac{1}{3}$$

Uz katras mediānas ir viens tāds punkts, kam stāvokļa vektors kopīgs; šis punkts visām mediānām kopīgs. Vietas vektors kopīgā punktā:

$$\overrightarrow{OP} = s\mathbf{a} + \frac{1}{2}(1-s)(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

Tā kā

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

tad seko:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{a} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a}) = \frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-2\mathbf{a}),$$

$$\overrightarrow{PA_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \frac{1}{6}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-2\mathbf{a}).$$

Tātad

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PA_1},$$

jeb

$$\overrightarrow{PA_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}.$$

Otrs atrisinājums.

Trijstūra virsotnes ir A, B, C, pretējo malu viduspunkti A_1, B_1, C_1. Malas uztveram kā vektorus:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{BC} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \mathbf{b}.$$

Savienojam A ar A_1, tad viegli apsvērt, pagarinot mediānu, ka

$$2\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c} - \mathbf{b},$$

tā kā

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{b}).$$

Mediānu AA_1 sadalām 3 daļās; punkts P ir tāds, ka

$$AP : PA_1 = 2 : 1.$$

Tad seko:

$$\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AA_1} = \frac{1}{3}(\mathbf{c} - \mathbf{b}),$$

$$\vec{PA_1} = \frac{1}{3}\vec{AA_1} = \frac{1}{6}(\mathbf{c} - \mathbf{b}).$$

Punktu P savienojam ar B un B_1; jāpierāda, ka B_1P un PB veido taisni un to attiecība ir 1 2. Aprēķinām:

$$\vec{B_1P} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \vec{AP} = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{3}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \frac{1}{6}(2\mathbf{c} + \mathbf{b}),$$

$$\vec{PB} = \vec{AB} - \vec{AP} = \mathbf{c} - \frac{1}{3}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \frac{1}{3}(2\mathbf{c} + \mathbf{b}),$$

no kurienes izriet, ka

$$\vec{B_1P} = \frac{1}{2}\vec{PB}.$$

Līdzīgā kārtā pierāda, ka

$$\vec{C_1P} = \frac{1}{2}\vec{PC}.$$

2. Uzdots parallēlograms $ABCD$. Malu AD sadala n vienādās daļās, tā ka

$$AK = \frac{1}{n}AD.$$

Punktu K savieno ar B. Šis savienojums sastop diagōnāli AC punktā P. Atrast $AP:AC$.

Iesākumu pieņemam punktā A un uzdodam punktu B un D stāvokļa vektorus:

$$\mathbf{a} = \vec{AB}, \quad \mathbf{b} = \vec{AD}.$$

Dots:

$$\vec{AK} = \frac{1}{n}\vec{AD} = \frac{1}{n}\mathbf{b}.$$

Var atrast:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Taisnei AC ir nolīdzinājums:

$$\mathbf{r} = s(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Taisnei KB:

$$\mathbf{r} = t \cdot \vec{AK} + (1 - t)\vec{AB},$$

$$\mathbf{r} = \frac{t}{n}\mathbf{b} + (1 - t)\mathbf{a}.$$

Krustpunktā P vietas vektori ir vienādi:

$$s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{t}{n}\mathbf{b} + (1 - t)\mathbf{a},$$

no tā seko:

$$s = 1 - t = \frac{t}{n};$$

$$t = \frac{n}{n+1}, \quad s = \frac{1}{n+1}.$$

Tātad:

$$\vec{AP} = \frac{1}{n+1}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{n+1}\vec{AC},$$

$$\frac{AP}{AC} = \frac{1}{n+1}.$$

Ja mala AD sadalīta n daļās, tad diagonāle AC sadalīta $n+1$ daļās:

$$\frac{AD}{AK} = n, \qquad \frac{AC}{AP} = n+1.$$

Ģeometriski skaidrs, ka punkts P sadala vienādā attiecībā tiklab AC kā KB. To var pierādīt vektoriāli:

$$\frac{\mathbf{b}}{n} + \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{n+1},$$

tātad:

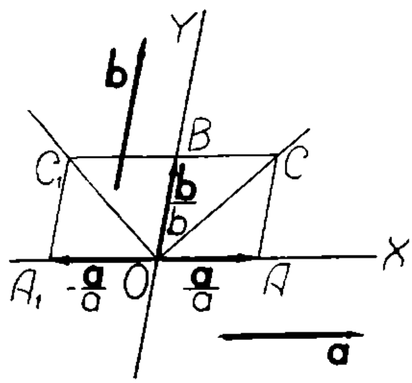
$$\mathbf{x} = \frac{n\mathbf{a}-\mathbf{b}}{n(n+1)};$$

$$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{n+1} + m\,\mathbf{x} = \mathbf{a},$$

tātad:

$$m\mathbf{x} = \frac{n\mathbf{a}-\mathbf{b}}{n+1}$$

$$n\mathbf{x} = m\mathbf{x},$$
$$m = n$$



17 att.

3. Leņķis uzdots ar vektoriem $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$. Uzrakstīt leņķa bisektrises nolīdzinājumu.

Ģeometriski, lai atrastu uzdoto leņķa bisektrisi, konstruējam rombu $OACB$ (bisektrise OC) vai OA_1C_1B (bisektrise OC_1) (Sk. 17. att.)

Vektoriāli:

No punkta O konstruējam vienības vektorus

$$\frac{\mathbf{a}}{a} \text{ un } \frac{\mathbf{b}}{b},$$

(to moduļi $= 1$). Bisektrisei OC ir nolīdzinājums:

$$\mathbf{r} = s\left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b}\right).$$

Lai dabūtu bisektrisi, OC_1, konstruējam no kopīga punkta vienības vektorus:

$$\frac{\mathbf{a}}{a} \text{ un} - \frac{\mathbf{b}}{b},$$

vai:

$$-\frac{\mathbf{a}}{a} \text{ un } \frac{\mathbf{b}}{b}.$$

Bisektrisei: OC_1 ir nolidzinājums

$$\mathbf{r} = s\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{b}}{b}\right).$$

4. Trijstūŗa iekšējā bisektrise sadala malu divi nogriežņos, kas attiecas kā tiem piegulošās malas.

Iesākums: punktā C.

$$\vec{CA} = \mathbf{a},$$

$$\vec{CB} = \mathbf{b}.$$

Malas AB nolīdzinājums

$$\mathbf{r} = s\mathbf{a} + (1 - s)\mathbf{b}.$$

Bisektrises nolīdzinājums

$$\mathbf{r} = t\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{b}}{b}\right).$$

Krustpunktā

$$s\mathbf{a} + (1 - s)\mathbf{b} = t\left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b}\right),$$

$$s = \frac{t}{a}, \quad as = b(1 - s) = t,$$

tātad:

$$1 - s = \frac{t}{b}.$$

Talšņu parametri krustpunktā:

$$s = \frac{b}{a + b},$$

$$t = \frac{ab}{a + b}.$$

Punktā M stāvokļa vektors:

$$\vec{CM} = \frac{b}{a + b}\mathbf{a} + \left(1 - \frac{b}{a + b}\right)\mathbf{b},$$

$$\vec{CM} = \frac{b\mathbf{a} + a\mathbf{b}}{a + b},$$

tātad:

$$\vec{AM} = \vec{CM} - \mathbf{a} = \frac{a}{a + b}(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

$$\vec{MB} = \mathbf{b} - \vec{CM} = \frac{b}{a + b}(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{a}{b}.$$

5. Pierādīt, ka trijstūŗa bisektrises krustojas kopīgā punktā. Atrast šī punkta vietas vektoru.

Trijstūŗa virsotnes apzīmējam ar A, B, C; bisektrises, kas no šīm virsotnēm iziet, sastop pretējās malas punktos A_1, B_1, C_1. Mums būs:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

Apzīmējumi malu gaŗumiem:

$$|\overrightarrow{AB}| = \gamma, \quad |\overrightarrow{BC}| = \alpha, \quad |\overrightarrow{CA}| = \beta,$$

Lietojot iepriekšējā uzdevuma iznākumus, var atrast malu nogriežņus, kādos bisektrises malu sadala:

$$\overrightarrow{AC_1} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

$$\overrightarrow{BA_1} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}(\mathbf{c} - \mathbf{b}),$$

$$\overrightarrow{CB_1} = \frac{\alpha}{\gamma+\alpha}(\mathbf{a} - \mathbf{c}).$$

Bisektrišu nolīdzinājumi:

$$AA_1 \qquad \mathbf{r} = s\mathbf{a} + (1-s)(\mathbf{b} + \overrightarrow{BA_1}),$$

$$BB_1 \qquad \mathbf{r} = t\mathbf{b} + (1-t)(\mathbf{c} + \overrightarrow{CB_1}),$$

$$CC_1 \qquad \mathbf{r} = u\mathbf{c} + (1-u)(\mathbf{a} + \overrightarrow{AC_1}).$$

Tātad:

$$AA_1 \qquad \mathbf{r} = s\mathbf{a} + (1-s)\left[\mathbf{b} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}(\mathbf{c} - \mathbf{b})\right],$$

$$BB_1 \qquad \mathbf{r} = t\mathbf{b} + (1-t)\left[\mathbf{c} + \frac{\alpha}{\gamma+\alpha}(\mathbf{a} - \mathbf{c})\right],$$

$$CC_1 \qquad \mathbf{r} = u\mathbf{c} + (1-u)\left[\mathbf{a} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(\mathbf{b} - \mathbf{a})\right].$$

Jāpierāda, ka ir tādas parametru vērtības, ka visi nolīdzinājumi dod vienu un to pašu vietas vektoru. Vajaga pastāvēt sistēmai:

$$s = (1-t)\frac{\alpha}{\gamma+\alpha} = (1-u)\left(1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right),$$

$$t = (1-u)\frac{\beta}{\alpha+\beta} = (1-s)\left(1 - \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right),$$

$$u = (1-s)\frac{\gamma}{\gamma+\beta} = (1-t)\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\right),$$

vai arī:

$$\frac{s}{\alpha} = \frac{1-t}{\gamma+\alpha} = \frac{1-u}{\alpha+\beta},$$

$$\frac{t}{\beta} = \frac{1-u}{\alpha+\beta} = \frac{1-s}{\beta+\gamma},$$

$$\frac{u}{\gamma} = \frac{1-s}{\beta+\gamma} = \frac{1-t}{\gamma+\alpha}.$$

No tā redzams, ka

$$\frac{s}{\alpha}=\frac{t}{\beta}=\frac{u}{\gamma}=\frac{1-s}{\beta+\gamma}=\frac{1-t}{\gamma+\alpha}=\frac{1-u}{\alpha+\beta}=k=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Tādas parametru vērtības atrast iespējams. Tātad bisektrises krustojas kopīgā punktā, kuŗam atbilst vietas vektora parametrs

$$s=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{p}\ (p \text{ — perimetrs})$$

un vietas vektors

$$\mathbf{r}=s\mathbf{a}+(1-s)\frac{\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{p}$$

6. Parādīt, ka trijstūrī kāda leņķa iekšējā bisektrise un divu pārējo leņķu ārējās bisektrises saiet kopā vienā punktā.

Trijstūŗa virsotnes apzīmējam ar A, B, C. Tā malas uztveŗam kā vektorus

$$\overrightarrow{CA}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{CB}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{c}.$$

Malu gaŗumi ir

$$|\overrightarrow{CA}|=a,\ |\overrightarrow{CB}|=b,\ |\overrightarrow{AB}|=c.$$

Iekšējai bisektrisei stūrī C ir nolīdzinājums

$$\mathbf{r}=s\left(\frac{\mathbf{a}}{a}+\frac{\mathbf{b}}{b}\right),$$

ārējām bisektrisēm stūŗos A un B ir nolīdzinājumi:

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\left(\frac{\mathbf{a}}{a}+\frac{\mathbf{c}}{c}\right),$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{b}+u\left(\frac{\mathbf{b}}{b}\quad\frac{\mathbf{c}}{c}\right).$$

Vektoru $\mathbf{c}$ var aizvietot ar $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, tad seko:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}&=s\left(\frac{\mathbf{a}}{a}+\frac{\mathbf{b}}{b}\right),\\ \mathbf{r}&=\mathbf{a}+t\left(\frac{\mathbf{a}}{a}+\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{c}\right),\\ \mathbf{r}&=\mathbf{b}+u\left(\frac{\mathbf{b}}{b}+\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{c}\right).\end{aligned}\right\}\qquad \text{(I)}$$

Lai kopīgais krustpunkts eksistētu, nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam ir tas, ka nolīdzinājumu (I) labās puses skālārie koeficienti pie $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ ir vienādi:

$$\frac{s}{a}=1+\frac{t}{a}\quad\frac{t}{c}=\frac{u}{c},\ \text{jeb: } sc=ac+t(c-a)=au$$

$$\frac{s}{b}=\frac{t}{c}=1+\frac{u}{b}-\frac{u}{c},\ \text{jeb: } sc=bt=bc+u(c-b).$$

Tātad:

$$cs=au=bt=\frac{abc}{a+b-c}$$

No šejienes seko tādas parametru s, t, u vērtības, kas nolīdzinājumus (I) pataisa par vienādiem, t. . taisnēm, ko tie izteic, ir kopīgs punkts.

III.

Divu vektoru reizinājumi.

No vektora, kā virzīta nogriežņa, jēdziena neizriet tieši, kas jāsaprot ar divu vektoru reizinājumu. Novērojot divu vektoriālu lielumu kopumus mēchanikā un fizikā, redzam, ka iznākumiem var būt divējāds raksturs.

Piemērs I. Pieņemsim, ka uz materiālu punktu P darbojas konstanta virziena un lieluma spēks, ko attēlo vektors **F**, un spēka pielikuma punkts pārvietojas pa taisni no P līdz P_1. Pārvietojumu PP_1 attēlo vektors **s**. Spēka padarīto darbu pilnīgi izteic skaitlis

$$Fs \cos(\mathbf{F}, \mathbf{s}),$$

pieņemot, ka darba vienība ir norunāta (piem. kilogrammetrs). Šī skaitļa izteiksmē jeb formulā ieiet kā reizinātāji: abu vektoru lielumi (moduļi) un vektoru veidotā leņķa kosinus.

Piemērs II. Spēku līdzsvara jautājumos liela loma ir spēku momenta jēdzienam. Pieņemsim, ka punktā P, ko noteic vietas vektors $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$, pielikts spēks **F**. Spēka momenta lielumu (attiecībā pret punktu O) dabū, kā spēka reizinājumu ar atstatumu no O līdz spēka darbības taisnei:

$$Fr \sin(\mathbf{F}, \mathbf{r}).$$

Šinī formulā ieiet kā reizinātāji: abu vektoru lielumi (moduļi) un vektoru veidotā leņķa sinus. Izteic darba vienības, bet gluži pretēji, kā pirmā piemērā, neapmierinās ar skaitlisko lielumu, bet pieņem arī virzienu, t. attēlo spēka momentu ar vektoru, kas statenisks pret abu vektoru plakni.

Abos piemēros uzdoti divi vektori un veido reizinājumu, kurā ieiet kā reizinātāji abu vektoru moduļi un leņķa trigonometriskā funkcija; ja pēdējā ir kosinus, iznākumu uzskata par skaitli (skālāru), bet ja tā ir sinus, iznākumu uzskata par kāda vektora lielumu.

Šie un citi praktisko zinību laukā smeltie piemēri liek izšķirt divējādus divu vektoru reizinājumus: 1) skālāro un 2) vektoriālo.

1. Skālārais vektoru reizinājums.

Definīcija:

Divu vektoru **a** un **b** skālārais reizinājums ir skaitlis $ab \cos\Theta$, kur Θ ir vektoru veidotais leņķis.

Skālāro reizinājumu apzīmē, rakstot starp vektoru nosaukumiem punktu; ad, saskaņā ar definīciju:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\,b \cos \Theta \tag{1}$$

Vienu no uzdotiem vektoriem, piem. **b**, var salikt komponentēs: otra vektora virzienā (iekšējā komponente $\mathbf{b}_1$) un stateniskā pret to virzienā (ārējā komponente $\mathbf{b}_2$):

$$b_1 = b \cos \Theta,$$
$$b_2 = b \sin \Theta.$$

Līdzīgā kārtā var salikt vektoru $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, kur $\mathbf{a}_1$ kolīneārs ar **b**, $\mathbf{a}_2 \perp \mathbf{b}$. Tad komponentu lielumi: $a_1 = a \cos \Theta$, $a_2 = a \sin \Theta$.

Definīcijas formulu (1) var rakstīt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\,(b \cos \Theta) = b\,(a \cos \Theta),$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a b_1 = b a_1.$$

Tas nozīmē:

Lai dabūtu divu vektoru skālāro reizinājumu, jāpareizina viena vektora lielums ar otra vektora projekciju uz pirmo (jeb: ar otra vektora iekšējās komponentes lielumu).

Tāpēc skālāro reizināšanu sauc arī par iekšējo reizināšanu (Grassmann, no jaunākiem autoriem: A. Chatelet un I. Kampé de Fériet). Vēl citi apzīmējumi: divu vektoru tiešais reizinājums (Wilson) vai algebriskais reizinājums (Coffin).

Īpaši gadījumi:

1) Kolīneāri vektori var būt tieši vai pretēji paralleli: $\Theta = 0$ vai π. Atkarībā no tā, seko:

$$\text{ja } \Theta = 0, \quad \cos\Theta = 1, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab;$$
$$\text{ja } \Theta = \pi, \quad \cos\Theta = -1, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -ab.$$

Ja abi faktori ir vienādi, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, skālāro reizinājumu $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ sauc par vektora **a** skālāro kvadrātu un raksta $(\mathbf{a})^2$; tātad:

$$(\mathbf{a})^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2,$$

t. i. vektora skālārais kvadrāts ir vienāds ar moduļa kvadrātu.

2) Stateniski vektori:

$$\Theta = \pm \frac{\pi}{2}, \cos \Theta = 0:$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Ja uzdoti divi vektori **a** un **b**, un vienam no tiem pārmainām virzienu uz pretējo pusi, tad nemainās ne vektora moduļi, ne leņķa kosinus absolūtā vērtība, bet pārmainās tikai kosinus zīme, t. i. pārmainās skālārā reizinājuma zīme:

$$(-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (-\mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{2}$$

2. Skālārā vektoru reizinājuma īpašības.

Tās var izteikt 3 vienādībās:

$$1)\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a};$$
$$2)\ (m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b})=m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b});$$
$$3)\ \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Pirmā vienādība izteic, ka vektoru skālārā reizinājumā faktoru kārtību ir atļauts mainīt (kommūtātīvā īpašība).

Tas seko no tā, ka formulās

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=ab\cos(\mathbf{a}\,,\mathbf{b})=ab\cos\Theta,$$
$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=ba\cos(\mathbf{b}\,,\mathbf{a})=ba\cos(-\Theta)$$

labās puses ir vienādas; tātad, arī kreisās puses ir vienādas.

Otrā vienādība izteic, ka skālāru koeficientu drīkst pārvietot no viena reizinātāja otrā vai arī nolikt visam reizinājumam priekšā. (Skālāro koeficientu asociātīvā un kommūtātīvā īpašība.)

Lai to pierādītu, apskatām papriekš gadījumu, kad $m>0$; šinī gadījumā:

$$\cos(m\mathbf{a}\,,\mathbf{b})=\cos(\mathbf{a}\,,m\mathbf{b})=\cos(\mathbf{a}\,,\mathbf{b}),$$

tātad, pareizinot ar mab:

$$mab\cos(m\mathbf{a}\,,\mathbf{b})=amb\cos(\mathbf{a}\,,m\mathbf{b})=mab\cos(\mathbf{a}\,,\mathbf{b}).$$

Tas apzīmē, ka

$$(m\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(m\mathbf{b})=m(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{3}$$

Šī formula, ievērojot (2), pareiza arī tad, ja $m=-1$. Apskatām, kas būs, ja $m=-m_1$, kur $m_1>0$. Saskaņā ar (3)

$$(m_1\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(m_1\mathbf{b})=m_1(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

Ja pārmaina virzienu vienam vektoram, pārmainās zīme skālāram reizinājumam; tātad, ja iepriekšējā formulā pirmās divi iekavās pieliek klāt — zīmi, tad tāda pat zīme jāpieliek priekšā beidzamam loceklim

$$(-m_1\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(-m_1\mathbf{b})=-m_1(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

No tā redzams, ka formula (3) paliek spēkā arī tad, kad m ir negātīvs.

No (3) viegli seko šāda vispārīgāka formula:

$$(m\mathbf{a})\cdot(n\mathbf{b})=(n\mathbf{a})\cdot(m\mathbf{b})=mn(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{4}$$

Otrādi, ja skālārais reizinājums $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, tas nozīmē, ka var būt $a=0$, vai $b=0$, vai $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$; faktori var arī nebūt nulles, bet tomēr to skālārais reizinājums izzūd, ja vektori ir stateniski.

Tātad, nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam, lai divi vektori, kas nav nulles vektori, būtu stateniski, ir tas, ka to skālārais reizinājums ir nulle:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0.$$

Vienības vektori. Divu vektoru **a** un **e** ($e = 1$) skālārais reizinājums

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = a \cos \Theta$$

ir vienāds ar **a** projekciju uz otru vektoru. Ja abi uzdotie vektori ir vienības vektori: $\mathbf{e}_1$ un $\mathbf{e}_2$ ($e_1 = 1$, $e_2 = 1$), to skālārais reizinājums dod vektoru veidotā leņķa kosinu:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos \Theta.$$

Ja $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}$:

$$(\mathbf{e})^2 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1.$$

Vienības vektorus trīs savstarpīgi stateniskos virzienos pieņemts apzīmēt ar **i**, **j**, **k**; acīm redzot:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,$$
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0.$$

Vispārīgā gadījumā divu vektoru **a** un **b** skālārā reizinājuma noteikšanai ir definīcijas formula:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Še a un b ir pozitīvi skaitļi, kas izteic vektoru garumu (moduli), tā kā $ab > 0$. Leņķi starp vektoriem var skaitīt no pirmā vektora līdz otram: negātīvu pulksteņa rādītāja virzienā, pozitīvu — pretējā virzienā; ievērojot kosina funkcijas īpašības, pietiek ņemt m a z ā k o leņķi starp vektoru virzieniem, uzskatot to vienmēr par p o z i t ī v u.

Ja mazākais leņķis starp vektoriem ir šaurs $\left(0 < \Theta < \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos \Theta > 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$; ja, turpretim, leņķis starp vektoriem ir p l a t s $\left(\frac{\pi}{2} < \Theta < \pi\right)$, tad $\cos \Theta < 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$.

Ja, neaizkaŗot vektoru lielumu, v i e n a m pārmaina virziena pusi pret pretējo, leņķis starp vektoriem pārvēršas agrākā leņķa papildinājumā līdz π; reizē ar to kosinus pārmaina zīmi, jo $\cos (\pi - \Theta) = - \cos \Theta$.

Trešā vienādība

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \tag{5}$$

izteic vektoru skālārās reizināšanas d i s t r i b ū t ī v o īpašību: lai pareizinātu summu, jāpareizina visi summandi un iznākumi jāsaskaita. Zīme + apzīmē: kreisajā pusē — vektoru (ģeometrisko) saskaitīšanu, labajā pusē — skālāru lielumu (algebrisku) saskaitīšanu.

Pierādījums.

Apzīmēsim ar φ leņķi starp vektoru **a** un vektoru $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (18. att.). Tad seko:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{OC} = a \,.\, |\overrightarrow{OC}| \cos \varphi,$$

tātad:

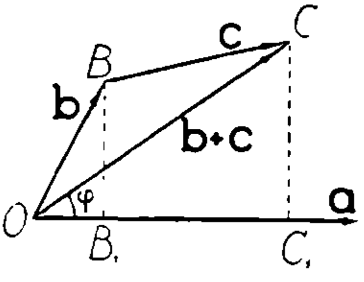
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = a \,.\, \overline{OC}_1 = a \,.\, (\overline{OB}_1 + \overline{B_1C_1}) = a \,.\, \overline{OB}_1 + a \,.\, \overline{B_1C_1}.$$

Viena vektora lieluma reizinājums ar otra vektora projekciju uz pirmo ir vektoru skālārais reizinājums:

$$a\ \overline{OB}_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b};\quad a\ B_1C_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c},$$

tātad:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$



18. att.

Šī iznākuma vairākkārtīga lietāšana rāda, ka divas vektoru summas skālāri jāreizina tā kā algebriskas summas:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots)\cdot(\mathbf{l}+\mathbf{m}+\mathbf{n}+\ldots) = \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{l}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{l}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{l}+\ldots+ \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{m}+\ldots+ \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}+\ldots+\end{aligned}$$

Piemēram:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a})^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + (\mathbf{b})^2;$$
$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (\mathbf{a})^2 - (\mathbf{b})^2.$$

Ja divi vektori **a** un **b** ir izteikti savstarpēji stateniskos vienības vektoros:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$

to skālārais reizinājums:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= a_1b_1(\mathbf{i})^2 + a_2b_1\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + a_3b_1\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + a_2b_2\ (\mathbf{j})^2 + a_1b_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + a_3b_2\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + \\ &+ a_3b_3(\mathbf{k})^2 + a_1b_3\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + a_2b_3\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,\end{aligned}$$

tāpēc ka $(\mathbf{i})^2 = (\mathbf{j})^2 = (\mathbf{k})^2 = 1$, bet visi citi skālārie reizinājumi labajā pusē izzūd.

Tātad:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{6}$$

3. Skālārā vektoru reizinājuma lietāšanas piemēri.

Piemērs 1: Uzdoti divi vektori **a** un **b**. Atrast to veidotā leņķa kosinu.

Nosauksim leņķi, ko vektori veido, par θ; tā kosinus ir vienības vektoru skālārais reizinājums:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}}{a}\cdot\frac{\mathbf{b}}{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{ab}.$$

Piemērs 2: Uzdoti divi vektori **a** un **b**. Atrast viena vektora komponentes parallēli otra vektora virzienam un stateniski pret to.

Vektora **b** iekšējā komponente

$$\mathbf{b}_1 = b \cos\Theta \frac{\mathbf{a}}{a},$$

kur

$$\cos\Theta = \frac{\mathbf{a}}{a} \cdot \frac{\mathbf{b}}{b}$$

tātad:

$$\mathbf{b}_1 = b \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} \frac{\mathbf{a}}{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a^2} \mathbf{a},$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{a^2} \mathbf{a}.$$

Piemērs 3: Divi punkti uzdoti ar stāvokļa vektoriem **a** un **b**. Atrast to atstatumu **d**.

$$\text{Ja } \overrightarrow{OA} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \text{ tad } \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

To paceļam skālāri kvadrātā:

$$d^2 = (\overrightarrow{AB})^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 = (\mathbf{b})^2 - 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{a})^2,$$
$$d^2 = a^2 + b^2 - 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Ja leņķis starp vektoriem ir Θ: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos\Theta$:

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos\Theta.$$

Piemērs 4: Dabūt ar vektoru palīdzību formulas, kas izteic sakarības starp trijstūŗa malām un leņķiem.

Apzīmēsim ar A, B, C trijstūŗa stūŗus un reizē leņķus šinīs stūŗos. Trijstūŗa malas uztversim kā vektorus:

$$\overrightarrow{CB} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{CA} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{AB} = \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Paceļot skālāri kvadrātā:

$$(\mathbf{a})^2 = (\mathbf{b})^2 + 2\,\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{c})^2,$$
$$a^2 = b^2 + 2\,bc \cos(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + c^2;$$
$$\text{leņķis } (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \pi - A,$$
$$\cos(\pi - A) = -\cos A.$$

Tātad:

$$a^2 = b^2 - 2\,bc \cos A + c^2.$$

Vektoriālo sakarību starp malām pareizināsim skālāri ar **a**:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a},$$

tātad:

$$a^2 = ab \cos(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + ac \cos(\mathbf{c}, \mathbf{a}),$$
$$\text{leņķis } (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = C,$$
$$\text{„} \quad (\mathbf{c}, \mathbf{a}) = B,$$
$$a^2 = ab \cos C + ac \cos B,$$
$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Piemērs 5: Dabūt sfēriskās trigonometrijas pamatformulu:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

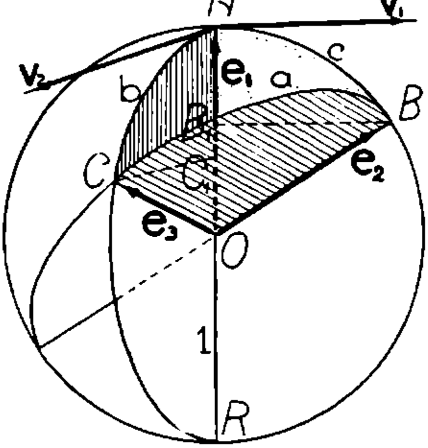
Vienības vektori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ noteic lodes punktus A, B, C. (Lodes radiuss = 1).

Sfēriskais leņķis A ir leņķis starp punktā A vilktām pieskarēm pie lokiem AB un AC. Tās uzdosim ar vienības vektoriem $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$. Vienības vektoru reizinājums ir leņķa kosinus:

$$\cos A = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2.$$

Vektors $\mathbf{v}_1$ ir koplanārs ar $\mathbf{e}_1$ un $\mathbf{e}_2$; $\mathbf{v}_2$ ir koplanārs ar $\mathbf{e}_1$ un $\mathbf{e}_3$. Tātad:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \beta_1 \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{v}_2 &= \alpha_2 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_3. \end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$



19. att.

Jāatrod α_1, β_1, α_2, β_2.

Reizinām skalāri pirmo formulu (A) ar $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{e}_1$, bet otru ar $\mathbf{v}_2$ un $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \beta_1 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_1,$$
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \beta_1 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1;$$
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_1)^2 = 1,$$
$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \ (\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{v}_1),$$
$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \sin c,$$
$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1,$$
$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \cos c.$$
$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \alpha_2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \beta_2 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}_2,$$
$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = \alpha_2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1;$$
$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 1,$$
$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0,$$
$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b,$$
$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1,$$
$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \cos b.$$

No tā seko:

$$1) \ 1 = \beta_1 \sin c, \quad 0 = \alpha_1 + \beta_1 \cos c;$$
$$2) \ 1 = \beta_2 \sin b, \quad 0 = \alpha_2 + \beta_2 \cos b.$$
$$\beta_1 = \frac{1}{\sin c}, \quad \alpha_1 = -\frac{\cos c}{\sin c};$$
$$\beta_2 = \frac{1}{\sin b}, \quad \alpha_2 = -\frac{\cos b}{\sin b}.$$

Tātad:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{e}_2 - \cos c \cdot \mathbf{e}_1}{\sin c}$$
$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{e}_3 - \cos b \cdot \mathbf{e}_1}{\sin b}.$$

Tie skālāri jāpareizina:

$$\cos A = \frac{(\mathbf{e}_2 - \cos c \cdot \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{e}_3 - \cos b \cdot \mathbf{e}_1)}{\sin b \sin c}$$

Skaitītājā ir:

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 \cos b - \cos c\, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + \cos b \cos c\, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 =$$
$$= \cos a - \cos c \cdot \cos b,$$
$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Tātad

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Cits pierādījums:

Projicējam B un C ortogonāli uz OA, projekcijas punkti ir B_1 un C_1. Tā kā $\overline{OB} = 1$, tad $\overline{OB} = \cos c$, $\overline{B_1B} = \sin c$; tāpat $\overline{OC_1} = \cos b$, $\overline{C_1C} = \sin b$.

$$\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1B} = \mathbf{e}_1 \cos c + \mathbf{v}_1 \sin c,$$

$$\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C} = \mathbf{e}_1 \cos b + \mathbf{v}_2 \sin b.$$

Skālāri pareizinot, un ievērojot to, ka $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{v}_1$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{v}_2$:

$$\cos a = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \cos b \cos c + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \sin b \sin c,$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Piemērs 6: Tetraedrā divi pāŗi pretējo šķautņu ir stateniski; pierādīt, ka trešā pāŗa šķautnes arī ir stateniskas, un ka pretējo šķautņu kvadrātu summa ir tā pati katram pārim.

Iesākuma punktu O novietojam vienā tetraedra virsotnē. Vietas vektori $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ noteic pārējās virsotnes.

Pretējās šķautnes:

$$\mathbf{c} \text{ un } \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a};$$
$$\mathbf{a} \text{ un } \overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b};$$
$$\mathbf{b} \text{ un } \overrightarrow{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

Uzdots, ka $\mathbf{c} \perp \overrightarrow{AB}$:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0,$$
$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}.$$

Uzdots arī, ka $\mathbf{a} \perp \overrightarrow{BC}$:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0,$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

No tā seko:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \qquad (B)$$
$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$
$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0,$$
$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0.$$

Tas izteic, ka $\mathbf{b} \perp \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ jeb:

$$\mathbf{b} \perp \overrightarrow{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}.$$

Pretējo šķautņu kvadrāti:

$$(\mathbf{c})^2 + (\overrightarrow{AB})^2 = (\mathbf{c})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 = c^2 + b^2 + a^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$
$$(\mathbf{a})^2 + (\overrightarrow{BC})^2 = (\mathbf{a})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{b},$$
$$(\mathbf{b})^2 + (\overrightarrow{CA})^2 = \mathbf{b}^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{c})^2 = b^2 + a^2 + c^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Ievērojot (B), labās puses ir vienādas.

Piemērs 7: Uzdotas 4 nekoplanāras taisnes. θ_{mn} apzīmē leņķi starp m-to un n-to taisnēm.

Pierādīt, ka

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} & \cos\theta_{14} \\ \cos\theta_{21} & 1 & \cos\theta_{23} & \cos\theta_{24} \\ \cos\theta_{31} & \cos\theta_{32} & 1 & \cos\theta_{34} \\ \cos\theta_{41} & \cos\theta_{42} & \cos\theta_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Taisnes uzdotas ar vienības vektoriem $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$. Tā kā, saskaņā ar pieņēmumu, taisnes nav koplanāras, starp vienības vektoriem ir spēkā lineāra sakarība:

$$A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3 + D\mathbf{e}_4 = 0.$$

Reizināsim šo nolīdzinājumu pēc kārtas ar visiem vienības vektoriem:

$$A\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + C\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + D\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_1 = 0,$$
$$A\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + B\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 + D\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_2 = 0,$$
$$A\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + B\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 + C\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 + D\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_3 = 0,$$
$$A\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_4 + B\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_4 + C\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4 + D\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = 0.$$

Tātad:

$$\begin{aligned} A \qquad\quad &+ B\cos\theta_{21} + C\cos\theta_{31} + D\cos\theta_{41} = 0, \\ A\cos\theta_{12} &+ B \qquad\quad + C\cos\theta_{32} + D\cos\theta_{42} = 0, \\ A\cos\theta_{13} &+ B\cos\theta_{23} + C \qquad\quad + D\cos\theta_{43} = 0, \\ A\cos\theta_{14} &+ B\cos\theta_{24} + C\cos\theta_{34} + D \qquad\quad = 0. \end{aligned}$$

Lai šie nolīdzinājumi visi reizē varētu būt spēkā, kad A, B, C, D visi $\neq 0$, koeficientu determinantam jābūt vienādam ar 0. Tas ir tas, kas jāpierāda.

Piemērs 8: Slīpleņķīgās koordinātu asīs (asu iesākums ir p. O un savstarpīgie leņķi ω_1, ω_2, ω_3) uzdots punkts $P(a, b, c)$. Atrast atstatumu $\overrightarrow{OP}$ un leņķu kosinus, ko $\overrightarrow{OP}$ veido ar koordinātu asīm.

Vienības vektori asu virzienos: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos\omega_3,$$
$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \cos\omega_1,$$
$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \cos\omega_2.$$

No iesākuma O līdz P:

$$\overrightarrow{OP} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3.$$

Lai dabūtu vektora garumu, tas jāpaceļ skālāri kvadrātā:

$$\overline{OP}^2 = (\overrightarrow{OP})^2 = (a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3)^2 =$$
$$= a^2(\mathbf{e}_1)^2 + b^2(\mathbf{e}_2)^2 + c^2(\mathbf{e}_3)^2 + 2\,ab\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + 2\,ac\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 + 2\,bc\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3.$$

Tātad:

$$\overline{OP}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\omega_3 + 2ac\cos\omega_2 + 2bc\cos\omega_1. \qquad \text{(I)}$$

Lai dabūtu $\cos\alpha$, kur α — leņķis starp Ox un OP, jāpareizina skālāri abu virzienu vienības vektori:

$$\cos\alpha = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}} = \frac{a + b\cos\omega_3 + c\cos\omega_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}},$$

kur izteiksme zem saknes ir (I).

4. Vektoriālais vektoru reizinājums.

Definīcija:

Divu vektoru **a** un **b** vektoriālais reizinājums ir vektors **v**, kam šādas īpašības: tā modulis ir $ab\sin\Theta$, kur Θ — mazākais leņķis starp vektoriem $(0 \leqslant \Theta \leqslant \pi)$, tā virziens ir statenisks pret vektoru **a**, **b** noteikto plakni, un virziena puse ir tā, kas veido labās rokas triedru **a**, **b**, **v**.

Vektoriālā reizinājuma apzīmēšanai Gibss un Vilsons lietā krustiņu: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, vācu matēmatiķi bieži — stūrainās iekavas: $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$, Burali-Forti un Markolongo īpašu simbolu: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Še lietāsim krustiņu.

Saskaņā ar definīciju:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab\sin\Theta \quad \mathbf{n}, \qquad (1)$$

kur **n** apzīmē vienības vektoru, kas virzīts tā, kā pārvietojas labās rokas skrūve, ja to griež tā, ka **a** visīsākā ceļā savietojas ar **b**. Pagrieziena leņķi Θ ērti skaitīt pozitīvu, ja griešanās, raugoties no **n** gala, ir pretēja pulksteņa rādītāju kustības virzienam. Ja **a**, **b**, **n** virzieni ir tā saskaņoti, Θ vienmēr ir pozitīvs, tātad, $ab\sin\Theta > 0$.

Vienu no uzdotiem vektoriem var salikt komponentēs: parallēli otra vektora virzienam un stateniski pret to (iekšējā un ārējā komponente). Vektoru ārējās komponentes ir $a_2 = a\sin\Theta$, $b_2 = b\sin\Theta$, tātad:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a(b\sin\Theta)\cdot\mathbf{n} = b(a\sin\Theta)\cdot\mathbf{n},$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a b_2 \mathbf{n} = b a_2 \mathbf{n}.$$

Lai dabūtu vektoriālā reizinājuma lielumu, viena vektora modulis jāpareizina ar otra vektora ārējās komponentes moduli.

Tāpēc vektoriālo reizināšanu sauc arī par ārējo reizināšanu (Grassmann, no jaunākiem: A. Chatelet un I. Kampé de Fériet).

Apskatīsim parallēlogramu $OAPB$, kuŗa malām OA un OB ir tādi virzieni un lielumi, kā attiecīgi vektoriem **a** un **b**. Parallēlograma laukums ir vienlīdzīgs $ab \sin \Theta$, kur $\Theta = \sphericalangle AOB$. Tāpēc:

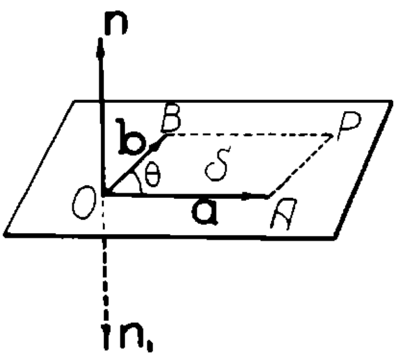
Divu vektoru **a** un **b** vektoriālais reizinājums ir vektors, kam modulis ir vienāds ar vektoru veidotā parallēlograma laukumu, bet virziena vienības vektors **n** ir statenisks pret parallēlograma plakni un virziena puse izvēlēta tā, ka, skatoties no **n** gala, parallēlograma kontūrs $OAPB$ jāapiet pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam.

Uzdoti **a**, **b**; kas ir $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$?

Konstruējam parallēlogramu, velkot $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Parallēlograma laukums $S = ab \sin \Theta$.

Nosakām parallēlograma apiešanas virzienu. Izteiksmē $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ pirmais faktors ir $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, ar to jāiesāk. Apiešanas kārtība $OAPB$. Vektors **n** jāņem tā, lai, skatoties no tā gala uz parallēlogramu, apiešanas virziens ir pozitīvs (pretējs pulksteņa rādītāja gaitas virzienam). Seko:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = S\mathbf{n}.$$



20. att.

Uzdoti tie paši **a**, **b**; kas ir $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$?

Tāpat konstruējam parallēlogramu $OAPB$, tā laukums ir tas pats: $S = ab \sin \Theta$. Apiešanas kārtība ir cita, jo izteiksmē $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ pirmais faktors ir $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Kontūrs jāapiet šādā kārtībā: $OBPA$. Lai tāda kustība no vienības vektora gala būtu pozitīva (pretēja pulksteņa rādītāja virzienam), vienības vektors $\mathbf{n}_1$ jāņem pretēji **n**. Tātad:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = S\mathbf{n}_1 = -S\mathbf{n}.$$
$$(\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n})$$

Īpaši gadījumi:

1) Kolineāri vektori: $\Theta = 0$ vai π. Abos gadījumos $\sin \Theta = 0$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$.

Nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam, ka divi no nulles atšķirīga lieluma vektori **a** un **b** ($a \neq 0$, $b \neq 0$) ir kolīneāri, ir tas, ka $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$.

Ka šis noteikums ir nepieciešams, mēs jau redzējām: no tā, ka vektori kolīneāri, seko, ka to vektoriālais reizinājums ir nulle. Otrādi, ja $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, un turklāt $a \neq 0$, $b \neq 0$, no tā seko, ka $ab \sin \theta = 0$, tātad, $\sin \theta = 0$, $\theta = 0$ vai π, tātad, vektori ir kolīneāri.

Secinājums:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0.$$

2) Stateniski vektori: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin \theta = 1$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab\,\mathbf{n}.$$

Statenisku vektoru vektoriālais reizinājums $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ir vektors, kuŗa modulis ir ab un kuŗa virziens ir tāds, ka **a**, **b** un $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ veido ortogōnālu labās rokas sistēmu.

3) Vienības vektori. Kāda vektora **a** ārējais reizinājums ar vienības vektoru **e** ($e = 1$) ir vektors, kam modulis ir vienāds ar vektora **a** ārējo komponenti:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{e} = a \sin \theta \quad \mathbf{n}.$$

Divu vienības vektoru vektoriālais reizinājums ir vektors, kam modulis ir vienāds ar vektoru veidotā leņķa sinu:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \sin \theta \quad \mathbf{n}.$$

Jāatzīmē vienības vektoru **i**, **j**, **k** īpašības, kad tie veido tiešo jeb t. s. labās rokas triedru: divu cikliskā kārtībā ņemtu vienības vektoru vektoriālais reizinājums dod iznākumā trešo vienības vektoru. Proti:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \qquad & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \text{turpretim:} \quad & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, & & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Vienādu faktoru reizinājumi izzūd:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0.$$

Ja, neaizkaŗot vektoru lielumu, viena virzienu pārmaina pret pretēju, leņķis starp vektoriem pārvēršas agrākā leņķa papildinājumā līdz π; sinus vērtību tā neietekmē, jo $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$. ($0 \leq \theta \leq \pi$). Nemainās ne vektoru moduļi, ne to veidotā leņķa sinus. Pārmainās tikai vienības vektora virziens pret pretēju, t. i. pārmainās vektoriālā reizinājuma zīme:

$$[-\mathbf{a}] \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times [-\mathbf{b}] = -[\mathbf{a} \times \mathbf{b}].$$

Tātad, ja vektoriālā vektoru reizinājumā vienam faktoram pārmainām zīmi, tad pārmainās zīme visam reizinājumam.

5. Vektoriālā vektoru reizinājuma īpašības.

Tās var izteikt vienādībās:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -[\mathbf{b}\times\mathbf{a}],\\
&2)\ [m\mathbf{a}]\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times[m\mathbf{b}] = m\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}],\\
&3')\ \mathbf{a}\times[\mathbf{b}+\mathbf{c}] = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c},\\
&3'')\ [\mathbf{b}+\mathbf{c}]\times\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{a} + \mathbf{c}\times\mathbf{a}.
\end{aligned}
$$

Pirmā vienādība rāda, ka mainot faktoru kārtību, mainās reizinājuma zīme pret pretēju. Tas jau noskaidrots sakarā ar vektoriālā reizinājuma definīciju. Vektoriālā reizinājuma faktoriem, tātad, nav kommūtātīvās īpašības.

Otrā vienādība ir skaidra pozitīva reizuļa m gadījumā. Ja vienu vai otru vektoru palielina m reiz ($m > 0$), leņķis starp vektoriem un to sinus nemainās, tāpat arī nemainās vienības vektors. Pārmainās vienīgi viena vektora modulis, kas palielinās m reiz; tikpat reiz lielāks ir reizinājums. Ja vienu vai otru vektoru pareizina ar pozitīvu skaitli m, ar tikpat pareizina to vektoriālo reizinājumu. Kā jau pierādīts, formula 2) spēkā arī tad, ja $m = -1$. Viegli parādīt, ka tā derīga arī tad, ja m ir negātīvs. Viegli seko vispārinājums:

$$[m\mathbf{a}]\times[n\mathbf{b}] = [n\mathbf{a}]\times[m\mathbf{b}] = mn\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}].$$

Šī formula izteic vektoriālā reizinājuma asociātīvo un kommūtātīvo īpašības attiecībā pret skālāriem reizinātājiem.

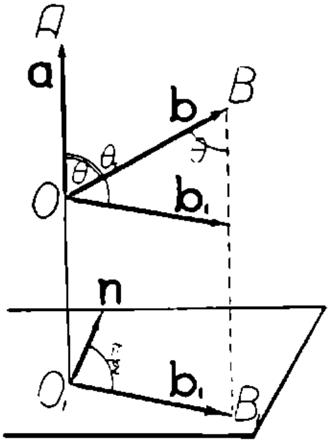
Formulas 3′) un 3″) izteic vektoriālās reizināšanas distribūtīvo likumu. Pierādījums pamatojas uz lemmas:

Vektoriālā reizinājumā vienu vektoru drīkst aizvietot ar tā projekciju uz plakni, kas stateniska pret otru vektoru.

Tātad:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}_1,$$

kur $\mathbf{b}_1$ ir vektora $\mathbf{b}$ projekcija uz plakni $\perp$ $\mathbf{a}$.



21. att.

Lemmas pierādījums.

Vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_1$ ir vienā plaknē, turklāt pagrieziens $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ir tāpat virzīts, kā pagrieziens $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_1$. Tas nozīmē, ka reizinājumiem $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ un $\mathbf{a}\times\mathbf{b}_1$ ir kopīgs vienības vektors $\mathbf{n}$.

Tātad:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= ab\sin\Theta\ \ \mathbf{n},\\
\mathbf{a}\times\mathbf{b}_1 &= ab_1\sin\Theta_1\,.\ \mathbf{n}.
\end{aligned}
$$

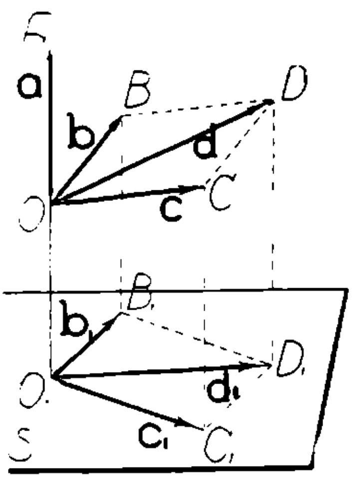
Bet:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \; b_1 = b \sin\theta;$$

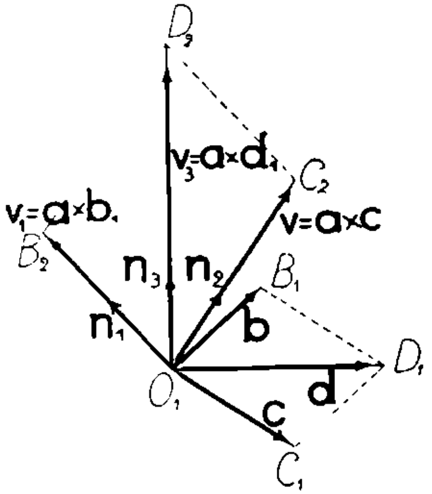
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1.$$

Uzdoti vektori **a**, **b**, **c**; var pieņemt, ka iesākumi savietoti punktā O. Vektorus $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ un $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ papildinām līdz pilnam parallēlogramam; tad

$$\overrightarrow{OD} = \mathbf{d} = \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$



22. att.



23. att.

Parallēlogramu $OBDC$ projicējam uz plakni $\perp$ **a**, tur arī dabūsim parallēlogramu $O_1B_1D_1C_1$. Tā malas $\overrightarrow{O_1B_1} = \mathbf{b}_1$, $\overrightarrow{O_1C_1} = \mathbf{c}_1$, diagonāle $\overrightarrow{O_1D_1} = \mathbf{d}_1 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1$.

Uz lemmas pamata var rakstīt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1,$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_2,$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{d}_1 = \mathbf{v}_3.$$

Vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ visi $\perp$ **a**, tātad, visus var pārnest plaknē S; tie $\perp$ $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1$ attiecīgi. To lielums seko no:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 = ab_1\mathbf{n}_1 \quad (\mathbf{a} \perp \mathbf{b}_1),\; v_1 = ab_1;$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} \times \mathbf{c}_1 = ac_1\mathbf{n}_2 \quad (\mathbf{a} \perp \mathbf{c}_1),\; v_2 = ac_1;$$
$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a} \times \mathbf{d}_1 = ad_1\mathbf{n}_3 \quad (\mathbf{a} \perp \mathbf{d}_1),\; v_3 = ad_1.$$

No tā izriet, ka $O_1B_2D_2C_2 \sim O_1B_1D_1C_1$, tātad:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Ar šī likuma palīdzību var parādīt, ka divi vektori, kas uzdoti kā summas, jāreizina tāpat, kā algebriskas summas; vektoriālās reizināšanas īpatnība ir tikai tā, ka visos locekļos jāievēro faktoru kārtība, jo kārtības maiņa ir līdzvērtīga zīmes maiņai.

Tātad:

$$[\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\quad]\times[\mathbf{l}+\mathbf{m}+\mathbf{n}+\quad]=$$
$$=\mathbf{a}\times\mathbf{l}+\mathbf{b}\times\mathbf{l}+\mathbf{c}\times\mathbf{l}+$$
$$+\mathbf{a}\times\mathbf{m}+\mathbf{b}\times\mathbf{m}+\mathbf{c}\times\mathbf{m}+$$
$$+\mathbf{a}\times\mathbf{n}+\mathbf{b}\times\mathbf{n}+\mathbf{c}\times\mathbf{n}+$$

Piemērs:

Pareizināt vektoriāli vektorus:

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}.$$

Reizinām abas summas tāpat, kā reizina algebriskas summas, bet sekojam, lai faktoru kārtība nesamainītos:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=a_1b_1[\mathbf{i}\times\mathbf{i}]+a_2b_1[\mathbf{j}\times\mathbf{i}]+a_3b_1[\mathbf{k}\times\mathbf{i}]+a_1b_2[\mathbf{i}\times\mathbf{j}]+a_2b_2[\mathbf{j}\times\mathbf{j}]$$
$$+a_3b_2[\mathbf{k}\times\mathbf{j}]+a_1b_3[\mathbf{i}\times\mathbf{k}]+a_2b_3[\mathbf{j}\times\mathbf{k}]+a_3b_3[\mathbf{k}\times\mathbf{k}].$$

Šeit:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0;$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k},$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i},$$
$$\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},\quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}.$$

Tātad:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-a_2b_1\mathbf{k}+a_3b_1\mathbf{j}+a_1b_2\mathbf{k}-a_3b_2\mathbf{i}-a_1b_3\mathbf{j}+a_2b_3\mathbf{i}.$$

Sakārtojot:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix}.$$

No lemmas seko, ka vektoru vektoriālais reizinājums nemainās, ja viena vektora gals slīd gar taisni, kas parallēla otram vektoram:

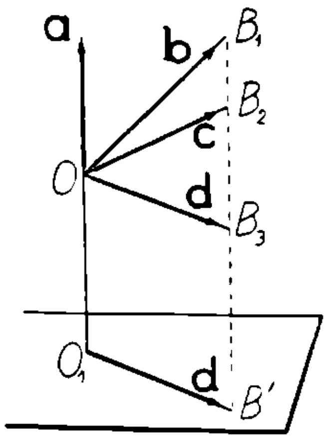
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{d}.$$

To var parādīt arī tā (24. att.):

$$\mathbf{b}=\mathbf{d}+\overrightarrow{B_3B_1},$$
$$\mathbf{c}=\mathbf{d}+\overrightarrow{B_3B_2},$$

jeb:

$$\mathbf{b}=\mathbf{d}+n_1\mathbf{a},$$
$$\mathbf{c}=\mathbf{d}+n_2\mathbf{a}.$$



24. att.

Tātad:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{d},$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{d},$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{d}.$$

Otrādi, ja $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, tas nenozimē, ka $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, bet ka $\mathbf{b}$ no $\mathbf{c}$ atšķiŗas ar komponenti, kas parallēla $\mathbf{a}$, t i. no tā seko ka $\mathbf{c} = \mathbf{b} + n\mathbf{a}$, kur $n = 1$. Tātad:

6. Vektoriālā vektoru reizinājuma lietājumi.

Piemērs 1:

Uzdoti divi vektori **a** un **b**. Atrast to veidotā leņķa sinu.

Pareizinot **a** ar **b** vektoriāli:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \Theta \, \mathbf{n},$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \Theta,$$

$$\sin \Theta = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{ab} = \left| \frac{\mathbf{a}}{a} \times \frac{\mathbf{b}}{b} \right|.$$

Tātad, lai dabūtu sinu leņķim starp divi vektoriem, jāpareizina vektoriāli virzienu vienības vektori un jāatrod reizinājuma modulis.

Piemērs 2:

Uzdoti divi vektori $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ un $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ar gala punktu koordinātām $A\,(a_1, a_2, a_3)$ un $B\,(b_1, b_2, b_3)$ ortogōnālās koordinātu asīs. Atrast sinu leņķim $AOB = \Theta$.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

Vektoru **a** un **b** moduļus dabūjam, paceļot skālāri kvadrātā:

$$a^2 = (\mathbf{a})^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$
$$b^2 = (\mathbf{b})^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2.$$

Tātad:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$
$$b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Lai dabūtu leņķa sinu, uzdotos vektorus pareizinām vektoriāli.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = ab \sin \Theta \quad \mathbf{n},$$

$$\mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = ab \sin \Theta \, . \, \mathbf{n}.$$

Vektors, kas vienādības kreisajā pusē, vienāds ar to, kas labajā pusē; tāpēc arī to moduļi vienādi. Atrodam:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = a^2 b^2 \sin^2 \Theta.$$

Tātad:

$$\sin^2 \Theta = \frac{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}$$

Piemērs 3:

Pierādīt Lagranža-Eilera identitāti:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2.$$

Kreisajā pusē izteiksme apzīmē matricas minoru kvadrātu summu. Identitāti dabūjam, uzskatot a_1, a_2, a_3 par punkta A, bet b_1, b_2, b_3 par punkta B koordinātām ortogonālās koordinātu asīs. Vektorus $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ un $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ pareizinām vektoriāli:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}.$$

Vektoriālais reizinājums:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = ab \sin \Theta\, \mathbf{n}.$$

Paceļot skalāri kvadrātā:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 \sin^2 \Theta,$$
$$= a^2 b^2 (1 - \cos^2 \Theta),$$
$$= a^2 b^2 - (ab \cos \Theta)^2.$$

Tātad:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

Tas ir vajadzīgā identitāte vektoriālā veidā. Ievietojot tur attiecīgās vērtības, dabū:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2.$$

Piemērs 4:

Pierādīt, ka trijstūrī

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Trijstūra malas uztveram kā vektorus, kas veido slēgtu poligōnu, tā kā

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0.$$

To reizinām vektoriāli ar $\mathbf{b}$ un $\mathbf{c}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} &= 0, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

Šeit:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a}\times\mathbf{b}=ab\sin(\mathbf{a},\ \mathbf{b})(-\mathbf{n}) & (\mathbf{a},\ \mathbf{b})=\pi-C \\ \left.\begin{array}{l}\mathbf{c}\times\mathbf{b}=cb\sin(\mathbf{c},\ \mathbf{b})\mathbf{n} \\ \mathbf{b}\times\mathbf{c}=cb\sin(\mathbf{c},\ \mathbf{b})(-\mathbf{n})\end{array}\right\} & (\mathbf{c},\ \mathbf{b})=\pi-A \\ \mathbf{a}\times\mathbf{c}=ac\sin(\mathbf{a},\ \mathbf{c})\mathbf{n} & (\mathbf{a},\ \mathbf{c})=\pi-B \end{array}$$

n apzīmē vienības vektoru, kas virzīts stateniski pret trijstūŗa plakni; no **n** gala raugoties vektori **a**, **b**, **c** atbilst pozitīvas rotācijas virzienam (pretēji pulksteņa rādītāja gaitai).

Tātad:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=ab\sin C(-\mathbf{n}),$$
$$\mathbf{c}\times\mathbf{b}=cb\sin A\,\mathbf{n},$$
$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=cb\sin A(-\mathbf{n}),$$
$$\mathbf{a}\times\mathbf{c}=ac\sin B\,\mathbf{n}.$$

To ievērojot, no (A) seko:

$$-ab\sin C+cb\sin A=0,$$
$$ac\sin B-cb\sin A=0,$$

vai:

$$cb\sin A=ac\sin B=ab\sin C,$$
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

Vingrinājumi.

1. Parādīt, ka stateņi caur trijstūŗa malu viduspunktiem iet caur kopīgu punktu.

Izvēlot patvaļīgu iesākuma punktu O, uzdodam trijstūŗa stūŗus A, B, C ar 3 nekoplanāriem vietas vektoriem **k**, **l**, **m**, tā ka

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{k},\quad \overrightarrow{OB}=\mathbf{l},\quad \overrightarrow{OC}=\mathbf{m}.$$

Trijstūŗa malas uztveŗam kā vektorus **a**, **b**, **c**:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}&=\overrightarrow{BC}=\mathbf{m}-\mathbf{l}, \\ \mathbf{b}&=\overrightarrow{CA}=\mathbf{k}-\mathbf{m}, \\ \mathbf{c}&=\overrightarrow{AB}=\mathbf{l}-\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{I}$$

Izvēlam trijstūŗa plaknē vienības vektorus $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ ($h_1=h_2=h_3=1$), kas stateniski attiecīgi pret malām **a**, **b**, **c**; tātad

$$\mathbf{h}_1\cdot\mathbf{a}=0,\quad \mathbf{h}_2\cdot\mathbf{b}=0,\quad \mathbf{h}_3\cdot\mathbf{c}=0. \tag{II}$$

Caur trijstūŗa malu viduspunktiem vilktiem stateņiem ir nolīdzinājumi:

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{m}-\frac{1}{2}\mathbf{a}+s_1\mathbf{h}_1,$$
$$\mathbf{r}_2=\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{b}+s_2\mathbf{h}_2,$$
$$\mathbf{r}_3=\mathbf{l}-\frac{1}{2}\mathbf{c}+s_3\mathbf{h}_3,$$

kur s_1, s_2, s_3 — mainīgi parametri. Ja šīs taisnes krustojas kopīgā punktā, tas nozīmē, ka ir tādas parametru vērtības, ka $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_3$. Jābūt

$$\mathbf{m}-\frac{1}{2}\mathbf{a}+s_1\mathbf{h}_1=\mathbf{k}-\frac{1}{2}\mathbf{b}+s_2\mathbf{h}_2=\mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{c}+s_3\mathbf{h}_3.$$

No šejienes seko, ievērojot (I):

$$s_3\mathbf{h}_3 - s_2\mathbf{h}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{a},$$

$$s_1\mathbf{h}_1 - s_3\mathbf{h}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{b},$$

$$s_2\mathbf{h}_2 - s_1\mathbf{h}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{c}.$$

Reizinot šīs vienādības skalāri ar **a**, **b**, **c**, dabū, ievērojot (II):

$$s_1 = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{h}_1\cdot\mathbf{c}} = \frac{1}{2}\frac{b\cos A}{\sin B} = r\cos A,$$

un tāpat $s_2 = r\cos B$, $s_3 = r\cos C$, kur A, B, C apzīmē trijstūra leņķus un r — apraksitā riņķa radiusu.

2. Atrast vienības vektoru, kas statenisks pret vektoriem $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ un $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$, un aprēķināt sinu leņķim, ko šie vektori veido.

Uzdotos vektorus apzīmējam ar $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},$$
$$\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Vektoru moduļi $v_1 = \sqrt{6}$, $v_2 = \sqrt{26}$.

Vektoriālais reizinājums

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = [2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}] \times [3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}] =$$
$$= 11[\mathbf{i}\times\mathbf{j}] - 3[\mathbf{j}\times\mathbf{k}] + 5[\mathbf{k}\times\mathbf{i}] = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}.$$

Tas ir vektors, kas statenisks pret abiem uzdotiem; tā modulis

$$|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 11^2} = \sqrt{155}.$$

Vienības vektors $\mathbf{n}$, kas statenisks pret abiem uzdotiem:

$$\mathbf{n} = \frac{-3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}}{\sqrt{155}}.$$

Sinus leņķim, ko veido savā starpā uzdotie vektori:

$$\sin\Theta = \left|\frac{\mathbf{v}_1}{v_1} \times \frac{\mathbf{v}_2}{v_2}\right| = \frac{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}{v_1 v_2} = \sqrt{\frac{155}{156}}.$$

3. Uzdotas slīpleņķu koordinātu asis ar vektoriem

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{OB} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$$

Punkts P (1, 1, 1) noteic staru $\overrightarrow{OP}$. Atrast tā virziena kosinus, kā arī moduli.

Vektoram $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ komponentes ir $\frac{\mathbf{a}}{a}, \frac{\mathbf{b}}{b}, \frac{\mathbf{c}}{c}$:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b} + \frac{\mathbf{c}}{c}.$$

Paceļot skalāri kvadrātā:

$$r = \sqrt{3 + 2\left(\frac{\mathbf{a}}{a}\cdot\frac{\mathbf{b}}{b} + \frac{\mathbf{a}}{a}\cdot\frac{\mathbf{c}}{c} + \frac{\mathbf{b}}{b}\cdot\frac{\mathbf{c}}{c}\right)}.$$

Ja leņķus starp **b** un **c**, **c** un **a**, **a** un **b** apzīmē attiecīgi ar λ, μ, ν, tad seko, ka

$$\mathbf{r} = \sqrt{3 + 2(\cos\lambda + \cos\mu + \cos\nu)}.$$

Virziena kosini vektoram **r**:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}}{a} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\frac{\mathbf{a}}{a} \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b} + \frac{\mathbf{c}}{c}\right)}{r} = \frac{1 + \cos\nu + \cos\mu}{r},$$

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{b}}{b} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\frac{\mathbf{b}}{b} \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b} + \frac{\mathbf{c}}{c}\right)}{r} = \frac{\cos\nu + 1 + \cos\lambda}{r},$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{c}}{c} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\frac{\mathbf{c}}{c} \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b} + \frac{\mathbf{c}}{c}\right)}{r} = \frac{\cos\mu + \cos\lambda + 1}{r}.$$

Uzdevumi III.

1. Pierādīt, ka trijstūŗa augstumi krustojas vienā punktā.

2. Trijstūris dabūts, savienojot trapezai neparallēlās malas viduspunktu ar pretējās malas galiem. Pierādīt, ka trijstūŗa laukums ir vienāds ar pustrapezas laukumu.

3. Uzdotas slīpleņķu koordinātu asis ar vektoriem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Atrast tādu punktu P, lai vektors $\overrightarrow{OP}$ veidotu vienādus leņķus ar **a**, **b**, **c**.

4. Ja taisnei vienādi leņķi ar trīs taisnēm, kas parallēlas kopīgai plaknei, tad tā statenīska pret šo plakni.

5. Punkts ir vienādos atstatumos no taisna trijstūŗa stūŗiem. Pierādīt, ka punkta savienojums ar hipotenūzas viduspunktu statenisks pret trijstūŗa plakni.

6. No ārējā punkta O velk pret plakni stateni ON. Otru taisni OM velk stateniski pret taisni PQ, kas ir uz plaknes. Pierādīt, ka $MN \perp PQ$.

7. Tetraedra šķautņu kvadrāti kopā ir vienlīdzīgi 4-kārtīgai pretējo šķautņu savienojumu kvadrātu summai.

8. Pierādīt, ka parallēlogramā diagōnāļu kvadrātu summa ir vienlīdzīga visu malu kvadrātu summai, ka diagōnāļu kvadrātu starpība ir vienlīdzīga 4-kārtīgam kaimiņmalu reizinājumam ar kosinu no leņķa starp šīm malām, ka divu kaimiņmalu kvadrātu starpība ir vienlīdzīga diagōnāļu reizinājumam ar leņķa kosinu starp diagōnālēm.

IV.

Vektoru lietājumi telpas ģeometrijā.

A. Plakne.

1. Plaknes nolīdzinājums. Uzdots vienības vektors **e**, kas vērsts no iesākuma punkta O stateniski pret uzdotu plakni. Stateņa gaŗumu no O līdz plaknes punktam N nosauksim par p:

$$ON = p, \quad \overrightarrow{ON} = p\mathbf{e}.$$

Patvaļīgi izvēlēta plaknes punkta P vietas vektoru nosauksim par **r**. Pareizināsim to skālāri ar **e**:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r \cdot 1 \cdot \cos\Theta = p,$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = p \tag{1}$$

Visu plaknes punktu vietas vektori atbilst nolīdzinājumam (1), un neviens vietas vektors, kas nobeidzas punktā ārpus plaknes, nav šinī nolīdzinājumā derīgs. Tāpēc (1) var uzskatīt par plaknes nolīdzinājumu.

Ja plaknes normāles virzienu rādītu nevis vienības vektors **e**, bet kāda cita gaŗuma vektors **n**, tad būtu

$$\mathbf{e} = \mathbf{n}/n.$$

To ievieto nolīdzinājumā (1) un dabū:

$$\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{n} = p,$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = np = q,$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = q \tag{2}$$

Tas ir nolīdzinājums plaknei, kas stateniska pret **n** un ir atstatumā $p = q/n$ no iesākuma, skaitot atstatumu pozitīvu vektora virzienā.

Otrādi, ja uzdots nolīdzinājums (2), var parādīt, ka visi vietas vektori **r**, kas tajā derīgi, ir ar galiem uz kopīgas plaknes. Pieņemsim, ka nolīdzinājumā (2) der $\mathbf{r}_1$ un $\mathbf{r}_2$. Tātad:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} = q,$$

$$\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n} = q.$$

Pareizinot ar k_1 un k_2 (patvaļīgi skālāri) un saskaitot:

$$(k_1\mathbf{r}_1 + k_2\mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n} = (k_1 + k_2)q,$$

$$\frac{k_1\mathbf{r}_1 + k_2\mathbf{r}_2}{k_1 + k_2} \cdot \mathbf{n} = q.$$

No tā redzams, ka, ja nolīdzinājumā der kādi divi vektori $\mathbf{r}_1$ un $\mathbf{r}_2$, tad tai pašā nolīdzinājumā (2) der arī visi bezgala daudzie vektori

$$\mathbf{r}=\frac{k_1\mathbf{r}_1+k_2\mathbf{r}_2}{k_1+k_2},$$

kuŗu gali ir uz taisnes, kas savieno uzdoto vektoru galus.

Visu nolīdzinājumā (2) derīgo vektoru gali veido kādu virsmu ar tādu īpašību, ka, ja divi punkti ir uz virsmas, tad uz tās pašas virsmas ir visa taisne, kas punktus savieno. Tāda īpašība attiecībā pret ikkuŗiem diviem punktiem ir tikai plaknei.

Plakne var būt uzdota ar normāles virzienā dotu vektoru $\mathbf{n}$, nosakot, ka tai jāiet caur uzdotu punktu A, ko noteic vietas vektors $\mathbf{a}$.

Ja kādam patvaļīgi plaknē izvēlētam punktam P atbilst vietas vektors $\mathbf{r}$, tad seko $\overrightarrow{AP}=\mathbf{r}-\mathbf{a}$. Tas vektors ir statenisks pret $\mathbf{n}$:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}=0,$$
$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}.$$

Uzdevums 1.

Slīpleņķīgās koordinātu asis, kas savā starpā veido leņķus ω_1, ω_2, ω_3, uzdots normāls pret plakni virziens ar virziena parametriem (k, l, m). Plaknes attālums no iesākuma ir p. Uzrakstīt plaknes nolīdzinājumu.

Asis noteicam ar virziena (vienības) vektoriem $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.
Leņķi starp koordinātu asīm uzdoti:

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2=\cos\omega_3,\quad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3=\cos\omega_2,\quad \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3=\cos\omega_1.$$

Vienības vektors virzienā stateniski uz plaknes pusi uzdots ar komponentēm:

$$\overrightarrow{OA}=\mathbf{e}=k\mathbf{e}_1+l\mathbf{e}_2+m\mathbf{e}_3.$$

Patvaļīgi izvēlētā punktā P stāvokļa vektors

$$\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3.$$

Saskaņā ar formulu (1):

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}=(x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3)\cdot(k\mathbf{e}_1+l\mathbf{e}_2+m\mathbf{e}_3)=p.$$

Pareizinot:

$$kx+ly+mz+(lx+ky)\,\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2+(my+lz)\,\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3+(kz+mx)\,\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1=p,$$
$$kx+ly+mz+(lx+ky)\cos\omega_3+(my+lz)\cos\omega_1+(kz+mx)\cos\omega_2=p,$$

vai arī:

$$(k+l\cos\omega_3+m\cos\omega_2)x-(l+m\cos\omega_1+k\cos\omega_3)y+$$
$$+(m+k\cos\omega_2+l\cos\omega_1)z=p.$$

Pieņemot apzīmējumu:

$$\Phi(k,l,m)=(k\mathbf{e}_1+l\mathbf{e}_2+m\mathbf{e}_3)^2=k^2+l^2+m^2+$$
$$+2kl\cos\omega_3+2lm\cos\omega_1+2mk\cos\omega_2,$$
$$\Phi'_k=2(k+l\cos\omega_3+m\cos\omega_2),$$
$$\Phi'_l=2(l+m\cos\omega_1+k\cos\omega_3),$$
$$\Phi'_m=2(m+k\cos\omega_2+l\cos\omega_1),$$

seko plaknes nolīdzinājums:

$$\Phi'_kx+\Phi'_ly+\Phi'_mz=2p.$$

Uzdevums 2.

Slīpleņķīgās koordinātu asis, kas savā starpā veido leņķus ω_1, ω_2, ω_3, uzdots normāls pret plakni virziens ar virziena kosiniem ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$). Plaknes attālums no iesākuma ir p. Uzrakstīt plaknes nolīdzinājumu.

Vienības vektori:

asu virzienos: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$,
normāles virzienā: $\mathbf{e}$.

Leņķi starp koordinātu asīm ω_1, ω_2, ω_3:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos\omega_3, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \cos\omega_2, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \cos\omega_1.$$

Vektoram $\mathbf{e}$ skālārās komponentes (k, l, m) nezināmas:

$$\mathbf{e} = k\mathbf{e}_1 + l\mathbf{e}_2 + m\mathbf{e}_3.$$

Šo formulu reizinām skālāri ar $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e} &= k(\mathbf{e}_1)^2 + l\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + m\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e} &= k\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + l(\mathbf{e}_2)^2 + m\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e} &= k\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + l\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 + m(\mathbf{e}_3)^2.
\end{aligned}$$

Tātad:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= k + l\cos\omega_3 + m\cos\omega_2,\\
\cos\beta &= l + m\cos\omega_1 + k\cos\omega_3,\\
\cos\gamma &= m + k\cos\omega_2 + l\cos\omega_1.
\end{aligned}$$

Labā pusē izteiksmes ir koeficienti pie x, y, z plaknes nolīdzinājumā (sk. iepriekšējo uzdevumu), tātad, plaknes nolīdzinājums ir

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

2. Asu nogriežņi. Uzdots plaknes vektoriālais nolīdzinājums, jāatrod nogriežņi, ko tā atšķeļ koordinātu asīm. Vispārīgāka problēma: zinot plaknes nolīdzinājumu un kāda stāvokļa vektora virzienu, atrast tā lielumu.

Plaknes nolīdzinājums:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = q,$$

kur $\mathbf{r}$ mainīgs vektors (stāvokļa vektors), kas iziet no iesākuma punkta. Kāda stāvokļa vektora virziens uzdots ar vienības vektoru $\mathbf{e}$ ($e = 1$), tā lielumu apzīmēsim ar r_1, pašu vektoru ar $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{r}_1 = r_1\mathbf{e}.$$

Vektora gals ir uz plaknes, vektors der plaknes nolīdzinājumā:

$$r_1\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = q,$$

tātad

$$r_1 = \frac{q}{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}}. \tag{1}$$

Plakne $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = q$ atšķeļ taisnei virzienā $\mathbf{e}$ ($e = 1$) nogriezni (1).

Ja plakne stateniska pret $\mathbf{n}$ un iet caur vektora $\mathbf{a}$ gala punktu, tās nolīdzinājums ir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$. Taisnei, kas vilkta no iesākuma virzienā $\mathbf{e}$ $(e = 1)$, tā atšķeļ nogriezni

$$r_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}} \tag{2}$$

Koordinātu asis uzdotas ar vienības vektoriem $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Šinīs asīs dota plakne:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = q.$$

Tās asu nogriežņi ir:

$$x_0 = \frac{q}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}}, \quad y_0 = \frac{q}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}}, \quad z_0 = \frac{q}{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}}. \tag{3}$$

Atbilde seko no tā, ka, ja stāvokļa vektoru virzieni ir $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ un to garumi attiecīgi x_0, y_0, z_0, paši vektori ir $x_0\mathbf{e}_1$, $y_0\mathbf{e}_2$, $z_0\mathbf{e}_3$.

Tie derīgi $\mathbf{r}$ vietā plaknes nolīdzinājumā:

$$x_0\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} = q, \quad y_0\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} = q, \quad z_0\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n} = q.$$

Izdalot pirmo nolīdzinājumu ar $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}$, otro — ar $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}$, trešo — ar $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}$ dabū (3).

Ja asis ortogonālas $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Plakne $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = q$ nošķeļ asīm nogriežņus:

$$x_0 = \frac{q}{\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}}, \quad y_0 = \frac{q}{\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}}, \quad z = \frac{q}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}. \tag{4}$$

Piemērs:

Plaknes normāle ar slīpleņķīgām asīm (asu leņķi ω_1, ω_2, ω_3) veido leņķus α, β, γ; stateņa garums no iesākuma līdz plaknei ir p. Atrast asu nogriežņus.

Apzīmēsim virziena (vienības) vektorus: asīm: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, normālei: $\mathbf{e}$.

Plaknes nolīdzinājums: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = p$.

Ja plakne nogriež asīm gabalus x_0, y_0, z_0, tad vektori $x_0\mathbf{e}_1$, $y_0\mathbf{e}_2$, $z_0\mathbf{e}_3$ derīgi $\mathbf{r}$ vietā plaknes nolīdzinājumā:

$$x_0\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e} = y_0\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e} = z_0\,\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e} = p,$$

tātad, asu nogriežņi:

$$x_0 = \frac{p}{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}} = \frac{p}{\cos\alpha}, \quad y_0 = \frac{p}{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}} = \frac{p}{\cos\beta}, \quad z_0 = \frac{p}{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}} = \frac{p}{\cos\gamma}.$$

3. Atstatums no punkta līdz plaknei. Atstatumu no iesākuma punkta O līdz plaknei $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = q$ var definēt kā vektora $\mathbf{r}$ projekciju uz normāles virzienu. Lai dabūtu vektora projekciju, tas jāreizina skalāri ar projekcijas virziena vienības vektoru.

$$p = ON = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{n} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{n} = \frac{q}{n}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II (1)}$$

Uzdevums I.

Atrast atstatumu x no iesākuma punkta O līdz plaknei $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=q$ slīpā virzienā, ko noteic vienības vektors $\mathbf{m}$.

$$x=OM, \text{ tā tad: } \overrightarrow{OM}=x\mathbf{m}.$$

Šis vektors der plaknes nolīdzinājumā:

$$x\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}=q,$$

tātad:

$$x=\frac{q}{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}}. \tag{2}$$

Pieņemsim tagad, ka uzdota plakne $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=q$ un punkts A tāds, ka $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$. Punkts A nav iesākumā. Atrast atstatumu no A līdz plaknei.

Uzdotās plaknes nolīdzinājums

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=q$$

vai

$$\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{n}=\frac{q}{n}=p.$$

Tās atstatums no iesākuma:

$$ON=p=q/n,$$

$$\overrightarrow{ON}=p\,\frac{\mathbf{n}}{n}=\frac{q\mathbf{n}}{n^2}.$$

Velkam plakni caur $A\,(\overrightarrow{OA}=\mathbf{a})$ stateniski pret $\mathbf{n}$. Mainīgam stāvokļa vektoram $\mathbf{r}'$ ir tāda pati projekcija uz normāli kā uzdotam $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}.$$

Plaknes atstatums no iesākuma

$$ON'=p'=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{n},$$

$$\overrightarrow{ON'}=p'\,\frac{\mathbf{n}}{n}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{n^2}\,\mathbf{n}.$$

Atstatums no uzdotā punkta A $(\overrightarrow{OA}=\mathbf{a})$ līdz plaknei $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=q$:

$$\overline{AP}=\overline{N'N}=\overline{ON}-\overline{ON'}=\frac{q-\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{n}; \tag{3}$$

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{N'N}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{ON'}=\frac{q-\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}}{n^2}\,\mathbf{n}. \tag{4}$$

Ja aprēķinot šīs izteiksmes iznāk $\overline{AP}>O$, tas nozīmē, ka $\overrightarrow{AP}$ tāpat virzīts kā $\mathbf{n}$, tātad, O un A ir vienā pusē uzdotai plaknei. Ja turpretim iznāk $\overline{AP}<O$, tas nozīmē, ka $\overrightarrow{AP}$ un $\mathbf{n}$ ir pretēji virzīti, tātad O un A ir plaknei pretējās pusēs.

Uzdevums II.

Atrast atstatumu x līdz plaknei $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = q$ no uzdota punkta A ($\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$) slīpā virzienā, kas parallēls vienības vektoram $\mathbf{b}$ ($b = 1$).

Vektors $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + x\mathbf{b}$ der uzdotās plaknes nolīdzinājumā:

$$(\mathbf{a} + x\mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} = q,$$

tātad

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} + x\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = q,$$

$$x = \frac{q - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}} \tag{5}$$

Atkarībā no tā:

$$\overrightarrow{AP} = x\mathbf{b} = \frac{q - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{b}. \tag{6}$$

Ja x iznāk pozitīvs ($x > 0$), tas nozīmē, ka vienības vektors $\mathbf{b}$ vērsts uz plaknes pusi, ja iznāk $x < 0$, tas nozīmē, ka $\mathbf{b}$ vērsts projām no plaknes.

4. **Divi plaknes.** — Plaknes

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = q, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}' = q' \tag{1}$$

ir parallēlas, ja to normālēm ir vienādi virzieni, tātad, ja vektori $\mathbf{n}$ un $\mathbf{n}'$ ir kolineāri. Leņķis Θ, ko šie vektori veido $= 0$ vai π:

$$\cos\Theta = \frac{\mathbf{n}}{n} \cdot \frac{\mathbf{n}'}{n'} = \pm 1 \tag{2}$$

Vēl citādi: plaknes (1) ir parallēlas, ja

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n}' = 0 \tag{3}$$

Plaknes ir stateniskas, ja $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}'$, tātad, ja normāļu vektoru skālārais reizinājums izzūd:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0 \tag{4}$$

Vispārīgā gadījumā divi plaknes veido kaktu, ko mērī leņķis Θ starp normālēm. Šī leņķa kosins ir vienības vektoru reizinājums:

$$\cos\Theta = \frac{\mathbf{n}}{n} \cdot \frac{\mathbf{n}'}{n'} \tag{5}$$

Ja divi plaknes nav parallēlas, tās krustojas pa noteiktu taisni, caur kuŗu var vilkt bezgala daudz dažādu plakņu. To visu nolīdzinājumi ietelp vienā formulā, kuŗu dabū tāpat kā plakņu kūļa nolīdzinājumu analitiskā ģeometrijā:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - q + \lambda(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}' - q') = 0,$$

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{n} - \lambda\, \mathbf{n}') = q - \lambda\, q' \tag{6}$$

Visi punkti, kuŗu vietas vektori $\mathbf{r}$ derīgi reizē nolīdzinājumos (1), apmierina arī (6); no tā redzams, ka abām plaknēm kopīgās taisnes punkti ir plaknē (6).

Mainot λ mainām plaknei (6) normāles virzienu vektoru $\mathbf{n}$ un $\mathbf{n}'$ plaknē. Speciāli šo parametru izvēlot, varam likt plaknei (6) izpildīt kādus papildu noteikumus. Prasīsim, lai (6) iet caur punktu, kuŗa vietas vektors ir $\mathbf{a}$.

Tādā gadījumā:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{n}-\lambda\,\mathbf{n}')=q-\lambda\,q',$$

tātad:

$$\lambda=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}-q}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}'-q'} \tag{7}$$

Uzdevums 1.

Uzrakstīt nolīdzinājumus plaknēm, kas dala uz pusēm kaktus starp divi uzdotām plaknēm (1).

Apskatām kādu punktu P tai kaktā, kur ir iesākums O. Punkta P vietas vektoru $\overrightarrow{OP}$ apzīmēsim ar $\mathbf{r}'$. No punkta P velkam stateņus pret plaknēm PQ un PQ'. Šinī kaktā $\overrightarrow{PQ}\parallel\mathbf{n}$, $\overrightarrow{PQ'}\parallel\mathbf{n}'$ un atstatumiem no punkta līdz plaknei ir vienāda zīme. Vektori

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\mathbf{r}'+h\,\frac{\mathbf{n}}{n},$$

$$\overrightarrow{OQ'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ'}=\mathbf{r}'+h'\,\frac{\mathbf{n}'}{n'}$$

apmierina pirmais — pirmo, otrais — otro nolīdzinājumu (1).

Ievietojot dabū:

$$\left(\mathbf{r}+h\,\frac{\mathbf{n}}{n}\right)\cdot\mathbf{n}=q,$$

un

$$\left(\mathbf{r}'+h'\,\frac{\mathbf{n}'}{n'}\right)\cdot\mathbf{n}'=q',$$

tātad:

$$h=\frac{q-\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}}{n},\qquad h'=\frac{q'-\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}'}{n'}.$$

Tai kaktā, kur ir iesākums, šiem lielumiem ir vienāda zīme, bisektrises plaknē bez tam tie ir vienādi aritmētiskā nozīmē. Rakstot vietas vektoru $\mathbf{r}'$ bez indeka, dabūjam bisektrises plaknes nolīdzinājumu šādā veidā:

$$\frac{q-\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{n}=\frac{q'-\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'}{n'} \tag{8}$$

kaktam (un tam pretimstāvošajam), kur ir iesākums. Blakus kaktos atstatumiem no punkta līdz plaknei ir pretējas zīmes, tur bisektrises plaknē $h=-h'$:

$$\frac{q-\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{n}=-\frac{q'-\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'}{n'}\;\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{8'}$$

Pārkārtojot (8) un (8′), dabūjam nolīdzinājumus plaknei, kas dala uz pusēm to kaktu, kur ir iesākums:

$$\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\mathbf{n}}{n}-\frac{\mathbf{n}'}{n'}\right)=\frac{q}{n}-\frac{q'}{n'} \tag{9}$$

un blakus kaktu:

$$r\cdot\left(\frac{\mathbf{n}}{n}+\frac{\mathbf{n}'}{n'}\right)=\frac{q}{n}+\frac{q'}{n'} \tag{9'}$$

Kārtula:

Uzdoto plakņu nolīdzinājumus

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=q,\quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'=q'$$

izteicam normāļu vienības vektoros:

$$\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{n}=\frac{q}{n},\quad \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}'}{n'}=\frac{q'}{n'}.$$

Atskaitot dabū bisektrises plaknes nolīdzinājumu kaktā, kur ir iesākums:

$$\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\mathbf{n}}{n}-\frac{\mathbf{n}'}{n'}\right)=\frac{q}{n}-\frac{q'}{n'};$$

saskaitot dabū bisektrises plaknes nolīdzinājumu blakus kaktam:

$$\mathbf{r}\cdot\left(\frac{\mathbf{n}}{n}+\frac{\mathbf{n}'}{n}\right)=\frac{q}{n}+\frac{q'}{n'}.$$

Uzdevums II.

Uzrakstīt nolīdzinājumu taisnei, kas kopīga divi uzdotām plaknēm.

Pieņemts, ka plaknes nav parallēlas, kā arī nesaplūst kopā, tā ka tiešām ir viena noteikta taisne, pa kuŗu tās krustojas. Lai uzrakstītu tās nolīdzinājumu, jāzina kādam vienam tās punktam vietas vektors un jāzina tās virziens.

Vektori $\mathbf{n}$ un $\mathbf{n}'$, saskaņā ar pieņēmumu, nav kolineāri, tie noteic plakni NON', kuŗas nolīdzinājums ir:

$$\mathbf{r}=s\mathbf{n}+s'\mathbf{n}', \tag{10}$$

ja s un s' ir mainīgi parametri. Attiecīgi izvēlot parametrus, var sameklēt tādu vietas vektoru, kas apmierina nevien (10), bet arī abus plakņu nolīdzinājumus:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=q,\quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}'=q' \tag{11}$$

No (10) un 11) izslēdzam $\mathbf{r}$:

$$(s\mathbf{n}+s'\mathbf{n}')\cdot\mathbf{n}=q,$$
$$(s\mathbf{n}+s'\mathbf{n}')\cdot\mathbf{n}'=q'.$$

Vai arī:

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})s+(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{n})s'=q,$$
$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')s+(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{n}')s'=q'.$$

Atrisinot dabū:

$$s = \frac{qn'^2 - q'(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')}{(nn')^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2} \tag{12}$$

$$s' = \frac{q'n^2 - q(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')}{(nn')^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')^2} \tag{12'}$$

Tādas parametru vērtības noteic punktu P' (vektoru OP'). Plakņu kopīgā taisne QR ir stateniska pret abām normālēm $\mathbf{n}$ un $\mathbf{n}'$, tātad, pret plakni NON'; tas nozīmē, tā parallēla vektoram $\mathbf{n} \times \mathbf{n}'$. Taisnei QR ir nolīdzinājums:

$$\mathbf{r} = s\mathbf{n} + s'\mathbf{n}' + t\,[\mathbf{n} \times \mathbf{n}], \tag{13}$$

kur t — mainīgs parametrs, bet s, s' — konstantes (12), (12').

5. Atstatums no punkta līdz taisnei. Caur punktu A ($\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$) uzdotā virzienā $\mathbf{b}$ ($b = 1$) vilkta taisne. Atrast atstatumu līdz taisnei no uzdotā punkta P' ($\overrightarrow{OP'} = \mathbf{r}'$).

Projicēsim punktu P' uz uzdoto taisni (punktā N): $P'N \perp AN$. Leņķis ANP' ir taisns:

$$\overline{AP'}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{NP'}^2.$$

Tam var atrast vienu kateti un hipotenūzu, katete AN ir vektora $\overrightarrow{AP'}$ projekcija uz uzdoto taisni, tātad:

$$\overline{AN} = (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

(lai dabūtu vektora projekciju, tas jāreizina skālāri ar tā virziena vienības vektoru, uz kuŗu projicē).

Hipotenūza ir uzdota kā vektoru starpība $\overrightarrow{AP'} = \mathbf{r}' - \mathbf{a}'$:

$$(\overline{AP'})^2 = \overrightarrow{AP'} \cdot \overrightarrow{AP'} = (\mathbf{r}' - \mathbf{a})^2,$$

tātad

$$(\overline{P'N}^2 = \overline{AP'}^2 - \overline{AN}^2 = (\mathbf{r}' - \mathbf{a})^2 - \{(\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}\}^2.$$

Iepriekšējā formula dod meklējamā atstatuma kvadrātu. Atstatumu var uzskatīt kā vektoru:

$$\overrightarrow{P'N} = \overrightarrow{P'A} + \overrightarrow{AN} = \mathbf{a} - \mathbf{r}' + \{(\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}\}\,\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{P'N} = \mathbf{a} - \mathbf{r}' - \{(\mathbf{a} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{b}\}\,\mathbf{b}.$$

Vingrinājumi.

1. Atrast plaknes nolīdzinājumu, kas iet caur punktu $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ stateniski vektoram $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$.

Izejot no tā, ka visu stāvokļa vektoru projekcijas uz plaknes normāli ir vienādas, dabūjam:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}.$$

Mums ir:

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k},$$
$$\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) = 6 - 12 - 7 = -13 = q.$$

Plaknes nolīdzinājums:

$$\mathbf{r}\cdot(3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k})=-13.$$

Atstatums $p=ON=q/n$:

$$\mathbf{n}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k},$$
$$n^2=9+16+49=74,$$
$$n=\sqrt{74},$$
$$p=\frac{q}{n}=-\frac{13}{\sqrt{74}}.$$

2. Atrast nolīdzinājumu plaknei, kas iet caur iesākuma punktu un taisni, kur krustojas plaknes

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}=p \text{ un } \mathbf{r}\cdot\mathbf{b}=q.$$

Nolīdzinājumu plaknei, kas iet caur divu dotu plakņu kopīgo taisni, atrod, pieskaitot vienas plaknes nolīdzinājumam otru, kas pareizināts ar kādu parametru λ:

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})=p+\lambda q.$$

Kamēr λ vērtība nav noteikta, nolīdzinājums izteic plakņu kūli. Parametrs λ jāizvēl tā, lai plakne iet caur iesākuma punktu. Nolīdzinājumā vajaga derēt vietas vektoram $\mathbf{r}=0$. Tātad:

$$0\cdot(\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})=0=p+\lambda q,\ \lambda=-\frac{p}{q}.$$

Meklējamās plaknes nolīdzinājums, pēc nelieliem pārveidojumiem:

$$\mathbf{r}\cdot(q\mathbf{a}-p\mathbf{b})=0.$$

3. Parādīt, ka punkti $\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ un $3(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ ir vienādos atstatumos no plaknes

$$\mathbf{r}\cdot(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})+9=0$$

un pretējās pusēs.

References punktu (iesākumu) apzīmēsim ar O. Vektors $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ uzdod punktu A, tāpat vektors $\mathbf{b}=3(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$ punktu B. No iesākuma punkta pret plakni stateniski vilktā taisne sastop plakni punktā N; šī taisne uzdota ar vektoru $\mathbf{n}=5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k}$.

Plaknēm, kas paralēlas uzdotai un iet caur punktiem A un B, ir nolīdzinājumi:

$$A)\ \mathbf{r}\cdot(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})=(\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})=-18;$$
$$B)\ \mathbf{r}\cdot(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})=3(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\cdot(5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k})=0.$$

Normāle pret plaknēm, kas vilkta caur iesākuma punktu, sastop plaknes attiecīgi punktos N, N_A un N_B. Atstatumi:

$$\overline{ON}=-\frac{9}{\sqrt{78}},\quad \overline{ON_A}=-\frac{18}{\sqrt{78}},\quad \overline{ON_B}=0.$$

Šeit $\sqrt{78}=n=|5\mathbf{i}+2\mathbf{j}-7\mathbf{k}|$.

Dabūtie iznākumi rāda, ka iesākuma punkts ir uz plaknes caur B. Punkts N ir vidū starp N_A un N_B (jeb O), turklāt pretējā pusē, nekā tā, ko rāda $\mathbf{n}$.

Uzdevumi IV A.

1. Uzdotas divi plaknes:

$$\mathbf{r}\cdot(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=1,$$
$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})=2.$$

Atrast kopīgās taisnes nolīdzinājumu.

2. Uzdotas plaknes

$$\mathbf{r}\cdot(3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})=1,$$
$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})=2.$$

Atrast plakni, kuŗa stateniska pret taisni, kas kopīga uzdotām plaknēm, un iet caur punktu $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

3. Dots kubs, kam šķautnes gaŗums ir 1 (vienības kubs). Atrast statenisko atstatumu no kuba stūŗa līdz diagōnālei, kas neiet caur šo stūri.

4. Uzdota plakne un ārpus tās punkts. Punktā novietots ortogonālu koordinātu asu iesākums. Pieņemot, ka plakne nošķeļ asīm nogriežņus a, b, c, pierādīt, ka

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

ir lielums, kuŗa vērtība nemainās, ja asis pagriež ap iesākumu.

5. Parādīt, ka plaknes

$$\mathbf{r}\cdot(2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+3\mathbf{k})=0,$$
$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k})=2,$$
$$\mathbf{r}\cdot(7\mathbf{j}-5\mathbf{k})+4=0$$

iet caur kopīgu taisni.

6. Parādīt, ka plakņu $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})=0$ un $\mathbf{r}\cdot(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k})=0$ kopīgai taisnei ir vienādi leņķi ar $\mathbf{i}$ un $\mathbf{k}$.

7. Punkts pārvietojas tā, ka starpība starp tā atstatumu kvadrātiem līdz divi uzdotiem punktiem ir konstanta. Atrast pārvietošanās ģeometrisko vietu.

B. Lode.

1. Lodes nolīdzinājums. Par lodi sauc ģeometrijā virsmu, kuŗas punkti ir konstantā atstatumā no kāda viena punkta, ko sauc par lodes c e n t r u; konstanto atstatumu no centra līdz virsmas punktiem sauc par lodes r a d i u s u.

Pieņemot iesākuma punktu O, uzdosim lodes radiusu a un centru $C(\overrightarrow{OC}=\mathbf{c})$. Kādam patvaļīgam lodes virsmas punktam R atbilst vietas vektors $\overrightarrow{OR}=\mathbf{r}$.

$$\overrightarrow{CR}=\mathbf{r}-\mathbf{c}.$$

Šī vektora modulis ir a:

$$(\overrightarrow{CR})^2=(\mathbf{r}-\mathbf{c})^2=a^2 \tag{1}$$

vai

$$(\mathbf{r}^2)-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}+c^2-a^2=0,$$

tātad, apzīmējot c^2-a^2 ar k:

$$\mathbf{r}^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}+k=0 \tag{1'}$$

Tāda sakarība ir spēkā attiecībā pret visiem lodes virsmas punktiem. Tāpēc nolīdzinājumu (1) jeb (1′) sauksim par l o d e s n o l ī d z i n ā j u m u attiecībā pret iesākumu O.

Ja iesākums ir lodes ārpusē: $c > a$, $c^2 > a^2$, $k = c^2 - a^2 > 0$. Šinī gadījumā k apzīmē no iesākuma lodei pievilktas pieskares gaŗuma kvadrātu.

Ja iesākums ir uz lodes: $c = a$, $c^2 = a^2$, $k = c^2 - a^2 = 0$, pieskares gaŗums ir nulle. Lodes nolīdzinājums šinī gadījumā ir:

$$\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = 0.$$

Ja iesākums ir lodes iekšienē: $c < a$, $c^2 < a^2$, $k = c^2 - a^2 < 0$; pieskari no iesākuma vilkt nav iespējams (to izteic sakot, ka pieskare nav reāla).

Īpašā gadījumā iesākums var būt lodes centrā: $c = 0$. Lodes nolīdzinājums:

$$r^2 = a^2, \text{ vai arī: } r^2 - a^2 = 0,$$

šinī gadījumā $k = -a^2$.

Uzdevums.

Slīpleņķīgās asīs (asu leņķi ω_1, ω_2, ω_3) dots lodes centrs $C(x_0, y_0, z_0)$ un radiuss a. Uzrakstīt tās nolīdzinājumu.

Asu virzienu vektori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ $(e_1 = e_2 = e_3 = 1)$: $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos \omega_3$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \cos \omega_2$, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \cos \omega_1$. Centra vietas vektors $\mathbf{c} = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3$, mainīga punkta vietas vektors $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$. Lodes nolīdzinājums:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 = a^2,$$
$$[(x - x_0)\,\mathbf{e}_1 + (y - y_0)\,\mathbf{e}_2 + (z - z_0)\,\mathbf{e}_3]^2 = a^2.$$

Paceļot skālāri kvadrātā:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + 2(x - x_0)(y - y_0)\cos\omega_3 + 2(x - x_0)$$
$$(z - z_0)\cos\omega_2 + 2(y - y_0)(z - z_0)\cos\omega_1 = a^2.$$

2. Lode un taisne. Uzdota lode ar nolīdzinājumu

$$F(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} + k = 0$$

un taisne $\mathbf{r} = \mathbf{d} + t\mathbf{b}$. Atrast punktus, kur taisne sastop virsmu.

Krustpunktos lodei un taisnei ir kopīgs radiuss vektors:

$$(\mathbf{d} + t\mathbf{b})^2 - 2(\mathbf{d} + t\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + k = 0,$$
$$\mathbf{d}^2 + 2t\,\mathbf{d} \cdot \mathbf{b} + t^2\mathbf{b}^2 - 2\,\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} - 2t\,\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + k = 0;$$

$\mathbf{b}$ ir vienības vektors, $b^2 = 1$:

$$t^2 + 2(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,t + \mathbf{d}^2 - 2\,\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} + k = 0,$$
$$t^2 + 2\,\mathbf{b} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c})\,t + F(d) = 0 \tag{1}$$

No tā seko divi parametra vērtības t_1 un t_2, kuŗas var būt: 1) reālas dažādas, kad taisne tiešām iet cauri lodei divi dažādos punktos, 2) reālas vienādas, kad taisne pieskaŗas lodei (sastop lodi divi kopā saplūdušos punktos), un 3) nereālas dažādas, kad taisne lodi nemaz nesastop. Kuŗš no šiem gadījumiem ir spēkā, to izšķiŗ kvadrātnolīdzinājuma (1) diskriminants:

$$\delta = \{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c})\}^2 - F(\mathbf{d}) \tag{2}$$

Ja

$\delta > 0$ 2 dažādi reāli punkti,
$\delta = 0$ punkti kopā,
$\delta < 0$ punkti nereāli.

No (1) seko:

$$t = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) \pm \sqrt{\delta} \text{ (divi vērtības } t_1 \text{ un } t_2).$$

Neatkarīgi no tā, vai t_1 un t_2 ir reāli vai nereāli, to reizinājums

$$t_1 \cdot t_2 = F(d) = \mathbf{d}^2 - 2\,\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} + k \tag{3}$$

t_1 un t_2 apzīmē, cik reizes jāņem vienības vektors **b**, lai no punkta $D(\mathbf{d})$ nokļūtu uz lodes virsmas, tātad:

$$t_1 = \overline{DP}_1, \quad t_2 = \overline{DP}_2,$$

(gaŗumi no D līdz lodei, pozitīvi **b** virzienā). Tātad:

$$\overline{DP}_1 \cdot \overline{DP}_2 = F(d). \tag{4}$$

Izteiksme $F(d)$ nav atkarīga no **b**, sk. (3). Tā paliek tāda pati, ja maināim **b** virzienu. Mainīsim virzienu pamazītiņām, liekot punktiem P_1 un P_2 tuvoties. Gala stāvoklī $\overline{DP}_1 = \overline{DP}_2 = DP$ (pieskares gaŗums). Tad

$$F(d) = \overline{DP}^2 = \text{pieskares gaŗuma kvadrāts.}$$

3. **Pieskaŗu plakne.** Uzdots ar vektoru **d** punkts D uz lodes virsmas un lodes nolīdzinājums:

$$F(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{r}^2 - 2\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} + k = 0. \tag{1}$$

Vilkt plakni, kas uzdotā punktā pieskaŗas lodei.

Tā kā punkts D ir uz lodes, tā vietas vektors **d** der lodes nolīdzinājumā:

$$F(\mathbf{d}) \equiv \mathbf{d}^2 - 2\,\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} + k = 0.$$

Caur D velkam taisni virzienā $\mathbf{b}\,(b = 1)$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{d} + t\,\mathbf{b},$$

un meklējam tās krustpunktus ar lodi:

$$(\mathbf{d} + t\,\mathbf{b})^2 - 2\,(\mathbf{d} + t\,\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + k = 0,$$
$$t^2 + 2\,\mathbf{b} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c})\,t + \mathbf{d}^2 - 2\,\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} + k = 0,$$

vai arī, ievērojot to, ka konstantais loceklis $F(d) = 0$:

$$t^2 + 2\,\mathbf{b} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c})\,t = 0.$$

No tā seko:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = -2\,\mathbf{b} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}).$$

t_1 atbilst punktam D, t_2 — punktam D', tie ir sekantes garumi no punkta līdz lodei. Bet tā kā punkts izvēlēts uz lodes, viens atstatums neizbēgami ir nulle. Mēs gribam, lai DD' būtu pieskare, tātad, arī otrai saknei jāizzūd, punktiem D un D' jāsaiet kopā, jābūt $t_2 = 0$, tātad:

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) = 0 \tag{2}$$

kas izteic to, ka pieskares virziens $\mathbf{b}$ ir statenisks pret radiusu $\overrightarrow{CD} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$. Ja vienības vektors $\mathbf{b}$ šo noteikumu izpilda, nolīdzinājums

$$\mathbf{r} = \mathbf{d} + t\mathbf{b} \tag{3}$$

parametriem t un $\mathbf{b}$ mainoties, izteic visas pieskares punktā D, t. i. pieskaru plakni.

Lai atbrīvotos no parametriem, pareizinām iepriekšējo nolīdzinājumu skālāri ar $\mathbf{d} - \mathbf{c}$, seko:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) + t\mathbf{b} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}),$$

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) \tag{4}$$

Nolīdzinājums izteic plakni, kas stateniska pret vektoru $\mathbf{d} - \mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$ un iet caur punktu $D(\overrightarrow{OD} = \mathbf{d})$. Patiešām, ieliekot nolīdzinājumā $\mathbf{r}$ vietā $\mathbf{d}$, dabūjam identitāti, tātad, D pieder plaknei.

Tātad:

Ja C ir lodes centrs ($\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$) un D ir kāds tās punkts ($\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$), pieskaru plaknei punktā D ir nolīdzinājums

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) \tag{4}$$

Uzdevums I.

Uzdota lode $F(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} + k = 0$ un plakne $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = q$. Kādam noteikumam jābūt izpildītam, lai plakne pieskartos lodei?

Noteikums: atstatumam no lodes centra līdz plaknei lieluma ziņā jābūt vienādam ar lodes radiusu.

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} = \frac{\mathbf{n}q}{nn}$$

kur CM un ON ir stateņi līdz plaknei; tātad:

$$\mathbf{c} + x\frac{\mathbf{n}}{n} + \overrightarrow{MN} = \frac{q}{n^2}\mathbf{n}.$$

Tā kā $\overrightarrow{MN} \perp \mathbf{n}$, tad $\overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{n} = 0$, tāpēc iepriekšējo nolīdzinājumu reizinām skālāri ar $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} + \frac{x}{n}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \overrightarrow{MN} \cdot \mathbf{n} = \frac{q}{n^2}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n},$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} + nx = q, \text{ tātad } x = \frac{q - \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}}{n}.$$

Jābūt

$$\frac{q - \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}}{n} = \pm a, \text{ (}a\text{ ir radiuss),}$$

$$\left(\frac{q - \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}}{n}\right)^2 = a^2 = c^2 - k \tag{5}$$

Uzdevums II:

Uzdotas divi lodes:

$$\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} + k = 0,$$
$$\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}_1 + k_1 = 0,$$

kad tās šķeļ viena otru stateniski?

Savienojot kādu abām lodēm kopīgu punktu A ar centriem C un C_1, dabūjam taisnleņķīgu trijstūri, kam katetes ir radiusi a un a_1:

$$\overline{CC_1}^2 = a^2 + a_1^2 = (\overrightarrow{CC_1})^2,$$
$$(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c})^2 = a^2 + a_1^2.$$

Paceļam skālāri kvadrātā un ievērojam to, ka

$$k = c^2 - a^2, \; k_1 = c_1^2 - a_1^2;$$

tad seko statenības noteikums:

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c} = \frac{k + k_1}{2} \tag{6}$$

4. Polārā plakne. Uz lodes, kas uzdota ar nolīdzinājumu

$$\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} + k = 0,$$

ņemsim punktu $D(\overrightarrow{OD} = \mathbf{d})$. Tātad

$$\mathbf{d}^2 - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} + k = 0 \tag{1}$$

Caur punktu D vilksim pieskaru plakni; tā ir stateniska pret $\overrightarrow{CD} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) \tag{2}$$

Attiecīgi izvēlot punktu D, var sasniegt to, ka pieskaru plakne iet caur $H(\overrightarrow{OH} = \mathbf{h})$, punkta vektors $\mathbf{h}$ tad der nolīdzinājumā (2):

$$\mathbf{h} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) \tag{3}$$

No (1) seko, ka

$$\mathbf{d} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} - k,$$

tātad

$$\mathbf{h} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{c}) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} - k.$$

Pārkārtojot:

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{h} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} - k,$$
$$\mathbf{d} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{c}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{c} - k\,. \tag{4}$$

Visi pieskaršanās punktu vietas vektori $\mathbf{d}$ atbilst šim nolīdzinājumam:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{c}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{c} - k \tag{5}$$

kurš izteic plakni. Visi pieskaršanās punkti ir šinī plaknē, kuru sauc par polāro plakni, kas atbilst punktam H, pēdējo sauc par tās polu. No (5) redzams, ka polārā plakne ir stateniska pret taisni, kas savieno polu ar lodes centru.

Ja vietas vektoru iesākumu novieto polā, seko ($\mathbf{h}=0$) no (5) polārās plaknes nolīdzinājums:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}=k \qquad .\ (6)$$

Uzdevums.

Uzdota lodes virsma $\mathbf{r}^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{k}=0$ un iesākuma punkta polārā plakne $\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}=k$. Pierādīt, ka caur iesākuma punktu vilktu taisni lodes virsma un polārā plakne sadala harmoniski.

Apzīmēsim iesākuma (references) punktu ar O; A, B un P lai ir punkti, kur virzienā $\mathbf{b}$ caur O vilkta taisne sastop lodi un polāro plakni.

Jāpierāda, ka

$$\frac{OA}{AP}\,\frac{OB}{BP}=-1, \text{ vai } \frac{AP}{OA}=-\frac{BP}{OB}. \qquad (1)$$

Ja taisne uzdota ar vienības vektoru $\mathbf{b}$, tad $\overrightarrow{OP}=t_1\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OA}=t_2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OB}=t_3\mathbf{b}$; tātad:

$$\overline{OP}=t_1,\quad \overline{OA}=t_2,\quad \overline{OB}=t_3. \qquad (2)$$

No tā seko:

$$\left.\begin{aligned}\overline{AP}&=\overline{OP}-\overline{OA}=t_1-t_2,\\ \overline{BP}&=\overline{OP}-\overline{OB}=t_1-t_3.\end{aligned}\right\} \qquad .\ (3)$$

Vērtības (2) un (3) ievietojam (1):

$$\frac{t_1-t_2}{t_2}=-\frac{t_1-t_3}{t_3},$$

no tā seko

$$\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{2}{t_1} \qquad .\ (4)$$

Tas jāpierāda.

Lai atrastu parametru t_1, taisnes nolīdzinājums $\mathbf{r}=t\mathbf{b}$ jāatrisina kopā ar polārplaknes nolīdzinājumu $\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}=k$:

$$t_1\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=k,$$

tātad:

$$t_1=\frac{k}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}} \qquad .\ (5)$$

Lai atrastu t_2 un t_3, taisnes nolīdzinājums $\mathbf{r}=t\mathbf{b}$ jāatrisina kopā ar lodes nolīdzinājumu $\mathbf{r}^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}+k=0$:

$$(t\mathbf{b})^2-2t\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+k=0.$$

Jāievēro, ka $b=1$:

$$t^2-2t\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+k=0.$$

No tā redzams, ka

$$t_2\cdot t_3=k,\quad t_2+t_3=2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}. \qquad .\ (6)$$

No 5 un 6 seko:

$$\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}=\frac{t_2+t_3}{t_2\cdot t_3}=\frac{2\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{k}=\frac{2}{t_1},$$

ko vajadzēja pierādīt.

5. Diametrālā plakne. Apskatām taisni $\mathbf{r} = \mathbf{d} + t\mathbf{b}$ kopā ar lodes virsmu: $\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r} \cdot c + k = 0$.

Meklēsim parametra vērtības krustpunktos:

$$(\mathbf{d} + t\mathbf{b})^2 - 2(\mathbf{d} + t\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + k = 0.$$

Tā kā $b = 1$, tad

$$t^2 - 2(\mathbf{d} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, t + (\mathbf{d}^2 - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} + k) = 0.$$

Abas t vērtības ir vienāda lieluma, bet atšķiŗas ar savām zīmēm, ja iepriekšējā nolīdzinājumā izzūd vidējais loceklis, t. i. ja

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0. \tag{1}$$

Šinī gadījumā punkts $D(\overrightarrow{OD} = \mathbf{d})$ dala uz pusēm lodes chordu. Jo, tā kā $b = 1$, tad:

$$t_1 = \overline{DP}_1, \quad t_2 = \overline{DP}_2, \quad t_1 + t_2 = \overline{DP}_1 + \overline{DP}_2 = 0, \quad \overline{DP}_1 = -\overline{DP}_2.$$

Tātad, punkti D, kuŗu vietas vektori $\mathbf{d}$ izpilda noteikumu (1), caur tiem (virzienā $\mathbf{b}$) vilktu chordu dala uz pusēm. Visu šo punktu ģeometriskā vieta ir plakne, kuŗas nolīdzinājums seko no (1), liekot tur $\mathbf{d}$ vietā mainīgu vektoru $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0 \tag{2}$$

(diametrālā plakne).

No (2) redzams, ka diametrālā plakne ir stateniska pret $\mathbf{b}$, tātad pret chordu virzienu. Tālāk (2) pārvēršas identitātē, ja pieņem $\mathbf{r} = \mathbf{c}$, t. i. ja diametrālā plakne ir vilkta caur centru.

V.

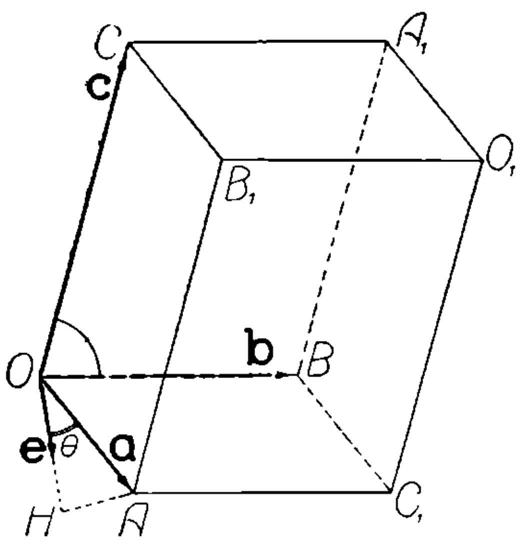
Trīs un vairāk vektoru reizinājumi.

1. Trīskārtīgais jauktais vektoru reizinājums $\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$.

Tāda izteiksme apzīmē, ka papriekš jāpareizina vektoriāli **b** ar **c**; iznākums ir kāds vektors, kas vēlāk jāpareizina skālāri ar **a**. Darbība, kas uzrakstīta iekavu iekšā, jāizdara papriekš, bet iekavas nav nepieciešamas izteiksmes sapratšanai. Ja, atmetot iekavas, raksta $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, neizceļas darbību izpratnē neskaidrība. Mēģinot uztvert uzrakstīto, kā $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, tūliņ redzam, ka tāda uztvere neiespējama, jo pareizināt vektoru **c** vektoriāli var tikai ar vektoru, bet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ir skālārs.

Jauktais vektoru reizinājums $\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$ ir skaitlis, kurš ģeometriski apzīmē no vektoriem **a**, **b**, **c** konstruēta parallēlepipeda tilpumu, kas ņemts ar + zīmi, ja **a**, **b**, **c** veido labās rokas triedru, bet ar — zīmi, ja — kreisās.

Pieņemsim, ka uzdoti trīs nekoplānāri vektori **a**, **b**, **c**; ja tos konstruē no viena punkta, tie nenovietojas vienā plaknē, bet veido, teiksim, labās rokas triedru.



Att. 25.

Saskaņā ar definīciju $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = bc \sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})\ \mathbf{e}$, kur **e** vienības vektors, kas statenisks pret parallēlepipeda plaknēm OBA_1C un $O_1B_1AC_1$; ja **a**, **b**, **c** veido labās rokas triedru, vektors **e** virzīts uz to pašu pusi no plaknes OBA_1C kā **a**; leņķis starp **a** un **e** šinī gadījumā ir šaurs. Koeficients, kas vektoram **e** ir klāt, $bc \sin(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ = laukumam $OBA_1C = L$:

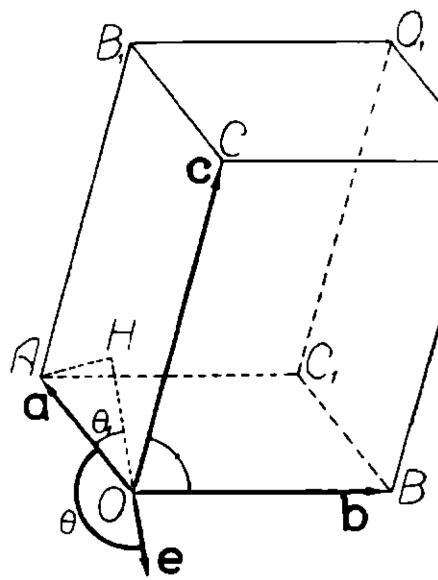
$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = L\mathbf{e}.$$

Šis iznākums ar **a** skālāri jāpareizina:

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = L\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}.$$

Ja kādu vektoru pareizina skālāri ar vienības vektoru, dabū vektora projekciju uz vienības vektora virzienu, tā tad: $\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = a \cos\theta = OH$. Tas nav nekas cits, kā parallēlepipeda augstums, ja pamats ir OBA_1C, bet galīgais iznākums ir parallēlepipeda tilpums T:

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = L \,.\, OH = T. \qquad (1)$$



26. att.

Lai dabūtu kreisās rokas triedru, pietiek pārmainīt viena vektora virzienu pret pretēju. Ņemsim **a** uz pretējo pusi. Tāpat kā iepriekš:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = L\mathbf{e},$$

un ar to skālāri jāpareizina **a**:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = L\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}.$$

Tā kā vektori **a**, **b**, **c** veido kreisās rokas triedru, vektori **a** un **e** ir plaknei OBA_1C pretējās pusēs un veido savā starpā platu leņķi $\theta = \pi - \theta_1$. Tātad, $\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = a \cos\theta = a\cos(\pi - \theta_1) = -a\cos\theta_1 = -\overline{OH}$. Lieluma ziņā tas arī šoreiz ir parallēlepipeda augstums, bet tas ir ņemts ar negātīvu zīmi:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = L \,.\, (-\overline{OH}) = -T \qquad (2)$$

Ja kādā izteiksmē, kas satur burtus a, b, c, izdara burtu apmaiņu, a vietā liekot b, b vietā liekot c, c vietā liekot a, tad to sauc par cs i k l i s k u apmaiņu.

Vektoru trijotnes **a**, **b**, **c**; **b**, **c**, **a**; **c**, **a**, **b** izceļas burtus cikliski apmainot. Tās visas veido vienvārdīgus triedrus, jo pēdējie visi ir vienas tās pašas (labās vai kreisās) rokas. Tas tāpēc, ka vektori neatšķiras ar savu savstarpējo stāvokli triedros, bet tikai ar triedru novietojumu telpā. Attiecīgi pagriežot ikvienu triedru var savietot ar pārējiem.

No tā seko, ka trīskārtīgā jauktā vektoru reizinājuma vērtība nemainās, ja vektorus cikliski apmaina.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \qquad (2)$$

Patiešām, ikviens reizinājums lielumā ir vienāds ar vektoru veidotā parallēlepipeda tilpumu, kas visiem reizinājumiem kopīgs, tāpēc ka visos ir tie paši vektori. Šie tilpumi bez tam jāņem ar vienu to pašu zīmi, jo reizinājumu izteiksmēs vektori apmainās cikliski; vektoru veidotie triedri ir vienvārdīgi, tāpēc tilpumi jāņem ar vienu to pašu zīmi.

Saskaņā ar skālārā reizinājuma īpašībām, tādā reizinājumā drīkst apmainīt savā starpā reizinātājus; augšējie reizinājumi (2) neatšķiras no šādiem:

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \qquad .\ (2')$$

Salīdzinot (2) ar (2'), redzam, ka:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}.\\ \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})&=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}.\\ \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})&=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}.\end{aligned} \qquad (3)$$

Tātad

Trīskārtīgā jauktā vektoru reizinājumā drīkst apmainīt savā starpā punktu un krustiņu (skālāro reizināšanu pret vektoriālo), atstājot savās vietās vektoru nosaukumus.

Divi jauktie reizinājumi, kas atšķiras ar vektoru ciklisko kārtību, ir pretēji vienādi, piemēram:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}),$$

tāpēc ka saskaņā ar augšā konstatētām jauktā reizinājuma īpašībām:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}),$$

ievērojot to, ka $\mathbf{c}\times\mathbf{a}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$.

Saņemot kopā sacīto:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})&=(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=-(\mathbf{c}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b})=\\ =\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})&=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=-(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}=-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=\\ =\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}=-\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})=\varepsilon T,\end{aligned} \qquad (4)$$

kur $\varepsilon=\pm 1$, atkarībā no tā, kādu triedru veido **a**, **b**, **c**.

Šīs vienādības Hevisaids (Heaviside) sauc par parallēlepipeda likumu. Parasts to apzīmēt arī par apmaiņas teōrēmu (Vertauschungssatz).

Vārdos:

Trīskārtīgais jauktais reizinājums nemainās, ja pārmij savā starpā punktu ar krustu, vai apmaina cikliskā kārtībā vektorus, bet tā zīme mainās, ja maina vektoru ciklisko kārtību.

Sākumā mēs minējām, ka iekavas rakstīšana jauktā reizinājumā nav nepieciešama. Tagad zinām, ka darbību apzīmējumus (punktu un krustu) drīkst rakstīt tādā kārtībā, kā vēlas. Noteic vektoru cikliskā kārtība. Ievērojot šīs īpašības, trīskārtīgā jauktā vektoru reizinājuma apzīmēšanai lieto īpašu simbolu, rakstot iekavās vektoru nosaukumus to cikliskā kārtībā. Formulas (4) var pārrakstīt:

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=-[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{b}]=\varepsilon T. \quad \text{(Grassmann)} \ldots\ldots\ (5)$$

Trīs nekoplanāri vektori **a**, **b**, **c** (labās rokas pirkstu sakārtojumā) veido parallēlepipedu, kuŗa tilpums

$$T = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}], . \tag{6}$$

vai arī tetraedru, kuŗa tilpums

$$T_0 = \frac{1}{6}[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]. \tag{7}$$

Vektorus **a**, **b**, **c** var aizvietot ar vienības vektoru vairojumiem: $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_1$, $\mathbf{b} = b\mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = c\mathbf{e}_3$. Tad seko tetraedra tilpums

$$T_0 = \frac{1}{6}\,a\,b\,c\,[\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3] \tag{7'}$$

Trīskārtīgo reizinājumu $[\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3]$ Staudt's sauc par stūŗa sinu (Eckensinus). Apzīmējumu attaisno (7') līdzība ar plaknes trīsstūŗa formulu

$$F = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin C.$$

Uzdevums.

i, **j**, **k** apzīmē vienības vektorus, kas noteic ortogōnālu labās rokas sistēmu. Atrast $[\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}]$, $[\mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}]$.

$$[\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}] = \mathbf{i}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) = \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1;$$

turpretim:

$$(\mathbf{i}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j}) = \mathbf{i}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) = \mathbf{i}\cdot(-\mathbf{i}) = -1.$$

Visas trīskārtīgā jauktā vektoru reizinājuma īpašības var pierādīt analitiski, izteicot vektorus to komponentēs.

Pieņemsim, attiecībā pret labās rokas sistēmu **i**, **j**, **k**, ka

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Vektoriālais reizinājums:

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

tātad:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Tā ir pazīstama formula parallēlepipeda tilpuma aprēķināšanai, kam viens stūris ir koordinātu iesākumā.

Parallēlepipeda likums izteic to faktu, ka determinanta vērtība nemainās, ja tā rindas apmaina cikliskā kārtībā, bet atkāpšanās no cikliskās kārtības līdzvērtīga zīmes pārmaiņai. Izejot no šīm īpašībām, var pierādīt visas formulas (4).

Pierādīsim ar determinantu palīdzību, ka drīkst apmainīt savā starpā punktu ar krustu. Jāatrod $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = ?$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix},$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} \cdot (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}).$$

Pietiek pareizināt trešo rindu:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (8')$$

Salīdzinot (8) ar (8′) redzam, ka

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c},$$

kas bij jāpierāda.

Lietājot Grasmaņa simbolu, raksta:

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

Teōrēma.

Nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam, lai trīs vektori **a**, **b**, **c** būtu koplanāri, ir tas, ka to trīskārtīgais jauktais reizinājums $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 0$.

Noteikums ir nepieciešams: nevar gadīties tā, ka vektori ir koplanāri, bet to reizinājums $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] \neq 0$. Ja uzdots, ka trīs vektori **a**, **b**, **c** ir koplanāri, no tā seko, ka katrā ziņā $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 0$.

Apskatīsim papriekš vispārīgo gadījumu: neviens no uzdotiem vektoriem nav nulle, nav arī starp tiem kolīneāru. Dots, ka vektori koplanāri, t. i. paralleli kopīgai plaknei, tā ka, konstruējot tos no kopīga iesākuma, tie novietojas kopīgā plaknē. Parallēlepipeds, ko tie veido, šinī gadījumā izvēršas plakanā figūrā, kuŗas tilpums ir nulle, tā tad $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 0$.

Citādi: uzdots, ka **a**, **b**, **c** — koplanāri, jāpierāda, ka $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 0$. Apzīmējot vektoriālo reizinājumu $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{v}$, var rakstīt:

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}.$$

Vektors $\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ statenisks pret plakni, ko noteic vektori **b** un **c**, tā tad, statenisks pret ikvienu vektoru, kas ir šinī plaknē, arī pret **a**. Tā tad $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$, bet tādā gadījumā $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$, t. i. $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Īpašos gadījumos vektori var būt koplanāri tā, ka viens no tiem ir nulle, vai arī neviens nav nulle, bet kādi divi ir kolīneāri. Pierādījums ar ģeometriskās interpretācijas palīdzību arī šinīs gadījumos paliek spēkā. Otrs pierādījums top vienkāršāks. Ja $\mathbf{a} = 0$, rakstām $[\mathbf{a\,b\,c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, tāpēc ka skālārais reizinājums ir nulle, ja viens faktors ir nulle. Ja **a** ir kolīnears **b**, rakstām: $[\mathbf{a\,b\,c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 \cdot \mathbf{c} = 0$; jo kolīneāru vektoru vektoriālais reizinājums ir nulle.

Noteikums ir pietiekams: ja par trīs vektoriem **a**, **b**, **c** zināms, ka $[\mathbf{a\,b\,c}] = 0$, no tā seko, ka tie ir koplanāri. Ja kāds no tiem ir nulle, vektori ir koplanāri; tāpat tas skaidrs, ja divi vektori kolīneāri. Atliek vispārīgais gadījums: trīs vektori **a**, **b**, **c** kas neviens nav nulle, kā arī neviens pāris nav kolīneāri, ir tādi, ka $[\mathbf{a\,b\,c}] = 0$; pierādīt, ka tie ir koplanāri. Rakstām:

$$[\mathbf{a\,b\,c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{c}.$$

Tā kā vektori **a**, **b** nav ne nulles, ne arī kolīneāri, to vektoriālais reizinājums $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{v}\ (\mathbf{v} \neq 0)$; tāpat $\mathbf{c} \neq 0$. Divu neizzūdošu vektoru skālārais reizinājums var būt nulle tikai tā un ne citādi, ka tie ir stateniski viens pret otru. No tā, ka

$$[\mathbf{a\,b\,c}] = \mathbf{v} \cdot \mathbf{c} = 0,$$

seko, ka $\mathbf{v} \perp \mathbf{c}$. Bez tam $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, tātad $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{b}$. Kā redzam, **v** statenisks reizē pret **a**, **b**, **c**, t. i. pēdējie vektori ir koplanāri.

Secinājums I.

Ja trīskārtīgā jauktā vektoru reizinājumā divi faktori ir vienādi, reizinājums ir vienāds ar nulli.

Piemēram:

$$[\mathbf{a\,b\,b}] = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{b}] = 0.$$

Citādi:

$$[\mathbf{a\,b\,b}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Secinājums II.

Ja trīskārtīgā jauktā vektoru reizinājumā faktoriem ir skālāri koeficienti, tos var rakstīt reizinājumam priekšā.

Piemēram:

$$[(m\mathbf{a})\,(n\mathbf{b})\,(p\mathbf{c})] = m\mathbf{a} \cdot (n\mathbf{b} \times p\mathbf{c}) = mnp\{a \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\} = mnp\,[\mathbf{a\,b\,c}].$$

Cits piemērs:

$$[\mathbf{a\,b\,c}] = abc\left[\frac{\mathbf{a}}{a}\,\frac{\mathbf{b}}{b}\,\frac{\mathbf{c}}{c}\right] = abc\,[\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3].$$

Vispārīgāk, pieņemsim, ka $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ir trīs nekoplanāri vienības vektori. Ikvienu vektoru var salikt komponentēs šinīs trīs virzienos. Pieņemsim, ka

$$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{b} = b_1\,\mathbf{e}_1 + b_2\,\mathbf{e}_2 + b_3\,\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{c} = c_1\,\mathbf{e}_1 + c_2\,\mathbf{e}_2 + c_3\,\mathbf{e}_3.$$

Vektoriālais reizinājums:

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=(b_2c_3-b_3c_2)(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)-(b_1c_3-b_3c_1)(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)+$$
$$+(b_1c_2-b_2c_1)(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2),$$

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

Tas jāpareizina skālāri ar $\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3$. Ar šo summu jāpareizina skālāri visi elementi determinenta pirmā rindā:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=a_1\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3),$$

ievērojot to, ka trīskārtīgais reizinājums, kam divi faktori ir vienādi, izzūd. Tātad:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=a_1\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3),$$
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)=a_2\mathbf{e}_2\cdot(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1),$$
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)=a_3\mathbf{e}_3\cdot(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2).$$

Trīskārtīgie reizinājumi labā pusē ir vienādi:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3),$$

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}[\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3] \qquad (9')$$

Uzdevums 1.

Zinot, ka

$$\mathbf{d}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c} \qquad (N)$$

atrast x, y, z.

Ja **a**, **b**, **c** ir nekoplanāri vektori, kas veido triedru, ikvienu ceturto var tikai vienā veidā salikt komponentēs pārējo vektoru virzienos. Skaitļi x, y, z ir pilnīgi noteikti, tie derīgi komponentu izteikšanai vektoros **a**, **b**, **c**.

Nolīdzinājumu

$$\mathbf{d}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$$

pareizināsim skālāri ar $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$:

$$\mathbf{d}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=x\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+y\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+z\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),$$
$$[\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]=x\,[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+y\,[\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+z\,[\mathbf{c}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}],$$

$$x=\frac{[\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} \qquad (10)$$

Līdzīgā kārtā, pareizinot uzdoto nolīdzinājumu skālāri ar $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ un $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

$$y=\frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{d}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}$$
$$z=\frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}]} \qquad (10')$$

Formulas varēja izcelties tikai ar noteikumu, ka $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\neq 0$, t. i. ka vektori **a**, **b**, **c** nav koplanāri. Ja šis noteikums nav izpildīts, nolīdzinājums (N), vispārīgi, nav iespējams.

Ja [a, b, c] = 0, vektori a, b, c ir vai vienā plaknē, vai uz vienas taisnes, vai visi ir nulles. Vajadzīgs, lai arī vektors d būtu tai pašā plaknē, uz tās pašas taisnes, vai 0, un tādā gadījumā atrisinājumu ir bezgala daudz.

Ievedīsim vēl formulās vektoru komponentes trīs ortogōnālos virzienos, kas veido labās rokas triedru i, j, k:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{c} &= c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{d} &= d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

No (N) seko:

$$d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k} = x\,(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) + \\ + y\,(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + z\,(c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}),$$

tātad:

$$\begin{aligned} xa_1 + yb_1 + zc_1 &= d_1, \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 &= d_2, \\ xa_3 + yb_3 + zc_3 &= d_3. \end{aligned}$$

Tātad:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z =$$

(Krāmera formulas).

Šīs formulas mēs uzrakstījām, eliminējot nezināmos lineārā algebriskā nolīdzinājumu sistēmā. Var parādīt, ka tās seko tieši no (10) un (10′).

$$x = \frac{[\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} = ?$$

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$[\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = \mathbf{d}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{c}] = (\mathrm{d}_1\mathbf{i} + \mathrm{d}_2\mathbf{j} + \mathrm{d}_3\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Tātad:

$$x = \frac{[\mathbf{d}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ un t. t.}$$

Secinājums:

4 nekoplanārus vektorus saista identiska sakarība:

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\,\mathbf{d} - [\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]\,\mathbf{a} + [\mathbf{c}\,\mathbf{d}\,\mathbf{a}]\,\mathbf{b} - [\mathbf{d}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]\,\mathbf{c} = 0 \ldots\ldots \quad (11)$$

To var pārrakstīt šādi:

$$\mathbf{d} = \frac{[\mathbf{d\,b\,c}]}{[\mathbf{a\,b\,c}]}\mathbf{a} + \frac{[\mathbf{a\,d\,c}]}{[\mathbf{a\,b\,c}]}\mathbf{b} + \frac{[\mathbf{a\,b\,d}]}{[\mathbf{a\,b\,c}]}\mathbf{c} \tag{11'}$$

Uzdevums 2:

Pierādīt, ka

$$[\mathbf{a\,b\,c}]^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix} \tag{12}$$

(Grāma determinants).

Kā palīglīdzekli ņemam vektoru salikumu komponentēs ortogōnālās asīs:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Saskaņā ar agrāk pierādīto:

$$[\mathbf{a\,b\,c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Paceļot kvadrātā:

$$[\mathbf{a\,b\,c}]^2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix}.$$

Grāma determinantu dabū uzdevumā: **atrast punktu, kas kopīgs 3 plaknēm:**

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_1 = q_1, \quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_2 = q_2, \quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_3 = q_3,$$

kur $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ — nekoplanāri vektori un q_1, q_2, q_3 — trīs uzdoti skalāri.

Jāatrod vektors $\mathbf{r}$, kas derīgs visos trijos nolīdzinājumos.

To var salikt komponentēs vektoru $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ virzienos:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{n}_1 + y\mathbf{n}_2 + z\mathbf{n}_3.$$

Šo nolīdzinājumu reizinām skalāri ar $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$:

$$x\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_1 + y\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_1 + z\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_1 = q_1,$$
$$x\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 + y\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_2 + z\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}_2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_2 = q_2,$$
$$x\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_3 + y\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_3 + z\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}_3 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_3 = q_3.$$

No šejienes seko eliminējot no 4 beidzamiem nolīdzinājumiem x, y, z:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3 \\ q_1 & \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_3 \\ q_2 & \mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_3 \\ q_3 & \mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_3\cdot\mathbf{n}_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots\ldots \tag{13}$$

2. Trīs vektoru vektoriālais reizinājums.

Apskatīsim reizinājumu $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Tas nozīmē, jāatrod $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{v}_1$ un ar to vektoriāli jāpareizina $\mathbf{a}$. Iznākumā dabūjam kādu vektoru $\mathbf{v}_2=\mathbf{a}\times\mathbf{v}_1=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Uz vektoriālā reizinājuma definīcijas pamata:

$$\mathbf{v}_1\perp\mathbf{b},\quad \mathbf{v}_1\perp\mathbf{c},\quad \mathbf{v}_1\perp\mathbf{v}_2,$$

tātad vektori $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2$ ir koplanāri, jo tie ir stateniski pret vienu to pašu vektoru $\mathbf{v}_1$. Pieņemsim, ka $\mathbf{b}$ un $\mathbf{c}$ nav kolineāri; tad vektoru $\mathbf{v}_2$ iespējams salikt komponentēs vektoru $\mathbf{b}$ un $\mathbf{c}$ virzienos:

$$\mathbf{v}_2=x\mathbf{b}+y\mathbf{c},$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=x\mathbf{b}+y\mathbf{c}, \tag{1}$$

kur x, y — kādi skālāri.

Līdzīgā kārtā var parādīt, ka:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=u\mathbf{a}+v\mathbf{b}, \tag{2}$$

kur u, v — kādi skālāri.

Salīdzinot (1) ar (2), redzam, ka, vispārīgi, to labās puses (tātad arī kreisās) nav vienādas:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\neq(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c},$$

tātad iekavas šinī gadījumā nedrīkst atmest vai pārvietot.

Uzdevums.

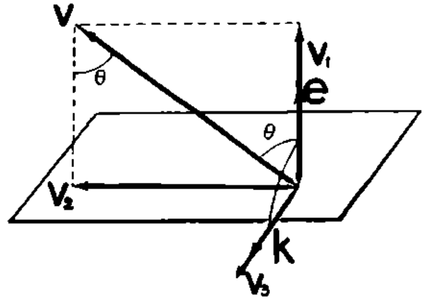
Atrast vektora $\mathbf{v}$ komponentes parallēli un stateniski virzienam, kas uzdots ar vienības vektoru $\mathbf{e}$.

Nosauksim parallēlo komponenti ar $\mathbf{v}_1$, statenisko — ar $\mathbf{v}_2$, ($\mathbf{v}_1\parallel\mathbf{e}$, $\mathbf{v}_2\perp\mathbf{e}$):

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2.$$

Lai dabūtu vektora parallēlās komponentes algebrisko lielumu, jāreizina vektors skālāri ar virziena vienības vektoru:

$$v_1=\mathbf{e}\cdot\mathbf{v},\ \text{tā tad:}\ \mathbf{v}_1=(\mathbf{e}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{e} \tag{3}$$



27. att.

Stateniskās komponentes lielums $v_2=v\sin\Theta$. Tāds pats lielums ir vektoram

$$\mathbf{v}_3=\mathbf{e}\times\mathbf{v}=v\sin\Theta\ \mathbf{k}=v_2\mathbf{k},$$

($k=1$), bet tas ir statenisks pret $\mathbf{v}_2$. Pareizināsim vektoru $\mathbf{v}_3$ vektoriāli ar $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{v}_3\times\mathbf{e}=(\mathbf{e}\times\mathbf{v})\times\mathbf{e}=v_2\mathbf{k}\times\mathbf{e}=\mathbf{v}_2.$$

Stateniskā komponente

$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{e}. \tag{4}$$

Tātad:

Saliekot vektoru v komponentēs parallēli un stateniski virzienam $\mathbf{e}(e = 1)$, dabū:

parallēlo komponenti $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}$, (3)

statenisko „ $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{e}$. (4)

To summa ir uzdotais vektors:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{e} + (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{e}, \tag{5}$$

jeb:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e})\,\mathbf{e} - (\mathbf{v} \times \mathbf{e}) \times \mathbf{e}. \tag{5'}$$

Vektoru **b** saliksim komponentēs parallēli un stateniski virzienam $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{a}$.

Saskaņā ar (3) un (4):

$$\mathbf{b}_1 = \left(\frac{\mathbf{a}}{a} \cdot \mathbf{b}\right)\frac{\mathbf{a}}{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\,\mathbf{a},$$

$$\mathbf{b}_2 = \left(\frac{\mathbf{a}}{a} \times \mathbf{b}\right) \times \frac{\mathbf{a}}{a} = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

Saskaitot:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\,\mathbf{a} + \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}},$$

tātad:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b}. \tag{6}$$

Līdzīgā kārtā, ja vektoru **a** saliekam komponentēs parallēli un stateniski virzienam $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{b}}{b}$:

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a}. \tag{6'}$$

Šī formula seko no (6), ja tur apmaina **a** pret **b**.

Vispārīgā formula trīs vektoru vektoriālā reizinājuma izvirzīšanai:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}. \tag{7}$$

Pierādījums I.

Pieņemsim, ka vektori **b** un **c** nav kolineāri. Tādā gadījumā vektoru trijotne **b**, **c** un $[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$ ir nekoplanāri, kas veido triedru. Ikvienu vektoru, arī **a**, var salikt komponentēs trīs nekoplanāru vektoru virzienos:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{b} + y\mathbf{c} + z\,[\mathbf{b} \times \mathbf{c}], \tag{8}$$

kur x, y, z — skālāri.

Nolīdzinājumu (8) pareizinām vektoriāli ar $[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$:

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = x\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] + y\mathbf{c} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] + z\,[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}],$$

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = x\{\mathbf{b} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\} - y\{\mathbf{c} \times [\mathbf{c} \times \mathbf{b}]\} \; . \; . \; . \; . \; . \tag{9}$$

Figūrālo iekavu izteikšanai ir formula (6), no kuŗas izriet:

$$\mathbf{b}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c},$$
$$\mathbf{c}\times[\mathbf{c}\times\mathbf{b}]=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b},$$

tātad:

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]=x\{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}\}-y\{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}\},$$
$$\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]=x\{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+y(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})\}\,\mathbf{b}-\{x(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})+y(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\}\,\mathbf{c}. \qquad (10)$$

Lai atrastu x un y, pareizinām (8) skālāri ar $\mathbf{b}$ un $\mathbf{c}$. Seko, ievērojot to, ka $[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]\cdot\mathbf{b}=[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]\cdot\mathbf{c}=0$:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=x(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})+y(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}),$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=x(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+y(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}).$$

Ievietojot formulā (10):

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} \qquad (7)$$

Pierādījums II.

Mēs jau noskaidrojām, ka $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ir vektors, kas koplanārs ar $\mathbf{b}$ un $\mathbf{c}$, tā ka

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=m\mathbf{b}-n\mathbf{c}.$$

Tas ir statenisks pret $\mathbf{a}$, tātad skālārais reizinājums ar $\mathbf{a}$ ir nulle:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=m\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-n\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}=0.$$

Kreisā pusē ir trīskārtīgais jauktais reizinājums, kam faktori vienādi:

$$\frac{m}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}=\frac{n}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}=k,$$

tātad:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=k\{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}\}. \qquad (11)$$

Atliek vēl pierādīt, ka $k=1$.

Pareizinām (11) skālāri ar $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}=k\{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\}. \qquad (12)$$

Kreisā pusē drīkst apmainīt savā starpā punktu un pirmo krustiņu:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{b}=-\mathbf{a}\cdot\{\mathbf{b}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\}=-\mathbf{a}\cdot\{(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}\}.$$

Vai arī:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{b}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}). \qquad (12')$$

Formulās (12) un (12′) kreisās puses ir vienādas, bet labās atšķiŗas ar faktoru k. Tātad $k=1$, ko vajadzēja pierādīt.

Pierādījums III.

Izteicam vektorus $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ komponentēs ortogonālās asīs, izvēlot $\mathbf{b}$ virzienu par $\mathbf{i}$ un novietojot $\mathbf{j}$ vektoru $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ plaknē. Trešo vienības vektoru $\mathbf{k}$ konstruējam tā, lai $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ būtu direktais (labās rokas) triedrs.

Uzdotie vektori:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b\mathbf{i},$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}.$$

To reizinājumi:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = b\mathbf{i} \times (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}) = bc_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} = bc_2\mathbf{k};$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times bc_2\mathbf{k} = a_1bc_2\mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_2bc_2\mathbf{j} \times \mathbf{k} =$$
$$= -a_1bc_2\mathbf{j} + a_2bc_2\mathbf{i}.$$

No otras puses:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c} = (a_1c_1 + a_2c_2)\,b\mathbf{i} - a_1b\,(c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}) = a_2bc_2\mathbf{i} - a_1bc_2\mathbf{j}.$$

Salīdzinot, redzams:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

Pierādījums IV.

Izvēlam patvaļīgu labās rokas triedru $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Jāatrod $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{v}_0$, kur $\mathbf{v}_0 = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Vektoriālais reizinājums:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \times \mathbf{i} & \mathbf{a} \times \mathbf{j} & \mathbf{a} \times \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Vektora $\mathbf{v}$ komponentes lielums vienības vektora $\mathbf{i}\,(i = 1)$ virzienā ir vienāds ar abu skālāro reizinājumu:

$$v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \times \mathbf{i} & \mathbf{a} \times \mathbf{j} & \mathbf{a} \times \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i};$$

Šeit:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) = 0,$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{k},$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}.$$

Tātad:

$$v_x = \begin{vmatrix} 0 & -\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} \\ b_1 & b_2 & \mathrm{b}_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$-\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = -(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = -a_3,$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = a_2.$$

Meklējamās komponentes lielums

$$v_x = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_3 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) + a_1 b_1 c_1 - a_1 b_1 c_1 =$$
$$= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) c_1 .$$

Tātad:

$$v_x = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) b_1 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) c_1 ,$$

un tāpat:

$$v_y = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) b_2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) c_2 ,$$
$$v_z = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) b_3 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) c_3 .$$

Pareizinot nolīdzinājumus pēc kārtas ar i, j, k un saskaitot, dabūjam:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}),$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{c}.$$

Pierādījums V.

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k},$$
$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}.$$

Veidojam vajadzīgos vektoriālos reizinājumus:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$
$$= (b_2 c_3 - b_3 c_2) \mathbf{i} + (b_3 c_1 - b_1 c_3) \mathbf{j} + (b_1 c_2 - b_2 c_1) \mathbf{k}.$$

Tālāk, uz tā paša likuma pamata:

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 c_3 - b_3 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix} =$$
$$= \mathbf{i} \, [a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)] +$$
$$+ \mathbf{j} \, [a_3 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1)] +$$
$$+ \mathbf{k} \, [a_1 (b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2 (b_2 c_3 - b_3 c_2)].$$

No otras puses:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)(b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) -$$
$$- (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)(c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}) =$$
$$= \mathbf{i} \, [(a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1] +$$
$$+ \mathbf{j} \, [(a_1 c_1 + a_3 c_3) b_2 - (a_1 b_1 + a_3 b_3) c_2] +$$
$$+ \mathbf{k} \, [(a_1 c_1 + a_2 c_2) b_3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2) c_3].$$

Labās puses ir vienādas, tātad arī kreisās ir vienādas.

No formulas

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

seko

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c} = - \mathbf{c} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{c} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{a}] = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a},$$
$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}.$$

Abi gadījumi pakļaujas kopīgai kārtulai:

Lai pareizinātu trīs vektorus vektoriāli, jāpareizina skalāri malējie vektori; dabūtais skaitlis ir koeficients pie vidējā vektora. Vidējais vektors vienmēr ir stūrainajās iekavās. Tālāk ņem otru vektoru iekavās un pareizina ar pārējo vektoru skalāro reizinājumu; iznākumu atskaita agrāk dabūtam.

Jāievēro:

1) iznākums ir lineāra iekavas vektoru funkcija;
2) koeficienti pie tiem vienmēr ir pārējo vektoru skalārie reizinājumi;
3) skalārie reizinājumi jāņem viens ar $+$, otrs ar $-$;
4) ar $+$ jāņem malējo vektoru skalārais reizinājums.

Uzdevums I.

Pierādīt, ka

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]+\mathbf{b}\times[\mathbf{c}\times\mathbf{a}]+\mathbf{c}\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=0 \qquad (13)$$

Pamatformula:

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

Apmainot burtus cikliski:

$$\mathbf{b}\times[\mathbf{c}\times\mathbf{a}]=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a},$$
$$\mathbf{c}\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}.$$

Saskaitot dabū (13), jo labā puse summa sastāv no locekļiem, kas pārās pretēji vienādi.

Uzdevums II.

Vektoru $\mathbf{u}$ ortogonāli projicē uz slīpleņķīgām asīm Ox, Oy, Oz, kas uzdotas ar vienības vektoriem $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Projekciju lielumu izteic uzdoti skaitļi α, β, γ. Atrast vektoru $\mathbf{u}$.

Pirmais paņēmiens:

Vektora projekcijas lielumu dabū skalāri pareizinot vektoru ar virziena vienības vektoru:

$$\alpha=\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_1,\ \beta=\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_2,\ \gamma=\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3.$$

Jāatrod tādi x, y, z, lai būtu:

$$\mathbf{u}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3. \qquad (14)$$

To reizinām skalāri pēc kārtas ar $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_1=x\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1+z\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1,\\ \beta&=\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_2=x\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2+y\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2,\\ \gamma&=\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_3=x\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3+y\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3+z\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

No (14) un (15) izriet, eliminējot x, y, z:

$$\begin{vmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \alpha & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3\\ \beta & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3\\ \gamma & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3\end{vmatrix}=0. \qquad (16)$$

Tātad:

$$\mathbf{u}=\frac{-1}{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]^2}\begin{vmatrix}0 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \alpha & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3\\ \beta & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3\\ \gamma & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3\end{vmatrix}. \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Otrais paņēmiens.

Meklēto vektoru iedomājamies saliktu komponentēs virzienos, ko noteic

$$\begin{aligned} I &= e_2 \times e_3, &\quad (I \perp \text{pl. } e_2,\ e_3) \\ J &= e_3 \times e_1, &\quad (J \perp \ ,,\ e_3,\ e_1) \\ K &= e_1 \times e_2. &\quad (K \perp \ ,,\ e_1,\ e_2) \end{aligned} \tag{18}$$

I, J, K nav vienības vektori, tie lielumā ir triedra e_1, e_2, e_3 leņķu sini un virzīti stateniski pret tā plaknēm. Veidojam:

$$J \times K = J \times [e_1 \times e_2] = (J \cdot e_2)\, e_1 - (J \cdot e_1)\, e_2;$$

šeit:

$$\begin{aligned} J \cdot e_2 &= [e_3 \times e_1] \cdot e_2 = [e_1\, e_2\, e_3] = \omega, \\ J \cdot e_1 &= [e_3 \times e_1] \cdot e_1 = [e_3\, e_1\, e_1] = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

tātad:

$$\left.\begin{aligned} J \times K &= \omega\, e_1, \\ K \times I &= \omega\, e_2, \\ I \times J &= \omega\, e_3. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ja e_1, e_2, e_3 ir direktais triedrs, $[e_1, e_2, e_3] = \omega > 0$, tad veidotie vektori ir kolineāri ar e_1, e_2, e_3. Vēl atrodam:

$$I \cdot [J \times K] = e_2 \times e_3 \cdot \omega\, e_1 = \omega^2,$$

$$[I\, J\, K] = \omega^2. \tag{21}$$

Jāatrod tādi X, Y, Z, lai būtu:

$$u = XI + YJ + ZK.$$

To pareizinām skalāri ar $(J \times K)$:

$$u \cdot [J \times K] = XI \cdot [J \times K] \text{ (citi locekļi izzūd).}$$

Tātad:

$$X = \frac{\alpha}{\omega},\ Y = \frac{\beta}{\omega},\ Z = \frac{\gamma}{\omega}; \tag{22}$$

$$u = \frac{\alpha I + \beta J + \gamma K}{\omega}. \tag{23}$$

3. Vektoru dalīšana.

Dalīšanu definē kā darbību, kas pretēja reizināšanai. Ja reizinājums un viens reizinātājs zināmi, bet otrs reizinātājs jāatrod, tā atrašanu sauc par dalīšanu. Tātad, ja nolīdzinājumos:

$$v \times a = b \text{ vai } v \cdot a = s,$$

v ir nezināms, bet pārējie (a, b, s) ir zināmi, nezināmā vektora atrašanu sauc par **vektoru dalīšanu.**

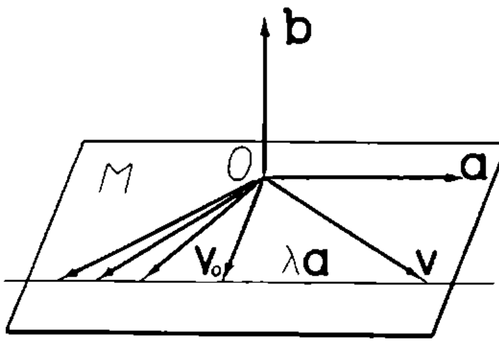
Vektoru reizināšana ir divējāda (skālārā un vektoriālā), atkarībā no tā jāizšķir arī divējādi dalīšanas uzdevumi.

Uzdevums I.

Zinot **a** un **b**, atrast tādu **v**, ka $v \times a = b$.

Saskaņā ar vektoriālās reizināšanas definīciju $b \perp a$ vai $a \cdot b = 0$. Ja uzdotie vektori **a** un **b** šo noteikumu nepilda, uzdevumā ir pretruna: atrast tādu **v**, kas prasību izpilda, nav iespējams. Tātad, lai uzdevums nebūtu pretrunīgs (un neiespējams), jābūt papildus izpildītam noteikumam $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ vai $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Tas ir nepieciešams noteikums uzdevuma atrisināšanai un reizē arī pietiekams. Ja tas izpildīts, tādus vektorus **v**, kas atbilst uzdevuma prasībai, var atrast, turklāt atrisinājumu ir bezgala daudz.

Zinot **a** un **b** ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$), atrast tādu **v**, ka $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$.



28. att.

Īpašs atrisinājums ir vektors $\mathbf{v}_0$, kas statenisks pret abiem uzdotiem **a** un **b**:

$$\mathbf{v}_0 = k[\mathbf{a} \times \mathbf{b}].$$

Konstantai k jābūt tādai, ka $\mathbf{v}_0$ derīgs reizināšanas formulā:

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

$$k[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

tātad:

$$k\{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}\} = \mathbf{b}.$$

Dots, ka $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, tāpēc:

$$k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{b},$$

$$k = \frac{1}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{1}{a^2} \quad . (1)$$

Viens atrisinājums ir:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{a^2} \quad . (2)$$

Pieņemsim, ka ir vēl kāds cits atrisinājums **v**; tātad:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Atskaitot

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{a} = 0,$$

tas nozīmē, ka vektors $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ ir kolīneārs ar **a**. Vai arī:

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \lambda \mathbf{a},$$

kur λ — patvaļīgs koeficients; tātad:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \lambda \mathbf{a} \quad (3)$$

Ievietojot formulā (3) $\mathbf{v}_0$ izteiksmi (2):

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{a^2} + \lambda \mathbf{a} \quad (3')$$

Ģeometriski **v** apzīmē vietas vektorus taisnei, kas vilkta caur vektora $\mathbf{v}_0$ gala punktu paralēli virzienam **a**.

Atrisinājumu (3′) var dabūt tieši no uzdotā nolīdzinājuma, reizinot to (priekšā) vektoriāli ar **a**:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Kreiso pusi izvirzām:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{v}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{a}=\mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

tātad:

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a},$$

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{a^2}+\lambda\mathbf{a}\quad(\lambda-\text{patvaļīgs}).$$

Loceklis $\lambda\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{a^2}\mathbf{a}=\left(\frac{\mathbf{a}}{a}\cdot\mathbf{v}\right)\frac{\mathbf{a}}{a}$ ir vektora $\mathbf{v}$ komponente virzienā $\mathbf{a}$.

Uzdevums II.

Zinot vektoru $\mathbf{a}$ un skālāru s, atrast tādu $\mathbf{v}$, ka $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}=s$.

Varam atrast, kā īpašu atrisinājumu, tādu vektoru $\mathbf{v}_0$, kas kolīneārs ar $\mathbf{a}$. Tātad abi atšķiŗas lielākais ar kādu proporcionālitātes faktoru:

$$\mathbf{v}_0=\lambda\mathbf{a}.$$

λ atrod, ievietojot $\mathbf{v}_0$ uzdotā nolīdzinājumā:

$$\lambda\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=s,$$

$$\lambda a^2=s,$$

tātad:

$$\lambda=\frac{s}{a^2}.$$

Īpašais atrisinājums:

$$\mathbf{v}_0=\frac{s}{a^2}\mathbf{a}.$$

Viegli pārliecināties, ka tas ir derīgs uzdotā reizināšanas sakarībā. Vai ir vēl kāds cits atrisinājums? Apzīmēsim to ar $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}=s,$$

$$\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{a}=s.$$

Atskaitot dabū:

$$(\mathbf{v}-\mathbf{v}_0)\cdot\mathbf{a}=0.$$

Tas nozīmē, ka $\mathbf{v}-\mathbf{v}_0$ ir vektors, kas statenisks pret $\mathbf{a}$. Vai arī: $\mathbf{v}-\mathbf{v}_0$ ir plaknē, kas stateniska pret $\mathbf{a}$. Ja ņem pilnīgi patvaļīgus divi vektorus $\mathbf{b}$ un $\mathbf{c}$, kas abi stateniski pret $\mathbf{a}$, tos abus var novietot plaknē, kas stateniska pret $\mathbf{a}$, tai pašā plaknē, kuŗā ir $\mathbf{v}-\mathbf{v}_0$. Vektori $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (abi $\perp\mathbf{a}$) un $\mathbf{v}-\mathbf{v}_0$ ir koplanāri, tātad:

$$\mathbf{v}-\mathbf{v}_0=\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c},$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}.$$

Atbilde:

$$\mathbf{v}=\frac{s}{a^2}\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}.$$

Ģeometriski $\mathbf{v}$ apzīmē vietas vektorus plaknei, kas stateniska pret $\mathbf{a}$ un ir no iesākuma punkta O atstatumā $\overline{OP}=v_0=s/a$, jo:

$$\overline{OP}^2=(\overrightarrow{OP})^2=\left(\frac{s}{a^2}\mathbf{a}\right)^2=\frac{s^2}{a^2}.$$

4. Četru vektoru reizinājumi.

Piemērs I:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\cdot[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\end{vmatrix}. \tag{1}$$

Apzīmēsim

$$\mathbf{c}\times\mathbf{d}=\mathbf{m}.$$

Tad mums ir triju vektoru **a**, **b**, **m** jauktais reizinājums, kuŗā drīkst apmainīt savā starpā punktu ar krustu:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\cdot[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\cdot\mathbf{m}=\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{m}].$$

Iekavās beigās ir 3 vektoru vektoriālais reizinājums:

$$[\mathbf{b}\times\mathbf{m}]=\mathbf{b}\times[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}.$$

Tas jāpareizina skālāri ar **a**:

$$\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{m}]=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}),$$

t. i.:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\cdot[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}).$$

Labo pusi var uzrakstīt determinanta veidā, tad seko formula (1).

Sakarību, ko formula izteic, var iztulkot Dekarta koordinātās:

pieņem

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},\quad \mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k},\quad \mathbf{c}=c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k},$$
$$\mathbf{d}=d_1\mathbf{i}+d_2\mathbf{j}+d_3\mathbf{k}.$$

No (1) seko:

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ c_1 & c_2 & c_3\\ d_1 & d_2 & d_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3\\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3\end{vmatrix}.$$

Kreisā pusē ir divu determinantu $\vec{\Delta}_1$ un $\vec{\Delta}_2$ reizinājums.

$$\vec{\Delta}_1=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k},$$
$$\vec{\Delta}_2=\begin{vmatrix}c_2 & c_3\\ d_2 & d_3\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}c_3 & c_1\\ d_3 & d_1\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Lai tos pareizinātu skālāri, jāpareizina koeficienti pie vienādiem vienības vektoriem un reizinājumi jāsaskaita; dabū identitāti:

$$\left.\begin{aligned}&(a_2b_3-a_3b_2)(c_2d_3-c_3d_2)+(a_3b_1-a_1b_3)(c_3d_1-c_1d_3)+\\ &+(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)=\\ &=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3)-\\ &-(a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3)(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Īpašā gadījumā, ja

$$\mathbf{a}=\mathbf{c},\quad \mathbf{b}=\mathbf{d},$$

seko:

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2=$$
$$=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^3\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2. \tag{3}$$

(Lagranža-Eilera identitāte).

Piemērs II.

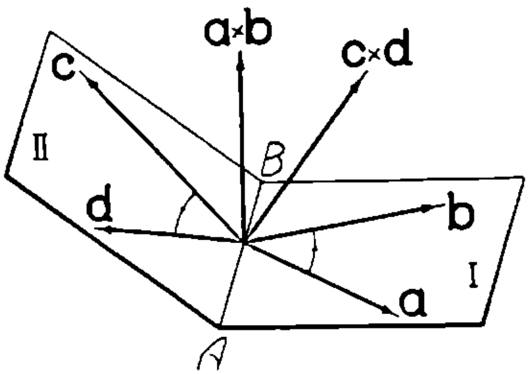
$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{d}].$$

Tas ir vektors, kas koplanārs ar visiem 4 vektoriem **a**, **b**, **c**, **d**, tātad, kolineārs taisnei, pa kuŗu plakne (**a**, **b**) šķeļ plakni (**c**, **d**).

Patiešām, vektori **a** un **b** noteic plakni I; vektori **d** un **c** noteic plakni II. Ja plaknes nav parallēlas, tās krustojas pa taisni AB. Vektoriālie reizinājumi:

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ statenisks pret **a** un **b** (pl. I),
$\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ „ „ **c** „ **d** (pl. II).

Vektors $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, būdams statenisks pret plakni I, ir statenisks pret ikvienu plaknes taisni, tātad arī pret AB. Vektors $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ ir statenisks pret plakni II, tātad arī pret AB. Vektori $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$ un $[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]$ abi ir stateniski pret vienu to pašu taisni; tie ir koplanāri plaknei, kas stateniska pret šo kopīgo taisni AB.



29. att.

Otrādi var sacīt: vektori $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$ un $[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]$ noteic plakni, pret kuŗu taisne AB stateniska. Tāpēc šo vektoru vektoriālais reizinājums ir vektors, kas parallēls taisnei AB. To var izteikt lineāri tiklab ar **a** un **b**, kā arī ar **c** un **d**.

Apzīmēsim $[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]$ ar **m**.

Mums būs:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\times\mathbf{m}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{m})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{m})\mathbf{a}.$$

Bet:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}],\quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{m}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}].$$

Tātad:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]\mathbf{b}-[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]\mathbf{a}. \qquad (4)$$

Apzīmēsim $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ar **n**.

Tad būs:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=\mathbf{n}\times[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}.$$

Bet:

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{d}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d}=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}],\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}].$$

Tātad:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}]\mathbf{c}-[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\mathbf{d}. \; \ldots\ldots\ldots \; (4')$$

Kārtula formulu uzrakstīšanai:

Četru vektoru vektoriālo reizinājumu $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]\times[\mathbf{c}\times\mathbf{d}]$ var izvirzīt izteiksmē, kas līneāri veidota no vienu vai otru iekavu vektoriem. Klāt tiem, kā koeficienti, ir pārējo vektoru jauktie reizinājumi, kas jāņem ar pretējām zīmēm. Ar $+$ jāņem tas reizinājums, kurā kā reizinātāji ir malējie vektori. Reizinātāju kārtība ir tāda kā izteiksmē, ko izvirza.

Vienu un to pašu izteiksmi var uzrakstīt divi veidos (4) un (4′). Tas rāda, ka starp 4 vektoriem **a**, **b**, **c**, **d** ir spēkā identiska sakarība:

$$[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]\,\mathbf{b}-[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]\,\mathbf{a}=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}]\,\mathbf{c}-[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\,\mathbf{d}, \tag{5}$$

ko tādā veidā ar augšējās kārtulas palīdzību var uzrakstīt.

Pārnesot visus locekļus vienā pusē:

$$[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]\,\mathbf{a}-[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{d}]\,\mathbf{b}+[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{d}]\,\mathbf{c}-[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\,\mathbf{d}=0 \tag{5′}$$

Rakstīsim **d** vietā **r**:

$$[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{r}]\,\mathbf{a}-[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{r}]\,\mathbf{b}+[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{r}]\,\mathbf{c}-[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\,\mathbf{r}=0,$$

tātad:

$$\mathbf{r}=\frac{[\mathbf{r}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\mathbf{a}+\frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{r}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\mathbf{b}+\frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{r}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\mathbf{c} \tag{6}$$

Formula (6) derīga dota vektora salikšanai komponentēs trīs uzdotos virzienos. Tās pamatā ir pieņēmums, ka $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\neq 0$, t. i. ka vektori **a**, **b**, **c** nav koplanāri.

5. Vektoru a, b, c apgrieztā (reciprokā) sistēma.

Uzdoti 3 nekoplanāri vektori **a**, **b**, **c**, tā ka jauktais trīskārtīgais reizinājums $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]\neq 0$. Par uzdotajiem vektoriem piekārtoto reciproko (apgriezto) sistēmu sauc vektorus:

$$\mathbf{a}'=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]},\ \mathbf{b}'=\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]},\ \mathbf{c}'=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}. \tag{1}$$

Šo vektoru apzīmējumu par reciprokiem attaisno tas, ka skālārie reizinājumi:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}'=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}=\frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}=1,$$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}'=\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}=\frac{[\mathbf{b}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}=1,$$

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}'=\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}=\frac{[\mathbf{c}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}=1.$$

Visi citi reizinājumi, kas veidoti no abu sistēmu vektoriem pa vienam no katras, ir nulles:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} = \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} = 0,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} = \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]} = 0,$$

tāpēc ka skaitītājos ir jauktie reizinājumi, kur divi reizinātāji vienādi, bet tādi reizinājumi ir nulles.

Uzdevums.

Salikt vektoru **r** komponentēs trīs nekoplanāru vektoru **a**, **b**, **c** virzienos.

Pieņemam: $\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$. Šo vienādību pareizinām skālāri ar $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = x\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c},$$

no kurienes seko:

$$x = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} = \frac{[\mathbf{r}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}. \tag{2}$$

Tādā pašā kārtā, reizinot ar $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$y = \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{r}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}, \quad z = \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{r}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}. \tag{2'}$$

Tātad:

$$\mathbf{r} = \frac{[\mathbf{r}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\mathbf{a} + \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{r}\,\mathbf{c}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\mathbf{b} + \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{r}]}{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]}\mathbf{c} \tag{3}$$

Ievērojot reciproko vektoru definīciju, dabū no (2) un (2'):

$$x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}', \quad y = \mathbf{r} \cdot \mathbf{b}', \quad z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}',$$

tātad (3) vietā:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}')\,\mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}')\,\mathbf{b} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}')\,\mathbf{c} \tag{4}$$

Reciprokās sistēmas ģeometriskais iztulkojums. — Formulās (1), kas definē reciproko sistēmu, saucējs ir skālārs, turklāt pozitīvs, pieņemot, ka **a**, **b**, **c** veido labās rokas (direkto) triedru. Šinī beidzamā gadījumā vektori $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ ir paralēli attiecīgiem vektoriem skaitītājos:

$$\mathbf{a}' \parallel \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{b}' \parallel \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{c}' \parallel \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Attiecībā pret parallēlepipeda plaknēm:

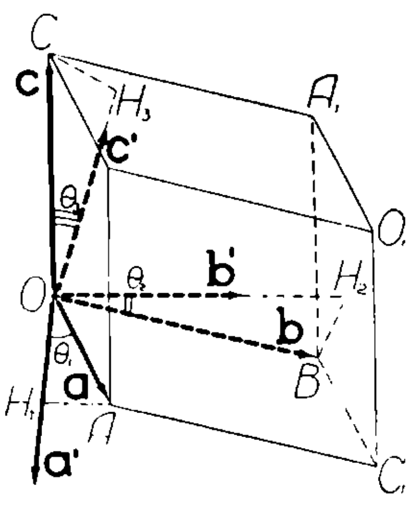
$$\mathbf{a}' \perp \text{pl. } (\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad \mathbf{b}' \perp \text{pl. } (\mathbf{c}, \mathbf{a}), \quad \mathbf{c}' \perp \text{pl. } (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Pietiek apskatīt kādu vienu reciprokās sistēmas vektoru, piem., $\mathbf{c}'$. No $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}' = 1$ jeb $cc' \cos \Theta_3 = 1$ seko

$$c' = \frac{1}{c \cos \Theta_3} = \frac{1}{h_3}.$$

Vektors **c**′ veido ar **c** šauru leņķi, jo $\cos \Theta_3 = 1 : cc' > 0$. Vektors **c**′ ir statenisks pret parallēlepipeda plakni OAC_1B un tā modulis ir inversais parallēlepipeda augstums pret šo plakni:

$$c \cos \Theta_3 = \overline{OH}_3 = h_3.$$



30. att.

Teōrēma. — Trīskārtīgais jauktais reizinājums, kas veidots no apgrieztās sistēmas vektoriem, ir vienlīdzīgs tiešās sistēmas trīskārtīgā jauktā reizinājuma apgrieztai vērtībai.

Ievērojot apgrieztās sistēmas vektoru definīciju (1):

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'] = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{[\mathbf{abc}]}\cdot\frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{[\mathbf{abc}]}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{[\mathbf{abc}]} =$$

$$= \frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]}{[\mathbf{abc}]^3}.$$

Četru vektoru vektoriālais reizinājums stūrainajā iekavā skaitītājā

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) =$$
$$= \mathbf{c\,a\,b}]\,\mathbf{a} - [\mathbf{c\,a\,a}]\,\mathbf{b} = [\mathbf{a\,b\,c}]\,\mathbf{a}.$$

Tātad:

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'] = \frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot[\mathbf{abc}]\,\mathbf{a}}{[\mathbf{abc}]^3} = \frac{1}{[\mathbf{abc}]}. \qquad (5)$$

Uzdevums. Atrast reciproko sistēmu vektoriem **a**′, **b**′, **c**′, kas paši ir reciprokā sistēma vektoriem **a**, **b**, **c**.

Nosauksim vektoru **a**′, **b**′, **c**′ apgrieztos par **a**″, **b**″, **c**″ Saskaņā ar (1):

$$\mathbf{a}'' = \frac{\mathbf{b}'\times\mathbf{c}'}{[\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}']} = \frac{[\mathbf{c}\times\mathbf{a}]\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]}{[\mathbf{abc}]}.$$

Skaitītājs jāizvirza vadoties no (4):

$$[\mathbf{c}\times\mathbf{a}]\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] = [\mathbf{cab}]\,\mathbf{a} - [\mathbf{caa}]\,\mathbf{b} = [\mathbf{abc}]\,\mathbf{a}.$$

To ievērojot, pārliecināmies, ka $\mathbf{a}'' = \mathbf{a}$, un tāpat arī $\mathbf{b}'' = \mathbf{b}$, $\mathbf{c}'' = \mathbf{c}$.

Ja vektoriem **a**, **b**, **c** reciprokā sistēma ir **a**′, **b**′, **c**′, tad otrādi: vektoriem **a**′, **b**′, **c**′ reciprokā sistēma ir **a**, **b**, **c**.

Vingrinājumi.

1. Uzrakstīt nolīdzinājumu plaknei caur 3 punktiem, kas uzdoti a vietas vektoriem $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Iesākuma punktu apzīmēsim ar O, dotos punktus ar A, B, C, mainīgo punktu plaknē ar R; mainīgais vietas vektors $\overrightarrow{OR} = \mathbf{r}$.

Vektori:

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{CR} = \mathbf{r} - \mathbf{c}$$

ir koplanāri, tātad trīskārtīgais jauktais reizinājums

$$[\mathbf{a} - \mathbf{b},\ \mathbf{d} - \mathbf{c},\ \mathbf{r} - \mathbf{c}] = 0.$$

Vai arī:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})] = 0, \quad (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

kur

$$\mathbf{n} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] + [\mathbf{c} \times \mathbf{a}].$$

Tā kā $\mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$, tad seko, ka plaknes nolīdzinājums ir $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$, jeb:

$$\mathbf{r} \cdot \{[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] + [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]\} = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}].$$

2. Uzrakstīt nolīdzinājumu plaknei caur 2 punktiem, kas uzdoti ar vietas vektoriem $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$; plaknei jābūt parallēlai taisnei, kuŗas virziens dots ar vektoru $\mathbf{c}$.

Meklējamā plakne ir parallēla vektoriem $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ un $\mathbf{c}$, tātad tā ir stateniska pret vektoru $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Tās nolīdzinājums ir:

$$\mathbf{r} \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] = q,$$

kur parametram q jābūt tādam, ka $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ (vai $\mathbf{r} = \mathbf{b}$) apmierina nolīdzinājumu. No tā izriet, ka

$$\mathbf{a} \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] = q,$$

jeb:

$$q = [\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}] - [\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}] = -[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}].$$

Plaknes nolīdzinājums:

$$\mathbf{r} \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{c}] = -[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}].$$

3. Uzdotas divas taisnes: viena caur punktu $\mathbf{a}$ virzienā $\mathbf{b}$, otra — caur punktu $\mathbf{a}'$ virzienā $\mathbf{b}'$. Kad šīm taisnēm ir kopīgs punkts? Ja taisnēm kopīga punkta nav, vilkt caur katru taisni pa plaknei tā, lai abas plaknes ir parallēlas. Kādi ir šo plakņu nolīdzinājumi un kāds ir atstatums starp plaknēm?

Iesākuma punkts ir O. No šī punkta iziet vektori $\mathbf{a}$ un $\mathbf{a}'$, kuŗi noteic attiecīgi punktus A un A'. Taišņu nolīdzinājumi, kuŗas iet caur punktiem A un A' virzienos $\mathbf{b}$ un $\mathbf{b}'$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{a}' + s \cdot \mathbf{b}'.$$

Ja šīm taisnēm ir kopīgs punkts, tad caur tām var vilkt plakni. Vektori $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$ un $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{a}' - \mathbf{a}$ ir koplanāri šai plaknei, tātad to trīskārtīgais jauktais reizinājums

$$[\mathbf{b},\ \mathbf{b}',\ \mathbf{a}' - \mathbf{a}] = 0.$$

Tāda sakarība starp vektoriem $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$ ir spēkā, ja uzdotām taisnēm ir kopīgs punkts.

Ja turpretim

$$[\mathbf{b},\ \mathbf{b}',\ \mathbf{a}' - \mathbf{a}] \neq 0,$$

tad taisnes nesastopas. Šinī gadījumā ir divas paralēlas plaknes tādas, ka katrā plaknē ir viena uzdotā taisne. Abas ir koplanāras vektoriem $\mathbf{b}$ un $\mathbf{b}'$, tātad, stateniskas pret $\mathbf{b}\times\mathbf{b}'$; viena iet caur punktu $\mathbf{a}$, otra — caur $\mathbf{a}'$. Plakņu nolīdzinājumi:

$$\mathbf{r}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{b}'] = \mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{b}'] = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}'],$$
$$\mathbf{r}\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{b}'] = \mathbf{a}'\cdot[\mathbf{b}\times\mathbf{b}'] = [\mathbf{a}'\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}'].$$

Atstatums starp plaknēm (visīsākais atstatums no vienas taisnes līdz otrai):

$$p = \frac{[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}'] - [\mathbf{a}'\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}']}{|\mathbf{b}\times\mathbf{b}'|} = \frac{[(\mathbf{a}-\mathbf{a}'),\mathbf{b},\mathbf{b}']}{|\mathbf{b}\times\mathbf{b}'|}.$$

4. Atrast nolīdzinājumu taisnei, kuŗa iet caur punktu $\mathbf{c}$ un sastop taisnes $\mathbf{r}=\mathbf{a}+s\mathbf{b}$ un $\mathbf{r}=\mathbf{a}'+t\mathbf{b}'$.

Caur uzdotām taisnēm vilksim plaknes, kuŗām liksim iet arī caur kopīgu punktu $\mathbf{c}$. Taisne, kas kopīga abām plaknēm, atbilst uzdevuma prasībām.

Plakne caur punktu $\mathbf{c}$ un taisni $\mathbf{r}=\mathbf{a}+s\mathbf{b}$ iet caur 2 punktiem, kas uzdoti ar vietas vektoriem $\mathbf{a}$ un $\mathbf{c}$. Šī plakne koplanāra vektoriem $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ un $\mathbf{b}$, tātad stateniska pret vektoru $(\mathbf{a}-\mathbf{c})\times\mathbf{b}$. Tās nolīdzinājums:

$$\mathbf{r}\cdot[(\mathbf{a}-\mathbf{c})\times\mathbf{b}] = \mathbf{a}\cdot[(\mathbf{a}-\mathbf{c})\times\mathbf{b}].$$

Pārmainot labā pusē punktu pret krustiņu un izdarot vektoriālo reizināšanu, dabū:

$$\mathbf{r}\cdot[(\mathbf{a}-\mathbf{c})\times\mathbf{b}] = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}].$$

Līdzīgā kārtā dabū nolīdzinājumu plaknei caur punktu $\mathbf{c}$ un taisni $\mathbf{r}=\mathbf{a}'+t\mathbf{b}'$:

$$\mathbf{r}\cdot[(\mathbf{a}'-\mathbf{c})\times\mathbf{b}'] = [\mathbf{a}'\,\mathbf{b}'\,\mathbf{c}].$$

Taisne, kas kopīga šīm divām plaknēm, stateniska pret abu plakņu normālēm, tātad paralēla vektoram:

$$[(\mathbf{a}-\mathbf{c})\times\mathbf{b}]\times[(\mathbf{a}'-\mathbf{c})\times\mathbf{b}] = \mathbf{d}.$$

Tās nolīdzinājums ir:

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} + u\,\mathbf{d} \quad (u \text{ — parametrs}).$$

5. Uzdotas 3 plaknes caur kopīgu punktu (triedra stūris). Caur šo punktu ikkatrā plaknē velk stateni pret trešo šķautni. Parādīt, ka šie statņi ir koplanāri.

Iesākuma punktu pieņemsim plakņu kopīgā punktā. Trīs plaknēm caur iesākuma punktu ir nolīdzinājumi:

$$1)\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_1 = 0,\quad 2)\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_2 = 0,\quad 3)\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_3 = 0.$$

Šķautne, ko veido divas plaknes, ir stateniska pret abu plakņu normālēm; šķautņu nolīdzinājumi:

$$12)\ \mathbf{r} = s\,[\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2],\quad 13)\ \mathbf{r} = t\,[\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_3],\quad 23)\ \mathbf{r} = u\,[\mathbf{n}_2\times\mathbf{n}_3].$$

Pret katru šķautni iesākuma punktā jāvelk stateniska plakne un jāmeklē pēdējās krustojums ar pretējo triedra plakni. Plaknei caur iesākumu, kuŗa stateniska pret šķautni 12), ir nolīdzinājums

$$\mathbf{r}\cdot[\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2] = 0.$$

Pretējai triedra plaknei ir nolīdzinājums $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_3 = 0$. Abas plaknes krustojas taisnē, kas stateniska pret abu plakņu normālēm, tātad paralēla vektoram

$$[\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2]\times\mathbf{n}_3 = \mathbf{v}_3.$$

Tāds virziens ir statenim pret šķautni 12) plaknē 3). Vēl ir 2 tādi stateņi:

$$[\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_3] \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{v}_2,$$
$$[\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3] \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_1.$$

Jāpierāda, ka vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ ir koplanāri. Nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam ir tas, ka trīskārtīgais jauktais reizinājums

$$[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3] = 0.$$

Izvirzot trīskārtīgos vektoriālos reizinājumus, dabū:

$$\mathbf{v}_1 = [\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3] \times \mathbf{n}_1 = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)\,\mathbf{n}_3 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3)\,\mathbf{n}_2;$$
$$\mathbf{v}_2 = [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_3] \times \mathbf{n}_2 = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)\,\mathbf{n}_3 - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3)\,\mathbf{n}_1;$$
$$\mathbf{v}_3 = [\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2] \times \mathbf{n}_3 = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3)\,\mathbf{n}_2 - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3)\,\mathbf{n}_1.$$

No šejienes seko:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2\,\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3\,[\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_3] + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3\,\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2\,[\mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_2] +$$
$$+ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3\,\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3\,[\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1].$$

Iznākums jāpareizina skalāri ar $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2\,\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3\,\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3\,[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_2] -$$
$$- \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3\,\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2\,\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3\,[\mathbf{n}_3 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_1] = 0,$$

ko vajadzēja pierādīt.

Uzdevumi V.

1. Plakne iet caur punktu $\mathbf{a}$ un paralēla divām taisnēm, kuru virzienus noteic $\mathbf{b}$ un $\mathbf{c}$. Parādīt, ka tās nolīdzinājums ir $\mathbf{r} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$.

2. Plakne iet caur taisni $\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$ un paralēla otrai taisnei, kuras virzienu noteic $\mathbf{c}$. Parādīt, ka tās nolīdzinājums ir $\mathbf{r} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$.

3. Plakne iet caur taisni $\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$ un punktu $\mathbf{c}$. Parādīt, ka tās nolīdzinājums ir $\mathbf{r} \cdot [(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \times \mathbf{b}] = [\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$.

4. Uzrakstīt nolīdzinājumu plaknei, uz kuras ir taisne $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$ un kura stateniska pret plakni caur taisnēm $\mathbf{r} = u\mathbf{b}$ un $\mathbf{r} = v\mathbf{c}$.

5. Atrast nolīdzinājumu plaknei, kas iet caur divām paralēlām taisnēm $\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$ un $\mathbf{r} = \mathbf{a}' + t\mathbf{b}$.

6. Kāds nolīdzinājums izteic plakni, uz kuras ir taisne $\mathbf{r} - \mathbf{a} = t\mathbf{b}$ un kura ir stateniska pret plakni $\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = q$?

7. Parādīt, ka plakni, kura iet caur divām taisnēm $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{a}'$ un $\mathbf{r} = \mathbf{a}' + s\mathbf{a}$, izteic nolīdzinājums $[\mathbf{r}\,\mathbf{a}\,\mathbf{a}'] = 0$. Iztulkot nolīdzinājumu ģeometriski.

8. Atrast īsāko atstatumu starp taisnēm $\mathbf{r} = t\mathbf{k}$ un $\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$. Uzrakstīt nolīdzinājumu taisnei, kura stateniska pret abām uzdotām.

9. Atrast nolīdzinājumu taisnei, kura iet caur punktu $\mathbf{c}$, sastop taisni $\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$ un paralēla plaknei $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}' = 0$.

10. Taisne pārvietojas paralēli uzdotai plaknei, slīdēdama gar divām nekoplanārām taisnēm. Parādīt, ka ģeometriskā vieta, kas slīdošās taisnes nogriezni sadala konstantā attiecībā, ir taisne.

11. Atrast ģeometrisko vietu punktam, kurš ir vienādos atstatumos no plaknēm $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_1 = q_1$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_2 = q_2$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_3 = q_3$.

12. Pierādīt, ka

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] + \mathbf{b} \times [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] + \mathbf{c} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = 0.$$

13. Pierādīt, ka

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}\, \mathbf{a} \times \mathbf{c} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\, \mathbf{a} \times \mathbf{d},$$

un uz iznākuma pamata izvirzīt

$$\mathbf{a} \times \{\mathbf{b} \times [\mathbf{c} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{e})]\}.$$

14. Pierādīt, ka

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b},\ \mathbf{b} \times \mathbf{c},\ \mathbf{c} \times \mathbf{a}] = [\mathbf{a}\, \mathbf{b}\, \mathbf{c}]^2,$$

un iznākumu uzrakstīt determinanta veidā.

15. Pierādīt, ka

$$[\mathbf{l}\, \mathbf{m}\, \mathbf{n}]\, [\mathbf{a}\, \mathbf{b}\, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{l} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{l} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{l} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{m} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{m} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix}.$$

16. Pierādīt formulas:

$$\begin{aligned} &[\mathbf{a} \times \mathbf{b},\ \mathbf{c} \times \mathbf{d},\ \mathbf{e} \times \mathbf{f}] = \\ &= [\mathbf{a}\, \mathbf{b}\, \mathbf{d}]\, [\mathbf{c}\, \mathbf{e}\, \mathbf{f}] - [\mathbf{a}\, \mathbf{b}\, \mathbf{c}]\, [\mathbf{d}\, \mathbf{e}\, \mathbf{f}] = \\ &= [\mathbf{a}\, \mathbf{b}\, \mathbf{e}]\, [\mathbf{f}\, \mathbf{c}\, \mathbf{d}] - [\mathbf{a}\, \mathbf{b}\, \mathbf{f}]\, [\mathbf{e}\, \mathbf{c}\, \mathbf{d}] = \\ &= [\mathbf{c}\, \mathbf{d}\, \mathbf{a}]\, [\mathbf{b}\, \mathbf{e}\, \mathbf{f}] - [\mathbf{c}\, \mathbf{d}\, \mathbf{b}]\, [\mathbf{a}\, \mathbf{e}\, \mathbf{f}]. \end{aligned}$$

VI.

Vektorfunkcijas, kas atkarīgas no viena skālāra parametra.

1. No skālāra parametra atkarīgu vektorfunkciju diferencēšana. — Pieņemsim, ka dota vienvērtīga un nepārtraukta vektoriāla funkcija, kas atkarīga no skālāra parametra t.

Tas nozīmē, ka apskatāmā vērtību intervallā ir dots likums, kas noteiktai skālārā parametra t vērtībai piekārto noteiktu mainīgā vektora **a** vērtību, tā ka, ja t mainās un dabū vērtības t_0, t_1, t_2, tad tām ikvienai atbilst pilnīgi noteikta vektora **a** vērtība $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. . Vektora **a** atkarību no t izteic līdzīgi tam kā skālāru funkciju gadījumā, rakstot:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t), \text{ un īpaši: } \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(t_0),\ \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}(t_1),$$

Liksim neatkarīgajam mainīgam (argumentam, parametram) t pieaugt par $\triangle t$; tad mainīsies arī funkcijas vērtība. Funkcijas pieaugums

$$\triangle \mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \triangle t) - \mathbf{a}(t).$$

Pieņēmums, ka uzdotā funkcija ir nepārtraukta, apzīmē to, ka funkcijas pieaugums $\triangle \mathbf{a}$ tiecas uz nulli vienlaicīgi ar parametra pieaugumu $\triangle t$, neatkarīgi no tā, kāds ir šis beidzamais pieaugums (pozitīvs vai negātīvs.)

Izdalīsim funkcijas pieaugumu ar neatkarīgā mainīgā (parametra) pieaugumu:

$$\frac{\triangle \mathbf{a}}{\triangle t} = \frac{\mathbf{a}(t + \triangle t) - \mathbf{a}(t)}{\triangle t}.$$

Labā pusē skaitītājā ir divu vektoru starpība, tātad vektors, bet saucējā — skālārs. Dalījums (diferenču kvocients $\triangle \mathbf{a}/\triangle t$) ir vektors, kuŗa vērtība, vispārīgi, atkarīga nevien no t, bet arī no parametra pieauguma $\triangle t$, un var tiekties uz noteiktu robežu, kad $\triangle t \to 0$. Ja tāda robeža ir, tad funkciju $\mathbf{a}(t)$ sauc par diferencējamu un pašu robežu par funkcijas diferenciālkoeficientu (kvocientu) jeb atvasināto.

Atvasināto funkciju apzīmē ar simboliem:

$$\mathbf{a}' \text{ jeb } \frac{d\mathbf{a}}{dt},\ \text{dažreiz } \dot{\mathbf{a}},$$

un atrod saskaņā ar definīciju:

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t + \triangle t) - \mathbf{a}(t)}{\triangle t}.$$

Tās reizinājumu ar neatkarīgā mainīgā diferenciāli sauc par funkcijas diferenciāli:

$$d\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\,dt = \mathbf{a}'\,dt.$$

Darbību, ar kuŗu atrod funkcijas atvasināto vai diferenciāli, sauc par diferencēšanu.

Par visām funkcijām, ar kuŗām mēs šeit nodarbosimies, pieņemsim, ka tās ir diferencējamas.

Vektorfunkcijas $\mathbf{a}(t)$ atvasinātā $\mathbf{a}'$ pati ir no t atkarīga vektorfunkcija: $\mathbf{a}' = \mathbf{a}'(t)$, kuŗu, pieņemot tās diferencējamību, var atvasināt tālāk un tā veidot funkcijai $\mathbf{a}(t)$ otrās, trešās un t. t. kārtas atvasinātās un diferenciāļus. Apzīmējumi ir tādi paši, kā skālārām funkcijām:

$$\mathbf{a}''(t),\ \mathbf{a}'''(t),\qquad \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2},\ \frac{d^3\mathbf{a}}{dt^3},$$

2. Diferencēšanas kārtulas. — Vektorfunkciju diferencēšanas (atvasināšanas) kārtulas neatšķiŗas no tām, kuŗas sastopam skālāru funkciju diferencēšanā, izņemot to, ka zināmos gadījumos jāievēro faktoru sakārtojums. Turpinājumā zem $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, sapratīsim diferencējamas, no skālāra mainīgā t atkarīgas vektorfunkcijas.

Konstanta vektora atvasinātā ir nulle.

Ja $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a} = \text{const.}$, tad vektorfunkcija nemainās, tās pieaugums $\triangle\mathbf{a} = 0$, un vienmēr pieaugumu attiecība $\triangle\mathbf{a}/\triangle t = 0$. Tātad $\mathbf{a}' = d\mathbf{a}/dt = 0$.

Summas atvasinātā ir vienlīdzīga summandu atvasināto summai.

Simbolos:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}' \tag{1}$$

Ja arguments pieaug par $\triangle t$, funkcijas $\mathbf{a}$ un $\mathbf{b}$ pieaug attiecīgi par $\triangle\mathbf{a}$ un $\triangle\mathbf{b}$. Summas pieaugums ir abu šo pieaugumu summa:

$$\triangle(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \triangle\mathbf{a} + \mathbf{b} + \triangle\mathbf{b}) - (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \triangle\mathbf{a} + \triangle\mathbf{b}.$$

Izdalot abas puses ar $\triangle t$:

$$\frac{\triangle(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{\triangle t} = \frac{\triangle\mathbf{a}}{\triangle t} + \frac{\triangle\mathbf{b}}{\triangle t},$$

tātad, ja $\triangle t \to 0$:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})' = \frac{d(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'.$$

Tāpat lielāka summandu skaita gadījumā.

Ja u ir skālāra, bet $\mathbf{a}$ vektoriāla funkcija, tad abu reizinājuma atvasinātā

$$(u\mathbf{a})' = u'\mathbf{a} + u\mathbf{a}'. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ja arguments t dabū pieaugumu $\triangle t$, tad u pieaug par $\triangle u$ un $\mathbf{a}$ par $\triangle\mathbf{a}$. Funkcijas pieaugumu atrod, atskaitot pieaugušās funkcijas vērtībai nepieaugušās funkcijas vērtību:

$$\triangle(u\mathbf{a}) = (u + \triangle u)(\mathbf{a} + \triangle\mathbf{a}) - u\mathbf{a} = \mathbf{a}\triangle u + u\triangle\mathbf{a} + \triangle u\triangle\mathbf{a}.$$

Izdalot ar $\triangle t$:

$$\frac{\triangle(u\mathbf{a})}{\triangle t} = \mathbf{a}\frac{\triangle u}{\triangle t} + u\frac{\triangle\mathbf{a}}{\triangle t} + \frac{\triangle u}{\triangle t}\triangle\mathbf{a}.$$

Beidzamais loceklis tiecas uz nulli, jo $\triangle\mathbf{a}$ izzūd reizē ar $\triangle t$. Atrodot abām pusēm robežu, dabū:

$$(u\mathbf{a})' = \frac{d(u\mathbf{a})}{dt} = \mathbf{a}\frac{du}{dt} + u\frac{d\mathbf{a}}{dt} = u'\mathbf{a} + u\mathbf{a}'.$$

Secinājums 1.

Ja $k = \text{const}$ un $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, tad no (2):

$$(k\mathbf{a})' = k\mathbf{a}' \tag{3}$$

Secinājums 2.

Ja $u = u(t)$ ir skālāra funkcija, bet vektors $\mathbf{a} = \text{const}$, tad no (2):

$$(u\mathbf{a})' = u'\mathbf{a} \tag{4}$$

Tātad, nemainīga virziena vektoram atvasinātā ir tāda pat virziena vektors.

Vektoru $\mathbf{r}$, kas izteikts ar komponentēm x, y, z ortogōnālās koordinātu asīs:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

atvasina saskaņā ar (4) tā, ka atvasina visas komponentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'' &= x''\,\mathbf{i} + y''\,\mathbf{j} + z''\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}''' &= x'''\mathbf{i} + y'''\mathbf{j} + z'''\mathbf{k} \end{aligned}$$

Tātad, vektora n-ās kārtas atvasinātai komponentes ir vienlīdzīgas vektora komponentu n-ās kārtas atvasinātām.

Vektoru reizinājumu atvasināšana norit saskaņā ar kārtulām:

$$\text{I)}\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})' = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}', \tag{5}$$

$$\text{II)}\ [\mathbf{a}\times\mathbf{b}]' = \mathbf{a}'\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{b}', \tag{6}$$

turklāt beidzamā formulā nedrīkst mainīt faktoru sakārtojumu, ja to neatsveŗ ar zīmes pārmaiņu.

Abām formulām pierādījuma gaita ir viena, tā ka pietiek apskatīt vienu, piem., beidzamo. Ja arguments t pieaug par $\triangle t$, funkcija $\mathbf{a}(t)\times\mathbf{b}(t)$ pieaug par

$$\begin{aligned} \triangle[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] &= (\mathbf{a} + \triangle\mathbf{a})\times(\mathbf{b} + \triangle\mathbf{b}) - \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \\ &= \mathbf{a}\times\triangle\mathbf{b} + \triangle\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \triangle\mathbf{a}\times\triangle\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Izdalot ar $\triangle t$:

$$\frac{\triangle[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]}{\triangle t}=\mathbf{a}\times\frac{\triangle\mathbf{b}}{\triangle t}+\frac{\triangle\mathbf{a}}{\triangle t}\times\mathbf{b}=\frac{\triangle\mathbf{a}}{\triangle t}\times\triangle\mathbf{b}.$$

Beidzamais summands tiecas uz nulli, jo $\triangle\mathbf{b}\to 0$, kad $\triangle t\to 0$. Galu galā:

$$\frac{d[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]}{dt}=\mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt}+\frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b},$$

vai īsākā rakstībā:

$$[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]'=\mathbf{a}'\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}'.$$

Piemērs 1. Dots $v=\mathbf{r}\,.\,\mathbf{r}$, atrast dv/dt.

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{r}+\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=2\,\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Bet $v=\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=r^2$, tātad, $dv/dt=2r\dfrac{dr}{dt}$.

Seko: $\mathbf{r}\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}=r\dfrac{dr}{dt}$.

Piemērs 2. $\mathbf{v}=\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$, atrast $d\mathbf{v}/dt$.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Trīs vektoru jaukto reizinājumu atvasina saskaņā ar kārtulu:

$$[\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}]'=[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]'=[\mathbf{a}'\mathbf{b}\,\mathbf{c}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{b}'\mathbf{c}]+[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}'],\tag{7}$$

raugoties, lai nemainās faktoru cikliskais sakārtojums. Piem., nav šķēršļu $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}']$ vietā rakstīt $[\mathbf{b}\,\mathbf{c}'\mathbf{a}]$ vai $[\mathbf{c}'\mathbf{a}\,\mathbf{b}]$, jo tiem visiem ir vienāds cikliskais faktoru sakārtojums.

Trīs vektoru vektoriālo reizinājumu atvasina saskaņā ar kārtulu:

$$[\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]]'=\mathbf{a}'\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}]+\mathbf{a}\times[\mathbf{b}'\times\mathbf{c}]+\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times\mathbf{c}'],\tag{8}$$

kur reizinājumos nav brīv mainīt faktoru sakārtojumu. Pretējā gadījumā var mainīties reizinājuma zīme.

Abas kārtulas pierāda, pieņemot $\mathbf{a}$ par vienu faktoru un $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ par otru, un šo divu faktoru reizinājumus pakļaujot kārtulām (5) un (6).

Piemērs 1. Atrast pirmo un otro atvasināto reizinājumam

$$A=\left[\mathbf{r}\,\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right].$$

Apzīmējot atvasināšanu ar apostrofu:

$$A'=[\mathbf{r}\,\mathbf{r}'\,\mathbf{r}'']'=[\mathbf{r}'\,\mathbf{r}'\,\mathbf{r}'']+[\mathbf{r}\,\mathbf{r}''\,\mathbf{r}'']+[\mathbf{r}\,\mathbf{r}'\,\mathbf{r}'''].$$

Trīskārtīgie jauktie reizinājumi, kur divi faktori ir vienādi, ir nulles. Tātad:

$$A'=[\mathbf{r}\,\mathbf{r}'\,\mathbf{r}'''].$$

Tāpat tālāk:

$$A'' = [\mathbf{r}\,\mathbf{r}''\,\mathbf{r}'''] + [\mathbf{r}\,\mathbf{r}'\,\mathbf{r}^{IV}].$$

Piemērs 2. Atrast pirmo un otro atvasināto reizinājumam

$$\mathbf{V} = \mathbf{r} \times \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right].$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{r}' \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''] + \mathbf{r} \times [\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''] + \mathbf{r} \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'''].$$

Vidējais reizinājums ir nulle, jo $\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'' = 0$; tātad:

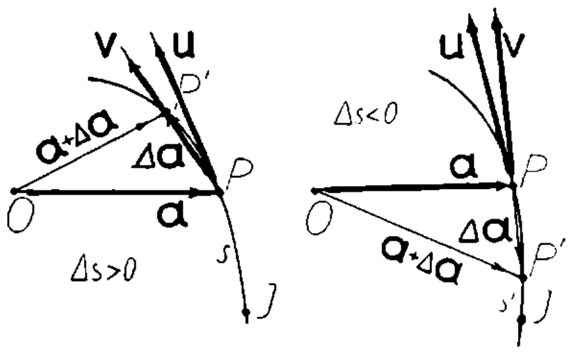
$$\mathbf{V}' = \mathbf{r}' \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''] + \mathbf{r} \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'''].$$

Tāpat tālāk:

$$\mathbf{V}'' = \mathbf{r}'' \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''] + 2\,\mathbf{r}' \times [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'''] + \mathbf{r} \times [\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}'''] + \mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{r}^{IV}].$$

3. Vektoru diferencēšana ģeometriskā iztulkojumā. — Vektori, kuŗus še apskatām, ir brīvi vektori; to iesākumus var pieņemt kopīgā punktā. Tad to gala punkti, ja vektorfunkcija ir nepārtraukta, argumentam mainoties apraksta telpas līkni, ko sauc par vektorfunkcijas hodografu jeb indikatrisu.

Šī līkne ir pilnīgi zināma, ja vektorfunkcija ir uzdota. Otrāds secinājums nav spēkā. Telpas līkne pati par sevi nav pietiekama vektorfunkcijas raksturošanai, jo tā nerāda parametra vērtības, kas atbilst katram līknes punktam. Vektorfunkcijas pilnīgai raksturošanai vajadzīga nevien līkne, bet arī skāla uz tās, kas katrā vietā atļauj nolasīt līknes punktiem piebiedrotās parametra vērtības.



Att. 31.

Ar hodografa palīdzību var pētīt vektorfunkciju īpašības; otrādi, dotas līknes īpašības var pētīt ar attiecīgas vektorfunkcijas palīdzību.

Pieņemsim, ka uzdota vektorfunkcija $\mathbf{a}\,(t)$. Parametram t atbilst hodografa vektors $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}\,(t)$, parametram $t + \triangle t$ — vektors $\overrightarrow{OP'} = \mathbf{a}\,(t + \triangle t)$. Vektorfunkcijas pieaugums

$$\triangle \mathbf{a} = \mathbf{a}\,(t + \triangle t) - \mathbf{a}\,(t) = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PP'}$$

ir vektors, kam lielums un virziens uzdoti ar chordu no nepieaugušā vektora gala līdz pieaugušā vektora galam.

Ņemsim uz līknes iesākuma punktu I loku gaŗuma skaitīšanai un norunāsim pozitīvo virzienu pa līkni. Parametram t atbilst loks $\smile IP = s$, parametram $t + \triangle t$ — loks $\smile IP' = s + \triangle s$. Pozitīvam $\triangle t$ var atbilst tiklab pozitīvs, kā negātīvs $\triangle s$.

Punktā P pieliksim vienības vektoru $\mathbf{v}$ ($v = 1$), kas virzīts pa chordu uz to pusi, kur loks pieaug, tātad:

no P pret P', ja $\triangle s > 0$, bet
„ P' „ P „ $\triangle s < 0$.

Tad attiecībā

$$\frac{\triangle \mathbf{a}}{\triangle t} = \frac{\overrightarrow{PP'}}{\triangle t} = \frac{\overrightarrow{PP'}}{|\overrightarrow{PP'}|} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{\triangle t} = \pm \mathbf{v} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{\triangle t}$$

$+$ jāņem, ja $\triangle s > 0$, bet $-$ jāņem, ja $\triangle s < 0$. Abas zīmes var apvienot vienā izteiksmē, ja formulā ieved loka pieaugumu $\triangle s$.

$$\frac{\triangle \mathbf{a}}{\triangle t} = \pm \mathbf{v} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{\triangle t} = \pm \mathbf{v} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{|\triangle s|} \frac{|\triangle s|}{\triangle t}.$$

Jāievēro, ka chordas un loka gaŗuma attiecība $|\overrightarrow{PP'}| : |\triangle s|$ tiecas uz 1, kad $\triangle s \rightarrow 0$, tālāk: $\pm |\triangle s| = \triangle s$ un $\triangle s / \triangle t \rightarrow ds/dt$.

Tātad, galīgi:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{u} \frac{ds}{dt} \tag{1}$$

kur $\mathbf{u}$ ir vienības vektors pa pieskari norunātā pozitīvā virzienā.

Uzdevums 1.

Atrast atvasināto funkciju mainīgam vektoram plaknē, kuŗa modulis ir konstants.

Ikviena vektora skālārais kvadrāts ir vienāds ar moduļa kvadrātu:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2,$$

tātad, ja atvasina:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr', \tag{2}$$

vai arī:

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r}' = r', \text{ t. i.:}$$

Vektora moduļa (skālārais) atvasinājums ir vienāds ar atvasinātā vektora projekcijas lielumu, projecējot uz vektora virzienu.

Ja vektora modulis $r = \text{const}$, tad no (2) seko, ka $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$, t. i. atvasinātais vektors ir statenisks pret pašu vektoru ($\mathbf{r}' \perp \mathbf{r}$). Vektora hodografs šinī gadījumā, vispārīgi, ir līkne uz lodes virsmas. Formula $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$ izteic pazīstamo faktu, ka pieskare līknei uz lodes virsmas stateniska pret radiusu šinī punktā.

Mūsu uzdevumā mainīgais vektors, kuŗa modulis konstants, ir plaknē. Tā hodografs ir riņķis kam radiuss ir r. Vektors $\mathbf{r}$ mainās atkarībā no leņķa Θ, ko $\mathbf{r}$ veido ar x asi; Θ var uzskatīt par argumenta t funkciju.

Pieņemot x un y asu virzienos vienības vektorus $\mathbf{i}$ un $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = r(\cos\Theta\, \mathbf{i} + \sin\Theta\, \mathbf{j}), \quad (r = \text{const})$$

$$\mathbf{r}' = r(-\sin\Theta\, \mathbf{i} + \cos\Theta\, \mathbf{j}) \frac{d\Theta}{dt}. \quad \dots\dots\dots\dots \tag{3}$$

Acīm redzot

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'=r^2(-\cos\Theta\sin\Theta+\sin\Theta\cos\Theta)\frac{d\Theta}{dt}=0,$$

$$(\mathbf{r}\perp\mathbf{r}').$$

Atvasinātā vektora modulis:

$$|\mathbf{r}'|=r\,|-\sin\Theta\,\mathbf{i}+\cos\Theta\,\mathbf{j}|\left|\frac{d\Theta}{dt}\right|,\quad |\mathbf{r}'|=r\left|\frac{d\Theta}{dt}\right|. \tag{4}$$

Apzīmēsim ar $\mathbf{u}$ vienības vektoru ($u=1$) pa pieskari augošo loku virzienā. Tas ir vektors, kas rāda vienmēr, piem., pretēji pulksteņa rādītāja kustībai. Atvasinātam vektoram $\mathbf{r}$, turpretim, ir tāds pats virziens, ja $\triangle\Theta>0$, kad $\triangle t>0$, vai pretējs, kad $\triangle\Theta<0$.

$$\mathbf{r}'=\pm\mathbf{u}\,r\left|\frac{d\Theta}{dt}\right|.$$

Šē jāņem

$$+\text{ ja }\triangle\Theta>0,\quad -\text{ ja }\triangle\Theta<0,$$

tātad, divkāršo zīmi un absolūtā lieluma apzīmējumu var atmest:

$$\mathbf{r}'=\mathbf{u}\,r\frac{d\Theta}{dt}. \tag{5}$$

Uzdevums 2.

Atrast pirmo un otro atvasināto vektorfunkcijai, kas izteikta polārkoordinātās.

Vektorfunkcijai

$$\mathbf{r}=r\,\mathbf{e}\quad(e=1) \tag{1}$$

$r=r(t)$, $\mathbf{e}=\mathbf{e}(\varphi)$, $\varphi=\varphi(t)$, kur t — parametrs. Vienības vektoru, kas vērsts pieskares virzienā uz to pusi, kur loks pieaug, apzīmēsim ar $\mathbf{p}$.

Vektora atvasinātā pēc loka ir vienības vektors pieskares virzienā uz loka pieaugšanas pusi. Attiecinot šo likumu uz vektoriem $\overrightarrow{OM}$ un $\overrightarrow{ON}$ un ievērojot to, ka uz vienības riņķa $ds=d\varphi$, dabū:

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds}=\frac{d\mathbf{e}}{d\varphi}=\mathbf{p},\quad \frac{d\mathbf{p}}{ds}=\frac{d\mathbf{p}}{d\varphi}=-\mathbf{e}, \tag{2}$$

un tātad:

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt}=\frac{d\mathbf{e}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\varphi'\,\mathbf{p},\quad \frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{d\mathbf{p}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=-\varphi'\,\mathbf{e} \tag{3}$$

Ar apostrofu ($'$) apzīmēti atvasinājumi pēc parametra t. Atvasinot (1):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{r}'=r'\,\mathbf{e}+r\,\mathbf{e}'=\mathbf{r}'\mathbf{e}+r\varphi'\mathbf{p}.$$

Tātad

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{r}'e+r\varphi'\,\mathbf{p}. \tag{4}$$

Pirmais summands labā pusē ir atvasinātās funkcijas komponente vektora $\mathbf{r}$ virzienā (vektors, kas kolīneārs ar $\mathbf{e}$); otrs summands ir komponente, kas $\perp$ pret šo virzienu (kolīneāra ar $\mathbf{p}$). Ja t apzīmē laiku, atvasinātā apzīmē ātrumu:

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\dot{r}\,\mathbf{e}+r\dot{\varphi}\,\mathbf{p}.\ \ldots\ldots\ldots \tag{4¹}$$

Atvasinot (4) vēlreiz:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = r''\mathbf{e} + r'\frac{d\mathbf{e}}{dt} + r'\varphi'\mathbf{p} + r\varphi''\mathbf{p} + r\varphi'\frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Ievērojot (β):

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (r'' - r\varphi'^2)\mathbf{e} + (2r'\varphi' + r\varphi'')\mathbf{p}. \tag{5}$$

4. Piemēri vektoru lietājumiem diferenciālģeometrijā (līkņu teōrija).

1) Līkne telpā un plaknē. Ja vietas vektors $\mathbf{r}$ mainās atkarībā no skālārā parametra u, tātad, ja uzdots, ka

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u), \tag{1}$$

tad vektora gals apraksta telpā vienu vai vairākas līknes, atkarībā no tā, vai funkcija ir vienvērtīga vai nav.

Ja vektora $\mathbf{r}$ projekciju lielumus uz koordinātu asīm $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ apzīmē ar $x = x(u), y = y(u)$, $z = z(u)$, tad līknes nolīdzinājumu var uzrakstīt:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{2}$$

Līkne būs xOy plaknē, ja $z = O$.

2) Pieskares virziens. Ņemsim vektorus $\mathbf{r}$ un $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, kas atbilst divi tuvām parametra vērtībām u un $u + \Delta u$. Ja vektoru gala punkti ir M un M', vektoriālais pieaugums $\Delta\mathbf{r} = \overrightarrow{MM'}$. Tam atbilst loka pieaugums $\Delta s = \smile MM'$. Apskatām vektoru:

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\smile MM'} = \mathbf{v}.$$

Tas virzīts pa chordu no punkta M uz M' pusi. Kad $\Delta s \to 0$, $\mathbf{v}$ tiecas saplūst ar pieskari punktā M. Lielums v (vektora modulis) maz atšķiŗas no vienības un tuvojas šai vērtībai kā robežai, kad $\Delta s \to 0$.

R a d i u s a   v e k t o r a   a t v a s i n ā j u m s   p ē c   l o k a   i r   v i e n ā d s   a r   v i e n ī b a s   v e k t o r u   p i e s k a r e s   v i r z i e n ā   u z   t o   p u s i,   u z   k u ŗ u   l o k s   p i e a u g. Ja šo vienības vektoru apzīmē ar $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{3}$$

Ja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ un $s = s(u)$, ko apzīmē vektora atvasinājums pēc parametra u?

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{du} = \mathbf{t}\frac{ds}{du} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4}$$

Apzīmēsim pieskares virziena kosinus ar cos α, cos β un cos γ. Lai tos dabūtu, jāprojicē vienības vektors uz koordinātu asīm:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k},$$

tātad:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \tag{5}$$

3) Pieskares nolīdzinājums.

Apzīmēsim mainīgo vektoru, kuŗa gals slīd pa pieskari, ar $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{t},$$

$$(\lambda - \text{parametrs}) \tag{6}$$

Vai arī:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda\frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{7}$$

Līknes mainīgās koordinātas apzīmēsim ar x, y, z (vektora $\mathbf{r}$ projekcijas), pieskares mainīgās koordinātas ar X, Y, Z (vektora $\mathbf{R}$ projekcijas):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}.$$

Ievietojot (7):

$$X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + \lambda\left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{ds}{ds}\mathbf{k}\right).$$

Tātad:

$$X = x + \lambda\frac{dx}{ds}, \quad Y = y + \lambda\frac{du}{ds}, \quad Z = z + \lambda\frac{dz}{ds}.$$

No šejienes seko pieskares nolīdzinājums analitiskā veidā:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{ds}} = \lambda \tag{8}$$

4) Normālplaknes nolīdzinājums.

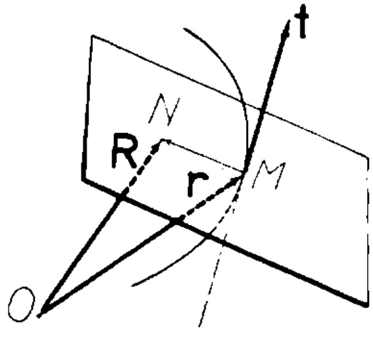
Normālplakne stateniska pret pieskari pieskaršanās punktā. (Att. 32.) Vienības vektors $\mathbf{t}$ statenisks pret normālplakni. Tāpēc:

$$\overrightarrow{MN} \perp \mathbf{t},$$

tātad:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0 \tag{9}$$

Tas ir normālplaknes nolīdzinājums vektoriālā veidā. Lai pārietu uz analitisko veidu, pieņemsim:



32. att.

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}.$$

Tad, ievietojot formulā (9):

$$\left[(X-x)\mathbf{i} - (Y-y)\mathbf{j} - (Z-z)\mathbf{k}\right] \cdot \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} - \frac{dy}{ds}\mathbf{j} - \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right) = 0,$$

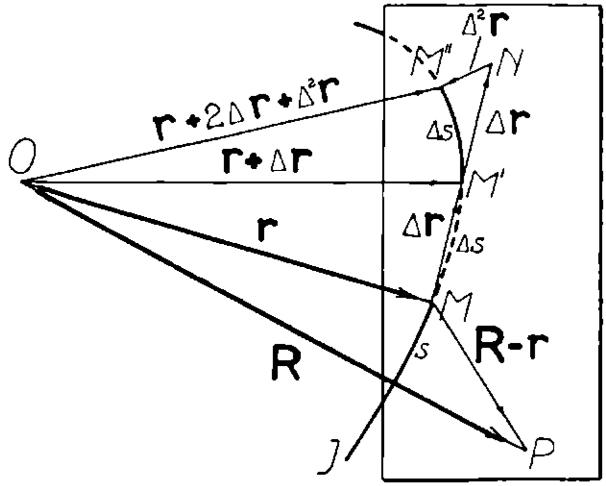
$$(X-x)\frac{dx}{ds} + (Y-y)\frac{dy}{ds} + (Z-z)\frac{dz}{ds} = 0 \qquad (10)$$

5) Oskulācijas jeb pieslejas plakne.

Uzdota līkne

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

Uzdodot parametru s (loka garumu no I), mēs nosakām vektoru $\mathbf{r}$ un reizē ar to līknes punktu M. Lokam pieaugot par Δs, vektors pieaug par $\Delta\mathbf{r}$ un noteic p. M'. (Att. 33.)



33. att.

Liksim lokam vēl pieaugt par Δs, tad pieaugs arī vektors $\overrightarrow{OM'} = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. Tā pieaugums

$$\Delta\overrightarrow{OM'} = \Delta(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = \Delta\mathbf{r} + \Delta^2\mathbf{r}$$

noteic punktu M''

Vilksim plakni caur punktiem M, M', M'' Ja tie nav uz vienas taisnes, plakne būs noteikta, viena vienīga. Tā ir parallēla vektoriem $\Delta\mathbf{r}$ un $\Delta^2\mathbf{r}$, tātad, stateniska pret vektoru $\Delta\mathbf{r} \times \Delta^2\mathbf{r}$. Vektors $\Delta\mathbf{r} \times \Delta^2\mathbf{r}$ nosaka plaknes normāles virzienu. Pēdējais ir statenisks pret ikvienu vektoru šinī plaknē. Tāds vektors ir $\mathbf{R}-\mathbf{r}$:

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot(\triangle\mathbf{r}\times\triangle^2\mathbf{r})=0,$$

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\left(\frac{\triangle\mathbf{r}}{\triangle s}\times\frac{\triangle^2\mathbf{r}}{\triangle s^2}\right)=0.$$

Tas ir plaknes nolīdzinājums caur 3 tuviem līknes punktiem. Kad $\triangle s\to 0$, plakne tiecas uz robežstāvokli, kuŗu sauc par pieslejas jeb oskulācijas plakni. Tās vektoriālais nolīdzinājums ir

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2r}{ds^2}\right)=0 \tag{11}$$

Kreisajā pusē ir 3 faktori jauktā tipa reizinājumā, kur darbības apzīmējumus var arī atmest un rakstīt:

$$\left[\mathbf{R}-\mathbf{r},\ \frac{d\mathbf{r}}{ds},\ \frac{d^2r}{ds^2}\right]=0 \tag{12}$$

Lai pārietu uz analitisko veidu, pieņemam, ka

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},$$

un tāpat

$$\mathbf{R}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}.$$

Tad seko:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2r}{ds^2}=\left[\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right]\times\left[\frac{dx}{ds}\mathbf{i}-\frac{dy}{ds}\mathbf{j}-\frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right]=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}$$

Tas jāpareizina skālāri ar $\mathbf{R}-\mathbf{r}=(X-x)\mathbf{i}+(Y-y)\mathbf{j}+(Z-z)\mathbf{k}$ un iznākums jāpielīdzina nullei. Tad dabū oskulācijas plaknes nolīdzinājumu analitiskā veidā:

$$\begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}=0 \tag{13}$$

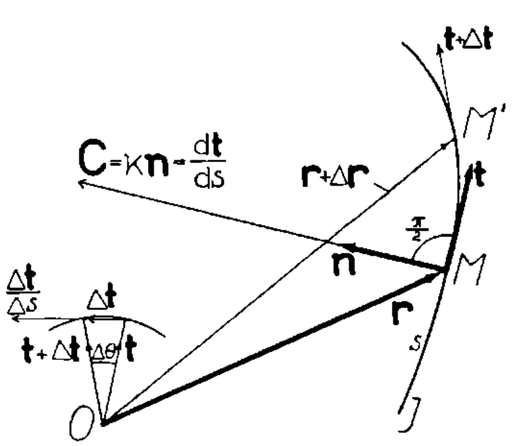
6) Līknes liece (liekums). Uzdota līkne ar nolīdzinājumu $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$; kur parametrs s ir loka gaŗums, skaitot no kāda iesākuma punkta I. (Att. 34.) Uzdodot s mēs nosakām: vektoru $\mathbf{r}$, gala punktu M un pieskares virzienu $\mathbf{t}$

šinī punktā. Citam parametram $s+\triangle s$ atbilst cits punkts M' un cits pieskares virziens $\mathbf{t}+\triangle\mathbf{t}$.

Apskatām vektoru

$$\mathbf{C}=\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\lim_{\triangle s\to 0}\frac{\triangle\mathbf{t}}{\triangle s} \tag{14}$$

No vektora $\mathbf{t}$ hodografa redzams, ka $\triangle\mathbf{t}/\triangle s$ robežstāvoklis, kad $\triangle s\to 0$, ir statenisks pret $\mathbf{t}$ ($\mathbf{C}\perp\mathbf{t}$), tātad, vektors $\mathbf{C}$ ir normālplaknē, kas vilkta pret līkni punktā M. Otrkārt, $\triangle\mathbf{t}$ ir koplanārs ar $\mathbf{t}$ un $\mathbf{t}+\triangle\mathbf{t}$, tātad, ar divi pieskarēm tuvos punktos, kas robežstāvoklī tiecas saiet kopā; no tā seko, ka vektors $\mathbf{C}$ ir arī pieslejas jeb oskulācijas plaknē. Tas ir normālplaknes un oskulācijas plaknes krustojumā uz taisnes, kuŗu sauc par galveno normāli.



34. att.

Apzīmēsim ar $\mathbf{n}$ vienības vektoru ($n=1$), kas vērsts pa galveno normali uz to pusi, uz kuŗu apskatāmā vietā griežas hodografa vektora gals. Vektori $\mathbf{C}$ un $\mathbf{n}$ atšķiŗas ar pozitīvu koeficientu $\varkappa\,(>0)$:

$$\mathbf{C}=\varkappa\,\mathbf{n},$$

tātad:

$$\varkappa\,\mathbf{n}=\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}. \tag{15}$$

Var parādīt, ka $\varkappa$ apzīmē līknes lieci (liekumu). Apskatām:

$$\left|\frac{\triangle\mathbf{t}}{\triangle s}\right|=\frac{|\triangle t|}{\triangle s}=\frac{2\sin\frac{\triangle\theta}{2}}{\triangle s}=\frac{\sin\frac{\triangle\theta}{2}}{\frac{\triangle\theta}{2}}\cdot\frac{\triangle\theta}{\triangle s}.$$

Kad $\triangle s\to 0$

$$\left|\frac{\triangle\mathbf{t}}{\triangle s}\right|\to\frac{d\theta}{ds}=\varkappa. \tag{16}$$

Ja riņķī leņķi starp pieskarēm loka galos izdala ar loka gaŗumu, dabū riņķa radiusa apgriezto vērtību ($1/\rho=$ riņķa liece). Ja kādā citā līknē dara tāpat, dabū vidējo lieci, līknes lieci kādā punktā saprot kā vidējās lieces robežu, kad loka gaŗums neaprobežoti samazinās. Lieces apgrieztā vērtība ir lieces radiuss.

Ja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, kur s loka garums, seko:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \varkappa\,\mathbf{n},$$

vai arī īsāk, atvasinājumu pēc loka apzīmējot ar apostrofu:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{t}, \quad \mathbf{r}'' = \mathbf{t}' = \varkappa\,\mathbf{n}.$$

Pēdējo nolīdzinājumu skālāri paceļ kvadrātā un atrod lieces kvadrātu:

$$\varkappa^2 = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'', \quad \varkappa = \sqrt{\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''} \tag{17}$$

Piemērs. $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$. Ortogōnālās asīs ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) dots mainīgs vektors

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

tātad:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} = \mathbf{t},$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} = \mathbf{t}.$$

Atvasinot vēlreiz

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k} = \varkappa\,\mathbf{n},$$

$$\mathbf{r}'' = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k} = \varkappa\,\mathbf{n}.$$

Tātad:

$$\varkappa^2 = \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}'' = (x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2,$$

$$\varkappa = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2} \tag{18}$$

Visbiežāk gadās, ka līkne noteikta, uzdodot koordinātu atkarību nevis no loka garuma, bet no kāda cita parametra. Piem.:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Tad, vispārīgi, var pieņemt, ka arī loka garums ir šī parametra funkcija, un otrādi. Patiešām, diferencējot iepriekšējās izteiksmes:

$$dx = \dot{x}\,du, \quad dy = \dot{y}\,du, \quad dz = \dot{z}\,du,$$

ar punktu apzīmējot atvasinājumus pēc parametra u. Paceļot kvadrātā un saskaitot:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\,du^2,$$

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = du,$$

tatad:

$$s = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,du = f(u).$$

Ja $s = f(u)$, tad arī otrādi $u = \omega(s)$, tā kā ar šīs funkcijas starpniecību x, y, z ir loka funkcijas. Uzdevums ir atrast līknes lieci, neizveidojot šo starpfunkciju, bet aprobežojoties ar zināšanu, ka tā eksistē.

Definīciju nolīdzinājumus

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{t} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\varkappa\mathbf{n}$$

pareizinām vektoriāli:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\mathbf{t}\times\varkappa\mathbf{n}=\varkappa(\mathbf{t}\times\mathbf{n})=\varkappa\mathbf{b}.$$

Še $\mathbf{t}\perp\mathbf{n}$, tāpēc $\mathbf{b}$ apzīmē vienības vektoru. Skālāri paceļot kvadrātā:

$$\varkappa^2=\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right]^2 \tag{19}$$

Šo formulu varētu lietāt lieces aprēķināšanai, ja $\mathbf{r}$ atkarība no s būtu noteikti zināma. Tas tā nav, tāpēc formula jāpārveido tā, lai varētu to izteikt ar parametru u. Jāievēro, ka

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{t},\quad \frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}=1,\ \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)^3=1.$$

Formulu (19) var paplašināt:

$$\varkappa^2=\frac{\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2r}{ds^2}\right]^2}{\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)^3}.$$

Pareizinot skaitītāju un saucēju ar $\left(\frac{ds}{du}\right)^6$ dabū:

$$\varkappa^2=\frac{\left[\frac{d\mathbf{r}}{du}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{du^2}\right]^2}{\left(\frac{d\mathbf{r}}{du}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{du}\right)^3}=\frac{[\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}]^2}{(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})^3} \tag{20}$$

7) Galvenā normāle. Par galveno normāli sauc normālplaknes un oskulācijas plaknes krustojuma taisni. (Att. 35.) Lieces vektors $\mathbf{C}=\varkappa\mathbf{n}=d^2\mathbf{r}/ds^2$ ir virzīts pa galveno normāli. Tās nolīdzinājums vektoriālā veidā ir:

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\mathbf{n}\varkappa p,$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\,p, \tag{24}$$

kur p ir parametrs.

Ja pieņem:

$$r=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{R}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k},$$

tad seko:

$$(X-x)\mathbf{i}+(Y-y)\mathbf{j}+(Z-z)\mathbf{k}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}\right)p.$$

Tātad:

$$X-x=\frac{d^2x}{ds}\rho,\quad Y-y=\frac{d^2y}{ds^2}\rho,\quad Z-z=\frac{d^2z}{ds^2}\rho.$$

No tā seko galvenās normāles nolīdzinājums analitiskā veidā:

$$\frac{X-x}{\frac{d^2x}{ds^2}}=\frac{Y-y}{\frac{d^2y}{ds^2}}=\frac{Z-z}{\frac{d^2z}{ds^2}} \tag{25}$$

8) **Binormāle.** Taisni, kas vilkta caur kādu līknes punktu stateniski pret pieslejas plakni, sauc par binormāli. Pieslejas plaknē ir divi stateniski vienības vektori: **t** pa pieskari augoša loka virzienā, un **n** — pa normāli uz lieces centra pusi. Binormāle ir stateniska pret tiem abiem, tātad, parallēla vektoram $\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$.

Ja P apzīmē kādu līknes punktu, kam vietas vektors ir **r**, un Q apzīmē binormāles punktu, kam vietas vektors **R**, tad seko, ka $\overrightarrow{PQ}$ ir kolīneārs ar **b**. Tātad:

$$\mathbf{R}-\mathbf{r}=u\mathbf{b}=u(\mathbf{t}\times\mathbf{n}), \tag{26}$$

kur u — parametrs, ir binormāles nolīdzinājums vektoriālā veidā.

Lai pārietu uz nolīdzinājuma analitisko veidu, pieņemsim, ka

$$\mathbf{R}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

No tā seko:

$$\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{n}=\rho\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}.$$

Ievietojot formulā (26):

$$(X-x)\mathbf{i}+(Y-y)\mathbf{j}+(Z-z)\mathbf{k}=$$
$$=\rho u\left[\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right]\times\left[\frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}\right].$$

Labo pusi var uzrakstīt determinanta veidā:

$$\rho u\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds}\\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2}\end{vmatrix}$$

Salīdzinot abas puses un apzīmējot $\rho u = \sigma$:

$$X - x = \sigma \begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = \sigma\left(\frac{d^2z}{ds^2}\,\frac{dy}{ds} - \frac{dz}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2}\right),$$

$$Y - y = \sigma \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix} = \sigma\left(\frac{d^2x}{ds^2}\,\frac{dz}{ds} - \frac{dx}{ds}\,\frac{d^2z}{ds^2}\right),$$

$$Z - z = \sigma \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix} = \sigma\left(\frac{d^2y}{ds^2}\,\frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2}\right).$$

Binormāles analitiskais nolīdzinājums ir:

$$\frac{X - x}{\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dz}{ds}} = \frac{Y - y}{\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{d^2z}{ds^2}\frac{dx}{ds}} = \frac{Z - z}{\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}}. \tag{27}$$

9) **Frenē formulas.** Apskatām telpas līkni $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Ikvienam tās punktam atbilst noteikts vienības vektoru triedrs: **t**, **n**, **b**. Vektors **t** ir virzīts pa pieskari uz loka pieaugšanas pusi, vektors **n** — pa normāli uz lieces centra pusi, vektors **b** ir pilnīgi noteikts ar to, ka tas kopā ar pārējiem sakārtojumā **t**, **n**, **b** veido labās rokas (direkto) triedru.

Vektoru **t**, **n**, **b** atvasinājumi pēc loka garuma s arī ir vektori. Apskatīsim šo vektoru moduļus un virzienus.

$$\text{I.}\quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \varkappa\,\mathbf{n} \tag{28}$$

Šī formula jau pierādīta, runājot par līkņu lieci. Tā kā **t** ir vienības vektors, seko $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$, tātad

$$\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0,$$

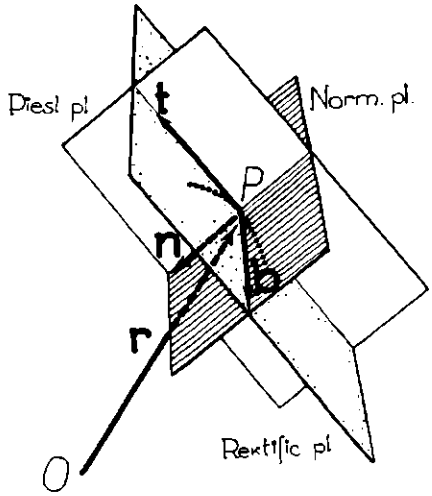
t. i. vektors $d\mathbf{t}/ds$ ir statenisks pret pieskari. To pieņem virzītu uz lieces centra pusi, tāpat vienības vektoru **n**. Tad $\varkappa$ ir pozitīvs skaitlis, ko sauc par līknes lieci (liekumu), bet tā apgriezto vērtību $1/\varkappa = \rho$ sauc par lieces (liekuma) radiusu:

$$\varkappa = \frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|$$

Liekumu var definēt arī citādi, kā robežvērtību, kuŗai tuvojas pieskares novirzīšanās leņķa attiecība pret atbilstošo loka gaŗumu, kad pēdējais neaprobežoti samazinās:

$$\varkappa = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sim \Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}.$$

II. $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\lambda \mathbf{n}$ (29)



35. att.

b ir vienības vektors, kas statenisks pret **t**, tātad, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ un $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0$. Diferencējot pirmo skālāro reizinājumu, atrod

$$\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0, \quad \text{t. i.} \ \frac{d\mathbf{b}}{ds} \perp \mathbf{b};$$

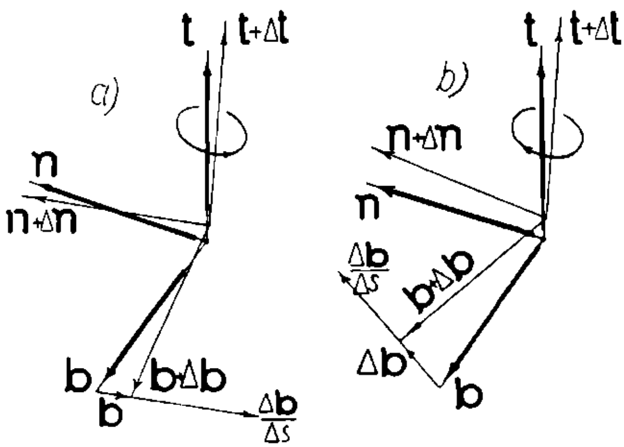
diferencējot otro dabū

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0.$$

Bet $d\mathbf{t}/ds = \varkappa \mathbf{n}$ un $\mathbf{b} \perp \mathbf{n}$, tāpēc

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0,$$

t. i. $d\mathbf{b}/ds$ ir statenisks pret **t**.



36. att.

Tā kā $d\mathbf{b}/ds$ statenisks tiklab pret **b**, kā pret **t**, tas nozīmē, ka tas kolīneārs ar **n**. Turklāt iespējami divi gadījumi, jo kolīneāri vektori var būt vērsti uz vienu pusi vai uz pretējām pusēm.

Iedomāsimies novērotāju, kas no vektora **t** gala skatās uz normālplakni. Kad loks pieaug par $\Delta s > 0$, šinī plaknē vektori griežas ap vektoru **t**. Ja vektors **b** (tā vietā var ņemt arī pieslejas plakni), no **t** gala skatoties, griežas pretēji pulksteņa rādītāja gaitai, t. i. **pozitīvas** rotācijas gadījumā, vektors $d\mathbf{b}/ds$ ir **pretēji** virzīts nekā **n**. Turpretim, ja rotācija saskan ar pulksteņa rādītāja gaitu, t. i., ja tā ir **negātīva**, tad vektors $d\mathbf{b}/ds$ ir **tāpat** virzīts kā **n**. Lai vektoru $d\mathbf{b}/ds$ izteiktu ar **n**, pēdējais pozitīvās rotācijas gadījumā jāreizina ar negātīvu skaitli, bet negātīvās rotācijas gadījumā ar pozitīvu skaitli. Saskanīgāku atbilstību dabū, ja **n** vietā raksta $-\mathbf{n}$; tā tas formulā II ir darīts.

Formula izteic:

a) Ja rotācija ir **pozitīva**, $d\mathbf{b}/ds$ un $-\mathbf{n}$ ir virzīti uz vienu pusi, reizulis $\lambda > 0$;

b) ja rotācija ir **negātīva**, $d\mathbf{b}/ds$ un $-\mathbf{n}$ ir virzīti uz pretējām pusēm, reizulis $\lambda < 0$.

Skaitli λ sauc par līknes vērpi, un tās apgriezto vērtību $1/\lambda = \tau$ par vērpes radiusu. Vērpi var definēt arī kā robežu, kuŗai tuvojas binormāles pagrieziena attiecība pret atbilstošo loka gaŗumu, kad pēdējais tiecas pret nulli.

$$\left|\frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}\right| = \frac{|\Delta \mathbf{b}|}{\Delta s} = \frac{2\sin\frac{\Delta\Theta}{2}}{\Delta s} = \frac{\sin\frac{\Delta\Theta}{2}}{\frac{\Delta\Theta}{2}} \cdot \frac{\Delta\Theta}{\Delta s} \to \frac{d\Theta}{ds}.$$

Pozitīvas griešanās gadījumā dabiski uzskatīt $d\Theta$ par pozitīvu (leņķa pieaugums pulksteņa rādītāja gaitas virzienā), bet negātīvas griešanās gadījumā par negātīvu. Tad iepriekšējā robeža saskan ar λ tiklab lielumā, kā zīmē:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta s} = \frac{d\Theta}{ds}.$$

$$\text{III.} \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\varkappa \mathbf{t} + \lambda \mathbf{b} \tag{30}$$

Lai to pierādītu, jāievēro, ka **t**, **n**, **b** (arī **n**, **b**, **t**) veido labās rokas triedru, tāpēc $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$. Atvasinot:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds}.$$

Jāievēro vēl, ka $d\mathbf{b}/ds = -\lambda\mathbf{n}$ un $d\mathbf{t}/ds = \varkappa\mathbf{n}$; tad seko:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\lambda(\mathbf{n} \times \mathbf{t}) + \varkappa(\mathbf{b} \times \mathbf{n}).$$

Tā kā $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}$ un $\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{t}$, vai arī: $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = -\mathbf{b}$ un $\mathbf{b} \times \mathbf{n} = -\mathbf{t}$, tad seko (30).

10) Vērpe. — Zinot Frenē formulas, var aprēķināt vērpi. Uzdotai līknei $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ atrodam pakāpeniski:

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{r}/ds &= \mathbf{t},\\ d^2\mathbf{r}/ds^2 &= d\mathbf{t}/ds = \varkappa\mathbf{n},\\ d^3\mathbf{r}/ds^3 &= \varkappa\, d\mathbf{n}/ds = \varkappa(-\varkappa\mathbf{t} + \lambda\mathbf{b}). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

No šiem vektoriem veido trīskārtīgo jaukto reizinājumu:

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right] = \left[\mathbf{t},\ \varkappa\mathbf{n},\ \varkappa(-\varkappa\mathbf{t} + \lambda\mathbf{b})\right] = (\mathbf{t}\times\varkappa\mathbf{n})\cdot\varkappa(\varkappa\mathbf{t} + \lambda\mathbf{b}).$$

Vektori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ veido labās rokas triedru; tātad, $\mathbf{t}\times\mathbf{n} = \mathbf{b}$. Tālāk $\mathbf{b}\cdot\mathbf{t} = 0$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right] = \varkappa^2\mathbf{b}\cdot(-\varkappa\mathbf{t} + \lambda\mathbf{b}) = \varkappa^2\lambda.$$

Tātad:

$$\lambda = \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right] \tag{32}$$

Aprēķināsim vēl $\varkappa^2$. Izejot no vienādībām $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{t}$ un $d^2\mathbf{r}/ds^2 = d\mathbf{t}/ds = \varkappa\mathbf{n}$, pareizinām tās vektoriāli vienu ar otru:

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right] = \mathbf{t}\times\varkappa\mathbf{n} = \varkappa\mathbf{b}.$$

Paceļot skalāri kvadrātā, dabū lieces kvadrātu:

$$\varkappa^2 = \left[\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right]^2 \tag{33}$$

Vērpe

$$\lambda = \frac{\left[\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}, \dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \dfrac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right]}{\left[\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\times\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right]^2} \tag{34}$$

Tā pati formula paliek spēkā, ja parametrs ir nevis s (loka garums), bet kāds cits, piem., u. Tam gadījumam atbilst formula, ko dabū no (34), tur $d\mathbf{r}/ds$, $d^2\mathbf{r}/ds^2$, vietā liekot $d\mathbf{r}/du$, $d^2\mathbf{r}/du^2$,

Piemērs.

Uzdota līkne $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, kur x, y, z atkarājas no loka garuma s. Atrast līknes vērpi.

Īsuma labad apzīmēsim atvasinātās pēc loka garuma ar apostrofu. Atvasinot dabū:

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} = \mathbf{t},$$
$$\mathbf{r}'' = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k} = \varkappa\mathbf{n}.$$

No tā seko lieces kvadrāts:

$$\varkappa^2 = \mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'' = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

Tātad, vērpe $\lambda = [\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''']: \varkappa^2 =$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \tag{35}$$

Lieces kvadrāta aprēķinā tikpat labi varēja iziet no (33):

$$\varkappa^2 = [\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''] = (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2.$$

11. Rektificējošā plakne. — Tā sauc plakni, kas stateniska pret galveno normāli līknes punktā. (Att. 35.)

Apzīmēsim mainīgo vietas vektoru līknei ar $\mathbf{r}$ un rektificējošai plaknei ar $\mathbf{R}$. Vektors $\mathbf{R} - \mathbf{r}$ ir statenisks pret $\mathbf{n}$; no tā seko rektificējošās plaknes nolīdzinājums

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

vai arī:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \varkappa \mathbf{n} = 0,$$

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0 \tag{36}$$

Lai izteiktu rektificējošo plakni analitiskā veidā, pieņemsim, ka

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

un tātad:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}.$$

Ievietojot šīs izteiksmes formulā (36) un izdarot skālāro reizināšanu, atrod:

$$(X - x)\frac{d^2x}{ds^2} + (Y - y)\frac{d^2y}{ds^2} + (Z - z)\frac{d^2z}{ds^2} = 0 \tag{37}$$

5. Vektorfunkciju integrēšana. — Ja $\mathbf{r}(t)$ ir dota funkcija, un ja eksistē kāda cita funkcija $\mathbf{F}(t)$, kuŗu atvasinot dabū pirmo:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \mathbf{r}(t), \tag{1}$$

tad $\mathbf{F}(t)$ sauc par funkcijas $\mathbf{r}(t)$ primitīvo funkciju jeb integrālu, un $\mathbf{F}(t)$ atrašanu par integrēšanu. Raksta

$$\mathbf{F}(t) = \int \mathbf{r}(t)\, dt = \mathbf{F}_0(t) + \mathbf{C},$$

kur $\mathbf{F}_0(t)$ kāda viena funkcija, kas apmierina (1). $\mathbf{C}$ ir konstants nenoteikts vektors (integrēšanas konstanta). Šīs konstantas dēļ integrālu $\mathbf{F}(t)$ sauc par nenoteikto un tā atrašanas darbību par nenoteikto integrēšanu.

Integrēšanas kārtulas pierāda ar diferencēšanu, un ikvienu diferencēšanas formulu var pārrakstīt integrēšanas simbolos.

Piemēri:

$$\int\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}+\mathbf{s}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)dt=\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}+c,$$

$$\int 2\mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt=\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}+c,$$

$$\int \mathbf{r}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,dt=\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\mathbf{c},$$

$$\int \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt=\mathbf{a}\times\mathbf{r}+\mathbf{c},\quad (\mathbf{a}=\text{const})$$

$$\int 2\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt}\,dt=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}+c.$$

Vingrinājumi.

Uzdevums 1.

Atrast funkciju $\mathbf{r}$, kas atbilst nolīdzinājumiem

$$\text{I)}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{a},\qquad \text{II)}\ \mathbf{a}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{b},$$

kur $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — konstanti vektori.

$$\text{I)}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{a}.$$

Pareizinām ar dt:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,dt=\mathbf{a}\,dt.$$

Integrējot:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\int\frac{d^2\mathbf{r}}{dt}\,dt=\int\mathbf{a}\,dt=\mathbf{a}\,t+\mathbf{C}_0.$$

Pareizinām ar dt un integrējam:

$$\mathbf{r}=\int\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt=\int(\mathbf{a}\,t+\mathbf{C}_0)\,dt=\frac{\mathbf{a}t^2}{2}+\mathbf{C}_0t+\mathbf{C}_1,$$

$$\mathbf{r}=\frac{1}{2}\,\mathbf{a}\,t^2+\mathbf{C}_0\,t+\mathbf{C}_1.$$

$$\text{II)}\ \mathbf{a}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{b}.$$

Tātad:

$$\int\left(\mathbf{a}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,dt\right)=\int\mathbf{b}\,dt,$$

$$\mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{b}\,t+\mathbf{c}.$$

Pareizinām ar dt un integrējam:

$$\int\left(\mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot dt\right)=\int(\mathbf{b}\,t\,dt+\mathbf{c}\,dt),$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{r}=\frac{1}{2}\mathbf{b}\,t^2+\mathbf{c}\,t+\mathbf{d}.$$

Uzdevums 2.

Atrast $\mathbf{r}$ no nolīdzinājuma

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{a}\,t+\mathbf{b},$$

pieņemot, ka $\mathbf{r}=0$ un $\frac{dr}{dt}=0$, ja $t=0$.

Pareizinām uzdoto diferenciālnolīdzinājumu ar dt un integrējam:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\int\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}dt=\int(\mathbf{a}\,t+\mathbf{b})\,dt=\frac{1}{2}\mathbf{a}\,t^2+\mathbf{b}\,t+\mathbf{c}.$$

Ja $t=0$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{c}=0$, tātad, meklējamās vektorfunkcijas atvasinātā

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\,t^2+\mathbf{b}\,t.$$

No šejienes:

$$\mathbf{r}=\int\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt=\int\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}\,t^2+\mathbf{b}\,t\right)dt=\frac{1}{6}\mathbf{a}\,t^3+\frac{1}{2}\mathbf{b}t^2+\mathbf{d}.$$

Ja $t=0$, $\mathbf{r}=\mathbf{d}=0$, tātad:

$$\mathbf{r}=\frac{1}{6}\mathbf{a}\,t^3+\frac{1}{2}\mathbf{b}\,t^2.$$

Uzdevums 3.

Ko var teikt par vektoru $\mathbf{U}=\mathbf{U}(t)$, ja tas pastāvīgi kolineārs savai ģeometriskai atvasinātai $d\mathbf{U}/dt$?

Apzīmēsim vienības vektoru $\mathbf{U}$ virzienā ar $\mathbf{u}$ un vektora $\mathbf{U}$ moduli ar k. Acīm redzot $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$, $k=k(t)$, un $\mathbf{U}=k\,\mathbf{u}$.

Atvasinātā:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=\frac{dk}{dt}\mathbf{u}+k\,\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Lai $d\mathbf{U}/dt$ būtu kolineārs ar $\mathbf{U}$ (tātad ar $\mathbf{u}$) otram summandam jāizzūd. Ja tas izzūd, iepriekšējā formula izteic $d\mathbf{U}/dt$ un $\mathbf{U}$ kolineāritāti; ja tas neizzūd, kolineāritātes nav. Nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam, lai $\mathbf{U}$ pastāvīgi būtu kolineārs ar $d\mathbf{U}/dt$, ir tas, ka

$$k\frac{d\mathbf{U}}{dt}=0,\quad \frac{d\mathbf{U}}{dt}=0,$$

$$\mathbf{U}=\text{const},$$

t. vektora $\mathbf{U}$ virzienam jābūt nemainīgam.

Uzdevums 4.

Parādīt, ka, ja kādā kustībā ātruma virziens nemainās, tad kustība ir pa taisni.

Ātruma virziens ir nemainīgs un noteikts ar konstantu vektoru **a**, bet ātruma lielums ir mainīgs skālārs $k = k(t)$. Tātad:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}k(t).$$

Pareizinām ar dt un integrējam:

$$\mathbf{r} = \int \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{a} \int k(t)\, dt = \mathbf{a} \,.\, \mathrm{K}(t),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \,.\, \mathrm{K}(t).$$

No tā redzams, ka **r** ir kolineārs ar konstantu vektoru **a**, tātad, kustība notiek pa taisni, kas paralēla vektoram **a**.

Uzdevums 5.

Pierādīt, ka, ja kādā kustībā ātrums paralēls noteiktai plaknei, kustība norisinās plaknē.

Kustības ātruma vektors $d\mathbf{r}/dt$ ir paralēls noteiktai plaknei jeb koplanārs divi uzdotiem vektoriem **a** un **b**:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b},$$

kur $\lambda = \lambda(t)$, $\mu = \mu(t)$. Pareizinot ar dt un integrējot

$$\mathbf{r} = \int \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{a} \int \lambda\, dt + \mathbf{b} \int \mu\, dt,$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\,\lambda_1 + \mathbf{b}\,\mu_1.$$

Tas nozīmē, **r** ir koplanārs ar **a** un **b**, tātad, kustība ir plaknes kustība.

Uzdevums 6.

Ko var teikt par vektoru $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$, ja

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2} = \lambda \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mu\mathbf{U},$$

kur λ un μ ir skālāras funkcijas, kurām arguments ir t?

Pareizinām vektoriāli ar **U**:

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2} \times \mathbf{U} = \lambda\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \times \mathbf{U}\right) + \mu\,\mathbf{U} \times \mathbf{U} = \lambda\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \times \mathbf{U}\right).$$

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \times \mathbf{U}\right)' = \frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2} \times \mathbf{U} = \lambda\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \times \mathbf{U}\right).$$

Apzīmēsim:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \times \mathbf{U} = \mathbf{V}.$$

Tātad, mums ir vektors **V** tāds, ka

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \lambda\,\mathbf{V}$$

Saskaņā ar uzdevumu 3 tas nozīmē, ka vektora **V** virziens ir nemainīgs; citādi:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}\times\mathbf{U}$$

ir nemainīga virziena vektors. Šis vektors ir statenisks reizē pret **U** un $d\mathbf{U}/dt$. Otrādi: vektors **U** ir statenisks pret nemainīgu virzienu, tātad, koplanārs noteiktai plaknei.

Uzdevumi VI.

1. Diferencēt sekojošas izteiksmes, kur **r** ir funkcija, kas atkarājas no t, r ir tās modulis un pārējie lielumi ir konstanti:

$$(\mathrm{I})\ \frac{\mathbf{r}}{r^2}+\frac{r\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}},\quad (\mathrm{II})\ \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{a}}{\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}},\quad (\mathrm{III})\ \frac{\mathbf{r}+\mathbf{a}}{\mathbf{r}^2+\mathbf{a}^2}.$$

2. Gadījumā, ja $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}\times d^2\mathbf{r}=0$, pierādīt, ka vektoram $\mathbf{r}\times d\mathbf{r}$ ir nemainīgs virziens un ka **r** ir vienmēr paralēls noteiktai plaknei.

3. Pierādīt, ka līkne $\mathbf{r}=\mathbf{a}\cos t+\mathbf{b}\sin t$ ir ellīpse, kuŗai **a** un **b** ir piekārtotie radiusi. Uzrakstīt uzdotam ellīpses radiusam **r** atbilstošo piekārtoto.

4. Parallēlogramam, ko veido ellīpses konjugētie (piekārtotie) radiusi, laukums ir konstants.

5. Ja vērpe visos līknes punktos ir nulle, līkne ir plaknes līkne. Izejot no tā pierādīt, ka nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam, ka līkne ir plaknes līkne, ir tas, ka

$$[\mathbf{r}',\ \mathbf{r}'',\ \mathbf{r}''']=0.$$

6. Pierādīt sakarības:

$$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'''=-\varkappa^2,\quad \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}^{(IV)}=-3\varkappa\varkappa',$$
$$\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'''=\varkappa\varkappa'.$$

7. Pierādīt, ka ikvienai līknei $\mathbf{t}'\cdot\mathbf{b}'=-\varkappa\lambda$.

8. Skrūves līnijai uz riņķa cilindra ir nolīdzinājums

$$\mathbf{r}=a\cos\Theta\,\mathbf{i}+a\sin\Theta\mathbf{j}+a\,\Theta\,tg\alpha\,\mathbf{k}.$$

Pierādīt, ka šai līknei tiklab liekums kā vērpe ir konstanta.

9. Ja vietas vektors **r** izteikts atkarībā no parametra u, tad

$$\mathbf{r}=s'\mathbf{t},\quad \mathbf{r}''=s''\mathbf{t}+\varkappa s'^2\mathbf{n},$$
$$\mathbf{r}'''=(s'''-\varkappa^2 s'^3)\,\mathbf{t}+s'(3\varkappa s''+k's')\,\mathbf{n}+\varkappa\lambda s'^3\mathbf{b},$$

kur apostrofs apzīmē atvasināšanu pēc parametra u.

10. Pamatojoties uz iepriekšējā uzdevuma iznākumiem, pierādīt, ka ikvienai līknei, kuŗai vietas vektors **r** atkarīgs no parametra u,

$$\varkappa=\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''/ks'^3,\quad \mathbf{n}=(s'\mathbf{r}''-s''\mathbf{r}')/ks'^3,$$
$$\varkappa^2=(\mathbf{r}''^2-s''^2)/s'^4,\quad \lambda=[\mathbf{r}',\ \mathbf{r}'',\ \mathbf{r}''']/k^2s'^6.$$

VII.

Lauku teōrijas elementi.

1. **Jēdziens par skālāru un vektoriālu lauku. Hamiltona diferenciāloperātors.** — Par l a u k u sauc aprobežotu vai neaprobežotu telpu, kuŗas punktiem ar noteiktu likumu piekārtotas zināma lieluma vērtības. Šis lielums, kuŗa vērtības telpas punktiem piekārtotas, var būt skaitlisks, tad lauku sauc par s k ā l ā r u; tas var būt arī vektoriāls, tad runā par v e k t o r u l a u k u.

Funkciju, kas skālāru vai vektoriālu lielumu piekārto telpas punktiem, sauc par v i e t a s f u n k c i j u, p u n k t a f u n k c i j u (point-function) vai l a u k a f u n k c i j u (Feldfunktion). Piemēram, ja punktam $P(x, y, z)$ atbilst $V = V(x, y, z)$, tad ar to ir definēts skālārs lauks; ja punktam $P(x, y, z)$ atbilst vektors $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$, tad ar to ir definēts vektoru lauks. Par funkcijām pieņemsim, ka tās ir vienvērtīgas, nepārtrauktas un diferencējamas.

Gandrīz viss, kas vajadzīgs lauku raksturīgāko diferenciālo īpašību pētīšanai, ir ietverts diferenciāloperātorā, kuŗu lietāt iesāka H a m i l t o n s. Šo diferenciāloperātoru apzīmē ar simbolu ∇, kuŗā daži saskata līdzību ar seno asiriešu kokli un tās vardā to sauc par „nabla"; citi atkal uzskata to par apgrieztu grieķu burtu delta, apgriež šinī vārdā burtu kārtību un dabū apzīmējumu „atled". Vēl citi (piem. Gibb's, Vilsons) simbolu ∇ proponē lasīt vienkārši „del".

H a m i l t o n a d i f e r e n c i ā l o p e r ā t o r a d e f i n ī c i j a (3 veidi):

$$\left.\begin{aligned} \nabla\ \ &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \\ \nabla\cdot &= \mathbf{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}, \\ \nabla\times &= \mathbf{i}\times\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\times\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\times\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ar pirmo operātora veidu iedarbojas uz skālāru punkta funkciju, piem. $V = V(x, y, z)$, un iznākumā dabū vektoru, ko sauc par funkcijas g r a d i e n t u:

$$\nabla V = \mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z} = \operatorname{grad} V. \tag{2}$$

gradients ir statenisks pret virsmu $V(x, y, z) = C$, kuŗas punktos funkcijas vērtība ir vienāda un vienlīdzīga konstantai C (l ī m e ņ a v i r s m a); tas redzams no tā, ka virsmas normālei punktā $P(x, y, z)$ virziena koeficienti ir proporcionāli $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial z$. Gradienta absolūtais lielums, no (2):

$$|\text{grad } V| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \tag{3}$$

Operātora ∇ pievienošanu skālāram V var uzskatīt par simboliska vektora ∇ reizināšanu ar skālāru V. Līdzīgā kārtā ar šo operātoru iedarbojas uz vektoriālu lauka funkciju, piem. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$; arī šo iedarbību uztveŗ kā simboliska vektora ∇ reizināšanu ar vektoru $\mathbf{F}$, šķirojot skālāro reizināšanu no vektoriālas. Skālārās reizināšanas iznākumu sauc par vektorfunkcijas divergenci, vektoriālas — par rotoru jeb rotāciju:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \text{div } \mathbf{F}, \tag{4}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \text{rot } \mathbf{F}. \tag{5}$$

Tiklab diverģence, kā rotācija ir punkta funkcijas; pirmā ir skālāra, otrā — vektoriāla.

Ja vektorfunkcija $\mathbf{F}$ uzdota ar komponentēm ortogōnālās koordinātu asīs:

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k},$$

kur $F_i = F_i(x, y, z)$, $(i = 1, 2, 3)$, tad seko, pēc funkcijas $\mathbf{F}$ parciālo atvasināto ievietošanas formulās (4) un (5):

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \tag{6}$$

un

$$\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right). \tag{7}$$

Pēdējo formulu vieglāk paturēt atmiņā, ja to uzraksta simboliskā veidā:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Rotācijas apzīmēšanai Maxwell's (1890.) ieveda lietāšanā terminu curl (= sproga, cirta), kas plaši izplatīts angļu un amerikāņu literātūrā. Tāpēc visur, kur lietāts saīsinājums rot, var, ja patīk, rakstīt curl:

rot **F** neatšķiŗas no curl **F**.

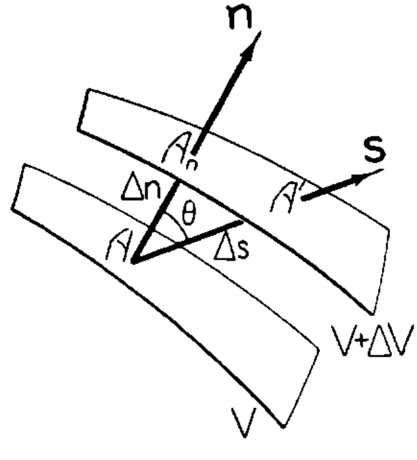
2. Virzītā atvasinātā skālārām un vektoriālām punkta funkcijām. — Apskatīsim skālāru punkta funkciju $V = V(x, y, z)$. Pieņemsim, ka apskatāmā argumenta vērtību apgabalā tā ir vienvērtīga un nepārtraukta un ka tai ir vienvērtīgas un nepārtrauktas atvasinātās.

Caur punktu $A\,(x, y, z)$ velkam taisni, kuŗas virziens uzdots ar kosiniem α, β, γ. Uz taisnes ņemam punktu $A'\,(x', y', z')$, atstatumā $|AA'| = \triangle s$ (att. 37); tā koordinātes:

$$x' = x + h, \qquad y' = y + k, \qquad z' = z + l,$$

kur koordinātu pieaugumiem ir šādas nozīmes:

$$h = \alpha \triangle s, \quad k = \beta \triangle s, \quad l = \gamma \triangle s. \quad (1)$$



37. att.

Punktā A' funkcijas vērtība ir $V(x', y', z')$. Iesākumā uzskaitītiem noteikumiem spēkā esot, funkciju var izvirzīt rindā, kas sakārtota pēc argumenta pieaugumu h, k, l pakāpēm:

$$V(x', y', z') = V(x + h, y + k, z + l) =$$

$$= V(x,y,z) + h\frac{\partial V}{\partial x} + k\frac{\partial V}{\partial y} + l\frac{\partial V}{\partial z} + \ldots$$

Tātad, funkcijas pieaugums

$$\triangle V = V(x', y', z') - V(x, y, z) = h\frac{\partial V}{\partial x} + k\frac{\partial V}{\partial y} + l\frac{\partial V}{\partial z} +$$

Tālāk seko locekļi, kur ir h^2, k^2, l^2, hk. hl, kl, Ievērojot to, ka argumentu pieaugumus var izteikt ar $\triangle s$, dabū:

$$\triangle V = \left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right)\triangle s + (\qquad\qquad)\triangle s^2 +$$

$$\lim_{\triangle s \to 0}\frac{\triangle V}{\triangle s} = \alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2)$$

Šī robežvērtība raksturo punkta funkcijas $V(x, y, z)$ maiņu pārvietojoties noteiktā virzienā, kuŗa kosini ir attiecīgi α, β. γ. Virziens ir kolīneārs vienības vektoram

$$\mathbf{s} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k},$$

kur $s = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$. Ja virzienu vērš paralleli vienai no koordinātu asīm, robežvērtība ir vienlīdzīga attiecīgi $\partial V/\partial x$, $\partial V/\partial y$, $\partial V/\partial z$. Ja virziens uzdots ar vektoru $\mathbf{s}\,(\alpha, \beta, \gamma)$, tam atbilst robežvērtība, kuŗu sauc par punkta funkcijas atvasināto šinī virzienā jeb, īsāk, par v i r z ī t o   a t v a s i n ā t o. Tās apzīmēšanai lietāsim parasto parciālas atvasinātās simbolu:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \lim_{\triangle s \to 0}\frac{\triangle V}{\triangle s} = \alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3)$$

Labo pusi šinī vienādībā var uztvert kā skālāro reizinājumu

$$(\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}) \cdot \left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

kas vienlīdzīgs $\mathbf{s} \cdot \nabla V$.

Tātad, **punkta funkcijas $V(x, y, z)$ atvasināto vienības vektora $\mathbf{s}(\alpha, \beta, \gamma)$ virzienā dabū skalāri pareizinot $\mathbf{s}$ ar funkcijas gradientu:**

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot \nabla V = \mathbf{s} \cdot \operatorname{grad} V. \tag{4}$$

Ņemsim uz līmeņvirsmas $V(x, y, z) = C$ punktu $A(x, y, z)$ un apzīmēsim ar $\mathbf{n}$ vienības vektoru, kas vērsts virsmas normāles virzienā uz to pusi, kur C pieaug. Virzienam atbilst atvasinātā:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla V = |\nabla V| = |\operatorname{grad} V|. \tag{5}$$

Tātad, **punkta funkcijas $V(x, y, z)$ atvasinātā vektora $\mathbf{n}$ virzienā, kas vērsts pa līmeņvirsmas $V(x, y, z) = C$ normāli uz to pusi, kur parametrs C pieaug, ir vienlīdzīga gradienta absolūtam lielumam:**

$$\frac{\partial V}{\partial n} = |\operatorname{grad} V| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}, \tag{6}$$

saskaņā ar (3) 136. lp. p.

Gradientu, kā katru vektoru, var izteikt ar savu absolūto lielumu un sava virziena vienības vektoru $\mathbf{n}$ $(n = 1)$:

$$\nabla V = \operatorname{grad} V = |\operatorname{grad} V| \, \mathbf{n}.$$

Ievietojot to formulā (4):

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot |\operatorname{grad} V| \mathbf{n} = |\operatorname{grad} V| \, \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}.$$

Apzīmējot leņķi starp $\mathbf{n}$ un $\mathbf{s}$ ar Θ un ievērojot (6) atrodam:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos \Theta \tag{7}$$

Vārdos šo sakarību var izteikt tā:

Funkcijai $V(x, y, z)$ atvasinātā līmeņvirsmas normāles virzienā ir vislielākā. Atvasināto citā virzienā atrod projecējot to uz šo virzienu.

Ja no uzdota līmeņa virsmas punkta izvēl virzienus uz to pusi, kur funkcija pieaug, un šinīs virzienos konstruē vektorus, kuŗu lielums tāds pats, kā atvasinātai attiecīgā virzienā, tad vektoru gala punkti ir uz lodes virsmas, kuŗai gradients ir diametrs. (Att. 38.)

Virzītās atvasinātās atrašanu skālārai punkta funkcijai virzienā s (α, β, γ) var uztvert kā darbību, ko izteic operātors

$$\mathbf{s} \cdot \nabla = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} . \qquad (8)$$

Lietājot operātoru sakarā ar punkta funkciju $V = V(x, y, z)$ atrod, ka

$$(\mathbf{s} \cdot \nabla) V = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}\right) V =$$

$$= \alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} = \mathbf{s} \cdot (\nabla V),$$

tā ka iekavas darbību paskaidrošanai ir nevajadzīgas un tās var atmest:

$$(\mathbf{s} \cdot \nabla) V = \mathbf{s} \cdot (\nabla V) = \mathbf{s} \cdot \nabla V.$$

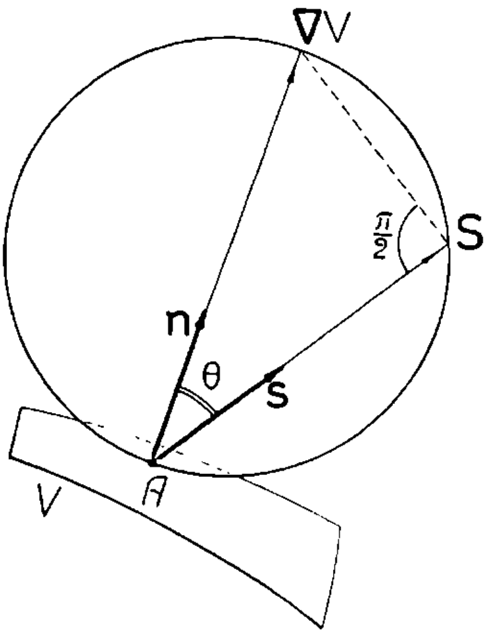
Ja vienības vektors s (α, β, γ) uzdod nemainīgu virzienu vektoru laukā, un lauka funkcija ir

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$$

tās atvasināto uzdotā virzienā definē tā pati formula (3), ja tur V aizvieto ar **F**:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta s} = \alpha \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} +$$

$$+ \beta \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{F} \qquad (9)$$



38. att.

Še Δs, tāpat kā skālāra lauka gadījumā, apzīmē pārvietojumu pa uzdota virziena taisni no punkta A (x, y, z) līdz punktam A', un Δ **F** apzīmē vektorfunkcijas pārmaiņu šinī pārvietojumā. (9) rāda, ka operātors $\mathbf{s} \cdot \nabla$ dod virzīto atvasināto tiklab skālārām, kā vektoriālām punkta funkcijām.

3. **Rēķināšanas kārtulas gradientam, diverģencei un rotācijai.** — Hamiltona operātora ∇ definīcija palīdz noskaidrot gradienta, diverģences un rotācijas īpašības un to, kā ar šīm funkcijām jārēķina.

Ja operands ir summa:

$$\left.\begin{aligned} \nabla (u + v) &= \nabla u + \nabla v, \\ \nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \nabla \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

vai arī:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad}(u+v) &= \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{rot} \mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

Kārtulu viegli paplašināt gadījumam, kad summandu ir vairāk par 2. Par summandiem $u, v, \ldots$ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$ jāatzīmē, ka tie ir skālāras vai, attiecīgi, vektoriālas punkta funkcijas, kas atkarīgas no x, y, z.

Hamiltona operātors, ja tam pakļauj nemainīgu lielumu, dod iznākumā nulli. Tātad, ja $a = \text{const}$, tad $\operatorname{grad} a = 0$. Tāpat, ja $\mathbf{a} = \text{const}$, tad seko, ka $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$. Vai arī:

$$\nabla a = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{a} = 0.$$

Ja operands ir divu faktoru reizinājums, iespējami 3 gadījumi: 1) abi faktori ir skālāri, 2) abi faktori ir vektori, un 3) abi faktori ir dažādas dabas. Tiem atbilst 6 kārtulas.

Kārtula I.

$$\left.\begin{aligned} \nabla(uv) &= u\nabla v + v\nabla u, \\ \operatorname{grad}(uv) &= u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Pierādījums.

$$\operatorname{grad}(uv) = \mathbf{i}\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial(uv)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial(uv)}{\partial z} =$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}v + \frac{\partial v}{\partial x}u\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial y}u\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial u}{\partial z}v + \frac{\partial v}{\partial z}u\right) =$$

$$= u\left(\mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial v}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u.$$

Kārtula II.

$$\left.\begin{aligned} \nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{u}) + \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{v}), \\ \text{vai:} \quad \operatorname{grad}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

kur

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}. \qquad (4)$$

un tāpat

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{i}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{k}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}. \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

Pierādījums.

$$\operatorname{grad}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{i}\frac{\partial(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{\partial z} =$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\cdot\mathbf{v}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\cdot\mathbf{v}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\cdot\mathbf{v}\right) +$$

$$+ \mathbf{i}\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\right) + \mathbf{j}\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\mathbf{u}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\right) =$$

$$\sum_{m=1}^{3}\mathbf{i}_m\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_m}\cdot\mathbf{v}\right) + \sum_{m=1}^{3}\mathbf{i}_m\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_m}\cdot\mathbf{u}\right),$$

kur jāsaprot:

$$x_1 = x,\quad x_2 = y,\quad x_3 = z;$$
$$\mathbf{i}_1 = \mathbf{i},\quad \mathbf{i}_2 = \mathbf{j},\quad \mathbf{i}_3 = \mathbf{k},$$

Tālāk apskatām:

$$\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{v}\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\right) =$$

$$= \mathbf{v}\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right) + \mathbf{v}\times\left(\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\right) + \mathbf{v}\times\left(\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\right).$$

Saskaņā ar izvirzījuma formulu:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

dabūsim:

$$\mathbf{v}\times\left(\mathbf{i}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right) = \left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\right)\mathbf{i} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{i})\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x},$$

$$\mathbf{v}\times\left(\mathbf{j}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\right) = \left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\right)\mathbf{j} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{j})\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y},$$

$$\mathbf{v}\times\left(\mathbf{k}\times\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\right) = \left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\right)\mathbf{k} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}$$

Saskaitot:

$$\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{u} = \sum_{m=1}^{3}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_m}\right)\mathbf{i}_m - \mathbf{v}\cdot\nabla\,\mathbf{u},$$

tātad:

$$\sum_{m=1}^{3}\mathbf{i}_m\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_m}\cdot\mathbf{v}\right) = \mathbf{v}\cdot\nabla\,\mathbf{u} + \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{u}.$$

Līdzīgā kārtā

$$\sum_{m=1}^{3}\mathbf{i}_m\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_m}\cdot\mathbf{u}\right) = \mathbf{u}\cdot\nabla\,\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}.$$

Saskaitot abas beidzamās vienādības, dabū (3).

Nemainīga vektora diferenciālfunkcijas izzūd. Piem., ja $\mathbf{v} = \mathbf{a} = \text{const}$, tad seko $\nabla \mathbf{v} = \nabla \mathbf{a} = 0$, $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = 0$, tātad:

$$\left.\begin{aligned} \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \\ \text{vai arī} \quad \text{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{u}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Kārtula III.

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot (u \mathbf{v}) &= u (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla u, \\ \text{vai} \quad \text{div} (u \mathbf{v}) &= u \,\text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } u. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Pierādījums.

$$\text{div} (u \mathbf{v}) = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial (u \mathbf{v})}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial (u \mathbf{v})}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial (u \mathbf{v})}{\partial z} =$$

$$= u \left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) + \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z} \right) =$$

$$= u \,\text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } u.$$

Secinājums 1.

Ja $u = a = \text{const}$, tad $\nabla u = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot (a \mathbf{v}) &= a \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \text{div} (a \mathbf{v}) &= a \,\text{div } \mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Secinājums 2.

Ja $\mathbf{v} = \mathbf{a} = \text{const}$, tad $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot (u \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \nabla u, \\ \text{div} (u \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \text{grad } u. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Kārtula IV.

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}), \\ \text{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Pierādījums.

$$\text{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{\partial z} =$$

$$= \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) + \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) + \mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right).$$

Attaisot iekavas un pārkārtojot trīskārtīgos jauktos reizinājumus, atrod:

$$\text{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) +$$

$$+ \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \times \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \times \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \times \mathbf{k} \right) = \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v},$$

tātad:

$$\text{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v}.$$

Kārtula V.

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times u \mathbf{v}) &= \nabla u \times \mathbf{v} + u \nabla \times \mathbf{v}, \\ \text{rot} (u \mathbf{v}) &= \text{grad } u \times \mathbf{v} + u \,\text{rot } \mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \tag{10}$$

Kārtula VI.

$$\left.\begin{aligned} &\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{u}), \\ \text{vai:}\quad &\operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Pierādījumi.

V) $\operatorname{rot} (u\mathbf{v}) = \nabla \times (u\mathbf{v}) = \mathbf{i} \times \frac{\partial (u\mathbf{v})}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial (u\mathbf{v})}{\partial y} + \qquad =$

$$= \mathbf{i} \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{v} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right) + \mathbf{j} \times \left(\frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{v} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right) + \mathbf{k} \times \left(\frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{v} + u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(\mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z}\right) \times \mathbf{v} + u \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right) =$$

$$= (\nabla u) \times \mathbf{v} + u \nabla \times \mathbf{v} = \operatorname{grad} u \times \mathbf{v} + u \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

VI) $\operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{i} \times \frac{\partial (\mathbf{u} \times \mathbf{v})}{\partial x} + \qquad =$

$$= \mathbf{i} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right) + \mathbf{j} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right) + \mathbf{k} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right).$$

Trīskārtīgie vektoriālie reizinājumi jāizvirza:

$$\mathbf{i} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \mathbf{v}\right) = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right) \mathbf{v},$$

$$\mathbf{j} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \times \mathbf{v}\right) = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - \left(\mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right) \mathbf{v},$$

$$\mathbf{k} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \times \mathbf{v}\right) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}\right) \mathbf{v}.$$

No tā seko, ja saskaita:

$$\sum_1 = \mathbf{i} \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \times \mathbf{v}\right) + \qquad = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{u};$$

tāpat

$$\sum_2 = \mathbf{i} \times \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \times \mathbf{u}\right) + \qquad = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Tātad: $\operatorname{rot} (\mathbf{u} \times) = \sum_1 - \sum_2 =$

$$= \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Ja V un $\mathbf{F}$ ir punkta funkcijas, tad arī ∇V (gradients), $\nabla \cdot \mathbf{F}$ (diverģence) un $\nabla \times \mathbf{F}$ (rotācija) ir punkta funkcijas. Otrā ir skālāra, tai ir gradients; pirmā un trešā ir vektoriālas, tām ir diverģence un rotācija. Pavisam iespējamas piecas **otrās kārtas diferenciālfunkcijas:**

I) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F}$,

II) $\operatorname{div} \operatorname{grad} V = \nabla \cdot \nabla V$,

III) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F}$,

IV) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V = \nabla \times \nabla V$,

V) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}.)$

Šo funkciju izvirzījumi:

I) grad div $\mathbf{F} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} =$

$$= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (\mathrm{div}\, \mathbf{F}) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} (\mathrm{div}\, \mathbf{F}) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} (\mathrm{div}\, \mathbf{F}). \tag{12}$$

II) div grad $V = \nabla \cdot \nabla V =$

$$= \mathbf{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\mathrm{grad}\, V) + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\mathrm{grad}\, V) + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\mathrm{grad}\, V =$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{13}$$

Iznākumu raksta arī:

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = \Lambda V,$$

apzīmējot ar Λ Laplasa operātoru:

$$\Lambda = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{14}$$

III) div rot $\mathbf{F} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0.$ (15)

Šo iznākumu visvieglāk paturēt atmiņā, ja operātoru ∇ uztveŗ kā vektoru un atceras, ka trīskārtīgais jauktais vektoru reizinājums ir nulle, kad tanī divi faktori ir vienādi. Pierādījums:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{F} = \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}.$$

div rot F =

$$= \mathbf{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) +$$

$$+ \mathbf{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\qquad . \right) +$$

$$+ \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\qquad . \right) =$$

$$= \left(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \times \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y\, \partial x} \right) + \left(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} \times \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x\, \partial y} \right) + \qquad = \mathbf{0}.$$

IV) rot grad $V = \nabla \times \nabla V = 0.$ (16)

Pierādījums:

$$\mathrm{rot\ grad}\, V = \nabla \times \left(\mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

V) $\mathrm{rot\ rot}\,\mathbf{F} = \mathrm{grad\ div}\,\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}$, (17)

kur

$$\nabla^2\mathbf{F} = \frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial z^2};$$

jeb

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla\nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}. \qquad (17')$$

Pierādījums.

$$\mathrm{rot\ rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\right)$$

Iekavas labā pusē jāatver un jāapskata atsevišķie summandi .Pirmais ir

$$\nabla \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right),$$

un divi pārējie seko, ja pirmā **i** un x aizvieto ar **j** un y vai attiecīgi ar **k** un z. Apskatām pirmo:

$$\nabla \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right) \times \mathbf{j} = \frac{\partial \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right)}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right)}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right)}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathbf{i} \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right) + \mathbf{j} \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\right) + \mathbf{k} \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\right)\right].$$

Trīskārtīgos vektoriālos reizinājumus stūŗainajā iekavā var izvirzīt saskaņā ar formulu:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

Tad seko:

$$\mathbf{i} \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right) = \left(\mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right)\mathbf{i} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x},$$

$$\mathbf{j} \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\right) = \left(\mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\right)\mathbf{i},$$

$$\mathbf{k} \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\right) = \left(\mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\right)\mathbf{i}.$$

Saskaitot:

$$[\qquad\qquad] = \mathbf{i}\,\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}.$$

Tātad:

$$\nabla \times \left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\right) = \mathbf{i}\,\frac{\partial\,(\nabla \cdot \mathbf{F})}{\partial x} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2},$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\right) = \mathbf{j}\,\frac{\partial\,(\nabla \cdot \mathbf{F})}{\partial y} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y^2},$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\right) = \mathbf{k}\,\frac{\partial\,(\nabla \cdot \mathbf{F})}{\partial z} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z^2},$$

no kurienes seko, kad saskaita:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla\nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}.$$

VIII.

Līknes, virsmas un tilpuma integrāli.

1. Līknes un virsmas integrāli. — Uzdota vektoriāla punkta funkcija $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ un līkne telpā ar vietas vektoru

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \tag{1}$$

kur x, y, z ir kāda parametra, visērtāk — loka garuma s funkcijas:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Ikvienam līknes punktam atbilst noteikta virziena un lieluma vektors $\mathbf{F}$, kuru var uztvert kā tā paša parametra s funkciju:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(x(s), y(s), z(s))$$

Līknes virzienu kādā punktā $\mathbf{r}$ raksturo loka augšanas virzienā pa pieskari vērstais vienības vektors

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (t = 1) \tag{2}$$

Šī vienības vektora skālārais reizinājums ar $\mathbf{F}$ dod vektora komponenti pieskares virzienā $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$, kuru arī var uzskatīt par s funkciju.

Pieņemsim, ka A un B ir divi līknes punkti vektoru $\mathbf{F}$ laukā, un ka virziens $A \to B$ ir loka pieaugšanas virziens (pozitīvais virziens). Loku AB sadalīsim elementos, ikvienu elementu reizināsim ar attiecīgo vektora $\mathbf{F}$ tangentiālo komponenti $\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ un reizinājumus saskaitīsim, t. i. veidosim noteikto integrālu

$$\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\, ds,$$

ko sauc par vektorfunkcijas $\mathbf{F}$ tangentiālo līknes integrālu.

No (2) seko, ka $\mathbf{t}\, ds = d\mathbf{r}$:

$$\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\, ds = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{3}$$

Analitiski, ja vektors $\mathbf{F}$ uzdots ar tā komponentēm F_1, F_2, F_3 ortogonālās koordinātu asīs:

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

un ja ievēro, ka saskaņā ar (1)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz,$$

dabū, ka tangentiālais līknes integrāls

$$\int_{S_1}^{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{S_1}^{S_2} (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz). \tag{4}$$

Īpašā gadījumā, kad vektorfunkcija **F** ir skālāras punkta funkcijas V gradients

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} V = \nabla V = \mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z},$$

skālārais reizinājums

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \nabla V \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = dV,$$

tātad, līknes integrāls starp punktiem A un B

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \quad V \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B dV = V_B - V_A. \tag{5}$$

Tas nozīmē:

Gradienta ∇V tangentiālais līknes integrāls ir vienlīdzīgs funkcijas V vērtību starpībai gala punktos.

Ja funkcija ir vienvērtīga un integrālu aprēķina visapkārt noslēgtai līknei, tad $V_B = V_A$ un $V_B - V_A = 0$. Tātad:

Gradienta integrāls visapkārt noslēgtai līknei ir nulle:

$$\int_C \quad V \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{6}$$

Integrēšanas simbolam pievienotais C šeit apzīmē integrēšanu visapkārt līknei.

Otrāds secinājums arī ir spēkā:

Ja kādai vektorfunkcijai **F** *tangentiālais līknes integrāls ir nulle gar ikvienu noslēgtu līkni, kā integrācijas ceļu, tad šī funkcija ir kādas skālāras punkta funkcijas V gradients.*

Pieņemsim, ka vektoru **F** laukā uzdota noslēgta līkne C (kontūrs) uz virsmas S. Izvēlēsim līknei noteiktu apiešanas virzienu. Virsmas elementa dS stāvokli telpā raksturosim ar vienības vektoru **n**, kas statenisks pret apskatāmo virsmas elementu un kas virzīts tā, ka raugoties uz kontūru (C) no vektora gala apiešanas virziens ir pozitīvs jeb pretējs pulksteņa rādītāja gaitai. Par pašu vektorfunkciju **F** jāatzīmē pieņēmums, ka tā vismaz apskatāmā virsmas daļā atbilst vienvērtības un nepārtrauktības noteikumam.

Sadalīsim elementos to virsmas daļu, ko norobežo kontūrs C, un katra elementa laukumu reizināsim ar attiecīgo vektora F normālkomponenti $\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}$. Šo reizinājumu summa, ja tā eksistē, ir dubultintegrāls

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

kuŗu sauc par vektorfunkcijas **F** virsmas integrālu. Integrēšanas simbolam piespraustais S izteic, ka integrēšana izplešas uz virsmas S.

2. **Stoksa teōrēma.** — Vektorfunkcijas **F** rotācija arī ir vektors. Aprēķināsim vektorfunkcijai līknes integrālu, bet tās rotācijai virsmas integrālu. Stoksa teōrēma apgalvo, ka šie integrāļi ir vienādi:

Funkcijas **F** tangentiālais līknes integrāls visapkārt kontūram C ir vienāds ar normālo virsmas integrālu, kas veidots tās pašas funkcijas rotācijai apskatāmā kontūra robežās.

Simbolos:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n}\cdot \operatorname{rot}\mathbf{F}\, dS. \tag{1}$$

Vai arī, ja vektorus izteic komponentes:

$$\mathbf{F}(X, Y, Z),\ \mathbf{r}(x, y, z),\ \mathbf{n}(\alpha, \beta, \gamma):$$

$$\int_C X dx + Y dy + Z dz = \iint_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} dS; \tag{2}$$

vai arī, izvirzot simbolisko determinantu:

$$\int_C X dx + Y dy + Z dz = \iint_S \left\{ \alpha\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \right.$$
$$\left. + \beta\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\right\} dS. \tag{3}$$

Pierādījums.

Funkcijas X, Y, Z ir skālāras punkta funkcijas, kuŗas ierobežo vienīgi tas, ka tām un to parciālām atvasinātām jābūt vienvērtīgām, galīgām un nepārtrauktām. Atsevišķā gadījumā var būt $Y = 0$, $Z = 0$. Tad $\mathbf{F} = X\mathbf{i}$, t. i lauku veido vektori, kas paralēli x asij, bet to skaitliskā vērtība ir atkarīga no x, y, z. Formula (3) pārveidojas šādā:

$$\int_C X dx = \iint_S \left(\beta \frac{\partial X}{\partial z} - \gamma \frac{\partial X}{\partial y}\right) dS. \tag{4}$$

Pierādīsim vispirms to.

Skālārās funkcijas X vērtība atkarājas no apskatāmā punkta koordinātām: $X = X(x, y, z)$. Dotās virsmas punktos ir spēkā virsmas nolīdzinājums $z = f(x, y)$, tātad, skālārās funkcijas vērtība virsmas punktos

$$X_1 = X(x, y, f(x, y)) = X_1(x, y)$$

ir pilnīgi noteikta ar koordinātām x, y. No tā seko, ka funkcijai X virsmas punktā $P(x, y, z)$ ir tāda pati vērtība, kā funkcijai X_1 ikvienā punktā uz taisnes, kas vilkta caur punktu P paralēli z asij.

Projecēsim uzdoto telpas likni C uz plakni xOy, dabūsim šinī plaknē kontūru C_1. Apzīmēsim ar Σ laukumu, ko kontūrs C_1 norobežo, un ar $d\Sigma$ — laukuma elementu. Apskatīsim dubultintegrālu

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial X_1}{\partial y} d\Sigma = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial X_1}{\partial y} dy = \int_{a_1}^{a_2} (X_1'' - X_1') \, dx.$$

Izteiksme labā pusē parveidojas kontūra integrālā:

$$\int_{a_1}^{a_2} (X_1'' - X_1') \, dx = \int_{a_1}^{a_2} X_1'' dx - \int_{a_1}^{a_2} X_1' dx = -\int_{a_1}^{a_2} X_1' dx - \int_{a_2}^{a_1} X_1'' dx = -\int_{C_1} X_1 \, dx.$$

Tātad:

$$\int_{C_1} X_1 dx = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial X_1}{\partial y} d\Sigma. \tag{5}$$

Attiecīgo formulu vektorfunkcijai X (uz virsmas S kontūrā C) dabūsim ievērojot sekojošo:

$$\text{(I)} \quad X_1 = X(x, y, z), \text{ ja } z = f(x, y),$$

tāpēc

$$\frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} q.$$

Normāles virziena kosini proporcionāli virsmas nolīdzinājuma kreisās puses parciālām atvasinātām:

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : -1 = p : q : -1,$$

tātad, $q = -\beta/\gamma$. To ievietojot dabū:

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Beidzot, laukuma elements $d\Sigma$ ir virsmas elementa dS projekcija uz xOy plakni:

$$\text{(III)} \quad d\Sigma = dx\, dy = \gamma\, dS.$$

Ievietojot izteiksmes (I), (II) un (III) formulā (5) dabū vajadzīgo sakarību (4)

$$\int_C X dx = -\iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial X}{\partial z} \right) \gamma\, dS = \iint_S \left(\beta \frac{\partial X}{\partial z} - \gamma \frac{\partial X}{\partial y} \right) dS.$$

Ja šinī vienādībā cikliski permutē X, Y, Z un attiecīgi x, y, z; α, β, γ, seko vēl divas vienādības:

$$\int_C Y dy = \iint_S \left(\gamma \frac{\partial Y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dS,$$

$$\int_C Z dz = \iint_S \left(\alpha \frac{\partial Z}{\partial y} - \beta \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dS.$$

No trīs beidzamām vienādībām, ja tās saskaita, pēc nelieliem parkārtojumiem, seko vispārīgā sakarība (2).

Pierādījuma pamatā ir pieņēmums, ka normāle pret virsmu veido šauru leņķi ar pozitīvo Oz virzienu ($\gamma > 0$). Ja $\gamma < 0$, būtu jāņem

$$d\Sigma = dx\,dy = |\gamma\, dS| = -\gamma\, dS.$$

Reizē ar to telpas līknes pozitīvam apiesanas virzienam atbilstu negātīvais virziens projekcijā. Zīme mainītos divreiz, un formula paliktu spēkā.

Secinājums.

Stoksa formulā (1) pieņemsim $\mathbf{F} = V\mathbf{a}$, kur V ir skālāra punkta funkcija un $\mathbf{a}$ — nemainīgs vektors. Vektoru lauks sastāv no kolīneāriem vektoriem, kuŗu gaŗums un vēršanās puse atkarājas no V.

Saskaņā ar (10) iepriekšējā nodaļā 142. lp. p.

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \text{rot}\,(V\mathbf{a}) = \text{grad}\,V \times \mathbf{a} = \nabla V \times \mathbf{a}.$$

Ievietojot Stoksa formulā dabū:

$$\int_C V\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n}\cdot\nabla V \times \mathbf{a}\,dS = \iint_S \mathbf{n}\times\nabla V\cdot\mathbf{a}\,dS,$$

tāpēc ka trīskārtīgā vektoru reizinājumā drīkst apmainīt savā starpā punktu ar krustiņu. Iepriekšējo vienādību var pārkārtot šādi:

$$\int_C \mathbf{a}\cdot V d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\times\nabla V\,dS.$$

Konstanto faktoru $\mathbf{a}$ var rakstīt ārpusē integrēšanas simbolam:

$$\mathbf{a}\cdot\int_C V d\mathbf{r} = \mathbf{a}\cdot\iint_S \mathbf{n}\times\nabla V\,dS.$$

Tā kā vektors $\mathbf{a}$ ir pilnīgi patvaļīgs, iepriekšējā vienādība iespējama tikai tā, ka

$$\int_C V d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n}\times\nabla V\,dS. \tag{6}$$

3. **Gausa diverģences teōrēma.** — Apskatīsim daļu telpas, ko norobežo noslēgta virsma vai vairākas tādas virsmas; beidzamā gadījumā vienai virsmai jābūt ārējai, citām — tās iekšā. Visos gadījumos kopvirsmu, kas apskatāmo telpas daļu (tilpumu) norobežo, apzīmēsim ar S.

Ar $\mathbf{n}$ apzīmēsim vienības vektoru ($n = 1$), kas kādā virsmas punktā virzīts stateniski pret pieskaŗu plakni un vērsts projām no apskatāmā tilpuma (vienības normāle).

$\mathbf{F}(X, Y, Z)$ ir vienvērtīga, galīga un nepārtraukta vektoriāla punkta funkcija; tādas pašas īpašības pieņemsim šīs funkcijas atvasinātām. Katram telpas punktam tad atbilst noteikts vektors $\mathbf{F}$ un noteiktas funkcijas, kas veidojas šo vektoru atvasinot. Vismaz apskatāmā tilpuma robežās šiem pieņēmumiem jābūt spēkā.

Ņemsim uz virsmas kādu punktu, kas pieder virsmas elementam dS. Šim punktam atbilst noteikti vektori **F** un **n**. Projecēsim **F** uz normāli, projekciju **F** • **n** reizināsim ar attiecīgo virsmas elementu dS, un šos reizinājumus summēsim pilnas virsmas robežās, t. veidosim funkcijas **F** normālo virsmas integrālu

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

No otras puses, sadalīsim apskatāmo tilpumu elementos un nosauksim kādu vienu elementu ar dV. Elementa iekšienē ņemsim punktu. Tam atbilst noteikta vektorfunkcijas diverģence div **F**. Reizināsim tilpuma elementu ar attiecīgo diverģenci un summēsim reizinājumus pilna tilpuma robežās, t. i. veidosim funkcijas **F** diverģencei tilpuma integrālu

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dv.$$

Gausa teōrēma apgalvo, ka šie integrāli ir vienlīdzīgi:

Vektorfunkcijas **F** normālais virsmas integrāls ir vienāds ar diverģences tilpuma integrālu, pieņemot, ka integrāli attiecas uz noslēgtu virsmu un tilpumu, ko tāda virsma norobežo.

Simbolos:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dv. \tag{1}$$

Ja vektori **F** un **n** uzdoti komponentēs ortogōnālās koordinātu asīs **F** (X, Y, Z) un **n** (α, β, γ), var rakstīt

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \\ \mathbf{n} &= \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

Tātad:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = X\alpha + Y\beta + Z\gamma,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Ievietojot šīs izteiksmes formulā (1) dabū tās analitisko veidu:

$$\iint_S (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, dS = \iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dv. \quad . \quad . \quad (2)$$

Pierādījums.

Vienkāršības labā pieņemsim, ka slēgtā virsma ir tāda, ka taisne, kas parallēla koordinātu asij, sastop virsmu vislielākais divi punktos.

Vilksim divas bezgala tuvas plaknes, kas parallēlas xOz plaknei un sastop apskatāmo virsmu. Atstatumu starp plaknēm nosauksim par dy. Tātad, šīs plaknes nošķeļ tilpumam plāksnīti, kuras biezums ir dy. Vilksim vēl divas plaknes atstatumā dz vienu no otras, abas parallēlas xOy plaknei. Visas 4 plaknes apskatāmam tilpumam izgriež elementāru prizmu, kurai stateniskais šķērsgriezums ir taisnstūris, kam laukums ir $dy\,dz$.

Elementārā prizma, caurdurdama virsmu, izgriež tanī 2 elementārus laukumus dS_1 un dS_2. Prizmas šķērsgriezums ir šo elementāro laukumu projekcija uz yOz plakni. Vienības normāli laukumam dS_1 apzīmēsim ar $\mathbf{n}_1$, bet laukumam dS_2 — ar $\mathbf{n}_2$. Abas normāles vērstas projām no apskatāmā tilpuma, tāpēc viena (teiksim $\mathbf{n}_1$) ar x asi veido platu leņķi, bet otra — šauru. To ievērojot varam uzrakstīt sakarību starp dS_1, dS_2 un to projekciju:

$$dy\,dz = -dS_1 \cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{i}) = dS_2 \cos(\mathbf{n}_2, \mathbf{i}),$$

$$dy\,dz = -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{i}\, dS_1 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{i}\, dS_2. \qquad (3)$$

Tālāk piegriežamies sekojošam trīkārtīgajam integrālam:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\,dy\,dz = \iint\limits_\Sigma dy\,dz \int\limits_{X_1}^{X_2} \frac{\partial X}{\partial x} dx = \iint\limits_\Sigma (X_2 - X_1)\, dy\,dz.$$

X_1 ir funkcijas X vērtība vienā elementārprizmas galā (elements dS_1), X_2 — otrā galā. Σ apzīmē virsmas projekciju uz yOz plakni (slēgts kontūrs). Šīs projekcijas robežās jāaplēš dabūtais divkārtīgais integrāls:

$$\iint\limits_\Sigma = \iint\limits_\Sigma (X_2\, dy\,dz - X_1\, dy\,dz). \qquad (A)$$

Ievērojot (3):

$$X_2\, dy\,dz = X_2\, \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{i}\, dS_2,$$

$$-X_1\, dy\,dz = X_1\, \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{i}\, dS_1;$$

tātad:

$$\iint\limits_\Sigma = \iint\limits_\Sigma (X_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{i}\, dS_1 + X_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{i}\, dS_2) = \iint\limits_S X \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}\, dS.$$

No tā seko, ka

$$\iiint\limits_V \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\,dy\,dz = \iint\limits_S X \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}\, dS,$$

vai arī, ievērojot to, ka $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = \alpha$ (normāles virziena kosinus) un $dx\,dy\,dz = dv$:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial X}{\partial x}\, dv = \iint\limits_S X\alpha\, dS \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (4)$$

Līdzīgā kārtā pierāda, ka

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Y}{\partial y} dv = \iint\limits_S Y\beta\, dS, \qquad (4')$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Z}{\partial z} dv = \iint\limits_S Z\gamma\, dS. \qquad (4'')$$

Saskaitot šīs 3 vienādības dabū Gausa formulu (2).

Pierādījuma pamatā bija pieņēmums, ka taisne, kas paralēla koordinātu asij, sastop virsmu vislielākais 2 punktos. Ja šis noteikums nav izpildīts, ja kopīgo punktu skaits ir lielāks par 2, tad kopīgie punkti var būt tikai pārskaitā, un virsmas normāles šinīs punktos pāŗos veido ar koordinātu asi saurus un platus leņķus. Pierādījums paliek spēkā, tikai divkārtīgais integrāls (A) aptveŗ lielāku summandu skaitu.

Secinājums.

Formulā (1) aizvietosim funkciju $\mathbf{F}$ ar $K\mathbf{i}$, kur K — skālāra punkta funkcija. Ievērojot to, ka $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = \alpha$ (normāles virziena kosins) un

$$\nabla \cdot K\mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial (K\mathbf{i})}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial (K\mathbf{i})}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial (K\mathbf{k})}{\partial z} = \frac{\partial K}{\partial x},$$

dabūsim:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial K}{\partial x} dv = \iint\limits_S \alpha K\, dS. \qquad (5)$$

Līdzīgā kārtā, aizvietojot formulā (1) $\mathbf{F}$ ar $K\mathbf{j}$ un $K\mathbf{k}$:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial K}{\partial y} dv = \iint\limits_S \beta K\, dS, \qquad (5')$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial K}{\partial z} dv = \iint\limits_S \gamma K\, dS. \qquad (5'')$$

Ja vienādības (5) līdz (5″) pēc kārtas pareizina ar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, dabūtos reizinājumus saskaita un ievēro, ka

$$\mathbf{i}\frac{\partial K}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial K}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial K}{\partial z} = \nabla K$$

un

$$\alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k} = \mathbf{n},$$

tad seko:

$$\iiint\limits_V \nabla K\, dv = \iint\limits_S \mathbf{n} K\, dS. \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

LITERĀTŪRA.

Bomovskis, N. Vektoru algebra un analize. I. Rīgā, 1928.

Bouligand, G. et Rabaté, G. Initiation aux méthodes vectorielles et aux applications géométriques de l'analyse. Paris, 1926.

Chatelet, A, et Kampé de Fériet, J. Calcul vectoriel. Théorie, applications géometriques et cinématiques. Paris, 1923.

Coffin, J.-G. Calcul vektoriel, avec applications aux mathématiques et à la physique. Traduction et notation française par Alex. Veronnet. Paris, 1914.

Дубнов, Я. С. Основы векторного исчисления. Ч. I. Москва, 1939 (Изд. 3).

Gans, R. Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die math. Physik. 4. Aufl. Leipzig, 1921.

Haas, A, Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigsten physikalischen Anwendungen. Berlin, 1922.

Кочин, Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 5-ое. Москва, 1937.

Lagally, M. Vorlesungen über Vektorrechnung. Leipzig, 1928. Arī: Лагалли, М. Векторное исчисление. Перев. с нем. Г. М. Катто. Москва, 1936.

Lohr, E. Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker u. Techniker. Berlin, 1939.

Pomey, J. B. Principes de Calcul vectoriel et tensoriel. Paris, 1923.

Runge, C. Vektoranalysis. Bd. I: Die Vektoranalysis des dreidimens. Raumes. Leipzig, 1919.

Silberstein, L. Eléments d'algèbre vectorielle et d'analyse vectorielle. Traduits de l'anglais par G. Matisse. Paris, 1921.

Сомов, П. О. Векториальный анализ. С.-П., 1907.

Spielrein, J. Lehrbuch der Vektorrechnung. Stuttgart, 1916. Arī: Шпильрейн, Я. Векторное исчисление для инженеров-электриков и физиков. I. Москва, 1936.

Valentiner, S. Vektoranalysis. Berlin, 1912. (Sammlung Göschen № 354.)

Weatherburn, C. E. Elementary Vector Analysis. With applications to geometry and physics. London, 1921.

Weatherburn, C. E. Advanced vector analysis with applications to mathematical physics. London, 1924.

Wilson, E. B. Vector Analysis. Newhaven, 1901. (Otrais izd. 1913.)

Autoru un priekšmetu rādītājs.

(Skaitļi apzīmē lapas puses.)

Pamanītās iespieduma kļūdas.

25. lp. 10. rindā no augšas iespiests $\overrightarrow{O_1P} = {}_1$, jābūt: $\overrightarrow{O_1P_1} =$.
29. „ 1. „ „ apakšas iespiests kosinu, jābūt: kosinus.
37. „ 2. „ „ augšas jāsvītro vārds „iet".
37. „ formulā (1) iespiests sa, jābūt: sa.
48. „ 2. rindā no augšas iespiests ad, jābūt tad.
48. „ 10. „ „ apakšas iespiests a^2, jābūt: a^2.
58. „ 20. „ „ augšas iespiests r, jābūt: ir.
58. „ 2. „ „ apakšas iespiests: vsam, jābūt: visam.
78. un 79. lappusē iespiests F(d), jābūt: **F(d)**.
87. lappusē 17. rindā no augšas iespiests (**ijk**), jābūt: [**ijk**].
90. „ 8. „ „ „ „ determinenta, jābūt: determinanta.
90. „ 3. „ „ apakšas iespiests $\frac{[\mathbf{abc}]}{[\mathbf{abd}]}$, jābūt: $\frac{[\mathbf{abd}]}{[\mathbf{abc}]}$.
102. un 103. lappusē virs svītras iespiests: motoru, jābūt: vektoru.
107. lappusē 2. rindā no augšas iespiests a, jābūt: ar.
108. „ 14. „ „ apakšas iespiests statņi, jābūt: stateņi.