LATVIJAS UNIVERSITĀTES MĀCĪBAS GRĀMATU SERIJA
№ 17

TEŌRĒTISKĀ MĒCHANIKA

Eižens LEIMANIS
LATVIJAS UNIVERSITĀTES
MATĒMATIKAS UN DABAS ZINĀTŅU FAKULTĀTES
DOCENTS

I SĒJUMS

KINĒMATIKA

RĪGĀ, 1940
LATVIJAS UNIVERSITĀTE

6233 Iespiests L. Audzes gr. sp. Rīgā, Tērbatas ielā 50, tālr. 98333
Klišejas izgatavojusi Armijas spiestuve, Rīgā, Muitas ielā 1

PRIEKŠVĀRDI

Šī darba, kuŗa pirmais sējums pašlaik parādās atklātībā, pamatā ir manas lekcijas par teōrētisko mēchaniku, kuŗas lasītas 1937.-38. māc.

TEŌRĒTISKĀ MĒCHANIKA

I SĒJUMS

E. LEIMANIS

Iespieduma laikā ieviesušos svarīgāko kļūdu saraksts.

27.	lpp.	5.	rindā no	apakšas	iespiests *polu* jābūt *redukcijas polu*.
45.	„	5.	„ „	„	„ vektoru PO_1 jābūt vektoru $\overline{PO_1}$.
99.	„	1.	„ „	augšas	„ g koordinātas jābūt $\mathbf{g}$ koordinātas.
142.	„	6.	„ „	apakšas	„ nesējas taisnes jābūt nesēju taisni.
256.	„	6.	„ „	„	„ $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)$ jābūt $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_A(S)$.
278.	„	6.	„ „	augšas	„ Q jābūt $\mathbf{Q}$.
292.	„	7.	„ „	„	„ T_G jābūt T_G.

matu sarakstot, ievērotas kā matēmatiķa, tā fiziķa un astronoma intereses. Nedomāju, ka tanī būtu apskatīti visi jautājumi, kas varētu interesēt lasītāju, kuŗa nolūks ir iedziļināties teōrētiskajā mēcha-

[1]) Skat., piem., T. Levi-Civita, *The absolute differential Calculus*, London, Blackie & Son Ltd, 1927, vai arī J. A. Schouten, *Der Ricci-Kalkul*, Berlin, Springer, 1924.

PRIEKŠVĀRDI

Šī darba, kuŗa pirmais sējums pašlaik parādās atklātībā, pamatā ir manas lekcijas par teōrētisko mēchaniku, kuŗas lasītas 1937.-38. māc. gadā Latvijas universitātes matēmatikas un dabas zinātņu fakultātes matēmatikas nodaļā.

Ar to arī izskaidrojams šīs grāmatas samērā elementārais raksturs, un tā nekādā ziņā nepretendē uz pilnīga traktāta nosaukumu. Tomēr esmu centies uzrakstīt darbu formā, kuŗa atspoguļotu modernu teōrētiskās mēchanikas kursu, kas apskatīts ar mūsdienu modernajā matēmatikā arvien vairāk dominējošām *vektoru* un *tensoru teōrijas* metodēm.

Vektoriālās un tensoriālās rakstības nolūks ir iepazīstināt lasītāju jau pašā sākumā ar simboliskiem apzīmējumiem, kuŗu konsekventa lietošana ir izrādījusies par noderīgu un nepieciešamu visās jaunākās fizikas teōrijās. Reizē ar to esmu gribējis ieinteresēt lasītāju arī par tā sauktajiem *absolūtiem diferenciālrēķiniem*[1]) *(calcul absolu)*, kuŗiem ir tik liela nozīme visās modernajās fizikas un ģeometrijas disciplīnās. Bez tam vektoriālais un tensoriālais algoritms dažreiz tādā mērā vienkāršo saliktu matēmatisku izteiksmju rakstību un pētīšanu, ka klasiskā koordinātu metode ar to nemaz nevar tikt salīdzināta. Tāpat dažos klasiskos jautājumos tensoriālā rakstība dod vienkāršu rezultātu sintezi. Tomēr no otras puses jābrīdina lasītājs no uzskata, ka ar tensoru teōrijas simbolisko operāciju, kuŗas ir daudz abstraktākas par parastām algebriskām operācijām, mēchanisma pilnīgu pārzināšanu jau būtu tvertas lietas savā dziļākajā būtībā.

Problēmu *vektoriālais* un *tensoriālais* uztveres veids šai darbā tomēr nav izpaudies vienpusīgi; arī klasiskajai *koordinātu* metodei ir ierādīta redzama vieta visur tur, kur tā likās dabīgāka.

Grāmata vispirms domāta kā palīgs studentiem un kā turpmākā baze augstākajiem mēchanikas kursiem: *analitiskai mēchanikai, debess mēchanikai, deformējama kontinuuma mēchanikai* u. t. t. Grāmatu sarakstot, ievērotas kā matēmatiķa, tā fiziķa un astronoma intereses. Nedomāju, ka tanī būtu apskatīti visi jautājumi, kas varētu interesēt lasītāju, kuŗa nolūks ir iedziļināties teōrētiskajā mēcha-

---

[1]) Skat., piem., T. Levi-Civita, *The absolute differential Calculus*, London, Blackie & Son Ltd, 1927, vai arī J. A. Schouten, *Der Ricci-Kalkul*, Berlin, Springer, 1924.

nikā, tomēr esmu centies ievērot svarīgākos un raksturīgākos no tiem. Domāju, ka grāmata varēs noderēt arī technisko fakultāšu studentiem, kas vēlētos papildināt savas zināšanas dažos teōrētiskās mēchanikas jautājumos.

Grāmatu sarakstot, esmu sekojis mēchanikas literātūrai angļu, franču, italiešu, krievu un vācu valodā. Nevarēdams sīki aizrādīt uz ikviena orīģināldarba tiešu vai netiešu ietekmi un atstājot pēc iespējas pilnīgu mēchanikas mācības grāmatu sarakstu otram sējumam, aprobežošos šeit tikai ar to darbu atzīmēšanu, kuŗus esmu visvairāk izlietojis, pirmo sējumu sarakstot, un kuŗu autoriem esmu par to pateicīgs. Tie ir šādi darbi:

G. Julia, *Cours de cinématique*, Paris, Gauthier-Villars, 1936.

T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. I, Bologna, Zanichelli, 1930.

P. Painlevé et Ch. Platrier, *Cours de mécanique*, Paris, Gauthier-Villars, 1929.

Pirmajā sējumā ir trīs lielākas daļas: I — Vektoru teōrija un cieta ķermeņa kinēmatika, II — Otrās kārtas tensoru teōrija un masas jēdziens kinēmatikā, III — Sistēmas un deformējama kontinuuma kinēmatika. Tanīs apskatīta *kinēmatiskā ģeometrija* kā ievads klasiskajā jeb Ņūtona mēchanikā, kas ietilps grāmatas otrā sējumā. Pirmajā sējumā tādējādi ir visas nepieciešamās priekšzināšanas mēchanikas studijām vārda tiešajā nozīmē.

Par dažiem aizrādījumiem šī darba sagatavošanā izsaku pateicību savam kollēgam ārk. prof. A. Lūsim. Tāpat pateicos arī visiem citiem, kas sekmējuši šī darba publicēšanu.

Eižens LEIMANIS

Rīgā, 1939. g. aprīlī.

SATURS

II nodaļa.
PUNKTA KINĒMATIKA.

III nodaļa.
CIETA ĶERMEŅA KINĒMATIKA.

IV nodaļa.

KUSTĪBU KOMPOZICIJA UN CIETA ĶERMEŅA KUSTĪBA.

V nodaļa.

CIETA ĶERMEŅA KOMPLĀNA KUSTĪBA.

VI nodaļa.

CIETA ĶERMEŅA GALĪGI PĀRVIETOJUMI.

OTRĀ DAĻA.

OTRĀS KĀRTAS TENSORU TEŌRIJA UN MASAS JĒDZIENS KINĒMATIKĀ.

VII nodaļa.

TENSORU TEŌRIJA.

VIII nodaļa.

MASAS JĒDZIENS KINĒMATIKĀ.

IX nodaļa.

INERCIJAS TENSORI, MOMENTI UN PRODUKTI.

X nodaļa.

KUSTĪBAS DAUDZUMS UN KINĒTISKAIS MOMENTS.

XI nodaļa.

SPARS UN KINĒTISKĀ ENERĢIJA.

XII nodaļa.

PAĀTRINĀJUMA ENERĢIJA.

TREŠĀ DAĻA.

SISTĒMAS UN DEFORMĒJAMA KONTINUUMA KINĒMATIKA.

XIII nodaļa.

SISTĒMAS KINĒMATIKAS PAMATJĒDZIENI.

XIV nodaļa.
DEFORMĒJAMA KONTINUUMA NEPĀRTRAUKTA TRANSFORMĀCIJA.

XV nodaļa.
DEFORMĒJAMA KONTINUUMA BEZGALA MAZA NEPĀRTRAUKTA TRANSFORMĀCIJA.

XVI nodaļa.

DEFORMĒJAMA MATERIĀLA KONTINUUMA NEPĀRTRAUKTA KUSTĪBA.

TEŌRĒTISKĀ MĒCHANIKA

I SĒJUMS.

IEVADS.

La meccanica è il paradiso delle scienze matematiche, perchè con quella si viene al frutto delle scienze matematiche.
Leonardo da Vinci.)*

Mēchanika ir zinātne par materiālu ķermeņu kustību. Saka, ka ķermenis kustas, ja tas maina savu poziciju attiecībā pret citiem ķermeņiem, kas iedomāti par nekustīgiem.

Mēchanikas pirmie sākumi meklējami jau sirmajā senatnē, jo apkārtējo ķermeņu kustība un miera stāvokļi nevarēja nesaistīt cilvēka uzmanību. Tā radās mēchanika kā *eksperimentāla* zinātne. Daudzos gadu simteņos tādējādi uzkrājās plašs eksperimentāli iegūtu mēchanikas likumu krājums, kur katrai atsevišķai dabas parādību klasei bija savi likumi. Piem. svīras likums, ko atrada Archimēds[1]), spēku parallēlograma likums, ko pirmais pamanīja Variņons[2]), bet vēlāk precīzi formulēja Ņūtons, smaga ķermeņa brīva kritiena likumi, kuŗus atrada Galilejs[3]), u. t. t. No šiem likumiem radās pirmā zinātniskā mēchanikas sistēma — *elementārā mēchanika.*

Uzkrājoties plašiem novērojumu materiāliem, dabīgi radās jautājums, vai daudzus eksperimentāli iegūtus mēchanikas likumus nevarētu atvasināt loģiski jeb racionāli no nedaudziem pamata principiem.

---

*) Leonardo da Vinci (1452.—1519. g.). Mēchanika ir matēmatisko zinātņu paradīze, jo ar to nonāk pie matēmatisko zinātņu sasniegumiem.

1) Archimedes (287.—212. g. pr. Kr.).

2) P. Varignon, *Nouvelle mécanique ou statique dont le projet fut donné en 1687,* Paris, 1725.

3) G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali,* in Leida, 1638.

Reizē ar šo jautājumu dzima *racionālā mēchanika.* Tās nodibinātājs ir Ņūtons, kas savā nemirstīgajā darbā *Philosophiae naturalis principia mathematica,* 1686. g., balstoties uz dažiem pamata principiem, sintetiski konstruēja racionālās mēchanikas sistēmu.

Nākošais posms mēchanikas attīstībā sākās ar Euleru[1]), Dalambēru[2]) un Lagranžu[3]), kas sāka lietot mēchanikā matēmatiskās analizes metodes, t. i. diferenciāl- un integrālrēķinu metodes. Tā radās *analitiskā mēchanika,* kuŗā priekšroka tika dota analitiskai metodei pret agrāko sintetisko metodi un kuŗā vairāk uzsvērts mēchanikas teōrētiskais raksturs.

Teōrētisko mēchaniku iedala *kinēmatikā* un *dinamikā. Kinēmatika* apskata ķermeņu kustības *telpā* un *laikā* neatkarīgi no kustību cēloņiem. *Dinamika* pētī ķermeņu kustības sakarā ar to cēloņiem un apskata šo cēloņu radītos fainomenus. Dinamika ietveŗ sevī *statiku,* kas pētī materiālu ķermeņu līdzsvara noteikumus, un *kinētiku,* kas pētī vispārīgo gadījumu, kad ķermeņi atrodas kustībā.

Bet tā kā fizikālo fainomenu patiesie cēloņi ir nezināmi, tad tos iedomājas aizstātus ar fiktīviem cēloņiem, sauktiem par *spēkiem,* kas spējīgi radīt tos pašus efektus kā patiesie cēloņi.

Nobeidzot šo ievadu, atzīmēsim, ka, papildinot līdz šim minēto koncepciju (t. i. telpas, laika un spēka) kompleksu ar skaitļa koncepciju, matēmatikas disciplīnas, atkarībā no koncepcijām, uz kuŗām tās bazējas, var sakārtot šādā simboliskā schēmā:

1° skaitlis: analize,
2° skaitlis + telpa: ģeometrija,
3° skaitlis + telpa + laiks: kinēmatika,

$$\left.\begin{array}{l}4^\circ \text{ skaitlis + telpa + spēks: statika}\\ 5^\circ \text{ skaitlis + telpa + laiks + spēks: kinētika}\end{array}\right\}\text{dinamika.}$$

---

[1]) L. Euler, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita,* 2 vol., Petropoli, 1736.

[2]) J. d'Alembert, *Traité de Dynamique, dans lequel les lois de l'équilibre et du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible, et démontrées d'une manière nouvelle, et où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque,* Paris, 1743.

[3]) J. L. Lagrange, *Méchanique analitique,* Paris, 1788.

PIRMĀ DAĻA.

VEKTORU TEŌRIJA UN CIETA ĶERMEŅA KINĒMATIKA.

I NODAĻA.

VEKTORU TEŌRIJA.

Vienkāršu un izteiksmīgu algoritmu teōrētiskās mēchanikas un fizikas daudzo un dažādo problēmu matēmatiskai formulēšanai un diskusijai sniedz vektoru un tensoru teōrija. Tādēļ iesāksim šo teōrētiskās mēchanikas kursu ar nodaļu par vektoru teōriju[1]), kuŗā apskatīsim vektoru teōrijas fundāmentālās koncepcijas un elementārās likumības.

1. §. Vektori.

1. **Skālāri un vektoriāli lielumi.** — Mēchanikā un fizikā sastopamos lielumus iedala skālāros, vektoriālos un tensoriālos lielumos[2]). *Skālārs* ir lielums, kas raksturojams ar tā skaitlisko vērtību, kuŗa izteikta kādas iepriekš fiksētas skālas vienībās. Šāda tipa lielumi ir, piem., masa, gaŗums, laiks u. t. t., kuŗus raksturo parastie skaitļi attiecībā pret izvēlētām skālām.

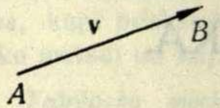
Daži citi lielumi turpretim nav pilnīgi determinēti tikai ar to skaitliskām vērtībām; piem., runājot par vēju, tas nav pietiekami determinēts, sakot, ka tā ātrums noteiktā vietā un laikā ir 6 km stundā, bet vēja pilnīgai raksturošanai ir jāuzrāda vēl tā darbības taisne (ideālizējot vēja kustību) un vērsums pa šo taisni; tā, piem., ja vēja darbības taisne ir noteikta ar diviem tās punktiem: ziemeļu un dienvidu punktu, tad vēja vērsums var būt ziemeļdienvidu vai dienvidziemeļu.

[1]) Tensoru teōrija tiks apskatīta VII nodaļā.

[2]) Lielumu iedalījumu skālāros un vektoriālos ir devis Hemiltons (W. R. Hamilton, 1805.—1865. g.) vispirms savos darbos *On Quaternions; or a new System of Imaginaries in Algebra,* kas publicēti Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 2, 1844.; Philosophical Magazine, (3), vol. 25, 1844, un vēlāk savā grāmatā *Lectures on Quaternions,* Dublin, 1853. Tensoriāla lieluma jēdzienu ir devis Foigts (W. Voigt, 1850.—1919. g.). Šī jēdziena definīciju skat. 225. lpp.

Lielumu, kas raksturojams bez tā skaitliskās vērtības vēl ar noteiktu virzienu un vērsumu, sauc par *vektoriālu* lielumu. Vektoriāli lielumi ir, piem., ātrums, paātrinājums, spēks u. t. t.

2. **Saistīts, brīvs un slīdošs vektors.** — Vektoriāla lieluma ģeometriskai raksturošanai izvēlas modeli, kam būtu visas šī lieluma īpašības: skaitliskā vērtība, virziens un vērsums. Šāds vienkāršs vektoriāla lieluma ģeometriskais modelis ir *orientēts taisnes segments* AB (1. zīm.), kuŗš savieno punktu A, sauktu par *sākuma punktu,* ar punktu B — *gala punktu* — un kuŗa *gaŗums* (attiecībā pret kādu iepriekš fiksētu skālu), *virziens* (noteikts ar segmenta AB nesēju taisni) un *vērsums* (noteikts ar segmenta AB gala punktu A un B orientāciju: no punkta A uz punktu B, ko apzīmē, liekot segmenta gala punktā B bultiņu) attiecīgi reprezentē vektoriālā lieluma *skaitlisko vērtību, virzienu* un *vērsumu.* Citiem vārdiem sakot, par *vektoru*[1]) sauc ģeometrisku, mēchanisku vai fizikālu lielumu, kuŗa jebkuŗu nozīmi iespējams reprezentēt ar noteiktu orientētu taisnes segmentu AB, kā gaŗums nav nulle[2]). Simboliski vektoru apzīmē, aizrādot uz tā reprezentētājas taisnes



1. zīm.

---

[1]) Nosaukumu *vektors* ir ieteicis Hemiltons kādā darbā, kas publicēts Quaterly Journal of Mathematics, vol. 1, 1845, Cambridge.

[2]) Blakus šai vektora definīcijai vektoru teōrijas literātūrā sastopama vēl otra definīcija, kuŗas vēsture īsumā ir šāda. Jau labi sen pirms Hemiltona ar orientēta virziena jēdzienu plaknē sāka operēt Vesels (C. Wessel, 1745.—1818. g.) savā darbā *Om directionens analytiske betegning,* Nye Samling af det Kong. Danske Videnskab. Selskabs Skrifter, vol. 5, 1797. g., kuŗa tulkojums franču valodā *Essai sur la représentation de la direction* iznāca 1897. g. Kopenhagenā, un Argans (J. Argand, 1768.—1822. g.) — darbā *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques,* 1806. g. Tālāk jēdziens par taisnes orientētu segmentu figūrē impliciti Möbiusa (A. F. Möbius, 1790.—1868. g.) grāmatā *Der barycentrische Calcul,* 1827. g., kā divu metrizētu punktu summas speciālgadījums, kad šo punktu masu summa ir vienāda ar nulli, bet ekspliciti, sākot ar 1832. g., Bellavitisa (G. Bellavitis, 1803.—1880. g.) darbos: *Sopra alcune applicazioni d'un nuovo metodo di geometria analitica,* Giornale di Scienze, Lettere ed Arte, vol. 13, 1833, Verona; *Metodo delle equipollenze,* Annali di Scienze del Regno Lombardo-Veneto, vol. 7, 1837, vol. 8, 1838, u. c. Beidzot ar taisnes orientētu segmentu n-dimensiju telpā pirmo reiz operēja Grasmanis (H. Grassmann, 1809.—1877. g.) savā darbā *Die lineale Ausdehnungslehre,* 1844. g. (Ges. Werke, Bd. I_1, 1894). Ievērojot šo vektora jēdziena attīstības priekšvēsturi un paliekot parastās 3-dimensiju telpas robežās, daži jaunāko laiku autori, kā Apells (P. Appell, 1855.—1930. g.), Bīberbachs (L. Bieberbach), Kūrants (R. Courant), Šazì (J. Chazy) u. c., par vektoru sauc gluži vienkārši taisnes orientētu segmentu.

orientētā segmenta AB gala punktiem un rakstot sākuma punktu A pirmo, ar

$$\overrightarrow{AB} \text{ vai } \overline{AB}.$$

Tādējādi vektors $\overline{AB}$ ir pilnīgi definēts ar šādiem tā elementiem: 1° *sākuma punktu* A; 2° *virzienu,* kas noteikts ar segmenta AB nesēju taisni; 3° *vērsumu,* noteiktu ar segmenta AB gala punktu orientāciju; 4° *garumu* (modulu) jeb absolūto vērtību, kas ir segmenta AB garums kādas iepriekš fiksētas skālas vienībās. Vai arī ar 1° *sākuma punktu* A; 2° *virzienu,* ko noteic segmenta AB nesēja taisne; 3° izvēlēto pozitīvo *vērsumu* uz tās un 4° *segmenta AB algebrisko vērtību,* kas skaitīta saskaņā ar izvēlēto vērsumu.

Abos gadījumos, ja v ir taisnes segmenta AB absolūtā vai algebriskā vērtība, vektoru $\overline{AB}$ apzīmē arī ar simbolu $\mathbf{v}$[1]), t. i.

$$\overline{AB} = \mathbf{v}$$

ir divi ekvivalenti vektora apzīmējumi.

Ja vektora sākuma punkts, saukts arī par vektora pielikšanas punktu, ir fiksēts telpā, tad šādu vektoru sauc par *saistītu vektoru,* piem. punkta ātrums, punkta paātrinājums.

Brīvs vektors ir tāds, kuŗa sākuma punkts ir brīvi izvēlams telpā, bet virziens, vērsums un gaŗums ir pilnīgi noteikti. Brīvs vektors tādējādi ir definēts līdz kādai patvaļīgai translācijai.

Par *slīdošu vektoru* sauc tādu, kuŗa nesēja taisne, vērsums un gaŗums ir pilnīgi noteikti, bet sākuma punkts uz šīs taisnes ir nenoteikts. Slīdošs vektors tā tad ir noteikts uz savas nesējas taisnes līdz kādai translācijai, parallēli savam virzienam.

Divus kaut kādus vektorus $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, t. i. saistītus, brīvus vai slīdošus, sauc par *vienādiem* un raksta

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 ,$$

ja tiem ir tas pats gaŗums, virziens un vērsums, un par *direkti vienādiem,* ja tie abi reizē ir saistīti vai slīdoši, bet ar vienu un to pašu nesēju taisni.

Divus kaut kādus vektorus $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ sauc par *pretējiem* un raksta

$$\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 ,$$

---

[1]) Šo simbolu pirmie lietoja Hevisaids (O. Heaviside, 1850.—1925. g.) Philosoph. Mag., (5), vol. 22, 1886, un Gibss (J. W. Gibbs, 1839.—1903. g.)— grāmatā *Vector-Analysis*, ed. by E. B. Wilson, New York, 1902 [*Collected Works of J. W. Gibbs,* 2 vol., New York, 1928].

ja to gaŗumi un virzieni ir vienādi, bet vērsumi pretēji, un par *direkti pretējiem,* ja tie abi reizē ir saistīti vai slīdoši, bet ar vienu un to pašu nesēju taisni.

Paplašinot vektora jēdzienu, definēsim *nulles vektoru* kā vektoru, kuŗa sākuma un gala punkts sakrīt. Nulles vektora gaŗums tā tad ir nulle, bet tā virziens un vērsums ir nenoteikti.

Vektoru, kuŗa gaŗums ir viena skālas vienība, sauc par *vienības vektoru.* Vienības vektoru ar to pašu virzienu un vērsumu kā vektoram **v** sauc par vektora **v** *versoru* un simboliski apzīmē ar vers **v**.

Vektora **v** gaŗumu (modulu) simboliski apzīmē ar[1])

$$\operatorname{mod} \mathbf{v} = |\mathbf{v}| = v.$$

Un tā kā katrs vienības vektors noteic noteiktu orientāciju un arī otrādi, tad vektoru **v** ar tā modulu v un versoru vers **v** var uzrakstīt šādi:

$$\mathbf{v} = v \operatorname{vers} \mathbf{v}.$$

3. **Vektora projekcija uz taisnes un uz plaknes un vektora komponents pa orientētu taisni.** — Par vektora $\mathbf{v} = \overline{AB}$ *projekciju* uz taisnes d (plaknes Π) sauc vektoru $\mathbf{v}_1 = \overline{A_1B_1}$, kuŗa sākuma un gala punkts ir dotā vektora $\overline{AB}$ sākuma un gala punkta ortogōnālās projekcijas uz taisnes d (plaknes Π). Vektora **v**, kas nav nulles vektors, projekcija uz taisnes d vai plaknes Π ir nulle tikai tad, ja taisne vai plakne, uz kuŗu dotais vektors **v** jāprojicē, ir tam perpendikulāra. Nulles vektora projekcija uz kaut kuŗas taisnes vai plaknes ir vienmēr nulle. Tālāk ir saprotams, ka divu vienādu vektoru projekcijas uz vienas un tās pašas taisnes vai tai parallēlām taisnēm, kā arī uz kādas plaknes vai tai parallēlām plaknēm ir vienādas.

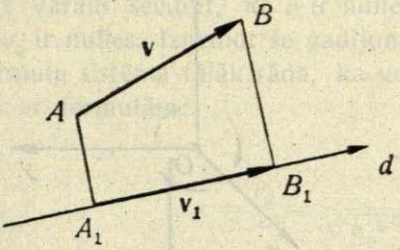
Ja doto taisni d iedomājas orientētu, t. i. ja uz tās izvēlas vienu no diviem iespējamiem tās punktu sakārtojumiem (2. zīm.), tad par vektora **v** *komponentu pa orientēto taisni d* sauc vektora **v** projekciju $\mathbf{v}_1$ uz šīs orientētās taisnes.

Nav grūti uzrakstīt tagad vektora **v** komponenta $\mathbf{v}_1$ pa orientēto taisni d algebrisko vērtību v_1 atkarībā no vektora **v** algebriskās vērtības v un leņķa, kādu veido vektors **v** ar orientēto taisni d. Analitiskā ģeometrija māca, ka

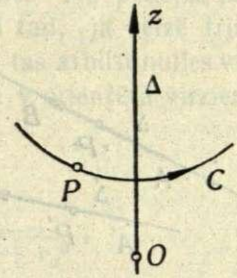
$$v_1 = v \cos(\mathbf{v}, d) = v \cos(d, \mathbf{v}), \tag{1.}$$

[1]) Simbolu mod **v** pirmo reizi lietoja Argans un Kōšī (A. L. Cauchy, 1789.—1857. g.), bet simbolu |**v**| —Veierštrass (K. Weierstrass, 1815.—1897. g.).

pie kam ar leņķi starp orientēto taisni d un vektoru $\mathbf{v}$ saprot leņķi (0 un π robežās, tās ieskaitot) starp orientēto taisni d un vektoram $\mathbf{v}$ kādu parallēli vilktu taisni ar to pašu orientāciju kā dotajam vektoram. Tādējādi v_1 ir pozitīvs vai negātīvs lielums atkarībā no tā, vai leņķis



2. zīm.



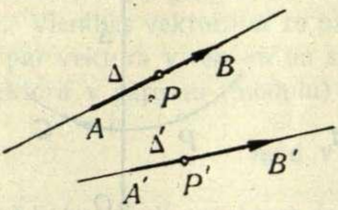
3. zīm.

$(\mathbf{v}, d)$ ir šaurs vai plats. Leņķis $(\mathbf{v}, d)$ ir nenoteikts, ja vektors $\mathbf{v}$ ir nulles vektors, bet (1.) formula ir spēkā arī šai gadījumā, jo kreisajā pusē v_1 ir nulle pēc definīcijas, bet labajā pusē v arī ir nulle, kamēr cos $(\mathbf{v}, d)$, kā no nenoteikta lieluma, tomēr ir galīgs lielums.

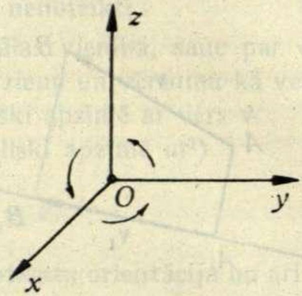
4. **Rotācijas vērsums. Orientācija.** — 1° *Rotācijas pozitīvais vērsums ap asi.*—Ja telpā ir dota kāda ass Δ, t. i. orientēta taisne Oz (3. zīm.), un kāds punkts P, kas pārvietojas pa kādu telpas līkni C, tad saka, ka punkta P cirkulācijas vērsums ap asi Δ ir *pozitīvs,* ja novērotājs, kas stāv ar kājām punktā O un galvu, vērstu pret punktu z, redz punktu P pārvietojamies pa līkni C no *labās puses* uz *kreiso.* Šādi definētais cirkulācijas pozitīvais vērsums ir vienāds ar *pozitīvo* jeb astronomijā apzīmēto *direkto rotācijas vērsumu,* t. i. vērsumu, kādā Zeme un citas planētas rotē ap savām asīm un kustas pa savām trajektorijām ap Sauli, pie kam rotācijas asis ir orientētas dienvidziemeļu vērsumā. Pretējo cirkulācijas vērsumu sauc par negātīvo vērsumu, un tas ir vienāds ar *negātīvo* jeb astronomijā saukto *retrograđo rotācijas vērsumu.*

2° *Divu asu savstarpējā orientācija.* — Apskatīsim divas asis Δ un Δ', kas neatrodas vienā plaknē, un divus punktus P un P', kas attiecīgi apraksta šīs asis vērsumos AB un $A'B'$ (4. zīm.). Viegli konstatēt: ja punkta P' cirkulācijas vērsums ap asi Δ ir pozitīvs, tad arī otrādi — punkta P cirkulācijas vērsums ap asi Δ' ir pozitīvs. Tādējādi divas asis rotē viena ap otru reizē vai nu abas pozitīvā, vai negātīvā vērsumā, citiem vārdiem sakot, abas asis ir viena pret otru reizē vai nu pozitīvi, vai negātīvi orientētas.

3° *Pozitīvi orientēts koordinātu triedrs.* — Apskatīsim slīp- vai taisnleņķu koordinātu triedru $Oxyz$ (5. zīm.), ko veido trīs koordinātu asis Ox, Oy, Oz. Šo triedru sauc par *pozitīvi orientētu,* ja plaknes xOz savienošanai ar plakni yOz, pagriežot to ap asi Oz par kādu leņķi ro-



4. zīm.



5. zīm.

bežās starp 0 un π vai par taisnu leņķi, rotācijas vērsums ir pozitīvs. Permūtējot cikliski burtus x, y, z, dabūjam divas ekvivalentas definīcijas attiecībā pret x- un y- asi. Ar maz izņēmumiem turpmāk vienmēr lietosim pozitīvi orientētu taisnleņķu koordinātu triedru, kuŗa attēls redzams 5. zīmējumā.

5. **Vektora koordinātas Dekarta koordinātu triedrā.** — Izvēlēsimies kādu pozitīvi orientētu ortogōnālu Dekarta koordinātu triedru $Oxyz$. Šai koordinātu triedrā dotais vektors $\mathbf{v}$ ir ģeometriski reprezentēts ar orientēto taisnes segmentu AB, kuŗa gaŗums, virziens un vērsums ir attiecīgi vienādi ar vektora $\mathbf{v}$ gaŗumu, virzienu un vērsumu. Bet orientētais segments AB izvēlētajā koordinātu triedrā ir pilnīgi noteikts, zinot tā gala punktu A un B koordinātas x', y', z' un x'', y'', z''. Tādēļ, apzīmējot vektora $\mathbf{v}$ komponentus pa koordinātu triedra asīm attiecīgi ar $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}_y$, $\mathbf{v}_z$, šo komponentu algebriskām vērtībām v_x, v_y, v_z, kā to māca analitiskā ģeometrija, dabūjam šādas izteiksmes:

(2.) $$v_x = x'' - x', \quad v_y = y'' - y', \quad v_z = z'' - z'.$$

Tālāk, apzīmējot vektora $\mathbf{v}$ virziena kosinus ar α, β, γ, pēc (1.) formulas dabūjam, ka

(3.) $$v_x = v\alpha, \quad v_y = v\beta, \quad v_z = v\gamma.$$

Trīs lielumi v_x, v_y, v_z, kā to rāda (2.) un (3.) formulu sistēma, pilnīgi noteic vektoru $\mathbf{v}$ telpā.

Tā no (3.) formulu sistēmas redzams, ka vektora **v** gaŗums v ir dots ar formulu

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \tag{4.}$$

kuŗā radikālis jāņem tā aritmētiskā nozīmē. No pēdējās izteiksmes savkārt varam secināt, ka v ir nulle tikai tad, ja reizē trīs lielumi v_x, v_y, v_z ir nulles. Izņemot šo gadījumu, jo tas atbilst nulles vektoram, (3.) formulu sistēma tālāk rāda, ka vektora **v** orientētā virziena kosini ir doti ar formulām:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \\ \beta &= \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \\ \gamma &= \frac{v_z}{v} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}. \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

Tā tad no (2.), (3.) un (5.) formulu sistēmas un (4.) formulas izriet, ka starp telpas vektoru **v** un tā komponentu pa koordinātu asīm Ox, Oy, Oz algebriskām vērtībām v_x, v_y, v_z eksistē vienviennozīmīga sakarība, t. i. katram vektoram **v** atbilst trīs lielumi v_x, v_y, v_z un otrādi — trīs lielumi v_x, v_y, v_z noteic vektoru **v**. Pamatojoties uz šo sakarību, trīs lielumus v_x, v_y, v_z sauc par vektora **v** *koordinātām* izvēlētajā koordinātu triedrā[1]). Dažreiz tās apzīmēsim arī vienkārši ar X, Y, Z.

6. **Vektora koordinātu transformācija.** — Iedomāsimies, ka doti ir divi ortogonāli koordinātu triedri $Oxyz$ un ΩXYZ, pie kam ikviena triedra asis attiecībā pret otru triedru ir noteiktas ar to virzienu kosiniem pēc tabulas

---

[1]) Diezgan izplatīts ir uzskats, pēc kuŗa ar vektora **v** komponentiem saprot vektora **v** komponentu $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}_y$, $\mathbf{v}_z$ pa koordinātu asīm algebriskās vērtības v_x, v_y, v_z. Lai gan šis apzīmējums pēc būtības nav tik izdevīgs, uz ko aizrāda arī Levi-Čivita (L e v i - C i v i t a) un Amaldi (A m a l d i) savā mēchanikas grāmatā, tomēr minētie autori terminu „komponents" šai nozīmē patur, ievērojot, ka tas stipri ieviesies. Mēs tomēr savā kursā lietosim terminus „vektora komponents" un „vektora koordināta" tai nozīmē, kādā tie tika definēti, t. i. vektora **v** komponenti ir tā projekcijas $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}_y$, $\mathbf{v}_z$ uz koordinātu asīm un vektora **v** koordinātas ir šo komponentu algebriskās vērtības v_x, v_y, v_z. Daži autori, piem. Apells, pēdējās sauc arī par vektora **v** projekcijām uz koordinātu asīm.

	Ox	Oy	Oz
ΩX	α_{11}	α_{12}	α_{13}
ΩY	α_{21}	α_{22}	α_{23}
ΩZ	α_{31}	α_{32}	α_{33} .

Kā zināms, deviņi virzienu kosini α_{ij} tad ir saistīti ar vienu no divām relāciju sistēmām

$$\alpha_{1i}^2 + \alpha_{2i}^2 + \alpha_{3i}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \alpha_{3i}\alpha_{3j} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

vai

$$\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \alpha_{i3}\alpha_{j3} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j),$$

kuŗas analitiski izsaka faktu, ka iepriekšējās tabulas ikvienas kolonnas vai rindas elementi ir kādas orientētas taisnes (viena triedra kādas ass attiecībā pret otru triedru) virziena kosini un ka ikviena triedra asis pa pārim ir savstarpēji perpendikulāras.

Uzrakstot transformācijas formulas, kuŗas saista kāda punkta koordinātas divos ortogōnālos koordinātu triedros, un ievērojot (2.) sistēmas relācijas, redzam, ka, pārejot no triedra $Oxyz$ uz triedru ΩXYZ, vektora **v** koordinātas v_x, v_y, v_z transformējas trīs jaunās koordinātās v_X, v_Y, v_Z pēc formulām

$$v_X = \alpha_{11}v_x + \alpha_{12}v_y + \alpha_{13}v_z,$$
$$v_Y = \alpha_{21}v_x + \alpha_{22}v_y + \alpha_{23}v_z,$$
$$v_Z = \alpha_{31}v_x + \alpha_{32}v_y + \alpha_{33}v_z;$$

un otrādi, pārejot no triedra ΩXYZ uz triedru $Oxyz$, vektora **v** koordinātas v_X, v_Y, v_Z tiek transformētas koordinātās v_x, v_y, v_z ar formulām

$$v_x = \alpha_{11}v_X + \alpha_{21}v_Y + \alpha_{31}v_Z,$$
$$v_y = \alpha_{12}v_X = \alpha_{22}v_Y + \alpha_{32}v_Z,$$
$$v_z = \alpha_{13}v_X + \alpha_{23}v_Y + \alpha_{33}v_Z.$$

Tādējādi, pārejot no viena koordinātu triedra uz otru, vektora koordinātu transformācijas formulas ir neatkarīgas no jaunā triedra sākuma punkta pozicijas, bet ir atkarīgas tikai no tā asu virzieniem pret veco triedru, kā to varēja arī viegli paredzēt.

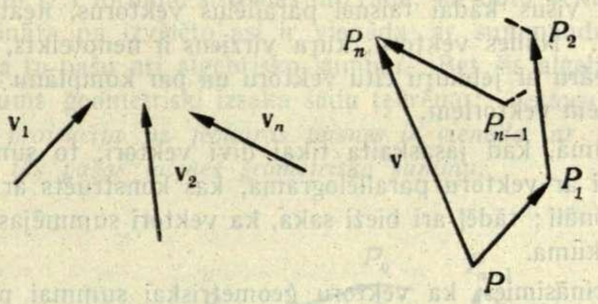
Ja vektors $\overline{AB}$ ir nulles vektors, tad $v_x = v_y = v_z = 0$, un tāpēc arī $v_X = v_Y = v_Z = 0$ un otrādi. Tādējādi kāda vektora anullēšanās izsaka tādu īpašību, kas ir neatkarīga no koordinātu triedra.

2. §. Vektoru adicija un subtrakcija. Vektora sadalīšana.

7. **Vektoru adicija.** — Par doto n vektoru $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *ģeometrisko summu* $\mathbf{v}$, rakstot to formā

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_n, \tag{6.}$$

sauc šādi konstruētu brīvo vektoru $\mathbf{v}$: Caur kādu brīvi izvēlētu punktu P kā sākuma punktu velkam vektoru $\overline{PP_1}$ — vienādu ar vektoru $\mathbf{v}_1$, pēc tam caur punktu P_1 velkam vektoru $\overline{P_1P_2}$ — vienādu ar $\mathbf{v}_2$, un tā turpinām, līdz beidzot caur punktu P_{n-1} novelkam vektoru $\overline{P_{n-1}P_n}$ — vienādu ar $\mathbf{v}_n$. Vektors $\overline{PP_n}$, kas savieno sākuma punktu P ar gala punktu P_n, ir meklētais vektors $\mathbf{v}$ (6. zīm.), kuŗu sauc par doto vektoru



6. zīm.

rezultanti. Brīvi izvēlētam sākuma punktam P mainoties, visi aprakstītā kārtā konstruētie vektori $\overline{PP_n}$ ir vienādi savā starpā, un tādēļ vektors $\mathbf{v}$ ir brīvs vektors.

Ja koordinātu triedrā $Oxyz$ vektoru $\mathbf{v}_i$ un $\mathbf{v}$ koordinātas apzīmē attiecīgi ar X_i, Y_i, Z_i un X, Y, Z, bet punktu P un P_i koordinātas ar x, y, z resp. x_i, y_i, z_i, tad tās ir saistītas ar šādām sakarībām:

$$\begin{array}{lll}
x_1 - x = X_1, & y_1 - y = Y_1, & z_1 - z = Z_1, \\
x_2 - x_1 = X_2, & y_2 - y_1 = Y_2, & z_2 - z_1 = Z_2, \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
x_n - x_{n-1} = X_n, & y_n - y_{n-1} = Y_n, & z_n - z_{n-1} = Z_n.
\end{array}$$

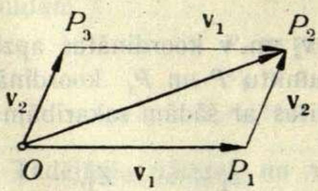
Saskaitot šo sakarību atsevišķās kolonnas, dabūjam, ka

$$
(7.)\quad \begin{cases} X = x_n - x = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\,, \\[2ex] Y = y_n - y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\,, \\[2ex] Z = z_n - z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i\,. \end{cases}
$$

Ja vektoru poligōns $PP_1P_2 \ldots P_n$, kas iegūts, dotos n vektorus poligōnējot, ir plakans, tad dotos vektorus sauc par *komplāniem vektoriem,* citiem vārdiem sakot, par komplāniem vektoriem sauc vektorus, kas ir parallēli kādai plaknei. Ja turpretim vektoru poligōns $PP_1P_2 \ldots P_n$, dotos vektorus poligōnējot, reducējas par taisni, tad šos vektorus sauc par *kollīneāriem vektoriem,* citiem vārdiem sakot, par kollīneāriem vektoriem sauc visus kādai taisnei parallēlus vektorus, neatkarīgi no to vērsumiem. Nulles vektoru, kuŗa virziens ir nenoteikts, var uzskatīt par kollīneāru ar jebkuŗu citu vektoru un par komplānu ar jebkuŗiem diviem citiem vektoriem.

Gadījumā, kad jāsaskaita tikai divi vektori, to summa ir dota ģeometriski ar vektoru parallēlograma, kas konstruēts ar šiem vektoriem, diagōnāli; tādēļ arī bieži saka, ka vektori summējas pēc parallēlograma likuma.

Pārliecināsimies, ka vektoru ģeometriskai summai piemīt *kommūtātīva* un *asociātīva* īpašība. Vispirms pierādīsim pirmo īpašību, t. i. ka vektoru ģeometriskā summa ir neatkarīga no kārtības, kādā dotie vektori ir summēti. Iesāksim ar vienkāršāko gadījumu, kad jāsummē tikai divi vektori $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$. Šai gadījumā šo vektoru summa ir reprezentēta ģeometriski ar parallēlograma $OP_1P_2P_3$, kas konstruēts ar vektoriem $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, diagōnāli OP_2 (7. zīm.), centrējot dotos vektorus vispirms kādā punktā O. Tiešām, parallēlograma diagōnāle OP_2 ģeometriski reprezentē vektoru, kas noslēdz kā vektoru poligōnu OP_1P_2 ar malām $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, tā arī vektoru poligōnu OP_3P_2 ar malām $\mathbf{v}_2$ un $\mathbf{v}_1$, un tādēļ



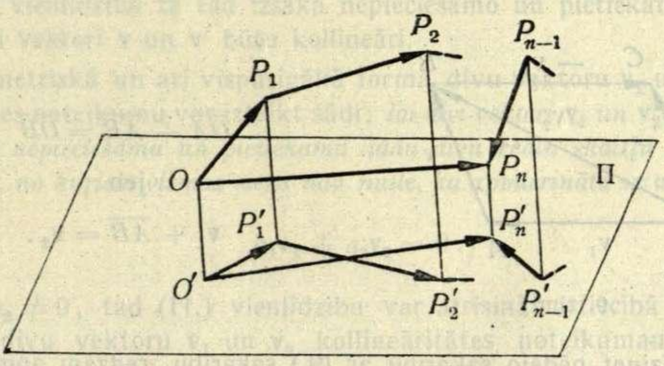
7. zīm.

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\,.$$

Tādējādi, saskaitot vairāk nekā divus vektorus, piem. n vektorus, un samainot jebkuŗus divus vienu otram sekojošus vektorus, vektoru poligōna gala punkts P_n un vektoru summa ar to nav mainījušies. Ar to vektoru summas kommūtātīvā īpašība ir pierādīta.

Lai pierādītu vektoru ģeometriskās summas asociātīvo īpašību, jāpierāda, ka šī summa nemainās, apmainot vairākus summandus ar to ģeometrisko summu. Tiešām, atsaucoties uz vektoru summas kommūtātīvo īpašību, varam iedomāties, ka vektori, kuŗus apmainām ar to ģeometrisko summu, ir viens otram sekojoši vektori, piem. trīs pirmie vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Tādā gadījumā vektoru poligōna trīs pirmās malas PP_1, P_1P_2, P_2P_3 tiek aizstātas ar to ģeometrisko summu PP_3. Bet ar šādu operāciju vektoru poligōna gala punkts P_n nemainās, un līdz ar to nemainīga paliek arī doto vektoru ģeometriskā summa.

8. **Projekciju teōrēma.** — Izvēloties kādu orientētu taisni telpā, to varam iedomāties par vienu kāda koordinātu triedra asi; attiecīgā formula no (7.) formulu sistēmas tad rāda, ka doto vektoru rezultantes koordināta pa izvēlēto asi ir vienāda ar summandu vektoru koordinātu pa to pašu asi algebrisko summu. Bet šis algebriskā rakstura secinājums ģeometriski izsaka šādu teōrēmu: *vektoru ģeometriskās summas projekcija uz jebkuŗas taisnes ir vienāda ar summandu projekciju uz tās pašas taisnes ģeometrisko summu.*



8. zīm.

Šī pati teōrēma ir spēkā arī, izdarot doto vektoru un to ģeometriskās summas parallēlprojekciju uz kādas plaknes. Ģeometriski par to varam pārliecināties šādi (8. zīm.). Projicējot kādā punktā O konstruētu vektorpoligōnu $OP_1P_2 \ldots P_n$, kuŗa malas ir dotie vektori, un šo vektoru ģeometrisko summu, reprezentētu ar vektoru $\overline{OP_n}$, uz dotās plaknes II, dabūsim vektorpoligōnu $O'P'_1P'_2 \ldots P'_n$ un vektoru $\overline{O'P'_n}$. Vektori $\overline{O'P'_1}, \overline{P'_1P'_2}, \ldots, \overline{P'_{n-1}P'_n}$ un vektors $\overline{O'P'_n}$ ir atbilstošo vektoru $\overline{OP_1}, \overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$ un to summas vektora $\overline{OP_n}$ parallēlprojekcijas, bet pēc konstrukcijas $\overline{O'P'_n}$ ir vektoru $\overline{O'P'_1}, \overline{P'_1P'_2}, \ldots, \overline{P'_{n-1}P'_n}$ ģeometriskā summa. Tādējādi *doto vektoru ģeometriskās summas parallēlprojekcija uz kādas plaknes ir vienāda ar summandu parallēlprojekciju uz tās pašas plaknes ģeometrisko summu.*

Savā būtībā abas šīs teōrēmas izsaka tikai to, ka slēgta poligōna parallēlprojekcija ir atkal slēgts poligōns. Tādēļ tās abas apvieno vienā teōrēmā, nosaucot to par *projekciju teōrēmu.*

9. **Vektoru subtrakcija.** — Par divu doto vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ diferenci, rakstot to formā

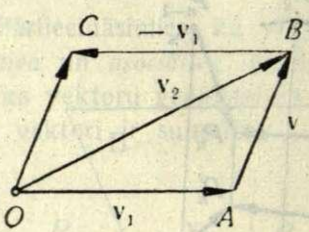
(8.) $$\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1,$$

sauc tādu brīvo vektoru $\mathbf{v}$, kas apmierina sakarību

(9.) $$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v} = \mathbf{v}_2.$$

Vēlāk redzēsim, ka diferenci var definēt arī, pamatojoties uz summas jēdzienu.

Vektora $\mathbf{v}$ konstruēšanai atliksim no punkta O vektoru $\overline{OA}$ — vienādu ar $\mathbf{v}_1$ — un vektoru OB — vienādu ar $\mathbf{v}_2$ (9. zīm.). Vektors $\overline{AB}$ pēc konstrukcijas tad ir vektors $\mathbf{v}$, jo



9. zīm.

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$$

jeb

$$\mathbf{v}_1 + \overline{AB} = \mathbf{v}_2.$$

Salīdzinot pēdējo sakarību ar (9.) sakarību, redzam apgalvojuma pareizumu.

Ja trijstūri OAB papildina līdz parallēlogramam ar OB kā vienu diagōnāli un tā ceturto virsotni apzīmē ar C, tad vektors $\overline{OC}$ ir vienāds ar $\mathbf{v}$, vektors $\overline{CB}$ vienāds ar $\mathbf{v}_1$, bet vektors $\overline{BC}$ vienāds ar $-\mathbf{v}_1$. Un tā tad pēc konstrukcijas vektors $\overline{OC}$ reprezentē vektoru $\overline{OB}$ un $\overline{BC}$ summu, t. i.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + (-\mathbf{v}_1).$$

Tā tad, *lai ģeometriski atrastu divu doto vektoru diferenci, subtrahendam jāmaina vērsums un pēc tam jākonstruē to summa, vai, ja minuends un subtrahends ir ar kopēju sākuma punktu, jāvelk vektors, kas savieno subtrahenda gala punktu ar minuenda gala punktu.*

10. **Vektora reizināšana ar reālu skaitli.** — Ja ir dots kāds vektors $\mathbf{v}$ ar tā virzienu, izvēlēto pozitīvo vērsumu uz pēdējā un algebrisko vērtību v, kas skaitīta saskaņā ar izvēlēto pozitīvo vērsumu, un kāds reāls skaitlis a, tad par vektora $\mathbf{v}$ reizinājumu ar reālo skaitli a sauc brīvo vektoru $a\mathbf{v}$ vai $\mathbf{v}a$ ar to pašu virzienu kā vektoram $\mathbf{v}$, bet algebrisko vērtību av. Šā vektora vērsums ir vienāds vai pretējs vektora $\mathbf{v}$ vērsumam atkarībā no tā, vai a ir pozitīvs vai negātīvs.

Pēc reizinājuma definīcijas $a\mathbf{v}$ ir nulles vektors, ja $\mathbf{v}$ ir nulles vektors vai ja a ir nulle, vai arī, ja reizē a un $\mathbf{v}$ ir nulles. Tādējādi vektors $a\mathbf{v}$ ir vienmēr kollīneārs ar vektoru $\mathbf{v}$.

Arī otrādi, ja vektors $\mathbf{v}'$ ir kollīneārs ar vektoru $\mathbf{v}$, kas nav nulles vektors, tad vienmēr eksistē viens tāds reāls skaitlis a, ka

$$\mathbf{v}' = a\mathbf{v}, \tag{10.}$$

pie kam a algebriskā vērtība ir v'/v; a tā tad ir pozitīvs skaitlis, ja vektoram $\mathbf{v}'$ ir tas pats vērsums kā vektoram $\mathbf{v}$, un a ir negātīvs, ja $\mathbf{v}'$ vērsums ir pretējs $\mathbf{v}$ vērsumam. Ja $\mathbf{v}' = 0$, tad $a = 0$.

(10.) vienlīdzība tā tad izsaka nepieciešamo un pietiekamo noteikumu, lai vektori $\mathbf{v}$ un $\mathbf{v}'$ būtu kollīneāri.

Simmetriskā un arī vispārīgākā formā divu vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ kollīneāritātes noteikumu var izteikt šādi: *lai divi vektori* $\mathbf{v}_1$ *un* $\mathbf{v}_2$ *būtu kollīneāri, ir nepieciešama un pietiekama tādu divu reālu skaitļu* a_1 *un* a_2 *eksistence, no kuŗiem vismaz viens nav nulle, ka apmierināta ir vienlīdzība*

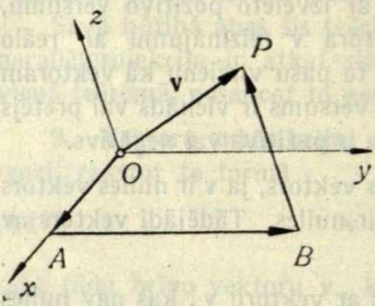
$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = 0\,. \tag{11.}$$

Ja $a_2 \neq 0$, tad (11.) vienlīdzību var atrisināt attiecībā pret $\mathbf{v}_2$, dabūjot divu vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ kollīneāritātes noteikumam agrāko (10.) formu.

Ja (10.) formulā a ir vienāds ar -1, tad vektors $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ ir pretējs vektoram $\mathbf{v}$.

11. **Vektora sadalīšana komponentu vektoros.** — Ir skaidrs, ka jebkuŗu vektoru var sadalīt bezgala daudz veidos un pēc patikas daudz *komponentu vektoros*, kuŗu ģeometriskā summa ir vienāda ar izvēlēto vektoru.

Viens šāds sadalījuma veids, kas bieži tiek lietots, ir telpas vektora **v** sadalīšana trijos vektoros, kuŗu virzieni ir doti. Šai nolūkā caur kādu brīvi izvēlētu punktu O velk paralēles trim dotajiem virzieniem (kas nav paralēli kādai plaknei), izvēloties uz ikvienas pozitīvo vērsumu tā, lai pēc to orientēšanas tās varētu uzskatīt par kāda pozitīvi orientēta slīpleņķu koordinātu triedra asīm Ox, Oy, Oz (10. zīm.).



10. zīm.

Pēc tam caur punktu O velk vektoru $\overline{OP}$ — vienādu ar doto vektoru **v** — un konstruē punkta P koordinātu kontūru $OABP$. Tad, kā 10. zīmējumā redzams,

$$\mathbf{v} = \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BP}.$$

Apzīmēsim vektora **v** koordinātas iepriekš konstruētā koordinātu triedrā ar X, Y, Z, kas reizē ir arī punkta P koordinātas šai triedrā. Tad, apzīmējot vienības vektorus pa šī koordinātu triedra asīm Ox, Oy, Oz attiecīgi ar **i**, **j**, **k** un atsaucoties uz īpašību, ka divi kollīneāri vektori atšķiŗas viens no otra tikai ar skālāro faktoru [(10.) vienlīdzība], kas izteic to algebrisko vērtību attiecību, vektorus $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ un $\overline{BP}$, atkarībā no attiecīgajiem vienības vektoriem, var izteikt šādi:

$$\overline{OA} = X\mathbf{i}\,, \quad \overline{AB} = Y\mathbf{j}\,, \quad \overline{BP} = Z\mathbf{k}\,.$$

Tādējādi koordinātu triedrā $Oxyz$, ko definē trīs pozitīvi orientēti vienības vektori **i**, **j**, **k**, vektoru **v**, atkarībā no tā koordinātām X, Y, Z, var izteikt formā

$$\mathbf{v} = \overline{OP} = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k}. \tag{12.}$$

Beidzot atzīmēsim vēl, ka brīvs vektors ir atkarīgs no trim parametriem — trim vektora koordinātām X, Y, Z. Saistīts vektors ir bez tam vēl atkarīgs no tā sākuma punkta trīs koordinātām, tā tad pavisam no sešiem parametriem. Slīdošs vektors savkārt ir atkarīgs no pieciem parametriem: diviem, kas noteic tā virzienu, un agrāk minētajiem trīs parametriem — tā koordinātām, kā iepriekšējos gadījumos.

3. §. Vektoru multiplikācija.

Izšķiŗ divus vektoru produktu tipus: skālāro un vektoriālo.

12. **Divu vektoru skālārais produkts.** — Divu vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ *skālāro produktu* apzīmē ar simbolu[1])

$$\mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2$$

un definē ar abu doto vektoru modulu un šo vektoru veidotā leņķa ϑ kosinus reizinājumu, t. i.

$$\mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2 = v_1 v_2 \cos \vartheta .$$

Divu vektoru skālārais produkts tā tad ir algebrisks lielums, bet ne vairs vektoriāls.

Skālārais produkts ir nulle, ja viens no vektoriem ir nulle vai arī ja tie ir savstarpēji perpendikulāri. Ja no dotajiem vektoriem $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ neviens nav nulles vektors, tad to skālārā produkta anullēšanās ir nepieciešamais un pietiekamais noteikums vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ perpendikulāritātei.

Divu no nulles atšķirīgu vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ skālārais produkts ir pozitīvs, ja šo vektoru veidotais leņķis ϑ ir šaurs, bet tas ir negātīvs, ja leņķis ϑ ir plats.

Ja abi dotie vektori $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ ir vienības vektori, tad

$$\mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2 = \cos \vartheta ;$$

tādēļ speciālā gadījumā, kad **i**, **j**, **k** ir trīs savstarpēji perpendikulāri vienības vektori, pastāv šādas sakarības:

$$(13.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i} . \mathbf{i} = \mathbf{j} . \mathbf{j} = \mathbf{k} . \mathbf{k} = 1 , \\ \mathbf{i} . \mathbf{j} = \mathbf{j} . \mathbf{k} = \mathbf{k} . \mathbf{i} = 0 . \end{array} \right.$$

13. **Cita skālārā produkta definīcija.** — Skālārā produkta definīciju iespējams modificēt, kā tas redzams, uzrakstot šo produktu tā agrākai izteiksmei ekvivalentās algebrisku produktu formās

$$v_1 (\text{proj.}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_2)_{\text{alg. vērtība}} \quad \text{resp.} \quad v_2 (\text{proj.}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{v}_1)_{\text{alg. vērtība}} ,$$

jo izteiksme $v_2 \cos \vartheta$ resp. $v_1 \cos \vartheta$ ir vienāda ar vektora $\mathbf{v}_2$ projekcijas uz vektora $\mathbf{v}_1$ resp. vektora $\mathbf{v}_1$ projekcijas uz vektora $\mathbf{v}_2$ virziena algebrisko vērtību.

---

[1]) Šo simbolu, kā arī nosaukumu *skālārais produkts* pirmais lietoja Gibss savās lekcijās — *Elements of Vector-Analysis, arranged for the use of students in Physics,* New-Haven, 1881—84.

Ja v_1 apzīmē vektora $\mathbf{v}_1$ algebrisko vērtību un ja tā ir pozitīva, tad

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 (\text{proj.}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_2)_{\text{alg. vērtība}},$$

bet ja vektora $\mathbf{v}_1$ algebriskā vērtība v_1 ir negātīva, t. i. ja projekciju asij ir $\mathbf{v}_1$ virziens, bet pretējais vērsums, tad

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -v_1 (\text{proj.}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_2)_{\text{alg. vērtība}} = v_1 (\text{proj.}_{-\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_2)_{\text{alg. vērtība}}.$$

Pēdējo izteiksmi dabūjam no iepriekšējās, pārmainot tanī abu faktoru zīmes.

Tā tad, lai kāda būtu vektora $\mathbf{v}_1$ algebriskās vērtības v_1 zīme, vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ skālārais produkts ir vienāds ar vektora $\mathbf{v}_1$ algebrisko vērtību v_1, reizinātu ar vektora $\mathbf{v}_2$ projekcijas uz vektora $\mathbf{v}_1$ virziena algebrisko vērtību, ko uzskata par pozitīvu tai pašā vērsumā kā v_1.

Citādi sakot, doto vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ skālārais produkts ir vienāds ar šo vektoru komponentu pa viena dotā vektora nesēju taisni algebrisko vērtību produktu, lai kā šī taisne būtu orientēta.

Beidzot vēl atzīmēsim, ka kaut kāda vektora $\mathbf{v}$ un kāda vienības vektora $\mathbf{u}$ skālārais produkts $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ ir vektora $\mathbf{v}$ komponenta pa orientēto taisni $\mathbf{u}$ algebriskā vērtība.

Ja abi dotie vektori $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ ir parallēli savā starpā un to algebriskās vērtības ir uzskatītas par pozitīvām vienā un tai pašā izvēlētajā vērsumā, tad vektora $\mathbf{v}_2$ projekcijas uz vektora $\mathbf{v}_1$ virziena algebriskā vērtība ir vienkārši v_2, un tādēļ šo vektoru skālārais produkts ir vienāds ar to modulu algebrisko produktu, t. i.

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_1 \, v_2,$$

pie kam algebriskais produkts ir pozitīvs, ja abu vektoru vērsumi ir vienādi ($\vartheta = 0$), bet šis produkts ir negātīvs, ja doto vektoru vērsumi ir pretēji ($\vartheta = \pi$).

Speciālā gadījumā, kad abi dotie vektori ir vienādi, t. i. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, vektora skālārais kvadrāts ir vienāds ar vektora algebriskās vērtības kvadrātu:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_1)^2 = v_1^2.$$

Tādējādi $\mathbf{v}_1^2 = 1$ raksturo vienības vektoru.

14. **Skālārā produkta īpašības.** — No skālārā produkta definīcijas izriet, ka tā vērtība, samainot faktoru kārtību, nemainās, t. i.

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 ;$$

citiem vārdiem sakot, *skālārais produkts ir kommūtātīvs.*

Jautājums par skālārā produkta asociātīvitāti atkrīt, jo tā kā $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ ir skālārs, tad par vektora $\mathbf{v}_3$ un skālāra $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ skālāro produktu nevar būt runas.

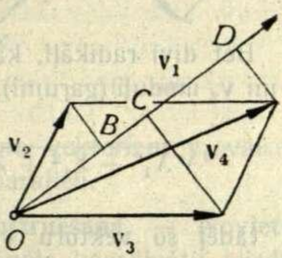
Turpretim *skālārais produkts ir distribūtīvs*, t. i..

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 ,$$

kur $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ ir trīs kaut kādi vektori. Apzīmēsim vektoru $\mathbf{v}_2$ un $\mathbf{v}_3$ ģeometrisko summu ar $\mathbf{v}_4$, t. i. rakstīsim

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

un iedomāsimies, ka vispārīgi vektors $\mathbf{v}_1$ neatrodas vektoru $\mathbf{v}_2$ un $\mathbf{v}_3$ noteiktajā plaknē (11. zīm.). Projicēsim vektorus $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ un $\mathbf{v}_4$ uz vektora $\mathbf{v}_1$ nesējas taisnes un apzīmēsim šo projekciju vektoru gaŗumus attiecīgi ar OB, OC un OD. Tad $OC = BD$, kā tas viegli pārbaudāms, atsaucoties uz projekciju teōrēmu, pēc kuŗas vektoru ģeometriskās summas projekcija uz kādas taisnes ir vienāda ar summandu projekciju uz tās pašas taisnes ģeometrisko summu.



11. zīm.

Tādējādi

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4 = v_1 v_4 \cos(\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_4) \\ &= v_1\, OD = v_1 (OB + BD) = v_1 (OB + OC) \\ &= v_1 v_2 \cos(\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2) + v_1 v_3 \cos(\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_3 ,\end{aligned}$$

ar ko skālārā produkta distribūtīvā īpašība ir pierādīta. Šo īpašību var vispārināt uz jebkuŗu vektoru summu skālāro produktu.

15. **Skālārā produkta analitiskā izteiksme ortogōnālā koordinātu triedrā.** — Apzīmēsim divu doto vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ koordinātas izvēlētajā ortogōnālā koordinātu triedrā attiecīgi ar X_1, Y_1, Z_1 un X_2, Y_2, Z_2. Šo vektoru skālārā produkta analitiskā izteiksme, ievērojot (12.) formulu, tad ir šāda:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (X_1\, \mathbf{i} + Y_1\, \mathbf{j} + Z_1\, \mathbf{k}) \cdot (X_2\, \mathbf{i} + Y_2\, \mathbf{j} + Z_2\, \mathbf{k}).$$

Bet tā kā skālāram produktam piemīt distribūtīva īpašība, tad, reizinot iepriekšējās vienlīdzības labajā pusē ikvienu pirmo iekavu locekli ar ikvienu otru iekavu locekli un ievērojot (13.) sistēmas sakarības, dabūjam tam šādu izteiksmi:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2 &= X_1 X_2 \;\mathbf{i}\,.\,\mathbf{i} + X_1 Y_2 \;\mathbf{i}\,.\,\mathbf{j} + X_1 Z_2 \;\mathbf{i}\,.\,\mathbf{k}\\ &+ Y_1 X_2 \;\mathbf{j}\,.\,\mathbf{i} + Y_1 Y_2 \;\mathbf{j}\,.\,\mathbf{j} + Y_1 Z_2 \;\mathbf{j}\,.\,\mathbf{k}\\ &+ Z_1 X_2 \;\mathbf{k}\,.\,\mathbf{i} + Z_1 Y_2 \;\mathbf{k}\,.\,\mathbf{j} + Z_1 Z_2 \;\mathbf{k}\,.\,\mathbf{k}\\ &= X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.\end{aligned}$$

Pēdējā skālārā produkta analitiskā izteiksme ir vienāda ar doto vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ veidotā leņķa ϑ kosinus analitiskās izteiksmes skaitītāju, jo, kā to analitiskā ģeometrija māca,

$$\cos\vartheta = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Bet divi radikāļi, kas atrodas $\cos\vartheta$ izteiksmes saucējā, ir vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ moduli (gaŗumi), t. i.

$$\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = v_1, \qquad \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2} = v_2,$$

un tādēļ šo vektoru veidotā leņķa ϑ kosinus formula dod skālārā produkta agrāko analitisko izteiksmi

$$v_1 v_2 \cos\vartheta = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

No pēdējās formulas varam secināt, ka doto vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, no kuŗiem neviens nav nulles vektors, perpendikulāritātes noteikums, kas izteikts ar šo vektoru koordinātām, ir

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0.$$

16. **Divu vektoru vektoriālais produkts.** — Par divu kaut kādu vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ vektoriālo produktu, ko apzīmē ar simbolu[1])

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2,$$

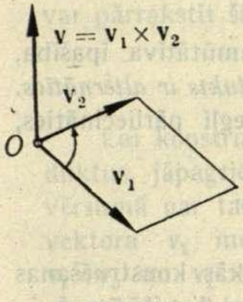
rakstot parasto reizināšanas zīmi starp doto vektoru simboliem, sauc šādi konstruētu brīvo vektoru $\mathbf{v}$: Vektora $\mathbf{v}$ virziens ir perpendikulārs vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ virzieniem. Tā vērsums ir tāds, lai triedrs, ko veido trīs vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}$, centrējot tos kādā punktā O, būtu pozitīvi orientēts (12 a. un 12 b. zīm.). Beidzot tā moduls (gaŗums) v ir skaitliski

[1]) Šo simbolu pirmais lietoja Gibss (skat. 17. lpp. *loc. cit.* [1])).

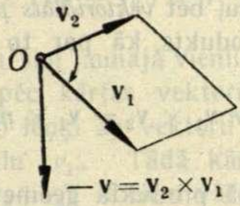
vienāds ar parallēlograma laukumu, kas konstruēts ar dotajiem vektoriem $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, t. i.

$$v = v_1 v_2 \sin\vartheta,$$

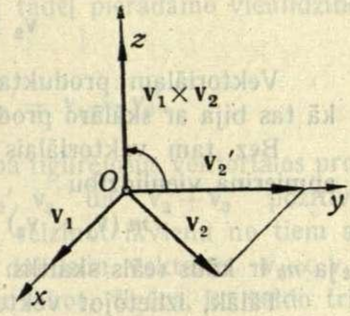
ja ϑ apzīmē leņķi, ko veido vektori $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$.



12a. zīm.



12b. zīm.



13. zīm.

Vektoriālais produkts ir nulle, ja viens no vektoriem $\mathbf{v}_1$ vai $\mathbf{v}_2$ ir nulles vektors vai ja šo vektoru virzieni ir parallēli.

17. **Vektoriālā produkta ģeometriska konstruēšana.** — Novietosim vektoru $\mathbf{v}_1$ kāda pozitīvi orientēta ortogōnāla koordinātu triedra x-ass vērsumā, skaitot no triedra sākuma punkta O, bet vektoru $\mathbf{v}_2$ plaknē xOy tā, lai tā sākuma punkts sakrīt ar punktu O, bet vērsums ir pa labi no šī punkta (13. zīm.). Projicējot pēc tam vektoru $\mathbf{v}_2$ uz plaknes yOz vektora $\mathbf{v}'_2$ veidā, kuŗa virziens un vērsums ir vienāds ar y-ass virzienu un vērsumu, redzam, ka vektoriālo produktu $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ un $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2'$ virzieni un vērsumi ir vienādi ar z-ass virzienu un vērsumu, bet parallēlograma laukums, kas konstruēts ar vektoriem $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, ir vienāds ar taisnstūŗa laukumu, konstruētu ar vektoriem $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2'$; citiem vārdiem sakot,

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2'.$$

Tādējādi, ievērojot pēdējo vienlīdzību, vektoriālā produkta ģeometriskai konstruēšanai dabūjam šādu priekšrakstu. *Caur vektoru* $\mathbf{v}_1$ *un* $\mathbf{v}_2$ *kopējo sākuma punktu O jāvelk vektoram* $\mathbf{v}_1$ *perpendikulāra plakne, uz šīs plaknes jāprojicē vektors* $\mathbf{v}_2$ *vektora* $\mathbf{v}_2'$ *veidā un pēc tam jāpagriež vektors* $\mathbf{v}_2'$ *pozitīvā vērsumā par taisno leņķi ap vektoru* $\mathbf{v}_1$ *(x-asi), reizinot to ar vektora* $\mathbf{v}_1$ *modulu* v_1. Dabūtais vektors ir produkta $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ ģeometriskais reprezentants.

18. **Vektoriālā produkta īpašības.** — No divu vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ vektoriālā produkta definīcijas izriet, ka, samainot faktoru kārtību, jaunā vektoriālā produkta $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1$ virziens un absolūtā vērtība ir vie-

nāda ar produkta $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ virzienu un absolūto vērtību, bet tā vērsums ir pretējs pirmatnējā produkta vērsumam (12 b. zīm.). Citiem vārdiem sakot, jaunais vektoriālais produkts $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1$ ir vektors, kas ir vērsts pretēji pirmatnējā vektoriālā produkta $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ reprezentētājam vektoram. Simboliski to izteic, rakstot, ka

$$\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 = -(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2).$$

Vektoriālam produktam tā tad nepiemīt kommūtātīva īpašība, kā tas bija ar skālāro produktu, bet *vektoriālais produkts ir alternātīvs.*

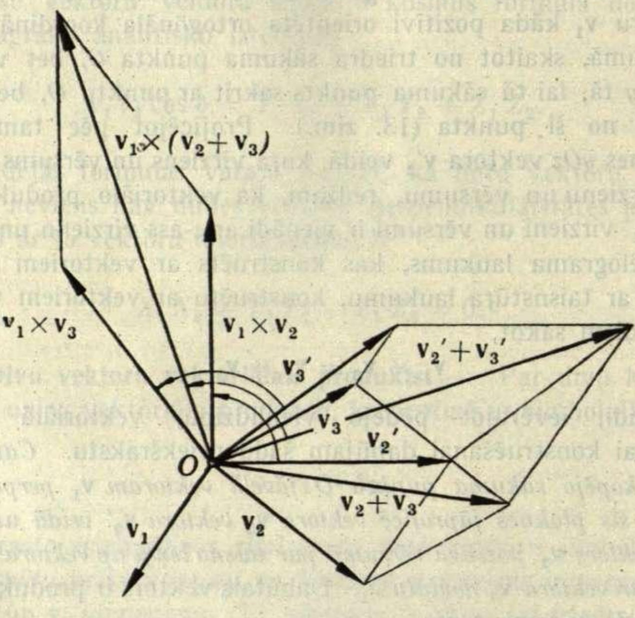
Bez tam vektoriālais produkts, kā par to viegli pārliecināties, apmierina vienlīdzību

$$m(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = m\,\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \times m\,\mathbf{v}_2,$$

ja m ir kāds reāls skaitlis.

Tālāk, izlietojot vektoriālā produkta ģeometriskās konstruēšanas paņēmienu, pierādīsim, ka *vektoriālais produkts ir distribūtīvs*, t. i., ja doti ir kaut kādi trīs vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ un $\mathbf{v}_3$, tad ievērota ir šāda vienlīdzība:

(14.) $$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3.$$



14. zīm.

Lai to pierādītu, konstruēsim visus trīs šinī vienlīdzībā figūrējošus vektoriālos produktus (14. zīm.). Šai nolūkā caur doto vektoru kopējo sākuma punktu O (iepriekš centrējot tos šinī punktā) velkam vektoram $\mathbf{v}_1$ perpendikulāru plakni un projicējam uz šīs plaknes vektorus $\mathbf{v}_2$ un $\mathbf{v}_3$, dabūjot tādējādi divus jaunus vektorus $\mathbf{v}_2'$ un $\mathbf{v}_3'$. Vektoru $\mathbf{v}_2$ un $\mathbf{v}_3$ summas $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ projekcija uz šīs plaknes, atsaucoties uz projekciju tēorēmu, ir vienāda ar summandu projekciju $\mathbf{v}_2'$ un $\mathbf{v}_3$, uz šīs plaknes summu, t. i. $\mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_3'$, un tādēļ pierādāmo vienlīdzību var pārrakstīt šādi:

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_3') = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3'.$$

Lai konstruētu šinī jaunajā vienlīdzībā figūrējošus vektoriālos produktus, jāpagriež pēc kārtas vektori $\mathbf{v}_2'$, $\mathbf{v}_3'$ un $\mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_3'$ pozitīvā vērsumā par taisno leņķi ap vektoru $\mathbf{v}_1$, reizinot ikvienu no tiem ar vektora $\mathbf{v}_1$ modulu v_1. Tādā kārtā dabūsim vektorus $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3$ un $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$. Citiem vārdiem sakot, figūra, ko veido trīs nosauktie vektori, jāpagriež par taisno leņķi ap vektoru $\mathbf{v}_1$, reizinot ikvienu tās malas garumu ar v_1. Tādējādi jaunajā figūrā, tāpat kā pirmatnējā, trešais vektors ir divu pirmo vektoru rezultante, ar ko uzrakstītā sakarība ir pierādīta.

(14.) vienlīdzību iespējams vispārināt uz jebkuŗu vektoru summu vektoriālo produktu.

19. **Vektoriālā produkta analitiskā izteiksme ortogōnālā koordinātu triedrā.** — Ja $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ apzīmē, kā agrāk, trīs savstarpēji perpendikulārus un pozitīvi orientētus vienības vektorus, tad no vektoriālā produkta definīcijas izriet, ka

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \tag{15.}$$

bet

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}. \end{array} \right. \tag{16.}$$

Apzīmējot tālāk ar X_1, Y_1, Z_1 un X_2, Y_2, Z_2 divu kaut kādu vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ koordinātas attiecībā pret kādu pozitīvi orientētu ortogōnālu koordinātu triedru, kas noteikts ar vienības vektoriem $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, šo vektoru vektoriālo produktu var uzrakstīt šādi:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (X_1\,\mathbf{i} + Y_1\,\mathbf{j} + Z_1\,\mathbf{k}) \times (X_2\,\mathbf{i} + Y_2\,\mathbf{j} + Z_2\,\mathbf{k}).$$

Bet tā kā vektoriālais produkts ir distribūtīvs, tad, reizinot pēdējās vienlīdzības labajā pusē ikvienu pirmo iekavu locekli ar ikvienu otru iekavu locekli, dabūjam šim produktam izteiksmi

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = X_1X_2\, \mathbf{i} \times \mathbf{i} + X_1Y_2\, \mathbf{i} \times \mathbf{j} + X_1Z_2\, \mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ + Y_1X_2\, \mathbf{j} \times \mathbf{i} + Y_1Y_2\, \mathbf{j} \times \mathbf{j} + Y_1Z_2\mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ + Z_1X_2\, \mathbf{k} \times \mathbf{i} + Z_1Y_2\, \mathbf{k} \times \mathbf{j} + Z_1Z_2\, \mathbf{k} \times \mathbf{k}\,,\end{aligned}$$

kas, ievērojot (15.) un (16.) sistēmas sakarības, reducējas vienkāršākā formā

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\, \mathbf{i} + (Z_1X_2 - X_1Z_2)\, \mathbf{j} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\mathbf{k}$$

vai determinanta formā

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Priekšpēdējā vektoriālā produkta izteiksmē vektoru **i**, **j**, **k** koeficienti, ja tos apzīmē ar v_x, v_y, v_z, pie kam

(17.) $$v_x = Y_1Z_2 - Z_1Y_2\,, \quad v_y = Z_1X_2 - X_1Z_2\,, \quad v_z = X_1Y_2 - Y_1X_2\,,$$

ir vektoriālā produkta projekciju uz x-, y- un z-ass algebriskās vērtības. Bet šos koeficientus, kā par to nav grūti pārliecināties, var interpretēt arī kā vektoru $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ veidotā parallēlograma laukuma projekciju uz vektoru $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$; $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}$ un $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ veidotām plaknēm algebriskās vērtības.

20. **Divkāršais vektoriālais produkts.** — Iedomāsimies, ka doti ir trīs vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, kuŗu koordinātas kādā pozitīvi orientētā ortogōnālā koordinātu triedrā attiecīgi ir X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3.

Pierādīsim, ka apmierināta ir šāda vienlīdzība:

(18.) $$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_3)\, \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2)\, \mathbf{v}_3\,.$$

Apzīmēsim vektora $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ koordinātas ar X, Y, Z; koordinātas X izteiksme pēc (17.) formulu sistēmas pirmās formulas tad ir šāda:

$$\begin{aligned} X &= Y_1(X_2Y_3 - Y_2X_3) - Z_1(Z_2X_3 - X_2Z_3) \\ &= (Y_1Y_3 + Z_1Z_3)X_2 - (Y_1Y_2 + Z_1Z_2)X_3\,. \end{aligned}$$

Pieskaitot un atņemot pēdējās formulas labajā pusē locekli $X_1X_2X_3$ un ievērojot skālārā produkta analitisko izteiksmi, redzam, ka

$$X = (\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_3)X_2 - (\mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{v}_2)X_3.$$

Analogi dabūjam, ka

$$Y = (\mathbf{v}_1 \, . \, \mathbf{v}_3) Y_2 - (\mathbf{v}_1 \, . \, \mathbf{v}_2) Y_3 ,$$
$$Z = (\mathbf{v}_1 \, . \, \mathbf{v}_3) Z_2 - (\mathbf{v}_1 \, . \, \mathbf{v}_2) Z_3 .$$

Tādējādi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) &= \mathbf{v} = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k} \\ &= (\mathbf{v}_1 \, . \, \mathbf{v}_3)(X_2\,\mathbf{i} + Y_2\,\mathbf{j} + Z_2\,\mathbf{k}) - (\mathbf{v}_1 \, . \, \mathbf{v}_2)(X_3\,\mathbf{i} + Y_3\,\mathbf{j} + Z_3\,\mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{v}_1 \, . \, \mathbf{v}_3)\,\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 \, . \, \mathbf{v}_2)\,\mathbf{v}_3 . \end{aligned}$$

Uzrakstīsim vēl divkāršā vektoriālā produkta $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3$ izteiksmi:

$$\text{(19.)} \quad \begin{aligned} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 &= -[\mathbf{v}_3 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)] = -[\mathbf{v}_3 \times -(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1)] \\ &= \mathbf{v}_3 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_3 \, . \, \mathbf{v}_1)\,\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_3 \, . \, \mathbf{v}_2)\,\mathbf{v}_1 . \end{aligned}$$

(18.) un (19.) vienlīdzība rāda, ka triju vektoru vektoriālais produkts *nav* asociātīvs.

21. **Jauktais produkts.** — Iedomāsimies, ka doti ir kaut kādi trīs vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Ar šo triju vektoru *jaukto produktu* saprot jebkuŗa šī vektora skālāro produktu ar pārējo divu vektoru vektoriālo produktu, t. i. produktus

$$\mathbf{v}_1 \, . \, (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) , \qquad \mathbf{v}_2 \, . \, (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) , \qquad \mathbf{v}_3 \, . \, (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) .$$

Pierādīsim, ka jauktā produktā skālārās un vektoriālās multiplikācijas darbības var samainīt, t. i., ka apmierināta ir identitāte

$$\text{(20.)} \qquad \mathbf{v}_1 \, . \, (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_3 \, . \, (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) .$$

Tālāk pierādīsim, ka trīs agrāk uzrakstītie jauktie produkti ir vienādi savā starpā, t. i.

$$\text{(21.)} \qquad \mathbf{v}_1 \, . \, (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 \, . \, (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_3 \, . \, (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) ,$$

citiem vārdiem sakot, jauktā produktā to faktori var tikt cikliski permūtēti.

Apzīmējot, kā agrāk, vektoru $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ koordinātas izvēlētajā ortogōnālā koordinātu triedrā attiecīgi ar X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3, (20.) vienlīdzību var uzrakstīt formā

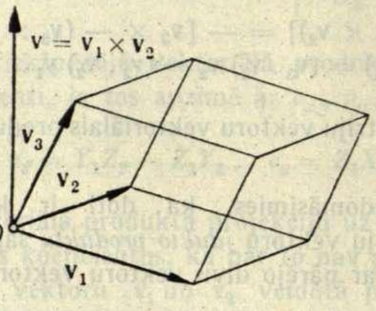
$$\begin{aligned} & X_1 (Y_2 Z_3 - Z_2 Y_3) + Y_1 (Z_2 X_3 - X_2 Z_3) + Z_1 (X_2 Y_3 - Y_2 X_3) \\ & = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) X_3 + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2) Y_3 + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) Z_3 , \end{aligned}$$

kas patiesi ir identiski apmierināta. Bet pēdējās vienlīdzības abas puses ir dotas ar determinantu

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

kas arī pierāda (21.) vienlīdzības pareizumu.

Pēdējā determinanta skaitliskā vērtība izteic parallēlepipeda tilpumu, kas konstruēts ar dotajiem vektoriem $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ (15. zīm.); tā skaitliskā vērtība ir pozitīva, ja vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ veido pozitīvi orientētu triedru, bet negātīva pretējā gadījumā.



15. zīm.

Tiešām, tā kā skālārā produkta $\mathbf{v}_3 . (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ otrs faktors — vektoriālais produkts $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ — skaitliski izsaka parallēlograma laukumu, kas konstruēts ar vektoriem $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, un tā virziens ir perpendikulārs šī parallēlograma plaknei, tad skālāro produktu $\mathbf{v}_3 . (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ var interpretēt ar vektora $\mathbf{v}$ algebriskās vērtības v un vektora $\mathbf{v}_3$ projekcijas uz vektora $\mathbf{v}$ virziena algebriskās vērtības reizinājumu. Bet pēdējās projekcijas gaŗums ir parallēlepipeda augstums h. Tādējādi produkta $\mathbf{v}_3 . (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ algebriskā vērtība ir vh. Tā ir pozitīva, ja $\mathbf{v}_3$ veido šauru leņķi ar vektoru $\mathbf{v}$, kas ir tā orientēts, lai rotācija $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ ap to būtu pozitīva, bet negātīva, ja šis ļeņķis ir plats. Citiem vārdiem sakot, produkts $\mathbf{v}_3 . (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ ir pozitīvs, ja $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ veido pozitīvi orientētu triedru, bet negātīvs pretējā gadījumā.

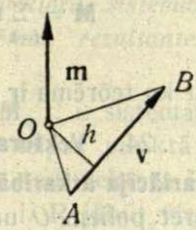
4. §. Vektora un vektoru sistēmas moments.

22. **Vektora līneārais (vektoriālais) moments pret punktu.** — Par vektora $\mathbf{v} = \overline{AB}$ ar sākuma punktu A *līneāro momentu pret punktu O* sauc saistīto vektoru $\underline{\mathbf{m}}$, kam sākums ir punktā O un kas ir vienāds ar vektoriālo produktu $\overline{OA} \times \mathbf{v}$, t. i.

$$\mathbf{m} = \overline{OA} \times \mathbf{v}.$$

Punktu O, pret ko vektora moments definēts, sauc par tā *polu* vai *centru*.

Šī vektora momenta definīcijas ģeometriskā interpretācija rāda (16. zīm.), ka 1° momenta virziens ir perpendikulārs plaknei OAB, 2° tā vērsums ir tāds, lai vektoru **m** un **v** savstarpējā orientācija būtu pozitīva, un 3° tā gaŗums ir skaitliski vienāds ar parallēlograma laukumu, kas konstruēts ar segmentiem OA un AB un kas savkārt ir vienāds ar vektora **v** modula v un pola O īsākā attāluma h līdz vektora **v** nesējai taisnei reizinājumu. Vektoram **v** slīdot pa savu nesēju taisni, tā moments **m** paliek nemainīgs, jo vektora **m** virziens un vērsums paliek tas pats, un arī tā gaŗums nemainās, jo parallēlogramu laukumi, kas konstruēti ar vienu un to pašu bazi un augstumu, ir vienādi.



16. zīm.

Tā tad arī slīdoša vektora moments pret polu O ir saistīts vektors ar sākuma punktu O.

Vektora moments **m** ir nulle, ja vektors **v** ir nulle vai ja tā nesēja taisne iet caur doto punktu O.

23. **Vektoru sistēmas rezultante un rezultētājs moments pret punktu.** — Apskatīsim saistītu vai slīdošu vektoru sistēmu, ko sastāda vektori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ar attiecīgajiem sākuma punktiem (dažādiem vai sakritušiem) $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Par šādas *vektoru sistēmas rezultanti* **R** *punktā* O sauc šo vektoru ģeometrisko summu, kas konstruēta ar punktu O kā sākuma punktu:

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i .$$

Vektoru sistēmas rezultante **R** ir brīvs vektors, t. i. tā ir neatkarīga no punkta O.

Apzīmēsim doto vektoru lineāros momentus pret punktu O attiecīgi ar $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_n$. Par *dotās vektoru sistēmas rezultētāju momentu pret punktu* O sauc vektoru **M**, kas ir vienāds ar sistēmas atsevišķo vektoru momentu pret šo punktu rezultanti, kuŗa konstruēta šai punktā:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \ldots + \mathbf{m}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i .$$

Punktu O sauc par *vektoru sistēmas polu* jeb *centru*.

Ja visiem dotās sistēmas vektoriem ir viens un tas pats sākuma punkts A, tad spēkā ir šāda *Variņona*[1]) *teorēma*: *Vektoru sistēmas,*

[1]) P. Varignon (1664.—1722. g.). Minētā teorēma atrodama pēc autora nāves izdotajā darbā *Nouvelle mécanique ou statique,* Paris, 1725.

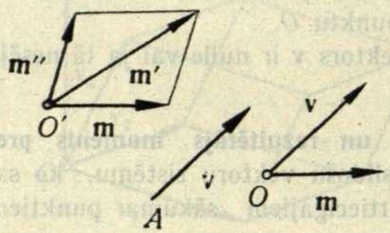
ko sastāda vairāki vektori ar kopēju sākuma punktu, rezultētājs moments pret polu O ir vienāds ar sistēmas rezultantes momentu pret šo polu.

Tiešām, no momenta definīcijas pret polu O, atsaucoties uz vektoriālā produkta distributīvo īpašību, izriet, ka

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i = \sum_{i=1}^{n} (\overline{OA} \times \mathbf{v}_i) = \overline{OA} \times \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i = \overline{OA} \times \mathbf{R},$$

ar ko teōrēma ir pierādīta.

24. **Vektora momenta un vektoru sistēmas rezultētāja momenta variācija atkarībā no pola.** — Apzīmēsim vektora $\mathbf{v} = \overline{AB}$ momentus pret poliem O un O' attiecīgi ar $\mathbf{m}$ un $\mathbf{m}'$ (17. zīm.). Pēc definīcijas



17. zīm.

$$\mathbf{m} = \overline{OA} \times \mathbf{v}, \quad \mathbf{m}' = \overline{O'A} \times \mathbf{v};$$

bet tā kā

$$\overline{O'A} = \overline{OA} + \overline{O'O},$$

tad

$$\mathbf{m}' = \overline{OA} \times \mathbf{v} + \overline{O'O} \times \mathbf{v},$$

jeb

$$\mathbf{m}' = \mathbf{m} + \overline{O'O} \times \mathbf{v}. \tag{22.}$$

Tā tad *kāda vektora* $\mathbf{v}$ *moments* $\mathbf{m}'$ *pret polu O' ir vienāds ar tā paša vektora momenta* $\mathbf{m}$ *pret polu O un vektora, kas ir vienāds ar vektoru* $\mathbf{v}$, *bet ar sākuma punktu O, momenta* $\mathbf{m}'' = \overline{O'O} \times \mathbf{v}$ *pret polu O' rezultanti.*

No pēdējās vektora momentu sakarības redzams, ka $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$, ja taisne OO' ir parallēla vektoram $\mathbf{v}$.

Ja doti ir n saistīti vai slīdoši vektori $\mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, kuŗu rezultante punktā O ir

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i\,,$$

un ja $\mathbf{m}'_i$ un $\mathbf{m}_i$ apzīmē vektora $\mathbf{v}_i$ momentus pret poliem O' un O, tad, n sakarības

$$\mathbf{m}'_i = \mathbf{m}_i + \overline{O'O} \times \mathbf{v}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

summējot, dabūjam (22.) sakarībai analogu sakarību

$$\text{(22'.)} \qquad \mathbf{M}' = \mathbf{M} + \overline{O'O} \times \mathbf{R},$$

kur $\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}'_i$ un $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i$. Pēdējā sakarība rāda, ka *vektoru sistēmas rezultētājs moments pret polu O' ir vienāds ar vektoru sistēmas rezultētāja momenta pret polu O un vektoru sistēmas rezultantes punktā O momenta pret polu O' rezultanti.*

(22'.) sakarība rāda, ka: 1° ja $\mathbf{R} = 0$, tad $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, t. i. sistēmas rezultētājs moments ir viens un tas pats jebkuŗā telpas punktā; 2° ja $\mathbf{M}'$ jābūt vienādam ar $\mathbf{M}$, lai kāds būtu pols O', tad vektora $\mathbf{R}$ momentam $\overline{O'O} \times \mathbf{R}$ jābūt nullei jebkuŗā punktā O, t. i. $\mathbf{R}$ jābūt vienādam ar nulli.

Tā tad tikai gadījumā, kad vektoru sistēmas rezultante $\mathbf{R}$ ir nulle, sistēmas rezultētājs moments $\mathbf{M}$ ir neatkarīgs no pola.

Vispārīgā gadījumā, kad $\mathbf{R} \neq 0$, $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ tikai tad, ja $\overline{O'O} \times \mathbf{R} = 0$, t. i. ja taisne $O'O$ ir parallēla rezultantei $\mathbf{R}$.

25. **Vektora momenta un vektoru sistēmas rezultētāja momenta analitiskās izteiksmes.** — Ja izvēlas kādu pozitīvi orientētu ortogōnālu koordinātu triedru un apzīmē šai triedrā vektora $\mathbf{v} = \overline{AB}$ koordinātas ar X, Y, Z, tā sākuma punkta A koordinātas ar x, y, z un pola O koordinātas ar a, b, c, tad vektora $\overline{OA}$ koordinātas ir $x-a$, $y-b$, $z-c$, bet vektora $\mathbf{v}$ momenta $\mathbf{m}$ pret polu O koordinātas m_x, m_y, m_z, atsaucoties uz (17.) formulu sistēmu, ir šādas:

$$\text{(23.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} m_x &= (y-b)\,Z - (z-c)\,Y, \\ m_y &= (z-c)\,X - (x-a)\,Z, \\ m_z &= (x-a)\,Y - (y-b)\,X. \end{aligned} \right.$$

Ja dotais pols O sakrīt ar koordinātu triedra sākuma punktu, tad $a = b = c = 0$. Apzīmējot šai gadījumā vektora $\mathbf{v}$ momentu ar $\mathbf{m}_0$ un tā koordinātas ar m_{0x}, m_{0y}, m_{0z}, dabūjam tām izteiksmes

$$\text{(23'.)} \qquad m_{0x} = y\,Z - z\,Y, \quad m_{0y} = zX - x\,Z, \quad m_{0z} = x\,Y - y\,X.$$

Aprēķināsim tagad vektora $\mathbf{v}$ momenta $\mathbf{m}'$ pret polu O' koordinātu m'_x, m'_y, m'_z analitiskās izteiksmes. Paturot līdzšinējos apzīmējumus un apzīmējot pola O' koordinātas izvēlētajā koordinātu triedrā ar x', y', z', un tā tad vektora $\overline{O'O}$ koordinātas ar $a-x'$, $b-y'$, $c-z'$, momenta $\mathbf{m}'' = \overline{O'O} \times \mathbf{v}$ koordinātām m''_x, m''_y, m''_z dabūjam izteiksmes:

$$m''_x = (b-y')\,Z - (c-z')\,Y, \quad m''_y = (c-z')\,X - (a-x')\,Z,$$
$$m''_z = (a-x')\,Y - (b-y')\,X.$$

Tālāk, no (22.) momentu sakarības, atsaucoties uz projekciju teōrēmu, izriet, ka

$$m'_x = m_x + m''_x, \quad m'_y = m_y + m''_y, \quad m'_z = m_z + m''_z.$$

Gadījumā, kad pols O sakrīt ar koordinātu triedra sākuma punktu, $a = b = c = 0$, un momenta $\mathbf{m}'$ pret polu O' koordinātas ir

$$(23''.)\qquad \begin{cases} m'_x = m_{0x} - y'\,Z + z'\,Y, \\ m'_y = m_{0y} - z'\,X + x'\,Z, \\ m'_z = m_{0z} - x'\,Y + y'\,X. \end{cases}$$

Ja dota ir vektoru sistēma un ja apzīmējam kāda šīs sistēmas vektora $\mathbf{v}_i = \overline{A_i B_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ koordinātas ar X_i, Y_i, Z_i, tā sākuma punkta A_i koordinātas ar x_i, y_i, z_i, momenta $\mathbf{m}_i$ pret polu O (kas sakrīt ar koordinātu triedra sākuma punktu) resp. momenta $\mathbf{m}'_i$ pret polu O' (ar koordinātām x', y', z') koordinātas ar m_{ix}, m_{iy}, m_{iz} resp. m'_{ix}, m'_{iy}, m'_{iz}, vektoru sistēmas rezultantes **R** un rezultētāja momenta **M** pret polu O resp. rēzultantes **R** un rezultētāja momenta **M**$'$ pret polu O' koordinātas ar X, Y, Z un M_x, M_y, M_z resp. X' Y' Z' un M'_x, M'_y, M'_z, pie kam

$$X = X' = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Y = Y' = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad Z = Z' = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_{ix}, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_{iy}, \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} m_{iz},$$

$$M'_x = \sum_{i=1}^{n} m'_{ix}, \quad M'_y = \sum_{i=1}^{n} m'_{iy}, \quad M'_z = \sum_{i=1}^{n} m'_{iz},$$

tad no (22'.) sakarības dabūjam (23''.) formulu sistēmai analogu sistēmu:

$$(24.)\qquad \begin{cases} M'_x = M_x - y'\,Z + z'\,Y, \\ M'_y = M_y - z'\,X + x'\,Z, \\ M'_z = M_z - x'\,Y + y'\,X. \end{cases}$$

26. **Algebriskais invariants.** — Vektoru sistēmas rezultante **R**, kā redzējām, ir invariants vektors, kamēr sistēmas rezultētājs moments

M ir mainīgs vektors, bet šo divu vektoru skālārais produkts ir algebrisks invariants. Tiešām, reizinot (22'.) sakarību skālāri ar **R**, dabūjam, ka

$$\mathbf{M}' \,.\, \mathbf{R} = \mathbf{M} \,.\, \mathbf{R} + (\overline{O'O} \times \mathbf{R}) \,.\, \mathbf{R},$$

bet tā kā vektors $\overline{O'O} \times \mathbf{R}$ pēc vektoriālā produkta definīcijas ir perpendikulārs vektoram **R**, tad

$$(\overline{O'O} \times \mathbf{R}) \,.\, \mathbf{R} = 0,$$

un tā tad

$$\mathbf{M}' \,.\, \mathbf{R} = \mathbf{M} \,.\, \mathbf{R}.$$

Šī algebriskā invarianta I vērtība punktā O un līdz ar to arī jebkuŗā citā punktā, ievērojot skālārā produkta analitisko izteiksmi, ir

$$I = \mathbf{M} \,.\, \mathbf{R} = M_x X + M_y Y + M_z Z.$$

Uzrakstot skālāro produktu **M** . **R**, atsaucoties uz tā definīciju, formā

$$\mathbf{M} \cos(\mathbf{R}, \mathbf{M}) = \frac{I}{R},$$

redzam, ka rezultētāja momenta **M** projekcijas uz rezultantes **R** virziena algebriskā vērtība ir konstanta.

No pēdējās vienlīdzības varam secināt: ja $I > 0$ vai $I < 0$, tad leņķis starp vektoru sistēmas rezultanti **R** un rezultētāju momentu **M** pret polu O ir attiecīgi vienmēr šaurs vai plats, lai kā būtu izvēlēts pols O.

Ja $I = 0$, bet $\mathbf{R} \neq 0$, tad vektoru sistēmas rezultētājs moments **M** ir perpendikulārs vektoram **R** vai arī speciālā gadījumā tas ir nulle.

27. **Vektoru sistēmas centrālā ass. Minimālais moments.** — Iedomājoties, ka vektoru sistēmas rezultante $\mathbf{R} \neq 0$, meklēsim punktu O' ģeometrisko vietu, attiecībā pret kuŗu vektoru sistēmas rezultētājs moments **M'** ir parallēls sistēmas rezultantei **R**. Nepieciešamais un pietiekamais noteikums, lai šī prasība būtu ievērota ir M'_x, M'_y, M'_z un X, Y, Z proporcionālitāte, t. i.

$$\frac{M_x - y'Z + z'Y}{X} = \frac{M_y - z'X + x'Z}{Y} = \frac{M_z - x'Y + y'X}{Z}.$$

Tā kā šie vienādojumi ir lineāri attiecībā pret x', y', z', tad punktu O' ģeometriskā vieta ir rezultantei **R** parallēla taisne. Šo taisni sauc par *vektoru sistēmas centrālo asi.*

Vektoru sistēmas rezultante **R** un rezultētājs moments **M** pret jebkuŗu centrālās ass punktu ir virzīti šīs ass virzienā, un šo vektoru vērsumi ir vienādi vai pretēji atkarībā no tā, vai I ir pozitīvs vai negātīvs.

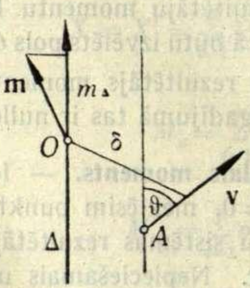
Tā kā vektoru sistēmas rezultētāja momenta **M** projekcijas uz sistēmas rezultantes **R** virziena algebriskā vērtība ir konstanta, t. i. tā ir neatkarīga no pola O, tad **M** vērtība pret jebkuŗu centrālās ass punktu ir *minimālā,* jo tādā gadījumā **M** sakrīt ar savu projekciju. Šī *minimālā rezultētāja momenta* absolūtā vērtība ir

$$\frac{|I|}{R}.$$

Ja algebriskais invariants $I = 0$ un vektori **R** un **M** nav nulles vektori, tad rezultētājs moments **M** ir perpendikulārs vektoram **R**, un minimālais moments ir nulle.

Gadījumā, kad sistēmas rezultante $\mathbf{R} = 0$, sistēmas rezultētājs moments **M** ir neatkarīgs no pola, un tā tad par sistēmas centrālo asi var izvēlēties jebkuŗu taisni, kas ir parallēla ar **M**.

28. **Vektora moments un vektoru sistēmas rezultētājs moments pret asi.** — Par vektora **v** *momentu* m_Δ *pret asi* Δ sauc vektora **v** momenta **m**, kas definēts pret kādu ass Δ punktu O, projekcijas uz šīs ass algebrisko vērtību (18. zīm.).



18. zīm.

Vektora momentu pret polu dažreiz sauc par *polāro momentu,* bet vektora momentu pret asi par *aksiālo momentu.*

Pārliecināsimies vispirms, ka vektora aksiālais moments ir neatkarīgs no ass Δ izvēlētā punkta O, kā to apgalvo definīcija.

Šai nolūkā iedomāsimies, ka ass Δ virziens ir vienāds ar z-ass virzienu. Tad pēdējā (23.) sistēmas formula, ievietojot tanī punkta O koordinātas $(0, 0, c)$, rāda, ka vektora momenta **m** koordināta m_z ir neatkarīga no c, t. i. izvēlētā punkta O, jo $m_z = xY - yX$.

Aksiālā momenta m_Δ algebriskās izteiksmes atrašanai iedomāsimies par punktu O ass Δ un vektora **v** nesējas taisnes īsākās distances δ pēdas punktu uz šīs ass. Vektora **v** polārā momenta **m** pret polu O absolūtā vērtība tad ir $v\delta$. Ja asij Δ caur punktu A vilktās parallēlās ass un vektora **v** veidoto leņķi apzīmē ar ϑ, tad leņķis starp asi Δ un vektoru **m** ir leņķim ϑ komplēmentārais leņķis, un tādēļ aksiālā momenta m_Δ absolūtā vērtība ir $v\delta \sin \vartheta$. Tā algebriskā vērtība tā tad ir

$$m_\Delta = \pm v\delta \sin \vartheta,$$

pie kam + zīme atbilst gadījumam, kad ass Δ un vektora **v** savstarpējā orientācija ir pozitīva, bet — zīme pretējā gadījumā.

Pēdējā aksiālā momenta m_Δ izteiksme rāda, ka tas ir nulle, ja vismaz viens no trim faktoriem v, δ vai $\sin \vartheta$ ir nulle, t. i. ja vektors **v** ir nulles vektors vai ja tas krusto asi Δ, vai ir tai parallēls.

Par vektoru sistēmas rezultētāju momentu M_Δ pret asi Δ sauc šīs sistēmas atsevišķo vektoru momentu pret asi Δ algebrisko summu, vai, kas ir tas pats, sistēmas rezultētāja momenta **M** pret ass Δ kādu punktu projekcijas uz šīs ass algebrisko vērtību.

29. **Vektoru sistēmas koordinātas.** — (24.) sistēmas formulas rāda, ka kādā pozitīvi orientētā ortogōnālā koordinātu triedrā vektoru sistēmas rezultētāja momenta **M'** pret kādu punktu O' koordinātas un līdz ar to arī sistēmas rezultētāja momenta M_Δ pret kādu asi Δ algebriskā vērtība ir sešu lielumu X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, t. i. vektoru sistēmas rezultantes un rezultētāja momenta pret punktu O (par ko var izvēlēties koordinātu triedra sākuma punktu) koordinātu, lineāras funkcijas. Aiz šī iemesla šos sešus lielumus X, Y, Z, M_x, M_y, M_z sauc par *vektoru sistēmas koordinātām* izvēlētajā koordinātu triedrā.

30. **Slīdoša vektora koordinātas.** — Apzīmēsim, kā agrāk, kādā pozitīvi orientētā ortogōnālā koordinātu triedrā vektora **v** un tā momenta **m** pret koordinātu triedra sākuma punktu O koordinātas attiecīgi ar X, Y, Z un m_x, m_y, m_z. Ievērojot, ka šie vektori ir savstarpēji perpendikulāri, t. i.

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

šo vektoru koordinātas apmierina sakarību

$$m_x X + m_y Y + m_z Z = 0 . \tag{25.}$$

Vektoram **v** slīdot pa savu nesēju taisni, tā koordinātas X, Y, Z un moments **m** pret izvēlēto punktu nemainās, un līdz ar to arī šī momenta koordinātas m_x, m_y, m_z ir nemainīgas.

Pierādīsim, ka arī otrādi: seši algebriski lielumi X, Y, Z, m_x, m_y, m_z, kuŗi apmierina (25.) sakarību un no kuŗiem trīs pirmie lielumi reizē nav nulles, noteic vienu slīdošu vektoru.

Vispirms ir skaidrs, ka eksistē bezgala daudz vektoru, kuŗu projekcijas ir X, Y, Z un momenta projekcijas m_x, m_y, m_z. Bet visi šie vektori var tikt iegūti no kaut kuŗa šāda vektora ar slīdi.

Tiešām, trīs vienādojumi

$$(26.)\quad yZ - zY - m_x = 0,\ zX - xZ - m_y = 0,\ xY - yX - m_z = 0,$$

uzskatot tanīs x, y, z par kāda punkta tekošām koordinātām, noteic trīs plaknes, kas krustojas pa vienu taisni d, jo (26.) sistēmas vienādojumi nav savā starpā neatkarīgi, bet, ievērojot (25.) sakarību, tie apmierina identitāti

$$E_1 X + E_2 Y + E_3 Z = 0,$$

kuŗā E_1, E_2, E_3 apzīmē (26.) sistēmas vienādojumu kreisās puses.

Meklētais triju plakņu krustošanās punkts (x, y, z), kas atrodas uz taisnes d, tā tad ir nenoteikts, bet vektors ar šo nenoteikto punktu kā savu sākuma punktu un koordinātām X, Y, Z atrodas uz šīs taisnes, un šī vektora momenta $\mathbf{m}$ koordinātas ir m_x, m_y, m_z. Tā tad tiešām, kā sākumā apgalvots, seši dotie lielumi, kas apmierina (25.) sakarību, noteic vienu slīdošu vektoru. Sešus algebriskos lielumus X, Y, Z, m_x, m_y, m_z, no kuŗiem pieci ir neatkarīgi, sauc par *slīdoša vektora koordinātām.*

5. §. Vektoru sistēmu ekvivalence un redukcija.

31. **Ekvivalentas vektoru sistēmas.** — Divas vektoru sistēmas Σ un Σ' sauc par *ekvivalentām,* ja to rezultantes un rezultētāji momenti pret kādu telpas punktu O ir vienādi. Tad, kā to rāda (22'.) sakarība, tie ir vienādi arī pret jebkuŗu citu punktu. Tā, piem., vektoru ar kopēju sākuma punktu sistēma pēc Variņona teōrēmas veido sistēmu, kas ir ekvivalenta vienam vienīgam vektoram — sistēmas rezultantei, kuŗa konstruēta vektoru kopējā sākuma punktā.

Apzīmēsim vektoru sistēmas Σ rezultantes $\mathbf{R}$ un rezultētāja momenta $\mathbf{M}$ pret punktu O koordinātas izvēlētajā koordinātu triedrā attiecīgi ar X, Y, Z un M_x, M_y, M_z un vektoru sistēmas Σ' analogās koordinātas tanī pašā koordinātu triedrā ar X', Y', Z' un M'_x, M'_y, M'_z. Šo vektoru sistēmu ekvivalences analitiskie noteikumi tad ir šādi:

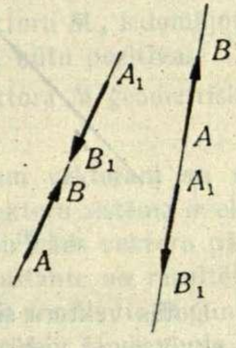
$$X = X', \qquad Y = Y', \qquad Z = Z';$$
$$M_x = M'_x, \qquad M_y = M'_y, \qquad M_z = M'_z.$$

Vektoru sistēma ir ekvivalenta nullei, ja tās rezultante un rezultētājs moments pret kādu punktu ir nulle. Piemērs šādai sistēmai ir divi *direkti pretēji* vektori, t. i. divi vienāda gaŗuma un pretēji vērsti vektori ar kopēju nesēju taisni (19. zīm.). Tiešām, ja šo divu vektoru koordinātas apzīmē ar X_1, Y_1, Z_1 un X_2, Y_2, Z_2 un to momentu pret kādu punktu koordinātas ar m_{1x}, m_{1y}, m_{1z} un m_{2x}, m_{2y}, m_{2z}, tad

$$X_1 = -X_2, \quad Y_1 = -Y_2, \quad Z_1 = -Z_2,$$
$$m_{1x} = -m_{2x}, \quad m_{1y} = -m_{2y}, \quad m_{1z} = -m_{2z}.$$

Pēdējās formulas rāda, ka divi direkti pretēji vektori veido sistēmu, kas ir ekvivalenta nullei.

No vektoru sistēmu ekvivalences definīcijas izriet, ka dotā vektoru sistēma ir ekvivalenta ar vienu vienīgu vektoru tikai tai gadījumā, ja eksistē kāds punkts, pret ko sistēmas rezultētājs moments ir nulle, kas savkārt ir iespējams tikai tad, ja minimālais moments, vai, kas ir tas pats, algebriskais invariants I ir 0. Ja šis noteikums ir ievērots un sistēmas rezultante $\mathbf{R} \neq 0$, tad dotā vektoru sistēma ir ekvivalenta ar savu rezultanti $\mathbf{R}$, kuŗas sākuma punkts ir brīvi izvēlams uz sistēmas centrālās ass.



19. zīm.

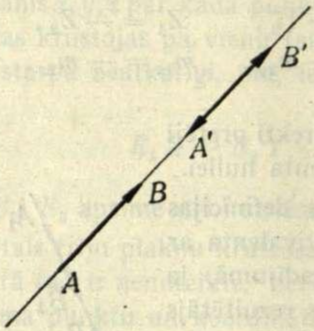
Jāatzīmē vēl, ka divas vektoru sistēmas ir ekvivalentas, ja viena no tām iegūta no otras, pievienojot tai vektoru sistēmu, kas ir ekvivalenta nullei, jo tādā gadījumā apskatītās vektoru sistēmas rezultante un rezultētājs moments paliek nemainīgi.

32. **Elementārās operācijas.** — Ar elementārām operācijām dotajā vektoru sistēmā saprot šādas divas operācijas: 1^0 *Vektoru ar kopēju sākuma punktu saskaitīšanu un sadalīšanu,* t. i. sistēmas vektoru ar kopēju sākuma punktu O aizstāšanu ar to rezultanti, kuŗas sākums ir punktā O, vai otrādi — vektora ar sākumu punktā O sadalīšanu vairākos citos vektoros ar to pašu sākuma punktu, bet kuŗu rezultante ir dotais vektors; 2^0 *Divu direkti pretēju vektoru pieskaitīšanu un atņemšanu.*

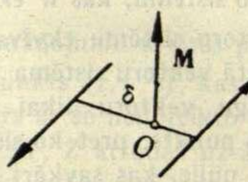
Pamatojoties uz šīm definīcijām, nav grūti pārliecināties, ka parasti lietotā operācija — vektora pārnešana pa savu nesēju taisni — var tikt aizstāta ar otrās elementārās operācijas divreizēju lietošanu. Tā, lai apmainītu vektoru $\overline{AB}$ ar tam vienādo vektoru $\overline{A'B'}$ (20. zīm.) uz tās pašas taisnes, pieskaitīsim direkti pretējo vektoru sistēmu

$\overline{A'B'}$ un $\overline{B'A'}$ un pēc tam atņemsim otru direkti pretējo vektoru sistēmu $\overline{AB}$ un $\overline{B'A'}$.

No teiktā redzams, ka, izdarot dotajā vektoru sistēmā vairākas elementāras operācijas pēc kārtas, dabūjam jaunu vektoru sistēmu, kas ir vienmēr ekvivalenta pirmatnējai.



20. zīm.



21. zīm.

Dotās vektoru sistēmas pārveidošanu ar elementārām operācijām tai ekvivalentā vienkāršākā sistēmā sauc par sistēmas *redukciju.*

33. **Vektoru pāris.** — Ar *vektoru pāri* saprot divu parallēlu, vienāda gaŗuma un pretēji vērstu vektoru sistēmu (21. zīm.).

Attālumu δ starp divu parallēlo vektoru nesēju taisnēm sauc par *vektoru pāŗa plecu.* Ar *vektoru pāŗa vērsumu* saprot rotācijas vērsumu, kas noteikts ar pāŗa diviem vektoriem attiecībā pret kādu punktu O, kuŗš atrodas starp parallēlām taisnēm. Tā kā vektoru pāŗa rezultante $\mathbf{R} = 0$, tad tā rezultētājs moments $\mathbf{M}$ pret kādu punktu ir neatkarīgs no pēdējā; citiem vārdiem sakot, vektoru pāŗa rezultētājs moments ir konstants, t. i. ar to pašu gaŗumu, virzienu un vērsumu visiem telpas punktiem. Vektoru pāŗa rezultētājs moments tā tad ir brīvs vektors. Šo vektoru sauc par *vektoru pāŗa asi.*

Izvēloties pāŗa viena vektora sākuma punktu par polu, viegli redzēt, ka vektoru pāŗa rezultētājs moments ir vienāds ar pāŗa otra vektora momentu pret pirmā vektora sākuma punktu. Tādējādi vektoru pāŗa rezultētāja momenta $\mathbf{M}$ gaŗums M ir vienāds ar pāŗa vektoru kopējā gaŗuma v un pāŗa pleca δ reizinājumu, t. i. $M = v\,\delta$. Tā virziens ir perpendikulārs pāŗa plaknei un vērsums ir noteikts ar pāŗa rotāciju pret punktu O, kas atrodas pāŗa plaknē starp vektoru nesēju taisnēm, tā, ka, iedomājoties šai punktā stāvam ar kājām novērotāju, kuŗa galva ir vērsta pāŗa ass pozitīvā vērsumā, tas redz pāŗa vektorus rotējam pozitīvā rotācijas vērsumā.

Divi vektoru pāŗi ir *ekvivalenti*, ja to rezultētāji momenti pret kādu punktu ir vienādi, jo to rezultantes ir vienmēr nulles.

Pārliecināsimies vēl, ka jebkuŗu vektoru **M** var uzskatīt bezgala daudz veidos par kāda vektoru pāŗa rezultētāju momentu. Pols nav jāmin tādēļ, ka pāŗa rezultētājs moments ir no tā neatkarīgs. Šai nolūkā velkam kādu vektoram **M** perpendikulāru plakni Π un uzzīmējam uz tās divas parallēlas taisnes ar atstatumu δ, pēc tam iedomājamies uz šīm taisnēm novietotus divus vektorus ar kopējo gaŗumu $\frac{M}{\delta}$ un ar tādiem vērsumiem, lai šo vektoru rotācija ap vektoru **M**, iedomājoties tā sākuma punktu starp vektoru nesēju taisnēm, būtu pozitīva.

Šādi konstruētais vektoru pāris ir viens vektora **M** ģeometriskais reprezentants.

34. **Vektoru sistēmas reducēšana līdz vienam vektoram un vienam vektoru pārim.** — Pierādīsim, ka jebkuŗa vektoru sistēma ir ekvivalenta ar sistēmu, ko sastāda kāds vektors un kāds vektoru pāris. Iedomāsimies, ka **R** un **M** ir dotās sistēmas rezultante un rezultētājs moments pret kādu polu O. Sistēma, ko sastāda rezultante **R** punktā O un kāds vektoru pāris ar rezultētāju momentu **M**, ir ekvivalenta dotajai sistēmai, jo šīs jaunās sistēmas rezultante ir **R** un tās rezultētājs moments ir vienāds ar pāŗa rezultētāju momentu **M**.

Ja punkts O ir izvēlēts uz sistēmas centrālās ass, tad sistēmas rezultante un rezultētājs moments ir virzīti šīs ass virzienā, pie kam vektoru pāŗa plakne ir perpendikulāra rezultantei **R** un pāŗa rezultētājs moments ir minimālais moments $\mathbf{M}_m$.

35. **Torsors.** — Iepriekšējo vektoru sistēmu, ko sastāda vektors **R**, kas virzīts dotās sistēmas centrālās ass virzienā, un vektoru pāris, kuŗa plakne ir perpendikulāra vektoram **R**, sauc par *torsoru* vai *dinamu.* Par torsora sākuma punktu, virzienu, vērsumu un gaŗumu sauc vektora **R** attiecīgos elementus. Vektoru pāŗa ass $\mathbf{M}_m$ un rezultantes **R** gaŗumu attiecību, t. i. lielumu

$$k = \frac{M_m}{R} = \frac{M \cos(\mathbf{M}, \mathbf{R})}{R} = \frac{M_x X + M_y Y + M_z Z}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{I}{R^2}$$

sauc par torsora *parametru.* Parametrs k ir pozitīvs vai negātīvs atkarībā no tā, vai vektoru **R** un $\mathbf{M}_m$ vērsumi ir vienādi vai pretēji.

Tādējādi redzam, ka jebkuŗa vektoru sistēma ir ekvivalenta ar torsoru, kuŗa virziens sakrīt ar sistēmas centrālo asi un kuŗa gaŗums un vērsums ir vienādi ar sistēmas rezultantes gaŗumu un vērsumu, bet parametrs ir dots ar pēdējo formulu.

36. **Vektoru sistēmas reducēšana līdz diviem vektoriem.** — Pierādīsim, ka jebkuŗu vektoru sistēmu ar elementārām operācijām var reducēt līdz diviem vektoriem, no kuŗiem viena sākuma punkts ir dots. Iedomāsimies, ka dots ir punkts O un konstruēsim šai punktā dotās sistēmas rezultanti **R**. Pēc 34. nodalījuma dotā sistēma ir ekvivalenta ar sistēmu, ko sastāda vektors **R** un vektoru pāris ar asi **M**. Ja vektoru **M** aizstāj ar vektoru pāri (**v**, — **v**), kuŗa viena vektora **v** sākuma punkts ir O, un ģeometriski saskaita vektorus **R** un **v**, apzīmējot to rezultanti ar $\mathbf{R}_1$, tad dotā sistēma ir ekvivalenta ar diviem vektoriem $\mathbf{R}_1$ un —**v**, pie kam pirmā vektora sākuma punkts ir dotais punkts. Vispārīgi šie divi vektori šķērsojas.

Ja vektors **M**, kas konstruēts punktā O, ir perpendikulārs vektoram **R** ar sākumu punktā O, tad abi pēdējie vektori atrodas vienā plaknē.

37. **Vektoru sistēmas reduktibilitātes analitiskie noteikumi.** — Vispārīgā gadījumā, kad $I = M_x X + M_y Y + M_z Z \neq 0$, vektori **R** un **M**, kas konstruēti punktā O un tāpat arī jebkuŗā citā punktā, nav nulles vektori. Tie nav arī savā starpā perpendikulāri, un tādēļ šai gadījumā dotā vektoru sistēma ir ekvivalenta ar diviem šķērsiem vektoriem (36. nodal.), vai ar vektoru **R**, kas virzīts sistēmas centrālās ass virzienā, un vektoru pāri, kuŗa plakne ir perpendikulāra šai asij.

Gadījumā, kad $I = \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 0$, bet **R** un **M** nav nulles vektori, tie ir perpendikulāri savā starpā, un reducētās sistēmas abi vektori atrodas vienā plaknē (36. nodal.). Šīs reducētās komplāno vektoru sistēmas speciālie gadījumi ir šādi: 1° Tā veido *vektoru pāri,* ja abi vektori ir paralēli, vienāda gaŗuma, bet pretējiem vērsumiem. Nepieciešamie un pietiekamie noteikumi tam ir

$$X = Y = Z = 0, \qquad M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 > 0.$$

2° Tā reducējas par vienu vienīgu vektoru — tās *rezultanti,* ja šie divi vektori neveido vektoru pāri. Šī gadījuma reālizēšanās nepieciešamais un pietiekamais noteikums ir

$$X^2 + Y^2 + Z^2 > 0.$$

Lai uzrakstītu šai gadījumā centrālās ass — rezultantes nesējas taisnes — vienādojumus, jāmeklē punktu, kuŗos rezultētājs moments ir nulle, ģeometriskā vieta. Pēc (24.) sistēmas formulām tā tad šie vienādojumi ir:

$$(27.)\quad \begin{cases} M_x - y'Z + z'Y = 0\,, \\ M_y - z'X + x'Z = 0\,, \\ M_z - x'Y + y'X = 0\,. \end{cases}$$

Reizinot pēdējos vienādojumus pēc kārtas ar X, Y, Z un tos saskaitot, dabūjam kreisajā pusē identiski nulli. Tā tad trīs plaknes, kas reprezentētas ar šiem vienādojumiem, krustojas pa vienu taisni.
3° Tā veido *divus direkti pretējus vektorus.* Nepieciešamie un pietiekamie noteikumi tam ir šādi:

$$X = Y = Z = 0\,, \qquad M_x = M_y = M_z = 0\,.$$

38. **Komplānu un parallēlu vektoru sistēmas.** — Atsaucoties uz iepriekšējā nodal. rezultātiem, pārliecināsimies, ka komplānu un parallēlu vektoru sistēmas ir ekvivalentas vai nu ar kādu vektoru, vai kādu vektoru pāri, vai arī ar nulles vektoru.

1° *Komplānu vektoru sistēma.* — Ja doto vektoru kopējā plaknē izvēlas kādu punktu O un konstruē šai punktā sistēmas rezultanti **R**, tad divi iespējamie gadījumi ir šādi: $\mathbf{R} \neq 0$ un $\mathbf{R} = 0$ (vektoru poligōns ir slēgts). Analogi, ja punktā O konstruē katra sistēmas vektora momentu, kas visi ir perpendikulāri vektoru plaknei, tad sistēmas rezultētājs moments **M** ir perpendikulārs vektoru plaknei, ja tas nav nulles vektors, vai arī tas ir nulle. Tā tad vienmēr $I = \mathbf{M} \,.\, \mathbf{R} = 0$, un reducētajai sistēmai ir iespējams tikai viens no iepriekšējā nodalījumā — ar noteikumu, ka $I = 0$ — minētajiem trim gadījumiem.

2° *Parallēlu vektoru sistēma.* — Ja izvēlas kādu taisni d, kas ir parallēla doto vektoru kopējam virzienam, un konstruē kādā punktā O sistēmas rezultanti **R**, tad tā ir vai nu atšķirīga no nulles un parallēla izvēlētajai taisnei, vai arī tā ir nulle. Analogi, punktā O konstruētie vektoru momenti atrodas plaknē, kas ir perpendikulāra taisnei d, un tā tad sistēmas rezultētājs moments **M** arī ir perpendikulārs taisnei d (ja tas nav nulles vektors), vai arī tas ir nulle. Rezultātā tā tad $I = \mathbf{M} \,.\, \mathbf{R} = 0$, un parallēlo vektoru sistēmai ekvivalentā reducētā sistēma ir vai nu vektoru pāris, vai viens vienīgs vektors, vai arī nulles vektors.

Apzīmēsim taisnes d, uz kuŗas izvēlēts pozitīvais vērsums, virziena kosinus ar α, β, γ un doto vektoru $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ algebriskās vērtības attiecīgi ar $v_1, v_2, \ldots, v_n$, uzskatot pie tam kāda vektora algebrisko vērtību par pozitīvu, ja šī vektora vērsums ir vienāds ar taisnes d vērsumu, pretējā gadījumā par negātīvu. Tālāk, apzīmējot izvēlētajā koordinātu triedrā vektora $\mathbf{v}_i$ sākuma punkta koordinātas ar x_i, y_i, z_i, paša vektora koordinātas ar X_i, Y_i, Z_i, bet tā momentus pret koordinātu asīm ar m_{ix}, m_{iy}, m_{iz}, dabūjam, ka

$$X_i = \alpha v_i, \quad Y_i = \beta v_i, \quad Z_i = \gamma v_i,$$

$$m_{ix} = y_i Z_i - z_i Y_i = v_i (\gamma y_i - \beta z_i),$$

$$m_{iy} = v_i (\alpha z_i - \gamma x_i), \quad m_{iz} = v_i (\beta x_i - \alpha y_i).$$

Apzīmējot, kā agrāk, sistēmas rezultantes **R** koordinātas ar X, Y, Z un rezultētāja momenta **M** pret punktu O koordinātas ar M_x, M_y, M_z, dabūjam šīm koordinātām šādas izteiksmes:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha v_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} v_i = \alpha R,$$

$$Y = \beta R, \quad Z = \gamma R,$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_{ix} = \sum_{i=1}^{n} v_i (\gamma y_i - \beta z_i) = \gamma \sum_{i=1}^{n} v_i y_i - \beta \sum_{i=1}^{n} v_i z_i,$$

$$M_y = \alpha \sum_{i=1}^{n} v_i z_i - \gamma \sum_{i=1}^{n} v_i x_i,$$

$$M_z = \beta \sum_{i=1}^{n} v_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} v_i y_i.$$

Apskatīsim pēc kārtas iespējamos trīs gadījumus.

1° Ja iedomājas, ka sistēmas rezultantes **R** algebriskā vērtība $R \neq 0$, sistēma ir ekvivalenta ar vienu vienīgu vektoru, kuŗa virziens ir vienāds ar sistēmas centrālās ass virzienu. Šīs ass vienādojumi ir doti ar (27.) sistēmu. Ievietojot šais vienādojumos X, Y, Z, M_x, M_y, M_z vietā augšējās izteiksmes, dabūjam sistēmas centrālajai asij šādus vienādojumus:

$$\frac{x - \xi}{\alpha} = \frac{y - \eta}{\beta} = \frac{z - \zeta}{\gamma},$$

pie kam

(28.) $$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i x_i}{R}, \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i y_i}{R}, \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i z_i}{R}.$$

Ja iedomājas, ka vektora $\mathbf{v}_i$ sākuma punkta koordinātas x_i, y_i, z_i ir konstantas, tad slīdošais vektors $\mathbf{v}_i$ kļūst par saistītu vektoru un punkts, kuŗa koordinātas ir dotas ar (28.) sistēmas formulām, ir pilnīgi noteikts. Šo punktu sauc par doto *parallēlo saistīto vektoru centru.* Pārvietojot doto vektoru rezultanti centrālās ass virzienā, līdz tās sākuma punkts sakrīt ar šo centru, dabū vektoru, kuŗu sauc par parallēlo saistīto vektoru sistēmas rezultanti. (28.) sistēmas formulas rāda, ka parallēlu saistītu vektoru centrs ir neatkarīgs no vektoru kopējā virziena, bet tas ir atkarīgs vienīgi no vektoru sākuma punktu pozicijām un vektoru algebriskām vērtībām. Visiem sistēmas vektoriem rotējot ap saviem sākuma punktiem, bet paliekot arvien parallēliem savā starpā un ar tām pašām algebriskām vērtībām to kopējā virzienā, šo parallēlo vektoru centrs nemainās. Tāpat tas nemainās, ja visu vektoru algebriskās vērtības ir reizinātas ar vienu un to pašu skaitli.

2° Iedomāsimies, ka $R = 0$, bet trīs summas

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} v_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{n} v_i z_i$$

visas reizē nav vienādas ar nulli. Vektoru sistēma tad ir ekvivalenta vektoru pārim vai nulles vektoram.

3° Ja reizē $R = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} v_i x_i = \sum_{i=1}^{n} v_i y_i = \sum_{i=1}^{n} v_i z_i = 0,$

tad koordinātas ξ, η, ζ ir nenoteiktas, un par vektoru sistēmu saka, ka tā atrodas astatiskā līdzsvarā.

Atzīmēsim vēl, ka (28.) sistēmas formulas, lietojot vektora $\mathbf{v}_i$ sākuma punkta A_i vietā tā radijvektoru, kas vilkts no kāda nekustīga punkta P, vektoriālā formā var uzrakstīt šādi:

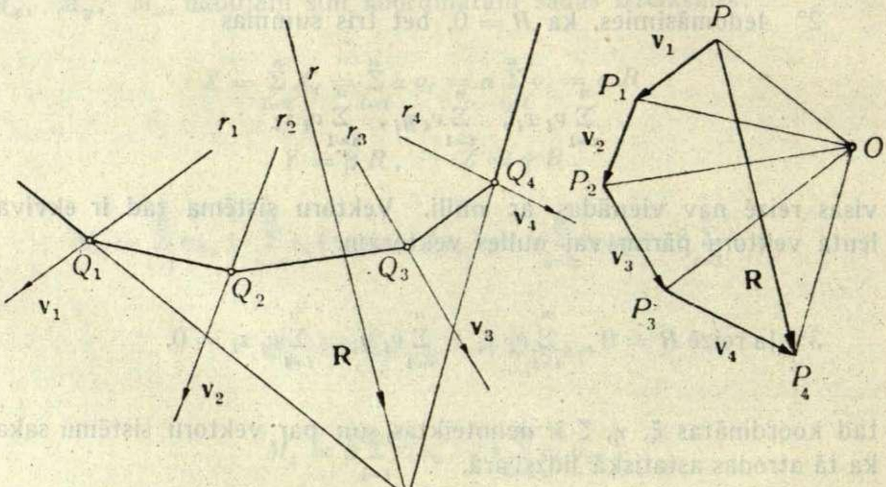
$$\overline{PC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i \overline{PA_i}}{R}, \tag{28'.}$$

kur C apzīmē parallēlo vektoru centru.

6. §. Komplānu un parallēlu vektoru sistēmu grafiska redukcija.

39. **Komplānu vektoru sistēmas redukcija.** — Dota ir komplānu vektoru sistēma; jākonstruē tai ekvivalents vektors vai vektoru pāris, atkarībā no tā, vai tās rezultante ir atšķirīga no nulles, vai arī tā ir vienāda ar nulli. Speciālā gadījumā jāparliecinās, vai sistēma nav ekvivalenta ar nulles vektoru, citiem vārdiem sakot, vai tā neatrodas līdzsvarā.

Vienkāršības dēļ apskatīsim vektoru sistēmu, ko sastāda četri vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, un apzīmēsim ar r_1, r_2, r_3, r_4 to nesējas taisnes (22. zīm.). Vispirms konstruēsim vektoru poligōnu



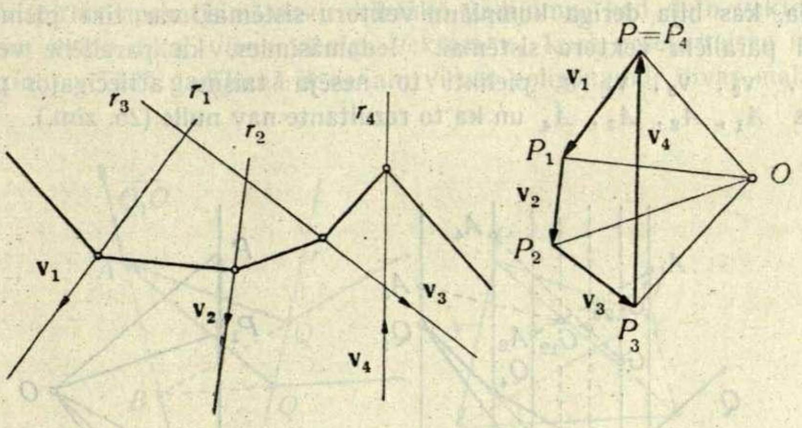
22. zīm.

$PP_1P_2P_3P_4$, kuŗa malas ir attiecīgi vienādas ar dotajiem vektoriem. Pēc tam, izvēloties patvaļīgi kādu polu O, vilksim starus OP, OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 un caur kādu patvaļīgu punktu Q_1 uz vektora $\mathbf{v}_1$ nesējas taisnes r_1 taisnēm OP un OP_1 parallēlas taisnes. Pēdējā krustojas ar r_2 punktā Q_2. Tālāk vilksim caur punktu Q_2 taisnei OP_2 parallēlu taisni, kas krustojas ar r_3 punktā Q_3. Caur pēdējo vilksim taisnei OP_3 parallēlu taisni, kas, krustojoties ar r_4, dod punktu Q_4, caur ko savkārt vilksim taisnei OP_4 parallēlu taisni. Šādi konstruētu poligōnu $Q_1Q_2Q_3Q_4$ sauc par dotās vektoru sistēmas *virves poligōnu*.

Ja vektoru $\mathbf{v}_1$ sadala divos vektoros $\overline{PO}$ un $\overline{OP_1}$ tā, lai pirmā vektora nesēja taisne ir virves poligōna brīvā mala, bet otra — tā nākamā mala Q_1Q_2, un tāpat attiecīgi pārējos vektorus, tad ik divi vektoru komponenti, kas atrodas uz virves poligōna nebrīvām malām, ir ekvivalenti nullei. Dotā vektoru sistēma tādējādi ir reducēta līdz diviem vektoriem $\overline{PO}$ un $\overline{OP_4}$, kas atrodas uz virves poligōna brīvajām malām.

Iespējami tad ir šādi gadījumi: 1° Punkti P un P_4 nesakrīt. Vektoru poligōns tad ir vaļējs, un $\mathbf{R} \neq 0$. Virves poligōna brīvās malas nav parallēlas, ja pols O neatrodas uz taisnes PP_4, un vektoru sistēma ir reducēta līdz vienam vektoram $\mathbf{R}$, kuŗa nesēja taisne r iet caur virves poligōna brīvo malu krustošanās punktu Q parallēli taisnei PP_4.

2° Punkti P un P_4 sakrīt. Vektoru poligōns tad ir slēgts, un tā tad $\mathbf{R} = 0$. Virves poligōna brīvās malas tad ir ar vienu un to pašu virzienu.

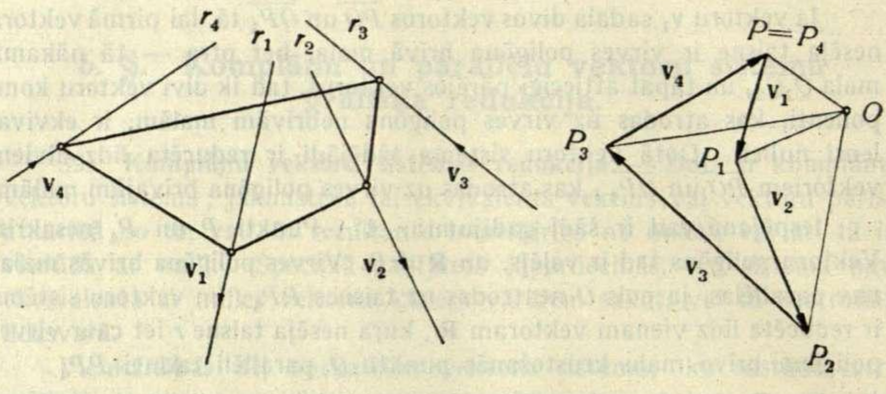


23. zīm.

a) Virves poligōna brīvās malas nesakrīt (23. zīm.). Vektoru sistēma tad ir reducēta līdz vektoru pārim $\overline{PO}$ un $\overline{OP}$. Pirmā vektora nesēja taisne ir virves poligōna pirmā brīvā mala, otra — tā pēdējā brīvā mala. Atstatums starp tām ir vektoru pāŗa plecs.

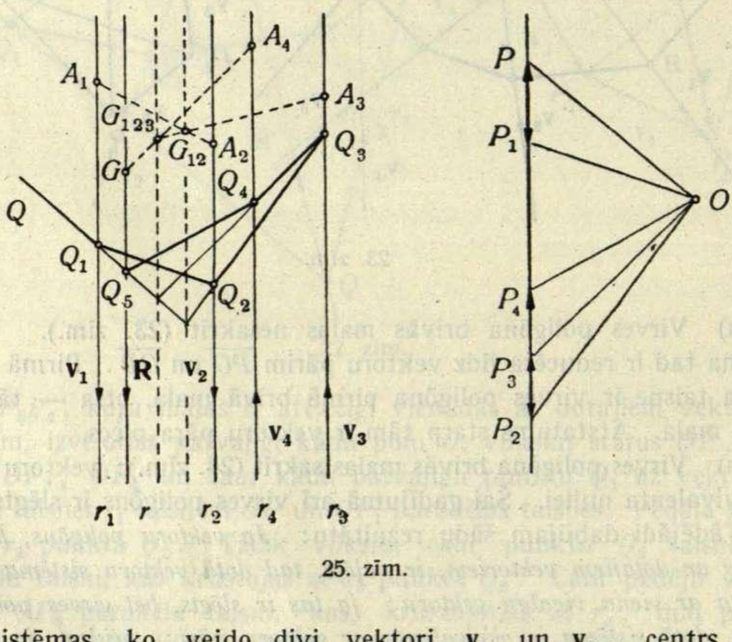
b) Virves poligōna brīvās malas sakrīt (24. zīm.): vektoru sistēma ir ekvivalenta nullei. Šai gadījumā arī virves poligōns ir slēgts.

Tādējādi dabūjam šādu rezultātu: *Ja vektoru poligōns, kas konstruēts ar dotajiem vektoriem, ir vaļējs, tad dotā vektoru sistēma ir ekvivalenta ar vienu vienīgu vektoru; ja tas ir slēgts, bet virves poligōns ir vaļējs, dotā sistēma ir ekvivalenta ar vektoru pāri; beidzot, ja slēgts ir kā vektoru poligōns, tā virves poligōns, tad dotā sistēma ir ekvivalenta nullei resp. tā atrodas līdzsvarā.*



24. zīm.

40. **Parallēlu vektoru sistēmas redukcija.** — Iepriekšējā konstrukcija, kas bija derīga komplānu vektoru sistēmai, var tikt piemērota arī parallēlu vektoru sistēmai. Iedomāsimies, ka parallēlie vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ ir pielikti to nesēju taišņu attiecīgajos punktos A_1, A_2, A_3, A_4 un ka to rezultante nav nulle (25. zīm.). Vek-

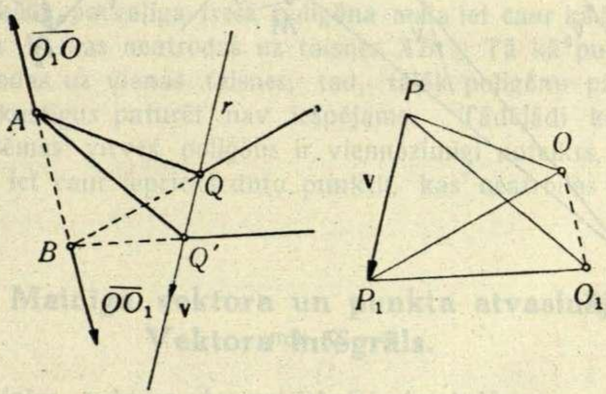


25. zīm.

toru sistēmas, ko veido divi vektori $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, centrs G_{12} ir punkts, kuŗā caur virves poligōna malu QQ_1 un Q_2Q_3 krustošanās punktu doto vektoru kopējam virzienam parallēli vilktā taisne, kā šo divu vektoru rezultantes nesēja, krusto taisni A_1A_2. Vektoru $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ centrs G_{123} ir punkts, kuŗā caur virves poligōna malu QQ_1 un Q_3Q_4 krustošanās punktu doto vektoru kopējam virzienam parallēli vilktā taisne, kā šo trīs vektoru rezultantes nesēja, krusto taisni A_3G_{12}. Analogi turpinot šo konstrukciju tālāk, dabūsim dotās vektoru sistēmas centru G, kuŗā parallēli dotās sistēmas kopējam virzienam ir pielikta tās rezultante $\mathbf{R}$.

41. **Polārā ass.** — Konstrukcijā, ko apskatījām 39. nodal., brīvi izvēlēt varēja divus elementus: punktu O, ko saucām par polu, un punktu Q_1 uz vektora $\mathbf{v}_1$ nesējas taisnes r_1. Bet tā kā punkta O pozicija ir atkarīga no diviem parametriem un punkta Q_1 pozicija no viena parametra, tad dotajai vektoru sistēmai eksistē pavisam ∞^3 virves poligōnu. Apskatīsim sakarību starp kādas vektoru sistēmas diviem patvaļīgiem virves poligōniem.

Vispirms apskatīsim visvienkāršāko gadījumu, kad doto vektoru sistēmu veido tikai viens vienīgs vektors $\mathbf{v}$, kuŗa nesēja taisne ir r (26. zīm.). Tādā gadījumā ikvienam virves poligōnam ir divas malas,

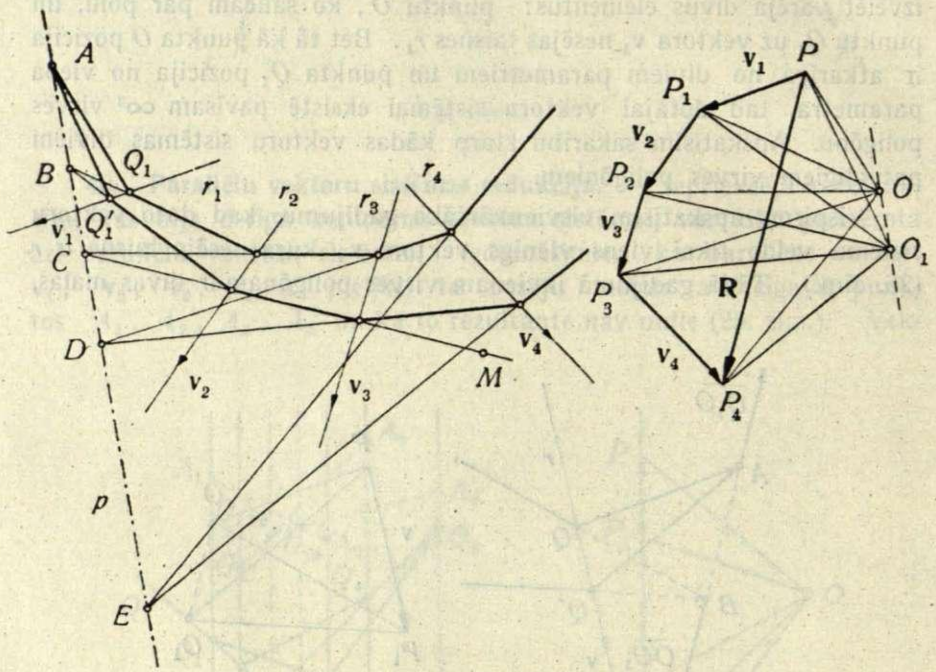


26. zīm.

kas abas ir brīvas. Izvēlēsimies patvaļīgi polu O un punktu Q uz taisnes r. Vektors $\mathbf{v}$ tad ir ekvivalents ar vektoru $\overline{PO}$ uz taisnes QA un vektoru $\overline{OP_1}$ uz taisnes QB. Tālāk, ja izvēlas citu polu O_1 un jaunu punktu Q' uz taisnes r, vektors $\mathbf{v}$ ir ekvivalents ar vektoru $\overline{PO_1}$ uz taisnes $Q'A$ un vektoru $\overline{O_1P_1}$ uz taisnes $Q'B$. Šīs divas vektoru sistēmas tādēļ ir ekvivalentas vai, citiem vārdiem sakot, pirmā sistēma un otrai pretējā sistēma veido sistēmu, kas ir ekvivalenta nullei. Vektors $\overline{PO}$ pa taisni QA ar vektoru $\overline{O_1P}$ pa taisni $Q'A$ dod rezultanti $\overline{O_1O}$ ar pielikšanas punktu A.

Tāpat vektors $\overline{OP_1}$ pa taisni QB ar vektoru $\overline{P_1O_1}$ pa taisni $Q'B$ dod rezultanti $\overline{OO_1}$ punktā B. Tā kā šīm rezultantēm jābūt direkti pretējām, tad tām jāatrodas uz vienas un tās pašas taisnes, citiem vārdiem sakot, taisnēm AB un OO_1 jābūt parallēlām. Tādējādi esam dabūjuši rezultātu, ka *taisne, kas savieno divu virves poligōnu atbilstošo malu krustošanās punktus, ir parallēla taisnei, kas savieno polus.*

Ja doti ir divi vai vairāki vektori, piem. četri vektori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ (27. zīm.), un ja, izvēloties patvaļīgi divus polus O un O_1 un



27. zīm.

divus punktus Q_1 un Q_1' uz vektora $\mathbf{v}_1$ nesējas taisnes r_1, konstruēti ir divi virves poligōni, ievērojot abas reizes vienu un to pašu vektoru kārtību, tad iepriekšējais rezultāts ir piemērojams ikvienam vektoram. Ja $\mathbf{v}_1$ ir pirmais vektors un $\mathbf{v}_2$ tam sekojošais, tad vektoram $\mathbf{v}_2$ punkts B ir virves poligōnu pirmo malu krustošanās punkts, bet punkts C šo poligōnu otru malu krustošanās punkts, un tā tad BC ir parallēls OO_1. Bet arī AB ir parallēls OO_1 un tādēļ trīs punkti A, B un C atrodas uz vienas taisnes. Turpinot šādējādi tālāk, dabūjam rezultātu, ka *kādas vektoru sistēmas divu virves poligōnu atbilstošo malu krustošanās punkti atrodas uz taisnes, ko sauc par vektoru sistēmas polāro asi un kas ir parallēla taisnei, kuŗa savieno polus.*

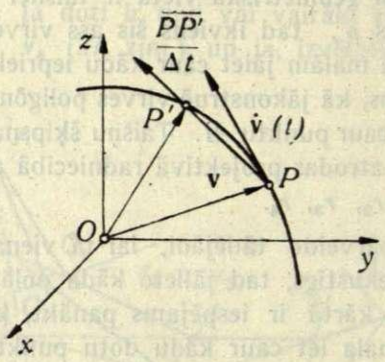
Dotajai komplāno vektoru sistēmai ikviena taisne, kas atrodas šo vektoru plaknē, ir polārā ass bezgala daudz virves poligōniem, starp kuŗiem atrodas kāds dotais poligōns. Tā, ja konstruēts ir kāds patvaļīgs dotās sistēmas virves poligōns, tad tā malas krustojas ar asi p punktos A, B, C, D, E, ... Šie punkti ir taišņu šķipsnu, kas rodas, bezgala daudz virves poligōnu atbilstošām malām krustojoties ar asi p, virsotnes. Šo poligōnu polu ģeometriskā vieta ir taisnei p parallēla taisne. Ja dota ir polārā ass p, tad ikviens šīs ass virves poligōns ir determinēts, ja vienai no tā malām jāiet caur kādu iepriekš dotu punktu. Tā 27. zīmējumā redzams, kā jākonstruē virves poligōns, kuŗa punktam C atbilstošai malai jāiet caur punktu M. Taišņu šķipsnas ar virsotnēm A, B, C, D, E, ... atrodas projektīvā radniecībā ar atbilstošām projektīvitātes asīm r_1, r_2, r_3, r_4.

Ja dotais virves poligōns ir jāpārveido tādējādi, lai tā vienas noteiktas malas punkts A paliktu nekustīgs, tad jālieto kāda polārass, kas iet caur šo punktu. Tādā kārtā ir iespējams panākt, ka kāda cita virves poligōna patvaļīga mala iet caur kādu dotu punktu B, kas neatrodas uz šīs ass. Ja virves poligōna diviem punktiem A un B jāpaliek nekustīgiem, tad, izvēloties AB par polārasi, iespējams panākt, ka kāda patvaļīga trešā poligōna mala iet caur kādu iepriekš dotu punktu M, kas neatrodas uz taisnes AB. Tā kā punkti A, B un M neatrodas uz vienas taisnes, tad, tālāk poligōnu pārveidojot, tos visus nekustīgus paturēt nav iespējams. Tādējādi kāds dotās vektoru sistēmas virves poligōns ir viennozīmīgi noteikts, ja tā trīs malas katra iet caur iepriekš dotu punktu, kas neatrodas uz vienas taisnes.

7. §. Mainīga vektora un punkta atvasinājumi. Vektora integrāls.

42. **Mainīga vektora ģeometriskais atvasinājums.** — Iedomāsimies, ka katrai parametra t vērtībai intervallā (t_0, t_1) viennozīmīgi atbilst kāds vektors $\mathbf{v}$ — brīvs, saistīts vai slīdošs. Paplašinot funkcijas koncepciju (no skālāriem uz vektoriāliem lielumiem), tad saka, ka vektors $\mathbf{v}$ ir parametra t funkcija, kas definēta intervallā (t_0, t_1), un raksta $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Attiecībā pret kādu izvēlētu ortogōnālu koordinātu triedru tad vektora $\mathbf{v}(t)$ koordinātas arī ir parametra t funkcijas, un tās apzīmē ar $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$. Vektoriālo funkciju $\mathbf{v}(t)$ sauc par *ierobežotu* intervallā (t_0, t_1), ja šinī intervallā galīgs ir tās moduls $v(t)$. Funkciju $\mathbf{v}(t)$ sauc par *nepārtrauktu* parametra vērtībai $t = \tau$, ja, lai cik mazs būtu kāds iepriekš dotais pozitīvais lielums ε, jebkuŗai

parametra vērtībai t', parametra vērtības $t = \tau$ apkārtnē, vektoriālās diferences $\mathbf{v}(t') - \mathbf{v}(t)$ moduls ir mazāks par ε. Ja vektoriālā funkcija $\mathbf{v}(t)$ tās definīcijas intervallā ir ierobežota, viennozīmīga un nepārtraukta, tad viennozīmīgas un nepārtrauktas ir arī trīs skālārās funkcijas $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ un otrādi.



28. zīm.

Caur kādu nekustīgu punktu, piem. koordinātu triedra $Oxyz$ sākuma punktu O, vilksim vektoru $\overline{OP}$ — vienādu ar vektoru $\mathbf{v}(t)$ (28. zīm.).

Dotā vektora $\mathbf{v}(t)$ koordinātas $X(t), Y(t), Z(t)$ tad ir reizē arī vektora $\overline{OP}$ gala punkta P koordinātas. Parametra vērtībai $t + \Delta t$ intervallā (t_0, t_1) atbilstošo vektoru apzīmēsim ar $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ un atliksim no punkta O ar šo vektoru vienādu vektoru $\overline{OP'}$. Vektoru $\overline{OP'}$ un $\overline{OP}$ ģeometriskā diference $\overline{PP'}$ ir vienāda ar vektoriālo pieaugumu $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$, kuŗa koordinātas ir ΔX, ΔY, ΔZ, kas savukārt ir triju funkciju $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ pieaugumi intervallā $(t, t + \Delta t)$, t. i.

$$\Delta X = X(t + \Delta t) - X(t),$$
$$\Delta Y = Y(t + \Delta t) - Y(t),$$
$$\Delta Z = Z(t + \Delta t) - Z(t).$$

Apskatīsim vektoru $\dfrac{\overline{PP'}}{\Delta t}$, kuŗš ir vienāds ar vektoru $\dfrac{\Delta\mathbf{v}(t)}{\Delta t}$, bet kuŗa sākuma punkts ir P. Šī vektora koordinātas ir:

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t},$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta t} = \frac{Y(t + \Delta t) - Y(t)}{\Delta t},$$

$$\frac{\Delta Z}{\Delta t} = \frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t}.$$

Parametra t pieaugumam Δt tiecoties uz nulli, ja funkcijas $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ ir diferencējamas, kvocienti $\frac{\Delta X}{\Delta t}, \frac{\Delta Y}{\Delta t}, \frac{\Delta Z}{\Delta t}$ tiecas uz šo funkciju atvasinājumiem $\dot{X}(t)$, $\dot{Y}(t)$, $\dot{Z}(t)$ un vektors $\frac{\overline{PP'}}{\Delta t}$ uz kādu robežvektoru, kuŗa koordinātas ir $\dot{X}(t)$, $\dot{Y}(t)$, $\dot{Z}(t)$. Šo brīvo vektoru sauc par dotā *vektora* $\mathbf{v}(t)$ *atvasinājumu* pēc parametra t un to apzīmē ar $\dot{\mathbf{v}}(t)$. Arī otrādi, no vektora $\mathbf{v}(t)$ atvasinājuma $\dot{\mathbf{v}}(t)$ eksistences varam secināt vektora $\mathbf{v}(t)$ koordinātu $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ atvasinājumu $\dot{X}(t)$, $\dot{Y}(t)$, $\dot{Z}(t)$ eksistenci.

Secinājumi. — 1° Ja dotais vektors $\mathbf{v}(t)$ ir konstants, t. i. ja tā koordinātas $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ ir konstantas, tad atvasinājumi $\dot{X}(t)$, $\dot{Y}(t)$, $\dot{Z}(t)$ ir nulles, un atvasinātais vektors $\dot{\mathbf{v}}(t)$ ir nulles vektors. Arī otrādi, ja atvasinātais vektors $\dot{\mathbf{v}}(t)$ ir nulles vektors, tad tā koordinātas $\dot{X}(t)$, $\dot{Y}(t)$, $\dot{Z}(t)$ ir nulles. Tā tad $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ ir konstantas, un tādēļ konstants ir arī vektors $\mathbf{v}(t)$.

2° Atvasinātā vektora $\dot{\mathbf{v}}(t)$ projekcijas algebriskā vērtība $\dot{X}(t)$ uz x-ass ir vienāda ar vektora $\mathbf{v}(t)$ projekcijas uz šīs ass algebriskās vērtības $X(t)$ atvasinājumu. Tā tad vispārīgi: vektora $\mathbf{v}(t)$ atvasinātā vektora $\dot{\mathbf{v}}(t)$ projekcijas uz kādas ass algebriskā vērtība ir vienāda ar dotā vektora $\mathbf{v}(t)$ projekcijas uz šīs ass algebriskās vērtības atvasinājumu.

43. **Vektora diferenciāls.** — Tā kā vektoriālās funkcijas $\mathbf{v}(t)$ vidējais pieaugums $\frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$ intervallā $(t, t + \Delta t)$, Δt tiecoties uz nulli, tuvojas $\dot{\mathbf{v}}(t)$ kā savai robežai, tad diference

$$\frac{\Delta \mathbf{v}(t)}{\Delta t} - \dot{\mathbf{v}}(t) = \boldsymbol{\epsilon}$$

ir infinītezimāls vektors reizē ar skālāru Δt, t. i. vektora $\boldsymbol{\epsilon}$ gaŗums ε ir infinītezimāls reizē ar Δt. Tādēļ saka arī, kā diferenciālrēķinos parasts, ka diference

$$\Delta \mathbf{v}(t) - \dot{\mathbf{v}}(t)\ \Delta t = \boldsymbol{\epsilon}\Delta t$$

ir infinītezimāls lielums ar kārtu, kas augstāka par vienu attiecībā pret Δt.

Tādējādi, aizstājot Δt ar dt un apzīmējot vektoriālās funkcijas $\mathbf{v}(t)$ diferenciālu ar $d\mathbf{v}(t)$, definējot to, kā parasti, ar $\dot{\mathbf{v}}(t)\,dt$, dabūjam, ka, tāpat kā skālārai funkcijai, vektoriālās funkcijas $\mathbf{v}(t)$ pieaugums $\Delta \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t + dt) - \mathbf{v}(t)$ intervallā dt atšķiŗas no funkcijas diferenciāla $d\mathbf{v}(t)$ par bezgala mazu lielumu, kuŗa kārta attiecībā pret dt ir augstāka par vienu.

Tā tad esam dabūjuši atvasinātam vektoram vēl šādu diferenciālu apzīmējumu

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$$

Vektora ģeometriskā atvasinājuma $\mathbf{v}(t)$ un vektora diferenciāla $d\mathbf{v}(t)$, kas abi konstruēti punktā P, nesējas taisnes virziens ir vienāds ar vektora $\overline{PP'}$ robežvektora nesējas taisnes virzienu, t. i. tangentes virzienu punktā P.

44. **Augstāku kārtu vektoriāli atvasinājumi.** — Tā kā vektora $\mathbf{v}(t)$ atvasinājums $\dot{\mathbf{v}}(t)$ ir savukārt vektoriāla funkcija, tad iespējams definēt vektora $\dot{\mathbf{v}}(t)$ atvasinājumu, kas ir vektora $\mathbf{v}(t)$ otrās kārtas atvasinājums un ko apzīmē ar $\ddot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d^2\mathbf{v}(t)}{dt^2}$. Tā koordinātas ir $\ddot{X}(t)$, $\ddot{Y}(t)$, $\ddot{Z}(t)$. Analogi var definēt vektora $\mathbf{v}(t)$ trešās, ceturtās un augstāku kārtu atvasinājumus.

45. **Vektoru summas un produktu atvasinājumi.** — No vektoriālo funkciju atvasinājuma definīcijas izriet, ka tā īpašības ir analogas ar skālāro funkciju atvasinājuma īpašībām. Tā redzējām, ka konstanta vektora atvasinājums ir nulle. Tālāk nav grūti pārliecināties, ka divi vektori ar vienādiem atvasinājumiem atšķiŗas viens no otra tikai ar konstantu vektoru. Tāpat arī vektoru summas atvasinājums ir vienāds ar summandu atvasinājumu summu. Pie tam, ja $\mathbf{v}$ ir parametra t ar kāda cita parametra $s = s(t)$ starpniecību salikta funkcija, tad

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Ja ir dots kāds skālārs lielums a un vektori $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, visi kā parametra t funkcijas, tad triju produktu tipu

$$a\,\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

atvasinājumi sastādāmi kā parasti, t. i.

$$\frac{d}{dt}(a\,\mathbf{v}_1) = \frac{da}{dt}\mathbf{v}_1 + a\frac{d\,\mathbf{v}_1}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{d\mathbf{v}_2}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \frac{d\mathbf{v}_2}{dt}.$$

Lai pierādītu uzrakstīto formulu pareizumu, jāpāriet atpakaļ uz šo formulu abās pusēs sastopamo vektoru projekciju algebriskām vērtībām un jāpārliecinās, ka tās ir vienas un tās pašas.

Ja $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, pie kam vektora $\mathbf{v}$ garums ir konstants, tad $\mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}^2$. Diferencējot pēdējo izteiksmi, dabūjam

$$\mathbf{v} . \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 ,$$

t. i. vektora ar mainīgu virzienu, bet konstantu garumu atvasinājums ir tam perpendikulārs vektors vai arī nulles vektors.

46. **Teilora[1]) formula vektoriālai funkcijai.** — Viss iepriekš teiktais rāda, ka arī citi diferenciālrēķinu formālie rezultāti var tikt attiecināti uz vektoriālām funkcijām, kā, piem., Teilora formula, kas reāla mainīga lieluma reālai funkcijai izsaka šādu teorēmu: ja $f(t)$ ir kāda skālāra lieluma t skālāra funkcija, kas ir nepārtraukta kopā ar tās pirmajiem n-ās kārtas atvasinājumiem intervallā (t_0, t_1), un ja t un $t + \Delta t$ apzīmē divas dažādas t vērtības šai intervallā, tad, definējot skālāro lielumu ε ar vienādojumu

$$(29.) \qquad f(t + \Delta t) = f(t) + (\Delta t) \dot{f}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2\,!} \ddot{f}(t) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(\Delta t)^n}{n\,!} [\overset{(n)}{f}(t) + \varepsilon] ,$$

šī skālāra ε robežlielums

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon = 0 .$$

Skālāra lieluma t vektoriālai funkcijai var pierādīt analogu teorēmu. Ja $\mathbf{v}(t)$ ir kāda skālāra lieluma t vektoriāla funkcija, kas ir nepārtraukta kopā ar tās pirmajiem n-ās kārtas atvasinājumiem intervallā (t_0, t_1), un ja t un $t + \Delta t$ apzīmē divas dažādas t vērtības šai intervallā, tad, definējot vektoru $\boldsymbol{\epsilon}_1$ ar vienādojumu

$$(30.) \qquad \mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + (\Delta t) \dot{\mathbf{v}}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2\,!} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(\Delta t)^n}{n\,!} [\overset{(n)}{\mathbf{v}}(t) + \boldsymbol{\epsilon}_1] ,$$

[1]) B. Taylor (1685.—1731. g.).

šī vektora robežvektors

$$\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\epsilon}_1 = 0 .$$

Lai šo teōrēmu pierādītu, apzīmēsim ar **a** kādu konstantu vektoru un apskatīsim skālāro funkciju $f(t) = \mathbf{a} \, . \, \mathbf{v}(t)$. Tā kā

$$\dot{f}(t) = \mathbf{a} \, . \, \dot{\mathbf{v}}(t) \, , \quad \ddot{f}(t) = \mathbf{a} \, . \, \ddot{\mathbf{v}}(t) \quad \text{u. t. t.,}$$

tad $f(t)$ kopā ar tās pirmajiem n-ās kārtas atvasinājumiem ir nepārtrauktas funkcijas apskatītajā intervallā, un mēs varam piemērot šai skālārai funkcijai (29.) Teilora formulu. Substituējot pēc tam šai formulā $f(t)$ vietā $\mathbf{a} \, . \, \mathbf{v}(t)$ un reizinot vektoriālās funkcijas (30.) Teilora formulas visus locekļus ar **a**, dabūjam divas formulas, kas, tās salīdzinot, rāda, ka

$$\varepsilon = \mathbf{a} \, . \, \boldsymbol{\epsilon}_1$$

un tā tad

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a} \, . \, \boldsymbol{\epsilon}_1 = 0 .$$

Bet tā kā **a** ir kaut kāds vektors, tad no pēdējās sakarības izriet, ka

$$\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\epsilon}_1 = 0 ,$$

kas arī bija jāpierāda.

47. **Mainīga punkta atvasinājums.** — Analogi kā ar vektoriem, iedomāsimies, ka intervallā (t_0 , t_1) katrai parametra t vērtībai atbilst viens noteikts punkts P, kas tad ir parametra t funkcija un ko apzīmē, rakstot $P = P(t)$. Attiecībā pret kādu izvēlētu ortogōnālu koordinātu triedru punkta $P(t)$ koordinātas ir parametra t funkcijas. Apzīmēsim tās ar $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Tālāk iedomāsimies, ka $P(t)$ ir *nepārtraukta* funkcija, t. i. ikkatrai parametra vērtībai t' , kuŗa atšķiŗas pēc patikas maz no parametra vērtības t, atbilst punkts $P(t')$, kas atrodas pēc patikas tuvu punktam $P(t)$. Parametram t mainoties, punkts $P(t)$ apraksta kādu līkni l . Izvēlēsimies uz tās divus punktus $P = P(t)$ un $P' = P(t + \Delta t)$, kas atbilst parametra vērtībām t un $t + \Delta t$ apskatāmā intervallā, un apzīmēsim ar

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$$

punkta funkcijas $P(t)$ pieaugumu intervallā $(t , t + \Delta t)$. Ģeometriski šis pieaugums ir raksturots ar vektoru $\overline{PP'}$, kas savieno līknes l punktu $P = P(t)$ ar punktu $P' = P(t + \Delta t)$.

Apskatīsim tālāk vektoru

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

ar tā projekciju algebriskām vērtībām

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t},$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}.$$

Ja funkcijas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ir diferencējamas, tad, parametra t pieaugumam Δt tiecoties uz nulli, kvocienti $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ tiecas uz šo funkciju atvasinājumiem $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ un vektors $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ uz kādu robežvektoru $\dot{P}(t)$ ar koordinātām $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$. Šo robežvektoru sauc par mainīgā punkta $P(t)$ atvasinājumu. Atvasinātā vektora $\dot{P}(t)$ virziens un vērsums ir vienāds ar tangentes virzienu un vērsumu līknes l punktā P, ja tangentes vērsumu uzskata par pozitīvu, parametra t vērtībai pieaugot.

Analogi vektora diferenciāla definīcijai, arī mainīgā punkta $P(t)$ diferenciālu $dP(t)$ definējam ar

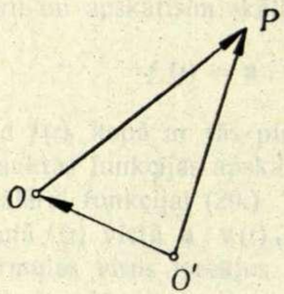
$$dP(t) = \dot{P}(t)\, dt,$$

pie kam, tāpat kā agrāk, vektors $P(t + dt) - P(t)$ atšķiras no vektora $dP(t)$ par bezgala mazu lielumu, kuŗa kārta attiecībā pret dt ir augstāka par vienu.

Vektoru $dP(t)$ sauc par mainīgā punkta $P(t)$ elementāro pārvietojumu parametra t infinītezimālā intervallā dt.

Tā kā punkta $P(t)$ atvasinājums $\dot{P}(t)$ ir vektors, tad iespējams konstruēt tā atvasinājumu, kuŗu apzīmē ar $\ddot{P}(t)$ un kuŗa koordinātas izvēlētajā koordinātu triedrā ir $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$. Vektoru $\ddot{P}(t)$ sauc par punkta $P(t)$ otrās kārtas atvasinājumu. Analogi definē augstāko kārtu atvasinājumus.

Apskatīsim tālāk mainīgu vektoru $\overline{OP}$, kas savieno kādu punktu O ar mainīgo punktu P. Punkta $P(t)$ radijvektors $\overline{OP}$ ir atkarīgs kā no punkta O, tā arī no parametra t, bet tā atvasinājums ir no punkta O neatkarīgs.



29. zīm.

Tiešām, izvēloties citu sākuma punktu O' (29. zīm.) un ievērojot, ka $\overline{O'O}$ ir konstants vektors, jo, punktam P mainoties, tas paliek nemainīgs, vienlīdzība

$$\overline{O'P} = \overline{O'O} + \overline{OP}$$

rāda, ka

$$\frac{d\,\overline{O'P}}{dt} = \frac{d\,\overline{OP}}{dt},$$

t. i. atvasinājums $\frac{d\,\overline{OP}}{dt}$ ir pilnīgi noteikts ar funkciju $P(t)$ un tādēļ arī raksta

$$\dot{P}(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{d\,\overline{OP}}{dt}. \tag{31.}$$

Ja punkts O ir konstants, tad punkta $P(t)$ radijvektors $\overline{OP}$ ir atkarīgs vienīgi no parametra t, un tā tad

$$\dot{\overline{OP}}(t) = \dot{P}(t),$$

t. i. mainīga vektora ar nekustīgu sākuma punktu atvasinājums ir vienāds ar tā gala punkta atvasinājumu.

48. **Teilora formula punkta funkcijai.** — Teilora formula punkta funkcijai $P(t)$ viegli atvasināma no 46. nodal. dotās Teilora formulas vektoriālai funkcijai $\mathbf{v}(t)$, attiecīgi pārveidojot šīs formulas ārējo izskatu, pēc kam to var uzrakstīt formā

$$\Delta P = \overline{PP'} = (\Delta t)\,\dot{P}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2\,!}\ddot{P}(t) + \dots$$
$$\dots + \frac{(\Delta t)^n}{n\,!}\,[\overset{(n)}{P}(t) + \boldsymbol{\epsilon}_1],$$

kur $P = P(t)$, $P' = P(t + \Delta t)$ un $\boldsymbol{\epsilon}_1$ ir kāds infinītezimāls vektors, kas tiecas uz nulli reizē ar Δt tiekšanos uz nulli. Tiešām, tā kā vektoriālais pieaugums $\Delta\,\overline{OP}$, kā to rāda sakarība

$$\Delta \overline{OP} = \overline{OP}\,(t + \Delta t) - \overline{OP}\,(t) = \overline{OP'} - \overline{OP} = \overline{PP'},$$

ir vektors, kas savieno punktu $P = P\,(t)$ ar punktu $P' = P\,(t + \Delta t)$ un kas tā tad ir no vektora $\overline{OP}$ sākuma punkta O neatkarīgs, tad šo vektoriālo pieaugumu var uzskatīt par punkta funkcijas $P(t)$ pieaugumu ΔP, rakstot, ka

$$\overline{PP'} = \Delta P = P\,(t + \Delta t) - P\,(t)\,.$$

Attīstot pēc tam vektoriālo funkciju $\overline{OP}\,(t + \Delta t)$, kas sastopama vektora $\overline{PP'}$ izteiksmē, Teilora rindā un ievērojot (31.) un tai analogās sakarības, kuŗas iegūtas, (31.) sakarību vairākkārtīgi diferencējot, dabūjam punkta funkcijas $P(t)$ pieaugumam ΔP augšā uzrakstīto attīstījumu.

49. **Vektora integrāls.** — Iedomāsimies, ka mainīgais vektors $\mathbf{v}\,(t)$ ir parametra t nepārtraukta funkcija intervallā (t_0, t_1), un apzīmēsim tā koordinātas ar $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$.

Ar šiem nosacījumiem eksistē noteiktie integrāli

$$I_x = \int_{t_0}^{t_1} X\,(t)\,dt\,,\quad I_y = \int_{t_0}^{t_1} Y\,(t)\,dt\,,\quad I_z = \int_{t_0}^{t_1} Z\,(t)\,dt\,.$$

Vektoru $\mathbf{I}$, ar koordinātām I_x, I_y, I_z, sauc par *vektora* $\mathbf{v}(t)$ *noteikto integrālu* intervallā (t_0, t_1), un to apzīmē, rakstot

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}\,(t)\,dt\,.$$

Viegli pārliecināties, ka šādi definēto integrālu $\mathbf{I}$ patiešām var uzskatīt par vektoriālas summas $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{v}\,(\tau_i)\,\Delta t_i$, ko dabūjam, sadalot intervallu (t_0, t_1) n elementāros intervallos Δt_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ un reizinot vektora $\mathbf{v}(t)$ vērtību $\mathbf{v}(\tau_i)$, kas atbilst kādai parametra t patvaļīgai vērtībai τ_i intervallā Δt_i, ar Δt_i un pēc tam dabūtos produktus saskaitot, robežlielumu, ja intervallu skaits neaprobežoti pieaug un to gaŗumi Δt_i tiecas uz nulli, t. i.

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}\,(t)\,dt = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}\,(\tau_i)\,\Delta t_i.$$

Tiešām, ja vektora $\mathbf{v}(\tau_i)$ koordinātas apzīmē ar $X(\tau_i)$, $Y(\tau_i)$, $Z(\tau_i)$, tad vektoriālās summas $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}(\tau_i)\,\Delta t_i$ koordinātas ir

$$\sum_{i=1}^{n} X(\tau_i)\,\Delta t_i, \quad \sum_{i=1}^{n} Y(\tau_i)\,\Delta t_i, \quad \sum_{i=1}^{n} Z(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

bet pēdējo summu robežlielumi ir I_x, I_y, I_z, kas definē vektoru $\mathbf{I}$.

Ja integrācijas intervalla (t_0, t) augšējā robeža t ir mainīga, tad vektors $\mathbf{I}(t)$, kas definēts ar integrālu

$$\mathbf{I}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t)\,dt,$$

ir parametra t funkcija, un šī vektora atvasinājums ir dotais vektors $\mathbf{v}(t)$; citiem vārdiem sakot, no pēdējās sakarības izriet, ka

$$\frac{d\,\mathbf{I}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t).$$

Ja vektora $\mathbf{I}(t)$ pielikšanas punkts O ir nekustīgs, tad tā gala punkts $P(t)$ ir parametra t funkcija, kuŗas atvasinājums ir dotais vektors $\mathbf{v}(t)$ (47. nodal.).

Beidzot, ja mainīgais vektors $\mathbf{v}(P)$ ir punkta P, kas mainās pa kādu vien-, div- vai trīsdimensionālu ģeometrisku lauku, t. i. līkni s, virsu σ vai tilpumu V, funkcija, tad vektoru $\mathbf{I}(P)$ ar koordinātām

$$\int_L X\,dL, \quad \int_L Y\,dL, \quad \int_L Z\,dL$$

sauc par *vektora* $\mathbf{v}(P)$ *integrālu pār lauku L,* un to apzīmē ar simbolu

$$\mathbf{I}(P) = \int_L \mathbf{v}(P)\,dL.$$

Arī šai gadījumā ir spēkā formula

$$\int_L \mathbf{v}(P)\,dL = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta L_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}(P_i)\,\Delta L_i.$$

Piezīme. — Formulas, kas definē vektoru $\mathbf{I}(P)$, labajā pusē raksta tikai vienu integrālu, ja zem tā atrodas tikai viena lieluma L diferenciāls dL; ja turpretim integrācijas lauks L ir, piem., divdimensionāls, t. i. jāintegrē ir pa kādu virsu σ, tad, rakstot L vietā σ, ortogōnālā līklīniju koordinātu sistēmā u_1, u_2 uz virsas σ,

$$dL = d\sigma = du_1 du_2$$

un

$$\int_L \mathbf{v}(P)\,dL = \int\!\!\int_\sigma \mathbf{v}(P)\,du_1 du_2.$$

Analogi, ja L reprezentē trīsdimensionālu integrācijas lauku V, ortogōnālā koordinātu triedrā $Oxyz$ tilpuma elements $dV = dxdydz$ un

$$\int_L \mathbf{v}(P)\,dL = \int\!\!\int\!\!\int_V \mathbf{v}(P)\,dx\,dy\,dz.$$

8. §. Telpas līknes diferenciālās īpašības.

50. **Vektors t.** — Mainīgā punkta P pozicijas noteikšanai uz dotās līknes l izvēlēsimies par parametru šīs līknes loka gaŗumu s, skaitot to no kāda punkta P_0: pozitīvi uz vienu pusi, bet negātīvi uz otru pusi. Katrai s nozīmei noteiktā intervallā tad atbilst noteikts līknes punkts $P(s)$. Punkta funkcijas $P(s)$ atvasinājuma vektora

$$\mathbf{t} = \frac{dP}{ds}$$

virziens un vērsums, kā zināms, ir vienāds ar tangentes virzienu un vērsumu līknes l punktā P, bet šī vektora absolūtā vērtība ir 1, t. i. $|\mathbf{t}| = 1$.

Tiešām, atsaucoties uz vektora $\mathbf{t}$ definīciju kā $\frac{\Delta P}{\Delta s}$ robežlielumu, pēdējā gaŗums ir vienāds ar chordas, kuŗas gaŗums ir $|\Delta P|$, un atbilstošā loka gaŗuma $|\Delta s|$ attiecību, bet šīs attiecības robežvērtība, kā zināms, ir 1.

51. **Līknes liekums. Vektors n.** — Ja izvēlas kādu telpas punktu O un piekārto katram līknes l punktam P punktu Q, ko dabūjam, atliekot no punkta O vektoru $\overline{OQ}$, kuŗa gaŗums ir 1, bet virziens un vērsums vienāds ar vektora $\mathbf{t}$ virzienu un vērsumu, tad punktu Q ģeometris-

kā vieta ir kāda līkne l' uz sfēras ar radiju 1. Šo līkni sauc par līknes l tangenšu sfērisko indikātrisi. Ja dotā līkne l ir īsta telpas līkne un tā nesatur taisnes segmentus, kuŗa ikviena indikātrise reducējas par punktu, tad vektors $\mathbf{t}$ mainās nepārtraukti un punkts Q apraksta kādu īstu sfērisku līkni l'. Leņķis $\Delta\varphi$, par kādu pagriežas tangente, tās pieskaršanās punktam pārvietojoties no punkta P uz P_1 pa loku ar gaŗumu $|\Delta s|$, mērījot to loka mērā ar lielā riņķa loku, kas savieno attiecīgos sfēriskās indikātrises punktus Q un Q_1, raksturo loka PP_1 deviāciju no taisnes. Šo deviāciju, kas izteikta loka PP_1 gaŗuma $|\Delta s|$ vienībās, t. i.

$$\frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|}$$

sauc par *loka PP_1 vidējo liekumu.* Tā apgriezto lielumu $\frac{|\Delta s|}{\Delta\varphi}$ sauc par tā paša *loka vidējā liekuma radiju.* Tas ir vienāds ar riņķa līnijas radiju, kuŗas loka gaŗumam $|\Delta s|$ atbilstošais kontingences leņķis, un tā tad arī centra leņķis, ir $\Delta\varphi$.

Attiecības $\frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|}$ robežlielumu, punktam P_1 tuvojoties punktam P, t. i. $\Delta s \to 0$, sauc par *līknes l liekumu punktā P.*

Lai pierādītu šī robežlieluma eksistenci, apzīmēsim ar

$$\overline{OQ} = \mathbf{t} \quad \text{un} \quad \overline{OQ_1} = \mathbf{t}_1$$

līknes l punktiem P un P_1 atbilstošo sfēriskās indikātrises punktu Q un Q_1 radijvektorus. Vektoru diference $\Delta\,\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}$ tad reprezentē vektoru $\overline{QQ_1}$, un chordas QQ_1 gaŗums ir vienāds ar vektora $\Delta\,\mathbf{t}$ gaŗumu $|\Delta\,\mathbf{t}|$. Tādēļ, uzrakstot loka vidējo liekumu formā

$$\frac{\Delta\varphi}{|\Delta\mathbf{t}|}\cdot\frac{|\Delta\mathbf{t}|}{|\Delta s|} = \frac{\Delta\varphi}{|\Delta\mathbf{t}|}\left|\frac{\Delta\mathbf{t}}{\Delta s}\right|$$

un ievērojot, ka loka $\Delta\varphi = \smile QQ_1$ un chordas QQ_1 gaŗumu attiecības $\frac{\Delta\varphi}{|\Delta\mathbf{t}|}$ robežvērtība ir 1, redzam, ka loka vidējā liekuma robežlielums ir vienāds ar vektora $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ gaŗumu, t. i. liekums līknes punktā P ir

$$c = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|,$$

kas pēc definīcijas ir pozitīvs lielums vai nulle. Punkta P liekuma radijs $\rho = \frac{1}{c}$. Bet tā kā $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{t})^2 = t^2 = 1$, tad $\frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) = 0$ jeb $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{t} = 0$, kas rāda, ka vektors $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ ir perpendikulārs vektoram $\mathbf{t}$ līknes punktā P. Taisni, kas vilkta caur līknes punktu P ar to pašu virzienu un vērsumu kā vektoram $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$, sauc par *punkta P galveno normāli*. Apzīmējot ar $\mathbf{n}$ vektora $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ versoru, t. i. vienības vektoru ar to pašu virzienu un vērsumu kā vektoram $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$, un zinot vektora $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ garumu c, varam rakstīt, ka

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = c\,\mathbf{n}$$

jeb

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{n}. \tag{32.}$$

Plakni caur līknes l punkta P tangentes un galvenās normāles vektoriem $\mathbf{t}$ un $\mathbf{n}$ sauc par *šī punkta oskulētāju plakni*. Plaknes līknei oskulētāja plakne jebkurā tās punktā sakrīt ar līknes plakni, bet telpas līknei šī plakne mainās no punkta uz punktu.

52. **Vektors b. Galvenais (Frenet) triedrs. Līknes torsija.** — Līknes oskulētājai plaknei punktā P vilktu orientētu perpendikulu, kas kopā ar vektoriem $\mathbf{t}$ un $\mathbf{n}$ veido pozitīvi orientētu ortogōnālu triedru, sauc par *punkta P binormāli*. Binormāles vienības vektoru apzīmēsim ar $\mathbf{b}$. Pozitīvi orientēto ortogōnālo triedru, ko veido punkta P trīs vektori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, sauc par līknes *punkta P galveno triedru* vai arī *Frenè*[1]) *triedru*. Triedra plakne $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$, ko noteic tangente un galvenā normāle, ir punkta P oskulētāja plakne; plakni $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ sauc par punkta *P normālo plakni*, bet trešo plakni $(\mathbf{b}, \mathbf{t})$ sauc par punkta *P rektificētāju plakni*. No vektoriālā produkta definīcijas izriet, ka

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}.$$

---

[1]) J. F. Frenet (1816.—1900. g.). Viņa vārdā nosauktais triedrs un turpmāk minētās formulas atrodamas *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1852.

Plaknes līknei vektors $\mathbf{b}$ ir konstants, bet telpas līknei tas ir parametra s funkcija. Tā kā

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathrm{b}^2 = 1 \text{ un } \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0,$$

tad, diferencējot šīs divas vienlīdzības un ievērojot, ka skālārais produkts $\mathbf{b} \cdot \dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = 0$, dabūjam

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} = 0.$$

Šīs divas vienlīdzības rāda, ka vektors $\dfrac{d\mathbf{b}}{ds}$ ir perpendikulārs reizē vektoram $\mathbf{b}$ un $\mathbf{t}$, un tā tad tas ir parallēls vektoram $\mathbf{n}$. Tādējādi

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = T\,\mathbf{n}, \tag{33.}$$

kur T apzīmē kādu pozitīvu vai negātīvu skaitli vai arī nulli.

Lielumu T sauc par līknes *vērpi (torsiju)* apskatītajā punktā P. Tā kā plaknes līknēm $\mathbf{b}$ ir konstants, tad tām $\dfrac{d\mathbf{b}}{ds} = 0$ un tāpēc arī $T = 0$. Ja $T \neq 0$, tad tā absolūtā vērtība mērī līknes deviāciju no oskulētājas plaknes tās punktā P.

Lai to pierādītu, apzīmēsim ar $\Delta\vartheta$ leņķi, par kādu pagriežas kustīgā punkta oskulētāja plakne, šim punktam pārvietojoties no punkta P punktā P_1 pa līknes loku ar garumu $|\Delta s|$; citiem vārdiem sakot, apzīmēsim ar $\Delta\vartheta$ leņķi starp binormālēm $\mathbf{b}$ un $\mathbf{b}_1$, mērījot to loka mērā ar lielā riņķa loku, kas savieno punktiem P un P_1 atbilstošos binormāļu sfēriskās indikātrises punktus Q' un Q'_1. Līknes deviāciju no oskulētājas plaknes punktā P, izteicot šo deviāciju loka garuma vienībās, mērī attiecības

$$\frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}$$

robežlielums. Ja šo attiecību pārraksta formā

$$\frac{\Delta\vartheta}{|\Delta\mathbf{b}|}\left|\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta s}\right|,$$

tad, punktam P_1 tuvojoties pa līkni l punktam P, t. i. $\Delta s \to 0$, pēdējās izteiksmes pirmā faktora robežvērtība ir viens, bet otra faktora robežvērtība ir vektora $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ garums $\left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right|$. Tā tad attiecības $\frac{\Delta\vartheta}{|\Delta s|}$ robežvērtība, ievērojot (33.) sakarību, ir T absolūtā vērtība, t. i.

$$|T| = \left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right|.$$

Skālārā lieluma T zīme līknes punktā P, kā vēlāk redzēsim, noteic līknes dispoziciju šai punktā.

Torsijas apgriezto lielumu

$$\tau = \frac{1}{T}$$

sauc par *torsijas radiju* apskatāmā punktā. Tas var būt kā pozitīvs, tā negātīvs lielums. Ar torsijas radiju (33.) sakarību var pārrakstīt šādi:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\mathbf{n}. \tag{34.}$$

53. **Frenè formulas.** — Daudzos ģeometriskos jautājumos par telpas līknēm ievērojama nozīme ir triju vektoru **t**, **n**, **b**, kas raksturo galveno triedru kādā līknes punktā, atvasinājumiem.

Pirmā un trešā vektora atvasinājumi ir izteikti ar (32.) un (34.) formulu. Atradīsim vēl trešo sakarību, kurā figūrētu vektors $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$. Šai nolūkā uzrakstīsim vektoru **n** formā

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$$

un dabūto sakarību diferencēsim:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{t}.$$

Ievērojot (32.) un (34.) sakarību un identitātes $\mathbf{b} \times \mathbf{n} = -\mathbf{t}$, $\mathbf{n} \times \mathbf{t} = -\mathbf{b}$, pēdējo izteiksmi var pārrakstīt šādi:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{t} - \frac{1}{\tau}\mathbf{b},$$

kas ir meklētā sakarība.

Formulas, kas izteic fundāmentālo vektoru $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ atvasinājumus,

$$(35.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\mathbf{n}, \\ \dfrac{d\mathbf{n}}{ds} = -\dfrac{1}{\rho}\mathbf{t} - \dfrac{1}{\tau}\mathbf{b}, \\ \dfrac{d\mathbf{b}}{ds} = \dfrac{1}{\tau}\mathbf{n}, \end{cases}$$

sauc par *Frenè formulām.*

Tādējādi ar katru līknes punktu P ir saistīti trīs skālāri lielumi s, ρ, τ un trīs fundāmentāli vektori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, kas visi saistīti savā starpā ar trim Frenè formulām: pavisam tā tad ir seši elementi un trīs relācijas.

54. **Torsijas zīme.** — Lai atrastu sakarību starp torsijas T zīmi kādā līknes punktā $P(s)$ un līknes dispoziciju šī punkta apkārtnē, apskatīsim divus bezgala tuvus šīs līknes punktus $P(s)$ un $P' = P(s + \Delta s)$ un izteiksim punkta funkcijas $P(s)$ pieaugumu $\Delta P(s)$ ar Teilora formulu atkarībā no šīs funkcijas trim pirmajiem atvasinājumiem. Tad dabūsim, ka

$$(36.)\quad \Delta P = \overline{PP'} = (\Delta s)\,\dot{P}(s) + \frac{(\Delta s)^2}{2}\,\ddot{P}(s) + \frac{(\Delta s)^3}{6}\,[\dddot{P}(s) + \boldsymbol{\epsilon}_1],$$

pie kam

$$\lim_{\Delta s \to 0} \boldsymbol{\epsilon}_1 = 0.$$

Bet tā kā

$$\dot{P}(s) = \frac{dP}{ds} = \mathbf{t}, \qquad \ddot{P}(s) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n} = c\mathbf{n}$$

un

$$\dddot{P} = \frac{d}{ds}(c\mathbf{n}) = \frac{dc}{ds}\mathbf{n} + c\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{dc}{ds}\mathbf{n} - c\,(c\mathbf{t} + T\,\mathbf{b}),$$

tad, substituējot šīs atvasinājumu izteiksmes (36.) formulā un reizinot pēc tam dabūtā vektora $\overline{PP'}$ izteiksmi skālāri ar $\mathbf{b}$, ievērojot sakarības

$$\dot{P}\,.\,\mathbf{b} = 0, \qquad \ddot{P}\,.\,\mathbf{b} = 0, \qquad \dddot{P}\,.\,\mathbf{b} = -cT,$$

dabūsim, ka

$$\overline{PP'}\,.\,\mathbf{b} = -\frac{(\Delta s)^3}{6}\,(cT - \boldsymbol{\epsilon}_1\,.\,\mathbf{b}).$$

Tā kā telpas līknēm liekums c un torsija T vispārīgi nav nulle, tad pietiekami mazām vektora $\boldsymbol{\epsilon}_1$ vērtībām locekļa cT absolūtā vērtība pārsniegs skālārā produkta $\boldsymbol{\epsilon}_1 . \mathbf{b}$ vērtību un līdz ar to skālārā produkta $\overline{PP'} . \mathbf{b}$ zīme būs vienāda ar produkta

$$-\frac{(\Delta s)^3}{6} cT$$

zīmi, kas savkārt ir vienāda ar produkta

$$-\Delta s T$$

zīmi, jo $\dfrac{(\Delta s)^2}{6} c$ ir pozitīvs lielums.

Bet skālārā produkta $\overline{PP'} . \mathbf{b}$ zīme nosaka, vai punkts P' atrodas punkta P oskulētājas plaknes pozitīvā vai negātīvā pusē, uzskatot to šīs plaknes pusi par pozitīvo, kuŗas pusē ir vektors $\mathbf{b}$. No otras puses šī produkta zīme mainās līdz ar Δs zīmes mainīšanos. No tā izriet, ka punktā P līkne krusto oskulētāju plakni. Ja punkts P' apraksta līkni loka gaŗuma s augšanas vērsumā, tad pirms punkta P lielums Δs ir negātīvs, punktā P tas ir nulle un pēc tam tas kļūst atkal pozitīvs.

Tādējādi, *ja torsija* $T > 0$, *līkne punktā* P *pāriet no oskulētājas plaknes pozitīvās puses tās negātīvā pusē,* jo šai gadījumā $-\Delta s\, T$ zīme pirms punkta P ir pozitīva, bet pēc tā negātīva, *ja turpretim* $T < 0$, *līkne punktā* P *pāriet no oskulētājas plaknes negātīvās puses tās pozitīvā pusē.*

55. **Uzdevumi.**

1. Parādīt: ja četri punkti, O, P, Q, R apmierina vienlīdzību

$$a\,\overline{OP} + b\,\overline{OQ} + c\,\overline{OR} = 0,$$

kur a, b, c ir trīs skālāri lielumi, tad šie četri punkti atrodas vienā plaknē. Ja bez tam vēl

$$a + b + c = 0,$$

tad trīs punkti P, Q, R atrodas uz taisnes.

2. Pārliecināties, ka

$$a\,\overline{OP} + b\,\overline{OQ} + c\,\overline{OR} + d\,\overline{OS} = 0$$

ar palīgnoteikumu

$$a + b + c + d = 0,$$

kur a, b, c, d ir četri skālāri lielumi, izteic noteikumu, ka četriem punktiem P, Q, R, S jāatrodas vienā plaknē.

3. Pierādīt, ka doto n vektoru $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ģeometriskās summas $\mathbf{R}$ gaŗuma kvadrāts R^2 ir dots ar formulu

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} v_j v_k \cos(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k),$$

pie kam pēdējā summā vienlīdzības labajā pusē jāsummē pa visām indeku $1, 2, \ldots, n$ kombinācijām pa divi.

4. Ja $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ir trīs nekomplāni vektori, tad doto vektoru $\mathbf{v}$ var sadalīt trijos citos vektoros, kuŗu virzieni un vērsumi ir attiecīgi vienādi ar vektoru $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ virzieniem un vērsumiem, tā, lai

$$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c},$$

kur λ, μ, ν ir noteikti koeficienti. Parādīt, ka

$$\lambda = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mu = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}, \quad \nu = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}.$$

5. Pierādīt, ka visos punktos, kas atrodas uz rotācijas cilindra, kuŗa ass sakrīt ar dotās saistīto vektoru sistēmas centrālo asi, šīs vektoru sistēmas rezultētājs moments ir tangentiāls šim cilindram un tā gaŗums un inklinācija pret asi ir konstanta.

6. Pierādīt, ka vektoru sistēmas, ko sastāda divi vektori, algebriskā invarianta absolūtā vērtība ir vienāda ar seškārtīgu tetraedra tilpumu, kas konstruēts ar dotajiem vektoriem un vektoru, kas savieno to sākuma punktus.

7. Pierādīt, ka divu šķērsu vektoru kopējais perpendikuls šķērso šo vektoru centrālo asi taisnā leņķī.

8. Pierādīt: ja AB un CD ir riņķa līnijas ar centru O divas savstarpēji perpendikulāras chordas, kas krustojas punktā P, tad vektoru sistēma $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD}$ ir ekvivalenta ar vektoru $2\,\overline{PO}$.

9. Pierādīt, ka nepieciešamais un pietiekamais noteikums, lai dotā vektoru sistēma būtu ekvivalenta nullei, ir, ka sistēmas rezultētājs moments ir nulle trijos punktos, kas neatrodas uz vienas taisnes.

10. Konstruēt vektoru sistēmas, ko sastāda divi vektori $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ ar to nesējām taisnēm r_1 un r_2, virves poligōnu, kuŗa divas brīvās malas iet caur dotajiem punktiem A un B, bet vidējā mala iet caur trešo punktu C, kas neatrodas uz taisnes AB.

11. Parallēlu vektoru sistēmas divi virves poligōni V_1 un V_2 atrodas perspektīvā afīnitātē ar polāro asi p kā afīnitātes asi un doto vektoru kopējo virzienu kā afīnitātes virzienu. Pierādīt, ka afīnitātes attiecība ir vienāda ar nogriežņu, kas rodas kādai vektoru kopējam virzienam parallēlai taisnei r šķeļoties ar V_1 un p un V_2 un p, garumu attiecību. Ievērojot to, konstruēt parallēlas vektoru sistēmas virves poligōnu, kura trim malām a, b, c jāiet attiecīgi caur punktiem A, B, C.

12. Pierādīt, ka trīs vektori, kuru virzieni ir perpendikulāri kāda trijstūra attiecīgajām malām to viduspunktos un garumi proporcionāli šī trijstūra malu garumiem, bet vērsumi vērsti uz tā iekšpusi (vai arī ārpusi), sastāda sistēmu, kas ir ekvivalenta nullei.

13. Iepriekšējā uzdevuma vispārinājums ir šāds: n vektori, kuru virzieni ir perpendikulāri kāda konveksa daudzstūra attiecīgajām malām to viduspunktos un garumi proporcionāli šī daudzstūra attiecīgo malu garumiem, bet vērsumi vērsti uz tā iekšpusi (vai arī ārpusi), sastāda sistēmu, kas ir ekvivalenta nullei.

14. Pierādīt, ka vektoru sistēma, ko sastāda tetraedra plaknēm perpendikulāri vilkti vektori caur to centriem (trijstūriem apvilkto riņķu centriem), ir ekvivalenta nullei, ja šo vektoru garumi ir proporcionāli plakņu laukumiem, bet to vērsumi iet uz šī tetraedra iekšpusi (vai arī ārpusi).

15. Dota ir kāda plaknes līkne. Šo līkni tās punkta P apkārtnē sauc par *konkavu* pret punktu O, ja leņķis, ko veido vektors $\mathbf{n}$ (galvenās normāles vienības vektors) un vektors $\mathbf{r} = \overline{OP}$, ir plats. Pretējā gadījumā šī līkne tās punkta P apkārtnē ir *konveksa* pret punktu O. Apzīmējot punkta O attālumu līdz tangentei punktā P ar p, pierādīt, ka līknes liekuma radijs ρ punktā P ir dots ar izteiksmi

$$\rho = r\left|\frac{dr}{dp}\right|.$$

16. Piemērojot iepriekšējo rezultātu elīpsei, izvēloties par punktu O tās centru, parādīt, ka

$$\rho = \frac{1}{ab}\,(a^2 + b^2 - r^2)^{3/2}.$$

17. Nepieciešamais un pietiekamais noteikums, lai kāds vektors $\mathbf{v}$, kas ir parametra t funkcija, t mainoties, paliktu ar nemainīgu virzienu, ir, ka šai parametra t mainīšanās intervallā $\mathbf{v} \times \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$.

18. Dots ir mainīgs punkts $P(t)$ kā parametra t funkcija. Apzīmējot šī mainīgā punkta aprakstītās līknes loka gaŗumu ar $s = s(t)$, parādīt, ka jebkuŗā šīs līknes punktā P trīs fundāmentālie vektori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, liekuma radijs ρ un torsijas radijs τ ir doti ar formulām

$$\mathbf{t} = \pm \frac{\dot{P}}{|\dot{P}|}, \quad \mathbf{n} = \frac{(\dot{P} \times \ddot{P}) \times \dot{P}}{|(\dot{P} \times \ddot{P}) \times \dot{P}|}, \quad \mathbf{b} = \pm \frac{\dot{P} \times \ddot{P}}{|\dot{P} \times \ddot{P}|},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{P} \times \ddot{P}|}{|\dot{P}|^3}, \quad \frac{1}{\tau} = -\frac{(\dot{P} \times \ddot{P}) \cdot \dddot{P}}{(\dot{P} \times \ddot{P})^2},$$

kur $\dot{P}$, $\ddot{P}$, $\dddot{P}$ apzīmē mainīgā punkta $P(t)$ atvasinājumus pēc parametra t un zīme $+$ formulās, kas dod $\mathbf{t}$ un $\mathbf{b}$, atbilst gadījumam, kad parametri s un t pieaug vienā un tai pašā vērsumā pa līkni, bet — zīme pretējā gadījumā.

19. Piemērojot formulu

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{P} \times \ddot{P}|}{|\dot{P}|^3}$$

punkta $P(t) = P[x(t), y(t)]$ kustībai plaknē, atvasināt parasto plaknes līknes liekuma formulu

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} + \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

20. Apzīmējot ar

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\rho}\mathbf{b} - \frac{1}{\tau}\mathbf{t},$$

parādīt, ka

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}.$$

II NODAĻA.

PUNKTA KINĒMATIKA.

9. §. Vispārīgs apskats.

56. **Definīcijas.** — Apzīmēsim kāda punkta P koordinātas triedrā T ar x, y, z un iedomāsimies, ka tās ir atkarīgas no kāda parametra t, kas mainās no $-\infty$ līdz $+\infty$.

Šo parametru t sauksim par *kinēmatisko laiku* vai vienkārši *laiku*, nepiešķiŗot šim jēdzienam nekādu fizikālu nozīmi, citiem vārdiem sakot, parametram t nav nekāda sakara ar laiku, ko mērī kāds pulkstenis.

Ģeometrija, kā zināms, apskata figūru savstarpējos novietojumus un kustības neatkarīgi no jēdziena „kinēmatiskais laiks". Paplašinot ģeometriju ar šo jauno pamatjēdzienu „kinēmatiskais laiks", dabūjam plašāku zinātni. Šo jauno zinātni kā mēchanikas sastāvdaļu, kas pētī kustību ģeometriskās īpašības atkarībā no kinēmatiskā laika, neprasot kustību cēloņus, sauc par *kinēmatiku.* Kinēmatika tadējādi ir pārejas pakāpe no ģeometrijas uz mēchaniku tās vārda īstajā nozīmē.

Kinēmatikas kā atsevišķas zinātnes sākums meklējams tikai jaunākajos laikos, kad Dalambērs[1]), Eulers[2]), Kants[3]), Karnò[4]), Vronskis[5]) un Ampērs[6]) aizrādīja uz vajadzību un nepieciešamību pirms dinamikas apskatīt atsevišķi kustīgo ķermeņu ģeometriskās īpašības. Ampērs ir ieteicis arī jaunās disciplīnas nosaukumu *kinēmatika.*

Atsevišķu kursu par kinēmatiku tieši priekš 100 gadiem (1838. g.) nolasījis Ponselè (*J. Poncelet,* 1788.— 1867. g.) Parīzes universitātē. Pirmo grāmatu par teōrētisko kinēmatiku sarakstījis Rezals[7]). Mūsu dienās kinēmatika ir jau stingri izstrādāta mēchanikas daļa, kuŗai liela nozīme, pētījot sarežģītākas dinamikas problēmas un mēchanismus.

---

[1]) J. d' Alembert (1716.—1783. g.), *Recherches sur la précession des équinoxes,* Paris, 1749.

[2]) L. Euler (1707.—1783. g.), *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum,* Novi Comment. Petrop., vol. 20, 1776.

[3]) I. Kant (1724.—1804. g.), *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft,* 1786.

[4]) L. Carnot (1753.—1823. g.), *Essai sur les machines,* 1797.

[5]) H. Wronsky (1778.—1853. g.), *Système archit. absolu,* 1818.

[6]) A. M. Ampère (1775.—1836. g.), *Essai sur la philosophie,* 1834.

[7]) H. Résal, *Traité sur la cinématique pure,* Paris, 1862.

Kā ģeometriskas figūras var uzskatīt par ģeometrisku punktu kopumiem, tā arī analogi materiālu ķermeni var uzlūkot par veidotu no sīkām partikulām ar tik mazām dimensijām, ka tās var uzskatīt par punktiem. Šādas partikulas sauc par *materiāliem punktiem*. Tā kā kinēmatikā materijai nav nekādas nozīmes, tad materiālu punktu kustības vietā varam apskatīt ģeometrisku punktu kustības. Materiālu vai ģeometrisku punktu sistēmu sauc par *invariāblu,* ja šo punktu savstarpējie attālumi ir nemainīgi, t. i. ja šie punkti ir nekustīgi viens pret otru. Šādu punktu sistēmu sauc arī par *cietu ķermeni.*

Kustības jēdziens pēc savas dabas ir *relātīvs.* Apgalvojumam, ka dotais ķermenis kustas vai atrodas miera stāvoklī, ir nozīme tikai tad, ja šis ķermenis, attiecinot to pret kādu citu invariāblu sistēmu, ko sauc par *references* sistēmu, maina ar laiku savu poziciju pret to vai tā pozicija paliek nemainīga.

Ja references sistēma ir nekustīga, tad apskatītā ķermeņa kustību pret šo sistēmu sauc par *absolūtu,* bet ja references sistēma ir kustīga, tad ķermeņa kustību pret to sauc par *relātīvu.* Astronomijā par šādu nekustīgu references sistēmu, attiecībā pret ko apskata Saules, Zemes un citu planētu kustības, iedomājas stāvzvaigžņu sistēmu. Runājot turpretim par ķermeņa krišanu vai Saules lēkšanu, references sistēma ir Zeme, kas pati kustas, un tā tad visas kustības pret to ir relātīvas.

Visos kustību fainomenu analitiskos pētījumos par references sistēmu iedomājas kādu Dekarta koordinātu triedru.

Parametrs t nevar tikt mainīts, ja punkta P kustība ir attiecināta pret vairākiem triedriem, kuŗu kustības arī var būt atkarīgas no šī parametra. Ja turpretim kustības sākumā t ir izvēlēts, tas var tikt aizstāts ar jaunu parametru Θ visos references triedros, rakstot

$$t = t(\Theta),$$

kur $t(\Theta)$ ir noteikta Θ funkcija, kas, Θ mainoties no $-\infty$ līdz $+\infty$, arī mainās no $-\infty$ līdz $+\infty$.

Tā kā ķermeņa kustība ir pilnīgi noteikta, ja zināma ir katra tā punkta kustība, tad vispirms var pētīt kāda viena punkta kustību un pēc tam apskatīt dotā ķermeņa kustību kā punktu sistēmas kustību. No šī viedokļa raugoties, kinēmatiku iedala *punkta kinēmatikā* un *sistēmas kinēmatikā.* Pēdējo vēl savkārt iedala *cieta ķermeņa kinēmatikā* un *deformējama kontinuuma kinēmatikā.*

57. **Punkta kustības definīcijas.** — 1° *Analitiskā definīcija.* — Apskatīsim punktu P, kas atrodas kustībā pret kādu pozitīvi orientētu ortogōnālu koordinātu triedru $Oxyz$. Ikkatrā laika momentā t intervallā

(t_0, t_1), kuŗā ir definēta kustība, punktam P ir noteikta pozicija šai koordinātu triedrā. Tādējādi punkts P apskatītajā intervallā ir definēts kā laika t funkcija:

$$(1.) \qquad P = P(t).$$

Šis ģeometriskais vienādojums ir ekvivalents (47. nodal.) ar vektoriālo vienādojumu

$$(1'.) \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

ja $\mathbf{r} = \overline{OP(t)}$ apzīmē punkta $P(t)$ pozicijas vektoru, t. i. vektoru, kas savieno koordinātu triedra sākuma punktu O ar kustīgo punktu $P(t)$.

Ja x, y, z ir punkta P koordinātas momentā t, kas reizē ir arī vektora $\mathbf{r}$ koordinātas šai momentā, tad (1.) ģeometriskais vienādojums resp. (1'.) vektoriālais vienādojums ir ekvivalents ar trim skālāriem vienādojumiem

$$(2.) \qquad x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

kuŗu labās puses ir laika t funkcijas, kas definētas intervallā (t_0, t_1). Atbilstoši mūsu uztverei par punkta P nepārtrauktu pārvietošanos telpā, mēs iedomājamies, ka funkcijas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ir reālas, viennozīmīgas, ierobežotas, nepārtrauktas un atvasināmas visā to definīcijas intervallā (t_0, t_1). (1.) resp. (1'.) vienādojumu un (2.) vienādojumu sistēmu sauc par *punkta P kustības vienādojumiem.*

Punktam P kustoties, tā viena otrai sekojošo poziciju ģeometriskā vieta ir kāda līkne, kuŗu sauc par punkta *P trajektoriju* un kuŗas parametriskie vienādojumi ir doti ar (2.) sistēmu. Eliminējot no (2.) vienādojumu sistēmas parametru t, trajektorija ir reprezentēta ar diviem vienādojumiem starp x, y, z. Trajektorija var būt taisne, plaknes līkne, kā arī telpas līkne.

Kā viegli saprast, punkta P kustību var *sadalīt* trīs taisnlīnijas kustībās, kuŗas reālizē punkta P ortogōnālās projekcijas P_x, P_y, P_z uz trim koordinātu triedra asīm. Arī otrādi: trīs vienlaicīgas taisnlīnijas kustības pa koordinātu triedra asīm definē telpā punkta P kustību, kuŗas projekcijas uz asīm ir dotās kustības. Un tā kā par koordinātu triedra asīm var izvēlēties jebkuŗas trīs savstarpēji perpendikulāras taisnes, tad vispārīgi var teikt, ka punkta kustību telpā var sadalīt trīs savstarpēji perpendikulārās taisnlīnijas kustībās, kuŗas sauc par dotās kustības komponentu kustībām.

2° *Naturālā definīcija.* — Ja punkta P trajektorija ir definēta ģeometriski, t. i. ja dota ir šo trajektoriju reprezentētāja līkne, tad punkta P pozicijas noteikšanai uz tās izvēlēsimies pašu līkni par līk-līnijas abscīzu s asi un kādu tās punktu $O\ (t_0)$ par kustības sākuma punktu. Abscīzu ass pozitīvais vērsums lai ir noteikts ar punkta P kustības vērsumu no $O\ (t_0)$ uz $P\ (t_1)$. Tālāk izvēlēsimies punkta P kustības definīcijas laika intervallā (t_0, t_1) divus bezgala tuvus momentus t un $t + dt$ ar punkta P atbilstošajām pozicijām $P\ (t)$ un $P\ (t + dt)$. Tad vektors

$$P\ (t + dt) - P\ (t),$$

ko sauc par punkta P *elementāro pārvietojumu laikā* dt, skaitot no momenta t, kāda bezgala maza lieluma, kuŗa kārta attiecībā pret dt ir augstāka par vienu, robežās, ir dots ar punkta P diferenciālu dP. Pēdējā koordinātas ir

$$dx = \dot{x}\ (t)\ dt, \qquad dy = \dot{y}\ (t)\ dt, \qquad dz = \dot{z}\ (t)\ dt.$$

Šis infinītezimālais vektors dP, kuŗa virziens ir vienāds ar tangentes virzienu trajektorijas punktā P un vērsums vienāds ar kustības vērsumu, raksturo punkta P elementāro pārvietojumu

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt$$

pa trajektoriju laikā dt, skaitot no momenta t, pie kam $+$ zīme atbilst gadījumam, kad punkta P kustība norit līklīnijas abscīzu ass pozitīvā vērsumā, bet $-$ zīme pretējam gadījumam. Vektora dP gaŗums ir $|ds|$.

Summējot visus punkta P elementāros pārvietojumus ds pa trajektoriju, skaitot no momenta t_0 līdz kādam momentam t, t. i. aprēķinot integrālu

$$\int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_0}^{t} \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt,$$

dabūjam punkta P līklīnijas abscīzas vērtību momentā t. Šis integrāls ir kāda noteikta funkcija $s(t)$, kuŗa ar hipotezēm, kādas mēs iedomājāmies par funkciju x, y, z dabu, ir tāpat viennozīmīga, ierobežota, nepārtraukta un atvasināma. Vienādojumu

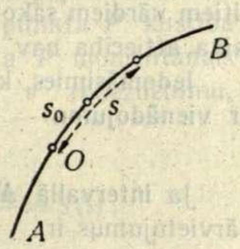
$$(3.) \qquad s = s\ (t)\ ,$$

kas definē punkta P poziciju uz tā trajektorijas atkarībā no laika, sauc par punkta P kustības *laika vienādojumu.* Līkni, ko reprezentē (3.) vienādojums ortogonālā koordinātu sistēmā ar laiku t kā abscīzu asi un s kā ordinātu asi, sauc par punkta P kustības *laika diagrammu.*

10. §. Ātrums.

58. **Vienmērīga līklīnijas kustība. Skālārais ātrums.** — Visvienkāršākais kustības veids ir *vienmērīga* kustība, ar ko saprot tādu kustību, kuŗā punkta pārvietojums ir proporcionāls laikam. Citiem vārdiem sakot, par vienmērīgu kustību sauc tādu, kuŗā pārvietojuma un attiecīgā laika attiecība ir konstanta.

Iedomāsimies, ka punkta P trajektorija ir līkne AB (30. zīm.). Izvēloties šo trajektoriju par līklīnijas abscīzu asi un kādu tās punktu O par abscīzu sākuma punktu, apzīmēsim punkta P līklīnijas abscīzu kustības sākuma momentā $t = 0$ ar s_0, bet momentā t ar s. Punkta pārvietojums laikā t tad ir $s—s_0$, un saskaņā ar vienmērīgas kustības definīciju



30. zīm.

$$\frac{s - s_0}{t} = const..$$

Ja šo konstanti apzīmē ar v, tad punkta P laika vienādojums iegūst formu

$$s = s_0 + vt, \tag{4.}$$

ko sauc par vienmērīgas kustības vienādojumu. Arī otrādi: katrs vienādojums ar pēdējo formu raksturo vienmērīgu kustību.

Tiešām, izvēloties kustības definīcijas laika intervallā divus momentus t un $t + \Delta t$, pēdējais vienādojums rāda, ka punkta P pārvietojums Δs laikā Δt ir dots ar formulu

$$\Delta s = s_0 + v(t + \Delta t) - s_0 - vt = v\Delta t,$$

no kurienes sakarība

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v, \tag{5.}$$

kas savkārt rāda, ka punkta P pārvietojuma Δs laika intervallā Δt, skaitot no kāda momenta t, un šī intervalla gaŗuma attiecība ir konstanta. Šo konstanto lielumu v sauc par *vienmērīgas kustības skālāro ātrumu.*

(5.) formula rāda, ka ātrums ir kinēmatisks lielums, kas definēts ar gaŗuma un laika attiecību. Ja $\Delta t = 1$, tad $v = \Delta s$ mērī punkta P pārvietojumu laika vienībā. Tādējādi, ja par gaŗuma vienību izvēlas metru un par laika vienību sekundi, ātruma vienība ir metrs sekundē.

Sakarība $\Delta s = v \Delta t$ rāda, iedomājoties, ka $\Delta t > 0$, t. i. apskatot intervallu Δt laika dabīgās secības kārtībā, ka Δs un v zīmes ir vienādas. Citiem vārdiem sakot, $v > 0$ vai < 0 atkarībā no tā, vai punkta kustība norit līklīnijas abscizu ass pozitīvā vai negātīvā vērsumā.

59. **Nevienmērīga līklīnijas kustība. Vidējais un patiesais ātrums.** — Kustību, kuŗā punkta pārvietojums nav proporcionāls laikam, vai, citiem vārdiem sakot, kustību, kuŗā punkta pārvietojuma un atbilstošā laika attiecība nav konstanta, sauc par *nevienmērīgu kustību.*

Iedomāsimies, ka punkta P pozicija uz tā trajektorijas ir definēta ar vienādojumu

$$s = s(t).$$

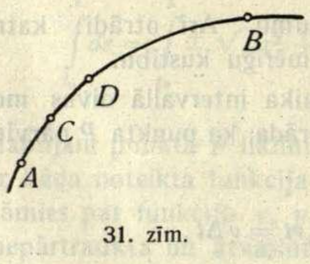
Ja intervallā Δt starp diviem momentiem t un $t + \Delta t$ punkta P pārvietojumus ir

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t),$$

tad attiecību

$$v' = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \tag{6.}$$

sauc par punkta P *vidējo ātrumu* laika intervallā $(t, t + \Delta t)$.



31. zīm.

Nevienmērīgas kustības vidējo ātrumu, kas dots ar (6.) formulu, var interpretēt ar fiktīva punkta P' ātrumu vienmērīgā kustībā, kuŗā tas noiet tanī pašā laika intervallā to pašu trajektorijas loku kā kustīgais punkts P nevienmērīgā kustībā. Vidējais ātrums v' dod jēdzienu par kustības maiņu laika intervallā $(t, t + \Delta t)$, bet tas nedod iespēju spriest par *patieso* ātrumu kādā šai laika intervallā noietās trajektorijas punktā.

Lai atrastu punkta P *patieso ātrumu* jebkuŗā momentā t, spriedīsim šādi: iedomāsimies, ka pa trajektorijas loku AB (31. zīm.), sākot no punkta A, vienlaicīgi kustas divi punkti P un P' — pirmais nevienmērīgā kustībā, bet otrs vienmērīgā. Ja loks AB ir punkta P nevienmērīgā kustībā noietās trajektorijas loks intervallā Δt, tad sadalām šo intervallu vairākos *vienādos* parciālos intervallos. Iedomāsimies, ka punkts P, izejot no punkta A, pirmajā parciālā intervallā noiet loku AC, otrā parciālā intervallā loku CD u. t. t., t. i. pirmā parciālā intervalla beigās punkts P atrodas punktā C, otra parciālā intervalla beigās punktā D u. t. t. Punkts P' turpretim pēc definīcijas pirmajā parciālā intervallā noiet loku AC ar punkta P vidējo ātrumu šai intervallā, otrā parciālā intervallā tas noiet loku CD ar punkta P vidējo ātrumu šai intervallā u. t. t. Tādējādi punkts P', izejot reizē ar punktu P no punkta A, nonāk reizē ar punktu P punktos C, D u. t. t., un pēc punkta P' kustības var spriest par punkta P kustību. Tādēļ, jo mazāki būs laika parciālie intervalli, jo labāk punkts P' aproksimēs punkta P kustību. Iedomājoties, ka parciālo intervallu garumi tiecas uz nulli, vai, citādi sakot, pārejot uz robežgadījumu, punkta P' kustība sakritīs ar punkta P kustību. Un tā tad punkta P momentānais ātrums v ir vienāds ar punkta P' vidējā ātruma v' robežlielumu, laika intervallam Δt tiecoties uz nulli, t. i.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dot{s}(t) .$$

Tādējādi nevienmērīgas kustības patiesais skālārais ātrums dotajā momentā ir vienāds ar kustīgā punkta pārvietojuma pirmo atvasinājumu pēc laika, pie kam atvasinājums aprēķināts šim momentam.

Ja šo definīciju attiecina uz vienmērīgu kustību, kas raksturota ar (4.) vienādojumu, tad dabū rezultātu, ka vienmērīgā kustībā ātrums v ir konstants. Un otrādi, ja dota ir kustība ar konstantu ātrumu v, tad vienādojumu

$$\frac{ds}{dt} = v$$

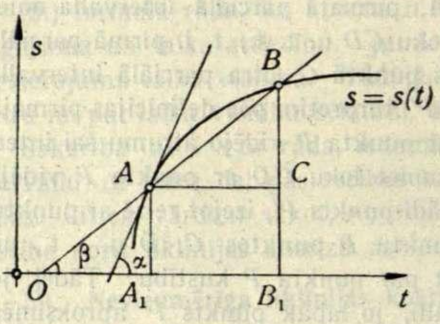
integrējot, dabūjam, ka

$$s = vt + const.,$$

t. i. dotā kustība ir vienmērīga. Secinājums tā tad ir šāds: *vienmērīga kustība raksturojama ar tās skālārā ātruma konstanci.*

60. **Vidējā un patiesā ātruma ģeometriska interpretācija.** — Kustības laika diagramma, kuŗa dod kustības likuma ģeometrisko interpretāciju, nav samaināma ar punkta kustības trajektoriju. Kustī-

bas diagramma var būt līkne, kamēr pati trajektorija ir taisne, un otrādi. Apskatīsim punkta vidējā un patiesā ātruma ģeometrisko interpretāciju ar kustības laika diagrammu (32. zīm.).



32. zīm.

Iedomāsimies, ka momentā t kustīgam punktam P atbilst tā kustības laika diagrammas punkts A, bet momentā $t + \Delta t$ punkts B, tad

$$OA_1 = t, \quad OB_1 = t + \Delta t.$$

Tālāk $A_1A = s(t)$, $B_1B = s(t + \Delta t)$, un punkta P vidējais ātrums v' laika intervallā Δt ir

$$v' = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{CB}{AC} = \operatorname{tg} \beta,$$

kur β apzīmē sekantes AB veidoto leņķi ar t-asi. Un tā tad punkta P *vidējais* ātrums intervallā Δt ir vienāds ar *sekantes,* kas savieno divus kustības laika diagrammas punktus, kuŗi atbilst laika intervalla sākuma un gala punktam, un *abscīzu ass* veidotā *leņķa tangentu.*

Laika intervallam $\Delta t \to 0$, punkts B tuvojas punktam A, un vidējais ātrums intervallā Δt tiecas uz patieso ātrumu momentā t kā savu robežu, bet līdz ar to robežgadījumā sekante AB kļūst par tangenti punktā A un leņķis β pāriet leņķī α, ko veido līknes punkta A tangente ar abscīzu asi. Tādējādi

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v' = \lim_{B \to A} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha,$$

t. i. punkta P patiesais ātrums dotajā momentā tiek izteikts ar šim momentam atbilstošā kustības laika diagrammas punkta tangentes un abscīzu ass veidotā leņķa tangentu.

Atkarībā no tā, vai funkcijas $s(t)$ atvasinājums $\dot{s}(t)$ parametra nozīmei t ir pozitīvs vai negātīvs, funkcija $s(t)$ pēc patikas mazā šo parametra nozīmi ietvērējā intervallā ir augoša vai dilstoša. Kinēmatiskā interpretācijā tas nozīmē, ka atkarībā no tā, vai patiesais ātrums $\dot{s}(t)$ momentā t ir pozitīvs vai negātīvs, punkta P kustība pēc patikas mazā laika intervallā ap momentu t ir direkta vai retrograda.

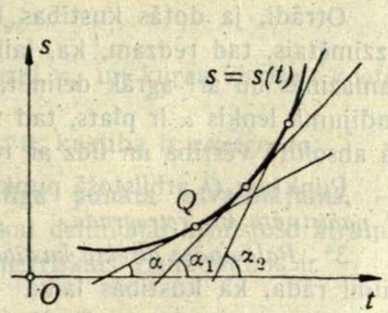
Ja funkcijas $s(t)$ atvasinājums $\dot{s}(t)$ parametra nozīmei t ir nulle, tad atbilstošā kustības laika diagrammas punktā tangente ir horizontāla un funkcijai $s(t)$ šai punktā ir maksimums vai minimums atkarībā no tā, vai tanī $\ddot{s}(t) < 0$ vai > 0. No kinēmatikas viedokļa punkta P ātruma anullēšanās momentā t nozīmē tā apstāšanos šai momentā un kustības vērsuma maiņu, kas savkārt ir atkarīga no $\ddot{s}(t)$ zīmes. Kustība ir *direkta* pirms un *retrograda* pēc momenta t, ja $\ddot{s}(t) < 0$, un tā ir *retrograda* pirms un *direkta* pēc momenta t, ja $\ddot{s}(t) > 0$.

Kustību, kuŗā ātrums ar laiku pakāpeniski pieaug, sauc par *paātrinātu*, bet kustību, kuŗā ātrums ar laiku pakāpeniski dilst, par *palēninātu* kustību.

Kustība tā tad ir paātrināta vai palēnināta atkarībā no tā, vai ātruma absolūtā vērtība pieaug vai dilst, jeb arī, kas ir tas pats, vai $\dot{s}^2(t)$ ir augoša vai dilstoša funkcija. Funkcijas $\dot{s}^2(t)$ atvasinājuma $2\dot{s}(t)\,\ddot{s}(t)$ zīme tā tad noteic kustības raksturu: kustība ir paātrināta vai palēnināta atkarībā no tā, vai $\dot{s}(t)$ un $\ddot{s}(t)$ (iedomājoties, ka abi šie atvasinājumi reizē nav nulles) ir ar vienādām vai dažādām zīmēm.

Apskatīsim šos divus gadījumus, no kuŗiem katrs sadalās vēl divos apakšgadījumos, atsevišķi. Vispirms jāsaka, ka, zinot kustības raksturu, nav grūti uzzīmēt attiecīgo laika diagrammu, un otrādi, ja dota kustības laika diagramma, tad viegli noteikt arī kustības raksturu.

1° *Paātrināta direkta kustība*: $\dot{s}(t) > 0$, $\ddot{s}(t) > 0$. — Otrs noteikums rāda, ka dotās kustības laika diagramma tās punkta Q, kas atbilst parametra nozīmei t, tuvākajā apkārtnē ir *konveksa* pret t-asi (33. zīm.). Pirmais noteikums turpretim izsaka tikai to, ka funkcija $s(t)$ kādā pēc patikas mazā t- intervallā, kas satur doto vērtību t, ir *augoša*, vai, citiem vārdiem sakot, laikam t pieaugot, kustības laika diagrammas attiecīgās ordinātas pieaug. Kustības laika diagrammas raksturs tās punkta Q apkārtnē tā tad ir tāds, kā 33. zīmējumā aizrādīts.



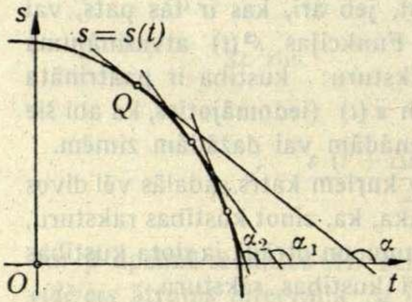
33. zīm.

Otrādi, ja dota kustības laika diagramma, kā 33. zīmējumā, tad, apzīmējot punkta Q tangentes un abscīzu ass veidoto leņķi ar α un ievērojot sakarību

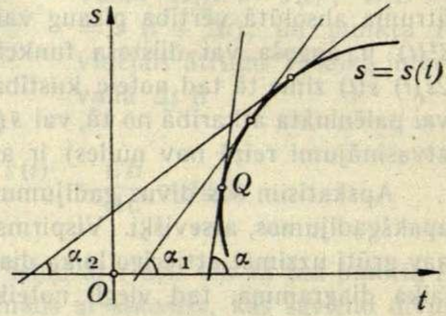
$$\dot{s}(t) = \operatorname{tg} \alpha,$$

redzam, ka šai gadījumā $\operatorname{tg}\alpha = \dot{s}(t) > 0$, un, laikam t pieaugot, pieaug arī $\dot{s}(t)$, jo leņķis α pieaug, iegūdams vērtības α_1, α_2, ... Kustības laika diagrammas punktam Q atbilstošā punkta P kustība pa tā trajektoriju tā tad ir *paātrināta* un *direkta*.

2° *Paātrināta retrograda kustība*: $\dot{s}(t) < 0$, $\ddot{s}(t) < 0$. — Šai gadījumā otrs noteikums rāda, ka dotās kustības laika diagramma tās punkta Q tuvākajā apkārtnē ir *konkava* pret t-asi. (34. zīm.). Pirmais noteikums savkārt rāda, ka funkcija $s(t)$ šī punkta apkārtnē ir dilstoša, citiem vārdiem sakot, laikam t pieaugot, kustības laika diagrammas attiecīgās ordinātas samazinās. Diagrammas raksturs tās punkta Q apkārtnē tā tad ir 34. zīmējumā aizrādītais.



34. zīm.



35. zīm.

Otrādi, ja dotās kustības laika diagrammas raksturs ir 34. zīm. uzzīmētais, tad redzam, ka, laikam t pieaugot, diagrammas ordinātas samazinās un arī agrāk definētais leņķis α samazinās. Bet tā kā šai gadījumā leņķis α ir plats, tad $\operatorname{tg}\alpha$ ir negātīvs, un, laikam t pieaugot, tā absolūtā vērtība un līdz ar to arī $\dot{s}(t)$ pieaug.

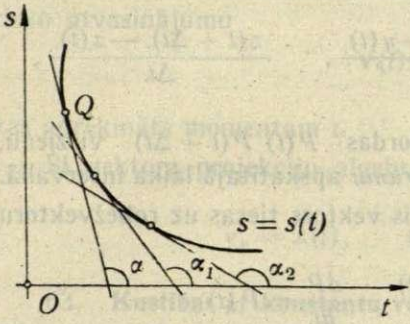
Punktam Q atbilstošā punkta P kustība pa tā trajektoriju tā tad ir *paātrināta* un *retrograda*.

3° *Palēnināta direkta kustība*: $\dot{s}(t) > 0$, $\ddot{s}(t) < 0$. — Šie divi noteikumi rāda, ka kustības laika diagramma tās punkta Q, kas atbilst parametra nozīmei t, tuvākajā apkārtnē ir *konkava* pret t-asi un ka tās ordinātas, parametram t pieaugot, arī pieaug. Dotās kustības laika diagrammas raksturs tā tad ir 35. zīmējumā uzrādītais.

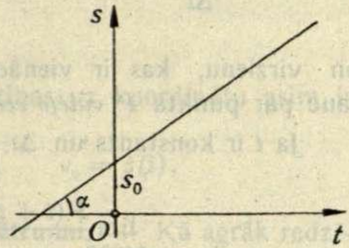
Otrādi, ja dota ir kāda kustība, kuŗas laika diagramma ir 35. zīmējumā uzrādītā, tad viegli noteikt šīs kustības raksturu.

Tā, laikam t pieaugot, diagrammas ordinātas pieaug un leņķis α samazinās, bet, tā kā $\dot{s}(t) > 0$ un $\operatorname{tg}\alpha = \dot{s}(t)$, tad ātruma absolūtā vērtība samazinās. Punkta P kustība tā tad ir *palēnināta* un *direkta*.

4° *Palēnināta retrograda kustība*: $\dot{s}(t) < 0$, $\ddot{s}(t) > 0$. — Šai pēdējā gadījumā dotās kustības laika diagramma tās punkta Q tuvākajā apkārtnē ir *konveksa* pret t-asi, un tās ordinātas, parametram t pieaugot, samazinās. Diagrammas raksturs tā tad ir šāds (36. zīm.):



36. zīm.



37. zīm.

Otrādi, ja dota ir šāda rakstura kustības laika diagramma, tad, laikam t pieaugot, tās ordinātas samazinās, bet leņķis α pieaug. Bet tā kā leņķis α ir plats, tad $\operatorname{tg}\alpha$ un līdz ar to arī $\dot{s}(t)$ ir negātīvs un, laikam t pieaugot, tā absolūtā vērtība dilst. Tāpēc punkta P kustība pa tā trajektoriju ir *palēnināta* un *retrograda*.

Vienmērīgas kustības gadījumā tās laika diagramma

$$s = s_0 + vt$$

ir taisne, kura nošķeļ uz s-ass nogriezni s_0 un kuŗas virziena koeficients ir $v = \operatorname{tg}\alpha$ (37. zīm.).

Ja $v > 0$, kustība ir *direkta*, ja $v < 0$, kustība ir *retrograda*.

61. **Vektoriālais ātrums kā kustīga punkta atvasinājums.** — Apskatīsim punkta P kustības analitiskai definīcijai atbilstošo ātruma definīciju. Ja punkta P kustības ģeometriskais vienādojums ir

$$P = P(t)$$

ar tam ekvivalentiem trim skālāriem vienādojumiem

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

kādā pozitīvi orientētā ortogōnālā koordinātu triedrā $Oxyz$, tad punkta P pārvietojums ΔP laika intervallā $(t, t + \Delta t)$ ir

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t).$$

Vektoru

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t},$$

ar sākumu punktā P, koordinātām

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \quad \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t},$$

un virzienu, kas ir vienāds ar chordas $P(t)\,P(t+\Delta t)$ virzienu, sauc par punkta P *vidējo vektoriālo ātrumu* apskatītajā laika intervallā.

Ja t ir konstants un $\Delta t \to 0$, tad šis vektors tiecas uz robežvektoru

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = \dot{P}(t),$$

kuŗa sākuma punkts ir P un koordinātas $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$. Uzskatot šo vektoru par laika t ar loka gaŗuma s starpniecību saliktu funkciju, varam rakstīt, ka

$$\text{(7.)} \qquad \dot{P}(t) = \frac{dP}{ds}\dot{s}(t) = \mathbf{t}\,\dot{s}(t),$$

kur $\mathbf{t}$ apzīmē vienības vektoru, kuŗa virziens un vērsums ir vienāds ar tangentes virzienu un vērsumu (skaitot to par pozitīvu loka gaŗuma s augšanas vērsumā) trajektorijas punktā P.

(7.) sakarība rāda, ka vektora $\dot{P}(t)$ gaŗums ir vienāds ar punkta P skālārā ātruma $\dot{s}(t)$ absolūto vērtību $|\dot{s}(t)|$, tā virziens ir vienāds ar tangentes virzienu punktā $P(t)$, bet tā vērsums ir vienāds ar vektora $\mathbf{t}$ vērsumu vai pretējo, atkarībā no tā, vai $\dot{s}(t)$ ir pozitīvs vai negātīvs.

Vektoru $\dot{P}(t)$, kas ir punkta $P(t)$ atvasinājums pēc laika un kas aprēķināts momentam t, sauc par punkta P *vektoriālo ātrumu momentā t.*

Šo vektoru apzīmē ar

$$\mathbf{v}(t) = \dot{P}(t),$$

un tā absolūtā vērtība ir $v = |\dot{s}(t)|$.

62. **Vektoriālais ātrums kā kustīga punkta pozicijas vektora atvasinājums.** — Ja kustīgais punkts $P(t)$ ir definēts ar tā pozicijas vektoru

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

attiecībā pret kāda pozitīvi orientēta ortogonāla koordinātu triedra sākuma punktu O, tad, ievērojot, ka mainīga vektora, kuŗa sākuma punkts ir fiksēts, atvasinājums ir vienāds ar tā gala punkta $P(t)$ atvasinājumu un atsaucoties uz iepriekšējā nodalījumā definēto punkta $P(t)$ vektoriālo ātrumu $\mathbf{v}(t)$ momentā t, redzam, ka punkta $P(t)$ vektoriālo ātrumu $\mathbf{v}(t)$ šai momentā var definēt arī ar tā pozicijas vektora $\mathbf{r}(t)$ ģeometrisko atvasinājumu

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t),$$

kas aprēķināts momentam t.

Šī vektora projekciju algebriskās vērtības uz koordinātu asīm ir

$$v_x = \dot{x}(t), \qquad v_y = \dot{y}(t), \qquad v_z = \dot{z}(t).$$

63. **Kustības ar konstantu vektoriālu ātrumu.** — Kā agrāk redzējām, vienmērīga kustība raksturojama ar tās skālārā ātruma konstanci. Apskatīsim tagad kustību, kas raksturojama ar konstantu vektoriālu ātrumu.

Ja ortogonālo koordinātu triedru izvēlas tā, lai tā x-ass virziens un pozitīvais vērsums ir vienāds ar konstantā vektoriālā ātruma $\mathbf{v}$ virzienu un vērsumu, tad vektora $\mathbf{v}$ koordinātas šai triedrā ir $v, 0, 0$, kur v apzīmē vektora $\mathbf{v}$ gaŗumu. Tālāk, atsaucoties uz teorēmu, ka punkta projekcijas uz kādas ass ātrums ir vienāds ar punkta ātruma projekcijas uz šīs ass algebrisko vērtību, dabūjam, ka

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{y} = 0, \qquad \dot{z} = 0.$$

Integrējot šos vienādojumus, dabūjam kustības vienādojumus

$$x = vt + const., \qquad y = const., \qquad z = const.,$$

kuŗos sastopamās trīs konstantes sauc par integrācijas konstantēm.

Pēdējie vienādojumi rāda, ka pavisam eksistē ∞^3 kustības, kas ir raksturotas ar konstanto vektoriālo ātrumu $\mathbf{v}$. Visas šīs kustības ir taisnlīnijas un vienmērīgas. Tādējādi, *katra kustība, kuŗas vektoriālais ātrums ir konstants, ir vienmērīga taisnlīnijas kustība.* Lai raksturotu vienu no šīm kustībām, ir jādod kustības sākuma noteikumi, t. i. punkta P koordinātas x_0, y_0, z_0 momentā t_0. To ievērojot, punkta P kustības vienādojumi var tikt uzrakstīti šādi:

$$x = v(t - t_0) + x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

64. **Ātrums polārkoordinātās plaknē.** — Punkta P kustība plaknē pret tanī izvēlēto ortogōnālo koordinātu sistēmu Oxy ir definēta, ja zināmas ir šī punkta koordinātas x, y kā laika t funkcijas:

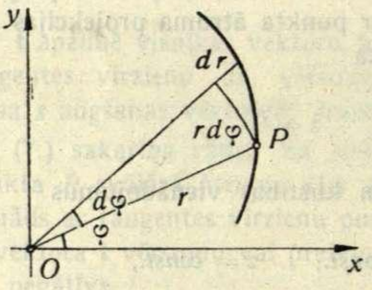
$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

Analogi punkta P kustība polārkoordinātu sistēmā ar punktu O kā polu un pozitīvo x-pusasi kā polāro asi, uzskatot pie tam punkta P anōmaliju φ par pozitīvu vērsumā, kas ir vienāds ar pozitīvās x-pusass rotāciju ap polu O par leņķi $\frac{\pi}{2}$ līdz tās sakrišanai ar pozitīvo y-pusasi, ir definēta, ja zināmas ir šī punkta polārās koordinātas $r = OP$ un $\varphi = \measuredangle xOP$ kā laika t funkcijas:

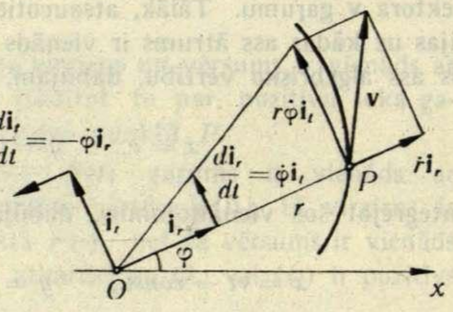
$$r = r(t), \qquad \varphi = \varphi(t).$$

Šos vienādojumus sauc par punkta P kustības vienādojumiem polārās koordinātās. Sakarība starp punkta P ortogōnālām Dekarta koordinātām x, y un tā polārkoordinātām r, φ ir dota ar formulām (38a. zīm.):

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$



38a. zīm.



38b. zīm.

Punkta P vektoriālā ātruma $\mathbf{v}$ sadalīšanai divos savstarpēji perpendikulāros komponentos, apzīmēsim punkta P radijvektora $\mathbf{r}$ vienības vektoru ar $\mathbf{i}_r$, tam perpendikulāro vienības vektoru, ko dabūjam, pagriežot $\mathbf{i}_r$ pozitīvā vērsumā par taisno leņķi, ar $\mathbf{i}_t$ un kustības plaknes pozitīvās normāles vienības vektoru ar $\mathbf{n}$.

Trīs vienības vektori $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_t$, $\mathbf{n}$ tad ir saistīti ar sakarību

(8.) $$\mathbf{i}_t = \mathbf{n} \times \mathbf{i}_r,$$

un punkta P radijvektors $\mathbf{r}$ var tikt uzrakstīts formā

(9.) $$\mathbf{r} = r\,\mathbf{i}_r.$$

Kā 38a. zīm. redzams, dr reprezentē kustīgā punkta P attāluma r no pola O pieaugumu laikā dt, bet $rd\varphi$ loka, kuŗu aprakstītu kustīgais punkts P laikā dt, tā attālumam r no pola O nemainoties, gaŗumu. Kustīgā punkta P ātrumu šais divos savstarpēji perpendikulāros virzienos algebriskās vērtības tā tad attiecīgi ir $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$ un $r\frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}$.

Ja punkta P vektoriālo ātrumu $\mathbf{v}$ sadala, kā 38b. zīmējumā redzams, divos komponentos, kuŗu virzieni ir vienādi ar šī punkta radijvektora un tam perpendikulārās taisnes virzienu, bet algebriskās vērtības ir attiecīgi $\dot{r}$ un $r\dot{\varphi}$, tad šie komponenti, izteikti ar attiecīgā virziena vienības vektoru $\mathbf{i}_r$ un $\mathbf{i}_t$, ir $\dot{r}\,\mathbf{i}_r$ un $r\dot{\varphi}\mathbf{i}_t$, un tā tad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{i}_r + r\dot{\varphi}\,\mathbf{i}_t.$$

Bet no otras puses, kā to rāda (9.) sakarība, to diferencējot,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\,\mathbf{i}_r + r\,\frac{d\mathbf{i}_r}{dt}.$$

Salīdzinot divas pēdējās vektora $\mathbf{v}$ izteiksmes, redzams, ka

(10.) $$\frac{d\mathbf{i}_r}{dt} = \dot{\varphi}\,\mathbf{i}_t.$$

Savkārt, (8.) sakarību diferencējot un izdarot attiecīgus pārveidojumus, dabūjam vienlīdzību

(11.) $$\frac{d\mathbf{i}_t}{dt} = -\dot{\varphi}\,\mathbf{i}_r.$$

Punkta P ātruma $\mathbf{v}$ komponentu algebriskās vērtības $v_r = \dot{r}$ un $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ sauc par tā *radiālo* un *transversālo* ātrumu.

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ sauc par punkta P *leņķisko ātrumu* kustībā ap punktu O.

65. **Ātrums sfēriskās koordinātās telpā.** — Punkta P pozicija telpā pret izvēlēto koordinātu triedru ir noteikta: 1° ar punkta P attālumu ρ no sistēmas sākuma punkta O, 2° ar leņķi φ, ko veido punkta

P meridionālā plakne ar plakni xOz, un 3° ar leņķi ϑ, ko veido ρ ar z-asi. Trīs lielumus ρ, φ, ϑ sauc par punkta P *sfēriskām koordinātām* (39. zīm.). Apzīmējot ar $r = OP_1$ punkta P radijvektora $\rho = OP$ projekciju uz xOy plaknes, dabūjam, ka

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,.$$

Bet tā kā

$$r = \rho\sin\vartheta\,,$$

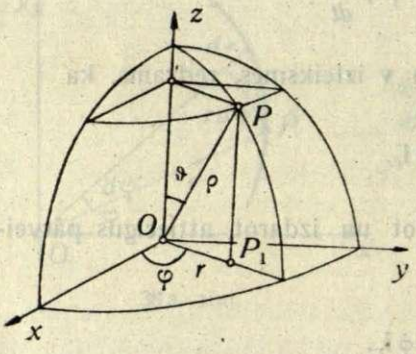
tad punkta P ortogōnālās Dekarta koordinātas x, y, z ar tā sfēriskām koordinātām ρ, φ, ϑ var izteikt šādi:

$$x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$z = \rho\cos\vartheta,$$

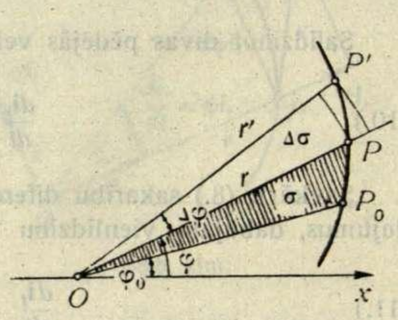
pie kam

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Lai atrastu punkta P ātruma koordinātas, ir jādiferencē tā koordinātu izteiksmes. Apskatīsim vēl ģeometrisku metodi punkta P ātruma $\mathbf{v}$ komponentu atrašanai pa trim savstarpēji perpendikulārām taisnēm. Tā, aprobežojoties ar punkta P kustību tā meridionālā



39. zīm.



40. zīm.

plaknē, šī punkta ar polārkoordinātām ρ, ϑ ātruma vektora projekciju uz šīs plaknes var sadalīt divos vektoros: vektorā $\mathbf{v}_\rho$, ar virzienu OP un algebrisko vērtību $v_\rho = \dot\rho$, un vektorā $\mathbf{v}_\vartheta$, kuŗa virziens ir perpendikulārs pirmajam un algebriskā vērtība $v_\vartheta = \rho\dot\vartheta$.

Ja pēc tam iedomājamies caur punktu P vilktu xOy plaknei parallēlu plakni, tad punkta P polārās koordinātas šai plaknē ir r, φ.

Punkta P ātruma projekciju uz šīs plaknes atkal var sadalīt divos savstarpēji perpendikulāros vektoros, no kuŗiem viens $\mathbf{v}_\varphi$, kuŗa algebriskā vērtība ir $v_\varphi = r\dot{\varphi} = \rho\dot{\varphi}\sin\vartheta$, ir perpendikulārs diviem iepriekšējiem vektoriem $\mathbf{v}_\rho$ un $\mathbf{v}_\vartheta$.

Tādējādi sfēriskās koordinātās punkta P vektoriālā ātruma $\mathbf{v}$ projekciju uz trim savstarpēji perpendikulārām taisnēm skālārās vērtības ir

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\vartheta = \rho\dot{\vartheta}, \quad v_\varphi = \rho\,\dot{\varphi}\sin\vartheta,$$

un tā tad pats skālārais ātrums v ir dots ar formulu

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\vartheta})^2 + (\rho\,\dot{\varphi}\sin\vartheta)^2.$$

66. **Sektoriālais ātrums pret punktu un pret asi.** — Iedomāsimies, ka plaknē kustīgais punkts P ir definēts ar tā polārām koordinātām r, φ (40. zīm.). Punktam P pārvietojoties no tā pozicijas P_0 momentā t_0 uz poziciju P momentā t, tā radijvektors $\mathbf{r} = \overline{OP}$ pāriet laukumu, ko apzīmēsim ar σ un uzskatīsim par pozitīvu, ja tas ir pāriets punkta P anōmalijas skaitīšanas pozitīvā vērsumā.

Ja laika intervallā Δt, skaitot no momenta t, punkta P radijvektors pāriet laukumu POP', ko apzīmēsim ar $\Delta\sigma$, tad radijvektora pārietā laukuma $\Delta\sigma$ maiņu laika vienībā, t. i. lielumu $\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}$, sauc par punkta P *vidējo sektoriālo ātrumu* pret centru O un

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma}$$

par punkta P *momentāno sektoriālo ātrumu* pret centru O.

Apzīmējot laika intervallā Δt radijvektora mazāko un lielāko gaŗumu ar r un $r' = r + \Delta r$, redzam, ka $\Delta\sigma$ apmierina nevienlīdzības

$$\tfrac{1}{2} r^2 \Delta\varphi < \Delta\sigma < \tfrac{1}{2} r'^2 \Delta\varphi$$

jeb

$$\tfrac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} < \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} < \tfrac{1}{2} r'^2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Robežgadījumā, kad $\Delta t \to 0$, arī $\Delta r \to 0$ un

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma} = \tfrac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \tfrac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}.$$

Ja punkta P Dekarta koordinātas apzīmējam ar x, y, tad, ievērojot ka

$$r^2\dot{\varphi} = x\dot{y} - y\dot{x},$$

punkta P sektoriālā ātruma izteiksme Dekarta koordinātu sistēmā ir

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Pēdējā sektoriālā ātruma $\dot{\sigma}$ izteiksme rāda, ka tas ir vienāds ar punkta P vektoriālā ātruma $\mathbf{v}$ — ar koordinātām $\dot{x}$, $\dot{y}$ — lineārā momenta pret centru O skālārās vērtības pusi. Ja par z-asi izvēlas punktā O plaknei xOy perpendikulāri vilktu taisni ar tādu orientāciju, lai triedrs $Oxyz$ būtu pozitīvi orientēts, un atliek uz šīs ass no punkta O nogriezni, kuŗa algebriskā vērtība ir vienāda ar sektoriālā ātruma algebrisko vērtību $\dot{\sigma}$, tad šis orientētais nogrieznis reprezentē vektoru $\mathbf{V}$, kas ir vienāds ar punkta P vektoriālā ātruma $\mathbf{v}$ momenta pret centru O pusi, t. i.

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\overline{OP} \times \mathbf{v}.$$

Vektoru $\mathbf{V}$, kuŗa moduls raksturo punkta P sektoriālā ātruma skālāro vērtību $\dot{\sigma}$ un vērsums noteic arī punkta P kustības momentāno vērsumu, sauc par punkta P *vektoriālsektoriālo ātrumu* pret centru O.

Šīs jaunās vektoriālsektoriālā ātruma definīcijas priekšrocība pret veco sektoriālā ātruma definīciju ir tā, ka punkta sektoriālais ātrums, definēts kā vektors, ir neatkarīgs no koordinātu triedra.

Šīs raksturīgās īpašības dēļ definēsim jekbuŗa telpas punkta P vektoriālsektoriālo ātrumu pret kādu centru O kā ar laiku t mainīgu vektoru

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\overline{OP} \times \mathbf{v}.$$

Šī vektora virziens jebkuŗā momentā t ir perpendikulārs plaknei, kas noteikta ar centru O un punkta P momentāno ātrumu $\mathbf{v}$. Tā vērsums ir tāds, lai momentā t punkta P kustība ap šo vektoru kā asi noritētu pozitīvā vērsumā. Beidzot tā moduls V ir vienāds ar punkta P radijvektora $\overline{OP}$ laika sprīdī dt pārietā kōniskā laukuma dL, kas ir salīdzināms ar bezgala mazu trijstūŗa OPP' laukumu, kur $\overline{PP'} = \mathbf{v}dt$, atvasinājumu pēc laika t.

Tiešām, tā kā

$$dL = \frac{1}{2}|\overline{OP} \times \overline{PP'}| = \frac{dt}{2}|\overline{OP} \times \mathbf{v}|,$$

tad

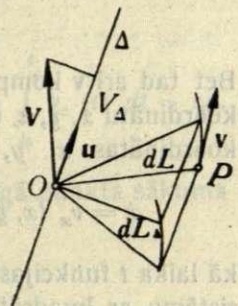
$$V = \frac{dL}{dt} = \tfrac{1}{2}\,|\overline{OP} \times \mathbf{v}|.$$

Ja punkta P kustība ir apskatīta kādā pozitīvi orientētā ortogōnālā koordinātu triedrā, kuŗa sākuma punkts ir punkts O, tad vektoriālsektoriālā ātruma $\mathbf{V}$ projekciju uz šī koordinātu triedra asīm algebriskās vērtības ir

$$(12.)\quad V_x = \tfrac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}),\quad V_y = \tfrac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}),\quad V_z = \tfrac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

kas savkārt ir punkta P ortogōnālo projekciju uz trim koordinātu triedra plaknēm skālārsektoriālie ātrumi.

Interpretēsim (12.) sistēmas formulas vēl citādi. Šai nolūkā iepazīsimies ar jēdzienu par punkta sektoriālo ātrumu pret asi. Par *punkta P sektoriālo ātrumu V_Δ momentā t pret asi* Δ (kas ir definēta ar vienības vektoru $\mathbf{u}$ ar koordinātām α, β, γ) sauc punkta P vektoriālsektoriālā ātruma $\mathbf{V}$ momentā t, kas definēts pret kādu šīs ass punktu O, projekcijas uz šīs ass Δ algebrisko vērtību (41. zīm.), t. i. lielumu



41. zīm.

$$V_\Delta = \mathbf{V}\,.\,\mathbf{u}.$$

Citiem vārdiem sakot, par punkta P sektoriālo ātrumu V_Δ momentā t pret asi Δ sauc punkta P radijvektora laika intervallā dt pārietā laukuma dL projekcijas dL_Δ uz kādas asij Δ perpendikulāras plaknes un laika dt attiecības algebrisko vērtību $\frac{dL_\Delta}{dt}$, uzskatot laukumu par pozitīvu, ja novērotājs, kuŗš stāv ar kājām punktā O un kuŗa galva ir vērsta ass Δ pozitīvā vērsumā, redz intervallā dt punktu P pārvietojamies pozitīvā vērsumā.

Tādējādi

$$V_\Delta = \frac{dL_\Delta}{dt} = \mathbf{V}\,.\,\mathbf{u}.$$

Ja punkts O ir koordinātu triedra sākuma punkts, tad (12.) sistēmas lielumi ir punkta P sektoriālie ātrumi pret attiecīgajām koordinātu asīm, t. i.

$$\frac{dL_{ox}}{dt} = V_x = \tfrac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}),$$

$$\frac{dL_{oy}}{dt} = V_y = \tfrac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}),$$

$$\frac{dL_{oz}}{dt} = V_z = \tfrac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

67. **Kustības noteikšana ar doto ātrumu.** — Tā kā punkta kustība ir zināma, ja dotas ir tā koordinātas kā laika t funkcijas, tad viens no kinēmatikā sastopamiem uzdevumiem ir kustības noteikšana pēc dotā ātruma. Vispārīgi kustīgā punkta ātrums $\mathbf{v}$ var tikt dots kā šī punkta pozicijas P un laika t funkcija:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(P \mid t).$$

Bet tad arī $\mathbf{v}$ komponentu algebriskās vērtības v_x, v_y, v_z ir punkta P koordinātu x, y, z un laika t funkcijas. Uzdevums ir atrast šī punkta koordinātas x, y, z, kas apmierina diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\dot{x} = v_x(x, y, z \mid t), \quad \dot{y} = v_y(x, y, z \mid t), \quad \dot{z} = v_z(x, y, z \mid t),$$

kā laika t funkcijas. Vispārīgi šo pirmās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmu ar kvadrātūrām atrisināt nevar, bet ar noteiktiem ierobežojumiem par funkciju v_x, v_y, v_z dabu var pierādīt[1]), ka šai sistēmai eksistē bezgala daudz atrisinājumu, kas ikviens ir atkarīgs no trim integrācijas konstantēm.

Tādējādi eksistē ∞^3 dažādas kustības ar doto ātrumu $\mathbf{v}$. Lai raksturotu vienu no tām, ir jādod kustīgā punkta pozicija kādā momentā t.

Apskatīsim vienkāršāko gadījumu, kad kustīgā punkta ātrums $\mathbf{v}$ ir atkarīgs vienīgi no laika t, t. i.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t).$$

Integrējamo diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\dot{x} = v_x(t), \quad \dot{y} = v_y(t), \quad \dot{z} = v_z(t)$$

tad var atrisināt ar kvadrātūrām, dabūjot koordinātām x, y, z izteiksmes

---

[1]) A. Lūsis, *Diferenciālvienādojumi un variāciju rēķini,* II d., Rīgā, 1938. g., 12. u. turpm. lpp.

$$x = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt + A, \quad y = \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,dt + B, \quad z = \int_{t_0}^{t} v_z(t)\,dt + C,$$

kuŗās A, B, C apzīmē integrācijas konstantes. Lai atrastu šo konstanšu mēchanisko nozīmi, ievietosim pēdējās koordinātu izteiksmēs, kuŗas ir derīgas visām t nozīmēm noteiktā intervallā, t vietā nozīmi t_0 un apzīmēsim šim momentam atbilstošās koordinātas ar x_0, y_0, z_0. Tad dabūsim, ka

$$x_0 = A, \quad y_0 = B, \quad z_0 = C,$$

t. i. momentā t_0 kustīgā punkta pozicija ir $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Trīs integrācijas konstantes tā tad raksturo kustīgā punkta poziciju P_0 kustības sākumā, kas atbilst momentam $t = t_0$.

Tādējādi

$$x = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt + x_0, \quad y = \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,dt + y_0, \quad z = \int_{t_0}^{t} v_z(t)\,dt + z_0.$$

Kustība tā tad ir noteikta, ja dots ir ātrums un kustīgā punkta sākuma pozicija.

11. §. Paātrinājums.

68. **Vienmērīgi mainīga līklīnijas kustība. Skālārais paātrinājums.** — Dabiskais ceļš paātrinājuma jēdziena iegūšanai ir mainīgas kustības ātruma maiņas izkalkulēšana no momenta uz momentu. Kustību sauc par *vienmērīgi mainīgu,* ja visā kustības norises laikā attiecība starp ātruma variāciju jebkuŗā izvēlētajā laika intervallā un atbilstošā intervalla gaŗumu ir konstanta.

Tā, apzīmējot kustības sākumā $t = 0$ kustīgā punkta ātrumu ar v_0, bet momentā t ar v, pēc definīcijas dubūjam, ka

$$\frac{v - v_0}{t} = a,$$

kur a apzīmē kādu konstanti. Pēdējā sakarība rāda, ka vienmērīgi mainīgā kustībā tās skālārais ātrums $v = \dot{s}(t)$ ir laika t lineāra funkcija:

$$\dot{s} = at + b, \tag{13.}$$

kur b apzīmē kustīgā punkta ātrumu v_0 momentā $t = 0$, bet $a \neq 0$. Ja a ir nulle, tad $\dot{s} = b = const.$, un kustība ir vienmērīga. Šo konstanto lielumu a, kas rāda ātruma variāciju laika vienībā, sauc par vienmērīgi mainīgas kustības *paātrinājumu.*

(13.) formula rāda, kā par to viegli pārliecināties, ka

$$a = \frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s}(t),$$

citiem vārdiem sakot, vienmērīgi mainīgas kustības paātrinājums a ir kustīgā punkta līklīnijas abscīzas s otrās kārtas atvasinājums pēc laika.

Kā agrāk redzējām, kustība ir paātrināta vai palēnināta atkarībā no tā, vai

$$\dot{s}\,\ddot{s} > 0 \text{ vai } < 0\,;$$

mūsu gadījumā tā tad kustība ir paātrināta vai palēnināta atkarībā no tā, vai

$$a(at + b) > 0 \text{ vai } < 0.$$

Uzrakstot pēdējās nevienlīdzības formā

$$a^2\left(t + \frac{b}{a}\right) \gtrless 0\,,$$

redzam: ja $t < -\frac{b}{a}$, kustība ir palēnināta; momentā $t = -\frac{b}{a}$ kustīgais punkts apstājas, bet ja $t > -\frac{b}{a}$, kustība ir paātrināta. Vienmērīgi mainīgā kustībā tā tad jāizšķiŗ divas fazes, kas ir šķirtas ar kustības miera punktu: pirmajā fazē kustība ir *palēnināta,* bet otrā — *paātrināta.*

Tāpat agrāk pārliecinājāmies, ka kustība ir direkta vai retrograda atkarībā no tā, vai $\dot{s} > 0$ vai < 0. Mūsu gadījumā

$$\dot{s} = a\left(t + \frac{b}{a}\right).$$

Ja $a > 0$, $\dot{s}$ ir pozitīvs vai negātīvs atkarībā no tā, vai $t + \frac{b}{a} > 0$ vai < 0, t. i. kustība ir direkta paātrinātā fazē, bet retrograda palēninātā fazē. Ja $a < 0$, tad kustības norises ir pretējas, t. i. kustība ir retrograda paātrinātā fazē, bet direkta palēninātā fazē.

Integrējot (13.) diferenciālvienādojumu, dabūjam vienmērīgi mainīgai kustībai vienādojumu

(14.) $$s = \tfrac{1}{2}at^2 + bt + c,$$

kur c ir kustīgā punkta abscīza momentā $t = 0$.

Kustības un kustības ātruma (14.) un (13.) vienādojumu iespējams vienkāršot, lietderīgi transformējot laiku t un abscīzu s ar formulām

$$t_1 = t + \frac{b}{a}, \qquad s_1 = s - \frac{2ac - b^2}{2a},$$

t. i. skaitot laiku t_1 no kustīgā punkta miera momenta $\left(t = -\frac{b}{a}\right)$ un tāpat arī s_1 no šī punkta pozicijas šai momentā. Minēto vienādojumu vietā pēc šādām transformācijām stājas vienādojumi:

(14′.) $$s_1 = \tfrac{1}{2}at_1^2,$$

(13′.) $$\dot{s}_1 = \dot{s} = at_1.$$

(14′.) vienādojums rāda, ka, t_1 tiecoties uz $\pm\infty$, kustīgais punkts attālinās pa tā trajektoriju līdz bezgalībai pozitīvā vai negātīvā vērsumā atkarībā no tā, vai $a > 0$ vai < 0. Tālāk, ja $-t'_1$ un t'_1 apzīmē divus momentus — pirmo pirms miera momenta $t_1 = 0$, otru pēc tā, tad (14′.) un (13.′) vienādojums rāda, ka šinīs divos momentos kustīgam punktam ir tā pati pozicija un ātruma absolūtā vērtība, bet ātrumu vērsumi ir pretēji.

Rezumējot tā tad varam teikt, ka vienmērīgi mainīgā kustībā, laikam t pieaugot no $-\infty$ līdz $+\infty$, kustīgais punkts palēnināti tuvojas miera punktam ar abscīzu

$$\frac{2ac - b^2}{2a}$$

no abscīzu ass pozitīvās vai negātīvās puses, atkarībā no tā, vai $a > 0$ vai < 0. Sasniedzot miera punktu $\left(t = -\frac{b}{a}\right)$, kustīgā punkta vērsums mainās uz pretējo, un punkts attālinās no tā paātrinātā kustībā uz to pašu pusi, no kurienes tas nācis, pie kam ikvienā trajektorijas punktā, krustojot to pretējos vērsumos, kustīgā punkta ātruma absolūtā vērtība ir tā pati.

Vienmērīgi mainīgas kustības laika diagramma ir parabola, kuŗas vienādojums ir (14.). Tās ass ir parallēla s-asij, un tā ir konkava pret pozitīvo vai negātīvo s-ass galu, skatoties pēc tā, vai $a > 0$ vai < 0.

69. **Nevienmērīgi mainīga līklīnijas kustība. Vidējais un patiesais paātrinājums.** — Apskatīsim kaut kādu mainīgu kustību un apzīmēsim šīs kustības ātrumu momentos t un t' attiecīgi ar v un v'. Ātruma variāciju laika vienībā, t. i. attiecību

$$\frac{v' - v}{t' - t} = a',$$

sauc par mainīgās kustības *vidējo paātrinājumu* laika intervallā t'—t. Ja kustība būtu vienmērīgi mainīga, tad a' būtu konstants lielums ar vienu un to pašu vērtību jebkuŗam intervallam.

Mainīgas kustības vidējo paātrinājumu dotajā laika intervallā var uzskatīt par tādas vienmērīgi mainīgas kustības paātrinājumu, kuŗā ātrums šai laika intervallā pieaug par to pašu lielumu kā apskatītajā kustībā.

Kustības *vidējais paātrinājums* dod jēdzienu par ātruma maiņu noteiktā laika intervallā. Lai dabūtu jēdzienu par *patieso* paātrinājumu dotajā momentā, tad spriedīsim tāpat kā agrāk, balstoties uz jēdziena par patieso ātrumu šai momentā. Analogi, kā minētajā gadījumā, atradīsim, ka kustības patiesais paātrinājums dotajā momentā ir vienāds ar vidējā paātrinājuma robežlielumu, laika intervallam tiecoties uz nulli, t. i.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a' = \lim_{t' \to t} \frac{v' - v}{t' - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Bet tā kā

$$v = \dot{s}(t),$$

ja dots ir kustības likums $s = s(t)$, tad

$$a = \frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s}(t),$$

t. i. mainīgas kustības patiesais paātrinājums dotajā momentā t ir vienāds ar kustīgā punkta pārvietojuma otru atvasinājumu pēc laika, aprēķinot atvasinājumu šim momentam.

70. **Vektoriālais paātrinājums.** — Ja punkta P kustība ir definēta ar ģeometrisko vienādojumu

$$P = P(t)$$

vai ar tam ekvivalentiem trim skālāriem vienādojumiem

$$x = x(t)\ , \quad y = y(t)\ , \quad z = z(t)$$

un ja $\mathbf{v}(t)$ apzīmē punkta P vektoriālo ātrumu momentā t, tad vektoru

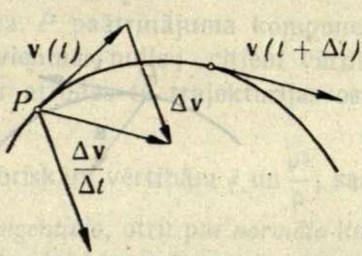
$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}\ ,$$

kas raksturo vektoriālā ātruma variāciju intervallā Δt starp diviem momentiem t un $t + \Delta t$, ar tā koordinātām

$$\frac{\dot{x}(t + \Delta t) - \dot{x}(t)}{\Delta t}\ ,$$

$$\frac{\dot{y}(t + \Delta t) - \dot{y}(t)}{\Delta t}\ ,$$

$$\frac{\dot{z}(t + \Delta t) - \dot{z}(t)}{\Delta t}$$



42. zīm.

un sākuma punktu P (42. zīm.), sauc par punkta P *vidējo vektoriālo paātrinājumu* intervallā $(t, t + \Delta t)$.

Par punkta P *vektoriālo paātrinājumu momentā* t sauc vektora $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ robežvektoru

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}}(t)\ ;$$

bet tā kā

$$\mathbf{v} = \frac{dP}{dt} = \dot{P}\ ,$$

tad

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2} = \ddot{P}\ .$$

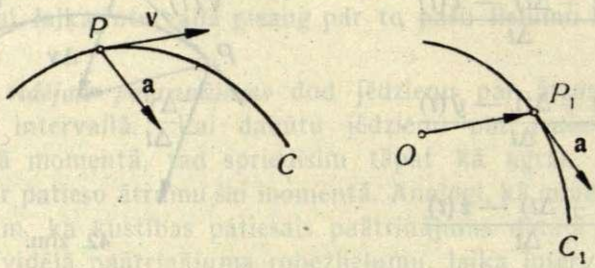
Pēdējā sakarība rāda, ka vektora $\mathbf{a}$ koordinātu a_x, a_y, a_z izteiksmes ir šādas:

$$a_x = \ddot{x}(t), \quad a_y = \ddot{y}(t), \quad a_z = \ddot{z}(t),$$

vai, vārdiem sakot, punkta P vektoriālā paātrinājuma projekcijas uz kādas ass (vai plaknes) algebriskā vērtība (koordināta) ir vienāda ar punkta projekcijas uz šīs ass (vai plaknes) paātrinājumu.

Paātrinājums ir kinēmatisks lielums, definēts ar ātruma un laika attiecību. Tādēļ, ja par gaŗuma vienību izvēlas metru un par laika vienību sekundi, paātrinājuma vienība ir 1 m/sek^2, t. i. paātrinājuma vienība ir tādas vienmērīgi paātrinātas kustības, kuŗā katrā sekundē ātrums pieaug par vienu metru sekundē, paātrinājums.

71. **Kustības hodografs un vektoriālā paātrinājuma ģeometriska interpretācija.** — Apzīmēsim punkta P vektoriālo ātrumu kādā tā trajektorijas punktā ar **v** (43. zīm.) un vilksim caur kādu fiksētu punktu



43. zīm.

O vektoru $\overline{OP_1}$, vienādu ar vektoru **v**. Punktam P aprakstot trajektoriju C, punkts P_1 arī pārvietosies un aprakstīs kādu līkni C_1, ko sauc par punkta P *kustības hodografu*[1]) pret polu O. Ja punkta P kustība ir dota, tad zināma ir arī P_1 kustība. Bet punkta P_1 ātrums ir tangentiāls hodografam šai punktā un vienāds ar mainīgā vektora $\overline{OP_1}$, kuŗa sākums ir punktā O, atvasinājumu. Bet šis vektors bija vienāds ar vektoru **v**, tādējādi punkta P_1 ātrums ir vektors **a**. Ģeometriski tā tad punkta P vektoriālo paātrinājumu **a** var interpretēt ar šī punkta kustības hodografa atbilstošā punkta P_1 ātrumu.

72. **Paātrinājuma komponenti Frenè triedrā.** — Punkta P paātrinājums **a** pēc definīcijas ir vektors ar sākumu punktā P, un tas mainās no momenta uz momentu. Apskatīsim tā komponentus Frenè

[1]) Hodografa jēdzienu pirmie lietojuši Enke (J. F. Encke, 1791.—1865. g.) un Möbiuss, pēdējais savā darbā *Die Elemente der Mechanik des Himmels,* 1843, Ges. Werke Bd. 4, bet tā vispārējo teōriju ir devis Hemiltons vispirms darbā, kas publicēts *Transactions of the R. Irish Academy,* vol. 3, Dublin, 1846, un vēlāk grāmatā *Elements of Quaternions,* London, 1866.

triedrā. Šai nolūkā atvasināsim pēc laika t kustīgā punkta P vektoriālo ātrumu $\mathbf{v}$, ko ar vienības vektoru $\mathbf{t}$ var uzrakstīt šādi:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{s}(t)\,\mathbf{t}.$$

Diferencējot $\mathbf{v}$ izteiksmi un ievērojot sakarību

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n},$$

dabūjam, ka

$$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\mathbf{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{n} = \ddot{s}\,\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}.$$

Šī pēdējā formula rāda, ka punkta P paātrinājuma komponents tā trajektorijas binormāles virzienā ir vienmēr nulle; citiem vārdiem sakot, punkta P paātrinājums vienmēr atrodas tā trajektorijas oskulētājā plaknē.

Divus vektorus $\ddot{s}\,\mathbf{t}$, $\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}$, ar to algebriskām vērtībām $\ddot{s}$ un $\frac{v^2}{\rho}$, sauc: pirmo par vektoriālā paātrinājuma $\mathbf{a}$ *tangentiālo*, otru par *normālo* komponentu. Pirmā komponenta virziens ir vienāds ar tangentes virzienu apskatītajā punktā un tā vērsums ir vienāds ar s augšanas vai dilšanas vērsumu atkarībā no tā, vai $\ddot{s} > 0$ vai < 0. Otrs komponents ir vienmēr virzīts uz trajektorijas liekuma centru.

Tangentiālais komponents ir vienmēr nulle, ja identiski $\ddot{s} = 0$, t. i. ja $\dot{s} = const.$; bet $\dot{s} = const.$ raksturo vienmērīgu kustību. Tādējādi *vienmērīga kustība ir raksturota ar tās paātrinājuma tangentiālā komponenta identisku anullēšanos.*

Vienmērīgi mainīga kustība, kā redzējām, ir raksturojama ar īpašību, ka tās paātrinājuma tangentiālais komponents ir konstants.

Lai paātrinājuma normālais komponents būtu identiski vienāds ar nulli visos trajektorijas punktos, tad, ievērojot, ka v nevar būt nulle visos punktos, $\frac{1}{\rho}$ resp. liekumam jābūt identiski vienādam ar nulli pa visu trajektoriju. Bet tā kā šī īpašība piemīt taisnei, tad no tā izriet, ka *paātrinājuma normālā komponenta identiska anullēšanās raksturo taisnlīnijas kustību.*

Tā tad *vienmērīga taisnlīnijas kustība raksturojama ar paātrinājuma abu komponentu identisku anullēšanos.*

73. **Paātrinājuma komponenti polārās koordinātās plaknē.** — Punkta P paātrinājums $\mathbf{a}$ pēc definīcijas ir tā vektoriālā ātruma $\mathbf{v}$

atvasinājums, bet vektora **v** izteiksme polārkoordinātās r, φ ir šāda (64. nodal.):

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{i}_r + r\,\dot{\varphi}\,\mathbf{i}_t.$$

Tādējādi, ievērojot (10.) un (11.) sakarību, dabūjam, ka

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\mathbf{i}_r + (2\,\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\mathbf{i}_t.$$

Šī vektoriālā paātrinājuma **a** izteiksme rāda, ka tas sadalās divos komponentos $\mathbf{a}_r$ un $\mathbf{a}_t$ ar attiecīgajām algebriskajām vērtībām

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \quad \text{un} \quad a_t = 2\,\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}.$$

Šo komponentu virzieni ir attiecīgi vienādi ar punkta P radijvektora **r** un tam perpendikulārās ass virzienu, kas iegūta, rotējot vektoru **r** ap polu O pozitīvā rotācijas vērsumā par leņķi $\frac{\pi}{2}$.

74. **Sektoriālais paātrinājums.** — Par telpas punkta P *vektoriālsektoriālo* paātrinājumu **A** pret centru O sauc šī punkta vektoriālsektoriālā ātruma **V** atvasinājumu pēc laika t. Pēc definīcijas

$$\mathbf{V} = \tfrac{1}{2}\overline{OP} \times \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v},$$

un tā tad

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right).$$

Bet tā kā $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ un **v** ir divi paralleli vektori, tad $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} = 0$, un tādējādi

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{a},$$

t. i. punkta P vektoriālsektoriālais paātrinājums pret centru O ir vienāds ar šī punkta paātrinājuma **a** vektoriālā momenta pret O pusi.

Uzrakstot vektoriālsektoriālo paātrinājumu kā katru vektorproduktu formā

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix},$$

redzam, ka vektoriālsektoriālā paātrinājuma koordinātas ir

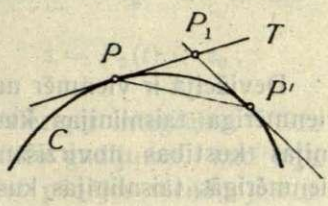
$$\tfrac{1}{2}(y\ddot{z} - z\ddot{y}), \quad \tfrac{1}{2}(z\ddot{x} - x\ddot{z}), \quad \tfrac{1}{2}(x\ddot{y} - y\ddot{x}),$$

kas savkārt ir punkta P projekciju uz attiecīgajām koordinātu plaknēm *skālārsektoriālie* paātrinājumi.

Polārkoordinātās plaknē skālārsektoriālā paātrinājuma $\ddot{\sigma}$ izteiksme ir šāda:

$$\ddot{\sigma} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}).$$

75. **Kustības deviācija.** — Iedomāsimies, ka momentā t kustīgā punkta pozīcija uz tā trajektorijas C ir punkts P un tā ātrums ir $\mathbf{v}$. Momentā $t + dt$ tas atrodas punktā P' (44. zīm.). Ja punkta kustība, sākot ar momentu t, būtu vienmērīga taisnlīnijas kustība, tad momentā $t + dt$ kustīgais punkts atrastos punktā P_1, kur



44. zīm.

$$\overline{PP_1} = \mathbf{v}\,dt.$$

Šo vienmērīgo taisnlīnijas kustību sauc par dotajai kustībai tangentiālo kustību momentā t. Apskatīsim vektoru $\overline{P_1P'}$, ko sauc par kustīgā punkta *deviācijas vektoru*:

$$\overline{P_1P'} = \overline{PP'} - \overline{PP_1}.$$

Apzīmēsim vektora $\overline{PP'}$ koordinātas ar Δx, Δy, Δz. Tā kā $\overline{PP_1}$ koordinātas ir $\dot{x}dt$, $\dot{y}dt$, $\dot{z}dt$, tad $\overline{P_1P'}$ koordinātas ir

$$\Delta x - \dot{x}dt, \qquad \Delta y - \dot{y}dt, \qquad \Delta z - \dot{z}dt,$$

un pēc Teilora formulas

$$\Delta x = x(t + dt) - x(t) = \dot{x}dt + \frac{1}{2}\ddot{x}(dt)^2 + \ldots$$

Tādējādi

$$\Delta x - \dot{x}dt = \ddot{x}\frac{(dt)^2}{2} + \ldots$$

un analogi

$$\Delta y - \dot{y}dt = \ddot{y}\frac{(dt)^2}{2} + \ldots,$$

$$\Delta z - \dot{z}dt = \ddot{z}\frac{(dt)^2}{2} + \ldots.$$

Ignōrējot augstākas pakāpes par $(dt)^2$, dabūjam, ka deviācijas vektora $\overline{P_1P'}$ koordinātas ir

$$\ddot{x}\,\frac{(dt)^2}{2}, \quad \ddot{y}\,\frac{(dt)^2}{2}, \quad \ddot{z}\,\frac{(dt)^2}{2}.$$

Apzīmējot ar **a** punkta P vektoriālo paātrinājumu, redzam, ka

$$\mathbf{a} = \lim_{dt\to 0} \frac{\overline{P_1P'}}{\frac{(dt)^2}{2}}.$$

Deviācija ir vienmēr nulle, ja vienmēr $\mathbf{a}=0$, t. i. ja kustība ir vienmērīga taisnlīnijas kustība. Tādējādi punkta deviācija mērī līklīnijas kustības novirzīšanos dotajā momentā t no tai tangentiālās vienmērīgās taisnlīnijas kustības.

76. **Kustības noteikšana ar doto paātrinājumu.** — Svarīga problēma dinamikā, kā redzēsim, ir kustības noteikšana pēc dotā paātrinājuma **a**, kas vispārīgi var būt kustīgā punkta pozicijas P, tā ātruma $\dot{P}$ un laika t funkcija, t. i.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}\,(P, \dot{P} \mid t).$$

Izvēlētajā ortogōnālā koordinātu triedrā vektora **a** koordinātas a_x, a_y, a_z ir septiņu argumentu $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$ funkcijas, un uzdevums reducējas otrās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmas

$$\left|\begin{array}{l} \ddot{x} = a_x\,(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t), \\ \ddot{y} = a_y\,(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t), \\ \ddot{z} = a_z\,(x, y, z;\ \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \mid t) \end{array}\right.$$

atrisinājuma meklēšanā. Šai sistēmai ir bezgala daudz atrisinājumu, no kuŗiem ikviens ir atkarīgs no sešām integrācijas konstantēm. Tādējādi eksistē ∞^6 dažādas kustības ar doto paātrinājumu **a.** Lai raksturotu vienu no šīm kustībām, ir jādod kādā momentā t_0 kustīgā punkta pozicija P_0 ar koordinātām x_0, y_0, z_0 un ātrums $\mathbf{v}_0$ ar koordinātām $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$.

Teiktā noskaidrošanai apskatīsim vienkāršāko gadījumu, kad **a** ir tikai laika t funkcija; tādā gadījumā agrākā otrās kārtas diferenciālvienādojumu sistēma reducējas par sistēmu

$$\ddot{x} = a_x\,(t), \qquad \ddot{y} = a_y\,(t), \qquad \ddot{z} = a_z\,(t).$$

Tās vienreizēja integrācija dod

$$\dot{x} = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt + A', \quad \dot{y} = \int_{t_0}^{t} a_y(t)\,dt + B', \quad \dot{z} = \int_{t_0}^{t} a_z(t)\,dt + C',$$

kur A', B', C' apzīmē trīs integrācijas konstantes. Šo konstanšu mēchaniskā nozīme ir tā, ka tās fiksē kustīgā punkta ātruma $\mathbf{v}_0$ koordinātas $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ kustības sākuma momentā $t = t_0$. Un tā tad

$$\dot{x} = F_1(t) + \dot{x}_0, \quad \dot{y} = F_2(t) + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = F_3(t) + \dot{z}_0,$$

kur funkcijas $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ apzīmē attiecīgos integrālus. Līdz ar to uzdevums ir reducēts uz agrāk apskatīto gadījumu, kad bija jānoteic kustība pēc dotā ātruma. Integrējot pēdējos vienādojumus vēlreiz, dabūjam kustīgā punkta P koordinātām šādas izteiksmes:

$$x = \int_{t_0}^{t} F_1(t)\,dt + \dot{x}_0(t - t_0) + x_0,$$

$$y = \int_{t_0}^{t} F_2(t)\,dt + \dot{y}_0(t - t_0) + y_0,$$

$$z = \int_{t_0}^{t} F_3(t)\,dt + \dot{z}_0(t - t_0) + z_0.$$

Kustība tā tad ir noteikta, ja bez paātrinājuma **a** vēl ir dota kustīgā punkta P *pozicija* P_0 un *ātrums* $\mathbf{v}_0$ kustības sākuma momentā $t = t_0$.

12. §. Kustības ar konstantu paātrinājumu.

77. **Smaga ķermeņa kustība.** — Iepriekšējos divos §§ iegūto rezultātu illustrēšanai apskatīsim kustības ar konstantu paātrinājumu, kuŗu tipisks piemērs ir smaga ķermeņa kustība ar dotu sākuma ātrumu. Vēsturiski šis ir pirmais piemērs, kuŗu pētījot, Galilejs[1]) pirmais definēja

---

[1]) G. Galilei (1564. — 1642. g.), *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali,* 1638., in Leida (Edizione Nazionale delle Opere di Galileo, vol. VIII).

paātrinājuma jēdzienu kā ātruma variāciju laika vienībā vienmērīgi mainīgā kustībā, kāda, kā to vēlāk redzēsim, ir brīva smaga ķermeņa kustība.

Smaga ķermeņa kustības likumus, pamatojoties uz eksperimentāliem novērojumiem, ir formulējis Galilejs, un mūsdienu terminoloģijā tos var izteikt šādi:

1. *Brīvs smags ķermenis bez sākuma ātruma krīt vertikāli ar konstantu paātrinājumu, kas ir vērsts vertikāli uz leju un kas visiem ķermeņiem ir viens un tas pats.*

2. *Smags ķermenis, sviests ar kaut kādu sākuma ātrumu kaut kādā virzienā, kustas ar to pašu konstanto paātrinājumu, kas ir vērsts vertikāli uz leju, kā brīvā kritienā no sava miera stāvokļa (ar sākuma ātrumu nulle).*

Šo konstanto paātrinājumu sauc par *gravitācijas* paātrinājumu **g** un tā skalāro vērtību apzīmē ar g. Gan jāpiezīmē, ka šie kustības likumi ir spēkā tikai bezgaisa telpā, kamēr gaisā ir vienmēr vēl jāņem vērā tā pretestība; tādējādi šie likumi, attiecināti uz smaga ķermeņa kustību gaisā, sniedz tikai faktiskās kustības tuvinājumu.

Gravitācijas paātrinājums **g** kā vektors visur uz zemes lodes nav viens un tas pats, bet tā virziens un skalārā vērtība g mainās no vietas uz vietu: g pieaug līdz ar vietas platuma pieaugšanu un dilst līdz ar augstuma pieaugšanu virs jūras līmeņa.

Zemāk minētā tabula rāda g vērtības, izteiktas m/sek², šādām vietām (ievērojot iepriekšēju redukciju līdz jūras līmenim):

Roma	(41°53′.5 z. plat.)	$g = 9.8038$,
Padua	(45°24′ „ „)	$g = 9.8066$,
Odesa	(46°29′ „ „)	$g = 9.8077$,
Vīne	(48°12′.7 „ „)	$g = 9.8092$,
Parīze	(48°50′.2 „ „)	$g = 9.8096$,
Londona (Grīniča)	(51°28′.6 „ „)	$g = 9.8120$,
Berlīne (Potsdama)	(52°22′.9 „ „)	$g = 9.8130$,
Maskava	(55°45′ „ „)	$g = 9.8156$,
Rīga	(56°57′ „ „)	$g = 9.8166$,
Ļeņingrada	(59°57′ „ „)	$g = 9.8193$,
Kapo Flora (italiešu eksp.)	(79°56′.8 „ „)	$g = 9.8307$.

Tomēr kādā ne visai lielā apvidū **g** virzienu un skalāro vērtību var uzskatīt par konstantu.

Ja ortogonālo koordinātu triedru $Oxyz$ izvēlas tā, lai tā xOy plakne būtu vertikāla ar pozitīvo y-ass vērsumu vertikāli uz leju, tad paātrinājuma g koordinātas šinī triedrā ir $(0, g, 0)$, un punkta P ar koordinātām x, y, z kustības diferenciālvienādojumi ir šādi:

$$(15.)\qquad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = g, \quad \ddot{z} = 0.$$

Apzīmēsim punkta P koordinātas un tā sākuma ($t = 0$) ātruma $\mathbf{v}_0$ koordinātas attiecīgi ar x_0, y_0, z_0 un $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. (15.) sistēmas divreizēja integrācija tad dod punkta P ātruma $\mathbf{v}$ koordinātas un paša punkta koordinātas formā:

$$(16.)\qquad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = gt + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0;$$

$$(17.)\qquad x = \dot{x}_0 t + x_0, \quad y = \tfrac{1}{2} gt^2 + \dot{y}_0 t + y_0, \quad z = \dot{z}_0 t + z_0.$$

Neierobežojot uzdevuma vispārīgumu, var iedomāties, ka punkts P kustības sākumā sakrīt ar koordinātu triedra sākuma punktu, t. i.

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

un ka tā sākuma ātrums $\mathbf{v}_0$ atrodas xOy plaknē, t. i. $\dot{z}_0 = 0$. Pēdējo apstākli vienmēr iespējams panākt, rotējot xOy plakni ap y-asi, līdz kamēr $\mathbf{v}_0$ atrodas šai plaknē un pie tam tā, lai $\dot{x}_0 \geqslant 0$.

Šai jaunajā koordinātu triedrā (16.) un (17.) sistēmas vienādojumu vienkāršotās formas ir šādas:

$$(16.')\qquad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = gt + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = 0;$$

$$(17.')\qquad x = \dot{x}_0 t, \quad y = \tfrac{1}{2} gt^2 + \dot{y}_0 t, \quad z = 0,$$

pie kam $\dot{x}_0 \geqslant 0$. Pēdējie vienādojumi rāda, ka punkta P kustība norit vertikālā plaknē, kas ir noteikta ar tā kustības sākuma poziciju un sākuma ātrumu $\mathbf{v}_0$.

78. **Vertikāls sviediens un brīvs kritiens.** — Apskatīsim gadījumu, kad $\dot{x}_0 = 0$, t. i. kad punkta P kustības sākuma ātrums $\mathbf{v}_0$ ir vertikāls. Tādā gadījumā $x = 0$, kā to rāda pirmais (17'.) sistēmas vienādojums, un punkta P kustība ir vienmērīgi mainīga taisnlīnijas kustība:

$$\dot{y} = gt + \dot{y}_0, \quad y = \tfrac{1}{2} gt^2 + \dot{y}_0 t.$$

Tā kā g ir pozitīvs lielums, tad kustība, kas apskatīta laika intervallā starp $t = -\infty$ un $t = +\infty$, ir *retrograda palēninātā fazē*, t. i. pirms kustības apstāšanās momenta

$$(18.)\qquad t = -\frac{\dot{y}_0}{g},$$

bet *direkta paātrinātā fazē.*

Ja turpretim pētījam kustību, sākot ar momentu $t = 0$, tad jāizšķiŗ divi gadījumi atkarībā no $\dot{y}_0$ zīmes.

1° Ja $\dot{y}_0 \geqslant 0$, t. i. ja kustības sākuma ātrums ir vērsts vertikāli uz leju vai arī tas ir nulle, tad kustības apstāšanās moments, kā to rāda (18.) formula, atbilst $t \leqslant 0$, citiem vārdiem sakot, kustības apstāšanās moments ir meklējams pirms kustības sākuma momenta $t = 0$ vai arī tas sakrīt ar šo momentu. Kustība tā tad atrodas vienmērīgi paātrinātā fazē, punktam kustoties neaprobežoti ilgi vienmērīgi paātrinātā kustībā.

2° Ja $\dot{y}_0 < 0$, t. i. ja kustības sākuma ātrums ir vērsts uz augšu (negātīvās y-ass vērsumā), tad kustības apstāšanās moments $t > 0$, citiem vārdiem sakot, kustība, sākot ar momentu $t = 0$ līdz momentam $t = -\frac{\dot{y}_0}{g}$, atrodas vienmērīgi palēninātā retrogradā fazē, sasniedzot šinī laikā maksimālo attālumu $-\frac{\dot{y}_0^2}{2g}$. Pēc tam kustība maina savu vērsumu un pāriet vienmērīgi paātrinātā fazē, punktam kustoties bezgalīgi ilgi vienmērīgi paātrinātā kustībā. Pie tam jebkuŗā momentā, intervallā starp $t = -\frac{\dot{y}_0}{g}$ un $t = -\frac{2\dot{y}_0}{g}$, punkts sasniedz tās pašas pozicijas ar tām pašām ātruma absolūtām vērtībām kā iepriekšējā fazē, bet ar pretējo vērsumu.

79. **Slīps sviediens.** — Atliek vēl apskatīt gadījumu, kad $\dot{x}_0 > 0$, t. i. kad punkta P kustības sākuma ātrums $\mathbf{v}_0$ nav virzīts vertikāli. Tādā gadījumā vienādojumi

$$(19'.)\qquad \dot{x} = \dot{x}_0, \qquad \dot{y} = gt + \dot{y}_0,$$

$$(19''.)\qquad x = \dot{x}_0 t, \qquad y = \tfrac{1}{2}gt^2 + \dot{y}_0 t$$

rāda, ka apskatītā punkta kustība sadalās vienmērīgā kustībā pa x-asi ar ātrumu $\dot{x}_0$ un vienmērīgi mainīgā kustībā pa y-asi, ko mēs jau apskatījām.

Eliminējot laiku t no (19''.) sistēmas vienādojumiem, dabūjam punkta P trajektorijai vienādojumu

$$y = \frac{g}{2\dot{x}_0^2}x^2 + \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}x,$$

kas reprezentē parabolu caur koordinātu sistēmas sākuma punktu O ar y-asij parallēlu asi. Šī parabola ir konkava pret y-ass pozitīvo vērsumu.

Apzīmēsim $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. (19′.) sistēmas formulas tad rāda, ka

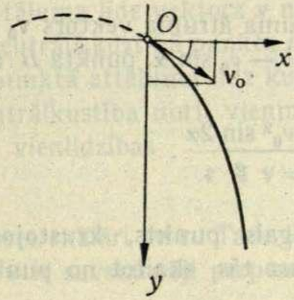
$$v^2 - v_0^2 = 2\,gy\,, \tag{20.}$$

t. i. ātruma kvadrāta pieaugums ir proporcionāls punkta krišanas augstumam.

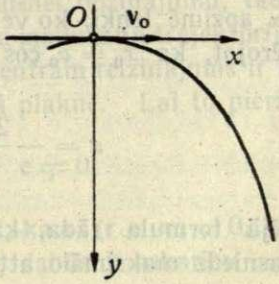
Tā kā ātruma **v** koordināta $\dot{x} = \dot{x}_0 > 0$, tad ātrums **v** nekad nevar kļūt par nulli, bet tas sasniedz savu minimālo vērtību $\dot{x}_0$ momentā $t = -\frac{\dot{y}_0}{g}$, kad $\dot{y} = 0$. Šai momentā tangente atbilstošajā trajektorijas punktā ir parallēla x-asij, un tā tad šis punkts ir parabolas virsotne ar koordinātām

$$-\frac{\dot{x}_0\dot{y}_0}{g}\,, \quad -\frac{\dot{y}_0^2}{2g}\,.$$

Tās dabūjam, ievietojot (19″.) sistēmas vienādojumos t vietā $-\frac{\dot{y}_0}{g}$.



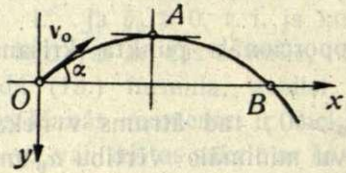
45. zīm.



46. zīm.

Tā kā mēs pētījam kustību, sākot ar momentu $t = 0$, tad jāizšķir atkal divi gadījumi atkarībā no $\dot{y}_0$ zīmes. 1° Ja $\dot{y}_0 \geqslant 0$, t. i. ja punkta kustības sākuma ātrums ir vērsts ieslīpi uz leju (45. zīm.) vai arī, ja tas ir horizontāls (46. zīm.), tad moments $t = -\frac{\dot{y}_0}{y}$, kad punkts atrodas parabolas virsotnē, ir pirms kustības sākuma momenta $t = 0$ vai arī tas sakrīt ar šo momentu; un tā tad kustīgais punkts apraksta parabolas loku ar arvien pieaugošu ātrumu, kā to rāda (20.) formula.

2° Ja $\dot{y}_0 < 0$, tad kustīgā punkta sākuma ātrums ir vērsts ieslīpi uz augšu. Punkts kustas pa parabolas loku, kas kāpj pret x-asi, un momentā $t = -\frac{\dot{y}_0}{g}$ sasniedz parabolas virsotni A ar augstumu $-\frac{\dot{y}_0^2}{2g}$ virs x-ass (47. zīm.). Ātrums šai kustībā samazinās, sasniedzot savu minimumu $\dot{x}_0$ parabolas virsotnē momentā $t = -\frac{\dot{y}_0}{g}$. Pēc tam punkts slīd pa parabolas loku uz leju ar arvien pieaugošu ātrumu, kā to rāda (20.) formula, un krusto x-asi punktā B ar abscīzu $x = -\frac{2\dot{x}_0\dot{y}_0}{g}$.



47. zīm.

Punkts B ir simmetrisks ar punktu O attiecībā pret parabolas asi.

Tā kā punkta kustība pa x-asi ir vienmērīga, tad punkts P noiet parabolas loku starp punktiem O un B laikā $-\frac{2\dot{y}_0}{g}$, kas ir divreiz lielāks par parabolas loka aprakstīšanai no punkta O līdz tās virsotnei A vajadzīgo laiku.

Ja α apzīmē leņķi, ko veido sākuma ātruma vektors $\mathbf{v}_0$ ar x-asi, tad, ievērojot, ka $\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha$, $\dot{y}_0 = -v_0 \sin\alpha$, punkta B abscīza ir

$$x = -\frac{2\,\dot{x}_0\dot{y}_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Pēdējā formula rāda, ka kustīgais punkts, krustojot otrreiz x-asi, sasniedz maksimālo attālumu uz tās, skaitot no punkta O, ja

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

13. §. Centrālas kustības.

80. **Centrālas kustības definīcija un raksturojums.** — Punkta P kustību sauc par *centrālu*, ja tā paātrinājuma virziens vienmēr iet caur vienu un to pašu punktu O, sauktu par *kustības centru*. Vai arī, kustība ir centrāla, ja punkta P paātrinājuma $\mathbf{a}$ nesēja taisne sakrīt

ar tā radijvektoru $\overline{OP} = \mathbf{r}$, t. i. ja paātrinājuma moments $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$ pret centru O ir nulle, vai, kas ir tas pats, ja

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0.$$

Arī otrādi, ja $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$, tad kustība ir centrāla. Kā zināms, vektora $\mathbf{a}$, kuŗa sākums ir punktā P, moments pret centru O ir nulle tikai tad, ja 1° $\mathbf{a} = 0$ (šo gadījumu izslēdzam) vai 2° ja šī vektora nesēja taisne iet caur centru O, kā tas ir centrālās kustībās. Tā tad vektoriālais noteikums $\mathbf{A} = 0$ ir raksturīgs centrālkustībai.

Tālāk nav grūti pārliecināties, ka centrālkustībā vektoriālsektoriālais ātrums $\mathbf{V}$ pret centru O ir konstants vektors. Pēc definīcijas punkta P vektoriālsektoriālais ātrums pret centru O ir

$$\mathbf{V} = \tfrac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v},$$

bet tā kā

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{A},$$

un centrālkustībai $\mathbf{A} = 0$, tad $\mathbf{V} = \mathbf{c}$, kur $\mathbf{c}$ apzīmē pēc gaŗuma un virziena konstantu vektoru.

Tā kā $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ absolūtā vērtība ir vienāda ar modula v un punkta O īsākā āttāluma līdz vektora $\mathbf{v}$ nesējai taisnei reizinājumu, tad var teikt arī, ka centrālā kustībā punkta P ātruma modula un trajektorijas tangentes šai punktā attāluma līdz kustības centram reizinājums ir konstants.

Centrālkustība norit vienmēr kādā plaknē. Lai to pierādītu, reizināsim vienlīdzības

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 2\,\mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} \neq 0,$$

abas puses skālāri ar $\mathbf{r}$. Tad, ievērojot, ka $\mathbf{r}\,.\,(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0$, jo vektori $\mathbf{r}$ un $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ ir savstarpēji perpendikulāri, dabūsim sakarību

$$\mathbf{r}\,.\,\mathbf{c} = 0.$$

Šī pēdējā sakarība rāda, ka vektors $\mathbf{r}$ ir vienmēr perpendikulārs vektoram $\mathbf{c}$, un tā tad kustīgais punkts P atrodas plaknē, kas vilkta caur punktu O un kas ir perpendikulāra konstantam vektoram $\mathbf{c}$. Apzīmējot kādā triedrā, kuŗa sākuma punkts ir O, vektora $\mathbf{c}$ koordinātas ar c_1, c_2, c_3 un punkta P koordinātas ar x, y, z, kas reizē ir arī vektora $\mathbf{r}$ koordinātas, pēdējo vektoriālo vienlīdzību var pārrakstīt formā

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0,$$

kas ir punkta P kustības plaknes vienādojums. Ja punkta P kustības plakni izvēlamies par xOy plakni, tad z, $\dot{z}$ un $\ddot{z}$ ir nulle un noteikums $\mathbf{A} = 0$ ir ekvivalents ar diferenciālvienādojumu

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0$$

jeb

$$x\dot{y} - y\dot{x} = const.$$

Pēdējais vienādojums rāda, ka punkta P sektoriālais ātrums centrālkustībā ir konstants, kā tam arī jābūt.

Atliek vēl apskatīt gadījumu, kad $\mathbf{c}$ ir nulles vektors. Tas ir iespējams: 1° ja $\mathbf{r}$ ir nulles vektors, t. i. ja kustīgais punkts sakrīt ar centru O (šo gadījumu, saprotams, izslēdzam), 2° ja $\mathbf{v}$ ir parallēls $\mathbf{r}$ vai 3° ja $\mathbf{v}$ ir nulles vektors. Abos pēdējos gadījumos $\mathbf{v}$ un $\mathbf{r}$ ir kollīneāri vektori, un tādēļ vektora $\mathbf{v}$ forma ir $m\mathbf{r}$, kur m vispārīgi ir laika t funkcija. Bet tā kā

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

tad

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\,\mathbf{r},$$

no kurienes

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0\, e^{\int_0^t m dt},$$

kur $\mathbf{r}_0$ apzīmē vektora $\mathbf{r}$ vērtību momentā $t = 0$, pie kam $\mathbf{r}_0 \neq 0$.

Pēdējā sakarība rāda, ka vektors $\mathbf{r}$ paliek vienmēr parallēls vektoram $\mathbf{r}_0$, un tā tad punkts P atrodas taisnlīnijas kustībā caur punktu O.

81. **Binè[1]) formulas.** — Punkta P ātruma $\mathbf{v}$ un paātrinājuma $\mathbf{a}$ radiālo un transversālo komponentu algebriskās izteiksmes polārkoordinātās, kā agrāk redzējām, bija šādas:

$$v_r = \dot{r}, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \tag{21.}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \qquad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \tag{22.}$$

Centrālkustībā pēc definīcijas punkta paātrinājuma transversālā komponenta algebriskai izteiksmei a_φ jābūt nullei, t. i. centrālkustību raksturotājs diferenciālvienādojums polārkoordinātās ir

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0,$$

vai, kas ir tas pats,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0.$$

[1]) J. Binet (1786.—1856. g.).

Pēdējais vienādojums rāda, ka centrālkustībā

$$r^2\dot{\varphi} = c,$$

kur c apzīmē laukuma konstanti. Ievērojot pēdējo sakarību, pārveidosim ātruma komponentu un paātrinājuma radiālā komponenta algebriskās izteiksmes tā, lai tās būtu vienīgi atkarīgas no punkta P radijvektora

$$r = r\,(\varphi)$$

un tā atvasinājumiem pēc φ.

Vispirms pārveidosim ātruma $\mathbf{v}$ komponentu algebriskās izteiksmes. Uztverot punkta P radijvektoru r par laika t ar anōmalijas φ starpniecību saliktu funkciju, var rakstīt, ka

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\,\dot{\varphi}\,.$$

Bet tā kā $r^2\dot{\varphi} = c$, tad pēdējo $\dot{r}$ izteiksmi var pārrakstīt šādi:

$$\dot{r} = \frac{c}{r^2}\,\frac{dr}{d\varphi} = -c\,\frac{d\,\dfrac{1}{r}}{d\varphi}\,. \tag{23.}$$

Ar šo pārveidoto $\dot{r}$ izteiksmi ātruma $\mathbf{v}$ komponentu algebriskās izteiksmes var pārrakstīt formā

$$v_r = -c\,\frac{d\,\dfrac{1}{r}}{d\varphi}\,, \quad v_\varphi = c\,\frac{1}{r}\,;$$

punkta P lineārais ātrums v tad ir dots ar formulu

$$v = |\sqrt{v_r{}^2 + v_\varphi{}^2}| = |c|\sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{d\dfrac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2},$$

ko sauc par *pirmo Binè formulu.*

Diferencējot (23.) izteiksmi vēlreiz, uzskatot tās labo pusi par t ar φ starpniecību saliktu funkciju, un ievietojot pēc tam tanī $\dot{\varphi}$ vietā $\frac{c}{r^2}$, dabūjam, ka

$$\ddot{r} = -\frac{c^2}{r^2}\,\frac{d^2\dfrac{1}{r}}{d\varphi^2}\,.$$

Substituējot paātrinājuma radiālā komponenta algebriskajā izteiksmē a_r otrā atvasinājuma $\ddot{r}$ vietā pēdējo izteiksmi un $\dot{\varphi}$ vietā $\frac{c}{r^2}$, dabūjam punkta P paātrinājuma radiālā komponenta algebrisko izteiksmi centrālā kustībā

$$a_r = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2}\right).$$

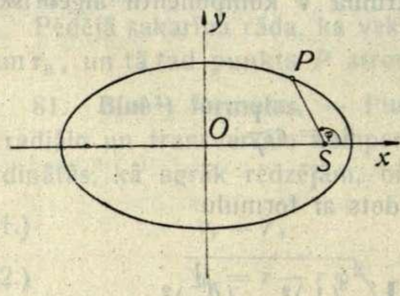
Šo formulu sauc par *otru Binè formulu*.

82. **Keplera planētu kustības likumi.** — Planētu centrālo kustību ap Sauli sauc dažreiz arī par Keplera kustību (48. zīm.). Šāds apzīmējums ir radies no tā, ka Keplers[1]), pamatojoties uz Ticho Brahes[2]) astronomisko novērojumu materiāla, pirmais formulēja tagad viņa vārdā pazīstamos trīs planētu kustības kinēmatiskos likumus, kas skan šādi:

1. *Planētu orbitas ir elīpses, kuŗu vienā fokū atrodas Saule.*

2. *Planētas radijvektora, kas savieno Saules un planētas gravitācijas centrus, pārietais laukums ir proporcionāls laikam.*

3. *Divu planētu orbitu aprakstīšanai vajadzīgo laiku kvadrātu attiecība ir vienāda ar šo orbitu lielo pusasu kubu attiecību.*



48. zīm.

Tā kā otrā likuma ekvivalenta forma ir, ka planētas vektoriālsektoriālais ātrums pret Sauli kā centru ir konstants, tad no tā izriet, ka planētas kustība ir centrāla.

Aprēķināsim planētas paātrinājuma radiālā komponenta algebrisko izteiksmi a_r. Apzīmējot ar a un b planētas orbitas lielo un mazo pusasi, ar $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$ tās ekscentricitāti, ar $p = \frac{b^2}{a}$ parametru un iz-

---

[1]) J. Kepler (1571.—1630. g.). Divi pirmie likumi publicēti darbā *Astronomia nova seu de Motibus stellae Martis*, Heidelbergae, 1609, Ges. Werke, B. III, München, 1937, trešais darbā *Harmonice mundi*, libri V, Linz, 1619.

[2]) Tycho Brahe (1546.—1601. g.), ievērojams dāņu astronoms.

vēloties orbitas vienu foku par polu ar polārās ass pozitīvo vērsumu uz tuvāko virsotni, orbitas polārais vienādojums iegūst formu

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

No pēdējā vienādojuma dabūjam šādas izteiksmes otrā Binė formulā sastopamiem lielumiem

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \varphi, \qquad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} = -\frac{e}{p} \cos \varphi, \qquad \frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} = \frac{1}{p}.$$

Tādējādi

$$a_r = -\frac{c^2}{p} \frac{1}{r^2}.$$

Šī a_r izteiksme rāda, ka planētai kustoties ap Sauli, planētas paātrinājums ir vienmēr vērsts uz Saules pusi un tā algebriskā vērtība ir apgriezti proporcionāla planētas un Saules attāluma kvadrātam.

Pierādīsim, ka lielums $\frac{c^2}{p}$ ir konstants un visām planētām viens un tas pats. Tā kā pēc otrā Keplera likuma planētas kustība ap Sauli ir centrāla, tad $r^2\dot{\varphi} = c$, un planētas radijvektora pārietais laukums σ momentā t, kad planētas anōmalija ir φ, ir

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 \, d\varphi = \tfrac{1}{2} c \int_0^{t} dt.$$

Ja ar T apzīmējam laika intervallu, kuŗā planēta apraksta savu orbitu, tad, piemērojot pēdējās divas laukuma izteiksmes elīpsei, dabūjam vienlīdzību

$$\pi ab = \frac{c}{2} T.$$

No šīs vienlīdzības izriet, ka

$$c = \frac{2\pi ab}{T}$$

un tāpēc

$$\frac{c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

Bet no trešā Keplera likuma izriet, ka

$$\frac{a^3}{T^2} = k_1,$$

kur k_1 ir konstante, kas ir viena un tā pati visām planētām. Tādējādi

$$\frac{c^2}{p} = 4\pi^2 k_1 = k.$$

Universālo konstanti k sauc par *Gausa*[1]) *konstanti*. Planētas radiālā paātrinājuma algebriskā izteiksme ar konstanti k tā tad ir šāda:

$$a_r = -\frac{k}{r^2}.$$

Pirmā Binè formula dod planētas lineāram ātrumam v izteiksmi

$$v = \frac{2\pi a^2}{bT}\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos\varphi},$$

kas rāda, ka ātrumam v ir maksimums, ja $\varphi = 0$, un minimums, ja $\varphi = \pi$; citiem vārdiem sakot, planētas ātrums sasniedz maksimumu perihēlijā un minimumu afēlijā.

14. §. Harmoniskas kustības.

83. **Vienmērīga cirkulāra kustība.** — Apskatīsim punkta P kustību pa riņķa līniju, kuŗas centrs atrodas kādas ortogōnālas Dekarta koordinātu sistēmas sākuma punktā un kuŗas radijs ir r. Riņķa līnijas vienādojums tad ir

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

un punkta P kustība ir definēta, ja zināma ir tā anōmalija φ attiecībā pret pozitīvo x-asi kā laika t funkcija. No punkta P kustības vienādojumiem

$$x = r\cos\varphi(t), \qquad y = r\sin\varphi(t)$$

izriet, ka tā ātruma koordinātas ir

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y} = r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

[1]) K. F. Gauss (1777.—1855. g.). Šo konstanti Gauss pirmo reizi aprēķinājis savā slavenajā darbā *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium,* Hamburgiae, 1809.

Tādējādi punkta P līneārais ātrums ir dots ar formulu

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r\,|\dot{\varphi}|\ ;$$

citiem vārdiem sakot, punkta P ātrums jebkuŗā momentā ir dots ar tā trajektorijas radija un leņķiskā ātruma absolūtās vērtības reizinājumu.

Lai cirkulārā kustība būtu vienmērīga, tad leņķiskam ātrumam $\dot{\varphi}$ jābūt konstantam. Ja šo $\dot{\varphi}$ konstanto vērtību apzīmē ar ω, tad no vienlīdzības $\dot{\varphi} = \omega$ izriet, ka

$$\varphi = \omega t + \varphi_0\,,$$

kur φ_0 apzīmē punkta P anōmaliju momentā $t = 0$. Binomu $\omega t + \varphi_0$ sauc arī par *kustības fazi momentā t*, kamēr φ_0 sauc par *kustības sākuma fazi.*

Vienmērīgas cirkulāras kustības vienādojumi tā tad ir šādi:

(24.) $$x = r\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad y = r\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Atkarībā no tā, vai $\omega > 0$ vai < 0, punkta P kustība norit pozitīvā (anōmalijas augšanas vērsumā) vai negātīvā kustības vērsumā.

Punkta P ātruma un paātrinājuma koordinātas ir dotas ar vienādojumiem

(25.) $$\dot{x} = -r\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega y, \qquad \dot{y} = r\omega\cos(\omega t + \varphi_0) = \omega x$$

un

(26.) $$\ddot{x} = -\omega\,\dot{y} = -\omega^2 x, \qquad \ddot{y} = \omega\dot{x} = -\omega^2 y.$$

Pēdējie divi vienādojumi rāda, ka

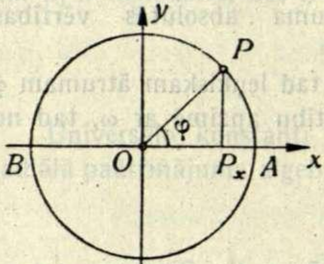
$$\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r},$$

t. i. punkta P paātrinājuma absolūtā vērtība ir $\omega^2 r$, un tas ir vērsts pret centru O.

(24.), (25.) un (26.) sistēmas vienādojumi rāda, ka pēc laika intervalla $\dfrac{2\pi}{\omega}$ punkts P atkal ieņem to pašu poziciju ar to pašu ātrumu un paātrinājumu kā kustības sākumā, citiem vārdiem sakot, punkta P kustība ir periodiska ar periodu $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

84. **Harmoniskā kustība.** — Iedomāsimies, ka punkts P atrodas vienmērīgi cirkulārā kustībā pa riņķa līniju ar radiju r un apskatīsim tā

projekcijas uz kāda riņķa diametra taisnlīnijas kustību: piem. punkta P projekcijas P_x uz x-ass kustību (49. zīm.). Punktam P aprakstot riņķa līniju pēc patikas daudz reižu, tā projekcija P_x oscillē starp punktiem A un B. Šo punkta P_x taisnlīnijas kustību sauc par *harmonisku* kustību. Harmoniskās kustības vienādojums, ātrums un paātrinājums ir attiecīgi doti ar (24.), (25.) un (26.) sistēmas pirmajiem vienādojumiem.



49. zīm.

Harmoniska kustība tā tad tāpat kā vienmērīgi cirkulāra kustība ir periodiska ar periodu $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Perioda reciproko vērtību $\nu = \frac{1}{T}$ sauc par kustības *frekvenci* un $\omega = \frac{2\pi}{T}$ par *frekvences* vai *pulsācijas konstanti*. Punkts O ir kustības *centrs* un r — kustības *amplitūda.*

Punkta P_x ātruma formula rāda, ka jebkuŗā pozicijā tā ātrums ir proporcionāls punkta P ordinātai P_y cirkulārā kustībā. Tādējādi P_x ātrums punktā A ir nulle, tas pieaug vērsumā pret centru O un sasniedz tanī savu maksimālo absolūto vērtību ωr, pēc tam dilst un punktā B ir atkal nulle. Kustībā no B uz A ātrums katrā P_x pozicijā iegūst atkal to pašu absolūto vērtību kā kustībā no A uz B, bet tikai ar pretējo zīmi.

Punkta P_x paātrinājums ir vērsts vienmēr pret centru O un tas ir proporcionāls šī punkta attālumam no centra. Savu maksimālo absolūto vērtību $\omega^2 r$ tas sasniedz punktos A un B, bet punktā O tas ir nulle.

Ja ir dotas divas harmoniskas kustības ar vienu un to pašu periodu

$$x = r\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad x' = r'\cos(\omega t + \varphi_0'),$$

tad saka, ka pirmajai kustībai pret otru ir fažu diference $\varphi_0 - \varphi_0'$.

Uzrakstot punkta P_x ātruma izteiksmi formā

$$\dot{x} = r\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

redzam, ka tā ātrumam $\dot{x}$ pret koordinātu x ir fažu diference $\frac{\pi}{2}$.

Punkta P_x paātrinājuma $\ddot{x}$ un koordinātas x fažu diference ir π.

Apskatīsim punkta P projekcijas P_y uz y-ass kustību, kuŗas vienādojums ir

$$y = r\sin(\omega t + \varphi_0) = r\cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Šai gadījumā punkta P_y harmoniskā kustība ir ar to pašu periodu un amplitūdu kā punkta P_x kustība, bet pirmajai pret pēdējo ir fažu diference $-\frac{\pi}{2}$, t. i. punkta P_y kustība ir novēlojusies pret P_x kustību par $\frac{1}{4}$ perioda, ja pilns periods atbilst fažu diferencei 2π.

Kā redzējām, harmoniskā kustībā ar frekvences konstanti ω punkta paātrinājums $\ddot{x}$ un koordināta x ikvienā momentā ir saistīti ar vienādojumu

$$\ddot{x} + \omega x = 0, \tag{27.}$$

lai kāda būtu kustības amplitūda r un sākuma faze φ_0, citiem vārdiem sakot,

$$x = r\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{28.}$$

apmierina (27.) otrās kārtas diferenciālvienādojumu, lai kādas būtu konstantes r un φ_0. Bet tā kā otrās kārtas diferenciālvienādojuma atrisinājums ir atkarīgs no divām patvaļīgām konstantēm, tad varam secināt, ka (28.) izteiksme ir (27.) vienādojuma vispārīgais atrisinājums, vai, citiem vārdiem sakot, (27.) vienādojums definē visas harmoniskās kustības ar periodu $\frac{2\pi}{\omega}$.

15. §. Lisažū[1]) līknes.

85. **Divu ortogōnālu harmonisku kustību ar vienādiem periodiem salikšana.** — Pēc hipotezes divu dotu ortogōnālu harmonisku kustību ar vienādiem periodiem vienādojumi ir šādi:

$$x = a\cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$y = b\cos(\omega t + \psi_0).$$

[1]) J. Lissajous, *Mémoire sur la position des noeuds dans les lames qui vibrent transversalement,* Ann. de phys. et de Chimie, 3e série, t. 30, 1850.

Neierobežojot problēmas vispārīgumu, varam iedomāties, ka $\varphi_0 = 0$, jo laika sākuma skaitīšanas moments nav svarīgs. Tādējādi dabūjam, ka

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos\omega t, \\ y = b\cos(\omega t + \psi_0). \end{array}\right. \tag{29.}$$

Pētīsim tagad kustīgā punkta (x, y) trajektorijas, kas atbilst konstantes ψ_0 dažādām vērtībām, iedomājoties ka ne a, ne arī b nav nulle, jo citādi mēs dabūtu taisnlīnijas kustību pa vienu no koordinātu asīm. Iedomāsimies, ka $a > 0$ un $b > 0$.

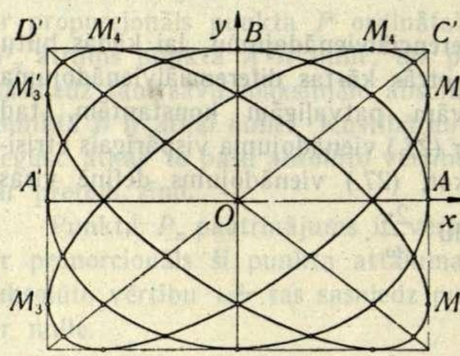
Pārrakstot (29.) sistēmas otru vienādojumu formā

$$y = b\cos\omega t\cos\psi_0 - b\sin\omega t\sin\psi_0$$

un eliminējot no tā $\sin\omega t$ un $\cos\omega t$ ar (29.) sistēmas pirmo vienādojumu, pēc dažiem pārveidojumiem dabūjam kustīgā punkta trajektorijas vienādojumu formā

$$b^2x^2 - 2\,abxy\cos\psi_0 + a^2y^2 = a^2b^2\sin^2\psi_0, \tag{30.}$$

kas rāda, ka šī trajektorija ir elīpse, kuŗas ass vispārīgi nesakrīt ar koordinātu sistēmas asīm.



50. zīm.

Apzīmējot ar γ leņķi, ko veido elīpses lielā ass ar x-asi, šis leņķis, kā to māca analitiskā ģeometrija, ir dots ar formulu

$$\operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2\,ab\cos\psi_0}{a^2 - b^2} \tag{31.}$$

un elīpses attiecīgo asu gaŗumi $2a_1$ un $2b_1$ ar formulām

$$2a_1 = \sqrt{2\,(a^2 + b^2 + \Delta)}, \qquad 2b_1 = \sqrt{2\,(a^2 + b^2 - \Delta)}, \tag{32.}$$

kur

$$\Delta^2 = a^4 + 2a^2b^2\cos 2\,\psi_0 + b^4.$$

Iedomāsimies, ka 1⁰ $\psi_0 = 0$. Tad kustīgā punkta trajektorija ir taisne CC' (50. zīm.).

2° $0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$. Elīpses lielās ass un x-ass veidotais leņķis, kā to rāda (31.) formula, ir šaurs. Substituējot (29.) sistēmas vienādojumos $t = 0$, dabūjam $x = a$, $y = b \cos \psi_0$, t. i. kustīgais punkts atrodas pozicijā M_1. Ja $t = -\frac{\psi_0}{\omega}$, tad $x = a \cos \psi_0$, $y = b$: kustīgais punkts atrodas pozicijā M_4. Trajektorija ir elīpse $M_1 M_2 M_3 M_4$, kas aprakstīta nule minētās punktu secības definētā vērsumā.

3° $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Kā to rāda (30.) vienādojums un (32.) sistēmas formulas, trajektorija ir elīpse ar vienādojumu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

un asīm $2a_1 = AA'$, $2b_1 = BB'$. Kustības vērsums pa šo elīpsi ir noteikts ar punktu secību A, B', A', B.

4° $\frac{\pi}{2} < \psi_0 < \pi$. Šai gadījumā elīpses lielās ass un x-ass veidotais leņķis ir plats, un tā tad elīpses lielā ass iet caur otru un ceturto kvadrantu. Substituējot (29.) sistēmas vienādojumos $t = 0$, dabūjam $x = a$, $y = b \cos \psi_0$; bet tā kā $\cos \psi_0$ ir negātīvs, tad uzrakstītajām koordinātām atbilstošais punkts ir M'_1. Ja $t = -\frac{\psi_0}{\omega}$, tad $x = a \cos \psi_0$, $y = b$, kas reprezentē punktu M'_4. Trajektorija ir elīpse $M_1' M_2' M_3' M_4'$, kas aprakstīta vērsumā, ko noteic četri tās nosauktie punkti.

5° $\psi_0 = \pi$. Šai gadījumā trajektorijas (30.) vienādojums reducējas par taisnes vienādojumu

$$\frac{x}{y} = -\frac{a}{b}.$$

Trajektorija ir diagonāle DD'.

6° $\pi < \psi_0 < \frac{3\pi}{2}$. Ja $t = 0$, tad (29.) sistēmas vienādojumi rāda, ka $x = a$, $y = b \cos \psi_0$. Bet tā kā y ir negātīvs, tad dabūjam punktu, kas ir analogs punktam M_1'. Ja $t = -\frac{\psi_0}{\omega}$, tad $x = a \cos \psi_0$, $y = b$; šāds punkts ir M_4'. Momentā $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ kustīgais punkts atrodas pozicijā M_3', kas ir diametrāli pretēja M_1'. Un tā kā $\frac{T}{2} > -\frac{\psi_0}{\omega}$, tad kustigais punkts nonāk pozicijā M_4' pirms pozicijas M_3' sasniegšanas. Trajektorija ir 4° gadījumam analoga elīpse ar kustības vērsumu $M_4'M_3'M_2'M_1'$.

Augot ψ_0 tālāk, dabūjam tās pašas trajektorijas kā agrāk, bet tikai kustības vērsums pa šīm trajektorijām ir pretējs agrākajam vērsumam.

Tādējādi visos gadījumos trajektorija atrodas taisnstūŗa

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b$$

iekšpusē, un tā pieskaŗas visām četrām tā malām. Vispārīgi tā ir elīpse, kas ir ievilkta šai taisnstūrī.

Beidzot, ja abu doto harmonisko kustību amplitūdas ir vienādas, t. i. $a = b$, bet fažu diference ir $\pm\frac{\pi}{2}$, tad trajektorijas vienādojums ir

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Trajektorija tā tad ir riņķa līnija. Tādējādi var teikt: ja dotas ir divas harmoniskas kustības pa divām ortogōnālām taisnēm ap to kopējo krustošanās punktu ar vienu un to pašu periodu un amplitūdu, bet fažu diferenci $\pm\frac{\pi}{2}$, tad šīs divas harmoniskās kustības summējas cirkulārā kustībā pa riņķa līniju.

86. **Divu ortogōnālu harmonisku kustību ar dažādiem periodiem salikšanas speciālais gadījums.** — Divu ortogōnālu harmonisku kustību ar dažādiem periodiem vienādojumi, attiecīgi izvēloties laika sākuma skaitīšanas momentu, ir šādi:

$$(33.)\qquad \begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = b\cos(\omega' t + \psi_0). \end{cases}$$

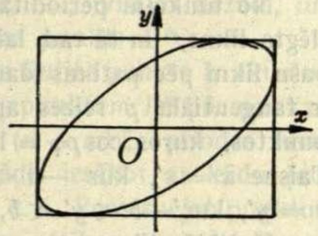
Apskatīsim speciālo gadījumu, kad $\omega' = \omega + h$, kur h ir mazs lielums. (33.) sistēmas vienādojumus tad var pārrakstīt formā

$$x = a\cos\omega t,$$
$$y = b\cos(\omega t + ht + \psi_0),$$

un laika intervallā $T = \frac{2\pi}{\omega}$ lielums $ht + \psi_0$ ir gandrīz konstants.

Punkta trajektorija ir elīpses veida līkne, kas tomēr nenoslēdzas (51. zīm.).

Nākošajā intervallā T trajektorija ir atkal elīpses veida līkne, kas arī neslēdzas, bet ar mazliet citādu orientāciju: tās pieskaršanās punkti apvilktajam taisnstūrim ir pavirzījušies uz priekšu vai atpakaļ atkarībā no tā, vai h ir pozitīvs vai negatīvs lielums. Tādējādi dabūjam līkni, ko sastāda pēc patikas daudz elīpses veida līkņu, kas visas ir ievilktas taisnstūri $x = \pm a$, $y = \pm b$.



51. zīm.

87. **Divu ortogonālu harmonisku kustību ar dažādiem periodiem salikšana.** — 1⁰ *Kommensurāblais gadījums. Periodītāte.* — Ja (33.) sistēmas vienādojumos konstantes ω un ω' ir kommensurābli lielumi, t. i.

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{p}{q},$$

kur p, q ir naturālie skaitļi bez kopējā dalītāja, tad

$$\omega = \alpha p, \qquad \omega' = \alpha q.$$

Ar apzīmējumu $\alpha t = \varphi$

(33.) sistēmas vienādojumus var pārrakstīt formā

$$(33'.) \qquad \begin{cases} x = a \cos p\varphi, \\ y = b \cos (q\varphi + \psi_0). \end{cases}$$

Šīs funkcijas ir periodiskas ar attiecīgajiem periodiem $\frac{2\pi}{p}$ un $\frac{2\pi}{q}$ un kopējo periodu 2π, jo mazākā pozitīvā $\varkappa$ vērtība, ar ko

$$a \cos p(\varphi + \varkappa) = a \cos p\varphi,$$
$$b \cos [q(\varphi + \varkappa) + \psi_0] = b \cos (q\varphi + \psi_0),$$

ir $\varkappa = 2\pi$. Tiešām, ja $\varkappa$ ir pirmās funkcijas periods, tad

$$\varkappa = \lambda \frac{2\pi}{p},$$

un ja tas ir otrās funkcijas periods, tad

$$\varkappa = \mu \frac{2\pi}{q}.$$

Tā tad

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q} \quad \text{jeb} \quad \lambda q = \mu p$$

un mazākās λ, μ vērtības naturālos skaitļos, kas apmierina pēdējo vienlīdzību, ir $\lambda = p$, $\mu = q$.

No funkciju perioditātes izriet, ka kustīgā punkta trajektorija ir slēgta līkne, un tā tad, laikam t pieaugot, punkts apraksta vienu un to pašu līkni pēc patikas daudz reižu. Jebkuŗai ψ_0 nozīmei trajektorija ir tangentiāla p reizes apvilktā taisnstūŗa ikvienai malai $x = a, -a$ punktos, kuŗos $\cos p\varphi = 1, -1$, un q reizes ikvienai malai $y = b, -b$. Taisne $x = x'$, kur $-a < x' < a$, šķeļ līkni $2p$ punktos, un taisne $y = y'$, kur $-b < y' < b$, $2q$ punktos.

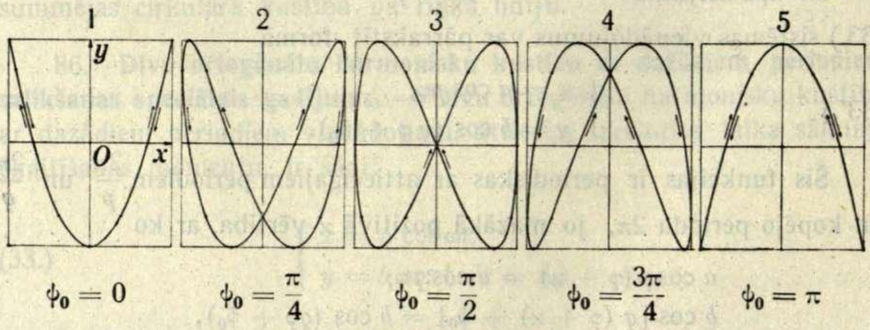
Dabūtās līknes visas ir algebriskas un racionālas, jo, substituējot $\xi = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$, mainīgie lielumi x un y ir ξ racionālas funkcijas. Bez tam visas līknes ir simmetriskas pret y-asi.

1. *piemērs.* — Ja $p = q = 1$, tad dabūjam agrāk apskatītās elīpses (85. nodal.).

2. *piemērs.* — Ja $p = 1$, $q = 2$, tad

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \cos (2\varphi + \psi_0)$$

un atkarībā no konstantes ψ_0 vērtībām dabūjam 52. zīmējumā dotās līknes.



52. zīm.

Ja $\psi_0 = \frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, tad dabūjam no jauna 4., 3. un 2. līkni, kas aprakstītas agrākajam vērsumam pretējā vērsumā. Pēc tam atkārtojas tā pati līkņu serija no jauna.

2° *Inkommensurāblais gadījums. Aperioditāte.* — Ja ω un ω' nav kommensurābli lielumi, kustīgā punkta trajektorija nekad neslēdzas.

Ja kādu taisnstūŗa iekšējo punktu apzīmē ar P, tad kustīgā punkta trajektorija nāk bezgala daudz reižu pēc patikas tuvu punktam P; speciālā gadījumā tā var arī iet tieši caur punktu P.

Pierādījums tam ir šāds. Apskatīsim kādu riņķa līniju, apzīmējot ar φ kādu šīs riņķa līnijas centrālo leņķi. Ja leņķis $\varphi = \xi = 2\pi\alpha$ ir inkommensurābls ar 2π, t. i. ja α ir irracionāls lielums, tad riņķa līnijas punkti $P_1, P_2 \ldots$, kas atbilst leņķiem $\xi, 2\xi, \ldots$, visi ir dažādi, un tā tad tiem eksistē vismaz viens akumulācijas punkts P^*.

Bet tas savkārt nozīmē, ka *ikviens* riņķa līnijas punkts ir akumulācijas punkts, jo, apzīmējot ar P_n un P_m divus punktam P^* pēc patikas tuvus punktus, punkts, kas atbilst leņķim $(n - m)\,\xi$, atrodas tuvu punktam, kas atbilst leņķim $\varphi = 0$. Tādējādi, iesākot ar kādu ļoti mazu loku un konstruējot tā daudzkārtņus, t. i. konstruējot punktus $P_{k\,(n-m)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, varam nākt pēc patikas tuvu ikvienam riņķa līnijas punktam.

Atgriežoties pie kustīgā punkta trajektorijas vienādojumiem, apzīmēsim

$$\varphi = \omega t, \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \alpha.$$

Tad (33.) sistēmas vienādojumus var pārrakstīt formā

$$\left\{\begin{aligned} x &= a \cos\varphi, \\ y &= b \cos(\alpha\varphi + \psi_0). \end{aligned}\right.$$

Tālāk apzīmēsim ar $\varphi = \varphi'$ vienādojuma

$$x' = a \cos\varphi$$

sakni intervallā $-a \leqslant x' \leqslant a$. Trajektorija krusto taisni $x = x'$ punktos, kuŗos

$$y = b \cos[\alpha(\varphi' + 2k\pi) + \psi_0], \qquad b \cos[\alpha(-\varphi' + 2k\pi) + \psi_0]\,;$$

bet tā kā leņķiem $2k\alpha\pi$ uz riņķa līnijas atbilst punkti, kuŗu kopums ir *visur biezs*[1]), tad atbilstošā kosinus faktora vērtības atrodas visur bieži starp -1 un $+1$.

Tādējādi trajektorija var šķērsot jebkuŗu taisnstūŗa apvidu, nākot jebkuŗam tā punktam neaprobežoti daudz reižu pēc patikas tuvu, pie kam var pierādīt, ka sakarība starp trajektorijas punktiem un φ vērtībām, φ mainoties robežās $-\infty < \varphi < \infty$, ir savstarpēji viennozīmīga.

---

[1]) Angl. *everywhere dense*, fr. *partout dense*, vāc. *überall dicht*.

88. **Trīs un n-dimensionālais gadījums.** — Trīsdimensionālā gadījumā punkta trajektorijas vienādojumi var tikt reducēti formā

$$\left\{\begin{array}{l} x = a \cos \varphi, \\ y = b \cos (\alpha\varphi + \psi_0), \\ z = c \cos (\beta\varphi + \varkappa_0). \end{array}\right.$$

Ja α un β ir kommensurābli lielumi, tad trajektorija slēdzas un kustība ir periodiska. Ja α un β abi ir irracionāli lielumi un to attiecība arī ir irracionāls lielums, tad iespējams, ka trajektorija šķērso jebkuŗu pēc patikas mazu parallēlepipeda

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b, \quad -c \leqslant z \leqslant c$$

apvidu un tā ir bez divkāršpunktiem, pie kam sakarība starp trajektorijas punktiem un φ vērtībām, kur $-\infty < \varphi < +\infty$, ir savstarpēji viennozīmīga.

Tas pats iespējams arī vispārīgā gadījumā

$$x_k = a_k \cos (\alpha_k \varphi + \psi_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

89. **Uzdevumi.**

1. Punkts P kustas pa taisni tādējādi, ka pret kādu punktu ārpus šīs taisnes tā leņķiskais ātrums ir konstants. Noteikt punkta P ātrumu un tā radiālo un transversālo komponentu.

2. Aprēķināt punkta ātrumu un paātrinājumu, kā arī atbilstošos radiālos un transversālos komponentus, ja šis punkts apraksta logaritmisko spirāli ar konstantu leņķisko ātrumu pret spirāles polu.

3. Pierādīt: ja punkta kustībā plaknē konstants ir tā paātrinājuma tangentiālais un normālais komponents, tad šī punkta trajektorija ir logaritmiskā spirāle. Speciālos gadījumos pēdējā var reducēties par riņķa līniju vai taisni.

4. Atrast peldētāja, kas peld ar konstantu ātrumu (pret ūdeni) perpendikulāri ūdens plūsmai, trajektoriju, iedomājoties, ka ūdens plūsma ir taisnlīnijas un tās ātrums ir proporcionāls attālumam no krasta. Parādīt, ka laiks, kādā peldētājs sasniedz krastu, ir neatkarīgs no ūdens plūsmas ātruma.

5. Punkts A kustas pa taisni ar konstantu ātrumu. Atrast punkta P trajektoriju, ja P kustas tādējādi, ka tā ātrums, kas ir konstants pēc absolūtās vērtības, vienmēr ir vērsts uz punktu A. Atrast laiku, kādā punkts P sasniegs punktu A (iedomājoties, ka punkta P ātrums ir lielāks par punkta A ātrumu).

6. Punkts P apraksta parabolu $y^2 = 2px$ tā, ka $y = b \cos \omega t$. Izpētīt kustību un uzzīmēt tās hodografu.

7. Punkts P apraksta riņķa līniju ar radiju R un centru O tā, ka tā kustības hodografs ir kōna šķēlums ar foku O. Izpētīt kustību un aprēķināt punkta P paātrinājumu.

8. Punkts P apraksta riņķa līniju. Apzīmējot ar O_1 un O_2 divus šīs riņķa līnijas punktus, aprēķināt punkta P ātruma un paātrinājuma komponentus radijvektoru O_1P un O_2P virzienos.

9. Doti divi punkti O un A. Kādā leņķī α jāizšauj no punkta O projektils, kuŗa sākuma ātrums ir $\mathbf{v}_0$, lai tas ietu caur otru doto punktu A?

Piezīme. — Izvēloties punktu O par koordinātu sistēmas sākuma punktu un atsaucoties uz pazīstamām formulām, vispirms jāuzraksta parabolas, kas iet caur punktu O, veidojot ar x-asi leņķi α, un punktu A (x, y), vienādojums. To darot, dabūsim kvadrātisku vienādojumu pret $\operatorname{tg}\alpha$. Uzdevumam ir divi, viens vai arī nav neviena atrisinājuma atkarībā no tā, vai punkts A atrodas iekšpus, uz vai ārpus parabolas

$$y = \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g}.$$

Šo parabolu tādēļ sauc par *drošības parabolu.*

10. Atsaucoties uz 9. uzd., parādīt, ka, mainot leņķi α, visas iespējamās trajektorijas ir tangentiālas drošības parabolai.

11. Atsaucoties uz 9. uzd., atrast sakarību starp diviem leņķiem α_1 un α_2, kuŗu virzienos izšautie projektili iet caur doto punktu A.

12. Divi ķermeņi, kas sviesti no kāda torņa vienā un tai pašā plaknē un ar vienu un to pašu sākuma ātrumu, bet dažādos virzienos, kuŗi noteikti ar leņķiem α_1, α_2 pret horizontu, nokrīt vienā un tai pašā vietā. Aprēķināt torņa augstumu.

13. No kāda punkta ir izšauti vairāki projektili vienā un tai pašā plaknē ar vienu un to pašu sākuma ātrumu $\mathbf{v}_0$, bet dažādos virzienos. Parādīt, ka 1° visu trajektoriju virsotņu ģeometriskā vieta ir elipse, 2° visu trajektoriju foku ģeometriskā vieta ir riņķa līnija, 3° visu projektilu poziciju dotajā momentā t ģeometriskā vieta ir kāda ar laiku t mainīga riņķa līnija.

14. Ja punkta kustība pa logaritmisko vai hiperbolisko spirāli ir centrāla attiecībā pret tās polu, tad šī punkta paātrinājums ir apgriezti proporcionāls tā radijvektora kubam.

15. Ja punkta kustība pa elipsi ir centrāla pret tās centru, tad šī punkta paātrinājums ir proporcionāls radijvektoram.

16. Punkta paātrinājums centrālā kustībā ir apgriezti proporcionāls tā radijvektora kvadrātam. Atrast šī punkta trajektoriju.

17. Atrast punkta trajektoriju, ja tā paātrinājums centrālkustībā ir apgriezti proporcionāls radijvektora kubam.

III NODAĻA.

CIETA ĶERMEŅA KINĒMATIKA.

16. §. Vispārīgs apskats.

90. **Cieta ķermeņa kustības analitiska definīcija.** — Apskatījuši iepriekšējā nodaļā punkta kinēmatiku, pāriesim tagad uz cieta ķermeņa kinēmatiku, saprotot ar *cietu ķermeni* kaut kādu figūru, kuŗas punktu savstarpējie attālumi, ķermenim kustoties, paliek invarianti.

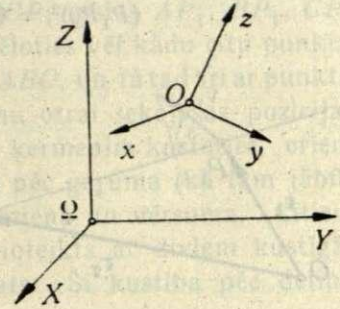
Zinot apskatītā cietā ķermeņa trīs punktu A, B, C, kas neatrodas uz vienas taisnes, pozicijas, iespējams fiksēt pārējo cietā ķermeņa punktu pozicijas, bet tomēr ne viennozīmīgi, jo kāda punkta M attālumi MA, MB, MC līdz trim punktiem A, B, C nenoteic punktu M viennozīmīgi, bet atstāj tam divas iespējamas pozicijas, t. i. divus punktus, kuŗos krustojas trīs sfēras ar centriem punktos A, B, C un radijiem MA, MB, MC.

Lai cietā ķermeņa pozicija būtu viennozīmīgi definēta, ir jāzina vēl kāda tā ceturtā punkta O pozicija; citiem vārdiem sakot, novērotājam, kuŗš stāv ar kājām punktā A un kuŗa galva ir vērsta pret punktu B, aplūkojot punktu C, ir vēl jāzina, kuŗā pusē no tā atrodas kāds cietā ķermeņa ceturtais punkts O.

Tādējādi kāda ar cieto ķermeni saistīta tetraedra virsotņu O, A, B, C pozicijas viennozīmīgi definē šī ķermeņa pozicijas. Starp šī tetraedra virsotnēm dažas iespējams izvēlēties noteiktos virzienos bezgalībā. Izvēloties O par vienu virsotni, pārējās trīs izvēlēsimies bezgalībā trīs savstarpēji perpendikulāros virzienos Ox, Oy, Oz tā, lai pēdējie veidotu kādu pozitīvi orientētu ortogōnālu triedru $Oxyz$. Šī triedra pozicija tad definē cietā ķermeņa poziciju. Katram cieta ķermeņa punktam šai triedrā ir noteiktas un konstantas koordinātas un otrādi, jebkuŗš punkts ar šo īpašību var tikt uzskatīts kā piederīgs cietam ķermenim. Tādējādi mēs nonākam pie sajēgas par *kustīgo telpu*, kas ar cieto ķermeni ir aizrauta kustībā. Cieta ķermeņa kinēmatikas uzdevums ir pētīt kustīga triedra $Oxyz$, kas saistīts ar kustīgo telpu, kustību pret kādu citu izvēlētu nekustīgu ortogōnālu triedru ΩXYZ, kas ir saistīts ar *nekustīgo telpu* (53. zīm.).

Triedra $Oxyz$ pozicija pret triedru ΩXYZ ir atkarīga no sešiem parametriem: trīs parametri definē triedra $Oxyz$ sākuma punkta O

poziciju un trīs parametri — triedra $Oxyz$ poziciju punktā O. Tiešām, lai definētu punkta O poziciju triedrā ΩXYZ, ir jādod vektors $\overline{\Omega O}$ vai tā koordinātas, jeb, kas ir tas pats, punkta O koordinātas X_O, Y_O, Z_O triedrā ΩXYZ. Tālāk, lai definētu triedra $Oxyz$ poziciju punktā O, ir jādod trīs vienības vektori **i**, **j**, **k** pa šī koordinātu triedra asīm Ox, Oy, Oz, vai, kas ir tas pats, šo vektoru koordinātas triedrā ΩXYZ, t. i. Ox virziena kosini α_{11}, α_{21}, α_{31}, Oy virziena kosini α_{12}, α_{22}, α_{32} un Oz virziena kosini α_{13}, α_{23}, α_{33}. Punktā P pozicija triedrā ΩXYZ tad ir dota ar vektoriālo vienlīdzību



53. zīm.

$$(1.)\quad \overline{\Omega P} = \overline{\Omega O} + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

kas ir ekvivalenta ar trim skālārām vienlīdzībām

$$(2.)\quad \begin{cases} X = X_O + \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z, \\ Y = Y_O + \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z, \\ Z = Z_O + \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z, \end{cases}$$

kuŗas dabūjam, iepriekšējo vektoriālo vienlīdzību projicējot uz koordinātu triedra ΩXYZ asīm.

Kā zināms, deviņi virzienu kosini nav neatkarīgi savā starpā, bet tie apmierina sešas sakarības:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\,.\,\mathbf{i} &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1, & \mathbf{i}\,.\,\mathbf{j} &= \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0, \\ \mathbf{j}\,.\,\mathbf{j} &= \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1, & \mathbf{j}\,.\,\mathbf{k} &= \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} = 0, \\ \mathbf{k}\,.\,\mathbf{k} &= \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, & \mathbf{k}\,.\,\mathbf{i} &= \alpha_{13}\alpha_{11} + \alpha_{23}\alpha_{21} + \alpha_{33}\alpha_{31} = 0, \end{aligned}$$

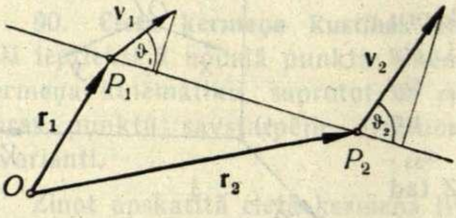
un tā tad tikai trīs virzienu kosini ir neatkarīgi savā starpā, t. i. triedra $Oxyz$ pozicija punktā O ir atkarīga no trim parametriem.

(2.) sistēmas vienlīdzības sauc par cieta ķermeņa kustības formulām, pie kam mēs iedomājamies, ka X_O, Y_O, Z_O un α_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ ir ierobežotas, viennozīmīgas un atvasināmas (vismaz līdz otrai kārtai) laika t funkcijas visā kustības definīcijas laika intervallā.

91. **Cieta ķermeņa kustībai raksturīga īpašība.** — Pierādīsim šādu cieta ķermeņa īpašību: *lai dotā punktu sistēma pārvietotos kā ciets ķermenis, ir nepieciešami un pietiekami, ka jebkuŗu divu punktu ātrumu projekciju uz taisnes, kas savieno šos divus punktus, algebriskās vērtības ir vienādas.*

Apzīmēsim ar P_1 un P_2 cietā ķermeņa divus punktus un ar $\mathbf{r}_1$ un $\mathbf{r}_2$ šo punktu pozicijas vektorus, skaitot no kustīgā triedra $Oxyz$ sākuma punkta O. Tad, kā to rāda 54. zīm.,

$$(P_1P_2)^2 = (\overline{P_1P_2})^2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = const.$$



54. zīm.

Diferencējot šo vienlīdzību, dabūjam

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) = 0$$

vai

$$(3.) \quad \overline{P_1P_2} \cdot \mathbf{v}_2 = \overline{P_1P_2} \cdot \mathbf{v}_1 .$$

Bet no divu vektoru skālārā produkta definīcijas, apzīmējot ar ϑ_1 un ϑ_2 leņķus, ko veido vektori $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$ ar vektoru $\overline{P_1P_2}$, izriet, ka

$$v_2 \cos \vartheta_2 = v_1 \cos \vartheta_1 ,$$

ar ko apgalvotā īpašība ir pierādīta. Lai pārliecinātos, ka minētais noteikums ir pietiekams, atliek iesākt ar pēdējo vienlīdzību un iet atpakaļ uz pirmo.

Pārrakstot (3.) vienlīdzību formā

$$(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \overline{P_1P_2} = 0 ,$$

redzam, ka pierādītā īpašība ir ekvivalenta apgalvojumam, ka *cieta ķermeņa divu punktu ātrumu ģeometriskā diference ir perpendikulāra taisnei, kas savieno šos punktus, resp. tās projekcija uz šīs taisnes ir nulle.*

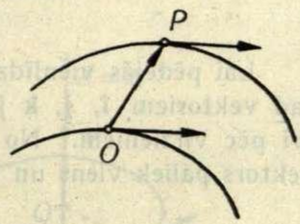
Iekams apskatām cieta ķermeņa vispārīgo kustību, apskatīsim vispirms dažas speciālas cieta ķermeņa kustības, kas vēlāk palīdzēs mums izprast vispārīgo kustību.

17. §. Cieta ķermeņa kustības pamatveidi.

92. **Translācijas kustība.** — Cieta ķermeņa kustību sauc par *translāciju,* ja, ķermenim kustoties, jebkuŗš kustīgās telpas vektors paliek viens un tas pats, t. i. ja tā gaŗums, virziens un vērsums ne-

mainās. Par šādas kustības iespēju ir viegli pārliecināties. Vispirms nav grūti iedomāties cieta ķermeņa kustību, kuŗā kāda trijstūŗa ABC orientētās malas paliek vienas un tās pašas. Ja izvēlas kādu punktu P_1, kas ir nekustīgi saistīts ar cietā ķermeņa trījstūri ABC, tad jebkuŗā citā pozicijā četrstūŗa $ABCP_1$ malas AP_1, BP_1, CP_1 paliek arī vienas un tās pašas. Tālāk, izvēloties vēl kādu citu punktu P_2, kas arī ir nekustīgi saistīts ar trijstūri ABC, un tā tad arī ar punktu P_1, un apskatot četrstūŗa ABP_1P_2 vienu otrai sekojošas pozicijas un spriežot kā agrāk, pārliecināsimies, ka, ķermenim kustoties, orientētais segments P_1P_2 paliek nemainīgs kā pēc gaŗuma (kā tam jābūt cieta ķermeņa kustībā), tā arī pēc tā virziena un vērsuma. Citiem vārdiem sakot, jebkuŗš vektors, kas ir noteikts ar diviem kustīgās telpas punktiem, paliek viens un tas pats. Šī kustība pēc definīcijas tā tad ir translācija.

Ipašība, ka translācijā jebkuŗš kustīgās telpas vektors paliek viens un tas pats, pilnīgi noteic cietā ķermeņa kustību, ja zināma ir viena tā punkta, piem. punkta O, kustība. Tā, ja P apzīmē kaut kādu cietā ķermeņa punktu, tad, ievērojot, ka vektors $\overline{OP}$ paliek viens un tas pats, punkta P trajektoriju dabūjam no punkta O trajektorijas ar ģeometrisko translāciju $\overline{OP}$ (55. zīm.).



55. zīm.

Punkta P kustības (1.) fundāmentālo formulu diferencējot, dabūjam tā vektoriālā ātruma $\dot{P}$ izteiksmi

$$(4.)\qquad \frac{d\overline{OP}}{dt} = \dot{P} = \dot{O} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

Bet tā kā translācijā vektori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ paliek vienmēr vieni un tie paši, tad

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0,$$

un tā tad

$$\dot{P} = \dot{O},$$

t. i. visu cietā ķermeņa punktu vektoriālie ātrumi dotajā momentā ir vienādi savā starpā. Citiem vārdiem sakot, translācijas kustība rakstu-rojama ar noteiktu vektoru, kas ir vienīgi laika t funkcija un kas, no momenta uz momentu mainīdamies, dod visu kustīgās sistēmas punktu kopējo ātrumu. Šo vektoru sauc par *translācijas kustības ātrumu* un tas ir reprezentēts ar kāda kustīgās sistēmas punkta, piem. punkta O, ātrumu $\dot{O}$.

Šī īpašība ir raksturīga translācijai, jo, ja

$$\dot{P} = \dot{O}\,,$$

tad no (4.) formulas izriet, ka

$$x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0.$$

Bet tā kā šai sakarībai jābūt apmierinātai, lai kāds būtu punkts P, tad varam secināt, ka

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0\,.$$

Lai pēdējās vienlīdzības būtu apmierinātas jebkurā momentā t, tad vektoriem $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jābūt konstantiem kā pēc to garumiem, tā arī pēc virzieniem. No pēdējās īpašības savkārt izriet, ka jebkurš vektors paliek viens un tas pats, jo, uzrakstot vektoru $\overline{P_1P_2}$ formā

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1}\,,$$

tas, kā divu konstantu vektoru $\overline{OP_2}$ un $\overline{OP_1}$ ar formu $x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ resp. $x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ diference, ir konstants vektors. Ar to apgalvotā translācijai raksturīgā īpašība ir pierādīta. Tādējādi (1.) formula raksturo translācijas kustību tikai tad, ja vektori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ir konstanti.

Diferencējot vienlīdzību $\dot{P} = \dot{O}$ vēlreiz, dabūjam

$$\ddot{P} = \ddot{O},$$

kas rāda, ka visu cietā ķermeņa punktu vektoriālie paātrinājumi dotajā momentā ir vienādi savā starpā. Šī īpašība turpretim nav raksturīga translācijai. Vektoru $\ddot{O}$, kas ir vienīgi laika t funkcija, sauc par *translācijas kustības paātrinājumu*.

Ja translācijas ātrums ir konstants, un tā tad tā paātrinājums ir nulle, tad visi cietā ķermeņa punkti kustas pa parallēlām taisnēm vienmērīgā kustībā. Šādu cieta ķermeņa kustību sauc par *vienmērīgu translāciju*.

Lai uzrakstītu translācijas kustības formulas Dekarta koordinātu triedrā, pēc translācijas definīcijas par koordinātu triedra $Oxyz$ asīm var izvēlēties trīs savstarpēji perpendikulāras orientētas taisnes, kuŗas vilktas caur kādu punktu O parallēli triedra ΩXYZ attiecīgajām asīm un kuŗu vērsumi ir attiecīgi vienādi ar asu ΩX, ΩY, ΩZ vērsumiem.

Translāciju raksturotāju konstanto vienības vektoru **i**, **j**, **k** koordinātas triedrā ΩXYZ tad ir

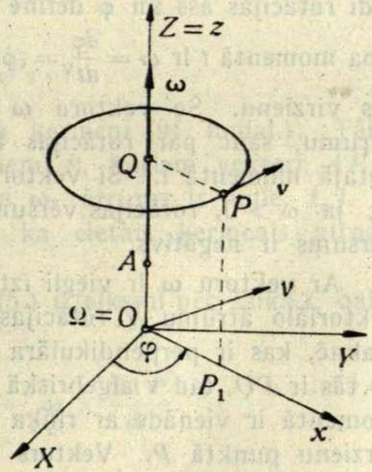
$$1,0,0, \qquad 0,1,0, \qquad 0,0,1,$$

kādēļ (2.) sistēma reducējas šādā vienkāršotā formā

$$X = X_0 + x, \qquad Y = Y_0 + y, \qquad Z = Z_0 + z,$$

kas ir translācijas kustību raksturotājas formulas.

93. **Rotācijas kustība.** — Cieta ķermeņa kustību sauc par *rotāciju*, ja divi šī ķermeņa punkti, un tā tad arī visi citi tā punkti, kas atrodas uz taisnes, kuŗa savieno šos divus punktus, paliek nekustīgi. Šo nekustīgo taisni sauc par *rotācijas asi*.



56. zīm.

Ja izvēlas kādu punktu P ārpus rotācijas ass un velk caur to perpendikulu PQ pret asi (56. zīm.), tad, ķermenim kustoties, pēc cieta ķermeņa definīcijas, PQ paliek vienmēr ortogōnāls asij un tā gaŗums arī nemainās. Tādējādi visi cietā ķermeņa punkti, kas neatrodas uz rotācijas ass, apraksta šai asij perpendikulārās plaknēs cirkulāras trajektorijas, kuŗu centri ir ass krustošanās punkti ar šīm plaknēm.

Cieta ķermeņa pozicija jebkuŗā momentā ir noteikta ar viena tā punkta P, kas neatrodas uz rotācijas ass, poziciju, vai, kas ir tas pats, ar plaknes p, kas iet caur punktu P un rotācijas asi, poziciju. Plaknes p poziciju parasti fiksē ar leņķi φ, ko veido šī plakne ar kādu iepriekš izvēlētu, pret triedru ΩXYZ nekustīgu plakni Π

(piem. $X\Omega Z$ plakni), kas vilkta caur rotācijas asi. Leņķi φ uzskata par pozitīvu vērsumā, kas ir vienāds ar punkta P pozitīvo cirkulācijas vērsumu ap asi, uz kuŗas iepriekš izvēlēts kāds pozitīvs vērsums.

Ķermenim rotējot, plaknes p anōmalija φ kļūst laika t funkcija, kuŗu iedomāsimies par viennozīmīgu, nepārtrauktu un atvasināmu (vismaz līdz otrai kārtai). Tādēļ, ja laika intervallā Δt plaknes p anōmalija pieaug par $\Delta\varphi$, kas ir visu cietā ķermeņa punktu aprakstīto cirkulāro trajektoriju loku centrālais leņķis, tad izteiksme

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

rāda, ka rotācijas kustībā jebkuŗā momentā visiem cietā ķermeņa punktiem ir viens un tas pats leņķiskais ātrums $\dot{\varphi}$. Rotācijas ass kopā ar leņķisko ātrumu $\dot{\varphi}$, uzskatot to par pozitīvu vai negātīvu atkarībā no tā, vai punkta P rotācija ap asi norit pozitīvā vai negātīvā vērsumā, pilnīgi noteic cieta ķermeņa rotācijas kustību. Tādējādi rotācijas ass un $\dot{\varphi}$ definē kādu vektoru $\boldsymbol{\omega}$, kuŗa algebriskā vērtība momentā t ir $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ un virziens ir vienāds ar rotācijas ass virzienu. Šo vektoru $\boldsymbol{\omega}$ ar konstantu virzienu, bet mainīgu gaŗumu, sauc par rotācijas kustības vektoriālo leņķisko ātrumu dotajā momentā t. Šī vektora vērsums nosaka rotācijas vērsumu, jo, ja $\omega > 0$, rotācijas vērsums ir pozitīvs, bet ja $\omega < 0$, rotācijas vērsums ir negātīvs.

Ar vektoru $\boldsymbol{\omega}$ ir viegli izteikt jebkuŗa cietā ķermeņa punkta P vektoriālo ātrumu $\mathbf{v}$ rotācijas kustībā. Tā kā punkts P kustas plaknē, kas ir perpendikulāra rotācijas asij, un šī punkta attālums no tās ir PQ, tad $\mathbf{v}$ algebriskā vērtība ir $\dot{\varphi}QP$ un tā virziens jebkuŗā momentā ir vienāds ar riņķa līnijas, kuŗas radijs ir QP, tangentes virzienu punktā P. Vektors $\mathbf{v}$ tā tad ir perpendikulārs vektoram $\boldsymbol{\omega}$ un attiecībā pret to tas ir pozitīvi orientēts, citiem vārdiem sakot, $\mathbf{v}$ ir vektora $\boldsymbol{\omega}$ moments pret centru P, t. i.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{QP} = \overline{PQ} \times \boldsymbol{\omega} .$$

Punkts Q, kā no punkta P pret rotācijas asi vilkta perpendikula pēdas punkts, mainās līdz ar punktu P. Lai šo mainīgo punktu eliminētu, izvēlēsimies uz ass kādu nekustīgu punktu, piem. punktu A, tad

$$\overline{QP} = \overline{QA} + \overline{AP} .$$

Bet tā kā vektori $\boldsymbol{\omega}$ un $\overline{QA}$ ir paralleli, tad to vektoriālais produkts ir nulle, un tā tad punkta P vektoriālo ātrumu $\mathbf{v}$ ar vektoru $\boldsymbol{\omega}$ var uzrakstīt šādi:

(5.) $$\mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP}.$$

Ātruma (5.) izteiksme ir raksturīga cieta ķermeņa rotācijas kustībai, t. i. ja kāda ķermeņa punktu ātrumus var izteikt ar (5.) formulu, tad šis ķermenis ir ciets ķermenis un tas atrodas rotācijas kustībā. Tiešām, pēc (5.) formulas šī ķermeņa divu punktu P_1 un P_2 ātrumi ir

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP_1}, \qquad \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP_2},$$

un tā tad

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \overline{P_1P_2}.$$

Bet tā kā $\boldsymbol{\omega} \times \overline{P_1P_2}$ ir perpendikulārs vektoram $\overline{P_1P_2}$, tad, reizinot iepriekšējās vienlīdzības abas puses skālāri ar $\overline{P_1P_2}$, dabūjam, ka

$$(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \,.\, \overline{P_1P_2} = 0$$

vai

$$\overline{P_1P_2} \,.\, \mathbf{v}_2 = \overline{P_1P_2} \,.\, \mathbf{v}_1.$$

Šī pēdējā sakarība raksturo cietu ķermeni (91. nodal.). Tālāk (5.) formula rāda, ka visiem punktiem P, kuŗiem vektori $\overline{AP}$ ir paralleli konstanta virziena vektoram $\boldsymbol{\omega}$, ātrums ir nulle, t. i. tie paliek nekustīgi. Bet tas nozīmē, ka cietais ķermenis atrodas rotācijas kustībā.

Atvasinot punkta P ātruma $\mathbf{v}$ (5.) izteiksmi pēc laika t, dabūjam tā paātrinājuma $\mathbf{a}$ izteiksmi

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{AP} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\overline{AP}}{dt}.$$

Bet tā kā

$$\frac{d\overline{AP}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{QP},$$

tad

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{AP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overline{QP})$$

vai

(6.) $$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{AP} - \omega^2\, \overline{QP}.$$

Pēdējā vienlīdzība rāda, ka punkta P paātrinājumu $\mathbf{a}$ var sadalīt divos komponentos: tangentiālā komponentā

$$\mathbf{a}_t = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{AP},$$

kas atrodas punkta P cirkulārās trajektorijas plaknē, un normālā komponentā

$$\mathbf{a}_n = -\omega^2 \overline{QP},$$

kas ir virzīts pret cirkulārās trajektorijas centru Q.

Ja leņķiskais ātrums $\boldsymbol{\omega}$ ir konstants (kā pēc virziena, tā arī pēc garuma), tad ikkurš cietā kermeņa punkts kustas vienmērīgā cirkulārā kustībā, un cieta ķermeņa kustību sauc par *vienmērīgu rotāciju.* Tādā gadījumā jebkura punkta paātrinājuma $\mathbf{a}$ tangentiālais komponents $\mathbf{a}_t = 0$, un tā tad šī punkta paātrinājums $\mathbf{a}$ reducējas par tā normālo komponentu

$$\mathbf{a}_n = -\omega^2 \overline{QP}.$$

94. **Rotācijas analitiskās izteiksmes.** — Lai pēc iespējas vienkāršotu rotācijas analitiskās formulas, izvēlēsimies nekustīgo triedru ΩXYZ tā, lai tā ΩZ-ass sakrīt ar rotācijas asi un sākuma punkts Ω būtu kāds patvaļīgs tās punkts, ar kuŗu sakrīt arī kustīgā triedra $Oxyz$ sākuma punkts O. Tālāk, izvēloties Oz-asi tā, lai arī tā sakrīt ar ΩZ-asi, plakne $X\Omega Y$ sakrīt ar plakni xOy. Kustīgā triedra pozicijas definēšanai pret nekustīgo triedru pietiek dot leņķi φ, ko veido ΩX un Ox asis, uzskatot to par pozitīvu, ja rotācijas vērsums ap asi ir pozitīvs. Tā tad

$$\sphericalangle (X, x) = \varphi(t), \qquad \sphericalangle (X, y) = \varphi(t) + \frac{\pi}{2}$$

un vektoru $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ koordinātas attiecīgi ir

$$\begin{array}{lll} \alpha_{11} = \cos\varphi, & \alpha_{21} = \sin\varphi, & \alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{12} = -\sin\varphi, & \alpha_{22} = \cos\varphi, & \alpha_{32} = 0, \\ \alpha_{13} = 0, & \alpha_{23} = 0, & \alpha_{33} = 1. \end{array}$$

Tādējādi (2.) sistēmas formulas, kas definē cieta ķermeņa kustību, rotācijas gadījumā iegūst formu:

$$\begin{aligned} X &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ Y &= x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ Z &= z. \end{aligned}$$

Uzrakstīsim vēl punkta P ātruma $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP}$ koordinātu izteiksmes kādā koordinātu triedrā $O_1x_1y_1z_1$, kas var būt kā kustīgs, tā nekustīgs pret triedru ΩXYZ vai $Oxyz$.

Ja vektora $\boldsymbol{\omega}$, ar koordinātām p, q, r, sākuma punkta A koordinātas apzīmē ar ξ_1, η_1, ζ_1, punkta P koordinātas ar ξ, η, ζ un vektora $\mathbf{v}$ koordinātas ar v_ξ, v_η, v_ζ, tad

$$\begin{aligned} v_\xi &= (\zeta - \zeta_1)q - (\eta - \eta_1)r, \\ v_\eta &= (\xi - \xi_1)r - (\zeta - \zeta_1)p, \\ v_\zeta &= (\eta - \eta_1)p - (\xi - \xi_1)q. \end{aligned}$$

Speciālie gadījumi: 1° Triedrs $O_1x_1y_1z_1$ sakrīt ar triedru ΩXYZ. Iedomājoties bez tam vēl vektora $\boldsymbol{\omega}$ sākuma punktu A sakrītam ar punktu Ω, dabūjam, ka

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0, \\ &p = q = 0, \quad r = \omega, \\ &\xi = X, \quad \eta = Y, \quad \zeta = Z; \end{aligned}$$

un tā tad

$$\begin{aligned} v_X &= -\omega Y, \\ v_Y &= \omega X, \\ v_Z &= 0. \end{aligned}$$

2° Triedrs $O_1x_1y_1z_1$ ir nekustīgi saistīts ar triedru $Oxyz$, pie kam abu triedru sākuma punkti O un O_1 sakrīt ar vektora $\boldsymbol{\omega}$ sākuma punktu A. Tādā gadījumā $\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0$, un ar jauniem apzīmējumiem

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z$$

vektora $\mathbf{v}$ koordinātu izteiksmes ir šādas:

$$\begin{aligned} v_x &= qz - ry, \\ v_y &= rx - pz, \\ v_z &= py - qx. \end{aligned}$$

Beidzot, ja abu triedru asis sakrīt, tad

$$p = q = 0, \quad r = \omega$$

un

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0.$$

Analogi atrodamas punkta P paātrinājuma koordinātu izteiksmes nekustīgā un kustīgā koordinātu triedrā. Ja par triedra $O_1x_1y_1z_1$ sākuma punktu izvēlas nekustīgā triedra ΩXYZ sākuma punktu, t. i. $O_1 = \Omega$, un par O_1z_1-asi rotācijas asi un ja punktu P un A koordinātas apzīmē attiecīgi ar ξ, η, ζ un ξ_1, η_1, ζ_1, bet vektora $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ koordinātas ar $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, tad, apzīmējot punkta P paātrinājuma **a** koordinātas triedrā $O_1x_1y_1z_1$ ar a_ξ, a_η, a_ζ, (6.) vienlīdzība rāda, ka

$$
\begin{aligned}
a_\xi &= (\zeta - \zeta_1)\dot{q} - (\eta - \eta_1)\dot{r} - \omega^2(QP)_\xi ,\\
a_\eta &= (\xi - \xi_1)\dot{r} - (\zeta - \zeta_1)\dot{p} - \omega^2(QP)_\eta ,\\
a_\zeta &= (\eta - \eta_1)\dot{p} - (\xi - \xi_1)\dot{q} - \omega^2(QP)_\zeta .
\end{aligned}
$$

Speciālie gadījumi: 1° Triedrs $O_1x_1y_1z_1$ sakrīt ar nekustīgo triedru ΩXYZ un punkts A sakrīt ar punktu Ω, t. i. $A = \Omega$. Tādā gadījumā

$$
\xi = X , \quad \eta = Y , \quad \zeta = Z ,
$$

$$
\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0 , \quad \dot{p} = \dot{q} = 0 , \quad \dot{r} = \dot{\omega} ;
$$

un

$$
\begin{aligned}
a_X &= -\dot{\omega}Y - \omega^2 X ,\\
a_Y &= \dot{\omega}X - \omega^2 Y ,\\
a_Z &= 0 .
\end{aligned}
$$

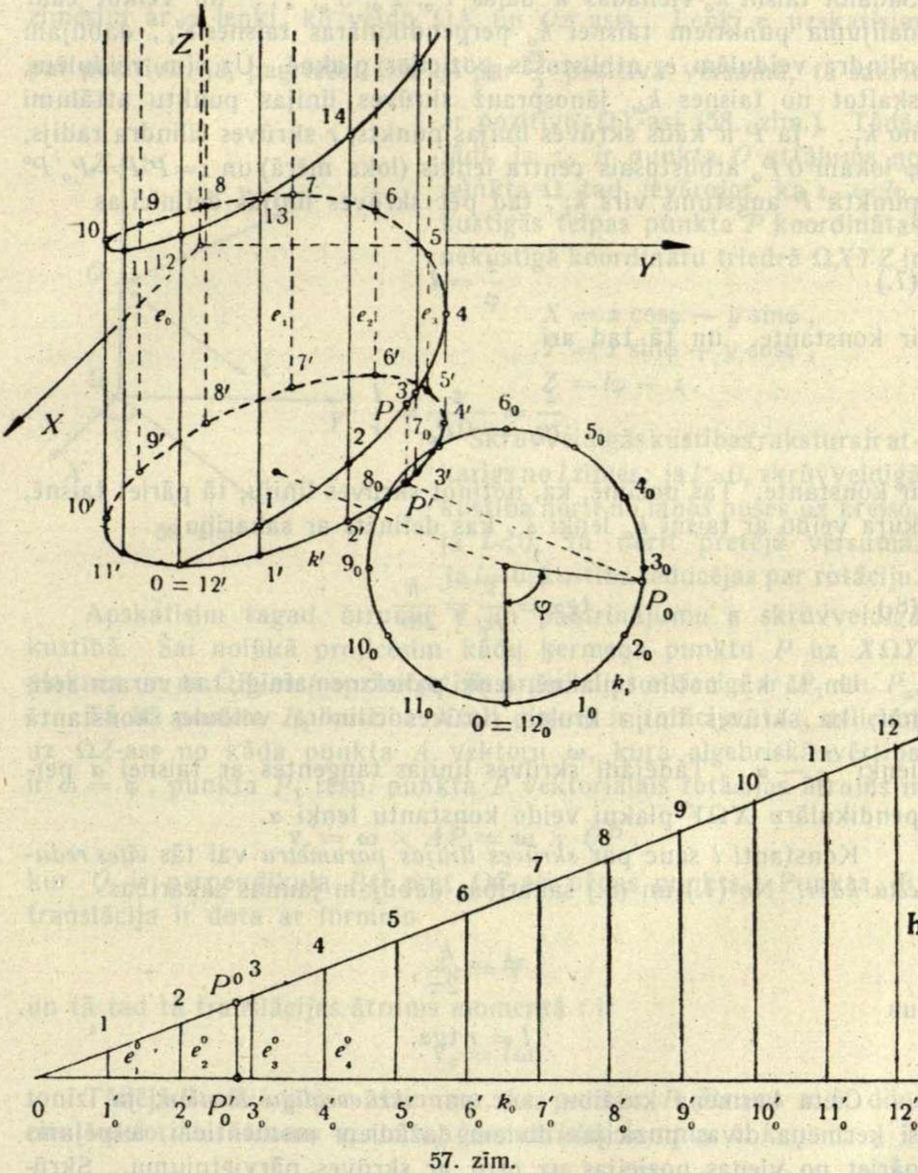
2° Triedrs $O_1x_1y_1z_1$ sakrīt ar kustīgo triedru $Oxyz$. Šai gadījumā a_x, a_y, a_z izteiksmes kustīgā triedrā $Oxyz$ dabūjamas no iepriekšējām a_X, a_Y, a_Z izteiksmēm, apmainot tanīs X, Y, Z ar x, y, z.

Speciālā gadījumā, kad rotācija ir vienmērīga, t. i. $\omega = \dot{\varphi} = const.$ un $\dot{\omega} = 0$, paātrinājuma koordinātas triedrā $Oxyz$ ir šādas:

$$
a_x = -\omega^2 x , \quad a_y = -\omega^2 y , \quad a_z = 0 .
$$

95. Skrūvveidīga kustība. — Ja kāds punkts P kustas ar konstantu ātrumu pa kādu taisni a, kamēr tā rotē ar konstantu ātrumu ap kādu tai parallēlu taisni a', tad punkts P apraksta līkni, ko sauc par *skrūves līniju*. Šī līnija atrodas uz rotācijas cilindra, ko veido taisne a un ko sauc par *skrūves cilindru*. Taisni a' sauc par *skrūves līnijas asi*. 57. zīmējumā ir redzams $X\Omega Y$ plaknei perpendikulāra cilindra un kādas šī cilindra skrūves līnijas slīpleņķa aksonometriskais attēls. Nogriezni h, kādu noiet punkts P pa taisni a, kamēr tā vienreiz apgriežas ap taisni a', sauc par *skrūves līnijas vītes kāpi*. Ja skrūves cilindra pamata riņķa līniju k_1 sadala n vienādās daļās (57. zīm. $n = 12$) un kustīgā punkta P sākuma poziciju apzīmē ar 0, tad, taisnei a pēc rotācijas nonākot dalījuma punktā 1′, punkts P ir pavirzījies pa šo taisni par gabalu $\frac{h}{n}$, taisnei a nonākot pozicijā 2′, punkts P ir atkal pavirzījies par $\frac{h}{n}$, u. t. t. Tādā kārtā dabūjam punkta P dažādās pozicijas 1, 2, ...

Iedomāsimies novērotāju, kuŗa kāju un galvas līnija sakrīt ar rotācijas cilindra asi a', pie kam vērsums no kājām uz galvu ir punkta P kustības vērsums pa taisni a. Skrūves līniju sauc par



57. zīm.

labēju vai par *kreisēju* atkarībā no tā, vai novērotājam punkta P kustība liekas noritam no labās puses uz kreiso vai pretējā vērsumā. 57. zīmējumā attēlotā skrūves līnija ir labēja skrūves līnija.

Pāršķeļot skrūves cilindru pa kādu tā veiduli un notinot šo cilindru plaknē, tā pamata riņķa līnija k_1 pāriet taisnē k_o, kuŗas garumu u var konstruēt, piem., ar Kochanska tuvināšanas metodi[1]). Sadalot taisni k_o vienādās n daļās $1'_o, 2'_o, 3'_o, \ldots$ un velkot caur dalījuma punktiem taisnei k_o perpendikulāras taisnes e^o_i, dabūjam cilindra veidulēm e_i atbilstošās pozicijas plaknē. Uz šīm veidulēm, skaitot no taisnes k_o, jānosprauž skrūves līnijas punktu attālumi no k_1. Ja P ir kāds skrūves līnijas punkts, r skrūves cilindra radijs, φ lokam $0 P_o$ atbilstošais centra leņķis (loka mērā) un $z = P'P = P_o'P^o$ punkta P augstums virs k_1, tad pēc skrūves līnijas definīcijas

$$\frac{z}{\varphi} = l \tag{7.}$$

ir konstante, un tā tad arī

$$\frac{z}{r\varphi} = \frac{z}{\smile 0P_o} = \frac{l}{r}$$

ir konstante. Tas nozīmē, ka, notinot skrūves līniju, tā pāriet taisnē, kuŗa veido ar taisni k_o leņķi α, kas definēts ar sakarību

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z}{r\varphi} = \frac{h}{2\pi r}. \tag{8.}$$

Un tā kā, notinot plaknē, leņķi paliek nemainīgi, tad varam secināt, ka skrūves līnija krusto skrūves cilindra veidules konstantā leņķī $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Tādējādi skrūves līnijas tangentes ar taisnei a perpendikulāru $X\Omega Y$ plakni veido konstantu leņķi α.

Konstanti l sauc par *skrūves līnijas parametru* vai tās *vītes reducētu kāpi.* No (7.) un (8.) sakarības dabūjam jaunas sakarības

$$l = \frac{h}{2\pi},$$

un

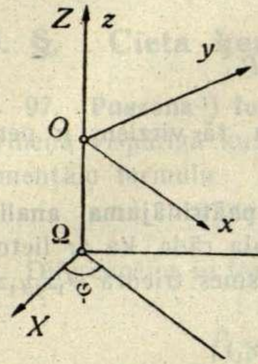
$$l = r \operatorname{tg}\alpha.$$

Cieta ķermeņa kustību sauc par *skrūvveidīgu kustību*, ja, zinot šī ķermeņa divas pozicijas diviem dažādiem momentiem, iespējams pāriet no vienas pozicijas uz otru ar skrūves pārvietojumu. Skrūvei jābūt ar nekustīgu asi un konstantu vītes kāpi.

---

[1]) Skat. E. Müller, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie,* 4. Aufl., Leipzig, Teubner, 1936, 34. lpp.

Lai uzrakstītu kāda skrūves līnijas punkta koordinātu izteiksmes, izvēlēsimies par nekustīgo triedru ΩXYZ kādu no kustīgā triedra $Oxyz$, kuŗa Oz-ass sakrīt ar rotācijas cilindra asi, pozicijām un apzīmēsim ar φ leņķi, ko veido ΩX un Ox asis. Leņķi φ uzskatīsim par pozitīvu, ja, pagriežot ΩX-asi par $\frac{\pi}{2}$ pozitīvā vērsumā, tā sakrīt ar pozitīvo ΩY-asi (58. zīm.). Tādējādi, ja z_0 ir punkta O attālums no punkta Ω, tad, ievērojot, ka $z_0 = l\varphi$, kustīgās telpas punkta P koordinātas nekustīgā koordinātu triedrā ΩXYZ ir



58. zīm.

$$X = x\cos\varphi - y\sin\varphi\,,$$
$$Y = x\sin\varphi + y\cos\varphi\,,$$
$$Z = l\varphi + z\,.$$

Skrūvveidīgās kustības raksturs ir atkarīgs no l zīmes: ja $l>0$, skrūvveidīgā kustība norit no labās puses uz kreiso, ja $l<0$, tā norit pretējā vērsumā. Ja $l=0$, kustība reducējas par rotāciju.

Apskatīsim tagad ātrumu $\mathbf{v}$ un paātrinājumu $\mathbf{a}$ skrūvveidīgā kustībā. Šai nolūkā projicēsim kādu ķermeņa punktu P uz $X\Omega Y$ plaknes un uz ΩZ-ass, apzīmējot šīs projekcijas attiecīgi ar P_1 un P_z.

Tā kā punkta P_1 kustība $X\Omega Y$ plaknē ir rotācija, tad, atliekot uz ΩZ-ass no kāda punkta A vektoru $\boldsymbol{\omega}$, kuŗa algebriskā vērtība ir $\omega = \dot{\varphi}$, punkta P_1 resp. punkta P vektoriālais rotācijas ātrums ir

$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{QP}\,,$$

kur Q ir perpendikula PQ pret ΩZ-asi pēdas punkts. Punkta P_z translācija ir dota ar formulu

$$z_0 = l\varphi\,,$$

un tā tad tā translācijas ātrums momentā t ir

$$\mathbf{v}_\varphi = l\boldsymbol{\omega}\,.$$

Tādējādi nākam pie atzinuma, ka punkta P ātrums $\mathbf{v}$ ir divu citu vektoriālu ātrumu $\mathbf{v}_r$ un $\mathbf{v}_\varphi$ ģeometriska summa, t. i.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\varphi + \mathbf{v}_r = l\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP}\,. \tag{9.}$$

Pēdējā formula rāda, ka $\mathbf{v}$ ir kādas vektoru sistēmas, kuŗas rezultante ir $\boldsymbol{\omega}$ un kuŗas rezultētājs moments pret centru A ir $\mathbf{v}_\varphi$, rezultētājs moments pret centru P.

Paātrinājumu $\mathbf{a}$ skrūvveidīgā kustībā dabūsim kā tā ātruma $\mathbf{v}$ atvasinājumu:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = l\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{AP} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\overline{AP}}{dt}.$$

Bet, ievērojot, ka $\frac{d\overline{AP}}{dt} = \mathbf{v}$, pēdējā izteiksme pēc pārveidojumiem iegūst formu

$$\mathbf{a} = l\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{AP} - \omega^2\, \overline{QP}. \tag{10.}$$

Ja $\omega = \dot{\varphi} = const.$, tad $\mathbf{a} = -\omega^2\,\overline{QP}$ un tā virziens ir perpendikulārs rotācijas asij.

96. **Skrūvveidīgas kustības ātruma un paātrinājuma analitiskās izteiksmes kustīgā triedrā.** — (9.) formula rāda, ka ar lietotiem apzīmējumiem ātruma $\mathbf{v}$ koordinātu izteiksmes triedrā $O_1x_1y_1z_1$ ir šādas:

$$\begin{aligned} v_\xi &= lp + q(\zeta - \zeta_1) - r(\eta - \eta_1), \\ v_\eta &= lq + r(\xi - \xi_1) - p(\zeta - \zeta_1), \\ v_\zeta &= lr + p(\eta - \eta_1) - q(\xi - \xi_1). \end{aligned}$$

Speciālā gadījumā, kad triedrs $O_1x_1y_1z_1$ ir nekustīgi saistīts ar triedru $Oxyz$ un punkti O un O_1 abi sakrīt ar punktu A, t. i. $A = O = O_1$, punkta P ātruma $\mathbf{v}$ koordinātām šai triedrā ir šādas izteiksmes:

$$\begin{aligned} v_x &= lp + qz - ry, \\ v_y &= lq + rx - pz, \\ v_z &= lr + py - qx. \end{aligned}$$

Punkta P paātrinājuma $\mathbf{a}$ koordinātas triedrā $O_1x_1y_1z_1$, kā to rāda (10.) formula, ir šādas:

$$\begin{aligned} a_\xi &= l\dot{p} + \dot{q}(\zeta - \zeta_1) - \dot{r}(\eta - \eta_1) - \omega^2\,(QP)_\xi, \\ a_\eta &= l\dot{q} + \dot{r}(\xi - \xi_1) - \dot{p}(\zeta - \zeta_1) - \omega^2\,(QP)_\eta, \\ a_\zeta &= l\dot{r} + \dot{p}(\eta - \eta_1) - \dot{q}(\xi - \xi_1) - \omega^2\,(QP)_\zeta. \end{aligned}$$

Ja triedra $O_1x_1y_1z_1$ asis sakrīt ar kustīgā triedra $Oxyz$ attiecīgajām asīm un $A = O = O_1$, tad

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0, \\ &\dot{p} = \dot{q} = 0, \quad \dot{r} = \dot{\omega}, \\ &\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z. \end{aligned}$$

Tādējādi kustīgā triedrā $Oxyz$ paātrinājuma **a** koordinātas ir šādas:

$$a_x = -\dot{\omega} y - \omega^2 x,$$
$$a_y = \dot{\omega} x - \omega^2 y$$
$$a_z = l\dot{\omega}.$$

18. §. Cieta ķermeņa vispārīga momentāna kustība.

97. **Puasona [1]) formulas.** — Ātrumu sadalījuma pētīšanu cieta ķermeņa vispārīgā kustībā iesāksim ar cieta ķermeņa kustības fundāmentālo formulu

$$\overline{\Omega P} = \overline{\Omega O} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Diferencējot šo formulu pēc laika t, dabūjam

$$\dot{P} = \dot{O} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}.$$

Punkta P ātruma pēdējā izteiksmē sastopami trīs vienības vektoru **i**, **j**, **k** atvasinājumi $\frac{d\mathbf{i}}{dt}, \frac{d\mathbf{j}}{dt}, \frac{d\mathbf{k}}{dt}$. Izteiksim šos atvasinātos vektorus kā vektoru **i**, **j**, **k** funkcijas, panākot ar to pēdējās formulas labās puses neatkarību no koordinātu triedra izvēles.

Atsaucoties uz īpašību, ka kāda vektora **v** un vienības vektora **u** skālārais produkts reprezentē dotā vektora **v** komponenta pa orientēto taisni, kas noteikta ar vienības vektoru **u**, algebrisko vērtību, vektora $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ komponentu pa koordinātu triedra asīm algebriskās vērtības var uzrakstīt kā

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k},$$

un tā tad

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{k}\right)\mathbf{k}. \tag{11.}$$

Bet tā kā vektori **i**, **j**, **k** ik pa divi ir savstarpēji perpendikulāri, tad

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1,$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0.$$

---

[1]) S. D. Poisson (1781.—1840. g.). Minētās formulas atrodamas viņa klasiskajā darbā *Traité de mécanique,* Paris, 1831.

Diferencējot šīs sakarības pēc laika t, dabūjam identitātes

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{i} = 0\,, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{j} = 0\,, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{k} = 0\,,$$

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0\,, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{j} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0\,, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{i}}{dt} = 0\,,$$

kuŗas ievērojot, (11.) formula var tikt pārrakstīta šādi:

$$\text{(11'.)} \qquad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j}\right) \mathbf{j} - \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i}\right) \mathbf{k}\,.$$

Bet tā kā vienības vektori **i**, **j**, **k** apmierina arī sakarības

$$\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}\,, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}\,, \quad \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i}\,,$$

tad (11'.) formulu var pārrakstīt formā

$$\text{(12.)} \qquad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left[\left(\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j}\right) \mathbf{k}\right] \times \mathbf{i}.$$

Šī formula rāda, ka iekavu otrs loceklis ir iegūts no pirmā locekļa, cirkulāri permūtējot **i**, **j**, **k**. Izdarot ar iekavu otru locekli vēlreiz šādu cirkulāru permūtāciju, dabūjam locekli

$$\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k}\right) \mathbf{i}\,,$$

bet reizinot šo locekli vektoriāli ar **i**, dabūjam identiski nulli, jo

$$\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k}\right) (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) = 0\,.$$

Tādēļ, lai (12.) formula būtu simmetriskāka, varam tai pieskaitīt pēdējo locekli, kas ir identiski vienāds ar nulli. Tādā kārtā dabūsim $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ izteiksmei šādu simmetrisku formu:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \left[\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j}\right) \mathbf{k}\right] \times \mathbf{i}\,.$$

Saprotams, ka vektoriem $\frac{d\mathbf{j}}{dt}$, $\frac{d\mathbf{k}}{dt}$ ir šādas analogas formas:

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \left[\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\,.\,\mathbf{k}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\,.\,\mathbf{i}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\,.\,\mathbf{j}\right)\mathbf{k}\right] \times \mathbf{j},$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \left[\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\,.\,\mathbf{k}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\,.\,\mathbf{i}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\,.\,\mathbf{j}\right)\mathbf{k}\right] \times \mathbf{k}.$$

Apzīmējot ar $\boldsymbol{\omega}$ vektoru

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\,.\,\mathbf{k}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\,.\,\mathbf{i}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\,.\,\mathbf{j}\right)\mathbf{k},$$

dabūjam vektoru **i**, **j**, **k** atvasinājumiem formulas

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}, \tag{13.}$$

kuŗas sauc par *Puasona formulām.*

Ja vektora $\boldsymbol{\omega}$ koordinātas kustīgā triedrā $Oxyz$ apzīmējam ar p, q, r, tad dabūjam tām izteiksmes

$$p = \frac{d\mathbf{j}}{dt}\,.\,\mathbf{k} = -\frac{d\mathbf{k}}{dt}\,.\,\mathbf{j} = \dot{\alpha}_{12}\,\alpha_{13} + \dot{\alpha}_{22}\,\alpha_{23} + \dot{\alpha}_{32}\,\alpha_{33},$$

$$q = \frac{d\mathbf{k}}{dt}\,.\,\mathbf{i} = -\frac{d\mathbf{i}}{dt}\,.\,\mathbf{k} = \dot{\alpha}_{13}\,\alpha_{11} + \dot{\alpha}_{23}\,\alpha_{21} + \dot{\alpha}_{33}\,\alpha_{31},$$

$$r = \frac{d\mathbf{i}}{dt}\,.\,\mathbf{j} = -\frac{d\mathbf{j}}{dt}\,.\,\mathbf{i} = \dot{\alpha}_{11}\,\alpha_{12} + \dot{\alpha}_{21}\,\alpha_{22} + \dot{\alpha}_{31}\,\alpha_{32}.$$

98. **Ātrums cieta ķermeņa vispārīgā kustībā.** — Ievietojot punkta P ātruma formulā $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$, $\frac{d\mathbf{j}}{dt}$, $\frac{d\mathbf{k}}{dt}$ vietā to izteiksmes no (13.) sistēmas, dabūjam tai izteiksmi

$$\dot{P} = \dot{O} + \boldsymbol{\omega} \times (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k});$$

bet tā kā

$$x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overline{OP},$$

tad

$$\dot{P} = \dot{O} + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OP}.$$

Ar jauniem apzīmējumiem

$$\dot{O} = \mathbf{v}_O, \quad \dot{P} = \mathbf{v}_P$$

punkta P ātruma formula iegūst tās galīgo formu

$$\text{(14.)} \qquad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OP}\,.$$

(14.) formulas ģeometriskā interpretācija ir šāda: ja punkts O ir kāds cieta ķermeņa punkts, tad jebkuŗa cita ķermeņa punkta P ātrums ir vektoru sistēmas, ar rezultanti $\boldsymbol{\omega}$ un rezultētāju momentu $\mathbf{v}_O$ pret centru O, rezultētājs moments pret centru P.

Pēdējā formulā vektori $\mathbf{v}_O$ un $\boldsymbol{\omega}$ ir vienīgi laika t funkcijas, un šī ātruma formula ir raksturīga cieta ķermeņa kustībai. Tiešām, ja doti ir divi vektori $\mathbf{v}_O$ un $\boldsymbol{\omega}$ vienīgi kā laika t funkcijas un ja ķermeņa punktu ātrumi var tikt izteikti ar pēdējo formulu, tad viegli pārliecināties, ka šī ķermeņa punktu savstarpējie attālumi kustībā paliek nemainīgi.

Vektors $\boldsymbol{\omega}$ ir neatkarīgs no kustīgā koordinātu triedra sākuma punkta O, bet tas ir atkarīgs vienīgi no tā asu virzieniem. Tādēļ, izvēloties citu triedra sākuma punktu R, dabūjam, ka

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_R + \boldsymbol{\omega} \times \overline{RP}\,.$$

Tādējādi vektors $\boldsymbol{\omega}$ un kāda cieta ķermeņa punkta, piem. O, ātrums $\mathbf{v}_O$ pilnīgi noteic ātrumu sadalījumu kustīgā triedrā dotajā momentā t.

Tā tad nekustīgā triedrā ΩXYZ cieta ķermeņa kustība ir pilnīgi definēta, ja kustīgā triedrā $Oxyz$ ir izvēlēts kāds punkts, piem. punkts O, un ja ir doti divi vektori $\mathbf{v}_O$ un $\boldsymbol{\omega}$ vienīgi kā laika t funkcijas. Šos divus vektorus sauc par cieta ķermeņa kustības *raksturīgiem* vektoriem pret centru O.

(14.) ģeometriskā formula dod iespēju uzrakstīt vektora $\mathbf{v}_P$ koordinātas jebkuŗā koordinātu triedrā $O_1x_1y_1z_1$, kuŗu attiecīgi specificējot, varam dabūt $\mathbf{v}_P$ koordinātas kustīgā un nekustīgā koordinātu triedrā.

Uzrakstīsim $\mathbf{v}_P$ koordinātas kustīgā triedrā $Oxyz$. Ja ξ, η, ζ ir $\mathbf{v}_O$ koordinātas un p, q, r vektora $\boldsymbol{\omega}$ koordinātas, tad vektora $\mathbf{v}_P$ koordinātām v_x, v_y, v_z triedrā $Oxyz$ ir šādas izteiksmes[1]):

[1]) (15.) formulu sistēmu ir devis Eulers savā darbā, kas publicēts *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1750.

$$
(15.)\quad \begin{cases} v_x = \xi + qz - ry\,, \\ v_y = \eta + rx - pz\,, \\ v_z = \zeta + py - qx\,. \end{cases}
$$

Punkta P ātruma $\mathbf{v}_P$ koordinātu atrašanai nekustīgā triedrā ΩXYZ jāprojicē (14.) vektoriālā formula uz šī triedra asīm. Vektora $\mathbf{v}_O$ koordinātas šai triedrā ir $\dot{X}_O$, $\dot{Y}_O$, $\dot{Z}_O$, bet vektora $\boldsymbol{\omega}$ koordinātu P, Q, R atrašanai ir jāprojicē šis vektors uz triedra ΩXYZ asīm ΩX, ΩY, ΩZ, dabūjot tām šādas izteiksmes:

$$
P = \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k}\right) \alpha_{11} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i}\right) \alpha_{12} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j}\right) \alpha_{13}\,,
$$

$$
Q = \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k}\right) \alpha_{21} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i}\right) \alpha_{22} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j}\right) \alpha_{23}\,,
$$

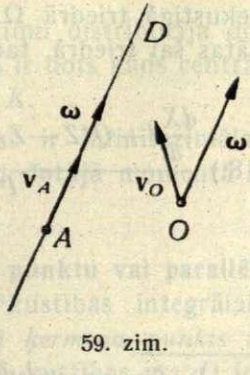
$$
R = \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k}\right) \alpha_{31} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i}\right) \alpha_{32} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j}\right) \alpha_{33}\,.
$$

Zinot vektoru $\mathbf{v}_O$ un $\boldsymbol{\omega}$ koordinātas, protams, nav nekādu grūtību punkta P ātruma koordinātu uzrakstīšanai.

99. **Momentānā kustības ass un tangentiālā skrūvveidīgā kustība.** — Iekams apskatām cieta ķermeņa vispārīgo momentāno kustību, apskatīsim divus speciālus gadījumus.

1⁰ Iedomāsimies, ka $\boldsymbol{\omega} = 0$, tad $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O$, lai kāds būtu punkts P. Citiem vārdiem sakot, visiem cieta ķermeņa punktiem šai momentā ir viens un tas pats ātrums. Tādā gadījumā saka, ka *dotā kustība apskatītajā momentā ir tangentiāla kādai translācijai.*

2⁰ Iedomāsimies, ka $\mathbf{v}_O = 0$, tad $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP}$ jebkuŗam punktam P. Cieta ķermeņa punktu ātrumi momentā t tā tad ir tādi paši kā rotācijā ap kādu asi caur punktu O ar rotācijas vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Šai gadījumā saka, ka *dotā kustība apskatītajā momentā ir tangentiāla kādai rotācijai.*



59. zim.

Vispārīgajā gadījumā, kad $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, $\mathbf{v}_O \neq 0$, kā to rāda (14.) formula, cieta ķermeņa punktu ātrumu sadalījums ir atkarīgs no vektoru sistēmas, kuŗas rezultante ir $\boldsymbol{\omega}$ un kuŗas rezultētājs moments pret centru O ir $\mathbf{v}_O$. Bet katrai vektoru sistēmai, kā zināms, eksistē *centrālā ass* D ar īpašību, ka jebkuŗā šīs ass punktā A vektoru $\boldsymbol{\omega}$ un $\mathbf{v}_A$ virzieni sakrīt ar tās virzienu (59. zīm.).

Mūsu kustības gadījumā šo asi sauc par *momentāno kustības asi.* Punktam A (14.) formula pārrakstāma šādi:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overline{AP}, \tag{16.}$$

pie kam vektoriem $\mathbf{v}_A$ un $\boldsymbol{\omega}$ ir ass D virziens. Bet pēdējā formula rāda, ka ātrumu sadalījums momentā t ir tāds pats kā skrūvveidīgā kustībā ap asi D, ar translācijas ātrumu $\mathbf{v}_A$ un rotācijas vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Šo pēdējo kustību tad arī sauc par apskatītai kustībai *tangentiālo skrūvveidīgo kustību* momentā t.

Uzrakstīsim tangentiālās skrūvveidīgās kustības momentānās ass D[1]) vienādojumus kustīgā koordinātu triedrā $Oxyz$. Ja x, y, z ir ass D punkta A koordinātas, tad vektora $\mathbf{v}_A$ koordinātas ir

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_A)_x &= \xi + qz - ry\,,\\(\mathbf{v}_A)_y &= \eta + rx - pz\,,\\(\mathbf{v}_A)_z &= \zeta + py - qx\,.\end{aligned}$$

Tālāk, lai vektors $\boldsymbol{\omega}$ (ar koordinātām p, q, r) un vektors $\mathbf{v}_A$ būtu ar vienu un to pašu virzienu, tad jābūt apmierinātiem šādiem vienādojumiem

$$\frac{\xi + qz - ry}{p} = \frac{\eta + rx - pz}{q} = \frac{\zeta + py - qx}{r}\,, \tag{17.}$$

kas ir momentānās kustības ass vienādojumi triedrā $Oxyz$.

Ja X_O, Y_O, Z_O un X, Y, Z ir attiecīgi punkta O un A koordinātas nekustīgā triedrā ΩXYZ un P, Q, R rotācijas vektora $\boldsymbol{\omega}$ koordinātas šai triedrā, tad momentānās kustības ass vienādojumi ir šādi:

$$\frac{\dfrac{dX_O}{dt} + Q(Z-Z_O) - R(Y-Y_O)}{P} = \frac{\dfrac{dY_O}{dt} + R(X-X_O) - P(Z-Z_O)}{Q} \tag{18.}$$

$$= \frac{\dfrac{dZ_O}{dt} + P(Y-Y_O) - Q(X-X_O)}{R}\,.$$

---

[1]) Šīs ass eksistenci pirmo reizi uzrādījis 1763. g. Moci (G. Mozzi, 1730.—1813. g.) darbā *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi,* Napoli. No jauna to ir atradis Košì darbā *Sur les mouvements que peut prendre un système invariable,* Exercises de math., 2, 1827, Oeuvres (2), t. 7.

Apzīmējot (17.) un (18.) sistēmas attiecību kopējo vērtību ar K, dabūjam, ka

$$K = \frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{p^2 + q^2 + r^2} = \frac{P\dfrac{dX_0}{dt} + Q\dfrac{dY_0}{dt} + R\dfrac{dZ_0}{dt}}{P^2 + Q^2 + R^2} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_0}{\omega^2}.$$

Bet (17.) sistēmas vienādojumi rāda, ka $\mathbf{v}_A = K\boldsymbol{\omega}$, t. i. K ir tangentiālās skrūvveidīgās kustības parametrs. Lielumi K un $\boldsymbol{\omega}$ kā laika t funkcijas raksturo tangentiālo skrūvveidīgo kustību.

Ja $\mathbf{v}_A = 0$, tad tangentiālā kustība reducējas par rotāciju. Tiešām, lai $\mathbf{v}_A$ būtu vienāds ar nulli, tad K jābūt vienādam ar nulli, vai, kas ir tas pats, jābūt apmierinātai vienlīdzībai,

$$p\xi + q\eta + r\zeta = 0,$$

kas izteic vektoru $\mathbf{v}_0$ un $\boldsymbol{\omega}$ perpendikulāritāti.

Apskatīsim jautājumu, vai cietam ķermenim var būt punkti, kuŗu ātrumi dotajā momentā ir vienādi ar nulli.

Ja $K \neq 0$, $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, tad $\mathbf{v}_A = K\boldsymbol{\omega}$ un tas nevienā punktā nekad nevar būt nulle.

Ja $K = 0$, $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, tad tangentiālā skrūvveidīgā kustība reducējas par rotāciju ap asi D, kuŗas punkti ir vienīgie ķermeņa punkti, kuŗu ātrumi ir nulle.

Ja $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{v}_0 \neq 0$, tad tangentiālā kustība reducējas par translāciju un ķermenim nav punktu, kuŗu ātrumi būtu vienādi ar nulli.

Beidzot, ja $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{v}_0 = 0$, tad ķermenis ir miera stāvoklī un jebkuŗa tā punkta ātrums ir nulle.

Šie pētījumi rāda, ka ķermeņa punktu ātrumu distribūcija dotajā momentā ir pilnīgi noteikta, ja šai momentā ir dots kāds centrālās ass D punkts A, vektors $\boldsymbol{\omega}$ un konstante K.

Mūsu līdzšinējo kustības pētījumu raksturs ir infinītezimālas dabas, jo tie aprobežojas tikai ar kustības norisi dotajā momentā t. Vēlāk pētīsim kustības integrālo norisi laikā.

100. **Cieta ķermeņa kustība ap nekustīgu punktu vai paralēli dotajai taisnei.** — Divos speciālos gadījumos kustības integrālais raksturs ir viegli noteicams. 1° *Ja viens cietā ķermeņa punkts ir nekustīgs*, tad tā ātrums ir nulle un momentānā kustības ass D iet caur šo punktu. Momentānā kustība jebkuŗā momentā ir rotācija ap šo asi.

2° *Ja viena cietā ķermeņa taisne paliek vienmēr pati sev parallēla,* tad, izvēloties šīs taisnes virzienu par Oz-ass virzienu, vektors $\mathbf{k}$ ir konstants un $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$. Bet tā kā

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k},$$

tad, vai nu $\boldsymbol{\omega} = 0$, t. i. kustība ir translācija, vai arī $\boldsymbol{\omega}$ un $\mathbf{k}$ ir parallēli vektori, t. i. momentānā ass ir parallēla asij Oz.

101. Paātrinājums cieta ķermeņa vispārīgā kustībā. — Punkta P ātruma formula cieta ķermeņa vispārīgā kustībā bija šāda:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OP}.$$

Tā kā punkta P paātrinājums $\mathbf{a}_P$ ir tā ātruma $\mathbf{v}_P$ ģeometriskais atvasinājums, tad

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \overline{OP})$$

vai

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{OP} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\overline{OP}}{dt}.$$

Bet tā kā

$$\frac{d\overline{OP}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{\Omega P} - \overline{\Omega O}) = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_O$$

un pēc (14.) formulas

$$\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_O = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OP},$$

tad

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{OP} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overline{OP}).$$

Ievērojot savukārt, ka

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overline{OP}) = -\omega^2 \overline{QP},$$

kur Q apzīmē perpendikula PQ pret vektora $\boldsymbol{\omega}$ nesējas taisnes pēdas punktu, dabūjam punkta P paātrinājumam formulu

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overline{OP} - \omega^2 \overline{QP}. \tag{19.}$$

Ja salīdzinām šo formulu ar paātrinājuma (10.) formulu skrūvveidīgā kustībā, tad redzam, ka šīs formulas atšķiŗas viena no otras tikai ar to, ka pēdējā formulā $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ vispārīgi nav parallēls vektoram $\boldsymbol{\omega}$, kā tas bija skrūvveidīgā kustībā. Tādējādi dotajai kustībai tangentiālā skrūvveidīgā kustība dod tās ātrumus, bet ne tās paātrinājumus dotajā momentā t.

Uzrakstīsim vēl paātrinājuma **a** koordinātu izteiksmes kustīgā koordinātu triedrā $Oxyz$. Apzīmēsim vektoru $\mathbf{a}_O$ un $\overline{QP}$ koordinātas attiecīgi ar λ, μ, ν un $(QP)_x$, $(QP)_y$, $(QP)_z$, kuŗas savkārt var izteikt ar vektora $\boldsymbol{\omega}$ koordinātām p, q, r un $\overline{OP}$ koordinātām x, y, z. Atliek vēl aprēķināt $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ koordinātas. Pēc definīcijas

$$\boldsymbol{\omega} = p\,\mathbf{i} + q\,\mathbf{j} + r\mathbf{k}\,;$$

diferencējot šo izteiksmi, dabūjam

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{p}\,\mathbf{i} + \dot{q}\,\mathbf{j} + \dot{r}\mathbf{k} + p\frac{d\,\mathbf{i}}{dt} + q\frac{d\,\mathbf{j}}{dt} + r\frac{d\mathbf{k}}{dt}\,,$$

bet tā kā

$$\frac{d\,\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}\,, \quad \frac{d\,\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}\,, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}\,,$$

tad

$$p\frac{d\,\mathbf{i}}{dt} + q\frac{d\,\mathbf{j}}{dt} + r\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (p\,\mathbf{i} + q\,\mathbf{j} + r\mathbf{k}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0\,,$$

un tā tad

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{p}\,\mathbf{i} + \dot{q}\,\mathbf{j} + \dot{r}\mathbf{k}\,,$$

t. i. vektora $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ koordinātas triedrā $Oxyz$ ir vektora $\boldsymbol{\omega}$ koordinātu p, q, r atvasinājumi pēc laika t.

Tādējādi punkta P paātrinājuma $\mathbf{a}_P$ koordinātu izteiksmes kustīgā triedrā $Oxyz$ ir šādas:

$$\begin{aligned} a_x &= \lambda + \dot{q}z - \dot{r}y - \omega^2 (QP)_x\,, \\ a_y &= \mu + \dot{r}x - \dot{p}z - \omega^2 (QP)_y\,, \\ a_z &= \nu + \dot{p}y - \dot{q}x - \omega^2 (QP)_z\,. \end{aligned}$$

Ja vektora $\boldsymbol{\omega}$ virzienu izvēlas par koordinātu triedra Oz-asi, tad

$$p = q = 0, \quad r = \omega,$$

$$(QP)_x = x\,, \quad (QP)_y = y\,, \quad (QP)_z = 0,$$

un tā tad

$$(20.) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_x &= \lambda + \dot{q}z - \dot{r}y - \omega^2 x\,, \\ a_y &= \mu + \dot{r}x - \dot{p}z - \omega^2 y\,, \\ a_z &= \nu + \dot{p}y - \dot{q}x\,. \end{aligned} \right.$$

Vēl apskatīsim jautājumu, vai momentā t eksistē punkti, kuŗu paātrinājums ir vienāds ar nulli. Lai uz šo jautājumu varētu atbildēt pozitīvi, jābūt apmierinātiem trim vienādojumiem

$$a_x = a_y = a_z = 0\,. \tag{21.}$$

Nepieciešamais un pietiekamais noteikums, lai šai sistēmai būtu viens atrisinājums, ir, ka determinants

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & -\dot r & \dot q \\ \dot r & -\omega^2 & -\dot p \\ -\dot q & \dot p & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2(\dot p^{\,2} + \dot q^{\,2})$$

nedrīkst būt vienāds ar nulli. Un tā kā vispārīgajā gadījumā $\omega \neq 0$, $\dot p \neq 0$, $\dot q \neq 0$, tad $\Delta \neq 0$, un sistēmai eksistē viens atrisinājums.

Ja $\Delta = 0$ un $\omega \neq 0$, tad jābūt $\dot p = \dot q = 0$. (20.) sistēmas vienādojumos tādā gadījumā jāievieto $\dot p = \dot q = 0$, un ja $\nu \neq 0$, tad sistēma ir neatrisināma, citiem vārdiem sakot, ķermenim nav neviena punkta ar paātrinājumu nulle. Ja $\nu = 0$, tad, ievērojot, ka divu pirmo (20.) sistēmas vienādojumu determinants $\omega^4 + \dot\omega^2 \neq 0$, visiem punktiem, kas atrodas uz kādas taisnes, kuŗa ir parallēla asij Oz, paātrinājumi ir vienādi ar nulli.

Ja $\omega = 0$ un $\dot\omega \neq 0$, tad $\Delta = 0$ un sistēma reducējas vienkāršākā formā:

$$\begin{aligned} \lambda + \dot q z - \dot r x &= 0\,, \\ \mu + \dot r x - \dot p z &= 0\,, \\ \nu + \dot p y - \dot q x &= 0\,. \end{aligned}$$

Tā ir neatrisināma, ja $\dot p\lambda + \dot q\mu + \dot r\nu \neq 0$. Tā ir nenoteikta, ja $\dot p\lambda + \dot q\mu + \dot r\nu = 0$. Šai gadījumā sistēma reducējas par diviem pirmajiem vienādojumiem, un ja, piem., $\dot r \neq 0$, tad eksistē viena taisne, kuŗa ir reprezentēta ar šiem vienādojumiem un kuŗas visiem punktiem dotajā momentā paātrinājumi ir vienādi ar nulli.

Ja $\omega = 0$, $\dot\omega = 0$, tad visiem sistēmas punktiem paātrinājums ir $\mathbf{a}_O$.

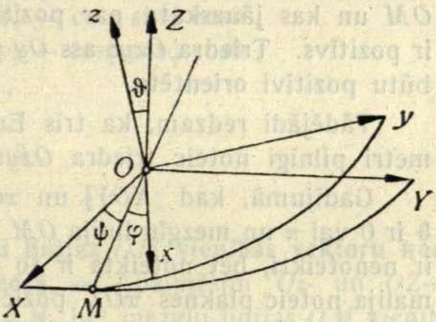
19. §. Eulera leņķi.

102. **Eulera leņķu definīcija.** — Kā redzējām, lai definētu cieta ķermeņa poziciju kādā nekustīgā koordinātu triedrā ΩXYZ, pietiek definēt kāda ar ķermeni nekustīgi saistīta koordinātu triedra

Oxyz poziciju pret šo triedru. Triedrs *Oxyz* ir noteikts ar sešiem parametriem: trīs parametri definē tā sākuma punkta *O* poziciju, bet paša triedra poziciju šai punktā noteic trīs savstarpēji perpendikulāri vienības vektori **i**, **j**, **k** vai, kas ir tas pats, šo vienības vektoru nesēju taišņu *Ox*, *Oy*, *Oz* deviņi virzienu kosini α_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, starp kuŗiem neatkarīgi ir tikai trīs.

Par šiem trim neatkarīgiem parametriem var izvēlēties piemērotus trīs no deviņiem virzienu kosiniem, pārējie virzienu kosini tad ir šo trīs kosinu funkcijas. Lietderīgāki izrādās par šiem trīs neatkarīgiem parametriem izvēlēties trīs direkti no zīmējuma nolasāmus lielumus, tā saucamos *Eulera leņķus*[1]).

Apskatīsim divus pozitīvi orientētus koordinātu triedrus *OXYZ* un *Oxyz* ar kopējo sākuma punktu *O* un izslēgsim gadījumu, kad *OZ*-ass sakrīt ar *Oz*-asi (60. zīm.). Tādā gadījumā *XOY*-plakne krustojas ar *xOy*-plakni pa taisni, kas ir perpendikulāra kā pret *OZ*-asi, tā arī pret *Oz*-asi, citiem vārdiem sakot, tā ir perpendikulāra pret plakni, kas vilkta caur abām asīm — *OZ* un *Oz*. Pozitīvo vērsumu uz šīs taisnes *OM*, kuŗu sauc par *mezglu līniju*, izvēlamies tādējādi, lai triedrs *OMZz* būtu pozitīvi orientēts. Leņķi ϑ starp asīm *OZ* un *Oz*, robežās starp 0 un π, sauc par *nūtācijas leņķi*. Mezglu līnijas *OM* anōmaliju $\psi = \sphericalangle XOM$, kuŗa tiek uzskatīta par pozitīvu vērsumā, kas atbilst pozitīvai rotācijai ap *OZ*-asi, sauc par *precesijas leņķi*. Leņķis ψ kā otrs lielums definē *Oz*-ass poziciju triedrā *OXYZ*. Pēc šādas *Oz*-ass pozicijas definīcijas, triedra *Oxyz* vienīgi iespējamā kustība ir rotācija ap *Oz*-asi. Šī rotācija ir noteikta, zinot *Ox*-ass anōmaliju pret mezglu līniju *OM*; leņķi $\varphi = \sphericalangle MOx$, uzskatot to par pozitīvu, ja rotācijas vērsums ap *Oz*-asi ir pozitīvs, sauc par *rotācijas leņķi*. Leņķi ψ un φ abi mainās robežās starp 0 un 2π, pirmo robežu ieskaitot. Trīs leņķus ϑ, ψ, φ, kas definē triedra *Oxyz* poziciju triedrā *OXYZ*, sauc par *Eulera leņķiem*.



60. zīm.

---

[1]) L. Euler, Novi Comment. Petrop., vol. 20, 1776.

Viegli pārliecināties, ka arī otrādi, ja doti ir trīs leņķi ϑ, ψ, φ, kas atrodas robežās

$$0 < \vartheta < \pi,$$
$$0 \leqslant \psi < 2\pi,$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

tad šie leņķi viennozīmīgi noteic triedra $Oxyz$ poziciju pret triedru $OXYZ$. Tiešām, precesijas leņķis ψ noteic XOY plaknē mezglu līnijas OM poziciju; pēdējai perpendikulārā plaknē caur punktu O atrodas orientētā Oz-ass, kuŗa ar OZ-asi veido nūtācijas leņķi ϑ, uzskatot to par pozitīvu rotācijas pozitīvā vērsumā ap mezglu līniju OM. Beidzot caur punktu O perpendikulāri Oz-asij vilktā plaknē atrodas Ox-ass, kas noteikta ar savu anōmaliju φ pret mezglu līniju OM un kas jāuzskata par pozitīvu, ja rotācijas vērsums ap Oz-asi ir pozitīvs. Triedra $Oxyz$ ass Oy pēc tam noteicama tā, lai šis triedrs būtu pozitīvi orientēts.

Tādējādi redzam, ka trīs Eulera leņķi kā trīs neatkarīgi parametri pilnīgi noteic triedra $Oxyz$ poziciju pret triedru $OXYZ$.

Gadījumā, kad XOY un xOy plaknes sakrīt, nūtācijas leņķis ϑ ir 0 vai π un mezglu līnija OM ir nenoteikta, tāpat arī leņķi ψ un φ ir nenoteikti, bet noteikta ir to summa $\varphi + \psi = \measuredangle XOx$. Šī anōmalija noteic plaknes xOZ poziciju pret plakni XOZ, ar ko triedra $Oxyz$ pozicija pret triedru $OXYZ$ ir determinēta. Vispārīgi ϑ, ψ, φ ir laika t funkcijas.

103. **Vienības vektoru i, j, k koordinātu izteiksmes ar Eulera leņķiem.** — Izteiksim tagad vienības vektoru **i, j, k** deviņas koordinātas — triedra $Oxyz$ asu virzienu kosinus α_{ij} — ar Eulera leņķiem. Šai nolūkā atzīmēsim, ka triedru $Oxyz$, kuŗa poziciju definē Eulera leņķi ϑ, ψ, φ, var iegūt no triedra $OXYZ$, izdarot pēc kārtas šādas trīs pozitīvas rotācijas ap attiecīgajām asīm: 1⁰ rotāciju ap asi OZ par leņķi ψ, dabūjot triedru OX_1Y_1Z, kuŗa OX_1-ass sakrīt ar mezglu līniju OM; 2⁰ rotāciju ap asi $OX_1{=}OM$ par leņķi ϑ, dabūjot triedru OX_1y_1z, kuŗa Oy_1-ass atrodas ZOz plaknē un veido leņķi ϑ ar OY_1-asi; 3⁰ rotāciju ap Oz-asi par leņķi φ, līdz kamēr $OX_1{=}OM$ sakrīt ar Ox-asi un Oy_1 ar Oy-asi. Šo triju rotāciju analitiskie vienādojumi ir šādi:

$$(22.)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= X_1 \cos\psi - Y_1 \sin\psi, \\ Y &= X_1 \sin\psi + Y_1 \cos\psi, \\ Z &= Z; \end{aligned} \right.$$

$$(23.)\quad \begin{cases} X_1 = X_1 , \\ Y_1 = y_1 \cos\vartheta - z \sin\vartheta , \\ Z = y_1 \sin\vartheta + z \cos\vartheta ; \end{cases}$$

$$(24.)\quad \begin{cases} X_1 = x \cos\varphi - y \sin\varphi , \\ y_1 = x \sin\varphi + y \cos\varphi , \\ z = z . \end{cases}$$

Eliminējot no pēdējiem vienādojumiem X_1, Y_1, y_1, dabūjam α_{ij} šādas izteiksmes ar leņķiem ϑ, ψ, φ:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\vartheta , \\
\alpha_{21} &= \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\vartheta , \\
\alpha_{31} &= \sin\varphi \sin\vartheta , \\
\alpha_{12} &= -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\vartheta , \\
\alpha_{22} &= -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\vartheta , \\
\alpha_{32} &= \cos\varphi \sin\vartheta , \\
\alpha_{13} &= \sin\psi \sin\vartheta , \\
\alpha_{23} &= -\cos\psi \sin\vartheta , \\
\alpha_{33} &= \cos\vartheta .
\end{aligned}$$

104. **Asu Oz, OZ un mezglu līnijas OM vienības vektoru koordinātas kustīgā un nekustīgā triedrā.** — Apzīmēsim Oz- un OZ-ass vienības vektorus attiecīgi ar **k** un **K**, bet mezglu līnijas OM vienības vektoru ar **m** un izteiksim šo vektoru koordinātas abos triedros ar Eulera leņķiem ϑ, ψ, φ. Nekustīgā triedrā $OXYZ$ vektoru **k** un **K** koordinātas ir attiecīgi

$$\alpha_{13}\,,\ \alpha_{23}\,,\ \alpha_{33} \text{ un } 0, 0, 1.$$

Vektora **m** koordinātas dabūjamas no (22.) sistēmas vienādojumiem, ievietojot tanīs $X_1 = 1$, $Y_1 = Z = 0$, un tā tad tā koordinātas ir

$$\cos\psi\,,\ \sin\psi\,,\ 0.$$

Kustīgā triedrā $Oxyz$ vektoru **k** un **K** koordinātas ir attiecīgi

$$0, 0, 1 \text{ un } \alpha_{31}\,,\ \alpha_{32}\,,\ \alpha_{33}\,.$$

Vektora **m** gala punkta koordinātas triedrā OX_1y_1z ir $X_1 = 1$, $y_1 = z = 0$, un tā tad paša vektora koordinātas dabūjam no (24.) sistēmas vienādojumiem, ievietojot tanīs minētās koordinātu vērtības:

$$\cos\varphi\,,\ -\sin\varphi\,,\ 0.$$

105. **Rotācijas vektora ω koordinātas kustīgā un nekustīgā koordinātu triedrā.** — Uzrakstīsim vēl cieta ķermeņa momentānā rotācijas vektora ω koordinātas abos triedros. Šai nolūkā apskatīsim divas cieta ķermeņa pozicijas, kas ir noteiktas ar Eulera leņķiem ϑ, ψ, φ un $\vartheta + d\vartheta$, $\psi + d\psi$, $\varphi + d\varphi$. Kā agrāk redzējām, pieaugums $d\vartheta$ atbilst elementārai rotācijai ap mezglu līniju OM par leņķi $d\vartheta$, tāpat $d\psi$ un $d\varphi$ atbilst attiecīgām elementārām rotācijām ap asīm OZ un Oz. Momentānā rotācijas vektora ω koordinātas asu OM, OZ, Oz virzienos tā tad ir $\dot\vartheta$, $\dot\psi$, $\dot\varphi$ un

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\vartheta \mathbf{m} + \dot\psi \mathbf{K} + \dot\varphi \mathbf{k}.$$

Ja vektora ω koordinātas triedros $Oxyz$ un $OXYZ$ apzīmējam attiecīgi ar p, q, r un P, Q, R, tad šo koordinātu izteiksmes ir šādas:

$$\begin{aligned}
p &= \dot\vartheta \cos\varphi + \dot\psi\, \alpha_{31}, \\
q &= -\dot\vartheta \sin\varphi + \dot\psi\, \alpha_{32}, \\
r &= \qquad\qquad\ \ \dot\psi\, \alpha_{33} + \dot\varphi, \\
P &= \dot\vartheta \cos\psi + \dot\varphi\, \alpha_{13}, \\
Q &= \dot\vartheta \sin\psi + \dot\varphi\, \alpha_{23}, \\
R &= \qquad\qquad\ \ \dot\varphi\, \alpha_{33} + \dot\psi.
\end{aligned}$$

Aizstājot pēdējās formulās virzienu kosinu α_{31}, α_{32}, α_{33}, α_{13}, α_{23} izteiksmes ar Eulera leņķiem, dabūjam, ka

$$\begin{aligned}
p &= \dot\vartheta \cos\varphi + \dot\psi \sin\varphi \sin\vartheta, \\
q &= -\dot\vartheta \sin\varphi + \dot\psi \cos\varphi \sin\vartheta, \\
r &= \qquad\qquad\ \ \dot\psi \cos\vartheta \qquad + \dot\varphi, \\
P &= \dot\vartheta \cos\psi + \dot\varphi \sin\psi \sin\vartheta, \\
Q &= \dot\vartheta \sin\psi - \dot\varphi \cos\psi \sin\vartheta, \\
R &= \qquad\qquad\ \ \dot\varphi \cos\vartheta \qquad + \dot\psi.
\end{aligned}$$

106. **Uzdevumi.**

1. Sadalīt rotāciju ω ap kādu asi r trīs rotācijās ω_1, ω_2, ω_3 ar vienādiem vērsumiem ap trim asīm r_1, r_2, r_3, kas ir parallēlas asij r.

2. Pierādīt, ka cieta ķermeņa kustībā punktu, kuŗu ātrumi dotajā momentā ir savā starpā vienādi, ģeometriskā vieta ir riņķa cilindrs, kuŗa ass sakrīt ar momentānās kustības asi.

IV NODAĻA.

KUSTĪBU KOMPOZICIJA UN CIETA ĶERMEŅA KUSTĪBA.

20. §. Kustību kompozicija.

107. **Definīcijas.** — Dota ir invariābla punktu sistēma S_0, kuŗu iedomājamies par nekustīgu. Bez tam ir dota invariābla punktu sistēma S_1, kas atrodas kustībā pret sistēmu S_0, un vēl kāda cita invariābla sistēma S_2, kas atrodas kustībā pret S_1.

Vispārīgi tad sistēma S_2 atrodas kustībā pret sistēmu S_0 un problēma, kas rodas, ir šāda: dota ir sistēmas S_2 kustība pret S_1 un S_1 kustība pret S_0, jānoteic S_2 kustība pret S_0.

Lai saīsinātu rakstību, turpmāk apzīmēsim ar $\left(\frac{S'}{S}\right)$ sistēmas S' kustību pret sistēmu S, ja S un S' ir dotās sistēmas.

Kustību $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ sauc par *relātīvo* kustību;

„ $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$ „ „ *pārnešanas* „ ;

„ $\left(\frac{S_2}{S_0}\right)$ „ „ *absolūto* „ .

Ja P ir sistēmas S_1 punkts, tad tā ātrumu kustībā $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$ sauc par *pārnešanas ātrumu*, ko apzīmē ar $\mathbf{v}_p$. Apskatot sistēmas S_2 punktu, kas momentā t sakrīt ar punktu P, tā ātrumu kustībā $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ sauc par *relātīvo* ātrumu, ko apzīmē ar $\mathbf{v}_r$. Beidzot tā paša punkta ātrumu kustībā $\left(\frac{S_2}{S_0}\right)$ sauc par *absolūto ātrumu*, apzīmējot to ar $\mathbf{v}_a$.

Analogi definējam punkta P *relātīvo, pārnešanas* un *absolūto* paātrinājumu $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_p$, $\mathbf{a}_a$. Kustību kompozicijas (salikšanas) uzdevums ir noteikt sakarību starp šiem ātrumiem, kā arī paātrinājumiem dotajā momentā.

108. **Ātrumu kompozicija.** — Apzīmēsim ar P kādu sistēmas S_2 punktu, kuŗa koordinātas kustīgā triedrā $Oxyz$, kas ir saistīts ar sistēmu S_1, ir x, y, z. Triedrs $Oxyz$ ir definēts pret nekustīgo triedru

ΩXYZ, kas saistīts ar nekustīgo punktu sistēmu S_0, ar vektoru $\overline{\Omega O}$, kuŗš definē tā sākuma punkta O poziciju, un vektoriem **i**, **j**, **k**, kuŗi definē tā poziciju punktā O. Tādēļ

$$(1.)\qquad \overline{\Omega P} = \overline{\Omega O} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

kur x, y, z ir laika t funkcijas. Diferencējot šo vektoriālo formulu pēc laika t, dabūjam punkta P absolūtā ātruma $\mathbf{v}_a$ izteiksmi:

$$(2.)\qquad \mathbf{v}_a = \left[\dot{O} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right] + \left[\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}\right].$$

Pirmās iekavas raksturo tā sistēmas S_1 punkta ātrumu nekustīgā koordinātu triedrā ΩXYZ, kas dotajā momentā sakrīt ar punktu P; citiem vārdiem sakot, pirmās iekavas raksturo punkta P pārnešanas ātrumu $\mathbf{v}_p$. Otras iekavas definē vektoru, kuŗa koordinātas triedrā $Oxyz$ ir $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, t. i. tās definē punkta P relātīvo ātrumu $\mathbf{v}_r$. Un tā tad no (2.) formulas izriet, ka

$$(3.)\qquad \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_r,$$

t. i. *jebkuŗā momentā punkta absolūtais ātrums ir vienāds ar tā relātīvā un pārnešanas ātruma ģeometrisko summu.*

Ja (2.) vektoriālo formulu, ievērojot Puasona formulas (97. nodal.), pārraksta formā

$$(2'.)\qquad \mathbf{v}_a = \dot{O} + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OP} + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

un projicē pēdējo uz kustīgā triedra $Oxyz$ asīm, apzīmējot pie tam vektoru $\bar{\dot{O}}$ un $\boldsymbol{\omega}$ koordinātas attiecīgi ar ξ, η, ζ un p, q, r, tad dabūjam vektora $\mathbf{v}_a$ koordinātām šādas izteiksmes:

$$(2''.)\qquad \begin{cases} v_{ax} = \xi + qz - ry + \dot{x}, \\ v_{ay} = \eta + rx - pz + \dot{y}, \\ v_{az} = \zeta + py - qx + \dot{z}. \end{cases}$$

109. **Paātrinājumu kompozicija.** — Diferencējot (2.) formulu vēlreiz pēc laika t, dabūjam punkta P absolūtam paātrinājumam šādu izteiksmi:

$$(4.)\qquad \mathbf{a}_a = \left[\ddot{O} + x\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2}\right] +$$
$$+ 2\left[\dot{x}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right] + \left[\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}\right].$$

Pirmās iekavas šai izteiksmē reprezentē punkta P *pārnešanas paātrinājumu* $\mathbf{a}_p$, kamēr trešās iekavas nav nekas cits kā punkta P *relātīvais paātrinājums* $\mathbf{a}_r$.

Meklēsim vēl otru iekavu mēchanisko nozīmi. Atsaucoties uz Puasona formulām, šīs iekavas, kuŗas apzīmēsim ar $\mathbf{a}_c$, var pārrakstīt formā

$$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}),$$

vai arī

(5.) $$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Vektoru $\mathbf{a}_c$, kas ir atkarīgs kā no relātīvās, tā arī no pārnešanas kustības, sauc par punkta P *komplēmentāro* jeb arī *Koriolisa*[1]) *paātrinājumu.* (4.) formulu tā tad var pārrakstīt formā

(6.) $$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_p + 2\mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r,$$

no kurienes dabūjam šādu Koriolisa teorēmu: *punkta absolūtais paātrinājums jebkuŗā momentā ir vienāds ar punkta relātīvā, pārnešanas un divkāršā komplēmentārā paātrinājuma ģeometrisko summu.*

(5.) formula rāda, ka $\mathbf{a}_c = 0$: 1° ja $\boldsymbol{\omega} = 0$, t. i. ja momentānā pārnešanas kustība ir translācija, 2° ja $\mathbf{v}_r = 0$, t. i. relātīvais ātrums ir nulle, un 3° ja $\boldsymbol{\omega}$ un $\mathbf{v}_r$ ir paralēli vektori.

110. **Ātrumu un paātrinājumu kompozicijas secinājumi.** — 1° *Divu atšķirīgu punktu P un P' relātīvais ātrums dotajā momentā.* — Par punkta P *relātīvo* ātrumu pret punktu P' dotajā momentā sauc punktu P un P' ātrumu šai momentā ģeometriskās diferences komponentu pa taisni PP', lai kādā triedrā šo punktu ātrumi būtu aprēķināti. Pārliecināsimies vispirms par divu punktu relātīvā ātruma neatkarību no koordinātu triedra izvēles. Šai nolūkā apskatīsim divus kustības references triedrus, no kuŗiem viens ir nekustīgs, bet otrs kustīgs, un apzīmēsim ar C un C' divus kustīgā triedra punktus, kas apskatītajā momentā sakrīt attiecīgi ar punktiem P un P'.

Apzīmējot dotajā momentā ar $\mathbf{v}_a$ un $\mathbf{v}'_a$ punktu P un P' absolūtos ātrumus, ar $\mathbf{v}_r$ un $\mathbf{v}'_r$ to relātīvos ātrumus un ar $\mathbf{v}_c$ un $\mathbf{v}'_c$ punktu C un C' absolūtos ātrumus, kas nav nekas cits kā punktu P un P' pārnešanas ātrumi, pēc ātrumu kompozicijas teorēmas dabūjam, ka

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_c, \qquad \mathbf{v}'_a = \mathbf{v}'_r + \mathbf{v}'_c.$$

Un tā tad

(7.) $$\mathbf{v}_a - \mathbf{v}'_a = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}'_r + \mathbf{v}_c - \mathbf{v}'_c.$$

---

[1]) G. G. Coriolis (1792.—1843. g.). Zemāk minētā teorēma atrodama darbā, kas iespiests *Journal de l'École polytechnique,* 1836.

Projicējot šo vienlīdzību uz PP' resp. reizinot to skālāri ar $\overline{PP'}$ un atceroties, ka cieta ķermeņa divu punktu C un C' ātrumu ģeometriskās diferences $\mathbf{v}_c - \mathbf{v}'_c$ projekcija uz taisnes CC' resp. PP' ir nulle (91. nodal.), dabūjam, ka

$$(8.)\qquad (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}'_a) \,.\, \overline{PP'} = (\mathbf{v}_r - \mathbf{v}'_r) \,.\, \overline{PP'}\,,$$

ar ko punktu P un P' relātīvā ātruma neatkarība no koordinātu triedra ir pierādīta.

2° *Divu kādā momentā sakrītošu punktu P un P' relātīvais ātrums šai momentā.*— Ja punkti P un P' apskatītajā momentā sakrīt, tad virziens PP' ir nenoteikts. Šai gadījumā ar punkta P relātīvo ātrumu pret punktu P' saprot vienkārši šo punktu ātrumu diferenci, lai kādā triedrā tie būtu aprēķināti. Bet ievērojot, ka tagad arī punkti C un C' sakrīt, dabūjam vienlīdzību $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}'_c$, un tāpēc (7.) vienlīdzība reducējas par vienlīdzību

$$(9.)\qquad \mathbf{v}_a - \mathbf{v}'_a = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}'_r\,,$$

ko arī vajadzēja pierādīt. Tādējādi redzam, ka divu punktu relātīvais ātrums ir neatkarīgs no references triedra izvēles.

3° *Divu kādā momentā sakrītošu punktu P, P', kuŗu relātīvie ātrumi ir nulle, relātīvais paātrinājums šai momentā.* — Ja kādā momentā punkti P un P' sakrīt, tad šai momentā sakrīt ne tikai punkti C un C', bet arī $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}'_r$. Tāpēc, apzīmējot momentā t punktu P un P' absolūtos paātrinājumus ar $\mathbf{a}_a$ un $\mathbf{a}'_a$, relātīvos paātrinājumus ar $\mathbf{a}_r$ un $\mathbf{a}'_r$, pēc paātrinājumu kompozicijas likuma,

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_p + 2\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) + \mathbf{a}_r\,,$$
$$\mathbf{a}'_a = \mathbf{a}_p + 2\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) + \mathbf{a}'_r\,,$$

no kurienes relācija

$$\mathbf{a}_a - \mathbf{a}'_a = \mathbf{a}_r - \mathbf{a}'_r\,.$$

Šī relācija izsaka šādu teōrēmu: *Divu kādā momentā sakrītošu punktu, kuŗu relātīvie ātrumi šai momentā ir vienādi ar nulli, relātīvais paātrinājums tai pašā momentā ir neatkarīgs no koordinātu triedra izvēles,* pie kam ar punkta P relātīvo paātrinājumu pret punktu P' dotajā momentā saprotot punktu P un P' paātrinājumu šai momentā ģeometrisko diferenci, lai kādā triedrā abi šie paātrinājumi būtu aprēķināti.

4° *Kustību kompozicijas speciālais gadījums: kustīgais ķermenis kādā galīgā laika intervallā atrodas translācijas kustībā.* — Ja kustīgais ķermenis kādā galīgā laika intervallā atrodas translācijas kustībā ($\boldsymbol{\omega} = 0$), tad visiem tā punktiem jebkurā momentā apskatītajā intervallā ir viens un tas pats ātrums $\mathbf{v}$ un paātrinājums $\mathbf{a}$. Tāpēc ātrumu un paātrinājumu kompozicijas formulas šai gadījumā reducējas par formulām

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v},$$

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a},$$

kur $\mathbf{v}$ un $\mathbf{a}$ apzīmē, piem., triedra T, kas saistīts ar kustīgo ķermeni, sākuma punkta ātrumu un pāātrinājumu momentā t nekustīgā triedrā T_1.

Ja translācijas kustība ir vienmērīga taisnlīnijas translācija, tad paātrinājums $\mathbf{a} = 0$, un pēdējā formula iegūst vienkāršāku formu

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r,$$

citiem vārdiem sakot, abos triedros paātrinājums ir viens un tas pats. Speciālā gadījumā, ja tas ir nulle kādam punktam P triedrā T, tad tas ir nulle tam pašam punktam arī triedrā T_1.

Otrādi, ja ikviens punkts, kas atrodas vienmērīgas taisnlīnijas translācijas kustībā pret T, atrodas vienmērīgas taisnlīnijas translācijas kustībā arī pret T_1, tad arī triedri T un T_1 atrodas viens pret otru vienmērīgā taisnlīnijas translācijā.

Tiešām, tā kā šai gadījumā $\mathbf{a}_r = 0$ un $\mathbf{a}_a = 0$, tad pēc Koriolisa teorēmas jābūt apmierinātai sakarībai

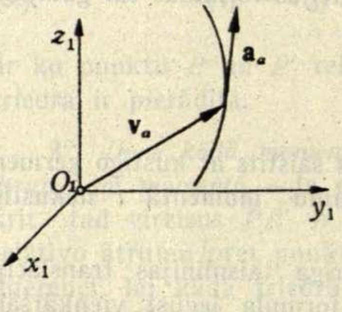
$$\mathbf{a}_p + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) = 0,$$

lai kāds būtu ātrums $\mathbf{v}_r$ un laiks t.

Iedomājoties šai sakarībā $\mathbf{v}_r$ vienādu ar nulli, redzam, ka arī $\mathbf{a}_p$ jābūt vienādam ar nulli. Šo hipotezi atmetot, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ un $\mathbf{a}_p$ jābūt vienādiem ar nulli, lai kāds būtu $\mathbf{v}_r$ un t. Bet tas ir iespējams tikai tad, ja $\boldsymbol{\omega} = 0$ un arī $\mathbf{a}_p = 0$, lai kāds būtu t. Ar to apgalvojums ir pierādīts.

Apvienojot direkto un reciproko apgalvojumu, dabūjam teorēmu: *Nepieciešamais un pietiekamais noteikums, lai divi triedri* T un T_1 *atrastos viens pret otru vienmērīgas taisnlīnijas translācijas kustībā, ir, ka ikviens punkts, kas atrodas vienmērīgas taisnlīnijas translācijas kustībā pret vienu no tiem, atrodas vienmērīgas taisnlīnijas translācijas kustībā arī pret otru.*

111. Būra formulas. — Lai uzrakstītu punkta P absolūtā paātrinājuma $\mathbf{a}_a$ koordinātu izteiksmes kustīgā triedrā $Oxyz$, ir jāprojicē (6.) formula uz šī triedra asīm. Bet to pašu varam panākt tiešā ceļā šādi (61. zīm.):



61. zīm.

Apzīmēsim ar O_1 kādu sistēmas S_0 punktu un vilksim caur šo punktu vektoru, kas ir vienāds ar $\mathbf{v}_a$. Šī vektora atvasinājums, vai, kas ir tas pats, tā gala punkta atvasinājums, ir punkta P absolūtais paātrinājums $\mathbf{a}_a$. Bet tā kā vektora $\mathbf{v}_a$ gala punkta ātruma koordinātas triedrā $Oxyz$ ir neatkarīgas no tā sākuma punkta, tad vilksim caur punktu O_1 triedru $O_1x_1y_1z_1$, kuŗa asis ir parallēlas triedra $Oxyz$ attiecīgajām asīm.

Šai triedrā caur punktu O_1 vilktā vektora, kas ir vienāds ar $\mathbf{v}_a$, gala punkta koordinātas ir v_{ax}, v_{ay}, v_{az}.

Bet tā kā šī triedra sākuma punkts O_1 ir nekustīgs un rotācijas vektors $\boldsymbol{\omega}$ šai triedrā ir tāds pats kā triedrā $Oxyz$, tad vektora $\mathbf{a}_a$ koordinātas kustīgā triedrā $Oxyz$, ievērojot (2″.) sistēmas formulas, ir šādas:

$$(10.)\quad \begin{cases} a_{ax} = \dfrac{d\,v_{ax}}{dt} + q\,v_{az} - r\,v_{ay}, \\[2ex] a_{ay} = \dfrac{d\,v_{ay}}{dt} + r\,v_{ax} - p\,v_{az}, \\[2ex] a_{az} = \dfrac{d\,v_{az}}{dt} + p\,v_{ay} - q\,v_{ax}. \end{cases}$$

Šīs formulas sauc par *Būra*[1]) *formulām.* Ievietojot tanīs v_{ax}, v_{ay}, v_{az} vietā to izteiksmes no (2″.) sistēmas, dabūjam punkta P absolūtam paātrinājumam $\mathbf{a}_a$ triedrā $Oxyz$ šādas koordinātas:

$$\begin{aligned} a_{ax} &= \ddot{x} + 2\,(q\dot{z} - r\dot{y}) + \dot{q}\,z - \dot{r}y - (p^2 + q^2 + r^2)\,x + \\ &\quad + (px + qy + rz)\,p + \dot{\xi} + q\zeta - r\eta, \\ a_{ay} &= \ddot{y} + 2\,(r\dot{x} - p\,\dot{z}) + \dot{r}\,x - \dot{p}\,z - (p^2 + q^2 + r^2)\,y + \\ &\quad + (px + qy + rz)\,q + \dot{\eta} + r\xi - p\zeta, \\ a_{az} &= \ddot{z} + 2\,(p\dot{y} - q\dot{x}) + \dot{p}y - \dot{q}x - (p^2 + q^2 + r^2)\,z + \\ &\quad + (px + qy + rz)\,r + \dot{\zeta} + p\eta - q\xi. \end{aligned}$$

[1]) E. Bour (1832.—1866. g.), *Mémoire sur les mouvements relatifs,* Journal de math. pures et appl., (2), vol. 8, 1863.

Speciālie gadījumi: 1° Iedomāsimies, ka kustīgais triedrs $Oxyz$ rotē ap tā sākuma punktu O, kas ir nekustīgs. Šai gadījumā

$$\xi = \eta = \zeta = 0\,, \qquad \dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0\,.$$

2° Iedomāsimies, ka kustīgā triedra rotācija ap nekustīgo punktu O ir vienmērīga. Ja Oz-asi izvēlas par rotācijas asi, tad vektora $\boldsymbol{\omega} = const.$ un $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ koordinātas ir

$$p = q = 0\,, \qquad r = \omega\,, \qquad \dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0\,,$$

un (2.″) un (10.) sistēmas formulas reducējas par šādām formulām:

$$\begin{aligned} v_{ax} &= \dot{x} - \omega y\,, & a_{ax} &= \ddot{x} - 2\,\omega\dot{y} - \omega^2 x\,, \\ v_{ay} &= \dot{y} + \omega x\,, & a_{ay} &= \ddot{y} + 2\,\omega\dot{x} - \omega^2 y\,, \\ v_{az} &= \dot{z}\,; & a_{az} &= \ddot{z}\,. \end{aligned}$$

112. **Vairāku kustību salikšana.** — Iedomāsimies, ka ir dota nekustīgā invariāblā sistēma S_0 un n sistēmas $S_1, S_2, \ldots, S_n$, kas atrodas kustībā pret S_0. Kustības $\left(\frac{S_1}{S_0}\right)$, $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$, $\left(\frac{S_3}{S_2}\right)$, ..., $\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$, kuŗas iedomājamies par zināmām, sauc par *komponentu kustībām*; meklēto kustību $\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ sauc par doto kustību *rezultētāju kustību.*

Apzīmēsim ar P punktu, kas momentā t sakrīt ar sistēmas S_i kādu punktu, un šī punkta ātrumu sistēmas S_i kustībā pret sistēmu S_j ar $\mathbf{v}_{ij}$. Uzdevums ir atrast $\mathbf{v}_{n0}$.

Pēc (3.) formulas saskaitot ik divas kustības (pārnešanas un relātīvo), dabūjam, ka

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{20} &= \mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_{21}\,, \\ \mathbf{v}_{30} &= \mathbf{v}_{20} + \mathbf{v}_{32}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{v}_{n0} &= \mathbf{v}_{n-1,0} + \mathbf{v}_{n,n-1}\,. \end{aligned}$$

Saskaitot šīs vienlīdzības, dabūjam rezultētājas kustības ātrumam izteiksmi

$$\mathbf{v}_{n0} = \mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{32} + \ldots + \mathbf{v}_{n,\,n-1}\,, \tag{11.}$$

kas ir divu kustību ātrumu saskaitīšanas likuma vispārinājums. Jāpiezīmē, ka paātrinājumam šāds vienkāršs vispārinājums, komplēmentārā paātrinājuma dēļ, neeksistē.

Pierādīsim, ka vairāku cieta ķermeņa kustību rezultētāja kustība ir atkal cieta ķermeņa kustība. Lai par to pārliecinātos, dotās kustības varam iedomāties aizstātas ar kādas invariāblas punktu sistēmas kustību, kas momentā t sakrīt pēc kārtas ar sistēmām $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_2, S_1$, no kuŗām ikviena atrodas kustībā pret tai sekojošo. Ja izvēlas šīs invariāblās punktu sistēmas jebkuŗus divus punktus P' un P'' un apzīmē to ātrumus momentā t kustībās $\left(\frac{S_1}{S_0}\right), \left(\frac{S_2}{S_1}\right), \ldots, \left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ attiecīgi ar $\mathbf{v}'_{10}, \mathbf{v}''_{10}$; $\mathbf{v}'_{21}, \mathbf{v}''_{21}; \ldots$ $\mathbf{v}'_{n,n-1}, \mathbf{v}''_{n,n-1}$, tad šo divu punktu ātrumi rezultētājā kustībā momentā t, kā to rāda (11.) formula, ir

$$\mathbf{v}'_{10} + \mathbf{v}'_{21} + \ldots + \mathbf{v}'_{n,n-1} \text{ un } \mathbf{v}''_{10} + \mathbf{v}''_{21} + \ldots + \mathbf{v}''_{n,n-1}.$$

Tā kā pēc definīcijas cieta ķermeņa kustībās $\left(\frac{S_1}{S_0}\right), \left(\frac{S_2}{S_1}\right) \ldots$ punktu P' un P'' ātrumu $\mathbf{v}'_{10}$ un $\mathbf{v}''_{10}$, $\mathbf{v}'_{21}$ un $\mathbf{v}''_{21}, \ldots$ projekciju uz $P'P''$ algebriskās vērtības ir vienādas, tad arī šo divu punktu rezultētājas kustības ātrumu projekciju uz $P'P''$ algebriskās vērtības ir vienādas. Bet tā kā šī īpašība piemīt jebkuŗiem diviem cieta ķermeņa punktiem un tā savkārt raksturo cieta ķermeņa kustību, tad no tā varam secināt, ka doto kustību rezultētāja kustība arī ir cieta ķermeņa kustība.

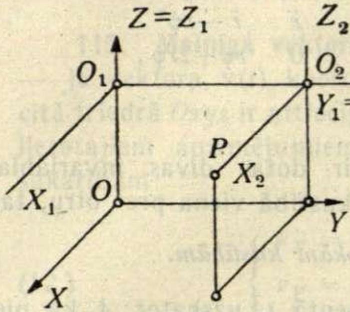
21. §. Kustību kompozicijas lietošana.

113. **Punkta ātruma un paātrinājuma komponentu atrašana.** — 1° *Dekarta koordinātās.* — Apzīmēsim ar P kādu pret triedru $OXYZ$ (62. zīm.) kustīgu punktu un apskatīsim punktā O_2 $(0, Y, Z)$ triedru $O_2X_2Y_2Z_2$, kuŗa asis ir parallēlas dotā triedra $OXYZ$ attiecīgajām asīm, un punktā O_1 $(0, 0, Z)$ triedru $O_1X_1Y_1Z_1$, kas tāpat kā pirmais ir parallēls dotajam triedram $OXYZ$. Ja $\mathbf{v}_2$ apzīmē punkta P ātrumu triedrā $O_2X_2Y_2Z_2$, tad $\mathbf{v}_{21}$ ir triedra $O_2X_2Y_2Z_2$ pārnešanas ātrums pret triedru $O_1X_1Y_1Z_1$ un $\mathbf{v}_{10}$ ir triedra $O_1X_1Y_1Z_1$ pārnešanas ātrums pret triedru $OXYZ$. Tādējādi punkta P ātrums $\mathbf{v}$ triedrā $OXYZ$ pēc ātrumu kompozicijas teorēmas ir šāds:

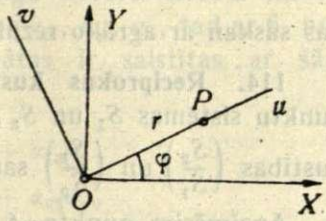
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{10}.$$

Bet triedrā $OXYZ$ vektora $\mathbf{v}_2$ koordinātas ir $\dot{X}, 0, 0$;
„ $\mathbf{v}_{21}$ „ „ $0, \dot{Y}, 0$;
„ $\mathbf{v}_{10}$ „ „ $0, 0, \dot{Z}$; un tā tad
„ $\mathbf{v}$ „ „ $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$.

2° *Polārās koordinātās.* — Uzrakstīsim punkta P ātruma **v** un paātrinājuma **a** koordinātas polārās koordinātās plaknē (63. zīm.).



62. zīm.



63. zīm.

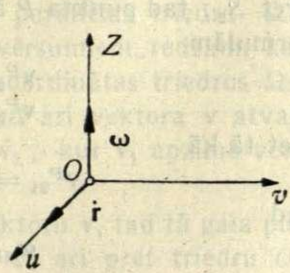
Punkta P absolūto kustību var iedomāties saliktu no punkta P relātivās kustības pa Ou-asi un tā pārnešanas kustības — Ouv rotācijas ap punktu O ar leņķisko ātrumu $\dot{\varphi}$. Projicējot sakarību

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_r$$

uz asīm Ou un Ov, dabūjam $\mathbf{v}_a$ koordinātas:

	$\mathbf{v}_p$	$\mathbf{v}_r$	$\mathbf{v}_a$
pa Ou asi...	0	$\dot{r}$	$\dot{r}$
pa Ov asi...	$r\dot{\varphi}$	0	$r\dot{\varphi}$.

Punkta P absolūtā paātrinājuma $\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_p + 2\mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r$ koordinātu atrašanai pa asīm Ou un Ov aprēķināsim vispirms tā komplēmentārā paātrinājuma $\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ koordinātas pa šīm asīm (64. zīm.). Ja šai nolūkā nosprauž pa direktā ortogōnālā triedra $OuvZ$ asi OZ vektoru $\boldsymbol{\omega}$, kuŗa algebriskā vērtība $\omega = \dot{\varphi}$, tad šī vektora un $\mathbf{v}_r$ koordinātas šai triedrā ir:



64. zīm.

	$\boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{v}_r$	$\mathbf{a}_c$
pa Ou asi...	0	$\dot{r}$	0
pa Ov asi...	0	0	$\dot{r}\dot{\varphi}$
pa OZ asi...	$\dot{\varphi}$	0	0,

un tā tad $\mathbf{a}_c$ koordinātas ir dotas ar pēdējo kolonnu.

Uzrakstot $\mathbf{a}_p$ un $\mathbf{a}_r$ koordinātas, dabūjam punkta P absolūtam paātrinājumam $\mathbf{a}_a$ šādas koordinātu izteiksmes:

	$\mathbf{a}_p$	$2\mathbf{a}_c$	$\mathbf{a}_r$	$\mathbf{a}_a$
pa Ou asi . . .	$-r\dot{\varphi}^2$	0	$\ddot{r}$	$\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2$
pa Ov asi . . .	$r\ddot{\varphi}$	$2\dot{r}\dot{\varphi}$	0	$r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}$,

kas saskan ar agrāko rezultātu.

114. **Reciprokas kustības.** — Ja ir dotas divas invariāblas punktu sistēmas S_1 un S_2, kas atrodas kustībā viena pret otru, tad kustības $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ un $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ sauc par *reciprokām kustībām.*

Apzīmēsim punkta A ātrumu momentā t, uzskatot A kā piederīgu sistēmai S_2, ar $\mathbf{v}_{21}$, bet sistēmai S_1, ar $\mathbf{v}_{12}$. Sistēmas S_1 kustību pret sevi pašu var iedomāties saliktu no kustībām $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ un $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$, un tā kā S_1 ir miera stāvoklī pret sevi pašu, tad jebkuŗa tā punkta ātrums pret S_1 ir nulle. Tā tad ātrumu kompozicijas teōrēma rāda, ka

$$\mathbf{v}_{12}+\mathbf{v}_{21}=0$$

vai

$$\mathbf{v}_{12}=-\mathbf{v}_{21}\,.$$

Ja ar P apzīmējam kādu citu punktu un ar $\boldsymbol{\omega}_{21}$ sistēmas S_2 ŗotācijas vektoru pret S_1, bet ar $\boldsymbol{\omega}_{12}$ sistēmas S_1 rotācijas vektoru pret S_2, tad punkta P ātrumi apskatītajās divās kustībās ir doti ar formulām

$$\mathbf{v}^P{}_{21}=\mathbf{v}^A{}_{21}+\boldsymbol{\omega}_{21}\times\overline{AP},$$
$$\mathbf{v}^P{}_{12}=\mathbf{v}^A{}_{12}+\boldsymbol{\omega}_{12}\times\overline{AP}.$$

Bet tā kā

$$\mathbf{v}^P{}_{21}=-\mathbf{v}^P{}_{12}\,,\qquad \mathbf{v}_{21}{}^A=-\mathbf{v}_{12}{}^A\,,$$

tad

$$\boldsymbol{\omega}_{21}\times\overline{AP}=-\boldsymbol{\omega}_{12}\times\overline{AP}$$

vai, kas ir tas pats,

$$(\boldsymbol{\omega}_{21}+\boldsymbol{\omega}_{12})\times\overline{AP}=0\,.$$

Tā kā šo sakarību jāapmierina jebkuŗam punktam P, tad no tā izriet, ka

$$\boldsymbol{\omega}_{21}+\boldsymbol{\omega}_{12}=0\,,$$

citiem vārdiem sakot, abu reciproko kustību momentānās asis sakrīt.

Ja A ir kāds šis ass punkts, tad kustības $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ elementi $\mathbf{v}^A_{21}$ un $\boldsymbol{\omega}_{21}$ ir *pretēji* pēc zīmes kustības $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$ elementiem $\mathbf{v}^A_{12}$ un $\boldsymbol{\omega}_{12}$.

115. **Mainīga vektora atvasinājums kustīgā koordinātu triedrā.** — Ja vektora $\mathbf{v}(t)$ koordinātas nekustīgā triedrā ΩXYZ un kādā citā triedrā $Oxyz$ ir attiecīgi v_X, v_Y, v_Z un v_x, v_y, v_z, tad ar 6. nodal. lietotajiem apzīmējumiem šīs koordinātas ir saistītas ar šādām sakarībām:

$$
(12.) \quad \begin{cases} v_X = \alpha_{11} v_x + \alpha_{12} v_y + \alpha_{13} v_z , \\ v_Y = \alpha_{21} v_x + \alpha_{22} v_y + \alpha_{23} v_z , \\ v_Z = \alpha_{31} v_x + \alpha_{32} v_y + \alpha_{33} v_z . \end{cases}
$$

Ja triedrs $Oxyz$ ir nekustīgi saistīts ar triedru ΩXYZ, tad visi α_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ ir konstanti, un tā tad arī vektora $\mathbf{v}$ atvasinātā vektora koordinātas, ja ar tām saprot vektora $\mathbf{v}$ koordinātu attiecīgajā triedrā atvasinājumus pēc laika t, pārejot no viena triedra uz otru, transformējas pēc (12.) sistēmas formulām, aizstājot tanīs v_X, v_Y, v_Z un v_x, v_y, v_z attiecīgi ar $\dot{v}_X$, $\dot{v}_Y$, $\dot{v}_Z$ un $\dot{v}_x$, $\dot{v}_y$, $\dot{v}_z$. Tādējādi abos triedros vektora $\mathbf{v}$ atvasinājums ir viens un tas pats. Ja turpretim triedrs $Oxyz$ ir kustīgs pret triedru ΩXYZ, tad vispārīgi vektora $\mathbf{v}$ atvasinājums, pārejot no viena triedra uz otru, mainās. Apzīmēsim vektora $\mathbf{v}$ atvasinājumu absolūtā triedrā ΩXYZ ar $\dot{\mathbf{v}}_a$ un kustīgā triedrā $Oxyz$ ar $\dot{\mathbf{v}}$. Iedomājoties caur punktu O vilktu kādu trešo triedru $Ox_1y_1z_1$, kuŗa asis ir parallēlas triedra ΩXYZ attiecīgajām asīm un ir ar tiem pašiem vērsumiem, redzam, ka, lai kāda būtu punkta O kustība, vektora $\mathbf{v}$ koordinātas triedros ΩXYZ un $Ox_1y_1z_1$ ir vienas un tās pašas, un tā tad arī vektora $\mathbf{v}$ atvasinājumi abos triedros ir identiski, t. i. $\dot{\mathbf{v}}_a = \dot{\mathbf{v}}_1$, kur $\dot{\mathbf{v}}_1$ apzīmē vektora $\mathbf{v}$ atvasinājumu triedrā $Ox_1y_1z_1$.

Ja triedrā $Oxyz$ atliek no punkta O vektoru $\mathbf{v}$, tad tā gala punkts P ir kustīgs kā pret triedru $Ox_1y_1z_1$, tā arī pret triedru $Oxyz$. Punkta P kustību pret triedru $Ox_1y_1z_1$, uzskatot to par absolūtu, var iedomāties saliktu no punkta P relātīvās kustības pret triedru $Oxyz$ un tā pārnešanas kustības pret triedru $Ox_1y_1z_1$.

Tā kā punkta P koordinātas triedrā $Ox_1y_1z_1$ ir v_X, v_Y, v_Z, tad $\dot{\mathbf{v}}_a(\dot{v}_X, \dot{v}_Y, \dot{v}_Z)$ ir punkta P absolūtais ātrums; analogi triedrā $Oxyz$ punkta P koordinātas ir v_x, v_y, v_z, un tā tad $\dot{\mathbf{v}}(\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z)$ ir punkta P relātīvais ātrums. Apzīmējot ar $\boldsymbol{\omega}$ triedra $Oxyz$ rotācijas vektoru pret triedru $Ox_1y_1z_1$ resp. ΩXYZ, punkta P pārnešanas ātrums $\mathbf{v}_p$ ir

$$\mathbf{v}_p = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OP} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Tādējādi, atsaucoties uz ātrumu kompozicijas teorēmu,

$$\dot{\mathbf{v}}_a = \dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Vektora $\mathbf{v}$ atvasinājumi abos triedros ir identiski, ja $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ ir nulle, t. i. ja 1° $\mathbf{v}$ ir paralēls triedra $Oxyz$ rotācijas asij, un 2° $\boldsymbol{\omega}$ ir nulle, t. i. triedrs $Oxyz$ atrodas translācijas kustībā pret triedru ΩXYZ.

116. **Rezultētājas momentānas kustības raksturs.** — Apskatīsim nekustīgo sistēmu S_0 un kustīgās sistēmas $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Ar agrākajiem apzīmējumiem rezultētājas kustības jebkuŗa punkta P ātrums ir

$$\mathbf{v}_{n0} = \mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{32} + \cdots + \mathbf{v}_{n,n-1}.$$

Ja komponentu kustību $\left(\frac{S_1}{S_0}\right), \left(\frac{S_2}{S_1}\right), \ldots, \left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ raksturi ir zināmi, tad pēdējā vektoriālā sakarība rāda rezultētājas kustības $\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$ raksturu.

1° *Iedomāsimies, ka visas komponentu kustības dotajā momentā ir tangentiālas translācijām.* Šai gadījumā $\mathbf{v}_{10}, \mathbf{v}_{21}, \ldots, \mathbf{v}_{n,n-1}$ ir neatkarīgi no punkta P, un tādēļ arī $\mathbf{v}_{n,0}$ ir neatkarīgs no apskatītā punkta, citiem vārdiem sakot, rezultētāja kustība ir tangentiāla kādai translācijai.

2° *Iedomāsimies, ka visas komponentu kustības dotajā momentā ir tangentiālas rotācijām.*

Kustībai raksturīgie vektori $\boldsymbol{\omega}$ un $\mathbf{v}_O$ pret polu O, kā agrāk redzējām, pilnīgi noteic ātrumu sadalījumu cieta ķermeņa kustībā, pie kam vektors $\boldsymbol{\omega}$ ir no pola O neatkarīgs. Tāpēc, apzīmējot ar $\boldsymbol{\omega}'$ un $\mathbf{v}_{O'}$ kustībai raksturīgos vektorus pret polu O', dabūjam, ka

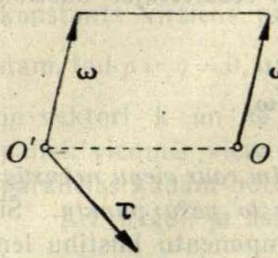
$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega},$$

bet

$$\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_O + \overline{O'O} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OO'},$$

kā to redzējām 98. nodal. Speciālā gadījumā, kad dotā kustība ir rotācija ar tai raksturīgiem vektoriem $\boldsymbol{\tau} = 0$ un $\boldsymbol{\omega}$ pret polu O, tās raksturīgie vektori pret polu O' ir $\boldsymbol{\omega} \times \overline{OO'}$ un $\boldsymbol{\omega}$.

No tā izriet, ka *rotācija ap taisni caur punktu O ir ekvivalenta rotācijai ap dotajai taisnei parallēlu taisni caur punktu O′ un translācijai* $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{OO'}$, *kas ir vektora* $\boldsymbol{\omega}$ *ar sākuma punktu O moments pret centru O′* (65. zīm.). Izlietosim tagad šo rezultātu.



65. zīm.

Apzīmēsim ar Δ_i kustības $\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$ momentāno rotācijas asi, ar A_i kādu šīs ass punktu un ar $\boldsymbol{\omega}_i$ attiecīgo rotācijas vektoru un iedomāsimies, ka visas rotācijas asis neiet caur vienu un to pašu punktu.

Ja izvēlas kādu cieta ķermeņa punktu P, tad rotācija $\boldsymbol{\omega}_i$ ap asi Δ_i ir ekvivalenta translācijai

$$\mathbf{v}_{i\ i-1} = \boldsymbol{\omega}_i \times \overline{A_i P}$$

un rotācijai $\boldsymbol{\omega}_i$ ap asij Δ_i parallēlu asi caur punktu P.

Momentānā rezultētāja kustība tādējādi ir salikta no translācijas

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}_{n,0} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\omega}_i \times \overline{A_i P})$$

un rotācijas

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i$$

ap taisni caur punktu P. No vektoru teōrijas viedokļa tā tad esam dabūjuši vektoru sistēmu ar rezultanti $\boldsymbol{\omega}$ un rezultētāju momentu $\boldsymbol{\tau}$ pret centru P.

Tādējādi redzam, ka *vairāku momentānu rotāciju rezultētāja kustība vispārīgi ir skrūvveidīga kustība.* Šīs skrūvveidīgās kustības momentānā ass sakrīt ar rotācijas vektoru sistēmas $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ centrālo asi.

Ja vektoru sistēma $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ ir ekvivalenta vektoru pārim, tad *rezultētāja kustība ir tangentiāla kādai translācijai*, kuŗas ātrums dotajā momentā ir ekvivalents vektoru pāŗa asij.

Rezultētāja kustība ir tangentiāla rotācijai, ja vektoru sistēma $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ ir ekvivalenta ar vienu rezultētāju vektoru, kas ir ievērots gadījumā, kad vektoru sistēmas minimālais moments ir nulle, t. i. ja vektoru sistēmas rezultētājs moments pret jebkuŗu punktu ir perpendikulārs rezultantei vai arī atsevišķā gadījumā tas ir nulle.

Šis gadījums ir reālizēts, ja visas rotācijas asis iet caur vienu nekustīgu punktu O, jo tad jebkuŗas rotācijas raksturīgais vektors $\mathbf{v}_{i,i-1} = \boldsymbol{\omega}_i \times \overline{A_i O}$ pret šo punktu ir nulle, un rezultētājas kustības raksturīgie vektori pret polu O ir

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}_{n\,0} = 0\,, \qquad \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i\,.$$

Tādējādi *vairāku momentānu rotāciju ap asīm caur vienu nekustīgu punktu rezultante ir rotācija ap kādu asi caur to pašu punktu.* Šīs rotācijas leņķiskais ātrums ir vienāds ar komponentu kustību leņķisko ātrumu ģeometrisko summu.

Ja rotācijas asis ir parallēlas savā starpā, tad vektoru sistēmas $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$, algebriskais invariants $I = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, un tādēļ ir izslēgts gadījums, ka rezultētāja kustība varētu būt skrūvveidīga.

Rezultētāja kustība ir translācija, ja $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i = 0$. Kustībai raksturīgais vektors $\boldsymbol{\tau}$, kas nav nulle, ir vektoru sistēmas $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ rezultētājs moments pret centru P, t. i.

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\omega}_i \times \overline{A_i P})\,.$$

Ja turpretim $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i \neq 0$, tad *rezultētāja kustība ir rotācija*

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i$$

ap asi, kas ir parallēla dotajām asīm caur šo parallēlo vektoru centru O. Vektoru sistēmas $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ centrs O ir definēts ar formulu

$$\overline{QO} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i\, \overline{QA_i}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i}\,,$$

kur Q ir kāds patvaļīgs references punkts.

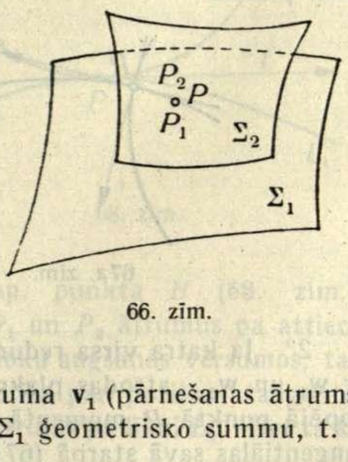
117. **Skrūvveidīgas kustības momentānās ass īpašība.** — Ja sistēmas S_1 kustībā pret S_0 skrūvveidīgās kustības momentānai asij ir konstants virziens pret S_1, tad tai ir konstants virziens arī pret S_0 un otrādi.

Iedomāsimies, ka momentānai asij Δ, kas ir parallēla $\boldsymbol{\omega}$, ir konstants virziens pret S_1. Ja izvēlas asi Oz parallēli šim virzienam, tad $p = q = 0$, un vienādojums $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$ rāda, ka $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$, jo vektori $\mathbf{k}$ un $\boldsymbol{\omega}$ ir parallēli, citiem vārdiem sakot, vektors $\mathbf{k}$ paliek vienmēr viens un tas pats, t. i. asis Oz un Δ vienmēr paliek parallēlas kādam noteiktam virzienam pret S_0.

Arī otrādi, ja asij Δ ir kāds noteikts virziens pret S_0, tad, tā kā reciprokās kūstības $\left(\frac{S_0}{S_1}\right)$ momentānā ass arī ir Δ, nav grūti pārliecināties, spriežot tāpat kā iepriekšējā gadījumā, ka asij Δ ir arī konstants virziens pret S_1.

22. §. Cietu ķermeņu ar saskarīgām robežvirsām kustība.

118. **Viena ķermeņa slīdēšana pa otru.** — Apskatīsim divus cietus ķermeņus T_1 un T_2 ar attiecīgām robežvirsām Σ_1 un Σ_2 (66. zīm.), kuŗām pa kustības laiku jāpaliek kontaktā. Lai noteiktu šo ķermeņu kustību, vispirms jānoteic viena ķermeņa kustība un pēc tam otra ķermeņa kustība pret pirmo.



66. zīm.

Apzīmēsim ar P_1 un P_2 virsu Σ_1 un Σ_2 punktus, kas momentā t sakrīt ar šo virsu ģeometrisko kontakta punktu P, un apskatīsim ķermeņa T_2 kustību pret T_1. Kādā absolūtā triedrā T virsas Σ_2 punkta P_2 absolūtais ātrums $\mathbf{v}_2$ pēc ātrumu kompozicijas likuma ir vienāds ar Σ_1 punkta P_1 ātruma $\mathbf{v}_1$ (pārnešanas ātrums) un punkta P_2 relātīva ātruma $\mathbf{v}_r$ pret Σ_1 ģeometrisko summu, t. i.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_r\,.$$

Un tā tad triedrā T punktu P_2 un P_1 ātrumu ģeometriskā diference $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$ ir vienāda ar punkta P_2 relātīvo ātrumu $\mathbf{v}_r$ pret Σ_1:

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_r\,. \tag{13.}$$

Šī diference, kā divu punktu P_2 un P_1 relātīvais ātrums, ir neatkarīga no koordinātu triedra T un to sauc par *virsas* Σ_2 *slīdes ātrumu pa virsu* Σ_1.

No otras puses ģeometriskā kontakta punkta P ātrums $\mathbf{w}_1$ pret Σ_1 pēc ātrumu kompozicijas likuma ir vienāds ar P ātruma $\mathbf{w}_2$ pret Σ_2 un Σ_2 punkta P_2 ātruma $\mathbf{v}_r$ pret Σ_1 ģeometrisko summu, t. i.

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_r\,,$$

un tā tad

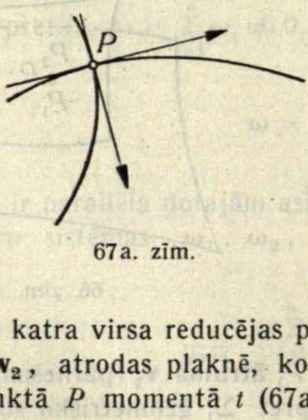
$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_r\,. \tag{14.}$$

Salīdzinot (13.) un (14.) izteiksmi, dabūjam, ka

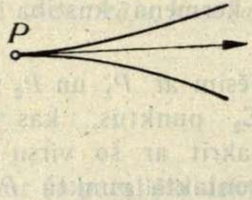
$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\,.$$

Pēdējā sakarība rāda, ka virsas Σ_2 slīdes ātrums pa virsu Σ_1, kā divu vektoru $\mathbf{w}_1$ un $\mathbf{w}_2$, no kuŗiem ikviens atrodas virsu Σ_1 un Σ_2 kopējā tangentiālā plaknē momentā t, ģeometriska diference arī atrodas šai plaknē.

Speciālie gadījumi: 1° Ja viena no virsām Σ_1 vai Σ_2 reducējas par līkni vai punktu, slīdes ātrums, tāpat kā $\mathbf{w}_1$ un $\mathbf{w}_2$, atrodas otras virsas, tās saskaršanās punktā ar līkni vai punktu, tangentiālā plaknē.



67a. zīm.



67b. zīm.

2° Ja katra virsa reducējas par vienu līkni, slīdes ātrums, reizē ar $\mathbf{w}_1$ un $\mathbf{w}_2$, atrodas plaknē, ko noteic tangentes abām līknēm to kopējā punktā P momentā t (67a. zīm.), arī tad, ja abas līknes ir tangentiālas savā starpā (67b. zīm.). Pēdējā gadījumā slīdes ātrums sakrīt ar tangenti, jo $\mathbf{w}_1$ un $\mathbf{w}_2$ ir vērsti pa šo tangenti.

119. **Slīde, velšanās un virpošana.** — Ja momentā t apskata virsas Σ_2 relātīvo kustību pret Σ_1, tad šo virsu infinītezimālā kustība kontakta punktā P var tikt sadalīta: 1° *translācijā* ar ātrumu $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ un 2° *rotācijā* $\boldsymbol{\omega} dt = (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1) dt$ ap kādu asi caur punktu P, apzīmējot ar $\boldsymbol{\omega}_1$ un $\boldsymbol{\omega}_2$ virsu Σ_1 un Σ_2 rotācijas ātrumus momentā t pret triedru T.

Rotāciju $\boldsymbol{\omega} dt$ savkārt var sadalīt divās citās rotācijās, no kuŗām vienas $\boldsymbol{\omega}_n dt$ ass ir perpendikulāra abām virsām Σ_1 un Σ_2 to kopējā pieskaršanās punktā, bet otras $\boldsymbol{\omega}_t dt$ ass atrodas abu virsu kopējā tangentiālā plaknē momentā t.

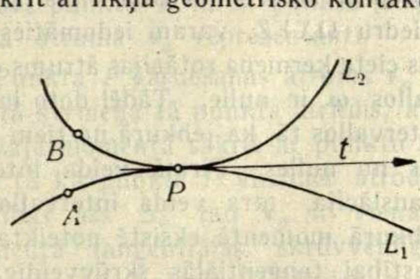
Rotāciju $\boldsymbol{\omega}_n$ sauc par *virpošanu*, bet rotāciju $\boldsymbol{\omega}_t$ par *velšanos*.

Ja slīdes ātrums ir vienmēr nulle, virsa Σ_2 veļas un virpo bez slīdes pa virsu Σ_1.

Kustību sauc par *vienkāršu slīdi*, ja $\boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\omega}_t = 0$, par *vienkāršu virpošanu*, ja $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_t = 0$, un par *vienkāršu velšanos*, ja $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_n = 0$.

Tādējādi virsu Σ_1 un Σ_2 vispārīgais infinītezimālais pārvietojums var tikt sadalīts: 1° sistēmas Σ_1, Σ_2 kā cieta ķermeņa pārvietojumā un 2° virsas Σ_2 slīdes, velšanās un virpošanas kustībā pa virsu Σ_1.

120. **Vienas līknes slīdēšana pa otru tai tangentiālu līkni.** — Ja L_1 un L_2 ir divas invariāblas līknes, kuŗas pa kustības laiku paliek vienmēr tangentiālas savā starpā, un ja P_1 un P_2 ir līkņu L_1 un L_2 attiecīgie punkti, kas momentā t sakrīt ar līkņu ģeometrisko kontakta punktu P, tad līknes L_2 slīdes ātrums pa līkni L_1, tāpat kā virsu gadījumā, sakrīt ar kopējo tangenti abām līknēm momentā t.



68. zīm.

Tāpēc vilksim punktā P abām līknēm kopējo pozitīvo tangenti Pt un apzīmēsim ar s_1 un s_2 līkņu L_1 un L_2 lokus AP un BP, mērījot tos pa attiecīgām līknēm no punkta A resp. punkta B (68. zīm.). Ja $\mathbf{w}_1$ un $\mathbf{w}_2$ apzīmē kontakta punktu P_1 un P_2 ātrumus pa attiecīgām līknēm, uzskatot tos par pozitīviem loku augšanas vērsumos, tad diference $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, kuŗa tiek uzskatīta par pozitīvu tangentes pozitīvā vērsumā Pt, ir līknes L_2 slīdes ātrums pa līkni L_1. Bet tā kā

$$\mathbf{w}_1 = \frac{ds_1}{dt}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{ds_2}{dt},$$

tad pēc lieluma un zīmes

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \frac{ds_1}{dt} - \frac{ds_2}{dt}. \tag{15.}$$

121. **Līknes velšanās bez slīdes pa otru līkni.** — Saka, ka līkne L_2 *veļas bez slīdes* pa līkni L_1, ja L_2 slīdes ātrums pa L_1 ir nulle. (15.) vienlīdzība šai gadījumā rāda, ka diference $s_1 - s_2$ ir konstanta. Šī diference ir nulle, ja kontakta punkta P loku gaŗumi pa abām līknēm L_1 un L_2 ir skaitīti, sākot ar vienu un to pašu momentu. Tādējādi līkņu velšanās gadījumā kontakta punkta noietie loku gaŗumi pa abām līknēm jebkuŗā laika intervallā (t_0, t_1) ir vienādi un ar to pašu vērsumu.

Arī otrādi, ja šis noteikums ir ievērots, tad $\mathbf{w} = 0$, kā to rāda (15.) formula.

Tā tad kādas līknes velšanās bez slīdes pa otru līkni ir definēta ar noteikumu, ka abas līknes ir vienmēr tangentiālas savā starpā un ka kontakta punktā apskatītie loki pa abām līknēm ir vienāda gaŗuma un ar to pašu vērsumu.

23. §. Cieta ķermeņa vispārīgas kustības ģeometriskā interpretācija.

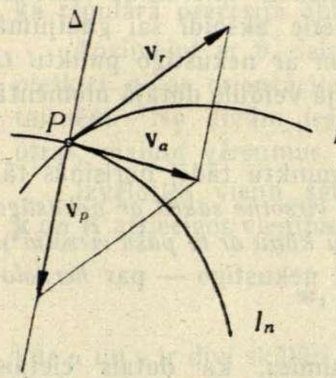
122. **Nepārtraukta cieta ķermeņa kustība.** — Apskatot kādā noteiktā laika intervallā cieta ķermeņa nepārtrauktu kustību pret triedru ΩXYZ, varam iedomāties, ka šai kustībā 1° dažos momentos cieta ķermeņa rotācijas ātrums $\boldsymbol{\omega}$ ir nulle un 2° dažos parciālos intervallos $\boldsymbol{\omega}$ ir nulle. Tādēļ doto intervallu iespējams sadalīt parciālos intervallos tā, ka jebkuŗā no tiem $\boldsymbol{\omega}$ ir vai nu nulle, vai arī tas atšķiŗas no nulles. Pirmā veida intervallos cieta ķermeņa kustība ir translācija, otra veida intervallos, kā zināms, cietam ķermenim jebkuŗā momentā eksistē noteikta kustības ass Δ, kas ir dotajai kustībai tangentiālās skrūvveidīgās kustības ass šai momentā.

Apzīmējot apskatītajā momentā cieta ķermeņa kustībai raksturīgos vektorus pret kādu punktu O ar $\mathbf{v}_O$ un $\boldsymbol{\omega}$, šī ķermeņa momentāno kustību var sadalīt rotācijā ar ātrumu $\boldsymbol{\omega}$ ap asi Δ un translācijā ar ātrumu $\frac{1}{\omega}\, \mathbf{v}_O . \boldsymbol{\omega}$ ass Δ virzienā. Speciālā gadījumā, kad kustības ass Δ cietā ķermenī ir nekustīga, citiem vārdiem sakot, kad šī ass ir nekustīga triedrā $Oxyz$, tad, kā redzējām, tā ir nekustīga arī triedrā ΩXYZ jeb nekustīgā telpā, un cieta ķermeņa kustība reducējas par skrūvveidīgu kustību.

Izslēdzot šo gadījumu, dotajai kustībai tangentiālās skrūvveidīgās kustības momentānā ass Δ, laikam t mainoties, pārvietojas nekustīgā telpā, aprakstīdama kādu taisnlīniju virsu Δ_n — *nekustīgu aksoīdu*; bet vispārīgi šī ass pārvietojas arī kustīgā telpā, aprakstīdama tanī kādu citu taisnlīniju virsu Δ_k — *kustīgu aksoīdu.*

Lai uzrakstītu šo taisnlīniju virsu — aksoīdu — vienādojumus, tad no 99. nodal. (17.) un (18.) sistēmas vienādojumiem, kas ir momentānās kustības ass vienādojumi kustīgā un nekustīgā triedrā, ir jāelliminē laiks t.

Jebkurā momentā t aksoīdiem Δ_n un Δ_k ir kopēja veidule Δ. Pierādīsim, ka šīs virsas ir tangentiālas jebkurā ass Δ punktā, t. i. tām ir kopēja tangentiāla plakne. Šai nolūkā iedomāsimies punktu P, kas jebkurā momentā atrodas uz attiecīgās momentānās ass Δ. Šī punkta absolūtā kustība ir salikta no tā relātīvās kustības pret cieto ķermeni un tā pārnešanas kustības, kas ir cieta ķermeņa kustība pret nekustīgo telpu. Punkta P relātīvās kustības trajektorija l_k ir kāda līkne uz Δ_k ar tangenti šīs līknes punktā P kā relātīvā ātruma $\mathbf{v}_r$ reprezentanti (69. zīm.). Analogi punkta P absolūtā trajektorija ir kāda līkne l_n uz nekustīgās virsas Δ_n ar tangenti šīs līknes punktā P kā šī punkta absolūtā ātruma $\mathbf{v}_a$ reprezentanti.



69. zīm.

Punkta P pārnešanas ātrums $\mathbf{v}_p$ ir cietā ķermeņa tā punkta ātrums, kas dotajā momentā sakrīt ar punktu P, un tā kā punkts P vienmēr atrodas uz attiecīgās momentānās kustības ass Δ, tad $\mathbf{v}_p$ ir vienāds ar dotajai kustībai dotajā momentā tangentiālās skrūvveidīgās kustības translācijas komponentu ass Δ virzienā. Tādējādi $\mathbf{v}_p$ ir vienmēr virzīts pa abu aksoīdu kopējo veiduli Δ.

Virsas Δ_k tangentiālā plakne punktā P ir noteikta ar Δ un $\mathbf{v}_r$, bet virsas Δ_n tangentiālā plakne tai pašā punktā ir noteikta ar Δ un $\mathbf{v}_a$. Bet tā kā $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_r$, tad abas šīs tangentiālās plaknes punktā P sakrīt.

Tādējādi cieta ķermeņa vispārīgas nepārtrauktas kustības ģeometriskā interpretācija ir šāda: *kāda taisnlīniju virsa, kas ir saistīta ar cieto ķermeni, kustas pa kādu citu taisnlīniju virsu, kas ir nekustīga* *telpā, tā, ka jebkurā momentā tā pieskaras šai nekustīgai virsai pa kādu veiduli, ap kuru tā rotē un reizē gar kuru tā arī slīd.*[1])

Ikvienā momentā abiem aksoīdiem kopējā veidule Δ ir momentānās kustības ass. Šo aksoīdu kustību, kuru sastāda momentāna rotācija ap asi Δ un translācija parallēli šai asij, sauc par *virāciju*. Tādējādi varam teikt, ka, *nepārtraukta cieta ķermeņa kustība ir attiecīgo divu aksoīdu virācija.*

24. §. Cieta ķermeņa kustība ap nekustīgu punktu.

123. **Puansò**[2]) **kōni.** — Ja dotajā laika intervallā kāds ķermeņa punkts O ir nekustīgs, tad no diviem cieta ķermeņa kustībai raksturīgiem vektoriem $\mathbf{v}_0$ un $\boldsymbol{\omega}$ pret punktu O pirmais ir nulle. Tādējādi dabūjam Dalambēra[3]) teōrēmu, kas saka, ka *cieta ķermeņa ar vienu nekustīgu punktu momentāna kustība ir ekvivalenta rotācijai ap kādu asi caur šo punktu.* Iepriekš minētie aksoīdi šai gadījumā reducējas par diviem tangentiāliem kōniem ar nekustīgo punktu O kā šo kōnu kopējo virsotni. Šo kōnu kopējā veidule dotajā momentā ir momentānā kustības ass.

Cieta ķermeņa kustība ap nekustīgu punktu tādēļ norisinās tā, ka *kāds ar cieto ķermeni saistīts kōns, kura virsotne sakrīt ar nekustīgo punktu, veļas bez slīdes pa kādu citu nekustīgu kōnu ar to pašu virsotni*[4]). Kustīgo kōnu sauc par *polodijas kōnu*, bet nekustīgo — par *herpolodijas kōnu.*

124. **Rēgulārā precesija.** — Iedomāsimies, ka dotais cietais ķermenis vienmērīgi rotē ap kādu asi f, kas ir nekustīgi saistīta ar cieto ķermeni, bet šī ass f, kas ir nekustīgi saistīta ar kādu citu nekustīgu telpas asi p, savkārt vienmērīgi rotē ap asi p. Cieta ķermeņa absolūto kustību, kas ir salikta no šī ķermeņa *relātīvās* kustības ap asi f un šīs ass *pārnešanas* kustības ap asi p, sauc

---

[1]) Šo likumu ir ievērojis jau Kōši (A. L. C a u c h y, *Exercises de math.*, t. 2, 1827, *Oeuvres,* (2), t. 7), bet skaidri to izteicis ir Ponselè 1838. g. savos priekšlasījumos Parīzes universitātē.

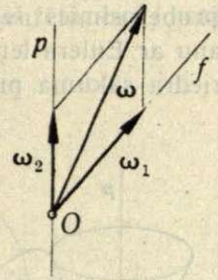
[2]) L. P o i n s o t, (1777.—1859. g.). Viņa klasiskais darbs ir *Eléments de statique,* kura desmitais izdevums iznāca 1861. g.

[3]) J. d'A l e m b e r t, *Recherches sur la précession des équinoxes,* Paris, 1749.

[4]) Šo likumu bija ievērojuši jau Kōši un Šals (M. C h a s l e s, 1793.—1880.g.) bet no jauna tā nozīmi parādīja Puansò savā darbā *Théorie nouvelle de la rotation des corps,* Paris, 1834., Journal de math. pures et appl., (1), t. 16, 1851.

par *rēgulāro precesiju.* Telpā nekustīgo asi p sauc par *precesijas asi*, bet ķermenī nekustīgo asi par *figūras asi.* Nekustīgo punktu O sauc par *precesijas polu* (70. zīm.).

Ja $\boldsymbol{\omega}_1$ un $\boldsymbol{\omega}_2$ ir attiecīgie rotācijas ātrumi ap asīm f un p, tad rēgulārās precesijas rotācijas ātrums ir $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.



70. zīm.

Tā kā pa kustības laiku parallēlograms, kas konstruēts ar vektoriem $\boldsymbol{\omega}_1$ un $\boldsymbol{\omega}_2$, kuŗu kopējais sākuma punkts ir O, paliek nemainīgs, jo vektoru $\boldsymbol{\omega}_1$ un $\boldsymbol{\omega}_2$ virzieni un gaŗumi ir nemainīgi, tad arī skālārais produkts $\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$ ir konstants un parallēlograma diagōnāle, kuŗa ir precesijas leņķiskā ātruma $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ nesēja un reizē arī kustības ass, ir ar konstantu virzienu, citiem vārdiem sakot, tās veidotie leņķi ar asīm f un p ir konstanti. No tā izriet, ka rēgulārā precesijā abi kōni ir rotācijas kōni.

Apzīmējot ar ϑ_0 šauro leņķi starp taisnēm f un p, tām varam piešķirt divas orientācijas tā, ka ϑ_0 ir leņķis starp šīm orientētām taisnēm. No divām iespējamām orientācijām viena dabūjama no otras, mainot vērsumus.

Izvēloties vienu šādu orientāciju uz f un p un apzīmējot ar $\mathbf{k}$ un $\mathbf{K}$ attiecīgos vienības vektorus šo asu virzienos, varam rakstīt, ka

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \mu \mathbf{k}, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \nu \mathbf{K},$$

kur μ un ν ir divi skālāri lielumi, no kuŗiem katrs var būt kā pozitīvs, tā negātīvs, atkarībā no tā, vai rotācijas ap attiecīgajām asīm ir pozitīvi vai negātīvi orientētas. Saprotams, ka mainot reizē f un p orientācijas, reizē mainās arī μ un ν zīmes.

Rēgulāro precesiju sauc par *direktu* vai *retrogradu* atkarībā no tā, vai rotācijas ap attiecīgajām asīm, kas ir orientētas tādējādi, ka tās veido šauru leņķi, ir ar vienādiem vai pretējiem vērsumiem.

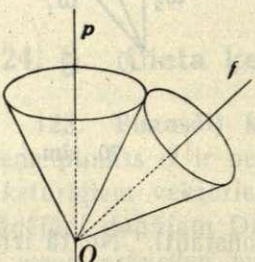
Pirmajā gadījumā μ un ν zīmes ir vienādas, otrā tās ir dažādas, vai, kas ir tas pats, tā kā $\cos\vartheta_0 > 0$, pirmajā gadījumā produkta

$$\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = \mu\, \nu \cos\vartheta_0$$

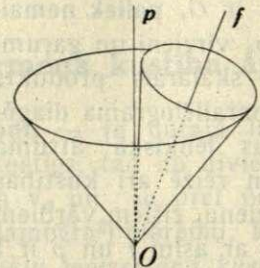
zīme ir $+$, otrā gadījumā tā ir $-$.

Rēgulāro precesiju vēl var klasificēt atkarībā no Puansò kōnu savstarpējā novietojuma. Nav grūti saprast, ka šeit iespējami tikai trīs gadījumi: 1° ikviens no kōniem atrodas otra ārpusē (71a. zīm.), 2° kustīgais kōns atrodas nekustīgā kōna iekšpusē (71b. zīm.) un 3° nekustīgais kōns atrodas kustīgā kōna iekšpusē (71c. zīm.).

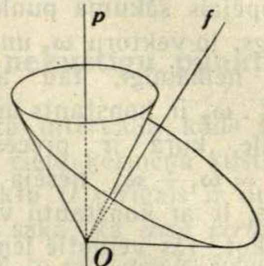
Neapskatot šo trīs gadījumu raksturošanai tuvākus kritērijus, aprobežosimies šeit ar rēgulārās precesijas vienādojumu uzrakstīšanu ar Eulera leņķiem. Izvēloties precesijas polu O par koordinātu triedra sākuma punktu ar orientētām asīm p un f, kas veido leņķi



71a. zīm.



71b. zīm.



71c. zīm.

ϑ_0, kā nekustīgā un kustīgā triedra OZ un Oz asīm, leņķis $XOM = \psi$ mērī mezglu līnijas anōmaliju plaknē, kas ir perpendikulāra asij $OZ = p$ caur punktu O, un leņķis $MOx = \varphi$ mērī x-ass anōmaliju plaknē, kas ir perpendikulāra asij $Oz = f$ arī caur punktu O. Tādējādi dabūjam, ka

$$\dot{\varphi} = \mu, \qquad \dot{\psi} = \nu.$$

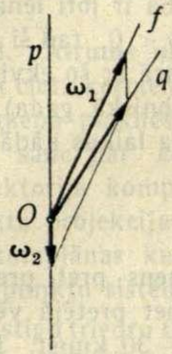
Integrējot šos vienādojumus un ievērojot, ka $\vartheta = \vartheta_0$, dabūjam rēgulārās precesijas vienādojumus

$$(16.) \qquad \vartheta = \vartheta_0, \qquad \varphi = \mu t + \varphi_0, \qquad \psi = \nu t + \psi_0,$$

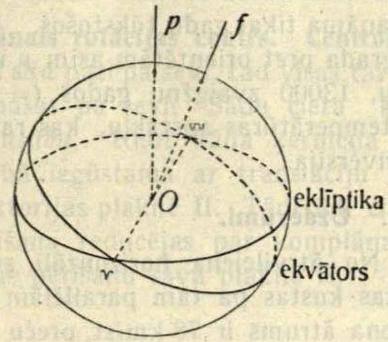
kur ϑ_0, φ_0, ψ_0 ir Eulera leņķi, kas atbilst sistēmas sākuma pozicijai. Arī otrādi, (16.) sistēmas trīs vienādojumi raksturo rēgulāru precesijas kustību, kuŗas OZ-ass ir precesijas ass, bet Oz-ass ir figūras ass.

125. **Zemes rēgulārā precesija.** — Zemes kustība ap savu centru, uzskatot to par nekustīgu, ir rēgulāra retrograda precesija. Precesijas ass p ir eklīptikas plaknei (Zemes orbitas plakne kustībā ap Sauli) perpendikulāra taisne un figūras ass f ir taisne, kas savieno Zemes polus. Orientējot asis f un p tā, lai to pozitīvie vērsumi rāda uz ziemeļiem, $\sphericalangle(p, f) \approx 23^0 27'$. Ap polāro asi f Zemes pil-

nais apgrieziens, kas norit no *rietumiem pār dienvidiem uz austrumiem*, noslēdzas vienā zvaigžņu dienā, bet polārā ass f savkārt rotē ap precesijas asi p vērsumā no *austrumiem pār dienvidiem uz rietumiem*, izdarot pilnu apgriezienu 26000 zvaigžņu gados (platoniskais gads). Un tā kā Zemes rotācija ap savu asi f ir pozitīvi orientēta, bet f rotā-



72. zīm.



73. zīm.

cija ap precesijas asi p ir negātīvi orientēta, tad tiešām Zemes rēgulārā precesija ir retrograda. Šo divu rotāciju rezultante ir rotācija ap asi q, kas ir precesijas kōna veidule un kas, atrazdamās $\measuredangle\,(p, f)$ ārpusē, veido ar asi f ļoti mazu leņķi, kuŗš ir vienāds ar 0″,00867 (72. zīm.).

Tādējādi kustīgais kōns, kuŗa veidules ar tā asi veido ļoti mazu leņķi, veļas pa nekustīgā kōna, kuŗa veidules ar tā asi veido leņķi, kas ir mazliet lielāks par 23°27′, iekšpusi.

Izvēloties par laika vienību zvaigžņu dienu, rotācijas ātrumu ω_1 un ω_2 algebriskās vērtības μ un ν, ievērojot izvēlēto asu f un p orientāciju, var attiecīgi izteikt formā

$$\mu = 2\pi\,, \qquad \nu = -\frac{2\pi}{366\,.\,26000} \approx -\frac{2\pi}{9\,.\,10^6}\,. \tag{17.}$$

126. **Ekvinokciju precesija.** — Kā zināms, eklīptika nav nekas cits kā plakne, kuŗā, no Zemes raugoties, notiek Saules gada kustība, no kuŗas savkārt ir atkarīga gada laiku maiņa. Eklīptika krusto Zemes ekvātora plakni, kas vilkta caur Zemes centru O perpendikulāri polārai asij f, pa taisni ♈♎ (73. zīm.). Saule savā kustībā pa eklīptiku, kas ir direkta pret asi p, vienreiz gadā krusto taisni O♈ punktā ♈. Šo momentu sauc par *pavasaŗa ekvinokciju* (*naktlīdzi*).

Momentu, kad Saule atrodas punktā ♎, kas ir diametrāli pretējs punktam ♈, sauc par *rudens ekvinokciju*. Taisni ♈♎ tādēļ sauc par *ekvinokciju taisni*.

Ja šo taisni references sistēmā ar Eulera leņķiem uzskata par mezglu līniju, tad no (16.) sistēmas trešā vienādojuma izriet, ka ekvinokciju taisne rotē pa eklīptiku ar leņķisko ātrumu $\dot{\psi} = \nu$. Bet (17.) sistēmas otra vienlīdzība savkārt rāda, ka šī kustība ir ļoti lēna un tā kļūst manāma tikai gadu tūkstošos. Un tā kā $\nu < 0$, tad šī kustība ir retrograda pret orientētām asīm p un t. Sakarā ar šo ekvinokciju precesiju, 13000 zvaigžņu gados (= pusei platoniskā gada) notiek pilnīga temperātūras apstākļu, kas raksturo gada laikus kādā Zemes vietā, inversija.

127. **Uzdevumi.**

1. No ātrvilciena horizontāli sviests akmens pret preču vilcienu, kas kustas pa tam parallēlām sliedēm, bet pretējā vērsumā. Ātrvilciena ātrums ir 78 km/st, preču vilciena — 30 km/st. Perpendikulāri kustības virzienam sviestā akmens ātrums ir 10 m/sek. Iedomājoties, ka trieciena pret sienu efekts ir proporcionāls ātruma kvadrātam (sviestā ķermeņa pret sviesto), parādīt, ka ar minētajiem noteikumiem trieciens būs 10 reizes spēcīgāks, nekā ja šis akmens būtu sviests no miera stāvokļa pret mierā stāvošu vagonu.

2. Izpētīt smaga ķermeņa, kas veļas bez berzes pa slīpu plakni, absolūto kustību, ja šī plakne kustas ar konstantu horizontālu ātrumu **v**, kas atrodas vertikālā plaknē, kuŗa ir perpendikulāra kustīgai plaknei.

3. Kāds punkts P kustas vienmērīgā taisnlīnijas kustībā. Izpētīt šī punkta šķietamo kustību pret koordinātu triedru, kas rotē ap kādu taisni, kuŗa ir perpendikulāra punkta P absolūtai trajektorijai.

4. Parādīt, ka Zemes rēgulārās precesijas kōns (kuŗa veidule ir q) krusto zemes lodes virspusi pa riņķi, kuŗa radijs nepārsniedz 30 cm (uzskatot Zemi par lodi ar radiju 6000 km).

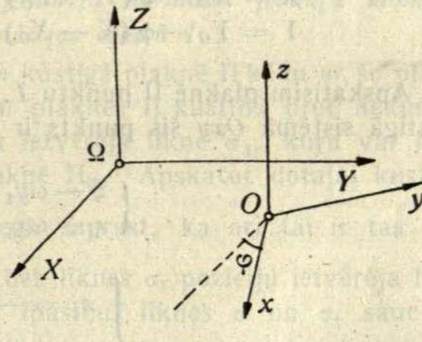
V NODAĻA.

CIETA ĶERMEŅA KOMPLĀNA KUSTĪBA.

25. §. Komplānas punktu sistēmas nepārtraukta kustība.

128. **Ātrums un momentānais rotācijas centrs. Centroīdas.** — Ja kāda cieta ķermeņa plakne Π slīd pati pa sevi, tad visas tai parallēlās ķermeņa plaknes arī slīd pašas pa sevi. Šādu cieta ķermeņa kustību sauc par *komplānu kustību*. Kaut kāda ķermeņa punkta P trajektorija komplānā kustībā iegūstama ar translāciju $\overline{P_1P}$ no šī punkta projekcijas P_1 trajektorijas plaknē Π. Tādējādi cieta ķermeņa komplānas kustības pētīšana reducējas par komplānas invariāblas punktu sistēmas kustības pētīšanu savā plaknē Π.

Nekustīgo triedru ΩXYZ izvēlēsimies tā, lai tā plakne $X\Omega Y$ sakrīt ar nekustīgo plakni Π_0, pa kuŗu slīd kustīgā plakne Π. Kustīgā triedra $Oxyz$, kas saistīts ar cieto ķermeni, plakni xOy savkārt iedomāsimies sakrītam ar plakni Π. Nekustīgā un kustīgā triedra attiecīgajām asīm ΩZ un Oz tad ir viens un tas pats plaknei Π (arī Π_0) perpendikulārais virziens (74. zīm.).



74. zīm.

Kustīgā triedra $Oxyz$ pozicija pret nekustīgo triedru ΩXYZ ir definēta ar punkta O koordinātām X_O, Y_O un leņķi φ, ko veido Ox-ass ar ΩX-asi. Kaut kuŗa plaknes Π punkta P koordinātas X, Y nekustīgā sistēmā ΩXY, zinot tā koordinātas x, y kustīgā sistēmā Oxy, ir dotas ar formulām

$$X = X_O + x\cos\varphi - y\sin\varphi\,,$$
$$Y = Y_O + x\sin\varphi + y\cos\varphi\,.$$

Punkta O ātruma $\mathbf{v}_O$ koordinātas un kustīgā triedra $Oxyz$ momentānā rotācijas vektora $\boldsymbol{\omega}$ koordinātas triedrā $Oxyz$ apzīmēsim attiecīgi ar ξ, η, ζ un p, q, r.

Jebkuŗa cieta ķermeņa punkta ātruma **v** koordinātas kustīgā triedrā $Oxyz$ tad ir dotas ar formulām

$$v_x = \xi + qz - ry\,,$$
$$v_y = \eta + rx - pz\,,$$
$$v_z = \zeta + py - qx\,.$$

Komplānā kustībā plaknē Π jebkuŗam šīs plaknes punktam P tā ātruma z-koordināta $v_z = 0$, no kurienes izriet, ka $\zeta = p = q = 0$. Tādējādi punkta P ātruma koordinātas kustīgā triedrā $Oxyz$ ir

$$(1.)\qquad \begin{cases} v_x = \xi - \omega y\,, \\ v_y = \eta + \omega x\,, \\ v_z = 0\,, \end{cases}$$

kur $\omega = r = \dot{\varphi}$. Punkta P ātruma koordinātas nekustīgā triedrā ΩXYZ savkārt ir

$$\dot{X} = \dot{X}_O - \dot{\varphi}\,(Y - Y_O) = \dot{X}_O - \omega\,(Y - Y_O),$$
$$\dot{Y} = \dot{Y}_O + \dot{\varphi}\,(X - X_O) = \dot{Y}_O + \omega\,(X - X_O).$$

Apskatīsim plaknē Π punktu I, kuŗa ātrums momentā t ir nulle. Kustīgā sistēmā Oxy šis punkts ir definēts ar formulām

$$(2.)\qquad \begin{cases} \xi - \omega y_1 = 0\,, \\ \eta + \omega x_1 = 0 \end{cases}$$

vai

$$(2.')\qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{\eta}{\omega}\,, \\ y_1 = \dfrac{\xi}{\omega}\,, \end{cases}$$

ja x_1, y_1 ir tā koordinātas šai sistēmā.

Nekustīgā sistēmā ΩXY punkts I ir dots ar formulām

$$(3.)\qquad \begin{cases} X_1 - X_O = -\dfrac{\dot{Y}_O}{\omega}\,, \\ Y_1 - Y_O = \dfrac{\dot{X}_O}{\omega}\,, \end{cases}$$

kur X_1, Y_1 ir tā koordinātas. Ja caur punktu I velkam taisni $Iz\,(IZ)$, kas ir perpendikulāra plaknei Π, tad arī jebkuŗa šīs taisnes punkta ātrums momentā t ir nulle.

Ievietojot (1.) sistēmas formulās koordinātu ξ, η vietā to nozīmes, kas atrastas no (2.) sistēmas formulām, dabūjam tām izteiksmes

$$v_x = -\omega\,(y - y_1)\,,$$
$$v_y = \omega\,(x - x_1)\,,$$
$$v_z = 0.$$

Šīs formulas rāda, ka jebkuŗa cieta ķermeņa punkta ātrums **v** momentā t ir tāds pats kā šī ķermeņa rotācijā ap asi $Iz(IZ)$ ar leņķisko ātrumu ω. Ass Iz (IZ) tā tad ir *momentānā rotācijas ass.*

Aprobežojoties tikai ar komplānas invariāblas punktu sistēmas kustības pētīšanu tās plaknē, redzam, ka jebkuŗa šīs sistēmas punkta ātrums momentā t ir tāds pats kā tās rotācijā ap centru I ar ātrumu ω. Punktu I tāpēc sauc par *momentāno rotācijas centru*[1]).

Bet tā kā rotācijā jebkuŗa punkta P ātrums **v** momentā t ir perpendikulārs IP un tam proporcionāls, un tā tad IP ir perpendikulārs punkta P trajektorijai, tad ar to ir pierādīta šāda Šala teorēma[2]:) *Komplānas punktu sistēmas trajektoriju normāles jebkuŗā momentā krustojas atbilstošā momentānā rotācijas centrā I.*

Šai pašā sakarībā apskatīsim kustīgā plaknē Π kādu ar šo plakni saistītu līkni σ, kuŗas pozicijām plaknes Π kustībā pret nekustīgo plakni Π_0 vispārīgi eksistē kāda ietvērēja līkne σ_1, kuŗu var iedomāties atrodamies nekustīgā plaknē Π_0. Apskatot dotajai kustībai $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$ reciproko kustību $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi}\right)$, viegli saprast, ka arī tai ir tas pats momentānais rotācijas centrs, bet līknes σ_1 poziciju ietvērēja līkne tagad ir līkne σ. Ievērojot šo īpašību, līknes σ un σ_1 sauc par *saistītiem profiliem.*

Apzīmēsim līkņu σ un σ_1 saskaršanās punktu momentā t ar T un pierādīsim, ka šo līkņu kopējā normāle punktā T iet caur momentāno rotācijas centru I.

Iedomāsimies, ka punkts T nesakrīt ar punktu I un atsauksimies pierādījumā uz kustību kompoziciju. Tā kā punkta T relātīvā kustība ir šī punkta kustība pa līkni σ, bet tā pārnešanas kustība izteicas plaknes Π kustībā pret nekustīgo plakni Π_0, t. i. līknes σ kustībā pret σ_1, tad šī punkta absolūtā kustība ir kustība pret nekustīgo plakni Π_0, kas norit pa līkni σ_1.

[1]) Joh. Bernoulli, 1667.—1748. g., *Propositiones variae,* XIV: *De centro spontaneo rotationis*; Opera omnia, IV, 1742.

[2]) Šī teorēma atrodama Šala darbā, kas publicēts *Bulletin de la Société math. de France.*, t. 6, 1878.

Un tā tad punkta T relātivais ātrums $\mathbf{v}_r$ resp. absolūtais ātrums $\mathbf{v}_a$ ir tā kustības ātrums pa līkni σ resp. pa līkni σ_1. Bet tā kā punktā T līknes σ un σ_1 saskaŗas, tad abi šie ātrumi ir virzīti pa šo līkņu kopējo tangenti šai punktā; un tāpēc arī punkta T pārnešanas ātruma $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_r$ nesēja taisne ir šī punkta kopējā tangente līknēm σ un σ_1. Pēc definīcijas punkta T pārnešanas ātrums ir tā plaknes Π punkta ātrums pret nekustīgo plakni Π_0, ar kuŗu apskatītajā momentā sakrīt punkts T, un tā kā šī plaknes Π punkta momentānā kustība ir momentāna rotācija ap momentāno rotācijas centru I, tad šai rotācijā punkta T ātrums ir perpendikulārs radijvektoram IT, kas ir kopējā normāle saistītiem profiliem σ un σ_1.

Apskatot nepārtrauktu cieta ķermeņa komplānu kustību kādā galīgā laika intervallā, varam iedomāties, ka 1° šai kustībā dažos momentos momentānā rotācijas ass $Iz\,(IZ)$ atrodas bezgalībā, 2° dažos momentos tā atrodas galībā. Doto intervallu tādēļ iespējams sadalīt parciālos intervallos tā, ka jebkuŗā no tiem ass $Iz\,(IZ)$ atrodas vai nu bezgalībā (I atrodas bezgalībā), vai galībā (I ir galīgs plaknes $\Pi(\Pi_0)$ punkts).

Pirmā veida intervallos cieta ķermeņa komplāna kustība ir translācija; otra veida intervallos jebkuŗā momentā eksistē noteikta rotācijas ass, ar kuŗu sakrīt kāda ķermeņa taisne. Laikam t mainoties, momentānā rotācijas ass Iz pārvietojas, aprakstot cietā ķermenī kādu cilindru c, kuŗa veidules ir perpendikulāras xOy-plaknei un kuŗa vadītāja (direktrise) ir kāda līkne I_k — momentāno rotācijas centru I ģeometriskā vieta šai plaknē.

Nekustīgā triedrā ΩXYZ momentāno rotācijas asu IZ ģeometriskā vieta atkal ir kāds cilindrs C, kuŗa veidules ir perpendikulāras $X\Omega Y$-plaknei un kuŗa direktrise šai plaknē ir kāda līkne I_n — momentāno rotācijas centru I ģeometriskā vieta sistēmā $X\Omega Y$.

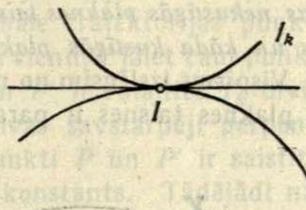
Teōrēma. — *Cieta ķermeņa nepārtrauktā komplānā kustībā cilindrs c, kas saistīts ar cieto ķermeni, veļas bez slīdes pa nekustīgo cilindru C, kuŗš saistīts ar nekustīgo telpu.*

Šis ir vispārīgās Ponselè teōrēmas speciāls gadījums. Lai pierādītu šo teōrēmu, pietiek pierādīt, ka *komplānā kustībā līkne I_k veļas bez slīdes pa līkni I_n*[1]. Šai nolūkā jāatceras līkņu velšanās definīcija (121. nodal.).

Līkņu I_k un I_n kopējais punkts momentā t ir punkts I, kuŗā sakrīt šim momentam atbilstošais kustīgais rotācijas centrs ar nekustīgo

[1]) Šo teōrēmu ir atradis Kōši, *Exercices de math.*, t. 2, 1827; *Oeuvres*, (2), t. 7.

rotācijas centru (75. zīm.). Punkta I *relātīvā* kustība ir šī punkta kustība pret kustīgo plakni Π un tā trajektorija ir I_k. Uzskatot punktu I par saistītu ar kustīgo plakni Π, tā *pārnešanas* kustība izteicama ar plaknes Π kustību pret plakni Π_0. Un tā tad punkta I kustību nekustīgā plaknē Π_0 var uzskatīt par tā *absolūto* kustību. Bet jebkuŗā momentā t kustīgais punkts I sakrīt ar kādu no nekustīgiem punktiem, kuŗu ģeometriskā vieta plaknē Π_0 ir līkne I_n, un tā tad līkne I_n ir punkta I absolūtās kustības trajektorija.



75. zīm.

Punkta I pārnešanas ātrums ir tā plaknes Π punkta ātrums pret plakni Π_0, kas dotajā momentā t sakrīt ar punktu I. Bet šī punkta ātrums ir nulle, jo I ir vienīgais plaknes Π punkts, kuŗa ātrums apskatītajā momentā ir nulle. Tāpēc, ja punkta I absolūto, relātīvo un pārnešanas ātrumu apzīmējam attiecīgi ar $\mathbf{v}_a$, $\mathbf{v}_r$ un $\mathbf{v}_p = 0$, tad ātrumu kompozicijas teorēma rāda, ka

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r$$

vai

$$\frac{ds_n}{dt} = \frac{ds_k}{dt},$$

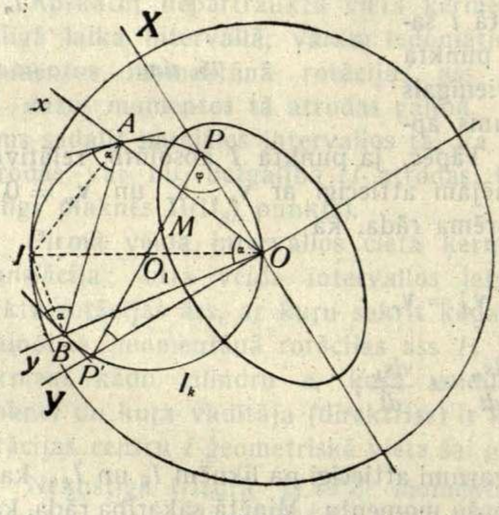
kur s_n un s_k ir punkta I loku gaŗumi attiecīgi pa līknēm I_n un I_k, kas skaitīti, sākot ar vienu un to pašu momentu. Minētā sakarība rāda, ka abu trajektoriju saskaršanās punktā to tangentes sakrīt un $s_n = s_k$, jo abu līkņu loku gaŗumi ir skaitīti no viena un tā paša momenta. Līknes I_k velšanās pa līkni I_n ar to ir pierādīta. Līknes I_k un I_n, kā momentāno rotācijas centru I ģeometriskās vietas kustīgā un nekustīgā plaknē, sauc par *centroīdām*. Atsevišķi līkni I_k sauc par *rulanti*, bet līkni I_n par *bazi*. Plaknes Π jebkuŗa punkta P trajektoriju komplānā kustībā sauc par *ruleti*.

Tādējādi esam pārliecinājušies, ka kādas plaknes ikvienai kustībai pa kādu citu plakni (translāciju izņemot) atbilst divas līknes, no kuŗām viena veļas bez slīdes pa otru. Arī otrādi, ja ir dotas divas šādas līknes un to kustības sākuma pozicijas, tad ir pilnīgi noteikta kustīgās plaknes poziciju ģeometriskā secība nekustīgā plaknē. Lai definētu vēl tās laika secību, ir jādod, piem., momentānā rotācijas centra I līklīnijas abscīza pa vienu no līknēm I_k vai I_n kā laika t funkcija

Pārejot no direktās kustības $\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right)$ uz reciproko $\left(\frac{\Pi_0}{\Pi}\right)$, viegli saprast, ka momentānais rotācijas centrs nemainās, bet jaunā baze ir I_k un rulante I_n. Leņķiskie momentānie ātrumi ω un ω_1 šais kustībās ir pretēji pēc zīmēm, t. i. $\omega_1 = -\omega$.

129. Piemēri. — 1⁰ *Divi kustīgās plaknes punkti apraksta divas nekustīgās plaknes taisnes. Jāatrod šai komplānā kustībā centroīdas un kāda kustīgās plaknes punkta trajektorija* (*rulete*) (76. zīm.).

Vispirms izslēgsim no mūsu apskata gadījumu, kad abas nekustīgās plaknes taisnes ir parallēlas, t. i. gadījumu, kas atbilst translācijas kustībai, un apzīmēsim kustīgās plaknes punktu A un B aprakstītās nekustīgās taisnes attiecīgi ar Ox un Oy, bet konstanto attālumu starp punktiem A un B ar l, t. i. $AB = l$.



76. zīm.

Tā kā punkta A trajektorija ir taisne Ox, tad normāle šai taisnei punktā A iet caur momentāno rotācijas centru I; tāpat normāle taisnei Oy punktā B iet caur centru I. Punkts I tā tad ir šo divu normāļu krustošanās punkts. Velkot caur trim punktiem O, A, B riņķa līniju, redzam, ka punkts I ir šīs riņķa līnijas punktam O diametrāli pretējais punkts.

Ja taišņu Ox un Oy veidoto leņķi apzīmē ar α, tad riņķa līnijas OAB diametrs ir $\frac{l}{\sin\alpha}$ un tā tad

$$OI = \frac{l}{\sin\alpha} = const.$$

Tas nozīmē, ka nekustīgā plaknē punkts I apraksta riņķa līniju I_n ar centru O un radiju $\frac{l}{\sin\alpha}$. Šī riņķa līnija ir apskatītās kustības *baze*.

Rulante ir punktu I ģeometriskā vieta kustīgā plaknē, kas saistīta ar AB. Uzskatot riņķa līniju OAB, kuŗa ar savu chordu AB punktos A un B veido leņķi α un kuŗas radijs r (vienāds ar riņķa līnijas I_n radija pusi) ir konstants, par saistītu ar kustīgo plakni un ievērojot, ka punkts I vienmēr atrodas uz šīs riņķa līnijas, varam secināt, ka riņķa līnija OAB ir apskatītās kustības *rulante* I_k.

Rulantes I_k kaut kuŗa punkta P trajektorija ir caur punktu O vilktas taisnes segments, jo, tā kā normāle trajektorijas punktā P iet caur punktu I, tad tangentei šai punktā vienmēr jāiet caur punktu O.

Speciālā gadījumā, kad punkti P un P' ir rulantes I_k divi diametrāli pretēji punkti, tie apraksta divas savstarpēji perpendikulāras taisnes OX un OY. Bet tā kā punkti P un P' ir saistīti ar kustīgo plakni, tad to attālums PP' ir konstants. Tādējādi nākam pie atzinuma, ka apskatītā kustība var tikt reālizēta, liekot taisnes segmentam ar konstantu gaŗumu slīdēt pa divām savstarpēji perpendikulārām nekustīgām taisnēm.

Jebkuŗš kustīgās plaknes punkts M šai kustībā apraksta elīpsi ar centru O. Tiešām, ja kādu segmenta PP' punktu apzīmējam ar M, tad, kā 76. zīmējumā redzams,

$$\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}\,.$$

Projicējot šo vektoriālo vienlīdzību uz sistēmas OXY asīm un apzīmējot punkta M koordinātas šai sistēmā ar x, y, tā attālumu no centra O_1 ar ρ un segmenta PP' veidoto leņķi ar OX-asi ar φ, dabūjam, ka

$$x = r\cos\varphi + \rho\cos\varphi = (r+\rho)\cos\varphi\,,$$
$$y = r\sin\varphi - \rho\sin\varphi = (r-\rho)\sin\varphi\,.$$

Eliminējot no šīm koordinātu izteiksmēm φ, dabūjam elīpses vienādojumu

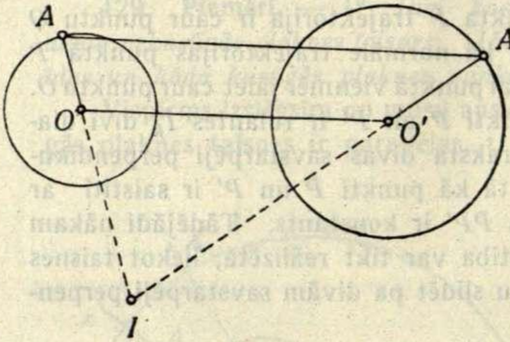
$$\frac{x^2}{(r+\rho)^2} + \frac{y^2}{(r-\rho)^2} = 1\,.$$

Šīs elīpses centrs ir punkts O un tās asis sakrīt ar koordinātu sistēmas OXY asīm.

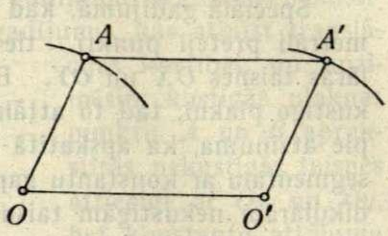
Reciprokā kustībā riņķa līnija I_n veļas pa riņķa līniju I_k, kuŗas radijs ir tikai puse no pirmās riņķa līnijas radija. Ja tagad kustīgo plakni iedomājas saistītu ar riņķi I_n, bet nekustīgo ar riņķi I_k, tad, kā vēlāk redzēsim (135. nodal.), jebkuŗa kustīgās plaknes punkta trajektorija ir epicikloīda.

2^0 *Jāatrod centroīdas komplānā kustībā, kas ir noteikta ar četrstūŗa kustību, kuŗa divas blakus virsotnes ir nekustīgas.*

Ja četrstūŗa divas nekustīgās virsotnes apzīmē ar O un O', bet pārējās divas virsotnes ar A un A' (77. zīm.), tad, kustīgās plaknes segmenta AA' gala punktiem paliekot uz nekustīgām riņķa līnijām ar centriem O, O' un radijiem OA un $O'A'$, momentānais rotācijas centrs I ir šo riņķa līniju normāļu OA un $O'A'$ krustošanās punkts.



77. zīm.



78. zīm.

Aprobežosimies ar vienkāršākiem gadījumiem, kad četrstūŗa pretējās malas ir vienāda gaŗuma. Tad ir iespējami šādi gadījumi.

1. *Četrstūris ir parallēlograms.* — Tā kā šai gadījumā (78. zīm.) riņķa līniju normāles OA un $O'A'$ pa kustības laiku paliek parallēlas, tad momentānais rotācijas centrs I atrodas bezgalībā un momentānā kustība ir translācija, kas ir perpendikulāra normāļu OA un $O'A'$ kopējam virzienam.

2. *Četrstūris ir antiparallēlograms.* — Apskatīsim vispirms gadījumu, kad taisne, kas savieno antiparallēlograma divas nekustīgās virsotnes, ir viena no tā īsākajām malām (79. zīm.).

Pēc antiparallēlograma definīcijas vienādas ir šādas malas:

$$AA' = OO', \quad OA = O'A'.$$

Ja momentānā rotācijas centra I attālumus no punktiem O un O' apzīmējam attiecīgi ar ρ un ρ', bet no punktiem A un A' ar r un r', t. i. ja

$$OI = \rho, \quad O'I = \rho',$$
$$AI = r, \quad A'I = r',$$

tad dabūjam sakarības:

(4.) $$\rho = r', \quad \rho' = r.$$

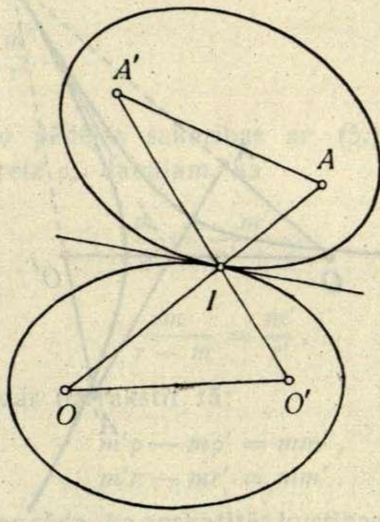
Apzīmējot antiparallēlograma gaŗāko malu pāŗa malas gaŗumu, t. i. nekustīgo riņķa līniju, pa kuŗām kustas punkti A un A', radiju kopējo gaŗumu ar m, dabūjam, ka

$$\rho + r = \rho' + r' = m,$$

ko, ievērojot (4.) sistēmas sakarības, var pārrakstīt tā:

$$\rho + \rho' = m, \quad r + r' = m.$$

Šīs divas sakarības rāda, ka nekustīgā plaknē punktu I ģeometriskā vieta (baze) ir elīpse ar fokiem O un O' un lielo asi m, bet



79. zīm.

kustīgā plaknē I ģeometriskā vieta (rulante) arī ir elīpse ar fokiem A un A' un to pašu lielās ass gaŗumu.

Tā kā šo elīpšu kopējā tangente punktā I ir leņķa $A'IO$ bisektrise un malas AA' un OO' ir simmetriskas pret šo tangenti, tad arī abas elīpses ir simmetriskas pret to punktā I. Malai AA' pārvietojoties, kustīgā elīpse I_k veļas bez slīdes pa nekustīgo elīpsi I_n.

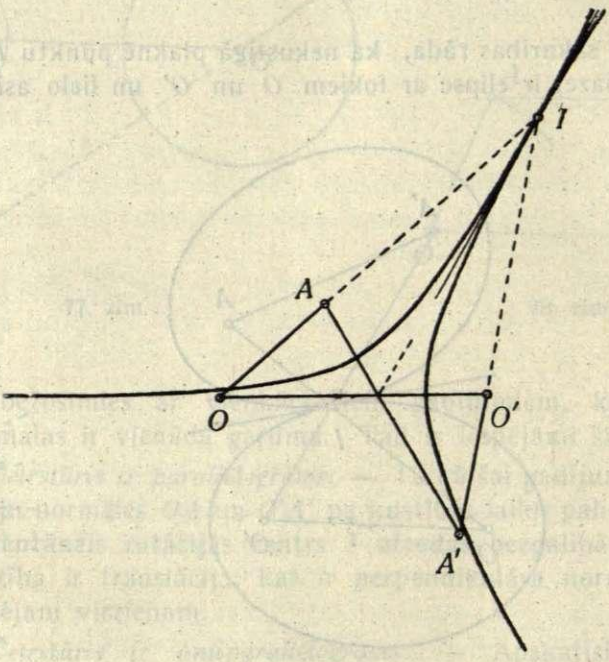
Otrā gadījumā, kad taisne, kas savieno antiparallēlograma divas nekustīgās virsotnes, ir viena no tā gaŗākajām malām (80. zīm.), tad, apzīmējot nekustīgo riņķa līniju radiju kopējo gaŗumu, tāpat kā agrāk, ar m, dabūjam, ka

$$\rho - r = r' - \rho' = m,$$

ko, ievērojot (4.) sistēmas sakarības, var pārrakstīt tā:

$$\rho - \rho' = m\,, \quad r' - r = m\,.$$

No šīm sakarībām varam secināt, ka šai gadījumā abas centroīdas ir savā starpā vienādas hiperbolas. Bazes foki ir O un O', bet rulantes foki — A un A'. Abu hiperbolu reālās ass garums ir m. Un



80. zim.

tā kā arī šai gadījumā kopējā tangente hiperbolām punktā I ir leņķa $A'IA$ bisektrise un malas AA' un OO' ir simmetriskas pret šo tangenti, tad arī abas hiperbolas ir simmetriskas pret to.

Malai AA' pārvietojoties, kustīgās hiperbolas I_k kreisais zars veļas bez slīdes pa nekustīgās hiperbolas I_n labo zaru.

3. *Četrstūŗa blakus malas, kas sastopas divās pretējās virsotnēs, ir vienādas.* — Iedomāsimies, ka šīs virsotnes ir O un A' (81. zīm.). Apzīmējot

$$OA = OO' = m\,, \quad AA' = A'O' = m',$$

dabūjam, ka

$$r - \rho = m\,, \quad r' - \rho' = m'. \tag{5.}$$

Tālāk no trijstūŗiem IOO' un IAA' ar sinu teōrēmu dabūjam proporcijas:

$$\frac{OO'}{OI} = \frac{\sin OIO'}{\sin OO'I},$$

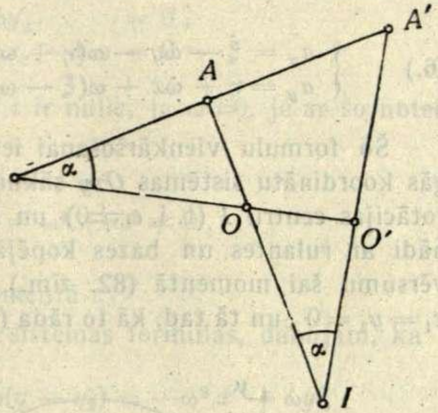
$$\frac{AA'}{A'I} = \frac{\sin AIA'}{\sin A'AI},$$

no kurienes

$$\frac{OO'}{OI} = \frac{AA'}{A'I}$$

resp.

$$\frac{m}{\rho} = \frac{m'}{r'}.$$



81. zīm.

Eliminējot no pēdējās sakarības ar (5.) sistēmas sakarībām vienreiz r' un otrreiz ρ, dabūjam, ka

$$\frac{m}{\rho} = \frac{m'}{m' + \rho'}$$

un

$$\frac{m}{r - m} = \frac{m'}{r'},$$

ko galīgā formā var pārrakstīt tā:

$$m'\rho - m\rho' = mm',$$
$$m'r - mr' = mm'.$$

Šis vienlīdzības rāda, ka apskatītās kustības centroīdas ir divi savā starpā vienādi *Dekarta*[1]) *ovāli* ar atbilstošajiem fokiem O, O' un A, A'.

130. **Paātrinājums un momentānais paātrinājumu centrs.** — Meklēsim plaknes Π punkta P paātrinājumu **a** momentā t. Apzīmējot šī paātrinājuma koordinātas xOy sistēmā ar a_x un a_y, pēc Būra formulām dabūjam tām šādas izteiksmes:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} - \omega v_y,$$

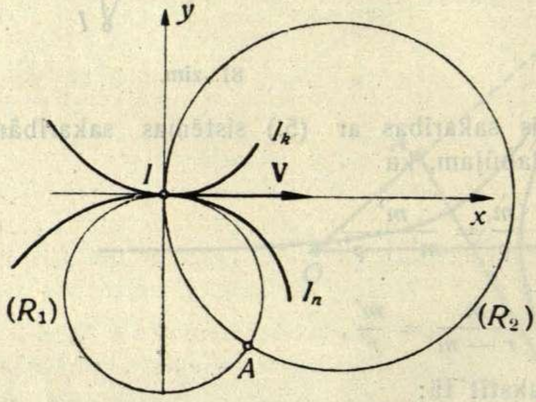
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} + \omega v_x.$$

[1]) R. Descartes (1596.—1650. g.). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie,* Leyde, 1637. Pēdējās daļas atsevišķs izdevums „*La géométrie*" iznāca 1886. g. Parīzē.

Bet ievērojot punkta P ātruma $\mathbf{v}$ koordinātu v_x un v_y izteiksmes, kas dotas ar (1.) sistēmas formulām, tās var pārrakstīt formā

$$(6.)\quad \begin{cases} a_x = \dot{\xi} - \dot{\omega} y - \omega(\eta + \omega x) = \dot{\xi} - \omega\eta - \omega^2 x - \dot{\omega} y\,, \\ a_y = \dot{\eta} + \dot{\omega} x + \omega(\xi - \omega y) = \dot{\eta} + \omega\xi - \omega^2 y + \dot{\omega} x\,. \end{cases}$$

Šo formulu vienkāršošanai iedomāsimies, ka momentā t kustīgās koordinātu sistēmas Oxy sākuma punkts O sakrīt ar momentāno rotācijas centru I (t. i. $\omega \neq 0$) un ass Ox virziens un vērsums ir vienādi ar rulantes un bazes kopējās tangentes virzienu un pozitīvo vērsumu šai momentā (82. zīm.). Tad punkta I koordinātas ir $x_1 = y_1 = 0$, un tā tad, kā to rāda (2'.) sistēmas formulas, arī $\xi = \eta = 0$.



82. zīm.

Lai dabūtu punkta I relātīvā (= absolūtā) ātruma koordinātu izteiksmes, tad jādiferencē (2'.) sistēmas formulas, pēc kam dabūjam, ka

$$\dot{x}_1 = -\frac{\dot{\eta}}{\omega} + \eta\,\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\,,$$

$$\dot{y}_1 = \frac{\dot{\xi}}{\omega} - \xi\,\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\,.$$

Bet tā kā momentā t ātruma koordinātai $\dot{y}_1$ jābūt vienādai ar nulli, tad no $\dot{y}_1$ izteiksmes, ievērojot ka $\xi = 0$, izriet, ka arī $\dot{\xi} = 0$.

Tādējādi, apzīmējot ar V punkta I relātīvo ātrumu momentā t pa Ox-asi, dabūjam, ka

$$V = -\frac{\dot{\eta}}{\omega} \quad \text{vai} \quad \dot{\eta} = -V\omega\,.$$

Pēc šiem pārveidojumiem (6.) sistēmas formulas izvēlētajā koordinātu sistēmā Oxy iegūst vienkāršotu formu

$$(7.)\quad \begin{cases} a_x = - \omega^2 x - \dot{\omega} y\,, \\ a_y = -V\omega - \omega^2 y + \dot{\omega} x\,. \end{cases}$$

No šīm formulām izriet, ka kustīgās plaknes Π punkta P, kas momentā t, kuŗā rotācija $\omega \neq 0$, sakrīt ar rotācijas centru I ($x = y = 0$), paātrinājums reducējas par tā normālo komponentu $a_y = -V\omega$.

Punktu A, kuŗa koordinātas x_2, y_2 apmierina formulu sistēmu

$$(7.') \qquad \begin{cases} -\omega^2 x_2 - \dot{\omega} y_2 = 0, \\ -\omega^2 y_2 + \dot{\omega} x_2 - V\omega = 0 \end{cases}$$

un kuŗa paātrinājums **a** momentā t ir nulle, ja $\omega \neq 0$, jo ar šo noteikumu (7.') sistēmas determinants

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 & -\dot{\omega} \\ \dot{\omega} & -\omega^2 \end{vmatrix} = \omega^4 + \dot{\omega}^2 \neq 0,$$

sauc par *paātrinājumu centru* momentā t.

Atņemot attiecīgi (7'.) un (7.) sistēmas formulas, dabūjam, ka

$$(7.'') \qquad \begin{cases} a_x = -\omega^2(x - x_2) - \dot{\omega}(y - y_2) = -\omega^2 x' - \dot{\omega} y', \\ a_y = -\omega^2(y - y_2) + \dot{\omega}(x - x_2) = -\omega^2 y' + \dot{\omega} x', \end{cases}$$

kur

$$x' = x - x_2, \qquad y' = y - y_2.$$

Pēdējās **a** koordinātu izteiksmes rāda, ka jebkuŗa plaknes Π punkta paātrinājums apskatītajā momentā t ir tāds pats kā šīs plaknes rotācijā ap nekustīgo punktu $A\,(x_2, y_2)$ ar rotācijas ātrumu $\boldsymbol{\omega}$ un paātrinājumu $\dot{\boldsymbol{\omega}}$.

Meklēsim tagad plaknes Π punktu, kas momentā t ir savu trajektoriju infleksijas punkti, ģeometrisko vietu. Nepieciešamais un pietiekamais noteikums, lai punkts P momentā t būtu savas trajektorijas infleksijas punkts, ir tā liekuma radija ρ pārvēršanās par bezgala lielu lielumu, vai, kas ir tas pats, tā paātrinājuma **a** normālā komponenta $\mathbf{a}_n$ anullēšanās šai momentā, jo $\mathbf{a}_n$ algebriskā vērtība ir $\frac{v^2}{\rho}$, kur v ir punkta P tangentiālais ātrums, kas nav nulle, ja punkts P nesakrīt ar momentāno rotācijas centru I.

Lai izteiktu, ka punkta P paātrinājuma normālais komponents ir nulle, pietiek izteikt, ka punkta P paātrinājumam **a** un ātrumam **v** ir tas pats virziens, t. i.

$$\frac{a_x}{v_x} = \frac{a_y}{v_y},$$

ko savkārt, ievērojot (1.) un (7.) sistēmas formulas, var pārrakstīt formā

$$\frac{-\omega^2 x - \dot{\omega} y}{-\omega y} = \frac{-V\omega - \omega^2 y + \dot{\omega} x}{\omega x},$$

vai, pēc attiecīgiem vienkāršojumiem, formā

$$x^2 + y^2 + \frac{V}{\omega} y = 0 ,$$

kas ir riņķa līnijas (R_1) vienādojums.

Tādējādi plaknes Π punktu, kas momentā t ir savu trajektoriju infleksijas punkti, ģeometriskā vieta ir riņķa līnija (R_1), kuŗa ir tangentiāla Ix-asij punktā I. Šo riņķa līniju sauc par plaknes Π punktu trajektoriju *infleksijas punktu riņķa līniju*[1]).

Izņēmums ir vienīgi punkts I, kas nav punkta P, kuŗš momentā t sakrīt ar punktu I, aprakstītās trajektorijas infleksijas punkts.

Tiešām, tā kā punkta P paātrinājumam, kā redzējām, jāreducējas par tā normālo komponentu ar algebrisko vērtību

$$a_y = \dot{\eta} = -V\omega \neq 0 ,$$

bet no otras puses tā vērtība ir $\frac{v^2}{\rho}$, tad, salīdzinot šīs divas $\mathbf{a}_n$ algebriskās vērtības un ievērojot, ka momentā t punkta $P = I$ ātrums $v = 0$, redzam, ka šī punkta liekuma radijam ρ jābūt vienādam ar nulli, t. i. punkts I ir punkta P trajektorijas pirmā veida atgriešanās punkts (smaile) ar tangenti Iy.

Analogi meklēsim plaknes Π punktu, kuŗu tangentiālais paātrinājums momentā t ir nulle, ģeometrisko vietu. Šo punktu ģeometrisko vietu atradīsim, izteicot, ka punkta P paātrinājums un ātrums momentā t ir savstarpēji perpendikulāri, t. i.

$$v_x a_x + v_y a_y = 0 ,$$

ko, ievērojot (1.) un (7.) sistēmas formulas, var pārrakstīt formā

$$\omega y(\omega^2 x + \dot{\omega} y) + \omega x(-V\omega - \omega^2 y + \dot{\omega} x) = 0$$

vai

$$\omega\dot{\omega}(x^2 + y^2) - V\omega^2 x = 0 .$$

Ja $\dot{\omega} \neq 0$, tad meklēto punktu ģeometriskā vieta ir riņķa līnija (R_2)[2]) ar vienādojumu

$$x^2 + y^2 - \frac{V\omega}{\dot{\omega}} x = 0 ,$$

---

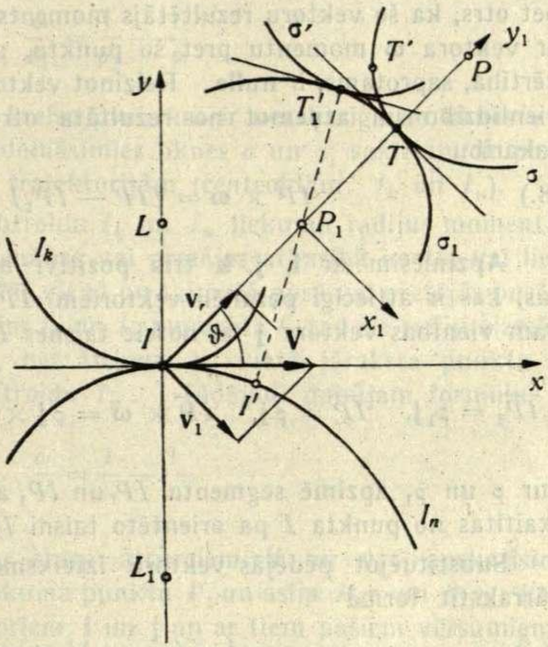
[1]) D e l a H i r e, *Traité des roulettes, Mémoires de l'Académie des Sciences*, Paris, 1706.

[2]) loc. cit. [1]). Abus riņķus (R_1) un (R_2) no jauna atrada B r e s s e, *Journal de l'École polytechn.*, cah. 35, 1853.

kuŗa ir tangentiāla Oy-asij punktā O un kuŗa tā tad ir ortogōnāla infleksijas punktu riņķa līnijai (R_1). Ja $\dot{\omega} = 0$, tad iepriekšējais vienādojums izteic taisnes — Oy-ass vienādojumu.

Abas riņķa līnijas (R_1) un (R_2) krustojas bez punkta O vēl vienā punktā, kas nav nekas cits kā punkts A — paātrinājumu centrs, jo šai riņķa līniju krustošanās punktā paātrinājuma abi komponenti ir nulles un tā tad arī paātrinājums ir nulle.

131. **Eulera-Savari formula.** — Apskatīsim kustīgā plaknē Π kādu ar šo plakni saistītu līkni σ, kuŗas pozicijām, plaknes Π kustībā pret nekustīgo plakni Π_0, eksistē ietvērēja līkne σ_1 plaknē Π_0. Apzīmēsim šo līkņu kopējo saskaršanās punktu momentā t ar T. Kopējā normāle abām līknēm šai punktā tad iet caur momentāno rotācijas centru I (83. zīm.). Tālāk apzīmēsim momentā t līkņu σ un σ_1 liekuma centrus attiecīgi ar P un P_1, šo centru attālumus no punkta I ar ρ un ρ_1 un momentānās rotācijas vektoru ap asi (I), kas iet caur punktu I perpendikulāri zīmējuma plaknei, ar $\boldsymbol{\omega}$. Pēc bezgala maza laika intervalla dt kontaktā atradīsies līkņu σ un σ_1 punkti T' un T'_1, kas atrodas pēc patikas tuvu punktam T. Lai šo kontaktu reālizētu, līkne σ jārotē vispirms ap centru P, līdz tās punkts T' sakrīt ar punktu T, un pēc tam ap centru P_1, līdz kamēr punkts T' sakrīt ar punktu T'_1. Tā kā punkti T' un T_1' atrodas ļoti tuvu punktam T un līknes σ un σ_1 šī punkta tuvākajā apkārtnē sakrīt ar savām liekuma riņķa līnijām, kas konstruētas šo līkņu kopējā saskaršanās punktā T, tad rotācijā ap centru P līkne σ kustēsies pati pa sevi, bet pēc rotācijas ap centru P_1 tā nonāks jaunā pozicijā σ' ar pieskaršanās punktu $T'_1 = T'$ līknei σ_1. Apzīmējot



83. zīm.

momentānos rotācijas vektorus ap asīm (P_1) un (P) attiecīgi ar $\boldsymbol{\omega}_1$ un $\boldsymbol{\omega}_2$, uzrakstīsim analitiskos noteikumus, lai vektoru sistēma $\boldsymbol{\omega}_1$ un $\boldsymbol{\omega}_2$ būtu ekvivalenta ar vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Šie noteikumi ir šādi:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2,$$
$$0 = \overline{IP_1} \times \boldsymbol{\omega}_1 + \overline{IP} \times \boldsymbol{\omega}_2,$$

no kuŗiem pirmais izsaka, ka vektoru $\boldsymbol{\omega}_1$ un $\boldsymbol{\omega}_2$ rezultante ir $\boldsymbol{\omega}$, bet otrs, ka šo vektoru rezultētājs moments pret punktu I ir vienāds ar vektora $\boldsymbol{\omega}$ momentu pret šo punktu, pie kam pēdējā momenta vērtība, saprotams, ir nulle. Reizinot vektoru $\overline{IP}$ vektoriāli ar pirmo vienlīdzību un atņemot no rezultāta otru vienlīdzību, dabūjam sakarību

(8.) $$\overline{IP} \times \boldsymbol{\omega} = (\overline{IP} - \overline{IP_1}) \times \boldsymbol{\omega}_1 .$$

Apzīmēsim ar **i**, **j**, **k** trīs pozitīvi orientētus vienības vektorus, kas ir attiecīgi parallēli vektoriem $\overline{IP} \times \boldsymbol{\omega}$, $\overline{IP_1}$ un $\boldsymbol{\omega}$, pie kam vienības vektors **j** lai noteic taisnes IT vērsumu. Tad

$$\overline{IP_1} = \rho_1 \mathbf{j}, \quad \overline{IP} = \rho \mathbf{j}, \quad \overline{IP} \times \boldsymbol{\omega} = \rho \mathbf{j} \times \omega \mathbf{k} = \rho\omega \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \rho\omega \mathbf{i},$$

kur ρ un ρ_1 apzīmē segmentu IP un IP_1 algebriskās vērtības, kuŗas skaitītas no punkta I pa orientēto taisni IT.

Substituējot pēdējās vektoru izteiksmes (8.) sakarībā, to var pārrakstīt formā

(8.′) $$\rho\omega \mathbf{i} = (\rho - \rho_1) \mathbf{j} \times \boldsymbol{\omega}_1 .$$

Ja punkta I ātrumu momentānā rotācijā ap asi (P_1) apzīmē ar $\mathbf{v}_1$, tad

$$\mathbf{v}_1 = \overline{IP_1} \times \boldsymbol{\omega}_1 = \rho_1 \mathbf{j} \times \boldsymbol{\omega}_1 ,$$

no kurienes

$$\mathbf{j} \times \boldsymbol{\omega}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\rho_1}.$$

Substituējot šo izteiksmi (8.′) formulā, pēc dažiem pārveidojumiem to var pārrakstīt formā

(8″.) $$\omega \mathbf{i} = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right) \mathbf{v}_1 .$$

Un tā kā vektori $\mathbf{i}$ un $\mathbf{v}_1$ ir paralleli, tad, uzskatot vektora $\mathbf{v}_1$ algebrisko vērtību v_1 par pozitīvu, ja tā vērsums ir vienāds ar $\mathbf{i}$ vērsumu, bet par negātīvu, pretējā gadījumā, dabūjam sakarību

$$\mathbf{v}_1 = v_1 \, \mathbf{i}.$$

Izdarot vēl pēdējo substitūciju (8″.) formulā, tā var tikt pārrakstīta formā

$$\frac{\omega}{v_1} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}. \tag{9.}$$

Lai pēdējās formulas kreiso pusi, kas ir neatkarīga no līknes σ, izteiktu vēl citā formā, iedomāsimies līknes σ un σ_1 sakrītam ar momentānā rotācijas centra trajektorijām (centroīdām I_k un I_n).

Ja r un r_1 apzīmē centroīdu I_k un I_n liekumu radijus momentā t, pie kam to zīmes ir vienādas vai pretējas atkarībā no tā, vai liekumu centri L un L_1 atrodas vienā un tai pašā pusē vai pretējās pusēs no kopējās tangentes līknēm I_k un I_n momentā t, tad šie radiji aizstāj agrākos radijus ρ un ρ_1, bet ātruma $\mathbf{v}_1$ vietā jāraksta punkta I ātrums $\mathbf{V}$ kustībā pa centroīdu I_n. Tādējādi dabūjam formulu

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}. \tag{10.}$$

Lai atrastu sakarību starp ātrumiem $\mathbf{V}$ un $\mathbf{v}_1$, apskatīsim kustīgu asu sistēmu ar sākuma punktu P_1 un asīm P_1x_1 un P_1y_1, kas ir attiecīgi parallēlas vektoriem $\mathbf{i}$ un $\mathbf{j}$ un ar tiem pašiem vērsumiem. Tālāk iedomāsimies, ka šī sistēma kustas tā, ka tās sākuma punkts vienmēr sakrīt ar liekuma centru P_1 un ass P_1y_1 ar kopējo normāli līknēm σ un σ_1 punktā T.

Punkta I absolūtais ātrums $\mathbf{V}$ momentā t ir tā ātrums kustībā pa līkni I_n. Punkta I pārnešanas ātrums momentā t ir *tā* kustīgās plaknes Π punkta ātrums pret nekustīgo plakni Π_0, ar kuŗu momentā t sakrīt šis punkts. Bet tā kā šī plaknes Π punkta momentānā kustība ir momentāna rotācija ap momentāno centru I, tad I pārnešanas ātrums ir $\mathbf{v}_1$. Punkta I relātīvais ātrums $\mathbf{v}_r$ momentā t ir tā ātrums kustībā pret kustīgo sistēmu $P_1x_1y_1$, bet tā kā punkts I vienmēr atrodas uz taisnes, kas savieno punktus P_1 un T, tad tā relātīvā ātruma $\mathbf{v}_r$ virziens sakrīt ar P_1y_1-ass virzienu. Un tā tad pēc ātrumu kompozicijas likuma

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_1.$$

Reizinot šo vienlīdzību skālāri ar **i**, dabūjam

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{i}\,.$$

Ja leņķi starp orientēto taisni IT un vektoru $\mathbf{V}$ apzīmē ar ϑ, tad leņķis starp vektoriem $\mathbf{V}$ un $\mathbf{i}$ ir $\frac{\pi}{2} - \vartheta$. To ievērojot, pēdējā sakarība kļūst ekvivalenta sakarībai

$$(11.) \qquad V \sin\vartheta = v_1\,.$$

Salīdzinot (9.), (10.) un (11.) formulu, dabūjam *Eulera-Savari formulu*[1])

$$(12.) \qquad \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right) \sin\vartheta = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\,.$$

Ar šo formulu punktam P tiek piekārtots punkts P_1 un līkne σ nav saistīta ne ar kādu citu noteikumu kā tikai to, ka punktam P jābūt tās liekuma centram apskatītajā momentā.

Speciālā gadījumā līkni σ var iedomāties reducējamies par pašu punktu P, bet tad P_1 ir punkta P aprakstītās trajektorijas liekuma centrs momentā t. Tādējādi *līknes σ, kuŗa ir saistīta ar kustīgo plakni Π, ietvērējas līknes σ_1 liekuma centrs P_1 momentā t sakrīt ar liekuma centru ruletei, kuŗu apraksta līknes σ liekuma centrs P, kas atbilst tās pieskaršanās punktam T ar līkni σ_1 momentā t.*

132. **Sakars starp trajektorijas punktiem un atbilstošiem liekuma centriem.** — Ar (12.) Eulera-Savari formulu uz līkņu I_k un I_n kopējās normāles to momentānā pieskaršanās punktā I jebkuŗam punktam P' var piekārtot kādu punktu P_1' tā, ka P_1' ir punkta P' aprakstītās līknes liekuma centrs šai momentā. Tiešām, tā kā šai gadījumā $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, tad (12.) vienlīdzība reducējas par vienlīdzību

$$(13.) \qquad \frac{1}{\rho_1'} - \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\,,$$

[1]) Eulers šo formulu min darbā, kas publicēts *Novi Commentarii Academiae Petrop.*, t. 11, 1765. No jauna to atradis un izlietojis savos priekšlasījumos *École Polytechnique,* Parīzē, Savari (F. Savary, 1797.—1841. g.), kā to vēlāk aizrādījis Šals (Chasles) kādā darbā, kas iespiests *Journal de mathém. pures et appl.*, t. 10, 1845.

kur $\rho' = IP'$, $\rho'_1 = IP'_1$ un r_0 ir konstante. Atrisinot pēdējo vienādojumu pret ρ'_1, dabūjam, ka

$$\rho'_1 = \frac{\rho'}{\frac{\rho'}{r_0} + 1}, \tag{14.}$$

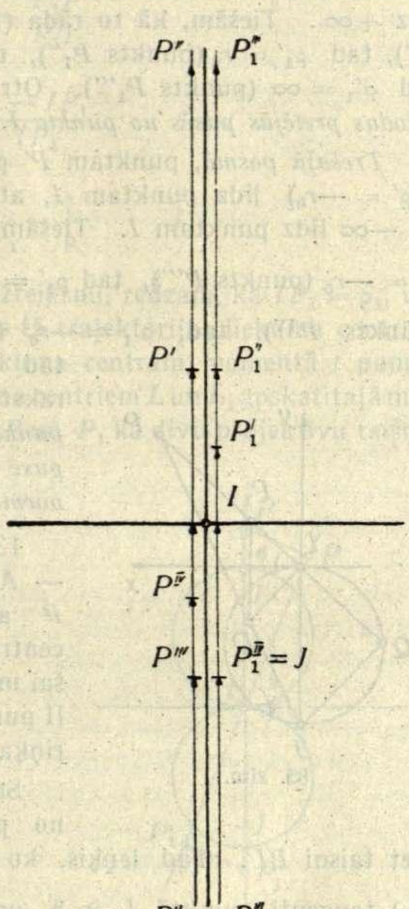
t. i. punktu P'_1 virkne (rinda) ir projektīva ar punktu P' virkni, pie kam centroīdu I_k un I_n liekuma centri L un L_1 ir atbilstoši punkti šai projektīvitātē.

Ja punkts P_1' attālinās līdz bezgalībai, t. i. ja $\rho'_1 = \infty$, tad

$$\rho' = -r_0 = -\frac{V}{\omega},$$

bet šai ρ' nozīmei atbilst infleksijas punktu riņķa līnijas (R_1) krustošanās punkts J ar asi Oy. Tādējādi punktam $P'_1 = \infty$ atbilstošais punkts (14.) projektīvitātē ir punkts J. Ja $\rho' = 0$, tad arī $\rho'_1 = 0$, t. i. momentānais rotācijas centrs I atbilst pats sev, kas tā tad ir (14.) projektīvitātes divkāršais punkts.

Atkarībā no punktu P' un P_1' savstarpējām pozicijām uz centroīdu kopējās normāles momentā t, tā sadalās trijos posmos, kā tas redzams no (14.) formulas.

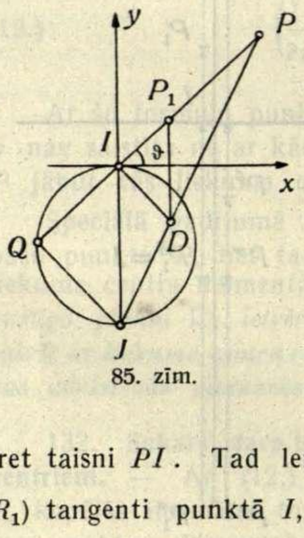


84. zīm.

Orientējot taisni PP_1 y-ass pozitīvā vērsumā, *pirmajā posmā*, punktam P' pārvietojoties no punkta I līdz $+\infty$, punkts P_1' pārvietojas no punkta I līdz punktam P_1'' $\left(\rho'_1 = r_0 = \frac{V}{\omega}\right)$. Tiešām, no (14.) formulas izriet, ka 1^0 ja $\rho' = 0$, tad $\rho_1' = 0$, 2^0 ja $\rho' = r_0$ (punkts P'), tad $\rho_1' = \frac{r_0}{2}$ (punkts P_1'), un 3^0 ja $\rho' = \infty$ (punkts P''), tad $\rho_1' = r_0$ (punkts P_1'') (84. zīm.). Pirmais posms tādējādi raksturīgs ar to, ka tanī *punkti P' un P_1' atrodas vienā un tai pašā pusē no punkta I — normāles pozitīvā pusē.*

Otrā posmā, punktam P' pārvietojoties no $-\infty$ līdz infleksijas punktam J, atbilstošais punkts P_1' pārvietojas no punkta P_1'' (r_0) līdz $+\infty$. Tiešām, kā to rāda (14.) formula, ja $\rho' = \pm\infty$ (punkts P''), tad $\rho_1' = r_0$ (punkts P_1''), un ja $\rho' = -r_0$ (punkts $J = P'''$), tad $\rho'_1 = \infty$ (punkts P_1'''). Otrā posmā tādējādi *punkti P' un P_1' atrodas pretējās pusēs no punkta I.*

Trešajā posmā, punktam P' pārvietojoties no infleksijas punkta $J(\rho' = -r_0)$ līdz punktam I, atbilstošais punkts P_1' pārvietojas no $-\infty$ līdz punktam I. Tiešām, kā to rāda (14.) formula, 1^0 ja $\rho' = -r_0$ (punkts P'''), tad $\rho_1' = \infty$ (punkts P_1'''), 2^0 ja $\rho' = -\frac{r_0}{2}$ (punkts P^{IV}), tad $\rho'_1 = -r_0$ (punkts P_1^{IV}), un 3^0 ja $\rho' = 0$, tad $\rho_1' = 0$. Trešais posms tādējādi raksturīgs atkal ar to, ka tanī abi *punkti P' un P_1' atrodas vienā un tai pašā pusē no punkta I, bet šoreiz tie atrodas normāles negātīvā pusē.*



85. zīm.

133. **Liekuma centra konstruēšana.** — Apskatīsim kāda plaknes Π punkta P aprakstītās trajektorijas liekuma centra P_1 konstruēšanu momentā t, ja šai momentā zināma ir kustīgās plaknes Π punktu trajektoriju infleksijas punktu riņķa līnija (R_1) (85. zīm.).

Savienosim punktu P ar J un no pēdējā vilksim perpendikulu JQ pret taisni PI. Tad leņķis, ko veido taisne PI ar riņķa līnijas (R_1) tangenti punktā I, ir ϑ, un leņķis QIJ ir $\frac{\pi}{2} - \vartheta$. Un tā tad

$$IQ = \rho_0 = IJ \sin\vartheta = -\frac{V}{\omega} \sin\vartheta .$$

Bet salīdzinot (10.), (12.) un (13.) formulu, redzam, ka

$$(15.) \qquad \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\frac{1}{\sin\vartheta} = \frac{1}{r_0}\,\frac{1}{\sin\vartheta} = \frac{\omega}{V\sin\vartheta} = -\frac{1}{\rho_0} .$$

Tālāk vilksim caur punktu I perpendikulu pret taisni PI un apzīmēsim tā krustošanās punktu ar taisni PJ ar D. Ja pēc tam caur šo punktu D velkam taisnei IJ parallēlu taisni, tad šīs taisnes krustošanās punkts ar taisni PI ir meklētais punkts P_1.

Tiešām, no proporcijām

$$\frac{IP}{IQ}=\frac{DP}{DJ}=\frac{P_1P}{P_1I}$$

izriet, ka

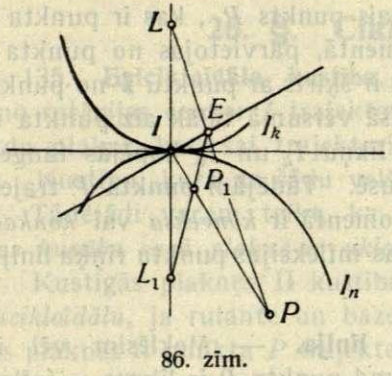
$$-\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{\rho-IP_1}{IP_1}$$

vai

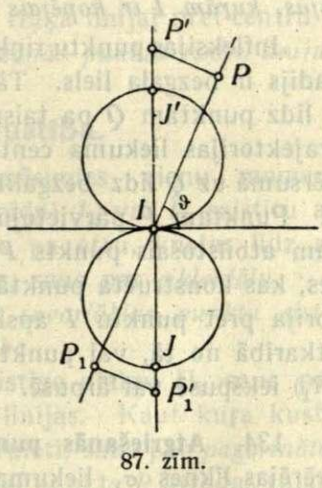
$$-\frac{1}{\rho_0}=\frac{1}{IP_1}-\frac{1}{\rho}.$$

Salīdzinot šo izteiksmi ar (15.) izteiksmi, redzam, ka $IP_1=\rho_1$, un tā tad P_1 ir punktam P atbilstošais tā trajektorijas liekuma centrs.

Savari konstrukcija ruletes liekuma centram momentā t pamatojas uz rulantes I_k un bazes I_n liekuma centriem L un L_1 apskatītajā momentā (86. zīm.). Uzskatot punktus P un P_1 kā divu projektīvu taišņu



86. zīm.



87. zīm.

šķipsnu centrus, redzam, ka taisnes PD un P_1D, tāpat PI un P_1I, ir atbilstošās taisnes šais projektīvās taišņu šķipsnās (85. zīm.). Bet tā kā abu taišņu šķipsnu kopējā taisne PP_1 atbilst pati sev, jo PI atbilst P_1I, tad apskatītās taišņu šķipsnas ir perspektīvas ar perspektīvitātes asi ID, kas ir perpendikulāra taisnei PI. Uz perspektīvitātes ass ID tā tad jākrustojas kādā punktā E arī taišņu pārim PL un P_1L_1. Tādējādi punkta P_1 konstruēšanai dabūjam šādu priekšrakstu (86. zīm.). Jāsavieno punkts P ar I un caur pēdējo jāvelk taisnei IP perpendikulāra taisne. Pēc tam jāvelk taisne PL, kas ar taisnei IP perpendikulāro taisni caur punktu I, krustojas punktā E. Taisnes EL_1 krustošanās punkts ar taisni IP ir meklētais punkts P_1.

Momentānā rotācijas centra I trajektoriju I_k un I_n kopējās normāles punktiem šī konstrukcija ir nederīga. Bet ja kādam punktam P ir konstruēts atbilstošais punkts P_1, tad, velkot šais punktos perpendikulus pret taisni PP_1, šo perpendikulu krustošanās punkti P' un P_1' ar taisni IJ ir atbilstošie punkti (87. zīm.). Tiešām,

$$-\frac{1}{IJ} = \frac{\omega}{V} = \left(\frac{1}{IP_1} - \frac{1}{IP}\right) \sin \vartheta = \frac{1}{IP_1'} - \frac{1}{IP'} .$$

Ja $\vartheta = 0$, tad pēc (15.) formulas lielumam $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}$ jābūt bezgala lielam, un ja $\rho \neq 0$, t. i. punkts P nesakrīt ar I, tad $\frac{1}{\rho_1}$ jābūt bezgala lielam lielumam, t. i. $\rho_1 = 0$. Tādējādi *momentānā rotācijas centra I trajektoriju I_k un I_n kopējās tangentes punkti apraksta trajektorijas, kuŗām I ir kopējais liekuma centrs apskatītajā momentā.*

Infleksijas punktu riņķa līnijas (R_1) punktam Q (85. zīm.) liekuma radijs ir bezgala liels. Tādēļ, punktam P pārvietojoties no punkta I līdz punktam Q pa taisni, attiecīgais punkts P_1, kas ir punkta P trajektorijas liekuma centrs šai momentā, pārvietojas no punkta I vērsumā uz Q līdz bezgalībai, un tas ir šķirts ar punktu P no punkta I. Punktam P pārvietojoties tai pašā vērsumā tālāk aiz punkta Q, tam atbilstošais punkts P_1 parādās līkņu I_k un I_n kopējās tangentes, kas konstruēta punktā I, otrā pusē. Tādējādi punkta P trajektorija pret punktu I apskatītajā momentā ir *konveksa* vai *konkava* atkarībā no tā, vai punkts P atrodas infleksijas punktu riņķa līnijas (R_1) iekšpusē vai ārpusē.

134. Atgriešanās punktu riņķa līnija. — Meklēsim vēl ietvērējas līknes σ_1 liekuma centru, kad punkts P ir līknes σ infleksijas punkts. Šai gadījumā $\rho = \infty$, un tā tad $\frac{1}{\rho} = 0$, un (12.) Eulera-Savari formula reducējas par formulu

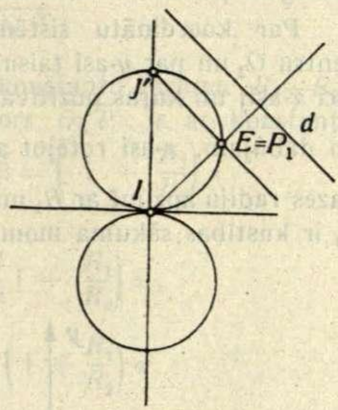
$$\frac{1}{\rho_1} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) \frac{1}{\sin\vartheta} .$$

Bet ievērojot (10.) sakarību, redzam, ka ρ_1 ir dots ar formulu

$$\rho_1 = \frac{V}{\omega} \sin\vartheta ,$$

no kurienes izriet, ka punkts P_1 sakrīt ar punktu E, kas atrodas uz riņķa līnijas, kuŗa ir simmetriska infleksijas punktu riņķa līnijai pret punktu I.

Speciālā gadījumā, kad σ ir taisne d (88. zīm.), punkts E, kas ir taisnes d ietvērējas līknes liekuma centrs, ir neatkarīgs no šīs taisnes attāluma no punkta I, bet tikai no tās virziena. Šis fakts izskaidrojams ar to, ka kustīgās plaknes parallēlām taisnēm ietvērējas līknes arī ir parallēlas.



88. zīm.

Ja taisne d iet caur punktu E, tad šīs taisnes ietvērējas līknes liekuma radijs punktā E ir nulle, un tā tad punkts E ir taisnes d ietvērējas līknes σ_1 atgriešanās punkts. Tādēļ arī riņķa līniju, kuŗa ir simmetriska trajektoriju infleksijas punktu riņķa līnijai pret centru I un kuŗas diametrs ir IJ', sauc par *atgriešanās punktu riņķa līniju.*

26. §. Cikloīdāla kustība.

135. **Epicikloīdāla kustība.** — Iedomāsimies vienu momentāno rotācijas centru I trajektoriju (centroīdu) I_k vai I_n saistītu ar kādu plakni, kas, šai trajektorijai veļoties pa otru, kustas līdz ar to. Kustību, kuŗa ar šādu velšanos rodas, sauc par *cikloīdālu.*

Tādējādi varam teikt, ka *komplānas invariāblas punktu sistēmas kustība savā plaknē ir cikloīdāla kustība.*

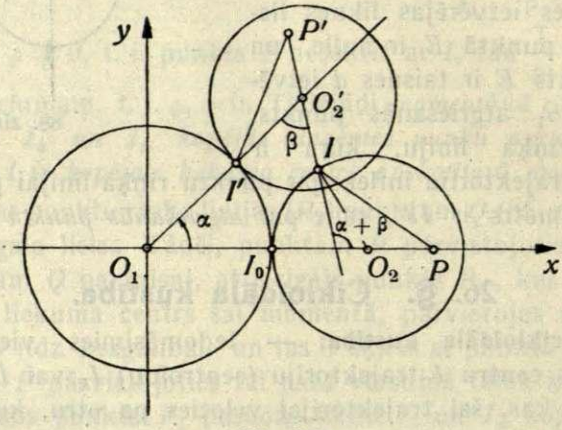
Kustīgās plaknes Π kustību pa nekustīgo plakni Π_0 sauc par *epicikloīdālu*, ja rulante un baze ir riņķa līnijas. Kaut kuŗa kustīgās plaknes Π punkta P trajektoriju, t. i. ruleti, sauc par *pagarinātu, saīsinātu* vai *atgriezenisku* atkarībā no tā, vai punkts P atrodas rulantes ārpusē, iekšpusē vai uz tās.

Ja rulante un baze pieskaŗas viena otrai ārēji, tad ruletes sauc par *epicikloīdām*; ja turpretim to savstarpējā saskaršanās ir iekšēja un bazes radijs ir lielāks par rulantes radiju, tad ruletes sauc par *hipocikloīdām*; ja bazes radijs ir mazāks par rulantes radiju, tad ruletes sauc par *pericikloīdām* un tās ir identiskas ar epicikloīdām[1]). Robežgadījumā, kad baze ir taisne, ruletes sauc par *cikloīdām.*

[1]) G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven,* Bd. I, Leipzig, Teubner, 1910, 482. un turpm. lpp.

Meklēsim tagad šo līkņu vienādojumus. Šai nolūkā par x-asi izvēlēsimies abu riņķa līniju centru līniju momentā ($t = 0$), kad kustīgais punkts P atrodas uz šīs līnijas (89. zīm.)

Par koordinātu sistēmas sākuma punktu izvēlēsimies bazes centru O_1 un par y-asi taisni, kuŗa vilkta caur šo punktu perpendikulāri x-asij un kuŗas pozitīvais vērsums ir vienāds ar taisnes vērsumu, ko dabūjam, x-asi rotējot ap O_1 pozitīvā vērsumā par leņķi $\frac{\pi}{2}$. Ja bazes radiju apzīmē ar R_1 un rulantes radiju ar R_2, tad $I_0O_2 = R_2$, kur I_0 ir kustības sākuma momentam atbilstošais momentānais rotācijas



89. zīm.

centrs. Apskatīsim tagad kādu citu rulantes poziciju momentā t un apzīmēsim šai momentā ar O_2' rulantes centru, ar I' momentāno rotācijas centru un ar P' punkta P poziciju. Tālāk apzīmēsim ar α leņķi, ko veido O_1I' ar x-asi, uzskatot šo leņķi par pozitīvu, ja rotācijas vērsums ap punktu O_1 ir pozitīvs. Leņķis β, ko veido $O_2'P'$ ar O_1I', ir viegli izteicams ar α. Ja I apzīmē rulantes punktu, kas, tai veļoties pa bazi, momentā t sakrīt ar punktu I', tad loka I_0I gaŗums ir $R_2\beta$. Bet no otras puses loka I_0I' gaŗums ir $R_1\alpha$, un tā kā šie loki ir vienādi savā starpā, tad

$$R_2\beta = R_1\alpha,$$

no kurienes

$$\beta = \frac{R_1}{R_2}\alpha.$$

Lai atrastu ruletes punkta P' koordinātu izteiksmes izvēlētajā koordinātu sistēmā, projicēsim vektoriālo vienlīdzību

$$\overline{O_1P'} = \overline{O_1O_2'} + \overline{O_2'P'}$$

uz šīs sistēmas asīm. Vektors $\overline{O_1O_2}'$ ir ar konstantu garumu R_1+R_2, bet mainīgu anōmaliju α; tāpat vektors $\overline{O_2'P'}$ ir ar konstantu garumu p, bet mainīgu anōmaliju $\alpha + \beta = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\alpha$.

Tādējādi

$$x = (R_1 + R_2)\cos\alpha + p\cos\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\alpha,$$

$$y = (R_1 + R_2)\sin\alpha + p\sin\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\alpha$$

ir epicikloīdas parametriskie vienādojumi, kas ir atkarīgi no viena parametra α, jo R_1, R_2, p ir konstantes.

Parastās epicikloīdas, ko apraksta punkts P, kas atrodas uz rulantes, vienādojumus dabūjam no iepriekšējiem, ievietojot tanīs p vietā R_2.

90. zīmējumā ir parādīti trīs epicikloīdu tipi, kas atbilst gadījumiem, kad $p \gtreqless R_2$, t. i. pagarināta, parasta (atgriezeniska) un saīsināta epicikloīda.

Katra epicikloīda ir salikta no bezgala daudz kongruentiem zariem, kuŗus apraksta punkts P, izejot no sākuma pozicijas, kad rulante pieskaŗas bazei punktā I_0, un atgriežoties atpakaļ pozicijā, kad tas pats rulantes punkts atkal pieskaŗas bazei. Pēc pilna rulantes apgrieziena $\beta = 2\pi$, un tā kā $\alpha R_1 = \beta R_2$, tad

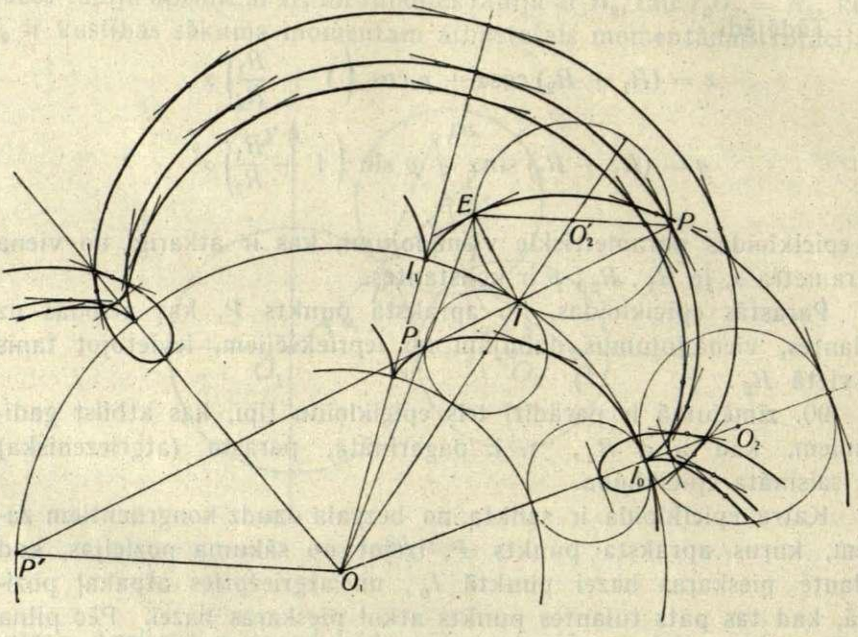
$$\alpha = 2\pi\frac{R_2}{R_1}$$

atbilst vienam un α daudzkārtņi vairākiem rulantes pilniem apgrieziem pa bazi. Bet katram rulantes pilnam apgriezienam pa bazi atbilst viens no epicikloīdas zariem, kas visi ir savā starpā kongruenti.

Ja R_1 un R_2 ir kommensurābli lielumi, t. i. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{n}$, kur m un n ir veseli skaitļi, tad $m\alpha = 2\pi n$, t. i. $m\alpha$ ir 2π daudzkārtnis. Tas nozīmē, ka pēc tam, kad punkts P būs aprakstījis m epicikloīdas zarus, tās atgriezīsies atpakaļ pirmatnējā pozicijā un savā turpmākā kustībā apraksts tos pašus epicikloīdas zarus kā agrāk.

Ja turpretim R_1 un R_2 nav kommensurābli lielumi, tad punkta P aprakstītā līkne nekad neslēgsies.

Hipocikloīdas vienādojumus dabūsim no epicikloīdas vienādojumiem, apmainot tanīs R_2 pret $-R_2$, pie kam R_1 jābūt lielākam par R_2. Ja $R_1 < R_2$, tad iegūtie vienādojumi reprezentē kādu pericikloīdu, kas, kā to var pierādīt, ir identiska ar kādu epicikloīdu.



90. zīm.

136. **Epicikloīdas liekuma centra konstruēšana.** — Apskatīsim parastās epicikloīdas liekuma centra konstruēšanu ar Savari metodi. Apzīmēsim ar P kustīgā punkta poziciju momentā t un ar I momentāno rotācijas centru (90. zīm.). Lai konstruētu punkta P aprakstītās epicikloīdas liekuma centru momentā t, savienosim punktu P ar I un vilksim caur punktu I taisni, kas ir perpendikulāra taisnei IP. Ja punktu P savieno ar rulantes liekuma centru $L = O_2'$, tad šī taisne krusto iepriekš minēto taisni punktā E, kas ir simmetrisks punktam P pret centru O_2'. Pēc Savari konstrukcijas, taisne EO_1, kuŗa savieno punktu E ar bazes liekumą centru $L_1 = O_1$, krusto taisni IP punktā P_1, kas ir epicikloīdas punkta P liekuma centrs momentā t.

Tā kā baze un rulante atrodas homotetiskā radniecībā ar homotecijas centru I un homotecijas attiecību

$$k = \frac{IO_1}{IO_2'} = \frac{IP'}{IP} = -\frac{R_1}{R_2},$$

tad $O_2'P$ ir parallēls O_1P'. Un tā kā $EP = 2\,O'_2P$, tad

$$\frac{P_1O_1}{P_1E} = \frac{O_1P'}{EP} = \frac{O_1P'}{2\,O'_2P} = -\frac{R_1}{2\,R_2},$$

no kurienes

$$\frac{O_1P_1}{P_1E} = \frac{R_1}{2\,R_2}$$

un

$$\frac{O_1P_1}{O_1P_1 + P_1E} = \frac{O_1P_1}{O_1E} = \frac{R_1}{R_1 + 2\,R_2},$$

t. i. punkts P_1 dabūjams no punkta E ar homoteciju, kuŗas centrs ir O_1 un kuŗas attiecība ir $\dfrac{R_1}{R_1 + 2\,R_2}$.

Bet tā kā rulantes loks $PE = \pi R_2$, tad punkts E atrodas uz epicikloīdas, ko apraksta rulantes punkts, kas kustības sākumā sakrīt ar rulantes un bazes pieskaršanās punktu I_1, tai veļoties agrākam vērsumam pretējā vērsumā.

Šo epicikloīdu dabūjam no dotās epicikloīdas, pagriežot to ap punktu O_1 par leņķi

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi\,R_2}{R_1}.$$

Un tā tad punkta P aprakstītās epicikloīdas liekuma centru P_1 ģeometriskā vieta arī ir epicikloīda, ko dabūjam no iepriekšējās epicikloīdas ar homoteciju, kuŗas centrs ir O_1 un attiecība $\dfrac{R_1}{R_1 + 2\,R_2}$.

Šī pēdējā epicikloīda ir tangentiāla bazei punktā I_0 un visos pārējos punktos, kuŗus dabūjam no šī punkta ar rotāciju ap centru O_1 par leņķi $m\alpha$, kur m ir kāds vesels skaitlis.

Tādējādi epicikloīdas evolūta ir tai līdzīga epicikloīda.

137. **Rulešu infleksijas punkti.** — Izvēlēsimies par x-ass pozitīvo vērsumu punktā I tangentes pozitīvo vērsumu šai punktā; pozitīvā y-ass tad dabūjama no pozitīvās x-ass, rotējot to pozitīvā vērsumā par leņķi $\frac{\pi}{2}$.

Tādā gadījumā (12.) Eulera-Savari formulā jāsubstituē

$$r_1 = R_1\,, \qquad r = -R_2\,,$$

un tā tad

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}.$$

Bet tā kā pēc (10.) formulas, apzīmējot infleksijas punktu riņķa līnijas (R_1) punktam I diametrāli pretējo punktu ar J,

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{IJ}\,,$$

tad, salīdzinot abas pēdējās izteiksmes, dabūjam, ka

$$IJ = -\frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}\,. \tag{16.}$$

Ja $R_2 > 0$, tad rulete ir *epicikloīda* un IJ zīme ir vienāda ar $-R_2$ resp. IO_2. Bet

$$|IJ| = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} < R_2\,,$$

citiem vārdiem sakot, infleksijas punktu riņķa līnija atrodas rulantes iekšpusē.

Tā tad jebkuŗš kustīgās plaknes punkts, kas atrodas no punkta O_2 attālumā starp

$$R_2 \text{ un } R_2 - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2^{\,2}}{R_1 + R_2}\,,$$

apraksta trajektoriju ar infleksijas punktiem. Visu pārējo kustīgās plaknes punktu trajektorijas ir bez infleksijas punktiem.

Ja $R_2 < 0$ un $0 > R_2 > -R_1$, tad rulete ir *hipocikloīda*; IJ zīme ir vienāda ar $-R_2$ resp. IO_2 un

$$|IJ| = \frac{R_1 |R_2|}{R_1 - |R_2|} > |R_2|\,,$$

tā tad punkts O_2 atrodas infleksijas punktu riņķa līnijas iekšpusē.

Ja, tālāk, $|R_2| < \frac{R_1}{2}$, tad infleksijas punktu riņķa līnija atrodas rulantes iekšpusē un punkta O_2 īsākais attālums līdz tai ir

$$d = \frac{R_1\,|R_2|}{R_1 - |R_2|} - R_2 = \frac{R_2^2}{R_1 - |R_2|}.$$

Tādējādi jebkuŗš kustīgās plaknes punkts, kas atrodas no punkta O_2 attālumā, kas ir mazāks par d, apraksta trajektoriju bez infleksijas punktiem; tāpat arī visi rulantes ārējie punkti. Visu pārējo punktu trajektorijas ir ar infleksijas punktiem.

Ja turpretim $|R_2| > \frac{R_1}{2}$, tad infleksijas punktu riņķa līnija atrodas rulantes ārpusē. Un tā tad visi rulantes iekšējie punkti un punkti, kas atrodas no O_2 attālumā, kas ir lielāks par $d = \frac{R_2^2}{R_1 - |R_2|}$, apraksta trajektorijas bez infleksijas punktiem.

Beidzot, ja $R_2 < 0$ un $R_2 < -R_1$, rulete ir *pericikloīda*; IJ zīme ir vienāda ar R_2 resp. O_2I zīmi. Tā tad infleksijas punktu riņķa līnija atrodas ārpus rulantes, pie kam

$$|IJ| = \frac{R_1\,|R_2|}{|R_2| - R_1}.$$

Tādējādi visi rulantes iekšējie punkti un punkti, kas atrodas no punkta O_2 attālumā, kas ir lielāks par

$$d = \frac{R_1\,|R_2|}{|R_2| - R_1} + |R_2| = \frac{R_2^2}{|R_2| - R_1},$$

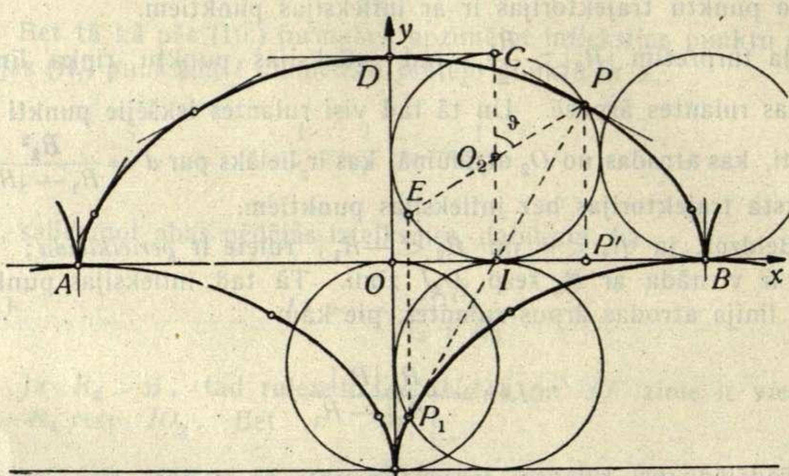
apraksta trajektorijas bez infleksijas punktiem. Pārējo punktu trajektorijas ir ar infleksijas punktiem.

138. **Parasta cikloīdāla kustība.** — Epicikloīdālas kustības divus raksturīgus robežgadījumus dabūjam, iedomājoties bezgalīgi pieaugam bazes radiju R_1 vai rulantes radiju R_2 tā, ka viena vai otra no šīm riņķa līnijām kļūst par taisni. Ja baze pārvēršas par taisni, tad attiecīgo kustību sauc par *cikloīdālu* un rulantes punktu aprakstītās trajektorijas par *cikloīdām*. Tāpat izšķiŗ *pagarinātas* un *saīsinātas* cikloīdas atkarībā no tā, vai trajektoriju aprakstītājs punkts, kas ir nekustīgi saistīts ar rulanti, atrodas ārpus vai iekšpus tās.

Ja turpretim rulante kļūst par taisni, tad tās punktu trajektorijas veido bazes evolventes.

Īsuma dēļ šeit aprobežosimies ar *parasto cikloīdu*, ar kuŗu vēlāk sastapsimies dinamikā. Par bazi izvēlēsimies taisni Ox, apzīmējot ar A un B divas sekojošas cikloīdas virsotnes, t. i. rulantes punkta P divas sekojošas pozicijas, kuŗās tas atrodas uz bazes (91. zīm.).

Par koordinātu sistēmas sākuma punktu O izvēlēsimies nogriežņa AB vidus punktu ar x-ass pozitīvo vērsumu uz punktu B. Par y-asi izvēlēsimies taisni, kas vilkta caur punktu O perpendikulāri x-asij ar pozitīvo vērsumu uz apskatītā cikloīdas zara augstāko punktu D.



91. zīm.

Apskatot kaut kādu rulantes punkta poziciju P, apzīmēsim momentāno rotācijas centru ar I, tam diametrāli pretējo punktu ar C un leņķi CO_2P ar ϑ. Tā kā rulante veļas bez slīdes pa bazi, tad, ja R ir rulantes radijs, loka CP gaŗums ir vienāds ar $OI = R\vartheta$.

Lai atrastu ruletes punkta P koordinātu izteiksmes izvēlētajā koordinātu sistēmā, jāprojicē vektoriālā vienlīdzība

$$\overline{OP} = \overline{OI} + \overline{IP}$$

uz šīs sistēmas asīm. To darot, dabūjam izteiksmes

$$\text{(17.)} \quad \begin{cases} x = OP' = OI + IP' = R(\vartheta + \sin\vartheta), \\ y = P'P = R(1 + \cos\vartheta), \end{cases}$$

kas ir cikloīdas parametriskie vienādojmi.

Diferencējot pēdējās formulas, dabūjam, ka

$$dx = R(1 + \cos\vartheta)\, d\vartheta\,,$$
$$dy = -R \sin\vartheta\, d\vartheta\,,$$

un tā tad loka elementa ds, kas skaitīts leņķa ϑ augšanas vērsumā, izteiksme ir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R\sqrt{2(1 + \cos\vartheta)}\, d\vartheta = 2R \left|\cos\frac{\vartheta}{2}\right| d\vartheta.$$

Bet tā kā viena cikloīdas zara robežās ϑ mainās starp $-\pi$ un $+\pi$, tad $\cos\frac{\vartheta}{2}$ ir pozitīvs. Tāpēc, integrējot pēdējo izteiksmi robežās no $\vartheta = 0$, kas atbilst cikloīdas zara augstākam punktam D, līdz kādai nozīmei ϑ, kas atbilst tās punktam P, dabūjam loka $s = \smile DP$ izteiksmi

$$s = 4R\sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{18.}$$

Leņķim ϑ mainoties no 0 līdz π, dabūjam cikloīdas pusloka DB garumu, kas ir $4R$, un tā tad cikloīdas loka garums ir $8R$.

Sastādīsim diferenci $y_1 = 2R - y$, kas ģeometriski izteic punkta P attālumu līdz tangentei cikloīdas augstākā punktā D. Ievērojot y izteiksmi, kuŗa dota ar (17.) sistēmas otru formulu, varam rakstīt, ka

$$y_1 = R(1 - \cos\vartheta) = 2R\sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

no kurienes, salīdzinot to ar (18.) formulu, dabūjam raksturīgu sakarību

$$s^2 = 8Ry_1$$

starp cikloīdas loka gaŗumu un ordinātu.

139. **Cikloīdas liekuma centra konstruēšana.** — Tā kā rulantes liekuma centrs sakrīt ar tās centru O_2, t. i. $L = O_2$, un bazes liekuma centrs atrodas bezgalībā, tad

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\,,\quad \frac{1}{r_1} = 0\,,$$

un tā tad

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{R}.$$

Apzīmējot infleksijas punktu riņķa līnijas (R_1) punktam I diametrāli pretējo punktu ar J un ievērojot (10.) formulu, redzam, ka

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{\omega}{V} = -\frac{1}{IJ}.$$

Salīdzinot pēdējās divas izteiksmes, varam secināt , ka

$$IJ = R = IO_2$$

resp. $J = O_2$, citiem vārdiem sakot, infleksijas punktu riņķa līnijas (R_1) diametrs ir IO_2 un tā atrodas rulantes iekšpusē.

Tādējādi saīsinātai cikloīdai ir vienmēr infleksijas punkti, bet pagarinātai tādu nav.

Konstruēsim kāda parastās cikloīdas punkta P liekuma centru ar Savari konstrukciju. Šai nolūkā savienosim punktu P ar I un vilksim caur punktu I taisni, kas ir perpendikulāra IP. Ja punktu P savieno ar rulantes liekuma centru $L = O_2$, tad šī taisne krusto iepriekš minēto taisni punktā E, kas ir simmetrisks punktam P pret centru O_2. Tā kā bazes liekuma centrs atrodas bezgalībā y-ass virzienā, tad pēc Savari konstrukcijas, velkot caur punktu E y-asij parallēlu taisni, tās krustošanās punkts P_1 ar taisni PI ir cikloīdas punkta P liekuma centrs.

No 91. zīmējuma redzams, ka

$$\frac{P_1E}{IO_2} = \frac{EP}{O_2P} = 2$$

resp.

$$P_1E = 2\,IO_2 = 2\,R\,.$$

Tādējādi punktu P_1 ģeometriskā vieta dabūjama no punktu E vietas ar translāciju, kuŗas algebriskā vērtība ir $-2R$ un virziens ir parallēls y-asij.

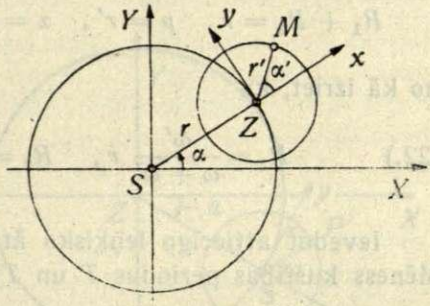
Bet punkts E arī apraksta cikloīdu, ko dabūjam no punkta P aprakstītās cikloīdas ar translāciju parallēli x-asij par πR.

Tādējādi punktu P_1 ģeometriskā vieta arī ir cikloīda, kas ir kongruenta ar punkta P aprakstīto cikloīdu. Citiem vārdiem sakot, parastas cikloīdas evolūta ir tai kongruenta cikloīda.

27. §. Piemēri.

140. **Mēness hēliocentriskā kustība.** — Pirmajā tuvinājumā var iedomāties, ka Zemes (Z) kustība ap Sauli (S) un Mēness (M) kustība ap Zemi ir cirkulāras kustības, kas norit ar vienmērīgiem ātrumiem, un ka to orbitu plaknes sakrīt.

Tālāk apskatīsim nekustīgu hēliocentrisku koordinātu sistēmu SXY un kustīgu ģeocentrisku sistēmu Zxy, kā 92. zīmējumā aizrādīts. Ja laiku t skaita no kāda Mēness M pilnīga aptumsuma momenta, kad Z un M atrodas uz SX-ass, tad momentā $t = 0$ Zemes hēliocentriskā anōmalija α pret SX-asi, un tāpat Mēness ģeocentriskā anōmalija α' pret Zx-asi, ir nulle. Apzīmējot Zemes hēliocentrisko leņķisko ātrumu ar ω un Mēness ģeocentrisko leņķisko ātrumu ar ω', momentā t leņķiem α un α' dabūjam šādas izteiksmes:



92. zīm.

$$\alpha = \omega t\,, \qquad \alpha' = \omega' t\,. \tag{19.}$$

Ja Zemes orbitas ap Sauli radiju apzīmē ar r un Mēness orbitas ap Zemi radiju ar r', tad Zemes hēliocentriskās koordinātas X_0, Y_0 ir

$$X_0 = r\cos\omega t\,, \qquad Y_0 = r\sin\omega t$$

un Mēness ģeocentriskās koordinātas x, y ir

$$x = r'\cos\omega' t\,, \qquad y = r'\sin\omega' t\,.$$

Projicējot vektoriālo vienlīdzību

$$\overline{SM} = \overline{SZ} + \overline{ZM}$$

uz nekustīgās koordinātu sistēmas asīm, dabūjam, ka

$$X = r\cos\alpha + r'\cos(\alpha + \alpha'),$$
$$Y = r\sin\alpha + r'\sin(\alpha + \alpha')$$

jeb

$$\left\{\begin{aligned} X &= r\cos\omega t + r'\cos(\omega + \omega')t\,, \\ Y &= r\sin\omega t + r'\sin(\omega + \omega')t\,. \end{aligned}\right. \tag{20.}$$

Pēdējie vienādojumi rāda, ka Mēness hēliocentriskā kustība ir epicikloīdāla, jo tie ir ar to pašu formu kā epicikloīdālas kustības vienādojumi

$$(21.)\quad \begin{cases} x = (R_1 + R_2)\cos\alpha + p\cos\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\alpha, \\ y = (R_1 + R_2)\sin\alpha + p\sin\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\alpha. \end{cases}$$

Identificējot (20.) un (21.) sistēmas vienādojumus, dabūjam, ka

$$R_1 + R_2 = r, \quad p = r', \quad \alpha = \omega t, \quad \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\alpha = (\omega + \omega')\,t,$$

no kā izriet, ka

$$(22.)\quad R_1 = \frac{\omega'}{\omega + \omega'}\,r, \quad R_2 = \frac{\omega}{\omega + \omega'}\,r, \quad p = r'.$$

Ievedot attiecīgo leņķisko ātrumu ω un ω' vietā Zemes un Mēness kustības periodus T un T', kas definēti ar formulām

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'},$$

(22.) sistēmas formulas var pārrakstīt tā:

$$(23.)\quad R_1 = \frac{T}{T + T'}\,r, \quad R_2 = \frac{T'}{T + T'}\,r, \quad p = r'.$$

Lielumu r, r', T, T' skaitliskās vērtības (tuvināti) ir šādas:

$$r = 150\,000\,000 \text{ km}, \quad r' = 360\,000 \text{ km},$$
$$T = 365 \text{ d.}, \quad T' = 28 \text{ d.}$$

Tādējādi Mēness hēliocentriskā kustība ir epicikloīdāla — ar Sauli kā bazes centru un bazes radiju R_1 un Zemi kā rulantes centru un rulantes radiju R_2.

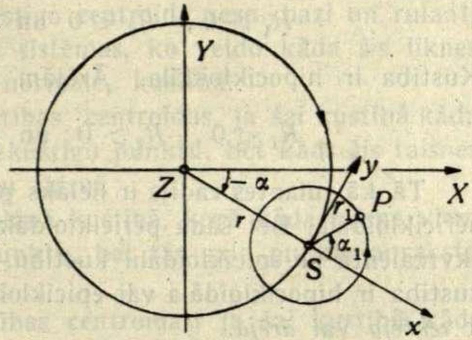
141. **Planētas ģeocentriskā kustība.** — Arī šai gadījumā pirmajā tuvinājumā var iedomāties, ka planētu aprakstītās orbitas ap Sauli ir cirkulāras un ka tās visas atrodas vienā plaknē, jo šo orbitu ekscentricitātes un inklinācijas pret eklīptiku ir ļoti mazas.

Uzrakstot trešo Keplera likumu ar divu planētu leņķiskiem ātrumiem ω un ω' formā

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{a'^{3/2}}{a^{3/2}},$$

redzam, ka leņķiskais ātrums kādai planētai ir jo mazāks, jo tālāk tā atrodas no Saules. Tālāk astronomiskie novērojumi rāda, ka visām planētām hēliocentriskais kustības vērsums ir viens un tas pats. Ja šo vērsumu izvēlas par leņķisko ātrumu pozitīvo vērsumu, tad Saules leņķiskais ātrums kustībā ap Zemi ir negātīvs. Apzīmēsim šo ātrumu ar $-\omega$ un kādas planētas P leņķisko ātrumu kustībā ap Sauli ar ω_1.

Atkal apskatīsim nekustīgu ģeocentrisku koordinātu sistēmu ZXY un kustīgu hēliocentrisku sistēmu Sxy (93. zīm.). Ja par laika t skaitīšanas sākumu izvēlas momentu, kad Zeme un planēta atrodas Saules pretējās pusēs uz ZX-ass, tad šai momentā Saules ģeocentriskā un planētas hēliocentriskā anomalija ir nulle; bet kādā momentā t tās ir



93. zīm.

$$\alpha = -\omega t\,, \qquad \alpha_1 = \omega_1 t\,.$$

Apzīmējot Zemes un planētas hēliocentriskos attālumus attiecīgi ar r un r_1 un projicējot vektoriālo vienlīdzību

$$\overline{ZP} = \overline{ZS} + \overline{SP}$$

uz nekustīgās sistēmas ZXY asīm, dabūjam planētas koordinātām šai sistēmā izteiksmes

$$X = r\cos\alpha + r_1\cos(\alpha_1 + \alpha)\,,$$
$$Y = r\sin\alpha + r_1\sin(\alpha_1 + \alpha)$$

jeb

$$\text{(24.)}\qquad \left\{\begin{aligned} X &= r\cos\omega\, t + r_1\cos(\omega_1 - \omega)t\,, \\ Y &= -r\sin\omega\, t + r_1\sin(\omega_1 - \omega)t\,. \end{aligned}\right.$$

Identificējot (24.) un (21.) sistēmas vienādojumus, dabūjam sakarības

$$R_1 + R_2 = r\,, \qquad p = r_1\,, \qquad \alpha = -\omega t\,, \qquad \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\alpha = (\omega_1 - \omega)t\,.$$

Ja Zemes un planētas kustības periodus T un T_1 definē attiecīgi ar formulām

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1},$$

tad no šīm sakarībām izriet, ka

$$R_1 = \frac{T}{T-T_1} r, \quad R_2 = -\frac{T_1}{T-T_1} r, \quad p = r_1.$$

Sadalot planētas attiecībā pret Zemes orbitu *iekšējās* un *ārējās* planētās atkarībā no tā, vai to orbitas atrodas Zemes orbitas iekšpusē vai ārpusē, viegli saprast, ka iekšējām planētām $T_1 < T$, un tā tad

$$R_1 > 0, \quad R_2 < 0 \text{ un } 0 > R_2 > -R_1.$$

Kustība ir hipocikloīdāla. Ārējām planētām $T_1 > T$, un tā tad

$$R_1 < 0, \quad R_2 > 0 \text{ un } 0 > R_1 > -R_2.$$

Tā kā rulantes radijs ir lielāks par bazes radiju, tad kustība ir pericikloīdāla. Bet šāda pericikloīdāla kustība, kā to var pierādīt, ir ekvivalenta ar epicikloīdālu kustību. Tādējādi planētas ģeocentriskā kustība ir hipocikloīdāla vai epicikloīdāla atkarībā no tā, vai planēta ir *iekšēja* vai *ārēja.*

Šis ir Ptolemaja[1]) pasaules sistēmas uzskats, pēc kuŗa planēta P kustas ap iedomātu punktu (mūsu gadījumā Sauli S), kas savkārt vienmērīgi kustas pa riņķa līniju ap Zemi Z. Iedomātā punkta (S) aprakstīto riņķa līniju Ptolemajs sauc par *deferentu (circulus deferens)*, bet planētas aprakstīto riņķa līniju par *epiciklu (epicyclus).*

Astronomisko novērojumu skaitam palielinoties, Ptolemaja sistēmas piekritēji pārliecinājās par tās trūkumiem un izdarīja tanī dažus pārlabojumus. Planētu tie iedomājās vienmērīgi kustamies pa riņķa līniju, kuŗas centrs kustas pa epiciklu ap iedomātu punktu, kas savkārt kustas pa deferentu, un tā joprojām, sablīvējot tādējādi vienu epiciklu virs otra un padarot pasaules sistēmu arvien komplicētāku.

Šāda komplicēta planētu ģeocentriskā kustība, jādomā, ilgi būtu palikusi neizskaidrojama, ja Kopernikam[2]) nebūtu radusies

---

[1]) Cl. Ptolemaeus (dzīv. II g. s. pēc Kr.). Viņa lielais darbs *Magna constructio,* kuŗā sakopotas visas tā laika zināšanas astronomijā un kuŗš arabiski tulkots par *Al Magesti,* iznāca latīņu valodā ar nosaukumu *Mathematicae constructionis,* Wittebergiae, 1549. g.

[2]) N. Copernicus (1473.—1543. g.), *De revolutionibus orbium coelestium libri sex.,* Norimbergiae, 1543.

pārgalvīga doma — attiecināt planētu kustības pret Sauli (hēliocentriskā sistēma). Koordinātu sistēmā, kas saistīta ar Sauli, planētu kustības uzreiz vienkāršojās. Planētu orbitas izrādījās elīpses, kuŗu vienā kopējā fokū atrodas Saule, kā to nosaka pirmais Keplera likums. Un tikai pēc tam Ņūtonam[1]) bija iespējams atrast vispasaules gravitācijas likumu, kas izskaidro planētu kustības ar Saules gravitācijas spēku. Tādējādi redzam, cik liela vēsturiska nozīme pasaules uzskata izveidošanā ir bijusi relātīvās kustības jēdzienam.

142. **Uzdevumi.**

1. Atrast nekustīgo un kustīgo centroīdu resp. bazi un rulanti kādas plaknes līknes references sistēmas, ko veido kāda šīs līknes punkta pozitīvā tangente un normāle, kustībā.

2. Atrast komplānas kustības centroīdas, ja šai kustībā kāda taisne vienmēr iet caur kādu nekustīgu punktu, bet kāds šīs taisnes punkts apraksta kādu nekustīgu taisni.

3. Atrast centroīdas komplānā kustībā, kuŗā kāda taisne vienmēr iet caur kādu nekustīgu punktu, bet tās gala punkts apraksta doto līkni.

4. Atrast komplānas kustības centroīdas, ja šai kustībā kāds taisns leņķis kustas tā, ka tā viena mala vienmēr iet caur kādu nekustīgu punktu, bet otras malas noteikts punkts apraksta kādu nekustīgu taisni.

5. Nekustīgā plaknē dota nekustīga trajektorija (baze) I_n. Noteikt kustīgo trajektoriju (rulanti) I_k tā, lai, tai veļoties bez slīdes pa nekustīgo trajektoriju I_n, tā piešķirtu kustīgās plaknes noteiktam punktam taisnlīnijas kustību (šo punktu ģeometriskā vieta ir rulete).

Piemērojot iepriekšējo rezultātu, atrisināt šādus trīs uzdevumus:

6. Baze I_n ir riņķa līnija ar radiju a, bet rulete ir kāds tās diametrs.

7. Baze I_n ir parabola ar parametru p un rulete ir tās direktrise.

8. Baze I_n ir parabola ar parametru p, bet rulete ir tās ass.

9. Kāda konstanta lieluma leņķa malas a, b slīd pa divām nekustīgām riņķa līnijām r_1 un r_2 ar atbilstošiem centriem O_1 un O_2. Atrast šīs komplānās kustības centroīdas un kādas trešās, ar a un b nekustīgi saistītas taisnes c, ietvērēju līkni.

---

[1]) I. Newton (1642.—1727. g.), *Philosophiae naturalis principia mathematica,* Londini, 1687. Labākais šī darba tulkojums mūsu dienās ir *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, Transl. A. Motte (1729), Ed. F. Cajori, Cambridge, 1934.

VI NODAĻA.

CIETA ĶERMEŅA GALĪGI PĀRVIETOJUMI.

28. §. Ekvivalentas kustības.

143. **Definīcijas.** — Līdz šim, runājot par cieta ķermeņa kinēmatiku, esam apskatījuši cieta ķermeņa kustības pamatveidus, vispārīgo momentāno kustību un nepārtrauktu cieta ķermeņa kustību.

Ja turpretim ir dotas divas cieta ķermeņa pozicijas, t. i. divas kongruentas figūras, tad eksistē bezgala daudz kustību, ar kuŗām iespējams cieto ķermeni pārvietot no vienas pozicijas otrā. Starp šīm bezgala daudz kustībām ir viena tāda, ar kuŗu ir notikusi faktiskā cieta ķermeņa pārvietošanās.

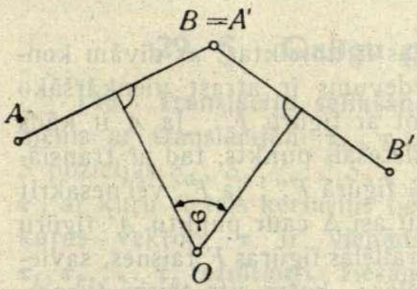
Jautāsim tagad, kāda ir visvienkāršākā kustība, ar kuŗu iespējams cieto ķermeni pārvietot no vienas dotās pozicijas otrā. Citiem vārdiem sakot, meklēsim visvienkāršāko kustību, kas savieno pirmo figūru ar otru, tai kongruentu figūru. Šādu kustību sauc par dotajai kustībai *ekvivalentu kustību*. Apskatīsim šo jautājumu atsevišķi cieta ķermeņa komplānā kustībā, kustībā ap vienu nekustīgu punktu un pēc tam brīvā kustībā.

144. **Komplāna kustība.** — Komplānā kustībā cieta ķermeņa pozicija ir noteikta ar diviem šī ķermeņa punktiem, un tāpēc šai gadījumā uz uzstādīto jautājumu var atbildēt šādi. Ja A ir kāds pirmās figūras punkts un A' tam atbilstošais punkts otrā figūrā un ja B ir tas pirmās figūras punkts, kas sakrīt ar punktu A' otrā figūrā un kam atbilstošais punkts ir B', tad $AB = A'B'$. Ja B' sakrīt ar punktu A, tad vienkāršākais pārvietojums, lai pirmā figūra sakristu ar otru, ir rotācija par leņķi π ap AB viduspunktu.

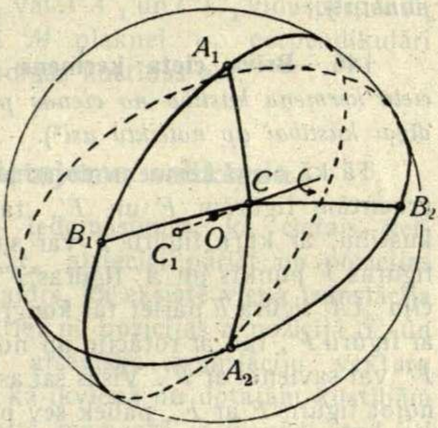
Ja $A'B'$ atrodas uz segmenta AB turpinājuma, tad cieta ķermeņa pārvietojums pirmās figūras savienošanai ar tai kongruento otru figūru ir translācija. Visos citos gadījumos cieta ķermeņa pārvietojums no pozicijas, kuŗa noteikta ar pirmo figūru, pozicijā, kuŗa noteikta ar otru, tai kongruento figūru, ir rotācija. Tās centrs ir segmentu AB un $A'B'$ vidusperpendikulu krustošanās punkts O, bet leņķis ir vienāds ar leņķi φ, ko veido šie vidusperpendikuli (94. zīm.).

Bet tā kā translāciju arī var uztvert kā rotāciju ap bezgala tāļu centru, tad dabūjam teorēmu, ka *komplānā cieta ķermeņa* *kustībā cietais ķermenis pārvietojams no vienas pozicijas otrā ar translāciju vai rotāciju ap galīgu centru*[1]).

145. **Kustība ap nekustīgu punktu.** — Gadījumā, kad cietam ķermenim ir viens nekustīgs punkts O, pārējos divus punktus, kas kopā ar O noteic cietā ķermeņa poziciju, var iedomāties atrodamies uz sfēras ar centru O. Apzīmēsim šos punktus ar A un B. Divās patvaļīgās cieta ķermeņa pozicijās nosauksim šos punktus par A_1, B_1 un A_2, B_2 (95. zīm.). Tā kā ķermenis ir ciets, tad lielā riņķa loks A_1B_1 (kas ir mazāks par π) ir vienāds ar lielā riņķa loku A_2B_2 (arī mazāku par π).



94. zīm.



95. zīm.

Pierādīsim, ka cieta ķermeņa pārvietojums no vienas pozicijas, kas ir noteikta ar punktiem O, A_1, B_1, otrā, kas ir noteikta ar atbilstošiem punktiem O, A_2, B_2, ir rotācija ap noteiktu asi caur punktu O par noteiktu leņķi φ.

Šai nolūkā iedomāsimies vilktus četrus lielos riņķus caur punktiem A_1, B_1; A_2, B_2; A_1, A_2 un B_1, B_2 (zīmējumā parādīti tikai divi pirmie riņķi). Pēc tam dalīsim uz pusēm loku A_1A_2 ar lielo riņķi, kas ir perpendikulārs šim lokam, un loku B_1B_2 ar tam perpendikulāro lielo riņķi.

---

[1]) Šo teōrēmu ir devis Šals (Chasles) kādā notā, kuŗu tas iesniedzis 1829. g., Société Philomatique, bet kas iespiesta tikai 1878. g. *Bulletin de la Société mathém. de France,* t. 6.

Divi pēdējie lielie riņķi krustojas divos diametrāli pretējos punktos C un C_1. Bet tā kā nupat minētie lielie riņķi caur punktu C dala lokus A_1A_2 un B_1B_2 uz pusēm, tad

$$\smile A_1C = \smile A_2C,$$
$$\smile B_1C = \smile B_2C.$$

Tā tad sfēriskie trijstūŗi A_1CB_1 un A_2CB_2 ir kongruenti, jo to attiecīgās malas ir vienādas. Pēc rotācijas ap asi CC_1 par leņķi A_1CA_2 punkts A_1 sakrīt ar punktu A_2 un punkts B_1 sakrīt ar punktu B_2.

Tādējādi, *ja cietam ķermenim ir viens nekustīgs punkts, tad kustība ap šo punktu ir ekvivalenta rotācijai ap noteiktu asi caur šo nekustīgo punktu*[1]).

146. **Brīva cieta ķermeņa kustība.** — Pierādīsim, ka *brīva cieta ķermeņa kustība no vienas pozicijas otrā ir ekvivalenta skrūvveidīgai kustībai ap noteiktu asi*[2]).

Tā kā cieta ķermeņa divas pozicijas ir noteiktas ar divām kongruentām figūrām F un F', tad uzdevums ir atrast vienkāršāko kustību, ar kuŗu figūru F var savienot ar figūru F'. Ja A ir kāds figūras F punkts un A' figūras F' atbilstošais punkts, tad ar translāciju $\overline{AA'}$ figūra F pāriet tai kongruentā figūrā F''; ja F'' vēl nesakrīt ar figūru F', tad ar rotāciju ap noteiktu asi Δ caur punktu A' figūru F'' var savienot ar F'. Visas šai asij parallēlās figūras F taisnes, savienojot figūru F ar F', paliek sev parallēlas; katra cita taisne turpretim maina savu virzienu.

Bet tā kā visas asij Δ perpendikulārās plaknes arī patur savu virzienu, tad figūras F savienošanu ar figūru F' varam panākt šādi: ja p un p' ir F un F' atbilstošās plaknes, kuŗas nemaina savu virzienu, tad pārvietojam vispirms figūru F ass Δ virzienā, līdz kamēr plakne p sakrīt ar plakni p'; pēc tam ar rotāciju ap noteiktu asi, kas ir perpendikulāra plaknei $p(p')$, panākama figūras F savienošana ar figūru F'. Šāda figūras F savienošana ar F' ir skrūvveidīga kustība, jo translācija $p \to p'$ ir parallēla rotācijas asij Δ.

147. **Šala skrūvveidīgas kustības ass konstrukcija.** — Apzīmēsim ar ABC un $A_1B_1C_1$ kāda trijstūŗa, kas definē cieta ķermeņa

[1]) L. Euler, *Formulae generales etc.*, Novi Commentarii Acad. Petropol., vol. 20, 1775.

[2]) M. Chasles. *Note sur les propriétés générales de deux corps etc.* Bulletin de Férussac, t. 14, 1830.

poziciju, kustības sākuma un gala poziciju. Pēc tam izvēlēsimies kādu patvaļīgu punktu O un konstruēsim trīs citus punktus A_2, B_2, C_2 tā, lai

$$\overline{OA_2} = \overline{AA_1}, \quad \overline{OB_2} = \overline{BB_1}, \quad \overline{OC_2} = \overline{CC_1}.$$

Trīs punkti A_2, B_2, C_2 resp. trijstūris $A_2B_2C_2$ noteic kādu plakni, ko apzīmēsim ar σ_1. Tālāk iedomāsimies caur punktu O vilktu plakni σ, kas ir parallēla plaknei σ_1. Ar ikvienu no agrāk minētām translācijām plakne σ pāriet plaknē σ_1. Projicējot trijstūŗus ABC un $A_1B_1C_1$ ortogōnāli uz plaknes σ_1, dabūjam divus jaunus trijstūŗus $A'B'C'$ un $A'_1B'_1C'_1$, no kuŗiem pirmais pāriet otrā ar rotāciju ap noteiktu centru M plaknē σ_1. Rotācijas centrs M ir taišņu $A'A'_1$ un $B'B'_1$ vai $A'A'_1$ un $C'C'_1$ vidusperpendikulu krustošanās punkts. Punktā M plaknei σ_1 perpendikulāri vilktā taisne m ir meklētā skrūvveidīgās kustības ass.

29. §. Galīgu pārvietojumu salikšana.

148. **Translāciju salikšana.** — Iedomāsimies, ka cietais ķermenis ar translācijām $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ attiecīgi pāriet no pozicijas S pozicijās $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Ir skaidrs, ka eksistē viena translācija τ, ar kuŗu cietais ķermenis tieši pāriet no pozicijas S pozicijā S_n un kuŗas vektors τ ir vienāds ar atsevišķo translāciju vektoru $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ rezultanti. Tiešām, tā kā ikvienā no dotajām kustībām visu ķermeņa punktu ātrumi jebkuŗā momentā ir vienādi, tad arī rezultētājā kustībā visu punktu ātrumi jebkuŗā momentā ir vienādi. Bet pēdējā īpašība raksturo translāciju, ko sauc par doto translāciju *rezultētāju translāciju.*

Tādējādi *vairākas translācijas summējas vienā rezultētājā translācijā, kuŗas reprezentētājs vektors ir vienāds ar atsevišķo translāciju reprezentētāju vektoru rezultanti.*

Atsaucoties uz vektoru summas kommūtātīvo īpašību, rezultētāja translācija ir neatkarīga no kārtības, kādā parciālās translācijas izdarītas.

Arī otrādi, jebkuŗu translāciju τ var sadalīt bezgala daudz veidos vairākās citās translācijās $\tau_1, \tau_2, \ldots$, pie kam $\tau = \sum\limits_i \tau_i$.

No bezgala daudz iespējamiem sadalīšanas veidiem atzīmēsim šādus divus:

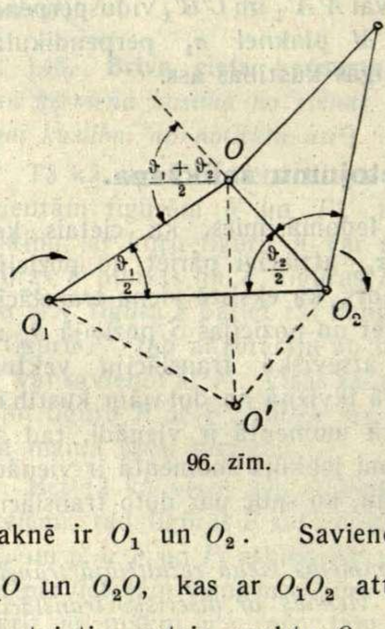
a) dotās translācijas τ sadalīšanu divās translācijās, no kuŗām vienas virziens ir dots, bet otra atrodas tai perpendikulārā plaknē;

b) dotās translācijas τ sadalīšanu trīs savstarpēji perpendikulārās translācijās, kas raksturotas ar vektoriem τ_1, τ_2, τ_3.

149. **Rotāciju salikšana.** — 1° *Salikšana ap vienu un to pašu asi.* — Ja ar doto ķermeni izdara vairākas rotācijas ap vienu un to pašu asi, par attiecīgiem leņķiem $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$, starp kuŗiem daži var būt negātīvi pēc konvencijas, tad *rezultētāja kustība atkal ir rotācija, pie kam rezultētājas rotācijas leņķis* ϑ *ir vienāds ar parciālo rotāciju leņķu algebrisko summu, t. i.*

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n .$$

Rezultētāja rotācija ir neatkarīga no kārtības, kādā izdarītas parciālās rotācijas.



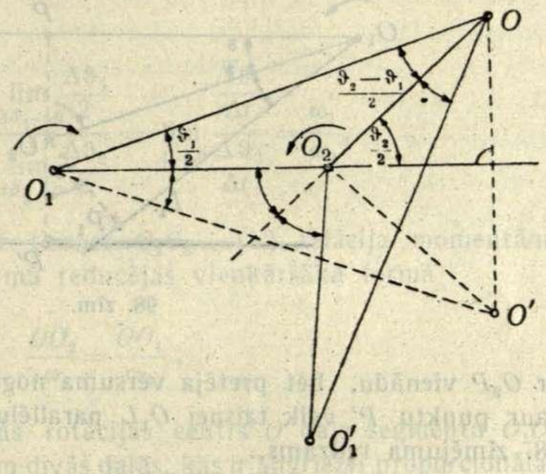
96. zīm.

2° *Salikšana ap parallēlām asīm.* — *a) Rotāciju vērsumi ir vienādi.* — Apskatīsim cieta ķermeņa divas rotācijas, no kuŗām vienas ass ir (O_1) un leņķis ϑ_1, bet otras ass ir pirmajai asij parallēla ass (O_2) un leņķis ir ϑ_2, pie kam rotāciju vērsumi ir vienādi, kā tas 96. zīmējumā aizrādīts ar bultiņām. Ja izvēlas kādu rotāciju asīm perpendikulāru plakni par zīmējuma plakni, tad rotāciju asu pēdu punkti šai plaknē ir O_1 un O_2. Savienosim O_1 ar O_2 un vilksim taisnes O_1O un O_2O, kas ar O_1O_2 attiecīgi veido leņķus $\frac{\vartheta_1}{2}$ un $\frac{\vartheta_2}{2}$ un krustojoties noteic punktu O.

Pierādīsim, ka *divas dotās rotācijas, kuŗas izdarītas sākumā minētā kārtībā, ir ekvivalentas ar vienu rotāciju ap asi, kas vilkta caur punktu* O *parallēli dotajām asīm, par leņķi* $\vartheta_1 + \vartheta_2$ *doto rotāciju kopējā vērsumā.*

Tiešām, apskatīsim cieta ķermeņa taisni, kas kustības sākumā sakrīt ar rotācijas asi (O_1). Pirmā rotācija ap asi (O_1) nemaina tās poziciju, bet otra ap asi (O_2) transformē to pozicijā (O'_1), kur leņķis $O_1O_2O'_1 = \vartheta_2$. Tālāk, taisne, kas kustības sākumā sakrīt ar (O), ar pirmo rotāciju pāriet pozicijā (O'), bet ar otru atgriežas savā sākuma pozicijā (O). Tādējādi ar minētām divām rotācijām cietais ķermenis pāriet pozicijā, kas raksturīga ar to, ka taisne, kas sākumā sakrīt ar asi (O), atkal atgriežas savā sākuma pozicijā, bet taisne, kas sakrīt ar asi (O_1), nonāk pozicijā (O'_1). Bet, kā viegli pārliecināties, kustība, kas cieto ķermeni transformē no tā sākuma pozicijas gala pozicijā, ir rotācija ap asi (O) par leņķi $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \sphericalangle O_1OO'_1$ vērsumā, kas ir vienāds ar doto rotāciju vērsumu. Ar šādu rotāciju ass (O_1) nonāk pozicijā (O'_1), ar ko apgalvojums ir pierādīts.

Samainot divu apskatīto rotāciju kārtību, rezultētājas rotācijas ass ir (O'), agrākās ass (O) vietā, bet nemainīgs paliek rotācijas leņķis un vērsums.



97. zīm.

b) Rotāciju vērsumi ir pretēji. — Iedomāsimies, ka rotāciju vērsumi ap parallēlām asīm ir pretēji, un tie ir 97. zīmējumā aizrādītie; pie tam pirmās rotācijas ass ir (O_1) un leņķis ϑ_1, bet otras ass ir (O_2) un leņķis ϑ_2. Bez tam iedomāsimies, ka $\vartheta_2 > \vartheta_1$.

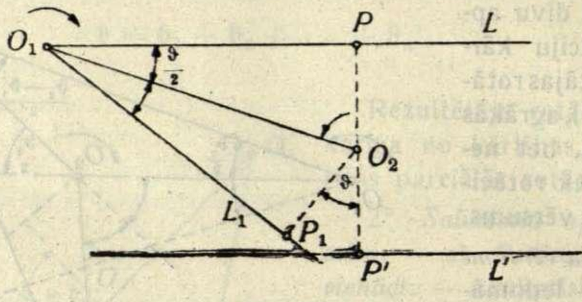
Konstruējot punktu O kā taisnes O_1O, kas veido leņķi $\frac{\vartheta_1}{2}$ ar O_1O_2, un taisnes O_2O, kas veido leņķi $\frac{\vartheta_2}{2}$ ar O_1O_2 pagarinājumu, krustošanās punktu un spriežot, kā iepriekšējā gadījumā, dabūjam, ka *divas dotās rotācijas, kuŗas izdarītas agrāk minētajā kārtībā, ir ekvivalentas ar vienu rotāciju ap asi* (O) *par leņķi* $\vartheta_2 - \vartheta_1$ *lielākās rotācijas vērsumā.* Arī šinī gadījumā rezultētāja rotācija ir atkarīga no parciālo rotāciju kārtības.

Abos gadījumos, kā no $\triangle O_1OO_2$ redzams, rotācijas ass (O) pozicija ir definēta ar relāciju

$$(1.)\qquad \frac{OO_2}{\sin\frac{\vartheta_1}{2}} = \frac{OO_1}{\sin\frac{\vartheta_2}{2}}.$$

c) Rotāciju pāris. — Divas vienāda lieluma, bet pretējiem vērsumiem, rotācijas ap parallēlām asīm sauc par *rotāciju pāri.* Apzīmēsim kopējo rotācijas leņķi ar ϑ un apskatīsim divas pret O_1O_2 simmetriskas taisnes O_1L un O_1L_1, kuŗas ar simmetrijas asi O_1O_2 veido leņķi $\frac{\vartheta}{2}$ (98. zīm.).

Ja no punkta O_2 velk perpendikulus O_2P un O_2P_1 attiecīgi pret taisnēm O_1L un O_1L_1 un atliek no šī punkta uz pirmā virziena



98. zīm.

ar O_2P vienādu, bet pretēja vērsuma nogriezni O_2P' un pēc tam caur punktu P' velk taisnei O_1L parallēlu taisni $P'L'$, tad, kā no 98. zīmējuma redzams,

$$\measuredangle\, PO_2P_1 = \pi - \vartheta\,,$$

un tā tad

$$\measuredangle\, P'O_2P_1 = \pi - (\pi - \vartheta) = \vartheta\,.$$

Ar pirmo rotāciju ap asi (O_1) taisne O_1L pāriet taisnē O_1L_1, bet ar otru rotāciju ap asi (O_2) šī taisne pāriet taisnē $P'L'$, kas pēc konstrukcijas ir parallēla taisnei O_1L. Tādējādi taisnes O_1L un punkta P gala pozicijas ir $P'L'$ un P', kas var tikt dabūtas no to sākuma pozicijām ar translāciju PP'. Un tā tad *rotāciju pāris ir ekvivalents vienai translācijai, kas reprezentēta ar segmentu*

$$PP' = 2\,PO_2 = 2\,O_1O_2 \sin\frac{\vartheta}{2}$$

un kas ar rotāciju pāŗa centru savienotāju taisni O_1O_2 veido leņķi $\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}$.

Rotāciju kārtība nemaina translācijas absolūto vērtību, bet tikai tās vērsumu.

d) *Momentānu rotāciju salikšana.* — Momentānas rotācijas var uzskatīt par robežgadījumu galīga lieluma rotācijām, ja, laika intervallam $\Delta t \to 0$, leņķi ϑ_1 un ϑ_2 kļūst infinītezimāli lielumi $\Delta\vartheta_1$ un $\Delta\vartheta_2$, kas abi tiecas uz nulli, bet tādā kārtā, ka

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vartheta_1}{\Delta t} = \frac{d\vartheta_1}{dt} = \omega_1, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vartheta_2}{\Delta t} = \frac{d\vartheta_2}{dt} = \omega_2,$$

kur ω_1 un ω_2 ir galīgi lielumi, kas reprezentē rotāciju leņķiskos ātrumus.

Tādā gadījumā

$$\frac{\sin\frac{\vartheta_1}{2}}{\sin\frac{\vartheta_2}{2}} \to \frac{\lim\limits_{\Delta\vartheta_1 \to 0} \frac{\Delta\vartheta_1}{2}}{\lim\limits_{\Delta\vartheta_2 \to 0} \frac{\Delta\vartheta_2}{2}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta\vartheta_1}{\Delta t}}{\frac{\Delta\vartheta_2}{\Delta t}} = \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

un punkts O atrodas uz taisnes O_1O_2. (1.) relācija momentānu rotāciju *a*) un *b*) gadījumā reducējas vienkāršākā formā

$$\frac{OO_2}{\omega_1} = \frac{OO_1}{\omega_2}, \tag{2.}$$

kas rāda, ka rezultētājas rotācijas centrs O dala segmentu O_1O_2 starp doto rotāciju centriem divās daļās, kas ir apgriezti proporcionālas doto rotāciju leņķiskiem ātrumiem. Punkts O atrodas starp punktiem O_1 un O_2 vai uz segmenta O_1O_2 pagarinājuma lielākā leņķiskā ātruma pusē atkarībā no tā, vai rotāciju vērsumi ir vienādi vai pretēji. Pirmajā gadījumā $\omega = \omega_1 + \omega_2$, otrā gadījumā ($\omega_2 > \omega_1$) $\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Momentānu rotāciju gadījumā rotāciju kārtība nav svarīga, jo šai gadījumā arī punkts O' sakrīt ar to pašu taisnes O_1O_2 punktu kā punkts O.

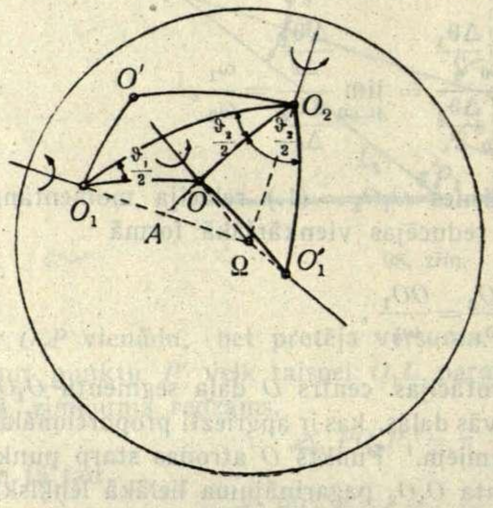
Infinītezimāla rotāciju pāŗa gadījumā varam secināt, ka *infinītezimālais rotāciju pāris ir ekvivalents ar infinītezimālu translāciju, kuŗa ir perpendikulāra rotāciju pāŗa asu plaknei un kuŗas absolūtā vērtība ir* $r\omega$, *ja* $r = O_1O_2$.

3° *Salikšana ap asīm, kas krustojas.* — *a*) *Rotāciju vērsumi ir vienādi.* — Konstrukciju divu vienāda vērsuma rotāciju, par ļeņķiem ϑ_1 un ϑ_2 ap asīm caur kopējo punktu Ω, salikšanai pirmais ir devis Rodrigs[2]).

2) O. Rodrigues (1794.—1851. g.).

Ap punktu Ω kā centru iedomāsimies vilktu sfēru, kuŗas radijs ir 1 un kuŗa dotās rotāciju asis krusto punktos O_1 un O_2 (99. zīm.). Tālāk vilksim divus lielo riņķu lokus O_1O un O_2O, kas ar lielā riņķa loku O_1O_2 attiecīgi veido leņķus $\frac{\vartheta_1}{2}$ un $\frac{\vartheta_2}{2}$ un krustojoties nosaka punktu O.

Ar pirmo rotāciju ap asi ΩO_1 par leņķi ϑ_1 cieta ķermeņa taisne, kas kustības sākumā sakrīt ar asi ΩO, pāriet tai simmetriskā pozicijā $\Omega O'$ pret lielā riņķa loku O_1O_2. Bet ar otru rotāciju ap asi ΩO_2 par leņķi ϑ_2 šī pati taisne atgriežas atpakaļ savā sākuma pozicijā ΩO. Un tā tad taisne ΩO, kuŗa ir kopēja kā cieta ķermeņa sākuma, tā gala pozicijai, paliek nemainīga, citiem vārdiem sakot, tā ir rezultētājas rotācijas, kas ir ekvivalenta ar divām dotajām rotācijām, ass.



99. zīm.

Lai atrastu rezultētājas rotācijas ap asi ΩO leņķi un vērsumu, konstruēsim uz loka O_2O kā bazes ar sfērisko trijstūri O_1O_2O simmetrisku sfērisku trijstūri O'_1O_2O. Ar pirmo rotāciju ap asi ΩO_1 cieta ķermeņa taisne, kas kustības sākumā sakrīt ar šo asi, paliek nekustīga; ar otru rotāciju par leņķi ϑ_2 ap asi ΩO_2 tā pāriet jaunā pozicijā $\Omega O'_1$, kur sfēriskais leņķis $O_1O_2O'_1 = \vartheta_2$.

Tādējādi ar divām dotajām rotācijām cietais ķermenis pāriet pozicijā, kas raksturīga ar to, ka šī ķermeņa taisne, kas sākumā sakrīt ar asi ΩO, atkal atgriežas savā sākuma pozicijā, bet taisne, kas sakrīt ar ΩO_1, nonāk pozicijā $\Omega O'_1$.

Tā tad rezultētājas rotācijas ap asi ΩO leņķis ir vienāds ar plakņu $O_1\Omega O$ un $O'_1\Omega O$ veidoto leņķi resp. uz sfēras ar sfērisko leņķi $O_1OO'_1$, ko apzīmēsim ar ϑ. Tā kā pēc konstrukcijas

$$\sphericalangle AOO_1 = \frac{\vartheta}{2}, \qquad \sphericalangle O_1OO_2 = \pi - \frac{\vartheta}{2},$$

tad no sfēriskā trijstūŗa O_1OO_2, lietojot kosina likumu leņķiem, dabūjam, ka

$$\cos\left(\pi - \frac{\vartheta}{2}\right) = -\cos\frac{\vartheta_1}{2}\cos\frac{\vartheta_2}{2} + \sin\frac{\vartheta_1}{2}\sin\frac{\vartheta_2}{2}\cos\alpha$$

jeb

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \cos\frac{\vartheta_1}{2}\cos\frac{\vartheta_2}{2} - \sin\frac{\vartheta_1}{2}\sin\frac{\vartheta_2}{2}\cos\alpha\,, \tag{3.}$$

kur α ir leņķis starp asīm ΩO_1 un ΩO_2.

(3.) formula definē rezultētājas rotācijas, kuŗas vērsums ir vienāds ar doto rotāciju kopējo vērsumu, leņķi ϑ.

Apzīmējot ar α_1 resp. α_2 leņķi, ko rezultētājas rotācijas ass ΩO veido ar asi ΩO_1 resp. asi ΩO_2, no sfēriskā trijstūŗa O_1OO_2 dabūjam šādas relācijas ass ΩO noteikšanai pret dotajām asīm ΩO_1 un ΩO_2:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\frac{\vartheta_2}{2}} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\frac{\vartheta_1}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\,. \tag{4.}$$

(3.) formula un (4.) formulu sistēma atrisina rotāciju salikšanas problēmu analitiski.

Tādējādi *divas rotācijas ap asīm caur kopēju punktu ir ekvivalentas ar vienu rotāciju ap noteiktu asi caur šo punktu. Rotācijas leņķis un ass ir determinēti attiecīgi ar* (3.) *formulu un* (4.) *formulu sistēmu.*

Samainot doto rotāciju kārtību, rezultētājas rotācijas ass ir $\Omega O'$, kas ir simmetriska ar asi ΩO pret loku O_1O_2.

b) *Rotāciju vērsumi ir pretēji.* — Ja doto rotāciju vērsumi ir pretēji, līdzšinējie spriedumi paliek spēkā, bet starpība ir tā pati kā rotācijā ap parallēlām asīm ar pretējiem vērsumiem.

c) *Momentānu rotāciju salikšana.* — Momentānu rotāciju gadījumā punkts O atrodas uz loka O_1O_2 un (4.) sistēmas relācijas reducējas vienkāršākā formā

$$\frac{\sin\alpha_1}{\omega_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\omega_1} = \frac{\sin\alpha}{\omega}\,,$$

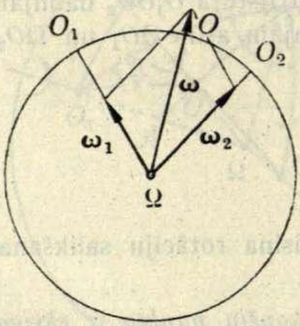
kur ω_1, ω_2, ω apzīmē doto rotāciju, kā arī rezultētājas rotācijas leņķiskos ātrumus.

Tiešām, atliekot pa rotāciju asīm ΩO_1 un ΩO_2 attiecīgos rotācijas vektorus $\boldsymbol{\omega}_1$ un $\boldsymbol{\omega}_2$ tā, lai rotācijas ap šīm asīm noritētu pozitīvā vērsumā, un konstruējot, kā 100. zīmējumā aprādīts, šo vektoru rezultanti $\boldsymbol{\omega}$, redzam, ka pēc sinu teorēmas starp šo vektoru algebriskām vērtībām un virzieniem pastāv augšējā sakarība.

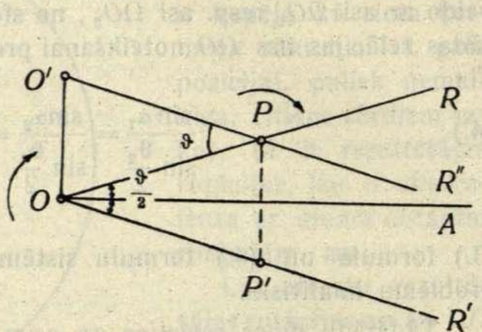
Tādējādi varam secināt, ka *divām dotajām momentānām rotācijām ekvivalentas rotācijas lielums, ass un vērsums ir definēti ar šo rotāciju raksturotāju vektoru rezultantes algebrisko vērtību, asi un vērsumu.*

Vispārīgi *vairākas momentānas rotācijas ap asīm caur kopēju punktu ir ekvivalentas ar vienu rotāciju, kuŗas elementi ir definēti ar doto rotāciju raksturotāju vektoru elementiem.*

150. **Translācijas un rotācijas salikšana.** — 1° Apskatīsim cieta ķermeņa rezultētāju kustību, ja tas ir pakļauts translācijai $\boldsymbol{\tau}$ un



100. zīm.



101. zīm.

rotācijai par leņķi ϑ ap asi, kas ir perpendikulāra translācijas $\boldsymbol{\tau}$ virzienam (101. zīm.).

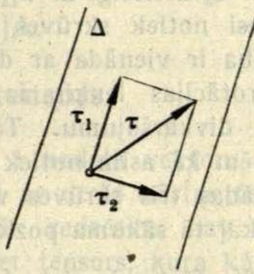
Iedomājoties rotācijas asi perpendikulāru zīmējuma plaknei, tās pēdas punktu šai plaknē apzīmēsim ar O. Translācija $\boldsymbol{\tau}$ tad ir parallēla šai plaknei.

Konstruēsim šai plaknē vektoru $\overline{OO'} = \boldsymbol{\tau}$ un šim vektoram perpendikulāru taisni OA. Pēc tam vilksim taisnes OR un OR', kas ikviena ar taisni OA veido leņķi $\frac{\vartheta}{2}$. Iedomājoties, ka translācija seko rotācijai, redzam, ka taisne OR ar rotāciju ap asi (O) par leņķi ϑ pāriet taisnē OR', kas savkārt ar translāciju $\boldsymbol{\tau}$ pāriet taisnē $O'R''$. Tādējādi taisne, kas kustības sākumā sakrīt ar rotācijas asi (P), atgriežas atpakaļ savā sākuma pozicijā, bet taisne PO pāriet taisnē PO'. Un tā tad rezultētāja kustība ir ekvivalenta rotācijai ap asi (P) par leņķi ϑ dotās rotācijas vērsumā.

Ja rotācija seko translācijai, tad dabūjam analogu rezultātu, bet rotācijas ass (P) vietā stājas ass (P').

Tādējādi *rotācija ap kādu asi un translācija perpendikulāri šai asij ir ekvivalentas rotācijai ap dotajai asij parallēlu taisni. Tās lielums un vērsums ir vienādi ar dotās rotācijas attiecīgajiem elementiem.*

2° Apskatīsim vēl gadījumu, kad cietais ķermenis ir pakļauts translācijai τ un rotācijai ap kādu asi Δ, kas nav ne perpendikulāra, ne arī parallēla translācijas virzienam. Iedomāsimies, ka translācija seko rotācijai. Sadalīsim translāciju τ divos komponentos τ_1 un τ_2, no kuŗiem pirmais ir parallēls asij Δ, bet otrs tai perpendikulārs (102. zīm.). Kā agrāk redzējām, rotācija ap asi Δ un tai perpendikulāra translācija ir ekvivalentas rotācijai ap kādu asij Δ parallēlu asi Δ_1. Bet pēdējā rotācija un tai parallēla translācija τ_1 ir ekvivalentas ar skrūves veida kustību.



102. zīm.

Tādējādi *rotācija un translācija ir ekvivalentas skrūves veida kustībai.* To pašu rezultātu dabūsim, iedomājoties, ka rotācija seko translācijai.

151. **Uzdevumi.**

1. Pierādīt, ka divas viena otrai sekojošas rotācijas, katra par 180° ap vienu no parallēlām asīm a un b, ir ekvivalentas ar translāciju, kuŗas virziens ir parallēls šo asu īsākā attāluma nesējai taisnei un kuŗas absolūtā vērtība ir vienāda ar šī attāluma divkāršojumu, bet vērsums iet no a uz b.

2. Pierādīt, ka divas viena otrai sekojošas rotācijas, katra par 180° ap vienu no asīm a un b, kas savā starpā krustojas, ir ekvivalentas ar rotāciju ap šīm asīm kopējo perpendikulu par leņķi, kas ir vienāds ar šo asu veidotā leņķa divkāršojumu, vērsumā no a uz b.

3. Pierādīt, ka trīs viena otrai sekojošas rotācijas, katra par 180° ap vienu no trim asīm, kas savā starpā krustojas un ir perpendikulāras, pārvieto cietu ķermeni atpakaļ tā sākuma pozicijā.

4. Pierādīt, ka divas viena otrai sekojošas rotācijas, katra par 180° ap vienu no šķērsām asīm a un b, ir ekvivalentas ar skrūves veida kustību, kuŗas ass sakrīt ar doto asu īsākā attāluma AB nesēju

taisni. Ja šo skrūves veida kustību sadala translācijā, kas ir parallēla šai asij, un rotācijā ap šo asi, tad translācijas absolūtā vērtība ir vienāda ar divkāršotu īsāko attālumu AB, bet rotācijas leņķis ir vienāds ar leņķa, ko veido asis a un b, divkāršojumu.

Ja dotās asis šķērsojas taisnā leņķī, tad apskatītās rotācijas ir ekvivalentas ar rotāciju par 180° ap šo šķērso asu īsākā attāluma AB nesēju taisni un translāciju parallēli šim virzienam par lielumu, kas ir vienāds ar $2AB$.

5. Dotas ir trīs taisnes a_1, a_2, a_3, kuŗas visas neatrodas vienā plaknē. Apzīmēsim īsāko attālumu starp taisnēm a_1 un a_2, a_1 un a_3 un a_2 un a_3 attiecīgi ar d_{12}, d_{13} un d_{23}. Iedomāsimies, ka ap taisni a_1 kā asi notiek skrūves veida kustība, kuŗas translācijas absolūtā vērtība ir vienāda ar divkāršu attālumu starp taisnēm d_{12} un d_{13} un rotācijas leņķis ir vienāds ar leņķa, ko veido taisnes d_{12} un d_{13}, divkāršojumu. Tāpat iedomāsimies, ka ap pārējām divām taisnēm kā asīm notiek analogas skrūves veida kustības. Pierādīt, ka šādas trīs skrūves veida kustības kopā pārvieto cietu ķermeni atpakaļ tā sākuma pozicijā (Alfena[1]) teōrēma).

6. Dotas ir cieta ķermeņa trīs pozicijas S_1, S_2 un S_3. Pierādīt, ka cietam ķermenim vienmēr eksistē tāda ceturtā pozicija S, no kuŗas tas var tikt pārvietots ikvienā no trim dotajām pozicijām ar rotāciju ap attiecīgu taisni par leņķi, kas ir vienāds ar 180°.

7. Apzīmējot ar ABC kādu sfērisku trijstūri, kas atrodas uz sfēras ar centru O, pierādīt, ka trīs viena otrai sekojošas rotācijas par leņķiem $2A$, $2B$, $2C$ ap attiecīgajām asīm OA, OB, OC, pie kam rotāciju vērsums ir pretējs vērsumam, kas definēts ar punktu A, B, C secību, pārvieto cietu ķermeni atpakaļ tā sākuma pozicijā. (Donkina[2]) un Hemiltona[3]) teōrēma).

---

[1]) G. H. Halphen (1844.—1889. g.), *Nouvelles Annales*, (3), t. 1, 1882.

[2]) W. F. Donkin (1814.—1869. g.). Teōrēma publicēta 1850. g.

[3]) W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, 1853.

OTRĀ DAĻA.

OTRĀS KĀRTAS TENSORU TEŌRIJA UN MASAS JĒDZIENS KINĒMATIKĀ.

VII NODAĻA.

TENSORU TEŌRIJA.

30. §. Otrās kārtas tensors.

148. **Pirmā definīcija.** — Apskatījuši I nodaļā vektoru teōrijas pamatjēdzienus, iepazīsimies šai nodaļā ar otrās kārtas tensora jēdzienu. Pirmās kārtas tensors, kā vēlāk redzēsim, nav nekas cits kā agrāk definētais brīvais vektors, bet tensors, kuŗa kārta ir nulle, ir skālārs. Blakus vektoru teōrijai tensoru teōrija ieņem ievērojamu vietu modernajā fizikā un ģeometrijā, jo tā bieži atļauj analitiskos pierādījumus vienkāršot un rakstību saīsināt. Minēto iemeslu dēļ arī mēs savā kursā neignōrēsim modernajās disciplīnās tik svarīgo tensora koncepciju.

Lai iegūtu otrās kārtas tensora jēdzienu, apskatīsim divus vektorus $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, apzīmējot to koordinātas izvēlētajā ortogōnālā koordinātu triedrā $Oxyz$ attiecīgi ar X_1, Y_1, Z_1 un X_2, Y_2, Z_2, un sastādīsim šo koordinātu produktus:

$$(1.)\quad \begin{cases} T_{11} = X_1X_2\,, & T_{12} = X_1Y_2\,, & T_{13} = X_1Z_2\,, \\ T_{21} = Y_1X_2\,, & T_{22} = Y_1Y_2\,, & T_{23} = Y_1Z_2\,, \\ T_{31} = Z_1X_2\,, & T_{32} = Z_1Y_2\,, & T_{33} = Z_1Z_2\,. \end{cases}$$

Tālāk piekārtosim šiem deviņiem lielumiem ar vispārīgu ortogōnālu koordinātu transformāciju

$$(2.)\quad \begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z\,, \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z\,, \\ z' = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z\,, \end{cases}$$

(kur x', y', z' apzīmē jaunās koordinātas, x, y, z agrākās koordinātas, α_{ij} jauno asu $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ pret agrākajām asīm Ox, Oy, Oz

virzienu kosinus pēc 6. nodal. tabulas, ja pēdējā asis ΩX, ΩY, ΩZ icdomājas aizstātas attiecīgi ar $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$) deviņus citus produktus

$$(3.)\quad \begin{cases} T'_{11} = X'_1X'_2\,, & T'_{12} = X'_1Y'_2\,, & T'_{13} = X'_1Z'_2\,, \\ T'_{21} = Y'_1X'_2\,, & T'_{22} = Y'_1Y'_2\,, & T'_{23} = Y'_1Z'_2\,, \\ T'_{31} = Z'_1X'_2\,, & T'_{32} = Z'_1Y'_2\,, & T'_{33} = Z'_1Z'_2\,, \end{cases}$$

pie kam pēc (2.) transformācijas formulu sistēmas attiecīgās koordinātas X', Y', Z' un X, Y, Z ir saistītas ar formulām

$$(4.)\quad \begin{cases} X' = \alpha_{11}X + \alpha_{12}Y + \alpha_{13}Z\,, \\ Y' = \alpha_{21}X + \alpha_{22}Y + \alpha_{23}Z\,, \\ Z' = \alpha_{31}X + \alpha_{32}Y + \alpha_{33}Z\,. \end{cases}$$

Kā viegli pārliecināties,

$$(5.)\quad T'_{ij} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\,\alpha_{j\tau}\,T_{\sigma\tau}\,,$$

kur i un j ir divi fiksēti skaitļi no skaitļiem 1, 2, 3. Un tā kā σ un τ iegūst pēc kārtas un neatkarīgi viens no otra vērtības 1, 2, 3, tad (5.) formulu sistēmas ikvienas formulas labajā pusē ir pavisam deviņi locekļi. Lai pārliecinātos par (5.) formulu sistēmas pareizumu, aprēķināsim, piem., lielumu T'_{23}. Pēc (5.) formulas dabūjam tam izteiksmi

$$\begin{aligned} T'_{23} &= \alpha_{21}\alpha_{31}T_{11} + \alpha_{21}\alpha_{32}T_{12} + \alpha_{21}\alpha_{33}T_{13} \\ &\quad + \alpha_{22}\alpha_{31}T_{21} + \alpha_{22}\alpha_{32}T_{22} + \alpha_{22}\alpha_{33}T_{23} \\ &\quad + \alpha_{23}\alpha_{31}T_{31} + \alpha_{23}\alpha_{32}T_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33}T_{33} \\ &= \alpha_{21}\alpha_{31}X_1X_2 + \alpha_{21}\alpha_{32}X_1Y_2 + \alpha_{21}\alpha_{33}X_1Z_2 \\ &\quad + \alpha_{22}\alpha_{31}Y_1X_2 + \alpha_{22}\alpha_{32}Y_1Y_2 + \alpha_{22}\alpha_{33}Y_1Z_2 \\ &\quad + \alpha_{23}\alpha_{31}Z_1X_2 + \alpha_{23}\alpha_{32}Z_1Y_2 + \alpha_{23}\alpha_{33}Z_1Z_2 \\ &= (\alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}Y_1 + \alpha_{23}Z_1)\,(\alpha_{31}X_2 + \alpha_{32}Y_2 + \alpha_{33}Z_2)\,, \end{aligned}$$

ko, ievērojot (4.) formulu sistēmu, var pārrakstīt formā

$$T'_{23} = Y'_1Z'_2\,,$$

kas arī bija jāpierāda.

Ar otrās kārtas tensoru saprot deviņu skālāru lielumu T_{ij} sistēmu ar īpašību, ka ikviena ortogōnāla koordinātu transformācija ar (2.) *formu šos deviņus lielumus transformē jaunos deviņos lielumos T'_{ij}, kas ar* (5.) *relāciju sistēmu ir saistīti ar agrākajiem lielumiem T_{ij}.*

Skālāros lielumus T_{ij} sauc par otrās kārtas tensora *koordinātām.* Otrās kārtas tensoru ar koordinātām T_{ij} apzīmē ar $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ un tā koordinātu tabulu

$$\begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix}$$

sauc par tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ *matricu.*

Lai aizrādītu simboliski uz tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ izcelšanos no vektoriem $\mathbf{v}_1$ un $\mathbf{v}_2$, tad raksta

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 ,$$

uzsveŗot ar to, ka tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ koordinātas T_{ij} ir sastādītas no doto vektoru koordinātām X_1, Y_1, Z_1 un X_2, Y_2, Z_2 pēc formulas

$$T_{ij} = v_{1i} v_{2j} ,$$

pie kam

$$\begin{aligned} v_{11} &= X_1, & v_{12} &= Y_1, & v_{13} &= Z_1, \\ v_{21} &= X_2, & v_{22} &= Y_2, & v_{23} &= Z_2. \end{aligned}$$

Ģeometrisku, mēchanisku vai fizikālu lielumu sauc par *tensoriālu,* ja attiecībā pret diviem koordinātu triedriem to var noteikt ar matricu, kas sastādīta ar deviņiem skālāriem lielumiem — tā koordinātām, kuŗas transformējas pēc (5.) formulu sistēmas, ja abi koordinātu triedri ir saistīti ar (2.) formulu sistēmu.

Apzīmējums, ka vektors ir pirmās kārtas tensors, attaisnojas ar to, ka (5.) tensora koordinātu transformācijas formulu sistēma ir (4.) vektora koordinātu transformācijas formulu sistēmas vispārinājums. Tiešām, mainot apzīmējumus

$$\begin{aligned} X &= v_1, & Y &= v_2, & Z &= v_3, \\ X' &= v'_1, & Y' &= v'_2, & Z' &= v'_3, \end{aligned}$$

(4.) formulu sistēmas vietā dabūjam sistēmu

$$v'_i = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{i\sigma} v_\sigma \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{6.}$$

kas ir ar to pašu formu kā (5.) formulu sistēma.

Atrisinot (5.) un (6.) relāciju sistēmu pret T_{ij} un v_i, dabūjam šīm sistēmām ekvivalentas relāciju sistēmas

$$T_{ij} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{\sigma i}\alpha_{\tau j} T'_{\sigma\tau} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{7.}$$

un

$$v_i = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{\sigma i} v'_{\sigma} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{8.}$$

bet tikai references triedru $Oxyz$ un $O'x'y'z'$ lomas ir apmainītas.

(5.) un (7.) relāciju sistēma rāda, ka kāda otrās kārtas tensora koordinātu anullēšanās izsaka tādu īpašību, kas ir neatkarīga no izvēlētā koordinātu triedra, jo, ja šīs koordinātas ir nulles vienā triedrā, tad tās ir nulles arī otrā, kā tas redzams no minētām sakarībām.

Arī agrāk redzējām, ka vektoru un skālāru anullēšanās izsaka īpašības, kas ir neatkarīgas no izvēlētā references triedra.

153. **Elementārās operācijas ar tensoriem.** — 1° *Tensoru adicija un subtrakcija.* — Ja doti ir divi tensori $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ un $\overline{\overline{\mathbf{\Theta}}}$ ar attiecīgajām koordinātām T_{ij} un Θ_{ij}, tad tensori $\overline{\overline{\mathbf{T}}} \pm \overline{\overline{\mathbf{\Theta}}}$ ar koordinātām $T_{ij} \pm \Theta_{ij}$ reprezentē divu doto tensoru summu resp. diferenci.

Tiešām, pēc tensora definīcijas

$$T'_{ij} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\alpha_{j\tau} T_{\sigma\tau},$$

$$\Theta'_{ij} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\alpha_{j\tau} \Theta_{\sigma\tau};$$

tādēļ, saskaitot un atņemot šīs vienlīdzības, dabūjam, ka

$$T'_{ij} \pm \Theta'_{ij} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\alpha_{j\tau} (T_{\sigma\tau} \pm \Theta_{\sigma\tau}).$$

Pēdējās vienlīdzības definē tensorus $\overline{\overline{\mathbf{T}}} \pm \overline{\overline{\mathbf{\Theta}}}$.

2° *Tensora un vektora iekšējais skālārais produkts.* — Pierādīsim, ka no dotā tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ un vektora $\mathbf{v}$ koordinātām T_{ij} un v_i sastādītie produkti

$$\left\{\begin{aligned} A_1 &= T_{11} v_1 + T_{12} v_2 + T_{13} v_3, \\ A_2 &= T_{21} v_1 + T_{22} v_2 + T_{23} v_3, \\ A_3 &= T_{31} v_1 + T_{32} v_2 + T_{33} v_3, \end{aligned}\right. \tag{9.}$$

kas var tikt rezumēti formulā

$$(9'.)\qquad A_i = \sum_{\sigma=1}^{3} T_{i\sigma}\, v_\sigma \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ir kāda vektora **A** koordinātas.

Lai to pierādītu, ir jāpārliecinās, ka lielumi A_1, A_2, A_3 transformējas tāpat kā vektora koordinātas, citiem vārdiem sakot, ja lielumu A_1, A_2, A_3 transformētie lielumi jaunajā koordinātu triedrā ir A'_1, A'_2, A'_3, pie kam

$$(10.)\qquad A'_i = \sum_{\sigma=1}^{3} T'_{i\sigma}\, v'_\sigma \qquad (i = 1, 2, 3),$$

tad

$$(11.)\qquad A'_i = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\, A_\sigma \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Tiešām, substituējot (10.) formulā $T'_{i\sigma}$ vietā tā izteiksmi

$$T'_{i\sigma} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} \alpha_{i\lambda}\,\alpha_{\sigma\mu}\, T_{\lambda\mu} = \sum_{\mu=1}^{3} \alpha_{\sigma\mu} \sum_{\lambda=1}^{3} \alpha_{i\lambda}\, T_{\lambda\mu},$$

kas sastādīta pēc (5.) formulas, un ievērojot (8.) un (9'.) relāciju sistēmu, dabūjam, ka

$$A'_i = \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{\sigma\mu}\, v'_\sigma \sum_{\lambda=1}^{3} \alpha_{i\lambda}\, T_{\lambda\mu} = \sum_{\mu=1}^{3} v_\mu \sum_{\lambda=1}^{3} \alpha_{i\lambda}\, T_{\lambda\mu}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{3} \alpha_{i\lambda} \sum_{\mu=1}^{3} T_{\lambda\mu}\, v_\mu = \sum_{\lambda=1}^{3} \alpha_{i\lambda}\, A_\lambda .$$

Bet šī formula nav nekas cits kā (11.) formula, ko arī vajadzēja pierādīt.

(9.) skālāro vienlīdzību sistēmu var rezumēt simboliskā formulā

$$(12.)\qquad \mathbf{A} = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \,.\, \mathbf{v},$$

kuŗu sauc par otrās kārtas tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ un vektora **v** iekšējās skālārās reizināšanas formulu. Šīs reizināšanas produkts ir vektors **A**.

3° *Tensora un vektora ārējais skālārais produkts.* — Tāpat kā iepriekšējā gadījumā var pierādīt, ka no dotā tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ un vektora $\mathbf{v}$ koordinātām T_{ij} un v_i sastādītie produkti

$$(13.)\qquad \begin{cases} B_1 = v_1 T_{11} + v_2 T_{21} + v_3 T_{31}\,, \\ B_2 = v_1 T_{12} + v_2 T_{22} + v_3 T_{32}\,, \\ B_3 = v_1 T_{13} + v_2 T_{23} + v_3 T_{33}\,, \end{cases}$$

kas var tikt rezumēti formulā

$$(13'.)\qquad B_i = \sum_{\sigma=1}^{3} v_\sigma T_{\sigma i} \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

ir kāda vektora $\mathbf{B}$ koordinātas.

(13.) skālāro vienlīdzību sistēmu var rezumēt simboliskā formulā

$$(14.)\qquad \mathbf{B} = \mathbf{v}\,.\,\overline{\overline{\mathbf{T}}}\,,$$

kuŗu sauc par otrās kārtas tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ un vektora $\mathbf{v}$ ārējās skālārās ŗeizināšanas formulu. Šīs reizināšanas produkts ir vektors $\mathbf{B}$.

Tādējādi vispārīgi ir jāšķiro tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ un vektora $\mathbf{v}$ iekšējās un ārējās reizināšanas operācijas

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}.\,\mathbf{v} \;\text{ un }\; \mathbf{v}\,.\,\overline{\overline{\mathbf{T}}}\,.$$

4° *Divu tensoru $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ un $\overline{\overline{\mathbf{\Theta}}}$ skālārais produkts.* — Ar divu tensoru $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ un $\overline{\overline{\mathbf{\Theta}}}$ skālāro produktu saprot šo tensoru koordinātu, kuŗām ir vienādi indeki, produktu summu, t. i. invarianto skālāro lielumu

$$\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\,\Theta_{ij}\,.$$

Lai pierādītu uzrakstītā skālārā produkta invarianci, ir jāpierāda, ka

$$\sum_{i,j=1}^{3} T'_{ij}\,\Theta'_{ij} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T_{\sigma\tau}\,\Theta_{\sigma\tau}\,.$$

Pēc definīcijas

$$\sum_{i,j=1}^{3} T'_{ij}\,\Theta'_{ij} = \sum_{i,j=1}^{3} \left(\sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\,\alpha_{j\tau}\,T_{\sigma\tau}\right)\left(\sum_{\lambda,\mu=1}^{3} \alpha_{i\lambda}\,\alpha_{j\mu}\,\Theta_{\lambda\mu}\right),$$

ko, grupējot pēc locekļiem, kas atbilst noteiktām σ, τ, λ, μ vērtībām, var pārrakstīt tā

$$\sum_{i,j=1}^{3} T'_{ij}\,\Theta'_{ij} = \sum_{\sigma,\tau,\lambda,\mu} \left(T_{\sigma\tau}\,\Theta_{\lambda\mu} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\,\alpha_{i\lambda} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{j\tau}\,\alpha_{j\mu}\right).$$

Bet tā kā

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\,\alpha_{i\lambda} = \begin{cases} 0, \text{ ja } \sigma \neq \lambda \\ 1, \text{ ja } \sigma = \lambda \end{cases}; \quad \sum_{j=1}^{3} \alpha_{j\tau}\,\alpha_{j\mu} = \begin{cases} 0, \text{ ja } \tau \neq \mu \\ 1, \text{ ja } \tau = \mu \end{cases},$$

tad vienīgie locekļi, kas pēdējā reizinājumā nav nulles, atbilst $\sigma = \lambda$ un $\tau = \mu$. Tādējādi

$$\sum_{i,j=1}^{3} T'_{ij}\,\Theta'_{ij} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T_{\sigma\tau}\,\Theta_{\sigma\tau},$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

154. **Otra definīcija.** — Divu vektoru skālārais produkts ir invariants lielums, t. i. neatkarīgs no koordinātu triedra izvēles, jo, kā viegli pārliecināties, divu vektoru **u** un **v** skālārais produkts triedrā *Oxyz* ir vienāds ar transformēto vektoru **u**′ un **v**′ skālāro produktu triedrā $O'x'y'z'$, t. i.

$$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} = \mathbf{u}'\,.\,\mathbf{v}'.$$

Tālāk apskatīsim vektoru **u**, **A** un **u**, **B** skālāros produktus. Ja vektora **u** koordinātas apzīmē ar u_1, u_2, u_3, tad divus invariantus

$$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{u},$$
$$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,.\,\mathbf{u},$$

ievērojot (9′.) un (13′.) formulu sistēmu, var pārrakstīt formās

$$\sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T_{\sigma\tau}\,u_\sigma\,v_\tau,$$

$$\sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T_{\sigma\tau}\,u_\tau\,v_\sigma,$$

kuŗas rāda, ka viena no tām dabūjama no otras, apmainot u ar v.

Pārliecināsimies tagad par šādas otrās kārtas tensora definīcijas ekvivalenci ar pirmo definīciju.

Ja **u** un **v** ir divi kaut kādi vektori un T_{ij} tādi deviņi skālāri lielumi, kas ar kādu ortogonālu koordinātu transformāciju, kuŗa transformē vektorus **u**, **v** vektoros **u**′, **v**′, transformējas tādos deviņos jaunos lielumos T'_{ij}, ka

$$\sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T_{\sigma\tau}\,u_\sigma\,v_\tau = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T'_{\sigma\tau}\,u'_\sigma\,v'_\tau, \tag{15.}$$

t. i. izteiksme

$$I = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T_{\sigma\tau}\, u_\sigma\, v_\tau$$

ir invariants, tad lielumi T_{ij} ir kāda otrās kārtas tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ koordinātas. Citiem vārdiem sakot, (5.) un (7.) relācija ir ekvivalentas ar (15.) relāciju, ja **u** un **v** ir kaut kādi vektori. Tā tad (15.) relāciju var uzskatīt par jaunu otrās kārtas tensora definīciju.

Tiešām, substituējot (15.) formulā u'_σ un v'_τ vietā to izteiksmes

$$u'_\sigma = \sum_{\lambda=1}^{3} \alpha_{\sigma\lambda}\, u_\lambda\,, \quad v'_\tau = \sum_{\mu=1}^{3} \alpha_{\tau\mu}\, v_\mu\,,$$

dabūjam

$$\sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T_{\sigma\tau}\, u_\sigma\, v_\tau = \sum_{\sigma,\tau,\lambda,\mu} T'_{\sigma\tau}\, \alpha_{\sigma\lambda}\, \alpha_{\tau\mu}\, u_\lambda\, v_\mu\,.$$

Apmainot šīs formulas kreisās puses izteiksmē indekus σ, τ, pret λ, μ, tās vietā stājas izteiksme

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{3} T_{\lambda\mu}\, u_\lambda\, v_\mu\,,$$

bet labās puses izteiksmi savkārt var pārrakstīt formā

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{3} u_\lambda\, v_\mu \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T'_{\sigma\tau}\, \alpha_{\sigma\lambda}\, \alpha_{\tau\mu}\,.$$

Tā kā šīm divām bilīneārām formām attiecībā pret mainīgiem lielumiem u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 jābūt vienādām, lai kādi būtu šie seši mainīgie lielumi, tad $u_\lambda v_\mu$ koeficientiem abās formās jābūt vieniem un tiem pašiem, t. i.

$$T_{\lambda\mu} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{\sigma\lambda}\, \alpha_{\tau\mu}\, T'_{\sigma\tau} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3).$$

Bet šī sakarība ir ar to pašu formu kā (7.), kas definē otrās kārtas tensora koordinātas. Ar to tensora jēdziena abu definīciju ekvivalence ir pierādīta. Otra definīcija savkārt rāda, ka bilīneārā forma I ir vispārīgo ortogōnālo transformāciju grupas invariants.

155. **Otrās kārtas simmetriskais tensors.** — Ja otrās kārtas tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ deviņas koordinātas T_{ij} apmierina noteikumu

$$T_{ij} = T_{ji}\,, \tag{16.}$$

tad tensoru $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ sauc par *simmetrisku*. Simmetrisks tensors savukārt transformējas simmetriskā tensorā, jo

$$(17.)\qquad T'_{ij} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\,\alpha_{j\tau}\,T_{\sigma\tau} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\,\alpha_{j\tau}\,T_{\tau\sigma} = T'_{ji}\,.$$

Otrās kārtas simmetriskam tensoram ir sešas koordinātas: 1° trīs koordinātas T_{11}, T_{22}, T_{33} un 2° trīs koordinātas $T_{23}=T_{32}$, $T_{13}=T_{31}$, $T_{21}=T_{12}$.

Ja tensors $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ ir simmetrisks, tad šī tensora un vektora $\mathbf{v}$ iekšējais un ārējais skālārais produkts $\overline{\overline{\mathbf{T}}}\,.\,\mathbf{v}$ un $\mathbf{v}\,.\,\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ dod vienu un to pašu vektoru $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, jo šai gadījumā vektoru $\mathbf{A}$ un $\mathbf{B}$ koordinātas, kas ir attiecīgi dotas ar (9.) un (13.) formulu sistēmu, ir identiskas.

Tensora simmetrijas gadījumā otrās kārtas tensora otra definīcija attiecīgi vienkāršojas. Šai gadījumā kvadrātiskās formas

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{u} = \overline{\overline{\mathbf{T}}}\,.\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T_{\sigma\tau}\,u_\sigma\,u_\tau,$$

kuŗa sastādīta ar vektora $\mathbf{u}$ koordinātām u_1, u_2, u_3, invariance pret ortogōnālo transformāciju grupu ir pietiekama, lai seši lielumi $T_{ij}=T_{ji}$ un $T'_{ij}=T'_{ji}$ būtu saistīti ar (5.) un (7.) relāciju, ja vektors $\mathbf{u}$, ar koordinātām u_1, u_2, u_3, un vektors $\mathbf{u}'$, ar koordinātām u'_1, u'_2, u'_3, un tāpat lielumi T_{ij} un T'_{ij} ir atbilstošie lielumi kādā ortogōnālā transformācijā.

Tiešām, substituējot formulas

$$\sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T_{\sigma\tau}\,u_\sigma\,u_\tau = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T'_{\sigma\tau}\,u'_\sigma\,u'_\tau\,,$$

kuŗa izsaka kvadrātiskās formas invarianci pret kādu ortogōnālu transformāciju, labajā pusē u'_σ un u'_τ vietā to izteiksmes

$$u'_\sigma = \sum_{\lambda=1}^{3} \alpha_{\sigma\lambda}\,u_\lambda\,,\quad u'_\tau = \sum_{\mu=1}^{3} \alpha_{\tau\mu}\,u_\mu$$

un apmainot tās kreisajā pusē summācijas indekus, dabūjam

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{3} T_{\lambda\mu}\,u_\lambda\,u_\mu = \sum_{\sigma,\tau,\lambda,\mu=1}^{3} T'_{\sigma\tau}\,\alpha_{\sigma\lambda}\,\alpha_{\tau\mu}\,u_\lambda\,u_\mu$$

jeb

$$\sum_{\lambda,\mu=1}^{3} T_{\lambda\mu}\,u_\lambda\,u_\mu = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} u_\lambda\,u_\mu \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} T'_{\sigma\tau}\,\alpha_{\sigma\lambda}\,\alpha_{\tau\mu}\,,$$

no kurienes, identificējot koeficientus pie $u_\lambda u_\mu$, varam secināt, ka

$$T_{\lambda\mu} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{\sigma\lambda}\, \alpha_{\tau\mu}\, T'_{\sigma\tau} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3),$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

156. **Bilīneāras vai kvadrātiskas formas un otrās kārtas asimmetriska vai simmetriska tensora identitāte.** — Katrs asimmetrisks otrās kārtas tensors, kā redzējām, var tikt definēts ar vienu invariantu bilīneāru formu

$$\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\, u_i\, v_j = T_{11} u_1 v_1 + T_{12} u_1 v_2 + T_{13} u_1 v_3 + T_{21} u_2 v_1 + T_{22} u_2 v_2$$
$$+ T_{23} u_2 v_3 + T_{31} u_3 v_1 + T_{32} u_3 v_2 + T_{33} u_3 v_3$$

un katrs simmetrisks otrās kārtas tensors ar vienu invariantu kvadrātisku formu

$$\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\, u_i\, u_j = T_{11} u_1^2 + 2T_{12} u_1 u_2 + 2T_{13} u_1 u_3 + T_{22} u_2^2 + 2T_{23} u_2 u_3$$
$$+ T_{33} u_3^2 .$$

Tādējādi otrās kārtas asimmetrisku tensoru teōrija ir identiska ar invariantu bilīneāru formu teōriju un otrās kārtas simmetrisku tensoru teōrija ar invariantu kvadrātisku formu teōriju, tāpat kā vektora **v** ar koordinātām v_1, v_2, v_3 pētīšana identificējas ar invariantas līneāras formas

$$v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$$

attiecībā pret u_1, u_2, u_3 pētīšanu

31. §. Otrās kārtas tensora komponenti.

157. **Simmetriskais un slīpsimmetriskais komponents.** — Apskatīsim kādu otrās kārtas tensoru $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ ar koordinātām T_{ij} un piekārtosim tam tensoru $\overline{\overline{\mathbf{\Theta}}}$ ar koordinātām $\Theta_{ij} = T_{ji}$.

Tā kā $\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\, u_i\, v_j$ ir invariants lielums, lai kādi būtu vektori

$\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ un $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$, un $\Theta_{ji} = T_{ij}$, tad $\sum_{j,i=1}^{3} \Theta_{ji}\, u_j\, v_i$ arī

ir invariants lielums.

No tā izriet, ka lielumi Θ_{ji} ir kāda tensora koordinātas.

Tensors

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{\mathbf{T}}} + \overline{\overline{\mathbf{\Theta}}})$$

ir *simmetrisks*, jo tā koordinātas D_{ij} apmierina simmetrijas noteikumus

$$D_{ij} = \tfrac{1}{2}(T_{ij} + \Theta_{ij}) = \tfrac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = D_{ji} \ ;$$

tensors

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{\mathbf{T}}} - \overline{\overline{\mathbf{\Theta}}})$$

turpretim ir *slīpsimmetrisks*, jo tā koordinātas G_{ij} apmierina noteikumus

$$G_{ij} = \tfrac{1}{2}(T_{ij} - \Theta_{ij}) = \tfrac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = -G_{ji}$$

un reducējas pēc to absolūtām vērtībām par trim dažādiem lielumiem:

$$\begin{array}{ccc} 0, & G_{12} = -G_{21}\,, & G_{13} = -G_{31}\,, \\ G_{21} = -G_{12}\,, & 0 & G_{23} = -G_{32}\,, \\ G_{31} = -G_{13}\,, & G_{32} = -G_{23}\,, & 0\,. \end{array}$$

Tādējādi tensors $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ ar koordinātām T_{ij} ir sadalīts divos tensoros $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ un $\overline{\overline{\mathbf{G}}}$, t. i. $\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \overline{\overline{\mathbf{G}}}$, pie kam tensors $\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{\mathbf{T}}} + \overline{\overline{\mathbf{\Theta}}})$ ar sešām dažādām koordinātām $\tfrac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ ir simmetrisks, bet tensors $\overline{\overline{\mathbf{G}}} = \tfrac{1}{2}(\overline{\overline{\mathbf{T}}} - \overline{\overline{\mathbf{\Theta}}})$, ar trim dažādām koordinātām $\tfrac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$ pēc to absolūtām vērtībām, ir slīpsimmetrisks.

Pierādīsim, ka trīs skālārie lielumi

$$G_1 = G_{32}\,, \quad G_2 = G_{13}\,, \quad G_3 = G_{21}$$

ir kāda vektora **G** koordinātas.

Transformējot lielumus G_{ij} ar kādu ortogōnālu koordinātu transformāciju lielumos G'_{ij}, dabūjam, ka

$$G'_{ij} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma}\alpha_{j\tau} G_{\sigma\tau} \ ;$$

bet tā kā

$$G_{\sigma\tau} = -G_{\tau\sigma}\,,$$

tad

$$G'_{ij} = (\alpha_{i3}\alpha_{j2} - \alpha_{i2}\alpha_{j3})\, G_{32} + (\alpha_{i1}\alpha_{j3} - \alpha_{i3}\alpha_{j1})\, G_{13} + (\alpha_{i2}\alpha_{j1} - \alpha_{i1}\alpha_{j2})\, G_{21}\,.$$

Tādējādi, piem., koordināta G'_1 ir dota ar izteiksmi

$$G'_1 = G'_{32} = (\alpha_{33}\alpha_{22} - \alpha_{32}\alpha_{23})\, G_{32} + (\alpha_{31}\alpha_{23} - \alpha_{33}\alpha_{21})\, G_{13} + (\alpha_{32}\alpha_{21} - \alpha_{31}\alpha_{22})\, G_{21}\,,$$

kuŗa, ievērojot pastāvošās relācijas starp virzienu kosiniem α_{ij}, var tikt pārrakst:ta formā

$$G'_1 = \alpha_{11} G_{32} + \alpha_{12} G_{13} + \alpha_{13} G_{21} = \alpha_{11} G_1 + \alpha_{12} G_2 + \alpha_{13} G_3 .$$

Analogi

$$G'_2 = \alpha_{21} G_{32} + \alpha_{22} G_{13} + \alpha_{23} G_{21} = \alpha_{21} G_1 + \alpha_{22} G_2 + \alpha_{23} G_3 ,$$
$$G'_3 = \alpha_{31} G_{32} + \alpha_{32} G_{13} + \alpha_{33} G_{21} = \alpha_{31} G_1 + \alpha_{32} G_2 + \alpha_{33} G_3 ,$$

ar ko ir pierādīts, ka lielumi G_1, G_2, G_3 ir kāda vektora **G** koordinātas.

Tādējādi otrās kārtas asimmetriska tensora pētīšana var tikt aizstāta ar viena simmetriska tensora $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ un viena vektora **G** pētīšanu. Simmetrisko tensoru $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ un vektoru **G** sauc par tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ *komponentiem.*

158. **Otrās kārtas tensora un vektora reizināšanas fundāmentālās formulas.** — Sadalot asimmetrisko otrās kārtas tensoru $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ simmetriskā tensorā $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ un slīpsimmetriskā tensorā $\overline{\overline{\mathbf{G}}}$, iespējams uzstādīt divas fundāmentālas tensora un vektora reizināšanas formulas.

Tensora $\overline{\overline{\mathbf{G}}}$ un vektora **u** ar koordinātām u_1, u_2, u_3 iekšējā skālārā produkta resp. vektora $\overline{\overline{\mathbf{G}}} . \mathbf{u}$ koordinātas ir

$$G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + G_{13}u_3 = G_2u_3 - G_3u_2 ,$$
$$G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + G_{23}u_3 = G_3u_1 - G_1u_3 ,$$
$$G_{31}u_1 + G_{32}u_2 + G_{33}u_3 = G_1u_2 - G_2u_1 .$$

Bet tā kā šis trīs skālārās vienlīdzības var tikt rezumētas vektoriālā vienlīdzībā

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}} . \mathbf{u} = \mathbf{G} \times \mathbf{u}$$

un

(18.) $$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \overline{\overline{\mathbf{G}}} ,$$

tad

(19.) $$\overline{\overline{\mathbf{T}}} . \mathbf{u} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} . \mathbf{u} + \mathbf{G} \times \mathbf{u} .$$

Pēdējo formulu sauc par *tensora un vektora iekšējās reizināšanas fundāmentālo formulu.*

Analogā kārtā dabūjam *tensora un vektora ārējās reizināšanas fundāmentālo formulu*

(20.) $$\mathbf{u} . \overline{\overline{\mathbf{T}}} = \mathbf{u} . \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \mathbf{u} \times \mathbf{G} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} . \mathbf{u} - \mathbf{G} \times \mathbf{u} .$$

159. **Otrās kārtas simmetriskā tensora ģeometriskā reprezentācija.** — Asimmetriska tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ viens komponents $\mathbf{G}$ ģeometriski raksturojams ar vektoru. Mēģināsim atrast tā otrā komponenta — simmetriskā tensora $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ ģeometrisko reprezentāciju.

Apskatīsim vienības vektoru $\mathbf{u}$ ar virziena kosiniem α, β, γ, kas reizē ir arī vektora $\mathbf{u}$ koordinātas, un sastādīsim skālāro produktu — invariantu

$$(21.)\quad d(\alpha,\beta,\gamma) = \overline{\overline{\mathbf{D}}}\,.\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u} = D_{11}\alpha^2 + D_{22}\beta^2 + D_{33}\gamma^2 + 2D_{23}\beta\gamma + 2\,D_{31}\gamma\alpha + 2\,D_{12}\alpha\beta\,.$$

Tālāk atliksim no punkta O virzienā, ko noteic α, β, γ, nogriezni OP ar garumu $\dfrac{1}{\sqrt{|d(\alpha,\beta,\gamma)|}}$, kur $|d(\alpha,\beta,\gamma)|$ apzīmē $d(\alpha,\beta,\gamma)$ absolūto vērtību. Nogriežņa gala punkta $P(x, y, z)$ koordinātas tad apmierina vienādojumus

$$(22.)\quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \pm\frac{1}{\sqrt{|d(\alpha,\beta,\gamma)|}}\,,$$

un punktu P ģeometriskā vieta, ko dabūjam, eliminējot α, β, γ no (21.) vienādojuma ar (22.) vienādojumu sistēmu, ir otrās kārtas virsas ar vienādojumu

$$(23.)\quad Q(x,y,z) = D_{11}x^2 + D_{22}y^2 + D_{33}z^2 + 2D_{23}yz + 2D_{31}zx + 2D_{12}xy \pm 1 = 0\,,$$

pie kam pēdējais loceklis ir jāņem ar zīmi —, ja d ir pozitīvs, un ar zīmi +, ja d ir negātīvs lielums.

Virsas $Q(x,y,z) = 0$, kuŗas reprezentē elīpsoīdu, ja $d(\alpha,\beta,\gamma)$ ir definīta[1]) kvadrātiska forma attiecībā pret mainīgiem lielumiem α, β, γ, bet divus saistītus hiperboloīdus, ja $d(\alpha,\beta,\gamma)$ ir indefinīta forma, sauc par simmetriskā tensora $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ *reprezentētājām virsām*, jo, ja tās ir dotas, tad zināmas ir tensora $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ sešas koordinātas D_{ij} un otrādi.

---

[1]) Apzīmējumi *definīta* un *indefinīta* kvadrātiska forma ir pamatoti ar šādu teorēmu: *pozitīvi definītas kvadrātiskas formas vērtība visām reālām mainīgo lielumu vērtībām ir vienmēr nulle vai pozitīvs lielums; negātīvi definītas formas vērtība ir vienmēr nulle vai negātīvs lielums.* Tādējādi definītas formas zīme ir jau iepriekš noteikta. Turpretim indefinīta kvadrātiska forma mainīgo lielumu reālām vērtībām pieņem kā pozitīvas, tā negātīvas vērtības. Tuvāk skat. M. Bôcher, *Einführung in die höhere Algebra,* Leipzig, Teubner, 1932, XI nod., 162. lpp.

Pierādīsim tensora $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ reprezentētāju virsu $Q(x, y, z) = 0$ divas īpašības.

I teōrēma. — *Punktā P, kuŗā taisne* Δ, *kas vilkta caur punktu O virzienā* $\mathbf{u}$ (α, β, γ), *krusto virsu* $Q(x, y, z) = 0$, *tangentiālā plakne ir perpendikulāra vektoram* $\mathbf{A} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} \,.\, \mathbf{u}$ *ar koordinātām* A_1, A_2, A_3.

Tiešām, tā kā virsai $Q(x, y, z) = 0$ punktā P tangentiālās plaknes vienādojums ir

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z = \sqrt{|d(\alpha, \beta, \gamma)|}, \tag{24.}$$

tad pierādāmā īpašība ir acīm redzama.

II teōrēma. — *Virsas* $Q(x, y, z) = 0$ *centra O attālums* δ *no tai tangentiālās plaknes punktā P ir vienāds ar*

$$\frac{\sqrt{|d(\alpha, \beta, \gamma)|}}{A},$$

kur A apzīmē vektora $\mathbf{A} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} \,.\, \mathbf{u}$ *gaŗumu.*

Šī teōrēma izriet no (24.) vienādojuma.

Ar I un II teōrēmu, zinot attiecīgās virsas $Q(x, y, z) = 0$, iespējams konstruēt vektoru $\mathbf{A}$, jo no vienas puses tas ir perpendikulārs virsas $Q(x, y, z) = 0$ tangentiālai plaknei punktā P, bet no otras puses, kā to rāda II teōrēma, ievērotai jābūt sakarībai

$$\frac{1}{\delta\, OP} = A.$$

Reciprocitātes likums. — *Vektora* $\mathbf{A} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} \,.\, \mathbf{u}$ *projekcija uz vektora* $\mathbf{v}$ *(vienības vektora) ir vienāda ar vektora* $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} \,.\, \mathbf{v}$ *projekciju uz vektora* $\mathbf{u}$ *(vienības vektora).* Vai, citiem vārdiem sakot,

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} \,.\, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} \,.\, \mathbf{v} \,.\, \mathbf{u}.$$

Tiešām, ja α, β, γ ir vektora $\mathbf{u}$ koordinātas un α', β', γ' vektora $\mathbf{v}$ koordinātas, tad iepriekšējā vienādojuma abas puses ir vienādas ar izteiksmi

$$\alpha\alpha' D_{11} + \beta\beta' D_{22} + \gamma\gamma' D_{33} + (\gamma\beta' + \beta\gamma') D_{32} + (\alpha\gamma' + \gamma\alpha') D_{13} \\ + (\beta\alpha' + \alpha\beta') D_{21},$$

kas ir simmetriska pret α, β, γ un α', β', γ'.

160. **Kvadrātiskas formas invarianti.** — Ir zināms, ka, mainot koordinātu triedru, kvadrātiskai formai $Q(x, y, z)$ eksistē trīs koeficientu funkcijas, kas paliek nemainīgas. Šīs funkcijas ir

$$D_{11} + D_{22} + D_{33},$$
$$D_{33}D_{22} + D_{11}D_{33} + D_{22}D_{11} - D_{32}^2 - D_{13}^2 - D_{21}^2,$$
$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix}.$$

Pirmo sauc par tensora $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ *kontrakcijas invariantu.* Pēdējā ir kvadrātiskās formas *diskriminants.*

32. §. Dažu vektoru un otrās kārtas tensoru sastādīšana.

161. **Skālāra gradients. Vektora atvasinājums.** — Iekams apskatām dažu otrās kārtas tensoru sastādīšanu, apskatīsim vispirms vektoru sastādīšanu, iesākot ar kādu skālāru resp. vektoriālu funkciju. Pierādīsim, ka

1° *Ja dota ir kāda skālāra funkcija* $U(x_1, x_2, x_3)$, *kuŗai eksistē parciālie atvasinājumi pēc* x_1, x_2, x_3, *kas ir kāda punkta koordinātas, tad trīs lielumi* $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}$ *ir kāda vektora* $\mathbf{V} = \mathbf{grad}\, U$, *saukta par skālāra* $U(x_1, x_2, x_3)$ *gradientu*[1]), *koordinātas.*

Ja vispārīgās ortogonālās koordinātu transformācijas formulas

$$(2.)\qquad \begin{cases} x'_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ x'_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\ x'_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \end{cases}$$

atrisina pret agrākiem mainīgiem lielumiem x_1, x_2, x_3, dabūjot

$$(25.)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{21}x'_2 + \alpha_{31}x'_3, \\ x_2 = \alpha_{12}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{32}x'_3, \\ x_3 = \alpha_{13}x'_1 + \alpha_{23}x'_2 + \alpha_{33}x'_3, \end{cases}$$

---

1) Vektora *gradienta* koncepciju ir ievedis Hemiltons savā grāmatā *Elements of Quaternions,* vol. 1, London, 1866, bet šī vektora tagad vispār atzīto apzīmējumu **grad** pirmo reizi sastopam Rīmaņa-Vēbera (Riemann-Weber) grāmatā *Die partiellen Differentialgleichungen der mathem. Physik,* 4. Aufl. 1900.

un funkcijā $U(x_1, x_2, x_3)$ mainīgo lielumu x_1, x_2, x_3 vietā substituē to (25.) sistēmas izteiksmes, tad funkcija $U(x_1, x_2, x_3)$ pāriet kādā jaunā funkcijā ar jauniem mainīgiem lielumiem x'_1, x'_2, x'_3. Bet no saliktu funkciju diferencēšanas likuma

$$\frac{\partial U}{\partial x'_i} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \alpha_{i1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \alpha_{i2} + \frac{\partial U}{\partial x_3} \alpha_{i3}$$

izriet, ka

$$\frac{\partial U}{\partial x'_i} = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{i\sigma} \frac{\partial U}{\partial x_\sigma}.$$

Šī sakarība raksturo lielumus $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}$ kā kāda vektora

(26.) $$\mathbf{V} = \mathbf{grad}\, U$$

koordinātas.

2° *Ja dota ir vektoriāla funkcija* $\mathbf{v}(u)$, *kas ir atkarīga no kāda parametra* u, *ar koordinātām* $v_1(u)$, $v_2(u)$, $v_3(u)$, *kuŗām eksistē atvasinājumi pēc* u, *tad trīs lielumi* $\frac{dv_1}{du}, \frac{dv_2}{du}, \frac{dv_3}{du}$ *ir kāda vektora koordinātas.*

Tiešām, tā kā ar (25.) formulu sistēmu vektora koordinātas $v_1(u)$, $v_2(u)$, $v_3(u)$ transformējas trīs jaunās koordinātās $v'_1(u)$, $v'_2(u)$, $v'_3(u)$, pie kam

$$v'_i = \alpha_{i1} v_1 + \alpha_{i2} v_2 + \alpha_{i3} v_3 \qquad (i=1, 2, 3),$$

tad

$$\frac{dv'_i}{du} = \alpha_{i1} \frac{dv_1}{du} + \alpha_{i2} \frac{dv_2}{du} + \alpha_{i3} \frac{dv_3}{du}$$

jeb

$$\frac{dv'_i}{du} = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{i\sigma} \frac{dv_\sigma}{du} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Šī sakarība savukārt raksturo lielumus $\frac{dv_1}{du}, \frac{dv_2}{du}, \frac{dv_3}{du}$ kā vektora $\frac{d\,\mathbf{v}(u)}{du}$, kuŗu sauc par vektora $\mathbf{v}(u)$ atvasinājumu, koordinātas.

162. **Vektoru lauks. Vektora gradienta tensors. Vektora rotors.** — Ar *vektoru lauku*[1]) telpā Ω saprot vektoru sistēmu ar īpa-

[1]) *Lauka* jēdzienu ir ievedis Lords Kelvins (Lord Kelvin, agrāk W. Thomson, 1824.—1907. g.) darbā, kas publicēts Philosophical Magazine, (4), vol. 1, 1851 (Reprint of Papers on Electricity and Magnetism, London, 1884).

šību, ka katram telpas Ω punktam P ir piekārtots kāds vektors $\mathbf{v}(P)$, kas mainās nepārtraukti no punkta uz punktu. Vektoru $\mathbf{v}(P)$ sauc par *lauka radītāju vektoru*.

Vektoru lauks ir dots, ja dotas ir šī lauka radītāja vektora $\mathbf{v}(P)$ koordinātas $v_1(x_1, x_2, x_3)$, $v_2(x_1, x_2, x_3)$, $v_3(x_1, x_2, x_3)$ kā punkta P koordinātu x_1, x_2, x_3 funkcijas. Tādējādi kādā koordinātu triedrā vektoru lauks ir dots ar trim skālāriem laukiem $v_1(x_1, x_2, x_3)$, $v_2(x_1, x_2, x_3)$, $v_3(x_1, x_2, x_3)$. Šīs apstāklis tomēr neizslēdz gadījumu, kad vektoru lauks ir definēts ar mazāk nekā trim skālāriem laukiem; tā, piem., vektoru lauks **grad** U ir pilnīgi definēts ar vienu skālāro lauku $U(x_1, x_2, x_3)$.

Teōrēma. — *Ja x_1, x_2, x_3 apzīmē punkta P koordinātas, tad vektora $\mathbf{v}(P)$ radītā laukā ar koordinātām $v_1(x_1, x_2, x_3)$, $v_2(x_1, x_2, x_3)$, $v_3(x_1, x_2, x_3)$ deviņi skālārie lielumi $T_{ij} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ ir kāda otrās kārtas tensora koordinātas.*

Atsaucoties uz iepriekšējā nodal. pierādīto 1° resp. 2° propoziciju, varam rakstīt, ka

$$T'_{ij} = \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} = \sum_{\tau=1}^{3} \alpha_{j\tau} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\tau}$$

resp.

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x_\tau} = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{i\sigma} \frac{\partial v_\sigma}{\partial x_\tau},$$

un tā tad

$$T'_{ij} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma} \alpha_{j\tau} \frac{\partial v_\sigma}{\partial x_\tau} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma} \alpha_{j\tau} T_{\sigma\tau}.$$

Šī sakarība prasa, lai deviņi lielumi T_{ij} būtu kāda otrās kārtas tensora koordinātas. Šo tensoru sauc par *vektora* **v** *gradientu* un apzīmē ar simbolu

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{grad}}}\ \mathbf{v}.$$

Vispārīgi $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ ir asimmetrisks tensors, un kā tādu to var sadalīt divos komponentos:

1° simmetriskā tensorā $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$, kuŗa koordinātas ir

$$D_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

un kuŗu sauc par *vektoru lauka simmetrisko tensoru*, un 2° vektorā **G** ar koordinātām

$$G_1 = G_{32} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right), \quad G_2 = G_{13} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right),$$

$$G_3 = G_{21} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right).$$

Vektoru **G** ar pēdējām koordinātu izteiksmēm sauc par vektora **v** *rotoru*[1]), rakstot

(27.) $$\mathbf{G} = \mathbf{rot}\ \mathbf{v}.$$

163. **Vektora diverģence. Tensora diverģences vektors.** — Ar vektora $\mathbf{v}(P)$ radītā lauka koordinātām $v_1(x_1, x_2, x_3)$, $v_2(x_1, x_2, x_3)$, $v_3(x_1, x_2, x_3)$ sastādīto skālāro lielumu

$$S = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

sauc par *vektora* **v** *diverģenci*[2]) un apzīmē ar simbolu

(28.) $$S = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Ar šo operāciju tā tad no vektora $\mathbf{v}(P)$ radītā lauka iespējams atvasināt skālāro lauku $S(x_1, x_2, x_3)$.

Vektora diverģences invarianci pret ortogōnālām transformācijām, kas raksturotas ar (2.) formulu sistēmu, pierāda šādi. Ar (2.) transformācijas formulu sistēmu vektora **v** koordinātas v_1, v_2, v_3 transformējas jaunās koordinātās v'_1, v'_2, v'_3, pie kam

(29.) $$v'_i = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{i\sigma} v_\sigma \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Jāpierāda, ka transformētā vektora $\mathbf{v}'$ diverģence

$$S' = \operatorname{div} \mathbf{v}' = \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial v'_3}{\partial x'_3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_i}$$

ir identiski vienāda ar pirmatnējā vektora **v** diverģenci S, t. i.

$$S'(x'_1, x'_2, x'_3) \equiv S(x_1, x_2, x_3).$$

---

[1]) *Rotora* jēdzienu ir ievedis Meksuels (J. C. Maxwell, 1831.—1879. g.) savā grāmatā *A Treatise on Electricity and Magnetism,* 1873. g., bet tā simbolu **rot** gandrīz vienlaicīgi Lorencs (H. Lorentz, 1853.—1928. g.) grāmatā—*Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern,* Leyden, 1895. g. un Ferrāriss (G. Ferraris, 1847.—1897. g.) darbā *Teoria geometrica dei campi vettoriali come introduzione allo studio della elettricità, del magnetismo ecc,* Mem. Acc. Scienze Torino, (2), vol. 47, 1897. g. Angļu autori simbola **rot** vietā lieto simbolu **curl**.

[2]) Apzīmējumu *diverģence* ieveda Klifords (W. K. Clifford, 1845.—1879. g.) savā grāmatā *Elements of Dynamics;* I part: *Kinematics,* 1878. g., bet simbolu div — Hevisaids (Heaviside) grāmatā *Electromagnetic Theory,* 1891. g.

Sastādīsim atvasinājumus $\frac{\partial v'_i}{\partial x'_i}$. Šai nolūkā diferencēsim (29.) vienlīdzību sistēmu, dabūjot

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x'_i} = \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{i\sigma} \frac{\partial v_\sigma}{\partial x'_i}.$$

Tālāk, atsaucoties uz 161. nodal. pierādīto pirmo propoziciju, varam rakstīt, ka

$$\frac{\partial v_\sigma}{\partial x'_i} = \sum_{\tau=1}^{3} \alpha_{i\tau} \frac{\partial v_\sigma}{\partial x_\tau},$$

un tā tad

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x'_i} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \alpha_{i\sigma} \alpha_{i\tau} \frac{\partial v_\sigma}{\partial x_\tau}.$$

Tādējādi

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_i} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \frac{\partial v_\sigma}{\partial x_\tau} \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i\sigma} \alpha_{i\tau},$$

bet tā kā

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{i\sigma} \alpha_{i\tau} = \begin{cases} 0, \text{ ja } \sigma \neq \tau \\ 1, \text{ ja } \sigma = \tau \end{cases},$$

tad vienīgie locekļi, kas pēdējās vienlīdzības labajā pusē nav nulles, atbilst indekiem $\sigma = \tau$, un tādā kārtā

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_i} = \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial v_\sigma}{\partial x_\sigma}$$

resp.

$$S' \equiv S.$$

Analogi apskatīsim tagad kādu *otrās kārtas tensora* $\overline{\overline{\mathbf{T}}}(P)$ radīto lauku ar koordinātām $T_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, kā punkta P koordinātu x_1, x_2, x_3 funkcijām, un sastādīsim trīs lielumus

$$v_1 = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3},$$

$$v_2 = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3},$$

$$v_3 = \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}.$$

Pierādīsim, ka šie trīs lielumi ir kāda vektora $\mathbf{v}$, kuŗu sauc par *tensora* $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ *diverģenci* un kuŗu apzīmē ar

$$\mathbf{v} = \mathbf{div}\, \overline{\overline{\mathbf{T}}},$$

koordinātas.

Tiešām, ar (25.) transformācijas formulu sistēmu tensora koordinātas T_{ij} pāriet jaunās koordinātās T'_{ij} un

$$v'_i = \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial T'_{i\sigma}}{\partial x'_\sigma} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{3} \frac{\partial T'_{i\sigma}}{\partial x_\tau} \alpha_{\sigma\tau};$$

bet tā kā

$$\frac{\partial T'_{i\sigma}}{\partial x_\tau} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{3} \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_\tau} \alpha_{i\lambda} \alpha_{\sigma\mu},$$

tad

$$v'_i = \sum_{\lambda=1}^{3} \alpha_{i\lambda} \sum_{\mu,\tau=1}^{3} \frac{\partial T_{\lambda\mu}}{\partial x_\tau} \sum_{\sigma=1}^{3} \alpha_{\sigma\tau} \alpha_{\sigma\mu}.$$

Vienīgie locekļi, kas pēdējā vienlīdzībā nav nulles, atbilst indekiem $\tau = \mu$, un tā tad

$$v'_i = \sum_{\lambda=1}^{3} \alpha_{i\lambda} \sum_{\tau=1}^{3} \frac{\partial T_{\lambda\tau}}{\partial x_\tau} = \sum_{\lambda=1}^{3} \alpha_{i\lambda} v_\lambda \qquad (i = 1, 2, 3),$$

bet pēdējā sakarība rāda, ka lielumi v_i ir kāda vektora koordinātas, ko arī vajadzēja pierādīt.

164. **Divkāršas operācijas.** — Nobeidzot šo nodaļu, atgādināsim, ka operācijas *diverģence un rotors* pēc to definīcijas ir attiecināmas tikai uz vektoriem, kamēr operācija *gradients* var tikt attiecināta tikai uz skālāru lielumu. No divkāršām operācijām tādēļ jēga ir šādām:

1° div **grad** U, 2° **rot grad** U, 3° div **rot v**, 4° **rot rot v**.

1° Ja $U(x_1, x_2, x_3)$ ir divreiz diferencējams skālārs lauks, tad

$$\text{div } \mathbf{grad}\ U = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right).$$

Izdarot šīs vienlīdzības labajā pusē aizrādītās darbības, dabūjam, ka

$$\text{div } \mathbf{grad}\ U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = \Delta U.$$

ΔU ir atkal skālārs lielums.

2° Izteiksme **rot grad** U turpretim ir vektors, tādēļ aprobežosimies ar vienas tā koordinātas, piem. koordinātas x_1, aprēķināšanu; pārējās divas koordinātas tad uzrakstāmas pēc analoģijas.

Pēc definīcijas

$$\mathrm{rot}_{x_1}\,(\mathbf{grad}\,U)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)\right]=0\,,$$

tāpat

$$\mathrm{rot}_{x_2}\,(\mathbf{grad}\,U)=\mathrm{rot}_{x_3}\,(\mathbf{grad}\,U)=0\,,$$

un tā tad

$$\mathbf{rot\ grad}\,U=0.$$

3° Divkārša operācija div **rot v** dod atkal skālāru lielumu. Pēc definīcijas

$$2\,\mathrm{div}\,\mathbf{rot\,v}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right),$$

un tā kā labajā pusē visi locekļi pa pāŗiem iznīcinās, tad

$$\mathrm{div}\,\mathbf{rot\,v}=0.$$

4° Tā kā **rot rot v** ir vektors, tad aprobežosimies atkal ar vienas tā koordinātas, piem. koordinātas x_1, aprēķināšanu. Apzīmēsim **rot v = w**, tad

$$2\,\mathrm{rot}_{x_1}\,\mathbf{w}=\frac{\partial w_3}{\partial x_2}-\frac{\partial w_2}{\partial x_3},$$

pie kam

$$2\,w_3=\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2},\quad 2\,w_2=\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}.$$

Meklētā vektora **rot rot v** koordināta x_1 tā tad ir šāda:

$$4\,\mathrm{rot}_{x_1}\,(\mathbf{rot\,v})=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)$$

jeb

$$4\,\mathrm{rot}_{x_1}\,(\mathbf{rot\,v})=-\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^{\,2}}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^{\,2}}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right).$$

Bet tā kā pēdējās vienlīdzības labajā pusē otras iekavas ir vienādas ar div **v**, tad to var pārrakstīt formā

$$4\,\mathrm{rot}_{x_1}\,(\mathbf{rot\,v})=-\Delta v_1+\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{div}\,\mathbf{v})=-\Delta v_1+\mathrm{grad}_{x_1}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{v})\,.$$

Vektora **rot rot v** koordinātām x_2 un x_3 dabūjamas analogas izteiksmes.

Un tā tad

$$4\,\mathbf{rot\,rot\,v}=-\Delta\mathbf{v}+\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,,$$

pie kam

$$\Delta\,\mathbf{v}=\Delta\,v_1\mathbf{i}+\Delta\,v_2\mathbf{j}+\Delta\,v_3\mathbf{k}\,.$$

VIII NODAĻA.

MASAS JĒDZIENS KINĒMATIKĀ.

33. §. Materiāla sistēma.

165. **Kinēmatiskā masa.** — Ar katru kustīgu ķermeni iedomāsimies saistītu kādu pozitīvu skaitli, t. i. lielumu, kas ir neatkarīgs no koordinātu triedra, pret kuŗu kustība tiek apskatīta, un sauksim šo skaitli par kustīgā ķermeņa *kinēmatisko masu* vai vienkārši *masu*, nepiešķirot šim jēdzienam nekādu fizikālu nozīmi. Kustīgu priekšmetu kopumu ar attiecīgām masām sauc par *materiālu sistēmu*. Materiālu sistēmu var sastādīt, piem., vien-, div- vai trīsdimensionāli ķermeņi ar nepārtrauktiem masu sadalījumiem, t. i. materiālas līknes, virsas un tilpumi.

166. **Blīvums.** Lai analitiski pētītu masas sadalījumu ķermenī, ir jāieved *blīvuma* jēdziens. Iedomāsimies, ka ķermeņa struktūra mainās nepārtraukti no punkta uz punktu. Tādā gadījumā ķermeņa elementa masas Δm un attiecīgā ģeometriskā lauka elementa ΔS (gaŗuma Δs, virsas $\Delta\sigma$ vai tilpuma Δv, atkarībā no tā, vai ķermenis ir vien-, div- vai trīsdimensionāls) attiecība

$$\frac{\Delta m}{\Delta S}$$

mainās līdz ar elementa maiņu un to sauc par ķermeņa *vidējo blīvumu* ģeometriskā lauka elementā ΔS.

Iedomāsimies, ka, ģeometriskā lauka elementam ΔS tiecoties uz nulli, t. i. ķermeņa elementam reducējoties par punktu P, minētā attiecība tiecas uz noteiktu robežu

$$\mu = \lim_{\Delta S \to P} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS}. \tag{1.}$$

Šo robežlielumu sauc par materiālā ķermeņa *lineāro, virsas* vai *tilpuma* blīvumu punktā P, atkarībā no tā, vai ķermenis ir vien-, div- vai trīsdimensionāls. Ķermeņa elementa blīvums tādējādi ir definēts kā tā masas dm un attiecīgā ģeometriskā lauka elementa dS (gaŗuma ds, virsas $d\sigma$ vai tilpuma dv) attiecība, kuŗai vispārīgi var piešķirt nepārtrauktības īpašību. Citiem vārdiem sakot, ķermeņa raksturīga īpašība ir lokāla blīvuma eksistence kā ierobežota, nepārtraukta un tā tad arī integrējama funkcija attiecīgajā ģeometriskā laukā S.

Ja zināma ir šī funkcija μ, tad ķermeņa masa m ir dota ar funkcijas μ integrālu pār lauku S. Tiešām, ņemot vērā, ka $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ atšķiras no μ par kādu lielumu ε, kas tiecas uz nulli reizē ar ΔS, varam rakstīt, ka

$$\frac{\Delta m}{\Delta S} = \mu + \varepsilon;$$

bet no pēdējās sakarības izriet, ka

$$\Delta m = \mu \Delta S + \varepsilon \Delta S,$$

un tā tad

$$m = \Sigma (\mu \Delta S + \varepsilon \Delta S),$$

kur Σ jāattiecina uz visu ķermeņa ieņemto ģeometrisko lauku.

Tā kā pēdējai sakarībai jābūt apmierinātai, lai kā būtu ķermenis sadalīts elementos, robežgadījumā varam iedomāties, ka ikviens ģeometriskā lauka elements ΔS tiecas uz nulli, un tā tad

$$m = \int_S \mu dS,$$

kur dS apzīmē ģeometriskā lauka S diferenciālu.

Ja μ ir vienmēr viens un tas pats lielums, lai kāds būtu apskatītā ķermeņa ģeometriskais elements dS (vienāds ar ds, $d\sigma$ vai dv), tad šo ķermeni (ar vienu, divām vai trīs dimensijām) sauc par *homogenu*. Homogena ķermeņa masa ir proporcionāla attiecīgam ģeometriskam laukam S (ar vienu, divām vai trīs dimensijām). Tiešām, tā kā šai gadījumā μ ir konstants, tad, (1.) formulu integrējot, dabūjam, ka

$$m = \int_S \mu dS = \mu S.$$

34. §. Masas jeb inercijas centrs.

167. **Diskrētas punktu sistēmas masas centrs.** — Apskatīsim materiālu sistēmu, kas sastādīta no n punktiem $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ ar attiecīgām masām m_i, un parallēlu vektoru sistēmu $m_i \mathbf{v}$ ar vienu

un to pašu vērsumu, bet ar sākuma punktiem minētos punktos P_i. Šīs parallēlo vektoru sistēmas centrs G, pret patvaļīgi izvēlēto references punktu O, ir dots ar vektoriālo vienlīdzību

$$\overline{OG} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overline{OP_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}. \tag{2.}$$

Punktu G, kas ir atkarīgs tikai no sistēmas konfigūrācijas un atsevišķo punktu masām, sauc par punktu sistēmas *masas* (*gravitācijas*) jeb *inercijas centru.*

Ja punkta P_i koordinātas kādā triedrā, kuŗa sākums ir punktā O, apzīmē ar x_i, y_i, z_i, tad masas centra G koordinātas x_0, y_0, z_0 šai triedrā ir dotas ar formulām

$$x_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}. \tag{3.}$$

Masas centrs nemainās, ja visas partikulārās masas tiek variētas kādā konstantā attiecībā.

Tālāk (2.) un (3.) formula rāda: *ja visi materiālie punkti atrodas kādā plaknē vai uz kādas taisnes, tad arī to masu centrs atrodas tai pašā plaknē vai uz tās pašas taisnes.*

Tiešām, ja plaknes gadījumā izvēlas punktu O arī šai plaknē, tad vektori $\overline{OP_i}$, un pēc (2.) formulas arī vektors $\overline{OG}$, un tā tad arī punkts G, atrodas tai pašā plaknē.

Taisnes gadījumā, izvēloties punktu O uz tās un ievērojot (2.) formulu, redzam, ka arī punkts G atrodas uz tās pašas taisnes.

Vēl pierādīsim sistēmas masas centram šādu raksturīgu īpašību: *Materiālas sistēmas masas centrs atrodas jebkuŗas slēgtas konveksas virsas σ iekšpusē, kas ietveŗ punktu sistēmu.*

Vispirms ir skaidrs: ja sistēmas visi punkti atrodas kādas plaknes vienā pusē, tad arī tās masas centrs atrodas tai pašā pusē. Tiešām, izvēloties šo plakni par x, y-plakni ar z-ass pozitīvo vērsumu uz to plaknes pusi, kur atrodas sistēmas punkti P_i, šo punktu koordinātas z_i ir pozitīvas vai nulles, un tā tad arī masas centra koordināta $z_0 = \dfrac{\sum\limits_i m_i z_i}{\sum\limits_i m_i}$ ir pozitīva vai nulle, pie kam tā ir nulle tikai tad, ja visas koordinātas z_i ir nulles.

Tā kā konveksas virsas σ jebkuŗai tangentiālai plaknei arī piemīt nupat pierādītā īpašība, tad sistēmas masas centram G jāpaliek telpas daļā, ko ietveŗ virsas σ tangentiālās plaknes, t. i. tam jāpaliek virsas σ iekšpusē.

Analogi var pierādīt, ka 1° *materiālas sistēmas, kuŗa atrodas vienā un tai pašā plaknē, masas centrs atrodas jebkuŗas slēgtas konveksas līknes iekšpusē, kas ieslēdz punktu sistēmu,* un 2° *materiālas sistēmas, kuŗa atrodas uz kādas taisnes, masas centrs atrodas segmenta iekšpusē, ko noteic divi galējie punkti.*

168. **Masas centra distribūtīvā īpašība.** — Ja dotā materiālā sistēma S ir sadalīta divās parciālās sistēmās S' un S'' ar attiecīgajām masām m', m'' un šo masu centriem G', G'', tad sistēmas S masas centrs G ir vienāds ar masu m' un m'', iedomājoties tās lokālizētas punktos G' un G'', centru.

Tiešām, apzīmējot ar P_i' kādu sistēmas S' un ar P_j'' kādu sistēmas S'' punktu, kuŗu attiecīgās masas ir m_i' un m_j'', pēc masas centra definīcijas pret kādu references punktu O, dabūjam, ka

$$\overline{OG'} = \frac{\sum\limits_i m_i' \overline{OP_i'}}{\sum\limits_i m_i'}, \quad \overline{OG''} = \frac{\sum\limits_i m_j'' \overline{OP_j''}}{\sum\limits_j m_j''},$$

un tā tad

$$\sum_i m_i' \, \overline{OG'} + \sum_j m_j'' \, \overline{OG''} = \sum_i m_i' \, \overline{OP_i'} + \sum_j m_j'' \, \overline{OP_j''}.$$

Bet tā kā šīs vienlīdzības labās puses summas abas kopā aptveŗ visus sistēmas S punktus, tad, ievērojot (2.) definīciju, šo vienlīdzību var pārrakstīt formā

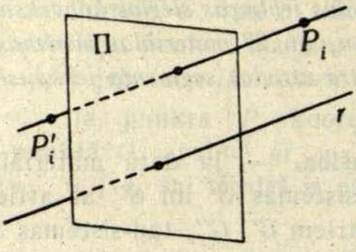
$$m'\overline{OG'} + m''\overline{OG''} = m\overline{OG},$$

kur $m' = \sum\limits_i m_i'$, $m'' = \sum\limits_j m_j''$ un m apzīmē sistēmas S totālo masu. Pēdējā vienlīdzība rāda, ka punkts G ir masu m' un m'', kas attiecīgi lokālizētas punktos G' un G'', centrs.

169. **Diametrālplakne un simmetrijas plakne.** — Plakni Π sauc par materiālas sistēmas S *diametrālplakni,* kuŗa saistīta ar vir-

zienu r, ja katram sistēmas S punktam P_i iespējams atrast uz taisnes, kas vilkta caur punktu P_i paralleli virzienam r, otru sistēmas punktu P_i', kuŗa masa ir vienāda ar punkta P_i masu un kuŗš atrodas tai pašā attālumā no plaknes Π kā punkts P_i, bet pretējā pusē no tās (103. zīm.). Šādus divus punktus P_i un P_i' sauc par *saistītiem* punktiem.

Diametrālplakne Π, kuŗa ir saistīta ar virzienu r, ir sistēmas S *simmetrijas* plakne, ja tā ir perpendikulāra virzienam r; tādā gadījumā saistītie punkti ir simmetriski pret plakni Π. Tā kā divu punktu ar vienādām masām masas centrs ir to viduspunkts, tad jebkuŗa saistīto punktu pāŗa masas centrs atrodas diametrālplaknē.



103. zīm.

Tādējādi, *ja materiālai sistēmai ir diametrālplakne vai speciālā gadījumā simmetrijas plakne, tad sistēmas masas centrs atrodas tās diametrālplaknē vai simmetrijas plaknē.*

Ja sistēmai ir divas diametrālplaknes, tad masas centrs atrodas uz šo plakņu krustošanās taisnes, vai, ja sistēmai ir vairākas diametrālplaknes, kuŗām vienmēr ir kāds kopējs punkts, tad šis punkts ir sistēmas masas centrs.

Analogi plakanas materiālas sistēmas gadījumā var runāt par tās *diametrāltaisni*, kas saistīta ar kādu virzienu resp. tās *simmetrijas asi.*

170. **Materiālas līknes, virsas un ķermeņa masas centrs.** — Apskatot kādu ķermeni ar nepārtrauktu masas sadalījumu, to var iedomāties sastādītu no kāda ļoti liela skaita materiālu punktu un robežgadījumā no bezgala daudz punktiem ar bezgala mazām masām. Tādā gadījumā galīgās summas (2.) un (3.) formulā ir jāaizstāj ar integrāliem, pie kam jāšķiro trīs gadījumi.

1° Ja nepārtrauktais masas sadalījums ir lineārs un tas veido kādu līknes loku s, tad, apzīmējot loka elementa ds lineāro blīvumu kādā tā punktā ar μ, loka s masas centrs G pret kādu patvaļīgu references punktu O ir dots ar vektoriālo formulu

$$\overline{OG} = \frac{\int\limits_m \overline{OP}\, dm}{\int\limits_m dm} = \frac{\int\limits_s \overline{OP}\, \mu\, ds}{\int\limits_s \mu\, ds} \tag{4.}$$

resp. tā koordinātas x_0, y_0, z_0 kādā triedrā ar sākumu punktā O ir dotas ar formulām

$$(5.)\qquad x_0 = \frac{\int\limits_s x\,\mu\,ds}{\int\limits_s \mu\,ds},\quad y_0 = \frac{\int\limits_s y\,\mu\,ds}{\int\limits_s \mu\,ds},\quad z_0 = \frac{\int\limits_s z\,\mu\,ds}{\int\limits_s \mu\,ds}.$$

2° Ja nepārtrauktais masas sadalījums ir divdimensionāls pa kādu virsu σ, tad, apzīmējot virsas elementa $d\sigma$ blīvumu kādā tā punktā ar μ, virsas σ masas centrs G pret punktu O ir dots ar vektoriālo formulu, kuŗu dabūjam no (2.) formulas, aizstājot tanī vektoriālās summas ar integrāliem pār virsu σ, t. i.

$$(6.)\qquad \overline{OG} = \frac{\int\limits_\sigma \overline{OP}\,\mu\,d\sigma}{\int\limits_\sigma \mu\,d\sigma}$$

resp. tā koordinātas x_0, y_0, z_0 ir dotas ar formulām

$$(7.)\qquad x_0 = \frac{\int\limits_\sigma x\mu\,d\sigma}{\int\limits_\sigma \mu\,d\sigma},\quad y_0 = \frac{\int\limits_\sigma y\mu\,d\sigma}{\int\limits_\sigma \mu\,d\sigma},\quad z_0 = \frac{\int\limits_\sigma z\mu\,d\sigma}{\int\limits_\sigma \mu\,d\sigma}.$$

3° Beidzot, ja nepārtrauktais masas sadalījums ir telpisks, veidojot tilpumu v, un ja μ apzīmē tilpuma elementa dv tilpuma blīvumu kādā tā punktā, tad tilpuma v masas centrs G pret punktu O ir dots ar vektoriālo formulu, kuŗu dabūjam no (2.) formulas, aizstājot tanī vektoriālās summas ar integrāliem pār tilpumu v, t. i.

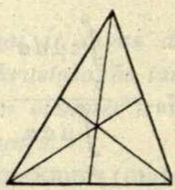
$$(8.)\qquad \overline{OG} = \frac{\int\limits_v \overline{OP}\,\mu\,dv}{\int\limits_v \mu\,dv}$$

resp. tā koordinātas x_0, x_0, z_0 kādā triedrā ar sākumu punktā O ir dotas ar formulām

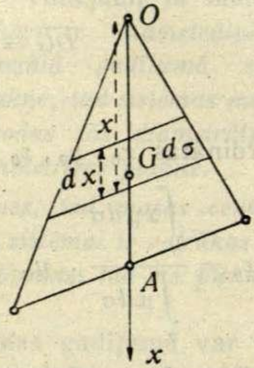
$$(9.)\qquad x_0 = \frac{\int\limits_v x\,\mu\,dv}{\int\limits_v \mu\,dv},\quad y_0 = \frac{\int\limits_v y\,\mu\,dv}{\int\limits_v \mu\,dv},\quad z_0 = \frac{\int\limits_v z\,\mu\,dv}{\int\limits_v \mu\,dv}.$$

171. **Masas centra aprēķināšana.** — Nepārtraukta masas sadalījuma gadījumos dažreiz iespējams noteikt masas centru ar elementārģeometriskiem paņēmieniem. Tā, piem., figūrām ar centru, kas cieta ķermeņa gadījumā ir trīs nekoaksiālu diametrālplakņu krustošanās punkts vai plakanas figūras gadījumā divu diametrāltaišņu krustošanās punkts, masas centrs, kā redzējām 169. nodal., sakrīt ar figūras ģeometrisko centru. Tādēļ, piem., homogena elīpsoīda vai homogenas elīpses masas centrs sakrīt ar attiecīgo ģeometrisko centru.

Parallēlepipeda ik divu parallēlu skaldņu vidusplakne ir diametrālplakne, kas saistīta ar virzienu, ko noteic šo skaldņu virsotnes savienotājas sķautnes. Tāpat parallēlograma viena viduslīnija ir diametrāltaisne, kas saistīta ar divu pārējo parallēlograma parallēlo malu noteikto



104. zīm.



105. zīm.

virzienu. Tādēļ homogena parallēlepipeda resp. homogena parallēlograma masas centrs sakrīt ar parallēlepipeda diagōnālplakņu resp. parallēlograma diagōnāļu krustošanās punktu.

Taisnes homogena segmenta masas centrs sakrīt ar tā viduspunktu.

1° *Trijstūris.* — Trijstūŗa ikviena mediāna ir diametrāltaisne, kuŗa saistīta ar virzienu, kas ir parallēls malai ko apskatītā mediāna dala uz pusēm (104. zīm.). Homogena trijstūŗa masas centrs tādēļ sakrīt ar mediānu krustošanās punktu, t. i. figūras ģeometrisko centru, kas atrodas $^1/_3$ mediānas gaŗuma l attālumā no attiecīgās malas vai $^2/_3$ mediānas gaŗuma l attālumā no tai pretim gulošās virsotnes.

Analitiski homogena trijstūŗa masas centru aprēķina šādi. Sadalot trijstūŗa laukumu ar taisnēm parallēli vienai trijstūŗa malai elementārās trapezās un aprēķinot šo trapezu masas centrus, ir skaidrs, ka simmetrijas dēļ tie atrodas uz trijstūŗa mediānas, kas ir diametrāltaisne, saistīta ar trijstūŗa malu, parallēli kuŗai trijstūris sadalīts trapezās (105. zīm.).

Ar elementāriem aprēķiniem viegli pārliecināties, ka elementārās trapezas laukuma $d\sigma$ izteiksme ir

$$d\sigma = c\,x\,d\,x\,,$$

kur c ir kāda konstante. Apzīmējot homogena trijstūŗa virsas blīvumu ar μ, elementārās trapezas masa dm ir

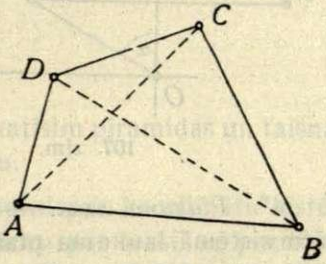
$$dm = \mu d\sigma = \mu cxdx = kxdx\,,$$

un lineārā masas sadalījuma blīvums μ_m pa mediānu Ox ir

$$\mu_m = \frac{dm}{dx} = kx\,.$$

Nehomogenā taisnes segmenta $OA = l$ masas centrs G tādēļ ir dots ar formulu

$$x_0 = \frac{\int\limits_x x\mu_m dx}{\int\limits_x \mu_m dx} = \frac{\int\limits_0^l x^2 dx}{\int\limits_0^l x\,dx} = \frac{2}{3}\,l\,.$$



106. zīm.

2° *Četrstūris.* — Ja dots ir vienkāršs četrstūris $ABCD$, tad ar divām diagonālēm AC un BD to var sadalīt trijstūŗos ABC, ADC un BAD, BCD (106. zīm.). Šo trijstūŗu masas centrus apzīmēsim attiecīgi ar G_1, G_2, G_3, G_4. Atsaucoties uz masas centra distributīvo īpašību, četrstūŗa masas centrs G ir vienāds ar punktu G_1 un G_2, kuŗos ir lokālizētas attiecīgo trijstūŗu masas, masu centru, un tā tad G jāatrodas uz taisnes G_1G_2. Analogi masas centram G jāatrodas uz taisnes G_3G_4. Tādējādi četrstūŗa masas centrs G ir taišņu G_1G_2 un G_3G_4 krustošanās punkts.

3° *Plaknes līkne.* — Plaknes līknei ortogonālā koordinātu sistēmā, kas atrodas līknes plaknē, (5.) formulu sistēma reducējas par divām pirmajām formulām. Ja līkne ir homogena un tai ir simmetrijas ass, tad, izvēloties to par x-asi un tai perpendikulāru taisni par y-asi,

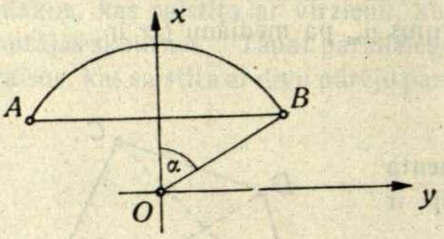
$$x_0 = \frac{\int\limits_s xds}{\int\limits_s ds}\,, \quad y_0 = 0\,.$$

Piemērs. — Homogens riņķa līnijas loks (107. zīm.). Koordinātu sistēmā ar sākumu riņķa līnijas centrā un loka AB simmetrijas asi kā Ox-asi, apzīmējot riņķa līnijas radiju ar r, dabūjam, ka

$$x = r\cos\varphi\,, \quad ds = r d\varphi$$

un

$$\int\limits_s x ds = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\varphi \; r d\varphi = 2\,r^2 \sin\alpha\,, \quad \int\limits_s ds = 2\,r\alpha\,.$$



107. zīm.

Tādējādi

$$x_0 = r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} = r\,\frac{AB}{\smile AB}\,.$$

Pusriņķa līnijai

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ un } x_0 = \frac{2r}{\pi}\,.$$

4° *Plakana virsa.* — Plakanai virsai (laukumam) kādā koordinātu sistēmā laukuma plaknē (7.) formulu sistēma reducējas par divām pirmajām formulām. Ja virsas blīvums ir konstants un laukumam ir simmetrijas ass, kuŗu izvēlamies par x-asi un tai perpendikulāru taisni par y-asi, tad virsas elements $d\sigma = ydx$, kur y ir laukuma norobežotājas līknes ordināta. Tādā gadījumā pirmās divas formulas no (7.) sistēmas reducējas par

$$x_0 = \frac{\int x\,y\,dx}{\int y\,dx}\,, \quad y_0 = 0\,,$$

kur x jāvariē attiecīgās robežās.

Piemērs. — Parabolas $y^2 = ax$ un taisnes $x = h$ ierobežotam laukumam

$$\int\limits_0^h xydx = \frac{2}{5}\,a^{\frac{1}{2}}\,h^{\frac{5}{2}}, \quad \int\limits_0^h ydx = \frac{2}{3}\,a^{\frac{1}{2}}\,h^{\frac{3}{2}},$$

un tā tad

$$x_0 = \frac{3}{5}\,h\,.$$

5° *Homogens ciets ķermenis.* — Ja ir dots homogens ciets ķermenis, tad, apzīmējot Ox-asij perpendikulāra šķēluma laukumu ar $f(x)$, tilpuma elements $dv = f(x)dx$ un tilpuma, kas ierobežots starp diviem parallēliem šķēlumiem, masas centra koordināta x_0 ir dota ar formulu

$$x_0 = \frac{\int x f(x)\,dx}{\int f(x)\,dx}, \tag{10.}$$

kur x jāvariē attiecīgās robežās.

Ja cietais ķermenis ir rotācijas ķermenis, tad, izvēloties tā simmetrijas asi par Ox-asi, $f(x) = \pi y^2$, kur y ir rotācijas virsas veidotājas līknes ordināta. Tādā gadījumā

$$x_0 = \frac{\int x y^2 dx}{\int y^2 dx}. \tag{11.}$$

Kā piemērus (10.) un (11.) formulai apskatīsim piramidas un taisna cirkulāra kōna masas centra aprēķināšanu.

Piramida. — Izvēloties piramidas virsotni par koordinātu sistēmas sākuma punktu O, tās augstuma virzienu par x-asi ar pozitīvo vērsumu pret tās pamatu un atsaucoties uz elementārās ģeometrijas teorēmu, pēc kuŗas piramidas pamata laukums un tam parallēla šķēluma laukums attiecas kā to attālumu no virsotnes kvadrāti, dabūjam, ka

$$f(x) = kx^2,$$

kur k ir kāds proporcionālitātes faktors un x apzīmē parallēlā šķēluma attālumu no virsotnes O. Apzīmējot piramidas augstumu ar h, pēc (10.) formulas koordinātai x_0 dabūjam izteiksmi

$$x_0 = \frac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx} = \frac{3}{4} h.$$

Zinot piramidas pamata laukuma masas centru G_0 un ievērojot, ka parallēli šķēlumi ir līdzīgas figūras, kuŗu masas centri tā tad atrodas taisnes G_0O un attiecīgā šķēluma krustošanās punktā, varam teikt, ka *piramidas masas centrs sakrīt ar $^1/_4$ augstumā no pamata vilkta šķēluma masas centru.*

Taisns rotācijas kōns. — Koordinātu sistēmā ar sākumu O kōna virsotnē un rotācijas asi kā Ox-asi, y ir proporcionāls x un pēc (11.) formulās

$$x_0 = \frac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx} = \frac{3}{4} h.$$

172. **Uzdevumi.**

1. Sadalot trapezu $ABCD$ ar vienu tās diagōnāli divos trijstūŗos un piemērojot ikvienai trapezas pamata malai likumu par masas statisko momentu pret kādu taisni, pierādīt, ka trapezas masas centra G attālumu no pamata malām AB un CD, kuŗu gaŗumi ir a un b, attiecība ir

$$\frac{2a+b}{2b+a}.$$

No šejienes izriet šāda G konstrukcija. Jāpagarina mala AB uz abām pusēm, atliekot no punktiem A un B nogriezni, kas ir vienāds ar CD. Analogi jāpagarina uz abām pusēm mala CD par nogriezni, kas ir vienāds ar AB. Savienojot dabūtos četrus punktus krustiski, radušais krustošanās punkts ir meklētais masas centrs G.

Piezīme. — Ar *masas m*, kas lokālizēta kādā punktā, *statisko momentu pret plakni* Π saprot masas m un tās attāluma līdz šai plaknei reizinājumu, kas jāņem ar $+$ zīmi, ja masa atrodas plaknes vienā pusē (patvaļīgi izvēlētā), bet ar — zīmi, ja tā atrodas pretējā pusē. Iedomājoties plakni Π sakrītam ar koordinātu plakni $z = 0$, no 167. nodal. (3.) formulu sistēmas trešās formulas izriet šāds momentu likums: *Kādas punktu sistēmas masu statisko momentu pret kādu plakni summa ir vienāda ar šīs sistēmas totālās masas, kas lokālizēta tās masas centrā, statisko momentu pret to pašu plakni.*

Analogi definē plaknē *masas statisko momentu pret kādu šīs plaknes taisni*, kas savkārt ir pakļauts analogam likumam.

Piemērojot likumu par masas statisko momentu pret kādu taisni, atrisināt uzdevumus:

2. No kvadrāta ir izgriezts vienādsānu trijstūris, kuŗa pamata mala ir viena kvadrāta mala. Kādam jābūt šī trijstūŗa augstumam, lai atlikušā piecstūŗa masas centrs sakristu ar šī trijstūŗa virsotni?

3. Pierādīt, ka cirkulāra sektora masas centrs atrodas uz šī sektora vidējā radija attālumā no centra, kas ir vienāds ar $^2/_3$ no atbilstošā loka masas centra attāluma no centra.

4. Kādam jābūt taisnstūŗa, kas konstruēts ārpus dotā pusriņķa, bet uz tā diametra, augstumam, lai kombinētās figūras masas centrs sakristu ar dotā riņķa centru?

5. Noteikt cirkulāra segmenta masas centru.

6. Pierādīt, ka parabolas segmenta (kas ierobežots ar parabolu un kādu chordu) masas centrs atrodas uz diametra, kas saistīts ar doto chordu, $^2/_5$ attālumā no chordas starp diametra krustošanās punktu ar parabolu un chordu.

IX NODAĻA.

INERCIJAS TENSORI, MOMENTI UN PRODUKTI.

35. §. Definīcijas.

173. **Materiāla punkta P un materiālas sistēmas S inercijas tensors pret punktu O.** — Ar punkta P koordinātām x, y, z sastādītie lielumi

$$T_{11} = y^2 + z^2, \qquad T_{23} = T_{32} = -yz,$$
$$T_{22} = z^2 + x^2, \qquad T_{31} = T_{13} = -zx,$$
$$T_{33} = x^2 + y^2, \qquad T_{12} = T_{21} = -xy,$$

ir kāda otrās kārtas simmetriska tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ koordinātas. Tensoru, kuŗa koordinātas dabūjam, reizinot tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ koordinātas ar punkta P masu m, sauc par *punkta P inercijas tensoru pret punktu O* un to apzīmē ar $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(P) = m\overline{\overline{\mathbf{T}}}$.

Apskatot materiālu sistēmu S, kuŗa sastādīta no punktiem P_i ar koordinātām x_i, y_i, z_i un masām m_i, *ar šīs sistēmas inercijas tensoru pret punktu O* saprot otrās kārtas simmetrisko tensoru, kas ir vienāds ar sistēmas atsevišķo punktu inercijas tensoru pret punktu O summu. Šo tensoru apzīmē ar $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)$ un tā koordinātas ir

$$(1.)\quad \begin{cases} I_{11} = \sum\limits_i m_i(y_i^2 + z_i^2), & I_{23} = I_{32} = -\sum\limits_i m_i y_i z_i, \\ I_{22} = \sum\limits_i m_i(z_i^2 + x_i^2), & I_{31} = I_{13} = -\sum\limits_i m_i z_i x_i, \\ I_{33} = \sum\limits_i m_i(x_i^2 + y_i^2), & I_{12} = I_{21} = -\sum\limits_i m_i x_i y_i. \end{cases}$$

Pārnesot koordinātu triedra sākuma punktu punktā A ar koordinātām (a, b, c), *sistēmas S inercijas tensora $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)$ pret punktu $A(a, b, c)$* koordinātu izteiksmes dabūsim no (1.) sistēmas izteiksmēm, apmainot tanīs x_i, y_i, z_i pret $x_i - a$, $y_i - b$, $z_i - c$. Tādējādi

$$(2.)\quad \begin{cases} I_{11} = \sum\limits_i m_i[(y_i-b)^2 + (z_i-c)^2], & I_{23} = I_{32} = -\sum\limits_i m_i(y_i-b)(z_i-c), \\ I_{22} = \sum\limits_i m_i[(z_i-c)^2 + (x_i-a)^2], & I_{31} = I_{13} = -\sum\limits_i m_i(z_i-c)(x_i-a), \\ I_{33} = \sum\limits_i m_i[(x_i-a)^2 + (y_i-b)^2], & I_{12} = I_{21} = -\sum\limits_i m_i(x_i-a)(y_i-b). \end{cases}$$

174. **Materiālas sistēmas inercijas momenti un produkti.** — Ar *materiālas sistēmas S inercijas momentu pret punktu O* saprot šīs sistēmas atsevišķo punktu masu un to attālumu līdz punktam O kvadrātu reizinājumu summu.

Ar *materiālas sistēmas S inercijas momentu pret taisni* Δ saprot šīs sistēmas atsevišķo punktu masu un to attālumu līdz taisnei Δ kvadrātu reizinājumu summu.

Apzīmējot sistēmas S inercijas momentu pret taisni Δ ar I_Δ, punkta P_i masu ar m_i, tā attālumu līdz taisnei Δ ar d_i, pēc definīcijas dabūjam, ka

$$I_\Delta = \sum_i m_i d_i^2 .$$

Ja sistēmas S totālā masa ir $M = \sum\limits_i m_i$, tad, uzrakstot I_Δ formā

$$I_\Delta = Md^2,$$

pozitīvo lielumu

$$d = \sqrt{\frac{I_\Delta}{M}}$$

sauc par *sistēmas S žirācijas (inercijas) radiju pret taisni* Δ.

Par *sistēmas S inercijas momentu pret plakni* Π sauc šīs sistēmas atsevišķo punktu masu un to attālumu līdz plaknei Π kvadrātu reizinājumu summu.

Sistēmas S inercijas momentu izteiksmes ir: pret trim koordinātu plaknēm —

$$(3.)\qquad I_{yz} = \sum_i m_i x_i^2, \qquad I_{zx} = \sum_i m_i y_i^2, \qquad I_{xy} = \sum_i m_i z_i^2 ;$$

pret trim koordinātu asīm —

$$(4.)\qquad \left\{ \begin{aligned} I_x &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \qquad I_y = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), \\ I_z &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \right.$$

un pret punktu O —

$$(5.)\qquad I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) .$$

Šīs momentu izteiksmes ir saistītas ar sakarībām

$$(6.)\qquad I_x = I_{zx} + I_{xy}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{yz} + I_{zx},$$

$$(7.)\qquad I = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} = \tfrac{1}{2}\,(I_x + I_y + I_z).$$

Dažreiz bez inercijas momentiem pret koordinātu asīm I_x, I_y, I_z apskata *sistēmas inercijas produktus pret šīm pašām asīm*:

$$(8.)\qquad P_x = \sum_i m_i y_i z_i\,, \quad P_y = \sum_i m_i z_i x_i\,, \quad P_z = \sum_i m_i x_i y_i\,.$$

Sistēmas S inercijas tensora $\overline{\overline{\mathrm{I}}}_O(S)$ pret punktu O koordinātas tādējādi ir šīs sistēmas inercijas momenti pret izvēlētajām trim savstarpēji perpendikulārām koordinātu asīm, kas vilktas caur punktu O, un ar pretējām zīmēm ņemti sistēmas inercijas produkti pret tām pašām asīm.

36. §. Inercijas tensora un momentu variācija.

175. **Königa[1]) teorēma.** — Apzīmēsim ar $\overline{\overline{\mathrm{I}}}_G(S)$ sistēmas S inercijas tensoru pret tās masas centru G un izvēlēsimies pēdējo par koordinātu triedra sākuma punktu; tensora $\overline{\overline{\mathrm{I}}}_G(S)$ koordinātas tad ir dotas ar 173. nodal. (1.) formulu sistēmu, bet tā kā G sakrīt ar koordinātu triedra sākuma punktu, tad

$$\sum_i m_i x_i = \sum_i m_i y_i = \sum_i m_i z_i = 0.$$

Apzīmējot ar $M = \sum_i m_i$ sistēmas S totālo masu, šīs sistēmas inercijas tensora $\overline{\overline{\mathrm{I}}}_A(S)$ pret punktu $A\,(a, b, c)$ koordinātas, kuŗas ir dotas ar 173. nodal. (2.) formulu sistēmu, var pārrakstīt formā:

$$(9.)\qquad \begin{cases} I_{11} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) + M\,(b^2 + c^2), \\ I_{22} = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) + M\,(c^2 + a^2), \\ I_{33} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + M\,(a^2 + b^2), \\ I_{23} = I_{32} = -\sum_i m_i y_i z_i - Mbc, \\ I_{31} = I_{13} = -\sum_i m_i z_i x_i - Mca, \\ I_{12} = I_{21} = -\sum_i m_i x_i y_i - Mab. \end{cases}$$

[1]) S. Koenig (1712.—1757. g.).

Šīs formulas var tikt rezumētas simboliskā vienlīdzībā

$$(10.)\qquad \overline{\overline{\mathbf{I}}}_A(S) = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) + \overline{\overline{\mathbf{G}}}_A\,.$$

Tensoru $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S)$ sauc par *sistēmas S centrālo inercijas tensoru.* (10.) vienlīdzība izteic analitiski šādu *Königa teōrēmu*:

Sistēmas S inercijas tensors $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_A$ *pret punktu A ir vienāds ar šīs sistēmas centrālā inercijas tensora* $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_G$ *un masas centra G, kuŗā jāiedomājas koncentrēta sistēmas totālā masa, inercijas tensora* $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_A$ *pret punktu A summu.*

176. **Inercijas momenta variācija atkarībā no taisnes.** — Tā kā lietojumos gandrīz vienmēr jāsastopas tikai ar inercijas momentu pret taisni, tad arī mēs aprobežosimies tikai ar šī momenta pētīšanu. Dotajai materiālai sistēmai S eksistē bezgala daudz inercijas momentu, no kuŗiem ikviens atbilst kādai taisnei. Apskatīsim inercijas momenta I_Δ maiņu līdz ar taisnes Δ mainīšanos. Šai nolūkā pietiek apskatīt divus gadījumus:

1° Kā mainās inercijas momenti pret parallēlām taisnēm?

2° Kā mainās inercijas momenti pret taisnēm ar kopēju punktu?

Tiešām, lai atrastu sakarību starp sistēmas S inercijas momentiem pret divām kaut kādām taisnēm Δ un Δ_1, pietiek izvēlēties uz taisnes Δ_1 kādu patvaļīgu punktu un vilkt caur to taisnei Δ parallēlu taisni Δ_2; 1° priekšraksts tad saista inercijas momentus pret parallēlām taisnēm Δ un Δ_2, bet 2° priekšraksts pret taisnēm Δ_2 un Δ_1, kuŗām ir kopējs punkts.

177. **Inercijas momenti pret taisnēm ar kopēju punktu.** — Apskatīsim tagad sistēmas S inercijas momentu I_Δ pret kādu taisni Δ, kas vilkta caur punktu O. Izvēloties šo punktu par koordinātu triedra $Oxyz$ sākuma punktu un definējot taisni Δ ar tās virziena kosiniem α, β, γ, pierādīsim, ka invariants

$$(11.)\qquad I_\Delta = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)\,.\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}\,,$$

kur $\mathbf{u}$ ir taisnes Δ vienības vektors ar koordinātām α, β, γ un sākumu punktā O, reprezentē sistēmas S inercijas momentu pret taisni Δ.

Tiešām, uzrakstot (11.) invariantu atrisinātā veidā, dabūjam tam izteiksmi

$$(12.)\qquad I_\Delta = I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2 + 2\,I_{32}\beta\gamma + 2\,I_{13}\gamma\alpha + 2\,I_{21}\alpha\beta,$$

kur koeficienti $I_{\lambda\mu}$ ir doti ar 173. nodal. (1.) formulu sistēmu. Ja taisne Δ sakrīt ar Ox-asi, tad $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, un I_Δ reducējas formā

$$I_\Delta = I_{11} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2),$$

kas pierāda par I_Δ apgalvoto īpašību.

Tādējādi (11.) jeb (12.) formula noteic sistēmas S inercijas momentu I_Δ pret jebkuŗu taisni Δ, kuŗa vilkta caur punktu O un kuŗas virziena kosini ir α, β, γ, kā funkciju no sešām konstantēm $I_{\lambda\mu}$, kas ir atkarīgas vienīgi no sistēmas S dabas, bet ne no taisnes Δ.

Tā kā (12.) vienlīdzības labā puse ir homogena kvadrātiska funkcija pret α, β, γ, tad šī funkcija nemainās, apmainot tanī α, β, γ pret $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, t. i. piešķirot taisnei Δ pretēju vērsumu; citiem vārdiem sakot, sistēmas inercijas moments ir neatkarīgs no taisnes Δ orientācijas.

178. **Inercijas momenti pret parallēlām taisnēm.** — Vilksim caur sistēmas S kādu punktu A un tās masas centru G divas parallēlas taisnes Δ un g, kuŗu virziena kosini ir α, β, γ, un orientēsim tās ar vienības vektoru $\mathbf{u}$, kuŗa koordinātas arī ir α, β, γ, nospraužot šo vektoru pa šīm taisnēm no punkta A resp. punkta G.

Tādā gadījumā no (10.) vienlīdzības izriet, ka

$$\text{(13.)} \qquad \overline{\overline{\mathbf{I}}}_A(S)\,.\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S)\,.\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u} + \overline{\overline{\mathbf{G}}}_A\,.\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}$$

jeb, ievērojot (11.) formulu,

$$\text{(14.)} \qquad I_\Delta = I_g + Md^2,$$

kur Md^2 ir masas centra G, kuŗā jāiedomājas koncentrēta sistēmas totālā masa M, inercijas moments pret taisni Δ.

Tādējādi *sistēmas S inercijas moments I_Δ pret taisni Δ ir vienāds ar šīs sistēmas momenta I_g pret taisni g, kas vilkta caur sistēmas S masas centru G parallēli taisnei Δ, un masas centra G, kuŗā jāiedomājas koncentrēta sistēmas totālā masa, inercijas momenta pret taisni Δ summu.*

37. §. Inercijas elīpsoīds.

179. **Inercijas elīpsoīda vienādojums.** — Tā kā materiālās sistēmas S inercijas moments $I_\Delta = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)\,.\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u}$ pret taisni Δ, kas ir dots ar 177. nodal. (12.) formulu, ir vienmēr pozitīvs lielums, tad,

atsaucoties uz 159. nodal. rezultātu, šis sistēmas otrās kārtas simmetriskā inercijas tensora $\overline{\overline{\mathrm{I}}}_O(S)$ pret punktu O reprezentētāja otrās kārtas virsa

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2\,Dyz - 2Ezx - 2\,Fxy = 1, \tag{15.}$$

kur

$$\begin{aligned} A &= I_{11}, \quad B = I_{22}, \quad C = I_{33}, \\ D &= -I_{23} = -I_{32} = P_x, \\ E &= -I_{31} = -I_{13} = P_y, \\ F &= -I_{12} = -I_{21} = P_z, \end{aligned}$$

vispārīgi ir reāls elīpsoīds, kuŗu sauc par sistēmas *S inercijas elīpsoīdu pret punktu O.* Speciālā gadījumā, kad (12.) kvadrātiskā forma sadalās divu neatkarīgu kvadrātu summā vai vienā kvadrātā, inercijas elīpsoīds ar (15.) vienādojumu reducējas par reālu elīptisku cilindru vai divām reālām parallēlām plaknēm.

Inercijas elīpsoīda pret punktu O simmetrijas asis un plaknes sauc par inercijas *galvenām asīm* un *galvenām plaknēm punktā O.*

Inercijas elīpsoīds ir determinēts, ja aprēķināti ir seši koeficienti A, B, C, D, E, F; un otrādi, ja dots ir inercijas elīpsoīds pret punktu O, tad, velkot caur tā centru taisni Δ ar dotajiem virziena kosiniem, ikviens šīs taisnes krustošanās punkts P ar doto elīpsoīdu determinē sistēmas S inercijas momentu I_Δ pret taisni Δ ar formulu

$$I_\Delta = \frac{1}{OP^2}.$$

Šī formula rāda, ka no visiem inercijas momentiem, kas sastādīti pret asīm, kuŗas vilktas caur punktu O, vismazākā vērtība ir momentam pret elīpsoīda lielo asi un vislielākā vērtība momentam pret tā mazo asi.

Inercijas elīpsoīdu pret sistēmas S masas centru G sauc par *centrālo inercijas elīpsoīdu* un tā simmetrijas asis un plaknes par *inercijas centrālām asīm* un *centrālām plaknēm.*

Ja par koordinātu asīm izvēlas inercijas elīpsoīda pret punktu O galvenās asis, tad inercijas elīpsoīda (15.) vienādojums reducējas par vienādojumu

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \tag{16.}$$

Inercijas moments I_Δ pret asi Δ šai gadījumā ir dots ar formulu

$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

Šī formula rāda, ka, zinot inercijas elīpsoīda pret punktu O galvenās asis, pietiek aprēķināt attiecīgos momentus A, B un C pret šīm asīm, lai aprēķinātu inercijas momentu pret jebkuŗu taisni Δ, kas vilkta caur punktu O.

Ja inercijas elīpsoīds pret punktu O ir rotācijas elīpsoīds, tad rotācijas ass un visi ekvātora diametri ir tā galvenās asis punktā O. Ja rotācijas asi izvēlas par Oz-asi, tad koeficients B ir vienāds ar A, un inercijas elīpsoīda vienādojums līdz ar inercijas momenta I_Δ formulu attiecīgi reducējas formā

$$A(x^2+y^2)+Cz^2=1,$$
$$I_\Delta = A(\alpha^2+\beta^2)+C\gamma^2 = A\sin^2\varphi + C\cos^2\varphi,$$

kur φ apzīmē leņķi starp taisni Δ un rotācijas asi.

Ja inercijas elīpsoīds pret punktu O ir sfēra, tad visas taisnes caur punktu O ir tā galvenās asis šai punktā, un iepriekšējais vienādojums un formula reducējas attiecīgi par vienādojumu

$$A(x^2+y^2+z^2)=1$$

un formulu

$$I_\Delta = A\,.$$

Ja visi sistēmas S punkti atrodas uz vienas taisnes, kas iet caur punktu O, tad, izvēloties šo taisni par Oz-asi, no sešiem koeficientiem A, B, C, D, E, F, izņemot $A=B=\sum_i m_i z_i^2$, visi pārējie ir nulles.

Tādā gadījumā inercijas elīpsoīds reducējas par rotācijas cilindru, kuŗa ass ir materiālo punktu līnija un kuŗa vienādojums ir

$$A(x^2+y^2)=1\,.$$

Inercijas moments I_Δ pret taisni Δ, kas veido leņķi φ ar materiālo taisni, ir dots ar formulu

$$I_\Delta = A(\alpha^2+\beta^2) = A\sin^2\varphi.$$

Beidzot, ja sistēmas S visi punkti atrodas vienā plaknē Π, tad, izvēloties punktu O līdz ar koordinātu asīm Ox, Oy arī šai plaknē, visu punktu z koordinātas ir nulles, un inercijas elīpsoīda pret punktu O vienādojums reducējas formā

$$Ax^2+By^2+Cz^2-2\,Fxy=1\,, \tag{17.}$$

kur

$$A+B=C\,. \tag{18.}$$

Plakne Π šai gadījumā ir inercijas galvenā plakne pret punktu O, kuŗa, šķēlumā ar inercijas elīpsoīdu ar (17.) vienādojumu, dod elīpsi, ko sauc par *sistēmas S inercijas elīpsi pret punktu O.*

Piezīme par inercijas elīpsoīda formu. — Ja sistēmas S inercijas elīpsoīdu pret punktu O attiecina uz tā galvenām asīm kā koordinātu asīm, tad šī elīpsoīda (16.) vienādojuma koeficienti A, B, C ir saistīti ar nevienlīdzībām

(19.) $$B + C \geqslant A \geqslant B - C$$

vai

(19.') $$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{1}{a^2} \geqslant \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}.$$

Pēdējās dabūjamas no iepriekšējām, izteicot A, B, C ar inercijas elīpsoīda pusasīm a, b, c, pie kam

$$a = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{C}}.$$

(19.) sistēmas nevienlīdzības rāda, ka ne katrs elīpsoīds var tikt uztverts par inercijas elīpsoīdu. Lai dotais elīpsoīds būtu kādas sistēmas inercijas elīpsoīds, ir nepieciešams, lai ar tā pusasu kvadrātu apgrieztiem lielumiem A, B, C varētu konstruēt trijstūri, kā to rāda (19.) sistēmas nevienlīdzības.

Plakana masas sadalījuma gadījumā pastāv (18.) sakarība vai tai ekvivalentā sakarība

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}.$$

180. **Noteikums, lai kāda ass būtu inercijas galvenā ass kādā tās punktā.** — Meklēsim analitisko noteikumu, lai inercijas elīpsoīdam pret punktu O ar (15.) vienādojumu kāda no koordinātu asīm, piem. Oz-ass, būtu galvenā ass šai punktā. Tādā gadījumā (15.) vienādojums nedrīkst mainīties, apmainot tanī x, y pret $-x$, $-y$; un tā tad nepieciešamie un pietiekamie noteikumi, lai Oz-ass būtu inercijas elīpsoīda ar (15.) vienādojumu galvenā ass, ir

$$D = 0, \quad E = 0$$

resp.

(20.) $$\sum_i m_i y_i z_i = \sum_i m_i z_i x_i = 0.$$

Lai Oz-ass būtu inercijas galvenā ass punktā O' ar augstumu h, ir nepieciešami un pietiekami, lai (20.) noteikumu sistēma būtu apmierināta, apmainot tanī z_i ar $z_i - h$, no kurienes noteikumi

(21.) $$\sum_i m_i y_i z_i - h \sum_i m_i y_i = 0, \quad \sum_i m_i z_i x_i - h \sum_i m_i x_i = 0,$$

kas, nefiksējot h vērtību (t. i. punktu O'), reducējas par vienu vienīgu noteikumu

(22.) $$\frac{\sum_i m_i y_i z_i}{\sum_i m_i y_i} = \frac{\sum_i m_i z_i x_i}{\sum_i m_i x_i}.$$

Šo attiecību kopējā vērtība ir h, t. i. punkta O' augstums.

181. **Noteikums, lai kāda ass būtu inercijas galvenā ass tās divos punktos.** — Lai Oz-ass būtu inercijas galvenā ass tās divos punktos O un O', ir nepieciešami un pietiekami, lai (21.) noteikumu sistēma būtu ievērota divām dažādām h vērtībām, t. i. bez (20.) noteikumu sistēmas jābūt ievērotiem vēl noteikumiem

(23.) $$\sum_i m_i y_i = \sum_i m_i z_i = 0.$$

Bet tādā gadījumā (21.) noteikumu sistēma ir ievērota, lai kāds būtu h, un Oz-ass ir inercijas galvenā ass pret jebkuŗu tās punktu. (23.) noteikumu sistēma savkārt izsaka, ka Oz-ass iet caur sistēmas S masas centru G, un tā tad tā ir inercijas centrālā ass.

Tādējādi kāda ass var būt inercijas galvenā ass pret vienu tās punktu. Bet ja tā ir inercijas centrālā ass, tad tā ir galvenā ass pret visiem tās punktiem. Ja turpretim (21.) noteikumu sistēma nav ievērota, tad tā nav galvenā ass pret nevienu tās punktu.

38. §. Inercijas tensora koordinātu (inercijas momentu un produktu) aprēķināšana.

182. **Problēmas sadalīšana.** — Iedomāsimies, ka noteikta ir sistēmas S totālā masa un tās centrs G un jāaprēķina ir sistēmas S inercijas tensors $\overline{\overline{\mathrm{I}}}_A(S)$ pret kādu tās punktu A.

Pēc Kōniga teōrēmas šai nolūkā pietiek aprēķināt sistēmas centrālā inercijas tensora $\overline{\overline{\mathrm{I}}}_G(S)$ sešas koordinātas, t. i. inercijas momentus A_G, B_G, C_G pret sistēmas centrālā inercijas elipsoīda asīm, kas vilktas caur punktu G, un inercijas produktus D_G, E_G, F_G pret šīm pašām asīm.

183. **Inercijas produktu aprēķināšana.** — Inercijas produktu aprēķināšana var tikt aizstāta ar inercijas momentu aprēķināšanu pēc formulas

$$xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2],$$

pēc kuŗas, lai aprēķinātu inercijas produktu pret Oz-asi, ir jāaprēķina divi inercijas momenti pret plakņu zOx un zOy bisektoru plaknēm. Šī paņēmiena trūkums ir tas, ka ikviena inercijas produkta aprēķināšanai ir jāaprēķina divi inercijas momenti.

184. **Ķermeņu ar nepārtrauktu masas sadalījumu inercijas momentu aprēķināšana.** — Inercijas momenta jēdzienu, kas bija definēts diskrētai punktu sistēmai S, iespējams vispārināt arī uz ķermeņiem ar nepārtrauktu masas sadalījumu — pa līkni, virsu vai tilpumu.

No formālā viedokļa šais gadījumos inercijas momenta I_Δ pret taisni Δ definīcijas formulā

$$I_\Delta = \sum_i m_i d_i^2$$

Σ ir jāapmaina pret integrālu, kas attiecināts uz vien-, div- vai trisdimensionāla ķermeņa ieņemto lauku, atkarībā no tā, ar cik dimensijām ir nepārtrauktais masas sadalījums.

Tā, piem., ja masas sadalījums ir lineārs un ds ir loka elements ap punktu P ar masu dm un lineāro blīvumu μ šai punktā, un d ir punkta P attālums līdz taisnei Δ, tad

$$I_\Delta = \int_m d^2\, dm = \int_s \mu d^2\, ds.$$

Analogi aprēķina inercijas momentu virsas un tilpuma gadījumā.

Šie momentu aprēķini daudzreiz var tikt vienkāršoti vai reducēti skaita ziņā, ievērojot simmetrijas apsvērumus, kas ļauj ieraudzīt *a priori* inercijas galvenās vai centrālās plaknes.

Tā, ja homogenam ķermenim ir simmetrijas plakne, tad šī plakne ir inercijas centrālā un galvenā plakne pret visiem tās punktiem.

Illustrēsim tagad ar dažiem piemēriem homogenu ķermeņu inercijas momentu aprēķināšanu.

Taisns parallēlepipeds. — Parallēlepipeda masas centrs G ir tā ģeometriskais centrs O un trīs vidus plaknes, kuŗas iet caur punktu O, kā trīs simmetrijas plaknes, ir inercijas centrālās plaknes. Lai aprēķinātu inercijas momentus A, B, C pret ortogōnālā triedra asīm ar sākumu punktā O un asu virzieniem, kas ir paralléli parallēlepipeda šķautnēm, pietiek aprēķināt inercijas momentus pret trim centrālām plaknēm Oyz, Ozx, Oxy. Ja parallēlepipeda šķautņu gaŗumus apzīmē ar a, b, c, tad tā skaldņu vienādojumi izvēlētajā koordinātu triedrā ir $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = \pm\frac{b}{2}$, $z = \pm\frac{c}{2}$.

Pēc definīcijas parallēlepipeda inercijas moments pret plakni Oyz ir dots ar integrālu

$$I_{yz} = \int_m x^2\, dm = \mu \iiint_v x^2\, dx\, dy\, dz,$$

kur μ apzīmē parallēlepipeda konstanto blīvumu, un trīskārtīgais integrāls jāattiecina uz visu tā tilpumu v, t. i. aprēķinot šo integrālu, x, y, z attiecīgi jāvariē robežās

$$-\frac{a}{2} \text{ un } +\frac{a}{2},\quad -\frac{b}{2} \text{ un } +\frac{b}{2},\quad -\frac{c}{2} \text{ un } +\frac{c}{2}.$$

Tā kā integrējamā funkcija x^2 ir neatkarīga no y un z, tad

$$I_{yz} = \mu b c \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \mu\, b c\, \frac{2}{3}\, \frac{a^3}{8}.$$

Bet tā kā parallēlepipeda totālā masa $M = \mu abc$, tad

$$I_{yz} = M\, \frac{a^2}{12};$$

analogi

$$I_{zx} = M\, \frac{b^2}{12},\quad I_{xy} = M\, \frac{c^2}{12}.$$

Tādējādi inercijas momenti pret asīm Ox, Oy un Oz attiecīgi ir

$$A = M\, \frac{b^2 + c^2}{12},\quad B = M\, \frac{c^2 + a^2}{12},\quad C = M\, \frac{a^2 + b^2}{12},$$

un atbilstošie žirācijas radiji

$$\sqrt{\frac{b^2+c^2}{12}}, \quad \sqrt{\frac{c^2+a^2}{12}}, \quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}.$$

Sfēra. — Apzīmējot sfēras radiju ar R un blīvumu ar μ, dabūjam tās masai izteiksmi

$$M = \frac{4}{3}\pi\mu R^3.$$

Sfēras masas centrs G ir tās centrs O. Centrālais inercijas elīpsoīds ir sfērisks, jo sfēras inercijas momenti pret jebkuŗu tās diametru ir vienādi.

Aprēķināsim vispirms sfēras inercijas momentu pret tās centru G. Tā kā sfēras slāņa starp radijiem r un $r+dr$ elementārais tilpums ir

$$dv = 4\pi r^2 dr$$

un masa

$$dm = 4\pi\mu r^2 dr,$$

tad

$$I = \int_m r^2 dm = 4\pi\mu\int_o^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\mu R^5 = \frac{3}{5}MR^2.$$

Tā tad pēc (7.) formulas sfēras inercijas moments pret kādu tās diametrālplakni ir $\frac{1}{3}I$ resp.

$$\frac{1}{5}MR^2,$$

un pret kādu tās diametru $\frac{2}{3}I$ resp.

$$\frac{2}{5}MR^2.$$

Sfēras žirācijas radijs pret kādu tās diametru tā tad ir

$$R\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Elīpsoīds. — Ja elīpsoīda pusasu gaŗumus apzīmē ar a, b, c un konstanto blīvumu ar μ, tad tā masa ir

$$M = \frac{4}{3}\pi\mu abc.$$

Masas centrs ir dotā elīpsoīda centrs O, un centrālā inercijas elīpsoīda asis sakrīt ar dotā elīpsoīda asīm.

Ja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ir dotā elīpsoīda vienādojums, tad tā inercijas moments pret plakni Oxy ir dots ar trīskārtīgo integrālu

$$I_{xy} = \mu \iiint z^2\, dx\, dy\, dz\,,$$

kas jāattiecina uz visu elīpsoīda tilpumu, t. i. telpu, kas definēta ar noteikumu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\,.$$

Ar substitūciju

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz'$$

iepriekšējais trīskārtīgais integrāls tiek transformēts jaunā trīskārtīgā integrālā

$$I_{xy} = abc^3 \mu \iiint z'^2\, dx'\, dy'\, dz',$$

kas jāattiecina uz sfēras

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 \leqslant 0$$

tilpumu. Tādējādi trīskārtīgais integrāls pēdējā I_{xy} izteiksmē reprezentē sfēras ar radiju 1 inercijas momentu pret kādu tās diametrālplakni un tā vērtība, kā to redzējām iepriekšējā piemērā, ir $\frac{4}{15}\pi\mu$, un tā tad

$$I_{xy} = \frac{4}{15}\pi\mu\, abc^3 = M\,\frac{c^2}{5}\,.$$

Analogi dabūjam, ka elīpsoīda inercijas momenti I_{yz} un I_{zx} pret Oyz- un Ozx-plaknēm ir

$$I_{yz} = M\,\frac{a^2}{5}, \quad I_{zx} = M\,\frac{b^2}{5}\,.$$

Elīpsoīda inercijas momenti pret asīm Ox, Oy, Oz un centru O tādējādi ir

$$I_x = M\frac{b^2+c^2}{5}, \quad I_y = M\frac{c^2+a^2}{5}, \quad I_z = M\frac{a^2+b^2}{5}$$

un

$$I = M\frac{a^2+b^2+c^2}{5}.$$

Un tā tad elīpsoīda žirācijas radiji pret tā asīm attiecīgi ir

$$\sqrt{\frac{b^2+c^2}{5}}, \quad \sqrt{\frac{c^2+a^2}{5}}, \quad \sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}.$$

Rotācijas cilindrs. — Apzīmējot cilindra radiju ar R, tā augstumu ar h un konstanto blīvumu ar μ, tā masai dabūjam izteiksmi

$$M = \pi\mu h R^2.$$

Cilindra masas centrs ir rotācijas ass segmenta, kas atrodas starp abiem pamatiem, viduspunkts. Cilindra centrālais inercijas elīpsoīds ir rotācijas elīpsoīds ar cilindra asi kā rotācijas asi.

Aprēķināsim vispirms cilindra inercijas momentu pret tā rotācijas asi Δ. Tā kā tilpums dv starp divām koaksiālām cilindriskām virsām ar radijiem r un $r + dr$ ir

$$dv = 2\pi hr\,dr,$$

tad šī tilpuma ieslēgtā masa ir

$$dm = 2\pi\mu hr\,dr$$

un tās inercijas moments pret asi Δ ir

$$r^2 dm = 2\pi\mu hr^3 dr.$$

Un tā tad cilindra inercijas moments pret tā asi Δ ir

$$I_\Delta = \int\limits_m r^2 dm = 2\pi\mu h\int^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\mu h R^4 = \frac{1}{2} MR^2.$$

Cilindra žirācijas radijs pret asi Δ ir $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

Tālāk aprēķināsim cilindra inercijas momentu pret kādu asi Gx, kas vilkta perpendikulāri asij Δ caur masas centru G. Šai nolūkā ir jāaprēķina cilindra inercijas momenti I_{xz} un I_{xy} pret plaknēm Gxz un Gxy, ja rotācijas ass Δ sakrīt ar Gz-asi.

Aprēķināsim I_{xz}. Ja šai nolūkā Gxy plaknē definē polārās koordinātas R, φ, tad cilindra segmenta, kas ierobežots starp divām plaknēm, kuŗas iet caur asi Δ un kuŗu anōmalijas ir φ un $\varphi + d\varphi$, tilpums ir

$$dv = \frac{1}{2} R^2 h \, d\varphi ,$$

masa

$$dm = \frac{1}{2} R^2 h \mu \, d\varphi ,$$

un tā tad

$$I_{xz} = \int_m y^2 dm = \frac{1}{2} \mu h R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \pi \mu h R^4 = \frac{1}{4} M R^2 .$$

Cilindra inercijas moments I_{xy} pret plakni Gxy savkārt ir dots ar formulu

$$I_{xy} = \mu \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} R^2 \lambda^2 \, d\lambda = M \frac{h^2}{12} .$$

Tādējādi cilindra inercijas moments I_x pret asi Gx ir

$$I_x = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) .$$

Cilindra žirācijas radijs pret Gx-asi ir $\frac{1}{2} \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{3}}$.

Riņķis. — Ja riņķa radiju apzīmē ar R un konstanto virsas blīvumu ar μ, tad tā masa ir $M = \pi R^2 \mu$. Riņķa masas centrs ir tā ģeometriskais centrs. Riņķa inercijas moments pret taisni, kas vilkta caur šī riņķa centru perpendikulāri tā plaknei, ir

$$I_\Delta = \int_0^R 2 \pi \mu r^3 dr = \frac{\pi R^4 \mu}{2} = M \frac{R^2}{2} .$$

Tā žirācijas radijs pret to pašu taisni ir $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Riņķa inercijas moments pret kādu tā diametru ir puse no I_Δ, t. i. $M\frac{R^2}{4}$; attiecīgais žirācijas radijs tā tad ir $\frac{R}{2}$.

Bezgala tievs taisns stienis. — Ja $2l$ ir stieņa garums un μ tā lineārais blīvums, tad stieņa masa $M = 2l\mu$. Stieņa masas centrs ir tā viduspunkts. Centrālais inercijas elipsoīds ir rotācijas cilindrs ar stieni kā asi. Stieņa inercijas moments pret šo asi ir nulle. Stieņa inercijas moments pret kādu taisni Gx, kas vilkta caur tā masas centru un tam perpendikulāri, ir

$$I_x = \int_{-l}^{l} \mu r^2 dr = \frac{2}{3}\mu l^3 = M\frac{l^2}{3}.$$

Stieņa žirācijas radijs pret šo taisni ir $\frac{l}{\sqrt{3}}$.

185. **Uzdevumi.**

1. Aprēķināt homogena taisnstūŗa inercijas momentu pret kādu tā malu, kā arī atbilstošo žirācijas radiju.

2. Aprēķināt homogena trijstūŗa inercijas momentu un žirācijas radiju pret vienu tā malu.

3. Aprēķināt homogena taisnes segmenta inercijas momentu pret kādu asi, kas iet caur tā viduspunktu un veido ar šo segmentu leņķi α.

4. Aprēķināt trijstūŗa inercijas momentu pret asi, kas iet caur vienu tā virsotni perpendikulāri trijstūŗa plaknei.

X NODAĻA.

KUSTĪBAS DAUDZUMS UN KINĒTISKAIS MOMENTS.

39. §. Definīcijas.

186. **Materiāla punkta kustības daudzums un kinētiskais moments.** — Ja kustīgā punkta P ar masu m koordinātas triedrā $Oxyz$ apzīmē ar x, y, z, tad tā vektoriālā ātruma $\dot{P} = \mathbf{v}$ koordinātas šai triedrā ir

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt},$$

kur t apzīmē kinēmatisko laiku.

Ar *materiālā punkta P kustības daudzumu momentā t* saprot vektoru

$$(1.) \qquad m\mathbf{v},$$

kuŗa sākums atrodas punktā P. Un tā tad kustības daudzuma koordinātas ir

$$(2.) \qquad m\dot{x}, \quad m\dot{y}, \quad m\dot{z}.$$

Par *materiālā punkta P kinētisko momentu pret doto punktu, taisni vai asi momentā t* sauc šī punkta kustības daudzuma momentu pret doto punktu, taisni vai asi.

Tā punkta $P(x, y, z)$ kinētiskais moments pret punktu $A(a, b, c)$ pēc definīcijas ir vektors

$$(3.) \qquad \mathbf{q} = \overline{AP} \times m\mathbf{v}$$

ar koordinātām

$$(4.) \quad \begin{cases} m[(y-b)\dot{z} - (z-c)\dot{y}], \quad m[(z-c)\dot{x} - (x-a)\dot{z}], \\ \qquad m[(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}]. \end{cases}$$

Ja punkts A sakrīt ar koordinātu triedra sākuma punktu O, tad $a = b = c = 0$, un punkta P kinētiskā momenta pret punktu O koordinātas ir

$$(4'.) \qquad m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Apzīmējot punkta P vektoriālsektoriālo ātrumu pret punktu A ar $\mathbf{V} = \frac{1}{2}(\overline{AP} \times \mathbf{v})$ un reizinot tā divkāršoto modulu ar m, dabūjam sakarību

(5.) $$2\,mV = |\overline{AP} \times m\mathbf{v}| = |\mathbf{q}| = q\,,$$

kas rāda, ka punkta P vektoriālsektoriālā ātruma pret punktu A modula V un tā divkārtīgās masas m reizinājums ir vienāds ar šī punkta kinētiskā momenta $\mathbf{q}$ pret punktu A absolūto vērtību q.

Reizinot vienlīdzības

$$2\,m\mathbf{V} = \mathbf{q}$$

abas puses skālāri ar vienības vektoru $\mathbf{u}$, kuŗa koordinātas ir šī vienības vektora nesējas taisnes Δ virziena kosini, un atsaucoties uz punkta P sektoriālā ātruma definīciju pret taisni Δ, dabūjam

$$2\,m\mathbf{V}\,.\,\mathbf{u} = \mathbf{q}\,.\,\mathbf{u}$$

jeb, ievērojot 66. nodal. rezultātus un apzīmējumus,

(6.) $$2\,mV_\Delta = 2\,m\,\frac{dL_\Delta}{dt} = q_\Delta\,.$$

Tādējādi punkta sektoriālā ātruma pret kādu taisni un tā divkārtīgās masas reizinājums ir vienāds ar šī punkta kinētiskā momenta projekcijas uz šīs ass algebrisko vērtību.

187. **Materiālas sistēmas kustības daudzums un kinētiskais moments.** — Apskatīsim materiālu sistēmu S, kas sastādīta no punktiem P_i, kuŗu masas ir m_i un koordinātas x_i, y_i, z_i attiecībā pret kādu ortogōnālu koordinātu triedru $Oxyz$.

Materiālās sistēmas S kustībā pret triedru $Oxyz$ ar šīs sistēmas *kustības daudzumu momentā t* saprot vektoru

(7.) $$\mathbf{K} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i\,,$$

kas ir vienāds ar tās atsevišķo punktu kustības daudzumu summu. Sistēmas kustības daudzuma koordinātas ir

(8.) $$\sum_i m_i \dot{x}_i\,, \quad \sum_i m_i \dot{y}_i\,, \quad \sum_i m_i \dot{z}_i\,.$$

Ar sistēmas S kinētisko momentu $\mathbf{Q}$ pret punktu A momentā t saprot šīs sistēmas atsevišķo punktu kinētisko momentu pret punktu A rezultētāju momentu, t. i. vektoriālo lielumu

(9.) $$\mathbf{Q} = \sum_i (\overline{AP_i} \times m_i \mathbf{v}_i).$$

Ja punkta A koordinātas ir a, b, c, tad sistēmas S kinētiskā momenta $\mathbf{Q}$ pret punktu A koordinātas ir

$$(10.)\quad \begin{cases} \sum\limits_i m_i\,[(y_i-b)\,\dot z_i-(z_i-c)\,\dot y_i]\,, \\ \sum\limits_i m_i\,[(z_i-c)\,\dot x_i-(x_i-a)\,\dot z_i]\,, \\ \sum\limits_i m_i\,[(x_i-a)\dot y_i-(y_i-b)\dot x_i]\,. \end{cases}$$

Speciālā gadījumā, kad punkts A sakrīt ar koordinātu triedra sākuma punktu O, $a=b=c=0$, un sistēmas kinētiskā momenta pret punktu O koordinātas ir

$$(10.')\quad \sum_i m_i(y_i\dot z_i-z_i\dot y_i),\quad \sum_i m_i(z_i\dot x_i-x_i\dot z_i),\quad \sum_i m_i(x_i\dot y_i-y_i\dot x_i).$$

Lielumi $\mathbf{K}$ un $\mathbf{Q}$ nav nekas cits kā vektoru sistēmas $m_i\mathbf{v}_i$ ar sākuma punktiem P_i rezultante un rezultētājs moments pret punktu A.

Materiālai sistēmai S pastāv (6.) formulai analoga formula

$$2\sum_i m_i\frac{dL_\Delta}{dt}=Q_\Delta\,,$$

kur $\sum\limits_i m_i$ apzīmē sistēmas totālo masu un Q_Δ sistēmas kinētiskā momenta $\mathbf{Q}$ projekcijas uz ass Δ algebrisko vērtību. Lielumu $\frac{dL_\Delta}{dt}$ šai gadījumā sauc par sistēmas S sektoriālo ātrumu momentā t pret asi Δ.

Sistēmas S sektoriālie ātrumi pret koordinātu asīm ir

$$\frac{dL_{Ox}}{dt}=\frac{\sum\limits_i m_i(y_i\dot z_i-z_i\dot y_i)}{2\sum\limits_i m_i},\qquad \frac{dL_{Oy}}{dt}=\frac{\sum\limits_i m_i(z_i\dot x_i-x_i\dot z_i)}{2\sum\limits_i m_i},$$

$$\frac{dL_{Oz}}{dt}=\frac{\sum\limits_i m_i(x_i\dot y_i-y_i\dot x_i)}{2\sum\limits_i m_i}\,.$$

40. §. Sistēmas kustība pret tās masas centru.

188. **Masas centra ātrums, paātrinājums, kustības daudzums un kinētiskais moments.** — Diferencējot pēc laika t sistēmas S ar totālo masu $m=\sum\limits_i m_i$ masas centra G definīcijas formulu pret punktu O, t. i. formulu

$$(11.)\quad m\,\overline{OG}=\sum_i m_i\,\overline{OP_i},$$

dabūjam

(12.) $$m\,\mathbf{v}_G = \sum_i m_i\,\mathbf{v}_i\,,$$

kur $\mathbf{v}_G$ apzīmē punkta G ātrumu. Salīdzinot (7.) un (12.) formulu, redzam, ka

(12.') $$\mathbf{K} = m\,\mathbf{v}_G\,,$$

t. i. *sistēmas kustības daudzums jebkuŗā momentā ir vienāds ar tās masas centra, kuŗā jāiedomājas koncentrēta visa sistēmas masa, kustības daudzumu šai momentā.*

Diferencējot (12.) formulu vēlreiz pēc laika t un apzīmējot punktu P_i un G paātrinājumus attiecīgi ar $\mathbf{a}_i$ un $\mathbf{a}_G$, dabūjam formulu

(13.) $$m\,\mathbf{a}_G = \sum_i m_i\,\mathbf{a}_i\,.$$

(12.) un (13.) formula dod sistēmas S masas centra G ātrumu un paātrinājumu kādā momentā t.

Ja no sistēmas masas centra G atliek vektoru $\mathbf{K}$, tad (12.') formula rāda, ka sistēmas kustības daudzuma $\mathbf{K}$ kinētiskais moments pret kādu punktu A ir vienāds ar tās masas centra, kuŗā jāiedomājas koncentrēta visa sistēmas masa, kustības daudzuma kinētisko momentu pret šo punktu.

Tālāk (12.) formula rāda: ja kustības references triedrs ir tāds, ka sistēmas S masas centra G ātrums $\mathbf{v}_G$ šai triedrā ir vienmēr nulle, kas, piem., ir ievērots, ja references triedra sākuma punkts O sakrīt ar sistēmas masas centru G, tad vektoru sistēmas $m_i\mathbf{v}_i$ rezultante $\mathbf{K}$ ir vienmēr nulle un tās kinētiskais moments $\mathbf{Q}$ sistēmas S kustībā pret apskatīto triedru ir viens un tas pats pret jebkuŗu punktu. Šī īpašība ir ļoti svarīga sistēmas S kustības pret tās masas centru pētīšanā.

189. **Sistēmas kustība pret tās masas centru.** — Apzīmēsim ar T kādu nekustīgu koordinātu triedru un ar T_G kustīgu triedru, kuŗa sākuma punkts vienmēr sakrīt ar sistēmas S masas centru G un kuŗa asis paliek parallēlas triedra T attiecīgajām asīm. Jebkuŗā momentā triedra T_G kustība pret triedru T tad ir translācija ar ātrumu $\mathbf{v}_G$, kas ir vienāds ar sistēmas S masas centra G ātrumu triedrā T.

Sistēmas S kustību pret triedru T_G sauc par *sistēmas kustību pret tās masas centru.*

Ja triedra T vietā par nekustīgu triedru izvēlas kādu citu triedru T_1, kas atrodas kaut kādā kustībā pret to, tad, ievērojot, ka šī kustība vispārīgi ir salikta no kādas translācijas un rotācijas, triedram T_1 atbilstošā sistēmas kustība pret tās masas centru G ir attiecināta pret kādu triedru T_{1G}, kas vispārīgi atšķiŗas no triedra T_G.

Tikai gadījumā, ja T_1 atrodas translācijas kustībā pret triedru T, triedri T_G un T_{1G} sakrīt.

Tiešām, tā kā triedri T_G un T_{1G} ir ar kopēju sākuma punktu G un triedrs T_{1G} pret T_G atrodas triedra T_1 rotācijā pret triedru T, tad, lai triedri T_G un T_{1G} sakristu, ir nepieciešami un pietiekami, lai šī rotācija būtu nulle.

Apzīmēsim tagad ar T kādu nekustīgu triedru un ar T_G attiecīgu kustīgu triedru un apskatīsim Königa teorēmu sistēmas S kinētiskā momenta aprēķināšanai.

Königa teorēma. — *Jebkuŗā momentā t sistēmas S kinētiskais moments pret kādu punktu O ir vienāds* 1° *ar šīs sistēmas kinētiskā momenta — tās kustībā pret masas centru G — un* 2° *masas centra G, kuŗā jāiedomājas koncentrēta sistēmas masa, kinētiskā momenta pret punktu O ģeometrisko summu.*

Lai šo teorēmu pierādītu, ievietosim sistēmas S kinētiskā momenta $\mathbf{Q}$ pret punktu O definīcijas formulā

$$\mathbf{Q} = \sum_i (\overline{OP_i} \times m_i \mathbf{v}_i)$$

punkta P_i absolūtā ātruma $\mathbf{v}_i$ vietā, atsaucoties uz ātrumu kompozicijas likumu, tā izteiksmi

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_i^{(r)},$$

kur $\mathbf{v}_i$ apzīmē punkta P_i ātrumu triedrā T, $\mathbf{v}_i^{(r)}$ tā ātrumu triedrā T_G un $\mathbf{v}_G$ triedra T_G translācijas ātrumu pret triedru T (P_i pārnešanas ātrums).

Pēc šādas substitūcijas dabūjam formulu

$$\mathbf{Q} = \sum_i m_i \overline{OP_i} \times \mathbf{v}_G + \sum_i (\overline{OP_i} \times m_i \mathbf{v}_i^{(r)}).$$

Pirmo locekli pēdējās formulas labajā pusē, ievērojot sistēmas masas centra definīcijas (11.) formulu, var pārrakstīt formā

$$\overline{OG} \times m \mathbf{v}_G.$$

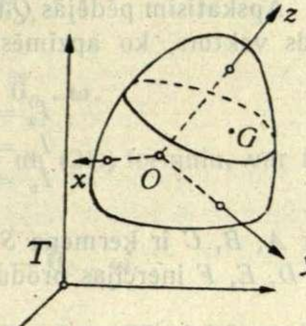
Otru locekli tai pašā formulā, atsaucoties uz iepriekšējā nodal. pēdējo piezīmi, var uzskatīt par sistēmas S kinētisko momentu $\mathbf{Q}_G^{(r)}$ tās kustībā pret masas centru G. Tādējādi pēdējo formulu var pārrakstīt formā

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_G^{(r)} + \overline{OG} \times m \mathbf{v}_G,$$

kas ir pierādāmās Königa teorēmas analitiskā izteiksme.

41. §. Cieta ķermeņa kustības daudzums un kinētiskais moments.

190. **Vispārīgais gadījums.** — Apzīmēsim kustīga cieta ķermeņa S raksturīgos vektorus pret kādu tā punktu O ar $\mathbf{v}_O$ un $\boldsymbol{\omega}$ un šo vektoru koordinātas pret kādu punktā O definētu ortogonālu koordinātu triedru $Oxyz$, kas ir nekustīgi saistīts ar cieto ķermeni S, attiecīgi ar u, v, w un p, q, r (108. zīm.).



108. zīm.

Jebkuŗa cieta ķermeņa S punkta P_i ātrums $\mathbf{v}_i$ tad ir dots ar formulu

$$(14.)\qquad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OP_i}\,.$$

Aprēķināsim cieta ķermeņa S kustības daudzumu $\mathbf{K}$. Šai nolūkā ievietosim formulā

$$(15.)\qquad \mathbf{K} = m\,\mathbf{v}_G$$

$\mathbf{v}_G$ vietā tā izteiksmi

$$(16.)\qquad \mathbf{v}_G = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OG}\,,$$

kas sastādīta pēc (14.) formulas ar vektoriem $\mathbf{v}_O$ un $\boldsymbol{\omega}$, dabūjot vektoru $\mathbf{K}$ formā

$$(17.)\qquad \mathbf{K} = m\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times m\overline{OG}\,.$$

Ja ķermeņa S masas centra G koordinātas kustīgā triedrā $Oxyz$ apzīmē ar x_0, y_0, z_0, tad vektora $\mathbf{K}$ koordinātas K_x, K_y, K_z šai triedrā ir dotas ar formulām

$$(18.)\qquad \begin{cases} K_x = m(u + qz_0 - ry_0), \\ K_y = m(v + rx_0 - pz_0), \\ K_z = m(w + py_0 - qx_0). \end{cases}$$

Tālāk aprēķināsim cieta ķermeņa S kinētisko momentu $\mathbf{Q}$ pret punktu O. Ievietojot $\mathbf{Q}$ definīcijas formulā

$$\mathbf{Q} = \sum_i (\overline{OP_i} \times m_i\,\mathbf{v}_i)$$

$\mathbf{v}_i$ vietā tā (14.) izteiksmi un ievērojot ķermeņa S masas centra G definīcijas formulu

$$m\,\overline{OG} = \sum_i m_i\,\overline{OP_i}$$

pret punktu O, dabūjam, ka

$$\mathbf{Q} = \sum_i [\overline{OP_i} \times (\boldsymbol{\omega} \times m_i\overline{OP_i})] + m\,\overline{OG} \times \mathbf{v}_O. \tag{19.}$$

Apskatīsim pēdējās Q izteiksmes labajā pusē pirmo locekli, kas ir kāds vektors, ko apzīmēsim ar $\mathbf{I}$. Vektora $\mathbf{I}$ koordinātu izteiksmes

$$\begin{aligned} I_x &= Ap - Fq - Er, \\ I_y &= -Fp + Bq - Dr, \\ I_z &= -Ep - Dq + Cr, \end{aligned}$$

kur A, B, C ir ķermeņa S inercijas momenti pret triedra $Oxyz$ asīm un D, E, F inercijas produkti pret tām pašām asīm, rāda, ka

$$\mathbf{I} = \sum_i [\overline{OP_i} \times (\boldsymbol{\omega} \times m_i\overline{OP_i})] = \sum_i \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O\,(P_i)\,.\,\boldsymbol{\omega} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O\,(S)\,.\,\boldsymbol{\omega}. \tag{20.}$$

Pēdējā formulā, saprotams, nav svarīgi uzsvērt, ka vektors $\boldsymbol{\omega}$ ir kāds rotācijas vektors; tādēļ, ja doti ir divi kaut kādi vektori $\overline{OA}$ un $\overline{OB}$, tad vispārīgi apmierināta ir (20.) formulai analoga formula

$$\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O\,(m\,\overline{OB})\,.\,\overline{OA} = \overline{OB} \times (\overline{OA} \times m\,\overline{OB}). \tag{21.}$$

Šai formulā $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O\,(m\,\overline{OB})$ apzīmē punkta B ar masu m inercijas momentu pret punktu O, un tas vispārīgi ir atkarīgs kā no punkta B, t. i. vektora $\overline{OB}$, tā arī no tā masas m. Ar (21.) formulu daudzreiz varēsim saīsināt rakstību.

Tādējādi ar jauniem apzīmējumiem ķermeņa S kinētiskā momenta $\mathbf{Q}$ pret punktu O (19.) izteiksmi var pārrakstīt formā

$$\mathbf{Q} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O\,(S)\,.\,\boldsymbol{\omega} + \overline{OG} \times m\mathbf{v}_O, \tag{22.}$$

pie kam tā koordinātu Q_x, Q_y, Q_z izteiksmes pēc (22.) formulas ir šādas:

$$\left\{\begin{aligned} Q_x &= Ap - Fq - Er + m\,(y_0 w - z_0 v), \\ Q_y &= -Fp + Bq - Dr + m\,(z_0 u - x_0 w), \\ Q_z &= -Ep - Dq + Cr + m\,(x_0 v - y_0 u). \end{aligned}\right. \tag{23.}$$

Dažreiz ir lietderīgi izteikt cieta ķermeņa S kustības daudzumu **K** un kinētisko momentu **Q** pret punktu O atkarībā no lielumiem, kas ir aprēķināti pret šī ķermeņa masas centru G, citiem vārdiem sakot, atkarībā no centrālā inercijas tensora $\overline{\mathbf{I}}_G(S)$ un ķermeņa S kustībai raksturīgiem vektoriem $\mathbf{v}_G$ un $\boldsymbol{\omega}$ pret masas centru G.

Vektors **K** ar (15.) formulu jau ir dots šādā formā. Atliek vēl transformēt vektoru **Q**, kas ir dots ar (22.) formulu. Vispirms pēc Königa teorēmas

$$\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) + \overline{\overline{\mathbf{G}}}_O,$$

un tā tad

$$\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \boldsymbol{\omega} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) \,.\, \boldsymbol{\omega} + \overline{\overline{\mathbf{G}}}_O \,.\, \boldsymbol{\omega}. \tag{24.}$$

Tālāk vektors $\overline{OG} \times m\mathbf{v}_O$, ievērojot (16.) un (21.) formulu, var tikt transformēts divu vektoru diferencē

$$\overline{OG} \times m\mathbf{v}_O = \overline{OG} \times m\mathbf{v}_G - \overline{\overline{\mathbf{G}}}_O \,.\, \boldsymbol{\omega}. \tag{25.}$$

Substituējot (24.) un (25.) izteiksmi (22.) formulā, dabūjam ķermeņa S kinētiskam momentam **Q** izteiksmi

$$\mathbf{Q} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) \,.\, \boldsymbol{\omega} + \overline{OG} \times m\mathbf{v}_G, \tag{26.}$$

kas ir atkarīga no šī ķermeņa centrālā inercijas tensora $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S)$, masas centra G un tā ātruma $\mathbf{v}_G$.

Projicējot šo vektoriālo vienlīdzību uz triedra $Oxyz$ asīm, dabūjam vektora **Q** koordinātām izteiksmes

$$\begin{aligned}
Q_x &= A_G p - F_G q - E_G r + m[y_0(w + py_0 - qx_0) - z_0(v + rx_0 - pz_0)],\\
Q_y &= -F_G p + B_G q - D_G r + m[z_0\,(u + qz_0 - ry_0) - x_0(w + py_0 - qx_0)],\\
Q_z &= -E_G p - D_G q + C_G r + m[x_0\,(v + rx_0 - pz_0) - y_0(u + qz_0 - ry_0)],
\end{aligned}$$

kur A_G, B_G, C_G apzīmē ķermeņa S inercijas momentus pret triedra $Gxyz$ asīm, kas vilktas caur punktu G parallēli triedra $Oxyz$ attiecīgajām asīm, un D_G, E_G, F_G inercijas produktus pret šīm asīm.

Ja kustīgā triedra $Oxyz$ asis ir parallēlas ķermeņa S centrālā inercijas elipsoīda asīm, tad koeficienti $D_G = E_G = F_G = 0$.

Ja redukcijas centrs O sakrīt ar cieta ķermeņa S masas centru G, tad (17.) un (22.) resp. (15.) un (26.) formula reducējas attiecīgi par

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}_G \text{ un } \mathbf{Q}_G = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) \,.\, \boldsymbol{\omega},$$

kas vektoriem **K** un $\mathbf{Q}_G$ dod šādas koordinātu izteiksmes:

(30.) $$K_x = mu\,,\quad K_y = mv\,,\quad K_z = mw\,,$$

(31.) $$\begin{cases} Q_{Gx} = A_G p - F_G q - E_G r\,, \\ Q_{Gy} = -F_G p + B_G q - D_G r\,, \\ Q_{Gz} = -E_G p - D_G q + C_G r\,. \end{cases}$$

Ja par koordinātu triedra $Gxyz$ asīm izvēlas ķermeņa S inercijas centrālās asis, tad $D_G = E_G = F_G = 0$, un (31.) formulu sistēma reducējas par sistēmu

(32.) $$Q_{Gx} = A_G p\,,\quad Q_{Gy} = B_G q\,,\quad Q_{Gz} = C_G r\,.$$

191. **Ciets ķermenis ar nekustīgu punktu.** — Ja cieta ķermeņa S punkts O ir fiksēts telpā, t. i. tas ir nekustīgs nekustīgā triedrā T, tad vektors $\mathbf{v}_O = 0$ resp. $u = v = w = 0$ un

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}_G,\quad \mathbf{Q} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)\,.\,\boldsymbol{\omega}\,.$$

Tādā gadījumā šīm vektoriālām formulām atbilstošās (18.) un (23.) sistēmas attiecīgās skālārās formulas reducējas par

(33.) $$K_x = m(qz_0 - ry_0),\quad K_y = m(rx_0 - pz_0),\quad K_z = m(py_0 - qx_0),$$

(34.) $$\begin{cases} Q_x = Ap - Fq - Er\,,\quad Q_y = -Fp + Bq - Dr\,, \\ Q_z = -Ep - Dq + Cr\,. \end{cases}$$

(34.) formulu sistēmu vēl var vienkāršot, izvēloties par koordinātu triedra $Oxyz$ asīm ķermeņa S inercijas galvenās asis punktā O. Tādā gadījumā $D = E = F = 0$, un (34.) formulu sistēmas vietā stājas formulas

(35.) $$Q_x = Ap\,,\quad Q_y = Bq\,,\quad Q_z = Cr\,.$$

192. **Ciets ķermenis ar nekustīgu asi.** — Ja cietais ķermenis S rotē ap kādu taisni Δ, kas ir nekustīga kā ķermenī, tā nekustīgā telpā, tad, piešķirot šai taisnei kādu orientāciju, to varam izvēlēties par vienu no kustīgā triedra $Oxyz$ asīm, piem. Oz-asi. Tādā gadījumā

$$p = q = 0\,,\quad r = \omega\,.$$

Bet tā kā arī punkts O ir kāds nekustīgs cieta ķermeņa S punkts, tad ķermeņa S kustības daudzuma **K** un kinētiskā momenta **Q** pret punktu O koordinātas ir dotas ar (33.) un (34.) sistēmas formulām, ievietojot tanīs $p = q = 0$, $r = \omega$. Tādējādi

$$K_x = -my_0\omega, \quad K_y = mx_0\omega, \quad K_z = 0, \tag{36.}$$

$$Q_x = -E\omega, \quad Q_y = -D\omega, \quad Q_z = C\omega. \tag{37.}$$

Tā kā rotācijas ap asi Δ absolūtā vērtība ir ω, tad $r = \pm\,\omega$, atkarībā no tā, vai izvēlētais rotācijas ass pozitīvais vērsums ir vienāds vai pretējs leņķiskā ātruma $\boldsymbol{\omega}$ vērsumam.

42. §. Cieta ķermeņa kustības daudzuma un kinētiskā momenta atvasinājumi.

193. **Vispārīgais gadījums.** — Dotajā momentā t cieta ķermeņa S kustības daudzums **K** un kinētiskais moments **Q** pret punktu O ir doti ar formulām

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times m\,\overline{OG}, \tag{17.}$$

$$\mathbf{Q} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)\,.\,\boldsymbol{\omega} + \overline{OG} \times m\,\mathbf{v}_O. \tag{22.}$$

Apzīmējot vektoru **K** un **Q** absolūtos atvasinājumus nekustīgā (absolūtā) triedrā T ar $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$ un $\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$ un relātīvos atvasinājumus kustīgā triedrā $Oxyz$ ar $\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_r$ resp. $\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_r$, pēc vektoru diferencēšanas fundāmentālās formulas dabūjam

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K},$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}.$$

Tā kā vektors $\overline{OG}$ un inercijas tensors $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)$ pret punktu O triedrā $Oxyz$, kas saistīts ar cieto ķermeni, ir no laika t neatkarīgi, tad, diferencējot (17.) un (22.) formulu attiecībā pret kustīgo triedru $Oxyz$, dabūjam

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_r = m\,(\mathbf{a}_O)_r + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times m\,\overline{OG}$$

un

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_r = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)\,.\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \overline{OG} \times m\,(\mathbf{a}_O)_r.$$

Ta tad

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m(\mathbf{a}_O)_r + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times m\overline{OG} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}$$

$$= m(\mathbf{a}_O)_r + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times m\overline{OG} + \boldsymbol{\omega} \times (m\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times m\overline{OG})$$

$$= m(\mathbf{a}_O)_r + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times m\overline{OG} - \boldsymbol{\omega} \times (\overline{OG} \times m\boldsymbol{\omega})$$

jeb

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m\mathbf{a}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times m\overline{OG} - \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(m\boldsymbol{\omega}) \,.\, \overline{OG} \tag{38.}$$

un

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \dot{\boldsymbol{\omega}} + \overline{OG} \times m(\mathbf{a}_O)_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}$$

$$= \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \dot{\boldsymbol{\omega}} + \overline{OG} \times m(\mathbf{a}_O)_r + \boldsymbol{\omega} \times [\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \boldsymbol{\omega} + \overline{OG} \times m\mathbf{v}_O]$$

jeb pēc dažiem pārveidojumiem

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \boldsymbol{\omega} + \mathbf{K} \times \mathbf{v}_O + \overline{OG} \times m\mathbf{a}_O. \tag{39.}$$

194. **Ciets ķermenis ar nekustīgu punktu.** — Ja cieto ķermeni S iedomājas fiksētu punktā O, tad raksturīgie vektori $\mathbf{v}_O = \mathbf{a}_O = 0$, un (38.) un (39.) formula reducējas par vienkāršākām formulām:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times m\overline{OG} - \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(m\boldsymbol{\omega}) \,.\, \overline{OG}, \tag{40.}$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \boldsymbol{\omega}\,. \tag{41.}$$

Pēdējā formula ir spēkā arī gadījumā, ja redukcijas centrs O sakrīt ar ķermeņa S masas centru G, jo tad $\mathbf{v}_O$ ir vienāds ar $\mathbf{v}_G$ un (39.) formulā trešais loceklis $\mathbf{K} \times \mathbf{v}_O = m\mathbf{v}_G \times \mathbf{v}_G = 0$; pēdējais loceklis arī anullējas, jo $O = G$ resp. $\overline{OG}$ ir nulles vektors.

Projicējot (40.) un (41.) vektoriālo formulu uz kustīgā koordinātu triedra $Oxyz$ asīm, ar agrākajiem apzīmējumiem dabūjam šādas vektoru $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$ un $\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$ koordinātu izteiksmes:

1. Vektora $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$ koordinātas:

$$(42.)\quad \begin{cases} m(z_0\dot{q}-y_0\dot{r})-m[x_0(q^2+r^2)-y_0pq-z_0pr], \\ m(x_0\dot{r}-z_0\dot{p})-m[y_0(r^2+p^2)-z_0qr-x_0qp], \\ m(y_0\dot{p}-x_0\dot{q})-m[z_0(p^2+q^2)-x_0rp-y_0rq]; \end{cases}$$

2. Vektora $\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$ koordinātas:

$$(43.)\quad \begin{cases} A\dot{p}-F\dot{q}-E\dot{r}+q(-Ep-Dq+Cr)-r(-Fp+Bq-Dr), \\ -F\dot{p}+B\dot{q}-D\dot{r}+r(Ap-Fq-Er)-p(-Ep-Dq+Cr), \\ -E\dot{p}-D\dot{q}+C\dot{r}+p(-Fp+Bq-Dr)-q(Ap-Fq-Er). \end{cases}$$

Pēdējās formulas ievērojami vienkāršojas, ja kustīgā triedra $Oxyz$ asis sakrīt ar ķermeņa S inercijas galvenām asīm punktā O.

Tādā gadījumā $D=E=F=0$, un vektora $\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$ koordinātas ir

$$(44.)\quad A\dot{p}+(C-B)qr,\quad B\dot{q}+(A-C)rp,\quad C\dot{r}+(B-A)pq.$$

195. **Ciets ķermenis ar nekustīgu asi.** — Ja cietais ķermenis rotē ap kādu taisni Δ, kas ir nekustīga kā ķermenī, tā nekustīgā telpā, tad, izvēloties šo taisni par triedra $Oxyz$ z-asi,

$$p=q=0,\qquad r=\omega.$$

Tālāk, izvēloties sākuma punktu O un koordinātu asi Ox tā, lai ķermeņa S masas centrs G atrastos uz tās, dabūjam

$$x_0=l=const.,\qquad y_0=z_0=0.$$

Tādējādi vektoru $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$ un $\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$ koordinātas resp. (42.) un (43.) sistēmas izteiksmes reducējas par šādām izteiksmēm:

1. $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$ koordinātas:

$$-ml\omega^2,\quad ml\dot{\omega},\quad 0.$$

2. $\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$ koordinātas:

$$-E\dot{\omega}+D\omega^2,\quad -D\dot{\omega}-E\omega^2,\quad C\dot{\omega}.$$

XI NODAĻA.

SPARS UN KINĒTISKĀ ENERĢIJA.

43. §. Definīcijas.

196. **Materiāla punkta spars un kinētiskā enerģija.** — Ja materiālā punkta P ar masu m koordinātas izvēlētajā references ţriedrā T momentā t apzīmē ar x, y, z un ātrumu ar $\mathbf{v}$, tad par *šī punkta sparu momentā t* sauc skālāro lielumu

$$2T = m\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v} = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = mv^2\,,$$

kur v apzīmē punkta P ātruma absolūto vērtību.

Punkta P spara atvasinājums pēc laika momentā t ir lielums

$$\frac{d2T}{dt} = \frac{d\,m\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v}}{dt} = 2m\mathbf{v}\,.\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = 2m\mathbf{v}\,.\,\mathbf{a}\,,$$

kur $\mathbf{a}$ apzīmē punkta P paātrinājumu.

Lielumu $d2T$ sauc par *materiālā punkta P elementāro sparu momentā t*, bet lielumu T, kas ir puse no punkta P spara momentā t, par *punkta P kinētisko enerģiju šai momentā.*

197. **Materiālas sistēmas spars un kinētiskā enerģija.** — Apzīmējot materiālās sistēmas S punkta P_i ar masu m_i koordinātas izvēlētajā references triedrā T ar x_i, y_i, z_i, ātrumu ar $\mathbf{v}_i$ un paātrinājumu ar $\mathbf{a}_i$, ar *šīs sistēmas sparu momentā t* resp. *ar šīs sistēmas spara atvasinājumu pēc laika momentā t* saprot sistēmas S atsevišķo punktu P_i sparu momentā t resp. punktu P_i sparu atvasinājumu pēc laika algebrisko summu.

Tādējādi sistēmas S spars $2T$ momentā t ir

$$2T = \sum_i m_i\mathbf{v}_i\,.\,\mathbf{v}_i = \sum_i m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \sum_i m_i v_i^2$$

un tā atvasinājums pēc laika

$$\frac{d2T}{dt} = \sum_i \frac{d\,m_i\mathbf{v}_i\,.\,\mathbf{v}_i}{dt} = 2\sum_i m_i\mathbf{v}_i\,.\,\frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$$
$$= 2\sum_i m_i(\dot{x}_i\ddot{x}_i + \dot{y}_i\ddot{y}_i + \dot{z}_i\ddot{z}_i) = 2\sum_i m_i\mathbf{v}_i\,.\,\mathbf{a}_i\,.$$

Lielumu $d2T$ sauc par *sistēmas S elementāro sparu momentā t,* bet lielumu T, kas ir puse no sistēmas S spara momentā t, — par *materiālās sistēmas S kinētisko enerģiju šai momentā.*

Kinētiskā enerģija T pēc definīcijas ir pozitīvs lielums, kas sistēmas S eventuālos miera stāvokļos reducējas par nulli.

Kā šīs definīcijas rāda, sistēmas S spars resp. kinētiskā enerģija un tā atvasinājums pēc laika t ir relātīvi lielumi, kas ir atkarīgi no izvēlētā references triedra T.

Tā, ja sistēmas S kustība ir apskatīta triedrā $Oxyz$, kuŗa sākuma punkts O kustas pēc kāda noteikta likuma pret nekustīgo triedru ΩXYZ un kuŗa asis paliek ar invariābliem virzieniem pret to, tad, apzīmējot ar $\mathbf{v}_O$ punkta O ātrumu pret ΩXYZ un ar $\mathbf{v}_i^{(r)}$ punkta P_i relātīvo ātrumu triedrā $Oxyz$, punkta P_i absolūtam ātrumam $\mathbf{v}_i$, pēc ātrumu kompozicijas likuma, dabūjam izteiksmi

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_i^{(r)}.$$

Ievietojot šo $\mathbf{v}_i$ izteiksmi sistēmas S kinētiskās enerģijas T definīcijas formulā

$$(1.) \qquad T = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \,.\, \mathbf{v}_i \,,$$

dabūjam, ka

$$(2.) \qquad T = \tfrac{1}{2}\, m v_O{}^2 + \tfrac{1}{2} \sum_i m_i v_i^{(r)\,2} + \mathbf{v}_O \,.\, \sum_i m_i \mathbf{v}_i^{(r)},$$

kur m apzīmē sistēmas S masu.

(2.) formula dod sistēmas S kinētiskās enerģijas izteiksmi triedrā ΩXYZ kā triju locekļu summu, no kuŗiem pirmais reprezentē punkta O kinētisko enerģiju, ja tanī būtu koncentrēta visa sistēmas masa, otrs — sistēmas kinētisko enerģiju tās relātīvā kustībā, un, beidzot, trešais loceklis ir atkarīgs kā no sistēmas relātīvās, tā no punkta O absolūtās kustības.

198. **Königa teōrēma.** — Apskatīsim (2.) formulas pārveidošanos, ja punkts O sakrīt ar sistēmas S masas centru G un kustīgā triedra $Gxyz$ (T_G) asis kustībā pret nekustīgo triedru ΩXYZ(T) vienmēr paliek parallēlas šī triedra attiecīgajām asīm.

Tādā gadījumā (2.) formulas trešais loceklis, kas tagad ir ar formu

$$\mathbf{v}_G \,.\, \sum_i m_i \mathbf{v}_i^{(r)},$$

kur $\mathbf{v}_G$ apzīmē masas centra G absolūto ātrumu, bet $\mathbf{v}_i^{(r)}$ punkta P_i relātīvo ātrumu pret G, ir nulle.

Tiešām, iedomājoties punktu O sakrītam ar G un diferencējot masas centra G definīcijas formulu

$$\sum_i m_i \overline{GP_i} = 0,$$

dabūjam

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i^{(r)} = 0.$$

Un tā tad (2.) formula reducējas par formulu

$$(3.)\qquad T = \tfrac{1}{2}\, m v_G^2 + \tfrac{1}{2} \sum_i m_i v_i^{(r)2} = T_G + \tfrac{1}{2} m v_G^2,$$

kas izteic šādu Königa teōrēmu: *Jebkuŗā momentā t materiālās sistēmas S kinētiskā energija ir vienāda* 1° *ar šīs sistēmas kinētiskās enerģijas — tās relātīvā kustībā pret masas centru G — un* 2° *tās masas centra G, kuŗā jāiedomājas koncentrēta visa sistēmas masa, kinētiskās enerģijas summu.*

44. §. Cieta ķermeņa kinētiskā enerģija.

199. **Vispārīga kustība.** — Apskatīsim cieta ķermeņa S kinētiskās enerģijas T aprēķināšanu šī ķermeņa vispārīgā kustībā pret absolūto references triedru T.

Ja apzīmējam, kā agrāk, ar $\mathbf{v}_O$ un $\boldsymbol{\omega}$ cieta ķermeņa S kustības raksturīgos vektorus pret kādu tā punktu O resp. šo vektoru koordinātas kādā, ar ķermeni nekustīgi saistītā, triedrā $Oxyz$ attiecīgi ar u, v, w un p, q, r, tad jebkuŗa ķermeņa S punkta P_i ātrums $\mathbf{v}_i$ ir dots ar formulu

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OP_i}.$$

Ievietojot šo $\mathbf{v}_i$ izteiksmi T definīcijas (1.) formulā, analogi sistēmas kinētiskās enerģijas (2.) formulai, dabūjam T formā

$$(4.)\qquad T = T' + T'' + T''',$$

kur

$$(5.')\qquad T' = \tfrac{1}{2}\, m\, v_O^{\,2},$$

$$(5.'')\qquad T'' = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \overline{OP_i})^2,$$

$$(5.''')\qquad T''' = \sum_i m_i\, \mathbf{v}_O \,.\, (\boldsymbol{\omega} \times \overline{OP_i}).$$

Lielums T' reprezentē cieta ķermeņa S kinētisko enerģiju translācijas kustībā ar ātrumu $\mathbf{v}_O$.

Lai interpretētu ģeometriski T'', apzīmēsim cieta ķermeņa momentāno rotācijas asi pret punktu O kā fiksētu punktu ar Δ. Tās vērsums tad ir noteikts ar vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Ja punkta P_i attālumu līdz asij Δ apzīmē ar d_i, tad vektora $\boldsymbol{\omega} \times \overline{OP_i}$ moduls ir ωd_i, un tā tad

$$T'' = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i d_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2} I_\Delta \omega^2 ,$$

kur I_Δ apzīmē ķermeņa S inercijas momentu pret asi Δ. Ja ass Δ virziena kosini ir α, β, γ, kas reizē ir arī vektora $\boldsymbol{\omega}$ versora $\mathbf{u}$ koordinātas, pie kam $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}$, tad

$$I_\Delta = \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{u} = \frac{1}{\omega^2} \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \boldsymbol{\omega} \,.\, \boldsymbol{\omega} ,$$

kur $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)$ apzīmē ķermeņa S inercijas tensoru pret punktu O.

Tādējādi

$$(6.)\qquad \begin{aligned} T'' &= \tfrac{1}{2} \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \boldsymbol{\omega} \,.\, \boldsymbol{\omega} \\ &= \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,F\,pq) . \end{aligned}$$

Beidzot, locekli T''', atsaucoties uz jaukta produkta īpašību, var pārrakstīt formā

$$T''' = (\sum_i m_i \overline{OP_i} \times \mathbf{v}_O) \,.\, \boldsymbol{\omega} ,$$

kas, ievērojot ķermeņa S masas centra G definīcijas formulu

$$m\,\overline{OG} = \sum_i m_i \overline{OP_i}$$

pret punktu O, iegūst galīgo izskatu

$$(7.)\qquad T''' = (m\,\overline{OG} \times \mathbf{v}_O) \,.\, \boldsymbol{\omega} = m \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix} ,$$

kur x_0, y_0, z_0 apzīmē masas centra G koordinātas triedrā $Oxyz$.

Un tā tad

$$(8.)\qquad T = \tfrac{1}{2} m\,v_O{}^2 + \tfrac{1}{2} \overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S) \,.\, \boldsymbol{\omega} \,.\, \boldsymbol{\omega} + (m\,\overline{OG} \times \mathbf{v}_O) \,.\, \boldsymbol{\omega} .$$

Pēdējā formula rāda, ka ķermeņa S kinētiskā enerģija T ir kvadrātiska funkcija attiecībā pret ķermeņa kustībai raksturīgo vektoru $\mathbf{v}_O$ un $\boldsymbol{\omega}$, kas konstruēti punktā O, koordinātām u, v, w un p, q, r.

Ja redukcijas centrs O sakrīt ar ķermeņa masas centru G un triedra $Gxyz$ asis sakrīt ar ķermeņa S inercijas galvenām asīm pret punktu G, tad $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $D = E = F = 0$, un A, B, C kļūst inercijas galvenie momenti. Tādā gadījumā T definīcijas formula reducējas par

$$T = \tfrac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2) + \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

kas ir salikta no ķermeņa kinētiskās enerģijas, tā kustībā pret masas centru, un masas centra, kuŗā jāiedomājas koncentrēta visa sistēmas masa, kinētiskās enerģijas, kā to prasa Königa teōrēma.

Ja ir doti cieta ķermeņa kustībai raksturīgie vektori $\mathbf{v}_G$ un $\boldsymbol{\omega}$ pret tā masas centru G, tad pēc Königa teōrēmas

$$T = \tfrac{1}{2} m v_G{}^2 + \tfrac{1}{2} \overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) \,.\, \boldsymbol{\omega} \,.\, \boldsymbol{\omega}.$$

Ievietojot šai izteiksmē $\mathbf{v}_G$ koordinātu izteiksmes, kuŗas aprēķinātas triedrā $Oxyz$, kas ir nekustīgi saistīts ar cieto ķermeni, dabūjam, ka

$$T = \tfrac{1}{2} m \left[(u + qz_0 - ry_0)^2 + (v + rx_0 - pz_0)^2 + (w + py_0 - qx_0)^2 \right] + \tfrac{1}{2}(A_G p^2 + B_G q^2 + C_G r^2 - 2\, D_G qr - 2\, E_G rp - 2\, F_G pq).$$

Ja triedra $Oxyz$ asis ir izvēlētas paralēli ķermeņa S inercijas centrālām asīm, tad $D_G = E_G = F_G = 0$, un pēdējā T izteiksme attiecīgi vienkāršojas.

Tā kā skālāra $T(u, v, w;\, p, q, r)$ parciālie atvasinājumi $\dfrac{\partial T}{\partial p}$, $\dfrac{\partial T}{\partial q}$, $\dfrac{\partial T}{\partial r}$ ir vienādi ar vektora $\mathbf{Q}$ koordinātām Q_x, Q_y, Q_z, tad, atsaucoties uz skālāra gradienta definīciju, varam rakstīt, ka

$$\mathbf{Q} = \mathbf{grad}\, T(p, q, r). \tag{9.}$$

Analogi skālāra $T(u, v, w;\, p, q, r)$ parciālie atvasinājumi $\dfrac{\partial T}{\partial u}$, $\dfrac{\partial T}{\partial v}$, $\dfrac{\partial T}{\partial w}$ ir vienādi ar vektora $\mathbf{K}$ koordinātām K_x, K_y, K_z [190. nodal. (18.) sistēmas formulas], un tā tad

$$\mathbf{K} = \mathbf{grad}\, T(u, v, w). \tag{10.}$$

Tā kā T ir sešu mainīgu lielumu u, v, w, p, q, r homogena kvadrātiska funkcija, tad, atsaucoties uz Eulera teōrēmu un ievērojot (9.) un (10.) formulu, dabūjam raksturīgu sakarību

$$(11.) \qquad T = \tfrac{1}{2}\mathbf{K}\,.\,\mathbf{v}_O + \tfrac{1}{2}\mathbf{Q}\,.\,\boldsymbol{\omega}\,.$$

Ja redukcijas centrs O sakrīt ar masas centru G, tad $\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_G$ un

$$(12.) \qquad T = \tfrac{1}{2} m\, v_G^2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{Q}\,.\,\boldsymbol{\omega}\,.$$

200. **Kustība ap nekustīgu punktu vai asi.** — Ja ķermenis S ir fiksēts kādā tā punktā, tad, izvēloties šo punktu par redukcijas centru O, kā arī par kustiga koordinātu triedra $Oxyz$, kas saistīts ar šo ķermeni, sākuma punktu, $\mathbf{v}_O = 0$ resp. $u = v = w = 0$. Bet tādā gadījumā $T' = T''' = 0$, un tā tad ķermeņa S kinētiskā enerģija ir dota ar formulu

$$(13.) \qquad T = T'' = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq).$$

Ja triedra $Oxyz$ asis sakrīt ar inercijas galvenām asīm pret punktu O, tad $D = E = F = 0$ un

$$(14.) \qquad T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)\,.$$

(13.) formula reprezentē cieta ķermeņa S kinētisko enerģiju arī tā kustībā ap kādu nekustīgu asi Δ, ja triedra $Oxyz$ sākuma punkts ir izvēlēts uz šīs ass. Bet tā kā šai gadījumā vektora $\boldsymbol{\omega}$ virziens sakrīt ar šo asi, tad, izvēloties to par kādu no koordinātu asīm, piem. Oz-asi,

$$p = q = 0\,, \quad |r| = \omega\,,$$

un (13.) formula reducējas par formulu

$$(15.) \qquad T = \tfrac{1}{2}Cr^2 = \tfrac{1}{2}C\omega^2\,,$$

kur C apzīmē cieta ķermeņa inercijas momentu pret rotācijas asi Δ.

201. **Ģeometriska sakarība starp $\boldsymbol{\omega}$ un $\mathbf{Q}$.** — Cieta ķermeņa S kustībā pret triedru $Oxyz$, kas sakrīt ar S inercijas galveno asu triedru punktā O, skālārais produkts

$$(16.) \qquad \tfrac{1}{2}\mathbf{Q}\,.\,\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

reprezentē šī ķermeņa kinētisko enerģiju kā absolūtā kustībā, tā relātīvā kustībā pret tā masas centru G atkarībā no tā, vai kinētiskā momenta $\mathbf{Q}$ redukcijas centrs O ir nekustīgs cieta ķermeņa punkts [$\mathbf{v}_O = 0$ (11.) formulā], vai arī tas sakrīt ar masas centru G [otrs loceklis (12.) formulā].

Ja abos gadījumos (16.) skālāro produktu apzīmē ar T, tad, ievērojot, ka tas reprezentē pozitīvi definītu kvadrātisku formu pret p, q, r, leņķis, ko veido vektori $\boldsymbol{\omega}$ un $\mathbf{Q}$, ir vienmēr šaurs.

Ar to pašu formulu iespējams konstruēt viena no diviem vektoriem $\boldsymbol{\omega}$ un $\mathbf{Q}$ virzienu un noteikt vērsumu, ja dots ir otrs vektors.

Tiešām, tā kā pēc 159. nodal. I teorēmas ķermeņa S inercijas tensora $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)$ pret punktu O reprezentētāja elīpsoīda $Q^*(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$ punktā P, kuŗā ass $O\boldsymbol{\omega}$ ar virziena kosiniem, kas ir proporcionāli p, q, r, krusto šo elīpsoīdu, tangentiālā plakne ir perpendikulāra vektoram

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\omega}\,\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)\,.\,\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{Q}}{\omega}$$

resp. ķermeņa kinētiskam momentam $\mathbf{Q}$ pret punktu O (abos minētos gadījumos formula, kas dod $\mathbf{Q}$, reducējas par $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_O(S)\,.\,\boldsymbol{\omega}$), tad, velkot no inercijas elīpsoīda centra O perpendikulu pret šo tangentiālo plakni un ievērojot, ka leņķim starp $\boldsymbol{\omega}$ un $\mathbf{Q}$ jābūt šauram, dabūjam vektora $\mathbf{Q}$ virzienu un vērsumu.

Lai $\mathbf{Q}$ virziens sakristu ar $\boldsymbol{\omega}$ virzienu, inercijas elīpsoīda tangentiālplaknei rotācijas ass $\boldsymbol{\omega}$ krustošanās punktā ar elīpsoīdu jābūt perpendikulārai pret $\boldsymbol{\omega}$, citiem vārdiem sakot, rotācijas asij $\boldsymbol{\omega}$ ir jābūt vienai no inercijas elīpsoīda galvenām asīm.

Otrādi, ja dots ir vektors $\mathbf{Q}$, tad, velkot inercijas elīpsoīdam vienu no divām tangentiālplaknēm, kas ir perpendikulāras $\mathbf{Q}$, un savienojot punktu O ar tangentiālplaknes pieskaršanās punktu, dabūjam vektora $\boldsymbol{\omega}$ virzienu. Tā vērsums nosakāms tādējādi, lai leņķis starp vektoriem $\mathbf{Q}$ un $\boldsymbol{\omega}$ būtu šaurs.

Inercijas elīpsoīda centra O attālums līdz tangentiālplaknei punktā P ir dots ar formulu

$$\delta = \frac{\sqrt{2T}}{Q}.$$

45. §. Galvenais references triedrs.

202. **Definīcijas.** — Sistēmas S kinētiskā enerģija pēc definīcijas, kā to jau uzsvērām, ir relātīvs lielums, t. i. tas ir atkarīgs no kustības references triedra. Mēģināsim tagad noteikt references triedru, pret kuŗu sistēmas S kinētiskā enerģija ir vismazākā.

1° *Galvenā triedra pirmā definīcija.* — *Par sistēmas S galveno references triedru T_g sauc tādu triedru, pret kuŗu šīs sistēmas kustības daudzumu vektoru $m_i\,\mathbf{v}_i$ sistēma ir ekvivalenta nullei.*

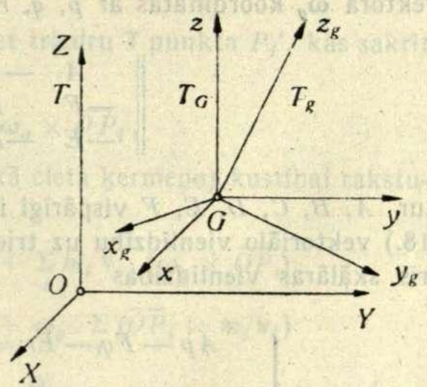
Noskaidrosim, vai šāds triedrs eksistē un kā to noteikt. Apzīmēsim sistēmas S punkta P_i, kuŗa masa ir m_i, ātrumu momentā t meklētajā triedrā T_g ar $\mathbf{v}_i$. Pēc definīcijas triedram T_g, apzīmējot ar O kādu tā punktu, ir jāapmierina divi noteikumi

$$(17.)\qquad \mathbf{K} = \sum_i m_i\,\mathbf{v}_i = 0\,, \qquad \mathbf{Q} = \sum_i (\overline{OP_i} \times m_i\,\mathbf{v}_i) = 0,$$

kas izteic sistēmas S kustības daudzumu vektoru sistēmas $m_i\,\mathbf{v}_i$ ekvivalenci ar nulli.

(17.) sistēmas pirmais noteikums rāda, ka sistēmas S masas centrs G pret triedru T_g ir nekustīgs. Tādēļ par triedra T_g sākuma punktu var izvēlēties pašu sistēmas S masas centru G.

Tālāk apskatīsim kādu references triedru T un tam atbilstošo triedru T_G sistēmas S kustības definēšanai pret tās masas centru G (109. zīm.).



109. zīm.

Apzīmēsim ar $\mathbf{w}_i$ punkta P_i ātrumu momentā t triedrā T_G un ar $\mathbf{w}_i'$ triedra T_g punkta P_i', kas momentā t sakrīt ar punktu P_i, ātrumu pret triedru T_G (punkta P_i pārnešanas ātrums). Pēc ātrumu kompozicijas likuma tad

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i'.$$

Bet tā kā, ievērojot (17.) sakarību sistēmu,

$$\mathbf{Q}_G = \sum_i (\overline{GP_i} \times m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{Q} + \overline{GO} \times \mathbf{K} = 0,$$

tad

$$\sum_i (\overline{GP_i} \times m_i \mathbf{w}_i') = \sum_i (\overline{GP_i} \times m_i \mathbf{w}_i).$$

Un tā kā triedra T_g punkti P_i', kas momentā t sakrīt ar attiecīgajiem sistēmas S punktiem P_i, kustas savā kopumā pret triedru T_G kā ciets ķermenis, tad, apzīmējot triedra T_g momentāno rotāciju pret triedru T_G ar $\boldsymbol{\omega}_g$ un sistēmas S inercijas tensoru pret G ar $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S)$, kas ir ar laiku t mainīgs lielums tāpat kā triedra T_g punkti P_i', pēdējo sakarību var pārrakstīt formā

$$\overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) \,.\, \boldsymbol{\omega}_g = \sum_i (\overline{GP_i} \times m_i \mathbf{w}_i). \tag{18.}$$

(18.) sakarība definē triedra T_g rotāciju pret T_G resp. pierāda viena vienīga triedra T_g eksistenci, pret kuŗu sistēmas S kustības daudzumu vektoru $m_i \mathbf{v}_i$ sistēma ir ekvivalenta nullei.

Apzīmējot triedrā T_G punkta P_i koordinātas ar x_i, y_i, z_i, vektora $\boldsymbol{\omega}_g$ koordinātas ar p, q, r un tensora $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S)$ matricu ar

$$\left\| \begin{matrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{matrix} \right\|,$$

kur A, B, C, D, E, F vispārīgi ir laika t funkcijas, un projicējot (18.) vektoriālo vienlīdzību uz triedra T_G koordinātu asīm, dabūjam trīs skālāras vienlīdzības

$$\left\{ \begin{aligned} Ap - Fq - Er &= \sum_i m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i), \\ -Fp + Bq - Dr &= \sum_i m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i), \\ -Ep - Dq + Cr &= \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i), \end{aligned} \right. \tag{19.}$$

kas determinē p, q, r resp. sistēmas S galveno references triedru T_g.

Speciālā gadījumā, kad triedrs T_G jebkuŗā momentā sakrīt ar sistēmas S inercijas centrālo triedru, $D = E = F = 0$ jebkuŗā momentā, un galvenā triedra T_g rotācija pret inercijas centrālo triedru ir definēta ar vektora $\boldsymbol{\omega}_g$ koordinātām

$$p = \frac{\sum_i m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i)}{A}, \quad q = \frac{\sum_i m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i)}{B},$$

$$r = \frac{\sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i)}{C}.$$

203. **Puankarè[1]) un Lerù[2]) teōrēma. Galvenā triedra otra definīcija.** — Teōrēma. — *Sistēmas S kustībā pret kādu triedru* T *tās kinētiskā enerģija momentā t ir vienāda* 1° *ar šīs sistēmas kinētiskās enerģijas šai momentā pret tās* (S) *galveno triedru* T_g *un* 2° *tās punktu, kas momentā t sakrīt ar triedra* T_g *punktiem, kinētiskās enerģijas, triedra* T_g *kustībā pret triedru* T, *summu.*

Ja sistēmas S punkta P_i ātrumu momentā t pret triedru T_g apzīmē ar $\mathbf{v}_i$, bet triedra T_g punkta P_i', ar kuŗu šai momentā sakrīt punkts P_i, ātrumu, šī triedra kustībā pret triedru T, ar $\mathbf{v}_i'$, tad sistēmas S kinētiskā enerģija T triedrā T ir dota ar izteiksmi

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i')$$

vai

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i' + \tfrac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2.$$

Bet tā kā triedra T_g kustībā pret triedru T punkta P_i', kas sakrīt ar P_i, ātrums ir dots ar formulu

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_{og} + \boldsymbol{\omega}_g \times \overline{OP}_i,$$

kur $\mathbf{v}_{og}$ un $\boldsymbol{\omega}_g$ apzīmē triedra T_g (kā cieta ķermeņa) kustībai rakstu-rīgos vektorus pret punktu O, tad

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i' &= \mathbf{v}_{og} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i + \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot (\boldsymbol{\omega}_g \times \overline{OP}_i) \\ &= \mathbf{v}_{og} \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_g \cdot \sum_i (\overline{OP}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \\ &= \mathbf{v}_{og} \cdot \mathbf{K} + \boldsymbol{\omega}_g \cdot \mathbf{Q},\end{aligned}$$

kas ir vienāds ar nulli, ievērojot T_g definīcijas (17.) noteikumu sistēmu.

Un tā tad

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + \tfrac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2, \tag{20.}$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

---

1) H. Poincaré (1854.—1912. g.), ģeniāls franču matēmatiķis.

2) Le Roux.

2° *Galvenā triedra otra definīcija. — Sistēmas S galvenais references triedrs T_g ir tāds triedrs, pret kuŗu tās kinētiskā enerģija ir vismazākā.*

Tiešām, pret jebkuŗu triedru T sistēmas S kinētiskā enerģija T ir dota ar formulu

$$T = T_g + \tfrac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2,$$

kur T_g apzīmē sistēmas kinētisko enerģiju pret galveno triedru T_g. Šī formula rāda, ka vienmēr

$$T > T_g,$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

204. **Sistēmas S galvenā triedra T_g neatkarība no kinēmatiskā laika t.** — Ja parametru — kinēmatisko laiku t aizstāj ar jaunu parametru — kinēmatisko laiku Θ, kas definēts ar formulu

$$t = \varphi(\Theta),$$

un apzīmē kāda sistēmas S punkta P_i ātrumu pret kādu triedru T un laiku t ar $\mathbf{v}_i$, bet tā paša punkta P_i ātrumu pret to pašu triedru un laiku Θ ar $\mathbf{v}_i'$, tad sakarības

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i \frac{d\varphi(\Theta)}{d\Theta}, \quad T' = T\left(\frac{d\varphi(\Theta)}{d\Theta}\right)^2,$$

kur T' apzīmē sistēmas S kinētisko enerģiju triedrā T, kuŗa sastādīta ar ātrumu $\mathbf{v}_i'$, rāda, ka references triedrs, pret kuŗu sistēmas kinētiskā enerģija ir vismazākā, jeb, citiem vārdiem sakot, sistēmas S galvenais triedrs T_g, ir neatkarīgs no izvēlētā kinēmatiskā laika.

XII NODAĻA.

PAĀTRINĀJUMA ENERĢIJA.

46. §. Paātrinājuma enerģijas definīcija un Königa teorēma.

205. **Materiāla punkta un materiālas sistēmas paātrinājuma enerģija.** — Apzīmējot materiālā punkta P, kuŗa masa ir m, koordinātas izvēlētajā references triedrā T momentā t ar x, y, z un paātrinājumu ar $\mathbf{a}$, ar šī *punkta paātrinājuma enerģiju momentā* t saprot skālāro lielumu

$$E = \tfrac{1}{2}\, m\, \mathbf{a} \,.\, \mathbf{a} = \tfrac{1}{2}\, m\, (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) = \tfrac{1}{2}\, m a^2,$$

kur a apzīmē punkta P paātrinājuma absolūto vērtību.

Apzīmējot materiālās sistēmas S punkta P_i, kuŗa masa ir m_i, koordinātas izvēlētajā references triedrā T momentā t ar x_i, y_i, z_i un paātrinājumu ar $\mathbf{a}_i$, ar šīs *sistēmas paātrinājuma enerģiju momentā* t saprot sistēmas S atsevišķo punktu paātrinājumu enerģiju algebrisko summu, t. i. lielumu

$$E = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i\, \mathbf{a}_i \,.\, \mathbf{a}_i = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i\, (\ddot{x}_i^2 + \ddot{y}_i^2 + \ddot{z}_i^2) = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i\, a_i^2 .$$

Sistēmas paātrinājuma enerģija, tāpat kā kinētiskā enerģija, ir atkarīga no sistēmas kustības references triedra.

206. **Königa teorēma.** — *Jebkuŗā momentā t materiālās sistēmas S paātrinājuma enerģija ir vienāda* 1° *ar šīs sistēmas S paātrinājuma enerģijas — tās relātīvā kustībā pret masas centru G — un* 2° *tās masas centra G, kuŗā jāiedomājas koncentrēta visa sistēmas masa, paātrinājuma enerģijas summu.*

Apzīmēsim kustības references triedru ar T un tam atbilstošo triedru — sistēmas S kustības definēšanai pret tās masas centru G — ar T_G.

Tālāk, apzīmēsim ar $\mathbf{a}_a$ un $\mathbf{a}_r$ sistēmas S punkta P_i, kuŗa masa ir m_i, paātrinājumu triedrā T resp. triedrā T_G un ar $\mathbf{a}_G$ masas centra G paātrinājumu triedrā T. Pēc paātrinājumu kompozicijas likuma

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_G .$$

Sistēmas S paātrinājuma enerģija triedrā **T** pēc definīcijas ir dota ar formulu

$$E = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{a}_a \cdot \mathbf{a}_a = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_G) \cdot (\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_G)$$

jeb

$$E = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i a_r^2 + \mathbf{a}_G \cdot \sum_i m_i \mathbf{a}_r + \tfrac{1}{2} m a_G^2,$$

kur m apzīmē sistēmas totālo masu. Bet, atsaucoties uz masas centra G definīcijas formulu,

$$\sum_i m_i \overline{GP_i} = 0$$

resp.

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_r = 0,$$

un tā tad

$$E = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i a_r^2 + \tfrac{1}{2} m a_G^2,$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

47. §. Königa teorēmu sinteze.

207. **Sintetiska relācija.** — Königa dažādās teorēmas, kuŗas līdz šim esam pierādījuši, saistās ar vienu tensoru teorijas sintetisku relāciju, kuŗu tagad uzrakstīsim.

Apzīmēsim ar **A** un **B** divus vektorus un ar $\mathbf{U}_p$ un $\mathbf{V}_p$ divas vektoru sistēmas, kas saistītas ar punktiem P_p, kuŗu attiecīgās masas ir m_p, pie kam

$$\sum_p m_p \mathbf{U}_p = 0, \quad \sum_p m_p \mathbf{V}_p = 0.$$

Tālāk iedomāsimies, ka

$$m = \sum_p m_p,$$

un apskatīsim divus otrās kārtas tensorus

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_p m_p (\mathbf{U}_p + \mathbf{A})(\mathbf{V}_p + \mathbf{B}),$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_G = \sum_p m_p \mathbf{U}_p \mathbf{V}_p.$$

Salīdzinot pēdējās divas relācijas, dabūjam meklēto sintetisko relāciju

$$(9.)\qquad \overline{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{T}}}_G + m\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,.$$

Secinājumi: 1° *Tensora* $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ *komponenti ir vienādi ar tensoru* $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_G$ *un* $m\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ *attiecīgo komponentu summu.*

2° *Tensora* $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$, *kuŗa simmetriskais komponents ir* $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$, *kontrakcijas invariants*

$$D_{11} + D_{22} + D_{33}$$

ir vienāds ar tensoru $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_G$ *un* $m\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ *attiecīgo simmetrisko komponentu kontrakcijas invariantu summu.*

208. **Königa teorēmu sinteze.** — Apzīmēsim ar O kādu nekustīgu punktu un ar G sistēmas S masas centru. Tad

1°, ja $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \overline{OG}$, $\mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p = \overline{GP}$, (9.) sintetiskā relācija izteic Königa teorēmu par sistēmas S inercijas tensoru;

2°, ja $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \dfrac{d\overline{OG}}{dt}$, $\mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p = \dfrac{d\overline{GP}}{dt}$, 2° secinājums izteic Königa teorēmu par sistēmas S kinētisko enerģiju;

3°, ja $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \dfrac{d^2\overline{OG}}{dt^2}$, $\mathbf{U}_p = \mathbf{V}_p = \dfrac{d^2\overline{GP}}{dt^2}$, 2° secinājums izteic Königa teorēmu par sistēmas S paātrinājuma enerģiju;

4°, ja $\mathbf{A} = \overline{OG}$, $\mathbf{B} = \dfrac{d\overline{OG}}{dt}$, $\mathbf{U}_p = \overline{GP}$, $\mathbf{V}_p = \dfrac{d\overline{GP}}{dt}$, 1° secinājums izteic Königa teorēmu par sistēmas S kinētisko momentu, apskatot tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ slīpsimmetrisko komponentu.

48. §. Privilēģētie un absolūtie references triedri.

209. **Materiālas sistēmas privilēģētie un absolūtie triedri.** — Saprotot *ar materiālas sistēmas* S *paātrinājumu daudzumu sistēmu* vektoru sistēmu, kuŗas vektora $m_i\mathbf{a}_i$ sākuma punkts sakrīt ar sistēmas S punktu P_i, kuŗa masa ir m_i un paātrinājums $\mathbf{a}_i$, meklēsim references triedru klasi, pret kuŗu dotās sistēmas S paātrinājumu daudzumu sistēma $m_i\,\mathbf{a}_i$ ir ekvivalenta nullei. Šos triedrus pēc definīcijas sauksim par *sistēmas* S *privilēģētiem triedriem* T_p.

Vispirms sistēmas S galvenais triedrs T_g un visi triedri T_a, kas atrodas vienmērīgas taisnlīnijas translācijas kustībā pret to, pieder pie privilēģēto triedru T_p klases. Tiešām, jebkuŗā triedrā T_a punkta P_i paātrinājums $\mathbf{a}_i$ ir tāds pats kā triedrā T_g (pēc triedra T_a definīcijas), bet ja šī punkta ātrumu triedrā T_g apzīmē ar $\mathbf{v}_i$ un izvēlas kādu punktu O, tad pēc triedra T_g definīcijas

$$\mathbf{K} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = 0\,, \quad \mathbf{Q} = \sum_i (\overline{OP_i} \times m_i \mathbf{v}_i) = 0\,.$$

Diferencējot šīs sakarības pēc laika t, dabūjam noteikumus

$$(1.)\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum\limits_i m_i \mathbf{a}_i = 0\,, \\ \dfrac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum\limits_i (\overline{OP_i} \times m_i \mathbf{a}_i) + \sum\limits_i \left(\dfrac{d\,\overline{OP_i}}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i\right) = \sum\limits_i (\overline{OP_i} \times m_i \mathbf{a}_i) = 0 \end{cases}$$

(otrā summa ir nulle, jo ikviena punkta P_i kustības daudzums $m_i \mathbf{v}_i$ ir parallēls punkta P_i ātrumam $\dfrac{d\,\overline{OP_i}}{dt}$), kas savkārt definē vienu privilēģēto triedru T_p.

Pēdējā sakarība rāda, ka sistēmas S paātrinājumu daudzumu sistēmas $m_i\mathbf{a}_i$ rezultētājs moments pret kādu punktu O ir vienāds ar S kustības daudzumu sistēmas rezultētāja momenta pret to pašu punktu O atvasinājumu.

Triedrus T_a, kas veido trīskārt bezgala lielu (∞^3) klasi, sauc par *sistēmas S absolūtiem triedriem.*

Bet privilēģēto triedru T_p klase ir daudz plašāka par absolūto triedru T_a klasi. Lai noteiktu visus privilēģētos triedrus T_p, pietiek noteikt triedru T_p klases apakšklasi T_G, pret kuŗas ikvienu triedru sistēmas S masas centrs G ir nekustīgs. Tad visi triedri, kas pret ikvienu no triedriem T_G atrodas vienmērīgas taisnlīnijas translācijas kustībā, arī pieder pie privilēģēto triedru T_p klases, jo paātrinājumi ikvienā triedrā T_p un atbilstošajā T_G ir vienādi. Pie tam ir skaidrs, ka šādi iegūsim visus privilēģētos triedrus T_p, jo ikvienam triedram T_p atbilst viens triedrs T_G sistēmas relātīvā kustībā pret G no klases T_p. Tālāk pierādīsim, ka eksistē trīskārt bezgala liela (∞^3) triedru T_G klase kā triedru T_p klases apakšklase, bet tā kā katrs triedrs T_G ar vienmērīgu taisnlīnijas translāciju dod trīskārt bezgala lielu (∞^3) triedru T_p klasi, tad pavisam eksistē seškārt bezgala liela (∞^6) privilēģēto triedru T_p klase.

Tiešām, apzīmējot ar $\boldsymbol{\omega}_g$ sistēmas S galvenā triedra T_g rotāciju pret triedru T_G un ar $\mathbf{w}_i$ sistēmas S kāda punkta P_i ātrumu šai triedrā, redzējām, ka

$$\text{(2.)} \qquad \overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) \,.\, \boldsymbol{\omega}_g = \sum_i (\overline{GP_i} \times m_i \mathbf{w}_i),$$

kur $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S)$ apzīmē sistēmas S centrālo inercijas tensoru.

Lai triedrs T_G būtu privilēģētais triedrs, tad jābūt ievērotiem noteikumiem

$$\text{(3.)} \qquad \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{w}_i = 0\,, \quad \frac{d}{dt} \sum_i (\overline{GP_i} \times m_i \mathbf{w}_i) = 0.$$

Pirmais no šiem noteikumiem ir vienmēr ievērots sistēmas S kustībā pret tās masas centru G, kā to rāda masas centra G definīcijas formula

$$\sum_i m_i \overline{GP_i} = 0\,,$$

to divreiz diferencējot. Tādēļ nepieciešamais un pietiekamais noteikums, lai T_G būtu sistēmas S privilēģētais triedrs, ir, lai (3.) sistēmas otrs noteikums būtu ievērots resp., kā to rāda (2.) sakarība, lai $\overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) \,.\, \boldsymbol{\omega}_g$ atvasinājums pēc laika t pret triedru T_G būtu nulle.

Tādējādi, atsaucoties uz vektora fundāmentālo atvasināšanas formulu, nepieciešamais un pietiekamais noteikums, lai T_G būtu sistēmas S privilēģētais triedrs, ir

$$\text{(4.)} \qquad \frac{d}{dt} (\overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) \,.\, \boldsymbol{\omega}_g) + \boldsymbol{\omega}_g \times (\overline{\overline{\mathbf{I}}}_G(S) \,.\, \boldsymbol{\omega}_g) = 0\,,$$

kur atvasinājums kreisajā pusē nozīmē atvasinājumu pret S galveno triedru T_g.

(4.) vektoriālais vienādojums definē galvenā triedra T_g rotāciju $\boldsymbol{\omega}_g$ pret privilēģēto triedru T_G, un tā tad $\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}_g$ ir triedra T_G reciprokās kustības pret triedru T_g rotācija.

Projicējot (4.) vektoriālo vienādojumu uz sistēmas S galvenā triedra T_g asīm, dabūjam trīs līneārus pirmās kārtas diferenciālvienādojumus attiecībā pret vektora $\boldsymbol{\omega}_g$ koordinātām p, q, r, un tā kā šo vienādojumu integrācija ir atkarīga no trim konstantēm, tad eksistē pavisam trīskārt bezgala daudz (∞^3) triedru T_G, kas pieder pie triedru T_p klases.

Bet ņemot vērā, ka katrs triedrs T_G savkārt dod trīskārt bezgala daudz (∞^3) triedru T_p, dotajai sistēmai S pavisam eksistē seškārt bezgala daudz (∞^6) privilēģēto triedru T_p.

210. **Privilēģētā triedra atkarība no kinēmatiskā laika.** — Aizstājot kinēmatisko laiku t ar jaunu kinēmatisku laiku Θ, kas definēts ar vienādojumu

$$t = \varphi(\Theta),$$

un apzīmējot kāda sistēmas S punkta P_i ātrumu un paātrinājumu pret triedru T un laiku t ar $\mathbf{v}_i$ un $\mathbf{a}_i$, bet tā paša punkta P_i paātrinājumu pret triedru T un laiku Θ ar $\mathbf{a}_i'$, redzam, ka $\mathbf{a}_i'$ ir dots ar formulu

$$\mathbf{a}_i' = \mathbf{a}_i \left(\frac{d\varphi}{d\Theta}\right)^2 + \mathbf{v}_i \left(\frac{d^2\varphi}{d\Theta^2}\right).$$

Noteikumi, lai triedrs T būtu privilēģēts, tad transformējas formā

$$\left(\frac{d\varphi}{d\Theta}\right)^2 \sum_i m_i \mathbf{a}_i + \left(\frac{d^2\varphi}{d\Theta^2}\right) \sum_i m_i \mathbf{v}_i = 0,$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\Theta}\right)^2 \sum_i (\overline{OP_i} \times m_i \mathbf{a}_i) + \left(\frac{d^2\varphi}{d\Theta^2}\right) \sum_i (\overline{OP_i} \times m_i \mathbf{v}_i) = 0,$$

un vispārīgi tie nav apmierināti ar (1.) noteikumu sistēmu, citiem vārdiem sakot, privilēģētie triedri (izņemot vienīgi galveno triedru), un tā tad arī absolūtie triedri, mainās atkarībā no kinēmatiskā laika.

211. **Cieta ķermeņa privilēģētie un absolūtie triedri.** — Iedomāsimies, ka materiālā sistēma S ir ciets ķermenis S, kas reizē ir arī sevis paša galvenais triedrs T_g, jo ķermeņa kinētiskā enerģija pret sevi pašu ir nulle, t. i. vismazākā. Tādā gadījumā ķermeņa S centrālais inercijas tensors $\overline{\overline{\mathrm{I}}}_G(S)$ ir no laika t neatkarīgs. Ja triedra T_g definēšanai par references triedru izvēlas ķermeņa S centrālo inercijas triedru $Gxyz$, tad vektora $\overline{\overline{\mathrm{I}}}_G(S)\,.\,\boldsymbol{\omega}_g$ projekciju uz šī triedra asīm algebriskās vērtības ir Ap, Bq, Cr, kur A, B, C ir konstantes. Projicējot (4.) vektoriālo vienlīdzību uz triedra $Gxyz$ asīm, dabūjam trīs lineārus pirmās kārtas diferenciālvienādojumus pret p, q, r, tā sauktos Eulera kustības diferenciālvienādojumus

$$(5.)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\,\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = 0\,, \\ &B\,\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = 0\,, \\ &C\,\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = 0\,, \end{aligned}\right.$$

kas definē cieta ķermeņa S rotācijas vektora $\boldsymbol{\omega}_g$ komponentus p, q, r kādā privilēģētā triedrā T, pret kuŗu masas centrs G ir nekustīgs.

Reizinot (5.) sistēmas vienādojumus attiecīgi ar p, q, r un tos saskaitot, pēc tam ar Ap, Bq, Cr un saskaitot, dabūjam divas integrējamas izteiksmes

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}=0,$$

$$A^2p\frac{dp}{dt}+B^2q\frac{dq}{dt}+C^2r\frac{dr}{dt}=0,$$

kas ir ekvivalentas ar diviem pirmintegrāliem

$$\text{(6.)}\qquad \begin{cases} Ap^2+Bq^2+Cr^2=D\lambda^2, \\ A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=D^2\lambda^2, \end{cases}$$

kur D un λ apzīmē divas konstantes.

(5.) diferenciālvienādojumu sistēma ir ekvivalenta ar (6.) relāciju sistēmu un vienu (5.) sistēmas diferenciālvienādojumu, piem. vienādojumu

$$\text{(7.)}\qquad B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp=0.$$

Substituējot (7.) vienādojumā r un p vietā to izteiksmes, kas aprēķinātas no (6.) sistēmas, dabūjam vienādojumu

$$\text{(8.)}\qquad \sqrt{AC}\,B\frac{dq}{dt} = \sqrt{[D(D-C)\lambda^2-B(B-C)q^2]\,[D(A-D)\lambda^2-B(A-B)q^2]}.$$

Tādējādi problēma par p, q, r, aprēķināšanu ir reducēta līdz šai elīptiskai kvadrātūrai.

(5.) diferenciālvienādojumu sistēmu ir ģeometriski pētījis Puansò. Tādēļ, apskatīto gadījumu, t. i. ķermeņa S kustību pret triedru T, sauc par Puansò kustību.

Triedra T kustību pret ķermeni S kā nekustīgu sauc par Puansò kustībai reciproku kustību.

Tādējādi *cieta ķermeņa S privilēģētie triedri ir visi tie, kuŗu kustība pret S masas centru ir vienāda ar Puansò kustībai reciproku kustību pret S kā nekustīgu ķermeni, kā arī visi tie, kas pret šiem triedriem atrodas vienmērīgas taisnlīnijas translācijas kustībā.*

Cietais ķermenis S ir sevis paša galvenais triedrs, un visi triedri, kas atrodas vienmērīgas taisnlīnijas translācijas kustībā pret S, ir tā absolūtie triedri.

TREŠĀ DAĻA.

SISTĒMAS UN DEFORMĒJAMA KONTINUUMA KINĒMATIKA.

XIII NODAĻA.

SISTĒMAS KINĒMATIKAS PAMATJĒDZIENI.

49. §. Holonomas un neholonomas sistēmas.

212. **Kinēmatiskās saites un to klasifikācija.** — Vienkāršākais punktu sistēmas tips ir ciets ķermenis, saprotot ar to tādu punktu sistēmu, kuŗā jebkuŗu divu punktu attālums, ķermenim kustoties, paliek nemainīgs. Cieta ķermeņa kustība, kā redzējām, ir noteikta ar trīs tā punktu, kas neatrodas uz vienas taisnes, kustību.

Dabā turpretim sastopam daudz un dažādus sistēmu piemērus, kur pa kustības laiku ar sistēmu notiek dažādas pārmaiņas, kā izplešanās, saraušanās u. t. t. Tāpat nereti gadās sastapties ar sistēmām, kuŗās dažu punktu kustības ierobežo pārējo punktu kustības.

Tādēļ šai nodaļā apskatīsim sistēmas, kuŗu kustības ir ierobežotas ar kādām iepriekš dotām sakarībām starp sistēmu raksturotājiem kinēmatiskiem lielumiem, kā, piem., pozicijām, ātrumiem, paātrinājumiem u. t. t.

Visvienkāršākais šādas sistēmas piemērs ir punkts, kuŗa kustība ir tā ierobežota, ka tam jākustas pa kādu iepriekš dotu līkni vai virsu. Šī punkta koordinātām pirmajā gadījumā jāapmierina vienādojumi

$$(1.)\qquad f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0,$$

kas reprezentē divas virsas, kuŗas krustojoties noteic doto līkni, bet otrā gadījumā vienādojums

$$(2.)\qquad f(x, y, z) = 0,$$

kas reprezentē doto virsu. Pirmajā gadījumā kustīgā punkta pozicija ir atkarīga tikai no viena parametra, par kuŗu var izvēlēties līknes loka gaŗumu, kas skaitīts no kāda noteikta momenta, bet otrā — no diviem parametriem, par kuŗiem var izvēlēties punkta līklīniju koordinātas kādā līklīniju koordinātu sistēmā uz dotās virsas.

Tādēļ šais divos gadījumos punkta P kustību simboliski varam izteikt attiecīgi ar vienādojumu

$$P = P(q) \text{ vai } P = P(q_1, q_2),$$

kur q un q_1, q_2 apzīmē attiecīgos parametrus.

Abos apskatītos gadījumos punkta kustība bija saistīta ar nekustīgu līkni vai virsu. Ja turpretim punkta kustībai jānotiek pa līkni vai virsu, kas ar laiku mainās, tad (1.) vienādojumu sistēmas un (2.) vienādojuma vietā stājas vienādojumi

$$(1.') \qquad f(x, y, z \mid t) = 0, \qquad g(x, y, z \mid t) = 0$$

un vienādojums

$$(2.') \qquad f(x, y, z \mid t) = 0.$$

Vispārīgi, ja sistēma sastādīta no n punktiem P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, kuŗu koordinātām x_i, y_i, z_i jāapmierina l vienādojumi

$$(3.) \quad f_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n \mid t) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, l, l < 3n),$$

tad šos vienādojumus, kas analitiski izteic sakarības starp sistēmas punktu vienlaicīgām (noteiktām t vērtībām) pozicijām, sauc par sistēmas *kinēmatisko saišu* vienādojumiem vai vienkārši *kinēmatiskām saitēm.*

Kinēmatiskās saites, kas ir mainīgas ar laiku, pēc Bolcmaņa[1]) terminoloģijas sauc par *reonomām saitēm* pretstatā *sklēronomām* saitēm, kas ir no laika neatkarīgas.

Par kinēmatisko saišu skaitu l jāsaka, ka tam vienmēr jābūt mazākam par $3n$, ja n ir sistēmas punktu skaits, jo citādi koordinātu skaits būtu vienāds vai mazāks par saišu vienādojumu skaitu un visas koordinātas varētu aprēķināt no saišu vienādojumiem.

Kinēmatiskās saites pēc Herca[2]) terminoloģijas iedala *holonomās* un *neholonomās.* Par holonomām saitēm sauc tādas saites, kuŗu vienādojumi ir neatkarīgi no sistēmas koordinātu atvasinājumiem pēc laika t, bet ir atkarīgi tikai no pašām koordinātām, un bez tam vēl varbūt no laika t.

---

1) L. Boltzmann, (1844.—1906. g.)
2) H. Hertz (1857.—1894. g.).

Pirmajā gadījumā šīs saites sauc par *holonomām reonomām*, bet otrā par *holonomām sklēronomām* saitēm.

Tādējādi (1.) vienādojumu sistēma un (2.) vienādojums reprezentē holonomas sklēronomas saites, bet (1.') sistēma un (2.') vienādojums — holonomas reonomas saites. Minēsim vēl kādu piemēru. Svārsteklis ar konstantu garumu, kuŗa kustības plakne ir vertikāla, ir piemērs holonomai sklēronomai saitei ar tās vienādojumu

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r = const.,$$

bet tas pats svārsteklis ar mainīgu garumu noder kā piemērs holonomai reonomai saitei ar vienādojumu

$$x^2 + y^2 = r^2(t).$$

Sistēmu, kuŗas kustība ir saistīta ar holonomām saitēm, sauc par *holonomu sistēmu.*

Sistēmas kustībai uzliktie ierobežojumi vēl var būt vispārīgākas dabas: tie var būt atkarīgi kā no tās koordinātām, tā arī koordinātu atvasinājumiem pēc laika un vēl eventuāli no paša laika t. Šādu saišu vienādojumu vispārīgais veids ir

$$\varphi_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n;\ \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n \mid t) = 0$$
$$(j = 1, 2, 3, \ldots, l).$$

Bet šādai diferenciālvienādojumu sistēmai ne katrreiz jābūt integrējamai, t. i. tai nav jābūt ekvivalentai ar kādu holonomu saišu vienādojumu sistēmu. Saites, kuŗu vienādojumus var izteikt ar diferenciālvienādojumiem, kuŗus galīgā veidā nav iespējams integrēt, sauc par *neholonomām* saitēm.

Neholonomu saišu vienādojumu forma ir

$$(4.) \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}dx_i + b_{ij}dy_i + c_{ij}dz_i) + d_j dt = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, l)$$

jeb

$$(4.') \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}\dot{x}_i + b_{ij}\dot{y}_i + c_{ij}\dot{z}_i) + d_j = 0,$$

kur a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} ir koordinātu x_i, y_i, z_i funkcijas, pie kam šos vienādojumus nevar iegūt, diferencējot vienādojumu sistēmas ar (3.) formu.

Sistēmu, kuŗas kustība ir saistīta ar vienu vai vairākām neholonomām saitēm, sauc par *neholonomu sistēmu.*

213. **Ģeometriskās un kinēmatiskās brīvības pakāpes.** — Apskatīsim sistēmu, kas sastādīta no n punktiem P_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$). Šīs sistēmas pozicija telpā ir noteikta ar $3n$ koordinātām $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$, t.i.

$$(5.)\qquad P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}).$$

Ja apskatītās sistēmas kustība ir ierobežota ar r holonomām saitēm, kuŗu vienādojumi ir ar formu

$$f_m(q_1, q_2, \ldots, q_{3n} \,|\, t) = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, r),$$

tad, atrisinot šo vienādojumu sistēmu attiecībā pret r koordinātām q_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, r$), dabūjam tās kā atlikušo $k = 3n - r$ koordinātu un laika t funkcijas. Ja dabūtās koordinātu q_j izteiksmes substituē (5.) vienādojumu sistēmā attiecīgo koordinātu vietā, tad šī sistēma reducējas par sistēmu

$$P_i = P_i^*(q_1, q_2, \ldots, q_k \,|\, t) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

kuŗā tikai $k = 3n - r$ koordinātas $q_1, q_2, \ldots, q_k$ ir savā starpā neatkarīgas.

Tādējādi sistēmas pozicija ir noteikta ar $k = 3n - r$ neatkarīgām koordinātām, kuŗas sauc par *Lagranža*[1]) *koordinātām.*

Neatkarīgo parametru skaitu, no kuŗa ir atkarīgas sistēmas iespējamās pozicijas, sauc par sistēmas *ģeometrisko brīvības pakāpju skaitu*, bet neatkarīgo parametru skaitu, no kuŗa ir atkarīgi sistēmas punktu iespējamie ātrumi, par *kinēmatisko brīvības pakāpju skaitu.* Šiem abiem skaitļiem vispārīgi nav jābūt vienādiem.

Minēto jēdzienu paskaidrošanai apskatīsim holonomas sklēronomas saites vienādojumu

$$(1.)\qquad f(x, y, z) = 0$$

un vienādojumu, kuŗu dabūjam, to diferencējot, t. i.

$$(6.)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} = 0.$$

Ar (1.) vienādojumu punkta ģeometrisko brīvības pakāpju skaits tiek reducēts līdz divi, bet ar (6.) vienādojumu arī punkta kinēmatisko brīvības pakāpju skaits tiek reducēts līdz divi.

Pirmajā vienādojumā parametri ir x, y, z, otrā $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, no kuŗiem ikvienā no tiem tikai divi ir neatkarīgi.

Minēsim vēl dažus piemērus holonomām sistēmām.

1) J. L. Lagrange (1736.—1813. g.).

Brīvam cietam ķermenim ir *sešas* ģeometriskās brīvības pakāpes, t. i. tikpat daudz kā triedram: trīs parametri definē tā sākuma punkta poziciju, bet pārējie trīs — tā asu orientāciju šai punktā (Eulera leņķi).

Ja cietam ķermenim ir viens nekustīgs punkts, tad ģeometrisko brīvības pakāpju skaits reducējas līdz *trīs*, tāpat cieta ķermeņa komplānā kustībā šim ķermenim ir *trīs* brīvības pakāpes: divi parametri definē kāda tā punkta poziciju vienā plaknē, bet trešais parametrs noteic taisnes virzienu, kas savieno šo punktu ar kādu otru ķermeņa punktu tai pašā plaknē. Ar šiem diviem punktiem cieta ķermeņa pozicija komplānā kustībā ir definēta.

Ja cietam ķermenim ir viena nekustīga taisne, tad ģeometrisko brīvības pakāpju skaits ir *viens*.

Telpā kustīga stieņa ģeometrisko brīvības pakāpju skaits ir *pieci*: trīs parametri noteic tā viena punkta poziciju, bet divi pārējie definē tā virzienu.

Apskatīsim tagad jautājumu, kā atsaucas uz sistēmas kustību holonomas un neholonomas saites. Ja sistēmas punktu skaits ir n un holonomo saišu skaits r, tad sistēmas ģeometrisko brīvības pakāpju skaits ir $k = 3n - r$, un katra jauna holonoma saite pamazina ģeometrisko brīvības pakāpju skaitu par vienu. Piem., brīvam punktam telpā ir trīs brīvības pakāpes; ja tam jākustas pa kādu dotu virsu, tad tam tiek uzlikta viena holonoma saite, kuŗas vienādojums ir virsas vienādojums, un punkta brīvības pakāpju skaits reducējas līdz divi. Ja tālāk punktam jākustas pa kādu dotu līkni uz dotās virsas, tad tā kustība ir ierobežota ar jaunu holonomu saiti, kuŗas vienādojums ir kādas virsas vienādojums, kuŗa krusto pirmo virsu pa doto līkni, un punkta brīvības pakāpju skaits reducējas līdz vienam.

Citādi izpaužas neholonomas saites ietekme. Neholonoma saite neizsaka ierobežojumus attiecībā uz sistēmas poziciju (sistēmas koordinātām), jo tās vienādojums nesaista galīgā veidā sistēmas koordinātas, bet tikai uz sistēmas pārvietojuma koordinātām dx_1, dy_1, dz_1, ..., dz_n, vai, citiem vārdiem sakot, uz sistēmas ātruma koordinātām $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, ..., $\dot{z}_n$. Tādēļ, ja n punktu sistēma savā kustībā ir ierobežota ar holonomām saitēm, tad ģeometrisko brīvības pakāpju skaits, kas ir vienāds ar sistēmas neatkarīgo koordinātu skaitu, ir vienāds arī ar sistēmas pārvietojuma neatkarīgo koordinātu skaitu; ja turpretim starp šīm saitēm ir arī neholonomas saites, tad ģeometrisko brīvības pakāpju skaits ir tāds pats kā agrāk, bet pārvietojuma neatkarīgo koordinātu skaits, un tā tad arī ātruma neatkarīgo koordinātu skaits, ir mazāks, un tieši par tik, cik liels ir neholonomo saišu skaits. Citiem vārdiem sakot, neholonomu saišu gadījumā kinēmatisko brīvības pakāpju skaits ir mazāks par ģeometrisko brīvības pakāpju skaitu.

Šo jēdzienu tuvākai paskaidrošanai apskatīsim vienu sistēmu ar vienu *holonomu* saiti un otru ar vienu *holonomu* saiti un divām *neholonomām* saitēm.

Lodes (cietas) kustība pa absolūti gludu plakni ir piemērs sistēmai ar *vienu holonomu saiti.* Izvēlēsimies par nekustīgā koordinātu triedra OXY plakni lodes velšanās plakni, kuŗai perpendikulāri caur kādu tās punktu iet triedra OZ-ass. Lodes pozicija jebkuŗā momentā ir pilnīgi definēta ar *piecām* neatkarīgām koordinātām, proti — ar *divām* tās centra koordinātām X, Y, un *trīs* Eulera leņķiem ϑ, ψ, φ, kas definē lodes rotāciju ap tās centru. Un tā kā lode var ieņemt jebkuŗu poziciju dotajā plaknē, tad tās koordinātas X, Y, ϑ, ψ, φ var iegūt jebkuŗas savā starpā neatkarīgas vērtības.

Ja plakne ir absolūti gluda, tad lodes pārvietošanās no pozicijas, kas definēta ar koordinātām X, Y, ϑ, ψ, φ, kādā tai blakus pozicijā ar koordinātām $X+dX$, $Y+dY$, $\vartheta+d\vartheta$, $\psi+d\psi$, $\varphi+d\varphi$, kur dX, dY, $d\vartheta$, $d\psi$, $d\varphi$ ir savā starpā neatkarīgi infinītezimāli lielumi, ir arī *iespējama kustība,* un kustības vienīgās *holonomās* saites vienādojums ir

$$Z = r,$$

kas neizteic neko citu, kā tikai to, ka lodes centrs ir vienmēr konstantā radija r attālumā no dotās plaknes.

Ja turpretim dotā plakne, pa kuŗu lodei jāveļas, nav gluda, tad dabūjam piemēru sistēmai ar *vienu holonomu* un *divām neholonomām saitēm.* Šai gadījumā bez agrākās holonomās saites vēl ir jāuzŗaksta noteikumi, lai lodes pieskaršanās punkta A plaknei slīdes pārvietojums apskatītajā momentā būtu nulle.

Ja $\mathbf{v}_0$ un $\boldsymbol{\omega}$ apzīmē lodes kustībai raksturīgos vektorus pret lodes centru O, tad lodes pieskaršanās punkta A ātrums $\mathbf{v}$ ir dots ar formulu

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \overline{OA},$$

pie kam vektori $\mathbf{v}_0$ un $\boldsymbol{\omega} \times \overline{OA}$ abi ir parallēli OXY plaknei: pirmais aiz tā iemesla, ka tas reprezentē lodes centra, kas kustas dotajai plaknei parallēlā plaknē, ātrumu, bet otrs kā vektors, kas ir perpendikulārs radijam OA. Tādēļ nekustīgā triedrā $\mathbf{v}_0$ koordinātas ir $\dot{X}$, $\dot{Y}$, 0, radijvektora $\overline{OA}$ koordinātas 0, 0, r, bet lodes centra O momentānā rotācijas vektora $\boldsymbol{\omega}$ koordinātas, apzīmējot tās ar P, Q, R, kā agrāk redzējām, ir šādas:

$$P = \dot{\vartheta} \cos\psi + \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi ,$$
$$Q = \dot{\vartheta} \sin\psi - \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi ,$$
$$R = \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi} .$$

Ievērojot šos apzīmējumus, noteikums $\mathbf{v} = 0$ ir ekvivalents ar šādiem vienādojumiem:

$$\dot{X} + r(\dot{\vartheta} \sin\psi - \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi) = 0 ,$$
$$\dot{Y} - r(\dot{\vartheta} \cos\psi + \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi) = 0 ,$$
$$\dot{Z} = 0 .$$

Bet šīs sistēmas divi pirmie diferenciālvienādojumi attiecībā pret trim Eulera leņķiem ϑ, ψ, φ ir neintegrējami, t. i, no tiem nav iespējams dabūt galīgā formā kādas sakarības starp sistēmas koordinātām, un tā tad tie ir piemērs divām neholonomām sistēmas saitēm.

Tā kā minētā diferenciālvienādojumu sistēma uzliek sistēmas pārvietojuma koordinātām dX, dY, $d\vartheta$, $d\psi$, $d\varphi$ vai, kas ir tas pats, sistēmas ātruma koordinātām $\dot{X}$, $\dot{Y}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ divus ierobežojumus, tad starp tām neatkarīgas paliek vairs tikai trīs.

Tādējādi apskatītās sistēmas *ģeometrisko* brīvības pakāpju skaits ir *pieci*, bet tās *kinēmatisko* brīvības pakāpju skaits ir tikai *trīs*.

50. §. Patiesi un virtuāli pārvietojumi.

214. **Holonomas sistēmas pārvietojumi.** — 1° *Patiesi pārvietojumi.* — Brīvs materiāls punkts var izdarīt pilnīgi patvaļīgu pārvietošanos no tā pozicijas jebkurā momentā t. Saistīts punkts vai sistēma turpretim, ja to konfigūrācijas momentā t ir dotas, momentā $t + dt$ var ieņemt tikai tādas konfigūrācijas, kādas tiem pieļauj saites. Holonomas sistēmas bezgala mazu pārvietojumu no tās konfigūrācijas K momentā t tai atļautā konfigūrācijā K' momentā $t + dt$ sauc par holonomas sistēmas *patieso pārvietojumu* laikā dt.

Iedomāsimies, ka holonomā sistēma, kas sastādīta no n punktiem P_i, ir definēta ar parametriskiem vienādojumiem

$$(7.) \qquad P_i = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_k \,|\, t) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Momentā t sistēmas konfigūrācija K ir definēta ar noteiktām parametru q_j nozīmēm, un jebkuŗu citu tai bezgala tuvu konfigūrāciju K' momentā $t + dt$ dabūsim, dodot parametriem q_j un t bezgala mazus, savā starpā neatkarīgus, pieaugumus dq_j un dt. Tādējādi, ja dP_i apzīmē punkta P_i pārvietojumu, tad

$$(8.)\quad P_i + dP_i = P_i(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \ldots, q_k + dq_k \mid t + dt)$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Attīstot pēdējo vienādojumu labās puses rindās un atņemot no tiem attiecīgos (7.) sistēmas vienādojumus, kā arī atmetot pēc tam visus locekļus ar augstāku kārtu par vienu, dabūjam dP_i izteiksmes

$$(9.)\quad dP_i = \frac{\partial P_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial P_i}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial P_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P_i}{\partial t} dt$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

kuŗas ir sistēmas iespējamā pārvietojuma no konfigūrācijas K momentā t vispārīgās analitiskās izteiksmes un kuŗās dq_j ir savā starpā neatkarīgi bezgala mazi attiecīgo parametru pieaugumi.

Ja apskatītās sistēmas kustība ir ierobežota ar r saitēm, kuŗas ir ar formu

$$(10.)\quad f_m(q_1, q_2, \ldots, q_k \mid t) = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, r),$$

tad var iedomāties, ka (7.) vienādojumu sistēma noteic sistēmas konfigūrāciju, bet tikai tās koordinātas tagad ir saistītas ar r savā starpā neatkarīgiem vienādojumiem, kuŗiem ir (10.) forma un kuŗi momentā $t + dt$ ir šādi:

$$f_m(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \ldots, q_k + dq_k \mid t + dt) = 0$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots, r).$$

Attīstot šo vienādojumu kreisās puses rindās un atņemot no tiem attiecīgos (10.) sistēmas vienādojumus, kā arī atmetot pēc tam šais attīstījumos visus locekļus ar augstāku kārtu par vienu, dabūjam

$$(11.)\quad \frac{\partial f_m}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f_m}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f_m}{\partial t} dt = 0$$
$$(m = 1, 2, 3, \ldots, r).$$

No šejienes varam secināt, ka arī gadījumā, kad dotās sistēmas kustība ir ierobežota ar r saitēm, (9.) vienādojumu sistēma reprezentē sistēmas iespējamā pārvietojuma no konfigūrācijas K momentā t vispārīgās analitiskās izteiksmes, bet tikai tagad parametru bezgala mazie pieaugumi dq_j un dt ir saistīti ar r vienādojumiem, kuŗiem ir (11.) forma. Citiem vārdiem sakot, iesākot ar doto konfigūrāciju momentā t, t. i. ar dotiem t un q_j, un dodot dt, starp parametru q_j pieaugumiem dq_j neatkarīgi vairs ir tikai $k-r$, bet pārējie var tikt aprēķināti no (11.) sistēmas.

Ja apskatītās sistēmas pozicija ir raksturota ar tās punktu P_i $3n$ Dekarta koordinātām x_i, y_i, z_i un ja sistēmas kustība ir ierobežota ar l vienādojumiem, kuŗiem ir (3.) forma, tad tās punktu P_i pārvietojumu koordinātas dx_i, dy_i, dz_i jebkuŗā patiesi iespējamā pārvietojumā ir saistītas ar l vienādojumiem

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=0 \quad (j=1,2,3,\ldots,l).$$

2° *Virtuāli pārvietojumi.* — Mēchanikā, kā vēlāk redzēsim, bez sistēmas patiesi iespējamiem pārvietojumiem ir svarīgi apskatīt vēl *iedomājamus jeb virtuālus pārvietojumus*, ar kuŗiem sistēmai būtu iespējams pāriet no vienas konfigūrācijas momentā t kādā citā tai bezgala tuvā konfigūrācijā, kuŗa iespējama *tai pašā* momentā t. Citiem vārdiem sakot, ja dotā sistēma momentā t saišu ietekmē ieņem konfigūrāciju K un ja K_1 ir kāda cita sistēmai iespējama konfigūrācija tai pašā momentā t un tā atrodas bezgala tuvu konfigūrācijai K, tad sistēmas pārvietošanos no konfigūrācijas K konfigūrācijā K_1 sauc par sistēmas *virtuālo* pārvietošanos.

Jautājums — vai šāds virtuāls pārvietojums ir arī *faktiski* iespējams? Faktiskam sistēmas pārvietojumam ir vajadzīgs noteikts laiks dt. Ja saites ir neatkarīgas no laika t, tad sistēmas konfigūrācija, kas bija iespējama momentā t, ir iespējama arī momentā $t+dt$, un tādēļ šai jaunajā konfigūrācijā sistēmu būs iespējams arī faktiski pārvietot, t. i. virtuālais pārvietojums būs reizē arī faktiski iespējamais. Ja saites turpretim ir atkarīgas no laika t, tad sistēmas konfigūrācija K_1 var izrādīties par tādu, kas momentā $t+dt$ nav savienojama ar dotajām saitēm, citiem vārdiem sakot, virtuālais pārvietojums nav vienmēr faktiski iespējamais pārvietojums.

Virtuālos pārvietojumus, atšķirībā no patiesiem pārvietojumiem, kuŗus apzīmējām ar simbolu d, apzīmēsim ar simbolu δ, t. i. apzīmēsim punkta P_i iespējamo pārvietojumu ar dP_i, tā Lagranža koordinātas ar dq_i vai Dekarta koordinātas ar dx_i, dy_i, dz_i, bet P_i virtuālo pārvietojumu apzīmēsim ar δP_i, tā Lagranža koordinātas ar δq_i vai Dekarta koordinātas ar δx_i, δy_i, δz_i.

Punkta P_i virtuālais pārvietojums ar tā Lagranža koordinātām δq_i var tikt izteikts formā

$$\text{(12.)} \qquad \delta P_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \delta q_j \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

kas ir homogena funkcija attiecībā pret Lagranža koordinātu q_j patvaļīgām variācijām δq_j, jo virtuāla pārvietojuma gadījumā $\delta t = 0$.

Ja dotā sistēmas kustība ir ierobežota ar r saitēm, kuŗām ir (10.) forma, tad sistēmas punktu virtuālos pārvietojumus var iedomāties dotus ar (12.) formulu sistēmu, bet tikai parametru q_j variācijas δq_j nav šai gadījumā savā starpā neatkarīgas, bet tās ir saistītas ar r homogeniem vienādojumiem

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_m}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, r).$$

Ja n punktu sistēma ir attiecināta uz tās punktu P_i $3n$ Dekarta koordinātām x_i, y_i, z_i un tās kustība ir ierobežota ar l vienādojumiem, kuŗiem ir (3.) forma, tad tās punktu P_i virtuālo pārvietojumu δP_i koordinātas δx_i, δy_i, δz_i ir saistītas ar l vienādojumiem

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, l).$$

215. **Neholonomas sistēmas pārvietojumi.** — 1° *Patiesi pārvietojumi.* — Kā agrāk redzējām, ja sistēmas, kuŗai ir k ģeometriskas brīvības pakāpes, kustība ir ierobežota ar l neholonomām saitēm, kuŗu vienādojumi vispārīgā formā ir

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\, dq_i + b_j\, dt = 0$$

vai

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\, \dot{q}_i + b_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, l),$$

tad sistēmas iespējamās konfigūrācijas dažādos momentos ar dotajām saitēm nav ierobežotas, bet gan ierobežoti ir sistēmas punktu patiesi iespējamie pārvietojumi resp. sistēmas punktu iespējamie ātrumi.

2° *Virtuāli pārvietojumi.* — Ja no konfigūrācijas, kas atbilst noteiktām parametru q_i vērtībām momentā t, jāpāriet uz tai bezgala tuvu konfigūrāciju, kuŗa attiecas uz to pašu momentu t, bet parametru vērtībām $q_i + \delta q_i$, tad neatkarīgo parametru q_i virtuālie pieaugumi δq_i ir saistīti ar l sakarībām

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\,\delta q_i = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, l),$$

jo virtuālo pārvietojumu gadījumā parametra t variācija $\delta t = 0$.

Ja n punktu sistēma ir attiecināta uz tās $3n$ Dekarta koordinātām x_i, y_i, z_i un ja tās kustība ir ierobežota ar l neholonomām saitēm, kuŗām ir (4.) vai (4.') forma, tad sistēmas virtuālais pārvietojums ($t = konst.$) ir ierobežots ar l vienādojumiem

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ij}\,\delta x_i + b_{ij}\,\delta y_i + c_{ij}\,\delta z_i) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, l).$$

XIV NODAĻA.

DEFORMĒJAMA KONTINUUMA NEPĀRTRAUKTA TRANSFORMĀCIJA.

51. §. Nepārtraukta transformācija.

216. **Definīcija.** — Šai nodaļā un turpmākās apskatīsim *deformējama kontinuuma*, kas sastādīts no deformējamiem elementiem un kas ieņem kādu galīgu un nepārtrauktu apvidu, kinēmatiku.

Iedomāsimies tādēļ dotu kādu nepārtrauktu materiālu sistēmu, kuŗa ieņem kādu galīgu un nepārtrauktu telpas apvidu R un kuŗas punkti pārvietojas tādējādi, ka tā paliek vienmēr nepārtraukta. Apskatītās sistēmas ieņemto jauno telpas apvidu kādā vēlākā momentā apzīmēsim ar R_1, nosaucot to par apvidus R *transformēto* apvidu. Ja izvēlētajā ortogonālā koordinātu triedrā $Oxyz$ apzīmējam kāda apvidus R punkta koordinātas ar x, y, z un tā transformētā apvidus R_1 atbilstošā punkta koordinātas ar x_1, y_1, z_1, tad punkta (x, y, z) transformācija punktā (x_1, y_1, z_1) ir definēta ar relācijām

$$(1.)\qquad x_1 = x_1(x, y, z), \qquad y_1 = y_1(x, y, z), \qquad z_1 = z_1(x, y, z).$$

Ar šāda veida transformācijām nākas sastapties hidrodinamikā un elastības teōrijā, ģeometriski reprezentējot šķidruma un elastīga ķermeņa elementu pārvietošanos.

Pēc definīcijas šo transformāciju sauc par *telpas apvidus R nepārtrauktu transformāciju*, ja 1° (1.) sistēmas relācijas noteic apvidus R ikviena punkta (x, y, z) un tā transformētā apvidus R_1 punkta (x_1, y_1, z_1) starpā savstarpēji viennozīmīgu sakarību un 2° ja apvidus R diviem bezgala tuviem punktiem transformētā apvidū R_1 savkārt atbilst divi bezgala tuvi punkti.

Analizē var pierādīt, ka šie nosacījumi ir ievēroti apvidus R jebkuŗam punktam (x, y, z), ja 1° x_1, y_1, z_1, kā x, y, z funkcijām, eksistē nepārtraukti parciāli atvasinājumi pēc x, y, z un 2° ja funkcionāldeterminants (Jakobi[1]) determinants)

---

[1]) C. G. J. Jacobi (1804.—1851. g.), *Über die Funktionaldeterminanten,* 1841.

$$J = \frac{\partial (x_1, y_1, z_1)}{\partial (x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial z} \end{vmatrix}$$

nekad nav nulle.

Turpmāk vienmēr iedomāsimies apvidu R pietiekami mazu, lai minētie divi nosacījumi būtu nepieciešami un pietiekami savstarpēji viennozīmīgas sakarības pastāvēšanai starp apvidu R un R_1 punktiem. Tādā gadījumā (1.) sistēmas relācijas var tikt atrisinātas attiecībā pret x, y, z, dabūjot relācijas

(2.) $$x = x(x_1, y_1, z_1), \quad y = y(x_1, y_1, z_1), \quad z = z(x_1, y_1, z_1),$$

pie kam funkcijām x, y, z eksistē nepārtraukti parciāli atvasinājumi pēc x_1, y_1, z_1 visiem apvidus R_1 punktiem.

217. **Nepārtrauktības hipotezes secinājumi.** — Apskatīsim tagad dažus nepārtrauktības hipotezes secinājumus.

Pirmais secinājums. — Kāda apvidus R punktu, kas atrodas uz nepārtrauktas virsas S ar vienādojumu

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

transformētie punkti arī atrodas uz nepārtrauktas virsas S_1, kuŗas vienādojums ir

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) \equiv \varphi[x(x_1, y_1, z_1), \; y(x_1, y_1, z_1), \; z(x_1, y_1, z_1)] = 0.$$

Tiešām, φ_1 kā nepārtraukta funkcija φ no nepārtrauktām funkcijām x, y, z, kas savkārt ir x_1, y_1, z_1 funkcijas, ir salikta nepārtraukta x_1, y_1, z_1 funkcija, un tā tad S_1 ir nepārtraukta virsa.

Tāpat kāda apvidus R nepārtrauktas līknes C, pa kuŗu krustojas divas apvidus R nepārtrauktas virsas S' un S'', punktu transformētie punkti atrodas uz nepārtrauktas līknes C_1, pa kuŗu krustojas virsu S' un S'' transformētās virsas S_1' un S_1'' un kuŗu sauc par dotās līknes C transformēto līkni.

Otrs secinājums. — Slēgtas nepārtrauktas virsas S, kuŗa norobežo apvidu R un kuŗas vienādojums ir

$$f(x, y, z) = 0,$$

punktu transformētie punkti apvidū R_1 apmierina nosacījumu

$$f\,[x\,(x_1,\ y_1,\ z_1),\ \ y\,(x_1,\ y_1,\ z_1),\ \ z\,(y_1,\ y_1,\ z_1)] \leqslant 0,$$

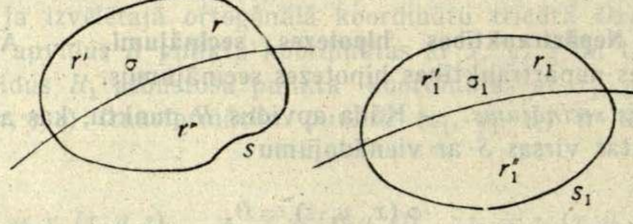
citiem vārdiem sakot, apvidu R_1 norobežo slēgta nepārtraukta virsa S_1 ar vienādojumu

$$f_1\,(x_1, y_1, z_1) \equiv f\,[x\,(x_1, y_1, z_1),\ y\,(x_1, y_1, z_1),\ z\,(x_1, y_1, z_1)] = 0,$$

kas ir virsas S transformētā virsa.

Trešais secinājums. — Tā kā apvidus R jebkuŗš parciālais apvidus r, kas ierobežots ar slēgtu virsu s, attiecībā uz (1.) sistēmas transformācijām ir ar tām pašām īpašībām kā apvidus R, tad virsai s atbilst kāda slēgta virsa s_1, kuŗu sauc par šīs virsas transformēto virsu un kuŗa ierobežo R_1 parciālo apvidu r_1. Virsa s_1 satur vienīgi visus parciālā apvidus r transformētos punktus.

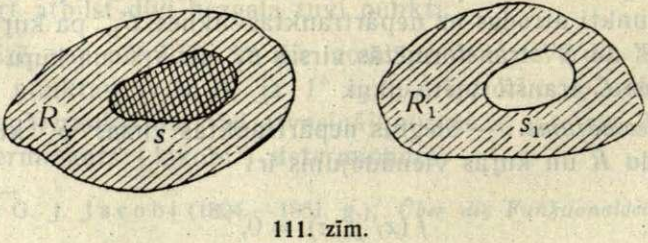
Ceturtais secinājums. — Vaļējas virsas σ (110. zīm.), kas sadala apvidu r divās daļās r' un r'', transformētā virsa σ_1 atrodas apvidū



110. zīm.

r_1 (pēc trešā secinājuma) un tā nedrīkst būt slēgta virsa, jo citādi σ vajadzētu būt slēgtai virsai. Un tā tad σ_1 sadala r_1 divās daļās r_1' un r_1'', kas atbilst r' un r''. Tādējādi, ja r elementi atrodas virsas σ pretējās pusēs, tad arī r_1 elementi atrodas virsas σ_1 pretējās pusēs.

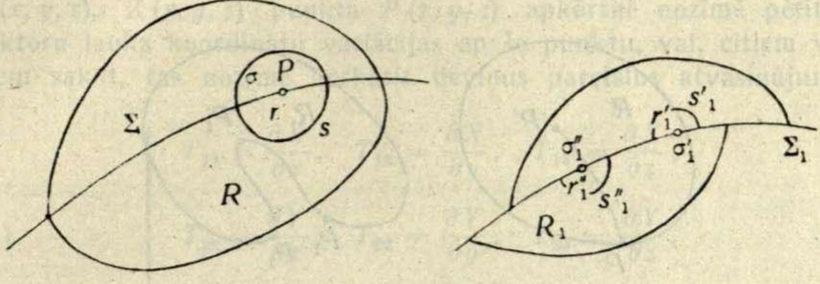
Piektais secinājums. — Transformētā apvidū R_1 nedrīkst būt tukšumu, jo slēgtai virsai s_1 (111. zīm.), kas ierobežo šo tukšumu,



111. zīm.

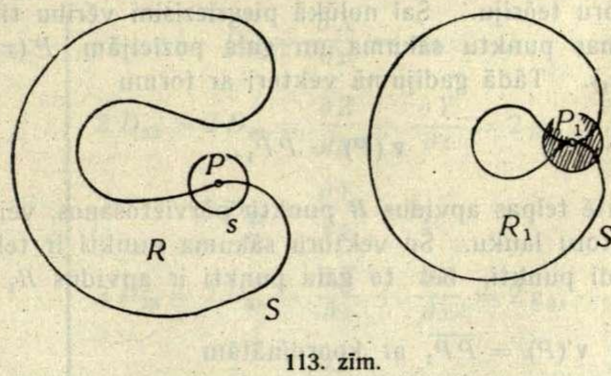
apvidū R atbilst slēgta virsa s, kas ietveŗ R elementus, un tā tad arī s_1 jāietveŗ attiecīgie R_1 elementi.

Sestais secinājums. — Transformētā apvidū R_1 nevar būt slīdes pa virsu Σ_1, kas ir virsas Σ transformētā virsa (112. zīm.). Tiešām, apskatīsim kādu ļoti mazu slēgtu, nepārtrauktu virsu s



112. zīm.

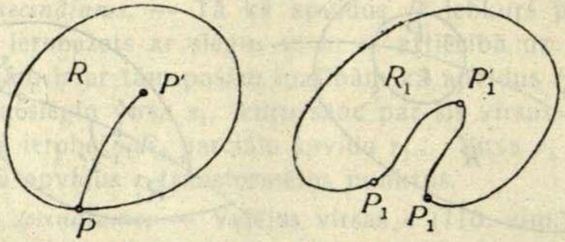
ap virsas Σ punktu P. Šīs virsas ierobežotais apvidus r ar virsas Σ daļu σ ir sadalīts divās daļās r' un r''. Pēc slīdes definīcijas, ja r ir pietiekami mazs apvidus, tā transformētais apvidus r_1 ir salikts no diviem apvidiem r_1' un r_1'', kas ierobežoti ar virsām σ_1', σ_1'' un s_1', s_1'', pie kam pēdējās sastāda virsas s transformētā virsa. Bet tādā gadījumā slēgtas nepārtrauktas virsas s transformētā virsa nebūtu slēgta, nepārtraukta virsa, kas pēc trešā secinājuma ir neiespējams.



113. zīm.

Septītais secinājums. — Transformētās virsas S_1 kādā punktā P_1 nevar būt saskaršanās, kā 113. zīm. pa labi aizrādīts. Tiešām, velkot ap punkta P_1 transformēto punktu P mazu sfēru s, tā vienā pusē no s ietveŗ apvidus R punktus, bet otrā ne. Tās transformētai virsai s_1 turpretim nav šīs īpašības, kas pēc ceturtā secinājuma ir neiespējams.

Astotais secinājums. — Uz apvidus R robežas nekad nevar rasties spraugas, citiem vārdiem sakot, elementi, kas atrodas uz PP', nekad nevar ieņemt pozicijas uz $P_1P_1'P_1$ (114. zīm.). Lai par to



114. zīm.

pārliecinātos, jāapmaina R un R_1 lomas un jāsecina kā iepriekšējā gadījumā, apskatot kādu punktu uz PP'.

52. §. Transformācijas vektora lauks.

218. **Transformācijas asimmetriskais tensors.** — Interpretēsim ģeometriski (1.) sistēmas relācijas, kuŗas definē nepārtraukta telpas apvidus R nepārtrauktu transformāciju apvidū R_1, saistot tās ar vektoru teōriju. Šai nolūkā piegriezīsim vērību tikai materiālās sistēmas punktu sākuma un gala pozicijām $P(x, y, z)$ un $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Tādā gadījumā vektori ar formu

$$\mathbf{v}(P) = \overline{PP_1},$$

kas reprezentē telpas apvidus R punktu pārvietošanos, veido nepārtrauktu vektoru lauku. Šo vektoru sākuma punkti ir telpas apvidus R dažādi punkti, bet to gala punkti ir apvidus R_1 atbilstoši punkti.

Vektoru $\mathbf{v}(P) = \overline{PP_1}$ ar koordinātām

$$X(x, y, z) = x_1(x, y, z) - x,$$
$$Y(x, y, z) = y_1(x, y, z) - y,$$
$$Z(x, y, z) = z_1(x, y, z) - z$$

sauc par *transformācijas vektoru* un tā radīto lauku par *transformācijas vektora lauku.* Lielumi $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$, saprotams, ir nepārtrauktas un ierobežotas x, y, z funkcijas apvidū R. Un tā tad uz vektora $\mathbf{v}(P) = \overline{PP_1}$, kas definē transformāciju, radīto lauku ir attiecināms viss, kas ir zināms par vektoru nepārtrauktiem laukiem.

Pētīt vektora $\mathbf{v}(P)$ radīto lauku ar koordinātām $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ punkta $P(x, y, z)$ apkārtnē nozīmē pētīt šī vektoru lauka koordinātu variācijas ap šo punktu, vai, citiem vārdiem sakot, tas nozīmē apskatīt deviņus parciālus atvasinājumus

$$(3.)\quad \begin{cases} T_{11} = \dfrac{\partial X}{\partial x}, & T_{12} = \dfrac{\partial X}{\partial y}, & T_{13} = \dfrac{\partial X}{\partial z}, \\[2ex] T_{21} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}, & T_{22} = \dfrac{\partial Y}{\partial y}, & T_{23} = \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\[2ex] T_{31} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}, & T_{32} = \dfrac{\partial Z}{\partial y}, & T_{33} = \dfrac{\partial Z}{\partial z}, \end{cases}$$

kas, pēc 162. nodal. pierādītās teōrēmas, ir kāda otrās kārtas asimmetriska tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \overline{\overline{\mathbf{grad}}}\,\mathbf{v}$ koordinātas. Šo tensoru sauc par *transformācijas asimmetrisko tensoru.*

Kā tādu to var sadalīt simmetriskā tensorā $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ un vektorā $\mathbf{G} = \mathbf{rot}\,\mathbf{v}$.

Transformācijas simmetriskā tensora $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ (ko apzīmē arī ar $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$) koordinātas D_{ij} bieži apzīmē arī ar e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, un to izteiksmes ir šādas:

$$(4.)\quad \begin{cases} D_{11} = \dfrac{\partial X}{\partial x} = e_1, \\[2ex] 2\,D_{32} = 2\,D_{23} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} + \dfrac{\partial Y}{\partial z} = 2\,g_1, \\[2ex] D_{22} = \dfrac{\partial Y}{\partial y} = e_2, \\[2ex] 2\,D_{13} = 2\,D_{31} = \dfrac{\partial X}{\partial z} + \dfrac{\partial Z}{\partial x} = 2\,g_2, \\[2ex] D_{33} = \dfrac{\partial Z}{\partial z} = e_3, \\[2ex] 2\,D_{21} = 2\,D_{12} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} + \dfrac{\partial X}{\partial y} = 2\,g_3. \end{cases}$$

Transformācijas asimmetriskā tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ otra komponenta — vektora $\mathbf{G} = \mathbf{rot\, v}$ — koordinātas G_1, G_2, G_3 bieži apzīmē arī ar p, q, r, un to izteiksmes ir

$$
(5.)\quad \left\{\begin{aligned}
G_1 &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = p,\\
G_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) = q,\\
G_3 &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = r.
\end{aligned}\right.
$$

219. **Dažas simboliskas relācijas.** — Apskatīsim transformācijas definētājas formulas:

$$
(6.)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= x_1(x, y, z) = x + X(x, y, z),\\
y_1 &= y_1(x, y, z) = y + Y(x, y, z),\\
z_1 &= z_1(x, y, z) = z + Z(x, y, z).
\end{aligned}\right.
$$

Apzīmējot ar P' un P_1' divus atbilstošus punktus, kas atrodas attiecīgi punkta P un P_1 apkārtnē, ar dx, dy, dz vektora $\overline{PP'}$ projekcijas un ar dx_1, dy_1, dz_1 vektora $\overline{P_1P_1'}$ projekcijas un attīstot (6.) sistēmas formulas Teilora rindās, aprobežojoties šais attīstījumos ar pirmās kārtas bezgala maziem lielumiem, dabūjam, ka

$$
(7.)\quad \left\{\begin{aligned}
dx_1 &= \left(1 + \frac{\partial X}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial X}{\partial y}\, dy + \frac{\partial X}{\partial z}\, dz,\\
dy_1 &= \frac{\partial Y}{\partial x}\, dx + \left(1 + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial Y}{\partial z}\, dz,\\
dz_1 &= \frac{\partial Z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial Z}{\partial y}\, dy + \left(1 + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dz.
\end{aligned}\right.
$$

Pēdējās trīs skālārās vienlīdzības var tikt rezumētas simboliskā vienlīdzībā

$$\overline{P_1P_1'} - \overline{PP'} = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \,.\, \overline{PP'}\,.$$

Tāpat, ja P'' un P_1'' apzīmē divus citus atbilstošus punktus, kas atrodas attiecīgi punkta P un P_1 apkārtnē, tad

$$\overline{P_1P_1''} - \overline{PP''} = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \,.\, \overline{PP''}.$$

Atņemot pirmo simbolisko vienlīdzību no otrās un apzīmējot

$$\mathbf{ds} = \overline{P'P''}, \quad \mathbf{ds}_1 = \overline{P_1'P_1''},$$

dabūjam, ka

$$\mathbf{ds}_1 - \mathbf{ds} = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \,.\, \mathbf{ds}. \tag{8.}$$

Vektoru **ds** sauc par transformācijas līneāro elementu.

Tālāk, atsaucoties uz tensora un vektora iekšējās reizināšanas fundāmentālo formulu (158. nodal.), pēdējo vienlīdzību var pārrakstīt formā

$$\mathbf{ds}_1 - \mathbf{ds} = \mathbf{G} \times \mathbf{ds} + \overline{\overline{\mathbf{D}}} \,.\, \mathbf{ds}. \tag{9.}$$

Izdarot divas transformācijas, iesākot ar vienu un to pašu apvidus sākuma stāvokli, un apzīmējot šo transformāciju raksturotājus tensorus ar $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_1$ ($\overline{\overline{\mathbf{D}}}_1$, $\mathbf{G}_1$) un $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_2$ ($\overline{\overline{\mathbf{D}}}_2$, $\mathbf{G}_2$), dabūjam divas (9.) formulai analogas formulas

$$\mathbf{ds}_1 - \mathbf{ds} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{ds} + \overline{\overline{\mathbf{D}}}_1 \,.\, \mathbf{ds},$$
$$\mathbf{ds}_2 - \mathbf{ds} = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{ds} + \overline{\overline{\mathbf{D}}}_2 \,.\, \mathbf{ds},$$

kuŗās $\mathbf{ds}_1$ un $\mathbf{ds}_2$ apzīmē vektoram **ds** atbilstošos vektorus šais transformācijās.

Atņemot pirmo formulu no otrās, dabūjam par (9.) formulu vispārīgāku formulu

$$\mathbf{ds}_2 - \mathbf{ds}_1 = (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1) \times \mathbf{ds} + (\overline{\overline{\mathbf{D}}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{D}}}_1) \,.\, \mathbf{ds}. \tag{10.}$$

53. §. Transformācijas deformācijas tensors.

220. **Deformācija un pārvietošana.** — Iedomāsimies nepārtrauktu materiālu sistēmu, kuŗas elementi tiek nepārtraukti transformēti no apvidus R apvidū R_1. Šādu materiālas sistēmas transformāciju sauc par *deformāciju*, ja materiālo sistēmu savā kopumā nav iespējams transportēt kā veselu, analogi cietam ķermenim, no pozicijas R pozicijā R_1. Speciālā gadījumā, kad materiālo sistēmu iespējams transportēt no pozicijas R pozicijā R_1, kā kaut ko veselu, saka, ka materiālas sistēmas transformācija ir *pārvietošana.* Tādējādi deformācija ir saistīta ar formas mainīšanos, kamēr pārvietošana tikai ar pozicijas mainīšanos. Nepārtrauktas materiālas sistēmas divas deformācijas ir identiskas, ja vienu no tām iespējams dabūt no otras ar vienkāršu pārvietošanu.

Kā vēlāk redzēsim, nepārtrauktas materiālas sistēmas deformācija ir raksturota ar vienu simmetrisku otrās kārtas tensoru. Lai šo tensoru definētu, sāksim pētīt transformācijas lineāro elementu **ds**, saistot tādējādi nepārtrauktas materiālas sistēmas deformāciju ar klasiskām teorijām par virsu deformāciju un lineārā elementa, kas atkarīgs no vairākiem mainīgiem lielumiem, kvadrāta pētīšanu[1]).

221. **Noteikumi pārvietošanai bez deformācijas kāda punkta apkārtnē.** — Apskatīsim ap punktu P kādu infinītezimālu apvidu r un tā transformēto apvidu r_1 ap punktu P_1, kas ir punkta P transformētais punkts, un jautāsim, vai ir iespējams apvidu r pārvietot apvidū r_1 ar translāciju $\overline{PP_1}$ un rotāciju ap punktu P_1, uzskatot apvidu r par cietu ķermeni?

Lai tas būtu iespējams, ir nepieciešami un pietiekami, ka agrāk definēto vektoru $\overline{P'P''}$ un $\overline{P_1'P_1''}$ garumi ir savā starpā vienādi, lai kāds būtu vektors $\overline{P'P''}$ apvidū r.

Bet, ja $\mathbf{ds}_1$ un $\mathbf{ds}$ koordinātas attiecīgi apzīmē ar dx_1, dy_1, dz_1 un dx, dy, dz, tad

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2,$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

un diferenci $ds_1^2 - ds^2$, ievērojot (7.) sistēmas formulas, var uzrakstīt formā

$$\begin{aligned} ds_1^2 - ds^2 = 2\,(\varepsilon_1 dx^2 + \varepsilon_2 dy^2 + \varepsilon_3 dz^2 + 2\gamma_1 dy\,dz \\ + 2\gamma_2 dz\,dx + 2\gamma_3 dx\,dy), \end{aligned} \tag{11.}$$

pie kam

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial X}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2\right], \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial Y}{\partial y} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right], \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial Z}{\partial z} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2\right], \\ 2\gamma_1 &= \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial z}, \\ 2\gamma_2 &= \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x}, \\ 2\gamma_3 &= \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{12.}$$

[1]) Sal. G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* t. II, III, Paris, Gauthier-Villars, 1914—15.

Tā tad nepieciešamie un pietiekamie noteikumi, lai transformācija, kas raksturota ar tensoru $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$, punkta P apkārtnē reducētos par pārvietošanu bez deformācijas, ir

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0. \tag{13.}$$

Tiešām, ja (12.) sistēmas sešas funkcijas ir nulles, tad, kā to rāda (11.) vienlīdzība,

$$ds_1 = ds\,,$$

t. i. apvidus R divu bezgala tuvu punktu P' un P'' attālums ir vienāds ar transformētā apvidus R_1 atbilstošo punktu P_1' un P_1'' attālumu.

Arī otrādi, ja transformācija ir pārvietošana, tad $ds_1 = ds$, un (12.) sistēmas sešas funkcijas ir vienādas ar nulli.

222. **Deformācijas tensors.** — Nav grūti pārliecināties, ka (12.) sistēmas seši lielumi ir kāda otrās kārtas simmetriska tensora koordinātas. Šo tensoru sauc par apskatītās transformācijas *deformācijas tensoru* un to apzīmē ar $\overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}$.

Tiešām, apzīmēsim

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_{11} = \varepsilon_1, \quad \Delta_{22} = \varepsilon_2, \quad \Delta_{33} = \varepsilon_3 \\ \Delta_{23} = \Delta_{32} = \gamma_1, \quad \Delta_{31} = \Delta_{13} = \gamma_2, \quad \Delta_{12} = \Delta_{21} = \gamma_3. \end{aligned}\right. \tag{14.}$$

Tā kā $ds_1^2 - ds^2$, ievērojot tā ģeometrisko nozīmi, ir invariants lielums, t. i. neatkarīgs no koordinātu triedra, tad (11.) vienlīdzības labā puse ir invarianta kvadrātiska forma, un tā tad tensors $\overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}$, kuŗa koordinātas ir dotas ar (14.) sistēmu, ir simmetrisks otrās kārtas tensors.

(11.) vienlīdzību tādējādi var pārrakstīt formā

$$ds_1^2 - ds^2 = 2\,\overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}\,.\,\mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds}. \tag{15.}$$

Pēdējo fundāmentālo relāciju var vispārināt analogi (9.) relācijai, apskatot apvidus divas transformācijas $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_1$ ($\overline{\overline{\mathbf{D}}}_1$, $\mathbf{G}_1$) un $\overline{\overline{\mathbf{T}}}_2$ ($\overline{\overline{\mathbf{D}}}_2$, $\mathbf{G}_2$) no viena un tā paša sākuma stāvokļa. Ja šo transformāciju deformācijas tensorus apzīmējam ar $\overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}_1$ un $\overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}_2$, tad dabūjam divas relācijas

$$ds_1^2 - ds^2 = 2\,\overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}_1\,.\,\mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds}\,,$$
$$ds_2^2 - ds^2 = 2\,\overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}_2\,.\,\mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds}\,,$$

no kuŗām, atņemot pirmo no otrās, iegūstam vispārīgu formulu

$$ds_2^2 - ds_1^2 = 2\,(\overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}_1)\,.\,\mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds}. \tag{16.}$$

223. **Deformācijas tensora īpašības.** — Apskatīsim dažus (16.) relācijas secinājumus.

I teōrēma. — *Nepieciešamais un pietiekamais noteikums, lai kāda apvidus punkta apkārtnē šī apvidus divas transformācijas no viena un tā paša sākuma stāvokļa atšķirtos viena no otras tikai ar kādu pārvietošanu, ir, lai šo transformāciju deformācijas tensori apskatītajā punktā būtu vienādi.*

Tiešām, no (16.) relācijas izriet, ka, lai kāds būtu **ds** apvidū r,

$$\overline{\overline{\Delta}}_2 = \overline{\overline{\Delta}}_1 \tag{17.}$$

un

$$ds_2 = ds_1 \tag{17.'}$$

ir divi ekvivalenti noteikumi.

II teōrēma. — *Nepieciešamais un pietiekamais noteikums, lai apvidus divas transformācijas no viena un tā paša sākuma stāvokļa atšķirtos visā apvidū viena no otras tikai ar kādu pārvietošanu, ir, lai šo transformāciju deformācijas tensori būtu vienādi ikvienā apvidus punktā.*

Jāpiezīmē, ka apvidus kā vesela pāreja no viena stāvokļa otrā, transformētā stāvoklī, ar pārvietošanu, ir iespējama tikai tad, ja

$$ds_1 = ds_2 \tag{18.}$$

ikvienā apvidus punktā, no kurienes savukārt izriet, ka, lai kāds būtu punkts $P(x, y, z)$,

$$\overline{\overline{\Delta}}_2 = \overline{\overline{\Delta}}_1 \tag{18.'}$$

ir (18.) noteikumam ekvivalents noteikums.

(18.) noteikums ir nepieciešams, lai jebkuŗa punkta apkārtnē pāreja no viena apvidus stāvokļa otrā varētu tikt reālizēta ar pārvietošanu. Bet tas ir arī pietiekams, jo, gaŗuma elementiem paturot gaŗumus, patur savus gaŗumus arī no šiem elementiem sastādītās galīgā gaŗuma līknes; un tā tad šis noteikums taisnēm piekārto taisnes, paturot attālumus starp attiecīgajiem elementiem. Tādējādi pāreja no viena apvidus stāvokļa otrā notiek tāpat kā cieta ķermeņa pāreja no vienas pozicijas otrā.

No visa teiktā varam secināt, ka deformācijas tensors $\overline{\overline{\Delta}}$ pilnīgi raksturo deformāciju, attaisnojot ar to savu nosaukumu.

224. **Kubiskā dilātācija.** — Pārliecināsimies, ka bezgala mazā apvidus ap punktu P tilpuma variācija ir vienīgi šī punkta deformācijas tensora koordinātu funkcija.

Apzīmējot ar V un V_1 transformācijā atbilstošo apvidu r un r_1 tilpumus ap punktiem P un P_1, varam rakstīt, ka

$$V = \iiint_r dx\, dy\, dz\,, \quad V_1 = \iiint_{r_1} dx_1\, dy_1\, dz_1\,.$$

Bet V_1 izteiksmi, transformējot mainīgos lielumus vairākkārtīgos integrālos, kā no analizes zināms, savkārt var uzrakstīt formā

$$V_1 = \iiint_{r_1} dx_1\, dy_1\, dz_1 = \iiint_r J\, dx\, dy\, dz, \tag{19.}$$

pie kam

$$J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & 1 + \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & 1 + \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ir (7.) transformācijas Jakobi determinants. Un tā tad no (19.) formulas izriet, ka

$$\frac{dV_1}{dV} = J\,,$$

no kurienes, pēc determinantu reizināšanas likuma, reizinot kolonnas ar kolonnām, dabūjam, ka

$$\left(\frac{dV_1}{dV}\right)^2 = J^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix}. \tag{19.'}$$

Pēdējā izteiksme rāda, ka $\frac{dV_1}{dV}$, un tā tad arī $\Theta = \frac{dV_1 - dV}{dV}$, ko sauc par *kubisko dilātāciju* punktā P, ir atkarīgs vienīgi no deformācijas tensora $\overline{\overline{\Delta}}$ koordinātām šai punktā.

225. **Deformācijas tensora ģeometriska reprezentācija. Dilātācijas elīpsoīds.** — Transformācijas deformācijas tensora $\overline{\overline{\Delta}}$ repre-

zentētājas virsas vietā parasti konstruē tensora $(\overline{\overline{1}} + \overline{\overline{\Delta}})$ reprezentētāju virsu, kur $\overline{\overline{1}}$ ir sfēriskais tensors ar koordinātām

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ja } i = j, \\ 0, & \text{ja } i \neq j. \end{cases}$$

Ar sfērisko tensoru $\overline{\overline{1}}$ (15.) formulu var pārrakstīt tā

$$\text{(20.)} \qquad ds_1^2 = ds^2 + 2\,\overline{\overline{\Delta}}\,.\,\mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds} = (\overline{\overline{1}} + 2\,\overline{\overline{\Delta}})\,.\,\mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds}.$$

Ja vektora $\mathbf{ds}$ ar virziena kosiniem α, β, γ vienības vektoru apzīmē ar $\mathbf{u}$, tad

$$\mathbf{ds} = ds\;\mathbf{u}\,.$$

Tālāk, ja no punkta P nosprauž radijvektoru $\mathbf{r} = \overline{PQ}$ ar garumu

$$r = \frac{1}{\sqrt{|\,d\,(\alpha, \beta, \gamma)\,|}},$$

pie kam

$$d\,(\alpha, \beta, \gamma) = (\overline{\overline{1}} + 2\,\overline{\overline{\Delta}})\,.\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u} = (\overline{\overline{1}} + 2\,\overline{\overline{\Delta}})\,.\,\frac{\mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds}}{ds^2} = \frac{ds_1^2}{ds^2}$$

jeb

$$\text{(20.')} \qquad \begin{aligned} d\,(\alpha, \beta, \gamma) = (1 + 2\,\varepsilon_1)\,\alpha^2 + (1 + 2\,\varepsilon_2)\,\beta^2 + (1 + 2\,\varepsilon_3)\,\gamma^2 \\ + 4\,\gamma_1 \gamma\,\beta + 4\,\gamma_2\,\alpha\,\gamma + 4\,\gamma_3\,\alpha\,\beta = \frac{ds_1^2}{ds^2}\,, \end{aligned}$$

tad gala punktu $Q\,(x, y, z)$ ģeometriskā vieta ir otrās kārtas virsa, kuŗas vienādojums koordinātu triedrā $Pxyz$, kuŗa asis vilktas caur punktu P parallēli dotā triedra attiecīgajām asīm, ir

$$\text{(21.)} \qquad \begin{aligned} (1 + 2\,\varepsilon_1)\,x^2 + (1 + 2\,\varepsilon_2)\,y^2 + (1 + 2\,\varepsilon_3)\,z^2 \\ + 4\,\gamma_1\,yz + 4\,\gamma_2\,zx + 4\,\gamma_3\,xy = 1. \end{aligned}$$

Šo virsu, kas ir elīpsoīds, jo tās vienādojuma kreisā puse, ievērojot, ka $d\,(\alpha, \beta, \gamma) > 0$, ir pozitīvi definīta kvadrātiska forma, sauc par *dilātācijas elīpsoīdu punktā P.*

Nospraustā radijvektora $\mathbf{r}$ gaŗums r ir

$$r = \frac{1}{\sqrt{|\,d\,(\alpha, \beta, \gamma)\,|}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{ds_1}{ds}\right)^2}} = \frac{ds}{ds_1}\,.$$

Apzīmējot ar

$$e = \frac{ds_1 - ds}{ds}$$

dilātācijas koeficientu radijvektora $\mathbf{r}$ virzienā, ko dažreiz sauc arī par gaŗuma vienības dilātāciju šai virzienā, dabūjam radijvektora $\mathbf{r}$ gaŗumam r izteiksmi

$$r = \frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{1+e}. \tag{22.}$$

Dilātācijas koeficients e var iegūt pozitīvas un negātīvas vērtības, izņemot vērtību -1, kā arī tas var būt vienāds ar nulli.

226. **Lineārās dilātācijas paralleli koordinātu triedra asīm.** — Interpretēsim ģeometriski funkcijas ε_1, ε_2 un ε_3. Šai nolūkā apskatīsim vektoru $\overline{PP'} = \mathbf{ds}$, kuŗa sākums ir punktā P un kuŗš ir parallēls koordinātu asij Ox, un apzīmēsim tā dilātācijas koeficientu ar δ_1. Apzīmējot šī vektora gaŗumu pēc deformācijas ar ds_1 un substituējot (20.') formulā

$$\alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 0,$$

dabūjam, ka

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{1 + 2\,\varepsilon_1},$$

un tā tad

$$\delta_1 = \frac{ds_1 - ds}{ds} = \sqrt{1 + 2\,\varepsilon_1} - 1.$$

Analogi, apzīmējot ar δ_2 un δ_3 Oy- un Oz-asij parallēlu vektoru kuŗu sākums ir punktā P, dilātācijas koeficientus, dabūsim, ka

$$\delta_2 = \sqrt{1 + 2\,\varepsilon_2} - 1, \quad \delta_3 = \sqrt{1 + 2\,\varepsilon_3} - 1.$$

Pēdējās trīs formulas definē ģeometriski ikvienā apvidus R punktā P funkcijas ε_1, ε_2, ε_3.

227. **Leņķiskā dilātācija ap punktu.** — Apzīmēsim ar $\mathbf{ds}\,(\alpha, \beta, \gamma) = \overline{PP'}$ un $\mathbf{ds}'\,(\alpha', \beta', \gamma') = \overline{PP''}$ divus vektorus, kuŗu kopējais sākums ir punktā P un kuŗi pēc deformācijas pāriet vektoros $\mathbf{ds}_1\,(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \overline{P_1P_1'}$ un $\mathbf{ds}_1'\,(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1') = \overline{P_1P_1''}$ ar kopēju sākuma punktu P_1, pie kam attiecīgie α, β, γ apzīmē šo vektoru virzienu kosinus. Diferenci $\varphi_1 - \varphi$, kur φ un φ_1 apzīmē leņķus, ko veido vektori $\mathbf{ds}$, $\mathbf{ds}'$ un $\mathbf{ds}_1$, $\mathbf{ds}_1'$, sauc par

leņķa *P′PP″* *dilātāciju.* Lai šo dilātāciju aprēķinātu, ir jāzin leņķa φ_1 izteiksme. Viegli aprēķināt $\cos\varphi_1$, sastādot vektoru $\mathbf{ds}_1$ un $\mathbf{ds}_1'$ skālāro produktu $\mathbf{ds}_1 . \mathbf{ds}_1'$. Tā reizinot (8.) fundāmentālo formulu

$$\mathbf{ds}_1 - \mathbf{ds} = \overline{\overline{\mathbf{T}}} . \mathbf{ds},$$

kur $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ apzīmē transformācijas tensoru, skālāri ar $\mathbf{ds}_1'$, dabūjam formulu

$$\mathbf{ds}_1 . \mathbf{ds}'_1 = \mathbf{ds} . \mathbf{ds}'_1 + \overline{\overline{\mathbf{T}}} . \mathbf{ds} . \mathbf{ds}'_1 .$$

Substituējot šīs formulas labajā pusē $\mathbf{ds}_1'$ vietā tā izteiksmi $\mathbf{ds}' + \overline{\overline{\mathbf{T}}} . \mathbf{ds}'$, redzam, ka

$$\mathbf{ds}_1 . \mathbf{ds}_1' = \mathbf{ds} . \mathbf{ds}' + \overline{\overline{\mathbf{T}}} . \mathbf{ds} . \mathbf{ds}' + \overline{\overline{\mathbf{T}}} . \mathbf{ds}' . \mathbf{ds} + (\overline{\overline{\mathbf{T}}} . \mathbf{ds}) . (\overline{\overline{\mathbf{T}}} . \mathbf{ds}'). \tag{23.}$$

Tālāk apzīmēsim, kā agrāk, vektoru $\mathbf{ds}$ un $\mathbf{ds}'$ koordinātas attiecīgi ar dx, dy, dz un dx', dy', dz'. Tad (23.) formulu var pārrakstīt formā

$$\begin{aligned}\mathbf{ds}_1 . \mathbf{ds}_1' = {} & (1 + 2\varepsilon_1)\, dx\, dx' + (1 + 2\varepsilon_2)\, dy\, dy' + (1 + 2\varepsilon_3)\, dz\, dz' \\ & + 2\gamma_1 (dy\, dz' + dz\, dy') + 2\gamma_2 (dz\, dx' + dx\, dz') + 2\gamma_3 (dx\, dy' + dy\, dx').\end{aligned} \tag{24.}$$

Bet, apzīmējot vektoru $\mathbf{ds}$ un $\mathbf{ds}'$ vienības vektorus attiecīgi ar $\mathbf{u}$ un $\mathbf{u}'$ un to koordinātas attiecīgi ar α, β, γ un α', β', γ', varam rakstīt, ka

$$\mathbf{ds} = ds\ \mathbf{u}, \qquad \mathbf{ds}' = ds'\ \mathbf{u}'$$

resp.

$$\begin{aligned} dx &= ds\ \alpha, & dx' &= ds'\ \alpha', \\ dy &= ds\ \beta, & dy' &= ds'\ \beta', \\ dz &= ds\ \gamma, & dz' &= ds'\ \gamma'. \end{aligned}$$

Substituējot pēdējās izteiksmes (24.) formulā un ievērojot (20.′) izteiksmi kvadrātiskai formai $d(\alpha, \beta, \gamma)$, dabūjam leņķa φ_1 aprēķināšanai izteiksmi

$$\begin{aligned}\frac{ds_1\ ds_1'\ \cos\varphi_1}{ds\ ds'} = {} & (1 + 2\varepsilon_1)\,\alpha\alpha' + (1 + 2\varepsilon_2)\,\beta\beta' + (1 + 2\varepsilon_3)\,\gamma\gamma' \\ & + 2\gamma_1 (\beta\gamma' + \gamma\beta') + 2\gamma_2 (\gamma\alpha' + \alpha\gamma') \\ & + 2\gamma_3 (\alpha\beta' + \beta\alpha') = \tfrac{1}{2}\,[\alpha' d_\alpha + \beta' d_\beta + \gamma' d_\gamma],\end{aligned} \tag{25.}$$

kur d_α, d_β, d_γ apzīmē $d(\alpha, \beta, \gamma)$ parciālos atvasinājumus pēc α, β un γ.

Bet tā kā kvadrātiskā forma $d(x, y, z)$ reprezentē punkta P dilātācijas elīpsoīda vienādojuma kreiso pusi, tad no pēdējās formulas izriet, ka dilātācijas elīpsoīds punktā P nosaka leņķisko dilātāciju ap šo punktu.

Lai leņķis φ_1 būtu taisns, ir nepieciešami un pietiekami, lai pirms deformācijas

$$\alpha' d_\alpha + \beta' d_\beta + \gamma' d_\gamma = 0,$$

t. i. lai virzieni PP'' un PP' būtu saistīti pret dilātācijas elīpsoīdu ar vienādojumu

$$d(x, y, z) = 1$$

punktā P. No šejienes secinām, ka eksistē trīs lineāri elementi ar sākumu punktā P, kas veido ortogōnālu triedru kā pirms, tā arī pēc deformācijas. Tie ir elementi, kas sākumā sakrīt ar punkta P dilātācijas elīpsoīda galvenajām asīm.

228. **Koordinātu triedra asīm paralēlu plakņu dilātācijas.** — Interpretēsim tagad ģeometriski funkcijas $2\gamma_1$, $2\gamma_2$, $2\gamma_3$. Šai nolūkā apskatīsim punktā P leņķi $P'PP''$, kuŗa infinītezimālās malas $PP' = ds$ un $PP'' = ds'$ ir attiecīgi paralēlas koordinātu triedra Oy- un Oz-asīm. Tādā gadījumā

$$(26.)\qquad \begin{cases} \alpha = 0, & \beta = 1, & \gamma = 0, \\ \alpha' = 0, & \beta' = 0, & \gamma' = 1. \end{cases}$$

Apzīmējot apskatītos elementus pēc deformācijas attiecīgi ar $P_1P_1' = ds_1$ un $P_1P_1'' = ds_1'$, dabūjam to variācijām izteiksmes

$$(27.)\qquad \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2}, \quad \frac{ds_1'}{ds'} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3}.$$

Tālāk, ja leņķi $P_1'P_1P_1''$ apzīmē ar φ_1, tad tas ir dots ar (25.) formulu, substituējot tanī ar (26.) un (27.) sistēmu dotās nozīmes. Tādējādi dabūjam, ka

$$(28.)\qquad 2\gamma_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2}\ \sqrt{1 + 2\varepsilon_3}\ \cos\varphi_1.$$

Analogas izteiksmes dabūjam koeficientiem $2\gamma_2$ un $2\gamma_3$ ikvienā punktā P.

229. **Galvenās dilātācijas.** — Par *galvenām dilātācijām* apvidus R punktā P sauc trīs lineāro elementu, kuŗu kopējais sākums ir punktā P un pirmatnējie virzieni vienādi ar šī punkta dilātācijas elipsoīda galveno asu virzieniem, dilātācijas koeficientus e_1, e_2 un e_3.

Apzīmēsim dilātācijas elipsoīda trīs virsotnes ar A, B, C. Tad koeficienti e_1, e_2 un e_3, kā to rāda (22.) sakarība, ir definēti ar formulām

$$e_1 = \frac{1}{PA} - 1, \quad e_2 = \frac{1}{PB} - 1, \quad e_3 = \frac{1}{PC} - 1.$$

Tā tad, lai aprēķinātu šos koeficientus, ir jāaprēķina dilātācijas elipsoīda ar (21.) vienādojumu asis PA, PB, PC. Šai nolūkā ir jāatrisina vienādojums

$$\begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 - \lambda & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 - \lambda & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

pret λ, kuŗš sastādīts ar elipsoīda (21.) vienādojuma kreisās puses koeficientiem un kuŗa saknes λ_1, λ_2 un λ_3 ir attiecīgi vienādas ar pusasu kvadrātu apgrieztām vērtībām $\frac{1}{PA^2}$, $\frac{1}{PB^2}$, $\frac{1}{PC^2}$.

Un tā tad

$$e_1 = \sqrt{\lambda_1} - 1, \quad e_2 = \sqrt{\lambda_2} - 1, \quad e_3 = \sqrt{\lambda_3} - 1.$$

XV NODAĻA.

DEFORMĒJAMA KONTINUUMA BEZGALA MAZA NEPĀRTRAUKTA TRANSFORMĀCIJA.

54. §. Nepārtraukta bezgala maza transformācija.

230. **Definīcija.** — Ja transformācijas vektors **v** (X, Y, Z) un tāpat arī transformācijas tensors $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ ir bezgala mazi vai, citiem vārdiem sakot, ja X, Y, Z un to parciālie atvasinājumi pēc x, y, z ir bezgala mazi, tad apskatīto nepārtraukto transformāciju sauc par *bezgala mazu* transformāciju.

Nepārtrauktu bezgala mazu transformāciju nozīme deformējamu kontinuumu mēchanikā, kā hidrodinamikā, tā arī elastības teōrijā, ir ļoti liela.

231. **Secinājumi.** — Ja transformācijas vektora **v** un transformācijas tensora $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$ koordinātas ir bezgala mazas, tad šo koordinātu produkti ik pa divi, tāpat arī to kvadrāti, salīdzinot tos ar to pirmajām pakāpēm, var tikt atmesti.

Tādējādi dabūjam šādus divus secinājumus:

1° *Transformācijas simmetriskais tensors* $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ *ir bezgala mazs, un tas ir vienāds ar transformācijas deformācijas tensoru* $\overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}$, *t. i.* $\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \overline{\overline{\mathbf{\Delta}}}$, kā tas redzams no 221. nodal. (12.) sistēmas formulām, atmetot tanīs tensora koordinātu produktus un kvadrātus. Šos tensorus ar koordinātām e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3, kuŗas dotas ar 218. nodal. (4.) formulu sistēmu, turpmāk apzīmēsim ar $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$.

2° 219. nodal. (9.) formulā vektors $\mathbf{G} \times \mathbf{ds}$, kur **G** ir bezgala mazs vektors, reprezentē, līdz kādam otrās kārtas bezgala mazam lielumam, vektora $\overline{PM} = \mathbf{ds}$ gala punkta M pārvietojumu rotācijā, kas raksturota ar vektoru **G**, par leņķi G. Aiz šī iemesla vektoru **G** ar koordinātām p, q, r, kuŗu turpmāk apzīmēsim ar $\mathbf{\Omega}$, sauc par *transformācijas rotācijas vektoru.*

Ar šiem jauniem apzīmējumiem 219. nodal. (9.) un (10.) un 222. nodal. (15.) un (16.) fundāmentālo formulu var pārrakstīt tā:

$$(1.)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{ds}_1 - \mathbf{ds} &= \mathbf{\Omega} \times \mathbf{ds} + \overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \mathbf{ds}\,, \\ \mathbf{ds}_2 - \mathbf{ds}_1 &= (\mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{\Omega}_1) \times \mathbf{ds} + (\overline{\overline{\mathbf{E}}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{E}}}_1) \,.\, \mathbf{ds} \end{aligned} \right.$$

un

$$(2.)\quad \left\{ \begin{aligned} ds_1^2 - ds^2 &= 2\,\overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \mathbf{ds} \,.\, \mathbf{ds}\,, \\ ds_2^2 - ds_1^2 &= 2\,(\overline{\overline{\mathbf{E}}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{E}}}_1) \,.\, \mathbf{ds} \,.\, \mathbf{ds}\,. \end{aligned} \right.$$

Tā kā vektori $\mathbf{ds}_1$ un $\mathbf{ds}$ pēc (1.) sistēmas pirmās formulas atšķiras viens no otra tikai par kādu otrās kārtas bezgala mazu lielumu un diference

$$ds_1^2 - ds^2 = (ds_1 + ds)\,(ds_1 - ds),$$

kāda bezgala maza lieluma, kuŗa kārta ir augstāka par vienu, robežās, ir vienāda ar

$$2\,ds\,(ds_1 - ds),$$

tad, aizstājot (2.) sistēmas pirmās formulas kreiso pusi ar pēdējo izteiksmi un pēc tam izdalot abas šīs formulas puses ar $2\,ds^2$, to var pārrakstīt formā

$$(3'.)\qquad \frac{ds_1 - ds}{ds} = \overline{\overline{\mathbf{E}}}\,.\,\frac{\mathbf{ds}}{ds}\,.\,\frac{\mathbf{ds}}{ds}\,.$$

Uzrakstot (2.) sistēmas otras formulas kreiso pusi formā $(ds_2^2 - ds^2) - (ds_1^2 - ds^2)$ un aizstājot pirmo iekavu ar $2\,ds\,(ds_2 - ds)$, otru iekavu ar $2\,ds\,(ds_1 - ds)$ un pēc tam izdalot šīs formulas abas puses ar $2\,ds^2$, dabūjam formulu

$$(3''.)\qquad \frac{ds_2 - ds_1}{ds} = (\overline{\overline{\mathbf{E}}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{E}}}_1)\,.\,\frac{\mathbf{ds}}{ds}\,.\,\frac{\mathbf{ds}}{ds}\,.$$

Tādējādi infinītezimāla vektora $\overline{PM}$ gala punkta M pārvietojums $\overline{MM_1}$ ir dots ar formulu

$$(4.)\qquad \overline{MM_1} = \overline{MP} + \overline{PP_1} + \overline{P_1M_1} = \overline{PP_1} + \mathbf{ds}_1 - \mathbf{ds},$$

ko, ievērojot (1.) sistēmas pirmo vienādojumu, var pārrakstīt formā

$$(5.)\qquad \overline{MM_1} = \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{ds} + \overline{\overline{\mathbf{E}}}\,.\,\mathbf{ds},$$

kur

$$\overline{PM} = \mathbf{ds}.$$

Pēdējā sakarība rāda, ka nepārtraukta bezgala maza transformācija ir raksturota ar diviem bezgala maziem vektoriem $\mathbf{v}$ un $\mathbf{\Omega}$ un vienu bezgala mazu tensoru $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$, un tās vispārīgā izteiksme ir dota ar (5.) formulu.

55. §. Bezgala mazu transformāciju salikšana un sadalīšana.

232. **Transformāciju salikšana.** — I teorēma. — *Nepārtraukta telpas apvidus vairāku bezgala mazu transformāciju no viena un tā paša*

sākuma stāvokļa salikšana notiek pēc šo transformāciju definētāju vektoru un tensoru salikšanas likumiem.

Tas nozīmē: ja $(\mathbf{v}_1, \mathbf{\Omega}_1, \overline{\overline{\mathbf{E}}}_1)$ un $(\mathbf{v}_2, \mathbf{\Omega}_2, \overline{\overline{\mathbf{E}}}_2)$ apzīmē divas vektoru un tensoru grupas, kas raksturo divas apvidus transformācijas no viena un tā paša sākuma stāvokļa, tad, izdarot šīs divas transformācijas pēc kārtas, tās ir ekvivalentas ar vienu rezultētāju transformāciju

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \ \mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{\Omega}_2, \ \overline{\overline{\mathbf{E}}}_1 + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_2)$$

no tā paša apvidus sākuma stāvokļa.

Pierādīsim šo teorēmu. Pirmā transformācija transformē punktu M punktā M_1 tā, ka ievērota ir vienlīdzība

$$\overline{MM_1} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{\Omega}_1 \times \mathbf{ds} + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_1 \cdot \mathbf{ds}, \tag{5.}$$

kur

$$\mathbf{ds} = \overline{PM}.$$

Otra transformācija, kas transformē punktu M_1 punktā M_2, apmierina analogu vienlīdzību

$$\overline{M_1M_2} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{\Omega}_2 \times \mathbf{ds}_1 + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_2 \cdot \mathbf{ds}_1,$$

pie kam

$$\mathbf{ds}_1 = \overline{P_1M_1}.$$

Bet tā kā $\mathbf{ds}_1$ un $\mathbf{ds}$ atšķiŗas viens no otra tikai par kādu otrās kārtas bezgala mazu lielumu, tad tā robežās

$$\overline{M_1M_2} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{\Omega}_2 \times \mathbf{ds} + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_2 \cdot \mathbf{ds}. \tag{6.}$$

Tādējādi, saskaitot (5.) un (6.) vienlīdzību, dabūjam, ka

$$\overline{MM_2} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + (\mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{\Omega}_2) \times \mathbf{ds} + (\overline{\overline{\mathbf{E}}}_1 + \overline{\overline{\mathbf{E}}}_2) \cdot \mathbf{ds},$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

233. **Transformāciju sadalīšana.** — II teorēma. — *Ikkatra bezgala maza transformācija var tikt sadalīta vienā translācijā, vienā rotācijā un vienā deformācijā.* Pēdējo sauc par bezgala mazās transformācijas *tīro deformāciju.*

Tiešām, saliekot apvidus trīs transformācijas

$$(\mathbf{v}, 0, 0), \ (0, \mathbf{\Omega}, 0), \ (0, 0, \overline{\overline{\mathbf{E}}})$$

no viena un tā paša sākuma stāvokļa, dabūjam vispārīgu transformāciju ($\mathbf{v}$, $\mathbf{\Omega}$, $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$) ar formu

$$\mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{ds} + \overline{\overline{\mathbf{E}}} \, . \, \mathbf{ds} \, .$$

Transformāciju (0, 0, $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$) sauc par *tīro deformāciju* jeb *tīro transformāciju.* Tādējādi bezgala maza tīra transformācija ir raksturota ar to, ka tās tensors reducējas par tās deformācijas tensoru, t. i. tas ir simmetrisks.

Nepieciešamie un pietiekamie analitiskie noteikumi šai redukcijai ir rotācijas vektora $\mathbf{\Omega}$ koordinātu p, q, r anullēšanās, t. i.

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

Bet šie noteikumi savukārt ir nepieciešami un pietiekami, lai izteiksme

$$X(x, y, z)\, dx + Y(x, y, z)\, dy + Z(x, y, z)\, dz$$

būtu kādas funkcijas $U(x, y, z)$ pilnais diferenciāls resp. lai transformācijas vektora $\mathbf{v}(P)$ koordinātas $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ apmierinātu sakarības:

$$X(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z), \qquad Y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z),$$

$$Z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z),$$

kas var tikt rezumētas vektoriālā vienlīdzībā

$$\mathbf{v}(P) = \mathbf{grad}\, U(P).$$

Citādi sakot, bezgala maza transformācija ir tīra deformācija, ja transformācijas vektora $\mathbf{v}(P)$ radītais lauks ir kāda skālāra $U(P)$ lauka gradients.

Tādā gadījumā saka, ka bezgala mazā transformācija ir *longitūdināla* vai *irrotācionāla.*

III teorēma. — *Tīro deformāciju var sadalīt sešās deformācijās: trīs dilātācijās un trīs slīdēs.*

Tiešām, ja tīro transformāciju (0, 0, $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$), kuŗas tensors ir $\overline{\overline{\mathbf{E}}}(e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3)$, sadala sešās parciālās transformācijās ar tensoriem $\overline{\overline{\mathbf{E}}}_1\ (e_1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\overline{\overline{\mathbf{E}}}_2\ (0, e_2, 0, 0, 0, 0)$, $\overline{\overline{\mathbf{E}}}_3\ (0, 0, e_3, 0, 0, 0)$,

..., $\overline{\overline{\mathbf{E}}}_6\ (0, 0, 0, 0, 0, g_3)$, tad katra no šīm parciālām transformācijām raksturo vienu tīro deformāciju, jo to tensori ir simmetriski.

Trīs pirmās tīrās deformācijas, kuŗu viena e koordināta nav nulle, sauc par *dilātācijām*, bet trīs pēdējās, kuŗu viena g koordināta nav nulle — par *slīdēm*.

Tādējādi *vispārīga bezgala maza transformācija var tikt sadalīta kādā pārvietošanā (ar translāciju* **v** *un rotāciju* $\mathbf{\Omega}$) *un tīrā deformācijā* $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$. Pirmā ir apskatīta III nodaļā, atliek vēl apskatīt tīro deformāciju.

56. §. Tīrā deformācija.

234. **Dilātācijas virsas.** — Tā kā tīrā deformācija ir raksturota ar vienu simmetrisku otrās kārtas tensoru $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$, tad pētīt šo tensoru nozīmē to pašu kā pētīt šī tensora reprezentētājas otrās kārtas virsas, kuŗas sauc par *dilātācijas virsām*.

Ja lineārā elementa **ds** dilātācijas koeficientu apzīmē ar

$$e = \frac{ds_1 - ds}{ds}, \tag{7.}$$

tad dilātācijas virsu radijvektora **r** gaŗums r virzienā **ds**, ko nosaka vienības vektors **u** ar virziena kosiniem (α, β, γ), pie kam $\mathbf{ds} = ds\ \mathbf{u}$, kā to rāda (3'.) formula, ir

$$r = \frac{1}{\sqrt{|e|}},$$

kur

$$\begin{aligned} e &= \overline{\overline{\mathbf{E}}} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \overline{\overline{\mathbf{E}}} \cdot \frac{\mathbf{ds}}{ds} \cdot \frac{\mathbf{ds}}{ds} = 2\,\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma) \\ &= e_1\,\alpha^2 + e_2\,\beta^2 + e_3\,\gamma^2 + 2\,g_1\,\beta\,\gamma + 2\,g_2\,\gamma\,\alpha + 2\,g_3\,\alpha\,\beta. \end{aligned} \tag{8.}$$

Un tā tad dilātācijas virsu vienādojums ir

$$2\varphi\,(x, y, z) = e_1 x^2 + e_2 y^2 + e_3 z^2 + 2 g_1 yz + 2 g_2 zx + 2 g_3 xy = \pm 1, \tag{9.}$$

pie kam pēdējā vienādojuma labajā pusē jāņem zīme +, ja e ir pozitīvs lielums, bet —, ja e ir negātīvs, vai, citiem vārdiem sakot, zīme jāizvēlas atkarībā no tā, vai lineārais elements apskatītajā virzienā izplešas vai saraujas.

Ja ap apskatīto punktu P ir tikai dilātācijas (t. i. $e > 0$ resp. kvadrātiskā forma $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ ir pozitīvi definīta) vai tikai kontrakcijas virzieni ($e < 0$ resp. kvadrātiskā forma $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ ir negātīvi definīta), tad atbilstošās virsas reducējas par elīpsoīdu. Ja turpretim punktā P ir kā dilātācijas ($e > 0$), tā kontrakcijas ($e < 0$) virzieni (t. i. kvadrātiskā forma $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ nav definīta), tad dilātācijas virsas sastāda divi saistīti hiperboloīdi, no kuŗiem viens atbilst dilātācijām, otrs — kontrakcijām, bet kuŗi šķirti ar asimptotu kōnu $\varphi(x, y, z) = 0$, kas atbilst virzieniem, kuŗu gaŗumi nemainās ($e = 0$).

235. **Tīrās deformācijas komponenti un tās tensora koordinātas.** — Tīrā deformācijā līneārā elementa $\mathbf{ds} = \overline{PM}$ punkts M pāriet punktā M_1, pie kam, apzīmējot $\mathbf{ds}_1 = \overline{PM_1}$, pēc (1.) sistēmas pirmās formulas dabūjam

$$\overline{MM_1} = \mathbf{ds}_1 - \mathbf{ds} = \overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \mathbf{ds}\,.$$

Un tā tad tīrās deformācijas $\overline{MM_1}$ projekciju uz koordinātu asīm algebriskās vērtības ir

$$(e_1\,\alpha + g_3\,\beta + g_2\,\gamma)\;ds = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,ds\,,$$

$$(g_3\,\alpha + e_2\,\beta + g_1\,\gamma)\;ds = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\,ds\,,$$

$$(g_2\,\alpha + g_1\,\beta + e_3\,\gamma)\;ds = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\,ds\,.$$

Bet, atsaucoties uz tensora reprezentētāju virsu īpašību, konstatējam, ka vektors $\overline{MM_1}$ ir perpendikulārs dilātācijas virsām punktā M, kuŗā $\mathbf{ds} = \overline{PM}$ tās krusto. Un tā tad virzienā $\overline{PM}$ vektora $\overline{MM_1}$ komponenta algebriskā vērtība, ievērojot šī vektora izteiksmi, ir

$$\overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \mathbf{ds} \,.\, \mathbf{u} = \overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \mathbf{ds} \,.\, \frac{\mathbf{ds}}{ds} = e\;ds\,.$$

Tādējādi līneārā elementa $\mathbf{ds}$, kuŗa virziena kosini ir α, β, γ, dilātācijas projekciju algebriskās vērtības ir

$$2\,\alpha\,\varphi\;ds\,,\quad 2\,\beta\,\varphi\;ds\,,\quad 2\,\gamma\,\varphi\;ds\,.$$

Tīrās deformācijas $\overline{MM_1}$ otrs komponents, kas ir perpendikulārs virzienam $\mathbf{ds}$, tā tad ir

$$\overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \mathbf{ds} - e\,\mathbf{ds}\,.$$

Šo komponentu sauc par lineāram elementam **ds** normālu *slīdi.* Tās projekciju uz koordinātu asīm algebriskās vērtības ir

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - 2\,\alpha\,\varphi\right) ds\,, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - 2\,\beta\,\varphi\right) ds\,, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} - 2\,\gamma\,\varphi\right) ds\,.$$

Pa koordinātu triedra *Pxyz* asīm gaŗuma vienības dilātācijas koordinātas attiecīgi ir

$$(e_1,\, 0,\, 0), \quad (0,\, e_2,\, 0), \quad (0,\, 0,\, e_3)$$

un normālās slīdes koordinātas —

$$(0,\, g_3,\, g_2), \quad (g_3,\, 0,\, g_1), \quad (g_2,\, g_1,\, 0),$$

no kurienes apzīmējums tīrās deformācijas tensora $\overline{\overline{\mathbf{E}}}$ koordinātām e_1, e_2, e_3 kā dilātācijām un g_1, g_2, g_3 — kā slīdēm.

236. **Tīrās deformācijas galvenie virzieni. Galvenās dilātācijas.** — Tā kā dilātācijas virsu asu virzieni ir brīvi no normālas slīdes, un vienīgi tiem ir šāda īpašība, tad šie trīs virzieni ar deformāciju nemainās. Šos trīs virzienus sauc par *tīrās deformācijas galveniem virzieniem* un dilātācijas šais virzienos par *galvenām dilātācijām.*

Vispārīgā bezgala mazā transformācijā šis asu triedrs tā tad pārvietojas kā ciets ķermenis: trīs savstarpēji perpendikulāri virzieni paliek savstarpēji perpendikulāri, un eksistē tikai viens šāds tīrās deformācijas galveno asu triedrs.

Tā tad, ja trīs savstarpēji perpendikulāri virzieni arī pēc transformācijas paliek savstarpēji perpendikulāri, tad tie ir tīrās deformācijas galveno asu virzieni.

Tādējādi vispārīga bezgala maza transformācija jebkuŗa punkta apkārtnē var tikt sadalīta: 1° tīrā deformācijā, kas atstāj šo ortogōnālo triedru invariantu, un 2° kādā translācijā un rotācijā, kas šo triedru kā cietu ķermeni pārvieto jaunā pozicijā.

Ja dilātācijas virsas ir attiecinātas pret to galvenām asīm kā koordinātu triedru, tad to vienādojumi ir

$$E_1\, x^2 + E_2\, y^2 + E_3\, z^2 = \pm 1,$$

pie kam

(10.) $$e_1 + e_2 + e_3 = E_1 + E_2 + E_3\,.$$

Interpretēsim pēdējo sakarību ģeometriski. 224. nodal. (19.') formula rāda, ka pirmās kārtas bezgala maza lieluma robežās ievērota ir vienlīdzība

$$J^2 = \left(\frac{dV_1}{dV}\right)^2 = 1 + 2\,(e_1 + e_2 + e_3),$$

no kurienes kubiskai dilātācijai dabūjam izteiksmi

$$\Theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = e_1 + e_2 + e_3\,.$$

Uzrakstītā (10.) relācija rāda, ka kubiskā dilātācija ir deformācijas tensora kontrakcijas invariants, un tā tad tā ir neatkarīga no koordinātu triedra izvēles.

Ja bezgala mazā transformācija ir tāda, ka ikvienā punktā kubiskā dilātācija $\Theta = 0$, t. i.

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

tad saka, ka transformācija ir *transversāla.* Kā piemēru šādai transformācijai var minēt inkompresībla šķidruma ar konstantu temperātūru bezgala mazu deformāciju, kā to redzēsim 247. nodalījumā.

237. **Divu elementu veidotā leņķa variācija.** — Apzīmēsim ar $\mathbf{ds}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ un $\mathbf{ds}'\,(\alpha', \beta', \gamma')$ divus lineārus elementus, kas pēc tīrās deformācijas attiecīgi pāriet elementos $\mathbf{ds}_1\,(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ un $\mathbf{ds}_1'\,(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1')$, pie kam attiecīgie α, β, γ apzīmē šo elementu virzienu kosinus.

Reizinot fundāmentālo formulu

$$\mathbf{ds}_1 - \mathbf{ds} = \overline{\overline{\mathbf{E}}}\,.\,\mathbf{ds}$$

skālāri ar $\mathbf{ds}_1'$, dabūjam, ka

$$\mathbf{ds}_1\,.\,\mathbf{ds}_1' = \mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds}_1' + \overline{\overline{\mathbf{E}}}\,.\,\mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds}_1'\,.$$

Substituējot pēdējās sakarības labajā pusē $\mathbf{ds}_1'$ vietā izteiksmi $\mathbf{ds}' + \overline{\overline{\mathbf{E}}}\,.\,\mathbf{ds}'$ un atmetot otrās kārtas bezgala mazos lielumus, dabūjam (2.) sistēmas pirmās formulas vispārinātu formulu

$$\mathbf{ds}_1\,.\,\mathbf{ds}_1' - \mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds}' = \overline{\overline{\mathbf{E}}}\,.\,\mathbf{ds}\,.\,\mathbf{ds}' + \overline{\overline{\mathbf{E}}}\,.\,\mathbf{ds}'\,.\,\mathbf{ds}\,.$$

Tālāk, ja φ un φ_1 apzīmē leņķus, ko veido elementi $\mathbf{ds}$, $\mathbf{ds}'$ un $\mathbf{ds}_1$, $\mathbf{ds}_1'$, tad pēdējo formulu pirmās kārtas bezgala mazo lielumu robežās var pārrakstīt formā

$$ds\, ds'\, (1 + e)\, (1 + e') \cos(\varphi + \varphi_1 - \varphi) - \mathbf{ds} \,.\, \mathbf{ds}' = \overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \mathbf{ds} \,.\, \mathbf{ds}' + \overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \mathbf{ds}' \,.\, \mathbf{ds}\,,$$

jeb

$$(1 + e + e')\, [\cos\varphi - (\varphi_1 - \varphi) \sin\varphi]\, ds\, ds' - ds\, ds' \cos\varphi = \overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \mathbf{ds} \,.\, \mathbf{ds}' + \overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \mathbf{ds}' \,.\, \mathbf{ds}\,,$$

kur $e\, ds$, $e'\, ds'$ ir elementu ds un ds' dilātācijas. Galīgā veidā pēdējo formulu var pārrakstīt tā:

$$(\varphi - \varphi_1) \sin\varphi = \overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \frac{\mathbf{ds}}{ds} \,.\, \frac{\mathbf{ds}'}{ds'} + \overline{\overline{\mathbf{E}}} \,.\, \frac{\mathbf{ds}'}{ds'} \,.\, \frac{\mathbf{ds}}{ds} - (e + e') \frac{\mathbf{ds}}{ds} \,.\, \frac{\mathbf{ds}'}{ds'}\,,$$

kas ir meklētā formula.

Piemērojot šo formulu taisna parallēlepipeda, kuŗa šķautnes ir parallēlas koordinātu triedra asīm, trīs šķautņu pāŗiem, grupējot šīs šķautnes pa divām, redzam, ka šis parallēlepipeds kļūst slīps. Tā plaknes dabūjam no dotā parallēlepipeda plaknēm ar dilātācijām e_1, e_2, e_3, bet taisnie divplakņu kakti pārvēršas kaktos

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - 2\, g_1, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - 2\, g_2, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} - 2\, g_3.$$

To pašu rezultātu dabūjam no 228. nodal. (27.) formulas un divām tai analogām, attīstot radikāļus pēc Ņūtona binoma formulas, substituējot $\cos\varphi_i$ $(i = 1, 2, 3)$ vietā izteiksmi

$$\cos\varphi_i = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_i\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_i\right) + \ldots,$$

γ_i vietā g_i un aprobežojoties rezultātā ar pirmās kārtas bezgala maziem lielumiem.

XVI NODAĻA.

DEFORMĒJAMA MATERIĀLA KONTINUUMA NEPĀRTRAUKTA KUSTĪBA.

57. §. Definīcijas.

238. **Ievads.** — Iepriekšējā nodaļā iepazināmies ar nepārtraukta apvidus pārvietošanu un deformāciju no ģeometriskā viedokļa, neprasot, kādi ātrumi, paātrinājumi u. t. t. šai pārvietošanā un deformācijā ir apvidus atsevišķiem punktiem. Šai nodaļā apskatīsim jautājumu, kā reprezentēt kustībā esoša nepārtraukta apvidus punktu ātrumus un paātrinājumus jebkuŗā momentā t. Dabūtie rezultāti attieksies uz kaut kāda nepārtraukta apvidus, kas var būt kā šķidrs, tā elastīgs vai pat ciets ķermenis, kustību.

Par nepārtraukta materiāla apvidus kinēmatikas pamatlicēju ir jāuzskata Kōšī, kuŗa darbiem šai disciplīnā ir fundāmentāla nozīme[1]).

Divas galvenās mainīgo lielumu sistēmas, kuŗas lieto nepārtraukta materiāla apvidus kinēmatikā, ir pazīstamas ar nosaukumiem *Lagranža mainīgo lielumu sistēma* un *Eulera mainīgo lielumu sistēma*, lai gan Eulers abas šīs sistēmas ir lietojis jau starp 1755. un 1757. g., bet no jauna tās ir devis Lagranžs[2]).

239. **Materiāls apvidus. Nepārtrauktības vienādojums.** — No ģeometriskā viedokļa nepārtrauktu apvidu sauc par *materiālu*, ja 1° ikvienā šī apvidus punktā P eksistē lokālais blīvums

$$\mu = \frac{dm}{dV},$$

kur dV apzīmē tilpuma elementu ap punktu P, bet dm šī elementa masu, un 2° ja masa dm ir invariants lielums nepārtrauktā kustībā.

Tādējādi, ja bezgala mazā elementa blīvumu divās atbilstošajās pozicijās apzīmē ar μ_0 un μ un attiecīgos tilpumus ar dV_0 un dV, tad $\mu_0\, dV_0 = \mu\, dV$.

---

[1]) Viņa darbu sakopojums šai disciplīnā atrodams memuārā A. L. Cauchy, *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie,* Oeuvres, (1.), 1, 1882, Paris, Gauthier-Villars.

[2]) J. L. Lagrange, *Mécanique analytique,* Paris 1788; Oeuvres Complètes, t. XI, 1888, t. XII, 1889, Paris, Gauthier-Villars.

Vienādojumu

(1.) $$\mu_0 \, dV_0 = \mu \, dV$$

sauc par apvidus *nepārtrauktības vienādojumu.*

240. **Lagranža un Eulera mainīgo lielumu definīcija.** — Apskatīsim nepārtrauktu materiālu apvidu, kas kustības sākuma momentā t_0 atrodas dotajā sākuma stāvoklī un ieņem telpas apvidu R_0, bet, laikam mainoties, transformējas un momentā t atrodas stāvoklī, ko sauc par *aktuālu*, un ieņem telpas apvidu R.

Lai definētu sistēmas aktuālo stāvokli, var lietot pēc izvēles divas mainīgo lielumu sistēmas:

1° var apskatīt momentā t materiālo elementu, kas sākuma momentā t_0 attiecībā pret kādu izvēlētu koordinātu triedru ieņēma poziciju (x_0, y_0, z_0); mainīgie lielumi tad ir x_0, y_0, z_0, t;

2° var apskatīt momentā t materiālo elementu, kas aktuālā stāvoklī tai pašā triedrā ieņem poziciju (x, y, z); mainīgie lielumi tādā gadījumā ir x, y, z, t.

Pirmos mainīgos lielumus sauc par Lagranža (vai sākuma stāvokļa), otrus par Eulera (vai aktuālā stāvokļa) mainīgiem lielumiem.

Apzīmēsim ar M materiālo elementu, kuram momentā t_0 triedrā $Oxyz$ ir pozicija $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$. Momentā t tas pats elements ieņem kādu jaunu poziciju $P\,(x, y, z)$. Atbilstoši mūsu uztverei par elementa M nepārtrauktu kustību, tā pozicija $P\,(x, y, z)$ momentā t ir sākuma pozicijas $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ un laika t ierobežota, nepārtraukta un viennozīmīga funkcija apvidū R_0, kādēļ var rakstīt, ka

(2.) $$P = P\,(P_0 \mid t)\,.$$

Šī ģeometriskā relācija ir ekvivalenta ar trim skālārām relācijām

(2.') $$x = x\,(x_0, y_0, z_0 \mid t), \quad y = y\,(x_0, y_0, z_0 \mid t), \quad z = z\,(x_0, y_0, z_0 \mid t),$$

kur x, y, z ir parametru x_0, y_0, z_0, kas raksturo materiālā elementa M poziciju momentā t_0, un laika t ierobežotas, nepārtrauktas un viennozīmīgas funkcijas apvidū R_0.

Un tā kā momentā $t = t_0$, $P = P_0$ resp. $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, tad

(3.) $$P_0 = P\,(P_0 \mid t_0)$$

resp.

(3.') $$x_0 = x\,(x_0, y_0, z_0 \mid t_0), \quad y_0 = y\,(x_0, y_0, z_0 \mid t_0), \quad z_0 = z\,(x_0, y_0, z_0 \mid t_0).$$

Tādējādi (2.) un (3.) relācija resp. (2.') un (3.') sistēmas relācijas definē apvidus R_0, kas atbilst momentam t_0, transformāciju apvidū R momentā t.

Tālāk, pēc mūsu hipotezes par materiālā apvidus nepārtrauktu kustību, starp elementa M poziciju $P(x, y, z)$ momentā t un tā poziciju $P_0(x_0, y_0, z_0)$ momentā t_0 eksistē savstarpēji viennozīmīga sakarība, kādēļ (2.) ģeometrisko relāciju resp. (2.') skālāro relāciju sistēmu var atrisināt attiecībā pret P_0 resp. pret x_0, y_0, z_0, rakstot, ka

(4.) $$P_0 = P_0(P \mid t)$$

resp.

(4.') $$x_0 = x_0(x, y, z \mid t), \quad y_0 = y_0(x, y, z \mid t), \quad z_0 = z_0(x, y, z \mid t),$$

pie kam visas šīs funkcijas ir tās argumentu ierobežotas, viennozīmīgas un nepārtrauktas funkcijas apvidū R.

Bet ja (2.') sistēma ir atrisināma attiecībā pret x_0, y_0, z_0, tad tas nozīmē, ka 1° funkcijām x, y, z eksistē nepārtraukti pirmās kārtas parciāli atvasinājumi pēc x_0, y_0, z_0, t un 2° funkcionāldeterminants

$$J = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x_0, y_0, z_0)}$$

nav nulle, ja punkts $P_0(x_0, y_0, z_0)$ atrodas sākuma apvidū R_0 un t mainās kādā intervallā (t_0, t_1).

Tālāk vēl iedomāsimies, ka tai pašā apvidū funkciju x, y, z parciāliem atvasinājumiem pēc x_0, y_0, z_0, t savkārt eksistē atvasinājumi pēc t, kas ir nepārtraukti attiecībā pret x_0, y_0, z_0, t.

58. §. Lagranža mainīgie lielumi.

241. **Transformācijas formulas.** — Apskatot nepārtraukta materiāla apvidus kustības sākuma stāvokli momentā t_0 un aktuālo stāvokli momentā t, galīgo transformāciju no sākuma stāvokļa aktuālajā stāvoklī varam determinēt ar ģeometrisko relāciju

$$P = P(P_0 \mid t)$$

vai trim skālārām relācijām

$$x = x(x_0, y_0, z_0 \mid t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0 \mid t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0 \mid t).$$

Uz šo transformāciju attiecas visi XIV nodaļā iegūtie rezultāti par galīgām transformācijām.

242. **Materiāla elementa ātrums un paātrinājums momentā t.** — Materiālā elementa M, kas sākuma momentā t_0 ieņem poziciju $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$, ātrums $\mathbf{v}$ un paātrinājums $\mathbf{a}$ momentā t ir noteikti ar tā pozicijas definētājas relācijas $P = P\,(P_0 \mid t)$ pirmās resp. otrās kārtas atvasinājumu pēc laika, kas aprēķināti momentam t:

(5.) $$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\,P\,(P_0 \mid t) = \dot{P}\,(P_0 \mid t)$$

un

(6.) $$\mathbf{a} = \frac{d^2}{dt^2}\,P\,(P_0 \mid t) = \frac{d}{dt}\,\dot{P}\,(P_0 \mid t) = \ddot{P}\,(P_0 \mid t).$$

Ātruma $\mathbf{v}$ un paātrinājuma $\mathbf{a}$ atbilstošās koordinātas $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ un $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ dabūsim no (2.') sistēmas relācijām, diferencējot tās vienreiz resp. divas reizes pēc t, uzskatot x_0, y_0, z_0 par konstantēm. Šo koordinātu izteiksmes tādējādi ir šādas:

(5.') $$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{d}{dt}\,x\,(x_0, y_0, z_0 \mid t), \\[2mm] \dot{y} = \dfrac{d}{dt}\,y\,(x_0, y_0, z_0 \mid t), \\[2mm] \dot{z} = \dfrac{d}{dt}\,z\,(x_0, y_0, z_0 \mid t) \end{cases}$$

un

(6.') $$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{d^2}{dt^2}\,x\,(x_0, y_0, z_0 \mid t), \\[2mm] \ddot{y} = \dfrac{d^2}{dt^2}\,y\,(x_0, y_0, z_0 \mid t), \\[2mm] \ddot{z} = \dfrac{d^2}{dt^2}\,z\,(x_0, y_0, z_0 \mid t). \end{cases}$$

(5.) vektoriālā formula resp. (5.') skālāro formulu sistēma rāda, ka materiālā elementa ātrums $\mathbf{v}$ momentā t ir determinēts, ja dots ir laiks t un elementa kustības sākuma pozicija $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$.

243. **Nepārtrauktības vienādojums.** — Nepārtrauktības vienādojums

$$\mu_0\,dV_0 = \mu\,dV,$$

ņemot vērā transformācijas funkcionāldeterminanta izteiksmi

$$J = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x_0, y_0, z_0)} = \frac{dV}{dV_0},$$

transformējas formā

$$\mu_0 = \mu J.$$

Diferencējot šo vienādojumu pēc t, dabūjam tam ekvivalentu diferenciālu formu

$$\dot{\mu} J + \mu \dot{J} = 0$$

jeb

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} + \frac{\dot{J}}{J} = 0,$$

pie kam momentā $t = t_0$

$$J = 1 \text{ un } \mu = \mu_0.$$

59. §. Eulera mainīgie lielumi.

244. **Materiālā elementa ātrums momentā t. Transformācijas formulas.** — Apskatīsim triedrā $Oxyz$ punktu $P(x, y, z)$ un apzīmēsim ar $\mathbf{v}$ materiālā apvidus tā elementa M ātrumu, kas momentā t sakrīt ar punktu $P(x, y, z)$. No analitiskā viedokļa tas nozīmē, ka vektors $\mathbf{v}$ ir elementa M pozicijas $P(x, y, z)$ un laika t funkcija, kādēļ varam rakstīt, ka

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(P \mid t). \tag{7.}$$

Šo vektora $\mathbf{v}$ funkcionālās atkarības no P un t analītisko reprezentāciju var iegūt arī no (5.) vektoriālās formulas, substituējot tanī P_0 vietā tā (4.) izteiksmi, vai, kas ir tas pats, substituējot (5.') skālāro formulu sistēmā x_0, y_0, z_0 vietā to izteiksmes, kas dotas ar (4.') formulu sistēmu.

(7.) vektoriālā relācija ir ekvivalenta ar trim skālārām relācijām

$$\dot{x} = v_x(x, y, z \mid t), \quad \dot{y} = v_y(x, y, z \mid t), \quad \dot{z} = v_z(x, y, z \mid t), \tag{7.'}$$

kas dod vektoriālā ātruma $\mathbf{v}$ koordinātu izteiksmes izvēlētajā triedrā kā x, y, z un t funkcijas.

Substituējot šais izteiksmēs x, y, z vietā attiecīgās (2'.) sistēmas izteiksmes, kas dod šos mainīgos lielumus kā x_0, y_0, z_0 un t funkcijas, dabūjam (5.') sistēmu.

Ar materiālā elementa M ātruma vektoru $\mathbf{v}$ bezgala mazā transformācija no apvidus stāvokļa momentā t stāvoklī, kas atbilst momentam $t + dt$, ir definēta ar transformācijas vektoru $\mathbf{V} = \mathbf{v}dt$, kuŗa koordinātas ir

$$X = v_x \, dt, \quad Y = v_y \, dt, \quad Z = v_z \, dt.$$

Jāpiezīmē vēl, ka uz šo bezgala mazo transformāciju attiecas visi XV nodaļā par bezgala mazām transformācijām dabūtie rezultāti.

245. **Lokālais un substanciālais atvasinājums.** — Apzīmēsim ar q kaut kādu skālāru, vektoriālu vai ģeometrisku lielumu, kas jebkuŗā momentā t ir definēts kā ikvienam telpas, kuŗā notiek kustība, punktam $P(x, y, z)$ (Eulera viedoklis), tā arī ikvienam elementam M, kuŗa pozicija šai kustībā ir noteikta ar tā sākuma poziciju P_0 (x_0, y_0, z_0) (Lagranža viedoklis).

Pirmajā gadījumā

(8.) $$q = q(P \mid t),$$

bet otrā

(9.) $$q = q(P_0 \mid t),$$

ar noteikumu, ka, pārejot no (8.) lieluma q izteiksmes uz (9.) izteiksmi, P ir jāuzskata par P_0 un t funkciju, kas dota ar (2.) relāciju un kas definē kustību.

Ar q *lokālo atvasinājumu* saprot q atvasinājumu pēc t, aprēķinātu no (8.) izteiksmes, uzskatot tanī P par konstantu lielumu. Lokālo atvasinājumu apzīmē ar

$$\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Ar q *substanciālo atvasinājumu* turpretim saprot q atvasinājumu pēc t, aprēķinātu no (9.) izteiksmes, uzskatot tanī P_0 par konstanti. Fiksējot P_0, tiek izvēlēts apvidus noteikts elements M, un tā tad lieluma q substanciālais atvasinājums determinē šī lieluma variāciju ar t, zīmējoties uz izvēlēto elementu. Lieluma q substanciālo atvasinājumu apzīmē parasti ar

$$\frac{dq}{dt} \text{ vai } \dot{q}.$$

Atradīsim tagad sakarību starp šiem diviem atvasinājumu veidiem. Šai nolūkā uzrakstīsim (8.) lieluma q izteiksmi atkarībā no P koordinātām x, y, z atklātā formā

$$q = q(x, y, z \mid t). \tag{8.'}$$

Ievērojot, ka tā (9.) izteiksme iegūstama no (8.) izteiksmes, uzskatot tanī P par kustīgu punktu, kuŗš definēts ar (2.) relāciju, vai, kas ir tas pats, no (8.') izteiksmes, uzskatot tanī x, y, z par parametru x_0, y_0, z_0 un laika t funkcijām, kuŗas determinētas ar (2.') sistēmu, q atvasinājuma pēc t sastādīšanai (8.') izteiksmei jāpiemēro saliktas funkcijas atvasināšanas likums. Šā atvasinājuma, kas pēc definīcijas ir $\frac{dq}{dt}$, izteiksme tā tad ir šāda:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial q}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial q}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Substituējot šai izteiksmē $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ vietā to izteiksmes no (7.') sistēmas, dabūjam meklēto sakarību

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial x} v_x + \frac{\partial q}{\partial y} v_y + \frac{\partial q}{\partial z} v_z + \frac{\partial q}{\partial t}. \tag{10.}$$

246. **Materiāla elementa paātrinājums momentā** t. — Piemērosim (10.) formulu, ja lielums q reprezentē kustīga materiāla elementa M ātrumu $\mathbf{v}$. Tas nozīmē, ka (8.) izteiksmes vietā ir jāapskata (7.) izteiksme. Bet vektora $\mathbf{v}$ substanciālais atvasinājums ir elementa M, kas momentā t ieņem poziciju $P(x, y, z)$, paātrinājums $\mathbf{a}$. Tādēļ (10.) formulas izskats, substituējot tanī q vietā $\mathbf{v}$, kļūst šāds:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \tag{11.}$$

Projicējot šo vektoriālo formulu uz izvēlētā koordinātu triedra asīm, dabūjam kustīgā elementa M paātrinājuma $\mathbf{a}$ koordinātu $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ izteiksmes formā

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t}, \\ \ddot{y} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t}. \end{aligned}\right. \tag{11.'}$$

247. **Nepārtrauktības vienādojums.** — Apskatot materiālā elementa M divas pozicijas $P(x, y, z)$ un $P_1(x + dx, y + dy, z + dz)$, kas atbilst attiecīgi momentiem t un $t + dt$, un apzīmējot šais pozicijās tā blīvumu ar μ un $\mu + d\mu$, bet ieņemtos tilpumus ar dV un dV_1, (1.) nepārtrauktības vienādojumu šīm divām pozicijām var uzrakstīt formā

$$(\mu + d\mu)\, dV_1 = \mu\, dV$$

jeb

$$d\mu + \mu \frac{dV_1 - dV}{dV_1} = 0.$$

Bet pirmās kārtas bezgala maza lieluma robežās pēdējo vienādojumu savkārt var pārrakstīt formā

$$d\mu + \mu \frac{dV_1 - dV}{dV} = 0.$$

Un tā kā līdz kādam pirmās kārtas bezgala mazam lielumam

$$\left(\frac{dV_1}{dV}\right)^2 = J^2 = 1 + 2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dt,$$

tad kubiskai dilātācijai dabūjam izteiksmi

$$\Theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dt.$$

Tādējādi, ievērojot pēdējo izteiksmi, nepārtrauktības vienādojums var tikt transformēts formā

$$v_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0$$

vai

$$\frac{\partial (\mu v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mu v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

jeb arī formā

$$\frac{d \log \mu}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Ja šķidrums ir inkompresībls un ar konstantu temperātūru, tad μ ir konstants, un pēdējais vienādojums reducējas par vienādojumu

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

kas izsaka, ka kubiskās dilātācijas koeficients jebkuŗā punktā un momentā ir nulle.

248. **Bezgala mazu transformāciju ātrumi.** — Vispārīga bezgala maza transformācija, kā redzējām (236. nodal.), var tikt sadalīta trīs bezgala mazās transformācijās. Šīs transformācijas un šo transformāciju koordinātas ir šādas:

1° *translācija* $\mathbf{V} = \mathbf{v}\, dt$ ar vektora $\mathbf{v}$ koordinātām v_x, v_y, v_z;

2° *rotācija* $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}\, dt$ ar vektora $\boldsymbol{\omega}$ koordinātām

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right);$$

3° *tīrā deformācija* $\overline{\overline{\mathbf{E}}} = \overline{\overline{\mathbf{e}}}\, dt$ ar tensora $\overline{\overline{\mathbf{e}}}$ koordinātām

$$e_{11} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad e_{22} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad e_{33} = \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$e_{32} = e_{23} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad e_{13} = e_{31} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),$$

$$e_{21} = e_{12} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Lielumus $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\overline{\overline{\mathbf{e}}}$ sauc attiecīgi par translācijas, rotācijas un deformācijas ātrumu.

60. §. Sakarība starp Lagranža un Eulera mainīgiem lielumiem. Trajektorijas. Plūsmas līnijas.

249. **Pāreja no Lagranža uz Eulera mainīgiem lielumiem.** — Lai pārietu no (2.) ģeometriskās funkcionālās relācijas vai tai ekvivalentās (2.′) skālāro funkciju sistēmas uz (7.) ģeometrisko relāciju resp. (7.′) sistēmu, kā redzējām, jāatvasina ir šī relācija resp. sistēma, dabūjot (5.) relāciju resp. (5.′) sistēmu, un pēc tam jāsubstituē tanīs P_0 vietā tā (4.) izteiksme resp. x_0, y_0, z_0 vietā to izteiksmes, kas dotas ar (4.′)

sistēmu. Tādējādi redzam, ka *pāreja no Lagranža uz Eulera mainīgiem lielumiem izdarāma bez integrācijas, citiem vārdiem sakot, ja kāda kustības problēma ir atrisināta, raugoties no Lagranža viedokļa, un tās atrisinājums ir dots ar* (2.) *relāciju resp.* (2.') *sistēmu, tad pāreja uz šīs problēmas atrisinājumu, kas iegūts, raugoties no Eulera viedokļa, un kas raksturots ar* (7.) *relāciju resp.* (7.') *sistēmu, izdarāma ar diferencēšanu un dažām galīgām operācijām.*

250. **Pāreja no Eulera uz Lagranža mainīgiem lielumiem. Materiālā elementa trajektorija.** — Apgrieztā teorēma turpretim nepastāv, t. i. ja zināms ir problēmas Eulera atrisinājums, kas raksturots ar (7.) relāciju resp. (7.') sistēmu, tad nav iespējams pāriet uz (2.) relāciju resp. (2.') sistēmu tikai ar diferencēšanu un dažām galīgām operācijām. Tiešām, tā kā (7.') sistēmu sastāda trīs pirmās kārtas diferenciālvienādojumi attiecībā pret nezināmām funkcijām $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ un šie diferenciālvienādojumi definē kāda materiāla elementa kustību, tad mainīgo lielumu transformācijas uzdevums reducējas uzdevumā par kustības noteikšanu ar doto ātrumu **v** kā x, y, z un laika t funkciju (67. nodal.). Bet šis uzdevums prasīja (7.') sistēmas integrāciju ar noteikumu, ka momentā $t = t_0$, $P = P_0$ resp. $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Šāds atrisinājums ir dots ar (2.) relāciju resp. (2.') sistēmu.

Tādējādi *pāreja no Eulera uz Lagranža mainīgiem lielumiem ir saistīta ar vienas trešās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmas integrāciju.*

Punktu $P(x, y, z)$ ģeometrisko vietu, kas definēta ar (2.) relāciju resp. (2.') sistēmu, sauc par materiālā elementa *M trajektoriju*. Jebkuŗām parametru x_0, y_0, z_0 vērtībām apvidū R_0 tādējādi atbilst viena trajektorija. Šīs trajektorijas ir viena no otras pilnīgi neatkarīgas, ja apvidus kustība nav ierobežota ar kādiem speciāliem noteikumiem, jo tad neatkarīgas savā starpā ir materiālā apvidus elementu kustības.

Materiālā apvidus trajektorijas savā kopumā tādējādi veido trīskārt bezgala lielu (∞^3) trajektoriju sistēmu. Saprotams, ka nav izslēgti gadījumi, kad apvidus dažādi elementi apraksta vienu un to pašu trajektoriju, ieņemot vienā un tai pašā momentā dažādas pozicijas uz tās. Ja ikvienu trajektoriju apraksta ∞^1 dažādi elementi, tad trajektoriju sistēma reducējas par divkārt bezgala lielu (∞^2) sistēmu. Šis gadījums, kā vēlāk redzēsim, ir reālizēts kustībās, kuŗas sauc par *permanentām* vai *stacionārām* kustībām.

251. **Plūsmas līnijas.** — Fiksējot momentu t, ar (7.) formulu jebkuŗam apvidus R punktam $P(x, y, z)$ ir piekārtots noteikts vektoriāls ātrums $\mathbf{v}$; citiem vārdiem sakot, jebkuŗā momentā t pa kustības laiku ir definēts kāds vektoru lauks, kuŗu veido materiālā apvidus elementu M, kas šai momentā sakrīt ar ģeometriskā lauka attiecīgajiem punktiem $P(x, y, z)$, momentānie ātrumu vektori.

Ar *plūsmas līnijām momentā t* saprot šī lauka vektoru līnijas, t. i. līnijas, kuŗu ikvienā punktā $P(x, y, z)$ tangente sakrīt ar momentāno ātruma vektoru $\mathbf{v}$ šai punktā.

Analitiski šīs līnijas ir raksturotas ar diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \tag{12.}$$

kuŗā t, kas sastopams ekspliciti ātruma $\mathbf{v}$ koordinātu v_x, v_y, v_z izteiksmēs, kā to rāda (7.') sistēma, ir jāuzskata par iepriekš fiksētu un tā tad turpmāk jāuzlūko par parametru.

(12.) diferenciālvienādojumu sistēma ir ekvivalenta ar diviem pirmās kārtas diferenciālvienādojumiem, kā tas redzams, iedomājoties, ka, piem., v_z nav nulle (kas ir spēkā ja $\mathbf{v} \neq 0$) un pārrakstot to formā

$$\frac{dx}{dz} = \frac{v_x}{v_z}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{v_y}{v_z}.$$

Šais vienādojumos z ir neatkarīgais mainīgais lielums, bet x un y nezināmās funkcijas un integrālu sistēma

$$x = x(z), \quad y = y(z), \tag{13.}$$

kas definē plūsmas līnijas galīgu vienādojumu formā, satur divas patvaļīgas integrācijas konstantes, kuŗas var tā noteikt, lai iepriekš dotai z vērtībai arī x un y pieņem iepriekš dotas vērtības. Ģeometriski tas nozīmē, ka apskatīta tiek tā plūsmas līnija, kas iet caur iepriekš doto apvidus punktu. Tā kā (13.) sistēmas vienādojumi satur divas patvaļīgas konstantes, tad tas nozīmē, ka plūsmas līnijas savā kopumā veido divkārt bezgala lielu (∞^2) sistēmu, no kuŗām viena un tikai viena iet caur ikvienu apvidus punktu, kuŗā $\mathbf{v} \neq 0$.

Vispārīgi plūsmas līnijas ir atšķirīgas no materiālo elementu trajektorijām, jo trajektorijas ir definētas ar (7.') diferenciālvienādojumu sistēmu, kuŗā t ir mainīgs lielums, kamēr plūsmas līnijas momentā t ir definētas ar (12.) diferenciālvienādojumu sistēmu, kur t ir iepriekš fiksēts lielums.

252. **Permanenta kustība.** — Kustību sauc par *permanentu*, ja vektoru lauks, kas reprezentē materiālā apvidus elementu momentānos ātrumu vektorus dotajā momentā t, ir no laika t neatkarīgs. Nepieciešamais un pietiekamais noteikums tam ir materiālā elementa M, kas momentā t ieņem poziciju $P(x, y, z)$, ātruma $\mathbf{v}$ neatkarība no laika t, t. i.

$$(7_1.) \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$$

resp.

$$(7_1'.) \qquad \dot{x} = v_x(x, y, z), \quad \dot{y} = v_y(x, y, z), \quad \dot{z} = v_z(x, y, z).$$

Šajā gadījumā plūsmas līnijas jebkuŗā momentā sakrīt ar materiālā apvidus elementu trajektorijām. Tiešām, tā kā tagad v_x, v_y, v_z ir no laika t neatkarīgi, tad $(7_1'.)$ trajektoriju diferenciālvienādojumu sistēmu, eliminējot laiku t, var pārrakstīt formā

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z)},$$

kas ir identiska ar (12.) sistēmu, kuŗa definē plūsmas līnijas. Trajektorijas šai gadījumā veido tikai divkārt bezgala lielu (∞^2) sistēmu, jo ∞^1 dažādi elementi, kas dotajā momentā atrodas uz kādas trajektorijas, apraksta visi šo pašu trajektoriju.

AUTORU RĀDĪTĀJS

Skaitļi rāda lapaspuses.

ANALITISKAIS SATURA RĀDĪTĀJS

Skaitļi rāda lapaspuses.