PROF. E. LEJNIEKS

AUGSTĀKĀ ALGEBRA

RĪGĀ, 1936

MATĒMATISKO ZINĀTŅU DARBINIEKU BIEDRĪBAS IZDEVUMS

Prof. E. Lejnieks

Augstākā algebra

Lekcijas, lasītas Latvijas Ūniversitātes matēmatikas un dabaszinātņu fakultātē

Sakārtojis *cand. math.* **E. Fogelis**
Rediģējis doc. **A. Lūsis**

Rīgā, 1936. g.

Matēmatisko zinātņu darbinieku biedrības izdevums

E. Pīpiņa un J. Upmaņa grāmatu un nošu spiestuve
Rīgā, Marijas ielā 10.

Priekšvārdi.

Šīs grāmatas saturā ir lekcijas, ko prof. E. Lejnieks lasīja 1920.—30. gadu starplaikā Mat. un dab. zinātņu fakultātes matēmatikas nodaļas studentiem. Ir apvienoti vairāki lasītie algebras kursi un uzņemti determinantu teōrijas elementi, kas lasīti atsevišķā kursā 1920. g., bet vēlāk ar saīsinājumiem ietilpināti analitiskās ģeometrijas kursā.

Atļauju savu lekciju publikācijai laipni deva prof. E. Lejnieks, bet gan grūtās slimības dēļ viņš manuskriptu nav skatījis cauri. Manā redakcijā lekcijas rūpīgi sakārtojis un uzrakstījis *cand. math.* E. Fogelis. Esam centušies atveidot mūsu bij. ļoti cienījamā skolotāja un vadītāja zinātniski metodisko vielas apstrādājumu.

Visumā esam paturējuši lekciju formu, tādēļ vietām ir daži atkārtojumi. Lai nepalielinātu grāmatas apjomu, dažu teōrēmu pierādījumos vajadzīgie paskaidrojumi lietāti konspektīvi. Terminoloģija visumā atbilst 1935. g. matēmatisko zinātņu darbinieku kongresā pieņemtajai terminoloģijai.

Izsaku pateicību E. Fogeļa kgm par veikto darbu, Matēmatisko zinātņu darbinieku biedrībai, kas uzņēmās materiālās saistības grāmatas izdošanai, un Kultūras Fondam par piešķirto pabalstu darba izdošanai.

A. Lūsis.

Jelgavā, 1935. g. decembrī.

Pirmā daļa.

Determinantu teōrijas elementi un līneāro vienādojumu sistēmas.

I. Determinanti un matricas.

§ 1. Otrās un trešās kārtas determinanti.

Ja ir dota divu lineāru vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

ar diviem nezināmiem x un y, tad, izlietojot tikai racionālās darbības, t. i. saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu un dalīšanu, sistēmas atrisinājumus var izteikt atkarībā no sistēmas koeficientiem a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 sekojošā kārtā. Reizināsim, pirmkārt, pirmā vienādojuma abas puses ar b_2, otrā ar b_1 un pēc tam atņemsim. Otrkārt, reizinasim attiecīgi ar a_2, a_1 un arī pēc tam atņemsim; tad dabūsim:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1, \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

Gadījumā, ja $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, var izteikt

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Redzam, ka atrisinājumi x un y ir sistēmas koeficientu racionālas funkcijas, kuŗu skaitītāji un saucēji (katrs par sevi) ir viena un tā pati funkcija, tikai ar citiem sistēmas koeficientiem. Tādēļ, ja $a_1 b_2 - a_2 b_1$ apzīmēsim ar

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

un nosauksim par **otrās kārtas determinantu,** tad sistēmas atrisinājumi x un y uzrakstāmi ar divu determinantu dalījumu:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Piezīme. Algebras vēsturē pirmo reizi ideja par determinantu sastopama Leibnica *(Leibniz)* vēstulē Lopitalam *(l'Hospital)* 1693. gadā. Tuvāki determinantu izlietošana aplūkota Kramera *(Cramer)* darbā par algebriskām līnijām (Ženēvā 1750. g.). XIX. g s. determinantu teōriju par patstāvīgu disciplīnu izstrādā Jakobi *(Jacoby)*, Koši *(Cauchy)*, Vandermonds un citi.

Otrās kārtas determinanta

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

četri elementi a_1, a_2, b_1, b_2 sakārtojas pa divām horizontālām **rindām** un divām vertikalām **kolonnām**, pa **galveno diagōnāli** $a_1 b_2$ un blakus diagōnāli $a_2 b_1$. Determinanta skaitliskā vērtība ir galvenās un blakus diagonāles elementu reizinājumu starpība.

Tiešā ceļā var pārliecināties par sekojošām īpašībām: 1) Determinanta vērtība nemainās, ja rindas pieņem par kolonnām un kolonnas par rindām. 2) Ja divas rindas samaina vietām, tad determinanta zīme mainās uz pretējo, bet absolūtā vērtība paliek tā pati. 3) Ja visus vienas rindas vai kolonnas elementus reizina ar skaitli k, tad arī determinanta vērtība pareizinās ar to pašu skaitli k.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Tādas pat īpašības, kā redzēsim vēlāk, piemīt arī augstāku kārtu determinantiem.

Trešās kārtas determinantu apskatīsim, atrisinot triju lineāru vienādojumu sistēmu ar trim nezināmiem.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

Reizināsim sistēmas pirmo vienādojumu ar 1, otro ar pagaidām nenoteiktu skaitli m, trešo ar n un saskaitīsim. Pieprasīsim, lai

$$\begin{cases} b_2 m + b_3 n = -b_1 \\ c_2 m + c_3 n = -c_1 \end{cases}$$

jeb

$$m = \frac{\begin{vmatrix} -b_1 & b_3 \\ -c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad n = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & -b_1 \\ c_2 & -c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Tad dabūsim

$$(a_1 + a_2 m + a_3 n)\,x = d_1 + d_2 m + d_3 n$$

vai

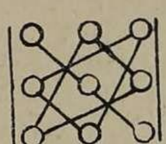
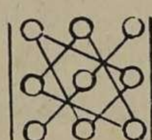
$$\left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right) x = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Definēsim trešās kārtas determinantu ar formulu

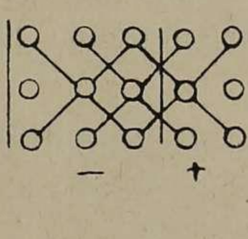
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 .$$

Determinanta deviņi elementi sakārtojas pa trim rindām un trim kolonnām. Elementi a_1, b_2, c_3 nosaka determinanta galveno, bet a_3, b_2, c_1 — blakus diagonāli. Cikliski mainot indekus 1, 2, 3 galvenās diagonāles elementiem, dabū produktus, kas determinanta izvirzījumā jāņem ar $+$ zīmi. Mainot cikliski indekus blakus diagonāles elementiem, dabū produktus, kuŗi jāņem ar — zīmi. Zīmes norāda ar schēmu:

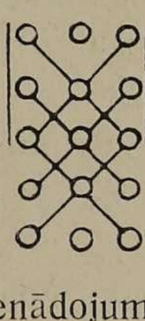
\+ , − 

Sarrusa paņēmiens. Pierakstām determinanta labajā pusē divas pirmās kolonnas vai apakšā divas pirmās rindas. Ar $+$ zīmi ņemam to elementu reizinājumus, kas sagrupējas pa galveno vai tai paralēlu diagonāli, bet ar — zīmi tos reizinājumus, kas atrodas tādā pat stāvoklī pret blakus diagonāli.



− +

vai



− +

Tagad atgriežamies pie triju vienādojumu sistēmas ar trim nezināmiem. Rakstot ar trešās kārtas determinantiem, mēs nonācām līdz formulai

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

no kuŗas nezināmā x nozīmi var izteikt kā divu determinantu dalījumu. Līdzīgas formulas par y un z var rakstīt uz analoģijas pamata. Var arī doto sistēmu pārrakstīt tā, lai y (resp. z) atrastos pirmā vietā, un tad izlietot iepriekšējo formulu.

Ceturtās, piektās un augstāku kārtu determinantus sakarā ar attiecīgu lineāru vienādojumu sistēmu atrisināšanu var definēt pēc analoga parauga, kā trešās kārtas determinants definēts ar otrās kārtas determinantu palīdzību.

§ 2. Elementu permūtācijas. Inversijas.

Ir doti n elementi, kas sanumurēti noteiktā kārtībā: pirmā jeb viszemākā elementa numurs ir 1, tam seko elements ar numuru 2,... un beidzot augstākais elements ar numuru n. Dotos n elementus, saliktus kaut kādā kārtībā, sauc par permūtāciju. Kā zināms no elementārās algebras, no n dažādiem elementiem var sastādīt n! dažādas permūtācijas.

Divu elementu k un l pārmainījumu vietām kādā savienojumā sauc par **transpoziciju (kl).**

Piemērs: permūtācija 42351 pēc transpozicijām (2, 3), (2, 1) top par 43152.

Viegli var pierādīt, ka no dotās n elementu permūtācijas ar vajadzīgu skaitu transpoziciju var dabūt katru citu permūtāciju no tiem pašiem elementiem.

Divu elementu dabiskās kārtības sagrozījumu permūtācijā abc...m sauc par **inversiju.** To skaits var būt pāŗu vai nepāŗu skaitlis, un atkarībā no tā permūtācija pieder pie pāŗu vai nepāŗu klases.

Definīcija: Kronekera ***(Kronecker)*** **simbols ir**

$$[a\,b\,c\ldots m] = \begin{cases} +1, & \text{ja inversiju skaits permutācijā ir pāru skaitlis,} \\ -1 & \text{— pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

Piemērs: savienojumā 534162 elementu dabiskās kārtas sagrozījumi ir 53, 54, 51, 52, 31, 32, 41, 42, 62; inversiju skaits ir 9 un Kronekera simbols $[534162] = -1$.

Vienīgo permūtāciju, kurā elementi seko viens otram dabiskā kārtībā, sauc par **galveno savienojumu.** Tā inversiju skaits ir O un Kronekera simbols +1.

Kramera un Bezū *(Bezout)* **teōrēma.** Viena transpozicija dotā permūtācijā inversiju skaitu palielina vai pamazina par nepāru skaitli.

Ar A, B un C apzīmēsim to elementu kompleksu, kas dotā permūtācijā atrodas pirms, starp un aiz pārvietojamiem elementiem k un l. Tad permūtāciju var rakstīt formā

$$AkBlC$$

Apskatīsim divus gadījumus.

I. Ir iespējams, ka kompleksā B nav neviena elementa. Tad k un l ir divi blakusstāvoši elementi. Permūtācijās

$$AklC \text{ un } AlkC$$

vienas un tās pašas inversijas sastāda katrs A elements ar katru C elementu, elements k ar katru A vai C elementu un arī elements l ar A un C elementiem. Abas permūtācijas atšķiras tikai ar vienu inversiju kl vai lk (atkarīgi no $k > l$ vai $l > k$).

II. Ja komplekss B sastāv no m elementiem a, b, c, ..., g, h, tad transpoziciju (kl) var atvietot ar $m + m + 1 = 2m + 1$ sekojošām blakus elementu transpozicijām:

$$(kl) = \underbrace{(ka)\,(kb)\ldots\ldots(kh)}_{m}\,(kl)\,\underbrace{(lh)\,(lg)\ldots\ldots(la)}_{m}$$

Katra no tām inversiju skaitu palielina vai pamazina par 1. Bet nepāru skaita pozitīvu un negātīvu vienu summa arī ir nepāru skaitlis. Ar to teōrēma pierādīta.

Sekas. Pāru un nepāru klasē permūtāciju skaits ir vienlīdzīgs.

Ja uzrakstīsim visas n! iespējamās permūtācijas no n elementiem un izdarīsim katrā no tām vienu un to pašu transpoziciju, tad dabūsim tās pašas permūtācijas, tikai citā kārtībā. Katra pāru klases permūtācija būs pārgājusi nepāru klasē un nepāru klases permūtācija pāru klasē. Tādēļ permūtāciju skaits abās klasēs ir vienlīdzīgs, un katrā klasē to ir $\frac{1}{2}n!$

§ 3. Determinanta vispārīgā definīcija un īpašības.

Ir doti n^2 elementi a_{rk} $(r, k = 1, 2, \ldots, n)$, kas sakārtoti n rindās un n kolonnās tā, ka elementa pirmais indeks nosaka rindas, bet otrais indeks kolonnas numuru:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

Ja ir sastādīti visi iespējamie reizinājumi

$$\pm a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \ldots a_{n\nu},$$

kas satur katrs tikai vienu elementu no katras rindas un tikai vienu elementu no katras kolonnas (tā tad $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ ir kaut kādā kārtībā skaitļi $1, 2, \ldots, n$) un reizinājumu zīmi $+$ vai $-$ nosaka Kronekera simbols $[\alpha\, \beta \ldots \nu]$, tad visu tādu locekļu algebrisku summu sauc par **n. kārtas determinantu.** Raksta:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum [\alpha\, \beta \ldots \nu]\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \ldots a_{n\nu} \qquad (1).$$

Reizinājumu $a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$ sauc par determinanta **galveno locekli.** Mainot tā otros indekus vietām, dabū visus determinanta locekļus skaitā $n!$ Puse no tiem jāsummē ar $+$, bet puse ar $-$ zīmi.

n. kārtas determinantu īsāki apzīmē ar $\|a_{rk}\|$, kur $r, k = 1, 2, \ldots, n$

Lemma. Ja savienojumā

$$a_{\alpha\alpha'}\, a_{\beta\beta'} \ldots a_{\nu\nu'}$$

divus elementus pārmaina vietām, tad pirmo un otro indeku Kronekera simbolu reizinājums $[\alpha\, \beta \ldots \nu]\, [\alpha'\, \beta' \ldots \nu']$ paliek pastāvīgs.

Tiešām, ja dotā savienojumā pārmaina divus elementus vietām, tad kā pirmo, tā otro indeku permūtācijās $\alpha\, \beta \ldots \nu$ un $\alpha'\, \beta' \ldots \nu'$ notiek katrā viena transpozicija. Abi Kronekera simboli maina zīmes uz pretējo, bet to reizinājums paliek agrākais.

Teorēma. n. kārtas determinanta katru locekli var izteikt arī formā

$$[\alpha\,\beta\,.\,.\,.\,\nu]\,[\alpha'\,\beta'\,.\,.\,.\,\nu']\,a_{\alpha\alpha'}\,a_{\beta\beta'}\,.\,.\,.\,a_{\nu\nu'}\,, \qquad (2)$$

kur indeki $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ un $\alpha', \beta', \ldots, \nu'$ ir kaut kādā kārtībā skaitļi $1, 2, \ldots, n$.

Tiešām, ar vajadzīgu skaitu transpoziciju pirmos vai otros indekus katrā loceklī var sarindot kādā patīk kārtībā. Lemma norāda, ka vispārējā locekļa formas (1) un (2) ir identiskas.

Sekas. Ja katrā determinanta loceklī otros indekus sarindo dabiskā kārtībā, tad jāmaina pirmie indeki un vispārīgais loceklis uzrakstāms arī formā.

$$[\alpha\,\beta\,.\,.\,.\,\nu]\,a_{\alpha 1}\,a_{\beta 2}\,.\,.\,.\,a_{\nu n}. \qquad (3)$$

Te secināma determinanta **I. īpašība:**

Ja determinantā apmaina rindas ar kolonnām, bet patur to kārtību, tad determinanta vērtība nemainās.

II. īpašība. Ja determinantā apmaina savā starpā divas rindas (vai kolonnas), tad determinanta zīme mainās uz pretējo, bet absolūtā vērtība nemainās.

Tiešām, Kramera un Bezū teorēmas izteic, ka viena transpozicija maina permūtācijas $\alpha\,\beta\,.\,.\,.\,\nu$ klasi. Tādēļ, ja apmaina divas rindas vietām, determinanta vispārīgais loceklis (1) savu absoluto vērtību patur, bet zīmi maina uz pretējo.

Sekas. Ja determinantam D ir divas vienādas rindas (vai kolonnas), tad determinants vienlīdzīgs nullei.

Apmainot determinanta vienādas kolonnas, dabū $D = -D$. Tā tad $D = O$.

Lemma. Determinants ir kaut kuŗas rindas vai kolonnas elementu līneārā homogena funkcija.

Tiešām, katrs determinanta izvirzījuma loceklis satur vienu un tikai vienu pirmās rindas elementu. Tādēļ izvirzījuma locekļus var sadalīt n grupās tā, ka visiem pirmās grupas locekļiem ir kopējs faktors a_{11}, visiem otrās grupas locekļiem kopīgs faktors a_{12} u. t. t. Visu pirmās grupas locekļu summu var apzīmēt ar $a_{11}\,A_{11}$, otrās grupas locekļu summu ar $a_{12}\,A_{12}$ u. t. t. Tad determinanta izvirzījums pēc pirmās rindas elementiem ir

$$D = a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + \,.\,.\,.\, + a_{1n}\,A_{1n}.$$

Līdzīgā kārtā determinantu var izvirzīt pēc kaut kuŗas citas rindas vai kolonnas elementiem, piem.:

$$D = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \cdots + a_{n1} A_{n1}.$$

III. īpašība. Ja visus vienas kolonnas vai rindas elementus reizina ar kādu skaitli k, tad arī determinanta vērtība pareizinās ar šo skaitli k.

Tā kā

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \ldots + a_{n1} A_{n1},$$

tad

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ ka_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ka_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{11} A_{11} + ka_{21} A_{21} + \ldots + ka_{n1} A_{n1} = kD$$

Sekas. 1. Ja determinantā vienas rindas (kolonnas) visiem elementiem ir kopīgs faktors k, tad šo faktoru var iznest priekš determinanta.

2. Ja determinantā visi vienas rindas (kolonnas) elementi ir proporcionāli kādas citas rindas (kolonnas) elementiem, tad determinants vienlīdzīgs nullei.

3. Ja determinantā visi vienas rindas (kolonnas) elementi ir nulles, tad arī determinants vienlīdzīgs nullei.

IV. īpašība. Ja visi vienas rindas (kolonnas) elementi ir divu skaitļu summas, tad determinantu var izteikt ar divu citu determinantu summu.

Tiešām, var pārveidot

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} + k_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + k_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{11} + k_{11}) A_{11} +$$

$$+ (a_{21} + k_{21}) A_{21} + \cdots + (a_{n1} + k_{n1}) A_{n1},$$

jeb

$$(a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \ldots + a_{n1} A_{n1}) + (k_{11} A_{11} + k_{21} A_{21} +$$

$$+ \ldots + k_{n1} A_{n1}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_{11} & a_{12} & \ldots & a_{n1} \\ k_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sekas. Ja vienas kolonnas (rindas) elementiem pieskaita kādas citas kolonnas (rindas) attiecīgos elementus, reizinātus ar kādu patvaļīgu skaitli k, tad determinants vērtību nemaina, piem.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + ka_{n2} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

§ 4. Adjunkti. Minori.

Ja determinants

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum [\alpha\, \beta\, \gamma \ldots \nu]\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu}$$

ir izvirzīts pēc pirmās rindas elementiem

$$D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \ldots + a_{1n} A_{1n},$$

tad

$$a_{11} A_{11} = \sum [1\, \beta\, \gamma \ldots \nu]\, a_{11}\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu} = a_{11} \sum [1\, \beta\, \gamma \ldots \nu]\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu}$$

un

$$A_{11} = \sum [1\, \beta\, \gamma \ldots \nu]\, a_{2\beta}\, a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu}$$

Bet Kronekera simbols $[1\, \beta\, \gamma \ldots \nu] = [\beta\, \gamma \ldots \nu]$, jo 1 kā permutācijas $1\, \beta\, \gamma \ldots \nu$ zemākais elements nevar radīt inversijas ar tam sekojošiem elementiem. Tādēļ A_{11} var uzrakstīt kā $(n - 1)$. kārtas determinantu

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kuŗu dabū, izsvītrojot dotā determinantā D pirmo rindu un pirmo kolonnu. Determinantu A_{11} sauc par **elementa a_{11} adjunktu.**

Kāda cita pirmās rindas elementa a_{1k} adjunktu A_{1k} var noteikt tā, ka k. kolonnu samaina ar (k — 1)., tad ar (k — 2). u. t. t. un beidzot ar pirmo kolonnu. Tad

$$D = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,k-1} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,k-1} & a_{2\,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nk} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,k-1} & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

un

$$A_{1k} = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,k-1} & a_{2\,k+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3\,k-1} & a_{3\,k+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,k-1} & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ja determinants D būtu jāizvirza pēc r. rindas elementiem, tad, r. rindu apmainot ar (r—1)., (r—2)., . . . un beidzot ar pirmo rindu, dabūsim

$$D = (-1)^{r-1} \begin{vmatrix} a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r\,k-1} & a_{rk} & a_{r\,k+1} & \dots & a_{rn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,k-1} & a_{1k} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1\,1} & a_{r-1\,2} & \dots & a_{r-1\,k-1} & a_{r-1\,k} & a_{r-1\,k+1} & \dots & a_{r-1\,n} \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \dots & a_{r+1\,k-1} & a_{r+1\,k} & a_{r+1\,k+1} & \dots & a_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,k-1} & a_{nk} & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Tā kā $(-1)^{r-1} . (-1)^{k-1} = (-1)^{r+k}$, tad elementa a_{rk} adjunkts ir determinants

$$A_{rk} = (-1)^{r+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,k-1} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-1\,1} & a_{r-1\,2} & \dots & a_{r-1\,k-1} & a_{r-1\,k+1} & \dots & a_{r-1\,n} \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \dots & a_{r+1\,k-1} & a_{r+1\,k+1} & \dots & a_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,k-1} & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kuŗu dabū, svītrojot dotā determinantā r. rindu un k. kolonnu un pievienojot zīmi noteicošo faktoru $(-1)^{r+k}$.

Determinanta D izvirzījums pēc r. rindas vai k. kolonnas elementiem ir summa

$$D = \sum a_{rk} A_{rk}, \tag{4}$$

kur viens no indekiem k vai r mainās no 1 līdz n, bet otrs nemainās.

Sekas. 1. Ja kādā determinantā D visi vienas rindas vai kolonnas elementi, izņemot vienu elementu a_{rk}, ir nulles, tad determinanta vērtība vienlīdzīga elementa a_{rk} reizinājumam ar tā adjunktu:

$$D = a_{rk} A_{rk}.$$

Piemērs. Vandermonda determinants.

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ x_1 & x_2 & \dots x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ja ejot no apakšas uz augšu, reizina katras iepriekšējās rindas elementus ar x_1 un atņem no nākošās, tad dabū

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & \dots & x_n^2 - x_nx_1 \\ 0 & x_2^3 - x_2^2x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 & \dots & x_n^3 - x_n^2x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x_2^{n-1} - x_2^{n-2}x_1 & x_3^{n-1} - x_3^{n-2}x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix}$$

Ja pirmā elementa adjunktā kolonnu kopīgos faktorus iznes priekš determinanta, tad var izteikt

$$V = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots 1 \\ x_2 & x_3 & \dots\dots x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \dots\dots x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-3} & \dots\dots x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ar zemākas kārtas Vandermonda determinantu.

Reducēšanu turpinot līdz

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} = x_n - x_{n-1}$$

un rezultātus apvienojot, dabū

$$V = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})$$

jeb

$$V = \prod_{i>j}^{1,n} (x_i - x_j)$$

Sekas 2. Adjunktu A_{rk} var uzrakstīt kā n. kārtas determinantu

$$A_{rk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,k-1} & c_1 & a_{1\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,k-1} & c_2 & a_{2\,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1\,1} & a_{r-1\,2} & \ldots & a_{r-1\,k-1} & c_{r-1} & a_{r-1\,k+1} & \ldots & a_{r-1\,n} \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \ldots & a_{r+1\,k-1} & c_{r+1} & a_{r+1\,k+1} & \ldots & a_{r+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,k-1} & c_n & a_{n\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kuŗā $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ir pilnīgi patvaļīgi skaitļi.

Sekas. 3. Ja kādā determinantā visi elementi, kas atrodas vienpus galvenās diagōnāles, ir nulles, tad determinants ir vienlīdzīgs galvenam loceklim.

Šo īpašību pierāda, determinanta kārtu pakāpeniski samazinot.

Teōrēma I. Ja vienas rindas (kolonnas) elementus reizina ar otras rindas (kolonnas) adjunktiem un saskaita, tad rezultātā rodas nulle, t. i.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{rk} A_{sk} = 0, \text{ ja } s \neq r; \quad \sum_{r=1}^{n} a_{rk} A_{rh} = 0, \text{ ja } h \neq k \qquad (5)$$

Tiešām, pirmā summa ir nulle kā determinants, kam s. un r. rindā atrodas vieni un tie paši elementi. Bet otrā summa ir nulle kā determinants ar divām vienādām kolonnām.

Teōrēma II. Ja determinants D ir vienlīdzīgs nullei, tad tā katru divu rindu adjunkti ir proporcionāli, t. i.

ja $D = 0$, tad

$$\frac{A_{r1}}{A_{s1}} = \frac{A_{r2}}{A_{s2}} = \ldots = \frac{A_{rn}}{A_{sn}}$$

Pierādījums. Reizinām determinanta

$$A_{r1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1\,1} & a_{r-1\,2} & \ldots a_{r-1\,k} & \ldots & a_{r-1\,n} \\ 1 & 0 & \ldots 0 & \ldots & 0 \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \ldots a_{r+1\,k} & \ldots & a_{r+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

k. kolonnu ar A_{sk} un pieskaitām pēc tam tai pirmo kolonnu, reizinātu ar A_{s1}, otro, reizinātu ar A_{s2} u. t. t. un beidzamo kolonnu, reizinātu ar A_{sn}. Tad

$$A_{r1}\,A_{sk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1k}A_{sk} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2k}A_{sk} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1\,1} & a_{r-1\,2} & \ldots a_{r-1\,k}A_{sk} & \ldots & a_{r-1\,n} \\ 1 & 0 & \ldots 0 & \ldots & 0 \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \ldots a_{r+1\,k}A_{sk} & \ldots & a_{r+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nk}A_{sk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{11}A_{s1} + a_{12}A_{s2} + \ldots + a_{1n}A_{sn} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{21}A_{s1} + a_{22}A_{s2} + \ldots + a_{2n}A_{sn} & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1\,1} & a_{r-1\,2} & \ldots a_{r-1\,1}A_{s1} + a_{r-1\,2}A_{s2} + \ldots + a_{r-1\,n}A_{sn} & \ldots a_{r-1\,n} \\ 1 & 0 & A_{s1} & \ldots 0 \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \ldots a_{r+1\,1}A_{s1} + a_{r+1\,2}A_{s2} + \ldots + a_{r+1\,n}A_{sn} & \ldots a_{r+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{n1}A_{s1} + a_{n2}A_{s2} + \ldots + a_{nn}A_{sn} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Visi pēdējā determinanta k. kolonnas elementi, izņemot r. rindā elementu A_{s1}, ir nulles, jo summa

$$\sum_{k=1}^{n} a_{rk}\,A_{sk} = \begin{cases} 0, & \text{ja } s \neq r \\ D, & \text{ja } s = r \end{cases}$$

Tā kā arī $D = 0$, tad

$$A_{r1}\,A_{sk} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,k-1} & 0 & a_{1\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,k-1} & 0 & a_{2\,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1\,1} & a_{r-1\,2} & \ldots & a_{r-1\,k-1} & 0 & a_{r-1\,k+1} & \ldots & a_{r-1\,n} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & A_{s1} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \ldots & a_{r+1\,k-1} & 0 & a_{r+1\,k+1} & \ldots & a_{r+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,k-1} & 0 & a_{n\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ja izvirza šo determinantu pēc k. kolonnas elementiem, tad dabū

$$A_{r1}\,A_{sk} = A_{s1}\,A_{rk}$$

jeb

$$\frac{A_{r1}}{A_{s1}} = \frac{A_{rk}}{A_{sk}}$$

Te var izvēlēties $k = 2, 3, \ldots, n$. Teōrēma ir pierādīta.

Definīcija. Ja dotā determinantā D izsvītro vienu vai vairākas rindas un tikpat daudz kolonnas, tad paliek zemākas kārtas determinants, ko sauc par dotā determinanta **minoru** Δ. Izsvītroto rindu un kolonnu kopīgie elementi arī sastāda determinantu, un to sauc par pirmā **papildu minoru** Δ'.

Ja viens no minoriem Δ vai Δ' ir k., tad otrs ir (n—k). kārtas determinants.

Pieņemsim, ka

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

un

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{k+1\,k+1} & a_{k+1\,k+2} & \ldots & a_{k+1\,n} \\ a_{k+2\,k+1} & a_{k+2\,k+2} & \ldots & a_{k+2\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\,k+1} & a_{n\,k+2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pierādīsim **teōremu**: Papildu minoru rezinājums $\Delta\Delta'$ ir sastāvdaļa no determinanta D izvirzījuma

$$D = \sum [\alpha\,\beta\ldots\varkappa\,\lambda\,\mu\ldots\nu]\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta}\ldots a_{k\varkappa}\, a_{k+1\,\lambda}\, a_{k+2\,\mu}\ldots a_{n\nu},$$

kur katrs indeks $\alpha, \beta \ldots \nu$ mainās no 1 līdz n.

Apzīmēsim ar D_1 to determinanta D izvirzījuma daļu, kur indeki $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ visos iespējamos veidos ir skaitļi $1, 2, 3, \ldots, k$, un neatkarīgi no tiem indeki $\lambda, \mu, \ldots, \nu$ mainās no $k+1$ līdz n. Tad neviens no pirmajiem indekiem nevar radīt inversiju ar kādu no pēdējiem. Tādēļ

$$[\alpha\, \beta \ldots \varkappa\, \lambda\, \mu \ldots \nu] = [\alpha\, \beta \ldots \varkappa]\, [\lambda\, \mu \ldots \nu]$$

un summu D_1 var sadalīt divos faktoros

$$D_1 = \sum [\alpha\, \beta \ldots \varkappa]\, [\lambda\, \mu \ldots \nu]\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \ldots a_{k\varkappa}\, a_{k+1\,\lambda}\, a_{k+2\,\mu} \ldots a_{n\,\nu} =$$

$$= \sum [\alpha\, \beta \ldots \varkappa]\, a_{1\alpha}\, a_{2\beta} \ldots a_{k\varkappa} \sum [\lambda\, \mu \ldots \nu]\, a_{k+1\,\lambda}\, a_{k+2\,\mu} \ldots a_{n\nu} = \Delta\, \Delta'.$$

Minoru Δ' sauc arī par **minora Δ adjunktu.**

Lai noteiktu adjunktu tādam minoram Δ, kuŗu sastāda rindu $r_1, r_2, \ldots, r_k$ un kolonnu $h_1, h_2, \ldots h_k$ kopīgie elementi, tad jāpārnes rinda r_1 pirmās rindas vietā un kolonna h_1 pirmās kolonnas vietā. Determinanta zīmi noteic ar faktoru $(-1)^{r_1+h_1}$. Ja pārnes vēl rindu r_2 otrās rindas un kolonnu h_2 otrās kolonnas vietā, tad determinants jāreizina ar $(-1)^{r_2-1+h_2-1} = (-1)^{r_2+h_2}$ u. t. t. Beidzot, kad visas dotās rindas un kolonnas pārnestas pirmajās vietās un atlikušās rindas un kolonnas atstātas to dabiskā kārtībā, tad determinanta D zīmi noteic $(-1)^s$, kur

$$s = (r_1 + r_2 + \ldots + r_k) + (h_1 + h_2 + \ldots + h_k)$$

Determinanta D izvirzījuma vienu daļu tagad sastāda reizinājums $(-1)^s\, \Delta\Delta'$. Tādēļ vispārīgā gadījumā *par minora Δ adjunktu sauc tā papildu minoru Δ', reizinātu ar $(-1)^s$, kur s ir to rindu un kolonnu rādītāju summa, kuŗu elementi sastāda minoru Δ.*

Piezīme. Δ' papildu minors ir Δ un adjunkts $(-1)^{s'}\Delta$. Tā kā $s + s' = 2.(1+2+3+\ldots+n)$, tad $(-1)^{s'} = (-1)^s$. Tādēļ Δ' adjunkts ir $(-1)^s\,\Delta$.

§ 5. Laplasa *(Laplace)* formula (1772. g.)

Pieņemsim, ka n. kārtas determinantā D ir dotas k rindas ar rādītājiem $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ un elementiem

$$\begin{matrix} a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & \cdots & a_{\alpha n} \\ a_{\beta 1} & a_{\beta 2} & \cdots & a_{\beta n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\varkappa 1} & a_{\varkappa 2} & \cdots & a_{\varkappa n} \end{matrix}$$

Ja no tiem sastāda visus iespējamos k. kārtas minorus $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, kas atšķiŗas viens no otra vismaz ar vienu kolonnu, tad tādu minoru ir skaitā $m = \binom{n}{k}$. Arī to adjunkti $(-1)^{s_1} \Delta'_1, (-1)^{s_2} \Delta'_2, \ldots, (-1)^{s_m} \Delta'_m$ atšķiras viens no otra vismaz ar vienu kolonnu. Reizinājumu

$$(-1)^{s_1} \Delta_1 \Delta'_1,\ (-1)^{s_2} \Delta_2 \Delta'_2, \ldots, (-1)^{s_m} \Delta_m \Delta'_m$$

visi locekļi ir dažādi, un tie visi ietilpst dotā determinanta D izvirzījumā. Tādēļ **Laplasa formula**

$$D = (-1)^{s_1} \Delta_1 \Delta'_1 + (-1)^{s_2} \Delta_2 \Delta'_2 + \ldots + (-1)^{s_m} \Delta_m \Delta'_m \quad (6)$$

būtu pareiza tad, ja locekļu skaits labā pusē būtu vienlīdzīgs ar locekļu skaitu kreisā pusē. Tā tas tiešām arī ir, jo locekļu skaits katrā minorā ir k!, adjunktā (n—k)! un pavisam kopā

$$m.k!\,(n-k)! = \binom{n}{k} k!\,(n-k)! = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} k!\,(n-k)! = n!$$

Piemērs. Ceturtās kārtas determinanta izvirzījums pēc pirmo divu rindu minoriem ir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

Sekas. 1. Ja dotajam determinantam ir k rindas, no kuŗu elementiem sastādīti k. kārtas minori visi ir nulles, tad arī determinants vienlīdzīgs nullei. 2. Ja no k rindu elementiem var sastādīt tikai vienu k. kārtas minoru, kas $\neq 0$, tad dotais determinants sadalās divu citu determinantu reizinājumā.

Piemērs.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1k} & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2k} & 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{kk} & 0 & 0 \ldots 0 \\ c_{11} & c_{12} \ldots c_{1k} & b_{11} & b_{12} \ldots b_{1h} \\ c_{21} & c_{22} \ldots c_{2k} & b_{21} & b_{22} \ldots b_{2h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{h1} & c_{h2} \ldots c_{hk} & b_{h1} & b_{h2} \ldots b_{hh} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2k} \\ \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1h} \\ b_{21} & b_{22} \ldots b_{2h} \\ \ldots & \ldots \\ b_{h1} & b_{h2} \ldots b_{hh} \end{vmatrix}$$

Arī otrādi: k. un h. kārtas determinantu reizinājumu var attēlot kā (k+h). kārtas determinantu.

Piezīme. Nemainot determinanta vērtību, var tā kārtu pēc patikas palielināt sekojošā veidā.

Ja

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & o & \dots & o \\ o & 1 & \dots & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & o & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

ir h. kārtas determinants, tad

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

var attēlot ar (k + h). kārtas determinantu.

§ 6. Determinantu reizināšana.

Divu n. kārtas determinantu

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{un } B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

reizinājumu var dažādos veidos attēlot ar (2n). kārtas determinantu, piem. ar

$$AB = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & o & o & \dots & o \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & o & o & \dots & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & o & o & \dots & o \\ -1 & o & \dots & o & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ o & -1 & \dots & o & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & o & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Ja te reizinām pirmo kolonnu ar b_{11}, otro ar $b_{21}, \dots$, n. kolonnu ar b_{n1} un pieskaitām (n+1). kolonnai, tad visi „b" šinī kolonnā top nulles. Līdzīgā kārtā elementu „b" vietā var dabūt nulles arī pārējās kolonnās un determinantu AB pārveidot par

$$AB = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & o & \dots & o & o & o & \dots & o \\ o & -1 & \dots & o & o & o & \dots & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & o & \dots & -1 & o & o & \dots & o \end{vmatrix}$$

ar

$$c_{rk} = a_{r1} b_{1k} + a_{r2} b_{2k} + \dots + a_{rn} b_{nk} \tag{7}$$

Tagad determinantu AB pec Laplasa teōrēmas var sadalīt divos faktoros:

$$AB = (-1)^s . \Delta . \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

ar

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & o & \dots & o \\ o & -1 & \dots & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & o & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n$$

un

$$s = (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) + (n+2) + \dots + 2n = n(2n+1)$$

Tādēļ $(-1)^s \Delta = +1$.

Dabūjam Binē *(Binet)* un Košī *(Cauchy)* reizināšanas formulu (1813., 1815. g.):

$$A.B = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

kur c_{rk} aprēķina, rēķinot un saskaitot visus viena determinanta r. rindas elementus ar attiecīgiem otra determinanta k. kolonnas elementiem.

Kā vienā, tā otrā determinantā rindas ar kolonnām var sajaukt. Tādēļ, kombinējot **rindas ar rindām, rindas ar kolon-**

nām, kolonnas ar rindām un kolonnas ar kolonnam, var dabūt četras dažādas determinantu reizināšanas metodes, t. i.

$$c_{rk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}\, b_{ki} = \sum_{i=1}^{n} a_{ri}\, b_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ir}\, b_{ki} = \sum_{i=1}^{n} a_{ir}\, b_{ik}$$

Piemērs: Ja n. kārtas determinantā katra elementa a_{rk} vietā raksta tā adjunktu A_{rk}, tad dabū determinantu D′, kuŗu sauc par **saistītu** ar D. Starp determinantiem

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{un } D' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

pastāv sakars **(Koši formula)**

$$D' = D^{n-1}$$

Gadījumā, kad $D = 0$, tad determinanta D katru divu rindu adjunkti ir proporcionāli. Tādēļ arī $D' = 0$, un šim gadījumam teōrēma pareiza. Vispārīgā gadījumā, kad $D \neq 0$, sastādīsim D un D′ produktu, reizinot rindas ar rindām. Dabūsim jaunu determinantu, kuŗā vispārīgais loceklis ir

$$c_{rk} = a_{r1} A_{k1} + a_{r2} A_{k2} + \ldots + a_{rn} A_{kn} = \begin{cases} 0, & \text{ja } r \neq k \\ D, & \text{ja } r = k \end{cases}$$

Tādēļ

$$DD' = \begin{vmatrix} D & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & D \end{vmatrix}$$

Ja dala abas puses ar $D \neq 0$, tad rodas $D' = D^{n-1}$. Tā tad teōrēma ir pierādīta.

§ 7. Matrica. Rangs.

Par **matricu** sauc m n elementu sistēmu

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \quad \text{jeb} \quad \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Bmatrix},$$

sakārtotu m rindās un n kolonnās tā, ka katrs elements a_{rk} atrodas r. rindā un k. kolonnā.

Ja $m = n$, tad matrica ir kvadratiska. No tās n^2 elementiem var sastādīt vienu matricai piederīgu n. kārtas determinantu un galīgā skaitā zemāku kārtu determinantus.

Ja $m > n$, tad matrica ir **taisnstūrīga.** No tās elementiem var dažādos veidos, izsvītrojot rindas un kolonnas, sastādīt matricai piederīgus determinantus ar kārtu $\leqq n$. Ja visi matricai piederīgie $(r + 1)$. kārtas determinanti ir vienlīdzīgi nullei, bet vismaz viens r. kārtas determinants nav nulle, tad saka, ka dotās matricas rangs ir r.

Ja vismaz viens no matricai piederīgiem n. kārtas determinantiem nav nulle, tad matricas rangs ir n. Citos gadījumos $0 \leqq r < n$. Speciālā gadījumā, kad $r = 0$, tad visi matricas elementi ir nulles.

Ja matricā pārmaina vietām divas rindas vai kolonnas, rindas samaina ar kolonnām, vai vienas kolonnas visus elementus reizina ar skaitli $k \neq 0$, vai vienas kolonnas visiem elementiem pieskaita attiecīgos otras kolonnas elementus, pareizinātus ar vienu un to pašu skaitli λ, tad saka, ka dabūtā matrica ir **ekvivalenta** ar doto.

Teōrēma. Ekvivalentu matricu rangi ir vienlīdzīgi.

Teōrēmas pareizība ir acīm redzama tādām ekvivalentām matricām, kas rodas viena no otras, mainot rindu vai kolonnu kārtību vai reizinot visus vienas kolonnas elementus ar skaitli $k \neq o$. Ja ir dota matrica

$$(M) \ldots \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

ar rangu r un pieskaita tās visiem k. kolonnas elementiem attiecīgos h. kolonnas elementus, reizinātu ar patvaļīgu skaitli λ, tad dabūjam jaunu matricu

$$(M') \ldots \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} + \lambda a_{1h} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} + \lambda a_{2h} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} + \lambda a_{mh} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

kuŗas rangs ir r'. No vienas puses katrs matricai (M') piederīgs p. kārtas determinants ir vai nu piederīgs arī matricai (M), vai sadalāms divu tādu p. kārtas determinantu summā, kas pieder matricai (M). Tādēļ visi (M') determinanti, kuŗu kārta ir augstāka par matricas (M) rangu, ir nulles. Tā tad (M') rangs nav augstāks par (M) rangu ($r' \leqq r$). No otras puses matrica (M) rodas no (M'), ja pieskaita tās k. kolonnas elementiem attiecīgos h. kolonnas elementus, reizinātus ar $-\lambda$, jo

$$(a_{ik} + \lambda a_{ih}) - \lambda a_{ih} = a_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Tādēļ arī matricas (M) rangs nav augstāks par (M') rangu ($r \leqq r'$). Tā tad abām matricām rangi ir vienlīdzīgi: $\mathbf{r} = \mathbf{r'}$.

Uzdevumi.

1) Izteikt ar trešās kārtas determinantiem summas:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3; \qquad 1 + a^2 + b^2 + c^2;$$
$$abc - an^2 - bm^2 - cp^2.$$

2) Pierādīt formulas:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3;$$

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2 b^2 c^2;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c);$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -y & -c & 0 & a \\ -z & -b & -a & 0 \end{vmatrix} = (ax - by + cz)^2$$

3) Aprēķināt determinantus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & x \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & a \dots & a \\ a & x_2 \dots & a \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a & a \dots & x_n \end{vmatrix}$$

4) Sareizinot determinantus

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1+ib_1 & c_1+id_1 \\ -c_1+id_1 & a_1-ib_1 \end{vmatrix}, \quad (i=\sqrt{-1})$$

pierādīt, ka četru skaitļu kvadrātu summas reizinājums ar citu četru skaitļu kvadrātu summu arī attēlojams ar četru skaitļu kvadrātu summu.

II. Līneāro vienādojumu sistēmas.

§ 8. Kramera formulas.

Ir dota n līneāru vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{cases}$$

ar n nezināmiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dotajiem koeficientiem a_{rk} un brīvajiem locekļiem b_r. Determinantu, ko sastāda koeficienti pie nezināmiem, sauc par **sistēmas determinantu D.** Apzīmējam elementa a_{rk} adjunktu ar A_{rk} un ar D_k determinantu, kas rodas, ja sistēmas determinantā k. kolonnas elementu vietā raksta brīvos locekļus b_r, t. i.:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{un} \quad D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2\,k-1} & b_2 & a_{2\,k+1} & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

jeb

$$D_k = b_1\,A_{1k} + b_2\,A_{2k} + \ldots + b_n\,A_{nk}.$$

Reizinām sistēmas pirmā vienādojuma abas puses ar A_{1k}, otrā ar $A_{2k}, \ldots$, pēdējā ar A_{nk} un pēc tam saskaitām visus vienādojumus. Rodas summa, kuŗā koeficients pie nezinamā x_h ir

$$a_{1h}\,A_{1k} + a_{2h}\,A_{2k} + \ldots + a_{nh}\,A_{nk} = \begin{cases} 0, & \text{ja } h \neq k \\ D, & \text{ja } h = k \end{cases}$$

To ievērojot, dabū sakarus

$$D\,.\,x_k = D_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (8)$$

Ja sistēmas determinants nav nulle ($D \neq 0$), tad no (8) atrisinājumus var izteikt ar **K r a m e r a formulām**

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Sekas. Ja visi brīvie locekļi ir nulles, tad arī visi $D_k = 0$. Sistēma ir **homogena,** un katrā gadījumā tai derīga triviālo atrisinājumu kopa

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Tādā gadījuma formula (8) top par

$$D \cdot x_k = 0,$$

un no tās varam secināt:

I. Ja homogenas sistēmas determinants nav nulle, tad visi sistēmas atrisinājumi ir nulles, jeb triviālie atrisinājumi ir arī vienīgie sistēmas atrisinājumi.

II. Ja n līneāru homogenu vienādojumu sistēmai ar n nezināmiem eksistē atrisinājumi, kas visi nav nulles, tad sistēmas determinants ir vienlīdzīgs nullei.

Apgrieztā kārtā, ja $D = 0$, tad

$$a_{s1} A_{r1} + a_{s2} A_{r2} + \ldots + a_{sn} A_{rn} = 0.$$

arī tad, kad $s = r$. Tādā gadījumā bez triviāliem atrisinājumiem $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ sistēmai eksistē arī vēl citi atrisinājumi, piemēram

$$x_1 = A_{r1}, \; x_2 = A_{r2}, \ldots, x_n = A_{rn} \tag{9}$$

Ir vienalga, kuŗas rindas adjunktus izvēlas par „x" nozīmēm, jo ja determinants ir nulle, tad ik divu rindu adjunkti ir proporcionāli.

Ja skaitļi $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2, \ldots, x_n = c_n$ sastāda homogenas sistēmas vienu atrisinājumu kopu, tad bezgala daudzus citus atrisinājumus sastāda tiem proporcionāli skaitļi $\lambda c_1, \lambda c_2, \ldots, \lambda c_n$ ar patvaļīgu faktoru λ. Tādēļ slēdziens:

Ja n lineāru homogenu vienādojumu sistēmas determinants ir nulle, tad atrisinājumi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ir proporcionāli determinanta kaut kuŗas rindas adjunktiem.

Ja ir dota $n+1$ vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} a_{11} \; x_1 + a_{12} \; x_2 + \ldots + a_{1n} \; x_n = b_1 \\ a_{21} \; x_1 + a_{22} \; x_2 + \ldots + a_{2n} \; x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n+1\,1} \; x_1 + a_{n+1\,2} \; x_2 + \ldots + a_{n+1\,n} \; x_n = b_{n+1} \end{cases}$$

ar n nezināmiem $x_1, \ldots, x_n$, tad, ievedot jaunu nezināmo $x_{n+1} = -1$, dabū $n + 1$ lineāru homogēnu vienādojumu sistēmu

$$a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + a_{rn} x_n + b_r x_{n+1} = 0, \; (r = 1, 2, \ldots, n+1)$$

ar $n + 1$ nezināmiem, kas visi nav nulles (vismaz $x_{n+1} \neq 0$). Tādēļ, lai šī un līdz ar to arī dotā sistēma būtu saderīga, ir **nepieciešami,** ka visu koeficientu un brīvo locekļu determinants vienlīdzīgs nullei, t. i.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \dots & a_{n+1\,n} & b_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

Jautājumu par to, vai šis nosacījums ir arī pietiekošs, izšķirsim vēlāk, apskatot plašāku līneāro vienādojumu teōriju, kuŗu XIX. g. s. beigās ir izstrādājuši Rušē *(Rouché),* **Frobenius, Kapelli** *(Capelli)* un citi autori.

§ 9. Vispārīgā līneāro vienādojumu sistēma.

Ir dota m līneāru vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

ar n nezināmiem $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ja pievieno vajadzības gadījumā sistēmai vēl citus vienādojumus, kuŗu visi koeficienti un brīvie locekļi ir nulles, tad vienmēr var iekārtot tā, ka vienādojumu būtu vairāk kā nezināmo, t. i. $m > n$.

Speciālā gadījumā ir iespējams, ka visi sistēmas koeficienti a_{rk} ir nulles. Tad arī visiem b_r jābūt nullēm. Sistēma šinī gadījumā ir nenoteikta, jo visu nezināmo nozīmes var izvēlēties patvaļīgi.

Ja šo gadījumu izslēdz, tad no sistēmas koeficientiem a_{rk} var sastādīt matricu

$$(A) = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

kuŗas rangs r ir lielāks par nulli, bet $\leqq n$. Visi matricai piederīgie $(r + 1)$. kārtas determinanti ir nulles, bet eksistē vismaz viens r. kārtas determinants Δ, kas nav nulle. Šo Δ sauc par sistēmas **galveno determinantu.**

Ja matricā pārmaina vietām divas rindas vai kolonnas, tad matricas rangs nemainās. Tādēļ dotā sistēmā vienādojumus un nezināmos var sanumurēt tā, ka galveno determinantu sastāda pirmo r rindu un kolonnu kopīgie elementi, t. i.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq o$$

Papildinot galveno determinantu ar vienu rindu $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir})$ un vienu kolonnu $(b_1, b_2, \dots, b_r, b_i)$, var sastādīt arī citus determinantus

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & b_i \end{vmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

kuŗus sauc par sistēmas **raksturīgiem** (charakteristiskiem) determinantiem.

Pierādīsim **teōrēmu:** m dotie vienādojumi ir saderīgi vienā sistēmā tad un tikai tad, ja sistēmas visi m raksturīgie determinanti ir vienlīdzīgi nullei.

Pierādīsim teōrēmas pirmo daļu (I) par **nepieciešamiem noteikumiem,** t. i.

I. Ja vienādojumu sistēma

$$a_{s1}\, x_1 + a_{s2}\, x_2 + \dots + a_{sn}\, x_n = b_s, \quad s = 1, 2, \dots, m$$

ar n nezināmiem ir saderīga, tad katrs raksturīgais determinants $\Delta_i = o$.

Ja **i** $\leqq$ **r**, tad $\Delta_i = o$ kā determinants ar divām vienādām rindām.

Tādēļ turpmāk pieņemsim, ka $i > r$. Ja dotā sistēma ir saderīga, t. i. tai var atrast atrisinājumu kopu

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n,$$

tad tāpat ir saderīga mazāka skaita to pašu vienādojumu sistēma. Ir, piemēram, saderīga arī sistēma

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1r} x_r = b_1 - a_{1\,r+1} c_{r+1} - a_{1\,r+2} c_{r+2} - \ldots - a_{1n} c_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2r} x_r = b_2 - a_{2\,r+1} c_{r+1} - a_{2\,r+2} c_{r+2} - \ldots - a_{2n} c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots + a_{rr} x_r = b_r - a_{r\,r+1} c_{r+1} - a_{r\,r+2} c_{r+2} - \ldots - a_{rn} c_n \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ir} x_r = b_i - a_{i\,r+1} c_{r+1} - a_{i\,r+2} c_{r+2} - \ldots - a_{in} c_n, \end{cases}$$

kuŗai ir $r + 1$ vienādojums, bet tikai r nezināmie $x_1, x_2, \ldots x_r$. Kā pierādīts iepriekš (§ 8), tad visu koeficientu un brīvo locekļu determinantam jābūt vienlīdzīgam nullei, t. i.

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & b_1 - a_{1\,r+1} c_{r+1} - \ldots - a_{1n} c_n \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & b_2 - a_{2\,r+1} c_{r+1} - \ldots - a_{2n} c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & b_r - a_{r\,r+1} c_{r+1} - \ldots - a_{rn} c_n \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & b_i - a_{i\,r+1} c_{r+1} - \ldots - a_{in} c_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & b_r \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & b_i \end{vmatrix} - c_{r+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,r+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{r\,r+1} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{i\,r+1} \end{vmatrix} -$$

$$- \ldots - c_n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{in} \end{vmatrix}$$

Vienādības labajā pusē pirmais determinants ir Δ_i, bet visi pārējie ir nulles, kā $(r + 1)$. kārtas determinanti, kas pieder matricai ar rangu r. Tā tad arī sistēmas raksturīgais determinants $\Delta_i = 0$. Teorēmas pirmā daļa ar to ir pierādīta.

Teorēmas otrā daļa (II) izteic, ka nosacījumi ir **pietiekoši** t. i.

II. Ja visi sistēmas raksturīgie determinanti ir nulles, tad sistēmas visi vienādojumi ir saderīgi.

Uzrakstām dotos m vienādojumus formā

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n - b_1 = 0 \\ f_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n - b_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n - b_n = 0 \end{aligned}$$

Sastādām determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & f_r \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & f_i \end{vmatrix},$$

un izteicam to ar summu

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{21} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{r1} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{i1} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{r2} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{i2} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$+ x_n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rn} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{in} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & b_r \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & b_i \end{vmatrix},$$

kas ir vienlīdzīga $-\Delta_i = o$.

Ja minēto determinantu izvirza pēc pēdējās kolonnas elementiem, tad dabū sakaru

$$f_1 A_{1\,r+1} + f_2 A_{2\,r+1} + \ldots + f_r A_{r\,r+1} + f_i A_{r+1\,r+1} = 0.$$

Tā kā $A_{r+1\,r+1}$ ir sistēmas galvenais determinants $\Delta \neq o$, tad funkciju f_i var izteikt kā $f_1, f_2, \ldots, f_r$ lineāru kombināciju

$$f_i = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_r f_r$$

ar pastāvīgiem koeficientiem $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Ja varētu atrast tādas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nozīmes, ar kuŗām $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots, f_r = 0$, tad arī visu atlikušo funkciju vērtības būtu nulles, t. i. visi m vienādojumi $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$ vienā sistēmā būtu saderīgi.

Nezināmo $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ nozīmes izvēlamies patvaļīgi. Tad palīga sistēmas

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1r} x_r = b_1 - a_{1\,r+1} x_{r+1} - \cdots - a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2r} x_r = b_2 - a_{2\,r+1} x_{r+1} - \cdots - a_{2n} x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \cdots + a_{rr} x_r = b_r - a_{r\,r+1} x_{r+1} - \cdots - a_{rn} x_n \end{cases}$$

determinants reizē ir arī dotās sistēmas galvenais determinants $\Delta \neq o$. Ar Kramera formulām var atrast pilnīgi noteiktas nezināmo $x_1, x_2, \ldots, x_r$ nozīmes, kas apmierina sistēmu. Ar to viss vajadzīgais ir pierādīts, un var formulēt papildnātu **teōrēmu:**

Lai m līneāri vienādojumi ar n nezināmiem būtu saderīgi vienā sistēmā, ir nepieciešami un pietiekoši, ka sistēmas visi raksturīgie determinanti ir vienlīdzīgi nullei. Ja bez tam matricas (A) rangs $r = n$, tad sistēmai eksistē tikai viena vienīga atrisinājumu kopa, ko izteic ar Kramera formulām; ja rangs $r < n$, tad dotai sistēmai eksistē bezgala daudz atrisinājumu, jo tad pirmie r nezināmie $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ir izteicami viennozīmīgā atkarībā no pēdējiem $n-r$ nezināmiem $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, kuŗu nozīmes var izvēlēties patvaļīgi.

Ja sistēmas visi raksturīgie determinanti ir nulles, tad var pārliecināties, ka matricām

$$(A) = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \quad \text{un} \quad (B) = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{matrix} \right\|$$

rangi ir vienlīdzīgi. Arī otrādi: ja matricu (A) un (B) rangi ir vienlīdzīgi, tad visi raksturīgie determinanti ir nulles. Tādēļ sistēmas atrisināšanas iespējamības kritēriju var formulēt arī šādā veidā (*Capelli* 1892. g.):

Lai m līneāri vienādojumi ar n nezināmiem būtu saderīgi vienā sistēmā, tad ir nepieciešami un pietiekoši, ka sistēmas koeficientu matrica nemaina rangu, ja tai pievieno brīvo locekļu kolonnu.

§ 10. Speciāli gadījumi un izlietojumi.

1. Ja m vienādojumu sistēma ar n nezināmiem ir saderīga un matricas (A) rangs ir n, tad eksistē tikai viena atrisinājumu kopa, ko aprēķina ar Kramera formulām no sistēmas pirmajiem n vienādojumiem. Atlikušie $m-n$ vienādojumi ir pirmo n vienādojumu secinājumi, un tos var arī ignorēt. Spe-

ciālā gadījumā, kad $n + 1$ līneāru vienādojumu sistēma ar n nezināmiem būtu saderīga, tad ir nepieciešami, ka matricai (B) piederīgais $(n + 1)$. kārtas determinants.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1\,1} & a_{n+1\,2} & \ldots & a_{n+1\,n} & b_{n+1} \end{vmatrix}$$

būtu vienlīdzīgs nullei (sk. arī 8. §). Ja bez tam matricas (A) rangs ir n, tad šis nosacījums ir arī pietiekošs.

2. Ja ir dota m homogenu vienādojumu sistēma ar n nezināmiem, tad matrica (B) atšķiŗas no (A) ar kolonnu, kuŗas visi elementi ir nulles. Tādēļ abu matricu rangi ir vienlīdzīgi. Tā tad **homogenu vienādojumu sistēma vienmēr ir saderīga. Katrā gadījumā šādai sistēmai ir viena triviālo atrisinājumu kopa $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Ja matricas (A) rangs ir n, tad tā ir sistēmas vienīgā atrisinājumu kopa.**

Citādā veidā var izteikt atrasto rezultātu ar sekojošu **teōrēmu:**

Lai m līneāru homogenu vienādojumu sistēmai ar n nezināmiem eksistētu atrisinājumi, kas nav visi reizē nulles, ir nepieciešami un pietiekoši, ka sistēmas visu koeficientu matricas rangs būtu mazāks par nezināmo skaitu n.

Speciālā gadījumā, lai n līneāru homogenu vienādojumu sistēmai ar n nezināmiem eksistētu atrisinājumi, kas nav visi reizē nulles, ir nepieciešami un pietiekoši, ka sistēmas visu koeficientu determinants ir vienlīdzīgs nullei.

3. Ir dotas m līneāras homogenas funkcijas

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \\ f_2 &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n \end{aligned}$$

ar n argūmentiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ja var atrast m skaitļus $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, kas nav visi reizē nulles tā, ka summa

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m$$

būtu identiski (t. i. visām $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nozīmēm) vienlīdzīga nullei, tad dotās m funkcijas sauc par **līneāri atkarīgām.** Ja tādi „λ" nav iespējami, tad funkcijas ir **līneāri neatkarīgas.**

Izteicot, ka summā $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m$ koeficienti pie katra argūmenta būtu nulles, dabū n līneāru homogenu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \ldots + a_{m1}\lambda_m = 0 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{m2}\lambda_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_m = 0 \end{cases}$$

ar m nezināmem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Lai sistēmai eksistētu atrisinājumi, kas nav visi reizē nulles, ir nepieciešami un pietiekoši, ka matricas

$$(A) = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right\|$$

rangs būtu mazāks par m. Ja $n < m$, tad šī prasība ir izpildīta. Tādēļ vairāk kā n līneāru homogenu n argūmentu funkcijas ir līneāri atkarīgas.

Ja $m = n$, tad matricas (A) rangs ir mazāks par m tikai tad, ja sistēmas determinants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Tā tad, lai n līneāras homogenas n argūmentu funkcijas būtu līneāri atkarīgas, ir nepieciešami un pietiekoši, ka ar funkcijām veidotās sistēmas visu koeficientu determinants ir vienlīdzīgs nullei.

Piemērs.

Funkcijas $f_1 = x_1 + 2x_2 + 3$

$f_2 = 2x_1 + 3x_2 + 4$

$f_3 = 3x_1 + 4x_2 + 5$

var uzskatīt par līneāri homogenām triju argūmentu x_1, x_2, 1 funkcijām. Tā kā sistēmas determinants

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

tad funkcijas ir lineāri atkarīgas. Tā tad $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = o$, kad λ_1, λ_2, λ_3 ir proporcionāli sistēmas determinanta kaut kuŗas kolonnas elementu adjunktiem. Var izvēlēties:

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad \lambda_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Tā tad

$$-f_1 + 2f_2 - f_3 = o.$$

Uzdevumi.

1) Atrisinat sistētmas:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = k \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + 5y + 6z = -2 \\ 7x + 8y + 9z = 9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \\ 13x + 6y + 4z = 23 \\ 10x + 19y - 13z = 16 \end{cases}$$

2) Kuŗām **a** nozīmēm sistēmai:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

eksistē atrisinājumi?

3) Atrisināt vienādojumus:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & o & o \\ 3 & x & 2 & o \\ o & 2 & x & 3 \\ o & o & 1 & x \end{vmatrix} = o; \quad \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & o & o \\ b & o & x & o \\ c & o & o & x \end{vmatrix} = o; \quad \begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix} = o.$$

Otrā daļa.

Vienādojumi ar vispārīgiem koeficientiem.

I. Polinomi.

§ 11. Polinomu dažas vispārīgās īpašības.

Par veselu racionālu funkciju jeb polinomu sauc izteiksmi

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

kuŗā $a_0, a_1, \ldots, a_n$ doti reāli vai kompleksi koeficienti, x — reāls vai komplekss argūments, un veselais pozitīvais skaitlis n ir polinoma pakāpe ($a_0 \neq 0$).

Tādas argūmenta x nozīmes, ar kuŗām $f(x)$ skaitliskā vērtība top nulle, sauc par polinoma $f(x)$ nullēm*) vai vienādojuma $f(x) = 0$ saknēm. Jāievēro, ka polinoms ir algebriska izteiksme, kuŗā x ir brīvi mainīgs lielums. Turpretim vienādojums ir formula, kuŗā x var pieņemt tikai tās nozīmes (ja tādas vispār eksistē), kas vienādojumu pārvērš skaitliskā tāpatībā.

Atzīmēsim šādu acīm redzamu saknes **īpašību**:

Ja x_1 ir vienādojuma $f(x) = 0$ sakne, tad x_1 ir sakne arī vienādojumam $f(x) \cdot F(x) = 0$, kur $F(x)$ ir kāds cits polinoms vai konstante.

Teōrēma. Ja ar ikkatru x nozīmi polinoms $f(x)$ ir identiski vienlīdzīgs nullei, tad polinoma visi koeficienti ir nulles.

Ja pirmās pakāpes polinoms $f(x) = a_0 x + a_1$ vienlīdzīgs nullei ar katru x nozīmi, tad arī $f(0) = 0$, t. i. $a_1 = 0$ un $f(x) = a_0 x$. Tā kā arī $f(1) = 0$, tad $a_0 = 0$.

Pieņemsim, ka teōrēma ir pareiza 2., 3. un $(n - 1)$. pakāpes polinomiem. Ja tad ar katru $x \neq 0$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

un $$f(2x) = 2^n a_0 x^n + 2^{n-1} a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

tad arī $(n - 1)$. pakāpes polinoms

$$2^n f(x) - f(2x) = (2^n - 2^{n-1}) a_1 x^{n-1} + (2^n - 2^{n-2}) a_2 x^{n-2} + \ldots + (2^n - 1) a_n$$

vienlīdzīgs nullei ar ikkatru $x \neq 0$. Tādēļ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Ievietojot šīs nozīmes polinomā $f(x)$ un uzrakstot $f(1) = 0$, dabūjam arī $a_0 = 0$. Ar to teōrēma pierādīta.

---

*) Lekcijās lietots termins polinoma saknes. (Red.)

Sekas. Ja divi n. pakāpes polinomi $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ un $g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$ ir identiski (t. i. vienlīdzīgi visām x nozīmēm), tad to koeficienti pie vienādām x pakāpēm ir vienādi: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, . . . , $a_n = b_n$.

Tiešām, funkcija

$$f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) x^n + (a_1 - b_1) x^{n-1} + \ldots + (a_n - b_n)$$

ir nulle visām x nozīmēm. Tādēļ visi koeficienti ir nulles:

$$a_0 - b_0 = 0, \; a_1 - b_1 = 0, \ldots, a_n - b_n = 0$$

jeb $$a_0 = b_0, \; a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n.$$

§ 12. Polinomu dalīšana.

Ja $f_1(x)$ un $f_2(x)$ ir polinomi ar pakāpēm n_1, n_2 un $n_1 \geqslant n_2$, tad, pirmo polinomu dalot ar otro, dabū divus jaunus polinomus: dalījumā $q(x)$ ar pakāpi $n_1 - n_2$ un atlikumā $f_3(x)$ ar zemāku pakāpi kā $f_2(x)$. Ir identisks sakars

$$f_1(x) = f_2(x) \cdot q(x) + f_3(x).$$

Var gadīties, ka visi $f_3(x)$ koeficienti ir nulles. Tad $f_1(x) = f_2(x) \cdot q(x)$ un saka, ka polinoms $f_1(x)$ dalās ar $f_2(x)$, ko simboliski pieraksta šādi: $f_1(x) \mid f_2(x)$.

Teorēma par atlikumu. Ja $f(x)$ dala ar $x - a$, tad atlikums ir $f(a)$.

Dalot $f(x)$ ar $x - a$, atlikumā var rasties skaitlis R. Tad identitātē

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + R$$

liekot x vietā a, dabū $f(a) = R$. Tā tad

$$f(x) = (x - a)\, q(x) + f(a)$$

vai $$[f(x) - f(a)] \mid (x - a).$$

Speciālā gadījumā, kad $a = x_1$ ir polinoma $f(x)$ nulle, tad $f(a) = 0$ un

$$f(x) \mid (x - x_1).$$

Arī otrādi: ja $f(x) \mid (x - a)$ jeb $f(x) = (x - a)\, q(x)$, tad a ir polinoma $f(x)$ nulle, jo $f(a) = 0$.

Praktikā $f(x)$ dala ar $x - a$ pēc **sintētiskās** jeb **Hornera metodes** (1819. g.).

Pieņemsim, ka

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n =$$
$$= (x - a)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + b_n,$$

un salīdzināsim koeficientus pie vienādām x pakāpēm:

$a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 - ab_0$, $a_2 = b_2 - ab_1$, . . ., $a_n = b_n - ab_{n-1}$.

Tā tad

$b_0 = a_0$, $b_1 = b_0 a + a_1$, $b_2 = b_1 a + a_2$, . . ., $b_n = b_{n-1} a + a_n$.

Hornera koeficientu schēma ir šāda:

$$\begin{array}{c|lllll} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \hline a & b_0 = a_0, & b_1 = ab_0 + a_1, & \ldots, & b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}, & b_n = ab_{n-1} + a_n \end{array}$$

Piemērs. Dalīt $f(x) = x^5 + x^4 - 2x + 6$ ar $x + 2$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ \hline -2 & 1, & -1, & 2, & -4, & 6, & -6 \end{array}$$

Sastādam nepilnīgo kvocientu un dalīšanas atlikumu:

$q(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 6$; $R = f(-2) = -6$.

§ 13. Polinomu augstākais kopīgais dalītājs.

Ja $f_1(x)$ dalīšanā ar $f_2(x)$ visi atlikuma $f_3(x)$ koeficienti nav nulles (atlikums vismaz ir 1. pakāpes polinoms), tad dalīšanas procesu varam turpināt, dalot $f_2(x)$ ar $f_3(x)$ u. t. t. Dabūsim identitātes:

$$f_1(x) = f_2(x)\, q_1(x) + f_3(x)$$
$$f_2(x) = f_3(x) . q_2(x) + f_4(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{n-2}(x) = f_{n-1}(x)\, q_{n-2}(x) + f_n(x)$$
$$f_{n-1}(x) = f_n(x) \quad q_{n-1}(x) + R$$

Atlikumu polinomu $f_3(x)$, $f_4(x)$, . . . pakāpes kļūst arvien mazākas. Tādēļ dalīšana izbeigsies ar atlikumu R, kas vairs nesatur x. Ir iespējami divi **gadījumi:** I) $R = 0$, II) $R \neq 0$.

I. Ja $R = 0$, tad uzrakstītā tabulā, ejot no apakšas uz augšu, redzam, ka $f_{n-1} \mid f_n$, . . . beidzot $f_2 \mid f_n$ un $f_1 \mid f_n$. Tā tad $f_n(x)$ ir polinoms, kas dala abus dotos polinomus $f_1(x)$ un $f_2(x)$. Ja būtu vēl kāds cits polinoms $\varphi(x)$ ar tādu īpašību, ka $f_1(x) \mid \varphi(x)$ un $f_2(x) \mid \varphi(x)$, tad, ejot uzrakstītā tabulā no augšas uz leju, pakāpeniski secinātu: $f_3 \mid \varphi$, $f_4 \mid \varphi$, . . . beidzot arī $f_n \mid \varphi$. Tādēļ $f_n(x)$ sauc par abu doto polinomu $f_1(x)$ un $f_2(x)$ **augstāko kopīgo dalītāju,** ko apzīmē ar

$$f_n(x) = (f_1, f_2) = D(x).$$

Divu polinomu augstākais kopīgais dalītājs tomēr ir noteikts tikai līdz pastāvīgam reizinātājam, jo reizē ar $f_n(x)$ arī $c\,f_n(x)$ dala abus dotos polinomus (c ir konstante, kas $\neq 0$). Šo apstākli izlieto $f_n(x)$ koeficientu vienkāršošanai. Apskatīto metodi augstākā kopīgā dalītāja noteikšanai sauc par Euklida algoritmu.

II. Ja skaitlis $R \neq 0$, tad abiem polinomiem nav kopīga dalītāja, vai saka arī, ka to augstākais kopīgais dalītājs ir 1.

Meklējot divu polinomu augstāko kopīgo dalītāju, var pēc patikas vienu vai abus polinomus reizināt vai dalīt ar katru skaitli $c \neq o$

Piemērs. Ja

$$f_1 = x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1$$

un $$f_2 = 7x^6 - 10x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x,$$

tad (f_1, f_2) vietā ir izdevīgāki meklēt $(7f_1, f_2)$.

$$\begin{array}{l|l}
7f_1 = 7x^7 - 14x^5 - 7x^4 + 7x^3 + 14x^2 - 7 & 7x^6 - 10x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x = f_2 \\
\hline
f_3 = \quad -4x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 7 & x
\end{array}$$

Tāpat turpinām:

$$\begin{array}{l|l}
4f_2 = 28x^6 - 40x^4 - 16x^3 + 12x^2 + 16x & -4x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 7 = f_3 \\
\hline
-21x^5 - 12x^4 + 54x^3 + 12x^2 - 33x \;* & -7x; \quad +7 \\
-28x^5 - 16x^4 + 72x^3 + 16x^2 - 44x & \\
\hline
5x^4 + 44x^3 - 54x^2 - 44x + 49 = f_4 &
\end{array}$$

Piezīme. Reizinām atlikumu * ar $\frac{4}{3}$.

Turpinām dalīšanu:

$$\begin{array}{l|l}
-5f_3 = 20x^5 + 15x^4 - 20x^3 - 50x^2 + 35 & 5x^4 + 44x^3 - 54x^2 - 44x + 49 = f_4 \\
\hline
-161x^4 + 196x^3 + 126x^2 - 196x + 35 \;** & 4x; \quad -23 \\
-115x^4 + 140x^3 + 90x^2 - 140x + 25 & \\
\hline
1152x^3 - 1152x^2 - 1152x + 1152 \;*** &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
f_4 = 5x^4 + 44x^3 - 54x^2 - 44x + 49 & x^3 - x^2 - x + 1 = f_5 \\
\hline
49x^3 - 49x^2 - 49x + 49 & 5x + 49 \\
\hline
R = 0 &
\end{array}$$

Tā tad $(f_1, f_2) = f_5 = x^3 - x^2 - x + 1$.

Piezīme. Reizinām atlikumu ** ar $\frac{5}{7}$ un dalīšanu turpinām; atlikums *** ir izdalīts ar 1152.

Teorēma. Ikviena divu polinomu kopīgā nulle ir reizē nulle arī abu polinomu augstākajam kopīgam dalītājam un **otrādi:** augstākā kopīgā dalītāja katra nulle ir arī abu doto polinomu nulle.

Tiešām, ja polinomiem $f_1(x)$ un $f_2(x)$ ir kopīga nulle x_1, tad $f_1(x) \mid (x - x_1)$ un $f_2(x) \mid (x - x_1)$. Tādēļ arī $D(x) \mid (x - x_1)$.

Otrādi: ja x_1 ir $D(x)$ nulle, tad $D(x) \mid (x - x_1)$. Tā kā $f_1(x) \mid D(x)$ un $f_2(x) \mid D(x)$, tad secinām $f_1(x) \mid (x - x_1)$ un $f_2(x) \mid (x - x_1)$, t. i. x_1 ir polinomu $f_1(x)$ un $f_2(x)$ kopīga nulle.

§ 14. Teilora *(Taylor)* rinda (1715. g.)

Funkcijām daudzu īpašību noskaidrošanu atviegio **Teilora rinda,** ko pierādīsim un izlietosim tikai polinomiem. Liekam polinomā

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

x vietā $x + h$, un sakārtojam polinomu pēc h augošām pakāpēm, lietojot binoma formulu. Rodas

$$f(x+h) = a_0 (x+h)^n + a_1 (x+h)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x+h) + a_n$$

$$= a_0 \left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n\right] +$$

$$+ a_1 \left[x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}h + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} x^{n-3}h^2 + \ldots + h^{n-1}\right] +$$

$$+ \ldots + a_{n-1}(x+h) + a_n = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) +$$

$$+ \frac{h}{1}[na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}] +$$

$$+ \frac{h^2}{1 \cdot 2}[n(n-1)a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1 x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}] +$$

$$+ \ldots + \frac{h^n}{n!} n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 \cdot a_0$$

jeb

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \tag{9}$$

Teilora rindā (9) koeficientus pie $\frac{h}{1!}, \frac{h^2}{2!}, \frac{h^3}{3!}, \ldots, \frac{h^n}{n!}$ sauc par pirmo, otro, trešo, ..., n. **atvasināto funkciju** un apzīmē ar $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ ..., $f^{(n)}(x)$.

Kā redzams,

$$f'(x) = na_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1};$$

$$f''(x) = n(n-1) a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + \ldots + 2.1.a_{n-2} =$$
$$= [f'(x)]', \text{ u. t. t.}$$

Noskaidrosim atvasināšanas likumus divu funkciju $f(x)$ un $g(x)$ summai (I) un reizinājumam (II).

I. Ja $F(x) = f(x) + g(x)$, tad

$$F(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + g(x) + hg'(x) +$$
$$+ \frac{h^2}{2!} g''(x) + \ldots = f(x) + g(x) + h[f'(x) + g'(x)] + \frac{h^2}{2!} [f''(x) +$$
$$+ g''(x)] + \ldots$$

Tā tad
$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x),$$
$$[f(x) + g(x)]'' = f''(x) + g''(x) \text{ u. t. t.}$$

Pieskaitot Teilora formulas abām pusēm pastāvīgu lielumu c, dabū

$$f(x+h) + c = f(x) + c + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots,$$

un

$$[f(x) + c]' = f'(x).$$

Tā tad konstantes c atvasinājums $c' = 0$.

II. Ja $F(x) = f(x) \,.\, g(x)$, tad

$$F(x+h) = f(x+h) \,.\, g(x+h) =$$
$$= \left[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots\right]\left[g(x) + hg'(x) + \frac{h^2}{2!} g''(x) + \ldots\right]$$

jeb $F(x+h) = f(x) \,.\, g(x) + h[f'(x) g(x) + f(x) g'(x)] + \ldots$

Tā tad $[f(x) \,.\, g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$.

Trim un vairāk reizinātājiem $f_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ der formulas:

$$(f_1 f_2 f_3)' = [f_1 (f_2 f_3)]' = f'_1 f_2 f_3 + f_1 (f_2 f_3)' = f'_1 f_2 f_3 + f_1 f'_2 f_3 + f_1 f_2 f'_3$$

un $(f_1 f_2 \ldots f_n)' = f_1' f_2 \ldots f_n + f_1 f_2' \ldots f_n + \ldots + f_1 f_2 \ldots f_n'$.

Speciālā gadījumā, kad $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$, tad

$$(f^n)' = nf^{n-1} \,.\, f'.$$

Liekot Teilora rindā $x = a$ un pēc tam dabūtā izteiksmē $h = x - a$, dabūjam **Meklorena** ***(Maclaurin)*** **rindu** funkcijai $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (10)$$

Polinoma $f(x)$ izvirzīšanai M e k l o r e n a r i n d ā ir jāzina tikai koeficienti $f(a)$, $f'(a)$, $\frac{f''(a)}{2!}$, . . , kuŗus praktikā atrod ar H o r n e r a m e t o d i. Dalot $f(x)$ ar $x - a$, dabū atlikumu $f(a)$ un dalījumu

$$f_1(x) = f'(a) + (x-a)\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + (x-a)^{n-1}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Dalot tālāk $f_1(x)$ ar $x - a$, dabūjam atlikumu $f'(a)$ un dalījumu

$$f_2(x) = f''(a) + (x-a)\frac{f'''(a)}{3!} + \ldots + (x-a)^{n-2}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Turpinot dalīšanu, šādā kārtā dabūsim atlikumus $\frac{f''(a)}{2!}$, $\frac{f'''(a)}{3!}$ u.t.t.

Piemērs. Polinomu $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 4$ izvirzīt $(x+2)$ pakāpju rindā. No papildinātas H o r n e r a schēmas

	3	—5	0	1	—4
—2	3	—11	22	—43	**82**
—2	3	—17	56	**—155**	
—2	3	—23	**102**		
—2	3	**—29**			
	3				

atrodam

$$f(-2) = 82,\ f'(-2) = -155,\ \frac{f''(-2)}{2!} = 102,\ \frac{f'''(-2)}{3!} = -29,$$

$$\frac{f^{IV}(-2)}{4!} = 3.$$

Tā tad

$$f(x) = 82 - 155(x+2) + 102(x+2)^2 - 29(x+2)^3 + 3(x+2)^4.$$

§ 15. Algebras pamatteōrēma.

Tagad sāksim pierādīt algebras pamatteōrēmu par algebriskā vienādojuma $f(z) = 0$ saknes eksistenci. Te polinomam

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$$

ir kompleksais argūments $z = x + iy$ ar $i = \sqrt{-1}$ un reāliem x un y.

Izvēlēsimies **Koši** ***(Cauchy)*** pierādījumu, kam vajadzīgas 4 palīgteōrēmas (lemmas).

I. lemma. J a p o l i n o m a b r ī v a i s l o c e k l i s $a_n = 0$, t a d v a r a t r a s t t ā d a s a r g ū m e n t a n o z ī m e s $z \neq 0$, a r k u ŗ ā m polinoma $f(z)$ absolūtā vērtība (modulis) ir mazāka par katru iepriekš dotu pozitīvu skaitli ε.

Pieņemsim, ka koeficientu $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ absolūto vērtību lielākā nozīme ir M. Tad

$$|f(z)| = |a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z| \leqslant |a_0 z^n| + |a_1 z^{n-1}| + \ldots + |a_{n-1} z|$$

jeb

$$|f(z)| \leqslant |a_0|\,|z|^n + |a_1|\,|z|^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}|\,|z| \leqslant M|z|^n + M|z|^{n-1} +$$
$$+ \ldots + M|z|, \text{ t. i. } |f(z)| \leqslant M\frac{|z| - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

Ja izvēlas $|z| < 1$, tad $|f(z)| < M\dfrac{|z|}{1 - |z|}$.

Vēl jāpieprasa, lai būtu $M\dfrac{|z|}{1 - |z|} < \varepsilon$, un tā tad $|z| < \dfrac{\varepsilon}{M + \varepsilon}$. Visi z ar lemmā minēto īpašību komplekso skaitļu plāksnē atrodas riņķī, kas vilkts ap 0 punktu ar radiju $\dfrac{\varepsilon}{M + \varepsilon}$.

II. lemma. Eksistē tādas argūmenta z nozīmes, ar kurām polinoma absolūtā vērtība ir lielāka par katru iepriekš dotu pozitīvu skaitli E.

Pārveido polinomu

$$f(z) = a_0 z^n \left\{1 + \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{z} + \frac{a_2}{a_0}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots + \frac{a_n}{a_0}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^n\right\}$$

jeb
$$f(z) = a_0 z^n\left\{1 + \varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right\},$$

kur

$$\varphi = \frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{1}{z} + \frac{a_2}{a_0}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots + \frac{a_n}{\bar{a}_0}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

ir polinoms bez brīvā locekļa. Tādēļ pietiekoši mazām $\left|\dfrac{1}{z}\right|$ nozīmēm, resp. pietiekoši lielām nozīmēm $|z| > A$, ir $\left|\varphi\left(\dfrac{1}{z}\right)\right| < \varepsilon < 1$. Tā tad

$1 - \left|\varphi\left(\dfrac{1}{z}\right)\right|$ ir pozitīvs skaitlis, un

$$|f(z)| = |a_0|\,|z|^n \left|1 + \varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right| \geqslant |a_0|\,|z|^n\left(1 - \left|\varphi\left(\frac{1}{z}\right)\right|\right) > |a_0|\,|z|^n(1 - \varepsilon).$$

Vēl jāpieprasa, lai $|a_0|\,|z|^n\,(1-\varepsilon) > E$; tad

$$|z| > \sqrt[n]{\frac{E}{|a_0|\,(1-\varepsilon)}} = B.$$

No divām prasībām $|z| > A$ un $|z| > B$ šaurāko var atmest. Tad paliek $|z| > R$, kur R ir A vai B. Noteikums $|z| > R$ nozīmē, ka visi z ar lemmā minēto īpašību atrodas ārpus riņķa, kas vilkts komplekso skaitļu plāksnē ap 0 punktu ar pietiekoši lielu radiju R.

III. Dalambēra *(D'Alembert)* lemma (1746. g.) Ja $f(a) \neq 0$, tad var atrast tādu argūmenta nozīmi $z = a_1$ ar kuŗu $|f(a_1)| < |f(a)|$.

Teilora formulai

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) +$$
$$+ \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

abas puses varam dalīt ar $f(a)$, jo $f(a) \neq 0$. Par $f'(a)$ nekas nav zināms; pieņemam: $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, bet $f^{(k)}(a) \neq 0$, kur $k \geqq 1$.

Tad

$$\frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 + \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{f(a)} + \ldots + \frac{h^n}{n!} \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{f(a)} =$$
$$= 1 + b_k h^k + b_{k+1} h^{k+1} + \ldots + b_n h^n.$$

Te $b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n$ ir zināmi kompleksi koeficientī, bet h pagaidām nenoteikts. Izteicam b_k un h trigōnometriskā formā:

$$b_k = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ un } h = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ar moduļiem r un ρ un amplitūdām α un φ. Tad ar **Muavra *(Moivre)* formulu** izteic

$$h^k = \rho^k\,(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$$

un $$b_k h^k = r\rho^k\,[\cos(\alpha + k\varphi) + i\sin(\alpha + k\varphi)].$$

Tagad izvēlēsimies φ tā, lai $\alpha + k\varphi = \pi$ $\left(\text{t. i. } \varphi = \frac{\pi-\alpha}{k}\right)$.

Tad $b_k h^k = -r\rho^k$ un

$$\left|\frac{f(a+h)}{f(a)}\right| = |1 - r\rho^k + b_{k+1} h^{k+1} + \ldots + b_n h^n| \leqq |1 - r\rho^k| +$$
$$+ |h^k|\,|b_{k+1} h + b_{k+2} h^2 + \ldots + b_n h^{n-k}|$$

jeb $$\left|\frac{f(a+h)}{f(a)}\right| \leqq |1 - r\rho^k| + \rho^k |b_{k+1} h + \ldots + b_n h^{n-k}|.$$

Līdz šīm $|h| = \rho$ bija nenoteikts. Tagad pieprasam, lai

$$r\rho^k < 1 \text{ un } |b_{k+1} h + \ldots + b_n h^{n-k}| < r$$

(sk. I. lemmu.) No šiem abiem $|h|$ ierobežojumiem paturam to, kas ietveŗ arī otru. Tad

$$\left|\frac{f(a+h)}{f(a)}\right| < 1 - r\rho^k + r\rho^k = 1, \text{ jeb } |f(a+h)| < |f(a)|.$$

Apzīmējot $a + h = a_1$, atrodam $|f(a_1)| < |f(a)|$, kas bija jāpierāda.

IV. lemma. Reāla nepārtraukta funkcija ar diviem mainīgiem noslēgtā apgabalā pieņem vismaz vienu reizi savu vismazāko vērtību šinī apgabalā.

Skaitļu plāksnē (x, y) dots noslēgts apgabals (A), un tajā definēta reāla nepārtraukta funkcija $v = F(x, y)$, kas (x, y, v) koordinātu sistēmā ģeometriski izteic nepārtrauktu virsu. Katram punktam (x, y) apgabalā (A) atbilst reāla un galīga v nozīme. Ir uzskatāmi skaidrs, ka apgabala (A) vienam punktam (x_1, y_1) uz virsas atbilst punkts ar vismazāko v nozīmi v_1.

Piezīme. Šīs lemmas stingru pierādījumu ir devis **Veierštrass** *(Weierstrass)*.

Algebras pamatteōrēma. Katram algebriskam vienādojumam ir vismaz viena reāla vai kompleksa sakne.

Dots polinoms $f(z)$ ar reāliem vai kompleksiem koeficientiem. Jāpierāda tādas argūmenta vērtības $z = z_1$ eksistence, kuŗai $|f(z_1)| = 0$ (tad arī $f(z_1) = 0$).

Liekam $z = x + iy$ funkcijā $f(z)$ un nodalām reālo un imāgināro daļu:

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\omega(x, y),$$

kur φ un ω ir reālas divu mainīgo funkcijas. Tad modulis

$$|f(z)| = +\sqrt{[\varphi(x, y)]^2 + [\omega(x, y)]^2} = F(x, y)$$

visām galīgām x, y nozīmēm ir nepārtraukta funkcija, kas pieņem tikai reālas un pozitīvas nozīmes. Pēc II. lemmas visiem punktiem z, kas atrodas ārpus riņķa ar radiju R un centru 0-punktā, ir $|f(z)| > E$. Tādēļ sakne (ja tāda eksistē) un arī visi punkti z ar $|f(z)| < E$ meklējami šī riņķa iekšpusē. Pēc IV. lemmas šinī riņķī atrodas punkts z_1, kuŗā $|f(z)|$ pieņem savu vismazāko nozīmi. Pēdējai jābūt nullei, jo pretējā gadījumā pēc Dalambēra lemmas varētu atrast tādu punktu z_2, ka

$|f(z_2)| < |f(z_1)| < E$. Tā tad arī z_2 atrastos riņķa (R) iekšpusē. Te ir pretruna $|f(z_1)|$ minimālās vērtības definīcijai. Atliek pieņemt, ka $|f(z_1)| = 0$, un teorēma pierādīta.

Piezīme. 18. gadu simtenī D a l a m b ē r a lemmu uzskatīja par līdzvērtīgu algebras pamatteorēmai, jo pēc tās var atrast tādas z nozīmes $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, ka $|f(z_1)| > |f(z_2)| > \ldots > |f(z_n)| > 0$, sastāda pozitīvu dilstošu skaitļu virkni. Varētu domāt, ka tādēļ eksistē tāds z_n, kam $|f(z_n)| = 0$. Šis slēdziens ir pārsteidzīgs, jo ne katra pozitīvu dilstošu skaitļu rinda tuvojas robežai 0, piem. rinda $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$

Pirmo stingro pierādījumu deva **Gauss** (1799. g.). Mūsu dienās ir jau vairāk kā 100 dažādu algebras pamatteorēmas pierādījumu.

Sekas. I. *Algebriskam n. pakāpes vienādojumam ir tieši n saknes.*

Ja n. pakāpes vienādojumam $f(z) = 0$ viena sakne ir z_1, tad $f(z) \mid (z - z_1)$ un $f(z) = (z - z_1) f_1(z)$, kur $f_1(z)$ ir $(n - 1)$. pakāpes polinoms. Vienādojumam $f_1(z) = 0$ arī ir vismaz viena sakne z_2. Tādēļ $f_1(z) = (z - z_2) f_2(z)$, kur $f_2(z)$ ir $(n - 2)$. pakāpes polinoms. Ja procesu atkārto n reiz līdz $f_{n-1}(z) = (z - z_n) f_n$, tad f_n ir pastāvīgs skaitlis un

$f(z) = f_n (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

Salīdzinot abās pusēs koeficientus pie z^n, dabūjam $f_n = a_0$. Tādēļ
$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$
t. i. — *katru n. pakāpes polinomu var sadalīt n lineāros reizinātājos.* No pēdējās formulas seko:
$$f(z_1) = f(z_2) = \ldots = f(z_n) = 0.$$
Tā tad $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tiešām ir vienādojuma $f(z) = 0$ saknes. To skaits ir tieši n, jo pieņemot, ka eksistē vēl kāda sakne $z = z_0$, dabū
$$f(z_0) = a_0 (z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \ldots (z_0 - z_n) = 0.$$
Bet reizinājums var būt nulle tikai tad, ja viens no reizinātājiem ir nulle. Tā tad kāds faktors, piem. $z_0 - z_k = 0$. Tas dod, ka $z_0 = z_k$, t. i. pieņemtā sakne z_0 neatšķiŗas no dotajām.

II. *Ja f(z) ir n. pakāpes polinoms un C patvaļīgs skaitlis, tad var atrast n dažādas vai vienādas z nozīmes, kuŗām f(z) = C.*

§ 16. Lagranža *(Lagrange)* interpolācijas formula.

Lietosim ērtības dēļ kā agrāk polinoma $f(x)$ kompleksam argūmentam apzīmējumu x.

Teōrēma. n. pakāpes polinoms $f(x)$ ir pilnīgi noteikts ar $n+1$ nozīmēm.

Ja argūmenta nozīmei $x = x_i$ funkcijas $f(x)$ nozīme ir $f(x_i) = y_i$, kur $i = 1, 2, \ldots, (n+1)$ un pieņemam

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

tad var sastādīt $n+1$ lineāru vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \ldots + a_n = y_1 \\ a_0 x_2^n + a_1 x_2^{n-1} + \ldots + a_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 x_{n+1}^n + a_1 x_{n+1}^{n-1} + \ldots + a_n = y_{n+1} \end{cases}$$

ar $n+1$ nezināmiem $a_0, a_1, \ldots a_n$. No šīs sistēmas visu nezināmo vērtības var aprēķināt.

Īsākā ceļā $f(x)$ atrod ar **interpolācijas formulām.**

Meklēsim vispirms polinomu $F_k(x)$, $(k \leqq n+1)$ ar tādu īpašību, ka

$$F_k(x_i) = 0, \text{ ja } i \neq k \text{ un } F_k(x_i) = y_k, \text{ ja } i = k,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Tad visi x_i, izņemot x_k, ir vienādojuma $F_k(x) = 0$ saknes. Tādēļ var izteikt

$$F_k(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)(x-x_{n+1}).$$

Konstante C jāizvēlas tā, lai būtu $F(x_k) = y_k$. To pieprasot, dabū

$$C = \frac{y_k}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n+1})}$$

un

$$F_k(x) = y_k \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n+1})} \quad (11)$$

Tagad var konstruēt polinomu $f(x)$, kas ar $n+1$ dotajām argūmenta nozīmēm $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ pieņem nozīmes $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2, \ldots, f(x_{n+1}) = y_{n+1}$. Pietiek izvēlēties

$$f(x) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} F_k(x),$$

kur visus polinomus $F_k(x)$ nosaka formula (11). Uzstādīto sakaru sauc par **Lagranža** interpolācijas formulu.

Ne mazāk vienkāršu problēmas atrisinājumu ir devis Ņutons *(Newton)* ar formulu

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_1) + A_2(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$. \quad . \quad . + A_n(x - x_1)(x - x_2) \, . \quad . \quad . (x - x_n),$$

kur koeficientus $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ atrod, liekot $x = x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$. Tad

$$f(x_1) = A_0, \; f(x_2) = A_0 + A_1(x_2 - x_1), \; f(x_3) = A_0 + A_1(x_3 - x_1) +$$
$$+ A_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \text{ u. t. t.}$$

Redzam, ka A_0 atkarīgs tikai no x_1, A_1 no x_1 un x_2, un vispārīgi A_k atkarīgs tikai no pirmajām $k + 1$ argūmenta un funkcijas nozīmēm.

Ja eksistētu **divas** n. pakāpes funkcijas $f(x)$ un $\varphi(x)$, kas ar $n + 1$ dažādām argūmenta nozīmēm $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ pieņem vienādas nozīmes, t. i. ja

$$f(x_i) = \varphi(x_i), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n + 1,$$

tad vienādojumam $F(x) = f(x) - \varphi(x) = 0$ būtu $n + 1$ saknes: $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, bet pakāpe $\leqq n$. Tas iespējams tikai tad, ja visi $F(x)$ koeficienti ir nulles. Tā tad polinomi $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir identiski.

Ar šo piezīmi ir saprotams, ka dažādas interpolācijas formulas izteic vienu un to pašu n. pakāpes polinomu $f(x)$.

§ 17. Vairākkārtējas saknes.

Ir iespējams, ka vienādojumam

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

ir vairākas vienādas saknes.

Ja $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = a$ un $f(x) = (x - a)^k f_1(x)$, kur $f_1(x)$ nedalās bez atlikuma ar $x - a$, tad saka, ka a ir d o t ā v i e n ā d o j u m a k - k ā r t ē j a s a k n e, r e s p. p o l i n o m a $f(x)$ k - k ā r t ē j a n u l l e. Saka arī: sakne, resp. nulle ir ar kārtu k.

Ja $f(x) = (x - a)_k f_1(x)$, tad pirmais atvasinājums ir

$$f'(x) = k(x - a)^{k-1} f_1(x) + (x - a)^k f'_1(x) = (x - a)^{k-1} f_2(x).$$

Te $f_2(x) = kf_1(x) + (x - a) f'_1(x)$ nedalās ar $x - a$, jo pēc norunas $f_1(x)$ ar to nedalās. Līdzīgā kārtā var diskutēt augstākos atvasinātos polinomus $f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ un pierādīt **teōrēmu I.**

J a a i r v i e n ā d o j u m a $f(x) = 0$ s a k n e a r k ā r t u k, t a d a i r a r ī v i e n ā d o j u m u

$$f'(x) = 0, \; f''(x) = 0, \; \ldots, \; f^{(k-1)}(x) = 0$$

sakne ar kārtu attiecīgi $k-1$, $k-2$, . . ., 1, bet nav par sakni vienādojumam

$$f^{(k)}(x)=0,$$

kur $f'(x)$, $f''(x)$, . . ., $f^{(k)}(x)$ ir dotā polinoma $f(x)$ atvasinājumi līdz kārtai k.

Otrādi: Ja $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$, bet $f^{(k)}(a) \neq 0$, tad a ir vienādojuma $f(x) = 0$ sakne ar kārtu k.

Tiešām, no Meklorena formulas seko:

$$f(x) = (x-a)^k g(x),$$

kur polinoms $g(x)$ nedalās ar $x-a$.

Teōrēma II. Lai vienādojumam $f(x) = 0$ būtu vairākkārtēja sakne, ir nepieciešami un pietiekoši, ka polinomiem $f(x)$ un $f'(x)$ būtu kopīgs dalītājs.

Ja vienādojumam $f(x) = 0$ ir k-kārtēja sakne a, tad $f(x) \mid (x-a)^k$ un $f'(x) \mid (x-a)^{k-1}$. Abiem polinomiem $f(x)$ un $f'(x)$ ir kopīgs dalītājs $(x-a)^{k-1}$.

Otrādi: Ja $f(x)$ un arī $f'(x)$ dalās ar $x-a$, tad a ir vismaz divkārtēja sakne vienādojumam $f(x) = 0$.

Izlietojot abas teōrēmas, konstruēsim **metodi vienādojuma vairākkārtējo sakņu izslēgšanai.** Ja izdara šo sakņu elimināciju, tad visas turpmākās algebras problēmas var attiecināt uz vienādojumiem, kas satur tikai vienkāršas saknes.

Apzīmējam dotā polinoma $f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n)$ visu vienkāršo faktoru reizinājumu ar X_1, divkārtējo ar X_2, u. t. t., visu k-kārtējo dažādo faktoru reizinājumu ar X_k. Tad ar racionālām darbībām var sastādīt funkciju tabulu:

$$\begin{array}{lll}
f(x) = X_1X_2^2X_3^3 \ldots\ldots X_k^k, & f'(x) = X_2X_3^2 \ldots X_k^{k-1}\,Y \\
D_1 = (f, f') = X_2X_3^2 \ldots\ldots X_k^{k-1}, & D'_1 = X_3X_4^2 \ldots X_k^{k-2}\,Z \\
D_2 = (D_1, D'_1) = X_3X_4^2 \ldots\ldots X_k^{k-2}, & D'_2 = X_4X_5^2 \ldots X_k^{k-3}\,U \\
D_3 = (D_2, D'_2) = X_4X_5^2 \ldots\ldots X_k^{k-3}, & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Šai tabulā Y, Z, U, . . . ir palīga funkcijas, un D ir augstākā kopīgā dalītāja simbols.

Ar dalījumiem

$$\frac{f}{D_1} = X_1 X_2 \,.\,.\, X_k = Q_1,\ \frac{D_1}{D_2} = X_2 X_3 \,.\,.\,.\, X_k = Q_2,$$

$$\frac{D_2}{D_3} = X_3 X_4 \ldots X_k = Q_3, \ldots \frac{D_{k-2}}{D_{k-1}} = X_{k-1} X_k = Q_{k-1},\ D_{k-1} = X_k = Q_k$$

sastāda jaunus dalījumus:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1,\ \frac{Q_2}{Q_3} = X_2, \,.\,.\,,\ \frac{Q_{k-1}}{Q_k} = X_{k-1},\ Q_k = X_k\,.$$

Tad vienādojumu

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0, \,.\,.\,.\,,\ X_k = 0$$

saknes ir attiecīgi dotā vienādojuma $f(x) = 0$ vienkāršās, divkārtējās, . . ., k-kārtējās saknes.

Uzdevumi.

1) Pierādīt, ka polinoms $(x + a + b)^{2n+1} - x^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}$ dalās ar $(x + a)(x + b)(a + b)$.

2) Noteikt koeficientus m, n tā, lai $x^4 + 3x^2 + mx + n$ dalītos ar $x^2 - 2mx + 2$.

3) Dalīt $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ ar $x - 1$ un aprēķināt $f(-2)$.

4) Vienādojuma $ax^5 + (b - ac)x^4 - bcx^3 - bx^2 - (a - bc)x + ac = 0$ divas saknes ir c un 1. Atrast pārējās saknes.

5) $f(x) = x^5 - x^3 + 1$ izvirzīt $(x + i)$ pakāpju rindā.

6) Noteikt, cikkārtēja sakne ir $x = i$ vienādojumam $x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$.

7) Noteikt vairākkārtējās saknes v-miem:

$$f_1(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0,$$

$$f_2(x) = x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = 0,$$

$$f_3(x) = 8x^4 + 20x^3 + 18x^2 + 7x + 1 = 0.$$

Attēlot grafiski polinomus $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$.

8) Kādiem jābūt p un q, lai vienādojumam $x^3 + px + q = 0$ visas trīs saknes būtu vienādas?

9) Kad vienādojumam $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ ir trīskārtēja sakne?

10) Vienādojumam $x^5 + ax^4 + 2x^3 + 1 = 0$ ir viena divkārtēja sakne; atrast koeficientu a.

11) Noteikt zemākās pakāpes polinomu $f(x)$, kam $f(0) = 4$, $f(i) = f(-i) = f(1) = f(-1) = 5$, un aprēķināt tās argūmenta nozīmes x, kuŗām $f(x) = 0$.

II. Simmetriskās funkcijas.

§ 18. Homogenās un elementārās simmetriskās funkcijas.

Plašākā nozīmē vesela racionāla funkcija jeb polinoms ar vairāk mainīgiem ir funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kuŗas argūmenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ savā starpā ir saistīti tikai ar trim aritmētiskām darbībām: saskaitīšanu, atņemšanu un reizināšanu (kāpināšanu veselā pozitīvā pakāpē). Citādi: polinoms ir summa no galīga skaita locekļiem, kuŗu vispārīgais veids ir

$$A x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

ar veseliem pozitīviem kāpinātājiem k_i. Par tāda locekļa **dīmensiju** sauc visu argūmentu kāpinātāju summu $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Ja polinoma locekļiem ir dažādas dīmensijas, tad augstāko no tām sauc par p o l i n o m a p a k ā p i. Ja visu locekļu dīmensijas ir vienādas, tad polinoms ir h o m o g e n s.

Divas vai vairāk funkcijas

$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sauc par **racionāli atkarīgām** tad, ja no tām var sastādīt veselu racionālu funkciju $F(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, kas identiski vienlīdzīga nullei. Piemēram, funkcijas $f_1 = x_1 + x_2$, $f_2 = x_1 x_2$, $f_3 = x_1^2 + x_2^2$ ir racionāli atkarīgas, jo $f_1^2 - 2f_2 - f_3 = 0$.

Funkciju $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sauc par **simmetrisku,** ja $n \geqslant 2$ un ja no jebkuŗu divu argūmentu savstarpējas apmaiņas funkcija savu vērtību nemaina. Tādas funkcijas piemērs varētu būt arī $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + \sin(x_1 + x_2 + x_3)$. Bet mēs apskatīsim tikai racionālas simmetriskas funkcijas, kuŗām pa lielākai daļai argūmenti būs kāda vienādojuma saknes.

Ja simmetriskā polinomā ir loceklis $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, tad tajā ir arī simmetriskā summa $A \sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, kuŗā $k_1, k_2, \ldots, k_n$ visos iespējamos veidos pārmainās vietām. Tādu summu $\sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ sauc par **vienveidīgu homogenu** simmetrisku funkciju. Nav grūti saprast, ka k a t r s s i m m e t r i s k s p o l i n o m s a r p a k ā p i m s a d a l ā m s g a l ī g a s k a i t a t ā d u v i e n v e i d ī g u h o m o g e n u f u n k c i j u s u m m ā, k u ŗ u p a k ā p e s $\leqslant m$

Piemērs.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 +$$
$$+ x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 - 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 = \sum x_1^4 + \sum x_1^2 x_2 - 4\sum x_1.$$

Vienkāršākās simmetriskās funkcijas ir tās, kuŗās katrs argūments ir tikai pirmajā pakāpē. Tādas funkcijas apzīmē ar

$$a_1 = -\sum x_1 \quad = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$
$$a_2 = \quad \sum x_1 x_2 \quad = \quad (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n)$$
$$a_3 = -\sum x_1 x_2 x_3 = -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

un sauc par argūmentu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **elementārām simmetriskām funkcijām.**

Teōrēma I. Ja vienādojuma augstākā locekļa koeficients $a_0 = 1$ (ar dalīšanu to vienmēr var panākt), tad tā pārējo locekļu koeficienti ir sakņu elementārās simmetriskās funkcijas.

Tiešām, ja vienādojuma $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ saknes ir $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tad vienādojums uzrakstāms arī formā $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = 0$. Atveŗot iekavas un salīdzinot koeficientus pie x vienādām pakāpēm, dabūjam **Vjeta** ***(Viète)*** **formulas** (1591. g.):

$$-\sum x_1 = a_1, \; \sum x_1 x_2 = a_2, \; \ldots, \; (-1)^k \sum x_1 x_2 \ldots x_k = a_k,$$
$$\ldots, \; (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n = a_n \qquad (12)$$

Teōrēma II. Elementārās simmetriskās funkcijas ir racionāli neatkarīgas.

Ja pieņemtu pretējo, tad eksistētu vesela racionāla funkcija $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, kas top par nulli visām $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nozīmēm, kad z_1 vietā liek
$a_1 = -\sum x_1$, z_2 vietā $a_2 = \sum x_1 x_2, \ldots, z_n$ vietā $a_n = (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n$. Izvēlamies visiem z patvaļīgas nozīmes $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2, \ldots$, $z_{n-1} = b_{n-1}$, izņemot vienu, piem. z_n. Ņemam tādu z_n, lai $F(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, z_n) \neq 0$. Tas iespējams bezgala daudz veidos, jo formula $F(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, z_n) = 0$ attiecībā uz z_n ir vienādojums, kam ir tikai galīgs sakņu skaits. Par z_n var ņemt skaitli b_n, kas nav šī vienādojuma sakne. Tagad mums ir skaitļi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tādi, ka $F(b_1, b_2, \ldots, b_n) \neq 0$. Varam atrast tādus skaitļus $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kam $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ir elementārās simmetriskās funkcijas (šie x_i ir vienādojuma

$x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$ saknes). Ar šīm x nozīmēm $F \neq 0$, bet tā ir pretruna ar funkcijas $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ definīciju. Tā tad elementārās simmetriskās funkcijas ir racionāli neatkarīgas.

§ 19. Ņutona formulas.

Apskatīsim vienādojuma $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ sakņu simmetriskās **pakāpju summas:**

$$s_1 = x_1 + x_3 + \ldots + x_n,$$

$$s_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \ldots, s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k,$$

un izteiksim tās ar elementārām simmetriskām funkcijām.

Sastādīsim polinoma

$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ atvasinājumu $f'(x)$ ar divām dažādām izteiksmēm. No vienas puses ir

$$f'(x) = (x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \ldots + (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

jeb

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{f(x)}{x-x_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x-x_n}.$$

Te izteiksmes $\frac{f(x)}{x-x_1}$ vietā varam rakstīt arī $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$, jo $f(x_1) = 0$. Liekot $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $f(x_1) = x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \ldots + a_n$ un pārveidojot, dabūsim

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = \frac{x^n - x_1^n}{x-x_1} + a_1 \frac{x^{n-1} - x_1^{n-1}}{x-x_1} + \ldots + a_{n-1} \frac{x-x_1}{x-x_1}$$

jeb

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^{n-1} + (x_1 + a_1) x^{n-2} + (x_1^2 + a_1 x_1 + a_2) x^{n-3} + \ldots + (x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}).$$

Tādā pat kārtā atrod

$$\frac{f(x)}{x-x_2} = x^{n-1} + (x_2 + a_1) x^{n-2} + (x_2^2 + a_1 x_2 + a_2) x^{n-3} + \ldots + (x_2^{n-1} + a_1 x_2^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$$

. . . .

. . . .

$$\frac{f(x)}{x-x_n} = x^{n-1} + (x_n + a_1) x^{n-2} + (x^2_n + a_1 x_n + a_2) x^{n-3} + \ldots + (x_n^{n-1} + a_1 x_n^{n-2} + \ldots + a_{n-1}).$$

Saskaitot dabūtās izteiksmes, sastāda

$$f'(x) = nx^{n-1} + (s_1 + na_1)\,x^{n-2} + (s_2 + a_1 s_1 + na_2)\,x^{n-3} + \ldots +$$
$$+ (s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + \ldots + na_{n-1}).$$

No otras puses izteic

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)\,a_1 x^{n-2} + (n-2)\,a_2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}.$$

Salīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm, dabūsim **Ņūtona formulas** [tās gan pirmais atradis beļģis Žirārs *(Girard)* 1629. g.]:

$$\begin{aligned} s_1 + a_1 &= 0 \\ s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 &= 0 \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ s_k + a_1 s_{k-1} + \ldots + a_{k-1} s_1 + ka_k &= 0, \end{aligned} \qquad (13)$$

ja $1 \leqslant k \leqslant n-1$. No šīm formulām pakāpeniski izteicamas summas $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{n-1}$ ar koeficientiem $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Augstāku (vai arī negātīvu kāpinātāju) pakāpju summas aprēķina, saskaitot formulas

$$x_1^h f(x_1) = 0,\ x_2^h f(x_2) = 0, \ldots, x_n^h f(x_2) = 0.$$

Apzīmējot $n+h$ ar k, dabūsim vispārīgo Ņutona formulu

$$s_k + a_1 s_{k-1} + a_2 s_{k-2} + \ldots + a_n s_{k-n} = 0,$$

kuŗā k ir patvaļīgs.

Arī pirmajā formulā (13) var ierobežojumu par k atcelt, liekot visus $a_k = 0$, ja $k > n$. Tad pirmā formula kļūst identiska ar otro.

Piemērs. Ja $k = 1, 2, 3, 4$, tad Ņutona formulās

$$s_1 = -a_1,\ s_2 = a_1^2 - 2a_2,\ s_3 = -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3,$$
$$s_4 = a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4. \qquad (14)$$

§ 20. Pamatteōrēma par simmetriskām funkcijām.

Ikkatra vesela racionāla simmetriska funkcija izteicama viennozīmīgi ar elementārām simmetriskām funkcijām, izlietojot tikai saskaitīšanas, atņemšanas un reizināšanas darbības. Citiem vārdiem, vienādojuma sakņu ikkatra vesela racionāla simmetriska funkcija ir arī vienādojuma koeficientu vesela racionālā funkcija.

Teōrēmas ideju devis Uorings *(E. Waring)* 1762. gadā, bet to pirmais pierādījis **Gauss** (1816. g.). Mēs apskatīsim **Gausa** un **Košī** pierādījumus.

I. Gausa pierādījums.

Pietiek, ka teōrēmu pierādām homogenai simmetriskai funkcijai $\sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, jo ikkatra cita simmetriska funkcija ir sadalāma tādu funkciju summā.

Ievedīsim jēdzienu par locekļa $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ augstumu ar kāpinātāju skaitļu virkni $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Ja $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ ir funkcijas augstākais loceklis, tad $k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_n$. Sakārtosim visus simmetriskās funkcijas locekļus tā, lai no diviem locekļiem augstākais būtu tas, kam pirmais kāpinātājs lielāks, bet pie vienādiem pirmajiem kāpinātājiem augstāks tas loceklis, kam otrais kāpinātājs lielāks u. t. t. (leksikografiskais princips).

Piemērs. $f(x_1, x_2, x_3) = \sum x_1^2 x_2 = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$ ir homogena simmetriska funkcija, sakārtota pēc locekļu augstuma.

Lemma. Divu simmetrisku funkciju reizinājums ir arī simmetriska funkcija, un tās augstākais loceklis ir abu doto funkciju augstāko locekļu reizinājums.

Apzīmējam ar

$$f = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} + \ldots + x_1^{k'_1} x_2^{k'_2} \ldots x_n^{k'_n} + \ldots\ldots$$

un $\varphi = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n} + \ldots + x_1^{h'_1} x_2^{h'_2} \ldots x_n^{h'_n} + \ldots\ldots$

divas sakārtotas simmetriskas funkcijas. Tad ir izpildīts viens no nosacījumiem:

$$k_1 > k'_1 \text{ vai } k_1 = k'_1,\; k_2 > k'_2;$$

vai $k_1 = k'_1,\; k_2 = k'_2,\; k_3 > k'_3$ u. t. t.,

un tāpat viens no nosacījumiem:

$h'_1 > h_1$ vai $h_1 = h'_1$, $h_2 > h'_2$; vai $h_1 = h'_1$, $h_2 = h'_2$, $h_3 > h'_3, \ldots$

Katrā gadījumā f un φ pirmo locekļu reizinājums $x_1^{k_1+h_1} x_2^{k_2+h_2} \ldots x_n^{k_n+h_n}$ iznāk augstāks par katru citu divu locekļu reizinājumu $x_1^{k'_1+h'_1} x_2^{k'_2+h'_2} \ldots x_n^{k'_n+h'_n}$, ar ko lemma pierādīta.

Tas pats sakāms par triju un vairāku simmetrisku funkciju reizinājumu.

Tagad atpakaļ pie pamatteōrēmas pierādījuma! Pieņemam, ka $f = \sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ ir dotā simmetriskā funkcija. Mēģināsim sastādīt tādu elementāro simmetrisko funkciju reizinājumu g, kuŗa augstākais loceklis vienāds ar dotās funkcijas augstāko locekli. Ja tas izdosies, tad $f - g = f_1$ arī būs simmetriska funkcija, bet tās augstākais loceklis zemāks par f augstāko locekli. Procesu varēsim turpināt: $f_1 - g_1 = f_2$, $f_2 - g_2 = f_3, \ldots$, līdz beidzot dabūsim rezultātu $f_k - g_k = 0$, jo funkcijas f locekļu skaits ir galīgs. Tad būs

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g + g_1 + \ldots + g_k = F(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

un teōrēma pierādīta.

Mums tikai atliek noskaidrot funkcijas g iespējamību. Pieņemsim

$$\pm g = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n} =$$

$$= (-\sum x_1)^{\lambda_1} (\sum x_1 x_2)^{\lambda_2} (-\sum x_1 x_2 x_3)^{\lambda_3} \ldots (\pm x_1 x_2 \ldots x_n)^{\lambda_n},$$

kur kāpinātāji $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pagaidām nenoteikti. Funkcijas g augstākais loceklis, neskaitot zīmi $+$ vai $-$, ir

$$x_1^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} x_2^{\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n} x_3^{\lambda_3 + \lambda_4 + \ldots + \lambda_n} \ldots x_n^{\lambda_n},$$

bet funkcijas f augstākais loceklis ir

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \ldots x_n^{k_n}.$$

Ja izvēlas $\lambda_1 = k_1 - k_2$, $\lambda_2 = k_2 - k_3, \ldots, \lambda_n = k_n$ (visi $\lambda \geqslant 0$, jo $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots$) un funkcijai g piemērotu zīmi, tad f un g augstākie locekļi tiešām kļūst vienādi.

Piemērs. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum x_1^2 x_2^2$.

Te $k_1 = k_2 = 2$, $k_3 = k_4 \ldots = k_n = 0$,

Tādēļ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \ldots = \lambda_n = 0$,

un $g = a_2^2 = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \ldots)^2 = \sum x_1^2 x_2^2 +$

$$+ 2 \sum x_1^2 x_2 x_3 + 2 \sum (x_1 x_2 \cdot x_3 x_4 + x_1 x_3 \cdot x_2 x_4 + x_1 x_4 \cdot x_2 x_3)$$

jeb $$g = \sum x_1^2 x_2^2 + 2 \sum x_1^2 x_2 x_3 + 6 \sum x_1 x_2 x_3 x_4$$

Tā tad $f_1 = f - g = -2 \sum x_1^2 x_2 x_3 - 6 \sum x_1 x_2 x_3 x_4$.

Bet f_1 augstākajam loceklim $-2x_1^2 x_2 x_3$ ir

$$k_1 = 2,\ k_2 = k_3 = 1, \text{ pārējie } k = 0.$$

Tādēļ

$$g_1 = -2a_1 a_3 = -2(x_1 + x_2 + \ldots)(x_1 x_2 x_3 + \ldots) =$$

$$= -2 \sum (x_1^2 x_2 x_3 + x_1 \cdot x_2 x_3 x_4 + x_2 \cdot x_1 x_3 x_4 + x_3 \cdot x_1 x_2 x_4 +$$

$$+ x_4 \cdot x_1 x_2 x_3) = -2 \sum x_1^2 x_2 x_3 - 8 \sum x_1 x_2 x_3 x_4,$$

un $f_2 = f_1 - g_1 = 2 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 = 2a_4$.

Tā tad $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum x_1^2 x_2^2 = a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4$.

II. Košī pierādījums.

Vispirms pierādīsim sekojošu **lemmu**: ja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir n argūmentu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementārās simmetriskās funkcijas, tad $n-1$ argūmentu $x_2, x_3, \ldots, x_n$ elementārās simmetriskās funkcijas ir

$x_1 + a_1,\ x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \ldots, x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$.

Pierādījums. Polinoms $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ dalās bez atlikuma ar $x - x_1$. No Hornera schēmas

	1	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
x_1	$1,$	$x_1 + a_1,$	$x_1^2 + a_1 x_1 + a_2,$	$\ldots,$	$x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1},$	$f(x_1) = 0$

atrodam, ka dalījumā ir polinoms

$$f_1 = x^{n-1} + (x_1 + a_1)\, x^{n-2} + (x_1^2 + a_1 x_1 + a_2)\, x^{n-3} + \ldots + (x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}),$$

kam koeficienti ir prasītās elementārās simmetriskās funkcijas.

Pamatteōrēmas pierādījumā Košī izlieto matēmatisko indukciju.

Pierādīsim, ka teōrēma pareiza diviem argūmentiem x_1, x_2. Te $-a_1 = x_1 + x_2$ un $a_2 = x_1 x_2$. Dotā simmetriskā funkcijā

$$F(x_1, x_2) = F(x_1, -a_1 - x_1) = A_0 x_1^k + A_1 x_1^{k-1} + \ldots + A_k$$

jeb

$$F(x_1, x_2) = \Phi(x_1)$$

koeficienti $A_0, A_1, \ldots, A_k$ ir lieluma a_1 funkcijas.

Dalām $\Phi(x)$ ar $f(x) = x^2 + a_1 x + a_2$. Tad atlikums ir lineāra x funkcija $Px + Q$, kuŗas koeficienti P, Q sastādās no a_1, a_2 ar pirmajām trim aritmētiskām darbībām.

Tā kā $\Phi(x) = f(x) \cdot \varphi(x) + (Px + Q)$ un $f(x_1) = f(x_2) = 0$, tad

$$F(x_1, x_2) = \Phi(x_1) = Px_1 + Q.$$

Simmetrijas dēļ arī

$$F(x_1, x_2) = F(x_2, x_1) = F(x_2, -a_1 - x_2) = Px_2 + Q.$$

Tādēļ $Px_1 + Q = Px_2 + Q$ vai $P(x_1 - x_2) = 0$. Tā kā vispārīgā gadījumā $x_1 \neq x_2$, tad $P = 0$ un

$$F(x_1, x_2) = Q(a_1, a_2).$$

Pieņemot, ka teorēma pareiza arī 3, 4, ..., $n-1$ argūmentiem $x_2, x_3, \ldots x_n$, sakārtosim n argūmentu simmetrisko funkciju $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pēc x_1 dilstošām pakāpēm:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_0 x_1^k + A_1 x_1^{k-1} + \ldots + A_k.$$

Tad koeficienti $A_0, A_1, \ldots, A_k$ ir simmetriskas $n-1$ argūmentu $x_2, x_3, \ldots, x_n$ funkcijas, kas pēc pieņēmuma ir veselas racionālās funkcijas no argūmentu $x_2, x_3, \ldots, x_n$ elementārām simmetriskām funkcijām. Uz lemmas pamata pēdējās var izteikt ar: $(x_1 + a_1)$, $(x_1^2 + a_1 x_1 + a_2)$, $\ldots$, $(x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$. Tā tad $A_0, A_1, \ldots, A_k$ var uztvert arī kā funkcijas no x_1, un polinomu F var arī sakārtot pēc x_1 pakāpēm

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = B_0 x_1^m + B_1 x_1^{m-1} + \ldots + B_m = \Phi(x_1).$$

tā, ka visi koeficienti „B" ir veselas racionālas $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ funkcijas. Ja nu dalām $\Phi(x)$ ar $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, tad atlikums var būt tikai $(n-1)$. pakāpes polinoms

$$C_0 x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1},$$

kuŗa koeficienti „C" ir veselas racionālas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ funkcijas.

Ja identitātē

$$\Phi(x) = f(x) \cdot \varphi(x) + C_0 x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}$$

liek $x = x_1$ un ievēro, ka $f(x_1) = 0$, tad atrod

$$\Phi(x_1) = F(x_1, x_2, \ldots x_n) = C_0 x_1^{n-1} + C_1 x_1^{n-2} + \ldots + C_{n-1}.$$

Bet tā kā $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ir simmetriska funkcija, tad x_1 vietā var likt arī $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Tad vienādojumam

$$C_0 x^{n-1} + C_1 x^{n-2} + \ldots + (C_{n-1} - F) = 0$$

ir n saknes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bet pakāpe tikai $n - 1$. Tas var būt iespājams tikai tad, ja visu vienādojuma locekļu koeficienti ir nulles. Starp citu arī $C_{n-1} - F = 0$, t. i.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}.$$

Bet C_{n-1} ir elementāro simmetrisko funkciju polinoms, tādēļ teōrēma pierādīta.

Piemērs. $F(x_1, x_2, x_3) = \sum x_1^2 x_2 = x_1^2(x_2 + x_3) +$
$$+ x_1(x_2^2 + x_3^2) + x_2 x_3 (x_2 + x_3).$$

Argūmentu x_2, x_3 elementārās simmetriskās funkcijas ir $x_1 + a_1$, $x_1^2 + a_1 x_1 + a_2$.

Te $x_2 + x_3 = -(x_1 + a_1)$, $x_2^2 + x_3^2 = (x_2 + x_3)^2 - 2x_2 x_3 =$
$$= (x_1 + a_1)^2 - 2(x_1^2 + a_1 x_1 + a_2), \quad x_2 x_3 = x_1^2 + a_1 x_1 + a_2.$$

Tādēļ $F(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^3 - 3a_1 x_1^2 - 3a_2 x_1 - a_1 a_2$.

Ja pieskaitām te klāt $3f(x_1) = 0 = 3(x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3)$, tad atrodam

$$F(x_1, x_2, x_3) = 3a_3 - a_1 a_2.$$

Simmetriskām funkcijām pamatteōrēmas pirmā puse ir pierādīta. Vēl atlicis **jautājums par viennozīmību.**

Ja kāda simmetriska funkcija f būtu izteicama divos veidos, ar elementārām simmetriskām funkcijām, t. i.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

un
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_2(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

tad būtu

$$F_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) - F_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \text{ t. i. } F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,$$

kas ir pretruna, jo esam pierādījuši, ka elementārās simmetriskās funkcijas ir racionāli neatkarīgas.

Pamatteorēmas vispārinājumam vajadzīga **lemma:**

Katra racionāla simmetriska funkcija ir izteicama ar divu veselu racionālu simmetrisku funkciju dalījumu.

Racionālu simmetrisku funkciju $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ var izteikt daļas formā

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Ja f_1 un g_1 atsevišķi nav simmetriskas funkcijas, tad izdarām visas iespējamas permūtācijas ar $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Izlietojot vairāku vienādu attiecību īpašību:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_k}{b_k} = \ldots = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots}{b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots},$$

atrodam no

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} =$$

$$= \frac{f_1(x_2, x_1, \ldots, x_n)}{g_1(x_2, x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{f_1(x_n, \ldots, x_2, x_1)}{g_1(x_n, \ldots, x_2, x_1)}$$

formulu

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f_1(x_1, \ldots, x_n) + f_1(x_2, \ldots, x_n) + \ldots + f_1(x_n, \ldots, x_1)}{g_1(x_1, \ldots, x_n) + g_1(x_2, \ldots, x_n) + \ldots + g_1(x_n, \ldots, x_1)}.$$

Apzīmējot daļas skaitītāju ar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un saucēju ar $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dabūjam veselas racionālas simmetriskas funkcijas f un g. Tādēļ

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Tagad saprotams **pamatteorēmas vispārinājums:** Katra racionāla simmetriska daļa ir elementāru simmetrisku funkciju racionāla funkcija.

§ 21. Izobāras funkcijas.

Visu indeku summu funkcijas $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kādā loceklī sauc par šī l o c e k ļ a s v a r u. Piem. locekļa $a_1 a_2^2 = a_1 a_2 a_2$ svars ir $1 + 2 + 2 = 5$. Ja funkcijas F visiem locekļiem ir viens un tas pats svars **k**, tad F sauc par **izobāru funkciju** ar svaru k.

Teōrēma I. *(A. Cayley,* 1853. g. p i e r ā d ī j i s *Faà de Bruno)*. H o m o g e n a s i m m e t r i s k a f u n k c i j a $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i r i z t e i c a m a a r a r g ū m e n t u $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i z o b ā r u f u n k c i j u, k u ŗ a s s v a r s v i e n ā d s a r p i r m ā s f u n k c i j a s d ī m e n s i j u.

Homogenai simmetriskai funkcijai $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ ir dīmensija $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Tāda pat dīmensija būs arī funkcijai $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1^{k_1 - k_2} a_2^{k_2 - k_3} \ldots a_n^{k_n}$, kas lietota iepriekšējās (§ 20) pamatteōrēmas G a u s a pierādījumā.

Tiešām,

$$
\begin{array}{lll}
a_1^{k_1 - k_2} = (-\sum x_1)^{k_1 - k_2} & \text{dīmensija ir} & k_1 - k_2, \\
a_2^{k_2 - k_3} = (\sum x_1 x_2)^{k_2 - k_3} & \text{,,} \quad \text{,,} & 2(k_2 - k_3), \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots \\
a_n^{k_n} = (\pm x_1 x_2 \ldots x_n)^{k_n} & \text{,,} \quad \text{,,} & n k_n
\end{array}
$$

un katra funkcijas $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ locekļa dīmensija ir

$$
k_1 - k_2 + 2(k_2 - k_3) + 3(k_3 - k_4) + \ldots + \\
+ (n-1)(k_{n-1} - k_n) + nk_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k.
$$

Arī visas funkcijas $f_1 = f - g, g_1, f_2, g_2, \ldots$, kas minētas G a u s a pierādījumā, ir homogenas funkcijas ar dīmensiju k.

Tagad noteiksim funkcijai $g = a_1^{k_1 - k_2} a_2^{k_2 - k_3} \ldots a_n^{k_n}$ s v a r u

$$
1 . (k_1 - k_2) + 2(k_2 - k_3) + \ldots + \\
+ (n-1)(k_{n-1} - k_n) + nk_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k.
$$

Šīs funkcijas g svars ir tāds pats kā funkcijas f dīmensija. Tā kā visām funkcijām $f, f_1, f_2, \ldots$ ir viena un tā pati dīmensija k, tad arī visām funkcijām $g, g_1, g_2, \ldots$ ir tas pats svars k. Tādēļ $g + g_1 + g_2 + \ldots = F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ir izobāra funkcija ar svaru k.

Teōrēma II. H o m o g e n a s i m m e t r i s k a f u n k c i j a $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a r a u g s t ā k o l o c e k l i $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, kur $k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_n$, i r i z t e i c a m a a r n e h o m o g e n u e l ementāru simmetrisku funkciju polinomu $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kam pakāpe ir k_1.

Funkcijas $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ augstākais loceklis ir $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, un $g = a_1^{k_1 - k_2} a_2^{k_2 - k_3} \ldots a_n^{k_n}$ dīmensija ir

$$k_1 - k_2 + k_2 - k_3 + \ldots + k_{n-1} - k_n + k_n = k_1.$$

Ja $f_1 = f - g$ augstākais loceklis ir $x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n}$, tad g_1 dīmensija ir h_1, u. t. t. Bet f_1 augstākais loceklis ir zemāks par f augstāko locekli, tādēļ $h_1 \leqq k_1$. Tāpat tālāk ejot, top saprotams, ka funkcijas $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = g + g_1 + g_2 + \ldots$ pakāpi nosaka pirmā locekļa g dīmensija k_1, jo visu pārējo locekļu $g_1, g_2, \ldots$ dīmensijas $\leqq k_1$.

Abām pēdējām teōrēmām dosim vēl **otru pierādījumu.**

Pieņemsim, ka $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ ir homogena simmetriska funkcija ar dīmensiju $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, ka $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_1, a_2, \ldots a_n)$ un polinoma $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kautkurš loceklis ir $a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n}$ ar svaru

$$1 h_1 + 2 h_2 + \ldots + n h_n.$$

Tad var izteikt vispārīgo locekli ar

$$a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n} = (-\sum x_1)^{h_1} (\sum x_1 x_2)^{h_2} \ldots (\pm \sum x_1 x_2 \ldots x_n)^{h_n}.$$

Formulas labā puse ir dotās homogenās simmetriskās funkcijas sastāvdaļa. Tādēļ dīmensijām

$$1 h_1 + 2 h_2 + \ldots + n h_n \quad \text{un} \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

jābūt vienlīdzīgām, ar ko I. teōrēma pierādīta.

Attiecībā uz argūmentu x_1 katra elementāra simmetriska funkcija a_k ir lineāra funkcija:

$$a_k = A_k x_1 + B_k.$$

Tādēļ

$$a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n} = (A_1 x_1 + B_1)^{h_1} (A_2 x_1 + B_2)^{h_2} \ldots (A_n x_1 + B_n)^{h_n}.$$

Polinomā F var atrasties tikai tādi locekļi $a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n}$, kuŗos x_1 pakāpe $h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ ir k_1 vai $k_2, \ldots$ vai k_n. Bet $h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ ir reizē arī locekļa $a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n}$ dīmensija. Ar to arī II. teōrēma pierādīta.

Piemēri. 1. $\sum x_1^2 x_2^2$ ir otrās pakāpes izobārs elementāro simmetrisko funkciju polinoms ar svaru 4.

Tādēļ $\sum x_1^2 x_2^2 = A a_2^2 + B a_1 a_3 + + C a_4$,

kur A, B, C pagaidām nezināmi koeficienti. To atrašanai uzrakstītā formulā liksim patvaļīgas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nozīmes. Tas ir atļauts, jo formula ir identitāte ar neatkarīgajiem argūmentiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Izvēlas: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$. Tad $a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 0$ un $1 = A.1$. Tā tad $A = 1$.

Ar $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = \ldots = x_n = 0$ atrod: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 0$, $\sum x_1^2 x_2^2 = 3 = 1 - B$, un $B = -2$.

Beidzot liekam $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$, $x_5 = x_6 = \ldots = x_n = 0$ Tad $a_1 = 0$, $a_2 = -2$, $a_4 = 1$; $\sum x_1^2 x_2^2 = 6 = 4 + C$, $C = 2$ un
$$\sum x_1^2 x_2^2 = a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4$$

2. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2$ ir trešās pakāpes vienādojuma $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ saknu simmetriska homogena funkcija ar dīmensiju 6 un augstāko locekli $x_1^4 x_2^2$. Izteicot to ar vienādojuma koeficientiem, dabū izobāru 4. pakāpes polinomu ar svaru 6. Tā tad tas var saturēt tādus locekļus $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a_3^{\lambda_3}$ ar veseliem pozitīviem λ, kam
$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 6 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqq 4 \end{cases}$$

Ir iespējamas šādas λ nozīmes, kas sarakstītas tabulā:

λ_3	2	1	1	0	0
λ_2	0	1	0	3	2
λ_1	0	1	3	0	2

Tādēļ
$$f(x_1, x_2, x_3) = Aa_1^3 a_3 + Ba_1^2 a_2^2 + Ca_1 a_2 a_3 + Da_2^3 + Ea_3^2.$$

Koeficientu A, B, . . ., E atrašanai izvēlēsimies x_1, x_2, x_3 tās nozīmes, kas uzrakstītas tabulas kreisajā pusē:

1) $1, -1, 0$;	$a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = -1$, $f = 4$; $4 = -D$,	$D = -4$
2) $1, 1, 0$;	$a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $f = 0$; $0 = 4B - 4$,	$B = 1$
3) $1, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$;	$a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $f = -27$; $-27 = E$,	$E = -27$
4) $2, 2, -1$;	$a_1 = -3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 4$, $f = 0$; $0 = -4.27A - 27.16$,	$A = -4$
5) $1, 1, 1$;	$a_1 = -3$, $a_2 = 3$, $a_3 = -1$, $f = 0$; $0 = -4.27 + 9.9 + 9C - 4.27 - 27$,	$C = 18$

Tā tad
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_1 - x_3)^2 =$$
$$= -4a_1^3 a_3 + a_1^2 a_2^2 + 18a_1 a_2 a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

§ 22. Rezultante.

Ja diviem vienādojumiem

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

un

$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m = 0$$

r kopīga sakne, tad to koeficientus saista kāds sakars

$$R(a_0, \ldots, a_n; b_0, \ldots, b_m) = 0,$$

kuŗu sauc par abu **vienādojumu rezultanti.** Funkcija

$$R(a_0, \ldots, a_n; b_0, \ldots, b_m)$$

ir abu **polinomu** $f(x)$ un $g(x)$ **rezultante,** ko apzīmē ar $R(f, g)$.

Parastais ceļš rezultantes atrašanai ir x **izslēgšana (eliminācija)** no vienādojumiem $f(x) = 0$ un $g(x) = 0$. Ja viens no polinomiem ir pirmās pakāpes, tad eliminācija izdarāma vienkārši.

Teōrētiskā ziņā x izslēgšanai vienkāršākā ir **simmetrisko funkciju metode** (praktiski tā gandrīz nelietojama).

Ar vienādojuma $f(x) = 0$ saknēm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ izteic

$$f(x) = a_0 (x - x_1) \ldots (x - x_n) = 0.$$

Ja vienādojuma $g(x) = 0$ saknes ir $y_1, y_2, \ldots, y_m$, tad vismaz viena no tām ir arī vienādojuma $f(x) = 0$ sakne. Tādēļ ir sakars

$$b_0^n . f. (y_1) . f(y_2) \ldots f(y_m) = 0$$

vai

$$a_0^m b_0^n (y_1 - x_1)(y_1 - x_2) \ldots (y_1 - x_n)(y_2 - x_1)(y_2 - x_2) \ldots$$
$$\ldots (y_m - x_1)(y_m - x_2) \ldots (y_m - x_n) = 0.$$

To īsi pieraksta

$$a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (y_i - x_j) = 0$$

ar reizinājuma simbolu Π.

Uzrakstītais reizinājums ir tiklab sakņu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kā arī sakņu $y_1, y_2, \ldots, y_m$ homogena simmetriska funkcija ar dimensiju **m n.** Tādēļ tas izteicams ar izobāru funkclju no $f(x)$ un $g(x)$ koeficientiem. Šis funkcijas svars ir arī m n.

P r a k t i s k i ē r t ā k a i r **metode,** ko publicējis **Silvesters** *(Sylvester)* 1840. gadā un kas ir pazīstama ar nosaukumu **dialitiskā izslēgšanas metode** (neatkarīgi no S i l v e s t r a to publicēja arī H e s s e 1844. gadā).

Ja vienādojumu $f(x) = 0$ un $g(x) = 0$ kopīgā sakne ir x_1, tad formulas

$$f(x_1) = 0,\ x_1 f(x_1) = 0,\ x_1^2 f(x_1) = 0,\ \ldots,\ x_1^{m-1} f(x_1) = 0$$
$$g(x_1) = 0,\ x_1 g(x_1) = 0\ \ x_1^2 g(x_1) = 0,\ \ldots,\ x_1^{n-1} g(x_1) = 0$$

varam uzskatīt par $m+n$ līneāru homogenu vienādojumu sistēmu, kuŗas $m+n$ nezināmie $1, x_1, x_1^2, \ldots, x_1^{m+n-1}$ visi nav nulles. Tādēļ sistēmas determinantam D jābūt nullei, t. i.

$$D = \left|\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n & 0\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_m & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_m \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \end{array} = 0$$

Ar to rezultante $R = D(a_0, \ldots, a_n; b_0, \ldots, b_m)$ ir konstruēta. Polinomu koeficienti determinantā sagrupējas divos parallēlogramos, no kuŗiem pirmais aizņem m, bet otrs n rindas. Citi determinanta elementi ārpus tiem ir nulles.

Uzrakstīsim vispārīgu $(m+n)$. kārtas determinantu:

$$D = \| C_{rk} \|; \; r, k = 1, 2, \ldots, (m+n).$$

Šī determinanta izvirzījuma vispārīgais loceklis ir

$$\pm C_{1\alpha} C_{2\beta} \ldots C_{m+1\,\lambda} \ldots C_{m+n\,\nu},$$

kur indeki $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \ldots, \nu$ ir skaitļu $1, 2, 3, \ldots, (m+n)$ permūtācijas. Tādēļ $\alpha + \beta + \ldots + \lambda + \ldots + \nu =$

$$= 1 + 2 + \ldots + (m+1) + \ldots + (m+n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)$$

Salīdzināsim abus determinantus:

$C_{1\alpha} = a_{\alpha-1}$, ja $\alpha = 1, 2, \ldots, (n+1)$, bet $C_{1\alpha} = 0$, ja $\alpha > n+1$

$C_{2\beta} = a_{\beta-2}$, ja $\beta = 2, 3, \ldots, (n+2)$, bet $C_{2\beta} = 0$, ja $\beta = 1$ vai $\beta > n+2$

. . . .

. . . .

$C_{m+1\,\lambda} = b_{\lambda-1}$, ja $\lambda = 1, 2, \ldots, (m+1)$, bet $C_{m+1\,\lambda} = 0$ pārējiem indekiem.

. . . .

Rezultantes vispārīgais loceklis ir

$$\pm a_{\alpha-1} \cdot a_{\beta-2} \ldots a_{\varkappa-m} \cdot b_{\lambda-1} \ldots b_{\nu-n},$$

un tā svars ir

$$(\alpha-1) + (\beta-2) + \ldots + (\varkappa-m) + (\lambda-1) + \ldots + (\nu-n) =$$
$$= (\alpha+\beta+\ldots+\varkappa+\lambda+\ldots+\nu) - (1+2+\ldots+m) - (1+2+\ldots+n)$$

jeb

$$\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) - \frac{1}{2}m(m+1) - \frac{1}{2}n(n+1) = mn.$$

Ar to vēlreiz pierādīts, ka divu polinomu rezultante ir to koeficientu izobāra funkcija ar svaru mn, ja m un n ir doto polinomu pakāpes.

Eulera metode (1764. g.). Ja $f(x_1) = g(x_1) = 0$, tad $f(x)$ un $g(x)$ dalās ar $x - x_1$. Tā tad var izteikt $f(x) = (x - x_1) f_1(x)$ un $g(x) = (x - x_1) g_1(x)$ ar diviem citiem polinomiem $f_1(x)$ un $g_1(x)$. Ja izslēdzam šeit $x - x_1$, tad rodas $f(x) g_1(x) - g(x) f_1(x) = 0$, t. i. ja n. un m. pakāpes vienādojumiem $f(x) = 0$ un $g(x) = 0$ ir kopīga sakne, tad var atrast divus citus polinomus $A(x)$ un $B(x)$ ar pakāpēm $m - 1$ un $n - 1$ tā, ka eksistē identisks sakars

$$A(x) . f(x) + g(x) . B(x) = 0,$$

kur $A(x) = g_1(x)$ un $B(x) = -f_1(x)$.

Pieprasot, lai kreisā pusē koeficienti pie visām x pakāpēm būtu nulles, dabū vajadzīgā skaitā līneārus homogenus vienādojumus. Ja izteic, ka sistēmas determinants ir nulle, tad dabū to pašu formu rezultantei kā ar Silvestera metodi.

Bezū *(Bezout)* **metode** (1764. g.) ir praktiski ērtāka, jo tā dod rezultanti zemākas kārtas determinanta veidā.

Gadījumā, kad abiem polinomiem $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ un $g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots b_n$ ir vienādas pakāpes, sastādīsim palīgfunkcijas:

$$\begin{array}{ll}
f_0 = a_0 & g_0 = b_0 \\
f_1 = a_0 x + a_1 & g_1 = b_0 x + b_1 \\
f_2 = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 & g_2 = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

$f_{n-1} = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$, $g_{n-1} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$,

un ar tām n polinomus, kuŗu vispārīgais veids ir

$$P_k = g_k f - f_k g, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Polinomu P_k pakāpes nav augstakas par $n - 1$, jo diferencei

$$(b_0 x^k + b_1 x^{k-1} \ldots + b_k)(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) -$$
$$- (a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k)(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} \ldots + b_n)$$

koeficients pie katra x^{n+h}, $h \geqslant 0$ ir

$$(a_0 b_{k-h} + a_1 b_{k-h-1} + \ldots + a_{k-h} b_0) -$$
$$- (b_0 a_{k-h} + b_1 a_{k-h-1} + \ldots + b_{k-h} a_0) = 0.$$

Tā tad var izteikt

$$P_k = C_{k0}\,x^{n-1} + C_{k1}\,x^{n-2} + \dots + C_{k\,n-1}\,.$$

Ja vienādojumiem $f(x) = 0$ un $g(x) = 0$ ir kopīga sakne x_1, t. i. $f(x_1) = g(x_1) = 0$, tad arī $P_k(x_1) = 0$. Tādēļ der sakarī:

$$\begin{cases} C_{00}\,x_1^{n-1} + C_{01}\,x_1^{n-2} + \dots + C_{0\,n-1} = 0 \\ C_{10}\,x_1^{n-1} + C_{11}\,x_1^{n-2} + \dots + C_{1\,n-1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{n-1\,0}\,x_1^{n-1} + C_{n-1\,1}\,x_1^{n-2} + \dots + C_{n-1\,n-1} = 0, \end{cases}$$

kas veido līneāru homogenu n vienādojumu sistēmu ar n nezināmiem: $1, x_1, x_1^2, \dots, x_1^{n-1}$. Atrisināšanas iespējamību izteic ar to, ka sistēmas determinants ir nulle, t. i.

$$\begin{vmatrix} C_{00} & C_{01} & \dots & C_{0\,n-1} \\ C_{10} & C_{11} & \dots & C_{1\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n-1\,0} & C_{n-1\,1} & \dots & C_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Te atliek ievietot „C“ izteiksmes ar $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$, kuŗu vispārējais veids ir

$$C_{r\,k-1} = (a_k b_r + a_{k+1} b_{r-1} + \dots) - (b_k a_r + b_{k+1} a_{r-1} + \dots) =$$
$$= (a_k b_r - a_r b_k) + (a_{k+1} b_{r-1} - a_{r-1} b_{k+1}) + \dots$$

jeb simboliski

$$C_{r\,k-1} = (k, r) + (k+1, r-1) + \dots + (k+r, o).$$

Piemēri.

1. $f = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3,\quad g = b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$

$$f_0 = a_0 \qquad\qquad g_0 = b_0$$
$$f_1 = a_0 x + a_1 \qquad\qquad g_1 = b_0 x + b_1$$
$$f_2 = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \qquad\qquad g_2 = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$

$$P_0 = (a_1 b_0 - a_0 b_1)\,x^2 + (a_2 b_0 - a_0 b_2)\,x + (a_3 b_0 - a_0 b_3),$$
$$P_1 = (a_2 b_0 - a_0 b_2)\,x^2 + (a_3 b_0 - a_0 b_3 + a_2 b_1 - a_1 b_2)\,x + (a_3 b_1 - a_1 b_3),$$
$$P_2 = (a_3 b_0 - a_0 b_3)\,x^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\,x + (a_3 b_2 - a_2 b_3).$$

Ja vienādojumiem $f(x) = 0$ un $g(x) = 0$ ir kopīga sakne, tad determinants ar simbolisko apzīmējumu

$$\begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) & (3,0) \\ (2,0) & [(3,0) + (2,1)] & (3,1) \\ (3,0) & (3,1) & (3,2) \end{vmatrix} = 0$$

2. Vienādojumiem

$$f = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \quad \text{un} \quad g = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0$$

ir kopīga sakne tad, ja

$$\begin{vmatrix} (1,0) & (2,0) \\ (2,0) & (2,1) \end{vmatrix} = 0$$

Šo determinantu izvirzot, dabūjam

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2 = 0$$

Vispārīgā gadījumā, kad polinomiem
$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ un $g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$
ir dažādas pakāpes, var pieņemt $n > m$.

Sastādām funkcijas:

$$\begin{array}{ll} f_0 = a_0 & g_0 = b_0 \\ f_1 = a_0 x + a_1 & g_1 = b_0 x + b_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

$f_{n-1} = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$, $g_{m-1} = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}$
un n polinomus:

$$P_{n-1} = f g_{m-1} - g f_{n-1}, \quad P_{n-2} = f g_{m-2} - g f_{n-2}, \ldots,$$

$P_{n-m} = f g_0 - g_{n-m}$, $P_{n-m-1} = g x^{n-m-1}$, $P_{n-m-2} = g x^{n-m-2}, \ldots,$
$P_0 = g$, kuŗu pakāpes nav augstākas par $n - 1$. Tālākā gaita tāda pat, kā iepriekš.

Piezīme. Daži autori rezultanti $R(f, g)$ definē ar $a_0^m b_0^n \prod\limits_{i,j}(y_i - x_j)$, kur x_j ir vienādojuma $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, bet y_i ir vienādojuma $g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m = 0$ saknes. Var pierādīt, ka Silvestera un Bezū determinanti ar šādu izteiksmi ir identiski.

§ 23. Bezū teōrēma.

Lemma. Divu polinomu $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n$ un $g(x) = b_0 x^m + \ldots + b_m$ rezultante $R(f, g)$ ir to koeficientu $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$ izobāra funkcija, kuŗas svars vienlīdzīgs ar doto polinomu pakāpju reizinājumu mn.

Šai lemmai mums jau ir divi pierādījumi. Apskatīsim vēl trešo. Rezultantes

$$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (y_i - x_j) =$$

$$= \sum a_0^{k_0} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n} b_0^{h_0} b_1^{h_1} b_2^{h_2} \ldots b_m^{h_m}$$

vispārīgā locekļa svars ir

$$s = k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n + h_1 + 2h_2 + \ldots + mh_m.$$

Sastādīsim divus vienādojumus:

$$F(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots A_n = 0$$

un $$G(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m = 0,$$

kuŗu saknes lai būtu t reiz lielākas nekā vienādojumu $f(x) = 0$ un $g(x) = 0$ saknes. Koeficienti būs

$$A_k = (-1)^k \sum tx_1 \,.\, tx_2 \ldots tx_k = t^k (-1)^k \sum x_1 x_2 \ldots x_k$$

jeb $$A_k = t^k a_k \text{ un } B_k = t^k b_k.$$

Tādēļ polinomu $F(x)$ un $G(x)$ rezultante ir

$$R(F, G) = A_0^m B_0^n \Pi(ty_i - tx_j) = a_0^m b_0^n t^{mn} \Pi(y_i - x_j)$$

jeb $$R(F, G) = t^{mn} R(f, g).$$

Bet var izteikt arī citādi

$$R(F, G) = \sum A_0^{k_0} A_1^{k_1} \ldots B_0^{h_0} \ldots B_m^{h_m} =$$

$$= \sum a_0^{k_0} (ta_1)^{k_1} (t^2 a_2)^{k_2} \ldots (t^n a_n)^{k_n} b_0^{h_0} (tb_1)^{h_1} \ldots (t^m b_m)^{h_m}$$

jeb $$R(F, G) = t^s R(f, g)$$

Salīdzinot abas izteiksmes, dabūjam $s = mn$, ar ko lemma pierādīta.

Bezū teōrēma. Vienādojumu sistēmas atrisinājumu skaits nevar būt lielāks par vienādojumu pakāpju reizinājumu.

Ja $f(x, y)$ un $g(x, y)$ ir m. un n. pakāpes polinomi un tie sakārtoti pēc dilstošām x pakāpēm:

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_k x^{n-k} + \ldots + a_n$$

un $$g(x, y) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_k x^{m-k} + \ldots + b_m,$$

tad koeficienti a_k un b_k ir veselas racionālas y funkcijas, kuŗu pakāpe nav augstāka par k. Ja no sistēmas

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

izslēdz x, tad rezultante

$$R = \sum a_0^{k_0} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n} b_0^{h_0} b_1^{h_1} \ldots b_m^{h_m}$$

būs vesela racionāla y funkcija ar pakāpi ne augstāku kā

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n + h_1 + 2h_2 + \ldots + mh_m = s = mn.$$

Ar to teōrēma pierādīta divu vienādojumu sistēmai. Nav grūti to vispārināt triju un vairāku vienādojumu sistēmām.

Geometriskā interpretācijā ar **Bezū teōrēmu** izteic, ka divas algebriskas m. un n. kārtas (pakāpes) līnijas uz plāksnes var krustoties augstākais mn punktos.

§ 24. Diskriminants.

Par polinoma $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ resp. vienādojuma $f(x) = 0$ diskriminantu sauc dotā un atvasinātā polinoma $f'(x)$ rezultanti, reizinātu ar $\pm a_0^{-1}$. Tā tad diskriminants ir polinoma $f(x)$ koeficientu vesela racionāla funkcija, kas vienlīdzīga nullei tikai tad, ja vienādojumam $f(x) = 0$ ir vairākkārtēja sakne.

Notekti diskriminantu D definē ar izteiksmi

$$D(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{-1} R(f', f).$$

Ja $f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, tad

$$f'(x) = a_0 (x - x_2) \ldots (x - x_n) + a_0 (x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \\ + \ldots + a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})$$

un

$$f'(x_1) = a_0 (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n),$$
$$f'(x_2) = a_0 (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f'(x_n) = a_0 (x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1}).$$

Tādēļ rezultante ir

$$R(f', f) = a_0^{n-1} f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_n) = a_0^{2n-1} \prod_{i \neq j}^{1,n} (x_i - x_j).$$

Te produktā $\prod_{i \neq j}^{1,n} (x_i - x_j)$ ir $n(n-1)$ faktori, un reizē ar $(x_i - x_j)$ tanī ir kā faktors arī $(x_j - x_i)$. Tādēļ varam to izteikt ar

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i > j}^{1,n} (x_i - x_j)^2$$

un diskriminantu ar Vandermonda determinanta kvadrātu. Izlietojot divu determinantu reizināšanas likumu (rindas ar rindām), diskriminantu var pārveidot

$$D(f) = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

jeb galīgi

$$D(f) = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

ar sakņu pakāpju summām $s_0 = n$, s_1, s_2, . . ., s_{2n-2}, kas noteicamas ar Ņutona formulām.

Piemēri. 1. Otrās pakāpes vienādojuma $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ diskriminants ir

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -a_1 \\ -a_1 & a_1^2 - 2a_2 \end{vmatrix} = a_1^2 - 4a_2$$

2. Trešās pakāpes vienādojuma $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ diskriminanta D sastādīšanai vajadzīgās sakņu pakāpju summas aprēķina ar Ņutona formulām (§ 19).

Tad izteic

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -a_1 & a_1^2 - 2a_2 \\ -a_1 & a_1^2 - 2a_2 & -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3 \\ a_1^2 - 2a_2 & -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3 & a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 \end{vmatrix}$$

jeb pārveidojot

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -a_1 & a_1^2 - 2a_2 \\ 2a_1 & -2a_2 & a_1 a_2 - 3a_3 \\ -2a_2 & a_1 a_2 - 3a_3 & -a_1^2 a_2 + a_1 a_3 + 2a_2^2 \end{vmatrix} =$$

un galīgi

$$D = -4a_1^3 a_3 + a_1^2 a_2^2 + 18a_1 a_2 a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

Ieteicams salīdzināt šo rezultātu ar $(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2$ izteiksmi 21. § 2. piemērā.

Speciāls gadījums: vienādojuma $x^3+px+q=0$ diskriminants ir

$$D = -(4p^3 + 27q^2)$$

Uzdevumi.

1) Atrast zemākās pakāpes vienādojumu ar racionāliem koeficientiem, ja tā viena sakne ir a) $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, b) $x_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, c) visas saknes ir -1, -1, 0, i, $-i$.

2) Pierādīt **teōrēmu:** ja vienādojuma $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$ saknes x_1, x_2, x_3 sastāda harmonisku progresiju (t. i. x_1^{-1}, x_2^{-1}, x_3^{-1} sastāda aritmētisku progresiju), tad vidējā sakne $x_2 = \frac{3c}{b}$.

Piemērs. Atrisināt vienādojumu $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$, zinot, ka tā saknes sastāda harmonisko progresiju.

3) Vienādojumam $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ divu sakņu summa ir nulle. Atrast sakarību starp koeficientiem a, b, c un atrisināt vienādojumu.

4) Cik locekļu ir simmetriskā funkcijā $\sum x_1^2 x_2 x_3$? Izteikt to ar elementārām simmetriskām funkcijām.

5) Aprēķināt vienādojuma $x^8 + x^6 - 1 = 0$ sakņu simmetrīsko funkciju $\sum \frac{x_1}{x_2 x_3}$.

6) Izteikt sakņu pakāpju summas s_{-1}, s_{-2}, s_{-3} ar elementārām simmetriskām funkcijām.

7) Atrisināt sistēmu

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36, \end{cases}$$

sastādot vienādojumu, kam saknes ir x, y, z.

8) Eliminēt y un z no sistēmas:

$$a) \begin{cases} xy + z^2 = a \\ yz + x^2 = b \\ zx + y^2 = c \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x^2 + y^2 = axyz \\ y^2 + z^2 = bxyz \\ z^2 + x^2 = cxyz \end{cases}$$

9) Sastādīt vienādojumu $ax^2 + bx + c = 0$ un $x^3 - 1 = 0$ rezultanti.

10) Sastādīt binomālā vienādojuma $x^n - 1 = 0$ diskriminantu.

III. Vienādojumu transformācijas.

§ 25. Čirnhausa *(Tschirnhaus)* transformācija.

Teōrēma I. Vienādojuma

$$f(x) = a_0 x_n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

saknes x_1 katru racionālu funkciju

$u(x_1) = \frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}$ var pārveidot veselā racionālā x_1 funkcijā ar pakāpi $\leq n-1$.

Ja vienādojuma $f(x) = 0$ pārējās saknes ir $x_2, x_3, \ldots, x_n$, tad var izteikt

$$u(x_1) = \frac{\varphi(x_1) \cdot \psi(x_2) \ldots \psi(x_n)}{\psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \ldots \psi(x_n)}.$$

Tagad saucējs kā dotā vienādojuma sakņu simmetriska funkcija ir skaitlis c, kuŗu nosaka vienādojuma koeficienti. Skaitītājā faktors $\psi(x_2)\psi(x_3) \ldots \psi(x_n)$ ir tāda vienādojuma koeficientu vesela racionāla funkcija, kuŗa saknes ir $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Konstruēsim tādu vienādojumu, dalot $f(x)$ ar $x - x_1$:

$$\begin{array}{c|llll} & a_0, & a_1 & a_2 & \ldots\ldots \\ \hline x_1 & a_0, & a_0 x_1 + a_1, & a_0 x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, & \ldots \end{array}$$

Tā koeficienti ir $a_0, a_0 x_1 + a_1, a_0 x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \ldots$ Tagad saprotams, ka izteiksme $F(x_1) = \varphi(x_1) \cdot \psi(x_2) \ldots \psi(x_n)$ ir saknes x_1 un dotā vienādojuma $f(x) = 0$ koeficientu vesela racionāla funkcija. Ja $F(x_1)$ pakāpe (attiecībā uz x_1) ir lielāka par $n - 1$, tad $F(x)$ dalīšanā ar $f(x)$ rodas atlikums $r(x)$ ar pakāpi $\leq n - 1$, un der sakars:

$$F(x) = f(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Tā kā $f(x_1) = 0$, tad $F(x_1) = r(x_1)$. Tā tad $F(x_1)$ var atvietot ar $r(x_1)$. Ar to teorēma pierādīta.

Piemērs. Atbrīvot daļu $N = \frac{5\sqrt[3]{2} + 6}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$ no irracionāla saucēja.

Apzīmēsim $\sqrt[3]{2} = x_1$, tad x_1 ir trešās pakāpes vienādojuma $x^3 - 2 = 0$ sakne, un

$$N = \frac{5x_1 + 6}{1 + x_1 + x_1^2}$$

Pēc minētās teōrēmas daļa N pārveidojama veselā racionālā x_1 funkcijā, kuŗas pakāpe $\leqslant 2$. Tā tad

$$\frac{5x_1+6}{1+x_1+x_1^2}=b_0+b_1x_1+b_2x_1^2$$

ar pagaidām nenoteiktiem koeficientiem b_0, b_1 un b_2.

Reizinām abas puses ar saucēju un ievērojam, ka $x_1^3=2$ un $x_1^4=2x_1$. Tad

$$5x_1+6=(b_0+2b_1+2b_2)+(b_0+b_1+2b_2)x_1+$$
$$+(b_0+b_1+b_2)x_1^2$$

Salīdzinot koeficientus pie vienādām x_1 pakāpēm, dabūjam $b_0=-6$, $b_1=1$, $b_2=5$. Tāpēc izteic $N=-6+\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{4}$.

Lai vienādojumam $f(x)=0$ ar saknēm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uzrakstītu atbilstošu jaunu vienādojumu $g(y)=0$, kuŗa saknes „y" ir kaut kādā racionālā atkarībā no saknēm „x", pietiek lietot veselu racionālu funkciju

$$y=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}$$

ar pakāpi $\leqslant n-1$. Šādu transformāciju ir pētījis Čirnhauss 1683. g. Tā tad mēs izvēlamies

$$y_1=b_0+b_1x_1+\ldots+b_{n-1}x_1^{n-1}$$
$$y_2=b_0+b_1x_2+\ldots+b_{n-1}x_2^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n=b_0+b_1x_n+\ldots+b_{n-1}x_n^{n-1}$$

un meklējam vienādojumu, kuŗa saknes ir $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Šī vienādojuma koeficienti ir argūmentu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ elementārās simmetriskās funkcijas: $-\sum y_1$, $\sum y_1y_2, \ldots$ un reizē arī sakņu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ simmetriskās funkcijas. Tādēļ tos var racionālā kārtā izteikt ar dotā vienādojuma $f(x)=0$ koeficientiem.

Apskatīsim **konkrētu metodi.** Vienādojuma $f(x)=0$ sakņu pakāpju summas $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ var uzskatīt par zināmām. Vienādojuma $g(y)=0$ sakņu pakāpju summas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ var aprēķināt. Zinot $S_1, S_2, \ldots, S_n$, ar Ņutona formulām var atrast vienādojuma $g(y)=0$ koeficientus.

S_1 dabū, saskaitot uzrakstītās transformācijas formulas:

$$S_1=nb_0+b_1s_1+\ldots+b_{n-1}s_{n-1}.$$

S_2 aprēķināšanai kāpinām

$$y=\varphi(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}$$

kvadrātā, dalām ar $f(x)$ un ņemam atlikumu

$$r(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}.$$

Tad no $y^2 = [\varphi(x)]^2 = f(x)\, g(x) + r(x)$
atrod $y_1^2 = r(x_1), y_2^2 = r(x_2)$ u. t. t.

Saskaitot formulas:

$$y_1^2 = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_{n-1} x_1^{n-1}$$
$$y_2^2 = c_0 + c_1 x_2 + \ldots + c_{n-1} x_2^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n^2 = c_0 + c_1 x_n + \ldots + c_{n-1} x_n^{n-1}$$

dabūjam $S_2 = nc_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_{n-1} s_{n-1}$. Ar tādu pat metodi atrod arī pārējos S_k.

Piemērs. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$. Te $s_1 = 1$, $s_2 = -3$. Ar transformācijas formulu $y = \frac{x}{x^2+1}$ izteic

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1^2+1} = Ax_1^2 + Bx_1 + C.$$

Reizinām ar saucēju, pamazinām kāpinātāju un salīdzinām koeficientus. Tad atrodam $A = 0$, $B = -1$, $C = 1$. Transformācija top vienkārša: $y = -x + 1$.

Sastādām $y^2 = x^2 - 2x + 1$ un $y^3 = 2x^2 - x$, ievērojot, ka $f(x) = 0$. Tādēļ ir

$$S_1 = -s_1 + 3\,.\,1 = 2,\ S_2 = s_2 - 2s_1 + 3\,.\,1 = -2,$$
$$S_3 = 2s_2 - s_1 = -7.$$

Apzīmējam meklējamā vienādojuma $g(y) = 0$ koeficientus ar $1, A_1, A_2, A_3$. Pēc Ņutona formulām

$$S_1 + A_1 = 0,\ S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = 0,\ S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3A_3 = 0$$

atrod $A_1 = -2$, $A_2 = 3$, $A_3 = -1$.

Tādēļ $g(y) = y^3 - 2y^2 + 3y - 1 = 0.$

Sevišķi svarīgs ir Čirnhausa transformācijas vienkāršākais gadījums — **lineārā transformācija**

$$y = kx - a.$$

Vispirms izlietosim **homogenu transformāciju**

$$y = kx.$$

Ir dots vienādojums $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Jāmeklē vienādojums $g(y) = y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n = 0$, kuŗa saknes ir k reiz lielākas par dotā vienādojuma saknēm. Izteic $A_1 = -\sum y_1 = -\sum kx_1 = ka_1$, $A_2 = \sum y_1 y_2 = \sum kx_1\,.\,kx_2 =$
$= k^2 \sum x_1 x_2 = k^2 a_2$, u. t. t.

Tādēļ

$$g(y) = y^n + ka_1 y^{n-1} + k^2 a_2 y^{n-2} + \ldots + k^n a_n.$$

Tā tad, lai sastādītu vienādojumu ar k reiz lielākām saknēm, tad koeficientu a_i vietā jāliek koeficienti $A_i = k^i a_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots n)$.

Ja $k = -1$, tad $y = -x$ un $A_i = (-1)^i a_i$, t. i. lai sastādītu vienādojumu, kuŗa sakņu zīmes ir pretējas vienādojuma $f(x) = 0$ sakņu zīmēm (bet to absolūtās vērtības nav izmainītas), tad visiem koeficientiem pie x nepāru pakāpēm ir jāmaina zīme ar pretējo.

Izlietojot transformāciju

$$y = x - a$$

dotajam vienādojumam

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

atrod jaunu vienādojumu

$$g(y) = A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

kuŗa saknes par a vienībām mazākas nekā dotā vienādojuma saknes. Izdarot polinomā $g(y)$ substituciju $y = x - a$ un sakārtojot $g(x - a)$ pēc x dilstošām pakāpēm, dabūsim polinomu

$$f(x) = A_0 (x - a)^n + A_1 (x - a)^{n-1} + \ldots + A_{n-1} (x - a) + A_n.$$

Pēc $f(x)$ dalīšanas ar $x - a$ rodas atlikums A_n un nepilnīgais kvocients

$$A_0 (x - a)^{n-1} + \ldots + A_{n-2} (x - a) + A_{n-1}.$$

Pēdējo dalot tālāk ar $x - a$, dabū atlikumu A_{n-1} un jaunu kvocientu, kas savukārt, dalīts ar $x - a$, dod atlikumā A_{n-2} u. t. t. Tā tad polinoma $g(y)$ koeficienti ir Hornera schēmā atlikumi, kas rodas, pakāpeniski dalot $f(x)$ ar $x - a$.

Vispārīgo līneāro transformāciju

$$y = kx - a$$

var izpildīt pakāpeniski. Var vispirms likt $z = kx$ un tad $y = z - a$ vai arī vispirms $z = x - \frac{a}{k}$ un tad $y = kz$.

Piemērs. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ un transformācija $y = -x + 1$. Pirmā palīga transformācija $z = -x$ dod vienādojumu

$$-z^3 - z^2 - 2z - 1 = 0$$

jeb

$$z^3 + z^2 + 2z + 1 = 0.$$

Otrā palīga transformācija: $y = z + 1$ darāma pakāpeniskas dalīšanas ceļā:

	1,	1,	2,	1
−1	1	0	2	−1
−1	1	−1	3	
−1	1	−2		
−1	1			

Rodas vienādojums $g(y) = y^3 - 2y^2 + 3y - 1 = 0$.

Teorēma II. Katru n. pakāpes vienādojumu $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ var pārveidot tādā formā, kuŗā iztrūkst loceklis ar x^{n-1}.

Ja ar transformāciju $y = x + a$ rodas vienādojums
$$g(y) = y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$
tad $A_1 = -\sum y_1 = -\sum (x_1 + a) = -\sum x_1 - \sum a = a_1 - na.$

No noteikuma $A_1 = 0$ jeb $a_1 - na = 0$ atrodam $a = \frac{a_1}{n}$. Tā tad meklējamā transformācija ir noteikta ar
$$y = x + \frac{a_1}{n}.$$

Piemēri. Otrās pakāpes vienādojumu $x^2 + ax + b = 0$ ar transformāciju $y = x + \frac{a}{2}$ var izteikt formā $y^2 + B = 0$.

Katru trešās pakāpes vienādojumu var pārveidot kanoniskā formā:
$$x^3 + px + q = 0$$
un ceturtās pakāpes vienādojumu:
$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Apskatīsim Čirnhausa transformāciju izlietojumu **trešās pakāpes vienādojuma atrisināšanā.**

Vienādojumam kanoniskā formā $x^3 + px + q = 0$ sakņu pakāpju summas $s_1 = 0$, $s_2 = -2p$.

Meklēsim transformāciju $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, kas doto vienādojumu pārveido viegli atrisināmā formā
$$y^3 + Q = 0 \quad \text{ar} \quad S_1 = S_2 = 0.$$
No transformācijas formulas seko
$$S_1 = 3b_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2 = 3b_0 - 2p\, b_2.$$
Tā tad noteikums $S_1 = 0$ dod $b_0 = \frac{2p}{3} b_2$.

No dotā vienādojuma izteic
$$x^3 = -px - q \quad \text{un} \quad x^4 = -px^2 - qx.$$
Tādēļ formulu
$$y^2 = b_2^2 x^4 + b_1^2 x^2 + b_0^2 + 2b_1 b_2 x^3 + 2b_0 b_2 x^2 + 2b_0 b_1 x$$
var pārveidot šādā:
$$y^2 = (b_0^2 - 2b_1 b_2 q) + (2b_0 b_1 - 2b_1 b_2 p - b_2^2 q)\, x + \\ + (b_1^2 + 2b_0 b_2 - b_2^2 p)\, x^2.$$

Sastādām

$$S_2 = 3(b_0^2 - 2b_1 b_2 q) + (2b_0 b_1 - 2b_1 b_2 p - b_2^2 q) s_1 +$$
$$+ (b_1^2 + 2b_0 b_1 - b_2^2 p) s_2 = 3(b_0^2 - 2b_1 b_2 q) - 2p(b_1^2 + 2b_0 b_2 - b_2^2 p)$$

Noteikumā $S_2 = 0$ liekam $b_0 = \frac{2p}{3} b_2$, dalām abas puses ar b_2^2 un apzīmējam $\frac{b_1}{b_2} = \lambda$. Tad rodas kvadrātvienādojums

$$3p\lambda^2 + 9q\lambda - p^2 = 0,$$

no kuŗa izteic

$$\lambda = \frac{b_1}{b_2} = \frac{-9q \pm \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{6p}.$$

Ja izvēlas $b_1 = -9q + \sqrt{81q^2 + 12p^3}$ un $b_2 = 6p$, tad var konstruēt transformāciju, kas doto kubvienādojumu pārveido formā

$$y^3 + Q = 0.$$

Ja ar šīm „b" nozīmēm sastāda y, y^2, y^3 izteiksmes, tad pēdējā izteiksme x nesatur (tā ir skaitlis $= -Q$). No abām pirmajām izteiksmēm izslēdzot x^2, dabūjam vienā pusē lineāru izteiksmi ar x, otrā pusē lineāru y un y^2 kombināciju. Tādā kārtā var aprēķināt x, jo $y = \sqrt[3]{-Q}$ ir zināms.

Ar Čirnhausa transformāciju n. pakāpes vienādojuma atrisināšanu reducē uz divu citu vienādojumu atrisināšanu, no kuŗiem viens ir vienkāršāks n. pakāpes, bet otrs (n—1). pakāpes vienādojums. Ar šo metodi 3. un 4. pakāpes vienādojumi ir algebriski atrisināmi, bet 5. un augstākās pakāpes vienādojumiem tā neder.

26. Resolventes.

Dotā vienādojuma

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

sakņu racionāla funkcija $y = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ja pārvieto savā starpā $x_1, x_2, \ldots, x_n$ visos iespējamos $n!$ veidos, var pieņemt m dažādas nozīmes: $y_1, y_2, \ldots, y_m$, kur $1 \leq m \leq n!$

Katra simmetriska funkcija $F(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ ir reizē arī simmetriska argūmentu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funkcija, jo no sakņu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vietu pārmaiņas lielumi $y_1, y_2, \ldots, y_m$ tikai pārmainīsies lomām, un funkcijas F nozīme paliks, kāda bijusi.

Arī elementārās simmetriskās argūmentu $y_1, y_2, \ldots, y_m$ funkcijas ir simmetriskas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funkcijas un racionālā kārtā izteicamas ar $f(x)$ koeficientiem. Tā tad eksistē m. pakāpes vienādojums $g(y) = 0$, kuŗā koeficienti racionāli atkarīgi no $f(x)$ koeficientiem un kuŗa saknes ir visas m dažādās iespējamās funkcijas

$$y = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nozīmes. Vienādojumu $g(y) = 0$ sauc par dotā vienādojuma $f(x) = 0$ **resolventi.**

Ja resolventes pakāpe zemāka par n (tas iespējams, ja n nav lielāks par 4), tad tā var atvieglot dotā vienādojuma atrisināšanu.

Reizinot racionālās daļas

$$\frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

skaitītāju un saucēju ar visām dažādām funkcijas ψ nozīmēm, kādas rodas, mainot vietām saknes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dabū saucējā skaitli, kas racionāli izteicams ar dotā vienādojuma koeficientiem. Dotā daļa pārveidojas veselā racionālā funkcijā $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tādēļ, sastādot resolventi, varam lietāt veselu racionālu un nesimmetrisku transformāciju

$$y = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Piemērs. Sastādīsim vienādojumu, ko apmierina dotā kubvienādojuma $x^3 + px + q = 0$ sakņu x_1, x_2, x_3 diferenču kvadrāti, t. i. tādu vienādojumu, kuŗa saknes ir

$$y_1 = (x_1 - x_2)^2, \quad y_2 = (x_2 - x_3)^2, \quad y_3 = (x_3 - x_1)^2$$

Izlietāsim mākslīgu paņēmienu, pārveidojot

$$y_1 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$$

jeb

$$y_1 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_3^2 - \frac{2x_1 x_2 x_3}{x_3} = s_2 - x_3^2 + \frac{2q}{x_3}$$

un līdzīgā kārtā y_2 un y_3

Lietāsim transformāciju

$$y = -2p - x^2 + \frac{2q}{x}$$

Reizinām abas puses ar x un sagrupējam:

$$x^3 + (2p + y)x - 2q = 0.$$

Ievērojot doto vienādojumu, izslēdzam x^3 un dabūjam

$$x = \frac{3q}{p + y}.$$

Ar šo izteiksmi dotais vienādojums pēc pārveidojumiem top

$$(p + y)^3 + 3p(p + y)^2 + 27q^2 = 0$$

jeb

$$y^3 + 6py^2 + 9p^2 y + (4p^3 + 27q^2) = 0.$$

Dotā vienādojuma $x^3 + px + q = 0$ diskriminantu var izteikt ar

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 = y_1 y_2 y_3 = -(4p^3 + 27q^2).$$

Kā citus piemērus apskatīsim 3. un 4. pakāpes vienādojumu

Lagranža resolventes.

3. pakāpes vienādojuma

$$x^3 + px + q = 0$$

sakņu lineāra funkcija

$$y = x_1 + ax_2 + bx_3,$$

ja maina x_1, x_2, x_3 vietām, var pieņemt 6 dažādas nozīmes $y_1, y_2, \ldots, y_6$. Attiecīgā resolvente ir 6. pakāpes vienādojums. Bet iespējams, ka pie lietderīgas a, b izvēles tā pieņem trinomālā vienādojuma formu

$$y^6 + Ay^3 + B = 0.$$

Tad reizē ar y_1 resolventes saknes būs arī $y_2 = \omega y_1$ un $y_3 = \omega^2 y_1$, kur ω ir skaitļa 1 kubsaknes viena kompleksā nozīme, piem.

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ ar } i = \sqrt{-1}.$$

Tādēļ var izteikt

$$x_3 + ax_1 + bx_2 = \omega (x_1 + ax_2 + bx_3)$$

un

$$x_2 + ax_3 + bx_1 = \omega^2 (x_1 + ax_2 + bx_3).$$

Salīdzinot koeficientus pie x_1, dabū $a = \omega$ un $b = \omega^2$. Tā tad meklētā transformācija ir

$$y = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3.$$

Apzīmējot $y^3 = z$, dabūjam otrās pakāpes vienādojumu

$$z^2 + Az + B = 0.$$

Tā tad eksistē tikai divas dažādas z nozīmes.

Par to varam arī tieši pārliecināties ar sekojošu aprēķinu. Ja apzīmē ar

$$z_1 = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 \text{ un } z_2 = (x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2)^3,$$

tad var izteikt

$$z_3 = (x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3)^3 = \omega^6 (x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3)^3 = (x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2)^3 = z_2,$$

$$z_4 = (x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1)^3 = \omega^3 (x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1)^3 = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 = z_1,$$

un līdzīgā kārtā

$$z_5 = (x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2)^3 = z_1, \quad z_6 = (x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1)^3 = z_2.$$

Lai noteiktu A un B, tad ir jāsastāda $z_1 + z_2$ un $z_1 z_2$.

Izlietājot trinoma kuba formulu

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + \\ + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

un ievērojot, ka $\omega^3 = 1$, dabū

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3 + (x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2)^3$$

jeb

$$z_1 + z_2 = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\omega x_1^2 x_2 + 3\omega^2 x_1 x_2^2 + 3\omega^2 x_1^2 x_3 + 3\omega x_1 x_3^2 + \\ + 3\omega x_2^2 x_3 + 3\omega^2 x_2 x_3^2 + 6x_1x_2x_3) + (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\omega x_1^2 x_3 + \\ 3\omega^2 x_1 x_3^2 + 3\omega^2 x_1^2 x_2 + 3\omega x_1 x_2^2 + 3\omega x_2 x_3^2 + 3\omega^2 x_2^2 x_3 + 6x_1 x_2 x_3).$$

Tā kā $1 + \omega + \omega^2 = 0$ jeb $\omega + \omega^2 = -1$, tad

$$z_1 + z_2 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12x_1 x_2 x_3 - \\ - 3(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2).$$

Dotajam kuba vienādojumam trūkst kvadrātlocekļa. Tāpēc $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; kāpinot kubā, dabūjam

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \\ + 3(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2) + \\ + 6x_1 x_2 x_3 = 0.$$

To ievērojot, atrasto $(z_1 + z_2)$ izteiksmi var vienkāršot šādi:

$$z_1 + z_2 = -9(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2) = \\ = -9[x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_2 x_3 (x_2 + x_3) + x_1 x_3 (x_1 + x_3)].$$

Tā kā $x_1 + x_2 = -x_3$; $x_2 + x_3 = -x_1$, $x_1 + x_3 = -x_2$,

tad $$z_1 + z_2 = 27x_1 x_2 x_3 = -27q.$$

Analogā kārtā var atrast

$$z_1 z_2 = [(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2)]^3 = \\ = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_1 x_3)^3$$

jeb $$z_1 z_2 = [(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)]^3 = \\ = -27(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)^3.$$

Galīgi $$z_1 z_2 = -27p^3.$$

Meklētā resolvente ir

$$z^2 + 27qz - 27p^3 = 0,$$

un tās saknes ir

$$z_1 = 27\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right), \quad z_2 = 27\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)$$

Dotā vienādojuma sakņu atrašanai izlietāsim formulas

$$\begin{cases} x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = \sqrt[3]{z_1} \\ x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2 = \sqrt[3]{z_2} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Reizinot tās pēc kārtas ar 1, 1, 1; ω^2, ω, 1; ω, ω^2, 1 un saskaitot, dabūjam

$$x_1 = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}), \quad x_2 = \frac{1}{3}(\omega^2 \sqrt[3]{z_1} + \omega \sqrt[3]{z_2}),$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(\omega \sqrt[3]{z_1} + \omega^2 \sqrt[3]{z_2}),$$

jeb

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Šo rezultātu sauc tā pirmā publicētāja vārdā par **Kardano** *(Cardano)* **formulu.**

Apskatīsim tagad **4. pakāpes vienādojumu**

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

Eksistē funkcijas $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, kas pieņem tikai trīs dažādas nozīmes, ja argūmentu x_1, x_2, x_3, x_4 vietas pārmaina visos 24 iespējamos veidos. Viena tāda funkcija y ar savām trim nozīmēm ir

$$y_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4$$
$$y_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4$$
$$y_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3$$

Sastādām:

$$\sum y_1 = \sum x_1 x_2 = a_2; \quad \sum y_1 y_2 = \sum x_1^2 x_2 x_3 = a_1 a_3 - 4a_4;$$

un

$$y_1 y_2 y_3 = \sum x_1^3 x_2 x_3 x_4 + \sum x_1^2 x_2^2 x_3^2 = x_1 x_2 x_3 x_4 \cdot s_2 + x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 s_{-2}$$

jeb

$$y_1 y_2 y_3 = a_4(a_1^2 - 2a_2) + a_4^2 \frac{a_3^2 - 2a_2 a_4}{a_4^2} = (a_1^2 - 4a_2)\, a_4 + a_3^2.$$

Ar šīm nozīmēm konstruējam **resolventi**

$$y^3 - a_2 y^2 + (a_1 a_3 - 4a_4)\, y - (a_1^2 - 4a_2)\, a_4 - a_3^2 = 0.$$

Ja resolventes sakne ir y_1, tad no sistēmas

$$\begin{cases} x_1 x_2 + x_3 x_4 = y_1 \\ x_1 x_2 \cdot x_3 x_4 = a_4 \end{cases}$$

aprēķinām reizinājumus $x_1 x_2$ un $x_3 x_4$. Pēc tam no sistēmas

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -a_1 \\ x_3 x_4 (x_1 + x_2) + x_1 x_2 (x_3 + x_4) = -a_3 \end{cases}$$

atrodam summas $x_1 + x_2$ un $x_3 + x_4$. Zinot reizinājumus $x_1 x_2$, $x_3 x_4$ un summas $(x_1 + x_2)$, $(x_3 + x_4)$, sastādām divas vienādojumu sistēmas, kam atrisinājumi ir x_1, x_2, x_3, x_4.

Varam viegli aprēķināt 4. pakāpes vienādojumam d i s k r i m i n a n t u, ja no y_1, y_2, y_3 izteiksmēm sastādām diferences;

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$$
$$y_1 - y_3 = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)$$
$$y_2 - y_3 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$$

Tās sareizinot un kāpinot kvadrātā, labajā pusē dabūjam 4. pakāpes vienādojuma diskriminantu D, bet kreisajā pusē tā resolventes diskriminantu. Izlietājot mums pazīstamu formulu, var izteikt diskriminantu ar resolventes, resp. dotā vienādojuma koeficientiem.

Uzdevumi:

1) Atbrīvot daļas no irracionāla saucēja:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{2x_1}{x_1+1}$, ja x_1 ir vienādojuma $x^4+x-1=0$ sakne.

c) $\dfrac{5x_1^2+3x_1}{x_1^2+x_1+1}$, ja x_1 ir vienādojuma $x^3-3x+1=0$ sakne.

2) Dots vienādojums $x^4-3x^3+x^2+4=0$. Sastādīt tādu vienādojumu, a) kam saknes par 2 vienībām mazākas nekā dotajam, b) kam saknes ir reciproki skaitļi ar dotā vienādojuma saknēm.

3) Zinot vienādojuma $x^3-6x^2+11x-6=0$ saknes x_1, x_2, x_3, sastādīt jaunu vienādojumu, kam saknes ir

$$y_1 = x_1^2+x_2x_3;\ y_2 = x_2^2+x_1x_3;\ y_3 = x_3^2+x_1x_2.$$

4) Sastādīt kvadrātvienādojumu ar saknēm x_1 un x_2, ja

$$x_1^2+x_2=11,\ x_2^2+x_1=7.$$

IV. Trešās un ceturtās pakāpes vienādojumi.

§ 27. Trešās un ceturtās pakāpes vienādojumu atrisināšanas metodes.

Trešās pakāpes vienādojuma pirmie atrisinātāji ir Ferro un Tartalla (*Scipione dal Ferro* un *Nicolo Tartaglia* 1535. g.). Apm. 30 gadus vēlāk Ferrari (*Ludovico Ferrari*) atrisinājis 4. pakāpes vienādojuma. Ar 5 pakāpes vienādojuma atrisināšanu neveicās. Vairāk kā 200 gadu veltīgi tika meklēta formula, kas ar algebriskiem simboliem izteiktu saknes atkarībā no vienādojuma koeficientiem. Tikai ap 1790. g. Ruffini (*Paolo Ruffini*) izteica domas, ka tāda formula nav iespējama. 1824. g. Nīls Abels (neatkarīgi no Ruffini) to arī pierādīja. Daudz vēlāk Ermīts (*Hermite*) izteica 5. pakāpes vienādojuma saknes ar elliptiskajām funkcijām.

Trešās un ceturtās pakāpes vienādojumu atrisināšanai ir daudz (tagad ap 100) metožu, no kuŗām apskatīsim sekojošas.

1. Trešās pakāpes vienādojumu

$$x^3 + px + q = 0$$

parasti atrisina pēc **Heda** (*Hudde*) metodes.

Liekam vienādojuma kreisajā pusē $x = u + v$. Tad pēc pārveidojumiem rodas

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Ja nu izvēlas u un v tā, lai $3uv + p = 0$ jeb $uv = -\frac{p}{3}$, tad trešās pakāpes vienādojumu atvieto sistēma

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Kā redzams, u^3 un v^3 ir kvadrātvienādojuma

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

saknes.

Tādēļ var izteikt

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ un } v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Katrai kubsaknei ir trīs nozīmes. Tādēļ varētu domāt, ka būs 9 nozīmes summai $u + v = x$. Bet ievērojot, ka $uv = -\frac{p}{3}$, par derīgām jāatzīst tikai šādas x nozīmes:

$$x_1 = u + v,\ x_2 = \omega u + \omega^2 v \text{ un } x_3 = \omega^2 u + \omega v,$$

kur ω ir skaitļa 1 kubsaknes viena kompleksā nozīme, piem.

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ ar } i = \sqrt{-1}$$

2. Apskatīsim **Ferrari metodi** 4. pakāpes vienādojuma

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

atrisināšanai. Pārveidojam vienādojumu, pārceļot pēdējos 3 locekļus labajā pusē

$$x^4 + a_1 x^3 = - a_2 x^2 - a_3 x - a_4.$$

Pieskaitot lietderīgi izvēlētu izteiksmi, mēģināsim abas puses pataisīt par pilniem kvadrātiem. Kreisajā pusē rastos

$$\left(x^2 + \frac{a_1}{2} x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{a_1}{2} x\right)^2 + y\left(x^2 + \frac{a_1}{2} x\right) + \frac{y^2}{4} =$$

$$= x^4 + a_1 x^3 + \frac{a_1^2}{4} x^2 + y\left(x^2 + \frac{a_1}{2} x\right) + \frac{y^2}{4},$$

ja pieskaitītu izteiksmi

$$\frac{a_1^2}{4} x^2 + y\left(x^2 + \frac{a_1}{2} x\right) + \frac{y^2}{4},$$

kuŗā y pagaidām patvaļīgs lielums. Labajā pusē pēc šīs izteiksmes pieskaitīšanas rastos polinoms

$$x^2\left(\frac{a_1^2}{4} - a_2 + y\right) + x\left(\frac{a_1}{2} y - a_3\right) + \left(\frac{y^2}{4} - a_4\right) = Ax^2 + Bx + C$$

ar koeficientiem

$$A = \frac{a_1^2}{4} - a_2 + y,\quad B = \frac{a_1}{2} y - a_3,\quad C = \frac{y^2}{4} - a_4$$

Šis trinoms ir pilns kvadrāts $\left(x\sqrt{A} + \frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2$ tikai tad, ja tā diskriminants $B^2 - 4AC = 0$, t. i. ja

$$\left(\frac{a_1}{2} y - a_3\right)^2 - 4\left(\frac{a_1^2}{4} - a_2 + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - a_4\right) = 0$$

jeb $\quad y^3 - a_2 y^2 + (a_1 a_3 - 4a_4) y - (a_1^2 - 4a_2) a_4 - a_3^2 = 0.$

Kā redzams, ir radusies tā pati Lagranža resolvente, kaut gan atrisināšanas metode te pavisam cita.

Zinot resolventes vienu sakni y_1, var pārveidot vienādojuma labo pusi pilnā kvadrātā $(kx + b)^2$, kur k un b ir zināmi:

$$k = \sqrt{A}\,, \quad b = \frac{B}{2\sqrt{A}}.$$

Pārveidotā vienādojuma

$$\left(x^2 + \frac{a_1}{2}x + \frac{y_1}{2}\right)^2 - (kx + b)^2 = 0$$

kreiso pusi var sadalīt reizinātājos:

$$\left[x^2 + \left(\frac{a_1}{2} + k\right)x + \frac{y_1}{2} + b\right]\left[x^2 + \left(\frac{a_1}{2} - k\right)x + \frac{y_1}{2} - b\right] = 0.$$

Tagad jāatrisina divi kvadrātvienādojumi:

$$x^2 + \left(\frac{a_1}{2} + k\right)x + \frac{y_1}{2} + b = 0, \quad x^2 + \left(\frac{a_1}{2} - k\right)x + \frac{y_1}{2} - b = 0.$$

Pirmā vienādojuma atrisinājumi ir x_1, x_2 ar sakaru

$$x_1\, x_2 = \frac{y_1}{2} + b,$$

bet otrā atrisinājumi ir x_3 un x_4 ar sakaru

$$x_3\, x_4 = \frac{y_1}{2} - b.$$

No minētiem sakariem atrod

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = y_1.$$

Tādu pat substitūciju lieto Lagranžs, konstruējot savu resolventi.

Atrisinot vienādojumu ar Ferrari metodi, var rasties neērtības vienīgi tad, ja resolventes sakne y_1 ir tāda, ka $A = 0$. Tādā gadījumā jāmēģina y_2 resp. y_3. Ja y_1, y_2 un arī y_3 dod $A = 0$ t. i.

$$\frac{a_1^2}{4} - a_2 + y_1 = \frac{a_1^2}{4} - a_2 + y_2 = \frac{a_1^2}{4} - a_2 + y_3 = 0,$$

tad visas trīs resolventes saknes ir vienādas

$$y_1 = y_2 = y_3 = a_2 - \frac{a_1^2}{4}.$$

Izlietājot vienādojuma sakņu un koeficientu sakarības, dabū

$$a_2 = \frac{3}{8}a_1^2, \quad a_3 = \frac{a_1^3}{16}, \quad a_4 = \frac{a_1^4}{256},$$

Tādēļ $$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = \left(x + \frac{a_1}{4}\right)^4.$$

Šinī gadījumā arī visas dotā vienādojuma saknes ir vienādas:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -\frac{a_1}{4}.$$

3. Apskatīsim **Dekarta** ***(R. Descartes)*** **metodi** 4. pakāpes vienādojumam kanoniskā formā

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Pieņemsim, ka polinoms $x^4 + px^2 + qx + r$ sadalās divos faktoros $(x^2 + kx + n)(x^2 - kx + m)$. Pēc reizināšanas un salīdzināšanas ar doto polinomu atrodam:

$$p = m + n - k^2, \quad q = k(m - n), \quad r = mn.$$

No diviem pirmajiem vienādojumiem izteiksim m un n ar k. Ir atļauts dalīt ar $k \neq 0$, jo pretējā gadījumā, kad $k = 0$, tad arī $q = 0$, un dotais vienādojums būtu bikvadrātvienādojums, kas tieši reducējams uz kvadrātvienādojumiem. Ja $k \neq 0$, tad dabūsim

$$m + n = p + k^2, \quad m - n = \frac{q}{k}$$

un

$$2m = p + k^2 + \frac{q}{k}, \quad 2n = p + k^2 - \frac{q}{k}.$$

Ar šo izteiksmju substitūciju vienādojumā $4r = 4mn$ rodas

$$4r = (p + k^2)^2 - \frac{q^2}{k^2}$$

Apzīmējot $k^2 = t$, dabū resolventi **Dekarta** formā

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0.$$

Pietiek atrast tās vienu sakni t_1, lai varētu noteikt k, m, n un doto vienādojumu reducēt uz diviem kvadrātvienādojumiem:

$$x^2 + kx + n = 0 \text{ un } x^2 - kx + m = 0.$$

4. Interesantu metodi 3. un 4. pakāpes vienādojumu atrisināšanai ir devis **Eulers**.

Par kubvienādojuma atrisinājumu Eulers pieņem izteiksmi

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

un atrod, ka A un B ir atrisinājumi kvadrātvienādojumam, ko var konstruēt ar dotā vienādojuma koeficientiem. Līdzīgā kārtā pieņemot, ka 4. pakāpes vienādojuma atrisinājums ir

$$x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C},$$

var sastādīt tādu 3. pakāpes vienādojumu (resolventi), kam par saknēm ir A, B, C. **Eulers** domāja, ka arī 5. pakāpes vienādojuma atrisinājums būs uzrakstāms formā

$$x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}.$$

Tomēr izrādās, ka te attiecīgā resolvente ir 6. pakāpes vienādojums.

Ja kubvienādojuma $x^3 + px + q = 0$ atrisinājums ir $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, tad

$$x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{AB}\left(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}\right) = A + B + 3\sqrt[3]{AB}\,.\,x$$

Salīdzinot ar doto vienādojumu $x^3 = -px - q$, dabū

$$A + B = -q, \quad A\,.\,B = -\frac{p^3}{27}$$

Tādēļ meklētais kvadrātvienādojums, ko apmierina A un B, ir

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Ja liek $y = 27z$, tad tas top identisks ar **Lagranža** resolventi.

Tagad izlietāsim **Eulera** metodi 4. pakāpes vienādojumam

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Pieņemsim, ka $x = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$, un meklēsim tādu trešās pakāpes vienādojumu

$$z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3 = 0,$$

kam saknes ir z_1, z_2, z_3. Tādā gadījumā sakari starp vienādojuma saknēm un koeficientiem ir

$$z_1 + z_2 + z_3 = -A_1, \quad z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = A_2, \quad z_1 z_2 z_3 = -A_3.$$

Tā kā

$$x^2 = z_1 + z_2 + z_3 + 2\left(\sqrt{z_1 z_2} + \sqrt{z_2 z_3} + \sqrt{z_1 z_3}\right) =$$
$$= -A_1 + 2\left(\sqrt{z_1 z_2} + \sqrt{z_2 z_3} + \sqrt{z_1 z_3}\right),$$

tad

$$(x^2 + A_1)^2 = 4\left[A_2 + 2\sqrt{z_1 z_2 z_3}\left(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}\right)\right] = 4A_2 + 8\sqrt{-A_3}\,x$$

jeb $\quad x^4 + 2A_1 x^2 - 8\sqrt{-A_3}\,x + (A_1^2 - 4A_2) = 0.$

Šim vienādojumam jābūt ekvivalentam ar doto. Salīdzinot koeficientus, atrodam

$$A_1 = \frac{p}{2}, \quad A_3 = -\frac{q^2}{64}\left(\text{bet } \sqrt{-A_3} = -\frac{q}{8}\right), \quad A_2 = \frac{p^2 - 4r}{16}.$$

Tādēļ resolventes vienādojums ar saknēm z_1, z_2, z_3 ir

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z - \frac{q^2}{64} = 0.$$

Izteiksmē

$$x = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

radikāļu zīmes jāizvēlas tādas, lai būtu

$$\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = \sqrt{-A_3} = -\frac{q}{8}.$$

No 8 iespējamiem kombinējumiem par derīgiem jāatzīst tikai 4. Liekot, ja vajadzīgs, x vietā $-x$ var iekārtot tā, lai $q < 0$. Tādā gadījumā dotā vienādojuma saknes ir

$$x_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \quad x_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$
$$x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

Ir secināmas formulas

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = 4(z_2 - z_3)$$
$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) = 4(z_1 - z_3)$$
$$(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = 4(z_1 - z_2).$$

Tās sareizinot un paceļot kvadrātā, dabū 4. pakāpes vienādojuma diskriminantu

$$D = 4^6\Delta$$

atkarībā no Eulera resolventes diskriminanta Δ.

5. Kā pēdējo apskatīsim **ģeometrisko metodi.** Vienādojums $x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$ ir līdzvērtīgs sistēmai

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 + a_1 xy + a_2 y + a_3 x + a_4 = 0 \end{cases}$$

vai arī sistēmai

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 + a_1 xy + a_2 y + a_3 x + a_4 + \lambda(x^2 - y) = 0. \end{cases}$$

Te pirmais vienādojums ģeometriski reprezentē parabolu, bet otrs ar patvaļīgu parametru λ — kādu otrās **kārtas** (pakāpes) līkni (koniku). Abu līniju krustošanās punktu abscisas izteic dotā vienādojuma saknes.

Izvēlēsimies λ tādu, lai otrais vienādojums

$$\lambda x^2 + a_1 xy + y^2 + a_3 x + (a_2 - \lambda) y + a_4 = 0$$

izteiktu divas taisnes. Tādā gadījumā, kā zināms no analitiskās ģeometrijas, nepieciešams un pietiekošs nosacījums ir

$$\begin{vmatrix} \lambda & \frac{a_1}{2} & \frac{a_3}{2} \\ \frac{a_1}{2} & 1 & \frac{a_2-\lambda}{2} \\ \frac{a_3}{2} & \frac{a_2-\lambda}{2} & a_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{jeb} \quad \begin{vmatrix} 2\lambda & a_1 & a_3 \\ a_1 & 2 & a_2-\lambda \\ a_3 & a_2-\lambda & 2a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Atklātā formā dabūjam vienādojumu

$$\lambda^3 - 2a_2\lambda^2 + (a_1 a_3 + a_2^2 - 4a_4)\lambda + (a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3 + a_3^2) = 0.$$

Arī te var sameklēt transformāciju, kas šo vienādojumu pārveido **Lagranža** resolventē.

Ar piemērotu parametra λ nozīmi ir nosakāmas taisnes $Ax+By+C=0$ un $A_1x+B_1y+C_1=0$. Minētā sistēma ir ekvivalenta divām vienkāršākām sistēmām

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \quad \text{un} \quad \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \end{cases}$$

vai diviem kvadrātvienādojumiem

$$Ax + Bx^2 + C = 0 \quad \text{un} \quad A_1 x + B_1 x^2 + C_1 = 0.$$

§ 28. Diskusija par kubvienādojuma saknēm.

Kubvienādojuma sakņu analizei ir vajadzīga vispārīga **teōrēma:**

J a v i e n ā d o j u m a $f(z)=1$ v i s i k o e f i c i e n t i i r r e ā l i s k a i t ļ i u n t ā v i e n a s a k n e i r k o m p l e k s a, t a d t a m i r a r ī s a k n e, k a s i r s a i s t ī t i k o m p l e k s ā a r d o t o.

Ja polinomā $f(z)$ ar reāliem koeficientiem liksim $z=x+iy$ (x un y reāli) un šķirsim reālos no imagināriem, tad

$$f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y),$$

kur P un Q ir reālu koeficientu un reālu argūmentu polinomi. Ievērojot, ka koeficienti ir reāli skaitļi, atrodam, ka polinoma vērtība saistītam kompleksam argumentam $\bar{z}=x-iy$ ir

$$f(x-iy) = P(x,y) - i\,Q(x,y).$$

Ja nu $x+iy$ ir vienādojuma $f(z)=0$ sakne, tad

$$P(x,y) = Q(x,y) = 0.$$

Tādēļ arī $f(x-iy)=0$, t. i. arī $x-iy$ ir $f(z)=0$ sakne.

Apskatīsim tādu kubvienādojumu $x^3+px+q=0$, kurā

koeficienti p un q ir reāli skaitļi (līdz šim mums nekur tāds ierobežojums nav bijis). Tā saknes ir x_1, x_2, x_3 un diskriminants

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 = -(4p^3 + 27q^2).$$

Tad $D > 0$ ir nepieciešamais un pietiekošais nosacījums, lai visas trīs vienādojuma saknes būtu reālas un dažādas.

Tiešām, ja visas trīs saknes ir reālas un dažādas, tad $(x_1 - x_2)^2$, $(x_2 - x_3)^2$, $(x_3 - x_2)^2$ ir pozitīvi skaitļi un to reizinājums $D > 0$. Bet ja vienādojumam ir kompleksas saknes: $x_1 = a + bi$, $x_2 = a - bi$, $x_3 = c$ (a, b, c reāli), tad

$$(x_1 - x_2)^2 = -4b^2 < 0,$$

$$(x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 = (a - c)^2 + b^2 > 0 \text{ un } D < 0.$$

Šos slēdzienus apstiprina arī Kardano formula, kurā izteiksme

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{D}{108}$$

Apskatīsim sekojošus gadījumus.

1. **Ja $D < 0$**, t. i. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, tad

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{un} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ir reāli lielumi. Viena sakne $x_1 = u + v$ ir reāla, bet pārējās divas $x_{2,3} = -\frac{1}{2}(u + v) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}(u - v)$ saistīti kompleksas.

2) **ja $D = 0$**, t. i. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, tad

$$u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \text{ bet } x_1 = 2u, \; x_2 = x_3 = -u.$$

Tā tad visas trīs saknes ir reālas: divas no tām ir vienādas, bet trešai pretēja zīme un divreiz lielāka absolūtā vērtība.

3. **Ja $D > 0$**, tad $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -B^2 < 0$ un *apriori* $p < 0$.

Apzīmēsim $-\frac{q}{2} = A$ un pierādīsim, ka $u = \sqrt[3]{A + Bi}$ un

$v = \sqrt[3]{A - Bi}$ ir saistīti kompleksi skaitļi (uzrakstot u un v trigonometriskā formā, šis apgalvojums top acīm redzams).

Lemma. Ja divu komplekso skaitļu $z_1 = a_1 + b_1 i$ un $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(b_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0)$ moduļi ir vienādi un to reizinājums ir reāls un pozitīvs, tad z_1, z_2 ir saistīti kompleksie skaitļi.

Dots, ka $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$ un $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$ ir reāls pozitīvs skaitlis. Tā tad $a_1 a_2 - b_1 b_2 > 0$ un $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$.

Pēdējās vienādības abas puses dalām ar $b_1 b_2 \neq 0$. Dabūto proporciju

$$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$$

kāpinām kvadrātā:

$$\frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_2^2}{b_2^2}$$

un pieskaitām abām pusēm 1. Rodas proporcija

$$\frac{a_1^2 + b_1^2}{b_1^2} = \frac{a_2^2 + b_2^2}{b_2^2},$$

kuŗai ir vienādi locekļi

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2.$$

Tad jābūt vienādiem arī locekļiem: $b_1^2 = b_2^2$ jeb $b_1 = \pm b_2$.

Ja pieņemam, ka $b_1 = +b_2$, tad formula

$$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$$

prasa, ka $a_1 = -a_2$, un dotā nevienādība $a_1 a_2 - b_1 b_2 > 0$ top neiespējama.

Atliek tikai iespēja $b_1 = -b_2$. Tad $a_1 = a_2$, un lemma ir pierādīta.

Varam pārliecināties, ka $u = \sqrt[3]{A + Bi}$ un $v = \sqrt[3]{A - Bi}$ izpilda lemmas nosacījumus. Tiešam

$$|u|^2 = \sqrt[3]{|A + Bi|^2} = \sqrt[3]{A^2 + B^2} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3} \quad \text{un} \quad |v|^2 = -\frac{p}{3},$$

bet

$$uv = \sqrt[3]{A^2 + B^2} = -\frac{p}{3} > 0.$$

Tādēļ u un v tiešām ir saistīti kompleksi skaitļi.

Ja $u=a+bi$, tad $v=a-bi$, un vienādojuma saknes ir

$$x_1 = 2a, \quad x_{2,3} = -a \pm b\sqrt{3}.$$

Vienīgās grūtības ir noteikt skaitļus a un b tā, lai

$$a + bi = \sqrt[3]{A + Bi}.$$

Kāpinām formulas abas puses kubā, un salīdzinām atsevišķi reālās un atsevišķi imāginārās daļas. Tad dabūjam **a** un **b** noteikšanai vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = A \\ 3a^2b - b^3 = B \end{cases}$$

Liekot $a = b.t$ un izslēdzot b, dabū jaunu vienādojumu

$$t^3 - 3\frac{A}{B}t^2 - 3t + \frac{A}{B} = 0,$$

ko ar līneāru transformāciju $y = t - \frac{A}{B}$ var reducēt kanoniskā formā

$$y^3 - 3\left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right)y - 2\frac{A}{B}\left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right) = 0.$$

Ar apzīmējumu $1 + \frac{A^2}{B^2} = k > 0$ dabū vienādojumu

$$y^3 - 3ky - 2k\frac{A}{B} = 0,$$

kuŗa diskriminants $D_1 = 4.27k^2 > 0$. Esam nonākuši pie tādas pat problēmas kā sākumā.

Varētu domāt, ka ir kāda cita algebriska metode, ar kuŗu var aprēķināt $\sqrt[3]{A + Bi}$. Tomēr tā nav, jo 1880. g. **Helders** *(Hölder)* ir pierādījis, ka ar algebriskiem līdzekļiem šis uzdevums nav atrisināms. Tādēļ trešās pakāpes vienādojuma atrisināšanas gadījumu, kad $D > 0$, apzīmē ar **nereducējamu** *(Casus irreducibilis)*.

Šinī gadījumā saknes izteicamas trigōnometriskā formā.

Ja

$$A + Bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

tad

$$r^2 = A^2 + B^2, \quad \cos\varphi = \frac{A}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{B}{r}.$$

Ar lietotām nozīmēm izteic

$$A = -\frac{q}{2},\ r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \text{ un } \left|\frac{A}{r}\right| < 1, \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0\right).$$

Tādēļ ar $\cos\varphi$ un $\sin\varphi$ izteiksmēm leņķis $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ ir nosakāms viennozīmīgi.

Ievērojot $\cos\varphi$ un $\sin\varphi$ periodītāti, var izteikt

$$u = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right)$$

un

$$v = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right),$$

kur $k = 1, 2, 3$. Tā kā $\sqrt[3]{r} = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, tad formulas

$$x_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \text{ ar } k = 1, 2, 3$$

izteic trīs reālas un dažādas saknes vienādojumam

$$x^3 + px + q = 0.$$

Pēc **citas trigōnometriskās metodes** izlietā formulu

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Apzīmējot $\cos\alpha = y$, $\cos 3\alpha = m$, var sastādīt y noteikšanai vienādojumu

$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{m}{4} = 0.$$

Ja vienādojumu $x^3 + px + q = 0$ transformē ar substitūciju $x = t \cdot y$ formā

$$y^3 + \frac{p}{t^2}y + \frac{q}{t^3} = 0,$$

tad tas top identisks ar iepriekšējo, kad

$$-\frac{3}{4} = \frac{p}{t^2} \text{ un } -\frac{m}{4} = \frac{q}{t^3}.$$

Tā tad jābūt

$$t = 2\sqrt{-\frac{p}{3}},\ m = \frac{-4q}{t^3} = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}.$$

Zinot t un $m = \cos 3\alpha$, atrod α un pēc tam $x = ty = t\cos\alpha$.

§ 29. Diskusija par 4. pakāpes vienādojuma saknēm.

Ceturtās pakāpes vienādojumam

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

ar reāliem koeficientiem p, q, r **Eulera** resolvente

$$z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16} z - \frac{q^2}{64} = 0$$

ir ar saknēm z_1, z_2, z_3.

Vienādojuma diskriminants $D = 4^6 . \Delta$, kur Δ ir diskriminants resolventei. Ja $q > 0$ (sk. § 27.), tad

$$x_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \quad x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}$$
$$x_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \quad x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.$$

Ir iespējami šādi **gadījumi:**

I. $D > 0$ (resp. $\Delta > 0$), II. $D = 0$ ($\Delta = 0$) un III. $D < 0$ ($\Delta < 0$).

I. $D > 0$, $\Delta > 0$. Ja $p < 0$, $4r - p^2 < 0$, tad z_1, z_2, z_3 ir reāli skaitļi, un divi no tiem var būt negatīvi, jo

$$z_1 z_2 z_3 = \frac{q^2}{64} > 0.$$

Pieņemsim, ka z_1 ir pozitīvs, z_2 un z_3 negatīvi. Tad

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 - |z_2| - |z_3| = -\frac{p}{2} > 0$$

norāda, ka $z_1 > |z_2| + |z_3|$

vai $z_1 (|z_2| + |z_3|) > (|z_2| + |z_3|)^2$.

Ja no šīs nevienlīdzības abām pusēm atņem $|z_2| \, |z_3|$, tad dabū

$$z_1 |z_2| + z_1 |z_3| - |z_2| \, |z_3| > |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_2| \, |z_3| > 0$$

jeb $-(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) > 0$.

Te rodas pretruna

$$4r - p^2 > 0,$$

jo dotais nosacījums ir $4r - p^2 < 0$.

Tā tad, šinī gadījumā visas trīs saknes z_1, z_2, z_3 ir pozitīvas un dažādas. No Eulera formulām seko, ka šinī gadījumā arī saknes x_1, x_2, x_3, x_4 ir reālas un dažādas.

Ja $D > 0$, bet abas vai viena no prasībām $p < 0$, $4r - p^2 < 0$ nav izpildīta, tad divas z nozīmes ir negātīvas, piem, $z_2 < 0$, $z_3 < 0$, bet $z_1 > 0$. Šinī gadījumā ceturtās pakāpes vienādojumam ir divi pāri kompleksi saistītu saknu:

$$x_{1,2} = \sqrt{z_1} \pm i\left(\sqrt{|z_2|} + \sqrt{|z_3|}\right)$$
$$x_{3,4} = -\sqrt{z_1} \pm i\left(\sqrt{|z_2|} - \sqrt{|z_3|}\right)$$

II. $D = 0$ ($\Delta = 0$). Ja $p < 0$, $4r - p^2 < 0$, tad visas trīs resolventes saknes ir pozitīvas un divas no tām vai arī visas trīs ir vienlīdzīgas. Ceturtās pakāpes vienādojumam visas četras saknes ir reālas, un divas vai trīs no tām ir vienlīdzīgas.

Ja $p \leqslant 0$, $4r - p^2 = q = 0$, tad $z_2 = z_3 = 0$, $z_1 \geqslant 0$, un ceturtās pakāpes vienādojumam ir divi pāri reālu divkārtēju saknu:

$$x_{1,2} = \sqrt{z_1}, \quad x_{3,4} = -\sqrt{z_1}.$$

Kad $p = 0$, tad arī

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Jā nosacījumi

$$p < 0, \quad 4r - p^2 < 0 \quad \text{vai} \quad 4r - p^2 = q = 0$$

nav izpildīti, tad

$$z_2 = z_3 < 0, \quad z_1 > 0,$$

un ceturtās pakāpes vienādojumam divas vienādās saknes ir reālas un divas kompleksi saistītas:

$$x_{1,2} = \sqrt{z_1} \pm 2i\sqrt{|z_2|}, \quad x_{3,4} = -\sqrt{z_1}.$$

Ja $p > 0$ un $4r - p^2 = q = 0$, tad

$$z_1 < 0, \quad z_2 = z_3 = 0,$$

un dotajam vienādojumam ir divkārtējas kompleksi saistītas saknes:

$$x_{1,2} = i\sqrt{|z_1|}, \quad x_{3,4} = -i\sqrt{|z_1|}$$

III. **$D < 0$** ($\Delta < 0$). Šinī gadījumā z_2, z_3 ir kompleksi saistīti skaitļi. Ja

$$\sqrt{z_2} = \alpha + i\beta,$$

tad $\sqrt{z_3} = \alpha - i\beta$ un $z_2 z_3 > 0$.

No formulas

$$z_1 z_2 z_3 = \frac{q^2}{64} > 0$$

seko, ka arī $z_1 > 0$. Šinī gadījumā ceturtās pakāpes vienādojumam divas saknes ir reālas, pārejās divas kompleksi saistīti skaitļi

$$x_{1,2} = \sqrt{z_1} \pm 2\alpha, \quad x_{3,4} = -\sqrt{z_1} \pm 2\beta i.$$

Uzdevumi.

1. Atrisināt vienādojumus:

a) $x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = 0$; $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$;
$x^3 - 10x - 1 = 0$; $x^3 - 6ix^2 - 10x + 8i = 0$;
$x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - b^2)\,x - a^3 + ab^2 = 0$.

b) $x^4 + 2x^2 - 12x^2 - 10x + 3 = 0$;
$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$; $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 = 0$;
$4x^4 - 11x^2 + 9x - 2 = 0$ (Eulera metode);
$x^4 - 12ax^2 + (45a^2 - b^2)\,x^2 - 2a\,(29a^2 - 5b^2)\,x + 24a^2\,(a^2 - b^2) = 0$.

2. Pierādīt, ka vispārīgo 3. pakāpes polinomu

$$f(x) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3$$

var pārveidot formā

$$A(x-a)^3 + B(x-b)^3,$$

kur a un b ir tāda kvadrātvienādojuma $F(x)=0$ saknes, kuŗa koeficienti racionāli izteicāmi ar $f(x)$ koeficientiem.

Secināt metodi 3. pakāpes vienādojuma $f(x)=0$ atrisināšanai un pierādīt, ka polinoma $f(x)$ diskriminants ir 0 tikai tad, ja arī polinoma $F(x)$ diskriminants ir 0.

V. Binomālie vienādojumi.

§ 30. Binomālo vienādojumu sakņu īpašības. Primitīvās saknes.

Vispārīgo binomālo vienādojumu $Ay^k + By^h = 0$ ar konstantēm A, B un veseliem kāpinātājiem $k > h$ var pārveidot vienkāršākā formā, sadalot faktoros vienādojuma kreiso pusi

$$Ay^h\left(y^{k-h} + \frac{B}{A}\right) = 0.$$

Tad vienādojumam $y^h = 0$ saknes ir $y_1 = y_2 = \ldots = y_h = 0$, bet pārējās saknes dod vienādojums $y^{k-h} + \frac{B}{A} = 0$.

Apzīmējot $k - h = n$ un izdarot līneāru transformāciju

$$y = x\sqrt[n]{-\frac{B}{A}},$$

dabū binomāla vienādojuma kanonisko formu

$$x^n - 1 = 0.$$

Ja $f(x) = x^n - 1$, tad visas vienādojuma $f'(x) = nx^{n-1} = 0$ saknes ir nulles, bet $f(0) \neq 0$.

Tādēļ binomālam vienādojumam (kanoniskā formā) visas saknes ir dažādas.

Ir tikai divi reāli skaitļi, kuŗu absolūtā vērtība ir 1. Tādēļ binomālam vienādojumam nevar būt vairāk kā divas reālas saknes: ja n ir pāŗu skaitlis, tad tādas saknes ir $+1$ un -1, bet ja n ir nepāŗu skaitlis, tad tikai $+1$.

Visas binomālā vienādojuma saknes ir uzrakstāmas trigōnometriskā formā ar izteiksmi

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad k = 1, 2, \ldots, n \text{ un } i = \sqrt{-1}.$$

Attēlotas komplekso skaitļu plāksnē, tās sadala n vienlīdzīgās daļās riņķa līniju, kuŗas centrs ir 0 punktā un radijs 1. Ap 1800. g. Gauss ir devis metodi binomālo vienādojumu atrisināšanai algebriskā formā un pierādījis, ka ar elementāriem līdzekļiem (cirkuli un līneālu) konstruēt binomālā vienādojuma saknes, resp. sadalīt riņķa līniju n vienlīdzīgās daļās var tikai tad, ja n ir vai nu pirmskaitlis formā $2^{2^k}+1$, vai arī zināma veida šādu pirmskaitļu produkts. Formā $2^{2^k}+1$ izteicami pirmskaitļi 3, 5, 17, 257, . . . Tādēļ ir iespējams konstruēt ar elementāriem līdzekļiem rēgulārus daudzstūŗus, kuŗu malu skaits ir viens no skaitļiem

$2^k, 2^k.3, 2^k.5, 2^k.17, \ldots, 2^k.3.5, 2^k.3.17, 2^k.5.17, 2^k.3.5.17, \ldots$

Zemāko pakāpju binomālie vienādojumi ar $n=1, 2, \ldots, 10$, un daži ar $n>10$ ir atrisināmi elementāri.

Piemērs. $x^7-1=0.$

Kreiso pusi var sadalīt faktoros

$$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0.$$

Dabūjam: 1) $x-1=0$ ar sakni $x=1$ un 2) simmetrisko jeb reciproko 6. pakāpes vienādojumu:

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x+1=0.$$

Lai atrisinātu pēdējo, dalām abas puses ar x^3 un apzīmējam

$$x+\frac{1}{x}=y.$$

Tad

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2, \quad x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y,$$

un dabūjam trešās pakāpes vienādojumu

$$y^3+y^2-2y-1=0,$$

ko var atrisināt algebriski.

Apskatīsim dažas binomālo vienādojumu sakņu **īpašības**, kas izteiktas ar sekojošām teōrēmām.

Teōrēma I. Ja $n>1$, tad visu binomālā vienādojuma sakņu summa ir nulle.

Tas tādēļ, ka vienādojumā nav locekļa ar x^{n-1}.

Teōrēma II. Reizē ar x_1 un x_2 arī $x_1 x_2$, $\frac{x_1}{x_2}$ un x_1^k (k vesels skaitlis) ir binomālā vienādojuma $x^n-1=0$ saknes.

Ja $x_1^n=1$ un $x_2^n=1$, tad arī

$$(x_1 x_2)^n=1, \quad \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n=1 \text{ un } (x_1^k)^n=(x_1^n)^k=1.$$

Jāpiezīmē, ka x_1 un x_1^{-1} ir saistīti kompleksi skaitļi. Tiešām ja $x_1 = p + qi$ tad

$$x_1^{-1} = \frac{1}{p+qi} = \frac{p-qi}{p^2+q^2}.$$

Tā kā $p^2 + q^2 = |x_1|^2 = 1$, tad $x_1^{-1} = p - qi$.

Sakars

$$x_1 + x_1^{-1} = 2p$$

norāda, ka binomālā vienādojuma saknes x_1 reālā daļa ir

$$p = \frac{1}{2}(x_1 + x_1^{-1}).$$

Teorēma III. Ja n dalās d, t. i. $n|d$, tad vienādojuma $x^d - 1 = 0$ saknes ir arī vienādojuma $x^n - 1 = 0$ saknes.

Tiešām, ja $x_1^d = 1$ un $n = n_1 d$ ar veselu skaitli n_1, tad arī $x_1^{dn_1} = 1$, jeb $x_1^n = 1$.

Teorēma IV. Visas divu binomālu vienādojumu $x^a - 1 = 0$ un $x^b - 1 = 0$ kopīgās saknes ir arī vienādojuma $x^d - 1 = 0$ saknes, kur d ir skaitļu a un b lielākais kopīgais dalītājs, t. i. $d = (a, b)$, un otrādi: vienādojuma $x^d - 1 = 0$ katra sakne ir arī vienādojumu $x^a - 1 = 0$ un $x^b - 1 = 0$ sakne.

Ja $a > b$, tad var izteikt ar kvocientu q un atlikumu r skaitli $a = b \cdot q + r$. Te $b > r$ un $(a, b) = (a, r)$. Ja x_1 ir vienādojuma $x^a - 1 = 0$ un arī vienādojuma $x^b - 1 = 0$ sakne, tad x_1 ir arī vienādojuma

$x^r - 1 = 0$ sakne, jo $x_1^r = x_1^{a-bq} = x_1^a \cdot (x_1^b)^{-q} = 1$.

Tā tad no diviem dotajiem veseliem skaitļiem a un b var atrast trešo veselo skaitli r, kas mazāks par abiem dotajiem, pie kam $(a, b) = (a, r)$ un x_1 ir arī vienādojuma $x^r - 1 = 0$ sakne. Turpinot šo dalīšanas procesu (Euklida algoritmu), dabūsim dilstošu pozitīvu veselu skaitļu virkni

$$a > b > r > r_1 > r_2 > \ldots,$$

kurai

$$(a, b) = (a, r) = (a, r_1) = \ldots = d.$$

Tādēļ agri vai vēlu virknei jāizbeidzas ar $r_n = d$. Skaitlis x_1 ir arī vienādojumu

$$x^{r_1} - 1 = 0, \quad x^{r_2} - 1 = 0, \ldots,$$

beidzot arī $x^{r_n} - 1 = 0$, t. i. $x^d - 1 = 0$ sakne.

Otrādi: Ja x_1 ir vienādojuma $x^d - 1 = 0$ sakne, tad x_1 ir arī vienādojumu $x^a - 1 = 0$ un $x^b - 1 = 0$ sakne, jo $a|d$ un $b|d$.

Sekas. Ja $(a, b) = 1$, t. i. a un b ir relātīvi pirmskaitļi, tad vienādojumiem $x^a - 1 = 0$ un $x^b - 1 = 0$ ir tikai viena kopīga sakne $x_1 = 1$.

Teōrēma V. Ja p ir absolūts pirmskaitlis un vienādojuma $x^p - 1 = 0$ viena sakne ir $x_1 \neq 1$, tad rindā $x_1, x_1^2, x_1^3, \ldots, x_1^p$ atrodas visas vienādojuma saknes.

Pietiek pierādīt, ka visi skaitļi rindā $x_1, x_1^2, \ldots, x_1^p$ ir dažādi, jo reizē ar x_1 visi x_1^k ir vienādojuma saknes, un arī to skaits p ir vajadzīgais. Ja rindā būtu divi vienādi skaitļi:

$$x_1^i = x_1^j \text{ ar } o < i < j \leq p,$$

tad $$x_1^k = 1, \text{ kur } k = j - i \text{ ar } 0 < k < p.$$

Vienādojumiem

$$x^p - 1 = 0 \text{ un } x^k - 1 = 0$$

būtu kopīga sakne x_1, kas — pretēji dotam — varētu būt tikai $x_1 = 1$, jo $(p, k) = 1$.

Ja x_1 apmierina binomālo vienādojumu

$$x^n - 1 = 0$$

un visi skaitļi rindā $x_1, x_1^2, \ldots, x_1^n$ ir dažādi, tad x_1 sauc par šī vienādojuma **prīmitīvo sakni.** Citādā veidā var definēt: x_1 ir vienādojuma $x^n - 1 = 0$ prīmitīvā sakne tad, ja x_1 nav sakne nevienam binomālam vienādojumam ar zemāku pakāpi nekā dotajam. Ir saprotams, ka abas definīcijas ir līdzvērtīgas.

Pierādīsim **teōrēmu VI**: katram binomālam vienādojumam $x^n - 1 = 0$ eksistē prīmitīvas saknes.

Prīmitīvo sakņu skaitu apzīmēsim ar $\varphi(n)$.

Pēc iepriekšējās teōrēmas (V.) vienādojuma

$$x^p - 1 = 0$$

katra sakne $x_1 \neq 1$ ir prīmitīva. Tādēļ $\varphi(p) = p - 1$, ja p ir pirmskaitlis.

Ja x_1 ir vienādojuma

$$x^n - 1 = 0$$

neprīmitīva sakne, tad x_1 ir kāda zemākas pakāpes vienādojuma

$$x^m - 1 = 0, \quad (m < n)$$

sakne.

Pēc teorēmas (IV) x_1 ir arī vienādojuma

$$x^d - 1 = 0$$

sakne, kur $d = (n, m)$. Tā kā $n | d$, tad vienādojuma $x^n - 1 = 0$ katra neprīmitīva sakne ir arī tāda vienādojuma

$$x^d - 1 = 0$$

sakne, kur d ir skaitļa n īsts dalītājs, t. i. $d < n$.

Gadījumā, kad $n = p^a$, visi īstie dalītāji $1, p, p^2, \ldots, p^{a-1}$ ir reizē arī skaitļa $N = p^{a-1}$ visi dalītāji. Tādēļ vienādojuma $x^n - 1 = 0$ katra neprīmitīvā sakne ir arī sakne vienādojumam

$$x^N - 1 = 0,$$

un, pats par sevi saprotams — arī otrādi.

Izdalot $x^n - 1$ ar $x^N - 1$, sastādām simmetrisku vienādojumu

$$x^{n-N} + x^{n-2N} + \ldots + x^N + 1 = 0,$$

ko sauc par **riņķa dalīšanas vienādojumu.** Šī vienādojuma visas saknes ir dotā binomālā vienādojuma prīmitīvās saknes, un to skaits ir

$$\varphi(n) = n - N = p^a - p^{a-1} = p^a\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Piemērs. Vienādojumam $x^9 - 1 = 0$ ir $9.\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6$ prīmitīvas saknes, kas apmierina vienādojumu $x^6 + x^3 + 1 = 0$.

Teorēma VII. Ja $(a, b) = 1$ un vienādojumu

$$x^a - 1 = 0, \quad y^b - 1 = 0$$

prīmitīvas saknes ir attiecīgi x_1 un y_1, tad vienādojumam $z^{ab} - 1 = 0$ ir prīmitīva sakne $z_1 = x_1 y_1$

Tiešam, z_1 ir vienādojuma $z^{ab} - 1 = 0$ sakne, jo

$$z_1^{ab} = (x_1^a)^b (y_1^b)^a = 1.$$

Pieņemsim, ka z_1 ir arī kāda zemākas pakāpes vienādojuma

$$z^m - 1 = 0 \text{ ar } m < ab$$

sakne.

Tad no sakara $x_1^m y_1^m = 1$ var izteikt $x_1^m = y_1^{-m}$. Pierādīsim, ka te ir pretruna.

Tiešām, x_1^m ir vienādojuma $x^a - 1 = 0$ sakne,un y_1^{-m} ir kāda vienādojuma $y^b - 1 = 0$ sakne. Sakars $x_1^m = y_1^{-m}$ norāda, ka abiem vienādojumiem ir kopīga sakne,kas $\neq 1$. Bet tas nav iespējams, ja $(a, b) = 1$.

Ja x_1, x_2 ir divas dažādas vienādojuma $x^a - 1 = 0$ prīmitīvās saknes un y_1, y_2 ir dažādas $y^b - 1 = 0$ prīmitīvās saknes, pie kam $(a, b) = 1$, tad arī $z_1 = x_1 y_1$ un $z_2 = x_2 y_2$ ir dažādas prīmitīvas vienādojuma $z^{ab} - 1 = 0$ saknes.

Pieņemot pretējo, ka $x_1 y_1 = x_2 y_2$, seko $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \neq 1$. Rodas līdzīga pretruna kā iepriekš. Tādēļ **sekas:**

Ja $(a, b) = 1$, tad $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Tagad varam noteikt vienādojuma $x^n - 1 = 0$ prīmitīvās saknes un to skaitu $\varphi(n)$ **vispārīgā gadījumā**, kad n sadalījums dažādu pirmskaitļu $p, q, r, \ldots$ produktā ir

$$n = p^a q^b \ldots r^k.$$

Ja izvēlas visos iespējamos veidos no katra vienādojuma

$$x^{p^a} - 1 = 0,\ x^{q^b} - 1 = 0, \ldots, x^{r^k} - 1 = 0$$

pa vienai prīmitīvai saknei un tās sareizina, tad dabū visas vienādojuma $x^n - 1 = 0$ prīmitīvās saknes. To skaits ir

$$\varphi(n) = \varphi(p^a) \cdot \varphi(q^b) \ldots \varphi(r^k) =$$

$$= p^a q^b \ldots r^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{r}\right),$$

jeb

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{r}\right).$$

Funkciju $\varphi(n)$ lietā arī skaitļu teōrijā, kur tā izteic ar skaitli n tō relātīvo pirmskaitļu skaitu, kas ir mazāki par skaitli **n**.

Piemērs. $x^{12} - 1 = 0.$

Te $12 = 2^2 \cdot 3$ un $\varphi(12) = 4$. Tādēļ sastādām vienādojumus

$$x^4 - 1 = 0 \text{ un } x^3 - 1 = 0.$$

Vienādojuma $x^4 - 1 = 0$ primitīvās saknes apmierina vienādojumu $x^2 + 1 = 0$, kam ir saknes $\pm i$. Bet $x^3 - 1 = 0$ prīmitīvās saknes dod vienādojums

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1 = 0,$$

kam saknes ir

$$\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}).$$

Pirmā vienādojuma katru sakni reizinot ar otrā vienādojuma katru sakni, dabūjam visas četras vienādojuma $x^{12} - 1 = 0$ prīmitīvās saknes. Vienu no tām, piemēram

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i),$$

kāpinot visās pakāpēs no 1 līdz 12, dabūsim visas vienādojuma $x^{12} - 1 = 0$ saknes.

§ 31. Riņķa līnijas sadalīšana vienlīdzīgās daļās. Regulāra 17-stūŗa konstrukcija.

Riņķa līnijas sadalīšanai n vienlīdzīgās daļās pietiek konstruēt vienādojuma $x^n - 1 = 0$ vienu prīmitīvo sakni x_1 un atkārtot tās amplitūdu n reizes. Saknes x_1 konstrukcijai savukārt pietiek konstruēt tās reālo daļu $\frac{1}{2}(x_1 + x_1^{-1})$, bet šī konstrukcija ar elementāriem līdzekļiem katrreiz nav iespējama.

Piemēram, apskatīsim **riņķa līnijas dalīšanu 5 un 7 vienlīdzīgās daļās.**

1. Vienādojuma $x^5 - 1 = 0$ četras kompleksas saknes

$$x_1,\ x_1^2,\ x_1^3,\ x_1^4,\quad (x_1 \neq 1).$$

iespējams sakārtot tā, ka katra nākošā ir iepriekšējās kvadrāts:

$$x_1,\ x_1^2,\ x_1^4,\ x_1^8 \text{ jeb } x_1,\ x_1^2,\ x_1^{-1},\ x_1^{-2}.$$

Apzīmēsim

$$x_1 + x_1^{-1} = y_1,\quad x_1^2 + x_1^{-2} = y_2.$$

Tā kā vienādojuma $x^5 - 1 = 0$ visu piecu sakņu $1, x_1, x_1^2, x_1^3, x_1^4$ summa ir 0, tad

$$y_1 + y_2 = -1 \text{ un } y_1 y_2 = (x_1 + x_1^{-1})(x_1^2 + x_1^{-2})$$

jeb

$$y_1 y_2 = x_1 + x_1^{-1} + x_1^2 + x_1^{-2} = -1.$$

Redzam, ka y_1, y_2 ir kvadrātvienādojuma

$$y^2 + y - 1 = 0$$

saknes

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

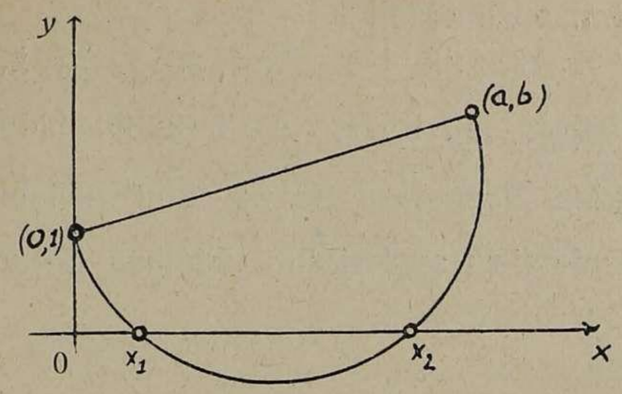
Tās var ar cirkuli un līneālu konstruēt.

Piemēram, var sākt konstrukciju ar taisnleņķa trijstūri, kam katetēs ir 1 un 2, tā tad hipotenūza ir $\sqrt{5}$ u. t. t.

Var arī izlietāt **kvadrātvienādojuma**

$$x^2 - ax + b = 0$$

reālo sakņu tiešas konstrukcijas metodi, kas pamatojas uz sekojošās īpašības. Riņķa līnija, kam punkti (a, b) un (0, 1) koordinātu sistēmā (x, y) ir diametra gala punkti, krustojoties ar x-asi, atšķeļ dotā vienādojuma saknes x_1, x_2.



Pierādījumu dod sekojošs analitisks aprēķins.

Tā kā riņķa centrs ir ar koordinatām $\left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ un radija kvadrāts ir $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2$, tad riņķa līnijas vienādojums ir

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Atrisinot kopīgi ar x-ass vienādojumu $y = 0$, dabūjam kvadrātvienādojumu $x^2 - ax + b = 0$, kam saknes ir x_1 un x_2.

2. **Vienādojuma $x^7 - 1 = 0$** sešas kompleksās saknes var sakārtot tā, ka katra nākošā ir iepriekšējās kubs ($x_1 \neq 1$):

$$x_1, \quad x_1^3, \quad x_1^{3^2} = x_1^9 = x_1^2, \quad x_1^{3^3} = x_1^6 = x_1^{-1},$$

$$x_1^{3^4} = x_1^{-3}, \quad x_1^{3^5} = x_1^{-9} = x_1^{-2},$$

bet

$$x_1^{3^6} = x_1^{-6} = x_1 \text{ u. t. t.}$$

Ja apzīmējam ar

$$y_1 = x_1 + x_1^{3^2} + x_1^{3^4} = x_1 + x_1^2 + x_1^{-3}$$

un

$$y_2 = x_1^3 + x_1^{3^3} + x_1^{3^5} = x_1^3 + x_1^{-1} + x_1^{-2},$$

tad

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -1 \\ y_1 \, y_2 = 2 \end{cases}$$

Kā kvadrātvienādojuma $y^2 + y + 2 = 0$ saknes y_1, y_2 gan var konstruēt ar cirkuli un līneālu, bet ar to nav līdzēts x_1 konstrukcijai.

Ja, turpretim, apzīmējam

$$x_1 + x_1^{-1} = z_1,\quad x_1^2 + x_1^{-2} = z_2,\quad x_1^3 + x_1^{-3} = z_3$$

$\left(\frac{z_1}{2}\text{ ir } x_1 \text{ reālā daļa}\right)$, tad z_1, z_2, z_3 ir kubvienādojuma saknes, un ar elementāriem līdzekļiem tās nav konstruējamas.

Kā pēdējo piemēru apskatīsim **regulāra 17-stūŗa konstrukciju.**

Vienādojuma

$$x^{17} - 1 = 0$$

16 kompleksās saknes iespējams sakārtot tā, ka katra nākošā ir iepriekšējās kubs ($x_1 \neq 1$):

$$x_1,\ x_1^3,\ x_1^{3^2} = x_1^9 = x_1^{-8},\ x_1^{3^3} = x_1^{-24} = x_1^{-7},\ x_1^{3^4} = x_1^{-21} = x_1^{-4},$$
$$x_1^{3^5} = x_1^{-12} = x_1^5,\ x_1^{3^6} = x_1^{15} = x_1^{-2},\ x_1^{3^7} = x_1^{-6},\ x_1^{3^8} = x_1^{-18} = x_1^{-1},$$
$$x_1^{3^9} = x_1^{-3},\ x_1^{3^{10}} = x_1^{-9} = x_1^8,\ x_1^{3^{11}} = x_1^{24} = x_1^7,\ x_1^{3^{12}} = x_1^{21} = x_1^4,$$
$$x_1^{3^{13}} = x_1^{12} = x_1^{-5},\ x_1^{3^{14}} = x_1^{-15} = x_1^2,\ x_1^{3^{15}} = x_1^6,$$

bet
$$x_1^{3^{16}} = x_1^{18} = x_1 \text{ u. t. t.}$$

Sadalām tās divās grupās un apzīmējam

$$y_1 = x_1 + x_1^{3^2} + x_1^{3^4} + x_1^{3^6} + x_1^{3^8} + x_1^{3^{10}} + x_1^{3^{12}} + x_1^{3^{14}}$$

un

$$y_2 = x_1^3 + x_1^{3^3} + x_1^{3^5} + x_1^{3^7} + x_1^{3^9} + x_1^{3^{11}} + x_1^{3^{13}} + x_1^{3^{15}},$$

jeb

$$y_1 = x_1 + x_1^{-1} + x_1^2 + x_1^{-2} + x_1^4 + x_1^{-4} + x_1^8 + x_1^{-8}$$

un $$y_2 = x_1^3 + x_1^{-3} + x_1^5 + x_1^{-5} + x_1^6 + x_1^{-6} + x_1^7 + x_1^{-7}$$

Ievērojot, ka visu 17 sakņu summa ir nulle, atrodam

summu $$y_1 + y_2 = -1.$$

Reizinājuma $y_1 y_2$ formulas labajā pusē iznāk 64 locekļi, starp kuŗiem katra sakne atkārtojas 4 reizes. Tāpēc

$$y_1 y_2 = 4(y_1 + y_2) = -4.$$

Nozīmes y_1 un y_2 var konstruēt, vai aprēķināt kā kvadrātvienādojuma

$$y^2 + y - 4 = 0$$

saknes. Sadalīsim arī y_1 un y_2 četrās summās

$$y_{11} = x_1 + x_1^{3^4} + x_1^{3^8} + x_1^{3^{12}},\qquad y_{21} = x_1^3 + x_1^{3^5} + x_1^{3^9} + x_1^{3^{13}}$$
$$y_{12} = x_1^{3^2} + x_1^{3^6} + x_1^{3^{10}} + x_1^{3^{14}},\qquad y_{22} = x_1^{3^3} + x_1^{3^7} + x_1^{3^{11}} + x_1^{3^{15}}$$

jeb

$$y_{11} = x_1 + x_1^{-1} + x_1^4 + x_1^{-4}, \quad y_{21} = x_1^3 + x_1^{-3} + x_1^5 + x_1^{-5},$$

$$y_{12} = x_1^2 + x_1^{-2} + x_1^8 + x_1^{-8}, \quad y_{22} = x_1^6 + x_1^{-6} + x_1^7 + x_1^{-7},$$

kas apzīmētas ar dubultindekiem. Sakari

$$y_{11} + y_{12} = y_1, \quad y_{11} \cdot y_{12} = y_1 + y_2 = -1$$

norāda, ka y_{11} un y_{12} ir kvadrātvienādojuma

$$z^2 - y_1 z - 1 = 0$$

saknes. Līdzīgā kārtā atrodam, ka y_{21} un y_{22} ir vienādojuma

$$t^2 - y_2 t - 1 = 0$$

saknes.

Beidzot sadalām arī y_{11} divās summās

$$y_{111} = x_1 + x_1^{-1}, \quad y_{112} = x_1^4 + x_1^{-4},$$

starp kuŗām ir sakari

$$\begin{cases} y_{111} + y_{112} = y_{11} \\ y_{111} \cdot y_{112} = y_{21} \end{cases}$$

Tā tad y_{111} un y_{112} ir vienādojuma

$$u^2 - y_{11} u + y_{21} = 0$$

saknes $u_1 = y_{111}$, $u_2 = y_{112}$. Tās var konstruēt ar cirkuli un līnealu. Tā kā $\frac{1}{2} y_{111} = \frac{1}{2}(x_1 + x_1^{-1})$ ir saknes x_1 reālā daļa un modulis $|x_1| = 1$, tad komplekso sakni x_1 var konstruēt.

Kvadrātvienādojuma

$$x_1 + x_1^{-1} = y_{111}$$

sakne x_1 izteicama ar algebriskiem simboliem, kuŗos atkārtojas kvadrātsakne $\sqrt{}$. Binomālā vienādojuma

$$x^{17} - 1 = 0$$

visas saknes dabū, kāpinot x_1 pakāpēs no 1 līdz 17.

Noteiktības dēļ pieņemsim, ka x_1 ir sakne ar mazāko pozitīvo amplitūdu $\varphi = \frac{2\pi}{17}$, t. i.

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{17} + i \sin\frac{2\pi}{17}.$$

Tad skaitļa x_1^4 amplitūda ir 4 reiz lielāka, bet arī $< \frac{\pi}{2}$. Tādēļ skaitļu x_1 un x_1^4 reālās daļas ir pozitīvas; no tām pirmā lielāka par otro. Abas kopā nosaka $y_{11} > 0$.

Vienādojuma

$$z^2 - y_1 z - 1 = 0$$

saknēm y_{11}, y_{12} ir pretējas zīmes. Tā kā $y_{11} > 0$, tad $y_{12} < 0$.

Arī vienādojuma

$$t^2 - y_2 t - 1 = 0$$

saknēm y_{21}, y_{22} ir pretējas zīmes. Tā kā $y_{22} < 0$, jo skaitļu x_1^6, x_1^7 amplitūdas ir starp $\frac{\pi}{2}$ un π, tad $y_{21} > 0$.

Salīdzinot skaitļu x_1^3 un x_1^7 amplitūdas 3φ un 7φ, dabū

$$0 < \frac{\pi}{2} - 3\varphi < 7\varphi - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Tādēļ saknes x_1^3 reālā daļa pozitīva un x_1^7 reālā daļa negatīva, bet pēc absolūtās vērtības lielāka kā pirmā. Līdzīgā kārtā atrodam, ka x_1^5 un x_1^6 reālās daļas negatīvas. Tādēļ $y_2 < 0$.

Arī vienādojuma

$$y^2 + y - 4 = 0$$

abām saknēm y_1, y_2 ir pretējas zīmes. Tā kā $y_2 < 0$, tad $y_1 > 0$

Kopsavilkumā atzīmējam sekojošo.

1. Vienādojuma $y^2 + y - 4 = 0$ pozitīvo sakni apzīmējam ar $y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$, negātīvo ar $y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$.

2. Vienādojuma $z^2 - y_1 z - 1 = 0$ pozitīvo sakni apzīmējam ar

$$y_{11} = \frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} + 1},$$

negātīvo ar y_{12} un vienādojuma $t^2 - y_2 t - 1 = 0$ pozitīvo sakni ar

$$y_{21} = \frac{y_2}{2} + \sqrt{\frac{y_2^2}{4} + 1},$$

negatīvo y_{22}.

3. Vienādojuma $u^2 - y_{11} u + y_{21} = 0$ abas saknes ir pozitīvas; lielāko no tām apzīmēsim ar y_{111}, mazāko ar y_{112}.

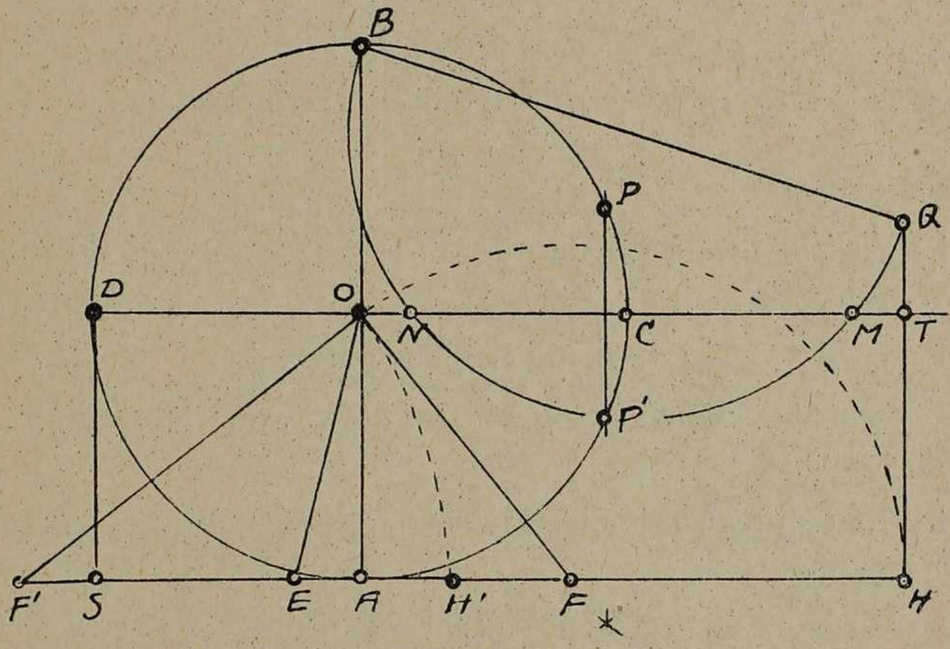
Tad $\frac{y_{111}}{2}$ ir vienādojuma $x^{17} - 1 = 0$ saknes x_1 (vai x_1^{-1}) reālā daļa.

No pierādītā seko rēgulāra 17-stūŗa konstrukcija, ja izlietā arī kvadrātvienādojuma reālo sakņu tiešās konstrukcijas metodi.

Piezīme. Pozitīvo un negātīvo sakņu apzīmēšanas kārtību var arī ignorēt. Tad aprakstītā metode dod vienādojuma $x^{17} - 1 = 0$, kuŗu katru komplekso sakni. Bet rēgulārā 17-stūŗa konstrukcijai tā tikpat noderīga kā iepriekšējā.

Konstrukcija un pierādījums. Ar radiju OA $= 1$ konstruē riņķa līniju ACBD un divus perpendikulārus diametrus AB un CD. Gala punktos A un D velk pieskares AS un DS. Konstruējam uz AS punktu E tā, ka

$$AE = \frac{1}{4}.$$



Tad

$$OE = \frac{1}{4}\sqrt{17}.$$

Atzīmējam punktus F un F′ tā, lai

$$EF = EO = EF'.$$

Tad

$$AF = \frac{1}{2}y_1, \qquad AF' = -\frac{1}{2}y_2$$

un

$$OF = \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2}, \quad OF' = \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2}$$

Uz pieskares AS atzīmējam punktus H un H′ tā, ka

$$FH = FO, \quad F'H' = F'O.$$

Tad

$$AH = \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_1^2} = y_{11}$$

un

$$AH' = \frac{1}{2}y_2 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}y_2^2} = y_{21}.$$

Tagad lietosim kvadrātvienādojuma sakņu tiešās konstrukcijas metodi. Velkam $HT \parallel AB$, atliekam $TQ = AH'$ un konstruējam riņķa līniju ar diametru BQ. Ja šīs riņķa līnijas un taisnes OC krustošanās punkti ir N un M, tad

$$OM = y_{111}.$$

Taisnes gabala OM vidusperpendikuls $P_1 P'$ krusto doto riņķa līniju $ACBD$ punktos P un P'. Ja savieno P ar O un C, tad

$$\measuredangle POC = \frac{2\pi}{17}$$

un chorda PC ir riņķī ievilktā rēgulārā 17-stūŗa mala.

Uzdevumi.

1. Atrisināt vienādojumu $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$.

2. Atrisināt binomālos vienādojumus $x^n - 1 = 0$ ar $n = 5, 6, 7, 8, 9$ un 10.

3. Sastādīt vienādojuma $x^n - 1 = 0$ prīmitīvo sakņu vienādojumu, ja $n = 12, 15, 20$ un 21.

4. Pierādīt, ka binomālam vienādojumam $x^n - 1 = 0$ sakņu pakāpju summa

$$S_k = \begin{cases} 0, \text{ ja } k \text{ nedalās ar } n \\ n, \text{ ja } k \text{ dalās ar } n. \end{cases}$$

Trešā daļa.

Vienādojumi ar reāliem skaitliskiem koeficientiem.

I. Reālo un komplekso saknu skaits.

§ 32. Nepārtraukto funkciju dažas īpašības.

Funkciju $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu** punktā x_0 tad, ja šinī punktā funkcijai ir noteikta galīga vērtība un katram, lai cik mazam, pozitīvam skaitlim ε var atrast otru pozitīvu skaitli δ tā, ka

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ja } |x - x_0| < \delta.$$

Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta **visos** intervalla (a, b) punktos, tad $f(x)$ sauc par **nepārtrauktu funkciju intervallā** (a, b).

Teōrēma I. Ikviens polinoms ar reāliem koeficientiem ir nepārtraukta funkcija intervallā

$$(-\infty, +\infty).$$

Katram galīgam x_0 arī $f(x_0)$ ir galīgs. Ar Teilora formulu izteic funkcijas pieaugumu

$$f(x_0+h) - f(x_0) = hf'(x_0) + h^2\frac{f''(x_0)}{2!} + \ldots + h^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

un to novērtē:

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leqq |h|\,|f'(x_0)| + \ldots + |h|^n\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|$$

jeb $$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leqq M(|h| + |h|^2 + \ldots + |h|^n),$$

ja M ir lielākais no koeficientiem

$$|f'(x_0)|,\ \left|\frac{f''(x_0)}{2!}\right|, \ldots, \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|,$$

kas katrs par sevi ir galīgs lielums. Ja izvēlas $|h| < 1$, tad

$$M(|h| + |h|^2 + \ldots + |h|^n) = M\frac{|h| - |h|^n}{1 - |h|} < M\frac{|h|}{1 - |h|}.$$

Pieprasām, lai pēdīgā izteiksme būtu mazāka par ε, t. i.

$$M\frac{|h|}{1 - |h|} < \varepsilon.$$

Tad $$|h|(M+\varepsilon) < \varepsilon \text{ un } |h| < \frac{\varepsilon}{M+\varepsilon}.$$

Apzīmējam $x_0 + h = x$. Ir atrasts pozitīvs skaitlis $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M+\varepsilon}$ tā, ka $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ja $|x - x_0| = |h| < \delta$. Teōrēma pierādīta.

Teōrēma II. Ja nepārtraukta funkcija $f(x)$ punktā x_0 ir pozitīva, tad eksistē tāds intervalls (a, b), kuŗā atrodas punkts x_0 un funkcija $f(x)$ ir pozitīva.

Funkcijas $f(x)$ nepārtrauktības nosacījumu $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ja $|x - x_0| < \delta$, var izteikt arī tā:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon, \text{ ja } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

Izvēloties $a = x_0 - \delta$, $b = x_0 + \delta$, un par ε pieņemot pozitīvo $f(x_0)$ nozīmi, esam teōrēmu pierādījuši. Ir līdzīga teōrēma gadījumā, kad funkcijas vērtība $f(x_0)$ ir negātīva.

Teōrēma III. *(Bolzano-Weierstrass* 1817., 1859. g.). Ja $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija, $a < b$ un $f(a)$, $f(b)$ zīmes ir pretējas, tad starp a un b atrodas vismaz viens punkts c, kuŗā $f(c) = 0$.

Pierādījums. Aprēķinām funkcijas $f(x)$ nozīmi intervalla (a, b) viduspunktā $\frac{a+b}{2}$. Ja $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, tad teōrēma ir pierādīta, bet ja $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, tad no diviem intervalliem

$$\left(a, \frac{a+b}{2}\right) \text{ un } \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$$

paņemam to, kuŗa gala punktos funkcijas $f(x)$ zīmes ir pretējas. Apzīmējam šo intervallu ar (a_1, b_1) un ievērojam, ka tas sastāda tikai pusi no intervalla (a, b). Tādēļ vai nu $a = a_1$, $b > b_1$ vai $a < a_1$, $b = b_1$. Turpinot šādu procesu, dabūjam vienu otrā ieslēgtus un dilstošus intervallus (a_2, b_2), $(a_3, b_3), \ldots, (a_n, b_n)$, no kuŗiem intervalls (a_n, b_n) ir 2^n reizes mazāks kā intervalls (a, b). Intervallā (a, b) ir ieslēgtas divas skaitļu virknes

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots < b$$

un

$$b \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n \geqq \ldots > a,$$

kas tuvojas vienai un tai pašai robežai **c**:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c, \text{ jo } \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

Vēl jāpierāda, ka $f(c) = 0$. Ja $f(c) > 0$, tad pēc iepriekšējās teōrēmas eksistē tāds galīgs intervalls $(c - \delta, c + \delta)$, kuŗā visos punktos $f(x) > 0$. Bet tā kā $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, tad, ja n ir pietiekoši liels, der nevienādības $c - a_n < \delta$, $b_n - c < \delta$. Tās norāda, ka punkti a_n, b_n atrodas intervallā $(c - \delta, c + \delta)$. Te rodas pretruna, jo $f(a_n)$ un $f(b_n)$ zīmes pretējas, un tā tad viena no tām ir negātīva.

Arī pieņemot, ka $f(c) < 0$, rodas tamlīdzīga pretruna.

Tādēļ atliek tikai iespēja $f(c) = 0$.

Sekas. Nepārtraukta funkcija $f(x)$ intervallā (a, b) pieņem visas skaitliskās vērtības, kas ieslēgtas starp $f(a)$ un $f(b)$.

Ja skaitlis N ieslēgts starp $f(a)$ un $f(b)$, tad funkcijas

$$F(x)=f(x)-N$$

nozīmes punktos a un b ir ar pretējām zīmēm. Tādēļ intervallā (a, b) atrodas punkts c, kurā $F(c) = f(c) - N = 0$. Tā tad $f(c)=N$.

Bolcano un Veierštrasa teorēmu var izlietot vienādojuma sakņu iežogošanai.

Piemērs. $f(x) = x^3 + 3x - 2$.

Te $f(0) = -2$ un $f(1) = 2$. Tādēļ vienādojuma $f(x) = 0$ vismaz viena sakne x_1 atrodas intervallā $(0,1)$. Funkcija $y=f(x)$ koordinātu sistēmā (x, y) ģeometriski reprezentē līku līniju, kas iet caur punktiem $(0,-2)$, $(1, 2)$ un punktā $(x_1, 0)$ krusto abscisu asi.

§ 33. Polinomu īpašības.

Teorēma I. Ja argūmenta absolūtā vērtība $|x|$ ir pietiekoši maza, tad vesela racionālā funkcija jeb polinoms $f(x)$ pieņem savā zemākā locekļa zīmi, bet, ja $|x|$ ir pietiekoši liela, tad — sava augstākā locekļa zīmi.

Polinomu vispārīgā veidā

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-k} x^k$$

ar $k \geqq 0$ var pārveidot tā:

$$f(x) = x^k(a_0 x^{n-k} + \ldots + a_{n-k-1} x + a_{n-k})$$

jeb
$$f(x) = x^k[\varphi(x) + a_{n-k}],$$

kur
$$\varphi(x) = a_0 x^{n-k} + \ldots + a_{n-k-1} x$$

ir polinoms bez brīvā locekļa. Kā zināms (§ 15.) ir tāds pozitīvs skaitlis x_0, ka visiem $|x| < x_0$ ir $|\varphi(x)| < |a_{n-k}|$. Tā tad $\varphi(x) + a_{n-k}$ zīmi noteic tikai a_{n-k}. Tādēļ polinoma $f(x)$ zīme tāda pat kā zemākā locekļa $a_{n-k} x^k$ zīme.

Ar transformāciju $\frac{1}{x} = y$ pārveido

$$f(x) = x^n(a_0 + a_1 y + \ldots + a_{n-k} y^{n-k}).$$

No pierādītā seko, ka visiem $|y| < y_0$, resp. visiem $|x| > \frac{1}{y_0}$ iekavās ieslēgtā polinoma zīme vienāda ar a_0 zīmi. Tā tad f(x) zīme vienāda ar augstākā locekļa $a_0 x^n$ zīmi.

Sekas I. Ja nepāŗu pakāpes vienādojuma augstākā locekļa koeficients ir pozitīvs, tad vienādojumam ir vismaz viena reāla sakne, kuŗas zīme pretēja zemākā locekļa koeficienta zīmei.

Reizinot (ja vajadzīgs) visus vienādojuma locekļus ar —1, var iekārtot tā, lai augstākā locekļa koeficients a_0 būtu pozitīvs. Tad lielām pozitīvām x nozīmēm polinoms

$$f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$$

ir pozitīvs, un pēc absolūtās vērtības lielām negātīvām x nozīmēm f(x) negātīvs, bet $f(0)=a_n$. Ja nu a_n ir pozitīvs, tad pēc Bolcano un Veierštrasa teōrēmas vienādojumam $f(x)=0$ ir viena negātīva sakne, bet ja a_n negātīvs, tad viena pozitīva sakne.

Gadījumā, kad $a_n=0$, tad vienādojumam ir vismaz viena sakne $x_1=0$.

Piemērs. Vienādojumam $x^5-x^3+x^2=0$ ir divas saknes vienlīdzīgas nullei un bez tam vismaz viena negātīva sakne.

Sekas II. Pāru pakāpes vienādojumam, kam augstākā locekļa koeficients ir pozitīvs, bet brīvais loceklis negātīvs, ir vismaz divas reālas saknes, no kūŗām viena ir pozitīva, bet otrā negātīva.

Pierādījums ir līdzīgs iepriekšējam.

Teōrēma II. Ja vienādojumam $f(x)=0$ ir k reālas saknes, kas atrodas intervallā (a, b), t. i.

$$a < x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_k < b,$$

tad f(a) un f(b) zīmes ir vienādas, ja k ir nulle vai pāru skaitlis, bet pretējās zīmes, ja k ir nepāru skaitlis.

Polinomu f(x) var izteikt

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)\,\varphi(x)$$

ar zemākas pakāpes polinomu $\varphi(x)$, pie kam intervallā (a, b) vienādojumam $\varphi(x) = 0$ nav nevienas reālas saknes. Bez tam

$\varphi(a)$ un $\varphi(b)$ zīmes ir vienādas, jo pretējā gadījumā pēc Bolcano un Veierštrasa teorēmas starp a un b tomēr būtu vienādojuma $\varphi(x)=0$ viena sakne.

Tādēļ attiecības

$$\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{(a-x_1)(a-x_2)\ldots(a-x_k)}{(b-x_1)(b-x_2)\ldots(b-x_k)}\cdot\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$$

zīmi nosaka tikai pirmie k faktori

$$\frac{a-x_1}{b-x_1},\ \frac{a-x_2}{b-x_2},\ \ldots,\ \frac{a-x_k}{b-x_k},$$

kas visi ir negātīvi, jo $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ieslēgti starp a un b. Ja nu k ir nulle vai pāru skaitlis, tad attiecība $\frac{f(a)}{f(b)}$ pozitīva, un $f(a), f(b)$ zīmes ir vienādas. Bet ja k ir nepāru skaitlis, tad $\frac{f(a)}{f(b)}$ negātīva un $f(a), f(b)$ zīmes pretējas.

Pareiza ir arī apgriezta teorēma, ko pierāda, pieņemot pretējo.

Sekas. Ja pēc x pakāpēm sakārtota vienādojuma galējo locekļu koeficientiem ir vienādas zīmes, tad vienādojuma pozitīvo sakņu skaits P ir nulle vai pāru skaitlis, bet ja tiem ir pretējas zīmes, tad P ir nepāru skaitlis.

Ja ε un E ir pozitīvi skaitļi, no kuŗiem pirmais ir pietiekoši mazs, bet otrs pietiekoši liels, tad vienādojuma $f(x)=0$ visas pozitīvas saknes atrodas intervallā (ε, E). Pēc pirmās teorēmas $f(\varepsilon)$ un $f(E)$ zīmes ir attiecīgi vienādas ar vienādojuma zemākā un augstākā locekļu koeficientu zīmēm; tālākais seko no iepriekšējās (II.) apgrieztās teorēmas.

Piemērs. Vienādojumam $x^5-3x^4+2x^3=0$ ir divas pozitīvas saknes. Bez tam $x=0$ ir trīskārtēja sakne.

§ 34. Rolla teorēma polinomiem.

Lemma. Ja ε ir pietiekoši mazs pozitīvs skaitlis un x_1 ir vienādojuma $f(x)=0$ sakne, tad reizinājums $f(x_1-\varepsilon)\,f'(x_1-\varepsilon)>0$, bet $f(x_1+\varepsilon)\,f'(x_1+\varepsilon)<0$, kur $f'(x)$ ir atvasinātais polinoms.

Ja x_1 ir k-kārtēja sakne vienādojumam $f(x)=0$, $(k\geqslant 1)$, tad

$$f(x)=(x-x_1)^k\,\varphi(x),\ \text{bet}\ \varphi(x_1)\neq 0.$$

Polinoma f(x) atvasinājuma

$$f'(x) = k(x-x_1)^{k-1}\varphi(x) + (x-x_1)^k\varphi'(x)$$

reizinājums ar f(x) ir

$$f(x)f'(x) = (x-x_1)^{2k-1}[k(\varphi(x))^2 + (x-x_1)\varphi(x)\varphi'(x)] =$$
$$= (x-x_1)^{2k-1}F(x),$$

kur $$F(x) = k(\varphi(x))^2 + (x-x_1)\varphi(x)\varphi'(x).$$

Tā kā $F(x_1) = k\,.\,(\varphi(x_1))^2 > 0$ un $F(x)$ ir nepārtraukta funkcija, tad eksistē tāds pozitīvs skaitlis ε, ka $F(x_1-\varepsilon)$ un $F(x_1+\varepsilon)$ ir pozitīvi. Tādēļ

$$f(x_1-\varepsilon)f'(x_1-\varepsilon) = (-\varepsilon)^{2k-1}F(x_1-\varepsilon) < 0,$$

bet

$$f(x_1+\varepsilon)\,.\,f'(x_1+\varepsilon) = \varepsilon^{2k-1}F(x_1+\varepsilon) > 0.$$

Rolla ***(Rolle)*** **teorēma.** Ja $f'(x)$ ir polinoma $f(x)$ atvasinātais polinoms, tad starp vienādojuma $f(x)=0$ divām sekojošām saknēm a un b atrodas vienādojuma $f'(x)=0$ vismaz viena sakne; gadījumā, kad vairākas saknes, tad — nepāru skaitā.

Pieņemsim, ka $a < b$ un $\varepsilon > 0$. Izlietājot iepriekšējo lemmu, varam dabūt nevienādību

$$f(a+\varepsilon)f'(a+\varepsilon)\,.\,f(b-\varepsilon)f'(b-\varepsilon) < 0.$$

Te $f(a+\varepsilon)$ un $f(b-\varepsilon)$ zīmes ir vienādas, jo intervallā $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ nav nevienas vienādojuma $f(x)=0$ saknes. Tādēļ

$$f(a+\varepsilon)f(b-\varepsilon) > 0,$$

bet

$$f'(a+\varepsilon)f'(b-\varepsilon) < 0,$$

t. i. $f'(a+\varepsilon)$ un $f'(b-\varepsilon)$ zīmes pretējas. Tā tad intervallā $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, resp. intervallā (a, b), atrodas nepāru skaits vienādojuma $f'(x) = 0$ sakņu.

Sekas I. Vienādojumam $f(x)=0$ var būt tikai viena sakne, kas lielāka par vienādojuma $f'(x)=0$ lielāko sakni, un arī tikai viena sakne, kas mazāka par mazāko vienādojuma $f'(x)=0$ sakni.

Sekas II. Ja vienādojuma $f(x)=0$ visas n saknes ir reālas (un dažādas), tad arī vienādojuma $f'(x)=0$ visas $n-1$ saknes ir reālas (un dažādas).

Ja $x_1, x_2, \ldots x_m$ ir pēc augoša lieluma sakārtotas v-ma

$f(x) = 0$ visas m saknes un to daudzkārtējība attiecīgi ir $k_1, k_2, \ldots, k_m$, tad $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Šīs saknes $x_1, x_2 \ldots, x_m$ sadala reālo skaitļu taisni $(m - 1)$ intervallos

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots (x_{m-1}, x_m),$$

kuŗos katrā ir vienādojuma $f'(x) = 0$ vismaz viena reāla sakne. Bez tam vienādojumam $f'(x) = 0$ ir arī $(k_1 - 1)$ - kārtēja sakne x_1, $(k_2 - 1)$ - kārtēja sakne $x_2, \ldots, (k_m - 1)$ - kārtēja sakne x_m. Tādēļ vienādojuma $f'(x) = 0$ reālo sakņu skaits ir vismaz

$$(m - 1) + (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \ldots + (k_m - 1)$$

jeb $$k_1 + k_2 + \ldots + k_m - 1 = n - 1.$$

Ja vienādojuma $f(x) = 0$ visas saknes būtu reālas un dažādas, tad $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 1$, $m = n$, un arī vienādojuma $f'(x) = 0$ visas $(n - 1)$ saknes būtu reālas un dažādas.

Teōrēma. Starp vienādojuma $f'(x) = 0$ divām sekojošām reālām saknēm α un β var atrasties tikai viena vai neviena dotā vienādojuma $f(x) = 0$ sakne.

Pieņemot, ka intervallā (α, β) atrodas divas vienādojuma $f(x) = 0$ saknes a, b, un ievērojot, ka α un β ir divas sekojošas $f'(x) = 0$ saknes, rodas pretruna Rolla teōrēmai.

Jautājumu par vienu vai nevienu vienādojuma $f(x) = 0$ sakni intervallā (α, β) izšķiŗ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ zīmju dažādība vai vienādība.

Piemērs. Funkcijas

$$P_1(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)' = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{8}[(x^2 - 1)^2]'' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \ldots,$$

vispārīgi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}[(x^2 - 1)^n]^{(n)}$$

sauc par **Ležandra *(Legendre)* polinomiem jeb Ležandra sfēriskām funkcijām.**

Pierādīsim, ka vienādojumam $P_n(x) = 0$ ar Ležandra polinomu $P_n(x)$ visas saknes ir reālas, dažādas un atrodas intervallā $(-1, +1)$.

Apskatām polinomu

$$f(x) = (x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n,$$

kam $+1$ un -1 ir n-kārtējas nulles. Tā tad vienādojuma $f(x) = 0$ visas saknes ir reālas. Rolla teorēmas sekas norāda, ka ar atvasinātiem polinomiem $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x) = 2^n n!\, P_n(x)$ sastādītiem vienādojumiem $f'(x) = 0, \ldots, f^{(n)}(x) = 0$ saknes ir reālas.

Uzrakstīsim šo polinomu pakāpes, vairākkārtējās un vienkāršās saknes sekojošā tabulā.

Polinoms	Pakāpe	Daudzkārtējība saknei $+1$	Daudzkārtējība saknei -1	Vienkāršu sakņu skaits intervallā $(-1, +1)$
$f(x)$	$2n$	n	n	0
$f'(x)$	$2n-1$	$n-1$	$n-1$	1
$f''(x)$	$2n-2$	$n-2$	$n-2$	2
....	....	....	....	....
$f^{(n)}(x)$	n	0	0	n

Izlietojot Rolla teorēmu, varam atrast, ka vienādojuma $f'(x) = 0$ viena vienkāršā sakne a_1 atrodas intervallā $(-1, +1)$; no divām vienkāršām vienādojuma $f''(x) = 0$ saknēm b_1, b_2 viena atrodas intervallā $(-1, a_1)$, otra intervallā $(a_1, +1)$, tā tad tās abas ir intervallā $(-1, +1)$ u. t. t. Pēdīgi nonākam pie vienādojuma $f^{(n)}(x) = 0$, kam šinī intervallā ir n vienkāršas reālas saknes, bet $+1$ vai -1 nav saknes.

§ 35. Dekarta teorēma.

Ja reālu skaitļu virknē $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n$ neviens skaitlis nav nulle un virknē ir N tādi skaitļi a_i, kam $a_i a_{i-1} > 0$, $(1 \leq i \leq n)$, bet M tādi skaitļi a_j, kam

$$a_j a_{j-1} < 0, \quad (1 \leq j \leq n),$$

tad saka, ka dotā skaitļu virknē ir N zīmju atkārtojumi un M zīmju maiņas.

Ir sakars $M + N = n$, jo ikkatrs virknes loceklis a_k ar $k = 1, 2, \ldots, n$ rada vai nu vienu zīmju maiņu, vai vienu atkārtojumu.

Lemma I. Ja skaitļu virknē $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ svītro vienu starpējo locekli a_k, tad zīmju maiņu skaits vai nu paliek agrākais, vai pamazinās par divi.

Locekļa a_k svītrošana var iespaidot tikai zīmju maiņu skaitu m starp locekļiem a_{k-1}, a_k, a_{k+1}. Reizinājumi $a_k\, a_{k-1}$ un $a_{k+1}\, a_k$ katrs atsevišķi var būt pozitīvs vai negātīvs. Tādēļ iespējami 4 gadījumi zīmju kombinējumā. Pēc a_k svītrošanas maiņu skaits m′ starp locekļiem a_{k-1} un a_{k+1} nosaka reizinājuma $a_{k+1}\, a_{k-1}$ zīmi, ko dabū ar produktu $a_k\, a_{k-1}$ un $a_{k+1}\, a_k$ rezinājuma

$$a_k\, a_{k-1} \cdot a_{k+1}\, a_k = a_{k+1}\, a_{k-1} \cdot a_k^2$$

zīmju likumu. Te faktors a_k^2 ir pozitīvs un reizinājuma zīmi neiespaido. Visi iespējamie 4 gadījumi norādīti sekojošā tabulā.

$a_k\, a_{k-1}$	$a_{k+1}\, a_k$	m	$a_{k+1}\, a_{k-1}$	m′	m — m′
+	+	0	+	0	0
+	—	1	—	1	0
—	—	2	+	0	2
—	+	1	—	1	0

Redzam, ka diference m—m′ ir 0 vai 2, un lemma pierādīta.

Sekas. Ja skaitļu virknē svītro vairākus starpējos locekļus, tad zīmju maiņu skaits vai nupaliek agrākais, vai samazinās par pāru skaitli.

Lemma II. Ja skaitļu virknē a_0, a_1, . . ., a_n galējiem locekļiem a_0, a_n ir vienādas zīmes, tad zīmju maiņu skaits M ir pāru skaitlis, bet ja galējiem locekļiem ir pretējas zīmes, tad M ir nepāru skaitlis.

Pierādījumam jāsvītro visi starpējie locekļi a_1, a_2, . . ., a_{n-1} un jālietā I. lemmas sekas.

Segnera lemma III (18. g. s. sāk.). Ja a ir pozitīvs skaitlis, polinomu $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ reizina ar x — a un sakārto dabūto reizinājumu g(x) pēc x dilstošām pakāpēm, tad polinoma g(x) locekļu koeficientu zīmju maiņu skaits par nepāru skaitli lielāks kā dotajā.

Polinoma f (x) augstākā locekļa koeficientu pieņemsim par pozitīvu. Ja tas tā nebūtu, tad visus f (x) koeficientus var reizināt ar —1, jo zīmju maiņu skaitu šī reizināšana neiespaido. Ja polinomā f (x) zīmju maiņu skaits M, tad tā koeficientu virkne sadalās (M + 1) posmos, kuŗos zīme nemainās. Katrā posmā ir viens vai vairāk locekļu. Schēmā norādītas to zīmes:

$$+, +, \ldots +; \;—, —, \ldots, —; \;\ldots; \;\eta, \ldots, \eta.$$

Te ar η noteic zīmi + vai — pēdējā posmā.

Polinoma f(x) reizinājumā ar $x - a$ zīmes sakārtojas šādi:

$$\mathbf{+}, +, \ldots, +; \mathbf{-}, -, \ldots, -; \mathbf{+}, \ldots; \boldsymbol{\eta}, \eta, \ldots \eta;$$
$$-, \ldots, -, \mathbf{-}; +, \ldots, +, \mathbf{+}; \ldots, \boldsymbol{\eta}; -\eta, \ldots -\eta, \mathbf{-\eta}.$$

Te pirmā rindiņā norādītas koeficientu zīmes polinoma f(x) reizinājumam ar x un otrā rindiņā reizinājumam ar $-a$, bet vertikālos stabiņos — līdzīgo locekļu zīmes.

Reizinājuma g(x) koeficientu virknē droši zināmas zīmes

$$\mathbf{+}, \ldots, \mathbf{-}, \ldots, \mathbf{+}, \ldots, \boldsymbol{\eta}, \ldots, -\boldsymbol{\eta},$$

kas sadala virkni $M + 1$ posmos. Maiņu skaits katrā posmā ir nepāru skaitlis (vismaz 1). Tādēļ maiņu skaits polinomā g(x) ir $M + 1$ vai par pāru skaitli lielāks.

Dekarta teorēma (1637. g.) Vienādojuma

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

pozitīvo sakņu skaits P ir vai nu vienāds ar polinoma locekļu koeficientu zīmju maiņu skaitu M, vai arī par pāru skaitli mazāks nekā M.

Pēc iepriekšējās teorijas P un M ir abi reizē pāru vai abi reizē nepāru skaitļi. Tādēļ to diference ir pāru skaitlis. Ir jāpierāda tikai, ka $P \leqq M$.

Pierādījumam var lietāt **pilnīgo indukciju.** Pirmās pakāpes polinomam koeficientu virknē var būt viena vai neviena zīmju maiņa. Atbilstošam vienādojumam ir vai nu viena vai neviena pozitīva sakne. Tā tad še $P = M$. Pieņemot, ka arī otrās, trešās, ... un $(n - 1)$. pakāpes polinomiem skaitlis P nav lielāks par M, t. i. $P \leqq M$, pierādīsim to pašu par n. pakāpes polinomu $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Pēdējam koeficientu virknē $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ir M zīmju maiņas.

Atvasinātā polinoma $f'(x)$ pakāpe ir $n - 1$ un tā koeficientu virknē $na_0, (n-1)a_1, \ldots, a_{n-1}$ ir M' zīmju maiņas, pie kam $M' = M$ vai $M - 1$.

Apzīmēsim dotā vienādojuma $f(x) = 0$ pozitīvas saknes ar $x_1, x_2, \ldots, x_m$ un to daudzkārtējību ar $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Tad

$$P = k_1 + k_2 + \ldots + k_m.$$

Vienādojumam $f'(x) = 0$ ar atvasināto polinomu $f'(x)$ pozitīvo sakņu skaits ir

$$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \ldots (k_m - 1) + m - 1 + 2h =$$
$$= P - 1 + 2h,$$

kur h ir kāds pozitīvs vesels skaitlis. Pēc pieņēmuma šis sakņu skaits nav lielāks par M', t. i. $P - 1 + 2h \leqq M'$. Te secinām:

$$P \leqq M' + 1 - 2h \leqq M' + 1 \leqq M + 1, \quad (M' \leqq M).$$

Tā tad $P \leqq M + 1$. Ja $P = M + 1$, tad P un M nevar būt abi reizē pāru vai abi reizē nepāru skaitļi. Ir jāpieņem, ka $P < M + 1$, un tā tad arī $P \leqq M$, jo P un M ir veseli pozitīvi skaitļi.

Otrā pierādījumā izlietā Segnera lemmu.

Ja vienādojuma $f(x)=0$ visas pozitīvās saknes ir $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tad

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_p)\,\varphi(x),$$

kur palīga vienādojumam $\varphi(x) = 0$ nav nevienas pozitīvas saknes. Polinoma $\varphi(x)$ galējo locekļu koeficientiem jābūt ar vienādām zīmēm, jo pretējā gadījumā tam tomēr būtu viena pozitīva sakne. Tādēļ $\varphi(x)$ koeficientu zīmju maiņu skaits ir pāru skaitlis 2k. Pēc Segnera lemmas polinomā $(x - x_1)\varphi(x)$ zīmju maiņu skaits ir $2k + 2k_1 + 1$, polinomā $(x-x_1)(x-x_2)\varphi(x)$ zīmju maiņu skaits ir $2k + 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1$ u. t. t. Beidzot polinomā

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_p)\,\varphi(x)$$

zīmju maiņu skaits M ir

$$2k + 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 + \ldots + 2k_p + 1 = 2K + P,$$

kur $K = k + k_1 + k_2 + \ldots + k_p$ ir vesels pozitīvs skaitlis vai nulle Tā tad $P = M - 2K$, un teōrēma pierādīta.

Piemērs. Polinomā $f(x) = 3x^{10} + 4x^2 + 7x - 2$ koeficientiem ir tikai viena zīmju maiņa. Tādēļ vienādojumam $f(x)=0$ ir tikai viena pozitīva sakne. Izdarot transformāciju $y = -x$, resp. mainot koeficientiem pie x nepāŗu pakāpēm zīmes ar pretējām, dabūjam jaunu polinomu $f_1(y) = 3y^{10} + 4y^2 - 7y - 2$. Vienādojumam $f_1(y) = 0$ arī ir viena pozitīva sakne. Tādēļ dotajam vienādojumam $f(x) = 0$ ir tikai divas reālas saknes: viena pozitīva un otra negātīva.

Ja neviens no polinoma

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n$$

koeficientiem $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nav nulle, tad f(x) sauc par **pilnu polinomu.** Zīmju maiņu M un atkārtojumu N summa $M+N$ tādā polinomā ir n. Ja pilnā polinomā maina koeficientiem pie x nepāru pakāpēm zīmes ar pretējām, resp. izdara transformāciju $y = -x$, tad vienmēr viens no diviem sekojošiem koeficientiem a_{i-1}, a_i maina zīmi ar pretējo. Tādēļ arī reizinājums $a_i a_{i-1}$ maina zīmi, t. i. transformācija $y = -x$ pārvērš zīmju maiņas atkārtojumos un atkārtojumus maiņās. Tādēļ vienādojumā ar pilnu polinomu **negātīvo sakņu skaits** vienlīdzīgs ar zīmju atkārtojumu skaitu vai arī par pāŗu skaitli mazāks.

Ja visas vienādojuma $f(x) = 0$ saknes ir reālas un pozitīvas ($P = M = n$), tad $f(x)$ ir pilns polinoms, un tajā nav zīmju atkārtojumu. Šis nosacījums gan ir nepieciešams, bet nav pietiekošs. Piemēram, polinomā $x^2 - x + 1$ ir divas zīmju maiņas, bet vienādojumam $x^2 - x + 1 = 0$ nav reālas saknes.

Ja vienādojumam $f(x) = 0$ pozitīvo sakņu skaits ir P, negātīvo Q, zīmju maiņu skaits ir M un pēc transformācijas $y = -x$ zīmju maiņas skaits top M', tad ir sakari:

$$P = M - 2a, \quad Q = M' - 2b \quad \text{un} \quad P + Q = M + M' - 2k,$$

kur a, b un $k = a + b$ veseli pozitīvi skaitļi vai nulles.

Pilnā polinomā $M + M' = n$. Ja svītro dažus polinoma locekļus, tad M un M' vai nu nemainās, vai arī pamazinās par pāru skaitli. Tāpēc nepilnā polinomā $M + M'$ ir vai nu n, vai par pāŗu skaitli mazāks. Ja $M + M' = n - 2K$ un $K > 0$, tad vienādojumam $f(x) = 0$ ir tieši $2(K + k)$ vai vismaz $2K$ kompleksas saknes.

Ja zināms, ka vienādojumam kompleksu sakņu nav, tad

$$M + M' = n, \quad P = M \quad \text{un} \quad Q = M'.$$

Piemērs. 1. $3x^5 - 4x^2 + 2x - 7 = 0$; $M = 3$. Mainot zīmes pie x nepāru pakāpēm ar pretējām, dabūjam virkni -3, -4, -2, -7 ar $M' = 0$. Tā kā $M + M' = 5 - 2$, tad dotajam vienādojumam ir vismaz 2 kompleksas saknes.

2. Binomālam vienādojumam $x^n - 1 = 0$ komplekso sakņu skaits ir tieši $n - (M + M')$, jo M un M' nav lielāki par 1.

§ 36. Komplekso sakņu skaits.

Apskatīsim dažas teōrēmas par vienādojuma komplekso sakņu skaitu. Netieši tās nosaka arī reālo sakņu skaitu.

Teōrēma. I. Vienādojumam ar reāliem koeficientiem kompleksās saknes var būt tikai pāru skaitā; reizē ar komplekso skaitli $a + bi$ arī saistītais skaitlis $a - bi$ ir tā paša vienādojuma sakne.

Pieņemsim, ka $a + bi$ ir vienādojuma

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

sakne, un ka koeficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ir reāli. Dalot $f(x)$ ar otrās pakāpes polinomu

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2,$$

kam koeficienti ir reāli skaitļi, atlikumā var rasties augstākais pirmās pakāpes polinoms $Ax + B$ ar reāliem koeficientiem A un B. Dabūjam identitāti

$$f(x) = (x - a + bi)(x - a - bi)\,q(x) + Ax + B.$$

Ja liekam x vietā vienādojuma $f(x) = 0$ sakni $a + bi$, tad rodas

$$0 = A(a + bi) + B$$

jeb

$$(Aa + B) + Abi = 0.$$

Tādēļ atsevišķi $Ab = 0$ un $Aa + B = 0$. Tā kā $b \neq 0$, tad jābūt $A = 0$ un arī $B = 0$. Tā tad var izteikt

$$f(x) = (x - a - bi)(x - a + bi)\,q(x).$$

Redzam, ka $f(a - bi) = 0$, t. i., $a - bi$ ir vienādojuma $f(x) = 0$ sakne.

No šīs teōrēmas var secināt agrāk pierādīto, ka katram nepāru pakāpes vienādojumam ar reāliem koeficientiem ir vismaz viena reāla sakne. Arī secinām, ka ir iespējams sadalīt katru polinomu ar reāliem koeficientiem reālos, augstākais otrās pakāpes faktoros.

Teōrēma II. Pēc x dilstošām pakāpēm sakārtotam vienādojumam

$$f(x) = ax^n + bx^m + cx^p + dx^q + \ldots + kx^s + h = 0,$$

$(n > m > p > q \ldots > s > 1)$ komplekso sakņu ir tikpat daudz, cik tādu ir binomāliem vienādojumiem $ax^n + bx^m = 0$, $bx^m + cx^p = 0$, $cx^p + dx^q = 0, \ldots, kx^s + h = 0$ visiem kopā, vai arī par pāru skaitli vairāk.

Vienkāršojam teōrēmā minētos binomālos vienādojumus, izslēdzot saknes $x = 0$. Tad rodas

$$f_1(x) = ax^{n-m} + b = 0,\; f_2(x) = bx^{m-p} + c = 0,$$
$$f_3(x) = cx^{p-q} + d = 0, \ldots, f_r(x) = kx^s + h = 0.$$

Saskaitām visiem kopā komplekso sakņu skaitu

$$S = n - m - (M_1 + M_1') + m - p - (M_2 + M_2') + p - q - $$
$$- (M_3 + M_3') + \ldots + s - (M_r + M_r') = n - (M_1 + M_2 + \ldots + M_r) -$$
$$- (M_1' + M_2' + \ldots + M_r'),$$

kur M_1 ir zīmju maiņu skaits koeficientiem a un b, M_2 zīmju maiņu skaits koeficientiem b un c u. t. t., M_r maiņu skaits koeficientiem k, h. Katrs no šiem M ir 1 vai 0, un to summa M ir zīmju maiņu skaits virknē a, b, c, ..., k, h. Mainot vienādojumos

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \ldots, f_r(x) = 0$$

pie x nepāru pakāpēm zīmes ar pretējām, dabū attiecīgo zīmju maiņu skaitu M_1', M_2', ..., M_r', un to summu M'. Tādēļ

$$S = n - M - M'.$$

Bet iepriekš noskaidrojām, ka katram vienādojumam ir vismaz $2K = n - M - M' = S$ kompleksu sakņu. Tā tad teōrēma pierādīta.

Tikko pierādītā teōrēma izrādās stipri auglīga, lai secinātu vienādojuma citas interesantas īpašības, izteiktas ar sekojošām teōrēmām:

1. Ja vienādojumā iztrūkst tāds loceklis, kam abās pusēs ir locekļi ar vienādām zīmēm, vai arī iztrūkst vairāki pēc kārtas sekojoši locekļi, tad vienādojumam ir vismaz divas kompleksas saknes.

2. Ja vienādojumā trīs sekojoši koeficienti veido ģeometrisku progresiju, tad vienādojumam ir kompleksas saknes.

Tiešām, no polinoma

$$f(x) = \ldots + cx^k + cqx^{k-1} + cq^2x^{k-2} + \ldots$$

ar reāliem koeficientiem sastādīsim jaunu polinomu

$$\varphi(x) = (x-q)\, f(x) = \ldots + cx^{k+1} + cq\,x^k + cq^2x^{k-1} + \ldots$$
$$- cq\,x^k - cq^2x^{k-1} - cq^3x^{k-2} - \ldots = \ldots + Ax^{k+1} + Bx^{k-2} + \ldots$$

Polinomam $\varphi(x)$ iztrūkst divi pēc kārtas sekojoši locekļi ar x^k un x^{k-1}. Tāpēc vienādojumam $\varphi(x) = 0$ ir vismaz divas kompleksas saknes, kas reizē ir arī vienādojuma $f(x) = 0$ saknes.

3. Ja vienādojumā

$$f(x) = 0$$

četri sekojoši koeficienti veido aritmētisku progresiju, tad vienādojumam ir kompleksas saknes.

Te

$$f(x) = \ldots + cx^k + (c+d)\,x^{k-1} + (c+2d)\,x^{k-2} + (c+3d)\,x^{k-3} + \ldots$$

Teorēmas pierādījumam $f(x)$ reizina ar

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Svarīgus rezultātus par vienādojuma reālo un komplekso sakņu skaitu ir atradis jau *De Gua* 18. g. simtenī. Pēc tam Lagerrs *(La Guerre)* 1885. g. uzrādījis daudz negaidītu vienādojuma īpašību, kas pamatojamas ar Dekarta teorēmu. Piemēram vēl minama *De Gua* **teorēma:** Ja vienādojuma visas saknes ir reālas, tad ikkatra koeficienta kvadrāts ir lielāks par tam blakusstāvošo koeficientu reizinājumu, t. i.

$$a_i^2 > a_{i-1}\,a_{i+1}.$$

Piezīme. Komplekso sakņu noteikšanu var reducēt uz cita vienādojuma reālu sakņu aprēķināšanu šādā veidā. Polinomā $F(z)$ izteic komplekso argūmentu $z = x + iy$ ar reāliem mainīgiem x, y un atdala reālos no imagināriem:

$$F(z) = f(x, y) + i\,g(x, y),\ (i = \sqrt{-1}).$$

Tad vienādojums

$$F(z) = 0$$

top ekvivalents ar vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Ja izslēdz no šīs sistēmas, piemēram y, tad rodas rezultante $R(x) = 0$, kam jāatrod reālas saknes.

Uzdevumi.

1) Izlietojot Rolla teorēmu, izpētīt vienādojuma

$$x^3 - x^2 - 12x + A = 0$$ saknes, ja $A = 15, 20, 25$.

2) Pierādīt: ja A un visi A_i ir pozitīvi skaitļi un $< a_2 < \ldots < a_n$, tad vienādojuma

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n} - A = 0$$

visas saknes ir reālas, un katrā intervallā (a_1, a_2), (a_2, a_3), . . . atrodas pa vienai saknei.

3) Pierādīt Uoringa *(Waring)* teōrēmu: Starp vienādojuma $f(x) = 0$ divām sekojošām reālām saknēm atrodas nepāru skaits vienādojuma

$$F(x) = f(x) - \lambda f'(x) = 0$$

sakņu (λ reāls skaitlis un $f'(x)$ ir atvasinātais polinoms).

Sekas. Ja visas $f(x) = 0$ saknes ir reālas, tad arī visas $F(x) = 0$ saknes reālas.

4) Ja polinoms $f(x)$ satur tikai x nepāru pakāpes un visiem $f(x)$ koeficientiem ir vienādas zīmes, tad vienādojuma $f(x) = 0$ viena sakne ir nulle, bet visas pārējās saknes ir kompleksi skaitļi.

5) Ja vienādojuma $f(x) = 0$ visas saknes ir reālas, tad vienodājuma $ff'' - f'^2 = 0$ visas saknes ir kompleksas (f' un f'' ir atvasinātie polinomi).

6) Ja vienādojumu

$$f(x) = 0 \quad \text{un} \quad \varphi(x) = 0$$

visas saknes ir reālas un $\lambda > 0$, tad arī vienādojuma

$$f\varphi' + \lambda f' \varphi = 0$$

visas saknes ir reālas (f' un φ' ir atvasinātie polinomi).

7) Noteikt vienādojumu:

a) $x^{2n} + ax^n + b = 0$,

b) $\frac{x^n}{n} + \frac{x^{n-1}}{n-1} + \ldots + \frac{x}{1} + 1 = 0$

reālo un komplekso sakņu skaitu.

8) Noteikt vienādojuma

$$f(x) = (n+1)\,x^n + nx^{n-1} + (n-1)\,x^{n-2} + \ldots + 2x + 1 = 0$$

komplekso sakņu skaitu.

9) Kādām λ nozīmēm vienādojumam

$$x^7 - 7x^2 + \lambda = 0$$

ir trīs reālas saknes?

II. Reālo sakņu robežas, izolācija un aprēķināšana.

§ 37. Reālo sakņu robežas.

Par vienādojuma

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

pozitīvo sakņu augšējo robežu sauc pozitīvu skaitli L, kas lielāks par vienādojuma visām pozitīvām saknēm. L var noteikt ar sekojošām metodēm.

1. Pirmo metodi L noteikšanai devis **Meklorens** ***(Maclaurin)***. Pieņemam, ka $a_0 > 0$ un N ir negātīvo koeficientu lielākā absolūtā vērtība. Polinomu f(x) var izteikt

$$f(x) = f(x) - N(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) + N(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)$$

jeb

$$f(x) = a_0 x^n - N(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) +$$
$$+ [(N + a_1) x^{n-1} + (N + a_2) x^{n-2} + \ldots + (N + a_n)].$$

Kvadrātiekavās ieslēgtais polinoms ir pozitīvs katrai pozitīvai x nozīmei. Tādēļ $f(x) > 0$ visām x nozīmēm, kuŗām

$$a_0 x^n - N(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) \geqq 0$$

jeb

$$a_0 x^n - N \frac{x^n - 1}{x - 1} = a_0 x^n - N \frac{x^n}{x - 1} + \frac{N}{x - 1} \geqq 0.$$

Nevienlīdzība $f(x) > 0$ der vēl jo vairāk visiem $x > 1$ ar noteikumu

$$a_0 x^n - N \frac{x^n}{x - 1} \geqq 0 \quad \text{jeb} \quad a_0 - \frac{N}{x - 1} \geqq 0.$$

Tā tad $x \geqq 1 + \frac{N}{a_0}$, un varam pieņemt

$$L = 1 + \frac{N}{a_0}.$$

Piemērs. $x^5 + x^4 - x^3 - x - 10000 = 0$. $L = 10001$.

2. **Lagranža** pārlabotā Meklorena metode.

Pieņemam, ka

$$a_0 > 0, \ a_1 > 0, \ \ldots, \ a_{k-1} > 0,$$

bet pirmais negātīvais koeficients ir a_k. Varam izteikt

$$f(x) = f(x) - N(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \ldots + 1) +$$
$$+ N(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \ldots + 1)$$

jeb

$$f(x) = a_0 x^n - N(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \ldots + 1) +$$
$$+ [a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{k-1} x^{n-k+1} + (N+a_k) x^{n-k} + \ldots + (N+a_n)].$$

Redzam, ka $f(x) > 0$ tad, ja

$$a_0 x^n - N(x^{n-k} + x^{n-k+1} + \ldots + 1) \geqq 0$$

jeb

$$a_0 x^n - N \frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1} = a_0 x^n - N \frac{x^{n-k+1}}{x-1} + \frac{N}{x-1} \geqq 0.$$

Ja $x > 1$, tad

$$\frac{N}{x-1} > 0,$$

un pietiek pieprasīt, lai

$$a_0 x^n - N \frac{x^{n-k+1}}{x-1} \geqq 0 \text{ jeb } x^{n-k+1} \left[a_0 x^{k-1} - \frac{N}{x-1}\right] \geqq 0.$$

Nevienādību

$$a_0(x-1)\, x^{k-1} - N \geqq 0$$

var vēl pastiprināt, ja faktoru x^{k-1} apmaina ar $(x-1)^{k-1}$. Tad no

$$a_0(x-1)(x-1)^{k-1} - N \geqq 0 \text{ jeb } a_0(x-1)^k \geqq N$$

var izteikt

$$x \geqq 1 + \sqrt[k]{\frac{N}{a_0}}$$

un pieņemt

$$L = 1 + \sqrt[k]{\frac{N}{a_0}}.$$

Piemērs. Vienādojuma

$$x^5 + x^4 - x^3 - x - 10000 = 0$$

pozitīvo sakņu augšējā robeža ar L a g r a n ž a metodi noteikta ir $1 + \sqrt{10000} = 101$.

3. Grupēšanas metode.

Pieņemam, ka $f(x)$ ir polinoms, kuŗā koeficientu zīme mainās tikai vienreiz, t. i.

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-k-1} x^{k+1} -$$
$$- a_{n-k} x^k - a_{n-k+1} x^{k-1} - \ldots - a_n,$$

kur visi $a_i > 0$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Var pārveidot

$$f(x) = x^k [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]$$

ar funkcijām

$$\varphi_1(x) = a_0 x^{n-k} + \ldots + a_{n-k-1} x$$

un $$\varphi_2(x) = a_{n-k} + \frac{a_{n-k+1}}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^k}.$$

Ja kādai pozitīvai nozīmei x_0 ir $f(x_0) > 0$, tad x_0 ir pozitīvo sakņu augšējā robeža.

Tiešām, visiem $x > x_0$ ir

$$\varphi_1(x) > \varphi_1(x_0) \text{ un } \varphi_2(x) < \varphi_2(x_0).$$

Tādēļ arī

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) > \varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0) > 0 \text{ vai } f(x) > 0.$$

Ja $f(x)$ koeficientu zīmes mainās vairāk reižu, tad sadalām polinomu grupās tā, ka katrā grupā zīme mainās tikai vienreiz un grupas augstākais loceklis ir pozitīvs. Noteicam augšējo robežu katrai grupai atsevišķi, un ņemam no tām lielāko.

Piemērs. $x^5 + x^4 - x^3 - x - 10000 = (x^5 - x - 10000) + (x^4 - x^3)$.

Pirmā grupa ir pozitīva, ja $x \geqq 7$, bet otrā, ja $x > 1$. Tādēļ $L = 7$.

4. Ņūtona metode.

Ja Meklorena rindā

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

nozīme $a > 0$ un koeficienti

$$f(a),\ f'(a),\ \frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

visi ir pozitīvi, tad katram $x > a$ arī $f(x)$ ir pozitīvs. Tādēļ a ir pozitīvo sakņu augšējā robeža. Koeficientu

$$f(a), f'(a), \ldots, \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

noteikšanai polinomu $f(x)$ atkārtoti dala ar $x-a$ pēc Hornera schēmas.

Piemērs. $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x + 3 = 0$, $a = 2$

	1,	−3,	2,	0,	−1,	3
2	1,	−1,	0,	0,	−1,	**1**
2	1,	1,	2,	4,	**7**	

Te $f(2) = +1$, $f'(2) = +7$, un pēdējā rindā visi koeficienti pozitīvi.

Tādēļ $\frac{f''(2)}{2!}, \frac{f'''(2)}{3!}, \ldots$ *apriori* būs pozitīvi, un dalīšanas turpinājums var palikt. Dotā vienādojuma pozitīvo sakņu augšējā robeža ir $L = 2$.

5. **Lagerrs** *(Laguerre)* ir variējis Ņūtona metodi tā, ka apmierinās ar vienreizīgu dalīšanu. Ja

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

dalījumā ar $x - a$ pēc schēmas

$$\begin{array}{c|l} & a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \\ \hline a & b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n \end{array}$$

visi koeficienti $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ir pozitīvi, tad **a** ir vienādojuma $f(x) = 0$ pozitīvo sakņu augšējā robeža. Tiešām, no tāpatības

$$f(x) = (x-a)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + b_n$$

seko: $f(x) > 0$ visiem $x > a$.

Piezīme. Ja uzskata a par argūmentu, tad polinomus

$$b_0, b_1, \ldots, b_n$$

sauc par Lagerra funkcijām. Daudzās algebras problēmās tām ir svarīga nozīme.

Piemērs. $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x + 3 = 0$, $a = 3$

$$\begin{array}{c|l} & 1,\ -3,\ 2,\ 0,\ -1,\ 3 \\ \hline 3 & 1,\ \ 0,\ 2,\ 6,\ 17,\ 54 \end{array} \quad \text{un } L = 3.$$

No visām aprakstītām metodēm lielākai pozitīvai saknei vistuvāko augšējo robežu L dod Ņūtona metode. Dažos gadījumos tikpat labu rezultātu dabū arī ar grupēšanas vai ar Lagerra metodi.

Pozitīvo sakņu **apakšējās robežas** noteikšanai izdara transformāciju

$$y = \frac{1}{x}.$$

Tad no vienādojuma

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

rodas jauns vienādojums

$$g(y) = 0,$$

kuŗa saknes ir reciprokas dotā vienādojuma saknēm. Polinoma $g(y)$ koeficienti ir tie paši $f(x)$ koeficienti, tikai uzrakstīti otrādā kārtībā:

$$g(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Ja vienādojuma $g(y) = 0$ pozitīvo sakņu augšējā robeža ir L, tad visas pozitīvās saknes $y_i < L$. Tā kā $y_i = \frac{1}{x_i}$, kur x_i ir vienādojuma $f(x) = 0$ pozitīva sakne, tad $\frac{1}{x_i} < L$ vai $x_i > \frac{1}{L}$. Tādēļ $\frac{1}{L}$ ir dotā vienādojuma $f(x) = 0$ pozitīvo sakņu apakšējā robeža.

Vienādojuma $f(x) = 0$ **negātīvo sakņu robežu** noteikšanai lietā transformācijas

$$y = -x \quad \text{un} \quad y = -\frac{1}{x}.$$

§ 38. Šturma teōrēma.

Problēma ir šāda: noteikt, cik ir vienādojuma $f(x) = 0$ reālu sakņu, kas atrodas intervallā (a, b)? Pa daļai jautājumu izšķiŗ jau $f(a)$ un $f(b)$ zīmju vienādība, resp. dažādība un speciālā gadījumā — intervallam $(0, +\infty)$ vai $(0, -\infty)$ arī Dekarta teōrēma. **Jakobi** ***(Jacobi)*** ir konstruējis transformāciju $y = \frac{x-a}{b-x}$, ar kuŗu vienādojums $f(x) = 0$ pāriet tādā vienādojumā $g(y) = 0$, ka katrai $f(x) = 0$ saknei, kas atrodas intervallā (a, b), atbilst viena pozitīva $g(y) = 0$ sakne un otrādi. Ar to arī jautājumam par sakņu skaitu intervallā (a, b) atbildi dod Dekarta teōrēma. Protams, jāpiezīmē, ka patiesais sakņu skaits var būt arī par pāru skaitli mazāks. Teōrētiski pilnīgu problēmas atrisinājumu ir devis **Šturms** ***(Sturm)*** 1829. g.

Pieņemsim, ka $R(x) = 0$ ir vienādojums, kam nav vairākkārtēju sakņu. Tādā gadījumā polinomam $R(x)$ nav kopīga dalītāja ar tā atvasinājumu $R'(x)$, ko apzīmēsim ar $R_1(x)$. Ja ar Eukļida algoritmu meklēsim $R(x)$ un $R_1(x)$ augstāko kopīgo dalītāju, bet **tikai visiem atlikumiem mainīsim zīmi uz pretējo,** tad dabūsim tāpatības:

$$R(x) = R_1(x)\,Q_1(x) - R_2(x),$$
$$R_1(x) = R_2(x)\,Q_2(x) - R_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{i-1}(x) = R_i(x)\,Q_i(x) - R_{i+1}(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{n-2}(x) = R_{n-1}(x)\,Q_{n-1}(x) - R_n$$

Pēdējais atlikums R_n ir pastāvīgs lielums un $\neq 0$, jo polinomiem $R(x)$ un $R_1(x)$ nav kopīga dalītāja. Dabūjam polinomu jeb veselu racionālu funkciju rindu

$$R(x),\ R_1(x), \ldots, R_n(x),$$

kuŗai ir četras sekojošas raksturīgas **īpašības.**

1. Pēdējā funkcija R_n intervallā (a, b) savu zīmi nemaina.

2. Nevienai x nozīmei divas blakusstāvošas funkcijas nevar abas reizē tapt par nullēm.

Tiešām pieņemot, ka ar $x = x_0$ būtu

$$R_{i-1}(x_0) = R_i(x_0) = 0,$$

no augšējām tāpatībām dabūtu

$$R_{i+1}(x_0) = 0,\quad R_{i+2}(x_0) = 0, \ldots$$

pēdīgi arī $R_n = 0$. Tā tad pretēji norunai vienādojumam

$$R(x) = 0$$

tomēr būtu vairākkārtēja sakne $x = x_0$.

3. Ja ar $x = x_0$ viena no vidējām funkcijām top nulle, tad tai blakusstāvošās funkcijas ar $x = x_0$ pieņem pretējas zīmes.

Ja

$$R_i(x_0) = 0,$$

tad no tāpatības

$$R_{i-1}(x) = R_i(x) \,.\, Q_i(x) - R_{i+1}(x)$$

seko:

$$R_{i-1}(x_0) = -R_{i+1}(x_0)$$

4. Ja ε ir pietiekoši mazs pozitīvs skaitlis un $R(x_1) = 0$, tad der nevienādības

$$R(x_1 - \varepsilon)\, R_1(x_1 - \varepsilon) < 0,\quad R(x_1 + \varepsilon)\, R_1(x_1 + \varepsilon) > 0.$$

Tas seko no Rolla teōrēmas lemmas.

Nepārtrauktas funkcijas, kas intervallā (a, b) izpilda šīs četras prasības, sauc par funkcijas $R(x)$ **Šturma funkcijām** šajā intervallā. Tās veido intervallā (a, b) Šturma funkciju rindu (ķēdi)

$$R(x),\ R_1(x), \ldots, R_n(x).$$

Ir vienalga, cik šinī rindā locekļu un vai tā konstruēta ar Eukl ī d a algoritmu, vai ar kādu citu metodi.

Piemērs. Var pierādīt, ka Ležandra sfērisko funkciju rinda

$$P_n(x),\ P_{n-1}(x), \ldots, P_1(x)$$

ir polinoma $P_n(x)$ Šturma funkciju rinda ikkatrā galīgā intervallā.

Šturma teorēma. Ja $R(x), R_1(x), \ldots, R_n(x)$ ir polinoma $R(x)$ Šturma funkciju rinda intervallā (a, b) ar $a < b$ un rindā $R(a), R_1(a), \ldots, R_n(a)$ ir M_a zīmju maiņas, bet rindā $R(b), R_1(b), \ldots, R_n(b)$ ir M_b zīmju maiņas, tad $M_a \geqq M_b$, un diference $M_a - M_b$ ir vienādojuma $R(x) = 0$ to reālo sakņu skaits, kas atrodas intervallā (a, b).

Teorēmas pierādījumam apskata sekojošos **trīs speciālos gadījumus.**

1. Ir iespējams, ka intervallā (a, b) neviena Šturma funkcija netop nulle. Tad ikvienam $R_i(a)$ ir tāda pat zīme kā $R_i(b)$. Tādēļ $M_a = M_b$, resp. $M_a - M_b = 0$, un šim gadījumam Šturma teorēma pierādīta.

2. Pieņemam, ka intervallā (a, b) dotā funkcija $R(x)$ netop nulle, bet viena Šturma funkcija $R_i(x)$ top nulle intervalla (a, b) kādā punktā c, t. i. $R_i(c) = 0$. Tai blakus stāvošo funkciju nozīmēm $R_{i-1}(c)$ un $R_{i+1}(c)$ ir pretējas zīmes, kas nelielā intervallā $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ ar $\varepsilon > 0$ nevar mainīties. Ja $R_{i-1}(c)$ zīmi nosaka ar η, kas ir ± 1, tad arī $R_{i-1}(c - \varepsilon)$ un $R_{i-1}(c + \varepsilon)$ zīmi nosaka ar η. Bet $R_{i+1}(c)$, $R_{i+1}(c - \varepsilon)$ un $R_{i+1}(c + \varepsilon)$ zīmei atbilst $-\eta$. Par $R_i(c - \varepsilon)$ un $R_i(c + \varepsilon)$ zīmēm nekas nav zināms. Noteiksim tās ar α un β, un sastādīsim zīmju diagrammu:

	. . . .	$R_{i-1}(x)$	$R_i(x)$	$R_{i+1}(x)$	. . . .
a					
$c - \varepsilon$		η	α	$-\eta$	
c		η	0	$-\eta$	
$c + \varepsilon$		η	β	$-\eta$	
b					

Te ε ir pēc patikas mazs pozitīvs skaitlis, α, β un η ir $+1$ vai -1. Sadalīsim intervallu (a, b) trīs daļās: $(a, c - \varepsilon)$, $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, $(c + \varepsilon, b)$. Salīdzināsim $M_{c-\varepsilon}$ un $M_{c+\varepsilon}$, t. i. attiecīgo zīmju maiņu skaitu, ko dabū, liekot Šturma funkcijās x vietā $c - \varepsilon$, resp. $c + \varepsilon$. Skaitļu $M_{c-\varepsilon}$ un $M_{c+\varepsilon}$ nevienādību varētu izsaukt tikai funkcija $R_i(x)$, jo neviena cita Šturma funkcija intervallā (a, b) netop nulle, tā tad zīmi nemaina. Virknē η, α, $-\eta$ ir viena zīmju maiņa, jo reizinājumiem $\eta\alpha$ un $-\alpha\eta$ ir pretējas zīmes. Tādēļ viens no tiem ir pozitīvs, bet otrs negātīvs. Līdzīgā kārtā redzam, ka arī virknē η, β, $-\eta$ ir viena zīmju maiņa. Varētu arī teikt, ka katras virknes galējiem locekļiem ir pretējas zīmes. Tādēļ zīmju maiņu skaits ir nepāru skaitlis, bet ne lielāks par divi. Tā tad zīmju maiņu skaits abās rindās ir vienāds, un $M_{c-\varepsilon} = M_{c+\varepsilon}$.

Intervalli $(a, c-\varepsilon)$ un $(c+\varepsilon, b)$ atbilst pirmajam gadījumam, jo te neviena Šturma funkcija zīmi nemaina. Tādē $M_a = M_{c-\varepsilon}$ un $M_{c+\varepsilon} = M_b$. Tā tad $M_a = M_b$. Šturma teōrēma arī šinī gadījumā pierādīta.

Zīmju maiņu skaiti būtu vienādi $M_a = M_b$ arī tad, ja intervallā (a, b) būtu vairāk punktu $c_1, c_2, \ldots$, kuŗos viena vai vairākas no vidējām Šturma funkcijām top par nullēm. Tad intervalls (a, b) būtu jāsadala attiecīgi vairākās daļās, un jāatsaucas uz apskatīto speciālo gadījumu.

3. Intervallā (a, b) atrodas vienādojuma $R(x) = 0$ viena sakne x_1. Sadalām intervallu (a, b) trīs daļās:

$$(a, x_1 - \varepsilon), (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon), (x_1 + \varepsilon, b).$$

Šturma funkcijas ceturtā īpašība izteic, ka $R(x_1 + \varepsilon)$ un $R_1(x_1 + \varepsilon)$ zīmes ir vienādas (tās noteic ar η), bet $R(x_1 - \varepsilon)$ un $R_1(x_1 - \varepsilon)$ zīmes pretējas. Arī $R(x_1 - \varepsilon)$ un $R(x_1 + \varepsilon)$ zīmes ir pretējas, jo intervallā $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ atrodas vienādojuma $R(x) = 0$ viena sakne. Zīmju diagrammai jābūt šādai:

	$R(x)$	$R_1(x)$
$x_1 - \varepsilon$	$-\eta$	η
x_1	0	η
$x_1 + \varepsilon$	η	η

Ar $x = x_1 - \varepsilon$ funkciju $R(x)$, $R_1(x)$ rindā ir viena zīmju maiņa, kas pazūd, ja $x = x_1 + \varepsilon$. Pārējās Šturma funkcijas, kā redzējām, zīmju maiņu skaitu nevar iespaidot. Tādēļ

$$M_{x_1-\varepsilon} > M_{x_1+\varepsilon} \text{ un } M_{x_1-\varepsilon} - M_{x_1+\varepsilon} = 1.$$

Intervallos $(a, x_1 - \varepsilon)$ un $(x_1 + \varepsilon, b)$ nekas svarīgs nenotiek, jo $M_a = M_{x_1-\varepsilon}$ un $M_{x_1+\varepsilon} = M_b$. Tādēļ arī $M_a > M_b$ un $M_a - M_b = 1$. Arī šinī gadījumā Šturma teōrēma pareiza.

Vispārīgā gadījumā, kad vienādojumam $R(x)=0$ intervallā (a, b) ir k saknes, tad tās ir vienkāršas. Intervallu (a, b) mēs varam domāt sadalītu k daļās (a, a_1), (a_1, a_2), . . ., (a_{k-1}, b) tā, ka katrā daļā atrodas vienādojuma $R(x)=0$ tikai viena sakne. Ja $M_1, M_2, \ldots, M_{k-1}$ ir attiecīgo zīmju maiņu skaits Šturma funkciju rindā ar $x = a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, tad pēc tikko apskatītā speciālā gadījuma

$$M_a - M_1 = 1,\quad M_1 - M_2 = 1,\ \ldots,\ M_{k-1} - M_b = 1.$$

Saskaitot šīs vienādības, dabūjam $M_a - M_b = k$; tā tad $M_a > M_b$. Šturma teorēma pierādīta.

Piemērs. Konstruēt Šturma funkcijas polinomam

$$R = x^4 + x^3 + x - 1.$$

Te $$R_1 = 4x^3 + 3x^2 + 1 = R'(x).$$

Dalām R ar R_1, iepriekš reizinot R ar 4 un pēc tam attiecīgi arī atlikumus pēc sekojošā parauga.

$$\begin{array}{r|l}
4R = 4x^4 + 4x^3 + 4x - 4 & 4x^3 + 3x^2 + 1 = R_1 \\ \hline
x^3 + 3x - 4 & x, +1 \\
4x^3 + 12x - 16 & \\ \hline
-3x^2 + 12x - 17 = -R_2; &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
3R_1 = 12x^3 + 9x^2 + 3 & 3x^2 - 12x + 17 = R_2 \\ \hline
57x^2 - 68x + 3 & 4x + 19 \\ \hline
160x - 320 & \\ \hline
x - 2 = -R_3; &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
R_2 = 3x^2 - 12x + 17 & -x + 2 = R_3 \\ \hline
-6x + 17 & -3x + 6 \\ \hline
+5 & \\ \hline
+1 = -R_4 &
\end{array}$$

Tā tad

$$R = x^4 + x^3 + x - 1,\quad R_1 = 4x^3 + 3x^2 + 1,$$

$$R_2 = 3x^2 - 12x + 17,\quad R_3 = -x + 2,\quad R_4 = -1.$$

Ja Šturma funkcijas aprēķina ar $x = -\infty, +\infty, 0$, tad var noteikt $R(x)=0$ pozitīvo un negātīvo sakņu skaitu. Pēc tam, izvēloties dažādas x nozīmes, var noteikt intervallus, kuros atrodas vienādojuma $R(x)=0$ tikai viena sakne. Tas redzams no sekojošās schēmas

	R	R_1	R_2	R_3	R_4	M
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	3
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	1
0	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	2
$+1$	$+$					
-1	$-$					
-2	$+$					

Tā tad vienādojumam $R(x) = x^4 + x^3 + x - 1 = 0$ ir tikai divas reālas saknes: viena pozitīva, bet otra negātīva. Pozitīvā sakne atrodas intervallā $(0, 1)$, jo $R(0) < 0$, bet $R(1) > 0$. Negātīvā sakne ir intervallā $(-1, -2)$.

Piezīme 1. Ja intervalla (a, b) gala punktā, piem. $x = a$, kāda no Šturma vidējām funkcijām $R_i(x)$ top nulle, tad tai blakusstāvošām ir pretējas zīmes. Izvēlamies (a, b) vietā intervallu $(a + \varepsilon, b)$, un sastādām zīmju diagrammu:

	$R_{i-1}(x)$	$R_i(x)$	$R_{i+1}(x)$
a	η	0	$-\eta$
$a + \varepsilon$	η	α	$-\eta$

Ar kaut kādu α virknē $\eta, \alpha, -\eta$ ir tikai viena zīmju maiņa tāpat kā virknē $\eta, -\eta$. Tādēļ tās funkcijas $R_i(x)$ ar $i \geqq 1$, kas ar $x = a$ vai $x = b$ top par nullēm, zīmju maiņas skaitot, var neievērot.

Kā izvairīties no gadījuma, kad $R(a) = 0$, ir saprotams pats par sevi.

Piezīme 2. Šturma funkciju aprēķināšanā ir atļauti tamlīdzīgi vienkāršojumi, kā meklējot divu polinomu augstāko kopīgo dalītāju. Dalīšanā atlikumus atļauts reizināt vai dalīt ar katru **pozitīvu** skaitli. Pēdējo atlikumu R_n var atvietot ar $+1$, ja $R_n > 0$, vai ar -1, ja $R_n < 0$.

Ja viena no vidējām funkcijām $R_k(x)$ intervallā (a, b) zīmi nemaina, tad Šturma rindu var izbeigt jau ar šo funkciju. Sekojošās funkcijas nav nozīmes meklēt, jo funkcijām

$$R(x),\ R_1(x),\ \ldots,\ R_k(x)$$

ir visas četras vajadzīgās Šturma funkciju īpašības. Minētā piemērā Šturma rindu var noslēgt jau ar funkciju $R_2(x)$ jo tās diskriminants ir negātīvs, un $R_2(x)$ visām reālām x nozīmēm patur vienu un to pašu zīmi.

Lai gan var lietāt minētos vienkāršojumus, tomēr Šturma metode praktiski var izrādīties ļoti neērta. Par to var pārliecināties **piemērā** ar $R(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, kur funkcijas $R_5(x)$ koeficienti iznāk 16 un 19 ciparu skaitļi.

Piezīme 3. Ja vienādojumam $R(x) = 0$ ir **vairākkārtējas saknes** un $D(x) = (R, R_1)$ ir $R(x)$ un $R'(x) = R_1(x)$ augstākais kopīgais dalītājs, tad vienādojumam

$$\frac{R(x)}{D(x)} = 0$$

ir visas saknes vienkāršas un tādas pat kā v-mam $R(x) = 0$. Funkciju $D(x)$ var atrast tādā pat kārtā kā Šturma funkcijas pēc tabulas

$$\begin{aligned} R(x) &= R_1(x) \,.\, Q_1(x) - R_2(x) \\ R_1(x) &= R_2(x) \,.\, Q_2(x) - R_3(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_{n-2}(x) &= R_{n-1}(x) \,.\, Q_{n-1}(x) - D(x) \\ R_{n-1}(x) &= D(x) \,.\, Q_n(x) \end{aligned}$$

Var pārliecināties, ka funkcijām

$$\frac{R(x)}{D(x)}, \frac{R_1(x)}{D(x)}, \ldots, \frac{R_{n-1}(x)}{D(x)}, 1$$

ir visas Šturma funkciju raksturīgās īpašības. Te 4. īpašība seko no Rolla teorēmas lemmas, ja ievēro, ka D^2 ir pozitīvs lielums un reizinājuma zīmi neiespaido.

Šinī gadījumā diference $M_a - M_b$ nosaka vienādojuma $R(x) = 0$ **dažādo** sakņu skaitu intervallā (a, b).

Ja $D(a)$ ir pozitīvs vai negatīvs skaitlis, tad rindā

$$\frac{R(a)}{D(a)}, \frac{R_1(a)}{D(a)}, \ldots, \frac{R_{n-1}(a)}{D(a)}, 1$$

ir tikpat daudz zīmju maiņu, cik rindā

$$R(a), \; R_1(a), \; \ldots, \; R_{n-1}(a), \; D(a).$$

Bet ja $D(a) = 0$, tad arī $R(a) = 0$. Tā tad a ir dotā vienādojuma sakne, un intervallam (a, b) jāizvēlas cits sākuma punkts.

Tas pats sakāms arī par zīmju maiņu skaitu abās rindās, kad $x = b$.

Tādēļ vienādojuma $R(x) = 0$ **dažādo** sakņu skaitu kādā intervallā nosaka arī funkciju rinda

$$R(x),\ R_1(x),\ \ldots,\ R_{n-1}(x),\ D(x),$$

kuŗai nav visas Šturma funkciju rindas īpašības.

Piezīme 4. Katras sekojošās Šturma funkcijas pakāpe ir vismaz par vienu zemāka kā iepriekšējās. Tādēļ visu funkciju skaits nevar būt lielāks par $n + 1$, ja n ir polinoma $R(x)$ pakāpe. Zīmju maiņu skaits M_a nevar būt lielāks par n.

Ja visas $R(x) = 0$ saknes ir reālas un dažādas un atrodas intervallā (a, b), tad nepieciešami jābūt $M_a = n$ un $M_b = 0$. Bet M_∞ var būt nulle tikai tad, ja visu Šturma funkciju augstāko locekļu koeficientiem ir vienādas zīmes. Tā tad: lai vienādojuma $R(x) = 0$ visas n saknes būtu reālas un dažādas, ir nepieciešami un pietiekoši, ka polinoma $R(x)$ Šturma funkciju rindā atrodas $(n+1)$ funkcijas (katrai sekojošai funkcijai pakāpe par 1 zemāka kā iepriekšējai), un funkciju augstāko locekļu koeficientiem zīmes ir vienādas.

Piemērs. Trešās pakāpes vienādojuma

$$R(x) = x^3 + px + q = 0$$

visas trīs saknes ir reālas un dažādas tad, ja Šturma funkciju rindā

$$R = x^3 + px + q,\ R_1 = 3x^2 + p,\ R_2 = -2px - 3q,$$
$$R_3 = -(4p^3 + 27q^2) = \Delta$$

augstāko locekļu koeficienti ir pozitīvi, t. i. ja $p < 0$ un diskriminants $\Delta > 0$. Otrā prasība ietveŗ arī pirmo, jo ar pozitīvu p nav iespējams, ka $-4p^3 - 27q^2 > 0$. Tādēļ, lai visas trīs vienādojuma $x^3 + px + q = 0$ saknes būtu reālas un dažādas, ir nepieciešami un pietiekoši, ka vienādojuma diskriminants $\Delta = -(4p^3 + 27q^2) > 0$.

Līdzīgā kārtā diskusijā par 4. pakāpes vienādojuma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

saknēm atrod kritēriju, kad saknes ir reālas un dažādas.

§ 39. Vienādojuma racionālās saknes.

Šinī nodalījumā apskatīsim vienādojumus, kam visi koeficienti ir racionāli skaitļi. Reizinot ar kopsaucēju, dabū vienādojumu, kam visi koeficienti ir veseli skaitļi.

Meklēsim tāda vienādojuma racionālas saknes.

Teōrēma. Ja vienādojuma

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

koeficienti ir veseli skaitļi un kāda sakne ir racionāla nesaīsināma daļa $\frac{p}{q}$, tad $a_0 \mid q$ un $a_n \mid p$.

Liekam vienādojuma kreisā pusē x vietā $\frac{p}{q}$ un atbrīvojamies no saucēja. Dabūjam tāpatību

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0,$$

kuŗā visi kreisās puses locekļi izņemot pirmo, dalās ar q, bet visi locekļi, izņemot pēdejo, dalās ar p. Tādēļ nepieciešams, ka arī $a_0 p^n \mid q$ un $a_n q^n \mid p$. Skaitļiem p^n un q, tāpat q^n un p nav īstu kopīgu dalītāju. Tādēļ jāprasa, lai $a_0 \mid q$ un $a_n \mid p$.

Piemērs. Ja vienādojumam

$$4x^5 - 7x^2 + 11x - 6 = 0$$

ir racionālas saknes, tad tās meklējamas starp skaitļiem

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}.$$

Sekas. Ja vienādojuma augstākā locekļa koeficients $a_0 = 1$ un visi pārējie koeficienti ir veseli skaitļi, tad tāda vienādojuma visas racionālās saknes ir veseli skaitļi, kas meklējami starp brīvā locekļa dalītājiem.

Ja a ir vienādojuma $f(x) = 0$ sakne, tad polinoms $f(x)$ dalās ar $x - a$ un tāpat arī ar $a - x$. Var dabūt tāpatību

$$f(x) = (a - x)\, q(x),$$

kur x vietā varam likt kuŗu katru skaitli, piem. $+1$ vai -1. Ja a ir vienādojuma $f(x) = 0$ sakne, tad nepieciešams, ka

$$f(1) \mid (a - 1) \text{ un } f(-1) \mid (a + 1).$$

To ievērojot, slēdzam, ka vienādojuma varbūtējo veselo sakņu skaits stipri samazināms. Par vienādojuma $f(x) = 0$ sakni var būt tikai tāds brīvā locekļa dalītājs, kas pamazināts par 1 dala $f(1)$, bet palielināts par 1 dala $f(-1)$.

Piemērs.

$$x^3 - 12x^2 + 30 = 0.$$

Te brīvā locekļa dalītāji a ir

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 6,\ \pm 10,\ \pm 15,\ \pm 30.$$

Bez tam $f(1) = 19$ un $19 \mid (a - 1)$ tikai tad, ja $a = 2$, bet $f(-1) = 17$ un 17 nedalās ar $3 = 2 + 1$. Tādēļ dotajam vienādojumam racionālu sakņu nemaz nav.

Ja vienādojuma

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

viena sakne $x_1 = a$ ir vesels skaitlis, tad $f(x) \mid (x - a)$, t. i.

$$f(x) = (x - a)(- b_0 x^{n-1} - b_1 x^{n-2} - \ldots - b_{n-1}),$$

kur $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ ir veseli skaitļi. Salīdzinot koeficientus pie x vienādām pakāpēm, dabū sakarus

$$a_n = a b_{n-1},\ a_{n-1} = a b_{n-2} - b_{n-1},\ a_{n-2} = a b_{n-3} - b_{n-2}, \ldots, 1 = - b_0.$$

Tā tad

$$a_n \mid a \text{ un } \frac{a_n}{a} = b_{n-1};\quad (b_{n-1} + a_{n-1}) \mid a \text{ un } \frac{b_{n-1} + a_{n-1}}{a} = b_{n-2} \text{ u. t. t.}$$

Ja summa $a_k + b_k$ ar a nedalās, tad a nav $f(x) = 0$ sakne.

Koeficientus „b" aprēķina pēc šādas schēmas:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	1
a	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	-1	0

Piemērs. $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$

	6	-5	7	-5	1
2	3	-1	3	-1	0
3	1	0	1	0	

Tā tad šī vienādojuma $f(x) = 0$ divas saknes ir

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3 \text{ un } f(x) = (x - 2)(x - 3)(x^2 + 1).$$

Ja vienādojuma $f(x) = 0$ augstākā locekļa koeficients $a_0 \neq 1$, tad, izdarot lineāru transformāciju

$$y = a_0 x,$$

dabū jaunu vienādojumu $g(y) = 0$, kam augstākā locekļa koeficients ir 1. Tādā kārtā jautājums par $f(x) = 0$ racionālām saknēm ir reducēts uz tikko apskatīto jautājumu par tāda vienādojuma racionālām saknēm, kuŗa augstākā locekļa koeficients ir 1.

Piemērs. $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 3 = 0.$

Reizinam vienādojuma abas puses ar 4^2 un apzīmējam $4x = y$. Dabūjam vienādojumu

$$g(y) = y^3 - 8y^2 + 20y - 48 = 0.$$

Te $g(1) = 35$, un $g(-1) = -77$. Ja a ir kāds no brīvā locekļa dalītājiem:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 24, \pm 48,$$

tad $g(1) \mid (a-1)$ tikai tad, kad a ir $2, -4, \pm 6$ vai 8. Ar šīm nozīmēm $g(-1) \mid (a+1)$ tad, ja $a = 6$. Tādēļ 6 jāpārbauda pēc Hornera schēmas

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -8 & 20 & -48 \\ \hline 6 & 1 & 2 & 8 & 0. \end{array}$$

Atrodam, ka $y_1 = 6$ ir vienādojuma $g(y) = 0$ sakne. Pārējās saknes dod kvadrātvienādojums $y^2 - 2y + 8 = 0$, bet tās nav racionālas. Tādēļ arī dotajam vienādojumam

$$f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 3 = 0$$

ir tikai viena racionāla sakne $x_1 = \frac{3}{2}$.

§ 40. Vienādojuma irracionālo sakņu tuvināta aprēķināšana.

Izlietojot Šturma teōrēmu, vienādojuma $f(x) = 0$ irracionālās saknes var aprēķināt tuvināti ar šādu paņēmienu. Var atrast intervallu (a, b), kurā atrodas $f(x) = 0$ tikai viena sakne; sakne tad ir **izolēta.** Ar intervalla atkārtotu dalīšanu uz pusēm var to pēc patikas samazināt. Bet šis ceļš ir garlaicīgs. Ir liels skaits citu paņēmienu, ar kuriem ātrāk sasniedz mērķi.

Apskatīsim vispirms **Ņūtona metodi** un *regula falsi**). Abas metodes ir izlietojamas arī transcendentiem vienādojumiem. Vēsturiskā ziņā *regula falsi* ir viena no vecākām metodēm, ko pazinuši un lietojuši senie ēģiptieši un indieši.

Pierādīsim vispirms divas palīgformulas: **Teilora formulu ar otro atlikuma locekli**

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \Theta h),$$

kur Θ ir īsts, pozitīvs daļskaitlis, t. i. $0 < \Theta < 1$, un **Lagranža formulu**

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c), \text{ kur } a < c < b,$$

jeb

$$f(a) - f(b) = (a - b)\, f'[a + \Theta(b - a)] \text{ ar } 0 < \Theta < 1.$$

---

*) Tulkojumā: neīstā kārtula.

Abas formulas ir vispārīgās Teilora formulas ar n. atlikuma locekli atsevišķi gadījumi, un varētu pierādīt abas reizē. Ērtāk ir tomēr pierādīt katru par sevi.

Vispirms sastādīsim funkciju

$$F(x) = f(a+h) - f(x) - (a+h-x)\,f'(x) - \frac{f(a+h) - f(a) - h f'(a)}{h^2}(a+h-x)^2,$$

kas top par nulli tad, ja $x = a$ vai $x = a + h$. Atvasinātā funkcija ir

$$F'(x) = -(a+h-x)\,f''(x) + 2\frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2}(a+h-x)$$

jeb

$$F'(x) = \frac{2}{h^2}(a+h-x)\left[f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2}f''(x)\right].$$

Pēc Rolla teorēmas vienādojumam $F'(x) = 0$ intervallā $(a, a+h)$ ir vismaz viena sakne $x = a + \Theta h$, kur $0 < \Theta < 1$. Izteicot $F'(a+\Theta h) = 0$ un dalot abas puses ar $\frac{2}{h^2}(a+h-x) \neq 0$, dabū pirmo formulu, ko vajadzēja pierādīt.

Otro formulu pierāda, lietojot funkciju

$$\varphi(x) = (x-b)\,f(a) - (x-a)\,f(b) - (a-b)\,f(x).$$

Tā kā $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, tad pēc Rolla teorēmas starp a un b atrodas skaitlis c, kas ir vienādojuma $\varphi'(x) = 0$ sakne. Izteicot atvasināto funkciju

$$\varphi'(x) = f(a) - f(b) - (a-b)\,f'(x),$$

dabūjam

$$0 = f(a) - f(b) - (a-b)\,f'(c)$$

vai

$$\frac{f(a) - f(b)}{a-b} = f'(c).$$

Tagad apskatīsim **Ņūtona un Furjē metodi,** kuŗas ideju devis Ņūtons, bet analitisko pamatojumu Furjē *(Fourier).*

Ja vienādojumiem

$$f(x) = 0 \quad \text{un} \quad f''(x) = 0$$

ir kopīgas saknes, tad tās jāizslēdz.

Intervallu (a, b), kuŗā atrodas vienādojuma $f(x) = 0$ viena vienkārša sakne $x_1 = a + h$, iespējams samazināt tā, ka vienādojumiem $f'(x) = 0$ un $f''(x) = 0$

intervallā (a, b) nav saknes, un tā tad funkciju $f'(x)$ un $f''(x)$ zīmes nemainās.

Reizinājumiem

$$f(a) . f''(a) \text{ un } f(b) . f''(b)$$

zīmes ir pretējas. Ar **a** apzīmēsim to intervalla gala punktu, kuŗā $f(a) . f''(a) > 0$.

Teilora formulā liekam $f(x_1) = f(a + h) = 0$. Tad rodas sakars

$$f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \Theta h) = 0,$$

no kuŗa izteic

$$h = x_1 - a = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2}{2} \cdot \frac{f''(a + \Theta h)}{f'(a)}.$$

Ja apzīmē

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a_1,$$

tad $\quad a_1 - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}$ un $x_1 - a_1 = -\frac{h^2}{2} \cdot \frac{f''(a + \Theta h)}{f'(a)}$.

Tādēļ reizinājums

$$(x_1 - a_1)(a_1 - a) = \frac{h^2}{2 (f'(a))^2} f(a) f''(a + \Theta h)$$

ir pozitīvs, jo pēc norunas $f(a) . f''(a) > 0$ un $f''(x)$ intervallā (a, b) zīmi nemaina. Tā kā $x_1 - a_1$ un $a_1 - a$ zīmes ir vienādas, tad a_1 atrodas starp a un x_1.

Līdzīgā kārtā var atrast, ka

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

atrodas starp a_1 un x_1,

$$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)}$$

starp a_2 un x_1 u. t. t. Katra sekojošā nozīme a_k atrodas saknei x_1 tuvāk kā iepriekšējā a_{k-1}. Tādēļ varētu sagaidīt, ka $\lim_{k \to \infty} a_k = x_1$. Šo apgalvojumu noskaidrosim.

Pieņemsim, ka visā intervallā (a, b) ir

$$|f'(x)| > A, \quad |f''(x)| < B \text{ un } M = \frac{B}{2A},$$

kur A un B ir pozitīvi skaitļi. Tā kā

$$x_1 = a_{k-1} + h_{k-1} = a_k + h_k \text{ un } a_k = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1})}{f'(a_{k-1})},$$

tad var izteikt

$$h_k = x_1 - a_k = x_1 - a_{k-1} + \frac{f(a_{k-1})}{f'(a_{k-1})}$$

jeb

$$h_k = h_{k-1} + \frac{f(a_{k-1})}{f'(a_{k-1})}.$$

No Teilora formulas

$$f(a_{k-1} + h_{k-1}) = f(a_{k-1}) + h_{k-1} f'(a_{k-1}) + \frac{h^2_{k-1}}{2} f''(a_{k-1} + \Theta h_{k-1}),$$

kurā var likt $f(a_{k-1} + h_{k-1}) = f(x_1) = 0$, var rakstīt

$$h_{k-1} + \frac{f(a_{k-1})}{f'(a_{k-1})} = -\frac{h^2_{k-1}}{2} \cdot \frac{f''(a_{k-1} + \Theta h_{k-1})}{f'(a_{k-1})}.$$

Salīdzinot ar iepriekšējo izteiksmi, dabū

$$h_k = -\frac{h^2_{k-1}}{2} \cdot \frac{f''(a_{k-1} + \Theta h_{k-1})}{f'(a_{k-1})}.$$

Tādēļ var novērtēt

$$|h_k| < M h^2_{k-1}$$

un tamlīdzīgi

$|h_{k-1}| < M h^2_{k-2}$, $|h_{k-2}| < M h^2_{k-3}, \ldots, |h_1| < M h^2$, bet $|h| < |a-b|$.
Ar pakāpenisku substitūciju un pārveidojumiem atrod

$$|h_k| < M^{1+2+4+\ldots+2^{k-1}} \cdot |a-b|^{2^k} = M^{2^k-1} |a-b|^{2^k} = M^{-1} [M(a-b)]^{2^k}.$$

Ja nu $M|a-b| < 1$, tad $\lim\limits_{k \to \infty} h_k = 0$ un $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = x_1$.

Ar to ir pierādīts sekojošais.

Ja vienādojuma $f(x) = 0$ vienkārša sakne x_1 ir ieslēgta pietiekoši šaurā intervallā (a, b), kurā $f'(x)$ un $f''(x)$ netop par nullēm,

$$|f'(x)| > A, \quad |f''(x)| < B, \quad \frac{B}{2A} = M, \quad |M(b-a)| < 1, \quad f(a) \cdot f''(a) > 0,$$

un ja ir sastādīta skaitļu rinda $a_0 = a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ tā, ka

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)} \text{ ar } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

tad visi a_k ir vai nu mazāki, vai lielāki par x_1 un $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = x_1$.

Tādēļ x_1 nozīmi var aprēķināt ar kādu patīk tuvinājumu.

Var pierādīt, ka katra sekojošā tuvinājuma kļūda ir apmēram iepriekšējā tuvinājuma kļūdas kvadrāts (tas redzams no $|h_k|$ izteiksmes), t. i. ja tuvinājums a_k dod sakni x_1 ar n pareizām decimālzīmēm, tad a_{k+1} ar apm. $2n$ pareizām decimālzīmēm.

Regula falsi.

Ja intervallā (a, b) atrodas vienādojuma $f(x) = 0$ viena sakne x_1, tad x_1 tuvinātas nozīmes ir jau a un b. Labāku tuvinājumu dabū, liekot

$$b_1 = a - \frac{f(a)}{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

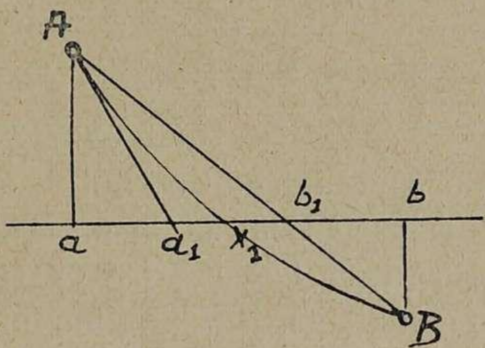
Tā kā f(a) un f(b) zīmes ir pretējas, tad

$$\left|\frac{f(a)}{f(a) - f(b)}\right| < 1.$$

Tādēļ intervalls (a, b_1) ir mazāks nekā (a, b), jo

$$|a - b_1| = |a - b| \left|\frac{f(a)}{f(a) - f(b)}\right| < |a - b|.$$

Regula falsi un Ņūtona metode saistās ar sekojošiem ģeometriskiem priekšstatiem. Ja $y = f(x)$ ir līka līnija, kas iet caur punktiem A [a, f (a)], B [b, f (b)] un punktā x_1 krusto abscisu asī, tad b_1 ir punkts, kuŗā sekante AB krusto abscisu asi. Bet punktā a_1 abscisu asi krusto līknes pieskaŗe, kas novilkta punktā A. Ja Ņūtona metodes nosacījumi ir izpildīti, tad ar zīmējuma palīdzību var viegli pierādīt, ka punkti a_1, b_1 atrodas saknei x_1 tuvāk nekā punkti a un b.



Pierādīsim, ka vienādojuma $f(x) = 0$ sakne x_1 atrodas starp Ņūtona tuvinājumu a_1 un *regula falsi* tuvinājumu b_1.

Tad būs arī pierādīts, ka b_1 ir labāks tuvinājums nekā b_3 ar kuŗu iesākām.

Tā kā $f(x) - f(a)$ dalās ar $x - a$, tad

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ir vesela racionāla funkcija. Ar Lagranža formulu dabūsim

$$F(a) = \lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f'[a + \Theta(a - x)] = f'(a)$$

un

$$F(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = f'(c_1),$$

kur nozīme c_1 atrodas starp a un x_1.

Tā kā $f(x_1) = 0$, tad no pēdejās formulas var izteikt

$$x_1 - a = - \frac{f(a)}{f'(c_1)}.$$

Sastādīsim vēl

$$F(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

kur c atrodas starp a un b.

Uzrakstīsim F(x) atvasināto funkciju

$$F'(x) = \frac{(x-a) f'(x) - [f(x) - f(a)]}{(x-a)^2}.$$

Ar Lagranža formulu izteic $f(x) - f(a)$ un dabū

$$F'(x) = \frac{(x-a) f'(x) - (x-a) f'[a + \Theta(x-a)]}{(x-a)^2}$$

jeb

$$F'(x) = \frac{f'(x) - f'[a + \Theta(x-a)]}{x - a}.$$

Vēlreiz pielietājot Lagranža formulu, atrod

$$F'(x) = \frac{[x - a - \Theta(x-a)] f''(\xi)}{x - a} = (1 - \Theta) f''(\xi).$$

Te Θ ir īsts pozitīvs daļskaitlis, bet ξ atrodas starp x un $a + \Theta(x-a)$, tā tad arī starp x un a. Ja nu x maina no a līdz b, tad $f''(\xi)$ zīmi nemaina. Tādēļ arī $F'(x)$ nemaina zīmi, un funkcija $F(x)$ intervallā (a, b) ir monotoni augoša vai dilstoša funkcija. Tāpēc $F(x_1)$ ir ieslēgts starp F(a) un F(b), resp. $f'(c_1)$ ieslēgts starp $f'(a)$ un $f'(c)$.

Ja a_1 ir saknes x_1 tuvinājums, kas aprēķināts ar Ņūtona metodi, bet tuvinājums b_1 ar *regula falsi*, tad

$$x_1 - a_1 = x_1 - a + \frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{un} \quad x_1 - b_1 = x_1 - a + \frac{f(a)}{f'(c)}$$

Ar substitūciju

$$x_1 - a = - \frac{f(a)}{f'(c_1)}$$

rodas

$$x_1 - a_1 = f(a)\left[\frac{1}{f'(a)} - \frac{1}{f'(c_1)}\right] \text{ un } x_1 - b_1 = f(a)\left[\frac{1}{f'(c)} - \frac{1}{f'(c_1)}\right].$$

Tā kā $f'(c_1)$ ieslēgts starp $f'(a)$ un $f'(c)$, tad izteiksmēm $x_1 - a_1$ un $x_1 - b_1$ ir pretējas zīmes. Tādēļ saknei x_1 jāatrodas starp a_1 un b_1. To arī vajadzēja pierādīt.

Praktikā *regula falsi* lietā kopā ar Ņūtona metodi, jo tad rezultātā derīgo zīmju skaits ir acīm redzams.

Piemērs. Vienādojuma

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

viena sakne atrodas intervallā (2; 2,1), jo

$$f(2) = -1, \text{ bet } f(2,1) = +0{,}061.$$

Vienādojumiem

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \text{ un } f''(x) = 6x = 0$$

šinī intervallā sakņu nav, un

$$f'(x) \geqq 10 = A, \quad f''(x) \leqq 12{,}6 = B, \quad M = \frac{B}{2A} = 0{,}63,$$

$$M\,|a - b| < 1.$$

Apskatāmā intervallā $f''(x) > 0$. Tādēļ $a = 2{,}1$ un $b = 2$. Pēc Ņūtona metodes tuvinājums ir

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{11{,}23} = 2{,}1 - 0{,}0054 = 2{,}0946$$

ar kļūdu $h_1 < M(a - b)^2 = 0{,}0063.$

Pēc *regula falsi* tuvinājums ir

$$b_1 = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{10{,}61} = 2{,}1 - 0{,}0057 = 2{,}0943.$$

Tādēļ x_1 ar trim pareizām decimālzīmēm ir 2,094.

Hornera metode.

Pieņemsim, ka vienādojuma $f(x) = 0$ visas reālās saknes ir atdalītas, un starp veseliem skaitļiem a un $a + 1$ atrodas reāla sakne y_1. Ar transformāciju

$$y = x - a,$$

dabū vienādojumu $F(y) = 0$, kam intervallā (0, 1) ir viena reāla sakne y_1. Pēc tam ar transformāciju

$$z = 10\,y$$

sastāda vienādojumu $F_1(z) = 0$, kam viena reāla pozitīva sakne z_1 atrodas intervallā $(b, b+1)$, kur $b < 10$. Tad

$$x_1 = a + y_1 = a + \frac{z_1}{10} \approx a + \frac{b}{10}.$$

Iesākto procesu turpinot, vienādojuma $f(x) = 0$ sakni x_1 var aprēķināt ar cik lielu tuvinājumu patīk. Vajadzīgās transformācijas $y = x - a$ un $z = 10y$ ir Čirnhausa transformāciju speciali veidi.

Piemērs. $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$; $2 < x_1 < 3$; $y = x - 2$. Pēc Hornera schēmas

	1	0	-2	-5
2	1	2	2	$-$**1**
2	1	4	**10**	
2	1	**6**		
	1			

izteic $F(y) = y^3 + 6y^2 + 10y - 1$,

bet $F_1(z) = z^3 + 60z^2 + 1000z - 1000$ un $0 < z_1 < 1$.

Pieņemot $t = 10z$, dabū

$$F_2(t) = t^3 + 600t^2 + 100\,000t - 1\,000\,000 \text{ un } 9 < t_1 < 10.$$

Izlietojot schēmu

	1	600	100 000	$-1\,000\,000$
9	1	609	105 481	$-\ \ 50\,671$
9	1	618	111 043	
9	1	627		
	1,			

transformē $F_2(t)$ ar $u = t - 9$. Ja liek $v = 10u$, tad $F_3(v) = v^3 + 6270\ v^2 + 11104300\ v - 50671000$, kur $4 < v_1 < 5$. Tā tad dotā vienādojuma $f(x) = 0$ sakne x_1 ar trim pareizām decimālzīmēm ir $2{,}094$.

§ 41. Grafiskās metodes.

Vienādojuma $f(x) = 0$ reālo sakņu noteikšanai pietiek konstruēt līniju $y = f(x)$. Tad konstruētās līnijas un x-ass krustošanās punktu abscisas izteic vienādojuma visas reālās saknes. Dažos gadījumos ir ērti doto vienādojumu apmainīt ar ekvivalentu vienādojumu sistēmu, ievedot palīga nezināmos. Tad saknes noteic ar divu līniju krustošanās punktu abscisām.

Piemērs. Kubvienādojums $x^3 + px + q = 0$.

Konstruējam divas līnijas: kubisko parabolu $y = x^3$ un taisni $y + px + q = 0$, un atrodam to krustošanas punktu abscisas. Pirmā līnija visiem trešās pakāpes vienādojumiem paliek viena un tā pati. Tā jākonstruē praktikā pēc iespējas rūpīgi. Taisnes $y + px + q = 0$ konstrukcija nekādas grūtības nerada.

Ceturtās pakāpes vienādojuma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

atrisināšanai šī grafiskā metode nav tik ērta. Te pēc iespējas pareizi jākonstruē divas otrās pakāpes līnijas

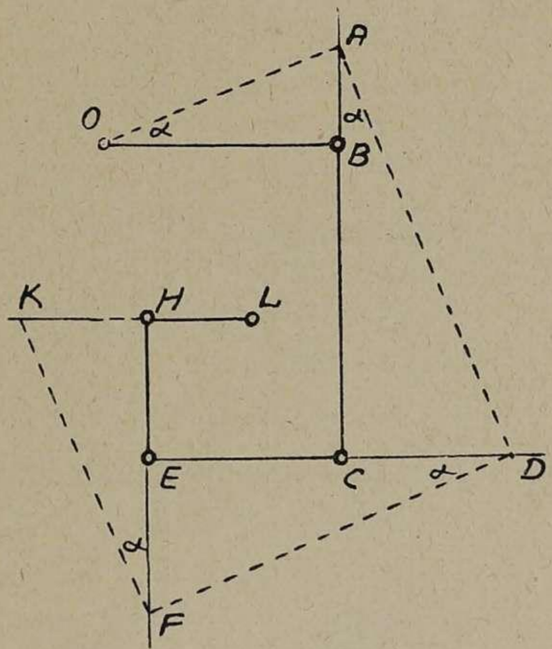
$$y = x^2 \text{ un } y^2 + px^2 + qx + r = 0$$

un jānoteic šo līniju krustošanās punkti.

Vēl atzīmējama **Lilla** (*Lille)* **metode.** Konstruējam ar taisniem leņķiem lauztu līniju, kuŗas atsevišķie nogriežņi ir proporcionāli vienādojuma koeficientiem un griešanas virzieni p r e t ē j i attiecīgo koeficientu zīmēm. Piemēram, polinomu

$$f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

gadījumā, kad koeficienti ir pozitīvi, attēlo zīmējumā līnija O B C E H L.



No pirmās līnijas O B C E H L sākuma punkta O konstruējam vēl otru lauztu līniju O A D F K, kas ar pirmo sastāda patvaļīgu leņķi α. Ja

$$\operatorname{tg} \alpha = x,$$

tad zīmējumā redzam, ka :

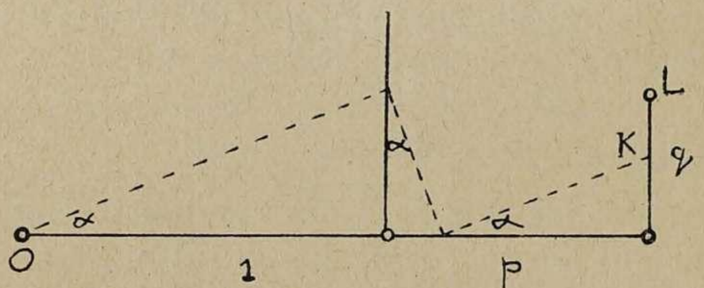
$$AB = a_0 x; \quad CD = (AB + a_1) x = a_0 x^2 + a_1 x;$$
$$EF = (CD + a_2) x = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x;$$
$$KL = (EF + a_3) x + a_4 = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = f(x).$$

Ja punkti K un L sakristu, tad $KL = f(x) = 0$. No zīmējuma nolasāmais $x = tg \alpha$ tad būtu vienādojuma $f(x) = 0$ sakne.

Līdzīgā kārtā var attēlot trešās pakāpes polinomu

$$x^3 - px + q,$$

kur $p > 0$ un $q > 0$, ar sekojošā zīmējumā lauzto līniju



un lietot kubvienādojuma saknes noteikšanai grafisko metodi.

Uzdevumi.

1. Noteikt vienādojuma $4x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 2x - 1 = 0$ pozitīvo saknu augšējo robežu.

2. Atdalīt reālās saknes vienādojumiem:

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 14x - 4 = 0; \quad x^5 - 2x^4 + x^3 - 8x + 6 = 0;$$
$$x^3 - 6x + 2 = 0.$$

3. Aprēķināt racionālas saknes vienādojumiem:

$$x^5 - x^4 - 25x^3 + 43x^2 + 72x - 90 = 0;$$
$$6x^6 - x^5 - 23x^4 - x^3 - 2x^2 + 20x - 8 = 0;$$
$$x^4 - \frac{40}{3} x^3 + \frac{130}{3} x^2 - 40x + 9 = 0.$$

4. Atrisināt ar Lilla grafisko metodi vienādojumu

$$4x^3 + 6x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Jaukti uzdevumi.

1. Kad n. pakāpes polinoms $f(x)$ dalās ar savu atvasināto polinomu $f'(x)$?

2. Noteikt a tā, lai $x^3 + y^3 + z^3 + axyz$ dalītos ar $x + y + z$.

3. Polinoms $x^5 + y^5 + z^5 + \lambda (x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2)$ dalās ar $(x + y + z)^2$. Atrast λ.

4. Pierādīt, ka polinoms $P = (x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ dalās ar $x - y$, $y - z$, $z - x$. Sadalīt polinomu faktoros.

5. Ja $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir otrās pakāpes polinomi, tad var atrast skaitļus λ_1 un λ_2 tā, ka
$f(x) = A\lambda_1 (x - a)^2 + B\lambda_2 (x - b)^2$, $\varphi(x) = A(x - a)^2 + B(x - b)^2$
un $f - \lambda_1 \varphi$ un $f - \lambda_2 \varphi$ ir polinomu kvadrāti.

6. Atrast tādu 7. pakāpes polinomu $f(x)$, kas, palielināts par 1, dalās ar $(x - 1)^4$, bet, pamazināts par 1, dalās ar $(x+1)^4$.

7. Atrisināt vienādojumus:

a) $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 9$, ja tā viena sakne $x_1 = 1 + i$.

b) $x^4 - 18x^3 + 111x^2 - 266x + a = 0$, ja tā viena sakne ir formā $4 + \sqrt{b}$.

c) $x^3 + px + q = 0$, ja divu sakņu summa $x_1 + x_2 = a$

d) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$, ja divu sakņu summa $x_1 + x_2 = 0$.

e) $x^3 + x^2 = a$, ja tā saknes veido aritmētisku progresiju.

f) $x^3 + x^2 + 2x + a = 0$, ja tā saknes veido ģeometrisku progresiju.

g) $x^6 - x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x - 2 = 0$, ja vienādojumam ir vairākkārtējas saknes.

8. Atrisināt vienādojumus:

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0, \quad x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0,$$

ja zināms, ka tiem ir kopīga sakne.

Tāpat $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$ un $2x^4 - 5x^2 + x + 2 = 0$.

9. Atrast a, ja vienādojumiem $x^3 + ax^2 + x - 1 = 0$ un $x^2 + 3x + 7 = 0$ ir kopīga sakne.

10. Atrast sakarību starp koeficientiem a_1, a_2, a_3, ja vienādojumam $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$.

a) viena sakne ir divu pārējo vidējais aritmētiskais skaitlis, b) vidējais ģeometriskais, c) visas trīs saknes raksturo taisnleņķa trijstūŗa malas vai d) kāda trijstūŗa leņķu tangentus.

11. Aprēķināt vienādojuma $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ sakņu simmetrisko funkciju $F = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)$.

Piezīme. Šajā kā arī sekojošā (12.) uzdevumā var izlietāt mākslotu paņēmienu:

$$F = (i - x_1)(i - x_2)(i - x_3)(-i - x_1)(-i - x_2)(-i - x_3)$$

jeb

$$F = f(i) \, . \, f(-i).$$

12. Sastādīt jaunu vienādojumu, kuŗa saknes ir dotā vienādojuma sakņu kvadrāti.

13. Dots vienādojums $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$. Kādās robežās ir ieslēgts a, ja vienādojuma visas četras saknes ir reālas?

Atrisināt to pašu uzdevumu vienādojumam

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + a = 0.$$

14. Ja $x = a$ ir vienādojuma $f(x) = 0$ k-kārtēja sakne, tad

$$\lim_{x \to a} (x - a) \frac{f'(x)}{f(x)} = k.$$

15. Pierādīt teōrēmu:

Ja $f(x)$ un $\varphi(x)$ ir polinomi bez kopīga dalītāja un x_1 ir vienādojuma

$$\big(f(x)\big)^2 + \big(\varphi(x)\big)^2 = 0$$

divkārtēja sakne, tad x_1 ir sakne arī vienādojumam

$$\big(f'(x)\big)^2 + \big(\varphi'(x)\big)^2 = 0.$$

Teōrēmu var vispārināt: ja x_1 ir $\big(f(x)\big)^4 + \big(\varphi(x)\big)^4 = 0$ četrkārtēja sakne, tad x_1 ir sakne arī vienādojumam

$$\big(f'''(x)\big)^4 + \big(\varphi'''(x)\big)^4 = 0 \text{ u. t. t.}$$

16. Pierādīt, ka $\sqrt[3]{abc} < \frac{a + b + c}{3}$, ja a, b un c nav visi vienlīdzīgi.

17. Pierādīt formulas

$$\sin\frac{\pi}{2n} \, . \, \sin\frac{2\pi}{2n} \, . \, . \, . \, \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

un

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} \, . \, \cos\frac{2\pi}{2n+1} \, . \, . \, . \, \cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n},$$

ja n ir vesels pozitīvs skaitlis.

Saturs.

Pirmā daļa.

Determinantu teōrijas elementi un līneāro vienādojumu sistēmas.

Otrā daļa.

Vienādojumi ar vispārīgiem koeficientiem.

Pamanītās iespieduma kļūdas.

Lapp.:	Rinda:	Iespiests:	Jābūt:
24	5. no apakšas	rēķinot	reizinot
32	6. „ augšas	a_{r2}	a_{2r}
53	8. „ apakšas	$(x - a)_k$	$(x - a)^k$
68	4. „ augšas	r	ir
68	21. „ „	$f\,.\,(y_1)$	$f(y_1)$
72	18. „ „	g_{n-m}	gf_{n-m}
76	9. „ „	$+ c$	$- c$
77	4. „ „	x_n	x^n
94	15. „ „	$= 1$	$= 0$
101	12. „ „	$- 12ax^2$	$- 12ax^3$
117	9. „ apakšas	$- \|h\|^n$	$- \|h\|^{n+1}$
147	8. „ augšas	2	$- 2$
151	4. „ apakšas	b_3	b,