Dr. ing. A. VĪTOLS
Latvijas ūniversitātes profesors.

STĀTIKA TELPĀ

1935.
L. Ū. Studentu padomes grāmatnīcas izdevums.

Dr.ing. A.VĪTOLS
Latvijas ūniversitātes profesors.

S T Ā T I K A   T E L P Ā .

1935.
L.Ū.Studentu padomes grāmatnīcas izdevums.

Spēku savienošana, kuŗi brīvi izklaidēti telpā.

Visi līdz šim apskatītie spēku gadijumi bija tādi, kuŗi uzrādija kādu īpatnību. Proti, visi spēki atradās vienā plaknē, kas stipri vienkāršoja visus dažādu uz šo gadijumu attiecošos statikas problēmu atrisināšanas paņēmienus.

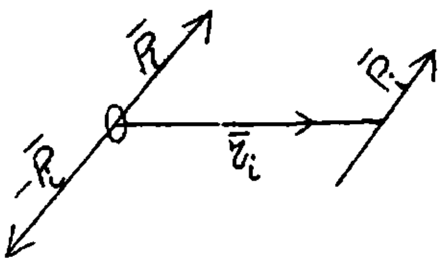
Tāļāk bija iespējams apskatīt plaknē gadijumu, kad spēku darbības linijas krustojas vienā punktā, kā arī parallēlu spēku gadijumu.

Tagad atliek apskatīt vispārīgāko gadijumu, kad spēki iedarbojas dažādos ķermeņa punktos tā, ka viņu darbības linijām ir visdažādākie virzieni telpā, pie kam, galvenā kārtā, nodarbosimies ar jautājumu, kā doto spēku sistemu reducēt pie visvienkāršākas iespējamas viņai ekvivalentas spēku sistemas, kā arī pie kādiem apstākļiem dotā spēku sistema līdzsvarojas.

I. Spēku ekvivalence.

§ 1. Telpā izklaidēto spēku reducēšana pie divu vektoru sistemas, $\bar{R}$ kopspēka jeb rezultantes un $\bar{M}(O)$ koppāra.

Iedomāsimies telpā brīvi izvēlētu punktu O, kuŗu sauksim par redukcijas punktu, pie kuŗa pieliksim visus telpā izklaidētus spēkus, netraucējot doto spēku mēchanisko efektu. Šāda operācija ir iespējama sekojošā ceļā. Ņemsim vērā vienu no spēkiem, piem. $\bar{P}_i$, kuŗam novilksim parallēlu liniju, ejošu caur punktu O (skat.zīm.1). Uz šīs linijas pieliksim divus vienādus ar $\bar{P}_i$, bet pretēji virzītus vektorus.



Zīm.1.

Tā kā šo vektoru summa ir

$$\bar{P}_i + (-\bar{P}_i) = 0$$

tad minētā operācija ir atļauta, jo viņa neienes dotā spēku sistemā nekādas pārgrozības, proti, dotai spēku sistemai ekvivalentā caur to netiks iespaidota, kā arī, ja dotie spēki atrastos līdzsvara stāvoklī, pēdējais caur šo operāciju nevarētu tikt traucēts.

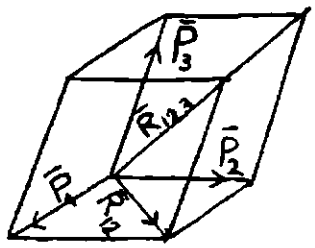
Ir saprotams, ka šīs operācijas rezultāts ir: spēks $\bar{P}_i$ ir ticis pārnests parallēli sev jaunā punktā O, bet šī pārvešana ir izsaukusi kā blakus rezultātu pāri

$$\bar{M}_i(O) = \left[\bar{r}_i\ \bar{P}\right]$$

Ir saprotams, ka katra spēka pārvešana radīs attiecīgu pāri, kādēļ pie visu spēku pārvešanas redukcijas p.O radīsies n pāru sistema. Spēki, pielikti vienā punktā O reducējas pie kopspēka

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

uz parallēlepipeda likuma pamata. Patiesi, ņemsim vērā 3 spēkus: $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ un $\bar{P}_3$, uz kuŗiem uzbūvēsim parallēlepipedu ar malām P_1, P_2, P_3 (skat.zīm.2).



zīm.2.

Uz mums jau pazīstamā parallēlegramma likuma pamata var savienot P_1 un $\bar{P}_2$ un gūt

$$\bar{R}_{12} = P_1 + \bar{P}_2$$

Tālāk uz tā paša likuma pamata var savienot P_3 un $\bar{R}_{12}$ un gūt

$$\bar{R}_{123} = \bar{R}_{12} + \bar{P}_3 = P_1 \quad \bar{P}_2 \quad \bar{P}_3$$

kur $\bar{R}_{123}$ ir parallēlepipeda diagonāle, caur ko parallēlepipeda likums ir pierādīts.
Pievienojot gūtai parallēlepipeda diagonālei pakāpeniski pa diviem atlikušiem spēkiem, beidzot gūsim sakarību:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i \quad . \; . \qquad . \qquad .(1)$$

§ 2. K o p p ā r i s.

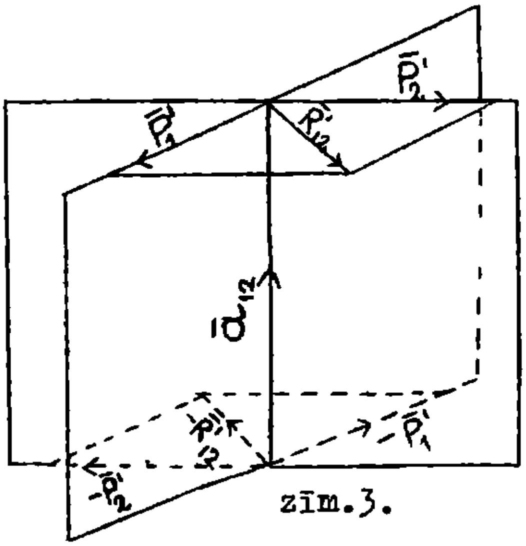
Ir jautājums, vai gūtos n spēku pārus arī nevar savienot vienā, viņiem ekvivalentā pārī, tā saucamā koppārī. Lai šo jautājumu izšķirtu, iedomāsimies kādu di u, no gūtiem, pāru darbības plaknes turpinātas līdz šo plakņu krustojumam taisnes veidā.

Reducēsim šos divi pārus, piem. $\bar{M}_1(0)$ un $\bar{M}_2(0)$ pie viena kopējā pleča a_{12}. Tad

$$P_1' = \frac{M_1(0)}{a_{12}} \quad \text{un} \quad P_2' = \frac{M_2(0)}{a_{12}} \quad , \text{ pie kam}$$

$$\left[\bar{a}_{12} , \bar{P}_1'\right] = \bar{M}_1(0) \quad \text{un} \quad \left[\bar{a}_{12} , \bar{P}_2'\right] = \bar{M}_2(0)$$

Tālāk, pārnesīsim šos pārus viņu darbības plaknēs līdz šo plakņu krustojuma linijai tā, lai spēki $\bar{P}_1'$ un $\bar{P}_2'$ iedarbotos kopējā punktā uz plakņu krustojuma linijas. Tāpat arī $-\bar{P}_1'$ un $-\bar{P}_2'$ atradīs kopējo iedarbes punktu uz tās pašas linijas, pie kam atstatums uz krustojuma linijas starp abiem iedarbes punktiem būs a_{12} (skat.zīm.3)



zīm.3.

Ir redzams, ka $\bar{R}_{12}' = \bar{P}_1' + \bar{P}_2'$
Pareizināsim šo nolīdzinājumu vektorieli uz pleci-vektoru $\bar{a}_{12}$, tad:

$$\left[\bar{a}_{12}, \bar{R}_{12}'\right] = \bar{M}_{12}(0) =$$

$$= \left[\bar{a}_{12}, (\bar{P}_1' + \bar{P}_2')\right] = \left[\bar{a}_{12}, \bar{P}_1'\right] +$$

$$+ \left[\bar{a}_{12}, \bar{P}_2'\right] = \bar{M}_1(0) + \bar{M}_2(0),$$

kur $\bar{M}_{12}(0)$ ir pāru $\bar{M}_1(0)$ un $\bar{M}_2(0)$ koppāris.

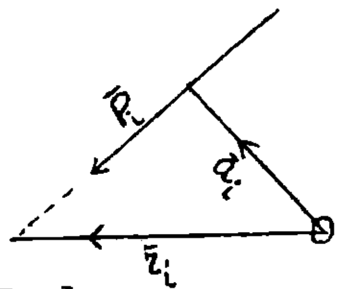
Gūtam pārim $\bar{M}_{12}(0)$ tādā pašā ceļā pievienojam vienu no palikušiem pāriem, kuŗu apzīmēsim ar $\bar{M}_3(0)$, tad gūsim

$$\bar{M}_{123}(0) = \bar{M}_{12}(0) + \bar{M}_3(0) = \left\{\bar{M}_1(0) + \bar{M}_2(0)\right\} + \bar{M}_3(0) =$$
$$= \bar{M}_1(0) + \bar{M}_2(0) + \bar{M}_3(0)$$

kamēr beidzot negūsim visas pāru sistemas koppāri:

$$\bar{M}_{12\ldots n}(0) = \bar{M}(0) = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i(0) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{a}_i,\bar{P}_i\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i,\bar{P}_i\right] \quad \ldots\ldots(2)$$

jo $\bar{a}_i = r_i \sin(\bar{r}_i,\bar{P}_i)$ /skat.zīm.3a).



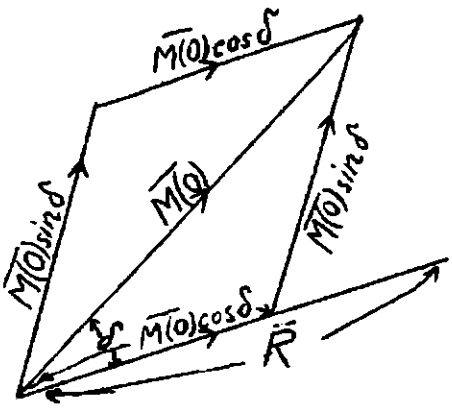
zīm.3a.

Tā tad dotai spēku telpas sistemai ekvivalentā ir reprezentēta caur diviem vektoriem: $\bar{R}$ un $\bar{M}(0)$, no kuŗiem $\bar{R}$ ir slīdošs vektors, kuŗa darbības linijas stāvotne ir noteikta caur redukcijas p.0, bet otrs, $\bar{M}(0)$, brīvs vektors, kuŗu var pārnest paralēli sev pēc patikas. Ja tas tā ir, tad pēdējo var pārnest arī punktā 0 un gūt 2 vektorus, $\bar{R}$ un $\bar{M}(0)$, ejošus caur vienu un to pašu punktu un veidojošus savā starpā kādu leņķi δ (skat.zīm.4).

Tā kā vienmēr ir iespējams pieņemt punktu 0 par koordinātu sākumu, tad šī punkta koordinātes skaitīsim $x = y = z = 0$ un beidzot ekvivalento sistemu aprakstīsim tā:

$$1)\ \bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i \quad (0,0,0)$$

$$2)\ \bar{M}(0) = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i(0) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{a}_i,\bar{P}_i\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i,\bar{P}_i\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$



zīm.4.

Nu ir skaidrs, ka analitiskas šīs sistemas elementu izteiksmes ir 9:

$\bar{R}$ vektora 3 projekcijas,

$\bar{R}$ vektora iedarbes punkta 0 trīs koordinātes 0,0 un 0,

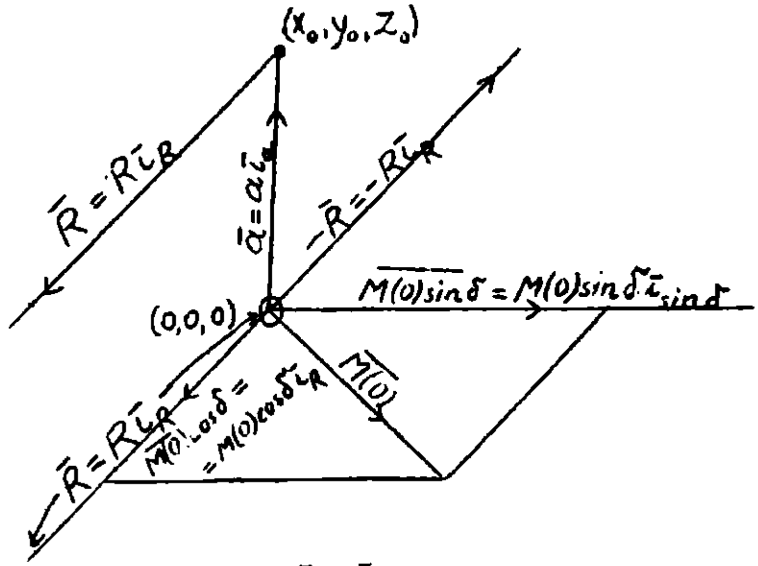
$\bar{M}(0)$ vektora 3 projekcijas.

§ 3. D i n a m a .

Ir iespējams sistemu (3) pārveidot vienkāršākā šādā ceļā. Saliksim (sk.zīm.4) $\bar{M}(0)$ divās komponentēs:

$$\bar{M}(0) = \overline{M(0)\sin\delta} + \overline{M(0)\cos\delta}$$

no kuŗām $\overline{M(0)\sin\delta}$ ir perpendikulāra pret $\bar{R}$ virzienu, bet $\overline{M(0)\cos\delta}$ ar viņu sakrīt. Tad pāris, kuŗa moments ir $\overline{M(0)\sin\delta}$, atrodās ar $\bar{R}$ vienā plaknē un tādēļ viņš var tikt saskaitīts ar $\bar{R}$ (skat."Statika plaknē" pāra saskaitīšanu ar atsevišķu spēku). Šīs saskaitīšanas rezultāts ir $\bar{R}$ pārbīde paralēli sev uz attālumu $\bar{a}$, perpendikulāru pret $\bar{R}$. Neaizmirsīsim vēl, ka arī vektors $\overline{M(0)\sin\delta}$, kā perpendikulārs pret plakni, kurā atrodās $\bar{a}$ un $\bar{R}$, ir perpendikulārs pret katru no šiem vektoriem (skat.zīm.5).



zīm.5.

Tāļāk, $\bar{i}_R$, $\bar{i}_{\sin\delta}$, $\bar{i}_a$ ir vienības vektori, kuŗi sakrīt attiecīgi ar $\bar{R}$, $\overline{M(0)\sin\delta}$ un $\bar{a}$ virzieniem.

Vektora $\bar{a}$ garums, kuŗš ir pāra $\overline{M(0)\sin\delta}$ plecis, ir saistīts:

$$a = \frac{M(0)\sin\delta}{R}$$

No uzrakstītās sakarības seko: $aR = M(0)\sin\delta$. Pareizināsim šī nolīdzinājuma abas puses uz vienības vektoru $\bar{i}_{\sin\delta}$, tad gūstam:

$$aR\bar{i}_{\sin\delta} = aR\left[\bar{i}_a, \bar{i}_R\right] = \left[a\bar{i}_a, R\bar{i}_R\right] = \left[\bar{a}, \bar{R}\right] = M(0)\sin\delta\ \bar{i}_{\sin\delta} \ \ldots\ldots\ldots (4)$$

Vektora $\bar{a}$ gala punkta koordinātes apzīmēsim ar x_o, y_o un z_o (sk.zīm.5) Šīs koordinātes var gūt, vektoru $\bar{a}$ vienkārši noprojektējot uz koordinātu asīm (sk. Ievads mēchanikā, 36.lapp.). Tā kā uzrakstītā nolīdzinājuma (4) vienības vektors $\bar{i}_{\sin\delta}$ nesakrīt ar $\bar{a}$ vienības vektoru $\bar{i}_a$, tad šo nolīdzinājumu būtu vektorieli jāpareizina uz tādu vektoru, kas piešķirtu gūtam produktam vienības vektora $\bar{i}_a$ virzienu. Tā kā, (skat.zīm.5), $\bar{i}_a = \left[\bar{i}_R, \bar{i}_{\sin\delta}\right]$, tad ir redzams, ka nolīdzinājumu (4) jāpareizina uz $\bar{i}_R$ jeb $\bar{R} = R\bar{i}_R$. Tad:

$$aR.R\left[\bar{i}_R, \bar{i}_{\sin\delta}\right] = aR^2\bar{i}_a = a\bar{i}_a R^2 = \bar{a}R^2 = R.M(0)\sin\delta\left[\bar{i}_R, \bar{i}_{\sin\delta}\right] =$$

$$= \left\{R.M(0)\sin(\bar{R}, \bar{M}(0)\right\}\ \bar{i}_a = \left[\bar{R}, \bar{M}(0)\right] \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

jo saskaņā ar $[\bar{R},\bar{M}(0)]$ definiciju ir:

$$[\bar{R},\overline{M(0)}] = \{R.M(0)\sin(\bar{R},M(0)\}\cdot \bar{1}_a$$

No nolīdzinājuma (5) seko:

$$\bar{a} = \frac{[\bar{R},\overline{M(0)}]}{R^2}$$

Apzīmējot attiecīgas vektoru $\bar{R}$, $\overline{M(0)}$ un $\bar{a}$ projekcijas uz koordinātu asīm ar R_x, R_y, R_z resp. X, Y un Z. $M_x(0)$, $M_y(0)$, $M_z(0)$ un a_x, a_y, a_z, gūstam, saskaņā ar "Ievads mēchanikā" 35.lapp.:

$$a_x = (x_o - 0) = x_o = \frac{R_yM_z(0) - R_zM_y(0)}{R^2} = \frac{YM_z(0) - ZM_y(0)}{R^2}$$

$$a_y = (y_o - 0) = y_o = \frac{R_zM_x(0) - R_x(M_z(0)}{R^2} = \frac{ZM_x(0) - XM_z(0)}{R^2}$$

$$a_z = (z_o - 0) = z_o = \frac{R_xM_y(0) - R_yM_x(0)}{R^2} = \frac{XM_y(0) - YM_x(0)}{R^2} \quad \ldots\ldots(6)$$

x_o, y_o un z_o ir pārnestā uz attālumu $\bar{a}$, $\bar{R}$ iedarbes punkta koordinātes, kurš - punkts - noteic jaunu $\bar{R}$ darbības linijas stāvotni; pirmatnēja, tā sakot provizoriskā, šīs darbības linijas stāvotne bija noteikta caur punktu 0, kura koordinātes bija (0,0,0).

Minētā punkta (x_o,y_o,z_o), kuru sauksim par dotās spēku sistemas centru, koordinātes var uziet arī vēl citādākā ceļā, un proti:

Raksta saīsināšanas dēļ ievedīsim uz brīdi apzīmējumu

$M(0)\sin\delta = M'(0)$ un tākā $\overline{M(0)\sin\delta} = [\bar{a},\bar{R}]$, tad

$$M'_x(0) = y_oZ - z_oY$$

$$M'_y(0) = z_oX - x_oZ$$

kur $M'_x(0)$ resp. $M'_y(0)$ ir vektora $\overline{M(0)\sin\delta}$ attiecīgas projekcijas.

Pareizināsim pirmo nolīdzinājumu uz Y, bet otru uz X un pēc tam atvilksim pirmo no otra, tad gūsim

$$YM'_x(0) = y_oYZ - z_oY^2$$

$$XM'_y(0) = z_oX^2 - x_oXZ$$

$$XM'_y(0) - YM'_x(0) = z_o(X^2 + Y^2) - Z(x_oX + y_oY)$$

Šī nolīdzinājuma otrai pusei pieskaitīsim un atvilksim z_oZ^2, tad gūsim

$$XM'_y(0) - YM'_x(0) = z_o(X^2 + Y^2) + z_oZ^2 - Z(x_oX + y_oY) - z_oZ^2 =$$

$= z_o(X^2 + Y^2 + Z^2) - Z(x_oX + y_oY + z_oZ) = z_oR^2 - Z(\bar{a}.\bar{R})$, kur $(\bar{a},\bar{R})$ ir vektoru ā un $\bar{R}$ skalārais produkts. Bet tā kā ā ir perpendikulārs pret $\bar{R}$, tad $(\bar{a}.\bar{R}) = 0$ un

$$XM'_y(0) - YM'_x(0) = z_0 R^2, \text{ no kurienes}$$

$$z_0 = \frac{XM'_y(0) - YM'_x(0)}{R^2} \quad \ldots \quad . \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

Pierādīsim vēl, ka $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. (Par šo jautājumu skat. Ievads mēchanikā 35.-39.lapp.).

Apzīmēsim $\bar{R}$ vektora virziena leņķus ar koordinātu asīm, attiecīgi ar α, β un γ, tad (skat. Ievads mēchanikā 31.lapp.):

$$X = R\cos\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n} X_i\ , \ \cos\alpha = \frac{X}{R}$$

$$Y = R\cos\beta = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \cos\beta_i = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i\ , \ \cos\beta = \frac{Y}{R}$$

$$Z = R\cos\gamma = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \cos\gamma_i = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i\ , \ \cos\gamma = \frac{Z}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

kur α_i, β_i un γ_i ir leņķi, kurus veido ar koordinātu asīm vektors $\bar{P}_i$.

Pacelsim uzrakstītās izteiksmes otrā potencē un pēc tam saskaitīsim, tad gūsim:

$$X^2 = R^2\cos^2\alpha = \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i \cos\alpha_i \right)^2$$

$$Y^2 = R^2\cos^2\beta = \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i \cos\beta_i \right)^2$$

$$Z^2 = R^2\cos^2\gamma = \left(\sum_{i=1}^{i=n} P_i \cos\gamma_i \right)^2$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = R^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

jo ortogonālā koordinātu sistemā $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (skat. Ievads mēchanikā 37.lapp.).

Uz brīdi, raksta saīsināšanas labad, ievedīsim vēl apzīmējumu $\overline{M(0)\cos\delta} = M''(0)$. Tad, tā kā

$$\overline{M(0)} = \overline{M(0)\cos\delta} + \overline{M(0)\cos\delta} = \overline{M'(0)} + \overline{M''(0)},$$

tad $\overline{M'(0)} = \overline{M(0)} - \overline{M''(0)}$ un

$$M'_x = M_x(0) - M''_x(0)$$

$$M'_y = M_y(0) - M''_y(0)$$

$$M'_z = M_z(0) - M''_z(0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

kur ar indeksiem x,y un z ir apzīmētas attiecīgo vektoru attiecīgās projekcijas uz asīm.

Tagad ievietosim formulā (7) gūtās $M'_y(0)$ un $M'_x(0)$ nozīmes, tad:

$$z_0 = \frac{X\left\{M_y(0) - M''_y(0)\right\} - \left\{Y\left\{M_x(0) - M''_x(0)\right\}\right.}{R^2}$$

$$= \frac{XM_y(0) - YM_x(0)}{R^2} - \frac{XM''_y(0) + YM''_x(0)}{R^2} =$$

$$= \frac{XM_y(0) - YM_x(0)}{R^2} - \frac{RM(0).(\cos\alpha\cos\beta\cos\delta - \cos\beta\cos\delta\cos\alpha)}{R^2} =$$

$$= \frac{XM_y(0) - YM_x(0)}{R^2}$$

Analogiski varētu uzrakstīt arī pārējās sistemas (6) izteiksmes.

Apskatīsim jautājumu, kādu formu pie $\bar{R}$ pārbīdes ir guvusi sistema (3). Mēs tagad konstatējam, ka $\overline{M(0)}$ komponente $\overline{M(0)\sin\delta}$, tā sakot, ir patērēta $\bar{R}$ pārbīdei, un no $\overline{M(0)}$ ir palikusi pāri tikai komponente $\overline{M(0)\cos\delta}$. Tā tad minētā sistema tagad sastāv no $\bar{R}$, pārnesta sistemas centrā (x_0, y_0, z_0) un no pāra momenta $\overline{M(0)\cos\delta}$, kura vektora virziens sakrīt ar $\bar{R}$ virzienu. Šādu spēku sistemu sauc par dinamu jeb kanonisku spēku sistemu. $M(0)\cos\delta$ sauksim par spēku sistemas galveno momentu jeb dinamas pāri:

$$M(0)_{din} = M(0)\cos\delta$$

un sistema gūst veidu:

$$1)\quad \bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i(x_0, y_0, z_0)$$

$$2)\quad \overline{M(0)}_{din} = \overline{M(0)\cos\delta} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (3^a)$$

(3^a) var reprezentēt arī tā:

1) $\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$ (bez iedarbes punktu noteikšanas)

2) $\overline{M(0)}_{din} = \overline{M(0)\cos\delta}$

3) $\bar{a}R^2 = \left[\bar{R}, \overline{M(0)}\right]$ ($\bar{R}$ iedarbes punktu noteikšanai). /skat. 3.).

Tāpat var šo sistemu raksturot arī sekojoši:

1) $\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$ (bez iedarbes punkta noteikšanas)

2) $\overline{M(0)}_{din} = \overline{M(0)\cos\delta}$ . . . . (3^b)

3) $\left[\bar{r}, \bar{R}\right] = \overline{M(0)\sin\delta} = \overline{M(0)} - \overline{M(0)\cos\delta}$ (šī vektora, tāpat kā arvienu

katra momenta projekcijas uz asīm sniedz $\bar{R}$ darbības linijas resp. sistemas centrālās ass nolīdzinājumu)

§ 4. Dinamas elementu analitiskās izteiksmes.

$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$ analitiskās izteiksmes jau tika dotas iepriekšējā paragrafā, pa ceļam, apskatot jautājumu par spēku sistemas centra koordinātēm. Viņas bija saskaņā ar (8) un (9):

$$R_x = X = R\cos\alpha = \sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n} X_i \; ; \; \cos\alpha = \frac{X}{R}$$

$$R_y = Y = R\cos\beta = \sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\beta_i = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \; ; \; \cos\beta = \frac{Y}{R}$$

$$R_z = Z = R\cos\gamma = \sum_{i=1}^{i=n} P_i\cos\gamma_i = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i \; ; \; \cos\gamma = \frac{Z}{R}$$

$$R = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Apzīmēsim tālāk ar λ, μ un ν $\overline{M(O)}$ virziena leņķus ar asīm, tad:

$$M_x(O) = M(O)\cos\lambda = \sum_{i=1}^{i=n} M_{ix}(O) = \sum_{i=1}^{i=n} M_i(O)\cos\lambda_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]_x = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i Z_i - z_i Y_i)$$

$$M_y(O) = M(O)\cos\mu = \sum_{i=1}^{i=n} M_{iy}(O) = \sum_{i=1}^{i=n} M_i(O)\cos\mu_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]_y = \sum_{i=1}^{i=n} (z_i X_i - x_i Z_i)$$

$$M_z(O) = M(O)\cos\nu = \sum_{i=1}^{i=n} M_{iz}(O) = \sum_{i=1}^{i=n} M_i(O)\cos\nu_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]_z = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i Y_i - y_i X_i) \quad . \qquad (11)$$

kur x_i, y_i un z_i ir spēka $\bar{P}_i$ radiusa-vektora $\bar{r}_i$ projekcijas (skat. I vads mēchanikā 43. un 44.lapp.), bet tā kā radiusi-vektori ir domāti novilkti no redukcijas punkta O, koordinātu sākuma, tad šo vektoru projekcijas (skat.Ievads mēchanikā 35.lapp.) dod viņu gala punktu attiecīgas koordinātes, kuŗas tanī pašā laikā var uzskatīt par attiecīgu spēku iedarbes punktu koordinātēm. Tālāk seko:

$$\cos\lambda = \frac{M_x(0)}{M(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(y_iZ_i - z_iY_i)}{M(0)}$$

$$\cos\mu = \frac{M_y(0)}{M(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(z_iX_i - x_iZ_i)}{M(0)}$$

$$\cos\nu = \frac{M_z(0)}{M(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n}(x_iY_i - y_iX_i)}{M(0)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

Paceļot šīs izteiksmes otrā potencē un saskaitot, gūstam:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1 = \frac{M_x^2(0) + M_y^2(0) + M_z^2(0)}{M^2(0)}$$

no kuŗienes pāra vektora modulis

$$M(0) = +\sqrt{M_x^2(0) + M_y^2(0) + M_z^2(0)} \quad . \quad . \; . \qquad (13)$$

Atzīmēsim, ka telpas spēku sistemā, kā neatkarīgi lielumi ir spēku vektoru P_i garumi (moduļi), virziena leņķi α_i, β_i un γ_i, un x_i, y_i un z_i, kuŗi tiek doti. Nav grūti pārliecināties, ka visu dinamas elementu analitiskās izteiksmes ir šo lielumu funkcijas. Ja tas tā ir, tad dinamas pāra resp. sistemas galvenā momenta

$$M(0)_{din} = M(0)\cos\delta$$

izteiksmi mēģināsim sastādīt pēc iespējas taisnākā ceļā.

Lai uzietu moduli $M(0)$, pāru momentu projekciju izteiksmes jau bija vajadzīgas /skat.(11)/, un viņas tā tad jau ir uzietas. Ar šo projekciju un vienības vektoru palīdzību var sastādīt $\overline{M(0)}$ komponentes:

$$M(0) = M_x(0)\bar{1}_x + M_y(0)\bar{1}_y + M_z(0)\bar{1}_z$$

proti, katra komponente ir produkts no vektora projekcijas (algebraisks lielums) ar vienības vektoru, kuŗa pozitīvais virziens sakrīt ar attiecīgas projekcijas ass pozitīvo virzienu.

Noprojektēsim $\overline{M(0)}$ uz $\bar{R}$ virzienu, tad (sk.Ievads 31.lapp.) gūstam:

$$M(0)\cos\delta = M(0)_{din} = M_x(0)\cos\alpha + M_y(0)\cos\beta + M_z(0)\cos\gamma \,.. \quad (13)$$

Dinamas vektora $\bar{R}$ iedarbes punkta, spēku sistemas centra, koordinātes ir noteiktas caur izteiksmju sistemu (6). Vektors $\overline{M(0)\cos\delta} = \overline{M(0)}_{din}$,turpretīm, tāpat kā $\overline{M(0)}$, no kuŗa viņš ir cēlies, ir brīvs vektors,bez noteikta iedarbes punkta.

Dinamu var analitiski noteikt arī, izlietojot viņas veidu (3^b) /skat.§ 3./. Atšķirību starp veidu (3-a) un (3-b) reprezentē vektoru nolīdzinājumi:

$$3)\ \bar{a}R^2 = \left[\bar{R}, \overline{M(O)}\right]$$

un attiecīgi:

$$\left[\bar{r},\bar{R}\right] = \left[\bar{r}, \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i\right] = \overline{M(O)} - \overline{M(O)\cos\delta}$$

Projektējot vektoru $\left[\bar{r},\bar{R}\right]$ uz asīm, gūstam:

$$\left[\bar{r},\bar{R}\right]_x = yZ - zY = M_x(O) - \left\{\overline{M(O)\cos\delta}\right\}_x = \sum_{i=1}^{i=n}(y_iZ_i - z_iY_i) -$$

$$- \left\{M_x(O)\cos\alpha + M_y(O)\cos\beta + M_z(O)\cos\gamma\right\}\cos\alpha$$

$$\left[\bar{r},\bar{R}\right]_y = zX - xZ = M_y(O) - \left\{\overline{M(O)\cos\delta}\right\}_y = \sum_{i=1}^{i=n}(z_iX_i - x_iZ_i) -$$

$$- \left\{M_x(O)\cos\alpha + M_y(O)\cos\beta + M_z(O)\cos\gamma\right\}\cos\beta$$

$$\left[\bar{r},\bar{R}\right]_z = xY - yX = M_z(O) - \left\{\overline{M(O)\cos\delta}\right\}_z = \sum_{i=1}^{i=n}(x_iY_i - y_iX_i) -$$

$$- \left\{M_x(O)\cos\alpha + M_y(O)\cos\alpha + M_z(O)\cos\gamma\right\}\cos\gamma$$

jeb:

$$yZ - zY = M_x(O) - \frac{(\bar{R},\overline{M(O)})}{R}\cos\alpha = M_x(O) - \frac{(\bar{R},\overline{M(O)})}{R^2}X$$

$$zX - xZ = M_y(O) - \frac{(\bar{R},\overline{M(O)})}{R}\cos\beta = M_y(O) - \frac{(\bar{R},\overline{M(O)})}{R^2}Y$$

$$xY - yX = M_z(O) - \frac{(\bar{R},\overline{M(O)})}{R}\cos\gamma = M_z(O) - \frac{(\bar{R},\overline{M(O)})}{R^2}Z$$

Kā redzams, gūtā nolīdzinājumu sistēma noteic telpā kādu taisni,-R iedarbes punktu ģeometrisko vietu, dinamas asi, kuŗas punktu tekošās koordinātes ir : x,y un z.

Šo nolīdzinājumu sistēmu var arī reprezentēt zem cita veida, izslēdzot no minētiem nolīdzinājumiem skalāro produktu

$$\frac{(\bar{R},\overline{M(O)})}{R^2} = \frac{(yZ - zY) - M_x(O)}{X} = \frac{zX - xZ - M_y(O)}{Y} =$$

$$= \frac{xY - yX - M_z(O)}{Z} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Centrālās ass nolīdzinājumam vēl var piešķirt ērtāku veidu, prātojot tā. Izvēlēsim uz centrālās ass kādu nogriezni $\bar{s}$. Šo nogriezni iedomāsimies nospraustu no sistemas centra (x_o,y_o,z_o) $\bar{R}$ virzienā. Nogriežņa gala punkta koordinātes lai ir x,y un z. Tad (skat. Ievads 35.lapp.):

$$s.\cos\alpha = x - x_0$$
$$s.\cos\beta = y - y_0$$
$$s.\cos\gamma = z - z_0$$

no kurienes:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

Ar šī nolīdzinājuma palīdzību var atrisināt uzdevumu: uziet punktus, kuŗos $\bar{R}$ darbības linija resp. sistemas centrālā ass krusto koordinātu plaknes (XZ) un (XY). Šeit jāliek:

1) $y = 0$, kas dod $\dfrac{x - x_0}{\cos\alpha} = \dfrac{-y_0}{\cos\beta}$, $x = x_0 - \dfrac{-y_0\cos\alpha}{\cos\beta}$, $z = z_0 - \dfrac{-y_0\cos\gamma}{\cos\beta}$

2) $z = 0$, $x = x_0 - \dfrac{z_0\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $y = y_0 - \dfrac{z_0\cos\beta}{\cos\gamma}$

Leņķi δ starp $\bar{R}$ un $\overline{M(O)}$ vektoriem var uziet, sastādot skalāro produktu:

$$\bar{R}.\overline{M(O)} = R.M(O)\cos\ = (\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z})(\overline{M_x(O)} + \overline{M_y(O)} + \overline{M_z(O)}) =$$
$$= XM_x(O) + YM_y(O) + ZM_z(O).$$

$$\cos\delta = \frac{1}{RM(O)}(XM_x(O) + YM_y(O) + ZM_z(O)) = \frac{X}{R}\frac{M_x(O)}{M(O)} + \frac{Y}{R}\frac{M_y(O)}{M(O)} +$$
$$+ \frac{Z}{R}\frac{M_z(O)}{M(O)} = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

§ 5. Dinamas īpatnējie gadijumi.

Par pamatu šo gadijumu izšķiršanai izvēlēsim skalārā produkta $\overline{RM(O)}$ īpatnējas vērtības:

$$\overline{RM(O)} = 0 \quad \text{un} \quad \overline{RM(O)} = \pm RM(O); \ \overline{RM(O)} = RM(O)\cos\delta = 0, \text{ ja}$$

1) $R = 0$. Sistema reducējas pie koppāra $\overline{M(O)}$ un dinama sastāv vienīgi no:
$$\overline{M(O)}_{din} = \overline{M(O)}$$

2) $M(O) = 0$. Sistema reducējas pie viena vienīgā vektora:
$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$
kas ir iespējams, kad visu spēku darbības linijas krustojas punktā O, sistemas centrā.

3) $\cos\delta = 0$, $\delta = \dfrac{\pi}{2}$, $M(O)_{din} = M(O)\cos\delta = 0$, $M(O)\sin\delta = M(O)$. Sistema reducējas pie viena vienīga vektora $\bar{R}$, kuŗa iedarbes punkta

koordinātes ir x_o, y_o un z_o, kuŗas uzejamas saskaņā ar (6)./Paralēlu spēku gadijumu skat.zemāk/.
4) $R = 0$, $M(O) = 0$ raksturo spēku sistemas līdzsvara stāvokli, kuŗš tiks vēl apskatīts atsevišķi.

$$\overline{RM(O)} = \pm RM(O) \qquad \cos\delta = \pm 1$$

ir dinamas gadijums ar $M(O)_{din} = M(O)\cos\delta$. Šādu veidu pieņem katra spēku sistema pie spēku sistemas reducēšanas pie kāda centrālās ass punkta.

§ 6. Spēka momenta vektora projekcija uz izvēlēto asi un spēka moments pret min. asi.

Spēku savienošanas gaita rāda, ka vektors

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i$$

ir pilnīgi neatkarīgs no redukcijas punkta izvēles, turpretīm:

$$\overline{M(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M_i(O)}$$

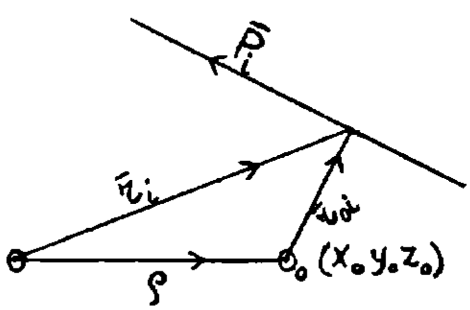
ir no viņa atkarīgs, jo $\overline{M_i(O)}$ izteiksmē ietilpst radiuss-vektors $\bar{r}_i$, kas vieno redukcijas punktu ar kādu punktu uz spēku $\bar{F}_i$ darbības linijām,pie kam operācijas galīgais rezultāts izpaudās veidā:

1) $$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i(0,0,0)$$

2) $$\overline{M(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M_i(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{F}_i\right]$$

Tagad pieņemsim, ka mēs gribētu pārvest sistemu uz citu redukcijas punktu O_o, noteiktu caur radiusu-vektoru $\bar{\rho}$(skat.zīm.6). Tā kā

$$\bar{r}_i = \bar{r}_{oi} + \bar{\rho} \;, \quad \bar{r}_{oi} = \bar{r}_i - \bar{\rho} \;,\text{tad}$$



zīm.6.

1) $$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i(x_o, y_o, z_o)$$

2) $$\overline{M_o(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_{oi}(0) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_{oi}, \bar{F}_i\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[(\bar{r}_i - \bar{\rho}).\bar{F}_i\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{F}_i\right] - \left[\bar{\rho}, \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i\right] = \overline{M(O)} - \left[\bar{\rho}, \bar{R}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

Ja saliek $\overline{M(O)}$ mums jau pazīstamās komponentēs,tad:

$$\overline{M(O)} = \overline{M(O)\sin\delta} + \overline{M(O)\cos\delta} \text{ un } \overline{M_o(O)} = \overline{M(O)} - \left[\bar{\varrho},\bar{R}\right] =$$
$$= \overline{M(O)\sin\delta} + \overline{M(O)\cos\delta} - \left[\bar{\varrho},\bar{R}\right] = \left\{\overline{M(O)\sin\delta} - \left[\bar{\varrho},\bar{R}\right]\right\} + \overline{M(O)\cos\delta}$$

Ja šeit pielīdzina $\overline{M(O)} - \left[\bar{\varrho},\bar{R}\right] = 0$, tad gūstam $\bar{\varrho} = \bar{a}$ un šī vektora gala punkts ir dinamas centrs (skat. § 3.) un:

$$\overline{M_o(O)} = \overline{M_o(O)} = \overline{M(O)\cos\delta} = \overline{M(O)}_{din}$$

un sistema gūst veidu:

$$1)\ \bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i\ (x_o, y_o, z_o)$$

$$2)\ \overline{M_o(O)} = \overline{M(O)_{din}} \qquad \text{(skat. /3a/ § 3.).}$$

Tā kā $\left|\cos\delta\right| \leqslant 1$, tad $\left|M(O)_{din}\right| \leqslant \left|M(O)\right|$, t.i. $M(O)_{din}$ ir vismazākais iespējamais dotās spēku sistemas koppāris.

Kas attiecas uz spēku sistemas vektoru

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i \text{ un } \overline{M(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M_i(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]$$

projektēšanu nolūkā gūt šo vektoru analitiskās izteiksmes, tad šo vektoru projekcijas ir neatkarīgas no koordinātu sākuma. Tiešam, ispārības labā pieņemsim, ka redukcijas O_o un koordinātu sākuma punkti O nesakrīt (skat. zīm. 7). Tad:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_{oi} - \bar{\varrho}$$

un ir redzams, ka $\bar{r}_i$ varam noturēt negrozīgu, lai kā mēs arī nemainītu $\bar{r}_{oi}$ un $\bar{\varrho}$, brīvi pārvietodami koordinātu sākumu telpā un teorēma ir pierādīta.

Sastādīsim vektora $\overline{M_o(O)}$ izteiksmi:

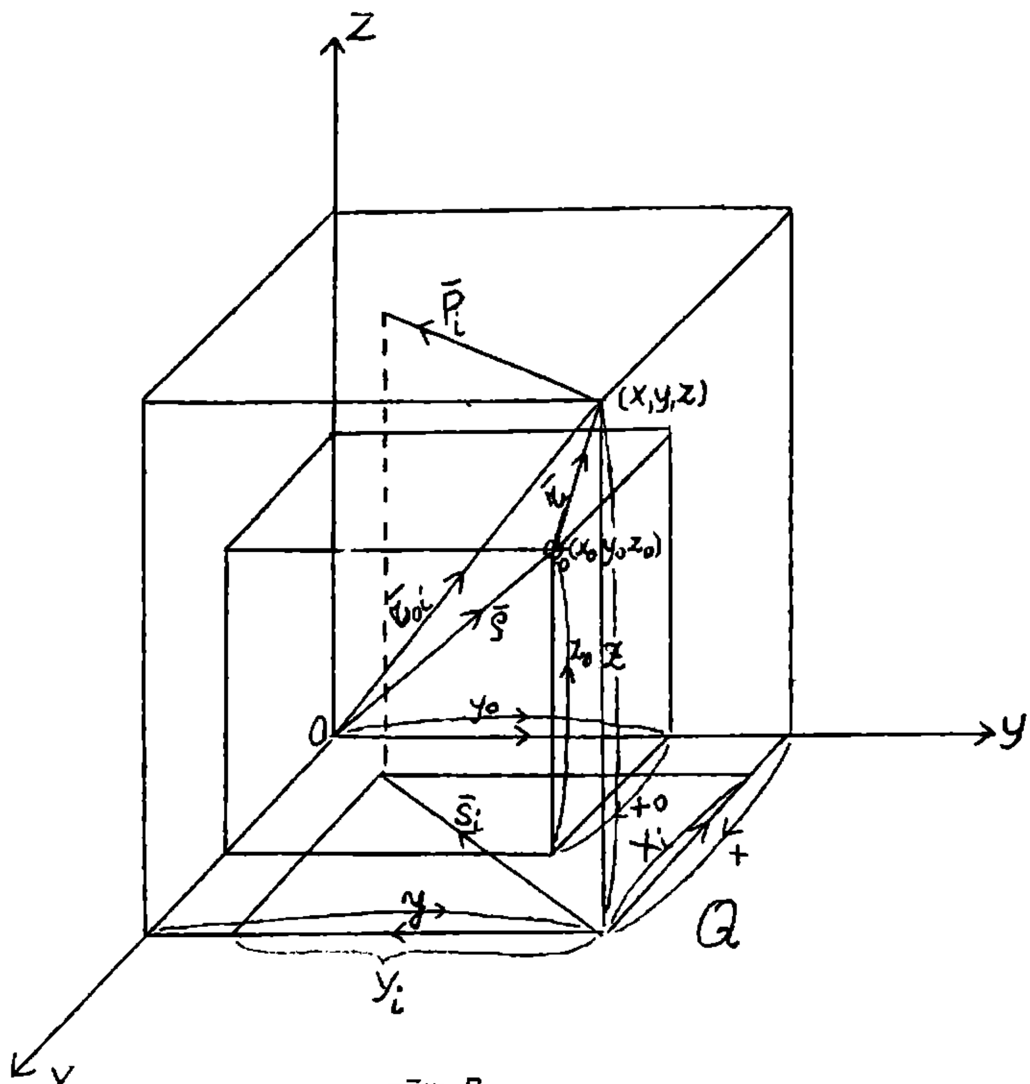
$$\overline{M_o(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[(\bar{r}_{oi} - \bar{\varrho}), \bar{P}_i\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_{oi}, \bar{P}_i\right] - \left[\bar{\varrho}, \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i\right] = \overline{M(O)} - \left[\bar{\varrho}, \bar{R}\right]$$

Ja projektē vektoru $\overline{M_o(O)}$, piemēram, uz X asi, tad gūstam:

$$M_{ox}(O) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]_x = \sum_{i=1}^{i=n} \left[(\bar{r}_{oi} - \bar{\varrho}), \bar{P}_i\right]_x =$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left\{(\bar{r}_{oi} - \bar{\varrho})_y Z_i - (\bar{r}_{oi} - \bar{\varrho})_z Y_i\right\} = \sum_{i=1}^{i=n} \left\{(y_i - y_o)Z_i - (z_i - z_o)Y_i\right\} =$$
$$= M_x(O) - (y_o Z - z_o Y)$$

izteiksme neatkarīga no koordinātu sākuma, lai gan

$\overline{M(O)}$ resp. $\overline{M_x(O)}$ un $\left[\bar{\rho}\,,\bar{R}\right]$ resp. $\left[\bar{\rho}\,,\bar{R}\right]_x = y_0 Z - z_0 Y$ katrs par sevi ņemts ir no koordinātu sākuma atkarīgi.



zīm.7.

Saprotams, ka vienkāršības labā parasti koordinātu sākumu savieto ar redukcijas punktu.

Runājot par vektoru analitisko izteiksmju gūšanu, jāmin spēka moments pret doto asi, piem. Z, kuŗu gūst tā: noprojektē spēku $\bar{P}_i$ uz plakni Q perpendikulāru pret asi Z un gūst projekciju S_i;pēdējās garumu pareizina uz viņa perpendikulāro atstatumu no punkta O. – ass Z krustojumu ar plakni Q un produktam piešķir zīmi + jeb – atkarībā no tā, kādā virzienā spēks $\bar{S}_i$ cenšas pagriezt plakni Q attiecībā pret novērotāju, kuŗš nostājies Z ass pozitivā virzienā. Vienosimies šim produktam piešķirt zīmi +, ja spēks $\bar{S}_i$ cenšās pagriezt plakni Q pretējā,pulksteņa rādītāja kustībai virzienā, un otrādi. Saskaņā ar šo konvenciju, mūsu gadijumā:

$$M_{i,z} = + \left| h_i S_i \right| \text{ ,un vispāri } M_{i,z} = \pm \left| h_i S_i \right|$$

kur ar $M_{i,z}$ lai ir apzīmēts min. spēka $\bar{P}_i$ moments pret asi Z un kur

$|h_i S_i|$ lai ir šī momenta absolūtas vērtības apzīmējums. Pareizināsim tagad $M_{i,z}$ izteiksmi uz vienības vektoru $\bar{I}_z$, tad:

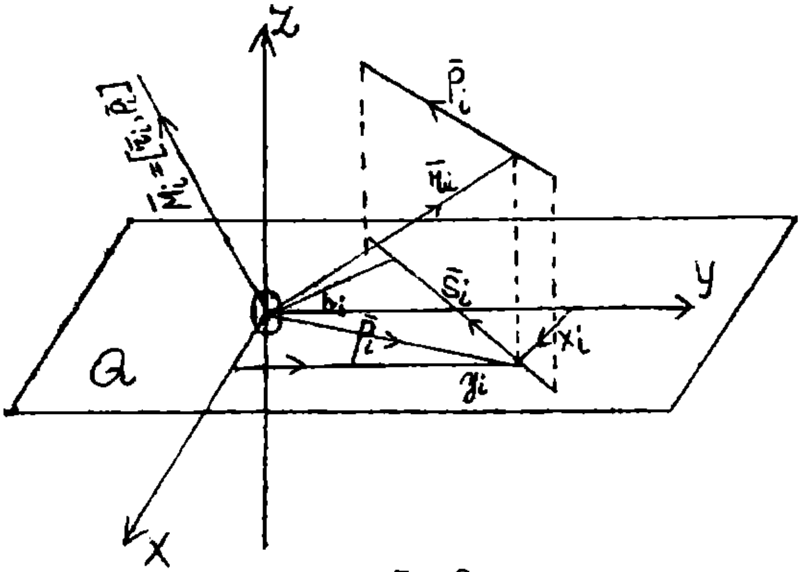
$$M_{i,z}\bar{I}_z = \pm|h_i S_i|\bar{I}_z = h_i S_i \bar{I}_z$$

kur $h_i S_i$ ir algebraisks lielums:

$$h_i S_i = \pm|h_i S_i|$$

skatoties pēc apstākļiem.

Kā saprotams, caur algebraiskas izteiksmes pareizināšanu uz vienīvas vektoru



zīm.8.

$\bar{I}_z$ ir gūts geometrisks nolīdzinājums (vektoru nolīdzinājums). Tāļāki vāram pakāpeniski rakstīt (skat.zīm.8):

$$M_{i,z}\cdot\bar{I}_z = h_i S_i \bar{I}_z = \left\{p_i \sin(\bar{p}_i,\bar{S}_i),S_i\right\}\bar{I}_z = \left[\overline{p_i},\bar{S}_i\right] =$$

$$=\left[(x_i\bar{I}_x + y_i\bar{I}_y)(X_i\bar{I}_x + Y_i\bar{I}_y)\right] = x_iY_i\bar{I}_z - y_iX_i\bar{I}_z = (x_iY_i - y_iX_i)\bar{I}_z$$

no kurienes seko, ka:

$$M_{i,z} = x_iY_i - y_iX_i \text{ ,bet } x_iY_i - y_iX_i = M_{iz}$$

kur M_{iz} ir momenta vektora $\bar{M}_i$ pret kādu punktu uz Z ass projekcija uz šo asi, kādēļ ir pierādīta teorēma: spēka $\bar{P}_i$ moments pret kādu asi ir vienāds ar šī spēka vektoriāla momenta projekciju uz šo asi, ņemta pret kādu punktu uz šīs ass:

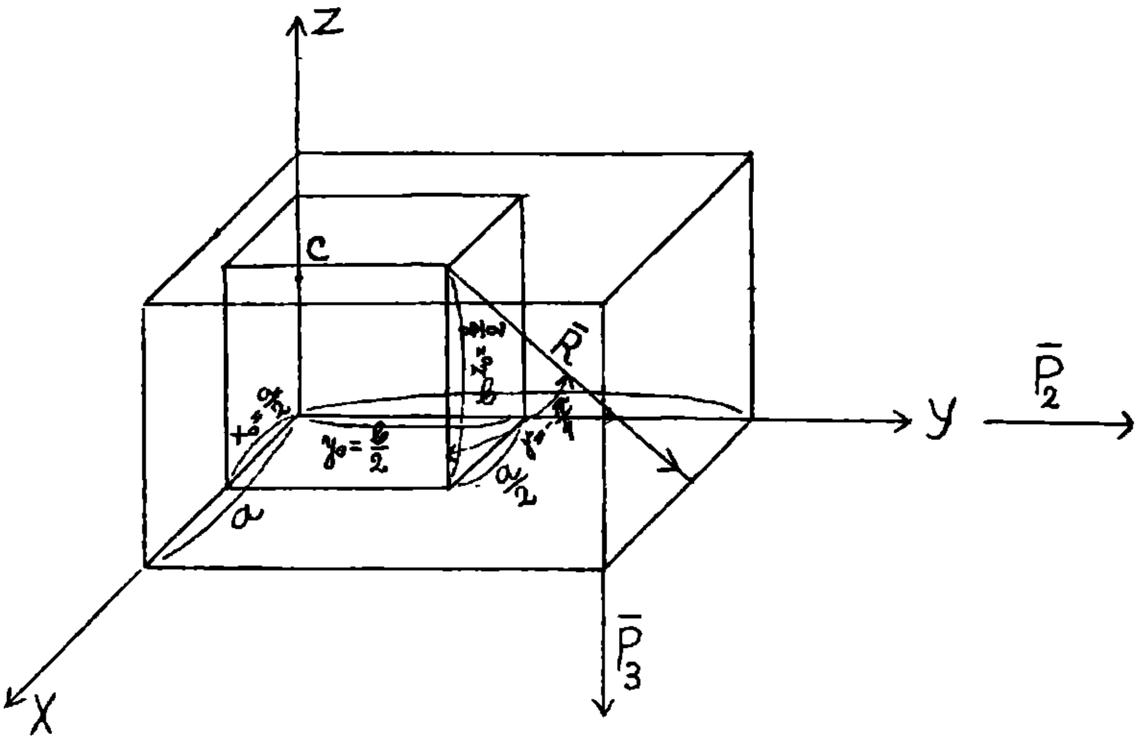
$$M_{i,z} = M_{iz} = M_i\cos(\bar{Z},\bar{M}_i)$$

(skat.zīm.8). Jāuzsver, ka punkta izvēle uz ass ir brīva, jo, kā redzams, momenta projekcijas izteiksme $x_iY_i - y_iX_i$ ir brīva no trešās koordinātes z_i. Katrā ziņā momenta vektora analitiskai izteiksmei caur projekciju ir priekšrocība pret viņas izteiksmi caur momentu pret asi, jo neprasa jaunu analitisku izteiksmju iegūšanas veidu iepretīm projekcijām, kuras var uzskatīt par universalu analitisko izteiksmju iegūšanas veidu. Bez tam momenta pret asi izslēgšana no pētītāja redzes aploka, neienes nekādu traucējumu universalā statikas teoremā: spēku savienošanas rezultāts vienmēr, kā plaknē, tā arī telpā, ir divi vektori:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n}\bar{P}_i \quad \text{un} \quad \overline{M(O)} = \sum_{i=1}^{i=n}\overline{M_i(O)}$$

kas nebūtu pretējā gadijumā.

<u>Piemērs.</u> Gar dotā parallēlepipeda malām, saskaņā ar zīm.Nr.8[a], darbojas spēki $\bar{P}_2$ un $\bar{P}_3$, pie kam starp spēku vektoru garumiem pastāv



zīm. $8^{\underline{a}}$.

sakarība: $P_2 = P_3 = P$. Uz jautājumu atbild 2 vektori:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = \bar{P}_2 + \bar{P}_3 = P_2\bar{i}_y - P_3\bar{i}_z = P(\bar{i}_y - \bar{i}_z) \ ; \ R = + P\sqrt{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} = \frac{0}{R} = 0, \ \cos\beta = \frac{Y}{R} = \frac{P}{P.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \beta = 0 \pm \frac{\pi}{4}$$

kas atbilst konam, aprakstītam ap Y tā, kā veidule sastāda ar asi $\beta = \frac{\pi}{4}$.

$$\cos\gamma = \frac{Z}{R} = \frac{-P}{P\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ \gamma = \pi \pm \frac{\pi}{4}$$

(Uzzīmēt $\bar{R}$ virzienu, noteiktu caur $\alpha = 0$, $\beta = \pm\frac{\pi}{4}$ un $\gamma = \pi \pm \frac{\pi}{4}$).

$$\overline{M(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M_i(O)} = \overline{M_2(O)} + \overline{M_3(O)}$$

$$\overline{M_x(O)} = - bP\bar{i}_x$$

$$\overline{M_y(O)} = + aP\bar{i}_y$$

$$\overline{M_z(O)} = 0$$

$\bar{R}$ iedarbes punkts (x_o, y_o, z_o):

$$x_0 = \frac{YM_z(0) - ZM_y(0)}{R^2} = \frac{+P.aP}{2R^2} = \frac{+a}{2}$$

$$y_0 = \frac{ZM_x(0) - XM_z(0)}{R^2} = \frac{-P(-bP)}{2P^2} = \frac{+b}{2}$$

$$z_0 = \frac{XM_y(0) - YM_x(0)}{R^2} = \frac{-P(-bP)}{2P^2} = \frac{+b}{2}$$

un $\bar{R}$ ir pilnīgi noteikts.

Saskaņā ar (13) ir:

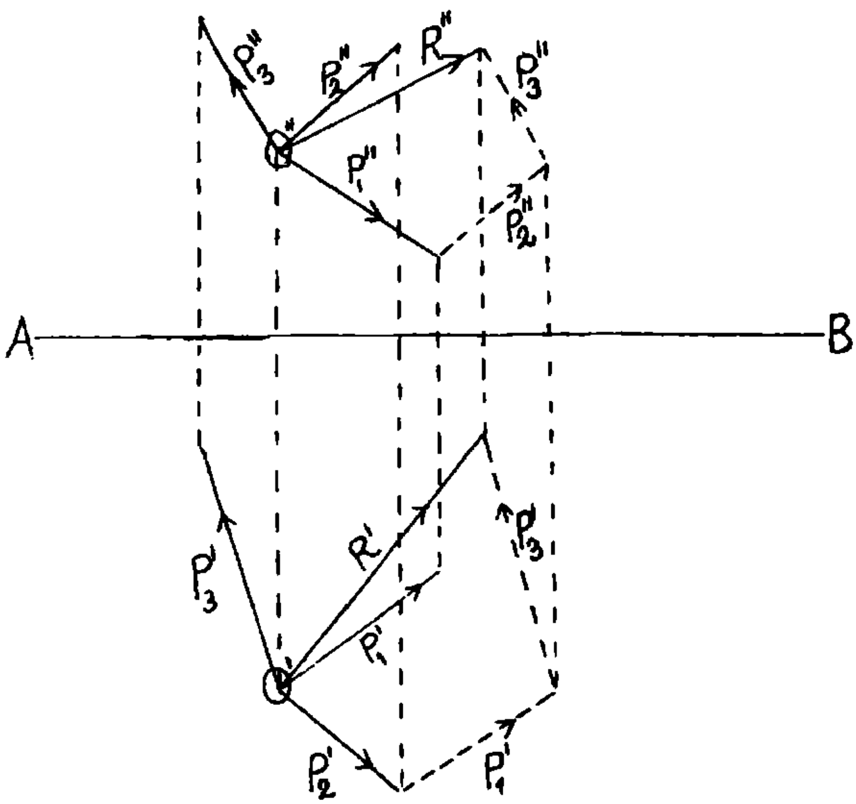
$$M(0)_{din} = M(0)\cos\delta = M_x(0)\cos\alpha + M_y(0)\cos\beta + M_z(0)\cos\gamma = + aP\frac{\sqrt{2}}{2}$$

un dinama ir noteikta.

§ 7. Spēku un momentu poligoni telpā.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i \quad \text{un} \quad \overline{M(0)} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M_i(0)}$$

izsaka, ka $\bar{R}$ resp. $\overline{M(0)}$ ir attiecīgu telpas poligonu noslēdzošas malas. Tomēr arī šinī gadijumā telpas poligonu konstruēšanu var reducēt pie divu plakanu poligonu konstruēšanas, no kuriem katrs reprezentē telpas poligona projekciju uz divām savstarpīgi ortogonālām projekcijas plaknēm (tēlojošas geometrijas metode).



zīm.9.

Šinī nolūkā noprojektēsim uz abām projekcijas plaknēm redukcijas punktu, kura attiecīgas projekcijas lai ir O' un O"; tāpat noprojektēsim arī katru no dotiem spēkiem. Pieņemsim, ka spēku ir trīs (skat. zīm. Nr.9).

Apzīmēsim attiecīgas spēku horizontālās projekcijas ar P_1', P_2' un P_3', bet vertikālās ar P_1'', P_2'' un P_3''. Ir zinams, ka katra punkta abām, un tā tad arī katra vektora gala punktu projekcijām jāatrodās uz taisnes, kuŗa ir perpendikulāra pret liniju AB. Ņemot šo apstākli vērā, attēlojam caur projekcijām doto spēku sistemu abās projekciju plaknēs, kuŗās konstruējam spēku attiecīgu projekciju poligonus. Šo poligonu noslēdzošās malas ir telpas spēku sistemas kopspēka $\bar{R}$ projekcijas R' un R", ar kuŗu palīdzību var noteikt $\bar{R}$ pilnīgi, kā spēka vektoru.

§ 8. Parallēlu spēku savienošana telpā.

A. Vispārējais paņēmiens.

Lai uzietu visvienkāršāko spēku sistemu ekvivalentu dotai spēku sistemai, var pielietot jau pazīstamo vispārīgo paņēmienu, reducējot spēkus pie izvēlētā redukcijas punkta 0 ar attiecīgu pāru palīdzību. Ir viegli saprast, ka koppāra momenta vektors sastādīs $\delta = \pi/2$ ar $\bar{R}$ virzienu, jo visu pāru vektori vienmēr būs perpendikulāri pret kopējo parallēlo spēku virzienu un tā tad parallēlu spēku gadijums ietilpst dinamas īpatnējo gadijumu p.3. (skat. § 5) un ekvivalenta sistema gūst veidu:

$$1)\ \bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i(x_o,y_o,z_o)$$

$$2)\ \overline{M(O)}_{din} = \overline{M(O)\cos\delta} = 0$$

Sistemas centra koordinātes x_o,y_o,z_o ir saistītas caur nolīdzinājumu

$$[\bar{a},\bar{R}] = \overline{M(O)\sin\delta} = \overline{M(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M_i(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} [\bar{r}_i,\bar{P}_i]$$

Ņemot projekcijas, gūstam:

$$M_x(O) = [\bar{a},\bar{R}]_x = y_oZ - z_oY = y_oR|\cos\gamma| - z_oR|\cos\beta| = \sum_{i=1}^{i=n} M_{ix}(O) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} [\bar{r}_i,\bar{P}_i]_x = \sum_{i=1}^{i=n} (y_iZ_i - z_iY_i) = \sum_{i=1}^{i=n} (y_iP_i\cos\gamma - z_iP_i\cos\beta) =$$

$$= |\cos\gamma| \sum_{i=1}^{i=n} y_iP_i - |\cos\beta| \sum_{i=1}^{i=n} z_iP_i$$

Analogiski gūstam:

$$M_y(O) = z_oR|\cos\alpha| - x_oR|\cos\gamma| = |\cos\alpha| \sum_{i=1}^{i=n} z_iP_i - |\cos\gamma| \sum_{i=1}^{i=n} x_iP_i$$

$$M_z(O) = x_oR|\cos\beta| - y_oR|\cos\alpha| = |\cos\beta| \sum_{i=1}^{i=n} x_iP_i - |\cos\alpha| \sum_{i=1}^{i=n} y_iP_i \quad \ldots(18)$$

kur α, β un γ ir $\bar{R}$ vektora virziena leņķi pret attiecīgām asīm. Parasti vektora projekcijai piešķir zīmi attiecīgs cos, saskaņā ar vienošanos, kuŗa tika pieņemts "Ievads mēchanikā" 30.lapp., bet paralēlu spēku gadījumā vienosimies cos zīmi piešķirt vektora modulim, skaitot pēdējo par aļgebraisku lielumu, turpretīm attiecīgu cos skaitīsim tad par pozitīvu lielumu, pret ko iebilst nevar, jo projekcijas zīme caur šo konvenciju netiek grozīta.

Nolīdzinājumu sistema (18) satur pazīstamā ā vektora projekcijas resp. šī vektora gala punkta, vispārējā gadījumā spēku sistemas centra, koordinātes x_0, y_0 un z_0. Neskatoties uz to, ka nolīdzinājumu ar 3 nezinamiem ir 3: x_0, y_0 un z_0, pēdējo vērtības tomēr nevar uziet ar šīs sistemas palīdzību, lai gan šīs vērtības (ar sistemu /6/ palīdzību) nolīdzinājumu sistemu (18) apmierina. Ja tas ir tā, tad rodas jautājums, ko reprezentē sistema (18). Nolīdzinājumu sistema (18) reprezentē $\bar{R}$ darbības linijas resp. īpatnēja gadījuma dinamas ass nolīdzinājumu. Tiešam, x_0, y_0 un z_0 var atvietot ar x,y un z un tad gūstam nolīdzinājumu sistemu, kuŗas vispārējais veids ir:

$$\begin{aligned} M_x(0) &= zY - yZ \\ M_y(0) &= zX - xZ \\ M_z(0) &= xY - yX \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18^{a}) \end{aligned}$$

Pareizinot pirmo nolīdzinājumu uz X, otro uz Y, bet trešo uz Z un saskaitot, gūstam:

$$\begin{aligned} X.M_x(0) &= zXY - yXZ \\ Y.M_y(0) &= zYX - xYZ \\ Z.M_z(0) &= xYZ - yXZ \end{aligned}$$

$$XM_x(0) + YM_y(0) + ZM_z(0) = \bar{R}.\overline{M(0)} = 0.$$

kas nozīmē, ka $\bar{R} \perp \overline{M(0)}$, ko jau mēs iepriekš zinājam. Šis apstāklis aizrāda uz to, ka sistemu (18) resp. (18a) ir jālieto citādā veidā, un šis veids ir: vienam no mainīgiem lielumiem x,y jeb z ir jāpiešķir noteiktu vērtību, lai uzietu pārējās

Pareizināsim tagad (18a) attiecīgi uz x,y un z, pie kam nolīdzinājumus saskaitīsim, tad gūsim:

$$\begin{aligned} x.M_x(0) &= xzY - xyZ \\ y.M_y(0) &= yzX - xyZ \\ z.M_z(0) &= xzY - yzX \end{aligned}$$

$$M_x(0).x + M_y(0).y + M_z(0).z = 0$$

plaknes nolīdzinājums, kuŗā atrodās pāris $\overline{M(0)} = [\bar{a}, \bar{R}]$ un kuŗa iet caur redukcijas punktu 0.

Kā teikts, ar formulu sistemu (6) var uziet vektora ā gala punkta koordinātes x_0, y_0 un z_0, kuŗš noteic $\bar{R}$ darbības linijas stāvokni. Nav vērts šīs izteiksmes parallēliem spēkiem atkārtot. Bet parallēlu spēku sistemai var uziet citu, vairāk raksturīgāku, punktu uz tās pašas linijas. Šo punktu uziet, pielīdzinājot sistemā (18):

$$x_o R = \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i$$

$$y_o R = \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i$$

$$z_o R = \sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i$$

Kā viegli pārliecināties:

$$\left.\begin{aligned} x_o &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i P_i}{R} \\ y_o &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i P_i}{R} \\ z_o &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{z_i P_i}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

pārvērš nolīdzinājumu sistemu (18), identitātu sistemā, kādēļ punkts (x_o, y_o, z_o) pieder centrālai asij. Šo punktu sauc par parallēlu spēku sistemas centru, viņam piemīt tā raksturīgā īpašība, ka šī punkta koordinātes ir neatkarīgas no leņķiem α, β un γ, kas nozīmē, ka parallēlu spēku centrs nemaina savu stāvotni, ja parallēlo spēku sistemu pagrieztu uz vienu un to pašu leņķi ap tiem punktiem, kuŗu koordinātes ir ietilpušas izteiksmju

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i \,, \quad \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i \,, \quad \sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i$$

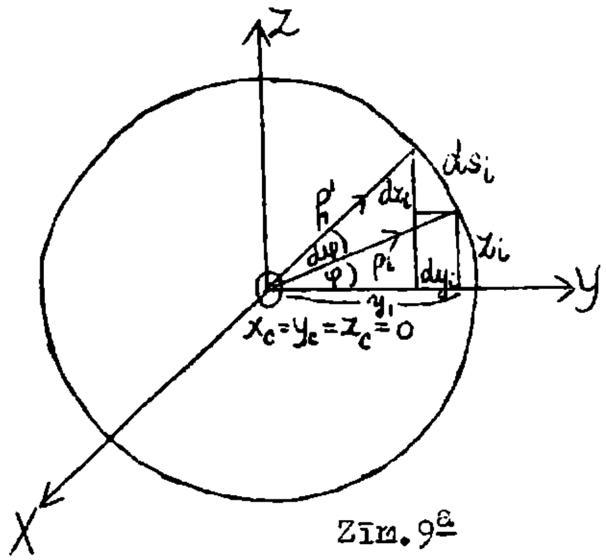
sastādīšanā (parasti šie punkti ir spēku iedarbes punkti).

Parādīsim vēl, ka ķermeni var pagriezt ap kādu asi, ejošu caur parallēlu spēku centru, bez kā centra stāvotne caur to tiktu grozīta. Pieņemsim, ka koordinātu sākums sakrīt ar parallēlu spēku centru, tad

$$x_c = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i P_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i} = 0$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i P_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i} = 0$$

$$z_c = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{z_i P_i}{\sum_{i=1}^{i=n} P_i} = 0$$



Zīm.9ª

Pieņemsim, ka ķermenis ir pagriezts pulksteņa kustībai pretējā virzienā par leņķi $d\varphi$, tad:

$$ds_i = p_i d\varphi \text{, bet}$$

$$dz_i = ds_i \cos(\bar{Z}, d\bar{s}_i) =$$

$$= p_i \cos(\bar{Z}, d\bar{s}_i) d\varphi =$$

$= y_i d\varphi$. Tagad diferencēsim z_c pēc φ. Kā redzams, zem $\sum$ zīmes tikai z_i ir atkarīgs no φ, kādēļ

$$dz_c = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{dz_i P_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} P_i} = d\varphi \sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i P_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} P_i} = d\varphi . y_c = 0$$

Tāpat var parādīt, ka arī $dy_c = 0$ un arī $dx_c = 0$, kas nozīmē, ka spēku centrs nereaģē uz ķermeņa pagriezienu ap kaut-kuŗu asi, ejošu caur spēku centru (x_c, y_c, z_c).

B. Īpatnējais paņēmiens.

Lai uzietu ekvivalentu dotai parallēlu spēku sistemai, mēs lietojam vispārējo paņēmienu, reducējot spēkus P_i pie izvēlētā p.O ar pāru palīdzību.

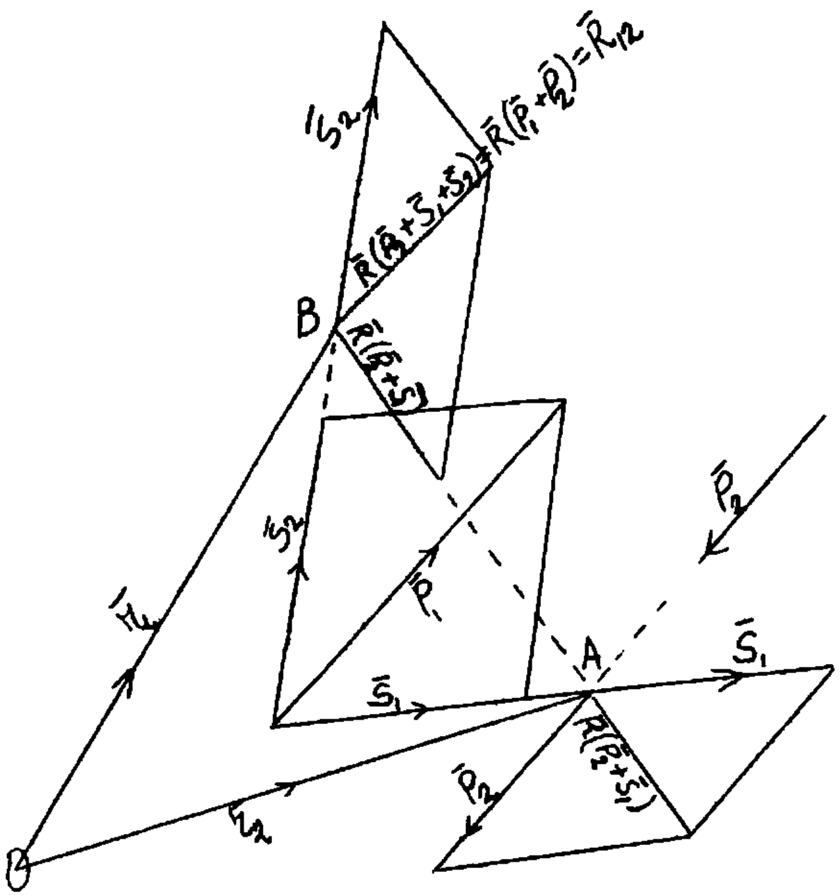
Tagad rādīsim, kā šo redukciju var izdarīt arī citādā ceļā, lietojot tieši parallēlogramma likumu un Varignona teoremu. Tiešam, katri divi no doto parallēlu spēku sistemas vienmēr atradīsies vienā plaknē, kādēļ šos spēkus var tieši savienot vienā kopspēkā, tāpat, kā plaknē. Gūstam min. divu spēku kopspēkam pievienojam nākamo spēku, kuŗš atkal atrodās vienā citā plaknē ar kopspēku, un tādēļ parallēlogramma likums atkal ir pielietojams. Tā šo operāciju var turpināt līdz galam un gūt pazīstamo sakarību:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

Attiecīgu grafisku $\bar{R}$ konstruēšanu var izvest divās projekcijas plaknēs, kā tas tika aizrādīts attiecībā uz vispārējo spēku gadijumu.

Varignona teorema.

Ņemsim vērā divus kādus parallēlo spēku sistemas spēkus, kuŗus apzīmēsim ar $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ (skat.zīm.10). Spēku $\bar{P}_1$ saliksim komponentēs $\bar{S}_1$ un $\bar{S}_2$ tā, lai būtu $\bar{P}_1 = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$.



zīm.10.

Pārnesam $\bar{S}_1$ punktā A uz $\bar{P}_2$ darbības līnijas, kur pievienojam šo komponenti spēkam $\bar{P}_2$ uz parallēlogramma likuma pamata un gūstam kopspēku

$$\bar{R}(\bar{P}_2+\bar{S}_1) = \bar{P}_2+\bar{S}_2$$

Punktu A savienojam ar jau iepriekš brīvi izvēlētu punktu O, kurš tā tad vispārējā gadijumā neatradīsies spēku $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ darbības plaknē. Taisnes nogriezni OA izveidojam par radiusu-vektoru $\bar{r}_2$, piešķirdami pēdējam apakšvirzienu no O pret A.

Pareizināsim šo radiusu-vektoru uz

$$\bar{R}(\bar{P}_2 + \bar{S}_1)$$

vektoriāli, un tad gūstam:

$$\left[\bar{r}_2,\bar{R}(\bar{P}_2 + \bar{S}_1)\right] = \left[\bar{r}_2,(\bar{P}_2 + \bar{S}_1)\right] = \left[\bar{r}_2,\bar{P}_2\right] + \left[\bar{r}_2,\bar{S}_1\right] .$$

Bet $\left[\bar{r}_2,\bar{R}(\bar{P}_2 + \bar{S}_1)\right]$ ir spēka $\bar{R}(\bar{P}_2 + \bar{S}_1)$ vektoriālais moments, ņemts pret punktu O, kā vektoriālā momenta centru. Tāpat $\left[\bar{r}_2,\bar{P}_2\right]$ ir spēka $\bar{P}_2$ vektoriālais moments un $\left[\bar{r}_2,\bar{S}_1\right]$ ir komponentes $\bar{S}_1$ vektoriālais moments, sastādīti pret to pašu centru, kādēļ var rakstīt:

$$\left[\bar{r}_2,\bar{R}(\bar{P}_2 + \bar{S}_1)\right] = \mathbf{M}(\bar{P}_2 + \bar{S}_1) = \mathbf{M}(\bar{P}_2) + \mathbf{M}(\bar{S}_1)$$

Gūto kopspēku $\bar{R}(\bar{P}_2 + \bar{S}_1)$ pārnesam punktā B, kur viņam uz tā paša parallēlogramma likuma pamata pievienojam komponenti $\bar{S}_2$, caur ko gūstam kopspēku:

$$\bar{R}(\bar{P}_2 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2) = \bar{R}(\bar{P}_1 + \bar{P}_2) = \bar{R}_{12} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$$

Radiusu-vektoru, novilktu no punkta O pret punktu B, pareizinājam vektoriāli uz $\bar{R}_{12} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$, caur ko gūstam tāpat

$$\left[\bar{r}_1, \bar{R}_{12}\right] = \bar{M}(\bar{P}_1 + \bar{P}_2) = \bar{M}_{12} = \left[\bar{r}_1, (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)\right] = \left[\bar{r}_1, \bar{P}_1\right] = \left[\bar{r}_1, \bar{P}_2\right] = $$
$$= \bar{M}(\bar{P}_1) + \bar{M}(\bar{P}_2) = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$$

Gūto kopspēku $\bar{R}_{12}$ un vienu no pārējiem parallēlo spēku sistemas spēkiem, piemēram $\bar{P}_3$, var atkal iedomāties ieslēgtus vienā plaknē, tā kā ar šiem spēkiem varētu izdarīt tās pašas manipulacijas, kā ar $\bar{P}_1$ un $\bar{P}_2$ un no tā paša punkta O novilkt attiecīgus radiusus-vektorus, kas dos iespēju uzrakstīt:

$$\left[\bar{r}_3, (\bar{R}_{12} + \bar{P}_3)\right] = \bar{M}_{123} = \left[\bar{r}_3, \bar{R}_{12}\right] + \left[\bar{r}_3, \bar{P}_3\right] = \bar{M}_{12} + \bar{M}_3 \text{ , bet}$$

$\bar{M}_{12} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$, kādēļ:

$$\bar{M}_{123} = \bar{M}_{12} + \bar{M}_3 = (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) + \bar{M}_3 = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3$$

Turpinot šo operāciju līdz galam, pievienojot tādā pašā kārtā visus pārējos spēkus, gūsim beidzot:

$$\bar{M}_{12\ldots n} = \bar{M} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

kur $\bar{M} = \left[\bar{r}, \bar{R}\right]$, bet $\bar{M}_i = \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]$. Ipatnējais šeit ir tas, ka gūtais moments nav vairs koppāris $\overline{M(O)}$, bet atsevišķā spēka $\bar{R}$ vektoriālais moments, saistīts caur punktu O vektors, kuŗu nevar pārnest parallēli sev, bet tikai var pārbīdīt savā darbības virzienā (slīdošs vektors).

§ 9. Parallēlu spēku ekvivalentas sistemas dažādi veidi.

Kā redzējam, atkarībā no paņēmiena varēja gūt divus ekvivalentas sistemas veidus:

I. 1) $\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i (0,0,0)$

2) $\overline{M(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{M_i(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]$

II. 1) $\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$

2) $\bar{M} = \left[\bar{r}, \bar{R}\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]$

Abas šīs sistemas ir identiskas, tikai viņu ārējie veidi atšķirās. Lai pirmo veidu vienkāršotu, koppāri $\overline{M(O)}$ ir jāpielīdzinā $\overline{M(O)} = \left[\bar{r}, \bar{R}\right]$, kur $\bar{r}$ var piešķirt speciālu nozīmi $\bar{r} = \bar{a}$, tad ar $\bar{a}R^2 = \left[\bar{R}, \overline{M(O)}\right]$ gūstam $\bar{R}$ iedarbes punktu x_o, y_o, z_o ar izteiksmju sistemas (6) palīdzību, jeb, piešķirot $\bar{r} = \bar{r}_c$,kas ir ērtāki,kur $\bar{r}_c$ ir parallēlo spēku centra radiuss-vektors, gūsim x_c, y_c un z_c ar sistemas (19) palīdzību.Tādēļ veidu I var rakstīt

$$\text{I-a.}\quad 1)\ \bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

$$2)\ \bar{M}(O) = \left[\bar{r}_c, \bar{R}\right] = \sum_{i=1}^{i=n} M_i(O) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]$$

pie kam projektējot vektoru $\overline{M(O)}$ uz asīm, gūsim nolīdzinājumu sistemu (18), no kurienes seko x_c, y_c un z_c saskaņā ar (19), kādēl I-a vietā varētu uzrakstīt arī

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i(x_c, y_c, z_c)$$

vienu vienīgu nolīdzinājumu.

Tāpat var neņemt vērā $\bar{r}$ speciālu nozīmi $\bar{r}_c$, bet izlietot

$$\overline{M(O)} = \left[\bar{r}, \bar{R}\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]$$

kur $\bar{r}$ ir mainīgs lielums. Šī vektora projekcijas uz asīm sniegs $\bar{R}$ darbības linijas nolīdzinājumu veidu (18a), kādēļ ekvivalento sistemu varētu uzrakstīt arī šādā veidā:

$$1)\ \bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$$

$$2)\ \overline{M(O)} = \left[\bar{r}, \bar{R}\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right]$$

Otrais veids (II) atšķirās no (I) caur to, ka $\bar{M}$ šeit nav jāpielīdzinā $\bar{M} = \left[\bar{r}, \bar{R}\right]_-$,bet Varignona teorema pate ir novedusi pie $\bar{M} = \left[\bar{r}, \bar{R}\right]$.Pielīdzinot $\bar{r}$ spēciālai nozīmei, $\bar{r} = \bar{r}_c$, gūsim $\bar{R}$ iedarbes punktu parallēlu spēku centrā, bet atstājot $\bar{r}$, gūsim $\bar{R}$ darbības linijas nolīdzinājumu.

§ 10. Parallēlu spēku ekvivalentās sistemas analitiskas izteiksmes.

Tā kā parallēlu spēku virziens ir noteikts caur $\cos\alpha, \cos\beta$ un $\cos\gamma$,tad šo virzienu var pieņemt par projekcijas ass virzienu,uz kuŗu projektē $\bar{R}$, kādēļ

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i$$

(kā projekcijas algebrāisks lielums). Tālāk var noteikt parallēlu spēku centru caur formulu sistemu (19), jeb

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i$$

pievienot klāt $\bar{R}$ darbības linijas nolīdzinājumu, kuŗu gūst, projektējot vektoru

$$\bar{M}(O) = \left[\bar{r},\bar{R}\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i,\bar{P}_i\right] \quad \text{resp.} \quad \bar{M} = \left[\bar{r},\bar{R}\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i,\bar{P}_i\right]$$

uz koordinātu asīm, caur ko gūstam sistemu (18a).

Paralēliem spēkiem parasti vēl speciālu koordinātu sistemu, proti, liekot, piemēram, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, tad:

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i$$

ar centru, kuŗš noteicās saskaņā ar (19. Var arī lietot otru noteikšanas veidu, proti, uzstādot $\bar{R}$ darbības linijas nolīdzinājumu caur vektora

$$\bar{M} = \left[\bar{r},\bar{R}\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i,\bar{P}\right]$$

projekcijām uz koordinātu asīm, kuŗu tad pievieno

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i$$

Mūsu speciālā gadijumā, kad $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, gūstam:

$$M_x = \left[\bar{r},\bar{R}\right]_x = yZ - zY = yR\cos\gamma - zR\cos\beta = 0 =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i,\bar{P}_i\right]_x = \cos\gamma \sum_{i=1}^{i=n} y_iP_i - \cos\beta \sum_{i=1}^{i=n} z_iP_i = 0,$$

tā tad identitate. Tālāki:

$$M_y = zX - xZ = zR\cos\alpha - xR\cos\gamma = zR\cos\alpha = \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} z_iP_i -$$

$$- \cos\gamma \sum_{i=1}^{i=n} x_iP_i = \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} z_iP_i, \text{no kurienes } z_c = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{z_iP_i}{R};$$

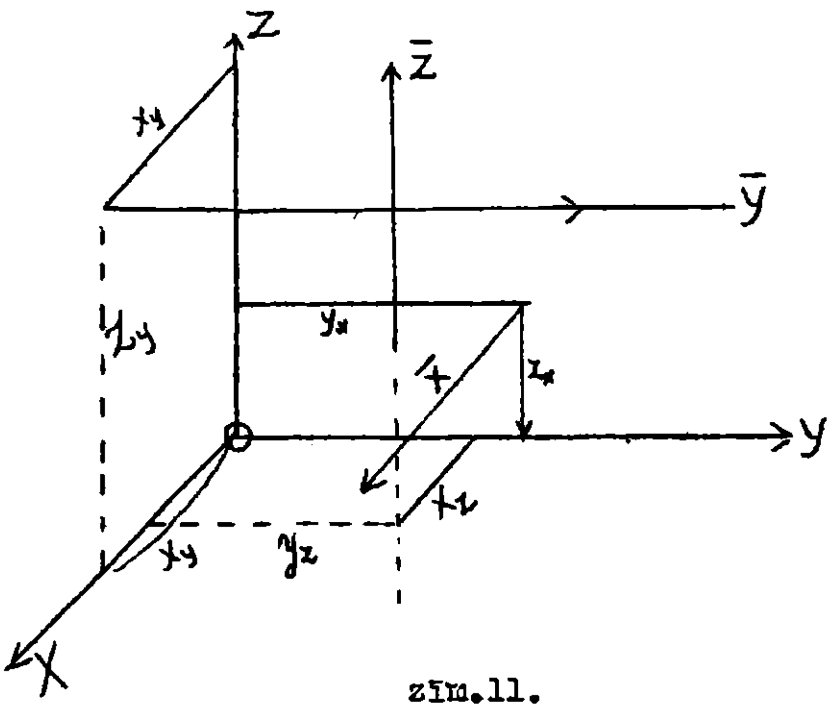
$$M_z = xY - yX = xR\cos\beta - yR\cos\alpha = - yR\cos\alpha = \cos\beta \sum_{i=1}^{i=n} x_iP_i -$$

$$- \cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} y_iP_i = -\cos\alpha \sum_{i=1}^{i=n} y_iP_i, \text{no kurienes:}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_iP_i}{R}$$

Gūtā sistema: $y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i}{R}$ un $z_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i}{R}$ noteic $\bar{R}$ darbības liniju parallēlu $\bar{X}$ asij. Ir jāatzīst, ka attiecībā uz parallēliem spēkiem, viņu ekvivalentās sistemas noteikšanu caur centru (x_c, y_c, z_c) ir pilnīgāka, kā nekā caur darbības liniju, jo centrs (x_c, y_c, z_c) izpauž parallēlo spēku savdabīgumu, kamēr spēka darbības linijā šis savdabīgums zūd.

§ 11. Telpu sistemas reducēšana pie 3. parallēliem koordinātu asīm, šķērsojošiem spēkiem.



zīm. 11.

Ciešā sakarā ar parallēlu spēku savienošanu stāv jautājums par spēku sistemas reducēšanu pie trim šķērsojošiem, parallēliem koordinātu asīm, spēkiem. Tiešam, katru spēku telpā var salikt 3 komponentēs, parallēlās koordinātu asīm tā, ka

$$1)\ \bar{X} = \sum_{i=1}^{i=n} X_i = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i \cos\alpha_i$$

$$2)\ \bar{Y} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{Y}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i \cos\beta_i$$

$$3)\ \bar{Z} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{Z}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i \cos\gamma_i$$

$$4)\ z_x = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_i X_i}{X}\ ,\ y_x = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i X_i}{X}$$

$$5)\quad x_y = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i Y_i}{Y}, \quad z_y = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_i Y_i}{Y}$$

$$6)\quad x_z = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i Z_i}{Z}, \quad y_z = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i Z_i}{Z}$$

Šo sistemu var tālāk pārveidot dinamā. Hidrostatikā parasti reducē virsmas spēkus – hidrostatisko spiedi pie apskatītās spēku sistemas.

§ 12. Smaguma centrs.

Vispārējais paņēmiens smaguma centra stāvotnes noteikšanai.

Visi ķermeņi, kas atrodas zemes lodes virsmā jeb viņas tuvumā, padoti smaguma spēka iedarbei. Smaguma spēks, iedarbodamies uz katru ķermeņa punktu un būdams proporcionāls punktu ieslēdzošas daliņas tilpumam, ir tilpuma spēks. Neskatoties uz to, ka šī spēka vektora virzieni krusto zemes lodes centru, tomēr, ņemot vērā ķermeņa niecīgās dimenzijas samērā pret zemes lodi, smaguma spēka vektoru sistemu var skaitīt par parallēlu spēku sistemu.

Smaguma spēku, kuri iedarbojas uz visiem ķermeņa punktiem, kopspēku sauc par ķermeņa svaru (ne visai dibināti, par ko tuvāki skat. "Ievads mēchanikā" 70.lapp.§ 2) un viņa iedarbes punktu – par smaguma centru.

Smaguma spēka īpašības ir jau noskaidrotas līdz ar parallēlu spēku sistemas īpašību noskaidrošanu (skat.§ 8).

Vispārējais centra stāvotnes noteikšanas paņēmiens pastāv iekš sekojoša: ķermeni sadala atsevišķās daļās, kuŗu smaguma centri, kā arī svari, pieņemami par zinamiem, un pielietojam formulu grupu (19) § 8:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i G_i}{\sum_{i=1}^{i=n} G_i}$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i G_i}{\sum_{i=1}^{i=n} G_i}$$

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_i G_i}{\sum_{i=1}^{i=n} G_i}$$

Šeit tagad G_i apzīmē minēto daļu svarus, bet ķermeņa svaru apzīmē

$\sum_{i=1}^{i=n} G_i$.

No šīm formulām seko, ka:

1) Centra uziešanai dotos spēkus var atvietot ar lielumiem, viņiem proporcionāliem, jo proporcionālitātes koeficients tad ietilps kā skaitītājā, tā arī saucējā un tad uz viņu izteiksmes (19) varēs saīsināt.

2) Ja visu ķermeņa daļu smaguma centri atrodas kādā plaknē, tad viņā atradīsies arī ķermeņa smaguma centrs. Tiešam, ja visi daļu punkti atrodas kādā plaknē, tad viņi apmierina plaknes nolīdzinājumu un kāda punkta i koordinātes ir saistītas:

$$ax_i + by_i + cz_i = \partial$$

$$ax_iG_i + by_iG_i + cz_iG_i = \partial . G_i$$

$$a\sum_{i=1}^{i=n} x_iG_i + b\sum_{i=1}^{i=n} y_iG_i + c\sum_{i=1}^{i=n} z_iG_i = a\xi\sum_{i=1}^{i=n} G_i + b\eta\sum_{i=1}^{i=n} G_i +$$

$$+ c\zeta\sum_{i=1}^{i=n} G_i = \partial\sum_{i=1}^{i=n} G_i \quad ; a\xi + b\eta + c\zeta = \partial$$

t.i. arī centra koordinātes x_c, y_c un z_c apmierina plaknes nolīdzinājumu, un centrs atrodas minētā plaknē.

3) Ja visi daļu smaguma centri atrodas uz kādas taisnes, tad arī ķermeņa smaguma centrs uz šīs taisnes atrodas. Tiešam, pieņemsim taisnes nolīdzinājumu veidā:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}$$

Tad smaguma centru koordinātēm šo nolīdzinājumu ir jāapmierina un mēs varam rakstīt:

$$\frac{x_i - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y_i - y_0}{\cos\beta} = \frac{z_i - z_0}{\cos\gamma},$$

$$\frac{x_iG_i - x_0G_i}{\cos\alpha} = \frac{y_iG_i - y_0G_i}{\cos\beta} = \frac{z_iG_i - z_0G_i}{\cos\gamma},$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_iG_i - x_0\sum_{i=1}^{i=n} G_i}{\cos\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_iG_i - y_0\sum_{i=1}^{i=n} G_i}{\cos\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_iG_i - z_0\sum_{i=1}^{i=n} G_i}{\cos\gamma} =$$

$$= \frac{\xi\sum_{i=1}^{i=n} G_i - x_0\sum_{i=1}^{i=n} G_i}{\cos\alpha} = \frac{\eta\sum_{i=1}^{i=n} G_i - y_0\sum_{i=1}^{i=n} G_i}{\cos\beta} = \frac{\zeta\sum_{i=1}^{i=n} G_i - z_0\sum_{i=1}^{i=n} G_i}{\cos\gamma}$$

Saīsinot uz $\sum_{i=1}^{i=n} G_i$, gūstam:

$$\frac{\xi - x_0}{\cos\alpha} = \frac{\eta - y_0}{\cos\beta} = \frac{\zeta \quad z_0}{\cos\gamma}$$

kas norāda, ka arī ķermeņa smaguma centrs atrodas uz tās pašas taisnes.

4) Ja visi ķermeņa daļu smaguma centri atrodās vienā punktā, tad $x_i = y_i = z_i = 0$ un līdz ar to uz (19) pamata arī $\xi = \eta = \zeta = 0$.
Ķermenis sauca̧s par homogenu, ja kaut kuŗu divu ķermeņa daļu svari attiecās kā šo daļu tilpumi:

$\frac{\Delta_m G}{\Delta_n G} = \frac{\Delta_m V}{\Delta_n V}$,kas ir iespējams, ja $\Delta_i G = \gamma \Delta_i V$, kur γ,proporcionālitātes koeficients, ir konstants lielums, bet simbols Δ apzīmē, ka ņemta vērā attiecīgā lieluma daļa. Šis proporcionālitātes koeficients skaitliski ir vienāds ar ķermeņa īpatnējo svaru, jo

$$\gamma = \frac{\Delta_i G}{\Delta_i V}$$

Ja šis koeficients nav konstants lielums, bet ir atkarīgs no punkta koordinātēm: $\gamma_i = \gamma(x_i, y_i, z_i)$, tad ķermeni sauc par heterogenu un pats koeficients γ noteicās tā izvēlam kādu ķermeņa tilpuma daļu,kuŗa ieslēdz punktu un uzejam šīs daļas svara attiecību pret viņas tilpumu

$$\gamma_i = \frac{\Delta_i G}{\Delta_i V}$$

Šis lielums ir mainīgs lielums,kamēr $\Delta_i.G$ un $\Delta_i.V$ ir mainīgi lielumi, bet šī attiecība tiecās pret kādu noteiktu robežu, līdz ar $\Delta_i G$ un $\Delta_i V$ samazināšanos līdz 0. Šo robežu sauc par ķermeņa īpatnējo svaru dotā punktā un viņa ir reprezentēta caur atvasinājumu

$$\gamma_i = \lim \left(\frac{\Delta_i G}{\Delta_i V} \right)_{\Delta_i V \to 0} = \frac{dG}{dV}$$

Smaguma centra uziešana vienkāršojas, ja ir iespējams novilkt ķermenī simmetrijas plaknes, linijas jeb punktus: pirmā gadijumā smaguma centrs atrodas simmetrijas plaknē, otrā - uz simmetrijas ass un trešā - simmetrijas punktā.

Ķermenim piemīt simmetrijas plakne, ja katram ķermeņa punktam A atbilst plaknes otrā pusē punkts B ar tādu pašu īpatnējo svaru,kā punktam A, pie kam šo punktu attālumi ir vienādi. Sadalam ķermeni bezgalīgi mazās daļās tā, lai bezgalīgi mazi tilpumi, kuŗi ieslēdz punktus A un B būtu vienādi, tad arī viņu svari būs vienādi, kādēļ katru divu tādu daļiņu smaguma centrs atrodas simmetrijas plaknē,un tā tad arī beidzot viņa ķermeņa smaguma centrs atradīsies šinī plaknē

Tiešam, pieņemsim, ka XOY plakne ir simmetrijas plakne, tad

$$\zeta = \frac{\lim \sum_{n=1}^{n\to\infty} x_i \gamma_i \Delta_i V}{\sum_{n=i}^{n\to\infty} \gamma_i \Delta_j V} = \frac{\int^V x \gamma dV}{\int^V \gamma dV} = 0$$

Šinī summā resp. integrālā visus summandus varēs sagrupēt pa pāriem tā, lai katru divu summandu summa, saskaņā ar noskaidroto ķermeņa sadalīšanas paņēmienu, būtu 0, kādēļ arī visa summa resp. integrāls skaitītājā ir 0 un līdz ar to arī $\zeta = 0$.

Ir saprotams, ka analogiskus prātojumus var piemērot arī attiecībā uz simmetrijas asi un simmetrijas punktu.

Ir arī saprotams, ka homogenam ķermenim piemīt minētie simmetrijas elementi, ja viņa virsmai šie elementi piemīt, jo ķermeņa iekšienē vienmēr minētā summa anulēsies un viņu būs jāpārbauda tikai attiecībā uz ķermeņa virsmu.

Uz priekšu apskatīsim tikai homogenus ķermeņus attiecībā uz kuriem:

$$\xi = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i \gamma \Delta_i V}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \gamma \Delta_i V} = \frac{\gamma}{\gamma} \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i \Delta_i V}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \Delta_i V} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i \Delta_i V}{V}$$

Tāpat analogiski:

$$\eta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} y_i \Delta_i V}{V} \quad \text{un} \quad \zeta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} z_i \Delta_i V}{V} \quad \ldots\ldots.(19^{a})$$

Tā kā šinīs formulās ietilpst tikai ķermeņu daļu tilpumi, tad "ķermeņa smaguma centrs" vietā bieži lieto izteicienu "ķermeņa tilpuma smaguma centrs".

Ļoti bieži nav iespējams saskaldīt ķermeni daļās ar galējiem samēriem un izlietot sakarības (19-a). Tad izeja ir sekojoša, kuŗa jau tika apskatīta attiecībā uz plakni.

Apzīmēsim ar $\Delta_i V$ ķermeņa tilpuma daļu, bet ar x_i, y_i un z_i kāda šīs daļas punkta koordinātes, tad:

$$\xi = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i \Delta_i V}{V}$$

būs ķermeņa smaguma centrs, kuŗš būs jo tuvāks īstam, jo ķermeņa daļas mazākas un kļūda galīgi pazudīs robežā, kad gūsim

$$(\lim \xi')_{n\to\infty} = \xi = \lim \frac{\sum\limits_{i=1}^{i\to\infty} x_i \Delta_i V}{V} = \frac{\int^{V} x dV}{V} \quad \text{un tāpat}$$

$$\eta = \frac{\int^{V} y dV}{V} \quad \text{un} \quad \zeta = \frac{\int^{V} z dV}{V}$$

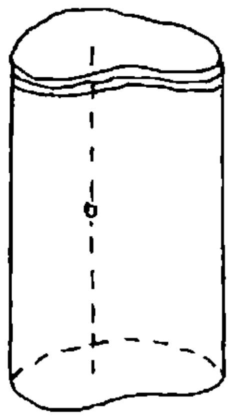
Šīs formulas prasa noteiktu integralu uziešanu, kad ir dots ķermeņa virsmas nolīdzinājums $f(x,y,z) = 0$. Tomēr to ķermeņu, kuŗi tiek apskatīti elementārā geometrijā, smaguma centrus var uziet mākslīgā ceļā, apejot noteikto integrālu lietošanu, uzmeklējot šais ķermeņos simmetrijas plaknes, asis un punktus, kā arī izlietojot vēl sekojošu teoremu: "Ja ir iespējams saskaldīt doto ķermeni atsevišķos vienādos ķermeņos,kuŗu smaguma centri ir zinami,tad, iedomājoties šo ķermeņu svarus pieliktus viņu smaguma centros, gūstam punktu geometrisku vietu kādas homogenas virsmas veidā (homogena tādēļ, ka visi atsevišķi svari ir vienādi)".

Pāriesim pie jautājuma par dažu izliektu virsmu un ķermeņu smaguma centru uziešanu.

Dažu izliektu virsmu smaguma centri.

Taisna cilindra sānu virsma.

Pieņemsim, ka cilindra pamatā atrodās figura, ierobežota ar kaut kādu līkni, bet viņa veidules ir stateniskas pret pamatu. Ar plaknēm, parallēlām pamatiem, sadalīsim cilindri bezgalīgi plānās plaknēs, kuŗas konturus, ar viscauri vienādu biezumu, varam uzskatīt par homogenām materiālām līknēm, resp. par tādām līknēm,kuŗu kaut kuŗas daļas svars ir proporcionāls viņas garumam. Pats par sevi saprotams, ka abu galējo plakņu konturu smaguma centri sakritīs ar abu pamatu perimetru smaguma centriem un visu pārējo vidus konturu smaguma centri atradīsies uz taisnes, kuŗa savienos abus jau minētos pamatu perimetru smaguma centrus. Uz šīs pašas taisnes arī atradīsies visas aplūkojamās virsmas smaguma centrs un proti - viņas vidus punktā, jo plakne, vilkta caur šo punktu stateniski pret taisni, ir minētās virsmas simmetrijas plakne. Tā tad kuŗa katra taisna cilindra (pamatfiguras veids nekrīt svarā) sānu virsmas smaguma centrs atrodās tās taisnes vidus punktā, kuŗa savieno abu pamatu perimetru smaguma centrus.



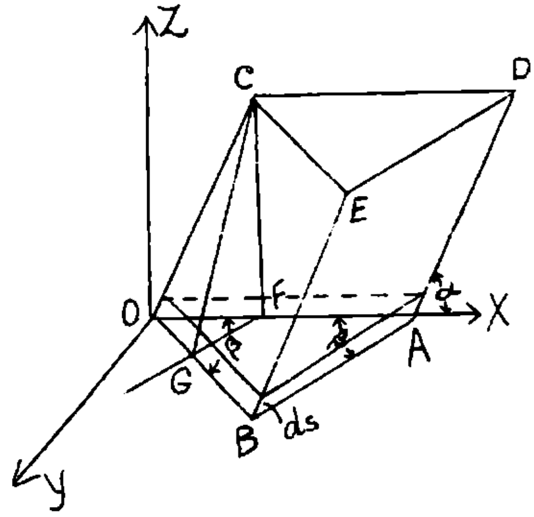
zīm.12.

Slīps cilindris.

Slīpam cilindrim, kuŗa veidules veido kaut kādu leņķi ar pamatu plaknēm, tik ko kā izvestais, attiecībā uz taisna cilindra sānu virsmas, likums nav piemērojams, jo šinī gadijumā kontura strēmeļu,kuŗas mēs iegūsim,novelkot plāknes parallēli pamatiem, biezums nebūs viscauri viņāds un tāpēc viņas nav uzskatāmas par homogenām materiālām līknēm. Šī iemesla dēļ galējo strēmeļu smaguma centri vispārīgi nesakritīs ar pamatu perimetru smaguma centriem un visas sānu virsmas smaguma centrs, lai gan gulēs plaknē, ejošā caur veiduļu vidus punktiem, bet tomēr neatradīsies uz taisnes, kuŗa savieno pamatu perimetru smaguma centrus. Ilustrēsim sacīto ar piemēru.

Pieņemsim cilindrim par pamatu trīsstūri, tad cilindris pārvērtīsies trīsstūra prizmā. Šīs prizmas pamatu noguldīsim uz XY plaknes, vienu virsotni novietosim koordinātu sistemas sākuma punktā O un vienu šķautni OA laidīsim pa X asi. Pieņemsim, ka mūsu prizmas skaldne OCDA sakrīt ar ZX plakni un visas parallēlās šķautnes OC, CB un AD veido ar plakni XY leņķi α.

Pieņemsim, ka prizmas pamatā ir vienādmalu trīsstūris AOB,kuŗa leņķi $\beta = 60^\circ$. No pieņemtā seko, ka $\cos(COB) = \cos\alpha \cos\beta$ /Novelkot



zīm.13.

šķēlienu tā, lai CF būtu $\perp$ pret OA un FG $\perp$ pret OB, tad:

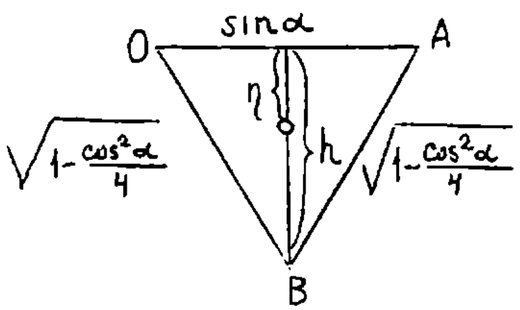
$$OG = OF\cos\beta = OC.\cos\alpha\cos\beta =$$
$$= OC.\cos(COB) \;/,\; \text{un}$$
$$\cos(EBA) = \cos\alpha\cos\beta \text{ ,no kurienes}$$
$$\sin(COB) = \sqrt{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta} =$$
$$= \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}} \quad \text{un} \quad \sin(EBA) =$$
$$= \sqrt{1 - \cos^2\alpha\cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}}$$

Novelkot plakni paralleli pamatam un nosaucot tos nogriežņus, kuŗus viņa nošķeļ no sānu šķautnēm, par ds, pārliecināsimies, ka iegūtās trīsstūrainās strēmeles biezums pie malas OA būs ds.sinα, pie malas OB:

$ds.\sin(COB) = ds.\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}}$, pie malas BA: $ds.\sin(EBA) = ds.\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}}$. Tā kā šo strēmeļu garumi ir vienādi, tad viņu svari ir proporcionāli platumiem resp. izteiksmēm:

$$\sin\alpha \;, \quad \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}} \;, \quad \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}}$$

Šādas strēmeles smaguma centrs atradīsies uz stateņa, novilkta no virsotnes B pret malu OA un viņa attālums no pēdējās η noteicās ar momentu nolīdzinājumu:



zīm.14.

$$\left(\sin\alpha + 2\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}}\right)\eta =$$
$$= \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}} \cdot \frac{h}{2} + \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}} \cdot \frac{h}{2}$$

no kurienes:

$$\eta = h \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}}}{\sin\alpha + 2\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{4}}} \;,$$

kur h - dotās prizmas pamata augstums.

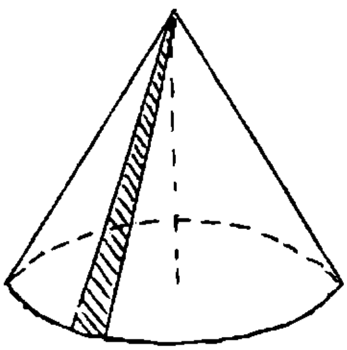
Atsevišķam gadijumam, ja $\alpha = 90^\circ$ resp. mūsu prizma ir taisna, $\eta = \frac{h}{3}$ un tad iegūtās trīsstūrainās strēmeles smaguma centrs sakrīt ar pamata perimetra smaguma centru. Visos citos gadijumos šie centri nesakritīs. Piemēram, ja $\alpha = 45^\circ$, tad:

$$\eta = h \frac{\sqrt{\frac{7}{8}}}{\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{7}{8}}} = h \frac{\sqrt{7}}{2(1 + \sqrt{7})} = 0{,}363h,$$ bet pamata perimetra smaguma centra attālums no malas OA ir $\eta' = \frac{h}{3} = 0{,}333h$ un abu centru savstarpējais atstatums ir 0,03h (sastāda 3% no pamata augstuma).

Gadijumos, kad slīpa cilindra pamatam ir divas simmetrijas asis (ģeometriskā nozīmē) un viņa veiduļu virziens ir tāds, ka viņu projekcijas uz pamata plakni ir parallēlas vienai no šīm simmetrijas asīm, tad tāda cilindra sānu virsmas smaguma centrs arī guļ uz taisnes, kuŗa savieno abu viņa pamatu smaguma centrus, jo katra no divām plaknēm, ejošām caur minēto savienojošo taisni un vienu no pamata simmetrijas asīm, ir cilindra sānu virsmas simmetrijas plakne viņas mēchaniskā nozīmē.

Taisna konusa sānu virsma.

Vispirms aplūkosim tādu konusu, kuŗa pamatā ir ripa un kuŗa virsotne atrodās uz stateņa pret pamata plakni, vilkta caur pamata centru. Pats par sevi saprotams, ka uz šī stateņa (konusa ass) atradīsies arī sānu virsmas smaguma centrs, jo katra plakne ejoša caur šo liniju ir sānu virsmas simmetrijas plakne. Lai noteiktu smaguma centra stāvotni uz konusa ass, sadalīsim konusa pamata perimetru bezgalīgi mazās daļās un katru no viņām pieņemsim par tāda elementāra trīsstūra pamatu, kuŗa virsotne sakrīt ar konusa virsotni. Šādu trīsstūru smagumu centri atrodās no pamata vienas trešdaļas augstuma atstatumā, tā tad visu elementāro trīsstūru smaguma centri atradīsies vienā un tanī pašā plaknē, kuŗa būs parallēla konusa pamatam un atradīsies vienas trešdaļas konusa augstuma atstatumā no viņa. Tanī pašā plaknē arī jāatrodas visas sānu virsmas smaguma centram, kuŗam, kā jau redzējam, bez tam vēl jāatrodās uz konusa ass. No šejienes seko slēdziens, ka taisna apaļa konusa sānu virsmas smaguma centrs atrodās uz konusa ass (linijas, kuŗa savieno pamata centru ar konusa virsotni) vienas trešdaļas konusa augstuma atstatumā no viņa pamata.

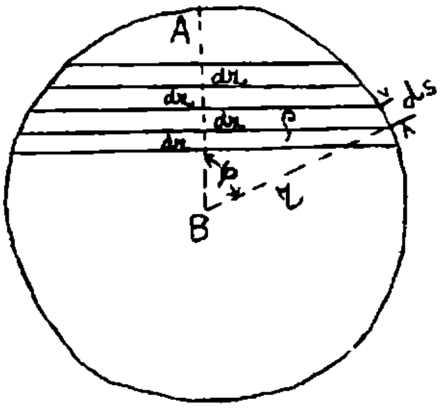


zīm.15.

Arī tanī gadijumā, kad konusa pamatā nav ripa, bet kaut kuŗa figura, ierobežota no līknes, ar divām simmetrijas asīm un kad konusa virsotne atrodās uz stateņa pret pamata plakni, ejošu caur pamata smaguma centru, augšā izvestais likums attaisnojās. Ja, turpretīm, konusa virsotne ieņem pilnīgi patvaļīgu stāvotni telpā jeb viņa pamata figurai nav divu simmetrijas asu, tad pievestais likums vairs nav piemērojams. Arī šinīs gadijumos konusa sānu virsmas smaguma centrs atrodās plaknē, ejošā parallēli pamatam vienas trešdaļas augstuma atstatumā no pēdējā, bet viņš nesakritīs ar šīs plaknes krustpunktu ar konusa asi.

Lodes joslas virsma.

Lodes joslu iegūsim, ja lodi šķelsim ar divām parallēlām plaknēm (uz zīmējuma šīs plaknes attēlotas taisnu liniju veidā). Katra no šīm plaknēm šķēlumā ar lodi veido riņķi. Šos riņķus uzskata par joslas



zīm.16.

pamatiem. Viegli saprotams,ka joslas smaguma centram jāatrodas uz linijas, kuŗa savieno abu pamatu centrus,jo katra plakne, ejoša caur šo liniju būs joslas simmetrijas plakne. Lai noteiktu joslas smaguma centra stāvotni uz šīs taisnes, sadalīsim visu joslu bezgalīgi mazās strēmelēs, velkot plaknes parallēli pamatiem atstatumā dz vienu no otras. Katras šādas strēmeles virsma būs:

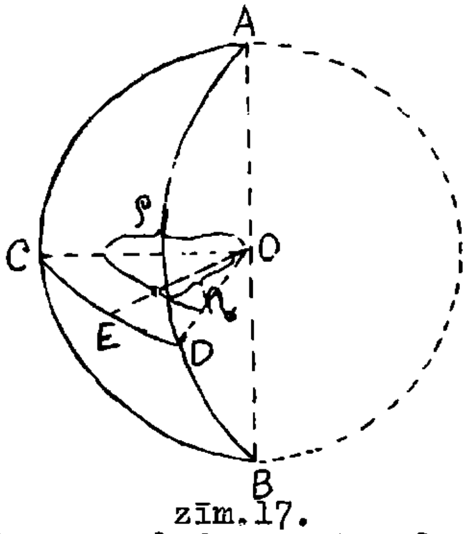
$$df = 2\pi\rho\, ds = 2\pi r\sin\varphi \frac{dz}{\sin\varphi} = 2\pi r dz\,,$$

kur r ir lodes radiuss. Tā kā dz visām strēmelēm vienāds, tad no df izteiksmes seko, ka visu strēmeļu virsmas ir vienādas un līdz ar to arī viņu svari ir vienādi. Ja nu mēs šos atsevišķu strēmeļu svarus iedomāsimies pieliktus viņu smaguma centros, tad gūsim tādu pašu parallēlu spēku sistemu, itkā kad taisne, savienojoša joslas pamatu centrus, būtu homogena materiāla linija,kuŗā koncentrēta visa aplūkojamās joslas masa. Joslas smaguma centrs saplūst ar minētās taisnes smaguma centru resp. atrodās viņas vidus punktā. Tā tad esam nonākuši pie slēdziena, ka lodes joslas virsmas smaguma centrs atrodās taisnes vidus punktā, kuŗa savieno abu pamatu centrus.

Šis pats likums attiecinams arī uz gadijumu, kad viena no pamatu plaknēm tikai pieskarās lodei, t.i. kad lodes josla pārvēršās lodes segmentā (lodes atgrieznī). Tālākais secinājums no šejienes: puslodes virsmas smaguma centrs atrodās pusradiusa atstatumā no lodes centra uz tā radiusa,kuŗš statenisks pret pamata plakni un iet caur lodes centru.

Lodes divplāksnis.

Kā pēdējo homogenu virsmu pārstāvi vēl aplūkosim to virsmu,kuŗa tiek izgriezta no lodes no divām plaknēm, kuŗu krustlinija ir kaut kāds lodes diametrs. Katra no šīm plaknēm krusto lodes virsmu pa kādu lielo aploci; tā tad lodes divplāksnis ierobežots uz lodes virsmas caur divu lielo aploču pusaplocēm.Pieņemsim, ka dotās plaknes krustojās pa diametru AB un aplūkojamais divplāksnis ierobežots no pusaploces ACB un ADB. Vilksim caur lodes centru O plakni stateniski pret diametru AB. Šī plakne krustos divplāksni pa loku CD un viņa sānu plaknes pa taisnēm CO un DO.Plakne COD ir divplākšņa simmetrijas plakne, un tāpēc meklējamais smaguma centrs atrodas uz viņas un guļ uz taisnes OE, kuŗa dala leņķi COD uz pusēm, jo plakne,kuŗa iet caur OE un AB arī ir divplākšņa simmetrijas plakne. Atliek tikai vēl noteikt meklējamā smaguma centra atstatumu no lodes centra O. Lai to panāktu, sadalīsim loku CD bezgalīgi mazās vienādās daļās un caur dalījumu punktiem novilksim plaknes,



zīm.17.

ejošas arī caur diametru AB, tādā kārtā sadalot doto divplāksni vienādos elementāros divplākšņos. So elementāro divplākšņu smaguma centri visi atrodās plaknē COD vienādos atstatumos no lodes centra, jo šie elementārie divplākšņi visi ir vienādi. Tā tad šie centri atrodās uz kādas aploces loka, kuŗas radiusu apzīmēsim ar ρ. Uz šī loka elementāro divplākšņu smaguma centri novietojušies vienādos atstatumos viens no otra un, tā kā šo divplākšņu svari arī ir vienādi, tad var minēto loku uzlūkot par homogenu materiālu loku, kuŗa smaguma centrs sakrīt ar aplūkojamās virsmas smaguma centru. Meklējamā smaguma centra atstatums no lodes centra izteiksies šādi:

$$\eta \quad \rho \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

kur α - puse no leņķa, ieslēgtā starp divplākšņa sānu plaknēm. Pievestajā izteiksmē pagaidam vēl nav zinams ρ. Lai noteiktu ρ, pielietosim augšā pievesto izteiksmi gadijumam, kad: $\alpha = \frac{\pi}{2}$

un lodes divplāksnis pārvēršās puslodē. Tad no iepriekšējās izteiksmes seko: $\eta = \frac{2\rho}{\pi}$. No otres puses, mums jau zinams, ka puslodes virsmas smaguma centrs atrodās pusradiusa atstatumā no lodes centra, $\eta = \frac{r}{2}$. Pielīdzinot abas η izteiksmes vienu otrai, gūstam:

$$\frac{2\rho}{\pi} = \frac{r}{2}\text{, no kurienes}\quad \rho = \frac{\pi r}{4}$$

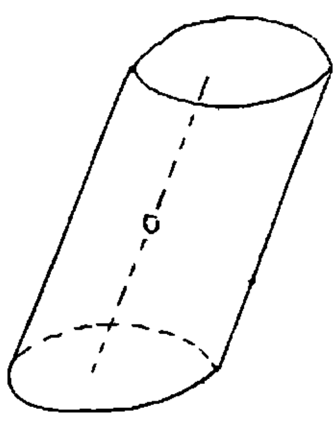
Ievērojot nupat atrasto, dabujam lodes divplākšņa virsmas smaguma centra atstatumu no lodes centra, pie kuŗas katras leņķa α vērtības

$$\eta = \frac{\pi . r . \sin\alpha}{4\alpha}$$

Dažu homogenu ķermeņu smaguma centri.

Prizma un cilindris.

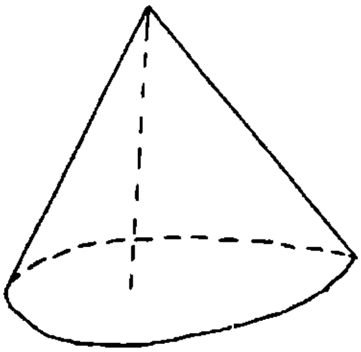
Aplūkosim kaut kādu taisnu jeb slīpu prizmu vai taisnu jeb slīpu cilindri, kuŗu pamatu plaknes parallēlas. Sadalīsim šos ķermeņus plaknēm parallēlām pamatiem bezgalīgi plānās plāksnītēs. Šādu plāksnīšu smaguma centri atradīsies uz taisnes, kuŗa savieno abu pamatu plākņu smaguma centrus. Visa ķermeņa smaguma centrs atradīsies minētās taisnes vidus punktā, jo plakne, vilkta caur šo punktu parallēli pamatiem, ir ķermeņa simmetrijas plakne. Tā tad kuŗas katras taisnas jeb slīpas prizmas un taisna jeb slīpa cilindra smaguma centrs atrodās tās taisnes vidus punktā, kuŗa savieno šo ķermeņu pamatu plakņu smaguma centrus.



zīm.18.

Piramide un konuss.

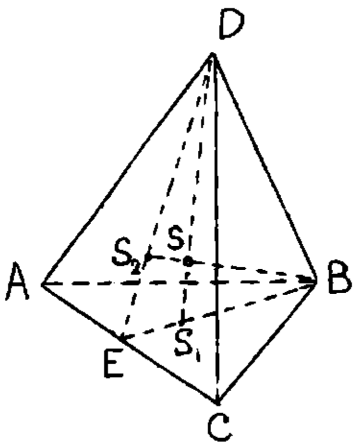
Aplūkojot piramidi jeb konusu, kuŗu pamatos ir kaut kāda figura un kuŗu virsotnes atrodās kaut kurā telpas punktā, un sadalot viņus, plāknēm parallēlām pamatiem, bezgalīgi plānās plāksnītēs, viegli pārliecinājamies, ka



zīm.19.

šo visu plāksnīšu smaguma centri atrodās uz taisnes, kuŗa savieno minēto ķermeņu virsotnes ar pamatu plakņu smaguma centriem. Uz šīs pašas taisnes arī jāatrodas visa ķermeņa smaguma centriem. Lai noteiktu smaguma centra stāvotni uz šīs taisnes, aplūkosim vispirms kaut kādu tetraedru, t.i. piramidu, kuŗas pamatā atrodas kaut kāds trīsstūris.

Pieņemsim, ka trīsstūris ABC ir tetraedra pamats un D viņa virsotne. Tad pamata laukuma smaguma centrs guļ uz medianas DE vienas trešdaļas medianas garuma atstatumā no punkta E Apzīmēsim šo punktu ar S_1. Kā augšā minēts, visas piramides smaguma centrs guļ uz taisnes DS_1. Tagad pieņemsim skaldni ACD par tetraedra pamatu un punktu B par viņa virsotni. Jaunā pamata laukuma smaguma centrs guļ uz medianas DE vienas trešdaļas DE atstatumā no punkta E. Apzīmēsim šo centru ar S_2. Tad visa tetraedra smaguma centram jāatrodas uz taisnes BS_2, tā tad viņām jāatrodas šīs taisnes un taisnes DS_1 krustpunktā (abām šīm taisnēm ir jākrustojās, jo viņas abas atrodas vienā un tanī pašā plaknē BDE). Apzīmēsim šo krustpunktu ar S un šis būs meklētais smaguma centrs. Mums ir šokošas sakarības:



zīm.20.

$$ES_1 = \frac{1}{3} EB \; ; \quad ES_2 = \frac{1}{3} ED, \text{ tā tad}$$

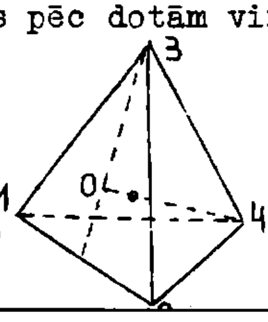
$S_1S_2 \parallel BD$. No tā seko, ka

$$\triangle S_1SS_2 \sim \triangle DSB, \text{ tā tad } S_1S \quad SD =$$

$$S_1S_2 \quad BD = ES_1 \quad EB = 1 \quad 3.$$

Tā tad meklējamais smaguma centrs sadala taisni DS_1 tādos divos nogriežņos, no kuŗiem mazākais ir vienāds vienai trešdaļai lielākā nogriežņa, jeb visas taisnes DS_1 vienai ceturtai daļai. Tā tad mēs iegūvam sekošu rezultātu: kuŗa katra tetraedra smaguma centrs atrodās uz taisnes, kuŗa savieno kaut kuŗas viņa skaldnes smaguma centru ar pretīm viņai guļošo virsotni un atrodās šīs taisnes vienas ceturtdaļas atstatumā no viņas pamata punkta. Smaguma centra atstatums no kuŗas katras skaldnes, mērīts pa perpendikulāru pret viņu, ir vienāds ar tetraedra attiecīgā augstuma (t.i. perpendikulāra, novilkta pret aplūkojamo skaldni caur viņai pretīm guļošo virsotni) vienu ceturto daļu.

Atrastais likums atļauj noteikt tetraedra smaguma centra koordinātes pēc dotām viņa virsotņu koordinātēm. Apzīmēsim tetraedra virsotnes ar skaitļiem 1,2,3,4 un viņu koordinātes burtiem $x_1, y_1, z_1, \ldots x_4, y_4, z_4$. Skaldnes 123 smaguma centra koordinātes tad izteiksies kā virsotņu 1,2 un 3 koordinātu vidējās aritmetiskās, t.i.



zīm.21.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 \quad y_3}{3}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

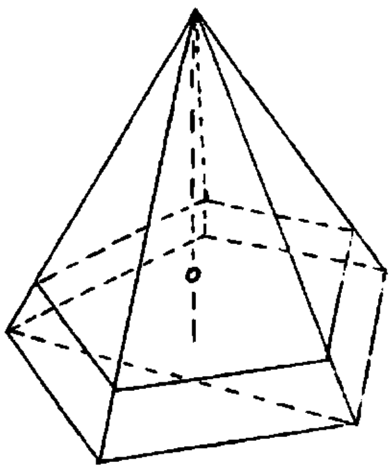
Meklējamais smaguma centrs guļ uz taisnes O_4 un atrodās vienas ceturtās daļas O_4 atstatumā no punkta O. Izejot no šā, meklējamā centra koordinātes izteiksies sekojoši:

$$\xi = x_0 + \frac{1}{4}(x_4 - x_0) = \frac{3}{4} x_0 + \frac{1}{4} x_4 = \frac{x_1 \quad x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

$$\eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \quad \text{un} \quad \zeta = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$$

Tā tad kuŗa katra tetraedra smaguma centra koordinātes ir viņa virsotņu koordinātu vidējās aritmetiskās.

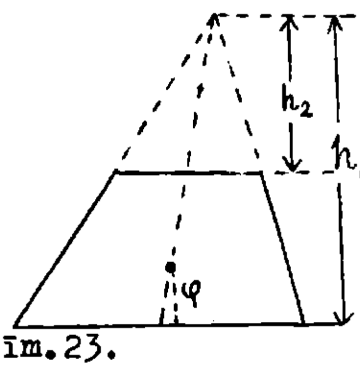
No tetraedra, t.i. piramides ar trīsstūri pamatā, viegli pāriet uz piramidi, kuŗai pamatā kaut kuŗš daudzstūris. Sadalīsim piramides pamata daudzstūri ar diagonālēm, izejošām no vienas kaut kādas viņa virsotnes, trīsstūros. Velkot plaknes caur diagonālēm un piramides virsotni, sadalīsim piramidi atsevišķos tetraedros, kuŗu pamati kopsummā sastāda piramides pamatu un guļ vienā plaknē. Visu tetraedru smaguma centri guļ vienā un tanī pašā plaknē, kuŗa parallēla piramides pamatam un atrodās no viņa vienas ceturtdaļas piramides augstuma atstatumā. Šajā pašā plaknē arī jāatrodas visas piramides smaguma centram, kuŗam bez tam vēl arī jāatrodas uz taisnes, kuŗa savieno pamata smaguma centru ar piramides pretīmguļošo virsotni.



zīm.22.

Tā tad kaut kuŗas piramides smaguma centrs atrodās uz taisnes, kuŗa savieno viņas pamata smaguma centru ar piramides virsotni un viņa atstatums no pamata plāknes (mērīts pa perpendikulāru) ir vienāds vienai ceturtai daļai no piramides augstuma.

Atrastais likums neatkarajās no pamata formas un viņa perimetra malu skaita. Šis likums piemērojams arī tad, kad piramides pamats ierobežots no bezgalīgi mazām malām, t.i. ar kaut kādu noslēgtu līkni. Tā tad augšā pievestais likums arī noteic kuŗa katra konusa smaguma centru.



zīm.23.

Nošķelts konuss.

Zinot konusa smaguma centra stāvotni, viegli to noteikt arī nošķeltam konusam, t.i. tādam ķermenim, kuŗu iegūstam nogriežot konusam ar plakni, parallēlu viņa pamatam, viņa augšējo daļu. Ortogonālā projekcijā dotais konuss attēlosies trīsstūra, bet nošķeltais - trapeces veidā. Apzīmēsim dotā konusa tilpumu ar V_1 un nošķeltās daļas (tā sauc. papildus konusa) tilpumu ar V_2, tad aplūkojamā nošķeltā konusa tilpums $V = V_1 - V_2$. Nošķeltā konusa smaguma centrs guļ uz taisnes, kuŗa savieno viņa abu pamatu smaguma centrus (jeb pilnā konusa pamata smaguma centru - ar viņa virsotni) un viņa atstatums no pilnā konusa pamata uzejams no momentu nolīdzinājuma:

$$V\varphi = V_1\varphi_1 - V_2\varphi_2$$

kur φ_1 ir pilnā konusa un φ_2 papildu konusa smaguma centru atstatumi no pilnā konusa pamata. Lai šos atstatumus izteiktu, apzīmēsim pilnā konusa augstumu ar h_1 un papildu konusa augstumu ar h_2, tad:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4}h_1 \quad \text{un} \quad \varphi_2 = h_1 - \frac{3}{4}h_2$$

Ievērojot nupat atrasto, no momentu nolīdzinājuma iegūstam:

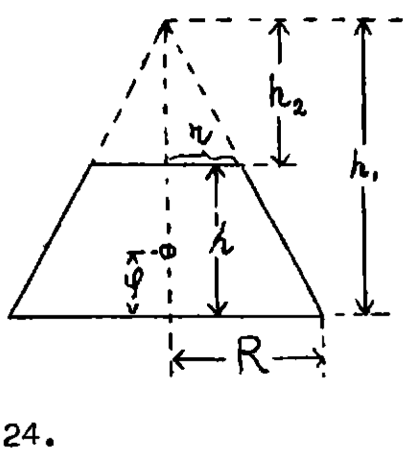
$$\varphi = \frac{\frac{V_1 h_1}{4} - V_2\left(h_1 - \frac{3}{4}h_2\right)}{V_1 - V_2} = \frac{\frac{h_1}{4} - \frac{V_2}{V_1}\left(h_1 - \frac{3}{4}h_2\right)}{1 - \frac{V_2}{V_1}}$$

Tā kā pilnā un papildu konusu tilpumi ir proporcionāli viņu augstumu kubiem, t.i.

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_2^3}{h_1^3}\text{, tad} \qquad \varphi = \frac{\frac{h_1}{4} - \frac{h_2^3}{h_1^3}\left(h_1 - \frac{3}{4}h_2\right)}{1 - \frac{h_2^3}{h_1^3}} = \frac{h_1^4 - 4h_1h_2^3 + 3h_2^4}{4(h_1^3 - h_2^3)} =$$

$$= \frac{h_1^3 + h_1^2h_2 + h_1h_2^2 - 3h_2^3}{4(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2)}$$

Šī formula der kuŗam katram konusam. Ja, atsevišķā gadijumā, dots ir nošķelts konuss, kuŗa pamats ir riņķis, tad augšā pievesto izteiksmi var pārveidot. Apzīmēsim aplūkojamā apaļā nošķeltā konusa pamatu riņķu radiusus ar R un r un viņa augstumu ar h, tad varam uzrakstīt sekojošu proporciju:



zīm.24.

$$\frac{h_1}{h_1 - h} = \frac{R}{r}\text{, no kurienes}$$

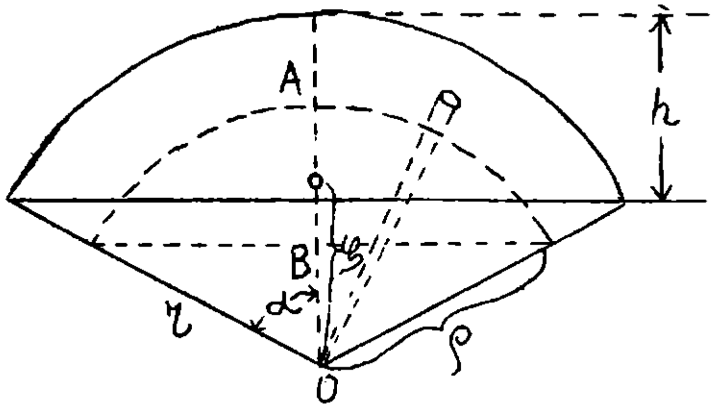
$$h_1 = h\frac{R}{R - r}\text{, } h_2 = h_1 - h = h\frac{r}{R - r}$$

Ieliekot šīs vērtības augšā izvestā izteiksmē, dabūsim:

$$\varphi = \frac{h}{4}\,\frac{R^3 + R^2r + Rr^2 - 3r^3}{(R - r)(R^2 + Rr + r^2)} = \frac{h}{4}\,\frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$

Lodes sektors.

Lodes sektors tiek izgriests no pilnas lodes tad, ja taisne, izejoša no lodes centra,griežoties ap punktu, kuŗš sakrīt ar lodes centru,tiek vadīta no aploces, kuŗa atrodās uz lodes virsmas.Lodes sektors ir ierobežots no tās koniskās virsmas, kuŗu griežoties veidoja minētā taisne un no šim konusam pieslejošās sfēriskās virsmas. Tā tad lodes sektors sastādās no taisna apaļa konusa un no lodes segmenta, kuŗa pamats sakrīt ar konusa pamatu. Ortogonālā projekcijā konuss veido vienādsānu trīsstūri un lodes segments - ripas segmentu, kuŗas centrs sakrīt ar trīsstūra virsotni.



zīm.25.

Lai atrastu šāda sektora smaguma centra stāvotni, sadalīsim viņa pamatu, t.i. lodes virsmu, vienādos bezgalīgi mazos laukumiņos un ņemsim katru šādu laukumiņu par tāda elementāra konusa pamatu,kuŗa virsotne atrodās lodes centrā. Šādā ceļā iegūto visu elementāro konusu smaguma centri atrodās arī uz kādas lodes virsmas, kuŗa radiuss $\rho = \frac{3}{4}$ r un kuŗa ierobežota no dotā sektora koniskās virsmas.Lodes segmenta (radiusa ρ)virsma ir vienmērīgi pārklāta ar elementāro konusu smaguma centriem resp. uz katras virsmas vienības atrodās vienāds šo centru skaits. Tā kā šo elementāro konusu svari ir vienādi, tad lodes segmenta, radiusa ρ, virsma var tikt pieņemta par homogēnu materiālu virsmu, kuŗas smaguma centrs ir arī aplūkojamā lodes sektora smaguma centrs.

No iepriekšējā mums zinams, ka lodes segmenta virsmas, kuŗas radiuss ir ρ, smaguma centrs atrodās nogriežņa AB vidus punktā,no kurienes tieši seko, ka:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} (\rho + \rho \cos\alpha) = \frac{3}{8} r (1 + \cos\alpha)$$

kur α - dotā sektora centrālā leņķa puse (t.i. leņķis starp sektora simmetrijas asi un kaut kuŗu viņa koniskās daļas veiduli).Šī leņķa α vietā var arī izteiksmē ievest sektora lodes segmenta augstumu. Apzīmējot šo augstumu ar h, iegūsim:

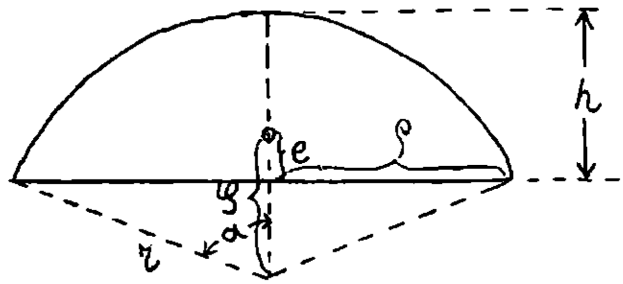
$$\cos\alpha = \frac{r - h}{r} \quad \text{un tad} \quad \mathcal{G} = \frac{3}{8} (2r - h) = \frac{3}{8} (d - h)$$

kur d - lodes diametrs. Atsevišķā gadijumā, puslodes tilpuma smaguma centrs atrodās no lodes centra jeb no puslodes pamata atstatumā

$$\mathcal{G} = \frac{3}{8} r$$

Lodes segments (Lodes nogrieznis).

Kuŗu katru lodes nogriezni (t.i. nogriezni, kuŗš noškelts no lodes ar kaut kādu plakni) var uzlūkot kā lodes sektora un taisna konusa starpību. Apzīmēsim sektora tilpumu ar V_1 un konusa tilpumu ar V_2, tad lodes nogriežņa tilpums: $V = V_1 - V_2$. Sektora un konusa smaguma centri guļ uz kopējas ass (t.i. uz taisnes, ejošas caur konusa virsotni un pamata centru). Uz šīs pašas taisnes arī atrodās lodes segmenta smaguma centrs, un viņa atstatums no lodes centra (konusa virsotnes) noteicās caur momentu nolīdzinājumu:



zīm.26.

$$(V_1 - V_2)\varphi = V_1\varphi_1 - V_2\varphi_2, \text{ kur } V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3(1 - \cos\alpha),$$

$$\varphi_1 = \frac{3}{8}\, r\,(1 + \cos\alpha),\ V_2 = \frac{1}{3}\pi r^3 \sin^2\alpha \cos\alpha \text{ un } \varphi_2 = \frac{3}{4}\, r.\cos\alpha.$$

Ievietojot šīs vērtības, iegūstam:

$$\varphi = \frac{\frac{1}{4}\pi r^4 \sin^2\alpha - \frac{1}{4}\pi r^4 \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\alpha) - \frac{1}{3}\pi r^3 \sin^2\alpha\cos\alpha} = \frac{3}{4}\, r \cdot \frac{\sin^4\alpha}{2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha}$$

Šinī izteiksmē ietilpst r un α, kuŗus tiešā mērīšanas ceļā no dotā lodes segmenta nevar iegūt. Šo lielumu vietā parocīgāki ievest segmenta augstumu h un viņa pamata riņķa radiusu ρ. Mums ir sekojošas sakarības:

$$\sin\alpha = \frac{\rho}{r},\quad \cos\alpha = \frac{r - h}{r},\quad r = \frac{\rho^2 + h^2}{2h}$$

Ievietojot šīs vērtības, pēc attiecīgas saīsināšanas, iegūsim:

$$\varphi = \frac{3\rho^4}{2h(3\rho^2 + h^2)}$$

Šī izteiksme nav parocīga tādēļ, ka izteic smaguma centra atstatumu no punkta, kuŗš atrodās ārpus dotā ķermeņa. Tāpēc noteiksim smaguma centra atstatumu ne vis no lodes centra, bet gan no dotā segmenta pamata centra. Nosaucot šo atstatumu par e, varam rakstīt, ka

$$e = \varphi - (r - h), \text{ kur } r - h = \frac{\rho^2 + h^2}{2h} - h = \frac{\rho^2 - h^2}{2h}$$

Ieliekot šīs vērtības un jau atrasto φ vērtību, gūsim:

$$e = \frac{h}{2} \cdot \frac{2\rho^2 + h^2}{3\rho^2 + h^2}$$

Apskatīsim vēl jautājumu par lodes divplākšņa tilpuma smaguma centru. Prātojot tāpat kā attiecībā uz šī ķermeņa virsmu (sk.zīm.17), mēs nonāksim pie slēdziena, ka lodes divplākšņa tilpuma un kādas smagas homogenas aploces, kuŗas radiuss $\varrho = kr$, smaguma centriem jāsakrīt. Šeit ar k ir apzīmēts kāds vēl nezinams koeficients. Smagas homogenas aploces smaguma centra ordināte

$$\eta = \frac{kr.\sin\alpha}{\alpha}$$

Bet lodes sektora smaguma centra ordināte bija $\xi = \frac{3}{8} r(1 + \cos\alpha)$, /skat.augstāki/.

Tāļāk ņemsim vērā, ka lodes divplāksnis pie $\alpha = \frac{\pi}{2}$ un puslode ir viens un tas pats ķermenis, kādēļ:

$$\left(\frac{kr.\sin}{\alpha}\right)_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \frac{2kr}{\pi} = \frac{3}{8} r(1 + \cos\alpha)_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} r ,$$

no kurienes seko, ka

$$k = \frac{3}{8}\,\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16} \quad \text{un} \quad \eta = \frac{3\pi}{16}\, r\, \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

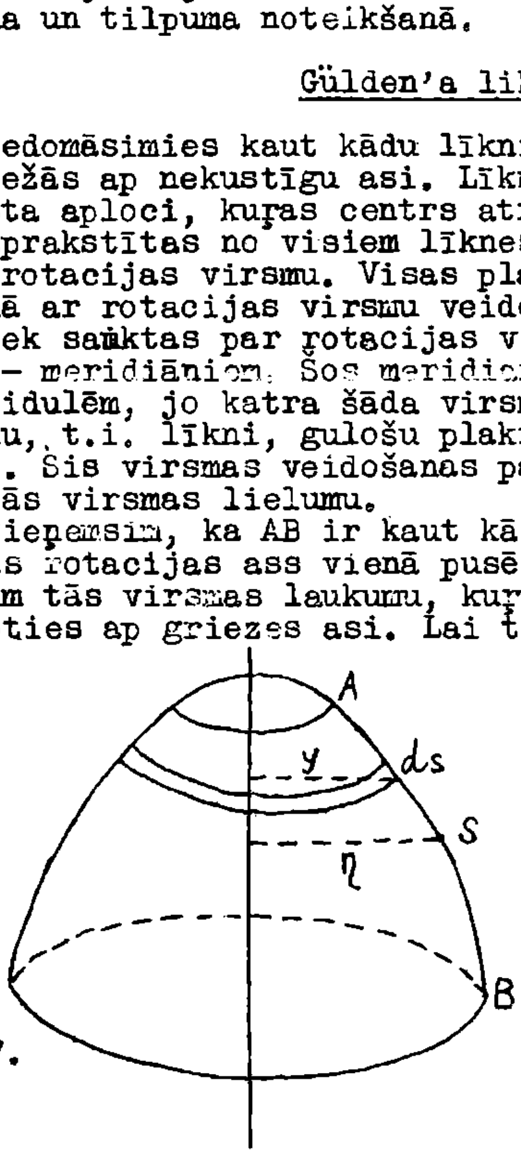
Ar daudz sarežgītākas formas ķermeņu smaguma centru noteikšanu vairs nenodarbosimies.

Aplūkosim vēl šeit smaguma centra pielietošanu gluži matematiskas dabas jautājumu atrisināšanai, proti, rotacijas ķermeņu virsmas laukuma un tilpuma noteikšanā.

Gülden'a likumi.

Iedomāsimies kaut kādu līkni (līkni plaknē jeb līkni telpā),kuŗa griežās ap nekustīgu asi. Līknei griežoties, katrs viņas punkts apraksta aploci, kuŗas centrs atrodās uz griezes ass. Aploces,kuŗas tiek aprakstītas no visiem līknes punktiem savā visumā veidos tā sauc. rotacijas virsmu. Visas plaknes, ejošas caur rotacijas asi, šķēlumā ar rotacijas virsmu veido pilnīgi kongruentas līknes.Šīs līknes tiek sauktas par rotacijas virsmas meridiānālām līknēm jeb vienkārši - meridiāniem. Šos meridianus var uzskatīt par rotacijas virsmas veidulēm, jo katra šāda virsma iegūstama griežot kuŗu katru meridianu, t.i. līkni, gulošu plaknē, ap asi, kuŗa arī guļ šīs līknes plaknē. Šis virsmas veidošanas paņēmiens dod iespēju viegli noteikt veidotās virsmas lielumu.

Pieņemsim, ka AB ir kaut kādas meridiānālas līknes daļa, kuŗa atrodās rotacijas ass vienā pusē (t.i. nekrusto rotacijas asi). Noteiksim tās virsmas laukumu, kuŗu veido līkne AB, vienu reizi apgriežoties ap griezes asi. Lai to panāktu, sadalīsim līkni AB bezgalīgi mazās daļiņās ds un apzīmēsim kaut kādas no šīm daliņām atstatumu no griezes ass ar y. Aplūkojamā daliņa, reizi apgriežoties ap rotacijas asi, aprakstīs bezgalīgi šauru aploces veidīgu strēmelīti, kuŗas laukums $dF = 2\pi y.ds$. Virsmas laukums, kuŗu apraksta visa līkne AB būs, bez šaubām,vienāds ar visu daliņu aprakstīto strēmeļu laukumu summu, t.i.



zīm.27.

$$F = \int^{AB} 2\pi y.ds = 2\pi \int^{AB} y.ds,$$

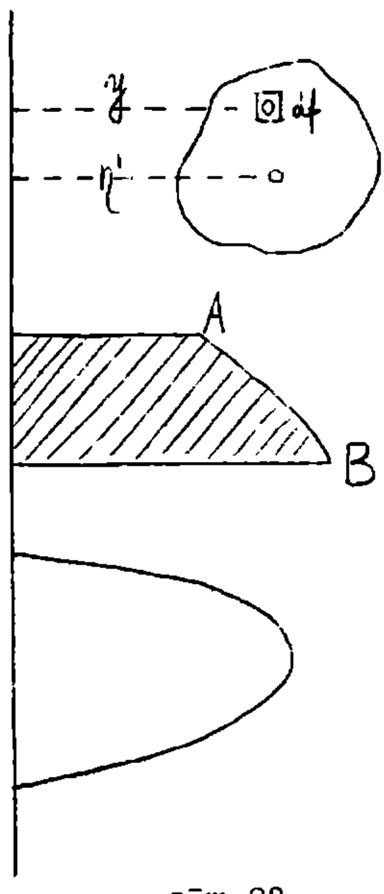
kur šī summa attiecās uz visām līknes AB daliņām. Šī summa nav nekas cits, kā dotās līknes statiskais moments ņemts pret doto asi, un tas ir vienāds ar līknes garuma reizinājumu uz viņas smaguma centra atstatumu no rotacijas ass:

$$\int^{AB} y.ds = s\eta ;$$

tā tad $F = 2\pi\eta s$. Reizinājums $2\pi\eta$ ir aploces garums, kuŗas radiuss ir η, t.i. tās aploces, kuŗu apraksta dotās līknes smaguma centrs, rotējot ap doto asi. Tā tad mēs esam nonākuši pie sekojoša likuma: virsmas laukums, kuŗu apraksta kaut kāda plakana līkne griežoties vienā apgriezienā ap asi, kuŗu viņa nekrusto un ar kuŗu viņa atrodās vienā plaknē, ir vienāds ar līknes garuma reizinājumu ar ceļa garumu, kuŗu apraksta vienā apgriezienā dotās līknes smaguma centrs.

Aplūkosim kaut kā ierobežotu laukumu, kuŗš griežās ap nekustīgu asi. Šādā rotacijā kuŗš katrs dotās virsmas laukumiņš apraksta bezgalīgi tievu aploces veidīgu gredzenu. Visu laukumiņu veidotie gredzeni rada ķermeņi, kuŗu sauc par rotacijas ķermeni. Kuŗa katra plakne, ejoša caur rotacijas asi šķēlumā ar doto rotacijas ķermeni veido kongruentas figuras ar vienādiem laukumiem. Šos šķēlienus sauc par meridianālaem šķēlieniem. Katru rotacijas ķermeni var veidot, griežot kaut kādu meridianālo šķēlienu, t.i. plakanu figuru, ap asi, kuŗa guļ šī šķēliena plaknē.

Aplūkosim kaut kāda meridianālā šķēliena daļu, kuŗa atrodās vienā griezes ass pusē. Šī šķēliena daļa var būt ierobežota no kaut kādas noslēgtas līknes, kaut kādas līknes nogriežņa AB un perpendikulāriem, novilktiem no viņa gala punktiem pret griezes asi jeb arī no līknes nogriežņa, kuŗa abi galu punkti atrodās uz griezes ass.



zīm.28.

Katrā gadijumā kaut kāds dotā šķēliena elementārs laukumiņš df kuŗa atstatums no griezes ass ir y, savā pilnā apgriezienā ap rotacijas asi apraksta gredzenu, kuŗa tilpums $dV = 2\pi y.df$. Visa sašvītrotā laukuma aprakstītā ķermeņa tilpums V

$$V = \int^{AB} 2\pi y.df = 2\pi \int^{AB} ydf$$

Šī summa ir dotā laukuma statiskais moments pret griezes asi un kā tāds ir vienāds ar visa laukuma reizinājumu ar viņa smaguma centra atstatumu no griezes ass:

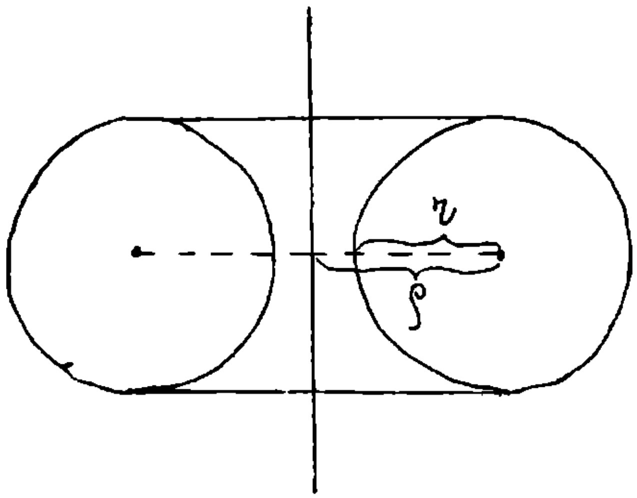
$$\int^{AB} ydf = f.\eta' \quad \text{un } V = 2\pi\eta' f,$$

kur η' dotā šķēliena laukuma smaguma centra atstatums no griezes ass. Šī izteiksme izsaka sekošo: ķermeņa tilpums, kuŗš iegūts griežot kaut kādu plakanu figuru vienā apgriezienā ap asi, kuŗa atrodās dotās figuras plaknē, bet nekrusto viņas konturu, ir vienāds ar dotās figuras laukuma reizinājumu ar tā ceļa garumu, kuŗu apraksta figuras laukuma smaguma centrs vienā apgriezienā ap griezes asi.

Abi augšā izteiktie likumi saucās par Gülden'a likumiem. Parādīsim viņu pielietošanu piemēros.

Riņķa gredzens.

Riņķa gredzens veidojās griežot riņķi ap asi, kuŗa atrodās ar riņķi vienā plaknē un iet ārpus riņķa aploces. Apzīmēsim dotā riņķa radiusu ar r un viņa centra atstatumu no griezes ass ar ρ. Riņķa aploces un arī riņķa laukuma smaguma centri sakrīt ar riņķa geometrisko centru, t.i. $\eta = \eta' = \rho$. Pielietojot iepriekš izvestās izteiksmes, atradīsim gredzena virsmas laukumu:



$$F = 2\pi\eta s = 2\pi\rho . 2\pi r = 4\pi^2 \rho r$$

un gredzena tilpumu:

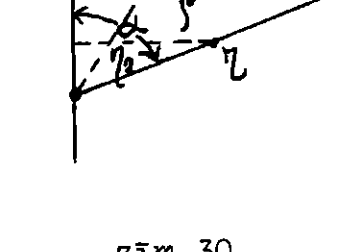
zīm. 29.

$$V = 2\pi\eta' . f = 2\pi\rho . \pi r^2 = 2\pi^2 \rho r^2$$

No šīm izteiksmēm seko vienkārša sakarība: $V = \frac{Fr}{2}$

Lodes sektors.

Lodes sektors veidojās griežot ripas sektoru ar asi, kuŗa sakrīt ar vienu no riņķa sektora malām. Apzīmēsim dotā riņķa sektora radiusu ar r un viņa centrālo leņķi ar α (α būs iegūtā lodes sektora centrālā leņķa puse). Atradīsim lodes sektora tilpumu. Pēc Güldena likuma



$$V = 2\pi\eta' . f, \text{ kur } f = \frac{r^2\alpha}{2} \text{ un}$$

$$\eta' = \frac{2}{3} \frac{r . \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{4r . \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3\alpha}$$

Ievietojot šīs vērtības, iegūsim, ka:

$$V = \frac{3}{4}\pi r^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3 (1 - \cos\alpha)$$

zīm. 30.

Sektora virsma sastādās no divām daļām un proti, no lodes segmenta virsmas, kuŗu apraksta loks s un no konusa sānu virsmas, kuŗu apraksta taisne r. Noteicot abu minēto virsmu laukumus pēc Güldena, iegūsim visam lodes sektora virsmas laukumam izteiksmi $F = s . 2\pi\eta_1 + r . 2\pi\eta_2 = 2\pi(s\eta_1 + r\eta_2)$, kur $s = r\alpha$.

$$\eta_1 = \frac{r.\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2r.\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha} \text{ un } \eta_2 = \frac{r.\sin\alpha}{2}$$

. Ievietojot pievestās vērtības, iegūstam:

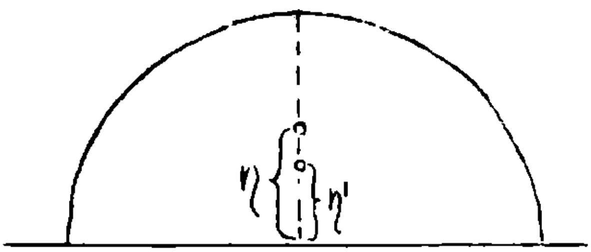
$$F = 2\pi(2r^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{r^2\sin\alpha}{2}) = 2\pi r^2(1 - \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{2})$$

Iegūto izteiksmi iespējams vienkāršot, ievedot viņā tā lodes segmenta pamata radiusu ρ un augstumu h, kurš ietilpst iegūtā lodes sektorā. Sakarības $\cos\alpha = \frac{r-h}{r}$ un $\sin\alpha = \frac{\rho}{r}$ dod iespēju pārveidot iepriekšējās izteiksmes sekojošās:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 \frac{h}{r} = \frac{2}{3}\pi r^2 h \quad \text{un} \quad F = 2\pi r^2(\frac{h}{r} + \frac{\rho}{2r}) = 2\pi r(h + \frac{\rho}{2})$$

Güldena likumus dažreiz arī var pielietot, lai uzietu dotās plakanas līknes jeb dotās plakanas figuras laukuma smaguma centrus. Lai tas būtu iespējams jāzin tās virsmas laukums, kuru veidos dotā līkne, rotējot ap kaut kādu asi, jeb tā ķermeņa tilpumu, kuru veidos dotās figuras laukums rotējot ap kaut kādu asi.

Piemēra dēļ atradīsim pusriņķa aploces un laukuma smaguma centrus, pielietojot Güldena likumus.



zīm. 31.

Rotējot pusriņķi ap diametru, iegūsim lodi, kuras virsmas laukums un tilpums izteicās caur jau zināmās formulām:

$$F = 4\pi r^2 \text{ un } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

No otras puses, pēc Güldena likumiem:

$$F = 2\pi\eta . \pi r \quad \text{un} \quad V = \frac{\pi r^2}{2} \; 2\pi\eta'$$

Pielīdzinot attiecīgi F un V izteiksmes, iegūsim jau agrāk atrastās izteiksmes:

$$\eta = \frac{4\pi r^2}{2\pi^2 r} = \frac{2r}{\pi} \quad \text{un} \quad \eta' = \frac{4\pi r^3}{3\pi^2 r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$

II. Spēku līdzsvars.

§ 1. Vispārējais gadijums.

Lai spēki telpā atrastos līdzsvara stāvoklī, ir nepieciešams, lai

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i = 0$$

bet ja spēku sistema būtu reducējusies pie pāra, tad, neskatoties uz to, ka pārī $\bar{R} = 0$, līdzsvara vēl nebūtu un ķermenis rotētu, kādēļ vēl nepieciešams, lai arī

$$\bar{M}(O) = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i(O) = 0$$

pēc kam pilnīgs līdzsvars nu ir nodrošināts. Tā tad nepieciešams un pietiekošs spēku līdzsvara noteikums ir, lai būtu:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0 \quad .... \quad (1)$$

$$\bar{M}(o) = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i(o) = 0 \quad .... \quad (2)$$

Noteikumi (1) un (2) ir izpildīti, ja min. vektoru garumi ir 0,t.i. ja:

$$|R| = + \sqrt{(\sum_{i=1}^{i=n} X_i)^2 + (\sum_{i=1}^{i=n} Y_i)^2 + (\sum_{i=1}^{i=n} Z_i)^2} = 0$$

$$|M(0)| = + \sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{i=n} M_{ix}(0)\right\}^2 + \left\{\sum_{i=1}^{i=n} M_{iy}(0)\right\}^2 + \left\{\sum_{i=1}^{i=n} M_{iz}(0)\right\}^2} = 0$$

Bet beidzamie noteikumi ir izpildīti, ja atsevišķi ir:

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i = 0 \qquad M_x(0) = \sum_{i=1}^{i=n} M_{ix}(0) = 0$$

$$Y = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0 \qquad M_y(0) = \sum_{i=1}^{i=n} M_{iy}(0) = 0$$

$$Z = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i = 0 \qquad M_z(0) = \sum_{i=1}^{i=n} M_{iz}(0) = 0$$

t.i. līdzsvara analitisko izteiksmju ir 6.

Kā redzams, nav nepieciešams reducēt spēku sistemu pie dinamas, lai izteiktu līdzsvara noteikumus, jo:

$$\overline{M(0)}_{din} = \overline{M(0)}\cos\delta = 0, \text{ ja } \overline{M(0)} = 0$$

Apskatīsim jautājumu, vai spēku līdzsvara noteikumus nav iespējams uzstādīt arī zem cita veida. Pieņemsim, piemēram, ka dotā spēku sistema reducēta pie punkta A ir devusi rezultātā $\overline{M_A(0)} = 0$, pie kam par $\bar{R}$ nekas nav zinams, izņemot to, ka viņš iet caur punktu A, pie kam viņa garums var būt kā 0, tā arī atšķirīgs no 0. Pieņemsim tālāk, ka koppāris, sastādīts pret citu punktu B arī ir $\overline{M_B(0)} = 0$. Tad, ja nu sistemas $\bar{R}$ ir atšķirīgs no 0, tad viņam jāiet arī caur šo punktu B, bet var arī būt, ka $\bar{R} = 0$. Beidzot pieņemsim,ka arī pret trešo punktu C, kurš neatrodas uz taisnes, kura iet caur A un B, koppāris $\overline{M_C(0)} = 0$. Šis apstāklis noteikti pierāda, ka arī $\bar{R} = 0$, jo, ja mēs uz brīdi pielaistu, ka sistema reducējas pie $\bar{R}$, atšķirīga no 0, tad būtu arī jāpielaiž, ka $\bar{R}$ iet caur 3 uz vienas taisnes neatrodošamies punktiem, kas nav iespējams. Saprotams, ka sistema

$$\overline{M_A(0)} = \overline{M_B(0)} = \overline{M_C(0)} = 0 \text{ ir ekvivalenta } \bar{R} = 0 \text{ un } \overline{M_A(0)} = 0$$

resp. $\overline{M_B(0)} = 0$, resp. $\overline{M_C(0)} = 0$, t.i. šī sistema viegli reducējas pie mums jau pazīstama līdzsvara veida.

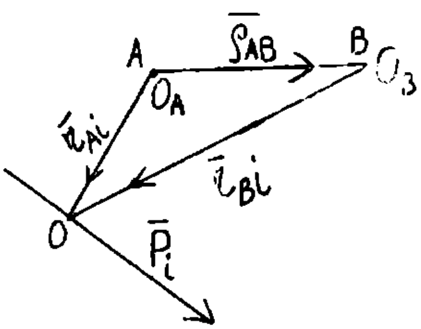
Katrs no 3 vektoriem $\overline{M_A(O)}$, $\overline{M_B(O)}$ un $\overline{M_C(O)}$ dod 3 projekcijas, kopā tā tad 9 analītisku nolīdzinājumu, no kā itkā varētu slēgt, ka ar gūto nolīdzinājumu sistēmu varētu uziet 9 nezinamus lielumus, pretēji pirmam līdzsvara noteikumu veidam, kurā vektori $\bar{R}$ un $\overline{M(O)}$ sniedz kopskaitā 6 nolīdzinājumu. Bet var pierādīt, ka starp lielumiem, kuri ietilpst min. 9 nolīdzinājumu sistēmā, pastāv 3 sakarības, kuras reducē neatkarīgo nezinamo skaitu no 9 uz 6. Tiešam, apskatīsim vektoru $\overline{M_A(O)}$, $\overline{M_B(O)}$ un $\overline{M_C(O)}$ izteiksmes

$$\overline{M_A(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_{Ai}, \bar{P}_i\right] = 0$$

$$\overline{M_B(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_{Bi}, \bar{P}_i\right] = 0$$

$$\overline{M_C(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_{Ci}, \bar{P}_i\right] = 0$$

kur $\bar{r}_{Ai}$, $\bar{r}_{Bi}$, $\bar{r}_{Ci}$ ir spēka radiuss-vektori redukcijas p.p. A, B, C.



zīm.32.

Atvilksim, piemēram, $\overline{M_B(O)}$ no $\overline{M_A(O)}$, tad gūstam:

$$\overline{M_A(O)} - \overline{M_B(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{Bi})\bar{P}_i\right]$$

Bet $(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{Bi}) = \bar{\rho}_{AB}$ (skat. zīm. 32) ir konstants lielums, atstatums starp redukcijas punktiem A un B, kādēļ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{Bi}), \bar{P}_i\right] = \left[(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{Bi}) \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i\right] = 0$$

Beidzamā sakarība noved pie slēdziena:

1) $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = \bar{R} = 0$ jeb 2) vektors $\bar{R} \neq$ sakrīt ar $(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{Bi}) = \bar{\rho}_{AB}$ virzienu. Nenoteiktību izslēdz jauna sakarība:

$\left[(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{ci}), \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i\right]$, no kurienes atkal seko, ka vai nu $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = \bar{R} = 0$, jeb $\bar{R} \neq 0$ sakrīt ar $(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{ci}) = \bar{\rho}_{Ac}$ virzienu. Tā kā virzieni $(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{Bi}) = \bar{\rho}_{AB}$ un $(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{ci}) = \bar{\rho}_{Ac}$ nesakrīt, jo redukcijas punkti neatrodas uz vienas taisnes, tad:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P} = \bar{R} = 0$$

kā vienīgais atrisinājums, pie kura mēs jau arī nonākam citādā ceļā. Apskatīsim tagad kāda no 3 pāru vektoriem, piemēram $\overline{M_C(O)}$, projekciju uz kādu koordinātu asi, piem. X, tad:

$$M_{Cx}(O) = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - y_c)Z_i - \sum_{i=1}^{i=n} (z_i - z_c)Y_i = \sum_{i=1}^{i=n} y_i Z_i - y_c \sum_{i=1}^{i=n} Z_i -$$

$$- \sum_{i=1}^{i=n} z_i Y_i + z_c \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = 0 = \sum_{i=1}^{i=n} y_i Z_i - \sum_{i=1}^{i=n} z_i Y_i,$$ t.i. kaut kuŗa pāra momenta projekcija tagad ir neatkarīga no redukcijas punkta koordinātēm, kādēļ visu 3 pāru vektoru sistema kopā dos tikai 3 analitiskus nolīdzinājumus, kas kopā ar $X = Y = Z = 0$ sniedz galu galā tikai 6 analitiskos nolīdzinājumus, kā parasts.

Apskatīsim vēl vienu spēku līdzsvara formu, proti, pieņemsim, ka

$$\overline{M_A(O)} = 0,\ \overline{M_B(O)} = 0 \text{ un bez tam } S = \sum_{i=1}^{i=n} S_i = 0,$$ kur S ir kopspēka projekcija uz asi $\overline{S}$, kuŗa nav perpendikulāra pret $(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{Bi}) = \bar{\rho}_{AB}$ (skat.zīm.32). Tad:

$$\overline{M_A(O)} - \overline{M_B(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{Bi}), \bar{P}_i\right] = \left[(\bar{r}_{Ai} - \bar{r}_{Bi}), \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i\right] =$$

$$= \left[\bar{\rho}_{AB}, \bar{R}\right] = 0,$$ no kurienes seko, ka vai nu 1) $\bar{R} = 0$, vai 2) $\bar{R} \neq 0$ virziens sakrīt ar $\bar{\rho}_{AB}$ virzienu. Bet noteikums:

$$\sum_{i=1}^{i=n} S_i = 0$$

ir ekvivalents $\bar{R} = 0$, ja $\bar{R}$ ietu $\bar{\rho}_{AB}$ virzienā. Tāpat kā iepriekšējā gadijumā, abi pāra momenti dos kopā tikai 3 projekcijas nolīdzinājumus, kas kopā ar $X = Y = Z = 0$ noved atkal pie 6 analitiskiem nolīdzinājumiem.

§ 2. Parallēlu spēku līdzsvars.

Lai parallēlu spēku sistema atrastos līdzsvara stāvoklī, ir nepieciešams, lai būtu:

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0$$

Šis noteikums nav pietiekošs. Ja pēdējam pievieno vēl klāt

$$\bar{M}(O) = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i(O) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right] = 0, \text{ jeb } \bar{M} = \left[\bar{r}, \bar{R}\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right] = 0$$ (skat.I, § 9), tad gūstam nepieciešamu un pietiekošu noteikumu sistemu zem veida:

$$1)\ R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0$$

$$2)\ \overline{M(O)} = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i(O) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right] = 0 \quad \text{resp.}$$

$$\bar{M} = \left[\bar{r}, \bar{R}\right] = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\bar{r}_i, \bar{P}_i\right] = 0$$

Tā kā $\bar{R} = 0$, tad loceklis $\left[\bar{r}, \bar{R}\right] = 0$ izkrīt un pie formas starp $\overline{M(O)} = 0$ un $\bar{M} = 0$ nav starpības. Pāriesim tagad uz jautājumu par parallēlu spēku līdzsvara analitiskām izteiksmēm. Tā kā

$$R' = \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0$$

ir algebrāisks nolīdzinājums, tad jānoskaidro tikai M(O) resp. $\bar{M}$ analitiskās izteiksmes. Šīs izteiksmes jau ir pievestas § 8, I. zem veida (18):

$$|\cos\gamma| \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i - |\cos\beta| \sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i = 0, \quad \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i}{|\cos\beta|} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i}{|\cos\gamma|}$$

$$|\cos\alpha| \sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i - |\cos\gamma| \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i = 0, \quad \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i}{|\cos\gamma|} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i}{|\cos\alpha|}$$

$$|\cos\beta| \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i - |\cos\alpha| \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i = 0 \quad \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i}{|\cos\alpha|} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i}{|\cos\beta|}$$

no kurienes seko, ka:

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i}{|\cos\alpha|} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i}{|\cos\beta|} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i}{|\cos\gamma|}$$

t.i. momenta projekciju neatkarīgu nolīdzinājumu ir tikai 2 un kopā parallēlu spēku sistemas līdzsvara analitiskās izteiksmes ir 3, proti:

$$1)\ R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0$$

$$2)\ \text{un}\ \ 3)\ \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i}{|\cos\alpha|} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i}{|\cos\beta|} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i}{|\cos\gamma|}$$

Izdevīgi ir izvēlēties koordinātu sistemu tā, lai kāda ass, piemēram

Z, būtu parallēla dota parallēlu spēku sistemas virzienam. Tad $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$ un nolīdzinājumu sistema gūst veidu:

$$1)\ R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i = 0$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i = 0$$

Bez šī parallēlu spēku līdzsvara, kuŗu sauksim par statisko, var noteikt vēl otru līdzsvara veidu, neatkarīgu no spēku virziena leņķa, prātojot tā: ja pievestām sakarībām (18) jāpastāv pie ikkuŗas leņķu sistemas α, β un γ, tad tas ir iespējams tad, un tikai tad, ja atseviški

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i = 0 \text{ un } \sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i = 0 .$$

Šo līdzsvaru sauc par astatisku un viņu noteic 4 analitiski nolīdzinājumi:

$$1)\ R = \sum_{i=1}^{i=n} P_i = 0$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{i=n} x_i P_i = 0$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{i=n} y_i P_i = 0$$

$$4)\ \sum_{i=1}^{i=n} z_i P_i = 0$$

Astatiskā līdzsvara noteikumi prasa, lai parallēlu spēku sistema reducētos pie diviem vienādiem, pretēji virzītiem spēkiem ar kopējo iedarbes punktu, jo šinī gadijumā līdzsvars būs neatkarīgs no spēku virziena leņķa: kā arī nepagrieztu divus tādus ar kopējo iedarbes punktu spēkus, līdzsvars neizjuks. Turpretīm statiskais līdzsvars prasa, lai parallēlu spēku sistema reducētos tikai pie diviem vienādiem pretēji virzītiem, uz vienas taisnes darbojošamies spēkiem bez kopēja iedarbes punkta. Tāda sistema nekādu spēku pagriezienu nepielaiž, jo tad rodas spēku pāris un līdzsvara vairs nav.