

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физики
по специальности
«Механика жидкости и газа»

Владислав Кременецкий, М. физ.

**Точные автомодельные решения в гидродинамике
и магнитной гидродинамике
и их отношении к задачам в приближении пограничного слоя.**

Научные руководители:

Щербинин Э.

Др. физ. хаб.

Институт Физики ЛУ

(до 08.2004 г.)

Фрейберг Я.

Др. физ.

Институт Физики ЛУ

(с 08.2004 г.)

PROMOCIJAS DARBS

fizikas doktora grāda iegūšanai
„Šķidruma un gāzes mehānikas”
specialitātē

Vladislavs Kremeņeckis, M. fiz.

**Eksaktie automodulārie atrisinājumi
hidrodinamikā un magnētiskajā hidrodinamikā
un to attiecība pret uzdevumiem robežslāņa tuvinājumā**

Zinātniskie vadītāji

Ščerbiņins E.

Dr. hab. fiz.

LU Fizikas Institūts

(līdz 2004. g. augustam)

Freiberģs J.

Dr. fiz.

LU Fizikas Institūts

(no 2004. g. augusta)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
I. Точные решения в гидродинамике.....	10
I.i. Краткий обзор литературы.....	10
I.ii. Предварительные замечания.....	11
I.1. Точные решения в декартовых координатах.....	12
I.2. Точные решения в полярных координатах.....	17
I.3. Точные осесимметричные решения в цилиндрических координатах.....	20
I.4. Точные осесимметричные решения в сферических координатах.....	28
I.5. Выводы.....	34
II. Решения в приближении пограничного слоя в гидродинамике.....	37
II.i. Краткий обзор литературы.....	37
II.ii. Предварительные замечания.....	39
II.1. Гидродинамический пограничный слой в декартовых координатах.....	40
II.2. Гидродинамический пограничный слой в полярных координатах.....	43
II.3. Гидродинамический осесимметричный пограничный слой в цилиндрических координатах.....	43
II.4. Гидродинамический осесимметричный пограничный слой в сферических координатах.....	53
II.5. Выводы.....	55
III. Точные решения в магнитной гидродинамике.....	57
III.i. Краткий обзор литературы.....	57
III.1. Уравнения магнитной гидродинамики.....	59
III.2. Плоские МГД течения в декартовой системе координат.....	61
III.3. МГД течения в полярных координатах.....	66
III.4. Осесимметричные МГД течения в цилиндрических координатах.....	71
III.5. Осесимметричные МГД течения в сферических координатах.....	77
III.6. Безындукционное приближение.....	80
III.6.1. Безындукционное приближение в декартовой системе координат для плоских течений.....	81
III.6.2. Безындукционное приближение в полярных координатах.....	84
III.6.3. Безындукционное приближение в цилиндрических координатах в осесимметричном случае.....	91
III.6.4. Безындукционное приближение в сферических координатах	

в осесимметричном случае.....	96
III.7. Выводы.....	98
IV. Пограничные слои в магнитной гидродинамике.....	103
IV.i. Краткий обзор литературы.....	103
IV.1. Плоские МГД пограничные слои в декартовых координатах.....	104
IV.2. Осесимметричные МГД пограничные слои в цилиндрических координатах.....	108
IV.3. МГД пограничные слои в безындукционном приближении.....	115
IV.3.1. Плоские МГД пограничные слои в декартовых координатах в безындукционном приближении.....	115
IV.3.2. Осесимметричные МГД пограничные слои в цилиндрических координатах в безындукционном приближении.....	118
IV.4. Выводы.....	128
V. Некоторые автомодельные задачи гидродинамики и магнитной гидродинамики.....	133
V.1. МГД течение в диффузоре и конфузоре.....	133
V.2. МГД течение с отсосом или вдувом на пластине в азимутальном магнитном поле в безындукционном приближении.....	139
V.3. МГД течение с отсосом или вдувом на пластине в радиальном магнитном поле.....	146
V.4. Кольцевой МГД аналог течения Куэтта в безындукционном приближении.....	156
V.5. Кольцевое МГД течение между вращающимися цилиндрами с отсосом/вдувом в безындукционном приближении.....	160
Заключение.....	172
Список литературы.....	178

Введение.

Данная работа посвящена систематизации имеющихся на данный момент автомодельных решений уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости в обычной гидродинамике и в магнитной гидродинамике. При помощи единого подхода к построению автомодельных решений и метода разделения переменных изучены все возможности перевода уравнений гидродинамики и магнитной гидродинамики в частных переменных в обыкновенные дифференциальные уравнения. Изучены допустимые виды электрических и магнитных полей в безындукционном приближении.

Как известно, уравнение Навье-Стокса не имеет общего решения [54]. При наличии определенных начальных и граничных условий возможно получить решение этого уравнения, но большая часть решений – это приближенные решения, получаемые либо с помощью упрощения модели течения, либо при помощи приближенных методов, например, асимптотических разложений. Каждое из подобных решений имеет ограниченную область применения, определяемую обычно критическими значениями неких параметров задачи. Зачастую приходится искать решения для нескольких интервалов значений параметров. Поэтому возможность нахождения точных решений, не ограниченных какими-либо значениями параметров, представляется достаточно важной.

Одним из способов получения точных решений является автомодельный подход [61]. Суть его заключается в сведении уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, причем переменная для обыкновенных уравнений строится как некая комбинация реальных переменных. Решение обыкновенных уравнений несколько проще, чем уравнений в частных производных, но область применения автомодельного подхода ограничена. Другими словами, круг задач, которые можно решить в рамках такого подхода, ограничен. Но автомодельное решение, в какой-то мере являющееся приближением, позволяет хотя бы определить основные особенности и параметры течения. К тому же, автомодельное решение позволяет использовать однажды полученное решение задачи для всех подобных задач.

Описанный выше подход применим не только в гидродинамике, но и в магнитной гидродинамике. Очень часто его также применяют и в теории пограничного слоя. Это связано с тем, что предложенный Людвигом Прандтлем [28] переход от уравнений Навье-Стокса к уравнениям пограничного слоя меняет тип дифференциального уравнения: от эллиптического к параболическому, что облегчает

введение автомодельной переменной. Также можно получить решение типа пограничного слоя, если в точном решении (то есть в решении полных уравнений Навье-Стокса, в которых не пренебрегается ни одним слагаемым) устремить некий параметр, характеризующий течение, к некоторому критическому значению. С физической точки зрения устремление параметра к критическому значению означает, что некоторые слагаемые становятся пренебрежимо малыми по сравнению с остальными слагаемыми. В результате можно получить уравнение типа пограничного слоя [43].

Другим способом преобразования уравнения в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение является метод разделения переменных. Этот способ также имеет ограниченную область применения, но опять же, как и автомодельный подход, позволяет проанализировать течение в первом приближении, и использовать полученное решение как нулевую итерацию при дальнейшем изучении.

Несмотря на ограниченный круг задач, допускающих автомодельные решения, и некоторые проблемы и парадоксы, связанные с самим автомодельным подходом [50], область применения таких решений достаточно велика:

1. использование автомодельного решения как некоего начального приближения при решении (в том числе и численном) усложненной задачи, которую невозможно преобразовать к автомодельному виду [45];
2. получение некоторых характеристик (обычно интегральных: расход, импульс и т.п.) течения не решая самого уравнения, то есть не рассчитывая поле скорости;
3. автомодельные решения могут использоваться в качестве тестовых задач при отладке алгоритмов численного расчета задач гидродинамики и магнитной гидродинамики;
4. автомодельные решения позволяют лицам, изучающим гидродинамику и магнитную гидродинамику (например, студентам соответствующих специальностей высших учебных заведений), на примере достаточно легко решаемых задач понять основные закономерности и эффекты, возникающие при взаимодействии жидкой среды с другими средами и силами;
5. некоторые задачи гидродинамики и магнитной гидродинамики допускают точные автомодельные решения (в том числе и решаемые аналитически), что позволяет исследовать течения на разных режимах без проведения дорогостоящих натуральных экспериментов;

- б. автомодельные решения позволяют получить универсальные кривые зависимостей параметров течения от безразмерных параметров, характеризующих как течение, так и воздействующие на него силы; для получения реальных величин для конкретной задачи нет необходимости заново решать системы уравнений, что может быть достаточно трудоемко и требовать значительных вычислительных мощностей и времени.

Способ построения автомодельных решений показан, например, в [56]. Общим при решении практически всех автомодельных задач является подход, в рамках которого построение решения начинается с построения автомодельной переменной и автомодельных уравнений, причем все это делается независимо от уже решенных задач. Однако, как показал в своих работах Э. В. Щербинин с соавторами ([38], [39], [40], [69], [71], [72]), все задачи автомодельного пограничного слоя описываются одним единственным уравнением (в гидродинамическом случае), зависящим от небольшого количества коэффициентов, содержащих в себе все особенности задачи. Следовательно, не имеет смысла каждый раз получать это уравнение, достаточно просто определить из условий задачи значения коэффициентов уравнения. То же самое можно сказать и о магнитной гидродинамике, только количество уравнений увеличивается.

Кроме того, наличие единых уравнений, связывающих течение жидкости с магнитными и электрическими полями, позволяет определить класс допустимых электрических и магнитных полей, которые можно применять при постановке задач. То есть по заданной системе распределения электрических и магнитных полей можно определить, как решать данную задачу: в автомодельной постановке или методом разделения переменных, или же необходимо выбрать другой способ решения. С другой стороны, выбирая способ введения в какую-либо решенную в автомодельной постановке задачу электрического и/или магнитного полей, необходимо выбирать из того вида полей, которые оставляют задачу автомодельной и оказывают воздействие на течение проводящей жидкости.

Задач, решенных в автомодельной постановке, достаточно много. Но до сих пор в рамках одной работы не был проведен комплексный анализ возможности построения точных решений и решений в приближении пограничного слоя в различных системах координат в гидродинамике и магнитной гидродинамике. К тому же автомодельные решения в магнитной гидродинамике рассмотрены не до конца.

На данный момент достаточно полный анализ возможности построения автомодельных решений в рамках теории пограничного слоя для цилиндрической и

сферической систем координат проводился в [43]. Также применение единого подхода в декартовой и полярной системах координат с рассмотрением как точных решений, так и решений типа пограничного слоя было начато в монографии [72] и предшествующих публикациях ([38], [39], [40], [69], [70]), в написании части которых участвовал автор.

Наличие работы, обобщающей все возможные варианты построения автомодельных решений было бы полезно как тем, кто изучает динамику вязкой жидкости, так и тем, кто в своей практической деятельности использует решения этого типа. В рамках предлагаемой работы сделана попытка рассмотреть все возможные варианты автомодельных решений как в точной постановке, так и в приближении пограничного слоя в четырех наиболее распространенных системах координат, что, насколько известно автору, до сих пор не проводилось. В диссертации получены универсальные системы уравнений, описывающие все возможные автомодельные задачи гидродинамики и магнитной гидродинамики. В рамках предлагаемого подхода решены 5 задач в точной постановке, и показано, как полученные точные решения описывают течения типа пограничного слоя. В работе не рассматривается отдельно вариант перевода точных решений в декартовой и цилиндрической системах координат в решения типа пограничного слоя устремлением параметра к критическим величинам. Также не рассматривались граничные условия ввиду того, что они никоим образом не влияют на вывод универсальных систем уравнений, а сказываются только лишь на величинах коэффициентов в уравнениях при рассмотрении конкретных задач и могут являться критерием применимости универсальных систем уравнений для данной задачи [15], [17].

Построение обыкновенных дифференциальных уравнений методом разделения переменных рассматривалось только для полярной и сферической систем координат, и в неявной форме – для цилиндрической системы координат ([43], [70], [72]). В данной работе изучена возможность применения этого метода как для точных решений, так и в приближении пограничного слоя, а также в декартовой системе координат, что ранее – насколько это известно автору – не проводилось.

Задачей данной работы было создание единого подхода к решению автомодельных задач гидродинамики и магнитной гидродинамики в точной постановке и в приближении пограничного слоя, создание справочника систем автомодельных уравнений в различных системах координат, а также допустимых электрических и магнитных полей как в полной постановке, так и в безындукционном приближении.

Дополнительно к автомодельному подходу также рассматривался и метод разделения переменных.

В работе получены следующие результаты:
применяя единый подход к построению автомодельных уравнений, а так же метод разделения переменных, в рамках одной работы

1. систематизирован и унифицирован подход к решению задач гидродинамики и магнитной гидродинамики как в точной постановке, так и в приближении пограничного слоя; для каждой системы координат получены единые уравнения и системы уравнений, коэффициенты в которых определяются постановкой каждой конкретной задачи;
2. определены случаи, в которых возможно построение точных автомодельных решений в различных системах координат в гидродинамике и магнитной гидродинамике;
3. определены случаи, в которых возможно построение решений типа пограничного слоя в различных системах координат в гидродинамике и магнитной гидродинамике;
4. в магнитогидродинамическом случае рассмотрены возможности постановки задач в безындукционном приближении (когда не учитываются индуцированные магнитные поля);
5. показана связь точных решений с решениями типа пограничного слоя;
6. показано решение некоторых задач в рамках полученных теоретических результатов.

Полученные в работе результаты могут быть использованы также в случае исследования конвективных течений и течений с примесями. Частично это показано в монографии [72], при работе над которой использовались материалы, вошедшие в диссертацию.

Применение использованных в работе методов и полученных результатов возможно в различных областях гидродинамики и магнитной гидродинамики, таких как теория электровихревых течений, электрошлаковый переплав, управление плазмой, астрофизика, а так же и в других областях, где важно взаимодействие движущейся жидкости и электромагнитных сил. К примеру, кольцевой аналог течения Куэтта в магнитном поле исследуется для объяснения явлений, происходящих в звездах [29].

Приведенные в работе результаты были представлены на нескольких международных конференциях и опубликованы в различных международных изданиях.

В диссертации выдвигаются следующие защищаемые положения:

1. В каждой из рассматриваемых систем координат методом разделения переменных и/или с помощью автомодельного подхода возможно построение универсальных уравнений или систем уравнений, описывающих все возможные варианты автомодельных задач как в точной постановке, так и в приближении пограничного слоя. Для получения уравнений, описывающих конкретную задачу, необходимо определить несколько коэффициентов в этих уравнениях из условий задачи (конфигурации области течения, граничных условий, внешних полей и т. п.).
2. В безындукционном приближении имеются вполне определенные виды электрических и магнитных полей, оставляющих задачи автомодельными.
3. В полярной и сферической системах координат возможно применение только метода разделения переменных. В этих системах невозможно построение уравнений типа пограничного слоя. Для получения решений такого типа необходимо решать точные уравнения, а образование пограничного слоя обеспечивается изменением характерного параметра (или параметров) задачи.
4. Полученные результаты позволяют определить некоторые характеристики течения (такие как расход, импульс) без необходимости решать сами уравнения, то есть рассчитывать поле скорости.

Работа построена следующим образом: диссертация состоит из введения, 5 разделов, из которых первые 4 начинаются краткими обзорами литературы, относящейся к теме раздела, и заключения.

В первом разделе рассматриваются возможности построения точных автомодельных решений в гидродинамике. На примере декартовых координат показан способ перевода уравнений в частных производных в обыкновенные дифференциальные уравнения, который используется во всей работе. Доказано, что автомодельный подход неприменим в полярной и сферической системах координат, и перевод уравнений гидродинамики в обыкновенные дифференциальные уравнения возможен только методом разделения переменных. Этот же метод применен и для декартовой системы координат.

Во втором разделе в приближении пограничного слоя получены варианты преобразования уравнений гидродинамики в автомодельные уравнения в декартовых и цилиндрических координатах. Показано, что в полярных и сферических координатах в рамках предлагаемого подхода нет возможности получить уравнения типа пограничного слоя.

В третьем разделе получены точные автомодельные уравнения магнитной гидродинамики во всех рассматриваемых системах координат как в случае полной формы электромагнитной силы, так и в безындукционном приближении. В безындукционном приближении определены виды электрического и магнитного полей, оставляющих уравнения магнитной гидродинамики автомодельными.

В четвертом разделе изучены уравнения магнитной гидродинамики в приближении пограничного слоя как в безындукционном приближении, так и в случае полной формы электромагнитного слагаемого. Получены виды допустимых электрических и магнитных полей.

Пятый раздел посвящен решению задач магнитной гидродинамики, на примере которых показано применение предлагаемого подхода. Решены 5 задач, являющиеся модифицированными вариантами классических задач. Проанализированы полученные результаты, некоторые из которых отличаются от приведенных в литературе.

В заключении подводятся итоги всей работы.

I. Точные решения в гидродинамике.

I.i. Краткий обзор литературы.

С момента появления уравнений Навье-Стокса предпринимались попытки как проинтегрировать их, так и найти любые их решения. Решение же уравнений в частных производных – сложная задача, особенно если эти уравнения нелинейные. Но как позже было доказано [54], общего решения эти уравнения не имеют.

Однако в некоторых случаях возможно получение точных решений уравнений Навье-Стокса. Вообще говоря, к таким решениям приводит рассмотрение течений двух типов [70], [43]:

- а) течений, инвариантных вдоль некоторого направления в пространстве;
- б) течений, для описания которых можно перейти от исходной системы уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям;
- в) иногда к точным относят решения, полученные в предположении, что нелинейные инерционные члены по отдельности не равны нулю, но взаимно уничтожаются.

Количество точных решений невелико, и большая их часть получена уже давно и являются классическими. В декартовых координатах это: течение в плоском канале, течение Куэтта, натекание жидкости на плоскость (плоское течение у передней критической точки) ([13], [15]), обтекание полубесконечной пластины [50]. В полярной системе координат: течение в диффузоре/конфузоре (течение Гамеля [11]), течение между двумя коаксиальными цилиндрами (цилиндрический аналог течения Куэтта) [68]. В цилиндрической системе координат решений найдено больше: течение Хагена-Пуазейля в цилиндрическом канале [68], вращение диска в бесконечном объеме жидкости [14], неподвижный диск во вращающейся жидкости (Бёдевадт [6]), течение между двумя вращающимися дисками ([44], [49]), течение между двумя вращающимися дисками произвольной формы [42], круглая струя Яцеева-Сквайра ([73], [32], [33]), радиально-щелевая струя Лойцянского [59], движение закрученного потока в трубе с проницаемыми и непроницаемыми стенками([35], [65]), течение между двумя конусами [62], пространственное течение в окрестности передней критической точки [68]. Гольдштик [49] рассмотрел класс точных решений в цилиндрических координатах, приведя в качестве физической интерпретации полученных результатов задачу о течении в приосевой зоне вихревой камеры и течение в полубесконечной трубе с неподвижной пористой стенкой. В сферических координатах самым известным точным решением является струя Ландау [56]. Среди

известных решений – струя Яцева-Сквайра ([73], [29], [30]), течение в воронке с вихревой нитью [70], течение с линейным источником в круговом конусе [70], течение с линейным источником/стоком [70]. В сферической же системе координат Гольдштиком был проведен анализ закрученных струй [48].

Все вышеприведенные решения объединяет одно: сначала выбирается переменная и вид функции тока, а потом, подставляя эти выражения в уравнения Навье-Стокса, получают обыкновенные уравнения. Причем выбор вида переменной и функции тока никак не обосновывается, за исключением того аргумента, что при таком выборе удастся выполнить необходимое преобразование. При этом все эти задачи являются обособленными, и результаты решения одной задачи не оказывают влияния на другие задачи подобного типа. К тому же, часть задач, позиционируемых как автомодельные, на самом деле решены методом разделения переменных (например, плоское и пространственное течения вблизи критической точки, течение вблизи вращающегося диска).

Насколько это известно автору, ранее не проводилась полная классификация возможностей построения точных автомодельных решений в наиболее часто используемых системах координат: декартовой, полярной, цилиндрической и сферической. В работе рассмотрены как автомодельный подход, так и метод разделения переменных. Получены полные системы уравнений, переменные и функции тока, по мере возможности проанализированы и даны физические интерпретации некоторых результатов.

I.ii. Предварительные замечания.

Стационарное движение несжимаемой жидкости описывается уравнением Навье – Стокса, в векторной форме имеющим вид [42]:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (I.1)$$

которое должно быть дополнено уравнением неразрывности:

$$\text{div } \mathbf{V} = 0. \quad (I.2)$$

Точным решением уравнения (I.1) будем называть решение полного уравнения Навье – Стокса, то есть уравнения, в котором не пренебрегается ни одним из слагаемых, в отличие от решения типа пограничного слоя, в котором в операторе

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (рассматриваются плоские, то есть двумерные течения) пренебрегают

одним слагаемым по сравнению со вторым.

Во всей работе используется следующий принцип построения решений: сначала исследуется возможность преобразовать систему уравнений в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, а после рассматриваются возможные виды функций тока и соответствующие им задачи. Граничные условия не рассматриваются, так как они не влияют на преобразование самих уравнений.

1.1. Точные решения в декартовых координатах.

В декартовых координатах (x, y, z) в случае двумерного (плоского) течения $(\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0), \partial/\partial z \equiv 0)$ уравнение (I.1) перейдет в

$$\begin{cases} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (I.3)$$

а уравнение неразрывности (I.2) –

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (I.4)$$

Тогда можно ввести функцию тока $\psi(x, y)$

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (I.5)$$

так что уравнение неразрывности (I.4) удовлетворяется автоматически.

При таком введении функции тока уравнения (I.3) запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \\ -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \end{cases} \quad (I.6)$$

В большинстве задач поле давления не является определяющим и неизвестно заранее, поэтому решать системы уравнений (I.3) или (I.6) достаточно сложно. В то же время, поле давления связано с полем скорости, и поле скорости позволяет рассчитать поле давления уже *после* решения задачи. Следовательно, можно исключить давление из систем (I.3) или (I.6), уменьшив количество неизвестных функций, но увеличив при этом порядок уравнения. Сделать это можно применив операцию ротора к (I.3) или, что то же самое, продифференцировав первое уравнение в (I.6) по y , а второе – по x ; вычтя затем второе уравнение из первого, получим уравнение 4-го порядка, не содержащее

давления. В случае, когда внешнее давление задано и определяет течение, тоже можно провести указанную операцию, но при этом нужно задавать некоторую интегральную величину. Например, в задачах о течении в трубе можно задать условие сохранения расхода через поперечное сечение трубы. Этот расход будет связан с заданным перепадом давления, что позволит полностью рассчитать течение жидкости.

Уравнения (I.6) после проведения вышеописанной операции перейдут в

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) = \nu \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right). \quad (I.7)$$

Автомодельный подход заключается в том, чтобы путем введения новой переменной, являющейся комбинацией реальных переменных, преобразовать уравнения в частных производных в обыкновенные дифференциальные уравнения. Подобный подход используется в теории пограничного слоя, предложенной Прандтлем [28]. Пограничным слоем называют узкую область течения, в которой происходит основное изменение скорости течения жидкости. Величина изменения скорости, скажем, до 1% от скорости внешнего потока, определяет толщину пограничного слоя. Впоследствии были предложены другие характеристики для оценки толщины пограничного слоя, которые гораздо меньше зависят от принятых процентов [39], например, толщина потери импульса

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} (1 - u/V_{\infty}) u/V_{\infty} dy$$

или толщина вытеснения

$$\delta^* = \int_0^{\infty} (1 - u/V_{\infty}) dy.$$

Эти величины были введены при исследовании пограничного слоя на пластине, обтекаемой набегающим потоком жидкости со скоростью вдали от пластины V_{∞} (задача Блазиуса). На пластине же выполняются условия прилипания. Для задач с другой геометрией и граничными условиями вид этих величин может быть иным.

Для перевода уравнения (I.7) в обыкновенное дифференциальное уравнение введем автомодельную переменную ([38], [72])

$$\eta = y/\delta(x) \quad (I.8)$$

(в декартовых координатах переменные x и y равноправны, поэтому в полученных выражениях можно при необходимости поменять их местами).

Перейдем к переменной η и вычислим частные производные (штрих обозначает производную по переменной, от которой зависит дифференцируемая функция;

переменная η считается отдельной переменной):

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\delta'}{\delta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Решения уравнения (I.7) будем искать в виде $\psi(x, y) = \psi_m(x)f(y/\delta(x))$, где $\psi_m(x)$ и $\delta(x)$ – неизвестные пока функции. Тогда

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y = \psi_m' f - \frac{\psi_m \delta'}{\delta} \eta f'; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x = \frac{\psi_m}{\delta} f';$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\psi_m'}{\delta} f' - \frac{\psi_m \delta'}{\delta^2} (\eta f')';$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi_m'' f - \frac{\psi_m' \delta'}{\delta} \eta f' - \left(\frac{\psi_m \delta'}{\delta} \right)' \eta f' + \psi_m \left(\frac{\delta'}{\delta} \right)^2 \eta (\eta f')';$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\psi_m}{\delta^2} f''$$

и уравнение (I.7) примет вид:

$$\begin{aligned} & f' f'' \left(-\frac{2 \psi_m^2 \delta'}{\delta^4} - \frac{2 \eta^2 \psi_m^2 \delta'^3}{\delta^4} + \frac{\psi_m \psi_m'}{\delta^3} + \frac{\eta^2 \psi_m \delta'^2 \psi_m'}{\delta^3} + \frac{2 \eta^2 \psi_m^2 \delta' \delta''}{\delta^3} \right) + \\ & \quad \eta f f'' \left(-\frac{4 \psi_m \delta'^2 \psi_m'}{\delta^3} + \frac{2 \delta' \psi_m'^2}{\delta^2} + \frac{\psi_m \psi_m' \delta''}{\delta^2} \right) + \\ & f \left(-\frac{\psi_m \psi_m'}{\delta^3} - \frac{\eta^2 \psi_m \delta'^2 \psi_m'}{\delta^3} \right) f^{(3)} + \eta v \left(-\frac{12 \psi_m \delta'^2}{\delta^4} + \frac{4 \delta' \psi_m'}{\delta^3} + \frac{2 \psi_m \delta''}{\delta^3} \right) f^{(3)} + \\ & \quad \eta^3 v \left(-\frac{12 \psi_m \delta'^4}{\delta^4} + \frac{4 \delta'^3 \psi_m'}{\delta^3} + \frac{6 \psi_m \delta'^2 \delta''}{\delta^3} \right) f^{(3)} + \\ & \quad \eta f'^2 \left(-\frac{4 \psi_m^2 \delta'^3}{\delta^4} + \frac{4 \psi_m \delta'^2 \psi_m'}{\delta^3} + \frac{5 \psi_m^2 \delta' \delta''}{\delta^3} - \frac{3 \psi_m \psi_m' \delta''}{\delta^2} - \right. \\ & \quad \quad \left. \frac{2 \psi_m \delta' \psi_m''}{\delta^2} - \frac{\psi_m^2 \delta^{(3)}}{\delta^2} \right) + \\ & v f'' \left(-\frac{12 \psi_m \delta'^2}{\delta^4} - \frac{36 \eta^2 \psi_m \delta'^4}{\delta^4} + \frac{8 \delta' \psi_m'}{\delta^3} + \frac{24 \eta^2 \delta'^3 \psi_m'}{\delta^3} + \frac{4 \psi_m \delta''}{\delta^3} + \right. \\ & \quad \frac{36 \eta^2 \psi_m \delta'^2 \delta''}{\delta^3} - \frac{12 \eta^2 \delta' \psi_m' \delta''}{\delta^2} - \frac{3 \eta^2 \psi_m \delta''^2}{\delta^2} - \frac{2 \psi_m''}{\delta^2} - \\ & \quad \left. \frac{6 \eta^2 \delta'^2 \psi_m''}{\delta^2} - \frac{4 \eta^2 \psi_m \delta' \delta^{(3)}}{\delta^2} \right) + \\ & f f' \left(-\frac{2 \psi_m \delta'^2 \psi_m'}{\delta^3} + \frac{2 \delta' \psi_m'^2}{\delta^2} + \frac{\psi_m \psi_m' \delta''}{\delta^2} - \frac{\psi_m' \psi_m''}{\delta} + \frac{\psi_m \psi_m^{(3)}}{\delta} \right) + \\ & \quad v \left(-\frac{\psi_m}{\delta^4} - \frac{2 \eta^2 \psi_m \delta'^2}{\delta^4} - \frac{\eta^4 \psi_m \delta'^4}{\delta^4} \right) f^{(4)} + \\ & \eta v f' \left(-\frac{24 \psi_m \delta'^4}{\delta^4} + \frac{24 \delta'^3 \psi_m'}{\delta^3} + \frac{36 \psi_m \delta'^2 \delta''}{\delta^3} - \frac{24 \delta' \psi_m' \delta''}{\delta^2} - \right. \\ & \quad \frac{6 \psi_m \delta''^2}{\delta^2} - \frac{12 \delta'^2 \psi_m''}{\delta^2} + \frac{6 \delta'' \psi_m''}{\delta} - \frac{8 \psi_m \delta' \delta^{(3)}}{\delta^2} + \frac{4 \psi_m' \delta^{(3)}}{\delta} + \\ & \quad \left. \frac{4 \delta' \psi_m^{(3)}}{\delta} + \frac{\psi_m \delta^{(4)}}{\delta} \right) - v f \psi_m^{(4)} = 0 \end{aligned} \tag{I.9}$$

Для построения автомодельного решения уравнения (I.9) необходимо, чтобы порядки по x всех слагаемых были одинаковы. Обратимся к коэффициенту при $f^{(4)}$:

$$-v \frac{\Psi_m}{\delta^4} (1 + 2\eta^2 \delta'^2 + \eta^4 \delta'^4).$$

Для автомодельности выражение в скобках в правой части равенства должно иметь порядок x^0 , поэтому

$$\delta'^2 = a = const; \delta'^4 = d = const.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$\delta = \sqrt{ax} + C_1, \delta = \sqrt[4]{dx} + C_2.$$

Приравнивая эти величины, имеем:

$$a = \sqrt{d}, C_1 = C_2.$$

Положим $C_1 = C_2 = 0$. Сделать это можно по следующим причинам. В остальных слагаемых в (I.9) функция $\delta(x)$ встречается в знаменателях не только в 4-й степени, но и в меньших степенях. Если умножить уравнение (I.9) на δ^4 , то появятся слагаемые с δ^1 , δ^2 и δ^3 . Следовательно, появятся слагаемые с разными порядками по x . Условием же автомодельности является равенство по x всех слагаемых уравнения, и удовлетворить это условие можно только лишь положив $C_1 = C_2 = 0$. Тогда $\delta = \sqrt{ax}$ и коэффициент при $f^{(4)}$ примет вид:

$$-v \frac{\Psi_m}{a^2 x^4} (1 + 2a\eta^2 + a^2\eta^4).$$

Отсюда следует, что $\frac{\Psi_m}{a^2 x^4} = bx^\alpha \Rightarrow \Psi_m = a^2 bx^{\alpha+4}$ (α , b – пока неизвестные постоянные). При этом уравнение (I.9) перейдет в:

$$\begin{aligned} & -a^2 b (24 + 50\alpha + 35\alpha^2 + 10\alpha^3 + \alpha^4) v x^\alpha f + 4a^2 b (6 + 11\alpha + 6\alpha^2 + \alpha^3) v x^\alpha \eta f' - \\ & - 2a^{7/2} b^2 (6 + 5\alpha + \alpha^2) x^{4+2\alpha} \eta f'^2 - 2ab (2 + 3\alpha + \alpha^2 + 6a\eta^2 + 9a\alpha\eta^2 + 3a\alpha^2\eta^2) v f'' + \\ & + 2a^{7/2} b^2 (8 + 6\alpha + \alpha^2) x^{4+2\alpha} \eta f f'' + a^{5/2} b^2 (2 + \alpha + 2a\eta^2 + a\alpha\eta^2) x^{4+2\alpha} f' f'' + \\ & + 4ab(1 + \alpha) v x^\alpha \eta f''' + 4a^2 b (1 + \alpha) v x^\alpha \eta^3 f''' - \\ & - a^{5/2} b^2 (4 + \alpha + 4a\eta^2 + a\alpha\eta^2) x^{4+2\alpha} f f''' - b(1 + 2a\eta^2 + a^2\eta^4) v x^\alpha f^{IV} = 0. \end{aligned} \quad (I.10)$$

Уравнение (I.10) станет автомодельным, если $x^\alpha = x^{4+2\alpha}$ или $\alpha = -4$. Тогда уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} & 24a^2 \eta v f' + 4a^{7/2} b \eta f'^2 + 12a(1 + 3a\eta^2) v f'' + 2a^{5/2} b (1 + a\eta^2) f' f'' + \\ & + 12a(1 + a\eta^2) \eta v f''' + (1 + a\eta^2)^2 v f^{IV} = 0 \end{aligned}$$

Если считать функцию f и переменную η безразмерными, то и уравнение тоже должно

быть безразмерным. Это можно получить, если принять $a = 1$ и $b = \nu$; в результате получим:

$$24\eta f' + 4\eta f'^2 + 12(1 + 3\eta^2)f'' + 2(1 + \eta^2)f'f'' + 12(1 + \eta^2)\eta f''' + (1 + \eta^2)^2 f^{IV} = 0. \quad (I.11)$$

Уравнение (I.11) – точное уравнение Навье-Стокса в автомодельной постановке.

Если взять

$$\psi_m = Ax^\alpha, \quad \delta = Bx^\beta, \quad (I.12)$$

то уравнение (I.10) станет автомодельным при $\beta = 1$ и $\alpha = 0$. Приняв $A = \nu$, $B = 1$, получим безразмерную переменную $\eta = y/x$ и безразмерное уравнение (I.11).

Решить аналитически уравнение (I.11) не представляется возможным, поэтому решать его необходимо численно при наличии достаточного числа граничных условий. В случае, если условия заданы на разных границах, то необходимо использовать метод пристрелки. Одним из вариантов численного решения данного уравнения вместо чистого метода пристрелки является метод пристрелки с масштабированием, описанный в [41], [72].

Еще одним способом построения точных решений в декартовых координатах является метод разделения переменных. Этот метод тоже можно отнести к автомодельному методу, при котором происходит масштабирование одной из координат. В этом случае функция тока берется в виде

$$\psi = g(x)f(y), \quad (I.13)$$

и уравнение (I.7) запишется следующим образом:

$$gg'ff'' - g'g''ff' - gg'ff''' + gg'''ff' - \nu(gf^{IV} + 2g''f'' + g^{IV}f) = 0. \quad (I.14)$$

Для того, чтобы получить из (I.14) обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной x (уравнение по переменной y будет точно таким же, если g заменить на f , а x на y), разделим (I.14) на f , то есть на коэффициент при старшей производной по x , и потребуем, чтобы все выражения, зависящие от y , были равны постоянным величинам. В результате получим, что функция f должна иметь вид

$$f(y) = ay + b, \quad (I.15)$$

а уравнение (I.14) преобразуется в

$$a(g'g'' + gg''') + \nu g^{IV} = 0, \quad (I.16)$$

первым интегралом которого является уравнение

$$a(g'^2 - gg'') + \nu g''' = const. \quad (I.17)$$

Уравнение вида (I.17) часто упоминается в литературе (например, [51], [52], [68]), правда, при рассмотрении автомодельной постановки таких задач, как плоское

течение у передней критической точки, течения Куэтта, Фокнера-Скэн, и некоторых других течений. В качестве примеров решений уравнения (I.17) можно привести следующие:

$$g(x) = -6\nu/ax; \quad g(x) = C_1x + C_2. \quad (\text{I.18})$$

Последнее решение в (I.18) с учетом (I.15) похоже на решение задачи о плоском течении в окрестности передней критической точки, во всяком случае, составляющие поля скорости совпадают по виду с приведенными в [68].

Возможно, что кроме приведенных решений (I.18) существуют и другие аналитические решения уравнения (I.17), но их нахождение является достаточно сложной задачей.

I.2. Точные решения в полярных координатах.

Существует класс задач, рассматривать которые удобнее не в декартовой системе координат, а в полярных координатах. Использование этой системы координат также позволяет сформулировать новые задачи, изучение которых в декартовых координатах затруднительно.

Так как дальнейшее рассмотрение будет проводиться для функции тока, то перейдем в уравнении (I.7) к полярным координатам. Полярные координаты являются частным случаем цилиндрических координат и применимы при описании плоских ($\partial/\partial z \equiv 0$) течений. Декартовы координаты связаны с полярными следующими соотношениями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Уравнение неразрывности (I.4) в полярных координатах примет вид

$$\frac{\partial r V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (\text{I.19})$$

откуда можно ввести гидродинамическую функцию тока ψ :

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (\text{I.20})$$

Уравнение (I.7) перейдет в:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi), \quad (\text{I.21})$$

где $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.

В декартовых координатах размерности переменных x и y одинаковы (размерность длины), в полярных координатах размерности r и φ различны (длина и радиан). Поэтому для построения безразмерной переменной из этих переменных необходимо привлечение характерного размера по r , что не всегда можно сделать достаточно просто и однозначно. Иногда для построения величины, которая имеет размерность длины и которую можно принять за характерный размер, необходимо комбинировать заданные параметры задачи, что может быть достаточно сложным.

В полярных координатах невозможно перевести уравнение (I.20) в обыкновенное дифференциальное уравнение, используя автомодельный подход и автомодельную переменную. Это можно показать, рассмотрев $\nabla^2 \psi$.

Будем искать автомодельную переменную в виде $\eta = \theta(r)F(\varphi)$. Сначала представим функцию тока как $\psi = R(r)f(\eta)$. Тогда (штрихи означают производные по переменным, от которых зависят функции):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \psi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} (R(r)f(\eta)) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (R(r)f(\eta)) = \\ &= \frac{1}{r} (R'f + R\theta'Ff') + R''f + R'\theta'F + R'\theta'Ff' + R\theta''Ff' + R\theta'^2 F^2 f'' + \frac{1}{r^2} (R\theta F''f' + RF'^2 \theta^2 f''). \end{aligned}$$

Для автомодельности это выражение должно зависеть только от r и η (так как есть слагаемые, не зависящие от φ). Это возможно только если $F(\varphi) = \text{const}$. Следовательно, $\eta = \text{const}\theta(r)$ - то есть переменная автомодельности будет зависеть только от r , а не от комбинации r и φ .

Аналогично, если взять функцию тока в виде $\psi = \Phi(\varphi)f(\eta)$. Получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \psi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} (\Phi(\varphi)f(\eta)) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\Phi(\varphi)f(\eta)) = \\ &= \frac{1}{r} \Phi \theta' F f' + \Phi F \theta'' f' + \Phi \theta'^2 F^2 f'' + \frac{1}{r^2} (\Phi'' f + \Phi \theta F'' f' + \Phi \theta^2 F'^2 f'' + \Phi' \theta F' f'' + \Phi' \theta F' f'). \end{aligned}$$

Для автомодельности слагаемые в выражении в скобках должны иметь одинаковый порядок по r . Это возможно только если $\theta(r) = \text{const}$. Тогда $\eta = \text{const}F(\varphi)$, то есть переменная автомодельности будет зависеть только от φ .

Из проведенного выше исследования можно сделать вывод, что построение автомодельной переменной как комбинации реальных переменных в полярной системе координат невозможно. Поэтому остается только метод разделения переменных (собственно, предыдущие результаты и приводят к методу разделения переменных).

Для преобразования уравнения (I.21) в обыкновенное дифференциальное уравнение используем метод разделения переменных. Представим функцию тока в виде $\psi = R(r)f(\varphi)$. В результате уравнение (I.21) перейдет в:

$$\begin{aligned} & \frac{Rf'}{r} \left[\left(R''' + \frac{R''}{r} - \frac{R'}{r^2} \right) f + \left(\frac{R'}{r^2} - 2 \frac{R}{r^3} \right) f'' \right] - \frac{R'f}{r} \left[\left(\frac{R'}{r} + R'' \right) f' + \frac{R}{r^2} f''' \right] = \\ & = \nu \left[\left(\frac{R'}{r^3} - \frac{R''}{r^2} + 2 \frac{R'''}{r} + R^{IV} \right) f + \left(4 \frac{R}{r^4} - 3 \frac{R'}{r^3} + \frac{R''}{r^2} \right) f'' + \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) \frac{f'''}{r^2} + \frac{R}{r^4} f^{IV} \right]. \end{aligned} \quad (I.22)$$

Если необходимо получить обыкновенное дифференциальное уравнение по φ , то все множители, зависящие от r , должны иметь один порядок по r . Если разделить уравнение (I.16) на $\nu R/r^4$, то получим:

$$\begin{aligned} & \frac{r^3}{\nu} \left(R''' + \frac{R''}{r} - \frac{R'}{r^2} \right) ff' + \frac{r^3}{\nu} \left(\frac{R'}{r^2} - 2 \frac{R}{r^3} \right) ff'' - \frac{r^3 R'}{\nu R} \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) ff' - \frac{rR'}{\nu} ff''' = \\ & = \frac{r^4}{R} \left(\frac{R'}{r^3} - \frac{R''}{r^2} + 2 \frac{R'''}{r} + R^{IV} \right) f + \frac{r^4}{R} \left(4 \frac{R}{r^4} - 3 \frac{R'}{r^3} + \frac{R''}{r^2} \right) f'' + \frac{r^2}{R} \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) f'' + f^{IV}. \end{aligned} \quad (I.23)$$

а все множители, зависящие от r , должны быть постоянными величинами:

$$\begin{aligned} & \frac{R}{\nu} = a_1, \quad \frac{rR'}{\nu} = a_2, \quad \frac{r^2 R''}{\nu} = a_3, \quad \frac{r^3 R'''}{\nu} = a_4, \quad \frac{rR'}{R} = a_5, \quad \frac{r^2 R'^2}{\nu R} = a_6, \\ & \frac{r^3 R'R''}{\nu R} = a_7, \quad \frac{r^2 R''}{R} = a_8, \quad \frac{r^3 R'''}{R} = a_9, \quad \frac{r^4 R^{IV}}{R} = a_{10}. \end{aligned} \quad (I.24)$$

Это условие выполняется только если $R(r) = \text{const}$. Тогда $a_2 = \dots = a_{10} = 0$ и (I.22) примет вид ($R = \nu$ из соображений размерности, считая $f(\varphi)$ безразмерной функцией):

$$f^{IV} + 4f'' + 2ff'' = 0. \quad (I.25,а)$$

В такой постановке

$$\psi = \nu f(\varphi), \quad V_r = \nu f'/r, \quad V_\varphi \equiv 0, \quad (I.25,б)$$

что соответствует радиальному растеканию или стоку жидкости из линейного источника/стока.

Если же необходимо получить обыкновенное дифференциальное уравнение относительно r , то все множители в (I.22), зависящие от φ , должны быть одного порядка по φ . Разделив уравнение (I.22) на νf , преобразуем его к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{R}{r} \left(R''' + \frac{R''}{r} - \frac{R'}{r^2} \right) \frac{f'}{\nu} + \frac{R}{r} \left(\frac{R'}{r^2} - 2 \frac{R}{r^3} \right) \frac{ff''}{\nu f} - \frac{R'}{r} \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) \frac{f'}{\nu} - \frac{RR'}{r^3} \frac{f'''}{\nu} = \\ & = \frac{R'}{r^3} - \frac{R''}{r^2} + 2 \frac{R'''}{r} + R^{IV} + \left(4 \frac{R}{r^4} - 3 \frac{R'}{r^3} + \frac{R''}{r^2} \right) \frac{f''}{\nu f} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) \frac{f'''}{\nu f} + \frac{R}{r^4} \frac{f^{IV}}{\nu f}. \end{aligned} \quad (I.26)$$

Все коэффициенты, зависящие от φ , должны быть постоянными:

$$\frac{f'}{\nu} = a_1, \quad \frac{ff''}{\nu f} = a_2, \quad \frac{f'''}{\nu} = a_3, \quad \frac{f''}{\nu f} = a_4, \quad \frac{f^{IV}}{\nu f} = a_5. \quad (I.27)$$

Из первого выражения в (I.27) следует, что $f = a_1 \nu \varphi + C$, а $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Так как в этом случае в уравнение (I.26) функция $f(\varphi)$ в чистом виде не встречается, то ее можно брать в виде $f = a_1 \nu \varphi$, а уравнение (I.26) станет следующим:

$$a_1 \left[\left(R''' + \frac{R''}{r} - \frac{R'}{r^2} \right) \frac{R}{r} - \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) \frac{R'}{r} \right] = \frac{R'}{r^3} - \frac{R''}{r^2} + 2 \frac{R'''}{r} + R^{IV}. \quad (I.28,а)$$

В такой постановке

$$\psi = a_1 \nu \varphi R(r), \quad V_r = a_1 \nu R/r, \quad V_\varphi = -a_1 \nu \varphi R'. \quad (I.28,б)$$

Уравнение (I.22) не накладывает каких-либо ограничений на функцию $f(\varphi)$, поэтому постоянная a_1 в (I.27) может быть равна 0. Тогда $f(\varphi) = \text{const}$, $f'(\varphi) = 0$ и уравнение (I.22) перейдет в

$$\frac{R'}{r^3} - \frac{R''}{r^2} + 2 \frac{R'''}{r} + R^{IV} = 0, \quad (I.29)$$

решением которого будет выражение вида:

$$R(r) = Ar^2(\ln r - 1) + Br^2 + C \ln r + D. \quad (I.30)$$

В этом случае

$$\psi = \text{const} R(r), \quad (I.31, а)$$

где $R(r)$ определяется выражением (I.30), а составляющие скорости будут такими:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\text{const} \left[Ar(2 \ln r - 1) + 2Br + \frac{C}{r} \right]. \quad (I.31,б)$$

Из (I.31) следует, что в такой постановке возможны только вязкие безынерционные (стоксовы) вращательные движения жидкости.

Кроме указанных случаев возможны и другие варианты функции тока, приводящие уравнения гидродинамики к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В некоторых случаях вид функции тока определяется геометрией течения, и не всегда метод разделения переменных пригоден.

I.3. Точные осесимметричные решения в цилиндрических координатах.

Существует класс задач, для которых характерна осевая симметрия течения. Подобные задачи проще и удобнее рассматривать в цилиндрической системе координат

(z, r, φ) при условии осевой симметрии, что равносильно независимости всех величин от угла φ , то есть $\partial/\partial\varphi \equiv 0$. Уравнения в цилиндрических координатах в осесимметричном случае запишутся в виде [40]

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E^2\psi}{r^2} \right) - \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E^2\psi}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi^2}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} E^4 \psi = 0, \quad (I.32)$$

где

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad E^4 = E^2(E^2). \quad (I.33)$$

Дополнительно необходимо рассматривать уравнение для окружной (азимутальной) скорости V_φ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial r V_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial r V_\varphi}{\partial z} + \nu \frac{1}{r} E^2(r V_\varphi) = 0. \quad (I.34)$$

Здесь ψ – гидродинамическая функция тока, связанная с составляющими скорости соотношениями:

$$\mathbf{V} = (V_z, V_r, V_\varphi) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r}, -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z}, V_\varphi \right). \quad (I.35)$$

Рассмотрим возможности преобразования уравнений (I.32) и (I.34) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Это можно попытаться сделать двумя способами:

1) введением новых переменных, являющихся комбинацией переменных z и r (автомодельный подход); 2) разделением переменных.

Обратимся к первому способу.

Введем переменную автомодельности в виде

$$\eta = B z^\beta r^\gamma. \quad (I.36)$$

Функцию тока ψ и азимутальную скорость V_φ можно представить в одном из двух видов:

$$\psi = A r^\alpha f(\eta), \quad V_\varphi = C r^d \Omega(\eta); \quad (I.37,а)$$

$$\psi = A z^\alpha f(\eta), \quad V_\varphi = C z^d \Omega(\eta). \quad (I.37,б)$$

Рассмотрим вариант а). Уравнение (I.32) примет вид (переменная z заменена на $z = \eta^{1/\beta} / (B^{1/\beta} r^{\gamma/\beta})$ в соответствии с (I.36)):

$$\left(-A^2 B^{3/\beta} r^{-3+2\alpha+\frac{3\gamma}{\beta}} \alpha(-2+\beta)(-1+\beta)\beta \eta^{-\frac{3+\beta}{\beta}} - A^2 B^{1/\beta} r^{-5+2\alpha+\frac{\gamma}{\beta}} \alpha\beta(2+\gamma)(-4+2\alpha+\gamma)\eta^{-\frac{1+\beta}{\beta}} \right) f f' +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(A^2 B^{3/\beta} r^{-3+2\alpha+\frac{3\gamma}{\beta}} (-1+\beta)\beta((-2+\alpha)\beta+2\gamma)\eta^{2-\frac{3}{\beta}} + A^2 B^{\frac{1}{\beta}} r^{-5+2\alpha+\frac{\gamma}{\beta}} (-4+\alpha)\beta\gamma(-2+2\alpha+\gamma)\eta^{2-\frac{1}{\beta}} \right) f'^2 + \\
& + \left(-3 A^2 B^{3/\beta} r^{-3+2\alpha+\frac{3\gamma}{\beta}} \alpha(-1+\beta)\beta^2 \eta^{2-\frac{3}{\beta}} - A^2 B^{\frac{1}{\beta}} r^{-5+2\alpha+\frac{\gamma}{\beta}} \alpha\beta\gamma(-2+2\alpha+3\gamma)\eta^{2-\frac{1}{\beta}} \right) f f'' + \\
& + \left(2 A r^{-5+\alpha} \gamma^3 (-4+2\alpha+3\gamma)\eta^3 + A^2 B^{3/\beta} r^{-3+2\alpha+\frac{3\gamma}{\beta}} \beta^2 ((-2+\alpha)\beta+2\gamma)\eta^{3-\frac{3}{\beta}} + \right. \\
& \quad \left. + A^2 B^{\frac{1}{\beta}} r^{-5+2\alpha+\frac{\gamma}{\beta}} (-4+\alpha)\beta\gamma^2 \eta^{3-\frac{1}{\beta}} \right) f' f'' + \\
& + \left(-A^2 B^{3/\beta} r^{-3+2\alpha+\frac{3\gamma}{\beta}} \alpha\beta^3 \eta^{3-\frac{3}{\beta}} - A^2 B^{\frac{1}{\beta}} r^{-5+2\alpha+\frac{\gamma}{\beta}} \alpha\beta\gamma^2 \eta^{3-\frac{1}{\beta}} \right) f f^{(3)} - \\
& - 2 B^{\frac{1}{\beta}} C^2 r^{-1+2d+\frac{\gamma}{\beta}} \beta \eta^{1-\frac{1}{\beta}} \Omega \Omega' + A r^{-5+\alpha} (-4+\alpha)(-2+\alpha)^2 \alpha \nu f + \\
& + \left(A r^{-5+\alpha} (2\alpha^2+2\alpha(-4+\gamma)+(-2+\gamma)^2) \gamma(-4+2\alpha+\gamma)\eta + A B^{4/\beta} r^{-1+\alpha+\frac{4\gamma}{\beta}} (-3+\beta)(-2+\beta)(-1+\beta)\beta \eta^{\frac{-4+\beta}{\beta}} + \right. \\
& \quad \left. + 2 A B^{2/\beta} r^{-3+\alpha+\frac{2\gamma}{\beta}} (-1+\beta)\beta(-2+\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma)\eta^{\frac{-2+\beta}{\beta}} \right) \nu f' + \\
& + \left(A r^{-5+\alpha} \gamma^2 (20+6(-4+\alpha)\alpha-24\gamma+12\alpha\gamma+7\gamma^2)\eta^2 + A B^{4/\beta} r^{-1+\alpha+\frac{4\gamma}{\beta}} (-1+\beta)\beta^2 (-11+7\beta)\eta^{2-\frac{4}{\beta}} + \right. \\
& \quad \left. + 2 A B^{2/\beta} r^{-3+\alpha+\frac{2\gamma}{\beta}} \beta((-2+\alpha)\alpha\beta+2(-1+\alpha)(-1+3\beta)\gamma+(-3+7\beta)\gamma^2)\eta^{2-\frac{2}{\beta}} \right) \nu f'' + \\
& + \left(6 A B^{4/\beta} r^{-1+\alpha+\frac{4\gamma}{\beta}} (-1+\beta)\beta^3 \eta^{3-\frac{4}{\beta}} + 2 A B^{2/\beta} r^{-3+\alpha+\frac{2\gamma}{\beta}} \beta\gamma(-\gamma+2\beta(-1+\alpha+3\gamma))\eta^{3-\frac{2}{\beta}} \right) \nu f^{(3)} + \\
& + \left(A r^{-5+\alpha} \gamma^4 \eta^4 + A B^{4/\beta} r^{-1+\alpha+\frac{4\gamma}{\beta}} \beta^4 \eta^{4-\frac{4}{\beta}} + 2 A B^{2/\beta} r^{-3+\alpha+\frac{2\gamma}{\beta}} \beta^2 \gamma^2 \eta^{4-\frac{2}{\beta}} \right) \nu f^{(4)} = 0 \quad (I.38)
\end{aligned}$$

Приравнявая порядки слагаемых по r , получим систему равенств:

$$-3+2\alpha+\frac{3\gamma}{\beta} = -5+2\alpha+\frac{\gamma}{\beta} = -5+\alpha = -1+2d+\frac{\gamma}{\beta}. \quad (I.39)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\gamma}{\beta} = -1, \quad \alpha = 1, \quad d = -1. \quad (I.40)$$

Следовательно, точное уравнение (I.32) станет автомодельным, если переменную взять

в виде $\eta = B\left(\frac{r}{z}\right)^\gamma$, функцию тока – в виде $\psi = Ar f(\eta)$, а азимутальную скорость –

$V_\phi = Cr^{-1}\Omega(\eta)$. Эти же величины удовлетворяют уравнению (I.34):

$$\begin{aligned}
& (-1+d^2)r^{-2+d} \nu \Omega + A B^{\frac{1}{\beta}} (1+d)r^{-2+d+\alpha+\frac{\gamma}{\beta}} \beta \eta^{\frac{-1+\beta}{\beta}} \Omega f' + \left(r^{-2+d} \gamma(2d+\gamma)\eta + B^{2/\beta} r^{d+\frac{2\gamma}{\beta}} (-1+\beta)\beta \eta^{\frac{-2+\beta}{\beta}} \right) \nu \Omega' - \\
& - A B^{\frac{1}{\beta}} r^{-2+d+\alpha+\frac{\gamma}{\beta}} \alpha\beta \eta^{1-\frac{1}{\beta}} f \Omega' + \left(r^{-2+d} \gamma^2 \eta^2 + B^{2/\beta} r^{d+\frac{2\gamma}{\beta}} \beta^2 \eta^{2-\frac{2}{\beta}} \right) \nu \Omega'' = 0 \quad (I.41)
\end{aligned}$$

В случае (I.37,б) уравнение (I.32) примет вид (переменная r заменена на $r = \eta^{1/\gamma} / (B^{1/\gamma} z^{\beta/\gamma})$ в соответствии с (I.36)):

$$\begin{aligned}
& \left(A^2 B^{3/\gamma} \alpha ((\beta + 1) (2\alpha + \beta - 2) \gamma - 2\beta (3\alpha + \beta - 2)) \eta^{\frac{\gamma-3}{\gamma}} z^{2\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 3} + \right. \\
& \quad \left. + A^2 B^{5/\gamma} \alpha (\gamma - 4) (\gamma - 2) \gamma \eta^{\frac{\gamma-5}{\gamma}} z^{2\alpha + \frac{5\beta}{\gamma} - 1} \right) f f' + \\
& + \left(A^2 B^{3/\gamma} \alpha \beta ((2\alpha + 3\beta - 1) \gamma - 2\beta) \eta^{2 - \frac{3}{\gamma}} z^{2\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 3} + 3 A^2 B^{5/\gamma} \alpha (\gamma - 2) \gamma^2 \eta^{2 - \frac{5}{\gamma}} z^{2\alpha + \frac{5\beta}{\gamma} - 1} \right) f f'' + \\
& \quad + \left(A^2 B^{3/\gamma} \alpha \beta^2 \gamma \eta^{3 - \frac{3}{\gamma}} z^{2\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 3} + A^2 B^{5/\gamma} \alpha \gamma^3 \eta^{3 - \frac{5}{\gamma}} z^{2\alpha + \frac{5\beta}{\gamma} - 1} \right) f f^{(3)} - \\
& - 2 A^2 B^{3/\gamma} (\alpha - 1) \alpha^2 \eta^{-3/\gamma} f^2 z^{2\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 3} - \left(A^2 B^{3/\gamma} \beta (2\alpha + \beta - 1) (2\beta + (\alpha - 2) \gamma) \eta^{2 - \frac{3}{\gamma}} z^{2\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 3} + \right. \\
& \quad \left. + A^2 B^{5/\gamma} (\gamma - 2) \gamma (4\beta + \alpha \gamma) \eta^{2 - \frac{5}{\gamma}} z^{2\alpha + \frac{5\beta}{\gamma} - 1} \right) f^2 - \\
& - \left(A^2 B^{3/\gamma} \beta^2 (2\beta + (\alpha - 2) \gamma) \eta^{3 - \frac{3}{\gamma}} z^{2\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 3} + A^2 B^{5/\gamma} \gamma^2 (4\beta + \alpha \gamma) \eta^{3 - \frac{5}{\gamma}} z^{2\alpha + \frac{5\beta}{\gamma} - 1} \right) f' f'' - \\
& \quad - 2 B^{1/\gamma} C^2 d \eta^{-1/\gamma} \Omega^2 z^{2d + \frac{\beta}{\gamma} - 1} - 2 B^{1/\gamma} C^2 \beta \eta^{1 - \frac{1}{\gamma}} \Omega \Omega' z^{2d + \frac{\beta}{\gamma} - 1} + \\
& \quad + A B^{1/\gamma} (\alpha - 3) (\alpha - 2) (\alpha - 1) \alpha \eta^{-1/\gamma} \nu f z^{\alpha + \frac{\beta}{\gamma} - 4} + \\
& \quad + \left(A B^{1/\gamma} \beta (2\alpha + \beta - 3) (\beta^2 + 2\alpha\beta - 3\beta + 2(\alpha - 3)\alpha + 2) \eta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{\beta}{\gamma} - 4} + \right. \\
& + 2 A B^{3/\gamma} (\alpha + \beta - 1) (\alpha + \beta) (\gamma - 2) \gamma \eta^{\frac{\gamma-3}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 2} + A B^{5/\gamma} (\gamma - 4) (\gamma - 2)^2 \gamma \eta^{\frac{\gamma-5}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{5\beta}{\gamma}} \left. \right) \nu f' + \\
& \quad + \left(A B^{1/\gamma} \beta^2 (7\beta^2 + 12\alpha\beta - 18\beta + 6(\alpha - 3)\alpha + 11) \eta^{2 - \frac{1}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{\beta}{\gamma} - 4} + \right. \\
& + 2 A B^{3/\gamma} \gamma ((7\gamma - 6)\beta^2 + (2\alpha - 1)(3\gamma - 2)\beta + (\alpha - 1)\alpha \gamma) \eta^{2 - \frac{3}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 2} + \\
& \quad \left. + A B^{5/\gamma} (\gamma - 2) \gamma^2 (7\gamma - 10) \eta^{2 - \frac{5}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{5\beta}{\gamma}} \right) \nu f'' + \\
& + \left(2 A B^{1/\gamma} \beta^3 (2\alpha + 3\beta - 3) \eta^{3 - \frac{1}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{\beta}{\gamma} - 4} + 2 A B^{3/\gamma} \beta \gamma ((2\alpha + 6\beta - 1)\gamma - 2\beta) \eta^{3 - \frac{3}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 2} + \right. \\
& \quad \left. + 2 A B^{5/\gamma} \gamma^3 (3\gamma - 4) \eta^{3 - \frac{5}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{5\beta}{\gamma}} \right) \nu f^{(3)} + \\
& + \left(A B^{1/\gamma} \beta^4 \eta^{4 - \frac{1}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{\beta}{\gamma} - 4} + 2 A B^{3/\gamma} \beta^2 \gamma^2 \eta^{4 - \frac{3}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 2} + A B^{5/\gamma} \gamma^4 \eta^{4 - \frac{5}{\gamma}} z^{\alpha + \frac{5\beta}{\gamma}} \right) \nu f^{(4)} = 0 \quad (I.42)
\end{aligned}$$

Приравнивая порядки слагаемых по z , получим систему равенств:

$$2\alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 3 = 2\alpha + \frac{5\beta}{\gamma} - 1 = \alpha + \frac{\beta}{\gamma} - 4 = \alpha + \frac{3\beta}{\gamma} - 2 = \alpha + \frac{5\beta}{\gamma} = 2d + \frac{\beta}{\gamma} - 1. \quad (I.43)$$

Отсюда получаем:

$$\alpha = 1, \quad \frac{\beta}{\gamma} = -1, \quad d = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{4\beta}{\gamma} + 1 \right) = -1. \quad (I.44)$$

Следовательно, точное уравнение (I.32) станет автомодельным, если переменную взять в виде $\eta = B\left(\frac{z}{r}\right)^\beta$, функцию тока – в виде $\psi = Az f(\eta)$, а азимутальную скорость – $V_\varphi = Cz^{-1}\Omega(\eta)$. Эти же величины удовлетворяют уравнению (I.34):

$$\begin{aligned} & AB^{2/\gamma} \alpha \eta^{-2/\gamma} f \Omega z^{d+\alpha+\frac{2\beta}{\gamma}-1} + AB^{2/\gamma} (\beta - d\gamma) \eta^{\frac{\gamma-2}{\gamma}} \Omega f' z^{d+\alpha+\frac{2\beta}{\gamma}-1} + \\ & + AB^{2/\gamma} \alpha \gamma \eta^{1-\frac{2}{\gamma}} f \Omega' z^{d+\alpha+\frac{2\beta}{\gamma}-1} + \left(\frac{(d-1)d}{z^2} - B^{2/\gamma} z^{\frac{2\beta}{\gamma}} \eta^{-2/\gamma} \right) \nu \Omega z^d + \\ & + \left(\beta(2d+\beta-1) \eta z^{d-2} + B^{2/\gamma} \gamma^2 \eta^{1-\frac{2}{\gamma}} z^{d+\frac{2\beta}{\gamma}} \right) \nu \Omega' + \left(\beta^2 \eta^2 z^{d-2} + B^{2/\gamma} \gamma^2 \eta^{2-\frac{2}{\gamma}} z^{d+\frac{2\beta}{\gamma}} \right) \nu \Omega'' = 0 \end{aligned} \quad (I.45)$$

Еще одна возможность построения автомодельного решения в обоих случаях – равенство нулю коэффициентов в слагаемых, содержащих переменную z в случае (I.37,а), и содержащих переменную r в случае (I.37,б).

В варианте (I.37,а) уравнение (I.38) станет автомодельным при $\beta = 0$. В этом случае остаются слагаемые порядка z^4 и уравнение приобретает вид:

$$\begin{aligned} & (\alpha - 4)(\alpha - 2)^2 \alpha f + (2\alpha^2 + 2\alpha(\gamma - 4) + (\gamma - 2)^2) \gamma (2\alpha + \gamma - 4) \eta f' + \\ & + \gamma^2 (20 + 6(\alpha - 4)\alpha - 24\gamma + 12\alpha\gamma + 7\gamma^2) \eta^2 f'' + 2\gamma^2 (2\alpha + 3\gamma - 4) \eta^3 f''' + \gamma^4 \eta^4 f^{IV} = 0, \end{aligned} \quad (I.46)$$

а уравнение (I.41) запишется в виде

$$(d^2 - 1)\Omega + \gamma\eta(2d + \gamma)\Omega' + \gamma^2\eta^2\Omega'' = 0, \quad (I.46,а)$$

что соответствует уравнениям

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) = 0, \quad (I.46,б)$$

с решениями

$$f(\eta) = C_1 \eta^{-\frac{\alpha}{\gamma}} + C_2 \eta^{\frac{2-\alpha}{\gamma}} + C_3 \eta^{\frac{2-\alpha}{\gamma}} \ln \eta + C_4 \eta^{\frac{4-\alpha}{\gamma}}, \quad (I.47,а)$$

$$\Omega(\eta) = D_1 \eta^{-\frac{d+1}{\gamma}} + D_2 \eta^{\frac{d+1}{\gamma}}. \quad (I.47,б)$$

Переменная в этом случае будет $\eta = Br^\gamma$, функция тока – $\psi = Ar^\alpha f(\eta)$, где функция f определяется выражением (I.47,а), окружная скорость задается в виде $V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta)$, где функция Ω определяется выражением (I.47,б) (фактически, разделение переменных). В принципе, уравнения (I.46,б) описывают вязкое течение жидкости в приближении пограничного слоя вдоль оси z (например, при $\gamma = 1$ имеем ламинарное течение в кольцевой трубе) ($V_r \equiv 0$) с вращением, являющимся комбинацией вращения, вызванного вихревой нитью (первое слагаемое в (I.47,б)), и квазитвердотельного вращения (второе слагаемое). Причем вращение никак не влияет на осевую скорость.

Других вариантов, при которых переменная зависела бы от r и/или z , нет.

В варианте (I.37,б) уравнение (I.42) станет автомодельным при $\beta = 0, \alpha = 1, d = 0$. В этом случае остаются слагаемые порядка r^0 , а уравнение станет следующим:

$$A(\gamma - 4)(\gamma - 2)f f' - A(\gamma - 2)\gamma\eta f'^2 + 3A\gamma\eta(\gamma - 2)f f'' + A\gamma\eta f f''' - A\gamma^2\eta^2 f' f'' + \\ + (\gamma - 4)(\gamma - 2)^2\nu f' + \gamma(\gamma - 4)(7\gamma - 10)\nu\eta f'' + \gamma(6\gamma - 8)\nu\eta f''' + \gamma\eta\nu f^{IV} = 0. \quad (I.48,a)$$

Уравнение (I.39) в этом случае примет вид:

$$Af\Omega + A\gamma\eta f\Omega' - \nu\Omega - \gamma\eta\nu\Omega' + \gamma(1 + \gamma)\eta\nu\Omega' + \gamma^2\eta^2\nu\Omega'' = 0. \quad (I.48,б)$$

Переменной автомодельности будет $\eta = Br^\gamma$, функция тока – $\psi = Azf(\eta)$, азимутальная скорость – $V_\phi = C\Omega(\eta)$. Фактически, получен вариант метода разделения переменных.

Теперь рассмотрим возможность преобразования уравнений в частных производных (I.32) и (I.34) в обыкновенные уравнения методом разделения переменных.

Представим функцию тока и азимутальную скорость в виде:

$$\psi = R(r)\Phi(z), \quad V_\phi = \Omega(r)\theta(z) \quad (I.49)$$

Подставим эти выражения в (I.32) и (I.34):

$$\frac{3RR'\Phi\Phi'}{r^4} + \frac{R'^2\Phi\Phi'}{r^3} - \frac{3RR''\Phi\Phi'}{r^3} - \frac{R'R''\Phi\Phi'}{r^2} - \frac{2R^2\Phi'\Phi''}{r^3} + \frac{RR'\Phi'\Phi''}{r^2} + \frac{RR''\Phi\Phi'}{r^2} - \\ - \frac{RR'\Phi\Phi''}{r^2} - \frac{2\Omega^2\theta\theta'}{r} - \frac{3\nu R'\Phi}{r^4} + \frac{3\nu R''\Phi}{r^3} - \frac{2\nu R'\Phi''}{r^2} + \frac{2\nu R''\Phi''}{r} - \frac{2\nu R'''\Phi}{r^2} + \\ + \frac{\nu R^{IV}\Phi}{r} + \frac{\nu R\Phi^{IV}}{r} = 0, \quad (I.50)$$

$$\frac{R\Omega\theta\Phi'}{r^2} - \frac{R'\Omega\theta'\Phi}{r} + \frac{R\Omega'\theta\Phi'}{r} + \frac{\nu\Omega'\theta}{r} - \frac{\nu\Omega\theta}{r^2} + \nu\Omega\theta'' + \nu\Omega''\theta = 0. \quad (I.51)$$

Из этих уравнений следует, что есть 2 возможности построения обыкновенных дифференциальных уравнений:

1) уравнения зависят только от переменной r ; 2) уравнения зависят только от переменной z . Рассмотрим обе этих возможности.

1). Построение уравнений, зависящих только от переменной r .

Разделим уравнение (I.50) на $\Phi(z)$, а (I.51) – на $\theta(z)$. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \frac{3RR'\Phi'}{r^4} + \frac{R'^2\Phi'}{r^3} - \frac{3RR''\Phi'}{r^3} - \frac{R'R''\Phi'}{r^2} - \frac{2R^2\Phi'\Phi''}{r^3\Phi} + \frac{RR'\Phi'\Phi''}{r^2\Phi} + \frac{RR''\Phi'}{r^2} - \frac{RR'\Phi''}{r^2} - \\ & - \frac{2\Omega^2\theta\theta'}{r\Phi} - \frac{3\nu R'}{r^4} + \frac{3\nu R''}{r^3} - \frac{2\nu R'\Phi''}{r^2\Phi} + \frac{2\nu R''\Phi''}{r\Phi} - \frac{2\nu R'''}{r^2} + \frac{\nu R^{IV}}{r} + \frac{\nu R\Phi^{IV}}{r\Phi} = 0, \end{aligned} \quad (I.52)$$

$$\frac{R\Omega\Phi'}{r^2} - \frac{R'\Omega\theta'\Phi}{r\theta} + \frac{R\Omega'\Phi'}{r} + \frac{\nu\Omega'}{r} - \frac{\nu\Omega}{r^2} + \frac{\nu\Omega\theta''}{\theta} + \nu\Omega'' = 0. \quad (I.53)$$

Уравнения (I.52) и (I.53) станут обыкновенными, если все множители, зависящие от z , будут постоянными величинами:

$$\Phi' = a_1, \quad \frac{\Phi''}{\Phi} = a_2, \quad \frac{\Phi'\Phi''}{\Phi} = a_3, \quad \Phi''' = a_4, \quad \frac{\Phi^{IV}}{\Phi} = a_5, \quad \frac{\theta\theta'}{\Phi} = a_6, \quad \frac{\Phi\theta'}{\theta} = a_7, \quad \frac{\theta''}{\theta} = a_8. \quad (I.54)$$

Первое равенство в (I.54) дает $\Phi = a_1 z + C_1$, откуда $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Из трех последующих равенств следует $\theta = \sqrt{a_1 a_6 z^2 + C_1 z + C_2}$. Величины a_6, a_7, a_8 будут постоянными, если $C_1 = C_2 = 0$. Тогда

$$\Phi = a_1 z, \quad \theta = \sqrt{a_1 a_6} z \quad \text{и} \quad a_7 = a_1, \quad a_8 = 0. \quad (I.55)$$

Уравнения (I.52), (I.53) примут вид:

$$\begin{aligned} & -\frac{3\nu}{r^4} R' + 3a_1 \frac{RR'}{r^4} + a_1 \frac{R'^2}{r^3} + 3\nu \frac{R''}{r^3} - 3a_1 \frac{RR''}{r^3} - a_1 \frac{R'R''}{r^2} - \\ & - 2\nu \frac{R'''}{r^2} + a_1 \frac{RR'''}{r^2} + \nu \frac{R^{IV}}{r} - 2a_6 \frac{\Omega^2}{r} = 0, \end{aligned} \quad (I.56)$$

$$-a_1 \frac{\Omega R'}{r} + a_1 \frac{\Omega R}{r^2} + a_1 \frac{\Omega' R}{r} - \nu \frac{\Omega}{r^2} + \nu \frac{\Omega'}{r} + \nu \Omega'' = 0. \quad (I.57)$$

2). Построение уравнений, зависящих только от переменной z .

Разделим уравнение (I.50) на $R(r)/r$, а уравнение (I.51) – на $\Omega(r)$. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3R'}{r^3} + \frac{R'^2}{r^2 R} - \frac{3R''}{r^2} - \frac{R'R''}{rR} + \frac{R'''}{r} \right) \Phi\Phi' + \left(-\frac{2R}{r^2} + \frac{R'}{r} \right) \Phi'\Phi'' - \frac{R'\Phi\Phi''}{r} - \\ & - \frac{2\Omega^2\theta\theta'}{R} + \left(-\frac{3\nu R'}{r^3 R} + \frac{3\nu R''}{r^2 R} \right) \Phi + \left(-\frac{2\nu R'}{rR} + \frac{2\nu R''}{R} \right) \Phi'' - \frac{2\nu R'''\Phi}{rR} + \frac{\nu R^{IV}\Phi}{R} + \nu\Phi^{IV} = 0, \end{aligned} \quad (I.58)$$

$$\frac{R\theta\Phi'}{r^2} - \frac{R'\theta'\Phi}{r} + \frac{R\Omega'\theta\Phi'}{r\Omega} + \left(\frac{\nu\Omega'}{r\Omega} - \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu\Omega''}{\Omega} \right) \theta + \nu\theta'' = 0. \quad (I.59)$$

Для того чтобы уравнение (I.58) стало обыкновенным дифференциальным уравнением, необходимо, чтобы все множители, зависящие от r , были постоянными величинами.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3R'}{r^3} + \frac{R'^2}{r^2 R} - \frac{3R''}{r^2} - \frac{R'R''}{rR} + \frac{R'''}{r} \right) &= a_1, \quad \left(-\frac{2R}{r^2} + \frac{R'}{r} \right) = a_2, \quad \frac{R'}{r} = a_3, \\ \left(-\frac{3\nu R'}{r^3 R} + \frac{3\nu R''}{r^2 R} \right) &= a_4, \quad \left(-\frac{2\nu R'}{rR} + \frac{2\nu R''}{R} \right) = a_5, \quad \frac{R'''}{rR} = a_6, \quad \frac{R'''}{R} = a_7, \\ \frac{\Omega^2}{R} &= a_8, \quad \frac{R}{r^2} = a_9, \quad \frac{R\Omega'}{r\Omega} = a_{10}, \quad \left(\frac{\nu\Omega'}{r\Omega} - \frac{\nu}{r^2} + \frac{\nu\Omega''}{\Omega} \right) = a_{11}. \end{aligned} \quad (I.60)$$

Из 3-ого равенства в (I.60) следует, что

$$R = a_3 r^2 + C; \quad (I.61)$$

так как функция R входит в знаменатели в выражениях в (I.60), а все выражения должны быть постоянными величинами, то необходимо, чтобы $C = 0$. Тогда

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_{11} = 0, \quad \Omega = \sqrt{a_3 a_8} r, \quad a_9 = a_{10} = a_3. \quad (I.62)$$

Подстановка (I.61), (I.62) в (I.58), (I.59) дает следующие уравнения:

$$2a_3 \Phi \Phi''' - \nu \Phi^{IV} + 2a_8 \theta \theta' = 0, \quad 2a_3 (\theta \Phi' - \Phi \theta') + \nu \theta'' = 0. \quad (I.63)$$

Таким образом, методом разделения переменных в цилиндрических координатах можно получить точное решение если

$$\psi = a_1 z R(r), \quad V_\varphi = \sqrt{a_1 a_6} z \Omega(r), \quad (I.64)$$

где a_1, a_6 - некие постоянные, определяемые постановкой задачи, а функции $R(r)$ и $\Omega(r)$ определяются из уравнений (I.56) и (I.57); и если

$$\psi = a_3 r^2 \Phi(z), \quad V_\varphi = \sqrt{a_3 a_8} r \theta(z), \quad (I.65)$$

где a_3, a_8 - некие постоянные, определяемые постановкой задачи, а функции $\Phi(z)$ и $\theta(z)$ определяются из уравнений (I.63).

Несколько слов о размерностях.

Для того, чтобы полученные уравнения и переменные были безразмерными, необходимо специальным образом выбрать коэффициенты A, B, C в случае автомодельного подхода. (В случае разделения переменных для проведения подобного анализа необходимо накладывать некие требования на размерность функций-множителей в функции тока; но каких-то очевидных обоснований для введения подобных требований не видно.) Размерности коэффициентов можно получить, используя связи между скоростями и функцией тока. Для каждого варианта имеем следующие результаты (L, T – размерности длины и времени соответственно):

- 1) $\psi = A r f(\eta), V_\varphi = C r^{-1} \Omega(\eta), \eta = B (r/z)^\gamma, [A] = [\nu] = L^2/T, [B] = 1, [C] = [\nu] = L^2/T;$
- 2) $\psi = A z f(\eta), V_\varphi = C z^{-1} \Omega(\eta), \eta = B (z/r)^\beta, [A] = [\nu] = L^2/T, [B] = 1, [C] = [\nu] = L^2/T;$

$$3) \psi = Az f(\eta), V_\varphi = C \Omega(\eta), \eta = Br^\gamma, [A] = [v] = L^2/T, [B] = L^{-\gamma}, [C] = [V] = L/T.$$

Если проанализировать автомодельные переменные в вариантах 1) – 3), то видно, что их можно упростить, сведя к новой переменной, если принять в вариантах 1) и 3) $\gamma = 1$, а в варианте 2) – $\beta = 1$. Тогда получим более простую и удобную форму переменной и, следовательно, уравнений:

$$1) \psi = Arf(\eta), V_\varphi = Cr^{-1}\Omega(\eta), \eta = B(r/z), [A] = [v] = L^2/T, [B] = 1, [C] = [v] = L^2/T;$$

$$2) \psi = Azf(\eta), V_\varphi = Cz^{-1}\Omega(\eta), \eta = B(z/r), [A] = [v] = L^2/T, [B] = 1, [C] = [v] = L^2/T;$$

$$3) \psi = Az f(\eta), V_\varphi = C \Omega(\eta), \eta = Br, [A] = [v] = L^2/T, [B] = L^{-1}, [C] = [V] = L/T.$$

1.4. Точные осесимметричные решения в сферических координатах.

Применение сферических координат (R, θ, φ) позволяет сформулировать новые задачи, приводящие к точным решениям уравнений Навье-Стокса, а также легче и полнее проанализировать уже поставленные задачи в других системах координат.

Ограничимся рассмотрением класса осесимметричных течений. В этом случае возможно введение функции тока ψ , связанной с составляющими скорости соотношениями

$$\mathbf{V} = (V_R, V_\theta, V_\varphi) = \left(\frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R}, V_\varphi \right), \quad (1.66)$$

а составляющая скорости V_φ будет зависеть только от R и θ , как и все остальные величины:

$$V_\varphi = V_\varphi(R, \theta), \quad (1.67)$$

так как условие осевой симметрии равносильно условию $\partial/\partial\varphi \equiv 0$.

Уравнения Навье-Стокса в сферических координатах для осесимметричных течений будут следующими ([43], [70]):

$$\sin \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{E^2 \psi}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial R} \frac{E^2 \psi}{R^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial V_\varphi^2}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial V_\varphi^2}{\partial R} + \nu E^4 \psi = 0, \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \theta} (R \sin \theta V_\varphi) - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial R} (R \sin \theta V_\varphi) + \nu R^2 \sin \theta E^2 (R \sin \theta V_\varphi) = 0, \quad (1.69)$$

где

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad E^4 = E^2(E^2). \quad (1.70)$$

Уравнения (I.68) – (I.69) можно попытаться преобразовать к обыкновенным дифференциальным уравнениям, как и в случае цилиндрической системы координат, двумя способами: 1) переходом к автомодельной переменной, составленной из переменных R и θ , и 2) методом разделения переменных.

Рассмотрим возможность построения автомодельного решения.

Необходимым условием этого является преобразование к автомодельному виду оператора E^2 , достаточным же – преобразование самих уравнений (I.68), (I.69).

Автомодельную переменную будем искать в виде

$$\eta = F(R)\Phi(\theta). \quad (I.71)$$

Сначала рассмотрим функцию тока в виде

$$\psi = T(R)\Omega(\eta). \quad (I.72)$$

Оператор E^2 перейдет в (штрихи означают дифференцирование по переменным, от которых зависят функции):

$$E^2\psi = T''\Omega + \frac{2\eta T'F'\Omega'}{F} + T\left(\frac{\eta F''\Omega'}{F} + \left(\frac{F'}{F}\right)^2 \eta^2 \Omega''\right) + \frac{TF[(\Phi''\Omega' + \Phi'^2)\sin\theta - \Omega'\Phi'\cos\theta]}{R^2 \sin\theta}. \quad (I.73)$$

Выражение (I.67) будет автомодельным, если все множители, не зависящие от η , будут постоянными:

$$T'' = a_1, \quad \frac{T'F'}{F} = a_2, \quad \frac{TF''}{F} = a_3, \quad T\left(\frac{F'}{F}\right)^2 = a_4, \quad \frac{TF\Phi''}{R^2} = a_5, \\ \frac{TF^2\Phi'^2}{R^2} = a_6, \quad \frac{TF\Phi'\cos\theta}{R^2 \sin\theta} = a_7. \quad (I.74)$$

Система (I.74) не имеет нетривиальных решений, следовательно, построить автомодельное решение с функцией тока (I.73) невозможно.

Рассмотрим функцию тока в виде

$$\psi = K(\theta)\Omega(\eta). \quad (I.75)$$

При этом оператор E^2 примет вид:

$$E^2\psi = F''\Phi K\Omega' + F'^2\Phi^2 K\Omega'' + \frac{F\Phi'}{R^2 \sin\theta} \left[\{K''\Omega + 2FK'\Phi'\Omega + KF\Phi''\Omega' + KF^2\Phi'^2\Omega''\} \sin\theta - \{K'\Omega + KF\Phi'\Omega'\} \cos\theta \right]. \quad (I.76)$$

Выражение (I.76) будет автомодельным, если все множители, не зависящие от η , будут постоянными:

$$F''\Phi K = a_1, F'^2\Phi^2 K = a_2, \frac{F\Phi'K''}{R^2} = a_3, \frac{F^2K'\Phi'^2}{R^2} = a_4, \frac{F^2K\Phi''}{R^2} = a_5, \frac{F^3K\Phi'^3}{R^2} = a_6, \\ \frac{F\Phi'K'}{R^2} \operatorname{ctg}\theta = a_7, \frac{F^2K\Phi'}{R^2} \operatorname{ctg}\theta = a_8. \quad (I.77)$$

Система (I.77) не имеет нетривиальных решений, следовательно, построить автомодельное решение с функцией тока (I.75) невозможно.

Полученные результаты показывают, что построить точное автомодельное решение уравнений Навье-Стокса в сферических координатах невозможно.

Рассмотрим возможность построения обыкновенного дифференциального уравнения методом разделения переменных.

Функцию тока ψ будем искать в виде

$$\psi = F(R)\Phi(\theta), \quad (I.78)$$

а азимутальную скорость – в виде

$$V_\varphi = W(R)\Omega(\theta). \quad (I.79)$$

После подстановки (I.78) – (I.79) в уравнения (I.68) – (I.69) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{(2 + \cos 2\theta) FF'\Phi\Phi'}{\sin^3 \theta R^4} - \frac{4 \operatorname{ctg} \theta F^2\Phi'^2}{\sin^3 \theta R^5} + \frac{\operatorname{ctg} \theta FF'\Phi'^2}{\sin \theta R^4} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta F'F''\Phi^2}{\sin \theta R^2} + \frac{2 FF''\Phi\Phi'}{\sin \theta R^3} + \\ & + \frac{1 F'F''\Phi\Phi'}{\sin \theta R^2} - \frac{3 \operatorname{ctg} \theta FF'\Phi\Phi''}{\sin \theta R^4} + \frac{4 F^2\Phi'\Phi''}{\sin \theta R^5} - \frac{1 FF'\Phi'\Phi''}{\sin \theta R^4} - \frac{1 FF'''\Phi\Phi'}{\sin \theta R^2} + \\ & + \frac{1 FF'\Phi\Phi'''}{\sin \theta R^4} + \nu \left\{ \frac{3(\cos 3\theta - 3\cos \theta) F\Phi'}{2\sin^3 \theta R^4} + 4 \operatorname{ctg} \theta \frac{F'\Phi'}{R^3} - 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{F''\Phi'}{R^2} + \right. \\ & \left. + \frac{5}{8} \left(8 + \frac{5}{\sin^2 \theta} \right) \frac{F\Phi''}{R^4} - 4 \frac{F'\Phi''}{R^3} + 2 \frac{F''\Phi''}{R^2} - 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{F\Phi'''}{R^4} + F^{IV}\Phi + \frac{F\Phi^{IV}}{R^4} \right\} - \\ & - 2 \cos \theta WW'\Omega^2 + 2 \sin \theta \frac{W^2\Omega\Omega'}{R} = 0, \quad (I.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nu \left\{ 2 \sin^2 \theta R^2 \Omega W' + \sin \theta \cos \theta RW\Omega' + \sin^2 \theta R^3 \Omega W'' + \sin^2 \theta RW\Omega'' - RW\Omega \right\} + \\ & + \cos \theta RF'\Phi W\Omega - \sin \theta FW\Omega\Phi' - \sin \theta RF\Phi'\Omega W' + \sin \theta R\Phi W F'\Omega' = 0. \quad (I.81) \end{aligned}$$

Существует две возможности преобразовать уравнения (I.80) - (I.81) в обыкновенные уравнения: 1) получить уравнения относительно R ; 2) получить уравнения относительно θ . Рассмотрим оба случая.

1) Преобразуем уравнения (I.80) – (I.81) в уравнения относительно R . Для этого разделим (I.80) на $\Phi(\theta)$, а (I.81) – на $\sin^2 \theta \Omega(\theta)$. В результате (I.80) и (I.81) перейдут в:

$$\begin{aligned}
& \frac{(2 + \cos 2\theta) FF'\Phi'}{\sin^3 \theta R^4} - \frac{4 \operatorname{ctg} \theta F^2 \Phi'^2}{\sin^3 \theta R^5 \Phi} + \frac{\operatorname{ctg} \theta FF'\Phi'^2}{\sin \theta R^4 \Phi} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta F'F''\Phi}{\sin \theta R^2} + \frac{2 FF''\Phi'}{\sin \theta R^3} + \\
& + \frac{1 F'F''\Phi'}{\sin \theta R^2} - \frac{3 \operatorname{ctg} \theta FF'\Phi''}{\sin \theta R^4} + \frac{4 F^2 \Phi'\Phi''}{\sin \theta R^5 \Phi} - \frac{1 FF'\Phi'\Phi''}{\sin \theta R^4 \Phi} - \frac{1 FF'''\Phi'}{\sin \theta R^2} + \\
& + \frac{1 FF'\Phi'''}{\sin \theta R^4} + \nu \left\{ \frac{3(\cos 3\theta - 3 \cos \theta) F\Phi'}{2 \sin^3 \theta R^4 \Phi} + 4 \operatorname{ctg} \theta \frac{F'\Phi'}{R^3 \Phi} - 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{F''\Phi'}{R^2 \Phi} + \right. \\
& + \left. \frac{5}{8} \left(8 + \frac{5}{\sin^2 \theta} \right) \frac{F\Phi''}{R^4 \Phi} - 4 \frac{F'\Phi''}{R^3 \Phi} + 2 \frac{F''\Phi''}{R^2 \Phi} - 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{F\Phi'''}{R^4 \Phi} + F^{IV} + \frac{F\Phi^{IV}}{R^4 \Phi} \right\} - \\
& - 2 \cos \theta \frac{WW'\Omega^2}{\Phi} + 2 \sin \theta \frac{W^2 \Omega \Omega'}{R\Phi} = 0, \tag{I.82}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nu \left\{ 2 R^2 W' + \operatorname{ctg} \theta \frac{RW\Omega'}{\Omega} + R^3 W'' + \frac{\Omega'' RW}{\Omega} - \frac{RW}{\sin^2 \theta} \right\} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} RF'\Phi W - \\
& - \frac{1}{\sin \theta} FW\Phi' - \frac{1}{\sin \theta} RF\Phi'W' + \frac{1}{\sin \theta} \frac{R\Phi WF'\Omega'}{\Omega} = 0. \tag{I.83}
\end{aligned}$$

Уравнения (I.82) и (I.83) будут зависеть только от R , если все множители, зависящие от θ , будут постоянными (так как коэффициенты при νF^{IV} в (I.82) и $\nu R^3 W''$ в (I.83) – постоянные). В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{2 + \cos 2\theta}{\sin^3 \theta} \Phi' = a_1, \quad \frac{\operatorname{ctg} \theta \Phi'^2}{\sin^3 \theta \Phi} = a_2, \quad \frac{\operatorname{ctg} \theta \Phi'^2}{\sin \theta \Phi} = a_3, \quad \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \Phi = a_4, \quad \frac{\Phi'}{\sin \theta} = a_5, \\
& \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \Phi'' = a_6, \quad \frac{\Phi'\Phi''}{\Phi \sin \theta} = a_7, \quad \frac{\Phi'''}{\sin \theta} = a_8, \quad \frac{\cos 3\theta - 3 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \frac{\Phi'}{\Phi} = a_9, \\
& \operatorname{ctg} \theta \frac{\Phi'}{\Phi} = a_{10}, \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = a_{11}, \quad \frac{\Phi''}{\Phi} = a_{12}, \quad \operatorname{ctg} \theta \frac{\Phi'''}{\Phi} = a_{13}, \quad \frac{\Phi^{IV}}{\Phi} = a_{14}, \quad \cos \theta \frac{\Omega^2}{\Phi} = a_{15}, \\
& \sin \theta \frac{\Omega \Omega'}{\Phi} = a_{16}, \quad \operatorname{ctg} \theta \frac{\Omega'}{\Omega} = a_{17}, \quad \frac{\Omega''}{\Omega} - \frac{1}{\sin^2 \theta} = a_{18}, \quad \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \Phi = a_{19}, \quad \frac{1}{\sin \theta} \Phi \frac{\Omega'}{\Omega} = a_{20}. \tag{I.84}
\end{aligned}$$

Система (I.84) не имеет нетривиального решения, следовательно, построить уравнения, зависящие только от R , невозможно. (Противоречивость уравнений системы можно показать на следующем примере: рассмотрим уравнения $\frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \Phi = a_4$ и $\frac{\Phi'}{\sin \theta} = a_5$. Из первого уравнения получаем, что $\Phi = a_4 \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$, а из второго – $\Phi = \int \Phi' d\theta = a_5 \int \sin \theta d\theta = -a_5 \cos \theta + const$. Уравнения для определения одной и той же функции имеют совершенно разные решения, следовательно, система (I.84) не имеет нетривиального решения.)

2) Преобразуем уравнения (I.80) – (I.81) в уравнения относительно θ . Для этого разделим (I.80) на $F(R)/R^4$, а (I.81) – на $RW(R)$. В результате (I.80) и (I.81) перейдут в:

$$\begin{aligned}
& \frac{(2 + \cos 2\theta)}{\sin^3 \theta} F' \Phi \Phi' - \frac{4 \operatorname{ctg} \theta}{\sin^3 \theta} \frac{F \Phi'^2}{R} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} F' \Phi'^2 - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{R^2 F' F'' \Phi^2}{F} + \frac{2}{\sin \theta} R F'' \Phi \Phi' + \\
& + \frac{1}{\sin \theta} \frac{R^2 F' F'' \Phi \Phi'}{F} - \frac{3 \operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} F' \Phi \Phi'' + \frac{4}{\sin \theta} \frac{F \Phi' \Phi''}{R} - \frac{1}{\sin \theta} F' \Phi' \Phi'' - \frac{1}{\sin \theta} R^2 F''' \Phi \Phi' + \\
& + \frac{1}{\sin \theta} F' \Phi \Phi''' + \nu \left\{ \frac{3(\cos 3\theta - 3 \cos \theta)}{2 \sin^3 \theta} \Phi' + 4 \operatorname{ctg} \theta \frac{R F' \Phi'}{F} - 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{R^2 F'' \Phi'}{F} + \frac{5}{8} \left(8 + \frac{5}{\sin^2 \theta} \right) \Phi'' - \right. \\
& \quad \left. - 4 \frac{R F' \Phi''}{F} + 2 \frac{R^2 F'' \Phi''}{F} - 2 \operatorname{ctg} \theta \Phi''' + \frac{R^4 F^{IV} \Phi}{F} + \Phi^{IV} \right\} - \\
& \quad - 2 \cos \theta W W' \Omega^2 + 2 \sin \theta \frac{W^2 \Omega \Omega'}{R} = 0, \tag{I.85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nu \left\{ 2 \sin^2 \theta \frac{R \Omega W'}{W} + \sin \theta \cos \theta \Omega' + \sin^2 \theta \frac{R^2 \Omega W''}{W} + \sin^2 \theta \Omega'' - \Omega \right\} + \cos \theta F' \Phi \Omega - \\
& \quad - \sin \theta \frac{F \Omega \Phi'}{R} - \sin \theta \frac{F \Phi' \Omega W'}{W} + \sin \theta \Phi F' \Omega' = 0. \tag{I.86}
\end{aligned}$$

Система (I.85) – (I.86) будет зависеть только от θ , если все множители, зависящие от R , будут постоянными (так как множители при Φ^{IV} в (I.85) и при Ω в (I.86) – постоянные):

$$\begin{aligned}
F' = a_1, \quad \frac{F}{R} = a_2, \quad \frac{R^2 F' F''}{F} = a_3, \quad R F'' = a_4, \quad R^2 F''' = a_5, \quad \frac{R F'}{F} = a_6 = \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{R^4 F^{IV}}{F} = a_7, \\
\frac{R^4 W W'}{F} = a_8, \quad \frac{R^3 W^2}{F} = a_9, \quad \frac{R W'}{W} = a_{10}, \quad \frac{R^2 W''}{W} = a_{11}, \quad \frac{F W'}{W} = a_{12}, \quad \frac{R^2 F''}{F} = a_{13}. \tag{I.87}
\end{aligned}$$

Система (I.84) имеет решение:

$$\begin{aligned}
F = a_2 R, \quad W = \frac{\sqrt{-a_1 a_8}}{R}, \quad a_1 = a_2, \quad a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = a_{13} = 0, \quad a_6 = 1, \quad a_9 = a_8, \\
a_{10} = -1, \quad a_{11} = 1, \quad a_{12} = -a_2 = -a_1, \quad a_1 a_8 < 0 \text{ (для действительности уравнений)}. \tag{I.88}
\end{aligned}$$

Следовательно, используя метод разделения переменных, можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение относительно θ , связывающее функции $\Phi(\theta)$ и $\Omega(\theta)$, если функции $F(R)$ и $W(R)$ брать в виде (I.88). Сами же уравнения (I.85) – (I.86) (и соответственно (I.80) – (I.81)) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
& a_1 \frac{(2 + \cos 2\theta)}{\sin^3 \theta} \Phi \Phi' - a_1 \frac{4 \operatorname{ctg} \theta}{\sin^3 \theta} \Phi'^2 + a_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \Phi'^2 - a_1 \frac{3 \operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \Phi \Phi'' + a_1 \frac{3}{\sin \theta} \Phi' \Phi'' + \\
& + a_1 \frac{1}{\sin \theta} \Phi \Phi''' + \nu \left\{ \frac{3(\cos 3\theta - 3 \cos \theta)}{2 \sin^3 \theta} \Phi' + 4 \operatorname{ctg} \theta \Phi' + \frac{5}{8} \left(\frac{8}{5} + \frac{5}{\sin^2 \theta} \right) \Phi'' - \right. \\
& \quad \left. - 2 \operatorname{ctg} \theta \Phi''' + \Phi^{IV} \right\} - 2 a_8 \cos \theta \Omega^2 - 2 a_8 \sin \theta \Omega \Omega' = 0, \tag{I.89}
\end{aligned}$$

$$\nu \left\{ -\sin^2 \theta \Omega + \sin \theta \cos \theta \Omega' + \sin^2 \theta \Omega'' - \Omega \right\} + a_1 \cos \theta \Phi \Omega + a_1 \sin \theta \Phi \Omega' = 0. \quad (\text{I.90})$$

Для упрощения уравнений (I.89) – (I.90) можно принять

$$a_1 = \nu, \quad a_8 = -\nu, \quad (\text{I.91}),$$

что не противоречит размерности скорости, если считать функции $\Phi(\theta)$ и $\Omega(\theta)$ безразмерными. Действительно, если функцию тока ψ , определяемую выражением (I.78), написать с учетом (I.88), то получим

$$\psi(R, \theta) = a_1 R \Phi(\theta). \quad (\text{I.92})$$

Составляющие поля скорости в соответствии с (I.66), (I.67) и (I.88) будут следующими:

$$V_R = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{a_1 R}{R^2 \sin \theta} \Phi'(\theta) = \frac{a_1}{R \sin \theta} \Phi'(\theta),$$

$$V_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} = -\frac{a_1 \Phi(\theta)}{R \sin \theta}, \quad V_\varphi = W(R) \Omega(\theta) = \frac{\sqrt{-a_1 a_8}}{R} \Omega(\theta). \quad (\text{I.93})$$

Если считать, что функции $\Phi(\theta)$ и $\Omega(\theta)$ – безразмерные, то

$$[V_R] = [V] = \frac{L}{T} = \left[\frac{a_1 \Phi'(\theta)}{R \sin \theta} \right] = \left[\frac{a_1}{R} \right] \left[\frac{\Phi'(\theta)}{\sin \theta} \right] = \frac{[a_1]}{L} \Rightarrow [a_1] = \frac{L^2}{T} = [\nu], \quad (\text{I.94})$$

где V, L, T – размерности скорости, длины и времени соответственно. Из (I.94) следует, что размерность a_1 есть размерность кинематической вязкости ν .

Аналогично можно показать, что размерность a_8 тоже равна размерности ν , а последнее условие в (I.88) определяет знак.

Таким образом, взяв функцию тока в виде

$$\psi = \nu R \Phi(\theta), \quad (\text{I.95})$$

а азимутальную скорость –

$$V_\varphi = \frac{\nu}{R} \Omega(\theta), \quad (\text{I.96})$$

получим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной θ , описывающих точные решения в сферических координатах:

$$\begin{aligned} & \frac{(2 + \cos 2\theta)}{\sin^3 \theta} \Phi \Phi' + \frac{\text{ctg } \theta}{\sin \theta} \left(1 - \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \Phi'^2 - \frac{3 \text{ctg } \theta}{\sin \theta} \Phi \Phi'' + \frac{3}{\sin \theta} \Phi' \Phi'' + \\ & + \frac{1}{\sin \theta} \Phi \Phi''' + \frac{3(\cos 3\theta - 3 \cos \theta)}{2 \sin^3 \theta} \Phi' + 4 \text{ctg } \theta \Phi' + \frac{5}{8} \left(\frac{8}{5} + \frac{5}{\sin^2 \theta} \right) \Phi'' - 2 \text{ctg } \theta \Phi''' + \Phi^{IV} + \\ & + 2 \cos \theta \Omega^2 + 2 \sin \theta \Omega \Omega' = 0, \end{aligned} \quad (\text{I.97})$$

$$\sin^2 \theta \Omega'' + \sin \theta \cos \theta \Omega' - \sin^2 \theta \Omega - \Omega + \cos \theta \Phi \Omega + \sin \theta \Phi \Omega' = 0. \quad (\text{I.98})$$

Эти уравнения описывают все возможные точные решения в сферических координатах, которые можно свести к системе ОДУ методом разделения переменных.

1.5. Выводы.

В данном разделе были обобщены возможности построения точных автомодельных решений уравнений течения вязкой жидкости. Показано применение единого автомодельного подхода и метода разделения переменных. Ниже приведены краткие результаты для каждой системы координат.

1) Декартова система координат.

В декартовой системе координат возможно построение точного автомодельного решения только при выборе переменной автомодельности и функции тока в виде:

$$\psi = A f(y/Bx),$$

а возможные течения описываются уравнением

$$24\eta f' + 4\eta f'^2 + 12(1 + 3\eta^2)f'' + 2(1 + \eta^2)f'f'' + 12(1 + \eta^2)\eta f''' + (1 + \eta^2)^2 f^{IV} = 0.$$

В случае применения метода разделения переменных функция тока должна браться в виде

$$\psi = g(x)(ay + b),$$

а уравнение движения запишется в виде:

$$a(g'g'' + gg''') + \nu g^{IV} = 0.$$

Некоторые решения этого уравнения:

$$g(x) = -6\nu/ax; \quad g(x) = C_1x + C_2.$$

Первое из этих двух решений ранее в литературе не встречалось.

2) Полярная система координат.

В полярной системе координат показано, что допустим только метод разделения переменных. Возможно получение уравнений, зависящих как от переменной φ , так и от переменной r , причем функция тока в обоих случаях берется в форме $\psi = R(r)f(\varphi)$.

В случае, если уравнения зависят только от переменной φ , то уравнение движения примет вид:

$$f^{IV} + 4f'' + 2ff'' = 0.$$

В такой постановке функция тока и составляющие скорости будут следующими:

$$\psi = \nu f(\varphi), \quad V_r = \nu f'/r, \quad V_\varphi \equiv 0,$$

что соответствует радиальному растеканию или стоку жидкости из линейного источника/стока.

В случае если уравнения зависят только от переменной r , то $f = a_1 v \varphi + C$. При $C = 0$ уравнение движения примет вид:

$$a_1 \left[\left(R''' + \frac{R''}{r} - \frac{R'}{r^2} \right) \frac{R}{r} - \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) \frac{R'}{r} \right] = \frac{R'}{r^3} - \frac{R''}{r^2} + 2 \frac{R'''}{r} + R^{IV}.$$

В такой постановке

$$\psi = a_1 v \varphi R(r), \quad V_r = a_1 v R/r, \quad V_\varphi = -a_1 v \varphi R'.$$

Так как ограничений на функцию $f(\varphi)$ нет, то ее можно также взять в виде $f(\varphi) = \text{const}$, и уравнение движения перейдет в

$$\frac{R'}{r^3} - \frac{R''}{r^2} + 2 \frac{R'''}{r} + R^{IV} = 0,$$

решением которого будет выражение вида:

$$R(r) = Ar^2(\ln r - 1) + Br^2 + C \ln r + D.$$

В этом случае $\psi = \text{const} R(r)$, где $R(r)$ определяется решением уравнения, а составляющие скорости будут такими:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\text{const} \left[Ar(2 \ln r - 1) + 2Br + \frac{C}{r} \right].$$

В такой постановке возможны только вязкие безынерционные (стоксовы) вращательные движения жидкости.

Кроме указанных случаев возможны и другие варианты функции тока, приводящие уравнения гидродинамики к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В некоторых случаях вид функции тока определяется геометрией течения, и не всегда метод разделения переменных пригоден.

3) Цилиндрическая система координат.

В цилиндрической системе координат получены точные решения как применением автомодельного подхода, так и методом разделения переменных. Автором показано, что преобразование уравнений Навье-Стокса возможно только в случае выбора переменных и функций тока в одном из следующих вариантов:

- 1) $\eta = Br/z, \quad \psi = Ar f(\eta), \quad V_\varphi = C \Omega(\eta)/r;$
- 2) $\eta = Bz/r, \quad \psi = Az f(\eta), \quad V_\varphi = C \Omega(\eta)/z;$
- 3) $\eta = Br, \quad \psi = Azf(\eta), \quad V_\varphi = C \Omega(\eta);$
- 4) $\psi = a_1 z R(r), \quad V_\varphi = \sqrt{a_1 a_6 z} \Omega(r);$

$$5) \psi = a_3 r^2 \Phi(z), V_\varphi = \sqrt{a_3 a_8} r \theta(z).$$

Вариант 3) получен применением автомодельного подхода, но по форме он является разделением переменных. Причем его отличие от варианта 4) в том, что азимутальные скорости различаются.

Для каждого варианта автором получены системы уравнений, которые можно использовать без дополнительных преобразований сразу же после выбора вида постоянных в переменных и функциях тока.

4) Сферическая система координат.

В сферической системе координат показано, что допустим только метод разделения переменных. Возможно получить решения, зависящие *только* от переменной θ , причем функция тока должна быть в виде $\psi = \nu R \Phi(\theta)$, а азимутальная скорость – $V_\varphi = \frac{\nu}{R} \Omega(\theta)$. Соответствующая система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений будет следующей:

$$\begin{aligned} & \frac{(2 + \cos 2\theta)}{\sin^3 \theta} \Phi \Phi' + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \left(1 - \frac{4}{\sin^2 \theta} \right) \Phi'^2 - \frac{3 \operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \Phi \Phi'' + \frac{3}{\sin \theta} \Phi' \Phi'' + \\ & + \frac{1}{\sin \theta} \Phi \Phi''' + \frac{3(\cos 3\theta - 3 \cos \theta)}{2 \sin^3 \theta} \Phi' + 4 \operatorname{ctg} \theta \Phi' + \frac{5}{8} \left(\frac{8}{5} + \frac{5}{\sin^2 \theta} \right) \Phi'' - 2 \operatorname{ctg} \theta \Phi''' + \Phi^{IV} + \\ & + 2 \cos \theta \Omega^2 + 2 \sin \theta \Omega \Omega' = 0 \\ & \sin^2 \theta \Omega'' + \sin \theta \cos \theta \Omega' - \sin^2 \theta \Omega - \Omega + \cos \theta \Phi \Omega + \sin \theta \Phi F' \Omega' = 0. \end{aligned}$$

II. Решения в приближении пограничного слоя в гидродинамике.

II.i. Краткий обзор литературы.

Задач, рассмотренных в приближении пограничного слоя, предложенном Людвигом Прандтлем в 1904 г. [28], намного больше, чем точных решений, так как уравнения пограничного слоя являются упрощенным вариантом уравнений Навье-Стокса. При этом при этом подходе меняется тип дифференциальных уравнений: с эллиптического на параболический, что облегчает их решение, в том числе и преобразованием в обыкновенные дифференциальные уравнения. Полученные решения будут справедливы в области, находящейся достаточно далеко от начала координат, так как теория Прандтля является асимптотической.

В связи с широким практическим применением теории пограничного слоя, было решено большое количество задач этого типа в различных системах координат. Многие из этих решений были проверены экспериментально, и проверки показали хорошее совпадение экспериментальных данных с теоретическими. Ниже приведен краткий обзор наиболее известных классических задач в каждой системе координат.

Первой задачей, решенной в приближении пограничного слоя, является задача Блазиуса – об обтекании полубесконечной пластины набегающим потоком [4]. Задача решена с помощью автомодельного подхода в декартовой системе координат. Показатель степени $\frac{1}{2}$ выбран на основании анализа подобного нестационарного решения (первой задачи Стокса). При этом никакого строгого обоснования для выбора именно такой величины нет. Как показано в [70], в привлечении таких оценок нет необходимости, так как при применении автомодельного подхода в общем виде этот коэффициент является несущественным.

Среди ставших классическими задач можно выделить следующие:

1. в декартовой системе координат: плоская струя Шлихтинга, плоское течение в окрестности передней критической точки, пристенная струя Акатнова [36], смешение двух однородных потоков (задача Гертлера [10]), течение в суживающемся канале (задача Польгаузена [26]; точное решение можно получить в полярной системе координат), пограничный слой в неоднородном внешнем потоке (Фокнер-Скэн, [9]);

2. в полярной системе координат: течение в конфузоре/диффузоре, течение в суживающемся канале, течение между двумя соосными цилиндрами (аналог течения Куэтта);
3. в цилиндрической системе координат: разнообразные задачи теории струй (круглая струя Шлихтинга [70], струя Ландау [70], закрученная веерная струя Лойцянского [59], осесимметричная затопленная струя, бьющая вдоль прямого круглого конуса [60]). Многие задачи теории струй рассмотрены с учетом вращения жидкости в струе. В этой же системе координат рассматривались задачи о пространственном течении в окрестности критической точки, вращение жидкости над неподвижным диском и вращение диска в неподвижной жидкости, течение с линейным источником в круговом конусе [70], и множество других задач.
4. в сферической системе координат: самой известной задачей является задача об истечении струи жидкости из конца тонкой трубки в покоящуюся жидкость (струя Ландау), решенную в точной постановке Ландау [55].

Необходимо заметить, что (как это будет пояснено далее) в полярной и сферической системах координат нет возможности построить приближение пограничного слоя в соответствии с подходом Прандтля, что означает необходимость решать точные уравнения Навье-Стокса (см. раздел I).

Некоторые из вышеприведенных задач решены с учетом отсоса или вдува жидкости через твердые стенки. Этот прием позволяет управлять пограничным слоем, что часто используется в авиации для достижения необходимых режимов обтекания крыла воздухом и предотвращения срыва потока.

Как и в случае точных решений, при решении автомодельных задач теории пограничного слоя в декартовых и цилиндрических системах координат вид переменной автомодельности и функций тока либо подбирался, либо предполагался исходя из неких соображений или близких задач. Наверное, единственная монография, в которой была предпринята попытка систематизировать автомодельные решения в цилиндрических координатах – это [43]. В дальнейшем Э. Щербининым и его сотрудниками была начата классификация и систематизация возможных автомодельных решений в теории пограничного слоя (см. [18], [20], [30], [31], [38], [39], [41], [71], [73]). Часть этих результатов, в получении которых участвовал автор, использована в данной диссертации, хотя подход, использованный в предлагаемой работе, отличается от подхода, примененного в вышеуказанных публикациях.

Насколько известно автору, до настоящего момента не было достаточно полного обзора и анализа возможностей построения решений типа пограничного слоя в наиболее часто используемых системах координат. В настоящей работе предлагается единый подход к построению автомодельных решений в приближении пограничного слоя, а также изучается применимость метода разделения переменных. Также рассматривается связь между решениями типа пограничного слоя и точными решениями.

II. ii. Предварительные замечания.

Существует класс течений, в которых основные изменения в скорости потока происходят в узком по сравнению с самим течением слое. Так как этот слой обычно формируется вблизи твердых поверхностей, то есть на границе течения, то его назвали пограничным слоем. Толщину пограничного слоя δ можно задавать различными способами, например, взяв за толщину пограничного слоя расстояние, на котором величина изменения скорости составляет, скажем, до 1% от скорости внешнего потока. Впоследствии были предложены другие характеристики для оценки толщины пограничного слоя, которые гораздо меньше зависят от принятых процентов, например, толщина потери импульса ([51], [52])

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} (1 - u/V_{\infty}) u/V_{\infty} dy$$

или толщина вытеснения

$$\delta^* = \int_0^{\infty} (1 - u/V_{\infty}) dy.$$

Толщина вытеснения есть не что иное, как расстояние, на которое отодвигаются от тела линии тока внешнего течения вследствие образования пограничного слоя (вытесняющее действие пограничного слоя) [68].

Для описания процессов, происходящих в пограничном слое, Прандтлем [28] было предложено считать, что скорость изменения характеризующих течение величин вдоль пограничного слоя намного меньше скорости изменения тех же величин поперек пограничного слоя. На этом основании в операторе Лапласа ∇^2 предлагается пренебречь одним из слагаемых по сравнению со вторым (выбор слагаемых зависит от конфигурации течения). Причиной таких различий в скорости изменения величин может являться как форма области течения, так и величины характеристик течения: скорость обтекания, расход, импульс, момент вращения и т. п.

В этом разделе будет рассмотрена возможность построения автомодельных решений уравнений Навье – Стокса в приближении пограничного слоя в различных системах координат.

II.1. Гидродинамический пограничный слой в декартовых координатах.

При построении решения в приближении пограничного слоя принимают, что $\partial^2/\partial x^2 = 0$, то есть пренебрегают скоростью изменений характеристик течения вдоль оси Ox по сравнению с изменением вдоль оси Oy (вообще говоря, в декартовой системе координаты x и y равноправны, и заменой переменных можно условие $\partial^2/\partial x^2 = 0$ перевести в условие $\partial^2/\partial y^2 = 0$ [72]). Рассмотрим случаи, в которых это можно сделать. Анализ точных решений уравнений Навье – Стокса в декартовых координатах (пункт I.1) показывает, что автомодельное решение и автомодельная переменная представляют собой степенные функции (I.12). Приняв автомодельную переменную и гидродинамическую функцию тока в виде

$$\eta = y/\delta(x), \quad \psi(x, y) = \psi_m(x)f(y/\delta(x)), \quad \psi_m = Ax^\alpha, \quad \delta = Bx^\beta, \quad (\text{II.1})$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \psi_m'' f - \frac{\psi_m' \delta'}{\delta} \eta f' - \left(\frac{\psi_m \delta'}{\delta} \right)' \eta f' + \psi_m \left(\frac{\delta'}{\delta} \right)^2 \eta (\eta f')' = \\ &= Ax^{\alpha-2} \left(\alpha(\alpha-1)f - 2\alpha\beta\eta f' + \beta\eta f'' + \beta^2\eta(\eta f')' \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\psi_m}{\delta^2} f'' = \frac{A}{B^2} x^{\alpha-2\beta} f''.$$

$\partial^2 \psi/\partial x^2$ будет иметь по x меньший порядок, чем $\partial^2 \psi/\partial y^2$, если $x^{\alpha-2} < x^{\alpha-2\beta}$ или $\alpha - 2 < \alpha - 2\beta$. Следовательно, для построения решения в приближении пограничного слоя необходимо принимать

$$\beta < 1. \quad (\text{II.2})$$

Значение числа β определяется из граничных и/или интегральных условий решаемой задачи. Например, для задачи об обтекании набегающим потоком плоской пластины (задача Блазиуса [4]) значение β будет равно $1/2$, для ламинарной затопленной струи (задача Шлихтинга [68]) $\beta = 2/3$.

Уравнение (I.7) для пограничного слоя примет вид:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} = \nu \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}. \quad (\text{II.3})$$

Подставляя $\psi(x, y) = \psi_m(x)f(y/\delta(x))$ и переходя к переменной (I.8), будем иметь:

$$\left(\frac{\psi_m \psi_m'}{\delta^3} - \frac{2\psi_m^2 \delta'}{\delta^4} \right) f f'' - \frac{\psi_m \psi_m'}{\delta^3} f f''' - v \frac{\psi_m}{\delta^4} f^{IV} = 0. \quad (\text{II.4})$$

Разделив уравнение (II.4) на $-v\psi_m/\delta^4$, получим

$$f^{IV} + \frac{\psi_m' \delta}{v} f f''' - \frac{1}{v} (\psi_m' \delta - 2\psi_m \delta') f f'' = 0. \quad (\text{II.5})$$

Для автомодельности коэффициенты перед $f f'''$ и $f f''$ должны иметь тот же порядок по x , что и коэффициент при f^{IV} , то есть x^0 . Решение системы дифференциальных уравнений ($a, b = \text{const}$)

$$\begin{cases} \frac{\psi_m' \delta}{v} = a \\ \frac{\psi_m \delta'}{v} = b \end{cases}$$

относительно функций $\psi_m(x)$ и $\delta(x)$ будет следующим ($a \neq -b$):

$$\delta(x) = C_1 \left[\left(\frac{v(a+b)x - C_2}{C_1} \right)^{\frac{b}{a+b}} \right], \quad \psi_m(x) = \left(\frac{v(a+b)x - C_2}{C_1} \right)^{\frac{a}{a+b}}.$$

Считая, что переменная η и функция f – безразмерные, получим, что и функция $\delta(x)$ должна иметь размерность L – длины, а $\psi_m(x)$ – размерность v – вязкости. Это следует из того, что производные функции тока ψ по координатам x, y должны иметь размерность скорости V , следовательно, размерность ψ – размерность вязкости. Если принять $C_2 = 0$, а $C_1 = v^{-b/a}$, то

$$\delta(x) = ((a+b)x)^{\frac{b}{a+b}}, \quad \psi_m(x) = v((a+b)x)^{\frac{a}{a+b}}, \quad (\text{II.6})$$

то есть обе функции действительно являются степенными функциями, и проведенный в начале параграфа анализ корректен (так как функция тока определяется с точностью до аддитивной постоянной, то выбор $C_2 = 0$ обоснован, к тому же упрощается вид функций и их анализ).

Из (II.6) можно получить связь между $\psi_m(x)$ и $\delta(x)$, которая будет универсальной для всех задач автомодельного пограничного слоя

$$\psi_m(x) = v \delta(x)^{a/b}. \quad (\text{II.7})$$

Уравнение (II.5) примет вид:

$$f^{IV} + a f f''' - (a - 2b) f f'' = 0. \quad (\text{II.8})$$

В случае $a = -b$ функции $\psi_m(x)$ и $\delta(x)$ будут не степенными, а показательными:

$$\delta = C_1 e^{-\frac{-bx+C_2}{C_1}}, \quad \psi_m(x) = e^{-\frac{-bx+C_2}{C_1}}$$

или

$$\delta = C_1 e^{-\frac{C_2}{C_1} - \frac{bx}{C_1}}, \quad \psi_m(x) = e^{\frac{C_2}{C_1} - \frac{bx}{C_1}}.$$

Большее число задач автомодельного пограничного слоя изучено в случае, когда функции $\psi_m(x)$ и $\delta(x)$ имеют степенной вид, поэтому при решении задач в приближении пограничного слоя будем рассматривать только этот вариант.

Если взять функции $\psi_m(x)$ и $\delta(x)$ в виде (II.1), то уравнение (II.5) запишется в виде

$$f^{IV} + \alpha \frac{AB}{\nu} x^{\alpha+\beta-1} ff''' - (\alpha - 2\beta) \frac{AB}{\nu} x^{\alpha+\beta-1} ff'' = 0. \quad (\text{II.10})$$

Для автомодельности необходимо, чтобы

$$\alpha = 1 - \beta, \quad (\beta < 1) \quad (\text{II.11})$$

и тогда (II.10) примет вид:

$$f^{IV} + (1 - \beta) \frac{AB}{\nu} ff''' - (1 - 3\beta) \frac{AB}{\nu} ff'' = 0. \quad (\text{II.12})$$

Функция тока ψ и переменная η в этом случае будут следующими:

$$\psi = Ax^{1-\beta} f(\eta), \quad \eta = y/(Bx^\beta). \quad (\text{II.13})$$

Для того, чтобы уравнение (II.12) было безразмерным, коэффициенты A и B должны иметь следующие размерности:

$$[AB] = [\nu] = L^2/T, \quad [B] = L^{1-\beta}, \quad [A] = L^{\beta+1}/T. \quad (\text{II.14})$$

Применение метода разделения переменных в теории пограничного слоя в рамках предлагаемого подхода не представляется возможным, так как нет возможности оценить порядки слагаемых в операторе Лапласа и определить, при каких условиях каким из слагаемых можно пренебречь. Но, приняв в (II.1) $\alpha = 1$, $\beta = 0$ получим, что первое слагаемое в ∇^2 автоматически зануляется. Этот выбор не противоречит условию (II.2), но фактически получается точное решение, одновременно являющееся решением в приближении пограничного слоя, и к тому же вид переменной и функции тока соответствует методу разделения переменных.

II.2. Гидродинамический пограничный слой в полярных координатах.

При рассмотрении точных решений в полярных координатах (пункт. I.2) было показано, что размерности слагаемых в операторе E^2 существенно различны, поэтому решение можно искать только методом разделения переменных. При использовании этого метода невозможно сравнивать между собой порядки слагаемых по какой-либо из переменных, следовательно, подход, примененный в пункте II.1, неприменим в полярных координатах. Тем не менее, получение решения типа пограничного слоя в данной системе координат возможно. Для этого необходимо решать задачу в полной постановке, а формирование пограничного слоя будет обеспечиваться достаточным для этого изменением граничных условий либо интегральных характеристик течения: скорость набегающего потока, скорость границ течения, импульс струи, момент вращения, расход и т.п.

II.3. Гидродинамический осесимметричный пограничный слой в цилиндрических координатах.

В приближении пограничного слоя для получения уравнений пренебрегают одним из слагаемых в операторе $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ по сравнению с другими.

Определим, при каких условиях можно пренебречь первым слагаемым в E^2 по сравнению со вторым, и наоборот, в каждом из случаев (I.37,а) и (I.37,б) ([72]).

Если функцию тока взять в виде (I.37,а), то

$$E^2 \psi = \frac{A \eta r^{\alpha + \frac{2\gamma}{\beta}} B^{\frac{2}{\beta}}}{\eta^{\frac{2}{\beta}}} \beta ((\beta - 1) f' + \eta \beta f'') +$$

$$+ A r^{\alpha - 2} ((\alpha - 2) \alpha f + \eta \gamma (2\alpha + \gamma - 2) f' + \eta^2 \gamma^2 f''). \quad (\text{II.15})$$

Первое слагаемое будет иметь больший порядок по r , чем второе, при условии

$$\gamma / \beta > -1, \quad (\text{II.16})$$

а порядок второго слагаемого будет больше при

$$\gamma / \beta < -1. \quad (\text{II.17})$$

Если функцию тока взять в виде (I.37,б), то

$$\begin{aligned}
E^2 \psi = & A z^{\alpha-2} ((\alpha-1)\alpha f + \eta\beta(2\alpha + \beta - 1)f' + \eta^2 \beta^2 f'') + \\
& + A \eta z^{\alpha + \frac{2\beta}{\gamma}} \frac{B^\gamma}{\eta^\gamma} \gamma ((\gamma-2)f' + \eta\gamma f'').
\end{aligned} \tag{II.18}$$

Порядок первого слагаемого по z будет больше, чем порядок второго, при

$$\beta/\gamma < -1, \tag{II.19}$$

а порядок второго будет больше, чем порядок первого, при

$$\beta/\gamma > -1. \tag{II.20}$$

Формально можно построить 4 вида пограничных слоев: 2 при использовании функции тока (I.37,а) в случаях (II.16) и (II.17) и 2 при использовании функции тока (I.37,б) в случаях (II.19) и (II.20).

1. Возьмем функцию тока в виде (I.37,а) $\psi = A r^\alpha f(\eta)$, вращательную скорость – в виде $V_\varphi = C r^d \Omega(\eta)$, а в операторе E^2 пренебрежем вторым слагаемым по сравнению с первым (условие (II.16)). Тогда уравнение (I.32) и (I.34) перейдут в:

$$\begin{aligned}
& A^2 \eta r^{2\alpha-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B}\right)^{1/\beta} (\beta-1)((\alpha-2)\beta + 2\gamma) f'^2 + 2C^2 r^{2(d+1)-3\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B}\right)^{3/\beta} \Omega \Omega' + \\
& + A \nu r^{\alpha+2} (\beta-1)(\beta-2)(\beta-3) f' - A^2 r^{2\alpha-\gamma/\beta} \alpha (\beta-1)(\beta-2) \left(\frac{\eta}{B}\right)^{1/\beta} f f' + \\
& + A^2 r^{2\alpha-\gamma/\beta} \eta^2 \left(\frac{\eta}{B}\right)^{1/\beta} \beta ((\alpha-2)\beta + 2\gamma) f f'' + A \nu r^{\alpha+2} \eta \beta (\beta-1)(7\beta-11) f'' - \\
& - 3A^2 r^{2\alpha-\gamma/\beta} \eta \alpha \beta (\beta-1) \left(\frac{\eta}{B}\right)^{1/\beta} f f'' + 6A \nu r^{\alpha+2} \eta^2 \beta^2 (\beta-1) f''' - \\
& - A^2 r^{2\alpha-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B}\right)^{1/\beta} \alpha \beta^2 \eta^2 f f''' + A \nu r^{\alpha+2} \eta^3 \beta^3 f^{IV} = 0,
\end{aligned} \tag{II.21}$$

$$A(d+1)r^{\alpha-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B}\right)^{1/\beta} \Omega f' + r^2 \nu (\beta-1) \Omega' - A r^{\alpha-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B}\right)^{1/\beta} \alpha f \Omega' + r^2 \nu \beta \eta \Omega'' = 0. \tag{II.22}$$

Приравнивая порядки слагаемых по r в (II.21), получим систему равенств:

$$2\alpha - \frac{\gamma}{\beta} = 2 + 2d - \frac{3\gamma}{\beta} = \alpha + 2. \tag{II.23}$$

Откуда получаем связь между α, β, γ и d :

$$\alpha = \gamma/\beta + 2, \quad d = 2\gamma/\beta + 1. \tag{II.24}$$

а условие (II.16) $\gamma/\beta > -1$ дает дополнительные условия:

$$\alpha > 1, \quad d > -1. \tag{II.25}$$

Уравнения (II.21) и (II.22) перепишутся в виде:

$$\begin{aligned}
& A^2 \eta \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} (\beta-1)((\alpha-2)\beta+2\gamma) f'^2 + 2C^2 \left(\frac{\eta}{B} \right)^{3/\beta} \Omega \Omega' + \\
& + Av(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3) f' - A^2 \alpha (\beta-1)(\beta-2) \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} f f' + \\
& + A^2 \eta^2 \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \beta((\alpha-2)\beta+2\gamma) f f'' + Av \eta \beta (\beta-1)(7\beta-11) f'' - \\
& - 3A^2 \eta \alpha \beta (\beta-1) \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} f f'' + 6Av \eta^2 \beta^2 (\beta-1) f''' - \\
& - A^2 \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \alpha \beta^2 \eta^2 f f''' + Av \eta^3 \beta^3 f^{IV} = 0, \tag{II.26}
\end{aligned}$$

$$A(d+1) \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \Omega f' + v(\beta-1) \Omega' - A \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \alpha f \Omega' + v \beta \eta \Omega'' = 0. \tag{II.27}$$

2. Функцию тока оставим ту же – (I.37,а), как и вращательную скорость – $V_\phi = Cr^d \Omega(\eta)$, а в операторе E^2 пренебрежем первым слагаемым (условие (II.17)). В этом случае уравнения (I.32) и (I.34) станут следующими:

$$\begin{aligned}
& Av r^{\alpha-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \alpha(\alpha-2)(\alpha-4) f + Av r^{\alpha-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma(2\alpha^2+2\alpha(\gamma-4)+(\gamma-2)^2) \eta f' - \\
& - A^2 r^{2\alpha} \alpha \beta (2+\gamma)(2\alpha+\gamma-4) \eta f f' - 2C^2 r^{2(2+d)} \beta \eta \Omega \Omega' + A^2 r^{2\alpha} \beta \gamma (\alpha-4)(2\alpha+\gamma-2) \eta^2 f'^2 + \\
& + Av r^{\alpha-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma^2 (20+6\alpha(\alpha-4)-24\gamma+12\alpha\gamma+7\gamma^2) \eta^2 f'' - \\
& - A^2 r^{2\alpha} \alpha \beta \gamma (2\alpha+3\gamma-2) \eta^2 f f'' + A^2 r^{2\alpha} \beta \gamma^2 (\alpha-4) \eta^3 f f'' + \\
& + 2Av r^{\alpha-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma^3 (2\alpha+3\gamma-4) \eta^3 f''' - A^2 r^{2\alpha} \alpha \beta \gamma^2 \eta^3 f f''' + \\
& + Av r^{\alpha-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma^4 \eta^4 f^{IV} = 0, \tag{II.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v r^{-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} (d^2-1) \Omega + Ar^\alpha \beta \eta f' \Omega + v r^{-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma(2d+\gamma) \eta \Omega' - \\
& - Ar^\alpha \alpha \beta \eta f \Omega' + v r^{-\gamma/\beta} \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma^2 \eta \Omega'' = 0. \tag{II.29}
\end{aligned}$$

Приравнявая в (II.28) порядки слагаемых по r , получим систему равенств:

$$\alpha - \frac{\gamma}{\beta} = 2\alpha = 2(d+2), \quad (\text{II.30})$$

откуда получаем связь между α, β, γ и d :

$$\alpha = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad d = -\frac{\gamma}{\beta} - 2, \quad (\text{II.31})$$

а условие (II.17) $\gamma/\beta < -1$ дает дополнительные условия:

$$\alpha > 1, \quad d > -1. \quad (\text{II.32})$$

которые совпадают с (II.25). Уравнения (II.28) и (II.29) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} & Av \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \alpha (\alpha - 2)^2 (\alpha - 4) f + Av \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma (2\alpha^2 + 2\alpha(\gamma - 4) + (\gamma - 2)^2) \eta f' - \\ & - A^2 \alpha \beta (2 + \gamma) (2\alpha + \gamma - 4) \eta f f' - 2C^2 \beta \eta \Omega \Omega' + A^2 \beta \gamma (\alpha - 4) (2\alpha + \gamma - 2) \eta^2 f'^2 + \\ & + Av \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma^2 (20 + 6\alpha(\alpha - 4) - 24\gamma + 12\alpha\gamma + 7\gamma^2) \eta^2 f'' - \\ & - A^2 \alpha \beta \gamma (2\alpha + 3\gamma - 2) \eta^2 f f'' + A^2 \beta \gamma^2 (\alpha - 4) \eta^3 f f'' + \\ & + 2Av \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma^3 (2\alpha + 3\gamma - 4) \eta^3 f''' - A^2 \alpha \beta \gamma^2 \eta^3 f f''' + \\ & + Av \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma^4 \eta^4 f^{IV} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

$$\begin{aligned} & v \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} (d^2 - 1) \Omega + A \beta \eta f' \Omega + v \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma (2d + \gamma) \eta \Omega' - \\ & - A \alpha \beta \eta f \Omega' + v \left(\frac{\eta}{B} \right)^{1/\beta} \gamma^2 \eta \Omega'' = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

3. Теперь рассмотрим функцию тока в виде (I.37,б): $\psi = Az^\alpha f(\eta)$, вращательную скорость – в виде $V_\phi = Cz^d \Omega(\eta)$, а в операторе E^2 оставим первое слагаемое (условие (II.19)). Уравнения (I.32) и (I.34) примут вид:

$$\begin{aligned} & -2A^2 B^{3/\gamma} z^{-3+2\alpha+\frac{3\beta}{\gamma}} (-1+\alpha) \alpha^2 \eta^{-3/\gamma} f^2 + \\ & + A^2 B^{3/\gamma} z^{-3+2\alpha+\frac{3\beta}{\gamma}} \alpha (-2\beta(-2+3\alpha+\beta) + (1+\beta)(-2+2\alpha+\beta)\gamma) \eta^{-\frac{3+\gamma}{\gamma}} f f' - \\ & - A^2 B^{3/\gamma} z^{-3+2\alpha+\frac{3\beta}{\gamma}} \beta (-1+2\alpha+\beta) (2\beta+(-2+\alpha)\gamma) \eta^{2-\frac{3}{\gamma}} f^2 - 2B^{1/\gamma} C^2 dz^{-1+2d+\frac{\beta}{\gamma}} \eta^{-1/\gamma} \Omega^2 - \\ & - 2B^{1/\gamma} C^2 z^{-1+2d+\frac{\beta}{\gamma}} \beta \eta^{1-\frac{1}{\gamma}} \Omega \Omega' + A^2 B^{3/\gamma} z^{-3+2\alpha+\frac{3\beta}{\gamma}} \alpha \beta (-2\beta+(-1+2\alpha+3\beta)\gamma) \eta^{2-\frac{3}{\gamma}} f f'' - \\ & - A^2 B^{3/\gamma} z^{-3+2\alpha+\frac{3\beta}{\gamma}} \beta^2 (2\beta+(-2+\alpha)\gamma) \eta^{3-\frac{3}{\gamma}} f' f'' + A^2 B^{3/\gamma} z^{-3+2\alpha+\frac{3\beta}{\gamma}} \alpha \beta^2 \gamma \eta^{3-\frac{3}{\gamma}} f f^{(3)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +AB^{\frac{1}{\gamma}} z^{-4+\alpha+\frac{\beta}{\gamma}} (-3+\alpha)(-2+\alpha)(-1+\alpha)\alpha\eta^{-1/\gamma} \nu f + \\
& +AB^{\frac{1}{\gamma}} z^{-4+\alpha+\frac{\beta}{\gamma}} \beta(-3+2\alpha+\beta)(2+2(-3+\alpha)\alpha-3\beta+2\alpha\beta+\beta^2)\eta^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}} \nu f' + \\
& +AB^{\frac{1}{\gamma}} z^{-4+\alpha+\frac{\beta}{\gamma}} \beta^2(11+6(-3+\alpha)\alpha-18\beta+12\alpha\beta+7\beta^2)\eta^{2-\frac{1}{\gamma}} \nu f'' + \\
& +2AB^{\frac{1}{\gamma}} z^{-4+\alpha+\frac{\beta}{\gamma}} \beta^3(-3+2\alpha+3\beta)\eta^{3-\frac{1}{\gamma}} \nu f^{(3)} + AB^{\frac{1}{\gamma}} z^{-4+\alpha+\frac{\beta}{\gamma}} \beta^4\eta^{4-\frac{1}{\gamma}} \nu f^{(4)} = 0. \quad (\text{II.35})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& AB^{2/\gamma} z^{-1+d+\alpha+\frac{2\beta}{\gamma}} \alpha\eta^{-2/\gamma} f\Omega + AB^{2/\gamma} z^{-1+d+\alpha+\frac{2\beta}{\gamma}} (\beta-d\gamma)\eta^{\frac{-2+\gamma}{\gamma}} \Omega f' + \\
& +AB^{2/\gamma} z^{-1+d+\alpha+\frac{2\beta}{\gamma}} \alpha\gamma\eta^{1-\frac{2}{\gamma}} f\Omega' + (-1+d)dz^{-2+d} \nu\Omega + \\
& +z^{-2+d} \beta(-1+2d+\beta)\eta\nu\Omega' + z^{-2+d} \beta^2\eta^2\nu\Omega'' = 0. \quad (\text{II.36})
\end{aligned}$$

Приравнивая в (II.35) порядки слагаемых по z , получим систему равенств:

$$-3+2\alpha+\frac{3\beta}{\gamma} = -1+2d+\frac{\beta}{\gamma} = -4+\alpha+\frac{\beta}{\gamma}, \quad (\text{II.37})$$

откуда получаем связь между α , β , γ и d :

$$\alpha = -1 - \frac{2\beta}{\gamma}, \quad d = -2 - \frac{\beta}{\gamma}, \quad (\text{II.37,a})$$

а условие (II.19) $\beta/\gamma < -1$ дает дополнительные условия:

$$\alpha > 1, \quad d > -1. \quad (\text{II.37,b})$$

Уравнения (I.32) и (I.34) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{4A^2B^{3/\gamma}(\beta+\gamma)(2\beta+\gamma)^2\eta^{-3/\gamma}}{\gamma^3} f^2 - \\
& - \frac{A^2B^{3/\gamma}(2\beta+\gamma)(12\beta^2-6(-1+\beta)\beta\gamma+(-4+\beta)(1+\beta)\gamma^2)\eta^{\frac{-3+\gamma}{\gamma}}}{\gamma^2} f f' + \\
& +3A^2B^{3/\gamma}\beta(\beta(-4+\gamma)-3\gamma)\eta^{2-\frac{3}{\gamma}} f'^2 - \frac{3A^2B^{3/\gamma}\beta(\beta(-2+\gamma)-\gamma)(2\beta+\gamma)\eta^{2-\frac{3}{\gamma}}}{\gamma} f f'' + \\
& +3A^2B^{3/\gamma}\beta^2\gamma\eta^{3-\frac{3}{\gamma}} f' f'' - A^2B^{3/\gamma}\beta^2(2\beta+\gamma)\eta^{3-\frac{3}{\gamma}} f f^{(3)} + \frac{2B^{\frac{1}{\gamma}}C^2(\beta+2\gamma)\eta^{-1/\gamma}}{\gamma} \Omega^2 - \\
& -2B^{\frac{1}{\gamma}}C^2\beta\eta^{1-\frac{1}{\gamma}}\Omega\Omega' + \frac{4AB^{\frac{1}{\gamma}}(\beta+\gamma)(2\beta+\gamma)(\beta+2\gamma)(2\beta+3\gamma)\eta^{-1/\gamma}}{\gamma^4} \nu f + \\
& + \frac{AB^{\frac{1}{\gamma}}\beta(\beta(-4+\gamma)-5\gamma)(-5\beta(-4+\gamma)\gamma+10\gamma^2+\beta^2(8+(-4+\gamma)\gamma))\eta^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}}}{\gamma^3} \nu f' + \\
& + \frac{AB^{\frac{1}{\gamma}}\beta^2(-30\beta(-2+\gamma)\gamma+35\gamma^2+\beta^2(24+\gamma(-24+7\gamma)))\eta^{2-\frac{1}{\gamma}}}{\gamma^2} \nu f'' +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2AB^{\frac{1}{\gamma}} \beta^3 (-5\gamma + \beta(-4 + 3\gamma)) \eta^{3-\frac{1}{\gamma}}}{\gamma} \nu f^{(3)} + AB^{\frac{1}{\gamma}} \beta^4 \eta^{4-\frac{1}{\gamma}} \nu f^{(4)} = 0, \quad (\text{II.38,a})$$

$$- \frac{AB^{2/\gamma} (2\beta + \gamma) \eta^{-2/\gamma}}{\gamma} f \Omega - AB^{2/\gamma} (2\beta + \gamma) \eta^{-\frac{2+\gamma}{\gamma}} f \Omega' + 2AB^{2/\gamma} (\beta + \gamma) \eta^{-\frac{2+\gamma}{\gamma}} \Omega f' +$$

$$+ \frac{(\beta + 2\gamma)(\beta + 3\gamma)}{\gamma^2} \nu \Omega + \frac{\beta(\beta(-2 + \gamma) - 5\gamma) \eta}{\gamma} \nu \Omega' + \beta^2 \eta^2 \nu \Omega'' = 0. \quad (\text{II.38,b})$$

4. Оставив функцию тока той же (I.37,б), как и вращательную скорость $V_\phi = Cz^d \Omega(\eta)$, а в операторе E^2 пренебрегая первым слагаемым по сравнению со вторым (условие (II.20)), получим уравнения (I.32) и (I.34) в форме:

$$-2C^2 d z^{2d-4\beta/\gamma} \left(\frac{\eta}{B}\right)^{4/\gamma} \Omega^2 - 2C^2 \beta z^{2d-4\beta/\gamma} \left(\frac{\eta}{B}\right)^{4/\gamma} \eta \Omega \Omega' + Av \gamma (\gamma - 2)^2 (\gamma - 4) z^{\alpha+1} \eta f' +$$

$$+ A^2 \alpha \gamma (\gamma - 2) (\gamma - 4) z^{\alpha+1} \eta f f' - A^2 \gamma (\gamma - 2) (4\beta + \alpha \gamma) z^{\alpha+1} \eta^2 f'^2 + Av \gamma^2 (\gamma - 2) (7\gamma - 10) z^{\alpha+1} \eta^2 f'' +$$

$$+ 3A^2 \alpha \gamma^2 (\gamma - 2) z^{2\alpha} \eta^2 f f'' - A^2 \gamma^2 (4\beta + \alpha \gamma) z^{2\alpha} \eta^3 f f'' + 2Av \gamma^3 (3\gamma - 4) z^{\alpha+1} \eta^3 f''' +$$

$$+ A^2 \alpha \gamma^2 z^{2\alpha} \eta^3 f f''' + Av \gamma^4 z^{\alpha+1} \eta^4 f^{IV} = 0, \quad (\text{II.39})$$

$$- \nu z \Omega + A \alpha z^\alpha f \Omega + A(\beta - d\gamma) z^\alpha \eta f' \Omega + \nu \gamma^2 z \eta \Omega' + A \alpha \gamma z^\alpha \eta f \Omega' + \nu \gamma^2 z \eta^2 \Omega'' = 0. \quad (\text{II.40})$$

Приравнявая в (II.39) порядки слагаемых по z , получим систему равенств

$$\alpha + 1 = 2\alpha = 2d - \frac{4\beta}{\gamma}, \quad (\text{II.41})$$

откуда следует связь между α , β , γ и d :

$$\alpha = 1, \quad d = 1 + \frac{2\beta}{\gamma}, \quad (\text{II.42})$$

а условие (II.20) $\beta/\gamma > -1$ дает дополнительные условия:

$$\beta/\gamma > -1, \quad d > -1. \quad (\text{II.43})$$

Уравнения (II.39) и (II.40) примут вид:

$$-2C^2 d \left(\frac{\eta}{B}\right)^{4/\gamma} \Omega^2 - 2C^2 \beta \left(\frac{\eta}{B}\right)^{4/\gamma} \eta \Omega \Omega' + Av \gamma (\gamma - 2)^2 (\gamma - 4) \eta f' +$$

$$+ A^2 \alpha \gamma (\gamma - 2) (\gamma - 4) \eta f f' - A^2 \gamma (\gamma - 2) (4\beta + \alpha \gamma) \eta^2 f'^2 + Av \gamma^2 (\gamma - 2) (7\gamma - 10) \eta^2 f'' +$$

$$+ 3A^2 \alpha \gamma^2 (\gamma - 2) \eta^2 f f'' - A^2 \gamma^2 (4\beta + \alpha \gamma) \eta^3 f f'' + 2Av \gamma^3 (3\gamma - 4) \eta^3 f''' +$$

$$+ A^2 \alpha \gamma^2 \eta^3 f f''' + Av \gamma^4 \eta^4 f^{IV} = 0, \quad (\text{II.44})$$

$$- \nu \Omega + A \alpha f \Omega + A(\beta - d\gamma) \eta f' \Omega + \nu \gamma^2 \eta \Omega' + A \alpha \gamma \eta f \Omega' + \nu \gamma^2 \eta^2 \Omega'' = 0. \quad (\text{II.45})$$

В результате получаем 4 возможных способа построения решений типа пограничного слоя в цилиндрических координатах ($\eta = Bz^\beta r^\gamma$):

$$1. \psi = Ar^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta), E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \alpha = \frac{\gamma}{\beta} + 2, d = 2\frac{\gamma}{\beta} + 1, \frac{\gamma}{\beta} > -1, \alpha > 1, \\ d > -1;$$

$$2. \psi = Ar^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta), E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \alpha = -\frac{\gamma}{\beta}, d = -\frac{\gamma}{\beta} - 2, \frac{\gamma}{\beta} < -1, \alpha > 1, \\ d > -1;$$

$$3. \psi = Az^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta), E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \alpha = -1 - \frac{2\beta}{\gamma}, d = -2 - \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma} < -1, \alpha > 1, \\ d > -1;$$

$$4. \psi = Az^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta), E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \alpha = 1, d = 1 + \frac{2\beta}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma} > -1, d > -1.$$

В каждом из указанных случаев возможно построение пограничных слоев, причем случаи 1 и 4 являются хорошо изученными, а случаи 2 и 3 представляют собой новый вариант пограничного слоя, дать физическую интерпретацию которому достаточно сложно.

Обратимся к виду автомодельной переменной η в случаях 1 и 4 (случаи 2 и 3 рассматривать не будем).

В случае 1 связь между γ и β можно записать в виде $\gamma > -\beta$ (примем, что $\beta > 0$).

Тогда $\eta = B \frac{r^\gamma}{z^\beta}$. Эта переменная останется безразмерной, если размерность постоянной

B будет $L^{\beta-\gamma}$, где L – некий характерный размер. В принципе, показатели γ и β можно выбирать произвольно с учетом связи между ними, но их соотношение естественнее выбирать исходя из физического смысла коэффициента B . В качестве часто используемой переменной автомодельности можно указать вариант

$$\gamma = 0, \beta = 1 \Rightarrow \eta = B/z, [B] = L.$$

Те же соображения относятся к случаю 4. Показатели β и γ связаны соотношением $\beta > -\gamma$ (примем $\gamma > 0$), а $[B] = L^{\gamma-\beta}$. Примером переменной, используемой на практике, является переменная η в виде

$$\eta = B/r (\gamma = 1, \beta = 0), [B] = L.$$

Для того, чтобы и автомодельные уравнения стали безразмерными, необходимо в функциях тока во всех трех вариантах выбирать размерность коэффициентов A , B и C с учетом показателей γ и β , а также связи между функцией тока и скоростью.

В варианте 1 размерности коэффициентов должны быть:

$$[A] = L^{1+\gamma-\frac{\gamma}{\beta}} / T, [C] = L^{\frac{2\gamma}{\beta}} T^{-1}, [B] = L^{\beta-\gamma},$$

а в варианте 4 –

$$[A] = [v] = L^2 / T, [C] = L^{\frac{2\gamma}{\beta}} T^{-1}, [B] = L^{\gamma-\beta}.$$

В рамках этого метода построения автомодельного решения в приближении пограничного слоя есть еще один способ, позволяющий оставить то или иное слагаемое в операторе E^2 – выбор показателей α , β и γ так, чтобы соответствующее слагаемое обращалось в нуль. При этом получатся точные решения (если таковые есть), являющиеся одновременно и решениями типа пограничного слоя.

Для функции $\psi = Ar^\alpha f(\eta)$ в операторе E^2 останется только первое слагаемое $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, если $\gamma = 0$ и либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = 2$, и останется только второе слагаемое $r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, если $\beta = 0$. Вариант $\beta = 0$ совпадает с решением (I.46). Уравнение же (I.34)

примет вид ($\eta = Br^\gamma$):

$$(d^2 - 1)\Omega + \gamma(2d + \gamma)\eta\Omega' + \gamma^2\eta^2\Omega'' = 0. \quad (\text{II.46})$$

Полученная система уравнений (I.46), (II.46) состоит из независимых уравнений, причем оба уравнения описывают чисто вязкое течение (приближение Стокса). Это решение применимо в процессах, где скорость течения невелика и основную роль играют вязкие силы (например, в некоторых химических процессах).

Если принять $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$, то (I.32) и (I.34) запишутся в виде ($\eta = Bz^\beta$):

$$\begin{aligned} & -\frac{2A^2 B^{3/\beta} (-1 + \beta) \beta^2 \eta^{2-\frac{3}{\beta}}}{r^3} f'^2 - \frac{2A^2 B^{3/\beta} \beta^3 \eta^{3-\frac{3}{\beta}}}{r^3} f' f'' - \\ & -2B^{\frac{1}{\beta}} C^2 r^{-1+2d} \beta \eta^{1-\frac{1}{\beta}} \Omega \Omega' + \frac{A B^{4/\beta} (-3 + \beta) (-2 + \beta) (-1 + \beta) \beta \eta^{\frac{-4+\beta}{\beta}}}{r} v f' + \\ & + \frac{A B^{4/\beta} (-1 + \beta) \beta^2 (-11 + 7\beta) \eta^{2-\frac{4}{\beta}}}{r} v f'' + \frac{6A B^{4/\beta} (-1 + \beta) \beta^3 \eta^{3-\frac{4}{\beta}}}{r} v f^{(3)} + \\ & + \frac{A B^{4/\beta} \beta^4 \eta^{4-\frac{4}{\beta}}}{r} v f^{(4)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

$$\begin{aligned} & A B^{\frac{1}{\beta}} (1 + d) r^{-2+d} \beta \eta^{\frac{-1+\beta}{\beta}} \Omega f' + (-1 + d^2) r^{-2+d} v \Omega + \\ & + B^{2/\beta} r^d (-1 + \beta) \beta \eta^{\frac{-2+\beta}{\beta}} v \Omega' + B^{2/\beta} r^d \beta^2 \eta^{2-\frac{2}{\beta}} v \Omega'' = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Уравнение (II.47) станет автомодельным, если $\beta = 0$ и $C=0$ ($V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta) \equiv 0$), но такой вариант не имеет смысла хотя бы потому, что переменная автомодельности станет постоянной: $\eta = B = \text{const}$.

Если $\gamma = 0$ и $\alpha = 2$, то уравнения (I.32) и (I.34) примут вид ($\eta = Bz^\beta$):

$$\begin{aligned} & -2 A^2 B^{3/\beta} (-2 + \beta) (-1 + \beta) \beta \eta^{-\frac{3+\beta}{\beta}} f f' - 6 A^2 B^{3/\beta} (-1 + \beta) \beta^2 \eta^{2-\frac{3}{\beta}} f f'' - \\ & - 2 A^2 B^{3/\beta} \beta^3 \eta^{3-\frac{3}{\beta}} f f^{(3)} - 2 B^{\frac{1}{\beta}} C^2 r^{-2+2d} \beta \eta^{1-\frac{1}{\beta}} \Omega \Omega' + \\ & + A B^{4/\beta} (-1 + \beta) \beta^2 (-11 + 7\beta) \eta^{2-\frac{4}{\beta}} \nu f'' + A B^{4/\beta} (-3 + \beta) (-2 + \beta) (-1 + \beta) \beta \eta^{-\frac{4+\beta}{\beta}} \nu f' + \\ & + 6 A B^{4/\beta} (-1 + \beta) \beta^3 \eta^{3-\frac{4}{\beta}} \nu f^{(3)} + A B^{4/\beta} \beta^4 \eta^{4-\frac{4}{\beta}} \nu f^{(4)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

$$\begin{aligned} & A B^{\frac{1}{\beta}} (1 + d) \beta \eta^{-\frac{1+\beta}{\beta}} \Omega f' - 2 A B^{\frac{1}{\beta}} \beta \eta^{1-\frac{1}{\beta}} f \Omega' + \frac{(-1 + d^2) \nu \Omega}{r^2} + \\ & + B^{2/\beta} (-1 + \beta) \beta \eta^{-\frac{2+\beta}{\beta}} \nu \Omega' + B^{2/\beta} \beta^2 \eta^{2-\frac{2}{\beta}} \nu \Omega'' = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

Уравнения (II.49) и (II.50) станут автомодельными либо при $C = 0$ (тогда уравнение (II.50) не нужно), либо при $d = 1$.

Для функции $\psi = A z^\alpha f(\eta)$ в операторе E^2 остается только слагаемое $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$,

если $\gamma = 0$, и слагаемое $r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, если $\beta = 0$ и либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = 1$.

В случае $\gamma = 0$ уравнения (I.32) и (I.34) запишутся в виде ($\eta = Bz^\beta$):

$$\begin{aligned} & - \frac{2 A^2 B^{\frac{3-2\alpha}{\beta}} (-1 + \alpha) \alpha^2 \eta^{-\frac{3+2\alpha}{\beta}}}{r^2} f^2 - \frac{2 A^2 B^{\frac{3-2\alpha}{\beta}} \alpha \beta (-2 + 3\alpha + \beta) \eta^{-\frac{3+2\alpha+\beta}{\beta}}}{r^2} f f' - \\ & - \frac{2 A^2 B^{\frac{3-2\alpha}{\beta}} \beta^2 (-1 + 2\alpha + \beta) \eta^{2+\frac{-3+2\alpha}{\beta}}}{r^2} f'^2 - \frac{2 A^2 B^{\frac{3}{\beta}-\frac{2\alpha}{\beta}} \alpha \beta^2 \eta^{2-\frac{3}{\beta}+\frac{2\alpha}{\beta}}}{r^2} f f'' - \\ & - \frac{2 A^2 B^{\frac{3}{\beta}-\frac{2\alpha}{\beta}} \beta^3 \eta^{3-\frac{3}{\beta}+\frac{2\alpha}{\beta}}}{r^2} f' f'' - 2 B^{\frac{1}{\beta}-\frac{2d}{\beta}} C^2 d \eta^{-\frac{1}{\beta}+\frac{2d}{\beta}} \Omega^2 - \\ & - 2 B^{\frac{1}{\beta}-\frac{2d}{\beta}} C^2 \beta \eta^{1-\frac{1}{\beta}+\frac{2d}{\beta}} \Omega \Omega' + A B^{\frac{4-\alpha}{\beta}} (-3 + \alpha) (-2 + \alpha) (-1 + \alpha) \alpha \eta^{-\frac{4+\alpha}{\beta}} \nu f + \\ & + A B^{\frac{4-\alpha}{\beta}} \beta (-3 + 2\alpha + \beta) (2 + 2(-3 + \alpha) \alpha - 3\beta + 2\alpha\beta + \beta^2) \eta^{-\frac{4+\alpha+\beta}{\beta}} \nu f' + \\ & + A B^{\frac{4-\alpha}{\beta}} \beta^2 (11 + 6(-3 + \alpha) \alpha - 18\beta + 12\alpha\beta + 7\beta^2) \eta^{2+\frac{-4+\alpha}{\beta}} \nu f'' + \\ & + 2 A B^{\frac{4-\alpha}{\beta}} \beta^3 (-3 + 2\alpha + 3\beta) \eta^{3+\frac{-4+\alpha}{\beta}} \nu f^{(3)} + A B^{\frac{4}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}} \beta^4 \eta^{4-\frac{4}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}} \nu f^{(4)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

$$\frac{A B^{\frac{1}{\beta}-\frac{d}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}} C \alpha \eta^{-\frac{1}{\beta}+\frac{d}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}}}{r^2} f \Omega + \frac{A B^{\frac{1}{\beta}-\frac{d}{\beta}-\frac{\alpha}{\beta}} C \beta \eta^{1-\frac{1}{\beta}+\frac{d}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}}}{r^2} \Omega f' -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{B^{-\frac{d}{\beta}} C \eta^{-\frac{2+d}{\beta}} (-B^{2/\beta} (-1+d) d r^2 + \eta^{2/\beta})}{r^2} \nu \Omega + B^{\frac{2-d}{\beta}} C \beta (-1+2d+\beta) \eta^{-\frac{2+d+\beta}{\beta}} \nu \Omega' + \\
& + B^{\frac{2}{\beta} - \frac{d}{\beta}} C \beta^2 \eta^{2 - \frac{2}{\beta} + \frac{d}{\beta}} \nu \Omega'' = 0.
\end{aligned} \tag{II.52}$$

Привести эту систему уравнений к системе обычных дифференциальных уравнений можно лишь при $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, что приводит к переменной $\eta = B = \text{const}$. Данный вариант не имеет физического смысла.

В случае $\beta = 0$ и $\alpha = 0$ уравнения (I.32) и (I.34) перейдут в ($\eta = B r^\gamma$, $V_\varphi = C z^d \Omega(\eta)$):

$$\begin{aligned}
& -2 B^{\frac{1}{\gamma}} C^2 d z^{-1+2d} \eta^{-1/\gamma} \Omega^2 + A B^{5/\gamma} (-4+\gamma) (-2+\gamma)^2 \gamma \eta^{-\frac{5+\gamma}{\gamma}} \nu f' + \\
& + A B^{5/\gamma} (-2+\gamma) \gamma^2 (-10+7\gamma) \eta^{2-\frac{5}{\gamma}} \nu f'' + 2 A B^{5/\gamma} \gamma^3 (-4+3\gamma) \eta^{3-\frac{5}{\gamma}} \nu f^{(3)} + \\
& + A B^{5/\gamma} \gamma^4 \eta^{4-\frac{5}{\gamma}} \nu f^{(4)} = 0,
\end{aligned} \tag{II.53}$$

$$\begin{aligned}
& -A B^{2/\gamma} d z^{-1+d} \gamma \eta^{1-\frac{2}{\gamma}} \Omega f' + z^d \left(\frac{(-1+d)d}{z^2} - B^{2/\gamma} \eta^{-2/\gamma} \right) \nu \Omega + \\
& + B^{2/\gamma} z^d \gamma^2 \eta^{1-\frac{2}{\gamma}} \nu \Omega' + B^{2/\gamma} z^d \gamma^2 \eta^{2-\frac{2}{\gamma}} \nu \Omega'' = 0.
\end{aligned} \tag{II.54}$$

Уравнение (II.53) станет автомодельным, если не рассматривать вращение жидкости ($C = 0$ и в этом случае (II.54) не нужно) или если $d = 0$, что соответствует вращательной скорости

$$V_\varphi = C \left(C_1 \operatorname{ch} \left(\frac{\ln \eta}{\gamma} \right) + i C_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\ln \eta}{\gamma} \right) \right). \tag{II.55}$$

В данном случае действительность решения приводит к условию $C_2 = 0$, а вращательная скорость запишется с учетом $\eta = B r^\gamma$ в виде

$$V_\varphi = \frac{C C_1}{2} \left(r^{\sqrt[\gamma]{B}} + \frac{1}{r^{\sqrt[\gamma]{B}}} \right). \tag{II.56}$$

Вращательная скорость вида (II.56) является комбинацией вращения, вызванного вихревой нитью (второе слагаемое в (II.56)), и квазитвердотельного вращения (первое слагаемое). Правда, в этом случае ($d = 0$) уравнения (II.53) и (II.54) становятся независимыми.

Если принять $\beta = 0$ и $\alpha = 1$, то получим:

$$\begin{aligned}
& A^2 B^{5/\gamma} (-4+\gamma) (-2+\gamma) \gamma \eta^{-\frac{5+\gamma}{\gamma}} f f' - A^2 B^{5/\gamma} (-2+\gamma) \gamma^2 \eta^{2-\frac{5}{\gamma}} f'^2 + \\
& + 3 A^2 B^{5/\gamma} (-2+\gamma) \gamma^2 \eta^{2-\frac{5}{\gamma}} f f'' - A^2 B^{5/\gamma} \gamma^3 \eta^{3-\frac{5}{\gamma}} f' f'' + \\
& + A^2 B^{5/\gamma} \gamma^3 \eta^{3-\frac{5}{\gamma}} f f^{(3)} - 2 B^{\frac{1}{\gamma}} C^2 d z^{-2+2d} \eta^{-1/\gamma} \Omega^2 +
\end{aligned}$$

$$+AB^{5/\gamma}(-4+\gamma)(-2+\gamma)^2\gamma\eta^{-5+\gamma/\gamma}v f' + AB^{5/\gamma}(-2+\gamma)\gamma^2(-10+7\gamma)\eta^{2-5/\gamma}v f'' +$$

$$+2AB^{5/\gamma}\gamma^3(-4+3\gamma)\eta^{3-5/\gamma}v f^{(3)} + AB^{5/\gamma}\gamma^4\eta^{4-5/\gamma}v f^{(4)} = 0, \quad (\text{II.57})$$

$$AB^{2/\gamma}z^d\eta^{-2/\gamma}f\Omega + AB^{2/\gamma}z^d\gamma\eta^{1-2/\gamma}f\Omega' - AB^{2/\gamma}dz^d\gamma\eta^{1-2/\gamma}\Omega f' +$$

$$+((-1+d)dz^{-2+d} - B^{2/\gamma}z^d\eta^{-2/\gamma})v\Omega + B^{2/\gamma}z^d\gamma^2\eta^{1-2/\gamma}v\Omega' + B^{2/\gamma}z^d\gamma^2\eta^{2-2/\gamma}v\Omega'' = 0. \quad (\text{II.58})$$

Уравнение (II.57) станет автомодельным в случае невращающейся жидкости ($C=0$ и уравнение (II.58) становится лишним) или в случаях $d=0$ или $d=1$. В случае $d=0$ уравнение (II.57) неподвержено влиянию вращательной скорости, но вращение вынуждено подстраиваться под основное течение; в случае $d=1$ уравнения (II.57) и (II.58) примут вид:

$$A\gamma\eta\{(\gamma-2)(\gamma-4)(v(\gamma-2)+Af)f' + \gamma(\gamma-2)\eta[-Af'^2 + (v(7\gamma-10)+3Af)f''] +$$

$$+ \gamma^2\eta^2\{-Aff'' + (2v(3\gamma-4)+Af)f'''\} + v\gamma^3\eta^3 f^{(4)}\} - 2C^2(\eta/B)^{4/\gamma}\Omega^2 = 0, \quad (\text{II.59})$$

$$\Omega\{-v + A(f - \gamma\eta f')\} + \gamma\eta((v\gamma + Af)\Omega' + v\gamma\eta\Omega'') = 0. \quad (\text{II.60})$$

Никаких иных вариантов построения решений типа пограничного слоя в рамках автомодельного подхода нет.

Применение метода разделения переменных в приближении пограничного слоя в рамках предлагаемого подхода невозможно. Точнее сказать, невозможно при использовании данного метода оценить порядки слагаемых в операторе E^2 и пренебречь одним из них по сравнению с другим. В таком случае при построении решений типа пограничного слоя необходимо решать точные уравнения, а за образование пограничного слоя будет отвечать какой-либо из параметров, характеризующих течение (расход, скорость, момент вращения и т. п.), если его величина достаточна для образования пограничного слоя. Но фактически рассмотренные варианты (I.46) – (II.46), (II.49) – (II.50), (II.53) – (II.54), (II.57) – (II.58) и (II.59) – (II.60) и есть метод разделения переменных. Эти же варианты являются одновременно как точными уравнениями, так и уравнениями в приближении пограничного слоя.

II.4. Гидродинамический осесимметричный пограничный слой в сферических координатах.

Для построения решений типа пограничного слоя в сферических координатах способ сравнения порядков слагаемых в операторе E^2 (I.67) неприменим, так как

размерности переменных R и θ различны, поэтому составить из них, как это делалось в цилиндрических координатах, безразмерную автомодельную переменную без привлечения дополнительных характерных величин невозможно (см. пункт I.5). Поэтому в сферических координатах существует только один способ построения решений в пограничном слое – использование больших параметров.

В качестве таких параметров можно использовать величины, характеризующие течение: скорость, импульс, расход, момент вращения и т.п.

Интегральные характеристики течения, позволяющие построить решения типа пограничного слоя, определяются следующими выражениями:

расход через поверхность S :

$$Q = \int_S V_n dS, \quad (\text{II.61})$$

объемный поток количества движения (импульс):

$$I = \int_S \Pi dS, \quad (\text{II.62})$$

момент количества движения:

$$M = \int_S r\Pi dS, \quad (\text{II.63})$$

где Π - симметричный тензор второго ранга, составляющие которого в сферических координатах имеют вид [55]:

$$\begin{aligned} \Pi_{RR} &= p + \rho V_R^2 - 2\rho\nu \frac{\partial V_R}{\partial R}; \\ \Pi_{\theta\theta} &= p + \rho V_\theta^2 - 2\rho\nu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_R}{R} \right); \\ \Pi_{\varphi\varphi} &= p + \rho V_\varphi^2 - 2\rho\nu \left(\frac{V_R}{R} + \text{ctg} \theta \frac{V_\theta}{R} \right); \\ \Pi_{R\theta} &= \rho V_R V_\theta - \rho\nu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{V_\theta}{R} \right); \\ \Pi_{\theta\varphi} &= \rho V_\theta V_\varphi - \rho\nu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} - \text{ctg} \theta \frac{V_\theta}{R} \right); \\ \Pi_{R\varphi} &= \rho V_R V_\varphi - \rho\nu \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial R} - \frac{V_\varphi}{R} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

Использование каждой из упомянутых характеристик для построения решения типа пограничного слоя зависит от постановки задачи, как и точный вид выражения характеристики и выбор поверхностей интегрирования.

II.5. Выводы.

1) Декартова система координат.

Для преобразования уравнений Навье-Стокса в автомодельные уравнения типа пограничного слоя необходимо переменную автомодельности и функцию тока брать в виде $\psi = Ax^{1-\beta} f(\eta)$, $\eta = y/(Bx^\beta)$, причем должно выполняться неравенство $\beta < 1$. Получено универсальное уравнение движения для плоских течений типа пограничного слоя:

$$f^{IV} + (1-\beta)\frac{AB}{\nu} ff''' - (1-3\beta)\frac{AB}{\nu} ff'' = 0.$$

Для того, чтобы уравнение было безразмерным, коэффициенты A и B должны иметь следующие размерности:

$$[AB] = [\nu] = L^2/T, [B] = L^{1-\beta}, [A] = L^{\beta+1}/T.$$

Применение метода разделения переменных в теории пограничного слоя в рамках предлагаемого подхода не представляется возможным, так как нет возможности оценить порядки слагаемых в операторе Лапласа и определить, при каких условиях каким из слагаемых можно пренебречь. Но при $\beta = 0$ получим, что первое слагаемое в операторе Лапласа автоматически зануляется. Этот выбор не противоречит условию $\beta < 1$, но фактически получается точное решение, одновременно являющееся решением в приближении пограничного слоя, и к тому же вид переменной и функции тока соответствует методу разделения переменных.

2) Полярная система координат.

Полярная система координат не позволяет применить подход Прандтля, так как нет возможности оценить порядки слагаемых в операторе Лапласа. Поэтому необходимо решать точные уравнения.

3) Цилиндрическая система координат.

В рамках автомодельного подхода получены следующие варианты построения решений типа пограничного слоя:

1. $\eta = Bz^\beta r^\gamma$, $\psi = Ar^\alpha f(\eta)$, $V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta)$, $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\alpha = \frac{\gamma}{\beta} + 2$, $d = 2\frac{\gamma}{\beta} + 1$, $\frac{\gamma}{\beta} > -1$,
 $\alpha > 1$, $d > -1$;

$$2. \eta = Bz^\beta r^\gamma, \psi = Az^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta), E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \alpha = 1, d = 1 + \frac{2\beta}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma} > -1,$$

$$d > -1;$$

$$3. \eta = Br^\gamma, \psi = Az^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta), E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \alpha = 0, C = 0 (V_\varphi = 0);$$

$$4. \eta = Br^\gamma, \psi = Az^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta), E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \alpha = 0, d = 0;$$

$$5. \eta = Br^\gamma, \psi = Az^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta), E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \alpha = 1, C = 0 (V_\varphi = 0);$$

$$6. \eta = Br^\gamma, \psi = Az^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta), E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \alpha = 1, d = 1;$$

$$7. \eta = Br^\gamma, \psi = Az^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta), E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \alpha = 1, d = 0;$$

$$8. \eta = Bz^\beta, \psi = Ar^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta), E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \alpha = 2, C = 0 (V_\varphi = 0);$$

$$9. \eta = Bz^\beta, \psi = Ar^\alpha f(\eta), V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta), E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \alpha = 2, d = 1.$$

Показано, что некоторые из приведенных выше вариантов построения решений типа пограничного слоя одновременно являются и точными решениями. Это варианты 3) – 9). В работе приведены как соответствующие системы автомодельных уравнений, так и проведен анализ возможных задач для каждого варианта. Формально получены 4 типа автомодельных пограничных слоев, 2 из которых являются хорошо известными и описанными в литературе, а 2 других ранее не встречались и их физическая интерпретация не дана. В дальнейшем эти виды пограничных слоев не изучались.

Применение метода разделения переменных в приближении пограничного слоя в рамках предлагаемого подхода невозможно. Точнее сказать, невозможно при использовании данного метода оценить порядки слагаемых в операторе E^2 и пренебречь одним из них по сравнению с другим. Но фактически рассмотренные варианты 3) – 9) и есть метод разделения переменных.

4) Сферическая система координат.

Сферическая система координат не позволяет применить подход Прандтля, так как нет возможности оценить порядки слагаемых в операторе Лапласа. Поэтому необходимо решать точные уравнения.

III. Точные решения в магнитной гидродинамике.

III.i. Краткий обзор литературы.

Несмотря на то, что магнитная гидродинамика как отдельный раздел механики жидкости существует уже достаточно давно, и в рамках этой отрасли физики решено огромное количество задач, имеющих как теоретическое, так и практическое значение, до сих пор нет монографий, систематизирующих имеющуюся информацию. В данном разделе предлагаются результаты систематизации автомодельных решений в магнитной гидродинамике.

Точные решения в магнитной гидродинамике (МГД) обычно получают введением магнитного и электрического полей в постановку точных задач в гидродинамике. Поэтому большая часть точных решений в МГД имеет ту же гидродинамическую схему течений. Естественно, что не любое электромагнитное (ЭМ) поле подходит для рассматриваемой задачи. При введении ЭМ полей анализируется начальная конфигурация поля скорости проводящей жидкости и выбирается такое распределение магнитного поля и электрического тока, чтобы они взаимодействовали с движущейся жидкостью в соответствии с законом Ампера.

Очень часто на вид допустимых ЭМ полей оказывает влияние способ решения магнитогидродинамической задачи, что ограничивает свободу выбора полей. Так, если задача решалась с применением автомодельного подхода, то электрический ток и магнитное поле должны выбираться такими, чтобы сохранить возможность автомодельного преобразования уравнений магнитной гидродинамики.

Большое влияние на течение проводящей жидкости в магнитном и электрическом полях оказывает проводимость стенок. Замена в одной и той же задаче непроводящих стенок на проводящие может привести к получению совершенно разных полей скорости, что объясняется различными условиями протекания по жидкости электрических токов.

В условиях пропускания по жидкости сильных токов, что характерно для современных технологических процессов (электрошлаковый переплав, электродуговая сварка), становится заметным влияние собственного магнитного поля пропускаемого тока. Причем это влияние является настолько существенным, что приводит к перестройке картины течения. Изучение этих эффектов привело к созданию отдельной теории – теории электровихревых течений. Изучению таких течений посвящена книга [43].

В качестве примеров точных МГД решений можно указать следующие:

1. в декартовых координатах: МГД аналог плоского течения у передней критической точки [17], течение в трубе с проводящими и непроводящими стенками во внешнем магнитном поле [47], МГД аналог течения Куэтта ([67], [72]);
2. в полярных координатах: МГД течение в конфузоре/диффузоре ([67], [20]), МГД аналог задачи Польшаузена в азимутальном поле ([31], [72]), кольцевой МГД аналог течения Куэтта ([16], [72]), (эти задачи и их модификации будут рассмотрены в разделе V);
3. в цилиндрических координатах: течение с линейным источником в круговом конусе ([70], [43]), МГД течение у плоской поверхности при наличии линейного источника [70], МГД аналог пространственного течения у передней критической точки [43], электровихревое течение между двумя параллельными стенками [43], вращение диска в азимутальном магнитном поле [66], [43];
4. в сферических координатах: МГД аналог струи Ландау ([70], [43]), течение в воронке, создаваемое центробежным полем ([70], [43]), движение газа в электрической дуге [43].

В работах [70] и [43] была проведена работа по систематизации точных решений в сферической, полярной и цилиндрической системах координат, причем во второй работе был применен подход (для цилиндрической и сферической систем координат), подобный тому, что предлагается в данной работе, но подход к анализу возможных вариантов отличался, к тому же не был полностью рассмотрен метод разделения переменных. В монографии [72] (в подготовке материалов для которой принимал участие автор) была изучена возможность построения автомодельного решения в МГД в декартовой системе координат, но не был рассмотрен метод разделения переменных. Также в этой работе был дан полный анализ возможных точных решений в полярной системе координат, и рассмотрены допустимые магнитные поля, но при анализе были допущены некоторые ошибки, которые исправлены в данной диссертации.

С точки зрения автора, наличие справочника допустимых электрических и магнитных полей, а также соответствующих систем уравнений магнитной гидродинамики, было бы полезно для тех, кто использует в своей практике автомодельные решения. Ниже проанализированы все возможности построения точных решений в магнитной гидродинамике в различных системах координат, допустимые магнитные поля и схемы пропускания электрического тока.

Электромагнитные силы рассмотрены как в полной постановке, так и в безындукционном приближении.

III.1. Уравнения магнитной гидродинамики.

Для описания стационарного движения несжимаемой проводящей жидкости под воздействием электрического и магнитного полей необходимо внести их воздействие на поле скорости в уравнение Навье-Стокса (I.1) [47]:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (\text{III.1})$$

где \mathbf{B} – индукция магнитного поля, \mathbf{j} – плотность электрического тока. Это уравнение необходимо дополнить уравнениями Максвелла:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B}, \quad (\text{III.2})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (\text{III.3})$$

(\mathbf{E} – напряженность электрического поля) и законом Ома для движущейся среды

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (\text{III.4})$$

где σ – электропроводность среды, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость вакуума. Кроме того, должны выполняться условия соленоидальности полей скорости \mathbf{V} , электрического тока \mathbf{j} и индукции магнитного поля \mathbf{B} :

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (\text{III.5})$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (\text{III.6})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (\text{III.7})$$

Если в (III.2) подставить закон Ома (III.4) и применить операцию rot, то с учетом (III.3) и (III.7) можно получить так называемое уравнение индукции

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\sigma \mu_0 \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (\text{III.8})$$

связывающее индукцию магнитного поля с полем скорости электропроводной среды.

Из (III.3) следует, что в стационарных процессах электрическое поле можно выразить через градиент электрического потенциала Φ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi, \quad (\text{III.9})$$

а применяя условие соленоидальности электрического тока (III.6) к (III.4), можно (с учетом (III.9)) получить уравнение ($\text{div grad } \Phi = \nabla^2 \Phi$)

$$\nabla^2 \Phi = \text{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}), \quad (\text{III.10})$$

связывающее потенциал электрического поля с полем скорости электропроводной среды.

В дальнейшем будем пользоваться уравнением движения (III.1) в форме, не содержащей давления, которая получается из (III.1) применением операции rot :

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{V} \times \mathbf{V}) = \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}). \quad (\text{III.11})$$

Если сравнить левую и правую части уравнения (III.11), то видно, что электромагнитное слагаемое $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B})$ схоже с инерционным слагаемым $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V})$, следовательно, вид функций, описывающих магнитное поле будет подобен виду функций, описывающих поле скорости.

Электромагнитная сила будет вихревой и вызывать изменения в поле скорости, если величина плотности тока меняется вдоль направления магнитного поля и/или магнитное поле меняется вдоль направления плотности тока. Это следует из

$$\text{rot}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{j} - (\mathbf{j} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}. \quad (\text{III.12})$$

Граничные и интегральные условия для поля скорости (за исключением всегда выполняющихся условий прилипания на твердой поверхности $\Gamma - \mathbf{V}|_{\Gamma} = 0$) определяются уравнением движения (III.1) с учетом электромагнитного слагаемого.

Для электромагнитного поля в неферромагнитных средах из уравнений Максвелла (III.2), (III.3), (III.7) и закона Ома (III.4) следует непрерывность на поверхности Γ величин

$$\mathbf{B}, (\text{rot } \mathbf{B})_n, \left(\frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{B} \right)_{\tau}, \mathbf{E}_{\tau}, (\sigma \mathbf{E})_n, \quad (\text{III.13})$$

при условии $\mathbf{V}|_{\Gamma} = 0$. Здесь n и τ – нормаль и касательная к поверхности Γ соответственно. Касательная составляющая электрического тока \mathbf{j}_{τ} и нормальная составляющая электрического поля \mathbf{E}_n меняются скачком на величину, зависящую от относительной электропроводности жидкости σ и тела σ_T :

$$\frac{\mathbf{j}_{\tau}}{\sigma} = \frac{(\mathbf{j}_T)_{\tau}}{\sigma_T}, \quad \sigma \mathbf{E}_n = \sigma_T (\mathbf{E}_T)_n. \quad (\text{III.14})$$

Для потенциала электрического поля граничными условиями служат

$$\Phi = \Phi_T, \quad \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sigma_T \frac{\partial \Phi_T}{\partial n}, \quad (\text{III.15})$$

где индекс T относится к величинам, определенным внутри обтекаемого тела. Если тело неэлектропроводно ($\sigma_T = 0$), то на границе Γ должны выполняться условия:

$$\mathbf{j}_n = \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{B})_n = 0, \mathbf{E}_n = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (\text{III.16})$$

Если тело – идеальный проводник ($\sigma_T = \infty$), то на границе Γ выполняются условия

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{E}_\tau = 0, \Phi|_\Gamma = \text{const}. \quad (\text{III.17})$$

III.2. Плоские МГД течения в декартовой системе координат.

Плоские ($\partial/\partial z = 0$) течения проводящей жидкости в электромагнитном поле в декартовых координатах описываются системой уравнений

$$\begin{cases} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} (j_y B_z - j_z B_y) \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho} (j_x B_z - j_z B_x), \\ V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} (j_x B_y - j_y B_x) \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

которая дополняется уравнениями соленоидальности полей скорости, электрического поля и магнитного поля:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{III.19})$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{III.20})$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{III.21})$$

а также уравнениями Максвелла и индукции:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y}, -\frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right), \quad (\text{III.22})$$

$$\begin{cases} \nabla^2 B_x = -\sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial y} (V_x B_y - V_y B_x) \\ \nabla^2 B_y = -\sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} (V_x B_y - V_y B_x) \\ \nabla^2 B_z = -\sigma \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} (V_z B_x - V_x B_z) - \frac{\partial}{\partial y} (V_y B_z - V_z B_y) \right) \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Так как и скорость, и ток, и магнитное поле подчиняются одинаковым уравнениям (III.19) – (III.21), то возможно введение не только гидродинамической

функции тока ψ , как в I.1, но и электрической ψ_1 , и магнитной ψ_2 функций тока. Эти функции определяются следующими соотношениями:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\text{III.24})$$

$$j_x = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, j_y = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad (\text{III.25})$$

$$B_x = \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, B_y = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}. \quad (\text{III.26})$$

Введение функций тока возможно и при наличии z -составляющих скорости, тока и магнитного поля, но они должны зависеть только от x и y :

$$V_z = V_z(x, y), j_z = j_z(x, y), B_z = B_z(x, y). \quad (\text{III.27})$$

Рассмотрим, насколько существенным является наличие z -составляющих. Из уравнения Максвелла (III.22) и уравнения (III.20) следует, что

$$j_x = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial y}, j_y = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (\text{III.28})$$

то есть

$$\psi_1 = \frac{1}{\mu_0} B_z + F_1(x) = \frac{1}{\mu_0} B_z + F_2(y). \quad (\text{III.29})$$

Отсюда следует, что $F_1(x) = F_2(y) = \text{const}$. Так как функцию тока определяют с точностью до аддитивной постоянной, то можно положить $F_1(x) = F_2(y) = 0$. Следовательно,

$$B_z(x, y) = \mu_0 \psi_1(x, y), \quad (\text{III.30})$$

то есть z -составляющая магнитного поля B_z определяется электрической функцией тока ψ_1 и может появиться либо в результате пропускания по жидкости тока с составляющими j_x, j_y (III.25), либо эти составляющие тока индуцируются движением среды в магнитном поле $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$ при $V_z(x, y) \neq 0$.

Из уравнения Максвелла (III.22) также имеем

$$j_z = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right). \quad (\text{III.31})$$

С учетом (III.26) получаем связь между j_z и ψ_2 :

$$j_z = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \right) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \psi_2, \quad (\text{III.32})$$

то есть z -составляющая электрического тока j_z определяется магнитным полем.

Рассмотрим теперь уравнение индукции (III.8). В координатной форме оно с учетом (III.30) запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi_2 = -\sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi_2 = -\sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \\ \nabla^2 \psi_1 = \sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (\text{III.33}) - (\text{III.35})$$

Интегрирование (III.33) и (III.34) дает уравнение для определения магнитной функции тока ψ_2 ($K = \text{const}$):

$$\nabla^2 \psi_2 = -\sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) + K. \quad (\text{III.36})$$

Проекция уравнения индукции на ось z (III.35) дает уравнение для определения электрической функции тока ψ_1 :

$$\nabla^2 \psi_1 = \sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right). \quad (\text{III.37})$$

Сравнение (III.32) и (III.36) дает выражение для определения j_z :

$$j_z = -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \psi_2 = \sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) - K. \quad (\text{III.38})$$

Перейдем теперь к уравнению движения. В дальнейшем примем, что $V_z \equiv 0$.

Применение операции ротора к системе (III.18) дает, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = -\frac{1}{\rho \mu_0} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi_2 - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi_2 \right), \quad (\text{III.39})$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.40})$$

(уравнение (III.40) является уравнением для z -составляющей скорости при $V_z = 0$ (3-е уравнение в (III.18))).

Из уравнения (III.39) видно, что электрическая функция тока ψ_1 никак не влияет ни на движение жидкости, ни – как это видно из (III.36) – на магнитное поле. Поэтому, в плоском случае j_x и j_y - составляющие электрического тока не оказывают влияния на поле скорости. Следовательно, можно положить $\psi_1 = 0$, если интересоваться только полем скорости. При этом уравнение (III.40) удовлетворяется автоматически. Кроме того, из (III.30) следует, что и магнитное поле $B_z(x, y)$, перпендикулярное плоскости

течения, также не влияет на поле скорости. Влияние этих величин сказывается только на поле давления [43], [72].

Рассмотрим возможность построения автомодельного решения. Так как уравнение (III.39) отличается от (I.7) только электромагнитным слагаемым, которое по форме совпадает с инерционной частью уравнения (III.39) (первые два слагаемых в этом уравнении), то для перевода (III.39) в автомодельную форму возьмем переменную автомодельности η и функции тока ψ, ψ_2 в том же классе функций, что и в пункте I.1 ([49]):

$$\eta = y/\delta(x), \quad \delta(x) = Bx^\beta, \quad \psi = Ax^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dx^d f_2(\eta). \quad (\text{III.41})$$

Подстановка (III.41) в (III.39) и (III.36) дает возможность определить неизвестные показатели степеней в (III.41). (Сами уравнения очень громоздки, поэтому здесь не приводятся.) Условие автомодельности – равенство порядков всех слагаемых по переменной x – приводит к соотношениям (пока не будем рассматривать константу в правой части уравнения (III.36)):

$$\begin{aligned} \alpha - 4 = 2\alpha - \beta - 3 = 2d - \beta - 3 = \alpha - 2\beta - 2 = 2\alpha - 3\beta - 1 = 2d - 3\beta - 1 = \alpha - 4\beta, \\ d - 2 = d + \alpha - \beta - 1 = d - 2\beta. \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Решение этой системы будет следующим:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad d = 0. \quad (\text{III.43})$$

Тогда точные автомодельные уравнения, описывающие в декартовых координатах течение жидкости в магнитном поле, примут вид:

$$\begin{aligned} 24Av\eta f' + \frac{4A^2}{B}\eta f'^2 + 12Av\left(\frac{1}{B^2} + 3\eta^2\right)f'' + \frac{2A^2}{B}\left(\frac{1}{B^2} + \eta^2\right)f'f'' + \\ + 12Av\eta\left(\frac{1}{B^2} + \eta^2\right)f''' + Av\left(\frac{1}{B^4} + \frac{\eta^2}{B^2} + \eta^4\right)f^{IV} - \\ - \frac{4D^2}{\rho\mu_0 B}\eta f_2'^2 - \frac{2D^2}{\rho\mu_0 B}\left(\frac{1}{B^2} + \eta^2\right)f_2'f_2'' = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

$$\frac{2D}{x^2}\eta f_2' + \frac{D}{x^2}\left(\frac{1}{B^2} + \eta^2\right)f_2'' = K. \quad (\text{III.45})$$

Рассмотрим сначала уравнение индукции (III.45). Это уравнение станет автомодельным только в том случае, если постоянная K в правой части будет равна нулю. Следовательно, в точной постановке должно быть $K = 0$.

Перейдем теперь к уравнению движения (III.44). Так как функция f и переменная автомодельности η – безразмерные, то и уравнение тоже должно быть безразмерным. Это возможно, если принять, например, $A = \nu, B = 1, [D] = B_0 L$, где B_0, L –

характерные величины магнитного поля и длины. (В общем случае необходимо выбирать коэффициенты A, B , из соображений размерности так, чтобы $[A] = [v]$, $[B] = 1$.)

Тогда переменная автомодельности и функции тока примут вид:

$$\eta = y/x, \quad \delta(x) = x, \quad \psi = v f(\eta), \quad \psi_2 = D f_2(\eta), \quad (\text{III.46})$$

а уравнения (III.44) и (III.45) запишутся как

$$24\eta f' + \eta f'^2 + 12(1 + 3\eta^2)f'' + 2(1 + \eta^2)f'f'' + 12\eta(1 + \eta^2)f''' + (1 + \eta^2 + \eta^4)f^{IV} - \\ - 4\frac{D^2}{v^2\rho\mu_0 B}\eta f_2'^2 - 2\frac{D^2}{v^2\rho\mu_0 B}\left(\frac{1}{B^2} + \eta^2\right)f_2'f_2'' = 0, \quad (\text{III.47})$$

$$2\eta f_2' + (1 + \eta^2)f_2'' = 0. \quad (\text{III.48})$$

Уравнение (III.48) имеет аналитическое решение, описывающее все допустимые в точной постановке магнитные поля:

$$f_2(\eta) = C_1 \arctg \eta + C_2 = C_1 \arctg(y/x) + C_2. \quad (\text{III.49})$$

Это решение проще анализировать в полярной системе координат, в которой оно запишется в виде

$$f_2(r, \varphi) = C_1 \varphi + C_2. \quad (\text{III.50})$$

Такая функция тока соответствует магнитному полю, образованному системой двух магнитов, один из которых является точечным и расположен в начале координат, а второй – кольцевой формы и расположен в бесконечности. Однако подстановка (III.49) в (III.47) приводит к уравнению, в котором последние два слагаемых, отвечающих за влияние магнитного поля на течение жидкости, отсутствуют:

$$24\eta f' + \eta f'^2 + 12(1 + 3\eta^2)f'' + 2(1 + \eta^2)f'f'' + 12\eta(1 + \eta^2)f''' + (1 + \eta^2 + \eta^4)f^{IV} = 0, \quad (\text{III.51})$$

что означает, что магнитное поле вида (III.49) не взаимодействует с движущейся жидкостью. Следовательно, в такой постановке магнитное поле не оказывает влияния на поле скорости.

Рассмотрим возможность построения обыкновенных дифференциальных уравнений для точной постановки методом разделения переменных. Для этого гидродинамическую и магнитную функции тока будем искать в виде:

$$\psi = g(x)f(y), \quad \psi_2 = g_2(x)f_2(y). \quad (\text{III.52})$$

Подставляя (III.52) в (III.39), (III.36), получим

$$f f'(g'g'' - gg''') + gg'(f f''' - f f'') + v(g f^{IV} + 2g''f'' + g^{IV}f) + \\ + \frac{1}{\mu_0\rho} \left[f_2 f_2' (g_2 g_2''' - g_2' g_2'') + g_2 g_2' (f_2' f_2''' - f_2 f_2''') \right] = 0, \quad (\text{III.53})$$

$$\mu_0 \sigma \left(g' g_2 f f_2' - g g_2' f f_2' \right) + g_2 f_2'' + g_2'' f_2 = K. \quad (\text{III.54})$$

Для того, чтобы получить из (III.53), (III.54) обыкновенные дифференциальные уравнения по переменной x (уравнения по переменной y будут точно такими же, если g и g_2 заменить на f и f_2 соответственно, а x заменить на y), разделим (III.53) на f , то есть на коэффициент при старшей производной по x , а уравнение (III.54) разделим на f_2 , и потребуем, чтобы все выражения, зависящие от y , были равны постоянным величинам. В результате получим, что функции f и f_2 должны иметь вид

$$f(y) = a y + b, \quad f_2 = c(a y + b), \quad (\text{III.55})$$

а постоянная K в (III.54) должна быть равна нулю. Уравнения же (III.53), (III.54) запишутся в виде

$$a(g'g'' - gg''') - \frac{ac^2}{\mu_0 \rho} (g_2'g_2'' - g_2g_2''') + \nu g^{IV} = 0, \quad (\text{III.56})$$

$$a\mu_0 \sigma (g'g_2 - gg_2') + g_2'' = 0. \quad (\text{III.57})$$

Как видно из полученной системы уравнений, используя метод разделения переменных можно преобразовать точные уравнения Навье-Стокса-Максвелла в ОДУ.

III.3. МГД течения в полярных координатах.

Сформулируем уравнения магнитной гидродинамики в полярных координатах, что позволит определить тот класс МГД задач, которые могут быть рассмотрены в этой координатной системе.

Так как течения, описываемые в полярных координатах, являются двумерными, то возможно введение гидродинамической функции тока ψ , связанной с составляющими скорости соотношениями (I.20) ([72]):

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

а также электрической ψ_1 и магнитной функций тока ψ_2 , связанных с плотностью электрического тока и индукцией магнитного поля соответственно:

$$j_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi}, \quad j_\varphi = -\frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \quad B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi}, \quad B_\varphi = -\frac{\partial \psi_2}{\partial r}. \quad (\text{III.58})$$

Тогда уравнение движения примет вид [47]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) + \frac{1}{\rho \mu_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi_2 \right), \quad (\text{III.59})$$

где $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – двумерный оператор Лапласа в полярных координатах.

Как было показано в предыдущем разделе, в случае плоских течений электрический ток не оказывает влияния на поле скорости. Так как уравнение (III.59) является тем же уравнением (III.39), только записанным в полярных координатах, то все сказанное об электрическом токе в декартовых координатах будет верно и для полярных координат.

Координатная форма уравнения индукции (III.8) в полярных координатах [65]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi_2 = -\sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right), \quad (\text{III.60})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi_2 = -\sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right). \quad (\text{III.61})$$

Интегрируя (III.60) по r , а (III.61) по φ , получаем ($K = \text{const}$):

$$\nabla^2 \psi_2 = -\sigma \mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) + K. \quad (\text{III.62})$$

Как было показано в пункте I.3, перевести уравнение (III.59) в обыкновенное можно только разделением переменных, представив функции тока ψ и ψ_2 в виде:

$$\psi = R(r)f(\varphi), \quad (\text{III.63})$$

$$\psi_2 = R_2(r)f_2(\varphi). \quad (\text{III.64})$$

В этом случае (III.59) перейдет в

$$\begin{aligned} & \frac{Rf'}{r} \left[\left(R''' + \frac{R''}{r} - \frac{R'}{r^2} \right) f + \left(\frac{R'}{r^2} - 2 \frac{R}{r^3} \right) f'' \right] - \frac{R'f}{r} \left[\left(\frac{R'}{r} + R'' \right) f' + \frac{R}{r^2} f''' \right] = \\ & = \nu \left[\left(\frac{R'}{r^3} - \frac{R''}{r^2} + 2 \frac{R'''}{r} + R'''' \right) f + \left(4 \frac{R}{r^4} - 3 \frac{R'}{r^3} + \frac{R''}{r^2} \right) f'' + \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) \frac{f''}{r^2} + \frac{R}{r^4} f'''' \right] + \\ & + \frac{1}{r \rho \mu_0} \left\{ R_2 f_2' \left[f_2 \left(R_2 + \frac{R_2''}{r} - \frac{R_2'}{r^2} \right) + R_2' f_2'' \right] - R_2' f_2 \left[f_2' \left(R_2'' + \frac{R_2'}{r} \right) + R_2 f_2''' \right] \right\}, \quad (\text{III.65}) \end{aligned}$$

а уравнение индукции (III.62) –

$$f_2 \left(R_2'' + \frac{R_2'}{r} \right) + R_2 f_2'' = \frac{\sigma \mu_0}{r} \left(R R_2' f' f_2 - R' R_2 f f_2' \right) + K. \quad (\text{III.66})$$

Рассмотрим уравнение (III.66). Для разделения переменных в этом уравнении есть три возможности:

- 1) $R_2 = \text{const} = a$, $R = \frac{Ar^2}{2} + B$;
- 2) $f_2 = \text{const} = a$, $f = A\varphi + B$;
- 3) $K = 0$.

В варианте 1) уравнение индукции переходит в

$$af_2'' = -\sigma\mu_0 Aaf f_2' + K, \quad (\text{III.67})$$

а уравнение движения (III.65) в

$$\left(\frac{Ar}{2} + \frac{B}{r}\right)f' \left(-\frac{2B}{r^3}\right)f'' - \frac{A^2 f}{2} \left[2Af' + \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{r^2}\right)f''\right] = \nu \left[\frac{4B}{r^4}f'' + \frac{2A}{r^2}f'' + \left(\frac{A}{2r^2} + \frac{B}{r^4}\right)f'''\right]. \quad (\text{III.68})$$

Уравнение (III.68) не содержит электромагнитных слагаемых, следовательно, магнитное поле не оказывает влияния на поле скорости.

В варианте 2) уравнение индукции примет вид

$$a \left(R_2'' + \frac{R_2'}{r} \right) = \sigma\mu_0 Aa \frac{RR_2'}{r} + K, \quad (\text{III.69})$$

а уравнение движения (III.65) –

$$\begin{aligned} \frac{AR}{r} \left(R''' + \frac{R''}{r} - \frac{R'}{r^2} \right) (A\varphi + B) - A \frac{R'(A\varphi + B)}{r} \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) = \\ = \nu \left(\frac{R'}{r^3} - \frac{R''}{r^2} + 2 \frac{R'''}{r} + R'''' \right) (A\varphi + B). \end{aligned} \quad (\text{III.70})$$

Этот вариант подобен варианту 1).

В варианте 3) уравнение (III.66) становится следующим:

$$f_2 \left(R_2'' + \frac{R_2'}{r} \right) + R_2 f_2'' = \frac{\sigma\mu_0}{r} \left(R R_2' f' f_2 - R' R_2 f f_2' \right). \quad (\text{III.71})$$

В этом случае можно пытаться построить два вида уравнений – уравнение по переменной r и уравнение по переменной φ .

Для построения уравнения по r разделим (III.71) на f_2 :

$$R_2'' + \frac{R_2'}{r} + R_2 \frac{f_2''}{f_2} = \frac{\sigma\mu_0}{r} \left(R R_2' f' - R' R_2 \frac{f f_2'}{f_2} \right). \quad (\text{III.72})$$

Уравнение (III.72) будет зависеть только от переменной r , если

$$f_2''/f_2 = a_1, f_2' = a_2, f_2 f_2'/f_2 = a_3, \quad (\text{III.73})$$

где a_1, a_2, a_3 – константы. Отсюда

$$f = a_2 \varphi + b, f_2 = C_1 (a_2 \varphi + b)^{a_3/a_2}, a_3 = a_2, a_1 = 0, \quad (\text{III.74})$$

а (III.72) запишется в виде

$$R_2'' + \frac{R_2'}{r} = \frac{a_2 \sigma \mu_0}{r} (R R_2' - R' R_2). \quad (\text{III.75})$$

Обратимся к уравнению движения (III.65). Для построения обыкновенного дифференциального уравнения по переменной r разделим (III.65) на νf . Тогда левая часть уравнения и первое (вязкое) слагаемое в правой части будут идентичны уравнению (I.26), а электромагнитное слагаемое примет вид:

$$\frac{1}{\rho \mu_0} \left\{ \frac{f_2 f_2'}{\nu f} \frac{R_2}{r} \left(R_2''' + \frac{R_2''}{r} - \frac{R_2'}{r^2} \right) + \frac{f_2' f_2''}{\nu f} \frac{R_2 R_2'}{r} - \frac{f_2 f_2'}{\nu f} \frac{R_2'}{r} \left(R_2'' + \frac{R_2'}{r} \right) - \frac{f_2 f_2'' R_2 R_2'}{\nu f} \frac{R_2'}{r} \right\}. \quad (\text{III.76})$$

В соответствии с результатами, полученными в пункте I.3, $f(\varphi) = a \nu \varphi$. Поэтому для того, чтобы выражение (III.76) не зависело от φ , необходимо, чтобы все множители, зависящие от φ , были постоянными величинами:

$$\frac{f_2 f_2'}{\nu f} = b_1, \frac{f_2' f_2''}{\nu f} = b_2, \frac{f_2 f_2'' R_2 R_2'}{\nu f} = b_3. \quad (\text{III.77})$$

Учитывая выражение для f , можно уточнить выражение для f_2 ($a_2 = a \nu$):

$$f_2 = C_1 a \nu \varphi. \quad (\text{III.78})$$

Тогда из (III.77) следует, что

$$b_1 = a C_1^2, b_2 = 0, b_3 = 0. \quad (\text{III.79})$$

Так как магнитные величины не могут быть связаны со свойствами жидкости, то коэффициент C_1 в (III.78) должен быть обратно пропорционален вязкости, чтобы исключить ее из магнитной функции тока:

$$C_1 = k/\nu. \quad (\text{III.80})$$

Тогда

$$f_2 = a k \varphi. \quad (\text{III.81})$$

Отсюда $b_1 = a k^2/\nu^2$ и уравнения движения (III.65) и индукции (III.66) запишутся в следующей форме ($a_2 = a_3 = a \nu$):

$$a \left[\left(R''' + \frac{R''}{r} - \frac{R'}{r^2} \right) \frac{R}{r} - \left(\frac{R'}{r} + R'' \right) \frac{R'}{r} \right] = \frac{R'}{r^3} - \frac{R''}{r^2} + 2 \frac{R'''}{r} + R^{IV} +$$

$$+ \frac{a k^2}{v^2 \rho \mu_0} \left[\left(R_2''' + \frac{R_2''}{r} - \frac{R_2'}{r^2} \right) \frac{R_2}{r} - \left(R_2'' + \frac{R_2'}{r} \right) \frac{R_2'}{r} \right], \quad (\text{III.82})$$

$$R_2'' + \frac{R_2'}{r} = a v \sigma \mu_0 \left(\frac{R R_2'}{r} - \frac{R' R_2}{r} \right). \quad (\text{III.83})$$

Функции тока ψ и ψ_2 формально запишутся в виде

$$\psi = a v \varphi R(r), \quad \psi_2 = a k \varphi R_2(r). \quad (\text{III.84})$$

Для построения уравнения по φ разделим (III.71) на R_2 :

$$f_2'' + \left(\frac{R_2''}{R_2} + \frac{R_2'}{r R_2} \right) f_2 = \sigma \mu_0 \left(\frac{R R_2'}{r R_2} f' f_2 - \frac{R'}{r} f f_2' \right). \quad (\text{III.85})$$

Уравнение (III.85) будет зависеть только от φ , если все множители, зависящие от r , будут постоянными величинами:

$$R_2''/R_2 = a_1, \quad R_2'/r R_2 = a_2, \quad R R_2'/r R_2 = a_3, \quad R'/r = a_4. \quad (\text{III.86})$$

Система (III.86) имеет два варианта решения: 1) $R_2 = \text{const}$; 2) $R = \text{const}$.

Согласно результатам пункта I.3, в уравнении движения разделить переменные можно только если $R = \text{const}$, то есть в варианте 2 (можно показать, что в варианте 1 $R = a_4 r^2/2 + b$). Решение системы (III.86) в варианте 2 дает, что $R_2 = \text{const}$. В этом случае $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ и уравнение индукции запишется в виде

$$f_2'' = 0, \quad (\text{III.87})$$

решением которого является

$$f_2(\varphi) = A \varphi + B. \quad (\text{III.88})$$

Уравнение движения (III.25) при этом примет вид ($R = a = \text{const}$, $R_2 = b = \text{const}$):

$$f^{IV} + 4 f'' + 2 a f f'' = 0. \quad (\text{III.89})$$

Это уравнение показывает, что магнитное поле вида (III.88) не оказывает влияния на поле скорости. К тому же, полученный результат совпадает с результатом, полученным в пункте III.2.

В результате проведенного анализа выяснилось, что в полярных координатах автомоделные задачи магнитной гидродинамики, в которых магнитное поле может оказывать воздействие на поле скорости, формулируемые в рамках метода разделения

переменных, могут описываться только уравнениями (III.82), (III.83) и функциями тока (III.84).

III.4. Осесимметричные МГД течения в цилиндрических координатах.

Для описания осесимметричных ($\partial/\partial\varphi = 0$) МГД течений в цилиндрических координатах воспользуемся гидродинамической ψ , электрической ψ_1 и магнитной ψ_2 функциями тока, которые связаны с составляющими скорости, электрического тока и магнитного тока соотношениями:

$$V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (\text{III.90})$$

$$j_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \quad j_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad (\text{III.91})$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r}, \quad B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial z}. \quad (\text{III.92})$$

Осесимметричные уравнения магнитной гидродинамики в цилиндрических координатах имеют вид [43]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E^2 \psi}{r^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E^2 \psi}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi^2}{\partial z} + \frac{v}{r} E^4 \psi = -\frac{\mu_0}{\rho r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_1^2}{r^2} \right) + \\ + \frac{1}{\mu_0 \rho} \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E^2 \psi_2}{r^2} \right) - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E^2 \psi_2}{r^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.93})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial r V_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r V_\varphi}{\partial z} + \frac{v}{r} E^2 (r V_\varphi) = \frac{1}{\rho r} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right), \quad (\text{III.94})$$

$$E^2 \psi_1 = \sigma r \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_1}{r^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_1}{r^2} \right) \right) \right], \quad (\text{III.95})$$

$$E^2 \psi_2 = \frac{\sigma \mu_0}{r} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \quad (\text{III.96})$$

где

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (\text{III.97})$$

Формально, введение функций тока в соответствии с (III.90) – (III.92) допускает существование азимутальных (окружных) составляющих скорости, тока и магнитного поля, зависящих только от z и r :

$$V_\varphi = V_\varphi(z, r), \quad j_\varphi = j_\varphi(z, r), \quad B_\varphi = B_\varphi(z, r). \quad (\text{III.98})$$

Рассмотрим возможность их образования и влияние на течение жидкости.

Вращательная скорость V_φ может создаваться как внешними источниками (например, вихревой нитью, вращающимися стенками и т. п.), так и взаимодействием магнитного поля и пропускаемого по жидкости тока. Поэтому влияние на картину течения вращения жидкости может оказаться существенным.

В соответствии с уравнением Максвелла (III.2)

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{r \mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi), -\frac{\partial}{\partial z} (r B_\varphi), \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right). \quad (\text{III.99})$$

Сравнение (III.99) с (III.91) дает, что

$$j_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{1}{r \mu_0} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi), \quad j_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = -\frac{1}{r \mu_0} \frac{\partial}{\partial z} (r B_\varphi). \quad (\text{III.100})$$

Отсюда следует, что с точностью до аддитивной постоянной

$$\psi_1 = \frac{r}{\mu_0} B_\varphi, \quad (\text{III.101})$$

и азимутальное магнитное поле B_φ создается пропускаемыми по жидкости осевым j_z и радиальным j_r токами.

Обратимся теперь к азимутальному току j_φ . В соответствии с уравнением Максвелла (III.99) и (III.92) имеем

$$\begin{aligned} j_\varphi &= \frac{1}{r \mu_0} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{r \mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{r^2 \mu_0} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r^2 \mu_0} E^2 \psi_2, \end{aligned} \quad (\text{III.102})$$

то есть азимутальная составляющая тока j_φ создается магнитным полем. В то же время, из уравнения индукции (III.96) следует, что

$$j_\varphi = -\frac{\sigma}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \quad (\text{III.103})$$

значит, за создание азимутального тока отвечает взаимодействие магнитного поля и движения жидкости. Из последнего равенства также видно, что плотность азимутального тока резко убывает (как r^{-3}) по мере удаления от оси симметрии.

В пункте I.3 были рассмотрены случаи, в которых возможно преобразование точных уравнений гидродинамики в обыкновенные уравнения:

- 1) $\eta = B(r/z)^\gamma$, $\psi = Arf(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)/r$;
- 2) $\eta = B(z/r)^\beta$, $\psi = Azf(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)/z$;
- 3) $\eta = Br^\gamma$, $\psi = Azf(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)$;
- 4) $\psi = a_1zR(r)$, $V_\varphi = \sqrt{a_1a_6}z\Omega(r)$;
- 5) $\psi = a_3r^2\Phi(z)$, $V_\varphi = \sqrt{a_3a_8}r\theta(z)$.

Так как уравнения магнитной гидродинамики являются дополненными электромагнитными силами уравнениями обычной гидродинамики, то электрическую и магнитную функции тока будем искать в этих же классах функций. Из сравнения первых двух слагаемых в левой части уравнения (III.93) (инерционные слагаемые) с выражением в квадратных скобках в правой части (магнитное слагаемое) следует, что вид магнитной функции тока ψ_2 совпадает с видом гидродинамической функцией тока ψ . То же самое можно сказать про слагаемое, содержащее вращательную скорость, и слагаемое, содержащее электрическую функцию тока. Запись уравнения (III.93) показывает, что $\psi_1/r \sim V_\varphi$, следовательно, общий вид всех неизвестных функций, входящих в (III.93) – (III.96), известен. Остается только определить их конкретный вид и выписать соответствующие уравнения. Подставляя варианты 1) – 4) в уравнения (III.93) – (III.96), получим полный набор функций, определяющих поле скорости, магнитное и электрическое поля:

- 1) $\eta = B(r/z)^\gamma$, $\psi = Arf(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)/r$, $\psi_1 = Nf_1(\eta)$, $\psi_2 = Drf_2(\eta)$;
- 2) $\eta = B(z/r)^\beta$, $\psi = Azf(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)/z$, $\psi_1 = Nf_1(\eta)$, $\psi_2 = Dz f_2(\eta)$;
- 3) $\eta = Br^\gamma$, $\psi = Azf(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)$, $\psi_1 = Nf_1(\eta)$, $\psi_2 = Dz f_2(\eta)$;
- 4) $\psi = a_1zR(r)$, $V_\varphi = \sqrt{a_1a_6}z\Omega(r)$, $\psi_1 = gzR_1(r)$, $\psi_2 = dzR_2(r)$
- 5) $\psi = a_3r^2\Phi(z)$, $V_\varphi = \sqrt{a_3a_8}r\theta(z)$, $\psi_1 = gr^2\Phi_1(z)$, $\psi_2 = dr^2\Phi_2(z)$.

Если проанализировать автомодельные переменные в вариантах 1) – 3) подобно тому, как это было сделано в пункте I.3, то видно, что приняв в вариантах 1) и 3) $\gamma = 1$, а в варианте 2) – $\beta = 1$, их можно упростить, сведя к новой переменной. Тогда получим более простую и удобную форму переменной и, следовательно, уравнений:

- 1) $\eta = Br/z$, $\psi = Arf(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)/r$, $\psi_1 = Nf_1(\eta)$, $\psi_2 = Drf_2(\eta)$;
- 2) $\eta = Bz/r$, $\psi = Azf(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)/z$, $\psi_1 = Nf_1(\eta)$, $\psi_2 = Dz f_2(\eta)$;
- 3) $\eta = Br$, $\psi = Azf(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)$, $\psi_1 = Nf_1(\eta)$, $\psi_2 = Dz f_2(\eta)$;

$$4) \psi = a_1 z R(r), V_\varphi = \sqrt{a_1 a_6} z \Omega(r), \psi_1 = g z R_1(r), \psi_2 = d z R_2(r);$$

$$5) \psi = a_3 r^2 \Phi(z), V_\varphi = \sqrt{a_3 a_8} r \theta(z), \psi_1 = g r^2 \Phi_1(z), \psi_2 = d r^2 \Phi_2(z).$$

Для того, чтобы полученные уравнения и переменные были безразмерными, необходимо специальным образом выбрать коэффициенты A, B, C, N, D в случае автомодельного подхода. (Как уже было сказано в п. I.3, в случае разделения переменных для перевода уравнений в безразмерную форму необходимы дополнительные требования на размерности всех используемых функций). Размерности коэффициентов можно получить, используя связи между скоростями и функцией тока. Для каждого варианта имеем следующие результаты (L, T, M, I, B_0 – размерности длины, времени, массы, силы тока и индукции магнитного поля соответственно):

$$1) [A] = [v] = L^2/T, [B] = 1, [C] = [v] = L^2/T, [N] = I, [D] = LM/(T^2 I^2) = LB_0;$$

$$2) [A] = [v] = L^2/T, [B] = 1, [C] = [v] = L^2/T, [N] = I, [D] = LM/(T^2 I^2) = LB_0;$$

$$3) [A] = [v] = L^2/T, [B] = L^{-\gamma}, [C] = [V] = L/T, [N] = I, [D] = LM/(T^2 I^2) = LB_0;$$

Если в задаче нет характерной величины нужной размерности, то ее необходимо составить из имеющихся величин. Если в задаче по жидкости не пропускается внешний электрический ток, то характерное значение индуцированного тока определяется магнитным полем в соответствии с законом полного тока: $I = \frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} d\mathbf{l}$. Точно так же в отсутствии внешнего магнитного поля определяется характерное значение индуцированного магнитного поля в зависимости от величины пропускаемого по жидкости электрического тока.

Выпишем уравнения магнитной гидродинамики для каждого варианта. Все нижеприведенные уравнения получены подстановкой функций тока для каждого из вышеприведенных вариантов в уравнения (III.93) – (III.96). Все коэффициенты в уравнениях для вариантов 1) – 3) станут безразмерными, если 1-ые уравнения разделить на Av , 2-ые – на Cv , 3-и – на N . 4-ые уравнения являются безразмерными.

Вариант 1.

$$\begin{aligned}
 & A \nu \eta^8 f^{(4)} + 12 A \nu \eta^7 f^{(3)} + 36 A \nu \eta^6 f'' + 3 A^2 B \eta^6 f' f'' - \frac{3 B D^2 \eta^6 f_2' f_2''}{\rho \mu_0} + \\
 & + A^2 B \eta^6 f f^{(3)} - \frac{B D^2 \eta^6 f_2 f_2^{(3)}}{\rho \mu_0} + 2 A B^2 \nu \eta^6 f^{(4)} + 6 A^2 B \eta^5 f'^2 - \frac{6 B D^2 \eta^5 f_2'^2}{\rho \mu_0} + \\
 & + 24 A \nu \eta^5 f' + 6 A^2 B \eta^5 f f'' - \frac{6 B D^2 \eta^5 f_2 f_2''}{\rho \mu_0} + 14 A B^2 \nu \eta^5 f^{(3)} + \\
 & + 6 A^2 B \eta^4 f f' - \frac{6 B D^2 \eta^4 f_2 f_2'}{\rho \mu_0} + 18 A B^2 \nu \eta^4 f'' + 3 A^2 B^3 \eta^4 f' f'' - \\
 & - \frac{3 B^3 D^2 \eta^4 f_2' f_2''}{\rho \mu_0} + A^2 B^3 \eta^4 f f^{(3)} - \frac{B^3 D^2 \eta^4 f_2 f_2^{(3)}}{\rho \mu_0} + A B^4 \nu \eta^4 f^{(4)} + \\
 & + 3 A^2 B^3 \eta^3 f'^2 - \frac{3 B^3 D^2 \eta^3 f_2'^2}{\rho \mu_0} + 3 A^2 B^3 \eta^3 f f'' - \frac{3 B^3 D^2 \eta^3 f_2 f_2''}{\rho \mu_0} + \\
 & + 2 A B^4 \nu \eta^3 f^{(3)} - 3 A^2 B^3 \eta^2 f f' + 2 B^3 C^2 \eta^2 \Omega \Omega' - \frac{2 B^3 N^2 \mu_0 \eta^2 f_1 f_1'}{\rho} + \\
 & + \frac{3 B^3 D^2 \eta^2 f_2 f_2'}{\rho \mu_0} - 3 A B^4 \nu \eta^2 f'' + 3 A B^4 \nu \eta f' - 3 A B^4 \nu f = 0
 \end{aligned}$$

(III.104)

$$C \nu \eta^3 \Omega'' + 2 C \nu \eta^2 \Omega' + A B C \eta f \Omega' - \frac{B D N \eta f_2 f_1'}{\rho} + B^2 C \nu \eta \Omega'' - B^2 C \nu \Omega' = 0$$

(III.105)

$$\begin{aligned}
 & N \eta^3 f_1'' + 2 N \eta^2 f_1' + 2 A B N \sigma \mu_0 \eta f_1 f' - B C D \sigma \eta f_2 \Omega' + A B N \sigma \mu_0 \eta f f_1' - \\
 & - 2 B C D \sigma \eta f_2' \Omega + B^2 N \eta f_1'' - B^2 N f_1' = 0
 \end{aligned}$$

(III.106)

$$\eta^4 f_2'' + B^2 \eta^2 f_2'' + 2 \eta^3 f_2' + B^2 \eta f_2' - B^2 f_2 - A B \sigma \mu_0 \eta^2 f_2 f' + A B \sigma \mu_0 \eta^2 f f_2' = 0$$

(III.107)

Вариант 2.

$$\begin{aligned}
 & A \nu \eta^8 f^{(4)} - 3 A^2 \eta^7 f' f'' + \frac{3 D^2 \eta^7 f_2' f_2''}{\rho \mu_0} + 14 A \nu \eta^7 f^{(3)} - A^2 \eta^7 f f^{(3)} + \frac{D^2 \eta^7 f_2 f_2^{(3)}}{\rho \mu_0} - \\
 & - 9 A^2 \eta^6 f'^2 + \frac{9 D^2 \eta^6 f_2'^2}{\rho \mu_0} + 51 A \nu \eta^6 f'' - 9 A^2 \eta^6 f f'' + \frac{9 D^2 \eta^6 f_2 f_2''}{\rho \mu_0} + \\
 & + 2 A B^2 \nu \eta^6 f^{(4)} + 45 A \nu \eta^5 f' - 15 A^2 \eta^5 f f' + \frac{15 D^2 \eta^5 f_2 f_2'}{\rho \mu_0} - 3 A^2 B^2 \eta^5 f' f'' + \\
 & + \frac{3 B^2 D^2 \eta^5 f_2' f_2''}{\rho \mu_0} + 18 A B^2 \nu \eta^5 f^{(3)} - A^2 B^2 \eta^5 f f^{(3)} + \frac{B^2 D^2 \eta^5 f_2 f_2^{(3)}}{\rho \mu_0} - \\
 & + 6 A^2 B^2 \eta^4 f'^2 + \frac{6 B^2 D^2 \eta^4 f_2'^2}{\rho \mu_0} + 36 A B^2 \nu \eta^4 f'' - 6 A^2 B^2 \eta^4 f f'' + \frac{6 B^2 D^2 \eta^4 f_2 f_2''}{\rho \mu_0} + \\
 & + A B^4 \nu \eta^4 f^{(4)} + 12 A B^2 \nu \eta^3 f' - 6 A^2 B^2 \eta^3 f f' + \frac{2 B^2 N^2 \mu_0 \eta^3 f_1 f_1'}{\rho} + \frac{6 B^2 D^2 \eta^3 f_2 f_2'}{\rho \mu_0} + \\
 & + 4 A B^4 \nu \eta^3 f^{(3)} - 2 B^4 C^2 \eta \Omega \Omega' + 2 B^4 C^2 \Omega^2 = 0
 \end{aligned}$$

(III.108)

$$\frac{DN \eta^4 f_2 f_1'}{\rho} + BC \nu \eta^4 \Omega'' + BC \nu \eta^3 \Omega' - ABC \eta^3 f \Omega' - BC \nu \eta^2 \Omega + ABC \eta^2 f \Omega + B^3 C \nu \eta^2 \Omega'' - 2B^3 C \nu \eta \Omega' + 2B^3 C \nu \Omega = 0 \quad (III.109)$$

$$NB^2 f_1'' + \frac{CDB \sigma \Omega f_2}{\eta} + CDB \sigma f_2 \Omega' + 2CDB \sigma \Omega f_2' - 2AN \sigma \mu_0 f f_1 - 2AN \sigma \mu_0 \eta f_1 f' + 3N \eta f_1' - AN \sigma \mu_0 \eta f f_1' + N \eta^2 f_1'' = 0 \quad (III.110)$$

$$A \sigma \mu_0 \eta^2 f_2 f' - A \sigma \mu_0 \eta^2 f f_2' + \eta^3 f_2'' + B^2 \eta f_2'' + 3 \eta^2 f_2' + 2B^2 f_2' = 0 \quad (III.111)$$

Вариант 3.

$$A \nu \eta^3 f^{(4)} - A^2 \eta^2 f' f'' + \frac{D^2 \eta^2 f_2' f_2''}{\rho \mu_0} - 2A \nu \eta^2 f^{(3)} + A^2 \eta^2 f f^{(3)} - \frac{D^2 \eta^2 f_2 f_2^{(3)}}{\rho \mu_0} + A^2 \eta f'^2 + 3A \nu \eta f'' - 3A^2 \eta f f'' + \frac{3D^2 \eta f_2 f_2''}{\rho \mu_0} - \frac{D^2 \eta f_2'^2}{\rho \mu_0} - 3A \nu f' + 3A^2 f f' - \frac{3D^2 f_2 f_2'}{\rho \mu_0} = 0 \quad (III.112)$$

$$C \nu \eta^2 \Omega'' + C \nu \eta \Omega' - C \nu \Omega + AC \eta f \Omega' + AC f \Omega - \frac{BDN f_2 f_1'}{\rho} = 0 \quad (III.113)$$

$$BN \eta^2 f_1'' + CD \sigma \eta \Omega f_2 - CD \sigma \eta^2 f_2 \Omega' - BN \eta f_1' + ABN \sigma \mu_0 \eta f f_1' - 2ABN \sigma \mu_0 f f_1 = 0 \quad (III.114)$$

$$\eta f_2'' - A \sigma \mu_0 f_2 f' + A \sigma \mu_0 f f_2' - f_2' = 0 \quad (III.115)$$

Вариант 4 ($\mu \equiv \mu_0$).

$$-2a_1 a_6 \Omega^2 + \frac{2g^2 \mu R_1^2}{r^2 \rho} - \frac{3\nu a_1 R'}{r^3} + \frac{3a_1^2 R R'}{r^3} + \frac{a_1^2 R'^2}{r^2} - \frac{3d^2 R_2 R_2'}{r^3 \mu \rho} - \frac{d^2 R_2'^2}{r^2 \mu \rho} + \frac{3\nu a_1 R''}{r^2} - \frac{3a_1^2 R R''}{r^2} - \frac{a_1^2 R' R''}{r} + \frac{3d^2 R_2 R_2''}{r^2 \mu \rho} + \frac{d^2 R_2' R_2''}{r \mu \rho} - \frac{2\nu a_1 R^{(3)}}{r} + \frac{a_1^2 R R^{(3)}}{r} - \frac{d^2 R_2 R_2^{(3)}}{r \mu \rho} + \nu a_1 R^{(4)} = 0 \quad (III.116)$$

$$\frac{\nu \sqrt{a_1} \sqrt{a_6} \Omega}{r} + \frac{a_1^{3/2} \sqrt{a_6} R \Omega}{r} - a_1^{3/2} \sqrt{a_6} \Omega R' + \nu \sqrt{a_1} \sqrt{a_6} \Omega' + a_1^{3/2} \sqrt{a_6} R \Omega' - \frac{dg R_2 R_1'}{r \rho} + \frac{dg R_1 R_2'}{r \rho} + r \nu \sqrt{a_1} \sqrt{a_6} \Omega'' = 0 \quad (III.117)$$

$$-\frac{2g \mu \sigma a_1 R R_1}{r} + d \sigma \sqrt{a_1} \sqrt{a_6} \Omega R_2 - g \mu \sigma a_1 R_1 R' - dr \sigma \sqrt{a_1} \sqrt{a_6} R_2 \Omega' - g R_1' + g \mu \sigma a_1 R R_1' + dr \sigma \sqrt{a_1} \sqrt{a_6} \Omega R_2' + gr R_1'' = 0 \quad (III.118)$$

$$\frac{\mu \sigma a_1 R_2 R'}{r} + \frac{R_2'}{r} - \frac{R \mu \sigma a_1 R_2'}{r} - R_2'' = 0 \quad (III.119)$$

Вариант 5.

$$\frac{2 \Phi_2 \Phi_2^{(3)} d^2}{a_3 \rho \mu_0} - 2 a_8 \theta \theta' + \frac{2 g^2 \mu_0 \Phi_1 \Phi_1'}{a_3 \rho} - 2 a_3 \Phi \Phi^{(3)} + \nu \Phi^{(4)} = 0 \quad (\text{III.120})$$

$$-2 a_3 \Phi \theta' + 2 a_3 \theta \Phi' + \nu \theta'' + \frac{2 d g \Phi_2 \Phi_1'}{\sqrt{a_3 a_8} \rho} - \frac{2 d g \Phi_1 \Phi_2'}{\sqrt{a_3 a_8} \rho} = 0 \quad (\text{III.121})$$

$$2 d \sigma \sqrt{a_3} \sqrt{a_8} \Phi_2 \theta' - 2 a_3 g \sigma \mu_0 \Phi \Phi_1' + g \Phi_1'' = 0 \quad (\text{III.122})$$

$$2 a_3 \sigma \mu_0 \Phi_2 \Phi_1' - 2 a_3 \sigma \mu_0 \Phi \Phi_2' + \Phi_2'' = 0 \quad (\text{III.123})$$

В варианте 3 уравнение (III.112) не содержит вращательной скорости и электрической функции тока, в то время как гидродинамическая функция тока входит в уравнения для определения $\Omega(\eta)$ и $f_1(\eta)$. Отсюда можно сделать вывод, что определяющим является взаимодействие гидродинамической и магнитной функций тока, а вращение жидкости и электрическое поле подстраиваются под эту картину течения. Немного странно выглядит нестыковка вариантов 3 и 4, которые по идее являются (если сравнивать переменные и функции тока) одним и тем же случаем. Но если гидродинамические и магнитные функции тока схожи, то вращательная скорость и электрическая функция тока различаются. Это действительно два разных случая.

Приведенные пять вариантов описывают все возможные способы построения точных обыкновенных уравнений магнитной гидродинамики в цилиндрических координатах.

III.5. Осесимметричные МГД течения в сферических координатах.

Уравнения, описывающие осесимметричные МГД течения в сферических координатах, имеют вид [43]:

$$\begin{aligned} \sin \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{E^2 \psi}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial R} \frac{E^2 \psi}{R^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial V_\varphi^2}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial V_\varphi^2}{\partial R} + \nu E^4 \psi = \\ = \frac{\sin \theta}{\rho \mu_0} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{E^2 \psi_2}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial R} \frac{E^2 \psi_2}{R^2 \sin^2 \theta} \right) + \\ + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\psi_1}{R \sin \theta} \right)^2 - \cos \theta \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\psi_1}{R \sin \theta} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{III.124})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \theta} (R \sin \theta V_\varphi) - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial R} (R \sin \theta V_\varphi) + \nu R^2 \sin \theta E^2 (R \sin \theta V_\varphi) =$$

$$= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial R} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} \right), \quad (\text{III.125})$$

$$E^2 \psi_1 = \sigma \sin \theta \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V_\varphi}{R \sin \theta} \right) - \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{V_\varphi}{R \sin \theta} \right) + \right. \\ \left. + \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\psi_1}{R^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\psi_1}{R^2 \sin^2 \theta} \right) \right) \right], \quad (\text{III.126})$$

$$E^2 \psi_2 = \frac{\sigma \mu_0}{R^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right), \quad (\text{III.127})$$

где операторы E^2 , E^4 определяются выражениями (I.61).

Гидродинамическая ψ , электрическая ψ_1 и магнитная ψ_2 функции тока связаны соответственно с составляющими скорости \mathbf{V} , плотности электрического тока \mathbf{j} и индукции магнитного поля \mathbf{B} соотношениями:

$$V_R = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad (\text{III.128})$$

$$j_R = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}, \quad j_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial R}, \quad (\text{III.129})$$

$$B_R = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial R}, \quad B_\varphi = \frac{\mu_0}{R \sin \theta} \psi_1. \quad (\text{III.130})$$

В работе [43] было показано, что создание в жидкости азимутального тока j_φ невозможно, поэтому эта составляющая электрического тока не рассматривается. Азимутальная же скорость V_φ является величиной, которую невозможно связать с гидродинамической функцией тока, поэтому она будет рассматриваться как самостоятельная величина. Связь азимутального магнитного поля B_φ с электрической функцией тока ψ_1 легко получить, используя уравнение Максвелла (III.2) и выражения (III.129).

Как было показано ранее (пункт I.4.), в сферических координатах преобразование уравнений в частных производных к безразмерным обыкновенным уравнениям возможно только методом разделения переменных:

$$\psi = v R \Phi(\theta), \quad V_\varphi = \frac{v}{R} \Omega(\theta). \quad (\text{III.131})$$

При этом получаем уравнение относительно переменной θ (в пункте I.4. было показано, что построить уравнение относительно переменной R невозможно). Поэтому электрическую и магнитную функции тока будем искать в виде:

$$\psi_1 = R_1(R)\Phi_1(\theta), \psi_2 = R_2(R)\Phi_2(\theta). \quad (\text{III.132})$$

Так как инерционное и магнитное слагаемые подобны, как и электрическое и вращательное слагаемые, то вид магнитной функции тока будет подобным виду гидродинамической функции тока, а электрическая функция тока пропорциональна вращательной скорости: $\psi_1 \sim R \sin \theta V_\varphi$, следовательно, функции (III.132) можно брать в виде

$$\psi_1 = C\Phi_1(\theta), \psi_2 = dR\Phi_2(\theta). \quad (\text{III.132,a})$$

Подставляя функции тока (III.131) и (III.132,a) в уравнения (III.124) – (III.127), получим

$$\begin{aligned} & -4v^2 \rho (15 \cos \theta + \cos 3\theta) \Phi^2 + v \sin \theta \Phi (2v \rho (34 + 13 \cos 2\theta) \Phi' - \\ & - 2d^2 \sigma \Phi_2 (3 \cos \theta \Phi_2' - \sin \theta \Phi_2'')) + 2 \sin \theta \left(3d^2 \sigma \Phi_2'^2 - v \rho (7 \cos \theta \Phi'' - \sin \theta \Phi''') \right) + \\ & + \sin \theta (4v^2 \rho \cos \theta \sin^3 \theta \Omega^2 - 15v^2 \rho \sin 2\theta \Phi'^2 + 4v^2 \rho \sin^4 \theta \Omega \Omega' + \\ & + v \Phi' (6d^2 \sigma \cos \theta \Phi_2^2 - 6d^2 \sigma \sin \theta \Phi_2 \Phi_2' + v \rho (\cos 3\theta - 7 \cos \theta + 6 \sin^2 \theta \Phi'')) + \\ & + \sin \theta \left(-4C^2 \mu_0 \sin \theta \Phi_1 \Phi_1' - v \left(v \rho (\cos 2\theta - 7) + 2d^2 \sigma \Phi_2^2 \right) \Phi'' + \right. \\ & \left. + 2v \rho \sin \theta (2 \cos \theta - \sin \theta \Phi''') \right) = 0, \quad (\text{III.133}) \end{aligned}$$

$$-\Omega + \cos \theta \sin \theta \Omega' + \cos \theta \Phi \Omega + \sin \theta \Phi \Omega' + \sin^2 \theta \Omega'' - \frac{Cd}{v^2 \rho} \Phi_2 \Phi_1' = 0, \quad (\text{III.134})$$

$$\begin{aligned} & C \mu_0 \sigma \left(2\Phi_1 \Phi' + \Phi (\Phi_1' - 2 \operatorname{ctg} \theta \Phi_1) \right) + d \sigma \left(\cos \theta \Phi_2 \Omega - \sin \theta (2\Omega \Phi_2' + \Phi_2 \Omega') \right) - \\ & - \frac{C}{v} \left(\cos \theta \Phi_1' - \sin \theta \Phi_1'' \right) = 0, \quad (\text{III.135}) \end{aligned}$$

$$v \mu_0 \sigma \left(\Phi_2 \Phi' - \Phi \Phi_2' \right) + \cos \theta \Phi_2' - \Phi_2'' = 0. \quad (\text{III.136})$$

Коэффициенты C и d можно выбрать так, чтобы уравнения (III.133) – (III.136) не содержали размерных величин (функции Φ_1 , Φ_2 считаем безразмерными). Тогда

$$[C] = I, \quad [d] = LB_0, \quad (\text{III.137})$$

где I , L и B_0 – характерные значения силы тока, длины и индукции магнитного поля, которые могут быть либо заданы условиями задачи, либо должны быть составлены из данных задачи.

С учетом полученных результатов, уравнения (III.133) – (III.136) примут вид:

$$\begin{aligned}
& -4(15\cos\theta + \cos 3\theta)\Phi^2 + \sin\theta\Phi(2(34 + 13\cos 2\theta)\Phi' - \\
& -2\frac{d^2\sigma}{\nu\rho}\Phi_2\left(3\cos\theta\Phi_2' - \sin\theta\Phi_2''\right) + 2\sin\theta\left(3\frac{d^2\sigma}{\nu\rho}\Phi_2'^2 - (7\cos\theta\Phi'' - \sin\theta\Phi''')\right) + \\
& + \sin\theta(4\cos\theta\sin^3\theta\Omega^2 - 15\sin 2\theta\Phi'^2 + 4\sin^4\theta\Omega\Omega' + \\
& + \Phi'\left(6\frac{d^2\sigma}{\nu\rho}\cos\theta\Phi_2^2 - 6\frac{d^2\sigma}{\nu\rho}\sin\theta\Phi_2\Phi_2' + (\cos 3\theta - 7\cos\theta + 6\sin^2\theta\Phi'')\right) + \\
& + \sin\theta\left(-4\frac{C^2\mu_0}{\nu^2\rho}\sin\theta\Phi_1\Phi_1' - \left(\left((\cos 2\theta - 7) + 2\frac{d^2\sigma}{\nu\rho}\Phi_2^2\right)\Phi'' + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\sin\theta(2\cos\theta - \sin\theta\Phi''')\right)\right) = 0, \tag{III.138}
\end{aligned}$$

$$-\Omega + \cos\theta\sin\theta\Omega' + \cos\theta\Phi\Omega + \sin\theta\Phi\Omega' + \sin^2\theta\Omega'' - \frac{Cd}{\mu_0\rho}\Phi_2\Phi_1' = 0, \tag{III.139}$$

$$\begin{aligned}
& \beta\left(\left(2\Phi_1\Phi' + \Phi\left(\Phi_1' - 2\operatorname{ctg}\theta\Phi_1\right)\right) + \frac{d\nu\sigma}{C}\left(\cos\theta\Phi_2\Omega - \sin\theta\left(2\Omega\Phi_2' + \Phi_2\Omega'\right)\right)\right) - \\
& - \left(\cos\theta\Phi_1' - \sin\theta\Phi_1''\right) = 0, \tag{III.140}
\end{aligned}$$

$$\beta\left(\Phi_2\Phi' - \Phi\Phi_2'\right) + \cos\theta\Phi_2' - \Phi_2'' = 0. \tag{III.141}$$

где $\beta = \nu\sigma\mu_0$ – безразмерная величина, называемая числом Бетчелора, а остальные коэффициенты в уравнениях тоже безразмерные.

Следовательно, все точные автомодельные решения в магнитной гидродинамике в сферических координатах описываются системой уравнений (III.138) – (III.141), решения которых определяют функции тока и азимутальную скорость в соответствии с выражениями:

$$\psi = \nu R\Phi(\theta), \quad \psi_1 = \nu\sqrt{\rho/\mu_0}\Phi_1(\theta), \quad \psi_2 = \nu\sqrt{\rho\mu_0}R\Phi_2(\theta), \quad V_\varphi = \frac{\nu}{R}\Omega(\theta). \tag{III.142}$$

III.6. Безындукционное приближение.

При постановке задач магнитной гидродинамики достаточно часто учесть все эффекты взаимодействия проводящей жидкости с электрическим током и магнитным полем сложно, и не всегда необходимо с практической точки зрения, так как воздействие индуцированных токов и полей на движение жидкости мало по сравнению с воздействием внешних электромагнитных полей. Поэтому, при рассмотрении магнитогидродинамических течений применяют так называемое безындукционное

приближение, в котором учитываются индуцированные движением проводящей жидкости в магнитном поле электрические токи, но не учитываются индуцированные магнитные поля.

Общий принцип построения безындукционного приближения состоит в следующем ([43], [70], [72]). Магнитная функция тока ψ_2 представляется в виде ряда по малому безразмерному параметру – числу Бетчелора

$$\beta = \nu \sigma \mu_0, \quad (\text{III.143})$$

которое в земных условиях имеет порядок $\beta \approx 10^{-6} \div 10^{-7}$. Сам ряд имеет вид:

$$\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \psi_{2n}, \quad (\text{III.144})$$

где ψ_{20} - невозмущенное движением жидкости внешнее магнитное поле. Уравнения магнитной гидродинамики содержат параметр β в первой степени, следовательно, при подстановке ряда (III.144) в эти уравнения на течение жидкости будут влиять только члены ряда ψ_{20} и ψ_{21} , остальные же будут иметь более высокий порядок по β , что с учетом малости β позволяет пренебречь ими.

Рассмотрим построение безындукционного приближения для каждой из используемых систем координат: декартовой, полярной, цилиндрической и сферической.

III.6.1. Безындукционное приближение в декартовой системе координат для плоских течений.

Для построения безындукционного приближения в декартовых координатах для плоских течений рассмотрим уравнение индукции (III.8)

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\sigma \mu_0 \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}),$$

которое с учетом связей (III.24) и (III.26) перейдет в (см. вывод формулы (III.36))

$$\nabla^2 \psi_2 = -\sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) + K, \quad (K=\text{const}). \quad (\text{III.145})$$

Подстановка ряда (III.144) в (III.145) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях β дает систему уравнений (как было указано ранее, слагаемые, пропорциональные 2-ой степени β и выше, отбрасываем ввиду малости β ; также в (III.145) используем тождество $\sigma \mu_0 = \sigma \mu_0 \nu / \nu = \beta / \nu$):

$$\nabla^2 \psi_{20} = K, \quad (\text{III.146})$$

$$\nabla^2 \psi_{21} = -\frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} \right). \quad (\text{III.147})$$

Функция ψ_{20} описывает невозмущенное внешнее магнитное поле, а ψ_{21} – возмущение этого поля движением жидкости.

Для упрощения записи уравнения (III.39) в безындукционном приближении, можно предложить такой метод ([43], [72]): в выражениях вида $\frac{\partial \psi_2}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi_2}{\partial y}$ функция

ψ_2 заменяется на ψ_{20} , а выражения вида $\nabla^2 \psi_2$ заменяются на

$$\nabla^2 \psi_2 = \nabla^2 \psi_{21} = -\frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} \right) + K. \quad (\text{III.148})$$

Таким образом, система уравнений будет следующей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = -\frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{III.149})$$

$$\nabla^2 \psi_1 = \sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right), \quad (\text{III.150})$$

$$\nabla^2 \psi_{20} = K. \quad (\text{III.151})$$

Подстановка в систему уравнений (III.149) – (III.151) переменных автомодельности и функций тока в виде

$$\eta = y/\delta(x), \quad \delta(x) = Bx^\beta, \quad \psi = Ax^\alpha f(\eta), \quad \psi_1 = Cx^\gamma f_1(\eta), \quad \psi_{20} = Dx^d f_2(\eta), \quad (\text{III.152})$$

а также применение условий автомодельности, позволяют определить неизвестные показатели степеней в (III.152):

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad d = 0, \quad \gamma - \text{любое}. \quad (\text{III.153})$$

Эти результаты приводят систему (III.149) – (III.151) к виду (для получения безразмерных уравнений коэффициенты A и B взяты в виде: $A = \nu$, $B = 1$):

$$24\eta f' + 4\eta f'^2 + 12(1 + 3\eta^2)f'' + 2(1 + \eta^2)f'f'' + 12\eta(1 + \eta^2)f''' + (1 + \eta^2)^2 f^{IV} = 0, \quad (\text{III.154})$$

$$\gamma(\gamma - 1)f_1 - 2(\gamma - 1)\eta f_1' - \gamma \mu_0 \sigma \nu f' f_1 + (1 + \eta^2)f_1'' = 0, \quad (\text{III.155})$$

$$\frac{D}{x^2} \left(2\eta f_2' + (1 + \eta^2)f_2'' \right) = K. \quad (\text{III.156})$$

Из уравнения (III.154) следует, что в безындукционной постановке магнитное поле не оказывает никакого влияния на поле скорости, так же как и электрический ток. Уравнение (III.155) можно интерпретировать следующим образом: поле скорости влияет на распределение электрического тока в плоскости течения, но не наоборот, однако это влияние мало, так как мало число Бетчелора, стоящее перед произведением $f' f_1$. Уравнение (III.156) показывает, что для автомодельной постановки должно быть $K=0$.

В этом варианте получаем, что магнитное поле не взаимодействует с полем скорости и не оказывает никакого влияния на движение жидкости.

Рассмотрим безындукционное приближение в декартовых координатах с точки зрения метода разделения переменных. Функции тока будем искать в виде:

$$\psi = g(x)f(y), \quad \psi_1 = g_1(x)f_1(y), \quad \psi_2 = g_2(x)f_2(y). \quad (\text{III.157})$$

Уравнения (III.149) – (III.151) преобразуем так, чтобы получить уравнения, зависящие только от переменной x (метод описан в пункте I.1). В результате получим ($a, b, c, d, e = \text{const}$):

$$\begin{aligned} 1) & f(y) = ay, \quad f_1(y) = ey, \quad f_2(y) = cy; \\ 2) & f(y) = ay + b, \quad f_2(y) = d, \quad f_1(y) = ay + b \text{ либо } f_1(y) = e. \end{aligned} \quad (\text{III.158})$$

Из (III.158) следует, что есть три возможных варианта построения точных решений методом разделения переменных. Рассмотрим каждый из них.

Вариант 1. $f(y) = ay, f_1(y) = ey, f_2(y) = cy$. Уравнения (III.149) – (III.151) запишутся в виде:

$$\frac{c^2}{\rho \mu_0} \left(gg_2'^2 - g'g_2g_2' + g''g_2^2 - gg_2g_2'' \right) + a(g'g'' - gg''') + \nu g'''' = 0, \quad (\text{III.159})$$

$$a \rho \mu_0 (g'g_1 - gg_1') + g_1'' = 0, \quad (\text{III.160})$$

$$cy g_2'' = K. \quad (\text{III.161})$$

Из уравнения (III.161) следует, что для разделения переменных должно быть либо $K = 0$, либо $g_2'' = 0$, что в данном случае одно и то же. Решением последнего уравнения является функция

$$g_2(x) = a_1x + a_2. \quad (\text{III.162})$$

Тогда магнитная функция тока запишется как

$$\psi_2 = (a_1x + a_2)cy, \quad (\text{III.163})$$

что соответствует магнитному полю с нейтральной точкой.

Из уравнений (III.160) и (III.159) следует, что электрический ток не оказывает никакого влияния на поле скорости, в то время как поле скорости влияет на электрическое поле.

С учетом (III.162) уравнение (III.159) запишется в виде:

$$\frac{c^2}{\rho \mu_0} (a_1^2 g - a_1 (a_1 x + a_2) g' + (a_1 x + a_2)^2 g'') + a (g' g'' - g g''') + \nu g^{IV} = 0. \quad (\text{III.164})$$

Уравнение же (III.160) необходимо только лишь для расчета поля давления.

Вариант 2. $f(y) = ay + b$, $f_2(y) = d$, $f_1(y) = ay + b$.

В этом случае уравнение (III.159) будет следующим:

$$a (g' g'' - g g''') + \nu g^{IV} = 0,$$

то есть чисто гидродинамическим. Это означает, что магнитное поле не оказывает влияния на поле скорости.

Вариант 3. $f(y) = ay + b$, $f_2(y) = d$, $f_1(y) = e$.

Этот вариант отличается от варианта 2 только уравнением для определения электрической функции тока и тоже является чисто гидродинамическим.

III.6.2. Безындукционное приближение в полярных координатах.

Рассмотрим возможность построения точных решений задач МГД в безындукционном приближении в полярных координатах. Уравнения магнитной гидродинамики будут следующими ([72]):

уравнение движения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) + \\ & + \frac{1}{\mu_0 \rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi_2 \right), \end{aligned} \quad (\text{III.165})$$

уравнение индукции ($K = \text{const}$)

$$\nabla^2 \psi_2 = \sigma \mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right) + K, \quad (\text{III.166})$$

(все обозначения идентичны использованным в пункте III.3).

К безындукционному приближению можно придти, как это было показано в декартовых координатах (см. пункт III.6), представляя магнитную функцию тока в виде ряда по степеням числа Бетчелора $\beta = \sigma \mu_0 \nu$: $\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \psi_{2n}$. Подставляя этот ряд в

уравнение индукции (III.166) и приравнявая слагаемые при одинаковых степенях β , получим

$$\nabla^2 \psi_{20} = K, \quad (\text{III.167})$$

$$\beta \nabla^2 \psi_{21} = \sigma \mu_0 \nu \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \varphi} \right), \quad (\text{III.168})$$

где, как и ранее (пункт III.6), будем считать, что функция ψ_{20} определяет внешнее, невозмущенное движением жидкости магнитное поле, а функция ψ_{21} – возмущение этого поля, вызванное движением среды.

Подстановка того же ряда в уравнение движения (III.165) дает с использованием (III.168) его представление в безындукционном приближении:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \nabla^2 \psi = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi) + \\ & + \frac{\sigma}{\rho r} \left[\frac{\partial \psi_{20}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.169})$$

С целью перехода от уравнения в частных производных (III.169) к обыкновенным дифференциальным уравнениям примем, как один из вариантов, метод разделения переменных, т.е. представим ψ и ψ_2 в виде:

$$\psi = R(r) f(\varphi), \quad \psi_{20} = R_2(r) f_2(\varphi). \quad (\text{III.170})$$

Подстановка второго выражения из (III.170) в (III.167) приводит к необходимости положить в (III.167) $K = 0$, а для определения функций $R_2(r)$ и $f_2(\varphi)$ будут служить уравнения (n – константа разделения)

$$f_2'' \pm n^2 f_2 = 0, \quad (\text{III.171,а})$$

$$r^2 R_2'' + r R_2' \mp n^2 R_2 = 0. \quad (\text{III.171,б})$$

Полагая константу разделения $n = 0$, получаем простейшие решения уравнений (III.171,а), (III.171,б): $f_2 = A\varphi + B$, $R_2 = C \ln r + D$ и решение для магнитной функции тока

$$\psi_{20} = (A\varphi + B)(C \ln r + D), \quad (\text{III.172})$$

определяющей составляющие индукции магнитного поля по (III.48):

$$B_r = A \frac{C \ln r + D}{r}, \quad B_\varphi = -C \frac{A\varphi + B}{r}. \quad (\text{III.173})$$

В частном случае $A = 0$ магнитными силовыми линиями являются окружности $r = \text{const}$ (рис. III.1,а), что соответствует азимутальному магнитному полю, создаваемому линейным токопроводом, который расположен в начале координат перпендикулярно

плоскости рисунка. При $C = 0$ магнитные силовые линии $\varphi = \text{const}$ соответствуют радиальному магнитному полю $B_r \sim \frac{1}{r}$ (рис. III.1,б); при $B = 0$ магнитные силовые линии $\varphi(\ln r + D/C) = \text{const}$ (или $r = r_0 e^{\text{const}/\varphi}$) можно представить себе как накручивающиеся на круг радиуса $r_0 = e^{-D/C}$, если значения const выбираются положительными ($\text{const} > 0$) (рис. III.1,в). При этом для однозначности функции необходимо исключить из области полярную ось, то есть магнитные линии начинаются и заканчиваются на плоскостях клина, перпендикулярного плоскости (r, φ) . Если же полагать $\text{const} < 0$, то конфигурация магнитных силовых линий соответствует спиралям, ограниченным кругом радиуса $r_0 = e^{-D/C}$ (рис. III.1,г) (из рассмотрения необходимо исключить полярную ось $\varphi = 0$). Наконец, вариант $D = 0$ с магнитными линиями тока $r = e^{\text{const}/(\varphi - \varphi_0)}$ отвечает при $\text{const} > 0$ случаю, показанному на рис. III.1,д, только окружность будет единичного радиуса (как и в случае, показанном на рис. III.1,в, для однозначности луч $\varphi = \varphi_0$ должен находиться внутри клина, перпендикулярного плоскости (r, φ)). Если же полагать $\text{const} < 0$, то конфигурация магнитных силовых линий соответствует спиралям, ограниченным кругом единичного радиуса подобно (рис. III.1,г), для однозначности луч $\varphi = \varphi_0$ должен находиться внутри клина, перпендикулярного плоскости (r, φ) .

Отметим также, что магнитное поле с магнитными линиями тока (III.172) отвечает уравнениям Максвелла $\text{div } \mathbf{B} = 0$ и $\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = 0$, так что для создания такого поля не требуется пропускать по жидкости электрический ток j_z с каким-то специальным его распределением.

При $n \neq 0$ решением уравнения (III.171,а) является $f_2 = A \sin n\varphi + B \cos n\varphi$ для знака (+) и $f_2 = A e^{n\varphi} + B e^{-n\varphi}$ для знака (-). Уравнение (III.171,б) представляет собой уравнение Эйлера с решением $R_2 = C r^n + D r^{-n}$ для знака (-) и $R_2 = C \sin(n \ln r) + D \cos(n \ln r)$ для знака (+). Такое магнитное поле с магнитной функцией тока (III.170) также не требует специального пропускания электрического тока j_z , так как перечисленные решения получены из уравнения $0 = \nabla^2 \psi_{20} = (\text{rot } \mathbf{B})_z = \mu_0 (j)_z$.

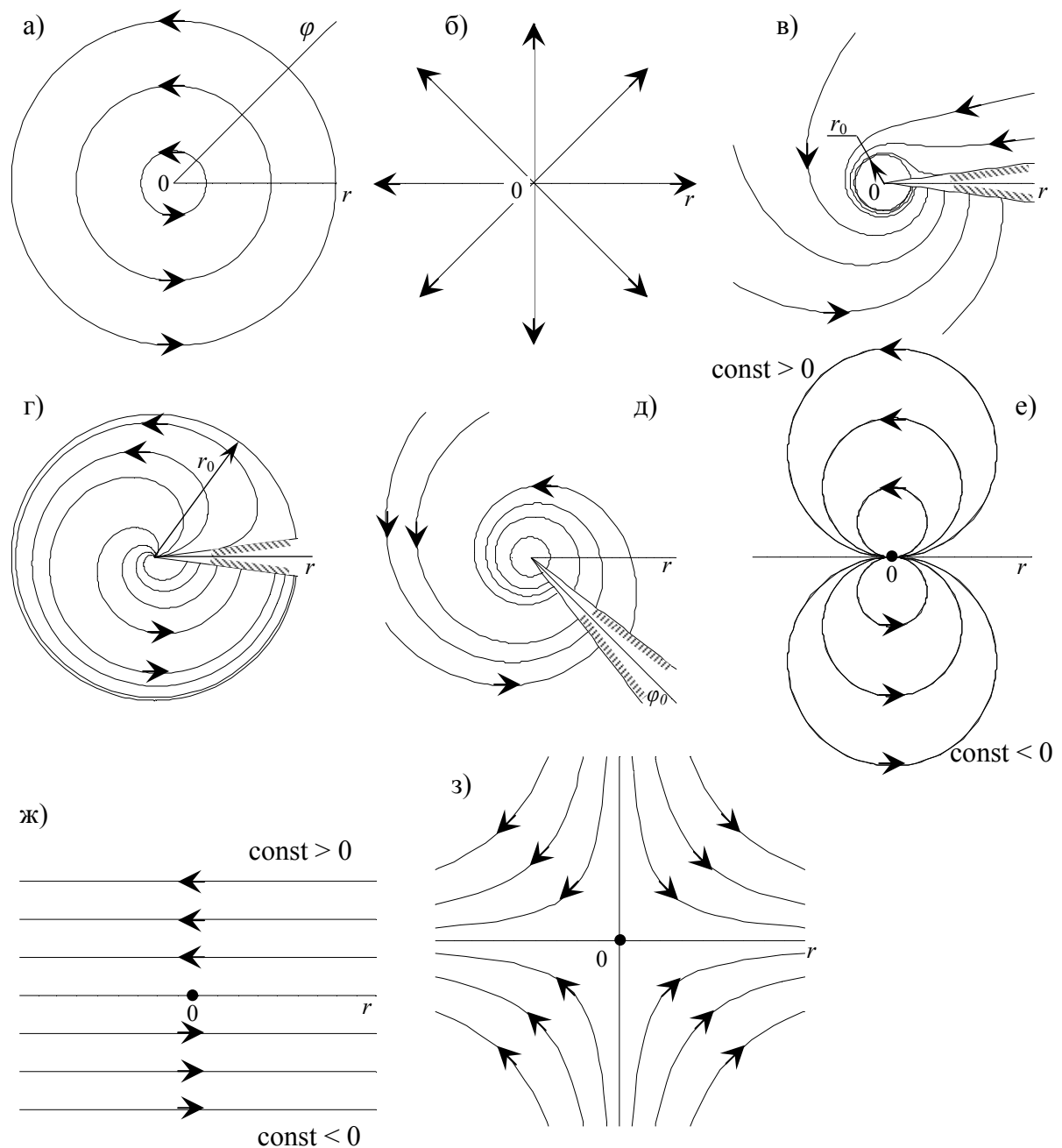


Рис. III.1. Конфигурации магнитных силовых линий, отвечающие различным значениям константы разделения n в (III.171,а), (III.171,б): а), б), в), г), д) – $n=0$; е), ж) – $n=1$; з) – $n=2$.

Приведем несколько примеров, соответствующих решению

$$\psi_{20} = (A \sin n\varphi + B \cos n\varphi) (Cr^n + Dr^{-n}). \quad (\text{III.174})$$

Полагая в (III.174) $B = 0$, $C = 0$, $n = 1$, получаем конфигурацию магнитных силовых линий, соответствующую $\psi_{20} = \sin \varphi / r = \text{const}$, т.е. линии $r = \text{const} \cdot \sin \varphi$, близкие к силовым линиям магнитного диполя (рис. III.1,е). Если принять $B = 0$, $D = 0$, $n = 1$, то ситуацию $r = \text{const} / \sin \varphi$, можно интерпретировать как создаваемую двумя бесконечными вертикальными магнитами, нейтральные линии которых расположены

на лучах $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, с полюсами, симметрично расположенными относительно начала координат $r = 0$ (рис. III.1,ж) (силовые линии параллельны лучам $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$). Очевидно, что решений (III.174), соответствующих различным значениям постоянных интегрирования A , B , C , D и константе разделения n , имеется бесчисленное множество. Например, полагая в (III.174) $B = 0$, $D = 0$, $n = 2$, получаем магнитное поле с нейтральной точкой ($r^{-2} = \text{const} \sin 2\varphi$) (рис. III.1,з) и т.д.

Подстановка выражений (III.170) в уравнение движения (III.169) приводит последнее к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{R}{r} f' \left[(E^2 R)' f + \left(\frac{R}{r^2} \right)' f'' \right] - \frac{R'}{r} f \left[(E^2 R) f' + \frac{R}{r^2} f''' \right] = \\ & = \nu \left\{ f E^2 (E^2 R) + f'' \left[E^2 \left(\frac{R}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} E^2 R \right] + f^{IV} \frac{R}{r^4} \right\} + \\ & + \frac{\sigma}{\rho r} \left[R_2 \left(\frac{1}{r} R R_2' \right)' f' f_2 f_2' - R_2 \left(\frac{1}{r} R' R_2 \right)' f f_2'^2 - \frac{1}{r} R R_2'^2 f_2 (f' f_2)' + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} R' R_2 R_2' f_2 (f f_2')' \right], \end{aligned} \quad (\text{III.175})$$

где через E^2 обозначен оператор $E^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$.

Чтобы получить обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) относительно переменной φ , нужно почленно разделить (III.175) на $\nu R / r^4$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu} \left[r^3 (E^2 R)' f f' + r^3 \left(\frac{R}{r^2} \right)' f' f'' - r^3 \frac{R'}{R} E^2 R f f' - r R' f f''' \right] = \\ & = \frac{r^4}{R} \left[E^2 (E^2 R) \right] f + \frac{r^4}{R} E^2 \left(\frac{R}{r^2} \right) f'' + \frac{r^2}{R} (E^2 R) f'' + f^{IV} + \\ & + \frac{\sigma}{\rho \nu} \left[\frac{r^3 R_2}{R} \left(\frac{1}{r} R R_2' \right)' f' f_2 f_2' - \frac{r^3 R_2}{R} \left(\frac{1}{r} R' R_2 \right)' f f_2'^2 - r^2 R_2'^2 f_2 (f' f_2)' + \right. \\ & \left. + r^2 \frac{R'}{R} R_2 R_2' f_2 (f f_2')' \right] \end{aligned} \quad (\text{III.176})$$

и положить в этом уравнении постоянными коэффициенты, зависящие от r . Согласно результатам пункта I.3, переменные в уравнении движения можно разделить только если $R(r) = \text{const}$. Для разделения переменных в электромагнитном слагаемом (слагаемое в квадратных скобках в (III.176)), необходимо, чтобы:

$$1) \frac{r^3 R_2}{R} \left(\frac{1}{r} R R_2' \right)' = k, \quad 2) \frac{r^3 R_2}{R} \left(\frac{1}{r} R' R_2 \right)' = p, \quad 3) r^2 R_2'^2 = q^2, \quad 4) r^2 \frac{R'}{R} R_2 R_2' = l. \quad (\text{III.177})$$

Из условий 2) и 4) в (III.177) следует $p = 0$, $l = 0$, из 3) – $R_2 = q \ln r + q_1$, но из 1) после подстановки этого решения для R_2 получаем $k = -2q(q \ln r + q_1)$, т.е. коэффициент k может быть постоянным лишь, если $q = 0$, но тогда и $k = 0$. В таком случае уравнение (III.176) переходит в уравнение движения неэлектропроводной жидкости, что, конечно, для наших целей мало интересно. Есть, однако, последний выход из положения: так как коэффициент k стоит перед произведением $f' f_2 f_2'$, то первое слагаемое в электромагнитном члене уравнения (III.176) может автоматически обратиться в нуль, если $f_2' = 0$, т.е. если $f_2 = \text{const}$.

Нетрудно прийти к заключению, что в таком случае имеем дело с решением (III.173), в котором следует положить $A = 0$, и может рассматриваться **единственно возможная** задача о МГД течении с полем скорости

$$V_r = B f' / r, \quad V_\varphi = 0,$$

а в составляющих магнитного поля должно быть положено (не ограничивая степени общности можно принять $B = 1$)

$$B_r = 0, \quad B_\varphi = -C / r,$$

т.е. задача о чисто радиальном расходящемся (диффузор) или сходящемся (конфузор) течении в азимутальном магнитном поле, создаваемым линейным токопроводом. Приближенное решение соответствующего этой задаче уравнения

$$f^{IV} + 4f'' + 2f' f'' - \text{Ha}^2 f'' = 0, \quad (\text{III.178})$$

где обозначено $\text{Ha}^2 = \sigma C^2 / \rho \nu$, будет приведено в разделе V.

Отметим также, что тот факт, что при $q = 0$ или $C = 0$ в (III.172) уравнение (III.176) становится чисто гидродинамическим, отражает свойство радиальных течений: на такие течения радиальное магнитное поле не оказывает силового воздействия.

Для получения из (III.175) ОДУ относительно переменной r разделим почленно (III.175) на коэффициент νf при старшей производной функции $R(r)$:

$$\begin{aligned} & \frac{f'}{\nu r} \frac{R}{r} (E^2 R)' + \frac{f' f''}{\nu f} \frac{R}{r} \left(\frac{R}{r^2} \right)' - \frac{f'}{\nu} \frac{R'}{R} E^2 R - \frac{f'''}{\nu} \frac{R' R}{r^3} = \\ & = E^2 (E^2 R) + \frac{f''}{f} \left[E^2 \left(\frac{R}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} E^2 R \right] + \frac{f^{IV}}{f} \frac{R}{r^4} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sigma}{\rho \nu} \left[\frac{f'}{f} f_2 f_2' \frac{1}{r} R_2 \left(\frac{1}{r} R R_2' \right)' - f_2'^2 \frac{1}{r} R_2 \left(\frac{1}{r} R' R_2 \right)' - \frac{f_2}{f} (f' f_2)' \frac{1}{r^2} R R_2'^2 + \right. \\
& \left. + \frac{f_2}{f} (f f_2')' \frac{1}{r^2} R' R_2 R_2' \right]. \quad (\text{III.179})
\end{aligned}$$

Теперь уже необходимо полагать постоянными множители, зависящие от φ , что приводит к условиям (I.21) и дополнительным условиям, вытекающим из необходимости разделить переменные в электромагнитном слагаемом (последнее слагаемое в квадратных скобках в (III.179)):

$$1) \frac{f'}{f} f_2 f_2' = m^2, \quad 2) f_2'^2 = t^2, \quad 3) \frac{f_2}{f} (f' f_2)' = p, \quad 4) \frac{f_2}{f} (f f_2')' = q. \quad (\text{III.180})$$

В пункте I.3 было выяснено, что $f = a \nu \varphi$, а из 2) в (III.170) следует $f_2 = t \varphi$ и, далее, $t^2 = p = q = m^2$. Такое решение для f_2 соответствует заданию магнитной функции тока в виде (III.172) при $B = 0$ и $A = m$. Тогда $R_2 = C \ln r + D$. Подставляя это выражение для R_2 в (III.179), получим

$$\begin{aligned}
& E^2 (E^2 R) - a \left[\frac{R}{r} (E^2 R)' - \frac{R'}{r} E^2 R \right] = \\
& = - \frac{\sigma m^2}{\rho \nu} \left\{ \frac{C \ln r + D}{r} \left[C \left(\frac{R}{r^2} \right)' - \left\{ \frac{1}{r} R' (C \ln r + D) \right\}' + \frac{C}{r^2} R' \right] - \frac{C^2 R}{r^4} \right\}. \quad (\text{III.181})
\end{aligned}$$

Более простой вид это уравнение приобретает, если положить $C = 0$:

$$E^2 (E^2 R) - a \left[\frac{R}{r} (E^2 R)' - \frac{R'}{r} E^2 R \right] = \text{Ha}^2 \frac{1}{r} \left(\frac{R'}{r} \right)', \quad (\text{III.182})$$

где обозначено $\frac{\sigma m^2 D^2}{\rho \nu} = \text{Ha}^2$.

Таким образом, в общем случае для уравнения (III.181) поле скорости должно задаваться в виде

$$V_r = a \nu R(r) / r, \quad V_\varphi = -a \nu \varphi R', \quad (\text{III.183})$$

а внешнее магнитное поле – в виде

$$B_r = m(C \ln r + D) / r, \quad B_\varphi = -m \varphi C / r \quad (\text{III.184})$$

с магнитной функцией тока

$$\psi_{20} = m \varphi (C \ln r + D). \quad (\text{III.185})$$

При $C = 0$ внешнее магнитное поле – чисто радиальное:

$$B_r = m D / r, \quad B_\varphi = 0, \quad (\text{III.186})$$

но в постановке (III.183) оно уже оказывает силовое воздействие на поле течения, так как наличествует азимутальная скорость V_φ .

Метод разделения переменных (III.170) не является единственным для получения из (III.167) обыкновенных дифференциальных уравнений. Возможно и представление гидродинамической функции тока в виде:

$$\psi = B f(\varphi) + l(\varphi) \ln r. \quad (\text{III.187})$$

Можно показать, что в таком случае для получения из (III.169) обыкновенного относительно переменной φ дифференциального уравнения необходимо положить $l(\varphi) = \text{const}$. Тогда

$$V_r = B f'(\varphi) / r, \quad V_\varphi = -l(\varphi) / r = -\text{const} / r. \quad (\text{III.188})$$

По размерности множитель B должен иметь размерность кинематической вязкости ν , а наиболее простой смысл он получает при рассмотрении диффузорных и конфузорных течений. Действительно, если такие течения сформированы двумя наклонными стенками $\varphi = \alpha_1$ и $\varphi = \alpha_2$, то условие сохранения расхода через поверхность $r = \text{const}$ на единицу длины вдоль перпендикуляра к плоскости течения приводит к $Q = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} V_r r d\varphi = B \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f' d\varphi = B(f(\alpha_2) - f(\alpha_1)) = V L$, а так как $B = \gamma \nu$, где γ – коэффициент пропорциональности, то $\gamma = Q / \nu = V L / \nu = \text{Re}$ и $B = \text{Re} \nu$.

III.6.3. Безындукционное приближение в цилиндрических координатах в осесимметричном случае.

В цилиндрических координатах (как это показано в пункте III.4) есть 5 вариантов точных решений, поэтому сначала выпишем безындукционное приближение в общей форме, а после рассмотрим возможность его применения для каждого варианта.

Подставим ряд (III.144) в уравнение индукции (III.96). Приравнявая выражения при β^0 и β^1 , получаем (оператор E^2 определяется выражением (III.97)):

$$E^2 \psi_{20} = 0, \quad (\text{III.189})$$

$$E^2 \psi_{21} = \frac{1}{\nu r} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (\text{III.190})$$

Заменяя в уравнениях магнитной гидродинамики (III.93) – (III.96) выражения $\partial \psi_2 / \partial r$ и $\partial \psi_2 / \partial z$ на $\partial \psi_{20} / \partial r$ и $\partial \psi_{20} / \partial z$ соответственно, а $E^2 \psi_2$ на

$$\frac{\sigma \mu_0}{r} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right),$$

получим систему уравнений, описывающих безындукционное приближение в МГД в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E^2 \psi}{r^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E^2 \psi}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi^2}{\partial z} + \frac{v}{r} E^4 \psi = -\frac{\mu_0}{\rho r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_1^2}{r^2} \right) + \\ & + \frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{III.191})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial r V_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r V_\varphi}{\partial z} + \frac{v}{r} E^2 (r V_\varphi) = \frac{1}{\rho r} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right), \quad (\text{III.192})$$

$$E^2 \psi_1 = \sigma r \left[\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_1}{r^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_1}{r^2} \right) \right) \right], \quad (\text{III.193})$$

$$E^2 \psi_{20} = K. \quad (\text{III.194})$$

Рассмотрим применимость различных вариантов задания функций тока в безындукционном приближении.

Вариант 1. $\eta = Br/z$, $\psi = Ar f(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)/r$, $\psi_1 = N f_1(\eta)$, $\psi_{20} = Dr f_2(\eta)$; (III.195)

Рассмотрение этого, а также всех остальных вариантов, начнем с магнитной функции тока ψ_{20} . Подстановка ее в (III.194) дает

$$f_2 - \eta(1 + 2B^{-2}\eta^2)f_2' - \eta^2(1 + B^{-2}\eta^2)f_2'' = rK/D. \quad (\text{III.196})$$

Уравнение (III.196) будет автомодельным только в том случае, если $K=0$. Следовательно, (III.196) запишется в виде:

$$f_2 - \eta(1 + 2B^{-2}\eta^2)f_2' - \eta^2(1 + B^{-2}\eta^2)f_2'' = 0. \quad (\text{III.197})$$

Общее решение этого уравнения будет следующим:

$$f_2(\eta) = C_1 \sqrt{1 + \left(\frac{B}{\eta} \right)^2} + i C_2 \left(\frac{B}{\eta} \right);$$

при $C_2 = 0$ полученное решение будет действительным:

$$f_2(\eta) = C_1 \sqrt{1 + \left(\frac{B}{\eta} \right)^2}. \quad (\text{III.198})$$

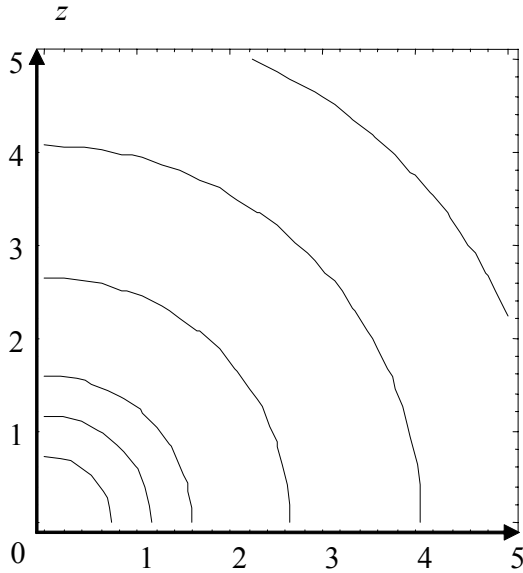


Рис. III.2. Линии магнитного поля, описываемого магнитной функцией тока (III.199).

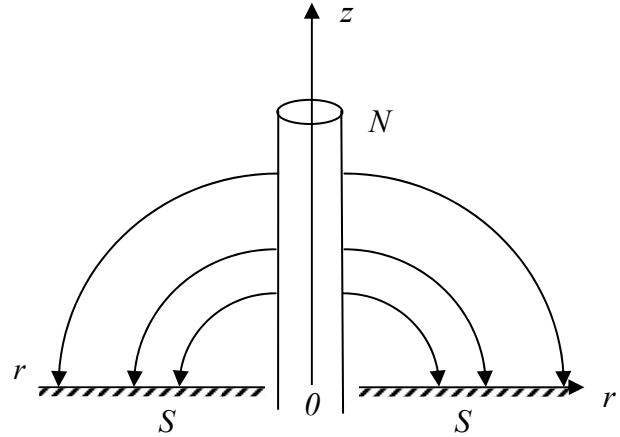


Рис. III.3. Схема, описывающая создание магнитного поля в соответствии с (III.199).

Переход к натуральным переменным (z, r) позволяет определить вид магнитной функции тока ψ_{20} :

$$\psi_{20} = DC_1 \sqrt{z^2 + r^2}, \quad (\text{III.199})$$

описывающей линии магнитного поля, представленные на рис. III.2. Этот случай соответствует полю магнита, одним из полюсов которого является ось симметрии Oz , а вторым – некоторая коническая поверхность (рис. III.3, [70]).

Вариант 2. $\eta = Bz/r$, $\psi = Az f(\eta)$, $V_\varphi = C\Omega(\eta)/z$, $\psi_1 = N f_1(\eta)$, $\psi_{20} = Dz f_2(\eta)$; (III.200)

Уравнение (III.194) запишется в виде (для автомодельности необходимо $K=0$):

$$\left[2 + 3(\eta/B)^2\right] \eta f_2' + \left[1 + (\eta/B)^2\right] \eta^2 f_2'' = 0. \quad (\text{III.201})$$

Его решением является функция

$$f_2(\eta) = C_1 - C_2 \frac{\sqrt{B^2 + \eta^2}}{B^2 \eta}. \quad (\text{III.202})$$

В зависимости от выбранных значений B можно получить все возможные для этого варианта магнитные поля в безындукционном приближении. Например, для переменной $\eta = z/r$ ($B = 1$) выражение (III.202) дает:

$$f_2(\eta) = C_1 - C_2 \sqrt{1 + \frac{1}{\eta^2}} = C_1 - C_2 \sqrt{1 + \frac{r^2}{z^2}}, \quad (\text{III.203})$$

а при $C_1 = 0$ магнитная функция тока ψ_{20} с точностью до знака совпадает с магнитной функцией тока (III.199).

Вариант 3. $\eta = Br, \psi = Az f(\eta), V_\varphi = C\Omega(\eta), \psi_1 = N f_1(\eta), \psi_{20} = Dz f_2(\eta);$ (III.204)

В этом случае магнитная функция тока удовлетворяет уравнению (для автомодельности необходимо $K=0$)

$$f_2' - \eta f_2'' = 0, \quad (III.205)$$

с решением

$$f_2(\eta) = C_1 \eta^2 / 2 + C_2 = C_1 B^2 r^2 / 2 + C_2. \quad (III.206)$$

Магнитная функция тока при этом запишется как

$$\psi_{20} = Dz \left(\frac{C_1 \eta^2}{2} + C_2 \right) = Dz \left(\frac{C_1 B^2 r^2}{2} + C_2 \right). \quad (III.207, a)$$

Составляющие магнитного поля будут

иметь вид:

$$B_z = DC_1 B^2 z, \quad B_r = -D \left(\frac{C_1 B^2 r}{2} + \frac{C_2}{r} \right). \quad (III.207, b)$$

Рис. III.4. Магнитное поле, описываемое магнитной функцией тока (III.207, a) при $C_1 \neq 0, C_2 = 0$.

Из полученных выражений (III.207, б) видно, что при $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ составляющие индукции магнитного поля растут линейно при удалении от начала координат. Векторы индукции такого поля показаны на рис. III.4, что соответствует магнитному полю с нейтральной точкой.

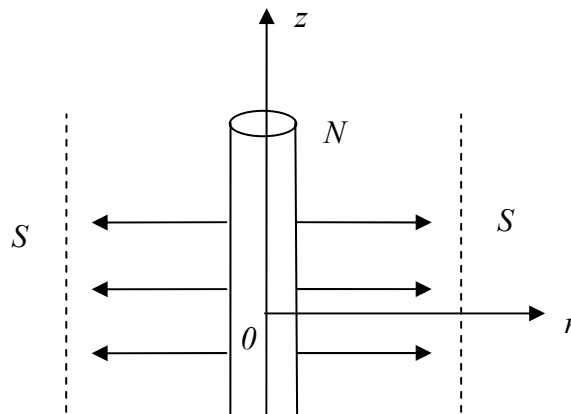
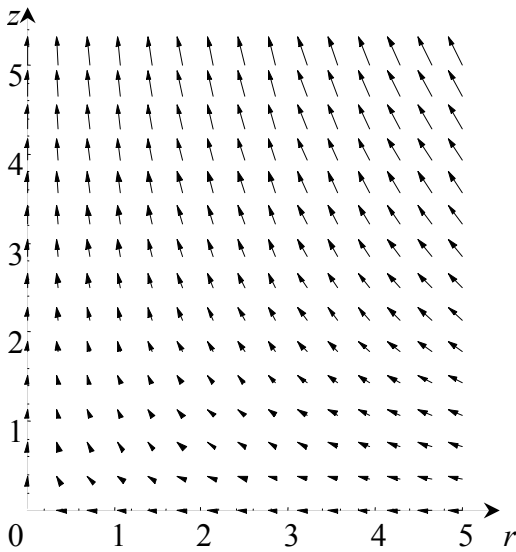


Рис. III.5. Схема создания радиального магнитного поля.

При $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ линии магнитного поля представляют собой прямые, перпендикулярные оси z , что соответствует радиальному магнитному полю,

напряженность которого убывает с удалением от оси симметрии, схема создания которого показана на рис. III.5 ([70]).

$$\text{Вариант 4. } \psi = a_1 z R(r), V_\varphi = \sqrt{a_1 a_6} z \Omega(r), \psi_1 = g z R_1(r), \psi_{20} = d z R_2(r). \quad (\text{III.208})$$

Так как в безындукционном приближении магнитная функция тока ψ_{20} не зависит от поля скорости, то из сравнения вида магнитных функций тока в вариантах 3 и 4 следует, что магнитные функции тока совпадают, т.е.

$$\psi_{20} = d z (C_1 r^2 / 2 + C_2). \quad (\text{III.209})$$

$$\text{Вариант 5. } \psi = a_3 r^2 \Phi(z), V_\varphi = \sqrt{a_3 a_8} r \theta(z), \psi_1 = g r^2 \Phi_1(z), \psi_{20} = d r^2 \Phi_2(z). \quad (\text{III.210})$$

Подстановка ψ_{20} в уравнение (III.194) приводит к уравнению

$$d r^2 \Phi_2''(z) = K. \quad (\text{III.211})$$

Переменные разделяются если $K=0$ или $\Phi_2''(z) = 0$, что равносильно. Отсюда следует, что

$$\Phi_2(z) = C_1 z + C_2, \quad (\text{III.212})$$

а магнитная функция тока ψ_{20} станет следующей:

$$\psi_{20} = d r^2 (C_1 z + C_2). \quad (\text{III.213,а})$$

Эта функция тока схожа с (III.207,а). Составляющие магнитного поля

$$B_z = 2d(C_1 z + C_2), B_r = -dC_1 r \quad (\text{III.213,б})$$

линейно растут с удалением от начала координат. Это магнитное поле с нейтральной точкой.

Полученные для каждого варианта магнитные функции тока полностью описывают весь класс допустимых магнитных полей, оставляющих уравнения автомодельными в цилиндрических координатах. Для получения систем автомодельных уравнений для каждого из вариантов необходимо подставить найденные магнитные функции тока вместе с соответствующими гидродинамической, электрической функциями тока и вращательной скоростью в уравнения (III.191) – (III.193). Так как эти системы получаются достаточно просто и к тому же достаточно громоздки, то они здесь не приводятся (фактически, необходимо только вычислить электромагнитные части систем, так как гидродинамические части для каждого из вариантов совпадают с приведенными в пункте III.4).

III.6.4. Безындукционное приближение в сферических координатах в осесимметричном случае.

Так как ранее было показано, что в этой системе координат перевести уравнения магнитной гидродинамики в обыкновенные уравнения можно лишь разделением переменных, то все функции тока и азимутальную скорость будем искать в виде произведения функций, зависящих только от R и только от θ :

$$\psi = F(R)\Phi(\theta), \psi_1 = F_1(R)\Phi_1(\theta), \psi_2 = F_2(R)\Phi_2(\theta), V_\varphi = V(R)\Omega(\theta). \quad (\text{III.214})$$

В соответствии с ранее полученными результатами, при разделении переменных возможно построение уравнений только по переменной θ , общий вид функций тока также известен:

$$\psi = AR\Phi(\theta), \psi_1 = N\Phi_1(\theta), \psi_2 = DR\Phi_2(\theta), V_\varphi = \frac{C}{R}\Omega(\theta); \quad (\text{III.215})$$

необходимо только определить коэффициенты A, C, D, N и функции $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Omega$.

Магнитную функцию тока представим в виде ряда по числу Бетчелора (III.133):

$$\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \psi_{2n}, \quad (\text{III.216})$$

и подставим в уравнение индукции

$$E^2 \psi_2 = \frac{\sigma \mu_0}{R^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right), \quad (\text{III.217})$$

где $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Приравнявая выражения при β^0 и β^1 , получаем

$$E^2 \psi_{20} = 0, \quad (\text{III.218})$$

$$E^2 \psi_{21} = \frac{1}{\nu R^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right). \quad (\text{III.219})$$

Далее поступаем так же, как и в предыдущих случаях: в выражениях, содержащих $\partial \psi_2 / \partial R$ и $\partial \psi_2 / \partial \theta$ заменяем ψ_2 на ψ_{20} , а в выражениях, содержащих $E^2 \psi_2$, заменяем $E^2 \psi_2$ на

$$E^2 \psi_2 = E^2 \psi_{21} = \frac{\mu_0 \sigma}{R^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right). \quad (\text{III.220})$$

Эта подстановка приводит к уравнениям, описывающим осесимметричные МГД течения в сферических координатах в безындукционном приближении:

$$\begin{aligned}
& -2A^2(15 \cos \theta + \cos 3\theta)\Phi^2 + 2C^2 \cos \theta \sin^4 \theta \Omega^2 + \frac{Av}{2}(\cos 3\theta - 7 \cos \theta) \sin \theta \Phi' + \\
& + A^2(34 + 13 \cos 2\theta) \sin \theta \Phi \Phi' + \frac{3AD^2\sigma}{\rho} \cos \theta \sin \theta \Phi_2^2 \Phi' - 15A^2 \cos \theta \sin^2 \theta \Phi'^2 - \\
& - \frac{2N^2\mu_0}{\rho} \sin^3 \theta \Phi_1 \Phi_1' - \frac{2AD^2\sigma}{\rho} \cos \theta \sin \theta \Phi \Phi_2 \Phi_2' - \frac{3AD^2\sigma}{\rho} \sin^2 \theta \Phi_2 \Phi' \Phi_2' + \\
& + \frac{3AD^2\sigma}{\rho} \sin^2 \theta \Phi \Phi_2'^2 + 2C^2 \sin^5 \theta \Omega \Omega' - \frac{Av}{2}(\cos 2\theta - 7) \sin^2 \theta \Phi'' - 7A^2 \cos \theta \sin^2 \theta \Phi \Phi'' - \\
& - \frac{AD^2\sigma}{\rho} \sin^2 \theta \Phi_2^2 \Phi'' + 3A^2 \sin^3 \theta \Phi' \Phi'' + \frac{AD^2\sigma}{\rho} \sin^2 \theta \Phi \Phi_2 \Phi_2'' - 2Av \cos \theta \sin^3 \theta \Phi''' + \\
& + A^2 \sin^3 \theta \Phi \Phi''' + Av \sin^4 \theta \Phi'''' = 0, \tag{III.221}
\end{aligned}$$

$$(A \cos \theta \Phi - \nu) \Omega + \sin \theta (\nu \cos \theta + A \Phi) \Omega' + \nu \sin^2 \theta \Omega'' - \frac{DN}{\rho C} \Phi_2 \Phi_1' = 0, \tag{III.222}$$

$$\begin{aligned}
& 2A\sigma\mu_0 \Phi_1 \Phi_1' + \cos \theta \Phi_1' + A\sigma\mu_0 (\Phi_1' - 2 \cos \theta \Phi_1) \Phi - \frac{2CD\sigma}{N} \sin \theta \Omega \Phi_2' + \\
& + \frac{CD\sigma}{N} (\cos \theta \Omega - \sin \theta \Omega') \Phi_2 + \sin \theta \Phi_1'' = 0, \tag{III.223}
\end{aligned}$$

$$\Phi_2'' - \operatorname{ctg} \theta \Phi_2' = 0. \tag{III.224}$$

Система (III.221) – (III.224) станет безразмерной, если принять (функции, зависящие от θ , будем считать безразмерными)

$$[A] = [\nu], [C] = [\nu], [D] = LB_0, [N] = I, \tag{III.225}$$

где I, L, B_0 – характерные величины силы тока, длины и индукции магнитного поля.

При этом уравнения запишутся в виде (примем $A = \nu, C = \nu$)

$$\begin{aligned}
& -2(15 \cos \theta + \cos 3\theta)\Phi^2 + 2 \cos \theta \sin^4 \theta \Omega^2 + \frac{1}{2}(\cos 3\theta - 7 \cos \theta) \sin \theta \Phi' + \\
& + (34 + 13 \cos 2\theta) \sin \theta \Phi \Phi' + \frac{3D^2\sigma}{\nu \rho} \cos \theta \sin \theta \Phi_2^2 \Phi' - 15 \cos \theta \sin^2 \theta \Phi'^2 - \\
& - \frac{2N^2\mu_0}{\nu^2 \rho} \sin^3 \theta \Phi_1 \Phi_1' - \frac{2D^2\sigma}{\nu \rho} \cos \theta \sin \theta \Phi \Phi_2 \Phi_2' - \frac{3D^2\sigma}{\nu \rho} \sin^2 \theta \Phi_2 \Phi' \Phi_2' + \\
& + \frac{3D^2\sigma}{\nu \rho} \sin^2 \theta \Phi \Phi_2'^2 + 2 \sin^5 \theta \Omega \Omega' - \frac{1}{2}(\cos 2\theta - 7) \sin^2 \theta \Phi'' - 7 \cos \theta \sin^2 \theta \Phi \Phi'' - \\
& - \frac{D^2\sigma}{\nu \rho} \sin^2 \theta \Phi_2^2 \Phi'' + 3 \sin^3 \theta \Phi' \Phi'' + \frac{D^2\sigma}{\nu \rho} \sin^2 \theta \Phi \Phi_2 \Phi_2'' - 2 \cos \theta \sin^3 \theta \Phi''' + \\
& + \sin^3 \theta \Phi \Phi''' + \sin^4 \theta \Phi'''' = 0, \tag{III.226}
\end{aligned}$$

$$(\cos \theta \Phi - 1)\Omega + \sin \theta (\cos \theta + \Phi)\Omega' + \sin^2 \theta \Omega'' - \frac{DN}{\rho v^2} \Phi_2 \Phi_1' = 0, \quad (\text{III.227})$$

$$2\beta \Phi_1 \Phi_1' + \cos \theta \Phi_1' + \beta (\Phi_1' - 2 \cos \theta \Phi_1) \Phi - \frac{2\nu D \sigma}{N} \sin \theta \Omega \Phi_2' + \\ + \frac{\nu D \sigma}{N} (\cos \theta \Omega - \sin \theta \Omega') \Phi_2 + \sin \theta \Phi_1'' = 0, \quad (\text{III.228})$$

$$\Phi_2 = C_2 - C_1 \cos \theta. \quad (\text{III.229})$$

Выражение (III.229) является решением уравнения (III.224) и определяет возможные виды магнитных полей в безындукционном приближении.

Обратимся теперь к магнитной функции тока ψ_2 , определяемой выражениями (III.215), (III.225) и (III.229):

$$\psi_2 = DR(C_2 - C_1 \cos \theta). \quad (\text{III.230})$$

Составляющие индукции магнитного поля в соответствии с (III.130) запишутся как

$$B_R = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = \frac{C_1 D}{R}, \quad (\text{III.231,а})$$

$$B_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial R} = -\frac{D(C_2 - C_1 \cos \theta)}{R \sin \theta}, \quad (\text{III.231,б})$$

$$B_\varphi = \frac{\mu_0}{R \sin \theta} \psi_1 = \frac{\mu_0 N \Phi_1(\theta)}{R \sin \theta}. \quad (\text{III.231,в})$$

При $C_2 = 0, C_1 \neq 0$ магнитное поле, описываемое формулами (III.231,а-б), есть радиальное поле, подобное изображенному на рис. III.5, а при $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ есть поле, подобное изображенному на рис. III.2 и рис. III.3.

Электрическая ψ_1 и магнитная ψ_2 функции тока определяют все возможные распределения электрического тока и магнитного поля в точной осесимметричной автомодельной постановке в сферических координатах в безындукционном приближении. Следовательно, решать задачи подобного типа можно только в указанном классе полей.

III.7. Выводы.

1) Декартова система координат.

В работе показано, что в рамках точного подхода (без применения каких-либо приближений) попытка построения автомодельного решения приводит к тому, что единственное допустимое магнитное поле не оказывает влияния на поле скорости. Это же относится и к пропусканию электрического тока по жидкости.

Если же применить метод разделения переменных, то гидродинамическая и магнитная функции тока (электрический ток не будет оказывать влияния на плоское течение) должны выбираться в виде:

$$\psi = g(x)(a y + b), \quad \psi_2 = c g_2(x)(a y + b).$$

Возможные же течения и магнитные поля определяются уравнениями:

$$a(g'g'' - gg''') - \frac{ac^2}{\mu_0 \rho} (g_2'g_2'' - g_2g_2''') + \nu g^{IV} = 0,$$

$$a\mu_0 \sigma (g'g_2 - gg_2') + g_2'' = 0.$$

Эти уравнения ранее не встречались в литературе.

В безындукционном приближении в случае применения автомодельного подхода магнитное поле так же, как и в точной постановке, не оказывает влияния на поле скорости.

Показано, что при использовании метода разделения переменных в безындукционном приближении есть только один вариант, при котором возможно сформулировать задачи магнитной гидродинамики – это течения в магнитном поле с нейтральной точкой:

$$\psi_2 = (a_1 x + a_2) c y.$$

Уравнение движения при этом запишется в виде:

$$\frac{c^2}{\rho \mu_0} (a_1^2 g - a_1 (a_1 x + a_2) g' + (a_1 x + a_2)^2 g'') + a(g'g'' - gg''') + \nu g^{IV} = 0. \quad (\text{III.164})$$

2) Полярная система координат.

В работе показано, что в этой системе координат возможно построение уравнений, зависящих только от переменной r . При этом функции тока ψ и ψ_2 формально запишутся в виде

$$\psi = a \nu \varphi R(r), \quad \psi_2 = a k \varphi R_2(r).$$

В безындукционном приближении есть несколько возможностей построения допустимых магнитных полей (электрический ток, как и в случае декартовых координат, не влияет на поле скорости):

- 1) $\psi_{20} = (A \varphi + B)(C \ln r + D),$
- 2) $\psi_{20} = (A \sin n \varphi + B \cos n \varphi)(C r^n + D r^{-n})$
- 3) $\psi_{20} = (A e^{n \varphi} + B e^{-n \varphi})(C \sin(n \ln r) + D \cos(n \ln r))$

Такие магнитные поля не требуют специального пропускания электрического тока j_z , так как перечисленные решения получены из уравнения $0 = \nabla^2 \psi_{20} = (\text{rot} B)_z = \mu_0 (j)_z$. Примеры некоторых из возможных полей рассмотрены в работе.

При построении уравнений, зависящих от переменной φ , имеем, что может рассматриваться *единственно возможная* задача о чисто радиальном расходящемся (диффузор) или сходящемся (конфузор) МГД течения в азимутальном магнитном поле, создаваемым линейным токопроводом., описываемая уравнением

$$f^{IV} + 4f'' + 2f'f'' - \text{Ha}^2 f'' = 0.$$

При построении уравнений, зависящих только от r , получим, что функции тока необходимо брать в виде $\psi = a v \varphi R(r)$, $\psi_{20} = m \varphi (C \ln r + D)$, уравнение же движения запишется как

$$E^2 (E^2 R) - a \left[\frac{R}{r} (E^2 R)' - \frac{R'}{r} E^2 R \right] = -\frac{\sigma m^2}{\rho v} \left\{ \frac{C \ln r + D}{r} \left[C \left(\frac{R}{r^2} \right)' - \left\{ \frac{1}{r} R' (C \ln r + D) \right\}' + \frac{C}{r^2} R' \right] - \frac{C^2 R}{r^4} \right\}.$$

Более простой вид это уравнение приобретает, если положить $C = 0$:

$$E^2 (E^2 R) - a \left[\frac{R}{r} (E^2 R)' - \frac{R'}{r} E^2 R \right] = \text{Ha}^2 \frac{1}{r} \left(\frac{R'}{r} \right)',$$

где обозначено $\frac{\sigma m^2 D^2}{\rho v} = \text{Ha}^2$. При $C = 0$ внешнее магнитное поле – чисто радиальное:

$$B_r = m D / r, \quad B_\varphi = 0,$$

и в этой постановке оно уже оказывает силовое воздействие на поле течения, так как наличествует азимутальная скорость V_φ .

Метод разделения переменных не является единственным для получения из уравнений Навье-Стокса-Максвелла обыкновенных дифференциальных уравнений. Возможно и представление гидродинамической функции тока в виде:

$$\psi = B f(\varphi) + l(\varphi) \ln r.$$

В таком случае для получения обыкновенного относительно переменной φ дифференциального уравнения необходимо положить $l(\varphi) = \text{const}$. Тогда

$$V_r = B f'(\varphi) / r, \quad V_\varphi = -l(\varphi) / r = -\text{const} / r.$$

3) Цилиндрическая система координат.

Автором показано, что для преобразования точных уравнений Навье-Стокса-Максвелла в обыкновенные дифференциальные уравнения с помощью автомодельного подхода и методом разделения переменных функции тока и переменные необходимо брать в одном из нижеприведенных видов:

$$1) \eta = Br/z, \psi = Ar f(\eta), V_\varphi = C\Omega(\eta)/r, \psi_1 = N f_1(\eta), \psi_2 = Dr f_2(\eta);$$

$$2) \eta = Bz/r, \psi = Az f(\eta), V_\varphi = C\Omega(\eta)/z, \psi_1 = N f_1(\eta), \psi_2 = Dz f_2(\eta);$$

$$3) \eta = Br, \psi = Azf(\eta), V_\varphi = C\Omega(\eta), \psi_1 = N f_1(\eta), \psi_2 = Dz f_2(\eta);$$

$$4) \psi = a_1 z R(r), V_\varphi = \sqrt{a_1 a_6} z \Omega(r), \psi_1 = g z R_1(r), \psi_2 = d z R_2(r);$$

$$5) \psi = a_3 r^2 \Phi(z), V_\varphi = \sqrt{a_3 a_8} r \theta(z), \psi_1 = g r^2 \Phi_1(z), \psi_2 = d r^2 \Phi_2(z).$$

Эти результаты согласуются с приведенными в [43], но проведенный здесь анализ отличается [43], к тому же вариант 2) в [43] не упоминается. В работе приведены готовые к использованию системы обыкновенных уравнений для каждого варианта.

В безындукционном приближении рассмотрены те же классы решений и определены допустимые магнитные поля.

$$1) \eta = Br/z, \psi = Ar f(\eta), V_\varphi = C\Omega(\eta)/r, \psi_1 = N f_1(\eta), \psi_{20} = Dr f_2(\eta).$$

Магнитное поле определяется функцией

$$f_2(\eta) = C_1 \sqrt{1 + \left(\frac{B}{\eta}\right)^2},$$

соответствующей полю магнита, одним из полюсов которого является ось симметрии Oz , а вторым – некоторая коническая поверхность.

$$2) \eta = Bz/r, \psi = Az f(\eta), V_\varphi = C\Omega(\eta)/z, \psi_1 = N f_1(\eta), \psi_{20} = Dz f_2(\eta).$$

Магнитное поле определяется функцией

$$f_2(\eta) = C_1 - C_2 \frac{\sqrt{B^2 + \eta^2}}{B^2 \eta},$$

которая при $C_1 = 0$ точно до знака совпадает с магнитной функцией тока из варианта 1.

$$3) \eta = Br, \psi = Az f(\eta), V_\varphi = C\Omega(\eta), \psi_1 = N f_1(\eta), \psi_{20} = Dz f_2(\eta).$$

Магнитное поле определяется функцией

$$f_2(\eta) = C_1 \eta^2 / 2 + C_2 = C_1 B^2 r^2 / 2 + C_2.$$

При $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ составляющие индукции такого поля соответствуют магнитному полю с нейтральной точкой. При $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ линии магнитного поля представляют

собой прямые, перпендикулярные оси z , что соответствует радиальному магнитному полю, напряженность которого убывает с удалением от оси симметрии.

$$4) \psi = a_1 z R(r), V_\varphi = \sqrt{a_1 a_6} z \Omega(r), \psi_1 = g z R_1(r), \psi_{20} = d z R_2(r).$$

Магнитное поле определяется функцией

$$\psi_{20} = d z (C_1 r^2 / 2 + C_2).$$

Эта магнитная функция тока совпадает с магнитной функцией тока варианта 3.

$$5) \psi = a_3 r^2 \Phi(z), V_\varphi = \sqrt{a_3 a_8} r \theta(z), \psi_1 = g r^2 \Phi_1(z), \psi_{20} = d r^2 \Phi_2(z).$$

Магнитное поле определяется функцией

$$\psi_{20} = d r^2 (C_1 z + C_2).$$

Это магнитное поле с нейтральной точкой.

Других вариантов нет.

4) Сферическая система координат.

Для построения точных решений в сферических координатах функции тока необходимо брать в виде:

$$\psi = \nu R \Phi(\theta), \psi_1 = \nu \sqrt{\rho / \mu_0} \Phi_1(\theta), \psi_2 = \nu \sqrt{\rho \mu_0} R \Phi_2(\theta), V_\varphi = \frac{\nu}{R} \Omega(\theta).$$

В работе приведены обыкновенные уравнения относительно переменной θ , полученные методом разделения переменных.

В безындукционном приближении функции тока остаются такими же, как и в точной постановке, а магнитная функция тока определяется выражением

$$\psi_2 = DR(C_2 - C_1 \cos \theta).$$

При $C_2 = 0, C_1 \neq 0$ магнитное поле, описываемое этой формулой, есть радиальное поле, а при $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ соответствует полю магнита, одним из полюсов которого является ось симметрии Oz , а вторым – некоторая коническая поверхность.

IV. Пограничные слои в магнитной гидродинамике.

IV.i. Краткий обзор литературы.

Область применения теории пограничного слоя в магнитной гидродинамике очень широка, что объясняется востребованностью ее результатов при разработке различных МГД-устройств: насосов, электролизеров, установок для электрошлаковой плавки и сварки металлов, систем охлаждения ядерных реакторов и т. п. В качестве начального этапа разработки подобных устройств очень часто используют автомодельные решения. Но в то же время, какой-либо систематизации в этой области не проводилось. Созданию своеобразного справочника допустимых решений в этом классе задач и посвящен данный раздел.

Так же, как и в обычной гидродинамике, в магнитной гидродинамике в приближении пограничного слоя решено достаточно много разнообразных задач, что связано с их практической востребованностью. В большинстве своем это задачи гидродинамического пограничного слоя, в которые вводятся электрические и/или магнитные поля.

Начать обзор уже решенных МГД задач в приближении пограничного слоя стоит с задачи Гартмана – развитого течения между параллельными пластинами в поперечном магнитном поле [12]. В этой задаче был показан основной эффект воздействия магнитного поля на поток проводящей жидкости – уплощение профиля скорости вследствие воздействия вихревой электромагнитной силы, возникающей при взаимодействии внешнего магнитного поля и индуцированного движением жидкости электрического поля. Также была оценена толщина так называемого гартмановского пограничного слоя – она была обратно пропорциональна числу Гартмана – параметру, характеризующему отношение действующих на жидкость электромагнитных и вязких сил.

В декартовой системе координат в качестве примеров можно привести МГД аналоги течения Куэтта [46], задачи Блазиуса, течения в криволинейном конфузоре, струи Шлихтинга, пристенной струи Акатнова [72].

Цилиндрическую систему координат широко используют для исследования осесимметричных струй и течений струйного типа. Рассмотрению таких течений в магнитном поле посвящена монография [70]. В качестве примеров рассмотренных в этой книге задач можно привести радиально-щелевую закрученную струю и струю Ландау-Яцевева-Сквайра.

В работах Э. Щербинина с соавторами ([71], [70], [69], [38], [39], [40], [15], [16], [17], [18], [21], [30], [31]), среди которых был и автор данной диссертации, была начата работа по созданию общего подхода к построению автомодельных уравнений в магнитной гидродинамике. Переработанные и дополненные результаты этих исследований приведены в данном разделе. Насколько известно автору, до этого подобные обобщающие исследования не проводились.

В этом разделе будут рассмотрены возможности построения решений типа пограничного слоя в магнитной гидродинамике при выборе электромагнитного слагаемого в точной постановке и в безындукционном приближении. Изучение будет проводиться на основе результатов, полученных в разделах II и III.

Как было сказано в разделе II, решения типа пограничного слоя в полярных и сферических координатах получаются из точных решений устремлением параметров задачи к их критическим значениям. Поэтому в этом разделе эти системы координат рассматриваться не будут, так как все уравнения, необходимые для построения решения типа пограничного слоя в магнитной гидродинамике в этих системах координат, уже получены в разделе III.

Также при построении уравнений типа пограничного слоя не будет использоваться метод разделения переменных, так как, как уже было сказано в разделе III данной работы, нет возможности оценить порядки функций для того, чтобы пренебречь каким-либо из слагаемых в операторе Лапласа по сравнению с другим слагаемым. Но вполне возможно (как это показано в разделе II), что в результате применения автомодельного подхода получатся решения, эквивалентные методу разделения переменных.

IV.1. Плоские МГД пограничные слои в декартовых координатах.

Для построения точных (электромагнитное слагаемое берется в полном виде) решений типа плоского пограничного слоя в МГД применим к системе уравнений (III.18) – (III.23) условие $\partial^2/\partial x^2 = 0$. В результате получим систему, описывающую МГД пограничный слой:

$$\begin{cases} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} (j_y B_z - j_z B_y) \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} (j_x B_z - j_z B_x), \\ V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} (j_x B_y - j_y B_x) \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{IV.2})$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{IV.3})$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad (\text{IV.4})$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y}, -\frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right), \quad (\text{IV.5})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} = -\sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial y} (V_x B_y - V_y B_x) \\ \frac{\partial^2 B_{yx}}{\partial y^2} = -\sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} (V_x B_y - V_y B_x) \\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} = -\sigma \mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} (V_z B_x - V_x B_z) - \frac{\partial}{\partial y} (V_y B_z - V_z B_y) \right) \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

Также в силе остаются все рассуждения относительно электрических и магнитных полей, приведенные в пункте III.2.

Вводя функции тока в соответствии с (III.24) – (III.26) и применяя операцию ротора к уравнениям (IV.1), получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \nu \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = -\frac{1}{\rho \mu_0} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y^3} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y^2} \right) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial V_z}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

Уравнения Максвелла и индукции после несложных преобразований приводят к следующим выражениям ($K = \text{const}$):

$$B_z = \mu_0 \psi_1, \quad (\text{IV.8})$$

$$-\mu_0 j_z = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = \sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + K, \quad (\text{IV.9})$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = -\sigma \mu_0 \left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \right]. \quad (\text{IV.10})$$

Несмотря на то, что рассматривается плоский пограничный слой (то есть все функции зависят только от двух координат – в данном случае, от x и y), возможно рассмотрение z -составляющих скорости, тока и магнитного поля, но при этом они должны тоже зависеть только от двух координат:

$$V_z = V_z(x, y), \quad j_z = j_z(x, y), \quad B_z = B_z(x, y). \quad (\text{IV.11})$$

Анализ влияния этих составляющих был проведен в пункте III.2. Также как и в пункте III.2, в дальнейшем будем рассматривать случай $V_z = 0$, то есть поле скорости имеет только две составляющих V_x и V_y . В такой постановке система (IV.7) запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \nu \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = -\frac{1}{\rho \mu_0} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial y^3} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial x \partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0 \end{cases}, \quad (\text{IV.12})$$

которую необходимо дополнить уравнениями

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = \sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + K, \quad (\text{IV.13})$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = -\sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right). \quad (\text{IV.14})$$

Рассмотрим возможности построения автомодельного решения системы уравнений (IV.12) – (IV.14). В соответствии с результатами пунктов II.1 и III.2, введем переменную автомодельности η и функции тока – гидродинамическую ψ и магнитную ψ_2 (электрической функцией тока ψ_1 можно пренебречь, если интересоваться только полем скорости (см. пункт III.2)):

$$\eta = y/\delta(x), \quad \delta(x) = Bx^\beta, \quad \psi = Ax^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dx^d f_2(\eta). \quad (\text{IV.15})$$

Подстановка (IV.15) в (IV.12) – (IV.13) в совокупности с условием автомодельности – равенством порядков по x всех слагаемых в уравнении – позволяет определить неизвестные показатели степеней в (IV.15). Приведем здесь только соотношения для степеней, опустив громоздкие уравнения (примем также, что $K = 0$):

$$2\alpha - 3\beta - 1 = 2d - 3\beta - 1 = \alpha - 4\beta, \quad d + \alpha - \beta - 1 = \alpha - 2\beta. \quad (\text{IV.16})$$

Решение системы (IV.16) будет следующим:

$$\alpha = d = 1 - \beta. \quad (\text{IV.17})$$

Следовательно, автомодельное решение задач МГД пограничного слоя в точной постановке зависит только от одного параметра – β . До сих пор никаких явных требований к величине этого параметра не предъявлялось. Однако на самом деле ограничение есть, и это – использование приближения пограничного слоя, пренебрежение в операторе Лапласа $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ первым слагаемым по сравнению со вторым. Определим, при каких условиях это можно сделать.

Подставим в оператор Лапласа автомодельную переменную η и гидродинамическую функцию тока ψ (IV.15):

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = Ax^{\alpha-2}(\alpha(\alpha-1)f - 2\alpha\beta\eta f' + \beta(\beta+1)\eta f' + \beta^2\eta^2 f'') + \frac{A}{B^2}x^{\alpha-2\beta}f'' . \quad (\text{IV.18})$$

Первое слагаемое в правой части равенства (IV.18) соответствует первому слагаемому в операторе Лапласа, второе слагаемое в правой части – второму слагаемому в операторе Лапласа. Для того, чтобы пренебречь первым слагаемым по сравнению со вторым, порядок второго слагаемого по x должен быть больше, чем порядок первого, то есть должно выполняться неравенство ($x \gg 1$):

$$\alpha - 2 < \alpha - 2\beta , \quad (\text{IV.19})$$

откуда следует, что

$$\beta < 1 . \quad (\text{IV.20})$$

Полученный результат совпадает с результатом из пункта II.1. Конкретное значение числа β определяется условиями решаемой задачи, такими как граничные и интегральные условия.

Приведем систему уравнений, описывающих точные (в том смысле, что для электромагнитных величин не использовалось никаких приближений) МГД течения типа пограничного слоя с учетом полученных результатов, но теперь будем считать постоянную K ненулевой:

$$(3\beta - 1)f' f'' + (1 - \beta)f f''' + \frac{\nu}{AB} f^{IV} + (3\beta - 1)\frac{D^2}{A^2 \mu_0 \rho} f_2' f_2'' + (1 - \beta)\frac{D^2}{A^2 \mu_0 \rho} f_2 f_2''' = 0 , \quad (\text{IV.21})$$

$$\mu_0 \sigma (1 - \beta) \left(f f_2' - f' f_2 \right) + \frac{f_2''}{AB} = \frac{B}{AD} K x^{1-3\beta} . \quad (\text{IV.22})$$

Для перевода уравнения (IV.22) в автомодельную форму есть два способа: 1) $\beta = \frac{1}{3}$, $K \neq 0$; 2) $K = 0$. Первый случай означает, что по жидкости пропускается постоянный электрический ток в направлении оси z [43], [72]. При этом значение β фиксировано, следовательно, это возможно только в одной задаче:

$$\frac{2}{3} f f''' + \frac{v}{AB} f^{IV} + \frac{2}{3} \frac{D^2}{A^2 \mu_0 \rho} f_2 f_2''' = 0, \quad (\text{IV.23})$$

$$\mu_0 \sigma \frac{2}{3} (f f_2' - f' f_2) + \frac{f_2''}{AB} = \frac{B}{AD} K. \quad (\text{IV.24})$$

Во втором случае ток $j_z = 0$ и уравнение (IV.22) автоматически становится автомодельным.

Для получения безразмерных уравнений необходимо определить размерности коэффициентов A , B и D в (IV.15). Учитывая связь между функциями тока и скоростью и индукцией магнитного поля, и считая переменную автомодельности η и функции f , f_2 безразмерными, получим, что (L , T , I и B_0 – размерности длины, времени и индукции магнитного поля соответственно)

$$[A] = [v] = L^{2-\alpha} / T, \quad [B] = L^{1-\beta}, \quad [D] = L^{1-d} B_0. \quad (\text{IV.25})$$

Отсюда с учетом (IV.17) можно получить размерности искомых коэффициентов:

$$[A] = L^{\beta+1} / T, \quad [B] = L^{1-\beta}, \quad [D] = B_0 L^\beta. \quad (\text{IV.26})$$

Если же (как это было сделано в пункте II.1) взять $\alpha = 1$, $\beta = 0$, то получим метод разделения переменных. Причем это решение – точное решение, так как никаких приближений не использовалось. И в то же время – это решение типа пограничного слоя.

IV.2. Осесимметричные МГД пограничные слои в цилиндрических координатах.

Рассмотрим возможность построения уравнений типа пограничного слоя в магнитной гидродинамике в цилиндрических координатах.

Для получения уравнений, описывающих магнитогидродинамический пограничный слой в цилиндрических координатах, необходимо точные уравнения магнитной гидродинамики (III.93) – (III.96) преобразовать в соответствии с подходом Прандтля [28], то есть пренебречь в операторе E^2 (III.97) одним из слагаемых.

В пункте II.3 был проведен анализ, в каких случаях возможно в операторе E^2 оставить то или иное слагаемой. Результаты этого анализа следующие: если рассматривать автомодельную переменную и гидродинамическую функции тока, а также азимутальную скорость в виде ((I.36), (I.37))

$$\eta = B z^\beta r^\gamma, \text{ а) } \psi = A r^\alpha f(\eta), V_\varphi = C r^d \Omega(\eta); \text{ б) } \psi = A z^\alpha f(\eta), V_\varphi = C z^d \Omega(\eta), \quad (\text{IV.27})$$

то в операторе E^2 первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь для функции тока (IV.27,а) при $\gamma/\beta < -1$ (II.17), а вторым по сравнению с первым – при $\gamma/\beta > -1$ (II.16); для функции же тока (IV.27,б) первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь для функции тока при $\gamma/\beta > -1$ (II.20), а вторым по сравнению с первым – при $\gamma/\beta < -1$ (II.19).

Также в пункте II.3 были определены случаи, в которых возможно построение осесимметричного пограничного слоя в цилиндрических координатах:

1. $\eta = B z^\beta r^\gamma$, $\psi = A r^\alpha f(\eta)$, $V_\varphi = C r^d \Omega(\eta)$, $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\alpha = \frac{\gamma}{\beta} + 2$, $d = 2\frac{\gamma}{\beta} + 1$, $\frac{\gamma}{\beta} > -1$, $\alpha > 1$, $d > -1$;
2. $\eta = B z^\beta r^\gamma$, $\psi = A z^\alpha f(\eta)$, $V_\varphi = C z^d \Omega(\eta)$, $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 1$, $d = 1 + \frac{2\beta}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma} > -1$, $d > -1$;
3. $\eta = B r^\gamma$, $\psi = A z^\alpha f(\eta)$, $V_\varphi = C z^d \Omega(\eta)$, $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 0$, $C = 0$ ($V_\varphi = 0$);
4. $\eta = B r^\gamma$, $\psi = A z^\alpha f(\eta)$, $V_\varphi = C z^d \Omega(\eta)$, $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 0$, $d = 0$;
5. $\eta = B r^\gamma$, $\psi = A z^\alpha f(\eta)$, $V_\varphi = C z^d \Omega(\eta)$, $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 1$, $C = 0$ ($V_\varphi = 0$);
6. $\eta = B r^\gamma$, $\psi = A z^\alpha f(\eta)$, $V_\varphi = C z^d \Omega(\eta)$, $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 1$, $d = 1$;
7. $\eta = B r^\gamma$, $\psi = A z^\alpha f(\eta)$, $V_\varphi = C z^d \Omega(\eta)$, $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 1$, $d = 0$;
8. $\eta = B z^\beta$, $\psi = A r^\alpha f(\eta)$, $V_\varphi = C r^d \Omega(\eta)$, $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\alpha = 2$, $C = 0$ ($V_\varphi = 0$);
9. $\eta = B z^\beta$, $\psi = A r^\alpha f(\eta)$, $V_\varphi = C r^d \Omega(\eta)$, $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\alpha = 2$, $d = 1$.

Для построения решений типа пограничного слоя в магнитной гидродинамике приведенные выше варианты необходимо дополнить электрической и магнитной функциями тока. Для определения их вида воспользуемся теми фактами, что 1) вид электромагнитного слагаемого в точности повторяет вид инерционного слагаемого, следовательно, вид магнитной функции тока будет таким же, как и вид гидродинамической функции тока; 2) как показано в пункте III.4, из записи уравнений магнитной гидродинамики в цилиндрических координатах следует, что $\psi_1/r \sim V_\varphi$,

значит, вид электрической функции тока тоже известен. Тогда, перенумеровывая и отделяя рассматриваемые варианты, можно записать виды переменных и функций тока, которые, возможно, позволят преобразовать уравнения магнитной гидродинамики в цилиндрических координатах в автомодельную форму (не теряя общности, в вариантах 3 – 9 можно упростить переменную автомодельности, приняв в 3 – 7 $\gamma = 1$ и $\eta = Br$, а в 8 – 9 – $\beta = 1$ и $\eta = Bz$):

$$1. \quad \eta = Bz^\beta r^\gamma, \quad \psi = Ar^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dr^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = Cr^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = Nr^{d+1} f_1(\eta),$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{\beta} + 2, \quad d = \frac{2\gamma}{\beta} + 1, \quad \frac{\gamma}{\beta} > -1, \quad \alpha > 1, \quad d > -1;$$

$$2. \quad \eta = Bz^\beta r^\gamma, \quad \psi = Az^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dz^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = Cz^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = Nz^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 1, \quad d = 1 + \frac{2\beta}{\gamma}, \quad p = 1 + \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > -1, \quad d > -1;$$

$$3. \quad \eta = Br, \quad \psi = Az^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dz^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = Cz^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = Nz^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 0, \quad C = 0 \quad (V_\phi = 0);$$

$$4. \quad \eta = Br, \quad \psi = Az^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dz^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = Cz^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = Nz^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 0, \quad d = 0, \quad p = 0;$$

$$5. \quad \eta = Br, \quad \psi = Az^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dz^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = Cz^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = Nz^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 1, \quad C = 0 \quad (V_\phi = 0), \quad p = 1;$$

$$6. \quad \eta = Br, \quad \psi = Az^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dz^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = Cz^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = Nz^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 1, \quad d = 1, \quad p = 1;$$

$$7. \quad \eta = Br, \quad \psi = Az^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dz^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = Cz^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = Nz^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 1, \quad d = 0, \quad p = 0;$$

$$8. \quad \eta = Bz, \quad \psi = Ar^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dr^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = Cr^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = Nr^p f_1(\eta), \quad E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\alpha = 2, \quad C = 0 \quad (V_\phi = 0), \quad p = 2;$$

$$9. \quad \eta = Bz, \quad \psi = Ar^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dr^\alpha f_2(\eta), \quad V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = Nr^p f_1(\eta), \quad E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\alpha = 2, \quad d = 1, \quad p = 2. \quad (\text{IV.28})$$

Изучим возможность построения решений типа пограничного слоя в магнитной гидродинамике в каждом из вышеуказанных вариантов. Громоздкие промежуточные выкладки опустим, выпишем только финальные уравнения.

Вариант 1.

$$\begin{aligned} & -A^2 B^{2/\beta} (-2 + \beta)(-1 + \beta)(2\beta + \gamma) \eta^{-2/\beta} f f' + 3 A^2 B^{2/\beta} (-1 + \beta) \beta \gamma \eta^{-\frac{2+\beta}{\beta}} f'^2 - \\ & -3 A^2 B^{2/\beta} (-1 + \beta) \beta (2\beta + \gamma) \eta^{-\frac{2+\beta}{\beta}} f f'' + 3 A^2 B^{2/\beta} \beta^2 \gamma \eta^{2-\frac{2}{\beta}} f' f'' - \\ & -A^2 B^{2/\beta} \beta^2 (2\beta + \gamma) \eta^{2-\frac{2}{\beta}} f f^{(3)} - 2 C^2 \beta \Omega \Omega' + \frac{2 N^2 \beta \mu_0}{\rho} f_1 f_1' + \\ & + \frac{B^{2/\beta} D^2 (-2 + \beta)(-1 + \beta)(2\beta + \gamma) \eta^{-2/\beta}}{\rho \mu_0} f_2 f_2' - \frac{3 B^{2/\beta} D^2 (-1 + \beta) \beta \gamma \eta^{-\frac{2+\beta}{\beta}}}{\rho \mu_0} f_2'^2 + \\ & + \frac{3 B^{2/\beta} D^2 (-1 + \beta) \beta (2\beta + \gamma) \eta^{-\frac{2+\beta}{\beta}}}{\rho \mu_0} f_2 f_2'' - \frac{3 B^{2/\beta} D^2 \beta^2 \gamma \eta^{2-\frac{2}{\beta}}}{\rho \mu_0} f_2' f_2'' + \\ & + \frac{B^{2/\beta} D^2 \beta^2 (2\beta + \gamma) \eta^{2-\frac{2}{\beta}}}{\rho \mu_0} f_2 f_2^{(3)} + A B^{3/\beta} (-3 + \beta)(-2 + \beta)(-1 + \beta) \beta \eta^{-3/\beta} \nu f' + \\ & + A B^{3/\beta} (-1 + \beta) \beta^2 (-11 + 7\beta) \eta^{-\frac{3+\beta}{\beta}} \nu f'' + 6 A B^{3/\beta} (-1 + \beta) \beta^3 \eta^{2-\frac{3}{\beta}} \nu f^{(3)} + \\ & + A B^{3/\beta} \beta^4 \eta^{3-\frac{3}{\beta}} \nu f^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

$$\begin{aligned} & 2 A C (\beta + \gamma) \Omega f' - A C (2\beta + \gamma) f \Omega' + \frac{D N (2\beta + \gamma)}{\rho} f_2 f_1' - \\ & - \frac{2 D N (\beta + \gamma)}{\rho} f_1 f_2' + B^{\frac{1}{\beta}} C (-1 + \beta) \beta \eta^{-1/\beta} \nu \Omega' + B^{\frac{1}{\beta}} C \beta^2 \eta^{1-\frac{1}{\beta}} \nu \Omega'' = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

$$\begin{aligned} & 2 A N \gamma \sigma \mu_0 f_1 f' - A N (2\beta + \gamma) \sigma \mu_0 f f_1' + (2 C D \beta \sigma + C D \gamma \sigma) f_2 \Omega' - \\ & - 2 C D \gamma \sigma \Omega f_2' + B^{\frac{1}{\beta}} N (-1 + \beta) \beta \eta^{-1/\beta} f_1' + B^{\frac{1}{\beta}} N \beta^2 \eta^{1-\frac{1}{\beta}} f_1'' = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

$$\begin{aligned} & A D (2\beta + \gamma) \mu_0 \sigma f_2 f' - A D (2\beta + \gamma) \mu_0 \sigma f f_2' + \\ & + B^{\frac{1}{\beta}} D (-1 + \beta) \beta \eta^{-1/\beta} f_2' + B^{\frac{1}{\beta}} D \beta^2 \eta^{1-\frac{1}{\beta}} f_2'' = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Вариант 2.

$$\begin{aligned} & A^2 B^{A/\gamma} (-4 + \gamma)(-2 + \gamma) \gamma \eta^{-\frac{4+\gamma}{\gamma}} f f' - A^2 B^{A/\gamma} (-2 + \gamma) \gamma (4\beta + \gamma) \eta^{2-\frac{4}{\gamma}} f'^2 + \\ & + 3 A^2 B^{A/\gamma} (-2 + \gamma) \gamma^2 \eta^{2-\frac{4}{\gamma}} f f'' - A^2 B^{A/\gamma} \gamma^2 (4\beta + \gamma) \eta^{3-\frac{4}{\gamma}} f' f'' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +A^2 B^{4/\gamma} \gamma^3 \eta^{3-\frac{4}{\gamma}} f f^{(3)} - \frac{2 C^2 (2 \beta + \gamma)}{\gamma} \Omega^2 - 2 C^2 \beta \eta \Omega \Omega' + \\
& + \frac{2 B^{2/\gamma} N^2 (\beta + \gamma) \eta^{-2/\gamma} \mu_0}{\gamma \rho} f_1^2 + \frac{2 B^{2/\gamma} N^2 \beta \eta^{1-\frac{2}{\gamma}} \mu_0}{\rho} f_1 f_1' - \\
& - \frac{B^{4/\gamma} D^2 (-4 + \gamma) (-2 + \gamma) \gamma \eta^{\frac{-4+\gamma}{\gamma}}}{\rho \mu_0} f_2 f_2' + \frac{B^{4/\gamma} D^2 (-2 + \gamma) \gamma (4 \beta + \gamma) \eta^{2-\frac{4}{\gamma}}}{\rho \mu_0} f_2'^2 - \\
& - \frac{3 B^{4/\gamma} D^2 (-2 + \gamma) \gamma^2 \eta^{2-\frac{4}{\gamma}}}{\rho \mu_0} f_2 f_2'' + \frac{B^{4/\gamma} D^2 \gamma^2 (4 \beta + \gamma) \eta^{3-\frac{4}{\gamma}}}{\rho \mu_0} f_2' f_2'' - \\
& - \frac{B^{4/\gamma} D^2 \gamma^3 \eta^{3-\frac{4}{\gamma}}}{\rho \mu_0} f_2 f_2^{(3)} + A B^{4/\gamma} (-4 + \gamma) (-2 + \gamma)^2 \gamma \eta^{\frac{-4+\gamma}{\gamma}} \nu f' + \\
& + A B^{4/\gamma} (-2 + \gamma) \gamma^2 (-10 + 7 \gamma) \eta^{2-\frac{4}{\gamma}} \nu f'' + 2 A B^{4/\gamma} \gamma^3 (-4 + 3 \gamma) \eta^{3-\frac{4}{\gamma}} \nu f^{(3)} + \\
& + A B^{4/\gamma} \gamma^4 \eta^{4-\frac{4}{\gamma}} \nu f^{(4)} = 0
\end{aligned} \tag{IV.33}$$

$$\begin{aligned}
& A C f \Omega - A C (\beta + \gamma) \eta \Omega f' + A C \gamma \eta f \Omega' - \\
& - \frac{B^{\frac{1}{\gamma}} D N \gamma \eta^{1-\frac{1}{\gamma}}}{\rho} f_2 f_1' + \frac{B^{\frac{1}{\gamma}} D N (\beta + \gamma) \eta^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}}}{\rho} f_1 f_2' - \\
& - C \nu \Omega + C \gamma^2 \eta \nu \Omega' + C \gamma^2 \eta^2 \nu \Omega'' = 0
\end{aligned} \tag{IV.34}$$

$$\begin{aligned}
& -2 A B^{\frac{1}{\gamma}} N \eta^{-1/\gamma} \sigma \mu_0 f f_1 - A B^{\frac{1}{\gamma}} N (3 \beta + \gamma) \eta^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}} \sigma \mu_0 f_1 f' + \\
& + C D \sigma \Omega f_2 - C D \gamma \eta \sigma f_2 \Omega' + C D (3 \beta + \gamma) \eta \sigma \Omega f_2' + \\
& + A B^{\frac{1}{\gamma}} N \gamma \eta^{1-\frac{1}{\gamma}} \sigma \mu_0 f f_1' + B^{\frac{1}{\gamma}} N (-2 + \gamma) \gamma \eta^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}} f_1' + B^{\frac{1}{\gamma}} N \gamma^2 \eta^{2-\frac{1}{\gamma}} f_1'' = 0
\end{aligned} \tag{IV.35}$$

$$- A D \gamma \sigma \mu_0 f_2 f' + A D \gamma \sigma \mu_0 f f_2' + D (-2 + \gamma) \gamma f_2' + D \gamma^2 \eta f_2'' = 0 \tag{IV.36}$$

Вариант 3.

В этом варианте не только вращательная скорость должна быть равной нулю, но и электрическая функция тока тоже: $\psi_1 \equiv 0$; следовательно, по жидкости не протекает электрический ток и течение не взаимодействует с магнитным полем, что и подтверждается уравнениями:

$$-3 f' + 3 \eta f'' - 2 \eta^2 f^{(3)} + \eta^3 f^{(4)} = 0 \tag{IV.37}$$

$$-f_2' + \eta f_2'' = 0 \tag{IV.38}$$

Эти уравнения являются независимыми, что означает, что в этой ситуации магнитное поле не оказывает воздействия на поле скорости.

Вариант 4.

В этом варианте для обеспечения автомодельности необходимо потребовать $p = 0$, то есть $\psi_1 = N f_1(\eta)$. В результате получим вариант, аналогичный предыдущему за тем лишь исключением, что здесь присутствуют вращательная скорость, подчиняющаяся уравнению

$$-\Omega + \eta \Omega' + \eta^2 \Omega'' = 0 \quad (\text{IV.39})$$

и электрический ток, описываемый уравнением

$$-f_1' + \eta f_1'' = 0 \quad (\text{IV.40})$$

Все уравнения являются независимыми, и, следовательно, в рассматриваемом варианте, как и предыдущем, магнитное поле не оказывает воздействия на поле скорости.

Вариант 5.

Для автомодельности уравнений необходимо положить $p = 1$ в электрической функции тока. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & 3 A^2 B^2 f f' + A^2 B^2 \eta f'^2 - 3 A^2 B^2 \eta f f'' - A^2 B^2 \eta^2 f' f'' + A^2 B^2 \eta^2 f f^{(3)} + \\ & + \frac{2 N^2 \eta \mu_0}{\rho} f_1^2 - \frac{3 B^2 D^2}{\rho \mu_0} f_2 f_2' - \frac{B^2 D^2 \eta}{\rho \mu_0} f_2'^2 + \frac{3 B^2 D^2 \eta}{\rho \mu_0} f_2 f_2'' + \\ & + \frac{B^2 D^2 \eta^2}{\rho \mu_0} f_2' f_2'' - \frac{B^2 D^2 \eta^2}{\rho \mu_0} f_2 f_2^{(3)} - 3 A B^2 \nu f' + 3 A B^2 \eta \nu f'' - \\ & - 2 A B^2 \eta^2 \nu f^{(3)} + A B^2 \eta^3 \nu f^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

$$-f_2 f_1' + f_1 f_2' = 0 \quad (\text{IV.42})$$

$$-2 A \sigma \mu_0 f f_1 - A \eta \sigma \mu_0 f_1 f' + A \eta \sigma \mu_0 f f_1' - \eta f_1' + \eta^2 f_1'' = 0 \quad (\text{IV.43})$$

$$-A \sigma \mu_0 f_2 f' + A \sigma \mu_0 f f_2' - f_2' + \eta f_2'' = 0 \quad (\text{IV.44})$$

Уравнение (IV.42) есть уравнение для азимутальной скорости, но так как вращения в данной постановке нет, то из этого уравнения видна связь между электрической и магнитной функциями тока:

$$f_1(\eta) = \tilde{C} f_2(\eta), \quad \psi_1 = \tilde{C} \psi_2, \quad \tilde{C} = \text{const}. \quad (\text{IV.45})$$

Следовательно, линии электрического и магнитного полей подобны, поля не взаимодействуют между собой и не вызывают азимутального движения жидкости.

Вариант 6.

Как и в предыдущем варианте, необходимо положить $p = 1$. Тогда уравнения запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
& 3 A^2 B^4 f f' + A^2 B^4 \eta f'^2 - 3 A^2 B^4 \eta f f'' - A^2 B^4 \eta^2 f' f'' + A^2 B^4 \eta^2 f f^{(3)} - \\
& - 2 \eta^3 \Omega^2 + \frac{2 B^2 N^2 \eta \mu_0}{\rho} f_1^2 - \frac{3 B^4 D^2}{\rho \mu_0} f_2 f_2' - \frac{B^4 D^2 \eta}{\rho \mu_0} f_2'^2 + \\
& + \frac{3 B^4 D^2 \eta}{\rho \mu_0} f_2 f_2'' + \frac{B^4 D^2 \eta^2}{\rho \mu_0} f_2' f_2'' - \frac{B^4 D^2 \eta^2}{\rho \mu_0} f_2 f_2^{(3)} - \\
& - 3 A B^4 \nu f' + 3 A B^4 \eta \nu f'' - 2 A B^4 \eta^2 \nu f^{(3)} + A B^4 \eta^3 \nu f^{(4)} = 0
\end{aligned} \tag{IV.46}$$

$$\begin{aligned}
& + A \rho f \Omega - A \eta \rho \Omega f' + A \eta \rho f \Omega' - B D N f_2 f_1' + B D N f_1 f_2' - \\
& - \nu \rho \Omega + \eta \nu \rho \Omega' + \eta^2 \nu \rho \Omega'' = 0
\end{aligned} \tag{IV.47}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 A B N \sigma \mu_0 f f_1 - A B N \eta \sigma \mu_0 f_1 f' + A B N \eta \sigma \mu_0 f f_1' + \\
& - D \eta^2 \sigma \Omega f_2' + D \eta \sigma \Omega f_2 - D \eta^2 \sigma f_2 \Omega' - B N \eta f_1' + B N \eta^2 f_1'' = 0
\end{aligned} \tag{IV.48}$$

$$- A \sigma \mu_0 f_2 f' + A \sigma \mu_0 f f_2' - f_2' + \eta f_2'' = 0 \tag{IV.49}$$

Вариант 7.

В этом варианте для обеспечения автомодельности необходимо принять $p = 0$.

Уравнения же примут вид:

$$\begin{aligned}
& 3 A^2 f f' + A^2 \eta f'^2 - 3 A^2 \eta f f'' - A^2 \eta^2 f' f'' + A^2 \eta^2 f f^{(3)} - \\
& - \frac{3 D^2}{\rho \mu_0} f_2 f_2' - \frac{D^2 \eta}{\rho \mu_0} f_2'^2 + \frac{3 D^2 \eta}{\rho \mu_0} f_2 f_2'' + \frac{D^2 \eta^2}{\rho \mu_0} f_2' f_2'' - \\
& - \frac{D^2 \eta^2}{\rho \mu_0} f_2 f_2^{(3)} - 3 A \nu f' + 3 A \eta \nu f'' - 2 A \eta^2 \nu f^{(3)} + A \eta^3 \nu f^{(4)} = 0
\end{aligned} \tag{IV.50}$$

$$A f \Omega + A \eta f \Omega' - \frac{B D N}{\rho} f_2 f_1' - \nu \Omega + \eta \nu \Omega' + \eta^2 \nu \Omega'' = 0 \tag{IV.51}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 A B N \sigma \mu_0 f f_1 + A B N \eta \sigma \mu_0 f f_1' + \\
& + D \eta \sigma \Omega f_2 - D \eta^2 \sigma f_2 \Omega' - B N \eta f_1' + B N \eta^2 f_1'' = 0
\end{aligned} \tag{IV.52}$$

$$- A \sigma \mu_0 f_2 f' + A \sigma \mu_0 f f_2' - f_2' + \eta f_2'' = 0 \tag{IV.53}$$

Как видно из уравнений, азимутальное вращение и электрический ток не влияют на z и r составляющие поля скорости, в то время как обратное влияние имеет место. Электрический ток взаимодействует только с азимутальной скоростью, и оба они подстраиваются под основную картину течения.

Вариант 8.

В этом варианте уравнения станут автомодельными, если принять $p = 2$. Тогда

$$- 2 A^2 B^2 f f^{(3)} + \frac{2 N^2 \mu_0}{\rho} f_1 f_1' + \frac{2 B^2 D^2}{\rho \mu_0} f_2 f_2^{(3)} + A B^3 \nu f^{(4)} = 0 \tag{IV.54}$$

$$f_2 f_1' - f_1 f_2' = 0 \quad (\text{IV.55})$$

$$-2 A \sigma \mu_0 f f_1' + B f_1'' = 0 \quad (\text{IV.56})$$

$$2 A \sigma \mu_0 f_2 f' - 2 A \sigma \mu_0 f f_2' + B f_2'' = 0 \quad (\text{IV.57})$$

Уравнение (IV.55) показывает, что электромагнитная сила не создает азимутального вращения. Из уравнения (IV.56) формально можно получить связь между гидродинамической и электрической функциями тока, но в общем виде от нее мало практической пользы.

Вариант 9.

Для автомодельности примем $p = 2$, и система уравнений запишется в виде:

$$-2 A^2 B^2 f f^{(3)} - 2 C^2 \Omega \Omega' + \frac{2 N^2 \mu_0}{\rho} f_1 f_1' + \frac{2 B^2 D^2}{\rho \mu_0} f_2 f_2^{(3)} + A B^3 \nu f^{(4)} = 0 \quad (\text{IV.58})$$

$$2 A C \Omega f' - 2 A C f \Omega' + \frac{2 D N}{\rho} f_2 f_1' - \frac{2 D N}{\rho} f_1 f_2' + B C \nu \Omega'' = 0 \quad (\text{IV.59})$$

$$2 C D \sigma f_2 \Omega' - 2 A N \sigma \mu_0 f f_1' + B N f_1'' = 0 \quad (\text{IV.60})$$

$$2 A D \sigma \mu_0 f_2 f' - 2 A D \sigma \mu_0 f f_2' + B D f_2'' = 0 \quad (\text{IV.61})$$

В результате проведенного анализа получаются 7 вариантов возможного построения автомодельных решений уравнений типа пограничного слоя в магнитной гидродинамике, в которых магнитное поле оказывает влияние на поле скорости: это варианты 1 – 2 и 5 – 9. Причем варианты 5 – 9 одновременно являются и точными решениями, и соответствуют методу разделения переменных.

Других вариантов построения автомодельных решений в цилиндрической системе координат в магнитной гидродинамике нет.

IV.3. МГД пограничные слои в безындукционном приближении.

Для построения автомодельных МГД решений типа пограничного слоя в безындукционном приближении воспользуемся результатами, полученными ранее в этом разделе, и теорией, изложенной в пункте III.6.

IV.3.1. Плоские МГД пограничные слои в декартовых координатах в безындукционном приближении.

Для построения решения типа пограничного слоя в безындукционном приближении воспользуемся системой (IV.12) – (IV.13), представив при этом магнитную функцию тока в виде (см. (III.144))

$$\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \psi_{2n},$$

где $\beta = \nu \sigma \mu_0$ – число Бетчелора.

Собственно, ход построения решения не отличается от описанного в пункте III.6.1, с той только разницей, что в операторе ∇^2 будет только одно слагаемое – $\partial^2/\partial y^2$.

Система уравнений, описывающих МГД пограничный слой в декартовых координатах в безындукционном приближении, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \nu \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = -\frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x} \right) \right), \end{aligned} \quad (IV.62)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = \sigma \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right), \quad (IV.63)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{20}}{\partial y^2} = K. \quad (IV.64)$$

Подставляя в систему (IV.62) – (IV.64) переменную автомодельности и функции тока в виде

$$\eta = y/\delta(x), \quad \delta(x) = Bx^\beta, \quad \psi = Ax^\alpha f(\eta), \quad \psi_1 = Nx^\gamma f_1(\eta), \quad \psi_{20} = Dx^d f_2(\eta), \quad (IV.65)$$

получим связь между показателями степеней в (IV.65):

$$\alpha = 1 - \beta, \quad d = \alpha = 1 - \beta, \quad \gamma - \text{любое}, \quad \beta < 1 \quad (IV.66)$$

(последнее условие следует из условия, что в операторе Лапласа остается только слагаемое $\partial^2/\partial y^2$). С учетом этих результатов система уравнений запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{A^2(-1+3\beta)}{B} f' f'' - \frac{A^2(-1+\beta)}{B} f f^{(3)} + \frac{AD^2(-1+(4-3\beta)\beta)\sigma}{\rho} f_2 f' f_2' + \\ + \frac{AD^2(-1+\beta)(-1+3\beta)\sigma}{\rho} f f_2'^2 + \frac{AD^2(-1+\beta)^2\sigma}{\rho} f_2^2 f'' - \\ - \frac{AD^2(-1+\beta)^2\sigma}{\rho} f f_2 f_2'' + \frac{Av}{B^2} f^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (IV.67)$$

$$-A\gamma N \mu \sigma f_1 f' - AN(-1+\beta)\mu \sigma f f_1' + \frac{N}{B} f_1'' = 0 \quad (IV.68)$$

$$-K + \frac{Dx^{1-3\beta}}{B^2} f_2'' = 0 \quad (\text{IV.69})$$

Электрическая функция тока не влияет ни на движение жидкости, ни на магнитное поле и может не рассматриваться, если интересоваться только лишь полем скорости (следовательно, уравнение (IV.68) можно опустить). Влияние электрического тока сказывается лишь при расчете поля давления.

Обратимся к уравнению (IV.69). Для приведения его к автомодельному виду есть 2 способа: 1) $\beta = 1/3$, $K \neq 0$; 2) $K = 0$. В первом случае получаем задачу, в которой пропускается электрический ток в направлении оси z , влияющий только на поле давления [31], [49], а уравнения (IV.67), (IV.69) перейдут в

$$\frac{4D^2\sigma}{9\rho} f_2^2 f'' - \frac{4D^2\sigma}{9\rho} f f_2 f_2'' + \frac{2A}{3B} f f^{(3)} + \frac{\nu}{B^2} f^{(4)} = 0 \quad (\text{IV.70})$$

$$\frac{D}{B^2} f_2'' = K \quad (\text{IV.71})$$

Уравнение (IV.71) имеет простое решение

$$f_2(\eta) = \frac{KB^2}{2D} \eta^2 + C_1 \eta + C_2. \quad (\text{IV.72,a})$$

Магнитная функция тока будет иметь вид ($\beta = 1/3$):

$$\psi_{20} = Dx^{1-\beta} \left(\frac{KB^2}{2D} \eta^2 + C_1 \eta + C_2 \right) = \frac{Ky^2}{2} + \frac{DC_1 y}{B} x^{1/3} + DC_2 x^{2/3}. \quad (\text{IV.72,b})$$

Эта функция тока описывает комбинацию трех магнитных полей: 1-е слагаемое соответствует магнитному полю, силовые линии которого параллельны оси x ($y = \text{const}$), индукция которого растет линейно с ростом y ($B_x = Ky$, $B_y = 0$); 2-е слагаемое соответствует магнитному полю, силовые линии которого описываются уравнением $y = \text{const} x^{-1/3}$ (кривые гиперболического типа) и сгущаются у оси y , а индукция убывает при удалении от начала координат ($B_x \sim x^{1/3}$, $B_y \sim y/x^{2/3}$) (это магнитное поле подобно магнитному полю с нейтральной точкой); 3-е слагаемое соответствует магнитному полю, силовые линии которого параллельны оси y ($B_x = 0$, $B_y \sim x^{-1/3}$), а индукция убывает при удалении от Oy [49].

Уравнение (IV.70) в этом случае запишется как

$$-\frac{2B^4 K (2C_2 D + \eta (2C_1 D + B^2 K \eta)) \sigma}{9\rho} f + \frac{B^2 (2C_2 D + \eta (2C_1 D + B^2 K \eta))^2 \sigma}{9\rho} f'' + \frac{2}{3} AB f f^{(3)} + \nu f^{(4)} = 0 \quad (\text{IV.73})$$

Во втором варианте уравнения (IV.69) при $K = 0$ магнитная функция тока определяется выражением

$$f_2(\eta) = C_1\eta + C_2, \quad \psi_{20} = Dx^{1-\beta} \left(\frac{C_1 y}{Bx^\beta} + C_2 \right) = \frac{DC_1}{B} yx^{1-2\beta} + C_2x^{1-\beta}, \quad (\text{IV.74})$$

которое описывает магнитное поле, являющееся комбинацией следующих полей: 1-е слагаемое соответствует полю, силовые линии которого описываются уравнением $y = \text{const } x^{2\beta-1}$; в зависимости от значения $\beta < 1$ можно получить различные поля: при $\beta = 0$ – магнитное поле с нейтральной точкой (силовые линии $y = \text{const}/x$, применяется в астрофизических приложениях), при $\beta = 1/2$ – однородное продольное магнитное поле $B_x = \text{const}, B_y = 0$; 2-е слагаемое соответствует полю, силовые линии которого ориентированы параллельно оси y ($x = \text{const}$); при этом $B_x = 0, B_y = C_2(1-\beta)x^\beta$ [72].

Уравнение движения (IV.67) в этом случае перейдет в

$$\begin{aligned} & \frac{C_1^2 D^2 (-1 + \beta) (-1 + 3\beta) \sigma}{\rho} f - \frac{C_1 D^2 (-1 + \beta) (-1 + 3\beta) (C_2 + C_1 \eta) \sigma}{\rho} f' + \\ & + \frac{D^2 (-1 + \beta)^2 (C_2 + C_1 \eta)^2 \sigma}{\rho} f'' + \frac{A (-1 + 3\beta)}{B} f' f'' + \\ & + \frac{A (1 - \beta)}{B} f f^{(3)} + \frac{\nu}{B^2} f^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.75}).$$

Как и в пункте IV.1, можно построить решение, являющееся одновременно и точным, и решением в приближении пограничного слоя, приняв $\alpha = 1, \beta = 0$. В этом случае автомодельное решение совпадает по виду с решением методом разделения переменных. Единственное допустимое в этом случае магнитное поле – поле с нейтральной точкой.

Этими вариантами исчерпываются возможности построения решений типа пограничного слоя в магнитной гидродинамике в декартовых координатах в безындукционном приближении. Примерами применения полученных в этом пункте уравнений являются задачи о МГД течении в окрестности критической точки и МГД аналоге задачи Блазиуса (обтекание плоской пластины набегающим потоком) [72].

IV.3.2. Осесимметричные МГД пограничные слои в цилиндрических координатах в безындукционном приближении.

Для построения безындукционного приближения поступим так же, как и в

предыдущем пункте. Магнитную функцию тока будем искать в виде ряда по степеням числа Бетчелора $\beta = \nu \sigma \mu_0$:

$$\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \psi_{2n} \quad (\text{IV.76})$$

Ход построения решения описан в пункте III.6.3. Система уравнений будет такой же, как и в III.6.3:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E^2 \psi}{r^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E^2 \psi}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi^2}{\partial z} + \frac{\nu}{r} E^4 \psi = - \frac{\mu_0}{\rho r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_1^2}{r^2} \right) + \\ & + \frac{\sigma}{\rho} \left[\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.77})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial r V_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r V_\varphi}{\partial z} + \frac{\nu}{r} E^2 (r V_\varphi) = \frac{1}{\rho r} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right), \quad (\text{IV.78})$$

$$E^2 \psi_1 = \sigma r \left[\frac{\partial \psi_{20}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) - \frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right) + \mu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\psi_1}{r^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_1}{r^2} \right) \right) \right], \quad (\text{IV.79})$$

$$E^2 \psi_{20} = K, \quad (\text{IV.80})$$

с той лишь разницей, что в зависимости от вида пограничного слоя в операторе

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

остается только одно из слагаемых.

Как и в пункте IV.2, рассмотрим 9 вариантов возможного построения решений типа пограничного слоя в магнитной гидродинамике и определим, в каких случаях применимо безындукционное приближение. В отличие от пункта IV.2 будем считать, что показатели степени для магнитной функции тока неизвестны. Это связано с тем, что теперь магнитная функция тока входит в уравнения (IV.77) – (IV.80) иначе, чем гидродинамическая функция тока, и утверждение о подобии этих функций неприменимо. В результате получим исходные формулировки для всех вариантов в виде:

$$1. \quad \eta = B z^\beta r^\gamma, \quad \psi = A r^\alpha f(\eta), \quad \psi_{20} = D r^d f_2(\eta), \quad V_\varphi = C r^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = N r^{d+1} f_1(\eta),$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{\beta} + 2, \quad d = \frac{2\gamma}{\beta} + 1, \quad \frac{\gamma}{\beta} > -1, \quad \alpha > 1, \quad d > -1;$$

$$2. \quad \eta = B z^\beta r^\gamma, \quad \psi = A z^\alpha f(\eta), \quad \psi_{20} = D z^d f_2(\eta), \quad V_\varphi = C z^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = N z^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 1, \quad d = 1 + \frac{2\beta}{\gamma}, \quad p = 1 + \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > -1, \quad d > -1;$$

3. $\eta = Br$, $\psi = Az^\alpha f(\eta)$, $\psi_{20} = Dz^t f_2(\eta)$, $V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta)$, $\psi_1 = Nz^p f_1(\eta)$,
 $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 0$, $C = 0$ ($V_\varphi = 0$);
4. $\eta = Br$, $\psi = Az^\alpha f(\eta)$, $\psi_{20} = Dz^t f_2(\eta)$, $V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta)$, $\psi_1 = Nz^p f_1(\eta)$,
 $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 0$, $d = 0$, $p = 0$;
5. $\eta = Br$, $\psi = Az^\alpha f(\eta)$, $\psi_{20} = Dz^t f_2(\eta)$, $V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta)$, $\psi_1 = Nz^p f_1(\eta)$,
 $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 1$, $C = 0$ ($V_\varphi = 0$), $p = 1$;
6. $\eta = Br$, $\psi = Az^\alpha f(\eta)$, $\psi_{20} = Dz^t f_2(\eta)$, $V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta)$, $\psi_1 = Nz^p f_1(\eta)$,
 $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 1$, $d = 1$, $p = 1$;
7. $\eta = Br$, $\psi = Az^\alpha f(\eta)$, $\psi_{20} = Dz^\alpha f_2(\eta)$, $V_\varphi = Cz^d \Omega(\eta)$, $\psi_1 = Nz^p f_1(\eta)$,
 $E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\alpha = 1$, $d = 0$, $p = 0$;
8. $\eta = Bz$, $\psi = Ar^\alpha f(\eta)$, $\psi_{20} = Dr^t f_2(\eta)$, $V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta)$, $\psi_1 = Nr^p f_1(\eta)$, $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,
 $\alpha = 2$, $C = 0$ ($V_\varphi = 0$), $p = 2$;
9. $\eta = Bz$, $\psi = Ar^\alpha f(\eta)$, $\psi_{20} = Dr^t f_2(\eta)$, $V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta)$, $\psi_1 = Nr^p f_1(\eta)$, $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,
 $\alpha = 2$, $d = 1$, $p = 2$. (IV.81)

Рассмотрим приведенные выше варианты.

Вариант 1.

Анализируя уравнения с учетом вида переменной и функций тока, получаем, что для обеспечения автомодельности показатель степени в магнитной функции тока должен быть равен $t = \alpha = 2 + \gamma/\beta$. Тогда уравнение (IV.80) примет вид

$$(-1 + \beta) f_2' + \beta \eta f_2'' = 0 \quad (IV.81)$$

с решением

$$f_2(\eta) = \tilde{C}_1 \beta \eta^{\frac{1}{\beta}} + \tilde{C}_2. \quad (IV.82)$$

Подставляя полученное решение в (IV.77) – (IV.79), получим систему уравнений, описывающих решение типа пограничного слоя в МГД в безындукционном приближении:

$$\begin{aligned}
& -A^2 B^{2/\beta} (-2+\beta)(-1+\beta)(2\beta+\gamma)\eta^{-\frac{2+\beta}{\beta}} f f' + 3 A^2 B^{2/\beta} (-1+\beta)\beta\gamma\eta^{2-\frac{2}{\beta}} f'^2 - \\
& -3 A^2 B^{2/\beta} (-1+\beta)\beta(2\beta+\gamma)\eta^{2-\frac{2}{\beta}} f f'' + 3 A^2 B^{2/\beta} \beta^2 \gamma \eta^{3-\frac{2}{\beta}} f' f'' - \\
& -A^2 B^{2/\beta} \beta^2 (2\beta+\gamma)\eta^{3-\frac{2}{\beta}} f f^{(3)} - \frac{A B^{\frac{1}{\beta}} D^2 (2\beta+\gamma)^2 \eta^{2-\frac{1}{\beta}} (C_2 + C_1 \beta \eta^{\frac{1}{\beta}})^2 \sigma}{\rho} f'' - \\
& -2 C^2 \beta \eta \Omega \Omega' + \frac{2 N^2 \beta \eta \mu_0}{\rho} f_1 f_1' - \frac{3 A B^{\frac{1}{\beta}} C_1^2 D^2 \gamma (2\beta+\gamma) \eta^{\frac{1}{\beta}} \sigma}{\rho} f - \\
& - \frac{1}{\beta \rho} \left(A B^{\frac{1}{\beta}} D^2 (2\beta+\gamma) \eta^{-\frac{1+\beta}{\beta}} (C_2 + C_1 \beta \eta^{\frac{1}{\beta}}) (C_2 (-1+\beta) (2\beta+\gamma) + \right. \\
& \left. + C_1 \beta (2(-1+\beta)\beta + (-4+\beta)\gamma) \eta^{\frac{1}{\beta}}) \sigma \right) f' + A B^{3/\beta} (-3+\beta)(-2+\beta)(-1+\beta)\beta \eta^{-\frac{3+\beta}{\beta}} \nu f' + \\
& + A B^{3/\beta} (-1+\beta)\beta^2 (-11+7\beta) \eta^{2-\frac{3}{\beta}} \nu f'' + 6 A B^{3/\beta} (-1+\beta)\beta^3 \eta^{3-\frac{3}{\beta}} \nu f^{(3)} + \\
& + A B^{3/\beta} \beta^4 \eta^{4-\frac{3}{\beta}} \nu f^{(4)} = 0
\end{aligned} \tag{IV.83}$$

$$\begin{aligned}
& 2 A C (\beta+\gamma) \eta \Omega f' - A C (2\beta+\gamma) \eta f \Omega' - \frac{2 D N (\beta+\gamma) \eta^{\frac{1}{\beta}} C_1}{\rho} f_1 + \\
& + \frac{D N (2\beta+\gamma) \eta (\beta \eta^{\frac{1}{\beta}} C_1 + C_2)}{\rho} f_1' + B^{\frac{1}{\beta}} C (-1+\beta) \beta \eta^{-\frac{1+\beta}{\beta}} \nu \Omega' + B^{\frac{1}{\beta}} C \beta^2 \eta^{2-\frac{1}{\beta}} \nu \Omega'' = 0
\end{aligned} \tag{IV.84}$$

$$\begin{aligned}
& 2 A N \gamma \eta \sigma \mu_0 f_1 f' - A N (2\beta+\gamma) \eta \sigma \mu_0 f f_1' - 2 C D \gamma \eta^{\frac{1}{\beta}} \sigma C_1 \Omega + \\
& + C D (2\beta+\gamma) \eta \sigma (\beta \eta^{\frac{1}{\beta}} C_1 + C_2) \Omega' + B^{\frac{1}{\beta}} N (-1+\beta) \beta \eta^{-\frac{1+\beta}{\beta}} f_1' + B^{\frac{1}{\beta}} N \beta^2 \eta^{2-\frac{1}{\beta}} f_1'' = 0
\end{aligned} \tag{IV.85}$$

Обратимся еще раз к магнитной функции тока и рассмотрим магнитные поля, описываемые решением (IV.82). С учетом (IV.82) она запишется как

$$\psi_{20} = D r^\alpha \left(\tilde{C}_1 \beta \eta^{\frac{1}{\beta}} + \tilde{C}_2 \right) = D r^{2+\frac{\gamma}{\beta}} \left(\tilde{C}_1 \beta B^{\frac{1}{\beta}} z r^{\frac{\gamma}{\beta}} + \tilde{C}_2 \right). \tag{IV.86}$$

Если в (IV.82) положить $\tilde{C}_1 = 0$, то силовые линии $\psi_{20} = const$ определяются условием $r^{2+\frac{\gamma}{\beta}} = const$. Это поле параллельно оси симметрии z ($B_z \sim r^{\frac{\gamma}{\beta}}$, $B_r = 0$). При этом лишь при $\gamma/\beta = 0$ магнитное поле является однородным, при остальных $\gamma/\beta > -1$ плотность магнитных силовых линий зависит от γ/β . При $\tilde{C}_2 = 0$ магнитные силовые линии располагаются на поверхностях вращения, образующие которых определяются степенной функцией $z = const / r^{2+2\gamma/\beta}$ ($2+2\gamma/\beta > 0$), причем с ростом γ/β происходит сгущение силовых линий у оси симметрии, а r -составляющая поля не зависит от z ($B_r \sim r^{1+2\gamma/\beta}$, $B_z \sim z r^{2\gamma/\beta}$). Например, при $\gamma/\beta = -1/2$ магнитные силовые

линии располагаются на поверхностях, образующими которых являются гиперболоиды $z = const/r$. При $\tilde{C}_1 \neq 0$ и $\tilde{C}_2 \neq 0$ получаем различные комбинации этих двух вариантов [70].

Вариант 2.

Показатель степени в функции ψ_{20} должен быть $t=1$, $p=1+\beta/\gamma$. Тогда уравнение (IV.80) перейдет в

$$(-2+\gamma)f_2' + \gamma\eta f_2'' = 0, \quad (IV.87)$$

решением которого является

$$f_2(\eta) = \frac{\gamma\tilde{C}_1}{2}\eta^{\frac{2}{\gamma}} + \tilde{C}_2. \quad (IV.88)$$

С учетом этого результата уравнения (IV.77) – (IV.79) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} & A^2 B^{4/\gamma} (-4+\gamma)(-2+\gamma)\gamma\eta^{\frac{-4+\gamma}{\gamma}} f f' - A^2 B^{4/\gamma} (-2+\gamma)\gamma(4\beta+\gamma)\eta^{\frac{2-4}{\gamma}} f'^2 + \\ & + 3 A^2 B^{4/\gamma} (-2+\gamma)\gamma^2\eta^{\frac{2-4}{\gamma}} f f'' - A^2 B^{4/\gamma} \gamma^2(4\beta+\gamma)\eta^{\frac{3-4}{\gamma}} f' f'' + \\ & + A^2 B^{4/\gamma} \gamma^3\eta^{\frac{3-4}{\gamma}} f f^{(3)} - \frac{2C^2(2\beta+\gamma)}{\gamma} \Omega^2 - 2C^2\beta\eta\Omega\Omega' - \\ & - \frac{4AB^{4/\gamma}C_1D^2\gamma\eta^{-2/\gamma}(C_2+2C_1(2\beta+\gamma)\eta^{2/\gamma})\sigma}{\rho} f - \\ & - \frac{AB^{4/\gamma}D^2\gamma\eta^{\frac{-4+\gamma}{\gamma}}(C_2+C_1\gamma\eta^{2/\gamma})(C_2(-4+\gamma)+C_1(-8\beta+(-6+\gamma)\gamma)\eta^{2/\gamma})\sigma}{\rho} f' + \\ & + \frac{2B^{2/\gamma}N^2(\beta+\gamma)\eta^{-2/\gamma}\mu_0}{\gamma\rho} f_1^2 + \frac{2B^{2/\gamma}N^2\beta\eta^{1-\frac{2}{\gamma}}\mu_0}{\rho} f_1 f_1' - \\ & - \frac{AB^{4/\gamma}D^2\gamma^2\eta^{\frac{2-4}{\gamma}}(C_2+C_1\gamma\eta^{2/\gamma})^2\sigma}{\rho} f'' + AB^{4/\gamma}(-4+\gamma)(-2+\gamma)^2\gamma\eta^{\frac{-4+\gamma}{\gamma}}\nu f' + \\ & + AB^{4/\gamma}(-2+\gamma)\gamma^2(-10+7\gamma)\eta^{\frac{2-4}{\gamma}}\nu f'' + 2AB^{4/\gamma}\gamma^3(-4+3\gamma)\eta^{\frac{3-4}{\gamma}}\nu f^{(3)} + \\ & + AB^{4/\gamma}\gamma^4\eta^{\frac{4-4}{\gamma}}\nu f^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (IV.89)$$

$$\begin{aligned} & ACf\Omega - AC(\beta+\gamma)\eta\Omega f' + AC\gamma\eta f\Omega' + \frac{2B^{\frac{1}{\gamma}}DN(\beta+\gamma)\eta^{\frac{1}{\gamma}}C_1}{\rho} f_1 - \\ & - \frac{B^{\frac{1}{\gamma}}DN\gamma\eta^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}}(\gamma\eta^{2/\gamma}C_1+C_2)}{\rho} f_1' - C\nu\Omega + C\gamma^2\eta\nu\Omega' + C\gamma^2\eta^2\nu\Omega'' = 0 \end{aligned} \quad (IV.90)$$

$$\begin{aligned} & AB^{\frac{1}{\gamma}}N\gamma\eta^{1-\frac{1}{\gamma}}\sigma\mu_0 f f_1' - 2AB^{\frac{1}{\gamma}}N\eta^{-1/\gamma}\sigma\mu_0 f f_1 - AB^{\frac{1}{\gamma}}N(3\beta+\gamma)\eta^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}}\sigma\mu_0 f_1 f' - \\ & - CD\gamma\eta\sigma(\gamma\eta^{2/\gamma}C_1+C_2)\Omega' CD\sigma(3(2\beta+\gamma)\eta^{2/\gamma}C_1+C_2)\Omega + B^{\frac{1}{\gamma}}N(-2+\gamma)\gamma\eta^{\frac{-1+\gamma}{\gamma}}f_1' + \end{aligned}$$

$$+B^{\frac{1}{\gamma}} N \gamma^2 \eta^{2-\frac{1}{\gamma}} f_1'' = 0 \quad (\text{IV.91})$$

Рассмотрим конфигурации магнитных поле, допустимых в этом классе решений. Магнитная функция тока с учетом (IV.88) будет следующей:

$$\psi_{20} = Dz \left(\frac{\gamma B^{\frac{2}{\gamma}} \tilde{C}_1}{2} z^{\frac{2\beta}{\gamma}} r^2 + \tilde{C}_2 \right). \quad (\text{IV.92})$$

При $\tilde{C}_1 = 0$ силовые линии магнитного поля $\psi_{20} = const$ соответствуют чисто радиальному магнитному полю (магнитные силовые линии располагаются на поверхностях $z = const$). При $\tilde{C}_2 = 0$ в зависимости от знака выражения $1 - 2\beta/\gamma$ силовые линии будут располагаться либо на параболоидах вращения ($0 > 1 - 2\beta/\gamma > -1$), либо на гиперboloидах вращения ($1 - 2\beta/\gamma > 0$); при $1 - 2\beta/\gamma = 0$ будем иметь однородное осевое магнитное поле $B_z = const$ [43].

Вариант 3.

В этом варианте для автомодельности необходимо принять $p = 0, t = 1$. Система уравнений (IV.77) – (IV.80) запишется как

$$f'' \left(\frac{3D^2 \sigma f_2^2}{\eta^4 \rho} - \frac{D^2 \sigma f_2 f_2'}{\eta^3 \rho} \right) - \frac{D^2 \sigma f_2^2 f''}{\eta^3 \rho} - \frac{3\nu f'}{\eta^4} + \frac{3\nu f''}{\eta^3} - \frac{2\nu f^{(3)}}{\eta^2} + \frac{\nu f^{(4)}}{\eta} = 0 \quad (\text{IV.93})$$

$$-\frac{f_2 f_1'}{\eta^2} = 0 \quad (\text{IV.94})$$

$$-\frac{f_1'}{\eta} + f_1'' = 0 \quad (\text{IV.95})$$

$$-\frac{f_2'}{\eta} + f_2'' = 0 \quad (\text{IV.96})$$

Решениями уравнений (IV.80) и (IV.80) являются функции

$$f_1(\eta) = \frac{\tilde{C}_1 \eta^2}{2} + \tilde{C}_2, \quad f_2(\eta) = \frac{\hat{C}_1 \eta^2}{2} + \hat{C}_2, \quad (\text{IV.97})$$

а уравнение (IV.94) накладывает дополнительное требование, удовлетворить которое оставаясь в рамках магнитной гидродинамики можно только приняв $\tilde{C}_1 = 0$. Следовательно, электрическая функция тока будет $\psi_1 = const$, то есть по жидкости не пропускается электрический ток, а магнитная функция тока запишется как

$$\psi_{20} = Dz \left(\frac{\hat{C}_1 B^2}{2} r^2 + \hat{C}_2 \right). \quad (\text{IV.98})$$

Магнитное поле, описываемое формулой (IV.98), полностью совпадает с рассмотренным в пункте III.6.3 (см. формулы (III.207,а,б)).

Вариант 4.

В этом случае показатель степени в выражении для магнитной функции тока должен быть $t = 1$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$f' \left(\frac{3D^2 \sigma f_2^2}{\eta^4 \rho} - \frac{D^2 \sigma f_2 f_2'}{\eta^3 \rho} \right) - \frac{D^2 \sigma f_2^2 f''}{\eta^3 \rho} - \frac{3\nu f'}{\eta^4} + \frac{3\nu f''}{\eta^3} - \frac{2\nu f^{(3)}}{\eta^2} + \frac{\nu f^{(4)}}{\eta} = 0 \quad (\text{IV.99})$$

$$\frac{C\nu\rho\Omega}{\eta^2} + \frac{C\nu\rho\Omega'}{\eta} + C\nu\rho\Omega'' - BDN \frac{f_2 f_1'}{\eta^2} = 0 \quad (\text{IV.100})$$

$$\frac{CD\sigma\Omega f_2}{\eta} - CD\sigma f_2 \Omega' - BN \frac{f_1'}{\eta} + BN f_1'' = 0 \quad (\text{IV.101})$$

$$-\frac{f_2'}{\eta} + f_2'' = 0 \quad (\text{IV.102})$$

Решение уравнения (IV.102) было получено в предыдущем варианте:

$$f_2(\eta) = \frac{\hat{C}_1 \eta^2}{2} + \hat{C}_2, \quad (\text{IV.103})$$

магнитная функция тока тоже будет такой же:

$$\psi_{20} = Dz \left(\frac{\hat{C}_1 B^2}{2} r^2 + \hat{C}_2 \right). \quad (\text{IV.104})$$

Как видно из остальных уравнений системы, электрический ток взаимодействует только с азимутальным вращением жидкости; на распределение тока так же влияет и магнитное поле. Но осевая и радиальная скорости полностью независимы как от электрического тока, так и от вращательной скорости.

Вариант 5.

Система уравнений (IV.77) – (IV.80) станет автомодельной, если $t = 1$. Последнее из этих уравнений при этом станет таким же, как и в двух предыдущих случаях:

$$-\frac{f_2'}{\eta} + f_2'' = 0 \quad (\text{IV.105})$$

с решением (IV.103). Такой же будет и магнитная функция тока, определяемая выражением (IV.104).

Уравнение (IV.78) определяет связь между магнитной и электрической функциями тока:

$$f_2 f_1' = f_1 f_2' \quad (\text{IV.106}),$$

откуда следует, что эти функции пропорциональны:

$$f_1 = \text{const } f_2, \quad (\text{IV.107})$$

следовательно, можно записать вид функции f_1 :

$$f_1(\eta) = \frac{\tilde{C}_1 \eta^2}{2} + \tilde{C}_2. \quad (\text{IV.108})$$

Само же уравнение (IV.106) показывает, что взаимодействие электрического тока и магнитного поля не вызывает азимутального вращения жидкости.

Оставшиеся два уравнения системы – (IV.77) и (IV.79) – запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{3 A^2 B^2 f f'}{\eta^4} + \frac{A^2 B^2 f'^2}{\eta^3} - \frac{3 A^2 B^2 f f''}{\eta^3} - \frac{A^2 B^2 f' f''}{\eta^2} + \frac{A^2 B^2 f f^{(3)}}{\eta^2} + \\ & + \frac{2 N^2 \mu_0 f_1^2}{\eta^3 \rho} - \frac{3 A B^2 D^2 \sigma f f_2 f_2'}{\eta^4 \rho} - \frac{A B^2 D^2 \sigma f f_2'^2}{\eta^3 \rho} + \\ & + f' \left(\frac{3 A B^2 D^2 \sigma f_2^2}{\eta^4 \rho} + \frac{A B^2 D^2 \sigma f_2 f_2'}{\eta^3 \rho} \right) - \frac{A B^2 D^2 \sigma f_2^2 f''}{\eta^3 \rho} + \\ & + \frac{A B^2 D^2 \sigma f f_2 f_2''}{\eta^3 \rho} - \frac{3 A B^2 \nu f'}{\eta^4} + \frac{3 A B^2 \nu f''}{\eta^3} - \frac{2 A B^2 \nu f^{(3)}}{\eta^2} + \frac{A B^2 \nu f^{(4)}}{\eta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.109})$$

$$-\frac{2 A \sigma \mu_0 f f_1}{\eta^2} - \frac{A \sigma \mu_0 f_1 f'}{\eta} - \frac{f_1'}{\eta} + \frac{A \sigma \mu_0 f f_1'}{\eta} + f_1'' = 0 \quad (\text{IV.110})$$

Формально можно подставить решение (IV.108) в (IV.110) и получить уравнение для определения гидродинамической функции тока f :

$$2\tilde{C}_2 f + \eta \left(\tilde{C}_1 \eta^2 / 2 + \tilde{C}_2 \right) f' = 0, \quad (\text{IV.111})$$

$$f(\eta) = \left(\tilde{C}_1 + \frac{2 \tilde{C}_2}{\eta^2} \right) \bar{C}. \quad (\text{IV.112})$$

решением которого является функция (\bar{C} – постоянная интегрирования)

$$2\tilde{C}_2 f + \eta \left(\tilde{C}_1 \eta^2 / 2 + \tilde{C}_2 \right) f' = 0, \quad (\text{IV.111})$$

$$f(\eta) = \left(\tilde{C}_1 + \frac{2 \tilde{C}_2}{\eta^2} \right) \bar{C}. \quad (\text{IV.112})$$

Однако подстановка (IV.112) и (IV.103) в (IV.109) в общем виде не дает ответа, является ли функция (IV.112) решением (IV.109). Для этого необходимо знать величины постоянных A , B , D и постоянных интегрирования в (IV.112) и (IV.103).

Вариант 6.

Уравнения станут автомодельными, если $t=1$. Уравнение (IV.80) при этом станет таким же, как и в предыдущем случае:

$$-\frac{f_2'}{\eta} + f_2'' = 0 \quad (\text{IV.113})$$

с решением (IV.103). Такой же будет и магнитная функция тока, определяемая выражением (IV.104). С учетом этого результата система (IV.77) – (IV.79) запишется в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{A^2 B^4 f^2}{\eta^3} + \frac{3 A^2 B^4 f f'}{\eta^4} - \frac{3 A^2 B^4 f f''}{\eta^3} - \frac{A^2 B^4 f' f''}{\eta^2} + \frac{A^2 B^4 f f^{(3)}}{\eta^2} - \\ & - \frac{2 C^2 \Omega^2}{\eta} + \frac{2 B^2 N^2 \mu_0 f_1^2}{\eta^3 \rho} - \frac{2 A B^4 D^2 \sigma C_1 (\eta^2 C_1 + C_2)}{\eta^3 \rho} f + \\ & + \frac{A B^4 D^2 \sigma (\eta^2 C_1 + 2 C_2) (5 \eta^2 C_1 + 6 C_2)}{4 \eta^4 \rho} f' - \frac{A B^4 D^2 \sigma (\eta^2 C_1 + 2 C_2)^2 f''}{4 \eta^3 \rho} - \\ & - \frac{3 A B^4 \nu f'}{\eta^4} + \frac{3 A B^4 \nu f''}{\eta^3} - \frac{2 A B^4 \nu f^{(3)}}{\eta^2} + \frac{A B^4 \nu f^{(4)}}{\eta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.114})$$

$$\begin{aligned} & \frac{A C f \Omega}{\eta^2} - \frac{A C \Omega f'}{\eta} + \frac{A C f \Omega'}{\eta} + \frac{B D N C_1 f_1}{\eta \rho} - \\ & - \frac{B D N (\eta^2 C_1 + 2 C_2) f_1'}{2 \eta^2 \rho} - \frac{C \nu \Omega}{\eta^2} + \frac{C \nu \Omega'}{\eta} + C \nu \Omega'' = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.115})$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2 A B N \sigma \mu_0 f f_1}{\eta^2} - \frac{A B N \sigma \mu_0 f_1 f'}{\eta} + C D \sigma \left(\frac{3}{2} \eta C_1 + \frac{C_2}{\eta} \right) \Omega - \\ & - \frac{1}{2} C D \sigma (\eta^2 C_1 + 2 C_2) \Omega' + \frac{A B N \sigma \mu_0 f f_1'}{\eta} - \frac{B N f_1'}{\eta} + B N f_1'' = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.116})$$

Вариант 7.

Для автомодельности необходимо принять $t=1$. Магнитная функция тока подчиняется опять же уравнению (IV.113) с решением (IV.103). Полная магнитная функция тока определяется выражением (IV.104). Остальные уравнения системы с учетом вида магнитной функции тока примут вид:

$$\begin{aligned} & \frac{3 A f f'}{\eta^4} + \frac{A f'^2}{\eta^3} - \frac{3 A f f''}{\eta^3} - \frac{A f' f''}{\eta^2} + \frac{A f f^{(3)}}{\eta^2} - \\ & - \frac{4 D^2 \sigma C_1 (2 \eta^2 C_1 + C_2)}{\eta^3 \rho} f + \frac{D^2 \sigma (\eta^2 C_1 + C_2) (5 \eta^2 C_1 + 3 C_2)}{\eta^4 \rho} f' - \\ & - \frac{D^2 \sigma (\eta^2 C_1 + C_2)^2 f''}{\eta^3 \rho} - \frac{3 \nu f'}{\eta^4} + \frac{3 \nu f''}{\eta^3} - \frac{2 \nu f^{(3)}}{\eta^2} + \frac{\nu f^{(4)}}{\eta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.117})$$

$$\frac{ACf\Omega}{\eta^2} + \frac{ACf\Omega'}{\eta} - \frac{BDNC_1f_1'}{\rho} - \frac{BDNC_2f_1'}{\eta^2\rho} - \frac{Cv\Omega}{\eta^2} + \frac{Cv\Omega'}{\eta} + Cv\Omega'' = 0 \quad (\text{IV.118})$$

$$\begin{aligned} & - \frac{2ABN\sigma\mu_0ff_1}{\eta^2} + \frac{ABN\sigma\mu_0ff_1'}{\eta} + \frac{CD\sigma(\eta^2C_1+C_2)}{\eta}\Omega - \\ & - CD\sigma(\eta^2C_1+C_2)\Omega' - \frac{BNf_1'}{\eta} + BNf_1'' = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.119})$$

В этом варианте азимутальное вращение и электрический ток не влияют на осевую и радиальную скорости, но сами вынуждены «подстраиваться» под них.

Вариант 8.

Чтобы система уравнений (IV.77) – (IV.80) стала автомодельной, необходимо положить $t = 2$. Тогда уравнения запишутся в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{2N^2\mu_0f_1f_1'}{\rho} - \frac{4ABD^2\sigma f_2^2f_1''}{\rho} + \frac{4ABD^2\sigma ff_2f_2''}{\rho} - \\ & - 2A^2B^2ff^{(3)} + AB^3vf^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.120})$$

$$f_2f_1' - f_1f_2' = 0 \quad (\text{IV.121})$$

$$-2A\sigma\mu_0ff_1' + Bf_1'' = 0 \quad (\text{IV.122})$$

$$f_2'' = 0 \quad (\text{IV.123})$$

Уравнение (IV.123) имеет простое решение

$$f_2(\eta) = C_1\eta + C_2 = C_1Bz + C_2, \quad (\text{IV.124})$$

которое определяет вид магнитной функции тока

$$\psi_{20} = DC_1Bzr^2 + DC_2r^2. \quad (\text{IV.125})$$

Эта функция тока описывает магнитное поле, составляющие которого задаются выражениями $B_z = 2DBC_1z + 2DC_2$, $B_r = -DBC_1r$. Это магнитное поле полностью соответствует магнитному полю, описанному в пункте III.6.3, Вариант 5, формула (III.213,б). Силовые линии располагаются на гиперболоидах вращения (при $C_2 = 0$).

Уравнение (IV.121) дает связь между видами магнитной и электрической функций тока:

$$f_1(\eta) = \bar{C} f_2(\eta), \quad (\text{IV.126})$$

следовательно, электрическая функция тока имеет тот же вид, что и магнитная:

$$f_1(\eta) = \hat{C}_1\eta + \hat{C}_2 = \hat{C}_1Bz + \hat{C}_2. \quad (\text{IV.127})$$

Подстановка этого выражения в (IV.122) позволяет формально найти гидродинамическую функцию тока f :

$$f(\eta) = 0, \quad (\text{IV.128})$$

что является малоинтересным. Нетривиальное решение получится, если в (IV.127) принять $\hat{C}_1 = 0$. Тогда из (IV.121) следует, что либо $\hat{C}_2 = 0$, либо $f_2 = \text{const}$. Первый вариант означает, что по жидкости не пропускается электрический ток ($\psi_1 \equiv 0$), второй вариант означает, что жидкость течет в однородном осевом магнитном поле $\psi_{20} = DC_2 r^2$, $B_z = 2DC_2$, $B_r = 0$.

Вариант 9.

Для обеспечения автомодельности необходимо, чтобы $t = 2$. В этом случае уравнения (IV.77) – (IV.80) запишутся как

$$\begin{aligned} -2A^2 B^2 f f^{(3)} - 2C^2 \Omega \Omega' + \frac{2N^2 \mu_0 f_1 f_1'}{\rho} - \frac{4ABD^2 \sigma f_2^2 f''}{\rho} + \\ + \frac{4ABD^2 \sigma f f_2 f_2''}{\rho} + AB^3 \nu f^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.129})$$

$$2AC\Omega f' - 2ACf\Omega' + \frac{2DN f_2 f_1'}{\rho} - \frac{2DN f_1 f_2'}{\rho} + BC\nu\Omega'' = 0 \quad (\text{IV.130})$$

$$2CD\sigma f_2 \Omega' - 2AN\sigma \mu_0 f f_1' + BN f_1'' = 0 \quad (\text{IV.131})$$

$$f_2'' = 0 \quad (\text{IV.132})$$

Решение последнего уравнения известно – (IV.124), как и вид магнитной функции тока – (IV.125). В этом варианте, в отличие от предыдущего, можно рассматривать задачи с азимутальной (вращательной) скоростью. А с учетом (IV.132) уравнение (IV.129) упрощается – предпоследнее слагаемое, содержащее f_2'' , равно нулю.

Таким образом, рассмотрены все возможные варианты построения автомодельных решений типа пограничного слоя в магнитной гидродинамике в безындукционном приближении. Первые два варианта являются чисто автомодельными решениями с переменной, построенной как комбинация естественных переменных, остальные же 7 вариантов есть не что иное, как разделение переменных.

IV.4. Выводы.

1) Декартова система координат.

Для преобразования уравнений необходимо функции тока брать в виде

$$\eta = y/\delta(x), \quad \delta(x) = Bx^\beta, \quad \psi = Ax^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dx^d f_2(\eta),$$

где показатели степеней связаны соотношениями

$$\alpha = d = 1 - \beta, \beta < 1.$$

Для перевода уравнения индукции в автомодельную форму есть два способа: 1) $\beta = 1/3$, $K \neq 0$; 2) $K = 0$. Первый случай означает, что по жидкости пропускается постоянный электрический ток в направлении оси Oz, но это возможно только при одном фиксированном β . Во втором случае ток не пропускается.

Если же взять $\alpha = 1$, $\beta = 0$, то получим метод разделения переменных. Причем это решение – точное решение, так как никаких приближений не использовалось. И в то же время – это решение типа пограничного слоя.

В безындукционном приближении дополнительно необходимо рассматривать электрическую функцию тока ψ_1 :

$$\eta = y/\delta(x), \delta(x) = Bx^\beta, \psi = Ax^\alpha f(\eta), \psi_1 = N x^\gamma f_1(\eta), \psi_{20} = Dx^d f_2(\eta),$$

а связь между показателями степеней будет следующей:

$$\alpha = 1 - \beta, d = \alpha = 1 - \beta, \gamma - \text{любое}, \beta < 1.$$

В работе приведена универсальная система автомодельных уравнений. Анализ уравнения индукции показывает, что для приведения его к автомодельному виду есть 2 способа: 1) $\beta = 1/3$, $K \neq 0$; 2) $K = 0$. В первом случае получаем задачу, магнитное поле в которой определяется выражением:

$$\psi_{20} = Dx^{1-\beta} \left(\frac{KB^2}{2D} \eta^2 + C_1 \eta + C_2 \right) = \frac{K y^2}{2} + \frac{DC_1 y}{B} x^{1/3} + DC_2 x^{2/3}.$$

Эта функция тока описывает комбинацию трех магнитных полей: 1-е слагаемое соответствует магнитному полю, силовые линии которого параллельны оси x, индукция которого растет линейно с ростом y; 2-е слагаемое соответствует магнитному полю, силовые линии которого описываются уравнением $y = \text{const} x^{-1/3}$ (кривые гиперболического типа) и сгущаются у оси y, а индукция убывает при удалении от начала координат (это магнитное поле подобно магнитному полю с нейтральной точкой); 3-е слагаемое соответствует магнитному полю, силовые линии которого параллельны оси y, а индукция убывает при удалении от Oy.

Во втором варианте при $K = 0$ магнитная функция тока определяется выражением

$$f_2(\eta) = C_1 \eta + C_2, \psi_{20} = Dx^{1-\beta} \left(\frac{C_1 y}{B x^\beta} + C_2 \right) = \frac{DC_1}{B} y x^{1-2\beta} + C_2 x^{1-\beta},$$

которое описывает магнитное поле, являющееся комбинацией следующих полей: 1-е слагаемое соответствует полю, силовые линии которого описываются уравнением

$y = \text{const } x^{2\beta-1}$; в зависимости от значения $\beta < 1$ можно получить различные поля: при $\beta = 0$ – магнитное поле с нейтральной точкой, при $\beta = 1/2$ – однородное продольное магнитное поле $B_x = \text{const}, B_y = 0$; 2-е слагаемое соответствует полю, силовые линии которого ориентированы параллельно оси y $B_x = 0, B_y = C_2(1 - \beta)x^\beta$.

Можно построить решение, являющееся одновременно и точным, и решением в приближении пограничного слоя, приняв $\alpha = 1, \beta = 0$. В этом случае автомодельное решение совпадает по виду с решением методом разделения переменных. Единственное допустимое в этом случае магнитное поле – поле с нейтральной точкой.

2) Цилиндрическая система координат.

В работе показано, что в цилиндрической системе координат перевести уравнения МГД пограничного слоя в точной постановке в обыкновенные дифференциальные уравнения можно только в следующих 7 случаях (в работе приведены соответствующие системы уравнений, нумерация вариантов соответствует их нумерации в работе):

$$1. \quad \eta = B z^\beta r^\gamma, \quad \psi = A r^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = D r^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = C r^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = N r^{d+1} f_1(\eta),$$

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{\beta} + 2, \quad d = \frac{2\gamma}{\beta} + 1, \quad \frac{\gamma}{\beta} > -1, \quad \alpha > 1, \quad d > -1;$$

$$2. \quad \eta = B z^\beta r^\gamma, \quad \psi = A z^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = D z^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = C z^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = N z^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 1, \quad d = 1 + \frac{2\beta}{\gamma}, \quad p = 1 + \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > -1, \quad d > -1;$$

$$5. \quad \eta = B r, \quad \psi = A z^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = D z^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = C z^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = N z^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 1, \quad C = 0 \quad (V_\phi = 0), \quad p = 1;$$

$$6. \quad \eta = B r, \quad \psi = A z^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = D z^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = C z^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = N z^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 1, \quad d = 1, \quad p = 1;$$

$$7. \quad \eta = B r, \quad \psi = A z^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = D z^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = C z^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = N z^p f_1(\eta),$$

$$E^2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad \alpha = 1, \quad d = 0, \quad p = 0;$$

$$8. \quad \eta = B z, \quad \psi = A r^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = D r^\alpha f_2(\eta), \quad V_\phi = C r^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = N r^p f_1(\eta), \quad E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\alpha = 2, \quad C = 0 \quad (V_\phi = 0), \quad p = 2;$$

$$9. \quad \eta = Bz, \quad \psi = Ar^\alpha f(\eta), \quad \psi_2 = Dr^\alpha f_2(\eta), \quad V_\varphi = Cr^d \Omega(\eta), \quad \psi_1 = Nr^p f_1(\eta), \quad E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\alpha = 2, \quad d = 1, \quad p = 2.$$

В безындукционном приближении существует 9 вариантов преобразования уравнений. Получены как системы уравнений, так и допустимые магнитные и электрические поля (в некоторых вариантах).

1. Магнитная функция тока

$$\psi_{20} = Dr^\alpha \left(\tilde{C}_1 \beta \eta^{\frac{1}{\beta}} + \tilde{C}_2 \right) = Dr^{2+\frac{\gamma}{\beta}} \left(\tilde{C}_1 \beta B^{\frac{1}{\beta}} z r^{\frac{\gamma}{\beta}} + \tilde{C}_2 \right).$$

При $\tilde{C}_1 = 0$ силовые линии определяются условием $r^{2+\frac{\gamma}{\beta}} = const$. Это поле параллельно оси симметрии z . При этом лишь при $\gamma/\beta = 0$ магнитное поле является однородным, при остальных $\gamma/\beta > -1$ плотность магнитных силовых линий зависит от γ/β . При $\tilde{C}_2 = 0$ магнитные силовые линии располагаются на поверхностях вращения, образующие которых определяются степенной функцией $z = const / r^{2+2\gamma/\beta}$ ($2+2\gamma/\beta > 0$), причем с ростом γ/β происходит сгущение силовых линий у оси симметрии, а r -составляющая поля не зависит от z . Например, при $\gamma/\beta = -1/2$ магнитные силовые линии располагаются на поверхностях, образующими которых являются гиперболоиды $z = const/r$. При $\tilde{C}_1 \neq 0$ и $\tilde{C}_2 \neq 0$ получаем различные комбинации этих двух вариантов.

2. Магнитная функция тока будет следующей:

$$\psi_{20} = Dz \left(\frac{\gamma B^{\frac{2}{\gamma}} \tilde{C}_1}{2} z^{\frac{2\beta}{\gamma}} r^2 + \tilde{C}_2 \right).$$

При $\tilde{C}_1 = 0$ силовые линии магнитного поля $\psi_{20} = const$ соответствуют чисто радиальному магнитному полю. При $\tilde{C}_2 = 0$ в зависимости от знака выражения $1-2\beta/\gamma$ силовые линии будут располагаться либо на параболоидах вращения ($0 > 1-2\beta/\gamma > -1$), либо на гиперболоидах вращения ($1-2\beta/\gamma > 0$); при $1-2\beta/\gamma = 0$ будем иметь однородное осевое магнитное поле $B_z = const$.

3. Магнитная и электрическая функции тока определяются выражениями

$$f_1(\eta) = \frac{\tilde{C}_1 \eta^2}{2} + \tilde{C}_2, \quad f_2(\eta) = \frac{\hat{C}_1 \eta^2}{2} + \hat{C}_2,$$

но для того, чтобы остаться в рамках магнитной гидродинамики необходимо принять $\tilde{C}_1 = 0$. Следовательно, по жидкости не пропускается электрический ток, а магнитная функция тока запишется как

$$\psi_{20} = D z \left(\frac{\hat{C}_1 B^2}{2} r^2 + \hat{C}_2 \right).$$

Магнитное поле, описываемое этой формулой, является комбинацией радиального поля и поля с нейтральной точкой.

4. Магнитная функция тока будет такой же, как и в варианте 3.

5. Магнитная функция тока будет такой же, как и в варианте 3. Электрическая функция тока определяется выражением

$$f_1(\eta) = \frac{\tilde{C}_1 \eta^2}{2} + \tilde{C}_2.$$

Формально можно получить уравнение для определения гидродинамической функции тока f :

$$2\tilde{C}_2 f + \eta (\tilde{C}_1 \eta^2 / 2 + \tilde{C}_2) f' = 0,$$

решением которого является функция (\bar{C} - постоянная интегрирования)

$$f(\eta) = \left(\tilde{C}_1 + \frac{2\tilde{C}_2}{\eta^2} \right) \bar{C}.$$

Однако подстановка этого выражения в уравнения в общем виде не дает ответа, является ли данная функция решением. Для этого необходимо знать величины постоянных A , B , D и постоянных интегрирования.

6. Магнитная функция тока будет такой же, как и в варианте 3.

7. Магнитная функция тока будет такой же, как и в варианте 3. В этом варианте азимутальное вращение и электрический ток не влияют на осевую и радиальную скорости, но сами вынуждены «подстраиваться» под них.

8. Магнитная функция тока определяется выражением.

$$\psi_{20} = D C_1 B z r^2 + D C_2 r^2,$$

что соответствует магнитному полю с нейтральной точкой. Получена связь между электрической и магнитной функциями

$$f_1(\eta) = \bar{C} f_2(\eta),$$

следовательно, электрическая функция тока имеет тот же вид, что и магнитная:

$$f_1(\eta) = \hat{C}_1 \eta + \hat{C}_2 = \hat{C}_1 B z + \hat{C}_2.$$

Подстановка этого выражения в уравнение движения позволяет формально найти гидродинамическую функцию тока f :

$$f(\eta) = 0,$$

что является малоинтересным. Нетривиальное решение получится, если принять $\hat{C}_1 = 0$. Тогда появляются 2 возможности: либо $\hat{C}_2 = 0$, либо $f_2 = const$. Первый вариант означает, что по жидкости не пропускается электрический ток ($\psi_1 \equiv 0$); второй вариант означает, что жидкость течет в однородном осевом магнитном поле $\psi_{20} = DC_2 r^2$, $B_z = 2DC_2$, $B_r = 0$.

9. Магнитная функция тока такая же, как в варианте 8. В этом варианте, в отличие от предыдущего, можно рассматривать задачи с азимутальной (вращательной) скоростью.

Варианты 5 – 9 являются не только решениями в приближении пограничного слоя, но и точными решениями и соответствуют методу разделения переменных.

V. Некоторые автомодельные задачи гидродинамики и магнитной гидродинамики.

В этом разделе будут рассмотрены некоторые задачи гидродинамики и магнитной гидродинамики, которые могут быть решены в автомодельной постановке в рамках подхода, предложенного в разделах I–IV данной работы. В качестве примеров выбраны МГД аналоги известных задач гидродинамики, а также модификации задач введением отсоса и/или вдува через твердые стенки.

V.1. МГД течение в диффузоре и конфузоре.

Течение Гамеля с полем скорости $V_r = \nu f' / r$, $V_\varphi = 0$ в магнитном поле линейного токопровода $B_\varphi = -C/r$ являлось предметом изучения многих авторов (см., например, [67], [70]). Рассмотрим приближенное решение такой задачи в полярных координатах, ограничившись безындукционным приближением и случаем больших чисел Гартмана. Здесь неприменимо разделение переменных и функции тока необходимо выбирать исходя из особенностей течения.

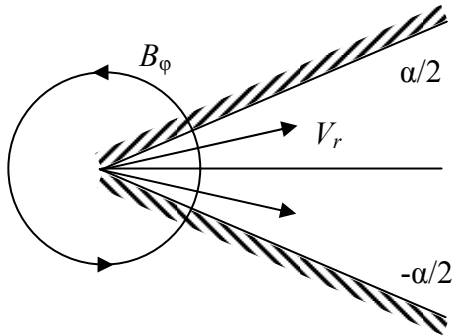


Рис. V.1. Схема течения в плоском диффузоре в азимутальном магнитном поле.

Схема рассматриваемого течения показана на рис. V.1. Гидродинамическая и магнитная функции тока в соответствии с видом составляющих скорости и магнитного поля выглядят следующим образом ((I.20), (I.25,б), (III.58), (III.172)):

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \nu f' / r, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \psi = \nu f(\varphi), \quad (\text{V.1,а})$$

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \varphi} = 0, \quad B_\varphi = -\frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} = -\frac{l}{r}, \quad \psi_{20} = l \ln r. \quad (\text{V.1,б})$$

Уравнение движения

$$f^{IV} + 4f''' + 2f'f'' - \text{Na}^2 f'' = 0, \quad (\text{V.2})$$

где $\text{Na}^2 = \frac{\sigma l^2}{\rho \nu}$, подчиним граничным условиям прилипания на стенках диффузора

(конфузора) с углом раствора α :

$$f'(\pm\alpha/2) = 0, \quad (\text{V.3,а})$$

симметричности профиля скорости

$$f''(0) = 0 \quad (\text{V.3,б})$$

и интегральному условию сохранения расхода

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} V_r r d\varphi = \nu \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} f' d\varphi = \pm Q. \quad (\text{V.3,в})$$

Если обозначить через число Рейнольдса Re величину Q/ν , то условие сохранения переписывается в виде:

$$\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} f' d\varphi = \pm Re, \quad (\text{V.3,г})$$

где знак (+) относится к диффузорному, а знак (-) – к конфузорному течением.

Приближенное решение при больших значениях Ha^2 можно получить с помощью известного приема замены искомой функции и переменной согласно $f(\varphi) = Ha^m F(\eta)$, $\varphi = Ha^n \eta$. Полагая, с целью сохранения идентичности выражения для радиальной скорости f' и F' в $f'(\varphi) = Ha^{m-n} F'(\eta)$, $m = n$ и, кроме того, принимая $n = -1$ с целью сохранения баланса между вязким и электромагнитным слагаемыми уравнения движения, получим вместо (V.2) уравнение

$$F^{IV} - F'' + \frac{1}{Ha^2} (4F'' + 2F'F'') = 0. \quad (\text{V.4})$$

Разыскивая приближенное решение (V.4) в виде ряда по обратным степеням Ha^2 :

$F = \sum_{n=0}^{\infty} (Ha^{-2})^n F_n$, получим для последовательных приближений уравнения

$$F_0^{IV} - F_0'' = 0, \quad (\text{V.5})$$

$$F_1^{IV} - F_1'' = -4F_0'' - 2F_0'F_0'' \quad \text{и т. д.} \quad (\text{V.6})$$

с условиями

$$F_0'(\pm Ha \alpha / 2) = 0, \quad F_0''(0) = 0, \quad \int_{-Ha \alpha / 2}^{Ha \alpha / 2} F_0' d\eta = \pm Re Ha \quad (\text{V.7})$$

$$F_1'(\pm Ha \alpha / 2) = 0, \quad F_1''(0) = 0, \quad \int_{-Ha \alpha / 2}^{Ha \alpha / 2} F_1' d\eta = 0. \quad (\text{V.8})$$

Решением задачи (V.5), (V.7) является

$$F_0' = A (\text{ch } \eta - \text{ch } Ha \alpha / 2) = f_0' = A (\text{ch } Ha \varphi - \text{ch } Ha \alpha / 2), \quad (\text{V.9})$$

$$Ha F_0'' = f_0'' = A Ha \text{sh } Ha \varphi. \quad (\text{V.10})$$

Подстановка решения (V.9) в интегральное условие (V.7) дает

$$A = \frac{(\pm Re) Ha}{2 [\text{sh } Ha \alpha / 2 - (Ha \alpha / 2) \text{ch } Ha \alpha / 2]}.$$

Решение задачи (V.6), (V.8) в таком случае имеет вид:

$$F_1' = f_1' = C (\operatorname{ch} \operatorname{Ha} \varphi - \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \alpha / 2) + B [\operatorname{Ha} \varphi \operatorname{sh} \operatorname{Ha} \varphi - (\operatorname{Ha} \alpha / 2) \operatorname{sh} \operatorname{Ha} \alpha / 2] - \\ - B (\operatorname{ch} \operatorname{Ha} \varphi - \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \alpha / 2) - (A^2 / 6) (\operatorname{ch} 2 \operatorname{Ha} \varphi - \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \alpha), \quad (\text{V.11})$$

$$\operatorname{Ha} F_1'' = f_1'' = C \operatorname{Ha} \operatorname{sh} \operatorname{Ha} \varphi + B \operatorname{Ha}^2 \varphi \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \varphi - (A^2 / 3) \operatorname{Ha} \operatorname{sh} 2 \operatorname{Ha} \varphi, \quad (\text{V.12})$$

где

$$B = A^2 \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \alpha / 2 - 2 A, \\ C = 2 B + B (\operatorname{Ha} \alpha / 2)^2 \frac{\operatorname{sh} \operatorname{Ha} \alpha / 2}{\operatorname{sh} \operatorname{Ha} \alpha / 2 - (\operatorname{Ha} \alpha / 2) \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \alpha / 2} + \\ + \frac{A^2}{12} \frac{\operatorname{sh} \operatorname{Ha} \alpha - \operatorname{Ha} \alpha \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \alpha}{\operatorname{sh} \operatorname{Ha} \alpha / 2 - (\operatorname{Ha} \alpha / 2) \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \alpha / 2}.$$

Перейдем теперь в полученных решениях к предельному случаю $\operatorname{Ha} \rightarrow \infty$. С точностью до слагаемых порядка $(\alpha \operatorname{Ha})^{-1}$ постоянные решения A , B и C представятся как

$$A = -\frac{(\pm \operatorname{Re})}{\alpha \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \alpha / 2} \left(1 + \frac{2}{\alpha \operatorname{Ha}}\right), \quad B = \frac{(\pm \operatorname{Re})}{\alpha \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \alpha / 2} \left[\frac{(\pm \operatorname{Re})}{\alpha} \left(1 + \frac{4}{\alpha \operatorname{Ha}}\right) + 2 \left(1 + \frac{2}{\alpha \operatorname{Ha}}\right) \right],$$

$$C = B - B \operatorname{Ha} \alpha / 2 - B 2 / \operatorname{Ha} \alpha + (A^2 / 3) (1 + 1 / \operatorname{Ha} \alpha) \operatorname{ch} \operatorname{Ha} \alpha / 2,$$

а скорость на оси симметрии $\varphi = 0$ с точностью до слагаемых порядка Ha^{-3} – как

$$f'(0) = f_0'(0) + \frac{1}{\operatorname{Ha}^2} f_1'(0) = \frac{(\pm \operatorname{Re})}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha \operatorname{Ha}} + \frac{4}{\alpha^2 \operatorname{Ha}^2} + \frac{8}{\alpha^3 \operatorname{Ha}^3}\right) + \frac{5}{3} \frac{(\pm \operatorname{Re})^2}{\alpha^3 \operatorname{Ha}^3} + \frac{4(\pm \operatorname{Re})}{\alpha^2 \operatorname{Ha}^3}$$

или

$$f'(0) / (\pm \operatorname{Re}) = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha \operatorname{Ha}} + \frac{4}{\alpha^2 \operatorname{Ha}^2} + \frac{8}{\alpha^3 \operatorname{Ha}^3} + \frac{5}{3} \frac{(\pm \operatorname{Re})}{\alpha^2 \operatorname{Ha}^3} + \frac{4}{\alpha \operatorname{Ha}^3}\right). \quad (\text{V.13})$$

Если число Re имеет порядок $\alpha \operatorname{Ha}^2$, то слагаемое, связанное с числом Re в выражении (V.13), является поправкой на случай больших значений Re и Ha , если же $\alpha \operatorname{Ha}^2 \gg \operatorname{Re}$, то в ядре течения нормированная по числу Рейнольдса радиальная скорость равна $1/\alpha$ как в диффузорном, так и в конфузорном течениях, и лишь в пограничном слое толщиной порядка Ha^{-1} она убывает до нуля. Это согласуется с результатом, приведенным в [67], а также следует из расчета профилей скорости

$$f' = f_0' + \frac{1}{\operatorname{Ha}^2} f_1',$$

выражение для которых представляется по двум членам ряда с решениями (V.9), (V.11) для F'_0 и F'_1 и показанных на рис. V.2, V.3.

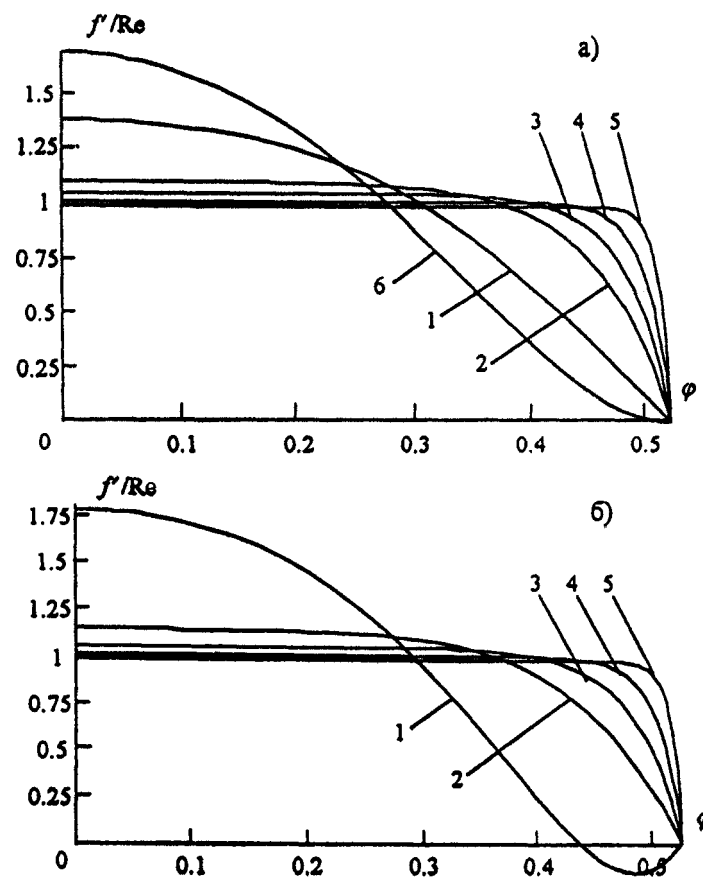


Рис.V.2. Расчетные профили радиальной скорости, нормированные по числу Re , в диффузорном течении при $Re = 100$ (а) и $Re = 300$ (б). Номера кривых соответствуют: $Na = 10$ (кривая 1), 20 (2), 30 (3), 50 (4), 100 (5), 7 (6).

Есть лишь некоторые различия в характере стремления нормированной скорости на оси симметрии к своему предельному значению $1/\alpha$ при $Na \rightarrow \infty$ в диффузорном и конфузорном течениях. Как следует из выражения (V.13), в диффузорном течении ($+Re$) к своему предельному значению осевая скорость стремится монотонно с ростом Na . В отличие от этого, в конфузорном течении ($-Re$) с ростом Na при фиксированных значениях α и Re осевая скорость достигает своего максимального значения при числе Na , определяемом решением квадратного уравнения $Na^2 + 4Na/\alpha + (12 - 5Re/2)/\alpha^2 + 6/\alpha = 0$ (например, если $\alpha = \pi/3$, $Re = 100$ имеем $[f'(0)/(-Re)]_{\max} = 1,0545$ при $Na = 13,1$) и лишь затем с повышением значения числа Na приближается к своему предельному значению (см. рис. V.3). И хотя при фиксированном значении числа Re максимальное отклонение скорости на оси от предельного значения сравнительно

незначительное, возможно с этим связана открывшаяся в настоящем анализе немонотонность профиля скорости в целом в конфузурном течении, особенно ярко проявляющаяся с увеличением числа Re при фиксированных значениях Ha (рис. V.3).

Трение находится по формуле

$$f'' = Ha F'' = Ha F_0'' + \frac{1}{Ha} F_1'' = A Ha \operatorname{sh} \eta + \frac{1}{Ha} [C \operatorname{sh} \eta + B \eta \operatorname{ch} \eta - (A^2 / 3) \operatorname{sh} 2\eta],$$

если воспользоваться решениями (V.10) и (V.12). В частности, на стенке $\varphi = -\alpha/2$ оно

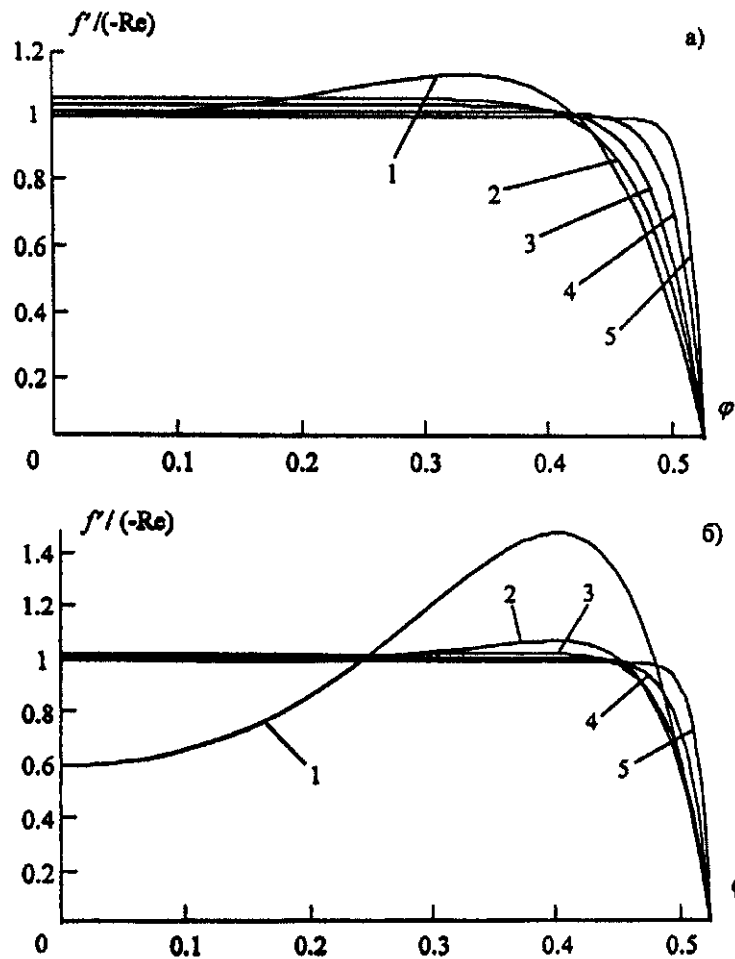


Рис. V.3. Расчетные профили радиальной скорости, нормированные по числу Re , в конфузурном течении при $Re = -100$ (а) и $Re = -300$ (б). Номера кривых соответствуют: $Ha = 10$ (кривая 1), 20 (2), 30 (3), 50 (4), 100 (5).

равно

$$f''(-\alpha/2) = -A Ha \operatorname{sh} Ha \alpha/2 + \frac{1}{Ha} [-C \operatorname{sh} Ha \alpha/2 - B (Ha \alpha/2) \operatorname{ch} Ha \alpha/2 + (A^2 / 3) \operatorname{sh} Ha \alpha], \quad (V.14)$$

а при больших Ha представляется в виде:

$$f''(-\alpha/2) = \frac{(\pm \text{Re}) \text{Ha}}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha \text{Ha}} \right) - \frac{(\pm \text{Re})^2}{\alpha^2 \text{Ha}} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\alpha \text{Ha}} \right)$$

или, при нормировке по $\pm \text{Re}$, как

$$f''(-\alpha/2) / (\pm \text{Re}) = \frac{\text{Ha}}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha \text{Ha}} \right) - \frac{(\pm \text{Re})}{\alpha^2 \text{Ha}} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{\alpha \text{Ha}} \right). \quad (\text{V.15})$$

Как видно из предельной формулы (V.15), уменьшение угла раствора α приводит при фиксированном числе Re и $\text{Ha} \gg |\text{Re}|/\alpha^2$ к росту трения как в диффузорном течении ($+\text{Re}$), так и в конфузорном течении ($-\text{Re}$). Судя по тому же выражению, при фиксированном числе Ha в диффузорном течении рост числа Re приводит к уменьшению трения, так что при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$ (см. ниже) возможно возникновение отрыва потока от стенки. В конфузорном же течении рост Re всегда сопровождается ростом трения на стенке.

Представляет интерес определить критическое число Рейнольдса в зависимости от α и Ha , при котором диффузорное течение находится в предотрывном состоянии (в конфузорном течении отрыва течения от твердых стенок, как известно, не происходит). Момент отрыва определяется по обращению в нуль трения на стенке. Полагая в (V.15) $f''(-\alpha/2) = 0$ и полагая $\text{Ha} \gg 1$, получаем для знака (+)

$$\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{3\alpha \text{Ha}^2 (2 + \alpha \text{Ha})}{3 + 2\alpha \text{Ha}} \approx \frac{3}{2} \alpha \text{Ha}^2. \quad (\text{V.16})$$

Этот результат принципиально отличается от полученного в [67] ($\text{Re}_{\text{кр}} = 6 \text{Ha}$),

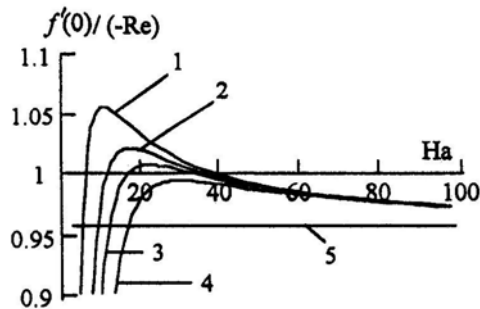


Рис.V.4. Характер изменения нормированной по числу Re скорости на оси симметрии в зависимости от значений чисел Re и Ha в конфузорном течении. Кривая 1 – $\text{Re} = -100$, 2 – $\text{Re} = -200$, 3 – $\text{Re} = -300$, 4 – $\text{Re} = -400$, 5 – асимптотическое значение скорости при больших Ha .

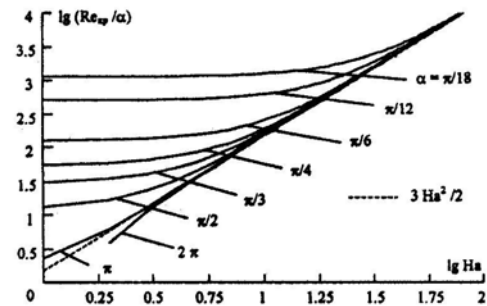


Рис.V.5. Зависимость критического значения числа Рейнольдса от числа Гартмана при различных значениях угла раствора диффузора в логарифмическом масштабе. Пунктиром показана эта зависимость при $\text{Ha} \gg 1$.

тем, что $Re_{кр}$ квадратично, а не линейно, зависит от числа Гартмана и, кроме того, $Re_{кр}$ определяется также углом раствора диффузора α . Более подробная зависимость $Re_{кр} / \alpha$ от Na , вычисленная по формуле (V.14), приведена на рис. V.5. Как видно, при больших Na кривые при всех значениях α выходят на асимптотику $Re_{кр} / \alpha \approx 3 Na^2 / 2$. Что касается умеренных и малых значений Na , то, несмотря на в целом верную тенденцию увеличения $Re_{кр}$ с уменьшением угла раствора диффузора α , этим данным можно доверять в меньшей степени, так как в самой постановке задачи предполагалось $Na \gg 1$.

Необходимо пояснить, что понимается под числом Na в данной задаче. Так как в постановке задачи имеется лишь азимутальное магнитное поле $B_\varphi = -l/r$, создаваемое линейным токопроводом, то постоянную l можно связать с электрическим током I в проводнике, расположенным на оси симметрии, применяя интегральную форму уравнения Максвелла

$$I = \frac{1}{\mu_0} \oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l}, \quad (V.17)$$

известную еще как закон полного тока. В данном случае его можно записать как

$$\frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\pi} B_\varphi r d\varphi = I, \text{ что дает } l = -\mu_0 I / 2\pi. \text{ Тогда } Na^2 = \frac{\sigma l^2}{\rho\nu} = \frac{\sigma \mu_0^2 I^2}{4\pi^2 \rho\nu}.$$

V.2. МГД течение с отсосом или вдувом на пластине в азимутальном магнитном поле в безындукционном приближении.

Такое течение, схема которого показана рис. V.6, характеризуется заданием гидродинамической функции тока в виде ((III.187))

$$\psi = Bf(\varphi) + C \ln r, \quad (V.18),$$

полем скорости ((III.188), $B = \pm Re\nu$, $C = (\pm \lambda)\nu$)

$$V_r = \pm Re f'(\varphi) / r, \quad V_\varphi = -(\pm \lambda) \nu / r, \quad (V.19),$$

магнитным полем

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \varphi} = 0, \quad B_\varphi = -\frac{\partial \psi_{20}}{\partial r} = -\frac{l}{r} \quad (V.20)$$

Рис. V.6. Схема течения на пластине с отсосом/вдувом в азимутальном магнитном поле.

и магнитной функцией тока

$$\psi_{20} = l \ln r, \quad (V.21),$$

а уравнением движения служит уравнение (III.172)

$$f^{IV} + 4f'' \pm 2 \operatorname{Re} f' f'' \pm \lambda f''' - \operatorname{Ha}^2 f'' = 0, \quad (\text{V.22})$$

где $\operatorname{Ha}^2 = \frac{\sigma l^2}{\rho \nu}$.

Рассматриваемая задача относится к тому же типу, что и предыдущая, когда функции тока подбираются на основании особенностей течения. В данном случае разделение переменных неприменимо.

Число Рейнольдса Re , фигурирующее в (V.19), определено выражениями, описанными в самом конце параграфа III.6.2, а знак определяет тип течения: (+) – для диффузорного (расходящегося) течения ($V_r > 0$), (–) – для конфузорного (сходящегося) течения ($V_r < 0$).

Будем рассматривать эту задачу при условиях: 1) имеется одна плоская стенка (пластина), на которой задана интенсивность отсоса ($+\lambda$) или вдува ($-\lambda$) жидкости, 2) предполагается, что при фиксированном значении числа Re – интенсивности источника ($\operatorname{Re} > 0$) или стока ($\operatorname{Re} < 0$) жидкости, расположенного в начале координат $r = 0$, число $\operatorname{Ha} \gg 1$, а саму ситуацию можно представить себе таким образом: в начале координат расположена вихревая нить, создающая, согласно [70], азимутальное вращение $V_\varphi = -(\pm\lambda)\nu/r$, так что на проницаемой твердой поверхности $\varphi = 0$, $0 \leq r = \infty$ имеет место отсос жидкости ($+\lambda$), если считать $\varphi \geq 0$, т.е. выше поверхности, и вдуву жидкости через ту же поверхность, если считать $\varphi \leq 0$, т.е. ниже этой поверхности.

Первое из этих условий привлечем для формулировки граничного условия вдали от поверхности пластины. Совмещая ось x с полярной осью $\varphi = 0$ и учитывая связь $\varphi = \operatorname{arctg} y/x$, приходим к конкретизации понятия “далеко от плоскости”. Оно означает, что при фиксированном x необходимо устремить y к ∞ . Тогда $\varphi \rightarrow \pi/2$, а аргументацией в пользу такого перехода может служить то обстоятельство, что в известной гидродинамической задаче Польгаузена [26] в качестве переменной привлечена комбинация $\eta = y/x$. Для функции f' в (V.19) в таком случае граничное условие на бесконечности ($y \rightarrow \infty$) будет формулироваться как $f'(\pi/2) = 1$ и, наряду с условием прилипания на пластине, совокупность граничных условий следующая:

$$f'(0) = 0, \quad f'(\pi/2) = 1, \quad f''(\pi/2) = 0, \quad (\text{V.23})$$

если интересоваться лишь радиальной скоростью f' .

Если в уравнении (V.22) произвести замену $f(\varphi) = F(\eta) / \text{Ha}$, $\varphi = \eta / \text{Ha}$ и почленно разделить на Ha^3 , то оно перейдет в

$$F'''' + \frac{1}{\text{Ha}^2} (4F'' \pm 2 \operatorname{Re} F' F'') \pm \frac{\lambda}{\text{Ha}} F''' - F'' = 0. \quad (\text{V.24})$$

Второе из упомянутых выше условий в таком случае предполагает возможность построения приближенного решения в виде ряда

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/\text{Ha})^n F_n(\eta). \quad (\text{V.25})$$

Подставляя ряд (V.25) в (V.24) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $1/\text{Ha}$, получаем для последовательных приближений уравнения

$$F_0'''' - F_0'' = 0, \quad (\text{V.26})$$

$$F_1'''' - F_1'' = -(\pm \lambda) F_0''', \quad (\text{V.27})$$

$$F_2'''' - F_2'' = -2(\pm \operatorname{Re}) F_0' F_0'' - 4F_0'' - (\pm \lambda) F_1''', \quad (\text{V.28})$$

и т. д.

Граничные условия для функций F_n в соответствии с (V.23) выберем следующим образом: для F_0

$$F_0'(0) = 0, \quad F_0'(\text{Ha} \pi / 2) = 1, \quad F_0''(\text{Ha} \pi / 2) = 0, \quad (\text{V.29})$$

для остальных функций F_n ($n \geq 1$) все условия типа (V.29) чисто нулевые.

Решением задачи (V.26), (V.29) является

$$F_0' = \frac{\operatorname{ch}(\eta - \text{Ha} \pi / 2) - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2}{1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2},$$

$$F_0'' = \frac{\operatorname{sh}(\eta - \text{Ha} \pi / 2)}{1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2} \quad (\text{V.30})$$

а уравнения (V.27) с нулевыми граничными условиями –

$$F_1' = \frac{(\pm \lambda)}{2} \frac{1}{(1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2)^2} \left\{ (\text{Ha} \pi / 2 - \operatorname{sh} \text{Ha} \pi / 2) \operatorname{ch}(\eta - \text{Ha} \pi / 2) - \right.$$

$$\left. - (1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2) [\eta \operatorname{ch}(\eta - \text{Ha} \pi / 2) - \operatorname{sh}(\eta - \text{Ha} \pi / 2)] - \right.$$

$$\left. - \text{Ha} \pi / 2 \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2 + \operatorname{sh} \text{Ha} \pi / 2 \right\},$$

$$F_1'' = \frac{(\pm \lambda)}{2} \frac{\operatorname{sh}(\eta - \text{Ha} \pi / 2)}{(1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2)^2} \left[- (1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2) \eta - \operatorname{sh} \text{Ha} \pi / 2 + \text{Ha} \pi / 2 \right]. \quad (\text{V.31})$$

Как следует из уравнения (V.27) и решения (V.31), первое приближение позволяет учесть лишь интенсивность отсоса (вдува) λ . Для учета же и числа Рейнольдса

потребуется привлечение следующего приближения, т.е. решение уравнения (V.28). Это решение весьма громоздко, но, тем не менее, его придется выписать:

$$F_2' = A \operatorname{sh} t + B \operatorname{cht} + C t \operatorname{sh} t + D t \operatorname{cht} + K t^2 \operatorname{cht} + M \operatorname{ch} 2t + P,$$

$$F_2'' = (B + C) \operatorname{sh} t + (A + D) \operatorname{cht} + D t \operatorname{sh} t + (C + 2K) t \operatorname{cht} + K t^2 \operatorname{sh} t + 2M \operatorname{sh} 2t. \quad (\text{V.32})$$

Здесь введена новая переменная $t = \eta - \text{Ha} \pi / 2$, а соотношения между постоянными и их выражения следующие:

$$D = -A = d / 2, \quad B = \frac{1}{1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2} \left[-D \left((\text{Ha} \pi / 2) \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2 - \operatorname{sh} \text{Ha} \pi / 2 \right) + \right. \\ \left. + C (\text{Ha} \pi / 2) \operatorname{sh} \text{Ha} \pi / 2 + K (\text{Ha} \pi / 2)^2 \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2 - M (1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi) \right], \quad C = b / 2 - 3c / 4,$$

$$K = c / 4, \quad M = a / 6, \quad P = -M - B, \quad a = -(\pm \operatorname{Re}) / (1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2)^2,$$

$$c = (\pm \lambda)^2 / 2 (1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2),$$

$$b = (\pm 2 \operatorname{Re} \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2) / (1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2)^2 - 4 / (1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2) + c,$$

$$d = \frac{(\pm \lambda)^2}{2} (\operatorname{sh} \text{Ha} \pi / 2 - (\text{Ha} \pi / 2) \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2) / (1 - \operatorname{ch} \text{Ha} \pi / 2)^2.$$

На рис. V.7, V.8 представлены результаты расчета профилей скорости для диффузорного и конфузорного течений при различных значениях параметра отсоса (вдува) λ и числа Гартмана по представлению

$$f'(\varphi) = F'(\eta) = F_0'(\eta) + \frac{1}{\text{Ha}} F_1'(\eta) + \frac{1}{\text{Ha}^2} F_2'(\eta)$$

с использованием решений (V.30) – (V.32).

Как видно, в целом рост числа Ha способствует уплощению профиля скорости в обоих типах течений (рис. V.7,б,г, V.7,б,г), поэтому остановимся на влиянии параметра отсоса или вдува, намеренно полагая (для более выпуклой формы представления этого влияния) значения параметра λ , сравнимыми со значением основного параметра течения – числа Рейнольдса Re (в гидродинамике при анализе влияния отсоса или вдува, как правило, принимается отношение $|\lambda| / \operatorname{Re} \ll 1$). В диффузорном течении при фиксированном a (рис. V.7,а) отсос жидкости с поверхности пластины способствует предотвращению отрыва потока от поверхности, но его рост указывает на тенденцию формирования обратного течения в удаленной от поверхности области (кривые 4, 5). При фиксированном λ рост значений числа Ha ведет к сглаживанию профиля скорости (рис. V.7,б). То же имеет место и в конфузорном течении (рис. V.8,а,б). Вдув жидкости способствует возникновению отрыва от поверхности в диффузорном течении (рис. V.7,в).

Что касается конфузорного течения, то отрыв от поверхности не возникает даже при сравнительно малых Na и больших значениях вдува, но с ростом $|\lambda|$ намечается, а затем и реализуется, зона обратного течения в области, удаленной от поверхности (рис. V.8,в). При фиксированном λ рост числа Na приводит к сглаживанию профиля радиальной скорости в обоих видах течений (рис. V.7,г, V.8,г).

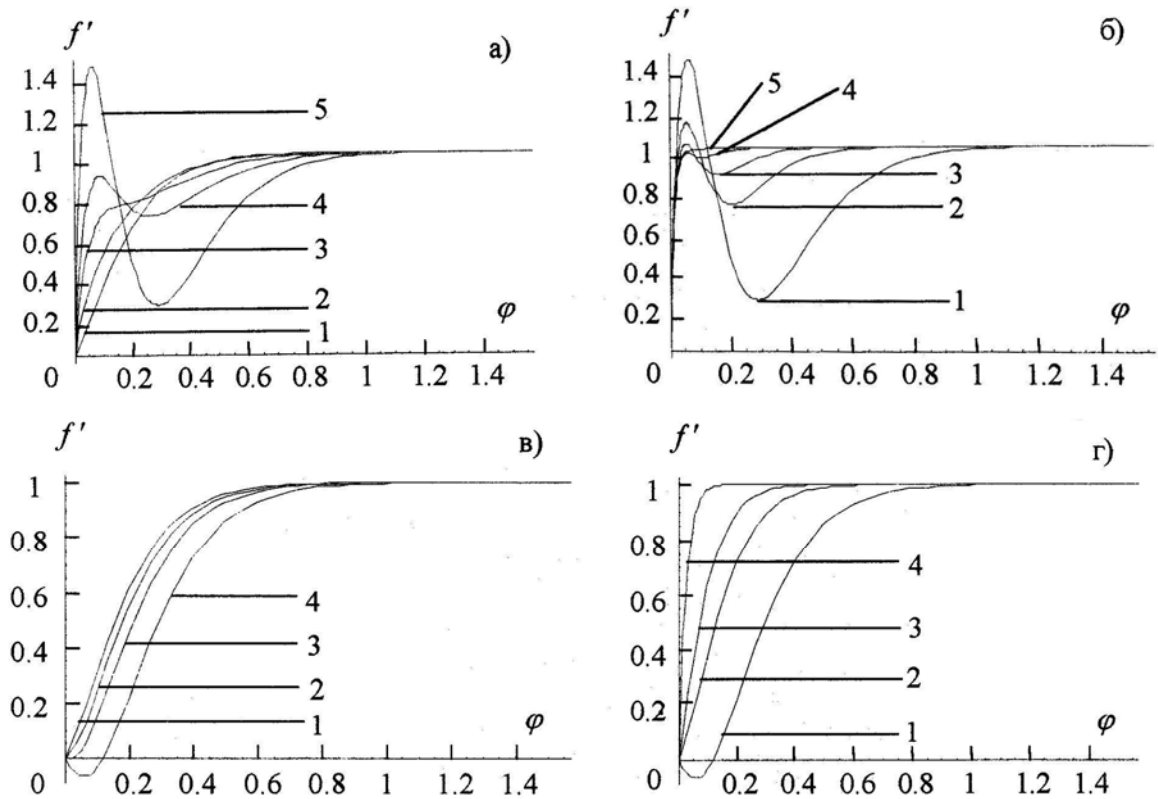


Рис. V.7. Распределение нормированной по числу Re радиальной скорости в азимутальном магнитном поле в диффузорном течении при отсосе жидкости с поверхности пластины (а, б) или вдуве через эту поверхность (в, г) и фиксированном числе $Re = 100$. Кривые на рисунках соответствуют: а) $Na = 10$, $\lambda = 1$ (кривая 1), $\lambda = 10$ (2), $\lambda = 20$ (3), $\lambda = 30$ (4), $\lambda = 50$ (5); б) $\lambda = 50$, $Na = 10$ (кривая 1), $Na = 15$ (2), $Na = 20$ (3), $Na = 30$ (4), $Na = 50$ (5); в) $Na = 10$, $\lambda = -1$ (кривая 1), $\lambda = -5$ (2), $\lambda = -10$ (3), $\lambda = -20$ (4); г) $\lambda = -20$, $Na = 10$ (кривая 1), $Na = 15$ (2), $Na = 20$ (3), $Na = 50$ (4).

Определенное представление о сказанном в отношении отрыва потока у твердой поверхности можно получить, если перейти к большим числам Гартмана ($Na \gg 1$) в выражениях для постоянных A , B , C и т.д.. Тогда получаем весьма простое выражение для трения на стенке:

$$f''(0) = Na \left(F_0''(0) + \frac{1}{Na} F_1''(0) + \frac{1}{Na^2} F_2''(0) \right) = Na \left[1 + \frac{1}{Na} \frac{(\pm\lambda)}{2} + \frac{1}{Na^2} \left(\frac{\lambda^2}{8} - \frac{2}{3} (\pm Re) - 2 \right) \right],$$

из которого следует, что при отсосе жидкости с поверхности пластины ($+\lambda$) трение на стенке растет, способствуя предотвращению отрыва пограничного слоя в диффузорном

течении (+Re). В этом же течении увеличение числа Re приводит к уменьшению трения на стенке, так что несложно установить, что при выполнении условия

$$\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}} = \frac{3}{2} \text{Ha}^2 + \frac{3}{4} \text{Ha} (\pm \lambda) + \frac{3}{16} \lambda^2 - 3$$

течение осуществляется с отрывом потока. Если отсос или вдув отсутствует ($\lambda = 0$), то при $\text{Ha} \gg 1$ эта формула отвечает формуле для $\text{Re}_{\text{кр}}$, полученной в предыдущем пункте

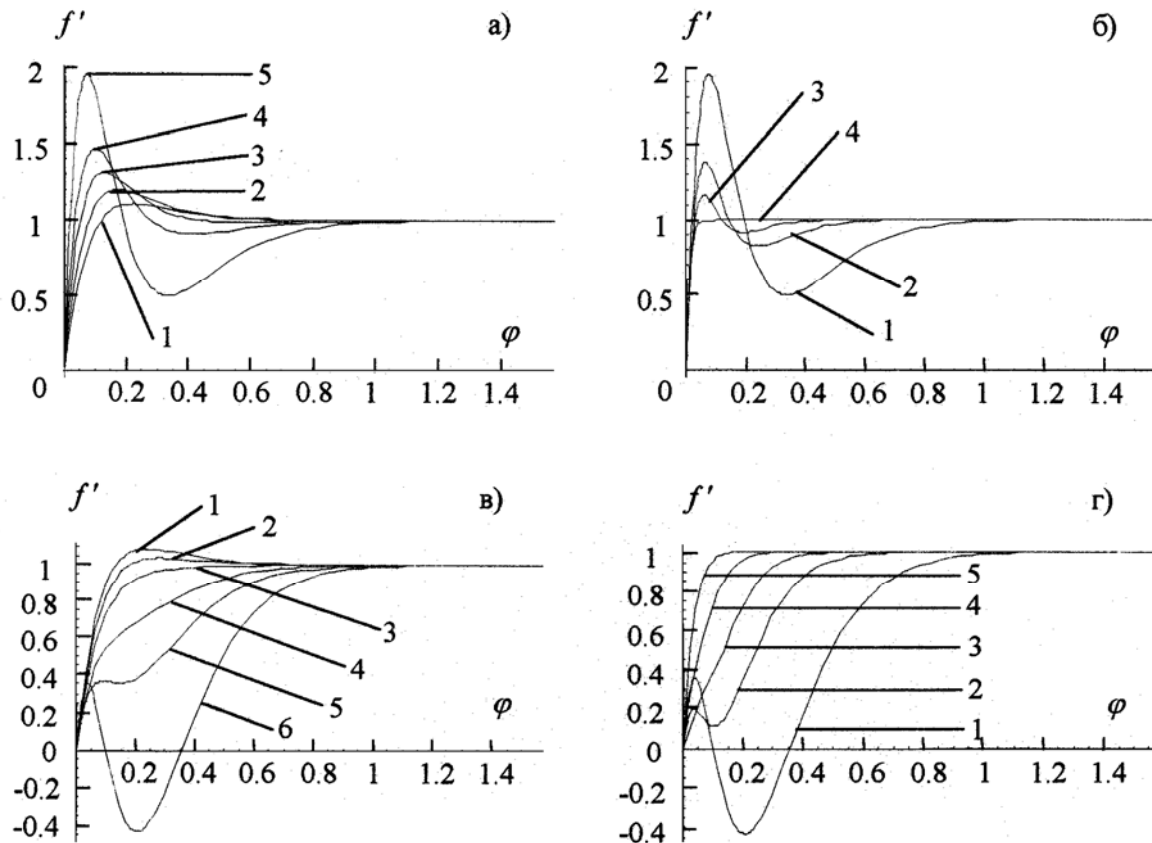


Рис. V.8. Распределение нормированной по числу Re радиальной скорости в азимутальном магнитном поле в конфузорном течении при отсосе жидкости с поверхности пластины (а,б) или вдуве через эту поверхность (в,г) и фиксированном числе $\text{Re} = -100$. Кривые на рисунках соответствуют: а) $\text{Ha} = 10$, $\lambda = 1$ (кривая 1), $\lambda = 10$ (2), $\lambda = 20$ (3), $\lambda = 30$ (4), $\lambda = 50$ (5); б) $\lambda = 50$, $\text{Ha} = 10$ (кривая 1), $\text{Ha} = 15$ (2), $\text{Ha} = 20$ (3), $\text{Ha} = 50$ (4); в) $\text{Ha} = 10$, $\lambda = -1$ (кривая 1), $\lambda = -5$ (2), $\lambda = -10$ (3), $\lambda = -20$ (4), $\lambda = -30$ (5), $\lambda = -50$ (6); г) $\lambda = -50$, $\text{Ha} = 10$ (кривая 1), $\text{Ha} = 15$ (2), $\text{Ha} = 20$ (3), $\text{Ha} = 30$ (4), $\text{Ha} = 50$ (5).

отличаясь лишь отсутствием множителя α при Ha^2 . Последнее не удивительно, так как в этой задаче ненулевым граничным условием служило второе условие (V.23), а в пункте V.1 – интегральное условие (V.3,г), которое при наличии двух твердых стенок и привело к появлению при больших Ha явной зависимости скорости на оси симметрии от угла α раствора диффузора ($f'(0) / \text{Re} = \pm 1 / \alpha$).

Критическое число $Re_{кр}$ является функцией двух параметров Ha и λ . В диффузорном течении при отсосе жидкости ($+\lambda$) $Re_{кр}$ монотонно растет с увеличением значений обоих параметров. При вдуве жидкости ($-\lambda$) и фиксированном значении параметра $|\lambda|$ имеется локальный экстремум (минимум) в зависимости $Re_{кр}(Ha)$ в точке $Ha = |\lambda|/4$ (при этом $Re_{кр} = 3\lambda^2/16$). Если же зафиксировать Ha , то такой экстремум в зависимости $Re_{кр}(\lambda)$ имеет место в точке $|\lambda| = 2Ha$ (при этом $Re_{кр} = 3Ha^2/4$).

Иллюстрация этого вывода приведена на рис. V.9. В области, располагающейся выше соответствующих кривых, $f''(0) < 0$, т.е., если для выбранного значения ($-\lambda$)

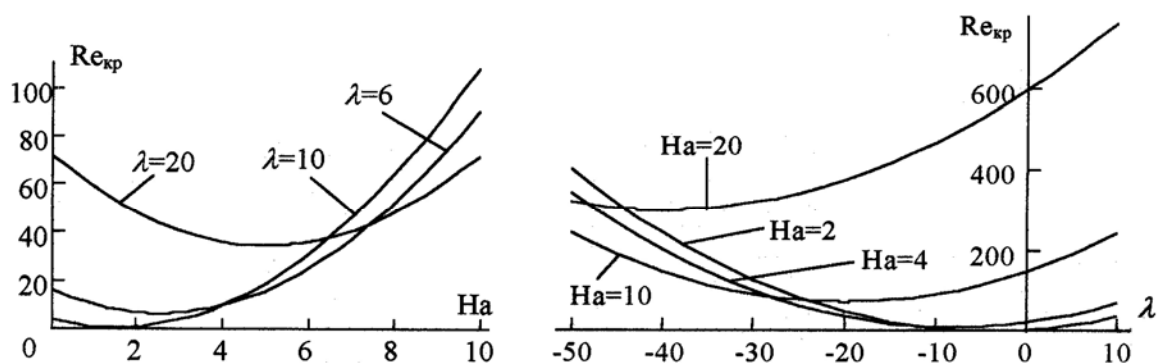


Рис. V.9. Особенности поведения зависимости $Re_{кр}(\lambda, Ha)$ в диффузорном течении. Значения λ в левой части рисунка отвечают $|\lambda|$, т.е. случаю вдува жидкости

число $Re > Re_{кр}$, то имеем дело с отрывным течением. Соответственно, область значений параметров Re и ($-\lambda$), которая расположена ниже этих кривых, относится к безотрывному течению ($f''(0) > 0$). При отсосе же жидкости ($+\lambda$) значение $Re_{кр}$ монотонно растет с ростом значений обоих параметров (Ha, Re). В конфузорном течении ($-Re$) никакое увеличение вдува ($-\lambda$) не в состоянии привести к предотрывной ситуации. Можно лишь отметить, что при фиксированных Ha и Re зависимость $f''(0)$ от интенсивности вдува в таком течении имеет минимум при значении $\lambda = 4Ha$. При этом $f''(0) = Ha^2 + 2Re/3$.

В заключение этого пункта обратим внимание на особенность рассмотренной задачи. Задание азимутальной скорости в виде $V_\varphi = -(\pm\lambda)v/r$, которую можно интерпретировать как создаваемую вихревой нитью, перпендикулярной плоскости течения и расположенной в начале координат (на передней кромке пластины), и азимутального магнитного поля $B_\varphi = -l_2/r$ означает, что между этими составляющими скорости и магнитного поля не происходит силового взаимодействия – все изменения в

поле скорости происходят за счет взаимодействия азимутального магнитного поля с радиальной составляющей скорости V_r .

V.3. МГД течение с отсосом или вдувом на пластине в радиальном магнитном поле.

В такой ситуации, показанной на рис. V.10, очевидно, что перестройка поля скорости может происходить главным образом за счет электромагнитной силы, связанной с азимутальной скоростью и радиальным полем. Но необходимо признать, что в

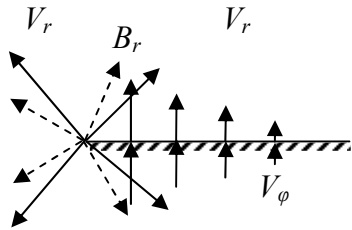


Рис. V.10. Схема течения на пластине с отсосом/вдувом в радиальном магнитном поле.

постановке (III.187), (III.188) азимутальную составляющую скорости приходится полагать изначально заданной и не зависящей от воздействия на нее радиального магнитного поля. Поэтому для обоснования последующих ниже выводов станет необходимым привлечь понятие ротора электромагнитной силы, обязанной взаимодействию поля скорости и магнитного поля. Перейдем теперь к формальным операциям.

Гидродинамическая функция тока, составляющие скорости и граничные условия остаются такими же, как и в предыдущей задаче, магнитная же функция тока и магнитное поле описываются выражениями (III.185), (III.186) ($C = 0$, $l = mD$):

$$\psi_{20} = m\varphi(C \ln r + D), \quad B_r = l/r, \quad B_\phi = 0. \quad (V.33)$$

Уравнение движения

$$f^{IV} + 4f'' \pm 2\text{Re} f' f'' \pm \lambda f''' + 2\text{Ha}^2 (\pm \lambda) / (\pm \text{Re}) = 0, \quad (V.34)$$

где $\text{Ha}^2 = \frac{\sigma l^2}{\rho \nu}$, после преобразований $f(\varphi) = F(\eta) / \text{Ha}$, $\varphi = \eta / \text{Ha}$ перейдет в

$$F^{IV} + \frac{1}{\text{Ha}^2} [4F'' + 2(\pm \text{Re}) F' F''] + \frac{1}{\text{Ha}} (\pm \lambda) F''' + \frac{1}{\text{Ha}} 2\alpha = 0, \quad (V.35)$$

где обозначено $\alpha = (\pm \lambda) / (\pm \text{Re})$. Его необходимо решать при граничных условиях

$$F'(0) = 0, \quad F'(\text{Ha} \pi / 2) = 1, \quad F''(\text{Ha} \pi / 2) = 0.$$

После подстановки ряда (V.25) получаем для последовательных членов ряда систему уравнений с соответствующими граничными условиями:

$$F_0^{IV} = 0,$$

$$F_0'(0) = 0, \quad F_0'(\text{Ha} \pi / 2) = 1, \quad F_0''(\text{Ha} \pi / 2) = 0; \quad (\text{V.36})$$

$$F_1^{IV} = -(\pm \lambda) F_0''' - 2\alpha,$$

$$F_1'(0) = 0, \quad F_1'(\text{Ha} \pi / 2) = 0, \quad F_1''(\text{Ha} \pi / 2) = 0; \quad (\text{V.37})$$

$$F_2^{IV} = -(\pm \lambda) F_1''' - 4F_0'' - 2(\pm) \text{Re} F_0' F_0'',$$

$$F_2'(0) = 0, \quad F_2'(\text{Ha} \pi / 2) = 0, \quad F_2''(\text{Ha} \pi / 2) = 0. \quad (\text{V.38})$$

Решением задачи (V.36) является

$$F_0' = -\eta^2 / N^2 + 2\eta / N, \quad F_0'' = -2\eta / N^2 + 2 / N, \quad (\text{V.39})$$

где обозначено $N = \text{Ha} \pi / 2$;

задачи (V.37) –

$$F_1' = D(\eta^3 / 6 - N\eta^2 / 3 + N^2\eta / 6), \quad F_1'' = D(\eta^2 / 2 - 2N\eta / 3 + N^2 / 6), \quad (\text{V.40})$$

здесь $D = 2(\pm \lambda) / N^2 - 2\alpha$;

задачи (V.38) –

$$\begin{aligned} F_2' = & \frac{8}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\eta^4}{N^2} - \frac{8}{2 \cdot 3} \frac{\eta^3}{N} - 2(\pm \text{Re}) \left(\frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{\eta^6}{N^4} - \frac{6}{3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{\eta^5}{N^3} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\eta^4}{N^2} \right) - \\ & - (\pm \lambda) D \left(\frac{\eta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{N\eta^3}{3 \cdot 3} \right) + A \frac{\eta^2}{2} + B\eta, \\ F_2'' = & \frac{8}{2 \cdot 3} \frac{\eta^3}{N^2} - \frac{8}{2} \frac{\eta^2}{N} - 2(\pm \text{Re}) \left(\frac{2}{4 \cdot 5} \frac{\eta^5}{N^4} - \frac{6}{3 \cdot 4} \frac{\eta^4}{N^3} + \frac{4}{2 \cdot 3} \frac{\eta^3}{N^2} \right) - \\ & - (\pm \lambda) D \left(\frac{\eta^3}{2 \cdot 3} - \frac{N\eta^2}{3} \right) + A\eta + B. \end{aligned} \quad (\text{V.41})$$

Постоянные интегрирования A и B при условиях (V.38) определяются как

$$A = \frac{10}{3} + \frac{11}{15}(\pm \text{Re}) - \frac{7}{36}(\pm \lambda) D N^2, \quad B = -\frac{2}{3} N - \frac{1}{5}(\pm \text{Re}) N + \frac{1}{36}(\pm \lambda) D N^3.$$

Профили скорости находятся по той же формуле, что и в предыдущем разделе:

$$f'(\varphi) = F'(\eta) = F_0'(\eta) + \frac{1}{\text{Ha}} F_1'(\eta) + \frac{1}{\text{Ha}^2} F_2'(\eta). \quad (\text{V.42})$$

Но прежде, чем перейти к анализу поля скорости в рассматриваемой задаче, попытаемся определить условия, при которых возможен отрыв потока от обтекаемой поверхности. Для трения на стенке $\varphi = 0$ ($\eta = 0$) получаем следующий результат:

$$f''(0) = \text{Ha} \left(F_0''(0) + \frac{1}{\text{Ha}} F_1''(0) + \frac{1}{\text{Ha}^2} F_2''(0) \right) =$$

$$= \frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{3} + \frac{(\pm\lambda)}{3} + \frac{\pi\lambda^2}{36} - \frac{\lambda^2\pi^3\text{Ha}^2}{114(\pm\text{Re})} - \frac{(\pm\lambda)\pi^2\text{Ha}^2}{12(\pm\text{Re})} - \frac{\pi(\pm\text{Re})}{10}. \quad (\text{V.43})$$

Анализ формулы (V.43), касающийся зависимости критического значения числа Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}}$ от параметров задачи (Ha, λ) не столь прост, как в случае азимутального магнитного поля. Полагая в (V.43) $f''(0) = 0$, получаем квадратное уравнение для определения критического значения Re :

$$\text{Re}_{\text{кр}}^2 - b \text{Re}_{\text{кр}} + c = 0,$$

где $b = (\lambda/3 + 4/\pi - \pi/3 + \pi\lambda^2/36)10/\pi$, $c = (\text{Ha}\pi/2)^2(\lambda \cdot 10/3\pi + 5\lambda^2/18)$. Записывая таким образом выражения для b и c , полагаем, что λ и $\text{Re}_{\text{кр}}$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Из решения квадратного уравнения $\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ следует, что если $c < 0$, то знак (+) в этом решении будет соответствовать диффузорному течению ($\text{Re}_{\text{кр}} > 0$), а знак (-) – конфузорному. Если же $c > 0$ и при этом $b^2 - 4c \geq 0$, то $\text{Re}_{\text{кр}}$ всегда положительно и этот случай может соответствовать лишь диффузорному течению при условии $b > 0$. Если же $b < 0$, то будем иметь дело лишь с конфузорным течением.

Проанализируем вначале конфузорное течение, в котором, как только что было выяснено, может существовать $\text{Re}_{\text{кр}}$ лишь при условии $c < 0$, т.е. если $\lambda^2 < -12\lambda/\pi$. Ясно, что при $\lambda > 0$ (отсос) это условие не выполняется, так что при отсосе жидкости с поверхности обтекаемой пластины отрыв потока не может произойти. Если же $0 > \lambda > -12/\pi$, то оказывается, что при вдуве жидкости существует такая область значений $(-\lambda)$ и $(-\text{Re})$, в которой отрывное конфузорное течение оказывается возможным. Как было показано в предыдущем пункте, в присутствии азимутального магнитного поля ни при каких значениях вдува отрыв потока не мог произойти. Расчеты зависимости $\text{Re}_{\text{кр}}(-\lambda)$ в конфузорном течении ($\text{Re}_{\text{кр}} < 0$) для некоторых значений Ha^2 приведены на рис. V.11,а. Эта зависимость при фиксированном значении числа Ha оказывается немонотонной и при приближении λ к границам $\lambda = 0$ и $\lambda = -12/\pi$ значения $\text{Re}_{\text{кр}} \rightarrow 0$. Область безотрывного течения располагается ниже соответствующих кривых из 1 – 4 и оси λ вне

интервала $0 > \lambda > -12/\pi$. В области выше этих кривых до оси λ течение осуществляется с отрывом потока.

Для диффузорного течения в этом же диапазоне изменения λ оказывается возможным формирование в радиальном магнитном поле области безотрывного течения, несмотря на наличие вдува (в отсутствие магнитного поля любой мало-мальски вдув скорее всего сразу приведет к отрыву потока). Представление об области безотрывного

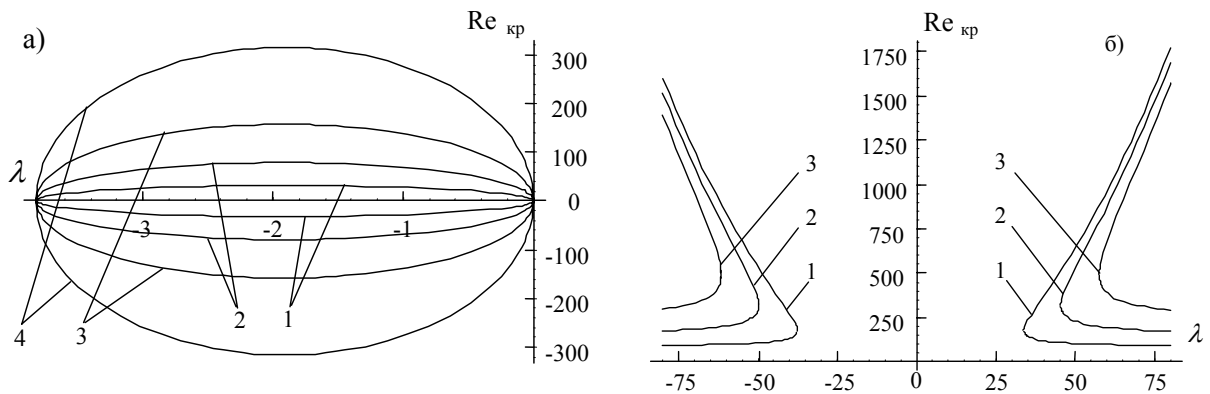


Рис. V.11. Зависимости $Re_{кр}$ от λ : а) в диапазоне $0 > \lambda > -12/\pi$ и б) в области больших значений $|\lambda|$. Верхняя часть рисунка а) относится к диффузорному течению, нижняя – к конфузорному; нумерация кривых соответствует числам Na : 20 (кривая 1), 50 (2), 100 (3), 200 (4). Рисунок б) относится к диффузорному течению, $Na = 6$ (кривая 1), 8 (2), 10 (3).

течения дает верхняя часть рис. V.11,а – она располагается ниже соответствующих кривых из 1 – 4. Здесь $f''(0) > 0$. В области выше этих кривых диффузорное течение становится отрывным ($f''(0) < 0$). При приближении к границам указанного интервала изменения λ $Re_{кр} \rightarrow 0,719$.

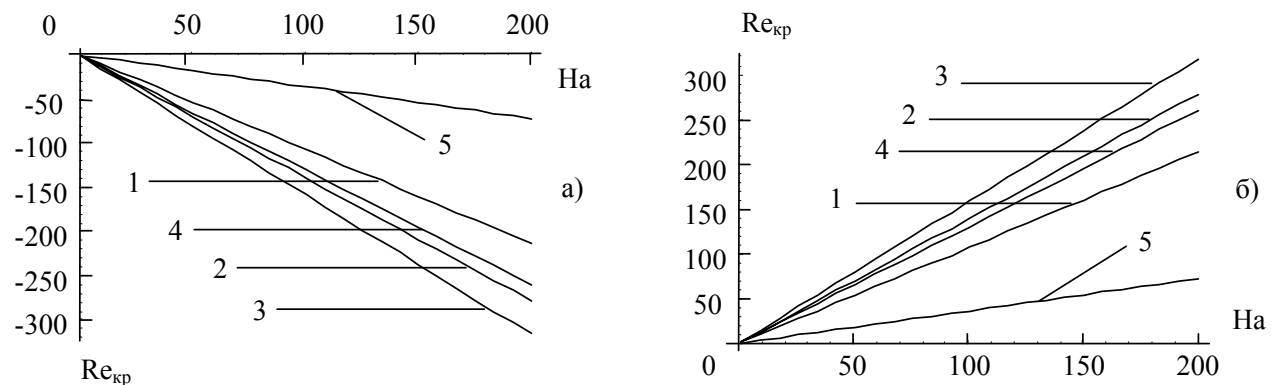


Рис. V.12. Зависимости $Re_{кр}$ от Na в диапазоне $0 > \lambda > -12/\pi$ для конфузорного а) и диффузорного б) течений. Значения λ : $-0,6$ (прямая 1), -1 (2), $-6/\pi$ (3), -3 (4), $-12/\pi + 0,05$ (5).

Зависимости $Re_{кр}$ от Na для того же интервала изменения λ представлены на рис. V.12 и практически линейны как для конфузорного (рис. V.12,а), так и для диффузорного течения (рис. V.12, б). Область безотрывного течения располагается ниже соответствующих прямых. Эти неожиданные результаты можно объяснить, если привлечь понятие ротора электромагнитной силы $rot \mathbf{F}_{эм}$. Если поле скорости задается составляющими $\mathbf{V} = (0, V_r, V_\varphi)$, а магнитное поле – $\mathbf{B} = (0, B_r, 0)$, то

$$rot \mathbf{F}_{эм} = rot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = rot [(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] = - \frac{\partial}{\partial r} (V_\varphi B_r^2) \mathbf{i}_z.$$

Во внешнем по отношению к пристеночному слою течении поле скорости задается выражениями (V.19), а магнитное поле – выражениями (V.33). Подставляя $V_r = Bf'/r$, $V_\varphi = -\lambda/r$, $B_r = DA/r$ в $rot \mathbf{F}_{эм}$, получаем

$$rot \mathbf{F}_{эм} = \frac{3D^2 A^2 (-\lambda)}{r^4} \mathbf{i}_z, \quad (V.44)$$

т.е. $rot \mathbf{F}_{эм}$ не зависит от радиальной скорости, что вполне естественно, так как радиальная скорость не взаимодействует с радиальным магнитным полем. Отсюда следует, что при $\lambda > 0$ (отсос) знак $rot \mathbf{F}_{эм}$ отрицательный, т.е. из внешнего потока жидкость закачивается в пристеночный слой таким образом, что в этом слое к основному течению добавляется течение, направленное вдоль поверхности к источнику движения. При вдуве же жидкости ($\lambda < 0$) $rot \mathbf{F}_{эм} > 0$ и добавочное движение направлено **от** источника движения. Отметим, что указанные последствия знака $rot \mathbf{F}_{эм}$ не зависят от того, рассматривается ли диффузорное или конфузорное течения, и не зависят от интенсивности этих течений (от значений $\pm Re$). Рисунок V.13 дает представление о взаимном расположении основного и

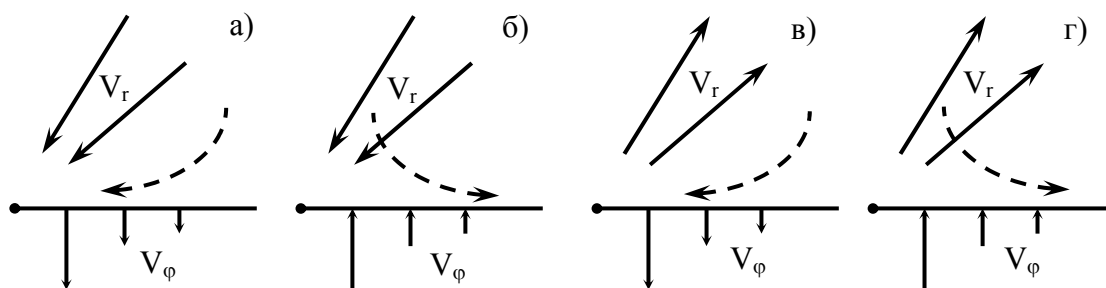


Рис. V.13. Схемы основных и инициированных электромагнитной силой течений. а), б) – конфузорное течение, в), г) – диффузорное течение; а), в) – течения с отсосом, б), г) – течения со вдувом жидкости. Сплошные линии относятся к основным течениям, штриховые – к дополнительным, создаваемым ротором электромагнитной силы.

дополнительного, инициированного ротором электромагнитной силы, течений при отсосе и вдуве и окажется полезным для объяснения приведенных выше результатов.

Из схем, показанных на рисунке V.13, становится понятным следующее.

1). В конфузорном течении при отсосе жидкости (рис. V.13,а) дополнительное течение совпадает с основным, а так как конфузорное течение и без отсоса является безотрывным, то оно тем более останется таковым при наличии отсоса.

2). В таком же основном течении при наличии вдува (рис. V.13,б) дополнительное течение противоположно у поверхности основному, и следует ожидать, что при определенных условиях возникнет зона отрывного течения. Можно предположить, что при слабом основном течении ($|Re| < |Re_{кр}|$) влияние дополнительного течения может стать существенным и привести к отрыву потока. С ростом интенсивности основного потока это влияние должно ослабевать, так что при $|Re| > |Re_{кр}|$ конфузорное течение вновь станет безотрывным (рис. V.11,а, V.12,а). Немонотонность зависимости $Re_{кр}(-\lambda)$ на рис. V.11,а связана, по-видимому, с тем, что при относительно малых значениях $|\lambda|$ влияние внешнего потока посредством $\text{rot } F_{эм}$ охватывает всю, в том числе и пристеночную, область течения. С ростом $|\lambda|$ при фиксированном Na в пристеночном слое все большую роль начинает играть вдув жидкости, а влияние внешнего потока относительно снижается, пока, наконец, движение жидкости в пристеночном слое не становится полностью зависящим от вдува. Этот момент определяется значением $|\lambda| = 12 / \pi$, при превышении которого конфузорное течение остается безотрывным. За исключением области, ограниченной осью λ и соответствующей кривой $Re_{кр}(-\lambda)$, конфузорное течение безотрывно.

Эти выводы следуют при рассмотрении диапазона $0 > \lambda > -12 / \pi$, т.е. если $c < 0$. Если же $c > 0$, то отрицательные значения $Re_{кр}$ могли бы быть, если $b < 0$. Можно показать, что отрицательные значения b располагаются в интервале $-2,204 < \lambda < -0,979$, т.е. в пределах уже исследованного интервала $0 > \lambda > -12 / \pi$, так что вывод об областях безотрывного и отрывного конфузорных течений остается в силе.

3). В диффузорном течении со вдувом ($\lambda < 0$) (рис. V.13,г) основное и дополнительное течения совпадают, поэтому можно ожидать, что в некотором диапазоне изменения параметров Re , $-\lambda$, Na может существовать область безотрывного диффузорного течения. Такая область положительных Re располагается ниже кривых 1 – 4 на рис. V.11,а, V.12,б. Если зафиксировать значение числа Na , то при превышении значения Re

критического числа $Re_{кр}$ диффузорное течение становится отрывным в диапазоне $0 > \lambda > -12 / \pi$. Немонотонность зависимости $Re_{кр}(-\lambda)$ объясняется теми же причинами, что и в пункте 2).

В таком же течении с отсосом (рис. V.13,в) дополнительное течение должно способствовать отрыву потока.

Но самым удивительным является то, что решение при достаточно больших $|\lambda|$ вновь предсказывает появление области безотрывного течения (левая часть рис. V.11,б), которая располагается слева от соответствующих кривых. Формально это связано с тем, что, как об этом было сказано в п. 2), при $|\lambda| > 0,979$ коэффициент b положителен и при $b^2 - 4c > 0$ значение $Re_{кр}$ становится положительным. По сути, это связано, по-видимому, с тем, что дополнительное течение, инициируемое ротором электромагнитной силы, который пропорционален как $D^2 A^2 \approx Na^2$, так и интенсивности вдува $|\lambda|$, препятствует отрыву. С другой стороны, вдув способствует отрыву потока от твердой поверхности. Сложная игра этих противоборствующих факторов определяет конечное состояние течения. Так, если зафиксировать значение Na , то, как следует из рис. V.13, значение $Re_{кр}$ растет с увеличением $|\lambda|$, т.е. налицо превалирующее действие фактора дополнительного течения над непосредственным влиянием вдува. То же имеет место и при фиксированном $|\lambda|$ и ростом Na .

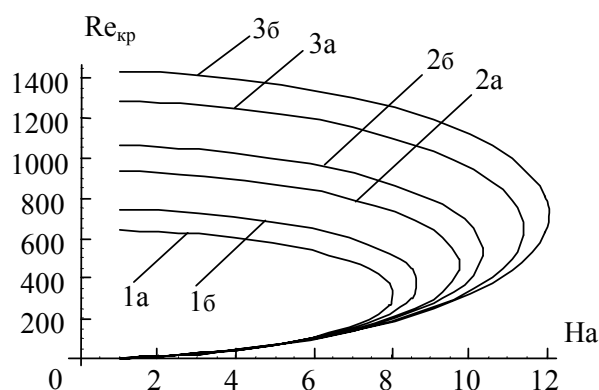


Рис. V.14. Зависимость $Re_{кр}$ от Na при вдуве (а) или отсосе (б) жидкости и значениях $|\lambda| = 50$ (кривые 1), 60 (2), 70 (3).

Вразумительного объяснения наличия зоны отрывного течения в области значений параметров $|\lambda|$ и Na , лежащей ниже соответствующих кривых на рис. V.11,б или рис. V.14, найти не удалось. Единственное, что можно отметить, что в этой области дискриминант $b^2 - 4c < 0$, и, возможно, для дальнейшего анализа необходимо привлечь к рассмотрению последующие члены ряда (V.25).

4). Описанные в п. 2) явления имеют место и в диффузорном течении с отсосом (рис. V.13,в) с той лишь поправкой, что теперь уже отсос способствует безотрывности течения, а дополнительное течение препятствует этому. Для иллюстрации этих явлений служат правая часть рис. V.11,б и рис. V.14.

Перейдем теперь к рассмотрению поля радиальной скорости. Вначале обратимся к конфузорному течению. Поле скорости зависит от трех параметров (Re , Na , λ), что существенно усложняет его анализ. Поэтому остановимся лишь на влиянии параметра λ при вдуве или отсосе жидкости на распределение радиальной скорости при фиксированных значениях параметров Re и Na . Наиболее интересные особенности в этом распределении ожидаются в диапазоне изменения значений параметра вдува $-12/\pi < \lambda < 0$, а значения параметров Na и Re положим такими: $Na = 100$, $Re = -125$. Эти значения выбраны по следующим соображениям. Судя по рис. V.12,а, точка пересечения таких значений Na и Re располагается на прямой 4 ($\lambda = -3$), т.е. такая тройка параметров соответствует предотрывному состоянию течения, в котором должно быть $f''(0) = 0$. Остальные точки пересечения вертикальной прямой $Na = 100$ с прямыми 1, 2, 3, 5 на рис. V.12,а отвечают значениям $Re_{кр}$ для каждого значения λ , соответствующего этим прямым. Так как выбранное значение $Re = -125$ превышает по

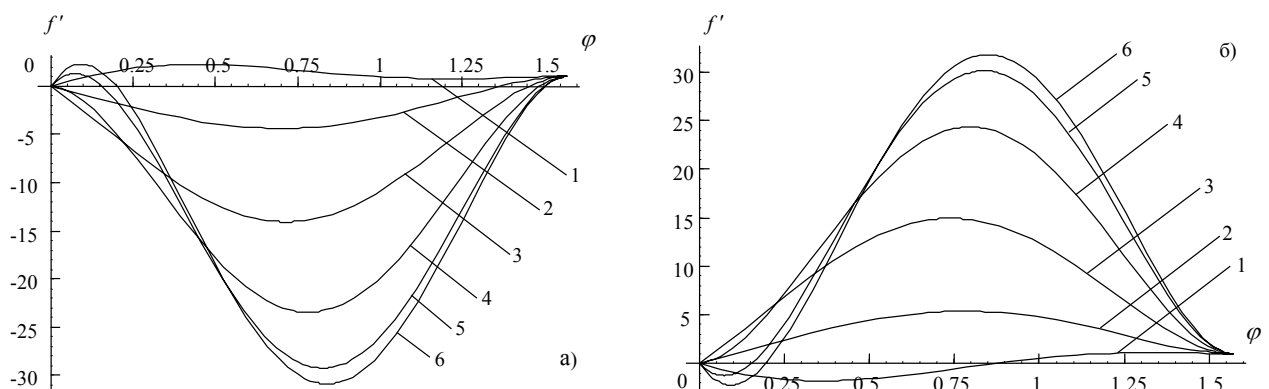


Рис. V.15. Профили радиальной скорости а) в конфузорном и б) диффузорном течениях при $|Re| = 125$ и $Na = 100$. Нумерация кривых соответствует значениям $\lambda = -0,5$ (кривые 1), $\lambda = -1$ (2), $\lambda = -6/\pi$ (3), $\lambda = -3$ (4), $\lambda = -12/\pi + 0,05$ (5), $\lambda = -4$ (6).

абсолютной величине таковые для прямых 5 и 1, то при $\lambda = -12/\pi + 0,05$ и $\lambda = -0,5$ профили скорости должны быть “безотрывными”. Для прямых же 3 и 2 $|Re_{кр}| > 125$ и профили скорости для $\lambda = -6/\pi$ и $\lambda = -1$ должны быть “отрывными”.

Расчеты f' , приведенные на рис. V.15, полностью подтверждают сказанное. Дополнительно на этом рисунке показан профиль скорости для $\lambda = -4$ (кривая 6). Это значение λ лежит вне диапазона, где может возникнуть отрывное течение, что также подтверждается поведением кривой 6.

То же можно сказать и о диффузорном течении в том же диапазоне изменения параметра λ с той лишь разницей, что теперь значения $Re_{кр}$, которые получаются при

пересечении вертикальной прямой $Na = 100$ с прямыми 5 и 1 на рис. V.12,б, оказываются меньше выбранного значения $Re = 125$. Поэтому при значениях λ , соответствующих прямым 5 и 1, осуществляется течение с отрывом потока, а соответствующих прямым 4, 2 и 3 течение является безотрывным (рис. V.15,б).

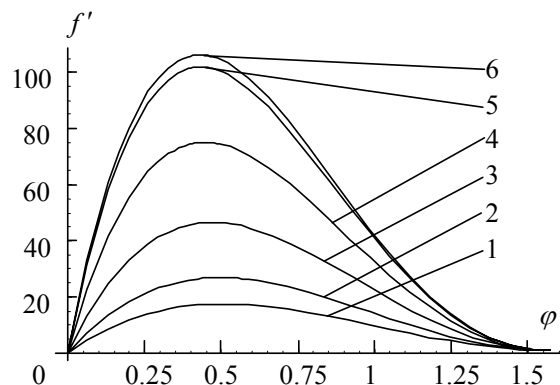


Рис. V.16. Распределение радиальной скорости при $Na = 100$, $Re = -125$ в область положительных значений λ : $\lambda = 0,5$ (кривая 1); 1 (2); $6/\pi$ (3); 3 (4); $12/\pi + 0,05$ (5); 4 (6).

Общей особенностью течения со вдувом (как конфузورных, так и диффузорных) в радиальном магнитном поле является значительное превышение радиальной скорости в большей части области течения над ее значением при $\varphi = \pi/2$ (на бесконечном удалении от обтекаемой поверхности), в отличие от случая азимутального магнитного поля (см. пункт V.2). Но самыми удивительными являются последствия влияния радиального магнитного поля на конфузорное течение. Действительно, истинные значения радиальной скорости следует получать согласно выражений (V.19), где $B = \pm Re \nu$. Для знака (-) (конфузор) тогда имеем $V_r = -\nu |Re| f'/r$, а так как в большей части области течения $f' < 0$ (для кривых 2 – 6 на рис. V.15,а), то в этой области $V_r > 0$, т.е. осуществляется движение жидкости против основного потока. Ничем иным, как действием $\text{rot } \mathbf{F}_{эм}$, вызывающим дополнительное движение жидкости против основного потока, этого объяснить нельзя.

В области положительных значений λ (отсос) конфузорное течение, как и следовало ожидать, всегда является безотрывным, но опять-таки значения радиальной скорости в пристеночной области значительно превышают ее значение на бесконечности $f'(\pi/2) = 1$ (рис. V.16).

Наконец, несколько слов о диффузорном течении при больших значениях $|\lambda|$, которым соответствуют зависимости $Re_{кр}(\pm\lambda)$, представленные на рис. V.12,б. Для фиксированного значения числа Na тенденция в поведении поля радиальной скорости такова: пристеночная область течения при относительно малых Re (рис. V.17,а) охвачена потоком с направлением, противоположным основному, причем с усилением отсоса ($\lambda > 0$) интенсивность обратного течения возрастает. При больших значениях Re усиление отсоса приводит к прямо противоположному эффекту (рис. V.17,б), так что возможно

формирование даже безотрывного течения (кривая 3 этого рисунка). Те же особенности в поле радиальной скорости имеют место и при вдуве ($\lambda < 0$) жидкости (рис. V.17, в, г).

Значения числа Рейнольдса 125 и 500 выбраны по следующим соображениям. Как видно из рисунков V.12,б и V.14, при $Na = 10$ значение $Re = 125$ соответствует отрывным течениям при любых значениях $|\lambda|$, а при $Re = 500$ течение может быть как отрывным, так и безотрывным в зависимости от величины $|\lambda|$. Предотрывное состояние течения определяется значениями $\lambda \approx 60$ и $\lambda \approx -65$.

Насколько все описанное соответствует действительности, может ответить эксперимент, постановка которого представляется весьма непростой.

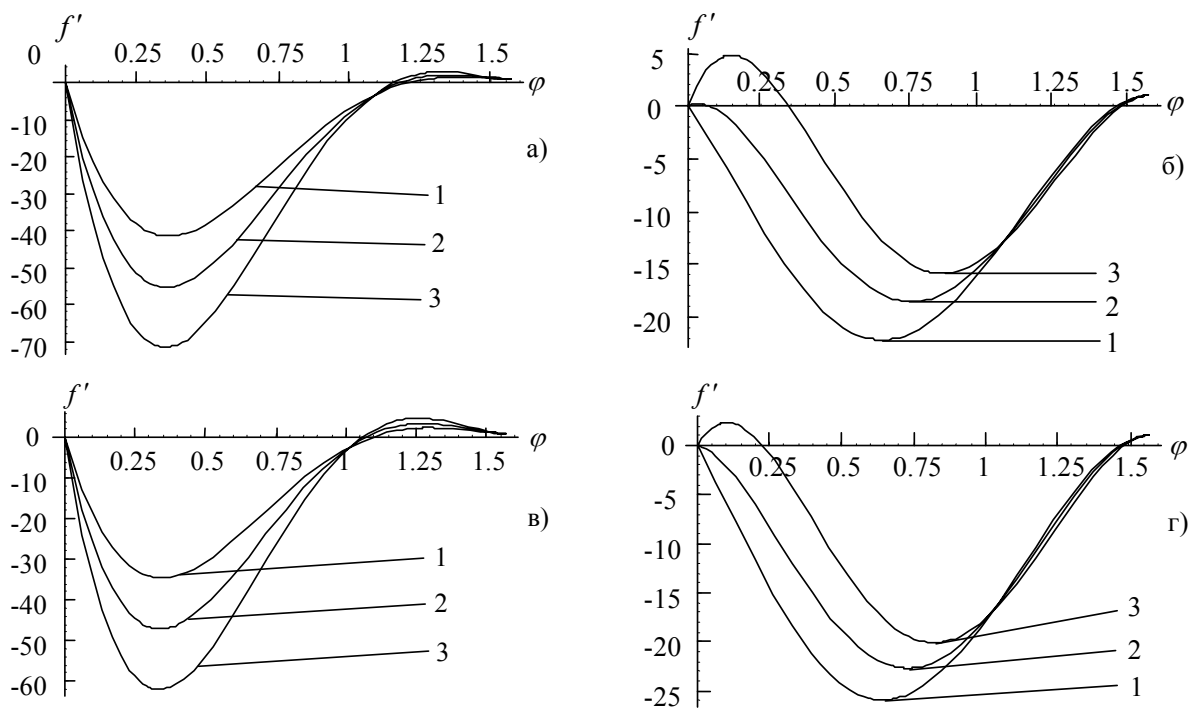
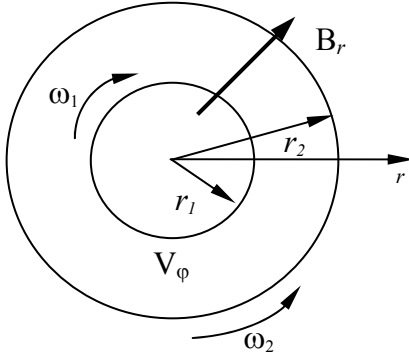


Рис. V.17. Распределение радиальной скорости в диффузорном течении при $Na = 10$ в области больших значений $|\lambda|$ и $Re = 125$ (а, в), $Re = 500$ (б, г). Рисунки а) и б) соответствуют положительным значениям λ ; в) и г) – отрицательным λ . Нумерация кривых соответствует значениям $|\lambda| = 50$ (кривые 1), 60 (2), 70 (3).

V.4. Кольцевой МГД аналог течения Куэтта в безындукционном приближении.

Рассмотрим кольцевой МГД-аналог течения Куэтта, схема которого показана на рис. V.18. В гидродинамическом плане это означает, что гидродинамическая функция тока выбирается в виде (I.31,а)

$$\psi = kR(\bar{r}), \quad (V.45)$$



где $\bar{r} = r/r_2$ (r_2 определено ниже), $k = \text{const}$, что соответствует заданию поля скорости:

$$V_r = 0, V_\phi = -kR'/r_2. \quad (V.46)$$

Значение $C = 0$ означает, в соответствии с (III.185), выбор магнитной функции тока в виде

$$\psi_{20} = (A\varphi + B)D, \quad (V.47)$$

т.е. задание внешнего магнитного поля в виде:

$$B_r = AD/r_2 \bar{r}, \quad B_\phi = 0. \quad (V.48)$$

Рис. V.18. Схема кольцевого МГД течения Куэтта.

Из вида гидродинамической функции тока следует, что границами области течения могут служить лишь окружности $\bar{r} = \text{const}$, на которых ψ принимает постоянные значения, а магнитные силовые линии $\psi_{20} = \text{const}$ представляют собою лучи $\varphi = \text{const}$.

Таким образом, постановка задачи соответствует тому, что рассматривается течение между двумя соосными цилиндрическими стенками радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$), в общем случае вращающимися с различными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 в произвольных направлениях, в радиальном магнитном поле (рис. V.18).

Уравнение движения следует из (III.182) (при выбранной гидродинамической функции тока (V.45) необходимо принять $a = 0$ (см. пункт I.2, пояснения к формулам (I.29) – (I.31))):

$$E^2(E^2 R) = \text{Ha}^2 \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{R'}{\bar{r}} \right)', \quad (V.49)$$

где $\text{Ha}^2 = \frac{\sigma}{\rho\nu} A^2 D^2 = \frac{\sigma B_0^2 r_2^2}{\rho\nu}$, так как комбинация AD/r_2 имеет смысл характерного значения магнитного поля B_0 .

Граничными условиями служат: $V_\varphi(r_1) = \omega_1 r_1 = \omega_1 r_2 \bar{r}_1 = -\frac{k}{r_2} R'(\bar{r}_1)$ и $V_\varphi(r_2) = \omega_2 r_2 = -\frac{k}{r_2} R'(1)$. Если положить $-\frac{k}{r_2} = \omega_1 r_2$, т. е. $k = -\omega_1 r_2^2$, то эти условия переходят в $R'(\bar{r}_1) = \bar{r}_1$, $R'(1) = m$, где $m = \omega_2 / \omega_1$. Кроме того, необходимо привлечь интегральное условие сохранения расхода в поперечных сечениях кольца $\varphi = \text{const}$:

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} V_\varphi dr = -\frac{k}{r_2} \int_{\bar{r}_1}^1 R' d\bar{r} = \omega_1 r_2^2 \int_{\bar{r}_1}^1 R' d\bar{r}. \quad (\text{V.50})$$

Если ввести среднерасходную скорость $V_{\varphi \text{ ср}} = (\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2) / 2$, то $Q = (\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2) (r_2 - r_1) / 2$ и интегральное условие записывается как $R(1) - R(\bar{r}_1) = (\bar{r}_1 + m)(1 - \bar{r}_1) / 2$.

Таким образом, уравнение (V.49) должно быть решено при условиях:

$$R'(\bar{r}_1) = \bar{r}_1, \quad R'(1) = m, \quad R(1) - R(\bar{r}_1) = (\bar{r}_1 + m)(1 - \bar{r}_1) / 2. \quad (\text{V.51})$$

В дальнейшем черточки над безразмерными величинами отпускаем.

Так как оператором E^2 служит $E^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$, то уравнение (V.49) можно один раз проинтегрировать:

$$r \frac{\partial E^2 R}{\partial r} = \text{Ha}^2 \frac{R'}{r} + A$$

или

$$r^2 R''' + r R'' - (1 + \text{Ha}^2) R' = Ar.$$

В свою очередь, последнее уравнение допускает понижение порядка $R' = F$, так что

$$r^2 F'' + r F' - (1 + \text{Ha}^2) F = Ar. \quad (\text{V.52})$$

Для сведения уравнения (V.52) к уравнению Эйлера необходимо в нем избавиться от правой части с помощью какого-либо частного решения. И здесь оказывается принципиальным, полагается ли $\text{Ha} = 0$ или $\text{Ha} \neq 0$.

Если $\text{Ha} = 0$, то одним из частных решений является $F_1 = Ar \ln r / 2$ и заменой $F = F_1 + \Phi$ уравнение (V.52) сводится к уравнению Эйлера $r^2 \Phi'' + r \Phi' - \Phi = 0$ с решением $\Phi = Br + C / r$, так что общим решением является

$$F = R' = Ar \ln r / 2 + Br + C / r, \\ R = \frac{A}{8} (2r^2 \ln r - r^2) + \frac{Br^2}{2} + C \ln r + D. \quad (\text{V.53})$$

Если $Ha \neq 0$, то таким частным решением оказывается $F_1 = -\frac{A}{Ha^2}r$ и заменой

$F_1 = -\frac{A}{Ha^2}r + \Phi$ уравнение (V.52) сводится к уравнению Эйлера следующего вида:

$r^2\Phi'' + r\Phi' - (1 + Ha^2)\Phi = 0$ с общим решением $\Phi = Br^{\sqrt{1+Ha^2}} + Cr^{-\sqrt{1+Ha^2}}$, так что окончательно имеем:

$$R' = -\frac{A}{Ha^2}r + Br^{\sqrt{1+Ha^2}} + Cr^{-\sqrt{1+Ha^2}},$$

$$R = -\frac{A}{2Ha^2}r^2 + \frac{B}{1+\sqrt{1+Ha^2}}r^{1+\sqrt{1+Ha^2}} + \frac{C}{1-\sqrt{1+Ha^2}}r^{1-\sqrt{1+Ha^2}} + D. \quad (V.54)$$

Условия (V.51) дают для постоянных интегрирования при $Ha = 0$:

$$B = \frac{1}{1-r_1^2}(m - r_1^2 + \frac{A}{2}r_1^2 \ln r_1), \quad C = \frac{r_1^2}{1-r_1^2}(1 - m - \frac{A}{2} \ln r_1), \quad A = \frac{4(1-m)r_1}{2r_1 \ln r_1 - (1-r_1^2)} \quad (V.55)$$

Те же условия в случае $Ha \neq 0$ приводят к следующим выражениям постоянных в решении (V.54):

$$\frac{A}{Ha^2} = \frac{1}{1-r_1^{N-1}}[mr_1^{N-1} - 1 + C(r_1^{-N-1} - r_1^{N-1})], \quad B = \frac{1}{1-r_1^{N-1}}[m - 1 - C(1 - r_1^{-N-1})],$$

$$C \left[\frac{1-r_1^{1-N}}{1-N} - \frac{(1-r_1^2)(r_1^{-N-1} - r_1^{N-1})}{2(1-r_1^{N-1})} - \frac{(1-r_1^{N+1})(1-r_1^{-N-1})}{(1+N)(1-r_1^{N-1})} \right] =$$

$$= \frac{(1-r_1^2)(mr_1^{N-1} - 1)}{2(1-r_1^{N-1})} - \frac{(m-1)(1-r_1^{N+1})}{(1+N)(1-r_1^{N-1})} + \frac{1}{2}(r_1 + m)(1-r_1),$$

где обозначено $N = \sqrt{1 + Ha^2}$.

Профили скорости, построенные по формуле (V.54), показаны на рис. V.19. При малых числах Гартмана распределение V_φ по радиусу практически линейно, а с ростом

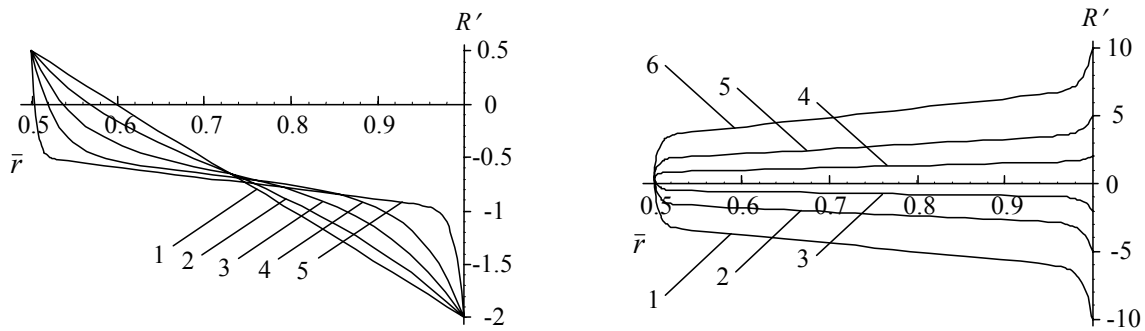


Рис. V.19. Распределение азимутальной скорости в кольцевом МГД течении Куэтта при $r_1 = 0,5$: а) при $m = -2$ и $Ha = 1$ (кривая 1), 5 (2), 10 (3), 20 (4), 100 (5); б) при $Ha = 100$ и $m = -10$ (кривая 1), -5 (2), -2 (3), 2 (4), 5 (5), 10 (6).

На принимает S – образный вид (рис. V.19,а), типичный для плоского МГД течения Куэтта [46], для любых значений отношения угловых скоростей $m = \omega_2 / \omega_1$ (рис. V.19,б). Лишь при $m = 1$ радиальное магнитное поле не оказывает никакого влияния на квазитвердотельное вращение жидкости.

Профили скорости в этой задаче явно показывают образование узких пограничных слоев вблизи вращающихся стенок. Причем никаких условий на уравнения не накладывалось, то есть решались точные уравнения. Этот пример показывает, что решения типа пограничного слоя могут быть получены из решений точных уравнений устремлением параметров задачи к неким критическим величинам. В данном случае, к образованию пограничных слоев приводит как устремление к большим значениям числа Гартмана (усиление магнитного поля), так и скорости вращения цилиндров.

Для трения на стенках $\tau_w = \mu \left. \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \right|_{r_1, r_2} = -\frac{\mu k}{r_2^2} R'' = \mu \omega_1 R''$ можно получить

следующие точные формулы:

при $Ha = 0$

$$R''(r_1) = \frac{r_1^4 - 2r_1^3 + 2r_1^2 + 2r_1 + 2m(r_1^3 - r_1^2 - 2r_1 - 1) - 2r_1(r_1^2 - 1)\ln r_1 + 1}{(r_1^2 - 1)(r_1^2 - 2r_1 \ln r_1 + 1)},$$

$$R''(1) = \frac{2r_1(r_1^3 - r_1^2 + r_1 + 1) - m(r_1^4 - 2r_1^3 + 2r_1^2 + 2r_1 + 1) - 2mr_1(r_1^2 - 1)\ln r_1}{(r_1^2 - 1)(r_1^2 - 2r_1 \ln r_1 + 1)};$$

при $Ha \neq 0$

$$R''(r_1) = \frac{(N-1)r_1^{N+1} + (N+1)r_1^N - (N+1)r_1 - Ha^2(m-1)(r_1^N + 1) - N + 1}{(N-1)r_1^{N+1} + (N+1)r_1^N - (N+1)r_1 - N + 1},$$

$$R''(1) = \frac{Ha^2 r_1(r_1^N + 1) + m((1-N)N r_1^{N+1} + (N+1)r_1^N - (1+N)N r_1 - N + 1)}{(N-1)r_1^{N+1} + (N+1)r_1^N - (N+1)r_1 - N + 1}.$$

При больших Ha с учетом $r_1 < 1$ последние две формулы упрощаются:

$$R''(r_1) = 1 + \frac{(m-1)Ha}{1+r_1}, \quad R''(1) = m + \frac{(m-1)r_1 Ha}{1+r_1},$$

вторые слагаемые в которых определяют вклад магнитного поля в трение на стенках. Как видно, в кольцевом аналоге течения Куэтта трение на стенках оказывается пропорциональным при этом условии первой степени числа Ha , как и в плоском аналоге этого течения [46].

V.5. Кольцевое МГД течение между вращающимися цилиндрами с отсосом/вдувом в безындукционном приближении.

Рассмотренную в пункте V.4 задачу можно обобщить на случай, когда через цилиндрические поверхности осуществляется отсос/вдув той же жидкости, которая находится между вращающимися цилиндрическими поверхностями. В этой ситуации имеет смысл привлекать не только внешнее радиальное магнитное поле $B_r = A / r$, как в V.4, но и азимутальное магнитное поле $B_\varphi = B / r$, которое можно создать либо линейным токопроводом, расположенным на оси симметрии, либо электрическим током, равномерно распределенным по внутреннему цилиндру и направленным вдоль оси z . Таким магнитным полям, отвечает магнитная функция тока

$$\psi_{20} = A\varphi + B \ln r. \quad (V.56)$$

Составляющие поля скорости в предположении равномерного распределения отсоса/вдува на цилиндрических поверхностях и независимости этих составляющих от координаты φ должны определяться более общим, чем в V.4, видом гидродинамической функции тока:

$$\psi = kR(\bar{r}) + C\varphi. \quad (V.57)$$

Тогда

$$V_r = \frac{C}{r_2} \frac{1}{\bar{r}}, \quad V_\varphi = -\frac{k}{r_2} R'(\bar{r}), \quad (V.58)$$

где $\bar{r} = r / r_2$ (обезразмеривание провели по радиусу внешнего цилиндра).

Схема такого течения показана на рис. V.20.

Если дополнительно положить $C = (\pm \lambda) \nu$, где под λ будем понимать параметр вдува (знак (+)) или отсоса (знак (-)) через внутренний цилиндр, $k = \nu$, $A = r_2 B_0$, $B = r_2 B_1$, где B_0 и B_1 – характерные значения

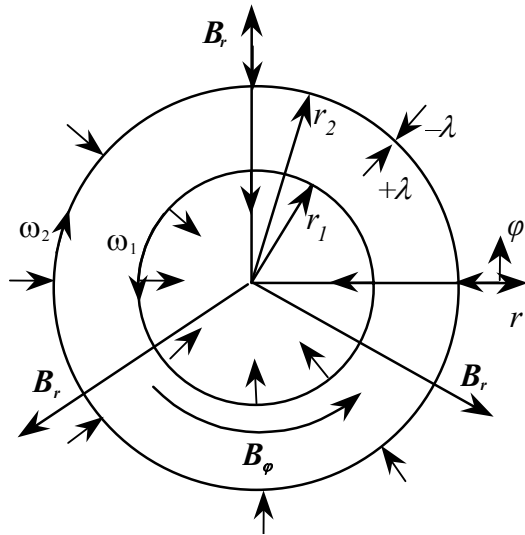


Рис.V.20. Схема кольцевого МГД течения с отсосом / вдувом.

радиального и азимутального магнитных полей соответственно, то уравнение движения (III.169) примет вид (черта над безразмерными величинами опущена):

$$r^4 R^{IV} + 2r^3 R''' - r^2 R'' + r R' - (\pm \lambda) (2r^3 R''' + r^2 R'' - r R') - 2(\pm \lambda) (\pm \overline{\text{Ha}}^2) + \text{Ha}^2 (r^2 R'' - r R') = 0. \quad (\text{V.59})$$

Здесь $\text{Ha}^2 = \sigma B_0^2 r_2^2 / \rho \nu$ – число Гартмана, вычисляемое по характерному значению B_0 радиального магнитного поля, а величина $\overline{\text{Ha}}^2 = \sigma B_0 B_1 r_2^2 / \rho \nu$ – число Гартмана, вычисляемое по характерным значениям радиального (B_0) и азимутального (B_1) магнитных полей. Выбор знака перед $\overline{\text{Ha}}^2$ в уравнении (V.59) диктуется направлением электромагнитной силы (точнее, ее ротора), которое, естественно, зависит от взаимной ориентации составляющих магнитного поля, в то время как знак перед Ha^2 вполне определен ввиду того, что ориентация радиального магнитного поля сама по себе не играет никакой роли из-за квадратичного представления параметра Ha в уравнении движения (V.59).

Граничные условия для рассматриваемой задачи следующие:

$$V_\varphi|_{r=r_1} = r_1 \omega_1, \quad V_\varphi|_{r=r_2} = r_2 \omega_2; \quad V_r|_{r=r_1} = (\pm \lambda) \frac{V}{r_1}, \quad V_r|_{r=r_2} = (\pm \lambda) \frac{V}{r_2},$$

где λ – величина, характеризующая интенсивность отсоса/вдува. Если обратиться к гидродинамической функции тока, то эти граничные условия при представлении поля скорости в виде (V.58) принимают вид:

$$R'(\bar{r}_1) = -\frac{r_2^2 \omega_1}{\nu} \bar{r}_1 = -\text{Re}_1 \bar{r}_1, \quad R'(1) = -\frac{r_2^2 \omega_2}{\nu} = -\text{Re}_2. \quad (\text{V.60})$$

Здесь Re_1 и Re_2 – числа Рейнольдса, вычисляемые по угловым скоростям внутреннего и внешнего цилиндров соответственно причем, эти числа могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Положительное значение какого-либо числа Рейнольдса отвечает тому, что соответствующий цилиндр вращается против часовой стрелки, отрицательное – по часовой стрелке. Знаки (+) или (–) в этих условиях отвечают за направление вращения цилиндров: знак (–) – соответствующий цилиндр вращается по часовой стрелке, знак (+) – цилиндр вращается против часовой стрелки.

Пока для уравнения четвертого порядка (V.59) мы располагаем двумя граничными условиями (V.60). Но так как для определения поля скорости необходимо, согласно (V.58), найти решение для функции $R'(r)$, то достаточно привлечь лишь **одно** дополнительное условие. Таким условием может служить вполне оправданное условие сохранения секундного расхода жидкости на единицу длины кольца вдоль оси z в сечениях $\varphi = \text{const}$, так как он не зависит от отсоса/вдува жидкости. Действительно,

радиальная составляющая скорости не участвует в азимутальном расходе жидкости в виду того, что вдув/отсос на внутреннем цилиндре компенсируется отсосом/вдувом на внешнем цилиндре, так что расход через сечения $\varphi = \text{const}$ должен сохраняться постоянным:

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} V_\varphi dr = \text{const} = -\nu \int_{\bar{r}_1}^1 R'(\bar{r}) d\bar{r} = -\nu [R(1) - R(\bar{r}_1)]. \quad (\text{V.61})$$

Если ввести среднерасходную скорость

$$V_{\varphi \text{ ср}} = (V_\varphi|_{r=r_1} + V_\varphi|_{r=r_2}) / 2 \quad (\text{V.62})$$

(частично возвращаемся к размерным значениям радиусов цилиндров), то

$$Q = V_{\varphi \text{ ср}} (r_2 - r_1) = \frac{(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2)(r_2 - r_1)}{2} = \frac{(\omega_1 \bar{r}_1 + \omega_2)(1 - \bar{r}_1)r_2^2}{2} = -\nu [R(1) - R(\bar{r}_1)]. \quad (\text{V.63})$$

Отсюда получаем необходимое третье условие

$$R(1) - R(\bar{r}_1) = -\frac{(\omega_1 \bar{r}_1 + \omega_2)(1 - \bar{r}_1)r_2^2}{2\nu}$$

или, опуская черточки над безразмерными величинами,

$$R(1) - R(r_1) = -\frac{(\text{Re}_1 r_1 + \text{Re}_2)(1 - r_1)}{2}. \quad (\text{V.64})$$

Задача (V.59), (V.60), (V.64) имеет аналитическое решение

($N = \sqrt{4 + 4\text{Ha}^2 + 4(\pm\lambda) + \lambda^2}$):

$$R'(r) = -\frac{(\pm\text{Ha}^2)(\pm\lambda)}{\text{Ha}^2 r} + 2rC_1 - C_2(2(\pm\lambda) - N)r^{((\pm\lambda) - N)/2} - C_3(2 + (\pm\lambda) + N)r^{((\pm\lambda) + N)/2}, \quad (\text{V.65})$$

а постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 (приведем их, несмотря на громоздкий вид) есть

$$C_1 = -\frac{r_1 \text{Re}_1 + \text{Re}_2}{2(1 + r_1)} - \frac{\overline{\text{Ha}}^2 (\pm\lambda) \ln(r_1)}{\text{Ha}^2 (1 - r_1^2)} +$$

$$+ \frac{2 \left((r_1 - 1) \left\{ \text{Ha}^2 r_1^2 \left(2N r_1^{\frac{N}{2}} \left(r_1^{1 + \frac{\pm\lambda}{2}} - 1 \right) + r_1^{\frac{\pm\lambda}{2}} \left((2 + (\pm\lambda))(1 + r_1)(1 - r_1^N) + N(r_1 - 1)(1 + r_1^N) \right) \right\} (\text{Re}_1 - \text{Re}_2) + \right.}{\text{Ha}^2 r_1 (r_1^2 - 1) \left(8N r_1^{1 + \frac{N}{2}} (1 + r_1^{\pm\lambda}) + \right.}$$

$$\left. + 2\overline{\text{Ha}}^2 N(\pm\lambda)(1 + r_1) \left(r_1^{\frac{N}{2}} + r_1^{2 + (\pm\lambda) + \frac{N}{2}} - r_1^{1 + \frac{\pm\lambda}{2}} (1 + r_1^N) \right) \right\} - 2\overline{\text{Ha}}^2 (\pm\lambda) r_1 \ln(r_1) \left\{ 2N r_1^{1 + \frac{N}{2}} (1 + r_1^{\pm\lambda}) + \right.}$$

$$\left. + r_1^{\frac{\pm\lambda}{2}} (N^2 (r_1^2 - 1)(r_1^N - 1) - (\lambda^2 - 1)(r_1^2 - 1)(r_1^N - 1) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{+r_1^{\frac{\pm\lambda}{2}} \left((2+(\pm\lambda))(r_1^2-1)(r_1^N-1) - N(1+r_1^2)(1+r_1^N) \right)}{-4N(r_1^2+1)(r_1^N+1)} \right\} \\
C_2 = r_1^{-1+\frac{N}{2}} & \frac{\left\{ \text{Ha}^2 r_1^2 \left(2(1+r_1) \left(1-r_1^{\frac{N+(\pm\lambda)}{2}} \right) - (N+(\pm\lambda))(1-r_1) \left(1+r_1^{\frac{N+(\pm\lambda)}{2}} \right) \right) (\text{Re}_1 - \text{Re}_2) + \right.}{\text{Ha}^2 \left\{ 8N r_1^{1+\frac{N}{2}} (1+r_1^{\pm\lambda}) + \right.} \\
& \left. + \overline{\text{Ha}}^2 (\pm\lambda) \left((-2+N+(\pm\lambda))(r_1^2-1) \left(r_1^{1+\frac{N+(\pm\lambda)}{2}} - 1 \right) - 2r_1^2 \ln(r_1) (2+N+(\pm\lambda)) \left(r_1^{-1+\frac{N+(\pm\lambda)}{2}} - 1 \right) \right) \right\}}{\left. + r_1^{\frac{\pm\lambda}{2}} \left(N^2(r_1^2-1)(r_1^N-1) - (\lambda^2-4)(r_1^2-1)(r_1^N-1) - 4N(r_1^2+1)(r_1^N+1) \right) \right\}} , \\
C_3 = & \frac{\left\{ \text{Ha}^2 r_1 \left(r_1^{\frac{\pm\lambda}{2}} (2(1+r_1) - (N-(\pm\lambda))(1-r_1)) - r_1^{\frac{N}{2}} (2(1+r_1) + (N-(\pm\lambda))(1-r_1)) \right) (\text{Re}_1 - \text{Re}_2) + \right.}{\text{Ha}^2 \left\{ 8N r_1^{1+\frac{N}{2}} (1+r_1^{\pm\lambda}) + \right.} \\
& \left. + \overline{\text{Ha}}^2 (\pm\lambda) (-2-N+(\pm\lambda))(r_1^2-1) \left(r_1^{\frac{N}{2}} - r_1^{1+\frac{\pm\lambda}{2}} \right) \right\} + 2\overline{\text{Ha}}^2 \ln(r_1) (\pm\lambda) (2-N+(\pm\lambda)) \left(r_1^{\frac{\pm\lambda}{2}} - r_1^{1+\frac{N}{2}} \right)}{\left. + r_1^{\frac{\pm\lambda}{2}} \left(N^2(r_1^2-1)(r_1^N-1) - (\lambda^2-4)(r_1^2-1)(r_1^N-1) - 4N(r_1^2+1)(r_1^N+1) \right) \right\}} .
\end{aligned}$$

Результаты расчета функции $(-R'(r))$, отвечающей за азимутальную скорость в (V.58), приведены на рис. V.21 – V.23. Расчеты проводились для случая, когда радиус внутреннего цилиндра вдвое меньше внешнего ($r_1 = 0,5$), а цилиндры вращаются в противоположные стороны с одинаковыми угловыми скоростями ($\text{Re}_1 = 10$, $\text{Re}_2 = -10$). Если же угловая скорость, скажем, внутреннего цилиндра меняется по знаку и абсолютному значению, то, как показывает численный эксперимент, точка отсчета профиля скорости при $r = r_1 = 0,5$ сдвигается согласно этому изменению, не меняя общего характера поведения профиля при варьировании параметров λ , Ha^2 и $\overline{\text{Ha}}^2$. То же относится и к случаю изменения угловой скорости внешнего цилиндра.

Как уже говорилось, из определения двух чисел Гартмана Ha^2 и $\overline{\text{Ha}}^2$ следует, что направление радиального магнитного поля B_r не имеет принципиального значения, так

как в уравнение движения эта составляющая поля входит в квадратичном виде. Что же касается числа $\overline{\text{Ha}}^2$, то в виду того, что в его определение входит произведение B_r и B_ϕ , соответствующее слагаемое в уравнении движения влияет на поле течения в зависимости

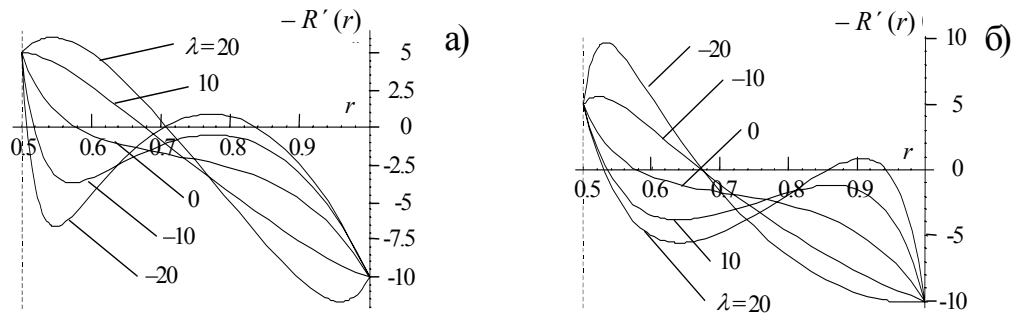


Рис. V.21. Профили азимутальной скорости при различных направлениях азимутального магнитного поля в зависимости от значений величины отсоса / вдува, $\text{Ha}^2 = 100$.
а) $\overline{\text{Ha}}^2 = +100$, б) $\overline{\text{Ha}}^2 = -100$.

от взаимной ориентации этих полей. Приведенные на рис. V.21 – V.23 результаты относятся к положительному направлению радиального магнитного поля – от оси симметрии. В таком случае знак (–) перед $\overline{\text{Ha}}^2$ соответствует направлению азимутального магнитного поля по часовой стрелке, знак (+) – против часовой стрелки.

Из рис. V.21 следует, что в отсутствие отсоса / вдува ($\lambda = 0$) радиальное магнитное

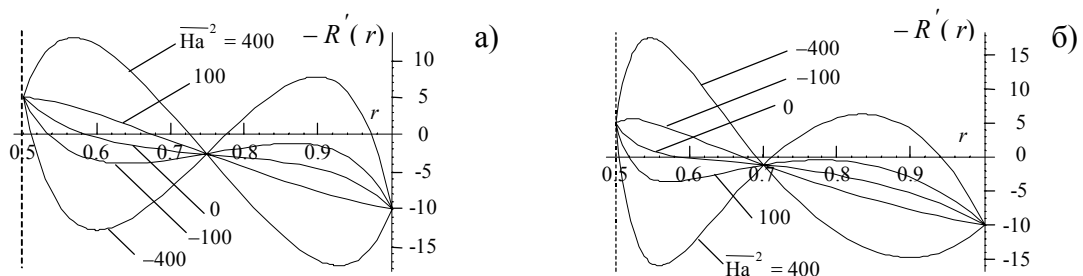


Рис. V.22. Профили азимутальной скорости в зависимости от величины и ориентации азимутального магнитного поля при фиксированном значении радиального поля $\text{Ha}^2 = 100$.

поле формирует S – образный профиль азимутальной скорости, типичный для МГД течения Куэтта (см. п. V.4). Отсос ($-\lambda$) жидкости от внутреннего цилиндра при направлении азимутального магнитного поля, соответствующего знаку (+) перед $\overline{\text{Ha}}^2$, приводит к резкому уменьшению азимутальной скорости вблизи этого цилиндра (рис. V.21,а), вплоть до изменения направления вращения жидкости. У внешнего цилиндра, через поверхность которого при этом осуществляется вдув жидкости, происходит в то же время процесс, обратный описанному. Вдув ($+\lambda$) через внутренний цилиндр сначала выпрямляет профиль скорости, как бы нивелируя действие радиального магнитного поля,

а затем с ростом λ приводит к формированию как у внутреннего, так и у внешнего цилиндров зон, в которых угловая скорость вращения жидкости превышает значения угловых скоростей вращения цилиндров.

Если поменять направление азимутального магнитного поля ($-\overline{Ha}^2$), то описанный процесс деформирования профиля скорости протекает в обратной последовательности (рис. V.21,б).

При том же фиксированном значении радиального магнитного поля ($Ha^2 = 100$) и вдуве жидкости через внутренний цилиндр увеличение значения \overline{Ha}^2 при знаке (+) приводит (рис. V.22,а) примерно к тому же результату, что и увеличение значения вдува λ при фиксированном \overline{Ha}^2 (рис. V.21,а), а при знаке (-) – к результату, аналогичному увеличению значения отсоса ($-\lambda$). При отсосе жидкости через внутренний цилиндр (рис. V.22,б) влияние значения и знака параметра \overline{Ha}^2 противоположно случаю вдува. И так же, как в выбранной для рис. V.21 ситуации, здесь тоже характерно формирование жидких зон со значительным превышением угловых скоростей вращения цилиндров при вдуве $\overline{Ha}^2 > 0$ или зон с обратным вращением жидкости при $\overline{Ha}^2 < 0$. Отсос жидкости меняет результат на прямо противоположный.

Наконец, рост значения радиального магнитного поля при фиксированных параметрах отсоса/вдува λ и $\pm \overline{Ha}^2$ нивелирует влияние этих параметров: формируется практически одинаковое при $Ha^2 \gg 1$ ядро потока для значений параметров, выбранных в качестве иллюстрации этого обстоятельства для рис. V.23; профили скорости принимают характерный для МГД течения Куэтта S – образный вид с образованием хорошо выраженных пограничных слоев у вращающихся поверхностей.

Для понимания механизма формирования поля азимутальной скорости обратимся к безразмерной форме ротора электромагнитной силы, ответственного за деформацию первоначально практически линейного (в отсутствие магнитного поля и отсоса/вдува) (см. п. V.4) распределения по радиусу профиля $V_\varphi(r)$:

$$\text{rot } \mathbf{F}_{\text{эм}} = \text{rot}((\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) = \left[-2(\pm \lambda)(\pm \overline{Ha}^2) + Ha^2(r^2 R'' - r R') \right] \mathbf{i}_z, \quad (\text{V.66})$$

попутно отметив, что его выражение есть не что иное, как вторая строка в уравнении (V.59).

Влияние отдельных слагаемых $\text{rot } \mathbf{F}_{\text{эм}}$ в (V.66) в зависимости от параметров Ha^2 , \overline{Ha}^2 и λ проиллюстрируем на примере вращения цилиндров с равными, но

противоположно направленными угловыми скоростями, с привлечением данных, представленных на рис. V.21– V.23.

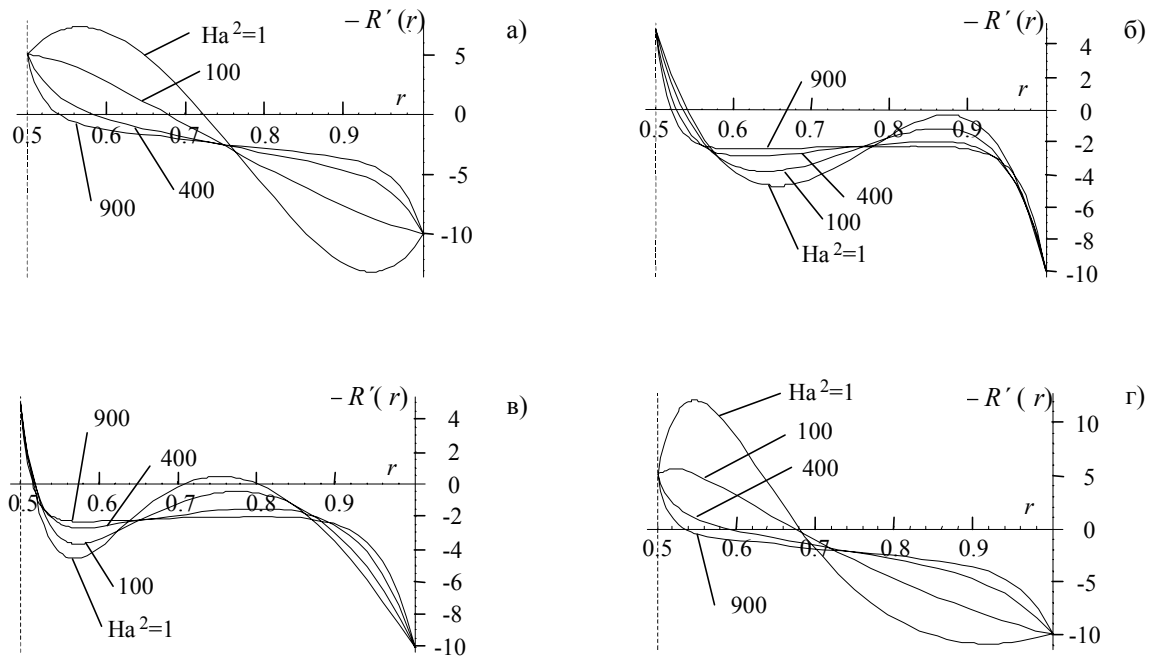


Рис. V.23. Влияние радиального магнитного поля на азимутальную скорость при различном направлении азимутального магнитного поля и отсоса / вдува.

- а) $\lambda = +10, \overline{Ha}^2 = +100$; б) $\lambda = +10, \overline{Ha}^2 = -100$;
 в) $\lambda = -10, \overline{Ha}^2 = +100$; г) $\lambda = -10, \overline{Ha}^2 = +100$.

Начнем с простейшего случая отсутствия азимутального магнитного поля ($\overline{Ha}^2 = 0$), когда на поле течения влияет лишь радиальное магнитное поле (второе слагаемое в (V.66)).

Формально первое слагаемое в (V.66) зануляется и при $\lambda = 0$, однако это не означает, что отсос/вдув не влияет на поле течения в отсутствие азимутального магнитного поля. Действительно, влияние параметра λ на поле течения сказывается и в неэлектромагнитном случае посредством нелинейного взаимодействия радиальной и азимутальной составляющих скорости – последнее слагаемое в первой строке уравнения (V.59).

Для определения действия радиального магнитного поля достаточно определить знак выражения $(R'/r)' = r^{-3} (r^2 R'' - r R')$. При выбранном направлении вращения цилиндров и $Ha^2 \ll 1$ профиль скорости почти линейен, так что функция $(-R'(r))$ является убывающей по r . Тем более убывающей по r будет функция $(-R'/r)$.

Следовательно, $(-R'/r)' < 0$, а $(R'/r)' > 0$, т.е. знак этой составляющей $\text{rot } \mathbf{F}_{\text{эм}}$ положителен во всей области течения. Это означает, например, что у внутреннего цилиндра с положительным направлением вращения скорость жидкости должна уменьшаться, так же, как и у внешнего, но уже по абсолютному значению, так как последний вращается в противоположную сторону. В результате линейный профиль деформируется в S – образный, т.е. в точности, как это было выяснено в V.4, причем, эта деформация будет тем ярче выражена, чем больше значение Na^2 .

Если $\lambda \neq 0$ и $\overline{\text{Na}}^2 \neq 0$, то воздействие этих факторов может привести к появлению зон с возрастанием азимутальной скорости (или функции $-R'(r)$), как это видно, например, из рис. V.23. Если скорость роста по r функции $(-R'(r))$ не выше, чем r^1 , то сказанное выше остается в силе. Покажем, что последнее всегда имеет место.

Действительно, обратимся к кривым, соответствующим $\text{Na}^2 = 1$ на рис. V.23. Для простоты положим $-R'(r) = y$, $r = x$ и предположим, что вблизи точки $x = x_0$, с которой начинается возрастание функции $y(x)$, ее можно представить как $y = k x^{1+a}$, при этом $a > 0$. Вычислим две первые производные этой функции в точке $x = x_0$:

$$y'(x_0) = \frac{y_0(1+a)}{x_0}, \quad y''(x_0) = \frac{y_0 a(1+a)}{x_0^2}, \quad (\text{V.67})$$

где $y_0 = k x_0^{1+a}$ – значение функции в начальной точке ее возрастания.

Область возрастания функции $y(x)$ располагается либо вблизи внутреннего цилиндра, как это следует из рис. V.23,а,г (при этом $y_0 > 0$), либо у внешнего цилиндра (рис. V.23,а,г) или внутри области течения (рис. V.23,б,в) (при этом $y_0 < 0$). В первом случае из условия возрастания функции вытекает, по (V.67), требование $1+a > 0$, а из вида кривых следует, что должно быть $y''(x_0) < 0$, т.е. $a < 0$. Объединение этих неравенств $-1 < a < 0$ доказывает вышеупомянутое утверждение. Во втором случае условие возрастания функции дает $1+a < 0$, т.е. $a < -1$, что уже само по себе достаточно для доказательства утверждения. Но, кроме того, из требования $y''(x_0) > 0$ следует $a > 0$, что вступает в противоречие с предыдущим необходимым неравенством.

Таким образом, знак второго слагаемого в $\text{rot } \mathbf{F}_{\text{эм}}$ (V.66) **всегда положителен**, а его вклад в деформацию профиля азимутальной скорости всегда сводится к формированию S – образности профиля скорости с ростом Na^2 и, соответственно, к формированию пограничных слоев гартмановского типа у вращающихся цилиндров.

Первое слагаемое в (V.66), как видно, не содержит какой-либо функциональной зависимости от r , а его знак, определяющий направление завихренности электромагнитной силы, целиком зависит от взаимной ориентации отсоса или вдува и азимутального магнитного поля. Ясно, что в комбинации 1) $[-(-\lambda)(+\overline{Ha}^2)]$ и 2) $[-(+\lambda)(-\overline{Ha}^2)]$ знак этого слагаемого положителен, так что действие этой составляющей завихренности электромагнитной силы должно быть таким же, как и второй составляющей, т.е. она должна приводить к «усилению S – образности» профиля, к более ярко выраженным пограничным слоям. Об этом и свидетельствуют данные, приведенные на рис. V.21,а и V.22,б для первого случая и рис. V.21,б, V.22,а – для второго. Более того, добавка этой составляющей в деформацию поля азимутальной скорости может оказаться настолько существенной, что жидкость у цилиндров может вращаться даже в сторону, противоположную вращению самих цилиндров.

В комбинациях 3) $[-(-\lambda)(-\overline{Ha}^2)]$ и 4) $[-(+\lambda)(+\overline{Ha}^2)]$ знак этой составляющей уже отрицательный, так что следует ожидать ослабление S – образности, сформированной радиальным магнитным полем, как с ростом $|\lambda|$ (рис. V.21,а и V.21,б), так и с ростом $|\overline{Ha}^2|$ (рис. V.22,а и V.22,б). Более того, при достаточно большом значении произведения $|\lambda| |\overline{Ha}^2|$, превышающем при $Ha^2 = 100$ значение 10^3 , скорость вращения жидкости у соответствующих цилиндров может даже превысить скорости вращения цилиндров.

До сих пор речь все время шла о влиянии *ротора электромагнитной силы* на формирование поля скорости. Но и в отсутствие этой силы наличие отсоса или вдува жидкости влияет, как уже упоминалось, на профиль скорости за счет нелинейного взаимодействия азимутальной и радиальной составляющих скорости (последнее слагаемое в первой строке уравнения (V.59)). Относительно этого влияния можно сказать следующее. В отсутствие магнитных полей и отсоса/вдува профиль скорости определяется решением (V.53) с постоянными интегрирования (V.55). Полагая в (V.55) $m = \omega_2 / \omega_1 = -1$, $r_1 = 1/2$, т.е. принятые в качестве примера для рассматриваемой задачи параметры (цилиндры вращаются с одинаковыми угловыми скоростями в противоположные стороны, а радиус внутреннего цилиндра вдвое меньше радиуса внешнего), получаем выражение для слагаемого, отвечающего за ротор нелинейного взаимодействия:

$$-(\pm\lambda)(2r^3R''' + r^2R'' - rR') = -(\pm\lambda)(3/2Ar^2 + 2C) = -(\pm\lambda)(1 - 6r^2) / (\ln 2 + 3/4).$$

Отсюда следует, что множитель $(1 - 6r^2)$ во всей области течения от $r = r_1 = 1/2$ до $r = r_2 = 1$ отрицателен, так что, во-первых, знак этого слагаемого полностью зависит от знака $(\pm\lambda)$ и, во-вторых, максимальное его значение достигается на внешнем цилиндре (здесь оно в 10 раз превышает значение на внутреннем цилиндре).

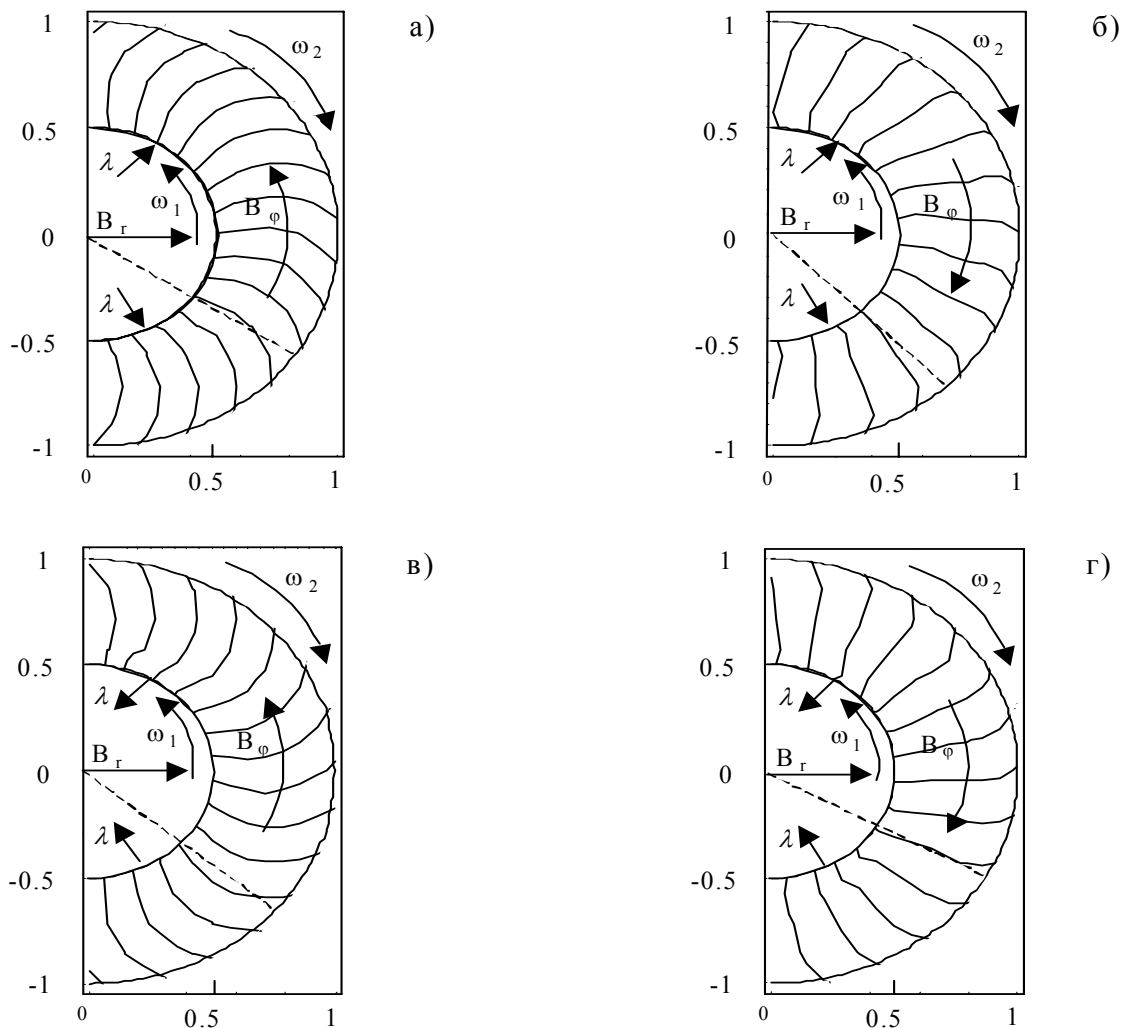


Рис. V.24. Траектории движения частиц жидкости. $Re_1 = 10, Re_2 = -10, Na^2 = 100$.
 а) $\lambda = +10, \overline{Na}^2 = +100$; б) $\lambda = +10, \overline{Na}^2 = -100$; в) $\lambda = -10, \overline{Na}^2 = +100$; г) $\lambda = -10, \overline{Na}^2 = -100$.

В соответствии с общеизвестными в гидродинамике принципами, вдув жидкости увеличивает толщину пограничного слоя, а отсос ее уменьшает, так что, например, при $(+\lambda)$ профиль скорости у внутреннего цилиндра должен выпучиваться, а у внешнего, где в то же время происходит отсос жидкости, прижиматься к стенке. Тем не менее, общий положительный знак ротора этой части инерционной силы во всей области течения

свидетельствует о том, что вдув через внутренний цилиндр должен приводить к S – образности профиля скорости, как это имело место в случае действия чисто радиального магнитного поля (при знаке $(+\lambda)$ ротор этой части совпадает с таким же знаком второго слагаемого в (V.66). Объясняется это тем, что завихренность этой части инерционной силы у внешнего цилиндра на порядок больше, чем у внутреннего, и подавляет естественное стремление к выпучиванию профиля скорости у внутреннего цилиндра при вдуве жидкости через него. Отличие от аналогичного действия радиального магнитного поля заключается в несимметричности притяжения профиля скорости к поверхностям цилиндров – у внутреннего цилиндра этот эффект менее выражен из-за прямого действия вдува.

Некоторый интерес представляют траектории движения частиц жидкости при действии отсоса/вдува в радиальном и азимутальном магнитных полях. В полном соответствии с проведенным анализом в комбинациях 1) и 2) (рис. V.24,в,г) частицы жидкости у поверхностей цилиндров движутся в сторону, противоположную вращению цилиндров, а место выхода (рис. V.24,г), (входа (рис. V.24,в)) отстает от места входа (выхода) через внутренний цилиндр. В комбинациях 3), 4) имеем противоположный результат (рис. V.24,а, б).

Из интегральных характеристик течения естественно представляет интерес трение на вращающихся стенках: $\tau_w = \mu \partial V_\varphi / \partial r |_{r_1, r_2} = -\mu k R'' / r_2^2 = \mu \omega_1 R''$. В общем виде значения τ_w на внутреннем $r = r_1$ и внешнем $r = 1$ цилиндрах можно получить, продифференцировав выражение (V.65). Рассмотрим, как влияет на трение увеличение каждого из параметров Ha , \overline{Ha} и λ .

Переходя к пределу при $Ha \rightarrow \infty$ в выражениях для постоянных C_1 , C_2 , C_3 и продифференцировав (V.65), получим с точностью до слагаемых порядка \overline{Ha}^2 / Ha^2 значения R'' на вращающихся стенках:

$$R''(r_1) = -\frac{r_1 Re_1 + Re_2}{1 + r_1} + \frac{Ha(Re_1 - Re_2)}{1 + r_1} - \frac{\overline{Ha}^2 \lambda \ln r_1}{Ha^2} + \frac{2\overline{Ha}^2 \lambda \ln r_1}{Ha(r_1^2 - 1)} - \frac{2(Re_1 - Re_2)}{Ha(1 + r_1)^2}, \quad (V.68)$$

$$R''(1) = \frac{Ha r_1 (Re_1 - Re_2) - (r_1 Re_1 + Re_2)}{1 + r_1} + \frac{\overline{Ha}^2 \lambda (1 - \ln r_1)}{Ha^2} - \frac{2\overline{Ha}^2 \lambda \ln r_1}{Ha(r_1^2 - 1)} - \frac{2(Re_1 - Re_2)}{Ha(1 + r_1)^2} + \frac{\overline{Ha}^2 \lambda}{Ha}. \quad (V.69)$$

Слагаемые порядка \overline{Ha}^2 / Ha^2 приходится оставлять, так как увеличение $Ha^2 \sim B_r^2$ означает, что одновременно растет и параметр $\overline{Ha}^2 \sim B_r B_\varphi$, так что эти слагаемые лишь

при фиксированных значениях λ и B_φ убывают с ростом B_r , да и то лишь как B_r^{-1} . Этим объясняется то обстоятельство, что кривые $R''(0,5)$ и $R''(1)$, приведенные на рис. V.25 для умеренных чисел Na , отчетливо отражают влияние отсоса / вдува λ на трение на поверхности вращающихся цилиндров. Непосредственное влияние этого параметра легко усматривается в выражении для постоянной интегрирования C_1 решения (V.65) (второе слагаемое в этом выражении). Но ясно, что при фиксированных значениях λ и B_φ и $Na \rightarrow \infty$ сильное радиальное магнитное поле полностью нивелирует присутствие азимутального магнитного поля и параметра λ . Это согласуется и с поведением скоростного поля при $Na \rightarrow \infty$ (рис. V.23). Что касается влияния параметра \overline{Na}^2 , то о

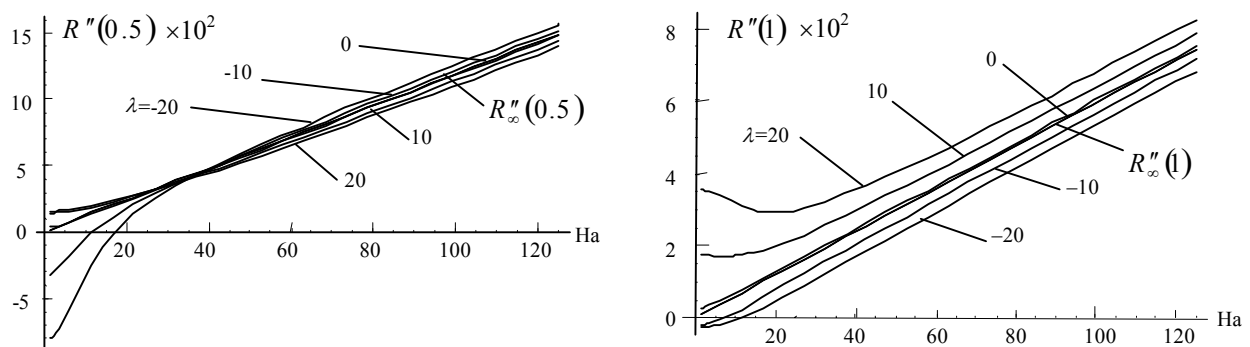


Рис. V.25. Зависимость трения на внутреннем (левая часть рисунка) и внешнем (правая часть рисунка) цилиндрах от Na при различных значениях λ . $\overline{Na}^2 = +10$.

нем можно сказать, что, во-первых, такое влияние проявляется лишь в комбинации $\overline{Na}^2 (\pm \lambda)$, как это видно из уравнения (V.59), и, во-вторых, при фиксированных значениях B_r трение будет меняться линейно с ростом $|B_\varphi|$ и, кроме того, такое изменение будет зависеть от взаимной ориентации λ , B_φ и B_r .

Заключение

Целью данной работы было обобщение и систематизация методов построения автомодельных решений для задач гидродинамики и магнитной гидродинамики в точной постановке и в приближении пограничного слоя. Смысл автомодельного подхода заключается в том, чтобы преобразовать уравнения в частных производных в обыкновенные дифференциальные уравнения, что можно сделать либо введением переменной специального вида, либо разделением переменных.

Решение большого количества задач как автором работы, так и другими авторами, показало, что в результате применения автомодельного подхода получаются подобные уравнения, отличающиеся только коэффициентами. Следовательно, можно получить универсальное уравнение, или систему уравнений, описывающее все возможные автомодельные решения в данной системе координат, коэффициенты в котором зависят от условий конкретной задачи.

Результаты проведенного исследования позволяют сделать следующие выводы.

I. Гидродинамика.

В точной постановке:

1. в декартовых координатах получено универсальное автомодельное уравнение, описывающее все допустимые в такой постановке плоские задачи; получено точное уравнение, описывающее плоские задачи, которые возможно решить методом разделения переменных, что, насколько это известно автору, сделано впервые;
2. в полярных координатах доказана невозможность перевода уравнений Навье-Стокса в автомодельную форму; разделением переменных получены варианты уравнений, зависящих от переменных r и φ , и проанализированы возможные их решения;
3. в цилиндрических координатах в осесимметричной постановке найдены 3 возможных варианта автомодельной постановки и 2 варианта применения метода разделения переменных;
4. в сферических координатах в осесимметричной постановке доказана невозможность перевода уравнений Навье-Стокса в автомодельную форму; показано, что в точной постановке осесимметричные уравнения можно преобразовать методом разделения переменных только к уравнениям относительно переменной θ ;

В приближении пограничного слоя:

1. показано, что в полярных и сферических (осесимметричная постановка) координатах преобразовать уравнения Навье-Стокса к уравнениям типа пограничного слоя невозможно; единственным способом получения таких уравнений является устремление характеризующих задачу параметров к критическим значениям;
2. в декартовых координатах получено универсальное автомодельное уравнение, описывающее все возможные в данной постановке плоские течения в приближении пограничного слоя; показано, что применение метода разделения переменных в приближении пограничного слоя в явном виде невозможно, однако существует вариант, при котором полученное уравнение соответствует методу разделения переменных, и, кроме того, это уравнение является не только уравнением в приближении пограничного слоя, но и точным уравнением;
3. в цилиндрических координатах в осесимметричной постановке в приближении пограничного слоя получено 11 вариантов построения решений (с учетом азимутального вращения), из них 2 варианта ранее не рассматривались и не имеют четкой физической интерпретации (такой подробный анализ, насколько известно автору, ранее не проводился); как и в декартовой системе координат, нет оснований для применения метода разделения переменных, но из полученных вариантов 5 являются фактически разделением переменных, и они же являются также точными уравнениями.

II. Магнитная гидродинамика.

В точной постановке:

1. для плоских течений в декартовых координатах показано, что при применении автомодельного подхода возможно описать только те задачи, в которых магнитное поле не оказывает влияния на поле скорости; при применении метода разделения переменных возможно решать задачи, в которых поле скорости взаимодействует с магнитным полем (этот вариант нигде ранее не встречался);
2. в полярных координатах в точной постановке методом разделения переменных возможно построить уравнения только относительно переменной r ;
3. в цилиндрических координатах в осесимметричном случае возможно построить 5 вариантов решений, из которых 3 соответствуют методу разделения переменных;

4. в сферических координатах в осесимметричном случае методом разделения переменных можно построить только уравнение относительно переменной θ ;
5. рассмотрено построение безындукционного приближения для всех 4 используемых систем координат;
6. в безындукционном приближении в декартовых координатах магнито-гидродинамическое решение можно построить только методом разделения переменных, но не автомодельным методом, что и было проделано автором; показано, что единственное магнитное поле, оказывающее воздействие на поле скорости есть магнитное поле с нейтральной точкой;
7. в полярных координатах в безындукционном приближении получен класс допустимых внешних магнитных полей; автором проанализированы некоторые варианты допустимых магнитных полей и приведены схемы распределения силовых линий для них; также получены универсальные уравнения относительно как переменной r , так и переменной φ ; показан вариант, позволяющий преобразовать уравнения Навье-Стокса-Максвелла в ОДУ не разделением переменных, а выбором другого вида функции тока, связанного с геометрией задачи;
8. в безындукционном приближении в цилиндрических координатах в осесимметричном случае получены возможные виды внешних магнитных полей, позволяющих преобразовать уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям во всех 5 вариантах; в некоторых случаях дана физическая интерпретация полученных полей;
9. в безындукционном приближении в сферических координатах в осесимметричном случае получены допустимые распределения электрического и внешнего магнитного полей;

В приближении пограничного слоя:

1. рассматривались только уравнения в декартовой и цилиндрической системах координат, так как в полярной и сферической системах уравнения совпадают с точной постановкой; рассмотрены как точная постановка в смысле отсутствия каких-либо допущений относительно электромагнитных сил, так и безындукционное приближение;
2. в декартовых координатах в точной постановке в приближении пограничного слоя получены 2 варианта автомодельных уравнений, один из которых является универсальным; в безындукционном приближении определены допустимые магнитные поля и приведена их физическая интерпретация;

автором найден вариант, при котором возможно построение уравнения, являющегося одновременно и точным, и уравнением в приближении пограничного слоя; этот вариант соответствует методу разделения переменных, и единственным допустимым магнитным полем является магнитное поле с нейтральной точкой;

3. в цилиндрических координатах в осесимметричном случае рассмотрены 9 возможных вариантов построения решений типа пограничного слоя с учетом азимутального вращения в точной постановке; автором получено, что только в 7 из них магнитное поле оказывает влияние на поле скорости; для всех случаев определены допустимые распределения электрического тока и магнитного поля;
4. в безындукционном приближении в цилиндрических координатах так же рассмотрены 9 возможных вариантов построения автомодельных решений в приближении пограничного слоя; в этом случае все 9 вариантов описывают магнитогидродинамические течения; для всех вариантов проанализированы допустимые магнитные поля и их физическая интерпретация.

Автором для всех вышеописанных вариантов выведены уравнения или системы уравнений, которые можно использовать при решении конкретных задач без дополнительных преобразований. Достаточно только определиться с выбором функций тока исходя из геометрии области течения и других условий задачи. Все необходимые параметры в уравнениях получаются простой подстановкой коэффициентов, входящих в функции тока. Другими словами, полученные результаты можно использовать как своеобразный справочник, не тратя время на однотипные вычисления. Ранее настолько полной классификации не создавалось. Подобные, но менее полные системы были предложены в монографиях [43], [70] и [72], но две первые работы ограничивались цилиндрической и сферической системами координат.

В разделе V приведены задачи, которые решались автором в рамках предлагаемого подхода. Решение известных задач позволяет сравнить предлагаемый подход с ранее применявшимися методами и оценить его эффективность.

В процессе решения рассмотренных в разделе V задач получены следующие новые результаты:

1. В задаче о МГД течении в диффузоре/конфузоре в азимутальном поле определена зависимость трения на стенке от угла раствора диффузора/конфузора, а для диффузорного течения найдена новая зависимость между числом Гартмана, характеризующим магнитное поле, и критическим

- числом Рейнольдса, при котором происходит отрыв потока от стенки диффузора. Эта зависимость отличается от приведенной в [67] тем, что существует зависимость от угла раствора конфузора, а так же тем, что критическое число Рейнольдса квадратично зависит от числа Гартмана.
2. В задаче о МГД течении с отсосом/вдувом на пластине в азимутальном магнитном поле исследована возможность отрыва потока при изменении индукции магнитного поля и интенсивности отсоса/вдува. Получено, что в случае конфузрного течения при любых комбинациях интенсивности магнитного поля и отсоса/вдува отрыва не происходит, но возникает обратное течение. В случае диффузорного течения найдены зависимости критического числа Рейнольдса, при котором происходит отрыв, от числа Гартмана и от интенсивности отсоса/вдува.
 3. В задаче о МГД течении с отсосом/вдувом на пластине в радиальном магнитном поле также исследовалась возможность отрыва потока. В этом случае отрыв возможен не только в диффузорном, но и в конфузрном течениях, что вызвано появлением инициированного ротором электромагнитной силы течением. Определены области значений числа Гартмана и интенсивности отсоса/вдува, при которых существует безотрывное течение. Оказалось, что существуют две области безотрывного течения, причем одна из них – при достаточно больших значениях интенсивности отсоса/вдува.
 4. В задаче о кольцевом МГД аналоге течения Куэтта получены точные решения как в присутствии радиального магнитного поля, так и в чисто гидродинамическом варианте. Получены точные решения задачи, а также рассчитано трение на стенках. Найдена асимптотика трения при стремлении числа Гартмана к бесконечности. Показано образование пограничного слоя как при увеличении числа Гартмана, то есть при усилении радиального магнитного поля, так и при изменении скорости вращения цилиндров.
 5. В задаче о кольцевом МГД течении между вращающимися цилиндрами с отсосом/вдувом получено точное решение для поля скорости, изучено влияние на течение интенсивности отсоса/вдува, радиального и азимутального магнитных полей при постоянном соотношении скоростей вращения. Проанализировано взаимодействие внешних магнитных полей и отсоса/вдува, построены траектории движения частиц жидкости, а также рассчитано трение на вращающихся стенках. Оказывается, что из-за наличия двух независимых составляющих магнитного поля можно рассматривать два числа Гартмана, одно

из которых зависит только от величины радиального магнитного поля, а второе создается комбинацией радиального и азимутального полей. Изменение этих величин оказывает существенное влияние на профиль скорости течения, в том числе и вызывая появления возвратного течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aristov, S. N. and Gitman, I. M., *Viscous flow between two moving parallel disks: exact solutions and stability analysis*, J. Fluid Mech., Vol. 464, pp. 209-215, 2002.
2. Barenblatt, G. I. and Zel'dovich, Ya. B., *Self-similar solutions as intermediate asymptotics*, Annual Rev. of Fluid Mech., Vol. 4, pp. 285-312, 1972.
3. Berman, A. S., *Laminar flow in channels with porous walls*, J. Appl. Physics, Vol. 24, No. 9, pp. 1232-1235, 1953.
4. Blasius H., *Crenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Zeitschr. f. Math. u. Phys., bd. 56, s. 1-37, 1908.
5. Bluman, G. W. and Cole, J. D., *Similarity Methods for Differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1974.
6. Bödewadt V.T., *Die Drehströmung über festen Gründe*, Z. Angew. Math. Mech. – 1940, 20, H.5. – S. 241 – 253.
7. Burde, G. I., *The construction of special explicit solutions of the boundary –layer equations. Steady flows*, Quart. J. Mech. Appl. math., Vol. 47, No. 2, pp. 247-260, 1994.
8. Dresner, L., *Similarity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*, Pitman, Boston, 1983.
9. Falkner, V. M. and Skan, S. W., *Some approximate solutions of the boundary layer equations*, Phil. Mag., Vol. 12, pp.865-896, 1931.
10. Goertler H., *Berechnung von Ausgaben der freien Turbulenz auf Grund neuen Näherungsansatzes*, ZAMM, Vol. 22, No. 5, pp. 244-254, 1942.
11. Hamell G., *Spiralformige Bewegung zaher Flüssigkeiten*, d. Dt. Mathematiker – Vereinigung, Vol. 25. s. 34-60, 1916.
12. Hartman J. *Hg–dynamics, I. Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field*, Mat.–fys. medd. K. Danske videnskab. – 1937. –Bd. 15, № 7.
13. Jeffery, G. B., *The two-dimensional steady motion of a viscous fluid*, Phil. Mag. Ser. 6, vol. 9, pp. 455-465, 1915.
14. Karman Th., *Über laminare und turbulente Reibung*, ZAMM, Bd. 1, pp. 233-251, 1921.
15. Kremenetsky V., *About the Self-similar Heat Boundary Layer Problems In Magnetohydrodynamics*, MATHEMATICAL MODELLING AND ANALYSIS, Vol.7, 2002.

16. Kremenetsky V., *MHD analogs of the Couette flow with suction/injection*, Proceedings of the 5th International PAMIR Conference "Fundamental and Applied MHD", Vol. I, Ramatuelle, France, September 16-20, 2002.
17. Kremenetsky V., *On the Self-similar Heat Boundary Layer Problems In Magnetohydrodynamics*, Magnetohydrodynamics, Vol. 37, No. 4, p. 373-378, 2001.
18. Kremenetsky V., Shcherbinin E., *Boundary layers formation in case of free and near-the-wall fan jets at the electrically induced vortical flows*, Mahyd'95. Abstracts. p. 27. Jurmala, Latvia, 1995.
19. V. Kremenetsky, E. Shcherbinin *On some magnetohydrodynamic flows in polar coordinates*, Proceedings of the 5th International Pamir Conference on Fundamental and Applied MHD, Ramatuelle, France, 2002, Vol. 1, VII-7.
20. Kremenetsky V., Shilova E., Shcherbinin E., *On Magnetohydrodynamic Flows in Convergent and Divergent Diffuser*, Magnetohydrodynamics, Vol. 39, No. 2, p. 179-186, 2003.
21. Kremeņeckis V., Ščerbiņins E., *Robežslāņa teorija hidrodinamikā aksiāli simetriskām un virpuļu plūsmām*, 35. RTU zinātniskā un tehniskā konference 1994. g. 19.-22. aprīlī. Konferenču materiāli. lpp. 34-37. Rīga, 1994.
22. Lin C. C., *Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 1, No. 4, pp. 391-395, 1958.
23. Ludlow, D. K., Clarkson, P. A., and Bassom, A. P., *New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., Vol. 53, 175-206, 2000.
24. Ma, P. K. H. and Hui, W. H., *Similarity solutions of the two-dimensional unsteady boundary-layer equations*, J. Fluid. Mech., Vol. 216, pp. 538-540, 1990.
25. Meleshko, S. V. and Pukhnachov, V. V., *A class of partially invariant solutions of Navier-Stokes equations*, J. Appl. Mech. & Tech. Phys., Vol. 40, No. 2, pp. 24-33, 1999.
26. Pohlhausen K., *Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht*, ZAMM, Vol. 1, s. 252-268, 1921.
27. Polyanin A. D., *Exact solutions to the Navier-Stokes equations with generalized separation of variables*, Doklady Physics, Vol. 46, No. 10, pp. 726-731, 2001.
28. Prandtl L., *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verhandlung d. III Internat. Mathem. Kongr. Heidelberg, s. 484-491, 1904.

29. Ruediger G., *MHD Instabilities in Hydromagnetic Taylor-Couette Flows*, Proceedings of The 15th Riga and 6th PAMIR Conference on Fundamental and Applied MHD, Vol. 1, pp. 117-120, June 27 - July 1, 2005, Rigas Jurmala, Latvia.
30. Shcherbinin E., Bartulis A., Kremenetsky V., *Theory of axisymmetric boundary layer in hydrodynamics and magneto hydrodynamics*, 3rd International Conference on Transfer Phenomena in Magnetohydrodynamics and Electroconducting Flows, vol. 1, p. 255-260, Aussois, France, 1997.
31. Shcherbinin E., *MHD flows in polar coordinates*, Magnetohydrodynamics, Vol. 39, No. 2, 169-178, 2003.
32. Squire H. B., *Jet emerging from a hole in a plane wall*, Phil. Mag., Ser. 7, vol. 43, No. 343, pp. 942-945, 1952.
33. Squire H. B., *The round laminar jet*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., Vol. 4, No. 3, pp. 321-329.
34. Wang, C. Y., *Exact solutions for the Navier-Stokes equations – the generalizd Beltrami flows, review and extensions*, Acta Mech., Vol. 81, pp. 69-74, 1990.
35. Yuan S. W., Finkelstein A. B., Brooklyn N. Y., *Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall*, Trans. ASME, Vol. 78, No. 4, pp. 719-724, 1956.
36. Акатнов Н. И., *Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки*, Труды Ленингр. Политех. ин-та, Техническая гидромеханика, вып. 5., с. 24-316 1953.
37. Бай Ши-И, *Теория струй*, М., 1960.
38. Бартулис А., Кременецкий В., Щербинин Э. В., *Общий метод построения автомодельных решений для плоских МГД течений*, Магнитная гидродинамика, Vol. 34, N2, с.109-128, 1998.
39. Бартулис А., Кременецкий В., Щербинин Э., *Теория осесимметричного пограничного слоя II рода*, Магнитная гидродинамика, Vol. 32, N1, с.291-299, 1996.
40. Бартулис А., Щербинин Э. В., *Магнитоуправляемое отсасывание пограничного слоя*, Магнитная гидродинамика, Vol. 34, No. 3, 211-224, 1998.
41. Бартулис А., Щербинин Э. В., *О методике численного интегрирования уравнений автомодельного пограничного слоя*, Магнитная гидродинамика, Vol. 36, No. 2, 119-152, 2000;
42. Бартулис А., Щербинин Э. В., *Электровихревое течение между двумя вращающимися дисками*, Магнитная гидродинамика, Vol. 33, No. 2, 156-162, 1997.

43. Бояревич В. В., Фрейберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В., *Электровихревые течения*, «Зинатне», 1985.
44. Бэтчелор Дж. К., *Введение в динамику жидкости*, «Мир», Москва, 1973.
45. Волосевич П. П., Леванов Е. И., *Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса*, Изд-во МФТИ, М., 1997.
46. Вулис Л. А., Джаугаштин К. Е., *Магнитогидродинамическое течение Куэтта*, ЖТФ, Т. 34, №. 12, с. 2171-2177, 1964.
47. Гельфгат Ю. М., Лиелаусис О. А., Щербинин Э. В., *Жидкий металл под действием электромагнитных сил*, «Зинатне», Рига, 1976.
48. Гольдштик М. А., *О закрученных струях*, Механика жидкости и газа, №1, 1979.
49. Гольдштик М. А., *Один класс точных решений уравнений Навье-Стокса*, ПМТФ, №2, 1966.
50. Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И., *Вязкие течения с парадоксальными свойствами*, «Наука», Сиб. отделение, Новосибирск, 1989.
51. Гринспен Х., *Теория вращающихся жидкостей*, Гидрометеиздат, Ленинград, 1975.
52. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., *Теоретическая гидромеханика, ч. 1*, Физматгиз, М., 1963.
53. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., *Теоретическая гидромеханика, ч. 2*, Физматгиз, М., 1963.
54. Ладъженская О. А., *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, «Наука», М., 1970.
55. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика*, «Наука», М., 1988.
56. Ландау Л. Д., *Новое точное решение уравнения Навье-Стокса*, ДАН, т. 43, № 7, с. 299-301, 1944.
57. Лойцянский Л. Г., *Ламинарный пограничный слой*, «Наука», Москва, 1962.
58. Лойцянский Л. Г., *Механика жидкости и газа*, «Наука», Москва, 1978.
59. Лойцянский Л. Г., *Радиально-щелевая струя в пространстве, заполненном той же жидкостью*, Тр. Ленингр. политех. инст., № 5, т. 17, вып. 1, с. 3-16, 1953.
60. Мартыненко О. Г., Коровкин В. Н., Соковишин Ю. А., *Теория ламинарных вязких струй*, «Наука и техника», Минск, 1985.
61. Седов Л. И., *Методы подобия и размерностей в механике*, «Наука», М., 1988.
62. Седов Л. И., *Механика сплошной среды, т. 1*, «Наука», М., 1970.
63. Седов Л. И., *Механика сплошной среды, т. 2*, «Наука», М., 1970.

64. Слезкин Н. А., *Движение вязкой жидкости между двумя конусами*, Уч. зап. МГУ, № 2, с. 83-87, 1934.
65. Смирнов Е. М., *Автомодельное решение уравнений Навье-Стокса для закрученного течения жидкости в круглой трубе*, ПММ, т. 45, вып. 5, с. 833-839.
66. Сычев В. В., *О движении вязкой электропроводной жидкости под действием вращающегося диска в присутствии магнитного поля*, ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, с. 906-908, 1960.
67. Цинобер А. Б., *Магнитогидродинамическое обтекание тел*, «Зинатне», Рига, 1970.
68. Шлихтинг Г., *Теория пограничного слоя*, М., 1974.
69. Щербинин Э. В., *Магнито-вязкий пограничный слой*, Магнитная гидродинамика, Vol. 35, No. 3, 217-235, 1999.
70. Щербинин Э. В., *Струйные течения вязкой жидкости в магнитном поле*, «Зинатне», Рига, 1973.
71. Щербинин Э. В., *Теория осесимметричного пограничного слоя в гидродинамике и магнитной гидродинамике*, Магнитная гидродинамика, Vol. 31, No. 2, 151-168, 1995.
72. Щербинин Э. В., *Теория пограничного слоя в гидродинамике и магнитной гидродинамике, т. 1. Плоские течения*, Лаборатория ЭВТ, самиздат, Саласпилс, 2004.
73. Яцеев В. И., *Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости*, ЖТФ, т. 20, № 11, с. 1031-1034, 1950.