Dr. ing. A. VĪTOLS
Latvijas Ūniversitātes profesors

PUNKTA KINĒMATIKA

1 9 3 2.
Latvijas Ūniversitātes Studentu padomes grāmatnīcas izdevums

Dr.ing. A.V Ī T O L S.
Latvijas Ūniversitātes profesors.

P U N K T A   K I N Ē M A T I K A.

Lekcijas lasītas Latvijas Ūniversitātes
Inženierzinātņu fakultātē.

1932.
Latvijas Ūniversitātes Studentu Padomes
grāmatnīcas izdevums.

PUNKTA MĒCHANIKA.

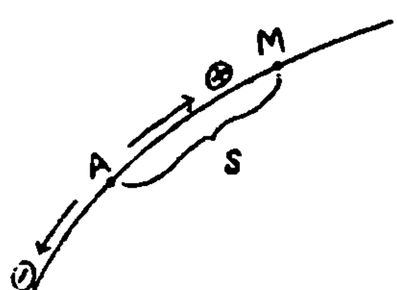
Kinēmatika jeb foronomija.

Kinēmatika jeb foronomija ir zinātne,kuŗa nodarbojās ar ķermeņu kustības likumu pētīšanu neatkarīgi no cēloņiem,kas šo kustību izsauc,jeb zinātne, kuŗas priekšmets ir ģeometrisku punktu un ķermeņu kustības likumu pētīšana.

I. Punkta ātrums.

§ 1. Punkta trajektorija.

Par punkta M trajektoriju saucās visu,viens otram sekojošo punkta stāvotņu ģeometriska vieta, jeb linija, kuŗu apraksta telpā kustošs punkts. Trajektorija, kā linija, var būt taisna un līkumaina, saskaņā ar ko punkta kustības var būt taisnvirzieniskas un līkumainas. Punkta M stāvotni uz trajektorijas var noteikt caur viņas attālumu attiecīgā loka AM = s gaŗuma veidā,skaitītu no kāda iepriekš izvēlēta punkta A (sk.zīm.Nr.1) uz vienu vai otru pusi no šī punkta. Kā redzams ar loka gaŗumu AM = s, kā absolūtu lielumu, izteiktu caur absolūtu skaitli vien, nepietiktu, lai punkta M stāvotni viennozīmīgi izteiktu, bet skaitlim, kas izteic loka gaŗumu, būtu jāpievieno klāt noteikums,uz kuŗu pusi no sākuma punkta A gaŗums ir ņemams. Kā zinams, šo papildu noteikumu var ievest, lietojot absolūto skaitļu vietā relatīvus (alģebrāiskus) skaitļus. Sakarā ar šo uz trajektorijas jāizšķir divus virzienus, izejot no sākuma punkta A,skaitot vienu (vienalga kādu) par pozitīvu, bet pretējo par negatīvu.Ja nu kustošais punkts atrodās pozitīvu attālumu rajonā, tad s ir pozitīvs skaitlis, ja negatīvā - tad negatīvs. Nu ir saprotams, ka ar relatīvu skaitļu ievešanu katra nenoteiktība punkta M stāvotnes noteikšanā uz dotās trajektorijas ir izslēgta.



zīm.1.

Kustību mēchanika dēfinē,kā punkta stāvotnes maiņu telpā līdz ar laiku,t.i. stāvotnes maiņa notiek nepārtraukti līdz ar laiku, jeb runājot matemātiski, attālums s ir nepārtraukta funkcija no laika t, s = f(t).Kā redzējam, šai funkcijai punkta stāvotnes noteiktības labad jābūt arī viennozīmīgai (eindeutig). Pats par sevi saprotams, ka minētai funkcijai s=f(t) tanī pašā laikā jābūt arī reālai, lai varētu runāt par esošu,patiesu punkta kustību.

Apskatīsim jautājumu par kustības pilnīgu noteikšanu ar trajektorijas palīdzību. Punkta kustība ir pilnīgi noteikta, ja ir doti:

1) trajektorijas veids un viņas stāvotne telpā. Lai šo noteikumu vieglāki varētu saprast, iedomāsimies punkta trajektoriju materiālas sastingušas līknes veidā. Ja šīs līknes stāvotne pret kādu citu ķermeni jeb ķermeņu sistēmu nav dota, tad nevar arī būt runa par kustoša uz šīs trajektorijas punkta stāvotnes noteikšanu,

2) ja uz trajektorijas norādīts jau minētais sākuma punkts A (repers),no kuŗa tiek skaitīti attālumi s,

3) ja ir dots attālumu s maiņas likums jeb tā sauktais kustības nolīdzinājums nepārtrauktas viennozīmīgas reālas funkcijas s = f(t) veidā, ko prasa pašas kustības parādības būtība.

Vienkāršākais funkcijas s = f(t) veids ir lineāra funkcija s = a+bt, kur a un b ir pastāvīgi koeficienti.

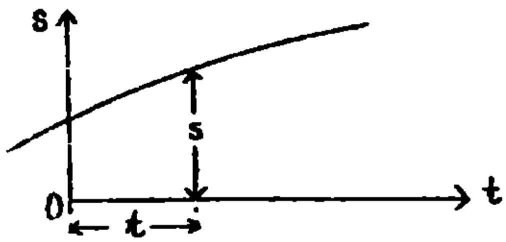
Ja par kādu kustību ir zinams, ka viņa ir reprezentēta caur lineāru funkciju s = a + bt, kur a un b vēl nav zināmi, tad šos koeficientus var uziet, ja būs zināmi divi diviem laika momentiem t_1 un t_2 atbilstošie attiecīgie attālumi s_1 un s_2. Tad koeficienti a un b izteicās caur nolīdzinājumu sistēmu:

$$(s)_{t=t_1} = s_1 = (a + bt)_{t=t_1} = a + bt_1$$

$$(s)_{t=t_2} = s_2 = (a + bt)_{t=t_2} = a + bt_2$$

§ 2.Attālumu likuma grāfiskais attēlojums.

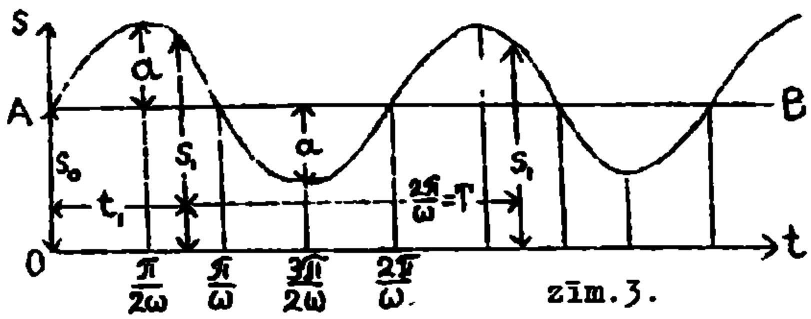
Funkciju $s = f(t)$ var attēlot grāfiski. Šinī nolūkā vēlam divas asis: laika t un attālumu s asis. Nospraužot t ass virzienā t nozīmes, pieņēmuši kādu garuma vienību par laika vienību, s - ass virzienā nospraužam attiecīgas s nozīmes, pieņēmuši atkal zināmu garuma vienību par s vienību. Tādā ceļā gūta līkne ir tā saucamā attālumu grāfika (zīm.2.)



zīm.2.

Attāluma grāfikai nav nekā kopēja ar punkta trajektoriju: uz vienas un tās pašas trajektorijas var pastāvēt dažādi s likumi: $s = f(t)$.

Piemēri. 1) $s = a + bt$ ir taisne.
2) $s = s_0 + a \,\mathrm{Sin}\, \omega t$ ir tā saucamā sinusoida(zīm.3.),kuŗu iegūstam sekojoši:



zīm.3.

1)kad $\omega t=0, t=0, s=s_0$

2) " $\omega t=\frac{\pi}{2}, t= \frac{\pi}{2\omega}, s=s_0+a$

3) " $\omega t=\pi, t= \frac{\pi}{\omega}, s=s_0$

4) " $\omega t = \frac{3\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2\omega}, s=s_0-a$

5) " $\omega t = 2\pi, t = \frac{2\pi}{\omega}, s=s_0$

u.t.t.

Kā viegli redzams, kustība šinī gadijumā sastāv no punkta svārstības ap punktu M,kuŗš atrodas s_0 attālumā no repera A (sk.zīm.1.). Ja t asi pārnestu s_0 attālumā (sk.zīm.3.),savietojot viņu ar AB (uz trajektorijas savukārt savietojot p.A ar p.M /sk.zīm.1/), tad: $s = a \sin \omega t$.

Kā redzams, vienas un tās pašas s nozīmes atkārtojās pie abscisu diferences $\frac{2\pi}{\omega}$,jo

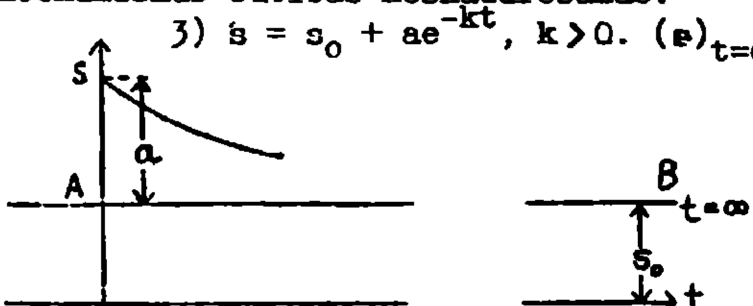
$$(s)_{t=t_1} = (s_0+a\mathrm{Sin}\omega t)_{t=t_1} = s_1 = s_0+a\mathrm{Sin}\omega t_1 = (s)_{t=(t_1 + \frac{2\pi}{\omega})} =$$

$$= (s_0 + a\mathrm{Sin}\omega t)_{t=(t_1 + \frac{2\pi}{\omega})} = s_0 + a\mathrm{Sin}\omega(\frac{2\pi}{\omega} + t_1) = s_0 + a\mathrm{Sin}(2\pi + \omega t_1) =$$

$$= s_0 + a\mathrm{Sin}\omega t_1 = s_1 \text{ (sk.zīm.3.).}$$

Šo abscises diferenci $T = \frac{2\pi}{\omega}$ sauc par svārstības periodu, koeficientu a par svārstības amplitudu, ωt - par svārstības fāzi un ω par svārstības frekvenci. Vēlāk, kad būsim iepazinušies ar ātruma jēdzienu un ar viņa dimenzijas simbolu, vēl reizi atgriezīsamies pie nupat nosaukto terminu mēchaniskas būtības noskaidrošanas.

3) $s = s_0 + ae^{-kt}$, $k > 0$. $(s)_{t=0} = (s_0 + ae^{-kt})_{t=0} = s_0 + a$



zīm.4.

$$(s)_{t=\infty} = (s_0 + ae^{-kt})_{t=\infty} = s_0$$

Šis nolīdzinājums raksturo kustību, kuŗā kustošs punkts no attāluma uz trajektorijas $s_0 + a$ tuvojās attālumam s_0,pēdējo galīgā laikā nekad nesasniedzot,jo s līkne skar liniju AB pie $t=\infty$,t.i.

AB ir s asimptote.

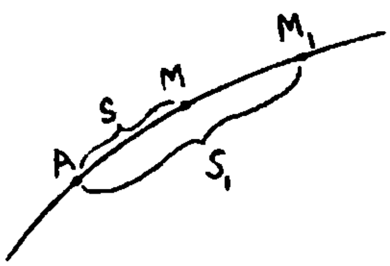
Visiem trim šeit apskatītiem kustības likumiem ir liela nozīme dabā. Sevišķi vienmērīgu kustību $s = s_o + at$ novērojam ļoti bieži. Piemēram, vilciens kustās vienmērīgi uz atsevišķiem ceļa gabaliem, pie kam šī vienmērīga kustība var notikt kā taisnā virzienā (trajektorija arī ir taisne), tā arī uz ceļa līknēm (trajektorija ir līkne).

Svārstības kustību $s = a\sin\omega t$ novērojam svārstā, kuŗš kustās bez mēchanisma pretestības gaisa brīvās telpās, bez amplitudas samazināšanās.

Funkcijas veids $s = ae^{-kt}$ nāk priekšā kustībā, kur medija (atmosferas ūdens) pretestība pirmo nolēnina. Piemēram svārsts, reizi iekustināts, pēc zināma laika apstājās, pateicoties dažāda veida kustības pretestībām; mēs konstatējam amplitudas pakāpenisku samazināšanos līdz $a = 0$. Šo kustības likumu varētu izteikt, piem., kombinējot otro un trešo apskatītās funkcijas: $s = ae^{-kt}.\sin\omega t$. Šinī kustībā mēs konstatējam amplitudas pakāpenisku samazināšanos līdz $a = 0$, pie $t = \infty$ (dziestoša kustība).

§ 3. Punkta pārvietojums gar viņa trajektoriju un punkta noietais ceļš zināmā laika sprīdī.

Par punkta M pārvietojumu, atbilstošu dotam laika sprīdim laika starpā $(t_1 - t)$, saucās attālumu diference $s_1 - s$, kur s ir punkta M attālums no kāda pieņemta sākuma punkta - repera A momentā t, bet s_1 tas pats momentā t_1 (sk.zīm.5.). Punkta pārvietojumu, atbilstošu dotam laika sprīdim ir jāatšķir no ceļa, kuŗu punkts noiet tanī pašā laika sprīdī:



zīm.5.

1) ja pārvietošanās laika sprīdī $(t_1 - t)$ notikusi vienā un tai pašā virzienā, tad punkta noietais ceļš ir vienāds ar pārvietojuma gar trajektoriju $(s_1 - s)$ absolūto lielumu $C = \pm(s_1 - s)$, kur zīme (+) ņemama tad, kad $(s_1 - s)$ ir pozitīvs lielums un zīme (-) tad, kad $(s_1 - s)$ ir negatīvs lielums, $(s_1 - s) < 0$. Pirmā gadījumā, kā redzams, pārvietošanās notiek pozitīva, otrā - negatīva attāluma virzienā. Lai apzīmētu skaitļa absolūto nozīmi jeb viņa modulu, parasti tiek lietots simbols, sastāvošs no skaitļa alģebrāiska apzīmējuma ieslēgta no abām pusēm ar strīpiņām. Tā tad saskaņā ar dēfinējumu

$$|s_1 - s| = \pm (s_1 - s) = C$$

2) ja dotā laika sprīdī punkta pārvietošanās ir notikusi gan uz vienu, gan uz otru pusi, tad ir iespējams, laiku saskaldot laika sprīžos, kuŗos pārvietošanās ir notikusi tikai uz vienu pusi, un dabūt:

ceļš, kas noiets laika sprīdī $(t_n - t)$ =

$$C = |s_1-s|+|s_2-s_1|+\ldots+|s_n-s_{n-1}|=\left[\pm(s_1-s_o)\right]+\left[\pm(s_2-s_1)\right]+\ldots+\left[\pm(s_n-s_{n-1})\right]$$

Punkta pārvietošanās gar viņa trajektoriju, kā jau zinams, ir alģebrāisks lielums (lielums, kas var būt pozitīvs, negatīvs un pat 0), kamēr ceļš vienmēr ir pozitīvs lielums un pie tam atšķirās no 0. Ja ceļš ir 0, tad kustība pavisam nav notikusi un kustības nolīdzinājums šim gadijumam dabon veidu $s = a$, kas atbilst miera stāvoklim, turpretīm, ja pārvietojums ir 0, tas vēl nenozīmē, ka kustība nebūtu notikusi.

<u>Piemērs:</u> $s = a\sin\omega t$. Pārvietošanās, atbilstoša laika sprīdim starp $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ un $t_o = 0$ (sk.zīm.3) ir:

$$(s_1-s) = a\sin\omega\cdot\frac{\pi}{\omega} - a\sin 0 = 0 - 0 = 0,$$

bet ceļš ir

$$C = (\pm s)_{t_o=0}^{t_1'=\frac{\pi}{2\omega}} + (\pm s)_{t_1'=\frac{\pi}{2\omega}}^{t_1=\frac{\pi}{\omega}} = \pm a(\sin\omega\frac{\pi}{2\omega} - \sin\omega.0)+$$

$$+\left\{\pm a(\sin\omega\frac{\pi}{\omega} - \frac{\sin\omega\pi}{2\omega}\right\} = |a|+|a| = 2|a|$$

§ 4. Punkta vidējais pārvietošanās ātrums gar viņa trajektoriju.

Par punkta vidējo pārvietošanās ātrumu V_m gar viņa trajektoriju laika sprīdī t_1-t saucās punkta pārvietojuma s_1-s, atbilstoša laika sprīdim (t_1-t), attiecībā pret pēdējo, t.i.

$$V_m = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}$$

Kā redzams, nupat ievestais lielums ir alģebrāisks, t.i. šī attiecība var būt pozitīva jeb negatīva un pat 0. Zīme atkarāsies no (s_1-s) izteiksmes zīmes, jo (t_1-t) varam vienmēr skaitīt par pozitīvu lielumu.

V_m vispārējā gadijumā ir funkcija no laika t, jo (s_1-s) tāda ir. Raksta saīsināšanas labad, apzīmējot (s_1-s) ar Δs un $(t_1 - t)$ ar Δt, dabūjam formulu: punkta pārvietošanās vidējais ātrums, jeb vienkārši - punkta vidējais ātrums

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

kur Δs tiek mērots ar pieņemto garuma vienību, bet Δt ar pieņemto laika vienību. Apzīmēsim minēto garuma vienību ar simbolu $[L]$, bet laika - ar $|T|$. Tad katru no mēramiem lielumiem var izteikt kā divu skaitļu produktu, no kuŗiem viens ir nenosaukts (abstrakts, reine Zahl), kuŗš rāda, cik reizes mērojamā lielumā ietilpst pieņemtā mēra vienība un pēdējās kāda daļa, jeb skaitlis, kas izteic mērīšanas (salīdzināšanas) rezultātu, bet otrs apzīmē pieņemtu mēra vienību un ir nosaukts skaitlis 1. Ieslēgsim pirmo skaitli iekavās, tad mērojamie lielumi izteicās:

$$\Delta s = (\Delta s)[L] \text{ un } \Delta t = (\Delta t)[T], \text{ bet } V_m = \frac{(\Delta s)[L]}{(\Delta t)[T]}$$

Saskaņā ar alģebras formulu $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c}.\frac{b}{d} = \frac{a}{c}\cdot bd^{-1}$ varam rakstīt:

$$V_m = \frac{(\Delta s)[L]}{(\Delta t)[T]} = (\frac{\Delta s}{\Delta t})\cdot\frac{[L]}{[T]} = (\frac{\Delta s}{\Delta t})\cdot[LT^{-1}]$$

, kur $[LT^{-1}]$ izteic ātruma mēra vienību un viņas sastāvu.

Ja mēs gribētu pāriet uz jaunām mēra vienībām, saistītām ar vecām caur $[L] = (m)[L_1]$, $[T] = n\,[T_1]$, tad $V_{1m} = (V_m)(m)[L_1](n^{-1})[T_1^{-1}] = (V_m\, mn^{-1})[L_1T_1^{-1}]$, kur atkal ir redzams jaunās mēra vienības sastāvs, kā arī redzams, kā dabūjams jauno vienību skaits $(V_m\, mn^{-1})$ no iepriekšējā (V_m).

Piemērs. $V_m = (5)[mtr.sec^{-1}]$. Pāriet uz mēru vienību $[cm.min^{-1}]$.
Tā kā $[mtr]=(100)[cm]$ un $[sec] = (\frac{1}{60})[min]$ tad $V_{1m}=(5).(100)(\frac{1}{60})^{-1}[cm.min^{-1}]$ $= (5.100.60)[cm.min^{-1}] = (3.10^4)[cm.min^{-1}]$.

Stūrainās iekavās [] ieslēgto produktu, kuŗš izteic, no kādām elementārām mēra vienībām sastāv mērojamā lieluma vienība un kādā pakāpē katra no viņām ietilpst šinī mēra vienības produktā, jeb kuŗš izteic mērojamā lieluma tā saucamo dimenziju, mēchanikā ievedis angļu fiziķis Maxwell's, sakarā ar ko šo apzīmējumu dažreiz sauc par Maxwell'a simbolu. Šī simbola priekšrocības pie pārejas no vienas mēru sistēmas uz otru ir acīmredzamas. (Par citām priekšrocībām sk. autora "Ievads mēchanikā").

Piemērs: $s = a\sin\omega t$.

1) Uziet punkta vidējo pārvietošanās ātrumu V_m, atbilstošu laika sprīdim starp $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ un $t_o = \frac{\pi}{4\omega}$

$$\text{Atb.: } V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1-s_o}{t_1-t_o} = \frac{a}{\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\pi}{4\omega}}\left[\sin\omega t\right]_{t_o=\frac{\pi}{4\omega}}^{t_1=\frac{\pi}{2\omega}} = \frac{4\omega a}{\pi}(\sin\omega\cdot\frac{\pi}{2\omega} - \sin\omega\cdot\frac{\pi}{4\omega}) =$$

$$= \frac{4\omega a}{\pi}\,(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2\omega a}{\pi}\,(2 - \sqrt{2})$$

3)Uziet punkta vidējo pārvietošanās ātrumu starp $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ un $t_o = 0$.

$$\text{Atb.: } V_m = \frac{a}{\frac{\pi}{\omega}} \Big| \operatorname{Sin}\omega t \Big|_{t_o=0}^{t_1=\frac{\pi}{\omega}} = \frac{\omega a}{\pi}(\operatorname{Sin}\frac{\pi}{\omega} - \operatorname{Sin}0) = \frac{\omega a}{\pi}\,0 = 0$$

§ 5. Punkta vienmērīga kustība.

Var gadīties, ka vidējais pārvietošanās ātrums $V_m = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = V_o$ ir pastāvīgs lielums, V_o = Const., neatkarīgs no laika t. Šādu punkta kustību, neatkarīgi no punkta trajektorijas veida, sauc par vienmērīgu un punkta vidējā pārvietošanās ātruma absolūto lielumu $|V_o| = \pm V_o$ sauc par vienmērīgas kustības ātrumu. Tā tad var izšķirt divus punkta ātrumus: punkta pārvietošanās ātrumu V_o kā algebrāisku lielumu un viņa kustības ātrumu $|V_o|$ kā absolūtu lielumu, sakars starp kuŗiem ir

$$|V_o| = \pm V_o = \pm \frac{(s_1 - s)}{t_1 - t} = \pm \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Piezīme. Kustība un pārvietošanās, tāpat kā ceļš un pārvietojums, nav identiski jēdzieni. Kustības jēdziens ietver sevī ne tikai ķermeņa stāvotnes maiņu telpā līdz ar laiku, bet arī viņa formas maiņu. Tā, piemēram, viļņveidīga kustība, kuŗā izpaužās medija dēformācija, nenozīmē paša medija pārvietošanos (viļņi uz ūdens virsmas). Tādēļ ne viss, kas kustās - pārvietojās, bet gan otrādi - viss, kas pārvietojās, tas kustās. Bet arī tad, kad no redzes aploka izdodās ~~pavisam~~ izslēgt dēformāciju (absolūti cieti ķermeņi), ir izdevīgi atšķirt kustību no pārvietošanās, kuŗa ir kustības īpatnējs veids. Lai labāki atšķirtu abus minētos jēdzienus, ņemsim vērā ģeometrisku punktu, attiecībā uz kuŗu nekad nevar būt runa par viņa dēformāciju, jo viņam nepiemīt nekādas formas. Iedomāsimies, ka punkta trajektorija ir dota, tad kustību var dēfinēt kā punkta stāvotnes maiņu līdz ar laiku uz punkta trajektorijas bez kustības apakšvirziena izšķirības (netiek ņemt vērā, ka punkta zināmā trajektorijas punktā maina savu kustības virzienu uz pretējo). Tad, kā viegli saprotams, pie dotas ātruma nozīmes, kuŗa būs izteikta caur absolūtu skaitli, būs iespējams aprēķināt punkta noieto ceļu, atbilstošu dotam laika sprīdim. Ja, turpretīm, tiks ņemta vērā kustības virziena maiņa, tad līdz ar to būs noteikta punkta pārvietošanās, kuŗas rezultāts būs jau mums pazīstamais pārvietojums, kuŗš, kā redzējam, dažreiz var būt 0, kamēr ceļš vienmēr būs atšķirīgs no 0, ja tikai kustība vispār ir notikusi.

Uz priekšu tādēļ, pretēji parastai mēchanikas terminoloģijai, nesajauksim terminus "kustība" un "pārvietošanās", pie kam daudzreiz mēchanikā lietotā termina "kustība" vietā nāksies lietot terminu "pārvietošanās". Šāds jēdzienu rafinējums ir iespējams latviešu valodā, kamēr daudzās citās valodās trūkst vārdu attiecīgās darbības un viņas rezultāta atšķirībai (Verschiebung, перемещение, dèplacement - var apzīmēt kā pašu darbību, tā arī viņas rezultātu).

Lai illustrētu nupat teikto par kustību un pārvietošanos, pievedīsim piemēru. Punkta svārstības gadijumā uz trajektorijas, punkts zināmos laika momentos ieņem vienu un to pašu stāvotni uz trajektorijas, tā kā viņa attālumu diference jeb pārvietojums pa laika sprīdi $(t_2 - t_1)$, $\Delta s = s_2 - s_1 = 0$, kas tomēr nenozīmē, ka punkts pa laika sprīdi $(t_2 - t_1)$ nebūtu kustējies, virzīdamies gar savu trajektoriju no kāda viņas punkta turp un atpakaļ, t.i. pārvietošanās ir notikusi, bet pārvietojums (pārvietošanās rezultāts, summarais, koppārvietojums, atsevišķu, atbilstošu sīkākiem laika sprīžiem, pārvietojumu alģebrāiska summa) = 0. Ja punkts uz trajektorijas svārstītos bezgalīgi ilgu laiku $t = \infty$, tad viņa kustības rezultāts ceļš $|C|$ būtu $|C| = \infty$, kamēr pārvietojums Δs, pārvietošanās rezultāts, viemēr paliktu galīgs lielums = punkta attālumu diferencei no vep. A momentā t_1 un $t_2 = \infty$

No nolīdzinājuma $\frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = V_o$ seko: $s_1 - s = V_o(t_1 - t)$, t.i. ka punkta pārvietojums gar viņa trajektoriju ir proporcionāls attiecīgam laika sprīdim un ka vienmērīgā kustībā pārvietojums nevar mainīt savu zīmi, jo V_o zīme arī nemainās, t.i. pārvietošanās uz trajektorijas notiek vienmēr uz vienu un to pašu pusi no mums jau pazīstamā sākuma punkta A jeb repera, ja $V_o > 0$, tad punkts pārvietojās uz pozitīvo attālumu pusi, jo $(t_1-t) > 0$, pretējā gadijumā, kad $V_o < 0$, notiek pretējais.

Tā kā vienmērīgā kustībā punkta parvietojums nemaina savu zīmi, tad sakars šimi kustības veidā starp punkta noieto ceļu un viņa pārvietojumu ir ļoti vienkāršs: punkta pārvietojuma absolūtais lielums $|s_1-s| = \pm(s_1-s)$ vienmēr ir vienāds ar punkta noieto ceļu C, $C = \pm(s_1-s)$ pie vienādiem laika sprīžiem un punkta kustības ātrums ir vienāds ar viņa ceļa ātrumu, t.i.

$$|V_o| = \pm\frac{(s_1 - s)}{t_1 - t} = \frac{C}{t_1 - t}$$

Ja laika sprīdi izvēlēsim vienādu ar pieņemto laika mēra vienību, t.i. liksim $t_1-t = (1)[T]$, tad $|V_o| = (C)[LT^{-1}]$ un vienmērīgās kustības ātrums $|V_o|$ skaitliski ir vienāds ar punkta noieto ceļu laika vienībā. Ja pie tam punkta noietais gar trajektoriju ceļš $C = \pm(s_1 - s)$ arī būtu bijis vienāds ar vienu garuma vienību, $\pm(s_1-s) = (1)[L]$, tad $|V_o| = (1)[LT^{-1}]$. Citiem vārdiem, ja tiktu novērota tāda vienmērīga punkta kustība, kad laika vienībā tiek noiets ceļš C, vienāds ar garuma vienību, tad tādas vienmērīgas kustības ātrums būtu izteikts caur skaitli 1. Tā tad vienmērīgas kustības ātruma vienība ir tādas vienmērīgas kustības ātrums, kad punkts laika vienībā noiet ceļa vienību.

No augšā pievestā nolīdzinājuma $s_1 - s = V_o(t_1 - t)$ seko, ka

$$s_1 = s + V_o t_1 - V_o t = (s - V_o t) + V_o t_1 = a + bt$$

kur $a = (s_1 - V_o t_1)$ un $b = V_o$. Tā tad katras vienmērīgas kustības nolīdzinājums ir $s = a + bt$, t.i. attālums ir lineāra funkcija no t, a ir punkta attālums uz trajektorijas no sākuma p.A momentā $t = t_o = 0$, $|b| = \pm b = |V_o|$ ir punkta vienmērīgas kustības ātrums, bet $b = V_o$ ir viņa vienmērīgas pārvietošanās ātrums, algebraisks lielums.

§ 6. Punkta pārvietošanās ātrums dotā laika momentā.

Punkta vidējais pārvietošanās ātrums pa trajektoriju tika izteikts:

$$V_m = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

pie kam vispārējā gadijumā V_m ir funkcija no laika t. Kā no formulas redzams, V_m ir atkarīgs arī no laika sprīža $(t_1 - t)$. Ja pievesto formulu pārraksta $s_1 - s = V_m(t_1 - t)$, tad redzams, ka V_m pilda V_o lomu vienmērīgā kustībā (sk.§ 5), kādēļ par vidējo ātrumu var teikt, ka viņš ir tas punkta pārvietošanās ātrums, ar kuru pārvietojoties vienmērīgi uz trajektorijas no stāvotnes M stāvotnē M_1 punkts patērētu to pašu laiku (t_1-t) (sk.zīm.5). Starp stāvotnēm M un M_1 uz trajektorijas V_m vispārīgi nesakritīs ar punkta īsto ātrumu, kuŗš mainās nepārtraukti, tikai vienu momentu piepaturēdams kādu nozīmi, kuŗa nākamā momentā jau ir citāda. Tikai to var teikt, ka līdz ar laika sprīža, t_1-t samazināšanos, kam seko arī $s_1 - s$ samazināšanās, vidējais ātrums V_m arvienu vairāk tuvosies ātruma īstai nozīmei V tanī momentā, kuŗam $t_1 - t = \Delta t$ pieslies.

Tā kā $t_1 = t + \Delta t$, tad redzams, ka Δt pieslejās momentam t. Beidzot jānāk pie slēdziena, ka V_m sakritīs ar punkta īsto ātrumu momentā t, kad Δt samazināsies līdz 0, līdz ar ko līdz 0 samazināsies arī Δs, kādēļ

$$V = \lim(V_m)_{\Delta t=0} = \lim\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0}$$

(lim. ir robežas apzīmējums, cēlies no latiņu vārda limes - robeža, jeb franču - limite. Uz priekšu, raksta saīsinājuma labad, simbolā $\lim\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{\Delta t=0}$

un citos līdzīgos atmetīsim $\Delta t=0$ un rakstīsim vienkārši $\lim\frac{\Delta s}{\Delta t}$ u.t.t.)
Tā kā robežā katrs no lielumiem Δs un Δt paliek par 0, tad mēs gūtu $V=\frac{0}{0}$, nenoteikts skaitlis. Bet šo nenoteiktību var izslēgt, ja starp s un t pastāv funkcionāla sakarība, kas arī patiesībā ir. Diferenciālrēķinos tiek rādīts, kā šī nenoteiktība tiek izslēgta un patiesa robeža uzieta caur operācijām, kuŗas sauc par diferencēšanu un funkcijas atvasinātās pēc neatkarīgā lieluma (mūsu gadijumā s atvasinātās pēc t) uziešanu. Šo atvasināto apzīmē ar $\frac{ds}{dt}$ un tādēļ

$$V = \lim V_m = \lim\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Mēchanikā ļoti bieži dažādu lielumu atvasināto apzīmējumam pēc laika t lieto simbolu $\frac{dY}{ds} = \dot{s}$. Pie dažiem autoriem sastopams arī parastais matemātikā apzīmējums $\frac{ds}{dt} = s'$. Vienosimies lietot pirmo paņēmienu, paturot pēdējo mainīgā lieluma atvasinātās apzīmējumam pēc kāda cita lieluma, izņemot t.

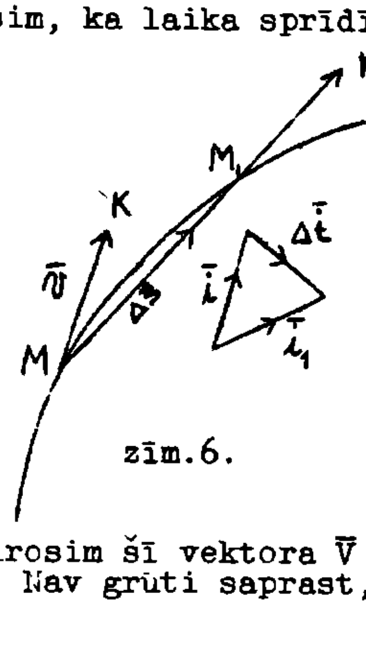
Atšķirsim arī uz priekšu divus ātrumus: pārvietošanās ātrumu dotā momentā V kā alģebrāisku lielumu un kustības ātrumu $|V|$ dotā momentā kā absolūtu lielumu, pie kam sakarība starp šiem ātrumiem ir

$$|V| = \pm V = \pm\frac{ds}{dt} = \pm\dot{s}$$

No formulas $V = \frac{ds}{dt}$ seko: $ds = Vdt$, $\int_{s_0}^{s} ds = s - s_0 = \int_{t_0}^{t} Vdt$, no kurienes ir redzams, ka ar V ātruma palīdzību, kā funkciju no laika t, $V = f(t)$, ir iespējams noteikt punkta stāvotni uz trajektorijas, kas tomēr vēl daudz nenozīmē, jo trajektorijas veidam jātiek iepriekš dotam. Bez tam pate stāvotnes noteikšanas operācija ir diezgan neērta. Kamēr citi līdzekļi mums nav zināmi, varētu rīkoties tā: ņemam diegu s garumā, kuŗa vienu galu savietojam ar mums jau pazīstamo sākuma p.A uz trajektorijas un diegu rūpīgi savietojot ar trajektoriju attiecīgā virzienā, vērojam kur nonāk diega gala punkts M. Šeit atradīsies kustošs punkts laika momentā t. Tikai vienā speciālā gadijumā punkta stāvotnes noteikšana būs ērta, proti, kad trajektorija ir taisne, kad garumus var ērti nospraust. Sakarā ar to jāsaka, ka pārvietošanās ātrums, kā alģebrāisks lielums, ir noderīgs tikai tam gadijumam, kad punkts pārvietojās gar taisni. Visiem pārējiem gadijumiem jāmēģina pārvietošanās ātruma jēdzienu paplašināt, noteicot viņu kā vektoriālu lielumu, reprezentētu caur vektoru.

§ 7. Punkta pārvietošanās ātrums kā vektoriāls lielums.

Pieņemsim, ka laika sprīdī Δt, kuŗš pieslienās dotam momentam t, kad kustošs punkts atrodās uz trajektorijas punktā M, pēdējais ir pārvietojies pa trajektoriju par loka garumu $\overline{MM_1} = \overline{\Delta s}$. Savienosim punktu M ar p. M_1 caur vektoru $\overline{MM_1}$ (pārvietojuma hordu) $= \overline{\Delta s}$, kuŗam piešķirsim virzienu, sakrītošu ar kustības virzienu un nospraudīsim no p.M $\overline{MM_1}$ virzienā vektoru $MK_1 = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$, t.i. vektoru tikdaudz reižu lielāku par $\overline{MM_1}$, cik vēlētā laika vienība [T] ir lielāka par Δt. Vektora $\overline{MK_1}$ robeža, kad $\Delta t = 0$, būs kāds vektors $\overline{MK}$, kuŗu skaitīsim par ātrumu $\overline{V}$ dotā momentā t, t.i.



zīm.6.

$$\overline{V} = \lim\frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} = \overline{MK}$$

Noskaidrosim šī vektora $\overline{V} = \overline{MK}$ elementus, virzienu, lielumu un iedarbes punktu. Nav grūti saprast, ka līdz ar Δt tuvošanos 0 punkts M_1 nepārtraukti tuvosies p.M, pie kam Δs un līdz ar viņu arī $\overline{MK_1}$ pakāpeniski arī mainīs savu virzienu, tuvodamies tangentes virzienam p.M un robežā pie $\Delta t = 0$ $\overline{MK_1}$ sakritīs ar tangentes virzienu p.M,t.i. ar $\overline{MK}$. Noskaidrojuš $\overline{V}$ virzienu, nodarbosimies ar viņa lielumu. Šinī nolūkā mēs varam augšā pievestā $\overline{V}$ dēfinicijas nolīdzinājumā atmest vektoru zīmes, pārejot uz skalaru sakarību:

$$V \doteq \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = MK$$

kur šī sakarība saista tagad tikai vektoru garumus. Ja funkcionāla sakarība starp s un t ir dota, t.i. ja ir dots kustības nolīdzinājums $s=f(t)$, tad $\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \pm \frac{ds}{dt} = \pm \dot{s}$, kur $\pm \frac{ds}{dt}$ ir $\dot{s}$ atvasinātās pēc t absolūta vērtība, kuŗa izteic punkta kustības (ne pārvietošanās) ātrumu dotā momentā.

Tā tad punkta pārvietošanās ātrums ir vektors $\overline{V}$, kuŗa:

1)virziens sakrīt ar tangenti, vilktu caur trajektorijas punktu,kur momentā t atrodās kustošs punkts,

2)lielums ir $V = \pm \frac{ds}{dt} = \pm \dot{s}$,

3)iedarbes punkts ir min.trajektorijas punkts,

4)apakšvirziens ir noteikts caur kustības virzienu.

Kā redzams $\overline{V}$ ir pilnīgi saistīts vektors, nepārnesams viņa darbības virzienā, pretēji spēka vektoram statikā, kuŗš ir slīdošs vektors.Vienosimies pievesto ātruma vektora dēfiniciju ietērpt sekojošā simboliskā formulā

$$\overline{V} = \lim \frac{\Delta \bar{s}}{\Delta t} = \frac{d\bar{s}}{dt} = \dot{\bar{s}}$$

kur sauksim $\frac{d\bar{s}}{dt}$ par ģeometrisko atvasināto no $\bar{s}$ pēc t.

Jau "Ievadā Mēchanikā" tika aizrādīts uz parastā vektoru apzīmējuma (ar strīpiņu virs burta) trūcību un tika rādītas priekšrocības, kuŗas dod vienības vektora lietošana. Vienības vektors ir tāds vektors, kuŗa garums ir 1, bet virziens sakrīt ar dotā vektora virzienu. Pareizinot šo vektoru uz skalari, varam dabūt kaut kuŗa vektora izteiksmi. Piemēram,tikko dēfinēto ātrumu $\overline{V}$ mēs varam izteikt tā: $\overline{V} = \bar{I}V$, kur $\bar{I}$ ir vienības vektors, kas sakrīt ar tangentes virzienu punktā M, bet V ir punkta kustības ātrums $V = \pm \frac{ds}{dt} = \pm \dot{s}$, kuŗš izteic vektora $\overline{V}$ garumu jeb moduli. $\bar{I}$ apakšvirziens ir noteikts caur punkta kustības resp. pārvietošanās virzienu. Ja $\bar{I}$ ir vienības vektors, kuŗš sakrīt ar tangentes virzienu punktā M,tad vienības vektoru $\bar{I}_1$ pārvietojuma hordas virzienā var saistīt ar $\bar{I}$ caur $\bar{I}_1 - \bar{I} = \Delta\bar{I}$, $\bar{I}_1 = \bar{I} + \Delta\bar{I}$ (sk.zīm.6) un $\Delta\bar{s} = \bar{I}_1 \Delta s = (\bar{I} + \Delta\bar{I})\Delta s$,

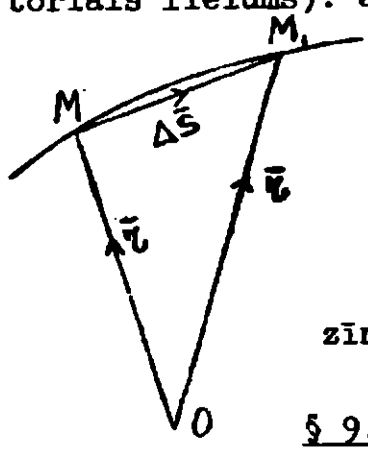
$$\overline{V} = \lim \left\{ (\bar{I}+\Delta\bar{I})\frac{\Delta s}{\Delta t} \right\} = \lim \bar{I} \frac{\Delta s}{\Delta t} + \lim \Delta\bar{I} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{I} \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{I} \frac{ds}{dt} = \bar{I}\dot{s} = \bar{I}V$$

jo $\lim \Delta i \frac{\Delta s}{\Delta t} = 0$. Šinīs formulās skalari, uz kuŗu pareizināts vienības vektors $\bar{I}$ vienmēr var skaitīt par alģebrāisku lielumu un pie tam vienmēr par pozitīvu, jo mēs vienojamies virzīt $\bar{I}$ pārvietošanās virzienā, pie kāda noteikuma ds vienmēr ir pozitīvs.

Piezīme. Daudzreiz izteiksmes un raksta saīsināšanas labad dažādu pārvietošanās īpašību apzīmējumiem atmet vārdu "pārvietošanās", rakstot,piemēram, punkta ātrums, zem kā būtu jāsaprot "punkta pārvietošanās ātrums".

§ 8. Punkta pārvietošanās ātrums jeb punkta ātrums kā ģeometriskais atvasinājums no punkta radiusa-vektora.

Ja ņemsim telpā negrozāmu punktu O (sk.zīm.7) un savienosim viņu ar pa trajektoriju kustošu punktu M, tad dabūsim tā saucamo kustošā punkta radiusu-vektoru, attiecībā pret negrozāmu punktu O. Punkta M kustības gaitā viņa radiuss-vektors maina savu lielumu un virzienu (mainās kā vektoriāls lielums). Ja momentā t radiuss-vektors ir $\bar{r}$, bet momentā t_1 viņš ir $\bar{r}_1$, tad no zīmējuma ir redzams, ka ģeometriski:



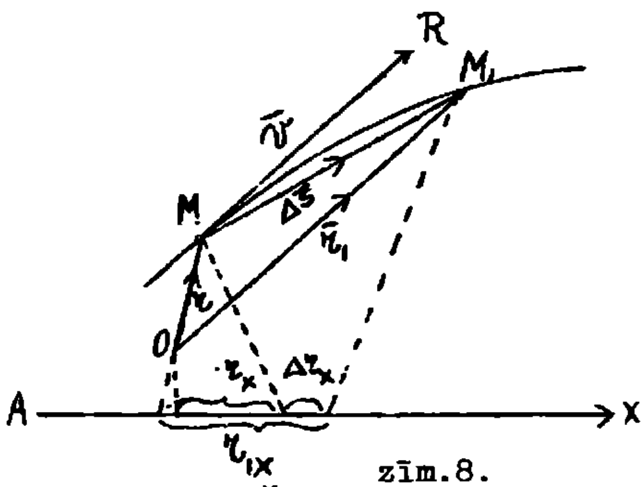
zīm.7.

$$\bar{r}_1 - \bar{r} = \overline{OM}_1 - \overline{OM} = \overline{MM}_1 = \Delta\bar{s} = \Delta\bar{r}$$

$$\lim \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \lim \frac{\Delta\bar{s}}{\Delta t} = \frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{V}$$ un teorēma ir pierādīta.

§ 9. Punkta pārvietošanās ātruma jeb punkta ātruma projekcijas analitiskā izteiksme uz negrozāmu asi.

No zīm.8. ir redzams, ka $\overline{MM}_1 = \overline{OM}_1 - \overline{OM} = \Delta\bar{s} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \Delta\bar{r}$. Noprojektēsim uz asi $\bar{X}$ abas šī nolīdzinājuma daļas, tad dabūsim



zīm.8.

$\Delta s \text{Cos}(\Delta\bar{s},\bar{X}) = r_{1x} - r_x = \Delta r_x$, kur r_{1x} un r_x ir attiecīgo radiusu-vektoru projekcijas uz asi $\bar{X}$, bet Δr_x ir šo vektoru projekciju pieaugums, kas atbilst laika sprīdim Δt.

Dalīsim abas augšējā nolīdzinājuma daļas uz Δt, tad

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \text{Cos}(\Delta\bar{s},\bar{X}) = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}$$

Šis nolīdzinājums nezaudē savu nozī[illegible] lai cik mazs arī nebūtu laika sprīdis Δt un arī robežā nolīdzinājums netiks traucēts, kad $\Delta t = 0$, t.i.

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{Cos}(\Delta\bar{s},\bar{X}) = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \lim \text{Cos}(\Delta\bar{s},\bar{X}) = V\text{Cos}(\bar{V},\bar{X}) = V_x = \lim \frac{\Delta r_x}{\Delta t} = \frac{dr_x}{dt} = \dot{r}_x$$

kur ar V_x ir apzīmēta ātruma projekcija uz asi $\bar{X}$, t.i. punkta ātruma projekcija uz negrozāmu asi analitiski izteicās caur radiusa-vektora projekcijas uz šo asi atvasinājumu pēc laika t.

§ 10. Punkta pārvietošanās ātruma, lieluma un virziena analitiskās izteiksmes ortogonālā koordinātu sistēmā.

Kad punkts M kustās telpā, viņa ortogonālās koordinātes (x,y,z) mainās līdz ar laiku, t.i. viņas ir kādas funkcijas no t. Pieņemsim, ka mums šīs funkcijas ir zināmas

$$x = F_1(t), \quad y = F_2(t), \quad z = F_3(t)$$

Ja šīs funkcijas ir dotas, tad punkta kustība ir pilnīgi noteikta, jo punkta stāvotne katrā brīdī telpā ir noteikta. Kā redzams, šim paņēmienam noteikt punkta kustību caur viņa koordinātēm, kā t funkcijām, ir lielas priekšrocības samērā ar paņēmienu s = f(t), kad trajektorijas veidu vajadzēja iepriekš dot. Mēs zinam, ka ātrums tiek noteikts, kad ir dots s = f(t). Nodarbosimies tagad ar jautājumu, kā noteikt ātrumu gadijumā, kad ir dotas funkcijas $x = F_1(t)$, $y = F_2(t)$ un $z = F_3(t)$.

Lai noteiktu ātrumu pilnīgi (kā skaitļa, tā arī virziena ziņā, t.i. kā vektoru) pietiek, ja katrā brīdī zināsim ātruma vektora projekcijas V_x, V_y, V_z uz attiecīgām koordinātu sistēmas asīm $(O,\bar{X},\bar{Y},\bar{Z})$, jo ja V_x, V_y, V_z būs zināmas, tad ātruma vektora skaitliskā nozīme (absolūtā) būs

$V = +\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$,bet vektora virzieni tiks noteikti caur leņķu cosinus'iem:

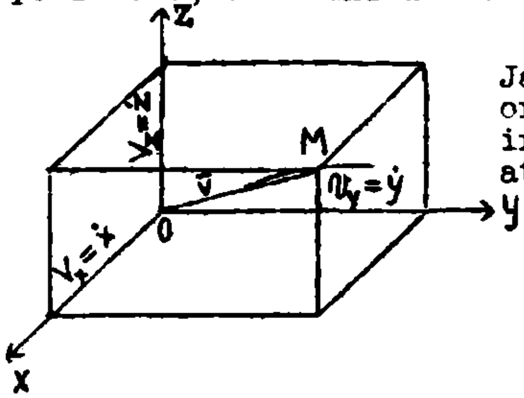
$$\mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{X}) = \frac{V_x}{V} = \frac{V_x}{+\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

$$\mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{Y}) = \frac{V_y}{V} = \frac{V_y}{+\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

$$\mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{Z}) = \frac{V_z}{V} = \frac{V_z}{+\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

Šinīs nolīdzinājumos cosinus'u zīmes (+ jeb -), jeb cosinus'us kā alģebrāiskus lielumus noteic projekcijas V_x, V_y un V_z, kuŗas ir izteiktas caur alģebrāiskiem skaitļiem. Tālākais uzdevums ir prast sastādīt V_x, V_y un V_z kā funkcijas no t. Tas ir viegli izdarams ar iepriekšējo formulu palīdzību, kur tika doti:

$$V_x = \dot{r}_x\ ,\ V_y = \dot{r}_y \text{ un } V_z = \dot{r}_z$$



zīm.9.

Ja (sk.zīm.9) savienosim kustošu punktu M ar koordinātu sistēmas centru O, tad radiuss-vektors ir $\bar{r} = \overline{OM}$, bet šī radiusa-vektora projekcijas uz attiecīgām asīm, kā redzams, ir:

$$r_x = x\ ,\ r_y = y\ ,\ r_z = z \quad \text{un tā tad}$$

$$V_x = \dot{r}_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{F}_1(t)$$

$$V_y = \dot{r}_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \dot{F}_2(t)$$

$$V_z = \dot{r}_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} = \dot{F}_3(t)$$

Saskaņā ar šīm formulām gūstam

$$V = +\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = +\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{X}) = \frac{V_x}{V} = \frac{\dot{X}}{+\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$\mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{Y}) = \frac{V_y}{V} = \frac{\dot{Y}}{+\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$\mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{Z}) = \frac{V_z}{V} = \frac{\dot{Z}}{+\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

Piemērs. Izpētīt punkta kustību, kuŗa ir noteikta taisnā ortogonalā koordinātu sistēmā caur nolīdzinājumiem

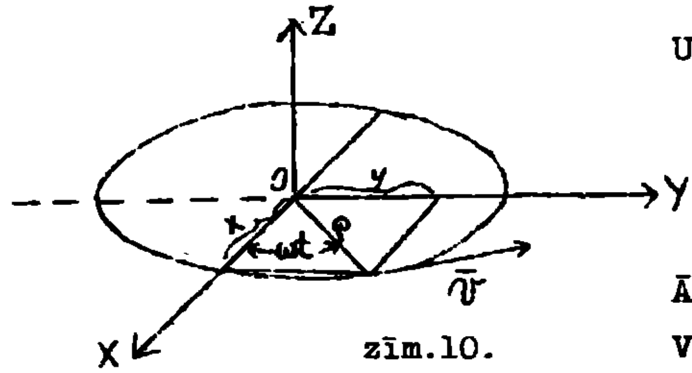
$$x = r\,\mathrm{Cos}\omega t,\ y = r\,\mathrm{Sin}\omega t,\ z = 0$$

kur ω ir kāds pastāvīgs lielums.

Tā kā z = 0, tad kustība notiek koordinātu sistēmas XOY plaknē. Paceļot pirmos divus nolīdzinājumus otrā pakāpē un pie tam viņus saskaitot, dabūsim

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\mathrm{Cos}^2\omega t + \mathrm{Sin}^2\omega t) = \rho^2$$

no kā ir redzams, ka punkta trajektorija ir riņķis aprakstīts plaknē XOY ar radiusu ρ ap koordinātu sākumu.



zīm.10.

Uziesim punkta pārvietošanās ātrumu:

$$V_x = \dot{x} = -\rho\omega\ \mathrm{Sin}\omega t$$

$$V_y = \dot{y} = \rho\,\omega\ \mathrm{Cos}\omega t$$

$$V_z = \dot{z} = 0$$

Ātruma $\bar{V}$ lielums (moduls)

$$V = +\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \rho\cdot\omega$$

t.i. punkts pārvietojās gar min. riņķi vienmērīgi.

Šinī vienmērīgā pārvietošanā gar riņķi pārvietojošos punkta projekcijas x un y veido pa asīm OX un OY svārstības kustības ar amplitudu $a = \rho$, kuŗas sauc par harmoniskām kustībām.

§ 11. Punkta pārvietošanās noteikšana, kad ir dots viņa pārvietošanās ātrums katrā momentā un punkta sākuma stāvotne.

Punkta pārvietošanās ātrums katrā momentā būs pilnīgi noteikts, ja katrā momentā būs dotas punkta ātruma projekcijas uz 3 ortogonālām koordinātu asīm, t.i. ja būs dotas

$$V_x = f_1(t), \quad V_y = f_2(t), \quad V_z = f_3(t)$$

Pieņemsim, ka punkta sākuma stāvotne ir noteikta caur

$$(x)_{t=t_o} = x_o\ , \quad (y)_{t=t_o} = y_o\ , \quad (z)_{t=t_o} = z_o$$

kur t_o ir moments, kad punkts atradās sākuma stāvotnē, noteiktā caur koordinātēm x_o, y_o, z_o.

Sakars starp ātruma projekcijām un punkta koordinātēm bija (sk.§ 9)

$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}\ , \quad V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}\ , \quad V_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

Ņemsim kaut kuŗu no šiem nolīdzinājumiem, piemēram pirmo: $V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$, un pareizināsim to ar dt, tad

$$V_x dt = \dot{x}dt = dx$$

Līdzīgi dabūsim

$$V_y dt = \dot{y}dt = dy$$

un

$$V_z dt = \dot{z}dt = dz$$

Tad

$$\int_{x_o}^{x} dx = x - x_o = \int_{t_o}^{t} V_x dt, \qquad x = x_o + \int_{t_o}^{t} V_x dt$$

$$\int_{y_o}^{y} dy = y - y_o = \int_{t_o}^{t} V_y dt, \qquad y = y_o + \int_{t_o}^{t} V_y dt$$

$$\int_{z_o}^{z} dz = z - z_o = \int_{t_o}^{t} V_z dt, \qquad z = z_o + \int_{t_o}^{t} V_z dt$$

Tā kā V_x, V_y un V_z ir doti kā funkcijas no t, tad integrāļus $\int V_x dt, \int V_y dt$ un $\int V_z dt$ ir iespējams ņemt, un mēs esam nonākuši pie nolīdzinājumiem, kuŗu veids ir $x = F_1(t)$, $y = F_2(t)$, $z = F_3(t)$, t.i. punkta stāvotne katrā brīdī būs noteikta caur viņa projekciju kustības (pārvietošanās) nolīdzinājumiem. Ja no šiem nolīdzinājumiem izslēdz t, tad dabūjam saistību starp kustoša punkta koordinātēm trajektorijas nolīdzinājumu veidā.

Piemērs. Noteikt punkta pārvietošanos, ja ātruma $\bar{V}$ projekcijas ortogonālā koordinātu sistēmā ir dotas

$$V_x = a, \quad V_y = bt, \quad V_z = ct^2 \quad \text{un ja}$$

$$(x)_{t=t_o=o} = 0, \quad (y)_{t=t_o=o} = 0 \quad \text{un} \quad (z)_{t=t_o=o} = 0$$

Tad (sk.§ 11):

$$x = x_o + \int_{t_o}^{t} a dt = |at|_o^t = at$$

$$y = y_o + \int_{t_o}^{t} bt.dt = \left| \frac{b}{2} t^2 \right|_o^t = \frac{bt^2}{2}$$

$$z = z_o + \int_{t_o}^{t} ct^2 dt = \left| \frac{ct^3}{3} \right|_o^t = \frac{ct^3}{3}$$

Izslēdzot t, dabūjam:

$$\frac{x}{a} = \pm\sqrt{\frac{2y}{b}} = \sqrt[3]{\frac{3z}{c}}$$

nolīdzinājumu sistēmu, kuŗa noteic punkta trajektoriju telpā.

II. Punkta paātrinājums.

§ 1. Vidējais paātrinājums punkta taisnvirzieniskā pārvietošanā.

Par punkta vidējo paātrinājumu viņa taisnvirzieniskā pārvietošanā sauksim attiecību

$$j_m = \frac{V_1 - V}{t_1 - t} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

kur $V_1 - V = \Delta V$ ir alģebrāisks ātruma pieaugums, atbilstošs laika sprīdim $t_1 - t = \Delta t$. Šī jaunā lieluma Maxwell'a simbols ir

$$j_m = \frac{(\Delta V).[LT^{-1}]}{(\Delta t).[T]} = (\frac{\Delta V}{\Delta t})[LT^{-2}] = (j_m)[LT^{-2}]$$

Piemērs.

$$j_m = (j_m)[mtr\ sec^{-2}]$$

Cik paātrinājuma vienību ir j_m', ja par garuma vienību pieņemtu $(1)[ctm]$, bet par laika vienību $(1)[min]$. Tā kā $(1)[mtr] = (100)[ctm]$ un $(1)[sec] = (\frac{1}{60})[min]$, tad $j_m' = (j_m).(100)(\frac{1}{60}{}^{-2})[ctm\ min^{-2}] =$

$= (j_m\ 36.10^4)[ctm\ min^{-2}]$, t.i. jauno vienību skaitu dabūjam no iepriekšējā, pareizinot viņu uz 36.10^4.

§ 2. Vienmērīgi mainīga punkta pārvietošanās taisnā virzienā.

Ja vidējais punkta taisnvirzieniskās pārvietošanās paātrinājums j_m piepatur pastāvīgu nozīmi priekš visiem laika sprīžiem, t.i. ja

$$j_m = \frac{V_1 - V}{t_1 - t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = Const = j_o$$

tad tādu punkta pārvietošanos sauc par vienmērīgi mainīgu un paātrinājuma j_o absolūto lielumu $|j_o| = \pm j_o$ sauc par vienmērīgi mainīgās kustības paātrinājumu.

Atkarībā no tā, vai ātruma absolūtās vērtības līdz ar laiku pieaug jeb dilst, izšķir punkta paātrinātu jeb nolēninātu kustību.

Piemērs. Ātruma maiņas likums ir dots caur nolīdzinājumu $V = \frac{V_o}{t_o}(t_o - t)$. Uziet kustības paātrinājumu $|j_o| = \pm j_o$ un noteikt paātrinātās un palēninātās kustības zonas.

Atb.:
$$|j_o| = \pm \frac{V_1 - V}{t_1 - t} = \pm \frac{V_o}{t_o}\left\{\frac{(t_o - t_1)-(t_o - t)}{t_1 - t}\right\} = -\frac{V_o}{t_o} = \frac{V_o}{t_o}$$

Kustība ir nolēnināta starp $t = 0$ un $t = t_o$ un paātrināta pie $t > t_o$, jo pirmā starpā ātrumu absolūtās vērtības dilst, bet otrā pieaug.

Ja $\frac{V_o}{t_o} < 0$, tad notiek tas pats.

§ 3. Punkta dotā momentā paātrinājums viņa taisnvirzieniskā pārvietošanā.

Par punkta paātrinājumu dotā momentā viņa taisnvirzieniskā pārvietošanā sauksim viņa vidējā pārvietošanās paātrinājuma, atbilstoša bezgalīgi mazam laika sprīdim Δt, kurš pieslejās dotam laika momentam, robežu. Tādā kārtā, apzīmējuši ar V un V_1 punkta pārvietošanās ātrumus momentā t un $t_1 = t + \Delta t$ un pašu paātrinājumu ar j, saskaņā ar pievesto paātrinājuma dēfinīciju dabūjam

$$j = \lim \frac{V_1 - V}{t_1 - t} = \lim \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

Turpretīm, par punkta kustības paātrinājumu dotā momentā t sauksim viņa pārvietošanās paātrinājuma dotā momentā t absolūto vērtību, tā kā sakars starp abiem šiem paātrinājumiem būs $|j| = \pm j$, kur $|j|$ ir punkta kustības paātrinājums, bet j viņa pārvietošanās paātrinājums - algebrāisks lielums.

Bez tam vēl var apskatīt jautājumu, vai kustība ir paātrināta jeb nolēnināta. Šinī nolūkā mēs apskatam ātrumu absolūto lielumu pieaugumu. Ja pēdējais ir pozitīvs, $\frac{d|V|}{dt} > 0$, kustība ir paātrināta, ja $\frac{d|V|}{dt} < 0$ - nolēnināta.

Piemērs. Ja punkts pārvietojās pa taisni un $s = a + bt$, tad $j = \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$, t.i. paātrinājuma nav un punkts kustās vienmērīgi; ja $s = a + bt + ct^2$, tad $j = \frac{d^2 s}{dt^2} = 2c$ un kustība ir vienmērīgi mainīga ar paātrinājumu $|j_o| = \pm 2c$. Apskatīsim jautājumu vai minētā kustība ir paātrināta jeb nolēnināta. Šinī nolūkā uziesim ātrumu $V = \frac{ds}{dt} = b + 2ct$.

Ja $b > 0$ un $c < 0$, tad kustība ir nolēnināta no $t = 0$ līdz $t_o = -\frac{b}{2c}$ un tālāki paātrināta.

Ja $b < 0$ un $c > 0$, tad kustība tāpat ir nolēnināta no $t = 0$, līdz $t_o = -\frac{b}{2c}$ un tālāki paātrināta. Ja b un c ir vienādas zīmes, tad kustība vienmēr ir paātrināta.

Ja pārvietošanās paātrinājums j uz taisnes kā f(t) līdz ar sākuma apstākļiem ir dots, tad var uziet kustības nolīdzinājumu $s = f(t)$.

Piemērs. $j = 2c$, $(V)_{t=0} = b$, $(s)_{t=0} = a$. Uziet kustības nolīdzinājumu.

$j = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dV}{dt} = 2c$; $dV = 2c dt$; $\int dV = V = 2c\int dt + C_1 = 2ct + C_1$;

$(V)_{t=0} = b = (2ct + C_1)_{t=0} = C_1$ un $V = b + 2ct$. Tālāki $V = \frac{ds}{dt} = b + 2ct$

$ds = b dt + 2ct\, dt$; $\int ds = s = b\int dt + 2c\int t dt + C_2 = bt + ct^2 + C_2$;

$(s)_{t=0} = a = (bt + ct^2 + C_2)_{t=0} = C_2$ un $s = a + bt + ct^2$, kas ir vienmērīgi mainīgas kustības (pārvietošanās) nolīdzinājums.

Noslēdzot jautājumu par punkta taisnvirzieniskas kustības paātrinājumu, varam teikt, ka mēs varējam izšķirt trīs paātrinājuma veidus:

1) pārvietošanās paātrinājumu, kā alģebrāisku lielumu, ar kuŗa palīdzību, kā tika rādīts ar piemēru, var tieši atrisināt jautājumu par $s = f(t)$,

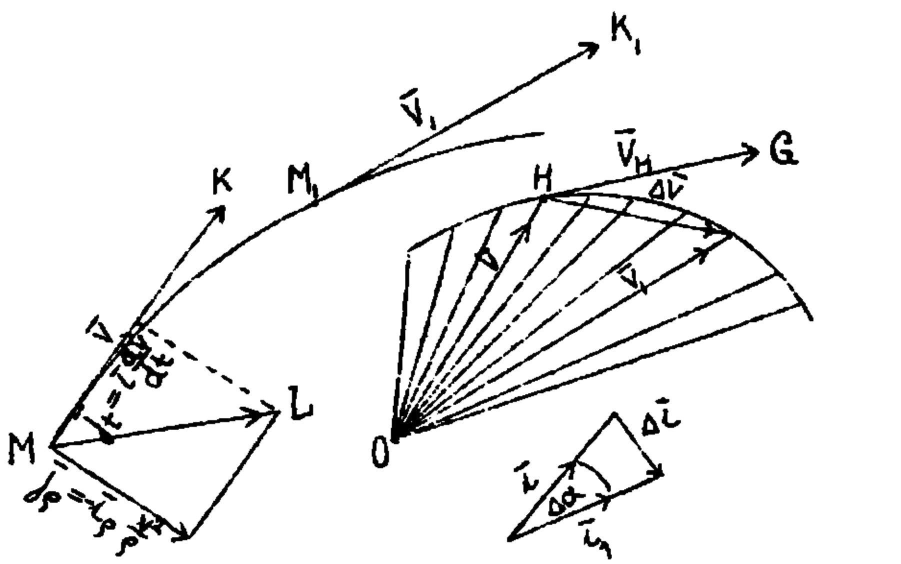
2) vienmērīgi paātrinātas resp. palēninātas kustības paātrinājumu, kā absolūtu lielumu, un

3) paātrinātas un nolēninātas kustības paātrinājumu, izejot no ātrumu absolūto lielumu salīdzināšanas.

§ 4. Punkta pārvietošanās paātrinājums vispārējā gadijumā.

Kad punkts pārvietojās telpā, tad viņa ātrums, vispārīgi runājot, maina savu lielumu un virzienu, t.i. ātrums mainās kā vektors.

Par punkta pārvietošanās paātrinājumu dotā momentā vispārējā gadijumā sauksim punkta ātruma ģeometriskā pieauguma, atbilstoša bezgalīgi mazam laika sprīdim Δt, kuŗš pieslejās dotam momentam t, attiecības robežu pret pašu šo laika sprīdi Δt. Tā tad, saskaņā ar šo dēfiniciju, apzīmējuši ar $\bar{V} = \overline{MK}$ (sk.zīm.11) punkta M ātrumu momentā t, ar $\bar{j}$ viņa paātrinājumu tanī pašā momentā, bet ar $\bar{V}_1 = \overline{M_1K_1}$ viņa ātrumu momentā $t_1 = t + \Delta t$, dabūjam:



zīm.11.

$$\bar{j} = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}}{t_1 - t} = \lim \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt}$$

t.i. paātrinājums $\bar{j}$ ir dabūjams kā ģeometriskā atvasinātā no $\bar{V}$ pēc t. Punkta paātrinājums dotā momentā t ir kāds vektors $\bar{j} = \overline{ML}$, nospraus̄ts no kustoša punkta. Šim vektoram ir ārkārtīga nozīme visā mēchanikā, jo caur viņu Newton's izteic punkta kustības maiņu, kuŗas cēlonis ir spēks. Pēdējo Newton's saista ar kustības maiņu - paātrinājumu caur vienkāršu proporcionālitāti, likdams $\bar{P}$ (spēks) $= m\bar{j}$, kur m proporcionālitātes koeficients izteic materiāla punkta masu.

Lai noskaidrotu $\bar{j}$ vektora elementus, angļu zinātnieks Hamiltons ir licis priekšā sekojošu paņēmienu. Izvēlējuši telpā brīvu punktu O, nospraudīsim no viņa vektoru $\overline{OH}$ ģeometriski vienādu ar punkta M ātrumu momentā t. Ja šādu nospraušanu izdarītu ar visiem ātruma vektoriem starp divām punkta M stāvotnēm uz trajektorijas, tad šo vektoru gali veidotu kādu īpatnēju līkni, kuŗu sauc par dotās pārvietošanās ātruma hodografu (no grieķu vārdiem ὁδός - ceļš un γραφω - rakstu). Līdz ar punkta M kustību teilpā mainīga līdz ar laiku t ātruma vektora gals H slīdēs gar šo līkni, jeb viņš šo līkni aprakstīs. Citiem vārdiem, hodografs ir trajektorija, kuŗu apraksta kāds kustošs punkts - p.M ātruma vektora gals H, kuŗš - ātruma vektors - rotē (griežās) ap p.O kā ap centru nepārtraukti mainīdams savu garumu un virzienu. Tā tad punktam M kustoties telpā un aprakstot trajektoriju, tanī pašā laikā (sinchroniski) tiek aprakstīta otra līkne - hodografs, pie kam katrai punkta M stāvotnei uz trajektorijas atbilst noteikta otra punkta H, aprakstoša hodografu, stāvotne uz pēdējā. No hodografa ir redzams, ka hodografu aprakstoša punkta H ātrums $\bar{V}_H$ ir

$$\bar{V}_H = \lim \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{j} \quad , \quad d\bar{V} = \bar{j}\, dt$$

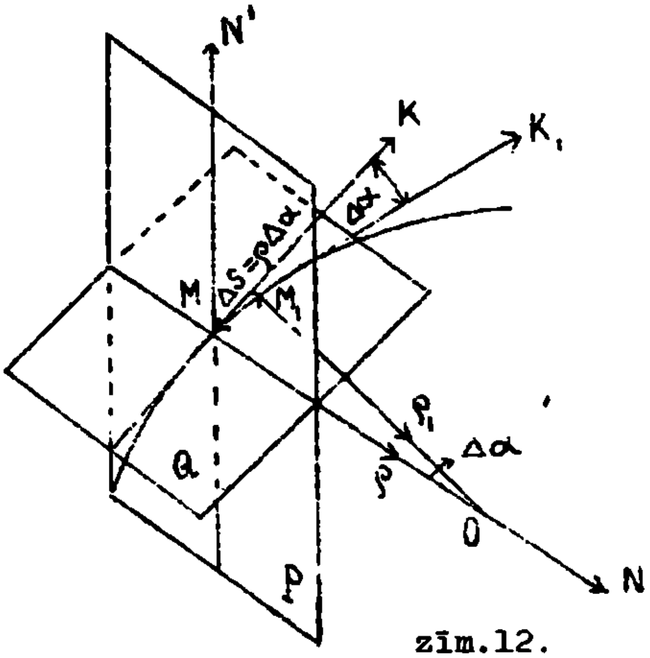
t.i. punkta M paātrinājums $\bar{J}$ ir ģeometriski vienāds ar punkta H,kurš apraksta hodografu, ātrumu $\bar{V}_H$.

Secinājumi. 1) Punkta vienmērīgā pārvietošanā pa taisni,punkta pārvietošanās ātruma hodografs pāriet punktā;

2) ja punkts pārvietojās taisnā virzienā ar mainīgu ātrumu, viņa pārvietošanās ātruma hodografs ir taisne;

3) ja punkts pārvietojās vienmērīgi kādā plaknē, tad viņa ātruma hodografs ir riņķa aploce, kuras plakne sakrīt jeb ir parallēla dotās pārvietošanās plaknei, hodografa radiuss ir vienāds ar dotās vienmērīgās pārvietošanās ātrumu.

§ 5. Daži ģeometriski jēdzieni.



zīm.12.

Par tangenti līknes punktā M saucās linija MK, ar kuru sakrīt horda MM_1 robežstāvotnē,kad punkts M_1 traucās savietoties ar punktu M.(sk.zīm.12).

Plakne P, kura vilkta caur p.M uz līknes perpendikulāri pret tangenti MK, saucās par līknes normālo plakni dotā viņas punktā M.

Novilksim p.M līcības radiusu ρ,t.i.tādu radiusu,kurš ir perpendikulārs pret tangenti MK punktā M un ar kuru var aprakstīt no tā saucamā līcības centra O bezgalīgi mazu līknes elementu Δs, kurš pieslejās punktam M.Tā kā ρ ir perpendikulārs pret tangenti MK, bet normalā plakne P ir perpendikulāra pret tangenti MK, tad ρ atrodās normalā plaknē P. Var iedomāties savukārt plakni, kura ietver sevī radiusus ρ un ρ_1.Šīs plaknes robežstāvotne ($\lim \Delta\alpha = 0$) ir plakne Q,kuru sauc par līcības plakni. Tā kā līcības plaknē Q atrodās tangente MK, kura ir perpendikulāra pret normālo plakni P, tad plaknes P un Q ir savstarpīgi ortogonālas. Šo plakņu krustojuma linija MN, ar kuru sakrīt līcības radiuss ρ, saucās par pirmo jeb galveno normali, bet liniju MN',perpendikulāru pret tangenti MK un galveno normali MN - par binormali.

Sakars starp aploces elementu Δs, līcības radiusu ρ un centrālo leņķi, kuru veido divi bezgali tuvi līdzības radiusi ρ un ρ_1, ir

$$\Delta s = \rho\Delta\alpha \ , \quad \Delta\alpha = \frac{\Delta s}{\rho}$$

Šo pašu leņķi veido savā starpā arī tangentes MK un M_1K_1,kuras ir attiecīgi perpendikulāras pret līcības radiusiem ρ un ρ_1 (sk.zīm.12).

§ 6. Punkta paātrinājuma komponentes - tangenciālā un radiālā.

Ievedīsim vienības vektoru $\bar{I}$, kura garums ir 1, virziens sakrīt ar ātrumu vektoru $\bar{V}$ punktā M un apakšvirziens ar pārvietošanās virzienu.Tad var ātruma vektoru $\bar{V}$ punktā M izteikt kā skalares - ātruma absolūtas vērtības V (kustības ātrums) - produktu ar vienības vektoru $\bar{I}$,t.i. var izteikt $\bar{V} = \bar{I}V$, kur V ir pozitīvs lielums, jo pārvietošanās un vienības vektora apakšvirziens ir vienādi

$$V = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Ātruma vektors $\bar{V} = \bar{I}V$ mainās līdz ar laiku, pie kam mainās abi viņa elementi, t.i. $\bar{I}$ un V. Pirmais ieņem stāvotni $\bar{I}_1$ parallēlu $\bar{V}_1$,savu garumu tomēr nemainīdams (sk.zīm.11), jo viņa garums vienmēr paliek 1, bet V pāriet V_1. Mēs varam abus jaunos lielumus $\bar{i}_1$ un V_1 izteikt caur iepriekšējiem, likdami $\bar{i}_1 = \bar{i} + \Delta\bar{i}$ un $V_1 = V + \Delta V$, tad $\bar{V}_1 = \bar{i}_1.V_1 = (\bar{i}+\Delta\bar{i})(V+\Delta V)$ un $\Delta\bar{V} = \Delta(\bar{i}V) = (\bar{i}+\Delta\bar{i})(V+\Delta V) - \bar{i}V = \bar{i}V + \Delta\bar{i}V + \bar{i}\Delta V + \Delta\bar{i}.\Delta V - \bar{i}V = \Delta\bar{i}V + \bar{i}\Delta V + \Delta\bar{i}.\Delta V$

Saskaņā ar paātrinājuma $\bar{j}$ dēfiniciju

$$\bar{j} = \lim \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta\bar{i}V + \bar{i}\Delta V + \Delta\bar{i}\Delta V}{\Delta t} = \frac{Vd\bar{i}}{dt} + \frac{\bar{i}dV}{dt}\ , \text{ jo } \lim \frac{\Delta\bar{i}\Delta V}{\Delta t} = 0$$

No šīs formulas arī ir redzams, kā tiek izpildīta vektora diferencēšana, kurš sastādīts ar vienības vektora palīdzību. Šī operācija formas pēc tiek izdarīta tāpat, kā produkta iV diferencēšana, kuŗa abi lielumi, i un V, ir skalari, jo $diV = diV + idV$. Kā redzams, paātrinājums $\bar{j}$ sakrīt divās komponentēs, no kuŗām $\frac{\bar{i}dV}{dt}$ ir noteikti ātruma vektora $\bar{V}$ virziens, jo $\bar{i}$ ar pēdējo sakrīt. $\frac{dV}{dt}$ izteic paātrinājumu $\bar{i}$ virzienā un tā kā $\bar{i}$ virziens sakrīt ar tangentes virzienu punktā M, tad $\frac{\bar{i}dV}{dt} = \bar{j}_t$ sauc par punkta M pārvietošanās tangenciālo paātrinājumu. Kā redzams, $\frac{dV}{dt}$ var būt kā pozitīvs, tā arī negatīvs, atkarībā no tā, vai ātruma absolūtā vērtība tangenciālā virzienā aug jeb dilst. Pēdējā gadijumā $\bar{j}_t$ maina savu virzienu pret $\bar{i}$, kurš vienmēr sakrīt ar pārvietošanās virzienu, kā to pieņēmām.

No zīm.11 ir redzams, ka $\bar{i}$ un $\bar{i}_1$, kuŗi ir parallēli $\bar{V}$ un $\bar{V}_1$, sastāda savā starpā leņķi $\Delta\alpha$, to pašu, kuŗu sastāda līcības radiusi ρ punktā M un ρ_1 punktā M_1. Sakarā ar šo $\Delta\bar{i} = -1.\Delta\alpha\ \bar{i}_\rho$, kur $\bar{i}_\rho$ ir vienības vektors, kurš robežā sakrīt ar $\bar{\rho}$ virzienu, kā to nav grūti saprast, ja sāk $\Delta\alpha$ samazināt līdz 0, un kuŗa apakšvirziens iet no līcības centra O pret kustošu punktu M.

Bet $\Delta s = \rho\Delta\alpha$, kādēļ $\Delta\bar{i} = -\bar{i}_\rho.\frac{\Delta s}{\rho}$ un tādēļ $\frac{Vd\bar{i}}{dt} = -\bar{i}_\rho.\frac{Vds}{\rho dt} = -\bar{i}_\rho\frac{V^2}{\rho}$

Šī ir punkta pārvietošanās paātrinājuma tā saucamā radiālā komponente $\bar{j}_\rho = -\bar{i}_\rho\frac{V^2}{\rho}$, kuŗa vienmēr ir virzīta pa līcības radiusu no kustoša punkta pret līcības centru ($\frac{V^2}{\rho}$ vienmēr ir pozitīvs). Tā tad punkta pārvietošanās paātrinājums sakrīt divās komponentēs $\bar{j} = \bar{j}_t + \bar{j}_\rho = \frac{\bar{i}dV}{dt} - \bar{i}_\rho\frac{V^2}{\rho}$ (sk.zīm.11.), kur $\frac{dV}{dt} = \dot{V} = \frac{d}{dt}(\frac{ds}{dt}) = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$. Paātrinājums tā tad komponenti binormales virzienā nedod. Vektora $\bar{j}$ garums

$$j = +\sqrt{(\bar{i}\dot{V})^2 + (\bar{i}_\rho\frac{V^2}{\rho})^2} = +\sqrt{(\dot{V})^2 + (\frac{V^2}{\rho})^2}$$

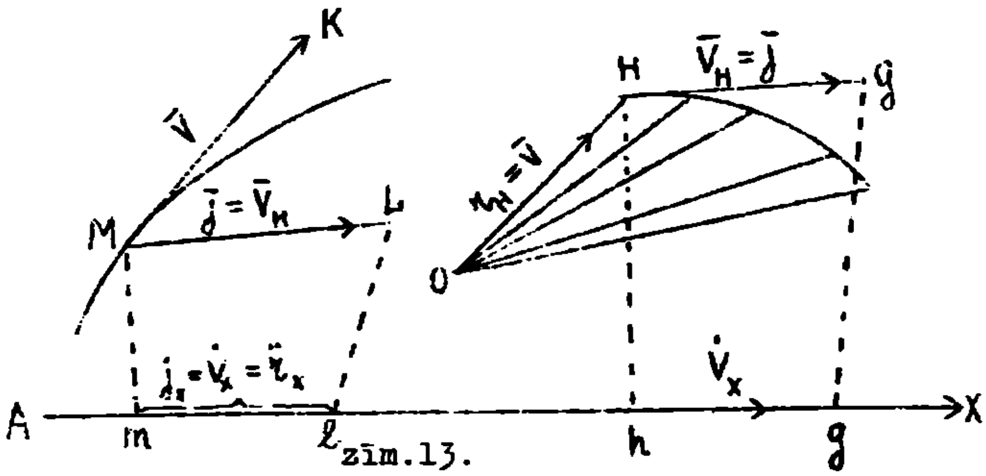
Apskatīsim dažus atsevišķus gadijumus.

1)Ja kustība ir taisnvirzieniska, tad $\rho = \infty$ un $\bar{j} = \frac{\bar{i}dV}{dt}$. Tā kā vektors $\bar{j}$ visu laiku sakrīt ar taisni, tad projektēsim viņu uz pārvietošanās pozitīvo virzienu uz taisnes, caur ko dabūjam $j = \frac{dV}{dt}$, algebrāisku izteiksmi.

2)Ja kustība notiek ar vienmērīgu ātrumu V_o gar kādu līkni, tad $\frac{dV_o}{dt} = 0$ un $\bar{j}_t = 0$, paliek tikai $\bar{j}_\rho = -\bar{i}_\rho\frac{V_o^2}{\rho}$. Gadijumā, kad punkts pārvietojās vienmērīgi pa riņķi, ar radiusu r, tad $\bar{j}_t = 0$, $\bar{j}_\rho = -\bar{i}_r\frac{V_o^2}{r}$

3)Kad punkts pārvietojās taisnā virzienā ar vienmērīgu ātrumu, tad $\bar{j}_t = \bar{j}_\rho = 0$, paātrinājuma nekāda nav.

§ 7. Punkta paātrinājuma projekcijas analitiskā izteiksme uz negrozāmu asi.



zīm.13.

Tā kā punkta paātrinājuma vektors $\bar{J}$ un punkta H ātruma, kurš apraksta pārvietošanās hodografu, vektors ģeometriski ir vienādi, $\bar{J} = \bar{V}_H$, tad viņu projekcijas uz kādu negrozāmu asi AX arī ir vienādas, t.i.

$j\operatorname{Cos}(\bar{J},\bar{X}) = j_x =$

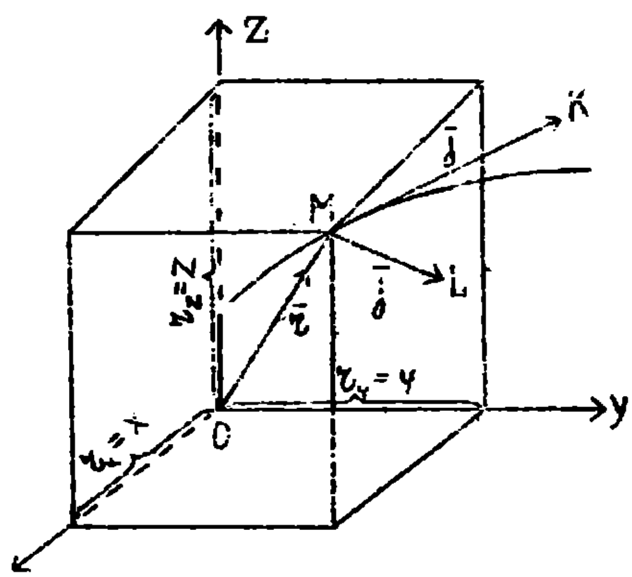
$= V_H \operatorname{Cos}(\bar{V}_H,\bar{X}) = V_{HX}$

Bet, kā jau zinam, kāda pārvietojošā punkta ātrum $\bar{V}$ projekcija V_x uz kādu negrozāmu asi AX analitiski tiek izteikta kā pirmā atvasinātā no radiusa-vektora $\bar{r}$ uz to pašu asi projekcijas r_x pēc laika t (sk.I.§ 9), t.i. $V_x = \dot{r}_x$. Tā kā punkta H radiuss-vektors $\bar{r}_H = \bar{V}$ (sk.zīm.13), tad

$$V_H \operatorname{Cos}(\bar{V}_H,\bar{X}) = V_{HX} = \dot{r}_{HX} = \dot{V}_x = (\dot{r}_x)^{\cdot} = \ddot{r}_x = (\dot{x})^{\cdot} = \ddot{x}$$

kur x ir pārvietojošā punkta koordināte (sk.I.§ 10) ortogonalā taisnā koordinātu sistēmā, ja no visām 3 savstarpīgi ortogonālām projekciju asīm veido ortogonalu koordinātu sistēmu, šīs asis, pārnesot paralēli sev lai viņas krustotos kādā punktā - koordinātu sistēmas sākumā.

§ 8. Punkta paātrinājuma lieluma un virziena analitiskas izteiksmes ortogonālā koordinātu sistēmā.



zīm.14

Ja punkta pārvietošanās ortogonālā projekciju sistēmā ir dota caur nolīdzinājumiem:

$$x = F_1(t),\ y = F_2(t) \text{ un } z = F_3(t)$$

tad punkta paātrinājuma lieluma un virziena noteikšanai pietiek ar paātrinājuma vektora projekciju uziešanu uz šīm asīm. No pēdējām var veidot ortogonalu koordinātu sistēmu. Šinī nolūkā savienojam pārvietojošos punktu M ar koordinātu sākumu O caur raiduss-vektoru $\overline{OM} = \bar{r}$, tad, kā redzams, $r_x = x$, $r_y = y$ un $r_z = z$ un uz iepriekšējās teorēmas pamata

$$j_x = \ddot{r}_x = \ddot{x} = \dot{V}_x$$

$$j_y = \ddot{r}_y = \ddot{y} = \dot{V}_y$$

$$j_z = \ddot{r}_z = \ddot{z} = \dot{V}_z$$

t.i. punkta paātrinājuma vektora projekcijas ortogonālā koordinātu sistēmā analitiski tiek izteiktas caur otriem atvasinājumiem no attiecīgām punkta koordinātēm pēc laika t un tādēļ punkta paātrinājuma lielums un virziens ir izteikti caur formulām:

$$j = +\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = +\sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}$$

$$\mathrm{Cos}(\overline{j},\overline{X}) = \frac{j_x}{j} = \frac{\ddot{x}}{+\sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}}$$

$$\mathrm{Cos}(\overline{j,Y}) = \frac{j_y}{j} = \frac{\ddot{y}}{+\sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}}$$

$$\mathrm{Cos}(\overline{j},\overline{Z}) = \frac{j_z}{j} = \frac{\ddot{z}}{+\sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}}$$

Kā redzams cosinus'us, kā alģebrāiskus lielumus, noteic projekciju $j_x = \ddot{x}$, $j_y = \ddot{y}$ un $j_z = \ddot{z}$ zīmes, jo

$$j = +\sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}$$

ir absolūts skaitlis.

§ 9. Punkta pārvietošanās noteikšana caur viņa paātrinājumu projekcijām un tā sauc. sākuma apstākļiem.

Punkta pārvietošanās ir pilnīgi noteikta, ja ir zināmi:
1) paātrinājuma lielums un virziens katrā momentā,
2) pārvietošanās sākuma apstākļi, t.i. punkta stāvotne un viņa ātruma lielums un virziens kādā noteiktā momentā $t = t_o$.

Pieņemsim, ka mums ir doti:

$$j_x = f_1(t), \quad j_y = f_2(t), \quad j_z = f_3(t)$$

un

$$(x)_{t=t_o} = x_o \; , \quad (\dot{x})_{t=t_o} = \dot{x}_o$$

$$(y)_{t=t_o} = y_o \; , \quad (\dot{y})_{t=t_o} = \dot{y}_o$$

$$(z)_{t=t_o} = z_o \; , \quad (\dot{z})_{t=t_o} = \dot{z}_o$$

Tā kā $j_x = \ddot{x}$, $j_y = \ddot{y}$ un $j_z = \ddot{z}$, tad

$$\ddot{x} = f_1(t) = j_x$$

$$\ddot{y} = f_2(t) = j_y$$

$$\ddot{z} = f_3(t) = j_z$$

Pareizināsim katru no šiem nolīdzinājumiem ar dt, tad

$$\ddot{x}.dt = d\dot{x} = f_1(t)dt = j_x dt$$

$$\ddot{y}.dt = d\dot{y} = f_2(t)dt = j_y dt$$

$$\ddot{z}.dt = d\dot{z} = f_3(t)dt = j_z dt$$

Integrējot dabūjam

$$\int_{\dot{x}_o}^{\dot{x}} d\dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_o = \int_{t_o}^{t} j_x dt \; , \quad \dot{x} = \dot{x}_o + \int_{t_o}^{t} j_x dt$$

$$\int_{\dot{y}_o}^{\dot{y}} d\dot{y} = \dot{y} - \dot{y}_o = \int_{t_o}^{t} j_y dt \; , \quad \dot{y} = \dot{y}_o + \int_{t_o}^{t} j_y dt$$

$$\int_{\dot{z}_o}^{\dot{z}} d\dot{z} = \dot{z} - \dot{z}_o = \int_{t_o}^{t} j_z dt \; , \quad \dot{z} = \dot{z}_o + \int_{t_o}^{t} j_z dt$$

Pareizināsim beidzamos nolīdzinājums vēl reizi ar dt, tad

$$\dot{x}.dt = dx = (\dot{x}_o + \int_{t_o}^{t} j_x dt)dt$$

$$\dot{y}.dt = dy = (\dot{y}_o + \int_{t_o}^{t} j_y dt)dt$$

$$\dot{z}.dt = dz = (\dot{z}_o + \int_{t_o}^{t} j_z dt)dt$$

Integrējot dabūjam

$$\int_{x_o}^{x} dx = x - x_o = \int_{t_o}^{t} \dot{x}.dt \quad , \quad x = x_o + \int_{t_o}^{t} \dot{x}.dt$$

$$\int_{y_o}^{y} dy = y - y_o = \int_{t_o}^{t} \dot{y}.dt \quad , \quad y = y_o + \int_{t_o}^{t} \dot{y}.dt$$

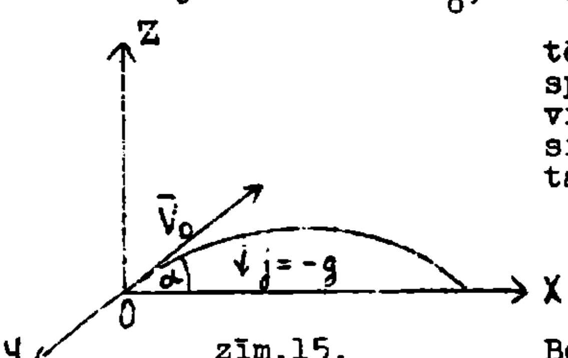
$$\int_{z_o}^{z} dz = z - z_o = \int_{t_o}^{t} \dot{z}.dt \quad , \quad z = z_o + \int_{t_o}^{t} \dot{z}.dt$$

un uzdevums ir atrisināts, jo ir dabūtas izteiksmes

$$x = F_1(t) \;, \quad y = F_2(t) \quad un \quad z = F_3(t)$$

kas pilnīgi noteic punkta pārvietošanos.

Piemērs. Noteikt smaga punkta pārvietošanos, kurš sviests gaisa brīvā medijā ar ātrumu V_o, virzītu pret horicontu zem $\angle\alpha$.



zīm.15.

Izvēlēsim ortogonalu koordinātu sistēmu tā, lai Z ass sakristu ar smaguma spēka paātrinājumu, bet viņas pozitīvais virziens ietu vertikāli uz augšu. Tālāk, sistēmas centru novietosim sviestā punkta pirmstāvotnē.

$$(x)_{t=t_o} = x_o = 0, \; (y)_{t=t_o} = y_o = 0,$$

$$(z)_{t=t_o} = z_o = 0$$

Bez tam sistēmas plakni ZOX savietosim ar vertikalu plakni, kuŗa iet caur ātrumu $\bar{V}_o$, tad, kā redzams

$$(\dot{x})_{t=t_o} = \dot{x}_o = V_o Cos\alpha$$

$$(\dot{y})_{t=t_o} = \dot{y}_o = 0$$

$$(\dot{z})_{t=t_o} = \dot{z}_o = V_o Sin\alpha$$

Bez tam, tā kā paātrinājums g sakrīt ar Z asi, tad

$$j_x = \ddot{x} = 0$$

$$j_y = \ddot{y} = 0$$

$$j_z = \ddot{z} = -g$$

Augšējās formulas, piemērotas šim gadijumam, dod

$$\dot{x} = \dot{x}_o + \int_{t_o}^{t} j_x dt = \dot{x}_o = V_o \; Cos\alpha$$

$$\dot{y} = \dot{y}_o + \int_{t_o}^{t} j_y dt = \dot{y}_o = 0$$

$$\dot{z} = \dot{z}_o + \int_{t_o}^{t} j_z dt = V_o Sin\alpha - g \int_{t_o}^{t} dt = V_o Sin\alpha - g(t - t_o)$$

Tālāk

$$1)\ x = x_o + \int_{t_o}^{t} \dot{x}.dt = x_o + \int_{t_o}^{t} V_o\cos\alpha.dt = V_o\cos\alpha(t - t_o)$$

$$2)\ y = y_o + \int_{t_o}^{t} \dot{y}.dt = 0$$

$$3)\ z = z_o + \int_{t_o}^{t} \dot{z}.dt = z_o + \int_{t_o}^{t} \left\{V_o\sin\alpha - g(t - t_o)\right\} dt =$$

$$= z_o + \int_{t_o}^{t} V_o\sin\alpha.dt - g\int_{t_o}^{t} (t - t_o)d(t-t_o) = z_o + V_o\sin\alpha(t-t_o) - g\cdot\frac{(t-t_o)^2}{2}$$

No nolīdzinājuma (2) ir redzams, ka smaga punkta trajektorija atrodas ZOX plaknē, t.i. vertikalā plaknē, kuŗa iet caur sākuma ātrumu $\vec{V}_o$. Izslēdzot no nolīdzinājumiem (1) un (3) $(t-t_o)$, dabūjam trajektorijas nolīdzinājumu $z = x\ tg\alpha - g\dfrac{x^2}{2V_o^2\cos^2\alpha}$, no kā redzams, ka smaga punkta trajektorija ir parabole. Dabujuši smaga punkta trajektoriju, atrisināsim vēl uzdevumu rindas

1) Kāds ir punkta nokrišanas attālums x_ℓ?

Trajektorijas nolīdzinājumu jāpielīdzina

$$z = 0 = x_\ell tg\alpha - \frac{g\,x_\ell^2}{2V_o^2\cos^2\alpha} = 0,\text{ kas dod } x_\ell = 0 \text{ un } tg\alpha - \frac{gx_\ell}{2V_o^2\cos^2\alpha} = 0 \text{ no kurienes } x_\ell = \frac{tg\alpha.2V_o^2\cos^2\alpha}{g} = 2\sin\cos\alpha\frac{V_o^2}{g} = \sin 2\alpha\frac{V_o^2}{g}, \max x_\ell = \frac{V_o^2}{g}\max\sin 2\alpha =$$

$$= \frac{V_o^2}{g}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{V_o^2}{g}\cdot 1 = \frac{V_o^2}{g}\ ;\quad 2\alpha = \frac{\pi}{2},\quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$, t.i. sviediens zem leņķa $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^o$ dod vislielāko nokrišanas attālumu.

2) Vislielākais smaga punkta pacelšanās augstums max z ?

Jāņem atvasinājums no z pēc x un jāpielīdzina

$$\dot{z} = \frac{dz}{dx}dz = 0,\text{ tad } \dot{z} = 0 = tg\alpha - \frac{g\,x}{V_o^2\cos^2\alpha} = 0$$

no kurienes $x = tg\alpha\dfrac{V_o^2}{g}\cos^2\alpha = \sin\alpha.\cos\alpha\dfrac{V_o^2}{g} = \dfrac{x_\ell}{2}$ un

$$\max z = \sin\alpha\cos\alpha\frac{V_o^2}{g}tg\alpha - \frac{g.\sin^2\alpha}{2V_o^2\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha\cdot\frac{V_o^4}{g^2} = \sin^2\alpha\cdot\frac{V_o^2}{g} - \frac{\sin^2\alpha}{2}\cdot\frac{V_o^2}{g} =$$

$$= \sin^2\alpha\frac{V_o^2}{2g}$$

$\text{Max}(\max) = \dfrac{V_o^2}{2g}$, kā redzams, ir panākams pie $\sin\alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^o$, t.i. sviežot smaga punktu ar ātrumu V_o vertikāli uz augšu.

3) Laiks, kuŗā smags punkts pacelsies vislielākā augstumā?

Ņemam formulu $z = V_o\sin\alpha(t-t_o) - \dfrac{g(t-t_o)^2}{2}$ un ievietojam viņā

$$z = \max z = \sin^2\alpha\frac{V_o^2}{2g},\text{ tad } \frac{g}{2}(t-t_o)^2 - V_o\sin\alpha(t-t_o) + \sin^2\alpha\frac{V_o^2}{2g} = 0$$

$(t-t_o) = V_o Sin\alpha \pm \frac{\sqrt{V_o^2 Sin^2\alpha - \frac{4g}{2}\cdot Sin^2\frac{\alpha}{2g}\cdot V_o^2}}{g} = V_o \frac{Sin\alpha}{g}$,bet moments $t = t_o + V_o \frac{Sin\,\alpha}{g}$,no kā ir redzams,ka $max(t-t_o) = \frac{V_o}{g}$ max $sin\alpha = \frac{V_o}{g} Sin\frac{\pi}{2} = \frac{V_o}{g} 1 = \frac{V_o}{g}$,t.i vislielākais pacelšanas laiks būs novērojams gadijumā, kad punkts ir sviests vertikalā virzienā.

4)Laiks, pēc kuŗa notecēšanas smagais punkts nokritīs uz X ass?

Ņemam formulu $z = V_o Sin\alpha(t-t_o) - g\cdot\frac{(t-t_o)^2}{2}$ un pielīdzinam $z = 0$,no kurienes

$$(t-t_o)\left[(V_o Sin\alpha - g\cdot\frac{(t-t_o)}{2}\right] = 0$$

Šim nolīdzinājumam ir divas saknes $(t-t_o)_1 = 0$, $t = t_o$,kas nozīmē punkta izsviešanas (izlaišanas no rokām) momentu. Otra sakne $(t-t_o)_2 = \frac{2V_o Sin\alpha}{g}$ Tā tad nokrišanas laiks līdzinājās dubultam pacelšanas laikam, jeb pacelšanas laiks ir vienāds ar nokrišanas laiku.

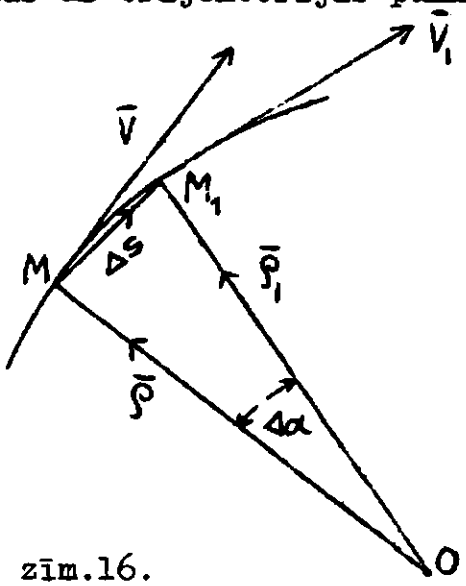
Nokrišanas moments $t = \frac{2V_o}{g} Sin\alpha + t_o$

$max\ t = \frac{2V_o}{g} max\ Sin\alpha + t_o = \frac{2V_o}{g} Sin\frac{\pi}{2} + t = \frac{2V_o}{g} + t_o$, t.i.sviešanā vertikalā virzienā nokrišanas moments t gūst savu vislielāko nozīmi.

III. Leņķiskais ātrums un paātrinājums.

§ 1. Leņķiskais ātrums.

Pieņemsim, ka pārvietojošais punkts, kuŗš laika momentā t atrodas uz trajektorijas punktā M, momentā $t + \Delta t = t_1$ atrodās punktā M_1, pārvietodamies par Δs.Tad Δs ir pārvietojums, kas atbilst laika sprīdim Δt, pie kam pēdējais pieslejās momentam t. Ņemsim vērā centrālā leņķa pieaugumu $\Delta\alpha$ par to pašu laika sprīdi Δt. Ja līcības radiusu p.M apzīmēsim ar ρ, tad $\Delta s = \rho\Delta\alpha$ un



zīm.16.

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \rho\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}; lim\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = V = \rho lim\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \rho\frac{d\alpha}{dt} = \rho\omega$, kur $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$, jo $\alpha = f(t)$. Lielumu $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ sauc par punkta leņķisko ātrumu momentā t.;ω var uztvērt kā alģebrāisku lielumu atkarībā no tā, uz kuŗu pusi pa trajektoriju punkts pārvietojās - pozitīvo attālumu virzienā jeb otrādi, pie kam ω piešķirāma vienāda zīme ar Δs. Ir ērtāki uzskatīt ω, saskaņā ar franču zinātnieku Poinsot, kā vektoru, kuŗu nosprauž uz asi, ejošu caur līcības centru O perpendikulāri pret līcības plakni MM_1O. Vektors $\bar{\omega}$ tiek nosprausts tā, ka nostājoties viņa virzienā redz punkta pārvietošanos pa trajektoriju, notiekošu zinamā virzienā,piemēram,pulksteņa rādītāja pārvietošanās virzienā jeb viņai pretējā.(sk.zīm.17)

Tad Poinsot vektora $\bar{\omega}$ garums $\omega = \pm\frac{d\alpha}{dt}$, absolūts lielums.

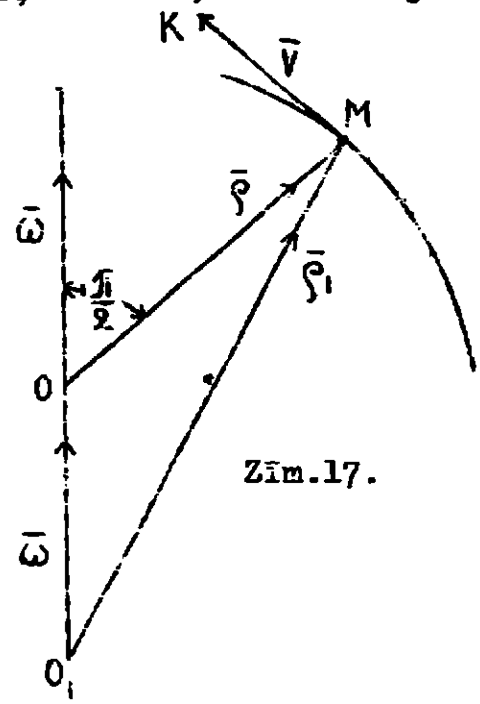
Leņķiskā ātruma ω Maxwell'a simbols ir

$$\omega = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\frac{[1]}{[T]} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)[T^{-1}] = (\omega)[T^{-1}]$$

jo α ir nenosaukts (abstrakts) skaitlis.

§ 2. Ātruma vektors $\bar V$, kā leņķiskā ātruma $\bar\omega$ moments.

Veidosim Poinsot $\bar\omega$ attēlojumu (sk.zīm.17) un apskatīsim divus vektorus $\bar V$ un $\bar\rho\omega$, kuŗi skaitliski ir vienādi, jo, kā redzējām, (sk.III.§1) $V = \rho\omega$. Sastādīsim no $\bar\omega$ un no $\bar\rho$, līcības radiusa, vektoriālu produktu $\bar L = [\bar\omega,\bar\rho]$. Šis vektors stāv perpendikulāri pret $(\bar\omega,\bar\rho)$ plakni un viņa garums $L = \omega\rho = V$. Tā kā $\bar V$ vektors arī ir perpendikulārs pret plakni $(\bar\omega,\bar\rho)$, tad $\bar V$ un $\bar L$ ir paralleli un vienāda garuma. Ja $\bar L$ apakšvirzienu pieņemsim tā, lai nostājušies viņā, redzētu $\bar\omega$ caur rotāciju visīsākā ceļā savietojoties ar $\bar\rho$ pretīm pulksteņa rādītāja pārvietošanās virzienam, tad arī abu vektoru $\bar V$ un $\bar L$ apakšvirzieni sakrīt, un $\bar V = \bar L = [\bar\omega,\bar\rho]$. Leņķis starp $\bar\omega$ un $\bar\rho$ bija $\frac{\pi}{2}$; ja pārnes $\bar\omega$ viņa darbības virzienā, tad leņķis $(\bar\omega,\bar\rho)$ mainās, bet tā, ka $\rho\,\mathrm{Sin}(\bar\omega,\bar\rho) = \rho_1\mathrm{Sin}(\bar\omega,\bar\rho_1) = \rho = \mathrm{Const}$, tad arī vektoriālais produkts $\bar V = \bar L = [\bar\omega,\bar\rho]$ caur tādu operāciju nemainās. Tā tad Poinsot vektors $\bar\omega$ var tikt pārnests viņa darbības virzienā, viņš ir slīdošs, bez noteikta iedarbes punkta, tāpat, kā spēks P statikā: $\bar V$ nozīme caur šo operāciju nemainās.



Zīm.17.

Ievērosim 3 vienības vektorus: $\bar I_\omega$ virzienā $\bar\omega$, $\bar I_\rho$ virzienā $\bar\rho$ un $\bar I$ virzienā $\bar V$, tad $\bar I V = [\bar I_\omega\cdot\omega, \bar I_\rho\cdot\rho] = [\bar I_\omega,\bar I_\rho]\omega\rho = \bar I\rho\omega$

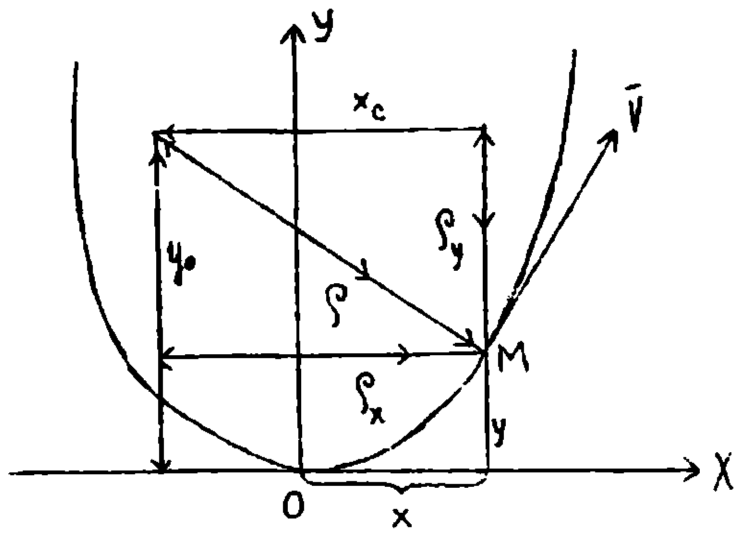
§ 3. Ātruma vektora $\bar V$, izteikta caur leņķisko ātrumu, projekciju analitiskās izteiksmes ortogonālā koordinātu sistēmā.

$$V_x = \dot x = [\bar\omega,\bar\rho]_x = \omega_y\cdot\rho_z - \omega_z\cdot\rho_y$$
$$V_y = \dot y = [\bar\omega,\bar\rho]_y = \omega_z\cdot\rho_x - \omega_x\cdot\rho_z$$
$$V_z = \dot z = [\bar\omega,\bar\rho]_z = \omega_x\cdot\rho_y - \omega_y\cdot\rho_x$$

Piemērs 1. Punkts pārvietojās gar paraboli, kuŗas nolīdzinājums ortogonālā koordinātu sistēmā (O,X,Y,Z) ir $y = x^2$, $z = 0$. Viņa ātruma projekcija V_x piepatur pastāvīgu nozīmi $V_x = \mathrm{Cost.} = V_0$. Uziet līcības centra C trajektoriju.

Tā kā pārvietošanās notiek plaknē $z = 0$, tad $\omega_x = \omega_y = 0$ un $\omega_z = \omega$, kādēļ

$$V_x = V_0 = -\omega\rho_y$$
$$V_y = \omega\rho_x = \frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = 2xV_0$$
$$\sqrt{V_x^2 + V_y^2} = V_0\sqrt{1 + 4x^2} = V = \rho\omega$$



$$x_c = x - \rho_x = x - \frac{V_y}{\omega} = $$
$$= x - \frac{V_y \cdot \rho}{V}$$

$$y_c = y - \rho_y = y + \frac{V_o}{\omega} =$$
$$= y + \frac{V_o \cdot \rho}{V}$$

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

bet $\frac{dy}{dx} = 2x, \ \frac{d^2y}{dx^2} = 2,$

zīm.18.

kādēļ $\rho = \frac{(1 + 4x^2)^{3/2}}{2}$ un

$$x_c = x - \frac{2xV_o(1 + 4x^2)^{3/2}}{2.V_o(1 + 4x^2)^{1/2}} = x - x(1 + 4x^2) = x - x - 4x^3 = -4x^3$$

$$y_c = y + \frac{V_o(1 + 4x^2)^{3/2}}{2.V_o(1+4x^2)^{1/2}} = y + \frac{1 + 4x^2}{2}$$

Bet $y = x^2$, kādēļ:

$$y_c = x^2 + \frac{1 + 4x^2}{2} = \frac{2x^2 + 1 + 4x^2}{2} = \frac{1 + 6x^2}{2}$$

un $x_c = -4x^3$

Lai gūtu saistību starp y_c un x_c, izslēdzam no abiem beidzamiem nolīdzinājumiem x, caur ko gūstam:

$$\frac{2y_c - 1}{6} = x^2$$
$$-\frac{x_c}{4} = x^3$$

$$\left(\frac{2y_c - 1}{6}\right)^3 = \left(-\frac{x_c}{4}\right)^2 = \left(\frac{x_c}{4}\right)^2$$

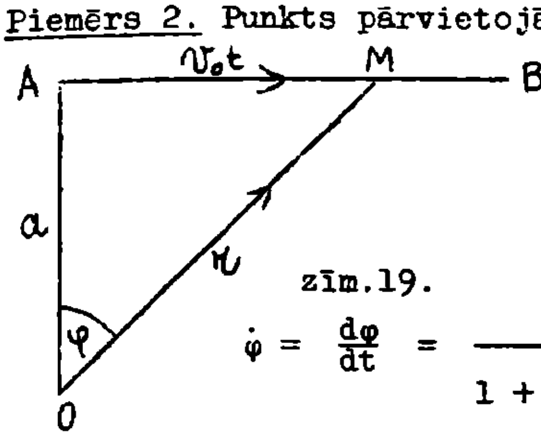
Līcības centra ātrums:

$$V_{cx} = \dot{x}_c = (-4x^3)^{\cdot} = -12x^2\dot{x} = -12x^2V_o$$
$$V_{cy} = \dot{y}_c = \dot{y} = \frac{1 + 6x^2}{2} = 6x\dot{x} = 6xV_o$$
$$V_c = + V_o\sqrt{144x^4 + 36x^2}$$

Līcības centra paātrinājums:

$$j_{cx} = \ddot{x}_c = (-12x^2V_o)^{\cdot} = -24xV_o^2$$
$$j_{cy} = \dot{y}_c = (6xV_o)^{\cdot} = 6V_o^2$$
$$j = + V_o^2\sqrt{576x^2 + 36}$$

Piemērs 2. Punkts pārvietojās ar vienmērīgu ātrumu $\dot{V}_0$ gar taisni AB. Uziet viņa leņķisko ātrumu pret punktu O atstatumā a no minētās taisnes, ja momentā $t = t_0 = 0$ pārvietojošs punkts atrodās punktā A.



zīm.19.

No zīm.19 seko, ka

$$AM = V_0 t = a\ \mathrm{tg}\varphi; \quad \varphi = \mathrm{arctg}\ \frac{V_0 t}{a}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{V_0}{a}}{1 + (\frac{V_0}{a}t)^2} = \frac{aV_0}{a^2 + V_0^2 t^2} = \frac{aV_0}{r^2}$$

§ 4. Leņķiskais paātrinājums.

Mēs redzējām (III,§.2), ka $\bar{i}V = -[\bar{i}_\rho \rho, \bar{i}_\omega \omega] = -[\bar{i}_\rho, \bar{i}_\omega]\rho\omega = \bar{i}\rho\omega$.
Duferencēsim šo nolīdzinājumu, tad

$$d(\bar{i}V) = \bar{i}dV - \bar{i}_\rho \frac{V}{\rho} ds = d(\bar{i}\rho\omega) = \bar{i}d(\rho\omega) - \bar{i}_\rho \rho\omega d\alpha = \bar{i}(\omega d\rho + \rho d\omega) - \bar{i}_\rho . \rho\omega d\alpha$$

(sk.II,§6). Ņemot atvasināto pēc t, dabūjam

$$\frac{d(\bar{i}V)}{dt} = \bar{j} = \bar{i}\dot{V} - \bar{i}_\rho \frac{V^2}{\rho} = \bar{i}(\omega\dot{\rho} + \rho\dot{\omega}) - \bar{i}_\rho . \rho\omega^2$$

Ja ρ = Const., tad $d\rho = 0$ un tad $\bar{j} = \bar{i}\rho\dot{\omega} - \bar{i}_\rho . \rho\omega^2$. Šinī nolīdzinājumā jauns un nenoskaidrots ir $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{d\alpha}{dt}) = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \mathcal{T}$. Šo lielumu sauc par leņķisko paātrinājumu. Viņa dimenzija ir

$$= (\frac{d\omega}{dt})\frac{[T^{-1}]}{[T]} = (\frac{d\omega}{dt})[T^{-2}] = (\mathcal{T})[T^{-2}]$$

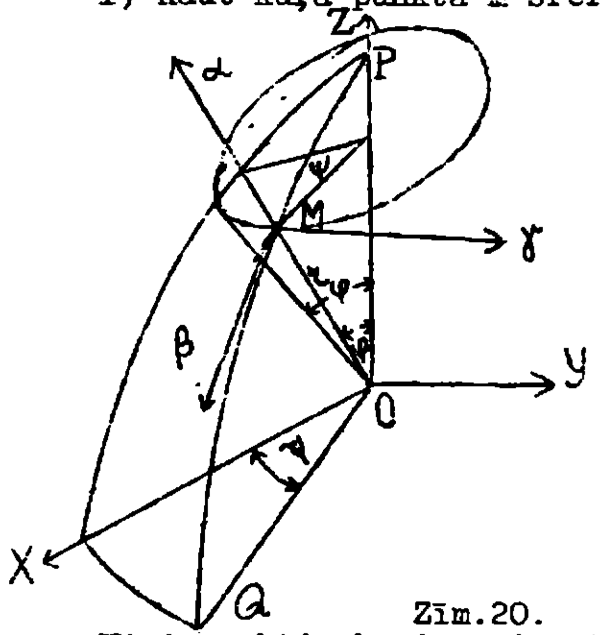
Leņķisko paātrinājumu var dabūt kā algebrāisku lielumu, jo leņķu skaitīšanu varam izdarīt kā pulksteņa rādītāja pārvietošanās virzienā, tā arī viņam pretējā, ja nostājamies ar pulksteni Poinsot vektora virzienā. Skaitot vienu no šiem virzieniem par pozitīvu,otru būtu jāskaita par negatīvu, atšķirot šos virzienus caur zīmēm + un −. Vēl ērtāki ir attēlot arī $\mathcal{T}$ kā vektoru pēc Poinsot metodes, pie kam, ja ω absolūtā vērtība līdz ar laiku pieaug, $\mathcal{T}$ nospraužņ $\bar{\omega}$ virzienā un otrādi.Ja ω absolūtā vērtība dilst, tad rotācija nolēninās un abi Poinsot vektori $\bar{\omega}$ un $\mathcal{T}$ izrādās pretēji virzīti.

IV. Punkta pārvietošanās noteikšana ar citu koordinātu sistēmu palīdzību.

§ 1. Koordinātu sistēmas sferiskā,cilindriskā un polārā plaknē.

Daudzos gadijumos, analizes ērtības labad, pārvietojošos punkta stāvotni izteic ar citas kādas sistēmas koordinātu palīdzību,piemēram, ar koordinātu sistēmu, kuŗa krustojās ne zem taisniem leņķiem (ne ortogonālā sistēma, bet zem leņķiem, atšķirīgiem no $\frac{\pi}{2}$ (slīpleņķa koordinātu sistēma), tāļāk koordinātu sistēma var tikt izvēlēta polāra,sferiskā un citas, skatoties pēc pārvietošanās rakstura. Apskatīsim še dažas no šīm sistēmām.

1) Kaut-kuŗa punkta M sferiskas koordinātes ir (sk.zīm.20.):



Zīm.20.

$r = OM$

radiusa-vektora garums, t.i. attālums no sistēmas tā sauc. pola O.

$\varphi = \angle MOP$

ir leņķis, kuŗu veido radiuss-vektors ar OP - tā sauc. polāro sistēmas asi.

$\psi = \angle XOQ$

ir divskaldniska kakta leņķis, kuŗu veido plakne POMQ ar plakni POX, kuŗu var nosaukt par pirmā meridiana plakni.

Visi punkti, kuŗiem piemīt viena un tā pati koordināte, $r = R$, atrodas uz sferas virsmas, kuŗas centrs ir O un radiuss R.

Visi punkti, kuŗiem piemīt viena un tā pati koordināte $\varphi = \Phi$, atrodās uz kona virsmas, kuŗa virsotne ir p.O un veidule sastāda ar polāro asi leņķi $\varphi = \Phi$.

Visi punkti, kuŗiem piemīt viena un tā pati koordināte $\psi = \Psi$, atrodās uz vienas un tās pašas meridionālas plaknes, kuŗa iet caur polāro asi OP.

Šīs virsmas sauc par koordinātu virsmām. Visa telpa ir ieņemta no trim virsmām: 1) $r = R$, 2) $\varphi = \Phi$ un 3) $\psi = \Psi$. Punkta M stāvotne ir noteikta kā šo 3 virsmu krustojuma punkts. Uz zīm.20. ir redzams, kādu stāvotni pret min. sistēmu ieņem Dekarta ortogonālā sistēma ar asīm $\overline{X}, \overline{Y}, Z$.

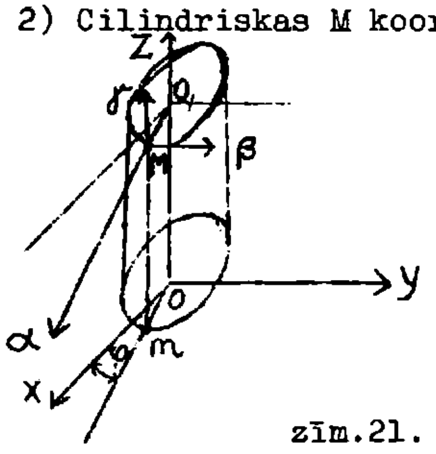
Katras divas no min. koordinātu virsmām krustojās gar liniju, kuŗu sauc par koordinātu liniju, bet šo liniju tangentes p.M α, β un γ sauc par koordinātu asīm; viņas ir ortogonalas un maina savu stāvotni telpā līdz ar pārvietojošos p.M stāvotni. Šo asu pozitīvie virzieni sakrīt ar attiecīgas koordinātes r, φ un ψ pieauguma virzienu, proti: ass α, kuŗa sakrīt ar liniju $\varphi = \Phi$, pozitīvais virziens sakrīt ar r pieauguma virzienu; ass β, kuŗa ir tangente meridianam $\psi = \Psi$ uz sferas $r = R$, pozitīvais virziens sakrīt ar to virzienu, kuŗā pieaug koordināte φ, un ass γ, kuŗa ir tangente p.M mazam riņķim $\varphi = \Phi$ uz sferas $r = R$, pozitīvais virziens sakrīt ar koordinātes ψ pieauguma virzienu. (Leņķis ψ pieaug pretējā pulksteņa rādītāja pārvietošanās virzienam, ja ar pulksteni nostājās OP virzienā).

Pārvietojošā punkta koordinātes r, φ un ψ ir laika t funkcijas

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t), \quad \psi = f_3(t)$$

Ja šīs funkcijas ir zināmas, tad arī punkta M stāvotne katrā dotā momentā t ir zināma. Izslēdzot no šīs nolīdzinājumu sistēmas t, dabūjam 2 saistības starp r, φ un ψ, kuŗas noteic punkta M trajektoriju sferiskās koordinātēs.

2) Cilindriskas M koordinātes ir (sk.zīm.21.):



zīm.21.

a) $z = Z = OO_1 = Mm$

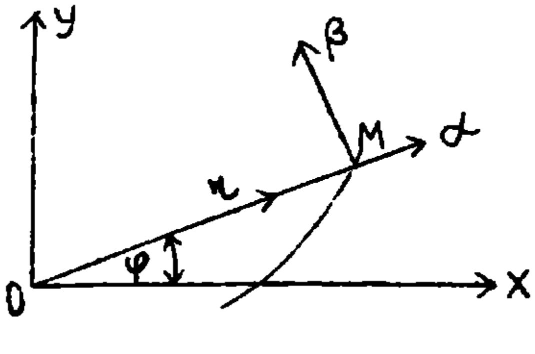
punkta M attālums no pamatplaknes XOY; koordinātu virsmas izteiktas caur $z = Const.$ ir plaknes, parallēlas plaknei XOY; z var mainīties starp $z = \infty$ un $z = -\infty$

b) $\varphi = \angle mOX$

ir divskaldniska, starp pamatplakni ZOX un meridionālo plakni O_1MmO kakta leņķis; koordinātu virsmas, kuŗu nolīdzinājums ir $\varphi = Const.$, ir plaknes, ejošas caur OZ; φ var mainīties no $\varphi = 0$ līdz $\varphi = 2\pi$, kā uz pozitīvu, tā arī negatīvu virzienu pusi.

c) $r = O_1M = Om$ ir punkta attālums no pamatass OZ; koordinātu virsmas, izteiktas caur nolīdzinājumu $r = Const.$ ir cilindriskas virsmas ar ripas šķēlienu ar veidulēm, parallēlām asij OZ; r var mainīties no $r=0$ līdz $r = +\infty$.

3) Polāras p.M koordinātes ir (sk.zīm.22.):



zīm.22.

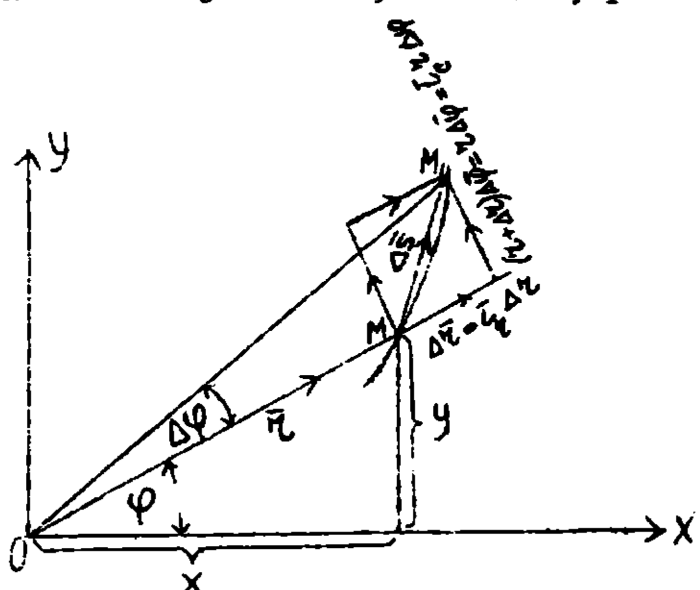
radiuss-vektors $r = OM$ un leņķis $\varphi = \angle MOX$. Koordinātu linijas ir: $\varphi = Const.$ ir linijas $OM\alpha$ nolīdzinājums un $r = Const.$ - riņķa nolīdzinājums. φ mainās no $\varphi = 0$ līdz $\varphi = 2\pi$, kā uz vienu, tā uz otru virzienu pusi, r mainās no $r = 0$ līdz $r = +\infty$.

Ar šo divu tā sauc. polāro koordinātu r un φ palīdzību, kā funkcijām no laika t, var tāpat viennozīmīgi noteikt p.M stāvotni plaknē. Polārām koordinātēm ir lielas priekšrocības dažos speciālos punkta plakanas pārvietošanās gadijumos. Kā redzams, polārās koordinātes seko no cilindriskām pie $z = 0$.

V. Punkta kinētisko lielumu analitiskās izteiksmes polārā koordinātu sistēmā.

§ 1. Punkta ātrums; absolūtais, relatīvais un pārneses ātrums.

Kā no zīmējuma Nr.23. redzams, punkta M pārvietošanās hordu $\overline{\Delta s}$ var salikt 2 komponentēs:



zīm.23.

$\overline{\Delta s} = \overline{\Delta r} + \overline{r\Delta\varphi} = \bar{1}_r\Delta r + \bar{1}_c r\Delta\varphi$

kur $\bar{1}_r$ un $\bar{1}_c$ ir attiecīgie vienības vektori, virzīti uz to pusi, ku r un φ lielumi pieaug. Skalarie Δr un $r\Delta\varphi$, uz kuŗiem vienības vektori pareizināti, pēc tam var tikt uzskatīti kā alģebrāiski lielumi. Piemēram, ja $r = f(t)$ būtu bijusi tāda veida, ka r garums ar laiku mazinās, tad tas apstāklis atsauktos uz Δr zīmi, kuŗa būtu bijusi (-). Izdalīsim $\overline{\Delta s} = \bar{1}_r\Delta r + \bar{1}_c r\Delta\varphi$ uz Δt un pāriesim uz robežu, tad

$$\lim \frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} = \frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{V} = \bar{1}_r \lim \frac{\Delta r}{\Delta t} + \bar{1}_c \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \bar{1}_r \frac{dr}{dt} + \bar{1}_c \frac{rd\varphi}{dt} = \bar{1}_r\dot{r} + \bar{1}_c r\dot{\varphi}$$

Mēs redzam, ka ātrumam polārā sistēmā atbilst komponentes:

1) radiālā virzienā, kuŗu sauksim par radiālo ātrumu un kuŗu apzīmēsim ar $\bar{V}_r = \bar{1}_r\dot{r}$, un

2) virzienā, perpendikulārā pret radiusa-vektora stāvotni attiecīgā laika momentā; šo komponenti sauksim par cirkulācijas ātrumu $\bar{V}_c = \bar{1}_c . r\dot{\varphi}$.

Tā tad $\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_c$.

Ja kādā momentā punkts zaudētu savu radiālo ātrumu (r = Const.), tad būtu

$$(\bar{V})_{\dot{r}=0} = \bar{V}_c$$

pie kam punkts pārvietotos pa riņķi, kuŗu veido radiuss r = Const. un tad būtu

$$\bar{V} = \bar{V}_c = \bar{1}\rho\omega$$

kur $\rho = r$ līcības radiuss un ω leņķiskais rotacijas ātrums ap līcības centru. Tāpat, ja būtu φ = Const., tad paliktu tikai pārvietošanās radiusa virzienā. Šos ātrumus $\bar{V}_r$ un $\bar{V}_c$ var vēl interpretēt tā: $\bar{V}_r$ ir ātrums, ar kuŗu punkts M slīd gar radiusu un ar kuŗu sakrīt pilnais p.M ātrums $\bar{V}$, ja radiuss r nerotē (φ = Const.); $\bar{V}_c$ ir ātrums, ar kuŗu radiuss-vektors pārnes uz viņa atrodošos p.M, un ar kuŗu sakrīt p.M pilnais ātrums, ja punkts apstājās pārvietoties uz radiusa-vektora (r = const.).

Pilno pārvietošanās ātrumu $\bar{V}$ var novērot tikai novērotājs, kuŗš pats nepārvietojās, atrasdamies, piemēram, negrozīgā koordinātu sākumā O. Ātrumu $\bar{V}_r$ var novērot tas pats novērotājs, ja viņš atrodās uz radiusa-vektora $\bar{r}$, tad ātrumu $\bar{V}_c$ nemana, ja novērotājam atņem katru iespēju redzēt negrozamo sistēmu XOY (piem. iedomājoties $\bar{r}$ kā cauruli, kuŗā atrodās novērotājs). Turpretīm, ja novērotāju novieto pašā pārvietojušos punktā M tā, ka viņš nedabū redzēt radiusa r sākuma p.O, un liek viņam skatīties uz X ass pusi, tad viņš manīs, ka X ass no viņa attālinājās un viņam būs iespēja konstatēt ātrumu $\bar{V}_c$.

Nupat apskatītam ātruma klasificējuma viedoklim, atkarībā no novērotāja atrašanās vietas un novērošanas apstākļiem, ir ļoti liela nozīme mēchanikā. Ātrumu $\bar{V}$, kuŗu novēro attiecībā pret negrozāmām koordinātu asīm (O,X,Y) sauc par absolūtu ātrumu $\bar{V}_a$ (vitesse absolue). Ātrumu, ar kuŗu pārvietojās punkts attiecībā pret pārvietojošamies koordinātu asīm, uz momentu itkā apstādinātam (dotā gadijumā par tādu pārvietojošos koordinātu asi var uzskatīt radiusu-vektoru r liniju, kuŗa rotē), sauc par relatīvu ātrumu $\bar{V}_r$ (vitesse relative) un, beidzot, ātrumu, kuŗš piemīt pārvietojošos mēdija punktam, ar kuŗu pārvietojošs p.M kādā momentā sakrīt, sauc par pārneses ātrumu $\bar{V}_e$ (vitesse d'entrâinement). No šī jaunā viedokļa $\bar{V} = \bar{V}_a$, $\bar{V}_r = \bar{V}_{rel}$ un $\bar{V}_c = \bar{V}_e$, un tā kā $\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_c$, tad $\bar{V}_a = \bar{V}_{rel} + \bar{V}_e$.

§ 2. Sakars starp ātruma komponentēm polārā un Dekarta (Cartesisches Axenkreuz) ortogonālā koordinātu sistēmā.

Lai šo sakaru dabūtu, projektēsim $\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_c$ uz Dekarta asīm X un Y, tad

$$V_x = \dot{x} = V_r\text{Cos}\varphi - V_c\text{Sin}\varphi = \dot{r}\text{Cos}\varphi - r\dot{\varphi}\text{Sin}\varphi$$

$$V_y = \dot{y} = V_r\text{Sin}\varphi + V_c\text{Cos}\varphi = \dot{r}\text{Sin}\varphi - r\dot{\varphi}\text{Cos}\varphi$$

$$V_x^2 + V_y^2 = V_r^2 + V_c^2 = V^2$$

Šo sakaru, saprotams, var arī dabūt, izejot no sakarībām starp Dekarta un polārām koordinātēm, kuŗš ir

$$x = r\text{Cos}\varphi\,, \quad \dot{x} = V_x = \dot{r}\text{Cos}\varphi - r\dot{\varphi}\text{Sin}\varphi$$

$$y = r\text{Sin}\varphi\,, \quad \dot{y} = V_y = \dot{r}\text{Sin}\varphi + r\dot{\varphi}\text{Cos}\varphi$$

Ja pēdējais ceļš arī nav sarežģīts attiecībā uz ātrumiem, tad viņš tāds paliek attiecībā uz paātrinājumu komponentu sakaru polārā un Dekarta sistēmās.

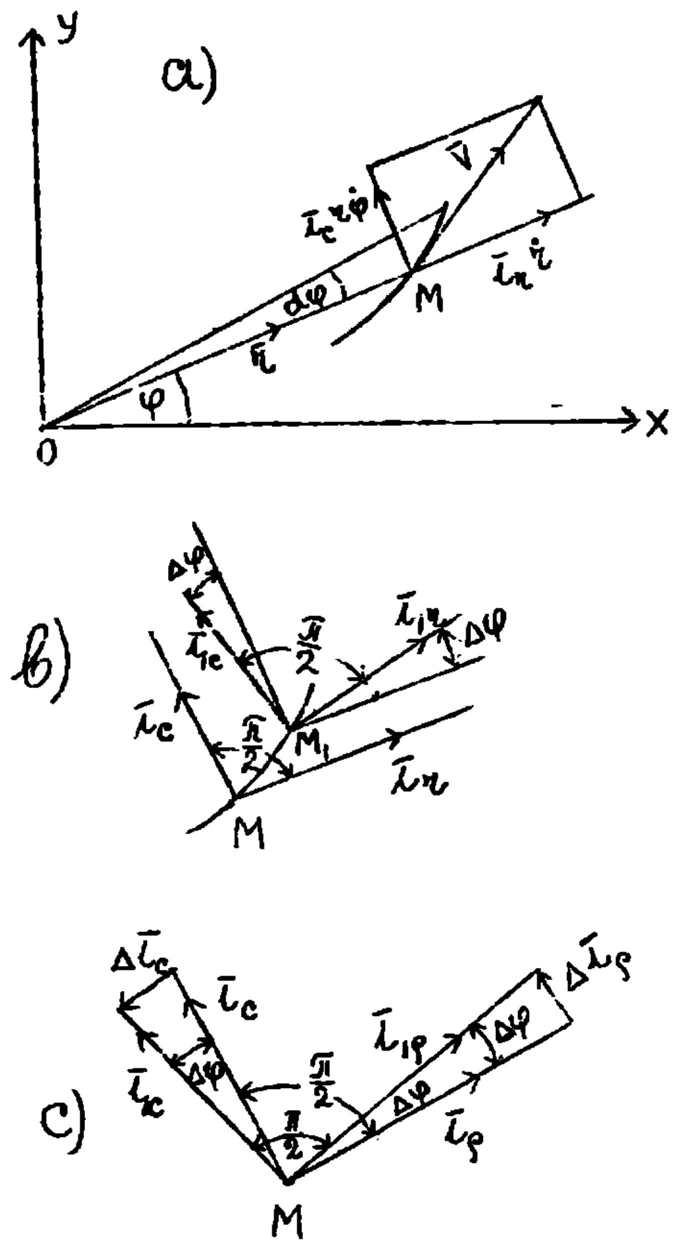
§ 3. Paātrinājums.

Paātrinājums

$$\bar{j} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(\bar{i}_r\dot{r}+\bar{i}_c r\dot{\varphi})}{dt} = \dot{r}\,\frac{d\bar{i}_r}{dt} + \bar{i}_r\,\frac{d\dot{r}}{dt} + r\dot{\varphi}\,\frac{d\bar{i}_c}{dt} + \bar{i}_c\,\frac{d(r\dot{\varphi})}{dt} =$$

$$= \dot{r}\,\frac{d\bar{i}_r}{dt} + \bar{i}_r\,\frac{d\dot{r}}{dt} + r\dot{\varphi}\,\frac{d\bar{i}_c}{dt} + \bar{i}_c(\dot{\varphi}\dot{r} + r\ddot{\varphi})$$

Kas attiecas uz vienību vektoru diferenciāliem, tad viņus varam izteikt tā. Kad punkts M būs pārvietojies jaunā stāvotnē M_1, tad vienību vektori $\bar{i}_r$ un $\bar{i}_c$, kuŗi savā starpā vienmēr veido $\frac{\pi}{2}$, būs pagriezušies katrs pret savu iepriekšējo stāvotni par tik, par cik radiuss-vektors $\bar{r}$ būs pagriezies pret savu iepriekšējo stāvotni (sk.zīm.24. a un b).



zīm.24.

Savietosim p. M_1 ar M, tad redzam, ka

$\Delta\bar{i}_r = \bar{i}_{1r} - \bar{i}_r = 1.\Delta\varphi\bar{i}_c$ un

$\Delta\bar{i}_c = \bar{i}_{1c} - \bar{i}_c = 1.\Delta\varphi(-\bar{i}_r)$

jo virziens $\Delta\bar{i}_r$ sakrīt robežā ar $\bar{i}_c$ virzienu, bet virziens $\Delta\bar{i}_c$ ir pretējs virzienam $\bar{i}_r$. Tā tad

$$\bar{j} = \bar{i}_c\dot{r}\dot{\varphi} + \bar{i}_r\ddot{r} - \bar{i}_r r\dot{\varphi}^2 + \bar{i}_c(\dot{\varphi}\dot{r} + r\ddot{\varphi}) =$$

$$= \bar{i}_r(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \bar{i}_c(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$$

Analizēsim šo $\bar{j}$ sadalijumu no pārvietošanās relativitātes viedokļa, par kuŗu bija runa V, §1. Kā redzams, $\bar{i}_r\ddot{r} = \bar{j}_r$ ir relatīvais paātrinājums (accélération relative), kuŗu dabū punkts attiecībā pret mierā stāvošu radiusu-vektoru (φ = Const.)

Jautāsim tālāk, kāds paātrinājums piemīt punktam M uz radiusa-vektora momentā, kad punkts ir apstājies slīdēt un tagad piedalās tikai cirkulācijas pārvietošanā kopā ar radiusu-vektoru (punkts apstājies pārvietoties medijā un veido kopējo kustību ar to medija punktu, ar kuŗu viņš dotā momentā sakrīt). Tad izvesta paātrinājuma izteiksmē $\bar{j}$ jāliek $r = \rho$ = Const., pie kam dabūjam

$$\bar{j}_c = \bar{i}_c r\ddot{\varphi} - \bar{i}_r r\dot{\varphi}^2 = \bar{i}\rho\dot{\omega} - \bar{i}_\rho\rho\omega^2 = \bar{i}\rho\,\tau - \bar{i}_\rho\rho\omega^2$$

(sk.III, §4). Ja nu abus noskaidrotos paātrinājumus $\bar{j}_r$ un $\bar{j}_c$ atvelk no kopējā $\bar{j}$, tad dabūjam

$$\bar{j} - (\bar{j}_r + \bar{j}_c) = \bar{i}_r(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \bar{i}_c(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) - \bar{i}_r\ddot{r} - \bar{i}_c r\ddot{\varphi} + \bar{i}_r r\dot{\varphi}^2 =$$

$$= 2\bar{i}_c\dot{r}\dot{\varphi}$$

t.i. vēl pastāv viena paātrinājuma komponente cirkulācijas $\bar{i}_c$ virzienā, kuŗu sauc par Coriolis'a paātrinājumu $\bar{j}_c$ pēc franču inženiera Coriolis'a vārda, kuŗš XIX g.s. sākumā aizrādīja uz šī paātrinājuma lielo technisko nozīmi. Paātrinājuma komponentes polārās koordinātes ir devis franču zinātnieks Clairaut jau XVIII g.s.

No $\bar{j}_c = \bar{i}_c \dot{r}\dot{\varphi}$ ir redzams, ka Coriolis'a paātrinājuma nav sekojošos gadijumos:

1) φ = Const., notiek tikai translacija, slīde pa radiusu-vektoru,
2) $r = \rho$ = Const.,–rotacija

Pievestais paātrinājuma sadalijums nav vienīgais. Viņu var sadalīt, izejot no ātrumiem $\bar{V}_r$ un $\bar{V}_c$, fiktīvi pielaižot, ka abi šie ātrumi ir taisnvirzieniski (vienības vektori paliek negrozīti). Tad

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \ddot{r} \quad \text{un} \quad \frac{d(V_c)}{dt} = \frac{d(r\dot{\varphi})}{dt} = \dot{\varphi}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

Atņemsim $\bar{i}_r\ddot{r} + \bar{i}_c(\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$ no $\bar{j} = \bar{i}_r(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \quad \bar{i}_c(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$, tad paliek papildu paātrinājums

$$\bar{j}_c = \bar{i}_c\dot{r}\dot{\varphi} - \bar{i}_r r\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}(\bar{i}_c\dot{r} - \bar{i}_r r\dot{\varphi})$$

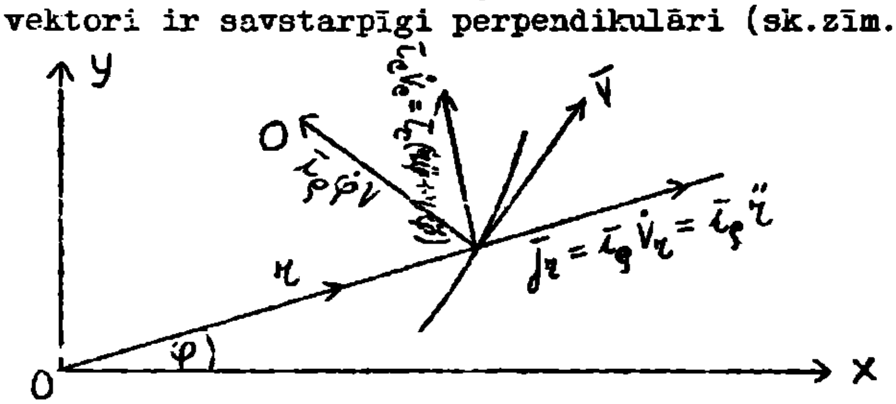
Pacelsim pēdējo nolīdzinājumu kvadratā, tad

$$j_c^2 = \dot{\varphi}^2\left\{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2\right\} = \dot{\varphi}^2(V_r^2 + V_c^2) = \dot{\varphi}^2V^2$$

Tā tad redzam, ka šī papildu paātrinājuma $\bar{j}_{com}$ garums ir $j_{com} = \dot{\varphi}V$, t.i. viņš ir $\dot{\varphi}$ reiz lielāks par ātruma vektora garumu V. Lai noteiktu viņa virzienu, sastādīsim skalaro produktu

$$\bar{j}_{com}\bar{V} = \dot{\varphi}(\bar{i}_c\dot{r} - \bar{i}_r r\dot{\varphi})(\bar{i}_r\dot{r} + \bar{i}_c r\dot{\varphi}) = \dot{\varphi}(r\dot{r}\dot{\varphi} - r\dot{r}\dot{\varphi}) = 0$$

t.i. šie vektori ir savstarpīgi perpendikulāri (sk.zīm.Nr.25).



zīm.25.

§ 4. Sakars starp paātrinājuma komponentēm polārā un Dekarta ortogonālē koordinātu sistēmās.

Projektēsim nolīdzinājumu

$$\bar{j} = \bar{i}_r(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \bar{i}_c(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$$

uz asīm X un Y

$$j_x = \ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathrm{Cos}\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathrm{Sin}\varphi$$
$$j_y = \ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathrm{Sin}\varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathrm{Cos}\varphi$$

kur $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ un $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

§ 5. Vienības vektora loma mēchanikā.

Ar vienības vektora palīdzību arī katrā citā koordinātu sistēmā var ērti izteikt visus kinēmatiskus lielumus. Piemēram, apskatīsim jautājumu par to, kā izteikt ātrumu $\bar{V}$ sferiskās koordinātēs. Ievedīsim vienības vektorus $\bar{1}_\alpha$, $\bar{1}_\beta$ un $\bar{1}_\gamma$, kuŗi sakrīt attiecīgi ar koordinātu asu pozitīviem virzieniem, tad

$$\bar{1}ds = \bar{1}_\alpha dr + \bar{1}_\beta r d\varphi + \bar{1}_\gamma r \mathrm{Sin}\varphi d\psi \;;\; \bar{V} = \bar{1}V = \frac{\bar{1}ds}{dt} = \bar{1}_\alpha \frac{dr}{dt} + \bar{1}_\beta \frac{rd\varphi}{dt} +$$

$$+ \bar{1}_\gamma r\mathrm{Sin}\varphi \frac{d\psi}{dt} = \bar{1}_\alpha \dot{r} + \bar{1}_\beta r\dot{\varphi} + \bar{1}_\gamma r\mathrm{Sin}\varphi\dot{\psi}$$

kur funkcijas

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t) \quad \text{un} \quad \psi = f_3(t)$$

ir dotas (sk.IV,§1).

Lai uzietu $\bar{V}$ virzienu leņķus pret koordinātu asīm $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ un $\bar{\gamma}$, lietosim sekojošo vispārējo paņēmienu. Pareizināsim $\bar{V}$ izteiksmes uz $\bar{1}_\alpha$, tad

$$V.\bar{1}.\bar{1}_\alpha = V\mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{\alpha}) = \bar{1}_\alpha.\bar{1}_\alpha.\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}$$,pārējo vektoru produkti

$\bar{1}_\alpha.\bar{1}_\beta = \bar{1}_\alpha.\bar{1}_\gamma = 0$, jo šie vektori ir ortogonali. Tā tad

$$\mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{\alpha}) = \frac{dr}{dt.V} = \frac{dr.dt}{dt.ds} = \frac{dr}{ds}$$. Tādā pašā ceļā

$$\mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{\beta}) = \frac{rd\varphi}{ds} \quad \text{un} \quad \mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{\gamma}) = r\mathrm{Sin}\varphi \frac{d\psi}{ds}$$

Piemērs. 1) $r = R = \mathrm{Const.}$

2) $\varphi = \varphi_0 + at$

3) $\psi = \mathrm{tg}\alpha \log \left[\dfrac{\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_0+at}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\varphi_0}{2}} \right]$

Ja izslēdz t, tad dabūjam punkta trajektoriju uz sferas ar radiusu $r = R$; trajektorijas nolīdzinājums

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi_0}{2}\, e^{\left(\frac{\psi}{\mathrm{tg}\alpha}\right)}$$

Šo līkni sauc par loksodromiju, viņa ir pazīstama kartografijā un navigācijā.

Aploces elements uz sferas r = R ir saistīts:

$$\bar{1}ds = \bar{1}_\beta r d\varphi + \bar{1}_\gamma r\mathrm{Sin}\varphi d\psi \quad (1)$$

Leņķis starp meridianas $\bar{1}_\beta$ un trajektorijas $\bar{1}$ tangentēm kopējā punktā

$$\bar{1}.\bar{1}_\beta ds = ds\mathrm{Cos}(\bar{1}_\beta,\bar{1}) = rd\varphi, \text{ jo } \bar{1}_\gamma.\bar{1}_\beta = 0$$

tāpēc, ka $\bar{1}_\gamma$ un $\bar{1}_\beta$ ir ortogonali. Tā tad meklējamais leņķis ir

$$\mathrm{Cos}(\bar{1}_\beta,\bar{1}) = \frac{rd\varphi}{ds}$$ (Sk.augstāk $\mathrm{Cos}(\bar{V},\bar{\beta})$)

Diferencēsim loksodromijas nolīdzinājumu

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi_0}{2}\, e^{\left(\frac{\psi}{\mathrm{tg}\alpha}\right)}$$

tad dabujam

$$\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2.\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}\, e^{(\frac{\psi}{\operatorname{tg}\alpha})}}{\operatorname{tg}\alpha}\, d\psi \quad (2)$$

Łacelsim (1) otrā pakāpē, izlietojot sakarību (2), tad

$$ds = \sqrt{r^2 d\varphi^2 + r^2 \operatorname{Sin}^2\varphi . d\psi^2} = r d\varphi \sqrt{1 + \frac{\operatorname{Sin}^2\varphi . \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{Cos}^4\frac{\varphi}{2}\cdot 4\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot e^{\frac{2\psi}{\operatorname{tg}\alpha}}}}$$

Izslēdzot $\quad e^{\frac{\psi}{\operatorname{tg}\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}}$

$$ds = rd\varphi\sqrt{1 + \frac{\sin^2\varphi . \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{Cos}^4\frac{\varphi}{2}\cdot 4\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}} = rd\varphi\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{rd\varphi}{\operatorname{Cos}\alpha} \quad \text{un}$$

$$\operatorname{Cos}(\bar{1}_\beta, \bar{1}) = \frac{rd\varphi}{ds} = \frac{rd\varphi}{rd\varphi}\operatorname{Cos}\alpha = \operatorname{Cos}\alpha$$

t.i. šis leņķis ir const., $\angle(\bar{1}_\beta, \bar{1}) = \alpha$. Šī ir loksodromijas īpašība.

Punkta, kas pārvietojās uz sferas $r = R$, ātrums gar loksodromiju ir

$$\bar{V} = \bar{1}_\alpha \dot{r} + \bar{1}_\beta . r\dot{\varphi} + \bar{1}_\gamma r \operatorname{Sin}\varphi . \dot{\psi}\ ; \qquad \dot{r} = 0,$$

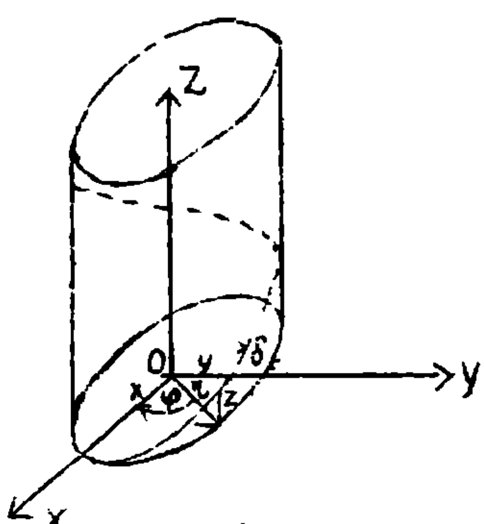
$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(\varphi_0 + at) = a\ ,$$

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2\operatorname{tg}(\frac{\varphi_0 + at}{2})}\ \frac{a}{\operatorname{Cos}^2(\frac{\varphi_0 + at}{2})} = \frac{a\operatorname{tg}\alpha}{\sin(\varphi_0 + at)} = \frac{a\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{Sin}\varphi} \quad \text{un}$$

$$\bar{V} = \bar{1}_\beta . Ra + \bar{1}_\gamma Ra\operatorname{Sin}(\varphi_0 + at)\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{Sin}(\varphi_0 + at)} = \bar{1}_\beta Ra + \bar{1}_\gamma Ra\operatorname{tg}\alpha = \text{Const.}$$

no laika neatkarīgs $\quad V^2 = a^2R^2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \frac{a^2R^2}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$

Piemērs 2. Punkts pārvietojās ar vienmērīgu ātrumu V_0 pa skrūves liniju us ripas cilindra virsmas. Uziet paātrinājumu un skrūves linijas radiusu ρ.



zīm.26.

Apzīmēsim skrūves linijas lieciena leņķi pret horicontu ar δ, tad

$$z = r\varphi . \operatorname{tg}\delta$$

kur r ir cilindra šķērsšķēliena kontura - riņķa linijas radiuss (sk.zīm.26).

Saskaņā ar noteikumu

$$V_0^2 = V_c^2 + V_r^2 + V_z^2 = \text{Const}$$

$$V_r = \dot{r} = 0,\ V_z = \dot{z} = \frac{rd\varphi}{dt}\operatorname{tg}\delta = r\omega\operatorname{tg}\delta,$$

$V_c = r\omega$, kādēļ $V_0^2 = r^2\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2\delta) = \frac{r^2\omega^2}{\operatorname{Cos}^2\delta}$

no kurienes redzams, ka arī $\omega = \text{Const.}$

$$x = r\,\mathrm{Cos}\varphi\ , \quad \dot{x} = -\,r\omega\,\mathrm{Sin}\varphi\ , \quad \ddot{x} = -\,r\omega^2\mathrm{Cos}\varphi = j_x$$
$$y = r\,\mathrm{Sin}\varphi\ , \quad \dot{y} = \omega r\,\mathrm{Cos}\varphi\ , \quad \ddot{y} = -\,r\omega^2\mathrm{Sin}\varphi = j_y$$
$$z = r\varphi\,\mathrm{tg}\delta\ , \quad \dot{z} = r\omega\,\mathrm{tg}\delta\ , \quad \ddot{z} = 0 = j_z$$

$$j = +\sqrt{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2} = +\sqrt{r^2\omega^4(\mathrm{Sin}^2\varphi + \mathrm{Cos}^2\varphi} = r\omega^2 = \frac{V_o^2}{\rho}$$

kur ρ ir līcības radiuss, bet $V_o^2 = \frac{r^2\omega^2}{\mathrm{Cos}^2\delta}$, kādēļ $r\omega^2 = \frac{r^2\omega^2}{\mathrm{Cos}^2\delta\rho}$,no kurienes $\rho = \frac{r}{\mathrm{Cos}^2\delta}$ Trajektorijas nolīdzinājums

$$z = r\varphi\,\mathrm{tg}\delta, \quad r = r_o = \mathrm{Const.}$$

Noslēdzot šo nodaļu par vienības vektoru pielietošanu minēsim, ka ar viņu un vispārīgi ar vektoru palīdzību, pa ceļam, var atrisināt daudzus diferenciālģeometrijas problemus, uz kuŗas gataviem rezultātiem atbalstas daži mēchanikas kursu autori, kuŗi lieto tīri analitiskus paņēmienus.

-------oOo------