LATVIJAS UNIVERSITĀTES
ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

564

Прикладные задачи математической физики математическое моделирование

Математическое моделирование /Гл.ред. А.А.Буйкис // Прикладные задачи математической физики /Отв.ред.Н.А.Авдонин. Т.564.Рига:ЛУ,1991.-208 с.

Сборник "Прикладные задачи математической физики" содержит работы, посвященные математическому моделированию различных физических и технологических процессов. Анализируются процессы тепло- и массопереноса в расплавах и жидкостях, задачи термоупругости и упругопластического деформирования в кристаллах.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов механико-математических и физико-математических специальностей.

ISBN 5-7970-0190-X

СОДЕРЖАНИЕ

SATURS

CONTENS

ВВЕДЕНИЕ

В настоящий сборник включены статьи, отражающие основные научные направления работ, проводимых в Институте математики и информатики Латвийского университета, на кафедре дифференциальных уравнений физико-математического факультета Латвийского университета, в других организациях, с которыми поддерживаются и развиваются научные связи.

В работах сборника большое внимание уделяется вопросам гидродинамики течений в высокотемпературных расплавах и жидкостях, вопросам электродинамики, а также другим задачам и методам математической физики.

Так, сложные задачи теплопереноса рассматриваются в работах А.Аболтиньша и А.Буйкиса, Н.Авдонина с соавторами, С.Вахрамеева и Р.Якушенка, Х.Калиса, Е.Люмкиса и Л.Пакул. В некоторых из перечисленных работ задачи теплообмена решаются в сопряженной с проблемами упругости постановке. Гидродинамические и электромагнитные явления в расплавах металлов и полупроводников изучаются в работах Г.Луринса, Ю.Антимирова и В.Лиепини, Е.Люмкиса и М.Спманиса.

Другим актуальным проблемам математического моделирования и математической физики посвящены работы Ю.Антимирова, А.Буйкиса и З.Титушкиной, А.Аболтиньша и А.Буйкиса, Б.Шехтера.

Работы сборника могут быть полезны широкому кругу специалистов, занимающихся математическим моделированием технологических процессов и разработкой программного обеспечения на ЭВМ.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Вып. 2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 517.974 : 519.6 : 631.365

А. Я. АБОЛТИНЬШ
ЛСХА, Елгава

А. А. БУИКИС
Институт математики
ЛАН и ЛУ, Рига

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СУШКИ ЗЕРНА С АКТИВНЫМ ВЕНТИЛИРОВАНИЕМ

В настоящее время в сельском хозяйстве Латвии в основном применяются два метода сушки урожая. Для зерна это сушка в конвективных сушилках и на установках активного вентилирования, а для сена, вороха многолетних трав применяются только установки активного вентилирования.

В ЛСХА разработано теоретическое обоснование и технология процесса сушки зерна, применяющая активное вентилирование и погрузку зерна слоями. При технологии активного вентилирования зерно с помощью транспортера равномерно заполняет всю площадь секции слоем одинаковой глубины. При этом каждая секция имеет свою вентиляционную и подогревающую установку. Конструкция пола склада-сушилки позволяет сформировать равномерное по площади распределение воздуха в зерновом слое.

Но в рамках этой технологии существует ряд недоработанных проблем. Это:

1) определение оптимальной толщины слоя при одноразовой погрузке зерна, чтобы полностью использовать возможности теплоносителя;

2) установка режимов эксплуатации вентиляционных установок для обеспечения выхода зерна с конечной влажностью не ниже 14 % по всей толщине насыпи.

Процесс сушки с активным вентилированием подобен процессу конвективной сушки /1/. Однако в этом случае процесс тепломассообмена не происходит так быстро как в сушилках конвективного типа, ибо температура теплоносителя небольшая (20-30 C^0).

1. Формулировка исходной задачи

При составлении математической модели сделаны следующие предположения:

1) слои зерна предполагаются одномерными, т.е. тепломассообмен происходит лишь по глубине слоя;

2) в неподвижном зерновом слое теплоноситель (подогретый воздух) течет равномерно сквозь единицу площади с постоянной скоростью снизу вверх ;

3) тепломассообмен происходит лишь между теплоносителем и зерном.

На основе законов сохранения энергии и вещества , а также законов тепломассообмена между зерном и сушильным агентом , имеем следующую систему дифференциальных уравнений /2/ для температур (соответсвенно для влажностей теплоносителя (воздуха) $T(x,t)$ (соответсвенно $d(x,t)$) и зерна $\Theta(x,t)$ (соответственно $W(x,t)$) :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K (W_p - W) \quad , \qquad t>0 \; , x>0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} + a_1 \cdot \frac{\partial d}{\partial x} = \frac{K}{a_2} (W - W_p) \quad , t>0 \; ,x>0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = c_1 (T - \Theta) + c_2 (W_p - W) \quad ,t>0 \; ,x>0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + a_1 \frac{\partial T}{\partial x} = c_0 (\Theta - T) \quad , t>0 \; ,x>0 \; , \qquad (4)$$

где x,t – переменные по глубине слоя и времени сушки . К системе (1) - (4) необходимо добавить граничные и начальные условия , которые мы выбираем в виде :

$$T|_{x=0} = T_в \; , \; d|_{x=0} = d_в \; , \; T|_{t=0} = \Theta|_{t=0} = \Theta_в \; , \quad W|_{t=0} = W_в \; ,$$

$$d|_{t=} \; ,$$

Здесь $a_1 = 3600v$, $a_2 = \frac{\gamma_в \cdot \varepsilon}{10 \cdot \gamma_з}$, $c_0 = \frac{\alpha_q}{m \cdot \gamma_в \cdot c_в}$,

$$c_1 = \frac{\alpha_q}{c_з \cdot \gamma_з (m-1)} \; , \quad c_2 = \frac{r \; K}{100 \; c_з} \; ,$$

где v – скорость сушильного агента (воздуха) (м/с),

$\gamma_в , \gamma_з$ – объемный вес воздуха и зерна соответстенно (кг/м^3),

$c_в , c_з$ – теплоемкость воздуха и зерна соответственно (кДж/кг),

r – скрытая теплота испарения влаги (кДж/кг) ,

$\varepsilon = m/(1-m)$ – порозность зерна (m-пористость) ,

W_p – равновесная влажность зерна (%),

α_q – коэффициент теплоотдачи (кДж/м^{3}С^0),

К – коэффициент сушки (1/час) .

Обычно система (1)-(4), для моделирования процесса сушки решается при упрощении $\Theta = T$ (напр. / 3 /), это обусловлено трудностью определеления коэффициента теплоотдачи α_q. Такое упрощение требует, во всяком случае, серьезного обоснования.

Мы для определения коэффициента α_q используем методику расчета теплоотдачи от теплоносителя блокам трещиноватого пласта / 4 /. В этой работе, в частности, получены аналитические формулы для определения средных по времени значений коэффициентов теплоотдачи для пластинки и шара соответсвенно:

$$\bar{\alpha}_q^{\,п} = 3\frac{\lambda}{l^2}, \qquad \bar{\alpha}_q^{\,ш} = 15\frac{\lambda}{R^2},$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала (зерно в нашем случае), (ккал/м·час·C°), l – половина толщины пластинки (м), R – радиус шара (м).

Зерно по форме отличается от шара. Степень отличия оценивается сферичностью ψ, представляющей собой отношение площади поверхности шара (равного по объему зерну) к действительной поверхности зерна. Сферичность ψ для пшеницы равна 0.82–0.85, ячменя – 0.80, риса – 0.84 / 5 /.

Высокая сферичность этих культур указывает на то, что в практических расчетах зерно этих культур можно рассматривать как шар. Так как сферичность зерна колеблется, то сделаем предположение, что коэффициент теплоотдачи α_q равен такой величине (это комбинация из формул для $\bar{\alpha}_q^{\,п}$ и $\bar{\alpha}_q^{\,ш}$):

$$\alpha_q = [\,3(1-\psi)+15\cdot\psi\,]\frac{\lambda}{R^2}.$$

Теплопроводность зерна с повышением влагосодержания и температуры возрастает. Рекомендованы следующие формулы / 4 / для неподвижного слоя пшеницы при температуре 20°C и влагосодержании 5–25 %:

$$\lambda = 0.07 + 0.023\cdot W_c, \quad вт/м\cdot{}^{\circ}C,$$

для риса при влагосодержании 15–27 %:

$$\lambda = 0.106 + 0.011\cdot W_c, \quad вт/м\cdot{}^{\circ}C.$$

2. Решение задачи интегральным преобразованием Лапласа

Систему (1)–(4) относительно W, d, T, Θ можно решать аналитически с использованием преобразования Лапласа / 7 /, если теплофизические параметры постоянны. Будем пользоваться для обозначения преобразования Лапласа следующим обозначением $L[f(t);p] = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \bar{f}(p)$, указывая соответствие между оригиналом и изображенным знаком $\doteq$, напр. $\bar{f}(p) \doteq f(t)$.

Переходя к изображениям, после несложных преобразований решение относительно $\bar{w}$ $(w = W - W_p)$ получим в виде

$$\bar{w} = \bar{w}(x,p) = \frac{W_s - W_p}{p + K} . \qquad (5)$$

Для обращения функции $\bar{W}(x,p)$ применим теорему о сдвиге и получим

$$W = (W_s - W_p) \cdot e^{-K \cdot t} + W_p . \qquad (6)$$

Решение относительно изображения $\bar{d}$ получаем в виде

$$\bar{d} = \bar{d}(x,p) = \frac{K(W_s - W_p)}{a_2 \cdot p(p+K)} + \left(\frac{K(W_p - W_s)}{a_2 \cdot p(p+K)} + \frac{d_s - d_r}{p} \right) \cdot e^{-\frac{p \cdot x}{a_1}} \qquad (7)$$

Для обращения функции $\bar{d}(x,p)$, представим ее в форме нескольких слагаемых:

$$\bar{d} = \frac{K(W_s - W_p)}{a_2 \cdot p\,(p+K)} + (d_s - d_r) \cdot \frac{1}{p} \cdot e^{-\frac{px}{a_1}} + \frac{K(W_p - W_s)}{a_2} \cdot \frac{1}{p(p+K)} e^{-\frac{px}{a_1}} =$$

$$= \bar{f}_1(p) + \bar{f}_2(p) + \bar{f}_3(p) .$$

Из формул связи изображения и оргинала имеем /8, 5.2(18), 5.5(9)/

$$\bar{f}_1(p) \doteq \frac{W_s - W_p}{a_2} (1 - e^{-K \cdot t}) \; ; \; \bar{f}_2(p) \doteq (d_s - d_r)\, \eta(t - \frac{x}{a_2}) ,$$

$$\bar{f}_3(p) \doteq \frac{W_s - W_p}{a_2} [e^{-K \cdot t} - e^{-K\frac{x}{a_1}}] \, \eta(t - \frac{x}{a_1})$$

Окончательно решение $d(x,t)$ – влажность воздуха – получается в виде:

$$d(x,t) = [d_s - d_r + \frac{W_s - W_p}{a_2} (e^{-K \cdot t} - e^{-K\frac{x}{a_1}})] \, \eta(t - \frac{x}{a_1}) + \frac{W_s - W_p}{a_2} (1 - e^{-Kt}) + d_r \quad (8)$$

Для нахождения $\bar{T}$ расмотрим уравнения (3) и (4) в изображениях

$$p \cdot \bar{\Theta} = c_1(\bar{T} - \bar{\Theta}) + c_2(W_p - \bar{W}) \qquad (9)$$

$$p\cdot\bar{T} + a_1\frac{d\bar{T}}{dx} = c_0(\bar{\Theta} - \bar{T}) \qquad (10)$$

Из уравнения (9) выражаем $\bar{\Theta}$ (используя (5))

$$\bar{\Theta} = \frac{c_1}{p+c_1}\bar{T} + \frac{c_2\cdot(W_p - W_s)}{(p+c_1)(p+K)}, \qquad (11)$$

подставляем его в (10) и получаем в итоге линейное дифференциальное уравнение:

$$a_1\frac{d\bar{T}}{dx} + B_2\cdot\bar{T} = A_2,$$

где $A_2 = \dfrac{c_0\cdot c_2(W_p - \bar{W})}{(p+c_1)} = \dfrac{c_0\cdot c_2\cdot(W_p - W_s)}{(p+c_1)(p+K)}$, $B_2 = p + c_0 - \dfrac{c_0\cdot c_1}{p+c_1}$.

Решив это уравнение, получаем такое выражение для $\bar{T}$:

$$\bar{T} = \left[\frac{A_2}{B_2}\cdot e^{\frac{x\cdot B_2}{a_1}} + \frac{T_s - \Theta_s}{p} - \frac{A_2}{B_2}\right]\cdot e^{-\frac{x\cdot B_2}{a_1}} \qquad (12)$$

Для нахождения оргинала $T(x,t)$ представим изображения (12) в виде:

$$\bar{T} = (T_s - \Theta_s)\frac{1}{p}\cdot e^{-\frac{p(p+c_0+c_1)}{p+c_1}\cdot\frac{x}{a_1}} + c_0\cdot c_2\left[\frac{W_p - W_s}{p(p+K)(p+c_0+c_1)}\right] -$$

$$- c_0\cdot c_2\cdot e^{-\frac{x\cdot c_0}{a_1}}\cdot\left[\frac{W_p - W_s}{p(p+K)(p+c_0+c_1)}\right]\cdot e^{-p\frac{x}{a_1}}\cdot e^{\frac{c_0 c_1 x}{a_1}\cdot\frac{1}{p+c_1}},$$

т.е. $\bar{T}$ можно записать в форме трех слагаемых:

$$\bar{T} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3 . \qquad (13)$$

Из $\bar{\varepsilon}_1$, представляя его как произведение

$$\bar{\varepsilon}_1 = (T_s - \Theta_s)\, e^{-\frac{c_0 x}{a_1}}\cdot\frac{1}{p}\, e^{-p\frac{x}{a_1}}\cdot e^{\frac{1}{p+c_1}\cdot\frac{c_0 c_1 x}{a_1}},$$

и используя теорему о свертке , получаем :

$$\bar{g}_1 = (\Theta_s - T_s)\cdot e^{-\frac{c_0 x}{a_1}} \cdot \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} e^{-c_1\tau}\,[I_0(2\cdot\sqrt{\frac{c_0 c_1 x\cdot\tau}{a_1}}) +$$

$$+ \sqrt{\frac{c_0 c_1 x\cdot\tau}{a_1}}\cdot I_1(2\cdot\sqrt{\frac{c_0 c_1 x\cdot\tau}{a_1}})]\,d\tau\cdot\eta(t-\frac{x}{a_1}) \quad , \qquad (14)$$

где $I_0(z), I_1(z)$-модифицированные функции Бесселя .

В свою очередь : $\bar{g}_2 = \frac{c_0 c_2 (W_p - W_s)}{(c_0 + c_1)K}(1 - e^{-Kt} + \frac{K}{c_0 + c_1}[e^{-t(c_0+c_1)} - 1])$. (15)

Для нахождения оргинала функции $\bar{g}_3$ запишем ее так :

$$\bar{g}_3 = \frac{c_0 c_2 (W_p - W_s)}{(c_0 + c_1)K}[\frac{Ke^{\frac{x}{a_1}(K-c_0)}}{c_0+c_1-K}\cdot\frac{1}{p+K}\cdot e^{-(p+K)\frac{x}{a_1}}\cdot e^{\frac{1}{p+c_1}\cdot\frac{c_0 c_1 x}{a_1}} + \frac{e^{-p\frac{x}{a_1}+\frac{c_0 c_1 x}{(p+c_1)a_1}-\frac{x}{a_1}c_0}}{p} +$$

$$+ \frac{(c_0+c_1)}{K-(c_0+c_1)}\,\frac{e^{\frac{x}{a_1}\cdot c_1}}{p+c_0+c_1}\, e^{-(p+c_0+c_1)\frac{x}{a_1}}\cdot e^{\frac{1}{p+c_1}\cdot\frac{c_0 c_1 x}{a_1}}]$$

и, воспользовавшись основными соотношениями преобразования Лапласа (см. / 8, 5.5(35), 4.1(15) /), получаем :

$$\bar{g}_3 = \frac{c_0 c_2 (W_s - W_p)}{(c_0 + c_1)K}\int_0^{t-\frac{x}{a_1}} e^{-c_1\tau}\,[I_0(2\sqrt{\frac{c_0 c_1 x\cdot\tau}{a_1}}) +$$

$$+ \sqrt{\frac{c_0 c_1 x\cdot\tau}{a_1}}\cdot I_1(2\sqrt{\frac{c_0 c_1 x\cdot\tau}{a_1}})]\cdot[\frac{Ke^{\frac{x}{a_1}(K-c_0)}}{c_0+c_1-K}\cdot e^{-(t-\tau)K} + e^{-\frac{x}{a_1}c_0} +$$

$$+ \frac{(c_0+c_1)}{K-(c_0+c_1)}\cdot e^{\frac{x}{a_1}\cdot c_1}\cdot e^{-(t-\tau)(c_0+c_1)}]\,d\tau\cdot\eta(t-\frac{x}{a_1}) \qquad (16)$$

Таким образом, подставляя (14) - (16) в (13) , получим оргинал :

$$T(x,t)=\int_0^{t-\frac{x}{a_1}} e^{-c_1\tau}\cdot\left[I_0\left(2\sqrt{\frac{c_0c_1x\cdot\tau}{a_1}}\right)+\sqrt{\frac{c_0c_1x\cdot\tau}{a_1}}\cdot I_1\left(2\sqrt{\frac{c_0c_1x\cdot\tau}{a_1}}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\left\{\frac{Ke^{\frac{x}{a_1}(K-c_0)}}{c_0+c_1-K}\cdot e^{-(t-\tau)K}-e^{-\frac{x}{a_1}c_0}+\frac{(c_0+c_1)}{K-(c_0+c_1)}\cdot e^{\frac{x}{a_1}\cdot c_1}\cdot e^{-(t-\tau)(c_0+c_1)}\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{c_0c_2(W_s-W_p)}{(c_0+c_1)K}+(\Theta_s-T_s)\cdot e^{-\frac{c_0}{a_1}x}\right]d\tau\cdot\eta\left(t-\frac{x}{a_1}\right)+$$

$$+\frac{c_0c_2(W_p-W_s)}{(c_0+c_1-K)K}\left(1-e^{-Kt}+\frac{K}{c_0+c_1}\left[e^{-t(c_0+c_1)}-1\right]\right)+\Theta_s. \qquad (17)$$

Теперь остается найти оргинал выражения (11). Очевидно, что $\frac{c_2\cdot(W_p-W_s)}{(p+c_1)(p+K)} \doteq \frac{c_2\cdot(W_p-W_s)}{c_1-K}\left(e^{-Kt}-e^{-c_1t}\right)$, и используя теорему свертывания ($T(x,t)$ определено выражением (17)) получаем

$$\Theta(x,t)=c_1\int_0^t e^{-c_1(t-\tau)}\cdot\eta\left(\tau-\frac{x}{a_1}\right)\left\{\int_0^{t-\frac{x}{a_1}}\exp(-c_1\omega)\cdot\left[I_0\left(2\sqrt{\frac{c_0c_1x\cdot\omega}{a_1}}\right)+\right.\right.$$

$$+\sqrt{\frac{c_0c_1x\cdot\omega}{a_1}}\cdot I_1\left(2\sqrt{\frac{c_0c_1x\cdot\omega}{a_1}}\right)\Bigg]\cdot\left[\left\{\frac{Ke^{\frac{x}{a_1}(K-c_0)}}{c_0+c_1-K}\cdot e^{-(\tau-\omega)K}-e^{-\frac{x}{a_1}c_0}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{(c_0+c_1)}{K-(c_0+c_1)}\cdot e^{\frac{x}{a_1}\cdot c_1}\cdot e^{-(\tau-\omega)(c_0+c_1)}\right\}\cdot\frac{c_0c_2(W_s-W_p)}{(c_0+c_1)K}+(\Theta_s-T_s)\cdot e^{\frac{c_0}{a_1}x}\right]d\omega\right\}d\tau+$$

$$+\int_0^t e^{-c_1(t-\tau)}\left(\left(1-e^{-K\tau}+\frac{K}{c_0+c_1}\left[e^{-\tau(c_0+c_1)}-1\right]\right)\frac{c_0c_2(W_p-W_s)}{(c_0+c_1-K)K}+\Theta_s\right)d\tau+$$

$$+\frac{c_2\cdot(W_p-W_s)}{c_1-K}\left(e^{-Kt}-e^{-c_1t}\right)+\Theta_s \qquad (18)$$

К сожалению, нам не удалось получит оргинал (18) в виде однократного интеграла.

Полученные в этом пункте аналитические выражения могут быть использованы для тестирования качества предлагаемых ниже разностных схем .

3. Построение разностной схемы и ее анализ

Систему (1)-(4) решаем с помощью разностных схем с весами σ_k (k= 1,2,3,4) для источниковых членов / 6 /. Аппроксимацию уравнения (1) запишем в виде :

$$\frac{\hat{W}-W}{\tau}=K[\sigma_1 W_p-\sigma_1\hat{W}+(1-\sigma_1)(W_p-W)] \quad ,\text{где } \hat{W}=W_i^{j+1},\ W=W^j$$

т. е.

$$W_i^{j+1}=W_i^j\left(1-\frac{K\tau}{1+K\tau\sigma_1}\right)+\frac{K\cdot\tau\cdot W_p}{1+K\tau\sigma_1} \quad . \qquad (19)$$

Для аппроксимации первых производных по пространству (конвективных членов) будем пользоваться классической явной односторонней разностью .

Таким образом, аппроксимация уравнения (2) принимает вид

$$\frac{\hat{d}-d}{\tau}+a_1\frac{\hat{d}-\check{d}}{h}=\frac{K}{a_2}[\sigma_2(\hat{W}-W_p)+(1-\sigma_2)(W-W_p)],$$

где $d^{(-1)}=d^j_{i-1}$ т. е.

$$d_i^{j+1}=d_i^j\left(1-\frac{a_1\tau}{h}\right)+\frac{a_1\tau}{h}d^j_{i-1}+\frac{K\tau}{a_2}[\sigma_2(W_i^{j+1}-W_p)+(1-\sigma_2)(W_i^j-W_p)] \qquad (20)$$

Для определения $\hat{\Theta}$ и $\hat{T}$ сперва из разностной аппроксимации уравнения (3) находим $\hat{\Theta}=f(\Theta,\hat{T},T)$ и это выражение подставляем в аппроксимацию уравнения (4) . Получаем выражение :

$$\hat{T}A=T\,B+T^{-1}C+\Theta D+E\ , \qquad (21)$$

Здесь использованы обозначения : $\hat{\Theta}=\Theta_i^{j+1}$, $\hat{T}=T_i^{j+1}$,$T^{-1}=T^j_{i-1}$,

$$A=1+\tau(c_1\sigma_3+c_0\sigma_4)\ ,$$

$$B=(1+\tau c_1\sigma_3)\left(1-\frac{a_1\tau}{h}\right)+\tau c_0[\tau c_1(\sigma_4-\sigma_3)-(1-\sigma_4)]\ ,$$

$$C=\frac{1}{h}(1+\tau c_1\sigma_3)\ , \qquad D=\tau c_0[1+c_1\tau(\sigma_3-\sigma_4)]\ ,$$

$$E=\tau^2c_0c_2\sigma_4[\sigma_3(\hat{W}_p-\hat{W})+(1-\sigma_3)(W_p-W)]\ .$$

Из выражения (21) $\hat{T}$ подставляем в зависимость $\hat{\Theta}=f(\Theta,\hat{T},T)$

и получаем выражения относительно Θ :

$$\hat{\Theta} A = B_1 \Theta + C_1 T + D_1 T^{-} + E_1 . \quad (22)$$

Здесь $$B_1 = 1 + \tau^2 c_0 c_1 (\sigma_3 - \sigma_4) - \tau c_1 + \tau (c_0 \sigma_4 + c_1 \sigma_3),$$

$$C_1 = \tau^2 c_0 c_1 (\sigma_3 - \sigma_4) + \tau c - \frac{a_1 \tau^2}{h} c_1 \cdot \sigma_1, \quad D_1 = \frac{a_1}{h} \tau c_1^2 \cdot \sigma_3$$

$$E_1 = \tau c_2 (1 + \tau c_0 \sigma_4) [\sigma_3 (W_p - \hat{W}) + (1 - \sigma_3)(W_p - W)] .$$

Достаточными условиями устойчивости уравнений (19) и (20) при $\tau < h/a_1$ являются неравенства $\sigma_1 > 0.5$ и $\sigma_2 > 0.5$ / 3 /.

Рассмотрим теперь устойчивость разностного уравнения для $\hat{T}$ (σ_3, σ_4 по принципу максимума мы должны выбрать так, чтобы A , B , C были положительными) . Очевидно , что A >0 и C >0 при $\sigma_3 > 0$ и $\sigma_4 > 0$. Для оценки B примем , что $\sigma_3 = \sigma_4$, тогда для τ получаем такую оценку :

$$\tau \le \frac{h}{a_1 + hc_0 - h\sigma_3 (c_1 + c_0)} \quad (23)$$

В свою очередь , (23) имеет смысл , если знаменатель не отрицателен , т.е. $a_1 + hc_0 - h\sigma_3(c_1 + c_0) \ge 0$. Оценка для σ_3 (то же самое имеем для σ_4)

$$\sigma_3 \le 1 - \frac{hc_1 - a_1}{h(c_1 + c_0)} \quad (24)$$

Условие устойчивости уравнения (21) требует выполнения условия $A \ge B + C$. После несложных преобразований получаем оценку

$$\tau \le \frac{1}{c_1 (\sigma_4 - \sigma_3)}.$$

Для устойчивости уравнения (22) достаточно выбрать A , B_1) . Требование положительности B_1 дает такую оценку для τ (при условии $\sigma_3 = \sigma_4$)

$$\tau < \frac{1}{c_1 - \sigma_3 (c_0 + c_1)} .$$

Соответствующая оценка для σ_3:

$$\sigma_3 \le 1 - \frac{c_0}{c_0 + c_1} . \quad (25)$$

Объединяя выписанные выше отдельные неравенства получаем , что

$$\tau \le \min\left\{ \frac{h}{a_1};\ \frac{h}{a_1 + hc_0 - h\sigma_3(c_0+c_1)};\ \frac{1}{c_1 - \sigma_3(c_0+c_1)};\ \frac{1}{c_1(\sigma_4 - \sigma_3)} \right\}.$$

При $\sigma_3 = \sigma_4$ (и $h(c_1 - c_0) - a_1 \ge 0$) σ_2 находим из (24) (в остальных случаях σ_3 определяем из (25))и окончательно получаем:

$$\tau \le \min\left\{ \frac{h}{a_1};\ \frac{h}{a_1 + hc_0 - h\sigma_3(c_0+c_1)};\ \frac{1}{c_1 - \sigma_3(c_0+c_1)} \right\}.$$

4. Результаты расчета

Математическое моделирование процесса сушки зерна позволило вычислить границу зоны сушки H: она определяется заданием допустимого безопасного времени хранения влажного материала $\tau_Б \le 6$ часов .

Приняв , что интенсивность влагосъема при вентилировании зерна постоянна, вычислена скорость перемещения зоны сушки ω . Напр. , для пшеницы при скорости воздуха $v = 0.1$ м/с и заданной конечной влажности $W_p = 14$ % мы получим следующие параметры зоны сушки при различных условиях начальной влажности зерна $W_в$.

Таблица

Толщина зоны сушки H и скорость ее перемещения ω в зависимости от начальной влажности $W_в$.

$W_в$ (%)	H (м)	ω (м/час)
17	2.37	0.39
19	1.74	0.29
21	1.29	0.22
23	0.93	0.16
25	0.66	0.11
27	0.48	0.08
29	0.33	0.06

В заключение отметим, что проведенные производственные опыты потверждают применимость для описания процесса сушки расмотренной здесь математической модели . Так, пшеница в производственных опытах 1985 г. с примерно одинаковой влажностью $W_Б \approx 21$ % в слое H =1.2 м до влажности 15.6 % высохла за 7.5 суток . Наше моделирование для слоя с H= 1.29 м дало время сушки в 8 суток . Это надо считать весьма хорошим совпадением ибо ясно , что все исходные теплофизические параметры заданы весьма неточно .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анискин В.И. , Рыбарук В.А. Теория и технология сушки и временной консервации зерна активным вентилированием . М.: Колос , 1972. 200 с.

2. Гинсбург А.С. Сушка пищевых продуктов . М.: Пищепромиздат , 1960. 683 с.

3. Методические рекомендации по математическому исследованию процесса сушки и охлаждения зерна в установках плотного слоя / Демич А.В. , Есаков Ю.В. , Мильман И.Э. , Ананьева Т.А. / / ВИЭСХ / Всесоюз. научч. исслед. ин-т электрификации сел. хоз-ва. -М. 1977.

4. Малофеев Г.Е. , Кеннави Ф.А. О коэффициенте теплоотдачи от теплоносителя блокам трещиноватого пласта //Известия высших учебных заведений . Нефть и газ . 1978. N°1. P.29-35

5. Егоров Г.А. Влияние тепла и влаги на процессы переработки и хранения зерна . М.: Колос , 1973 . 264 с.

6. Самарский А.А. Теория разностных схем . М.: Наука, 1983. 616 с.

7. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласса и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288с.

8. Бейтмен Г. , Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука , 1969. Т.1. 344 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Вып. 2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК: 519.6:539

Н.А.АВДОНИН, С.С.ВАХРАМЕЕВ
ИМИ ЛУ, Рига,
А.М.СОКОЛОВ, М.Д.КОРНЕЕВА,
А.М.ФИЛАЧЕВ, Москва

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЛОТНОСТИ ДИСЛОКАЦИЙ В КРИСТАЛЛАХ АНТИМОНИДА ИНДИЯ ПРИ ВЫРАЩИВАНИИ МЕТОДОМ ЧОХРАЛЬСКОГО

При разработке технологических процессов выращивания монокристаллов совершенной структуры необходимым элементом является прогнозирование уровня термических напряжений и величины плотности дислокаций в кристалле. Отсюда возникает необходимость решения задачи упругопластического деформирования с учетом особенностей движения и размножения дислокаций по системам скольжения кристалла. Необходимо также численное решение задачи теплообмена, описывающей процесс роста и охлаждения кристалла.

В настоящей работе проведено моделирование и численное решение на ЭВМ задачи теплопереноса и совместной задачи упруго-пластического деформирования при выращивании малодислокационных кристаллов антимонида индия диаметром до 8,4 см методом Чохральского.

Установлено, что при заданных тепловых условиях выращивания уровень термических напряжений невелик; сдвиговые напряжения по системам скольжения кристалла антимонида индия незначительно превосходят уровень критических сдвиговых напряжений. Величина плотности дислокаций в расчетных вариантах не превосходила 10^2 см$^{-2}$. Расчеты проводились для различных диаметров тигля и кристалла и для различных направлений выращивания кристалла.

В первых двух разделах работы приводится математическая модель упругопластической задачи и задачи теплопереноса с учетом излучения с внутренних поверхностей камеры и поверхности кристалла и расплава. В третьем разделе приводятся результаты расчетов отдельных вариантов и их предварительный анализ, в четвертом - экспериментальные данные.

I. Математическая модель упругопластической задачи для кристаллов в процессе их выращивания из расплава строится с учетом физических представлений о движении и размножении дислокаций по системам скольжения под действием сдвиговых напряжений при заданном распределении температурного поля в кристалле.

Рассматривается кристалл цилиндрической формы (область $\mathcal{D}_1$, см. рис.I), выращиваемый из расплава (область $\mathcal{D}_2$) в осесимметричной системе координат (r, z). Уравнения упругопластического равновесия в перемещениях U и W в области $\mathcal{D}_1$ записываются в следующем виде /I/:

$$a\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU)+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+b\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial z}=$$

$$=d\frac{\partial T}{\partial r}+2\left[\frac{\partial \varepsilon^P_{rr}}{\partial r}+\frac{\varepsilon^P_{rr}-\varepsilon^P_{\varphi\varphi}}{r}+\frac{\partial \varepsilon^P_{rz}}{\partial z}\right], \qquad (I)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right)+a\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+b\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU)=$$

$$=d\frac{\partial T}{\partial z}+2\left[\frac{\partial \varepsilon^P_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial \varepsilon^P_{zz}}{\partial z}+\frac{\varepsilon^P_{rz}}{r}\right]$$

Принимая во внимание, что поверхность кристалла свободна от внешних нагрузок, граничные условия в перемещениях записываются следующим образом: на боковой поверхности кристалла, при $r=R$

$$\frac{\partial U}{\partial r}+k\left(\frac{U}{R}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)=cT+\frac{2}{a}\varepsilon^P_{rr}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial r}=2\varepsilon^P_{rz}$$

на фронте кристаллизации $z=h$ и на верхнем торце кристалла $z=H$

$$\frac{\partial W}{\partial z}+K\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}\right)=cT+\frac{2}{a}\varepsilon^{p}_{zz}$$

$$\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}=2\varepsilon^{p}_{rz}\ . \qquad (3)$$

$$a=2\frac{1-\mu}{1-2\mu},\qquad b=\frac{1}{1-2\mu},\qquad d=2\frac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha .$$

На оси кристалла, $r=0$, выполняются условия симметрии

$$U=0,\qquad \frac{\partial W}{\partial r}=0\ . \qquad (4)$$

Здесь μ и α - коэффициенты Пуассона и термического расширения; $T(r,z,t)$ - температура кристалла; ε^{p}_{rr}, $\varepsilon^{p}_{\varphi\varphi}$, ε^{p}_{zz}, ε^{p}_{rz} - компоненты тензора пластической деформации.

Компоненты тензора суммарной деформации (упругой, температурной и пластической) определяются по известным формулам Коши:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial U}{\partial r},\qquad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{U}{r},\qquad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial W}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial r}\right) \qquad (5)$$

компоненты тензора напряжений определяются уравнениями состояния /I/:

$$\sigma_{ij}=Ga\left[(1-K)\varepsilon_{ij}-\frac{2}{a}\varepsilon^{p}_{ij}+(K\varepsilon_{ii}-cT)\delta_{ij}\right] \qquad (6)$$

Здесь i, j = 1,2,3; (1 = r, 2 = φ, 3 = z), G - модуль сдвига.

$$K = \frac{\mu}{1-\mu}, \quad C = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha .$$

Тензор пластической деформации ε^{p}_{ij} определяется следующим образом. Пусть n - номер плоскости, m - направление скольжения, тогда для (n, m)-ой системы скольжения сдвиговые напряжения вычисляются следующим образом:

$$\tau^{n,m} = \alpha^{n,m}_{1i}\,\alpha^{n}_{3j}\,\sigma_{ij} ,$$

$$\alpha_{1i} = \cos(X'_1, X_i), \quad \alpha_{3i} = \cos(X'_3, X_i), \tag{7}$$

где X_i - исходная система координат; X'_1, X'_3 - кристаллографическая система координат в системе скольжения (n, m). Ось X'_3 - направлена по нормали к плоскости скольжения, ось X'_1 - в направлении скольжения в данной плоскости.

Учитывая величины сдвиговых напряжений $\tau^{n,m}$, пластическая деформация $(\varepsilon^{p})^{n,m}$ в (n, m)-ой системе определяется следующим образом: (в квазистационарной системе координат, согласованной с системой принятой в тепловой задаче, см. п.2)

$$\frac{d(\varepsilon^{p})^{n,m}}{dz} = \frac{b}{W_0} N_D^{n,m} V^{n,m}, \quad (\varepsilon^{p})^{n,m}_{t=0} = 0 \tag{8}$$

$$V^{n,m} = V_0 \left(\frac{\tau_{эф}^{n,m}}{\tau_0}\right)^{q} \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \tag{9}$$

$$\tau^{n,m}_{эф} = \begin{cases} |\tau^{n,m}| - G\varepsilon^{p}_{n,m} - A\sqrt{N_D^{n,m}}, & \tau^{n,m}_{эф} \geq \tau_{кр} \\ 0, & \tau^{n,m}_{эф} < \tau_{кр} \end{cases} \tag{10}$$

b - величина вектора Бюргерса; $N_{\mathcal{D}}^{n,m}$ - плотность дислокаций; $V^{n,m}$ - скорость скольжения дислокаций при внешних нагрузках; W_0 - скорость продвижения кристалла в процессе роста из расплава; A - параметр междислокационного взаимодействия; U - энергия активации.

Величины V_0, τ_0, U, A; $\tau_{кр}$ - определяются экспериментально.

Плотность дислокаций в (n,m)-ой системе скольжения определяется следующим образом

$$N_{\mathcal{D}}^{n,m} = N_0 \exp\left(\frac{\beta}{W_0}\int_0^z V^{n,m}\, ds\right) \tag{11}$$

N_0 - начальная плотность дислокаций; β - коэффициент размножения дислокаций.

Теперь по найденной пластической деформации $(\varepsilon^P)^{n,m}$ в системах скольжения (n,m), определяется весь тензор пластической деформации $(\varepsilon_{ij}^P)^{n,m}$, с использованием формулы обратного преобразования тензоров

$$(\varepsilon_{ij}^P)^{n,m} = \frac{1}{2}(\varepsilon^P)^{n,m}(\alpha_{1i}^{n,m}\alpha_{3j}^{n} + \alpha_{1j}^{n,m}\alpha_{3i}^{n}). \tag{12}$$

Заметим, что компоненты тензора пластической деформации зависят от угла φ. Для решения упругопластической задачи в осесимметричной постановке осредним тензор по координате φ и вычислим тензор суммарной пластической деформации по всем системам скольжения

$$\varepsilon_{ij}^P = \frac{1}{2\pi}\sum_n\sum_m\int_0^{2\pi}(\varepsilon_{ij}^P)^{n,m}\, d\varphi \tag{13}$$

Суммарная плотность дислокаций по всем системам определяется следующим образом:

$$N_{\Sigma} = \sum_n\sum_m N_{\mathcal{D}}^{n,m} \tag{14}$$

Сформулированная задача упругопластического деформирования (I)-(I4) служит для определения напряжений σ_{ij}, сдвиговых напряжений $\tau^{n,m}$, пластических деформаций ε^{p}_{ij} и плотности дислокаций $N_{\mathcal{D}}$ с учетом кристаллографического направления выращивания кристалла из расплава при заданном температурном поле T в кристалле.

Задача термоупругости решается итерационным конечно-разностным методом. Нелинейная задача упругопластического деформирования кристалла решается с использованием метода последовательных упругих решений, /2/. Счет ведется до установления по напряжениям по невязке.

2. Задача определения температурного поля решается в следующей постановке.

В области, занятой кристаллом высотой H_1, и жидким столбиком высотой h, записывается квазистационарное уравнение теплопроводности, которое в цилиндрической системе координат (r, z), жестко связанной с неподвижным нагревателем, имеет следующий вид /3/:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)-c\rho W_0\frac{\partial T}{\partial z}=0 \qquad (I5)$$

T - температура, C - удельная теплоемкость, ρ - плотность вещества, W_0 - скорость вытягивания кристалла из расплава,

$$\lambda=\begin{cases}\lambda_s\,, & T<T_{пл}\\ \lambda_\ell\,, & T>T_{пл}\end{cases} \qquad (I6)$$

λ_s, λ_ℓ - коэффициенты теплопроводности кристалла и расплава, $T_{пл}$ - температура плавления.

На границе раздела фаз $z^*(r,t)$ задается температура плавления

$$T=T_{пл} \qquad z=z^* \qquad (I7)$$

Кроме того, записывается условие теплового баланса на фронте кристаллизации

$$\lambda_s\frac{\partial T}{\partial n}-\lambda_\ell\frac{\partial T}{\partial n}=\gamma\rho W_0\,, \qquad z=z^* \qquad (I8)$$

В подкристальной области на уровне зеркала расплава $z = 0$, задается температура перегрева расплава

$$T = T_0 , \quad z = 0 ; \quad T_0 = T_{пл} + \delta T_{пер} \qquad (19)$$

$\delta T_{пер}$ - величина перегрева расплава.

На остальной части поверхности кристалла, включая его верхнюю часть, выполняется граничное условие с учетом теплообмена излучением между поверхностью кристалла и окружающими поверхностями (внутренние поверхности стенок камеры, система экранов, тигель и поверхность расплава). Все поверхности, включая поверхности кристалла и расплва считаются диффузионно-серыми. Как известно, /4/, это приводит к следующему условию на поверхности кристалла

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\varepsilon(s)}{1-\varepsilon(s)} \left(\sigma T^4(s) - B(s) \right) \qquad (20)$$

$\partial / \partial n$ - производная по наромали к граничной поверхности кристалла, σ - постоянная Стефана-Больцмана, $T(s)$ - температура, $\varepsilon(s)$ - степень черноты поверхности, s - текущая координата поверхности кристалла и окружающих его поверхностей. Плотность потока эффективного излучения определяется интегральным уравнением

$$B(s) = \sigma \varepsilon(s) T^4(s) + (1-\varepsilon(s)) \int_A B(s') K(s,s') dA \qquad (21)$$

$K(s,s')$ - ядро интегрального уравнения, которое в случае изотропного излучения и при отсутствии поглощения имеет вид:

$$K(s,s') = \frac{\cos(\vec{n},\vec{s}) \cos(\vec{n}',\vec{s}')}{\pi \ell^2_{ss'}} \qquad (22)$$

$\ell_{ss'}$ - расстояние между точками s и s' поверхности; $\vec{n}$ и $\vec{n}'$ - вектора нормалей к поверхности A в точках s и s' ; $\vec{s}$ - направляющий вектор прямой, соединяющей точки s и s'.

Для численного решения нелинейной задачи теплопереноса (I5)-(2I) используется конечно-разностный метод. Для этой цели в области $\mathcal{D}_1$, занятой кристаллом и жидким столбиком вводится разностная сетка и записывается дискретный аналог исходной задачи. При записи дискретного аналога вводится нестационарный член $(T^{K+1}-T^K)/\tau$, где τ - итерационный параметр, K - номер итерации (K = 0,I,2,...). Счет ведется до момента установления

$$max\left|\frac{T^{K+1}-T^K}{T^K}\right| < \varepsilon \quad , \qquad (23)$$

где ε - заданное число ($\varepsilon \approx 10^{-3}$). Заметим, что для аппроксимации исходного эллиптического уравнения второго порядка с самосопряженным оператором, используется консервативная разностная схема. Для решения разностных уравнений используется итерационный метод неполного разложения Холецкого /5/ с самосопряженными градиентами, имеющий высокую эффективность решения сеточных задач.

В заключении данного раздела отметим, что для решения совместной упругопластической задачи (I)-(I4) и задачи теплопереноса (I5)-(2I) разработан пакет программ, состоящий из отдельных модулей - модуль решения задачи теплопереноса, задачи термоупругости, модуль расчета тензора пластической деформации, и расчет суммарной плотности дислокаций по всем системам скольжения.

3. Указанное программное обеспечение было использовано для расчета серии вариантов для кристаллов антимонида индия диаметром 8 см и 4,3 см при направлениях выращивания [I00], [III] и [II2]. Значения критических сдвиговых напряжений определялись следующим образом:

$$\tau_{кр} = A_0\, exp\left(\frac{U}{kT}\right) \qquad (24)$$

T - температура кристалла. Значения энергии активации и константы A_0 для антимонида индия задавались по данным работы /6/. $A_0 = 6\cdot 10^3$, приведенная энергия активации дислокаций $Q = U/kT_{пл} = 3,5$. Отсюда следует, что

$\tau_{кр} = 2\cdot 10^5$ *па* при $T = T_{пл} = 798^\circ K$ и $\tau_{кр} = 3{,}3\cdot 10^5$ *па* при $T = T_{пл} - 100^\circ$.

Приведем примеры расчетов напряжений и плотности дислокаций и их анализ.

На рисунках 2-4 даны результаты численных расчетов для кристалла диаметром 4,3 см. при направлении выращивания [100]. Высота кристалла принималась равной 10 см. На первом рисунке (рис.2) приведены изотермы в кристалле, при задании следующих тепловых условий выращивания: перегрев расплава под кристаллом 10°, перегрев на стенке тигля у поверхности расплава 20°, температура на стенках камеры установки принималась равной 473°К, высота стенки тигля над уровнем расплава 3 см.

Расчеты показывают, что температура по длине кристалла от фронта кристаллизации ($T_{пл} = 798^\circ K$) понижается на 130°, изотермы в кристалле приобретают более вогнутый характер по мере удаления от фронта кристаллизации (см. рис. 2) градиенты температур по радиусу кристалла в области фронта кристаллизации у поверхности кристалла примерно равны 1 к/см, градиенты на противоположном конце кристалла заметно больше (2,5 к/см).

Далее решалась задача упругопластического деформирования (1)-(14). На рис. 3 дано распределение сдвиговых напряжений $\tau^{n,m}$, рассчитанных с учетом величины тензора напряжений σ_{ij} и с учетом направления выращивания кристалла 100 (см. формулу (7)). Значения $\tau^{n,m}$ рассчитаны по системам скольжения (n,m) и приведены на рис. 3 для: $n = 1$, $m = 1,2.3$. Максимальная величина сдвиговых напряжений $\tau^{1,3} = -2{,}6\cdot 10^5$ *па* (см. рис.3). Сдвиговые напряжения для остальных систем скольжения находятся из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \tau^{1,1} &= \tau^{2,1} = \tau^{3,3} = \tau^{4,3} \\ \tau^{1,2} &= \tau^{2,2} = \tau^{3,1} = \tau^{4,1} \\ \tau^{1,3} &= \tau^{2,3} = \tau^{3,2} = \tau^{4,2} \end{aligned} \qquad (25)$$

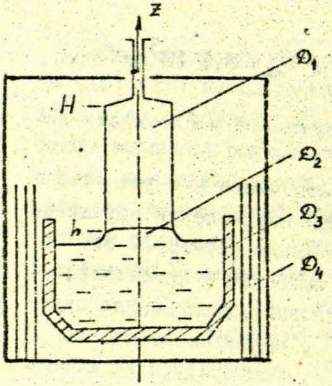


Рис.I. Схема выращивания кристалла из расплава $\mathcal{D}_1$ - кристалл, $\mathcal{D}_2$ - расплав, $\mathcal{D}_3$ - тигель, $\mathcal{D}_4$ - система экранов, h - высота жидкого столбика, $H_1 = H - h$ - высота кристалла

Для рассматриваемого нами варианта рассчитывалась суммарная плотность дислокаций $N_{\mathcal{D}}$. Учитывая значения критических сдвиговых напряжений $\tau_{кр}$ по формуле (24) расчетная величина максимальной плотности дислокаций равна $10^2 см^{-2}$, распределение $N_{\mathcal{D}}$ в поперечном срезе кристалла изображено на рис. 4. Как видно из рисунка максимальная $N_{\mathcal{D}}$ сосредоточена в приповерхностной области кристалла, образуя скопление дислокаций у поверхности кристалла в виде кольца.

Таким образом, при направлении выращивания [100] и указанных тепловых условиях плотность дислокаций в кристалле не превышает $10^2 см^{-2}$. Если изменить направление выращивания и задать направление [111], то сдвиговые напряжения $\tau^{n,m}$ становятся несколько меньше (максимальное $\tau^{1,3} = 2{,}2 \cdot 10^5$). Уменьшение $\tau^{n,m}$ приводит к уменьшению $N_{\mathcal{D}}$. Максимальная плотность дислокаций равна $0{,}8 \cdot 10^2$ $см^{-2}$, а распределение по радиальному сечению кристалла аналогично приведенному распределению $N_{\mathcal{D}}$ на рис. 4.

При расчетах использовались следующие значения физических констант:

$G = 2{,}3 \; 10^{10} па$, $\alpha = 5{,}2 \cdot 10^{-6} К^{-1}$, $\mu = 0{,}3$,
$q = 1{,}5$, $\beta = 4$, $b = 4 \cdot 10^{-8}$ см, $V_0 = 10^4$ см/с,
$\tau_0 = 10^7 па$, $W_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ см/с, $T_{пл} = 798^0 К$,

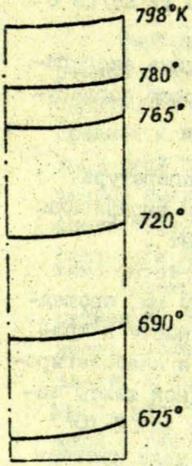


Рис.2. Изотермы (°K) в кристалле диаметром 4,3 см

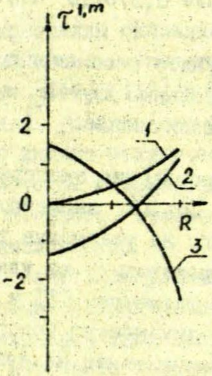


Рис.3. Сдвиговые напряжения $\tau^{1,m} \times 10^{-5}$ (па) в радиальном сечении кристалла. D = 4,3 см, φ = 0, направление выращивания [100]; 1 - m = 1; 2 - m = 2; 3 - m = 3

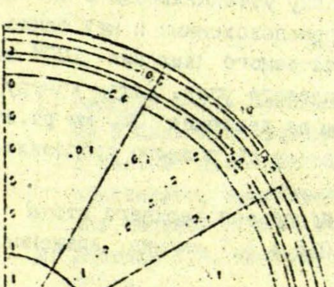


Рис. 4. Распределение плотности дислокаций $N_D \times 10^{-1}$ (см^2) в радиальном сечении кристалла. D = 4,3 см, направление выращивания [100].

C = 630 дж/кгк, ρ = $0{,}579 \cdot 10^{-2}$ кг/см^3, λ = 0,17 вт/см с
ε = 0,7.

В следующем пункте рассматривается методика эксперимента и экспериментальные данные, которые хорошо согласуются с расчетными величинами.

4. Методика проведения эксперимента и аппаратура.

Монокристаллы $InSb$ диаметром до 50 мм выращивали методом Чохральского на установке типа "Редмет".

Выращивание производили из кварцевых синтетических особочистых тиглях диаметром III и высотой 70 мм, прошедших предварительно химическую очистку поверхности в травителе 2,5. При выращивании нелегированных и слаболегированных германием кристаллов в качестве исходной шихты использовали кристаллы марок ИСЭ-0 или ИСЭ-Iв ($n \leq 2 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$). В качестве затравок применяли чистые нелегированные кристаллы $InSb$ в форме параллелепипеда длиной ~ 60 мм и стороной квадрата ~ 4 мм.

Материал шихты и затравку обрабатывали предварительно в азотной кислоте, а затем в реактиве СР-4, многократно промывали в ионноочищенной воде и высушивали. Легирование расплава производили специально подготовленными лигатурами $InSb + Ge$ (с концентрацией дырок $p = 2 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$) и $InSb + Te$ (с концентрацией электронов $n = 2{,}4 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$).

Тигель с загрузкой и затравку устанавливали в соответствующие держатели установки с расположенным в ней тепловым узлом, вакуумировали до остаточного давления 10^{-3} мм рт.ст. и производили нагрев теплового узла. Затем камеру заполняли гелием особой чистоты до давления 380 мм рт.ст. увеличивали температуру нагревателя до полного расплавления шихты.

Величина рабочих скоростей подъема верхнего штока (кристалла) составляла $V_{кр}$ - 0,015 ÷ 1,7 мм/мин, вращения $\omega_{кр}$ - 10 ÷ 20 об/мин.
Нижнего штока (тигля) скорость подъема - V_T - 1,5 ÷ 1,7 мм/мин, скорость вращения - ω_T = 2 - 60 об-мин.

Выращивание монокристаллов $InSb$ производили в кристаллографических направлениях [100], [III] и [110].

Выращенные монокристаллы охлаждали, на станке с внутренней режущей кромкой вырезали пластины толщиной 2 мм с ориентацией поверхности [III], [II0] и [I00] из верхней, средней и нижней частей, удаляли нарушенный приповерхностный слой после резки химико-механической и химико-динамической полировкой и методом оптической микроскопии после соответствующего селективного травления поверхности подсчитывали плотность дислокаций.

Установлено, что кристаллографическое направление выращивания при всех прочих равных условиях на величину плотности дислокаций в цилиндрической части монокристаллов не влияет и находится в интервале значений $I \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^2$ $см^{-2}$, что с учетом ошибки метода довольно хорошо согласуется с расчетными данными. А сама картина макрораспределения дислокаций носит в основном статистической характер, и только в некоторых случаях наблюдалось увеличение ее в тонком приповерхностном слое монокристалла. Связано это со стоком дислокаций под действием сдвиговых напряжений, которые для данных конкретных случаев оказались выше, чем для других сравнительных случаев, возможно из-за технологических неконтролируемых воздействий: изменение температуры стенки камеры и других водоохлаждаемых частей установки, либо более медленное охлаждение монокристалла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Авдонин Н.А., Вахрамеев С.С., Освенский В.В. Постановка и численное решение термоупругопластической задачи с учетом движения дислокаций в плоскостях скольжения кристаллов, выращиваемых из расплава //Математическое моделирование. М.: Наука, 1986. С.158-171.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 379 с.
3. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинатне, 1980. 180 с.
4. Сперроу Э., Сесс Р. Теплообмен излучением. Л.: Энергия, 1971. 294 с.

5. V.A.Meijernik, H.A. Van Der Vorst. An iterative solution method for linear system of wich the coefficient matrix is a symmetric. M. matrix// Math. Comp. January 1937. V. 31. P. 148-162.
6. Концевой Ю.А., Литвинов Ю.М., Фаттахов Э.А. Пластичность и прочность полупроводниковых материалов и структур. М.: Радио и связь, 1982. 240 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Вып. 2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 536.421.1+536.74

Н.А.АВДОНИН, М.Л.ГУЛБЕ
ИМИ ЛУ, Рига
В.Н.ГОТИН, В.В.МИШИН
НИИ ЧЕРМЕТ, Москва

АНАЛИЗ ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЫ В СЛИТКЕ В ПРОЦЕССЕ ЭЛЕКТРОШЛАКОВОГО ПЕРЕПЛАВА МЕТАЛЛА

Процесс электрошлакового переплава металла достаточно сложен (см. рис. 1), и при его математическом моделировании необходимо учитывать многие факторы - прохождение токов через шлаковую ванну, оплавление электрода, падение перегретых капель в ванну металла, дендритную кристаллизацию металла с образованием двухфазной зоны, гидродинамику в шлаковой ванне и жидкой зоне металла. Математическому моделированию электрошлакового переплава посвящен ряд работ, из которых отметим наиболее существенные, см. /1/-/3/. В работе /1/ ставится задача в полной неометрии, однако не учитывается гидродинамика в расплаве и шлаке и динамика образования двухфазной зоны. Фронт кристаллизации в наплавляемом слитке находится как изотерма ликвидуса при исходном содержании примеси в расплаве. В работе /3/ задача решается с учетом гидродинамики в шлаке, однако двухфазная зона находится при весьма упрощенном предположении, что доля твердой фазы пропорциональна температуре. Задача распределения примеси при этом не решается. Однако, известно, что двухфазная зона формируется под действием переохлаждения, которое определяется характером сегрегации примеси.

В настоящей работе приводятся расчеты и анализ кристаллизации слитков ЭШП с учетом формирования двухфазной зоны слитка на основе осредненной модели двухфазной зоны, предложенной в /4/.

Рассмотрим следующую схему электрошлакового переплава металлов. В начальный момент времени в водоохлаждаемом кристаллизаторе цилиндрической формы находятся начальный слой металла (теплет) высотой h и слой жидкого шлака высотой H, обладающего электрическим сопротивлением. В шлаковую ванну на определенную глубину опускается металлический электрод цилиндрической формы и включается электрическое питание. Ток, проходящий через шлаковую ванну, разогревает ее, и электрод начинает плавиться. Оплавляющийся металл проходит через шлаковую ванну, очищается от примесей, попадает на начальный слой металла и кристаллизуется. Кристаллизующийся слиток при движении вверх вытесняет шлаковую ванну.

В настоящей работе рассмотрим задачу тепломассопереноса в области занятой кристллизующимся металлом 3 (см.рис.I). Целью решения задачи является определение температурных полей металлического слитка, а также положения и формы двухфазной зоны, расположенной между линиями ликвидус и солидус кристаллизующегося металла. Процесс описывают следующие осредненные уравнения теплопереноса /4/:

$$\varkappa \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) - \varkappa v_0 \frac{\partial T}{\partial x} - \tag{I}$$

$$-\alpha_0 (T - T_0) + \gamma \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

диффузии примеси

$$(1-(1-m)\eta)\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{D}\frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mathcal{D}\frac{\partial C}{\partial r}\right) + \tag{2}$$

$$+(1-m)C\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Доля твердой фазы $\eta\,(x, r, t)$ - определяется осредненным кинетическим соотношением:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \beta \cdot \Delta T(\theta(\Delta T)\cdot\theta(1-\eta) + \theta(-\Delta T)\cdot\theta(\eta)), \tag{3}$$

где

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases}, \quad \theta_1(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1, & \xi \geq 0 \end{cases}. \tag{4}$$

На поддоне и боковой поверхности слитка потребуем выполнения условий:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l+h} = -\alpha_1 (T - T_{вн}) \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=0} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -Q(x) \tag{6}$$

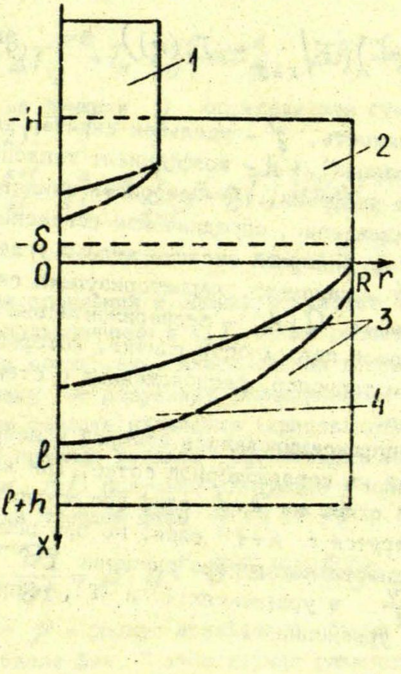


Рис. I. Схема электрошлаковой плавки:
I - оплавляющийся электрод;
2 - шлаковая ванна;
3 - кристаллизирующийся слиток;
4 - область, занятая двухфазной зоной.

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=l+h} = 0\,; \quad \left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{r=0} = \left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{r=R} = 0\,; \tag{7}$$

$$T(x,r,0) = T_H(x,r)\,; \qquad C(x,r,0) = C_H \tag{8}$$

Для определения граничного условия на границе шлак-металл (рис. I) введем δ-слой, углубленный в шлаковую ванну и будем считать, что температура $T_1(r)$ при $x = -\delta$ задается из эксперимента. Тогда осредняя уравнение теплопроводности по этому слою δ, получаем следующее граничное условие третьего рода

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \left(\mathcal{L} v_0 + \frac{\lambda_ш}{\delta}\right)\left(\left.T\right|_{x=0} - T_1(r)\right) \tag{9}$$

Здесь $\mathcal{L}$ - удельная теплоемкость, γ - удельная скрытая теплота плавления (кристаллизации), λ - коэффициент теплопроводности, $\mathcal{D}$ - коэффициент диффузии, v_0 - скорость наплавления слитка, ΔT - переохлаждение, определяемое согласно диаграмме фазового состояния бинарной системы железо-углерод, $\Delta T = T_n - T - \alpha C$, β - параметр, характеризующий скорость объемной кристаллизации, $Q(x)$ - экспериментально заданный поток тепла на боковой поверхности слитка, который определяется по показаниям термопар, расположенных в стенке медного кристаллизатора.

Уравнения (I), (2) аппроксимировались обычной консервативной разностной схемой на неравномерной сетке. Так как при использовании неявной схемы на $k+1$ слое все члены в правой части уравнения берутся с $k+1$ слоя, но при решении уравнения теплопроводности неизвестно значение C^{k+1}, то члены, содержащие $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ в уравнениях (I) и (2), аппроксимируются по-разному. В уравнении (I)

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{ij}^{K+1} = \beta\cdot\Delta T_{ij}^{K+1/2}\left(\theta(\Delta T_{ij}^{K})\cdot\theta(1-\eta_{ij}^{K})+\theta(-\Delta T_{ij}^{K})\cdot\theta(\eta_{ij}^{K})\right) \qquad (10)$$

в уравнении (2) также используется полунеявная схема при аппроксимации соответствующих членов:

$$\left(C\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{ij}^{K+1} = C_{ij}^{K}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{ij}^{K+1} \qquad (11)$$

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{ij}^{K+1} = \beta\cdot\Delta T_{ij}^{K+1}\left(\theta(\Delta T_{ij}^{K+1/2})\cdot\theta(1-\eta_{ij}^{K})+\theta(-\Delta T_{ij}^{K+1/2})\cdot\theta(\eta_{ij}^{K})\right) \qquad (12)$$

где $\Delta T_{ij}^{K+1/2} = T_n - T_{ij}^{K+1} - \alpha C_{ij}^{K}$, $\Delta T_{ij}^{K+1} = T_n - T_{ij}^{K+1} - \alpha C_{ij}^{K+1}$

Сама функция η определяется суммированием соотношения (12):

$$\eta_{ij}^{K+1} = \eta_{ij}^{0} + \tau\sum_{S=0}^{K}\beta\cdot\Delta T_{ij}^{S+1}\left(\theta(\Delta T_{ij}^{S+1})\theta(1-\eta_{ij}^{S}) + \theta(-\Delta T_{ij}^{S+1})\cdot\theta(\eta_{ij}^{S})\right) \qquad (13)$$

Для сравнения и оценки результатов, полученных методом, использованным в (I), также решается задача в классической постановке. Классическая постановка задачи кристаллизации не допускает возникновения двухфазной зоны и скрытая теплота плавления (кристаллизации) выделяется только на границе раздела фаз. Методом локального осреднения (см. /5/) получаем следующее уравнение для определения доли твердой фазы $\eta(X, r, t)$:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \beta\cdot\Delta T\cdot\theta(\Delta T)\cdot\theta(\rho - x), \qquad (14)$$

где ρ – радиус локального объема осреднения на границе раздела фаз. В этом случае разностную аппроксимацию членов, содержащих $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ следует записать в уравнении (I)

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{ij}^{k+1}=\beta\cdot\Delta T_{ij}^{k+1/2}\left(\theta(\Delta T_{ij}^{k})\cdot\theta(1-\eta_{ij}^{k})\cdot\theta_1(\eta_{i\pm1j\pm1}^{k}-1)+\right. \tag{15}$$
$$\left.+\theta(-\Delta T_{ij}^{k})\cdot\theta(\eta_{ij}^{k})\right),$$

- в уравнении (2)

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{ij}^{k+1}=\beta\cdot\Delta T_{ij}^{k+1}\left(\theta(\Delta T_{ij}^{k+1/2})\cdot\theta(1-\eta_{ij}^{k})\cdot\theta_1(\eta_{i\pm1j\pm1}^{k}-1)+\right. \tag{16}$$
$$\left.+\theta(-\Delta T_{ij}^{k+1/2})\cdot\theta(\eta_{ij}^{k})\right),$$

а сама функция η определяется аналогично, как и в (I3)

$$\eta_{ij}^{k+1}=\eta_{ij}^{0}+\tau\sum_{s=0}^{k}\beta\cdot\Delta T_{ij}^{s+1}\left(\theta(\Delta T_{ij}^{s+1})\theta(1-\eta_{ij}^{s})\cdot\theta_1(\eta_{i\pm1j\pm1}^{s}-1)+\right. \tag{17}$$
$$\left.+\theta(-\Delta T_{ij}^{s+1})\theta(\eta_{ij}^{s})\right),$$

где $\eta_{i\pm1j\pm1}$ - значения функций $\eta\,(x,r,t)$ в точках, сдвинутых на шаг в любом направлении по пространству. Для сравнения проводились расчеты по методу, использованному в работе /3/. Этот метод, определяющий долю твердой фазы в интервале температур ликвидус-солидус в зависимости от температуры по линейному закону, т.е., функция $\eta\,(x,r,t)$ определяется следующим образом:

$$\eta=\frac{T_l-T}{T_l-T_s}\cdot\theta(T_l-T)\left(\theta(T-T_s)+\frac{T_l-T_s}{T_l-T}\cdot\theta_1(T_s-T)\right), \tag{18}$$

а уравнение (I) принимает вид

$$\mathcal{L}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\mathcal{L}v_0\frac{\partial T}{\partial x}- \tag{19}$$
$$-\alpha_0(T-T_0)+\frac{\gamma}{T_l-T_s}\frac{\partial T}{\partial x}\theta(\eta)\theta(1-\eta)$$

В этом случае решается только задача теплопроводности.

При расчетах применяется эффективный итерационный метод неполного LU-разложения сопряженных градиентов /6/. Расчеты проводились на следующем варианте экспериментальной плавки углеродистой стали. Содержание углерода 0,5%.

γ = 247 дж/г; v_o = 0,02 см/сек; $\lambda_{ж}$ = 0,155 Вт/см $^oК$;
$\lambda_{тв}$ = 0,314 Вт/см $^oК$; $\lambda_{ш}$ = 0,005 Вт/см $^oК$;
$\varkappa$ = 5,42 дж/см^3 $^oК$; δ = 0,1 см; T_ℓ = 1425 ^oC; T_s = 1375^oC;
ℓ = 20 см; R = 12,5 см; $T_n = 1500\,^oC$.

Значения потока $Q(X)$ брались из экспериментальных данных, полученных в НИИ ЧЕРМЕТ, см. таблицу.

X (см)	0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.	3.6	4.2	4.8	5.4	6.
$Q(x)$(Вт/см^2)	115.	235.	140.	85.	70.	60.	50.	35.	25.	20.	15

Для значений X от 6. до 20. задан постоянный поток Q = 15 Вт/см^2.

Приведем результаты расчетов по трем указанным выше методам и их сравнительную оценку. На рис. 2 представлены поля изотерм в кристаллизующемся слитке, на рис. 3 - изолинии доли твердой фазы η, характеризующие положение и форму двухфазной зоны в слитке.

Сравнение результатов расчетов по указанным трем методикам показывает их существенное различие. Так, расчеты без учета двухфазной зоны, рис. 3б приводят к слишком глубокой жидкой ванне металла, не говоря о том, что нет информации о размерах двухфазной зоны. Расчеты по методике работы /3/, (рис. 3в) дают более широкую двухфазную зону, расположенную ниже, чем по результатам расчетов с учетом кинетики образования двухфазной зоны, рис. 3а. Отметим еще, что во всех случаях при заданных тепловых условиях наблюдается выход жидкого металла на боковую поверхность кристаллизатора на узком участке (1,5-2 см).

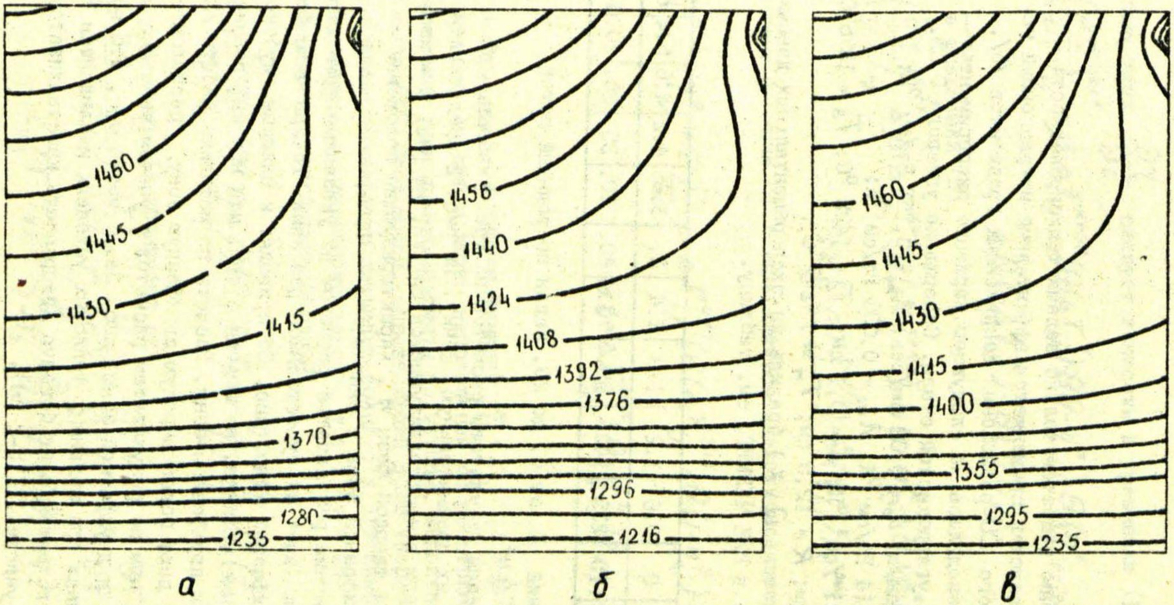


Рис. 2. Поля изотерм (^{o}C) в кристаллизующемся слитке. а) с учетом кинетики формирования двухфазной зоны; б) без учета двухфазной зоны; в) двухфазная зона определяется по интервалу температур ликвидус-солидус.

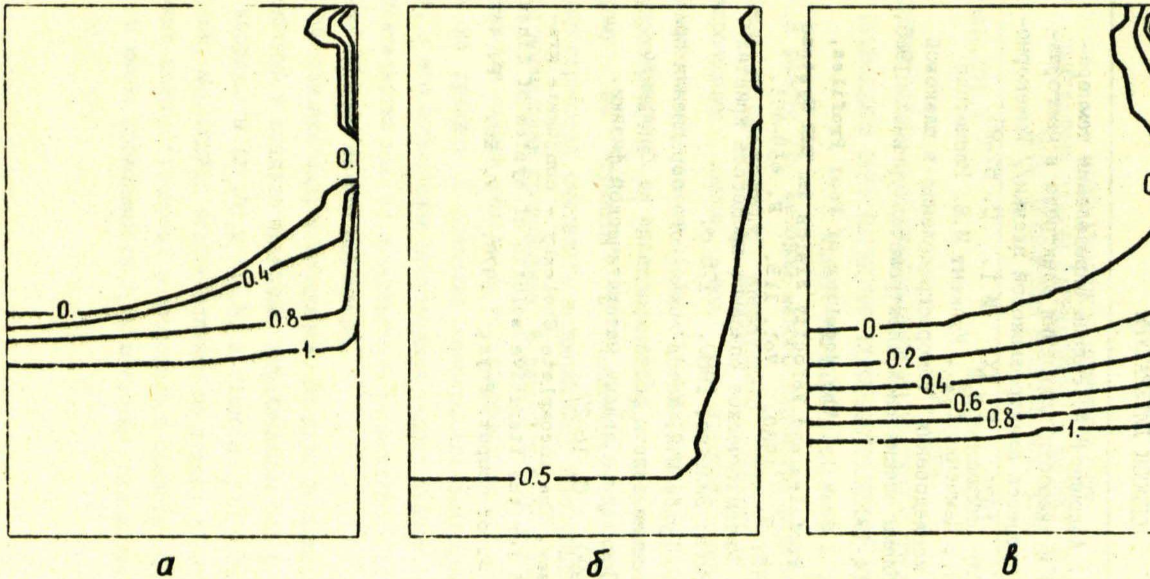


Рис. 3. Изолинии доли твердой фазы η . а) с учетом кинетики формирования двухфазной зоны; б) без учета двухфазной зоны; в) двухфазная зона определяется по интервалу температур ликвидус-солидус.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Иванова Г.Ф., Авдонин Н.А. Задача определения температурного поля и скорости плавления электрода в многофазной системе процесса электрошлаковой плавки// Инженерно-физический ж. 1971. Т. XX. № I. С. 87-95.

2. Махненко В.И., Демченко В.Ф., Крикент И.В. Расчетная система для исследования токораспределения в шлаковой ванне// Проблемы специальной электрометаллургии. 1985. Вып. I. С. 14-19.

3. M.Choudhary, J.Szekely. The Modeling of Pool Profiles, Temperature Profiles and Velocity Fields in ESR Systems // Met. Trans. B. 1980. Vol. 11B. P. 439-453.

4. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинатне, 1980. 175 с.

5. Авдонин Н.А., Гулбе М.Л. Метод локального осреднения при численном решении задачи роста кристалла из бинарного расплава// Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1990. С. 18-27.

6. David S.Kersaw. The incomplate Cholesky - conjugate gradient method for the iterative solutio of system of linear equations// J. of Comput. Phys. 1978. V. 26. P. 43-65.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Вып. 2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 620.179.4

М.Я.Антимиров, В.Р.Лиепиня
РТУ, Рига

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИЗЛУЧАТЕЛЯ С НЕОДНОРОДНЫМ ПРОВОДЯЩИМ ФЕРРОМАГНИТНЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

В работе /1/ методом малого параметра решена задача о влиянии неоднородного проводящего полупространства на двухпроводную линию, ток в которой меняется по гармоническому закону. В /1/ магнитная проницаемость полупространства μ_1 и включения μ_2 считались равными и поэтому на границе L включения и окружающего полупространства считались непрерывными векторный потенциал и его нормальная производная. В данной работе решается та же задача для случая, когда $\mu_1 \neq \mu_2$ (ферромагнитный случай). При этом на границе L остается непрерывным векторный потенциал, а его нормальная производная терпит скачок. Последнее обстоятельство вносит существенные коррективы в решение задачи методом малого параметра.

Постановка задачи следующая. По двум бесконечным, расположенным в воздухе проводам, параллельным оси y и имеющим координаты (x_0, h) и (x_1, h) в области $z>0$ (зона 0) течет ток, меняющийся соответственно по закону $\pm I\cos\omega t$. Проводящее полупространство расположено в области $-\infty<x, y<+\infty$, $z<0$ и имеет проводимость σ_1 и магнитную проницаемость μ_1

всюду, за исключением области $D\{-p\leqslant x\leqslant p;\ -\infty<y<+\infty,$ $-s-r\leqslant z\leqslant -s\}$, которая имеет проводимость σ_2 и магнитную проницаемость μ_2. Предполагается, что величины $\varepsilon=\sigma_2/\sigma_1-1$ и $\varepsilon_1=\mu_2/\mu_1-1$ достаточно малы (малые параметры). Пусть $A_0(x,z)$, $A_1(x,z)$, $A_2(x,z)$ есть соответственно векторные потенциалы в зонах 0,I и II (зона I - проводящее полупространство без области D, зона II - область D). Тогда математическая постановка задачи для функций A_0-A_2 имеет вид

$$\Delta A_0=-\mu_0 I\delta(z-h)\,[\delta(x-x_0)-\delta(x-x_1)],\quad z>0, \tag{1}$$

$$\Delta A_1+k_1^2A_1=0,\ z<0,\ (x,z)\notin D, \tag{2}$$

$$\Delta A_2+k_1^2(1+\varepsilon)A_2=0,\ (x,z)\in D,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{3}$$

где I - амплитуда силы тока, μ_0 - абсолютная магнитная проницаемость, $k_1^2=-i\omega\sigma_1\mu_1$. Граничные условия :

$$z=0:\ A_0=A_1,\ \bar{\mu}_1\frac{\partial A_0}{\partial z}=\frac{\partial A_1}{\partial z},\ \bar{\mu}_1=\frac{\mu_1}{\mu_0}, \tag{4}$$

$$\text{на } L:\ A_1=A_2,\ \tilde{\mu}\frac{\partial A_1}{\partial n}=\frac{\partial A_2}{\partial n},\ \tilde{\mu}=\frac{\mu_2}{\mu_1}=1+\varepsilon_1, \tag{5}$$

где L - граница зоны II, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к границе.

Кроме того

$$A_0,\ A_2\to 0\ \text{при}\ \sqrt{x^2+z^2}\to\infty. \tag{6}$$

Ищем решение задачи (I)-(6) в виде разложения по двум малым параметрам :

$$A_0=A_0^0+\varepsilon\bar{A}_0^1+\varepsilon_1 A_0^1+\ldots \tag{7}$$

$$A_1=A_1^0+\varepsilon\bar{A}_1^1+\varepsilon_1 A_1^1+\ldots \tag{8}$$

$$A_2 = A_2^0 + \varepsilon \bar{A}_2^1 + \varepsilon_1 A_2^1 + \ldots \tag{9}$$

Подставляя (7)-(9) в (I)-(6), получим

$$\Delta (A_0^0 + \varepsilon \bar{A}_0^1 + \varepsilon_1 A_0^1 + \ldots) =$$

$$= -I\mu_0 \delta(z-h)[\delta(x-x_0) - \delta(x-x_1)], \tag{I0}$$

$$\Delta(A_1^0 + \varepsilon \bar{A}_1^1 + \varepsilon_1 A_1^1 + \ldots) +$$

$$+ k_1^2(A_1^0 + \varepsilon \bar{A}_1^1 + \varepsilon_1 A_1^1 + \ldots) = 0, \tag{II}$$

$$\Delta(A_2^0 + \varepsilon \bar{A}_2^1 + \varepsilon_1 A_2^1 + \ldots) +$$

$$+ (I+\varepsilon)\, k_1^2(A_2^0 + \varepsilon \bar{A}_2^1 + \varepsilon_1 A_2^1 + \ldots). \tag{I2}$$

При $z=0$:

$$A_0^0 + \varepsilon \bar{A}_0^1 + \varepsilon_1 A_0^1 + \ldots = A_1^0 + \varepsilon \bar{A}_1^1 + \varepsilon_1 A_1^1 + \ldots, \tag{I3}$$

$$\bar{\mu}_1 \frac{\partial}{\partial z}(A_0^0 + \varepsilon \bar{A}_0^1 + \varepsilon_1 A_0^1 + \ldots) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(A_1^0 + \varepsilon \bar{A}_1^1 + \varepsilon_1 A_1^1 + \ldots). \tag{I4}$$

На L:

$$A_1^0 + \varepsilon \bar{A}_1^1 + \varepsilon_1 A_1^1 + \ldots = A_2^0 + \varepsilon \bar{A}_2^1 + \varepsilon_1 A_2^1 + \ldots \tag{I5}$$

$$(1+\varepsilon_1) \frac{\partial}{\partial n}(A_1^0 + \varepsilon \bar{A}_1^1 + \varepsilon_1 A_1^1 + \ldots) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial n}(A_2^0 + \varepsilon \bar{A}_2^1 + \varepsilon_1 A_2^1 + \ldots) \tag{I6}$$

Приравнивая в (I0) - (I6) члены, не содержащие "ε" и "ε_1", получим задачу для нулевого приближения в виде

$$\Delta A_0^0 = -I\, \mu_0 \delta(z-h)\, [\delta(x-x_0) - \delta(x-x_1)], \tag{I7}$$

$$\Delta A_1^0 + k_1^2 A_1^0 = 0, \tag{18}$$

$$\Delta A_2^0 + k_1^2 A_2^0 = 0, \tag{19}$$

$$z=0:\ A_0^0 = A_1^0,\ \ \bar{\mu}_1 \frac{\partial A_0^0}{\partial z} = \frac{\partial A_1^0}{\partial z}. \tag{20}$$

Решая задачу (I7)-(20), получим

$$\overset{0}{A}_0(x,z) = -\frac{I\mu_0}{4\pi} \ln \frac{(z+h)^2+(x-x_1)^2}{(z+h)^2+(x-x_0)^2} +$$

$$+\frac{I\mu_0 \bar{\mu}_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(z+h)}}{\lambda \bar{\mu}_1 + q} \left[\cos\lambda(x-x_0) - \cos\lambda(x-x_1)\right] d\lambda, \tag{21}$$

$$\overset{0}{A}_1(x,z) = \frac{I\mu_0 \bar{\mu}_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h + zq}}{\lambda \bar{\mu}_1 + q} \left[\cos\lambda(x-x_0) - \right.$$

$$\left. - \cos\lambda(x-x_1)\right] d\lambda, \tag{22}$$

где $q = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$, $A_2^0(x,z) = A_1^0(x,z)$. Учитывая (I7)-(20) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и ε_1, получим две задачи: одну для $\bar{A}_0^1$, $\bar{A}_1^1$, $\bar{A}_2^1$ - она совпадает с задачей в работе /I/ и поэтому ее не выписываем; вторая задача - для A_0^1, A_1^1, A_2^1 получается в виде:

$$\Delta A_0^1 = 0,\quad z>0, \tag{23}$$

$$\Delta A_1^1 + k_1^2 A_1^1 = 0,\ z<0,\ (x,z) \notin D, \tag{24}$$

$$\Delta A_2^1 + k_1^2 A_2^1 = 0,\ (x,z) \in D, \tag{25}$$

$$z=0:\ A_0^1=A_1^1,\ \ \bar{\mu}_1 \frac{\partial}{\partial z} A_0{}^1 = \frac{\partial}{\partial z} A_1^1; \tag{26}$$

$$\text{на } L:\ A_1^1 = A_2^1,\ \ \frac{\partial}{\partial n} A_2^1 = \frac{\partial}{\partial n} A_1^1 + \frac{\partial}{\partial n} A_1^0, \tag{27}$$

где A_1^0, следовательно и $\frac{\partial}{\partial n} A_1^0$ – заданы. Уравнения (24) и (25) совместн^ с граничными условиями (27) можно объединить в одно уравнение (для области $x \geqslant 0$) :

$$\Delta A_1^1 + k_1^2 A_1^1 = -\frac{\partial}{\partial n} A_1^0|_L\, \delta(\mu - \mu|_L), \tag{28}$$

где

$$\delta(\mu-\mu|_L) = \delta(x-p)|_{z\in[-s-r,-s]} + \delta(z+s+r)|_{x\in[0,p]} +$$

$$+\ \delta(z+s)|_{x\in[0,p]}$$

Для решения уравнения (28), разобьем A_1^0 на сумму четной и нечетной по x функций :

$$A_1^0(x,z) = A^0_{1\text{чет}} + A^0_{1\text{неч}}, \tag{29}$$

где

$$A^0_{1\text{чет}} = \frac{I\mu_0\bar{\mu}_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h+zq}}{\lambda\bar{\mu}_1+q}\cos\lambda x\,(\cos\lambda x_0 - \cos\lambda x_1)d\lambda, \tag{30}$$

$$A^0_{1\text{неч}} = \frac{I\mu_0\bar{\mu}_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h+zq}}{\lambda\bar{\mu}_1+q}\sin\lambda x\,(\sin\lambda x_0 - \sin\lambda x_1)d\lambda. \tag{31}$$

Решим задачу отдельно для четного и нечетного случаев. Решение в общем случае будет равно сумме четного и нечетного решений. Сперва рассмотрим четный случай, для которого требуется решить задачу:

$$\Delta A_0^1 = 0,\ z>0,\ 0<x,\ z<+\infty, \tag{32}$$

$$\Delta A_1^1 + k_1^2 A_1^1 = -\frac{\partial}{\partial n} A^0_{1\text{чет}}\,/_L\, \delta(\mu-\mu/_L),\ z<0 \tag{33}$$

с граничными условиями

$$z=0: A_0^1 = A_1^1,\ \bar{\mu}_1 \frac{\partial A_0^1}{\partial z} = \frac{\partial A_1^1}{\partial z}; \tag{34}$$

$$z \to +\infty : A_0^1 \to 0; \quad z \to -\infty : A_1^1 \to 0; \tag{35}$$

$$x=0 : \frac{\partial A_0^1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial A_1^1}{\partial x} = 0. \tag{36}$$

Применим к задаче (32)-(36) косинус - преобразование Фурье по x, положив

$$A_k^{1c}(\lambda, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A_k^1(x,z) \cos\lambda x dx, \ (k=0,1) \tag{37}$$

Тогда получим задачу

$$\frac{d^2 A_0^{1c}}{dz^2} - \lambda^2 A_0^{1c} = 0, \tag{38}$$

$$\frac{d^2 A_1^{1c}}{dz^2} - (\lambda^2 - k_1^2) A_1^{1c} =$$

$$= \begin{cases} 0, & z \notin (-s-r, -s) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial}{\partial x} A^0_{1\text{чет}}/_{x=p} \cos\lambda p, & z \in (-s-r, -s) \end{cases} \tag{39}$$

с граничными условиями

$$z=0 : A_0^{1c} = A_1^{1c},\ \bar{\mu}_1 \frac{d A_0^{1c}}{dz} = \frac{dA_1^{1c}}{dz}, \tag{40}$$

$$z\to\infty:\ A_0^{1c}\to 0; \qquad z\to-\infty:\ A_1^{1c}\to 0 \tag{41}$$

$$z=-s:\ A_1^{1c}\Big|_{z=-s-0}=A_1^{1c}\Big|_{z=-s+0}; \tag{42}$$

$$\frac{dA_1^{1}}{dz}\Big|_{z=-s-0}-\frac{dA_1^{1c}}{dz}\Big|_{z=-s+0}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^p \frac{\partial A^0_{1\text{чет}}}{\partial z}\Big|_{z=-s}\cos\lambda x\,dx \tag{43}$$

$$z=-s-r:\ A_1^{1c}\Big|_{z=-s-r-0}=A_1^{1c}\Big|_{z=-s-r+0}; \tag{44}$$

$$\frac{dA_1^{1c}}{dz}\Big|_{z=-s-r+0}-\frac{dA_1^{1c}}{dz}\Big|_{z=-s-r+0}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^p \frac{\partial A^0_{1\text{чет}}}{\partial z}\Big|_{z=-s-r}\cos\lambda x\,dx. \tag{45}$$

Решая задачу (38) – (45) и применяя обратное конус-преобразование Фурье, получим

$$A^1_{0\text{чет}}(x,z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty A_{\text{чет}}(\lambda)e^{-\lambda z}\cos\lambda x\,d\lambda, \tag{46}$$

где

$$A_{\text{чет}}(\lambda) = \frac{I}{\lambda\bar{\mu}_1+q}\int\limits_0^{\infty}\left\{\left[(\hat{q}-q)B(t,\lambda)e^{-\hat{q}(s+r)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{I}{\sqrt{2\pi}} f(s+r,t)\varphi(t,\lambda)\right]\right\} e^{-q(s+r)} - \left[(\hat{q}-q)B(t,\lambda)e^{-\hat{q}s} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{I}{\sqrt{2\pi}} f(s,t)\varphi(t,\lambda)\right]\right\} e^{-qs}\Big\}dt\ , \qquad (47)$$

$$B(t,\lambda) = \frac{I\mu_0\bar{\mu}_1\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\,\frac{\cos\lambda p}{t^2-\lambda^2}\,\frac{e^{-th}}{t\bar{\mu}_1+\hat{q}}\,\sin pt(\cos tx_0 - \cos tx_1),$$

$$f(s,t) = \frac{I\mu_0\bar{\mu}_1}{\pi}\,\frac{\hat{q}e^{-s\hat{q}-th}}{t\bar{\mu}_1+\hat{q}}\left[\cos tx_0 - \cos tx_1\right],$$

$$\varphi(t,\lambda) = 2\,\frac{\lambda\sin\lambda p\cos tp - t\cos\lambda p\sin tp}{\lambda^2-t^2},$$

$$\hat{q} = \sqrt{t^2-k_1^2}\ ,\quad q = \sqrt{\lambda^2-k_1^2}\ .$$

В нечетном случае нужно решить задачу (32)-(35), заменив в правой части уравнения (33) $A^0_{1\,\text{чет}}$ на $A^0_{1\,\text{неч}}$, а условие (36) заменить условием

$$x=0\ :\ A^0_1=0,\ A^1_1=0.$$

Решение для нечетного случая, полученное путем применения синус- преобразования Фурье по переменной x, имеет вид :

$$A^{0}_{1\text{неч}}(x,z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} A_{\text{неч}}(\lambda) e^{-\lambda z} \sin\lambda z d\lambda \qquad (48)$$

где

$$A_{\text{неч}}^{\cdot}(\lambda) = \frac{1}{\lambda \bar{\mu}_1 + q} \int\limits_{0}^{\infty} \{[\hat{q} - q)\hat{B}(t,\lambda) e^{-\hat{q}(s+r)} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(s+r,t)\hat{\varphi}(t,\lambda)\Big]\Big\} e^{-q(s+r)} - \Big[(\hat{q}-q)\hat{B}(t,\lambda) e^{-\hat{q}s} -$$

$$- \frac{I}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(s,t)\hat{\varphi}(t,\lambda)\Big]\Big\} e^{-qs}\Big\} dt , \qquad (49)$$

$$\hat{B}(t,\lambda) = \frac{I\mu_0 \bar{\mu}_1 \sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{\sin\lambda p}{t^2 - \lambda^2} \frac{e^{-th}}{t\bar{\mu}_1 + \hat{q}} \cos pt(\sin tx_0 - \sin tx_1),$$

$$\hat{f}(s,t) = \frac{I\mu_0 \bar{\mu}_1 \, \hat{q} e^{-s\hat{q} - th}}{t\bar{\mu}_1 + \hat{q}} \Big[\sin tx_0 - \sin tx_1\Big],$$

$$\hat{\varphi}(t,\lambda) = 2\,\frac{t\sin\lambda p\cos pt - \lambda\cos\lambda p\sin pt}{\lambda^2 - t^2} .$$

В результате из (7) (при $\varepsilon=0$) получим выражение для $A_0(\bar{x},h)$ в виде (чертой сверху обозначим те размерные величины, которые после перехода к безразмерным величинам обозначаются той же буквой (з черты):

$$A_0(\bar{x}_0,h)=-\frac{1}{4\pi}I\mu_0 \ln\frac{4h^2+d^2}{4h^2}+\frac{I\mu_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-2\lambda h}}{\lambda\bar{\mu}_1+q}(1-\cos\lambda d)\,d\lambda+$$

$$+\varepsilon_1[A^1_{0\ \text{неч}}(\bar{x}_0,h)+A^1_{0\ \text{чет}}(\bar{x}_0,h)], \qquad (50)$$

где $d=x-x_0$, $\varepsilon_1=\frac{\mu_2}{\mu_1}-1$,

$$A^1_{0\ \text{чет}}(x_0,h)=\frac{2I\mu_0\bar{\mu}_1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda h}\cos\lambda\bar{x}_0}{\lambda\bar{\mu}_1+q}\,d\lambda\int_0^\infty\Big[e^{-(\hat{q}+q)(\bar{s}+\bar{r})}-$$

$$-e^{(\hat{q}+q)\bar{s}}\Big]\frac{(\cos t\bar{x}_0-\cos t\bar{x}_1)e^{-th}}{t\bar{\mu}_1+\hat{q}}\Big[\frac{(\hat{q}-q)\sin\bar{p}t\cos\lambda\bar{p}}{t^2-\lambda^2}+$$

$$+\frac{\hat{q}(\lambda\sin\lambda\bar{p}\cos t\bar{p}-t\cos\lambda\bar{p}\sin t\bar{p})}{t^2-\lambda^2}\Big]\,dt, \qquad (51)$$

$$A^1_{0\ \text{неч}}(\bar{x}_0,h)=\frac{2I\mu_0\bar{\mu}_1}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda h}\sin\lambda\bar{x}_0}{\lambda\bar{\mu}_1+q}\,d\lambda\times$$

$$\times\int_0^\infty\frac{e^{-th}(\sin t\bar{x}_0-\sin t\bar{x}_1)}{t\bar{\mu}_1+\hat{q}}\Big[e^{(\hat{q}+q)(\bar{s}+\bar{r})}-e^{(\hat{q}+q)\bar{s}}\Big]\times$$

$$\times\Big[\frac{(q-\hat{q})\cos\bar{p}t\sin\lambda\bar{p}}{t^2-\lambda^2}+\frac{\hat{q}(t\sin\lambda\bar{p}\cos\bar{p}t-\lambda\cos\lambda\bar{p}\sin\bar{p}t)}{t^2-\lambda^2}\Big]\,dt. \qquad (52)$$

Перейдем к безразмерным величинам, положив

$$x_0 = \frac{\bar{x}_0}{d}\ ,\ x_1 = \frac{\bar{x}_1}{d} = x_0 + 1,\ \beta = d\sqrt{\omega\sigma_1\mu_1}\ ,$$

$$\alpha = \frac{2h}{d}\ ,\ \lambda = \frac{\beta y}{d}\ ,\quad t = \frac{\beta x}{d},\ s = \frac{\bar{s}}{d}\ ,\ r = \frac{\bar{r}}{d},\ p = \frac{\bar{p}}{d}\ ,$$

$$k_1^2 = -j\,\omega\sigma_1\mu_1 = -j\,\frac{\beta^2}{d^2}\ ,$$

$$q = \sqrt{\lambda^2 - k^2} = \frac{\beta}{d}\sqrt{y^2+j}\ ,\quad \hat{q} = \sqrt{t^2 - k_1^2} = \frac{\beta}{d}\sqrt{x^2+j}\ .$$

Тогда формулы (50)-(52) приводятся к виду:

$$A_0(x_0,\frac{\alpha}{2}) = -\frac{1}{4\pi}I\mu_0 \ln(1+\frac{1}{\alpha^2}) + \frac{I\mu_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\beta y}(1-\cos\beta y)}{y+\sqrt{y^2+j}}dy +$$

$$+\ \varepsilon_1\left[A^1_{0\ \text{неч}}(x_0,\frac{\alpha}{2}) + A^1_{0\ \text{чет}}(x_0,\frac{\alpha}{2})\right],$$

где

$$A^1_{0\ \text{чет}}(x_0,\frac{\alpha}{2}) = \frac{2I\mu_0\bar{\mu}_1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\cos\beta y x_0}{\bar{\mu}_1 y + \hat{y}}dy \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha\beta(x+y)}}{x\bar{\mu}_1 + \hat{x}} \times$$

$$\times \frac{e^{-\beta(s+r)(\hat{y}+\hat{x})} - e^{-\beta s(\hat{y}+\hat{x})}}{x^2 - y^2}(\cos\beta x_0 x - \cos\beta(x_0+1)x) \times$$

$$\times\left[(\hat{x} - \hat{y})\cos\beta p y \sin\beta p x + \hat{x}\,(y\sin p\beta y \cos p\beta x - \right.$$

$$\left. - x\cos p\beta y \sin p\beta x\right]dx,$$

$$\hat{x} = \sqrt{x^2+j}\,, \quad \hat{y} = \sqrt{y^2+j}\,,$$

$$A^1_{0\ \text{неч}}(x_0, \frac{a}{2}) = \frac{2I\mu_0\bar{\mu}_1}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\beta y x_0}{\bar{\mu}_1 y+\hat{y}}\,dy\int\limits_0^\infty \frac{e^{-a\beta(x+y)}}{x\bar{\mu}_1+\hat{x}}\,\cdot$$

$$\frac{e^{-\beta(s+r)(\hat{y}+\hat{x})} - e^{-\beta s(\hat{y}+\hat{x})}}{x^2 - y^2}(\sin\beta x_0 x - \sin\beta(x_0+1)x)$$

$$\Big[(\hat{y} - \hat{x})\sin p\beta y\cos p\beta x + \hat{x}\,(x\sin p\beta y\cos p\beta x -$$

$$- y\cos p\beta y\sin p\beta x)\Big]dx.$$

На ЭВМ вычисляется величина

$$|z_b| = \frac{\pi^2}{2I\mu_0\mu_1}\,|A^1_{0\ \text{чет}}(x_0, \frac{a}{2}) + A^1_{0\,\text{неч}}(x_0, \frac{a}{2})|,$$

которая может быть определена экспериментально. Результаты вычисления приведены на рис.I. Как видно из рисунка, наблюдается связь между максимумом величины $|z_b|$ (который тем резче, чем меньше безразмерная величина зазора a) и полушириной зазора p. Кроме того, наблюдается резкое уменьшение $|z_b|$ с ростом относительной магнитной проницаемости $\bar{\mu}_1$. Одинаковые величины максимумов на кривых II и III связаны с тем, что увеличение в 5 раз величины зазора на кривой III (a=0,5) компенсируется уменьшением вдвое величины $\bar{\mu}_1$ по сравнению с кривой II.

Отметим, что векторный потенциал двух уединенных проводов получается, если в (2I) положить $q = \lambda$ и равен первому слагаемому в (2I), взятому со знаком минус. С ростом $\bar{\mu}_1$, как видно из (2I), вклад однородного проводящего полупространства в векторный потенциал двух уединенных проводов возрастает и совпадает с ним при $\bar{\mu}_1 \to \infty$. Однако,

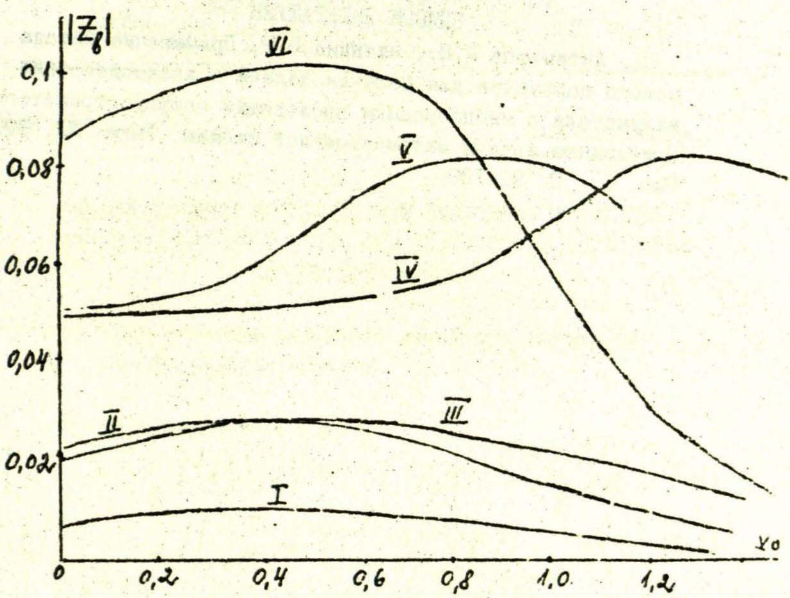


Рис.I. Зависимость модуля $|Z_\ell|$ от x_0 при различных значениях параметров (ς = 0,55, τ = 0,05) :

I α = 0.I; β = I; p = I; $\bar{\mu}$ = 20
II α = 0.I: β = I: p = I: $\bar{\mu}_1$ = I0
III α = 0.5: β = I; p = I; $\bar{\mu}_1$ = 5
IУ α = 0.I: β = I; p = 2; $\bar{\mu}_1$ = 5
У α = 0.I: β = I; p = I 5; $\bar{\mu}_1$ = 5
УI α = 0.I, β = 5: p = I ; $\bar{\mu}_1$ = 5

как видно из (22), векторный потенциал самого проводящего полупространства, расположенного в области $z<0$, стремится к нулю при $\bar{\mu}_1 \to \infty$, так как величина $\bar{\mu}_1$ в формуле (22) входит в , т.е. в показатель степени экспоненты, причем реальная часть показателя степени - отрицательна. Именно по этой причине, как видно из (29), $|Z_\ell| \to 0$ при $\bar{\mu}_1 \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Антимиров М.Я., Лиепиня В.Р. Применение метода малого параметра для решения задачи о взаимодействии излучателя с неоднородным проводящим полупространством// Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1990. Вып. I С. 91-100.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Вып.2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 517.984:537.84

Ю.М.Антимиров
РТУ, Рига

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБРАТНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОМПЛЕКСНЫМ ИНТЕГРАЛОМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

1. Представление обратного линейного оператора комплексным интегралом

Рассмотрим краевую задачу:

$$(L_x + L_y)U(x,y) = -F(x,y), \quad \begin{matrix} a<x<b, \\ c<y<d, \end{matrix} \tag{1.1}$$

$$U\big|_{x=a} = U\big|_{x=b} = U\big|_{y=c} = U\big|_{y=d} = 0, \tag{1.2}$$

где $F(x,y)$ - непрерывная функция в области $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$; L_x, L_y - линейные дифференциальные операторы 2-го порядка соответственно по переменным x и y, причем оператор (L_x+L_y) - эллиптический, /1/. Вместо операторов 2-го порядка могут быть заданы эллиптические операторы любого четного порядка с соответствующим числом граничных условий (например, для оператора 4-го порядка надо задать по два нулевых граничных условия на каждой из сторон прямоугольника, и т. д.). Решение задачи (1.1), (1.2) обычно ищут в виде ряда по собственным функциям одного из операторов L_x или L_y, однако такие ряды мало пригодны для изучения асимптотического поведения решения при наличии малого параметра при старших производных.

Покажем, что решение задачи (1.1), (1.2) можно получить в виде интеграла по параметру в комплексной плоскости, более пригодного для изучения асимптотического поведения решения. Для этого рассмотрим краевую задачу:

$$(L_x - \sigma)A(x,y,\sigma) = -F(x,y),\ a < x < b, \qquad (I.3)$$

$$A\big|_{x=a} = A\big|_{x=b} = 0, \qquad (I.4)$$

где y - действительный параметр, σ - комплексный параметр. Считаем, что оператор L_x имеет дискретный спектр собственных значений λ_i ($i = 1,2,3\ldots$). Тогда при $\sigma \neq \lambda_i$ оператор $(L_x-\sigma)$ обратим и решение задачи (I.3), (I.4) имеет вид:

$$A(x,y,\sigma) = -(L_x-\sigma)^{-1}F(x,y). \qquad (I.5)$$

Функция $A(\sigma) \equiv A(x,y,\sigma)$ имеет особые точки вида $\sigma = \lambda_i$. Найдем вычет $A(x,y,\sigma)$ при $\sigma = \lambda_i$. Для этого разложим $A(x,y,\sigma)$ и $F(x,y)$ в ряд по собственным функциям $f_i(x)$ оператора L_x, т. е. по решениям задачи:

$$L_x f_i(x) = \lambda_i f_i(x),\ f_i(a) = f_i(b) = 0. \qquad (I.6)$$

Получим

$$A(x,y,\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(y,\sigma) f_i(x), \qquad (I.7)$$

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i(y) f_i(x), \qquad (I.8)$$

где $a_i(y,\sigma)$ - неизвестные функции, а $k_i(y)$ - заданные функции (здесь использована полнота системы функций $f_i(x)$, /I/). Подставляя (I.7), (I.8) в (I.3), найдем коэффициенты $a_i(y,\sigma)$ и получим решение задачи (I.3), (I.4) в виде:

$$A(x,y,\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i(y)}{\sigma-\lambda_i} f_i(x). \qquad (I.9)$$

Из (I.9) следует, что $\sigma = \lambda_i$ - простые полюсы функции $\mathcal{A}(x,y,\sigma)$, так что сумма всех вычетов функции $\mathcal{A}(x,y,\sigma)$ в точках $\sigma = \lambda_i$ при использовании (I.8) равна:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{\sigma=\lambda_i} \mathcal{A}(x,y,\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(y) f_i(x) = F(x,y). \tag{I.10}$$

Если теперь C - контур в комплексной плоскости σ в виде петли, содержащей внутри себя особые точки $\sigma = \lambda_i$, и обе ветви этой петли уходят на бесконечность, то по теореме о вычетах справедливо представление:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \mathcal{A}(x,y,\sigma)\,d\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{\sigma=\lambda_i} \mathcal{A}(x,y,\sigma) = F(x,y), \tag{I.11}$$

причем сходимость интеграла (I.II) следует из сходимости ряда (I.8). Далее рассмотрим задачу:

$$(L_y + \sigma) K(x,y,\sigma) = \mathcal{A}(x,y,\sigma), \; c \leq y \leq d, \tag{I.12}$$

$$K\big|_{y=c} = K\big|_{y=d} = 0\,. \tag{I.13}$$

Если μ_j - собственные значения оператора L_y, то при $\sigma \neq \mu_j$ оператор $(L_y + \sigma)$ - обратим, и из (I.12) следует:

$$K(x,y,\sigma) = (L_y + \sigma)^{-1} \mathcal{A}(x,y,\sigma)\,. \tag{I.14}$$

Предположим, что собственные значения λ_i и μ_j - различны (т. е. оператор $(L_x + L_y)$ - обратим) и предположим, что указанный выше контур можно выбрать так, чтобы он содержал внутри себя особые точки $\sigma = \lambda_i$, но не содержал особые точки $\sigma = -\mu_j$. Покажем, что тогда решение задачи (I.I), (I.2) имеет вид:

$$U(x,y) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C K(x,y,\sigma)\,d\sigma, \tag{I.15}$$

причем интеграл (I.I5) сходится по тем же причинам, что и интеграл (I.II). Действительно, граничные условия (I.2) уже выполнены, так как они выполнены для $K(x,y,\sigma)$, а подстановка (I.I5) в (I.I) и использование принципа суперпозиции, /I/, коммутирования операторов L_x и L_y и соотношений (I.3) и (I.II) дает:

$$-(L_x+L_y)U(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C (L_x+L_y)K(x,y,\sigma)d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C (L_y+\sigma+L_x-\sigma)(L_y+\sigma)^{-1}A(x,y,\sigma)d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C (L_x-\sigma)(L_y+\sigma)^{-1}A(x,y,\sigma)d\sigma+F(x,y)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C (L_y+\sigma)^{-1}(L_x-\sigma)A(x,y,\sigma)d\sigma+F(x,y)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C (L_y+\sigma)^{-1}F(x,y)d\sigma+F(x,y)=F(x,y). \quad (I.I6)$$

Последний справа интеграл в (I.I6) равен нулю, так как контур C не содержит внутри себя точек $\sigma=-\mu_j$ и, следовательно, подынтегральная функция не имеет особых точек внутри C.

Формально полученный вывод можно записать так:

$$U(x,y)=-(L_x+L_y)^{-1}F(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C (L_y+\sigma)^{-1}(L_x-\sigma)^{-1}F(x,y)d\sigma. \quad (I.I7)$$

Итак, алгоритм получения решения (I.17) следующий:

I. Решается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка (y - действительный параметр, σ - комплексный):

$$(L_x-\sigma)\vartheta(x,y) = -F(x,y), \tag{I.18}$$

$$\vartheta\big|_{x=a} = \vartheta\big|_{x=b} = 0. \tag{I.19}$$

Пусть $\vartheta = \vartheta(x,y,\sigma)$ - ее решение.

2. Решается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения (x , σ - параметры):

$$(L_y+\sigma)\,\omega(x,y,\sigma) = \vartheta(x,y,\sigma), \tag{I.20}$$

$$\omega\big|_{y=c} = \omega\big|_{y=d} = 0. \tag{I.21}$$

Пусть $\omega = \omega(x,y,\sigma)$ - ее решение.

Тогда решение задачи (I.I), (I.2) имеет вид:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \omega(x,y,\sigma)\,d\sigma, \tag{I.22}$$

где контур C - петля, обе ветви которой уходят на бесконечность и внутри которой содержатся либо только особые точки функции $\vartheta(x,y,\sigma)$, либо только особые точки функции $\omega(x,y,\sigma)$ (без особых точек функции $\vartheta(x,y,\sigma)$).

Отметим, что из (I.22) сразу получается известное решение задачи (I.I), (I.2) в виде ряда по собственным функциям оператора L_x или оператора L_y , в зависимости от того, содержит ли контур C внутри себя только особые точки $\sigma = \lambda_i$, либо только особые точки $\sigma = -\mu_j$. Однако эти ряды менее пригодны для изучения асимптотического поведения решения, чем интеграл (I.22).

2. Приложение метода к решению задачи об МГД-течении в прямоугольном канале в неоднородном магнитном поле при больших числах Гартмана

Рассматривается полностью развитое в направлении оси z течение вязкой проводящей несжимаемой жидкости в прямоугольном канале в области $-\ell_1 \leq x \leq \ell_1$, $-\ell_2 \leq y \leq \ell_2$, $-\infty < z < \infty$ в неоднородном внешнем магнитном поле вида

$$\vec{B}^e = B_0 \frac{x}{\ell_2} \vec{e}_x - B_0 \frac{y}{\ell_2} \vec{e}_y \,, \tag{2.1}$$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ - единичные векторы осей X и y. Стенки канала - непроводящие. В безразмерных величинах (характерный размер длины - ℓ_2) система уравнений для поля скоростей $v(x,y)\vec{e}_z$ и индуцированного магнитного поля $b(x,y)\vec{e}_z$ имеет вид (см. /2/):

$$\left.\begin{aligned} &\Delta w_1 + xH\frac{\partial w_1}{\partial x} - yH\frac{\partial w_1}{\partial y} = -1 \\ &\Delta w_2 + yH\frac{\partial w_2}{\partial y} + xH\frac{\partial w_2}{\partial x} = -1 \end{aligned}\right\}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{2.2}$$

$$w_1\Big|_{x=\pm\ell} = w\Big|_{y=\pm 1} = 0; \quad w_2\Big|_{x=\pm\ell} = w_2\Big|_{y=\pm 1} = 0, \tag{2.3}$$

где $w_1 = v + b$, $w_2 = v - b$, $\ell = \ell_1/\ell_2$, $H = B_0 \ell_2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}$ - число Гартмана, σ - проводимость, ρ - плотность, ν - кинематическая вязкость жидкости. Достаточно решить задачу для функции $w_1(x,y)$, так как функция $w_2(x,y)$ получается из $w_1(x,y)$ заменой H на $-H$. В работе /2/ получено точное решение данной задачи в виде ряда по функциям Куммера, /3/, оценить который в центре канала при $H \to \infty$ не удалось.

Получим решение задачи (2.2), (2.3) описанным выше методом в виде комплексного интеграла и оценим его в центре канала при $H \to \infty$. Задача (2.2), (2.3) для $w_1(x,y)$ - это задача вида (I.I), (I.2), где

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H\cdot x\frac{\partial}{\partial x}, \quad L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - Hy\frac{\partial}{\partial y},$$
$$F(x, y) = 1. \tag{2.4}$$

Задача (I.18), (I.19) при условиях (2.4) принимает вид:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + Hx\frac{dv}{dx} - \sigma v = -1, \tag{2.5}$$

$$v\Big|_{x=\pm\ell} = 0. \tag{2.6}$$

Решение задачи (2.5), (2.6) выражается через функции Куммера (вырожденные гипергеометрические функции) $M(a, b, x)$, /3/:

$$v(x,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\left[1 - \frac{M\left(\frac{\sigma}{2H}, \frac{1}{2}, -\frac{Hx^2}{2}\right)}{M\left(\frac{\sigma}{2H}, \frac{1}{2}, -\frac{H\ell^2}{2}\right)}\right]. \tag{2.7}$$

Аналогично, задача (I.20), (I.21) при условиях (2.4) имеет решение:

$$w(x,y,\sigma) = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{M\left(\frac{\sigma}{2H}, \frac{1}{2}, \frac{Hy^2}{2}\right)}{M\left(\frac{\sigma}{2H}, \frac{1}{2}, \frac{H}{2}\right)} - 1\right] v(x,\sigma), \tag{2.8}$$

где $v(x,\sigma)$ определяется из (2.7). Стандартными методами можно доказать, что функции

$$\varphi_1(\sigma) = M\left(\frac{\sigma}{2H}, \frac{1}{2}, -\frac{H\ell^2}{2}\right), \quad \varphi_2(\sigma) = M\left(\frac{\sigma}{2H}, \frac{1}{2}, \frac{H}{2}\right) \tag{2.9}$$

как функции переменного σ имеют только действительные и простые нули, положительные для первой функции и отрицательные - для второй. Точка $\sigma = 0$ есть устранимая особая точка функции w. Поэтому контур C в (I.22) можно взять, например, в виде разреза по отрицательной действительной полуоси в комплексной плоскости σ с обходом по полуокружностям нулей функции $\varphi_2(\sigma)$. Тогда подстановка (2.7) и (2.8) в (I.22) дает решение задачи (2.2), (2.3) для функции $w_1(x, y)$ в виде:

$$w_1(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{1}{\varphi_1(\sigma)}M\left(\frac{\sigma}{2H},\frac{1}{2},-\frac{Hx^2}{2}\right)-1\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\varphi_2(\sigma)}M\left(\frac{\sigma}{2H},\frac{1}{2},\frac{Hy^2}{2}\right)-1\right]d\sigma. \qquad (2.10)$$

Из (2.10) после замены $\sigma=2Hz$ следует:

$$w_1(0,0)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\tilde{C}}\frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{M(z,\frac{1}{2},-\hat{H}\ell^2)}-1\right]\left[\frac{1}{M(z,\frac{1}{2},\hat{H})}-1\right]dz, \qquad (2.11)$$

где $\tilde{C}\equiv C$, $\hat{H}=H/2$. Используем асимптотическое представление функции $M(z,\frac{1}{2},\hat{H})$ при $\hat{H}\to\infty$ (см. /3/, формула 13.1.4):

$$M(z,\tfrac{1}{2},\hat{H})\sim 1+\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(z)}\hat{H}^{z-\frac{1}{2}}e^{\hat{H}}\left[1+O(\hat{H}^{-1})\right], \qquad (2.12)$$

где $\Gamma(z)$ - гамма-функция. Слагаемое 1 сохранено в (2.12), так как контур C есть разрез, по отрицательной действительной полуоси, охватывающий точку $z=0$, а в окрестности точки $z=0$ второе слагаемое справа в (2.12) становится близким к нулю. Тогда (2.11) примет вид:

$$w_1(0,0)\sim\frac{1}{4\pi i}\int\limits_C\frac{1}{z}\left[\frac{1}{M(z,\frac{1}{2},-\hat{H}\ell^2)}-1\right]\frac{1}{\frac{e^{-\hat{H}}}{\sqrt{\pi}}\hat{H}^{\frac{1}{2}-z}\Gamma(z+1)+z}dz, \qquad (2.13)$$

Таким образом, интеграл (2.13) равен сумме вычетов по действительным отрицательным нулям уравнения

$$z+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(z+1)e^{-\hat{H}}\hat{H}^{\frac{1}{2}-z}=0. \tag{2.I4}$$

Используя соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z, \tag{2.I5}$$

приведем уравнение (2.I4) к виду:

$$\sin\pi z=-\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-z)}e^{-\hat{H}}\hat{H}^{\frac{1}{2}-z}. \tag{2.I6}$$

При $\hat{H}\to\infty$ уравнение (2.I6) имеет корни вида:

$$z_n=-n+O\left(\frac{1}{n!}e^{-\hat{H}}\hat{H}^{\frac{1}{2}-n}\right),\ n=0,1,2\ldots \tag{2.I7}$$

Покажем, что при $\hat{H}\to\infty$ основной вклад в интеграл (2.I3) дает вычет в точке $z=z_0$, а сумма вычетов в остальных точках z_n пренебрежимо мала по сравнению с вычетом в точке $z=z_0$. Положим

$$\varphi(z)=z+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z+1)\hat{H}^{\frac{1}{2}-z}e^{-\hat{H}}. \tag{2.I8}$$

Из (2.I8) следует

$$\varphi'(z_n)=1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\hat{H}^{\frac{1}{2}}e^{-\hat{H}}\left[\Gamma'(z_n+1)\hat{H}^{-z_n}-\Gamma(z_n+1)\hat{H}^{-z_n}\cdot\ln\hat{H}\right]. \tag{2.I9}$$

Используя (2.I4), преобразуем (2.I9) к виду:

$$\varphi'(z_n)=1-z_n\left[\frac{\Gamma'(z_n+1)}{\Gamma(z_n+1)}-\ln\hat{H}\right]. \tag{2.20}$$

Тогда вычет в точке $z=z_0$ подынтегральной функции в (2.I3) (обозначим ее через $f(z)$) равен:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\frac{1}{z_0}\left[\frac{1}{M(z_0,\frac{1}{2},-\hat{H}e^{2})}-1\right]\frac{1}{1-z_0[\Psi(z_0+1)-\ln\hat{H}]}, \tag{2.2I}$$

где $\Psi(z)=[\ln\Gamma(z)]'$ - логарифмическая производная гамма-функции. Так как $z_0 \sim e^{-\hat{H}}\sqrt{\hat{H}}$ при $\hat{H}\to\infty$ и $M(0,b,x)=1$, то из (2.21) следует:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \sim -\frac{d}{dz} M\left(z,\frac{1}{2},-\hat{H}\ell^2\right)\Big|_{z=z_0}, \quad \hat{H}\gg 1. \tag{2.22}$$

Воспользуемся асимптотическим разложением при $\hat{H}\ell^2 \to +\infty$ (см. /3/, формула 13.1.5):

$$M\left(z,\frac{1}{2},-\hat{H}\ell^2\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-z)}\left(\hat{H}\ell^2\right)^{-z}\left[1+O(|z|)\right]. \tag{2.23}$$

Тогда из (2.22) получим

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \sim \ln \hat{H}\ell^2 - \Psi\left(\tfrac{1}{2}\right). \tag{2.24}$$

Аналогичные рассуждения для особых точек $z=z_n$ $(n=1,2,\ldots)$ дают

$$\operatorname*{Res}_{z_n} f(z) = \frac{1}{z_n}\left[\frac{1}{M(z_n,\frac{1}{2},-\hat{H}\ell^2)}-1\right]\frac{1}{1-z_n[\Psi(z_n+1)-\ln\hat{H}]}. \tag{2.25}$$

Подставим (2.23) в (2.25) (учитывая, что $z_n\to -n$ при $\hat{H}\to\infty$):

$$\operatorname*{Res}_{z_n} f(z) \sim -\frac{1}{n}\left[\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\hat{H}^n \ell^{2n}}-1\right]\frac{1}{1+n[\Psi(z_n+1)-\ln\hat{H}]}. \tag{2.26}$$

Так как $\Psi(z_n+1)\to\infty$ при $z_n\to -n$, то

$$\lim_{\hat{H}\to\infty} \operatorname*{Res}_{z_n} f(z) = 0, \quad n=1,2,3,\ldots \tag{2.27}$$

Покажем, кроме того, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{z_n} f(z) \tag{2.28}$$

сходится при каждом фиксированном $\hat{H}\gg 1$. Для этого используем соотношение (см. /3/):

$$\psi(1+z) = \psi(-z) - \pi \operatorname{ctg} \pi z \tag{2.29}$$

Из (2.29) и (2.17) следует:

$$\psi(1+z_n) = \psi(-z_n) - \pi \operatorname{ctg} z_n \sim \psi(n) + \frac{\pi(-1)^n}{\sin \pi z_n} \sim \psi(n) + \pi(-1)^n n! e^{\hat{H}} \hat{H}^{-(n+\frac{1}{2})} . \tag{2.30}$$

Из (2.26) и (2.30) следует, что ряд (2.28) сходится и, следовательно, основной вклад в интеграл (2.13) при $\hat{H} \to \infty$ дает формула (2.24). Таким образом, при $\hat{H} \to \infty$ из (2.13) и (2.24) получим:

$$w_1(0,0) \sim \frac{1}{2H} \cdot \ln \hat{H} \ell^2 \tag{2.31}$$

Так как $w_2(0,0)$ получается из $w_1(0,0)$ заменой $\hat{H}$ на $-\hat{H}$, то при $H \to \infty$

$$w_2(0,0) \sim \frac{\ln \hat{H}}{2H} \tag{2.32}$$

и, следовательно, при $H \to \infty$, (ℓ - const):

$$v(0,0) \sim \frac{\ln(H \cdot \frac{\ell}{2})}{2H} . \tag{2.33}$$

Таким образом, при $H \to \infty$ скорость в центре канала стремится к нулю, что соответствует физическим соображениям. Отметим, что в одномерной задаче (когда $\ell \to \infty$) получается простое решение (см. /2/), из которого следует, что скорость экспоненциально возрастает с ростом H, что не соответствует физическим соображениям. Как отмечено в /2/, происходит это потому, что с ростом H уменьшается размер области, в которой задачу можно считать одномерной. Как видно из (2.33), наличие боковых стенок канала при как угодно больших, но фиксированных значениях ℓ снимает это противоречие.

Найдем асимптотику расхода Q при $H \gg 1$. Имеем

$$Q = \int_{-l}^{l} dx \int_{-1}^{1} u(x,y)\, dy. \qquad (2.34)$$

Таким образом, (см. (2.7) и (2.10)), требуется вычислить интеграл от функции $\vartheta(x,\sigma)$ по x в пределах от $-l$ до l и интеграл по y от функции $f(y,\sigma)$ (где $f(y,\sigma)$ - коэффициент при $\vartheta(x,\sigma)$ в (2.8)) в пределах от -I до I. Интеграл от $\vartheta(x,\sigma)$ вычисляется путем непосредственного интегрирования уравнения (2.5) по x с интегрированием по частям члена $H\cdot x\cdot d\vartheta/dx$. Аналогично вычисляется интеграл от $f(y,\sigma)$. В результате (2.34) принимает вид:

$$Q = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{l}{\hat{H}} \int_C \frac{1}{z^2}\left[1-\frac{M(z,\frac{3}{2},\hat{H}l^2)}{M(z,\frac{1}{2},\hat{H}l^2)}\right]\left[1-\frac{M(z,\frac{3}{2},-\hat{H})}{M(z,\frac{1}{2},-\hat{H})}\right] dz. \qquad (2.35)$$

При $H \gg 1$ из (2.35) следует

$$Q = \frac{4\sqrt{2}}{H\sqrt{H}}\left(1+O(H^{-1})\right). \qquad (2.36)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

2. Регирер С.А. Развитые магнитогидродинамические течения в каналах при наличии внешнего магнитного поля остроконечной геометрии // Журнал технической физики. 1974. Т. XIIУ. Вып. 7. С.1395-1400.

3. Абрамовиц М. и Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Вып.2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 517.947:519.6:556.388

А.А.Буйкис,З.Ю.Титушкина
Ин-т физики ЛАН,
Рига

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАККОРМАКА ПРИ РАСЧЕТЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКИХ РАСТВОРОВ В ПОЧВЕ

В работе /I/ была рассмотрена математическая модель движения загрязняющих веществ в почве для случая промышленных выбросов загрязнителя,возникающих в аварийных ситуациях. Был разработан алгоритм численного решения задачи на базе метода конечных разностей с аппроксимацией конвективного слагаемого "против потока" и проведен расчет модельного примера с использованием изотермы Ленгмюра.Общеизвестно,однако, что односторонняя аппроксимация конвективных слагаемых хороша лишь в том случае,если расчет ведется на "пределе устойчивости",т.е. при критерии Куранта практически совпадающем с единицей.Иначе в численном решении присутствует достаточно большая численная диффузия и дисперсия.С другой стороны,для алгоритма из /I/ существенно было то,что он реализовался прогонками в направлении диффузии,т.е. схемой типа "бегущего счета" в направлении конвекции.

Для локальных аварийных выбросов существенным может оказаться учет продольной диффузии (дисперсии),особенно, если будет учитываться многослойное строение пласта со слабо проницаемыми перемычками,через которые все-таки постепенно происходит диффузионное загрязнение нижележащих слоев.Далее, в таких случаях (сильного загрязнения) существенную роль на протекание процесса может оказать нелинейность процесса сорбции,т.е. переход от изотермы Генри к изотерме Ленгмюра. Наконец,для экономичности алгоритма численной реализации разностной схемы было бы хорошо иметь алгоритм типа "бегушего счета" в направлении конвекции. Исходя из таких соображений в этой статье используется адаптация явного варианта схемы Маккормака, которая в /3/ предложена для одномерного уравнения конвективной диффузии.

Описание модели. При моделировании воздействий промышленных аварий на распространение загрязнителя в подземных водах и почве рассматривается двумерная прямоугольная область Ω. Жидкость втекает и вытекает из области через ее границы со скоростью $\bar{v}$. В некоторый момент времени на одной из границ области происходит выброс загрязняющих веществ. Используются следующие уравнения: уравнение (I), описывающее конвективный и диффузионный перенос загрязняющего вещества водой, а также сорбирование загрязнителя почвой; уравнение (2), отражающее кинетику сорбции; уравнение (3), характеризующее изотерму сорбции Ленгмюра /2/.

$$m\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial t}=-v\frac{\partial u}{\partial x}+D_L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+D_T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\beta(u-\tilde{u}) \qquad (2)$$

$$a=\frac{u_0\tilde{u}}{\gamma(u_0+p\tilde{u})}, \qquad (3)$$

где $u(x,y,t)$ -концентрация загрязняющего вещества, находящегося в поровом пространстве в свободном состоянии; $a(x,y,t)$ - концентрация сорбированного загрязняющего вещества; $\tilde{u}(x,y,t)$ - равновесная концентрация, характеризующая подвижное динамическое равновесие процессов сорбции и десорбции; t -время; β -кинетический коэффициент, зависящий от свойств породы и загрязняющего вещества; m -пористость почвы; $1/\gamma$ -коэффициент Генри; D_T и D_L -коэффициенты поперечной и продольной диффузии загрязняющего вещества соответственно; u_0, p = const.

Полагается, что в начальный момент времени загрязнитель в области Ω отсутствует:

$$u(x,y,0)=0,\ a(x,y,0)=0 \qquad (x,y)\in\Omega \qquad (4)$$

В общем случае на границах $y=0$, $y=Y$ может быть задана величина потока вещества, вызванная его диффузией:

$$-D_T \frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t)=\psi_1(x,t)$$
$$D_T \frac{\partial u}{\partial y}(x,Y,t)=\psi_2(x,t), \qquad (5)$$

где ψ_1, ψ_2 -заданные функции x и t. Если ширина области достаточно велика, можно считать, что через границы потоки отсутствуют, т.е. что

$$\psi_1(x,t)\equiv 0,\ \psi_2(x,t)\equiv 0.$$

На границе $x=X$ ставится следующее условие

$$D_L \frac{\partial u}{\partial x}(X,y,t)\equiv 0. \qquad (6)$$

На левой границе области $x=0$ задается концентрация свободного загрязнителя как функция времени

$$u(0,y,t)=\varphi(y,t). \qquad (7)$$

Описание численного алгоритма. Численное решение задачи (I)-(7) проводилось методом Маккормака на равномерной сетке с шагом h_x -по оси x, h_y -по оси y, τ -по времени:

$$\{x_i=ih_x,\ i=\overline{1,M};\ y_j=jh_y,\ j=\overline{1,N};\ t_k=k\tau,\ k=\overline{1,K}\}.$$

При использовании метода Маккормака /3/ для аппроксимации выражений (I)-(3) итерации осуществляются в два этапа: первый этап-предиктор, второй-корректор. На первом этапе производится приближенное получение результатов, второй этап необходим для их уточнения.

На первом этапе (предиктор) уравнения (I)-(3) нами аппроксимируются выражениями вида:

$$m\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^{n}}{\tau}+\frac{a_{ij}^{n+1}-a_{ij}^{n}}{\tau}=-v\frac{u_{i+1j}^{n}-u_{ij}^{n}}{h_x}+D_x\frac{u_{i+1j}^{n}-2u_{ij}^{n}+u_{i-1j}^{n}}{h_x^2}+$$

$$+D_T\sigma\frac{u_{ij+1}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2}+D_T(1-\sigma)\frac{u_{ij+1}^{n}-2u_{ij}^{n}+u_{ij-1}^{n}}{h_y^2} \qquad (8)$$

$$\frac{a_{ij}^{n+1}-a_{ij}^{n}}{\tau}=\beta\left((u_{ij}^{n}-\tilde{u}_{ij}^{n})(1-\sigma_1)+\sigma_1(u_{ij}^{n+1}-\tilde{u}_{ij}^{n+1})\right) \qquad (9)$$

$$a_{ij}^{n}=\frac{u_0\tilde{u}_{ij}^{n}}{\gamma(u_0+p\tilde{u}_{ij}^{n})}$$

$$(10)$$

$$a_{ij}^{n+1}=\frac{u_0\tilde{u}_{ij}^{n+1}}{\gamma(u_0+p\tilde{u}_{ijN}^{n+1})}.$$

Алгоритмическая реализация уравнений (8)-(10) затруднительна для непосредственного применения метода прогонки. Для преодоления этого затруднения используется прием, аналогичный описанному в /1/. Уравнения (10) сначала подставляются в уравнение (9), а полученное выражение подставляется в (8). В итоге, система (8)-(10) преобразовывается к прогоночному виду:

$$Au_{ij-1}^{n+1}-Cu_{ij}^{n+1}+Bu_{ij+1}^{n+1}=-F_j\,,$$

$$F_j=u_{ij}^{n}\left(\frac{m}{\tau}-\beta(1-\sigma_{01})+\frac{v}{h_x}-\frac{2D_T(1-\sigma)}{h_y^2}+\beta\sigma_{01}\frac{\beta\tau\gamma(1-\sigma_1)}{\frac{u_0}{u_0+p\tilde{u}_{ijN}^{n+1}}+\tau\beta\gamma\sigma_1}\right)+$$

$$+\tilde{u}_{ij}^{n}\left(\beta\sigma_{01}\frac{\frac{u_0}{u_0+p\tilde{u}_{ij}^{n}}}{\frac{u_0}{u_0+p\tilde{u}_{ijN}^{n+1}}+\tau\beta\gamma\sigma_1}-\beta\sigma_{01}\frac{\beta\tau\gamma(1-\sigma_1)}{\frac{u_0}{u_0+p\tilde{u}_{ijN}^{n+1}}+\tau\beta\gamma\sigma_1}+\beta(1-\sigma_{01})\right)-$$

$$-u_{i+1j}^{n}\frac{v}{h_x}+\frac{D_T(1-\sigma)}{h_y^2}(u_{ij+1}^{n}+u_{ij-1}^{n})+D_x\frac{u_{i+1j}^{n}-2u_{ij}^{n}+u_{i-1j}^{n}}{h_x^2}\,,$$

$$A=B=\frac{D_T\sigma}{h_y^2}\,,\; C=\frac{2D_T\sigma}{h_y^2}+\frac{m}{\tau}+\beta\sigma_{01}-\beta\sigma_{01}\frac{\beta\tau\gamma\sigma_1}{\frac{u_0}{u_0+p\tilde{u}_{ijN}^{n+1}}+\tau\beta\gamma\sigma_1}.$$

На втором этапе (корректор) выражения (I)-(3) мы аппроксимируем следующим образом:

$$m\frac{2u_{ij}^{n+1}-(u_{ij}^{n}+u_{ij}^{\overline{n+1}})}{\tau}+\frac{2a_{ij}^{n+1}-(a_{ij}^{n}+a_{ij}^{\overline{n+1}})}{\tau}=-v\frac{u_{ij}^{\overline{n+1}}-u_{i-1j}^{\overline{n+1}}}{h_x}+ \qquad (11)$$

$$+D_L\frac{u_{i+1j}^{\overline{n+1}}-2u_{ij}^{\overline{n+1}}+u_{i-1j}^{\overline{n+1}}}{h_x^2}+D_T\sigma_2\frac{u_{ij+1}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{ij-1}^{n+1}}{h_y^2}+D_T(1-\sigma_2)\frac{u_{ij+1}^{\overline{n+1}}-2u_{ij}^{\overline{n+1}}+u_{ij-1}^{\overline{n+1}}}{h_y^2}$$

$$\frac{a_{ij}^{\overline{n+1}}-a_{ij}^{n}}{\tau}=\beta\left((u_{ij}^{n}-\tilde{u}_{ij}^{n})(1-\sigma_1)+\sigma_1(u_{ij}^{\overline{n+1}}-\tilde{u}_{ij}^{\overline{n+1}})\right)$$

$$\frac{a_{ij}^{n+1}-a_{ij}^{\overline{n+1}}}{\tau}=\beta\left((u_{ij}^{\overline{n+1}}-\tilde{u}_{ij}^{\overline{n+1}})(1-\sigma_1)+\sigma_1(u_{ij}^{n+1}-\tilde{u}_{ij}^{n+1})\right) \qquad (12)$$

$$a_{ij}^{n}=\frac{u_0\tilde{u}_{ij}^{n}}{\gamma(u_0+p\tilde{u}_{ij}^{n})}$$

$$a_{ij}^{\overline{n+1}}=\frac{u_0\tilde{u}_{ij}^{\overline{n+1}}}{\gamma(u_0+p\tilde{u}_{ij}^{\overline{n+1}})} \qquad (13)$$

$$a_{ij}^{n+1}=\frac{u_0\tilde{u}_{ij}^{n+1}}{\gamma(u_0+p\tilde{u}_{ijN}^{n+1})}.$$

Далее уравнения (I3) подставляются в (I2), а полученные из (I2) выражения подставляются в (II). И система уравнений (II)-(I3) приводится к прогоночному виду:

$$Au_{ij-1}^{n+1}-Cu_{ij}^{n+1}+Bu_{ij+1}^{n+1}=-F_j,$$

$$F_j=D_L\frac{u_{i+1j}^{\overline{n+1}}-2u_{ij}^{\overline{n+1}}+u_{i-1j}^{\overline{n+1}}}{h_x^2}-v\frac{u_{ij}^{\overline{n+1}}-u_{i-1j}^{\overline{n+1}}}{h_x}+\frac{m}{\tau}(u_{ij}^{n}+u_{ij}^{\overline{n+1}})+$$

$$+D_T(1-\sigma_2)\frac{u_{ij+1}^{\overline{n+1}}-2u_{ij}^{\overline{n+1}}+u_{ij-1}^{\overline{n+1}}}{h_y^2}-\beta(1-\sigma_{02})(u_{ij}^{n}+u_{ij}^{\overline{n+1}}-\tilde{u}_{ij}^{n}-\tilde{u}_{ij}^{\overline{n+1}})+$$

$$+\frac{\beta\sigma_{02}}{\frac{u_0}{u_0+p\tilde{u}_{ijN}^{\overline{n+1}}}+\tau\beta\gamma\sigma_1}\left(\frac{u_0\tilde{u}_{ij}^{n}}{u_0+p\tilde{u}_{ij}^{n}}+\frac{u_0\tilde{u}_{ij}^{\overline{n+1}}}{u_0+p\tilde{u}_{ij}^{\overline{n+1}}}+\tau\beta\gamma(1-\sigma_1)(u_{ij}^{n}+u_{ij}^{\overline{n+1}}-\tilde{u}_{ij}^{n}-\tilde{u}_{ij}^{\overline{n+1}})\right),$$

$$A = B = \frac{D_T \sigma_2}{h_y^2}, \quad C = \frac{2m}{\tau} + \frac{2D_T \sigma_2}{h_y^2} + 2\beta\sigma_{02} - 2\beta\sigma_{02} \frac{\tau\beta\gamma\sigma_1}{\dfrac{u_0}{u_0 + p\tilde{a}^{n+1}_{y,N}} + \tau\beta\gamma\sigma_1}.$$

Здесь σ , σ_1 , σ_2 -коэффициенты, введенные для обеспечения устойчивости разностной схемы. Символ $\overline{n+1}$ на этапе предиктор обозначает номер временного слоя, на котором производится прогонка, знак n -номер предыдущего временного слоя. На этапе корректор верхний временной слой обозначается знаком $n+1$, нижние- $\overline{n+1}$ и n . Нижний индекс N в формулах (10), (13) обозначает номер предыдущей итерации.

Выражения (8)-(10) и (11)-(13) отличаются аппроксимацией членов $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial a}{\partial t}$ уравнения (1). Это вызывает необходимость изменить уравнения (9) и (10), представив их в виде (12) и (13). При аппроксимации временных производных u и a на этапе предиктор используются два временных слоя, на этапе корректор аппроксимация производится с помощью трех временных слоев: верхнего временного слоя, обозначенного символом $n+1$ и двух нижних, обозначенных символами $\overline{n+1}$ и n . В формуле (8) член $\frac{\partial u}{\partial x}$ представляется правой разностной производной, в формуле (11)-левой.

<u>Входные параметры.</u> Решение задачи проводилось при постоянных и переменных граничных условиях в зоне выброса загрязнителя. Коэффициенты имели следующие значения: $\sigma = 0$; $\sigma_{01} = 0,5$;

$\sigma_{02} = 0,5$; $\sigma_1 = 0,5$; $\sigma_2 = 1$; $D_T = 10^{-4}$ м^2/сут; $D_L = 5 \cdot 10^{-4}$ м^2/сут;

$v = 0,1$ м/сут; $\beta = 0,5$; 1; 2; 3; $\gamma = 1,5$; 2; $p = 1$; $m = 0,4$;

$u_0 = 0,01$; 0,05, 0,1; 0,5; 1; 5; 10; $Y = 1$ м ; $X = 2,5$ м.

Отношение длины зоны выброса к ширине области загрязнения составляло 3/5. Функция $\varphi(y,t)$ при постоянных граничных условиях в зоне выброса загрязнителя принималась равной 1, при переменных граничных условиях в начале процесса $\varphi(y,t)$ принималась равной 1, а затем-0 (так называемый концентрационный вал).

Анализ результатов. Для постановки без учета продольной диффузии на основании сравнения максимально допустимых временных шагов и балансовых отношений для методов Маккормака и односторонних разностей можно сделать вывод, что метод Маккормака является более эффективным, чем метод односторонних разностей. Так, при β =2, γ =1.5 максимально допустимый временной шаг для метода Маккормака равен 0.28, а для метода односторонних разностей-0.2. При β =3, γ =1-0.3 и 0.18 соответственно, при β =3, γ =2 - 0.36 и 0.23 соответственно, т.е. максимально допустимый шаг для метода Маккормака примерно в 1.5 раза больше, чем для метода односторонних разностей, что позволяет существенно увеличить скорость численных расчетов.

Для проверки качества разностного алгоритма были проведены расчеты балансов масс для методов Маккормака и односторонних разностей как в /1/ и /4/. Под балансом масс $\eta(t)$ понимается отношение количества загрязнителя, распределенного в исследуемой области в некоторый момент времени $(M_1(t))$, полученного из модели (1)-(7), к количеству вещества, поступившему в область за это же время вместе с потоком воды через зону выброса $(M_2(t))$:

$$\eta(t) = \frac{M_1(t)}{M_2(t)} . \qquad (14)$$

Исследование балансов масс для методов Маккормака и односторонних разностей показало, что с уменьшением u_0 в уравнении (3) сходимость балансовых отношений к 1 ускоряется. Сравнение балансов масс показывает, что погрешность результатов, вычисленная при вариации β, γ и u_0 для метода Маккормака практически всегда в 1.5-2 раза ниже, чем для метода односторонних разностей.

Метод Маккормака позволяет использовать тот же алгоритм прогонки в поперечном направлении и в случае продольной диффузии. Максимально допустимый временной шаг для расширенной модели равен 0.28 при β =2, γ =1.5 и 0.32 при β =3, γ =1. Дисбаланс массы, полученный на основании вычисления (14) составляет менее 1% . Это позволяет сделать вывод о достаточно эффективной работе метода.

Рассмотрим влияние величины u_0 на количество вещества, находящегося в поровом пространстве (рис.1) и количество

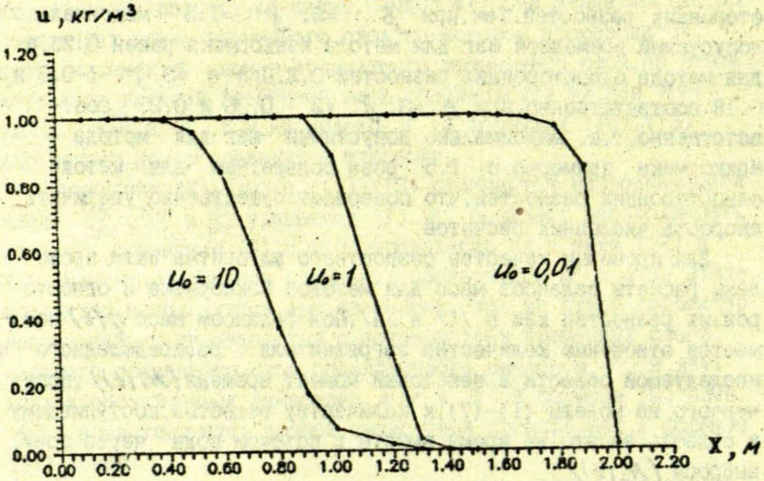


Рис.1. Зависимость концентрации свободного загрязнителя от величины u_0 (t =8сут; y =0.5м; ρ =1).

сорбированного почвой вещества (рис.2). Анализ результатов показывает, что увеличение значения u_0 ведет к уменьшению концентрации вещества в свободной фазе и значительному увеличению концентрации сорбированного вещества. Изменение u_0 оказывает влияние и на движение фронта загрязняющих веществ в почве. При уменьшении u_0 от 10 до 1 скорость движения фронта загрязняющего вещества увеличивается в 1.7 раза. Конфигурация фронта так же зависит от u_0 . Так, если значение u_0 близко к 0 наблюдается резкое падение концентрации загрязняющих веществ, находящихся в свободном

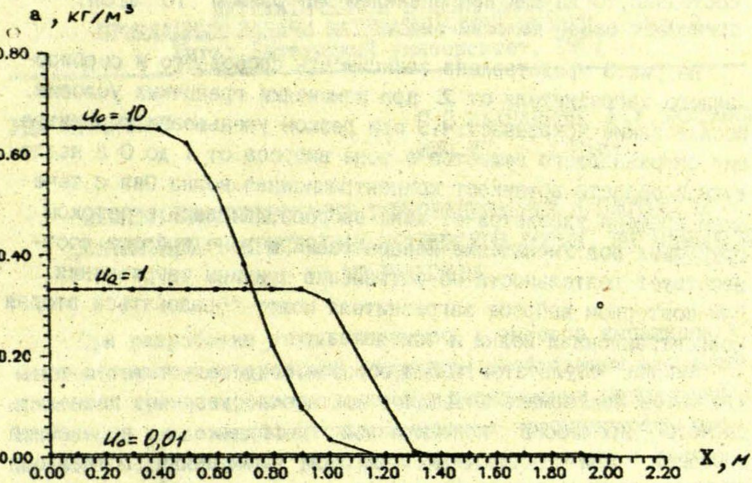


Рис.2.Зависимость концентрации сорбированного загрязнителя от величины u_0 (t =8сут; y =0.5м; ρ =I).

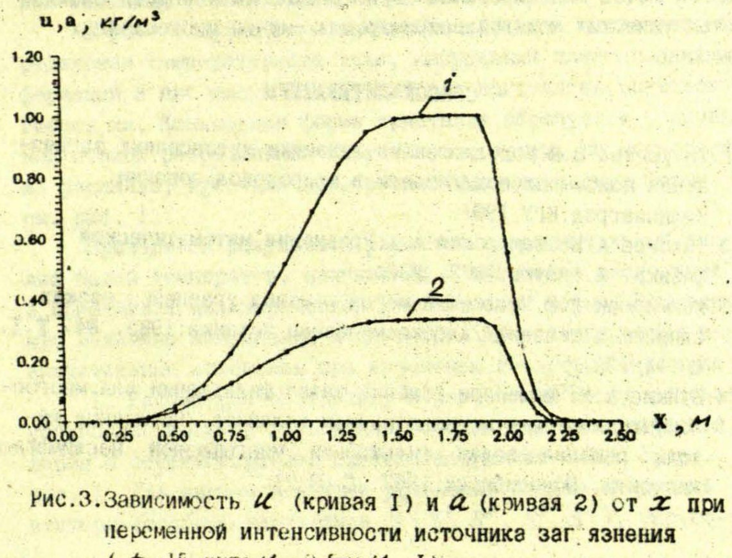


Рис.3.Зависимость u (кривая I) и a (кривая 2) от x при переменной интенсивности источника заг язнения (t =15 сут; y =0.5м; u_0 =I).

состоянии, тогда как при значении u_0 равном 10 фронт принимает более пологий вид.

На рис.3 представлена зависимость свободного и сорбированного загрязнителя от x при изменении граничных условий. Исследование показывает, что при резком уменьшении концентрации загрязняющего вещества в зоне выброса от 1 до 0 в исследуемой области возникает концентрационная волна. Она с течением времени удаляется от зоны выброса, двигаясь с потоком грунтовых вод. Уменьшение концентрации в зоне выброса соответствует деятельности по устранению причины загрязнения. При повторном выбросе загрязнителя может образоваться вторая концентрационная волна и так далее.

Анализ результатов, таким образом, свидетельствует о том, что метод Маккормака позволяет достаточно уверенно проводить расчеты процессов конвективной диффузии с нелинейной сорбцией при достаточно широком изменении отдельных параметров процесса (например u_0 меняется в 10^3 раз). Исходя из полученного опыта, авторы надеются использовать представленный метод моделирования при разработке более сложных математических моделей, например, для случая многослойных пластов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титушкина З.Ю. Моделирование динамики интенсивных загрязнений подземных вод//Модели в природопользовании. Калининград: КГУ, 1991.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736с.
3. Маккормак Р.В. Численный метод решения уравнений вязких сжимаемых течений//Аэрокосмическая техника. 1983. №4. Т.1. С.114-123.
4. Буйкис А.А. Численное решение задач фильтрации для многослойных пластов с использованием сплайнов//Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1987. С.68-71.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, Вып.2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 519.6:539

С.С.ВАХРАМЕЕВ, Р.А.ЯКУШЕНОК
ИМИ ЛУ, Рига

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ И ПЛОТНОСТИ ДИСЛОКАЦИЙ В КРИСТАЛЛАХ КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ, ВЫРАЩИВАЕМЫХ ИЗ РАСПЛАВА

При разработке технологических процессов выращивания монокристаллов совершенной структуры необходимым элементом является прогнозирование величины термических напряжений и плотности дислокаций. Отсюда возникает необходимость численного моделирования упругопластической задачи и расчета плотности дислокаций в кристалле. Необходимо также численное решение задачи теплообмена в процессе роста кристалла при заданных технологических режимах.

В работе приводится комплексная модель численного определения температурного поля, напряжений пластических деформаций и плотности дислокаций для кристаллов конической геометрии. Коническая форма кристалла образуется в начальный период разращивания из расплава, затем, по мере роста из расплава, кристалл приобретает цилиндрическую форму, см. рис. I.

Приводятся результаты расчетов и сравнительный анализ полей температур, напряжений и плотности дислокаций в кристаллах цилиндрической и коническо: формы. Показано, что величины напряжений и плотности дислокаций могут иметь значительные изменения при изменении геометрии кристалла.

I. Рассмотрим постановку и разностный метод решения упругопластической задачи для монокристаллов конической формы в осесимметричной системе координат (r , z), см. рис. I. Для записи исходных уравнений введем следующие векторы-столбцы: напряжений $\vec{S}\,(S^1, S^2, S^3, S^4)$, упруго-

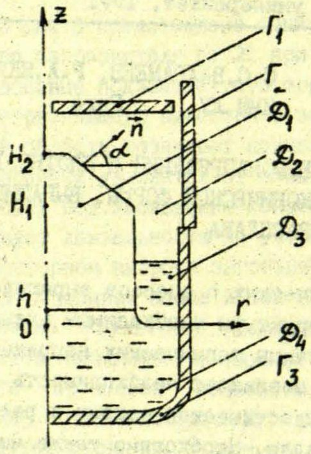


Рис. I. Схема установки при выращивании кристалла из расплава. $\mathcal{D}_1$ - кристалл, $\mathcal{D}_2$ - газ, $\mathcal{D}_3$ - флюс, $\mathcal{D}_4$ - расплав, Γ_1 - верхний экран, Γ_2 - боковой нагреватель, Γ_3 - стенка тигля, h - высота жидкого столбика, $H_1 - h$ - высота цилиндрической части кристалла, $H_2 - h$ - высота кристалла.

пластических деформаций $\vec{e} = (e^1, e^2, e^3, e^4)$ и пластических деформаций $\vec{e}_p = (e_p^1, e_p^2, e_p^3, e_p^4)$ с соответствующими компонентами

$$s^1 = \sigma^{rr} - \sigma^{\varphi\varphi}, \quad s^2 = \sigma^{\varphi\varphi}, \quad s^3 = \sigma^{zz}, \quad s^4 = \sigma^{rz}$$

$$e^1 = \varepsilon^{rr}, \quad e^2 = \varepsilon^{rr} - \varepsilon^{\varphi\varphi}, \quad e^3 = \varepsilon^{zz}, \quad e^4 = \varepsilon^{rz}$$

$$e_p^1 = \varepsilon_p^{rr}, \quad e_p^2 = \varepsilon_p^{rr} - \varepsilon_p^{\varphi\varphi}, \quad e_p^3 = \varepsilon_p^{zz}, \quad e_p^4 = \varepsilon_p^{rz}$$

Кроме того, вводится вектор смещений $\vec{u} = (u^r, u^z)$ с компонентами u^r и u^z.

Система уравнений упругопластического деформирования кристалла запишется в следующем виде:

уравнения равновесия

$$R^* \vec{S} = 0 \qquad (1)$$

соотношения Коши

$$\vec{e} = R\vec{u} \qquad (2)$$

уравнения состояния, /I/

$$\vec{S} = H\vec{e} - \vec{\beta}T - H\vec{e}_p \tag{3}$$

В уравнениях (I)-(3) матрицы-операторы имеют вид:

$$R^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}$$

В работе /2/ показано, что оператор R^* сопряжен к R. Это свойство операторов сохраняется в дальнейшем при построении разностной схемы.

$$H = \begin{pmatrix} 4\mu & -2\mu & 0 & 0 \\ -2\mu & \lambda+2\mu & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, λ, μ - коэффициенты Ламэ, α - коэффициент температурного расширения, T - температура. Кроме основных уравнений (I)-(3) выполняются уравнения совместности деформаций /3/, которые в принятых обозначениях имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 e^1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e^3}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2 e^4}{\partial r\,\partial z} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}\left[r(e^2 - e^1)\right] - e^1 = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

Граничные условия при свободной от внешних сил поверхности кристалла, включая его конусную часть запишутся следующим образом:

$$(S^1+S^2)n_r + S^4 n_z = 0$$
$$S^4 n_r + S^3 n_z = 0 \qquad (5)$$

n_r и n_z - составляющие вектора $\vec{n}$ внешней нормали к граничной поверхности.

В несвязной постановке задачи (I)-(5) температурное поле T кристалла определяется независимо численным решением задачи теплообмена. Эта задача рассматривается во второй части работы. Для замыкания уравнений (I)-(5) необходимо определение вектора пластических деформаций $\vec{e}_p$. Дадим краткую сводку основных соотношений, более полное изложение этого вопроса имеется в работе /I/. Принимая во внимание, что монокристалл имеет (n , m) систем скольжения, где n - номер плоскости скольжения (n = I,2,...,), m - направление скольжения (m = I,2,...,) определяются сдвиговые напряжения $\tau_{13}^{n,m}$ в системах скольжения (n,m). Для этой цели исходный тензор σ_{κ} (κ, ℓ = I,2,3) в цилиндрической системе координат (оси r, φ, z обозначим соответственно I,2,3) преобразуется в тензор σ_{ij}^{α} в декартовой системе координат известным образом

$$\sigma_{ij}^{d} = \alpha_{ik}\alpha_{j\ell}\sigma_{k\ell} \qquad (i,j=1,2,3) \;, \qquad (6)$$

где матрица переходных коэффициентов α_{ij} имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{k\ell}$ в цилиндрической системе записываются следующим образом:

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\varphi\varphi} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Сдвиговые напряжения $\tau_{13}^{n,m}$ в системах скольжения (n,m) определяются следующим образом:

$$\tau_{13}^{n,m} = \beta_{1i}^{n,m} \beta_{3j}^{n} \sigma_{ij}^{d} \quad (7)$$

$$\beta_{1i} = \cos(x_1', x_i), \quad \beta_{3i} = \cos(x_3', x_i)$$

x_i - исходная декартовая система координат; x_1', x_3' - новая система координат, где ось x_3' направлена по нормали к n-ой плоскости, x_1' - направление скольжения m в данной плоскости n, /I/.

Пластическая деформация $(\varepsilon_p)^{n,m}$ в соответствующей системе скольжения (n, m) с учетом сдвиговых напряжений $\tau_{13}^{n,m}$ определяется следующим образом:

$$\frac{d(\varepsilon_p)^{n,m}}{dz} = \frac{b}{W_0} N_D^{n,m} V^{n,m}, \quad (\varepsilon_p)_{t=0}^{n,m} = 0 \quad (8)$$

$$V^{n,m} = V_0 \left(\frac{\tau_{эф}^{n,m}}{\tau_0}\right)^q \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \quad (9)$$

$$\tau_{эф}^{n,m} = \begin{cases} |\tau_{13}^{n,m}| - G(\varepsilon_p)^{n,m} - A\sqrt{N_D^{n,m}} & , \tau_{эф}^{n,m} \geq \tau_{кр} \\ 0 & , \tau_{эф}^{n,m} < \tau_{кр} \end{cases} \quad (10)$$

b - величина вектора Бюргерса, $N_D^{n,m}$ - плотность дислокаций, $V^{n,m}$ - скорость скольжения дислокаций, A - параметр междислокационного взаимодействия, U - энергия активации, W_0 - скорость продвижения кристалла в процессе роста из расплава в квазистационарной системе координат (r, z, t), жестко связанной с неподвижным нагревателем /4/.

Величины V_0, τ_0, U, A, $\tau_{кр}$ - определяются экспериментально. Плотность дислокаций в (n, m)-ой системе определяется следующим образом:

$$N_{\mathcal{D}}^{n,m} = N_0 \exp\left(\frac{\beta}{W_0}\int_0^{z} V^{n,m} ds\right) \tag{11}$$

N_0 - начальная плотность, β - коэффициент размножения дислокаций.

Теперь, по найденной пластической деформации $(\mathcal{E}_p)^{n,m}$ определяется весь тензор пластической деформации $(\mathcal{E}_{pij})_d^{n,m}$ по формулам обратного преобразования:

$$(\mathcal{E}_{pij})_d^{n,m} = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_p)^{n,m}(\beta_{1i}^{n,m}\beta_{3j}^{n} + \beta_{1j}^{n,m}\beta_{3i}^{n}) \tag{12}$$

Остается перейти из декартовой системы в исходную цилиндрическую систему координат

$$(\mathcal{E}_{pkl})^{n,m} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}(\mathcal{E}_{pij})_d^{n,m} \,. \tag{13}$$

Заметим, что компоненты тензора пластической деформации в цилиндрической системе координат зависят от координаты φ. Для решения упругопластической задачи в осесимметричной постановке осредним тензор по φ и вычислим тензор суммарной пластической деформации по всем системам скольжения, что записывается следующим образом:

$$\mathcal{E}_{pij} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{m=1}^{m_0}\int_0^{2\pi}(\mathcal{E}_{pij})^{n,m} d\varphi \tag{14}$$

Компоненты тензора $\mathcal{E}_{pij}$

$$\mathcal{E}_{pij} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{p11} & 0 & \mathcal{E}_{p13} \\ 0 & \mathcal{E}_{p22} & 0 \\ \mathcal{E}_{p31} & 0 & \mathcal{E}_{p33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{prr} & 0 & \mathcal{E}_{prz} \\ 0 & \mathcal{E}_{p\varphi\varphi} & 0 \\ \mathcal{E}_{pzr} & 0 & \mathcal{E}_{pzz} \end{pmatrix}$$

являются составляющими вектора пластических деформаций

$$\vec{e}_p\,(e_p^1=\varepsilon_{prr},\ e_p^2=\varepsilon_{p\varphi\varphi}+\varepsilon_{prr},\ e_p^3=\varepsilon_{pzz},\ e_p^4=\varepsilon_{prz})$$

см. уравнение (3).

Суммарная плотность дислокаций по всем системам скольжений определяется соотношением

$$N_{\mathcal{D}}=\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{m=1}^{m_0}N_{\mathcal{D}}^{n.m} \tag{15}$$

Сформулированная в замкнутом виде нелинейная задача (I)-(I5) решается методом последовательных упругих решений /5/. В этом случае исходная нелинейная задача сводится к решению последовательности линейных задач теории упругости. Последовательность задач теории упругости решается разностным методом.

Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию упругопластической задачи. В исходной области $\mathcal{D}_1$, занятой кристаллом, вводится неравномерная разностная сетка $\mathcal{D}_1^h$ с шагами $h_{i+1}=r_{i+1}-r_i$ и $g_{j+1}=z_{j+1}-z_j$ по осям координат r и z. $r_0\le r\le r_N$, $z_0\le z\le z_M$; $r_0=0$, $z_0=h$, $r_N=R$, $z_M=H$; $i=0,1,\ldots,N$; $j=0,1,\ldots,M$. Разностная сетка рассматривается на множестве точек в целых узлах $\{r_i;z_j\}$ и на множестве точек $\left\{r_i+\frac{h_{i+1}}{2};\ z_j+\frac{g_{j+1}}{2}\right\}$ в полуцелых узлах сетки (см. рис. 2). Аппроксимацию исходных уравнений (I)-(3) в разностном виде запишем следующим образом:

уравнения равновесия

$$\frac{r_{i+1/2}S^1_{i+1/2\,j+1/2}-r_{i-1/2}S^1_{i-1/2\,j+1/2}}{r_i\tilde{h}_i}+\frac{S^2_{i+1/2\,j+1/2}-S^2_{i-1/2\,j+1/2}}{\tilde{h}_i}+$$
$$+\frac{S^4_{ij+1}-S^4_{ij}}{g_{j+1}}=0 \tag{16}$$

$$\frac{S^3_{i+1/2\,j+1/2}-S^3_{i+1/2\,j-1/2}}{\tilde{g}_j}+\frac{r_{i+1}S^4_{i+1j}-r_iS^4_{ij}}{r_{i+1/2}h_{i+1}}=0$$

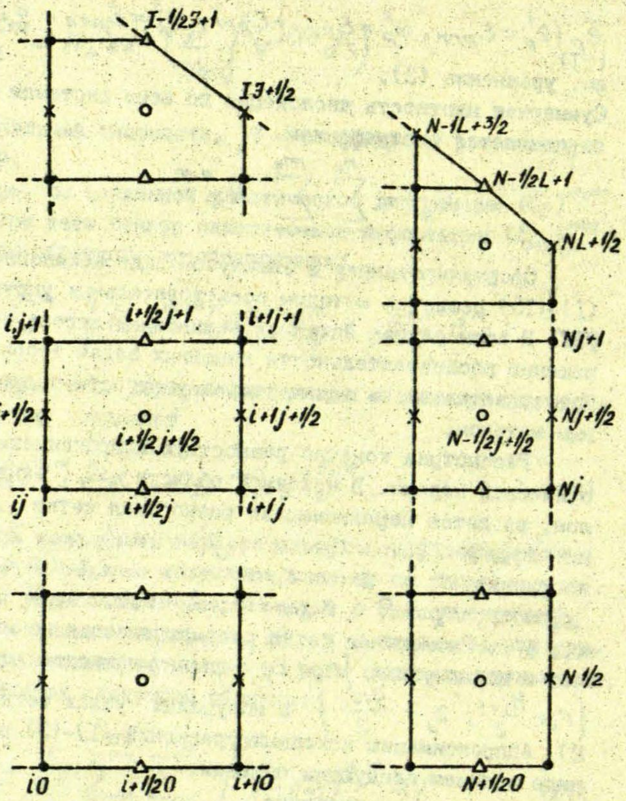


Рис. 2. Разностная сетка для задачи термоупругости (o - точки определения $e^{k}_{i+1/2j+1/2}$, $S^{k}_{i+1/2j+1/2}$, $K=1,2,3$;

$$\bullet - e^{4}_{ij},\ S^{4}_{ij};\ \times - u^{r}_{ij+1/2};\ \Delta - u^{z}_{i+1/2j})$$

уравнения Коши

$$e^1_{i+1/2\,j+1/2}=\frac{u^r_{i+1\,j+1/2}-u^r_{i\,j+1/2}}{h_{i+1}},\quad e^3_{i+1/2\,j+1/2}=\frac{u^z_{i+1/2\,j+1}-u^z_{i+1/2\,j}}{g_{j+1}}$$

$$e^2_{i+1/2\,j+1/2}=\frac{r_{i+1}u^r_{i+1\,j+1/2}-r_i u^r_{i\,j+1/2}}{r_{i+1/2}\,h_{i+1}} \tag{I7}$$

$$e^4_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{u^r_{i\,j+1/2}-u^r_{i\,j-1/2}}{\tilde g_j}+\frac{u^z_{i+1/2\,j}-u^z_{i-1/2\,j}}{\tilde h_i}\right)$$

$$\tilde h_i=\frac{h_{i+1}+h_i}{2},\quad \tilde g_j=\frac{g_{j+1}+g_j}{2}$$

физические уравнения состояния

$$S^1_{i+1/2\,j+1/2}=\left[4\mu e^1-2\mu e^2-(4\mu e^1_p-2\mu e^2_p)\right]_{i+1/2\,j+1/2}$$

$$S^2_{i+1/2\,j+1/2}=\left[-2\mu e^1+(\lambda+2\mu)e^2+\lambda e^3+\beta T+\right.$$
$$\left.+2\mu e^1_p-(\lambda+2\mu)e^2_p-\lambda e^3_p\right]_{i+1/2\,j+1/2} \tag{I8}$$

$$S^3_{i+1/2\,j+1/2}=\left[\lambda e^2+(\lambda+2\mu)e^3+\beta T-\lambda e^2_p-(\lambda+2\mu)e^3_p\right]_{i+1/2\,j+1/2}$$

$$S^4_{ij}=\left[2\mu(e^4-e^4_p)\right]_{ij}$$

Рассмотрим аппроксимацию граничных условий (5).

На нижнем торце кристалла, при $z_0=h$

$$S^{3}_{i+1/2\;1/2} = 0\,, \quad S^{4}_{i0} = 0 \tag{19}$$

На боковой поверхности цилиндрической части кристалла, при $r = R$

$$S^{1}_{N-1/2\,j+1/2}\frac{r_{N-1/2}}{r_N} + S^{2}_{N-1/2\,j+1/2} = 0\,,\ S^{4}_{Nj} = 0 \tag{20}$$

На боковой поверхности конусной части кристалла граничные условия имеют следующий вид, /6/:

$$\left(S^{1}_{I-1/2\,J+1/2}\frac{r_{I-1/2}}{r_I} - S^{2}_{I-1/2\,J+1/2}\right)\frac{g_{J+1}}{\sqrt{g^2_{J+1}+\tilde{h}^2_I}} + S^{4}_{IJ}\frac{\tilde{h}_I}{\sqrt{g^2_{J+1}+\tilde{h}^2_I}} = 0 \tag{21}$$

$$\frac{r_I}{r_{I+1/2}}S^{4}_{IJ}\frac{\tilde{g}_J}{\sqrt{\tilde{g}^2_J+h^2_{I+1}}} + S^{3}_{I+1/2\,J-1/2}\frac{h_{I+1}}{\sqrt{\tilde{g}^2_J+h^2_{I+1}}} = 0\,,$$

где (I, J) - координаты образующей конуса сеточной области $\mathcal{D}^h_1$. Разностные уравнения (21) аппроксимируют граничные условия (5) со вторым порядком точности при равномерных шагах h_i и g_j разностной сетки $\mathcal{D}^h_1$.

Для решения разностной упругопластической задачи используется итерационная схема

$$\frac{\vec{S}^{m+1}_K - \vec{S}^{m}_K}{\tau_{m+1}} + HR_h C^{-1}_h R^{*}_h \vec{S}^{m}_K = 0\,, \tag{22}$$

где τ_{m+1} - итерационный параметр, m - номер итерации ($m = 0, 1, \ldots$), K - номер последовательного приближения ($K = 0, 1, \ldots$). Если K фиксировано, то итерационная схема (23) является схемой для решения разностной задачи упругости, такая задача рассматривалась в работе /6/, где построен оператор C_h неявной итерационной схемы, ускоряющий сходимость.

Допустим, что $K = 0$. В начальном приближении примем, что вектор пластической деформации $(\vec{e}_p)^o = 0$. Тогда по схеме (22) определяется вектор напряжений $\vec{S}_o$. Далее рассматривается вектор пластической деформации $\vec{e}_{p1}$ в первом приближении ($K = 1$) следуя уравнениям (6)-(7), что в краткой форме обозначим так

$$\vec{e}_{p1} = \Phi^h(\vec{S}_o^m) . \qquad (23)$$

Теперь, поскольку известно $\vec{e}_{p1}$ для $K = 1$ по схеме (22) определяется вектор $\vec{S}_1$. Процесс решения последовательных задач упругости продолжается до выполнения соотношения

$$\left| \frac{\vec{S}_{K+1}^m - \vec{S}_K^m}{\vec{S}_K^m} \right| < \mathcal{E} , \qquad (24)$$

где $\mathcal{E}$ - заданное число.

Процесс последовательных приближений быстро сходится при малых упругопластических деформированиях (10^{-4} - 10^{-5}), для сходимости обычно требуется 6-7 приближений, при этом $\mathcal{E} \approx 10^{-2}$.

Рассмотрим задачу теплопереноса.

2. Для определения температурного поля в кристалле рассматривается задача теплообмена в следующей постановке. В области конической формы, занятой кристаллом высотой $H_2 - h$ и жидким столбиком h (см. рис. 1) записывается квазистационарное уравнение теплопроводности /4/

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) - c\rho W_o \frac{\partial T}{\partial z} = 0 . \qquad (25)$$

(r, z) - неподвижная система цилиндрических координат ($0 \leq r \leq R(z)$, $h \leq z \leq H_2$) жестко связанная с нагревателем, координата z направлена вдоль оси кристалла. T - температура, C - удельная теплоемкость, ρ - плотность, W_o - скорость вытягивания кристалла из расплава

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_s & T < T_{пл} \\ \lambda_e & T > T_{пл} \end{cases} \tag{26}$$

λ_s, λ_e - коэффициенты теплопроводности кристалла и расплава, $T_{пл}$ - температура плавления.

На границе раздела двух фаз $z^*(r)$ температура равна

$$T = T_{пл} \tag{27}$$

Кроме того, записывается условие теплового баланса на границе раздела двух фаз:

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial n} - \lambda_e \frac{\partial T}{\partial n} = \gamma \rho W_n \,, \tag{28}$$

где $W_n = W_c / \cos(\vec{n}, z)$;
$\vec{n}$ - нормаль и $\partial / \partial n$ - производная по нормали к поверхности z^*. Граничные условия записываются следующим образом.

В подкристальной области на уровне зеркала расплава $z = 0$ (см. рис. I) задается температура перегрева расплава

$$T = T_o \,, \quad T_o = T_{пл} + \delta T_{пер} \tag{29}$$

$\delta T_{пер}$ - величина перегрева.

На остальной части кристалла, включая его коническую часть, выполняется граничное условие с учетом теплообмена излучением между поверхностью кристалла и внешними поверхностями, окружающими кристалл (внутренние поверхности стенок камеры установки, системы экранов, тигля и поверхности расплава, см. рис. I). Все поверхности, включая поверхности кристалла и расплава считаются диффузно-серыми /7/. Это приводит к следующему условию на поверхности кристалла:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\varepsilon(s)}{1-\varepsilon(s)} \left(\sigma T^4(s) - B(s) \right) \tag{30}$$

σ - постоянная Стефана-Больцмана, $T(s)$ - температура, $\varepsilon(s)$ - степень черноты поверхностей, s - текущая координата поверхности кристалла и окружающих его поверхностей. Плотность потока эффективного излучения $B(s)$ определяется интегральным уравнением

$$B(s)=\varepsilon(s)\sigma T^4(s)-(1-(s))\int B(s')K(s,s')dA \quad (31)$$

$K(s,s')$ - ядро интегрального уравнения, которое в случае изотропного излучения и при отсутствии поглощения имеет вид:

$$K(s,s')=\frac{\cos(\vec{n},\vec{s})\cos(\vec{n}',\vec{s})}{\pi\, \ell^2_{ss'}} \quad (32)$$

$\ell_{ss'}$ - расстояние между точками s и s' на поверхности, $\vec{n}$ и $\vec{n}'$ - векторы нормалей к поверхности A в точках s и s'; $\vec{s}$ - направляющий вектор прямой, соединяющий точки s и s'.

Кроме учета теплообмена излучением в форме (30), учитывается поток конвективного теплообмена кристалла с флюсом и газом

$$q_i(z)=\alpha_i(T(z)-\theta_i(z)), \quad i=1,2 \quad (33)$$

α_i - коэффициент конвективного теплообмена флюса ($i=1$) или газа ($i=2$); $\theta_i(z)$ - температура флюса или газа.

Учитывая условия (30) и (33), граничное условие на поверхности кристалла записывается следующим образом:

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}=\frac{\varepsilon(s)}{1-\varepsilon(s)}(\sigma T^4(s)-B(s))+\alpha_i(T(z)-\theta_i(z)) \quad (34)$$

$\partial T/\partial n$ - производная по нормали к поверхности кристалла.

Для численного решения нелинейной задачи теплопереноса (25)-(34) используется конечно-разностный метод. В области, занятой кристаллом и жидким столбиком h вводится разностная сетка, согласованная с разностной сеткой $\mathcal{D}^h_1$, для упругопластической задачи и записывается дискретный аналог задачи (25)-(34). Для записи итерационной схемы вводится нестационарный член $\partial T/\partial z$ в уравнении (25), используется интегро-интерполяционный метод Самарского и записывается неявная консервативная разностная схема. Для решения разностной задачи используется метод неполного разложения Холецкого с самосопряженными градиентами, имеющий высокую эффективность решения сеточных задач.

3. Рассмотрим результаты расчетов полей температур, напряжений и плотности дислокаций по изложенной методике. Расчеты проводились для кристаллов арсенида галлия, выращиваемых из расплава в кристаллографическом направлении [I00] методом Чохральского с жидкостной герметизацией расплава борным ангидридом (флюсом). Диаметр кристалла принимался равным 8 см, диаметр тигля I0 см, высота кристалла $H = H_2 - h$ (см. рис. I). Внешняя температура θ_0 на внутренних стенках тигля и нагревателя, и температура θ_i во флюсе ($i = 1$) и в газе ($i = 2$) задавались в виде следующей линейной функции

$$\theta_0(z) = \theta_i(z) = T_1 - Kz, \quad 0 \leqslant z \leqslant H^* \qquad (35)$$

T_1 - температура стенки тигля на уровне расплава,
K - градиент, H^*- высота камеры. T_1 = I526°K,
K = 30 к/см, H^*= I2 см. Кроме того: α_1 = 2,6·I0^2 вт/см^{2}к
α_2 = 0,3 вт/см^2 при давлении в газе 3 атм; высота слоя флюса H_ϕ = I0 см, $\delta T_{пер}$ = I0°K, θ_T = I323°K. Остальные величины физических констант принимались следующие:
G = 3,4·I0^{10} Па, α = 0,64·I0^{-5} 1/°K , μ = I/3,
$T_{пл}$ = I5II°K, W_0 = 0,03 см/мин, λ = 0,I35 вт/см к,
ε = 0,7, C = 43I вт·сек/ кг к, ρ = 5,3I·I0^{-3} кг/см^3,
b = 4·I0^{-8} см, V_0 = I0^4 см/сек, τ_0 = I0^7 Па.

Критический уровень сдвиговых напряжений рассчитывается по формуле:

$$\tau_{кр} = 12 \cdot 10^3 \exp\left(\frac{3,97\,T_{пл}}{T}\right) \qquad (36)$$

Для иллюстрации и сравнения результатов приводятся два варианта расчетов. В первом случае рассматривается цилиндрический кристалл высотой 4 см и радиусом 4 см без конической части ($\alpha = 0$). Для этого случая на рис. 3 приводятся изотермы в кристалле. Расчеты показывают, что величина перепада температуры по длине кристалла составляет примерно 110°К, что составляет в среднем градиент 28 к/см. Локальные градиенты в области фронта кристаллизации несколько выше (по длине 40 к/см, по радиусу 25 к/см). Расчеты напряжений и плотности дислокаций дали следующие результаты. Сдвиговые напряжения $\tau^{n,m}$ по системам скольжения в несколько раз превышают величину критических напряжений $\tau_{кр}$. Например, максимальные $\tau^{1,1} = 3{,}8 \cdot 10^6$ *Па*, в то время как $\tau_{кр} = 0{,}75 \cdot 10^6$ *Па*. Результаты расчетов плотности дислокаций $N_Ɗ$ изображенные на рис. 4 показывают, что максимальная $N_Ɗ$ равна $4{,}8 \cdot 10^4$ см$^{-2}$ у поверхности кристалла (при $z = 3{,}2$ см). В центральной части кристалла $N_Ɗ$ несколько меньше и равна примерно 10^4см$^{-2}$. Рассмотрим второй пример расчета при одинаковых тепловых условиях выращивания. В этом случае кристалл имеет коническую часть с углом наклона образующей конуса 70°, общая высота кристалла как и прежде равна 4 см. На рис. 5 показано распределение изотерм, перепад температуры по длине кристалла здесь также равен 110°К, градиенты в области фронта кристаллизации несколько меньше (30 к/см и 15 к/см), чем в первом варианте. Однако характер распределения изотерм иной, в этом случае изотермы меняют знак прогиба по высоте кристалла, см. рис. 5. При расчете упругопластической задачи максимальные сдвиговые напряжения стали несколько меньше ($\tau^{1,1} = 3 \cdot 10^6$ *Па*), однако в центральной части кристалла величина сдвиговых напряжений гораздо меньше и соответствует величине критических ($0{,}7 - 0{,}8 \cdot 10^6$ *Па*). Это приводит к тому, что расчетная величина $N_Ɗ$ у поверхности кристалла равна $4 \cdot 10^4$ см$^{-2}$ (см. рис. 6), однако в центральной части кристалла дислокации практически отсутствуют ($N_Ɗ < 10^2$ см$^{-2}$). В конусной части кристалла (см. рис. 6, при $z = 3$ см)

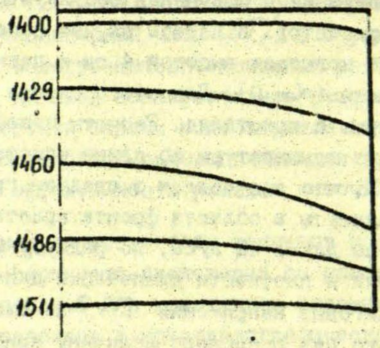


Рис. 3. Изотермы ($^{\circ}K$) в кристалле
$H = R = 4$ см, $\alpha = 0^{\circ}$

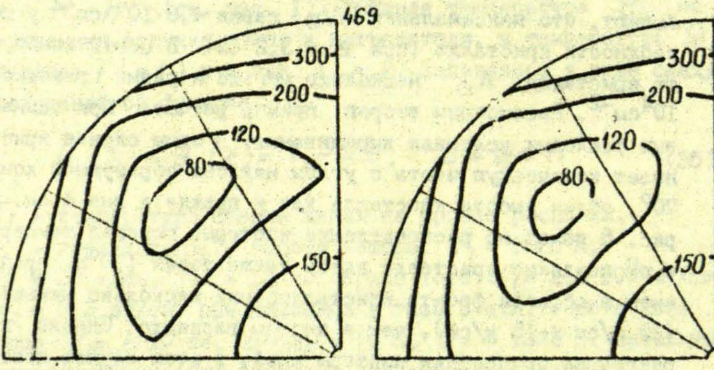


Рис. 4. Распределение плотности дислокаций
$10^{-2} \times N_D$ (см$^{-2}$) в радиальных
сечениях кристалла $H = R = 4$ см, $\alpha = 0^{\circ}$
а) $z = 2$ см, б) $z = 3,2$ см

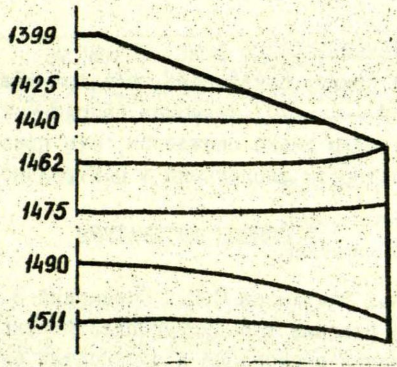


Рис. 5. Изотермы (^{o}К) в кристалле
H = 4 см, α = 70^{o}

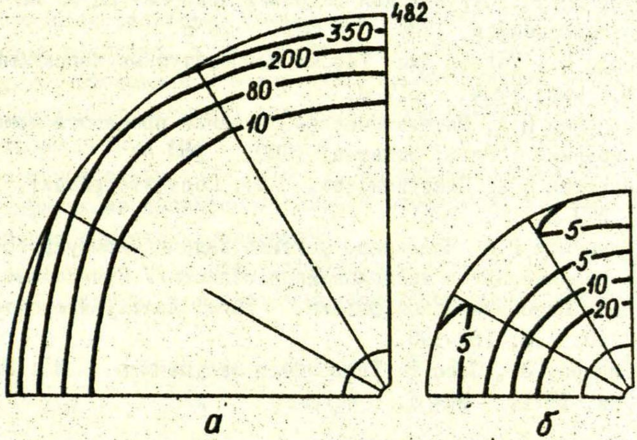


Рис. 6. Распределение плотности дислокаций
$10^{-2} \cdot N_{\mathcal{D}}$ (см$^{-2}$) в радиальных
сечениях кристалла H = 4 см, α = 70^{o}
а) z = 2,2 см, R = 4 см
б) z = 3 см, R = 2,7 см

также незначительна.

Указанный пример показывает, что при задании угла наклона образующей $\alpha = 70^0$ величина напряжений в центральной части кристалла резко снижается, это приводит к резкому снижению плотности дислокаций в центральной его части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдонин Н.А., Вахрамеев С.С., Освенский В.Б. Постановка и численное решение термоупругопластической задачи с учетом движения дислокаций в плоскостях скольжения кристаллов, выращиваемых из расплава. Математическое моделирование. М.: Наука, 1986. С. 158-171.
2. Коновалов Н.Н., Сорокин С.Б. Структура уравнений теории упругости: Статическая задача// Препринт ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1986. № 665. 26 с.
3. Боли Б., Уэйнер Дис. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
4. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинатне, 1980. 180 с.
5. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Гостехтеориздат, 1948. 379 с.
6. Якушенок Р.А. Численное решение задачи термоупругости в напряжениях в криволинейной области// Прикладные задачи математической физики. Рига: Латв.университет, 1990. С. 182-190.
7. Сперроу Э., Сэсс Р. Теплообмен излучением. Л.: Энергия, 1971. 294 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Вып.2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 532.542.2+519.632.4

Г.Р.ЛУРИНС,
Институт математики и информатики Латвийского университета, Рига

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ РАСПЛАВА В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ВАННЫ АЛЮМИНИЕВОГО ЭЛЕКТРОЛИЗЕРА

В работе /I/ теоретически доказано преобладание планарного течения расплава над вертикальным в ванне алюминиевого электролизера. Однако при изучении различных процессов в расплаве, в частности тепло- массопереноса, необходима информация и о вертикальной циркуляции расплава. Эту циркуляцию вызывает как продольная компонента ротора электромагнитных сил ($rot\, f_x$), так и поперечный градиент температуры ($\partial T/\partial y$). Определение этих источников циркуляции является отдельной проблемой, поэтому здесь они будут считаться заданными.

Двумерное течение в поперечном сечении ванны (см. рис. I) определяется системой дифференциальных уравнений

$$u\frac{\partial\omega}{\partial z} + v\frac{\partial\omega}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right) + \tag{I}$$

$$+\frac{1}{\rho}\, rot\, f_x + \beta g \frac{\partial t}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\omega \tag{2}$$

с граничными условиями

$\psi = 0$ - на всех границах области,

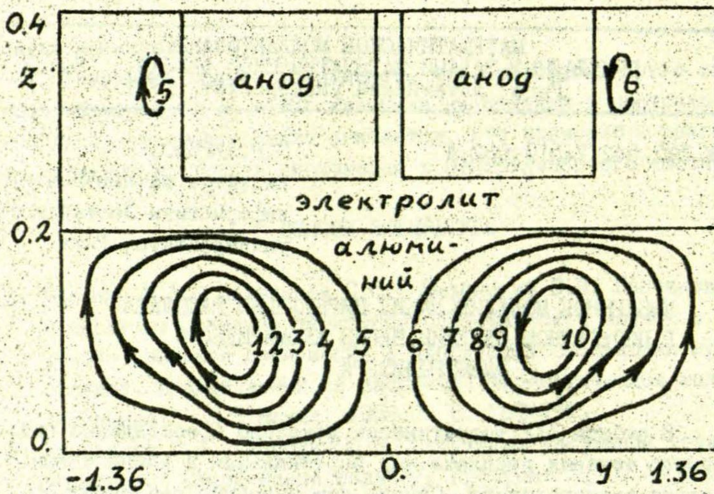


Рис. I. Электровихревая циркуляция

$\omega=0$ - на верхней свободной поверхности,

$\omega=-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial n^2}$ - на анодах и твердых стенках, (3)

$\nu_{эл}\rho_{эл}\omega_{эл}=\nu_{Al}\rho_{Al}\omega_{Al}$ - на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей - алюминия и электролита,

где ν, β - коэффициенты кинематической вязкости и объемного температурного расширения,

$u=\partial\psi/\partial z$ - продольная компонента скорости,

$v=-\partial\psi/\partial y$ - вертикальная компонента скорости,

Аппроксимация дифференциальной задачи (I)-(3) проводилась не неравномерной сетке

$$W=\{h_i,\ i=1,\dots,N-1;\ g_j,\ j=1,\dots,M-1\} \qquad (4)$$

со сгущением точек в подaнодной области. На этой сетке была построена монотонная разностная схема аналогичная примененной в /2/:

$$\frac{u_{i,j}}{2}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i,j}}{h_i}+\frac{\omega_{i,j}-\omega_{i-1,j}}{h_{i-1}}\right)+$$

$$\frac{v_{i,j}}{2}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j}}{g_j}+\frac{\omega_{ij}-\omega_{i,j-1}}{g_{j-1}}\right)=$$

$$=\nu P_{i,j}\left(\frac{\omega_{i+1,j}-\omega_{i,j}}{h_i\hbar_i}-\frac{\omega_{i,j}-\omega_{i-1,j}}{h_{i-1}\hbar_i}\right)+ \qquad (5)$$

$$+\nu R_{i,j}\left(\frac{\omega_{i,j+1}-\omega_{i,j}}{g_j\mathfrak{g}_j}-\frac{\omega_{i,j}-\omega_{i,j-1}}{g_{j-1}\mathfrak{g}_j}\right)+$$

$$+\beta g\,\frac{T_{i+1,j}-T_{i-1,j}}{h_{i-1}+h_i}+\frac{1}{\rho}(\mathrm{rot} f_x)_{ij}$$

$$\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i,j}}{h_i\hbar_i}-\frac{\psi_{i,j}-\psi_{i-1,j}}{h_{i-1}\hbar_i}+$$

$$+\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j}}{g_j\mathfrak{g}_j}-\frac{\psi_{i,j}-\psi_{i,j-1}}{g_{j-1}\mathfrak{g}_j}=-\omega_{i,j}\,, \qquad (6)$$

где

$$P_{i,j}=|u_{i,j}|\hbar_i/(2\nu)/th(|u_{i,j}|\hbar_i/(2\nu)),$$

$$R_{i,j}=|v_{i,j}|\mathfrak{g}_j/(2\nu)/th(|v_{i,j}|\mathfrak{g}_j/(2\nu)),$$

$$\hbar_i=(h_{i-1}+h_i)/2\,;\quad \mathfrak{g}_j=(g_{j-1}+g_j)/2$$

$$(i=2,\ldots,N-1;\ j=2,\ldots,M-1).$$

Для определения ω на твердых стенках использовалось условие Тома, а на границе раздела сред при $j=m$ - следующая аппроксимация:

$$\omega_{i,m}^{Ал} = \left(-\frac{2\Psi_{i,m-1}}{g_{m-1}^2 g_m} - \frac{2\Psi_{i,m+1}}{g_m^2 g_{m-1}}\right) \Big/ \left(\frac{1}{g_m} + \frac{\nu_{Ал}\rho_{Ал}}{\nu_{эл}\rho_{эл} g_{m-1}}\right) \qquad (7)$$

$$\omega_{i,m}^{эл} = \left(\frac{2\Psi_{i,m-1}}{g_{m-1}^2 g_m} - \frac{2\Psi_{i,m+1}}{g_m^2 g_{m-1}}\right) \Big/ \left(\frac{\nu_{эл}\rho_{эл}}{g_m \nu_{Ал}\rho_{Ал}} + \frac{1}{g_{m-1}}\right)$$

$$(i=2,\dots,N-1).$$

Разностное уравнение для функции тока Ψ решалось итерационным методом Холецкого, а для вихря ω - методом переменных направлений.

Характерная картина электровихревой циркуляции представлена на рис. I. В этом случае циркуляция в слое алюминия значительно интенсивнее, чем в электролите ($|V|_{ср}^{Ал}$ = 0,007; $|V|_{ср}^{эл}$ = 0,001). Интенсивности же тепловой циркуляции (рис. 2) в алюминии и в электролите мало отличаются ($|V|_{ср}^{Ал}$ = 0,011, $|V|_{ср}^{эл}$ = 0,016). Совместная циркуляция (рис. 3) близка к тепловой, так как при заданных полях температуры и ротора электромагнитных сил тепловая циркуляция значительно интенсивнее электровихревой ($|V|_{ср}^{эвт}$ = 0,005, $|V|_{ср}^{т}$ = 0,013).

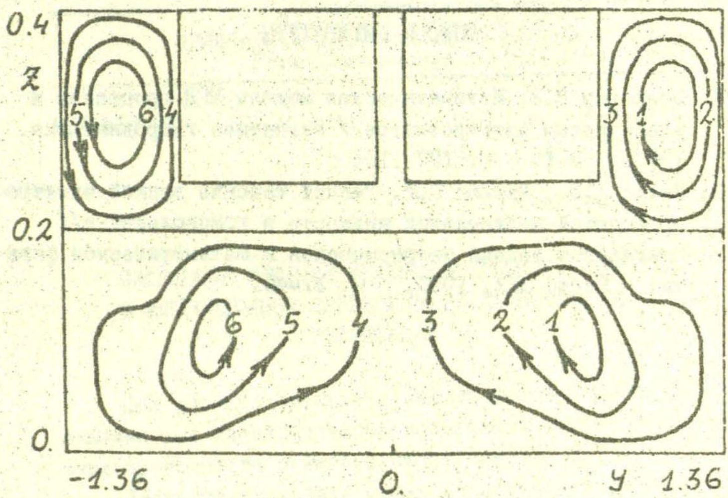


Рис. 2. Тепловая циркуляция

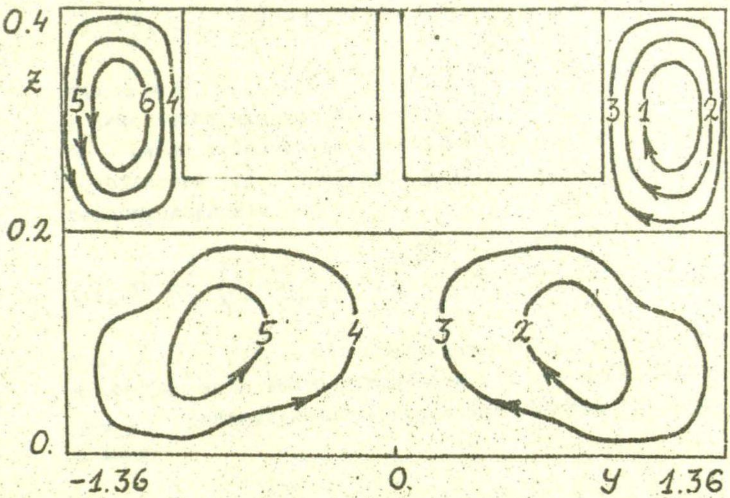


Рис. 3. Совместная циркуляция

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Бояревич В.В. Математическая модель МГД-процессов в алюминиевом электролизере// Магнитная гидродинамика. - 1987. № I. - С. I07-II5.
2. Калис Х.Э., Луринс Г.Р. Расчет течения вязкой электропроводящей несжимаемой жидкости в гомополярнике// Прикладные задачи теоретической и математической физики. - Рига: ЛГУ, 1980. - С. 37-45.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, Вып.2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 518.61

Х.Э.КАЛИС
Латвийский университет,
Рига

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ

Для расчета пространственных температурных полей в алюминиевых электролизерах необходимо решать уравнение теплопроводности в многослойной среде.

Пусть многослойная среда представляет собой совокупность прямоугольных призм

$$\Omega_i=\{(x,y,z): -L_1\le x\le L_1,\ -L_2\le y\le L_2,\ z_i\le z\le z_{i+1}\},$$

где $i=0,1,\dots,N-1$, $z_0, z_1,\dots,z_N, L_1, L_2$ – действительные числа, причем $z_N-z_0<\min(L_1,L_2)$, N – число слоев среды в направлении оси z. В каждой из подобластей Ω_i требуется решать стационарное уравнение теплопроводности

$$LT_i\equiv\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial z}\right)+\lambda_i\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2}\right)=-f_i(x,y,z), \qquad (1)$$

где T_i, f_i, λ_i – значения температуры, источника тепла и коэффициента теплопроводности в i-ом слое. При $z=z_0$, $z=z_N$ рассматриваются граничные условия третьего рода в виде

$$\lambda_0\frac{\partial T_0}{\partial z}=\alpha_0(T-T_{B_0}), \qquad (2)$$

$$-\lambda_{N-1}\frac{\partial T_{N-1}}{\partial z}=\alpha_{N-1}(T-T_{B_{N-1}}), \tag{3}$$

где α, T_B - коэффициенты теплопередачи и внешняя температура.

На границах раздела $z=z_i$ ($i=\overline{1,N-1}$) ставятся условия сопряжения

$$\lambda_{i-1}\frac{\partial T_{i-1}}{\partial z}=\lambda_i\frac{\partial T_i}{\partial z}, \tag{4}$$

$$T_{i-1}=T_i. \tag{5}$$

На боковых границах $x=\pm L_1$, $y=\pm L_2$ тоже использованы граничные условия вида (2), (3)

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial n}=\alpha(T-T_B), \tag{6}$$

где $\frac{\partial T}{\partial n}$ - нормальная производная от температуры в направлении внешней нормали, α, λ, T_B - соответствующие коэффициенты теплопередачи, теплопроводности и внешняя температура, независящие от переменной в пределах ширины слоя.

Для понижения размерности краевой задачи (I-6) применяется операция осреднения по ширине слоя $\ell_i=z_{i+1}-z_i$, и аппроксимация зависимости температуры от координаты z в виде параболического сплайна /I/

$$T_i(x,y,z)=\bar{T}_i(x,y)+m_i(z-\bar{z}_i)+e_iG_i\ell_i^{-2}[(z-\bar{z}_i)^2-\ell_i^2/12], \tag{7}$$

где $G_i=\ell_i/\lambda_i$, $i=\overline{0,N-1}$,

$$\bar{T}_i(x,y)=\frac{1}{\ell_i}\int_{z_i}^{z_{i+1}}T_i(x,y,z)\,dz,\quad \bar{z}_i=\frac{1}{2}(z_i+z_{i+1}),$$

m_i, e_i - коэффициенты сплайна, зависящие от (x,y) координаты, определяющиеся из $2N$ условий (2-5).

Для определения e_i получается линейная система алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей /2/, т.е. разностные уравнения вида

$$\begin{cases} A_i e_{i-1} + C_i e_i + B_i e_{i+1} = a_i(\bar{\bar{T}}_{i+1} - \bar{\bar{T}}_i) - b_i(\bar{\bar{T}}_i - \bar{\bar{T}}_{i-1}), \\ e_{-1} = e_N = 0, \quad i = \overline{0, N-1}, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$A_i = G_{i-1}[G_i + G_{i+1}], \quad B_i = G_{i+1}(G_i + G_{i-1}),$$

$$C_i = A_i + B_i + D_i, \quad D_i = (G_i + G_{i+1})(G_i + G_{i-1}),$$

$$a_i = 3(G_i + G_{i-1}), \quad b_i = 3(G_i + G_{i+1}),$$

$$G_{-1} = 2\alpha_0^{-1}, \quad G_N = 2\alpha_{N-1}^{-1}, \quad \bar{\bar{T}}_{-1} = T_{B_0}, \quad \bar{\bar{T}}_N = T_{B_{N-1}}.$$

В частном случае при $N = 2$ (два слоя) из (8) имеем систему двух уравнений для определения величин e_0, e_1, где $C_0 = (G_0 + G_1)(G_0 + 4\alpha_0^{-1}) + B_0$, $B_0 = G_1(G_0 + 2\alpha_0^{-1})$, $A_1 = G_0(G_1 + 2\alpha_1^{-1})$, $C_1 = A_1 + (G_0 + G_1)(G_1 + 4\alpha_1^{-1})$, $a_0 = 3(G_0 + 2\alpha_0^{-1})$, $b_0 = 3(G_0 + G_1) = a_1$, $b_1 = 3(G_1 + 2\alpha_1^{-1})$.

Следовательно, по формулам Крамера имеем

$$\begin{aligned} e_0 &= \delta^{-1}[-\tilde{A}_1 \bar{T}_0 + \tilde{B}\bar{T}_1 + \tilde{C}_1], \\ e_1 &= \delta^{-1}[\tilde{B}\bar{T}_0 - \tilde{A}_2 \bar{T}_1 + \tilde{C}_2], \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\delta = (G_0 + G_1)[A_1(G_0 + 4\alpha_0^{-1}) + B_0(G_1 + 4\alpha_1^{-1}) + (G_0 + G_1)(G_0 + 4\alpha_0^{-1})(G_1 + 4\alpha_1^{-1})],$$

$$\tilde{A}_1 = 3(G_0 + G_1)[12\alpha_0^{-1}\alpha_1^{-1} + 12\alpha_1^{-1}G_0 + 4G_1(\alpha_0^{-1} + \alpha_1^{-1}) + G_1^2 + 4G_1G_0],$$

$$\tilde{B} = 9(G_0+G_1)(G_0+2\alpha_0^{-1})(G_1+2\alpha_1^{-1}),$$

$$\tilde{A}_2 = 3(G_0+G_1)[12\alpha_0^{-1}\alpha_1^{-1}+12\alpha_0^{-1}G_1+$$
$$+4G_0(\alpha_0^{-1}+\alpha_1^{-1})+G_0^2+4G_1G_0],$$

$$\tilde{C}_1 = 3(G_0+G_1)(T_{B_0}C_1 - T_{B_1}B_0),$$

$$\tilde{C}_2 = 3(G_0+G_1)(T_{B_1}C_0 - T_{B_0}A_1).$$

После сокращения на G_0+G_1 имеем окончательные выражения (9) для определения коэффициентов сплайна e_0, e_1 /3/.

Для определения коэффициентов e_i при $N>2$ из системы уравнений (8) независимо от величин средних значений температур $\bar{T}_i$ вводится прямоугольная матрица с элементами $\alpha_{i,j}(i=\overline{0,N-1},\ j=\overline{0,N})$ /2/, причем

$$e_i = \sum_{j=0}^{N} \alpha_{i,j}(\bar{T}_j - \bar{T}_{j-1}),\quad i=\overline{0,N-1}. \tag{10}$$

Тогда из (8) следует, что $\alpha_{i,j}$ определяются из системы разностных уравнений

$$\begin{cases} A_i\alpha_{i-1,j} + C_i\alpha_{i,j} + B_i\alpha_{i+1,j} = -F_{i,j} \\ \alpha_{-1,j} = \alpha_{N,j} = 0,\quad i=\overline{0,N-1},\quad j=\overline{0,N}, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$F_{ij} = -\delta_{i,j}b_i + \delta_{i+1,j}a_i\,,$$

$\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

Система разностных уравнений (11) для каждого j решается методом прогонки /4/

$$\alpha_{i,j} = X_i\alpha_{i+1,j} + y_{i,j}\,,\quad i=N-1,\ldots,1,0;$$

$$X_i = -B_i/(C_i+A_iX_{i-1}),\quad y_{i,j} = -X_i(F_{i,j}-A_iy_{i-1,j})/B_i, \tag{12}$$

где $X_{-1} = y_{-1,j} = 0$.

Так как $A_i>0,\ B_i>0,\ C_i>A_i+B_i,\ a_i>0,\ b_i>0,$ $\alpha_0\geqslant 0,\ \alpha_{N-1}\geqslant 0$, то методом математической индукции легко показать, что $X_i\in(-1,0),\ sign(Y_{i,j})=(-1)^{i+j+1},$ $sign(\alpha_{i,j})=(-1)^{i+j+1},\quad i=\overline{0,N-1},\ j=\overline{0,N}.$

Так как

$$e_i=\sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j}\bar{T}_j+\alpha_{i,N}T_{B_{N-1}}-\alpha_{i,0}T_{B_0}, \tag{13}$$

где $a_{i,j}=\alpha_{i,j}-\alpha_{i,j+1}=sign(\alpha_{i,j})|\alpha_{i,j}|-sign(\alpha_{i,j+1})\times$ $\times|\alpha_{i,j+1}|=sign(\alpha_{i,j})(|\alpha_{i,j}|+|\alpha_{i,j+1}|),$

то также $sign(a_{i,j})=(-1)^{i+j+1}$.

Трехдиагональную матрицу систем уравнений (8), (II) можно симметризовать /4/, если каждое уравнение умножить на $\alpha_i=G_i/((G_{i-1}+G_i)(G_i+G_{i+1}))$. Тогда коэффициенты систем уравнений (8) и (II) можно записать в виде

$$A_i=G_iG_{i-1}/(G_i+G_{i-1}),\quad B_i=G_iG_{i+1}/(G_i+G_{i+1})=A_{i+1},$$
$$C_i=A_i+B_i+D_i,\quad D_i=G_i,\quad a_i=3G_i/(G_i+G_{i+1}), \tag{14}$$
$$b_i=3G_i/(G_i+G_{i-1}).$$

Можно также каждое уравнение систем (8), (II) соответственно делить на G_i, тогда коэффициенты имеют простейший вид (матрица несимметрична)

$$A_i=G_{i-1}/(G_i+G_{i-1}),\quad B_i=G_{i+1}/(G_i+G_{i+1}),$$
$$C_i=A_i+B_i+D_i,\quad D_i=1,\quad a_i=3/(G_i+G_{i+1}), \tag{15}$$
$$b_i=3/(G_i+G_{i-1}),$$

причем $A_i\in(0,1),\ B_i\in(0,1);\ C_i\in(1,3),\ a_i>0,\ b_i>0.$

Для оценки решения системы (II) введем новые неизвестные

$\tilde{\alpha}_{i,j}$ при помощи соотношений

$$\alpha_{i,j} = (-1)^{i+j+1}\tilde{\alpha}_{i,j}, \; i = \overline{0,N-1}, \quad j = \overline{0,N}.$$

Тогда после умножения каждого уравнения (11) на $(-1)^{i+j}$ имеем стандартную запись разностных уравнений в виде /4/

$$\begin{cases} \Lambda\tilde{\alpha}_{i,j} \equiv A_i\tilde{\alpha}_{i-1,j} - C_i\tilde{\alpha}_{i,j} + B_i\tilde{\alpha}_{i+1,j} = -\tilde{F}_{i,j} \\ \tilde{\alpha}_{-1,j} = \tilde{\alpha}_{N,j} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

которые при каждом фиксированном j представляют монотонную разностную схему ($i = \overline{0,N-1}$)

$$\tilde{F}_{i,j} = \delta_{i,j}b_i + \delta_{i+1,j}a_i \geqslant 0.$$

Из принципа максимума (минимума) монотонных разностных схем /4/ ($\Lambda\tilde{\alpha}_{i,j} \leqslant 0$) следует, что все значения $\tilde{\alpha}_{i,j} \geqslant 0$. Оценивая решение разностной задачи, перепишем (16) в виде

$$C_i\tilde{\alpha}_{i,j} = A_i\tilde{\alpha}_{i-1,j} + B_i\tilde{\alpha}_{i+1,j} + \tilde{F}_{i,j} \tag{17}$$

Если максимальное значение $\tilde{\alpha}_{i,j}$ при фиксированном j достигается при $i = i_0$, т.е. $\max\limits_i \tilde{\alpha}_{i_0,j}$ и $\tilde{\alpha}_{i,j} \leqslant \tilde{\alpha}_{i_0,j}, i = \overline{0,N-1}$, то из (17) следует, что

$$C_{i_0}\tilde{\alpha}_{i_0 j} \leqslant \tilde{\alpha}_{i_0 j}(A_{i_0} + B_{i_0}) + \tilde{F}_{i_0 j}$$

или

$$D_{i_0}\tilde{\alpha}_{i_0 j} \leqslant \tilde{F}_{i_0 j}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\alpha}_{i,j} \leqslant \max_i(\tilde{F}_{i,j}/D_i) = \max_i(3/(G_i + G_{i-1})), \quad j = \overline{0,N}. \tag{18}$$

Разностные уравнения можно записать и прямо для величин $a_{ij} = (-1)^{i+j+1}\tilde{a}_{i,j}$ из (13), т.е. имеем систему уравнений (16), где $\tilde{\alpha}_{i,j}$ заменены на $\tilde{a}_{i,j}$, а

$$\tilde{F}_{ij} = \delta_{i,j}(a_i + b_i) + \delta_{i+1,j}a_i + \delta_{i-1,j}b_i \geqslant 0.$$

Так как $\tilde{a}_{i,j} = \tilde{\alpha}_{i,j} + \tilde{\alpha}_{i,j+1}, \; i,j = \overline{0,N-1}$, то аналогично (18) получим оценку

$$\tilde{a}_{i,j} \leqslant \max_i \left(\frac{3}{G_i + G_{i-1}} + \frac{3}{G_i + G_{i+1}} \right). \tag{19}$$

Оценивать величины $\tilde{a}_{i,j}$ в случае формул (I4) можно также по формулам прогонки

$$\tilde{a}_{i,j} = \tilde{X}_i \tilde{a}_{i+1,j} + \tilde{y}_{i,j} \quad (i = N-1, \dots, 1, 0),$$

где

$$\tilde{X}_i = \frac{B_i}{C_i - A_i \tilde{X}_{i-1}}, \qquad \tilde{y}_{i,j} = (\tilde{F}_{i,j} + A_i \tilde{y}_{i-1,j}) \tilde{X}_i / B_i, \quad i = \overline{0, N-1}$$

$$\tilde{X}_{-1} = \tilde{y}_{-1,j} = 0, \qquad j = \overline{0, N-1}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{X}_i \in (0,1)$, $\tilde{y}_{i,j} \geqslant 0$, $\tilde{a}_{i,j} \geqslant 0$. Следовательно, /4/

$$\tilde{a}_{i,j} \leqslant \tilde{a}_{i+1,j} + \tilde{y}_{i,j} \leqslant \sum_{k=i}^{N-1} \tilde{y}_{k,j} \quad (\tilde{a}_{N,j} = 0),$$

$$\gamma_{i+1} \equiv A_{i+1} \tilde{y}_{i,j} = B_i \tilde{y}_{i,j} = (\tilde{F}_{i,j} + \gamma_i) \tilde{X}_i \leqslant \gamma_i + \\ + \tilde{F}_{i,j} \leqslant \sum_{l=0}^{i} \tilde{F}_{l,j} \quad (\gamma_0 = A_0 \tilde{y}_{-1,j} = 0);$$

$$\tilde{y}_{i-1,j} = \gamma_i / A_i \leqslant A_i^{-1} \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{F}_{l,j}, \tag{20}$$

$$\tilde{a}_{i,j} \leqslant \sum_{k=i}^{N-1} A_{k+1}^{-1} \sum_{l=0}^{k} \tilde{F}_{l,j}.$$

После осреднения уравнения (I) имеем

$$2 l_i^{-1} e_i + L(\bar{T}_i) = -\bar{f}_i (x, y), \tag{21}$$

где

$$\bar{f}_i = \frac{1}{l_i} \int_{z_i}^{z_{i+1}} f_i(x, y, z)\, dz,$$

$$L(\bar{T}_i) = \lambda_i \left(\frac{\partial^2 \bar{T}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} \right).$$

С учетом (13) систему уравнений (21) можно переписать в векторном виде

$$\Delta \vec{T} + \mathcal{A}\vec{T} + \vec{F} = 0, \tag{22}$$

где $\vec{T}$ - вектор с составляющими T_i, $i=\overline{0,N-1}$,

Δ - оператор Лапласа,

$\mathcal{A}$ - квадратная матрица с элементами

$$\frac{2}{\ell_i \lambda_i} a_{i,j}, \quad i,j=\overline{0,N-1},$$

$\vec{F}$ - вектор с составляющими $\frac{1}{\lambda_i}(\alpha_{i,N} T_{B_{N-1}} - -\alpha_{i,0} T_{B_0})$, $i=\overline{0,N-1}$.

Принимая, что собственные значения матрицы $\mathcal{A}$ действительные, различные и равны μ_K, $K=\overline{0,N-1}$ (это выполняется для $N=2$), а соответствующие собственные вектора расположены в столбцах матрицы W, то при помощи преобразования

$$\vec{T} = W\vec{S} \quad (\vec{S} = W^{-1}\vec{T}) \tag{23}$$

следует, что уравнение (21) принимает вид

$$\Delta\vec{S} + D\vec{S} + W^{-1}\vec{F} = 0$$

или

$$\Delta S_K + \mu_K S_K + \widetilde{F}_K = 0, \quad K=\overline{0,N-1}, \tag{24}$$

где S_K, $\widetilde{F}_K$ - составляющие векторов $\vec{S}$, $W^{-1}\vec{F}$,

μ_K - элементы диагональной матрицы D.

Здесь учтено, что $AW=WD$ или $W^{-1}AW=D$. Применяя преобразование подобия $\widetilde{E}^{-1}\mathcal{A}\widetilde{E} = -\widetilde{\mathcal{A}}$, где $\widetilde{E}^{-1} = \widetilde{E}$ - диагональная матрица с элементами $(-1)^{i+1}$, $i=\overline{0,N-1}$; собственные значения матриц $\mathcal{A}$, $-\widetilde{\mathcal{A}}$ совпадают, а матрица собственных векторов $\widetilde{W} = \widetilde{E}W$. Ясно, что матрица $\widetilde{\mathcal{A}}$ имеет неотрицательные элементы, а ее собственные значения равны $(-\mu_K)$.

Рассмотрим аппроксимацию системы уравнений (24) на равномерной сетке с шагами h_1, h_2, причем, каждое разностное уравнение решается итерационным методом релаксаций

$$S_{k,i,j}^{(m+1)} = (1-\omega_k) S_{k,i,j}^{(m)} + \omega_{k,i,j}^{z}, \tag{25}$$

где

$$S_{k,i,j}^{z} = \frac{1}{2(h_2/h_1 + h_1/h_2) - h_1 h_2 \mu_k} \Big[h_2/h_1 \big(S_{k,i-1,j}^{(m+1)} + S_{k,i+1,j}^{(m)}\big) +$$

$$+ h_1/h_2 \big(S_{k,i,j-1}^{(m+1)} + S_{k,i,j+1}^{(m)}\big) + h_1 h_2 \tilde{F}_{k,i,j}$$ – итерационное

приближение по методу Зейделя,

ω_k – коэффициенты релаксации ($0 < \omega_k < 2$),

$S_{k,i,j}^{(0)}$ – заданное начальное приближение,

$$S_{k,i,j} = S_k(x_i, y_i),\ \tilde{F}_{k,i,j} = \tilde{F}_k(x_i, y_j),\ x_i = -L_1 + i h_1,$$

$$y_j = -L_2 + j h_2,\ N_1 h_1 = 2L_1,\ N_2 h_2 = 2L_2,\ i = \overline{1, N_1 - 1};\ j = \overline{1, N_2 - 1},$$

m = 0, 1, 2, ... итерационный индекс.

Известно, что оптимальный параметр релаксации при граничных условиях первого рода имеет вид /5/

$$\omega_k = 2/(1 + \sqrt{1 + \varepsilon_k^2}), \tag{26}$$

где

$$\varepsilon_k = \left(\frac{h_2}{h_1}\cos\frac{\pi}{N_1} + \frac{h_1}{h_2}\cos\frac{\pi}{N_2}\right)\left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_2}{h_1} - \frac{h_1 h_2}{2}\mu_k\right)^{-1}.$$

Следовательно, метод релаксации (25) можно записать в векторном виде

$$\vec{S}^{(m+1)} = \Omega \vec{S}^{z} + \Omega^{*} \vec{S}^{(m)} \quad (m = 0, 1, \ldots), \tag{27}$$

где элементы диагональных матриц Ω , Ω^* являются ω_k и $1 - \omega_k$, $k = \overline{0, N-1}$

Умножая (27) слева на матрицу W и учитывая (23) имеем

$$\vec{T}^{(m+1)} = W\Omega W^{-1}\vec{T}^{z} + W\Omega^{*}W^{-1}\vec{T}^{(m)}, \quad m=0,1,\ldots, \tag{28}$$

где $\vec{T}^{z}$ - итерационное приближение по методу Зейделя для расчета разностного аналога системы уравнений (22).

Численные расчеты показали, что метод релаксации (28) сходится примерно от 5 до 10 раз быстрее, чем простой метод Зейделя ($\omega_k \equiv 1$, $k=\overline{0,N-1}$).

Аналогично можно построить алгоритм для решения более общей задачи теории теплопроводности с учетом конвективных членов в уравнении (I), т.е.

$$LT_i \equiv div\,(\lambda_i\, grad\, T_i) - \rho c_{p_i} \vec{V}_i \cdot grad\, T_i\,, \tag{29}$$

где C_p, ρ_i - коэффициенты удельной теплоемкости и плотности, а $\vec{V}_i$ - вектор скорости осредненного планарного течения среды со составляющими u_i, v_i, $i=\overline{0,N-1}$. Тогда, с учетом равенств /3/

$$c_{p_i}\rho_i\lambda_i^{-1}u_i = \bar{u}, \quad c_{p_i}\rho_i\lambda_i^{-1}v_i = \bar{v} \quad (i=\overline{0,N-1})$$

имеем уравнение (24) в виде

$$\Delta s_k - \bar{u}\,\partial s_k/\partial x - \bar{v}\,\partial s_k/\partial y + \mu_k s_k + \tilde{F}_k = 0, \quad k=\overline{0,N-1}, \tag{30}$$

а соответствующий метод Зейделя для монотонности разностной схемы имеет вид /3/

$$s^{z}_{k,i,j} = \frac{1}{2(h_2/h_1\cdot\gamma_1 + \gamma_2 h_1/h_2) - h_1 h_2 \mu_k}\Big[\frac{h_2}{h_1}(\gamma_1 + a_1)s^{(m+1)}_{k,i-1,j} +$$

$$+ \frac{h_2}{h_1}(\gamma_1 - a_1)s^{(m)}_{k,i+1,j} + \frac{h_1}{h_2}(\gamma_2 + a_2)s^{(m+1)}_{k,i,j-1} +$$

$$+ \frac{h_1}{h_2}(\gamma_2 - a_2)s^{(m)}_{k,i,j+1} + h_1 h_2 \tilde{F}_{k,i,j}\Big].$$

Здесь γ_1, γ_2 – соответствующие возмущенные коэффициенты монотонных схем /5/:

1) $\gamma_\alpha = |a_\alpha| cth |a_\alpha|$ (схема А.А.Ильина),

2) $\gamma_\alpha = |a_\alpha| + (1+|a_\alpha|)^{-1}$ (схема А.А.Самарского),

3) $\gamma_\alpha = 1 + |a_\alpha|$ (схема с односторонними разностями),

где $a_1 = \frac{1}{2}\bar{u}h_1$, $a_2 = \frac{1}{2}\bar{v}h_2$, $|a_\alpha| \le \gamma_\alpha$, $\alpha = 1,2$.

В этом случае формулы оптимальных коэффициентов релаксации (26), (28) сохраняются, а

$$\varepsilon_K = \left(\frac{h_2}{h_1}\sqrt{\gamma_1^2 - a_1^2}\cos\frac{\pi}{N_1} + \frac{h_1}{h_2}\sqrt{\gamma_2^2 - a_2^2}\cos\frac{\pi}{N_2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{h_2}{h_1} + \frac{h_1}{h_2} - \frac{1}{2}h_1h_2\mu_K\right)^{-1}.$$

В случае переменных коэффициентов, т.е. при зависимости величин $\bar{u}$, $\bar{v}$, λ_i, ρ_i, C_{ρ_i} от (x, y) в формулах (26), (28) параметры ω_K, ε_K тоже зависят от координат или индексов (i, j) (метод локальной релаксации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буйкис А.А. Интерполяция интегральных средних кусочно-гладкой функции параболическим сплайном. Латвийский математический ежегодник. 1985. Вып. 29. С. 1[illegible]4-197.

2. Буйкис А.А. Интерполирующие в среднем сплайны для понижения размерности дифференциальных уравнений //Латвийский математический ежегодник. 1989. Вып. 33. С. 187-191.

3. Калис Х.Э. Определение оптимальных коэффициентов метода локальной релаксации для решения уравнения теплопроводности в двухслойной среде //Латвийский математический ежегодник. 1992 Вып. 36. В печати.

4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.

5. Кали Х.Э., Луринс Г.Р. Определение оптимального релаксационного параметра для некоторых монотонных разностных схем //Латвийский математической ежегодник. 1981. Вып. 25. С. 167-178.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, Вып.2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 519.6+537.311.5

Е.Д.ЛЮМКИС, М.Я.ОПМАНИС
ИМИ ЛУ, Рига

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА ПРИ ЭЛЕКТРОШЛАКОВОМ ПЕРЕПЛАВЕ

При электрошлаковом переплаве (ЭШП) через систему электрод-шлак-металл пропускается ток величиной порядка 10 кА, что приводит к выделению джоулева тепла в шлаке и расплавлению электрода. В существующих установках применяется переменный ток промышленной частоты (50 Гц). В расчетах ток часто считается постоянным /1/, хотя в более поздних работах /2/ учитывается то, что ток переменный. При математическом моделировании ЭШП с поиском формы оплавляемого электрода расчет распределения плотности тока необходимо вести на каждом шаге по времени, следовательно алгоритм расчета должен быть достаточно эффективным. В случае постоянного тока задача сводится к уравнению Лапласа, для решения которого разработаны высококачественные итерационные методы, основанные на методе сопряженных градиентов /3,4/. В случае переменного тока задача сводится к обращению несамосопряженного комплексного оператора и алгоритмы, применяемые для решения уравнения Лапласа, вообще говоря, не могут быть использованы.

Настоящая работа посвящена описанию алгоритма расчета распределения плотности переменного электрического тока для процесса ЭШП. Проведено сравнение распределений плотности джоулева тепловыделения полученного для случаев переменного и постоянного токов.

Постановка задачи

Для нахождения распределения плотности тока используются уравнения Максвелла:

$$div\,\vec{B} = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\,rot\,\vec{B} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -rot\,\vec{E} \qquad (3)$$

и закон Ома для движущейся среды:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}), \qquad (4)$$

где $\vec{B}$ - индукция магнитного поля, $\vec{j}$ - плотность тока, $\vec{E}$ - напряженность электрического поля, μ_0 - магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ VsA^{-1}m^{-1}$), σ - электропроводность среды, $\vec{v}$ - вектор скорости.

Уравнения (2) и (4) позволяют получить следующее уравнение для функций $\vec{B}$ и $\vec{E}$:

$$\frac{1}{\mu_0}\,rot\,\vec{B} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

Применяя к данному уравнению оператор rot и используя (3), получается:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\,rot\left(\frac{1}{\sigma}\,rot\,\vec{B}\right) + rot(\vec{v}\times\vec{B}) \qquad (5)$$

Если $\vec{B}$ - индуцированное проходящим через среду переменным током магнитное поле, то его можно искать в виде:

$$\vec{B} = \vec{B}_A\,e^{i\omega t}, \qquad (6)$$

где $\vec{B}_A$ - амплитуда, $\omega = 2\pi f$, f - частота переменного тока, i - мнимая единица.

Тогда, подставив (6) в (5), имеем

$$i\omega \vec{B}_A = -\frac{1}{\mu_0} rot\left(\frac{1}{\sigma} rot \vec{B}_A\right) + rot\left(\vec{v} \times \vec{B}_A\right) \tag{7}$$

Все величины в уравнении обезразмериваются с помощью характерных величин длины L^*, электропроводности σ^*, скорости V^*, плотности тока j^*, амплитуды магнитной индукции B_A^*.

Тогда уравнение (7) для безразмерных величин имеет вид

$$\alpha i \vec{B}' = -rot'\left(\frac{1}{\sigma'} rot' \vec{B}'\right) + Re_m\, rot'\left(\vec{v}' \times \vec{B}'\right) \tag{8}$$

где $\alpha = \omega \mu_0 \sigma^* (L^*)^2$, $Re_m = \mu_0 \sigma^* v^* L^*$ - магнитное число Рейнольдса. Отдельно проведенные расчеты гидродинамических потоков говорят о том, что для существующих установок характерная скорость V^* меньше произведения ωL^* и, следовательно, последним слагаемым в уравнении (8) можно пренебречь. Окончательный вид уравнения для определения функции $\vec{B}'$:

$$\alpha i \vec{B}' = -rot'\left(\frac{1}{\sigma'} rot' \vec{B}'\right) \tag{9}$$

В дальнейшем все выкладки будут вестись для безразмерных переменных, и знак $'$ будем опускать.

Поскольку рассматриваемая система осесимметрична, производные всех функций в цилиндрической системе координат по φ равняются нулю. Компонента плотности тока j_φ также равняется нулю.

Из соотношения (2) следует, что вектор $\vec{B}$ имеет лишь φ-составляющую:

$$\vec{B} = (0, B^\varphi, 0) \tag{10}$$

С учетом (10) уравнение (9) может быть переписано в виде

$$\alpha i B^{\varphi} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial B^{\varphi}}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\sigma r}\frac{\partial}{\partial r}(rB^{\varphi})\right] \quad (11)$$

Компоненты плотности тока j_r и j_z могут быть определены как

$$j_r = -\frac{1}{2}\frac{\partial B^{\varphi}}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{2r}\frac{\partial(rB^{\varphi})}{\partial r} \quad (12)$$

Плотность джоул ва тепла определяется по формуле

$$W = \frac{j_r \bar{j}_r + j_z \bar{j}_z}{\sigma} \quad (13)$$

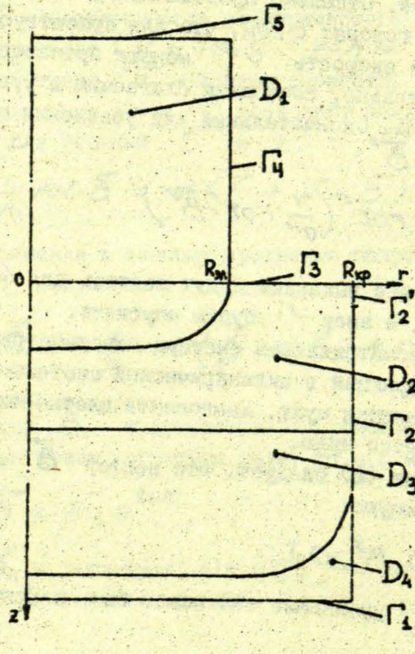


Рис. I. Схема установки при ЭШП. D_1 - электрод, D_2 - шлак, D_3 - расплав, D_4 - закристаллизовавшийся металл, Γ_5 - торец электрода, Γ_4 - боковая поверхность электрода, Γ_3 - поверхность шлака, Γ_2' - контактный поясок, Γ_2 - боковая поверхность кристаллизатора, Γ_1 - дно кристаллизатора, $R_{эл}$ - радиус электрода, $R_{кр}$ - радиус кристаллизатора.

Будем считать, что на торце электрода Γ_5 (рис.1) осевая компонента плотности тока распределена равномерно по сечению электрода, а радиальная компонента отсутствует. При переходе к безразмерным переменным в качестве j^* возьмем плотность тока на торце электрода. Тогда из (12) и условия ограниченности тока на оси имеем:

$$B^{\varphi}(r)\Big|_{\Gamma_5} = \frac{r}{R_{эл}^2} \qquad (14)$$

На поверхностях $\Gamma_4, \Gamma_3, \Gamma_2$ полагаем, что нормальная компонента электрического тока через границу равна нулю. Тогда, интегрируя (12), найдем

$$B^{\varphi}(z)\Big|_{\Gamma_4} = \frac{1}{R_{эл}}, \; B^{\varphi}(r)\Big|_{\Gamma_3} = \frac{1}{r}, \; B^{\varphi}(z)\Big|_{\Gamma_2} = \frac{1}{R_{кр}} \qquad (15)$$

При сделанных предположениях ток через сечение Γ_1 равен току через Γ_5. Предполагая, что компонента j_r на Γ_1 равняется нулю, получим:

$$\frac{\partial B^{\varphi}}{\partial z}\Big|_{\Gamma_1} = 0 \qquad (16)$$

В ряде случаев необходимо учитывать утечку тока через поясок Γ_2'. Тогда меняются краевые условия на границах Γ_2 и Γ_2':

$$\begin{aligned} B^{\varphi}(z)\Big|_{\Gamma_2'} &= \left(1 - K_n \frac{z_j - z_{jo}}{z_{jp} - z_{jo}}\right) \Big/ R_{кр} \\ B^{\varphi}(z)\Big|_{\Gamma_2} &= \frac{1 - K_n}{R_{кр}} \end{aligned} \qquad (17)$$

где K_n ($0 \leq K_n \leq 1$) - часть тока, протекающая через поясок Γ_2', $z_j - z_{jo}$ - расстояние координаты рассматриваемой точки до поверхности шлака, $z_{jp} - z_{jo}$ - ширина контактного пояска.

Метод численного решения

Область Ω , включающую электрод, шлак, расплав и закристаллизовавшийся слиток, покроем неравномерной сеткой Ω_h узлов $\{r_i, z_j : r_1 = 0, r_i = r_{i-1} + h_i, i = 2,\ldots,N;$ $z_1 = -L, z_j = z_{j-1} + g_j, j = 2,\ldots, M\}$. Введем также шаги $\hbar_i, \bar{g}_j : \hbar_1 = \frac{h_2}{2}, \hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, i = 2,\ldots,N-1, \hbar_N = \frac{h_N}{2}$ $\bar{g}_1 = \frac{g_2}{2}, \bar{g}_j = \frac{g_j + g_{j+1}}{2}, j = 2,\ldots,M-1, \bar{g}_M = \frac{g_M}{2}$ и средние значения координаты $r : r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}, i = 1,\ldots,N-1$. Функцию B^φ будем искать в целых узлах, а электропроводность σ считаем заданной в полуцелых узлах $(i+\frac{1}{2}, j)$ и $(i, j+\frac{1}{2})$.

Во внутренних узлах области Ω_h уравнение (II) аппроксимируется разностным уравнением

$$\alpha i B^\varphi_{ij} = \frac{1}{\bar{g}_j}\left[\frac{1}{\sigma_{ij+\frac{1}{2}}}\frac{B^\varphi_{ij+1} - B^\varphi_{ij}}{g_{j+1}} - \frac{1}{\sigma_{ij-\frac{1}{2}}}\frac{B^\varphi_{ij} - B^\varphi_{ij-1}}{g_j}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{1}{\sigma_{i+\frac{1}{2}j}\, r_{i+\frac{1}{2}}}\frac{r_{i+1} B^\varphi_{i+1j} - r_i B^\varphi_{ij}}{h_{i+1}} - \right. \tag{I8}$$

$$\left. - \frac{1}{\sigma_{i-\frac{1}{2}j}\, r_{i-\frac{1}{2}}}\frac{r_i B^\varphi_{ij} - r_{i-1} B^\varphi_{i-1j}}{h_i}\right]$$

Поскольку условия (I4) и (I5) на границе являются условиями I-го рода, то в приграничных узлах входящие в уравнение (I8) значения B^φ с границы формируют правую часть оператора.

Оператор, получаемый умножением уравнения (I8) на $\hbar_i \bar{g}_j$, является симметричным, но с комплексной составляющей. Для решения данной системы уравнений воспользуемся разновидностью усеченного метода Петрова-Галеркина-Крылова ORTHOMIN.

Вместо данной системы линейных уравнений $Ay = f$ будем решать другую систему $A'y = f'$, где

$$A' = Q^{-1}A \quad , \quad f' = Q^{-1}f \tag{19}$$

Предобуславливатель Q, выбираемый как неполное LL^T - разложение (неполное разложение Холецкого) матрицы A, оказывается весьма эффективным при обращении оператора Лапласа /4/. Поскольку применительно к задачам ЭШП нас интересуют невысокие частоты ω (α невелико), возьмем в качестве Q неполное разложение Холецкого матрицы $\frac{A+A^*}{2}$, где A^*- матрица, комплексно сопряженная матрице A.

Порядок вычислений следующий:

1) по заданному начальному приближению y_0 вычисляется невязка $r_0 = f' - A'y_0$ и полагается $s_0 = r_0$;

Для $k = 1,2,\ldots$ последовательно вычисляются

$$\begin{aligned}
&2)\quad q_k = A's_k ,\\
&3)\quad y_{k+1} = y_k + \frac{(r_k, q_k)}{(q_k, q_k)} s_k ,\\
&4)\quad r_{k+1} = r_k - \frac{(r_k, q_k)}{(q_k, q_k)} q_k ,\\
&5)\quad s_{k+1} = r_{k+1} - \frac{(A'r_{k+1}, q_k)}{(q_k, q_k)} s_k .
\end{aligned} \tag{20}$$

Данный алгоритм для каждого k обеспечивает выполнение соотношений

$$\begin{aligned}
(r_{k+1}, q_k) &= 0\\
(q_{k+1}, q_k) &= 0
\end{aligned} \tag{21}$$

Вычисление прекращается по одному из следующих признаков:

1) $(r_k, r_k) < \varepsilon_0$

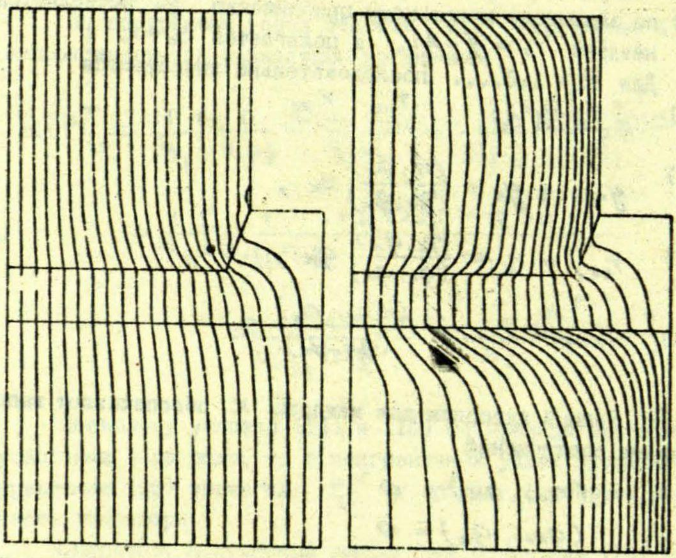
2) $\dfrac{(r_k, r_k)}{r_0} < \varepsilon$

3) $K > K_{max}$

где $\mathcal{E}_o$, $\mathcal{E}$ и K_{max} - введенные параметры процесса.

Результаты расчетов

Расчеты проводились для системы электрод-шлак-расплав со следующими значениями констант: $L^* = R_{эл} = 0{,}3\ m$, $I = 7500$ А, $\sigma^* = \sigma_{шл} = 400\ \Omega^{-1} m^{-1}$, $f = 50\ Hz$, $j^* = 26525{,}8\ Am^{-2}$, $B^* = 5 \cdot 10^{-3}\ Vs^{-1}$, $\alpha = 1{,}4212 \cdot 10^{-2}$, $R_{кр}/R_{эл} = 1{,}3$.



а б

Рис. 2

На рисунке 2а приведены изолинии функции $-\frac{rB^{\varphi}}{2}$, которая в случае постоянного тока является "функцией тока" для плотности электрического тока j. Значения изолиний избраны так, чтобы на торце электрода изолинии находились бы на одинаковом расстоянии друг от друга. На рис. 2б приведены изолинии функции $-\frac{r}{2}|B^{\varphi}|$, которая, хотя и не является полным аналогом "функции тока" для случая переменного тока, но все же довольно хорошо характеризует поведение плотности тока. Хорошо просматривается скин-слой,

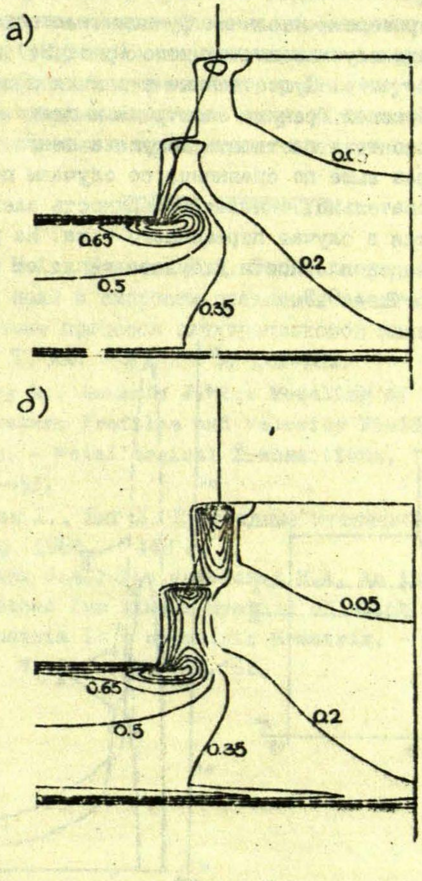


Рис. 3

размер которого по теоретическим расчетам - примерно I/4 радиуса электрода.

В шлаке практически нет отличий между случаями постоянного и переменного тока. Для электрода, радиус которого в три раза меньше рассматриваемого, отсутствуют различия между изолиниями этих функций также и в зоне электрода и расплава.

На рис. 3 приведены изолинии функции плотности джоулева тепла W для случаев постоянного (рис. 3а) и переменного (рис. 3б) тока. Существенные различия просматриваются лишь на боковой границе электрода и шлака - для случая переменного тока плотность джоулева тепла в этой зоне несколько раз выше по сравнению со случаем постоянного тока. Следовательно, боковая поверхность электрода скорее сплавляется в случае переменного тока. На рис. 4 показана зависимость плотности джоулева тепла от радиуса для $z = 0,2$ и $z = 0,3$.

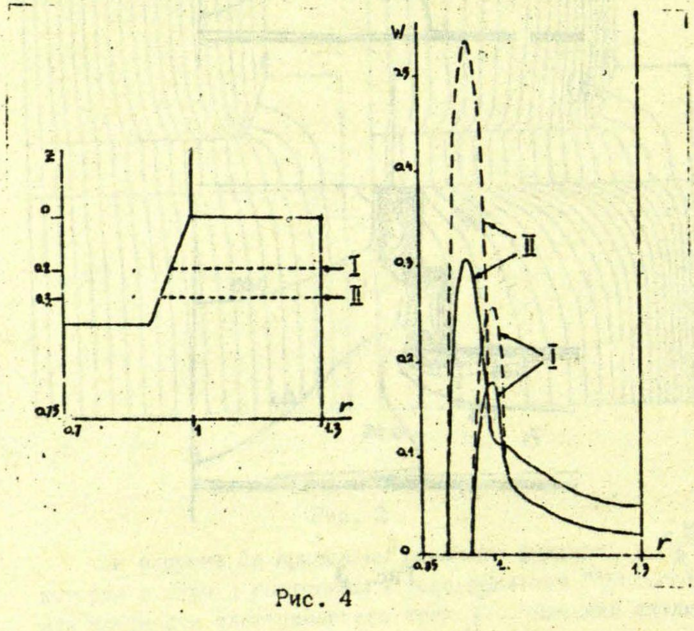


Рис. 4

Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1037 и для различных форм электрода и значений параметра α требовали разное количество машинного времени. Для сетки размерами 31x51 расчет переменного тока требовал 1-1,5 минуты процессорного времени, что существенно больше (в 5-10 раз) необходимых затрат процессорного времени для расчета постоянного тока. Полученные результаты свидетельствуют о том, что при небольших значениях частоты переменного тока и радиуса варианты с применением постоянного и переменного токов отличаются мало. Следовательно, в этих случаях расчеты с применением переменного тока могут быть заменены более дешевыми расчетами в приближении постоянного тока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдонин Н.А., Иванова Г.Ф. Задача определения температурного поля и скорости плавления электрода в многофазной системе процесса электрошлаковой плавки. - ИФЖ, 1971. Т. XX. - № 1. - С. 121-129.
2. Choudary M., Szekely J. The Modeling of Pool Profiles, Temperature Profiles and Velocity Fields in ESR Systems. - Metallurgical Transactions. 1980. - V. 11B.- P. 439-453.
3. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. - М.: Мир, 1986. - 448 с.
4. Meijerink J.A., Van den vorst H.A. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix. - Math. Comp., 1977. V. 31. P. 148-162.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, Вып.2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 519.6+539.3

Е.Д.ЛЮМКИС, Л.А.ПАКУЛ
ИМИ ЛУ, Рига

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В КРИСТАЛЛЕ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Неравномерное тепловое расширение вызывает температурные напряжения, действие которых приводит к образованию и размножению дислокаций в кристалле. Величина термоупругих напряжений позволяет оценить одну из основных характеристик качества монокристалла - плотность дислокаций и их распределение в кристалле. Расчету напряженного состояния растущего кристалла посвящено большое число работ. Отметим, в частности, работы /1,2/, где такие расчеты проводятся конечно-разностным методом в предположении плоского фронта растущего кристалла. Однако в реальном процессе выращивания кристалла межфазная граница может иметь значительную кривизну. Влияние формы фронта кристаллизации на величину напряжений и их распределение в кристалле численно исследовано, например, в работах /3-5/, где использовался метод конечных элементов. Показано, что напряжения, возникающие вблизи границы раздела фаз, в несколько раз превышают напряжения, возникающие внутри кристалла, и возрастают с увеличением кривизны границы. Таким образом, при решении задачи термоупругости необходимо учитывать сложную форму кристалла.

В работах /6-8/ построены конечно-разностные схемы на сетках Дирихле и предложена методика расчетов уравнений гидродинамики и теплопереноса. Оказалось, что триангуляция Делоне, согласованная с текущим положением межфазной границы, и построенные на ней ячейки Дирихле удобны и для аппроксимации уравнений Ламе, записанных в перемещениях. Определение ячеек Дирихле и методика их построения подробно описаны в /9/. Достоинство подобной сетки состоит в том, что в шаблон разностной схемы входят только ближайшие соседи сеточного узла. Упрощает процесс построения разностных схем использование понятия опорного разностного оператора и операторных разностных схем, введенных в работах /10,11/ и примененных, в частности, в /6/.

Настоящая работа посвящена построению разностных схем для двумерных уравнений теории упругости на сетках Дирихле в декартовой и цилиндрической системах координат. Задача рассматривается в квазистационарном приближении. Температурное поле, а также положение и форма фронта кристаллизации определяются из совместного решения тепловой и гидродинамической задач по методике, изложенной в работах /7,8/. Для расчета термоупругих напряжений в кристалле решается система уравнений теории упругости относительно перемещений $\vec{u}$:

$$-\mu\, rot\, rot\, \vec{u} + (\lambda + 2\mu)\, grad\, div\, \vec{u} = \gamma\, grad\, (T - T_0), \tag{1}$$

где λ , μ - коэффициенты Ламе; $\gamma = \alpha_t (2\mu + 3\lambda)$, α_t - коэффициент теплового расширения. В декартовой системе координат (x , y, z) для двумерного плоского случая $\vec{u}$ = (u^x, u^y, 0); в цилиндрической системе координат для осесимметричного случая $\vec{u}$ = (u^r, 0 , u^z).

Краевыми условиями являются условия свободной поверхности кристалла:

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} n_j \right) \cdot (\lambda\, div\, \vec{u} - \gamma T) n_i = 0 \tag{2}$$

Для осесимметричной области на оси задаются условия симметрии.

Разностные операторы, являющиеся аналогами дифференциальных операторов $grad$, div , rot , вводятся согласованными между собой, выполняющими разностные аналоги следующих интегральных соотношений:

$$\int_V \varphi\, div\, \vec{A}\, dv + \int_V (\vec{A}, grad\, \varphi)\, dv = \oint_S \varphi\, (\vec{n}, \vec{A})\, ds \tag{3}$$

$$\int\limits_{v}(\vec{B},rot\vec{A})dv-\int\limits_{v}(\vec{A}.rot\vec{B})dv=\oint\limits_{s}(\vec{n},[\vec{A}\times\vec{B}])ds \quad (4)$$

$$\int\limits_{v}\varphi(\vec{c},rot\vec{A})dv-\int\limits_{v}(\vec{C},[\vec{A}\cdot grad\varphi])dv=\oint\limits_{s}\varphi(\vec{c},[\vec{n}\times\vec{A}])ds, \quad (5)$$

где S - поверхность, ограничивающая объем V ; $\vec{n}$ - внешняя нормаль к S ; $\vec{C}$ - произвольная вектор-функция такая, что $rot\,\vec{c}\equiv 0$.

Разностные операторы будем строить для осесимметричного случая.

Обозначим через m некоторую ячейку сетки с центром в точке m (см. рис. I); n - произвольного ближайшего соседа ячейки m ; ячейки p и q - соседи ячеек m и n, находящиеся от вектора $\vec{mn}$ слева и справа, соответственно; $n\in K_m$ - вершины ячейки m . Значения сеточной функции $\vec{u}_i$ определим в центрах ячеек Дирихле. В качестве опорного разностного оператора выберем оператор DIV , который определен в K-той вершине ячейки и действует на векторную сеточную функцию, заданную в центрах ячеек, имеющих общую вершину K .

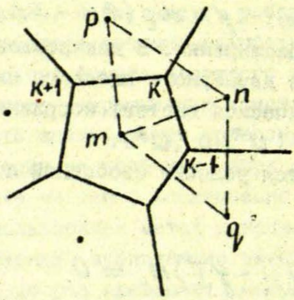


Рис. I. Фрагмент сетки

Разностный оператор DIV строим, аппроксимируя дифференциальный оператор div на основе определения:

$$div\,\vec{u}=\lim_{v\to 0}\frac{\oint\limits_{s}(\vec{u},\vec{n})ds}{v}, \quad (6)$$

где V - объем, содержащий точку определения; S - поверхность, ограничивающая объем V; $\vec{n}$ - внешняя нормаль в V.

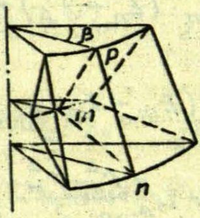


Рис. 2

Выберем в качестве V в формуле (6) объем VK_K фигуры, полученной вращением треугольника mnp вокруг оси на угол $\pm\beta$ (рис. 2). Тогда S - поверхность, состоящая из объединения граней этой фигуры. Объем VK_K - вычисляется по формуле $VK_K = SK_K \cdot r^* \cdot \beta$, где SK_K - площадь треугольника mnp, $r^* = \frac{1}{3}(r_m + r_n + r_p)$. Рассмотрим поверхность S_{np}, образованную поворотом стороны np вокруг оси на угол $\pm\beta$. Вектор нормали к поверхности S_{np} имеет вид $\vec{n} = (z_p - z_n / \ell_{np}, 0, r_n - r_p / \ell_{np})$, где ℓ_{np} - длина стороны np, (r_n, z_n) и (r_p, z_p) - координаты точек n и p. Принимая во внимание независимость скалярного произведения $(\vec{u}, \vec{n})$ от угла поворота, поверхностный интеграл по S_{np} аппроксимируем следующим образом:

$$\int_{S_{np}} (\vec{u}, \vec{n})\, ds = \int_{n}^{p} \int_{-\beta}^{+\beta} \left(u^r \frac{z_p - z_n}{\ell_{np}} + u^z \frac{r_n - r_p}{\ell_{np}} \right) r \cdot d\alpha \cdot d\ell \cong$$

$$\cong \beta \left[\frac{u_n^r r_n + u_p^r r_p}{2} (z_p - z_n) + \frac{u_n^z + u_p^z}{2} \frac{r_n + r_p}{2} \cdot (r_n - r_p) \right]$$

Для поверхностей, которые образованы поворотом сторон mn и mp соответственно, внешние нормали задаются аналогично. Интегрирование по граням S^+ и S^-, образованным поворотом треугольника mnp на углы $+\beta$ и $-\beta$, вклада в общее выражение для оператора дивергенции не даст, поскольку векторы нормали имеют отличные от нуля только φ-компоненты. В результате получаем следующее выражение для разностного оператора DIV в K-той вершине ячейки m:

$$(DIV\vec{u})_K = \frac{1}{2r_K SK} \Big[u^r_m \cdot r_m \cdot (z_n - z_p) + u^r_n \cdot r_n \cdot (z_p - z_m) + u^r_p \cdot r_p \cdot (z_m - z_n) + u^z_m \frac{r_p^2 - r_n^2}{2} + u^z_n \frac{r_m^2 - r_p^2}{2} + u^z_p \frac{r_n^2 - r_m^2}{2} \Big] \tag{7}$$

Поскольку для построения разностной схемы необходимо образовывать повторную операцию $GRAD \cdot DIV$, в качестве области определения оператора $GRAD$ выберем пространство скалярных сеточных функций, определенных в вершинах ячеек, а в качестве области значений - пространство сеточных функций, определенных в центрах ячеек. Оператор $GRAD$ строим на основе разностного аналога тождества (3). Поверхностный интеграл даст вклад в выражение для $GRAD$ вблизи границы. При получении оператора $GRAD$ во внутренних точках будем считать, что φ на границе принимает нулевое значение. Тогда для граничных точек необходимо добавить вклад от поверхностного интеграла с учетом аппроксимации конкретных граничных условий.

Для внутренних точек (3) аппроксимируем следующим образом:

$$\sum_{K \in K} \varphi_K \cdot (DIV\vec{A})_K \cdot SK_K \cdot r_K + \sum_{m \in M} \Big[A^r_m (GRAD_r \varphi)_m + A^z_m (GRAD_z \varphi)_m \Big] \cdot S_m \cdot r_m = 0 , \tag{8}$$

где S_m - площадь ячейки m, r_m - радиус центра ячейки m,

K - множество всех вершин ячеек Дирихле, M - множество всех ячеек; скалярная функция φ определена в вершинах ячеек, векторная функция $\vec{A}$ - в центрах ячеек. Подставив в (8) выражение для $DIV\vec{A}$ из (7), получим выражения для проекций оператора $GRAD$ в центре ячейки m :

$$(GRAD_r \varphi)_m = -\frac{1}{2S_m r_m} \sum_{k \in K_m} \varphi_k r_m (z_n - z_p)$$

$$(GRAD_z \varphi)_m = -\frac{1}{2S_m r_m} \sum_{k \in K_m} \varphi_k \frac{r_p^2 - r_n^2}{2}, \tag{9}$$

где K_m - множество вершин ячейки m.

Оператор ROT, определенный в вершинах ячеек и действующий на функцию, определенную в центрах ячеек, строим на основе разностного аналога тождества (5). Считая, что $\vec{c} = (0, 1/r, 0)$ и что поверхностный интеграл обращается в нуль, записываем разностный аналог (5) в виде:

$$\sum_{k \in K} \varphi_k \frac{1}{r_k} (ROT_\varphi \vec{A})_k \cdot SK_k \cdot r_k - \sum_{m \in M} \frac{1}{r_m} \Big[(GRAD_r \varphi)_m \cdot A_m^z - (GRAD_z \varphi)_m \cdot A_m^r \Big] \cdot S_m \cdot r_m = 0 . \tag{10}$$

Подставляя в (10) выражения для проекций $GRAD$ из (9), получаем выражение для φ-компоненты оператора ROT:

$$(ROT_\varphi \vec{u})_k = \frac{1}{2 \cdot SK_k} \Big[u_m^z (z_p - z_n) + u_n^z (z_m - z_p) + u_p^z (z_n - z_m) + u_m^r \frac{r_p^2 - r_n^2}{2 \cdot r_m} + u_n^r \frac{r_m^2 - r_p^2}{2 \cdot r_n} + u_p^r \frac{r_n^2 - r_m^2}{2 \cdot r_p} \Big]. \tag{11}$$

Построим еще один разностный аналог оператора rot, определенный в центрах ячеек и действующий на функцию, определенную в вершинах ячеек. Оператор ROT строим на основе разностного аналога тождества (4):

$$\sum_{k\in K}(B_\varphi)_k(\mathcal{ROT}_\varphi\vec{u})_k\cdot SK_k\cdot r_k-\sum_{m\in M}\left[u^r_m(ROT_r\vec{B})_m+\right. \tag{12}$$
$$\left.+u^z_m(ROT_z\vec{B})_m\right]\cdot S_m\cdot r_m=0\,.$$

Подставляя (11) в (12), получаем выражения для проекций оператора ROT:

$$(ROT_z\vec{B})_m=-\frac{1}{2\cdot S_m\cdot r_m}\sum_{k\in K_m}\frac{r_k}{r_m}(z_n-z_p)(B_\varphi)_k\cdot r_m \tag{13}$$
$$(ROT_r\vec{B})_m=\frac{1}{2\cdot S_m\cdot r_m}\sum_{k\in K_m}\frac{r_k}{r_m}\frac{r_p^2-r_n^2}{2}(B_\varphi)_k$$

Построенная система разностных операторов DIV, $GRAD$, $\mathcal{ROT}$, ROT дает возможность образовывать повторные операции $GRAD\cdot DIV$, $ROT\cdot\mathcal{ROT}$. Для внутренних узлов сетки консервативная разностная схема получается непосредственной заменой дифференциальных операторов $grad\,div$, $rot\,rot$, $grad$ их разностными аналогами.

Для построения разностного уравнения для граничных узлов сетки в качестве контрольного объема V_m выбираем объем фигуры, получаемой вращением вокруг оси симметрии граничной ячейки m на угол $\pm\beta$ (рис. 3). Обозначим через M_1, M_2 соседние граничные узлы точки M, A - общую граничную вершину ячеек M и M_1, B - общую граничную вершину ячеек M и M_2.

Интегрируя (1) по объему и переходя к поверхностному интегралу, имеем:

$$\oint_S\left[-\mu(\vec{n}\times rot\,\vec{u})+((\lambda+2\mu)div\,\vec{u}-\gamma_0 T)\vec{n}\right]ds=0\,. \tag{14}$$

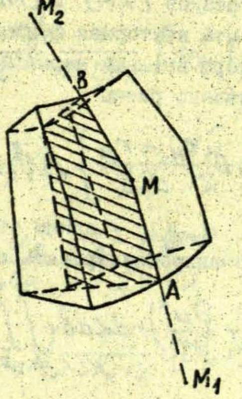


Рис. 3

где S - поверхность, ограничивающая данную фигуру вращения. Разобьем поверхность S на поверхность S_ℓ, ограничивающую фигуру внутри кристалла, и граничную поверхность S_r. Интегралы по поверхности S_ℓ аппроксимируем, используя построенные разностные операторы $DIV\vec{u}$, $\mathcal{ROT}_\varphi \vec{u}$ для внутренних вершин ячейки. При интегрировании по поверхности S_r выделим в подынтегральном выражении граничное условие (2) и перейдем к производной по направлению $\vec{\tau}$, являющемуся касательным к границе. В результате r-проекция интеграла по поверхности преобразуется к следующему виду:

$$\int\limits_{S_r}\left[\mu\cdot n_z\cdot(rot_\varphi \vec{u})+((\lambda+2\mu)div\vec{u}-\gamma T)n_r\right]ds =$$

$$= 2\mu\int\limits_{S_r}\left(\frac{u^r}{r}n_r+\frac{\partial u^z}{\partial\tau}\right)ds = \tag{15}$$

$$= 2\mu\left[\int\limits_{S_{r_1}}\left(\frac{u^r}{r}n_r+\frac{\partial u^z}{\partial\tau}\right)ds+\int\limits_{S_{r_2}}\left(\frac{u^r}{r}n_r+\frac{\partial u^z}{\partial\tau}\right)ds\right],$$

где $S_r = S_{r_1} \cup S_{r_2}$; S_{r_1} и S_{r_2} - поверхности, образованные поворотом трезков $[AM]$ и $[MB]$ вокруг оси на угол $\pm\beta$. Считаем, что векторная функция $\vec{\mathcal{I}}$ постоянна внутри ячейки. Векторы внешней нормали к поверхностям S_{r_1} и S_{r_2} соответственно равны

$$\vec{n}_1 = \left\{ \frac{z_M - z_{M_1}}{d_{MM_1}}, 0, \frac{r_{M_1} - r_M}{d_{MM_1}} \right\}, \quad \vec{n}_2 = \left\{ \frac{z_{M_2} - z_M}{d_{MM_2}}, 0, \frac{r_M - r_{M_2}}{d_{MM_2}} \right\},$$

где d_{MM_1} и d_{MM_2} - длины отрезков $[MM_1]$ и $[MM_2]$. Тогда (15) можно аппроксимировать следующим образом:

$$2\mu \left[\int_A^M \int_{-\beta}^{+\beta} \left(\frac{u^r}{r} n_r + \frac{\partial u^z}{\partial \tau} \right) r\,d\alpha\,dl + \int_M^B \int_{-\beta}^{+\beta} \left(\frac{u^r}{r} n_r + \frac{\partial u^z}{\partial \tau} \right) r\,d\alpha\,dl \right] \cong$$

$$\cong 2\mu \cdot \beta \left[\int_A^M \left(u_M^r \frac{z_M - z_{M_1}}{d_{MM_1}} + \frac{u_M^z - u_{M_1}^z}{d_{MM_1}} \cdot \frac{r_M + r_{M_1}}{2} \right) dl + \right.$$

$$\left. + \int_M^B \left(u_M^r \frac{z_{M_2} - z_M}{d_{MM_2}} + \frac{u_{M_2}^z - u_M^z}{d_{MM_2}} \cdot \frac{r_M + r_{M_2}}{2} \right) dl = \right.$$

$$= 2\mu \cdot \beta \left[\frac{z_{M_2} - z_{M_1}}{2} u_M^r + \frac{u_M^z - u_{M_1}^z}{2} \cdot \frac{r_M + r_{M_1}}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{u_{M_2}^z - u_M^z}{2} \cdot \frac{r_{M_2} + r_M}{2} \right]$$

Аналогично аппроксимируется интеграл по z -направлению:

$$\int_{S_r} \left[-\mu \cdot n_r \cdot (\mathrm{rot}_\varphi \vec{u}) + ((\lambda + 2\mu)\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \gamma T) n_z \right] ds \cong$$

$$\cong 2\mu \cdot \beta \left[\frac{r_{M_1} - r_{M_2}}{2} u_M^r - \frac{u_M^r - u_{M_1}^r}{2} \cdot \frac{r_M + r_{M_1}}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{u_{M_2}^r - u_M^r}{2} \cdot \frac{r_M + r_{M_2}}{2} \right].$$

Разностные уравнения на свободной поверхности имеют вид:

r -проекция:

$$-\mu\cdot\sum_{k\in K_M^*}\frac{r_k}{r_M}\frac{r_p^2-r_n^2}{2}\frac{1}{2\cdot SK_k}\Big[u_M^z(z_p-z_n)+$$

$$+u_n^z(z_M-z_p)+u_p^z(z_n-z_M)+\frac{u_M^r}{r_M}\frac{r_p^2-r_n^2}{2}+$$

$$+\frac{u_n^r}{r_n}\frac{r_M^2-r_p^2}{2}+\frac{u_p^r}{r_p}\frac{r_n^2-r_M^2}{2}\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\sum_{k\in K_M^*}r_M\cdot(z_p-z_n)\cdot\Big[\frac{1}{2\cdot SK_k\cdot r_k}\cdot\big(u_M^r r_M(z_n-z_p)+ \qquad (I6)$$

$$+u_n^r r_n(z_p-z_M)+u_p^r r_p(z_M-z_n)+$$

$$+u_M^z\frac{r_p^2-r_n^2}{2}+u_n^z\frac{r_M^2-r_p^2}{2}+u_p^z\frac{r_n^2-r_M^2}{2}\big)-\gamma T_k\Big]+$$

$$+2\mu\cdot\Big[\frac{z_{M_2}-z_{M_1}}{2}u_M^r+\frac{r_{M_1}-r_{M_2}}{4}u_M^z+\frac{r_M+r_{M_2}}{4}u_{M_2}^z-$$

$$-\frac{r_M+r_{M_1}}{4}u_{M_1}^z\Big]=0$$

z -проекция:

$$-\mu\cdot\sum_{k\in K_M^*}r_k\cdot(z_p-z_n)\frac{1}{2\cdot SK_k}\Big[u_M^z(z_p-z_n)+$$

$$+u_n^z(z_M-z_p)+u_p^z(z_n-z_M)+\frac{u_M^r}{r_M}\frac{r_p^2-r_n^2}{2}+$$

$$+\frac{u_n^r}{r_n}\frac{r_M^2-r_p^2}{2}+\frac{u_p^r}{r_p}\frac{r_n^2-r_M^2}{2}\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\sum_{k\in K_M^*}\frac{r_n^2+r_p^2}{2}\Big[\frac{1}{2\cdot SK_k\cdot r_k}\Big(u_M^r r_M(z_n-z_p)+$$

$$+u_n^r r_n(z_p-z_M)+u_p^r r_p(z_M-z_n)+u_M^z\frac{r_p^2-r_n^2}{2}+$$

$$+u_n^z\frac{r_M^2-r_p^2}{2}+u_p^z\frac{r_1^2-r_M^2}{2}\Big)-\gamma T_k\Big]+$$

$$+2\mu\cdot\Big[\frac{r_M+r_{M_1}}{4}\cdot u_{M_1}^r+\frac{r_{M_1}-r_{M_2}}{4}u_M^r-\frac{r_M+r_{M_2}}{4}u_{M_2}^r\Big]=0,$$

где K_M^* - множество внутренних вершин ячейки M .

В декартовой системе координат разностные операторы DIV, $GRAD$, ROT, $\mathcal{ROT}$ строятся подобным же образом. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательные выражения: аппроксимации уравнений во внутренних точках

$$-\mu\sum_{k\in K_m}\frac{x_p-x_n}{2\cdot SK_k}\Big[u_m^y(y_p-y_n)+u_n^y(y_m-y_p)+$$

$$+u_p^y(y_n-y_m)+u_m^x(x_p-x_n)+u_n^x(x_m-x_p)+u_p^x(x_n-x_m)\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\sum_{k\in K_m}(y_p-y_n)\Big[\frac{1}{2\cdot SK_k}\Big(u_m^x(y_n-y_p)+u_n^x(y_p-y_m)+$$

$$+u_p^x(y_m-y_n)+u_m^y(x_p-x_n)+u_n^y(x_m-x_p)+u_p^y(x_n-x_m)\Big)-\gamma T_k\Big]=0 \qquad (17)$$

$$-\mu\sum_{k\in K_m}\frac{y_p-y_n}{2\cdot SK_k}\Big[u_m^y(y_p-y_n)+u_n^y(y_m-y_p)+u_p^y(y_n-y_m)+$$

$$+u_m^x(x_p-x_n)+u_n^x(x_m-x_p)+u_p^x(x_n-x_m)\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\sum_{k\in K_m}(x_n-x_p)\Big[\frac{1}{2\cdot SK_k}\big(u_m^x(y_n-y_p)+u_n^x(y_p-y_m)+$$

$$+u_p^x(y_m-y_n)+u_m^y(x_p-x_n)+u_n^y(x_m-x_p)+u_p^y(x_n-x_m)\big)-\gamma T_k\Big]=0$$

аппроксимации уравнений в граничных точках

$$-\mu\sum_{k\in K_M^*}\frac{x_p-x_n}{2\cdot SK_k}\Big[u_M^y(y_p-y_n)+u_n^y(y_M-y_p)+u_p^y(y_n-y_M)+$$

$$+u_M^x(x_p-x_n)+u_n^x(x_M-x_p)+u_p^x(x_n-x_M)\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\sum_{k\in K_M^*}(y_p-y_n)\Big[\frac{1}{2\cdot SK_k}\big(u_M^x(y_n-y_p)+u_n^y(x_m-x_p)+$$

$$+u_p^y(x_n-x_m)\big)-\gamma T_k\Big]+2\mu\cdot(u_{M_2}^y-u_{M_1}^y)=0\,. \qquad (18)$$

$$-\mu\sum_{k\in K_M^*}\frac{y_p-y_n}{2\cdot SK_k}\Big[u_M^y(y_p-y_n)+u_n^y(y_M-y_p)+u_p^y(y_n-y_M)+$$

$$+u_M^x(x_p-x_n)+u_n^x(x_M-x_p)+u_p^x(x_n-x_M)\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\sum_{k\in K_M^*}(x_n-x_p)\Big[\frac{1}{2\cdot SK_k}\big(u_M^x(y_n-y_p)+$$

$$+u_n^x(y_p-y_M)+u_p^x(y_M-y_n)+u_M^y(x_p-x_n)+$$

$$+u_n^y(x_M - x_p) + u_p^y(x_n - x_M)) - \gamma T_k\Big] +$$

$$+2\mu\cdot(u_{M_1}^x - u_{M_2}^x) = 0.$$

Приведенная разностная схема (I7-I8) на прямоугольной сетке совпадает с предложенной в работе /I2, с. 2II/ и имеет второй порядок аппроксимации.

Покажем, что матрица жесткости системы является симметричной. Представим вектор неизвестных в виде $\vec{u} = (u_1^r, u_1^z, \ldots, u_N^r, u_N^z)$, N - число точек разностной сетки. Введем следующие обозначения для коэффициентов матрицы жесткости C: $C_{2m-1,2n-1} = a_{mn}^r$ - коэффициент при u_n^r r-проекции разностного уравнения термоупругости в точке m; $C_{2m-1,2n} = b_{mn}^r$ - коэффициент при u_n^z r-проекции уравнения в точке m; $C_{2m,2n-1} = b_{mn}^z$ - коэффициент при u_n^r z-проекции уравнения; $C_{2m,2n} = a_{mn}^z$ - коэффициент при u_n^z z-проекции уравнения в точке m. Используя разностные уравнения (I6) и обозначения, принятые на рис. I, рис. 3, проверим выполнение следующих равенств:

$$a_{mn}^r = a_{nm}^r,\quad b_{mm}^r = b_{mm}^z,\quad a_{mn}^z = a_{nm}^z,\quad b_{mn}^r = b_{nm}^z.$$

$$a_{mn}^r = -\mu\cdot\Big[\frac{r_k}{r_m}\,\frac{r_p^2 - r_n^2}{2}\,\frac{1}{2SK_k}\,\frac{r_m^2 - r_p^2}{2r_n} +$$

$$+\frac{r_{k-1}}{r_m}\,\frac{r_n^2 - r_q^2}{2}\,\frac{1}{2\cdot SK_{k-1}}\,\frac{r_q^2 - r_m^2}{2r_n}\Big] +$$

$$+(\lambda+2\mu)\Big[r_m(z_p - z_n)\frac{1}{2\cdot SK_k\cdot r_k}\cdot r_n\cdot(z_p - z_m) +$$

$$+r_m(z_n - z_q)\frac{1}{2\cdot SK_{k-1}\cdot r_k}\cdot r_n\cdot(z_m - z_q)\Big]$$

$$a_{nm}^r = -\mu\cdot\Big[\frac{r_k}{r_n}\,\frac{r_p^2 - r_m^2}{2}\,\frac{1}{2\cdot SK_k}\,\frac{r_n^2 - r_p^2}{2r_m} +$$

$$+\frac{r_{k-1}}{r_n}\,\frac{r_q^2-r_m^2}{2}\,\frac{1}{2SK_{k-1}}\,\frac{r_n^2-r_q^2}{2r_m}\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\cdot r_n\cdot\Big[(z_q-z_m)\frac{1}{2\cdot SK_{k-1}\cdot r_{k-1}}\cdot r_m\cdot(z_q-z_n)+$$

$$+(z_m-z_p)\frac{1}{2\cdot SK_k\cdot r_k}\cdot r_m\,(z_n-z_p)\Big]$$

$$b^r_{mn}=-\mu\cdot\Big[\frac{r_k}{r_m}\,\frac{r_p^2-r_n^2}{2}\,\frac{1}{2\cdot SK_k}(z_m-z_p)+\frac{r_{k-1}}{r_m}\,\frac{r_n^2-r_q^2}{2}\,\frac{1}{2SK_{k-1}}(z_q-z_m)\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\cdot r_m\cdot\Big[(z_p-z_n)\frac{1}{2\cdot SK_k\cdot r_k}\,\frac{r_m^2-r_p^2}{2}+(z_n-z_q)\frac{1}{2\cdot SK_{k-1}r_{k-1}}\,\frac{r_q^2-r_m^2}{2}\Big]$$

$$b^z_{nm}=-\mu\Big[r_k(z_m-z_p)\frac{1}{2\cdot SK_k}\,\frac{r_p^2-r_n^2}{2\cdot r_m}+$$

$$+r_{k-1}(z_q-z_m)\frac{1}{2\cdot SK_{k-1}}\,\frac{r_n^2-r_q^2}{2\cdot r_m}\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\cdot\Big[\frac{r_p^2-r_m^2}{2}\,\frac{1}{r_k\cdot 2\cdot SK_k}\cdot r_m\cdot(z_n-z_p)+$$

$$+\frac{r_m^2-r_q^2}{2}\,\frac{1}{r_{k-1}\cdot 2\cdot SK_{k-1}}\cdot r_m\cdot(z_q-z_n)\Big]$$

$$b^r_{mn}=-\mu\cdot\Big[\sum_{k\in K_m^*}\frac{r_k}{r_m}\,\frac{r_p^2-r_n^2}{2}\,\frac{1}{2\cdot SK_k}\cdot(z_p-z_n)\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\Big[\sum_{k\in K_m^*}r_m(z_p-z_n)\frac{1}{2\cdot SK_k\cdot r_k}\,\frac{r_p^2-r_n^2}{2}\Big]+\mu\cdot\frac{r_{m_1}-r_{m_2}}{2}$$

$$b^z_{mm}=-\mu\cdot\Big[\sum_{k\in K_m^*}r_k(z_p-z_n)\frac{1}{2\cdot SK_k}\,\frac{r_p^2-r_n^2}{2\cdot r_m}\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\left[\sum_{\kappa\in K_m^*}\frac{r_n^2-r_p^2}{2}\,\frac{1}{2\cdot SK_\kappa\cdot r_\kappa}\cdot r_m\cdot(z_n-z_p)\right]+\mu\cdot\frac{r_{m_1}-r_{m_2}}{2}$$

$$b_{mm_1}^{r}=-\mu\cdot\frac{r_m+r_{m_1}}{2}$$

$$b_{m_1m}^{z}=-\mu\cdot\frac{r_{m_1}+r_m}{2}$$

$$a_{mn}^{z}=-\mu\Big[r_\kappa(z_p-z_n)\frac{1}{2\cdot SK_\kappa}\cdot(z_m-z_p)+$$

$$+r_{\kappa-1}\cdot(z_n-z_q)\frac{1}{2\cdot SK_{\kappa-1}}(z_q-z_m)\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\Big[\frac{r_n^2-r_p^2}{2}\,\frac{1}{r_\kappa\cdot 2\cdot SK_\kappa}\cdot\frac{r_m^2-r_p^2}{2}+$$

$$+\frac{r_q^2-r_n^2}{2}\,\frac{1}{r_{\kappa-1}\cdot 2\cdot SK_{\kappa-1}}\,\frac{r_q^2-r_m^2}{2}\Big]$$

$$a_{nm}^{z}=-\mu\cdot\Big[r_\kappa\cdot(z_m-z_p)\frac{1}{2\cdot SK_\kappa}(z_p-z_n)+$$

$$+r_{\kappa-1}(z_q-z_m)\frac{1}{2\cdot SK_{\kappa-1}}(z_n-z_q)\Big]+$$

$$+(\lambda+2\mu)\Big[\frac{r_p^2-r_m^2}{2}\,\frac{1}{r_\kappa\cdot 2\cdot SK_\kappa}\,\frac{r_p^2-r_n^2}{2}+$$

$$+\frac{r_m^2-r_q^2}{2}\,\frac{1}{2\cdot SK_{\kappa-1}\cdot r_{\kappa-1}}\cdot\frac{r_n^2-r_q^2}{2}\Big]$$

Таким образом, построенная разностная схема является консервативной и сохраняет свойства самосопряженности исходных дифференциальных операторов.

Система разностных уравнений термоупругости решается с помощью пакета YSMP/13/ для симметричной положительно определенной матрицы.

Компоненты тензора термоупругих напряжений в кристалле определяются по рассчитанному полю перемещений путем численного дифференцирования.

В качестве тестовой была решена задача расчета термоупругих напряжений в цилиндре ($0 \leqslant r \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$), торцы и боковая поверхность которого свободны от напряжений. Распределение температуры задавалось в виде $T = c \cdot r^2$. Расчеты по изложенной методике показали хорошее совпадение с аналитическим решением, приведенным в работе /14, с.223/. В таблицах 1-4 приведены значения напряжений $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}$.

В заключение авторы благодарят Ю.В.Апановича за плодотворные обсуждения работы.

Таблица I

Значения напряжений σ_r. Верхнее число получено из аналитического решения /II, стр.237/; нижнее - из расчета

z \ r	0.I	0.[illegible]	0.5	0.7	0.9
0.	5.094 5.10	4.563 4.64	3.560 3.56	2.2I5 2.29	0.726 0.735
0.I	5.073 5.08	4.545 4,62	3.550 3.54	2.2I0 2.29	0.723 0.746
0.2	5.00I 5.00	4.488 4.56	3.5I4 3.50	2.I94 2.28	0.7I8 0.746
0.3	4.858 4.85	4.372 4.44	3.44I 3.43	2.I6I 2.25	0.707 0.743
0.4	4.607 4.60	4.I6I 4.23	3.307 3.30	2.I0I 2.I9	0.694 0.736
0.5	4.I95 4.I8	3.822 3.88	3.079 3.09	I.996 2.09	0.672 0.722
0.6	3.548 3.52	3.275 3.30	2.706 2.68	I.8I9 I.9I	0.643 0.693
0.7	2.568 2.55	2.436 2.57	2.II9 2.I5	I.53I I.60	0.595 0.643
0.8	I.I3I I.II	I.I90 I.0I	I.228 I.03	I.080 I.I0	0.522 0.53I
0.9	-0.9I6 -0.796	-0.6I2 -0.425	-0.093 -0.27	0.I07 0.473	0.409 0.470

Таблица 2

Значения напряжений σ_φ. Верхнее число в клетке получено из аналитического решения /II, стр.237/; нижнее - из расчета

z \ r	0.I	0.3	0.5	0.7	0.9
0.	5.044 4.92	4.09I 4.I4	2.I72 2.I5	-0.74I -0.67	-4.679 -4.68
0.I	5.022 4.90	4.075 4.I3	2.I65 2.I4	-0.734 -0.66I	-4.659 -4.66
0.2	4.950 4.84	4.0I9 4.07	2.I4I 2.II	-0.7I9 -0.645	-4.60I -4.59
0.3	4.808 4.700	3.905 3.96	2,08I 2.05	-0.709 -0.635	-4.5I4 -4.50
0.4	4.556 4.45	3.697 3.75	I.953 I.92	-0.727 -0.655	-4.4I2 -4.40
0.5	4.I42 4.05	3.344 3.39	I.7I4 I.70	-0.8I3 -0.743	-4.32I -4.3I
0.6	3.493 3.4I	2.773 2.83	I.296 I.26	-I.02I -0.95	-4.282 -4.28
0.7	2.508 2.46	I.89I I.96	0.62I 0.56I	-I.424 -I.39	-4.355 -4.36
0.8	I.062 I.09	0.575 0.598	-0.449 -0.5I6	-2.I25 -2.09	-4.628 -4.65
0.9	-0.997 -0.93	-I.328 -I.I4	-2.036 -2.I6	-3.245 -3.I7	-5.I25 -5.I6

Таблица 3

Значение апряжений σ_z. Верхнее число получено из аналитического решения /II, стр.238/; нижнее - из расчета

z	0.I	0.3	0.5	0.7	0.9
0.	4.943 4.87	4.353 4.42	2.992 2.97	0.498 0.567	-3.65I -3.66
0.I	4.859 4.79	4.353 4.35	2.949 2.92	0.498 0.563	-3.596 -3.60
0.2	4.6I0 4.56	4.072 4.I4	2.8I9 2.79	0.495 0.558	-3.437 -3.44
0.3	4.204 4.I6	3.727 3.80	2.604 2.58	0.486 0.548	-3.I70 -3.I8
0.4	3.655 3.62	3.256 3.34	2.304 2.30	0.466 0.528	-2.80I -2.82
0.5	2.987 2.96	2.679 2.77	I.926 2.05	0.428 0.497	-2.338 -2.36
0.6	2.238 2.28	2.024 2.23	I.486 I.50	0.365 0.449	-I.799 -I.83
0.7	I.467 I.44	I.34I I.33	I.0I0 I.08	0.276 0.409	-I.222 -I.26
0.8	0.758 0.824	0.700 0.798	0.544 0.603	0.I68 0.309	-0.67I -0.742
0.9	0.223 0.49I	0.205 0.44I	0.I65 0.257	0.060 0.I42	-0.222 -0.I08

Таблица 4

Значения напряжений σ_{rz} . Верхнее число получено из аналитического решения /11, стр.238/; нижнее – из расчета

z \ r	0.	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.	0. 0.	0. -0.004	0. -0.004	0. -0.007	0. 0.005	0. 0.001
0.1	0. 0.	0.084 0.087	0.233 0.229	0.323 0.249	0.305 0.309	0.141 0.149
0.2	0. 0.	0.167 0.177	0.461 0.456	0.639 0.560	0.609 0.609	0.286 0.292
0.3	0. 0.	0.243 0.260	0.675 0.669	0.941 0.854	0.907 0.902	0.432 0.438
0.4	0. 0.	0.310 0.334	0.865 0.859	1.215 1.12	1.189 1.18	0.580 0.583
0.5	0. 0.	0.361 0.392	1.013 1.01	1.440 1.38	1.431 1.41	0.719 0.719
0.6	0. 0.	0.388 0.428	1.097 1.13	1.578 1.56	1.601 1.56	0.834 0.826
0.7	0. 0.	0.381 0.437	1.004 1.06	1.583 1.53	1.643 1.56	0.888 0.868
0.8	0. 0.	0.324 0.441	0.930 0.970	1.386 1.48	1.479 1.53	0.827 0.812
0.9	0. 0.	0.202 0.282	0.587 0.497	0.896 0.942	0.994 0.999	0.560 0.533

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдонин Н.А., Вахрамеев С.С., Освенский В.Б. Постановка и численное решение термоупругопластической задачи с учетом движения дислокаций в плоскостях скольжения кристаллов, выращиваемых из расплава// Математическое моделирование. Получение монокристаллов и полупроводниковых структур. М.: Наука, 1986. С. 158-171.
2. A.S.Jordan, A.R.Von Neida and R.Caruso, J. Crystal Growth 76 (1986) 243.
3. G.O.Mednoye, K.E.Evans and D.J.Bacon, J. Crystal Growth 97 (1989) 709.
4. S.Motakef, J.Crystal Growth 88 (1988) 341.
5. C.E. Schvezov, I.V.Samarasekera and F.Weinberg. J. Crystal Growth 92 (1988) 479.
6. Апанович Ю.В., Люмкис Е.Д. Разностные схемы для уравнений Навье-Стокса на сетке из ячеек Дирихле// Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1988. Т. 28. № 3. С.390-399.
7. Апанович Ю.В., Люмкис Е.Д. Применение разностных схем на ячейках Дирихле для решения задач тепломассообмена с фазовыми переходами// Дифференц. уравнения, 1988. Т. 24. № 7. С. 1113-1121.
8. Апанович Ю.В., Люмкис Е.Д., Пакул Л.А. Численное исследование влияния гидродинамики и радиационного теплообмена в процессе горизонтальной направленной кристаллизации на положение и форму межфазной границы// Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1990. С. 68-91.
9. Green P.J., Sibson R. Computing Dirichlet Tesselation in the Plane. - Comput J. - 1978. - V. 21. - P. 168-173.
10. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы// Дифференц. уравнения, 1981. Т. 17. № 7. С. 1317-1327.
11. Михайлова Н.В., Тишкин В.Ф., Тюрина Н.Н. и др. Численное моделирование двумерных газодинамических течений на сетке переменной структуры// Журн. вычисл. мат. и мат.

физ. 1986. Т. 26, № 9. С. 1392-1406.
12. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 352 с.
13. Eisenstat S.C., Gursky M.C., Schultz M.H., Sherman A.H. Yale Sparse Matrix Package. I. The Symmetric Codes. Int. J. Numer. Meth. Eng.. 1982. 18. N8. 1145-1152.
14. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 307 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, Вып.2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 536.421+536.421.4+536.24

Э.Н.МАРТУЗАНЕ
ИМИ ЛУ, Рига
А.С.СЕНЧЕНКОВ
КБ общего машиностроения,
Москва

ВЛИЯНИЕ КВАРЦЕВЫХ АМПУЛ И ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБРАЗЦА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ АМПУЛЬНОЙ ЗОННОЙ ПЛАВКЕ

В работах /I,2/ изучались процессы теплопереноса, происходящие при ампульной зонной плавке, когда образец, концы которого закреплены в полых графитовых держателях, помещается в кварцевую ампулу, вдоль которой движется муфель с резистивным нагревателем. Исследовалось влияние расположения нагревателя относительно слитка и температуры нагревательной системы, а также наличие рифлений графитовых держателей на ширину проплава и перегрев расплава в условиях невесомости. В этих работах представлена математическая модель для определения теплового поля как в одномерной, так и в двумерной постановках, изложен метод решения и полученные результаты.

При проведении ампульной зонной плавки в наземных условиях образец кроме ампулы помещается также в кварцевую трубочку с радиусом, близким к радиусу слитка. Для определения влияния поглощения и испускания излучения кварцем в работе /3/ предложена приближенная модель учета полупрозрачных кварцевых ампул, а также приведены результаты расчетов температурных полей при ампульной зонной плавке германия для заданной нагревательной системы. Показано, что при наличии кварцевых ампулы и трубочки уменьшаются ширина зоны проплава и перегрев расплава относительно температуры плавления.

В данной работе исследуются температурные поля образца, кварцевых ампулы и трубочки в зависимости от теплофизических свойств образца, его размеров и внешней температуры. Рассматривается упрощенная модель системы нагреватель-слиток, схематически изображенная на рис. I.

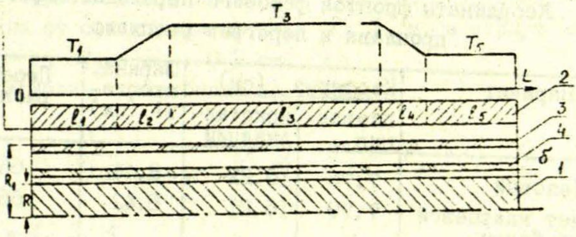


Рис. I. Схема расчетной области при ампульной зонной плавке и распределение температуры на нагревателе: I - слиток; 2 - нагреватель; 3 - кварцевая ампула; 4 - кварцевая трубка

Для параметрических исследований используется одномерная модель, включающая в себя уравнения теплопроводности для слитка, графита и кварцевых ампул. Источники, входящие в уравнение, учитывают радиационный теплообмен между слитком, нагревателем и полупрозрачными кварцевыми ампулами. Математическая постановка задачи совпадает с приведенной в работе /3/.

Для проведения расчетов был выбран следующий вариант в качестве базового: радиус слитка $R = 2$ см; длина слитка $L = 24$ см; температура плавления $T_{пл} = 1300^{\circ}$К; удельная теплоемкость $C = 0{,}4$ дж/(г $^{\circ}$К); плотность $\rho = 5$ /см^3; $\lambda_s = 0{,}1$ вт/(см$^{\circ}$К); $\lambda_\ell = 0{,}2$ вт/(см$^{\circ}$К) - теплопроводность кристалла и расплава, соответственно; $\varepsilon_s = 0{,}6$; $\varepsilon_\ell = 0{,}2$ - - степень черноты кристалла и расплава; $\mathcal{L} = 0$ - удельная скрытая теплота плавления; $v = 0$ - скорость продвижения слитка.

Распределение температуры нагревателя, представленное на рис. I, задается на участках $\ell_1 = \ell_5 = L/3$, $\ell_2 = \ell_4 = L/12$, $\ell_3 = L/6$ в следующем виде:

$$T_1 = T_5 = 0{,}9 * (T_{пл} - 273); \quad T_3 = 1{,}2 * (T_{пл} - 273) \quad (I)$$

Соответствующая степень черноты нагревательных участков

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_5 = 0{,}2; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 0{,}4; \quad \varepsilon_3 = 0{,}8$$

Таблица I

Координаты фронтов фазового перехода, ширина проплава и перегрев расплава

№	Вариант	Изотерма (см) плавления	Изотерма (см) кристаллизации	Ширина проплава (см)	Перегрев расплава
I	базовый	7.78	I6.22	8.44	66.8
2	нет кварцевой трубочки	7.79	I6.2I	8.42	66.9
3	нет кварцевой труб. и ампулы	7.75	I6.25	8.5	68.2
4	$\lambda_s = 0.03$, $\lambda_\ell = 0.06$	7.48	I6.52	9.04	I35.8
5	$\lambda_s = 0.0I$, $\lambda_\ell = 0.02$	7.9I	I6.08	8.I7	I78.0
6	$\lambda_s = 0.3$, $\lambda_\ell = 0.6$	9.30	I4.70	5.4	I4.0
7	$\varepsilon_s = \varepsilon_\ell = 0.2$	7.62	I6.38	8.76	69.0
8	$\varepsilon_s = \varepsilon_\ell = 0.6$	6.75	I7.25	I0.5	I3I.8
9	R = I см	7.57	I6.43	8.86	I44.6
I0	R = 3 см	9.63	I4.37	4.74	I4.7
II	$T_{пл}$ = 800°К	нет проплава			
I2	$T_{пл}$ = I800°К	7.38	I6.62	9.24	I89.I
I3	$T_{пл}$ = I800°К, L = 32 см	II.3I	20.68	9.37	I89.8
I4	$T_{пл}$ = I800°К, L = 32 см, нет кварцевой трубочки	II.3I	20.68	9.37	I89.8

Температурные поля для кварцевых ампул и трубочки определяются при следующих значениях физических компонент для кварца $\lambda_{кв} = 0{,}025$ вт/(см°К) - теплопроводность кварца; $\rho = 2{,}2$ г/см ^{3} - плотность; $C = 0{,}24$ дж/(ч°К) - удельная теплоемкость; $\tau = 0{,}75 \cdot 10^{-3} (T_{кв} - 273) - 0{,}1$ - аппроксимация величины коэффициента пропускания кварца.

Диаметр кварцевых трубочки и ампулы - 0,2 см; зазор между трубочкой и слитком $\delta = 0{,}05$ см. Кварцевая ампула удалена от оси слитка на $R_1 = R + 1$ см, а корпус нагревателя - на $R_2 = R_1 + 0{,}2$ см.

Условия теплообмена на торцах:

$$\pm \lambda \left. \frac{\partial T_i}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ x=L}} = \alpha (T_i - T_к) \, , \qquad (2)$$

$i = 1, 3, 4$.

где T_i - температура слитка или кварцевых ампул,

$T_к$ - температура корпуса, принимаемая равной 373°К,

$\alpha = 0{,}007$ вт/(см^2 °К).

Рассмотрим полученные результаты.

В таблице I представлены координаты фронтов плавления $\varkappa_1$ и кристаллизации $\varkappa_2$, ширина зоны проплава ℓ и перегрев расплава ΔT относительно температуры плавления. Базовый вариант включает в себя также наличие кварцевых ампулы и трубочки и представлен в таблице вариантом № I. Температурное поле слитка определено также для следующих случаев по сравнению с базовым : 2 - отсутствует кварцевая трубочка, что соответствует ампульной зонной плавке в космосе; 3 - отсутствуют кварцевая ампула и трубочка, 4 - коэффициенты теплопроводности $\lambda_s = 0{,}03$ вт/(см °К); $\lambda_\ell = 0{,}06$ вт/(см°К); 5. - $\lambda_s = 0{,}01$ вт/(см°К), $\lambda_\ell = 0{,}02$ вт/(см°К); 6. - $\lambda_s = 0{,}3$ вт/(см°К), $\lambda_\ell = 0{,}6$ вт/(см°К); 7. - степень черноты слитка и расплава $\varepsilon_s = \varepsilon_\ell = 0{,}2$; 8. - $\varepsilon_s = \varepsilon_\ell = 0{,}6$: 9. - $R = 1$ см; 10. - $R = 3$ см; 11. - $T_{пл} = 800$°К; 12. - $T_{пл} = 1800$°К; 13. - $T_{пл} = 1800$°К, $L = 32$ см; 14. - $T_{пл} = 1800$°К, $L = 32$ см, отсутствует кварцевая трубочка.

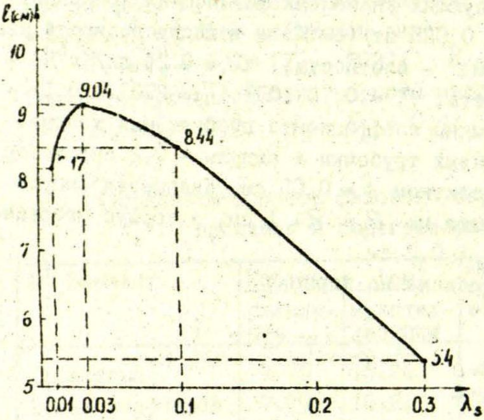


Рис. 2. Зависимость ширины зоны проплава от величины коэффициента теплопроводности $(\lambda_\ell / \lambda_s) = 2$

На рис. 2 представлена зависимость ширины зоны проплава от значений коэффициентов теплопроводности по результатам таблицы I (номера вариантов):

I - $\lambda_s = 0{,}1$ Вт/(см^{0}К); $\lambda_\ell = 0{,}2$ Вт/(см^{0}К)

4 - $\lambda_s = 0{,}03$ Вт/(см^{0}К); $\lambda_\ell = 0{,}06$ Вт/(см^{0}К)

5 - $\lambda_s = 0{,}01$ Вт/(см^{0}К); $\lambda_\ell = 0{,}02$ Вт/(см^{0}К)

6 - $\lambda_s = 0{,}3$ Вт/(см^{0}К); $\lambda_\ell = 0{,}6$ Вт/(см^{0}К)

Из рис. 2 видно, что ширина зоны проплава растет при увеличении коэффициентов теплопроводности от 0,0I до 0,03 Вт/(см^{0}К), а затем при дальнейшем увеличении коэффициентов теплопроводности ширина зоны расплава начинает уменьшаться.

Из рис. 3 видно, что ширина зоны проплава в зависимости от величины радиуса слитка по результатам, представленным в таблице I номером I - для радиуса слитка 2 см, номером 9 - для радиуса слитка I см и номером I0 - для радиуса слитка 3 см, уменьшается с увеличением радиуса слитка.

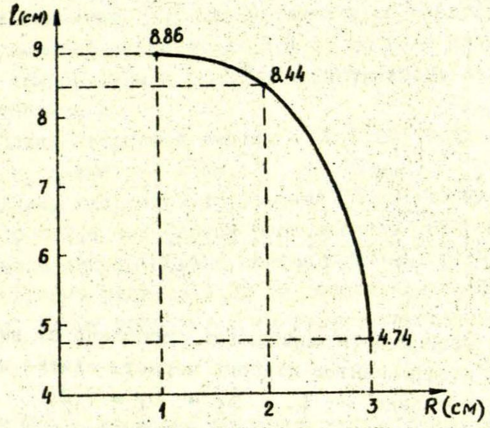


Рис. 3. Зависимость ширины зоны проплава от радиуса слитка

В таблице I в номерах вариантов I, II, I2 представлены результаты для $T_{пл}$ = 1300°K, 800°K, 1800°K, соответственно. При низкой температуре плавления $T_{пл}$ = 800°K распределение температуры на нагревателе (1) не обеспечивает проплавление слитка; при $T_{пл}$ = 1300°K ширина проплава l = = 8,44 см, а перегрев расплава ΔT = 66,8° ; при $T_{пл}$ = = 1800°K, l = 9,24 см при перегреве расплава ΔT=189,I°.

Из рис. 4 видно, что ширина зоны проплава при одинаковых значениях коэффициентов степени черноты слитка и расплава увеличивается с увеличением значений коэффициентов. При разных значениях коэффициентов степени черноты слитка и расплава ширина проплава становится меньше.

На рис. 5 для базового варианта, результаты которого в таблице № I, даются распределения температуры по длине: в слитке - кривая I, в кварцевой ампуле - кривая 2. (Поскольку нагревательная система симметрична относительно середины слитка, распределение температуры для правой половины слитка не приводится).

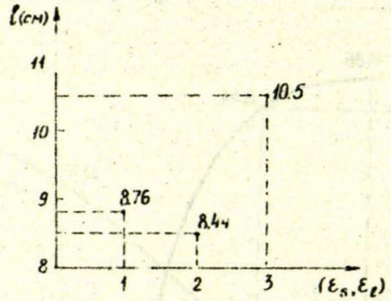


Рис. 4. Зависимость ширины зоны проплава от величины коэффициентов степени черноты слитка и расплава

1. - $\mathcal{E}_S = \mathcal{E}_\ell = 0{,}2$;
2. - $\mathcal{E}_S = 0{,}6$, $\mathcal{E}_\ell = 0{,}2$;
3. - $\mathcal{E}_S = \mathcal{E}_\ell = 0{,}6$

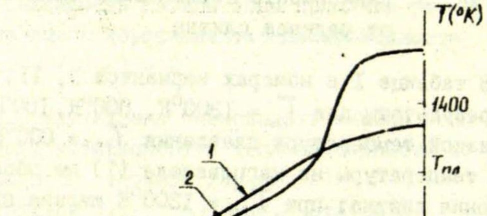


Рис. 5. Распределение температуры по длине для базового варианта

кривая I - в слитке,

кривая 2 - в кварцевой ампуле.

Проводились также расчеты бестигельной зонной плавки слитка германия Ge для установки со следующими параметрами: диаметр нагревателя 3,4 см по всей длине. Распределение температуры и степени черноты вдоль нагревателя даны в таблице 2.

Длина кварцевой ампулы - 36,I см, толщина ампулы - 0,I5 см, диаметр - 3 см.

Длина кварцевой трубочки - 25 см, толщина - 0,I5 см, диаметр - 2,4 см. Слиток располагается на расстоянии 5 см от начала ампулы. Длина слитка - 27 см, радиус слитка - I см. Графит радиуса I,33 см расположен с обеих сторон слитка. Кроме того, на I см графит заходит на слиток.

Таблица 2

Распределение температуры и степени черноты вдоль нагревателя

Координата от начала ампулы (см)	Температура (°К)	Степень черноты
0	333	0.3
3	365	0.3
6,3	46I	0.3
9,5	757	0.3
I3	983	0.5
I6,8	II7I	0.3
I8.2	I348	0.3
I9	I4I0	0.7
I9,8	I373	0.7
22.4	II44	0.3
28.4	960	0.5
29.9	96I	0.5
33.I	959	0.5
35.7	94I	0.5
36.I	890	0.5

Коэффициент теплоотдачи слева (в начале ампулы) $1,9\cdot10^{-4}$ Вт/(см$^{\circ}$К), справа - $2,6\cdot10^{-3}$ Вт/(см$^{\circ}$К), температура корпуса установки - 300°К.

. Исследовались температурные поля слитка германия в случае (I) отсутствия кварцевых ампулы и трубочки, в случае (2) отсутствия кварцевой трубочки, в случае (3) для слитка и кварцевых ампулы и трубочки и в случае (4) при отсутствии зазора между расплавом и кварцевой трубочкой.

Чтобы оценить влияние отсутствия зазора между расплавом и кварцевой трубочкой, в краевое условие на поверхности слитка

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R} = Q_1 ,$$

где λ - коэффициент теплопроводности,

T - температура слитка,

R - радиус слитка,

Q_1 - результирующее излучение, определяемое в /3/,

в правую часть добавляется слагаемое

$$\lambda_{кв} \frac{T-T_4}{d/2} : \quad Q_1' = Q_1 + \lambda_{кв} \frac{T-T_4}{d/2} ,$$

где $\lambda_{кв}$ - коэффициент теплопроводности кварца,

T_4 - температура кварцевой трубочки,

d - толщина кварцевой трубочки.

Таким образом, приближенно учитывается перенос тепла в радиальном направлении. Такое же слагаемое с противоположным знаком добавляется в краевое условие для трубочки.

В случае (I), когда рассчитывается температура в слитке без учета кварцевых ампул, ширина проплава составляет 1,58 см и перегрев расплава 3,96°К. В случае (2), когда учитывается влияние только кварцевой ампулы ширина проплава - 1,61 см, перегрев расплава - 3,72°К. Получилось, что ширина проплава увеличилась, но температура расплава стала ниже. В случае (3), когда есть кварцевые трубочка и ампула, ширина проплава - 1,52 см, перегрев расплава - 3,16°К, т.е. ширина и перегрев расплава уменьшились. В случае (4), в котором в отличие от (3) отсутствует зазор между кварцевой трубочкой и расплавом, происходит существенное увеличение перегрева расплава - 41,9°К и ширины проплава - 4,56 см. Следовательно, можно ожидать, что в наземных условиях можно получить большую зону проплава, чем в невесомости, когда кварцевая трубочка отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулбе М.Л., Мартузане Э.Н., Копелиович Э.С., Раков В.В. Численное исследование температурного поля при моделировании процесса зонной плавки в ампуле// Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛГУ, 1985. С. 135-144.
2. Гулбе М.Л., Мартузане Э.Н., Волков Ю.Л., Копелиович Э.С., Раков В.В. Численное исследование тепловых, гидродинамических и концентрационных потоков в процессе зонной ампульной плавки в невесомости// Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛГУ, 1987. С. 35-44.
3. Люмкис Е.Д., Мартузан Б.Я., Мартузане Э.Н., Сенченков А.С. Математическая модель теплопереноса при зонной плавке в полупрозрачной ампуле// Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛГУ, 1989. С. 106-115.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ , Вып.2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 517.946 : 519.6

E. Schechter
Zentrum für Praktische Mathematik
Kaiserslautern, Germany

NUMERICAL APPROXIMATION AND EXISTENCE OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR PARABOLIC EQUATION

In [13] we considered the nonlinear degenerate parabolic equation (1.1) in which the term a was independent of the unknown function u. Many phenomena however, require that a depends on u too. We mention in this direction the flow with accretion through porous media [6], the heat conduction with absorption [5] and the migration of animal populations with population supply [3] - [11]. Our aim is to show that an adequate implicit difference scheme (§2) yields an approximating sequence whose limit is the generalized solution of (1.1)-(1.3). In this way numerical procedures can be regarded as a tool in proving existence of a solution of our problem. It turns out that some conditions under which such a solution exists are less restrictive than those in [2].

1. The statement of the problem

The problem we are considering can be formally written as

(1.1) $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\Phi(u) + a(x, y, t, u)$ on $Q = \Omega \times]0, T[$

(1.2) $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ on Ω

(1.3) $u(x, y, t)\big|_S = u_1(x, y, t)$ $S = \Gamma \times [0, T]$,

where $\Omega \subset \Re^2$ is a regular, bounded, convex domain; $0<T<+\infty$, $\Gamma=\partial\Omega$. We have considered two space variables for the sake of simplicity, only. The data occurring in the problem will be subject to the following assumption:

(A)

(i) $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ $u_1 \in C(S)$, $a \in C(\bar{Q}\times\Re_+)$;

$u_0, u_1, a(x, y, t, 0) \ge 0$; $u\big|_S = u_1(x, y, 0)$.

(ii) $\Phi(u)$ and $\Phi'(u) > 0$ for $u > 0$, $\Phi(0) = 0$

$\Phi \in C^1[0, +\infty[$.

(iii) $a(x, y, t, z) - a(x, y, t, z_1) \le L(z - z_1)$

$z \ge z_1 \ge 0$, $L \ge 0$ $(x, y, t) \in Q$.

$a(x, y, t, z) \ge - Bz^p$, for $z \ge 0$ and $p \ge 1$, $B \ge 0$.

Denote, $M \ge u_0, u_1, a(x, y, t, 0)$.

The Malthus function $a = \lambda u$ and the Verhulst function $a = \mu - \lambda u^2$ in the problem of migration of animal populations [2], [10] satisfy these requirements. Other important examples are $\Phi(u) = u^m$, $m > 1$ and

$$a(x, y, t, u) = \lambda u^p + a(x, y, t), \quad p \ge 1, \ a \ge 0, \ \lambda \le 0.$$

In general, the problem (1.1) - (1.3) hasn't a classical solution, so we define a generalized solution:

<u>Definition</u>. A function $u \in L^{\infty}(Q)$, $u \geq 0$ (a.e.) is called a weak solution of (1.1) - (1.3) if:

(i) u satisfies (1.2), (1.3) in a generalized sense

(ii) $\phi(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$

(iii) For any $f \in H^1(Q)$ such that $f|_{S_1} = 0$

$$(1.4)\quad \int_Q \left(u \frac{\partial f}{\partial t} - \nabla\phi(u) * \nabla f\right) dxdydt +$$

$$+ \int_Q a(x,y,t,u)\, f\, dxdydt +$$

$$+ \int_\Omega u_o(x,y)\, f(x,y,0) dxdy = 0.$$

Here $S_1 = S \cup \{(x,y,T);\ (x,y) \in \overline{\Omega}\}$.

<u>2. The implicit difference scheme.</u>

Let $\mathcal{R}_h$ be a rectangular mesh with step $h > 0$ in the space directions and τ in the time direction such that $0 \in \mathcal{R}_h$. Let the stems h, τ be such that $\lambda = \tau/h^2$, $\lambda = $ Const. Denote $x_i = ih$, $y_j = jh$, $t_k = k\tau$; $U_{ij}(k) = U(x_i, y_j, t_k) = U(k)$; $\overline{\Omega}_h = = \mathcal{R}_h \cap \overline{\Omega}$ and $\overline{Q}_h = \mathcal{R}_h \cap \overline{Q}$.

Put

$$U_{\bar{t}}(k) = \frac{U(k) - U(k-1)}{\tau}$$

and similarily $U_{\bar{x}}$, $U_{\bar{y}}$ for the backward differences in the space variables. The forward differences will be denoted by U_x, U_y, U_t.

As usual

$$\Delta_h U(k) = U_{x\bar{x}}(k) + U_{y\bar{y}}(k).$$

We replace the problem (1.1) - (1.3) by the following difference scheme:

$$(2.1)\quad U_{\bar{t}}(k) = \Delta_h\phi(U(k)) + a(k-1, U(k-1)) \text{ on } Q_h$$

$$(2.2)\quad U(0) = u_{oh}$$

$$(2.3)\quad U|_{\Gamma_h} = u_2(x,y,k\tau)\ ,\ k = 1,2,\dots,\ K = [\tfrac{T}{\tau}].$$

Here $U \geq 0$, $u_{oh} = u_o|_{\Omega_h}$ and Γ_h is the set of points $(x_i, y_j) \in \overline{\Omega}_h$ such that at least one of the four neighbours: $(x_{i+1}, y_j), (x_{i-1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_i, y_{j-1})$ lies outside $\overline{\Omega}_h$. Further $\Omega_h = = \overline{\Omega}_h \backslash \Gamma_h$ and

$$Q_h = \{(x,y,t) \mid (x,y) \in \Omega_h,\ t = t_1, t_2, \dots, t_K\}.$$

The function $u_2 : \Gamma_h \to \mathcal{R}$ is defined as follows:

$$u_2(x,y,t) = u(x^*,y^*,t)$$

where $(x^*,y^*) \in \partial\Omega$ is the nearest point to the mesh point $(x,y) \in \Gamma_h$.

Theorem 2.1. Suppose that assumption (A) holds and that U is a solution of the problem (2.1) - (2.3).

Then

$$0 \le U \le M_T \quad \text{on } \overline{\Omega}_h$$

provided that $\tau BM_T^{p-1} \le 1$.

Here
$$M_T = \begin{cases} Me^{LT} + \frac{M}{L}(e^{LT}-1) & \text{for} \quad L\neq 0 \\ M(1+T) & \text{for} \quad L=0 \end{cases}$$

Proof: We consider the case $L\neq 0$ ($L=0$, can be seceded in the same manner) and prove that

$$0 \le U(k) \le M_k \qquad k=1,2,\dots,K,$$

where

$$M_k = M(1+\tau L)^k + \frac{M}{L}[(1+\tau L)^k - 1].$$

Let $k=1$. Then if the minimum of $U(1)$ is reached in an interior point (x_m,y_n), $\Delta_h\phi(U_{mn}(1)) \ge 0$ so that

$$U_{mn}(1) \ge U_{mn}(0) + \tau a_{mn}(0,U_{mn}(0)) \ge$$
$$\ge U_{mn}(0)\,(1 - \tau BU_{mn}^{p-1}(0)) \ge 0.$$

If $(x_m,y_n) \in \Omega_h$ is the maximum point of $U_{ij}(1)$, $\Delta_h\phi(U_{mn}(1)) \le 0$ and

$$U_{mn}(1) \le U_{mn}(0) + \tau(a_{mn}(0,U_{mn}(0)) - a_{mn}(0,0)) + \tau M \le$$
$$\le M(1+\tau L) + \tau M = M_1.$$

Now suppose the inequalities hold for k-1 and prove them for k. Let $U_{mn}(k)$ be the minimum of $U_{ij}(k)$ and suppose $(x_m,y_n) \in \Omega_h$. Then $\Delta_h\phi(U_{mn}(k)) \ge 0$ and

$$U_{mn}(k) \ge U_{mn}(k-1) + \tau a_{mn}(k-1,U_{mn}(k-1)) \ge$$
$$\ge (1 - \tau BU_{mn}^{p-1}(k-1))\,U(k-1) \ge 0.$$

If $U_{mn}(k)$ is an interior maximum

$$U_{mn}(k) \le$$
$$\le U_{mn}(k-1) + \tau(a_{mn}(k-1,U_{mn}(k-1)) - a_{mn}(k-1,0)) + \tau M \le$$
$$\le (1+\tau L)M_{k-1} + \tau M = M_k.$$

The theorem is proved.

In order to prove the solvability of the difference problem (2.1) - (2.3), consider the following linear homogeneous algebraic system:

$$V_{ij} = \tau\Delta_h(\alpha_{ij}V_{ij}) \qquad \text{on } \Omega_h \tag{2.4}$$

$$V_{ij}|_{\Gamma_h} = 0$$

with arbitrary $\alpha_{ij} \geq 0$.

<u>Lemma 2.1.</u> For any given (α_{ij}), the system (2.4) admits the trivial solution only.

Indeed, if for a mesh - point (x_m, y_n) e.g. $V_{mn} < 0$, the indices could be modified, if necessary, so that $\Delta_h(\alpha_{mn} V_{mn}) \geq 0$. This is however in contradiction with the equation. Next, consider the linear system:

$$W_{ij}(k) = Z_{ij} + \tau\Delta_h(\alpha_{ij}(k)W_{ij}(k)) + \tau a_{ij}(k, Z_{ij})$$

$$(2.5) \quad W_{ij}(k) = Z_{ij} \text{ on } \Gamma_h.$$

$$\alpha_{ij} \geq 0 \, , \; Z : \overline{\Omega_h} \to \mathcal{R}_+ \, .$$

From Lemma 2.1 it follows:

<u>Corollary 2.1.</u> For a given Z and fixed $k=1, 2, \ldots, K$, (2.5) has a unique solution.

In particular we have

$$W_{ij}(k) = W_{ij}(k-1) + \tau\Delta_h(\alpha_{ij}(k)W_{ij}(k)) + \tau a_{ij}(k, W_{ij}(k-1))$$

$$(2.6) \quad W_{ij}(k) = u_2(x_i, y_j, t_k), \; (x_i, y_j) \in \Gamma_h, \; k=1, 2, \ldots, K$$

$$W_{ij}(0) = u_o(x_i, y_j) \text{ on } \overline{\Omega_h}.$$

The matrices $(\alpha_{ij}(k))$ are defined in the following way. Let $V : \Omega_h \to \mathcal{R}_+$ and suppose that $\phi(0)=0$, then

$$\alpha_{ij}(k) = \begin{cases} \dfrac{\phi(V_{ij}(k))}{V_{ij}(k)} & \text{for } V_{ij}(k) \neq 0 \\ \phi'(0) & \text{for } V_{ij}(k) = 0 \, . \end{cases}$$

<u>Lemma 2.2.</u> Suppose condition (A) holds, $\tau L < 1$. Assume we are given a function

$$V : \overline{\Omega_h} \to \mathcal{R}_+$$

such that $V(k)|_{\Gamma_h} = u_2(k)$; $k=1, 2, \ldots, K$. Then (2.6) has a unique solution

$$W : \overline{\Omega_h} \to \mathcal{R}_+ \, .$$

<u>Proof:</u> (2.6) has, according to Corollary 2.1, a unique solution for $k=1$. This solution is nonnegative. Otherwise it would exist a couple (m, n) such that

$$W_{mn}(1) < 0 \, , \; \Delta_h(\alpha_{mn}(1)W_{mn}(1)) \geq 0 \, .$$

Then according to A (iii)

$$W_{mn}(1) \geq W_{mn}(0) + a_{mn}(0, U_{mn}(0)) \geq (1 - \tau B U_{mn}^{p-1}(0)) U_{mn}(0) > 0.$$

In general $W_{ij}(k) \geq 0$ follows from $W_{ij}(k-1) \geq 0$. Again according to the same Corollary (2.6) has a unique solution. The lemma is proved.

For a fixed $k=1,2,\ldots K$, (2.6) defines a continuous operator

$$G(k) : \mathcal{R}^s_+ \to \mathcal{R}^s_+; \quad V(k) \to W(k), \quad s=\text{card } \Omega$$

<u>Lemma 2.3.</u> Under the assumption (A) the operator $G(k)$ has a unique fixed point for any $k=1,2,\ldots,K$, provided that

$$\tau B M_T^{p-1} \leq 1.$$

Proof: Since $W \geq 0$

$$||W(k)||_1 = h^2 \sum_{\Omega_h} |W_{ij}(k)| = h^2 \sum_{\Omega_h} W_{ij}(k) =$$

$$= h^2 \sum_{\Omega_h} (W_{ij}(k-1) + +\tau\Delta_h(\alpha_{ij}(k)W_{ij}(k)) +$$

$$+ \tau a_{ij}(k, W_{ij}(k-1)) \leq$$

$$\leq h^2 \sum_{\Omega_h} [(1 + L\tau)W_{ij}(k-1) + \tau\Delta_h(\alpha_{ij}(k)W_{ij}(k)) + \tau M]$$

Because $W = V = u_2$ on Γ_h

$$||W(k)||_1 \leq h^2 \sum_{\Omega_h} (1 + L\tau)W_{ij}(k-1) + \tau h^2 \sum_{\Omega_h} M + 2\lambda h^2 \sum_{\Gamma_h} \phi(u_2(k))$$

Denote

$$\rho(k) = h^2 \sum_{\Omega_h} (1 + L\tau)W_{ij}(k-1) + 2\lambda h m(\Gamma)\phi(M) + \tau M m(\Omega)$$

and

$$S^+_\rho(k) = \{x \in \mathcal{R}^S;\ x \geq 0,\ ||x||_1 \leq \rho(k)\}$$

$s = \text{card } \Omega_h$ and m stands for the Lebesque measure.

Then $$G(k) : \mathcal{R}^S_+ \to S^+_\rho(k)\ , \quad k=1,2,\ldots,K,$$

and Brouwer's fixed-point theorem is applicable.
The uniqueness follows from Lemma 2.2.

<u>Remark.</u> The fixed points $U(k)$ $k=1,2,\ldots,K$ constitute the solution of the difference system (2.1) - (2.3).

<u>3. Extensions of discrete functions.</u>

Suppose U, V are vectors with components U_i respectively V_i, $p \leq i \leq q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $p < q$. Then the formula of partial summation reads:

$$(3.1) \qquad h \sum_{i=p}^{q-1} (V_x)_i U_i = - h \sum_{i=p+1}^{q} V_i (U_{\bar{x}})_i + U_q V_q - U_p V_p.$$

In order to define extensions of mesh-functions, we introduce

$$\omega_{ij} = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2;\ ih < x < (i+1)h,\ \ jh < y < (j+1)h\}$$

$$q_{ij}^{(k)} = \omega_{ij} \times]k\tau, (k+1)\tau[\qquad i,j \in \mathbb{Z}$$

Denote

$$\overline{\Omega}_h = \bigcup_{\omega_{ij} \subset \Omega} \overline{\omega_{ij}}, \qquad \overline{Q}_h = \bigcup_{q_{ij}^{(k)} \subset Q} \overline{q}_{ij}^{(k)}.$$

and observe that these coincide with the notation for the corresponding sets of mesh-points. $\overline{\Omega}_h$, $\overline{Q}_h$ are the greatest such domains contained in $\overline{\Omega}$ and $\overline{Q}$ respectively.
The smallest rectangular domains containing $\overline{\Omega}$ respectively $\overline{Q}$ are:

$$\Omega_h^* = \bigcup_{\omega_{ij} \cap \Omega \neq \emptyset} \omega_{ij}; \qquad \overline{Q}_h^* = \bigcup_{q_{ij}^{(k)} \cap Q \neq \emptyset} \overline{q}_{ij}(k).$$

There are three interpolants of a mesh-function in which we are interested, namely:

a) (0) - interpolate: This is defined on the domain $\overline{Q}_h$ by the step-function:

$$\overline{V}_h\big|_{q_{ij}^{(k)}} = V_{ij}(k+1), \qquad q_{ij}^{(k)} \subset Q_h.$$

b) (1) - interpolate: This is a continuous function $V_h' : \overline{Q}_h \to \mathcal{R}$, whose restriction on each cell $q_{ij}(k)$ is a polynomial of degree one in each variable, interpolating V_h at the vertices of $q_{ij}(k)$. Clearly $V_h' \in EH^1(Q)$.

c) Mixed interpolation: $V_{(1)} : \overline{Q}_h \to \mathcal{R}$. On each $q_{ij} \subset Q$, $V_{(1)}$ is constant in x

$$V_{(1)}(x,y,t) = V_{(1)}(x_i, y, t);$$

and linear in y, t. In a similar way one defines $V_{(2)}$ for y. All the above prolongation can be defined on Ω_h, Ω_h^*, Q_h^*.

In the sequel we consider

$$V'(t) = V(t) = V(K_\tau) \qquad \text{for } t \in [K_\tau, T].$$

Important relations between the extensions are

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = (V_x)_{(1)}\ ; \qquad \frac{\partial V'}{\partial y} = (V_y)_{(2)} \quad \text{on } q_{ij}(k). \tag{3.2}$$

We are mainly concerned with the case when h, $\tau \to 0$. Here is now a well-known result of Ladyzhenskaia [7]:

<u>Theorem 3.1.</u> Suppose we are given a function $V_h : \mathcal{R}_h \to \mathcal{R}$ such that
(i) there exists a constant C independent of h, τ for which:

$$\tau h^2 \sum_{Q_h} V_h^2 \leq C \tag{3.3}$$

(ii) $V_h = 0$ in $\mathcal{R}_h \setminus \Omega_h$.

There, if one of the extensions V, V', $\tilde{V}_{(1)}$, $V_{(2)}$ is weakly convergent in $L^2(Q)$ when $\tau, h \to 0$, the same is true for the other three extensions. In the sequel we shall make use of the following properties of the domain Q and the boundary function u_1.

(P): The couple (Ω, u_1) is said to have the property (P), if there exists a function $f \in C(Q)$ with following properties:

(i) $$f\big|_S = u_1, \qquad S = \partial\Omega \times [0,T]$$

(ii) The derivatives $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ exist and are bounded in Q.

(P_h): The couple (Ω, u_1) is said to have the property (P_h), if there exists a mesh-function $f_h : \overline{Q}_h \to \mathcal{R}$ such that

(i) $f_h(k)\big|_{\Gamma_h} = u_2(k)$, $k=1,2,\dots,K$

(ii) $f_t(k)$, $f_x(k)$, $f_y(k)$, $f_{x\bar{x}}(k)$, $f_{y\bar{y}}(k)$ are bounded on $\overline{\Omega}_h$, $k=1,2,\dots,K$.

The differences of (P_h) (ii) are taken on the points where they make sense.

Remarks:

1. If (P) holds, the restriction of f to $\overline{Q}_h$ satisfies (P_h) (ii) and

$$f_h(k)\big|_{\Gamma_h} = u_2(k) + r_h(k), \quad k=1,2,\dots,K$$

$$|\, r_h \,| \le Ch, \ C \text{ independent of } h, \ \tau.$$

Thus (P_h) is "nearly" satisfied.

2. If u_1 is independent of (x,y), then $u_2 = u_1$ and (P_h) follows from (P). Property (P) has been considered by many authors, e.g. in [8] (class $O^{2,1}$).

4. Estimates of first-order differences.

To begin with, here is some notation:

$$\Omega_h^+ = \{(x_i, y_j) \in \overline{\Omega}_h : \ (x_{i+1}, y_j) \text{ and } (x_i, y_{j+1}) \in \overline{\Omega}_h\}.$$

$$Q_h^+ = \{(x_i, y_j, t_k) \in \overline{Q}_h : \ (x_i, y_j) \in \overline{\Omega}_h^{\,+},\ k=1,2,\dots,K\}.$$

$$\Gamma_h^+ = \{(x_i, y_j) \in \Omega_h : (x_{i-1}, y_j) \in \Gamma_h\}; \Gamma_h^- =$$
$$= \{(x_i, y_j) \in \Gamma_h : \ (x_{i-1}, y_j) \in \overline{\Omega}_h\}.$$

(Γ_h was defined in §2)

Similar meanings regarding ψ have $^+\Gamma_h$, $^-\Gamma_h$. For simplicity we use the same notation when $\overline{\Omega}_h$ is replaced by $\overline{\Omega}_h^*$ and consider a function V defined on $\overline{U}_h$ extended to $\overline{U}_h^*$ in the following manner:

$$V(x_i, \psi_j, t_k) = V(x^*, \psi^*, t_k), \quad (x_i, \psi_j) \in \overline{\Omega}_h^* \setminus \overline{\Omega}_h$$

where $(x^*, \psi^*) \in \Gamma$ is the nearest point to (x_i, ψ_j).

<u>Theorem 4.1.</u> Suppose that:

(i) U is the solution of (2.1) - (2.3)

(ii) (Ω, u_1) has the property (P_h)

(iii) u_1 is Lipschitz continuous

(iv) Condition (A) holds, $\tau B M_T^{p-1} \le 1$

and there exists M' such that $|a(x, \psi, t, z)| \le M'$ for $(x, \psi, z) \in \Omega$, $0 \le z \le M_T$.

Then there exists a constant C independent of h, τ such that

$$\tau h^2 \sum_{\Omega_h^{**}} (\phi_x(U)^2 + \phi_y(U)^2) < C.$$

Here for example $\phi_x(U)^2 = ((\phi(U))_x)^2$.

<u>Proof:</u> Condition (ii) ensures the existence of a function

$V : \overline{U}_h \to \mathbb{R}$ such that

$$V|_{\Gamma_h} = u_2 \ .$$

with bounded differences up to the second order in x, ψ and first order in t. Take V = U on $\overline{\Omega}_h^* \setminus \overline{\Omega}_h$ and put W = U - V. By multiplying both sides of (2.1) with $\tau h^2 W(k)$ and summing up, we get

$$(4.1) \quad \tau h^2 \sum_{\Omega_h} W(k) U_t(k) =$$

$$= \tau h^2 \sum_{\Omega_h} W(k)[\Delta_h \phi(U(k)) + a(k-1, U(k-1))].$$

The left hand side can be transformed using the identity:

$$a(a-b) = \frac{1}{2}[a^2 - b^2 + (a-b)^2]$$

into

$$(4.2) \qquad \frac{1}{2} h^2 \sum_{\Omega_h} (U^2(k) - U^2(k-1) +$$

$$+ \tau^2 U_t^2(k)) - \tau h^2 \sum_{\Omega_h} V(k) U_t(k-1).$$

Since W = 0 on $\overline{\Omega}_h^* \setminus \overline{\Omega}_h$, $W_x = 0$ on $^+\Gamma_h$, $W_y = 0$ on $^-\Gamma_h$.

Consequently

$$(4.3)\quad \tau h^2\sum_{\Omega_h} W(k)\Delta_h\phi(U(k)) = \tau h^2\sum_{\overline{\Omega}_h} W(k)\Delta_h\phi(U(k)) =$$

$$= \tau h^2\sum_{\Omega_h^+} [W_x(k)\ \phi_x(U(k)) + + W_y(k)\ \phi_y(U(k))].$$

Further we have

$$(4.4)\quad -h^2\sum_{\Omega_h^+} V_x\phi_x(U) = h^2\sum_{\Omega_h} V_{x\bar{x}}\ \phi(U) + h\sum_{\Gamma_h^+} V_{\bar{x}}\ \phi(U) +$$

$$+ h\sum_{\Gamma_h^+} V_{\bar{x}}\ \phi(U) - h\sum_{\Gamma_h^-} V_{\bar{x}}\ \phi(U),$$

and similarily for ψ.

Replacing (4.2), (4.3), (4.4) in (4.1) and summing up for $k=1,2,\dots,K$, we get after applying once more (3.1):

$$\tau h^2\sum_{\Omega_h^+}(U_x\ \phi_x(U)+U_y\ \phi_y(U)) \le \tau h^2\sum_{\Omega_h}|\Delta_h V|\ \phi(U) +$$

$$+ \tau h\sum_{k=1}^{K}\Big(\sum_{\Gamma_h^+} V_x\ \phi(U) + \sum_{\Gamma_h} V_{\bar{y}}\ \phi(U) - \sum_{\Gamma_h^-} V_{\bar{x}}\ \phi(U) -$$

$$-\sum_{\Gamma_h} V_{\bar{y}}\ \phi(U)\Big) + \tau h^2\Big(\sum_{\Omega_h}|W|M' + \sum_{\overline{\Omega}_h}|V_{\bar{t}}|U\Big) +$$

$$+ h^2\sum_{\Omega_h}(U(K)\ V(K) - U(0)\ V(0)).$$

Taking into account (P_h) and Theorem 2.1, it follows that there exist a constant C such that

$$\tau h^2\sum_{\Omega_h^+}(U_x\ \phi_x(U)+U_y\ \phi_y(U)) \le C.$$

We notice now that $\phi_x(U)^2$ $\phi'(M')$ $\phi_x(U)$ U_x and that $|\phi_x(U)|$ is bounded on $\overline{\Omega}_h^* \setminus \Omega_h^+$.

Remark. Theorem 4.1 remains valid if assumption (ii) is replaced by: (ii') (Ω, u_1) has the property (P).

Indeed, let us take $V = f\Big|_{\overline{\Omega}_h}$. Then the right-hand side of (4.3) reads:

$$-\tau h^2\sum_{\Omega_h^+}[W_x(k)\ \phi_x(U(k)) + W_y(k)\ \phi_y(U(k))]\ -$$

$$- \tau h^2 \Big(\sum_{\Gamma_h^-} W_x(k)\, \phi_x(U(k)) + \sum_{{}^-\Gamma_h} W_y(k)\, \phi_y(U(k)) \Big) +$$

$$+ \tau h \Big(\sum_{\Gamma_h^-} W(k)\, \phi_x(U(k)) + \sum_{{}^-\Gamma_h} W(k)\, \phi_h(U(k)) \Big).$$

According to the Remark of §3 there exists a constant C independent of h, such that

$$\sum_{\Gamma_h} h \sum \big(h\, |W_x(k)\, \phi_x(U(k))| + |W(k)|\, |\phi_x(U(k))| \big) < C,$$

$$\sum_{\Gamma_h} h \sum \big(h\, |W_y(k)\, \phi_y(U(k))| + |W(k)|\, |\phi_y(U(k))| \big) < C.$$

Thus the proof can go on unchanged.
Before passing to the next theorem we denote:

$$M = \max \{ i;\ \exists j,\ (x_i, y_j) \in \overline{\Omega_h} \},$$

$$m = \min \{ i;\ \exists j,\ (x_i, y_j) \in \overline{\Omega_h} \}$$

and analogously N, n with regard to y.
Given $n \leq j \leq N$, then $M(j) = \max \{ i;\ (x_i, y_j) \in \overline{\Omega_h} \}$.
$m(j)$, respectively $M(i)$, $n(i)$ have similar meanings.

<u>Theorem 4.2.</u> Suppose condition of Theorem 4.1 hold.
Then there exists a constant C independent of h such that

$$\max_{[0,T]} \Big\| \frac{\partial}{\partial t} U_h^{\cdot} \Big\|_{H^{-3}(\Omega)} < C .$$

<u>Proof:</u> We have to prove that

$$\Big| \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} U^{\cdot}(x, y, t)\psi(x, y)\,dx\,dy \Big| < C\, \|\psi\|_{H^3_0(\Omega)}$$

for any $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ and $t \in [0, T]$. Recall that $U^{\cdot}$ was extended to $\overline{\Omega_h}^* \times [0, T]$.
For $(x, y, t) \in \overline{q_{ij}}(k)$

$$U^{\cdot}(x, y, t) = \frac{1}{\tau h^2} \sum U_{ij}(k) L_{ijk}(x, y, t)$$

where the sum is extended over the vertices of $q_{ij}(k)$ and

$$L_{ij}(P) = \begin{cases} 1 & \text{for } P = (x_i, y_j, t_k) \\ 0 & \text{for } P \neq (x_i, y_j, t_k). \end{cases}$$

The basic functions L_{ij} are linear in x, y, t.
Hence in $q_{ij}(k)$

$$\frac{\partial}{\partial t} U^{\cdot}(x, y, t) = \frac{1}{h^2} [(x_{i+1} - x)(y_{j+1} - y)(U_t)_{i+1, j+1}(k) +$$

$$+ (x_{i+1} - x)(y - y_j)(U_t)_{i+1, j}(k) +$$

$$+ (x-x_i)(y_{j+1} - y)(U_t)_{i,j+1}(k) +$$
$$+ (x-x_i)(y - y_j)(U_t)_{ij}(k)],\quad k=0,1,\dots,K-1$$

and we get

$$(4.5)\qquad \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(U_h'(x,y,t))\psi(x,y)dxdy =$$
$$= \int_{\Omega_h^* \setminus \overline{\Omega_h}} \frac{\partial}{\partial t}(U_h'(x,y,t))\psi(x,y)dxdy +$$
$$+ h^2\sum_{\Omega_h^c} (\Delta_h\phi(U_{ij}(k)) +$$
$$+ a_{ij}(k-1, U_{ij}(k-1))) \int_0^1\int_0^1 d_{ij}(r,s)drds +$$
$$+ h^2 \sum_{\Gamma_h} (U_{\bar t})_{ij}(k)\int_0^1\int_0^1 d_{ij}(r,s)drds\,.$$

Here

$$d_{ij}(r,s) = (1-r)(1-s)\psi(x_i+rh, y_j+sh) +$$
$$+ r(1-s)\psi(x_{i-1}+rh, y_j+sh) + rs\psi(x_{i-1}+rh, y_{j-1}+sh) +$$
$$+ (1-r)s\psi(x_i+rh, y_{j-1}+sh) \quad \text{for } (x_i, y_j, t_k) \in \Omega_h.$$

Taking now the Lipschitz continuity into account and recalling the way in which U was extended to $\overline{\Omega}_h^* \setminus \Omega_h$, we get

$$(4.6)\qquad \Big|\int_{\Omega_h^* \setminus \Omega_h} (U_h'(x,y,t))\psi(x,y)dxdy\Big| < Ch \max_{\Omega} |\psi|$$

$$(4.7)\qquad \Big|h \sum_{\Gamma_h} (U_{\bar t})_{ij}(k)h \int_0^1\int_0^1 d_{ij}(r,s)drds\Big| < Ch \max_{\Omega} |\psi|.$$

Now

$$h^2\sum_{\Omega_h} \phi_{x\bar x}(U_{ij}(k))d_{ij} = h\sum_{j=1}^{N-1} h \sum_{i=m(j)+1}^{M(j)-1} \phi_{x\bar x}(U_{ij}(k))d_{ij} =$$
$$= - h\sum_{j=1}^{N-1} h \sum_{i=m(j)}^{M(j)-2} \phi_x(U_{ij}(k))(d_{ij})_x +$$
$$+ h \sum_{j=1}^{N-1} (\phi_x(U_{M(j)-1,j}(k))d_{M(j)-1,j} -$$

$- \phi_x(U_{m(j),j}(k))d_{m(j),j})$.

On the other hand, taking into account that $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_0(\Omega)$ and the definition of d_{ij}

$$|d_{ij}|, |(d_{ij})_x| \le C \max(|\psi|, |\frac{\partial \psi}{\partial x}|, |\frac{\partial \psi}{\partial y}|)$$

for any i, j, and

$$\max_{\Gamma_i, i, j} (|d_{m(j)-1,j}|, |d_{m(j),j}|) < Ch \max|\frac{\partial \psi}{\partial x}|.$$

and similarily for

$$h^2 \sum_{\Omega_h} \phi_{\overline{\psi\psi}}(U_{ij}(k))d_{ij}, \quad k=1,2,\dots,K.$$

Recalling that the imbedding $H^{-}(\Omega) \subset \bar{C}^1(\Omega)$ is continuous and that $|a(k-1,U(k-1))| < M'$, the estimates (4.6) - (4.8) prove our theorem.

5. Convergence of the discrete solution

We begin with some functional analytic results which we use in this section.

Consider three Banach spaces B_0, B_1, B such that

$$B_0 \subset B \subset B_1; \; B_0, B_1 \text{ reflexive.}$$

The inclusions are algebraic as well as topological.

Let

$$W = \{v \in L^p(0,T;B_0) \; ; \; \frac{dv}{dt} \in L^q(0,T;B_1)\}$$

$$0 < T < +\infty \; ; \; p,q > 1$$

be a Banach space with the norm

$$||v||_W = ||v||_{L^p(0,T;B_0)} + ||\frac{dv}{dt}||_{L^q(0,T;B_1)}$$

Obviously

$$W \subset L^p(0,T;B).$$

<u>Lemma 5.1.</u> Suppose that the imbedding $B_0 \subset B$ is compact and $1<p, q<+\infty$.

Then $W \subset L^p(0,T;B)$ is also compact.

For the proof we see Lions [3].

<u>Lemma 5.2.</u> Suppose $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times [0,T[)$ and that U is the solution of (2.1)-(2.3). Then for h, τ sufficiently small

(5.1) $$\int_Q (\tilde{U}\tilde{\psi}_t - \tilde{\phi}_x(U)\tilde{\psi}_x - \tilde{\phi}_y(U)\tilde{\psi}_y + \tilde{c}(U)\psi)dxdydt +$$

$$+ \int_\Omega \tilde{u}_0(x,y)\tilde{\psi}(x,y,0)dxdy = 0.$$

Proof: Recall that, e.g. $\tilde{\psi}_t$ is the (0)-extension of $(\psi_t)_{ij}(k)$. By multiplying values of U, we get after summation:

$$\tau h^2\sum_{k=1}^{K}\sum_{\Omega_h^+}[U_h(k-1)\psi_t(k-1) + (\Delta_h\phi(U(k)) +$$

$$+ a(k-1,U(k-1))\psi(k)] + h^2\sum_{\Omega_h} u_0\psi(0) = 0,$$

if τ is so small that $\psi(K\tau) = 0$.
Hence

$$\tau h^2\sum_{k=1}^{K}\sum_{\Omega_h^+}[U_h(k-1)\psi_t(k-1) - \phi_x(U(k))\psi_x(k) - \tag{5.2}$$

$$- \phi_y(U(k))\psi_y(k) + a(k-1,U(k-1))\psi(k)] +$$

$$+ h^2\sum_{\Omega_h} u_0\psi(0) = 0.$$

Again if h, τ are so small that

$$\mathrm{supp}\psi,\ \mathrm{supp}\psi_x,\ \mathrm{supp}\psi_y \subset \Omega_h \times [0,T[,$$

instead of (5.2) one can write (5.1).

<u>Lemma 5.3.</u> (Lions [9]) Let $D \subset \mathfrak{R}^n$ be a bounded domain and $u, u_j \in L^p(D)$, $p > 1$ $j=1,2,\ldots$. Assume that

(i) $||u_j||_p \le C$ $j=1,2,\ldots$
C independent of j.

(ii) $u_j \to u$ a.e. on D.

Then $u_j \to u$ weakly in $L^p(D)$.

<u>Lemma 5.4.</u> Suppose $D \subset \mathfrak{R}^n$ is bounded and that the sequence $\{u_j\}$ $C(\bar{D})$ $j=1,2,\ldots$ has the following properties:

(i) $\max|u_j| \le C$ $j=1,2,\ldots$

(ii) $u_j \to u$ a.e. on D

(iii) There exists $q > 1$ such that $u \in L^q(D)$.

Then the sequence contains a subsequence, convergent in $L^p(D)$ for any $p \in [1,+\infty[$ and its limit $u \in L^\infty(D)$.

<u>Proof:</u> The previous lemma ensures that $u_j \to u$, weakly in $L^q(D)$. Because of (i) there is a subsequence $\{u_i\}\subset\{u_j\}$ such that $u_i \to u$ weakly in $L^p(D)$ for any finite $p \ge 1$ with $u \in \bigcup_{p\ge1} L^p(D)$. Since there exists a constant C_1, independent of p such that $||u||_p < C_1$, it follows that $u \in L^\infty(D)$. On the other hand, according to Yegorov's theorem, there exists a small measurable set $D_0 \subset D$, such that $u_i \to u$

uniformly on $D \setminus D_0$. Thus for p=1:

$$\int_D |u_i-u|^p dx = \int_{D\setminus D_0} |u_i-u|^p dx + \int_{D_0} |u_i-u|^p dx.$$

Since

$$\left(\int_{D_0} |u_i-u|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_{D_0} |u_i|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_{D_0} |u|^p dx\right)^{1/p}.$$

the absolute continuity of the integral implies that $u_i \to u$ in $L^p(D)$.

In what follows a bar over the subscript h means an adequately chosen subsequence.

Theorem 5.1 Suppose that

(i) Condition (A) holds

(ii) u_1 is Lipschitz continuous in all variables

(iii) U is the solution of (2.1) - (2.3)

(iv) (u_i, Ω) possesses the property (P) or (P_h).

Then there exists a subsequence $(\overline{h,\tau}) \subset (h,\tau)$ of indices and a function $v \in L^\infty(Q)$; $\frac{\partial v}{\partial x}$ and $\frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(Q)$ such that:

(j) $\quad (\phi(U_{\bar h}))' \to v$ in $L^q(Q)$ for $q \in [1,+\infty[$

(jj) $\quad (\phi_x(U_{\bar h}))' \to \frac{\partial v}{\partial x}$.

$\quad (\phi_y(U_{\bar h}))' \to \frac{\partial v}{\partial y}$ weakly in $L^2(Q)$

(jjj) $\quad \phi(\tilde U_{\bar h}) \to v$ a.e. and $v \ge 0$ a.e. on Q.

Proof: Recall that U is extended to $\overline{\Omega}_h$* and U' to [0,T].

From Theorem 4.1 and (ii) we get

$$(5.3) \qquad \tau h^2 \sum_{\Omega_h} (\phi_x(U)^2 + \phi_y(U)^2) < C.$$

Consequently in view of Theorem 2.1 we obtain with a suitable constant C

$$(5.4) \qquad \int_{Q_h^*} ((\phi(U')')^2 + (\phi_x(U)_{(1)})^2 + (\phi_y(U)_{(2)})^2 dxdydt < C.$$

This estimate entails for a subsequence

$$\phi(U_{\bar h})' \to v,\ \phi_x(U_{\bar h})_{(1)} \to v_1,\ \phi_y(U_{\bar h})_{(2)} \to v_2$$

weakly in $L^2(Q$. Now, according to Theorem 3.1

$$\phi_x(U_{\bar h})'_{(1)} \to v_1,\ \phi_y(U_{\bar h})'_{(2)} \to v_2 \text{ weakly in } L^2(Q).$$

On the other hand,

$$(5.5) \qquad (\phi_x(U))_{(1)} = \frac{\partial\phi(U)'}{\partial x},\ (\phi_y(U))_{(2)} = \frac{\partial\phi(U)'}{\partial y}$$

which implies $v_1 = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, $v_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

i.e. (jj).

Next, let us take in Lemma 5.1, $p=q=2$, $B_0=H^1(\Omega)$, $B=L^r(\Omega)$, $1\le r<+\infty$, $B_1=H^{-3}(\Omega)$. Then by Theorem 4.2 and (5.6), $\{\phi(U_h)'\}$ is precompact in $L^2(0,T;L^r(\Omega))$. Consequently a subsequence $\phi(U_h)'$ converges strongly in $L^2(Q)$ to $v\in L^2(Q)$. This enables us to apply Lemma 5.4 which proves (j) and passing if necessary to another subsequence, also (jjj). The proof is complete.

We introduce now a new continuous extension which interpolates the discrete function

$$V_h : \overline{Q}_h \to \mathbb{R}$$

namely

$$V_h^- = \phi^{-1}(\phi(V_h)').$$

It is readily seen that $V_h^- \in C(\overline{Q}_h) \cap H^1(Q_h)$.

<u>Theorem 5.2</u> Under the hypotheses of Theorem 5.1 there exists a function $u \in L^\infty(Q)$, $u \ge 0$ a.e., with

$$\frac{\partial\phi(u)}{\partial x},\ \frac{\partial\phi(u)}{\partial y} \in L^2(Q)$$

such that for an adequately chosen subsequence of indices $\{h, \tau\}$:

(i) $\phi(U_{\bar h})' \to \phi(u)$ in $L^p(Q)$ for any $p \in [1,+\infty[$

(ii) $\phi_x(U_{\bar h})' \to \dfrac{\partial\phi(u)}{\partial x}$,

$\phi_y(U_{\bar h})' \to \dfrac{\partial\phi(u)}{\partial y}$ weakly in $L^2(Q)$

(iii) $U'_{\bar h} \to u$ weakly $L^p(Q)$, $1<p<+\infty$ and a.e.,

for $h\to 0$, $\tau\to 0$.

(iv) u satisfies (1.4).

Moreover, if there exists an $x_0 \ge 0$ such that $\phi(x) \ge x$ for $x \ge x_0$, then

(v) $U_{\bar h} \to u$ in $L^p(Q)$ for any $1 \le p < +\infty$

<u>Proof:</u> Suppose v to be the function from Theorem 5.1 and $u = \phi^{-1}(v)$. Then clearly (i), (ii) are fulfilled. Since $v \in L^\infty(Q)$ we get $u \in L^\infty(Q)$ and by Lemma 5.3 $U'_{\bar h} \to u$ weakly in $L^p(Q)$ so that (iii) holds. Further, the solution U of (2.1)-(2.3) satisfies (5.1) for $\in \mathcal{D}(\Omega \times]0,T[)$ provided that h, τ are small enough.

Because

$$\tilde{\psi} \to \psi, \quad \tilde{\psi}_t \to \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad \tilde{\psi}_x \to \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \tilde{\psi}_y \to \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$\tilde{\psi}(x, y, 0) \to \psi(x, y, 0)$$

uniformly in strictly interior domains, we see, if we take into account (5.1), (i), (ii), that u is solution of (1.4); (iv) is fulfilled. If $\phi(x) \geq x$ for $x \geq x_0$, then $\phi^{-1}(x) \leq x$, $x \geq x_0$ so that

$$\phi^{-1}(x) \leq x + x_0.$$

This implies [12, p. 167] that $\{\phi^{-1}(\phi(u_h)')\}$ is compact in $L^p(\Omega)$ for any $p \in [1, +\infty[$.

6. Boundary and initial conditions

Lemma 6.1 (Lions [9]) If X is a Banach space and $f \in L^p([0,T];X)$, $\frac{df}{dt} \in L^p([0,T];X)$ $1 \leq p < +\infty$, then f is a continuous mapping on $[0,T]$ (after eventually modifying it on a set of measure zero).

Consequence. Suppose u to be the solution constructed in Theorem 5.1.

Then

$$u(0) = u\big|_{t=0}$$

makes sense.

Indeed, according to Lemma 6.1 and Theorem 4.2 f is, except eventually a set of measure zero, a continuous function in $L^2([0,T];H^{-3}(\Omega))$.

Lemma 6.2 (Lions-Magenes [1, Vol. 11]). Let $f \in L^2([0,T];H^1(\Omega))$ and suppose Ω to be regular enough. Then the trace $f|_S$ exists and belongs to $H^{1/2,0}(S)$.

Moreover the mapping

$$f \to f|_S, \quad H^{1,0}(\Omega) \to H^{1/2,0}(S)$$

is continuous.

Here

$$H^{1/2,0}(S) = L^2([0,T];H^{1/2}(\Gamma)) \subset L^2(S).$$

Theorem 6.1. If Ω is sufficiently regular and all conditions of Theorem 5.2 hold, then u posesses a trace $u|_S$.

Proof: Since $\phi(u) \in H^{1,0}(\Omega)$, by Lemma 6.2

$$\phi(u)\big|_S \in H^{1/2,0}(S) \subset L^2(S).$$

On the other hand since $\phi^{-1}(x) \leq x + x_0$: $u|_S$ exists and the trace is continuous.

Theorem 6.2. Suppose Ω to be sufficiently regular. Assume

that u is the solution constructed in Theorem 5.2 and that the conditions of this theorem to be fulfilled.
Then

(i) $\quad u|_S = u_1$ and $U_{\bar{h}}^-|_S \to u_1$ uniformly

<u>Proof:</u> According to Theorem 5.2 there exists a sequence $\{U_n\} \subset \{U_{\bar{h}}^-\}$, $n=1,2,\ldots$

$U_h \in C(\bar{Q})$, such that

$$U_n \to u \text{ in } L^p(Q) \qquad p \in [1,+\infty[.$$

At the same time there exists a sequence $V_n \in C^\infty(\bar{Q})$ such that

(6.1) $$\max_{\bar{Q}} |U_n - V_n| < \frac{1}{n}.$$

By Theorem 6.1 the trace operator is continuous

$$V_n|_S \to u|_S \text{ in } L^2(Q),$$

which implies in view of (6.1)

$$U_n|_S \to u|_S \text{ in } L^2(S).$$

On the other hand u_1 being Lipschitz continuous and by the way u_2 was constructed, $U_n|_S \to u_S$ uniformly. A similar argument proves (ii).

7. Uniqueness. Convergence of the difference scheme.

Theorem 5.1 and 5.2 prove only the convergence of certain sequences of difference approximation. When the problem is known to have a unique solution, it follows easily that the whole difference scheme converges to it. In [13] we showed that in the case when the term a is independent of u the uniqueness property holds. The proof is however not valid in general.
In order to tackle the problem of the term a depending on u, we shall make use of the uniqueness result of Bertsch [2]. To do this, we have to prove that our solution $u \in C([0,T];L^1(\Omega))$.
Let $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ arbitrary. Consider a sequence of step-sizes $(h_n,\tau_n) \subset (\bar{h},\bar{\tau})$ for which the convergences in Theorems 5.1 and 5.2 take place. We denote $\Omega_n = \Omega_{h_n}$, $U_n = U_{h_n}$, $\psi_n = \psi|_{\Omega_h}$, $\psi_x^{(n)} = (\psi_x)_n$, etc.. Take $t \in]0,T]$ and let $k_n \in \mathbb{N}$ be such that

$$(k_n - 1)\tau_n < t \le k_n \tau_n.$$

We assume that n is large enough so that $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega_n$, $k_n \ge 1$.
From (2.1) it follows that

$$\tau_n h_n^2 \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{\Omega_n} [\, U_{\bar{t}}^{(n)}(k) - \Delta_n \phi(U_n(k)) - a(k-1, U_n(k-1))]\psi_n = 0$$

which can also be written as

$$(7.1) \qquad h_n^2 \sum_{\Omega_n} U_n(k_r)\psi_n = h_n^2 \sum_{\Omega_n} u_0^{(n)}\psi_n +$$

$$+ \tau_n h_n^2 \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{\Omega_n^+} [\phi_x(U_n(k))\psi_x^{(n)} + \phi_y(U_n(k))\psi_y^{(n)} -$$

$$- a(k-1, U_n(k-1))]\psi_n]$$

Using the (0)-interpolation, (7.1) can be transformed into ($\tilde{U}^{(n)}(t) = U_n(k_n)$):

$$\int_\Omega \tilde{U}_n(t)\tilde{\psi}_n dxdy = \int_\Omega \tilde{u}_0^{(n)}\tilde{\psi}_n dxdy + \int_{Q_n} [\tilde{\phi}_x^{(n)}(U(t))\tilde{\psi}_x^{(n)} +$$

$$+ \tilde{\phi}_y^{(n)}(U(t))\tilde{\psi}_y^{(n)} - \hat{a}(x, y, t, \hat{U}_n(t))\psi_n]dxdydt.$$

where $\qquad Q_n = \Omega \times [0, k_n\tau_n]$ and

$$\hat{a}(x, y, t, \hat{U})|_{q_{ij}(k)} = a(x_i, y_j, t_k, U_{ij}(k)).$$

Hence for sufficiently large m and n,

$$\int_\Omega |\tilde{U}_m(t)\tilde{\psi}_m - \tilde{U}_n(t)\tilde{\psi}_n| dxdy \le$$

$$\le \int_\Omega |\tilde{u}_0^{(m)}\tilde{\psi}_m - \tilde{u}_0^{(n)}\tilde{\psi}_n| dxdy +$$

$$+ \int_Q (|\tilde{\phi}_x^{(m)}(U(t))\tilde{\psi}_x^{(m)} - \tilde{\phi}_x^{(n)}(U(t))\tilde{\psi}_x^{(n)}| +$$

$$+ |\tilde{\phi}_y^{(m)}(U(t))\tilde{\psi}_y^{(m)} - \tilde{\phi}_y^{(n)}(U(t))\tilde{\psi}_y^{(n)}| +$$

$$+ |\hat{a}(x, y, t, \hat{U}_m(t))\psi_m - \hat{a}(x, y, t, \hat{U}_n(t))\psi_n|)dxdydt.$$

Now, $\tilde{\psi}_x^{(p)} \to \frac{\partial\psi}{\partial x}$ uniformly in the interior of Q as $p \to +\infty$ and $\tilde{\phi}_x^{(p)}(U) \to \frac{\partial\phi(u)}{\partial x}$ weakly in $L^2(Q)$ (Theorem 5.2).

This entails

$$\int_Q |\tilde{\phi}_x^{(m)}(U(t))\tilde{\psi}_x^{(m)} - \tilde{\phi}_x^{(n)}(U(t))\tilde{\psi}_x^{(n)}| dxdydt \to 0$$

$m, n \to 0$ In a similar way one proves, taking into account Assumption (A) and the above mentioned Theorem 5.2 that the other two integrals converge to zero.

On the other hand by Theorem 3.1,

$$\int_\Omega |U_m(t)\psi_m - U_n(t)\psi_n| dxdy \le$$

$$\le \int_\Omega |\bar{U}_m(t)\tilde{\psi}_m - \bar{U}_n(t)\tilde{\psi}_n| dxdy + \int_Q \mathfrak{X}_{m,n}(t)dxdy$$

with $\int_\Omega \mathcal{R}_{mn}(t)dxdy \to 0$ as $m, n \to \infty$, uniformly in $t \in [0,T]$.
Here $U_n(t) = \eta_n t_{n-1} + (1-\eta_n)t_n$; $t_n = k_n t_n$, $0 < \eta_n < 1$.
Consequently

$$\max_{[0,T]} ||U^*_m(t)\psi^*_m - U^*_n(t)\psi^*_n||_1 \to 0$$

$m, n \to +\infty$. Hence $U^*_p(t)\psi^*_p \to u\psi$ in $C([0,T], L^1(\Omega))$ for any $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Suppose now $\{\theta_n\}$ to be a sequence such that $\theta_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ and $\theta_n \to 1$ in $L(\Omega)$.
Then

$$\max_{[0,T]} ||u\theta_m - u\theta_n||_1 \le ||u||_\infty ||\theta_n - \theta_m||_1.$$

Consequently $u = \lim u\theta_n$ belongs to $C([0,T], L(\Omega))$.

Acknowledgements. Most of the results of this paper were obtained during my stay at the "Institut für Angewandte Mathematik" at Hamburg University as visiting professor in the academic year 1985/86. I am indebted to my colleaques at the Institute fur helpful discussions as well as for providing a friendly atmosphere in which I could pursue my activities.

Zentrum für Prakctische Mathematik, Kaiserslautern, Germany.

References

1. ARONSON D.G., The porous medium equation. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1224, pp. 1-46, 1986.
2. BERTSCH M., Aclass of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term, Nonlinear Analysis, Vol. 7, No. 1, pp. 117-127, 1983.
3. GURTIN M.E., MacCAMY R.C., On the diffusion of biological populations, Mathematical Biosciences, Vol. 33, pp. 35-49, 1977.
4. HORNUNG U., MESSING W., Poröse Medien-Methoden und Simulation, Verlag Beiträge zur Hydrologie, Kirchzarten, 1984.
5. KALASHNIKOV A.S., The propagation of disturbances in problems of non-linear heat corduction with absorption, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 14, No. 4, p 70-84, 1974.
6. KOVACS G., Seepage Hydraulics, Elsevier, Amsterdam, 1981.
7. LADYZHENSKAIA O.A., Boundary-value problems of Mathematical Physics (in Russian), Nauka, Moscow, 1974.
8. LADYZHENSKAIA O.A., SOLONNIKOV V.A., URAL'CEVA N.N., Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, A.M.S. Providence, 1968.
9. LIONS J.L., Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires, Dunod, Paris, 1969.
10. LIONS J.L., MAGENES E., Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.
11. OKUBO A., Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980
12. PASCALI D., SBURLAN S., Nonlinear mappings of monotone type, Sijhoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1978.
13. SCHECHTER E., The generalized solution of a nonlinear degenerate parabolic equation and its numerical compution, L'analyse Numerique et la Theorie de l'Approximation, Tome 13, No 1, pp. 73-93, 1984.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, Вып.2
Рига: Латвийский университет, 1991

УДК 622.276.65

А.А.Панферова
РТУ, Рига

ПРОГРЕВ СЛОЯ ШАРОВ ПОТОКОМ ГОРЯЧЕГО ГАЗА В ТОЛСТОСТЕННОМ КАНАЛЕ

Решению задачи о прогреве слоя шаров, занимающих полупространство $\tilde{x} \geq 0$, потоком горячего газа, имеющего при $\tilde{x}=0$ заданную постоянную температуру, посвящены работы /1/ и /2/. В работе /1/ рассмотрены два случая теплообмена газа и шаров: 1. Коэффициент теплопроводности шаров $\lambda_{ш}$ - конечен. 2. Коэффициент теплопроводности $\lambda_{ш}=\infty$. Во втором случае решение получено в виде простого интеграла, содержащего модифицированную функцию Бесселя $I_0(z)$, а в первом случае переход от изображения к оригиналу выполнен приближенно. В работе /2/ рассмотрен лишь первый случай ($\lambda_{ш}$ - конечно), но переход от изображения к оригиналу сделан точно и проведены числовые расчеты.

В данной работе решена задача о прогреве слоя шаров потоком горячей жидкости или газа в толстостенном канале, расположенном в области $0 \leq \tilde{x} < +\infty$, $-H \leq \tilde{z} \leq 0$. Стенки канала расположены в областях $0 \leq \tilde{x} < +\infty$, $0 \leq \tilde{z} < +\infty$ и $0 \leq \tilde{x} < +\infty$, $-\infty < \tilde{z} \leq -H$ и имеют коэффициент теплопроводности, равный λ_c. В силу симметрии ниже рассматривается область $\tilde{z} \geq -\frac{1}{2}H$. При $\lambda_c = 0$ решение данной задачи переходит в решение из работы /2/, а при $\lambda_{ш} \to \infty$ - в решение задачи из работы /3/.

Пусть $\tilde{R}$ - радиус шаров, F - площадь контакта шаров и газа в единице объема, $T_г$, $T_ш$, T_c - температуры газа, шаров и стенки, $c_г$, $c_ш$, c_c, $\lambda_г$, $\lambda_ш$, λ_c - соответственно, объемные теплоемкости и коэффициенты теплопроводности газа, шаров и стенки, Q - объемный расход газа на единицу ширины канала. Тогда уравнение теплопроводности для области, занятой газом, примет вид (при пренебрежении передачей тепла за счет теплопроводности в направлении оси $\tilde{x}$ в канале и его стенках, что справедливо при достаточно больших Q):

$$-\frac{Q}{H}c_г\frac{\partial T_г}{\partial \tilde{x}}+\lambda_г\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\left[\sigma(\tilde{z})\frac{\partial T_г}{\partial \tilde{z}}\right]-$$

$$-F\lambda_ш\frac{\partial T_ш}{\partial \tilde{r}}\Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}}=mc_г\frac{\partial T_г}{\partial \tilde{t}}, \qquad (I)$$

где m - пористость, $\sigma(\tilde{z})$ - просветность в сечении $\tilde{z}$, $\tilde{r}$ - расстояние от центра шара до точки измерения его температуры. Граничные и начальные условия имеют вид:

$$\tilde{x}=0:\ T_г=T_e;\ \tilde{z}=-\frac{1}{2}H:\ \frac{\partial T_г}{\partial z}=0; \qquad (2)$$

$$\tilde{z}=0:\ T_г=T_c,\ \lambda_г\frac{\partial T_г}{\partial \tilde{z}}=\lambda_c\frac{\partial T_c}{\partial \tilde{z}};\ \tilde{t}=0:\ T_г=0. \qquad (3)$$

Проинтегрируем (I) по $\tilde{z}$ от $-\frac{1}{2}H$ до 0 по участкам, занятым газом, т. е. вместо интегрирования по прямой $\tilde{x}=\bar{\tilde{x}}=const$ интегрирование ведется по некоторой кривой, достаточно мало отклоняющейся от прямой $\tilde{x}=\bar{\tilde{x}}$ при достаточно малых $\tilde{R}$ (подробности осреднения по $\tilde{\ }$ приведены в /4/). При интегрировании второго слагаемого слева в (I) с использованием условий (2) и (3) получим:

$$\lambda_г\sigma(\tilde{z})\frac{\partial T_г}{\partial \tilde{z}}\Big|_{z=-\frac{1}{2}H}^{\tilde{z}=0}=\lambda_г\sigma(0)\frac{\partial T_г}{\partial \tilde{z}}\Big|_{\tilde{z}=0}=$$

$$=\lambda_c\frac{\partial T_c}{\partial \tilde{z}}\Big|_{\tilde{z}=0}, \qquad (4)$$

так как $\sigma(0)=1$ (в силу того, что площадь контакта шаров со стенкой равна нулю). Тогда, полагая

$$\tilde{T}_2(\tilde{x},\tilde{t})=\frac{2}{H}\int\limits_{-\frac{H}{2}}^{0} T_2\,d\tilde{z},\quad \tilde{T}_ш(\tilde{x},\tilde{r},\tilde{t})=\frac{2}{H}\int\limits_{-\frac{H}{2}}^{0} T_ш\,d\tilde{z} \qquad (5)$$

после интегрирования (I) по $\tilde{z}$ получим:

$$\frac{1}{2}c_2 Q\frac{\partial\tilde{T}_2}{\partial\tilde{x}}+\lambda_c\frac{\partial T_c}{\partial\tilde{z}}\bigg|_{\tilde{z}=0}-\frac{1}{2}HF\lambda_ш\frac{\partial\tilde{T}_ш}{\partial\tilde{r}}\bigg|_{\tilde{r}=\tilde{R}}=$$

$$=\frac{1}{2}Hc_2 m\frac{\partial\tilde{T}_2}{\partial\tilde{t}}. \qquad (6)$$

Для определения в (6) теплового потока в шары рассмотрим задачу (α - коэффициент теплообмена между газом и шарами, а также между газом и стенкой)

$$a_ш^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{r}^2}(\tilde{r}T_ш)=\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}(\tilde{r}T_ш),\quad a_ш^2=\lambda_ш/c_ш, \qquad (7)$$

$$\tilde{t}=0:T_ш=T_0;\ \tilde{r}=\tilde{R}:-\lambda_ш\frac{\partial T_ш}{\partial\tilde{r}}=\alpha(T_ш-T_2), \qquad (8)$$

причем предполагается, в силу малости $\tilde{R}$, что $T_ш$ зависит от $\tilde{x}$ и $\tilde{z}$ только как от параметров, входящих в T_2 . Интегрируя (8) по $\tilde{z}$ по области, занятой шарами, получим:

$$a_ш^2\frac{\partial^2}{\partial\tilde{r}^2}(\tilde{r}\tilde{T}_ш)=\frac{\partial}{\partial\tilde{t}}(\tilde{r}\tilde{T}_ш), \qquad (9)$$

$$\tilde{t}=0:\tilde{T}_ш=T_0;\ \tilde{r}=\tilde{R}:-\lambda_ш\frac{\partial\tilde{T}_ш}{\partial\tilde{r}}=\alpha(\tilde{T}_ш-\tilde{T}_2). \qquad (10)$$

После применения преобразования Лапласа к задаче (9), (10) тепловой поток $\partial \tilde{T}_ш / \partial \tilde{r}$ при $\tilde{r}=\tilde{R}$ легко выразится через $T_г(\tilde{x},\tilde{t})$. Аналогично, тепловой поток в стенку в (6) определяется путем решения задачи:

$$a_c^2 \frac{\partial^2 T_c}{\partial \tilde{z}^2} = \frac{\partial T_c}{\partial \tilde{t}}, \quad a_c^2 = \lambda_c / c_c, \quad 0 < \tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t} < +\infty, \tag{11}$$

$$\tilde{t} = 0: T_c = T_0; \quad \tilde{z} = 0: \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial \tilde{z}} = \alpha\left[T_c - \tilde{T}_г(\tilde{x},\tilde{t})\right]. \tag{12}$$

Введем безразмерные величины:

$$u = \frac{\tilde{T}_г - T_0}{T_в - T_0}, \quad \theta = \frac{T_c - T_0}{T_в - T_0}, \quad u_ш = \frac{\tilde{T}_ш - T_0}{T_в - T_0}, \quad x = \frac{2\tilde{x}}{H},$$

$$r = \frac{2\tilde{r}}{H}, \quad R = \frac{2\tilde{R}}{H}, \quad t = \frac{4 a_ш^2 \tilde{t}}{H^2}, \quad a^2 = \frac{a_c^2}{a_ш^2}, \quad b_1 = \frac{\alpha H}{2\lambda_ш}, \tag{13}$$

$$b_2 = \frac{\alpha H}{2\lambda_к}, \quad \beta_1 = \frac{Q}{m a_ш^2}, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha H}{2 m c_г a_ш^2}, \quad \delta = \frac{H}{2} F \gamma_1.$$

Тогда математическая постановка задачи примет вид:

$$-\beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\gamma_1}{b_2} \frac{\partial \theta}{\partial z}\bigg|_{z=0} - \frac{\delta}{b_1} \frac{\partial u_ш}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x, t < +\infty, \tag{14}$$

$$t = 0: u = 0; \quad x = 0: u = 1; \quad u \to 0 \text{ при } x \to \infty, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r u_ш) = \frac{\partial}{\partial t}(r u_ш), \quad 0 < r < R, \quad 0 < t < +\infty, \tag{16}$$

$$t = 0: u_ш = 0; \quad r = R: -\frac{\partial u_ш}{\partial r} = b_1\left[u_ш - u(x,t)\right]; \tag{17}$$

$$a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=\frac{\partial\theta}{\partial t},\quad 0<x,z,t<+\infty, \tag{18}$$

$$t=0:\ \theta=0;\quad z=0:\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=b_2\left[\theta-u(x,t)\right]. \tag{19}$$

Применение к задаче (I4) - (I9) преобразования Лапласа дает изображение искомых решений в виде:

$$\bar{u}(x,p)=e^{-\frac{x}{\beta_1}p}\bar{F}(x,p) \tag{20}$$

$$p\bar{F}(x,p)=\exp\left\{-\frac{x}{\beta_1}\left[\frac{\gamma_1\sqrt{p}}{ab_2+p}+\bar{\delta}\frac{R\sqrt{p}-\operatorname{th}R\sqrt{p}}{R\sqrt{p}+(Rb_1-1)\operatorname{th}\sqrt{p}R}\right]\right\}, \tag{21}$$

$$\bar{u}_{ш}(x,r,p)=\frac{b_1R^2\bar{u}(x,p)}{(Rb_1-1)\operatorname{sh}R\sqrt{p}+R\sqrt{p}\operatorname{ch}R\sqrt{p}}\,\frac{\operatorname{sh}r\sqrt{p}}{r}, \tag{22}$$

$$\bar{\theta}(x,z,p)=\frac{b_2\exp\left(-\frac{z}{a}\sqrt{p}\right)}{b_2+\frac{\sqrt{p}}{a}}\bar{u}(x,p). \tag{23}$$

При $\lambda_c\to 0$ параметр $b_2\to\infty$ и формула (20) переходит в изображение Лапласа, полученное в /I/ и /2/ для течения газа в полупространстве $x\geq 0$, занятом шарами.

Для перехода к оригиналам заметим, что уравнение

$$R\sqrt{p}+(Rb_1-1)\operatorname{th}R\sqrt{p}=0 \tag{24}$$

имеет только действительные и отрицательные корни - эти корни, как видно из решения (22) задачи (I6), (I7), являются простыми полюсами изображения Лапласа 3-й краевой задачи уравнения теплопроводности для шара (см. /5/). Кроме того, точка $p=0$ является точкой ветвления функции $\bar{F}(x,p)$. Если сделать разрез от точки $p=0$ по отрицательной действительной полуоси, то в области $|\arg p|\leq\pi$ каждая из двух ветвей функции $\bar{F}(x,p)$ является однозначной аналитической функцией, все особые точки которой лежат в полуплоскости $Re\,p < 0$ (кроме точки $p = 0$, являющейся простым полюсом). Поэтому в качестве контура интегрирования в формуле обращения преобразования Лапласа можно, как и в работе /2/, взять прямую $Re\,p = 0$ с обходом точки $p = 0$ по правой полуокружности радиуса δ. В результате оригинал $f(x,t)$ изображения $\bar{F}(x,p)$ получается в виде (после перехода к пределу при $\delta \to 0$):

$$f(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \exp\left[-\frac{x}{\beta_1}\left(\gamma_1 + \frac{\bar{\delta}}{\ell}\right)\right] \int_0^\infty e^{B(x,\tau)} \frac{\sin A(x,\tau,t)}{\tau} d\tau, \tag{25}$$

где

$$B(x,\tau) = \frac{Rx}{\beta_1 \varphi_1}\left[\gamma_1 a b_2 (u + a b_2 R) + \frac{\bar{\delta} b_1}{\ell} \psi_1\right], \quad \varphi_1 = u^2 + (u + a b_2 R)^2,$$

$$A(x,\tau,t) = \tau t - \frac{Rx}{\beta_1 \varphi_1}\left(\gamma_1 a b_2 u - \frac{\bar{\delta} b_1}{\ell} \psi_2\right), \quad u = R\sqrt{\frac{\tau}{2}}, \quad \ell = 1 - R b_1, \tag{26}$$

$$\psi_1 + i\psi_2 = \frac{2u^2 - \ell u (n_1 + n_2) + i \ell u (n_1 - n_2)}{(u - \ell n_1)^2 + (u - \ell n_2)^2}, \quad n_1 + i n_2 = \frac{\operatorname{sh} 2u + i \sin 2u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2u}.$$

В частном случае при $\alpha \to \infty$ интеграл упрощается и принимает вид:

$$f(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} e^{\frac{x\delta_1}{\beta_1}} \int_0^\infty \frac{1}{\tau} e^{-\bar{B}(x,\tau)} \sin \bar{A}(x,\tau,t) d\tau, \tag{27}$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \frac{HFc_{\text{ш}}}{mR\gamma_2}, \quad \bar{B}(x,\tau) = \frac{x}{\beta_1} \sqrt{\frac{\tau}{2}} \left[\gamma + \delta_1 R (\bar{n}_1 + \bar{n}_2)\right], \tag{28}$$

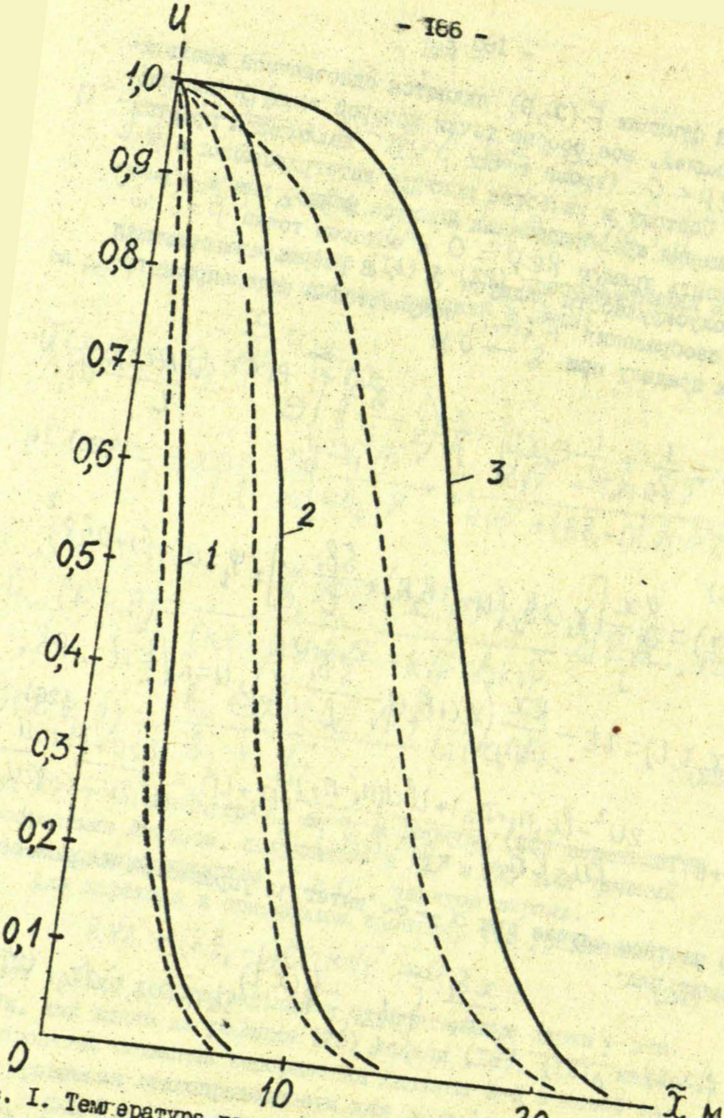


Рис. I. Температура газа по формулам (27), (3I):
I – $\tilde{t}$ = 30, 2 – 75, 3 – 150 час; —— – $\lambda_c = 0$. ---- $\lambda_c = \lambda_ш$.

$$\bar{A}(x,\tau,t)=\frac{x}{\beta_1}\sqrt{\frac{\tau}{2}}\left[\gamma+\delta_1 R(\bar{\Pi}_1-\bar{\Pi}_2)\right]-\tau t, \qquad (29)$$

$$\gamma=\frac{\lambda_K}{m c_2 a_ш^2 a}, \quad \bar{\Pi}_1+i\bar{\Pi}_2=\frac{sh 2u+i\sin 2u}{ch 2u-\cos 2u}. \qquad (30)$$

Температура газа определится из формул (20) и (25) (или (27)):

$$u(x,t)=f\left(x,t-\frac{x}{\beta_1}\right)\eta\left(t-\frac{x}{\beta_1}\right), \qquad (31)$$

где $\eta(t)$ - единичная функция. На рис. I приведены результаты расчета температуры газа $u(x,t)$ по формулам (27), (31) при следующих значениях параметров:
H = 7,5 м, $\bar{R}$ = 0,5 м, $\lambda_ш = 2\frac{ккал}{м\cdot час\,^oC}$, C_c = 500, $C_ш$ = 550, $C_г$ = 1000 $\frac{ккал}{м^3\,^oC}$, $Q = 0{,}108\frac{м^2}{час}$, m = 0,2, $F = 3{,}14\,\frac{1}{м}$.

Как видно из рисунка, потери тепла в стенки канала начинают ощущаться при $\bar{t} \geqslant 75$ часов.

Найдем из (22) изображение средней по объему температуры шара:

$$\bar{u}_{шс}(x,p)=\frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_{V_ш}\bar{u}_ш\,dV. \qquad (32)$$

Вычисления дают

$$\bar{u}_{шс}(x,p)=\exp\left(-\frac{x}{\beta_1}p\right)\bar{\Phi}(x,p), \qquad (33)$$

где

$$\bar{\Phi}(x,p)=\frac{3b_1}{R p^2}\varphi(p)\exp\left\{-\frac{x}{\beta_1}\left[\frac{\gamma_1\sqrt{p}}{p+ab_2}+\bar{\delta}\varphi(p)\right]\right\}, \qquad (34)$$

$$\varphi(p)=\frac{R\sqrt{p}-th R\sqrt{p}}{(Rb_1-1)\,th R\sqrt{p}+R\sqrt{p}}. \qquad (35)$$

Используя формулу обращения, аналогично предыдущему найдем:

$$u_{ш.с}(x,t)=f_1\left(x,t-\frac{x}{\beta_1}\right)\eta\left(t-\frac{x}{\beta_1}\right), \qquad (36)$$

где

$$f_1(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{3b_1}{\pi l R}\exp\left[-\frac{x}{\beta_1}\left(\gamma_1+\frac{\delta}{R}\right)\right]\times$$

$$\times\int_0^\infty \frac{1}{\tau^2}e^{B(x,\tau)}\left[l_1\cos A(x,\tau,t)-b_1\beta R\sin A(x,\tau,t)\right]d\tau, \qquad (37)$$

причем $A(x,\tau,t)$, $B(x,\tau)$ - те же, что и в (26),
$l_1=R\psi_1 b_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванцов Г.П. и Любов Б.Я. Прогрев неподвижного слоя шаров потоком горячего газа // ДАН СССР. 1952. Т.36. № 2. С. 293-296.
2. Романов В.А., Смирнова Н.Н. Теплообмен при вынужденной конвекции в слабопроницаемой среде // Инженерно-физический журнал. 1977. Т.33. № 2. С. 305-310.
3. Антимиров М.Я., Панферова А.А. О температурном поле при движении жидкости в двухкомпонентной пористой среде, контактирующей с непроницаемыми стенками // Инженерно-физический журнал. 1972. Т.23. № 5. С. 916-917. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 4683-72.
4. Панферова А.А. Решение смешанных задач теплопроводности при движении жидкости через пористые среды. Кандидатская диссертация. - Минск: БГУ, 1988. 165 с.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты опубликованных в настоящем сборнике работ по математическому моделированию могут быть использованы для оптимизации выращивания полупроводниковых и полупрозрачных монокристаллов, путем повышения их химической однородности, минимизации плотности дислокаций, увеличения скорости выращивания путем применения вибрационной технологии, уменьшения времени охлаждения кристаллов. Разработанные математические модели и численные методы могут быть использованы при разработке пакетов прикладных программ для управления технологическими процессами.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.974:519.6:631.365

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СУШКИ ЗЕРНА С АКТИВНЫМ ВЕНТИЛИРОВАНИЕМ. Аболтиньш А.Я., Буйкис А.А.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.10-19

Сформулирована математическая модель, состоящая из уравнений для температур и влажностей зерна и воздуха. Предложено выражение для коэффициента теплообмена. При постоянных параметрах методом интегрального преобразования найдено аналитическое решение задачи. Предложена разностная схема, исследованы некоторые ее свойства. Приведены результаты расчетов и дан краткий их анализ.

Библиогр. 8 назв., табл. I.

УДК 519.6:519

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЛОТНОСТИ ДИСЛОКАЦИЙ В КРИСТАЛЛАХ АНТИМОНИДА ИНДИЯ ПРИ ВЫРАЩИВАНИИ МЕТОДОМ ЧОХРАЛЬСКОГО. Авдонин Н.А., Вахрамеев С.С., Соколов А.М., Корнеева М.Д., Филачев А.М.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.20-34.

В работе приводится математическая модель термоупругопластического деформирования кристаллов антимонида индия с учетом особенностей движения и размножения дислокаций по системам скольжения. На основе разработанного пакета программ проведена серия численных экспериментов для различных режимов выращивания кристаллов. Установлено, что при заданных тепловых условиях выращивания сдвиговые напряжения как правило незначительно превосходят уровень критических напряжений, расчетная величина плотности дислокаций не превосходит 10^2 $см^{-2}$. Результаты экспериментальных данных хорошо согласуются с результатами расчетов.

УДК 536.421.1+536.74

АНАЛИЗ ДВУХФАЗНОЙ ЗОНЫ В СЛИТКЕ В ПРОЦЕССЕ ЭЛЕКТРОШЛАКОВОГО ПЕРЕПЛАВА МЕТАЛЛА. Авдонин Н.А., Гулбе М.Л., Тотин В.Н., Мишин В.В.// Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.35-44.

Рассмотрена математическая модель с учетом образования двухфазной зоны в слитке процесса электрошлакового переплава металла. Проведен численный сравнительный анализ трех методов решения поставленной задачи. Исследовано образование двухфазной зоны. Показано, что для корректного определения двухфазной зоны необходимо учитывать характер сегрегации примеси в расплаве.

Ил. 3., библиогр. 6 назв., табл. I.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИЗЛУЧАТЕЛЯ С НЕОДНОРОДНЫМ ПРОВОДЯЩИМ ФЕРРОМАГНИТНЫМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА. Антимиров М.Я., Лиепиня В.Р.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.45-58.

Решается задача о взаимодействии излучателя в виде двухпроводной линии с проводящим полупространством, содержащим неоднородное включение. Проводимости и магнитные проницаемости полупространства и включения равны, соответственно, σ_1, σ_2 и μ_1, μ_2. Задача решается путем разложения по двум малым параметрам $\bar{\varepsilon} = \sigma_2/\sigma_1 - 1$ и $\varepsilon = \mu_2/\mu_1 - 1$. Приводятся результаты численных расчетов.

Ил. I, библиогр. I назв.

УДК 517.984:537.84

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБРАТНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОМПЛЕКСНЫМ ИНТЕГРАЛОМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ. Антимиров Ю.М.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.59-70.

Решение двумерной краевой задачи для линейного эллиптического оператора в прямоугольной области представлено в виде комплексного интеграла по параметру от произведения одномерных операторов. Такое представление более удобно для исследования асимптотического поведения решения с малым параметром при лапласиане. В качестве примера найдена асимптотика поведения решения задачи об МГД-течении в прямоугольном канале в неоднородном внешнем магнитном поле при больших числах Гартмана.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.947:519.6:556.388

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАККОРМАКА ПРИ РАСЧЕТЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКИХ РАСТВОРОВ В ПОЧВЕ. Буйкис А.А., Титушкина З.Ю.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.71-80.

Рассматривается математическая модель движения сорбируемого загрязняющего вещества. Разработан алгоритм численного решения задачи на основе адаптации разностного метода Маккормака и проведен расчет модельного примера для изотермы Ленгмюра. Выяснены преимущества схемы Маккормака перед разностной схемой с односторонней разностью.

Ил. 3, библиогр. 4 назв.

УДК 519.6:539

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ И ПЛОТНОСТИ ДИСЛОКАЦИЙ В КРИСТАЛЛАХ КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ, ВЫРАЩИВАЕМЫХ ИЗ РАСПЛАВА. Вахрамеев С.С., Якушенок Р.А.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.81-98.

Разработана неявная схема численного решения задачи термоупругопластического деформирования кристаллов арсенида галлия конической формы, выращиваемых из расплава методом Чохральского с жидкостной герметизацией расплава. Приводятся результаты расчетов и сравнительный анализ полей температур, сдвиговых напряжений по системам скольжения и плотности дислокаций в кристаллах. Проанализировано влияние геометрии на величину плотности дислокаций в кристалле.

УДК 532.542.2+519.632.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ РАСПЛАВА В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ ВАННЫ АЛЮМИНИЕВОГО ЭЛЕКТРОЛИЗЕРА. Луринс Г.Р.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.99-104.

Предложена численная модель расчета циркуляции расплава в поперечном сечении ванны алюминиевого электролизера при заданных полях ротора электромагнитных сил и температуры. Рассчитаны характерные картины электровихревой, тепловой и совместной циркуляции дан их сравнительный анализ.

Ил. 3., библиогр. 2 назв.

УДК 518.61

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ. Калис Х.Э.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.105-116.

Построена осредненная математическая модель, описывающая распространение температуры в многослойной среде. Алгоритм расчета построен на основе использования параболических сплайнов и монотонных разностных схем. Полученная система разностных уравнений решается методом оптимальной релаксации.

Библиогр. 5 назв.

УДК 519.6+537.311.5

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА ПРИ ЭЛЕКТРОШЛАКОВОМ ПЕРЕПЛАВЕ. Люмкис Е.Д., Опманис М.Я.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.117-127.

Разработан алгоритм численного решения задачи и проведены расчеты распределения плотности переменного тока в системе электрод-шлак-расплав для процесса электрошлакового переплава. Произведено сравнение результатов для случаев постоянного и переменного тока.

Ил. 4, библиогр. 4 назв.

УДК 519.6+539.3

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В КРИСТАЛЛЕ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ. Люмкис Е.Д., Пакул Л.А.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.128-140.

В работе предлагается методика численного решения задачи термоупругости в двумерной плоской и осесимметричной областях с произвольной формой фронта кристаллизации. На сетке из ячеек Дирихле построена разностная схема, которая является консервативной и сохраняет свойство самосопряженности исходных дифференциальных операторов.

УДК 536.421+536.421.4+536.24

ВЛИЯНИЕ КВАРЦЕВЫХ АМПУЛ И ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СБРАЗЦА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ АМПУЛЬНОЙ ЗОННОЙ ПЛАВКЕ. Мартузане Э.Н., Сенченков А.С.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С. 150-159.

В работе численно исследуются температурные поля образца, кварцевых ампулы и трубочки при ампульной зонной плавке в зависимости от теплофизических свойств образца, его размеров и внешней температуры, создаваемой заданной нагревательной системой, с учетом полупрозрачности кварцевых ампул. Приведены зависимости ширины проплава и перегрева расплава от различных теплофизических свойств образца.

Ил. 5, библиогр. 3 назв., табл. 2.

УДК 622.276.65

ПРОГРЕВ СЛОЯ ШАРОВ ПОТОКОМ ГОРЯЧЕГО ГАЗА В ТОЛСТОСТЕННОМ КАНАЛЕ. Панферова А.А. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1991. - Вып. 2. - С.180-188.

Решается задача о поле температур газа, шаров и стенки при прогреве слоя шаров потоком горячего газа в полубесконечном толстостенном канале. Радиусы шаров считаются достаточно малыми, так что учитывается только радиальная составляющая теплового потока в шары. Приведен пример расчета температуры газа как при конечной, так и при нулевой теплопроводности стенок канала.

Ил. 1, библиогр. 5 назв.

REFERĀTI

GRAUDU KALTĒŠANAS PROCESA AR AKTĪVO VENTILĒŠANU MATEMĀTISKĀ MODELĒŠANA. Āboltiņš A.J., Buiķis A..../ Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. lpp. 10-19.

Izveidots matemātiskais modelis, kas sastāv no graudu un gaisa temperatūtu un mitrumu vienādojumiem. Piedāvāta siltumapmaiņas koeficienta aprēķināšanas izteiksme; konstantiem parametriem ar Laplasa integrālās transformācijas metodi iegūts uzdevuma analītisks atrisinājums. Piedāvāta diferenču shēma, izpētītas dažas tās īpašības. Doti skaitliskie rezultāti un īsa to analīze.

SKAITLISKA TEHNISKO SPRIEGUMU UN DISLIKĀCIJU BLĪVUMA IZPĒTO PĒC ČOHRAĻSKA METODES AUDZĒJAMOS INDIJA ANTIMONĪDA KRISTĀLOS. Avdoņins N.A., Vahramejevs S.S., Sokolovs A.K., Korņejeva M.D., Filačevs A.M.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. lpp. 20-34.

Darbā ir piedāvāts indija antimonīda kristālu termoelastīgās un plastiskās deformēšanās matemātiskais modelis, ņemot vērā dislokāciju kustības un vairošanās īpatnības slīdes sistēmās. Balstoties uz izstrādātās programmu paketes, veikta sērija skaitlisko eksperimentu dažādiem kristālu audzēšanas režīmiem. Tiek konstatēts, ka uzdotajos termiskajos audzēšanas apstākļos nobīdes spriegumi praktiski ļoti nenozīmīgi pārsniedz kritiskos spriegumus un dislokāciju blīvuma aprēķinātā vertība nepārsniedz 10^2 cm^{-2}. Eksperimentu rezultāti labi saskan ar skaitlisko aprēķinu rezultātiem.

DIVFĀZU ZONAS KAUSĒJUMĀ METĀLA ELEKTRO-ŠLAKAS PĀRKAUSĒŠANAS PROCESĀ ANALĪZE. Avdoņins N.A., Gulbe M.L., Gotins V.N., Mišins V.V.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl.- lpp.35-44.

Ar aplūkots metāla elektro-šlakas pārkausēšanas procesa matemātiskais modelis ar divfāzu zonas veidošanos. Ir izdarīta formulētās metodes triju risināšanas metožu skaitliska salīdzinošā analīze. Ir izpētīts divfāzu zonas veidošanās process. Ir parādīts, ka korektai divfāzu zonas noteikšanai nepieciešams ievērot piemaisījumu segregācijas kausējuma raksturu.

IZSTAROTĀJA UN NEHOMOGĒNAS VADĪTSPĒJĪGAS FERROMAGNĒTIKAS PUSPLAKNES SAVSTARPĒJĀS IEDARBĪBAS PROBLĒMAS ATRISINĀŠANA AR MAZĀKĀ PARAMETRA METODI. Antimirovs M.J., Liepiņa V.R.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. - lpp. 45-58.

Tiek risināta problēma par divvadu līnijas izstarotāja un vadītspējīgas pusplaknes, kas satur nehomogēnu slēgumu, saustarpējo iedarbību. Pusplaknes un slēguma vadītspējas un magnētiskās caurlaidības ir attiecīgi σ_1, μ_1 un σ_2, μ_2. Problēmas atrisinājums tiek meklēts kā izvirzījums pēc diviem maziem parametriem $\varepsilon = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1$ un $\varepsilon_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1$. Tiek doti skaitlisko aprēķinu rezultāti.

PAR APGRIEZTĀ DIFERENCIĀLĀ OPERATORA EFEKTĪVU IZRĒĶINĀŠANU AR KOMPLEKSĀ INTEGRĀĻA PALĪDZĪBU UN TĀ PIELIETOJUMU. Antimirovs J.M.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. - lpp. 59-70.

Taisnstūrveida apgabala lineāra eliptiska operatora divdimensiju robežproblēmas atrisinājums (ots kompleksa integrāļa no viendimensiju operatoru reizinājuma veidā. Šāds izteiksmes veids ir ērts atrisinājuma ar mazu parametru pie Laplasa operatora asimptotiskās uzvedības pētīšanai. Atrastu magnētiskās hidrodinamikas plūsma taisnstūrveida kanālā pie neviendabīga ārējā magnētiskā lauka pie lieliem Hartmana skaitļiem uzdevuma atrisinājuma uzvedības asimpotika.

MAKKORMAKA METODES IZMANTOŠANA ŠĶIDRUMA FILTRĀCIJAS APRĒĶINAM AUGSNĒ. Buiķis A.A., Tituškina Z.U.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. - lpp. 71-80.

Aplūkots matemātiskais modelis piesārņojašas vielas plūsmai, kura sorbējas porainajā vidē. Izstrādāts algoritms problēmas skaitliskai risināšanai, adaptējot Makkormaka diferenču metodi un veikti aprēķini modeļa problēmai ar Lengmīra izotermu. Parādītas Makkormaka shēmas priekšrocības salīdzinājumā ar vienpusējo diferenču shēmu.

NO KAUSĒJUMA AUDZĒJAMU KONISKAS FORMAS KRISTĀLU TERMISKO SPRIEGUMU UN DISLOKACIJU BLĪVUMA TAJOS MATEMĀTISKĀ MODELĒŠANA. Vahramejevs S.S., Jakušenoks R.A.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. - lpp. 81-98.

Skaitliskai termo-elastības un plastiskās deformēšanas problēmas atrisināšanai koniskas formas gallija arsenīda kristāliem, ko audzēno kausējuma pēc Čohraļska metodes ar šķidru kausējuma hermetizāciju, ir izstrādāta shēma. Aprēķinu rezultātā iegūti temperatūru lauks kristālā, termiskie spriegumi kristāla slides plaknēs un dislikāciju blīvuma sadalījums. Tiek veikta rezultātu analīze atkarībā no kristāla ģeometrija.

KAUSĒJUMA CIRKULĀCIJAS SKAITLISKĀ MODELĒŠANA ALUMĪNIJA ELEKRTOLĪZES VANNAS ŠĶĒRSGRIEZUMĀ. Lurins V.R.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. - lpp.99-104.

Rakstā piedāvāta skaitliskais modelis kausējuma cirkulācijas aprēķināšanai alumīnija elektrolīzes vannas šķērsgriezumā dotiem elektromagnētiskā spēka rotora un temperatūras sadalījumiem. Aprēķinātas raksturīgās elektrovirpuļveida, siltuma un kopējās cirkulācijas ainas un dota to salīdzinoša analīze.

SILTUMA VADĪŠANAS VIENĀDOJUMA SKAITLISKĀ RISINĀŠANA DAUDZSLĀŅU VIDĒ AR OPTIMĀLĀS RELAKSĀCIJAS METODI. Kalis H. // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. - lpp. 105-116.

Izstādāts viduvētais matemātiskais modelis, kurš apraksta temteratūras izlatīšanos daudzslāņu vidē. Aprēķinu algoritms ir veidots, lietojot paraboliskos splainus un monotonas diferenču shēmas. Iegūta diferenču vienādojumu sistēma tiek risināta ar optimālo relaksācijas metodi.

ELEKTRISKĀS STĀVAS SADALĪJUMA APRĒĶINĀŠANA ELEKTROSĀRŅU KAUSĒŠANAS PROCESAM. Ļumķis J.D., Opmanis M.J.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. - lpp. 118-127.

Izstādāts maiņstrāvas blīvuma sadalījuma aprēķināšanas algoritms sistēmai elektrods-sārņi-kausējums. Veikta maiņstrāvas un līdzstrāvas gadījumas iegūto skaitlisko rezultātu salīdzināšana.

TERMOELASTĪBAS SPRIEGUMU APRĒĶINĀŠANAS METODIKA KRISTĀLAM AR LĪKLĪNIJU ROBEŽĀM. Ļumķis J.D , Pakul L.A.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikāas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. - lpp. 128-149.

Piedavāta metodīka divdimensiju termoelastības problēmu skaitliskai risināšanai Dekarta un cilindriskā koordīnātu sistēmās. Diferenču shēma ir konstruēta tīklam, kurš sastāv no Dirihlē šūnām, un pielietojāma kristālam ar diezgan patvaļīgu kristālizācijas fronti tā augšanas izpētei. Konstruētā skaitliskā shēma ir konservatīva un pašsaistīta.

KVARCA AMPULAS UN TERMISKO PARAUGA ĪPAŠĪBU IETEKME UZ TEMPERATŪRAS SADALĪJUMU ZONĀLAJĀ KAUSĒŠANĀ AMPULĀ. Martuzāne E.N., Senčenkovs A.S.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskāas fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. - lpp. 150-159.

Darbā tiek skaitliski modelēti parauga, kvarca ampulas ... caurules temperatūras lauki zonālās kausēšanas procesā ... atkarībā no parauga termiskajām īpašībām, tā izmēriem un no apkārtējās sildīšanas sistēmas temperatūras, ņemot vērā kvarca ampulas puscaurspīdījumu.

Tiek pētīta zonas platuma un kausējuma temperatūras atkarība no dažādām parauga termiskajām īpašībām.

BURBUĻU SLĀŅA SILDIŠANA KARSTA GĀZES PLŪSMĀ BIEZU SIENU KANALĀ. Parferova A.A.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās prāblēmas. Rīga: LU, 1991. - 2. izl. lpp. 180-188.

Tiek risināts jautājums par gāzes temperatūru lauku, burbuļim un burbuļu sasilšanas pakāpi, ja tie tiek sildīti ar karstu gāzi pusbezgalīgā biezsienu kanālā. Burbuļu rādiuss ir pietiekami mazs, tā tiek nemta vērā tikai radiālā siltuma straume burbuļos. Šis piemērs gāzes temperatūras aprēķināšanai kā pie uzdotās tā arī pie nulles siltumvadības uz kanāla sienām.

Zīm. 1, bibliogr. 5 nos.

A B S T R A C T S

THE MATHEMATICAL SIMULATION OF GRAIN DRYING PROCESS BY VENTILATION. Aboltins A.J., Buikis A.A.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P. 10-19.

Mathematical model which contain temperature and humidity equations of grain and air is given in the article. The expression for the heat-exchange koefficient is offered here. Analytical solution of problem with constant parameters is solved with Laplace integral transformations. Some characteristics for difference scheme are investigated. Numerical results and short analysis are given.

THE NUMERICAL SIMULATION OF THERMOPLASTIC STRESS AND DISLOCATION DENSITY IN InSb CRYSTALS BY CZOCHRALSKI GROWTH CONFIGURATION. Avdonin N.A.., Vachramejev S.S., Sokolov A.M., Corneewa M.D., Pylatchow A.M.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P. 20-34.

The numerical model for calculation thermoplastic-plastic deformations, stress and dislocation density in InSb crystals with respect to the dislocation generation in slyp systems. The numerical experiments for different conditions of temperature show, that shear stress in slip systems [100] are few greater than critical shear stress and dislocation density is not greater than 10^2 cm^{-2}. The results of experimets are in good agreement with numerical calculations.

ANALYSIS OF TWO-PHASE ZONE IN INGOT DURING THE ESR PROCESS OF METAL. Avdonin N.A., Gulbe M.L., Gotin V.N., Mishin V.V.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P.35-44.

The mathematical model of ESR (electro-sleg remelting) process of metal is considered by taking into account the formation of two-phase zone in the ingot. The numerical comparison of three methods for the solution of formulated problem is carried out. The formation of two-phase zone is investigated. The necessity of taking into account the character of impurity segregation in the melt for correct determination of two-phase zone is shown.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF INTERACTION OF A INDUCTOR WITH AN NON-HOMOGENEOUS CONDUCTING FERROMAGNETIC SEMI-SPACE BY THE SMALL PARAMETER METHOD. Antimirov M.Ya., Liepiņa V.R.// Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P.44-58.

A solution of the problem of interaction of a inductor in the form of a two-wired line with a non-homogeneous conducting semi-space is given. The conductivities and magnetic permeabilities of the two parts of the semi-space are equal to σ_1, μ_1 and σ_2, μ_2 respectively. The problem is solved by expansion in two small parameters $\varepsilon = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1$ and $\varepsilon_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1$. Results of numerical computation are given.

Bibliography 1 title, 1 figure.

ON THE EFFECTIVE REPRESENTATION OF THE INVERSED LINEA DIFFEPENTIAL OPERATOR BY THE COMPLEX INTEGRAL. Antimirov Yu.M.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P.58-70.

The solution of the boundary problem for the linear elliptic operator in rectangular domain is presented as a complex parametric integral depending on the multiplication of one-dimensional operators. Such a presentation is convinient for the asymtotic analysis of solutions of the problems with small parameter multiplies by laplacian. As on example the asymtotics of the solution of the problem describing MHD-flow in rectangular channel in the non-homogeneous external magnetic field with large Hartman numbers is obtained.

APPLICATION OF MACCORMACK IN THE NUMERICAL CALCULATION OF SOLUTION FILTRATION IN THE SOIL. Buikis A.A., Titiushkina Z.U.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P. 71-80.

Mathematical model of contaminant movement and contaminant sorption is considered in present paper. Algorithms of numerical solution of exploring problem was developed on the basis of MacCormack method and investigation of test case for Langmuir isotherm was released. It was indicated, that MacCormack differencial scheme is more effective that one-sided differencial scheme.

THE NUMERICAL MODELING OF THERMOELASTIK STRESS AND DISLOCATION DENSITY IN CONIC CRYSTALS PULLING FROM THE MELT. Vachramejeva S.S., Yakuschonoks R.A.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P. 81-99.

The numericaб simulation of thermoelastic-plastic deformations and dislocation density in conic gallium arsenide crystals pulling from the melt by Czochralski method. Numerical solutions and analysis fields of themperature, shear stress in slip systems and dislocation density show conic geometry influence on magnitude of dislocation density generation in pulled crystals.

NUMERICAL SIMULATION OF MELT CIRCULATION IN THE CROSS-SECTION OF ALUMINIUM REDUCTION CELLS. Lurins G.R. // The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P. 99-104.

A numerical model for melt circulation calculations in the cross-section of aluminium reduction cells is offered for given electromagnetic rotor and temperature fields. Characteristic electrovortex, thermal and combined circulation streamline patterns are computed and supplied with comparative analysis.

Fig. 3, ref. 2.

THE NUMERICAL SOLUTION OF HEAT TRANSFER EQUATION IN MULTI-LAYER MEDIUM WITH OPTIMAL RELAXATION METHOD. Kalis H.E.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P. 105-116.

Overaged mathematical model determining heat transfer in multi-layer medium is developed. The algorythm of calculations is based on monotoneus difference schemes and parabolic splines. The obtained systems of difference equations is solved with optimal relaxation method.

Bibl. 5.

NUMERICAL CALCULATION OF ABTERNATING CURRENT DISTRIBUTION IN ESR SYSTEMS. Ljumkis E.D., Opmanis M.J.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P. 117-127.

The aim of present paper is to study density of alternating current in electro-slag remelting system. The problem is solved numericaly and direct comparison between density of alternating and direct current for corresponding conditions is made.

NUMERICAL SOLUTION OF THERMOELASTICITY PROBLEM IN CRYSYAL WAITH CURVILINEAR BOUNDARIES. Ljumkis E.D., Pakul L.A.// The mathenatical simulation. Applied tasks of methematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol.2. - P. 129-149.

The numerical technique for digital solution of two-dimensional thermoelasticity problem in either Cartesian or cylindrical coordinate system is presented. Finite difference scheme is derived on mesh consisting from the Dirichlet cells and may be applied for crystal growth problem with rather arbitrary interface shape. The constructed numerical scheme is conservative and self-conjugate.

THE INFLUENCE OF QUARTZ AMPOULE AND THERMAL CHARACTERISTCS OF THE MATERIAL ON THE DISTRIBUTION OF TEMPERATURE DURING AMPOULE ZONE MELTING. Martuzane E.N., Senchenkov A.S.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P.150-159.

The temperature of the crystal, the quartz ampoule and the tube is numerically investigated. The dependence of the crystal temperature on its thermal characteristics, dimensions and outer temperature of heating system is studied taking into account the transperancy of quartz ampoules.

The molten zone width and the melt temperature are plotted for different thermal characteristics of the crystal.

ON THE HEATING OF THE SPHERES SLAB BY A HOT GAS FLOW IN A CHANNAL WITH A THICK WALLS. Panfjorova A.A.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1991. - Vol. 2. - P. 160-179.

A solution of the problem about on temperature field of a gas, spheres and wall, when a spheres slab heated by a hot gas flow in a semi-infinite channel with a thick walls

is given. The radii of the spheres are small and only the radial part a heat flux into the spheres is taken into account. Results of numerical computation are given.

Fig. 1, bibliogr. 5 items.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Научные труды
Том 564

Рецензенты: Е.С.Польский, доктор физ.-мат.наук, Ин-т математики и информатики ЛУ;
Е.Ф.Царьков, доктор физ.-мат.наук, РТУ.

Редакторы: Н.Авдонин, Р.Павлова
Технический редактор С.Лининя
Корректор Б.Мартузан

Подписано к печати 30.09.1991. Ф/б 60х84/16.
Бумага №1. 13,3 физ.печ.л. 12,1 усл.печ.л. 10,1 уч.изд.л.
Тираж 350 экз. Рег.уд.№ 2-0266. Зак.№ 508 Цена 2 р.

Латвийский университет
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано на ротапринте ЛУ
226050 Рига, ул.Калею, 43