LATVIJAS UNIVERSITĀTES
ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

575

MATEMĀTISKĀ MODELĒŠANA
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

L A T V I J A S   U N I V E R S I T Ā T E

Fizikas un matemātikas fakultāte
Diferenciālvienādojumu un tuvināto metožu katedra

MATEMĀTISKĀ MODELĒŠANA.

MATEMĀTISKĀS FIZIKAS LIETIŠKĀS PROBLĒMAS

Zinātniskie raksti
575.sējums

Latvijas Universitāte
Rīga 1992

ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физико-математический факультет
Кафедра дифференциальных уравнений и приближенных методов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Научные труды
Том 575

Латвийский университет
Рига 1992

U N I V E R S I T Y   O F   L A T V I A

Faculty of physics and Mathematics
Chair of Differential Equations and Numerical Methods

THE MATHEMATICAL SIMULATION.

APPLIED PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Papers of sciennces
575 vol

University of Latvia
Riga 1992

BBK 22

Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietiškās problēmas/ Atb.red. prof. H.Kalis. - Rīga: LU, 1992. - 575.sēj. - 150 lpp.

Zinātnisko rakstu krājums ietver Latvijas zinātnieku un augstskolu pasniedzēju un aspirantu zinātniskos darbus, izstrādātus laika periodā no 1991. - 1992. gadam matemātiskajā modelēšanā, risinot dažādas matemātiskās fizikas lietiškās problēmas.

Krājums domāts vecāko kursu studentiem, aspirantiem un zinātniskajiem darbiniekiem.

SATURA RĀDĪTĀJS

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Н.А.Авдонин, Х.Э.Калис
Латвийский университет

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВИБРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

В работе /I/ была предложена осредненная модель гидродинамики, описывающая вторичные течения в жидкости, возникающие под влиянием вибрирующего твердого тела. Численные расчеты по осредненной модели были сопоставлены с результатами эксперимента, проведенного на модельной жидкости вода-глицерин, и дали хорошее совпадение /I/, см. рис.I.

В настоящей работе проведен анализ гидродинамических потоков в неизотермической жидкости в сосуде с радиусом R при наличии в ней вибрирующего твердого тела с радиусом r_0 и с высотой $H = Z - z_0$, рис.2. Анализ будем проводить на конкретном случае высокотемпературного расплава и кристалла Γ_4, Γ_5 , погруженного в расплав. Кристалл вибрирует в вертикальном направлении с частотой ω и амплитудой a . Вначале опишем метод расчета и примененные разностные схемы, затем приведем анализ взаимодействия вибрационной и естественной конвекции.

I. Уравнения гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости в переменных скорости после осреднения остаются неизменными и для цилиндрической системы координат имеют вид (знак осреднения опущен):

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)\right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right), \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\right) + g\beta(T - T_0), \quad (2)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где V_r, V_z – составляющие скорости, p, T, T_0 – давление, температура среды и температура равновесия, g, ν, β – коэффициенты ускорения свободного падения, кинематической вязкости, объемного расширения.

Однако на поверхности вибрирующего тела (Γ_5) вместо условий прилипания должны выполняться следующие условия третьего рода /I/

$$\nu\frac{\partial V_r}{\partial z} = -\nu\delta^{-1}V_r + \frac{4}{\delta}a^2\delta^{-1}n^2\omega^2 r,\ V_z = 0\ (z = z_0,\ 0 < r < r_0), \quad (4)$$

где $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$.

На остальных границах области $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4)$ выполняются обычные условия прилипания или условия на свободной поверхности жидкости (Γ_3).

Уравнение теплопроводности

$$C_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - C_p\rho\left(V_z\frac{\partial T}{\partial z} + V_r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \quad (5)$$

справедливо как в расплаве, так и в кристалле $(V_r = V_z = 0)$, где λ, C_p, ρ – соответствующие коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотности. Для T на границах $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ставится условие 3-его рода

$$-\lambda\,\partial T/\partial n = \alpha(T - T_B), \quad (6)$$

где n – внешняя нормаль к границе, α – коэффициенты теплоотдачи, T_B – внешняя температура.

Уравнение неразрывности (3) выполняется автоматически, если $V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}$, $V_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$, где ψ – функция тока жидкости. Если без функции тока ψ ввести еще нормированную функцию вихря $u = rot_\theta\vec{V}/r$ ($rot_\theta\vec{V}$ – функция завихренности), то из (I-3) следует система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\nu}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial u}{\partial r}\right) - V_r\frac{\partial u}{\partial r} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - V_z\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\beta g}{r}\frac{\partial T}{\partial r} \quad (7)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = -ru. \quad (8)$$

Уравнение (8) аппроксимируется на основной неравномерной сетке W_h с узлами (r_i, z_j), $i=\overline{1,N+1}$, $j=\overline{1,M+1}$ симметрическими разностным уравнениям /2/

$$a_{i+1j}(\psi_{i+1j}-\psi_{ij})-a_{ij}(\psi_{ij}-\psi_{i-1j})+b_{ij+1}(\psi_{ij+1}-\psi_{ij})-$$
$$-b_{ij}(\psi_{ij}-\psi_{ij-1})=-r_i u_{ij}\hbar_i \bar{g}_j,\ i=\overline{2,N},\ j=\overline{2,M}, \tag{9}$$

где
$$a_{ij}=\frac{1}{r_{i-0,5}}\frac{\bar{g}_j}{h_i},\ b_{ij}=\frac{1}{r_i}\frac{\hbar_i}{g_j},\ a_{i+1j}=\frac{1}{r_{i+0,5}}\frac{\bar{g}_j}{h_{i+1}},$$
$$b_{ij+1}=\frac{1}{r_i}\frac{\hbar_i}{g_{j+1}},\ h_i=r_i-r_{i-1},\ g_j=z_j-z_{j-1},$$
$$\bar{g}_j=0{,}5(g_{j+1}+g_j),\ \hbar_i=0{,}5(h_{i+1}+h_i),\ r_1=0,\ r_{N+1}=R,$$
$$r_{i+0,5}=r_i+h_{i+1}/2,\ r_{i-0,5}=r_i-h_i/2,\ z_{M+1}=Z,\ z_{MN}=z_0,$$
$$z_1=0,\ r_{NH}=r_0.$$

Уравнение (I) аппроксимируется на сдвинутой на полшага относительно основной сетки W_h сетке $W_{h/2}$ с узлами $(r_{i+0,5}, z_{j+0,5})$ $i=\overline{1,N}$; $j=\overline{1,M}$,

причем для составляющих вектора скорости следуют выражения:

$$(V_r)_{i,j+0,5}=-\frac{1}{r_i g_{j+1}}(\psi_{ij+1}-\psi_{ij}),\ i=\overline{1,N+1},\ j=\overline{1,M},$$

$$(V_z)_{i+0,5,j}=\frac{1}{r_{i+0,5}h_{i+1}}(\psi_{i+1j}-\psi_{ij}),\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M+1}. \tag{10}$$

Для разностной аппроксимации по пространству уравнения (I) используется монотонная разностная схема вида /3,4/

$$\tilde{g}_j\tilde{\hbar}_i\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij}=B^{(1)}_{ij}(u_{i+1j}-u_{ij})-A^{(1)}_{ij}(u_{ij}-u_{i-1j})+$$
$$+B^{(2)}_{ij}(u_{ij+1}-u_{ij})-A^{(2)}_{ij}(u_{ij}-u_{ij-1})-Q_{ij}u_{ij}+F_{ij},$$
$$i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M}, \tag{11}$$

где

$$B^{(1)}_{ij}=\nu\frac{r^3_{i+1}}{r^3_{i+0,5}}\frac{\tilde{g}_j}{h^+_i}s((v_r)_{i+0,5,j}h^+_i/\nu),\ A^{(1)}_{ij}=\nu\frac{r^3_i}{r^3_{i-0,5}}\frac{\tilde{g}_j}{h^-_i}\cdot$$

$$\cdot s(-(v_r)_{i-0,5,j}h^-_i/\nu),\ B^{(2)}_{ij}=\nu\frac{\tilde{h}_i}{g^+_j}s((v_z)_{i,j+0,5}g^+_j/\nu),$$

$$A^{(2)}_{ij}=\nu\frac{\tilde{h}_i}{g^-_j}s(-(v_z)_{i,j-0,5}g^-_j/\nu),\quad s(z)=z/(e^z-1),$$

$$F_{ij}=-\frac{\beta g}{r_{i+0,5}}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{ij}\tilde{g}_j\tilde{h}_i,\ h^+_i=r_{i+1,5}-r_{i+0,5},$$

$$h^-_i=r_{i+0,5}-r_{i-0,5},\ g^+_j=z_{j+1,5}-z_{j+0,5},\ g^-_j=z_{j+0,5}-$$

$$-z_{j-0,5},\ \tilde{h}_i=0,5(h^+_i+h^-_i)=h_{i+1},\ \tilde{g}_j=0,5(g^+_j+g^-_j)=g_{j+1},$$

$$Q_{ij}=0,\ u_{ij}=u(t,r_{i+0,5},z_{j+0,5}),\ldots$$

Для уравнения теплопроводности (5) монотонная аппроксимация на сетки $W_{h/2}$ имеет вид:

$$\tilde{g}_j\tilde{h}_i\left(c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{ij}=\tilde{B}^{(1)}_{ij}(T_{i+1j}-T_{ij})-\tilde{A}^{(1)}_{ij}(T_{ij}-T_{i-1j})+$$

$$+\tilde{B}^{(2)}_{ij}(T_{ij+1}-T_{ij})-\tilde{A}^{(2)}_{ij}(T_{ij}-T_{ij-1})-\tilde{Q}_{ij}T_{ij}+\tilde{F}_{ij},\quad i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M} \qquad (12)$$

где
$$\tilde{B}^{(1)}_{ij}=\lambda\frac{r_{i+1}}{r_{i+0,5}}\frac{\tilde{g}_j}{h^+_i}s((\tilde{v}_r)_{i+0,5,j}h^+_i/\lambda),$$

$$\tilde{A}^{(1)}_{ij}=\lambda\frac{r_i}{r_{i-0,5}}\frac{\tilde{g}_j}{h^-_i}s(-(\tilde{v}_r)_{i-0,5,j}h^-_i/\lambda),$$

$$\tilde{B}^{(2)}_{ij}=\lambda\frac{\tilde{h}_i}{g^+_i}s((\tilde{v}_z)_{i,j+0,5}g^+_j/\lambda),\ A^{(2)}_{ij}=\lambda\frac{\tilde{h}_i}{g^-_i}s(-(\tilde{v}_z)_{i,j-0,5}g^-_j/\lambda),$$

$$\tilde{Q}_{ij}=\tilde{F}_{ij}=0,\ \tilde{v}_r=v_r c_p\rho,\ \tilde{v}_z=v_z c_p\rho,$$

$$T_{ij}=T(t,r_{i+0,5},z_{j+0,5}),\ldots$$

С учетом определения функции вихря u, граничное условие (4) имеет вид (Γ_5)

$$\psi = 0,\ u = -\delta^{-1}\left(r^{-1}V_r - \frac{4}{8}\pi^2 a^2 \omega^2 r/\nu\right), \tag{13}$$

где

$$(V_r)\Big|_{\Gamma_5} = r^{-1}_{i+0,5}(\psi_{i+1,HN-1} + \psi_{i,HN-1})/(2g_{HN}),$$
$$i = \overline{1, NH-1}.$$

Так как граница расчетной области находится между узловыми линиями сетки $Wh/2$, то для граничного условия (6) имеем, например, на Γ_2 следующую аппроксимацию:

$$T_{N+1,j} = T_{Nj} - r_{Nj}(T_{Nj} - T_B), \tag{14}$$

где

$$r_{Nj} = 1/(0,5 + \lambda/(\alpha h_N^+)),\ j = \overline{1,M}.$$

Для монотонной аппроксимации необходимо выполнение условия

$$T_{Nj} \geqslant T_{N+1j} \geqslant T_B \quad \text{или} \quad T_{Nj} \leqslant T_{N+1j} \leqslant T_B,$$

т.е.

$$0 \leq r_{Nj} \leq 1 \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{\alpha h_N^+} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Аналогично аппроксимируется температура в приграничных узлах около границ Γ_3, Γ_1.
На оси симметрии Γ_6: $\partial u/\partial r = \partial T/\partial r = 0$ или

$$T_{0j} = T_{1j},\ u_{0j} = u_{1j},\ j = \overline{1,M}.$$

Функция тока ψ на границе равна нулю. На свободной поверхности Γ_3: $u = 0$.

Для аппроксимации функции вихря u на твердой границе используются условия типа Вудса или Тома /5/.

На горизонтальных границах Γ_1, Γ_5 из уравнения (3) с учетом условий прилипания $\partial\psi/\partial z = 0$ и непротекания $\psi = 0$ следует:

$$-r^2 u_s = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\Big|_s, \; -r^2 \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_s = \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3}\Big|_s,$$

а из разложения ряда Тейлора:

$$\psi_{s1} = \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\Big|_s \pm \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3}\Big|_s + O(h^4) =$$

$$= -\frac{h^2 r^2}{2} u_s \pm \frac{h^3}{6}\left(-r^2 \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_s\right) + O(h^4) =$$

$$= -\frac{h^2 r^2}{2} u_s - \frac{h^3 r^2}{6}\,\frac{u_{s1} - u_s}{h/2} + O(h^4) =$$

$$= -\frac{h^2 r^2}{6} u_s - \frac{h^2 r^2}{3} u_{s1} + O(h^4),$$

т.е. $$u_s = -\frac{6}{h^2 r^2}\psi_{s1} - 2u_{s1} + O(h^5). \qquad (15)$$

Здесь использована формула $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_s = \pm\frac{u_{s1} - u_s}{h/2} + O(h)$, индексом S обозначаются величины на твердой границе, а $S1$ – на ближайшей узловой линии к границе, знак + относится нижней стенке Γ_1, а – верхней Γ_5, Γ_3; h – расстояние между узловыми линиями около границе на сетке W_h.

На вертикальных стенках Γ_2, Γ_4 из уравнения (8) с учетом $\frac{\partial \psi}{\partial r}\Big|_s = \psi_s = 0$ следует:

$$-r^2 u_s = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\Big|_s, \; -2ru_s - r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_s = \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3}\Big|_s - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\Big|_s,$$

т.е.

$$\psi_{s1} = \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\Big|_s \pm \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3}\Big|_s + O(h^4) =$$

$$= -\frac{h^2 r^2}{2} u_s \pm \frac{h^3}{6}\left(-2ru_s - r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_s - ru_s\right) + O(h^4) =$$

$$= -\frac{h^2 r^2}{2} u_s \pm \frac{h^3}{6}\left(-3ru_s \mp r^2 \frac{u_{s1} - u_s}{h/2}\right) + O(h^4) =$$

$$= -\frac{h^2 r^2}{6} u_s \mp \frac{h^3 r}{2} u_s - \frac{h^2 r^2}{3} u_{s1} + O(h^4)$$

или $$u_s = -\frac{6}{h^2 r^2}\psi_{s1} / (1 \pm 3h/r) - \frac{4}{1 \pm 3h/r}\,\frac{u_{s1}}{2} + O(h^2), \qquad (16)$$

где знак + относится к левой стенке Γ_4, а – к правой – Γ_2.

При использовании условий типа Тома на стенках имеем

$$\psi_{s1} = -\frac{h^2 r^2}{2} u_s + O(h^3)$$

или

$$u_s = -\frac{2}{h^2 r^2} \psi_{s1} + O(h) . \qquad (17)$$

Формально условие Тома (17) имеет первый порядок точности, но практически-второй /5/.

Так как разностные уравнения (11) выписаны на сетке $\omega_{h/2}$, то около границы используются следующие поправки в коэффициентах разностных уравнений:

1) на Γ_1 ($j = 1$, $i = \overline{1, N}$) с учетом (15),(17):

$$u_{i,0} = 2 u_s - u_{i,1} = 2 K_i - (4\mathcal{F}+1) u_{i,1} ,$$

$$- A^{(2)}_{i,1} (u_{i,1} - u_{i,0}) = - A^{(2)}_{i,1} [(4\mathcal{F}+2) u_{i,1} - 2 K_i],$$

т.е. в (11) при $j = 1$ появляется член с $Q_{i,1} = A^{(2)}_{i,1} (4\mathcal{F}+2)$, а в правой части к F_{ij} прибавляется $2 A^{(2)}_{i,1} K_i$, где K_i - слагаемое, содержащее ψ_{s1} в граничных условиях (15), (17), а $\mathcal{F} = 0$ - для условий Тома (17), $\mathcal{F} = 1$ - для условий Вудса (15);

2) на Γ_2 ($i = N$, $j = \overline{1, M}$) с учетом (16),(17):

$$u_{N+1,j} = 2 u_s - u_{N,j} = 2 K_j - (4\mathcal{F}+1) u_{N,j} / (1 - 3h/r),$$

$$B^{(1)}_{N,j} (u_{N+1,j} - u_{N,j}) = 2 K_j B^{(1)}_{N,j} - B^{(1)}_{N,j} u_{N,j} (4\mathcal{F}+2) / (1 - 3h/r),$$

т.е. в (11) при $i = N$ появляется член

$$Q_{N,j} = B^{(1)}_{N,j} (4\mathcal{F}+2) / (1 - 3h/r),$$

а в правой части к $F_{i,j}$ прибавляется $2 B^{(1)}_{N,j} K_j$, где K_j - слагаемое, содержащее ψ_{s1} в (16),(17);

3) на $\Gamma_3\ (j=M,\ i=\overline{NM,N})$ с учетом $u=0$:

$$u_{i,M+1} = -u_{i,M}$$

$$B^{(2)}_{i,M}(u_{i,M+1}-u_{i,M}) = -2B^{(2)}_{i,M}u_{i,M},$$

т.е. в (II) $Q_{i,M} = 2B^{(2)}_{i,M}$;

4) на $\Gamma_4\ (i=NM,\ j=\overline{MN,M})$ с учетом (16),(17):

$$u_{NM-1,j} = 2u_s - u_{NM,j} = 2K_j - (4\mathcal{F}/(1+3h/r)+1)\cdot$$

$$\cdot u_{NM,j},\quad -A^{(1)}_{NM,j}(u_{NM,j}-u_{NM-1,j}) = 2K_j A^{(1)}_{NM,j} -$$

$$-A^{(1)}_{NM}(4\mathcal{F}/(1+3h/r)+2)u_{NM,j},$$

т.е. в (II) при $i=NM$

$$Q_{i,j} = A^{(1)}_{i,j}((4\mathcal{F}+a)/(1+3h/r)+2),$$ а

к $F_{i,j}$ прибавляется $2K_j A^{(1)}_{i,j}$;

5) на $\Gamma_5\ (j=MN-1,\ i=\overline{1,NM-1})$ с учетом (13):

$$u_{i,MN} = 2u_s - u_{i,j} = 2K_i - u_{i,j},$$

$$B^{(2)}_{i,j}(u_{i,j+1}-u_{i,j}) = -2B^{(2)}_{i,j}u_{i,j} + 2K_i B^{(2)}_{i,j},$$

т.е. в (II) при $j=MN-1$ имеем

$Q_{i,j} = 2B^{(2)}_{i,j}$, а к $F_{i,j}$ прибавляется $2K_i B^{(2)}_{i,j}$,

где K_i - правая часть выражения (13);

если граница Γ_5 не вибрирует, то с учетом (15),(17):

$$u_{i,MN} = 2u_s - u_{ij} = 2K_i - (4\mathcal{J}+1)u_{ij},$$

$$B_{ij}^{(2)}(u_{ij+1} - u_{ij}) = 2B_{ij}^{(2)}K_i - B_{ij}^{(2)}(4\mathcal{J}+2)u_{ij},$$

т.е. в (II) при $j = MN-1$,

$Q_{ij} = B_{ij}^{(2)}(4\mathcal{J}+2)$, а к F_{ij} прибавляется слагаемое $2B_{ij}^{(2)}K_i$.

6) на Γ_6 $(i=1, j=\overline{1,M})$ с учетом условий симметрии $u_{0j} = u_{1j}$. т.е. из условия

$-A_{1j}^{(1)}(u_{1j} - u_{0j}) = 0$ следует, что $A_{1j}^{(1)} = 0$.

Аналогично ставятся граничные условия для температуры. Например, на границе Γ_2 из (I2),(I4) следует, что при $i=N$

$$\widetilde{B}_{Nj}^{(2)}(T_{i+1,j} - T_{i,j}) = -r_{Nj}\widetilde{B}_{Nj}^{(2)}(T_{Nj} - T_B),$$

т.е. в уравнениях (I2) при $i=N$ появляется член $\widetilde{Q}_{ij} = r_{Nj}\widetilde{B}_{Nj}^{(2)}$, а в правой части к $\widetilde{F}_{ij}$ прибавляется слагаемое $r_{Nj}\widetilde{B}_{Nj}^{(2)}T_B$.

На других границах:

I) $(j=1)$

$$T_{i,1} - T_{i,0} = r_{i,1}(T_{i,1} - T_B); \quad r_{i,1} = 1/(0{,}5 + \lambda/(\alpha g_1)),$$

$$-\widetilde{A}_{i,1}^{(2)}(T_{i,1} - T_{i,0}) = -r_{i,1}\widetilde{A}_{i,1}^{(2)}(T_{i,1} - T_B),$$

т.е. в уравнениях (I2)

$\widetilde{Q}_{ij} = r_{i,1}\widetilde{A}_{i,1}^{(2)}$, $\widetilde{F}_{ij} = r_{i,1}\widetilde{A}_{i,1}^{(2)}T_B$;

2) Γ_3 $(j=M)$

$$T_{i,M+1}-T_{i,M}=-r_{i,M}(T_{i,M}-T_B),\ r_{i,M}=1/(0{,}5+\lambda/(\alpha g_M^+)),$$

$$\tilde{B}^{(2)}_{i,M}(T_{i,M+1}-T_{i,M})=-r_{i,M}\tilde{B}^{(2)}_{i,M}(T_{i,M}-T_B),$$

т.е. в (I2) имеем

$$\tilde{Q}_{ij}=r_{i,M}\tilde{B}^{(2)}_{i,M},\quad \tilde{F}_{ij}=r_{i,M}\tilde{B}^{(2)}_{i,M}T_B,$$

3) $\Gamma_6\ (i=1)$, $T_{0j}=T_{1j}$, что выполняется автоматически, так как $\tilde{A}^{(1)}_{1j}=0$.

Для аппроксимации производной $(\partial T/\partial r)_{ij}$ в правой части (II) на сетке $\omega_{h/2}$ используется разностная формула второго порядка точности

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{ij}=\left(\frac{h_i^-}{h_i^+}(T_{i+1j}-T_{ij})+\frac{h_i^+}{h_i^-}(T_{ij}-T_{i-1j})\right)/(h_i^++h_i^-). \tag{18}$$

Для вычисления функций $S(z)$, $S(-z)$ используется степенная аппроксимация /3/

$$S(z)=S(|z|)+\max(-z,0),\ S(-z)=S(|z|)+\max(z,0),$$

где

$$S(|z|)=\max\left(0,\ (1-0{,}1|z|)^5\right).$$

Разностные схемы имеют по крайней мере второй порядок аппроксимации и монотонны, т.к.

$$A^{(1)}_{ij}>0,\ B^{(1)}_{ij}>0,\ A^{(2)}_{ij}>0,\ B^{(2)}_{ij}>0,\ Q_{ij}\geqslant 0,$$

$$\tilde{A}^{(1)}_{ij}>0,\ \tilde{B}^{(1)}_{ij}>0,\ \tilde{A}^{(2)}_{ij}>0,\ \tilde{B}^{(2)}_{ij}>0,\ \tilde{Q}_{ij}\geqslant 0,$$

$$a_{ij}>0,\ b_{ij}>0.$$

При аппроксимации уравнений по времени используется односторонние разности, т.е. $(\partial u/\partial t)_{ij}\approx(u_{ij}-\check{u}_{ij})/\tau$, $(\partial T/\partial t)_{ij}\approx(T_{ij}-\check{T}_{ij})/\tau$,

где $\check{u}$, $\check{T}$ - значения u, T на предыдущем слое времени, τ - шаг по времени.

На текущем слое времени разностные уравнения (II),(I2) реализованы методом релаксации, а разностные уравнения (9) решались методом Холецкого /2/. Начальные условия: $u = 0$, $T = 1500\ C^0$.

Параметры задачи: $Z = R = 6$ см, $z_0 = 3{,}9$ см, $r_0 = 3$ см, $\nu = 14;\ 0{,}36$, $\rho C_p = 1{,}2$; $\beta g = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}4$.

Параметры сетки: $N = M = 22$.

Сетка почти равномерная, за исключением узловых линий в окрестности $j = MN$ и $i = NM$, где шаги сетки для трех узловых линий в 2 раза меньше, чем остальные, $\tau = 0{,}05$,

на Γ_1 : $\alpha = 1$, $T_B = 1500\ C^0$,

на Γ_2 : $\alpha = 1$, $T_{B_j} = 1500 - Kz_j$, $j = \overline{1, M+1}$, $K = 20\ 0^0$,

на Γ_3 : $\alpha = 1$, $T_B = 500\ C^0$.

Узлы разностной сетки W_h расположены следующим образом:

$r = 0;\ 0{,}3;\ 0{,}6;\ 0{,}9;\ 1{,}2;\ 1{,}5;\ 1{,}8;\ 2{,}1;\ 2{,}4;\ 2{,}7;\ 2{,}85;\ 3{,}0;\ 3{,}15;\ 3{,}3;\ 3{,}6;\ 3{,}9;\ 4{,}2;\ 4{,}5;\ 4{,}8;\ 5{,}1;\ 5{,}4;\ 5{,}7;\ 6{,}0,$

$z = 0;\ 0{,}3;\ 0{,}6;\ 0{,}9;\ 1{,}2;\ 1{,}5;\ 1{,}8;\ 2{,}1;\ 2{,}4;\ 2{,}7;\ 3{,}0;\ 3{,}3;\ 3{,}6;\ 3{,}75;\ 3{,}9;\ 4{,}05;\ 4{,}2;\ 4{,}5;\ 4{,}8;\ 5{,}1;\ 5{,}4;\ 5{,}7;\ 6{,}0.$

Сходимость метода установления для расчета гидродинамической задачи быстрая (примерно 20 итерационных циклов), но для совместного расчета с учетом температуры-умеренная (около 200 итераций), причем условия типа Вулса более точные. Для ускорения сходимости метода необходимо применять монотонные векторно-разностные схемы /4/.

2. Приведем результаты расчетов для различных температурных режимов на стенках сосуда и различных значений вибрационных параметров a и ω .

рис.3 приведена картина линий тока вторичного вибрационного течения в изотермической жидкости. Как видим, картина течения хорошо согласуется с течением на модельной жидкости (рис.1).

На рис.4 приводится расчетная картина термогравитационного течения без вибрации.

На рис.5 приведена картина течения при вибрационных параметрах ω = 50 Гц, a = 100 мкм в неизотермической жидкости при перепаде температуры по стенке тигля K = 20 C°

Вибрационный поток вытеснет поток естественной конвекции из под кристалла, однако интенсивность потока естественной конвекции остается значительной.

На рис.6 приведена картина течения при усиленных параметрах вибрации ω = 150 Гц, a = 100 ,4к и при тех же тепловых параметрах. Как видно, вибрационный поток становится преобладающим. Конвективный вихрь малой интенсивности наблюдается на дне сосуда. При дальнейшем увеличении вибрационных параметров конвективные потоки практически полностью подавляются.

Полученные результаты могут иметь существенное значение для технологии выращивания монокристаллов из расплава, когда необходимо устранить отрицательное влияние естественной конвекции на качество монокристалла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдонин Н.А., Калис Х.Э. Анализ вторичных течений в жидкости вблизи вибрирующей поверхности//Сб.научных трудов "Прикладные задачи математической физики".- ЛГУ:Рига, 1989.-4-17 с.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука,1978.-591 с.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.- М.: Энергоатомиздат,1984.-151 с.
4. Калис Х.Э. Специальные разностные схемы решения краевых задач математической физики//Электронное моделирование.- Киев.-Т.8.-№ 3.-1986.-С.78-83.
5. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. - М.:Мир, 1980.- 616 с.

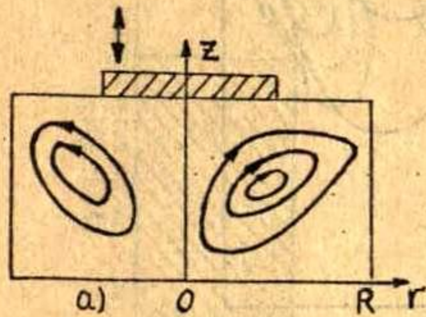


Рис.1. Возникновение вторичного вибрационного потока в жидкости:
а) экспериментальные данные;
б) расчетные уровни линий тока.

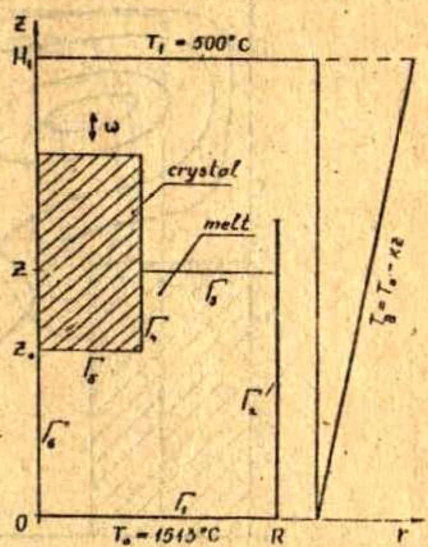
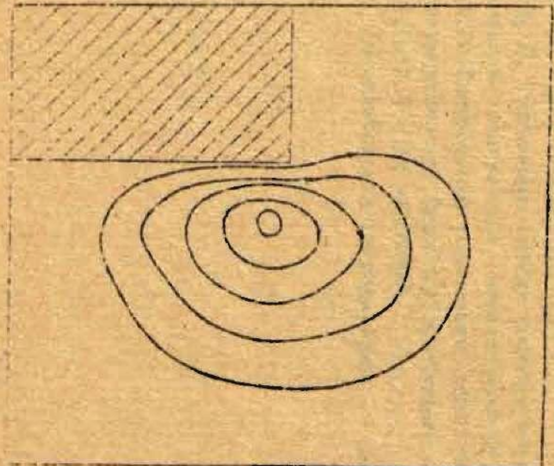


Рис.2. Схема установки.



[illegible] вынужденный поток, линии тока: $\Delta T=0$;
ω [illegible] μ.

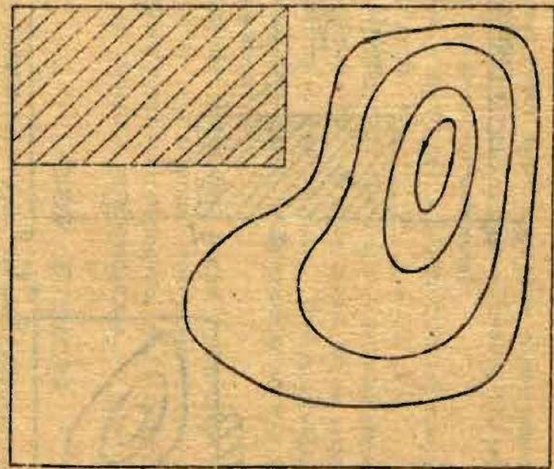


Рис.4. Поток естественной конвекции: $\Delta T=20^{\circ}C$;
$\omega=0$; $B=0$.

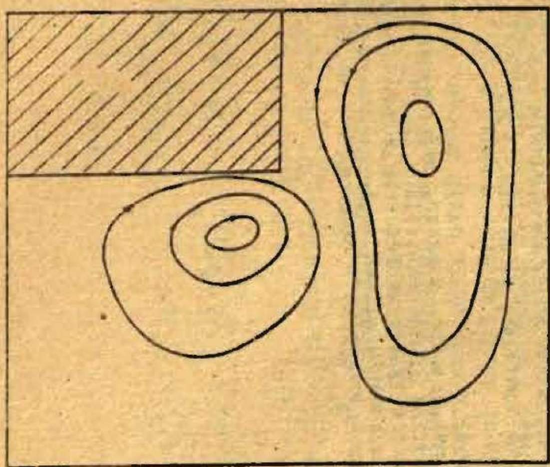


Рис.5. Линии тока при вибрациях и естественной конвекции: $\Delta T=20^\circ C$; $\omega=70$ Гц; $a=100\,\mu$.

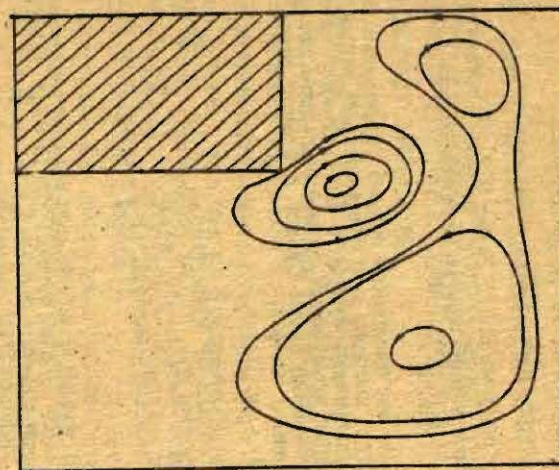


Рис.5. Линии тока: $\Delta T=20^\circ C$; $\omega=150$ Гц; $a=100\,\mu$.

УДК 537.84:669.713.7

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВИБРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ. Авдонин Н.А., Калис Х.Э.//Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.- Рига: ЛУ, 1992. - Вып.3.

В работе проведен численный анализ гидродинамических потоков несжимаемой, вязкой, неизотермической жидкости при наличии в ней вибрирующего твердого тела. Анализ проведен на основе применения монотонных разностных схем для расчета полной системы уравнений Навье-Стокса с учетом термогравитационной конвекции.
Библ. 5 назв.

NUMERICAL ANALYSIS OF VIBRATIONAL FLOWS OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLUID. Avdonin N., Kalis H. // The mathematical modelling. Applied problems of mathematical physics. Riga: LU, 1992.- vol.3.

The numerical analysis of the hydrodinamical flow of viscous incompressible nonisothermal fluid with vibrating solid body is carried out. The analysis is based on monotoneus difference schemes for calculation of the full system of Navje-Stoksa equations with taking into account the thermogravitational convection.
Ref. 5.

NEIZOTERMISKA ŠĶIDRUMA VIBRĀCIJAS PLŪSMU SKAITLISKĀ ANALĪZE. Avdoņins N., Kalis H. // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas.-Rīga: LU,1992.- 3.sēj.

Darbā veikta nesaspiežama viskoza, neizotermiska šķidruma hidrodinamikas plūsmu skaitliskā analīze atkarībā no cieta ķermeņa vibrācijas. Analīze pamatojas uz monotonu diferenču shēmu izmantošanu pilnas Navje-Stoksa vienādojumu sistēmas aprēķināšanā, ievērojot termogravitācijas konvekciju.
Bibl. 5 nos.

И.Я.Антимиров, А.А.Пенфорова
РТУ

ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОСОДЕРЖАНИЯ ПЛАСТА ПРИ ТЕПЛОВОЙ ИНЖЕКЦИИ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ МЕЖФАЗНОГО ТЕПЛООБМЕНА

В монографии /I/ найден интегральный поток тепла $w_0(t)$ от твердой к жидкой фазе при нагнетании теплоносителя в теплоизолированный от кровли и подошвы пласт, а в случае нетеплоизолированного пласта проведены лишь некоторые оценки. В данной работе при тех же предположениях, что и в /I/, получено точное выражение $w_0(t)$ для нетеплоизолированного пласта, а также теплосодержание твердой и жидкой фаз пласта в каждый момент времени t.

Рассматривается бесконечно глубоко залегающий горизонтальный пласт, расположенный в области $-\infty < \tilde{x}, \tilde{y} < +\infty$, $-2h \le \tilde{z} \le 0$. Кровля и подошва расположены, соответственно, в областях $-\infty < \tilde{x}, \tilde{y} < +\infty$, $0 < \tilde{z} < +\infty$ и $-\infty < \tilde{x}, \tilde{y} < +\infty$, $-\infty < \tilde{z} < -2h$. Через одну или несколько скважин, трактуемых как линейные источники несжимаемой жидкости, в пласт нагнетается несжимаемая жидкость с постоянной температурой T_b на оси скважин. Ниже рассматривается случай нагнетания жидкости через одну скважину с объемным расходом Q, и указаны лишь небольшие изменения в выкладочной части, которые нужно произвести в случае нескольких скважин. Теплофизические свойства кровли и подошвы считаются одинаковыми, и ниже рассматривается только область $\tilde{z} \ge -h$.

Введем безразмерные величины:

$$u = \frac{T_{ж} - T_0}{T_b - T_0}, \quad v = \frac{T_c - T_0}{T_b - T_0}, \quad w = \frac{T_к - T_0}{T_b - T_0}, \quad a^2 = a_c^2 / a_{ж}^2,$$

$$r = \tilde{r}/h, \quad z = \tilde{z}/h, \quad t = a_{ж}^2 \tilde{t}/h^2, \quad \nu = Qc_{ж}/(8\pi m h \lambda_{ж}), \tag{I}$$

$$\alpha = h^2 \alpha_{1,2}/(\lambda_{ж} m), \quad B = m c_{ж} \alpha / [(1-m) c_c],$$

$$a^{*2} = a_к^2 / a_{ж}^2,$$

где T_0 - начальная температура пласта и кровли, $T_{ж}$, T_c, $T_к$ - температуры, $a^2_{ж}$, $a^2_к$, a^2_c - коэффициенты температуропроводности жидкости, скелета пласта и кровли, $\lambda_{ж}$, $C_{ж}$ - коэффициент теплопроводности и объемная теплоемкость жидкости, m - пористость и равная ей средняя просветность, $\alpha_{1,2}$ - коэффициент межфазного теплообмена между жидкостью и скелетом пласта. Тогда математическая постановка задачи примет вид (см. /I/, с. 84):

$$a^{*2} L_0 w = \partial w/\partial t, \quad 0<r,z,t<+\infty, \tag{2}$$

$$a^2 L_0 v + \beta(u-v) = \partial v/\partial t, \tag{3}$$

$$0<r,t<+\infty, \; -1<z<0,$$

$$L_\nu u - \alpha(u-v) = \partial u/\partial t, \; L_\nu = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-2\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{4}$$

$$t=0: u=v=w=0; \; r=0: u=1; \; z=-1: \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \tag{5}$$

$$z=0: u=v=w; \; r^2+z^2 \to \infty: u,v,w \to 0. \tag{6}$$

Что касается граничных условий в плоскости $z=0$ контакта двухфазного пласта и непроницаемой кровли, то (в отличие от /I/) естественно предположить, что поток тепла в кровлю равен сумме потока тепла от жидкой фазы (с долей m) и от твердого скелета (с долей $1-m$):

$$\tilde{z}=0: -\lambda_к \frac{\partial T_к}{\partial \tilde{z}} = -m\lambda_{ж} \frac{\partial T_{ж}}{\partial \tilde{z}} - (1-m)\lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial \tilde{z}}. \tag{7}$$

После перехода к безразмерным величинам из (7) следует:

$$z=0: \lambda^* \partial w/\partial z = m\, \partial u/\partial z + \lambda(1-m)\partial v/\partial z, \tag{8}$$

где $\lambda^* = \lambda_к/\lambda_{ж}$, $\lambda = \lambda_c/\lambda_{ж}$, $\lambda_к$ и λ_c - коэффициенты теплопроводности кровли и скелета.

Интегральный поток тепла от жидкости к скелету пласта определяется соотношением (см. / I/):

$$w_0(t)=2\pi\int_{-1}^{0}A(z,t)dz\,,\quad A(z,t)=\int_{0}^{\infty}r(u-v)dr. \qquad (9,10)$$

Вместо аппарата функций Грина, используемого в /I/, применим для определения $w_0(t)$ более эффективный метод, используемый ранее в /2/ для точного определения теплосодержания пропластков в многослойном однофазном пласте. Для этого умножим уравнения (2), (3) и (4) на r, проинтегрируем по r от нуля до бесконечности и используем условия на бесконечности (6) (предполагая, что $r\partial u/\partial r$ тоже стремится к нулю на бесконечности). Применяя затем к полученным уравнениям преобразование Лапласа по времени, получим задачу:

$$\bar{\tilde{w}}''=\frac{p}{a^{*2}}\bar{\tilde{w}},\quad 0<z<+\infty,\qquad '=d/dz, \qquad (11)$$

$$a^2\bar{\tilde{v}}''+\beta(\bar{\tilde{u}}-\bar{\tilde{v}})=p\bar{\tilde{v}}, \qquad (12)$$

$$-1<z<0,$$

$$\frac{2\nu}{p}+\bar{\tilde{u}}''-\alpha(\bar{\tilde{u}}-\bar{\tilde{v}})=p\bar{\tilde{u}}, \qquad (13)$$

$$z=-1:\ \bar{\tilde{u}}'=\bar{\tilde{v}}'=0;\ z\to\infty:\ \bar{\tilde{u}},\bar{\tilde{v}},\bar{\tilde{w}}\to 0; \qquad (14)$$

$$z=0:\ \bar{\tilde{u}}=\bar{\tilde{v}}=\bar{\tilde{w}},\ \lambda^*\bar{\tilde{w}}'=m\bar{\tilde{u}}'+\lambda(1-m)\bar{\tilde{v}}'. \qquad (15)$$

Здесь:

$$\tilde{f}(z,t)=\int_0^\infty rf(r,z,t)dr,\quad \bar{\tilde{f}}(z,p)=\int_0^\infty\tilde{f}(z,t)e^{-pt}dt. \qquad (16)$$

Как и в /I/, дальнейшее решение задачи проведем при $a^2=1$. Тогда из (12) и (13) можно получить задачу для $\bar{\tilde{u}}-\bar{\tilde{v}}$, причем $\bar{\tilde{u}}-\bar{\tilde{v}}=0$ при $z=0$, так что уравнение (11) и второе граничное условие в (15) не используются. Тогда, решая задачу (11)-(15), найдем, применяя преобразование Лапласа к (9,10), что

$$\overline{w}_0(p)=\frac{4\pi\nu}{p\gamma^2}\left(1-\frac{1}{\gamma\,\mathrm{ch}\frac{1}{2}\gamma}\right)=$$

$$=\frac{4\pi\nu}{p\gamma^2}-\frac{8\pi\nu}{p\gamma^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\gamma}, \qquad \gamma=\sqrt{p+\alpha+\beta}. \tag{I7}$$

Первое слагаемое в (I7) соответствует изображению Лапласа функции $w_0(t)$ для теплоизолированного пласта (см. /I/), а второе слагаемое – дополнительным потерям тепла в кровлю и подошву. После обращения (I7) получим интегральный поток тепла от жидкости к скелету пласта в виде формулы, вполне пригодной для числовых расчетов:

$$w_0(t)=\frac{4\pi\nu}{\delta^2}\left(1-e^{-\delta t}\right)-$$

$$-8\pi\nu\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2\delta}\left[e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{2\sqrt{t}}-\delta\sqrt{t}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{t}}+\delta\sqrt{t}\right)\right]-e^{-\delta^2 t}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-\frac{\delta^2}{4t}}-\right.$$

$$\left.\left.-\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{erfc}\,\frac{n+\frac{1}{2}}{2\sqrt{t}}\right]\right\}, \qquad \delta=\sqrt{\alpha+\beta}. \tag{I8}$$

Найдем теперь теплосодержание жидкой и твердой фаз, определяемые соотношениями:

$$\hat{u}(t)=2\pi\int_{-1}^{0}dz\int_{0}^{\infty}r u\,dr, \quad \hat{v}(t)=2\pi\int_{-1}^{0}dz\int_{0}^{\infty}r v\,dr. \tag{I9}$$

Ограничимся, как и в /1/, случаем

$$\alpha=\beta, \quad m/\lambda^{*}=(1-m)\lambda/\lambda^{*}\equiv\kappa. \tag{20}$$

Тогда из (II)-(I5) найдем

$$\hat{u}(t)=\frac{1}{2}\left[w_0(t)+\Psi(t)\right],\ \hat{v}(t)=\frac{1}{2}\left[\hat{\Psi}(t)-w_0(t)\right], \qquad (21)$$

где $w_0(t)$ определяется формулой (18) (при $\alpha=\beta$), а

$$\hat{\Psi}(t)=2\nu\left\{t-\frac{1+\mu}{2ka^*}\sum_{n=0}^{\infty}\mu^n\left[\frac{1}{3}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left(4t+\alpha_n^2\right)e^{-\alpha_n^2/4t}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha_n\left(t+\frac{1}{6}\alpha_n^2\right)\operatorname{erfc}\frac{\alpha_n}{2\sqrt{t}}\right]\right\},\ \alpha_n=2n+1,\ \mu=\frac{2ka^*-1}{2ka^*+1}. \qquad (22)$$

При тепловой инжекции через n произвольно расположенных скважин с расходами Q_i ($i=0, 1, 2, \ldots, n$) и постоянной температурой на оси скважин нужно (см. /2/) записать уравнения (2)-(4) в прямоугольных координатах, причем уравнение (4) нужно записать в виде

$$\Delta u - \operatorname{div}(u\vec{v})-\alpha(u-v)=\partial u/\partial t. \qquad (23)$$

Затем надо проинтегрировать эти уравнения по x и по y в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, применив при интегрировании уравнения (23) плоский аналог формулы Остроградского-Гаусса. В результате получается та же система (11)-(15), в которой параметр ν заменится на параметр $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n$ ($\nu_i = Q_i a_{\text{ж}}^2/8\pi m h$). Таким образом, решение задачи в этом случае дается формулами (18), (21), (22), в которых нужно сделать указанную замену.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рубинштейн Л.И. Температурные поля в нефтяных пластах. - М. - 1972. - 276 с.
2. Панферова А.А. Точное определение теплосодержания пропластков при тепловой инжекции в многослойный пласт// Изв. АН Латв ССР. Сер. физ. и техн. наук. - 1986. - № 4. - С. 80-87.

УДК [illegible].276.05

ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОСОДЕРЖАНИЯ ПЛАСТА ПРИ ТЕПЛОВОЙ ИНЖЕКЦИИ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ МЕЖФАЗНОГО ТЕПЛООБМЕНА.

Антимиров М.Я., Панферова А.А. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.-Рига: ЛУ, 1992. - Вып. 3.

Решена задача об интегральном потоке тепла от жидкой к твердой фазе и о теплосодержании твердой и жидкой фаз при тепловой инжекции в нефтяной пласт при конечной скорости межфазного теплообмена. Пласт находится в тепловом контакте с окружающими проницаемыми породами.

Библиогр. 2 назв.

AN EXACT DETERMINATION OF HEAT CONTENTS OF THE STRATUM UNDER THERMAL INJECTION IN THE CASE FINITE HEAT TRANSFER BETWEEN THE FACES. Antimirov M.Ya., Panferova A.A. // The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. Riga: LU: 1992.- Vol.3.

An exact solution of the problem of integral heat transmission from liquid face to hard and determination of heat contents of the liquid and hard faces of the stratum under thermal injection in the case finite heat transfer between the faces is given. The stratum has a heat contact with adjacent formation.

Ref. 2.

PRECĪZA SILTUMA DAUDZUMA NOTEIKŠANA SLĀNIM PIE SILTUMA INŽEKCIJAS STARPFĀZU SILTUMAPMAIŅAS GALĪGĀ GADĪJUMĀ. Antimirovs M., Panfjorova A. //Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas.-Rīga: LU, 1992.- 3.sēj.

Atrisināts uzdevums par siltumintegrālplūsmu no šķidras uz cietu fāzi un siltumietilpība cietā un šķidrā fāzē pie siltuma inžekcijas naftas slānī pie galīga starpfāzu siltumapmaiņas ātruma. Slānis atrodas siltuma kontaktā ar apkārtējo vidi.

A. Buiķis, I. Pagodkina
Latvijas Universitāte

MAINĪGO VIRZIENU METODES IZMANTOŠANA DIVU SASKAROŠOS SLĀŅU KONVEKTĪVĀS DIFŪZIJAS PROBLĒMAS ATRISINĀŠANAI

Pēdējā laikā liela uzmanība tiek veltīta tādai ekoloģijas problēmai kā pazemes ūdeņu piesārņošana. Pazemes ūdeņu plūsmas rezultātā piesārņojums var izplatīties lielos attālumos un apdraudēt izmantojamos tīro ūdeņu avotus. Lai novērstu iespējamās ekoloģiskās katastrofas, ir svarīgi tās prognozēt, izmantojot matemātiskos aprēķinus.

Piesārņojuma izplatīšanos pazemes slāņos pieņemts matemātiski modelēt ar konvektīvās difūzijas vienādojumiem /1-6/. Zemes garozas ieži ir kārtaini un katrai no tām ir savas atšķirīgas īpašības pazemes ūdeņu caurlaidībai. Līdz ar to vienā no slāņiem ūdeņu filtrācija (konvekcija) var notikt ātrāk nekā blakus esošajā, tātad arī piesārņojums vienā slānī izplatās ātrāk, otrā lēnāk, vienlaicīgi difūzijas ceļā nonākot arī no viena slāņa otrā. Tāpēc pietiekami precīzos matemātiskajos modeļos jāņem vērā kā piesārņojuma izplatīšanās ar difūziju un konvekciju katrā no slāņiem, tā arī slāņu savstarpējā mijiedarbība.

Apskatīsim pazemes ūdeņu piesārņojošās pasīvās vielas, t.i., tādas, kas nesorbējas uz poru virsmas, filtrācijas procesu divos blakus esošos slāņos, kur katram no tiem ir atšķirīgi difūzijas, porainības koeficienti un konvekcijas ātrumi.

Pieņemsim, ka sākuma brīdī $t=0$ abu slāņu ieejā - pirmajā un otrajā, notiek piesārņojuma izplūde, t.i., koncentrācija $C=1$. Piesārņojums attiecīgi ar filtrācijas ātrumiem V_1 un V_2 katrā slānī kustas x ass virzienā. Divdimensiju gadījumā piesārņojuma koncentrācijas lauku izmaiņu abos slāņos ar biezumiem H_1 un H_2 apraksta vienādojumi

$$n_i \frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2} + S_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - V_i \frac{\partial C_i}{\partial x}, \quad (i=1,2) \tag{1}$$

$$0 < x < L, \quad -H_1 < y < H_2,$$

ar sākuma nosacījumiem

$$C_1\Big|_{t=0} = C_2\Big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

robežnosacījumiem

$$C_1\Big|_{x=0} = C_2\Big|_{x=0} = 1, \quad D_1 \frac{\partial C_1}{\partial y}\Big|_{y=-H_1} = D_2 \frac{\partial C_2}{\partial y}\Big|_{y=H_2} = 0, \tag{3}$$

$$C_1\Big|_{x=L} = C_2\Big|_{x=L} = 0,$$

un nosacījumiem uz abu slāņu saskaršanās robežas

$$D_1 \frac{\partial C_1}{\partial y}\Big|_{y=-0} = D_2 \frac{\partial C_2}{\partial y}, \tag{4}$$

kur

n_i - aktīvā porainība,

D_i - horizontālās difūzijas koeficienti,

S_i - vertikālās difūzijas koeficienti,

V_i - filtrācijas ātrumi.

Telpas koordinātu asis vērstas šādi: x ass - slāņu saskarsmes horizontālā virzienā, y ass - vertikāli slāņiem, koordinātu sākumpunkts - slāņu ieejā uz saskarsmes līnijas.

Problēmas (1)-(4) skaitliskai risināšanai nepieciešams pietiekami daudz gan skaitļotāja mašīnlaiks, gan atmiņas. Tādēļ turpmāk apskatītā problēma ļauj samazināt atrisinājuma definīcijas apgabalu, līdz ar to arī skaitlisko rezultātu masīvus.

Situācijā, kurā saskarošos slāņu īpašības izsaka šādas to parametru attiecības:

$$D_1 \gg D_2 \qquad \text{un} \qquad V_2 n_1 \le V_1 n_2$$

problēmas (1)-(4) vietā formulēts matemātiskais modelis ar "koncentrētu kapacitāti" /7,8/:

$$n_2 \frac{\partial c}{\partial t} = \mathcal{D}_2 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + S_2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V_2 \frac{\partial c}{\partial x}, \tag{5}$$

$$0 < x < L, \quad 0 < y < H_2,$$

sākuma nosacījumi

$$c\Big|_{t=0} = 0, \tag{6}$$

neklasiskais nosacījums uz slāņu saskaršanās robežas $y=0$

$$n_1 \frac{\partial c}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial c}{\partial y} + S_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V_1 \frac{\partial c}{\partial x}, \tag{7}$$

nosacījumi uz pārējām apgabala robežām

$$c\Big|_{x=0} = 1, \quad c\Big|_{x=L} = 0, \tag{8}$$

$$\mathcal{D}_2 \frac{\partial c}{\partial y}\Big|_{y=H_2} = 0, \tag{9}$$

kur $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 / \mathcal{D}_2$.

Šāda filtrācijas uzdevuma nostādne (5)-(9) ļauj skaitliski atrisināt filtrācijas problēmu tikai augšējā (kuru raksturo indekss 2) slānī, kurā piesārņojums filtrējas ātrāk nekā apakšējā. Vielas koncentrāciju apakšējā slānī raksturo koncentrācijas funkcija $c(x,0,t)$ uz augšējā slāņa apakšējās robežas $y=0$. Atzīmēsim, ka šī problēma (5)-(9) ir matemātiskās fizikas problēma ar neklasisku robežnosacījumu. Darba mērķis - noskaidrot, kādām filtrācijas problēmas daudzslāņu apgabalu parametru attiecībām uzdevumu (1)-(4) un (5)-(9) atrisinājumu skaitliskie rezultāti ir identiski un kādām nē.

Formulētās problēmas (1)-(4) un (5)-(9) skaitliski risināsim ar režģa metodi. Diferenču shēmu aprēķiniem izmantosim mainīgo virzienu metodi. Definēsim vienmērīgu režģi ar soļiem h_x, h_y, τ un attiecīgi diskrētajiem apgabaliem: divu slāņu gadījumā

$$\omega^1_{h\tau} = \left\{ (x_i, y_k, t_n) \mid x_i = i h_x,\ i = 0,1,\ldots,N;\ y_k = -H_1 + k h_y,\ k = 0,1,\ldots,M;\ t_n = n \cdot \tau,\ n = 0,1,\ldots \right\}$$

un viena slāņa ar neklasisko robežnosacījumu gadījumā

$$\bar{\omega}^{0}_{h\tau} = \left\{ (x_i, y_k, t_n) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i = i h_x,\ i = 0, 1, \dots, N;\ y_k = k h_y,\ k = 0, 1, \dots, M; \\ t_n = n \tau,\ n = 0, 1, \dots \end{array} \right\}$$

ar atbilstošo režģu funkciju

$$u^{n}_{ik} = u(x_i, y_k, t_n).$$

Vienādojumu (1) un (5) skaitliskai risināšanai izmantosim operatoru faktorizācijas shēmas /9/:

$$\begin{cases} n\,\dfrac{\bar{u} - u}{\tau} = \dfrac{1}{2}\left(\mathcal{D}\Lambda_2 u + S\Lambda_1 \bar{u} - V\left(\sigma \Lambda_1^{+} \bar{u} + (1-\sigma)\Lambda_1^{-} \bar{u}\right)\right) \\ n\,\dfrac{\hat{u} - \bar{u}}{\tau} \quad \dfrac{1}{2}\left(\mathcal{D}\Lambda_2 \hat{u} + S\Lambda_1 \bar{u} - V\left(\sigma \Lambda_1^{+} \bar{u} + (1-\sigma)\Lambda_1^{-} \bar{u}\right)\right) \end{cases} \tag{10}$$

šāda realizācija

$$\begin{cases} \left[\frac{n}{\tau}E - \frac{1}{2}S\Lambda_1 + \frac{V}{2}\left(\sigma\Lambda_1^{+} + (1-\sigma)\Lambda_1^{-}\right)\right]\bar{u} = \left[\frac{n}{\tau}E + \frac{1}{2}\mathcal{D}\Lambda_2\right]u \\ \left[\frac{n}{\tau}E - \frac{1}{2}\mathcal{D}\Lambda_2\right]\hat{u} = \left[\frac{n}{\tau}E + \frac{1}{2}S\Lambda_1 - \frac{V}{2}\left(\sigma\Lambda_1 + (1-\sigma)\Lambda_1^{-}\right)\right]\bar{u}, \end{cases} \tag{11}$$

kur

$$\Lambda_1 u = \frac{u^{n}_{i+1,k} - 2u^{n}_{ik} + u^{n}_{i-1,k}}{h_x^2}, \quad \Lambda_2 u = \frac{u^{n}_{i,k+1} - 2u^{n}_{ik} + u^{n}_{i,k-1}}{h_y^2},$$

$$\Lambda_1^{+} = \frac{u^{n}_{i+1,k} - u^{n}_{i,k}}{h_x}, \qquad \Lambda_1^{-} = \frac{u^{n}_{i,k} - u^{n}_{i-1,k}}{h_x},$$

$$u = u^{n} = u(x_i, y_k, t_n),$$

$$\bar{u} = u^{n+1/2} = u(x_i, y_k, t_n + \tfrac{\tau}{2}),$$

$$\hat{u} = u^{n+1} = u(x_i, y_k, t_{n+1}),$$

E - vienības operators,

σ - diferenču operatora svars.

Ja $\sigma = \frac{1}{2}$, diferenču shēma (10) aproksimē vienādojumus (1) un (5) ar kārtu $O(h_x^2, h_y^2, \tau^2)$, attiecīgi, ja $\sigma = 0$ un $\sigma = 1$, ar kārtu $O(h_x, h_y^2, \tau^2)$.

Apskatīsim robežnosacījumu skaitlisko realizāciju slānī $(n + \frac{1}{2})$ mainīgo virzienu metodē problēmai (1)-(4). Aprēķini x ass virzienā, t.i., ar sistēmas (11) pirmo vienādojumu, ņemot vērā, ka $u|_{x=0}$ un $u|_{x=L}$ nav atkarīgi no t, uz robežām $x=0$ un $x=L$

$$\bar{u}|_{x=0} = 1, \qquad \bar{u}|_{x=L} = 0.$$

Funkcijas $\bar{u}$ aprēķini uz robežām $y=-H_1$, $y=0$, $y=H_2$ veikti dažādi

1) funkcija $\bar{u}$ aprēķināta uz robežām ar diskrētās faktorizācijas metodi, realizējot algoritmu:

$$\left[\frac{n}{\tau}E - \frac{S}{2}\Lambda_1 + \frac{V}{2}(\sigma\Lambda_1^+ + (1-\sigma)\Lambda_1^-)\right]\bar{u} = \left[\frac{n}{\tau}E + \mathcal{D}\hat{\Lambda}_2\right]u, \qquad (12)$$

kur attiecīgi uz robežām

$$n=n_1\ (n=n_2),\quad S=S_1\ (S=S_2),\quad V=V_1\ (V=V_2),\quad \mathcal{D}=\mathcal{D}_1\ (\mathcal{D}=\mathcal{D}_2),$$

$$\tilde{\Lambda}_2 u = \frac{u_{i,1}^n - u_{i,0}^n}{h_y^2} \quad \left(\tilde{\Lambda}_2 u = \frac{u_{i,M-1}^n - u_{i,M}^n}{h_y^2}\right),$$

bet uz kopējās robežas

$$\left[\frac{n_1+n_2}{\tau}E - \frac{S_1+S_2}{2}\Lambda_1 + \frac{V_1+V_2}{2}(\sigma\Lambda_1^+ + (1-\sigma)\Lambda_1^-)\right]\bar{u}_r = \qquad (13)$$

$$= \left[\frac{n_1+n_2}{\tau}E + A_1\tilde{\Lambda}_{r1} + A_2\tilde{\Lambda}_{r2}\right]u_r,$$

kur

$$A_1 = \mathcal{D}_1/h_y^2, \quad A_2 = \mathcal{D}_2/h_y^2,$$

$$\tilde{\Lambda}_{r1} = \frac{\mathcal{D}_1}{4\mathcal{D}_2}u_{ir-2} + \left(1-\frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_2}\right)u_{ir-1} + \left(\frac{3}{4}\frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_2} - \frac{5}{4}\right)u_r + \frac{1}{4}u_{r+2},$$

$$\tilde{\Lambda}_{r2} = \frac{1}{4}u_{ir-2} + \left(\frac{3}{4}\frac{\mathcal{D}_2}{\mathcal{D}_1} - \frac{5}{4}\right)u_{ir} + \left(1-\frac{\mathcal{D}_2}{\mathcal{D}_1}\right)u_{ir+1} + \frac{\mathcal{D}_2}{4\mathcal{D}_1}u_{ir+2};$$

2) pieņemot, ka funkcija $\bar{u}$ ir nepārtraukta un pietiekami gluda, tika veikta $\bar{u}$ vērtību ekstrapolācija uz robežām, izmantojot jau izrēķinātās vērtības apgabala iekšienē, atrisinot vienādojuma (11) pirmo vienādojumu;

3) tā kā nosacījumi uz robežām $y=-H_1$, $y=H_2$ nav atkarīgi no t un pieņemot, ka tas ir tā arī uz slāņu saskarsnes robežas, funkcijas $\bar{u}$ vērtības rēķinātas pēc formulām:

$$\bar{u}_{i0} = \frac{1}{3}(4\bar{u}_{i1} - \bar{u}_{i2}), \quad y=-H_1,$$

$$\bar{u}_{iM} = \frac{1}{3}(4\bar{u}_{iM-1} - \bar{u}_{iM-2}), \quad y=H_2,$$

$$\bar{u}_{ir} = \frac{\mathcal{D}_1(4\bar{u}_{ir-1} - \bar{u}_{ir-2}) + \mathcal{D}_2(4\bar{u}_{ir+1} - \bar{u}_{ir+2})}{3(\mathcal{D}_1+\mathcal{D}_2)}, \quad y=0.$$

Problēmai (5)-(9) slānī $(n+\frac{1}{2})$, līdzīgi kā iepriekšējam gadījumam, pārbaudīti šādi varianti:

1) faktorizācija, realizējot uz robežas $y=0$ algoritmu:

$$\left[\left(\frac{n_1}{\tau}E+\xi\frac{n_2}{\tau}\right)E-\frac{1}{2}(S_1+\xi S_2)\Lambda_1+\frac{1}{2}(V_1+\xi V_2)(\sigma\Lambda_1^{+}+(1-\sigma)\Lambda_1^{-})\right]\bar{u}= \\ =\left(\frac{n_1}{\tau}+\xi\frac{n_2}{\tau}-\frac{D_1}{h_y}\right)u_{i1}+\frac{D_1}{h_y}u_{i2}, \quad i=2,3,\dots,N-1, \tag{14}$$

kur $\xi=(h_y\cdot D_1)/(2D_2)$,

bet uz robežas $y=H_2$, algoritmu

$$\left[\frac{n_2}{\tau}E-\frac{S_2}{2}\Lambda_1+\frac{V_2}{2}(\sigma\Lambda_1^{+}+(1-\sigma)\Lambda_1^{-})\right]\bar{u}=\frac{n_2}{\tau}u_{iM}+D_2\frac{u_{iM-1}-u_{iM}}{h_y^3}. \tag{15}$$

Vienādojumi (12)-(15) atļauj aprēķināt režģa funkciju $\bar{u}$ uz palīgslāņa $(n+\frac{1}{2})$ ar diskrēto faktorizācijas metodi.

Aprēķini uz slāņa $(n+1)$, t.i., sistēmas (11) otrā vienādojuma skaitliskā risināšana arī veikta ar diskreto faktorizācijas metodi y ass virzienā. Metodes realizācijai robežnosacījumi uz robežām $y=-H_1$, $y=0$ un $y=H_2$ jāaproksimē ar diferenču vienādojumiem izskatā

$$\hat{u}_{iK}=\alpha\,\hat{u}_{i,K+1}+\beta, \quad K=0,\ K=M-1.$$

Vispirms apskatīsim divslāņu uzdevumu (1)-(4). Uz pirmā, apakšējā apgabala robežas $y=-H_1$

$$\hat{u}_{i1}=\alpha_2\,\hat{u}_{i,2}+\beta_2, \tag{16}$$

kur

$$\alpha_2=\frac{D_1}{\gamma_1\cdot h_y^2}, \qquad \gamma_1=\frac{n_1}{\tau}+\frac{D_1}{h_y^2},$$

$$\beta_2=\frac{1}{\gamma_1}\left[\frac{n_1}{\tau}E+\frac{S_1}{2}\Lambda_1-\frac{V_1}{2}(\sigma\Lambda_1^{+}+(1-\sigma)\Lambda_1^{-})\right]\bar{u}$$

uz otrā, virsējā apgabala augšējās robežas $y=H_2$

$$\hat{u}_{i,M-1}=\alpha_M\,\hat{u}_{iM}+\beta_M, \tag{17}$$

kur

$$\beta_M=\frac{1}{\gamma_M}\left[-\frac{n_2}{\tau}E-\frac{S_2}{2}\Lambda_1+\frac{V_2}{2}(\sigma\Lambda_1^{+}+(1-\sigma)\Lambda_1^{-})\right]\bar{u},$$

$$\alpha_M=\frac{1}{\gamma_M}\left(\frac{n_2}{\tau}+\frac{D_2}{h_y^2}\right), \quad \gamma_M=\frac{D_2}{h_y^2}.$$

Uz šo abu apgabalu saskares robežas $y=0$, ņemot vērā nosacījumu (4):

$$\hat{u}_{i2}=\alpha_{1+1}\hat{u}_{i1+1}+\beta_{1+1}, \qquad (18)$$

kur

$$\alpha_{1+1}=\frac{1}{\gamma_2}\Big(2\eta_2-\frac{2h_y^2}{\tau}\Big),\ \gamma_2=D_1(3-4\alpha_{1-1}+\alpha_2\cdot\alpha_{1-1})+2D_2,$$

$$\beta_{1+1}=\frac{1}{\gamma_2}\Big[\frac{2h_y^2}{\tau}\bar{u}_{i2+1}-h_y^2[S_2\Lambda_1-V_2(\sigma\Lambda_1^++(1-\sigma)\Lambda_1^-)]\bar{u}_{i,1}+$$
$$+D_1(4\beta_1-\beta_2\cdot\alpha_{1-1}+\beta_{1-1})\Big),$$

bet α_2,α_{1-1} un β_2,β_{1-1} ir jau aprēķinātie faktorizācijas metodes koeficienti apakšējā apgabalā, nonākot līdz kopējai robežai $y=0$.

Otrās problēmas gadījumā (5)-(9) ar neklasisko nosacījumu (7) uz robežas $y=0$

$$\hat{u}_{i,1}=\alpha_2\hat{u}_{i,2}+\beta_2, \qquad (19)$$

kur

$$\alpha_2=\frac{D_1}{\gamma\cdot h_y},\quad \gamma=\frac{n_1}{\tau}+\frac{D_1}{D_2}\frac{h_y}{2\tau}n_2+\frac{D_1}{h_y},$$

$$\beta_2=\frac{1}{\gamma}\Big(\Big[\Big(\frac{n_1}{\tau}+\frac{D_1}{D_2}\frac{h_y}{2\tau}n_2\Big)E+\Big(S_1+\frac{D_1}{D_2}\cdot\frac{h_y}{2}S_2\Big)\Lambda_1-$$
$$-\Big(V_1+\frac{D_1}{D_2}\frac{h_y}{2}V_2\Big)(\sigma\Lambda_1^++(1-\sigma)\Lambda_1^-)\Big]\bar{u}\Big),$$

bet uz robežas $y=H_2$

$$\hat{u}_{i,M-1}=\alpha_{M1}\hat{u}_{iM1}+\beta_{M1}, \qquad (20)$$

kur

$$\alpha_{M1}=\Big(\frac{n_2}{\tau}+\frac{D_2}{h_y^2}\Big)\frac{1}{\gamma_{M1}},\ \gamma_{M1}=\frac{D_2}{h_y^2},$$

$$\beta_{M1}=\frac{1}{\gamma_{M1}}\Big[-\frac{n_2}{\tau}E-\frac{S_2}{2}\Lambda_1+\frac{V_2}{2}(\sigma\Lambda_1^++(1-\sigma)\Lambda_1^-)\Big]\bar{u}.$$

Skaitliskie aprēķini ļauj secināt:

1. Ja abu slāņu difūzijas koeficientu attiecība $D_1/D_2 > 10$, tad, pieļaujot nelielas citu parametru atšķirības, abu uzdevumu atrisinājumu skaitlisko rezultātu starpība nepārsniedz skaitli ar kārtu 10^{-2} (atrisinājuma funkcija $C(x,y,t)$ normēta uz 1). Aprēķini ir veikti arī difūzijas koeficientu attiecībai ar kārtu 10^{2}, kas atbilst situācijai ar normālu difūzijas koeficientu ļoti plānā slānī (pārejot uz viensláņa problēmu, t.i., veicot viduvēšanu, iespējams liels "nefizikālas" difūzijas koeficients).

2. Jo konvekcijas ātrumu attiecība lielāka, konkrēti jau pie $\frac{V_2}{V_1} > 3$, parādās abu uzdevumu atrisinājumu skaitliskajos rezultātos būtiskas atšķirības. Tas, acīmredzot, ir izskaidrojams arī ar skaitliskas difūzijas kļūdu, kas rodas no konvekcijas saskaitāmā aproksimēšanas ar vienpusējo diferenci "pret plūsmu" /9/.

LITERATŪRAS SARAKSTS

1. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации. - М.: Недра, 1976. - 407 с.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. - М.: Наука, 1969. - 546 с.
3. Фрид Ж. Загрязнение подземных вод. - М.: Недра, 1981.- 304 с.
4. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. - М.: МГУ, 1979.- 369 с.
5. Bear J. Hydraulics of Groundwater. - NY: McGraw-Hill, 1979. - 569 p.
6. De Marsily G. Quantitative Hydrology. - Academic Press, 1986. - 439 p.

7. Буйкис А.А. Двухтемпературное поле в гетерогенной среде в приближении сосредоточенной емкости // Прикладные задачи теоретической и математической физики.- Рига,1977.- Вып.I.-74-83 с.

8. Буйкис А.А., Шмите М.З. Численное решение одной конвективно-диффузионной задачи // Лат. мат.ежегодник, I984.- Вып.28.-I0-13 с.

9. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей.- Т.I. - М.: Мир,I99I. - 502 с.

УДК 518.6I

MAINĪGO VIRZIENU METODES IZMANTOŠANA DIVU SASKAROŠOS SLĀŅU KONVEKTĪVĀS DIFŪZIJAS PROBLĒMAS RISINĀŠANAI. A.Buiķis, I.Pagodkina // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. - Rīga: LU,1993.- 3.sēj.

Darbā apskatīti divi matemātiskie modeļi konvekcijas un difūzijas problēmai porainā divslāņainā vidē. Skaitliski pētīta abu nostādņu sakritība.

МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФУЗИОННО-КОНВЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ В ДВУХ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ СЛОЯХ. Буйкис А.А., Пагодкина И.Э. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.- Рига: ЛУ,1993. - Вып.3.

В работе рассмотрены две математические модели для конвективной и диффузионной проблемы в пористой двухслойной области. Численно расследовано совпадение обеих постановок.

DIE ANWERTUNG DER METHODE DER VERÄNDERLICHEN RICHTUNGEN FÜR DIE LÖSUNG DES KONVEKTIONS-DIFFUSIONS PROBLEMS IM ZWEISCHICHTIGEN GEBIET. A.Buikis, I.Pagodkina // Mathematische Modellirung. Die praktische Problemen der mathematischen Physik.-Riga, 1993.- 3.

In der Arbeit sind zwei Problemstellungen für Konvektions-Diffusions Gleichung in zweischichtigem System betrachtet. Man analysiert die Näherung beiden Modellen.

М.З.Буйке, А.А.Буйкис

ФОРМУЛА ЯВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ОТ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕРПОЛИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

В этой работе получено явное представление классического кубического интерполированного сплайна через все значения интерполируемой функции. Она дополняет работу /I/, в которой была получена формула для кубического сплайна, отправляясь от обычного его выражения через вторые производные $M_i = S_3''(x_i)$, $i=\overline{0,N}$. В данной работе аналогичная формула получена при помощи выражения через первые производные сплайна $m_i = S_3'(x_i)$, $i=\overline{0,N}$.

Пусть на конечном сегменте $[a, b]$ дано множество узлов интерполирования и значения интерполируемой функции $f(x)$ в них /2/:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b,$$

$$f(x_0) = f_0,\ f(x_1) = f_1,\ \dots,\ f(x_N) = f_N.$$

Кроме того, даны краевые условия: даны первые или вторые производные на концах сегмента $[a, b]$:

$$f'(a) = f_0',\quad f'(b) = f_N', \tag{1}$$

$$f''(a) = f_0'',\quad f''(b) = f_N''. \tag{2}$$

Как хорошо известно из литературы, например /2/, обозначая первые производные в узлах интерполирования через m_i,

$$m_i = S_3'(x_i),\ i=\overline{0,N},$$

для сплайна на интервале $[x_i, x_{i+1}]$, получаем выражение:

$$S_\Delta(f,x) = m_i\frac{(x_{i+1}-x)^2(x-x_i)}{h_i^2} - m_{i+1}\frac{(x-x_i)^2(x_{i+1}-x)}{h_i^2} +$$
$$+ f_i\frac{(x_{i+1}-x)^2[2(x-x_i)+h_i]}{h_i^3} + f_{i+1}\frac{(x-x_i)^2[2(x_{i+1}-x)+h_i]}{h_i^3} \tag{3}$$

Из непрерывности первой и второй производной сплайна в точках x_i, $i=\overline{1,N-1}$, находим систему уравнения относительно m_i, $i=\overline{1,N-1}$:

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=3\lambda_i\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}+3\mu_i\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i},$$

где

$$h_i=x_{i+1}-x_i,\ \lambda_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i},\ \mu_i=1-\lambda_i,$$

или в более удобной форме:

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=\psi_i(f_i-f_{i-1})+\varphi_i(f_{i+1}-f_i)+F_i. \quad (4)$$

Здесь

$$\psi_i=\frac{3\lambda_i}{h_{i-1}},\ \varphi_i=\frac{3\mu_i}{h_i},\ F_i\equiv 0,\ i=\overline{1,N-1}. \quad (5)$$

Для замыкания системы (4) необходимо воспользоваться краевыми условиями (I) и (2). Если (I) записывать в форме (4), то

$$m_0=f_0',\ m_N=f_N', \quad (6)$$

$$\begin{aligned}&\mu_0=\lambda_0=0,\ F_0=2f_0',\ \psi_0=\varphi_0=0,\\ &\mu_N=\lambda_N=0,\ F_N=2f_N'\ \ \psi_N=\varphi_N=0.\end{aligned} \quad (7)$$

При условиях (2), дифференцируя (3), получаем:

$$\begin{aligned}&2m_0+m_1=3\frac{f_1-f_0}{h_0}-\frac{h_0}{2}f_0''\\ &m_{N-1}+2m_N=3\frac{f_N-f_{N-1}}{h_{N-1}}+\frac{h_{N-1}}{2}f_N''\end{aligned} \quad (8)$$

или в форме (4):

$$\begin{aligned}&\lambda_0=0,\ \mu_0=1,\ \psi_0=0,\ \varphi_0=\frac{3}{h_0},\ F_0=-\frac{h_0}{2}f_0'',\\ &\lambda_N=1,\ \mu_N=0,\ \psi_N=\frac{3}{h_{N-1}},\ \varphi_N=0,\ F_N=\frac{h_{N-1}}{2}f_N''.\end{aligned} \quad (9)$$

Система (4) вместе с уравнениями (6) или (8), где коэффициенты и правые части вычисляются по формулам (5) и (7) или (9), легко решается классическим методом прогонки. Подставляя найденные выражения m_i в (3), можем получить значение сплайна на подсегменте $[x_i, x_{i+1}]$, зависящее лишь от значений функции $f(x)$ на концах подсегмента $[x_i, x_{i+1}]$.

По аналогии с /I/ получим представление сплайна, показывающее его зависимость от всех значений интерполируемой функции. Для этого будем искать m_i в форме:

$$m_i = \gamma_i + \sum_{j=0}^{N} \beta_{ij} f_j \quad . \tag{10}$$

Тогда, подставляя (10) в (4) и учитывая линейную независимость f_i, получаем системы для определения γ_i и β_{ij}. Система для γ_i, $i=\overline{0,N}$

$$\begin{aligned} &2\gamma_0 + \mu_0 \gamma_1 = F_0, \\ &\lambda_i \gamma_{i-1} + 2\gamma_i + \mu_i \gamma_{i+1} = 0 , \quad i=\overline{1,N-1} \\ &\lambda_{N-1}\gamma_{N-1} + 2\gamma_N = F_N. \end{aligned} \tag{11}$$

Система относительно матрицы β_{ij}, $i=\overline{0,N}$, $j=\overline{0,N}$:

$$\lambda_i \beta_{i-1j} + 2\beta_{ij} + \mu_i \beta_{i+1j} = 0 , \quad i \neq j-1, j, j+1,$$

$$\lambda_i \beta_{i-1j} + 2\beta_{ij} + \mu_i \beta_{i+1j} = \varphi_i , \quad i=j-1,$$

$$\lambda_i \beta_{i-1j} + 2\beta_{ij} + \mu_i \beta_{i+1j} = \psi_i - \varphi_i , \quad i=j,$$

$$\lambda_i \beta_{i-1j} + 2\beta_{ij} + \mu_i \beta_{i+1j} = -\psi_i , \quad i=j+1,$$

или, пользуясь символом Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i=j, \end{cases}$$

для каждого $j=\overline{0,N}$

$$\lambda_i \beta_{i-1j} + 2\beta_{ij} + \mu_i \beta_{i+1j} = -\psi_i \delta_{i-1j} + (\psi_i - \varphi_i)\delta_{ij} + \varphi_i \delta_{i+1j} . \tag{12}$$

Здесь $i=\overline{0,N}$, $\beta_{-1j} = \beta_{N+1j} = 0$. Остальные коэффициенты и правые части даны формулами (5), (7) или (9). Видно, что β_{ij}, γ_i не зависят от значений f_i интерполируемой функции. Решив системы (11) и (12), подставляя (10) в (3), получаем выражение для $S_\Delta(f,x)$ в подинтервале $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_\Delta(f,x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2}{h_i^2} \left\{ \frac{x-x_i}{h_i} \left[h_i \left(\gamma_i + \sum_{j=0}^{N} \beta_{ij} f_j \right) + 2f_i \right] + f_i \right\} +$$

$$+ \frac{(x-x_i)^2}{h_i^2} \left\{ \frac{x_{i+1}-x}{h_i} \left[-h_i \left(\gamma_{i+1} + \sum_{j=0}^{N} \beta_{i+1j} f_j \right) + 2f_{i+1} \right] + f_{i+1} \right\}$$

Это выражение для $S_\Delta(f, x)$ явно зависит от всех значений f_i. Более того, величины β_{ij} не зависят от правых частей краевых условий (I) или (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Буйкис А,А. Задачи математической физики с разрывными коэффициентами и их приложения. - Рига:Зинатне,1992. - 360 с. (в печати)

2. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир,1972. - 316 с.

УДК 519.6

ФОРМУЛА ЯВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ОТ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕРПОЛИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ. Буйке М.З., Буйкис А.А.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.-Рига: ЛУ,1992. - Вып.3.

Получена формула кубического сплайна, которая несодержит I-ые и 2-ые производные,а в явной форме зависит от значений интерполируемой функции.

KUBISKĀ SPLAINA TIEŠĀS ATKARĪBAS IZTEIKSME NO INTERPOLĒJAMĀS FUNKCIJAS VĒRTĪBĀM. Buiķe M., Buiķis A.//Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas - Rīga: LU,1992.- 3.sēj.

Iegūta kubiskā splaina atklāta reprezentācijas formula, kurā nesatur ne 1., ne 2. atvasinājumus, bet tikai visas interpolējamās funkcijas vērtības mezglu punktos.

EINE EXPLIZITE REPRESENTATIONSFORMEL FÜR KUBISCHER SPLINE, DIE NUR ALLE WERTE DER INTERPOLIERENDEN FUNKTION ENTHÄLT. M.Bujke, A.Buikis//Mathematische Modellierung. Die praktische Problemen der mathematischen Physik. Riga, 1992. - 3.

Es ist explizite Representations-formel für kubischer Spline gegeben, welche nicht erste und zweite Ableitungen, aber nur alle Werte der interpolierender Funktion enthält.

А. А. Буйкис, Н. Л. Уланова
Ин-т математики ЛАН и ЛУ,
Рига

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНСЕРВАТИВНОГО ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ С ТОНКИМ СЛОЕМ

В различных областях современной техники встречаются многослойные конструкции с отдельными слоями относительно малой толщины. Для исследования систем, полученных при постановке таких задач, с дальнейшим их численным (или аналитическим) решением удобно перейти к новой постановке с дополнительными условиями типа сосредоточенной емкости /1-3/ или их обобщениям, напр. /4-7/, иными словами - методу консервативного осреднения.

В этой работе рассмотрена задача для уравнения теплопроводности в угловой области, когда возникает существенная дополнительная сложность реализации осреднения вблизи угла.

1. Исследование температурного поля в угловой области, состоящей из двух или нескольких слоев, различающихся толщиной и материалом, обусловлено определенными трудностями. Основные из них:

- расчет температуры в тонком слое или учет его влияния;
- расчет температуры в угловой области тонкого слоя.

Для облегчения решения задач такого типа предлагается метод консервативного осреднения (МКО) для тонкой граничной подобласти и методика осреднения для расчета температуры в угловой точке. МКО реализуется на следующей задаче теплопроводности с двухслойной угловой областью.

2. Конструкция представляет собой прямой угол, состоящий из двух прямоугольников (стенок), с относительно большой толщиной и относительно малым коэффициентом

теплопроводности материала (в конкретном расчете - бетон). Угол облицован тонким слоем материала с большим коэффициентом теплопроводности (металлическим листом).

Внутренняя поверхность конструкции поддерживается при заданной температуре. Наружная поверхность подвергается интенсивному разогреву (пламя, горячий воздух). Это так называемая задача о «несгораемом сейфе».

Предполагая, что длина конструкции достаточно велика, рассматривается сечение угловой области, т. е. двумерный вариант задачи (рис. 1.).

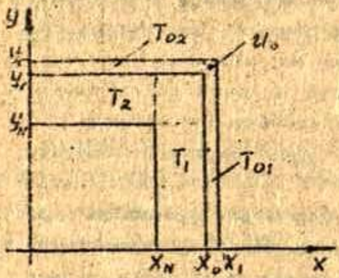


Рис. 1. Схема конструкции. T_1- температура в вертикальной основной области, T_2- в горизонтальной основной области, T_{01} и T_{02}-температура в тонком слое.

Постановка исходной сопряженной задачи включает в себя двумерные нестационарные уравнения теплопроводности для всех областей и слоев:

$$\rho c\frac{\partial T_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)+F(x,y,t),\quad \left\{\begin{array}{l} x_N<x<x_0,\\ 0<y<y_0,\end{array}\right. \tag{11}$$

$$\rho c\frac{\partial T_2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)+F(x,y,t),\quad \left\{\begin{array}{l} 0<x<x_0,\\ y_N<y<y_0,\end{array}\right. \tag{12}$$

$$\rho_0 c_0\frac{\partial T_{01}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_0\frac{\partial T_{01}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_0\frac{\partial T_{01}}{\partial y}\right),\quad \left\{\begin{array}{l} x_0<x<x_1,\\ 0<y<y_1,\end{array}\right. \tag{21}$$

$$\rho_0 c_0\frac{\partial T_{02}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_0\frac{\partial T_{02}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_0\frac{\partial T_{02}}{\partial y}\right),\quad \left\{\begin{array}{l} 0<x<x_1,\\ y_0<y<y_1,\end{array}\right. \tag{22}$$

вместе с граничными и начальными условиями:

- на внутренних поверхностях - условия I рода:

$$T_1 = T_c, \qquad \begin{cases} x = x_1, \\ y < y_n, \end{cases} \qquad (3_1)$$

$$T_2 = T_c, \qquad \begin{cases} x < x_n, \\ y = y_1, \end{cases} \qquad (3_2)$$

- на наружных поверхностях - условия теплообмена по Ньютону:

$$k_0 \frac{\partial T_{01}}{\partial x} + \alpha T_{01} = \varphi, \qquad \begin{cases} x = x_1, \\ y < y_1, \end{cases} \qquad (4_1)$$

$$k_0 \frac{\partial T_{02}}{\partial y} + \alpha T_{02} = \varphi, \qquad \begin{cases} x < x_1, \\ y = y_1, \end{cases} \qquad (4_2)$$

где $\varphi = \alpha T^{*}$, T^{*} - температура наружной среды (напр. воздуха),
- условия сопряжения между основной областью и слоем:

$$T_1/_{x_0-0} = T_{01}/_{x_0+0}, \qquad y<y_0, \qquad (5_1)$$

$$T_2/_{y_0-0} = T_{02}/_{y_0+0}, \qquad x<x_0, \qquad (5_2)$$

$$k \frac{\partial T_1}{\partial x}/_{x_0-0} = k_0 \frac{\partial T_{01}}{\partial x}/_{x_0+0}, \qquad y<y_0, \qquad (6_1)$$

$$k \frac{\partial T_2}{\partial y}/_{y_0-0} = k_0 \frac{\partial T_{02}}{\partial y}/_{y_0+0}, \qquad x<x_0, \qquad (6_2)$$

- начальные условия (при $t=0$):
$T_1 = T_2 = T_{01} = T_{02} = T_c$.

Задача в такой постановке аппроксимируется разностной схемой, которая решается методом переменных направлений в каждой двумерной области, пересылая на каждом итерационном шаге значения температур в зоне пересечения из уже просчитанной области в следующую.

В случае, когда толщина основной области отличается от толщины слоя на порядок и больше, решение сопряженной задачи связано с определенными вычислительными трудностями (типичная задача с малым параметром). И метод консервативного осреднения по тонкой граничной подобласти значительно облегчает решение подобных задач, сохраняя при этом в постановке задачи все характеристики осредняемой подобласти.

3. Метод консервативного осреднения для отдельной граничной подобласти подробно изложен в находящейся в

печати монографии /7/.

Введем следующие обозначения для осреднения по координатам y и x:

$$\overline{U}o(y,t)=\frac{1}{\delta 1}\int_{x0}^{x1} To(x,y,t)dx, \quad \delta 1=x1-x0, \qquad (71)$$

$$\overline{U}o(x,t)=\frac{1}{\delta 2}\int_{y0}^{y1} To(x,y,t)dy, \quad \delta 2=y1-y0, \qquad (72)$$

Уравнения для слоя (21) с учетом (71), граничных условий на внешней поверхности (31) и условий сопряжения (51),(61), переводятся в граничное условие для основной области (11):

$$k\frac{\partial T}{\partial x}/_{x0}=\varphi-\alpha To/_{x1}+\delta 1\frac{\partial}{\partial y}(k0\frac{\partial\overline{U}o}{\partial y})-\rho_0 c_0\delta 1\frac{\partial\overline{U}o}{\partial t}. \qquad (8)$$

Это условие содержит три неизвестные функции: $\overline{U}o$, T, $To/_{x1}$.

Для их определения применим линейное распределение температуры по осредняемой координате (напр. x):

$$To/_{x1}=T/_{x0}+\frac{\varphi-\alpha T/_{x0}}{k'}(x-x0), \quad k1=k0+\alpha\,\delta 1, \qquad (9)$$

$$\overline{U}_0=T/_{x0}+\frac{\varphi-\alpha T/_{x0}}{k1}\frac{\delta 1}{2} = \overline{U}o=\frac{\delta 1}{2k1}\varphi+\frac{1}{2}(1+\frac{k0}{k1})T/_{x0}, \qquad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), исключим два неизвестных и получим граничное условие для (11) при x = x0:

$$k\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\delta 1}{2}(1+\frac{k0}{k1})\frac{\partial}{\partial y}(k0\frac{\partial T}{\partial y})-\rho_0 c_0\frac{\delta 1}{2}(1+\frac{k0}{k1})\frac{\partial T}{\partial t}-\alpha\frac{k0}{k1}T+\widehat{F}1, \qquad (111)$$

где $\widehat{F}1=\frac{k0}{k1}\varphi+\frac{\delta 1^2}{2k1}\left[\frac{\partial}{\partial y}(k0\frac{\partial\varphi}{\partial y})-\rho_0 c_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]$.

Для уравнения (12) получаем аналогичное граничное условие при y = y0:

$$k\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\delta 2}{2}(1+\frac{k0}{k2})\frac{\partial}{\partial x}(k0\frac{\partial T}{\partial y})-\rho_0 c_0\frac{\delta 2}{2}(1+\frac{k0}{k2})\frac{\partial T}{\partial t}-\alpha\frac{k0}{k2}T+\widehat{F}2, \qquad (112)$$

где $\bar F_2 = \frac{k_0}{k_2}\varphi + \frac{\delta_2^2}{2k_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \rho_0 c_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]$, $k_2 = k_0 + \alpha\,\delta_2$.

Граничные условия (11₁) и (11₂) сохраняют все характеристики осредняемой подобласти, а выписанные с учетом основного уравнения имеют второй порядок при разностной аппроксимации.

Преобразование (7-11) сводит решение двумерной сопряженной задачи с малым параметром к решению одного двумерного уравнения, но с неклассическим граничным условием, численное решение которого значительно проще.

4. Предыдущие рассуждения относились к задаче с плоской граничной подобластью. В случае же, когда основная область и подобласть (слой) являются угловыми (рис. 1), возникает дополнительная проблема консервативного осреднения угловой зоны или определение температуры в угловой точке.

Предположим, что распределение температуры в слое T_0, в области угловой точки, может быть аппроксимировано полиномом 2-й степени как по координате x, так и по координате y (угловая область является общей для T_{01} и T_{02}).

$$\bar U_0(x,t) = \bar U_0^{(0)}(t) + \bar V_1(t)\,\frac{x-x_0}{\delta_1} + \bar V_2(t)\left(\frac{x-x_0}{\delta_1}\right)^2 . \qquad (12_1)$$

$$\bar U_0(y,t) = \bar U_0^{(0)}(t) + \bar V_1(t)\,\frac{y-y_0}{\delta_2} + \bar V_2(t)\left(\frac{y-y_0}{\delta_2}\right)^2 . \qquad (12_2)$$

Коэффициенты $\bar U_0$, $\bar V_1$ и $\bar V_2$ (аналогично $\bar U_0$, $\bar V_1$ и $\bar V_2$) осредняются из граничных условий:

из (10) : $\bar U_0^{(0)}(t) = \frac{\delta_1}{2k_1}\varphi_1/_{y_0} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{k_0}{k_1}\right)T/_{(x_0,y_0)}$

и из (12₂), (6₂)

$$\bar V_1(t) = \frac{2}{3k_0+k_2}\left[3(k_0+k_2)(U_0-\bar U_0^{(0)}) + \alpha\,\delta_2\,\bar U_0^{(0)} - \delta_2\,\varphi\right], \qquad (13_2)$$

$$\bar V_2(t) = -\frac{2}{3k_0+k_2}\left[2\,k_0\,(U_0-\bar U_0^{(0)}) + \alpha\,\delta_2\,\bar U_0^{(0)} - \delta_2\,\varphi\right]. \qquad (14_2)$$

Таким образом, граничное условие (8) при $x = x0$, $y = y0$ принимает вид:

$$\frac{\rho_0 c_0}{2}\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\alpha\ k0}{\delta 1(k0+k1)}\ T +$$

$$\frac{4k0}{(1+\frac{k0}{k1})(1+\frac{k0}{k2})}\left[\frac{3(k0+k1)U0-2(2k0+k1)\overline{U}0^{(0)}-\delta 1\ \varphi}{(3k0+k1)\delta 1^2}\right]+$$

$$\frac{6k0}{1+\frac{k0}{k1}}\left[\frac{2k2U0-(k0+k2)\overline{U}0^{(0)}-\delta 2\ \varphi}{(3k0+k2)\delta 2^2}\right]+F1, \tag{15₂}$$

где $F1 = \frac{1}{k0+k1}\left[\frac{k0}{\delta 1}\varphi + \frac{\delta 1\ k0\ k1}{\delta 1(k0+k1)}\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \rho_0 c_0 \frac{\delta 1}{2}\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]$

Окончательное уравнение для T получаем из суммы (15₂) и аналогичного ему (15₁), полученного из (10), (12₁), (6₁) и (8), т.е. из уравнений, осредненных по координатам x и y.

В этих уравнениях (15₁) и (15₂) присутствует неизвестная функция $U0(t)$ - среднее значение температуры угловой зоны.

Для ее определения проинтегрируем граничное условие (8) с учетом (4₂) и следующего выражения:

$$U0(t) = \frac{1}{\delta 2}\int_{y0}^{y1}\overline{U}0(y,t)dy = \frac{1}{\delta 1\ \delta 2}\int_{x0}^{x1}dx\int_{y0}^{y1}T0(x,y,t)dy.$$

В результате получаем:

$$\rho_0 c_0 \frac{\partial U0}{\partial t} = -\frac{\alpha}{\delta 1}\left(\overline{U}0^{(0)} + \overline{V}1 + \overline{V}2\right) + k0\left(2\frac{\overline{V}2}{\delta 2^2} - \frac{\overline{V}1}{\delta 1^2}\right) + \Phi 1,$$

где $\Phi 1 = \frac{1}{\delta 1\ \delta 2}\int_{y0}^{y1}\varphi\ dy.$ (16₁)

и аналогично:

$$\rho_0 c_0 \frac{\partial U0}{\partial t} = -\frac{\alpha}{\delta 2}\left(\overline{U}0^{(0)} + \overline{V}1 + \overline{V}2\right) + k0\left(2\frac{\overline{V}2}{\delta 1^2} - \frac{\overline{V}1}{\delta 2^2}\right) + \Phi 2,$$

где $\Phi 2 = \frac{1}{\delta 1\ \delta 2}\int_{x0}^{x1}\varphi\ dx.$ (16₂)

Полусумма от этих выражений при подстановке (12₁) и (12₂) дает окончательное выражение для U_0:

$$\rho_0 c_0 \frac{\partial U_0}{\partial t} + \frac{12k_0[2k_1U_0-(k_0+k_1)\overline{\overline{U}}_0^{(c)}] - (9k_0-k_1)\delta_1\varphi}{2\delta_1^2(3k_0+k_1)} +$$

$$+ \frac{12k_0[2k_2U_0-(k_0+k_2)\overline{\overline{U}}_0^{(o)}] - (9k_0-k_2)\delta_2\varphi}{2\delta_2^2(3k_0+k_2)} = \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2} \qquad (17)$$

Таким образом, для расчета температуры в угловой точке (T) необходимо рассмотреть следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (10) \text{ - для } \overline{\overline{U}}_0^{(o)} \text{ и } \overline{\overline{U}}_0^{(c)}, \\ (17) \text{ - для } U_0, \\ (15) \text{ - для } T. \end{cases}$$

Она не содержит производных по пространственным переменным, что избавляет от необходимости решать уравнения специальными методами, увеличивающими сложность и время расчета. С ее помощью учитывается не только влияние граничных условий, но и характеристики материала слоя и точные размеры этой угловой области.

5. Конкретные расчеты проводились для сопряженной задачи с линейной аппроксимацией температуры в угловой точке и для задачи с применением МКО для угловой граничной подобласти, поскольку способ вычисления значения температуры в угловой зоне, или угловом узле, достаточно существенен при использовании сеточных методов расчета температурных полей.

Толщина основной области: $y_0-y_в = x_0-x_в = 0.05$м,
толщина слоя: $y_1-y_0 = x_1-x_0 = 0.005$м,
материал основной области - бетон: $k = 0.175$ Вт/м К,
$\rho = 1600$ кг/м^3, $c = 800$ дж/кг К,
материал слоя - металл: $k_0 = 40.0$ Вт/мК, $\rho_0 = 7800$ кг/м^3,
$c_0 = 502.4$ дж/кг К,
коэффициент теплообмена $\alpha = 16$ Вт/м^{2}К,
температура внутренней поверхности $T_в = 293$ °К,
температура горячего воздуха $T_г = 773$ °К.

Результаты сравнения решений сопряженной и осредненной задач представлены на рис. 2. Здесь показаны изменения температуры в процессе нагрева для обеих задач в двух точках: в верхнем углу (x_0, y_0) с максимальной температурой и в нижнем углу (x_n, y_n) с минимальной температурой.

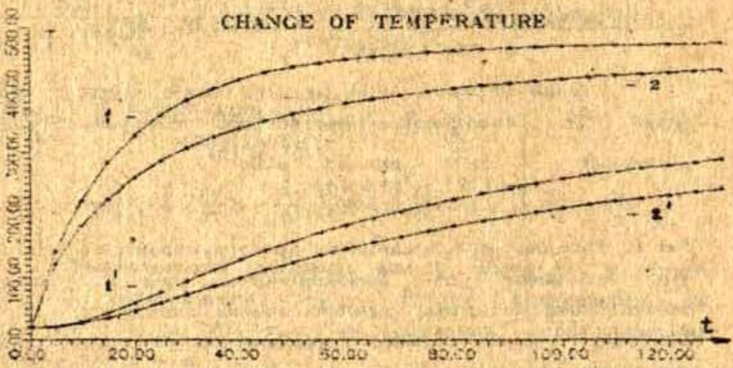


Рис. 2. Изменение температуры стенки в процессе нагрева. 1, 1' - для сопряженной задачи, 2, 2' - для осредненной задачи. 1, 2 - температура в точке (x_0, y_0), 1', 2' - в точке (x_n, y_n).

Температура в выбранных точках выше для решения осредненной задачи, поскольку в ней учтена температура в слое. Для сопряженной же задачи дано значение температуры под слоем, в верхней точке основной области. Однако это влияние повышенной температуры переносится и вовнутрь области, что сказывается и на температуре в нижних точках. Для лучшего совпадения результатов можно использовать и другие способы аппроксимации температуры в угловой точке при решении сопряженной задачи.

В целом же результаты расчетов показали, что использование предложенного метода МКО, приводящего к решению одной двумерной задачи с неклассическим граничным условием, дает значительные преимущества в численной реализации и при выборе шага по времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А. Об одной задаче распространения тепла// Вест. МГУ.-1977. - Ч. 1.- S 3.-С. 85-101; Ч. 2.-S. 5.-С. 119-129.

2. Самарский А. А. Теория разностных схем.-М.: Наука, 1976

3. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений.-М.: Наука, 1976

4. Буйкис А. А. Изменение постановки задач математической физики с разрывными коэффициентами в составных областях// Электронное моделирование.—1986. —N. 6.

5. Буйкис А. А. Моделирование процессов фильтрации в сложных средах методом консервативного осреднения: Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ. мат. наук.-Казань, 1987

6. Буйкис А. А., Уланова Н. Л. Математическое моделирование тепловых процессов вакуумной технологии: Тез. докл. 1 Респ. конф. "Численные методы моделирования технологических процессов." -Рига, 1989.

7. Буйкис А. А. Задачи математической физики с разрывными коэффициентами и их приложения.-Рига: Зинатне.-1992. -360с.

УДК 517.974:519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНСЕРВАТИВНОГО ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ С ТОНКИМ СЛОЕМ. Буйкис А. А., Уланова Н. Л. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. Рига: ЛУ, 1992. Вып. 3.

Исследуется нестационарное температурное поле в двухслойной угловой области. Сравниваются решения двух постановок: исходной с условиями сопряжения, и постановки, полученной по методу консервативного осреднения (осреднения по толщине тонкого слоя).

KONSERVATĪVĀS VIDUVĒŠANAS METODES PIELIETOJUMS STŪRA APGABALĀ AR PLĀNU SLĀNI. Buiķis A.A., Ulanova N.L.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas.-Rīga: LU, 1992.- 3.sēj.

Pētīts nestacionārais temperatūras lauks divslāņu apgabalam ar stūri. Tiek salīdzināti divu problēmu atrisinājumi: sākotnējai problēmai ar saistības nosacījumiem un nostādne, kura iegūta ar konservatīvās viduvēšanas metodi (viduvēšana pa plānās kārtiņas biezumu).

MA 35Q88

THE APPLICATION OF THE CONSERVATED AVERAGING METHOD FOR THE ANGULAR REGION WITH THIN LAYER. Buikis A.A., Ulanova N.L.// The mathematical simulation. Applied tasks of mathematical physics. Riga: LU, 1992. Vol.3.

The transitional temperature field is researching in the double - layer angular region. For comparison is representing the solutions of two formulations of the problem: the starting problem with the boundary conjugate conditions and the formulation, which be obtained by the conservated averaging method (the averaging over layer thickness).

М.А.Белов
ЛУ, Рига
Л.А.Столярова
РТУ, Рига
О.М.Юдрупс
ЛУ, Рига

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ЖЁСТКО ПРИКРЕПЛЁННЫХ ГРУЗОВ НА ДИНАМИКУ ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В настоящей работе на базе специальных асимптотических аппроксимаций ($h/R \to +0$) построены простые инженерные формулы анализа задач динамики тонкостенных цилиндрических оболочек с жёстко прикреплёнными грузами. В математической модели учитываются лишь поперечные перемещения w. Это, конечно, приводит к существенному упрощению модели, но, как показано в /1,2/, такое допущение приемлемо для инженерных расчётов.

Рассмотрен случай ортотропной цилиндрической оболочки толщины h, длины L с радиусом срединной поверхности R, к боковой поверхности которой в точках с координатами (α_j^*, φ_j), $j=1,2,\dots,N$ жёстким образом прикреплены N грузов массой m_j^*. Боковая поверхность нагружается импульсом внешнего давления $-g^*(\alpha^*,\varphi)\,\delta(t)$, где функция $g^*(\alpha^*,\varphi)$ является 2π – периодической по аргументу φ. Переход к безразмерным величинам осуществляется следующим образом: продольная координата $\alpha=\alpha^*/R$, $\alpha^*\in[0,L]$, прогиб $w=w^*/R$, присоединённые массы $m_j=m_j^*/(h\rho R^2)$, время $\tau=t/t_0$, длина оболочки $l=L/R$, амплитуда импульса внешнего нагружения $g=g^*/g_0$, где ρ – размерная плотность материала оболочки и

$$t_0=R\left[(1-\nu_1\nu_2)\rho\right]^{1/2}E_1^{-1/2},\quad g_0=h\left[E_1\rho/(1-\nu_1\nu_2)\right]^{1/2}. \quad (1)$$

Ниже используются также обозначения :

$$\varepsilon = h^2/(12R^2), \ \omega^2 = E_2/E_1, \ \gamma = \nu_2 + 2(1-\nu_1\nu_2)G/E_1 \ . \quad (2)$$

В дальнейшем ε рассматривается как малый параметр.

I. Математическая модель

Согласно принятым выше допущениям, математическая модель определения прогиба w при импульсном нагружении боковой поверхности цилиндрической оболочки имеет вид /3/ :

$$\varepsilon \hat{L} w + \omega^2 w + \left(1 + \sum_{j=1}^{N} m_j \delta(\alpha-\alpha_j, \varphi-\varphi_j)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + g(\alpha,\varphi)\delta(\tau) = 0$$

$$\Lambda_1^{(1)} w|_{\alpha=0} = \Lambda_2^{(1)} w|_{\alpha=0} = \Lambda_1^{(2)} w|_{\alpha=\ell} = \Lambda_2^{(2)} w|_{\alpha=\ell} = 0 \ ,$$

$$w|_{\tau=0} = \partial w/\partial\tau|_{\tau=0} = 0 ; \quad (3)$$

где

$$\hat{L} = \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\gamma\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\varphi^2} + \omega^2\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} \quad ; \quad (4)$$

(α_j, φ_j) — безразмерные координаты точек крепления грузов $\alpha_j \in]0,\ell[$, $\varphi_j \in [-\pi,\pi]$; $\delta(\alpha,\varphi)$, $\delta(\tau)$, соответствующие δ - функции Дирака, $\Lambda_k^{(1)}$ и $\Lambda_k^{(2)}$ — операторы граничных условий на левом $(\alpha = 0)$ и правом $(\alpha = \ell)$ торце оболочки.

2. Алгоритм решения

Более детально методика решения задачи (3) изложена в /4/. Здесь приведём лишь основные этапы алгоритма решения.

2.I. Применяется интегральное преобразование Лапласа по безразмерному времени τ , причём, если $f(\tau)$ - оригинал, то соответствующее изображение обозначается через $\bar{f}(p)$.

2.2. В пространстве изображений по Лапласу строится асимптотическая $(\varepsilon \to +0)$ аппроксимация функции Грина $\bar{G} = \bar{G}(\alpha,\varphi;x,\eta,q)$, $q = (p^2+\omega^2)/\varepsilon$, т.е. решения задачи:

$$\varepsilon\hat{L}\bar{G} + (\omega^2+p^2)\bar{G} = -\delta(\alpha-x, \varphi-\eta) \ ,$$

$$\Lambda_1^{(1)}\bar{G}|_{\alpha=0} = \Lambda_2^{(1)}\bar{G}|_{\alpha=0} = \Lambda_1^{(2)}\bar{G}|_{\alpha=\ell} = \Lambda_2^{(2)}\bar{G}|_{\alpha=\ell} = 0 \ . \quad (5)$$

В первом приближении:

$$\bar{G} = \bar{G}_\infty + \bar{\pi} = \frac{1}{\varepsilon}\bar{\Omega} \ , \ \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_\infty + \bar{\Pi} \qquad (6)$$

где

$$\bar{\Omega}_\infty = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega q}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{r_k^2}{s_k^2} \operatorname{Kei}\left(\sqrt[4]{\frac{q}{\omega^2}} \frac{r_k^2}{s_k}\right) , \qquad (7)$$

$$r_k = \left[\omega(\alpha-x)^2 + (\varphi-\eta-2k\pi)^2\right]^{1/2} , \quad q = (p^2+\omega^2)/\varepsilon , \qquad (8)$$

$$s_k = \left[\omega^2(\alpha-x)^4 + 2\gamma(\alpha-x)^2(\varphi-\eta-2k\pi)^2 + (\varphi-\eta-2k\pi)^2\right]^{1/4} , \qquad (9)$$

$$\operatorname{Kei}(z) = \frac{1}{2i}\left[K_0(e^{i\pi/4}z) - K_0(e^{-i\pi/4}z)\right] , \qquad (10)$$

$K_0(x)$ – функция Макдональда,

$$\bar{\Pi} = \sum_{j=1}^{4} c_j v_j(\alpha) , \qquad (11)$$

$$v_1(\alpha) = \exp(-\varkappa_1\alpha) , \ v_2(\alpha) = \exp(-\varkappa_2\alpha) ,$$

$$v_3(\alpha) = \exp(\varkappa_1(\alpha-\ell)) , \ v_4(\alpha) = \exp(\varkappa_2(\alpha-\ell)) , \qquad (12)$$

$$\varkappa_1 = \sqrt[4]{q}\exp(i\pi/4) , \ \varkappa_2 = \sqrt[4]{q}\exp(-i\pi/4) , \qquad (13)$$

а для коэффициентов c_j имеем СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{4} a_{\mu j} c_j = b_\mu , \quad \mu = 1, 2, 3, 4 ; \qquad (14)$$

где

$$a_{1j} = \Lambda_1^{(1)} v_j|_{\alpha=0} , \ a_{2j} = \Lambda_2^{(1)} v_j|_{\alpha=0} ,$$

$$a_{3j} = \Lambda_1^{(2)} v_j|_{\alpha=\ell} , \ a_{4j} = \Lambda_2^{(2)} v_j|_{\alpha=\ell} , \qquad (15)$$

$$b_1 = -\Lambda_1^{(1)}\bar{\Omega}_\infty|_{\alpha=0} , \ b_2 = -\Lambda_2^{(1)}\bar{\Omega}_\infty|_{\alpha=0} ,$$

$$b_3 = -\Lambda_1^{(2)}\bar{\Omega}_\infty|_{\alpha=\ell} , \ b_4 = -\Lambda_2^{(2)}\bar{\Omega}_\infty|_{\alpha=\ell} , \qquad (16)$$

причём $\sqrt[4]{q}$ имеет главное значение.

2.3. Используя функцию Грина $\bar{G} = \bar{\Omega}/\varepsilon$, получаем следующую асимптотическую ($\varepsilon \to +0$) аппроксимацию решения задачи (3) :

$$\bar{w} = \frac{1}{\varepsilon}\bar{W} = \frac{1}{\varepsilon}\bar{W}(\alpha, \varphi, q, \frac{\varepsilon}{p^2}) , \quad q = \frac{p^2+\omega^2}{\varepsilon} , \qquad (17)$$

где

$$\overline{W} = \overline{W}_0(\alpha,\varphi,q) + \sum_{j=1}^{N} \bar{x}_j \overline{W}_j(\alpha,\varphi,q) \ , \qquad (18)$$

$$\overline{W}_0 = \int_0^{\ell}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\Omega}(\alpha,\varphi;x,\eta,q)\, g(x,\eta)\, dx\, d\eta \ , \qquad (19)$$

$$\overline{W}_j = m_j \overline{\Omega}(\alpha,\varphi;\alpha_j,\varphi_j,q) \ , \qquad (20)$$

а для определения $\bar{x}_j = \bar{x}_j(q,\varepsilon/p^2)$, $j=1,2,\dots,N$ имеется СЛАУ

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\bar{x}_j - \frac{\varepsilon}{p^2}\bar{x}_i = b_i \ , \quad i=1,2,\dots,N \ , \qquad (21)$$

где

$$a_{ij} = \overline{W}_j\Big|_{\substack{\alpha=\alpha_i\\ \varphi=\varphi_i}} \ , \quad b_i = -\overline{W}_0\Big|_{\substack{\alpha=\alpha_i\\ \varphi=\varphi_i}} \ . \qquad (22)$$

2.4. Методика обращения интегрального преобразования Лапласа базируется на структуре изображения (I7) и на предположении, что искомый прогиб w может быть представлен в виде:

$$w = \mathrm{Re}\left[A(\alpha,\varphi,\varepsilon\tau)\, e^{-i\omega t}\right] =$$

$$= a(\alpha,\varphi,\varepsilon\tau)\cos\omega\tau + b(\alpha,\varphi,\varepsilon\tau)\sin\omega\tau \ , \qquad (23)$$

где $A(\alpha,\varphi,\varepsilon\tau) = a(\alpha,\varphi,\varepsilon\tau) + i\,b(\alpha,\varphi,\varepsilon\tau)$ — комплексная амплитуда с малой изменяемостью по τ.

В этом случае из (I7) имеем

$$\bar{w} = \frac{1}{\varepsilon}\overline{W}(\alpha,\varphi,q,\frac{\varepsilon}{p^2}) = \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} w(\alpha,\varphi,\tau;\varepsilon)\, d\tau \ . \qquad (24)$$

Полагая в (24) $p = -i\omega + \varepsilon z$, учитывая (23) и проведя замену переменной интегрирования $t = \varepsilon\tau$, получаем:

$$\overline{W}(\alpha,\varphi,-2i\omega z+\varepsilon z^2, \frac{\varepsilon}{-\omega^2-2i\omega\varepsilon z+\varepsilon^2 z^2}) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-zt} A(\alpha,\varphi,t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{2i\frac{\omega}{\varepsilon}t}\bar{A}(\alpha,\varphi,t)\,dt \ , \qquad (25)$$

здесь $\bar{A} = a - i\,b$.

При малых ε вторым интегралом в (25) можно пренебречь. В итоге, переобозначая z через p, получаем, что комплексная амплитуда $A(\alpha,\varphi,t)$ имеет следующее изображение по Лапласу:

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} A(\alpha,\varphi,t)\,dt = 2\overline{W}(\alpha,\varphi,-2i\omega p+\varepsilon p^2,\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 p^2-2i\omega\varepsilon p-\omega^2}). \quad (26)$$

Так как в (23) амплитуда $A(\alpha,\varphi,t)$ необходима лишь для малых значений $t=\varepsilon\tau$, то для обращения (26) можно использовать более простые "инженерные" алгоритмы, дающие "хорошие" результаты для малых t. В частности, если воспользоваться простейшей формулой обращения

$$f(t) \approx (p\,\overline{f}(p))\big|_{p=1/t}\ , \quad (27)$$

то получим следующую инженерную формулу расчёта вынужденных колебаний оболочки:

$$w = \frac{2}{\varepsilon\tau}\,\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega\tau}\,\overline{W}(\alpha,\varphi,\frac{1-2i\omega\tau}{\varepsilon\tau^2},\frac{\varepsilon\tau^2}{1-2i\omega\tau-\omega^2\tau^2})\right], \quad (28)$$

где функция $\overline{W}$ определена (I8) и для своего вычисления требует лишь решения СЛАУ (I4), (21) и вычисления интеграла (I9). Из аналитической формулы (28) легко определяются и другие характеристики колебательного процесса.

3. Численный эксперимент и его анализ

Основные численные расчёты проводились для следующих параметров оболочки: L = I м ; R = 0,5 м; h = 0,00I м; ρ = = 2740 кг/м^3; $\nu_1 = \nu_2$ = 0,3 и для амплитуды импульса

$$q^* = \begin{cases} J^*\cos\varphi\ , & |\varphi| \le \pi/2\ , \\ 0\ , & \pi/2 \le |\varphi| \le \pi\ , \end{cases} \quad (29)$$

где J^* = I0 Па·с.

Результаты численных экспериментов представлены в размерном виде на рис. I — 7.

Анализ результатов и аналитической формулы решения (28) позволяет сделать некоторые выводы и предложить ряд инженерных оценок динамики тонкостенной цилиндрической оболочки при импульсном нагружении её боковой поверхности.

3.I. При начальных колебаниях оболочки влияние точек крепления грузов и торцов оболочки (граничных условий) локализовано (имеет ряд пограничных слоёв) . Причём области влияния точек крепления грузов не зависят от их массы (см.

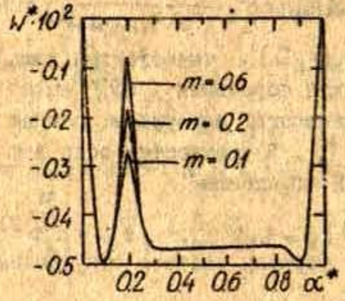


Рис.I.

Прогиб в сечении $\varphi = 0$ при $t = 0{,}01$ с. $N = 1$, $\alpha_1^* = 0{,}2$ м, $\varphi_1 = 0$. Верхняя линия соответствует массе $m_1^* = 0{,}6$ кг, нижняя массе $m_1^* = 0{,}1$ кг. $E_1 = E_2 = 0{,}2 \cdot 10^7$ Н/м^2, $G = 0{,}1 \cdot 10^7$ Н/м^2. Торцы оболочки заделаны жёстко.

рис.I,2 и 4) и вида нагружения, а определяются лишь характеристиками оболочки и зависят от времени. Анализ аналитической формулы решения (28) позволяет дать следующую оценку области влияния жёстко закреплённой в точке (α_j^*, φ_j) массы на динамический процесс (формулы приведены в размерном виде)

$$\Delta_j(\alpha^*, S^*) \leq \Delta(t) , \qquad (30)$$

где

$$\Delta_j(\alpha^*, S^*) = \sqrt{(\alpha^* - \alpha_j^*)^2 + (S^* - S_j^*)^2} , \quad S^* = R\varphi , \quad S_j^* = R\varphi_j , \qquad (31)$$

$$\Delta(t) \sim 4 E_2^{1/8} R^{1/4} h^{1/2} \left[(1 - \nu_1 \nu_2)\rho \right]^{-1/8} \psi \, t^{1/4} \qquad (32)$$

$$\psi = (\omega \cos^2\theta + \sin^2\theta)^{-1} (\omega^2 \cos^4\theta + 2\gamma \cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta)^{1/4} , \qquad (33)$$

а θ - полярный угол при переходе $\alpha^* - \alpha_j^* = r\cos\theta$, $\varphi - \varphi_j = r\sin\theta$.

Итак, в случае тонкостенных оболочек $(h/R \to +0)$ область влияния присоединённой массы на первых колебаниях весьма мала и с течением времени расширяется достаточно медленно (как $t^{1/4}$).

Аналогичные оценки имеют место и для области влияния торцов оболочки. Пусть $\alpha^* = \alpha_0^*$ - торец цилиндрической оболочки. Тогда область влияния этого торца имеет оценку:

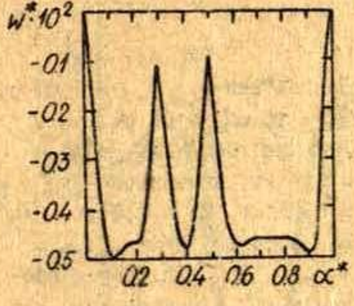


Рис.2.
Прогиб при $\varphi = 0$, $t = 0{,}01$ с. $N = 2$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\alpha_1^* = 0{,}3$ м, $\alpha_2^* = 0{,}5$ м, $m_1^* = 0{,}4$ кг, $m_2^* = 0{,}5$ кг; $E_I = E_2 = 0{,}2 \cdot 10^7$ Н/м^2, $G = 0{,}1 \cdot 10^7$ Н/м^2. Торцы оболочки заделаны жёстко.

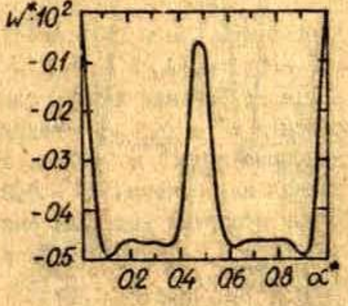


Рис.3.
Прогиб при $\varphi = 0$, $t = 0{,}01$ с. $N = 2$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\alpha_1^* = 0{,}46$ м, $\alpha_2^* = 0{,}5$ м, $m_1^* = 0{,}4$ кг, $m_2^* = 0{,}5$ кг; $E_I = E_2 = 0{,}2 \cdot 10^7$ Н/м^2, $G = 0{,}1 \cdot 10^7$ Н/м^2. Торцы оболочки заделаны жёстко.

$$|\alpha^* - \alpha_0^*| \leq \Delta_1(t) \quad , \tag{34}$$

$$\Delta_1(t) \sim 4 (R E_1 h^2)^{1/4} [E_2 (1 - \nu_1 \nu_2) \rho]^{-1/8} t^{1/4} \quad . \tag{35}$$

Область влияния граничного условия не зависит от способа закрепления торца оболочки. Это следует из аналитической формулы решения (28) (см. также рис.4) .

Численные расчёты, проведённые для оболочки с параметрами: $R = 0{,}5$ м, $L = 1{,}0$ м, $h = 0{,}005$ м, $\nu_1 = 0{,}3$; $\nu_2 = 0{,}45$; $\rho = 2740$ кг/м^3, $E_I = 0{,}2 \cdot 10^7$ Н/м^2, $E_2 = 0{,}3 \cdot 10^7$ Н/м^2, $G = 0{,}15 \cdot 10^7$ Н/м^2, при жёсткой заделке торцов

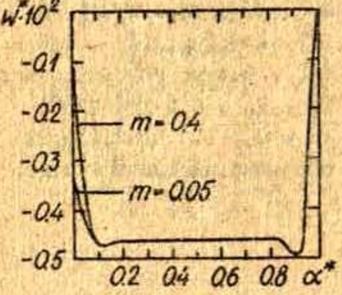


Рис.4.
Прогиб при $\varphi = 0$, $t = 0{,}0I$ с. $N = I$, $\alpha_1^* = 0$, $\varphi_1 = 0$. Верхняя линия для $m_1^* = 0{,}4$ кг, нижняя для $m_1^* = 0{,}05$ кг. $E_I = 0{,}2 \cdot I0^7$ Н/м^2, $E_2 = 0{,}4 \cdot I0^7$ Н/м^2, $G = 0{,}I5 \cdot I0^7$ Н/м^2. Торец оболочки $\alpha^* = 0$ свободен, а торец $\alpha^* = I$ м заделан жёстко.

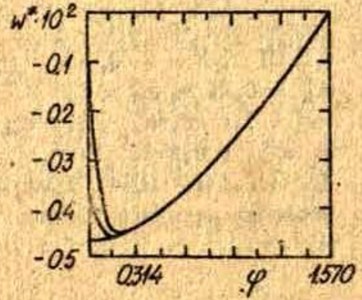


Рис.5.
Прогиб при $t = 0{,}0I$ с. $N = I$, $\alpha_1^* = 0{,}3$ м, $\varphi_1 = 0$; $m_1^* = 0{,}5$ кг. Верхняя линия для сечения $\alpha^* = 0{,}3$ м, средняя для сечения $\alpha^* = 0{,}25$ м, а нижняя для сечения $\alpha^* = 0{,}2$ м. Торцы оболочки заделаны жёстко. $E_I = 0{,}2 \cdot I0^7$ Н/м^2, $E_2 = 0{,}4 \cdot I0^7$ Н/м^2, $G = 0{,}I5 \cdot I0^7$ Н/м^2.

оболочки и в отсутствии присоединённых масс показали, что при $0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$ с.

$$|\alpha^* - \alpha_0^*| \leqslant 0{,}833 \cdot \Delta_1(t) \qquad (36)$$

с относительной погрешностью $\leqslant$ II %.

При тех же характеристиках оболочки для случая $N = I$, $m_1^* = 0{,}5$ кг, $\alpha_1^* = 0{,}5$ м, $\varphi_1 = 0$ и $0 \leqslant t \leqslant 0{,}3$ с.

$$\Delta_1(\alpha^*, S^*) \leqslant 0{,}87 \cdot \Delta(t) \qquad (37)$$

с относительной погрешностью $\leqslant$ I2 %.

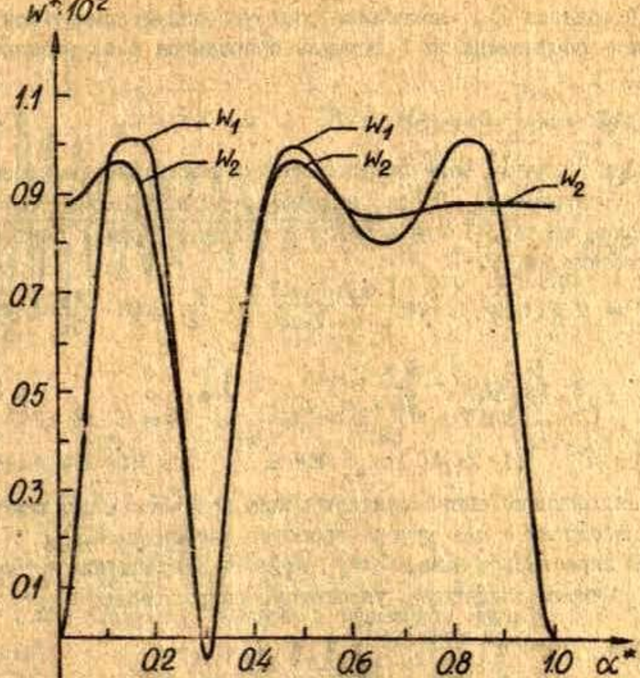


Рис.6.

Прогиб при t = 0,5 с. φ = 0, N = I, α_1^* = 0,3 м, φ_1 = 0, m_1^* = 0,4 кг, линия w_1 вычислена по формуле (28) , а w_2 по формуле (4I) ; h = 0,005 м, ν_1 = 0,3; ν_2 = = 0,45; E_1 = 0,2·10^7 Н/м^2, E_2 = 0,3·10^7 Н/м^2, G = = 0.15·10^7 Н/м^2 . Торцы оболочки заделаны жёстко.

При t = 0,3 с. зоны влияния торца оболочки к присоединённой массы встречаются.и структура колебательного процесса при t > 0,3 с. усложняется.

3.2. Поверхность тонкостенной цилиндрической оболочки разбивается на области влияния прикреплённых грузов и торцов оболочки (оценки этих областей даны в п.3.I.) и на оставшуюся часть поверхности D_S . В начальный период, когда области влияния не пересекаются, динамику оболочки можно исследовать отдельно на каждой из выделенных областей (см. рис. I–6) .

В области D_5 колебания оболочки аппроксимируются простейшими соотношениями (формулы приводятся в безразмерном виде) :

$$w = -\frac{1}{\omega} g(\alpha,\varphi)\sin\omega\tau \ , \quad \omega = \sqrt{E_2/E_1} \ . \qquad (38)$$

При принятых выше предположениях аналитическое решение (28) упрощается. Пусть, например, торец оболочки $\alpha = 0$ закреплён жёстко. Тогда в области влияния торца в первом приближении имеем:

$$w = 2g(0,\varphi)\tau \operatorname{Re}\left[\frac{\exp(-i\omega\tau)}{1-2i\omega\tau}\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\varkappa\alpha}{\sqrt[4]{\varepsilon}}s(\tau)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\bar\varkappa}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\bar\varkappa\alpha}{\sqrt[4]{\varepsilon}}s(\tau)\right) - 1\right)\right] \ , \qquad (39)$$

где

$$s(\tau) = \tau^{-1/2}(1-2i\omega\tau)^{1/4} \ , \quad \varkappa = e^{i\pi/4} \ , \quad \bar\varkappa = e^{-i\pi/4} \ . \qquad (40)$$

Аналогичные аппроксимации можно получить и для второго торца оболочки и для других способов закрепления.

В окрестности точки (α_j, φ_j) - закрепления груза массы m_j - имеем следующую, упрощённую аппроксимацию:

$$w = -2\tau \operatorname{Re}\left[\frac{\exp(-i\omega\tau)}{1-2i\omega\tau}\left\{ g(\alpha,\varphi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4m_j\, g(\alpha_j,\varphi_j)}{\pi(m_j + 8\sqrt{\omega\varepsilon}\, s_1(\tau))}\left(\frac{r_j}{z_j}\right)^2 \operatorname{kei}\left(\frac{r_j^2 s_0(\tau)}{\sqrt[4]{\varepsilon}\, z_j}\right)\right\}\right] \ , \qquad (41)$$

где

$$s_1(\tau) = \tau\frac{\sqrt{1-2i\omega\tau}}{1-2i\omega\tau-\omega^2\tau^2} \ , \quad s_0(\tau) = (\tau\omega)^{-1/2}\cdot(1-2i\omega\tau)^{1/4} , \qquad (42)$$

$$r_j = \left[\omega(\alpha-\alpha_j)^2 + (\varphi-\varphi_j)^2\right]^{1/2} \ , \qquad (43)$$

$$z_j = \left[\omega^2(\alpha-\alpha_j)^4 + 2\gamma(\alpha-\alpha_j)^2(\varphi-\varphi_j)^2 + (\varphi-\varphi_j)^4\right]^{1/4} . \qquad (44)$$

Сравнение счёта по формулам (28) и (4I) представлено на рис.6.

Из (4I) следует аппроксимация движения $w_j = w_j(\alpha_j,\varphi_j,\tau)$ жёстко присоединённой массы m_j :

$$w_j = 16\sqrt{\omega\varepsilon}\, \tau^2 g(\alpha_j,\varphi_j) \operatorname{Re}\left[\exp(-i\omega\tau)/S_j(\tau)\right] , \qquad (45)$$

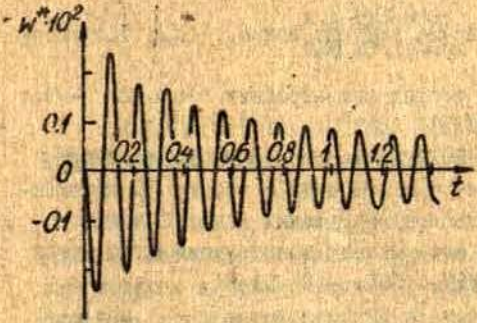


Рис.7.
Прогиб в точке крепления груза. $N = 1$, $\alpha_1^* = 0{,}3$ м, $\varphi_1 = 0$, $m_1^* = 0{,}5$ кг. $E_1 = E_2 = 0{,}2 \cdot 10^7$ Н/м^2, $G = 0{,}1 \cdot 10^7$ Н/м^2. Торцы оболочки заделаны жёстко.

$$S_j(\tau) = (1-2i\omega\tau)^{1/2}(1-2i\omega\tau-\omega^2\tau^2)(m_j + 8\sqrt{\omega\varepsilon}\, S_1(\tau)) \quad . \quad (46)$$

Отсюда имеем:

$$w_j \sim 16\sqrt{\omega\varepsilon}\, \tau^2 g(\alpha_j, \varphi_j)/m_j \quad , \quad \tau \to +0 \quad , \quad (47)$$

$$w_j \sim \frac{8\sqrt{2\varepsilon}\, g(\alpha_j, \varphi_j)}{m_j \omega^2 \sqrt{\tau}} \cos(\omega\tau - \pi/4) \quad , \quad \tau \to +\infty \quad . \quad (48)$$

Из (47) следует (формула в размерном виде):

$$\frac{\partial^2 w_j^*}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = -\frac{16\, h\, (E_1 E_2)^{1/4}}{\sqrt{3\rho}\, m_j^* \sqrt{1-\nu_1\nu_2}}\, g^*(\alpha_j^*, \varphi_j) \quad . \quad (49)$$

Отметим, что инерционная сила не зависит от массы прикреплённого груза.

3.3. Анализ формул решения позволяет выделить критическую массу жёстко прикреплённого груза $m_0^* = R h^2 \rho$. В расчётном примере $m_0^* = 0{,}13$ кг. Если масса груза $m_j^* << m_0^*$, то при импульсном нагружении боковой поверхности такой груз можно считать "лёгким". Его воздействие на динамический процесс незначительно и колебания оболочки близки к соответствующим колебаниям оболочки без грузов. При $m_j^* >> m_0^*$ груз является "тяжёлым" и при первых колебаниях оболочки точка крепления груза практически не движется (см. формулы (45) - (48)) . Область $m_j^* \sim m_0^*$ является переходной (см. рис.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алумяэ Н.А. О применимости метода расчленения напряжённого состояния при решении осесимметричных задач динамики

замкнутой цилиндрической оболочки//Изв.АН ЭССР.-1961. - № 3. - С. 171-181.
2. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. - Л.: Судостроение, 1972. - 374 с.
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. - 448 с.
4. Белов М.А., Столярова Л.А. Инженерные формулы динамики тонкостенных цилиндрических оболочек с жёстко прикреплёнными грузами при импульсном нагружении боковой поверхности//Проектирование и оптимизация конструкций инженерных сооружений. - Рига.: РТУ, 1990. - С. 51-61.

УДК 539.3: 534.1

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ЖЕСТКО ПРИКРЕПЛЕННЫХ ГРУЗОВ НА ДИНАМИКУ ТОНКОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ. Белов М.А., Столярова Л.А., Юдрупс О.М.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.-Рига:ЛУ, 1993.-Вып.3

На базе специальных асимптотических аппроксимаций разработан достаточно простой аналитический метод расчёта вынужденных колебаний тонкостенной ортотропной цилиндрической оболочки с жёстко прикрепленными грузами. Проведен анализ влияния жёстко прикрепленных грузов на динамику оболочки.

THE ASYMPTOTIC ESTIMATIONS OF THE FIRMLY FIXED LOADS INFLUENCE ON THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELL DYNAMICS. Belov M.A., Stolarova L.A., Judrups O.M.// The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics.- Riga:LU, 1993. Vol. 3

Basing on special asymtotic approximations was worked out sufficiently simple analytic method for calculating of thin-walled cylindrical shell with firmly fixed loads forced oscilations. There was carried out the analysis of the firmly fixed loads influence on shell dynamics.

PLĀNU CILINDRISKU ČAULU DINAMIKAS ASIMPTOTISKIE NOVĒRTĒJUMI ATKARĪBĀ NO NEKUSTĪGI PIESTIPRINĀTĀM MASĀM. Belovs M.A., Stolarova L.A., Judrups O.M. // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. - Rīga: LU, 1993.- 3. sēj.

Izmantojot speciālas asimptotiskas aproksimācijas, atrasta pietiekami vienkārša analītiska metode, kā aprēķināt plānas ortotropas cilindriskas čaulas uzspiestās svārstības, ja tai ir nekustīgi piestiprinātas masas. Veikta analīze, kā nekustīgi piestiprinātas masas ietekmē čaulas dinamiku.

А.Б.Цибулис
ИМИ ЛУ, Рига

К ПРОБЛЕМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В /I/ был приведен пример "сглаженной системы", состоящей из двух эллиптических уравнений, для которой предельный переход в "классическом смысле" неосуществим. Другими словами, предельный переход в этой системе не приводит к системе такого же вида. Наличие таких примеров несколько проясняет сложность открытой проблемы введения обобщенного решения для систем уравнений с разрывными нелинейностями.

Сложность этой проблемы заключается в том, что не ясно, как же следует доопределить разрывные коэффициенты на так называемых двухфазных зонах. В отличие от системы, известно /2/, что для одного уравнения решение может быть введено так, что все разрывные коэффициенты в двухфазной зоне доопределяются единообразным способом - при помощи одной и той же неизвестной функции.

Ниже приведен пример системы со сглаженными коэффициентами, в которой возможен предельный переход в "классическом смысле", тем не менее не все коэффициенты предельной системы в двухфазной зоне могут быть заданы при помощи одной и той же неизвестной функции.

Существование такого примера вытекает из /I/, однако этот факт там остался незамеченным.

Пусть:

$$\Omega = (0,\pi) \quad ; \quad W = \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2}(\Omega) \; ;$$

$$\alpha_1 , \alpha_2 > 0 \; , \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \; ;$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1, & t<0, \\ \alpha_2, & t>0, \end{cases} \quad \beta(t) = \begin{cases} 1, & t<0, \\ -1, & t>0. \end{cases}$$

Пусть разрывные функции α, β аппроксимируются непрерывными функциями α^k, β^k следующим образом:

$$\alpha^k(t) = \alpha_2 \varphi^k(t) + \alpha_1 (1-\varphi^k(t)), \tag{1}$$

$$\beta^k(t) = (-1)\varphi^k(t) + 1\cdot(1-\varphi^k(t)) = 1-2\varphi^k(t), \tag{2}$$

где

$$\varphi^k(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ kt, & 0<t<\frac{1}{k}, \\ 1, & t \ge \frac{1}{k}, \quad k=1,2,\ldots . \end{cases} \tag{3}$$

Относительно $u, v \in W$ рассмотрим систему со сглаженными коэффициентами:

$$\int_\Omega \alpha^k(v)(u_x \zeta_x + \zeta)\,dx = 0 \quad \forall \zeta \in W \tag{4}$$

$$\int_\Omega (v_x \psi_x + \beta^k(v))\,dx = 0 \quad \forall \psi \in W \tag{5}$$

Заметим, что функция

$$v^k(x) = \frac{\sin^2 mx}{k}, \quad m = \sqrt{\tfrac{5}{2}}$$

удовлетворяет соотношению (5).

Действительно, так как $0 \le v^k \le \frac{1}{k}$, то согласно (2), (3)

$$\varphi^k(v^k) = kv^k, \quad \beta^k(v^k) = 1-2kv^k, \tag{6}$$

и следовательно:

$$\int\limits_{\Omega} v^k_x \psi_x dx = -\int\limits_{\Omega} v^k_{xx} \psi dx = -\int\limits_{\Omega} \frac{2m^2}{k}(1-2\sin^2 mx)\psi dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega}(1-2kv^k)\psi dx = -\int\limits_{\Omega}\beta^k(v^k)\psi dx.$$

ВР (4) (ВР - вариационное равенство), в которое вместо v подставлена функция v^k, имеет единственное решение u^k,. см., например, /3/, причем без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{u^k\}$ сходится слабо к некоторому u^0 в пространстве W.

В силу G -сходимости /4/ имеем:

$$\int\limits_{\Omega} \alpha^k(v^k) u^k_x \eta_x dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int\limits_{\Omega} \alpha^0 u^0_x \eta_x dx, \qquad (7)$$

где α^0 определяется из соотношения

$$\frac{1}{\alpha^k(v^k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\alpha^0}. \qquad (8)$$

Далее ради простоты изложения будем считать, что k пробегает лишь те значения натуральных чисел, при которых число m - целое.

Поскольку $kv^k = \sin^2 mx \longrightarrow \frac{1}{2}$ при $k\to\infty$, то согласно (I), (6) $\alpha^k(v^k) = (\alpha_2-\alpha_1)kv^k+\alpha_1 \longrightarrow \alpha^* = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega} \alpha^k(v^k)\eta\, dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int\limits_{\Omega} \alpha^* \eta\, dx,$$

что наряду с (7) дает следующее предельное соотношение

$$\int\limits_{\Omega}(\alpha^k(v^k)u_x^k\eta_x+\alpha^k(v^k)\eta)\,dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int\limits_{\Omega}(\alpha^0u_x^0\eta_x+\alpha^*\eta)\,dx$$

Покажем, что $\alpha^0\neq\alpha^*$. Действительно, непосредственным вычислением получаем, что при любом целом m

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{(\alpha_2-\alpha_1)\sin^2 mx+\alpha_1}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}},$$

поэтому вследствие (8)

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha^0}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\alpha^*}=\frac{2\pi}{\alpha_1+\alpha_2}\neq\frac{\pi}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}},$$

и, следовательно, $\alpha^0\neq\alpha^*$, так как $\alpha_1\neq\alpha_2$.

Учитывая, что $v^k\to v^0$ $(v^0\equiv 0)$ сильно в $\overset{\circ}{W}$ и $\beta^k(v^k)\longrightarrow\beta^0$ $(\beta^0\equiv 0)$ слабо в L_2 при $k\to\infty$, переходя к пределу в системе (4)-(5), получим:

$$\int\limits_{\Omega}(\alpha^0u_x^0\eta_x+\alpha^*\eta)\,dx=0 \qquad \forall\eta\in\overset{\circ}{W} \tag{9}$$

$$\int\limits_{\Omega}(v_x^0\psi_x+\beta^0\psi)\,dx=0 \qquad \forall\psi\in\overset{\circ}{W}.$$

Коэффициенты α°, α^*, β° этой системы не могут быть представлены в виде:

$$\rho = \rho^+ \varphi^* + \rho^- (1 - \varphi^*) \qquad (10)$$

с одной и той же функцией $\varphi^* : \Omega \to [0,1]$ для $\rho = \alpha^\circ, \alpha^*, \beta^\circ$. (Здесь через ρ^+, ρ^- обозначены соответственно правый и левый пределы функции ρ при $t \to 0$). Это немедленно следует из того, что $\alpha^\circ \neq \alpha^*$.

Более того, ни при какой функции a со значениями из замкнутого интеграла с конечными точками α_1, α_2 не может выполняться следующее ВР, предельное для (4)

$$\int_\Omega a(x)(u^\circ_x \eta_x + \eta)\,dx = 0 \quad \forall \eta \in W. \qquad (11)$$

Допустим, что такая функция a, удовлетворяющая (II), существует. Тогда непосредственно по определению обобщенной производной

$$(a u^\circ_x)_x = a \qquad (12)$$

В одномерном случае это равенство выполняется для обычной производной почти всюду в Ω (см., например, /5, с. 143/.

Заметим, что единственным решением ВР (9) является функция

$$u^\circ(x) = \frac{\alpha^*}{2\alpha^\circ}(x^2 - \pi x).$$

Отсюда и из (12) получаем, что для почти всех $x \in \Omega$

$$a(x) = c\,(x - \tfrac{\pi}{2})^\gamma,$$

где $\gamma = \alpha^\circ/\alpha^* - 1$, а C – произвольная постоянная.

Поскольку $\gamma < 0$, то $a(\tau) \to \infty$ при $\tau \to \frac{\pi}{2}$, что противоречит ораниченности функции a.

Замечание. Пусть вместо (2) функция β аппроксимируется следующим способом:

$$\beta^k(t) = 1 - 2\varphi^k(t + \frac{1}{2k}). \tag{I3}$$

Тогда система (4)-(5) имеет решение $u^k = (x^2 - \pi x)/2$, $v^k = 0$, и при $k \to \infty$ получим следующую систему:

$$\int_\Omega \alpha_1 (u_x \eta_x + \eta) dx = 0 \quad \forall \eta \in W \tag{I4}$$

$$\int_\Omega (v_x \psi_x + \beta^0 \psi) dx = 0 \quad \forall \psi \in W \tag{I5}$$

с α_1, β^0 не представимыми в виде (I0) с одной и той же функцией φ^*. Тем не менее решение $(u,v) = (\frac{x^2 - \pi x}{2}, 0)$ этой системы удовлетворяет другой системе, коэффициенты которой уже представимы в виде (I0) (с функцией $\varphi^* = 1/2$), а именно, системе, которая отличается от (I4)-(I5) лишь тем, что вместо α_1 взято число α^*.

Более того, последняя система может быть получена как предел сглаженной системы (4)-(5), если β аппроксимируется согласно (I3), а α по формуле

$$\alpha^k(t) = (\alpha_2 - \alpha_1)\varphi^k(t + \frac{1}{2k}) + \alpha_1 .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цибулис А.Б. О предельном переходе в одной системе эллиптических уравнений при сглаживании разрывных нелинейностей // Латв.матем.ежегодник. - 1988. - Вып.32. - С.50-54.

2. Цибулис А.Б. О разрешимости эллиптических уравнений с коэффициентами, терпящими разрывы на поверхностях вида $u = g(x)$ // Латв.матем.ежегодник. - 1985. - Вып.29. - С.100-111.

3. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа // М.:Наука, 1973. - 576 с.

4. Олейник О.А. О распространении тепла в многомерных дисперсных средах // Задачи механики и математической физики. - М., 1976. - С.224-236.

5. Избранные главы анализа и высшей алгебры. - Л.: ЛГУ, 1981. - 200 с.

УДК 517.95

К ПРОБЛЕМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ. Цибулис А.Б. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.-Рига: ЛУ, 1993.-Вып.3

На основе специально выбранного примера системы эллиптических уравнений с РН (РН - разрывные нелинейности) показано, что различные способы аппроксимации РН, вообще говоря, приводят к различным предельным системам. Это в определенном смысле освещает сложность открытой проблемы введения решения для систем уравнений с РН.

TO THE PROBLEM OF THE DEFINITION OF SOLUTION FOR SYSTEMS OF ELLIPTIC EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS NONLINEARITIES. Cibulis A. // The Mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. - Riga: LU, 1993. - Vol.3.

On a basis on the specially selected example of the system of elliptic equations with DN (DN - discontinuous nonliniarities) it is shown that different ways of the approximation of DN lead to the different, generally speaking, limit systems. This elucidate in a certain sense the complexity of the open problem of the definition of the solution for systems of equations with DN.

MSC. 35J45

PAR ATRISINĀJUMA DEFINĒŠANAS PROBLĒMU ELIPTISKU VIENĀDOJUMU SISTĒMĀM AR PĀRRAUTĀM NELINEARITĀTĒM. Cibulis A. // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. - Rīga: LU, 1993. - 3.sēj.

Pamatojoties uz speciāli izvēlētas eliptisku vienādojumu sistēmas ar PN (PN - pārtrauktās nelinearitātes) piemēru, pierādīts, ka dažādi PN aproksimācijas veidi, vispārīgi runājot, dod dažādas robežsistēmas. Tas zināmā nozīmē izgaismo atklātās problēmas - kā definēt atrisinājumu eliptisku vienādojumu sistēmām ar PN ? - sarežģītību.

С.П.Юшанов

ВНУТРЕННИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В МОНОКРИСТАЛЛАХ С НЕОДНОРОДНЫМ СОСТАВОМ

В малодислокационных монокристаллах основную роль в нарушении совершенства структуры материала играет неравномерное распределение по объему точечных дефектов. Точечная дефектность проявляется в различных формах: сегрегационное распределение примеси, слоистое распределение по полосам роста, канальная неоднородность, образование примесных субструктур, включения и т.д. Помимо изменения оптических, электрических, магнитных и других физических свойств, неравномерность распределения точечных дефектов приводит к появлению внутренних напряжений, которые снижают прочностные характеристики материала. Величина внутренних напряжений определяется локальными градиентами концентрации дефектов и природой микронеоднородности.

В работе рассмотрен метод расчета напряженного состояния монокристаллов с распределением дефектов по полосам роста. Этот тип структурной неоднородности наблюдается в металлах, ионных кристаллах, полупроводниках, гранатах при выращивании методами зонной плавки, Чохральского, Вернейля и обусловлен либо неравномерностью распределения легирующей примеси, либо отклонением состава соединения от стехиометрического. Обзор и библиография работ по механизмам возникновения и структуре слоистой неоднородности содержатся в /1,2/.

1. Базисное поле пластической деформации. Рассмотрим бесконечную изотропную среду с распределенными точечными дефектами. В общем случае полная деформация ε^{T}_{ij} представима в виде

$$\varepsilon^{T}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon^{P}_{ij},$$

где ε_{ij} - упругая деформация; ε^{P}_{ij} - несовместная деформация, порождаемая распределенными дефектами. Следуя терминологии, принятой в континуальной теории /3/, величину ε^{P}_{ij} будем называть базисным полем пластической деформации. Несовместность поля ε^{P}_{ij} является источником внутренних напряжений, поскольку она вызывает упругие деформации ε_{ij} такие, что полная деформация ε^{T}_{ij} удовлетворяет условиям совместности. ε^{P}_{ij} находится по следующей схеме. Вначале рассматривается изолированный дефект в бесконечной среде. Методами теории упругости определяется порождаемое этим дефектом поле полных перемещений $\vec{U}^{T}_{i}$. Далее находится полная дисторсия $\vec{\beta}^{T}_{ij} = \vec{U}^{T}_{j,i}$, симметричная сингулярная часть которой определяет базисное поле пластической деформации $\bar{\varepsilon}^{P}_{ij}$ изолированного дефекта. Для дефекта точечного типа сингулярность сосредоточена в точке (для дефекта дислокационного типа - на линии). Базисное поле ε^{P}_{ij} среды с распределенными дефектами вычисляется путем осреднения по ансамблю базисных полей $\bar{\varepsilon}^{P}_{ij}$ изолированных дефектов.

Для определения поля $\vec{U}^{T}_{i}$ воспользуемся методом силовых мультиполей /4/. Для дефекта, расположенного в начале координат, имеем

$$\vec{U}^{T}_{i}(\vec{r}) = -G_{ij,k}(\vec{r})\mathbb{P}^{(1)}_{kj} + \frac{1}{2!}G_{ij,kl}(\vec{r})\mathbb{P}^{(2)}_{klj} - \frac{1}{3!}G_{ij,klm}(\vec{r})\mathbb{P}^{(3)}_{klmj} + \ldots \quad (1.1)$$

где $G_{ij}(\vec{r})$ - тензор перемещений Грина; $\mathbb{P}^{(1)}_{kj}$ - дипольный, $\mathbb{P}^{(2)}_{klj}$ - квадрупольный, $\mathbb{P}^{(3)}_{klmj}$ - октупольный и т.д. моменты дополнительных сил, с которыми точечный дефект действует на соседние атомы кристаллической решетки. Мультипольные моменты определяются при помощи теории решетки, либо дискретно-континуальным методом с использованием экспериментальных данных о рассеянии фононов, нейтронов или рентгеновских лучей. Ограничимся рассмотрением дипольного приближения, поскольку оно определяет поля, наиболее медленно убывающие на бесконечности. Подставляя в (1.1) выражение для тензора Грина изотропной среды /4/ и сохраняя только первый член разложения, после вычислений находим

$$\vec{\beta}^{T}_{ij}(\vec{r}) = -\frac{\mathbb{P}^{(1)}_{ns}}{8\pi\mu}\left(\delta_{js}\,r_{,ppni} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,r_{,ijns}\right), \quad (1.2)$$

где λ, μ - постоянные Ламе; δ_{ij} - символ Кронекера. Входящие в (1.2) четвертые производные модуля радиус-вектора содержат формальную и сингулярную составляющие /5/: $\Gamma_{,ijkl} = \Gamma^{(l)}_{,ijkl} + \Gamma^{(s)}_{,ijkl}$. Сингулярная составляющая равна

$$\Gamma^{(s)}_{,ijkl} = -\frac{8\pi}{15}\,\delta(\vec{r})(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \qquad (1.3)$$

$\delta(\vec{r})$ - распределение Дирака. Выделяя из (1.2) сингулярную часть по правилу (1.3), находим пластическую дисторсию $\vec{\beta}^p_{ij}$, а затем и базисное поле пластической деформации изолированного диполя:

$$\vec{\varepsilon}^p_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\,(\vec{\beta}^p_{ij} + \vec{\beta}^p_{ji}) = \frac{1}{15\mu(\lambda+2\mu)}\left[(3\lambda+8\mu)\mathbb{P}^{(1)}_{ij} - (\lambda+\mu)\mathbb{P}^{(1)}_{**}\delta_{ij}\right]\delta(\vec{r}). \qquad (1.4)$$

Обозначим через δV изменение объема образца, вызванное наличием в нем изолированного дефекта. Из формулы $\delta V = \int\vec{\varepsilon}^p_{**}(\vec{r})dV$ и (1.4) находим первый инвариант дипольного момента

$$\mathbb{P}^{(1)}_{**} = 3(\lambda+2\mu)\delta V.$$

Тогда (1.4) можно записать в виде

$$\vec{\varepsilon}^p_{ij}(\vec{r}) = \left[\frac{\delta V}{3}\,\delta_{ij} + \frac{1}{15\mu}\,\frac{3\lambda+8\mu}{\lambda+2\mu}\,\mathbb{D}_{ij}\right]\delta(\vec{r}), \qquad (1.5)$$

где $\mathbb{D}_{ij} = \mathbb{P}^{(1)}_{ij} - \frac{1}{3}\,\mathbb{P}^{(1)}_{**}\delta_{ij}$ - девиатор дипольного момента.

Теперь рассмотрим среду с распределенными дефектами. Выделим физически малый объем $v(\vec{r})$, содержащий достаточно большое число N дефектов, и проведем по нему осреднение

$$\varepsilon^p_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{v}\int\limits_{v(\vec{r})}\sum_{n=1}^{N}\vec{\varepsilon}^p_{ij}(\vec{r}-\vec{r}\,'_n)dV'. \qquad (1.6)$$

Из (1.5) и (1.6) находим искомое поле ε^p_{ij} в дипольном приближении

$$\varepsilon^p_{ij}(\vec{r}) = \left[\frac{\delta V}{3}\,\delta_{ij} + \frac{1}{15\mu}\,\frac{3\lambda+8\mu}{\lambda+2\mu}\,\mathbb{D}_{ij}\right]c(\vec{r}), \qquad (1.7)$$

где $c = \frac{N}{v}$ - объемная концентрация дефектов.

Первое слагаемое базисного поля (1.7) характеризует чисто дилатационные свойства дефектов, а второе слагаемое описывает искажение формы кристаллической решетки. Для дефектов, принадлежащих к группам симметрии $\mathbb{T}_d$ и $\mathbb{O}_h$, девиаторы дипольных моментов $\mathbb{D}_{ij} = 0$ /4/. В этом случае базисное поле ε^p_{ij} соответствует дефектам типа центров дилатации

$$\varepsilon^p_{ij}(\vec{r}) = \frac{1}{3}\,\delta V\delta_{ij}\,c(\vec{r}). \qquad (1.8)$$

Дефекты такого типа обычно моделируются сферическими жесткими включениями либо системами трех равных двойных взаимно перпендикулярных сил /6,7/.

Если базисное поле пластической деформации, отвечающее заданной дефектной структуре, определено, то расчет напряженно-деформированного состояния сводится к решению континуальных неоднородных уравнений равновесия теории упругости /3/

$$\mu U^{T}_{i,jj} + (\lambda+\mu) U^{T}_{j,ij} = 2\mu\varepsilon^{P}_{ij,j} + \lambda\varepsilon^{P}_{ss,i} \qquad (1.9)$$

совместно с краевыми условиями, заданными в терминах средних поверхностных сил либо средних смещений.

2. Внутренние напряжения в цилиндрическом кристалле. Рассмотрим изотропный цилиндрический кристалл радиуса R и длиной L с точечными дефектами класса симметрии T_d или O_h, концентрация которых $c(r,z)$ (r - радиальная, z - осевая координаты) является осесимметричной и периодической по z функцией с периодом $T \ll L$. Уравнения равновесия (1.9), записанные в инвариантной форме, с учетом (1.8) имеют вид

$$\nabla\cdot\nabla\vec{u}^{T} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla\nabla\cdot\vec{u}^{T} = 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\frac{\delta V}{3}\nabla c;\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \qquad (2.1)$$

Боковая поверхность цилиндра свободна от нагрузок

$$\sigma_{rr}(r,z)=0,\quad \sigma_{rz}(r,z)=0 \text{ при } r=R \qquad (2.2)$$

При отсутствии внешних нагрузок условия $c(r,z)=c(r,z+T)$ и $T \ll L$ приводят к тому, что влияние краевых условий на торцах цилиндра на напряженно-деформированное состояние быстро убывает по мере удаления от них. В дальнейшем области, непосредственно прилегающие к торцам цилиндра, исключаются из рассмотрения.

Для решения задачи (2.1), (2.2) перемещения $\vec{u}^{T}$, тензор полных деформаций $\hat{\varepsilon}^{T}$ и тензор напряжений $\hat{\sigma}$ представим в виде суперпозиции $\vec{u}^{T}=\vec{u}^{c}+\vec{u}^{o}$, $\hat{\varepsilon}^{T}=\hat{\varepsilon}^{c}+\hat{\varepsilon}^{o}$, $\hat{\sigma}=\hat{\sigma}^{c}+\hat{\sigma}^{o}$. Поля $\vec{u}^{c}$, $\hat{\varepsilon}^{c}$, $\hat{\sigma}^{c}$ соответствуют задаче о равновесии бесконечной среды с заданным распределением дефектов $c(r,z)$, а $\vec{u}^{o}$, $\hat{\varepsilon}^{o}$, $\hat{\sigma}^{o}$ - задаче о равновесии бездефектного цилиндра, на боковую поверхность которого действуют нормальная $-\sigma^{c}_{rr}(R,z)$ и тангенциальная $-\sigma^{c}_{rz}(R,z)$ нагрузки.

Поле $\vec{u}^{c}$ определяется потенциалом перемещения Гудьера /8/ $\vec{u}^{c}=\nabla\psi$, который удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla\cdot\nabla\Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{\delta V}{3}\,c. \qquad (2.3)$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi(r,z)=-R^2\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{\delta V}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_s r/R)}{\lambda_s^2+\beta_k^2R^2}\Big[C_{ks}^{(1)}\cos\beta_k z+C_{ks}^{(2)}\sin\beta_k z\Big], \qquad (2.4)$$

где $\beta_k=\frac{2k\pi}{T}$; λ_s – положительные корни уравнения $HJ_0(\lambda)-\lambda J_1(\lambda)=0$, $H>0$; $C_{ks}^{(i)}$ – коэффициенты разложения функции $c(r,z)$ в ряд Фурье по z и в ряд Дини-Бесселя по r. Напряжения $\hat{\sigma}^c$ вычисляются через потенциал перемещений Φ по формуле

$$\hat{\sigma}^c=\frac{E}{1+\nu}\,(\nabla\nabla\Phi-\hat{I}\nabla\cdot\nabla\Phi), \qquad (2.5)$$

где $\hat{I}$ – единичный тензор второго ранга; E – модуль Юнга.

Поле $\vec{u}^o$ находится с помощью представления Папковича-Нейбера /9/. В осесимметричном случае $\vec{u}^o=(u_r^o, 0, u_z^o)$, причем

$$u_r^o(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{[\beta_k rI_0(\beta_k r)-4(1-\nu)I_1(\beta_k r)](A_k^{(1)}\cos\beta_k z+A_k^{(2)}\sin\beta_k z)+$$
$$+\beta_k I_1(\beta_k r)(B_k^{(1)}\cos\beta_k z+B_k^{(2)}\sin\beta_k z)\Big\};$$
$$\qquad (2.6)$$
$$u_z^o(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\beta_k rI_1(\beta_k r)(-A_k^{(1)}\sin\beta_k z+A_k^{(2)}\cos\beta_k z)+$$
$$+\beta_k I_0(\beta_k r)(-B_k^{(1)}\sin\beta_k z+B_k^{(2)}\cos\beta_k z)\Big].$$

Напряжения $\hat{\sigma}^o$ связаны с перемещениями $\vec{u}^o$ соотношением

$$\hat{\sigma}^o=\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}\,(\nabla\vec{u}^o+\vec{u}^o\nabla)+\frac{1}{1-2\nu}\,\hat{I}\nabla\cdot\vec{u}^o\right]. \qquad (2.7)$$

Входящие в (2.6) постоянные $A_k^{(i)}$, $B_k^{(i)}$ определяются из краевых условий (2.2) с учетом (2.4), (2.5) и (2.6), (2.7).

3. Асимптотическое решение при плоском распределении дефектов. Пусть $c=c(z)$ и $T/R\ll 1$. Такое распределение дефектов реализуется в монокристаллах с однородной полосчатой структурой, выращенных в условиях плоского фронта кристаллизации. В этом случае (2.3) вырождается в обыкновенное по z дифференциальное уравнение, с помощью которого из (2.5) непосредственно находятся компоненты тензора $\hat{\sigma}^c$

$$\sigma_{rr}^c=\sigma_{\varphi\varphi}^c=-\frac{E}{1-\nu}\,\frac{\delta V}{3}\,c(z), \quad \sigma_{zz}^c=\sigma_{rz}^c=0. \qquad (3.1)$$

Поле $\hat{\sigma}^c$ порождается действием на боковой поверхности цилиндра нормальной нагрузки $\frac{E}{1-\nu}\,\frac{\delta V}{3}\,c(z)$. Условие $T/R\ll 1$ означает, что эта нагрузка является высокочастотной. Следовательно, радиальное распределение компонент тензора $\hat{\sigma}^{\circ}$ имеет характер краевого эффекта: они быстро убывают по мере удаления от боковой поверхности цилиндра. Выражения для компонент тензора $\hat{\sigma}^{\circ}$ получим из (2.7) путем асимптотического разложения (2.6) по малому параметру T/R. Используя разложения бесселевых функций $I_p(x)$ при $x\gg1$, после вычислений с сохранением главных членов асимптотических разложений получим:

$$
\begin{aligned}
\sigma^{\circ}_{rr} &\simeq \frac{E}{1-\nu}\frac{\delta V}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\zeta_k}}{\sqrt{\rho}}\left[1+\zeta_k+\frac{1}{2}\left(1+\frac{3\rho^2-7}{4\rho}\right)\right](C_k^{(1)}\cos\beta_k z+C_k^{(2)}\sin\beta_k z);\\
\sigma^{\circ}_{\phi\phi} &\simeq \frac{E}{1-\nu}\frac{\delta V}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\zeta_k}}{\sqrt{\rho}}\left[2\nu+\frac{1-\rho}{\rho}\right](C_k^{(1)}\cos\beta_k z+C_k^{(2)}\sin\beta_k z);\\
\sigma^{\circ}_{zz} &\simeq \frac{E}{1-\nu}\frac{\delta V}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\zeta_k}}{\sqrt{\rho}}\left[2-\zeta_k-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+3\rho^2}{4\rho}\right)\right](C_k^{(1)}\cos\beta_k z+C_k^{(2)}\sin\beta_k z);\\
\sigma^{\circ}_{rz} &\simeq \frac{E}{1-\nu}\frac{\delta V}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\zeta_k}}{\sqrt{\rho}}\left[\zeta_k+\frac{3}{8}\frac{\rho^2-1}{\rho}\right](-C_k^{(1)}\sin\beta_k z+C_k^{(2)}\cos\beta_k z),
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

где $\zeta_k=\beta_k R(1-\rho)$; $\rho=r/R$; $1-\varepsilon<\rho\le1$; $\varepsilon=T/R$ – размер зоны краевого эффекта; $C_k^{(i)}$ – коэффициенты Фурье функции $c(z)$.

Таким образом, напряженное состояние цилиндра с плоской полосчатой неоднородностью разделяется на два: в основном массиве цилиндра в области $0\le\rho\le1-\varepsilon$ имеет место плоское напряженное состояние (3.1), а в тонком слое у боковой поверхности $1-\varepsilon<\rho\le1$ реализуется обьемное напряженное состояние, являющееся суперпозицией (3.1) и (3.2). В частности, на боковой поверхности

$$\sigma_{rr}(R,z)=\sigma_{rz}(R,z)=0;\ \sigma_{\phi\phi}(R,z)=-(1-2\nu)\frac{E}{1-\nu}\frac{\delta V}{3}c(z);$$

$$\sigma_{zz}(R,z)=\frac{E}{1-\nu}\frac{\delta V}{3}c(z).$$

4. Внутренние напряжения в монокристаллах $Gd_3Ga_5O_{12}$. Монокристаллы гадолиний-галлиевого граната (ГГГ), выращенные методом Чохральского, имеют низкую плотность дислокаций (1÷100 см$^{-2}$ /10,11/) и четко выраженную полосчатую структуру /10,12,13/, обусловленную неоднородностью

химического состава соединения. Рассмотрим монокристалл исходного состава $Gd_{3+x_0}Ga_{5-x_0}O_{12}$. Монокристалл состава $Gd_{3+x}Ga_{5-x}O_{12}$ при $x \neq x_0$ рассматривается как среда с распределенными дефектами (твердый раствор замещения). Установим выполнение сделанных в п.2 основных предположений. Для ГГГ фактор анизотропии A=1.05 /14/. При избытке гадолиния замещение ионов галлия происходит в октаэдрических позициях /15/. Следовательно, ГГГ переменного состава может рассматриваться как изотропная среда с распределенными дефектами класса симметрии O_h.

При изменении состава на величину $\Delta x = x - x_0$ относительное изменение размера a_0 решетки равно /16/

$$\frac{\Delta a}{a_0} = \left[\frac{r(G_d^{3+})}{r(G_a^{3+})} - 1 \right] \cdot 0.0284 \Delta x, \qquad (4.1)$$

где $r(Gd^{3+}) = 1.06\text{Å}$ и $r(Ga^{3+}) = 0.62\text{Å}$ - радиусы катионов Gd^{3+} и Ga^{3+} /17/. С другой стороны, для кубической решетки

$$\frac{\Delta a}{a_0} = \frac{\delta V}{3} c. \qquad (4.2)$$

Формулы (4.1), (4.2) и (1.8) устанавливают связь между составом монокристалла ГГГ и базисным полем пластической деформации. Характерный уровень внутренних напряжений соответствует зоне плоского напряженного состояния и, согласно (3.1), (4.2), равен

$$\sigma_0 = \frac{E}{1-\nu} \frac{\Delta a}{a_0}. \qquad (4.3)$$

В дальнейшем все напряжения нормируются к величине σ_0. Оценим пределы изменения σ_0, исходя из литературных данных. Упругие постоянные ГГГ равны /18/: $E = 2.25 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.28$. Согласно /16/, при образовании монокристаллической фазы ГГГ в расплаве перед фронтом кристаллизации концентрация Ga_2O_3 не ниже 55.5мол% и не выше 69 мол%, что соответствует изменению состава x_L жидкой фазы в пределах $-0.52 \leq x_L \leq 0.56$. Используя экспериментальную зависимость /16/ состава x твердой фазы граната от состава x_L жидкой фазы, находим $0.03 \leq x \leq 0.083$. При конгруэнтном составе $Gd_{3.05}Ga_{4.95}O_{12}$ $(x_0 = 0.05)$ $-0.02 \leq \Delta x \leq 0.033$. Из (4.1) и (4.3) получаем оценки для σ_0

$$-200 \text{ МПа} \leq \sigma_0 \leq 100 \text{ МПа}. \qquad (4.4)$$

При статическом плоском напряженном состоянии хрупкое растрескивание гранатовых пленок происходит при напряжениях порядка 400 МПа /19/, а в опытах на одноосную ползучесть развитое пластическое деформирование наблюдается при температурах >1670°K и напряжениях порядка 200 МПа /14/. Оценка (4.4) показывает, что в ГГГ с переменным составом внутренние напряжения могут достигать значений, сопоставимых с критическими.

Исследуем характер пространственного распределения внутренних напряжений. Пусть $c(r,z)$ изменяется по гармоническому закону вдоль оси z и по параболическому закону по r

$$c(r,z)=C_o\cos\beta(z-\delta r^2/R^2);\ \beta=2\pi/T. \qquad (4.5)$$

Распределение (4.5) соответствует полосчатой структуре состава монокристалла, выращенного в условиях плоского (δ=0), либо искривленного ($\delta\neq0$) фронта кристаллизации. При этом предполагается, что на поверхности фронта состав однороден. Параметры C_o, T, δ определяются конкретными технологическими условиями выращивания монокристалла.

Радиальное распределение напряжений показано на рис. 1 при δ=0. Здесь и в дальнейшем принято $T = 0.1R$. Расчет проводился в сечениях z=0 для нормальных и в сечениях $z=T/4$ для касательных компонент тензора напряжений. При соблюдении условия $T\ll R$ период неоднородности не влияет на величину максимальных напряжений, которые не зависят также и от искривленности фронта кристаллизации, но при $\delta\neq0$ радиальное распределение напряжений становится осциллирующим с частотой $\sim\delta/T$.

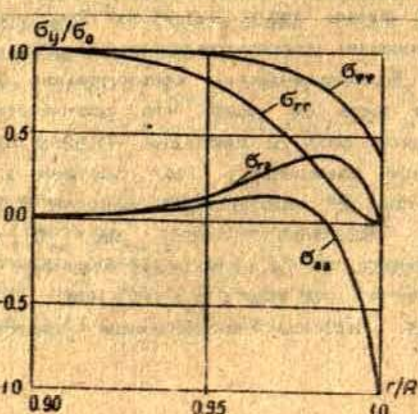


Рис 1.

При определеных условиях монокристаллы ГГГ пластически деформируются путем скольжения /14/. Аналогично, как и в о.ц.к. металлах, скольжение идет вдоль диагоналей куба $\langle 111\rangle$ по

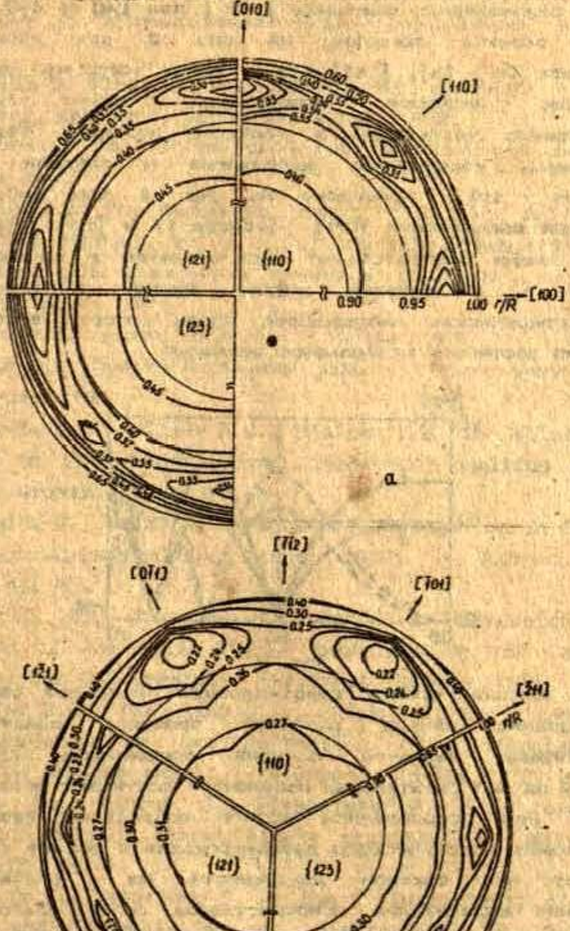


Рис. 2.

плоскостям {110}, {121}, {123}. Для каждого семейства систем скольжения рассчитывались максимальные касательные напряжения. Изолинии безразмерных значений $|\tau/\sigma_0|$ при $z=0$ и $\delta=0$ в зоне краевого эффекта показаны на рис. 2 для направлений выращивания [001] (а), [111] (б) с учетом того, что указанные направления являются поворотными осями симметрии соответственно четвертого и третьего порядков. Радиальное распределение касательных напряжений в главной системе скольжения 110 приведено на рис. 3 при $\delta=0.1R$ для направлений выращивания [001] (кривые 1) и [111] (кривые 2). Сплошные линии соответствуют распределению в сечении $z=0$, штриховые - в сечении $z=T/4$. Кривые построены для кристаллографических направлений, вдоль которых касательные напряжения достигают наибольшего значения.

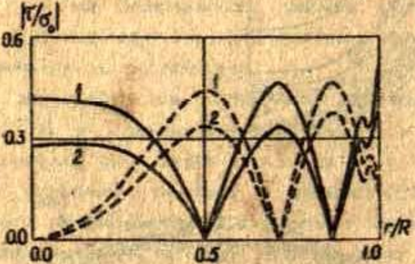


Рис. 3.

При плоском фронте кристаллизации наиболее опасной, с точки зрения начала развития процесса пластического деформирования, является боковая поверхность кристалла, поскольку на ней касательные напряжения достигают максимальных значений. При искривленном фронте возрастает вероятность инициирования пластического деформирования в объеме кристалла вдали от его боковой поверхности. Из рассмотренных направлений выращивания монокристаллов более благоприятным является направление [111], так как в этом случае уровень касательных напряжений более низкий.

Список литературы

1. Carlberg T. Some aspects on the formation of striations during crystal growth from the melt.- J.Cryst. Growth,

1987, v.85, N 1-2.

2. Мильвидский М.Г., Освенский В.Б. Структурные дефекты в монокристаллах полупроводников. - М.: Металлургия, 1984.

3. Де Вит Р. Континуальная теория дисклинаций. - М.: Мир, 1977.

4. Teodosiu C. Elastic models of crystal defects. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1982.

5. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред.- М.: Наука, 1977.

6. Eshelby J.D. The continuum theory of lattice defects.- In: Solid State Physics, vol.3. N.Y.: Academic Press, 1956.

7. Косевич А.М. Физическая механика реальных кристаллов. - Киев: Наук. думка, 1981.

8. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975.

9. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости.- М.: Гостехиздат, 1955.

10. Brandle C.D., Miller D.C., Nielsen J.W. The elimination of defects in Czochralski grown rare-earth gallium garnets.- J.Cryst. Growth, 1972, v.12, N3.

11. Schmidt W., Weiss R. Dislocation propagation in Czochraski grown gadolinium gallium garnet (GGG). - J.Cryst. Growth, 1978, v.43, N5.

12. Takagi K., Fukazawa T., Ishii M. Inversion of the direction of the solid-liquid interface on the Czochralski growth of the GGG crystals. - J.Cryst. Growth, 1976, v.32, N1.

13. Miller D.C., Valentino A.J., Shick L.K. The effect of melt flow phenomena on the perfection of Czochralski grown gadolinium gallium garnet. - J.Cryst. Growth, 1978, v.44, N2.

14. Garem H., Rabier J., Veyssiere P. Slip systems in gadolinium gallium garnet single crystals. - J.Mater. Sci., 1982, v.17, N3.

15. Rabier J., Veyssiere P. Grilhe J. Possibility of stacking faults and dissociation of dislocation in the garnet structure. - Phys. Stat. Sol.(a), 1976, v.35, N1.

16. Allibert M., Chatillon B., Mareshal J., Lissalde F., Êtude du diagramme de phase dans le systême Gd_2O_3-Ga_2O_3. - J. Cryst. Growth, 1974, v.23, N4.

17. Состав-дефектность-свойство твердых фаз. Метод кластерных

компонентов. - М: Наука, 1977.

18. Жариков Е.В., Китаева В.Ф., Осико В.В., Рустамов И.Р., Соболев Н.Н. Упругие, фотоупругие и теплофизические характеристики гадолиний-скандий-галлиевого граната //Физика твердого тела.- 1984.- Т.26 , вып.5.

19. Tolksdorf W., Bartels G., Espinosa G.R., Holst P., Mațeika D., Welz F. Controlled lattice constant mismatsh by oompositional ohanges in liquid phase epitaxially grown single orytal films of rare earth yttrium gallium garnet substrates.- J.Cryst. Growth, 1972, v.17, N1.

УДК 548.571:539.319

ВНУТРЕННИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В МОНОКРИСТАЛЛАХ С НЕОДНОРОДНЫМ СОСТАВОМ. Юшанов С.П.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. -Рига: ЛУ,1992.- Вып.3.

Предложен метод расчета внутренних напряжений в бездислокационных кристаллах с заданным распределением точечных дефектов. Построено решение для изотропного цилиндра с дефектами класса симметрии T_d или Φ_h. На примере $Gd_3Ga_5O_{12}$ получены оценки для величины внутренних напряжений и исследован характер их пространственного распределения. Определены области, наиболее опасные с точки зрения начала пластического деформирования. Ил. 3, библиогр. 19.

IEKŠĒJIE SPRIEGUMI MONOKRISTĀLOS AR NEVIENDABĪGU SASTĀVU. Jušanovs S. // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problemas. - Rīga: LU, 1992. - 3. sēj.

Tiek piedāvāta iekšējo spriegumu aprēķinu metode bezdislokāoiju kristālos ar uzdotu punkveida defektu sadalījumu . Ir atrasts atrisinājums oilindriskā apgabalā ar defektiem no T_d vai Φ_h simetrijas klasēm. Atrisinot konkrētu piemeru $Gd_3Ga_5O_{12}$ materiālam, ir iegūts iekšējo spriegumu vērtību novērtējums un ir izp[illegible] to telpiskā sadalījuma raksturs. Ir noteikti apgabali, [illegible]ros iespējama plastiskā deformācija. 3 il., bibliogr. 19 nos.

INNER STRESSES IN INHOMOGENEOUS CRYSTALS. Jushanov S.P.// In: The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. Riga: LU, 1992. - Vol.3.

The method of stress calculation for crystals with low dislocation density and with prescribed point defects distribution is proposed. The solution for isotropic cylinder with defects of T_d or Φ_h class symmetry is constructed. The magnitude of residual stresses and their spatial distribution are calculated for $Gd_3Ga_5O_{12}$ crystals. The most dangerous regions where plastic deformation could be developed are analysed. Fig. 3, ref.19.

Х.Э.КАЛИС
Латвийский университет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОДА ЛОКАЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Для расчета температурного поля в слоях расплава (алюминий и электролит) алюминиевого электролизера рассматривается прямоугольная призма $\Omega = \{(x,y,z): |x| \leq L_x, |y| \leq L_y, 0 \leq z \leq H_2\}$, одну часть из которой $\Omega_1 = \{(x,y,z): |x| \leq L_x, |y| \leq L_y, 0 < z \leq H_1\}$ занимает жидкий алюминий, а другую $\Omega_2 = \{(x,y,z): |x| \leq L_x, |y| \leq L_y, H_1 < z \leq H_2\}$ - электролит. Здесь L_x, L_y - полудлина и полуширина электролизной ванны, H_2 - высота расплава, которая на порядок меньше, чем L_x, L_y, H_1 - высота алюминия. Трехмерные тепловые поля в зависимости от скорости течения расплава и электрического тока описываются уравнениями теплопроводности в двухслойной среде /I/

$$\rho_k c_{p_k} \vec{V} \operatorname{grad} T_k = \operatorname{div}(\lambda_k \operatorname{grad} T_k) + q_k, \quad k = 1; 2, \tag{I}$$

где

$T_k = T_k(x,y,z)$ - температура k-ого слоя ($k=1$ - слой алюминия; $k=2$ - слой электролита),

$c_{p_k}, \rho_k, \lambda_k$ - коэффициенты удельной теплоемкости, плотности и теплопроводности сред,

$q_k = j_k^2/\sigma_k$ - источник джоулева тепла,

$\vec{j}_k$ - вектор плотности электрического тока,

σ_k - коэффициент электропроводности k-ого слоя,

$\vec{V}_k = (u_k, v_k, 0)$ - вектор скорости осредненного планарного течения расплава,

$u_K = u_K(x,y), v_K = v_K(x,y)$ - составляющие вектора скорости, удовлетворяющие уравнению неразрывности

$$div\, \vec{v}_K = \partial u_K/\partial x + \partial v_K/\partial y = 0.$$

Краевая задача теплопроводности замыкается граничными условиями 3-его рода

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_B) \qquad (2)$$

и условиями сопряжения на поверхности раздела сред ($z = H_1$) вида

$$\begin{cases} T_1 = T_2, \\ \lambda_1 \partial T_1/\partial z = \lambda_2 \partial T_2/\partial z, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль на границе,

T_B - температура примыкающей внешней среды,

α - коэффициент теплоотдачи (если внешний слой изолированный, то $\alpha = 0$, а в случае заданной температуры $\alpha = \infty$).

Из (2) следует, что при $z = 0$ (нижняя граница алюминия) и $z = H_2$ (поверхность электролита) соответственно

$$\lambda_1 \partial T_1/\partial z = \alpha_1(T_1 - T_{B_1}), \qquad (4)$$

$$-\lambda_2 \partial T_2/\partial z = \alpha_2(T_2 - T_{B_2}), \qquad (5)$$

где коэффициенты теплоотдачи α_1, α_2 и также внешние температуры T_{B_1}, T_{B_2} могут зависеть от x, y координат.

Для понижения размерности применяются операция осреднения по высотам слоев H_1, H_2 и сплайновая апроксимация по переменной z. Следовательно, проведя осреднение уравнения (I) в K-ом слое расплава по высоте слоя $\ell_K = H_K - H_{K-1}$ ($K = 1;2, H_0 = 0$) и применяя интерполяцию с параболическим сплайном /2/

$$T_K(x,y,z) = \overline{T}_K(x,y) + m_K(z - \overline{z}_K) + \ell_K\left[(z - \overline{z}_K)^2/\ell_K^2 - \frac{1}{12}\right], \qquad (6)$$

имеем

$$2 e_K \ell_K^{-1} + L(\overline{T}_K) + \overline{q}_K = 0, \qquad (7)$$

где

$$L(\bar{T}_k)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_k\frac{\partial \bar{T}_k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_k\frac{\partial \bar{T}_k}{\partial y}\right)-\rho_k c_{0_k}\left(u_k\frac{\partial \bar{T}_k}{\partial x}+v_k\frac{\partial \bar{T}_k}{\partial y}\right),$$

$$\bar{T}_k=l_k^{-1}\int_{H_{k-1}}^{H_k}T_k(x,y,z)\,dz,\quad \bar{q}_k=l_k^{-1}\int_{H_{k-1}}^{H_k}q_k(x,y,z)\,dz,$$

$$\bar{z}_k=(H_k+H_{k-1})/2,\quad \sigma_k=l_k/\lambda_k.$$

Коэффициенты сплайна (6) m_k, e_k с учетом условий (2-5) вычисляются следующим образом:

$$e_1=-A_1\bar{T}_1+B\bar{T}_2+C_1,\quad e_2=B\bar{T}_1-A_2\bar{T}_2+C_2, \tag{8}$$

$$\lambda_1 m_1=[\alpha_1(\bar{T}_1-T_{B_1})+e_1(1+\alpha_1\sigma_1/6)](1+\alpha_1\sigma_1/2)^{-1},$$

$$\lambda_2 m_2=[\alpha_2(T_{B_2}-\bar{T}_2)-e_2(1+\alpha_2\sigma_2/6)](1+\alpha_2\sigma_2/2)^{-1},$$

где

$$A_1=4\delta^{-1}[1+\alpha_1\sigma_1+\tfrac{1}{3}\sigma_2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2(\sigma_1+\sigma_2))-\alpha_1\alpha_2\sigma_2^2/4]>0,$$

$$A_2=4\delta^{-1}[1+\alpha_2\sigma_2+\tfrac{1}{3}\sigma_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2(\sigma_1+\sigma_2))-\alpha_1\alpha_2\sigma_1^2/4]>0,$$

$$B=(2+\alpha_1\sigma_1)(2+\alpha_2\sigma_2)\delta^{-1}>0,\quad b_1=(2+\alpha_1\sigma_1)\sigma_2/3,$$

$$C_1=\delta^{-1}[\alpha_1 T_{B_1}b_2-\alpha_2 T_{B_2}b_1],\quad C_2=\delta^{-1}[\alpha_2 T_{B_2}a_1-\alpha_1 T_{B_1}a_2],$$

$$\delta=\tfrac{8}{3}[(\sigma_1+\sigma_2)(1+\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2/12)+(\sigma_1+4\sigma_2/3)\alpha_2\sigma_2/4+$$
$$+(\sigma_2+4\sigma_1/3)\alpha_2\sigma_2/4],\quad a_1=(\sigma_1+\sigma_2)(1+\alpha_1\sigma_1/6)+$$
$$+(\sigma_1/3+\sigma_2)(1+\alpha_1\sigma_1/2),\quad b_2=(\sigma_1+\sigma_2)(1+\alpha_2\sigma_2/6)+$$
$$+(\sigma_2/3+\sigma_1)(1+\alpha_2\sigma_2/2),\quad a_2=(2+\alpha_2\sigma_2)\sigma_1/3.$$

В случае граничных условий первого рода (4),(5) надо в формулах (8) перейти к пределу, когда α_1 или α_2 стремятся к бесконечности.

Следовательно, в слоях алюминия и электролита имеем связанную систему двух уравнений $(B \neq 0)$ в виде:

$$\Delta \overline{\overline{T}}_1 - \frac{c_{p_1}\rho_1}{\lambda_1}\left(u_1 \frac{\partial \overline{\overline{T}}_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \overline{\overline{T}}_1}{\partial y}\right) - \frac{A_1}{\varkappa_1}\overline{\overline{T}}_1 + \frac{B}{\varkappa_1}\overline{\overline{T}}_2 + \frac{C_1}{\varkappa_1} + \frac{\overline{q}_1}{\lambda_1} = 0$$

$$\Delta \overline{\overline{T}}_2 - \frac{c_{p_2}\rho_2}{\lambda_2}\left(u_2 \frac{\partial \overline{\overline{T}}_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \overline{\overline{T}}_2}{\partial y}\right) + \frac{B}{\varkappa_2}\overline{\overline{T}}_1 - \frac{A_2}{\varkappa_2}\overline{\overline{T}}_2 + \frac{C_2}{\varkappa_2} + \frac{\overline{q}_2}{\lambda_2} = 0, \qquad (9)$$

где $\varkappa_k = l_k \lambda_k / 2$, $k = 1;2$.

Уравнения (9) решаются соответственно в (x,y) сечениях областей Ω_1 и Ω_2 при граничных условиях вида (2)

$$\lambda_k \frac{\partial \overline{\overline{T}}_k}{\partial n} = \alpha_k \left(\overline{\overline{T}}_k - \overline{\overline{T}}_{B_k}\right), \; k = 1;2, \qquad (10)$$

где $\overline{\overline{T}}_{B_k}$ - осредненная внешняя температура в k-ом слое.

Для решения краевой задачи (9),(10) методом сеток применяются монотонные разностные схемы, которые реализуются методом локальной релаксации.

Для ускорения сходимости итерационного процесса определяются оптимальные коэффициенты релаксации при помощи "замораживания" коэффициентов разностных уравнений.

I. Пусть $u_1 = v_1 = u_2 = v_2 = 0$, т.е. течение расплава отсутствует. Тогда систему уравнений (9) можно переписать в векторном виде

$$\Delta \vec{T} + \mathcal{B}\vec{T} + \vec{F} = 0, \qquad (11)$$

где

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \overline{\overline{T}}_1 \\ \overline{\overline{T}}_2 \end{pmatrix}, \; \vec{F} = \begin{pmatrix} C_1 \varkappa_1^{-1} + \overline{q}_1 \lambda_1^{-1} \\ C_2 \varkappa_2^{-1} + \overline{q}_2 \lambda_2^{-1} \end{pmatrix}, \; \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -A_1 \varkappa_1^{-1} & B \varkappa_1^{-1} \\ B \varkappa_2^{-1} & -A_2 \varkappa_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $\mathcal{B}$ имеют вид:

$$\mu_{1,2} = -0{,}5\left[\frac{A_1}{\varkappa_1} + \frac{A_2}{\varkappa_2} \pm \left(\left(\frac{A_1}{\varkappa_1} - \frac{A_2}{\varkappa_2}\right)^2 + \frac{4B^2}{\varkappa_1 \varkappa_2}\right)^{1/2}\right]. \qquad (12)$$

Оба собственные значения действительные и отрицательные, если

$$B^2 \leq A_1 A_2 .$$

Данное неравенство выполняется, причем знак равенства достигается только в предельном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Соответствующие собственные векторы матрицы $\mathcal{A}$ можно расположить в столбцах матрицы

$$W = \begin{pmatrix} B\varkappa_1^{-1} & B\varkappa_1^{-1} \\ \mu_1 + A_1\varkappa_1^{-1} & \mu_2 + A_1\varkappa_1^{-1} \end{pmatrix},$$

для которой

$$\det W = B\varkappa_1^{-1}(\mu_2 - \mu_1) \neq 0,$$

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_2 + A_1\varkappa_1^{-1} & -B\varkappa_1^{-1} \\ -(\mu_1 + A_1\varkappa_1^{-1}) & B\varkappa_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Применяя линейное преобразование

$$\vec{T} = W\vec{S} \quad (\vec{S} = W^{-1}\vec{T}), \tag{13}$$

система уравнений (11) с учетом

$$\mathcal{A}W = WM \quad \text{или} \quad W^{-1}\mathcal{A}W = M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

принимает вид

$$W\Delta\vec{S} + \mathcal{A}W\vec{S} + \vec{F} = 0$$

или

$$\Delta\vec{S} + M\vec{S} + W^{-1}\vec{F} = 0 \tag{14}.$$

Следовательно, система уравнений (14) расщепляется в виде двух отдельных уравнений

$$\Delta S_m + \mu_m S_m + \widetilde{F}_m = 0 \quad (m = 1;2), \tag{15}$$

где

S_m, $\widetilde{F}_m$ – составляющие векторов $\vec{S}$, $W^{-1}\vec{F}$.

Соответствующие граничные условия (10) в общем случае не разделяются, т.к.

$$\frac{\partial\vec{S}}{\partial n} = D(\vec{S} - W^{-1}\vec{T}_B), \tag{16}$$

где матрица $D = W^{-1}\Lambda W \left(\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1\lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_2\lambda_2^{-1} \end{pmatrix}, \vec{T}_B = \begin{pmatrix} T_{B_1} \\ T_{B_2} \end{pmatrix}\right)$ имеет диагональный вид только тогда, когда $\alpha_2\lambda_2^{-1} = \alpha_1\lambda_1^{-1}$.

Так как обычно вид граничных условий мало влияет на значение оптимального коэффициента метода релаксации /3/, то при определении такого коэффициента граничные условия (10),(16) заменяются граничными условиями первого рода.

Рассмотрим аппроксимацию второго порядка уравнения (15) на равномерной сетке

$$\omega_h=\{(x_i,y_j): x_i=ih_1-L_x,\ y_j=jh_2-L_y,\ i=\overline{1,N_1-1},\ j=\overline{1,N_2-1},\ h_1=2L_x/N_1,\ h_2=2L_y/N_2\} \tag{17}$$

в следующем виде $(S_m\equiv S,\ \mu_m\equiv\mu,\ \widetilde{F}_m\equiv f)$:

$$\frac{h_2}{h_1}(S_{i+1,j}-2S_{i,j}+S_{i-1,j})+\frac{h_1}{h_2}(S_{i,j+1}-2S_{i,j}+S_{i,j-1})+ \\ +h_1h_2(\mu S_{i,j}+f_{i,j})=0,\ i=\overline{1,N_1-1};\ j=\overline{1,N_2-1}, \tag{18}$$

где $S_{i,j}=S(x_i,y_j)$, $f_{i,j}=f(x_i,y_j)$.

Применяем к разностным уравнениям (18) метод релаксации в виде

$$S_{i,j}^{(k+1)}=(1-\omega)S_{i,j}^{(k)}+\omega S_{i,j}^{z}\quad (k=0;1;2\ldots), \tag{19}$$

где

$$S_{i,j}^{z}=\left(2(h_2h_1^{-1}+h_1h_2^{-1})-h_1h_2\mu\right)^{-1}\left[\frac{h_2}{h_1}\left(S_{i-1,j}^{(k+1)}+S_{i+1,j}^{(k)}\right)+\right. \\ \left.+\frac{h_1}{h_2}\left(S_{i,j-1}^{(k+1)}+S_{i,j+1}^{(k)}\right)+h_1h_2f_{i,j}\right]$$

- итерационное приближение по методу Зейделя,

ω - коэффициент релаксации $(0<\omega<2)$,

$S_{i,j}^{(0)}$ - заданное начальное приближение.

Для ошибки $z_{i,j}^{(k)}=S_{i,j}^{(k)}-S_{i,j}$ имеет место итерационный процесс (19) с учетом, что величина $z_{i,j}^{z}$ не содержит слагаемое $h_1 h_2 f_{ij}$, а граничные значения $z_{ij}^{(k)}$ при $i=0;\, N_1$, $j=0;\, N_2$ равны нулю. Разностные уравнения (19) для ошибки можно переписать в векторной форме

$$\vec{z}^{(k+1)} = S\vec{z}^{(k)} \quad (k=0;1;2\cdots),$$

где S - матрица перехода, а $\vec{z}^{(k)}$ - вектор с размерностью $N=(N_1-1)(N_2-1)$ и составляющими $z_{ij}^{(k)}$.

Пусть
$$\vec{z}^{(k+1)} = \lambda \vec{z}^{(k)}, \tag{20}$$

где λ - собственное значение матрицы S , а решение разностных уравнений (19) ищем в виде гармоник /4/:

$$z_{ij}^{(k)} = A_{ij} \sin\frac{\pi k_1 i}{N_1} \sin\frac{\pi k_2 j}{N_2},$$
$$k_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, \quad \alpha = 1;2.$$

После подстановки в (19) $(f_{ij} \equiv 0)$ с учетом (20) имеем:

$$(\lambda - 1 + \omega) A_{ij} \sin\frac{\pi k_1 i}{N_1} \sin\frac{\pi k_2 j}{N_2} =$$
$$= \frac{\omega}{2(h_2 h_1^{-1} + h_1 h_2^{-1}) - h_1 h_2 \mu} \left\{ \frac{h_2}{h_1}\left[\lambda A_{i-1,j} \sin\frac{\pi k_1 (i-1)}{N_1} + \right.\right.$$
$$\left. + A_{i+1,j} \sin\frac{\pi k_1 (i+1)}{N_1}\right] \sin\frac{\pi k_2 j}{N_2} + \frac{h_1}{h_2}\left[\lambda A_{i,j-1} \sin\frac{\pi k_2 (j-1)}{N_2} + \right.$$
$$\left.\left. + A_{i,j+1} \sin\frac{\pi k_2 (j+1)}{N_2}\right] \sin\frac{\pi k_1 i}{N_1} \right\}. \tag{21}$$

Если для определения произвольных коэффициентов A_{ij} предполагать, что

$$A_{ij} = \sqrt{\lambda} A_{i-1,j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} A_{i+1,j} = \sqrt{\lambda} A_{i,j-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} A_{i,j+1}, \tag{22}$$

то из (21) следует уравнение для определения собственного значения λ в виде

$$\lambda - \omega \varepsilon_k \sqrt{\lambda} - (1-\omega) = 0, \tag{23}$$

где $\varepsilon_k = \dfrac{h_2 h_1^{-1} \cos(\pi k_1/N_1) + h_1 h_2^{-1} \cos(\pi k_2/N_2)}{h_2 h_1^{-1} + h_1 h_2^{-1} - h_1 h_2 \mu/2}$, $k=(k_1, k_2)$.

При $\varkappa \leq 0$ следует, что $|\varepsilon_K| < 1$.

При $\omega = 1$ (метод Зейделя) имеем $\lambda = \varepsilon_K^2 < 1$, и итерационный метод Зейделя сходится.

Для определения оптимального параметра релаксации $\widetilde{\omega}$ надо минимизировать функцию $\rho(\omega) = \max\limits_{K_1 K_2} |\lambda|$,

где

$$\lambda = \left[\tfrac{1}{2}\omega\varepsilon_K \pm \sqrt{\delta_K}\right]^2, \; \delta_K = \left(\tfrac{1}{2}\omega\varepsilon_K\right)^2 - \omega + 1, \quad K = (K_1, K_2).$$

При $\omega > 1$ надо рассматривать 2 случая:

1) $\delta_K < 0$, тогда значения λ - комплексно сопряженные, и

$$|\lambda| = \omega - 1;$$

2) $\delta_K \geq 0$, тогда значения λ действительные, и

$$\rho(\omega) = \left[\tfrac{1}{2}\omega\widetilde{\varepsilon} + \left(\left(\tfrac{1}{2}\omega\widetilde{\varepsilon}\right)^2 + 1 - \omega\right)^{1/2}\right]^2,$$

где

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{h_2 h_1^{-1}\cos(\pi/N_1) + h_1 h_2^{-1}\cos(\pi/N_2)}{h_2 h_1^{-1} + h_1 h_2^{-1} - h_1 h_2 \varkappa/2}. \tag{24}$$

При $\delta_K \geq 0$, $\min\limits_{\omega} \rho(\omega) = \rho(\widetilde{\omega})$, где $\widetilde{\omega}$ определяется из уравнения

$$\delta_0 = \left(\tfrac{1}{2}\widetilde{\omega}\widetilde{\varepsilon}\right)^2 + 1 - \widetilde{\omega} = 0$$

или

$$\widetilde{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \widetilde{\varepsilon}^2}} \tag{25}$$

В этом случае $\rho_0 = \rho(\widetilde{\omega}) = \left(\tfrac{1}{2}\widetilde{\omega}\widetilde{\varepsilon}\right)^2 = \widetilde{\omega} - 1$.

Такой результат получил Д.Юнг при $h_1 = h_2 = h$ и $\varkappa = 0$ /3/.

Следовательно, метод оптимальной релаксации (19) имеет следующий векторный вид:

$$\vec{S}^{(K+1)} = \widetilde{\Omega}\,\vec{S}^{\,z} + \widetilde{\Omega}^{*}\,\vec{S}^{(K)} \quad (K = 0; 1 \cdots), \tag{26}$$

где

$$\widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\omega}_2 \end{pmatrix}, \; \widetilde{\Omega}^{*} = E - \widetilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 - \widetilde{\omega}_1 & 0 \\ 0 & 1 - \widetilde{\omega}_2 \end{pmatrix},$$

$\widetilde{\omega}_m = 2/\left(1 + (1 - \widetilde{\varepsilon}_m^2)^{1/2}\right)$, $\widetilde{\varepsilon}_m = \left(h_2 h_1^{-1}\cos(\pi/N_1) + h_1 h_2^{-1}\cos(\pi/N_2)\right)/\left(h_2 h_1^{-1} + h_1 h_2^{-1} - h_1 h_2 \varkappa_m/2\right)$, $(m = 1; 2)$.

Умножая (26) слева на матрицу W и учитывая (13), имеем

$$\vec{T}^{(k+1)} = W\tilde{\Omega}W^{-1}\vec{T}^{z} + W\tilde{\Omega}^{*}W^{-1}\vec{T}^{(k)} \quad (k \geq 0), \tag{27}$$

где

$$W\tilde{\Omega}W^{-1} = \frac{\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1}{\mu_2 - \mu_1}\begin{pmatrix} -(\mu_1 + A_1 x_1^{-1}) & B x_1^{-1} \\ B x_2^{-1} & \mu_1 + A_1 x_1^{-1} \end{pmatrix} + \tilde{\Omega},$$

$$W\tilde{\Omega}^{*}W^{-1} = E - W\tilde{\Omega}W^{-1},$$

так как $(\mu_1 + A_1 x_1^{-1})(\mu_2 + A_1 x_1^{-1}) + B^2 x_1^{-1} x_2^{-1} = 0$.

Если расписать (27) по составляющим вектора $\vec{T}$, то:

$$\bar{T}_1^{(k+1)} = \frac{\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1}{\mu_2 - \mu_1}\Big[-(\mu_1 + A_1 x_1^{-1})(\bar{T}_1^{z} - \bar{T}_1^{(k)}) + B x_1^{-1}(\bar{T}_2^{z} - \bar{T}_2^{(k)})\Big] + \tilde{\omega}_1 \bar{T}_1^{z} + (1 - \tilde{\omega}_1)\bar{T}_1^{(k)},$$

$$\bar{T}_2^{(k+1)} = \frac{\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1}{\mu_2 - \mu_1}\Big[B x_1^{-1}(\bar{T}_1^{z} - \bar{T}_1^{(k)}) + (\mu_1 + A_1 x_1^{-1})(\bar{T}_2^{z} - \bar{T}_2^{(k)})\Big] + \tilde{\omega}_2 \bar{T}_2^{z} + (1 - \tilde{\omega}_2)\bar{T}_2^{(k)}, \quad (k \geq 0). \tag{28}$$

2. С учетом течения расплава принимается, что

$$c_{p_1}\rho_1\lambda_1^{-1}u_1 = c_{p_2}\rho_2\lambda_2^{-1}u_2 = \bar{u}, \quad c_{p_1}\rho_1\lambda_1^{-1}v_1 = c_{p_2}\rho_2\lambda_2^{-1}v_2 = \bar{v}.$$

Тогда систему уравнений можно переписать в следующем векторном виде

$$\Delta\vec{T} - \bar{u}\frac{\partial\vec{T}}{\partial x} - \bar{v}\frac{\partial\vec{T}}{\partial y} + \mathcal{B}\vec{T} + \vec{F} = 0$$

После преобразования (13) имеем для составляющих вектора $\vec{S}$ уравнение типа (15) в виде

$$\Delta s - \bar{u}\,\partial s/\partial x - \bar{v}\,\partial s/\partial y + \mu s + f = 0,$$

а соответствующие монотонные разностные уравнения (18) имеют вид

$$h_2 h_1^{-1}\gamma_1(s_{i+1,j} - 2s_{ij} + s_{i-1,j}) - \frac{1}{2}\bar{u}h_2(s_{i+1,j} - s_{i-1,j}) + h_1 h_2^{-1}\gamma_2(s_{i,j+1} - 2s_{ij} + s_{i,j-1}) - \frac{1}{2}\bar{v}h_1(s_{i,j+1} - s_{i,j-1}) + h_1 h_2(\mu s_{ij} + f_{ij}) = 0, \tag{29}$$

где γ_1, γ_2 - соответствующие возмущенные коэффициенты /5/:

$\gamma_\alpha = |a_\alpha| \, cth \, |a_\alpha|$ (А.М.Ильин),

$\gamma_\alpha = |a_\alpha| + (1 + |a_\alpha|)^{-1}$ (А.А.Самарский),

$\gamma_\alpha = 1 + |a_\alpha|$ (односторонние разности),

$\gamma_\alpha = 1$ (центральные разности),

$$a_1 = \frac{1}{2}\bar{u} h_1, \; a_2 = \frac{1}{2}\bar{v} h_2, \; |a_\alpha| \le \gamma_\alpha, \; \alpha = 1,2 .$$

Теперь разностные уравнения с учетом релаксации имеют вид:

$$S_{ij}^{(k+1)} = (1-\omega) S_{ij}^{(k)} + \omega S_{ij}^{z} \quad (k \geqslant 0),$$

где

$$S_{ij}^{z} = \frac{1}{2(h_2 h_1^{-1}\gamma_1 + h_1 h_2^{-1}\gamma_2) - h_1 h_2 \mu}\Big[\frac{h_2}{h_1}(\gamma_1 + a_1) S_{i-1,j}^{(k+1)} +$$

$$+ \frac{h_2}{h_1}(\gamma_1 - a_1) S_{i+1,j}^{(k)} + \frac{h_1}{h_2}(\gamma_2 + a_2) S_{i,j-1}^{(k+1)} + \frac{h_1}{h_2}(\gamma_2 -$$

$$- a_2) S_{i,j+1}^{(k)} + h_1 h_2 f_{ij}\Big]. \qquad (30)$$

Аналогично предыдущему предполагая, что

$$A_{ij} = \sqrt{\lambda \frac{\gamma_1 + a_1}{\gamma_1 - a_1}}\, A_{i-1,j} = \sqrt{\frac{\gamma_1 - a_1}{\lambda(\gamma_1 + a_1)}}\, A_{i+1,j} =$$

$$= \sqrt{\lambda \frac{\gamma_2 + a_2}{\gamma_2 - a_2}}\, A_{i,j-1} = \sqrt{\frac{\gamma_2 - a_2}{\lambda(\gamma_2 + a_2)}}\, A_{i,j+1},$$

имеем уравнение (23), где

$$\varepsilon_k = \Big[h_2 h_1^{-1} \sqrt{\gamma_1^2 - a_1^2}\cos\frac{\pi k_1}{N_1} + h_2 h_2^{-1}\sqrt{\gamma_2^2 - a_2^2}\cos\frac{\pi k_2}{N_2}\Big] \cdot$$

$$\cdot \Big(\frac{h_2}{h_1}\gamma_1 + \frac{h_1}{h_2}\gamma_2 - \frac{h_1 h_2}{2}\mu\Big)^{-1}, \; k = (k_1, k_2). \qquad (31)$$

Следовательно, при $\mu \le 0$ следует формула оптимального параметра релаксации (25), где

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{h_2 h_1^{-1}\sqrt{\gamma_1^2 - a_1^2}\cos\frac{\pi}{N_1} + h_1 h_2^{-1}\sqrt{\gamma_2^2 - a_2^2}\cos\frac{\pi}{N_2}}{h_2 h_1^{-1} + h_1 h_2^{-1} - h_1 h_2 \mu/2}. \qquad (32)$$

Также сохраняется формулы (28) с заменой $\tilde{\varepsilon}_m$ выражением (32), где $\mu = \mu_m$, $m = 1;2$.

В случае переменных коэффициентов, т.е. когда величины $\bar{u}, \bar{v}, \mu, \lambda_1, \lambda_2, \rho_1, \rho_2, c_{p_1}, c_{p_2}, A_1, A_2, B, C_1, C_2$ зависят от (x,y), формулы локальной релаксации (25),(28) сохраняются (параметры $\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ тоже зависят от (x,y) или (i,j)). Численные расчеты для электролизера на 175 кА при $L_x = 5$, $L_y = 2{,}2$, $H_1 = 0{,}2$, $H_2 = 0{,}25$, $\rho_1 = 2300$, $\rho_2 = 2100$, $\lambda_1 = 60$, $\lambda_2 = 6$, $h = 0{,}25$, $c_{p_1} = 1060$, $c_{p_2} = 1653$, $\sigma_1 = 3{,}3 \cdot 10^6$, $\sigma_2 = 200$, $\bar{T}_1^{(0)} = \bar{T}_2^{(0)} = 900$, $T_{B_1} = T_{B_2} = 300$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 10$ показали, что при выборе коэффициенте из формулы (25) метод локальной релаксации при $\bar{u} = \bar{v} = 0$ сходится примерно 10 раз быстрее, чем метод Зейделя ($\omega_1 = \omega_2 = 1$).

Аналогичную методику можно применять для решения уравнения теплопроводности в многослойной среде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. - М.: Наука,1970,-672 с.

2. Буйкис А.А. Интерполяция интегральных средних кусочно-гладкой функции параболическим сплайном //Латвийский математический ежегодник.-1985.-Вып.29.-С.194-197.

3. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.- М.: ИЛ, 1963.-487 с.

4. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. - М.: Мир,1972,-418 с.

5. Калис Х.Э., Луринс Г.Р. Определение оптимального релаксационного параметре для некоторых монотонных разностных схем //Латвийский математический ежегодник.-1981.-Вып.25.-С.167-178.

УДК 518.61

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОДА ЛОКАЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ. Калис Х. //Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.-Рига: ЛУ, 1992.- Вып.3.

Для расчета температурного поля в двухслойной среде (твердой и жидкой) алюминиевого электролизера применяются операция осреднения по высоте слоев, сплайновая аппроксимация и монотонная разностная схема. Разностная схема реализуется методом локальной релаксации, оптимальные коэффициенты которой определяются минимизацией модуля перехода разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
Библ. 5 назв.

ON OBTAINING OPTIMAL COEFFICIENTS OF LOCAL RELAXATION METHOD FOR SOLVING HEAT TRANSFER EQUATION IN TWO-LAYER MEDIUM. Kalis H. //The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. Riga: LU,1992. - vol.3.

Height averaging, spline approximation and monotonous difference schemes are applied in calculations of temperature field in the two-layer medium (liquid or solid) of aluminium reduction cells. The difference scheme is realized with the help of local relaxation method with optimal coefficients, obtained by minimization of the transition module for difference scheme with constant coefficients.
Ref. 5.

LOKĀLĀS RELAKSĀCIJAS METODES OPTIMĀLO KOEFICIENTU NOTEIKŠANA SILTUMA VADĪŠANAS VIENĀDOJUMA ATRISINĀŠANAI DIVSLĀŅU VIDĒ. Kalis H. //Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas.-Rīga: LU,1992.- 3.sēj.

Temperatūras lauka aprēķināšanai alumīnija elektrolizera divslāņu vidē (cietā vai šķidrā) tiek pielietota vidušanas operācija, aproksimācija ar splainiem un monotonā diferenču shēma. Diferenču shēma tiek realizēta ar lokālo relaksācijas metodi, kuras optimālie koeficienti tiek noteikti,minimizējot pārejas moduli shēmai ar konstantiem koeficientiem.
Bibl. 5 nosauk.

A. Reinfelds, H.Kalis, J.Krikis
Institute of Mathematics
Latvian Academy of Sciences
19 Turgeneva St., 226524 Riga

QUALITATIVE INVESTIGATION OF SOME WORLD EVOLUTION MODEL

0. Introduction.

The purpose of this paper is to analyze some system of ordinary differential equations, which arises in modeling complex social - economical systems. Mathematical models of such evolution systems have been developed in the works of J.W.Forrester [1] and D.L.Meadows [2]. Special case was considered in [3]. The present paper is devoted to analysis of a case, when we investigate the interaction of industry, human and natural resources at monotonous industrial development.

1. Preliminaries.

Let x, y and z denote the natural, human and industrial factor in relative quantities at time t. Practical meaning has only non-negative values of variables.

We consider a C^k $(k \geq 1)$ smooth system of differential equations governing this interaction in R^3_+

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) - \delta y + \lambda_1 z \\ \dot{y} = x f_2(y) + \lambda_2 z \\ \dot{z} = h(x,y,z). \end{cases} \tag{1}$$

The continuously differentiable functions f_1: $R_+ \to R$, f_2: $R_+ \to R$ describe the logistic law of natural and human resources growth. $\delta > 0$ specify the influence of human factor to rate of natural resources, variable parameters λ_1, $\lambda_2 \in R$ control the influence of industry to natural and human factor. The functions f_1, f_2 and h: $R^3_+ \to R$ have additional properties: $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{y\to+\infty} f_2(y) = -\infty$, $f_1'(0) > 0$, $f_2'(0) > 0$, $h(0,y,z) = h(x,0,z) = h(x,y,0) = h(x,y,c_3) = 0$, $\partial h(x,y,c_3)/\partial z < 0$ and $h(x,y,z) > 0$ if $x > 0$, $y > 0$, $0 < z < c_3$. The derivatives f_1', f_2' are strongly monotone decreasing. Let us note that there are numbers $0 < a_1 < c_1$ such as $f_1'(a_1) = 0$, $f_1(c_1) = 0$. At point a_1 function f_1

has a maximum.

Note that the system (1) has invariant manifold $z = c_3$. If initial conditions are $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ and $0 < z(0) < c_3$, corresponding solution may be one of the following type:

a) $\lim_{t\to+\infty} z(t) = c_3$.

b) $\exists\ T > 0$ such that $x(T) = 0$.

c) $\exists\ T > 0$ such that $y(T) = 0$.

In case a) trajectory tends to limit set on invariant manifold. In the cases b), c) trajectory crosses plane $x = 0$ or $y = 0$ at finite moment of time. It means that natural or human resourses vanishes in finite interval of time. Besides in the case when $\lambda_2 = 0$ there are trajectories, which tend to plane $x = 0$ as $t \to +\infty$ ($\lim_{t\to+\infty} z(t) = z_\infty \le c_3$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lambda_1\delta^{-1}z_\infty = y_\infty$), if $\delta f_2(y_\infty) \le \lambda_1 \partial h(0, y_\infty, z_\infty)/\partial x$.

2. Main results.

First of all let us consider the system of differential equations on invariant manifold $z = c_3$ in the quadrant $x \ge 0$, $y \ge 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) - \delta y + \lambda_1 c_3 \\ \dot{y} = x f_2(y) + \lambda_2 c_3. \end{cases} \tag{2}$$

The equilibrium points are solutions of system

$$\begin{cases} f_1(x) - \delta y + \lambda_1 c_3 = 0 \\ x f_2(y) + \lambda_2 c_3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

To solve a system (3) geometrically means to find common points of two principle isoclines. Corresponding Jacobi matrix is

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} f_1'(x) & -\delta \\ f_2(y) & x f_2'(y) \end{pmatrix}.$$

Let us compute Jacobi matrix determinant

$$\det J(x,y) = x f_1'(x) f_2'(y) + \delta f_2(y)$$

and trace

$$\mathrm{Tr}\ J(x,y) = f_1'(x) + x f_2'(y).$$

The signs of det J and Tr J in equilibrium points help determine its type. Curve $\det J(x,y) = 0$ divides first quadrant into three domains, in each of which det $J(x,y)$ preserve sign. Besides curve Tr $J(x,y) = 0$ divides domain, where det $J(x,y) > 0$, into two parts. Let us note that type of structurally stable equilibrium depends only of its location in first quadrant.

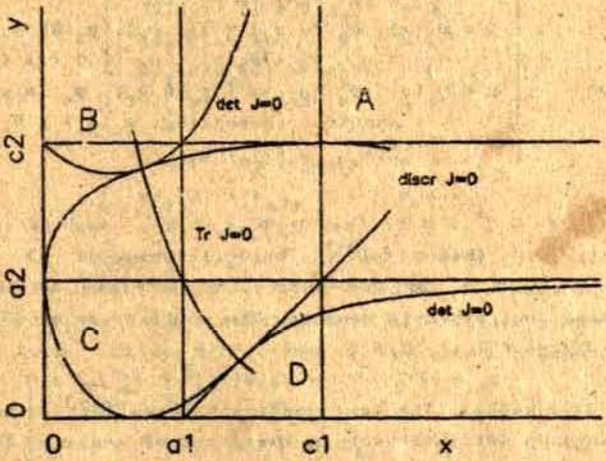


Figure 1. Type of (2) equilibrium depending of location.

Table 1

Domain	det J	Tr J	equilibrium
A	> 0	< 0	attractor
B	< 0		saddle
C	> 0	> 0	repeller
D	< 0		saddle

Attractor (repeller) may be node or focus. If the inequality $(f_1'(x) - xf_2'(y))^2 > 4\delta f_2(y)$ holds, attractor (repeller) is node, but in the case $(f_1'(x) - xf_2'(y))^2 < 4\delta f_2(y)$ the attractor (repeller) is focus. In the case of $(f_1'(x) - xf_2'(y))^2 = 4\delta f_2(y)$, attractor (repeller) is node if in addition f_1', f_2' are Holder continuous.

The domains boundary are continuous function graphs. To take into account properties of functions f_1 and f_2 and using implicit function theorem, we obtain the following:

Table 2

Boundary	Equations of boundary and growth properties
$\partial A\cap\partial C$	$y = \psi_1(x)$, $\psi_1: I \to \mathbb{R}_+$, $a_1 \in I \subseteq \mathbb{R}_+$, $\psi_1(a_1) = a_2$, ψ_1 is strongly monotone decreasing if $x \le a_1$
∂B	$x = \psi_2(y)$, $\psi_2: [c_2, +\infty[\to [a_1, +\infty[$, $\psi_2(c_2) = a_1$, $\psi_2(y) > a_1$ if $y > c_2$
	$y = \psi_3(x)$, $\psi_3: [0, a_1] \to]a_2, c_2]$, $\psi_3(0) = \psi_3(a_1) = c_2$, $a_2 < \psi_3(x) < c_2$ if $0 < x < a_1$
∂D	$y = \psi_4(x)$, $\psi_4: [a_1, +\infty[\to [0, a_2[$, ψ_4 is strongly monotone increasing, $\psi_4(a_1) = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\psi_4(x) = a_2$

If $f_1, f_2 \in C^k$ $k \ge 1$, then $\psi_2, \psi_3, \psi_4 \in C^{k-1}$, and if in addition $f_2''(y) < 0$, then $\psi_1 \in C^{k-1}$. The equilibrium on ∂D, when $\mathrm{Tr}\, J(x,y) \ne 0$, is node-saddle, because one of isocline is convex, but other is concave. The equilibrium on ∂B, when $\mathrm{Tr}\, J(x,y) \ne 0$, $f_1, f_2 \in C^2$ and

$$\Delta_1 = x(f_2')^2 f_1'' + f_1'(2(f_2')^2 - f_2'' f_2) \ne 0,$$

is node-saddle. The last condition means that principle isoclines do not intersect in the point of contact. The equilibrium on $\partial A\cap\partial C$ is complex focus, when $\det J \ne 0$, $f_1, f_2 \in C^3$ and

$$\Delta_2' = f_1'(\delta(f_1'')^2 - \delta f_1''' f_2' - 2\delta(f_2')^2 - x^2 f_2(f_2'')^2 + 3\delta f_2'' f_2) + \det J\,(x f_2 f_2''' + \delta f_1''') \ne 0.$$

Δ_2 has the same sign as magnitude of Lyapunov. If $\Delta_2 < 0$, focus is attractor, but if $\Delta_2 > 0$, focus is repeller. For explaining the type of equilibrium in the case $\Delta_1 = 0$ or $\Delta_2 = 0$, we need higher derivatives.

In the case when $\lambda_2 \ge 0$, there is no cycle because there is separatrix going from saddle to node. If $\lambda_2 < 0$, cycle bifurcates from complex focus. If $\Delta_2 > 0$, there may appear cycle-repeller, but in the case $\Delta_2 < 0$, there may appear cycle-attractor. The latter means that for respectively chosen parameters λ_1, λ_2, industry tends to stationary state, while human and natural factors change periodically with the same period.

Let $Q = \{(x,y) \in \partial B \mid \Delta_1 = 0\}$.

Theorem. *Let $f_1, f_2 \in C^2$, $(f_2'')^2 + (f_2' + f_1'')^2 > 0$ and* mes Ω : 0. *Then there exists C^1 smooth function $\Lambda : R \to R$ such as $\lambda_1 > \Lambda(\lambda_2)$ and the system* (1) *has structurally stable attractor.*

Proof. In parameter λ_1, λ_2 plane, the curve of bifurcation separates a region which contains an attractor. The branches of curve will be found from systems

$$\begin{cases} f_1(x) - \delta y + \lambda_1 c_3 & = 0 \\ x f_2(y) + \lambda_2 c_3 & = 0 \\ x f_1'(x) f_2'(y) + \delta f_2(y) & = 0 \\ x f_2'(y) + f_1'(x) & \le 0 \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} f_1(x) - \delta y + \lambda_1 c_3 & = 0 \\ x f_2(y) + \lambda_2 c_3 & = 0 \\ x f_2'(y) + f_1'(x) & = 0 \\ x f_1'(x) f_2'(y) + \delta f_2(y) & \ge 0. \end{cases}$$

It is possible to solve this if the results of Table 2 are taken into account. We get equations of bifurcation curve in parametric form. Let us differentiate the above system. We get

$$\begin{cases} f_1'(x)dx - \delta dy + c_3 d\lambda_1 & = 0 \\ f_2(y)dx + x f_2'(y)dy + c_3 d\lambda_2 & = 0 \\ (x f_1'(x))' f_2'(y)dx + (x f_1'(x) f_2''(y) + \delta f_2'(y))dy & = 0 \end{cases}$$

Hence, if $\Delta_1 \neq 0$, we obtain

$$d\lambda_1/d\lambda_2 = -\delta(x f_2'(y))^{-1}.$$

As the right hand side is continuous and mes $\Omega = 0$, then bifurcation curve is C^1 smooth. Analogous to previous case we obtain for second branch

$$d\lambda_1/d\lambda_2 = \frac{x f_1' f_2'' + \delta(f_2' + f_1'')}{x f_2 f_2'' + f_1'(f_2' + f_1'')}.$$

At the point of intersection of curves det $J = 0$ and Tr$J = 0$, both branches of bifurcation curve have the same tangent.

Remark. The branches of bifurcation curve getting from the first system is C^1 smooth even if $f_1, f_2 \in C^1$, and derivatives are strongly monotone. Then f_1 and f_2 have second derivative almost everywhere.

The theorem gives necessary conditions for existing attractor. Next our aim is to find a region in parameter plane λ_1, λ_2 for which solution starting on the point $x(0) \in$

$= y(0) = z(0) = 1$ tends to attractor. We consider the case $f_1(x) = x(1-x)$, $f_2(y) = y(1-y)$, $b(x,y,z) = xyz(2-z)$, $\delta = 1$ and perform numerical calculation on PC IBM AT. We applied some modification of Runge - Kutta method [5] and use program DOPRI5 with automatical choice of a step of integration. In algorithm there is employed chaining step of integration with given precision ε. The numerical results in time interval $t \in [0,10]$ with precision $\varepsilon = 10^{-3}$ and $\varepsilon = 10^{-5}$ are obtained and compared. They differ in fourth sign, and therefore, the main results are obtained with precision $\varepsilon = 10^{-3}$. The above values are given in

Table 3.

λ_1	λ_2	t	x	y
0.7	-0.2	7.43	1.56	0.517
0.35	-0.15	7.26	1.16	0.502
0.25	-0.10	7.58	0.864	0.608
0.3	-0.05	8.38	0.665	0.813
0.4	0	4.63	0.74	1.00
0.45	0.05	8.97	0.679	1.13
0.55	0.1	4.56	0.923	1.18
0.65	0.25	5.85	0.911	1.39
0.7	0.30	4.89	0.986	1.42
0.75	0.40	5.36	0.979	1.53
0.8	0.45	4.33	1.06	1.55
0.8	0.50	3.64	1.13	1.56
0.85	0.55	4.28	1.08	1.62
0.85	0.60	5.31	1.02	1.69
0.9	0.70	4.93	1.05	1.75
0.9	0.75	6.67	0.974	1.84

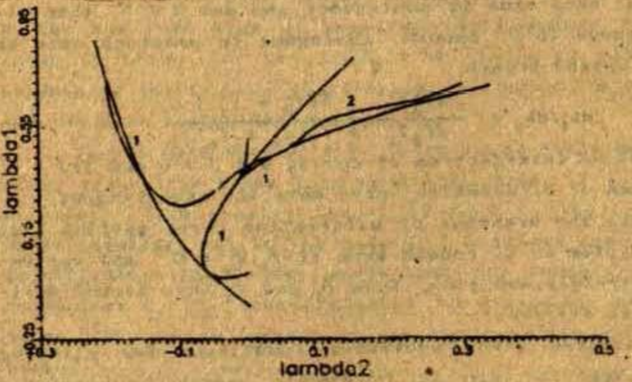


Figure 2. Curves of bifurcation

Here curve 1 - graph of function Λ (bifurcation curve of theorem), curve 2 - a numerically computed boundary of of region for which solutions started at the point $x(0) = y(0) = z(0) = 1$ tends to attractor.

Acknowledgment.

This work has been completed with the financial support of the Science Council of Latvia under grant 90.224.

References

1. J.W.Forrester. World Dynamics. - Cambridge, Mass.: Wright - Allen Press, 1971.
2. D.H.Meadows, D.L.Meadows, J.Randers, W.W.Behrens III. The limits to growth. - New York: Universe Books, 1989.
3. G.Andrikson, L.Rastrigin. Non - linear Model of Regional Ecological System: Synenergetic Approach. // International summer school on mathematical modeling and scientific computation. September 23 - 28, 1990, Albena (near Varna), Bulgaria. - Sofia, 1990. - P. 189 - 192.
4. Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. - М.: Наука, 1976. - 496 с.
5. E.Hairer, S.P.Norsett, G.Wanner. Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems. - Berlin: Springer Verlag, 1987. - 480 p.

Received 12.05.92

УДК 517.939.4+538.4

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРОЙ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ МИРА. Рейнфелд А.А., Калис Х.Э., Крикис Ю.Ю. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.- Рига: ЛУ, 1992.- Вып. 3.

Рассмотрен частный случай модели Форрестера - Медоуза развития социально-экономической системы. Предполагается, что индустрия развивается монотонно, и изучается взаимное влияние индустрии, естественных и человеческих ресурсов. Найдены необходимые значения параметров, при которых развитие стремится к устойчивому положению равновесия.

Ил. 2, библиогр. 5 назв., табл. 3.

KĀDA PASAULES ATTĪSTĪBAS MODEĻA KVALITATĪVA IZPĒTE. Reinfelds A.A.,Kalis H.E.,Kriķis J.J.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas.- Rīga: LU, 1992. - 3. sē/

Apskatīts Forrestera - Medouza sociāli - ekonomiskas sistēmas modeļa speciālgadījums. Aplūkots gadījums, kad rūpniecība monotoni attīstās un pētīts rūpniecības, dabas un cilvēku resursu savstarpējā mijiedarbība. Atrastas parametra vērtības, kuras nodošina stabīlu attīstību.

2 zīm., 3 tabulas, bibl. 5 nosauk.

MSC 34C05, 90A58

QUALITATIVE INVESTIGATION OF SOME WORLD EVOLUTION MODEL. Reinfelds A.A.,Kalis H.E.,Krikis J.J.// The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics.- Riga: LU, 1992.- Vol.3.

The special case of Forrester - Meadows social-economical systems model is analyzed. The interaction of industrial, human and natural resources at monotonous industrial development are investigated. The necessary values of parameters which guarantee that evolutions tends to the stable equilibrium are found.

2 figures, 3 tables, 5 references.

И.У.Райтумс

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введение. При разработке численных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений большой интерес вызывают конструкции точных разностных схем, т.е. таких схем, решения которых в узловых точках совпадают с решением исходной краевой задачи. Одним из первых такие схемы ввел и исследовал А.М.Ильин /I/.

В настоящей работе рассматривается построение разностной схемы для линейного уравнения второго порядка на прямой, которая является точной в классе кусочно-постоянных коэффициентов.

I. На заданном интервале рассмотрим краевую задачу

$$(LU)(x) \equiv \varepsilon U''(x) + a(x)U'(x) - b(x)U(x) = f(x), \quad (\mathrm{I.I})$$

$$c < x < d, \quad U(c) = \mu_1, \quad U(d) = \mu_2 .$$

где $\varepsilon > 0$, μ_1, μ_2 - заданные константы, a, b и f - заданные непрерывные функции. Предполагается, что $0 < c < d < 1$ и что функция b является неотрицательной.

Зафиксируем натуральное число $N \geqslant 2$ и определим неравномерную сетку

$$W_h = \{ x_i \mid i = \overline{0,N},\ x_0 = c,\ x_N = d \}$$

с точками

$$c = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = d$$

и вектором шагов

$$h = (h_1, \ldots, h_N),\quad h_i = x_i - x_{i-1},\quad i = 1, \ldots N .$$

Функции на сетке будем обозначать через y с

$$y_i = y(x_i)\ , \quad i=\overline{0,N}$$

2. В первом шаге построения разностной схемы функции a, b и f заменяются на кусочно-постоянные на интервалах из W_h функций.

Для произвольной пары интервалов $(x_{i-1}, x_i) \cup (x_i, x_{i+1})$ из W_h мы можем применять следующие три аппроксимации $\tilde{a}$ функции a:

1) $$\tilde{a}(x) = a\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) \quad \text{в} \quad (x_i, x_{i+1})$$

$$\tilde{a}(x) = a\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right), \quad \text{в} \quad (x_{i-1}, x_i)$$

2) $$\tilde{a}(x) = \frac{1}{2}\left(a(x_i) + a(x_{i+1})\right) \quad \text{в} \quad (x_i, x_{i+1})$$

$$\tilde{a}(x) = \frac{1}{2}\left(a(x_{i-1}) + a(x_i)\right) \quad \text{в} \quad (x_{i-1}, x_i)$$

3) $$\tilde{a}(x) = \frac{1}{h_{i+1}}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)\,dx \quad \text{в} \quad (x_i, x_{i+1})$$

$$\tilde{a}(x) = \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} a(x)\,dx \quad \text{в} \quad (x_{i-1}, x_i)$$

Для любой из этих аппроксимаций и фиксированного i, x_i - внутренняя точка W_h, обозначим

$$a_i^- \equiv \tilde{a}(x)\ , \quad x \in (x_{i-1}, x_i) \equiv \mathcal{J}_i^-$$

$$a_i^+ \equiv \tilde{a}(x)\ , \quad x \in (x_i, x_{i+1}) \equiv \mathcal{J}_i^+$$

Аналогичные аппроксимации и обозначения определяем для функций b и f. Введем еще также обозначения:

$$u_i^- \equiv u(x)\ , \quad x \in \mathcal{J}_i^- .$$

$$U_i^{+} \equiv U(x) \quad , \quad x \in \mathfrak{I}_i^{+}$$

В этих обозначениях краевая задача (I.I) (с функциями $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{f}$ вместо a, b, f) в интервале записывается как:

$$\begin{cases} L U_i^{\pm} \equiv \varepsilon (U_i^{\pm})''(x) + a_i^{\pm}(U_i^{\pm})'(x) - b_i^{\pm} U_i^{\pm}(x) = f_i^{\pm} \\ U_i^{-}(x_{i-1}) = y_{i-1} \ , \ U_i^{+}(x_{i+1}) = y_{i+1} \\ U_i^{-}(x_i) = U_i^{+}(x_i) \ , \ (U_i^{-})'(x_i) = (U_i^{+})'(x_i) \ , \end{cases} \qquad (2.I)$$

где значения y_{i-1} и y_{i+1} также неизвестны.

Корни $\lambda^{\pm}_{1,2}$ характеристического уравнения для краевой задачи (2.I) являются вещественными числами, так как дискриминант

$$D_i^{\pm} \equiv (a_i^{\pm})^2 + 4\varepsilon b_i^{\pm} \geqslant 0$$

и $\lambda^{\pm}_{1,2}$ равны

$$\lambda^{\pm}_{1,2} = \frac{-a_i^{\pm} \pm \sqrt{D_i^{\pm}}}{2\varepsilon} ,$$

где, как выше и в дальнейшем, верхний знак " - " указывает на соответствие интервалу (x_{i-1}, x_i), а " + " — интервалу (x_i, x_{i+1}).

Если обозначить

$$\frac{-a_i^{-}}{2\varepsilon} = \alpha_i^{-} \quad , \quad \frac{-a_i^{+}}{2\varepsilon} = \alpha_i^{+}$$

$$\frac{\sqrt{D_i^{-}}}{2\varepsilon} = \beta_i^{-} \quad , \quad \frac{\sqrt{D_i^{+}}}{2\varepsilon} = \beta_i^{+}$$

то решение $U^{\pm}$ в $(x_{i-1}, x_i) \cup (x_i, x_{i+1})$ краевой задачи имеет представление

$$\begin{cases} U^-(x) = e^{\alpha_i^-(x-x_i)} \cdot (C_1 ch\beta_i^-(x-x_i) + \\ \qquad + C_2 sh\beta_i^-(x-x_i)) + U_p^-(x-x_i), \\ U^+(x) = e^{\alpha_i^+(x-x_i)} \cdot (C_3 ch\beta_i^+(x-x_i) + \\ \qquad + C_4 sh\beta_i^+(x-x_i)) + U_p^+(x-x_i), \end{cases} \tag{2.2}$$

где константы C_1, C_2, C_3 и C_4 пока неизвестны (они зависят от i), а частное решение $U_p^{\pm}$ имеет представление:

$$U_p^{\pm}(x-x_i) = \begin{cases} -\dfrac{f_i^{\pm}}{b_i^{\pm}}, \quad b_i^{\pm} \neq 0, \\ \dfrac{f_i^{\pm}}{a_i^{\pm}} \cdot (x-x_i), \quad b=0 \text{ и } a \neq a \\ \dfrac{f_i^{\pm}}{2\varepsilon} \cdot (x-x_i)^2, \quad b=0 \text{ и } a=0 \end{cases}$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3 и C_4 рассмотрим граничные условия и условия сопряжения для $U^-(x)$ и $U^+(x)$ в точке x_i. Эти условия дают систему уравнений:

$$\begin{cases} U^-(x_i) = U^+(x_i), \\ (U^-)'(x_i) = (U^+)'(x_i), \\ U^-(x_{i-1}) = y_{i-1}, \\ U^+(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases}$$

Константы C_1 и C_3 можно выразить через C_2 и C_4, что (после подстановки полученных выражений в граничных условиях) приводит к системе уравнений относительно C_2 и C_4:

$$\begin{cases} ch\beta_i^- h_i^- (\beta_i^+ C_4 - \beta_i^- C_2 - \alpha_i^+ (A_0^+ - A_0^-) + (B^+ - B^-)) - \\ \quad - (\alpha_i^- - \alpha_i^+) C_2 sh\beta_i^- h_i^- = (\alpha_i^- - \alpha_i^+) e^{\alpha_i^- h_i^-} (y_{i-1} - A_{i-1}^-), \\ ch\beta_i^+ h_i^+ (\beta_i^+ C_4 - \beta_i^- C_2 - \alpha_i^- (A_0^+ - A_0^-) + (B^+ - B^-)) + \\ \quad + (\alpha_i^- - \alpha_i^+) C_4 sh\beta_i^+ h_i^+ = (\alpha_i^- - \alpha_i^+) e \quad (y_{i+1} - A_{i+1}^+), \end{cases}$$

где $\quad A_{i-1}^{-} = U_p^{-}(h_i^{-})\ , \quad A_{i+1}^{+} = U_p^{+}(h_i^{+})\ ,$

$$A_0^{\pm} = U_p^{\pm}(0)\ , \quad B_0^{\pm} = (U_p^{\pm})'(0)$$

Следовательно,

$$C_2 = \frac{1}{\varkappa}\cdot\Big[e^{-\alpha_i^{+}h_i^{+}}\cdot(y_{i+1}-A_{i+1}^{+})\beta_i^{+}\gamma^{-} - e^{\alpha_i^{-}h_i^{-}}\cdot(y_{i-1}-A_{i-1}^{-})\cdot$$
$$\cdot(\beta_i^{+}\gamma^{+}+(\alpha_i^{-}-\alpha_i^{+})\varphi^{+}) + A\gamma^{-}(\beta_i^{+}\gamma^{+}-\alpha_i^{+}\varphi^{+}) + (B^{+}-B^{-})\gamma^{-}\varphi^{+}\Big]\ ,$$

$$C_4 = \frac{1}{\varkappa}\Big[e^{-\alpha_i^{+}h_i^{+}}\cdot(y_{i+1}-A_{i+1}^{+})\cdot((\alpha_i^{-}-\alpha_i^{+})\varphi^{-}+\beta_i^{-}\gamma^{-}) -$$
$$- e^{\alpha_i^{-}h_i^{-}}\cdot(y_{i-1}-A_{i-1}^{-})\beta_i^{-}\gamma^{+} + A\gamma^{+}(\alpha_i^{-}\varphi^{-}+\beta_i^{-}\gamma^{-}) - (B^{+}-B^{-})\gamma^{+}\varphi^{-}\Big]\ ,$$

где

$$\gamma^{\pm} = ch\,\beta_i^{\pm}h_i^{\pm}\ , \quad \varphi^{\pm} = sh\,\beta_i^{\pm}h_i^{\pm}\ ,$$

$$\varkappa = \beta_i^{+}\gamma^{+}\varphi^{-} + (\alpha_i^{-}-\alpha_i^{+})\varphi^{-}\varphi^{+} + \beta_i^{-}\gamma^{-}\varphi^{+}\ .$$

Последующие простые вычисления с использованием условия сопряжения дают искомые выражения и для констант C_1 и C_3 :

$$C_1 = \frac{1}{\varkappa}\cdot\Big[e^{-\alpha_i^{+}h_i^{+}}\cdot(y_{i+1}-A_{i+1}^{+})\beta_i^{+}\varphi^{-} + e^{\alpha_i^{-}h_i^{-}}\cdot(y_{i-1}-A_{i-1}^{-})\beta_i^{-}\varphi^{+} +$$
$$+ A\varphi^{-}(\beta_i^{+}\gamma^{+}-\alpha_i^{+}\varphi^{+}) + \varphi^{-}\varphi^{+}(B^{+}-B^{-})\Big]\ ,$$

$$C_3 = \frac{1}{\varkappa}\cdot\Big[e^{-\alpha_i^{+}h_i^{+}}\cdot(y_{i+1}-A_{i+1}^{+})\beta_i^{+}\varphi^{-} + e^{\alpha_i^{-}h_i^{-}}(y_{i-1}-A_{i-1}^{-})\beta_i^{-}\varphi^{+} -$$
$$- A\varphi^{+}(\alpha_i^{-}\varphi^{-}+\beta_i^{-}\gamma^{-}) + \varphi^{-}\varphi^{+}(B^{+}-B^{-})\Big]\ ,$$

$$A = A_0^{+} - A_0^{-}\ .$$

Полученные выражения для констант C_1, C_2, C_3 и C_4 и формула (2.2) дают представление для точного решения $U^{\pm}$ краевой задачи (2.1) во всем интервале $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ (с неизвестными пока значениями y_{i-1}, y_i, y_{i+1} функции U в узловых точках x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).

3. Точную разностную схему для краевой задачи (I.I) с кусочно-постоянными в W_h коэффициентами будем искать в виде

$$\begin{cases} \Lambda y_i \equiv \tilde{A}_i y_{i-1} - \tilde{C} y_i + \tilde{B}_i y_{i+1} = F_i , \\ y_0 = \mu_1 , \quad y_N = \mu_2 , \quad i = \overline{1,N-1} . \end{cases} \tag{3.I}$$

Неизвестные величины $\tilde{A}_i$, $\tilde{C}_i$, $\tilde{B}_i$ и F_i легко определяются из условий

$$U^-(x_i) = U^+(x_i) = y_i ,$$

$$C_1 + U_p^-(0) = C_3 + U_p^+(0) = y_i .$$

В итоге получаем окончательное представление для коэффициентов разностной схемы (3.I):

$$\tilde{A}_i = e^{\alpha_i^- h_i^-} \cdot \beta_i^- \varphi^+ , \quad \tilde{C}_i = \varkappa , \quad \tilde{B}_i = e^{-\alpha_i^+ h_i^+} \cdot \beta_i^+ \varphi^- ,$$

$$F_i = A_{i+1}^+ e^{-\alpha_i^+ h_i^+} \cdot \beta_i^+ \varphi^- + A_{i-1}^- e^{\alpha_i^- h_i^-} \cdot \beta_i^- \varphi^+ - \tag{3.2}$$

$$- A \varphi^- (\beta_i^+ \gamma^+ - \alpha_i^+ \varphi^+) - \varphi^- \varphi^+ (B^+ - B^-) - A_0 \varkappa .$$

Для сравнения полученной разностной схемы с уже известными рассмотрим случай схемы Ильина /I/ в ситуации, где

$$b = 0 , \; a_i^+ = a_i^- = a_i \neq 0 , \; f_i^+ = f_i^- = f_i , \; h^+ = h^- = h .$$

В этих условиях схема Ильина имеет вид:

$$e^{-\frac{a_i h}{2\varepsilon}} \cdot y_{i-1} - 2 ch \frac{a_i h}{2\varepsilon} y_i + e^{\frac{a_i h}{2\varepsilon}} \cdot y_{i+1} = - \frac{2 f_i h}{a_i} sh \frac{a_i h}{2\varepsilon} \tag{3.3}$$

В свою очередь схема (3.I) имеет коэффициенты

$$A_0^{\pm} = 0 , \; A_{i-1}^- = - \frac{f_i h}{a_i} , \; A_{i+1}^+ = \frac{f_i h}{a_i} , \; B^+ - B^- = 0 .$$

После несложных преобразований получаем, что схема (3.I) переходит в

$$e^{-\frac{a_i h}{2\varepsilon}} y_{i-1} - 2\,\mathrm{ch}\,\frac{a_i h}{2\varepsilon}\, y_i + e^{\frac{a_i h}{2\varepsilon}} y_{i+1} = -\frac{2 f_i h}{a_i}\,\mathrm{sh}\,\frac{a_i h}{2\varepsilon}, \quad (3.4)$$

что совпадает со схемой (3.2). Таким образом в рассмотренной ситуации предложенная схема (3.I) совпадает с известной схемой Ильина из /I/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной//Мат. заметки. - 1969. - № 6, вып.2. - С. 237-248.

2. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 654 с.

3. Калис Х. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. - Рига: Звайгзне, 1986. - 416 с.

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. Райтумс И.У. //Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.-Рига, 1992. - Вып.3.

В работе предложена разностная схема для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Схема является точной в случае линейного уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами.

Библ. 3 назв.

AN ALGORITHM FOR NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. Raitums I.//The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. - Riga:LU, 1992. - vol.3.

The paper discuss a finite difference scheme for ordinary differential equations which is precise in the case of piece wise constant coefficients.

Ref. 3.

PAR KĀDU OTRĀS KĀRTAS PARASTO DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU ROBEŽPROBLĒMU SKAITLISKĀS RISINĀŠANAS METODI. Raitums J. //Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. - Rīga:LU, 1992. - 3.sēj.

Darbā aplūkota viena galīgo diferenču shēma otrās kārtas parasto diferenciālvienādojumu robežproblēmu skaitliskai risināšanai. Shēma ir precīza gabaliem konstantu koeficientu gadījumā.

Bibl. 3 nos.

И.М.Володко
РТУ, Рига

СВОБОДНАЯ ТЕПЛОВАЯ МГД КОНВЕКЦИЯ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе /I/ найден класс внешних магнитных полей, оставляющих автомодельной задачу свободной тепловой конвекции около вертикальной пластины. В данной работе для частного вида такого внешнего поля (см. /2/)

$$\vec{B}^e = B_0 (l/x)^{-1/4} \vec{e}_y \tag{I}$$

(ось x направлена вертикально вверх, ось y -горизонтально) получена точная асимптотика решения этой задачи при $Z = Ha^2/\sqrt{Gr} \to \infty$ (Ha - число Гартмана, Gr - число Грасгофа). Уже при $Z \geqslant 4$ найденное асимптотическое решение мало отклоняется от точного решения этой задачи, найденного численно, методом стрельбы.

Если скорость жидкости $\vec{V}$ и внешнее магнитное поле $\vec{B}^e$ имеют вид

$$\vec{V} = \{u(x,y), v(x,y)\}, \vec{B}^e = \{B_x(x,y), B_y(x,y)\}, \tag{2}$$

то погранслойные уравнения свободной тепловой конвекции в безиндукционном приближении имеют вид (см. /3/,/1/):

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_\infty) + \frac{\sigma}{\rho}(vB_x - uB_y)B_y, \tag{3}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{4),(5}$$

$$y = 0: u = 0, v = 0, T = T_w; \; y = \infty: u = 0, T = T_\infty, \tag{6}$$

где ν, a - коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости, g -ускорение силы тяжести, β - коэффициент теплового расширения, σ -проводимость, ρ - плотность жидкости.

Для перехода к автомодельной задаче в случае поля (I) введем функцию тока $\psi(x,y)$ ($v = \psi_y$, $u = -\psi_x$), автомодельную переменную η и безразмерную температуру Θ (см. /3/):

$$\eta = ky x^{-1/4}; \ \psi = 4\nu k x^{3/4} f(\eta); \ k^4 = Gr/(4\ell^3);$$

$$\theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty); \ Gr = \nu^{-2} g\beta (T_w - T_\infty)\ell^3. \quad (7)$$

После перехода к переменным (7) задача (3)-(6) становится автомодельной и принимает вид (штрих означает дифференцирование по η):

$$f''' + 3ff'' - 2f'^2 + \theta - Zf' = 0, \quad (8)$$

$$\theta'' + 3Pr f\theta' = 0, \quad (9)$$

$$\eta = 0: f = 0, f' = 0, \theta = 1; \ \eta = \infty: f' = 0, \theta = 0, \quad (10)$$

где $Z = Ha^2/\sqrt{Gr}$, $Ha = B\ell\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}$ – число Гартмана, $Pr = \nu/a$ –число Прандтля.

Отметим, что в /2/ найдена асимптотика решения задачи (8)-(10) при $Z \to \infty$ лишь в ядре течения, в то время как в данной работе определяется асимптотика как в ядре, так и в динамическом погранслое при $Z \to \infty$.

Для получения асимптотики в ядре течения положим в (8) и (9)

$$\theta = Z\tilde{\theta} \quad (11)$$

и перейдем к пределу при $Z \to \infty$. Получим систему:

$$\tilde{\theta} - f' = 0, \quad \tilde{\theta}'' + 3Pr f\tilde{\theta}' = 0. \quad (12),(13)$$

Подставляя $\tilde{\theta} = f'$ из (12) в (13), получим задачу

$$f''' + 3Pr ff'' = 0 \quad (14)$$

$$\eta = 0: f = 0, f' = Z^{-1}; \ \eta = \infty: f' = 0, \quad (15)$$

причем условие $f' = Z^{-1}$ при $\eta = 0$ следует из (11) и (12).

Чтобы исключить из (14) и (15) параметры Pr и Z, положим

$$f = \frac{1}{\sqrt{Z\,Pr}}\,F\;,\quad \eta = \sqrt{\frac{Z}{Pr}}\,\eta_1\,. \qquad (16)$$

Получим задачу:

$$F''' + 3FF' = 0\,,\ (\,' = d/d\eta_1) \qquad (17)$$

$$\eta_1 = 0 : F = 0,\ F' = 1\ ;\ \eta_1 = \infty : F' = 0. \qquad (18)$$

В /2/ приводится результат численного решения задачи (17), (18), из которого следует, что

$$F''(0) = -1{,}087. \qquad (19)$$

Решим задачу (17), (18) методом интегральных соотношений (см. /5/), видоизменив его так, чтобы получить не только $F''(0)$, близкое к (19), но и сами кривые $F'(\eta_1)$ и $\theta(\eta_1)$, близкое к точному численному решению. Для этого вместо обычно используемого приближения полиномами (см. /5/) используем приближение с помощью показательных функций:

$$F(\eta_1) = a_0 + a_1 e^{-\eta_1} + a_2 e^{-2\eta_1} + a_3 e^{-3\eta_1}, \qquad (20)$$

где $a_0 - a_3$ неизвестные коэффициенты. Функция (20) уже удовлетворяет условию на бесконечности в (18). Для определения четырех коэффициентов $a_0 - a_3$ используем первые два граничных условия в (18), а также условие

$$F'''(0) = 0, \qquad (21)$$

которое получается из уравнения (17) и условия $F(0) = 0$. Проинтегрируем уравнение (17) по η от $\eta = 0$ до $\eta = \infty$, получим

$$F''(0) + 3\int_0^\infty F'^2(\eta_1)\,d\eta_1 = 0. \qquad (22)$$

Использовав первые два граничных условия в (18) и условие (21), удается коэффициенты $a_1 - a_3$ выразить через a_0, а соотношение (22) приводит к квадратному уравнению для a_0, в котором надо выбрать корень $a_0 > 0$ (т. к. должно быть $a_0 = f(\infty)$).

В результате получим

$$a_0 = 0{,}7158\ ;\ a_1 = -0{,}2063\ ;$$

$$a_2 = -0{,}7349\ ;\ a_3 = 0{,}2254\ ;\ F''(0) = -1{,}117, \tag{23}$$

что менее чем на 3% отличается от точного значения $F''(0)$ в (19).

Подстановка (20) в (16) и (12) дает решение задачи в ядре течения в виде

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{Z Pr}} \sum_{k=0}^{3} a_k e^{-k\eta\gamma}\ ,\ \gamma = \sqrt{\frac{Pr}{Z}}, \tag{24}$$

$$\theta(\eta) = Z f'(\eta) = -\sum_{k=1}^{3} k a_k e^{-k\eta\gamma}, \tag{25}$$

где $a_0 - a_3$ определяются из (23).

Так как условие $f'(0) = Z^{-1}$ в (15) противоречит условию $f'(0) = 0$ в (10), то в окрестности точки $\eta = 0$ должен быть пограничный слой, компенсирующий эту неувязку. Для построения решения в этом погранслое предположим, что число Прандтля $Pr \ll 1$, так что в пределах толщины динамического погранслоя температура остается постоянной и равной I. Положим в уравнениях (8) и (9)

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{Z}}\ ,\ \theta = Z^{3/2}\theta_1\ ,\ f = f_1 \tag{26}$$

и перейдем к пределу при $Z \to \infty$. Получим задачу:

$$\frac{d^3 f_1}{d\xi^3} + \theta_1 - \frac{d f_1}{d\xi} = 0\ ,\quad \frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} = 0 \tag{27),(28}$$

$$\xi = 0:\ f_1 = f_1' = 0\ ,\quad \theta_1 = Z^{-3/2}. \tag{29}$$

В силу того, что $Pr \ll 1$, из (28),(29) следует, что

$$\theta_1 = Z^{-3/2}, \tag{30}$$

так что для неизвестной функции f_1 получается уравнение:

$$\frac{d^3 f_1}{d\xi^3} + Z^{-3/2} - \frac{d f_1}{d\xi} = 0. \tag{31}$$

Решение уравнения (31), удовлетворяющее граничным условиям (29) и имеющее ограниченную производную при $\xi \to \infty$, имеет вид (после перехода к переменной η):

$$f_1(\eta) = Z^{-3/2}\left(e^{-\eta\sqrt{Z}} - 1 + \eta\sqrt{Z}\right), \; \theta = 1. \tag{32}$$

Из (32) следует, что

$$\lim_{\eta \to \infty} f_1'(\eta) = -\frac{1}{Z}, \tag{33}$$

что совпадает с пределом в ядре течения (см. (24))

$$\lim_{\eta \to 0} f'(\eta) = -\frac{1}{Z}, \tag{34}$$

т. е. условия согласования выполнены. Для построения составного разложения (см. /6/) нужно взять сумму решения в ядре и в погранслое и вычесть общий предел (т.е. Z^{-1}), это дает:

$$f(\eta) = Z^{-3/2}\left(e^{-\eta\sqrt{Z}} - 1\right) + \sum_{k=0}^{3} a_k e^{-k\gamma\eta}. \tag{35}$$

Формулы (35) ,(25) дают асимптотическое решение задачи (8)-(10) при $Z \to \infty$ и $Pi \ll 1$. Из (35) следует

$$f'(\eta) = -Z^{-1} e^{-\eta\sqrt{Z}} - Z^{-1}\sum_{k=1}^{3} k a_k e^{-k\gamma\eta}. \tag{36}$$

На рисунке I приведены результаты расчета функций $f'(\eta)$ и $\theta(\eta)$ по формулам (25), (36); на этом же рисунке приведены результаты точного численного решения задачи (8)-(10), полученного методом стрельбы при Pi = =0,0525, Z =4 и Z =10. Как видно из рисунка, асимптотика (25) и (36) практически сливается с точным численным решением при Z =10 и дает малое отклонение от него при Z = =4.

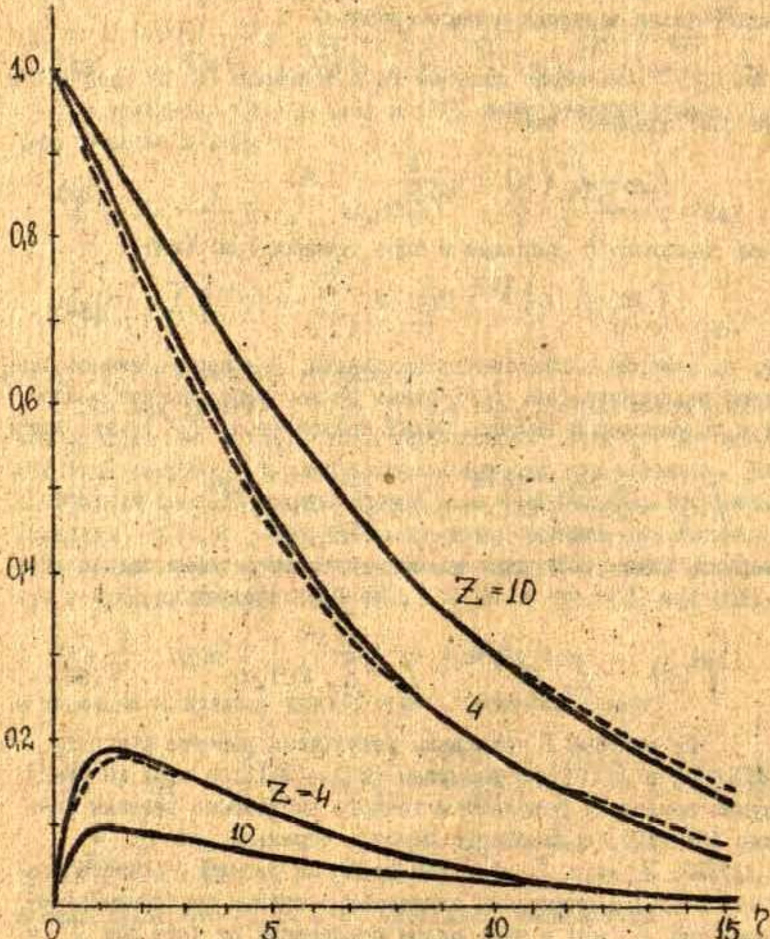


Рис. I. Сравнение точного численного (——) и асимптотического (----) решений для вертикальной пластины при Pr =0,0625, Z =4 и Z =10. Верхние кривые - $\theta(\eta)$, нижние - $f'(\eta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антимиров М.Я., Володко И.М., Жирнов О.В., Подвысоцкий А.Ю. О классе магнитных полей, оставляющих автомодельными задачи свободной тепловой МГД конвекции// Магнитная гидродинамика.-1991.-№3.-С.75-81.

2. Likoudis P.S..Natural convection of an elektrically conducting fluid in the presence of a magnetic field//Intern.. J.Heat a..Mass Transfer.-1968..-Vol.II,N9.-P.1385-1391.

3. Джалурия И. Естественная конвекция.-М.,1983.-399с.

4. Гельфгат Ю.А., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил.-Рига,1976.-231с.

5. Блум Э.Я., Михайлов Ю.А., Озолс Р.Я. Тепло- и массообмен в магнитном поле.-Рига,1980.-355с.

6. Найфэ А. Методы возмущений.-М.,1976.-455с.

УДК 537.84

СВОБОДНАЯ ТЕПЛОВАЯ МГД КОНВЕКЦИЯ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ. Володко И.М.// Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики: ЛУ, 1992.- Вып.3.

Получена точная асимптотика решения автомодельной задачи о свободной тепловой МГД конвекции около вертикальной полубесконечной пластины при $Z = Ha^2/\sqrt{Gr} \to \infty$ (Ha - число Гартмана, Gr - число Грасгофа). Внешнее магнитное поле имеет вид $\vec{B}^e = B_0(\ell/x)^{-1/4}\vec{e}_y$ (ось x направлена вертикально вверх). При Z =10, Pr =0,0625 найденная асимптотика поля скоростей и температур практически совпадает с точным численным решением, а при Z =4 дает малое отклонение от него.

Ил. 1. библиогр. 6 назв.

NATURAL MHD CONVECTION NEAR A VERTICAL PLATE IN A STRONG MAGNETIC FIELD. I.M.Volodko// The mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. Riga: LU, 1992.- Vol.3.

An exact asimptote of the self-similar problem about MHD natural convection near a vertical semi-infinite plate, if $Z = Ha^2/\sqrt{Gr} \to \infty$ is given (Ha - Hartman number, Gr - Grashof number). The external magnetic field is $\vec{B}^e = B_0(l/x)^{-1/4}\,\vec{e}_y$. ($x$ axes direction is vertical up). The asimptotic solution of a velocity and temperature fields practically coincide with exact numerical solution of the problem if Z =10, Pr =0,0625 and has small deviation from them if Z =4.

Bibliogr. 6 title, 1 figure.

BRĪVĀ MHD SILTUMKONVEKCIJA PIE VERTIKĀLĀS PLATES STIPRĀ MAGNĒTISKĀ LAUKĀ. Volodko I.M.// Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas.-Rīga: 1992.- 3 izl.

Darbā izstrādāta brīvās MHD siltumkonvekcijas pie vertikālās plates automodeļa uzdevuma risināšanas precīza asimptotika, kad $Z = Ha^2/\sqrt{Gr} \to \infty$ (Ha - Hartmana skaitlis, Gr - Grasgofa skaitlis). Ārējais magnētiskais lauks ir $\vec{B}^e = B_0(l/x)^{-1/4}\,\vec{e}_y$ (x ass vērsta vertikāli uz augšu). Gadījumā Z =10, Pr =0,0625 ātruma un temperatūras lauku atrastā asimptotika praktiski sakrīt ar precīzo skaitlisko atrisinājumu, bet gadījumā Z =4 starpība ir neliela.

Zīm. 1, bibiogr. 6 nos.

Jānis VUCANS
University of Latvia

Approximation of the third ordre to effective thermoconductivity of the quadratic lattice structure

First let's introduce quadratic lattice structure

$$B = B(\tau) = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ (x_1, x_2) : (| x_1 - k| < \tau/2) \ ; \ (|x_2 - k| < \tau/2) \right\}$$

depending on the width of a strip equal to $\tau \in (0,1)$.

Let's introduce also the orest

$$Q = Q(\tau) = B(\tau) \cap (-1/2, 1/2)^2 .$$

This paper refers to homogenization theory for the Laplacian on B with homogenous Neumann boundary condi ions. In order to find for this problem the homogenized matrix, which is due to the symmetry equal to $\hat{K}\delta_{ij}$, we have to solve the auxiliary homogenization problem :

$$\Delta u = 0 \ \text{ in } \ Q(\tau), \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ in } \ \partial Q(\tau) \setminus ([-1/2, 1/2]^2), \tag{1}$$

$(U - x_1)$ being 1-periodic in both of the variables x_1 and x_2.

Then homogenized coefficient which is in this case effective thermoconductivity is equal to

$$\hat{K} = \hat{K}(\tau) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\rangle = \iint_Q \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 dx_2 . \tag{2}$$

In the article [1] we (together with S.M.Kozlov) have proved for this problem the following

<u>Theorem 1</u>. *The effective thermoconductivity $\hat{K} = \hat{K}(\tau)$ is given by the two equivalent formulae*

$$\hat{K} = \tau \left\{ 1 + I_3(\alpha) \left[I_1(\alpha) \, I_5(\alpha) \right]^{-1} \right\} \tag{3^1}$$

and

$$\hat{K} = 1 - (1-\tau) \left\{ I_4(\alpha) \left[I_2(\alpha) \, I_5(\alpha) \right]^{-1} \right\} , \tag{3^2}$$

where $\alpha = \alpha(\tau)$, $\tau \in (0,1)$, is the unique solution of the equation

$$\tau = I_1(\alpha) \left[I_1(\alpha) + I_2(\alpha) \right]^{-1} \tag{4}$$

from the interval $(1, +\infty)$ and for $\alpha > 1$ the functions $I_1(\alpha) - I_5(\alpha)$ are given by the following integrals :

$$I_1(a) = \int_1^a \sqrt{\frac{t}{(t^2-1)(a^2-t^2)}}\, dt ,$$

$$I_2(a) = \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{(1-t^2)(a^2-t^2)}}\, dt ,$$

$$I_3(a) = \int_0^1 \sqrt{\frac{z}{(1-z^2)(a^2-z^2)}} \int_z^a \sqrt{\frac{1}{(1+t)(a^2-t^2)}}\, dt\, dz ,$$

$$I_4(a) = \int_0^1 \sqrt{\frac{z}{(1-z^2)(a^2-z^2)}} \int_{-1}^z \sqrt{\frac{1}{(1+t)(a^2-t^2)}}\, dt\, dz ,$$

$$I_5(a) = \int_{-1}^a \sqrt{\frac{1}{(1+t)(a^2-t^2)}}\, dt = \sqrt{\frac{2}{a}}\, K\left(\sqrt{(a+1)/2a}\right) ,$$

where $K(\cdot)$ is complete Legendre elliptic integral of the first kind.

In the proof of this theorem in the note [1] we used conformal mapping and elliptic integrals and finally we obtained the explicit solution of the problem (1). That allowed to write down the formulae $(3^{1,2})$. We note that for implicit function $a=a(\tau)$, $\tau\in(0,1)$ given by (4) are true the limiting properties

$$\lim_{\tau\to 0_+} a(\tau) = 1_+ , \qquad \lim_{\tau\to 1_-} a(\tau) = +\infty . \tag{5}$$

Using the Theorem 1 in the article [1] we obtained also the following asymptotic formulae

$$\hat{K}(\tau) = 1 - (1-\tau)^2 \frac{\Gamma^4(1/4)}{8\,\pi^2} + o\left((1-\tau)^2\right), \qquad \tau\to 1_- . \tag{6}$$

and

$$\hat{K}(\tau) = \tau + k_2\tau^2 + o(\tau^2), \qquad \tau\to 0_+ . \tag{7}$$

where $\Gamma(\cdot)$ is Euler's Gamma function and

$$k_2 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\operatorname{arcsh} 1} t \sqrt{\operatorname{cosech}^2 t - 1}\, dt \approx 0.27936 . \tag{8}$$

Earlier with others methods formula (6) is obtained in the paper [2], but formula (7) - in the [3]. The advantage of the Theorem 1 is its applicability for more detalized investigations of the effective thermoconductivity $\hat{K}(\cdot)$ in the all interval $(0,1)$.

The main results of this paper are the graphical illustration of the effective thermoconductivity $\hat{K}(\tau)$, $\tau\in(0,1)$,

(look Figures 1 and 2) and the improvement of the asymtotic formula (7) given by

Theorem 2. *For the problem (1)-(2) is true the asymtotic formula*

$$\hat{K}(\tau) = \tau + k_2\tau^2 + k_3\tau^3 + o(\tau^3), \qquad \tau \to 0_+ . \tag{9}$$

where k_2 *is given by (8), but*

$$\begin{aligned} k_3 = -k_2 \left\{ \frac{1}{2\Pi} \left[5 \ln 2 + 4 \operatorname{arctg}(2^{-1/4})\right] - \frac{5}{4} \right\} \approx \\ \approx - k_2 \cdot 0.0131 \approx - 3.661 \cdot 10^{-3} . \end{aligned} \tag{10}$$

In order to obtain these results the more acurate study of the functions $I_j(\alpha)$ and their derivatives $I_j'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} I_j(\alpha)$. $j=1,2,3,5$, is necessary. We transform these functions of α in the forms without the singularities in the integrals. We abandon the transformations and write down here only the final expressions.

So, for $I_1(\alpha)$ we obtain :

$$I_1(\alpha) = 2^{-3/4} \int_{-\Pi/2}^{\Pi/2} \left[(\alpha^2-1) \sin z + \alpha^2 + 1\right]^{-1/4} dz , \tag{11}$$

$$I_1(\alpha) = \frac{\Pi}{2} + o(1) , \qquad \alpha \to 1_+ \tag{12}$$

$$I_1'(\alpha) = - \frac{\Pi}{8} + o(1) , \qquad \alpha \to 1_+ . \tag{13}$$

For the function $I_2(\alpha)$ is true the equality

$$I_2(\alpha) = \left[2(\alpha+1)\right]^{-1/2} \left[-\ln (\alpha-1) + g_2(\alpha)\right] . \tag{14}$$

where

$$\begin{aligned} g_2(\alpha) = \ln\left[\left(\frac{\sqrt[4]{4\alpha} + \sqrt{\alpha+1}}{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{\alpha+1}} \right)^2 \left(\frac{2\sqrt{\alpha} + \alpha + 1}{\sqrt{2} + \sqrt{\alpha+1}} \right) \right] + \\ + 2 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{2/(\alpha+1)} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{2\alpha/(\alpha+1)^2} + \\ + \sqrt{2} \int_0^{\sqrt[4]{2/(\alpha+1)}} \left[\frac{1}{1+s} + \frac{s-1}{1+s^2} \right] \sqrt{\frac{1-s^4}{4\alpha-(\alpha+1)^2 s^4}}\, ds . \end{aligned} \tag{15}$$

Since in every interval $(1,\alpha^*]$, $\alpha^*>1$, the function $g_2(\alpha)$ and its derivative $g_2'(\alpha)$ are bounded we have the following limiting properties :

$$I_2(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln(\alpha-1) + \frac{1}{2}g_2(1) + o(1), \quad \alpha\to 1_+, \qquad (16)$$

where

$$g_2(1) = \frac{5}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctg}\,(2^{-1/4}), \qquad (17)$$

$$I_2'(\alpha) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{8}\ln(\alpha-1) + o(\ln(\alpha-1)), \quad \alpha\to 1_+. \qquad (18)$$

For the function $I_3(\alpha)$ we obtain the expressions :

$$I_3(\alpha) = f_{30}(\alpha) - \int_0^1 \sqrt{1-y}\int_0^1 \sqrt{\frac{z}{1-z}}\,\frac{(\alpha-z)[\alpha+1+2\alpha y+2z(1-y)]}{f_{32}(\alpha,z)\,f_{33}^3(\alpha,y,z)}\,dz\,dy =$$

$$= f_{30}(\alpha) - \frac{\pi}{2\alpha^2}\int_0^1 f_{31}(\alpha,y)\sqrt{1-y}\,\left[(1+\alpha y)(1+y)\right]^{-3/2}dy -$$

$$-\int_0^1\sqrt{1-y}\int_0^1\left\{\sqrt{z(1-z)}\,\frac{3-\alpha+2y(2\alpha-1)+2z(1-y)}{f_{32}(\alpha,z)\,f_{33}^3(\alpha,y,z)}\right. -$$

$$-\frac{1}{2}f_{31}(\alpha,y)\frac{\sqrt{z(1-z)}+\mathrm{arctg}\sqrt{(1-z)/z}}{f_{32}^3(\alpha,z)\,f_{33}^5(\alpha,y,z)}\Big\{(1+\alpha+2z)f_{33}^2(\alpha,y,z) +$$

$$\left.+\,3(1-y)\left[1+\alpha+2\alpha y+2z(1-y)\right]f_{32}^2(\alpha,z)\Big\}\right\}dz\,dy, \qquad (19)$$

where

$$f_{30}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{\alpha+1+\sqrt{2\alpha(\alpha+1)}},$$

$$f_{31}(\alpha,y) = (\alpha-1)\left[3+\alpha+2y(\alpha-1)\right],$$

$$f_{32}(\alpha,z) = \sqrt{(1+z)(\alpha+-)},$$

$$f_{33}(\alpha,y,z) = \sqrt{\left[1+\alpha y+z(1-y)\right]\left[\alpha(1+y)+z(1-y)\right]}.$$

From these expressions we get

$$I_3(\alpha) = \sqrt{2}\int_0^{\mathrm{arcsh}\,1} t\,\sqrt{\mathrm{cosech}^2 t-1}\,dt + o(1), \quad \alpha\to 1_+, \qquad (20)$$

$$I_3'(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}\,\pi}{64}\left[4+5\pi-10\ln 2\right] + o(1), \quad \alpha\to 1_+. \qquad (21)$$

The limiting properties for the function $I_5(\alpha)$, when $\alpha\to 1_+$, immediatly follow from the Legendre elliptic integral $K(\cdot)$ representation in form of the row given by the formula (8.113.3) from [4] :

$$I_3(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{16}\Big[-8\ln(\alpha-1) + 40\ln 2 + 3(\alpha-1)\ln(\alpha-1)\Big] + $$
$$+\, o\big((\alpha-1)\ln(\alpha-1)\big)\,, \qquad \alpha\to 1_+\,. \tag{22}$$

$$I_3'(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{16}\Big[-\frac{8}{\alpha-1} + 3\ln(\alpha-1)\Big] + o\big(\ln(\alpha-1)\big)\,,\ \alpha\to 1_+\,. \tag{23}$$

From the (4),(5),(12),(13),(16) and (18) we acquire the identities

$$\alpha'(\tau) = \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} = \left[\frac{d}{d\alpha}\,\frac{I_1(\alpha)}{I_1(\alpha)+I_2(\alpha)}\right]^{-1} =$$

$$= \Big[I_1(\alpha)+I_2(\alpha)\Big]^2 \Big[I_1'(\alpha)\, I_2(\alpha) - I_1(\alpha)\, I_2'(\alpha)\Big]^{-1}, \tag{24}$$

$$\lim_{\tau\to 0_+} \tau\,\ln\big(\alpha(\tau)-1\big) = -\pi\,. \tag{25}$$

$$\lim_{\tau\to 0_+} \tau^2\,\big(\alpha(\tau)-1\big)^{-1}\,\alpha'(\tau) = \pi\,. \tag{26}$$

Now using the obtained formulae (11)-(26) we shall prove the Theorem 2.

Proof of Theorem 2. First let's introduce the function

$$F(\tau) = \frac{1}{\tau}\,\frac{I_2(\alpha(\tau))}{I_1(\alpha(\tau))\, I_3(\alpha(\tau))}\,, \quad \tau\in(0,1)\,. \tag{27}$$

Then from (5),(12),(20),(22) and (25) follows the equality

$$\lim_{\tau\to 0_+} F(\tau) = k_2 \tag{28}$$

Now let's consider the derivative

$$\frac{d}{d\tau}F(\tau) = \frac{1}{\tau^2\, I_1^2\, I_3^2}\Big\{\tau\,\alpha'(\tau)\, I_3\Big[I_1\, I_3' - I_1'\, I_3\Big] -$$

$$- I_1\, I_3\Big[\tau\,\alpha'(\tau)\, I_3' + I_3\Big]\Big\}\,. \tag{29}$$

From the properties (5),(12),(13),(16),(20),(21),(22),(25) and (26) we have

$$\lim_{\tau\to 0_+} \tau^2\, I_1^2(\alpha(\tau))\, I_2^2(\alpha(\tau)) = \frac{\pi^2}{2} \tag{30}$$

$$\lim_{\tau\to 0_+} \tau\alpha'(\tau)\, I_3(\alpha(\tau))\Big[I_1(\alpha(\tau))\, I_3'(\alpha(\tau)) - I_1'(\alpha(\tau))\, I_3(\alpha(\tau))\Big] = 0 \tag{31}$$

From (4) and (24) we obtain

$$\tau\, a'(\tau)\, I_5' + I_5 = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\, \frac{(I_1 + I_2)^2}{I_1' I_2 - I_1 I_2'}\, I_5' + I_5 =$$

$$= \frac{I_1' I_2 I_5 + I_1^2 I_5' + I_1 (I_2 I_5 - I_2' I_5)}{I_1' I_2 - I_1 I_2'}\ . \tag{32}$$

The equalities (12),(13),(16),(17),(18),(22),(23) give us the following formulae

$$I_1 \left[I_2 I_5' - I_2' I_5 \right] = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2(\alpha-1)} \left[\frac{6}{4} \ln 2 - \frac{1}{2} \beta_2(1) \right] + o\left[\frac{1}{\alpha-1}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\pi}{32(\alpha-1)} \left[10 \ln 2 - \pi + 8 \operatorname{arctg}(2^{-1/4}) \right] + o\left[\frac{1}{\alpha-1}\right]\ , \quad \alpha \to 1_+ .$$

$$I_1' I_2 I_5 = o\left[\frac{1}{\alpha-1}\right]\ , \qquad \alpha \to 1_+\ ,$$

$$I_1^2 I_5' = - \frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{8(\alpha-1)} + o\left[\frac{1}{\alpha-1}\right]\ , \qquad \alpha \to 1_+\ ,$$

$$I_1' I_2 - I_1 I_2' = \frac{\pi}{4(\alpha-1)} + o\left[\frac{1}{\alpha-1}\right]\ , \qquad \alpha \to 1_+\ .$$

These formulae according to (32) imply

$$\tau\, a'\, I_5' + I_5 = \left[\frac{\pi}{4(\alpha-1)} + o\left[\frac{1}{\alpha-1}\right] \right]^{-1} \cdot \left\{ - \frac{\sqrt{2}\,\pi^2}{8(\alpha-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{32(\alpha-1)} \left[10 \ln 2 - \pi + 8 \operatorname{arctg}(2^{-1/4}) \right] + o\left[\frac{1}{\alpha-1}\right] \right\} =$$

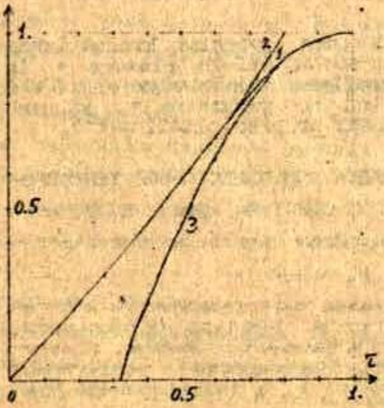
$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \left[10 \ln 2 - 5\pi + 8 \operatorname{arctg}(2^{-1/4}) \right] + o(1), \quad \tau \to 0_+ . \tag{33}$$

Then from the (5),(8),(12),(20),(29),(30),(31) and (33) we obtain

$$\lim_{\tau \to 0_+} \frac{d}{d\tau} F(\tau) = -k_2 \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[5 \ln 2 + 4 \operatorname{arctg}(2^{-1/4}) \right] - \frac{5}{4} \right\} = k_3 . \tag{34}$$

So from the (3'),(27) and (34) follows the equality (9). The Theorem 2 is proved.

Now we stress that our formulae (11),(14),(15) and (19) haven't singularities in the integrals, therefore they can be used for approximately calculation of functions $I_1(\alpha)$, $I_2(\alpha)$ and $I_3(\alpha)$ by formulae of quadratures. The function $I_5(\alpha)$ can be approximately calculated by the formula (8.113.3) from [4]. That allows us to calculate approximately the effective thermoconductivity $K(\tau)$ in the all interval $\langle 0,1\rangle$. In the Figure 1 we represent the graphyc of the effective thermoconductivity $\hat{K}(\tau)$, $\tau\in\langle 0,1\rangle$. In the Figure 1 we give also the graphycs of approximations to $\hat{K}(\tau)$ given by formulae (6),(7) and (9). The graphycs of approximations (7) and (9) are practically congrous. For more detalized illustration of function $\hat{K}(\tau)$ and its approximations (6),(7) and (9) in the Figure 2 we represent the graphyc of the difference $\hat{K}(\tau)-\tau$, $\tau\in\langle 0,1\rangle$, and the graphycs of the corresponding differences for the approximations (6),(7) and (9). We note that from Figures 1 and 2 we can see that formulae (7) and (9) give good approximation to $\hat{K}(\tau)$ for $\tau\in\langle 0;0,6\rangle$, but (6) gives good approximation to $\hat{K}(\tau)$ for $\tau\in\langle 0,85;1\rangle$.



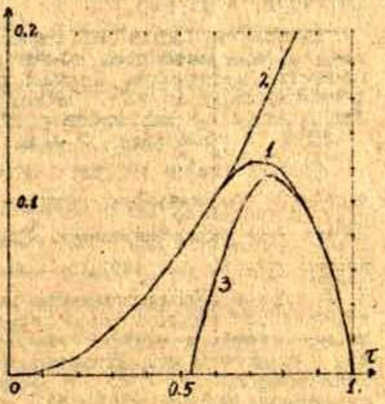


Figure 1. 1 - graphyc of the $\hat{K}(\tau)$; 2 - graphycs (practically congrous) of approximations (7) and (9) to $\hat{K}(\tau)$; 3 - graphyc of approximation (6) to $\hat{K}(\tau)$.

Figure 2. 1 - graphyc of the $\hat{K}(\tau)-\tau$; 2- graphycs (practically congrous) of the $k_3\tau^3$ and $k_2\tau^2+k_3\tau^3$; 3- graphyc of the $\left[1-(1-\tau)^2\cdot\frac{\Gamma^4(1/4)}{8\pi^2}\right]-\tau$.

List of references

1. S.M.Kozlov and J.Vucāns, *Explicit formula for effective thermoconductivity on the quadratic lattice structure*. C.R.Acad.Sci.Paris, t.314, Serie I, 1992, p.281-286.

2. S.M.Kozlov, *Geometric aspects of homogenization.* Russian Mathematical Surveys, 1989, № 2, p.91-120.

3. S.M.Kozlov and G.P.Panasenko, *Corrections to the strenth materials theory for the lattice structure.* Publication du laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1991. 8 p.

4. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.-М.,1962.-1100 с.

UDC 517.946

EFEKTĪVĀS TERMOVADĪTSPĒJAS TREŠĀS KĀRTAS APROKSIMĀCIJA KVADRĀTISKAI REŽĢVEIDA STRUKTŪRAI. Vucāns J. //Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas.-Rīga: LU, 1992. - 3. sēj.

Rakstā aplūkots siltumvadīšanas uzdevums kvadrātiskai režģveida struktūrai plaknē. Režģa stieņa platums τ ir uzdevuma parametrs. Iegūta grafiska ilustrācija efektīvās termovadītspējas $K(\tau)$ atkarībai no parametra τ, kā arī funkcijas $K(\tau)$ Maklorēna polinoms ar precizitāti $o(\tau^3)$.
Bibl. 4 nosaukumi, 2 zīm.

АППРОКСИМАЦИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КВАДРАТИЧНОЙ РЕШЕТЧАТОЙ СТРУКТУРЫ. Вуцан Я. // Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики.-Рига: ЛУ, 1992. - вып. 3.

В статье рассматривается задача теплопроводности для периодической квадратичной решетчатой структуры на плоскости. Ширина полоски решетки τ является параметром задачи. Получена графическая иллюстрация зависимости эффективной теплопроводности $K(\tau)$ от параметра τ, а также полином Маклорена для $K(\tau)$ с точностью $o(\tau^3)$.
Библ. 4 назв., 2 рис.

APPROXIMATION OF THE THIRD ORDER TO EFFECTIVE THERMOCONDUCTIVITY OF THE QUADRATIC LATTICE STUCTURE. Vucāns J. // The Mathematical Simulation. Applied Problems of Mathematical Physics.-Riga, 1992.-Vol. 3.

In the article the problem of thermoconductivity for the periodic quadratic lattice stucture in plane is discussed. The width τ of a strip of the lattice is the parameter of the problem. The graphycal illustration for the dependence of the effective thermoconductivity $K(\tau)$ from the parameter τ is obtained. The polinomial of Maclaurin with the precision $o(\tau^3)$ for $K(\tau)$ is got.
Ref. 4, Fig. 2.

А. Земитис
Латвийский университет, Рига

И. Риекстиня
Технический университет, Рига

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

При решении задач математической физики в последнее время широкое распространение получили методы типа взвешенных невязок /1/. Так, применение полиномиальных аппроксимаций для решения различных задач химической технологии обсуждается в /2/. Оказывается , что во многих задачах достаточно брать лишь несколько базисных функций , чтобы получить для решения приемлемую точность.

Интересно заметить , что развитие самой вычислительной техники способствует не только развитию новых математических методов , но и нахождению новых нюансов в применении известных. Например , при использовании однопроцессорных компьютеров эффективными являются однородные алгоритмы (однородные разностные схемы , метод фиктивных областей итд. /3/) , дающие возможность записать методы решения задач в сложных областях со сложной структурой решения единообразно и целостно . Появление многопроцессорной техники заставляет думать и в другом направлении — как разбить одну задачу на семейство относительно независимых подзадач, которые можно решать одновременно . Так, в /4/ обосновываются методы разделения задачи на подзадачи , соответствующие геометрическим подобластям исходной области . В данной работе разбиение осуществляется по характеру решения .

1. Постановка задачи.

В качестве примера рассмотрим модельную нелинейную задачу в прямоугольнике, которая фактически соответствует стационарной задаче Стефана /3/, когда скрытым теплом плавления можно пренебречь. В качестве подобластей будем брать области постоянства коэффициентов в уравнении. Напомним, что речь идет о нахождении решения в относительно тонком слое. Поэтому размер области в вертикальном направлении, как правило, будет считаться намного меньше размера её в горизонтальном направлении. Итак, будем искать приближенное решение задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(U)\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(U)\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0,\qquad 0<x<1,\ 0<y<1. \tag{1}$$

$$U(x,0)=0,\quad 0<x<1,\qquad U(x,1)=\mu(x),\quad 0<y<1, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=1}=0,\qquad 0<y<1, \tag{3}$$

где

$$\lambda(U)=\begin{cases}\lambda_1, & 0\le U(x,y)<U_0,\\ \lambda_2, & U_0<U(x,y).\end{cases} \tag{4}$$

$\mu(x)$ – заданная функция.

Так как функция $\lambda(U)$ разрывна, то тогда на линии разрыва (предположим, что линия разрыва может быть представлена $y=\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – неизвестная функция) должны выполняться условия непрерывности потока и самой функции (квадратная скобка означает разность пределов с обеих сторон к линии).

$$\left[\lambda(U)\frac{\partial U}{\partial n}\right]_{y=\varphi(x)}=0\ ,\qquad [U]_{y=\varphi(x)}=0\ , \tag{5}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ производная по нормали к линии разрыва.

Здесь и в дальнейшем предполагается, что $\varphi(x)$ дана такая, которая гарантирует, что $0<\varphi(x)<L$ при $0\le x\le 1$, то есть линия $y=\varphi(x)$ пересекает границу прямоугольной области только на боковых сторонах. При этих предположениях задачу можно переформулировать в виде:

$$\Delta U=0,\quad 0<x<1\ ,\ 0<y<\varphi(x), \tag{6}$$

$$\Delta V=0,\quad 0<x<1\ ,\ \varphi(x)<y<L, \tag{7}$$

$$U(x,0)=0,\qquad 0<x<1, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&U(x,\varphi(x))=U_0,\\&V(x,\varphi(x))=U_0,\quad 0<x<1,\\&V(x,L)=P(x),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=1}=\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=1}=0. \tag{10}$$

$$\lambda_1\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{y=\varphi(x)}=\lambda_2\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{y=\varphi(x)},\quad 0<x<1, \tag{11}$$

где Δ оператор Лапласа.

2. Метод решения

Для решения задачи (6)-(11) будем использовать комбинацию разностного метода и метода Галеркина с полиномиальными базисными функциями. Итак, решение системы (6)-(11) будем искать в виде параболы по направлению оси Y .

$$U(x,y)\approx A_0(x)+A_1(x)*y+A_2(x)*y^2, \qquad (12)$$

$$V(x,y)\approx B_0(x)+B_1(x)*y+B_2(x)*y^2. \qquad (13)$$

Ясно, что такого рода разложение будет более точным, если ширина слоя небольшая. Требуя выполнения граничных условий (8),(9) в представлении (12),(13), легко исключить четыре функции:

$$A_0(x)=0, \qquad (14)$$

$$A_1(x)=\frac{U0}{\varphi(x)}-A_2(x)*\varphi(x), \qquad (15)$$

$$B_0(x)=\frac{U_0*L-\varphi(x)*P(x)}{L-\varphi(x)}+B_2(x)*\varphi(x)*L \qquad (16)$$

$$B_1(x)=\frac{P(x)-U0}{L-\varphi(x)}-B_2*(L+\varphi(x)). \qquad (17)$$

Систему для определения остающихся неизвестных можно получить, если требовать выполнения уравнений (6),(7) и граничных условий (10) в среднем по ширине слоя. После вычисления производных для $U(x,y)$ и $V(x,y)$, подставляя их в (6),(7) и интегрируя по вертикальному направлению, будем иметь:

$$A_2''(x)\varphi^2(x)+6A_2'(x)\varphi(x)\varphi'(x)+3A_2(x)(4\ \varphi(x)\varphi''(x))$$

$$-\ 3\frac{U0}{\varphi^2(x)}(2\varphi'^2(x)-\varphi(x)\varphi''(x))=0. \qquad (18)$$

$$B_2''(x)(L-\varphi(x))^2-6B_2'(x)(L-\varphi(x))\varphi'(x)-3B_2(x)*$$

$$*(4+(L-\varphi(x))*\varphi''(x))=3*P''(x)-\frac{6*\varphi'(x)P'(x)}{L-\varphi(x)}+$$

$$+\frac{3*(U_0-P(x))}{(L-\varphi(x))^2}(2*\varphi'^2(x)+\varphi''(x)*(L-\varphi(x)).\qquad(19)$$

$$A_2'(0)=A_2'(L)=B_2'(0)=B_2'(L)=0.\qquad(20)$$

Для нахождения функции $\varphi(x)$ необходимо использовать также условие сопряжения (11), которое после преобразований принимает вид:

$$\lambda_1\left[\left(\frac{U_0}{\varphi(x)}\varphi'(x)+A_2(x)\varphi(x)\varphi'(x)\right)\varphi'(x)+\frac{U_0}{\varphi(x)}+A_2(x)\varphi(x)\right]$$

$$=\lambda_2\left[\left(L*B_2'(x)\varphi(x)+B_2(x)\varphi(x)\varphi'(x)-\frac{P(x)\varphi'(x)-U_0\varphi'(x)}{L-\varphi(x)}\right)*\right.$$

$$\left.*\varphi'(x)+B_2(x)(\varphi(x)-L)+\frac{P(x)-U_0}{L-\varphi(x)}\right].\qquad(21)$$

Полученная задача для A_2, B_2, φ решается разностным методом на сетке $\omega_h=\{ iH \mid 1\le i\le N-1, H=1/N \}$; для аппроксимации производных в (18), (19) и (21) используются центральные разности. Аппроксимацию условий (20) получим, исходя из разностной аппроксимации условия (10):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{u(H,y)-u(0,y)}{H}+\frac{1}{2}H\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{x=0}+O(H^2).\qquad(22)$$

Подставляя вместо $u(x,y)$ представление (12) и интегрируя (22) в пределах от 0 до $\varphi(0)$, будем иметь:

$$\frac{U_0}{2H}(\varphi(H)-\varphi(0)) - \frac{1}{6H}(A_2(H)\varphi^3(H) - A_2(0)\varphi^3(0)) + HA_2(0)\varphi(0) = 0 \,. \qquad (23)$$

Аналогично получаются остальные формулы для граничных условий:

$$\frac{1}{H}\left[\frac{U_0+P(H)}{2}(L-\varphi(H)) - \frac{U_0+P(0)}{2}(L-\varphi(0)) - \frac{1}{6}B_2(H)(L-\varphi(H))^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}B(0)(L-\varphi(0))^3\right] + HB_2(0)(L-\varphi(0)) = 0 \quad , \qquad (24)$$

$$\frac{U_0}{2H}(\varphi(1)-\varphi(1-H)) - \frac{1}{6H}(A_2(1)\varphi^3(1) - A_2(1-H)\varphi^3(1-H)) -$$

$$- H\varphi(1)A_2(1) = 0 \quad , \qquad (25)$$

$$\frac{1}{H}\left[\frac{U_0+P(1)}{2}(L-\varphi(1)) - \frac{1}{6}B_2(1)(L-\varphi(1))^3 - \frac{U_0+P(1-H)}{2}(L-\varphi(1-H)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}B_2(1-H)(L-\varphi(1-H))^3\right] - HB_2(1)(L-\varphi(1)) = 0 \,. \qquad (26)$$

В результате получается нелинейная разностная задача, так как $\varphi(iH)$ $i=1,2,\ldots,N$ также являются неизвестными. Для решения разностной задачи использовался следующий метод.

1. При заданном φ^k определяются A_2^{k+1}, решив методом прогонки разностные уравнения, соответствующие уравнению (18), и используя граничные условия (23), (25).

2. С тем же φ^k решаются сеточные уравнения, соответствующие (19), граничным условиям (24) и (26). Отметим, что здесь также можно воспользоваться методом прогонки.

3. Вычисляются φ^{k+1} во всех точках ω_h

$$\varphi^*(IH)=\varphi^k(IH)+D_1\tau N_2^k(IH)\ ,\quad 0\le I\le N\ ,$$

$$\varphi^{k+1}(IH)=\omega*\varphi^*(IH)+\varphi^k(IH)*(1-\omega)\ ,$$

где

D_1 - невязка в разностном аналоге условия сопряжения (21),

τ итерационный параметр,

N_2^k косинус угла между нормалью и осью Y в соответствующей точке линии $y=\varphi^k(x)$,

ω параметр релаксации ,

Итерации продолжаются до тех пор, пока не станет

$$\max_I\left|\varphi^{k+1}(IH)-\varphi^k(IH)\right|<\varepsilon\ . \qquad (27)$$

3. Результаты расчетов

В качестве теста берется решение уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$U(x,y)=(e^{0.25\pi y}-e^{-0.25\pi y})\cos(0.25\pi x)\ . \qquad (28)$$

Как видим, функция (28) не полностью удовлетворяет граничным условиям (10) , так как производная по X на правой границе прямоугольника не равна нулю . Но это не мешает нам использовать эту функци в качестве граничной на верхней границе . Итак , при $L=0.25$, $\lambda 1=\lambda 2=1$, $u_0=0.1$ функция $y=\varphi(x)$ фактически должна дать изолинию решения краевой задачи для уравнения Лапласа . В таблице 1 даны значения найденной функции $\varphi(x)$ и $U(x,\varphi(x))$.

Таблица 1.

Координаты изолинии u_0=0.1

X_i	$\varphi(X_i)$	$U(X_i, \varphi(X_i))$
0.0	0.0637	0.1001
0.1	0.0639	0.1001
0.2	0.0645	0.1001
0.3	0.0655	0.1001
0.4	0.0669	0.1001
0.5	0.0689	0.1000
0.6	0.0714	0.1000
0.7	0.0748	0.0999
0.8	0.0783	0.0995
0.9	0.0817	0.0977
1.0	0.0817	0.0908

Как видно из третьего столбца таблицы , несовпадение с u_0 наблюдается в окрестности правой границы , где у функции $U(x,y)$ производная по x не равна нулю. Для получения этих результатов использовалась 21 сеточная точка . Отличие от результатов, полученных при 41 точке, не превосходит 1% .

Интересной является зависимость количества итераций от величины релаксационного параметра ω . Если обычно эта величина находится между нулем и двойкой , то в данном случае экспериментально найденное оптимальное значение ω может быть и больше 3. Так, при $P(x)=0.5\cos(\pi x)+1$, $\lambda 1=1$, $\lambda 2=2$, $u_0=0.4$, $\varepsilon=10^{-5}$, если не пользоваться релаксацией ($\omega=1$), то необходимо 99 итераций. С $\omega=1.9$ число итераций 59 , а при $\omega=3.2$ число итераций 38. Этот факт следовало бы более тщательно изучить.

Если при фиксированных граничных условиях и конкретном u_0 менять параметры $\lambda 1, \lambda 2$, то характер расположения линии разрыва следующий. Увеличение $\lambda 1$ ведет к перемещению линии разрыва к верхней границе , а уменьшение — к перемещению к противоположном направлении. Число итераций, как правило, в этом случае меньше, чем при разных λ. Так, с предыдущим $P(x)$ и с $\lambda 1=4$, $\lambda 2=1$, $\omega=3$ после 20 итераций получим $\varphi(x)$, как показано в таблице 2.

Таблица 2

Координаты линии разрыва

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
φ	0.1494	0.1549	0.1704	0.1951	0.2220	0.2348

Проведенные расчеты показали, что метод работает достаточно хорошо, если условия задачи гарантируют размещение линии разрыва таким образом, чтобы образовались два слоя переменной толщины.

Список литературы

1. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина.– М., 1988.
2. Villadsen J., Michelsen M.L. Solution of Differential Equation Models by Polynomial Approximation. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall (1978).
3. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. – М., 1987.
4. Quarteroni A., Sacci L.C. Iteration by Subdomains in Numerical Fluid Dynamics // Proc. 3rd Germ.-Ital. Symp. "Appl. Math. Ind. and Technol.", Siena, June 18-22, 1988. Stuttgart, 1989 p.54-76.

УДК 519.6

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ. Земитис А., Риекстиня И. //Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. - Рига: ЛУ, 1993.- Вып. 3.

В работе рассматривается эллиптическая задача с кусочно постоянными коэффициентами, когда место разрыва коэффициента зависит от решения задачи. Численный метод построен на основе комбинации методов Галеркина и конечных разностей. Приводятся результаты расчетов.

THE APPLICATION OF GALERKIN METHOD FOR SOLUTION OF ONE NONLINEAR PROBLEM. Zemitis A., Riekstina // The Mathematical simulation. Applied problems of mathematical physics. -Riga: LU, 1993. -Vol. 3.

The numerical solution of nonlinear elliptical problem with piecewise constants coefficients is given. The interruption line is dependent of solution. The numerical method is derived of the basis Galerkin and finite difference methods. The numerical examples are discussed.

PAR GALERKINA METODES PIELIETOJUMU KĀDAS NELINEĀRAS PROBLĒMAS RISINĀŠANAI. Zemītis A., Riekstiņa I.//Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. Rīga: LU, 1993. -3. sēj.

Darbā aplūkota eliptiska robežproblēma ar gabaliem konstantiem koeficientiem, kad pārtraukuma līnija atkarīga no atrisinājuma. Skaitliskā metode izveidota uz Galerkina un galīgo diferenču metožu bāzes. Tiek analizēti aprēķinu rezultāti.

A. Zemītis
Latvijas Universitāte, Rīga

DAŽI SKAITLISKI EKSPERIMENTI AR NELINEĀRU ELASTĪGU MATERIĀLU

Darbā /1/ ar polinomiālas aproksimācijas palīdzību vienā no koordināšu virzieniem tika uzkonstruēta "ātrā" risināšanas metode Sinjorīnī problēmai, kas savukārt ļāva apskatīt arī inverso problēmu. Šajā darbā tiek turpināts modelēt cieta šķēršļa un elastīga materiāla kontakts, kad materiāls pakļaujas nelineāram materiāla likumam.

Klasiskais Huka likums /2/, kas ir pamatā lineārajai elastības teorijai, garantē lineāru atbilstību starp deformējošo spēku un pārvietojumiem. Taču daudzos gadījumos šī atbilstība ir izteikti nelineāra, piemēram, porolonam /3/. Šajā sakarībā radās nepieciešamība ar pēc iespējas vienkāršiem līdzekļiem atklāt galvenās, kāda nelineāra materiāla likuma īpašības. Tas ir, noskaidrot, kādu iespaidu uz šķēršļa problēmas atrisinājumu atstāj ģeometriskās nelinearitātes ievērošana, kādu fizikālā nelinearitāte, salīdzinot ar lineāro gadījumu.

1. Uzdevuma nostādne.

Ir zināms, ka vispārīgā gadījumā homogēnam, izotropam materiālam sprieguma tenzors izsakās /4/:

$$\sigma = C_1(I_1, I_2, I_3)E + C_2(I_1, I_2, I_3)D + C_3(I_1, I_2, I_3)D^2, \qquad (1)$$

kur U-deformācijas tenzors, kura komponentes galīgu deformāciju gadījumā atrodamas.

$$q_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_i}{\partial X_j}+\frac{\partial U_j}{\partial X_i}+\frac{\partial U_k}{\partial X_i}\frac{\partial U_k}{\partial X_j}\right],\quad i,j,k=1,2, \qquad (2)$$

$I_1=q_{ii}$,
$I_2=q_{ij}q_{ij}$,
$I_3=q_{ij}q_{ik}q_{jk}$, (tātad I_1, I_2, I_3 - trīs tenzora U invarianti),

E-vienības tenzors, U_i, $i=1,2$ - pārvietojumi X_i virzienā.

Šeit un arī turpmāk pēc atkārtotiem vienādiem indeksiem jāsummē, ja nav tieši apgalvots pretējais.

Atgādināsim, ka tā saucamajam San-Venana-Kirhofa materiālam sakarība (1) ir uzrakstāma formā:

$$\sigma=\lambda I_1 E+2\mu\Omega, \qquad (3)$$

kur λ, μ-Lamē koeficienti. Ja q_{ij} izteiksmē (2) neieiet kvadrātiskie locekļi, tad formula (3) atbilst lineārajai elastības teorijai. Ja tiek pilnībā izmantota formula (2), tad šai gadījumā runā par ģeometrisko nelinearitāti. Kāds no formulas (3) vispārinājumiem varētu būt:

$$\sigma=\lambda I_1 E+2\mu\Omega+\gamma\Omega^2, \qquad (4)$$

kur γ-vai nu konstante vai invariantu funkcija.

Pieņemsim, ka tenzorā U^2 var neievērot pārvietojumu atvasinājumu pakāpes, kas ir augstākas par 2. Tādā gadījumā:

$$(U^2)_{11}=\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right)^2+0.25\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_j}+\frac{\partial U_2}{\partial X_1}\right)^2,$$

$$(U^2)_{12}=(U^2)_{21}=0.5\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right),$$

$$(U^2)_{22}=0.25\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)^2.$$

Konstanta γ gadījumā līdzsvara vienādojumus, kas atbilst sprieguma tenzoram (4), varam uzrakstīt sekojoši:

$$\lambda\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+0.5\left(\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)^2\right)\right)+2\mu\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)^2\right)\right)+2\mu\frac{\partial}{\partial x_2}\left(0.5\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)^2+0.25\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)^2\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial x_2}\left(0.5\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)\right)=0 \qquad (5)$$

$$\lambda\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+0.5\left(\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)^2\right)\right)+2\mu\frac{\partial}{\partial x_1}\left(0.5\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)+0.5\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)\right)+2\mu\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+0.5\left(\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)^2\right)\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial x_1}\left(0.5\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial x_2}\left(0.25\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)^2\right)=0 \qquad (6)$$

Tā ir nelineāra diferenciālvienādojumu sistēma U_1, U_2 noteikšanai. Līdzīgi kā darbā /1/ arī šeit var tikt noformulēta šķērša problēma, tikai tradicionālo Lamē vienādojumu vietā jāņem vienādojumi (5),(6).

Tātad meklēsim funkcijas U_1, U_2, kas apgabalā $G=\{(X_1,X_2) | 0<X_1<1, -\delta<X_2<\delta\}$ apmierina vienādojumus (5),(6), un bez tam izpildās nosacījumi:

$$U_1(0,X_2)=U_2(0,X_2)=U_1(1,X_2)=U_2(1,X_2)=0, X_2 \in [-\delta,\delta], \tag{7}$$

$$U_1(X_1,-\delta)=U_2(X_1,-\delta)=0, X_1 \in [0,1], \tag{8}$$

$$\delta+U_2(X_1,\delta) \le \varphi(X_1+U_1(X_1,\delta)), X_1 \in [0,1], \tag{9}$$

$$\sigma_t|_{S_1}=0, \tag{10}$$

$$\sigma_n|_{S_1} \le 0, \tag{11}$$

kur $X_2=\varphi(X_1)$ - uzdota šķēršļa funkcija, S_1 - taisnstūra G robeža $X_2=\delta$ deformētā stāvoklī, $\sigma_n|_{S_1}$ ($\sigma_t|_{S_1}$) - normālais (tangenciālais) spriegums uz robežas S_1 deformētā stāvoklī. (Jāatzīmē, ka autoram nav zināmi uzdevuma (5-11) korektības pētījumi).

2. Risināšanas metode un aprēķinu rezultāti.

Tā kā darbā /1/ lietotā metode sevi labi parādīja gan no ātrdarbības, gan arī no precizitātes viedokļa, tad tika mēģināts to lietot arī šoreiz. Ja lineāro Lamē vienādojumu gadījumā, meklējot atrisinājumu kā kubiskas funkcijas X2 virzienā ($\delta \ll 1$), varēja iegūt parasto diferenciālvienādojumu sistēmu ar labu struktūru, tad šeit iegūst nelineāru sistēmu, kuras struktūrai īpašas priekšrocības nav. Ņemot vērā formulu lielo apjomu, tās šeit netiek parādītas. Tomēr būtiski, ka nelineāro sistēmu ir iespējams linearizēt tā, ka linearizētajai sistēmai saglabājas iepriekšējā lineārā varianta struktūra, un bez tam iterāciju metode konverģē noteiktām γ vērtībām. Tātad viena iterācija, kas jāveic sakarā ar vienādojumu (5),(6) nelinearitāti, veicama ar četrām faktorizācijām X_1 virzienā (jāatceras, ka vēl ir ārējās iterācijas, kas saistītas ar kontaktzonas noteikšanu).

Rezultāti tiks analizēti noteiktam šķērslim, kad funkcija φ ir uzrakstāma formā:

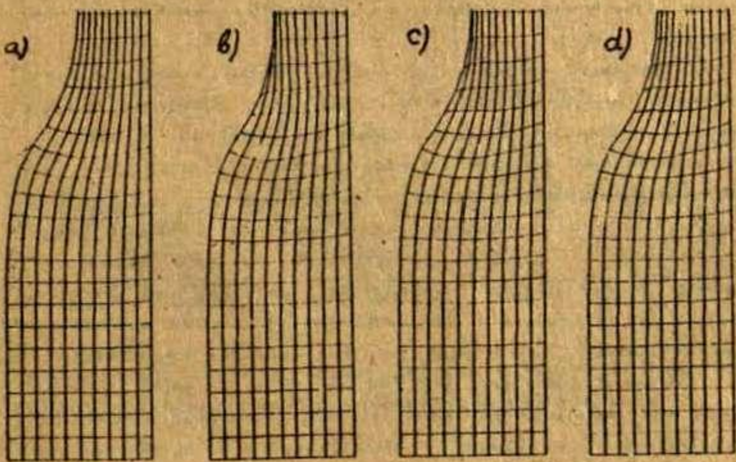
$$\varphi(X_1)=\delta - D + \sqrt{9\delta^2 - (X_1-0.5)^2},$$

kur

2δ – apvalka 6 biezums,

D – parametrs, kas raksturo šķēršļa iegrimšanas dziļumu.

Konkrētie aprēķini tika veikti pie $\delta=0.08$, $\lambda=1$, $\mu=1.38$.



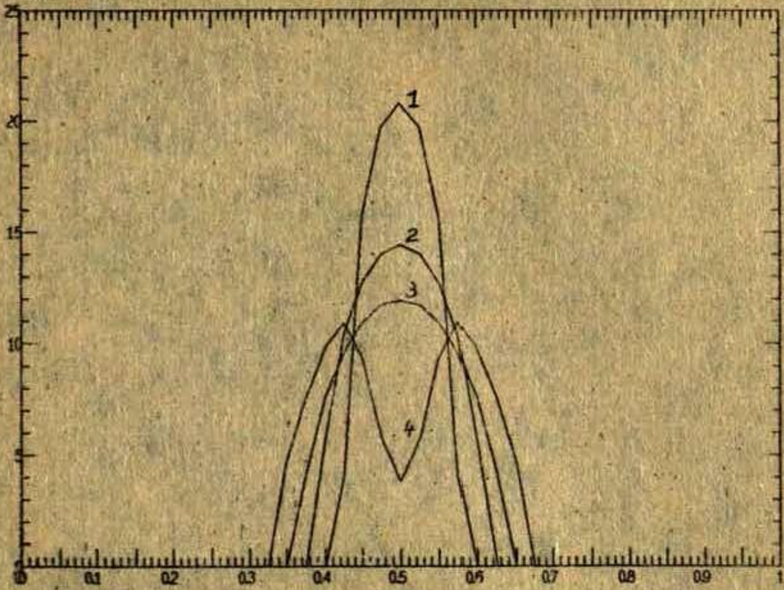
1. zīm. Taisnstūra izskats pēc deformācijas:
a) lineārā teorija, b) $\gamma=0$, c) $\gamma=0.5$, d) $\gamma=2$.

1. zīmējumā redzams, kā izskatās taisnstūris pēc deformācijas (simetrijas dēļ attēlota tikai puse no apvalka) atkarībā no tā, vai materiāls lineārs, ģeometriski nelineārs ($\gamma=0$) vai

nelineārs ($\gamma \neq 0$). Šai piemērā $D=\delta$, kas atbilst 50% deformācijai centrālajā daļā. Kā redzams (a), neskatoties uz samērā lielo deformāciju, lineārā problēma var tikt atrisināta un rezultāti ir ticami. Pievienojot šim pašam variantam ģeometrisko nelinearitāti (b), var konstatēt savdabīgu efektu, kas neatbilst fizikālajai realitātei centrālajā daļā elastīgā materiāla daļiņas apvēršas. Tas ir, augšējo slāņu savstarpējais novietojums pēc deformācijas var mainīties. No pārējiem variantiem c), d) var izsecināt, ka, U^2 var spēlēt regularizatora lomu. Parametram γ dilstot negatīvajā apgabalā, rezultāti pamazām kļūst fizikāli jēdzīgi. Jāatzīmē, ka variants $\gamma=-2$ ir samērā tuvs lineārajam gadījumam (sprieguma sadalījumu atšķirība kontakta zonā nepārsniedz 2 - 3%).

2. zīmējumā redzams spiediena sadalījuma raksturs ģeometriskās nelinearitātes gadījumā pie dažādiem šķērša iegrimšanas dziļumiem. Šajā gadījumā nefizikālajai situācijai atbilst sprieguma kritums šķērša centrālajā daļā, kur ir lielākās deformācijas.

Skaidrs, ka šo novērojumu secinājumus var uzskatīt tikai par hipotēzēm, jo aprēķinu rezultātiem no paša sākuma ir ierobežota precizitāte. Salīdzināt šai gadījumā iegūtos rezultātus ar citiem, kas būtu rēķināti pēc citas metodikas, autoram neizdevās. Katrā ziņā var secināt, ka kvadrātiskais loceklis deformācijas tenzorā (4) un U^2 sprieguma tenzora izteiksmē (1) var ļoti būtiski ietekmēt aprēķinu rezultātus. Tā, piemēram, veiktajos skaitliskajos eksperimentos rezultējošā spēka atšķirība starp lineāro un nelineāro gadījumu varēja sasniegt 60 - 70%, kad centrālajā šķērša daļā deformācija ir 55% no nedeformētā izmēra vertikālajā virzienā. Dabīgi, ka pilnīgākai nelinearitāšu izvērtēšanai



2. zīm. Spiediena sadalījums (%) kontakta zonā atkarībā no štorēļa iegrimšanas dziļuma(%): a) 12.5, b) 25 , c) 37.5, d) 56.25.

nepieciešams veikt aprēķinus arī pēc citām metodikām, kā arī izdarīt salīdzinājumus ar eksperimentu rezultātiem.

LITERATŪRAS SARAKSTS

1. А. Земитис О численном решении обратной задачи Синьорини// Математика: Научные труды.-Рига: ЛУ, 1991.-С. 103-114.
2. A. Sommerfeld. Mechanik der deformierbaren Medien. Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/M, 1978.
3. G. Wagner. Zur werkstofflichen Beurteilung von PUR Schaumstoffpolstern fuer Automobil Vollschaumsitze// Automobiltechnische Zeitschrift 83 (1981) 3.

4. M.Staat . J.Ballmann . Zur Problematik tensorieller Verallgemeinerungen einachsiger nichtlinearer Materialgesetze// Z.angew. Math. Mech. 69(1989) 2.P.73-81.

DAŽI SKAITLISKI EKSPERIMENTI AR NELINEĀRU ELASTĪGU MATERIĀLU.

A.Zemītis // Matemātiskā modelēšana. Matemātiskās fizikas lietišķās problēmas. - Rīga: LU, 1993. 3.sēj.

Darbā analizēti skaitlisko eksperimentu rezultāti, kas iegūti, lietojot nelineāru elastīgu materiālu (materiāla likums satur Koši-Grīna tenzora kvadrātu). Aprēķini rāda, ka kvadrātiskajam loceklim var būt regulatora loma.

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛАСТИЧНЫМ МАТЕРИАЛОМ.

Земитис А. //Математическое моделирование. Прикладные задачи математической физики. -Рига: ЛУ, 1993.- Вып. 3.
УДК 516. 63

В работе анализируются результаты численных экспериментов, когда закон материала содержит квадрат тензора Коши Грина. Расчеты показали, что квадратичный член может играть роль регулятора.

SOME NUMERICAL EXPERIMENTS WITH NONLINEAR ELASTIC MATERIAL.

Zemītis A.// The Mathematical Simulation. Applied Problems of Mathematical Physics. - Riga: LU, 1993. - Vol.3.
AMS Subject classification 65N,73C.

In the paper is analyzed results of numerical experiments with nonlinear elastic material (the law of material holds the second power of Kosti Green tenzor). The computations results show that quadratic term can be a regularization of the problem.