

PROGRAMM

des

städtischen Real-Gymnasiums

zu

R i g a ,

enthaltend

- 1) eine Abhandlung über *die Cardioide*, vom Gymnasial-Lehrer G. Schweder.
- 2) Schulnachrichten, vom Director.

Riga, 1867.

Gedruckt bei W. F. Häcker.



7/6086

PROGRAMM

städtischen Real-Gymnasiums

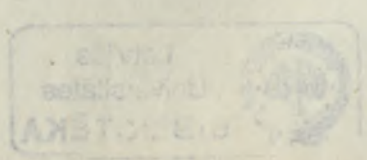
Von der Censur erlaubt.

Riga, den 12. Januar 1867.

Riga

1) eine Abhandlung über die Wirkung des Gymnasial-Unterrichts
2) Schulbesuchsanforderungen des Gymnasiums

Riga, 1867
Verlag von W. & J. Bredius



Die Cardioide.

§ 1.

Definition und Construction der Cardioide.

Die Cardioide oder Herzlinie ist der geometrische Ort des Punktes, der auf einer stets durch denselben Punkt einer Kreisperipherie gehenden und sich in deren Ebene drehenden Geraden so liegt, dass er vom zweiten Durchschnitt dieser Geraden mit dem Kreise um dessen Durchmesser absteht.

Diese Curve — AEDSNA in Fig. 1 — lässt sich daher auf folgende Weise darstellen: Auf einen kreisförmigen Ring ALB, der an seiner Peripherie einen aufrechten Stift A trägt, setzt man ein Lineal, das in der Strecke MN eine gerade Spalte und ausserdem in M, L und N drei abwärts gehende und abfärbende Stifte besitzt, so auf, dass der Stift A innerhalb der Spalte bleibt. Wird nun das Lineal so bewegt, dass der Stift L am äusseren Rande des Ringes hingeleitet, so verzeichnen die Stifte M und N, welche um den Ringdurchmesser von L abstehen, die Cardioide. Dieselbe ist eine in sich zurückkehrende Curve und könnte auch beschrieben werden, wenn einer der Stifte M oder N weggelassen wird.

§ 2.

Gleichungen der Cardioide.

Es sei in Fig. 1 A der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, so ergibt sich aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ALB und APM die Proportion:

$$AB : AM = AL : AP \text{ oder}$$

$$a : \sqrt{x^2 + y^2} = (\sqrt{x^2 + y^2} - a) : x$$

und daraus folgt die Gleichung:

$$1) \quad x^2 + y^2 - ax = a \sqrt{x^2 + y^2},$$

welche sich auch noch auf die folgenden Formen bringen lässt:

$$2) \quad y^4 - (a^2 + 2ax - 2x^2)y^2 - 2ax^3 + x^4 = 0,$$

$$3) \quad y = \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} + ax - x^2 \mp \frac{a}{2} \sqrt{4ax + a^2}}.$$

Die Cardioide gehört also zu den algebraischen Curven vierten Grades.

Legt man ein polares Coordinatensystem zu Grunde, wo A den Pol, AC die Polaraxe bedeuten, so ist, wenn der Leitstrahl AM mit ρ und der Winkel MAC mit φ bezeichnet werden,

$$x = \rho \cos \varphi \text{ und } x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Die Gleichung 1 geht daher über in

$$4) \quad \rho = a(1 + \cos \varphi)$$

welches die Polargleichung der Cardioide ist. Dieselbe ergibt sich auch unmittelbar aus der Fig. 1, denn sie besagt nur, dass

$$AM = LM + AL \text{ ist.}$$

Betrachtet man den entgegengesetzten Leitstrahl $AN = \rho'$, so ist

$$\rho' = a (1 + \cos(\pi + \varphi)) \text{ oder}$$

$$\rho' = a (1 - \cos \varphi),$$

und dies besagt, dass

$$AN = LN - AL,$$

was ebenfalls unmittelbar aus Fig. 1 erhellt. Zugleich erkennt man, dass

$$\rho + \rho' = 2a,$$

d. h. von jeder durch A gehenden Geraden ist, das von der Cardioide begrenzte Stück constant und gleich dem doppelten Durchmesser des Grundkreises.

Die Cardioide ist ein besonderer Fall der circularen Conchoide.

Soll nämlich der Punkt M in § 1 von dem zweiten Durchschnitt der sich drehenden Geraden mit dem Kreise nicht gerade um den Durchmesser, sondern um eine beliebige Constante c abstehen, so ist der geometrische Ort desselben bekanntlich die circularen Conchoide. Deren Gleichungen sind

$$y^2 - (c^2 + 2ax - 2x^2)y^2 + (a^2 - c^2)x^2 - 2ax^3 + x^4$$

$$\text{oder } \rho = c + a \cos \varphi,$$

welche für $c = a$ in die der Cardioide übergehen. Für $c < a$ hat die circularen Conchoide die Gestalt von Fig. 2, für $c > a$ die von Fig. 3.

§ 4.

Die Cardioide ist ein besonderer Fall der Epicycloiden.

Wenn ein Kreis auf einem anderen bei äusserer Berührung fortrollt, so beschreibt ein Punkt in der Peripherie desselben eine Curve, welche die gemeine Epicycloide genannt wird.

Es sei in Fig. 4 C der Mittelpunkt des ruhenden Kreises und zugleich der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, welche nach rechts und nach oben positiv genommen werden.

Sind ferner x und y die Coordinaten des Punktes M, r und r' die Halbmesser des ruhenden und des rollenden Kreises, so ist

$$-x = (r + r') \cos \alpha + r' \cos(\pi - \alpha - \beta),$$

$$y = (r + r') \sin \alpha - r' \sin(\pi - \alpha - \beta),$$

$$\text{oder } x = -(r + r') \cos \alpha + r' \cos(\alpha + \beta),$$

$$y = (r + r') \sin \alpha - r' \sin(\alpha + \beta).$$

Weil aber Bogen AH = Bogen MH, so ist auch

$$r\alpha = r'\beta \text{ oder } \beta = \frac{r\alpha}{r'}, \text{ daher}$$

$$1) \begin{cases} x = -(r + r') \cos \alpha + r' \cos \frac{r + r'}{r'} \alpha \\ y = (r + r') \sin \alpha - r' \sin \frac{r + r'}{r'} \alpha. \end{cases}$$

Setzt man in diesen allgemeinen Gleichungen der Epicycloide $r = r'$, so erhalten sie für diesen besonderen Fall die einfache Form:

$$2. \begin{cases} x = -2r \cos \alpha + r \cos 2\alpha \\ y = 2r \sin \alpha - r \sin 2\alpha \end{cases}$$

und entsprechen dann wieder der Cardioide. Um nun zu beweisen, dass diese transcendenten Gleichungen mit den in § 2 gefundenen übereinstimmen, verlege man den Coordinatenanfang wieder nach A. Dadurch wird aber

$$\begin{aligned} x &= r - 2r \cos \alpha + r \cos 2\alpha \text{ oder } x = r(1 + \cos 2\alpha - 2 \cos \alpha), \\ \text{und wegen } \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$

$$x = 2r(\cos^2 \alpha - \cos \alpha).$$

Wenn aber $AC = MK$ ist, so wird auch $\alpha = \beta$, Fig. 6, folglich $AM \parallel KC$, somit

$$\angle MAC + \angle ACK = \pi \text{ oder } \varphi + \alpha = \pi;$$

$$\text{daher ist auch } x = 2r(\cos^2 \varphi + \cos \varphi),$$

und weil $x = \rho \cos \varphi$, so folgt endlich

$$\rho = 2r(1 + \cos \varphi),$$

welches die in § 2 gefundene Polargleichung der Cardioide ist. Dieselbe ist somit als eine Epicycloide zu betrachten, in welcher die Radien des ruhenden und des rollenden Kreises einander gleich sind und der ruhende Kreis zugleich der Grundkreis der Cardioide ist.

§ 5.

Die Cardioide ist ein besonderer Fall der katakaustischen Linien des Kreises.

In Fig. 5 stellt OW eine spiegelnde Kreislinie mit dem Mittelpunkt C und dem Halbmesser $= R$ dar. C sei zugleich Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, die wieder in den Richtungen nach rechts und nach oben positiv genommen werden. Vom leuchtenden Punkt S treffe ein Strahl den Spiegel in W , dessen Coordinaten seien u und v ; ferner $SC = b$, $\angle WCO = \alpha$, $\angle MWC = \angle SWC = \beta$, folglich $\angle CSW = \alpha - \beta$. Man hat somit

$$u = -R \cos \alpha; \quad v = R \sin \alpha$$

$$1) \quad CG = b \sin(\alpha - \beta) = R \sin \beta.$$

Da die Normale WC mit dem reflectirten Strahl einen ebenso grossen Winkel bildet als mit dem einfallenden Strahl, so ist es leicht, zu jedem einfallenden Strahl den reflectirten zu construiren. Der Punkt M , wo zwei benachbarte von S ausgehende Strahlen sich nach der Spiegelung schneiden, ist ein Punkt der Katakaustika. Seine Coordinaten seien x und y .

$$\text{Nun ist } \operatorname{tg} WMR = \frac{WR}{MR} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha - \beta) = \frac{v - y}{u - x} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{v - y}{x - u}.$$

Führt man hier die oben stehenden Werthe von u und v ein, so erhält man durch eine leichte Transformation folgende Gleichung des reflectirten Strahls:

$$2) \quad y \cos(\alpha + \beta) + x \sin(\alpha + \beta) + R \sin \beta = 0.$$

Geht man zu einem zweiten, von S ausgehenden Strahl über, der unendlich nahe an SW liegt, so muss man, um die Gleichung des entsprechenden reflectirten Strahls zu erhalten, α und β unendlich wenig ändern. Sind nun x und y die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden benachbarten reflectirten Strahlen, so bleiben x und y unveränderlich, und ist die Gleichung 2) daher bloß nach α und β zu differentiiiren. Setzt man dabei zur Abkürzung $\frac{d\beta}{d\alpha + d\beta} = q$, so folgt

$$3) y \sin(\alpha + \beta) - x \cos(\alpha + \beta) - q R \cos \beta = 0$$

als Gleichung des zu MW unendlich nahen Strahls. — Eliminirt man aus Gleichung 2 und 3 erst y , dann x , so folgt

$$4) \begin{cases} x = -R \sin \beta \sin(\alpha + \beta) - q R \cos \beta \cos(\alpha + \beta) \\ y = -R \sin \beta \cos(\alpha + \beta) + q R \cos \beta \sin(\alpha + \beta) \end{cases}$$

Kann man nun aus den Gleichungen 4 und 1, α und β eliminiren, so erhält man die Gleichung der Katakaustika. Diese Elimination gelingt jedoch nur in besonderen Fällen, so auch in dem Fall, dass der strahlende Punkt S auf dem Umfange der spiegelnden Kreislinien liegt. Dann werden nämlich

$$b = R; \alpha = 2\beta, \text{ also } q = \frac{1}{3}.$$

Die Gleichungen 4 erhalten dadurch folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} x &= -R \sin 3\beta \sin \beta - \frac{1}{3} R \cos 3\beta \cos \beta \\ y &= -R \cos 3\beta \sin \beta + \frac{1}{3} R \sin 3\beta \cos \beta \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} R (\cos 4\beta - \cos 2\beta) - \frac{1}{6} R (\cos 4\beta + \cos 2\beta) \\ y &= \frac{1}{2} R (\sin 2\beta - \sin 4\beta) + \frac{1}{6} R (\sin 4\beta + \sin 2\beta), \end{aligned}$$

oder endlich

$$5) \begin{cases} x = -\frac{2}{3} R \cos \alpha + \frac{1}{3} R \cos 2\alpha \\ y = \frac{2}{3} R \sin \alpha - \frac{1}{3} R \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen die Katakaustika dar, wenn der strahlende Punkt auf dem Umfange des spiegelnden Kreises liegt. Eine Vergleichung derselben mit den Gleichungen 2 in § 4 zeigt aber, dass dieselbe eine Cardioide ist, in welcher der Halbmesser des Grundkreises $\frac{1}{3}$ vom Halbmesser des spiegelnden Kreises beträgt.

Bemerkenswerth ist noch, dass für jeden Punkt M der Cardioide der Wälzungswinkel $\text{ACH} = \alpha$ und der Winkel $\text{WCO} = \alpha$, den die Normale im spiegelnden Punkt mit der Axe bildet, identisch sind: Fig. 6.

Führt man in die Gleichungen 5 die Werthe

$$u = -R \cos \alpha \text{ und } v = R \sin \alpha = (R - u - \alpha) \text{ } x$$

ein, so erhält man noch folgende Gleichungen der Cardioide:

$$6) \begin{cases} x = \frac{2u^2 + 2Ru - R^2}{3R} \\ y = \frac{2(R+u)v}{3R} = \frac{2(R+u)\sqrt{R^2-u^2}}{3R} \end{cases}$$

§ 6.
Die Länge des zurückgeworfenen Strahls.

Setzen wir unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen in Fig. 6 $SW = l'$, $MW = l$, so ist

$$l^2 = (u - x)^2 + (v - y)^2,$$

oder wenn wir die Werthe des vorigen § einführen

$$l^2 = \frac{2}{3} R^2 (1 + \cos \alpha) = \frac{1}{3} R^2 \cos^2 \alpha_2,$$

$$l = \frac{2}{3} R \cos \alpha_2.$$

Andererseits ist $SW = SO \cos WSO$ oder

$$l' = 2 R \cos \alpha_2,$$

$$\text{also } l = \frac{1}{2} l',$$

d. h. die Länge des zurückgeworfenen Strahls bis zur Cardioide ist stets ein Drittel von der des einfallenden. Diese Eigenschaft kann dazu benutzt werden, einzelne Punkte der Cardioide in beliebiger Anzahl zu construiren, denn es ist ja auch $\angle MWC = \angle SWC$, der zurückgeworfene Strahl ist also nach Richtung und Länge durch den einfallenden bestimmt.

Da die Cardioide später nicht mehr als Brennlinie betrachtet wird, so mag gleich hier bemerkt werden, dass

$$l = \frac{1}{2} \text{ Bogen SM ist.}$$

Es wird nämlich in § 25 gezeigt werden, dass

$$\text{Bogen SM} = 8r \cos \alpha_2 = \frac{8}{3} R \cos \alpha_2 \text{ ist.}$$

§ 7.

Lauf der Cardioide.

Die Polargleichung der Cardioide ist nach § 2:

$$\rho = a (1 + \cos \varphi).$$

Fig. 1. Während der Winkel φ von 0 bis π zunimmt, beschreibt der Punkt M den Cardioidenbogen SMDA, und da unterdessen $\cos \varphi$ von +1 bis -1 abnimmt, so nimmt auch der Leitstrahl unterdessen beständig ab, indem

$$\text{für } \varphi = 0 \quad \rho = 2a,$$

$$\text{„ } \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \rho = a,$$

$$\text{„ } \varphi = \pi \quad \rho = 0 \text{ wird.}$$

Von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = 2\pi$ nimmt dagegen $\cos \varphi$ von -1 bis +1 stetig zu, folglich wächst auch ρ unterdessen von 0 bis 2a, indem für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ $\rho = a$ wird. Die Cardioide ist also eine geschlossene Curve. Man nennt A ihren Rückkehrpunkt und S ihren Scheitel. $AS = 2a$ wird auch der Durchmesser der Cardioide genannt.

§ 8.

Noch eine Construction der Cardioide.

Haben zwei Cardioiden den Pol und die Polaraxe gemein, so verhalten sich die Leit-

strahlen in beiden Cardioiden, die zu demselben Polarwinkel gehören, offenbar wie ihre Durchmesser. Dadurch kann man, wenn eine Cardioide gegeben ist, beliebig viele Punkte einer andern Cardioide von gegebenem Durchmesser construiren.

§ 9.

Discussion der Gleichung.

Die Gleichung der Cardioide

$$y^4 - (a^2 + 2ax - 2x^2)y^2 - 2ax^3 + x^4 = 0$$

geht für $x = 0$ über in

$$y^4 - a^2 y^2 = 0,$$

und diese wird befriedigt durch $y = +a$, $y = -a$ und zweimal durch $y = 0$, d. h. die Cardioide geht durch den Coordinatenanfang und wird von der Ordinatenaxe überhaupt in drei Punkten getroffen. Der Coordinatenanfang ist aber in Bezug auf die Ordinatenaxe ein doppelter Punkt.

Setzt man aber $y = 0$, so geht die Cardioidengleichung über in

$$-2ax + x^4 = 0,$$

welche für x einmal den Werth $2a$ und dreimal den Werth 0 ergibt, d. h. die Abscissenaxe schneidet die Cardioide nur in zwei Punkten, der Coordinatenanfang aber ist in Bezug auf dieselbe ein dreifacher Punkt.

Dass A in Beziehung auf die Ordinatenaxe ein doppelter Punkt, in Beziehung auf die Abscissenaxe ein dreifacher Punkt ist, findet seine Erklärung darin, dass die Schlinge AZ der circularen Conchoide (Fig. 2) sich für die Cardioide in den Punkt A zusammenzieht.

Weil in unserer Gleichung y nur mit geradem Exponenten vorkommt, so gibt es zu jeder Abscisse zwei gleiche, aber entgegengesetzte Ordinaten. Die Cardioide ist also in Bezug auf die Abscissenaxe symmetrisch. Weil aber x auch mit ungeraden Exponenten behaftet ist, so gehören zu $+x$ und zu $-x$ verschieden y , die Cardioide wird also durch die Ordinatenaxe nicht symmetrisch getheilt.

Versteht man unter dem Durchmesser einer Curve diejenige Gerade, welche alle einer bestimmten Richtung parallelen Sehnen derselben halbirt, so ist offenbar die Abscissenaxe ein solcher Durchmesser der Cardioide und zwar der einzige.

Da die Gleichung der Cardioide auch die Form

$$y = \mp \sqrt{\left\{ \frac{a^2}{2} + ax - x^2 \mp \frac{a}{2} \sqrt{4ax + a^2} \right\}} \text{ hat,}$$

so erhält man zu jedem Werth von x vier Werthe von y . Wie viel Ordinaten aber jeder Abscisse entsprechen, bedarf der Untersuchung.

Berücksichtigen wir zunächst den Fall, dass x positive Werthe hat, so wird

$$y = \mp \sqrt{\left\{ \frac{a^2}{2} + ax - x^2 \pm \frac{a}{2} \sqrt{4ax + a^2} \right\}}$$

so lange reelle Werthe haben, als

$$x^2 < \frac{a^2}{2} + ax + \frac{a}{2} \sqrt{4ax + a^2}$$

$$\text{oder } x^2 - ax - \frac{a^2}{2} < \frac{a}{2} \sqrt{4ax + a^2}$$

$$\text{oder } x^4 - 2ax^3 + a^2x + \frac{a^4}{4} < a^3x + \frac{a^4}{4} \quad (6)$$

$$\text{oder } x^4 - 2ax^3 < 0,$$

d. h. so lange $x < 2a$.

Der Ausdruck $y = \mp \sqrt{\frac{a^2}{2} + ax - x^2 - \frac{a}{2} \sqrt{4ax + a^2}}$ ist aber nur so lange reell, als

$$\frac{a^2}{2} + ax > x^2 + \frac{a}{2} \sqrt{4ax + a^2} \quad (7)$$

$$\text{oder } \frac{a^4}{4} + a^3x + a^2x^2 > x^4 + ax^2 \sqrt{4ax + a^2} + a^3x + \frac{a^4}{4}$$

$$\text{oder } a^2x^2 > x^4 + ax^2 \sqrt{4ax + a^2},$$

was für ein positives x aber unmöglich ist. Es ergibt also der zweite Ausdruck für y zu jedem positiven x nur imaginäre Werthe. Für positive x findet man somit reelle Werthe blos, wenn man vor dem zweiten Wurzelzeichen das positive Zeichen nimmt, aber auch diese nur, wenn $x < 2a$, jenseits welcher Grenze es keine Punkte der Curve mehr gibt.

Gibt man aber dem x negative Werthe, so werden alle Ordinaten imaginär, sobald

$$\sqrt{4ax + a^2} \text{ imaginär wird, d. h. sobald } x < -\frac{a}{4} \text{ wird.}$$

Ueber $x = -\frac{a}{4}$ hinaus gibt es also keine Punkte der Curve; für diesen Werth wird $y = \mp \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Da für jedes x zwischen den Grenzen 0 und $-\frac{a}{4}$ y entweder grösser oder kleiner als $\mp \frac{a\sqrt{3}}{4}$ wird, je nachdem das positive oder negative Zeichen vor $\sqrt{4ax + a^2}$ genommen wird, so gehören zu jeder negativen Abscisse zwischen den genannten Grenzen vier Ordinaten.

§ 10.

Entwicklung der in der Folge nöthigen Differentialquotienten.

Aus der Gleichung 2 in § 2

$$y^4 - (4r^2 + 4rx - 2x^2)y^2 - 4rx^3 + x^4 = 0$$

folgt:

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{r(y^2 + 3x^2) - x(y^2 + x^2)}{(y^2 + x^2 - 2rx - 2r^2)y}$$

Da die Entwicklung von $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus dieser Gleichung sehr weitläufig wird, so gehen wir zur Bestimmung desselben lieber von den in § 4 und § 5 hergeleiteten Gleichungen aus.

Es folgt aus $x = r(-2 \cos \alpha + \cos 2\alpha)$,

$$y = r(2 \sin \alpha - \sin 2\alpha),$$

$$2) \frac{dx}{d\alpha} = 2r(\sin \alpha - \sin 2\alpha) = -4r \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$3) \frac{dy}{d\alpha} = 2r(\cos \alpha - \cos 2\alpha) = 4r \sin^3 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$4) \frac{dy}{dx} = \frac{\cos \alpha - \cos 2\alpha}{\sin \alpha - \sin 2\alpha} = -\operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2};$$

$$5) \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{2 \cos^2 \frac{3}{2} \alpha} \frac{d\alpha}{dx} = \frac{3}{8r \cos^3 \frac{3}{2} \alpha \sin \alpha};$$

$$6) \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{3}{8r \sin^3 \frac{3}{2} \alpha \sin \alpha}.$$

Geht man von den Gleichungen 6 in § 5 aus, so erhält man

$$7) \frac{dx}{du} = \frac{4u + 2R}{3R}$$

$$8) \frac{dy}{du} = \frac{2(R^2 - Ru - 2u^2)}{3Rv}.$$

Aus der Polargleichung erhält man

$$9) \frac{d\rho}{d\varphi} = -a \sin \varphi;$$

$$10) \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -a \cos \varphi.$$

Aus $y = \rho \sin \varphi$ und $x = \rho \cos \varphi$ bekommt man:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \rho \cos \varphi + \sin \varphi \frac{d\rho}{d\varphi}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\rho \sin \varphi + \cos \varphi \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Berücksichtigt man, dass $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, so folgt:

$$11) \frac{dy}{dx} = -\frac{(1 + \cos \varphi) \cos \varphi - \sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi) \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi} \\ = -\frac{\cos \varphi + \cos 2\varphi}{\sin \varphi + \sin 2\varphi} = -\cotg \frac{3\varphi}{2}$$

$$12) \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{4a \sin^3 \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

§ 11.

Convexität und Concavität der Cardioide.

In Fig. 7 ist $y = \rho \sin \varphi$ und nach § 10 Gleichung

$$12) \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{4a \sin^3 \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ist $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, während y positiv bleibt, daher ist die Cardioide von S bis E gegen die Xaxe hohl. Von $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ bis $\varphi = \pi$ dagegen sind y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ beide positiv, daher die Cardioide von E bis A der Xaxe die erhabene Seite zukehrt. Von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ sind y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ beide negativ, haben also gleiche Zeichen, daher ist die Curve auch zwischen A und E' gegen die Xaxe convex. Von $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ bis $\varphi = 2\pi$ aber haben y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ wieder entgegengesetzte Zeichen, daher die Curve von E' bis S wieder gegen die Xaxe hohl ist

§ 12.
Maxima und Minima der Coordinaten.

Damit x ein Maximum oder Minimum werde, muss (§ 10 GL 11)

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{tg} \frac{3\varphi}{2} = 0 \text{ werden, was für } \varphi = 0, \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ und } \varphi = \frac{4\pi}{3} \text{ ge-}$$

schieht. Im ersten Fall ist x ein Maximum, in den beiden andern ein Minimum. Berücksichtigt man, dass bekanntlich

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

so ergeben sich aus

$$x = a(1 + \cos \varphi) \cos \varphi \text{ und}$$

$$y = a(1 + \cos \varphi) \sin \varphi$$

die Coordinaten des Max. für $\varphi = 0$ in S: $x = 2a, y = 0,$

„ „ „ Min. „ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ in E: $x = -\frac{a}{4}, y = \frac{a\sqrt{3}}{4},$

„ „ „ Min. „ $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ in E': $x = -\frac{a}{4}, y = -\frac{a\sqrt{3}}{4}.$

Damit y ein Max. oder Min. werde, muss

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg} \frac{3\varphi}{2} = 0 \text{ werden, was für } \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ und } \varphi = \frac{5\pi}{3} \text{ geschieht. Man findet}$$

die Coordinaten des Max. für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ in G: $x = \frac{3a}{2}, y = \frac{3\sqrt{3}a}{4},$

„ „ „ Min. „ $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ in G': $x = \frac{3a}{2}, y = -\frac{3\sqrt{3}a}{4},$

für $\varphi = \pi$ wird aber

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

wodurch A als ein vielfacher Punkt angezeigt wird, was auch bereits in § 9 gefunden war.

§ 13.
Geometrische Beziehungen.

In Fig. 7 ist, wie man leicht aus dem Früheren erkennt:

$$AE = AE' = AC = r,$$

$$CE = CE' = EE' = GK = KK' = K'G' = r\sqrt{3},$$

$$AG = AG' = CS = R = 3r;$$

E, A u. G' liegen in einer Geraden, eben so E', A u. G.

Setzt man in Gl. 3 § 2 $x = \frac{a}{2} = r$, so erhält man die Ordinate in $C = r \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$
 $= r \cdot 2,542\dots$ Es ist die Ordinate in $F = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2} \cdot r} = r \cdot 2,598\dots$
 Endlich verhalten sich $AI:AE:AD:AG:AS = 0,5:1:2:3:4$.

§ 14.

Richtung der Tangente.

Bezeichnet man den Winkel, den eine Tangente an einen Punkt der Cardioide mit der positiven Richtung der Xaxe bildet, durch ϑ , so ist bekanntlich

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx}.$$

Die Betrachtungen in § 12 ergaben, dass $\operatorname{tg} \vartheta$ in G und $G' = 0$, in S, E und $E' = \infty$ ist, d. h. die Tangente ist in den beiden ersten Punkten parallel zur Abscissenaxe, in den andern parallel zur Ordinatenaxe. Zugleich sieht man leicht, dass die Tangenten in G und G' die Seiten des dem spiegelnden Kreise eingeschriebenen Sechsecks, die Tangente in E und E' die Seite des regelmässigen Dreiecks ist. Setzt man die Coordinaten von D und D' in die Gleichung für $\operatorname{tg} \vartheta$, so erhält man $\operatorname{tg} \vartheta = \mp 1$, also $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ oder $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$. Die Tangenten in D und D' sind die Seiten des dem spiegelnden Kreise eingeschriebenen Quadrats.

Für den Punkt A werden einige der im § 10 entwickelten Ausdrücke für $\frac{dy}{dx} = 0$, wodurch A als vielfacher Punkt angezeigt wird, während die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \mp \operatorname{cotg} \frac{3\varphi}{2}$ für $A \operatorname{tg} \vartheta = 0$ ergibt. Die Tangente im Punkt A fällt also mit der Abscissenaxe zusammen.

§ 15.

Längen der Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale.

1) Die Länge T der Tangente zwischen dem Berührungspunkt und der Abscissenaxe wird bestimmt durch die Formel:

$$T = y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$$

Führt man hier die Werthe aus Gl. 11 in § 10 ein, so wird $T = \frac{2r \sin \varphi + r \sin 2\varphi}{\cos \frac{3}{2}\varphi}$.

Für S , wo $\varphi = 0$, wird $T = 0$,

„ G , „ $\varphi = \frac{\pi}{3}$, „ $T = \infty$,

„ D , „ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, „ $T = a\sqrt{2}$,

„ E , „ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, „ $T = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

2) Bezeichnet man die Subtangente mit St, so ist allg.:

$$\text{St} = y \frac{dx}{dy}$$

und für die Cardioide, abgesehen vom Zeichen:

$$\text{St} = (2r \sin \varphi + r \sin 2\varphi) \operatorname{tg} \frac{3\varphi}{2}.$$

Für G, wo $\varphi = \frac{\pi}{3}$, wird $\text{St} = \infty$,

„ D, „ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, „ $\text{St} = a$,

„ E, „ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, „ $\text{St} = 0$.

3) Allgemein hat man für die Normale:

$$N = y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \text{ also für die Cardioide:}$$

$$N = \frac{2r \sin \varphi + r \sin 2\varphi}{\sin \frac{3\varphi}{2}}.$$

Für G, wo $\varphi = \frac{\pi}{3}$, wird $N = \frac{3\sqrt{3}}{2} r$,

„ D, „ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, „ $N = a\sqrt{2}$,

„ E, „ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, „ $N = \infty$, weil hier die Normale der Abscissenaxe

parallel ist.

4) Allgemein ist die Subnormale

$$\text{Sn} = y \frac{dy}{dx},$$

also für die Cardioide $\text{Sn} = (2r \sin \varphi + r \sin 2\varphi) \operatorname{cotg} \frac{3\varphi}{2}$.

Für G wird $\text{Sn} = 0$, denn die Normale fällt mit der Ordinate zusammen.

„ D wird $\text{Sn} = a$,

„ E „ $\text{Sn} = \infty$.

§ 16.

Gleichungen der Tangente und der Normale.

Die Gleichung der Tangente für einen Punkt x, y , ist allgemein

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1} (x - x_1).$$

Für die Cardioide erhält man daher folgende Gleichungen:

$$y, (y^2 + x^2 - 2rx - 2r^2) (y - y_1) + (y^2 x + x^3 - ry_1 - 3rx^2) (x - x_1) = 0$$

$$\text{oder } y - y_1 = -\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} (x - x_1),$$

wo C der Coorndanfang ist, oder $y - y_1 = -\operatorname{cotg} \frac{3\varphi}{2} (x - x_1)$.

Die Gleichung der Normalen ist allgemein:

$$(y - y_1) dy + (x - x_1) dx = 0, \text{ also für die Cardioide}$$

$$(ry^2 + 3rx^2 - x, y^2 - x^3) (y - y_1) + (y^2 + x^2 - 2rx, -2r^2) y, (x - x_1) = 0$$

$$\text{oder } y - y_1 = \cotg \frac{3\alpha}{2} (x - x_1)$$

$$\text{oder } y - y_1 = \tg \frac{3\alpha}{2} (x - x_1).$$

§ 17.

Die Normale im Punkte M einer Cardioide geht stets durch den Punkt H, in dem der entsprechende Wälzungskreis den Grundkreis berührt, und die Tangente durch den Punkt W, indem die Verbindungsgerade beider Kreismittelpunkte den Wälzungskreis zum zweiten Mal schneidet.

Gehört in Fig. 6 der Wälzungswinkel α zum Punkt M (x, y) , so ist

$$x = -2r \cos \alpha + r \cos 2\alpha,$$

$$y = 2r \sin \alpha - r \sin 2\alpha.$$

Es seien x_2, y_2 die Coordinaten von H, so ist

$$x_2 = -r \cos \alpha,$$

$$y_2 = r \sin \alpha.$$

Die Gleichung der Geraden MH

$$y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_2)$$

geht daher über in

$$y - y_1 = - \frac{\sin \alpha - \sin 2\alpha}{\cos \alpha - \cos 2\alpha} (x - x_1)$$

$$y - y_1 = \cotg \frac{3\alpha}{2} (x - x_1),$$

was mit der im vorigen § gefundenen Gleichung der Normalen übereinstimmt, so dass also der erste Theil des vorstehenden Satzes erwiesen ist. Weil der Winkel, den die Normale mit der Tangente bildet, ein Rechter ist, so muss $\angle HMW$ ein Winkel im Halbkreise sein, W also auf dem andern Endpunkt des durch H gehenden Durchmessers liegen.

§ 18.

Von den Durchschnitten der Normalen mit dem Grundkreise ist der eine stets doppelt so weit von dem zugehörigen Cardioidenpunkt entfernt als der andere.

In Fig. 6 ist offenbar $\triangle QCH \cong \triangle MKH$,

daher auch $QH = MH$

und $QM = 2HM$. w. z. b. w.

§ 19.

An einen Punkt M der Cardioide die Normale und die Tangente zu ziehen.

Man ziehe Fig. 6 den Leitstrahl AM und aus C eine Parallele zu demselben. Wird der Durchschnittspunkt H der letzteren und des Grundkreises mit M durch eine Gerade verbunden so ist dieselbe die verlangte Normale. Eine Senkrechte darauf im Punkte M gibt

die verlangte Tangente, welche man auch erhält, wenn man auf der genannten Parallele ein Stück CW gleich dem dreifachen Halbmesser bestimmt und W mit M durch eine Gerade verbindet. Berücksichtigt man, dass $\alpha + \varphi = \pi$, wie in § 4 gezeigt, so ergibt sich der Beweis leicht aus § 17.

§ 20.

Polarsubtangente und Polarsubnormale.

Fig. 6. Errichtet man im Pol eine Senkrechte auf dem Leitstrahl AM , so heisst das Stück AU derselben bis zur Tangente die Polarsubtangente (p) des Punktes M , das Stück AQ aber bis zum Durchschnitt mit der Normalen dessen Polarsubnormale (q).

$$\text{Allgemein ist } p = \rho^2 \frac{d\varphi}{d\rho},$$

$$q = \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Für die Cardioide ist $\rho = a(1 + \cos \varphi) = 2a \cos^2 \varphi/2$,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -a \sin \varphi = -2a \sin \varphi/2 \cos \varphi/2,$$

daher abgesehen vom Zeichen $p = 2a \cos^2 \varphi/2 \cotg \varphi/2$,

$$q = a \sin \varphi.$$

Bezeichnet man die Winkel zwischen der Polaraxe und der Polarsubnormale mit φ' , so ist

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

$$\cos \varphi' = -\sin \varphi,$$

$$\text{daher } q = a \cos \varphi',$$

d. h. der Endpunkt von q liegt auf dem Umfange des Grundkreises.

Auch diese Beziehung lässt sich zu einer Construction der Normalen an einen gegebenen Punkt der Cardioide benutzen. Man braucht nämlich nur den Leitstrahl zu ziehen, auf diesem im Pol eine Senkrechte zu errichten und den Durchschnittspunkt derselben und des Grundkreises durch eine Gerade mit dem gegebenen Punkt zu verbinden, so ist letztere die verlangte Normale.

§ 21.

Der Winkel zwischen der Normalen und dem Lichtstrahl ist halb so gross als der Polarwinkel; der Winkel zwischen der Tangente und dem Leitstrahl halb so gross als der Wälzungswinkel.

Bezeichnet man in Fig. 6 den Winkel zwischen der Normalen und dem Leitstrahl mit ω , so ist

$$AQ = \rho \operatorname{tg} \omega = a \sin \varphi \text{ nach } \S 20,$$

$$2a \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \omega = 2a \sin \varphi/2 \cos \varphi/2,$$

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi/2,$$

$$\omega = \varphi/2 \text{ w. z. b. w.}$$

Auch diese Beziehung lässt sich zu einer Construction der Normalen benutzen.

Setzt man $\angle AMU = \tau$, so ist

$$\varphi + \alpha = \pi$$

$$\varphi/2 + \alpha/2 = \pi/2$$

$$\omega + \tau = \pi/2$$

$$\varphi/2 + \alpha/2 = \omega + \tau$$

$$\varphi/2 = \omega$$

$$\alpha/2 = \tau \text{ w. z. b. w.}$$

§ 22.

Der Krümmungshalbmesser.

Allgemein ist die Formel für den Krümmungshalbmesser

$$\gamma = \frac{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}$$

Führt man hier die Ausdrücke aus § 10, Gl. 9 und 10 ein, so folgt für die Cardioide

$$\gamma = \frac{8}{3} r \cos \varphi/2,$$

also für S: $\gamma = \frac{8}{3} r,$

„ G: $\gamma = \frac{4\sqrt{3}}{3} r,$

„ D: $\gamma = \frac{4\sqrt{2}}{3} r,$

„ E: $\gamma = \frac{4}{3} r,$

„ A: $\gamma = 0.$

Da nun $\gamma^2 = \frac{16}{9} a^2 \cos^2 \varphi/2$

und $\rho = 2 a \cos^2 \varphi/2,$

so folgt $\gamma^2 = \frac{8}{9} a \rho,$

d. h. die Quadrate der Krümmungshalbmesser für alle Punkte der Cardioide verhalten sich wie die zugehörigen Leitstrahlen.

§ 23.

Die Evolute der Cardioide.

Wenn p und q die Coordinaten des zum Punkt x y gehörenden Krümmungsmittelpunktes sind, so ist bekanntlich:

$$p = x - \frac{(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2) \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$q = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Führt man hier die Werthe für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus den Gl. 4 und 5 des § 10 ein, so erhält man für die Cardioide:

$$p = x + \frac{8r \sin \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{3} = x + \frac{4r}{3} (\cos \alpha - \cos 2\alpha)$$

$$q = y + \frac{8r \cos \frac{3}{2} \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{3} = y + \frac{4r}{3} (\sin 2\alpha - \sin \alpha)$$

und wenn man auch für x und y die Werthe aus § 4 einführt:

$$1 \quad \begin{cases} p = -\frac{2r}{3} \cos \alpha - r/3 \cos 2\alpha, \\ q = \frac{2r}{3} \sin \alpha + r/3 \sin 2\alpha. \end{cases}$$

Wird zu jedem Punkt x, y der Cardioide der Krümmungsmittelpunkt bestimmt, so bildet die Aufeinanderfolge dieser Krümmungsmittelpunkte eine Curve, welche die Evolute der Cardioide genannt wird. Sie ist durch die Gleichungen 1 dargestellt, wo p, q und α veränderlich sind. Setzt man hier $\alpha = \pi - \alpha'$ und nimmt die Richtung von C nach A als die der positiven Abscissen an, so erhält man

$$2 \quad \begin{cases} p = -\frac{2}{3} r \cos \alpha' + r/3 \cos 2\alpha', \\ q = \frac{2}{3} r \sin \alpha' - r/3 \sin 2\alpha', \end{cases}$$

welche — wie die Vergleichung mit § 4 zeigt — wieder eine Cardioide darstellen. Es ist somit die Evolute einer Cardioide selbst eine Cardioide, welche zu der ursprünglichen Cardioide eine entgegengesetzte Lage und einen dreimal kleinern Durchmesser hat. Die entsprechenden Grundkreise sind concentrisch. Fig. 7.

Setzt man in der Gl. 1, $\alpha = 0$, so wird $p = -r$, $q = 0$, d. h. der Scheitel der Evolute fällt mit dem Rückkehrpunkt der ursprünglichen Cardioide zusammen. Für $\alpha = \pi$, wird $p = -r/3$, $q = 0$, wodurch der Rückkehrpunkt A' der Evolute bestimmt wird.

§ 24.

Für jeden Punkt M der Cardioide sind dieser Punkt M , der zugehörige Krümmungsmittelpunkt R und die beiden Durchschnitte H und Q der Normalen mit dem Grundkreise harmonische Punkte.

Fig. 6. Nach § 6 ist $MW = 1/3 SW$, also auch $MW = 1/3 WV$ und $MW : MV = 1 : 2$.

Da MQ eine Tangente an der Cardioide ARA' ist, so hat man offenbar ebenso auch

$$RH : RQ = 1 : 2.$$

Nach § 18 ist aber auch

$$MH : MQ = 1 : 2, \text{ folglich}$$

$$RH : RQ = MH : MQ,$$

die Punkte Q, R, H, M sind also harmonische Punkte.

§ 25.

Rectification der Cardioide.

1) Es ist $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$
und führt man hier die Werthe aus Gl. 2 und 3 des § 10 ein:

$$ds = 4r \sin \alpha/2 d\alpha,$$

$$s = -8r \cos \alpha/2 + \text{const.}$$

Lässt man den Bogen bei S anfangen, so wird für $\alpha = 0$, auch $s = 0$, daher $\text{const.} = 0$.

Für $\alpha = \pi$ wird daher, da der Bogen nur positiv zu nehmen ist:

$$s = 8r = 4a$$

und da dies der halbe Umfang der Cardioide ist, so ist ihr ganzer Umfang
 $= 16r = 8a$.

2) Legt man die Gleichungen 7 und 8 des § 10 zu Grunde, so erhält man

$$ds = \frac{\sqrt{8R} du}{3\sqrt{R-u}}$$

$$s = \frac{2\sqrt{8R}}{3} \sqrt{R-u} + \text{const.}$$

Lässt man den Bogen bei dem leuchtenden Punkt S anfangen, so ist für $u = R$, $s = 0$, also

auch $\text{const.} = 0$, daher $s = \frac{4\sqrt{2R}}{3} \sqrt{R-u}$

also für $u = -R$,

der halbe Cardioidenbogen $= \frac{8R}{3}$,

der ganze Cardioidenbogen $= \frac{16R}{3} = 16r = 8a$ wie oben.

3) Für Polarcoordinaten ist allgemein:

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

also für die Cardioide

$$ds = 2a \cos \varphi/2 d\varphi,$$

$$s = 4a \sin \varphi/2,$$

wo $\text{const.} = 0$ ist, wenn der Bogen wieder bei S anfängt.

Für $\varphi = \pi$, wird $s = 4a$ als halber Cardioidenbogen, wie oben.

4) Für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ erhält man Bogen $SG = 2a$.

Der Punkt G also, der die grösste Ordinate hat, halbirt den Cardioidenbogen SGA.

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ folgt Bogen $SD = 2\sqrt{2}a$,

„ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ „ „ $SE = 2\sqrt{3}a$,

daher ist Bogen $DG = 2a(\sqrt{2}-1) = 0,828\dots a$,

„ $DE = 2a(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 0,636\dots a$,

„ $AE = 2a(2-\sqrt{3}) = 0,536\dots a$.

§ 26.

Rollt auf einer Cycloide, deren Erzeugungskreis den Durchmesser $2a$ hat, eine Cardioide vom Durchmesser $2a$ ohne zu gleiten so, dass anfangs die Rückkehrpunkte beider Curven zusammenfallen und dass die Cardioide während dieser Bewegung mit ihrer convexen Seite die concave Seite der Cycloide berührt, so beschreibt der Rückkehrpunkt der Cardioide die Verbindungsgerade der Rückkehrpunkte der Cycloide.

Fig. 8. Bekanntlich ist die Länge eines Umganges der Cycloide gleich dem vierfachen Durchmesser des Wälzungskreises, also die Länge der Cycloide $ABC = 8a$. Nach § 25 ist aber auch der Umfang der Cardioide $A'MSA' = 8a$. Da somit die Längen beider Curven gleich sind, so wird nach einer Umdrehung der Cardioide ihr Rückkehrpunkt allerdings mit dem zweiten Rückkehrpunkt der Cycloide zusammentreffen, und es ist nur noch zu beweisen, dass derselbe auch in den Zwischenlagen stets auf der Geraden AC bleibt.

Ist A der Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, welche nach rechts und nach unten positiv genommen worden, so sind

$$1) \begin{cases} x = a(\varepsilon - \sin \varepsilon) \\ y = a(1 - \cos \varepsilon) \end{cases}$$

die Gleichungen der Cycloide, indem ε den Wälzungswinkel bedeutet.

Nimmt man A' als Pol, den Winkel $SA'M = \varphi$ als Polarwinkel an, so ist die Polargleichung der Cardioide

$$2) \rho = a(1 + \cos \varphi).$$

Aus der anfänglichen Lage, wo A' mit A zusammenfiel, sei die Cardioide so weit fortgerollt, dass sie die Cycloide in M berührt. Für die Cycloide ist bekanntlich

$$AM = 4a(1 - \cos \varepsilon/2).$$

Nach § 25 $A'M = 4a(1 - \sin \varphi/2)$.

Da nun beide Bogen einander gleich sind, so ist

$$\cos \varepsilon/2 = \sin \varphi/2,$$

$$\varepsilon/2 = \pi/2 - \varphi/2,$$

$$\varepsilon = \pi - \varphi,$$

$$\cos \varepsilon = -\cos \varphi, \text{ folglich}$$

$$3) y = \rho.$$

Da sich beide Curven in M berühren, so haben sie die Normale MN gemeinsam.

Ist nun η der Winkel, den MN mit y bildet, so ist

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} = \operatorname{cotg} \varepsilon/2.$$

Ist ω der Winkel zwischen MN und ρ , so ist nach § 21

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi/2.$$

Nun ist aber wegen $\varepsilon/2 = \pi/2 - \varphi/2$,

$$\operatorname{cotg} \varepsilon/2 = \operatorname{tg} \varphi/2,$$

also auch $\operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \omega$ und

$$4) \eta = \omega.$$

Diese Gleichung besagt, dass der Leitstrahl der Cardioide an den Berührungspunkt M in die Richtung der Ordinate fällt, während die Gleichung 3 zeigt, dass dieser Leitstrahl und die

Ordinate auch gleich lang sind. Der Rückkehrpunkt A' liegt somit stets auf der Abscissenaxe AC , w. z. b. w.

§ 27.

Quadratur der Cardioide.

Bezeichnet man den Sector, welcher von zwei Leitstrahlen und einer Curve begrenzt wird, durch S , so ist allgemein:

$$dS = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi.$$

Da nun $\rho^2 = a^2 (1 + \cos \varphi)^2 = r^2 (4 + 8 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi)$
 $= r^2 (6 + 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi),$

so ist für die Cardioide

$$dS = \frac{r^2}{2} (6 + 8 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi) d\varphi,$$

$$S = \frac{r^2}{2} (6\varphi + 8 \sin \varphi + \sin 2\varphi),$$

wo const. = 0 ist, wenn die Fläche bei S anfängt.

Für $\varphi = 2\pi$ erhält man die ganze Cardioidenfläche $= 6r^2\pi = \frac{2R^2\pi}{3}$, d. h. die Cardioidenfläche ist das Sechsfache des Grundkreises und $\frac{2}{3}$ des spiegelnden Kreises.

Für $\varphi = \pi/3$ erhält man den Sector $ASG = r^2\pi + \frac{9\sqrt{3}}{4}r^2$.

Macht man $TF = AF = \frac{3r}{2}$, so ist nach § 12

$$\Delta ATG = \frac{9\sqrt{3}}{4}r^2,$$

also der Cardioidenausschnitt TSG gleich dem Grundkreise.

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man den Sector $ASD = \frac{3r^2\pi}{2} + 4r^2$, folglich das

$$\text{Segment ADE} = \frac{3r^2\pi}{2} - 4r^2.$$

Für $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ erhält man den Sector $ASE = 2r^2\pi + \frac{7\sqrt{3}}{4}r^2$, folglich das

$$\text{Segment ALE} = r^2 - \frac{7\sqrt{3}}{4}r^2.$$

Die einfachste Formel für die Quadratur bekommt man, wenn man C als Anfangspunkt der Polarcoordinaten λ, ϑ annimmt, dann ist das Differential des Sectors bekanntlich

$$dS = \frac{1}{2} \lambda^2 d\vartheta = \frac{x dy - y dx}{2}.$$

Führt man die Werthe

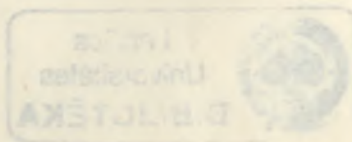
$$x = -r(2 \cos \alpha - \cos 2\alpha),$$

$$y = r(2 \sin \alpha - \sin 2\alpha)$$

ein, so erhält man nach leichter Reduction für die Cardioide

$$S = 3r^2 \int (1 - \cos \alpha) d\alpha = 3r^2 (\alpha - \sin \alpha),$$

wo const. = 0 ist, wenn man den Bogen bei A anfangen lässt. Die Formel gibt mit dem Früheren übereinstimmende Resultate.



§ 28.

Die Oberfläche des Rotationscardioids,

welches durch Umdrehung einer Cardioide um ihren Durchmesser als Axe erzeugt wird, erhält man aus der allgemeinen Formel

$$2 \pi \int y \, ds,$$

wenn hier $y = a \sin \varphi = (1 + \cos \varphi) \sin \varphi = 4a \cos^3 \varphi/2 \sin \varphi/2$,

$$ds = 4a \cos \varphi/2 \, d\varphi/2 \quad (\S 23, 3) \text{ gesetzt werden.}$$

$$\text{Dann ist } \int y \, ds = -\frac{16a^2}{5} \cos^5 \varphi/2 + \text{const.}$$

Für die ganze Oberfläche des Rotationscardioids ergibt sich daher

$$2 \pi \int_0^\pi y \, ds = \frac{32 a^2 \pi}{5}.$$

Für die Fläche, welche durch Rotation des Bogens A E um A I als Axe entsteht, erhält man

$$2 \pi \int_0^\pi y \, ds = \frac{a^2 \pi}{5}.$$

§ 29.

Cubatur des Rotationscardioids.

Das Volumen eines Rotationskörpers ist allgemein

$$\pi \int y^2 \, dx,$$

also das des Rotationscardioids

$$\pi \int \left(\frac{a^2}{2} + ax - x^2 \mp a/2 \sqrt{4ax + a^2} \right) dx$$

$$= \pi \left\{ \frac{a^2}{2} x + a/2 x^2 - \frac{1}{3} x^3 \mp \frac{1}{12} (4ax + a^2)^{3/2} \right\} + \text{const.}$$

Für den durch Rotation des Sectors ASD entstandenen Körper gilt nur das untere Zeichen (§ 9), und durch Integration von $x = 0$ bis $x = 2a$ erhält man dessen Inhalt

$$= \frac{5 a^3 \pi}{2}.$$

Für den durch Rotation von ADEI entstandenen Körper gilt ebenfalls das untere Zeichen, und durch Integration von $x = -a/4$ bis $x = 0$ erhält man dessen Inhalt

$$= \frac{33 a^3 \pi}{192}.$$

Den durch Rotation von AEI entstandenen Körper erhält man, wenn man das Integral von $x = -a/4$ bis $x = 0$ nimmt, jetzt aber das obere Zeichen gelten lässt:

$$= \frac{a^3 \pi}{192}.$$

Addirt man die beiden ersten Ausdrücke und subtrahirt davon den dritten, so erhält man das Volumen des ganzen Rotationscardioids

$$= \frac{8 a^3 \pi}{3}.$$

Das Rotationscardioid ist somit doppelt so gross als eine Kugel, die zum Durchmesser den Durchmesser der Cardioide hat.

§ 30.

Geschichte und Literatur der Cardioide.

Wir haben gesehen, dass die Cardioide zu drei Gattungen von Curven gehört: zu den Conchoiden, zu den Epicycloiden und zu den Brennnlinien, und haben in diesen drei Richtungen nachzuforschen, um zu ermitteln, wann und wem die Cardioide zuerst bekannt geworden. Sehr alt ist die Bekanntschaft mit der Conchoide, denn nach den Nachrichten des Pappus in seinen *collectaneis mathematicis Lib. IV*, hat schon Nicomedes (c. 200 a. Chr.) dieselbe erfunden und zur Lösung des Delischen Problems von der Verdoppelung des Würfels, wie auch zur Dreitheilung des Winkels benutzt. Obgleich nun dieses letztere Problem allgemeiner und bequemer mit Hilfe der circularen Conchoide gelöst wird, so lässt sich doch ziemlich sicher annehmen, dass Nicomedes nur die Conchoide mit gerader Directrix gekannt hat und dass ihm und dem Alterthum die Cardioide als besonderer Fall der circularen Conchoide fremd geblieben ist. Die Epicycloiden sind zwar auch schon von Ptolemaeus zur Erklärung der Planetenbewegungen benutzt worden, indessen ist damals wol kaum der besondere Fall, wo Wälzungskreis und Grundkreis einander gleich sind, weiter verfolgt worden. Eine Beschäftigung mit den Brennnlinien war dem Alterthum bei den damaligen mathematischen Hilfsquellen vollends unmöglich, daher ist wol anzunehmen, dass man erst im 17. Jahrhundert, wo sich die Mathematiker mit solcher Vorliebe der Cycloide und verwandten Curven zuwandten, dass man diese Zeit auch das Jahrhundert der Cycloide genannt hat, auf die Cardioide aufmerksam geworden ist. 1705 gab Carré in den *Memoires de l'Academie des Sc.* einen Aufsatz über diese Linie, betrachtete indessen nur den Theil DEAE'D'. Nach seiner Angabe hat sich schon vor ihm Körnersma mit ihr beschäftigt. Der Name „Cardioide“ ist zuerst von Castilliani gebraucht worden (*Phil. Trans. 1741*). Seitdem ist in Werken über analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung bisweilen auch die Cardioide als Beispiel benutzt worden. Eine neuere, ihr besonders gewidmete Abhandlung gibt es meines Wissens nicht. Von den Werken, die etwas mehr als den Namen und die Gleichung der Cardioide geben, sind mir folgende bekannt geworden:

Magnus: *Lehrsätze und Aufgaben aus der analytischen Geometrie.*

Klügel: *Wörterbuch.*

Schörre: *Die Conchoide.*

Zehme: *Die verschiedenen Cycloiden.*

Meyer: *Die Brennnlinien der Curven zweiter Ordnung.*

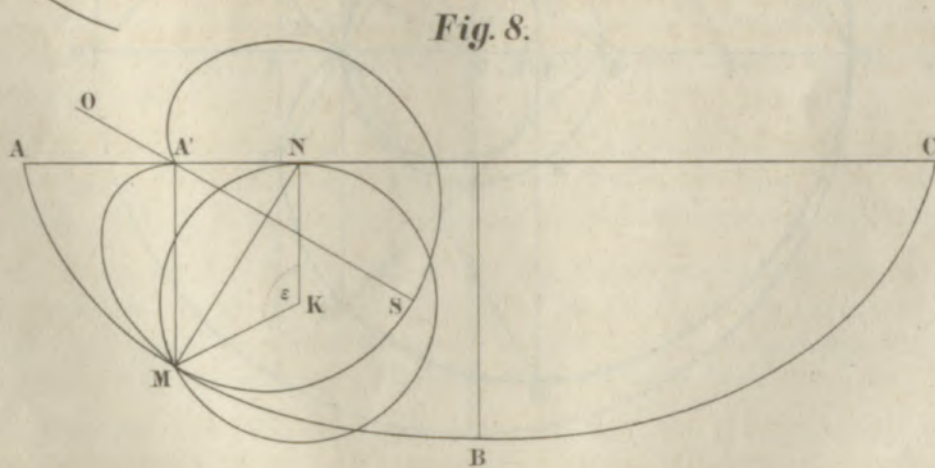
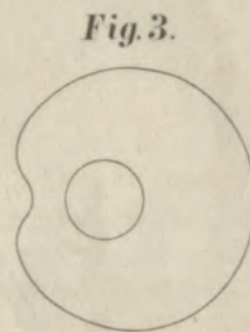
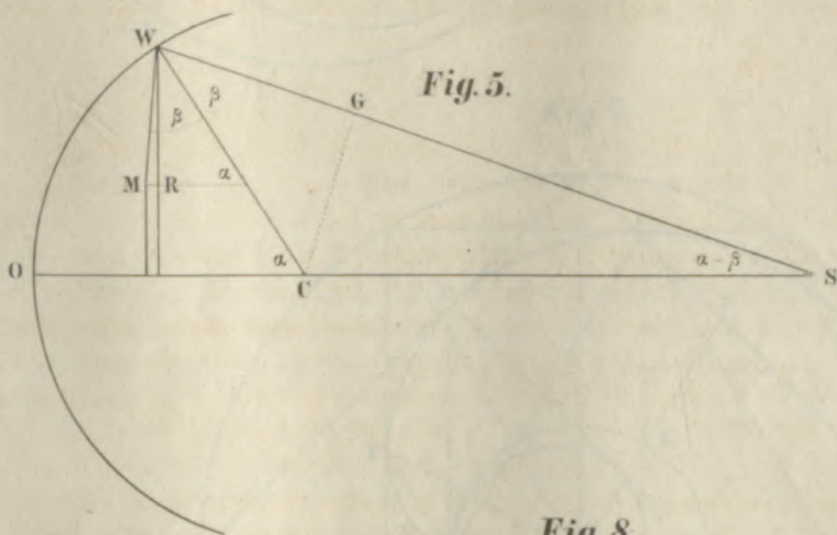
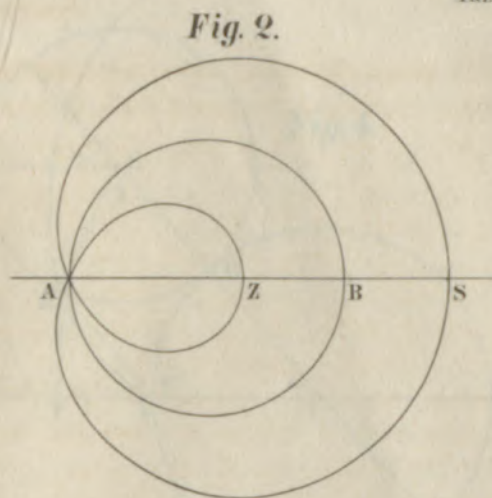
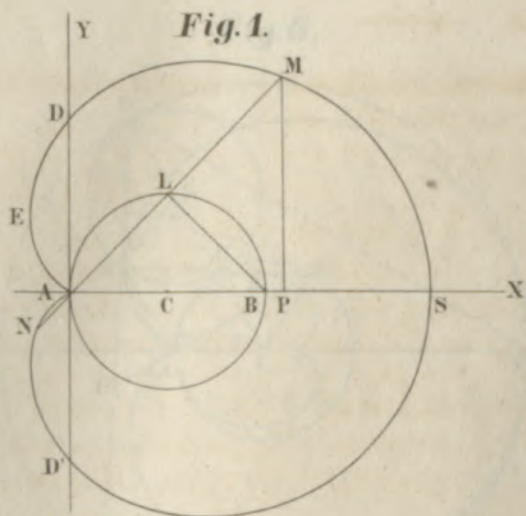


Fig. 2



Fig. 1



Fig. 3



Fig. 4

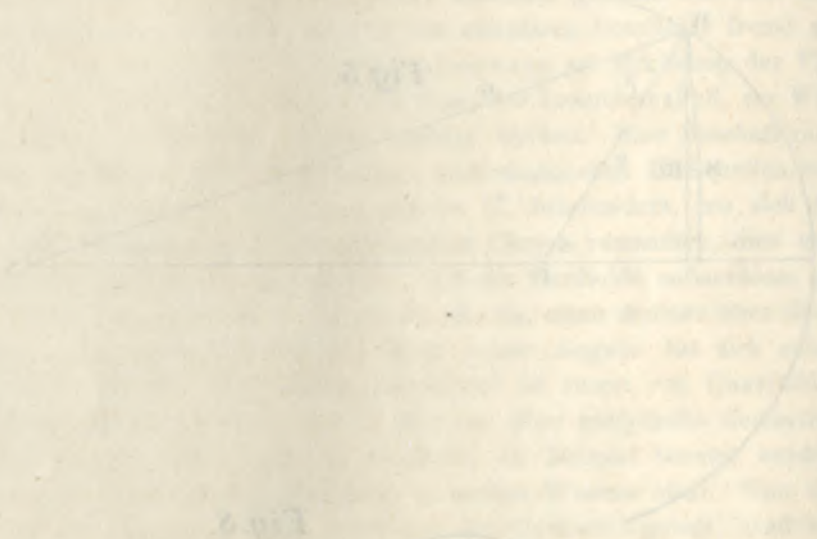


Fig. 5



Fig. 6.

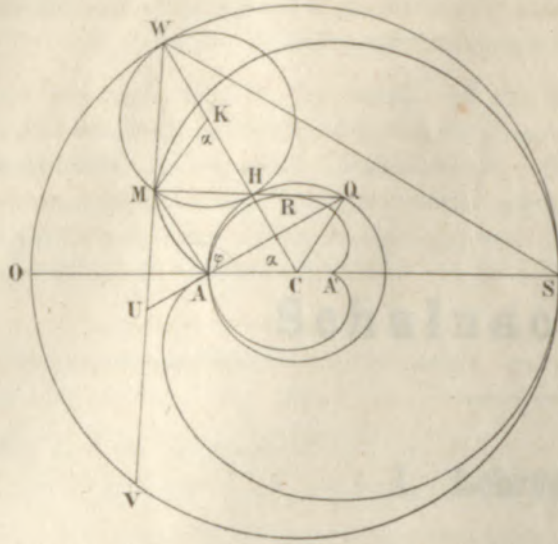


Fig. 4.

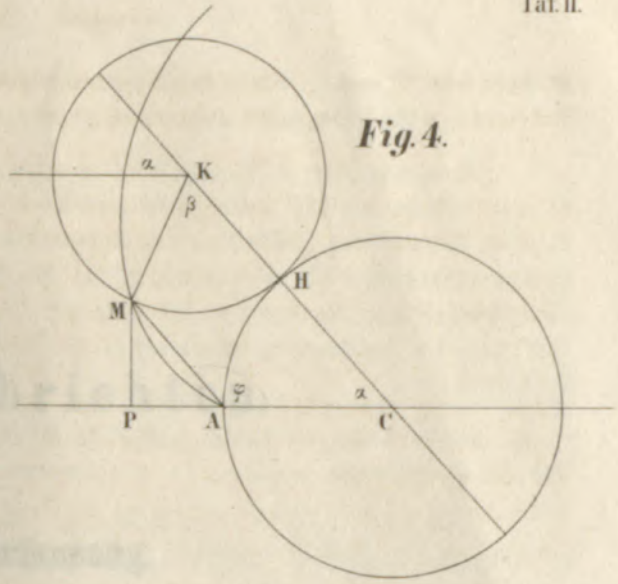
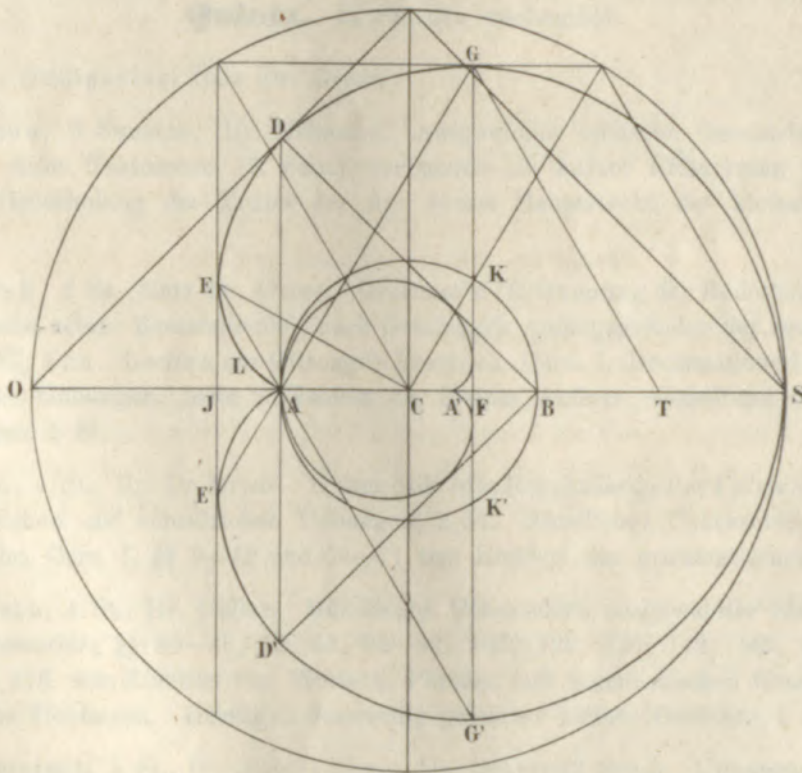


Fig. 7.



100

Fig. 6.



Fig. 7.



Schulnachrichten.

I. Lehrverfassung.

1. Uebersicht des im Jahre 1866 im Gymnasium ertheilten Unterrichts.

Quinta. 32 Stunden wöchentlich.

Ordinarius: Herr Dr. Gross.

Religion, 3 Stunden, Hr. Helmsing. Ausgewählte biblische Geschichten des Neuen (1. Sem.) und Alten Testaments (2. Sem.), verbunden mit kurzer Erläuterung passender Kirchenlieder. Wiederholung des Textes der drei ersten Hauptstücke des kleinen Lutherschen Katechismus.

Deutsch, 3 St., Herr Dr. Gross. Grammatik (Erläuterung der Redetheile und des einfachen Satzes und seiner Bestandtheile), nach Götzinger's Anfangsgründen der deutschen Sprachlehre, §§ 1—187, 1 St. Lectüre aus Oltrogge's Lesebuch, Curs. I. Declamations-Uebungen, 1 St. Orthographische Uebungen. Alle 2 Wochen ein kleiner Aufsatz, enthaltend die Wiedergabe von Erzählungen, 1 St.

Latein, 4 St., Hr. Dr. Gross. Grammatik (das Regelmässige der Formenlehre), verbunden mit mündlichen und schriftlichen Uebungen, 2 St. Mündliches Uebersetzen aus Ellendt's latein. Lesebuche, Curs. I, §§ 9—42 und 58—71 zum Einüben der grammatischen Formen, 2 St.

Russisch, 4 St., Hr. Haller. Mündliches Uebersetzen ausgewählter Stücke aus Golotsow's Chrestomathie, §§ 46—48, 52, 53, 92—94, 103, 129, 130, 142, 143, 145, 151—153, 155—159, 175, 176, zum Einüben von Wörtern, Phrasen und grammatischen Grundformen, 3 St. Orthographische Uebungen. Hersagen auswendig gelernter kleiner Gedichte, 1 St.

Französisch, 5 St., Hr. Sire (1 Sem.), Hr. Dubois (2 Sem.). Uebungen im Lesen und Niederschreiben gelesener Stücke nach dem Dictat, 1 St. Mündliches Uebersetzen ins Deutsche und ins Französische aus Margot, Cours élémentaire et progressif I, §§ 1—81 und 1—69 zum

Einüben von Wörtern, Phrasen und grammatischen Grundformen, verbunden mit schriftlichen Uebungen, 3 St. Hersagen auswendig gelernter Fabeln und Gespräche, 1 St.

Mathematik, 4 St. a) Arithmetik, 3 St., Hr. Schweder. Wiederholung der vier Species mit ganzen und gebrochenen, gleich und ungleich benannten Zahlen. Reductionen von Maasen, Münzen und Gewichten. Schlussrechnung. Decimalbrüche. Uebungen im Kopfrechnen. b) Geometrische Vorübungen, 1 St., Hr. Rieke. Erläuterung und Veranschaulichung der Grundbegriffe der Raumgrößenlehre an mit Durchschnitten versehenen geometrischen Körpern. Uebungen im Anfertigen geometrischer Körper und in der Ausführung leichter planimetrischer Constructionen.

Naturbeschreibung, 2 St., Hr. Schweder. Uebersicht der drei Naturreiche; ausführlich die Säugethiere.

Geschichte, 2 St., Hr. Helmsing. Biographisch gehaltene Erzählungen aus dem griechischen und römischen Alterthum (1. Sem.), aus dem Mittelalter und der neuen Zeit (2. Sem.).

Geographie, 2 St., Hr. Maczewski. Topische Geographie.

Kalligraphie, 3 St., Hr. Rieke. Nach Vorschrift des Lehrers an der Wandtafel und nach der Tactir-Methode, so wie auch nach Vorlegeblättern lateinischer, deutscher und russischer Schrift.

Anmerkung. Von den für den Unterricht in der Kalligraphie angesetzt 3 Stunden wurde aushilfsweise 1 Stunde zur Verstärkung des geometrischen Unterrichts verwendet.

Quarta. 32 Stunden wöchentlich.

Ordinarius: Hr. Helmsing.

Religion, 3 St., Hr. Helmsing. Uebersicht und kurze Inhaltsangabe der Alt- und Neutestamentlichen Bücher, zugleich als Repetition des in Quinta Vorgetragenen, nebst Erklärung und Einübung passender Kirchenlieder, 1 St. Des Katechismus-Unterrichts niederer Cursus, mit steter Begründung aus der heiligen Schrift und Einprägung biblischer Kernsprüche, 2 St.

Deutsch, 3 St., Hr. Dr. Gross. Grammatik (Wortbildung, Ableitung und Zusammensetzung nebst Erklärung der Bedeutung der wichtigsten Vor- und Nachsilben. Die Lehre vom Satze mit Uebungen im Nachbilden von Sätzen, nach Götzinger's Anfangsgründen der deutschen Sprachlehre, §§ 7—227), 1 St. Lectüre aus Oltrogge's Lesebuche, Curs. II. Uebungen im Nacherzählen des Gelesenen und im Declamiren, 1 St. Einübung der Interpunctions-Regeln durch Dictate. Allwöchentlich ein Aufsatz erzählenden Inhalts, 1 St.

Latein, 5 St., a) 4 St. der Director. Grammatik (das Unregelmässige der Formenlehre und das Nothwendigste über Wortbildung und Ableitung. Hauptlehren der Syntax), 2 St.

Mündliches Uebersetzen ins Deutsche aus Ellendt's latein. Lesebuche, Curs. II., Abschn. 3, §§ 78—166, 2 St. b) 1 St., Hr. Helmsing. Allwöchentlich ein schriftliches Exercitium.

Russisch, 4 St., Hr. Haller. Grammatik (das Regelmässige der Formenlehre), 1 St. Mündliches Uebersetzen der schwierigeren Lesestücke aus Golotasow's Chrestomathie, §§ 180 bis 182, 184—188, 204, 211, 213, 215—217, 225 ins Deutsche und aus Tschereschewitsch's Chrestomathie, §§ 7, 19, 28, 33, 38, 45, 46, 59, 60, 63, 64, 67, 342—353 und 173—183 ins Russische, 2 St. Uebungen im Recitiren auswendig gelernter Gedichte abwechselnd mit mündlichem Wiedergeben des Inhalts des Gelesenen. Allwöchentlich ein schriftliches Exercitium, 1 St.

Französisch, 4 St., Hr. Sire (1. Sem.), Hr. Dubois (2. Sem.) Grammatik (abgekürzter Cursus der Formenlehre und Dictate nebst schriftlichen Uebungen im Conjugiren der unregelmässigen Verba), 1 St. Mündliches Uebersetzen aus Margot, Cours élémentaire II, §§ 63—95, ins Deutsche, nebst darauf bezüglicher grammatischer Analyse und aus Fränkel's Stufenleiter II, §§ 100—120 ins Französische, mit Erklärung der dabei in Betracht kommenden syntactischen Grundregeln, 2 St. Allwöchentlich ein schriftliches Exercitium. Ausserdem Extemporalien und Uebungen im Recitiren auswendig gelernter Gedichte, 1 St.

Mathematik, 4 St., a) Arithmetik, 3 St., Hr. Schweder. Wiederholung der Lehre von den gemeinen und Decimalbrüchen. Verwandlung einer Bruchform in die andere. Geschäfts- und Zinsrechnung, mit Zurückführung auf die Einheit. Die Lehre von den Proportionen und deren Anwendung auf die einfache und zusammengesetzte Regeldetri. Kettenregel. Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Berechnung der Quadrat- und Cubikwurzeln. Uebungen im Kopfrechnen. b) Geometrie, 1 St., Hr. Rieke. Planimetrie bis zu der Lehre von der Verwandlung der Figuren.

Naturbeschreibung, 2 St., Hr. Schweder. Vögel, Reptilien, Fische (1. Sem.). Wirbellose Thiere (2. Sem.).

Geschichte, 3 St., Hr. Helmsing. Zusammenhängende Darstellung der alten Geschichte

Geographie, 2 St., Hr. Maczewski. Hauptlehren aus der Physik der Erde, physische Geographie der aussereuropäischen Erdtheile, mit Berücksichtigung der wichtigsten politischen Momente, namentlich Asiens und Nordamerikas.

Kalligraphie, 2 St., Hr. Rieke. Nach Vorschrift des Lehrers an der Wandtafel und nach der Tactir-Methode, so wie auch nach Vorlegeblättern.

Tertia. 32 Stunden wöchentlich.

Ordinarius: Hr. Haller.

Religion, 3 St., Hr. Helmsing. Biblische Geschichte im Zusammenhange mit steter Hervorhebung der heilsgeschichtlichen Bedeutung der Thatsachen. Das Leben Jesu, hauptsächlich nach dem Evangelium Matthäi und die Apostelgeschichte (1. Sem.). Alttestamentliche Ge-

schichte auf Grund einer Auswahl meist historischer Abschnitte des Alten Testaments, namentlich des ersten Buches Mose (2. Sem.).

Deutsch, 3 St., Hr. Dr. Gross. Grammatik (innere Umbildung und äussere Fortbildung des Satzes. Von der Verbindung mehrerer Sätze und den Perioden, nach Götzinger's deutscher Sprachlehre, §§ 276—408), 1 St. Lectüre aus Oltrogge's Lesebuche, Curs. III. Uebungen im freien Vortrag und im Declamiren, 1 St. Alle 2 Wochen ein schriftlicher Aufsatz. Extemporalien, 1 St.

Latein, 5 St., der Director. Grammatik (die Syntax im Zusammenhange, durch Beispiele erläutert), 1 St. Mündliches Uebersetzen aus Caesar de bell. Gall. VII., 17—90 und VIII., 1—10, 2 St. Erklärung ausgewählter Stücke aus Ovid's Metam., Fast., nach Siebelis' Lesebuche III., Abschn. 16—29. Vorausgeschickt wurde eine Erläuterung der wichtigsten, die Prosodie und den Versbau betreffenden Regeln, 1 St. Alle 2 Wochen ein schriftliches Exercitium und Extemporalien, abwechselnd mit der Repetition des grammatischen Unterrichts, 1 St.

Russisch, 5 St., Hr. Haller. Grammatik (das Unregelmässige der Formenlehre nach vorgängiger Wiederholung des in Quarta ertheilten grammatischen Unterrichts und Einübung der Hauptregeln der Syntax), 1 St. Mündliches Uebersetzen ausgewählter Stücke aus Schafranow's Chrestomathie, Abschn. 34, 110, 129, 131 ins Deutsche und aus Schafranow's Muster-Sammlung, Abschn. 16, 51, 61 ins Russische, 2 St. Allwöchentlich ein schriftliches Exercitium, 1 St. Aeltere Geschichte Russlands bis auf Михаилъ Θεодоровичъ Романовъ, 1 St.

Französisch, 4 St., Hr. Sire (1. Sem.), Hr. Dubois (2. Sem.) Grammatik (vollständiger Cursus der Formenlehre und Einübung der Grundregeln der Syntax, unter steter Vergleichung mit den Eigenthümlichkeiten der deutschen Sprache), 1 St. Mündliches Uebersetzen leichter Lesestücke aus der Chrestomathie von Noël et de la Place I, 1—21, ins Deutsche und aus Fränkel's Anthologie I, 1—10; II, 1—6 ins Französische, 2 St. Alle 2 Wochen ein schriftliches Exercitium, abwechselnd mit Extemporalien und Uebungen im Recitiren von Gedichten, 1 St.

Mathematik, 4 St., Hr. Gottfried. I. Sem. Vollständiger Cursus der Planimetrie. 2. Sem. Algebra (positive und negative Grössen. Die 4 Species in Buchstaben; Potenzen. Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekanntem Grösse), 3 St. Repetition des in Quarta vorgetragenen Lehrstoffs der Geometrie, 1 St. Mit diesem Unterrichte wurden allwöchentlich häusliche Uebungen im Lösen vorzugsweise algebraischer Aufgaben verbunden.

Naturbeschreibung, 2 St., Hr. Schweder. 1. Sem. Botanik. Während der günstigen Jahreszeit wurden zur Einübung der Pflanzenkunde Excursionen angestellt. 2. Sem. Mineralogie.

Geschichte, 3 St., Hr. Maczewski. Zusammenhängende Darstellung der mittleren Geschichte.

Geographie, 3 St., Hr. Maczewski. Politische Geographie Europa's nebst seinen Colonien, auf Grundlage der physischen Geographie dieses Erdtheils, mit besonderer Berücksichtigung Russlands.

Secunda. 32 Stunden wöchentlich.

Ordinarius: Hr. Gottfriedt.

Religion, 2 St., Hr. Helmsing. Des Katechismus-Unterrichts höherer Cursus. Die christliche Sittenlehre (1. Sem.). Die christliche Glaubenslehre (2. Sem.).

Deutsch, 3 St., Hr. Dr. Gross. Charakteristik der Hauptgattungen der Poesie. (Im 1. Sem. gelangten die lyrische und epische Poesie zur Behandlung und wurden lyrische Gedichte und Voss' Idylle „der siebenzigste Geburtstag“ gelesen. Im 2. Sem. wurde die dramatische Poesie durchgenommen und Lessing's „Dramaturgie“ im Auszuge gelesen.) 1 St. Uebungen im freien Vortrag und im Disputiren, 1 St. Stylistik. Alle 2 Wochen ein schriftlicher Aufsatz, 1 St.

Russisch, 4 St., Hr. Haller. Grammatik (die Syntax erläutert an Beispielen nach dem Lehrbuche von Nikolitsch, §§ 1—226) und schriftliche Extemporalien, 1 St. Mündliches Uebersetzen schwierigerer Stücke aus Schafranow's Chrestomathie, Abschn. 14, 17 ins Deutsche, verbunden mit Uebungen im Paraphrasiren und mündlichen Wiedergeben des Inhalts des zu Hause Gelesenen. Ausserdem wurden gelesen und erläutert die Erzählungen: Мужу von Turjenuw, ночь предъ Рождествомъ von Gogol, die Skizzen von Dahl (Казакъ Луганскій): находчивое поколѣние, Чухонцы въ Питеръ und Gogol's Komödie Ревизоръ, 1 St. Mündliches Uebersetzen aus Oltrogge's deutschem Lesebuche, Curs. I, II, 11; VII, 2, 3, 4, 10. Allwöchentlich ein schriftliches Exercitium, abwechselnd mit Aufsätzen meist erzählenden Inhalts, 1 St. Geschichte Russlands seit der Thronbesteigung des Hauses Romanow bis auf unsere Tage, 1 St.

Französisch, 4 St., Hr. Sire (1. Sem.), Hr. Dubois (2. Sem.). Grammatik (die Syntax im Zusammenhange, erläutert an Beispielen). Alle 2 Wochen ein schriftliches Exercitium, abwechselnd mit Aufsätzen erzählenden Inhalts, 2 St. Mündliches Uebersetzen schwierigerer Stücke aus der Chrestomathie von Noël et de la Place I, Abschn. 8—28, ins Deutsche, verbunden mit Uebungen im Paraphrasiren und mündlichen Wiedergeben des zu Hause Gelesenen, 1 St. Mündliches Uebersetzen ausgewählter Stücke aus Fränkel's Anthologie, Curs. II, A, 1—15 und B, 1—4, ins Französische und schriftliche Extemporalien, 1 St.

Englisch, 5 St., Hr. Rieke. Uebungen im Lesen und in der Orthographie. Grammatik (die Formenlehre und das Wichtigste aus der Syntax), 2 St. Mündliches Uebersetzen ausgewählter Stücke aus Williams' Lesebuche, ins Deutsche und aus Fränkel's Anthologie, ins Englische, 2 St. Allwöchentlich ein schriftliches Exercitium, daneben Extemporalien und Uebungen im Recitiren, 1 St.

Mathematik. Im 1. Sem. 6 St., Hr. Gottfriedt. Algebra (Potenzen mit gebrochenen Exponenten, complexe Zahlen und deren Umformung, Logarithmen, Gleichungen mit einer und mit mehreren Unbekannten vom ersten und zweiten Grade), 3 St. Stereometrie, 3 St. Im 2. Sem. 7 St., Hr. Gottfriedt. Algebra (Wurzel- und Logarithmen-Rechnung, cursorisch durchgenommen. Arithmetische und geometrische Progressionen. Combinations-Lehre. Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Binomischer Lehrsatz), 3 St. Trigonometrie und Anwendung derselben, 2 St. Uebungen im Ansetzen von Gleichungen und Geschäftsrechnen in allgemeiner Form,

2 St. Mit diesem Unterrichte wurden allwöchentlich häusliche Uebungen in der Lösung mathematischer Aufgaben verbunden.

Physik. Im 1. Sem. 3 St., Hr. Schweder. Allgemeine Eigenschaften der Körper. Hauptlehren vom Gleichgewicht und von der Bewegung fester, flüssiger und luftförmiger Körper. Das Wichtigste aus der Lehre vom Schall, vom Licht und von der Wärme, experimentell erläutert. Im 2. Sem. 2 St., Hr. Schweder. Magnetismus, Reibungs- und Berührungs-Electricität, Electro-Magnetismus, electriche Telegraphie, durch Experimente erläutert.

Geschichte, 3 St., Hr. Maczewski. Specielle Darstellung der neueren Geschichte, sowol in ihren einzelnen Thatsachen, wie in den wichtigsten Thätigkeits-Aeusserungen des Lebens der Völker.

Geographie, 2 St., Hr. Maczewski. Handels- und Gewerbs-Geographie der aussereuropäischen Erdtheile, mit besonderer Berücksichtigung ihrer natur- und culturhistorischen Grundlagen.

Prima. 32 Stunden wöchentlich.

Ordinarius: Hr. Maczewski.

Religion, 2 St., Hr. Helmsing. Vergleichende Darstellung der in den verschiedenen christlichen Confessionen bekenntnismässig fixirten Lehrbegriffe. Erklärung der Augsburschen Confession. Uebersichtliche Darstellung der Kirchengeschichte.

Deutsch, 2 St., Hr. Dr. Gross. Literatur-Geschichte bis zur neuesten Zeit. Nur die hervorragenden Erscheinungen sind ausführlicher behandelt worden. Für die ältere Zeit wurde besonders Gewicht auf die Mittheilung von Proben gelegt; für die neuere wurden die Schüler auf die Privat-Lectüre hingewiesen und diese zum Gegenstande der Besprechung gemacht, 1 St. Uebungen im freien Vortrag und allmonatlich eine schriftliche Ausarbeitung, 1 St.

Russisch, 4 St., Hr. Haller. Erklärung russischer Musterschriften (Sagoskin's Юрій Милославскій; Puschkin's Еврейскій Оубинъ; Lermontow's Герой нашего времени), 1 St. Mündliches Uebersetzen ins Russische (Schiller's Geschichte des dreissigjährigen Krieges I, S. 235 bis 263 und S. 363—385), 1 St. Uebersichtliche Darstellung der russischen Literatur-Geschichte, von der ältesten Zeit bis auf die neueste, 1 St. Alle 2 Wochen ein schriftlicher Aufsatz über ein gegebenes Thema. Schriftliche Extemporalien und Uebungen im freien Vortrage, 1 St.

Französisch, 4 St. Hr. Sire (1. Sem.), Hr. Dubois (2. Sem.). Lectüre (Louis XI. von Casimir Delavigne; Iphigénie von Racine), 1 St. Mündliches Uebersetzen ins Französische (Schiller, der Neffe als Onkel; der Parasit — die 4 ersten Scenen —; der dreissigjährige Krieg S. 1—25). Schriftliche Extemporalien, 1 St. Geschichte der französischen Literatur mit ausgewählten Proben, vom Anfange des 17. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Alle 2 Wochen ein Aufsatz über ein gegebenes Thema. Zwischenein Uebungen im freien Vortrage, 2 St.

Englisch, 4 St., Hr. Rieke. Lectüre (Shakspeare's Coriolanus und Richard II. Ausserdem aus Washington Irving's Sketch-Book: The Christmas Dinner. Little Britain. John Bull.

The Angler. Westminster Abbey. The Mutability of Literature. The Boar's Head Tavern, Eastcheap), 2 St. Mündliches Uebersetzen ins Englische (Schiller's Geisterseher, S. 16—63), 1 St. Alle 2 Wochen ein Aufsatz über ein gegebenes Thema, abwechselnd mit einer schriftlichen Uebersetzung. Schriftliche Extemporalien und Uebungen im freien Vortrage, 1 St.

Mathematik. Im 1. Sem. 6 St., Hr. Gottfriedt. Ansetzen von Gleichungen und höhere bürgerliche Rechnungen (Sparcassen-Rechnung, Lebens-, Aussteuer-, Capital-Versicherungen, Renten-, Pensions-, Versicherungs-Rechnungen), 2 St. Elemente der algebraischen Analysis (Kettenbrüche, diophantische Gleichungen, Elemente der Functionen-Lehre, Gleichungen des dritten Grades), 2 St. Elementare analytische Geometrie, 1 St. Mathematische Geographie, 1 St. Hiermit wurden allwöchentlich häusliche Uebungen im Lösen mathematischer Aufgaben verbunden. Im 2. Sem. 2 St., Hr. Gottfriedt. Lösung von Aufgaben aus allen Gebieten der Mathematik, soweit sie Lehrgegenstand der Schule waren, sowie auch aus der Physik und Chemie.

Physik. Im 1. Sem. 3 St., Hr. Schweder. Wärmelehre, Hydrostatik, Aërostatik, Wellenlehre und Akustik, mathematisch und experimentell erläutert. Im 2. Sem. 5 St., Hr. Schweder. Die Lehre vom Licht, mathematisch und experimentell erläutert, 2 St. Elemente der Mechanik (Parallelogramm der Kräfte. Gleichgewicht der Kräfte an einem Punkte und an einem System von Punkten. Kräftepaare. Hebel. Schwerpunkts-Bestimmung. Standfestigkeit. Princip der virtuellen Geschwindigkeit. Theorie der einfachsten Maschinen. Gleichförmige und ungleichförmige Bewegung. Fall, Pendel, Wurf, Stoss. Maass der Kräfte. Bewegung der Himmelskörper), 3 St.

Mechanische Technologie. Im 2. Sem. 2 St., Hr. Gottfriedt. Verarbeitung der Metalle, des Holzes, der Faserstoffe u. s. w.

Chemie, 3 St., Hr. Gottfriedt. Im 1. Sem. wurde die anorganische Chemie vorgetragen, im 2. Sem. nach kurzer Repetition darin fortgefahren. Es wurde der Vortrag durchweg mittelst Experimente erläutert und vielfach zu stöchiometrischen Rechnungen Anleitung gegeben.

Geschichte, 2 St., Hr. Maczewski. Neueste Geschichte, angeknüpft an die kurz wiederholte neuere Geschichte der einzelnen Staaten, mit besonderer Berücksichtigung der Erfindungen und Entdeckungen.

Geographie, 2 St., Hr. Maczewski. Handels- und Gewerbs-Geographie von Europa und seinen Staaten, mit besonderer Berücksichtigung Russlands.

Den Schülern orthodox-griechischer Confession wurde der Religions-Unterricht von dem Religionslehrer dieser Confession, Priester Sokolow, in 2 Abtheilungen, zusammen in 4 Stunden wöchentlich, nach dem dafür bestätigten Programm ertheilt. In der ersten Abtheilung wurden die betreffenden Schüler der drei oberen, in der zweiten Abtheilung die betreffenden Schüler der beiden unteren Classen in je 2 Stunden vereinigt.

Ausser dem Cursus wurde Unterricht ertheilt:

im Zeichnen, 6 St., in 2 Abtheilungen, Hr. Clark. 1. Abth. (I u. II comb.), 4 St. Linearzeichnen. (Uebungen in geometrischen Constructionen und im Copiren von Maschinen-Zeichnungen.) Freihandzeichnen (nach Dupuis'schen Holz- und Herdtle'schen Gypsmodellen) in Tusche, Kreide und Blei ausgeführt. 2. Abth. (III), 2 St. Linearzeichnen. (Uebungen in den Anfangsgründen des geometrischen Zeichnens nach vom Lehrer an der Wandtafel gemachten Angaben.) Freihandzeichnen (Contouren);

im Singen, 3 St., in 3 Abtheilungen, Hr. Löbmann. 1. Abth. (I, II, III vereint), 1 St. Vierstimmige Choräle und Motetten. 2. Abth. (IV), 1 St. Zweistimmige Choräle und Lieder. 3. Abth. (V), 1 St. Notenkenntniss, Treff- und Stimmübungen;

im Turnen, 4 St., in 2 Abtheilungen, zu je 2 Stunden, Hr. Meissner. Die erste Abtheilung bildeten die Schüler der I., II., III. Classe, die zweite der IV. und V. Classe. Die Turnübungen selbst bestanden in gymnastischen Uebungen am Turnergeräth, so wie in Frei- und Ordnungsübungen.

Anmerkung. Der den Schülern der obersten Classe in 4 Stunden wöchentlich ausser dem Cursus zu ertheilende Unterricht in den Mercantil-Fächern fiel im verflossenen Jahre aus, weil sich zu demselben kein Schüler gemeldet hatte.

2. Uebersicht der Vertheilung der Unterrichtsfächer im **Cursus** unter die Lehrenden.

	Religion.	Deutsch.	Latein.	Russisch.	Französisch.	Englisch.	Mathematik.	Physik.	Chemie.	Naturbeschreib.	Mechanische Technologie.	Geschichte.	Geographie.	Kaligraphie.	Summa.
Der Director	—	—	III, 5, IV, 4.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9
Lehrer: Helmsing	I, 2, II, 2, III, 3, IV, 3, V, 3.	—	IV, 1.	—	—	—	—	—	—	—	—	IV, 3, V, 2.	—	—	19
" Sokolow, Priester	I, II, III, 2, IV, 2, 2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	(4)
" Gross	—	I, 2, II, 3, III, 3, V, 3, IV, 3, V, 3.	V, 4.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18
" Haller	—	—	—	I, 4, II, 4, III, 4, IV, 4, V, 4.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	21
" Dubois	—	—	—	—	I, 4, II, 4, III, 4, IV, 4, V, 5.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	21
" Rieke	—	—	—	—	—	I, 4, II, 5, IV, 1, V, 1.	—	—	—	—	—	—	IV, 2, V, 3.	—	16
" Gottfried	—	—	—	—	—	—	I, 8, I, 6, II, 6, III, 4, 2, 8, I, 2, II, 7, III, 4.	—	I, 3, I, 3.	—	—	—	—	—	19
" Schweder	—	—	—	—	—	—	I, 8, IV, 3, I, 8, I, 3, V, 3, II, 3, 2, 8, IV, 3, 2, 8, I, 5, V, 3.	—	—	III, 2, IV, 2, V, 2, III, 2, IV, 2, V, 2.	—	—	—	—	(18)
" Maczewski	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	I, 2, II, 3, III, 3, IV, 2, V, 2.	—	—	19
														Summa	160

An der Beaufsichtigung der Schüler in den zwischen dem Vormittags- und Nachmittagsunterrichte liegenden Erholungsstunden, welche zugleich zu gelegentlicher Unterweisung benutzt wurden, theilnahmen sich die Lehrer Schweder, Helmsing, Gross und Rieke in 4 Stunden wöchentlich.

3. *Angabe der bei dem Unterrichte, ausser den im Original gelesenen Autoren, gebrauchten Lehrbücher.*

Für das Lehrfach der Religion: Luther's kleiner Katechismus. Raumer, geistliche Lieder. Kurtz, biblische Geschichte. Kurtz, christliche Religionslehre. Kurtz, Abriss der Kirchengeschichte. — Священная Исторія изд. Мухомомъ. Катихизисъ Митрополита Филарета. — Für das Lehrfach der deutschen Sprache: Göttinger, Anfangsgründe der deutschen Sprachlehre. Göttinger, deutsche Sprachlehre für Schulen. Oltrogge, deutsches Lesebuch, I, II u. III. Schäfer, Grundriss der Geschichte der deutschen Literatur. Kleinpaul, Poetik für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. — Für das Lehrfach der lateinischen Sprache: Meiring, lateinische Grammatik. Ellendt, lateinisches Lesebuch für die untersten Classen der Gymnasien. Siebelis, Tirocinium poeticum. — Für das Lehrfach der russischen Sprache: Голотузовъ, хрестоматія для переводовъ съ Русскаго языка на Немецкій. Черешевичъ, хрестоматія для перевода съ Немецкаго языка на Русскій. Серно-Соловьевичъ, практ. Русская Грамматика. Николичъ, синтаксисъ Русскаго языка, составленный сравнительно съ языкомъ Немецкимъ. Шафрановъ, Русская хрестоматія для употребленія въ училищахъ прибалтійскихъ губерній ч. I. и II. Шафрановъ, собраніе образцовъ Немецкой прозы для упражненія въ переводахъ съ Немецкаго языка на Русскій. Иловайскій, краткіе очерки Русской исторіи. — Für das Lehrfach der französischen Sprache: Margot, cours élémentaire et progressif de langue française. Fränkel, Stufenleiter. Uebungen zum Uebersetzen ins Französische, Cours. II. Fränkel, Anthologie französischer Prosaisten des 18. und 19. Jahrhunderts. Noël et de la Place, leçons francaises de littérature et de morale. Noël et Chapsal, grammaire française. Noël et Chapsal, exercices français sur l'orthographe, la syntaxe et la ponctuation. Bougeault, précis historique et chronologique de la littérature française. — Für das Lehrfach der englischen Sprache: Rothwell, Schulgrammatik der englischen Sprache. Williams, englisches Lese- und Schulbuch. — Für das Lehrfach der Mathematik: Westberg, der kleine Rechner, Lehrstufe I und II. Pahnsch, Arithmetik und Algebra. Meyer Hirsch, Aufgaben-Sammlung für die Algebra. Legendre, Geometrie, Th. I u. II. Wiegand, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. Vega, Logarithmen-Tafeln. Nerling, ebene Trigonometrie. Wiegand, sphärische Trigonometrie. Wiegand, mathematische Geographie. Wiegand, höhere bürgerliche Rechnungsarten. Hechel, analytische Geometrie. Wiegand, algebraische Analysis und Anfangsgründe der Differential-Rechnung. — Für das Lehrfach der Naturwissenschaften: Schilling, kleine Schul-Naturgeschichte. Koppe, Anfangsgründe der Physik für den Unterricht in den oberen Classen der Gymnasien. Stöckhardt, Schule der Chemie. — Für das Lehrfach der Geschichte: Köpert, Geschichts-Cursus für die mittleren Classen der Gymnasien. Dittmar, Weltgeschichte im Umriss. Kiepert, Atlas der alten Welt. — Für das Lehrfach der Geographie: Pütz, Lehrbuch der vergleichenden Erdbeschreibung. Sydow, Schulatlas.

4. *Themata, welche von den Schülern der oberen Classen im Laufe des Jahres in freien Aufsätzen bearbeitet worden sind.*

In Prima. Deutsch: Der siebenzigste Geburtstag (Commentar). — Was verhalf der Messiasde zu ihrem Beifalle? — Ist das Leben ein Traum? — Omnia mea mecum porto (Chrie). — Was besitzt ein Volk in seiner Literatur? — Das Geld. — Was verehrte Göthe an Hans Sachs? — Omne tulit punctum, qui miscuit utile dulci.

Russisch: О значеніи Самозванщины. — Отчего Россія въ сравненіи съ другими государствами отстала въ ходѣ развитія и просвѣщенія? — Янъ Гусъ, предтеча Лютера. — О значеніи пословиць. — Сравненіе стихотвореній Пушкина и Лермонтова: Пророкъ. — Романтизмъ и его значеніе. — О пользѣ знанія химіи въ практической жизни. — Суевѣріе и легковѣріе. — Сравненіе Мильтіада и Фемистокла. — Сравненіе стихотвореній Державина и Пушкина: Памятникъ. — Характеръ Евгенія въ Онегинѣ Пушкина. — Лютеръ и Меланхтонъ, сравненіе. — Сравненіе Русскаго и Французскаго народовъ по характеру. — Вліяніе Петра Великаго на Русскую словесность. — Отчего Англія сдѣлалась морскою державою? — Сравненіе Хемницера съ Крыловымъ.

Französisch, abwechselnd mit einigen die schwierigeren Partien der Syntax betreffenden Stylübungen: Mahomet. — Conquête du Mexique par Fernand Cortez. — Christophe Colomb. — Conquête du Pérou par Pizarre. — Sully et Colbert (parallèle). — Justinien, empereur d'Orient. — Prise de Constantinople par Mahomet II. — Les avantages de l'amitié. — Destruction de Jérusalem, l'an 70 après J. Chr. — Avantages d'une exposition universelle. — La troisième croisade. — Analyse du 1^{er} acte d'Iphigénie. — Les quatre âges de la vie. — Charlemagne (administration intérieure).

Englisch, abwechselnd mit schriftlichen Uebersetzungen aus dem Deutschen: Charles the Bold, Duke of Burgundy. — Frederic Barbarossa. — Peter the Great. — Argument of the first act of Shakspeare's Coriolanus. — The expedition of Xerxes in to Greece. — William the Conqueror. — Cyrus. — The first crusade. — Argument of the first act of Shakspeare's Richard II. — King Henry VIII.

In Secunda. Deutsch: Ueber die Stenographie. — Moses und Muhammed. — Die Macht der Gewohnheit. — Was heisst sein Leben geniessen? — Weshalb nennen wir den Rhein den schönsten Strom Deutschlands? — Auf welche Weise bezeigen wir dem Alter die schuldige Ehrfurcht? — Kleider machen Leute. — Ursachen der Reformation. — Gott begegnet Manchem, wer ihn nur grüssen möchte. — Kann der Selbstmord als Beweis eines vorzüglichen Muthes gelten? — Man lebt nur einmal in der Welt. — Ueber die Kunst des Extemporirens. — Die Kreuzschau (Commentar zum Gedichte von Chamisso). — Im Leid halt aus, im Glück halt ein. — In welcher Beziehung steht das historische Drama zur geschichtlichen Wahrheit? — Warum mangelt den Deutschen das Lustspiel?

Russisch, abwechselnd mit schriftlichen Uebersetzungen aus dem Deutschen: Поездка по желѣзной дорогѣ. — Суворовъ. — Воскресное утро въ деревнѣ. — Причины паденія Рима. — О торговлѣ неграми — невольниками. — Какъ и какія слѣдуетъ читать книги? — Не красна изба углами, а красна пирогами. — Описаніе землетрясенія. — Письмо родителямъ о смерти любимаго товарища. — Троянская война. — Леонидъ, царь Спартанскій. — Разореніе Магдебурга полководцемъ Тилли.

Französisch, abwechselnd mit schriftlichen Uebersetzungen aus dem Deutschen: Tullus Hostilius. — Prise de Rome par les Gaulois. — Guerre contre les Véiens. — Les 306 Fabius. — Le poëte Tyrtée enflamme le courage des Spartiates. — Christophe Colomb à Barcelone. — Bayard et Gaston de Foix. — Pepin le Bref.

In Tertia. Deutsch: Der Wasserfall. — Der Schwan. — Theodorich, König der Ostgothen. — Ein Unglücksfall auf dem Eise. — Schlacht im Teutoburger Walde. — Erklärung

von Synonymen. — Die Natur, ein Tempel Gottes. — Raub der Proserpina (metrisch bearbeitet nach Ovid). — Ein Sommerabend. — Die Erntezeit. — Wer nur dem Magen opfert, vergisst, wo die Sterne stehen. — Erklärung von Synonymen. — Die Gründung Thebens (metrisch bearbeitet nach Ovid). Uebersetzung aus Caesar de bell. Gall. VII, 53 u. 54. — Erklärung des Schillerschen Räthsels: Von Perlen baut sich eine Brücke u. s. w. — Der Apfelbaum, ein Wirth. — Die Freuden des Winters.

5. *Aufgaben, welche den Abiturienten des Gymnasiums bei den Maturitäts-Prüfungen des verflossenen Schuljahres gestellt worden sind.*

Am Schlusse des 1. Semesters.

Im Deutschen und Französischen waren die Abiturienten auf Beschluss der Lehrer-Conferenz von der Prüfung gänzlich dispensirt worden.

Im Russischen: Рудольфъ Габсбургскій.

Im Englischen: Ein Beispiel von Kindesliebe. Uebersetzung aus dem Deutschen ins Englische.

In der Mathematik: 1) $x^2 + 3x + y = 73 - 2xy$; $y^2 + 3y + x = 44$. — 2) Von einem Cylinder ist gegeben das durch einen Achsenschnitt entstehende Rechteck = $570 \square'$. Die Grundfläche des Cylinders beträgt $361 \square'$. Wie gross ist der Inhalt des Cylinders und die gekrümmte Oberfläche des Cylinders? — 3) Den Inhalt einer regelmässigen Pyramide zu berechnen, deren Grundfläche ein regelmässiges Siebeneck ist und deren Seitenkante zur Grundfläche unter einem Winkel von 70° geneigt ist. Die Seite des Siebenecks = $10'$.

Am Schlusse des 2. Semesters.

Im Englischen waren die Abiturienten auf Beschluss der Lehrer-Conferenz von der Prüfung gänzlich dispensirt worden.

Im Deutschen: Worauf haben wir bei der Wahl unseres Berufs zu achten?

Im Russischen: Марія Стюартъ.

Im Französischen: Louis XIV.

In der Mathematik: 1) $x + y + \sqrt{x + y} = 6$; $x^2 + y^2 = 10$. — 2) Wie gross muss der äussere Radius r einer Hohlkugel von Messing sein, die mitten im Wasser schweben, d. h. weder sinken noch steigen soll, wenn die Dicke der Kugelschale $d = 1$ Zoll beträgt und das spezifische Gewicht des Messings $s = 8$ gesetzt wird? r soll in Zollen angegeben werden. — 3) In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Unterschied der spitzen Winkel $d = 69^\circ 13' 20''$ und die kleinere Kathete 22 Fuss. Wie gross sind die Stücke des Dreiecks?

II. Chronik und Statistik der Anstalt.

1. Schulzeit und Schulferien.

Der Unterricht begann im 1. Semester des verflossenen Schuljahres am 10. Januar, nachdem die Anmeldungen zur Aufnahme der neu eintretenden Schüler am 5. und die Prüfung derselben am 7. und 8. Januar stattgefunden hatte und wurde mit der Censur am 18. Juni Nachmittags beschlossen. Die mündliche Prüfung der Abiturienten fand am 7., 8., 11. und 15. Juni und deren förmliche Entlassung am 21. Juni Statt. Im 2. Semester begann der Unterricht, nach vorgängiger Entgegennahme der Anmeldungen und Prüfung der Recipienten, am 3. August und erhielt durch die am 20. December nach dem Vormittags-Unterrichte abgehaltene Censur, der am 22. December die Dimission der nach wohlbestandener Maturitäts-Prüfung zu entlassenden Zöglinge folgte, seinen Abschluss. Die mündliche Maturitäts-Prüfung wurde am 7., 10. und 14. December Nachmittags, die reglements-mässig abzuhaltende Prüfung der Schüler der dritten Classe in der lateinischen Sprache im 1. Sem. am 13. Juni, im 2. Sem. am 15. December Abends veranstaltet. Zu den an die Stelle der öffentlichen Prüfungen getretenen gleichzeitigen Repetitionen in sämmtlichen Classen wurde in dem einen, wie in dem andern Semester die letzte Schulwoche verwandt. Die Osterferien währten, vom Palmsonntag ab, 14 Tage. Ausser den im Kalender angegebenen hohen Kirchen- und Staatsfesten wurde der Unterricht am 17. Mai, als dem herkömmlichen dritten Pfingstfeiertage und am 10. November, als dem Gedächtnisstage Luther's, althergebrachter Sitte gemäss, ausgesetzt und der 19. October zum Gedächtniss der Reformation durch einen besondern Schulact in Gegenwart der Lehrer und der Schüler gefeiert. Am 5. April fiel der Nachmittags-Unterricht aus, weil die Schüler in Veranlassung des für die Rettung Sr. Majestät des Kaisers aus Lebensgefahr abzuhaltenden Dankgebetes in die Kirchen entlassen wurden. Am 28. und 29. October endlich fand in Anlass der Feier der Vermählung Sr. Kaiserlichen Hoheit, des Grossfürsten-Thronfolgers und am 14. November in Veranlassung des Geburtsfestes Ihrer Kaiserlichen Hoheit, der Grossfürstin Cäsarewna Maria Feodorowna kein Unterricht Statt.

2. Lehrpersonal.

Am Schlusse des ersten Semesters schied aus dem Lehrer-Collegium, zu dessen aufrichtigem Bedauern, der stellv. Lehrer der französischen Sprache und Literatur L. Sire, seiner Bitte gemäss, aus dieser amtlichen Function, der er seit dem Anfange des Jahres 1861 mit anerkennenswerthem Eifer, Geschick und seltener Pflichttreue vorgestanden hatte, entlassen. An seine Stelle trat mit dem 1. August d. J. der Oberlehreramts-Candidat L. Dubois. Eine anderweitige Veränderung hat im Lehrpersonal des Gymnasiums während des verflossenen Schuljahres nicht stattgefunden. Es besteht dasselbe, ausser dem Director, wirklichen Staatsrath und Ritter Dr. Ed. Haffner, aus folgenden Lehrern: dem Oberlehreramts-Candidaten, Cand. theol. J. Helmsing, für das Lehrfach der Religion, dem Oberlehreramts-Candidaten, Cand. math. M. Gottfriedt, für das Lehrfach der Mathematik, dem Oberlehreramts-Candidaten, Cand. math. G. Schweder, für das Lehrfach der Naturwissenschaften, dem Oberlehreramts-Candidaten, W.

Maczewski, für das Lehrfach der historischen Wissenschaften, dem Oberlehreramts-Candidaten Dr. R. Gross, für das Lehrfach der deutschen Sprache und Literatur und der lateinischen Sprache, dem Oberlehreramts-Candidaten, Titulairrath C. Haller, für das Lehrfach der russischen Sprache und Literatur, dem Oberlehreramts-Candidaten A. Rieke, für das Lehrfach der englischen Sprache, dem Oberlehreramts-Candidaten L. Dubois, für das Lehrfach der französischen Sprache und Literatur, dem Religionslehrer für die zur orthodox-griechischen Confession gehörigen Schüler, Priester A. Sokolow, dem Lehrer des hiesigen Polytechnicums, J. Clark, für das Linear- und Freihandzeichnen, dem Musikdirector F. Löbmann, für den Unterricht im Gesange, dem Lehrer H. Meissner, für den Unterricht in der Gymnastik.

3. Frequenz.

Die Zahl der Schüler des Gymnasiums betrug in den einzelnen Classen:

am Schlusse des Schuljahres 1865 in Prima 15, Secunda 32, Tertia 44, Quarta 42, Quinta 29 = 162

Im Laufe d. J. 1866 wurden auf-

genommen: „ „ 1, „ 1, „ 5, „ 7, „ 30 = 44

206

gingen ab: „ „ 7, „ 13, „ 14, „ 11, „ 8 = 53

Bestand am Schlusse des Schuljahres 1866 nach stattgehabter

Versetzung: „ „ 19, „ 26, „ 41, „ 41, „ 26 = 153

Versetzt wurden:

am Schlusse des 1. Sem. aus II nach I: 2 am Schlusse des 2. Sem. aus II nach I: 8

„ III „ II: 4 „ III „ II: 13

„ IV „ III: 9 „ IV „ III: 14

„ V „ IV: 12. „ V „ IV: 13.

Nach absolvirtem Schulcursus und wohlbestandener Maturitäts-Prüfung sind dimittirt worden:

am Schlusse des 1. Semesters:

1) Nicolai Johannsohn, aus Riga, evangel.-luth. Conf., 18½ Jahre alt, 4 Jahre

auf dem Gymnasium, 1½ J. in Prima, beabsichtigte die Universität zu Dorpat zu beziehen, um daselbst Mathematik zu studiren.

2) Victor v. Rautenfeld, aus Kurland, orthod.-griech. Conf., 19¾ J. alt, 3½ J. auf

dem Gymnasium, 1½ J. in Prima, beabsichtigte die Universität zu Dorpat zu beziehen, um daselbst Physik zu studiren.

3) Carl Petri, aus Riga, evangel.-luth. Conf., 20½ J. alt, 4½ J. auf dem Gymna-

sium, 2½ J. in Prima, beabsichtigte in das hiesige Polytechnicum einzutreten, um daselbst Agronomie zu studiren.

4) Eduard v. Transehe, aus Livland, evangel.-luth. Conf., 18½ J. alt, 2½ J. auf

dem Gymnasium, 1 J. in Prima, beabsichtigte die Universität zu Dorpat zu beziehen, um daselbst Physik zu studiren.

am Schlusse des 2. Semesters:

- 5) Woldemar Schnakenburg, aus Belosersk, evangel.-luth. Conf., 20½ J. alt, 5 J. im Gymnasium, 1½ J. in Prima, beabsichtigt die Universität zu Dorpat zu beziehen, um daselbst Agronomie zu studiren.
- 6) Jacob Ehmecke, aus Riga, evangel.-luth. Conf., 18½ J. alt, 4 J. im Gymnasium, 1½ J. in Prima, beabsichtigt die Universität zu Dorpat zu beziehen, um daselbst Chemie zu studiren.

Ausser diesen hat sich ein Auswärtiger, Nicolai Kalageorgy, der Maturitäts-Prüfung unterzogen und dieselbe bestanden.

Von den vor Beendigung des Schulcursus abgegangenen 47 Schülern traten 9 in den Comptoirdienst, 7 in ein kaufmännisches Geschäft, 3 in eine Apotheke, 1 in das See-Cadetten-corps, 1 in den Militair-, 1 in den See-, 1 in den Eisenbahn-, 1 in den Telegraphen-Dienst; 4 gingen zur Landwirthschaft, 10 in andere Lehranstalten über (von diesen 7 auf den von Seiten der Anstalt ertheilten Rath); 2 folgten ihren Aeltern ins Ausland, 5 gingen ab, um ihre Schulstudien privatim fortzusetzen, 2 wurden ausgeschlossen.

An dem Unterricht in den ausser dem Cursus gelehrtten Gegenständen nahmen Theil: in den Mercantillfächern — Schüler; im Zeichnen: von den Schülern der drei oberen Classen 75; im Singen: in allen 3 Abtheilungen zusammen 46 Schüler; im Turnen: im Ganzen 160 Schüler.

4. Sammlungen.

Die Bibliothek des Gymnasiums besteht gegenwärtig — Gelegenheitsschriften geringeren Umfangs ungerechnet — aus 1361 Werken in 3497 Bänden. Sie ist auch im verfloßenen Jahre durch den Ankauf von neuen Werken und Fortsetzungen früher angeschaffter Werke (darunter: Lorek, Flora Prussica, Hofmeister, Handbuch der physiologischen Botanik, Hinterberger, Lehrbuch der chemischen Technik, Gorup-Besanez, Lehrbuch der Chemie, Herrmann, Geschichte des russischen Staates, Binder, novus thesaurus adagiorum Latinorum, Journal des Ministeriums der Volks-Aufklärung, Langbein, pädag. Archiv, Schmid, Encyclopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens, Schlömilch, Zeitschr. für Mathematik und Physik, Wackernagel, deutsches Kirchenlied, Baltische Monatsschrift) und durch Geschenke vermehrt worden. Von letzteren gingen namentlich ein aus dem Departement des Ministeriums der Volks-Aufklärung: Матеріалы для исторіи учебныхъ заведеній Минист. Нар. Просв., Матеріалы для исторіи и статистики учебныхъ заведеній Минист. Нар. Просв., Читенія въ обществѣ исторіи и древностей Россійскихъ, Межовъ, литература Русской исторіи, Матеріалы для исторіи образованія въ Россіи въ царствованіи Александра I., Сборникъ распоряженія по Министерству Нар. Просв., Прохоровъ, Христіанскія древности и археологія u. a. m., aus dem Rigaschen Naturforscher-Verein: Wiedemann, Grammatik der Mordwinischen Sprache.

Die bei dem Gymnasium befindlichen Sammlungen mathematischer, physikalischer und chemischer Apparate und Instrumente haben einen Zuwachs von 21 Nummern erfahren (darunter ein Tellurium, ein Winkelspiegel, ein Apparat zur Bestimmung der Leitungsfähigkeit der Metalle für die Wärme, für Wasserzersetzung u. s. w.), so dass die Sammlung der physikalischen Apparate gegenwärtig 228 Nummern, die der chemischen 27 Nummern und die der ma-

thematischen, nach Ausscheidung eines unbrauchbar gewordenen Instruments, 12 Nummern enthält.

Die Naturalien-Sammlung der Anstalt enthält an Mineralien 716 Nummern, an Sämereien 266 Nummern, ein Herbarium von 198 Nummern, an zoologischen Gegenständen 50 Nummern. Einen Zuwachs erhielt letztere Sammlung durch einen Seeigel und 12 ausgestopfte Vögel, welche der Anstalt vom hiesigen Naturforscher-Verein geschenkt wurden.

Ausserdem besitzt die Anstalt 77 naturhistorische Wandtafeln, 3 Globen, 17 Wandcharten; für den Zeichnen-Unterricht den Dupuis'schen Apparat nebst Holz- und Drathmodellen, eine Sammlung von Gypsmodellen, die erforderlichen Vorzeichnungen, Musikalien und Vorderschriften.

Die Sammlung von Schulbüchern, welche armen Schülern auf die Zeit ihres Schulbesuchs verabreicht werden, hat auch im verflossenen Jahre einen Zuwachs erhalten und beläuft sich gegenwärtig auf 362 Werke in 429 Bänden.

Die durch freiwillige Beiträge der Schüler gebildete deutsche Lese-Bibliothek, an welcher sich im 1. Sem. 51 Schüler, im 2. Sem. 45 Schüler betheiligten, enthält 264 Werke in 335 Bänden, die noch im Entstehen begriffene Sammlung von russischen Lesebüchern 21 Werke in 48 Bänden.

5. Freischule und Stipendien.

Von der Zahlung des Schulgeldes — von 28 Rbln. jährlich in den 3 oberen und von 20 Rbln. jährlich in den beiden unteren Classen — sind im Laufe des verflossenen Schuljahres befreit gewesen 33 Schüler, aus den 3 oberen Classen namentlich: F. Berg, A. Hach, E. Ohms, C. Perron, H. Masing, N. Schönfeldt, A. Seyboth, G. Girgensohn, A. Mense, V. Maczewski, G. Kreutzberg, C. Kersten, E. Friederichs; aus den beiden unteren Classen: E. Zahn, E. Mietens, G. Niedermüller, C. Molloth, A. Pirang, A. Francke, W. Weinberg, H. Schönfeldt, N. Suchanow, J. Seyboth, H. Petersohn, E. Baltzer, H. Antonius, W. Nauck, O. Wilde, C. Goodman, J. Levy, E. Weiss, E. Rosengreen, E. Rathmeister. Es ist mithin, da 2 der genannten Schüler aus den oberen und 6 aus den unteren Classen nur ein halbes Jahr in den betreffenden Classen sich befanden, an Schulgeld überhaupt die Summe von 704 Rbln. erlassen worden.

Das von einem Wohledlen Rathe der Stadt in Anlass des 50jährigen Amtsjubiläums des Herrn Bürgermeisters, derzeitigen Präses des Schul-Collegiums u. s. w. C. Chr. Gross gegründete Stipendium wurde den Schülern der II. Classe: E. Ohms, G. Girgensohn und A. Seyboth im Betrage von je 30 Rbln. zu Theil. Der in der Verwaltung des Gymnasiums befindliche Fonds zu dereinstigen Stipendien für hilfsbedürftige Schüler der Anstalt beträgt gegenwärtig in Renten tragenden Documenten 530 Rbl. und in baarem Gelde 4 Rbl. 58 Kop.

6. Verordnungen.

Rescript des Herrn Curators vom 25. Januar, betreffend die von dem Herrn Minister der Volks-Aufklärung für die Lehranstalten zur Richtschnur bestimmte Anleitung über die bei dem Erscheinen der Cholera zu beobachtenden Maassregeln.

Rescript Desselben vom 18. Februar, betreffend Anordnungen des Herrn Ministers der Volks-Aufklärung hinsichtlich der Haltung der Schüler in den Classen und ihren Oberen gegenüber.

Rescript Desselben vom 21. Juni, enthaltend die Mittheilung der auf Grundlage des Allerhöchsten Befehles vom 13. Mai d. J. von dem Herrn Minister der Volks-Aufklärung eingeschärften Principien für die erziehliche Thätigkeit der Schulen.

Rescript Desselben vom 6. August, enthaltend die Vorschrift des Herrn Dirigirenden des Ministeriums der Volks-Aufklärung, Schüler, deren Schulversäumnisse sich als ungerechtfertigt erweisen, in den Lehranstalten nicht zu dulden.

Rescript Desselben vom 11. August, enthaltend die Anordnung, dass die Maturitäts-Prüfung in der russischen Sprache jedesmal abgehalten werden und demnach eine Dispensation von der Prüfung in diesem Fache nicht mehr stattfinden solle.

Rescript Desselben vom 15. September, enthaltend die Anordnung des Herrn Dirigirenden des Ministeriums der Volks-Aufklärung, alle in dem Journal des Ministeriums abgedruckte Circulair-Vorschriften, ohne dass darauf bezügliche besondere Aufträge abgewartet werden, zu erfüllen.

7. *Besondere Ereignisse.*

Im Juni d. J. wurde dem städtischen Gymnasium und sämmtlichen städtischen Elementarschulen, mit Ausnahme der beiden Ilgezeemschen, — die Ehre des Besuchs Sr. Erlaucht, des Herrn Curators des Dorpatschen Lehrbezirks, Grafen Keyserling, zu Theil. In demselben Monat wurde das Gymnasium und das Holtsche Institut von dem Herrn Bezirks-Schulinspector, Staatsrath Schilling, revidirt und betheiligte sich derselbe namentlich an der Maturitäts-Prüfung der Abiturienten des Gymnasiums im Fache der russischen Sprache.

Der Unterricht im nächsten Semester nimmt am 10. Januar seinen Anfang.

Riga, den 22. December 1866.

Director **Haffner.**

