АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ПОЛИМЕРОВ

На правах рукописи

ЧАТЕ Андрис Константинович

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАТИВНОСТИ КОМПОЗИТОВ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ НИХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
старший научный сотрудник,
кандидат технических наук
РИКАРДС Р.Б.

Рига - 1981

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные гладкие и подкрепленные ребрами слоистые оболочки из композитного материала получили широкое применение в различных областях техники. Развитие сверхзвуковой авиации, машиностроения и приборостроения, ракетной техники и ряда других отраслей, где используются данные конструкции, вызвало жизненную необходимость в проведении серьезных научных исследований поведения оболочек при различных воздействиях. Во многих практически важных задачах возникает проблема создания конструкций наименьшего веса при ограничениях на прочность, на устойчивость и при других физических ограничениях. При этом бывает необходимо производить расчет конструкций переменной жесткости, переменной геометрии и с переменными параметрами структуры. Для многослойных оболочек из композитных материалов немаловажным является также вопрос об эффективном методе определения деформативных характеристик, исходя из свойств волокон и матрицы и в зависимости от вида упаковки. Среди большого числа работ, посвященных исследованию слоистых анизотропных ребристых оболочек, сравнительно мало работ, в которых исследование оболочек выполнено с учетом дискретного размещения ребер и с учетом структуры композитного материала. Большинство исследований относится к оболочкам с продольно поперечными ребрами. Практически отсутствуют решения,учитывающие дискретный характер размещения спирально винтовой системы ребер. Поэтому создание универсальных методов, алгоритмов и программ для решения таких задач является важной и актуальной проблемой.

При расчете конструкций из композитных материалов, в частности, оболочек, задачу можно разбить на две части. Первая часть задачи - это определение жесткости (упругих характеристик) композита на основе структурных параметров материала, вторая часть - определение прочности, устойчивости, частот собственных колебаний оболочек. Для решения второй части задачи необходимо сначала решить первую.

Механика композитов основывается на двух различных, дополняющих друг друга, подходов. Первый, традиционный подход, основан на рассмотрении композита как макрооднородного анизотропного материала. С точки зрения такого подхода, поведение материала можно охарактеризовать таким же образом, как и поведение любого другого идеально анизотропного материала, не рассматривая его микроструктуру. Предположение об однородности позволяет применять существующие методы анализа слоистых сред при проектировании многослойных пластинок и элементов оболочек из композита. Так, например, для описания прочности при сложном напряженном состоянии применяются феноменологические теории прочности анизотропных материалов. Однако такой подход не обеспечивает глубокого понимания поведения композита и не позволяет учесть ряд его особенностей. Критический обзор данного направления можно найти в работах [13, 21, 24, 44, 45].

Другое направление представляет собой так называемый микромеханический или структурный подход. Это также феноменологический подход, только на уровне матрицы и волокон. При этом вместо малого объема квазиоднородного композита рассматривают моноволокно арматуры, помещенное в матрицу, имеющую форму прямоугольной призмы. На основе этого нового структурного элемента, зная геометрические параметры, можно определить практически все характеристики композита, исходя из свойств армирующих волокон и матрицы. При этом после решения краевой задачи определения напряжений в структурных элементах для определения прочности композита применяются различные критерии разрушения отдельно для волокон и матрицы. Ряд ранних исследований в области микромеханики был направлен на получение оценок упругих свойств композита [97]. Дальнейшее развитие этого направления позволило теоретически оценить поведение однонаправленно армированного материала. В работе [105] методом конечных элементов (МКЭ) исследовалось упруго-пластическое поведение однонаправленно армированного композита при растяжении вдоль волокон. В работах [74, 76] методом конечных элементов дан численный анализ процесса развития трещин в однонаправленно армированном композите при нагружении перпендикулярно армирующим волокнам. Решение строится с учетом пластических свойств матрицы. В работе [92] получены поверхности прочности композитного материала с учетом температуры. Микромеханический подход при исследовании прочностных свойств композитных материалов также применялся в работах [75, 80, 93, 94]. Однако исследования разрушения при сложном напряженном состоянии, основанные на микромеханическом подходе, практически отсутствуют. Также крайне мало работ, в которых произведено сравнение результатов, полученных расчетным путем, с экспериментальными данными.

Одним из определяющих факторов для оболочек, работающих на устойчивость и в режиме колебаний, является жесткость материала. Для определения жесткости многослойного композита в зависимости от структура армирования используется теория армирования. Общая схема решения в этом случае следующая. Сначала по теории армирования определяется жесткость монослоя, обычно однонаправленно армированного. Затем по теории анизотропных и слоистых пластин и оболочек [6, 7, 15, 26, 27, 40] определяются жесткостные характеристики оболочки. Усредненные жесткости монослоя определяются по формулам теории армирования. Различные подходы к определению усредненных жесткостей композита рассмотрены в работах [15, 20, 33, 51, 63, 64, 96]. Для материалов с анизотропными волокнами определение усредненных характеристик рассматривалось в работах [32, 98, 99, 103]. Для монослоя усредненные характеристики можно получить также из решения пространственной задачи теории упругости с помощью МКЭ [102]. При этом появляется возможность рассматривать различные виды упаковки волокон, волокна различной формы, а также анизотропные волокна и матрицы [57].

Широкое применение для решения задач по определению напряженно-деформированного состояния, устойчивости, динамического поведения конструкций, получил МКЭ. Свою популярность этот метод завоевал не только универсальностью решения, но и возможностью единым образом автоматически подготовить задачу к решению. Основы теории МКЭ достаточно полно изложены в монографиях [36, 50, 62, 65 и др.]. Однако, несмотря на растущую популярность, всеобщее признание и успешные попытки применения для решения широкого класса задач механики сплошной среды, для некоторых задач МКЭ еще не получил должного завершения. В первую очередь, это относится к проблемам анализа тонких оболочек и конструкций, созданных на их основе. Встречающиеся при этом трудности связаны с решением вопросов обеспечения совместности по границам смежных элементов, с аппроксимацией криволинейных поверхностей и с исключением деформаций в криволинейных элементах при смещениях их как жестких тел. Несмотря на большое число публикаций, посвященных применению МКЭ для анализа тонких оболочек, в настоящее время имеются лишь несколько моделей высокоточных искривленных конечных элементов, в которых более или менее корректно решены эти вопросы. Причем используемые элементы чрезвычайно сложны, требуют трудоемкого интегрирования и весьма неудобны при практических расчетах.

Все оболочечные элементы можно разделить на четыре группы:

- оболочечные элементы как совокупность плоских элементов;
- трехмерные оболочечные элементы;
- осесимметричные оболочечные элементы;
- криволинейные оболочечные элементы.

При использовании элементов первой группы предполагается, что поведение непрерывной криволинейной поверхности достаточно точно описывается поведением поверхности, составленной из малых плоских элементов. Из физических соображений следует, что с уменьшением размеров элементов решение должно сходиться, и, как показывает опыт, такая сходимость действительно наблюдается. С помощью элементов именно такого типа были решены практически важные задачи. Существует много работ, посвященных этим проблемам. Так, плоские элементы использованы в работах [36, 82, 87, 108]. Основной недостаток плоских элементов состоит в том, что при их использовании взаимное влияние друг на друга мембранных и изгибных деформаций учитывается только на границе. В связи с этим для получения приемлемого решения необходимо производить достаточно мелкое разбиение области на конечные элементы.

Вторую группу элементов, применяемых для расчета толстостенных конструкций, составляют пространственные изопараметрические элементы с некоторыми упрощающими гипотезами относительно кинематики элемента. Этому направлению посвящены работы [12, 36, 79].

Впервые к решению осесимметричных задач (элементы третьей группы) были приведены в работе [25]. При этом рассматривались простые усеченные конусы. В работах [30, 66, 95] рассматриваются возможности применения различных криволинейных координат. Данному направлению посвящены и работы [73, 109].

При расчете оболочечных конструкций широко применяются криволинейные оболочечные элементы. При этом используются криволинейные координаты, способы введения которых описаны в работах [36, 62]. Несколько вариантов применения таких элементов в форме метода перемещений описано в работах [14, 71, 89, 90, 107]. Один из самых простых способов построения криволинейных оболочечных элементов состоит в использовании теории пологих оболочек [89, 90]. При этом предполагается, что элемент является пологим относительно локальной системы координат в плоскости, проходящей через его узловые точки, а энергия деформации элемента определяется с помощью соответствующих выражений, содержащих производные по координатам в плоскости проекции. В результате можно использовать такие же функции формы, как и для плоских элементов, причем интегрирование проводится в плоскости.

Теоретическое описание треугольного оболочечного элемента с учетом гипотезы Кирхгофа-Лява впервые было дано в работе [84]. Этому направлению посвящены работы [86, 110]. В работах [85, 91, 100, 114] построены различные конечные элементы для произвольных оболочек. Однако при построении элементов с использованием соотношений, основанных на гипотезе Кирхгофа-

Лява, возникает ряд трудностей, связанных с необходимостью обеспечения гладкости аппроксимирующих функций.

Все вышеупомянутые совместные конечные элементы оболочек чрезвычайно сложны, при реализации требуют больших затрат машинного времени и оказываются неэффективными для решения задач, в которых свойства материала меняются скачкообразно. Все эти трудности можно преодолеть, если при построении конечных элементов использовать теорию типа Тимошенко-Рейснера. Этому направлению посвящены работы [I6, 29, 59, 7I] ~~II4, II5]~~.

При расчете оболочек, усиленных ребрами, различают два случая: I) оболочка усилена густо расположенными ребрами жесткости, что позволяет применить метод "размазывания"; 2) ребра жесткости расположены редко, при этом возникает необходимость учета их дискретного расположения. В ранних работах по расчету ребристых оболочек рассматривался первый случай. В более поздних работах уже рассматриваются оболочки, подкрепленные дискретной системой ребер.

Основы теории ребристых оболочек заложены в работах В.З.Власова и А.И.Лурье, которые построили уравнения равновесия продольно подкрепленной цилиндрической оболочки в перемещениях. При этом ребристая оболочка рассматривалась как конструкций, состоящая из соответственно оболочки и подкрепляющих ее одномерных упругих элементов. В.З.Власов учитывал влияние ребер введением в уравнения равновесия обшивки в качестве дополнительных нагрузок реакций ребер, которые затем с использованием уравнений равновесия ребер исключались. А.И.Лурье для вывода уравнений равновесия использовал принцип возможных перемещений.

К настоящему времени известно лишь ограниченное число задач, для которых получены точные аналитические решения. Это задачи определения напряженно-деформированного состояния замкнутой цилиндрической оболочки, усиленной продольными [5, 10, 35] либо кольцевыми [27] ребрами. Для замкнутой круговой оболочки, усиленной продольными ребрами, в наиболее простой форме решение получено в случае граничных условий шарнирного опирания и при условии, что искомые функции можно представить в виде тригонометрических рядов по продольной координате [5]. Решение значительно упрощается при использовании двойных тригонометрических рядов. В этом случае оно сводится к определению точных решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [10, 35]. Необходимо отметить, что для ряда задач, решение которых можно свести к системе обоснованных дифференциальных уравнений конечного порядка с переменными коэффициентами, можно получить практически точные решения на основе метода дискретной ортогонализации. В частности, такие решения получены для оболочек вращения, усиленных кольцевыми ребрами [27]

Для расчета произвольных оболочек с произвольными граничными условиями широко применяется метод конечных разностей [1, 2, 3], а в последнее время и метод конечных элементов [17, 61].

Метод конечных элементов использован в работах [23, 34, 37, 60], где определены напряженно-деформированные состояния различных оболочек как с продольными, так и с поперечными ребрами.

Большой общностью для решения задач деформирования ребристых оболочек обладает подход, основанный на применении импульсных функций, развитый в работе [52].

Одной из основных причин появления ребристых оболочек является их устойчивость под действием различного вида нагрузок. Первыми работами, в которых устойчивость цилиндрических оболочек с кольцевыми ребрами изучалась с учетом их дискретного размещения, являются работы [4, 28]. Позднее появились работы, посвященные устойчивости цилиндрических оболочек, усиленных перекрестной системой ребер. Решение данной проблемы получено на основе энергетического метода и одночленной аппроксимации перемещений в работах [8, 9 и др.] В этих работах было показано, что во многих случаях определяющими являются такие формы волнообразования при потере устойчивости, которые можно описать только с помощью теории, учитывающей дискретное размещение ребер. Точные решения некоторых задач устойчивости ребристых оболочек получены также в работах [18, 19, 41, 47, 112].

Среди работ, посвященных колебаниям ребристых оболочек, весьма значителна доля статей, в которых исследуются колебания цилиндрических оболочек, усиленных кольцевыми или продольными ребрами [31, 42, 111, 113].

Имеется большое число работ, содержащих численное исследование собственных частот колебаний оболочек вращения, усиленных перекрестной системой ребер [43, 48, 67, 78 и др.].

Однако полностью отсутствуют работы, посвященные расчету оболочек со спирально винтовой системой ребер с учетом их дискретного расположения, как по определению напряженно-деформированного состояния, так и по расчету устойчивости и частот собственных колебаний.

Учитывая вышесказанное, в диссертационной работе ставилась следующая цель: на основе метода конечных элементов и метода суперэлементов разработать единый подход к решению задач расчета многослойных ребристых оболочек из композитного материала, включая определение деформативных характеристик по свойствам компонент, полей микронапряжений, а также определение критических нагрузок и частот собственных колебаний по усредненным характеристикам, и создать комплекс программ для решения указанного класса задач.

Основное содержание работы изложено в 4-х главах.

В первой главе предложена методика определения полей микронапряжений однонаправленно и пространственно ортогонально армированного композита. Получены начальные поверхности разрушения композитных материалов, и результаты сопоставлены с экспериментальными данными. Определены упругие характеристики однонаправленно и пространственно ортогонально армированного композита с анизотропными волокнами. Исследовано влияние вида упаковки объемного содержания волокон, степени анизотропии волокон на деформативные свойства композита.

Во второй главе предложен полностью согласованный изопараметрический треугольный конечный элемент для расчета непологих многослойных оболочек произвольной формы, учитывающий поперечный сдвиг и обжатие нормали. Получены матрицы жесткости, инкрементальной жесткости и масс. Исследованы свойства сходимости данного элемента.

Третья глава посвящена расчету цилиндрических оболочек со спирально винтовой системой ребер. Произведены расчеты на устойчивость и определены частоты собственных колебаний. Решена задача оптимизации по весу цилиндрической оболочки со спирально винтовой системой ребер при ограничении на частоту собственных колебаний.

В четвертой главе описан комплекс программ для решения вышеизложенных задач.

Научная новизна работы выявляется в том, что разработан единый подход, основанный на применении метода конечных элементов, для определения начальной поверхности разрушения и деформативных характеристик композитных материалов с линейно и нелинейно упругой матрицей и изотропными или анизотропными волокнами. На основе конечноэлементной дискретизации разработана методика решения задач устойчивости, определения частот собственных колебаний цилиндрических оболочек из композитных материалов со спирально винтовой системой ребер. Для решения данных задач предложен полностью согласованный изопараметрический треугольный конечный элемент произвольных непологих многослойных оболочек, учитывающий деформации поперечного сдвига и обжатие нормали. На основе разработанной методики решен ряд задач, в частности, определены деформативные характеристики и начальные поверхности разрушения композитных материалов, определены критические нагрузки устойчивости и частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек со спирально винтовой системой ребер, проведена весовая оптимизация рассмотренных оболочек при ограничении на низшую частоту собственных колебаний.

Практическая ценность работы заключается в разработке методов и реализации на ЭВМ комплекса программ, предназначенных для решения широкого класса задач по расчету оболочечных конструкций из композитов и решении на основе разработанных методов и комплекса программ ряда практических задач.

Глава I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК И ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В первой главе определены упругие характеристики и начальные поверхности разрушения однонаправленно армированного и пространственно ортогонально армированного композита с учетом анизотропии волокон. Полученные численные решения сопоставлены с другими известными решениями и экспериментальными данными. Для решения задачи использован метод конечного элемента. Полученные результаты использованы в последующих главах при расчете многослойных оболочек из композитного материала.

I.I. Модель материала

При расчете упругих характеристик и определении прочностных свойств композитных материалов композит можно рассматривать как совокупность суперэлементов, имеющих форму параллелепипеда (рис. I.I). Это означает, что композит образуется из геометрически одинаковых элементов (структурный элемент первого уровня), каждый из которых в случае однонаправленно армированного материала (рис.I.2) подвергается одинаковым воздействиям нагрузки. Основные предположения сводятся к следующему: I) компоненты однородные, линейно или нелинейно упругие; 2) армирующие волокна непрерывные; 3) между арматурой и связующим существует жесткое сцепление. В случае пространственно армированных композитов структурные элементы первого уровня (суперэлементы), расположенные по различным направлениям, образуют материал более сложной структуры. Здесь рассматриваются только ортогонально армированные композиты. Предполагается, что волокна в композите прямолинейны и расположены регулярно в двух или трех взаимно ортогональных направлениях. В таком случае можно выделить из композита характерный объем, находящийся вдали от границ тела. Периодичность структуры характерного объема изображена на рис.I.3. Характерный объем

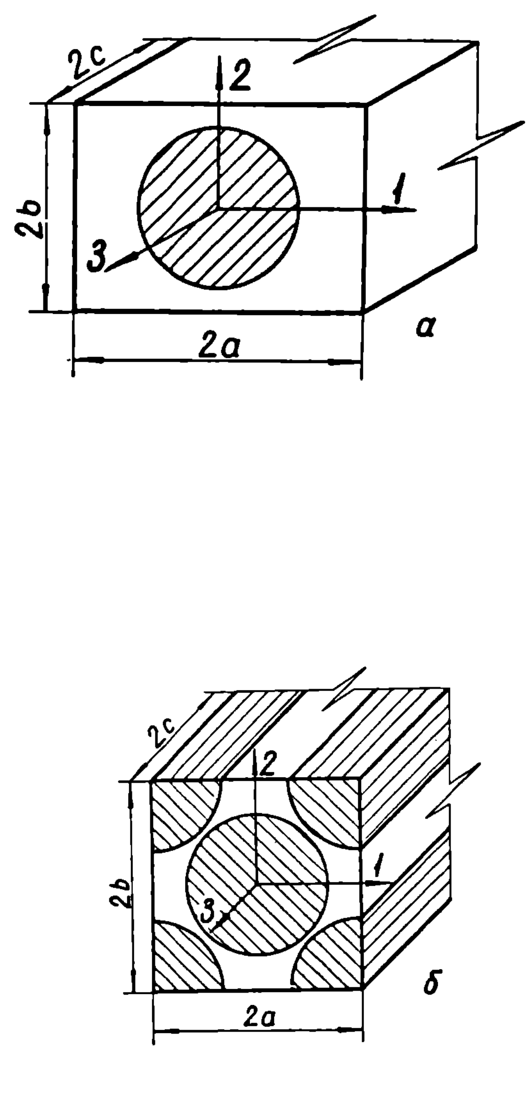
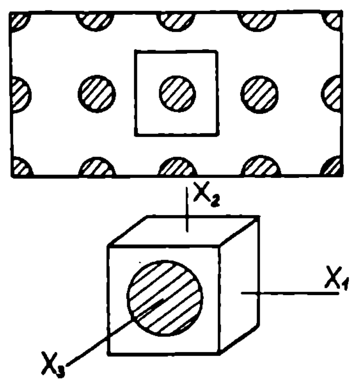
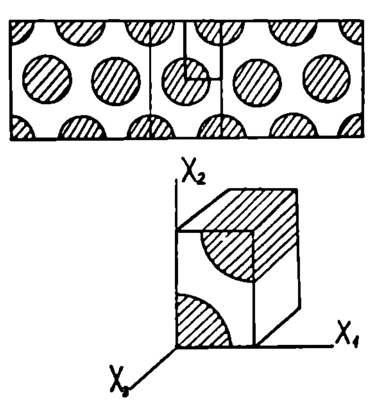


Рис.I.I. Структурный элемент первого уровня (суперэлемент) композита: а - прямоугольная упаковка; б - гексагональная упаковка.

состоит из структурных элементов первого уровня, которые содержат волокно и матрицу или только матрицу. Волокна и матрица - структурные элементы второго уровня.



а



б

Рис.I.2. Характерный объем однонаправленно армированного композита: а - прямоугольная упаковка; б - гексагональная упаковка.

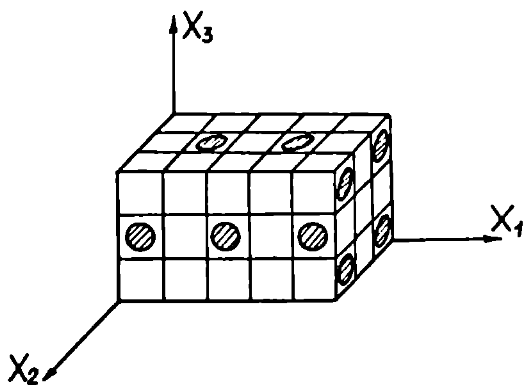


Рис.I.3. Характерный объем пространственно ортогонально армированного композита

I.2. Определение поля микронапряжений в композите.

I.2.I. Поле микронапряжений в структурном элементе первого уровня - линейно упругая задача.

Найдем связь между деформациями суперэлемента и микронапряжениями, микродеформациями в структурных элементах второго уровня. Обозначим через σ_{ij} и s_{ij} соответственно напряжения в суперэлементе (напряжения в структурных элементах второго уровня) и напряжения, усредненные по объему суперэлемента. Соответствующие деформации обозначим через ε_{ij} и e_{ij} . Произвольное пространственное деформирование супералемента можно описать, задав шесть деформированных состояний - три сдвиговых и три одноосных [54,55]. В таблице I.I приведены граничные условия в перемещениях, средние деформации и напряжения структурного элемента первого уровня. Кроме того, на границе волокна и матрицы должны удовлетворяться условия непрерывности перемещений:

$$u_i^a = u_i^m \quad , \qquad i = 1,2,3. \qquad (1.1)$$

Таблица I.I

Деформированное состояние	Граничные условия $x_1 = a$, $x_1 = -a$	$x_2 = b$, $x_2 = -b$	$x_3 = c$, $x_3 = -c$	Деформации e_{ij}	Напряжения σ_{ij}
I	$u_1 = u_1^*$ $u_1 = -u_1^*$	$u_2 = 0$ $u_2 = 0$	$u_3 = 0$ $u_3 = 0$	$e_{11} = \frac{u_1^*}{a}$	$\sigma_{11}^{I}, \sigma_{22}^{I}, \sigma_{33}^{I}$
II	$u_1 = 0$ $u_1 = 0$	$u_2 = u_2^*$ $u_2 = -u_2^*$	$u_3 = 0$ $u_3 = 0$	$e_{22}^{II} = \frac{u_2^*}{b}$	$\sigma_{11}^{II}, \sigma_{22}^{II}, \sigma_{33}^{II}$
III	$u_1 = 0$ $u_1 = 0$	$u_2 = 0$ $u_2 = 0$	$u_3 = u_3^*$ $u_3 = -u_3^*$	$e_{33}^{III} = \frac{u_3^*}{c}$	$\sigma_{11}^{III}, \sigma_{22}^{III}, \sigma_{33}^{III}$
IV	$u_1 = 0$ $u_1 = 0$	$u_2 = 0$ $u_2 = 0$	$u_3 = u_3^*\vert_{x_1=a}$ $u_3 = -u_3^*\vert_{x_1=-a}$	$2e_{13}^{IV} = \frac{u_3^*}{b}$	σ_{13}^{IV}
V	$u_1 = 0$ $u_1 = 0$	$u_2 = 0$ $u_2 = 0$	$u_3 = u_3^*\vert_{x_2=b}$ $u_3 = -u_3^*\vert_{x_2=-b}$	$2e_{23}^{V} = \frac{u_3^*}{a}$	σ_{23}^{V}
VI	$u_1 = u_1^*\vert_{x_2=b}$ $u_1 = -u_1^*\vert_{x_2=-b}$	$u_2 = 0$ $u_2 = 0$	$u_3 = 0$ $u_3 = 0$	$2e_{12}^{VI} = \frac{u_1^*}{b}$	σ_{12}^{VI}

Эти условия выполняются автоматически, так как задача решается в перемещениях. Вследствие симметрии решение задачи, т.е. определение напряженно-деформированного состояния (НДС), можно определить для одного октанта. Так как в I, II, III и УI деформированных состояниях $e_{33} = const$, то эти задачи можно решать как плоские. Для состояний IУ и У единственным отличным от нуля перемещением является u_3, и эти задачи решаются как одномерные. При решении плоской задачи в случае III деформированного состояния, для обеспечения неразрывности перемещений на границе между матрицей и волокном следует приложить дополнительные радиальные силы. Величина дополнительных радиальных сил определена из предположения, что волокно находится в бесконечной, однородной анизотропной среде, с усредненными упругими характеристиками [54].

Как показали расчеты с использованием трехмерных конечных элементов для всех шести деформированных состояний, результаты решения плоской и пространственной задачи практически совпадают в широком диапазоне изменения отношения жесткости волокна и матрицы и объемного содержания волокон. Решение задачи для всех деформированных состояний осуществлялось методом конечного элемента (МКЭ) с применением принципа минимума потенциальной энергии. Для решения плоской задачи использовались известные треугольные элементы постоянной деформации с шестью степенями свободы [36]. Для решения пространственной задачи выведен конечный элемент в виде треугольной призмы, имеющий I8 степеней свободы, с линейной аппроксимацией перемещений. Вариант разбиения структурного элемента на конечные элементы показан на рис.I.4.

Матрицы жесткости элемента получены с помощью соотношения:

$$[K]^e = \int_V [B]^T [D] [B] \, dV , \qquad (I.2)$$

где $[D]$ - матрица упругости; $[B]$ - матрица связи деформаций и перемещений в элементе [36].

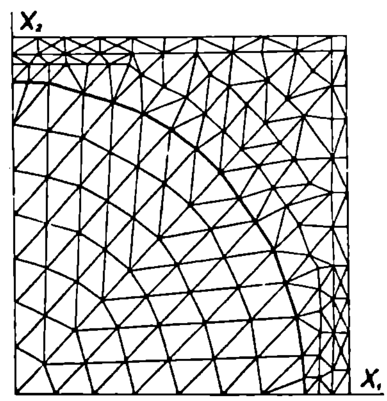


Рис.I.4. Разбиение структурного элемента на конечные элементы.

Используя конечный элемент (I.2), формируем общую матрицу жесткости $[K]$. Далее проблема минимизации функционала, т.е. определение НДС суперэлемента, сводится к решению системы линейных уравнений с ленточной матрицей:

$$[K]\{u\} = \{R\} , \qquad (I.3)$$

где $\{u\}$ - вектор всех узловых перемещений; $\{R\}$ - вектор внешних сил.

Вводя граничные условия, решаем систему (I.3):

$$\{u\} = [K]^{-1}\{R\} . \qquad (I.4)$$

Из узловых перемещений обычным образом получаем деформации и напряжения в конечных элементах в матрице и волокнах и, тем самым, определяем поля микронапряжений σ_{ij} в структурных элементах второго уровня при заданном e_{ij}.

Для нахождения поля микронапряжений в суперэлементе при любом заданном Δ_{ij} существуют два способа:

I. С помощью выражений

$$e_{ij} = q_{ijkl}\,\Delta_{kl} \qquad (\text{I.5})$$

определяются деформации, значения которых подставляются затем в граничные условия. Здесь q_{ijkl} - тензор податливости (методика определения q_{ijkl} и тензора жесткости C_{ijkl} при заданных шести деформационных состояниях дано в § I.4.I).

Далее, решая систему уравнений (I.3), используя известные соотношения МКЭ [36], можно получить σ_{ij} в элементах второго уровня.

2. Используя соотношения

$$\{\sigma\} = [A]\{\Delta\} \qquad (\text{I.6})$$

Здесь $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$ - напряжения в элементе второго уровня; $\{\Delta\}^T = \{\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{13}, \Delta_{12}\}$ - заданное напряженное состояние суперэлемента; $[A]$ - матрицы размером 6 x 6, отражающие связь между напряжениями, усредненными по ооъему суперэлемента (макронапряжениями), и напряжениями в суперэлементе (микронапряжениями) для каждого конечного элемента.

Для каждого конечного элемента можно установить следующую зависимость:

$$[\Sigma] = [A][\Omega] \qquad (\text{I.7})$$

Здесь $[\Sigma]$ - матрица размером 6 x 6, компонентами которой являются микронапряжения в элементе для всех деформационных состояний; $[\Omega]$ - матрица размером 6 х 6, компонентами которой являются макронапряжения для всех шести деформационных состояний. Из (I.7) находим значение матрицы $[A]$.

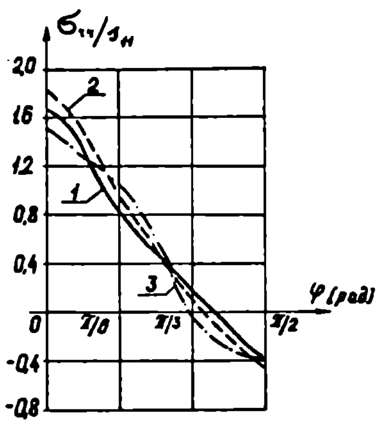
$$[A]=[\Sigma][\Omega]^{-1} \qquad (I.8)$$

Подставляя (I.8) в (I.6), получаем окончательное соотношение между микронапряжениями в элементе (напряжениями в элементах второго уровня) и макронапряжениями (напряжениями элемента первого уровня) для произвольного напряженного состояния:

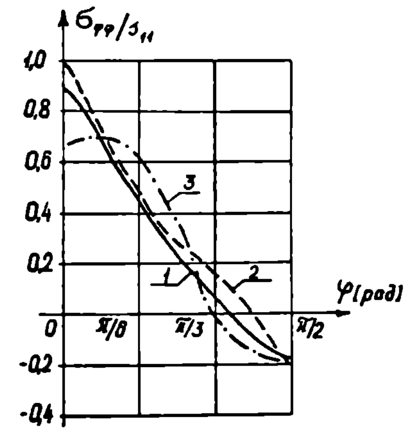
$$\{\sigma\} = [\Sigma_1][\Omega]^{-1}\{\Delta\} \qquad (I.9)$$

Таким образом формула (I.9) дает величины напряжений в элементах второго уровня при произвольном напряженном состоянии суперэлемента.

На рис.I.5 а, б (кривые I) показано распределение нормальных напряжений в радиальном σ_{rr} (рис.I.5 а) и окружном $\sigma_{\varphi\varphi}$ (рис.I.5 б) направлениях на границе волокна и матрицы для стеклоэпоксидного композита при действии на него растягивающего напряжения Δ_{11}. Исходные данные: E_a = 7·I0^4 МПа; ν_a = 0,20; E_m = 3,5·I0^3 МПа, ν_m = 0,34; $\mu = V_a / V_K$ = = 0,55. Здесь E_a, E_m, ν_a, ν_m - модули упругости и коэффициенты Пуассона волокон и матрицы соответственно, μ - объемное содержание волокон в суперэлементе. На рис.I.5 показаны также напряжения, полученные из решения задачи по методу конечных разностей [77] (кривые 2) и по аналитическому методу, использующему разложение функции напряжений в ряды Фурье (кривая 3) [80].



а



б

Рис.I.5. Распределение нормальных напряжений в радиальном (а) и окружном (б) направлениях.

I.2.2. Поля микронапряжений в структурном элементе первого уровня - нелинейно упругая задача.

В предыдущем параграфе поля напряжений в композите найдены методом конечного элемента в предположении, что связь для обоих компонентов подчиняется закону Гука. Однако у большинства полимерных матриц преобладают нелинейно-упругие деформации, особенно при действии сжимающих или касательных напряжений. На рис.I.6 представлена типичная диаграмма растяжения и сжатия для эпоксидной матрицы. При сжатии материала до разрушения имеются значительные неупругие деформации. При растяжении большинство термореактивных смол ведет себя хрупко. Отклонение диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ от линейности наблюдается лишь при напряжениях, близких к разрушающим. Ясно, что учет нелинейности может привести к значительным поправкам НДС в компонентах. Различные задачи неупругого поведения рассматривались в работах [81, 93, 94, 105]. Но эти модели предполагают одинаковые диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ при растяжении и сжатии и не могут быть использованы для полимерных матриц.

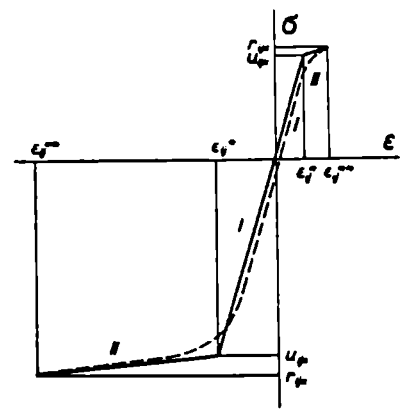


Рис.I.6. Кривая деформирования полимерной матрицы.

Рассмотрим случай простого нагружения, когда диаграмма деформирования полимерной матрицы аппроксимируется тремя линейными участками (рис.I.6). Для любого количества участков алгоритм решения в принципе такой же. Через σ_{ij}^{*} , ε_{ij}^{*} обозначим величины напряжений и деформаций, при которых достигается предел пропорциональности, через σ_{ij}^{**} , ε_{ij}^{**} - при которых происходит разрушение материала.

Для описания поверхности предела пропорциональности используется уравнение [54]:

$$\Psi(I_1, I_2, I_3) \equiv u_1 I_2^{\frac{1}{2}} + u_2 I_1 + u_3 I_2^{-\frac{1}{2}} I_1^2 + u_4 I_2^{-1} I_1^3 + \tag{I.10}$$
$$+ u_5 I_2^{-1} I_3 + u_6 I_2^{-\frac{3}{2}} I_1 I_3 + u_7 I_2^{-\frac{3}{2}} I_1^4 - 1 = 0 .$$

Здесь $I_1 = \sigma_{ii}$; $I_2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij}$; $I_3 = \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}$ - инварианты тензора напряжений; u_i - константы, определяющиеся из значений пределов пропорциональности u_{ijk} [45].

Поверхность прочности в пространстве главных напряжений описывается таким же уравнением, но с другими константами:

$$\varphi(I_1, I_2, I_3) \equiv K_1 I_2^{\frac{1}{2}} + K_2 I_1 + K_3 I_2^{-\frac{1}{2}} I_1^2 + K_4 I_2^{-1} I_1^3 + \\ + K_5 I_2^{-1} I_3 + K_6 I_2^{-\frac{3}{2}} I_1 I_3 + K_7 I_2^{-\frac{3}{2}} I_1^4 - 1 = 0. \qquad (\text{I.II})$$

Здесь K_i - константы, определяющиеся из характерных прочностей r_{ijk} [45].

На рис.I.7 представлены сечения плоскостью $\sigma_3 = 0$ поверхности $\psi = 0$ (кривая I) и поверхности прочности $\varphi = 0$ (кривая 2) со следующими константами материала:

$$\{u\} = \{20100;\ -10530;\ -1950;\ 3660;\ 8650;\ -1270;\ 800\}\ 1/\text{МПа};$$
$$\{K\} = \{13650;\ -5100;\ -2880;\ 2000;\ 7270;\ 1850;\ -120\}\ 1/\text{МПа}. \qquad (\text{I.I2})$$

Деформирование материала описывается следующим образом. Если $\psi \leq 0$ (I этап деформирования), то полимерная матрица работает линейно-упруго и деформирование подчиняется закону Гука с константами E_m^{I}, ν_m^{I}. Если $\psi = 0$, то достигнуты напряжения σ_{ij}^{*} предела пропорциональности и начинается II этап деформирования. На втором этапе при $\psi > 0$ и $\varphi < 0$ связь между приращениями напряжений $\Delta\sigma_{ij}$ и деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}$ также линейна и закон деформирования имеет вид:

$$\{\sigma\} = [D]_{II}\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_*\}\right) + \{\sigma_*\}, \qquad (\text{I.I3})$$

где $\{\sigma\}$ и $\{\varepsilon\}$ – текущие значения напряжений и деформаций при условии, что $\psi > 0$.

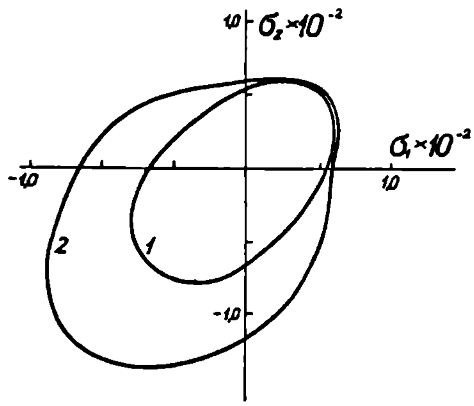


Рис.I.7. Поверхности предела пропорциональности и прочности полимерной матрицы.

Таким образом деформирование полимерной матрицы характеризуется константами: E_m^{I} , ν_m^{I} , E_m^{II} , ν_m^{II} и функцией ψ (I_1, I_2, I_3).

Для подсчета микронапряжений используется МКЭ. Алгоритм решения сводится к следующему.

I. При заданных граничных условиях решается линейно-упругая задача с константами I этапа. Для полимерной матрицы имеем уравнение $\{\sigma\} = [D]_I \{\varepsilon\}$, где $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ – полные напряжения и деформации в конечном элементе; $[D]_I$ – матрица упругости с константами I этапа.

2. При заданном макронапряженном состоянии $\{s\}$ находятся элементы, в которых выполняется условие $\psi = 0$. Это означает, что в данных элементах достигнут предел пропорциональности и, тем самым, определены макронапряжения $\{s_*\}$ и макродеформации $\{e_*\}$.

3. Достигнутые на I этапе в этих элементах деформации и напряжения рассматриваются как начальные для II этапа деформирования элемента. Затем вычисляются обусловленные начальными деформациями и напряжениями силы, которые в узлах элементов добавляются к внешним. Силы в узлах элемента, обусловленные начальными деформациями $\{\varepsilon_*\}$, определяются следующим образом [36]:

$$\{F\}^e_{\varepsilon_*} = -\int_V [B]^T [D]_{II} \{\varepsilon_*\}\, dV = \tag{I.14}$$
$$= \int_V [B]^T [D]_{II} [B]\, dV \{\delta_*\}^e = -[K]^e_{II} \{\delta_*\}^e .$$

Здесь $[K]^e_{II}$ – матрица жесткости элемента с константами материала II этапа; $\{\delta_*\}^e$ – достигнутые в конце I этапа перемещения в узлах элемента; $[B]$ – матрица связи деформаций и перемещений. Силы в узлах элемента, обусловленные начальными напряжениями $\{\sigma_*\}$:

$$\{F\}^e_{\sigma_*} = \int_V [B]^T \{\sigma_*\}\, dV = [K]^e_I \{\delta_*\}^e . \tag{I.15}$$

Здесь $[K]^e_I$ – матрица жесткости элемента с константами материала I этапа.

4. Далее задается приращение макродеформаций $\Delta\{e\}$ = $= 0{,}02 \div 0{,}05 \{e_*\}$, т.е. перемещений $\Delta\{\delta\}$ на границах элементарного блока [ ]. Следует отметить, что дальнейшее нагружение таково, что макродеформации меняются пропорционально $\{e\}$. В то же время из-за нелинейных деформаций матрицы макронапряжения $\{\Lambda\}$ уже не меняются пропорционально. Для достижения пропорционального изменения макронапряжений необходимо на каждом шаге приращений построить еще один процесс итераций для отыскания такого приращения макродеформаций $\Delta\{e\}$, которое сохраняет

пропорциональный путь нагружения в пространстве макронапряжений.

Для определения полных перемещений $\{\delta\}$ после приращения макродеформаций на $\Delta\{e\}$ имеем следующую систему линейных уравнений:

$$[K]_{II}\{\delta\} + \{F\}_{\varepsilon_*} + \{F\}_{\sigma_*} - \{R\} = 0 \tag{I.16}$$

$$\text{или} \quad [K]_{II}\{\delta\} = \{Q\}.$$

Здесь $[K]_{II} = \sum [K]^c_{II}$ - матрица жесткости всей системы, которая получается обычным образом - путем объединения узловых сил в ансамбль; $\{F\}_{\varepsilon_*} = \sum \{F\}^e_{\varepsilon_*}$ и $\{F\}_{\sigma_*} = \sum \{F\}^c_{\sigma_*}$ - суммарные силы в узлах, обусловленные начальными деформациями и напряжениями в элементах; $\{R\}$ - внешние силы в узлах системы; $\{Q\} = \{R\} - \{F\}_{\varepsilon_*} - \{F\}_{\sigma_*}$ - суммарные силы в узлах системы. Отметим, что матрицу $[K]_{II}$ нет необходимости формировать заново, так как в ней изменяются только строки, соответствующие узлам, к которым примыкают элементы, переходящие с I этапа деформирования на II. В связи с этим систему (I.16) для второго и дальнейших шагов удобно решать не прямым, а итерационным методом, используя в качестве начальных приближений перемещения на предыдущем шаге. Для решения системы (I.16) использован метод релаксации. При первом обращении матрицы на I этапе использовался метод исключения Гаусса. Перемещения определялись из решения системы (I.16)

5. Величина напряжений в конечных элементах определяется следующим образом. Для элементов, которые еще работают на I этапе деформирования, напряжения подсчитываются из перемещений, используя матрицу упругости с константами I этапа:

$$\{\sigma\} = [D]_I [B]\{\delta\}. \tag{I.17}$$

Для элементов, работающих на II этапе деформирования, из (I.13), используя перемещения $\{\delta_*\}$, которые были в узлах данного элемента в конце I этапа, когда он переключался на II этап деформирования, имеем:

$$\{\sigma\} = [D]_{II}[B](\{\delta\} - \{\delta_*\}) + [D]_I [B]\{\delta_*\} = \\ = \Delta\{\sigma\} + \{\sigma_*\}. \qquad (I.18)$$

Здесь $\{\sigma_*\}$ - напряжения в элементе, когда в нем был достигнут предел пропорциональности; $\Delta\{\sigma\}$ - приращение напряжений в элементе из-за неупругих деформаций.

6. По напряжениям (I.17) и (I.18) проверяется условие прочности (I.I) для всех элементов в полимерной матрице. Проверка прочности для конечных элементов, которые находятся в волокне, производится по условию Мизеса. Если для какого то элемента $\varphi \geqslant 0$, это свидетельствует о начале разрушения в матрице. Соответствующие макронапряжения $\{\Lambda_{**}\}$ и макродеформации характеризуют точку в пространстве напряжений или деформаций, когда наступает начальное разрушение. Рассматривая различные простые пути нагружения, можно, таким образом построить начальную поверхность прочности композита с учетом нелинейного деформирования матрицы.

Если $\varphi < 0$ для всех конечных элементов в матрице и не нарушено условие прочности Мизеса для элементов в волокне, то происходит переход к пункту 2 и устанавливаются элементы, перешедшие на II этап деформирования, т.е. в которых $\psi \geqslant 0$.

I.2.3. Поля микронапряжений в пространственно-ортогонально армированном композите.

Суперэлемент рассматривается как конечный элемент с усредненной жесткостью, связь между напряжениями и деформациями которого дает соотношение

$$\{\sigma\} = [D]\{e\} \qquad (I.19)$$

Здесь $[D]$ - матрица жесткости материала размером 6 x 6; $\{\sigma\}$, $\{e\}$ - векторы размером 6 x I, напряжений и деформаций.

В качестве узловых выбираем угловые точки структурного элемента первого уровня. В каждом узле имеем три перемещения, т.е. суперэлемент имеет 24 степени свободы. Трилинейная аппроксимация перемещений внутри элемента стандартным образом позволяет получить [36] выражения для перемещений через узловые перемещения

$$\{u\} = [IN_1, IN_2, \quad , IN_8]\{\delta\}^e \qquad (I.20)$$

Здесь $\{u\}^T = \{u, v, w\}$ - вектор перемещений произвольной точки структурного элемента первого уровня; $\{\delta\}^e$ - вектор узловых перемещений размером 24 x I; I - единичная матрица размером 3 x 3; N_1 , N_2 , ..., N_8 - функции формы суперэлемента [36]. Подставляя выражение (I.20) в соотношения Коши для деформаций, получаем

$$\{e\} = [B]\{\delta\}^e. \qquad (I.21)$$

Здесь $[B]$ - матрица связи деформаций в элементе и узловых перемещений размером 6 x 24. Из формул (I.19) и (I.21) получаем напряжения в суперэлементе:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e. \qquad (I.22)$$

Матрицу жесткости $[K]^e$ размером 24 х 24 получаем выражением (I.2).

Далее при заданной геометрии упаковки волокон решаем задачи деформирования для характерного объема композита V_K (рис.I.2).

Для ортогональной упаковки волокон локальная система координат суперэлемента совпадает с глобальной системой координат для композита. В зависимости от направления волокна в суперэлементе меняются лишь усредненные жесткости суперэлемента в глобальной системе координат. Для суперэлементов, содержащих только матрицу, используется матрица жесткости изотропного материала с константами упругости матрицы E_m , ν_m . Стандартным образом объединив суперэлементы в ансамбль [36], приходим к системе уравнений (I.3). Решая задачу (I.3) для шести деформированных состояний (граничные условия на границах характерного объема аналогичны условиям, поставленным на границах суперэлемента), получаем перемещения (I.4) в зависимости от деформаций композита E_{ij}^{A} (A - деформированное состояние). Из выражений (I.4), (I.2I) и (I.22) получаем деформации $\{e\}$ и напряжения $\{\sigma\}$ в структурных элементах первого уровня для шести деформированных состояний, что позволяет определить тензор жесткости A_{ijkl} и тензор податливости a_{ijkl} для композита (методика определения A_{ijkl} дана в § I.4.2). Связь между произвольными деформациями характерного объема E_{ij} и усредненными по характерному объему напряжениями композита S_{ij} может быть представлена следующим образом:

$$S_{ij} = A_{ijkl} E_{kl} ; \qquad (I.23)$$

$$E_{ij} = a_{ijkl} S_{kl} . \qquad (I.24)$$

Методика определения микронапряжений в структурных элементах второго уровня σ_{ij} при заданных макронапряжениях S_{ij} следующая:

I. Из формулы (I.24) при заданном S_{ij} находятся деформации характерного объема композита

$$\{E\} = [a]\{S\} \qquad (\text{I.25})$$

Здесь $\{E\}^T = \{E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{23}, 2E_{13}, 2E_{12}\}$ – матрица деформаций композита; $[a]$ – матрица податливости композита; $\{S\}$ – матрица напряжений.

2. Определяются перемещения на границах характерного ообема, соответствующие деформациям (I.25).

3. При соответствующих граничных условиях решается объемная задача (I.4) и определяются перемещения в каждом узле всех структурных элементов первого уровня (суперэлементов).

4. По формуле (I.22) определяются средние напряжения всех суперэлементов.

5. Используя формулу (I.9), определяются микронапряжения структурных элементов второго уровня.

Предложенная методика будет использоваться далее при решении задачи по определению начальной поверхности прочности, где необходимо найти связь между заданными макронапряжениями S_{ij} композита и микронапряжениями в структурных элементах второго уровня σ_{ij} .

I.3. Начальная поверхность разрушения композитных материалов.

I.3.I. Однонаправленно армированный композит.

Задача по определению начальной поверхности разрушения, очевидно, распадается на две части – определение поля микронапряжений в компонентах (см. § I.2.I) и анализ прочности армирующих волокон и связующего. Для определения поверхности прочности композита необходимо установить, в какой точке композита появляется начальное разрушение. Для полимерного связующего имеем условия (I.10) и (I.11) с константами (I.12) [54]. В качестве условия разрушения волокон используем критерий Мизеса:

$$\frac{3}{2} I_{2\sigma} = \left(\bar{\tau}_{100}\right)^2 \tag{I.26}$$

Здесь $\bar{\tau}_{100}$ – прочность волокон на растяжение; $I_{2\sigma} = S_{ij} S_{ij}$ – второй инвариант девиатора напряжений; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} p$ – девиатор напряжений; $p = \sigma_{ii}$ – гидростатическое давление.

Построение поверхности прочности производилось следующим образом. В шестимерном пространстве напряжений s_{ij} с помощью одного параметра ρ задавалось напряженное состояние:

$$\begin{aligned}
s_{11} &= \rho \cos \varphi_5 ; \\
s_{22} &= \rho \sin \varphi_5 \cos \varphi_4 ; \\
s_{33} &= \rho \sin \varphi_5 \sin \varphi_4 \cos \varphi_3 ; \\
s_{12} &= \rho \sin \varphi_5 \sin \varphi_4 \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 ; \\
s_{13} &= \rho \sin \varphi_5 \sin \varphi_4 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 , \\
s_{23} &= \rho \sin \varphi_5 \sin \varphi_4 \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1
\end{aligned} \tag{I.27}$$

(отметим, что при рассмотрении однонаправленно армированного композита $\{S\} = \{s\}$, где $\{S\}$ – средние напряжения характерного объема композита). Здесь φ_K – углы, характеризующие положение ρ в пространстве s_{ij}. При заданных φ_K выражения (I.27) подставлялись в (I.9), а соотношения (I.9) для конечных элементов, находящихся в волокне, в свою очередь – в условия (I.26), а для элементов, находящихся в связующем – в условия (I.10), (I.11). Методика определения поля микронапряжения σ_{ij} в зависимости от s_{ij} дана в § I.2.I. Для каждого элемента определялась величина ρ^*, при которой происходит разрушение в этой точке. Из всех ρ^* выбиралось минимальное значение ρ^*_{min}, что определяло величину макронапряжений, при которых в суперэлементе появляется первая микротрещина. На рис. I.8 показаны различные сечения поверхности предела пропорциональности (I) и поверхности прочности (2) по линейно-упругому анализу, со следующими характеристиками жесткости компонентов: E_a = I.I0^5 МПа; ν_a = 0,2; E_m = 3,5·I0^3 МПа; ν_m = 0,35. Объемный коэффициент армирования μ = 0,6. Кружками на всех рисунках отмечены экспериментальные значения прочности однонаправленно армированного стеклоэпоксидного композита [70]. Точки при растяжении волокон соответствуют величине напряжения, при котором в образце начинается фотонная эмиссия, указывающая на начало разрушения. Напряжения даны в МПа. Элементарный блок структурного элемента был разделен на 260 треугольных конечных элементов постоянной деформации. Количество узловых точек равно I52. Анализ напряженного состояния в компонентах показал, что наиболее нагруженным местом в композите является граница между волокнами и матрицей. На рис. I.9 показаны линии уровня главных напряжений σ_k и функции φ, характеризующей нагруженность точки при сжатии поперек волокон, когда в опасной точке достигнут предел прочности. Главное направление напряжения σ_3 совпадает с направлением волокна, главные напряжения σ_1 и σ_2 действуют в плоскости $x_1 \sim x_2$. Главные направления напряжений σ_1 и σ_2 меняются от элемента к элементу, так как сдвиговое напряжение σ_{12} меняется в зависимости от координат. Цифрами на линиях уровня главных напряжений указана величина их отношения к макронапряжению S_{11}^{**}

Далее приводим результаты расчета деформирования до начала разрушения для стеклоэпоксидного композита по нелинейно упругому

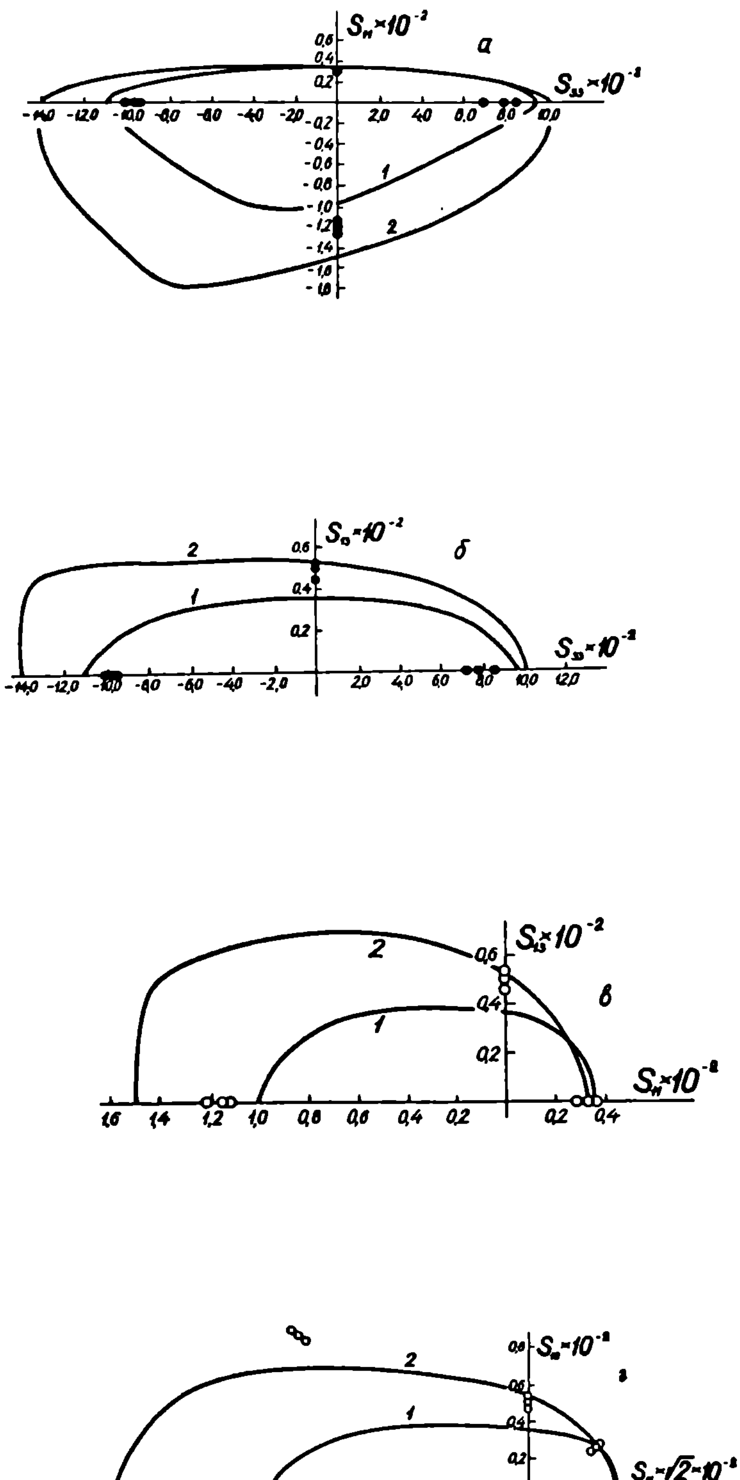


Рис.I.8. Сечения поверхностей предела пропорциональности и прочности композита плоскостями $S_{13} = 0$ (а), $S_{11} = 0$ (б), $S_{33} = 0$ (в), $S_{11} - S_{33} = 0$

анализу со следующими характеристиками композита: $E_a = 1\cdot10^5$ МПа; $\nu_a = 0,2$; $E_m = 3,5\cdot10^3$ МПа; $\nu_m^{I} = 0,35$; $\nu_m^{II+} = 0,3$; $\nu_m^{II-} = 0,4$; $G_m^{I} = 4,45$ МПа. Здесь ν_m^{II+}, ν_m^{II-} – коэффициенты Пуассона при растяжении и сжатии на втором этапе деформирования. Экспериментально установлено, что для термореактивных смол коэффициент Пуассона при растяжении уменьшается, а при сжатии увеличивается.

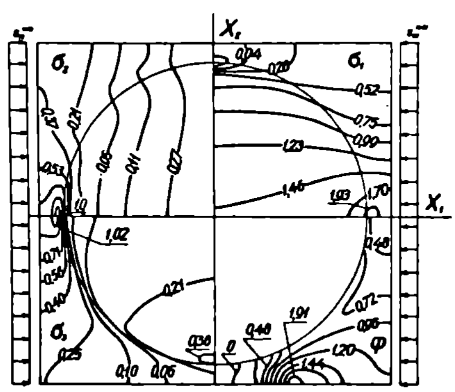


Рис.1.9. Линии уровня главных напряжений и напряженности в момент начала разрушения.

Рассмотрим нагружение композита при двухосном сжатии поперек волокон $S_{11} = S_{22} \neq 0$. Методика определения поля микронапряжений при нелинейно упругом анализе дано в § 1.2.2. На рис. 1.10 показано развитие нелинейно-упругих зон в матрице до начала разрушения. На рисунках последовательно изображены случаи $\{e\} = 1,05\{e_*\}$ $1,4\{e_*\}$, $2,3\{e_*\}$. При последнем значении деформации начинается разрушение в матрице. Места начала разрушения обозначены двойной штриховкой. Соответствующие макронапряжения $S_{11}^{**} = S_{22}^{**} = -401,2$МПа. Отметим, что по линейно-упругому расчету получаем $S_{11}^{**} = S_{22}^{**} =$ $= -278,0$ МПа.

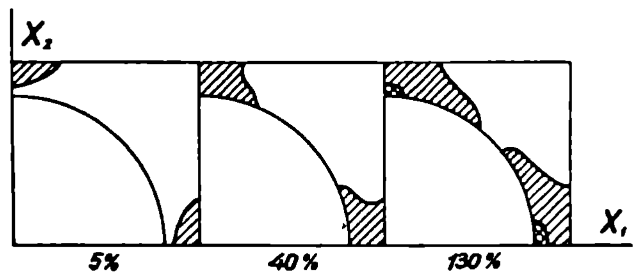


Рис.I.IO. Развитие нелинейно-упругих зон в матрице

На рис. I.II изображены сечения в плоскости $S_{11} \sim S_{22}$ поверхности предела пропорциональности (кривая I), поверхности прочности по линейно-упругому анализу (кривая 2) и по нелинейно-упругому анализу (кривая 3). Видим, что при напряженных состояниях сжатия учет нелинейности заметно изменяет поверхности прочности.

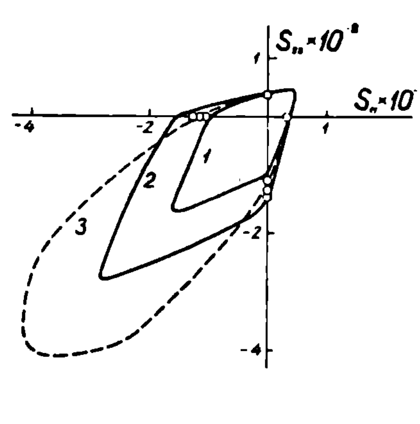


Рис.I.II. Сечения поверхностей предела пропорциональности и прочности композита плоскостью $S_{33} = 0$.

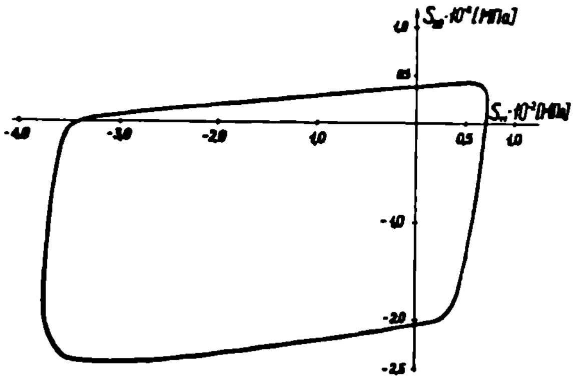
Величину нелинейно-упругого деформирования полимерной матрицы характеризует расстояние между поверхностью предела пропорциональности и поверхностью прочности. При растягивающих напряжениях обе поверхности почти совпадают, т.е. имеет место хрупкое разрушение, и анализ микронапряженного состояния можно провести, используя закон Гука. В то же время при сжимающих напряжениях поверхность прочности, полученная из неупругого анализа, значительно отличается от поверхности, полученной из линейно-упругого анализа.

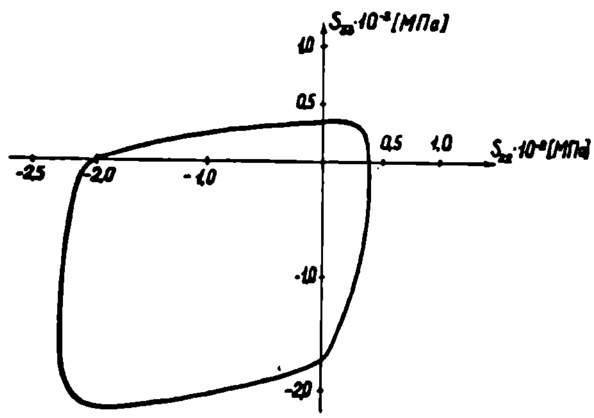
I.3.2. Пространственно ортогонально армированный композит. Сравнение с экспериментом

Для характерного объема композита V_K в шестимерном пространстве напряжение S_{ij} задается радиус-вектором ρ и пятью углами φ_K, характеризующими положение ρ в пространстве S_{ij}:

$$
\begin{aligned}
S_{11} &= \rho \cos\varphi_5 ; \\
S_{22} &= \rho \sin\varphi_5 \cos\varphi_4 ; \\
S_{33} &= \rho \sin\varphi_5 \sin\varphi_4 \cos\varphi_3 ; \\
S_{12} &= \rho \sin\varphi_5 \sin\varphi_4 \sin\varphi_3 \cos\varphi_2 ; \\
S_{13} &= \rho \sin\varphi_5 \sin\varphi_4 \sin\varphi_3 \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 ; \\
S_{23} &= \rho \sin\varphi_5 \sin\varphi_4 \sin\varphi_3 \sin\varphi_2 \sin\varphi_1
\end{aligned}
\qquad (I.28)
$$

При заданном φ_K по условию (I.26) для структурных элементов второго уровня, находящихся в волокне, и по условию (I.II) для элементов в матрице проверяется условие прочности для конечных элементов второго уровня всех суперэлементов. Методика определения поля микронапряжений σ_{ij} в зависимости от S_{ij}' дана в





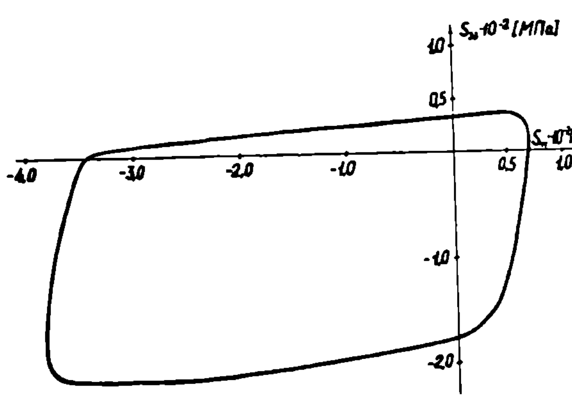


Рис.I.I2. Начальные поверхности разрушения трехмерно армированного композита (соотношение числа волокон 4:3:2).

§ I.2.3. Наименьшее ρ^*_{min} показывает величину макронапряжений композита S_{ij}, при которой начинается разрушение. На рис. I.12 показаны различные сечения начальной поверхности разрушения трехмерно армированного стеклоэпоксидного композита, при соотношении числа волокон в направлениях X_1, X_2 и X_3 - 4.3.2. В данном случае в качестве характерного объема можно выделить повторяющуюся структуру, изображенную на рис.I.2. На рис.I.13 показана теоретическая поверхность начального разрушения, полученная по предложенной методике, и экспериментальные результаты [69] (обозначены Δ), где начальное разрушение в компонентах связано с началом фотоэмиссии. Видно, что поверхность начального разрушения,полученная по МКЭ, хорошо согласуется с началом появления фотоэмиссии в материале. Были использованы следующие исходные данные: соотношение числа волокон в направлениях X_1, X_2 и X_3 - I:2:0; объемный коэффициент армирования μ = 0,6; E_a = 10^5 МПа; ν_a = = 0,21; прочность при растяжении волокон $\bar{\tau}_{100}$ = $3{,}7 \cdot 10^3$ МПа; E_m = = $3{,}5 \cdot 10^3$ МПа; ν_m = 0,35.

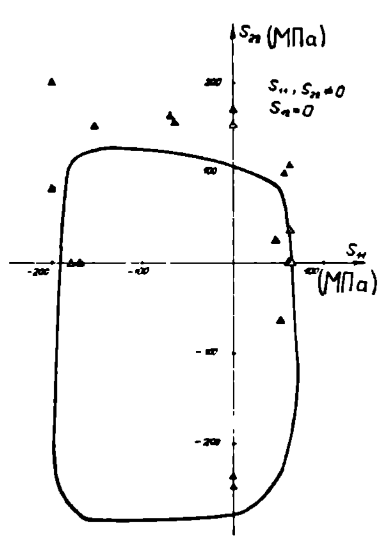


Рис.I.13. Теоретическая поверхность начала разрушения при S_{12} = 0

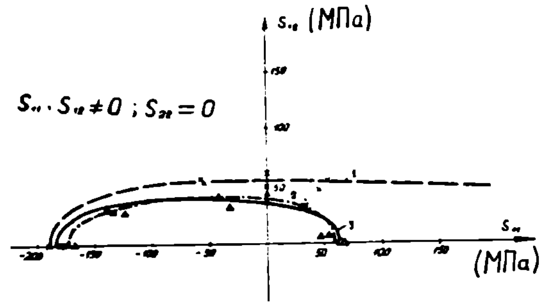


Рис.I.14. Экспериментальные поверхности разрушающих напряжений (I), напряжений, соответствующих появлению фотоэмиссии (2), теоретическая кривая начала разрушения (3) при $S_{22} = 0$

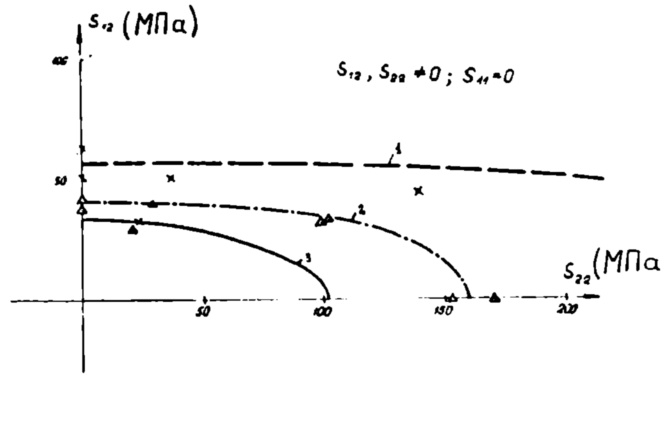


Рис.I.15. Экспериментальные поверхности разрушающих напряжений (I), напряжений, соответствующих появлению фотоэмиссии (2), теоретическая кривая начала разрушения (3) при $S_{11} = 0$

Сравнение теоретических и экспериментальных кривых дано также на рис.I.14 и I.15, где показаны экспериментальные поверхности разрушающих напряжений (кривая I), напряжений, соответствующих появлению фотоэмиссии (кривая 2), теоретическая поверхность, полученная МКЭ (кривая 3), экспериментальные значения разрушающих напряжений (X) и значения, соответствующие появлению механолюминисценции (Δ). Как видно, получено хорошее соответствие теоретического расчета с экспериментом. Отметим,что на рисунках I.13, I.14, I.15 поверхности получены при $S_{13} = 0$; $S_{23} = 0$; $S_{33} = 0$.

I.4. Упругие характеристики композита

Определение деформированных характеристик композитных материалов является одной из основных задач теории армирования. Для ее решения используются различные подходы, обзор и анализ которых даны в работах [33, 45, 101, 103]. При определении связи между полями макро- и микронапряжений усредненные деформативные характеристики композита получаются как промежуточный результат.

I.4.I. Упругие свойства однонаправленно армированного композита с анизотропными волокнами.

Выше были определены поля микронапряжений σ_{ij} и поля микродеформации ε_{ij} для шести деформированных состояний. Далее определим компоненты тензора жесткости C_{ijkl} суперэлемента.

Обозначим макродеформации суперэлемента во всех деформированных состояниях через e_{ij}, а соответствующие макронапряжения - через s_{ij}. Тогда энергия деформации характерного объема, рассматриваемого как макрооднородное тело, будет:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int\limits_V s_{ij}\, e_{ij}\, dV = \frac{1}{2}\int\limits_V C_{ijkl}\, e_{ij}\, e_{kl}\, dV \qquad (\text{I.29})$$

С другой стороны, для всех шести деформационных состояний по МКЭ определено поле микронапряжений и микродеформаций в компонентах. Соответствующая энергия деформации характерного объема в этом случае может быть получена из зависимости

$$\mathcal{U}^* = \frac{1}{2}\int\limits_V \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}\, dV \qquad (\text{I.30})$$

Приравнивая энергию деформации $\mathcal{U}^*$ структурного элемента, рассматриваемого как неоднородное тело, к энергии деформации структурного элемента, рассматриваемого как макрооднородное тело,можно получить упругие характеристики композита. Из условия $\mathcal{U} = \mathcal{U}^*$ получаем систему уравнений для определения усредненных жесткостей:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} C_{1111} \left(e_{11}^{I}\right)^2 = \mathcal{U}_{I}^{*};\\
&\frac{1}{2} C_{3333} \left(e_{33}^{III}\right)^2 = \mathcal{U}_{III}^{*};\\
&\frac{1}{2} \left[C_{1111} \left(e_{11}^{I}\right)^2 + 2 C_{1122}\, e_{11}^{I}\, e_{22}^{II} + C_{2222} \left(e_{22}^{II}\right)^2\right] = \mathcal{U}_{I+II}^{*};\\
&\frac{1}{2} \left[C_{1111} \left(e_{11}^{I}\right)^2 + 2 C_{1133}\, e_{11}^{I}\, e_{33}^{III} + C_{3333} \left(e_{33}^{III}\right)^2\right] = \mathcal{U}_{I+III}^{*},\\
&2\, C_{1313} \left(e_{13}^{IV}\right)^2 = \mathcal{U}_{IV}^{*};\\
&2\, C_{2323} \left(e_{23}^{V}\right)^2 = \mathcal{U}_{V}^{*},\\
&2\, C_{1212} \left(e_{12}^{VI}\right)^2 = \mathcal{U}_{VI}^{*}.
\end{aligned} \qquad (\text{I.31})$$

Здесь $U_A^* = \frac{1}{2}\int\limits_V \sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^A dV$ – энергия деформаций структурного элемента первого уровня в состоянии A (при этом структурный элемент рассматривается как неоднородное тело);

$$U_{A+B}^* = U_A^* + U_B^* + \frac{1}{2}\int\limits_V \sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B dV + \frac{1}{2}\int\limits_V \sigma_{ij}^B \varepsilon_{ij}^A dV -$$

энергия деформаций при совместной воздействии состояния A и состояния B .

Решая систему (I.31), находим C_{ijkl} и тензор податливости q_{ijkl} . Если B_{ij} (i , j = 1,2, ...6) – матрица податливости, то компоненты B_{ij} связаны с техническими постоянными соотношениями:

$$E_j = \frac{1}{B_{jj}} \; (j = 1,2,3) \quad , \quad \nu_{1i} = -\frac{B_{1i}}{B_{ii}} \; (i = 2,3) \, ,$$

$$\nu_{23} = -\frac{B_{23}}{B_{33}} \quad , \quad G_{23} = \frac{1}{B_{44}} \, ;$$

$$G_{13} = \frac{1}{B_{55}} \quad , \quad G_{12} = \frac{1}{B_{66}} \, ,$$

где E_j , ν_{ij} , G_{ij} – соответственно модули упругости, коэффициенты Пуассона и модули сдвига для суперэлемента.

Если матрица композита линейно-упругая и изотропная, то ее жесткость характеризует модуль упругости E_m и коэффициент Пуассона ν_m . Для описания линейно-упругих ортотропных с цилиндрической симметрией волокон необходимо девять упругих постоянных: E_z^a , E_r^a, E_Q^a , ν_{rQ}^a, ν_{zr}^a , ν_{Qz}^a , G_{rz}^a, G_{Qz}^a , G_{Qr}^a (z , r , Q – цилиндрические координаты, связанные с осями симметрии волокна).

Упругие характеристики композита определяем, используя вышеизложенную методику. Для получения матрицы жесткости элемента, находящегося в матрице, используем соотношение

$$[K]_m^e = \iint\limits_S [B]^T [D] [B] \, dx\,dy \, , \qquad (\text{I.32})$$

где S – площадь конечного элемента; $[D]$ – матрица упругости для плоского деформированного состояния; $[B]$ – матрица связи деформаций и перемещений в элементе [36].

Для конечного элемента, находящегося в волокне, имеем соотношение

$$[K]_a^e = \iint_S [B]^T [T] [D'] [T]^T [B] \cdot dx\,dy \qquad (I.33)$$

где $[D']$ – матрица упругости в осях $1'2'$ (рис.I.16); $[T]$ – матрица трансформации.

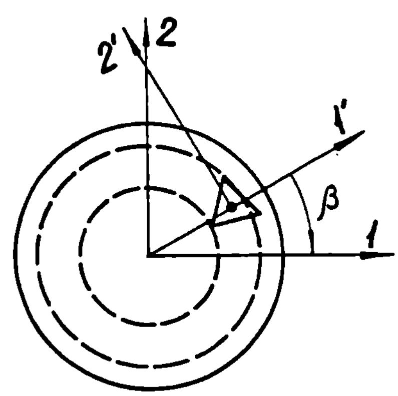


Рис.I.16. Локальная и общая системы координат для конечного элемента в волокне

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \sin^2\beta & -2\sin\beta\cos\beta \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 2\sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & -\sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta - \sin^2\beta \end{bmatrix}$$

Здесь β - угол между основной системой координат и локальной, связанной с осями симметрии волокна. В осях $1'2'$ конечный элемент в волокне ортотропен, и его матрица упругости для плоского деформированного состояния будет:

$$[\mathcal{D}'] = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{1'1'} & \mathcal{D}_{1'2'} & 0 \\ \mathcal{D}_{1'2'} & \mathcal{D}_{2'2'} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_{6'6'} \end{bmatrix}$$

где

$$\mathcal{D}_{1'1'} = \frac{\beta_{2'2'}}{\gamma}, \qquad \mathcal{D}_{2'2'} = \frac{\beta_{1'1'}}{\gamma},$$

$$\mathcal{D}_{1'2'} = \frac{\beta_{1'2'}}{\gamma}, \qquad \mathcal{D}_{6'6'} = G_{1'2'},$$

$$\gamma = \beta_{1'1'}\beta_{2'2'} - \beta_{1'2'}^2 .$$

Здесь $\beta_{i'j'}$ - компоненты матрицы упругости для плоской деформации

$$\beta_{1'1'} = a_{1'1'} - \frac{a_{1'3'}^2}{a_{3'3'}}; \quad \beta_{1'2'} = a_{1'2'} - \frac{a_{1'3'}\,a_{2'3'}}{a_{3'3'}},$$

$$\beta_{2'2'} = a_{2'2'} - \frac{a_{2'3'}^2}{a_{3'3'}} \qquad (\text{I}.34)$$

В соотношениях (I.34) $a_{i'j'}$ - компоненты матрицы податливости в локальной системе координат:

$$a_{1'1'} = \frac{1}{E_r^a}; \quad a_{2'2'} = \frac{1}{E_\theta^a}, \quad a_{3'3'} = \frac{1}{E_z^a},$$

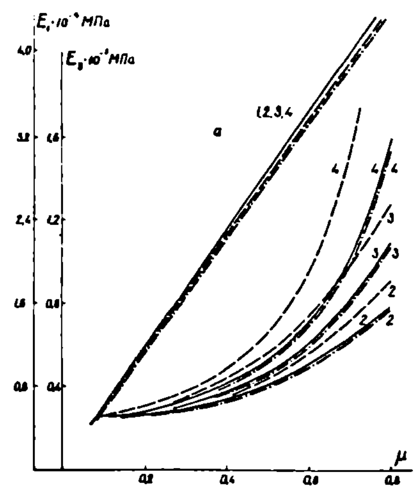
$$a_{1'2'} = -\frac{\nu^a_{rQ}}{E^a_r}\ ;\quad a_{2'3'} = -\frac{\nu^a_{Qz}}{E^a_Q}\ ;\quad a_{1'3'} = -\frac{\nu^a_{rz}}{E^a_r}\ .$$

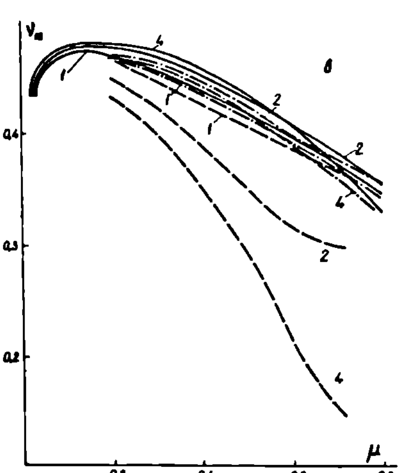
Рассмотрим примеры расчета, где проведен анализ влияния анизотропии волокна на упругие свойства однонаправленно армированного композита (суперэлемента) при гексагональной и квадратичной упаковке волокон при различной степени анизотропии волокон и их объемного содержания. В связи с отсутствием полных экспериментальных данных по упругим свойствам угле- или органоволокон принималось, что они трансверсально-изотропны с цилиндрической симметрией и их анизотропия характеризуется пятью константами: $E^a_r = E^a_Q$; $G^a_{rz} = G^a_{Qz}$; ν^a_{Qr} ; E^a_z ; $\nu^a_{zr} = \nu^a_{Qz}$. При численном решении были приняты следующие значения упругих констант углеродных волокон и эпоксидной матрицы: $E^a_z = 2{,}8\cdot 10^5$ МПа; $E_m = 3{,}5\cdot 10^3$ МПа; $\nu_m = 0{,}34$; $\nu^a_{zr} = 0{,}25$; $\nu^a_{rQ} = 0{,}30$; $G^a_{rz} = 4{,}7\cdot 10^4$ МПа (I.35)

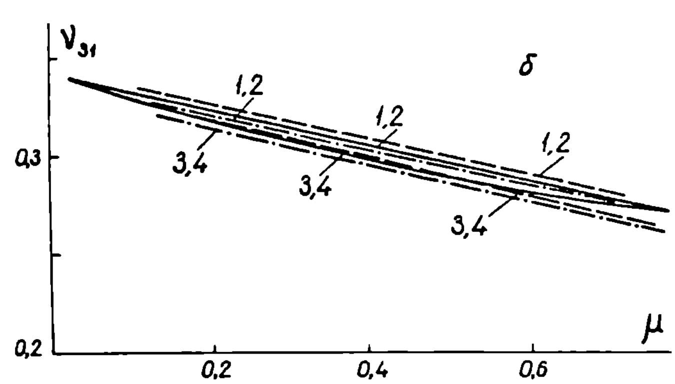
На рис. I.17 изображены зависимости всех шести упругих констант материала от объемного коэффициента армирования μ с разной анизотропией волокон, т.е. при различных соотношениях радиального,продольного модулей упругости волокна ($K = E^a_r/E^a_z$). Отметим, что для гексагональной упаковки (класс симметрии среды $\mathcal{D}_6$) существует всего пять независимых компонент тензора упругости, а трансверсальный модуль сдвига определяется по зависимости $G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$. Для квадратичной упаковки (класс симметрии среды $\mathcal{D}_4$) имеем шесть линейно независимых компонент тензора упругости.

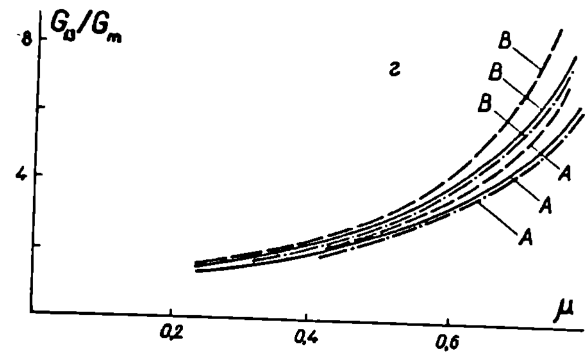
На рис.I.17 штрихпунктирные линии соответствуют гексагональной упаковке волокон, штриховые - квадратичной упаковке волокон, кривые I, 2, 3, 4 - значениям коэффициента анизотропии $K = 0{,}02$, 0,I, 0,2, 0,8. На рис.I.I7 кривые А и В соответствуют соотношению модулей продольного сдвига волокна и модуля сдвига матрицы $m = G^a_{tz}/G_m$ = 20 и 80. Вычисления упругих констант проведены в диапазоне изменения объемного содержания волокон μ = 0,2÷0,7 с шагом $\Delta\mu$ = 0,I. Для сравнения сплошными линиями на рис.I.I7 показаны результаты работ [98, 103], полученные из решения плоской задачи в рядах Фурье для гексагональной упаковки. Из анализа кривых видно, что решения по методу конечных элементов и в рядах Фурье практически совпадают для модулей E_1 и E_3, модулей сдвига G_{13} и G_{12} и продольного коэффициента Пуассона ν_{31}. Решение по МКЭ для поперечного коэффициента Пуассона ν_{12} дает значение примерно на 3 - 5% ниже, чем значение ν_{12} из решения в рядах Фурье. Сравнение результатов для квадратичной (класс симметрии среды D_4) и гексагональной (класс симметрии среды D_6) упаковок показало, что продольный модуль упругости E_3 совпадает в обоих случаях, поперечный модуль упругости E_1 значительно больше при квадратичной упаковке, продольный коэффициент Пуассона ν_{31} совпадает в обоих случаях, поперечный коэффициент Пуассона ν_{12} значительно меньше для квадратичной упаковки и продольный модуль сдвига G_{13} больше при квадратичной упаковке.

На рис. I.I8 отражено влияние степени анизотропии волокна на упругие свойства композита. Кривые I, 2, 3, 4 соответствуют объемному содержанию волокон μ = 0,I84, 0,326, 0,5I0 и 0,655 соответственно. Графики на рис. I.I8 построены при исходных данных (I.35), кроме коэффициентов Пуассона: ν^a_{zr} = 0,25; $\nu^a_{r\theta}$ = = 0,25 (см. рис.3.3 а); ν^a_{zr} = 0,2; $\nu^a_{r\theta}$ = 0,25 (см. рис.I.I8б). Из анализа кривых видим, что в диапазоне изменения степени анизотропии волокна K = 0,05 - 0,I (это соответствует диапазону изменения степени анизотропии различных марок углеволокон) вид упаковки волокон мало влияет на значение поперечного модуля упругости.


а
1,2,3,4
μ
0,2
0,4
0,6
0,8


в
0,4
0,3
0,2
μ
0,2
0,4
0,6
0,8


ν_{31}
б
1,2
3,4
0,3
0,2
μ
0,2
0,4
0,6



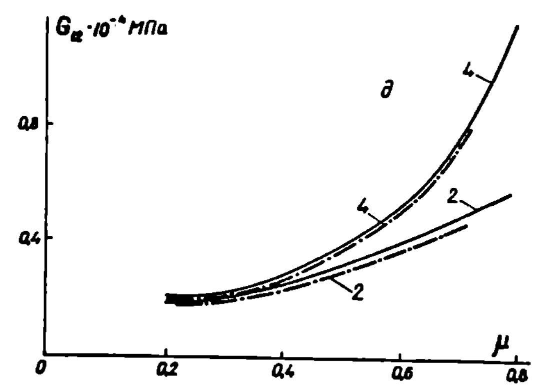
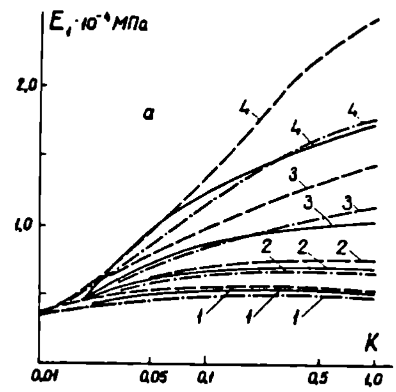


Рис.I.I7. Зависимость упругих констант композита от объемного содержания при различной степени анизотропии волокон: а - продольный (E_3) и поперечный (E_1) модули упругости; б,в - продольный (ν_{31}) и поперечный (ν_{12}) коэффициенты Пуассона; г,д - продольный (G_{13}) и поперечный (G_{12}) модули сдвига.



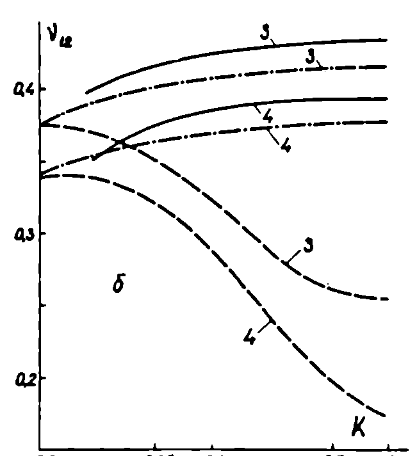


Рис.I.18. Зависимость упругих констант от степени анизотропии материала $K = E_r^a / E_z^a$
а – поперечный модуль упругости E_1 ;
б – поперечный коэффициент Пуассона ν_{12}

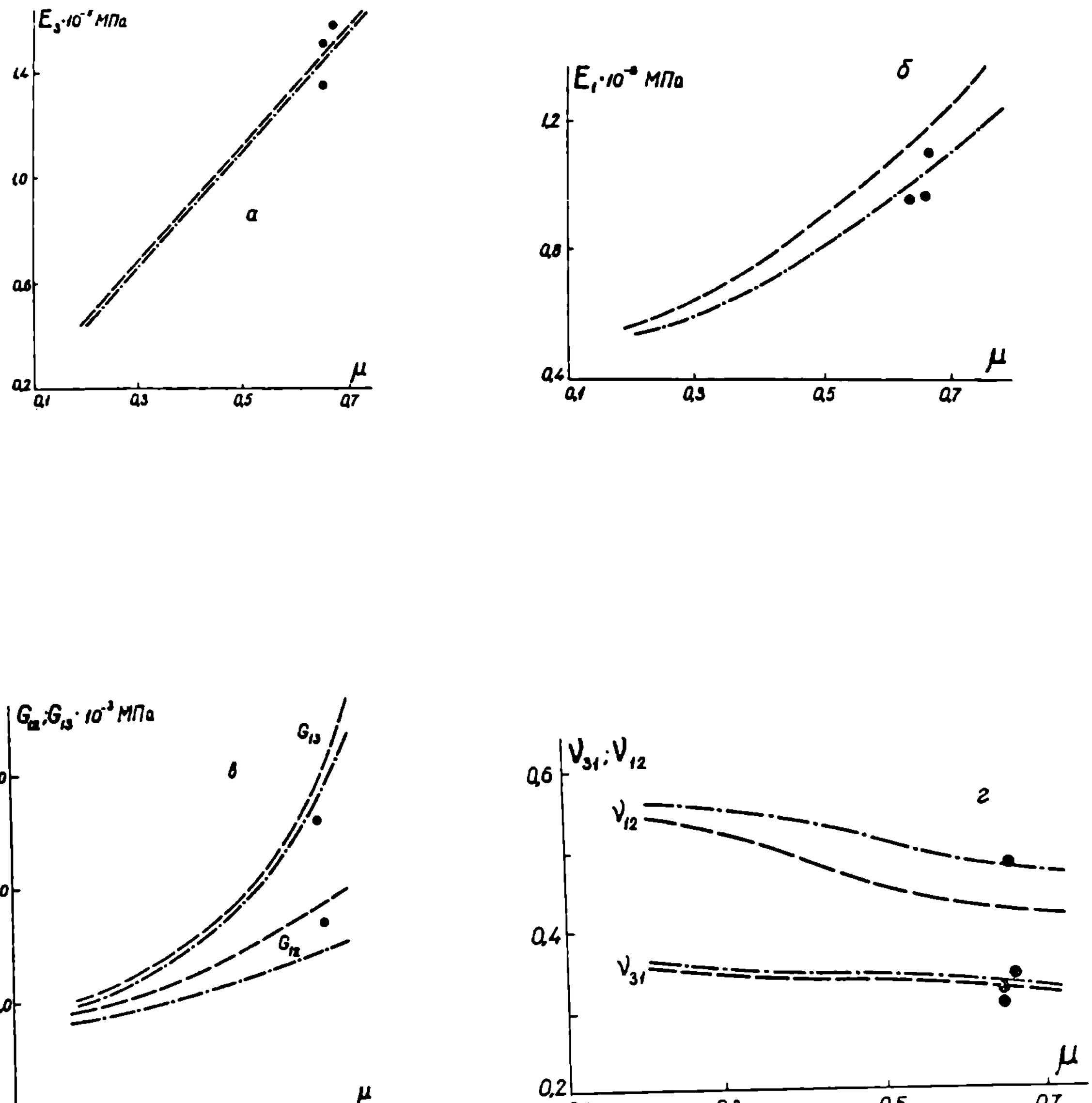


Рис. I.19. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов для углеэпоксидного композита: а,б – продольный (E_3) и поперечный (E_1) модули упругости; в – продольный модуль сдвига G_{13} ; г – коэффициенты Пуассона ν_{31} и ν_{12} .

В этом же диапазоне степени анизотропии волокон вид упаковки значительно влияет на величину поперечного коэффициента Пуассона.

Далее на рис.I.19 приведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов упругих свойств углеэпоксидного композита со следующими характеристиками жесткости углеволокон и матрицы [99]: $E_z^a = 2{,}28\cdot 10^5$ МПа; $E_r^a = 2{,}06\cdot 10^4$ МПа; $\nu_{r\theta}^a = 0{,}42$; $\nu_{zr}^a = 0{,}3$; $G_{zr}^a = 4{,}7\cdot 10^4$ МПа; $E_m = 3{,}5\cdot 10^4$ МПа; $\nu_m = 0{,}38$.

Проведены расчеты для квадратичной и гексагональной упаковок. Из анализа результатов следует, что данные эксперимента для поперечного модуля упругости E_1, модуля сдвига G_{13} и коэффициента Пуассона ν_{12} лучше согласуются с расчетными при гексагональной упаковке волокон. Экспериментальное значение поперечного модуля сдвига G_{12} находится между расчетными для квадратичной и гексагональной упаковок.

I.4.2. Упругие свойства пространственно ортогонально армированного композита.

Методика получения усредненных напряжений $\{\mathfrak{s}\}$ и деформации $\{e\}$ для всех суперэлементов характерного объема композита изложена в § I.2.3.

Имея $\{\mathfrak{s}\}$ и $\{e\}$, в суперэлементах для шести деформированных состояний путем приравнивания энергии деформации характерного объема композита, рассматриваемого как макрооднородное тело, к энергии деформации композита, состоящего из структурных элементов первого уровня, нетрудно получить усредненную жесткость композита

$$\frac{1}{2}\int_V A_{ijkl}\,E_{ij}E_{kl}\,dV=\frac{1}{2}\int_V \mathfrak{s}_{ij}\,e_{ij}\,dV\,, \qquad (\text{I.36})$$

где E_{ij} - деформации характерного объема композита; A_{ijkl} - тензор жесткости композита.

Результаты для двумерно армированного материала с симметричным расположением слоев находятся в первых двух строках табл.1.2, где a : b : c обозначает соотношение числа волокон в направлениях x_1, x_2, x_3 (рис.1.2). Были приняты следующие исходные характеристики составляющих материалов: E_a = $1\cdot10^5$ МПа, ν_a = = 0,21, E_m = 3500 МПа; ν_m = 0,35.

Таблица 1.2

Соотношение числа волокон	μ	$E_1\times10^{-3}$ МПа	$E_2\times10^{-3}$ МПа	$E_3\times10^{-3}$ МПа	$G_{13}\times10^{-3}$ МПа	$G_{23}\times10^{-3}$ МПа	$G_{12}\times10^{-3}$ МПа	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}
1:1:0	0,6	39,1 / 39,1	39,1 / 39,1	16,9 / 16,8	6,7 / 8,1	6,7 / 8,1	4,5 / 9,8	0,100 / 0,108	0,272 / 0,272	0,272 / 0,272
2:1:0	0,6	46,6 / 46,6	31,5 / 31,5	16,8 / 16,8	6,4 / 8,7	5,7 / 7,6	7,7 / 9,8	0,130 / 0,134	0,270 / 0,273	0,270 / 0,273
4:3:2	0,465	33,8	22,5	19,8	6,7	4,7	4,4	0,170	0,199	0,203
1:1:1	0,450	24,2	24,2	24,2	5,3	5,3	5,3	0,159	0,159	0,159

В знаменателе для сравнения приведены константы, полученные при использовании для определения жесткости слоистого материала усреднения жесткостей. В плоскости армирования это соответствует применению теории слоистых пластин с использованием жесткости суперэлемента для однонаправленно армированного слоя.

В таблице 1.3 представлены упругие константы для двумерно армированного материала (1:2:0), полученные по предложенной методике, и константы, определенные экспериментально [69], со следующими исходными данными: E_a = 86000 МПа, ν_a = 0,21, E_m =

$= 3500$ МПа, $\nu_m = 0{,}35$, $\mu = 0{,}633$.

Таблица I.3

Характеристики		М К Э	Экспериментально (работа [ ])
E_1	(МПа)	30500	30500±5700
E_2	(МПа)	43I00	45700±I400
E_3	(МПа)	I8I00	-
ν_{12}		0,II	0,I3±0,04
ν_{13}		0,25	0,25±0,03
ν_{23}		0,26I	0,I98±0,004

Как видно из табл.I.2 и I.3, упругие характеристики, полученные данной методикой, хорошо согласуются с другими результатами.

Выводы по I главе

I. Предложена методика определения поля микронапряжений в однонаправленно и пространственно ортогонально армированном композите с линейно или нелинейно упругой матрицей и линейно упругими изотропными или анизотропными волокнами.

2. Получены начальные поверхности разрушения однонаправленно и пространственно ортогонально армированных композитов. Показано хорошее совпадение результатов, полученных по предложенной методике, с экспериментом.

3. Определены упругие характеристики однонаправленно армированного композита с анизотропными волокнами. Исследовано влияние различных факторов (объемное содержание волокон, степень анизо-

тропии и т.д) на упругие характеристики. Определены упругие характеристики пространственно ортогонально армированного композита. Показано хорошее совпадение полученных результатов с другими имеющимися решениями и экспериментом.

Глава II

ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ МНОГОСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ПО СДВИГОВОЙ МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО

В данной главе предложен изопараметрический, полностью согласованный треугольный конечный элемент, учитывающий деформации поперечного сдвига и обжатия нормами для расчета многослойных непологих оболочек произвольной формы. Использованы кинематические соотношения типа Тимошенко. Выведены матрицы жесткости, инкрементальной жесткости и масс конечного элемента для решения задач изгиба, устойчивости и колебаний. На численных примерах исследованы свойства сходимости предложенного конечного элемента.

2.I. Минимизируемые функционалы

Известно, что в теории оболочек Кирхгофа-Лява построение согласованного конечного элемента для оболочек произвольной формы связано со значительными трудностями, так как в этом случае при формулировке задачи в перемещениях требуется обеспечить непрерывность между элементами первой производной прогиба. Эти трудности не возникают в теории оболочек типа Тимошенко, так как для построения согласованного конечного элемента при использовании принципа минимума потенциальной энергии требуется обеспечить непрерывность между элементами только самих обобщенных перемещений.

Рассмотрим вывод матриц жесткости, инкрементальной жесткости и масс для изопараметрического конечного элемента по сдвиговой модели Тимошенко из принципа минимума потенциальной энергии оболочки. Расположим на срединной поверхности оболочки систему криволинейных нормальных координат $\{x^{\alpha}, x^3\}$ с координатным базисом $\{\vec{a}_\alpha ; \vec{a}_3\}$ так, чтобы базисный вектор $\vec{a}_3$ был направлен в сторону внешней нормали поверхности. Функционал энергии деформаций элемента оболочки, рассматриваемого как трехмерное тело, имеет вид:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int_V \sigma^{ij} e_{ij}\, dV = \frac{1}{2}\int_V A^{ijkl} e_{kl} e_{ij}\, dV, \qquad (2.1)$$

где

$$i, j, k, l = 1,2,3 \;.$$

Здесь σ^{ij} - компоненты тензора напряжений; e_{ij} - компоненты тензора деформаций; A^{ijkl} - компоненты тензора жесткости материала оболочки. Далее примем, что оболочка по толщине имеет многослойную структуру с кусочно-постоянной жесткостью и что перемещения по толщине оболочки для всего пакета слоев в целом распределяются согласно гипотезе Тимошенко [22]:

$$\vec{u} = \vec{v} + x^3 \vec{\gamma} \qquad (2.2)$$

Здесь $\vec{u}$ - вектор полных перемещений, $\vec{v} = v^{\alpha}\vec{a}_\alpha + w\,\vec{a}_3$ - вектор перемещений срединной поверхности; $\vec{\gamma} = \gamma^{\alpha}\vec{a}_\alpha + \gamma\,\vec{a}_3$ - вектор поворота нормального элемента.

Далее, используя гипотезу (2.2), из трехмерного функционала (2.1) получим двумерный. Для этого используем соотношения Коши для полных деформаций

$$2e_{ij} = \vec{u}_{,i}\,\vec{g}_j + \vec{u}_{,j}\,\vec{g}_i + \vec{u}_{,i}\,\vec{u}_{,j} \qquad (2.3)$$

и выразим с помощью гипотезы (2.2) трехмерные деформации (2.3) через двумерные. В (2.3) $\vec{g}_i$ - векторы пространственного базиса с матричным тензором $g_{ij} = \vec{g}_i\,\vec{g}_j$. Полные деформации оболочки согласно гипотезе Тимошенко имеют вид [22]:

$$e_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} + z\chi_{\alpha\beta} + z^2\phi_{\alpha\beta};$$
$$e_{\alpha 3} = \gamma_{\alpha 3} + \frac{1}{2} z \varkappa_{\alpha 3}; \qquad (2.4)$$
$$e_{33} = \gamma_{33}$$

Здесь двумерные деформации выражаются через обобщенные перемещения. Представим эти деформации как сумму линейных и квадратичных членов от перемещений:

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega^{(1)}_{\alpha\beta} + \Omega^{(2)}_{\alpha\beta}; \quad \chi_{\alpha\beta} = \chi^{(1)}_{\alpha\beta} + \chi^{(2)}_{\alpha\beta},$$
$$2\phi_{\alpha\beta} = 2\phi^{(1)}_{\alpha\beta} + 2\phi^{(2)}_{\alpha\beta}, \quad 2\gamma_{\alpha 3} = 2\gamma^{(1)}_{\alpha 3} + 2\gamma^{(2)}_{\alpha 3}, \qquad (2.5)$$
$$\varkappa_{\alpha 3} = \varkappa^{(1)}_{\alpha 3} + \varkappa^{(2)}_{\alpha 3}; \quad 2\gamma_{33} = 2\gamma^{(1)}_{33}$$

Линейные деформации выражаются через обобщенные перемещения следующим образом:

$$\Omega^{(1)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}\right); \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \vartheta_{\alpha\|\beta} - b_{\alpha\beta} w,$$
$$\chi^{(1)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\beta\alpha}\right); \quad \varkappa_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} - b^{\lambda}_{\alpha}\varepsilon_{\lambda\beta}, \qquad (2.6)$$
$$K_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\|\beta} - b_{\alpha\beta}\gamma,$$
$$2\phi^{(1)}_{\alpha\beta} = -b^{\lambda}_{\alpha} K_{\lambda\beta} - b^{\lambda}_{\beta}\gamma_{\lambda}$$
$$2\gamma^{(1)}_{\alpha 3} = \gamma_{\alpha} + \psi_{\alpha}; \quad \psi_{\alpha} = w_{,\alpha} + b^{\nu}_{\alpha}\vartheta_{\nu};$$
$$\varkappa^{(1)}_{\alpha 3} = \varphi_{\alpha} - b^{\nu}_{\beta}\gamma_{\nu}; \quad \varphi_{\alpha} = \gamma_{,\alpha} + b^{\nu}_{\alpha}\gamma_{\nu};$$
$$2\gamma^{(1)}_{33} = 2\gamma.$$

Здесь $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ - компоненты первого и второго тензоров срединной поверхности, знак параллельности означает ковариантное дифференцирование в метрике срединной поверхности оболочки. Квадратичные члены деформаций в (2.5) выражаются через шесть обобщенных перемещений следующим образом:

$$
\begin{aligned}
2\,\Omega^{(2)}_{\alpha\beta} &= \varepsilon^{\nu}_{\alpha}\,\varepsilon_{\nu\beta} + \psi_\alpha \psi_\beta ; \\
\chi^{(2)}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left(\varkappa^{(2)}_{\alpha\beta} + \varkappa^{(2)}_{\beta\alpha}\right) , \\
\varkappa^{(2)}_{\alpha\beta} &= K^{\lambda}_{\alpha}\,\varepsilon_{\lambda\beta} + \varphi_\beta \psi_\alpha , \\
2\,\Phi^{(2)}_{\alpha\beta} &= K^{\mu}_{\alpha}\,K_{\mu\beta} + \varphi_\alpha \varphi_\beta ; \\
2\,\gamma^{(2)}_{\alpha 3} &= \gamma_\lambda\,\varepsilon^{\lambda}_{\alpha} + \gamma\,\psi_\alpha , \\
\varkappa^{(2)}_{\alpha 3} &= \gamma_\lambda\,K^{\lambda}_{\alpha} + \varphi_\alpha \gamma .
\end{aligned}
\qquad (2.7)
$$

Сначала из (2.I) получим квадратичный функционал, из которого определяется матрица жесткости элемента. Для этого в (2.5) сохраним лишь линейные слагаемые. Представляя (2.4) с учетом (2.5) в (2.I), получаем двумерный функционал:

$$
\begin{aligned}
U = \frac{1}{2}\int_S \Big\{ & A^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta} + B^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\Omega_{\alpha\beta}\chi_{\gamma\delta} + \chi_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta}\right) + \\
& + D^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\alpha\beta}\chi_{\gamma\delta} + 4\,A^{\alpha 3\beta 3}\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\beta 3} + \\
& + A^{3333}(\gamma_{33})^2 + A^{\alpha\alpha 33}\,\Omega_{\alpha\alpha}\gamma_{33} + B^{\alpha\alpha 33}\chi_{\alpha\alpha}\gamma_{33}\Big\}\, dS .
\end{aligned}
\qquad (2.8)
$$

Здесь A, B, D - компоненты тензоров мембранной, мембранноизгибной и изгибной жесткости, которые известным образом выражаются через координаты слоев и их жесткости [08]. Методика определения жесткости одного слоя дана в предыдущей главе.

Переходя на физические компоненты тензоров и на матричную запись, из функционала (2.8) получаем

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int_S \{\mathcal{E}\}^T [\mathcal{D}] \{\mathcal{E}\}\, dS, \qquad (2.9)$$

где $\{\mathcal{E}\}$ - вектор физических компонент обобщенных деформаций

$$\{\mathcal{E}\}^T = \{ \Omega_{(11)}, \Omega_{(22)}, 2\Omega_{(12)}, \varkappa_{(11)}, \varkappa_{(22)}, 2\varkappa_{(12)}, 2\gamma_{(13)}, 2\gamma_{(23)}, 2\gamma_{(33)} \};$$

$[\mathcal{D}]$ - матрица упругости материала многослойной оболочки

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 & Q_{23} \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & 0 & B_{13} & B_{23} & 0 & 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь для физических компонент тензоров жесткости $Q^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $D^{\alpha\beta\gamma\delta}$ введены матричные обозначения [68]

При решении задач устойчивости нам необходима также матрица геометрической жесткости. Для этого далее получим энергию деформации в начальном послекритическом состоянии (состояние b). Примем, что внешние нагрузки меняются пропорционально одному параметру λ и что при некотором значении этого параметра λ_* происходит переход от докритического состояния равновесия (состояние a) на начальное послекритическое состояние (b).

Суммарное поле обобщенных перемещений в послекритической стадии $u_{(b)}$ определяется в виде

$$u_{(b)} = u_{(a)} + u ,$$

где $u_{(a)}$ - полные перемещения в докритической стадии; u - допустимое поле возмущений обобщенных перемещений, которое переводит в точке λ_* конструкцию из состояния a в состояние b. Тогда компоненты тензора деформации срединной поверхности $\Omega^{(b)}_{\alpha\beta}$ тензора искривлений $\chi^{(b)}_{\alpha\beta}$ и вектор поперечного сдвига $\gamma^{(b)}_{\alpha 3}$ в состоянии b могут быть представлены как сумма докритических деформаций ($\Omega^{(a)}_{\alpha\beta}$, $\chi^{(a)}_{\alpha\beta}$, $\gamma^{(a)}_{\alpha 3}$) и деформаций ($\Omega_{\alpha\beta}$, $\chi_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha 3}$), обусловленных возмущенными перемещениями:

$$\begin{aligned} \Omega^{(b)}_{\alpha\beta} &= \Omega^{(a)}_{\alpha\beta} + \Omega^{(1)}_{\alpha\beta} + \Omega^{(2)}_{\alpha\beta} ; \\ \chi^{(b)}_{\alpha\beta} &= \chi^{(a)}_{\alpha\beta} + \chi^{(1)}_{\alpha\beta} , \\ \gamma^{(b)}_{\alpha 3} &= \gamma^{(a)}_{\alpha 3} + \gamma^{(1)}_{\alpha 3} + \gamma^{(2)}_{\alpha 3} . \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Потенциальная энергия деформации (2.8) в начальном послекритическом состоянии с учетом (2.10) выражается в виде суммы:

$$\mathcal{U}_{(b)} = \mathcal{U}_{(a)} + \mathcal{U}_{(1)} + \mathcal{U}_{(2)} + \quad + \quad , \qquad (2.11)$$

где $\mathcal{U}_{(a)}$ содержит только произведения членов $\Omega^{(a)}_{\alpha\beta}$, $\chi^{(a)}_{\alpha\beta}$, $\gamma^{(a)}_{\alpha 3}$; $\mathcal{U}_{(1)}$ содержит произведения членов $\Omega^{(a)}_{\alpha\beta}$, $\chi^{(a)}_{\alpha\beta}$, $\gamma^{(a)}_{\alpha 3}$ на $\Omega^{(1)}_{\alpha\beta}$, $\chi^{(1)}_{\alpha\beta}$, $\gamma^{(1)}_{\alpha 3}$; $\mathcal{U}_{(2)}$ представляется в виде суммы:

$$\mathcal{U}_{(2)} = \mathcal{U}^{*}_{(2)} + \mathcal{U}^{G}_{(2)} ,$$

где $\mathcal{U}^{*}_{(2)}$ является той частью потенциальной энергии элемента оболочки, которая не зависит от докритических деформаций, а $\mathcal{U}^{G}_{(2)}$ является их функцией:

$$\mathcal{U}^{G}_{(2)} = \frac{1}{2}\int\limits_{S}\Big\{2\, Q^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\Omega^{(a)}_{\gamma\delta}\,\Omega^{(2)}_{\alpha\beta} + 2\, B^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\Omega^{(2)}_{\gamma\delta}\,\chi^{(a)}_{\alpha\beta} + 4\, Q^{\alpha 3\beta 3}\left(\gamma^{(a)}_{\alpha 3}\gamma^{(2)}_{\beta 3} + \gamma^{(a)}_{\beta 3}\gamma^{(2)}_{\alpha 3}\right) + 2\, Q^{\alpha\alpha 33}\,\Omega^{(2)}_{\alpha\alpha}\,\gamma^{(a)}_{33}\Big\}\, dS. \qquad (2.12)$$

В выражении (2.11) отбрасываются члены третьего и более высоких порядков. Минимизируя функционал (2.12), получаем матрицу инкрементальной жесткости конечного элемента в задачах устойчивости. Функционал кинетической энергии оболочки в теории типа Тимошенко в случае слоев одинаковой плотности имеет вид [22]

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{S} h\rho\Big\{\dot{v}_{\alpha}\dot{v}^{\alpha} + \dot{w}\dot{w} + \frac{h^2}{12}\dot{\gamma}_{\alpha}\dot{\gamma}^{\alpha} + \frac{h^2}{12}\dot{\gamma}\dot{\gamma}\Big\}\, dS. \qquad (2.13)$$

Здесь h – толщина оболочки; ρ – плотность материала. Функционал (2.13) используется для получения матрицы масс конечного элемента.

2.2. Матрицы жесткости, инкрементальной жесткости и масс конечного элемента.

2.2.I. Матрица жесткости конечного элемента

Чтобы конечные элементы были универсальными и пригодными для использования в криволинейной системе координат, выберем их в виде треугольных изопараметрических элементов второго порядка с шестью узлами или третьего порядка с девятью узлами (рис.2.I).

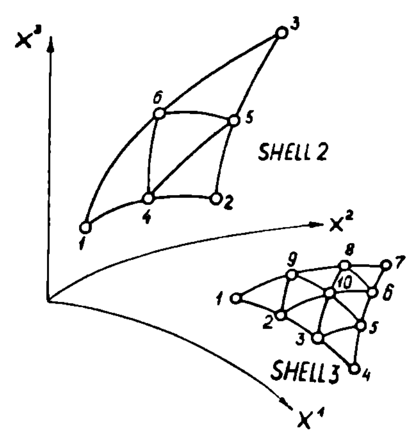


Рис.2.I. Изопараметрические треугольные конечные элементы второго и третьего порядка

Для оболочки с заданным первым $a_{\alpha\beta}$ и вторым $b_{\alpha\beta}$ тензорами поверхности, выражая тензорные компоненты деформации, искривлений и перемещений через физические и переходя на матричную запись, из (2.6) получаем:

$$\{\varepsilon\} = [\mathcal{L}]\,\{u\}\,. \qquad (2.14)$$

Здесь $\{u\}^T = \{u, v, w, \gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \gamma\}$ - вектор физических компонент обобщенных перемещений, $\{\varepsilon\}^T = \{\Omega_{(11)}, \Omega_{(22)}, 2\Omega_{(12)}, \varkappa_{(11)}, \varkappa_{(22)}, 2\varkappa_{(12)}, 2\gamma_{(13)}, 2\gamma_{(23)}, \gamma_{(33)}\}$ - вектор деформаций, $[\mathcal{L}]$ - оператор дифференцирования, элементы которого выражаются через символы Кристофеля, компоненты первого и второго тензоров поверхности и операторы частного дифференцирования по координатам поверхности. Если в качестве глобальных координат элемента используются цилиндрические координаты поверхности s, φ ($x^1 = s$; $x^2 = R\varphi$) со следующими значениями компонент первого и второго тензоров поверхности

$$a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}; \quad b_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, \qquad (2.15)$$

то оператор дифференцирования имеет вид:

$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial}{R\partial\varphi} & \frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial}{R\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{R\partial\varphi} & \frac{1}{R} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{R\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 1 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{R} & \frac{\partial}{R\partial\varphi} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

Далее выражаем перемещения внутри элемента $\{u\}$ через узловые перемещения, используя функции формы треугольного элемента [36]:

$$\{u\}=[N_1 I,\ N_2 I,\ \quad ,\ N_n I]\{\delta^{(e)}\}=[N]\{\delta^{(e)}\} \qquad (2.17)$$

Здесь I – единичная матрица размером 6 x 6 или 10 x 10 $\{\delta^{(e)}\}^T=\{\delta_1,\delta_2,\quad,\delta_n\}$; $\{\delta_i\}^T=\{u_i\ ,\vartheta_i,\ w_i\ ,\gamma^i_{(1)}\ ,\gamma^i_{(2)}\ ,\gamma^i\}$ – узловые перемещения, причем n = 6 – для элемента второго порядка (условно обозначим этот элемент через $SHELL2$ и n = 10 – для элемента третьего порядка (элемент $SHELL3$). Функции формы в (2.17) выражаются через $\mathcal{L}$ – координаты треугольника. Так, например, для элемента $SHELL2$ имеем [36]

$$\begin{aligned} N_1&=(2\mathcal{L}_1-1)\mathcal{L}_1, & N_4&=4\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2,\\ N_2&=(2\mathcal{L}_2-1)\mathcal{L}_2, & N_5&=4\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3,\\ N_3&=(2\mathcal{L}_3-1)\mathcal{L}_3, & N_6&=4\mathcal{L}_1\mathcal{L}_3, \end{aligned} \qquad (2.18)$$

а для элемента $SHELL3$ –

$$\begin{aligned} N_1&=\tfrac{1}{2}\mathcal{L}_1(3\mathcal{L}_1-1)(3\mathcal{L}_1-2), & N_6&=\tfrac{9}{2}\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3(3\mathcal{L}_3-1),\\ N_2&=\tfrac{9}{2}\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2(3\mathcal{L}_1-1), & N_7&=\tfrac{1}{2}\mathcal{L}_3(3\mathcal{L}_3-1)(3\mathcal{L}_3-2),\\ N_3&=\tfrac{9}{2}\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2(3\mathcal{L}_2-1); & N_8&=\tfrac{9}{2}\mathcal{L}_3\mathcal{L}_1(3\mathcal{L}_3-1),\\ N_4&=\tfrac{1}{2}\mathcal{L}_2(3\mathcal{L}_2-1)(3\mathcal{L}_2-2); & N_9&=\tfrac{9}{2}\mathcal{L}_3\mathcal{L}_1(3\mathcal{L}_1-1),\\ N_5&=\tfrac{9}{2}\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3(3\mathcal{L}_2-1), & N_{10}&=27\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\mathcal{L}_3. \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Функции формы (2.18) и (2.19) обеспечивают непрерывность обобщенных перемещений между элементами при любом их изопараметрическом изгибании. Таким образом рассматриваемые элементы являются полностью согласованными.

Подставляя (2.17) в (2.14), получаем кинематические соотношения для конечного элемента:

$$\{\varepsilon\} = [B_1, B_2, \quad , B_n]\{\delta^{(e)}\} = [B]\{\delta^{(e)}\} \qquad (2.20)$$

Здесь $[B]$ – матрица связи деформаций элемента с узловыми перемещениями. Элементы этой матрицы содержат частные производные первого порядка функции формы по глобальным координатам оболочки x^α. Так при $x^1 = s$ и $x^2 = R\varphi$ матрицы $[B_i]$ имеют вид:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R}\frac{\partial N_i}{\partial \varphi} & \frac{1}{R}N_i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R}\frac{\partial N_i}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R}\frac{\partial N_i}{\partial \varphi} & \frac{1}{R}N_i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R}\frac{\partial N_i}{\partial \varphi} & \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} & N_i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R}N_i & \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}. \qquad (2.21)$$

Элементы матрицы $[B_i]$ содержат производные функции формы по глобальным координатам x^α. Выразим эти производные через производные функций формы по локальным (треугольным) координатам:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial x^2} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix}. \qquad (2.22)$$

Здесь Якобиан преобразования координат имеет вид:

$$[J] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial L_1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial L_2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial L_2} \end{bmatrix}. \qquad (2.23)$$

В (2.22) используются функции формы (2.18) и (2.19), выраженные через две независимые L - координаты ($L_3 = 1 - L_1 - L_2$). Для установления связи между глобальными и локальными координатами используем функции формы (2.18), (2.19):

$$x^\alpha = [N_1 , N_2 , \qquad , N_n] \{x\} , \quad \alpha = 1,2 \qquad (2.24)$$

Здесь $\{x\}^T = \{x_1^\alpha , x_2^\alpha , \ldots , x_n^\alpha\}$ - значения глобальных координат в узлах элемента. Используя соотношения (2.18) - (2.24), в функционале (2.9) получаем квадратичную форму

$$U = \frac{1}{2}\{\delta^{(e)}\}^T [K] \{\delta^{(e)}\}, \qquad (2.25)$$

где $[K]$ - матрица жесткости конечного элемента:

$$[K] = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} [B]^T [D] [B] \, |det([J])| \, dL_1 \, dL_2 . \qquad (2.26)$$

Здесь $[D]$ - матрица упругости многослойной оболочки (2.9). Элементы матрицы жесткости определялись путем численного интегрирования. При этом использовалась схема Гаусса различного порядка, весовые коэффициенты для которой приведены в работе [65].

2.2.2. Матрица инкрементальной жесткости конечного элемента

Квадратичная часть энергии деформаций U_2^G (2.I2) после несложных преобразований представляется в виде:

$$U_2^G = \frac{1}{2}\int_S \Big(2\,\Omega_{11}^{(2)} N_{11}^{(a)} + 2\,\Omega_{22}^{(2)} N_{22}^{(a)} + 2\,\Omega_{12}^{(2)} N_{12}^{(a)} + 2\,\gamma_{13}^{(2)} Q_1^{(a)} + 2\,\gamma_{23}^{(2)} Q_2^{(a)} \Big) dS, \qquad (2.27)$$

где докритические усилия выражаются следующим образом:

$$N_{11}^{(a)} = A_{11}\Omega_{11}^{(a)} + A_{12}\Omega_{22}^{(a)} + B_{11}\mathcal{X}_{11}^{(a)} + B_{12}\mathcal{X}_{22}^{(a)} + A_{13}\gamma_{33}^{(a)},$$

$$N_{22}^{(a)} = A_{12}\Omega_{11}^{(a)} + A_{22}\Omega_{22}^{(a)} + B_{12}\mathcal{X}_{11}^{(a)} + B_{22}\mathcal{X}_{22}^{(a)} + A_{23}\gamma_{33}^{(a)},$$

$$Q_1^{(a)} = 2\,Q_{55}\,2\gamma_{(13)}^{(a)}\;;$$
$$Q_2^{(a)} = 2\,Q_{44}\,2\gamma_{(23)}^{(a)}\;,$$
$$N_{12}^{(a)} = 2\left(Q_{66}\,2\Omega_{12}^{(a)} + B_{66}\,2\varkappa_{12}^{(a)}\right). \qquad (2.28)$$

Докритические деформации вычисляются согласно соотношениям (2.20).

Если в качестве глобальных координат конечного элемента выбираем $x^1 = s$ и $x^2 = R\varphi$, то из (2.7) с учетом (2.6) и (2.15) и переходя на физические компоненты, получаем:

$$2\,\Omega_{(11)}^{(2)} = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{R\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 ,$$
$$2\,\Omega_{(22)}^{(2)} = \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{R\partial\varphi} + \frac{w}{R}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{R\partial\varphi} - \frac{v}{R}\right)^2 ,$$
$$2\,\Omega_{(12)}^{(2)} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{R\partial\varphi}\left(\frac{\partial v}{R\partial\varphi} + \frac{w}{R}\right) + \frac{\partial w}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{R\partial\varphi} - \frac{v}{R}\right); \qquad (2.29)$$
$$2\,\gamma_{(13)}^{(2)} = \gamma_{(1)}\frac{\partial u}{\partial s} + \gamma_{(2)}\frac{\partial u}{R\partial\varphi} + \gamma\,\frac{\partial w}{\partial s} ,$$
$$2\,\gamma_{(23)}^{(2)} = \gamma_{(1)}\frac{\partial v}{\partial s} + \gamma_{(2)}\left(\frac{\partial v}{R\partial\varphi} + \frac{w}{R}\right) + \gamma\left(\frac{\partial w}{R\partial\varphi} - \frac{v}{R}\right).$$

Запишем функционал (2.27) в матричном виде:

$$U_2^G = \frac{1}{2}\int_S \{C\}^T [A]\,\{C\}\,dS . \qquad (2.30)$$

Здесь $\{C\}^T = \Big\{ \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{R\partial\varphi}, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial \vartheta}{\partial s},$
$\left(\frac{\partial \vartheta}{R\partial\varphi} + \frac{w}{R}\right), \left(\frac{\partial w}{R\partial\varphi} - \frac{\vartheta}{R}\right), \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma \Big\},$

$$[A] = \begin{bmatrix} N_{11}^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}N_{12}^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_1^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & N_{11}^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}N_{12}^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_1^{(a)} & 0 \\ 0 & 0 & N_{11}^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_2^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_1^{(a)} \\ \frac{1}{2}N_{12}^{(a)} & 0 & 0 & N_{22}^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_2^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}N_{12}^{(a)} & 0 & 0 & N_{22}^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_2^{(a)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}N_{12}^{(a)} & 0 & 0 & N_{22}^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_2^{(a)} \\ \frac{1}{2}Q_1^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_2^{(a)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}Q_1^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_2^{(a)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_1^{(a)} & 0 & 0 & \frac{1}{2}Q_2^{(a)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.31)$$

Вектор $\{C\}$ с учетом (2.17) можно переписать в виде:

$$\{C\} = [\,E_1, E_2, \quad\quad , E_n\,]\,\{\delta^{(e)}\} = [E]\{\delta^{(e)}\}, \qquad (2.32)$$

где

$$[E_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{R\partial \varphi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{R\partial \varphi} & \frac{N_i}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N_i}{R} & \frac{\partial N_i}{R\partial \varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}.$$

Подставляя соотношения (2.18) - (2.24), (2.31), (2.32) в функционал (2.30), получаем квадратичную форму

$$U_2^G = \frac{1}{2}\{\delta^{(e)}\}^T [G] \{\delta^{(e)}\}, \qquad (2.33)$$

где $[G]$ - матрица инкрементальной жесткости конечного элемента

$$[G] = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} [E]^T [A][E] \left| \det([J]) \right| dL_1\, dL_2 . \qquad (2.34)$$

Элементы матрицы инкрементальной жесткости определяются путем численного интегрирования.

2.2.3. Матрица масс конечного элемента

Для получения матрицы масс конечного элемента используется функционал кинетической энергии оболочки (2.13). Подставляя (2.18) - (2.24) в функционал (2.13), получаем кинетическую энергию в виде квадратичной формы от скоростей узловых перемещений:

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{\delta}^{(e)}\}[M]\{\dot{\delta}^{(e)}\}, \qquad (2.35)$$

где $[M]$ - матрица масс конечного элемента:

$$[M] = \rho h \int_0^1\int_0^{1-L_1} [N]^T[R][N]\,|det([J])|\,dL_1\,dL_2\,,$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix}. \qquad (2.36)$$

Элементы матрицы масс также определяются путем численного интегрирования.

2.3. Свойства сходимости элементов. Численные примеры.

Как известно [36], для обеспечения сходимости метода конечного элемента требуется выполнение трех условий:

I) при применении изопараметрической техники элемент должен быть полностью согласованным;

2) конечный элемент должен удовлетворять условиям перемещения элемента как жесткого тела (без деформаций);

3) во всех точках элемента должен выполняться критерий постоянства деформаций (растяжения, сдвига, изгиба, кручения).

Как показано выше, первое условие выполняется посредством выбора функционала и соответствующих функций форм элемента. Для выполнения второго условия необходимо, чтобы для данного элемента существовали три пространственных перемещения и три пространственных поворота как жесткого тела (без деформаций). Это означает, что матрица жесткости свободного элемента должна иметь шесть нулевых собственных значений. В таблице 2.I в порядке убывания приведен спектр собственных значений свободного прямоугольника, образованного из двух треугольных элементов второго порядка.

Таблица 2.I

λ_1	λ_2		λ_{37}	λ_{38}	λ_{39}
0,4730xI0^{4}	0,2572xI0^{4}		0,I082xI0^{2}	0,I0I5xI0^{2}	0,I708xI0^{I}
λ_{40}	λ_{41}	λ_{42}	λ_{43}	λ_{44}	λ_{45}
0,4327xI0^{-3}	0,283IxI0^{-3}	0,2292xI0^{-3}	0,8473xI0^{-4}	0,3624xI0^{-I3}	0,3427xI0^{-I3}

Матрица жесткости в этом случае имеет порядок 45 (без учета обжатия нормали). Вычисления проведены с двойной точностью.

Из анализа собственных значений видим, что матрица жесткости имеет шесть нулевых собственных значений. Таким образом второе необходимое условие сходимости также выполняется.

Для проверки третьего условия поступаем следующим образом. К паре плоских треугольных элементов, образующих прямоугольник, прикладываем следующие состояния: одноосной деформации, в плоскости элемента, чистого изгиба и кручения. Проверка для всех состояния дала одни и те же деформации для всех точек интегрирования и узловых точек. Таким образом и третий критерий сходимости выполняется.

Для проверки скорости сходимости предложенных конечных элементов, точности различных схем интегрирования и оценки эффективности элементов второго и третьего порядка рассмотрим два численных примера: задачу изгиба и задачу на собственные значения (собственные колебания оболочки).

Сначала рассмотрим пример изгиба однослойной цилиндрической оболочки из ортотропного материала, нагруженной по линии образующей (рис. 2.2). Края оболочки свободны.

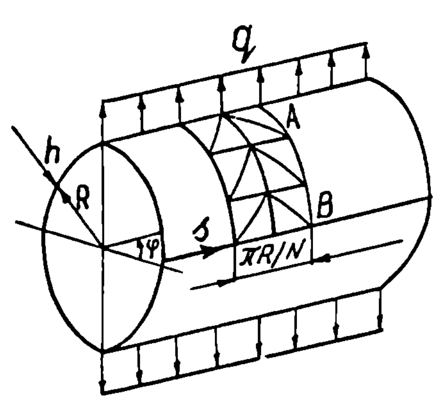


Рис.2.2. Цилиндрическая оболочка под действием распределенной нагрузки по образующей

Эта задача требует применения уравнений теории непологих оболочек, кроме того, для нее легко получить точное аналитическое решение. Таким образом на этой задаче мы можем исследовать свойства сходимости предложенного элемента. Ввиду симметрии мы можем рассматривать одну четвертую часть кольца шириной $\pi R/N$, где N – число блоков разбиения четвертой части окружности (один блок содержит четыре треугольных конечных элемента). В этой задаче в качестве глобальных координат использованы цилиндрические координаты поверхности z, φ ($x^1 = z$; $x^2 = R\varphi$).

В таблице 2.2 в качестве результатов расчета представлены безразмерный и нормальный прогиб и моменты в токах A и B $\bar{w}_A = E_2 h w_A / qR$; $\bar{M}_A = M_A / qR$ в зависимости от числа блоков разбиения и используемого элемента.

Таблица 2.2

N	$\bar{w}_A$		$\bar{w}_B$		$\bar{M}_A$		$\bar{M}_B$	
	SHELL2	SHELL3	SHELL2	SHELL3	SHELL2	SHELL3	SHELL2	SHELL3
1.	21,71	67,84	-20,61	-60,61	0,0514	0,2268	-0,0513	-0,1271
2.	55,61	96,98	-48,87	-86,26	0,1764	0,3163	-0,1050	-0,1833
3.	82,76	97,49	-73,52	-86,65	0,2622	0,3177	-0,1574	-0,1826
4.	92,51	97,49	-82,32	-86,65	0,2952	0,3180	-0,1761	-0,1811
5.	95,25	97,41	-84,56	-86,58	0,3062	0,3181	-0,1801	-0,1808
8.	97,19	-	-86,43	-	0,3156	-	-0,1824	-
12.	97,20	-	-86,43	-	0,3156	-	-0,1824	-
Аналитическое решение	97,51		-86,72		0,3183		-0,1817	

Данные табл.2.2 получены при следующих значениях параметров материала и геометрии оболочки: R/h = 10; $A_{(2222)}$ = $A_{(3333)}$; $A_{(2222)}/A_{(2323)}$ = 20; $A_{(1122)}$ = $A_{(2233)}$ = $A_{(1133)}$ = 0.
Из анализа результатов таблицы видим, что при увеличении N все величины сходятся к точным значениям. Используя элемент SHELL3 , при N = 2 получаем примерно такую же относительную погрешность результатов как и при N = 8 для элемента SHELL2
В таблице 2.3 представлены основные данные, характеризующие размеры задач и время решения с использованием элементов второго и третьего порядка.

Таблица 2.3

Элемент	Число блоков	Число уравнений	Полуширина ленты	Время счета (мин)
SHELL2	8	510	78	20
SHELL3	2	294	174	30

Следует отметить, что система линейных уравнений решалась методом исключения Гаусса с двойной точностью. Результаты, представленные в таблицах 2.2 и 2.3, получены на ЭВМ ЕС-1022. Из данных таблицы 2.3 видим, что полуширина ленты системы линейных алгебраических уравнений при использовании элемента SHELL2 значительно меньше, чем для элемента SHELL3 . Это является основным параметром, определяющим требуемый минимум оперативной памяти и, в связи с этим, определяющим эффективность решения задачи. Несмотря на то, что элемент третьего порядка имеет большую скорость сходимости, из-за большой полуширины ленты даже при решении системы уравнений с двойной точностью эффект накопления ошибок округления проявляется раньше (см.результаты в таблице 2.2 для N = 5). Поэтому в дальнейших исследованиях в основном использовался элемент SHELL2 . Однако ясно, что элемент SHELL3 может быть эффективным в задачах другого класса, например, в таких задачах, где ожидается большая концентрация напряжений.

Исследуем далее свойства сходимости элементов. Согласно (2.18) и (2.19) обобщенные перемещения для элементов SHELL2 и SHELL3 представлены соответственно полиномами второго и третьего порядков. Полином второй степени может аппроксимировать истинное распределение перемещений с ошибкой порядка ℓ^3 , где $\ell = \pi R/2N$ - характеристический размер элемента. Таким образом первые производные обобщенных перемещений, которые входят в функционал (2.3), представляются с ошибкой порядка ℓ^2 Следовательно, погрешность энергии деформаций будет иметь порядок ℓ^4 . Погрешность перемещения под сосредоточенной нагрузкой также будет иметь порядок ℓ^4 [65]. Рассуждая аналогично, получим, что погрешность перемещения для элемента SHELL3 будет иметь порядок ℓ^6 . На рис.2.3 изображены графики зависимости относительной погрешности от числа блоков (оба масштаба являются логарифмическими). Кривая I на рис.2.3, характеризующая погрешность прогиба в токе A , получена с использованием элемента SHELL2 , кривая 2 - с использованием элемента SHELL3 . Из анализа кривых видим, что практическая погрешность прогиба асимптотически пропорциональна N^{-4} и N^{-6} для элементов SHELL2 и SHELL3 соответственно, что согласуется с теоретически предсказанным результатом.

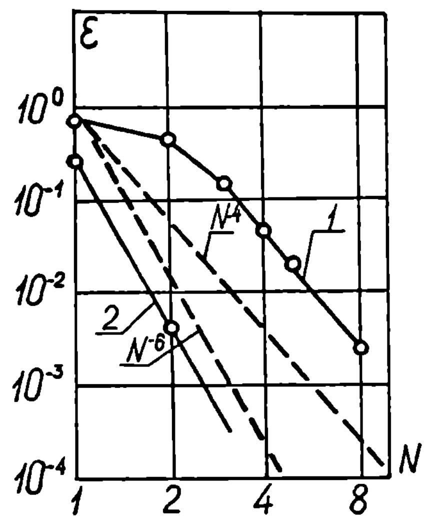


Рис.2.3. Сходимость решения по перемещению в зависимости от числа блоков разбиения.

При вычислении элементов матрицы жесткости, инкрементальной жесткости или масс, важным является вопрос о выборе порядка схемы численного интегрирования по способу Гаусса. Естественно,что с точки зрения эффективности, необходимо применять схему с минимальным числом узловых точек, обеспечивающую необходимую точность. Здесь можно руководствоваться следующим общим правилом - порядок схемы интегрирования должен быть таким, чтобы обеспечивалась такая же или несколько меньшая (но не большая) погрешность интегрирования как и основная погрешность аппроксимации. Исследуем далее этот вопрос на примере численных решений.

Для определения матрицы жесткости (2.26) интеграл заменяется суммой

$$\int_0^1 \int_0^{1-\mathcal{L}_1} f(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3) \, |det([J])| \, d\mathcal{L}_1 \, d\mathcal{L}_2 = \sum_{i=1}^{n} W_i \, g(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3), \qquad (2.37)$$

где $g(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$ включает $|det([J])|$. В работе [65] представлены схемы интегрирования различного порядка для треугольника. Порядок интегрирования должен определяться суммой показателей степеней трех координат в каждом члене элементов матрицы жесткости [62]. Так как мы применяем изопараметрическую технику для элемента и в явном виде нельзя определить порядок полинома, то исследовалась сходимость решения в зависимости от применяемых схем интегрирования. Результаты определения прогиба $\overline{w}_A$ в зависимости от порядка схемы с использованием элемента SHELL2 (при N = 5) представлены в таблице 2.4.

Дальнейшее увеличение порядка схемы практически не изменяет результат, полученный для схемы № = 7 пятого порядка (табл. 2.4). Таким образом для получения матрицы жесткости элемента SHELL2 можно применять схему пятого порядка. Такое же исследование было проведено для элемента SHELL3 и установлено, что в этом случае также требуется применение схемы пятого порядка.

Для исследования свойств сходимости предложенного элемента в задачах на собственные значения решалась задача об определении минимальной собственной частоты колебаний цилиндрической оболочки, защемленной по торцам (см. рис.2.4). Уравнение метода ко-

Таблица 2.4

	Число точек	Степень точности (порядок схемы)	α_1	α_2	α_3	W_i	$\bar{\omega}_4$	
I	3	2	α β β	β α β	β β α	1/3	98,30	α = 2/3 β = I/6
2	3	2	I/2 0 I/2	I/2 I/2 0	0 I/2 I/2	I/3	95,09	
3	4	3	I/3 0,6 0,2 0,2	I/3 0,2 0,6 0,2	I/3 0,2 0,2 0,6	-0,5625 0,5208(3)	99,02	
4	6	3	α α β β γ γ	β γ α γ α β	γ β γ α β α	I/6	97,84	α =0,6590276 β =0,23I9334 γ =0,I090390I.
5	6	4	α β β γ Δ Δ	β α β Δ γ Δ	β β α Δ Δ γ	0,I0995I7 0,22338I6	96,54	α =0,8I68456 β =0,09I5762 γ =0,4459485 Δ =0,I08I0302
6	7	4	I/3 α α β β γ γ	I/3 β γ α γ α β	I/3 γ β γ α β α	0,3750 0,I04I6(6)	96,26	α =0,7367I25 β =0,2379324 γ =0,025355I
7	7	5	I/3 α β β γ Δ Δ	I/3 β α β Δ γ Δ	I/3 β β α Δ Δ γ	0,225033 0,I25939I 0,I32394I	95,25	α =0,7974270 β =0,I0I2865 γ =0,0597I58 Δ =0,470I42I
Точное решение							97,5I	

нечных элементов для определения частот имеет следующий вид:

$$[K]\{X\} = \omega^2 [M]\{X\} \qquad (2.38)$$

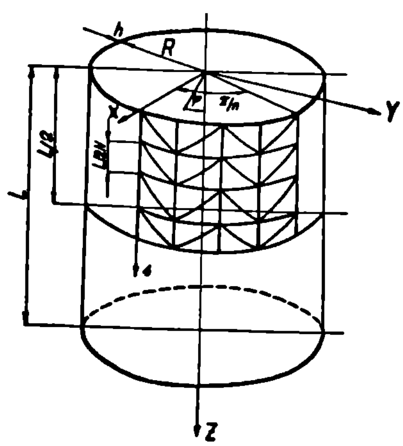


Рис.2.4. Конечноэлементная разбивка цилиндрической оболочки

Для решения обобщенной проблемы собственных значений (2.38) необходимы алгоритмы, которые используют ленточную структуру матриц $[K]$ и $[M]$, являющуюся следствием конечноэлементной дискретизации. При этом часто бывает необходимо определить не весь спектр собственных значений, а только минимальное собственное значение (как в задачах устойчивости) или начальный участок спектра собственных значений (в задачах колебаний). Многие известные алгоритмы не удовлетворяют этим требованиям и в связи с этим они малоэффективны для решения проблемы (2.38) с большими матрицами ленточной структуры. Поэтому для решения задачи (2.38) использовался алгоритм нахождения минимального собственного значения, который сводится к следующему:

I. Задается первое приближение для вектора:

$$\{X\}_K = I \qquad (K = I)$$

2. Матрица $[M]$ умножается на вектор $\{X\}_K$, используя ленточную структуру матрицы $[M]$

$$\{F\}_K = [M]\{X\}_K$$

3. Решается система уравнений, используя ленточную структуру матрицы $[K]$

$$[K]\{X\}_{K+1} = \{F\}_K ;$$

$$\{X\}_{K+1} = [K]^{-1}\{F\}_K .$$

4. Нормируется вектор $\{X\}_{K+1}$:

$$\{X\}_{K+1} = \{X\}_{K+1} / X_{1_{K+1}}$$

5. Проверяется условие

$$\max \left| \frac{\{X\}_{K+1} - \{X\}_K}{\{X\}_{K+1}} \right| > \varepsilon ,$$

если оно выполнено, то происходит возврат ко второму пункту.

6. Определяется

$$\omega_{min} = 1 / X_{1_{K+1}}$$

С помощью данного алгоритма решались различные задачи устойчивости и колебаний оболочек с конечноэлементной дискретизацией. Кроме того, данный алгоритм позволяет находить также второе и последующие собственные значения, используя условия ортогональности собственных векторов. Необходимо отметить эффективность данного алгоритма: так решение задачи с ε = 0,01 для матриц порядка 700 с полушириной ленты 80 получаем всего за 5 ÷ 7 итераций.

При решении задачи о нахождении собственных значений защемленной цилиндрической оболочки вследствие симметрии граничных условий и форм колебаний рассматривалась половина длины оболочки с сектором $\frac{\pi}{n}$ (рис.2.4), где n - число волн по окружности собственной формы колебаний. В таблице 2.5 представлены результаты расчета в зависимости от числа блоков разбиения (для элемента SHELL1).

Таблица 2.5

Число блоков	Порядок матриц [K] и [M]	Число итераций	ω_{min} (1/s)
1	54	6	51,20
2	150	5	25,87
3	295	5	22,91
4	486	5	22,24
5	726	6	22,04

Результаты в таблице 2.5 получены при тех же значениях параметров материалов как и в задаче изгиба (кроме $A_{(1111)} = A_{(2222)}$, $A_{(1212)} = \frac{1}{2}\left(A_{(1111)} - A_{(1122)}\right)$; $A_{(1122)}/A_{(1111)} = A_{(2233)}/A_{(1111)} = A_{(1133)}/A_{(1111)} = 0.2$) и следующих параметрах геометрии оболочки h/R = 0,0525; L = = 3. Рассматривалась собственная форма колебаний с числом волн по окружности n = 3 и с числом полуволн по длине m = 1.

Проведем оценку сходимости полученных решений. Эта задача не имеет аналитического решения. Но поскольку применяется изопараметрический элемент (SHELL2), удовлетворяющий всем трем критериям сходимости и известно [65], что минимальное собственное значение сходится так же как энергия деформации, т.е., пропорционально N^{-4} , можно поступить следующим образом. Так как две точки на графике сходимости должны находиться на наклоне N^{-4}, то точное решение мы можем определить из уравнения:

$$\lg \varepsilon_1 - \lg \varepsilon_2 = \operatorname{tg}\alpha \left(\lg N_2 - \lg N_1 \right), \qquad (2.39)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_T - \omega_1}{\omega_T}\ ; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\omega_T - \omega_2}{\omega_T}\ ,$$

ω_1 , ω_2 - значения минимальных частот собственных колебаний при конечноэлементной разбивке на число блоков N_1 и N_2 соответственно, α - угол наклона прямой N^{-4} к оси абсцисс.

Сходимость решения к точному в зависимости от числа блоков разбиения показана на рис.2.5. Для нахождения точного решения использовались точки $N_1 = 3$ и $N_2 = 5$. Как видим из рисунка, контрольная точка ($N = 4$) почти располагается на прямой, проходящей через точки N_1 и N_2 , что свидетельствует о правильности использованных оценок точности решения и хорошей сходимости метода.

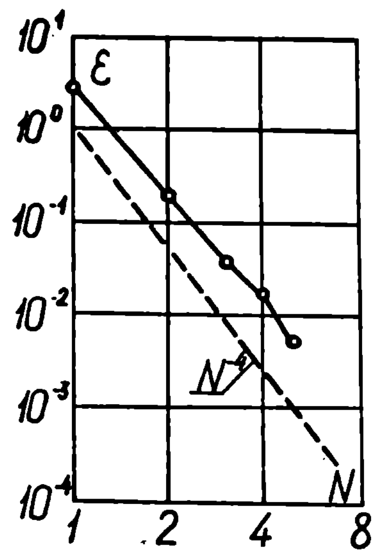


Рис.2.5. Сходимость решений по частотам колебания в зависимости от числа блоков.

Выводы по II главе

I. Предложен новый, полностью согласованный изопараметрический треугольный конечный элемент многослойной оболочки.

2. Исследованы свойства сходимости данного элемента в задачах изгиба, колебаний и устойчивости. На численных примерах показана эффективность данного элемента при решении вышеуказанных задач.

3. Предложен эффективный алгоритм нахождения минимальных собственных значений для задач большой размерности.

Глава III

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СПИРАЛЬНО ВИНТОВОЙ СИСТЕМОЙ РЕБЕР

В данной главе методом суперэлементов определены минимальные частоты собственных колебаний и критические нагрузки цилиндрических оболочек со спирально винтовой системой ребер. Использован изопараметрический треугольный конечный элемент, предложенный во второй главе.

3.I. Суперэлементы оболочки.

3.I.I. Квадратичные формы спирально винтовой поверхности

Расположим на срединной поверхности ребер систему криволинейных нормальных координат X^1, X^2, X^3 (рис.3.I)с координатным базисом $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ так, чтобы базисный вектор $\vec{a}_3$ был направлен в сторону внешней нормали поверхности, базисный вектор $\vec{a}_1$ вдоль геодезической линии обшивки, а вектор $\vec{a}_2$ по нормали к геодезической линии. Определим компоненты метрического тензора поверхности в данной системе координат [39]

$$a_{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \, \vec{a}_\beta \qquad (3.I)$$

Здесь

$$\vec{a}_\alpha = \vec{r}_{,\alpha} \, , \qquad (3.2)$$

где $\vec{r}$ - радиус вектор произвольной точки на срединной поверхности ребра.

$$
\begin{aligned}
&\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,; \\
&x = (R - X^1)\cos\left(\frac{X^1 \sin\alpha}{R}\right) + f_1(X^3), \\
&y = (R - X^2)\sin\left(\frac{X^1 \sin\alpha}{R}\right) + f_2(X^3), \qquad (3.3) \\
&z = X^1\cos\alpha - X^3\sin\alpha,
\end{aligned}
$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - орты декартовой глобальной системы координат xyz (рис.3.I). Из (3.2) с использованием (3.3) определяем базисные векторы спирально винтовой поверхности

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_1 = &-\vec{i}\,(R - X^2)\,\frac{\sin\alpha}{R}\,\sin\left(\frac{X^1 \sin\alpha}{R}\right) + \\
&+\vec{j}\,(R - X^2)\,\frac{\sin\alpha}{R}\,\cos\left(\frac{X^1 \sin\alpha}{R}\right) + \vec{k}\cos\alpha, \qquad (3.4) \\
\vec{a}_2 = &-\vec{i}\cos\left(\frac{X^1 \sin\alpha}{R}\right) - \vec{j}\sin\left(\frac{X^1 \sin\alpha}{R}\right).
\end{aligned}
$$

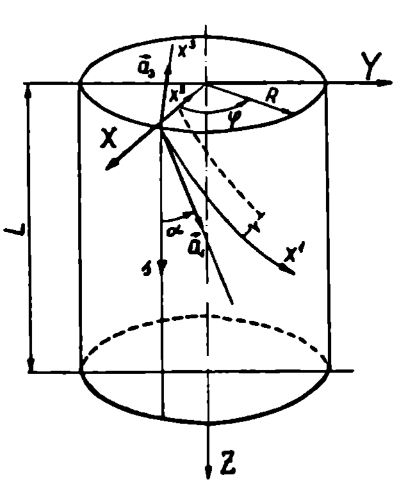


Рис.3.I. Система криволинейных нормальных координат оболочки со спиральными ребрами.

Поскольку $\vec{a}_3$ является нормалью к срединной поверхности, то вектор $\vec{a}_3$ определяется через векторы (3.4):

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, \qquad (3.5)$$

где $\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$

Из (3.5) с учетом (3.4) получаем:

$$\vec{a}_3 = \vec{i}\,\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\alpha\,\sin\left(\frac{x^1\sin\alpha}{R}\right) + \\ + \vec{j}\left[-\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\alpha\cos\left(\frac{x^1\sin\alpha}{R}\right)\right] + \vec{k}\,\frac{(R-x^2)}{R\sqrt{a}}\sin\alpha \qquad (3.6)$$

Здесь $$a = \cos^2\alpha + (R-x^2)\,\frac{\sin^2\alpha}{R^2}.$$

Используя (3.I) и (3.4), получаем следующие значения компонент первого тензора поверхности:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.7)$$

Компоненты второго тензора поверхности получаем, используя соотношение [39]

$$b_{\alpha\beta} = -\vec{a}_\alpha\,\vec{a}_{3,\beta}\,. \qquad (3.8)$$

Подставляя в (3.8) соотношения (3.4) и (3.6), имеем:

$$b_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sin 2\alpha}{2R\sqrt{a}} \\ \dfrac{\sin 2\alpha}{2R\sqrt{a}} & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

3.I.2. Матрица жесткости конечного элемента ребер.

Получим для спирального ребра в матричной форме связь между вектором физических компонент деформации:

$$\{\varepsilon\}^T=\{\Omega_{(11)},\ \Omega_{(22)},\ 2\Omega_{(12)},\ \chi_{(11)},\ \chi_{(22)},\ 2\chi_{(12)},\ 2\gamma_{(13)},\ 2\gamma_{(23)}\ \gamma_{(33)}\}$$

и вектором физических компонент обобщенных перемещений

$$\{u\}^T=\{u,\ v,\ w,\ \gamma_{(1)},\ \gamma_{(2)},\ \gamma\}$$

в следующем виде:

$$\{\varepsilon\}=[\mathcal{L}]\,\{u\}. \qquad (3.10)$$

Подставляя (3.9) в (2.6) и переходя на физические компоненты, получаем компоненты матрицы оператора дифференцирования для спирально винтового ребра:

$$[\mathcal{L}]=\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\sqrt{a}\,\partial x^1} & -\frac{R-x^2}{a}\frac{\sin^2\alpha}{R^2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{R-x^2}{\sqrt{a}\,R^2}\sin^2\alpha & \frac{\partial}{\sqrt{a}\,\partial x^1} & -\frac{\sin 2\alpha}{Ra} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\sqrt{a}\,\partial x^1} & -\frac{R-x^2}{a}\frac{\sin^2\alpha}{R^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{R-x^2}{\sqrt{a}\,R^2}\sin^2\alpha & \frac{\partial}{\sqrt{a}\,\partial x^1} & -\frac{1}{Ra}\sin 2\alpha\\
0 & \frac{\sin 2\alpha}{2Ra} & \frac{\partial}{\sqrt{a}\,\partial x^1} & 1 & 0 & 0\\
\frac{\sin 2\alpha}{2Ra} & 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

Далее выражаем перемещения внутри элемента $\{u\}$ через узловые перемещения, используя функции формы треугольного элемента (§ 2.2.I). Подставляя эти выражения в (3.IO), нетрудно получить матрицу $[B]$ связи деформаций элемента с узловыми перемещениями. Имея матрицу $[B]$ и Якобиан преобразования $[J]$ [58], можно определить матрицу жесткости (2.26) в глобальных координатах конечного элемента.

3.I.3. Матрица жесткости суперэлементов и конструкции

Повышение требуемой точности расчета и, следовательно, увеличение числа конечных элементов влечет за собой увеличение трудоемкости всего расчета в целом. Этот вопрос особенно актуален в задачах оптимизации, поскольку прямая задача решается многократно. Для сокращения времени счета и уменьшения объема оперативной памяти применяется метод суперэлементов [49]. Общая матрица жесткости конструкции формируется из соответствующих матриц суперэлементов.

Матрица жесткости суперэлемента может быть получена следующим путем. Вначале обычным образом формируется матрица жесткости подструктуры. Разделим узловые точки подструктуры на внутренние и внешние, обозначим их соответственно индексами i и s . Если матрицу жесткости $[K]$ подструктуры можно представить в блочном виде

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{is}] \\ [K_{si}] & [K_{ss}] \end{bmatrix}, \qquad (3.12)$$

то матрица жесткости $[K]^s$ суперэлемента определяется следующим образом:

$$[K]^s = [K_{ss}] - [K_{si}][K_{ii}]^{-1}[K_{is}] \qquad (3.13)$$

В задачах расчета оболочек со спирально винтовыми ребрами применяются суперэлементы нескольких уровней. Вначале из конечных элементов обшивки и ребер (рис.3.2) формируются суперэлементы первого уровня SUPSKIN1A для обшивки оболочки и SUPRIB1A для ребер оболочки. Из данных суперэлементов формируются суперэлементы следующего уровня SUP1A (рис.3.3), из которых формируются соответственно суперэлементы SUP2 (рис.3.3).Элемент SUP2 является базисным элементом, из которого формируется матрица жесткости конструкции.

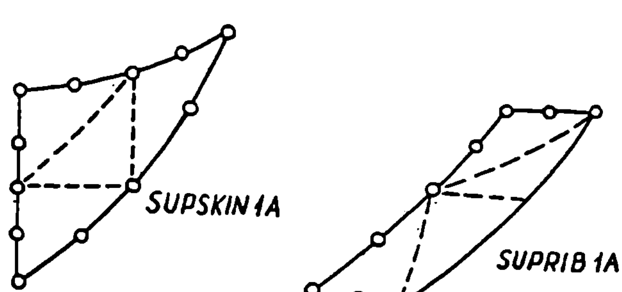


Рис.3.2. Суперэлементы оболочки:
SUPSKIN1A – обшивки оболочки;
SUPRIB1A – спиральных ребер.

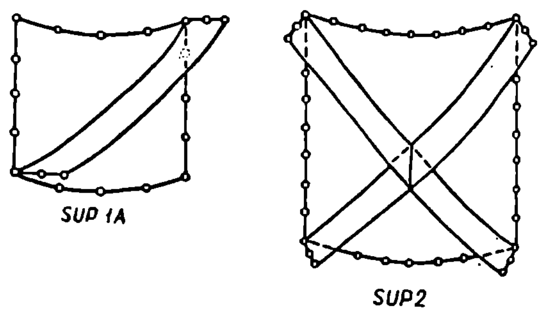


Рис.3.3. Суперэлементы оболочки

Следует отметить, что из выражения (2.26) матрица жесткости для обшивки получается в цилиндрических поверхностных координатах (α , φ), а матрица жесткости для ребер - в спиральных координата (X^1, X^2). Для решения задачи о совместном деформировании ребер и обшивки соответствующие матрицы необходимо привести к общей системе координат. В качестве глобальных координат конструкции выбираем декартовые (рис.3.I) x , y , z .

Между перемещениями в различных системах координат можно установить следующую зависимость:

$$\{u\} = [T]\{u'\} \qquad (3.14)$$

Здесь $\{u\}$ - вектор перемещения точки в глобальных координатах конечного элемента; $\{u'\}$ - вектор перемещения в глобальных координатах конструкции; $[T]$ – матрица преобразования.

Подставляя (3.14) в (2.25), с учетом (2.26) получаем матрицу жесткости конечного элемента в глобальных координатах конструкции

$$[K']^e = [T']^T [K]^e [T'], \tag{3.15}$$

где $[K]^e$ определяется выражением (2.26), а

$$[T'] = \begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix}$$

Нетрудно установить, что при переходе от цилиндрической системы координат к глобальным координатам конструкции матрица преобразований имеет вид:

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_1] & 0 \\ 0 & [T_1] \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

где
$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь φ – угол, характеризующий смещение точки на обшивке оболочки относительно оси X (рис.3.I). Для конечных элементов в ребрах имеем следующую матрицу преобразований:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} -\frac{R-X^2}{R\sqrt{a}}\sin\alpha\sin Q & \frac{R-X^2}{R\sqrt{a}}\sin\alpha\cos Q & \frac{\cos\alpha}{\sqrt{a}} \\ -\cos Q & \sin Q & 0 \\ \frac{\cos\alpha}{\sqrt{a}}\sin Q & -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{a}}\cos Q & \frac{R-X^2}{R\sqrt{a}}\sin\alpha \end{bmatrix}, \qquad (3.17)$$

где
$$Q = \frac{X^1\sin\alpha}{R}.$$

Матрица жесткости всей конструкции (рис.3.4) формируется из однотипных суперэлементов SUP2 ,что позволяет значительно сэкономить время решения задачи. Матрица жесткости суперэлементов рассчитывается с помощью выражений (3.I5), (3.I6),где

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.18)$$

Здесь β – угол смещения суперэлемента с матрицей жесткости $[K']^s$ по отношению к суперэлементу с матрицей жесткости $[K]^s$ как жесткого тела без деформаций.

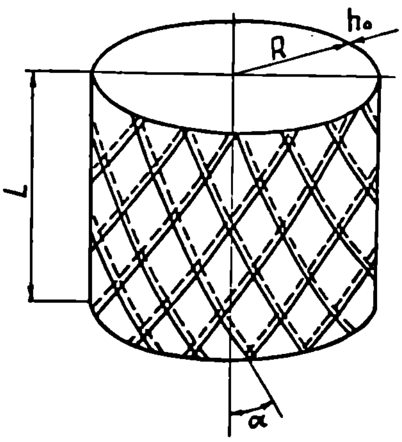


Рис.3.4. Оболочка со спирально винтовой системой ребер.

3.2. Частоты собственных колебаний оболочки со спиральными ребрами.

Матрицу масс изопараметрического конечного элемента можно получить, используя соотношения (2.37). Матрицу масс суперэлемента получаем следующим путем [49]. Вначале формируем обычным образом матрицу масс подструктуры. Если представить матрицу масс подструктуры в оболочном виде аналогично матрице жесткости (3.12)

$$[M]=\begin{bmatrix}[M_{ii}] & [M_{is}] \\ [M_{si}] & [M_{ss}]\end{bmatrix}, \qquad (3.19)$$

то матрицу масс суперэлемента можно получить в следующем виде:

$$[M]^s = [M_{ss}] - [M_{si}][K_{ii}]^{-1}[K_{is}] - $$
$$ - [K_{si}][K_{ii}]^{-1}\left([M_{is}] - [M_{ii}][K_{ii}]^{-1}[K_{is}]\right), \qquad (3.20)$$

где $[K_{ii}]$, $[K_{is}]$, $[K_{si}]$ – блоки матрицы жесткости соответствующего структурного элемента (3.I2).

Для получения матрицы масс используем процедуру, аналогичную той, которая использовалась при получении матрицы жесткости (§ 3.I.I). Окончательное матричное уравнение задачи о свободных колебаниях будет иметь вид

$$\left([K'] - \omega^2[m']\right)\{X\} = 0 , \qquad (3.2I)$$

где $[K']$ и $[m']$ – матрицы жесткости и масс всей конструкции.

На некоторые узловые точки накладываются кинематические граничные условия в виде

$$[A]\{X\} = 0 , \qquad (3.22)$$

где $[A]$ – матрица коэффициентов линейных кинематических условий. Для учета кинематических условий (3.22) преобразуем матрицу жесткости $[K']$ и матрицу масс $[m']$ конструкции следующим образом. Для учета граничных условий типа (3.22) воспользуемся методом множителей Лагранжа. Минимизируем вспомогательный функционал

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_\Sigma + \{Q\}^T[A]\{X\} , \qquad (3.23)$$

где $\{Q\}$ – вектор множителей Лагранжа, $U_\Sigma = \{X\}^T([K'] - \omega^2[m'])\{X\}$ сумма потенциальной и кинетической энергии системы.

Из условия минимума (3.23)

$$\frac{\partial U_1}{\partial \{X\}^T} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U_1}{\partial \{Q\}^T} = 0 \tag{3.24}$$

получаем следующую систему

$$\begin{bmatrix} [K'] & [A]^T \\ [A] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [m'] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = 0 \tag{3.25}$$

Использовав связные граничные условия (3.22), вместо уравнения (3.2I) решаем уравнение (3.25) по алгоритму, описанному в § 2.2.3. Некоторые численные результаты, полученные с применением данной методики, представлены в § 3.4.

3.3. Устойчивость оболочки со спиральными ребрами.

Матрицу инкрементальной жесткости изопараметрического конечного элемента обшивки оболочки можно получить, используя соотношения (2.32), (2.33) и (2.35). Используя методику, изложенную в § 2.2.2, получим матрицу инкрементальной жесткости для ребер.

Если в качестве глобальных координат конечного элемента выбираем X^1, X^2, X^3 (рис.3.I), то из (2.7) с учетом (2.6), (3.9) и переходя на физические компоненты, получаем:

$$2\,\Omega^{(2)}_{(11)} = \varepsilon^2_{(11)} + \varepsilon^2_{(12)} + \psi^2_{(1)} ,$$

$$2\,\Omega^{(2)}_{(22)} = \varepsilon^2_{(21)} + \varepsilon^2_{(22)} + \psi^2_{(2)} ,$$

$$2\,\Omega^{(2)}_{(12)} = \varepsilon_{(11)}\varepsilon_{(21)} + \varepsilon_{(12)}\varepsilon_{(22)} + \psi_{(1)}\psi_{(2)} ;$$

$$2\,\gamma^{(2)}_{(13)} = \gamma_{(1)}\varepsilon_{(11)} + \gamma_{(2)}\varepsilon_{(12)} + \psi_{(1)}\gamma ;$$

$$2\,\gamma^{(2)}_{(23)} = \gamma_{(1)}\varepsilon_{(21)} + \gamma_{(2)}\varepsilon_{(22)} + \psi_{(2)}\gamma ,$$

где

$$\varepsilon_{(11)} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial u}{\partial x^1} + \frac{A}{a}\vartheta ;$$

$$\varepsilon_{(12)} = \frac{\partial u}{\partial x^2} + \left(\frac{A}{a\sqrt{a}} - \frac{A}{a}\right)u - \frac{\sin 2\alpha}{2Ra}w ,$$

$$\varepsilon_{(21)} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial \vartheta}{\partial x^1} - \frac{A}{a}u - \frac{\sin 2\alpha}{2Ra}w , \qquad (3.26)$$

$$\varepsilon_{(22)} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x^2} ,$$

$$\psi_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial w}{\partial x^1} + \frac{\sin 2\alpha}{2Ra}\vartheta ;$$

$$\psi_{(2)} = \frac{\partial w}{\partial x^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2Ra}u .$$

Здесь $$A = (X^2 - R)\,\frac{\sin^2\alpha}{R^2}$$

$$a = \cos^2\alpha + (R - X^2)\,\frac{\sin^2\alpha}{R^2}$$

Подставляя (3.26) в (2.27), получаем функционал в матричном виде:

$$U_2^c = \frac{1}{2}\int\limits_S \{c\}^T [A] \{c\}\, dS \qquad (3.27)$$

Здесь

$$\{c\}^T = \{\varepsilon_{(11)},\ \varepsilon_{(12)},\ \psi_{(1)},\ \varepsilon_{(21)},\ \varepsilon_{(22)}\ \psi_{(2)},\ \gamma_{(1)},\ \gamma_{(2)},\ \gamma\}$$

$[A]$ - определяется в (2.32).

Используя соотношения (2.32), из (3.27) с учетом (3.26) нетрудно получить окончательное выражение (2.34) для матрицы инкрементальной жесткости ребер, где $[E_i]$ определяется в следующем виде:

$$[E_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\sqrt{a}\,\partial x^1} & \frac{A}{a} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^1} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right)\frac{A}{a} N_i & 0 & -\frac{\sin 2\alpha}{2Ra} N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin 2\alpha}{2Ra} N_i & \frac{\partial N_i}{\sqrt{a}\,\partial x^1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A}{a} N_i & \frac{\partial N_i}{\sqrt{a}\,\partial x^1} & -\frac{\sin 2\alpha}{2Ra} N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sin 2\alpha}{2Ra} N_i & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \qquad (3.28)$$

Чтобы найти докритические усилия (2.28), необходимо решить уравнение равновесия всей оболочки:

$$[K']\{\delta\} = \{F'\} \qquad (3.29)$$

Здесь $[K']$ - матрица жесткости оболочки (§ 3.I.3); $\{\delta\}$ - вектор обобщенных перемещений оболочки; $\{F'\}$ - вектор обобщенных усилий оболочки.

Если на конечный элемент оболочки действует только распределенная внешняя нагрузка $\{q\}$ (нагрузка на единицу площади), то вектор усилий одного конечного элемента определяется следующим образом [36] :

$$\{F\}^e = -\iint\limits_S [N]^T\{q\}\,dS = -\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-\ell_1} [N]^T\{q\}\,\left|det([J])\right|\,d\ell_1\,d\ell_2 \qquad (3.30)$$

Обычным способом - путем объединения узловых сил в ансамбль нетрудно получить вектор усилий подструктуры:

$$\{F\} = \sum \{F\}^e \qquad (3.3I)$$

и вектор узловых усилий суперэлемента

$$\{F\}^s = \{F_s\} - [K_{si}]\,[K_{ii}]^{-1}\,\{F_i\}\,, \qquad (3.32)$$

где $\{F_s\}$ - вектор нагрузок, приложенных к граничным узлам подструктуры; $\{F_i\}$ - вектор нагрузок, приложенныхк внутренним узлам подструктуры, $[K_{si}]$ и $[K_{ii}]$ определены в (3.I2).

Далее, используя методику, изложенную в § 3.I.3, нетрудно получить $\{F'\}$ в выражении (3.29). После учета граничных условий, решая уравнение (3.29), можно получить докритические перемещения оболочки. Используя соотношения (2.20) и (2.29), вычисляются докритические усилия, которые необходимы для получения матрицы инкрементальной жесткости. Окончательное матричное уравнение задачи об определении критической нагрузки будет иметь вид:

$$\left([K'] - \lambda[G']\right)\{X\} = 0 \qquad (3.33)$$

Здесь $[K']$ – матрица жесткости ребристой оболочки в глобальной системе координат; $[G']$ – матрица инкрементальной жесткости в глобальной системе координат; $\{X\}$ – вектор обобщенных узловых перемещений всей оболочки.

После учета граничных условий (§ 3.3.2) решается задача (3.33) определения минимального собственного значения λ_{min} по алгоритму, описанному в § 2.2.3. Если полученное наименьшее собственное значение λ_{min} равно единице, то при заданной нагрузке произойдет потеря устойчивости оболочки, в противном случае следует изменить нагрузку и повторить всю процедуру расчетов заново, и так до тех пор, пока λ_{min} в некоторой погрешностью не будет равняться единице. Ниже приводятся численные результаты, полученные при решении конкретных задач.

Рассмотрим пример расчета на устойчивость при внешнем давлении цилиндрической оболочки со спирально винтовой системой ребер. Длина оболочки L = 3,14, радиус оболочки R = 1, толщина оболочки H = 0,02, граничные условия жесткого защемления. Обшивка оболочки выполнена в виде многослойного, однородного по толщине композита, монослой которого имеет объемный коэффициент армирования μ = 0,6 и выполнен из однонаправленно армированного углеэпоксидного композита со следующими характеристиками (рассчитаны по методике, предложенной в § I.4): $E_1 = E_2 = 0{,}16\times10^5$ МПа; $E_3 = 1{,}8\times10^5$ МПа; $G_{13} = G_{23} = 0{,}468\times10^4$ МПа; $\nu_{31} = \nu_{32} = 0{,}289$; $\nu_{13} = \nu_{23} = 0{,}026$. Ось 3 направлена вдоль волокон, оси I, 2 расположены в плоскости изотропии этого трансверсально-изотропного монослоя. Монослои расположим под углами 0°, $\pm45^\circ$, 90° к образующей оболочки с относительным количеством слоев в этих направлениях соответственно 0,25; 0,25; 0,25; 0,25. Спирально винтовые ребра оболочки однослойные, выполненные из того же материала и расположены под углами $\alpha = 45^\circ$ и 135° к образующей оболочки; число ребер $N = 8$, высота ребер оболочки $H_r = 0{,}3$, толщина ребер $b_r = 0{,}03$. Критическая нагрузка соответствующей оболочки без ребер $q_1 = 2{,}92$ МПа

Ребристая оболочка имеет критическую нагрузку $q_2 = 20{,}12$ МПа

Представляет интерес сравнение масс гладкой и ребристой оболочек:

$$m_1 = 0{,}398 \qquad ; \qquad m_2 = 0{,}592$$

Из примера расчета видна эффективность использования спирально винтовых подкреплений для увеличения несущей способности конструкции.

3.4. Оптимизация цилиндрических оболочек со спиральными ребрами, работающих в режиме колебаний.

Улучшения весовых характеристик композитных оболочек, работающих в режиме колебаний, можно добиться путем управления формой оболочки. Наиболее простое решение данной проблемы - это создание подкрепленных оболочек. Сформулируем далее следующую задачу оптимизации:

$$G(x) \to \min \tag{3.34}$$

при ограничениях на частоту собственных колебаний

$$\omega_*\{x\} - \omega \geq 0 \qquad (3.35)$$

при геометрических ограничениях

$$\psi_i(x) \geq 0; \quad i = 1,2,3 \ldots \qquad (3.36)$$

Здесь $G(x)$ – критерий качества проекта – масса оболочки; $\{x\} = \{x_1, x_2, \quad , x_n\}$ – вектор оптимизируемых параметров, в который входят как структурные параметры материала ребер и обшивки, так и геометрические параметры оболочки; $\omega_*(x)$ – минимальная частота собственных колебаний, зависящая от оптимизируемых параметров; ω – некоторая заданная частота; $\psi_i(x)$ – совокупность геометрических ограничений.

Решение поставленной оптимизационной задачи состоит из двух частей. Первая часть – определение физического ограничения – $\omega_*(x)$ низшей частоты собственных колебаний ребристой оболочки (§3.3.2). Вторая проблема – отыскание конструкции минимального веса, которая удовлетворяет ограничениям задачи. При этом используется следующий подход.

При решении задачи оптимизации почти всегда можно в пространстве параметров оптимизации выделить границы области, в которой, вероятно, находится оптимум. Опираясь на опыт и интуицию, исследователь может составить закон распределения вероятности нахождения оптимума в этой выделенной области. В этом области, согласно законам распределения вероятности нахождения оптимума, можно провести определенное количество испытаний. Каждому испытанию соответствует точка в пространстве параметров оптимизации. При испытании проводится расчет минимальной частоты колебаний оболочки и вычисляются показатели качества - масса конструкции. После испытаний, проведенных по определенному плану, делаются оценки по показателям качества и выделяется лучший проект. Вокруг лучшего проекта в первой серии испытаний выделяется новая область поиска и в ней строится новый план и проводятся испытания следующей серии. Здесь для построения оптимального плана использован подход, предложенный в [11] для планирования многофакторных экспериментов. На основе испытаний строим приближенную модель

$$\omega_*^M = \omega_*^M(x) \qquad (3.37)$$

Синтез модельных функций проводится по методике, предложенной в работе [12] . Так как синтез модели производится в классе элементарных функций, то полученная функций ограничения весьма проста. Поэтому, заменяя в исходной оптимизационной задаче ограничение (3.35) ограничением с модельными функциями (3.37), получаем эквивалентную задачу оптимизации, решение которой легко получить методами математического программирования.

Рассмотрим пример оптимизации цилиндрической оболочки из углепластика со спирально винтовой системой ребер при ограничении на частоту собственных колебаний. Исходные характеристики оболочки такие же, как и в задаче, рассмотренной в § 3.3.

В качестве параметров оптимизации выбираем следующие величины: толщину обшивки H , высоту спиральных ребер H_t . Ширину ребра принимаем ровной $b_t = H_t/10$ Таким образом имеем вектор параметров оптимизации или вектор проекта:

$$\{x\} = \{H, H_t\}$$

Для первой серии испытаний выделяем следующую область поиска:

$$0{,}01 \leqslant H \leqslant 0{,}04$$

$$0{,}08 \leqslant H_k \leqslant 0{,}25$$

В данной области поиска проводим серию испытаний по методике, предложенной в работе [11]. Выбираем план с десятью уровнями. В этом случае для двух переменных имеем следующую матрицу плана:

$$[E] = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 2 \\ 6 & 5 \\ 9 & 7 \\ 1 & 3 \\ 2 & 9 \\ 5 & 8 \\ 7 & 1 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad (3.38)$$

Компоненты вектора $\{X\}$ для i-ого испытания согласно плану (3.38) определяем по формуле:

$$X_j^{(i)} = X_j^{min} + \left(X_j^{max} - X_j^{min}\right)\frac{E_{ij}}{\max\limits_{ij} E_{ij}} . \qquad (3.39)$$

Здесь X_j^{max} и X_j^{min} - максимальные и минимальные значения вектора проекта в данной серии испытаний.

В таблице 3.1 приведены результаты расчета плана первой серии. За показатели качества проекта были выбраны следующие величины: масса конструкции $G = V\gamma_k$, (V - объем конструкции, γ_k - плотность материала оболочки), минимальная частота колебаний ω_* .

Таблица 3.I

№ уровня проекта	Параметры оптимизации		Показатели качества		
	H	H_r	V	ω_* (1/с)	Форма колебаний
I	0,04	0,I48	0,9924	I952	A
2	0,0I9	0,I82	0,4925	223I	A
3	0,022	0,II4	0,5209	I838	A
4	0,028	0,I65	0,7I03	2064	A
5	0,037	0,I99	0,9795	2I62	A
6	0,0I3	0,I3I	0,3I52	2054	A
7	0,0I6	0,233	0,4409	250I	A
8	0,025	0,2I6	0,6754	2329	A
9	0,03I	0,097	0,7I62	I736	A
I0	0,034	0,250	0,9552	2377	A

Здесь A – общая форма колебаний.

Из анализа показателей качества плана первой серии видим тенденцию к увеличению минимальной частоты колебаний при уменьшении толщины оболочки H и при увеличении высоты ребер H_r Из этого следует необходимость сдвинуть область поиска в данном направлении. Исходя из этого, для второй серии испытаний выделяем следующую область поиска:

$$0{,}005 \leq H \leq 0{,}0I$$
$$0{,}08 \leq H_r \leq 0{,}3$$

В таблице 3.2 приведены результаты расчета плана второй серии. Все имеющиеся формы колебаний оболочки представлены на рис.3.~~5~~ 3. Кроме того, в области поиска были подсчитаны частоты в дополнительных точках. Результаты этих испытаний показаны в таблице 3.~~3~~ 4.

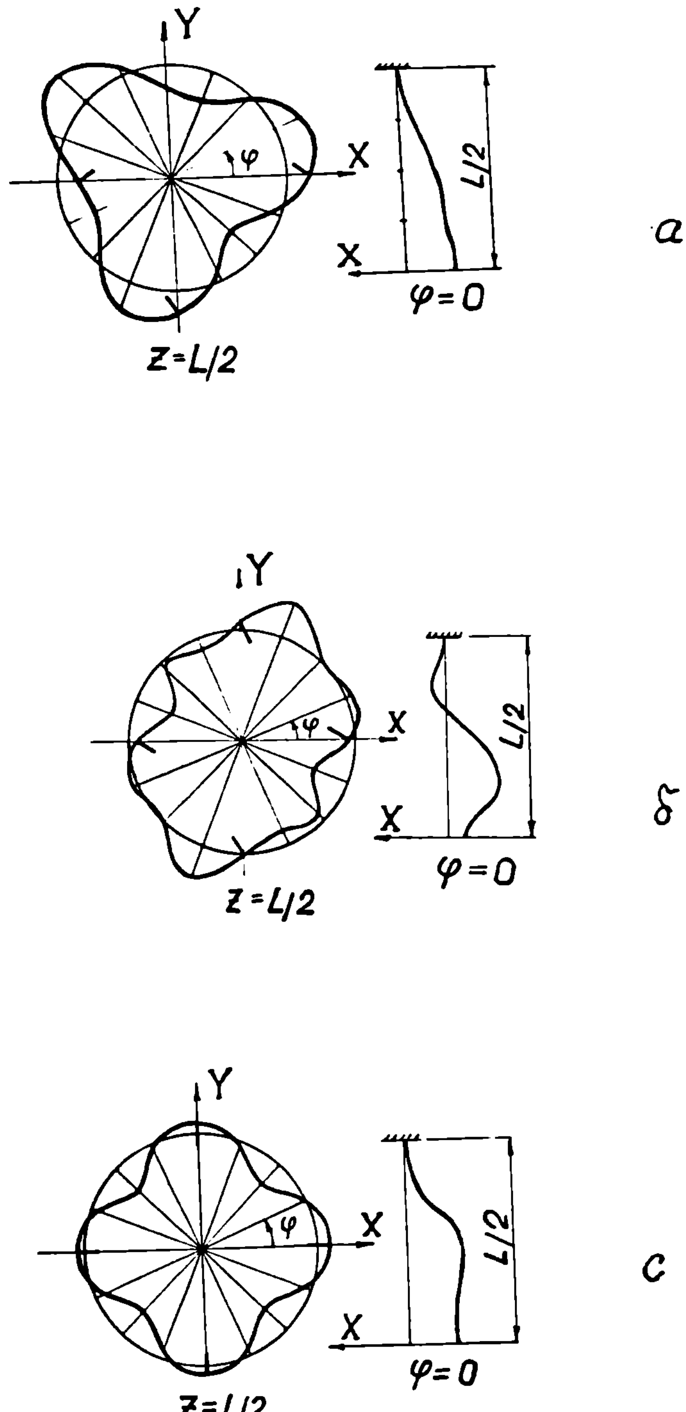


Рис.3.5. Формы колебаний оболочки со спирально
винтовой системой ребер: а) общая(форма А);
б) местная (форма В); с) местная (форма С).

Таблица 3.2

№ уровная проекта	Параметры оптимизации		Показатели качества		
	H	H_r	V	$\omega_k\,(\frac{1}{s})$	Форма колебаний
I	0,0100	0,168	0,2547	3036	C
2	0,0065	0,212	0,1748	2586	A
3	0,0070	0,124	0,1681	2182	A
4	0,0080	0,190	0,2094	2486	A
5	0,0095	0,234	0,2621	2214	B
6	0,0055	0,146	0,1361	1734	B
7	0,0060	0,278	0,1738	1941	B
8	0,0075	0,256	0,2121	2056	B
9	0,0085	0,102	0,1978	1972	A
10	0,0090	0,300	0,2668	2009	B

Здесь В и С – местные формы колебаний оболочки.

Таблица 3.3

№	Параметры оптимизации		Показатели качества		
	H	H_r	V	$\omega_k\,(\frac{1}{s})$	Форма колебаний
I	0,0090	0,153	0,2248	2285	A
2	0,0076	0,167	0,1933	2398	A
3	0,0065	0,176	0,1672	2470	A
4	0,0093	0,200	0,2465	2493	A
5	0,0130	0,208	0,3479	2455	A
6	0,0060	0,236	0,1659	1991	B
7	0,0060	0,200	0,1590	2553	A
8	0,0240	0,288	0,7026	2574	A
9	0,0120	0,288	0,3513	2049	B
10	0,0074	0,228	0,2028	2024	B
11	0,0076	0,226	0,2076	2614	A

Используя данные, полученные при испытаниях (таблицы 3.I, 3.2, 3.3), построим функции $\omega_*^{1M}(x)$ и $\omega_*^{2M}(x)$, которые отражают поведение модели при общей форме колебаний (форма А) и местной форме колебаний (формы В и С) соответственно. Синтез функций ω_*^{1M} и ω_*^{2M} по таблично заданным значениям проводится по методу наименьших квадратов, используя программу, основанную на методике, изложенной в работе [72].

В нашем случае функции имеют следующий вид:

$$\omega_*^{1M} = 3550 - 593\frac{1}{\tilde{X}_2} - 157\frac{1}{\tilde{X}_1} - 656\,\tilde{X}_2 \qquad (3.40)$$

Здесь $\tilde{X}_1 = 0{,}115 + 76{,}923\,X_1$; $\tilde{X}_2 = -0{,}448 + 6{,}494\,X_2$

$$\omega_*^{2M} = 1195 + 708\,\tilde{X}_2 + 421\frac{1}{\tilde{X}_1} - 98\frac{1}{\tilde{X}_1\tilde{X}_2} \qquad (3.41)$$

Здесь $\tilde{X}_1 = 0{,}324 + 29{,}412\,X_1$; $\tilde{X}_2 = -78{,}53 + 5{,}24\,X_2$

Переходная граница между формами А и В, С определяется уравнением

$$H_{\kappa} = f_1(H') \qquad (3.42)$$

Уравнение (3.42) получаем из расчетных точек, используя аппроксимацию по методу наименьших увадратов. Данную границу можно описать полиномом Чебышева

$$H_{\kappa} = b_1 T_0(H') + b_2 T_1(H') + \qquad + b_5 T_4(H'),$$

где $T_K(H') = 2H' T_{K-1}(H') - T_{K-2}(H')$

при $K \geq 2$.

Здесь $T_0(H') = 1$;
$T_1(H') = H'$,

$$H' = \frac{2H - (H_{min} + H_{max})}{H_{max} - H_{min}}$$

Здесь для рассматриваемого примера $\{b\}^T = \{0{,}242;\ 0{,}073;\ -0{,}011,\ 0{,}014;\ -0{,}018\}$

На рис.3.6 показаны линии уровня низшей частоты колебаний (сплошные линии), линии уровня массы оболочки (штриховые линии и граница областей между формами A и B, C (штрихпунктирная линия).

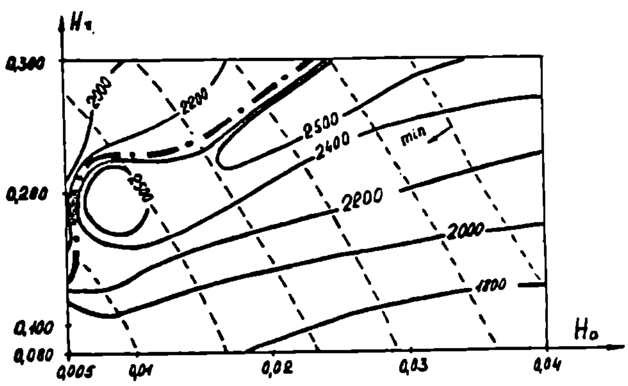


Рис.3.6. Линии уровня низшей частоты колебаний оболочки со спирально винтовой системой ребер.

Таким образом исходную задачу оптимизации (3.34) - (3.36) заменяем следующей

$$G(x) \to min \qquad (3.43)$$

при физических ограничениях

$$\omega_*^M(x) - \omega \geq 0 \qquad (3.44)$$

и геометрических ограничениях

$$\begin{aligned} 0{,}005 &\le H \le 0{,}01 \\ 0{,}08 &\le H_r \le 0{,}3 \end{aligned} \qquad (3.\cancel{45}\ 19)$$

где

$$\omega_*^{M}(x) = \begin{cases} \omega_*^{1M}(x) & \text{при} \quad H_r - f_1(H') \geq 0 \\ \omega_*^{2M}(x) & \text{при} \quad H_r - f_1(H') \leq 0 \end{cases}$$

Далее решаем задачу оптимизации (3.43) - (3.45). Оптимуму исходной задачи (3.34) - (3.36), полученному из решения вспомогательной задачи (3.43) - (3.45), соответствует следующий вектор проекта (при $\omega = 2400$ с$^{-1}$):

$$\{X_*\} = \{ 0{,}006 ,\ 0{,}180 \}$$

$$G(X_*) = 0{,}1440$$

Для проверки в точке оптимума $\{X_*\}$ методом конечного элемента было вычислено точное значение основного ограничения и установлено, что исходное ограничение нарушено менее, чем на 5 %.

Выводы по III главе

1. Получены основные соотношения конечного элемента для спирально винтовых ребер.

2. Разработана методика определения критических нагрузок и частот собственных колебаний для цилиндрических оболочек со спирально винтовой системой ребер, основанная на методе суперэлемента.

3. На примере задачи весовой оптимизации ребристой оболочки показана возможность применения метода суперэлемента при расчете физических ограничений оптимизационной задачи.

Глава IУ

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ЭВМ

4.I. Общая характеристика комплекса программ.

В настоящее время, когда МКЭ прочно вошел в практику расчетов, существует значительное количество вычислительных программ. Некоторые из этих программ представляют собой довольно сложные универсальные комплексы ("Прочность - 75" [38], "Каскад - 2" [49], NASTRAN [106], ASKA [83]), другие предназначены для решения довольно простых задач и невелики по объему. Тем не менее, исследователю нередко приходится создавать свои собственные программы. Так для решения прямых и оптимизационных задач, рассмотренных в настоящей работе, создан комплекс программ. Назначение данного комплекса - расчет и оптимизация подкрепленных оболочек из композитных материалов. В основу комплекса заложен метод конечных элементов и метод суперэлементов для решения прямых задач, и метод информативного планирования экспериментов для решения оптимизационных задач.

Комплекс программ предназначен для использования ЭВМ серии ЕС в системе ОС. Реализация комплекса осуществляется на ЭВМ ЕС-1022, ЕС-1030, ЕС-1033 с оперативной памятью 512 кб. Программы комплекса состоят из 10 модульных блоков. Блоки модулей 1-9 предназначены для решения прямой задачи, блок 10 - для решения оптимизационной задачи. На рис.4.1 изображена общая структура программного комплекса. Программный комплекс предназначен для микромеханического анализа монослоя композита, для определения упругих характеристик композита, исходя из характеристик компонент композита, для решения задач изгиба, колебаний и устойчивости гладких и ребристых оболочек. Ниже приводится краткое описание содержания составляющих модульных блоков. Общее количество подпрограмм в комплексе составляет около 200.

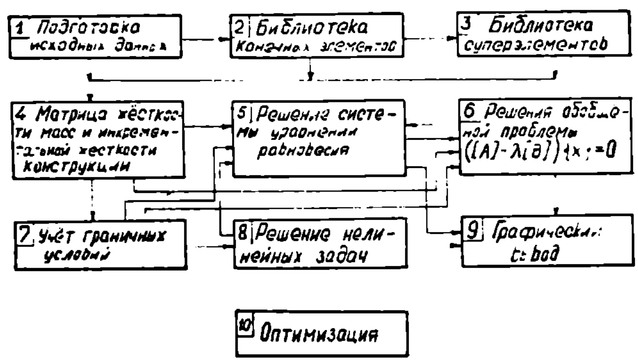


Рис.4.I. Основные блоки комплекса программ.

4.2. Основные блоки, реализующие метод конечных элементов.

I. В этом блоке производится подготовка исходной информации, т.е. дискретизация области и минимизация полуширины ленты. Основные программы этого блока следующие:

SDALL , SUB - производят дискретизацию произвольной плоской области на треугольные элементы. Причем в качестве исходной информации необходимо представить исследуемую область в виде набора фрагментов, каждый из которых геометрически представляет собой треугольник (одна сторона его может быть и частью окружности). Далее каждый фрагмент с постоянным шагом h разбивается на h^2 одинаковых треугольников;

SSDAA2 , SSDAA3 , SSDAA4 - производят дискретизацию обшивки цилиндрической оболочки и ребер оболочки на изопараметрические треугольные элементы второго (SHELL2) и третьего (SHELL3) порядка;

SUBT01 , SUBT02 , SUBT03 - производят дискретизацию цилиндрической оболочки со спиральными ребрами;

TELPS - производит дискретизацию области на пространственные элементы в виде параллелепипеда;

CCNOP6 - производит дискретизацию области на пространственные элементы в виде треугольной призмы.

Поскольку при автоматической подготовке информации порядок нумерации узлов не является очевидным, то поднимается вопрос об оптимальной нумерации для получения минимальной ширины ленты матрицы жесткости конструкции. Для этой цели используется программа MINBNN , в основе которой лежат идеи, изложенные в работе [88].

Так как количество входной информации для конечноэлементных программ велико, большое значение приобретает автоматизация проверки этой информации. Такой контроль может быть проделан с помощью подключения программ из блока № 9.

2. Данный блок содержит библиотеку конечных элементов, которые необходимы для решения задач, рассмотренных в данной работе. Вычисления матриц жесткости, масс и инкрементальной жесткости конечных элементов можно произвести поблочно, причем блок дол-

жен иметь размер $NDF \times NDF$, где NDF – число степеней свободы в одной точке. Можно также вычислить матрицу сразу для всего конечного элемента. Она будет иметь порядок $NED \times NED$, где NED – число степеней свободы элемента.

Вычисление матрицы изопараметрических элементов производится с применением численного интегрирования. Перечислим далее основные элементы, использованные в настоящей работе:

STIF12 – треугольный элемент первого и второго порядка для решения плоской задачи;

ST12 – пространственный элемент в виде параллелепипеда с восмью узлами, имеющий 24 степени свободы для решения объемных задач;

STIF6 – пространственный элемент в виде треугольной призмы с 6 узлами, имеющий 18 степеней свободы;

ST1222 – семейство изопараметрических элементов второго и третьего порядка для расчета произвольных непологих гладких и ребристых оболочек (SHELL2 , SHELL3).

3. Библиотека суперэлементов. Суперэлементы используются при расчете ребристых оболочек и собираются из треугольных изопараметрических элементов второго порядка (SHELL2). Для расчета оболочек с кольцевыми ребрами используются суперэлементы одного уровня. При расчете цилиндрических оболочек со спирально винтовой системой ребер используются суперэлементы нескольких уровней, а именно: SUBSKIN1 , SUBRIB1 , SUP1A , SUP2 (см. рис.3.2 и рис.3.3).

4. Блок формирования матриц жесткости, инкрементальной жесткости и масс конструкции. Здесь представлена группа программ, которые используются в зависимости от размерности задач, также от

метода решения систем алгебраических уравнений.

Основные программы этого блока следующие:

FORM1 – программа формирования одновременно всей матрицы в оперативной памяти (ОП) размером NSZF x NBAND (NSZF – общее количество уровней, NBAND – полуширина ленты);

BFORM1 – программа формирования одновременно в ОП матрицы размером NNZ x NBAND, где NNZ = N x NDF , где N = I,2,3...M;

FORBBB – программа формирования одновременно в ОП блоков размером NB x NB , где NB ≤ NBAND;

FORM – программа формирования одновременно в ОП всех ненулевых членов матрицы и соответствующей матрицы-указателя;

FRONTA – программа формирования матрицы жесткости и одновременная реализация прямого метода исключения Гаусса.

Здесь используется то свойство, что при исключении i -ой неизвестной при помощи i -ого уравнения совсем необязательно, чтобы коэффициенты других уравнений были полностью просуммированы. Здесь построение матриц жесткости для конечных элементов происходит "параллельно" с исключением неизвестных внутри блока. В оперативной памяти одновременно находится одномерный массив размерности NL = (NBAND +1) x NBAND /2

5. Блок решения системы уравнений равновесия. Он содержит несколько программ, которые используются в зависимости от того, в каком виде сформирована матрица жесткости конструкции, и от ресурсов ЭВМ, которые имеются в нашем распоряжении.

Блок решения систем линейных уравнений содержит следующие программы:

SOLVE – программа, реализующая метод исключения Гаусса, когда одновременно в ОП хранится вся матрица жесткости конструкции размером NSZF x NBAND (совместно с программой FORM1);

SOISOI - программа, реализующая итерационный метод Гаусса-Зейделя с одновременным хранением в ОП матрицы размером NSZF x NBAND (FORM1);

BSOLVE - программа, реализующая метод исключения Гаусса с хранением в ОП блока размером NBA x NBAND, где NBA = 2 x NBAND (BFORM1);

SOISSS - реализует итерационный метод Гаусса-Зейделя с одновременным хранением в ОП NBAND x NBAND (BFORM1);

BAND2R - реализует метод исключения Гаусса с хранением в ОП двух строк длиной NBAND (BFORM1);

SALNE - реализует блочный метод исключения Гаусса (FORBBB);

SOIKTE - реализует итерационный метод Гаусса-Зейделя (FORM).

6. Решение обобщенной проблемы собственных значений $[A]\{X\} = \lambda [B]\{X\}$. В основу метода положен алгоритм, описанный в § 2.2.3. Этот блок содержит следующие программы:

SIPAS - программа, реализующая итерационный метод определения минимального собственного значения. В ОП одновременно находится один массив ($[A]$ или $[B]$) размерностью NSZF x NBAND

SIPAS1 - реализует тот же итерационный метод с хранением в ОП одновременно части одного массива ($[A]$ или $[B]$) размерностью NBAND x NBAND

7. Блок учета граничных условий. Этот блок содержит следующие программы:

IZSVRK - программа вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нулевым граничным условиям, когда в ОП одновременно находится матрица размером NSZF x NBAND

TS2VRK1 – программа вычеркивания строк и столбцов, соответствующих нулевым граничным условиям, когда в ОП одновременно находится матрица размером NS2 x NBAND , где NS2 ≤ NS2F

T2SVRA – программа учета граничных условий в векторе нагрузки;

SAISOB – программа, реализующая учет граничных условий в глобальных координатах с помощью множителей Лагранжа. В ОП одновременно находится массив размерностью NS2F x NBAND

SAIS01 – программа, аналогичная программе SAIROB , но с одновременным хранением в ОП массива размерностью NS2 x NBAND

8. Блок решения физически нелинейных задач по определению поля напряжений однонаправленно армированного композита. Блок реализует метод переменной жесткости. При этом используются программы блоков 4 и 5.

9. Блок графического вывода результатов. Этот блок содержит несколько программ, позволяющих получить на АЦПУ сетку конечных элементов в исследуемой области и линии уровня главных напряжений. Этот блок содержит следующие программы:

GGIIGG – программа вывода сетки КЭ на АЦПУ для плоской области;

GGII11 – программа вывода сетки КЭ на АЦПУ для ребристых оболочек;

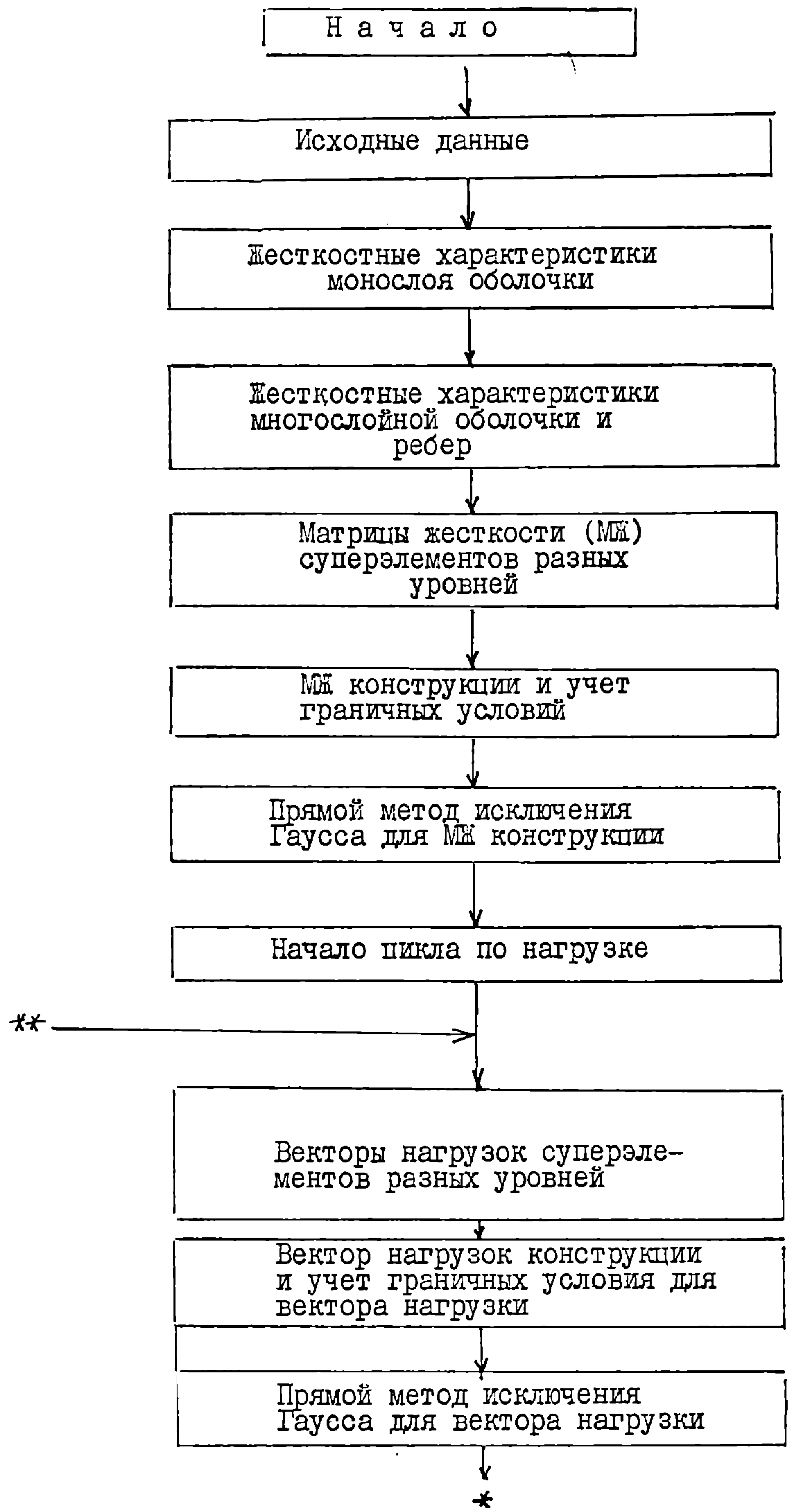
GRAFF – программа вывода на АЦПУ линий уровня главных напряжений.

II. Блок оптимизации методом информативного планирования экспериментов для решения оптимизационных задач для ребристых оболочек.

4.3. Пример расчета критической нагрузки оболочки со спиральными ребрами при внешнем давлении (основные этапы реализации на ЭВМ).

В данном параграфе рассмотрим общую схему решения задачи об устойчивости оболочки со спиральными ребрами под действием внешнего давления (рис.4.2).

После ввода исходных данных по методике, изложенной в I-ой главе, расчитываются упругие характеристики обшивки и ребер оболочки. Далее строятся суперэлементы оболочки нескольких уровней. В данной задаче (оболочка со спиральными ребрами) применяются суперэлементы трех уровней (см. III гл.). Из суперэлементов высшего уровня формируется матрица жесткости конструкции и учитываются граничные условия. При заданной нагрузке находятся докритические перемещения оболочки (решается уравнение (3.29)). Далее формируются матрицы инкрементальной жесткости суперэлементов и затем матрица инкрементальной жесткости конструкции. После учета граничных условий решается задача на собственные значения (уравнения (3.33)). Если полученное наименьшее собственное значение равно единице, то при заданной нагрузке произойдет потеря устойчивости оболочки. В противном случае следует изменить нагрузку и снова повторить всю процедуру (цикл по нагрузке см. рис.4.2), до тех пор, пока λ_{min} с некоторой погрешностью не будет равняться единице. В приложении представлены основная программа и основные подпрограммы, реализующие данную блок-схему. Аналогичные блок-схемы существуют для всех задач, рассматриваемых в данной работе.


Начало
Исходные данные
Жесткостные характеристики монослоя оболочки
Жесткостные характеристики многослойной оболочки и ребер
Матрицы жесткости (МЖ) суперэлементов разных уровней
МЖ конструкции и учет граничных условий
Прямой метод исключения Гаусса для МЖ конструкции
Начало цикла по нагрузке
**
Векторы нагрузок суперэлементов разных уровней
Вектор нагрузок конструкции и учет граничных условия для вектора нагрузки
Прямой метод исключения Гаусса для вектора нагрузки
*

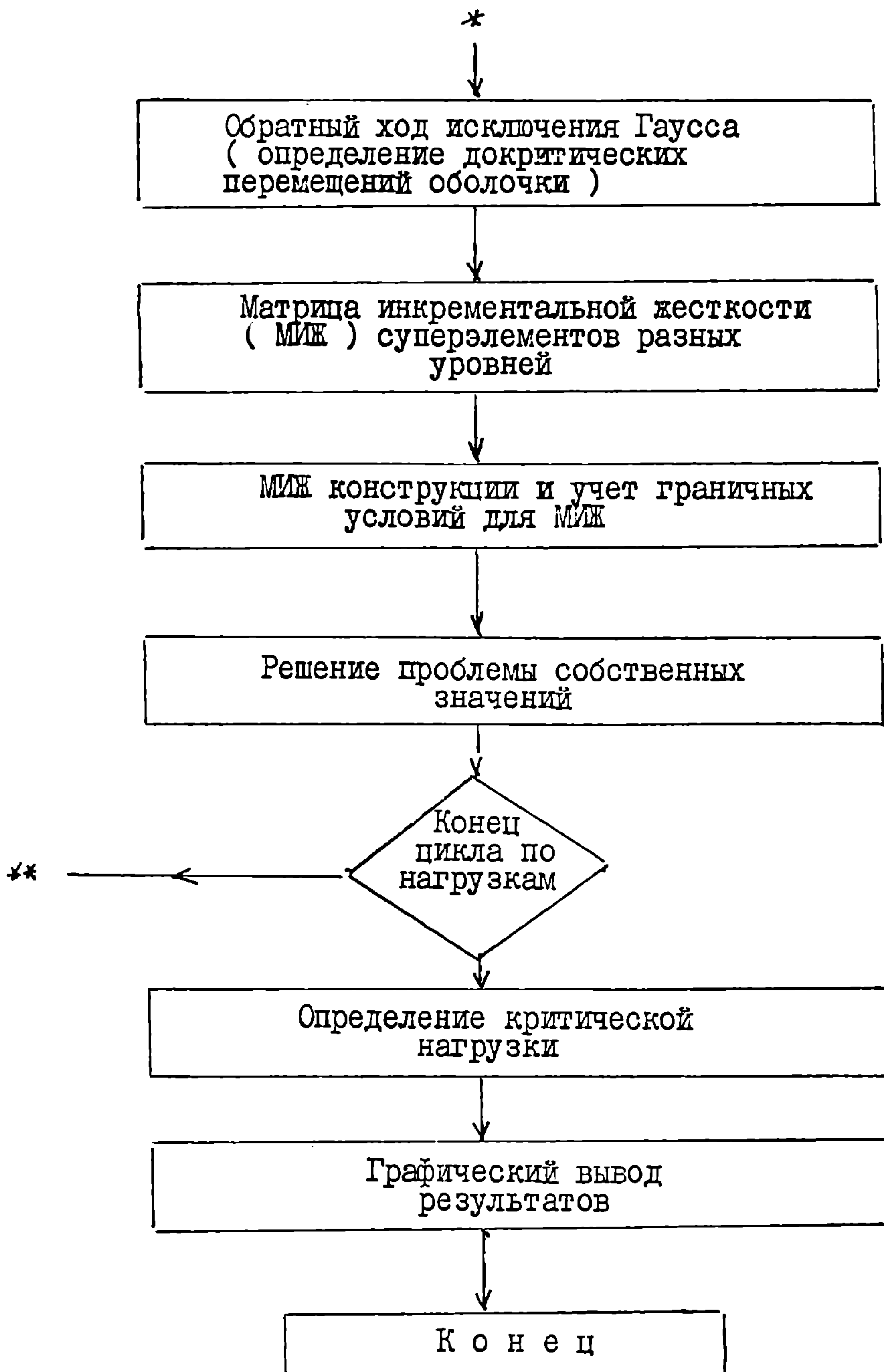


Рис.4.2. Блок-схема решения задачи устойчивости оболочки.

В таблице 4.I приведены характерные времена решения типовых задач с использованием данного комплекса программ. Как следует из таблицы, объем оперативной памяти колеблется от I30 K (задача № I) до 600 K (задача № 6). В широком диапазоне также колеблется время решения задач (от нескольких секунд до одного часа).

Таблица 4.I

№	Задача	Число уравнений	Число итераций	Полуширина ленты	Время решения	Марка ЭВМ
I.	Расчет упругих характеристик монослоя МКЭ	I00	-	30	30 (s)	ЕС-I030
2.	Расчет упругих характеристик пространственно ортогонально армированного композита	300	-	90	I0-60 (MIN)	ЕС-I030
3.	Формирование МЖ одного элемента	матрица размер. 36х36	-	Число точек интегрирования по схеме Гаусса-7	24 (s)	ЕС-I022
4.	Изгиб цилиндрической оболочки МКЭ	I000	-	90	40 (MIN)	ЕС-I022
5.	Собственные колебания цилиндрической оболочки (МКЭ, SHELL2)	200	5	80	I4 (MIN)	ЕС-I022
6,	Собственные колебания цилиндрической оболочки со спиральными ребрами (МСЭ)	400	5-7	200	60 (MIN)	ЕС-I033

Выводы

I. Разработана методика определения поля микронапряжений в однонаправленно и пространственно ортогонально армированном композите при сложном напряженном состоянии, позволяющая определить упругие характеристики однонаправленно и пространственно ортогонально армированного композита с анизотропными волокнами и определить начальные поверхности разрушения однонаправленно армированного композита с упругой и нелинейно-упругой матрицей и пространственно ортогонально армированного композита с упругой матрицей при сложном напряженном состоянии.

2. Для расчета произвольных непологих многослойных оболочек предложен новый, полностью согласованный изопараметрический треугольный конечный элемент, учитывающий деформации поперечного сдвига и обжатие нормали, и исследованы свойства сходимости элемента.

3. На основе конечноэлементной дискретизации разработана методика решения задач устойчивости и определения частот собственных колебаний цилиндрических оболочек из композитных материалов со спирально винтовой системой ребер, учитывающая дискретный характер размещения ребер.

4. Создан универсальный комплекс программ для ЭВМ, позволяющий решать вышеизложенные задачи, в том числе:

- определить начальные поверхности разрушения однонаправленно и пространственно ортогонально армированных композитов при сложном напряженном состоянии;
- определить упругие характеристики однонаправленно и пространственно ортогонально армированных композитов с анизотропными волокнами;
- исследовать однонаправленно армированный композит с нелинейно-упругой матрицей;
- определить критические нагрузки и частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки со спирально винтовой системой ребер.

ЛИТЕРАТУРА

1. АБОВСКИЙ Н.П. К расчету ребристых оболочек смешанным методом. - В кн.: Пространственные конструкции в Красноярском крае: Материалы III конф. по пространственным конструкциям. Красноярск, 1968, с.36-55.
2. АБОВСКИЙ Н.П. Смешанное вариационное уравнение для пологой ребристой оболочки. - Строит.механика и расчет сооружений, 1969, № 4, с.20-21.
3. АБОВСКИЙ Н.П., ГЕТЦ И.И., ШЕСТОПАЛ Б.М. Машинный алгоритм расчета ребристых оболочек. - Пространств.конструкции зданий и сооружений, 1972, вып.4, с.42-45.
4. АЛФУТОВ Н.А. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной поперечным силовым набором и нагруженной внешним равномерным давлением. - Инж.сб., 1956, вып.23, с.36-46.
5. АМБАРЦУМЯН С.А. Расчет симметрично нагруженной круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами. - Докл.АН Арм.ССР, 1955, т.22, вып.4, с.157-162.
6. АМБАРЦУМЯН С.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1967. - 266 с.
7. АМБАРЦУМЯН С.А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. - 446 с.
8. АМИРО И.Я. Исследование устойчивости ребристых замкнутых цилиндрических оболочек при одновременном действии осевого сжатия и внутреннего давления. - В кн.: конф. по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанского университета, 1961, с.5-9.

9. АМИРО И.Я., ПРОКОПЕНКО Н.Я. Исследование устойчивости подкрепленной продольными ребрами слоистой цилиндрической оболочки при осевом сжатии. - Сопротивление материалов и теория сооружений, 1973, № 21, с.3-11.

10. АМИРО И.Я., ЗАРУЦКИЙ В.А., ПОЛЯКОВ П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. - Киев: Наукова думка, 1973. - 248 с.

11. АУДЗЕ П.П., ЭГЛАЙС В.О. Новый подход к планированию многофакторных экспериментов. - В кн.: Вопросы динамики и прочности, Рига, 1977, вып.35, с.104-107.

12. БАБАЯН В.Р. Расчет цилиндрической оболочки с учетом деформации сдвига по МКЭ. - В кн.: Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону, 1978, с.216-220.

13. БЕЛЯНИН Ф.П., ЯЦЕНКО В.Ф., МАРГОЛИН Т.Т. Прочность и деформативность стеклопластиков при двухосном сжатии. - Киев: Наукова думка, 1971. - 150 с.

14. БОГНЕР Ф.К., ФОКС Р.Л., ШМИТ Л.А. Расчет цилиндрической оболочки методом дискретных элементов. - Ракетная техника и космонавтика, 1967, № 5, с.170-175.

15. БОЛОТИН В.В., НОВИЧКОВ Ю.Н. Механика многослойных конструкций. - М.: Машиностроение, 1980. - 376 с.

16. БОТЕНКОВА Л.Г., КАПУСТИН С.А., ЛАТУПСИН А.Ю. К вопросу применения сдвиговых моделей МКЭ для расчета тонкостенных конструкций. - Прикладные проблемы прочности и пластичности, 1979, № 5, с.69-74.

17. БУРМАН З.И., ЛУКАШЕНКО В.И., ТИМОФЕЕВ М.Т. Расчет тонкостенных подкрепленных оболочек методом конечных элементов с применением ЭЦВМ. - Казань: Изд-во Казанского университета, 1973. - 569 с.

18. ВАНИН Г.А., СЕМЕНЮК Н.П. Влияние конструктивной схемы подкрепленной ребрами ортотропной цилиндрической оболочки на ее устойчивость. - Механика полимеров, 1976, № 6, с.1059-1063.

19. ВАНИН Г.А., СЕМЕНЮК Н.П., ЕМЕЛЬЯНОВ Р.Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. - Киев: Наукова думка, 1978. - 211 с.

20. ВАН-ФО ФЫ Г.А. Теория армированных материалов с покрытиями. - Киев: Наукова думка, 1971. - 232 с.

21. ВУ Э.М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. - В кн.: Композиционные материалы. Т.2. Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978, с.401-491.

22. ГАЛИМОВ К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. - Казань: Казанский университет, 1975. - 326 с.

23. ГАЛУЩАК О.В., КИСЛООКИЙ В.Н., КУЩОВ В.И. и др. Исследование статики и устойчивости композитных подкрепленных оболочек методом конечного элемента. - В кн.: Численные методы решения задач строительной механики. Киев: Киев.инж.-строит.ин-т, 1978, с.88-93.

24. ГОЛЬДЕНБЛАТ И.И., КОПНОВ В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. - М.: Машиностроение, 1968. - 192 с.

25. ГРАФТОН Р.Е., СТРОУМ Д.Р. Расчет осесимметричных оболочек методом прямого определения жесткости. - Ракетная техника и космонавтика, 1963, № 10, с.129-136.

26. ГРИГОЛЮК Э.И., ЧУЛКОВ П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. - М.: Машиностроение, 1973. - 170 с.

27. ГРИГОРЕНКО Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. - Киев: Наукова думка, 1973. - 228 с.

28. ДАРЕВСКИЙ В.М., КШНЯКИН Р.И. Устойчивость подкрепленной кольцами цилиндрической оболочки при действии внешнего давления. - Докл.АН СССР, 1960, т.134, с.548-551.

29. ДАТТ Эффективный треугольный элемент оболочек. - Ракетная техника и космонавтика. 1970, № 11, с.

30. ДЖОНС Р.Е., СТРОУМ Д.Р. Расчет оболочек вращения прямым методом жесткостей с помощью криволинейных элементов. - Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 9, с.20-25.

31. ДИАМАНТ Г.И., ЗАРУЦКИЙ В.А. Об определении собственных частот колебаний продольно подкрепленных цилиндрических оболочек. - Прикл.механика, 1978, т.14, № 1, с.53-58.

32. ЕРМАКОВ Г.А., ФОКИН А.Г., ШЕРМЕРГОР Т.Д. Эффективные модули упругости материалов, армированных анизотропными волокнами. - Известия АН СССР МТТ, 1974, № 4, с.110-117.

33. ЖИГУН И.Г., ПОЛЯКОВ В.А. Свойства пространственно-армированных пластиков. - Рига: Зинатне, 1978. - 216 с.

34. ЗАЙЦЕВ В.Н. Динамический расчет тонкостенных подкрепленных оболочек с применением метода конечного элемента. - Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т.5, № 1, с.132-135.

35. ЗАРУЦКИЙ В.А. К расчету ребристых цилиндрических оболочек, подверженных действию произвольных нагрузок. - Прикл.механика, 1966, т.2, № 4, с.17-25.

36. ЗЕНКЕВИЧ О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 542 с.

37. ИВАНОВ Ю.И. Расчет подкрепленных тонкостенных конструкций методом конечного элемента. - Учен.зап. ЦАГИ, 1978, т.3, № 1, с.51-59.

38. ИСАХАНОВ Г.В., КИСЛООКИЙ В.Н., САХАРОВ А.С. и др. Система математического обеспечения прочностных расчетов пространственных конструкций. - Проблемы прочности, 1978, № 11, с.59-61.

39. КАГАН В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч.1. - М.-Л.: Гостехиздат, 1947. - 506 с.

40. КОРОЛЕВ В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. - М.: Машиностроение, 1965. - 272 с.

41. КАРПОВ Н.И. Об устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами жесткости. - Прикл.механика, 1966, т.2, № 7, с.27-33.

42. КОНДРАШОВ Н.С. Собственные частоты цилиндрических оболочек, подкрепленных ребрами. - В кн.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Куйбышев, 1970, с.249-255.

43. МАЛИНИН А.А. Колебания и устойчивость оболочек вращения с дискретными включениями и отверстиями. - Прикл.механика, 1973, т.9, № 10, с.29-34.

44. МАЛМЕЙСТЕР А.К. Геометрия теории прочности. - Механика полимеров, 1966, № 4, с.519-529.

45. МАЛМЕЙСТЕР А.К., ТАМУЖ В.П., ТЕТЕРС Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. - Рига: Зинатне, 1980. - 572 с.

46. МАЛЮТИН И.С. Деформация цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами. - Изв.АН СССР. Механика твердого тела, 1971, № 1, с.30-37.

47. МАЛЮТИН И.С. К теории слоистых анизотропных цилиндрических оболочек, подкрепленных ребрами. - Механика полимеров, 1974, № 4, с.647-654.

48. МАКДОНАЛЬД Задача о свободных колебаниях подкрепленных цилиндрических оболочек. - Ракетная техника и космонавтика, 1970, т.8, № 2, с.75-84.

49. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. Под об.ред. В.А.Постунова. - Л.: Судостроение, 1979. - 288 с.

50. ОДЕН Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. - М.: Мир, 1976. - 464 с.

51. ПАГАНО Н.Дж. Роль эффективных модулей в исследовании упругих свойств слоистых композитов. - В кн.: Композиционные материалы, т.2. Механика композиционных материалов, М.: Мир, 1978, с.13-60.

52. ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. - М.: Машиностроение, 1981. - 191 с.

53. РИКАРДС Р.Б., ТЕТЕРС Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. - Рига: Зинатне, 1974. - 310 с.

54. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Начальная поверхность прочности однонаправленно армированного композита при плоском напряженном состоянии. - Механика полимеров, 1976, № 4, с.633-639.

55. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Деформирование и разрушение однонаправленно армированного композита с нелинейно-упругой матрицей. - Механика полимеров, 1978, № 1, с.55-61.

56. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Начальные поверхности разрушения ортогонально армированных композитов. - В кн.: Механика твердого деформируемого тела, Куйбышев, 1979, вып.4, с.97-108.

57. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Упругие свойства композита с анизотропными волокнами. - Механика композитных материалов, 1980, № 1, с.22-29.

58. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Изопараметрический треугольный конечный элемент многослойной оболочки по двиговой модели Тимошенко. Ч.1. - Механика композитных материалов, 1981, № 3, с.453-460.

59. РОЗИН Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ. Метод конечных элементов. - Л.: Энергия, 1971. - 150 с.

60. РЫБИНА И.И., ЧЕРНЕВА И.Н. О расчете подкрепленной ребрами оболочки вращения методом конечных элементов. - Сб. тр.: Ленинград.ин-т инж.ж.-д.транспорта, 1976, № 401, с.73-86.

61. САХАРОВ А.С., СОЛОВЕЙ Н.А. Исследование сходимости метода конечных элементов в задачах пластин и оболочек. - Пространственные конструкции, з даний и сооружения, 1977, № 3, с.10-15.

62. СЕГЕРЛИНГ Л. Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1979. - 392 с.

63. СЕНДЕЦКИЙ Дж. Упругие свойства композитов. - В кн.: Композиционные материалы, т.2. Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978, с.61-101.
64. СКУДРА А.М., БУЛАВС Ф.Я. Структурная теория армированных пластиков. - Рига: Зинатне, 1978. - 192 с.
65. СТРЕНГ Г., ФИКС Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. - 350 с.
66. СТРИКЛИН Я., НАВАРАТНА Д.Р., ПИАН Т.Х. Усовершенствование расчета оболочек вращения матричным методом перемещений. - Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 11, с.252-254.
67. СЮОЛЛ И. Исследование свободных колебаний цилиндрических оболочек с ортогонально расположенными подкрепляющими элементами, рассматриваемыми как дискретные. - Ракетная техника и космонавтика, 1968, т.6, № 3, с.167-177.
68. ТЕТЕРС Г.А., РИКАРДС Р.Б., НАРУСБЕРГ В.Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. - Рига: Зинатне, 1978.- 240 с.
69. УПИТИС З.Т. Исследование разрушения слоистых композитов в зависимости от структуры армирования. - Дис.на соиск. уч.ст.канд.техн.наук. - Рига, 1980. - 131 с.
70. УПИТИС З.Т., РИКАРДС Р.Б. Исследование зависимости прочности композита от структуры армирования при плоском напряженном состоянии. - Механика полимеров, 1976, № 6, с.1018-1024.
71. УТКУ С. Матрица жесткостей для тонких треугольных элементов ненулевой гауссовой кривизны. - Ракетная техника и космонавтика, 1967, № 9, с.150-159.

72. ЭГЛАЙС В.О. Аппроксимация табличных данных многомерным уравнением регрессии. - В кн.: Вопросы динамики и прочности, 1981, вып.39, с.120-125.

73. ЭДЕЛМЕН Х.М., КЭТЕРИНЕС Д.С., УОЛТОН В.Ц. Точность вычисления напряжений методом конечных элементов. - Ракетная техника и космонавтика, 1970, № 3, с.462-467.

74. ADAMS D.F. Elastoplstic Crack Propagation in a Transversely Loaded Unidirectional Composite. - Journal of Composite Materials, 1974, v.8, No I, p.38-54.

75. ADAMS D.F. Practical Problems Associated with the Application of Finite Element Method to Composite Material Michromechanical Analyses. - Fibre Science and Technology, 1974, v.7, p.III-I22.

76. ADAMS D.F. A Micromechanical Analysis of Crack Propagation in an Elastoplastic Composite Material. - Fibre Science and Technology, 1974, v.7, p.237-255.

77. ADAMS D.F., DONER D.R. Transverse Normal Loading of a Unidirectional Composite. - Journal of Composite Materials, 1967, v.I, No 2, p.I52-I64.

78. ACRUGGS R.M., PIERCE C.V., REESE I.R. An Analytical and Experimental Study of the Vibration of Orthogonally Stiffened Cylindrical Shells. - J.Spacecraft and Rocket, 1979, v.6, No 5, p.603-609.

79. AHMAD S., IROUS B.M., ZIENKIEWICZ O.C. Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. - Int.J. Num.Meth. in Eng., 1970, v.2, p.419-45I.

80. AKBARZADEH A., ADAMS D.F. A Hybrid Finite Element Micromechanical Analysis of Composite Materials. - Fibre Science and Technology, 1976, v.9, p.277-285.

81. ANAUD S.C., LEE S.L., ROSSOW E.C. Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Plane Stress Problems Based Upon Tresca Yield Criterion. - Ing.-Archiv., 1970, v.39, p.421-425.

82. ARGYRIS I.W. Matrix Displacement Analysis of Anisotropic Shells by the Finite Element Method. - Journal of the Royal Aeronautical Society, 1965, v.69, Nov., p.801-805.

83. ARGYRIS J.H. ASKA: Automatic System for Kinematic Analysis Universal System for Structural Analysis Based on the Matrix Displacement Method. - Nucl.Eng.Des., 1969, v.10, No 2, p.441-447.

84. ARGYRIS J.H., SCHARPF D.W. The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method. - Aeronaut.J., 1968, v.72, p.873-883.

85. ASHWELL D.G., SABIR A.B. A New Cylindrical Shell Finite Element Based on Simple Independent Strain Functions.- Int.J.Mech.Sci., 1972, v.14, p.171-183.

86. BREBIA C.A., DEB NATH J.M. A Composition of Recent Shallow Shell Finite-Element Analysis. - Int.J.Mech.Sci., 1970, v.12, p.849-857.

87. CLOUGH R.W., JOHNSON R.J. A Finite Element Approximation for the Analysis of Thin Shells. - Int.J.Solids Struct., 1968, v.4, p.43-60.

88. COLLINS R.J. Band with Reduction by Automatic Remembering. - Int.J.Num.Meth.in Eng., 1973, v.6, No 2, p.345-356.

89. CONNOR J., BREBBIA C. Stiffness Matrix for Shallow Rectangular Shell Element. - Proc.Am.Soc.Civ.Eng., 1967, v.93, EM, p.43-65.

90. COWPER G.R., LINBERG G.M., OLSON M.D. A Shallow Shell Finite Element of Triangular Shape. - J.Solids and Struct.,1970, v.6, p.1133-1156.

91. DUPIS G., GOEL J.J. A Curved Finite Element for Thin Elastic Shells. - Int.J.Solids and Structures, 1970, v.6, p.1413-1428.

92. DVORAK G.J., RAO M.S., TARU I.O. Yielding in Unidirectional Composites Under External Loads and Temperature Changes. - Journal of Composite Materials, 1973, v.7, No 2, p.194-216.

93. FOYE R.L. Theoretical Post-Yielding Behavior of Composite Laminates Part I - Inelastical micromechanics. - Journal of Composite Materials, 1973, v.7, No 2, p.178-193.

94. FOYE R.L. Theoretical Post-Yielding Behavior of Composite Laminates Part II - Inelastic Micromechanics. - Journal of Composite Materials, 1973, v.3, No. 4, p. 310-319.

95. GIANNINI M., MILES G.A. A Curved Element Approximation in the Analysis of Axi-Symmetric Thin Shells. - Int. Num. Meth. in Eng., 1970, v.2, p. 459-476.

96. HASHIN Z. On Elastic Behavior of Fibre Reinforced Materials of Arbitrary Transverse Phase Geometry. - J. Mech. Phys. Solids, 1965, v. 13, No.3, p. 119-134.

97. HASHIN Z., ROSEN B. The Elastic Moduli of Fibre Rein-

forced Composite Materials. - J. Appl. Mech., 1964, v. 31, p. 223-233.

98. ISHIKAVA T., KOBAYASHI S. Elastic Properties of Unidirectional Fibre-Reinforced Composites II. - Fukugo Zairyo Kenkyu (Composite Materials and Structures), 1974, v.3, No.4, p. 23-31.

99. ISHIKAVA T., KOYAWA K., KOBAYASHI S. Elastic Moduli of Carbon Fibers: Journal of Composite Materials, 1977, v. 11, No.3, p. 332-344.

100. JONES R.F. A Curved Finite Element for General Thin Shell Structures. - Nuclear Engineering and Design, 1978, v.48, p. 415-425.

101. JONES R.M. Mechanics of Composite Materials. - N.Y., 1975. 432 p.

102. KANG S.I., RENTZEPIS G.M. On the Determination of Physical Properties of Composite Materials by a Three-Dimensional Finite Element Procedure. - Composite Materials Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials, 1974, p. 166-187.

103. KOBAYASHI S., ISHIKAVA T. Elastic Properties of Unidirectional Fiber-Reinforced Composites. I.- Fukugo Zairyo Kenkyu), 1974, v.3, No.3, p. 12-20.

104. LARSSON S.G., HARKEGARD G. On the Finite Element Analysis of Crack and Inclusion Problems in Elastic-Plastic Materials. - Comp. and Struct., 1974, v.4, No.2, p. 293-305.

105. LIN T.H., SALINAS D., ITO Y.M. Elastic-Plastic Analysis of Unidirectional Composites. - Journal of Composite

Materials, 1972, v.6, No.1, p. 48-62.

106. MAC NEAL R.H., MAC CORNIC C.W. The NASTRAN Computer Program for Structural Analysis. - Comput. and Struct., 1971, v.7, No.1, p. 32-35.

107. OLSON M.D. Analysis of Arbitrary Shells Using Shallow Shell Finite Elements. - In: Shell Structures Theory, Experiment and Design. Prentice Hall, New Jersey, 1974, p. 405-434.

108. OLSON M.D. A Simple Flat Triangular Shell Element Revisited. - Int. J. Num. Meth. in Eng., 1979, v.14, No.1, p. 51-68.

109. POPOV E.P., PENZIEN J., LU Z.A. Finite Element Solution for Axisymmetric Shells. - Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1964, v.90, No. EM 5, p. 119-145.

110. RAO K.P. A Rectangular Laminated Anisotropic Shallow Thin Element. - Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng., 1978, v.15, No.1, p. 13-33.

111. RINEHART S.A., WANG J.T. Vibration of Simply Supported Cylindrical Shells with Longitudinal Stiffeners. - J. Sound and Vibr., 1972, v.24, No. 2, p. 151-163.

112. SINGER J., HAFTKA R.T. Buckling of Discretely Stringer-Stiffened Cylindrical Shells and Elastically Restrained Panels. - AIAA Journal, 1975, v.13, No.7, p. 849-950.

113. WANG J.T., Rinehart S.A. Free Vibrations of Longitudinally Stiffened Cylindrical Shells. - Trans. ASME. 1974, E 41, No.4, p. 1087-1093.

СПИСОК

ПУБЛИКАЦИЙ, В КОТОРЫХ ИЗЛОЖЕНЫ ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

I. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Начальная поверхность прочности однонаправленного композита при плоском напряженном состоянии.- Механика полимеров, 1976, № 4, с.633-639.

2. ЧАТЕ А.К. Расчет упругих констант ортогонально армированных композитов. - В кн.: Тезисы докладов Первой конференции молодых специалистов и механике полимеров. Рига: Зинатне, 1977, с.58-59.

3. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Деформирование и разрушение однонаправленного композита с нелинейно-упругой матрицей. - Механика полимеров, 1978, № I, с.55-6I.

4. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Исследование неупругих деформаций и микроразрушения композитных материалов МКЭ. - В кн.: Тезисы докладов УII Всесоюзной конференции по прочности и пластичности. Горький, 1978, с.I03-I04.

5. ЧАТЕ А.К. Деформативные характеристики пластиков, армированных анизотропными волокнами. - В кн.: Тезисы докладов Второй конференции молодых специалистов по механике композитных материалов, Рига: Зинатне, 1979, с.38-39.

6. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Начальные поверхности разрушения ортогонально армированных композитов. - В сб.: Механика деформируемых сред, Куйбышев, 1979, вып.4, с.97-I08.

7. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Упругие свойства композита с анизотропными волокнами. - Механика композитных материалов, 1980, № I, с.22-29.

8. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Изопараметрический треугольный конечный элемент для расчета многослойных непологих оболочек.- В кн.: Труды XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1980, т.3, с.179-184.

9. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Изопараметрический треугольный конечный элемент многослойной оболочки по сдвиговой модели Тимошенко. I. Матрицы жесткости, масс и геометрической жесткости элемента. - Механика композитных материалов, 1981, № 3, с.453-460.

10. РИКАРДС Р.Б., ЧАТЕ А.К. Изопараметрический треугольный конечный элемент многослойной оболочки по сдвиговой модели Тимошенко. 2. Численные примеры. - Механика композитных материалов, 1981, № 5. с.

11. ЧАТЕ А.К. Оптимизация ребристых цилиндрических оболочек из композитов при ограничении на частоту собственных колебаний. - В кн.: Тезисы докладов Третьей конференции молодых ученых и специалистов по механике композитных материалов, Рига: Зинатне, 1981, с.137-138.

копия

"УТВЕРЖДАЮ"
Зам. Главного конструктора
(подпись) ГРИГОРЬЕВ Ю.П.
"22" 01 1980г.

М.П.

ТЕХНИЧЕСКИЙ АКТ ВНЕДРЕНИЯ

" 15 " ноября 1979 г. г. Рига Миасс

Мы, нижеподписавшиеся: представители Института механики полимеров АН Латв.ССР ст.научн.сотр. Рикардс Р.Б.

с одной стороны, и предприятия (организации) п/я Г-4725 нач.отдела ЛИЗИН В.Т.

с другой стороны, составили настоящий акт о том, что выполненные работы по теме (договору) № 77/4 от 23 февраля 1977 года "Расчет несущей способности и оптимизация подкрепленных
(название темы (договора), раздела, этапа)
оболочечных конструкций из композиционного материала"

внедрены на предприятии п/я Г-4725

ПЕРЕЧЕНЬ

выполненных работ и достигнутая от внедрения эффективность

№№ п/п	Наименование внедренных мероприятий и содержание работ, выполненных по каждому мероприятию	Достигнутая техническая эффективность (абс.нат. единицы измерения или проц.
1	2	3
I.	Методика оптимизации оболочек из композитных материалов, работающих на устойчивость.	Методика расчета оптимизации оболочек из композитных материалов позволяет при проектировании конструкций достигать уменьшение их веса до 20%.

I	2	3
2.	Программы расчета методом конечного элемента и оптимизации по весу гладких и ребристых оболочек, работающих на устойчивость	Внедрение программы расчета и оптимизации оболочек позволяет увеличить качественный уровень проектных проработок

Годовой экономический эффект, определенный заказчиком.

Ожидаемый годовой экономический эффект, расчитанный по изделию

(сумма прописью)

в рамках предприятия, п/я Г-4725 составляет

Тридцать девять тысяч шестьсот четыре рубля.

Расчет годового экономического эффекта, произведенный в соответствии с действующими методиками и инструкциями, прилагается.

Представители предприятия
ст.научн.сотр. РИкардс Р.Б.
(подпись) Ю.01.80 г.

Представители предприятия
Нач.отдела Лизин В.Т.
(подпись) Ю.01.80 г.

Начальник сектора
(подпись) БЕССАРАБОВ Ю.Д.
Ведущий инженер
(подпись) АНУФРИЕВ А.П.

Копия верна:

Ученый секретарь Института механики полимеров АН Латв.ССР
В.Ф.Зинченко

-145-

ZIN.
POLIMĒRU MEHĀNIKAS
INSTITŪTS
Rīga, Aizkraukles ie
Nr 551145, 551187
RG 1179 Polimers

ИНСТИТУТ
МЕХАНИКИ ПОЛИМЕРОВ
Айзкрауклес, 23
№ 551145, 551187
РГ Полимер

№ ____________

№ ____________

СПРАВКА

о внедрении работ по теме "Теория деформирования новых композитных материалов и методика расчета тонкостенных конструкций из этих материалов" (один из ответственных исполнителей мл.н.сотр. Чате А.К.)

За период с 1975 по 1981 г по теме "Теория деформирования новых композитных материалов и методика расчета тонкостенных конструкций из этих материалов" и хоздоговором с предприятием п/я Г-4725 (акт внедрения от 15.II.79 г.) осуществлено внедрение методики оптимизации по весу оболочек из композитных материалов с учетом устойчивости.

Годовой экономический эффект от внедрения методики в указанной организации составляет 40 тыс.руб за счет повышения качества проектных проработок и снижения материалоемкости изделий.

Примечание: соответствующие документы о внедрении хранятся в делах ИМП.

Ученый секретарь Института,
канд.техн.наук В.Ф.Зинченко

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Ниже приведены программа и некоторые основные подпрограммы вычисления критической нагрузки устойчивости цилиндрической оболочки со спирально винтовой системой ребер.

Здесь представлены следующие подпрограммы:

STI222 – подпрограмма формирования матрицы жесткости, масс и геометрической жесткости элементов SHELL2 и SHELL3 ;

SUBFOP – подпрограмма формирования суперэлемента;

SIPAS2 – подпрограмма определения минимального собственного значения;

SUBSLO – подпрограмма формирования вектора нагрузки суперэлемента;

PAVIE – подпрограмма определения внутренних перемещений в суперэлементе.

Общее количество подпрограмм в данной задаче 34.

```
      C
      C      ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ НАЗРУЗКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
      C      С СПИРАЛЬНИМЫ РЕБРАМИ НА УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ВНЕШНОМ ДАВЛЕНИС
             REAL*8 LD
              REAL*4 LL
             COMMON/I189/ I2,I8,EPS /IJ/ II,JJ,LL(20,3),NIN
           1        /QQ/ Q(9,9),Q1(9,9),Q2(9,9),Q3(9,9)
           2        /NN/ N1,NPN,NEN,KROBEZ,N2
           3        /HAL/NSHN,RA,HA,NN,BBB(10),BB(10),H2,H3,H4
           4        /KK/ KSV,NVN(300),RSR,NLK,KIM
           5      /ELE/E1,E2,E3,S12,S13,S23,S21,S31,S32,G12,G13,G23
           6     /WW/ W,RS,BLL(10),NRIB(300),RS2,RS4
           7      /RR/ RR(1000),FFF(300)
           8        /AA/ NP,NE,NOD,NSZF,NON,NDF,NBAND
                EXTERNAL ST1222
      C      ******************************************************C     *       ИСПОЛ
      C      *     2=ДЛЯ ИНКРЕМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦИ КОНСТРУКЦИЙ          *
      C      *     8=ДЛЯ МАТРИЦИ ЖЕСТКОСТИ КОНСТРУКЦИИ                *C     *    9=ДЛЯ МА
      C      *     10=ДЛЯ МАТРИЦИ N-1-ОГО УРОВНЯ                      *
      C      *     11=ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТИ  N-1 УРОВНЯ            *C     *    12-ПРОМЕ
      C      ******************************************************
             DEFINE FILE 2(300,1200,L,I2) , 8(300,1200,L,I8)
             DEFINE FILE 9(700,400,L,I9), 10(700,400,L,I10)
             DEFINE FILE 11(30,7294,L,I11), 12(30,7294,L,I12)
             DIMENSION NTP(20),NON(20,5),NOP(50,40),NOP1(50,40),CORD(100,6)
           1        ,SI(186,186),SM(186,186),NT(100),NNC(100)
           2        ,SK(144,240),NZLN(400),NKSS(400),R(400),NKX(400)
           3        ,XUX(400),D(400),LD(20,3),FT(100),DS(400),SMD(36000)
           4        ,I199(50),I110(50),I111(50),I112(50),NNNN(50)
      C        ****************************************************C      *
      C        *                                                  *
      C        *      SS=ПОЛУДЛИНА  ОБОЛОЧКИ                      *
      C        *      RA=РАДИУС  ОБОЛОЧКИ                         *C      *      НА-Т
      C        *      H4=ТОЛЧИНА РЕБЕР                            *
      C        *      HRA=ВЫСОТА РЕБЕР                            *C      *      NRS-
      C        *      NSHN=НОМЕР СХЕМ ИНТЕГРИРОВАНИИ              *
      C        *      EPS=ТОЧНОСТЬ ДЛЯ АЛГОРИТМА ВАЙНИКОВА        *C      *        ВЕ
      C        *      ------------------------------------        *
      C        *             NEN=ЧИСЛО СТРОК В (NOP)              *C      *
      C        *             NM= ЧИСЛО СТРОК И СТОЛБЕЦ В (SI,SM)  *
      C        *             N1= ЧИСЛО СТРОК В (SK)               *C      *
      C        *       -------------------------------------      *
             EQUIVALENCE(SK(1),SM(1),SMD(1)),(FFF(1),FT(1))
             PI=3,14159
             NRS=4
             KSV=1
             NSHN=7
             EPS=0,10
             NLK=1
             NEN=50
             NPN=100
             NM=186
             NSZ=144
             N1=144
             N2=240
             E1=18,0E10
             E2=1,6E10
             E3=E1
             S21=0,026
             S12=E1*S21/E2
             S13=S12
             S23=0,285
             S32=S23
             S31=S21
             G12=0,47E10
             G23=G12
```

```
      G13=G12
      RA=1.
      SS=2.*PI/NRS
      AA=SS/2.
      NN=4
      BBB(1)=0.
      BBB(2)=45.
      BBB(3)=-45.
      BBB(4)=90.
      QQ(1)=0.25
      QQ(2)=0.25
      QQ(3)=0.25
      QQ(4)=0.25
      HA=0.02
      CALL MATDQQ(Q,0)
      HRA=0.2
      H4=HRA/10
      NN=1
      BBB(1)=0.
      QQ(1)=1.
      CALL MATDQQ(Q2,2)
      PRINT 1418,HA
      PRINT 1419,HRA,H4
      CALL MINTGE(LL,LD,NIN,NSHN)
      QR=1000000.
C
C  ***********   ФОРМИРОВАНИЯ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ  **************C
C            МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ  N=1-ОГО УРОВНЯ
C
      CALL SUBT01(CORD,NOK,FT,IT,HRA,AA,NON,1)
      DO 900 IK=1,IT
      KKFF=0
      CALL SUBFOP(IK,NON,SI,SM,CORD,NOP,ST1222,NM,IS,IB
     1          ,FT,0,0,0,NT,KKFF,0,0,0)
      CALL RIERAK(IS,IB,IK,NON,SI,SM,NM,I10,10,II10,KKFF)
      CALL RIERA1(IS,IB,IK,SI,NM,11,II11,I11,7294,1,B)
  900 CONTINUE
C
C             МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ N-ОГО УРОВНЯ
C
      CALL SUBT02(NOP,NON,1,NT,IT,FT,AA)
      DO 1111 IK=1,IT
      CALL SUBFOP(IK,NON,SI,SM,CORD,NOP,ST1222,NM,IS,IB
     1          ,FT,10,I110,I10,NT,KKFF,0,0,0)
      CALL RIERAK(IS,IB,IK,NON,SI,SM,NM,I9,9,II99,KKFF)
      CALL RIERA1(IS,IB,IK,SI,NM,12,II12,I12,7294,1,B)
 1111 CONTINUE
C
C            МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ КОНСТРУКЦИИ
C
      CALL SUBT03(NOP,CORD,NNC,NT,NS,NZLN,NIZ,NKSS,NKS
     1          ,FT,SS,NSZ,NUMBLK,HRA,0)
      NBAND=N2-10
      NNZZ=NSZF
      KKMM=1
      I8=1
      DO 1441 NW=NS,NUMBLK
      CALL FORCCC(SK,CORD,NOP,ST1222,NSZ,NW,KKMM,NON,FT
     1          ,NT,NNC,Y,I9,II99)
      CALL IZSVR1(SK,R,NZLN,NIZ,0,NSZF,NBAND,0,NKX,NW,NSZ,NS)
      KEKE=KKMM-1
      KIM=2*KKMM-2
      CALL SAIR01(SK,NIZ,NZLN,NKS,NKSS,XUX,CORD,KEKE,NKX
     1          ,B,NUMBLK,NW,NSZ,NG,NOP,DS,1,NS)
      DO 1661 I=1,NG
 1661 WRITE(8'I8)(SK(I,J),J=1,N2)
```

```
 1441 CONTINUE
C
C  ***********  ПРЯМНИЯ ХОД ИСКЛЮЧЕНИЯ ПО ГАУСУ  **************C
      CALL SOL000(8,SMD)
C
C  ***********  ФОРМИРОВАНИЯ ВЕКТОРА НАГРУЗКИ  ***************
C
C          ВЕКТОР НАГРУЗКИ N-1-ОГО УРОВНЯ
C
 1165 CALL SUBTO1(CORD,NOP,FT,IT,HRA,AA,NON,1)
      DO 915 IK=1,IT
      CALL SUBSLO(IK,NON,CORD,NOP,QR,0,0,0,B
     1            ,NT,FI11,I111,I11,SI,NM,10,II10,I10)
  915 CONTINUE
C
C          ВЕКТОР НАГРУЗКИ N-ОГО УРОВНЯ
C
      CALL SUBTO2(NOP,NON,1,NT,IT,FT,AA)
C     DO 1115 IK=1,IT
      DO 1115 IK=1,IT
      CALL SUBSLO(IK,NON,CORD,NOP,QR,10,II10,I10,B
     1            ,NT,FI112,I112,I12,SI,NM,9,II09,I9)
 1115 CONTINUE
C
C          ВЕКТОР НАГРУЗКИ КОНСТРУКЦИИ
C
      CALL SUBTO3(NOP,CORD,NNC,NT,NS,NZLN,NIZ,NKSS,NKS
     1            ,FT,SS,NSZ,NUMBLK,HRA,0)
      DO 10 I=1,NSZF
   10 RR(I)=0.
      DO 817 N=1,NE
      NCN=NNC(N)
      IK=NT(N)
      NCD=NCN*6
      I9=II99(51-IK)
      READ(9'I9)(B(I),I=1,NCD)
      FFLL=FT(N)
      NPG=2*NCN
      S=SIN(FFLL)
      C=COS(FFLL)
      DO 818 I=1,NPG
      II=(I-1)*3
      AC=B(II+1)*C
      BS=B(II+2)*S
      AS=B(II+1)*S
      BC=B(II+2)*C
      B(II+1)=AC-BS
  818 B(II+2)=AS+BC
      DO 817 L=1,NCN
      DO 817 J=1,6
      IG=(NOP(N,L)-1)*6+J
      IL=(L-1)*6+J
  817 RR(IG)=RR(IG)+B(IL)
      CALL IZSVRA(RR,NIZ,NZLN,NNZZ,NKS,NKSS,B,0,NKX,DS)
C
C  **********  ОБРАТНИЯ ХОД ИСКЛЮЧЕНИЯ ГАУСА ***************C
      NBAND=NSZF
      NLN=(1+NSZF)*NSZF/2
      I8=1
      READ(8'I8)(SMD(I),I=1,NLN)
      CALL SOLVE2(SMD,RR,1)
      CALL IZSVRA(RR,NIZ,NZLN,NNZZ,NKS,NKSS,B,1,NKX,DS)
C
C  *********** ОБРАТНИЯ ХОД В МЕТОДЕ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ  **********C  *********** ПО
C
C          ВНУТРЕНИЕ ПЕРЕМЕЧЕНИЯ  УЗЛОВ  N-ОГО  УРОВНЯ
```

```
C
      NS=1
      NNNN(1)=1
      CALL SUBTO2(NOP1,NON,1,B,IT,FT,AA)
      CALL PAVIE(NS,NNNN,NUP,NNC,SMD,NT,NON,12,I12,II12,B
     1            ,SI,NM,NOP1)
C
C           ВНУТРЕНИЕ ПЕРЕПЕШЕНИЯ  УЗЛОВ  N=1-ОГО УРОВНЯ
C
      NS=4
      DO 919 I=1,NS
      NNNN(I)=I
  919 NNC(I)=12
      CALL SUBTO2(NOP,NON,1,NT,IT,FT,AA)
      CALL SUBTO1(CORD,NOP,1,FT,IT,HRA,AA,NON,1)
      CALL PAVIE(NS,NNNN,NUP,NNC,SMD,NT,NON,11,I11,II11,B
     1            ,SI,NM,NOP1)
C
C  ********* ФОРМИРОВАНИЯ ИНКРЕМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ  ************C
C          ИНКРЕМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ N=1 УРОВНЯ
C
       CALL SUBTO1(CORD,NUP,FT,IT,HRA,AA,NON,1)
      DO 1113 IK=1,IT
      KKFF=1
      CALL SUBFOP(IK,NON,S1,SM,CORD,NOP,STI222,NM,IS,IB
     1            ,FT,010,0,NT,KKFF,11,I11,II11)
      CALL RIERAK(IS,IB,IM,NON,SI,SM,NM,I10,10,II10,KKFF)
 1113 CONTINUE
C
C     ИНКРЕМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА СУПЕРЭЛЕМЕНТА  N=0ГО  УРОВНЯ
C
      CALL SUBTO2(NOP,NON,1,NT,IT,FT,AA)
C     DO 1114 IK=1,IT
      DO 1114 IK=1,IT
      CALL SUBFOP(IK,NON,S1,SM,CORD,NOP,STI222,NM,IS,IB
     1            ,FT,10,II10,I10,NT,KKFF,12,II12,I12)
      CALL RIERAK(IS,IB,IM,NON,SI,SM,NM,I9,9,II99,KKFF)
 1114 CONTINUE
C
C           ИНКРЕМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА  КОНСТРУКЦИИ
C
      CALL SUBTO3(NOP,CORD,NNC,NT,NS,NZLN,NIZ,NKSS,NKS
     1            ,FT,SS,N2,NUMBLK,HRA,0)
      NBAND=N2-10
      I2=1
      KKMM=2
      DO 1551 NW=NS,NUMBLK
      CALL FORCCC(SK,CORD,NOP,STI222,NSZ,NW,KKMM,NON,FT
     1            ,NT,NNC,9,I9,II99)
      CALL IZSVR1(SK,R,NZLN,NIZ,0,NSZF,NBAND,0,NKX,NW,NSZ,NS)
      KEKE=KKMM-1
      KIM=2*KKMM-2
      CALL SAIRO1(SK,NIZ,NZLN,NKS,NKSS,XUX,CORD,KEKE,NKX
     1            ,B,NUMBLK,NW,NSZ,NG,NOP,DS,1,NS)
      DO 2345 I=1,NG
 2345 WRITE(2'I2)(SK(I,J),J=1,N2)
 1551 CONTINUE
C
C  *************  СОБСТВЕНАЯ ЗНАЧЕНИЯ *************************C
      CALL SIPAS2(SMD,R,XUX,B,AM,1)
      AMA=AM
C
C  ***************  МАССА КОНСТРУКЦИИ  ************************C
      CALL RCMASA(HRA,SS,NKS,MA)
      CALL SSCCKK(AMA,QR,NS,2,50)
      WRITE(6,1845) NS
```

```
      IF(NS.EQ.0) GO TO 1195
      DO 118 I=1,NNZZ
  118 R(I)=0.
      DO 119 I=1,NSZF
      II=NKX(I)
  119 R(II)=B(I)
      FT(1)=0.
      FT(2)=PI/2.
      FT(3)=PI
      FT(4)=3.*PI/2.
      PRINT 1845,(I,(R((I-1)*6+J),J=1,6),I=1,NP)
 1845 FORMAT(I10,6E15.6)
 1418 FORMAT(T20,'ТОЛЩИНА УБОЛОЧКИ =',E15.6)
 1419 FORMAT(T20,'ВИСОТА РЕБР=',E15.6/T20,'ТОЛЩИНА РЕБР=',E15.6)
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE SIPAS2(SI,XAUX,XUX,B,AM,KKAA)
C     АЛГОРИТМ ВАЯНИКОВА ДЛ  ПОЛНОЯ ВЕРХНЕЯ ТРЕУГОЛЬНОЯ МАТРИЦЕ
C     МАТРИЦА ЖОСТКОСТИ НАХОДИТСЯ НА 8 ФАЙЛ, ОБРАБОТАНАЯ ПРОГ."SOL000"
C     МАТРИЦА МАСС ИЛИ ИНЕР.ЖОСТК. НАХОДИТСЯ НА 2 ФАЙЛЕ
C    КОТОРАЯ ЗАПИСАННО ПОСТРОЧНО, КАЖДАЯ СТРОКА НА ОДИН ЗА ИСЬ, ДЛИНОЯN
C     N2,( НАЧИТ МАТРИЦА ЗАДАННО ПРЯМРОУГОЛЬНОЯ ФОРМОЯ NSZF*N2,N2>=NBAND
C    ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ПРОГРАММИ "SOLVE2" И "MULT33"
C     AM=СОБСТВЕНАЯ ЗНАЧЕНИЯ
C     XAUX(1)-СОБСТВЕНИЯ ВЕКТОР
C     KKAA=МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ИТЕРАЦИЯ
C     SI(1),XUX(1),B(1)- РАБОЧИЕ МАШ ВИ
      COMMON/AA/ NP,NE,NCN,NSZF,NON,NDF,NBAND
      COMMON/II89/ I2,I8,EPS
      COMMON/NN/ N1,NPN,NEN,KR,N2
      DIMENSION SI(1),XAUX(1),XUX(1),B(1)
      NLN=(1+NSZF)*NSZF/2
      I2=1
      NBAND=NSZF
       K=0
      DO 1002 I=1,NSZF
      READ(2'I2)(B(J),J=1,N2)
      NBA=NSZF-I+1
      DO 1002 L=I,NBA
      K=K+1
 1002 SI(K)=B(L)
      I2=1
       WRITE(2'I2)(SI(I),I=1,NLN)
      DO 66 I=1,NSZF
      B(I)=1.
   66 XUX(I)=1.
      NSK=0.
   14 CONTINUE
      I2=1
      READ(2'I2)(SI(I),I=1,NLN)
      CALL MULT33(SI,B,XAUX)
      NSK=NSK+1
      I8=1
      READ(8'I8)(SI(I),I=1,NLN)
      CALL SOLVE2(SI,XAUX,1)
      DO 20 I=1,NSZF
   20 B(I)=XAUX(I)
      EIG=XAUX(1)
      AM=1./EIG
      IF(KKAA.EQ.0) GO TO 200
      WRITE(6,1434) NSK,I,EIG,AM
 1434 FORMAT(2I20,2E20.7)
  200 CONTINUE
      DO 57 I=1,NSZF
   57 B(I)=XAUX(I)/EIG
      DO 67 I=1,NSZF
      IF(ABS(B(I)).LT.0.01) GO TO 67
      ABBA=ABS((B(I)-XUX(I))/B(I))
      IF(ABBA-EPS) 67,67,82
   67 CONTINUE
      GO TO 50
   82 CONTINUE
   25 DO 26 I=1,NSZF
   26 XUX(I)=B(I)
      GO TO 14
   50 AM=1./EIG
      WRITE(6,152) NSK,AM
  152 FORMAT(T10,'NSK=',I2,T30,'AM=',E14.7)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE PAVIE(NS,NNEE,NOP,NNC,R,NT,NON,KV1,I15,II15
     1,B,SI,NM,NOP1)
C     РАСЧЕТ ПЕРЕМЕНЕНИЕ  ФНУТРЕНИХ ТОЧЕК
C     NS=ЧИСЛО РАСЧИТИВАЕМЫХ ЗЛЕМЕНТОВ
C     NNEE=ИХ ПОРЯДКОВ Е НОМЕРА С СООТВЕТСТВ И ТОПОЛГИИ В NOP
C     NNO=ЧИСЛО УЗЛОВ СООТВЕТСТВУЮЩЕВА СУПЕРЕЛЕМЕНТА
C     R(1000,1)-ОПОМГАТЕЛЬНЫЯ МАСИВ С РАЗМЕРНОСТИ 1000*NS  !!!
C     NT=УКАЗЫВАЕТ ТИП ЭЛЕМЕНТОВ(СООТВЕТСВУЮЩИМ К NOP) ДЛЯ НАХОЖ-
C     ДЕНИЯ ЗАПСЕЯ В KV1
C     I15=СЧЕТЧИК ЗАПИСЕЯ ФАЙЛА KV1
C     II15= УКАЗЫВАЕТ ГДЕ НАХОДЯТСЯ НА KV1 KI**-1   KI**-1*KIS
C     ДЛЯ КАЖДОВА ТИПА  СУПЕРЕЛЕМЕНТА
C     NON=ХАРАКТЕРИСТИК СТРУКТУРНОГО ЭЛЕМЕНТА И KS  ИЗ КОТОР,СТРОИТСЯ
C     СУПЕРЭЛЕМЕНТ
C     B(1)=СПОМОГАТЕЛЬНЫЯ МАССИВ
C     SI= МАСИВ С РАЗМЕРНОСТИ  MN*MN
C     NOP1=ТОПОЛОГИЯ  ЭЛЕМЕНТОВ НИЖЕГО УРОВНЯ ИЗ  КОТОРЫХ СТРОЕТСЯ
C     СУПЕРЭЛЕМЕНТ
      COMMON/NN/ N1,NPN,NEN
      COMMON/RR/ RR(1000)
      DIMENSION NNEE(1),NOP(NEN,1),NNC(1)
     1,R(1000,1),NT(1),NON(20,5),II15(1),B(1)
     2,SI(NM,1),NOP1(NEN,1)
      DO 10 I=1,NS
      N=NNEE(I)
      NCN=NNC(N)
      J=0
      DO 11 K=1,NCN
      DO 11 L=1,6
      KK=(NOP(N,K)-1)*6+L
      J=J+1
   11 R(J,I)=RR(KK)
   10 CONTINUE
      DO 51 I=1,1000
   51 RR(I)=0.
      DO 20 IM=1,NS
      N=NNEE(IM)
      K=NT(N)
      NE=NON(K,1)
      NPI=NON(K,2)
      NP=NON(K,3)
      NCN=NON(K,4)
      NDF=NON(K,5)
      NIS=NPI*NDF
      IS=NIS+1
      IB=NP*NDF
      K=0
       DO 225 I=IS,IB
      K=IB-I+1
      KK=K+NIS
      R(KK,IM)=R(K,IM)
  225 R(K,IM)=0.
      K=NT(N)
      I15=II15(( K-1)*2+1)
      READ(KV1'I15)((SI(I,J),J=1,NIS),I=1,NIS),
     1((SI(I,J),J=IS,IB),I=1,NIS)
      I15=II15((K-1)*2+2)
      READ(KV1'I15)(B(I),I=1,NIS)
      DO 25 I=1,NIS
      DO 25 K=1,NIS
   25 R(I,IM)=R(I,IM)+SI(I,K)*B(K)
      DO 26 I=1,NIS
      DO 26 K=IS,IB
   26 R(I,IM)=R(I,IM)-SI(I,K)*R(K,IM)
      K=NT(N)
      LL=0
```

```
                                                                       00000660
      L=0                                                              00000670
      DO 61 I=1,K                                                      00000675
      LL=LL+NON(I,3)                                                   00000680
   61 L=L+NON(I,1)                                                     00000690
      LNE=L                                                            00000695
      LL=LL-NP                                                         00000700
      L=L-NE+1                                                         00000710
      DO 62 N=L,LNE                                                    00000720
      DO 62 J=1,NCN                                                    00000730
      II=(NOP1(N,J)-1)*NDF                                             00000750
      DO 62 M=1,NDF                                                    00000760
      II=II+1                                                          00000770
      JJ=II-LL*6                                                       00000780
   62 RR(III)=R(JJ,IM)                                                 00000790
   20 CONTINUE                                                         00000800
      RETURN                                                           00000810
      END
```

```
      SUBROUTINE SUBFOP(IK,NON,SI,SM,CORD,NOP,STI,NM,IS,IB,IT,KVK,
     1II10,I10,NT,KKFF,KV1,II15,I15)
C     ФОРМИРОВАНИЯ  СУПЕРЭЛЕМЕНТА
C     ЕСЛИ KKFF=0, ТО ФОРМИРУЕТСЯ  ТОЛЬКО МАТРИЦА ЖОСТКОСТИ
C     ЕСЛИ KKFF=1, ТО ФОРМИРУЕТСЯ  ТОЛЬКО ИНКР.МАТРИЦА
C     (НЕОБХОДИМОЕ МАТР. ЖЕСТКОСТИ  БЕРЕТСЯ  ОТ  ФАЙЛА KV1)
C    (ЗАПИЦЬ НА ФАИЛ KV1 ПРОИЗВОДТ ПРОГРАМА "RIRERA1"ПОЦЛЕ РЕЖИМА KKFF=0
C     ЕСЛИ KKFF=2  ТО  ФОРМИРУЕТ ОБЕ  МАТРИЦЫ
C     KVK=0 -ИСПОЛЬЗУЕТСЯ  ПОДПРОГРАММА STI222
C     KVK=NNN-МАТРИЦЫ СЧИТЫВАЕТСЯ  ОТ ФАЙЛА  С НОМЕРОМ  NNN
C     II10(1)- СПОМОГАТЕЛЬНИЯ  МАСИВ  ДЛЯ KVK
C     I10 - СЧЕТЧИК ЗАПИСЕЙ  ДЛЯ  KVK
C     KV1=NNNN  С ЭТОГО ФАЙЛА  СЧИТЫВАЕТСЯ (K)**(-1) И (K)**(-1)*KIS
C     ДЛЯ  ФОРМИРОВАНИЯ  ИНКРЕМЕНТАЛЬНОЯ МАТРИЦЫ
C     ДАННЯ ФАЙЛ  НЕОБХОДИМО  ТОЛЬКО  ПРИ  KKFF=1
      REAL*4 IT
      COMMON/NN/ N1,NPN,NEN
     1       /AA/ NP,NE,NCD,NSZF,NCN,NDF
     2       /KK/ KSV,NVN(200),RSR,NLK,KIM
     3     /IJ/ JJ,KK
      DIMENSION NOP(NEN,1),CORD(NPN,1),D(6,6),DD(6,6)
     1,SI(NM,1),NON(20,1),SM(NM,1),IT(1),II10(1),NT(1),II15(1)
      NE=NON(IK,1)
      NPI=NON(IK,2)
      NP=NON(IK,3)
      NCN=NON(IK,4)
      NDF=NON(IK,5)
      NS=NP*NDF
      NIS=NPI*NDF
      NCD=NCN*NDF
      LL=0
      L=0
      DO 1 I=1,IK
      LL=LL+NON(I,3)
    1 L=L+NON(I,1)
      LNE=L
      LL3=LL
      L=L-NE+1
      LL=LL-NP
      LLNP=LL+1
      LLS=LL+NDF
      DO 10 I=1,NS
      DO 10 J=1,NS
      SM(I,J)=0.
   10 SI(I,J)=0.
      ND=NCN
      DO 200 NN=LLNP,LL3
      DO 400 N=L,LNE
      DO 402 JJ=1,NCN
      IF(NOP(N,JJ).EQ.NN) GO TO 403
  402 CONTINUE
      GO TO 400
  403 CONTINUE
      DO 320 KK=1,NCN
      IF(NOP(N,KK).LT.NOP(N,JJ))  GO TO 320
      IF(KVK.NE.0) GO TO  810
      IF(KKFF.EQ.1)  GO TO  21
      KIM=0
      CALL STI(N,D,CORD,NOP)
      CALL MATT22(D,N,IT)
      IF(KKFF.EQ.0)  GO TO 820
   21 KIM=2
      CALL STI(N,DD,CORD,NOP)
      CALL MATT22(DD,N,IT)
      GO TO 820
  810 CONTINUE
```

```
      IZ=NT(N)
      KM=(JJ-1)*ND+KK+III(IZ)
      I10=KM
      READ(KVK'I10) D,DD
      IF(KKFF.EQ.1) GO TO 25
      CALL MATT22(D,N,IT)
      IF(KKFF.EQ.0)  GO TO820
   25 CALL MATT22(DD,N,IT)
  820 CONTINUE
      IF(KKFF.EQ.1) GO TO 26
      I=0
      NROWB=(NOP(N,JJ)-1)*NDF
      DO 350 J=1,NDF
      NROWB=NROWB+1
      I=I+1
      II=0
      NCOLB=(NOP(N,KK)-1)*NDF
      DO330 K=1,NDF
      NCOLB=NCOLB+1
      II=II+1
      NK=NCOLB-LLS
      NR=NROWB-LLS
  330 SI(NR,NK)=SI(NR,NK)+D(I,II)
  350 CONTINUE
      IF(KKFF.EQ.0) GO TO 27
   26 CONTINUE
      I=0
      NROWB=(NOP(N,JJ)-1)*NDF
      DO 3500J=1,NDF
      II=0
      NROWB=NROWB+1
      I=I+1
      NCOLB=(NOP(N,KK)-1)*NDF
      DO 3300 K=1,NDF
      NCOLB=NCOLB+1
      II=II+1
      NK=NCOLB-LLS
      NR=NROWB-LLS
 3300 SM(NR,NK)=SM(NR,NK)+DD(I,II)
 3500 CONTINUE
   27 CONTINUE
  320 CONTINUE
  400 CONTINUE
  200 CONTINUE
      DO 60 I=1,NS
      DO 60 J=1,NS
      SM(J,I)=SM(I,J)
   60 SI(J,I)=SI(I,J)
      IF(KKFF.EQ.1)  GO TO  31
      CALL PINIU1(SI,NIS,MM)
      IS=NIS+1
      IB=NS
      DO 510 I=1,NIS
      DO 510 J=IS,IB
      SI(I,J)=0.
      DO 510 K=1,NIS
  510 SI(I,J)=SI(I,J)+SI(I,K)*SI(J,K)
      DO 520 I=IS,IB
      DO 520 J=IS,IB
      DO 520 K=1,NIS
  520 SI(I,J)=SI(I,J)-SI(I,K)*SI(K,J)
      IF(KKFF.EQ.0)  GO TO  41
      GO TO 32
   31 CONTINUE
      KM=II15((IK-1)*2+1)
      IS=NIS+1
```

```
      IB=NS
      I15=KM
      READ(KV1'I15)((SI(I,J),J=1,NIS),I=1,NIS),
     1((SI(I,J),J=IS,IB),I=1,NIS)
   32 CONTINUE
      DO 5200 I=IS,IB
      DO 5200 J=IS,IB
      DO 5200 K=1,NIS
 5200 SM(I,J)=SM(I,J)+SM(I,K)*SI(K,J)-SI(K,I)*SM(K,J)
      DO 530 I=1,NIS
      DO 530 J=IS,IB
      SM(I,J)=0
      DO 530 K=1,NIS
  530 SM(I,J)=SM(I,J)+SM(I,K)*SI(K,J)
      DO 540 I=IS,IB
      DO 540 J=IS,IB
      DO 540 K=1,NIS
  540 SM(I,J)=SM(I,J)+SI(K,I)*SM(K,J)
   41 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SUBSLO(IK,NON,CORD,NOP,GR,KVK,III0,I10
     1,B,NT,FT,KV1,IIRR,IKK,SI,NM,KV2,IIR2,IR2)
C     IK=ПОРЯДКОВОЙ НОМЕР ФОРМИРУЕМАВА СУПЕРЕЛЕМЕНТА N УРОВНЯ
C     GR=НАГРУЗКА
C     KVK=НОМЕР ФАЙЛА НА КУТОРОМ НАХОДИТСЯ ВЕКТОР N-1 УРОВНЯ
C     B(1)=СПОМОГАТЕЛЬНИЯ ПАСОИВ
C     NT(1)=УКАЗВАЕТ ТИП СУПЕРЭ. N-1 УРОВНЯ
C     FT(1)=УГЛЫ ДЛЯ ПОЛУЧ; СУПЭРЭ, ОДНОТИПНЫХ N-1 УРОВНЯ ПРЕОБР. КОРДИН
C     ||||*** ПРИ KVK=0 ИСПОЛЬЗУЕТСЯ  SSLLDD ****||||||
C     KV1=НОМЕР ФАЙЛА НАС ПРОНЕХ, РЕЗ. SI IK-ОГО ЕЛЕМЕНТА N-ОГО УРОВНЯ
C     KV2=НОМЕР ФАЙЛА В КОТОРОМ ЗАПИСИВАЕТСЯ ВЕКТОР N-ОГО УРОВНЯ
C     |||| ДЛИНА ОДНОВО ЗАПИСИ ФАЙЛА KVK U KV2 =400 БАЙТ   ||||
C     |||||**** РАЗМЕРЫ МАСИВ III0,IIRR,IIR2>=50 ||||||||||||
      COMMON/NN/ N1,NPN,NEN
      COMMON/AA/ NP,NE,NCD,NSZP,NCN
      COMMON/KK/ KSV,NVN(200)
      COMMON/RR/ RR(1000)
      DIMENSION NON(20,1),CORD(NPN,1),NOP(NEN,1),
     1F(10),B(1),III0(1),NT(1),FT(1),IIRR(1),SI(NM,1),IIR2(1)
      NE=NON(IK,1)
      NPI=NON(IK,2)
      NP=NON(IK,3)
      NCN=NON(IK,4)
      NDF=NON(IK,5)
      NS=NP*NDF
      NIS=NPI*NDF
      L=0
      LL=0
      DO 1 I=1,IK
      LL=LL+NON(I,3)
    1 L=L+NON(I,1)
      LNP=LL
      LL=LL-NP+1
      LG=LL-1
      LNE=L
      L=L-NE+1
      DO 10 I=1,NS
   10 RR(I)=0.
      IF(KVK.NE.0)  GO TO 810
      DO 818 N=L,LNE
      IF(NVN(N).NE.0) GO TO 818
      CALL SSLLDD(NOP,CORD,N,GR,F,AR)
      DO 817 I=1,NCN
      IG=(NOP(N,I)-1)*6+3-LG*6
  817 RR(IG)=F(I)+RR(IG)
  818 CONTINUE
      IF(KSV.EQ.0)  GO TO 822
      DO 1101 I=1,NP
      II=(I-1)*6
      A=RR(II+3)
      FFLL=CORD(I+LG,2)
      IF(A.EQ.0.) GO TO 1101
      RR(II+1)=A*COS(FFLL)
      RR(II+2)=A*SIN(FFLL)
      RR(II+3)=0.
 1101 CONTINUE
  822 GO TO 820
  810 CONTINUE
      NCD=NCN*NDF
      DO 819 N=L,LNE
      IZ=NT(N)
      I10=III0(51-IZ)
      READ(KVK'I10)(B(J),J=1,NCD)
      I=0
      DO 911 J=1,NCN
      K=NOP(N,J)-LG
```

```
      DO 911 JJ=1,NDF
      KK=(K-1)*NDF+JJ
      I=I+1
  911 RR(KK)=RR(KK)+B(I)
  819 CONTINUE
  820 CONTINUE
      IRR=IIRR((IK-1)*2+1)
      IS=NIS+1
      IB=NS
      READ(KV1'IRR)((SI(I,J),J=1,NIS),I=1,NIS),
     1((SI(I,J),J=IS,IB),I=1,NIS)
      DO 1000 I=IS,IB
      DO 1000 K=1,NIS
 1000 RR(I)=RR(I)-SI(K,I)*RR(K)
      IRR=IIRR((IK-1)*2+2)
      WRITE(KV1'IRR)(RR(I),I=1,NIS)
      IR2=IIR2(51-IK)
      WRITE(KV2'IR2)(RR(I),I=IS,IB)
      IIR2(50-IK)=IIR2(51-IK)+(IB-IS+1)*4/400+1
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE STI222(N,D,CORD,NOP)                                   00000010
      REAL*4 L1,L2,LL                                                   00000020
      COMMON/WW/ W,RS1,BLL(10),NRIB(300),RS2,RS4,RS3                    00000030
      COMMON/QQ/ QAQ(9,36)                                              00000040
      COMMON/HAL/ NSHN,R,H1,N5,BBB(10),QQ(10),H2,H3,H4                  00000050
      COMMON/NN/ N1,NPN,NEN                                             00000060
      COMMON/AA/ NP,NE,NCU,NSZF,NON                                     00000070
      COMMON/KK/ KSV,NVN(300),RSR,NLK,KIM                               00000080
      COMMON/IJ/ II,JJ,LL(40,3),NIN                                     00000090
      COMMON/RR/ RR(1800),FFF(300)                                      00000100
      DIMENSION D(6,6),B(9,6),Q(9,9)                                    00000110
     1,CORD(NPN,1),NOP(NEN,1)                                           00000120
     2,F(9,6),DD(6,6),T(6,9)                                            00000130
     3,DN(10,2),SS(4),AN(10),BL(10,2)                                   00000140
     4,PAR(60),E(9)                                                     00000150
     5,CC(9,9),RAR(60)                                                  00000160
      DO 1 I=1,6                                                        00000170
      DO 1 J=1,6                                                        00000180
      F(I,J)=0.                                                         00000185
    1 D(I,J)=0.                                                         00000190
      LQ=NVN(N)                                                         00000200
      DO 500 J=1,9                                                      00000210
      JA=J+LQ*9                                                         00000220
       DO 500 I=1,9                                                     00000230
      CC(I,J)=0.                                                        00000240
  500 Q(I,J)=QAQ(I,JA)                                                  00000250
      IF(LQ.EQ.0) H=H1                                                  00000260
      IF(LQ.EQ.1) H=H2                                                  00000270
      IF(LQ.EQ.2) H=H4                                                  00000280
      IF(LQ.EQ.3) H=H3                                                  00000290
      RS=RS1                                                            00000300
      IF(LQ.EQ.2) RS=RS4                                                00000310
      IF(LQ.EQ.1) RS=RS2                                                00000320
      IF(LQ.EQ.3) RS=RS3                                                00000325
      IF(KIM.NE.2) GO TO 2212                                           00000330
      KNN=0                                                             00000340
      DO 508 I=1,6                                                      00000350
      NNN=NOP(N,I)                                                      00000360
      DO 508 J=1,6                                                      00000370
      NR=(NNN-1)*6+J                                                    00000380
      KNN=KNN+1                                                         00000390
      RAR(KNN)=RR(NR)                                                   00000400
  508 PAR(KNN)=RR(NR)                                                   00000410
      IF(KSV.EQ.0) GO TO 2212                                           00000420
      DO 2213 I=1,6                                                     00000430
      FF=FFF(N)                                                         00000431
      F(1,1)=COS(FF)                                                    00000432
      F(1,2)=SIN(FF)                                                    00000433
      F(2,1)=-F(1,2)                                                    00000434
      F(2,2)=F(1,1)                                                     00000435
      F(3,3)=1.                                                         00000436
      F(4,4)=F(1,1)                                                     00000437
      F(4,5)=F(1,2)                                                     00000438
      F(5,4)=F(2,1)                                                     00000439
      F(5,5)=F(2,2)                                                     00000440
      F(6,6)=1.                                                         00000441
      CALL MATT11(DD,N,CORD,NOP,I)                                      00000442
      DO 901 L5=1,6                                                     00000443
      DO 901  K5=1,6                                                    00000444
      T(L5,K5)=0.                                                       00000445
      DO 901 M5=1,6                                                     00000446
  901 T(L5,K5)=T(L5,K5)+DD(L5,M5)*F(M5,K5)                              00000447
      DO 2213 J=1,6                                                     00000450
      J1=(I-1)*6                                                        00000460
      RAR(J1+J)=0.                                                      00000470
```

```
 2213 RAR(J1+J)=RAR(J1+J)+T(J,K)*PAR(J1+K)
 2212 CONTINUE
      DO 220 L=1,NIN
      L1=LL(L,1)
      L2=LL(L,2)
      Z=LL(L,3)
      IF(KIM.NE.0)  GO TO 4000
      CALL MATBBB(B,L1,L2,M,CORD,NOP,N,DET,JJ)
      DO 100 I=1,9
      DO 100 J=1,6
      F(I,J)=0.
      DO 100 K=1,9
  100 F(I,J)= F(I,J)+Q(I,K)*B(K,J)
      CALL MATBBB(B,L1,L2,M,CORD,NOP,N,DET,II)
      DO 10 I=1,6
      DO 10 J=1,6
      DD(I,J)=0.
      DO 40 K=1,9
   40 DD(I,J)=DD(I,J)+B(K,I)*F(K,J)
   10 D(I,J)=D(I,J)+DD(I,J)*Z*ABS(DET)
      GO TO 220
 4000 IF(KIM.NE.1)  GO TO 5000
      CALL MATBB2(NOP,CORD,IN,L1,L2,DN,SS,DET,AN,BL)
      DAN=AN(JJ)*AN(II)*H**3*Z*ABS(DET)
       DO 3098 I=1,3
 3098 D(I,I)=D(I,I)+DAN
      DO 3099 I=4,6
 3099 D(I,I)=D(I,I)+DAN*H**2/12.
      GO TO 220
 5000 CONTINUE
      DO 503 I=1,9
  503 E(I)=0.
      DO 501 I=1,6
      CALL MATBBB(B,L1,L2,M,CORD,NOP,N,DET,I)
      DO 501 J=1,9
      DO 501 K=1,6
  501 E(J)=E(J)+B(J,K)*RAM((I-1)*6+K)
      A11=Q(1,1)*E(1)+Q(1,2)*E(2)+Q(1,4)*E(4)+Q(1,5)*E(5)+Q(1,9)*E(9)
      A22=Q(1,2)*E(1)+Q(2,2)*E(2)+Q(2,4)*E(4)+Q(2,5)*E(5)+Q(2,9)*E(9)
      A33=2.*(Q(3,3)*E(3)+Q(3,6)*E(6))
      A44=2.*Q(7,7)*E(7)
      A55=2.*Q(8,8)*E(8)
      DO 30 I=1,3
      CC(I,I)=A11
      CC(I,I+3)=A33/2.
      CC(I,I+6)=A44/2.
      CC(I+3,I+3)=A22
   30 CC(I+3,I+6)=A55/2.
      DO 31 I=1,9
      DO 31 J=I,9
   31 CC(J,I)=CC(I,J)
      CALL MATBB1(B,L1,L2,M,CORD,NOP,N,DET,JJ)
      DO 32 I=1,9
      DO 32 J=1,6
      F(I,J)=0.
      DO 32 K=1,9
   32 F(I,J)=F(I,J)+CC(I,K)*B(K,J)
      CALL MATBB1(B,L1,L2,M,CORD,NOP,N,DET,II)
      DO 33 I=1,6
      DO 33 J=1,6
      DD(I,J)=0.
      DO 34 K=1,9
   34 DD(I,J)=DD(I,J)+B(K,I)*F(K,J)
   33 D(I,J)=D(I,J)+DD(I,J)*Z*ABS(DET)
  220 CONTINUE
```

```
      CALL MATT11(T,N,CORD,NOP,JJ)
      DO 810 I=1,6
      DO 810 J=1,6
      DD(I,J)=0.
      DO 810 K=1,6
  810 DD(I,J)=DD(I,J)+D(I,K)*T(K,J)
      CALL MATT11(T,N,CORD,NOP,II)
      DO 820 I=1,6
      DO 820 J=1,6
      D(I,J)=0.
      DO 820 K=1,6
  820 D(I,J)=D(I,J)+T(K,I)*DD(K,J)
  800 CONTINUE
      RETURN
      END
```