Jānis Mencis

ĪSI UN VIENKĀRŠI MĀCĀMIES PĒTĪT UN IZPRAST MATEMĀTIKU

SKOLOTĀJU
IZGLĪTĪBAS JOMA:
Matemātika

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
PEDAGOĢIJAS, PSIHOLOĢIJAS UN MĀKSLAS FAKULTĀTE

Jānis Mencis

ĪSI UN VIENKĀRŠI MĀCĀMIES PĒTĪT UN IZPRAST MATEMĀTIKU

SKOLOTĀJU
IZGLĪTĪBAS JOMA:
Matemātika

Latvijas Universitāte,
Pedagoģijas, psiholoģijas un mākslas fakultāte
2020

Jānis Mencis. *Īsi un vienkārši mācāmies pētīt un izprast matemātiku.* Rīga: LU Akadēmiskais apgāds, 2020. 105 lpp.

Grāmata izstrādāta Latvijas Universitātes Pedagoģijas, psiholoģijas un mākslas fakultātes 2020. gada attīstības projektā "Inovatīvo mācību materiālu izstrāde jaunajām izglītības, pedagoģijas un sporta virziena studiju programmām".

Studiju materiāli vidusskolas un pamatskolas matemātikas didaktikā matemātikas skolotāju programmas studentiem veidoti, ievērojot šādus principus:

- studiju saturs atbilst kursa aprakstam "Skolas matemātikas praktikums II" un palīdz apgūt to, akcentējot mācību pieejas maiņu skolā un augstskolā un parādot dažādus sadarbības veidus;
- grāmatas nodaļas veidotas, iekļaujot gan lekciju centrālos jautājumus saistībā ar matemātikas uzdevumiem, gan lekciju uzdevumus to satura jēgas izpratnei;
- teorētiskais un praktiskais materiāls nodrošina atgriezeniskās saites iespējas;
- komentāri uzdevumu veikšanai sniegti, balstoties uz praktiskām dzīves situācijām.

Recenzente *Dr. math*. Dace Kūma

Korektore Gita Kļaviņa
Vāka dizainu veidojusi Baiba Lazdiņa
Maketējusi Ieva Zarāne

© Jānis Mencis, 2020
© Latvijas Universitāte, 2020

e-ISBN 978-9934-18-573-1

Saturs

Ievads ... 4

1. Matemātiskas kļūdas un to novēršanas metodiskie paņēmieni ... 6

1.1. Aritmētika ... 6

1.2. Algebra ... 20

2. Ģeometrija – deduktīva zinātne vai aprēķinu praktikums? ... 28

2.1. Metodiskie ieteikumi ... 28

2.2. Pamatuzdevumi ... 35

2.3. Papilduzdevumi ... 75

Literatūra ... 91

Pielikumi ... 92

1. pielikums Matemātikas terminu skaidrojošā vārdnīca ... 92

2. pielikums Matemātikā bieži lietotie apzīmējumi ... 98

3. pielikums Pārbaudes darbs, gatavojoties kursam "Skolas matemātikas praktikums II" ... 100

Ievads

Eksaktās zinības laika gaitā ir kritušas nežēlastībā, un skolēni vieglu roku atsakās no grūtajiem mācību priekšmetiem. Savukārt pavasaros, kad tuvojas eksāmenu laiks, aktualizējas marginālas diskusijas par tēmu: kur man dzīvē praktiski noderēs ģeometrija, trigonometrija un algebra? Ja tev, cienījamo student, viss jau kļuvis skaidrs, tad vari turpmāko nelasīt. Bet, ja vēlies uzzināt, kā es, cenšoties atbildēt uz jautājumu, kāpēc jāmācās matemātika, secināšu dīvainas lietas, tad droši lasi tālāk.

Pats jautājums – kāpēc jāmācās matemātika? – jau ir tik viltīgi formulēts (tā jautā mazi bērni, kas katrai mūsu atbildei pievieno drausmīgo “kāpēc?”), ka neatkarīgi no tā, kādus argumentus es minēšu, vienmēr var sekot “kāpēc?”, tā radot situāciju, kas galu galā noved pie jautājumiem par dzīves jēgu, pasaules uzbūvi un Dieva eksistenci (tāda tipa jautājumi ir visā pasaulē atzīti par visvairāk uzdotajiem). Par matemātikas apguves mērķiem un metodēm un nepieciešamību matemātiku mācīties ir uzrakstīts tik daudz, ka neko jaunu šeit pateikt nevaru.

Bet tomēr...

1. Matemātika nav jāmācās, tāpat kā nav rītos jāceļas. Ja domājat, ka rītos nav jāceļas, tad jums ir 100% taisnība, ka matemātika nav jāmācās.
2. Ja uzskatāt sevi par personu ārpus sabiedrības, arī tad varat nemācīties matemātiku un, protams, varat nemācīties neko.
3. Teorētiskā un lietišķā matemātika (un nepārprotami arī skolas matemātika) jālikvidē kā šķira, jāaizliedz ar likumu, jo tādējādi mēs pazaudēsim vienu no galvenajām objektīvās realitātes izziņas iespējām un ātri vien pielīdzināsimies mūsu mazajiem brāļiem, kuriem, iespējams, neklājas nemaz tik slikti.

Problēma ir nevis jautājumā “kāpēc jāmācās?”, bet jautājumos, kas saistās ar skolu kā valsts sistēmas sastāvdaļu. Kādā situācijā mēs esam, visiem ir skaidrs. Tāpēc skolotāja darbs kļūst par misiju, bet ne visi misionāra darbam ir gatavi. Viens standarts matemātikā visiem skolēniem nepalīdz uztvert matemātiku kā estētisku vērtību, nedod iespēju iemācīt tieši to, kas nepieciešams, lai matemātika kļūtu par skolēna sabiedroto dažādās dzīves situācijās.

Sākumskolā vairums bērnu nosauc matemātiku par savu mīļāko mācību priekšmetu, bet kas notiek tālāk? Te jāatceras Dānijas izglītības ministra vārdi: “Matemātika ir skaista, bet kāpēc mēs, mācot bērniem, padarām to briesmīgu?” Neaizmirsīsim arī, ka izglītības sistēma pēc būtības ir ļoti konservatīva. Piemēram, ja būtu nolemts ko radikāli mainīt un matemātiku mācīt ar mūzikas palīdzību (kas nebūt nav aplami), kur gan mēs ņemtu katram skolēnam klavieres? Un vai skolotāji prot spēlēt kaut vienu mūzikas instrumentu, par kora diriģēšanu nemaz nerunājot? (Pirmajā brīvvalsts laikā prata gan!) Tāpēc daudzas lietas notiek tradīciju ietekmē, kas kaut kādā mērā tomēr garantē, ka no apmācāmā iznāks jēdzīgs sabiedrības loceklis.

Arī skolotāju sagatavošanas programmās vēl nav iespējams iekļaut tādus kursus kā klasiskās dejas, mūzikas instrumentu spēle, vizuālā māksla, kas ļautu skolotājam būt ne tikai formālo zināšanu nesējam, bet arī radošai personībai. Pozitīvas tendences izglītības lauciņa sakārtošanā vērojamas beidzamajās Izglītības un zinātnes ministrijas un projekta “Skola 2030” aktivitātēs, kas rosina skolēniem ne tikai apgūt formālo matemātiku, bet arī veidot matemātisko izpratību. Novēlu, lai neviens no mums nenonāktu tāda tiesneša varā, kas spriestu aptuveni tā: noziedznieks bija vatenī, personai X ir vatenis, tāpēc persona X ir noziedznieks.

Un, ja jūs esat bērnu vecāki, tad neaizmirstiet, ka jūs varat tieši ietekmēt gan savas atvases, gan skolotāja darbu, palīdzot atrast bērnam ceļu, kā mācīties ar prieku, – un ne tikai matemātiku.

Teorētiskā matemātika kā zinātnes nozare ietver matemātikas apakšnozares, un vairums matemātikas kursu ir sistemātiska rakstura. Toties vidusskolā dažos gados jāapgūst un jāizprot liels apjoms sarežģītu jēdzienu un spriedumu (teorēmas, īpašības, algoritmi, definīcijas). Lai nekļūdītos praktisku problēmu risināšanā, noderīgs var būt īss pārskats (skat. nobeigumu) par dažām pamatlietām un simboliem, ar kuriem nākas sastapties matemātikas praktikumos un citos matemātikas studiju kursos. Studiju materiāli balstās uz avotiem (Mencis, Mencis, 2004a, 2004b; Oliņa, Namsone, France, 2018) un ilggadēju studiju procesu Latvijas Universitātē.

Grāmatas pirmajā nodaļā atradīsim kļūdu cēloņus un mācīsimies pareizi risināt uzdevumus aritmētikā un algebrā. Otrajā nodaļā būsim tikai ģeometrijas pasaulē, kur deduktīvi pierāda sakarības šajā zinātnes jomā, kas ir svarīga arī skolas kursā gan pamatskolā, gan vidusskolā. Studenti iegūs daļēju skolotāja kompetenci, ne tikai atrisinot uzdevumus, bet arī meklējot kļūdas uzdevumu risinājumos un tos kritiski izvērtējot.

Kurss ieteicams jebkuras studiju programmas studentiem, it īpaši tiem, kuri vēlas kļūt par mūsdienīgiem skolotājiem (gan pamatskolā, gan vidusskolā).

1. Matemātiskas kļūdas un to novēršanas metodiskie paņēmieni

1.1. Aritmētika

Aritmētikas uzdevumos nākas gan saskaitīt un atņemt, gan reizināt un dalīt racionālus skaitļus. Vienmēr jābūt saprotamam – uzdevums jārisina tuvināti vai precīzi. Pētot dotos uzdevumus, jūties kā skolotājs – ne tikai sameklē kļūdas, bet paskaidro arī, kāpēc tās radušās. Ja nepieciešams, atkārto, kā parastās daļas pārvērš decimāldaļās, un otrādi.

1. uzdevums

Novērtē risinājumu! Kāds teorētiskās matemātikas (aritmētikas) aspekts nav ievērots? Atrisini pareizi!

RISINĀJUMS

$$\frac{5\frac{1}{4} : \left(4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24}\right)}{7{,}326 : 1{,}8 + 0{,}7533 : 0{,}81} + 0{,}1(6) : 0,(5) =$$

$$= \frac{5{,}25 : (4{,}416667 - 3{,}958333)}{4{,}07 + 0{,}93} + 0{,}30(18) =$$

$$= \frac{5{,}25 : 0{,}458334}{5} + 0{,}30(18) =$$

$$= \frac{11{,}45453}{5} + 0{,}30(18) =$$

$$= 2{,}2900906 + 0{,}30(18) = 2{,}592706$$

2. uzdevums

Novērtē risinājumu! Pārbaudi ar kalkulatoru aprēķinu! Vai atbildes sakrīt? Kāpēc jā vai nē?

RISINĀJUMS

$$\frac{0,(5)}{0{,}2(7)} : \frac{6{,}435 : 1{,}17 + 1\frac{1}{8} \cdot 0{,}16}{1\frac{15}{36} : \left(3\frac{1}{18} - 2\frac{7}{12}\right)} = \frac{15}{142}$$

APRĒĶINS

1) $0,(5) = \frac{5}{9}$; $0{,}2(7) = \frac{27-2}{9} = \frac{25}{9}$;

2) $\frac{5}{9} : \frac{25}{9} = \frac{5 \cdot 9}{9 \cdot 25} = \frac{1}{5}$

3) $6{,}435 = 6\frac{435}{1000}$; $\quad 1{,}17 = 1\frac{17}{100;}$

4) $6\frac{435}{1000} : 1\frac{17}{100} = 6\frac{87}{200} : 1\frac{17}{100} = \frac{87 + 6 \cdot 200}{200} : \frac{17 + 1 \cdot 100}{100} = \frac{1287}{200} : \frac{117}{100} =$

$= \frac{1287 \cdot 100}{200 \cdot 117} = \frac{128700}{23400} = \frac{1287}{234} = 5\frac{1}{2}$

5) $1\frac{1}{8} \cdot \frac{16}{100} = 1\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{25} = \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{25} = \frac{9 \cdot 4}{8 \cdot 25} = \frac{36}{200} = \frac{9}{50}$

6) $5\frac{1}{2} + \frac{9}{50} = 5 + \frac{1}{2} + \frac{9}{50} = 5 + \frac{25}{50} + \frac{9}{50} = 5 + \frac{35}{50} = 5 + \frac{17}{25} = 5\frac{17}{25}$

7) $3\frac{1}{18} - 2\frac{7}{12} = \frac{1 + 3 \cdot 18}{18} - \frac{7 + 2 \cdot 12}{12} = \frac{55}{18} - \frac{31}{12} = \frac{110 - 93}{36} = \frac{17}{36}$

8) $1\frac{15}{36} : \frac{17}{36} = 1\frac{5}{12} : \frac{17}{36} = \frac{5 + 1 \cdot 12}{12} : \frac{17}{36} = \frac{17}{12} : \frac{17}{36} = \frac{17 \cdot 36}{12 \cdot 17} = 3$

9) $5\frac{17}{25} : 3 = \frac{17 + 5 \cdot 25}{25} : 3 = \frac{142}{25} : 3 = \frac{142}{75} = \frac{1 \cdot 75 + 67}{75} = 1\frac{67}{75}$

10) $\frac{1}{5} : 1\frac{67}{75} = \frac{1}{5} : \frac{67 + 1 \cdot 75}{75} = \frac{1}{5} : \frac{142}{75} = \frac{1 \cdot 75}{5 \cdot 142} = \frac{75}{710} = \frac{15}{142}$

3. uzdevums

Izpēti risinājumu un aprēķinu! Vai viss izdarīts korekti? Kāds pamatojums ir aprēķina astotajam solim?

RISINĀJUMS

$(23{,}15 - ((8{,}712 - 3{,}24) \cdot 1\frac{7}{18} + 28{,}8) : 3\frac{7}{15}) : 9\frac{1}{6} \cdot 6{,}(2) =$

$= (23{,}15 - (5{,}472 \cdot 1\frac{7}{18} + 28{,}8) : 3\frac{7}{15}) : 9\frac{1}{6} \cdot 6{,}(2) =$

$= (23{,}15 - (7{,}6 + 28{,}8) : 3\frac{7}{15}) : 9\frac{1}{6} \cdot 6{,}(2) =$

$= (23{,}15 - 36{,}4 : 3\frac{7}{15}) : 9\frac{1}{6} \cdot 6{,}(2) =$

$$= (23{,}15 - 10{,}5) : 9\frac{1}{6} \cdot 6{,}(2) =$$

$$= 12{,}65 : 9\frac{1}{6} \cdot 6{,}(2) =$$

$$= 1\frac{19}{50} \cdot 6{,}(2) =$$

$$= 1\frac{19}{50} \cdot \frac{56}{9} =$$

$$= 8\frac{44}{75}$$

APRĒĶINS

1) $8{,}712 - 3{,}24 = 5{,}472$

2) $5{,}472 = \frac{5472}{1000}$

3) $\frac{5472}{1000} \cdot \frac{25}{18} = \frac{136800}{18000} = \frac{1368}{180} = \frac{76}{10} = 7{,}6$

4) $7{,}6 + 28{,}8 = 36{,}4 = \frac{364}{10}$

5) $\frac{364}{10} : \frac{52}{15} = \frac{364 \cdot 15}{10 \cdot 52} = \frac{5460}{520} = 10{,}5$

6) $23{,}15 - 10{,}5 = 12{,}65 = \frac{1265}{100}$

7) $\frac{1265}{100} : \frac{55}{6} = \frac{1265 \cdot 6}{100 \cdot 55} = \frac{7590}{5500} = \frac{69}{50}$

8) $6,(2) = 6 + \frac{2}{10 - 1} = 6 + \frac{2}{9} = \frac{54 + 2}{9} = \frac{56}{9}$

9) $\frac{69 \cdot 56}{50 \cdot 9} = \frac{3864}{450} = \frac{644}{75} = 8\frac{44}{75}$

4. uzdevums

Vispirms pārbaudi dalījumus rūtiņu tīklā! (Vai uzdevuma atrisināšanai tas ir labākais paņēmiens?)

Tavas domas par pārveidojumiem:

$$2\frac{1}{17} \text{ jeb } \frac{2 \cdot 17 + 1}{17} = \frac{35}{17} \text{ jeb } 2{,}0588 \quad 35 : 17 = 2{,}0588$$

$$5,(6) \text{ jeb } 5{,}7 : 0{,}5(6) \text{ jeb } 0{,}57 = 5{,}7 \text{ jeb } \frac{57}{10} : 0{,}57 \text{ jeb } \frac{57}{100} = \frac{57 \cdot 100}{10 \cdot 57} = \frac{10}{1} = 10$$

Atrodi vēl ko nepareizu un neracionālu!

RISINĀJUMS

$$\frac{1{,}25 : 15{,}625 + 0{,}54 \cdot \frac{2}{9} - 0{,}175}{2\frac{1}{17} - 1\frac{9}{34}} + 5,(6) : 0{,}5(6) =$$

$$= \frac{0{,}08 + 0{,}54 \cdot \frac{2}{9} - 0{,}175}{\frac{35}{17} - \frac{43}{34}} + 5,(6) : 0{,}5(6) =$$

$$= \frac{0{,}08 + 0{,}54 \cdot \frac{2}{9} - 0{,}175}{2{,}0588 - 1{,}265} + 5,(6) : 0{,}5(6)$$

$$= \frac{0{,}08 + 0{,}12 - 0{,}175}{0{,}7938} + 5,(6) : 0{,}5(6) =$$

$$= \frac{0{,}025}{0{,}794} = + 5,(6) : 0{,}5(6) = 0{,}031 + 10 = 10{,}031$$

APRĒĶINI

$$1{,}25 : 15{,}625 = 1\frac{25}{100} : 15\frac{625}{1000} = \frac{125}{100} : \frac{12565}{1000} = \frac{125}{100} \cdot \frac{1000}{12565} =$$

$$= \frac{125}{1} \cdot \frac{10}{12565} = \frac{1}{1} \cdot \frac{10}{125} = \frac{10}{125} = \frac{2}{25} \text{ jeb } 0{,}08$$

$$0{,}54 \cdot \frac{2}{9} = \frac{54}{100} \cdot \frac{2}{9} = \frac{27}{50} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3}{50} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{25} \text{ jeb } 0{,}12$$

$$\begin{array}{r} 0{,}08 \\ \underline{+\,0{,}12} \\ 0{,}20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}200 \\ \underline{-0{,}175} \\ 0{,}025 \end{array}$$

$2\frac{1}{17}$ jeb $\frac{2 \cdot 17 + 1}{17} = \frac{35}{17}$ jeb 2,0588 $\quad 35 : 17 = 2{,}0588$

3	5	:	1	7	=	2,	0	5	8	8	2	3	5	2	9	4	1	1	(7	.	.
3	4																				
	1	0																			
		0																			
	1	0	0																		
		8	5																		
		1	5	0																	
		1	3	6																	
			1	4	0																
			1	3	6																
					4	0															
					3	4															
						6	0														
						5	1														
							9	0													
							8	5													
								5	0												
								3	4												
								1	6	0											
								1	5	3											
										7	0										
										6	8										
											2	0									
											1	7									
												3	0								
												1	7								
												1	3	0							
												1	1	7							
													1	3	0						

$$1\frac{9}{34} = \frac{1 \cdot 34 + 9}{34} = \frac{43}{34} \text{ jeb } 43 : 34 = 1{,}2647$$

4	3	:	3	4	=	1,	2	6	4	7	0	.	.	.							
3	4																				
	9	0																			
	6	8																			
	2	2	0																		
	2	0	4																		
		1	6	0																	
		1	3	6																	
			2	4	0																
			2	3	8																
					2	0															
						0															
					2	0	0	.	.	.											

$$\begin{array}{r} _{-}\;2{,}\ 0\ 5\ 8\ 8 \\ 1{,}\ 2\ 6\ 5\ 0 \\ \hline 0{,}\ 7\ 9\ 3\ 8 \end{array}$$

$$5,(6) \text{ jeb } 5{,}7 : 0{,}5(6) \text{ jeb } 0{,}57 = 5{,}7 \text{ jeb } \frac{57}{10} : 0{,}57 \text{ jeb } \frac{57}{100} = \frac{57 \cdot 100}{10 \cdot 57} = \frac{10}{1} = 10$$

2	5	:	7	9	4	=	0,	0	3	1	.	.	.	.						
	0																			
2	5	0																		
		0																		
2	5	0	0																	
2	3	8	2																	
	1	1	8	0																
		7	9	4																
		3	8	6	0	.	.	.	.	.										

5. uzdevums

Komentē risinājumu gan no teorētiskā, gan metodiskā aspekta! Izvērtē aprēķinu! Atrodi kļūdas!

RISINĀJUMS

$$\frac{4\frac{2}{7}-3\frac{1}{6}}{6{,}756-2{,}056}+\frac{0{,}27+9\frac{2}{3}:4,(8)}{2\frac{5}{36}+0{,}325:\frac{13}{20}\cdot 2\frac{2}{9}}-\frac{16}{21}+\frac{5}{21}=$$

$$=\frac{\frac{47}{42}}{4{,}7}+\frac{\frac{3}{11}+9\frac{2}{3}:4,(8)}{2\frac{5}{36}+0{,}325:\frac{13}{20}\cdot 2\frac{2}{9}}-\frac{16}{21}+\frac{5}{21}=$$

$$=\frac{10}{42}+\frac{\frac{99}{44}}{\frac{117}{36}}-\frac{16}{21}+\frac{5}{21}=$$

$$=\frac{10}{42}+\frac{99}{143}-\frac{16}{21}+\frac{5}{21}=$$

$$=\frac{5588}{6006}-\frac{16}{21}+\frac{5}{21}=$$

$$=\frac{5588}{6006}-\frac{4576}{6007}+\frac{5}{21}=$$

$$=\frac{1012}{6006}+\frac{1430}{6006}=\frac{2442}{6006}=\frac{37}{91}$$

APRĒĶINS

1) $4\frac{2}{7}-3\frac{1}{6}=\frac{30^{\cdot 6}}{7}-\frac{17^{\cdot 7}}{6}=\frac{180}{42}-\frac{133}{42}=\frac{47}{42}$

2) $0,(27)=\frac{27}{10^2-1}=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$

3) $4,(8)=\frac{48-4}{9}=\frac{44}{9}$

4) $0{,}325:\frac{13}{20}=\frac{325}{1000}:\frac{13}{20}=\frac{25}{1000}\cdot\frac{1}{13}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{9}=\frac{10}{9}$

5) $\frac{47}{42}:\frac{47}{10}=\frac{10}{42}$

6) $9\frac{2}{3}:\frac{44}{9}=\frac{29}{3}\cdot\frac{9}{44}=\frac{87}{44}$

7) $\frac{3^{\cdot 4}}{11} + \frac{87}{44} = \frac{12}{44} + \frac{87}{44} = \frac{99}{44}$

8) $2\frac{5}{36} + \frac{10}{9} = \frac{77}{36} + \frac{10^{\cdot 4}}{9} = \frac{77}{36} + \frac{40}{36} = \frac{117}{36}$

9) $\frac{99}{44} : \frac{117}{36} = \frac{99}{44} \cdot \frac{36}{117} = \frac{3564^{:4}}{5148} = \frac{891}{1287} = \frac{99}{143}$

10) $\frac{10}{42} + \frac{99}{143} = \frac{1430 + 4158}{6006} = \frac{5588}{6006} - \frac{16^{\cdot 286}}{21} =$

$= \frac{5588 - 4576}{6006} = \frac{1012}{6006} + \frac{5^{\cdot 286}}{21} = \frac{1012 + 1430}{6006} = \frac{2442^{:33}}{6006} = \frac{37}{91}$

6. uzdevums

Lai matemātiskos aprēķinos nerastos kļūdas, nepieciešams ne tikai zināt formālos darbību izpildes algoritmus, bet arī skaidri saprast, ko nozīmē aritmētiskās darbības, kādas ir to precīzās definīcijas un īpašības.

Paskaidro katru definīciju, īpašību, sakarību un jēdzienu ar konkrētu piemēru visās skaitļu kopās!

Svarīgākās īpašības, kurus izmanto algebrisko uzdevumu risināšanā.

Saskaitīšanas un reizināšanas īpašības

$a + b = b + a$ (saskaitīšanas komutatīvā īpašība).

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (saskaitīšanas asociatīvā īpašība).

$ab = ba$ (reizināšanas komutatīvā īpašība).

$(a + b) \cdot c = ac + bc$ (reizināšanas asociatīvā īpašība).

Ja $a = b$ un c – jebkurš skaitlis, tad $a + c = b + c$.

Ja $a = b$ un $c \neq 0$, tad $ac = bc$.

Atņemšanas un dalīšanas definīcijas un īpašības

Skaitli c sauc par skaitļu a un b starpību, ja $a = b + c$, t. i., $a - b = c$ nozīmē, ka $a = b + c$

$a - b = a + (-b)$ (atņemšana aizstāta ar saskaitīšanu).

$\left.\begin{array}{l} a + (b - c) = a + b - c \\ a - (b - c) = a - b + c \end{array}\right\}$ iekavu atvēršanas likumi.

Skaitli c sauc par skaitļu a un b dalījumu, ja $a = bc$, t. i., $a \div b = c$ nozīmē, ka $a = bc$, $(b \neq 0)$.

Saskaitīšanas, reizināšanas un dalīšanas darbību speciālie gadījumi

$a + 0 = 0 + a = a$ (nulles pieskaitīšana).

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (reizināšana ar vieninieku).

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (reizināšana ar nulli).

$0 \div a = 0(a \neq 0)$ (nulles dalīšana).

Pakāpes definīcija un īpašības

Skaitļa a pakāpi ar naturālu kāpinātāju n definē ar vienādību

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n reizes}.$

Pakāpi ar kāpinātāju 0 un ar kāpinātāju 1 definē šādi:

$a^0 = 1\,(a \neq 0),\ a^1 = a.$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,(a \neq 0, n \in N)$ (pakāpe ar negatīvu kāpinātāju).

$a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}$ (a > 0) (pakāpe ar daļveida kāpinātāju).

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (pakāpju reizināšana, ja bāzes ir vienādas).

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (reizinājuma kāpināšana).

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\,(b \neq 0)$ (dalījuma kāpināšana).

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ (dalījuma pakāpe ar negatīvu kāpinātāju).

$(a^n)^m = a^{nm}$ (pakāpes kāpināšana).

Saīsinātās reizināšanas identitātes

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (kvadrātu starpība).

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (binoma kvadrāts).

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ (binoma kubs).

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (kubu summa).

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (kubu starpība).

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ (trinoma kvadrāts).

Kvadrāttrinoma sadalīšana reizinātājos

Teorēma

Ja x_1 un $x_2$ir kvadrāttrinoma $ax^2 + bx + c = 0$ saknes, tad
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

DEFINĪCIJA Skaitli, ar kuru var izdalīt bez atlikuma doto veselo skaitli, sauc par šī skaitļa dalītāju. Naturālo skaitli, kas bez atlikuma dalās tikai ar skaitli 1 un pats ar sevi, sauc par pirmskaitli.

DEFINĪCIJA Naturālu skaitli, kas bez atlikuma dalās ar skaitli 1 un vēl ar citiem naturāliem skaitļiem, sauc par saliktu skaitli.

DEFINĪCIJA Sadalījumu pirmskaitļu reizinājumā sauc par dotā naturālā skaitļa sadalījumu pirmreizinātājos. Ja reizinātāji sakārtoti augošā secībā un vienādi reizinātāji uzrakstīti kā pakāpes, tad to sauc par kanonisko sadalījumu. Lai doto naturālo skaitli sadalītu pirmreizinātājos, tad visiem naturāliem šī skaitļa reizinātājiem ir jābūt pirmskaitļiem.

DEFINĪCIJA Par divu vai vairāku naturālu skaitļu kopīgo dalītāju sauc skaitli, ar kuru var izdalīt visus dotos skaitļus. Par divu vai vairāku naturālu skaitļu lielāko kopīgo dalītāju sauc lielāko skaitli, ar kuru dalās visi dotie skaitļi.

DEFINĪCIJA Divus skaitļus, kuriem nav neviena kopīga dalītāja, izņemot skaitli 1, sauc par savstarpējiem pirmskaitļiem.

DEFINĪCIJA Par divu vai vairāku skaitļu mazāko kopīgo dalāmo sauc mazāko skaitli, kas dalās ar visiem dotajiem skaitļiem.

DEFINĪCIJA Saka, ka reālie skaitļi $a = b$, ja ir vienādas šo skaitļu veselās daļas un vienādi ir visi atbilstošie decimālcipari, t. i., ja $a_i = b_i$, $i = 0,1,2,\ldots$...

DEFINĪCIJA Saka, ka $a_0, a_1a_2a_3\ldots < b_0, b_1b_2b_3\ldots$, ja ir spēkā šādi nosacījumi: $a_k < b_k$ un $a_i = b_i$ visiem $i < k$.

DEFINĪCIJA Katram reālam skaitlim (arī iracionālam skaitlim) atbilst viens noteikts koordinātu taisnes punkts.

DEFINĪCIJA Reālos skaitļus, kas ir piekārtoti savstarpēji simetriskiem koordinātu taisnes punktiem attiecībā pret koordinātu sākumpunktu *O*, sauc par savstarpēji pretējiem skaitļiem.

DEFINĪCIJA Par reālā skaitļa *a* moduli jeb absolūto vērtību sauc pašu šo skaitli, ja tas ir pozitīvs vai vienāds ar 0, un šim skaitlim pretējo skaitli, ja *a* ir negatīvs.

Reālo skaitļu summas, starpības, reizinājuma un dalījuma moduļa īpašības, kuras ir spēkā jebkuriem reāliem skaitļiem a un b.

$|a + b| \leq |a| + |b|;$

$|a - b| \geq |a| - |b|;$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, (ja $b \neq 0$).

Aritmētiskās un algebriskās izteiksmes

Matemātisko izteiksmi, kurā ir tikai ar cipariem uzrakstīti konkrēti skaitļi, sauc par skaitlisku izteiksmi jeb aritmētisku izteiksmi. Matemātisko izteiksmi, kurā ir arī mainīgie, sauc par izteiksmi ar mainīgajiem jeb par algebrisku izteiksmi.

Visu mainīgā vērtību kopu, ar kurām algebriskai izteiksmei ir jēga, sauc par izteiksmes definīcijas apgabalu.

Algebriskās daļas vērtība nemainās, ja daļas skaitītāju un saucēju reizina vai dala ar vienu un to pašu izteiksmi, kuras vērtība nav nulle.

Saknes (radikāļa) definīcija un īpašības

DEFINĪCIJA Par *n*-tās pakāpes sakni no skaitļa *a* sauc tādu skaitli *b*, kuram $b^n = a$, t. i., $b = \sqrt[n]{a}$ nozīmē, ka $b^n = a$.

ĪPAŠĪBA Ja *n* ir pāra skaitlis, tad $\sqrt[n]{a}$ eksistē nenegatīviem *a* un saknes vērtība arī ir nenegatīvs skaitlis.

Ja *n* ir nepāra skaitlis, tad $\sqrt[n]{a}$ eksistē visām *a* vērtībām, turklāt $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$ (sakne no reizinājuma).

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(a \geq 0, b > 0)$ (sakne no dalījuma).

$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}}$ $(a \geq 0)$ (saknes rādītāja maiņa).

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[n \cdot k]{a^k \cdot b^n}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$ (sakņu reizināšana).

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}} = \sqrt[n \cdot m]{a^k}$ $(a \geq 0)$ (sakne no saknes).

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

Daļu īpašības

Ja $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tad $ad = bc$, $(b \neq 0, d \neq 0)$ (daļu vienādība, arī proporcijas pamatīpašība).

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$, $(m \neq 0)$ (daļas pamatīpašība).

$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$ (zīmju maiņa).

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ (daļu saskaitīšanas likums).

$A\frac{k}{n} = A + \frac{k}{n} = \frac{An+k}{n}$ (jauktā skaitļa pārveidošana par neīstu daļskaitli).

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$ (daļu atņemšanas likums).

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (daļu reizināšanas likums).

$\frac{c}{d} \cdot A = \frac{c}{d} \cdot \frac{A}{1} = \frac{cA}{d}$ (daļas reizināšana ar veselu skaitli).

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$ (daļu dalīšanas likums).

$A:\frac{c}{d}=A\cdot\frac{d}{c}=\frac{Ad}{c}$ (vesela skaitļa dalīšana ar daļu).

$\frac{c}{d}:A=\frac{c}{d}\cdot\frac{1}{A}=\frac{c}{dA}$ (daļas dalīšana ar veselu skaitli).

7. uzdevums

Precizē noteikumus pats! Izpildi krustskaitļu mīklu! (Skat. 1. tabulu.)
Horizontāli

1. $81^{0,75}\cdot 32^{-0,4}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}:125^{-\frac{1}{3}}-(8\cdot 2^{0,2})^{1,25}$

2. $(0,008)^{-\frac{1}{3}}:\left(5\sqrt[3]{5}\right)^{0,75}+\left(\left(\sqrt{10\sqrt[4]{0,001}}\right)^{3}:8^{\frac{1}{8}}\right)^{8}$

3. $6^{-1,25}\cdot 4^{-\frac{3}{8}}\cdot 9^{\frac{5}{8}}$

4. $\left(\left(\sqrt[6]{100\sqrt{0,1}}\right)^{5}\cdot 0,2^{1,25}\right)^{4}+0,0081^{-0,5}:\left(9\sqrt{3}\right)^{-1,2}$

5. $2a^{2}\cdot(0,125a^{2}b^{-9})^{-\frac{1}{3}}, a=343, b=\frac{1}{7}$

6. $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)+4+\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$

Vertikāli

1. $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}:25^{-0,5}-64^{\frac{4}{3}}\cdot 32^{-0,6}+(81\cdot 3^{-0,25})^{0,8}$

2. $10^{-0,5}\cdot 25^{0,75}:16^{\frac{5}{8}}$

3. $0,027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^{0,75}-3^{-1}+(5,5)^{0}$

4. $\frac{\left(ax^{\frac{3}{8}}\right)^{0,8}}{a^{-1,2}x^{0,1}},\ a=6, x=32$

5. $\frac{x\sqrt[5]{2x\sqrt[3]{4x^{2}}}}{0,25^{\frac{1}{3}}ax^{-\frac{2}{3}}},\ a=2, x=9$

1. tabula. **Krustskaitļu mīklas laukums**

	5	11				7
		1	8	,	10	
			,			
	2					
	4	9				
3	,		6			

Ieteikumi (Skat. 2. tabulu.)

! Visus kāpinātājus pārveido par parastajām daļām.

! Daudzviet izdevīgi ir pakāpes atstāt kā pakāpes un izkāpināt tikai pašās beigās.

2. tabula. **Ieteikumi**

Izteiksme	**Ieteikumi**
$81^{0,75}\cdot 32^{-0,4}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}:$ $:125^{-\frac{1}{3}}-(8\cdot 2^{0,2})^{1,25}$	1) $(8\cdot 2^{0,2})^{1,25}$ Izsaki 8 kā pakāpi un izmanto pakāpju īpašības $(ab)^n=a^nb^n$ un $a^na^m=a^{n+m}$.
	2) Pakāpes bāzi izsaki kā pakāpi. Piemēram, $81=3^4$.
	3) Vienkāršo saskaitāmos, izmantojot īpašību $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$, piemēram, $(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^{4\cdot\frac{3}{4}}=3^3$.
	4) Izmanto īpašību $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.
$(0,008)^{-\frac{1}{3}}:\left(5\sqrt[3]{5}\right)^{0,75}+$ $+\left(\left(\sqrt{10\sqrt[4]{0,001}}\right)^3:8^{\frac{1}{8}}\right)^8$	1) $\sqrt{10\sqrt[4]{0,001}}$ Pārveido 0,001 kā parastu daļu un ienes 10 zem 4-tās pakāpes saknes. Saīsini zemsaknes izteiksmi.
	2) Izmanto īpašības $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$ un $\sqrt[n]{a}^{\,m}=\sqrt[n]{a^m}$.
	3) $\left(\left(\sqrt{10\sqrt[4]{0,001}}\right)^3:8^{\frac{1}{8}}\right)^8$ Izmanto īpašību $(a^n)^m=a^{n\cdot m}$. Ievēro, ka 8 pazūd kāpinātājs un sakne noīsinās.
	4) $\left(5\sqrt[3]{5}\right)^{0,75}$ Ienes 5 zem kuba saknes un pārej vai nu uz sakni (daļveida pakāpe → sakne), vai pakāpi.

Izteiksme	Ieteikumi
	5) $(0{,}008)^{-\frac{1}{3}}$ Pārej uz parasto daļu un pakāpes bāzi izsaki kā pakāpi. Izmanto īpašību $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$.
	6) Izmanto īpašību $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
$6^{-1{,}25} \cdot 4^{-\frac{3}{8}} \cdot 9^{\frac{5}{8}}$	1) Pakāpes bāzi izsaki kā pakāpi. Piemēram, $4 = 2^2$.
	2) Pārveido visus saskaitāmos kā sakni (daļveida pakāpe → sakne).
	3) Izmanto īpašību $\sqrt[n\cdot m]{a^{n\cdot k}} = \sqrt[m]{a^k}$.
	4) Izmanto īpašību, kā reizina saknes: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
$\left(\left(\sqrt[6]{100\sqrt{0{,}1}}\right)^5 \cdot 0{,}2^{1{,}25}\right)^4 +$ $+\, 0{,}0081^{-0{,}5} : \left(9\sqrt{3}\right)^{-1{,}2}$	1) Pārveido 0,125 kā parasto daļu un izsaki gan saucēju, gan skaitītāju kā pakāpi. Vari pāriet uz $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.
	2) Izmanto īpašību $(ab)^n = a^n b^n$.
	3) Izmanto īpašību $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.
	4) Saskaiti pakāpes ar vienādajām bāzēm!
	5) Izsaki 343 kā pakāpi. Vienkāršo izteiksmi ar $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$.
$2a^2 \cdot (0{,}125a^2b^{-9})^{-\frac{1}{3}}, a =$ $= 343, b = \frac{1}{7}$	1) Pārveido 0,125 kā parasto daļu un izsaki gan saucēju, gan skaitītāju kā pakāpi. Vari pāriet uz $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.
	2) Izmanto īpašību $(ab)^n = a^n b^n$.
	3) Izmanto īpašību $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
	4) Saskaiti pakāpes ar vienādajām bāzēm.
	5) Izsaki 343 kā pakāpi. Vienkāršo izteiksmi ar $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$.

1.2. Algebra

Nereti skolēns atsakās risināt uzdevumu, jo ir nonācis netipiskā situācijā. Pirmais, otrais un trešais uzdevums parādīs, ka viss tomēr ir ļoti vienkārši.

1. uzdevums

Atrisini vienādojumu!

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 4{,}5\left(x+\frac{1}{x}\right) + 5 = 0$$

Atgādinājums, kā atrast saknes kvadrātvienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$

1) Diskriminanta metode

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

2) Vjeta teorēma

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

3) Lietot iekavas

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

4) Minēt saknes

RISINĀJUMS

1) Redzam, ka uzdevumā ir divas iekavas:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Lai būtu vieglāk rēķināt, šo iekavu var aizvietot ar substitūciju – jaunu mainīgo *t*.

$$t^2 - 4{,}5t + 5 = 0$$

2) Tagad redzam, ka tas ir kvadrātvienādojums attiecībā pret *t*:

$$t^2 - 4{,}5t + 5 = 0 \quad |\cdot 2$$

3) Lai būtu vieglāk rēķināt, vienādojuma abas puses var reizināt ar 2:

$$2t^2 - 9t + 10 = 0$$

4) Atrodam saknes, rēķinot diskriminantu (var arī izmantot citas metodes sakņu meklēšanai):

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 = 81 - 80 = 1$$

$$t_1 = \frac{9 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$t_2 = \frac{9 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

5) Kad atrasta substitūcijas vērtība, atgriežamies pie punkta 1) un pielīdzinām iegūtos rezultātus iekavai:

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{5}{2}$

b) $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2$

6) Vienādojam saucējus kreisajā pusē:

a) $\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{x^2 + 1}{x} = 2$

7) Sareizinām "krustiski":

a) $2(x^2 + 1) = 5x$

b) $x^2 + 1 = 2x$

8) Atveram iekavas un visu vienādojuma labo pusi pārnesam uz kreiso pusi:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

9) Atrodam saknes, rēķinot diskriminantu a) gadījumā un izmantojot Vjeta teorēmu b) gadījumā:

a) $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$

b) $\begin{cases} x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 \cdot x_4 = 1 \end{cases}$

$x_3 = x_4 = 1$

10) Veicam pārbaudi, ievietojot dotajā vienādojumā visas saknes pēc kārtas:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4{,}5\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$$

11) Pārbaudām $x_1=2$

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)^2-4{,}5\left(2+\frac{1}{2}\right)+5=?=0$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{2}\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{20}{4}=\frac{25}{4}-\frac{45}{4}+\frac{20}{4}=0\ \rightarrow sakne\ x_1=2\ der$$

12) Pārbaudām

$$x_2=\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2-4{,}5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)+5=?=0$$

Iegūstam to pašu:

$$\left(\frac{1}{2}+2\right)^2-4{,}5\left(\frac{1}{2}+2\right)+5=0\ (no\ 11.punkta)\rightarrow\ x_2=\frac{1}{2}\ der$$

13) Pārbaudām $x_3=x_4=1$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2-4{,}5\left(1+\frac{1}{1}\right)+5=?=0$$

$$4-9+5=0\ \rightarrow saknes\ x_3=x_4=1\ der$$

14) Atbilde: $\frac{1}{2}$; 1; 2

Cita metode uzdevuma rēķināšanai

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4{,}5\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$$

1) Uzreiz kāpinām kvadrātā pirmo iekavu:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}-4{,}5x-4{,}5\cdot\frac{1}{x}+5=0$$

2) Vienādojam saucējus:

$$\frac{x^4+2x^2+1-4{,}5x^3-4{,}5x+5x^2}{x^2}=0|\ \cdot 2x^2, x\neq 0$$

3) Reizināsim ar $2x^2$ un savilksim līdzīgos locekļus:

$$2x^4-9x^3-9x+14x^2+2=0$$

4) Mēģināsim uzminēt vienu sakni. Par sakni var būt $x = 1$, tad jāizdala polinoms ar $(x - 1)$:

$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 \;\Big|\; \underline{(x-1)}$

$\underline{2x^4 - 2x^3}$ $\qquad\qquad\qquad 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

$-7x^3 + 14x^2 - 9x + 2$

$\underline{-7x^3 + 7x^2}$

$7x^2 - 9x + 2$

$\underline{7x^2 - 7x}$

$-2x + 2$

$\underline{-2x + 2}$

0

5) Vienādojums pārveidojas:

$(x-1)(2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) = 0$

6) Varam vēlreiz mēģināt uzminēt sakni, vēl viena sakne ir $x = 1$, tad dalām polinomu ar $(x - 1)$:

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 \;\Big|\; \underline{(x-1)}$

$\underline{2x^3 - 2x^2}$ $\qquad\qquad\qquad 2x^2 - 5x + 2$

$-5x^2 + 7x - 2$

$\underline{-5x^2 + 5x}$

$2x - 2$

$\underline{2x - 2}$

0

7) Vienādojums pārveidojas:

$(x-1)(x-1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$

8) Atrisināsim kvadrātvienādojumu, lai atrastu divas pārējās saknes:

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

$x_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2;\; x_1 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$

9) Atbilde: $\dfrac{1}{2}$; 1; 2

10) Varam secināt, ka ar šo metodi ir sarežģītāk rēķināt uzdevumu, nekā izmantojot substitūciju. Šajā uzdevumā bija viegli uzminēt saknes, bet vairākos uzdevumos tas nebūs tik vienkārši, līdz ar to uzdevuma rēķināšana būs sarežģītāka.

2. uzdevums

Atrisini vienādojumu!

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x - \frac{1}{x}\right) = 5$$

1) $x - \frac{1}{x} = t \rightarrow t^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

2) $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$

3) $t^2 + 2t - 3 = 0$

4) $t_1 = -3;\ \ t_2 = 1$

5) $x - \frac{1}{x} = -3$ $\qquad$ $x - \frac{1}{x} = -1$

6) $x^2 + 3x - 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 + x - 1 = 0$

7) $D = 3^2 - 4(-1) = 13$ $\qquad$ $D = 1^2 - 4(-1) = 5$

8) $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\qquad$ $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

3. uzdevums

Atrisini vienādojumu!

$$\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$$

1) $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=t \to t^2=\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2=\frac{x^2}{9}-\frac{2\cdot 4}{3}+\frac{16}{x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{3}-2\cdot 4+\frac{48}{x^2}\right)$

2) $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)=0|\ \cdot\frac{1}{3}$

3) $\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}-\frac{10}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)+\frac{8}{3}-\frac{8}{3}=0$

4) $\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2-\frac{10}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)+\frac{8}{3}=0$

5) $t^2-\frac{10}{3}t+\frac{8}{3}=0|\ \cdot 3$

6) $3t^2-10t+8=0$

7) $D=10^2-4\cdot 3\cdot 8=4$

8) $t_1=2;\ \ t_2=\frac{4}{3}$

9)	$\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2$	$\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}$
10)	$x^2-6x-12=0$	$x^2-4x-12=0$
11)	$D=6^2-4(-12)=84$	$D=4^2-4(-12)=64$
12)	$x_{1,2}=\frac{6\pm 2\sqrt{21}}{2}=3\pm\sqrt{21}$	$x_{3,4}=\frac{4\pm\sqrt{64}}{2}\to x_3=6; x_4=-2$

4. uzdevums

Šī uzdevuma atrisināšanas prasme nepieciešama funkciju robežu noteikšanā. Vispirms jāatbrīvojas no iracionalitātes saucējā un jāsaīsina daļa.

Šādus uzdevumus risina, reizinot daļas skaitītāju un saucēju ar saucējam saistīto izteiksmi. Tipiska kļūda – daļa nepamatoti tiek kāpināta kvadrātā, iegūstot izteiksmi, kas nav identiska dotajai.

a) $$\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$$

$$\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x+7-9}=\sqrt{x+7}+3$$

b) $$\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$$

$$\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+3}{\sqrt{x+3}+3}=\frac{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{x+3-9}=\sqrt{x+3}+3$$

c) $$\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}\cdot\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}=\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{5-x-5-x}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)$$

d) $$\frac{x^2-9}{\sqrt{2x+3}-3}$$

$$\frac{x^2-9}{\sqrt{2x+3}-3}\cdot\frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3}=\frac{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{2x+3-9}=$$

$$=\frac{1}{2}(x+3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)$$

5. uzdevums

Aprēķini robežu, doto izteiksmi vispirms pārveidojot daļas formā un saīsinot!

No teorijas

Funkcijas robežas definīcija: skaitli *b* sauc par funkcijas *f* robežu, kad $x \to a$, ja visiem *x*, kas neierobežoti tuvojas punktam *a*, atbilstošās funkcijas vērtības tiecas uz skaitli *b*. To pieraksta šādi: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

a) $$\lim_{x \to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$$

$$\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}=\frac{6-(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{-x+3}{(x-3)(x+3)}=\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)}=$$
$$=-\frac{1}{x+3}$$

$$\lim_{x \to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)=\lim_{x \to 3}\left(-\frac{1}{x+3}\right)=-\frac{1}{6}$$

b) $$\lim_{x \to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$$

$$\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}=\frac{1}{x+2}-\frac{12}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{x^2-2x+4-12}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$$
$$=\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{x-4}{x^2-2x+4}$$

$$\lim_{x \to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)=\lim_{x \to -2}\left(\frac{x-4}{x^2-2x+4}\right)=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$$

c) $$\lim_{x \to -1}\left(\frac{3}{x^3+1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{3}{x^3+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}-\frac{1}{x+1}=\frac{3-(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$
$$=-\frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}=-\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=$$
$$=-\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

$$\lim_{x \to -1}\left(\frac{3}{x^3+1}-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x \to -1}\left(-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)=-\frac{-3}{3}=1$$

2. Ģeometrija – deduktīva zinātne vai aprēķinu praktikums?

2.1. Metodiskie ieteikumi

Izveidotajos pamatuzdevumos ir nepieciešamas tikai matemātikas stundās apgūtās zināšanas, tomēr tās tiek lietotas nestandarta situācijās. Skolotājam ir jāmāca skolēns gan pierādīt un argumentēt savus atrisinājumus, gan ņemt vērā visus uzdevuma noteikumus un dotos datus, pārbaudīt un arī sniegt atbildi, kas atbilst uzdevuma jautājumam. Šīs iemaņas var apgūt tikai uzdevumu risināšanas procesā un pārliecinoties par to nepieciešamību. Tādēļ uzdevumu risinājumā ir pievienoti komentāri un argumentēti pamatojumi.

Svarīga loma ir skolēnu spējai pielietot zināšanas netriviālās situācijās, tāpēc ir izveidoti papilduzdevumi, kurus skolēns var risināt gan pirms netriviālā uzdevuma apskatīšanas, gan arī risināšanas gaitā secinot, ka viņam trūkst nepieciešamo pamatzināšanu. 4. tabulā ir apkopoti papilduzdevumi un tajos apslēptās zināšanas un prasmes, savukārt 3. tabulā ir doti uzdevumu numuri un visu to papilduzdevumu numuri, kas ietver nepieciešamās zināšanas uzdevuma sekmīgai atrisināšanai.

3. tabula. **Uzdevumi un papilduzdevumi**

Pamatuzdevums	Atbilstošie papilduzdevumi
1.	3., 14., 23., 1-1.
2.	4.
3.	2., 33.
4.	4., 44.
5.	1., 5., 6., 7., 9., 11., 12., 18., 22., 41.
6.	17., 45.
7.	14., 18.
8.	2., 15., 18., 40.
9.	16., 21.
10.	9., 19., 20., 24.
11.	32., 11-1., 11-2.
12.	15., 18., 28., 38.
13.	7., 11., 12., 42., 43., 13-1.
14.	12., 13., 25., 26., 27., 28., 29., 30., 31., 39., 41., 14-1.
15.	2., 15., 33., 34., 35., 36., 37.
16.	10., 40.

4. tabula. **Papilduzdevumi un nepieciešamās zināšanas to atrisināšanai**

Papild-uzdevuma Nr.	**Kas jāzina, jānosaka / ko jāprot aprēķināt vai pamatot / kas jāizpēta**
1.	Trīsstūru vienādības pazīmes.
2.	Trīsstūra malu nevienādība.
3.	ĪPAŠĪBA Pret lielāko leņķi atrodas garākā mala, un otrādi. Trīsstūra iekšējo leņķu summa.
4.	Trīsstūra iekšējo leņķu summa (šķērsleņķi, bisektrise).
5.	Trīsstūra laukuma aprēķināšanas formula $S = ah/2$.
6.	Divu trīsstūru augstums no kopīgas virsotnes. Trīsstūra laukuma aprēķināšanas formula $S = ah/2$.
7.	Trīsstūra laukuma aprēķināšanas formula $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$.
8.	Kvadrāta diagonāles garuma aprēķināšanas formula $d = a\sqrt{2}$.
9.	Vienādmalu trīsstūra laukuma aprēķināšanas formula. Kvadrāta diagonāles garuma aprēķināšanas formula $d = a\sqrt{2}$.
10.	Vienādmalu trīsstūra laukuma aprēķināšanas formula.
11.	Pitagora teorēma. Vienādmalu trīsstūra laukuma aprēķināšanas formula. Trīsstūra laukuma aprēķināšanas formula $S = 0{,}5ab \sin \alpha$. Trīsstūra laukuma aprēķināšanas formula $S = ah/2$. Figūras laukuma aprēķināšana kā vairāku figūru laukumu summa.
12.	Kosinusu teorēma.
13.	Mediānas garuma aprēķināšanas formula $m_a = 0{,}5\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. ĪPAŠĪBA Pret lielāko leņķi atrodas garākā mala, un otrādi.
14.	Taisnleņķa trīsstūrim apvilktās riņķa līnijas centra atrašanās vieta. Pitagora teorēma.
15.	Pitagora teorēma.
16.	Eiklīda teorēma.
17.	Trīsstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusa aprēķināšanas formula $R = abc/4S$. Trīsstūrī ievilktās riņķa līnija rādiusa aprēķināšanas formula $r = S/p$.
18.	Trīsstūru līdzības pazīmes.
19.	Sektora laukums (kā riņķa daļas laukums). Segmenta laukums.
20.	Figūras laukums kā atsevišķu figūru laukumu summa/starpība. Riņķa laukums vai sektora laukums.
21.	Riņķa līnijas pieskares no viena punkta.
22.	Trīsstūru līdzības koeficients. Līdzīgu trīsstūru laukums.
23.	Mediānas, bisektrises un augstuma savstarpējais novietojums patvaļīgā trīsstūrī.
24.	Regulāra daudzstūra virsotnes leņķa aprēķināšanas formula $\alpha = 180° (n - 2)/n$.

Papild-uzdevuma Nr.	**Kas jāzina, jānosaka / ko jāprot aprēķināt vai pamatot / kas jāizpēta**
25.	Taisnes vienādojuma noteikšana caur doto punktu un doto virziena koeficientu $y - y_1 = k(x - x_1)$.
26.	Sakarība starp savstarpēji perpendikulāru taišņu virziena koeficientiem $(k_1 \cdot k_2 = -1)$. Taisnes vienādojuma noteikšana $y - y_1 = k(x - x_1)$.
27.	Taisnes virziena koeficienta definīcija $k = \mathrm{tg}\ \alpha$. Sakarība starp perpendikulāru taišņu virziena koeficientiem / paralēlu taišņu virziena koeficientiem.
28.	Attāluma starp diviem punktiem aprēķināšana.
29.	Taisnes vienādojuma noteikšana caur diviem dotiem punktiem $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.
30.	Vienādi vektori.
31.	Divu vektoru summa vektors (trīsstūra/paralelograma likums).
32.	Teorēma par nevienādību starp divu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko $((a^2 + b^2)/2 \geq \sqrt{a^2b^2})$.
33.	Pierādījums no pretējā.
34.	Apgalvojuma patiesumvērtība. Pierādījums ar pretpiemēru.
35.	Ekvivalenti apgalvojumi.
36.	Apgrieztais apgalvojums.
37.	Tiešais un apgrieztais apgalvojums.
38.	Ģeometriskais pārveidojums – paralēlā pārnese.
39.	Ģeometriskais pārveidojums – pagrieziens.
40.	Saīsinātās reizināšanas formulas $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ un $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ (kur a, b un c no reālo skaitļu kopas).
41.	Redukcijas formulas $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ un $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.
42.	Ciklometrisko funkciju vērtības.
43.	Trigonometriskās saskaitīšanas formulas $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ un $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.
44.	Aritmētiskā progresija. Diference.
45.	Aritmētiskās progresijas vidējā locekļa īpašība $(a_n = 0{,}5(a_{n-1} + a_{n+1}))$.

Risinot uzdevumus, jācenšas atrast oriģinālākos, racionālākos atrisinājumus, pakāpeniski pārejot no vieglākā uz grūtāko, no vienkāršākā uz sarežģīto. To var veikt ar papilduzdevumu palīdzību. Lai attīstītu loģisko domāšanu, kā arī atrastu racionālāko risinājumu, ir lietderīgi risināt uzdevumus ar vairākiem loģiski atšķirīgiem paņēmieniem. Tādēļ vairākiem pamatuzdevumiem ir atšķirīgi risinājuma varianti, kam nepieciešama dažāda pamatzināšanu bāze, ir arī samērā laikietilpīgi risinājumi. Tas mudinās skolēnus katru pētāmo problēmu apskatīt radoši un mēģināt racionalizēt risinājumu.

Skolēniem ir jāpievērš uzmanība uzdevumu pieraksta, zīmējuma noformēšanai, pareizai matemātikas simbolikas lietošanai. Tādēļ skolotājam ir iespēja katru uzdevumu dot skolēniem, aizklājot daļu no risinājuma, dotajiem lielumiem vai zīmējumu, un aicināt skolēnus tos aizpildīt. Tā kā sarežģītiem uzdevumiem vispirms ir nepieciešama analīze, tad risināšanas plāns, kas bieži vien ir pietiekams, lai skolēni pēc tam uzdevumu pilnībā atrisinātu paši, pirms uzdevuma risinājuma ir dots. Dotas ir arī galvenās norādes par risinājumu skaitu (arī pamatojums tam) vai minēta nepieciešamo pamatzināšanu bāze.

Ja uzdevuma nosacījumi ir tādi, ka uzdevumam būs vairāki atrisinājumi, tad vispirms jāmāca skolēnus ieraudzīt šo atrisinājumu atšķirību, analizēt dotos lielumus un nonākt pie secinājuma, ka atrisinājumi būs vairāki. Jāmāca pamatot, cik un kādi atrisinājumi iegūti.

Ir apskatīti visi risinājumā iespējamie gadījumi, ja tādi uzdevumā ir vairāki, un norādīti iemesli, kādēļ ir vairāk nekā viena atbilde.

Skolotājs uzdevumu komplektu var izmantot, gan iekļaujot uzdevumus mācību stundās, gan arī veidojot skolēnu mājasdarbus. Ieteicams, apskatot uzdevumu, neuztvert to kā galīgu un ar vienu iespējamo atrisinājumu. Arī skolotājam jābūt radošam un jāvariē mācību metodes, darba formas, izvēloties dažādus skolēnu zināšanām atbilstošus uzdevuma risināšanas variantus. Daži iespējamie skolēnu un skolotāja darba varianti ar pamatuzdevumiem apkopoti 5. tabulā.

5. tabula. **Skolotāja un skolēna iespējamā darbība, izmantojot pamatuzdevumus**

Skolotājs	**Skolēns**
Sagatavo **uzdevuma** formulējumu un **atrisinājumu**. Aicina skolēnus izpētīt risinājumu un analizēt to (patstāvīgi, pa pāriem, grupās, kopīgi). Ja nepieciešams, uzdod uzvedinošus jautājumus (tos var jau iepriekš sagatavot un iedot skolēniem, lai analīze ir vienkāršāka). **Jautājumu piemēri** 1. Kāda ir risinājuma struktūra? (Kas dots, jāaprēķina, zīmējums, atrisinājums (sastāv no spriedumiem un aprēķiniem), secinājumi, pamatojumi u. c.) 2. Kas ir dots? Kas jāaprēķina, jāpierāda?	Apskata uzdevumu un tā atrisinājumu un analizē risinājuma gaitu (secību, izkārtojumu, sakarības, pamatojumus u. c.).

Skolotājs	**Skolēns**
3. Vai pietiek informācijas, lai varētu aprēķināt, pierādīt? (Ja nepietiek, kur to var atrast?) 4. Kādas zināšanas, prasmes, formulas nepieciešams izmantot risinājuma gaitā? 5. Vai tev bija visas zināšanas, prasmes, vai formulas bija zināmas? 6. Vai veiktie aprēķini un secinājumi ir pamatoti un "likumīgi"? 7. Ko tu risinājumā nesaprati? Kas radīja grūtības?	
Sagatavo **uzdevuma** formulējumu un **atrisinājumu** (sagrieztu pa soļiem, nenorādot patieso secību). Aicina skolēnus salikt risinājumu kā puzli (loģiskā secībā). Skolotājam izdevīgs gadījums varētu būt tad, ja klasē veidojas vismaz divi vai trīs atšķirīgi risinājuma (secības) varianti, kas ļautu uzsākt diskusiju par to, kā būtu pareizi, kurš spriedums pamato kādu citu, kādas norādes meklēt, lai atrastu īsto secību, u. c.	Saliek risinājumu kā puzli. Pamato izvēlēto secību. Novērtē citu skolēnu risinājuma secību. Pamato, kāpēc tā ir vai nav pareiza. Kopīgi meklē norādes, kas palīdz noteikt risinājuma loģisko secību.
Sagatavo **uzdevuma** formulējumu, **zīmējumu** un aizpildītus laukus "**dots**", "**jāaprēķina/jāpierāda**". Ievērojot katra skolēna individuālās prasmes matemātikā (vai klases prasmes kopumā), aicina izveidot risinājuma plānu un/vai atrisināt to.	Veido tikai risinājuma plānu un/vai atrisina uzdevumu.
Sagatavo **uzdevuma** formulējumu, **zīmējumu**. Aicina skolēnus aizpildīt laukus "dots", "jāaprēķina" un atrisināt uzdevumu. Ja skolotājs sagatavotu vairāku uzdevumu tekstus un zīmējumus un aicinātu skolēnus tikai aizpildīt laukus "dots" un "jāaprēķina", tas skolēnus, kuriem ir grūtības risināt uzdevumus, mudinātu aizpildīt vismaz šos laukus, un tas motivētu mēģināt arī atrisināt uzdevumu. Tiem skolēniem, kuriem šo lauku aizpildīšana sagādā grūtības, uzdevuma risinājums bieži vien ir trūcīgs un nepamatots.	Aizpilda laukus "dots", "jāaprēķina".
Sagatavo **uzdevuma** formulējumu un aizpildītus laukus "**dots**" un "**jāaprēķina/jāpierāda**". Aicina skolēnus izveidot zīmējumu, izmantojot dotos apzīmējumus un, piemēram, iekrāsojot elementu, kas ir jāaprēķina. Tas attīstītu skolēnu prasmi izveidot uzdevumam atbilstošu zīmējumu un akcentēt, kas ir jāaprēķina.	Izveido uzdevumam atbilstošu zīmējumu, iekrāsojot prasīto zīmējuma elementu.
Sagatavo **uzdevuma** formulējumu un dažādus **zīmējumus**, no kuriem viens atbilst konkrētajam uzdevumam.	Izvēlas uzdevumam atbilstošo zīmējumu, pamato izvēli.

Skolotājs	**Skolēns**
Aicina skolēnus atrast atbilstošo zīmējumu un pamatot savu izvēli. Lūdz pamatot, kas pārējos zīmējumos ir aplams.	Akcentē pārējo zīmējumu kļūdas.
Skolēniem ar labām zināšanām matemātikā skolotājs sagatavo tikai **uzdevuma** formulējumu. Aicina skolēnus izstrādāt rīcības plānu, kā viņi nonāks pie atrisinājuma (sastādīs risinājuma plānu, pārvērtīs doto informāciju simbolu valodā un sakārtos to, veidos zīmējumu, veiks aprēķinus un spriedumus, pamatos tos, utt.). Pēc tam var aicināt plānu realizēt (tas var būt arī mājas darbs).	Izveido rīcības plānu. Ja nepieciešams, arī veic plānā aprakstītās darbības un atrisina uzdevumu.
Sagatavo uzdevuma formulējumu un risinājumu (ar kļūdām). Aicina skolēnus izpētīt risinājumu. Ja nepieciešams, norāda, ka ir iespējamas kļūdas risinājumā. Aicina noskaidrot, kādēļ tās radušās (neņemot vērā kādu nosacījumu, aritmētiskas kļūdas, pamatojot ar nepamatotu spriedumu u. c.).	Izpēta risinājumu. Meklē un atrod kļūdas. Pamato to rašanās cēloņus. Labo tās.

JA UZDEVUMA RISINĀJUMĀ IESPĒJAMI VAIRĀKI GADĪJUMI (ATBILDES)

Sagatavo **uzdevuma** formulējumu un tā **risinājumu** (tikai ar **vienu gadījumu**). Aicina apskatīt risinājumu un veido klasē diskusiju, lai noskaidrotu: vai atrisinājums ir viennozīmīgs, vai ir iespējami arī citi gadījumi, kas uzdevuma nosacījumos uz to norāda, kāds ir risinājums citos gadījumos, ar ko tas atšķiras? Tas ļauj skolēniem pašiem saskatīt nepieciešamību risinājumu papildināt, pamatot, kāpēc dotais risinājums nav pilnīgs, atrast pārējos iespējamos gadījumus un pamatot, ka citu nav. Līdz ar to arī citos uzdevumos skolēns pirms uzdevuma risināšanas varēs mēģināt vai arī spēs noteikt, cik gadījumu ir iespējams. PIEZĪME Uzdevuma aktualizācijai un rosināšanai par iespējamiem vairākiem gadījumiem, kas jāapskata risinājumā, var arī sagatavot **uzdevuma** formulējumu un **iespējamos** uzdevumam atbilstošos **zīmējuma variantus**, starp kuriem ir gan pareizi, gan aplami. Aicina skolēnus apskatīt variantus un izvēlēties to, kas, viņuprāt, atbilst uzdevuma nosacījumiem, uzreiz nenorādot, ka iespējami ir vairāki. Tas dod iespēju skolēniem pašiem to pamanīt un secināt, ka risinājumā jāietver visi tie gadījumi, kas ietekmē atbildi.	Apskata risinājumu. Piedalās diskusijā. Saskata, ka risinājums nav pilnīgs, to nepieciešams papildināt. Pamato savus spriedumus un to, ka citu gadījumu nav. Apskata piedāvātos variantus un izvēlas to, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem. Salīdzina ar pārējo skolēnu izvēli. Kopīgi secina, ka risinājumā ir jāapskata vairāk nekā viens gadījums, jo katrā no tiem risinājums un atbilde var atšķirties.

Skolotājs	Skolēns
Sagatavo **uzdevuma** formulējumu. Aicina skolēnus atrisināt, vispirms kopīgi noskaidrojot iespējamo gadījumu skaitu.	Atrisina, apskatot visus iespējamos gadījumus.
Sagatavo **uzdevuma** formulējumu. Aicina skolēnus atrisināt, nenorādot, ka ir iespējami vairāki gadījumi.	Atrisina, apskatot visus iespējamos gadījumus.
Ja ir piedāvāti dažādi viena uzdevuma risinājuma varianti	
Sagatavo uzdevuma formulējumu un vienu tā risinājumu. Aicina skolēnus apskatīt risinājumu un piedāvāt savus iespējamos risinājumus, kas atšķiras no dotā (tikai ideju līmenī, pilnībā tos nerisinot), parādot, kāda pamatzināšanu bāze ir nepieciešama katram risinājuma variantam.	Apskata doto risinājumu un piedāvā savu risinājuma variantu. Nosaka nepieciešamās pamatzināšanas.
Sagatavo **uzdevuma** formulējumu un **visus risinājumus** (katru uz savas lapiņas). Sadala skolēnus grupās un iedod katrai grupai vienu lapiņu ar risinājumu. Aicina skolēnus 1) izpētīt risinājumu; 2) noteikt nepieciešamo pamatzināšanu bāzi; 3) uzrakstīt risinājuma "+" un "–". Aizrautīgākam darbam un sacensību garam var aicināt skolēnus mēģināt pamatot, ka viņu atrisinājums ir vislabākais (līdzīgi debatēm).	Izpēta risinājumus, nosaka nepieciešamo pamatzināšanu bāzi, nosaka un uzraksta risinājuma "+" un "–".
Sagatavo **uzdevuma** formulējumu un **visu risinājumu norādes** (katru uz savas lapiņas). Sadala skolēnus grupās un katrai grupai iedod vienu lapiņu ar risinājuma norādēm (zināšanām, ko drīkst izmantot, piemēram, tematu "vektori"). Aicina skolēnus atrisināt uzdevumu, izmantojot tikai dotās norādes un pamatzināšanas. Ja nepieciešams, ļauj izmantot visus pieejamos informācijas avotus. Pēc tam salīdzina katras grupas iegūtos rezultātus, risinājuma laikietilpīgumu u. c.	Atrisina uzdevumu, izmantojot tikai dotās norādes un pieejamos informācijas avotus. Salīdzina iegūtos rezultātus un izmantotās zināšanas, laikietilpīgumu, metodes u. c.

Skolotājs var variēt uzdevumu atbilstoši stundā apgūstamajai tēmai. Izveidotajā uzdevumu komplektā ir pamatuzdevumi, kuriem ir piedāvāti vairāki risinājuma varianti, kas atšķiras cits no cita ar nepieciešamajām pamatzināšanām un prasmēm. Vienu un to pašu uzdevumu ir iespējams rēķināt, apgūstot dažādas matemātikas tēmas. Ieteicams skolotājam iedot skolēniem atrisināt vienu un to pašu uzdevumu, izmantojot dažādas zināšanas. Piemēram, skolēnus var sadalīt grupās un katrai grupai norādīt atrisinājuma virzienu, pēc tam aicināt prezentēt risinājumu un iegūtos rezultātus. Kopīgi var izdarīt secinājumus gan par risinājuma varianta laikietilpīgumu un racionalitāti, gan nepieciešamo zināšanu daudzumu, gan varbūt trūkstošo informāciju un tās ieguves avotiem.

Ja skolotājam ir iespējams jau iepriekš novērtēt, kas skolēniem konkrēta uzdevuma atrisināšanā sagādās grūtības, var aicināt skolēnus vispirms atrisināt papilduzdevumus. Tas ļaus kā skolēniem, tā arī skolotājam pārbaudīt, vai skolēni ir apguvuši uzdevumam nepieciešamās pamatzināšanas. Tikai pēc tam skolotājs var piedāvāt atbilstošo uzdevumu. Arī tad, ja skolotājs darba procesā mana, ka skolēniem trūkst nepieciešamo pamatzināšanu, viņš var piedāvāt skolēniem atbilstošos papilduzdevumus.

Šādi ir iespējams arī diferencēt darbu klasē, ievērojot katra skolēna zināšanu līmeni. Iespējams, ka daļai klases jau papilduzdevumu atrisināšana sagādās grūtības. Savukārt citi tajā pašā laikā varēs mēģināt risināt atbilstošo pamatuzdevumu vai vienkāršotu pamatuzdevumu. Līdz ar to visi skolēni būs motivēti un aktīvi iesaistīsies mācību procesā, jo tiks doti uzdevumi atbilstoši viņu zināšanu līmenim un spējām. Tāpat skolotājs papilduzdevumus var uzdot kā mājasdarbu, gatavojoties nākamajai matemātikas stundai un tādējādi sagatavojot skolēnus pamatuzdevumu risināšanai, kuri apskatīti nākamajā matemātikas stundā.

2.2. Pamatuzdevumi

1. uzdevums

No trīsstūra virsotnes novilkta bisektrise, mediāna un augstums. Leņķis starp bisektrisi un mediānu ir $\boldsymbol{\alpha}$, bet leņķis starp bisektrisi un augstumu ir β. Nosaki, kurš leņķis ir lielāks: α vai β!

PIEZĪME Trīsstūra ABC veids nosaka uzdevuma atrisinājumu. Šoreiz pievērsīsim uzmanību bisektrises un mediānas garumu savstarpējam novērtējumam, jo tas palīdzēs noteikt, kurš leņķis ir lielāks: α vai β. Katrā gadījumā zīmējuma veidošanas shēma būs līdzīga, tādēļ turpinājumā aprakstīta shēma un pievienoti rezultāti, kas attiecas uz trīsstūri ABC neatkarīgi no tā veida, un uzdevuma risinājumā tie minēti jau kā dotie lielumi.

Zīmējuma veidošana

1) No trīsstūra ABC virsotnes A novelkam mediānu AM, bisektrisi AL un augstumu AH.

   $\sphericalangle MAL$ – leņķis starp bisektrisi un mediānu,

   $\sphericalangle LAH$ – leņķis starp bisektrisi un augstumu.

2) Trīsstūrim apvelkam riņķa līniju ar centru punktā O.

3) Novelkam diametru DE perpendikulāri malai BC, līdz ar to $AH \parallel OD$.

4) $\sphericalangle MDA = \sphericalangle LAH = \beta$ kā šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm AH un OD.

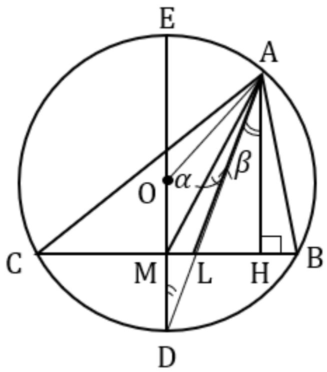
5) Pagarinām bisektrisi AL līdz diametra galapunktam D.

1. gadījums

$\Delta ABC -$ šaurleņķa trīsstūris (skat. 1. att.).

Dots: ΔABC, $\sphericalangle BAC < 90°$,
$AM -$ mediāna,
$AL -$ bisektrise,
$AH -$ augstums,
$AH \parallel OD$,
$\sphericalangle MDA = \sphericalangle LAH = \beta$, $\sphericalangle MAL = \alpha$.

Jānosaka: lielāks ir leņķis α vai β?



1. attēls. **1. uzdevuma 1. gadījums**

ATRISINĀJUMS

$AM > OA > MD$, jo riņķa līnijas centrs atrodas šaurleņķa trīsstūra iekšienē.
Tas nozīmē, ka $AM > MD$.
Apskatām trīsstūri AMD. Tā kā pret garāko malu atrodas lielākais leņķis, $AM > MD$ un pret malu AM atrodas $\sphericalangle MDA = \beta$, tad $\alpha < \beta$.

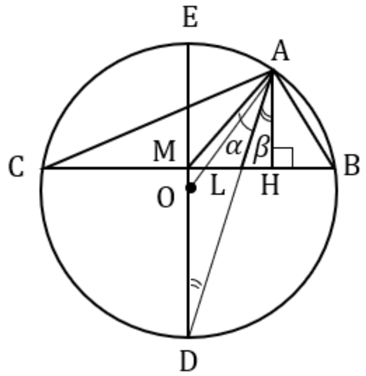
Atbilde: $\alpha < \beta$.

2. gadījums

$\Delta ABC -$ platleņķa trīsstūris (skat. 2. att.).

Dots: ΔABC, $\sphericalangle BAC > 90°$,
$AM -$ mediāna,
$AL -$ bisektrise,
$AH -$ augstums,
$AH \parallel OD$,
$\sphericalangle MDA = \sphericalangle LAH = \beta$, $\sphericalangle MAL = \alpha$.

Jānosaka: lielāks ir leņķis α vai β?



2. attēls. **1. uzdevuma 2. gadījums**

ATRISINĀJUMS

$AM < OA < MD$, jo riņķa līnijas centrs atrodas ārpus platleņķa trīsstūra.
Tas nozīmē, ka $AM < MD$.
Apskatām trīsstūri AMD. Analoģiski secinām, ka $\alpha > \beta$, jo pret malu MD, kas ir garāka nekā AM, atrodas $\measuredangle MAD = \alpha$.

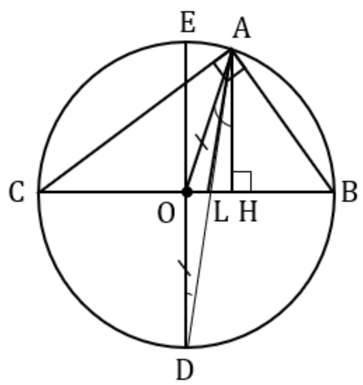
Atbilde: $\alpha > \beta$.

3. gadījums

$\Delta ABC -$ taisnleņķa trīsstūris (skat. 3. att.).

Dots: ΔABC, $\measuredangle BAC = 90°$,
$AO -$ mediāna ($M = O$),
$AL -$ bisektrise,
$AH -$ augstums,
$AH \parallel OD$,
$\measuredangle MDA = \measuredangle LAH = \beta$, $\measuredangle MAL = \alpha$.

Jānosaka: lielāks ir leņķis α vai β?



3. attēls. **1. uzdevuma 3. gadījums**

ATRISINĀJUMS

$OA = OD$, jo taisnleņķa trīsstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz hipotenūzas viduspunkta.
$\sphericalangle DAO = \sphericalangle ODA$, jo ΔDOA ir vienādsānu.
Tā kā $\sphericalangle ODA = \beta$ un $\sphericalangle DAO = \alpha$, tad $\alpha = \beta$.

Atbilde: $\alpha = \beta$.

PAPILDUZDEVUMI 3., 14., 23., 1-1.

2. uzdevums

Trīsstūrī ABC no virsotnēm A un B novilktas bisektrises, kas veido ar pretējām trīsstūra malām vienādus leņķus. Atrodi sakarību starp $\sphericalangle A$ un $\sphericalangle B$!

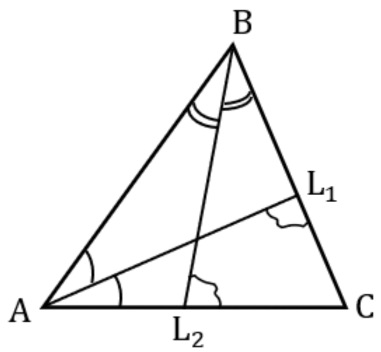
PIEZĪME Veidojot uzdevuma nosacījumiem atbilstošu zīmējumu, kur AL_1 – leņķa A bisektrise un BL_2 – leņķa B bisektrise, iegūsim divus dažādus gadījumus: $\sphericalangle AL_1C = \sphericalangle BL_2C$ vai $\sphericalangle AL_1B = \sphericalangle BL_2C$.

1. gadījums

$\sphericalangle AL_1C = \sphericalangle BL_2C$ (skat. 4. att.).

Dots: ΔABC,
$\sphericalangle AL_1C = \sphericalangle BL_2C$.

Jānosaka: sakarība starp $\sphericalangle A$ un $\sphericalangle B$.



4. attēls. **2. uzdevuma 1. gadījums**

ATRISINĀJUMS

1) Apskatām ΔCAL_1 un ΔCBL_2:
   a) $\sphericalangle AL_1C = \sphericalangle BL_2C$ pēc dotā,
   b) $\sphericalangle C$ – kopīgs.

   Līdz ar to arī $\sphericalangle L_1AC = \sphericalangle L_2BC$.

2) Tā kā

a) $\sphericalangle B = 2 \cdot \sphericalangle L_2BC$, jo BL_2 ir leņķa B bisektrise,

b) $\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle L_1AC$, jo AL_1 ir leņķa A bisektrise,

iegūstam, ka $\sphericalangle A = 2 \cdot \sphericalangle L_1AC = 2 \cdot \sphericalangle L_2BC$ un $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

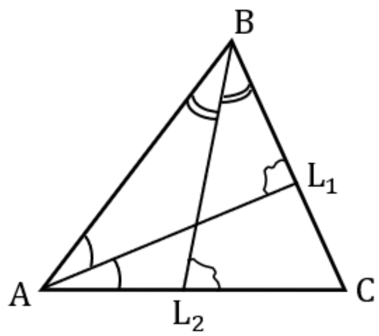
Atbilde: $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

2. gadījums

$\sphericalangle AL_1B = \sphericalangle BL_2C$ (skat. 5. att.).

Dots: ΔABC,
$\sphericalangle AL_1B = \sphericalangle BL_2C$.

Jānosaka: sakarība starp $\sphericalangle A$ un $\sphericalangle B$.



5. attēls. **2. uzdevuma 2. gadījums**

ATRISINĀJUMS

Izteiksim $\sphericalangle AL_1B$ no ΔAL_1B un ΔBL_2C un salīdzināsim iegūtās izteiksmes.

1) Apskatām ΔAL_1B.
$\sphericalangle AL_1B = 180° - \sphericalangle B - 0{,}5 \cdot \sphericalangle A$, jo trīsstūra iekšējo leņķu summa ir 180° un AL_1 ir leņķa A bisektrise.

2) Apskatām ΔBL_2C:

a) $\sphericalangle AL_1B = \sphericalangle BL_2C = 180° - 0{,}5 \cdot \sphericalangle B - \sphericalangle C$, jo trīsstūra iekšējo leņķu summa ir 180°, BL_2 – leņķa B bisektrise.

b) $\sphericalangle C = 180° - \sphericalangle A - \sphericalangle B$, jo trīsstūra iekšējo leņķu summa ir 180°.

c) Ievietojot $\sphericalangle C$ vietā atbilstošo izteiksmi, iegūstam, ka $\sphericalangle AL_1B = \sphericalangle BL_2C = 180° - 0{,}5 \cdot \sphericalangle B - (180° - \sphericalangle A - \sphericalangle B) = \sphericalangle A + 0{,}5 \cdot \sphericalangle B$.

3) Pirmajā un otrajā punktā iegūto izteiksmju vērtības ir vienādas.
$180° - \sphericalangle B - 0{,}5 \cdot \sphericalangle A = \sphericalangle A + 0{,}5 \cdot \sphericalangle B$

$-1{,}5 \cdot \sphericalangle B - 1{,}5 \cdot \sphericalangle A = -180°$

$-1{,}5 \cdot (\sphericalangle B + \sphericalangle A) = -180°$

$\sphericalangle B + \sphericalangle A = 120°$

Atbilde: $\sphericalangle B + \sphericalangle A = 120°$.

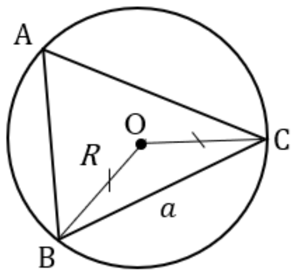
PAPILDUZDEVUMS 4.

3. uzdevums

Pierādi, ka trīsstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss nevar būt mazāks kā viena sestā daļa no trīsstūra perimetra (skat. 6. att.)!

Dots: ΔABC,
$R.l.(O; R = OB)$.

Jāpierāda: $R \geq P/6$.



6. attēls. **3. uzdevuma zīmējums**

PIERĀDĪJUMS

Pieņemsim, ka eksistē trīsstūris, kuram izpildās pretējais apgalvojums, t. i., ka ir spēkā nevienādība

$$R < \frac{1}{6} \cdot P, \quad (1)$$

kur P – trīsstūra perimetrs. Ja pierādīsim, ka šis pieņēmums ir aplams, tad dotais apgalvojums būs patiess.

1) Apzīmējam trīsstūra garāko malu $BC = a$.
2) Tādā gadījumā ir spēkā nevienādība $P \leq 3a$ (trīsstūra perimetrs ir mazāks vai vienāds ar trim trīsstūra garākajām malām).
3) Ievietojam (1) nevienādībā P vietā $3a$.

   $R < \frac{1}{6} \cdot 3a \Rightarrow R < \frac{a}{2}$

4) Tas nozīmē, ka $2R < a$, un no trīsstūra nevienādības izriet, ka $|CO| + |OB| < |CB|$. Iegūtā nevienādība ir aplama, jo trīsstūra divu malu garumu summa nevar būt mazāka kā tā trešās malas garums.

5) Līdz ar to pieņēmums ir aplams un trīsstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss nevar būt mazāks kā viena sestā daļa no trīsstūra perimetra, kas arī bija jāpierāda.

PAPILDUZDEVUMI 2., 33.

4. uzdevums

Trīsstūra ABC leņķu A, B, C lielumi veido aritmētisko progresiju ar diferenci $\pi/7$. Trīsstūra bisektrises krustojas punktā D. Punkti A', B', C' atrodas attiecīgi uz stariem DA, DB, DC vienādā attālumā no punkta D (skat. 7. att.). Pierādi, ka arī leņķu A', B', C' lielumi veido aritmētisko progresiju! Aprēķini diferenci!

Dots: $\Delta ABC,\ \Delta A'B'C'$,

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$,

$\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD$,

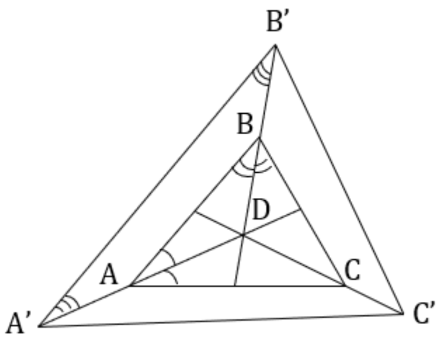
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$,

$A'D = B'D = C'D$,

$\sphericalangle B - \sphericalangle A = \sphericalangle C - \sphericalangle B = \frac{\pi}{7}$.

Jāpierāda: $\sphericalangle B' - \sphericalangle A' = \sphericalangle C' - \sphericalangle B' = d$.

Jāaprēķina: d.



7. attēls. **4. uzdevuma zīmējums**

ATRISINĀJUMS

Izteiksim trīsstūra $A'B'C'$ katru leņķi A', B', C' kā divu leņķu summu, kādos tos sadala nogriežņu DA, DB, DC pagarinājumi. Noskaidrosim, ar ko šī summa ir vienāda, un tad pārbaudīsim, vai šie lielumi veido aritmētisko progresiju. Ērtības labad apzīmējam leņķu lielumus $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ un attiecīgi $\sphericalangle A' = \alpha'$, $\sphericalangle B' = \beta'$, $\sphericalangle C' = \gamma'$. Pārrakstām doto sakarību ar jaunajiem apzīmējumiem.

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta = \frac{\pi}{7}$$

1) Apskatām $\Delta A'DB'$, lai noteiktu $\sphericalangle B'A'D$ lielumu.

   a) Tā kā $A'D = B'D$, tad $\Delta A'DB'$ ir vienādsānu.

b) Izsakot leņķa $B'A'D$ lielumu, ņemam vērā, ka $180° = \pi$.

$$\sphericalangle B'A'D = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle BDA)$$

c) Lai noteiktu leņķa BDA lielumu, apskatām ΔABD.

$$\sphericalangle BDA = \pi - (\sphericalangle DBA + \sphericalangle BAD)$$

d) Ievietojam $\sphericalangle BDA$ vietā atbilstošo izteiksmi un aizstājam $\sphericalangle DBA$ un $\sphericalangle BAD$, izmantojot ieviestos apzīmējumus.

$$\sphericalangle B'A'D = \tfrac{1}{2}\Big(\pi - \big(\pi - (\sphericalangle DBA + \sphericalangle BAD)\big)\Big) = \tfrac{1}{2}(\sphericalangle DBA + \sphericalangle BAD) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\beta + \alpha}{4}$$

2) Apskatot $\Delta A'C'D$, lai noteiktu leņķa $C'A'D$ lielumu, rīkojas analoģiski, un secinājumi ir līdzīgi.

$$\sphericalangle C'A'D = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle ADC) = \frac{1}{2}(\sphericalangle DAC + \sphericalangle DCA) = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha + \gamma}{4}$$

3) $\sphericalangle A' = \alpha' = \sphericalangle B'A'D + \sphericalangle C'A'D$

$$\sphericalangle A' = \alpha' = \frac{\beta + \alpha}{4} + \frac{\alpha + \gamma}{4} = \frac{2\alpha + \beta + \gamma}{4}$$

4) Izmantojam to, ka $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, jo trīsstūra iekšējo leņķu summa ir 180°.

$$\alpha' = \frac{\pi + \alpha}{4}$$

5) Analoģiski, apskatot trīsstūra $A'B'C'$ pārējos leņķus kā divu leņķu lielumu summu, nosakām to atbilstošās izteiksmes.

$$\sphericalangle B' = \beta' = \frac{\pi + \beta}{4}, \quad \sphericalangle C' = \gamma' = \frac{\pi + \gamma}{4}$$

6) Pārbaudām, vai leņķu A', B', C' lielumi α', β', γ' veido aritmētisko progresiju, t. i., vai diference ir viena un tā pati.

$$\beta' - \alpha' = \frac{\pi + \beta}{4} - \frac{\pi + \alpha}{4} = \frac{\beta - \alpha}{4} = \frac{\pi}{7 \cdot 4} = \frac{\pi}{28}$$

$$\gamma' - \beta' = \frac{\pi + \gamma}{4} - \frac{\pi + \beta}{4} = \frac{\gamma - \beta}{4} = \frac{\pi}{7 \cdot 4} = \frac{\pi}{28}$$

7) Rezultātā esam ieguvuši, ka arī $\Delta A'B'C'$ leņķu A', B', C' lielumi veido aritmētisko progresiju ar diferenci $\pi/28$.

PAPILDUZDEVUMI 4., 44.

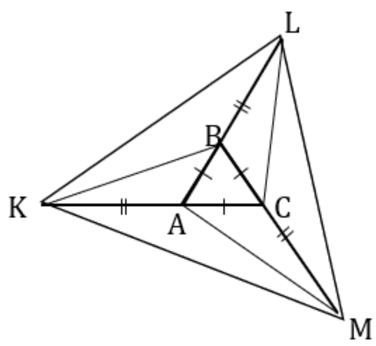
5. uzdevums

Vienādmalu trīsstūra ABC malas pagarinātas tā, ka attālums no trīsstūra virsotnēm A, B, C attiecīgi līdz punktiem L, M un K ir divreiz lielāks nekā trīsstūra malas garums, t. i., $BL = 2 \cdot AB$, $CM = 2 \cdot BC$ un $AK = 2 \cdot CA$. Punkti K, L un M ir savienoti un veido trīsstūri KLM. Nosaki trīsstūra KLM laukumu, ja $S_{ABC} = 1$ dm^2 (skat. 8.–12. att.)!

PIEZĪME Šim uzdevumam piedāvāti trīs risinājuma varianti. Kopumā nepieciešamās pamatzināšanas ir: dažāda veida trīsstūru laukumu aprēķināšana, trīsstūru līdzība, līdzības koeficients, trīsstūru vienādība, kosinusu teorēma. Šīs zināšanas nav jāizmanto visos uzdevuma risinājuma variantos vienlaicīgi.

A variants (skat. 8. att.)

Dots: ΔABC,
$AB = BC = AC$,
$BL = 2 \cdot AB$,
$CM = 2 \cdot BC$,
$AK = 2 \cdot CA$,
$S_{\Delta ABC} = 1$ dm^2.
Jāaprēķina: $S_{\Delta KLM}$.

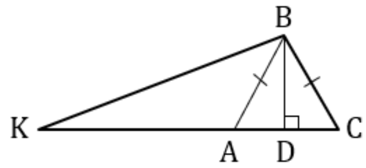


8. attēls. **5. uzdevuma A variants**

ATRISINĀJUMS

Trīsstūra KLM laukumu aprēķināsim kā atsevišķo trīsstūru laukumu summu. Novelkam nogriežņus AM, BK un CL. Līdz ar to ΔKLM laukumu veido septiņi trīsstūri. Noteiksim katra trīsstūra laukumu.

1) Tā kā $AB = BC = AC$ (pēc dotā), tad patiesa ir arī vienādība $2 \cdot AB = 2 \cdot BC = 2 \cdot AC$. Saskaņā ar doto iegūstam, ka $AK = BL = CM$.
2) Tā kā ΔABC ir vienādmalu, tad visi tā augstumi ir vienādi. Ja novelkam trīsstūra ABC augstumu BD, viegli pamanīt, ka ΔKBA augstums BD ir arī trīsstūra ABC augstums (skat. 9. att.).



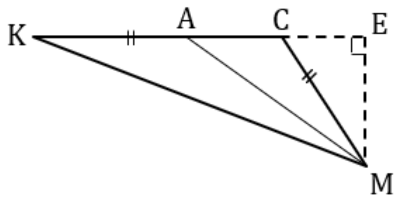
9. attēls. ΔKBC **attēlojums**

3) Tā kā $S_{\Delta ABC} = (BD \cdot AC) : 2 = 1$ dm^2 un $AK = 2 \cdot AC$, tad

$S_{\Delta KBA} = (BD \cdot AK) : 2 = (BD \cdot 2 \cdot AC) : 2 = 2 \cdot S_{\Delta ABC} = 2 \cdot 1 = 2$ dm^2.

4) $S_{\Delta KBA} = S_{\Delta LCB} = S_{\Delta MAC} = 2 \cdot S_{\Delta ABC} = 2$ dm^2, jo $AK = BL = CM$ (malas, pret kurām novilkts augstums) un augstumi arī ir vienādi.

5) Apskatām ΔKAM un ΔACM. Novelkam trīsstūra ACM augstumu ME. Secinām, ka ME ir arī ΔKAM augstums (skat. 10. att.).



10. attēls. ΔKCM **attēlojums**

6) $S_{\Delta KAM} = (AK \cdot EM) : 2 = (2 \cdot AC \cdot EM) : 2 = 2 \cdot S_{\Delta ACM} =$

$= 2 \cdot 2 = 4$ dm^2, jo $AK = 2 \cdot AC$ un $S_{\Delta ACM} = (AC \cdot EM) : 2 = 2$ dm^2.

7) Trīsstūriem BLC un CLM, kā arī trīsstūriem AKB un BKL ir viens un tas pats augstums.

8) Tā kā $S_{\Delta KAM} = 2 \cdot S_{\Delta ACM} = 4$ dm^2, $AB = BC = AC$, $BL = 2 \cdot AB$, $CM = 2 \cdot BC$, $AK = 2 \cdot CA$, tad $S_{\Delta KAM} = S_{\Delta CLM} = S_{\Delta BKL} = 2 \cdot S_{\Delta ACM} = 4$ dm^2.

9) Visu atsevišķo trīsstūru laukumi ir aprēķināti, varam aprēķināt $S_{\Delta KLM}$.

$S_{\Delta KLM} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta KBA} + S_{\Delta LCB} + S_{\Delta MAC} + S_{\Delta KAM} + S_{\Delta CLM} + S_{\Delta BKL} =$

$= 1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 = 19$ (dm^2).

Atbilde: $S_{\Delta KLM} = 19$ dm^2.

B variants (skat. 11. att.)

Dots: ΔABC,

$AB = BC = AC$,

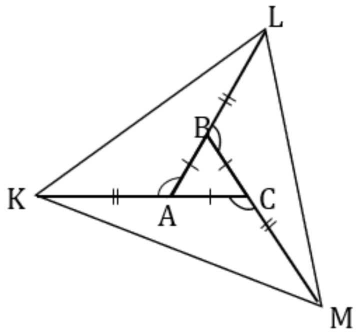
$BL = 2 \cdot AB$,

$CM = 2 \cdot BC$,

$AK = 2 \cdot CA$,

$S_{\Delta ABC} = 1$ dm^2.

Jāaprēķina: $S_{\Delta KLM}$.



11. attēls. **5. uzdevuma B variants**

ATRISINĀJUMS

Trīsstūra KLM laukumu aprēķināsim kā atsevišķu trīsstūru KAL, LBM, MCK un ABC laukumu summu. Vispirms pierādīsim, ka trīsstūri KAL, LBK un MCK ir vienādi, jo tad arī to laukumi ir vienādi. Līdz ar to pietiks aprēķināt laukumu vienam no minētajiem trīsstūriem.

1) Tā kā

a) $AK = BL = CM$, jo $BL = 2 \cdot AB$, $CM = 2 \cdot BC$, $AK = 2 \cdot AC$ un $AB = BC = AC$.

b) $AL = AB + BL$, $BM = BC + CM$, $CK = AC + AK$. Tā kā vienādību labajās pusēs atbilstošie lielumi ir vienādi, tad vienādas ir arī to kreisās puses: $AL = BM = CK$.

c) $\sphericalangle KAL = \sphericalangle LBM = \sphericalangle MCK = 180° - 60° = 120°$, jo $\Delta ABC -$ vienādmalu (tā visi leņķi ir $60°$ lieli) un katru no šiem leņķiem var iegūt, apskatot blakusleņķus,

tad $\Delta KAL = \Delta LBM = \Delta MCK$ pēc pazīmes mlm.

2) Apskatām trīsstūri KAL. Lai varētu noteikt šī trīsstūra laukumu, pietiek noskaidrot tā malu AK un AL garumus, jo tad varēsim izmantot trīsstūra laukuma aprēķināšanas formulu

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot ab \sin \alpha,$$

kur a, $b -$ trīsstūra malas un $\alpha -$ leņķis starp šīm malām.

3) Aprēķinām trīsstūra ABC malas garumu, izmantojot regulāra trīsstūra laukuma aprēķināšanas formulu.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 1 = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AB^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}} \text{ (dm}^2\text{)}$$

4) Aprēķinām malu KA un AL garumus.

$$KA = 2 \cdot CA = 2 \cdot AB = \frac{4}{\sqrt{\sqrt{3}}} \text{(dm)}$$

$$AL = AB + BL = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}} + \frac{4}{\sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{6}{\sqrt{\sqrt{3}}} \text{ (dm)}$$

5) Aprēķinām ΔKAL laukumu.

$$S_{\Delta KAL} = \frac{1}{2} \cdot KA \cdot AL \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{\sqrt{3}}} \cdot \frac{6}{\sqrt{\sqrt{3}}} \cdot \sin 60° = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\ (\mathrm{dm}^2)$$

6) $S_{\Delta LBM} = S_{\Delta MCK} = S_{\Delta KAL} = 6\ (\mathrm{dm}^2)$, jo $\Delta KAL = \Delta LBM = \Delta MCK$.

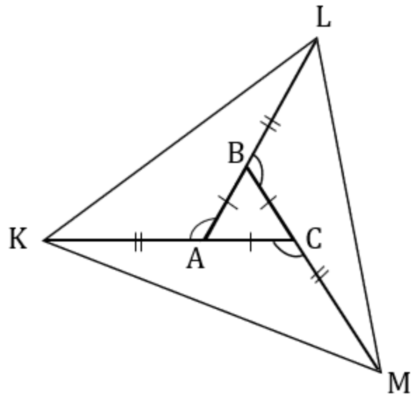
7) $S_{\Delta KLM} = S_{\Delta LBM} + S_{\Delta MCK} + S_{\Delta KAL} + S_{\Delta ABC} = 6 + 6 + 6 + 1 = 19\ (\mathrm{dm}^2)$

Atbilde: $S_{\Delta KLM} = 19\ \mathrm{dm}^2$.

C variants (skat. 12. att.)

Dots: ΔABC,
$AB = BC = AC$,
$BL = 2 \cdot AB$,
$CM = 2 \cdot BC$,
$AK = 2 \cdot CA$,
$S_{\Delta ABC} = 1\ \mathrm{dm}^2$.

Jāaprēķina: $S_{\Delta KLM}$.



12. attēls. **5. uzdevuma C variants**

ATRISINĀJUMS

Trīsstūra KLM laukumu aprēķināsim kā vienādmalu trīsstūra laukumu, vispirms pamatojot, ka tā malas ir vienādas, un nosakot to garumu.

1) Apskatām ΔKCM.

a) $KC : CM = 3 : 2$, jo $KC = 3AC$ un $CM = 2AC$.

b) $\sphericalangle KCM = \sphericalangle KAL = \sphericalangle LBM = 180° - 60° = 120°$, jo $\Delta ABC -$ vienādmalu (tā visi leņķi ir 60° lieli), un katru no šiem leņķiem var iegūt, apskatot blakusleņķus.

c) Apzīmējam $AC = x$, $KC = 3x$, $CM = 2x$ un aprēķinām KM pēc kosinusu teorēmas.

$$KM^2 = KC^2 + CM^2 - 2 \cdot KC \cdot CM \cdot \cos \sphericalangle KCM$$

$$KM^2 = (3x)^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2x \cdot \cos 120° = 9x^2 + 4x^2 + 12x^2 \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$KM^2 = 19x^2$$

$$KM = x\sqrt{19}\ (\mathrm{dm})$$

2) $KM = LM = KL$, jo trīsstūri KCM, MCL un LAK ir vienādi pēc pazīmes mlm.
3) Tā kā trīsstūri KLM un ABC ir vienādmalu, tad $\Delta KLM \sim \Delta ABC$.

$$\frac{KL}{AB} = \frac{x\sqrt{19}}{x} = \sqrt{19} = k$$

$$\frac{S_{\Delta KLM}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = 19 \Rightarrow \frac{S_{\Delta KLM}}{1} = 19 \Rightarrow S_{\Delta KLM} = 19\ (\mathrm{dm}^2)$$

Atbilde: $S_{\Delta KLM} = 19\ \mathrm{dm}^2$.

PAPILDUZDEVUMI 1., 5., 6., 7., 9., 11., 12., 18., 22., 41.

6. uzdevums

Trīsstūra malu a, b un c garumi veido aritmētisko progresiju. Pierādi, ka ir patiesa vienādība $ac = 6Rr$, ja r – trīsstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss, bet R – trīsstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss!

PIEZĪME Uzdevuma risinājuma gaitā nav būtiska loma ģeometriskam zīmējumam, tādēļ to neveidosim, bet izmantosim mums zināmās ģeometriskās sakarības.

PIERĀDĪJUMS

Tā kā trīsstūra malu garumi veido aritmētisko progresiju, tad varam apzīmēt $a = b - d$ un $c = b + d$. Jāpierāda, ka patiesa ir vienādība $ac = 6Rr$.

Ja trīsstūra malu a, b, c garumi veido aritmētisko progresiju, tad malas a un c varam izteikt, izmantojot malu b un diferenci d: $a = b - d$ un $c = b + d$. Tad trijstūra perimetrs ir $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{b-d+b+b+d}{2} = \frac{3b}{2}$. Uzrakstīsim trīsstūra laukumu, izmantojot divas dažādas formulas.

1) Trīsstūra laukumu S var aprēķināt, zinot tā malu garumus a, b, c un apvilkās riņķa līnijas rādiusu R, $S = \frac{abc}{4R}$.
2) Trīsstūra laukumu S var aprēķināt arī, zinot tā pusperimetru p un ievilktās riņķa līnijas rādiusu r.

$$S = pr = \frac{3b}{2} \cdot r = \frac{3br}{2}$$

3) Tā kā 1) un 2) ir izteikts viena un tā paša trijstūra laukums, tad labās puses izteiksmes ir vienādas. Dotajā vienādībā parametru R un r vietā ievietojam atbilstošās izteiksmes.

$\frac{abc}{4R} = \frac{3br}{2} \Rightarrow 2abc = 12bRr \Rightarrow ac = 6Rr$,

kas arī bija jāpierāda.

PAPILDUZDEVUMI 17., 45.

7. uzdevums

Riņķa līnijai, kuras rādiuss ir 1 cm, punktā C pieskaras riņķa līnija ar rādiusu 3 cm. Taisne, kas iet caur punktu C, krusto mazāko riņķa līniju punktā A, bet lielāko – punktā B. Noteikt nogriežņa AC garumu, ja nogriežņa AB garums ir $2\sqrt{5}$ cm.

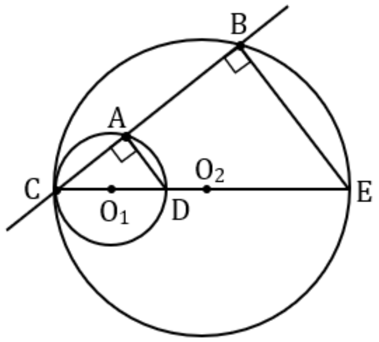
PIEZĪME Tā kā nav zināms, kā riņķa līnijas pieskaras viena otrai (iekšēji vai ārēji), apskatīsim abus gadījumus.

1. gadījums

Riņķa līnijas pieskaras viena otrai punktā C iekšēji (skat. 13. att.).

Dots: $R.l.(O_1; O_1D = 1\text{ cm})$,
$R.l.(O_2; O_2E = 3\text{ cm})$,
$R.l.(O_1; 1) \cap R.l.(O_2; 3) = C$,
$AB = 2\sqrt{5}$ cm.

Jāaprēķina: AC.



13. attēls. **7. uzdevuma 1. gadījums**

ATRISINĀJUMS

1) Apskatīsim ΔCAD un ΔCBE.
   a) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE = 90°$, jo riņķa līnijā ievikts trīsstūris, kura viena mala ir arī riņķa līnijas diametrs, ir taisnleņķa trīsstūris.
   b) $\sphericalangle C$ ir kopīgs.

   Tātad $\Delta CAD \sim \Delta CBE$ pēc pazīmes ll.
2) $\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE}$, jo $\Delta CAD \sim \Delta CBE$.
3) Ievietojam zināmos lielumus, ņemot vērā, ka $CB = CA + 2\sqrt{5}$, un aprēķinām CA vērtību.

$$\frac{CA}{CA + 2\sqrt{5}} = \frac{2}{6} \Rightarrow 6 \cdot CA = 2 \cdot CA + 4\sqrt{5} \Rightarrow 4 \cdot CA = 4\sqrt{5} \Rightarrow CA = \sqrt{5}\ (\text{cm})$$

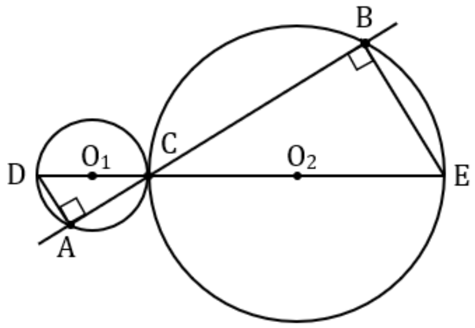
4) Tā kā $CA = \sqrt{5}$ cm, tad $CB = 3\sqrt{5}$ cm un $CB > CE$. Tā nevar būt, jo $CE = 6$ cm ir hipotenūza, bet katete nevar būt garāka par hipotenūzu.

2. gadījums

Riņķa līnijas pieskaras viena otrai punktā C ārēji (skat. 14. att.).

Dots: $R.l.(O_1; O_1C = 1$ cm),
$R.l.(O_2; O_2E = 3$ cm),
$R.l.(O_1; 1) \cap R.l.(O_2; 3) = C$,
$AB = 2\sqrt{5}$ cm.

Jāaprēķina: AC.



14. attēls. **7. uzdevuma 2. gadījums**

ATRISINĀJUMS

1) Apskatīsim ΔDAC un ΔEBC.
   a) $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EBC = 90°$, jo riņķa līnijā ievikts trīsstūris, kura viena mala ir arī riņķa līnijas diametrs, ir taisnleņķa trīsstūris;
   b) $\sphericalangle DCA = \sphericalangle ECB$ (krustleņķi),
   tātad $\Delta DAC \sim \Delta EBC$ pēc pazīmes ll.

2) $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{DC}{EC}$, jo $\Delta DAC \sim \Delta EBC$.

Ievietojam zināmos lielumus, ņemot vērā, ka $BC = AB - AC = 2\sqrt{5} - AC$, un aprēķinām AC vērtību.

$$\frac{AC}{2\sqrt{5} - AC} = \frac{2}{6}$$

$$6 \cdot AC = 4\sqrt{5} - 2 \cdot AC$$

$$8 \cdot AC = 4\sqrt{5}$$

$$AC = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (cm)}$$

3) Šis gadījumus var būt, jo $AC < DC$, kur $DC = 2 \cdot O_1D = 2$ (cm).

Atbilde: $AC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm.

PAPILDUZDEVUMI 14., 18.

8. uzdevums

Trīsstūrī ABC, kuram $\sphericalangle C \geq 90°$, no virsotnes C pret malu AB novilkts augstums CD. Pierādi, ka vienādība $CD + AB > AC + BC$ ir patiesa!

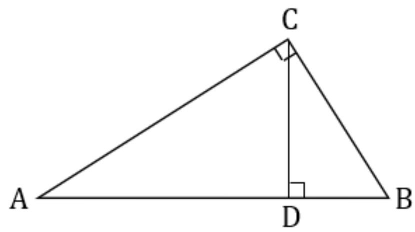
PIEZĪME Tā kā $\sphericalangle C$ var būt gan taisns, gan lielāks nekā $90°$, tad ir jāapskata divi gadījumi.

1. gadījums

$\sphericalangle C = 90°$ (skat. 15. att.).

Dots: ΔABC,
$CD \perp AB$,
$\sphericalangle C = 90°$.

Jāpierāda: $CD + AB > AC + BC$.



15. attēls. **8. uzdevuma 1. gadījums**

ATRISINĀJUMS

Pierādījuma gaitā noskaidrosim, ar ko ir vienāda izteiksme $(CD + AB)^2$ un vai tās vērtība ir lielāka nekā izteiksmes $(AC + BC)^2$ vērtība. Jā tā būs, tad no abām nevienādības pusēm izvilksim kvadrātsakni un iegūsim, ka arī nevienādība $CD + AB > AC + BC$ ir patiesa.

1) Izmantojot saīsinātās reizināšanas formulu $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, pārveidojam izteiksmi $(CD + AB)^2$.

   $(CD + AB)^2 = CD^2 + 2 \cdot CD \cdot AB + AB^2$

   Tā kā nepieciešams izteiksmi $(CD + AB)^2$ salīdzināt ar $(AC + BC)^2$, tad jānoskaidro, ar ko ir vienāda izteiksme $CD \cdot AB$ un AB^2.

2) $AB^2 = AC^2 + BC^2$ pēc Pitagora teorēmas.

3) Tā kā

   a) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CDB = 90°$, jo $CD \perp AB$,

   b) $\sphericalangle B$ – kopīgs,

   tad $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ pēc pazīmes ll.

4) $AB \cdot CD = AC \cdot BC$, jo trīsstūri ABC un CBD ir līdzīgi.

5) Gan $CD \cdot AB$, gan AB^2 aizstājam ar atbilstošajām izteiksmēm.

   $(CD + AB)^2 = CD^2 + 2 \cdot AC \cdot BC + AC^2 + BC^2 = CD^2 + (AC + BC)^2$

6) $(CD + AB)^2 = CD^2 + (AC + BC)^2 > (AC + BC)^2$, jo $CD^2 > 0$.

   Tātad $(CD + AB)^2 > (AC + BC)^2$.

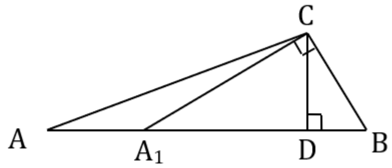
7) Tā kā trīsstūra elementu garumi ir pozitīvi skaitļi, tad no nevienādības abām pusēm var vilkt kvadrātsakni un nevienādības zīme nemainās. Iegūstam, ka $CD + AB > AC + BC$, kas bija jāpierāda.

2. gadījums

$\sphericalangle C > 90°$ (skat. 16. att.).

Dots: ΔABC,
$CD \perp AB$,
$\sphericalangle C > 90°$,

Jāpierāda: $CD + AB > AC + BC$.



16. attēls. **8. uzdevuma 2. gadījums**

ATRISINĀJUMS

Novelkam nogriezni A_1C tā, lai $\sphericalangle A_1CB = 90°$. Izveidojas divi trīsstūri A_1CB un AA_1C.

1) ΔA_1CB ir taisnleņķa trīsstūris. Tam ir spēkā nevienādība $CD + A_1B > A_1C + BC$. To pierādījām iepriekš.

2) Apskatām ΔAA_1C.

   $AA_1 + A_1C > AC$ pēc trīsstūra nevienādības.

   $AA_1 > AC - A_1C$

3) Saskaitām 1) un 2) punktā iegūtās nevienādības.

   $CD + A_1B + AA_1 > A_1C + BC + AC - A_1C$

   $CD + A_1B + AA_1 > BC + AC$

Tā kā $AA_1 + A_1B = AB$, tad, ievietojot izteiksmes $A_1B + AA_1$ vietā AB, iegūstam, ka $CD + AB > AC + BC$, kas bija jāpierāda.

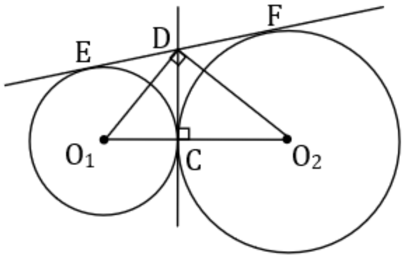
PAPILDUZDEVUMI 2., 15., 18., 40.

9. uzdevums

Divas riņķa līnijas ārēji pieskaras viena otrai punktā C. To rādiusu garumi ir 2 cm un 7 cm. Caur punktu C novilkta kopīga pieskare, kas krustojas ar citu kopīgu pieskari punktā D (skat. 17. att.). Aprēķini attālumu no mazākās riņķa līnijas centra līdz punktam D!

Dots: $R.l.(O_1; O_1C = 2$ cm),
$R.l.(O_2; O_2C = 7$ cm).

Jāaprēķina: O_1D.



17. attēls. **9. uzdevuma zīmējums**

ATRISINĀJUMS

1) Novelkot nogriežņus O_1D un O_2D, iegūstam trīsstūri O_1DO_2.
2) Tā kā ED un CD ir riņķa līnijas pieskares no viena punkta, tad O_1D ir leņķa EDC bisektrise. Analoģiski O_2D ir leņķa FDC bisektrise.
3) Tādā gadījumā $\sphericalangle O_1DC + \sphericalangle CDO_2 = 90°$. Tātad ΔO_1DO_2 ir taisnleņķa trīsstūris.
4) Lai noteiktu katetes O_1D garumu, izmantosim Eiklīda teorēmu, jo ir zināms gan hipotenūzas garums, gan atbilstošās katetes projekcijas uz hipotenūzas garums.

   $O_1D^2 = O_1C \cdot O_1O_2 = 2 \cdot 9 = 18$

   $O_1D = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (cm)

Atbilde: $O_1D = 3\sqrt{2}$ cm.

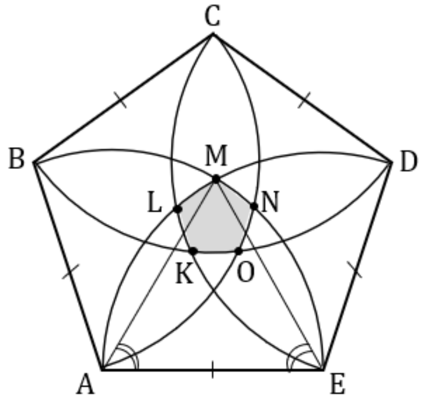
PAPILDUZDEVUMI 16., 21.

10. uzdevums

No regulāra piecstūra, kura malas garums ir 1 cm, nodzēsti tie punkti, kas atrodas tuvāk nekā 1 cm attālumā no visām tā virsotnēm vienlaicīgi (skat. 18. att.). Aprēķini nenodzēstās figūras laukumu!

Dots: $ABCDE$ – piecstūris,
$AB = BC = CD = DE = AE = 1$ cm.

Jāaprēķina: $S_{nenodzēsts}$.



18. attēls. **10. uzdevuma zīmējums**

ATRISINĀJUMS

Iekrāsosim nodzēsto piecstūra daļu $KLMNO$. Tātad jāparēķina neiekrāsotās daļas laukums. Nenodzēstā piecstūra daļa ir sadalīta ar riņķa līniju (ar rādiusu 1 cm un centriem piecstūra virsotnēs) lokiem piecos vienādos līklīnijas trīsstūros ANE, EMD, DLC, CKB, BOA. Ja aprēķināsim viena līklīnijas trīsstūra laukumu, tad, sareizinot to ar 5, iegūsim meklēto laukumu.

1) Novelkam nogriežņus AM un ME.

   Līklīnijas trīsstūra EMD laukums ir vienāds ar sektora EMD un segmenta EMN laukumu starpību. Savukārt segmenta EMN laukums ir vienāds ar sektora $MAEN$ un trīsstūra MAE laukumu starpību.

2) ΔMAE – vienādmalu trīsstūris, jo $AM = AE = ME = 1$ cm kā riņķa līniju rādiusi. Aprēķinām trīsstūra MAE un sektora $MAEN$ laukumu.

$$S_{\Delta MAE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{sekt.\ (MAEN)} = \frac{\pi R^2 \alpha°}{360°} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 60°}{360°} = \frac{\pi}{6} \text{ (cm}^2\text{)}$$

3) Aprēķinām segmenta EMN laukumu.

$$S_{segm.\ (EMN)} = S_{MAEN} - S_{\Delta MAE} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{(cm}^2\text{)}$$

4) Lai aprēķinātu sektora EMD laukumu, nepieciešams noteikt leņķa MED lielumu. Lai to noteiktu, vispirms jāaprēķina piecstūra virsotnes leņķa lielums ($n -$ daudzstūra malu skaits).

$$\sphericalangle E = \frac{180° \cdot (n-2)}{n} = \frac{180° \cdot (5-2)}{5} = 108°$$

$$\sphericalangle MED = \sphericalangle E - \sphericalangle AEM = 108° - 60° = 48°$$

$$S_{sekt.\ (EMD)} = \frac{\pi R^2 \alpha°}{360°} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 48°}{360°} = \frac{2\pi}{15}\ (\text{cm}^2)$$

5) $S_{EMD} = S_{sekt.\ (EMD)} - S_{segm.\ (EMN)}$

$$S_{EMD} = \frac{2\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{30}\ (\text{cm}^2)$$

6) Tā kā nenodzēstā figūra sastāv no pieciem vienādiem līklīnijas trīsstūriem, tad tās laukumu aprēķinām kā piecu segmentu EMD laukumu.

$$S_{nenodz.} = 5 \cdot S_{EMD} = 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{30}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\ (\text{cm}^2)$$

Atbilde: $S_{nenodz.} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{6}$ cm^2.

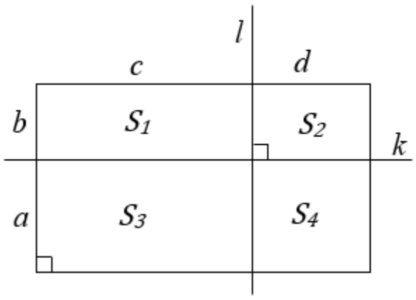
PAPILDUZDEVUMI 9., 19., 20., 24.

11. uzdevums

Taisnstūra vienas malas garums ir 1 cm. Zināms, ka ar divām perpendikulārām taisnēm šo taisnstūri var sadalīt četros taisnstūros tā, ka trim no tiem laukums nav mazāks kā 1 cm^2, bet ceturtā taisnstūra laukums nav mazāks kā 2 cm^2 (skat. 19. att.). Nosaki, ar kādu mazāko taisnstūra otras malas garumu tas ir iespējams!

Dots: taisnstūris,
$l \perp k$,
$a + b = 1$ cm,
$S_1 \geq 1$ cm^2, $S_2 \geq 1$ cm^2,
$S_3 \geq 1$ cm^2, $S_4 \geq 2$ cm^2.

Jāaprēķina: $c + d$.



19. attēls. **11. uzdevuma zīmējums**

ATRISINĀJUMS

Novelkam taisnes l un k tā, lai $l \perp k$. Iegūtos taisnstūru laukumus apzīmējam ar S_1, S_2, S_3, S_4, bet taisnstūru malas apzīmējam ar a, b, c un d.

1) Ņemot vērā doto un izmantojot ieviestos apzīmējumus, varam uzrakstīt, ka

   $S_1 = bc \geq 1,$

   $S_2 = bd \geq 1,$

   $S_3 = ac \geq 1,$

   $S_4 = ad \geq 2.$

2) Viegli pamanīt, ka $S_1 \cdot S_4 = S_2 \cdot S_3$, jo $bc \cdot ad = bd \cdot ac$.

3) $S_1 + S_4 \geq 2\sqrt{S_1 \cdot S_4}$ (nenegatīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par to vidējo ģeometrisko), tātad $1 + 2 \geq 2\sqrt{1 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$, ņemot vērā doto par taisnstūru laukumiem.

4) Tā kā $S_1 \cdot S_4 = S_2 \cdot S_3$, tad $S_2 + S_3 \geq 2\sqrt{S_2 \cdot S_3} = 2\sqrt{S_1 \cdot S_4} \geq 2\sqrt{2}$.

5) Tātad $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$.

6) Ja mazākais taisnstūra laukums ir $3 + 2\sqrt{2}$ cm^2 un vienas malas garums ir 1 cm, tad otras malas garums ir $c + d = S : (a + b) = \left(3 + 2\sqrt{2}\right) : 1 = 3 + 2\sqrt{2}$ (cm).

7) Tāds taisnstūris tiešām apmierina uzdevuma prasības, ja $a = 2 - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2} - 1$, $c = \sqrt{2} + 1$ un $d = 2 + \sqrt{2}$. (Uzrādi arī konkrētos taisnstūrus! Kāpēc?)

Atbilde: $(3 + 2\sqrt{2}\,)$ cm.

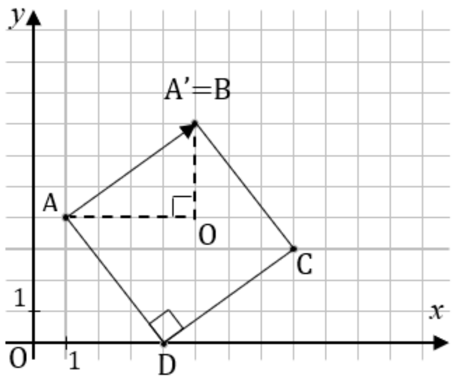
PAPILDUZDEVUMI 32., 11-1., 11-2.

12. uzdevums

Paralēlā pārnese dota ar formulām $x' = x + 4$, $y' = y + 3$. Zināms, ka, veicot šo pārnesi, kvadrāta $ABCD$ virsotne A attēlojas par virsotni B (skat. 20. att.). Aprēķini kvadrāta diagonāles garumu!

Dots: $ABCD -$ kvadrāts,
$y' = y + 3$,
$x' = x + 4$ cm,
$A' = B$.

Jāaprēķina: AC.



20. attēls. **12. uzdevuma zīmējums**

ATRISINĀJUMS

Lai aprēķinātu kvadrāta diagonāles AC garumu, pietiek noteikt kvadrāta malas garumu.

1) Ērtības labad izmantojam koordinātu plaknes pirmo kvadrantu un brīvi atliekam punktu A, jo nav pateikts, kur tieši kvadrāts atrodas. Tā kā paralēlajā pārnesē virsotne A attēlojas par virsotni B, tad, izmantojot dotās formulas, iegūstam virsotni B (pārvietojoties 4 rūtiņas pa labi paralēli Ox asij tās pozitīvajā virzienā un 3 rūtiņas paralēli Oy asij tās pozitīvajā virzienā).
2) Iegūstam, ka paralēlās pārneses vektors ir AA'. Malas AB garumu var aprēķināt gan kā vektora $\overrightarrow{AA'}$ garumu, gan arī kā taisnleņķa trīsstūra AOA' hipotenūzas garumu.

$$|\overrightarrow{AA'}| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + \left(B_y - A_y\right)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

vai $AA' = \sqrt{AO^2 + A'O^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ pēc Pitagora teorēmas.

3) $AC = AA' \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, jo kvadrāta diagonāli aprēķina pēc formulas $d = a\sqrt{2}$, kur $d -$ kvadrāta diagonāle, $a -$ kvadrāta mala.

Atbilde: $AC = 5\sqrt{2}$.

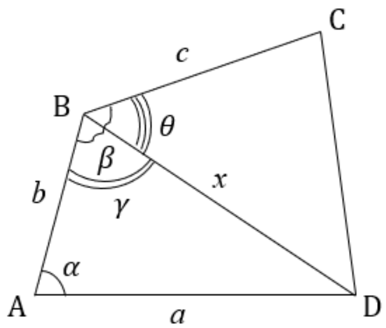
PAPILDUZDEVUMI 15., 18., 28., 38.

13. uzdevums

Aprēķini četrstūra laukumu, ja tā trīs secīgas malas ir a, b, c, bet malas b pieleņķi ir α un β (skat. 21. att.)!

Dots: $AABCD$ – četrstūris,
$AD = a$, $AB = b$, $BC = c$,
$\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$.

Jāaprēķina: S_{ABCD}.



21. attēls. **13. uzdevuma zīmējums**

ATRISINĀJUMS

Novelkam četrstūra $ABCD$ diagonāli BD. Tā laukumu aprēķināsim kā trīsstūru ABD un BCD laukumu summu. Apzīmējam $\sphericalangle ABD = \gamma$ un $\sphericalangle CBD = \theta$.

1) Apskatām ΔABD.

a) $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot ab \sin\alpha$

b) Aprēķinām BD pēc kosinusu teorēmas.

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$$

c) Lai aprēķinātu ΔBCD laukumu, nepieciešams noteikt leņķi θ. Tā kā $\theta = \beta - \gamma$, tad vispirms aprēķināsim γ. Pēc kosinusu teorēmas uzrakstām izteiksmi malas AD aprēķināšanai un izsakām γ.

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha - 2b\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \cos\gamma$$

$$2b\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \cos\gamma = 2b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$2b\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \cos\gamma = 2b(b - a\cos\alpha)$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \cos\gamma = b - a\cos\alpha$$

$$\cos\gamma = \frac{b - a\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}$$

d) Apzīmējam $\cos\gamma = K$, tad $\gamma = \arccos K$. Līdz ar to $\theta = \beta - \arccos K$.

2) $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot c\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \sin(\beta - \arccos K)$

3) Jānoskaidro, ar ko ir vienāda izteiksme $\sin(\beta - \arccos K)$. Izmantojam trigonometrisko sakarību $\sin(\delta - \varepsilon) = \sin\delta\cos\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\delta$.

$\sin(\beta - \arccos K) = \sin\beta\cos(\arccos K) - \sin(\arccos K)\cos\beta$

$* \ \cos(\arccos K) = K = \frac{b - a\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}$

$* \ \sin(\arccos K) = \sqrt{1 - K^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{b - a\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}\right)^2} =$

$= \sqrt{1 - \frac{b^2 - 2ab\cos\alpha + a^2\cos^2\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} =$

$= \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + b^2 + 2ab\cos\alpha - a^2\cos^2\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} =$

$= \sqrt{\frac{a^2 - a^2\cos^2\alpha}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{a^2(1 - \cos^2\alpha)}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}$

Ievietojam $\cos(\arccos K)$ un $\sin(\arccos K)$ vietā atbilstošās izteiksmes.

$\sin(\beta - \arccos K) = \sin\beta \cdot \frac{b - a\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} - \cos\beta \cdot \frac{a\sin^2\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} =$

$= \frac{b\sin\beta - a\cos\alpha\sin\beta - a\cos\beta\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}} = \frac{b\sin\beta - a\sin(\alpha + \beta)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}$

4) Aprēķinām $S_{\Delta BCD}$, ievietojot $\sin(\beta - \arccos K)$ vietā atbilstošo izteiksmi.

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot c\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \frac{b\sin\beta - a\sin(\alpha + \beta)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}$

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot (bc\sin\beta - ab\sin(\alpha + \beta))$

5) Aprēķinām četrstūra $ABCD$ laukumu.

$S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot ab\sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot (bc\sin\beta - ab\sin(\alpha + \beta)) =$

$= \frac{1}{2} \cdot (ab\sin\alpha + bc\sin\beta - ab\sin(\alpha + \beta))$

Atbilde: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (ab\sin\alpha + bc\sin\beta - ac\sin(\alpha + \beta))$

PAPILDUZDEVUMI 7., 11., 12., 42., 43., 13-1.

14. uzdevums

Uz patvaļīga trīsstūra ABC malām AB un BC ārpus trijstūra novietoti kvadrāti $ABMP$ un $CBNK$. Pierādi, ka nogrieznis MN ir perpendikulārs trīsstūra mediānai BD un ir divas reizes garāks nekā tā!

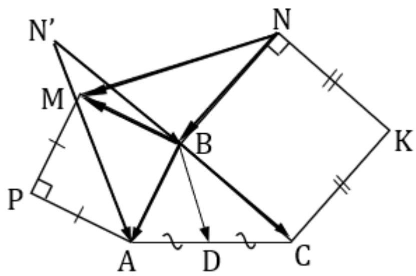
PIEZĪME Šim uzdevumam tiek piedāvāti četri risinājuma varianti, kas ļauj to risināt dažādu planimetrijas tēmu apguvē, t. i., apgūstot tēmu par vektoriem, lineāru funkciju (taisnes vienādojuma noteikšana), kosinusu teorēmu un trīsstūra mediānas garuma aprēķināšanu (izmantojot formulu), kā arī tēmu par ģeometriskiem pārveidojumiem. Kopumā šī uzdevuma risinājumā ir jāizmanto plašs pamatzināšanu klāsts, līdz ar to ir daudz palīguzdevumu.

A variants

PIEZĪME Pierādījuma gaitā izmantosim vektorus un pagriezienu ap punktu. Pierādījums veidojas salīdzinoši īss, un nav jāveic sarežģīti aprēķini (skat. 22. att.).

Dots: ΔABC,
$ABMP$ – kvadrāts,
$CBNK$ – kvadrāts,
BD – mediāna.

Jāpierāda: $BD \perp MN$ un $MN = 2 \cdot BD$.

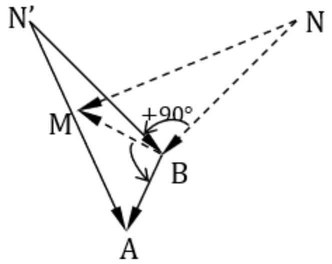


22. attēls. **14. uzdevuma A variants**

PIERĀDĪJUMS

1) $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{MB}$ pēc trīsstūra saskaitīšanas likuma.

2) Veicam pagriezienu par 90° ap punktu B. Līdz ar to vektors $\overrightarrow{NB}$ attēlojas par vektoru $\overrightarrow{N'B}$, bet vektors $\overrightarrow{BM}$ – par vektoru $\overrightarrow{BA}$ (skat. 23. att.).

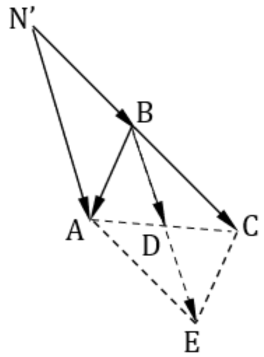


23. attēls. **Vektoru pagrieziens ap punktu *B***

3) Tā kā pagrieziens ap punktu saglabā ģeometriskās figūras īpašības un $\overrightarrow{N'A} = \overrightarrow{N'B} + \overrightarrow{BA}$, tad $\overrightarrow{N'A}$ ir vektora $\overrightarrow{NM}$ attēls.

4) $\overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{N'A}$, jo tika veikts pagrieziens par 90° ap punktu B, turklāt $\left|\overrightarrow{NM}\right| = \left|\overrightarrow{N'A}\right|$.

5) Vektori $\overrightarrow{N'B}$ un $\overrightarrow{BC}$ ir vienādi, jo tie ir vienādi vērsti un vienāda garuma. Līdz ar to vienādībā $\overrightarrow{N'A} = \overrightarrow{N'B} + \overrightarrow{BA}$ drīkstam $\overrightarrow{N'B}$ vietā rakstīt vektoru $\overrightarrow{BC}$ (skat. 24. att.).
$\overrightarrow{N'A} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$.



24. attēls. **Vektoru $\overrightarrow{N'B}$ un $\overrightarrow{BC}$ vienādības attēlojums**

6) Saskaitot vektorus $\overrightarrow{BC}$ un $\overrightarrow{BA}$ pēc paralelograma likuma, iegūstam, ka $\overrightarrow{N'A} = \overrightarrow{BE} =$ $= 2 \cdot \overrightarrow{BD}$, jo $\overrightarrow{BD}$ ir trīsstūra ABC mediāna, tātad atrodas uz paralelograma $ABCE$ diagonāles BE un ir puse no tās.

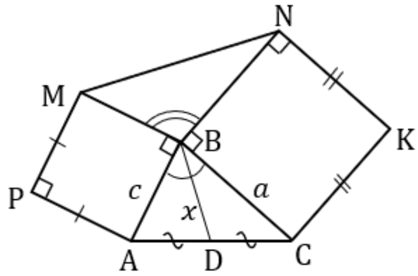
7) Tā kā $\overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{N'A}$, $\overrightarrow{N'A} = 2 \cdot \overrightarrow{BD}$ un $\left|\overrightarrow{NM}\right| = \left|\overrightarrow{N'A}\right|$, tad $BD \perp MN$ un $MN = 2 \cdot BD$, kas bija jāpierāda.

B variants

PIEZĪME Vispirms pierādīsim, ka nogrieznis MN ir divas reizes garāks nekā mediāna BD, un tad šo faktu izmantosim, lai pierādītu, ka MN ir perpendikulārs BD. Izteiksim nogriežņu MN un BD garumus no diviem dažādiem trīsstūriem un salīdzināsim iegūtās izteiksmes, lai pamatotu, ka $MN = 2 \cdot BD$ (skat. 25. att.).

Dots: ΔABC,
$ABMP -$ kvadrāts,
$CBNK -$ kvadrāts,
$BD -$ mediāna.

Jāpierāda: $BD \perp MN$ un $MN = 2 \cdot BD$.



25. attēls. **14. uzdevuma B variants**

PIERĀDĪJUMS

Apzīmējam: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle ABC = x$, tad $\sphericalangle MBN = 180° - x$.

1) Apskatām ΔMBN. Izsakām malu MN pēc kosinusu teorēmas.

$$MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2 \cdot MB \cdot BN \cdot \cos(\sphericalangle MBN)$$

$$MN^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos(180° - x) = c^2 + a^2 + 2ca \cos x$$

$$MN = \sqrt{c^2 + a^2 + 2ac \cos x}$$

2) Apskatām ΔABC. Izsakām BD kā trīsstūra ABC mediānas garumu.

$$BD = \frac{\sqrt{2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 - AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}{2}$$

3) Lai salīdzinātu MN un BD atbilstošās izteiksmes, tām ir jābūt atkarīgām no vieniem un tiem pašiem lielumiem. Tā kā MN ir izteikts ar a un c un leņķi x, tad arī BD ir jāizsaka tikai ar šiem mainīgajiem. Tāpēc izsakām trīsstūra ABC malas AC garumu kvadrātā (jo izteiksmē nepieciešams tās kvadrāts), izmantojot kosinusu teorēmu.

$$b^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\sphericalangle ABC) = c^2 + a^2 - 2ca \cos x$$

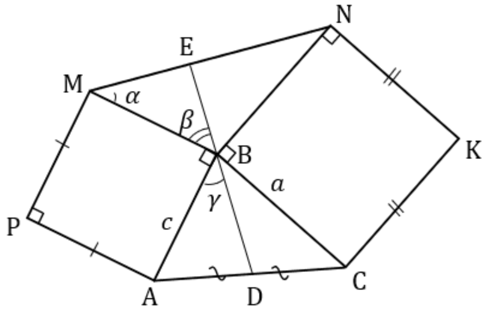
4) Ievietojam b^2 vietā atbilstošo izteiksmi.

$$BD = \frac{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - (c^2 + a^2 - 2ca \cos x)}}{2} = \frac{\sqrt{c^2 + a^2 + 2ca \cos x}}{2}$$

5) Salīdzinām MN un BD izteiksmes.

$$\frac{MN}{BD}=\frac{\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos x}}{\frac{\sqrt{c^2+a^2+2ca\cos x}}{2}}=\frac{2\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos x}}{\sqrt{c^2+a^2+2ac\cos x}}=2$$

Tātad nogrieznis MN ir divas reizes garāks nekā trīsstūra ABC mediāna BD, kas bija jāpierāda.



26. attēls. **Nogriežņu MN un BD perpendikularitātes pierādījums**

6) Lai pierādītu, ka $BD \perp MN$, vispirms papildināsim zīmējumu (skat. 26. att.). Pagarinām mediānu BD, līdz tā krustojas ar nogriezni MN punktā E. Apzīmējam $\sphericalangle EMB=\alpha$, $\sphericalangle EBM=\beta$ un $\sphericalangle ABD=\gamma$. Noteiksim leņķa MEB lielumu, izmantojot ieviestos apzīmējumus. Ja izrādīsies, ka $\sphericalangle MEB=90°$, tad BD būs perpendikulārs ar MN.

7) Apskatām trīsstūri ΔMBN. Pēc kosinusu teorēmas uzrakstām BN^2 atbilstošo izteiksmi un, izmantojot ieviestos apzīmējumus un jau aprēķinātos lielumus, izsakām a.

$$BN^2=MN^2+MB^2-2\cdot MN\cdot MB\cdot\cos\alpha$$

$$a^2=(2\cdot BD)^2+c^2-2\cdot 2\cdot BD\cdot c\cdot\cos\alpha$$

$$a^2=\left(2\cdot\frac{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}{2}\right)^2+c^2-\frac{4c\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}{2}\cdot\cos\alpha$$

$$a^2=2c^2+2a^2-b^2+c^2-2c\cdot\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}\cdot\cos\alpha$$

$$2c\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}\cdot\cos\alpha=3c^2+a^2-b^2$$

$$\cos\alpha=\frac{3c^2+a^2-b^2}{2c\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{3c^2+a^2-b^2}{2c\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}\right)$$

8) Apskatām ΔABC. Pēc kosinusu teorēmas uzrakstām AD^2 atbilstošo izteiksmi un izsakām γ.

$$AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cdot\cos\gamma$$

$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2=c^2+\left(\frac{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}{2}\right)^2-2\cdot c\cdot\frac{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}}{2}\cdot\cos\gamma$$

$$\frac{b^2}{4} = c^2 + \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} - c \cdot \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \cdot \cos\gamma$$

$$c\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} \cdot \cos\gamma = \frac{6c^2 + 2a^2 - 2b^2}{4} = \frac{3c^2 + 2a^2 - b^2}{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{3c^2 + 2a^2 - b^2}{2} : \left(c\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}\right) = \frac{3c^2 + 2a^2 - b^2}{2c\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{3c^2 + a^2 - b^2}{2c\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}\right)$$

9) Tā kā trīsstūra iekšējo leņķu summa ir 180°, tad leņķi α un γ ir mazāki nekā 180°. Zinot, ka $\cos\alpha = \cos\gamma$, secinām, ka $\alpha = \gamma$.

10) $\gamma + \beta + 90° = 180° \Longrightarrow \gamma + \beta = 90°$, jo $\sphericalangle DBE -$ izstiepts leņķis. Tā kā $\alpha = \gamma$, tad $\alpha + \beta = 90°$.

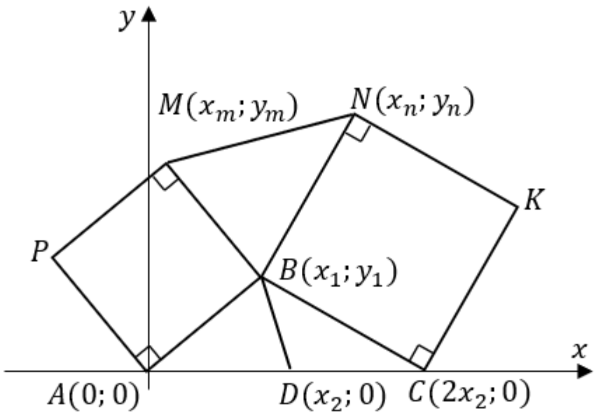
Iegūstam, ka $\sphericalangle MEB = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°$. Tātad $BD \perp MN$, kas bija jāpierāda.

C variants

PIEZĪME Novietosim trīsstūri ABC koordinātu plaknes pirmajā kvadrantā tā, ka tā virsotne A atrodas koordinātu plaknes sākumpunktā, bet virsotne C atrodas uz Ox ass. Tad atbilstoši konstruējam kvadrātus $ABMP$ un $CBNK$ uz tā malām (skat. 27. att.).

Dots: ΔABC,
$ABMP -$ kvadrāts,
$CBNK -$ kvadrāts,
$BD -$ mediāna.

Jāpierāda: $BD \perp MN$, $MN = 2 \cdot BD$.



27. attēls. **14. uzdevuma C variants**

PIERĀDĪJUMS

Pierādījumu veidosim, izmantojot taišņu vienādojumus un to virziena koeficientus. Ja izrādīsies, kas taisnes MN virziena koeficienta k_{MN} un taisnes BD virziena koeficienta k_{BD} reizinājums ir -1, tad taisnes MN un BD ir perpendikulāras.

Apzīmējam punktu koordinātas: $B = (x_1; y_1)$, $D = (x_2; 0)$, $M = (x_m; y_m)$, $N = (x_n; y_n)$, savukārt $C = (2x_2; 0)$, jo $AD = DC$ (BD ir trīsstūra ABC mediāna). Taisnes BD virziena koeficientu un attālumu starp punktiem B un D var noteikt, izmantojot ieviestos apzīmējumus. Lai noteiktu attālumu starp punktiem M un N, taisnes MN vienādojumu un pēc tam virziena koeficientu, vispirms jānoskaidro punktu M un N koordinātas.

1) Apskatām taisni BD.

   a) Tās vienādojumu nosakām, izmantojot punktus $B = (x_1; y_1)$ un $D = (x_2; 0)$.

   $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{0 - y_1} \Rightarrow y - y_1 = -\frac{y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow y = -\frac{y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) - y_1$$

   b) $k_{BD} = -\frac{y_1}{x_2 - x_1}$

   $$|BD| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (0 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_1^2}$$

Noteiksim $M = (x_m; y_m)$.

2) Apskatām taisni AB.

   a) Tās vienādojumu nosakām, izmantojot punktus $A = (0; 0)$ un $B = (x_1; y_1)$.

   $$\frac{x - 0}{x_1 - 0} = \frac{y - 0}{y_1 - 0} \Rightarrow \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} \Rightarrow y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$$

   b) $k_{AB} = \frac{y_1}{x_1}$

   c) $|AB| = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

3) Apskatām taisni MB.

   a) $k_{MB} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{x_1}{y_1}$, jo $MB \perp AB$ ($APMB$ ir kvadrāts).

   b) Taisnes vienādojumu nosakām, izmantojot k_{MB} un $B = (x_1; y_1)$.

   $$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) \Rightarrow y = -\frac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

   c) Taisnes vienādojumu nosakām, izmantojot k_{MB} un $M = (x_m; y_m)$.

   $$y - y_m = -\frac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_m) \Rightarrow y = -\frac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_m) + y_m$$

   d) Tā kā $|MB| = |AB|$ un $|MB| = \sqrt{(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2}$, tad

   $$\sqrt{(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

4) Apvienojam b) – d) vienādojumu sistēmā.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) + y_1 \\ y = -\dfrac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_m) + y_m \\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2} \end{cases}$$

Ievietojam otrajā vienādojumā y vietā atbilstošo izteiksmi no pirmā vienādojuma.

$$-\frac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) + y_1 = -\frac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_m) + y_m$$

$$\frac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_m) - \frac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) + y_1 = y_m$$

$$\frac{x_1}{y_1} \cdot (x - x_m - x + x_1) + y_1 = y_m$$

$$\frac{x_1}{y_1} \cdot (x_1 - x_m) + y_1 = y_m$$

Ievietojam trešajā sistēmas vienādojumā y_m vietā atbilstošo izteiksmi un nosakām x_m.

$$\sqrt{(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2$$

$$(x_1 - x_m)^2 + \left(y_1 - \frac{x_1}{y_1} \cdot (x_1 - x_m) - y_1\right)^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$(x_1 - x_m)^2 + \frac{x_1^2}{y_1^2} \cdot (x_1 - x_m)^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$(x_1 - x_m)^2 \left(1 + \frac{x_1^2}{y_1^2}\right) = x_1^2 + y_1^2$$

$$(x_1 - x_m)^2 \left(\frac{y_1^2 + x_1^2}{y_1^2}\right) = x_1^2 + y_1^2$$

$$(x_1 - x_m)^2 = \frac{(y_1^2 + x_1^2) \cdot y_1^2}{(y_1^2 + x_1^2)} = y_1^2$$

$$x_1 - x_m = y_1$$

$$x_m = x_1 - y_1$$

Ievietojam y_m atbilstošajā izteiksmē x_m vietā $x_1 - y_1$. Nosakām y_m.

$$y_m = \frac{x_1}{y_1} \cdot (x_1 - x_m) + y_1 = \frac{x_1}{y_1} \cdot \big(x_1 - (x_1 - y_1)\big) + y_1 = \frac{x_1}{y_1} \cdot y_1 + y_1 = x_1 + y_1$$

5) Esam ieguvuši, ka $M = (x_1 - y_1; x_1 + y_1)$.

Noteiksim $N = (x_n; y_n)$.

6) Apskatām taisni BC.

a) Tās vienādojumu nosakām, izmantojot punktus $B = (x_1; y_1)$ un $C = (2x_2; 0)$.

$$\frac{x - x_1}{2x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{0 - y_1} \Rightarrow y - y_1 = -\frac{y_1}{2x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{y_1}{2x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

b) $k_{BC} = -\frac{y_1}{2x_2 - x_1}$

c) $|BC| = \sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + (0 - y_1)^2} = \sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + y_1^2}$

7) Apskatām taisni BN.

a) $k_{MB} = -\frac{1}{k_{BC}} = \frac{2x_2 - x_1}{y_1}$, jo $BN \perp BC$ ($BNKC$ ir kvadrāts).

b) Taisnes vienādojumu nosakām, izmantojot k_{BC} un $B = (x_1; y_1)$.

$$y - y_1 = \frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) \Rightarrow y = \frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

c) Taisnes vienādojumu nosakām, izmantojot k_{BC} un $N = (x_n; y_n)$.

$$y - y_n = \frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_n) \Rightarrow y = \frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_n) + y_n$$

d) Tā kā $|BN| = |BC|$ un $|BN| = \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2}$, tad

$$\sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2} = \sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + y_1^2}.$$

8) Apvienojam b) – d) vienādojumu sistēmā.

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) + y_1 \\ y = \dfrac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_n) + y_n \\ \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2} = \sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + y_1^2} \end{cases}$$

Ievietojam otrajā vienādojumā y vietā atbilstošo izteiksmi no pirmā vienādojuma.

$$\frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) + y_1 = \frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_n) + y_n$$

$$\frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_1) - \frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_n) + y_1 = y_n$$

$$\frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_1 - x + x_n) + y_1 = y_n$$

$$\frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x_n - x_1) + y_1 = y_n$$

Ievietojam trešajā sistēmas vienādojumā y_n vietā atbilstošo izteiksmi un nosakām x_n.

$$\sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2} = \sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + y_1^2}$$

$$(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2 = (2x_2 - x_1)^2 + y_1^2$$

$$(x_n - x_1)^2 + \left(\frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x_n - x_1) + y_1 - y_1\right)^2 = (2x_2 - x_1)^2 + y_1^2$$

$$(x_n - x_1)^2 + \frac{(2x_2 - x_1)^2}{y_1^2} \cdot (x_n - x_1)^2 = (2x_2 - x_1)^2 + y_1^2$$

$$(x_n - x_1)^2 \left(1 + \frac{(2x_2 - x_1)^2}{y_1^2}\right) = (2x_2 - x_1)^2 + y_1^2$$

$$(x_n - x_1)^2 \left(\frac{y_1^2 + (2x_2 - x_1)^2}{y_1^2}\right) = (2x_2 - x_1)^2 + y_1^2$$

$$(x_n - x_1)^2 = \frac{(y_1^2 + (2x_2 - x_1)^2) \cdot y_1^2}{(y_1^2 + (2x_2 - x_1)^2)} = y_1^2$$

$$x_n - x_1 = y_1$$

$$x_n = x_1 + y_1$$

Ievietojam y_n atbilstošajā izteiksmē x_n vietā $x_1 + y_1$. Nosakām y_n.

$$y_n = \frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x_n - x_1) + y_1 = \frac{2x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x_1 + y_1 - x_1) + y_1 = 2x_2 - x_1 + y_1$$

9) Esam ieguvuši, ka $N = (x_1 + y_1; 2x_2 - x_1 + y_1)$.

10) $|MN| = \sqrt{\big(x_1 + y_1 - (x_1 - y_1)\big)^2 + \big(2x_2 - x_1 + y_1 - (x_1 + y_1)\big)^2}$

$$|MN| = \sqrt{(2y_1)^2 + (2(x_2 - x_1))^2} = \sqrt{4y_1^2 + 4(2x_2 - x_1)^2} = 2\sqrt{y_1^2 + (2x_2 - x_1)^2}$$

11) Salīdzinām MN un BD.

$$\frac{|MN|}{|BD|} = \frac{2\sqrt{y_1^2 + (2x_2 - x_1)^2}}{\sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + y_1^2}} = 2$$

Ieguvām, ka MN ir divas reizes garāks nekā BD, kas bija jāpierāda.

12) Nosakām taisnes MN vienādojumu, izmantojot punktus $M = (x_1 - y_1; x_1 + y_1)$ un $N = (x_1 + y_1; 2x_2 - x_1 + y_1)$.

$$\frac{x - (x_1 - y_1)}{x_1 + y_1 - (x_1 - y_1)} = \frac{y - (x_1 + y_1)}{2x_2 - x_1 + y_1 - (x_1 + y_1)} \Rightarrow \frac{x - x_1 + y_1}{2y_1} = \frac{y - x_1 - y_1}{2x_2 - 2x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - x_1 - y_1 = \frac{2(x_2 - x_1)(x - x_1 + y_1)}{2y_1} \Rightarrow y = \frac{x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_1 + y_1) + x_1 + y_1$$

13) Tātad $k_{MN} = \frac{x_2 - x_1}{y_1}$. Aprēķinām $k_{BD} \cdot k_{MN}$ vērtību.

$$k_{BD} \cdot k_{MN} = -\frac{y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{y_1} = -1$$

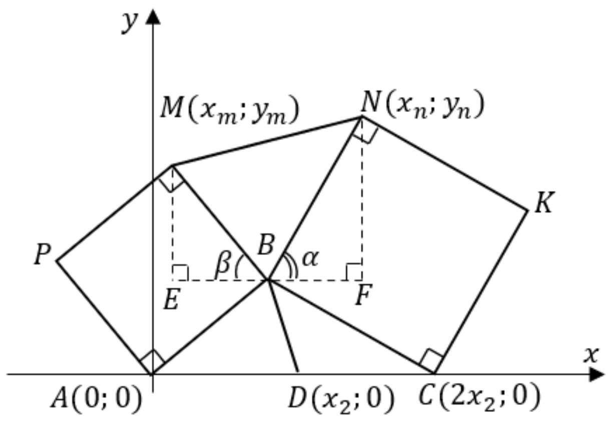
Tā kā taišņu MN un BD virzienu koeficientu reizinājums ir -1, tad $MN \perp BD$, kas bija jāpierāda.

D variants

PIEZĪME Zīmējums ir līdzīgs risinājuma variantam *C*. Saglabājam tos pašus apzīmējumus: $B = (x_1; y_1)$, $D = (x_2; 0)$, $M = (x_m; y_m)$, $N = (x_n; y_n)$ un $C = (2x_2; 0)$. Taisnes BD virziena koeficientu un attālumu starp punktiem B un D var noteikt, izmantojot ieviestos apzīmējumus. Lai noteiktu attālumu starp punktiem M un N, taisnes MN vienādojumu un pēc tam virziena koeficientu, vispirms jānoskaidro punktu M un N koordinātas. Šim nolūkam konstruējam taisnleņķa trīsstūrus MEB un NFB tā, ka $EB \parallel Ox$ un $BF \parallel Ox$ (skat. 28. att.). Apzīmējam $\sphericalangle MBE = \beta$ un $\sphericalangle NFB = \alpha$.

Dots: ΔABC,
$ABMP -$ kvadrāts,
$CBNK -$ kvadrāts,
$BD -$ mediāna.

Jāpierāda: $BD \perp MN$, $MN = 2 \cdot BD$.



28. attēls. **14. uzdevuma D variants**

PIERĀDĪJUMS

Pierādījumu veidosim, izmantojot taišņu vienādojumus un to virziena koeficientus. Ja izrādīsies, kas taisnes MN virziena koeficienta k_{MN} un taisnes BD virziena koeficienta k_{BD} reizinājums ir -1, tad taisnes MN un BD ir perpendikulāras.

1) Nosakām taisnes BD vienādojumu, taisnes virziena koeficientu un attālumu starp punktiem B un D.

   a) Izmantojam punktus $B = (x_1; y_1)$ un $D = (x_2; 0)$.

   $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{0 - y_1} \Rightarrow y - y_1 = -\frac{y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow y = -\frac{y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) - y_1$$

   b) $k_{BD} = -\frac{y_1}{x_2 - x_1}$

   c) $|BD| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (0 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + {y_1}^2}$

Noteiksim $M = (x_m; y_m)$.

2) Apskatām taisni AB.

   a) Tās vienādojumu nosakām, izmantojot punktus $A = (0; 0)$ un $B = (x_1; y_1)$.

   $$\frac{x - 0}{x_1 - 0} = \frac{y - 0}{y_1 - 0} \Rightarrow \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} \Rightarrow y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x$$

   b) $k_{AB} = \frac{y_1}{x_1}$

   c) $|AB| = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

3) Apskatām taisni MB.

   a) $k_{MB} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{x_1}{y_1}$, jo $MB \perp AB$ ($APMB$ ir kvadrāts).

   b) $|MB| = |AB| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

4) Apskatām ΔMEB. Tā kā $EB \parallel Ox$, tad $k_{MB} = -\operatorname{tg}\beta = -\frac{|ME|}{|BE|} = -\frac{x_1}{y_1}$.

5) Līdz ar to

   a) $x_m = x_1 - |BE| = x_1 - y_1$;

   b) $y_m = y_1 + |ME| = y_1 + x_1$.

6) Esam ieguvuši, ka $M = (x_1 - y_1; x_1 + y_1)$.

Noteiksim $N = (x_n; y_n)$.

7) Apskatām taisni BC.

   a) Tās vienādojumu nosakām, izmantojot punktus $B = (x_1; y_1)$ un $C = (2x_2; 0)$.

   $$\frac{x - x_1}{2x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{0 - y_1} \Rightarrow y - y_1 = -\frac{y_1}{2x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$
   $$\Rightarrow y = -\frac{y_1}{2x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$$

b) $k_{BC} = -\frac{y_1}{2x_2 - x_1}$

c) $|BC| = \sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + (0 - y_1)^2} = \sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + {y_1}^2}$

8) Apskatām taisni BN.

a) $k_{BN} = -\frac{1}{k_{BC}} = \frac{2x_2 - x_1}{y_1}$, jo $BN \perp BC$ ($BNKC$ ir kvadrāts).

b) Tā kā $|BN| = |BC| = \sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + {y_1}^2}$

9) Apskatām ΔNFB. Tā kā $FB \parallel Ox$, tad $k_{NB} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{|NF|}{|BF|} = \frac{2x_2 - x_1}{y_1}$.

10) Līdz ar to

a) $x_n = x_1 + |BF| = x_1 + y_1$;

b) $y_n = y_1 + |NF| = y_1 + 2x_2 - x_1$.

11) Esam ieguvuši, ka $N = (x_1 + y_1; 2x_2 - x_1 + y_1)$.

12) $|MN| = \sqrt{\big(x_1 + y_1 - (x_1 - y_1)\big)^2 + \big(2x_2 - x_1 + y_1 - (x_1 + y_1)\big)^2}$

$|MN| = \sqrt{(2y_1)^2 + (2(x_2 - x_1))^2} = \sqrt{4y_1^2 + 4(2x_2 - x_1)^2} = 2\sqrt{{y_1}^2 + (2x_2 - x_1)^2}$

13) Salīdzinām MN un BD.

$$\frac{|MN|}{|BD|} = \frac{2\sqrt{y_1^2 + (2x_2 - x_1)^2}}{\sqrt{(2x_2 - x_1)^2 + y_1^2}} = 2$$

Ieguvām, ka MN ir divas reizes garāks nekā BD, kas bija jāpierāda.

14) Nosakām taisnes MN vienādojumu, izmantojot punktus

$M = (x_1 - y_1; x_1 + y_1)$ un $N = (x_1 + y_1; 2x_2 - x_1 + y_1)$.

$$\frac{x - (x_1 - y_1)}{x_1 + y_1 - (x_1 - y_1)} = \frac{y - (x_1 + y_1)}{2x_2 - x_1 + y_1 - (x_1 + y_1)} \Longrightarrow \frac{x - x_1 + y_1}{2y_1} = \frac{y - x_1 - y_1}{2x_2 - 2x_1}$$

$$\Longrightarrow y - x_1 - y_1 = \frac{2(x_2 - x_1)(x - x_1 + y_1)}{2y_1} \Longrightarrow y = \frac{x_2 - x_1}{y_1} \cdot (x - x_1 + y_1) + x_1 + y_1$$

15) Tātad $k_{MN} = \frac{x_2 - x_1}{y_1}$. Aprēķinām $k_{BD} \cdot k_{MN}$ vērtību.

$$k_{BD} \cdot k_{MN} = -\frac{y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{y_1} = -1$$

Tā kā taišņu MN un BD virzienu koeficientu reizinājums ir -1, tad $MN \perp BD$, kas bija jāpierāda.

PAPILDUZDEVUMI 12., 13., 25., 26., 27., 28., 29., 30., 31., 39., 41., 14-1.

15. uzdevums

Pierādi: ja a, b, c ir patvaļīga trīsstūra malas, tad eksistē trīsstūris, kura malu garumi ir $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$! Vai ir patiess apgrieztais apgalvojums?

PIEZĪME Šoreiz pierādījums sastāv no divām daļām: ir jāpierāda dotā apgalvojuma patiesums un jānoskaidro, vai ir patiess apgrieztais apgalvojums.

1. daļa. “Ja *A*, tad *B*”

Dots: a, b, c ir patvaļīga trīsstūra malas.

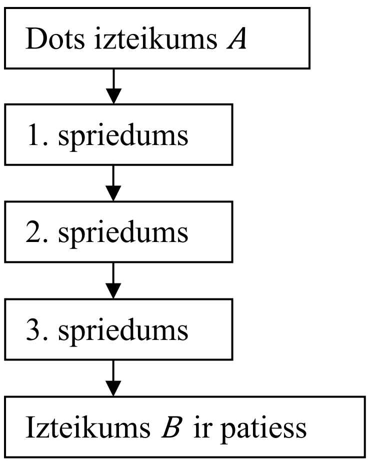
Jāpierāda: eksistē trīsstūris ar malu garumiem $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

PIERĀDĪJUMS

1) Ja pieņemam, ka c ir trīsstūra garākā mala, tad ir patiesa vienādība $a + b > c$.
2) Tā kā ir jānoskaidro, vai arī $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$, tad vispirms noteiksim, ar ko ir vienāds nevienādības kreisās puses summas kvadrāts. Pārrakstām izteiksmi, izmantojot saīsinātās reizināšanas formulu $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

   $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$

   Secinām, ka iegūtā izteiksme noteikti ir lielāka nekā dotā trīsstūra malu a un b summa, jo tai tiek pieskaitīts pozitīvs skaitlis $2\sqrt{ab}$.
3) Tā kā $a + b > c$, tad $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 > c$. Izvelkot kvadrātsakni no abām nevienādības pusēm, iegūstam patiesu nevienādību $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$.
4) Tātad eksistē trīsstūris ar malu garumiem $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, kas bija jāpierāda (pierādījuma shēmu skat. 29. att.).



29. attēls. **15. uzdevuma 1. daļas pierādījuma shēma**

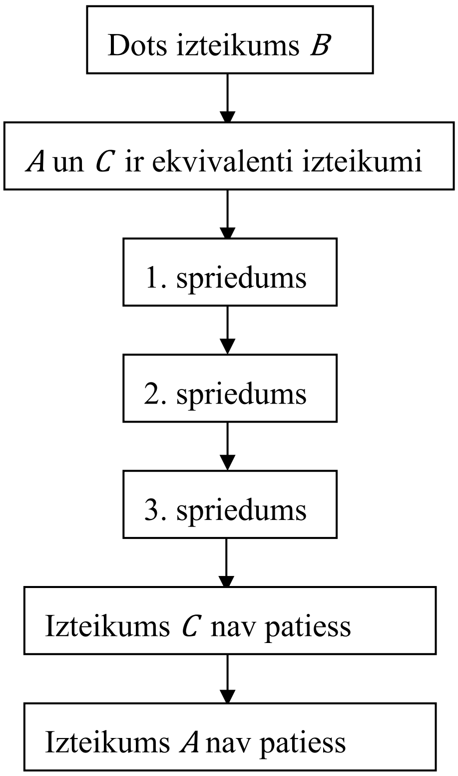
2. daļa. “Ja B, tad A”

Dots: $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ ir patvaļīga trīsstūra malas.
Jāpierāda: eksistē trīsstūris ar malu garumiem a, b, c.

PIERĀDĪJUMS

1) Šis apgalvojums ir ekvivalents apgalvojumam: “Ja patvaļīga trīsstūra malu garumi ir a, b, c, tad eksistē trīsstūris ar malu garumiem a^2, b^2, c^2.” Pārbaudīsim, vai ekvivalentais apgalvojums ir patiess jebkuram trīsstūrim.
2) Izvēlamies vienādsānu taisnleņķa trīsstūri, kura katetes garums ir 1 cm. Tādā gadījumā hipotenūzas garums ir $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ cm (pēc Pitagora teorēmas).
3) Saskaņā ar apgalvojumu eksistē trīsstūris, kura malu garumi ir a^2, b^2, c^2. Tātad vajadzētu eksistēt arī trīsstūrim ar malu garumiem 1^2, 1^2, $\left(\sqrt{2}\right)^2$ jeb 1, 1 un 2.
4) Trīsstūris ar šādiem malu garumiem neeksistē, jo tā divu malu garumu summa $1+1=2$ ir vienāda ar trešās malas garumu (neizpildās trīsstūra nevienādība).
5) Esam atraduši gadījumu, kad apgrieztā apgalvojuma ekvivalentais apgalvojums nav patiess. Līdz ar to arī apgrieztā apgalvojuma izteikums A nav patiess.
6) Secinām, ka apgrieztais apgalvojums nav patiess. Ja patvaļīga trīsstūra malu garumi ir $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, tad ne vienmēr eksistē trīsstūris ar malu garumiem a, b, c.

Pierādījuma gaita shematiski parādīta 30. attēlā.



30. attēls. **15. uzdevuma 2. daļas pierādījuma shēma**

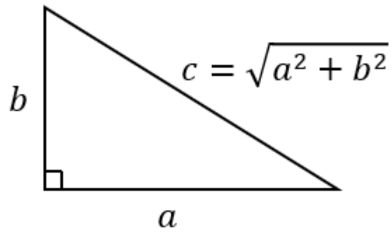
PAPILDUZDEVUMI 2., 15., 33., 34., 35., 36., 37.

16. uzdevums

Atrodi vismaz divus taisnleņķa trīsstūrus, kuriem to laukuma un perimetra skaitliskās vērtības ir vienādas!

Dots: $P_\Delta = a + b + c,$
$S_\Delta = ab/2,$
$S_\Delta = P_\Delta.$

Jāaprēķina: a, b, c (skat. 31. att.).



31. attēls. **16. uzdevuma zīmējums**

ATRISINĀJUMS

Izmantojot doto, uzrakstīsim vienādojumu un noteiksim trīsstūra malu garumu atbilstošās izteiksmes. Ievietosim skaitļus un aprēķināsim trīsstūra malu garumus.

1) Pārrakstām doto izteiksmi $S_\Delta = P_\Delta$, ievietojot atbilstošos lielumus.

$$\frac{ab}{2} = a + b + c$$

2) Lai varētu izteikt malas a garumu atkarībā no malas b garuma, izsakām malu c ar a un b pēc Pitagora teorēmas.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3) Ievietojam vienādojumā c vietā atbilstošo izteiksmi.

$$\frac{ab}{2} = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{ab}{2} - a - b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Kāpinām abas vienādojuma puses kvadrātā.

$$\frac{a^2b^2}{4} + a^2 + b^2 - a^2b - b^2a + 2ab = a^2 + b^2$$

$$\frac{a^2b^2}{4} - a^2b - b^2a + 2ab = 0$$

Dalām abas vienādojuma puses ar ab ($\neq 0$, jo malu garumi nav 0) un izsakām a.

$$\frac{ab}{4} - a - b + 2 = 0$$

$$\frac{ab}{4} - a = b - 2$$

$$a\left(\frac{b}{4} - 1\right) = b - 2$$

$$a \cdot \frac{b-4}{4} = b - 2$$

$$a = \frac{4(b-2)}{b-4} = \frac{4b-8}{b-4} = \frac{4b-16+8}{b-4} = \frac{4(b-4)+8}{b-4} = 4 + \frac{8}{b-4}$$

Jāievēro, ka $b \neq 4$, jo 4 neietilpst izteiksmes definīcijas apgabalā.

4) Izvēlamies b vērtību un, ievietojot atbilstošajās izteiksmēs, aprēķinām a un c. Pārbaudām, vai atrastie malu garumi atbilst uzdevuma nosacījumiem.

a) Ja $b = 8$, tad $a = 4 + 8 : (8 - 4) = 4 + 2 = 6$ un $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

Pārbaude: $P_\Delta = 6 + 8 + 10 = 24$ (g. v.), $S_\Delta = 6 \cdot 8 : 2 = 48 : 2 = 24$ (l. v.).

b) Ja $b = 12$, tad $a = 4 + 8 : (12 - 4) = 4 + 1 = 5$ un $c = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

Pārbaude: $P_\Delta = 5 + 12 + 13 = 30$ (g. v.), $S_\Delta = 5 \cdot 12 : 2 = 60 : 2 = 30$ (l. v.).

Atbilde: Piemēram, 6, 8, 10 un 5, 12, 13. Var arī būt citi atbilžu varianti, b vietā ievietojot citu skaitli, bet jāatceras, ka $b \neq 4$. (Kāpēc $b > 4$?)

PAPILDUZDEVUMI 10., 40.

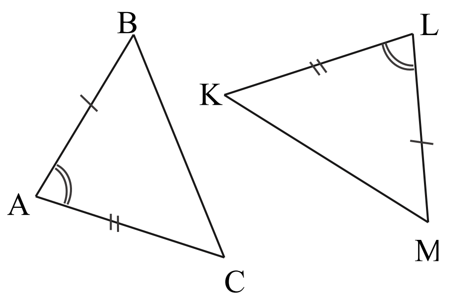
2.3. Papilduzdevumi

Katrs uzdevums ir kā palīguzdevums vismaz vienam no pamatuzdevumiem. To risināšanai nepieciešamas ne tikai vidusskolas matemātikas zināšanas, bet arī pamatskolas kursā apgūtās zināšanas. Papilduzdevumu skaits var pārsniegt norādīto skaitu, lai nepieciešamības gadījumā skolotājs var palielināt palīdzības apjomu.

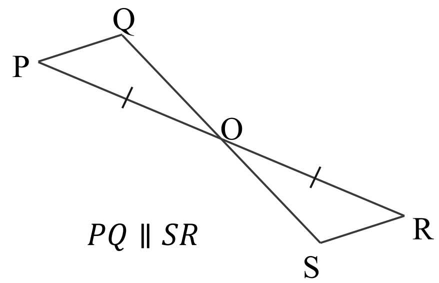
1. uzdevums

Nosaki un pieraksti vienādo trīsstūru pārus un to vienādības pazīmi!

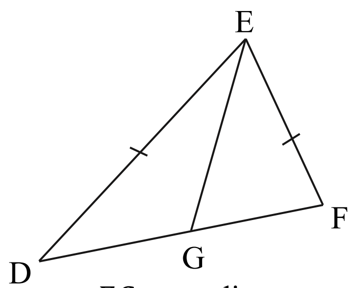
a)



b)

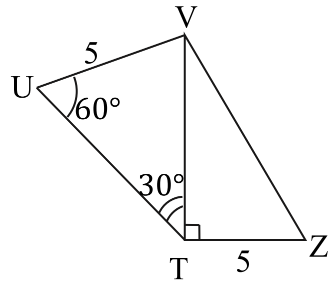


c)



EG − mediāna

d)



Atbilde: a) $\Delta ABC = \Delta LMK\ (mlm)$;
b) $\Delta POQ = \Delta ROS\ (lml)$;
c) $\Delta DEG = \Delta FEG\ (mmm)$;
d) $\Delta TVZ = \Delta VTU\ (mlm)$.

2. uzdevums

Vai eksistē trīsstūris ar malu garumiem:

a) 5 cm, 5 cm, 5 cm;

b) 3 cm, 3 cm, 6 cm;

c) 4 cm, 12 cm, 8 cm;

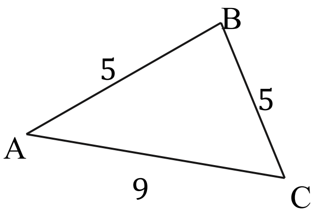
d) 1,5 dm, 7 cm, 9 cm?

Atbilde: a) jā; b) nē; c) nē; d) jā.

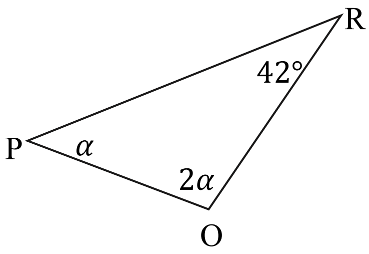
3. uzdevums

Sakārto augošā secībā dotā trīsstūra leņķus pēc to leņķu lielumiem un/vai malas pēc to garumiem, ja tas iespējams!

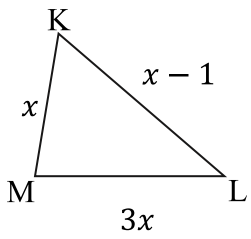
a)



b)



c)



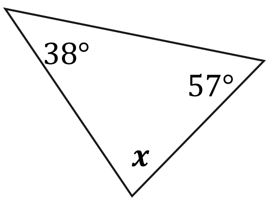
Atbilde: a) $\sphericalangle A = \sphericalangle C < \sphericalangle B$;

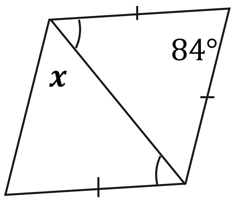
b) $\sphericalangle R < \sphericalangle P < \sphericalangle O$, $OP < OR < PR$;

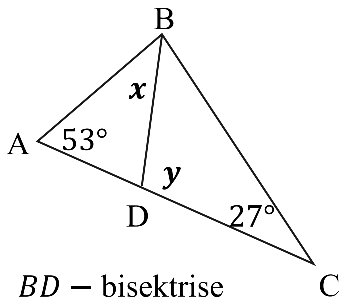
c) $KL < MK < ML$, $\sphericalangle M < \sphericalangle L < \sphericalangle K$.

4. uzdevums

Aprēķini nezināmā leņķa lielumu!







a) $x =$ b) $x =$ c) $x =$, $y =$

Atbilde: a) 85°; b) 48°; c) 50°, 103°.

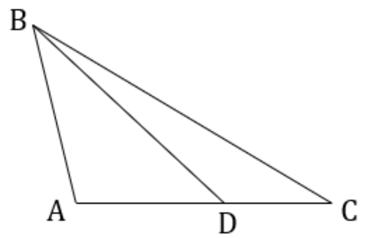
5. uzdevums

Aprēķini trīsstūra laukumu, ja tā vienas malas garums ir 8 cm, bet augstums, kas novilkts pret šo malu, ir 5 cm.

Atbilde: 20 cm^2.

6. uzdevums

Aprēķini ΔBCD laukumu, ja zināms, ka ΔABD laukums ir 15 cm^2, $AD = 6$ cm, bet $DC = 4$ cm (skat. 32. att.).



32. attēls. **6. uzdevuma zīmējums**

Atbilde: $10\ \text{cm}^2$.

7. uzdevums

Trīsstūra KLM malas KL un KM ir attiecīgi 4 cm un $\sqrt{6}$ cm, bet $\sphericalangle K = 60°$. Aprēķini trīsstūra laukumu!

Atbilde: $3\sqrt{2}\ \text{cm}^2$.

8. uzdevums

Aprēķini kvadrāta diagonāles garumu, ja tā malas garums ir 4 cm!

Atbilde: $4\sqrt{2}$ cm.

9. uzdevums

Vienādmalu trīsstūra malas garums ir vienāds ar kvadrāta, kura malas garums ir 2 cm, diagonāles garumu. Aprēķini šī trīsstūra laukumu!

Atbilde: $2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

10. uzdevums

Vai eksistē vienādmalu trīsstūris, kura perimetra un laukuma skaitliskās vērtības ir vienādas? Ja eksistē, pamato ar piemēru!

Atbilde: Eksistē, tā malas garums ir $4\sqrt{3}$. (Malas garumu iegūst, apzīmējot trīsstūra malas garumu, uzrakstot trīsstūra perimetra un laukuma atbilstošās izteiksmes, liekot starp izteiksmēm vienādības zīmi un atrisinot iegūto vienādojumu.)

11. uzdevums

Aprēķini piecstūra $ABCDE$ laukumu, ja $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle D = 60°$, $\sphericalangle BEC = 30°$, $AB = 8$, $ED = 10$, $AE = 6$, $CD = ED$!

Atbilde: $49 + 25\sqrt{3}$.

12. uzdevums

Dots trīsstūris ABC. Aprēķini tā malu AC, ja:

a) $AB = 6\sqrt{2}$, $BC = 12$ un $\sphericalangle B = 45°$,

b) $AB = 5$, $BC = 7$ un $\sphericalangle A = 120°$.

Atbilde: a) $6\sqrt{2}$;   b) 3.

13. uzdevums

Trīsstūra malu garumi ir 5 cm, 9 cm un 10 cm. Aprēķini mediānas garumu, ja tā novilkta no lielākā leņķa virsotnes!

Atbilde: $2\sqrt{7}$ cm.

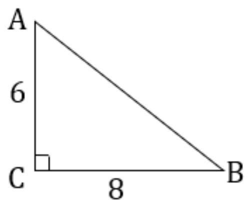
14. uzdevums

Taisnleņķa trīsstūra katešu garumi ir 21 un 20. Aprēķini trīsstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiusa garumu!

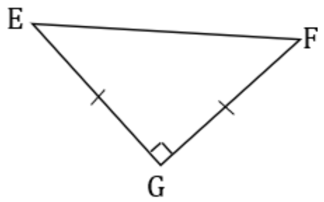
Atbilde: 14,5

15. uzdevums

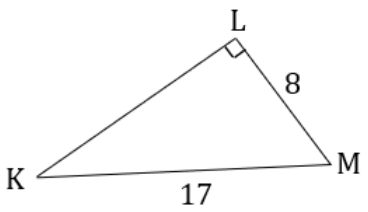
Aprēķini nezināmo lielumu!



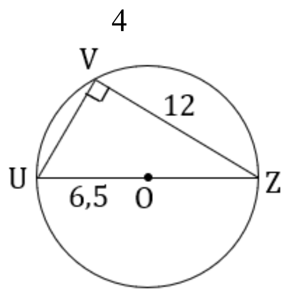
$AB = ?$



$EF = ?$



$KL = ?$



$UV = ?$

Atbilde: $AB = 10$ cm, $KL = 15$ cm, $EF = 4\sqrt{2}$ cm, $UV = 5$ cm.

16. uzdevums

Taisnleņķa trīsstūrī ABC no taisnā leņķa virsotnes novilkts augstums CD, kas sadala hipotenūzu nogriežņos attiecīgi 2 : 1. Aprēķini AC, BC un CD, ja $AB = 9$ cm!

Atbilde: $3\sqrt{3}$ cm, $3\sqrt{6}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm.

17. uzdevums

Trīsstūra malu garumi ir 7 cm, 8 cm un 13 cm. Aprēķini riņķa līnijas rādiusa garumu, ja trīsstūris ir:

a) ievilkts riņķa līnijā;

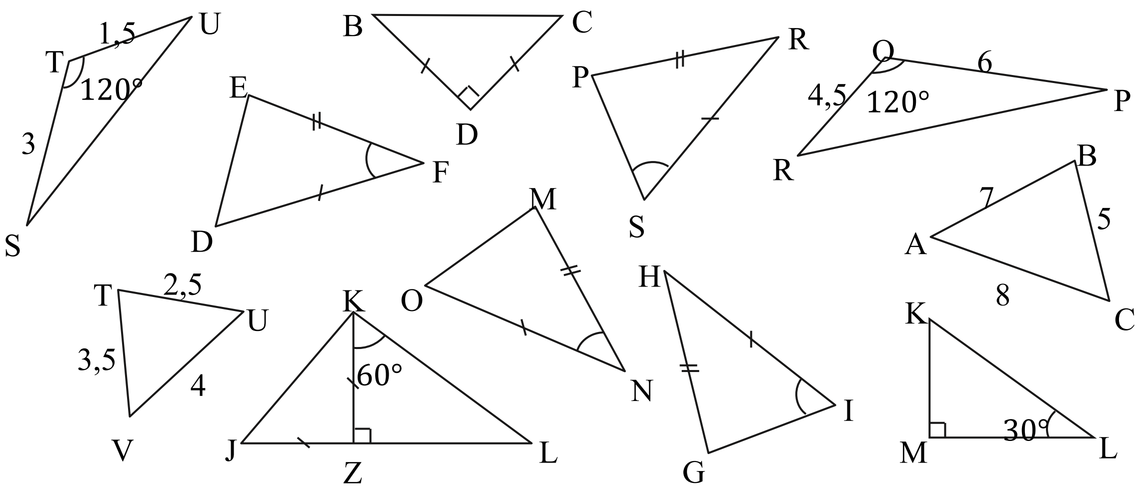
b) apvilkts ap riņķa līniju.

Atbilde: a) $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ cm; b) $\sqrt{3}$ cm.

18. uzdevums

Nosaki līdzīgo trīsstūru pārus un aizpildi tabulu!

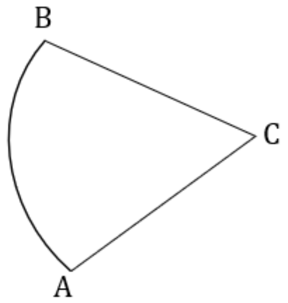
Pazīme			
Līdzīgo trīsstūru pāri			



Atbilde: $\Delta TUV \sim \Delta ACB$ (mmm),
$\Delta EFD \sim \Delta MNO$ (mlm),
$\Delta BDC \sim \Delta KZJ$ (mlm vai ll),
$\Delta ZKL \sim \Delta MKL$ (ll).

19. uzdevums

Aprēķini līklīnijas trīsstūra ABC laukumu, ja $\sphericalangle C = 60°$ un $BC = 2$ cm! Aprēķini segmenta laukumu, ko atšķeļ horda AB (skat. 33. att.)!

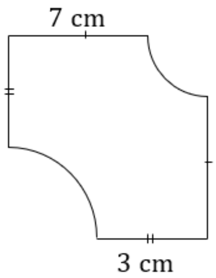


33. attēls. **19. uzdevuma zīmējums**

Atbilde: 24π cm^2, $24\pi - \sqrt{3}$ cm^2.

20. uzdevums

Students pirms eksāmena sagatavoja špikeri – kvadrātisku lapiņu ar malas garumu 12 cm. No rīta viņš secināja, ka naktī viņu ir apciemojusi pele un nograuzusi divus pretējos špikera stūrus tā, kā parādīts zīmējumā (skat. 34. att.). Students nolēma: ja špikerī būs saglabājusies vismaz puse informācijas (lapiņa bija aprakstīta no malas līdz malai), tad viņš to ņems līdzi.
Palīdzi viņam noskaidrot, cik liels laukums informācijas ir saglabājies! Vai students ņems špikeri uz eksāmenu? Kā būtu rīkojies tu?



34. attēls. **20. uzdevuma zīmējums**

Atbilde: 64,5 cm^2.
Students neņems špikeri uz eksāmenu.

21. uzdevums

Riņķa līnijai ar centru punktā O caur punktiem A un B novilktas divas pieskares, kas krustojas punktā C. Aprēķini $\sphericalangle ACO$ lielumu, ja $\sphericalangle AOB = 144°$!

Atbilde: $\sphericalangle ACO = 18°$.

22. uzdevums

Trīsstūri ABC un $A_1B_1C_1$ ir līdzīgi. Aprēķini trīsstūra $A_1B_1C_1$ laukumu, ja:

a) $AB = 9$ cm, $A_1B_1 = 18$ cm un $S_{ABC} = 27$ cm^2;

b) $AB = 4{,}5$ cm, $A_1B_1 = 1{,}5$ cm un $S_{ABC} = 36$ cm^2!

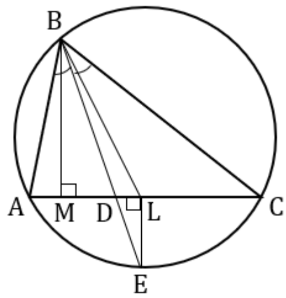
Atbilde: a) 108 cm^2; b) 4 cm^2.

23. uzdevums

No trīsstūra virsotnes novilkts augstums, mediāna un bisektrise (skat. 35. att.). Pierādi, ka jebkurā trīsstūrī bisektrise atrodas starp mediānu un augstumu! Aizpildi tukšās vietas pierādījumā!

Dots: ΔABC,
$BM \perp AC$,
$AL = LC$,
$\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$.

Jāpierāda: $D \in ML$.



35. attēls. **23. uzdevuma zīmējums**

PIERĀDĪJUMS

Apskatīsim augstumu, mediānu un bisektrisi, kas novilkti no ΔABC virsotnes ... . Pagarinām .... BD, līdz tā krusto trīsstūrim apvilkto riņķa līniju punktā ... .

1) Punkts E ir loka AC ...., jo BD ir .... ABC, kas balstās uz .... AC, bisektrise.
2) Tādā gadījumā punkta E projekcija uz AC ir malas AC ....

Līdz ar to .... pamats M un .... pamats L ir nogriežņa BE .... projekcijas uz nogriežņa AC. Tas nozīmē, ka .... , kas bija jāpierāda.

Atbilde: A, bisektrisi, E, viduspunkts, leņķa, loka, viduspunkts, augstuma, mediānas, galapunktu, $D \in ML$.

24. uzdevums

Aprēķini regulāra n-stūra virsotnes leņķi, ja:

a) $n = 4$, b) $n = 9$, c) $n = 15$!

Atbilde: a) $90°$;
b) $140°$;
c) $156°$.

25. uzdevums

Nosaki taisnes vienādojumu, ja tās virziena koeficients ir 3 un tai pieder punkts $A(-2; 5)$!

Atbilde: $y = 3x + 11$.

26. uzdevums

Nosaki 25. uzdevumā minētajai taisnei perpendikulāras taisnes vienādojumu, ja tās krustojas punktā $B(-4: 1)$!

Atbilde: $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

27. uzdevums

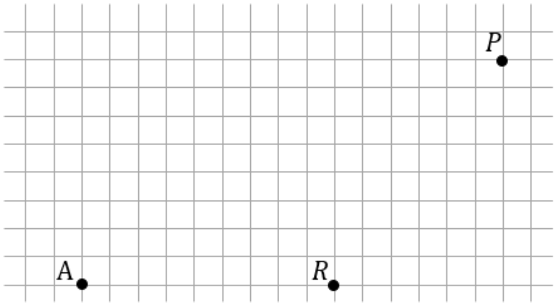
Aprēķini leņķa, ko veido taisne $y = x + 2$ ar Ox asi, lielumu! Nosaki kādas taisnes vienādojumu, kas veido ar Ox asi $135°$ lielu leņķi un a) ir perpendikulāra dotajai taisnei, b) nav perpendikulāra dotajai taisnei, c) ir paralēla dotajai taisnei!

Atbilde: $45°$;
a) $y = -x + 2$;
b) $y = -x + a$, $a \in R$;
c) neeksistē taisne, kas ir paralēla dotajai, jo tās neveido ar Ox asi vienlielus leņķus.

28. uzdevums

Zīmējumā (1 rūtiņa atbilst 1 km^2) attēlotas trīs dzīvesvietas – Aināra, Renātes un Paula māja, kas apzīmētas ar viņu vārda pirmo burtu (skat. 36. att.). Nav atzīmēta tikai Ivara māja. Pauls uzaicināja Aināru ciemos. Tomēr vispirms Ainārs apciemoja Renāti un tikai pēc tam Paulu.

1) Cik kilometru garu ceļu veica Aivars?
2) Par cik kilometriem īsāks ceļš Aivaram būtu jāveic, ja viņš būtu uzreiz devies pie Paula?
3) Zināms, ka Ivara un Aināra māja atrodas tikpat tālu viena no otras kā Renātes un Paula māja, savukārt attālums starp Paula un Ivara māju ir tikpat liels kā attālums starp Aivara un Renātes māju. Nosaki, kur atrodas Ivara māja, un atliec zīmējumā atbilstošo punktu!
4) Aprēķini attālumu starp Ivara un Renātes dzīvesvietu!



36. attēls. **28. uzdevuma zīmējums**

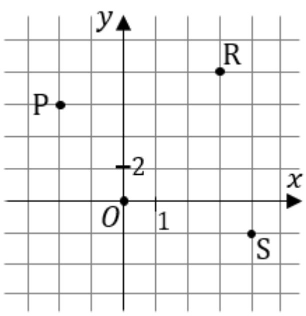
Atbilde: a) 19 km; b) 2 km; c) 8 rūtiņas uz augšu no Aivara mājas un 6 rūtiņas pa labi; d) $\sqrt{73}$ km.

PIEZĪME Šo uzdevumu var variēt atkarībā no auditorijas. 6. klases skolēnus skolotājs var aicināt izmērīt un pēc skolotāja izvēlēta mēroga rēķināt atbilstošos attālumus. 8. klases skolēni var konstruēt atbilstošos taisnleņķa trīsstūrus un rēķināt attālumu kā taisnleņķa trīsstūra hipotenūzas garumu. Savukārt 10. klases skolēniem šo uzdevumu var piedāvāt gan tēmas “vektori” aktualizācijai, lai rosinātu skolēnu interesi par vektoriem, gan zināšanu nostiprināšanai, aicinot iezīmēt attēlā koordinātu asis un rēķināt attālumu kā vektora garumu.

Visbeidzot var sadalīt klasi grupās un aicināt katrai no tām atrisināt uzdevumu ar vienu no iepriekš aprakstītajiem paņēmieniem. Pēc tam risinājums jāprezentē pārējām grupām, minot tā priekšrocības un iespējamos trūkumus. Tā skolēniem tiktu dota iespēja apskatīt doto problēmu no dažādiem skata punktiem, rosinātu radošo domāšanu arī citos uzdevumos un tiktu atkārtotas un nostiprinātas jau iepriekš apgūtās zināšanas.

29. uzdevums

Savienojot punktus O, P, R un S, veidojas četrstūris $OPRS$ (skat. 37. att.). Nosaki tā diagonāļu vienādojumus!



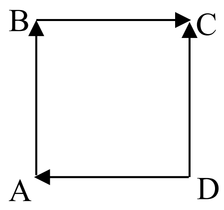
37. attēls. **29. uzdevuma zīmējums**

Atbilde: $y = -\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$ un $y = \frac{8}{3}x$.

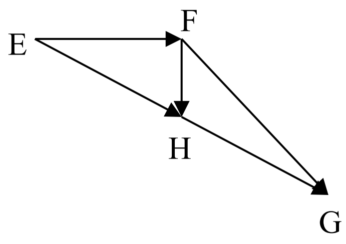
30. uzdevums

Nosaki vienādu vektoru pārus!

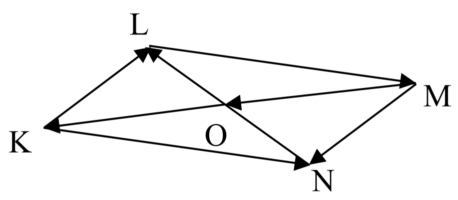
a) $ABCD$ – kvadrāts



b) FH – mediāna



c) $KLMN$ – paralelograms



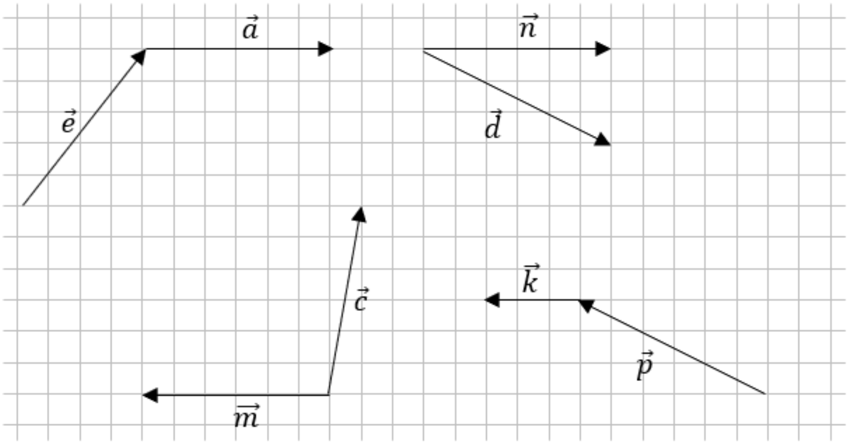
Atbilde: a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$;

b) $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{HG}$;

c) $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KN}, \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{MO}, \overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{MN}$.

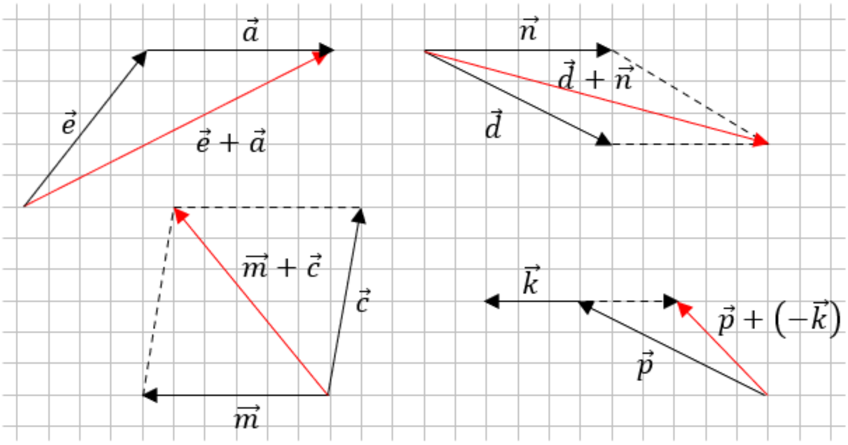
31. uzdevums

Konstruē vektorus $\vec{e}+\vec{a}$, $\vec{d}+\vec{n}$, $\vec{m}+\vec{c}$ un $\vec{p}+(-\vec{k})$ (skat. 38. att.)!



38. attēls. **31. uzdevuma zīmējums**

Atbilde: skat. 39. att.



39. attēls. **31. uzdevuma atrisinājums**

32. uzdevums

Pierādi, ka nevienādība $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ ir patiesa, ja a un b ir pozitīvi skaitļi!

Atbilde: veicot identiskus pārveidojumus, iegūst nevienādību $(a^2+b^2)/2 \geq \sqrt{a^2b^2}$, kas ir pareiza pēc teorēmas par divu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

33. uzdevums

Pierādi: ja divas taisnes ir perpendikulāras pret trešo taisni, tad tās ir paralēlas!

Atbilde: pierādījumu veido, pieņemot pretējo, ka šīs taisnes nav paralēlas. No pieņēmuma izriet, ka taisnēm ir krustpunkts un izveidojas trīsstūris, kura divi leņķi ir taisni. Tas nav iespējams. Līdz ar to pieņēmums ir aplams. Dotais apgalvojums ir patiess.

34. uzdevums

Vai dotais apgalvojums ir patiess? Ja nav, pamato ar pretpiemēru!

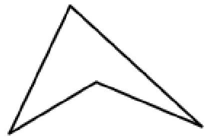
a) Visi četrstūri ir izliekti.

b) Neeksistē taisnstūris, kuram tā pretējās malas nav pa pāriem paralēlas.

c) Izliektā četrstūrī, kura malu garumi pēc kārtas ir 5 cm, 9 cm, 6 cm, 2 cm, ir ievilkta riņķa līnija.

d) Neeksistē vienādmalu trīsstūris, kuram tā perimetra un laukuma skaitliskās vērtības sakrīt.

Atbilde: a) nē (skat. 40. att.); b) jā; c) jā; d) nē, eksistē, tā mala ir $4\sqrt{3}$.



40. attēls. **34. uzdevuma atrisinājums**

35. uzdevums

Vai dotie apgalvojumi A un B ir ekvivalenti?

a) A: Latvijas galvaspilsēta ir Rīga.
B: Tulpe ir ziedaugs.

b) A: Sandra, Liene un Maija ir meiteņu vārdi.
B: Trīsstūrim ir divas diagonāles.

c) A: Aprīlī ir 31 diena.
B: Latvijas karogā nav baltās krāsas.

d) A: Ja četrstūra pretējo leņķu suma ir 180°, tad to var ievilkt riņķa līnijā.
B: Ja četrstūra pretējo leņķu suma nav 180°, tad to nevar ievilkt riņķa līnijā.

Atbilde: a) jā; b) nē; c) jā; d) jā.

36. uzdevums

Uzraksti dotajam apgalvojumam apgriezto apgalvojumu!

a) Ja Jānim ir kaķis, tad viņa mīļākais mājdzīvnieks ir kaķis.

b) Ja šodien ir darbadiena, tad es eju uz skolu.

c) Ja trīsstūra divi leņķi ir vienādi, tad tas ir vienādsānu trīsstūris.

d) Ja četrstūra diagonāles ir perpendikulāras, tad tas ir kvadrāts.

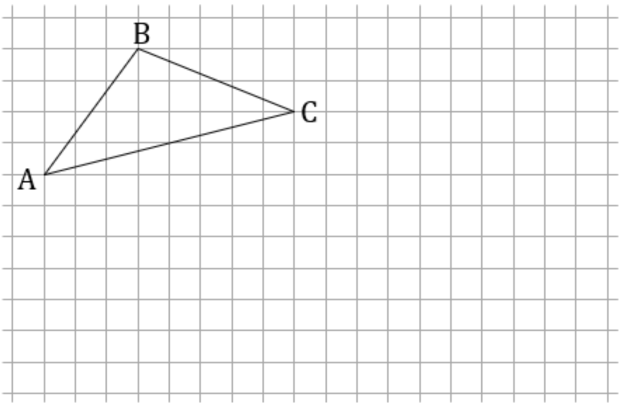
Atbilde: a) Ja Jāņa mīļākais mājdzīvnieks ir kaķis, tad viņam ir kaķis.
b) Ja es eju uz skolu, tad šodien ir darbadiena.
c) Ja trīsstūris ir vienādsānu, tad tā divi leņķi ir vienādi.
d) Ja četrstūris ir kvadrāts, tad tā diagonāles ir perpendikulāras.

37. uzdevums

Uzraksti vienu apgalvojumu un tam apgriezto apgalvojumu!

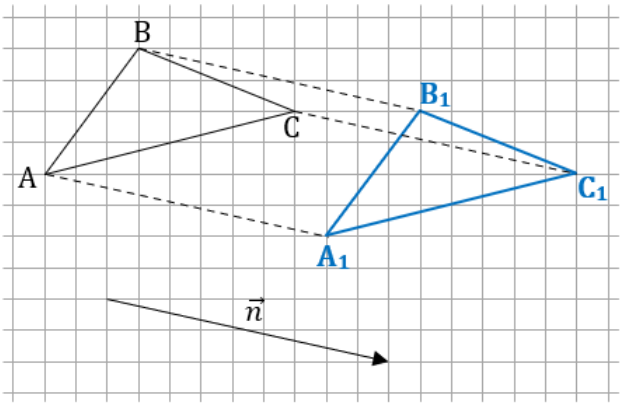
38. uzdevums

Konstruē trīsstūra ABC (skat. 41. att.) attēlu paralēlajā pārnesē par vektoru $\vec{n} = (9; -2)$, vispirms konstruējot paralēlās pārneses vektoru!



41. attēls. **Trīsstūris ABC**

Atbilde: skat. 42. att.

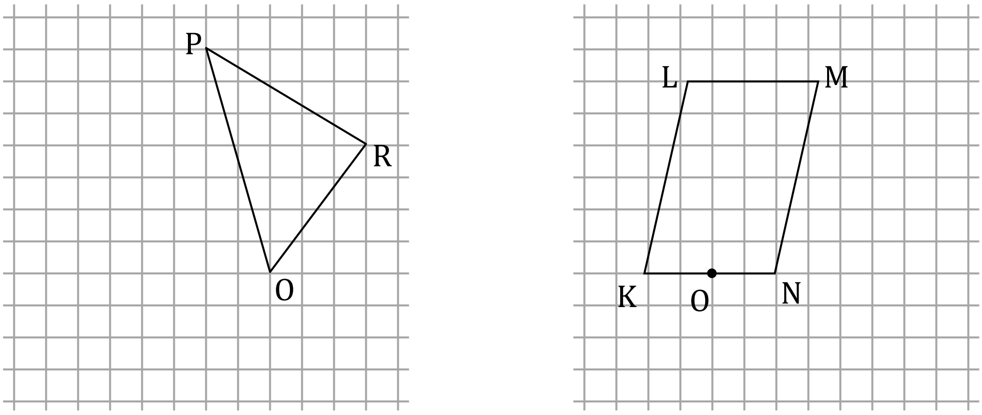


42. attēls. **38. uzdevuma risinājums**

39. uzdevums

Konstruē figūru (skat. 43. att.), kas iegūta, veicot pagriezienu ap

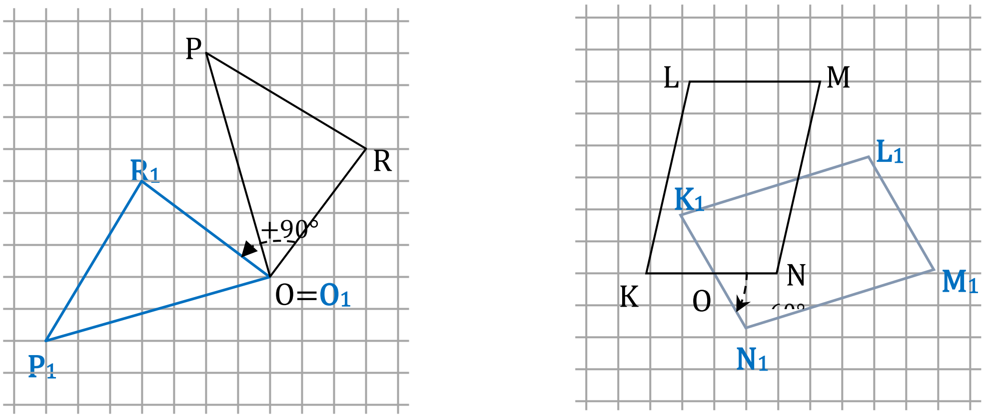
a) centru O par 90°;   b) centru O par $-60°$!



43. attēls. **39. uzdevuma zīmējums**

Atbilde: skat. 44. att.

a) Pagrieziens ap centru O par 90°.   b) Pagrieziens ap centru O par $-60°$.



44. attēls. **39. uzdevuma risinājums**

40. uzdevums

Izpildi algebriskos pārveidojumus!

a) $(a+5)^2 =$

b) $\left(\sqrt{3}-2b\right)^2 =$

c) $(x-3y)^2 =$

d) $(-4x-y)^2 - 8xy =$

e) $v^2 - (v+7z)^2 - z^2 =$

f) $(6x+y)^2 + (x-6y)^2 =$

g) $(a+b+1)^2 =$

h) $(2z-u+v)^2 =$

Atbilde: a) $a^2+10a+25$;

b) $3-4\sqrt{3}b+4b^2$;

c) $x^2-6xy+9y^2$;

d) $16x^2+y^2$;

e) $-14vz-2z^2$;

f) $37x^2+37y^2$;

g) $a^2+b^2+1+2ab+2a+2b$;

h) $4z^2+u^2+v^2-4uz+4vz-2uv$.

41. uzdevums

Aprēķini izteiksmes vērtību!

a) $\sin 180° =$

b) $\cos 60° =$

c) $\sin 120° =$

d) $\cos 135° =$

e) $\cos 0° =$

f) $-\cos 150° =$

Atbilde: a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) 1; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

42. uzdevums

Atrodi rāmī atbilstošo izteiksmes vērtību!

1) $\arcsin \frac{1}{2} =$

2) $\arccos(-1{,}5) =$

3) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$

4) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

5) $\cos\ (\arcsin 1) =$

6) $A \in [-1; 1],\ \sin\ (\arccos A) =$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
0	π	1	-1
$\sqrt{1-A^2}$	$\frac{\pi}{6}$		
$0°$	nav definēta	A	

Atbilde: 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) nav definēta; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) $\sqrt{1-A^2}$.

43. uzdevums

Vienkāršo izteiksmi!

a) $\cos\alpha\,(1+\sin\beta)+\sin(\alpha-\beta) =$

b) $\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta) =$

Atbilde: a) $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha$; b) $-2\sin\beta\cos\alpha$.

44. uzdevums

Nosaki, vai dotā virkne ir aritmētiskā progresija!

a) $1; 3; 5; 7; \ldots$

b) $4; 2; 1; 0{,}5; \ldots$

c) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \ldots$

d) $a_n = 7-n, n \in N$.

Atbilde: a) ir, jo $d = 2$; b) nav; c) ir, jo $d = \frac{\pi}{12}$; d) ir, jo $d = -1$.

45. uzdevums

Aprēķini aritmētiskās progresijas nezināmo locekli!

a) $2; 5; a_3; 11; 14; \ldots, a_3 - ?$

b) $a_1 = 7$ un $a_3 = 15$, $a_2 - ?$

c) $a_3 = -1$ un $a_5 = 2$, $a_2 - ?$

Atbilde: a) 8; b) 11; c) $-2{,}5$.

Literatūra

Mencis J., Mencis J. (jun.) (2004) *Algebra īsi un vienkārši*. Rīga: Zvaigzne ABC.

Mencis J., Mencis J. (jun.) (2004) *Ģeometrija īsi un vienkārši.* Rīga: Zvaigzne ABC.

Oliņa Z., Namsone D., France I. (2018) *Mācīšanās lietpratībai.* Kolektīvā monogrāfija. Rīga: LU Akadēmiskais apgāds.

Pielikumi

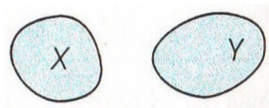
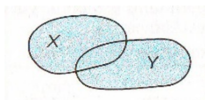
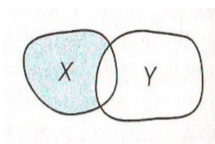
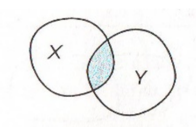
1. pielikums
Matemātikas terminu skaidrojošā vārdnīca

Izmanto skaidrojošo vārdnīcu kā turpinājuma uzdevumu, jo tevi gaida praktikums II, – papildini tabulu ar piezīmēm un izveido jaunu kolonnu ar zīmējumiem! Paskaidro, kāpēc dažas definīcijas prasa zināmu teorētisku sagatavotību!

Tabula. **Matemātikas terminu skaidrojošā vārdnīca**

Jēdziens	**Zīmējums**	**Definīcija**	**Piezīme**
Absolūtais biežums		Kādas datu vērtības skaits.	
Amplitūda		Starpība starp datu vislielāko un vismazāko vērtību.	Bieži izmanto, nosakot temperatūras izmaiņas vasarā upēs, ezeros.
Gadījuma lielums		Par gadījuma lielumu sauc funkciju, kas katram elementāram notikumam piekārto skaitli.	
Ģenerālkopa jeb populācija		Pamatkopa, tās elementi var būt dažādi objekti.	
Izlase		Apakškopa.	**Ģenerālkopas** jeb **populācijas** izlases sastāda, izvēloties elementus atbilstoši dotajiem nosacījumiem.
Moda		Vērtība, kas atkārtojas visbiežāk.	Lai to noteiktu, jāapskata pati kopa un jānovērtē, kura vērtība atkārtojas visbiežāk, šī vērtība tad arī ir moda.
Relatīvais biežums		Kādas datu vērtības **absolūtā biežuma** attiecība pret visu datu skaitu.	
Vidējais aritmētiskais		Doto datu (skaitļu) summas dalījums ar datu skaitu.	Bieži izmanto, nosakot vidējo vecumu, vidējo cenu produktiem, vidējo svaru.
Faktoriāls		Par naturāla skaitļa n faktoriālu sauc visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n ieskaitot (to apzīmē ar $n!$).	

Jēdziens	Zīmējums	Definīcija	Piezīme
Kombinācijas		Par kombinācijām no *n* elementiem pa *k* elementiem sauc tādas nesakārtotas **izlases**, kuras sastāv no *k* pamatkopas elementiem un kuras cita no citas atšķiras ar vismaz vienu elementu. C_n^k ir visu šādu izlašu skaits.	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Nav svarīga secība. Veidotajās izlasēs nav nozīmes tam, kā tiek sakārtoti elementi. Futbola komandā izvēloties uzbrucēju trijnieku, nav nozīmes tam, vai izvēlas 1., 2., 3. spēlētāju vai 2., 3., 1. spēlētāju, tas būs tas pats uzbrucēju trijnieks.
Kombinatorika		Par kombinatoriku sauc matemātikas nozari, kurā arī noskaidro, cik noteikta veida apakškopu jeb izlašu var izveidot no dotās kopas elementiem.	
Permutācijas		Sakārtotas *n* elementu kopas, kuras cita no citas atšķiras tikai ar elementu secību (ir iegūtas no vienas un tās pašas kopas, pārvietojot tās elementus).	$P_n = n!$ – visu permutāciju skaits No dotās elementu kopas veidojam izlases, izmantojot visus elementus.
Kombinatorikas reizināšanas likums		Ja kādu izvēli var realizēt *k* dažādos veidos un savukārt katrai no tām var realizēt kādu citu izvēli *m* dažādos veidos, tad šīs abas izvēles pēc kārtas iespējams realizēt $k \cdot m$ dažādos veidos.	
Kombinatorikas saskaitīšanas likums		Ja kādu izvēli var realizēt *k* dažādos veidos vai arī ja to var realizēt *m* citos dažādos veidos, tad šo izvēli kopā var realizēt $k + m$ dažādos veidos.	Ja ir dotas divas kopas, no kurām jāizdara viena un tā pati izvēle, izdevīgāk ir šīs kopas apvienot un tad izdarīt izvēli no kopīgās kopas.
Variācijas		Par variācijām no *n* elementiem pa *k* elementiem sauc tādas sakārtotas izlases, kas sastāv no *k* pamatkopas elementiem un cita no citas atšķiras vai nu ar elementu sakārtojumu, vai ar pašiem elementiem.	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ir visu permutāciju skaits. Secība ir svarīga. Veidotajās izlasēs ir svarīgi, lai tās atšķiras ar vismaz viena elementa atrašanās vietu. Skaitlis 123 atšķiras no skaitļa 213.
Gadījuma mēģinājums		Ja **mēģinājuma** rezultātā var iegūt dažādus **notikumus**, tad šādu mēģinājumu sauc par gadījuma mēģinājumu.	Mēs nevaram ietekmēt rezultātu, viss notiek uz labu laimi.

Jēdziens	Zīmējums	Definīcija	Piezīme
Gadījuma notikums		**Mēģinājuma** laikā **notikums** gan iestājas, gan neiestājas.	Izvirzot notikuma rezultātu, nevaram droši teikt, ka tas iestāsies, – tas var gan iestāties, gan neiestāties.
Iznākuma kopa		Notikumu kopa, kuras elementi ir visi iespējamie mēģinājuma iznākumi un tikai šie iznākumi.	
Klasiskā varbūtība		Par **gadījuma notikuma** *A* klasisko varbūtību *P*(*A*) sauc notikumam *A* labvēlīgo iznākumu skaita *k* attiecību pret visu iespējamo iznākumu kopskaitu *n*, pieņemot, ka visi mēģinājuma iznākumi ir vienādi iespējami.	
Mēģinājums		**Mēģinājums** (eksperiments) ir noteiktu un nemainīgu apstākļu kompleksa nodrošināšana neierobežoti daudz reižu.	
Neiespējams notikums		**Mēģinājuma** laikā **notikums** neiestājas nevienā mēģinājumā.	
Nenovēršams notikums		**Mēģinājuma** laikā notikums iestājas katrā mēģinājumā.	
Nesavienojami notikumi		**Notikumus** *X* un *Y* sauc par nesavienojamiem notikumiem, ja šo notikumu šķēlums ir **neiespējams notikums**.	 Viens no notikumiem ir tāds, kura nosacījumus otrs neizpildīs nevienā mēģinājumā.
Notikums		Notikums ir **mēģinājuma** rezultāts.	
Notikumu apvienojums		Par notikumu *X* un *Y* apvienojumu sauc notikumu, kurš realizējas tad un tikai tad, ja iestājas vismaz viens no šiem notikumiem.	
Notikumu starpība		Par notikumu *X* un *Y* starpību sauc jaunu notikumu, kurš realizējas tad, ja ir iestājies notikums *X* un nav iestājies notikums *Y*.	
Notikumu šķēlums		Par **notikumu** *X* un *Y* šķēlumu sauc notikumu, kurš realizējas tad un tikai tad, ja abi šie notikumi iestājas vienlaikus.	

Jēdziens	Zīmējums	Definīcija	Piezīme
Pretējs notikums		Divus **notikums** X un Y sauc par savstarpēji pretējiem notikumiem, ja to apvienojums ir **nenovēršams notikums**, bet šķēlums ir **neiespējams notikums**.	
Savienojami notikumi		Notikumus X un Y sauc par savienojamiem notikumiem, ja šo notikumu šķēlums ir iespējams notikums.	Šiem notikumiem ir kaut kas kopīgs.
Varbūtība		Par notikuma A varbūtību sauc tam piekārtotu skaitli $p = P(A)$, kas raksturo tā iestāšanās iespēju.	$P(A) \in [0; 1]$
Centrālā projekcija		Attēls, kuru iegūst, ja visi projicējošie stari iziet no viena punkta.	S ir punkts – projekcijas centrs, no kura iziet visi projekcijas stari caur ķermeņa virsotnēm pret plakni.
Divplakņu kakta leņķis		Divplakņu kakta leņķi var iegūt, novelkot plakni perpendikulāri divplakņu kakta šķautnei.	
Divplakņu kakts		Par divplakņu kaktu sauc figūru, kuru veido divas pusplaknes ar kopīgu robežu, ja abas pusplaknes neatrodas vienā plaknē.	A un B ir pusplaknes, kuras neatrodas vienā plaknē.
Krustiskas taisnes		Divām taisnēm ir tieši viens kopīgs punkts.	Taisnes a un b ir krustiskas taisnes.
Leņķis starp taisni un plakni		Par leņķi starp taisni un plakni sauc leņķi starp taisni un tās **projekciju** plaknē.	Taisnes MA projekcija ir OA, leņķis starp taisni MA un OA ir OAM.
Paralēlā projekcija		Attēls, kuru iegūst, ja visu projicējošo staru virziens ir paralēls kādai taisnei.	Taisne l ir projekcijas virziena taisne, visi projekcijas stari ir paralēli tai. Projekcijas stari tiek vilkti no ķermeņa virsotnēm pret plakni.
Paralēlas taisnes		Divas taisnes sauc par paralēlām, ja tās atrodas vienā plaknē un nekrustojas.	Taisnes a un b ir paralēlas taisnes.
Perpendikulāras taisnes		Divas taisnes sauc par savstarpēji perpendikulārām, ja leņķis starp tām ir 90°.	Taisnes a un b ir perpendikulāras taisnes.
Plakņu paralelitāte		Plaknes sauc par paralēlām, ja tās nešķeļas.	Plaknes A un B ir paralēlas.
Plakņu perpendikularitāte		Divas plaknes sauc par perpendikulārām, ja leņķis starp tām ir 90°.	Plaknes A un B ir perpendikulāras.

Jēdziens	Zīmējums	Definīcija	Piezīme
Projekcija		Telpisku figūru attēlošana plaknē.	Ir divi galvenie projekciju veidi: paralēlā projekcija un centrālā projekcija.
Šķērsas taisnes		Divas taisnes sauc par šķērsām taisnēm, ja tās neatrodas vienā plaknē.	Taisnes *a* un *b* neatrodas vienā plaknē, tās ir šķērsas taisnes.
Taisnes un plaknes paralelitāte		Taisni un plakni sauc par paralēlām, ja tās nekrustojas.	Taisne *b* ir paralēla plaknei α.
Taisnes un plaknes perpendikularitāte		Taisni sauc par perpendikulāru plaknei, ja tā ir perpendikulāra katrai šīs plaknes taisnei, kas iet caur taisnes krustpunktu ar šo plakni.	Ja taisne ir perpendikulāra divām krustiskām taisnēm plaknē, tad tā ir perpendikulāra plaknei.
Triju perpendikulu teorēma		Ja taisne, kas atrodas plaknē, ir perpendikulāra pret slīpnes projekciju, tad tā ir perpendikulāra arī pret pašu slīpni.	Taisne *m* ir perpendikulāra pret taisni *BA*1, tā ir arī perpendikulāra pret slīpni.
Četrstūra prizma		Prizma, kuras pamats ir četrstūris.	
Daudzskaldnis		Par daudzskaldni sauc telpisku ķermeni, kura virsma sastāv no plaknes daudzstūriem.	
Diagonālšķēlums		Prizmas šķēlumu ar plakni, kas iet caur prizmas diagonāli un sānu šķautni, sauc par diagonālšķēlumu.	*AA*1*C*1*C*, *CC*1*F*1*F* un *FF*1*D*1*D*.
Leņķis starp prizmas diagonāli un pamatu		Leņķis starp prizmas diagonāli un pamatu ir leņķis starp diagonāli un tās projekciju pamata plaknē.	
Pamata laukums		Telpiska ķermeņa pamata (daudzstūra, riņķa) laukums.	Tiek aprēķināts pamata daudzstūrim pēc dotā daudzstūra laukuma aprēķināšanas formulām.
Pamata šķautne		Daudzskaldņa šķautnes, kas ir pamatu malas.	Pamatu šķautnes: *DE*, *EF*, *FD*, *D*1*E*1, *E*1*F*1, *F*1*D*1.
Pilnas virsmas laukums		Par telpiska ķermeņa pilnas virsmas laukumu *S* sauc ķermeņa visas virsmas laukumu.	Prizmai un cilindram: $S_{pilna} = S_{sānu} + 2S_{pam}$.. Piramīdai un konusam: $S_{pilna} = S_{sānu} + S_{pam}$.

Jēdziens	Zīmējums	Definīcija	Piezīme
Prizma		Par *n*-stūra prizmu sauc daudzskaldni, kura divas skaldnes ir vienādi *n*-stūri, kas atrodas paralēlās plaknēs, bet pārējās *n* skaldnes ir paralelogrami.	
Prizmas augstums		Perpendikulu, kas novilkts no viena pamata kaut kāda punkta pret otra pamata plakni, sauc par prizmas augstumu.	
Prizmas diagonāle		Nogriezni, kas savieno divas daudzskaldņa virsotnes, kuras nepieder vienai skaldnei, sauc par daudzskaldņa diagonāli.	Diagonāle: *N*1*S*.
Prizmas pamats		Daudzstūri, kuri atrodas prizmas paralēlajās plaknēs.	
Regulāra prizma		Taisnu prizmu, kuras pamati ir regulāri daudzstūri, sauc par regulāru prizmu.	
Sānu skaldne		Prizmai: paralelogrami, piramīdai: trijstūri.	
Sānu šķautne		Sānu šķautnes: *AA*1, *CC*1, *BB*1.	
Sānu virsmas laukums		Daudzskaldnim: visu sānu skaldņu laukumu summa.	Taisnai prizmai sānu skaldņu izklājums veido taisnstūri ($S_{sānu} = P_{pam.} \cdot H$).
Skaldnes diagonāle		Nogrieznis, kas savieno sānu skaldnes divas virsotnes, kuras nepieder vienai malai.	
Slīpa prizma		Prizmu, kuras sānu šķautnes nav perpendikulāras pamatiem, sauc par slīpu prizmu.	
Šķautne		Prizmas virsmas daudzstūru kopīgās malas sauc par šķautnēm.	
Taisna prizma		Prizmu, kuras sānu šķautnes ir perpendikulāras pamatiem, sauc par taisnu prizmu.	
Prizmas tilpums		Prizmas tilpums ir vienāds ar pamata laukuma un augstuma reizinājumu. $V = S_{pam} \cdot H$	
Trijstūra prizma		Prizma, kuras pamata daudzstūris ir trijstūris.	

2. pielikums
Matemātikā bieži lietotie apzīmējumi

Lai nekļūdītos praktisku problēmu risināšanā, noderīgs var būt īss pārskats par dažām pamatlietām un simboliem, ar kuriem sastapsimies matemātikas praktikumos un citos matemātikas studiju kursos.

$\forall x \mathrm{P}(x)$	katram x izpildās nosacījums P(x)
$\forall x \in K\ \mathrm{P}(x)$	katram kopas K elementam x izpildās nosacījums P(x)
$\exists x \mathrm{P}(x)$	eksistē tāds x, kam izpildās nosacījums P(x)
$\exists!\, x \mathrm{P}(x)$	eksistē viens vienīgs x, kam izpildās nosacījums P(x)
$\exists x \in K\ \mathrm{P}(x)$	eksistē tāds kopas K elements x, kam izpildās nosacījums P(x)
$\neg \mathrm{A}$	nav tiesa, ka izpildās nosacījums A
$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$	A un B
$\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$	A vai B
$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$	ja A, tad B
$p \in A$	p ir kopas A elements (p pieder kopai A)
$z \notin A$	z nav kopas A elements (z nepieder kopai A)
$\{a_1, \ldots, a_n\}$	kopa, kas sastāv no elementiem $a_1, \ldots, a_n$
$\{x \mid \mathrm{P}(x)\}$	kopa, kas sastāv no tiem un tikai tiem elementiem x, kuriem ir patiess apgalvojums P(x)
$]a; b[= \{x \mid a < x < b\}$	vaļējs intervāls a, b; jeb $]a; b[$
$\emptyset$	tukšā kopa (kopa bez elementiem)
$N_+ = \{1,2,3,\ldots\}$	visu naturālo skaitļu kopa
$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$	visu veselo skaitļu kopa
$Q = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in Z \wedge q \in N_+\right\}$	visu racionālo skaitļu kopa
R	visu reālo skaitļu kopa
∞	bezgalība
$+\infty$	plus bezgalība
$A \subseteq B$	A ir B apakškopa (B ir A virskopa)
$A \subset B$	A ir B īsta apakškopa
$A \cup B$	kopu A un B apvienojums
$A \cap B$	kopu A un B šķēlums
$A \setminus B$	kopu A un B starpība
(x, y)	sakārtots pāris
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	n-dimensionāls kortežs
$A \times B$	kopu A un B Dekarta reizinājums

Funkcijas

$f: X \to Y$	f ir funkcija, kas kopu X attēlo kopā Y
$f: x \mapsto y$	funkcija f elementu x attēlo par y, t. i., $f(x) = y$
$\mathrm{Dom}(f)$	funkcijas f definīcijas apgabals; D(f)
$\mathrm{Ran}(f)$	funkcijas f vērtību apgabals; E(f)
f^{-1}	funkcijas f inversā funkcija
$g \circ f$	funkciju f un g kompozīcija
(x_n)	virkne
$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$	virknes robeža
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x)$	funkcijas f robeža x, tiecoties uz x_0 pa kopu X
f'	funkcijas f atvasinājums

Kombinatorika

$n!$	n faktoriāls
P_n	permutāciju skaits no n elementiem
A_n^k	variāciju skaits no n elementiem pa k elementiem
$C_n^k, \binom{n}{k}$	kombināciju skaits no n elementiem pa k elementiem

3. pielikums

Pārbaudes darbs, gatavojoties kursam "Skolas matemātikas praktikums II"

1. variants

1. Atrisināt nevienādību.

   $$\frac{2x+5}{|x+1|} \geq 1$$

2. Noteikt funkcijai dabīgo definīcijas kopu.

   $$y = \sqrt{9-x^2} + lg\frac{1}{x}$$

3. Izpētīt dotās funkcijas paritāti.

   $$y = \frac{x^4-2}{x}$$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamat-elementārās funkcijas grafiku.

   a) $y = \frac{x-5}{x-4}$

   b) $y = 2\,sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

   c) $y = 1 - 2^{x+3}$

   d) $y = \frac{1}{2}arccos(2-x)$

2. variants

1. Atrisināt nevienādību.

   $$\frac{|x-5|}{x+3} \geq 2$$

2. Noteikt funkcijai dabīgo definīcijas kopu.

   $$y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}} + lg(2+x)$$

3. Izpētīt dotās funkcijas paritāti.

   $$y = \frac{x^2}{x^3+1}$$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamat-elementārās funkcijas grafiku.

   a) $y = |x^2 + 2x - 15|$

   b) $y = \frac{1}{2}log_4(2x-4)$

   c) $y = -\,cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

   d) $y = \pi + arcsin(2-x)$

3. variants

1. Atrisināt nevienādību.

   $$\frac{x^2 - 5x + 6}{|x| + 7} < 0$$

2. Noteikt funkcijai dabīgo definīcijas kopu.

   $$y = arccos\frac{x-1}{2} + \sqrt{3+x}$$

3. Izpētīt dotās funkcijas paritāti.

   $$y = \frac{sin\,x\,cos\,x}{x^2}$$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamat-elementārās funkcijas grafiku.

   a) $y = |x^2 - 6x + 1|$

   b) $y = 3 - log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

   c) $y = \mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

   d) $y = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(1-2x)$

4. variants

1. Atrisināt nevienādību.

   $$\frac{x^2 + 6x - 7}{|x+4|} < 0$$

2. Noteikt funkcijai dabīgo definīcijas kopu.

   $$y = arcsin\frac{x}{x-1}$$

3. Izpētīt dotās funkcijas paritāti.

   $$y = \frac{|x| - 2}{x - x^3}$$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamat-elementārās funkcijas grafiku.

   a) $y = 2 + log_3(3-x)$

   b) $y = \frac{x-4}{x+2}$

   c) $y = sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

   d) $y = \pi - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x-2)$

5. variants

1. Atrisināt nevienādību.

   $$\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$$

2. Noteikt funkcijai dabīgo definīcijas kopu.

   $$y = \sqrt{3-x} + arcsin\frac{3-2x}{3}$$

3. Izpētīt dotās funkcijas paritāti.

   $$y = -3x - x^5$$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamatelementārās funkcijas grafiku.

   a) $y = 3 - sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$

   b) $y = \frac{x-3}{x+2}$

   c) $y = -\frac{1}{2}log_3(1-x)$

   d) $y = \pi - 2\mathrm{arctg}(x+1)$

6. variants

1. Atrisināt nevienādību.

   $$\frac{|x+2|-x}{x} \leq 2$$

2. Noteikt funkcijai dabīgo definīcijas kopu.

   $$y = \frac{lg(x-1)}{\sqrt{16-x^2}}$$

3. Atrast dotās funkcijas inverso funkciju, ja tāda eksistē.

   $$y = 1 + lg(x+2)$$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamatelementārās funkcijas grafiku.

   a) $y = 4 - sin\frac{x-\pi}{3}$

   b) $y = \frac{x+2}{x-3}$

   c) $y = 3^{2-x}$

   d) $y = \pi - 2\mathrm{arctg}(x+2)$

7. variants

1. Atrisināt nevienādību.

   $$\frac{2x+5}{|x+1|} \geq 1$$

2. Noteikt funkcijai dabīgo definīcijas kopu.

   $$y = \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{lg(x-1)}$$

3. Atrast dotās funkcijas inverso funkciju, ja tāda eksistē.

   $$y = 3x^2 - 1$$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamat-elementārās funkcijas grafiku.

   a) $y = |x^2 - 2x - 1|$

   b) $y = 3^{x+1} - 1$

   c) $y = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right)$

   d) $y = \pi + 2\text{arctg}(1 - x)$

8. variants

1. Atrisināt nevienādību.

   $$\frac{|x-5|}{x+3} \geq 2$$

2. Noteikt funkcijai dabīgo definīcijas kopu.

   $$y = \sqrt{\frac{lg(x+1)}{x^2}}$$

3. Izpētīt dotās funkcijas paritāti.

   $$y = \frac{\cos x}{x}$$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamat-elementārās funkcijas grafiku.

   a) $y = 2 - sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

   b) $y = \frac{x-1}{x-3}$

   c) $y = 4^{2x-4}$

   d) $y = \pi + \frac{1}{3}\text{arctg}(2 - x)$

9. variants

1. Atrisināt nevienādību.

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{|x| + 7} < 0$$

2. Noteikt funkcijai dabīgo definīcijas kopu.

$$y = \frac{\sqrt{3x - 2}}{x^2 - x - 2}$$

3. Izpētīt dotās funkcijas paritāti.

$$y = \frac{\sin x}{|x - 1|}$$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamatelementārās funkcijas grafiku.

a) $y = |2x^2 - 6x + 4|$

b) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = \frac{1}{2}\arccos(x + 2)$

d) $y = 2 + \frac{1}{3}\log_2(1 - x)$

10. variants

1. Atrisināt nevienādību.

$$\frac{x^2 + 6x - 7}{|x + 4|} < 0$$

2. Noteikt funkcijai dabīgo definīcijas kopu.

$$y = lg(x^2 - x - 6)$$

3. Izpētīt dotās funkcijas paritāti.

$$y = \frac{x^3 - 2}{x + 3}$$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamatelementārās funkcijas grafiku.

a) $y = |2x^2 - 6x + 4|$

b) $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

c) $y = \frac{x+3}{x-1}$

d) $y = \pi + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x + 2)$

11. variants

1. Atrisināt nevienādību.

   $$\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$$

2. Noteikt dabīgo definīcijas kopu funkcijai.

   $y = lg(x^2 - x - 6) + \sqrt{3-x}$

3. Izpētīt dotās funkcijas paritāti.

   $y = x^2 \operatorname{tg}x$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamat-elementārās funkcijas grafiku.

   a) $y = 2 + log_4(1-x)$

   b) $y = \frac{x-1}{x+1}$

   c) $y = 1 + \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

   d) $y = \pi - \frac{1}{2}\arcsin(x-2)$

12. variants

1. Atrisināt nevienādību.

   $$\frac{|x+2|-x}{x} \leq 2$$

2. Noteikt dabīgo definīcijas kopu funkcijai.

   $y = lg(x^2 - 1)$

3. Atrast inverso funkciju, ja tā funkcijai eksistē.

   $y = 3x^2 - 3$

4. Dotajām funkcijām noteikt definīcijas kopu, vērtību kopu un uzzīmēt šo funkciju grafikus, pārbīdot un deformējot atbilstošas pamat-elementārās funkcijas grafiku.

   a) $y = |x^2 - 2x - 15|$

   b) $y = log_3(2x-4)$

   c) $y = 4 - cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

   d) $y = \pi - \arcsin(4-x)$