L. Ausējs

Finanču matēmatika

Politiskā aritmētika
Apdrošināšanas matēmatika

Rīgā, 1927.
Latvijas universitātes studentu padomes grāmatnīcas apgādībā.

Armijas spiestuve, Rīgā, Muitas ielā Nr. 1.

Ievads.

Financu matēmatika vārda plašākā nozīmē aptveŗ tirdzniecisko naudas operāciju, tāpat banku un biržas, krājkašu un hipotēku operāciju rēķinus, kā ari ilggadēju aizņēmumu aprēķinus — ar vienu vārdu, jautājumus, kur figurē *kapitāls* un ar to saistītie *augļi* (intereses); bez tam vēl finanču matēmatikā ietilpst iedzīvotāju statistika, mirstības aprēķināšana un apdrošināšanas rēķini. Parasti tirdzniecisko naudas operāciju, tāpat banku un biržas operāciju — tā saucamo *īsa termiņa naudas operāciju rēķinus*, cik tālu tie aprobežojas ar elementārmatēmatikas lietāšanu un praksē parasto aprēķinu paņēmienu aplūkošanu, apvieno tā saucamā *komercaritmētikā*. Tāpat ari statistiku un apdrošināšanas rēķinus, kas kļuvuši jau par īpašu finanču matēmatikas nozari, aplūko atsevišķi tā saucamā *apdrošināšanas matēmatika*.

Atlikušos finanču matēmatikas rēķinus, ko var saukt par *gaŗa termiņa naudas operāciju rēķiniem* vai citādi — *augļu augļu rēķiniem*, nodala īpašā finanču matēmatikas nozarē ar nosaukumu *politiskā aritmētika*.

Politiskā aritmētika nozīmē tik daudz, kā „valsts rēķini" (πόλις — pilsēta, valsts, ἀριθμός — skaitlis). Kaut gan šis nosaukums ir divu grieķu vārdu sakopojums, tomēr grieķu valodā nav sastopams*). Līdzīgs vārdu sakopojums sastopams 14. gadu simt. otrā pusē Smirnas Nikolaja Rabdas darbā ar nosaukumu Μέθοδος πολιτικῶν λογαριασμῶν, kas apzīmētu tik daudz kā „Pilsoņu dzīves rēķinu paņēmienu metode". Šinī darbā aplūkoti pa daļai tādi uzdevumi, kur sastopamas vienkāršas vai saliktas attiecības, pa daļai tādi, kas atrisināmi ar pirmās pakāpes vairāku nezināmo nolīdzinājumu palīdzību. Tā tad satura ziņā šis darbs atšķiŗas no tā, ko tagad atzīmē ar vārdu *politiskā aritmētika*. Pēc satura drīzāk pieslienas mūsu dienu politiskai aritmētikai Marka Mosheimera (Marcus Mosheimer, no 1572. g. Heidelbergas universitātē matēmatikas profesors) darbs „Disputatio juridica de rebus mathematicis" 1558. No pagājušā gadusimteņa pirmās puses darbiem būtu minami: „Anleitung zu finanziellen, poli-

*) M. Cantor. Politische Arithmetik, zweite Auflage, Leipzig 1903. S. 1.

tischen und juridischen Rechnungen. Ein Handbuch für Staatsmänner, Cameralisten, Kaufleute, Juristen, Forstmänner, Oeconomen etc. von Dr. L. Oettingen. Braunschweig, 1845" un „Politische Arithmetik. Anleitung zur Kenntniss und Uebung aller im Staatswesen vorkommenden Berechnungen. Ein Handbuch für Staatsbeamte und Geschäftsmänner von L. C. Bleibtreu. Heidelberg, 1845". Pirmais no minētiem darbiem aptveŗ šādas nodaļas. I. Vienkāršo augļu rēķini. II. Augļu augļu rēķini. III. Attiecība starp vienkāršu un augļu augļu rēķiniem. IV. Par interuzurija aprēķināšanu. V. Par varbūtības rēķiniem. VI. Par loteriju aizņēmumiem un loterijām. VII. Par mirstību. VIII. Mūža renšu, dzīvības apdrošināšanas, atraitņu pensiju u. t. t. aprēķināšana.

Kā redzams, te ir lielākā tiesa finanču matēmatikas jautājumu.

Bleibtreu'a darbam šāds saturs. I. Mēri un svari. II. Finances. 1. Nauda a) monētas; b) zelts un sidrabs stieņos. 2. Par vekseļu operācijām. 3. Par vienkāršiem un augļu augļiem. 4. Par valsts parādu deldēšanu. 5. Par valstspapīru apgrozību. 6. Publiskas laimes spēles. 7. Zemnieku apgrūtinājumu (Lasten) izbeigšana. 8. Meža vērtības aprēķināšana. 9. Publisko darbu arbitraža. III. Iedzīvotāju skaitliskā attiecība. IV. Cilvēka dzīves varbūtību noteikšana. V. Iestādes, kas dibinās uz cilvēku mirstību. 1. Mūža renšu iestādes. 2. Dzīvības apdrošināšanas iestādes. 3. Renšu iestādes. VI. Apdrošināšana. VII. Kredītiestādes. VIII. Krājkases. Tabulas.

Tā tad ari te politiskā aritmētika aptvērusi gandrīz visus finanču matēmatikas jautājumus.

Mēs politiskā aritmētikā aplūkosim augļu augļu, renšu, ilggadēju aizņēmumu deldēšanas, aizņēmumu kursu un rentabilitātes rēķinus.

Tā kā ļoti daudzos jautājumos nāksies lietot tabulas, kur skaitļi doti tikai ar zināmu tuvinājumu, t. i. doti aptuvenie skaitļi, ar kuŗiem jāizpilda dažādas darbības, un tā kā aptuvenie skaitļi vispār ļoti bieži sastopami dažādos jautājumos, tad jāprot ar tiem rīkoties — galvenokārt, jāprot novērtēt gala iznākuma pareizība. Tāpēc vispirms aplūkosim, pēc iespējas elementārā veidā, kā rīkojas ar aptuveniem skaitļiem, un tad pāriesim uz tiešiem politiskās aritmētikas jautājumiem.

I daļa

Politiskā aritmētika

Pirmā nodaļa.

I. Aptuvenie skaitļi.

1. Aptuvenie skaitļi kā skaitīšanas, mērīšanas vai aritmētisko darbību rezultāts.

1. Ja skaitāmo priekšmetu nav visai daudz, tad tos varam izskaitīt līdz pašam pēdējam; iznākumā dabūjam veselu pozitīvu skaitli un pie tam tādu, kas pilnīgi noteikti jeb precīzi izteic skaitāmo priekšmetu skaitu, t. i. skaitāmo priekšmetu ir tiešām tik daudz, cik dabūtā skaitlī vienību; piem., ja esam izskaitījuši istabā cilvēkus pie galda un atraduši skaitīšanas rezultātā 24, tad tas nozīmē, ka istabā ir tiešām 24 cilvēki — ne vairāk un ne mazāk. Šādus skaitļus sauc par precīziem skaitļiem.

Turpretīm, ja skaitāmo priekšmetu ir ļoti daudz, piem., iedzīvotāju lielā pilsētā vai pat valstī, tad, gadījumā, ja rastos vajadzība visus tos līdz pēdējam izskaitīt, tādu skaitīšanu nebūtu tik viegli izdarīt, kā pirmā gadījumā. Bet šādos gadījumos, kur skaitāmo priekšmetu ļoti daudz, gandrīz nekad nerodas vajadzība zināt visu priekšmetu skaitu pilnīgi precīzi: pa lielai tiesai pietiek zināt šādu priekšmetu skaitu aptuvumis; daudzreiz pietiek, ja zinām to skaitļu šķiru, kas izteic skaitāmo priekšmetu skaitu — vai šis skaits sniegsies tūkstošos vai miljonos — un cik būs augstāko šķiru vienību tādā skaitlī. Piemēram, ja zinām, ka pilsētā ir 403 562 iedzīvotāji, tad mēs teiktu, ka tur ir 400 000 iedzīvotāju vai, ja valstī būtu 2 599 413 iedzīvotāju, tad teiktu, ka valstī ir 2 600 000 iedzīvotāju; šie skaitļi rādītu iedzīvotāju skaitu aptuvumis, vai citādi — apaļos skaitļos; zinādami tikai šos skaitļus, varam teikt, ka varbūt pilsētā ir zināmā brīdī bijis 399 817 vai 405 629 iedzīvotāju, valstī 2 615 386 vai 2 596 417 iedzīvotāju, bet katrā ziņā īstais iedzīvotāju skaits pirmā gadījumā nav mazāks par 300 000, pat nav visai tuvs tam, piem., nav 319 875, jo tad teiktu, ka iedzīvotāju skaits apaļos skaitļos ir 300 000; tāpat iedzīvotāju skaits nav lielāks par 500 000, pat nav tuvs tam, piem., nav 489 964, jo tad teiktu, ka iedzīvotāju skaits apaļos skaitļos ir 500 000.

Ņemsim citu piemēru. Ja ir uzstādīts jautājums: cik zirņu vienā tonnā, tad ari šis jautājums jāsaprot tā, ka zirņu skaits, jānoteic aptuvumis, apaļos skaitļos. To varētu izdarīt piem., tā, ka no vienas šķirnes zirņu daudzuma, kas sveŗ 1 tonnu, ņemam kā pagadas kādu sauju zirņu un atsveŗam, piem., 100 g; saskaitām, cik zirņu ieiet 100 gramos; ja dabūsim, ka 100 gramos ir 410 zirņu, tad varētu teikt, ka tonnā jeb 1 000 000 gramos būs 10 000 reiz vairāk zirņu, t. i. tonnā būs 4 100 000 zirņu. Protams, ka ari šis skaitlis izteic zirņu skaitu tonnā tikai aptuvumis, jo īstenībā vienā tonnā zirņu var būt par dažiem simtiem vai pat tūkstošiem vairāk vai mazāk.

2. Nule aplūkotos skaitīšanas gadījumos skaitāmo priekšmetu skaitu, ja būtu vajadzīgs, varētu, kaut gan ar lielām grūtībām, izteikt ari pilnīgi precīzi, piem., ja izdarītu tautas skaitīšanu vai ari izskaitītu zirņus visus līdz pēdējam.

Citādi tas ir ar skaitļiem, ko dabūjam kā mērīšanas (gaŗuma vai leņķu mērīšanas vai citu lielumu mērīšanas, kas saistīti ar gaŗuma vai leņķu mērīšanu) vai svēršanas rezultātus: visi ar kaut kādu instrumentu (gaŗuma mēru, leņķu mēru, svaru) palīdzību dabūtie skaitļi, kas izteic mērāmos lielumus, pēc savas būtības ir skaitļi, kas nedod lieluma īstās nozīmes, bet tikai kādreiz gluži nejauši sakrīt ar mērojamā lieluma īsto nozīmi. Tas nāk pa daļai no mērāmo instrumentu nepilnības, pa daļai no cilvēku ārējo jūtekļu nepilnības, kā ari citiem tīri fizikāliem iemesliem. Tuvākus norādījumus par to mums dod attiecīgās zinātņu nozares (fizika, ķīmija u. c.).

Tā tad visi tādi skaitļi, kas rāda gaŗumus, leņķa lielumus, temperatūras, specifisko svaru, atmosfairas spiedienu u. tml. tikai aptuvumis, ar lielāku vai mazāku precīzitāti, izteic šo lielumu īstās nozīmes.

3. Aptuvenie skaitļi var rasties ari vēl citādi — no precīziem skaitļiem, ja ar tiem izpildām kādas aritmētiskas darbības vai tos izteicam kā decimālskaitļus.

Piem., ja aprēķināsim augļus, ko dos 4 mēnešos 4100 lati, kas atdoti uz 8%, tad meklējamais augļu skaits x izteiksies tā:

$$x = \frac{8 \,.\, 4100 \,.\, 4}{100 \,.\, 12} = \frac{328}{3} \text{ jeb } x = 109 \text{ lati } 33\tfrac{1}{3} \text{ sant.}$$

Tā kā naudas vienību, kas mazākas par 1 santimu, nav apgrozībā, tad dabūtais skaitlis jānoapaļo, atmetot $^1/_3$ sant.; tāpēc $x = 109$ lati 33 sant. = Ls 109,33.

Tā tad noapaļotais skaitlis 109,33 neizteic pilnīgi precīzi augļu daudzumu, kas rodas no 4100 lat. 4 mēnešos, ja maksā 8%.

Protams, ka atsevišķā gadījumā tāda noapaļošana liela iespaida neatstāj, bet ja pieņemsim, ka bankai ir 3000 noguldītāju un no katra noguldītāja banka, noapaļojot rēķinus, ietaupa $^1|_3$ sant., tad tas dod jau $\frac{1}{3}$ sant. $3000 = 1000$ sant. $=$ Ls 10.

Ņemsim citus piemērus. Ja gribam skaitļus $\frac{13}{64}$, $\frac{5}{7}$ un $\sqrt{2}$ izteikt ar decimāldaļu palīdzību, tad dabūsim, ka

$$\frac{13}{64} = 0{,}203125;$$

$$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285\ldots = 0{,}(714285);$$

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

Pirmā gadījumā $\frac{13}{64}$ varam izteikt decimāldaļās pilnīgi precīzi; otrā gadījumā $\frac{5}{7}$ dos tā saucamo periodisko daļu, ka visus ciparus uzrakstīt nespējam, bet varam tos tikai simboliski apzīmēt; trešā gadījumā ar punktiem apzīmēti cipari, kuŗus varam dabūt pēc patikas lielā skaitā, turpinot saknes izvilkšanu, bet kas nekāda perioda nedos; saknes izvilkšanu varam turpināt neaprobežoti, jo $\sqrt{2}$ nevar izteikt precīzi ne ar kādu daļu skaitli.

2. Aptuveno skaitļu robežas; absolūtā kļūda.

1. Redzējām, ka visi mērīšanas (vārda plašākā nozīmē) dati ir aptuvenie skaitļi. Var rasties jautājums, vai tie aprēķini, kas dibinās uz šiem datiem, nav nedroši, vai nav apšaubāmi? Kā var dabas zinātnes, sevišķi astronomiju, fiziku, ķīmiju vai techniskās zinātnes uzlūkot par eksaktām, ja tām jārīkojas ar skaitļiem, kas izteic īstos lielumus tikai aptuvumis?

Tas iespējams tikai tad, ja zinām, cik tālu varam uzticēties šiem datiem, citiem vārdiem, ja protam noteikt kļūdu vai kļūdas augstāko robežu, kas saistīta ar šiem skaitļiem.

Tāpēc ir no ļoti liela svara, rīkojoties ar aptuveniem skaitļiem, vienmēr būt skaidrībā par pielaistās kļūdas lielumu vai par to robežu, kuŗu nepārsniedz pielaistā kļūda.

2. Ja apzīmēsim skaitļa īsto nozīmi ar A un tā vietā ņemsim aptuveno skaitli a, tad skaitļu A un a starpību (šīs starpības ab-

solūto nozīmi) sauc par skaitļa a absolūto kļūdu. Tā tad skaitļa a absolūtā kļūda ir $|A-a|$.

Redzējām, ka $\frac{13}{64} = 0{,}203125$; ja nav vajadzības dabūto decimāldaļu ņemt ar tik daudz decimālzīmēm, bet var aprobežoties tikai ar trim, tad precīzā skaitļa 0,203125 vai $\frac{13}{64}$ vietā varam ņemt aptuveno 0,203; tādā gadījumā skaitļa 0,203 absolūtā kļūda būs $0{,}203125 - 0{,}203 = 0{,}000125$. Ja aptuvenais skaitlis a ir mazāks par precīzo skaitli A, tad saka, ka a ir skaitļa A aptuvenā nozīme ar iztrūkumu; ja a lielāks par A, tad saka, ka a ir skaitļa A aptuvenā nozīme ar piedevām; pirmā gadījumā saka, ka kļūda ir pamazinājumā; otrā — ka palielinājumā.

Minētā piemērā 0,203 ir skaitļa 0,203125 aptuvenā nozīme ar iztrūkumu un kļūda 0,000125 ir pamazinājumā.

3. Tomēr bieži precīzā skaitļa A īstā lieluma nezinām, it īpaši, ja ir darīšana ar skaitļiem kā mērīšanas rezultātiem, un tāpēc ari nevaram noteikt absolūtās kļūdas lieluma; viss, ko tādos gadījumos zinām, ir tas, ka absolūtā kļūda nepārsniedz zināma skaitļa, kuŗu sauc par absolūtās kļūdas augstāko robežu; īsuma dēļ „augstāko robežu" sauc vienkārši par robežu. Tā, piem., ja ņemsim $\sqrt{2}$ vietā 1,414, tad nevaram pateikt absolūtās kļūdas lieluma, jo $\sqrt{2}$ nevaram izteikt precīzi ne vesela, ne daļu skaitļa veidā, un tāpēc ari nevaram izteikt starpības starp $\sqrt{2}$ un 1,414. Tomēr šinī gadījumā varam noteikt to skaitli, kuŗu kļūda nepārsniegs, t. i. varam atrast kļūdas robežu.

Tiešām, tā kā $1{,}415^2 = 2{,}002225$, tad $1{,}415^2 > 2$ un $1{,}415 > \sqrt{2}$; bez tam redzējām, ka $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, tā tad $\sqrt{2} < 1{,}414$; tā tad dabūjam nevienlīdzību $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, kas rāda,*) kā $\sqrt{2} - 1{,}414 < 1{,}415 - 1{,}414$ jeb $\sqrt{2} - 1{,}414 < 0{,}001$; tāpat $1{,}415 - \sqrt{2} < 0{,}001$.

Tāpēc, ja $\sqrt{2}$ vietā ņemsim 1,414 vai 1,415, tad pielaistā kļūda nepārsniegs 0,001, t. i. kļūdas robeža būs 0,001; tā tad 1,414 ir $\sqrt{2}$ nozīme ar iztrūkumu, pie kam iztrūkums mazāks par 0,001 un 1,415 ir $\sqrt{2}$ nozīme ar piedevām, pie kam piedevas mazākas par 0,001. Skaitļi 1,414 un 1,415 ir robežas, kuŗu starpā atrodas $\sqrt{2}$ īstā nozīme.

*) Sk. L. Ausējs. Algebra I. d. 5. izd. 95. §.

Par skaitļiem 1,414 un 1,415 mēdz teikt, ka tie ir $\sqrt{2}$ nozīmes ar tuvinājumu līdz 0,001. Vispār, ja skaitļa a absolūtā kļūda nepārsniedz ε, tad saka, ka skaitlis a ir ņemts ar tuvinājumu vai precīzitāti līdz ε.

4. Aplūkotā gadījumā varējām noteikt kļūdas augstāko robežu un ari kļūdas virzienu, t. i. to, vai kļūda būs palielinājumā vai pamazinājumā.

Līdzīgā kārtā, ja ar milimetros iedalītu linijālu gribētu izmērīt, piem., zīmuļa garumu un būtu atraduši, ka zīmuļa gals atrodas starp 143. un 144. dalījumu, tad varētu teikt, ka zīmuļa īstais garums lielāks par 143 *mm* un mazāks par 144 *mm*; pieņemot par zīmuļa garumu 143 vai 144 *mm*, pielaidīsim kļūdu, kuras īstās nozīmes nezinām, bet gan varam apgalvot, ka kļūda nepārsniegs 1 *mm*; tāpēc varam teikt, ka 143 *mm* ir zīmuļa garums ar iztrūkumu, pie kam iztrūkums mazāks par 1 *mm*, un 144 *mm* ir zīmuļa garums ar piedevām, pie kam piedevas nepārsniedz 1 *mm*; 143 *mm* un 144 *mm* ir tās robežas, kuru starpā atrodas zīmuļa īstais garums un ir zīmuļa garuma nozīmes ar tuvinājumu līdz 1 *mm*.

Ari šinī gadījumā protam noteikt kļūdas robežu un virzienu.

5. Aplūkosim citu gadījumu. Ja gribētu salīdzināt uz Robervala svariem 1 mārciņas atsvaru ar metriskās sistēmas mēriem, tad, noliekot vienā svaru kausā mārciņas atsvaru, liktu otrā kausā gramus, kamēr dabūtu līdzsvaru. Pieņemsim, ka līdzsvars ir iestājies tad, kad otrā kausā atrodas 409,4 *g*; sāksim likt tagad gramu daļas pie jau novietotiem svaru kausā 409,4 *g*, piem., 0,02, 0,05, 0,1 u. t. t, ņemot nost mazāko atsvaru un liekot tā vietā lielāku, kamēr dabūsim svaru kausa nosvēršanos uz leju. Pieņemsim, ka vajadzēs pielikt vēl 0,2 *g*, lai svari izietu no līdzsvara stāvokļa. Tas rāda, ka kļūda palika nepamanīta, kamēr tā bija mazāka par 0,2 *g*. Tā tad mārciņas īstais svars gramos var būt ari lielāks nekā 409,4 *g*, bet tas nepārsniedz 409,6 *g*.

Ja tagad, izejot no agrākā stāvokļa, kad svaru kausā bija 409,4 *g*, sāktu mazos atsvarus pakāpeniski ņemt nost (vai, citiem vārdiem, likt otrā svaru kausā atsvarus klāt), tad novērotu, ka līdzsvars izzustu, t. i. kauss ar gramu atsvariem celtos uz augšu tikai tad, ja būtu atņēmuši (vai otrā pielikuši) ne mazāk par 0,2 *g*. Tas rāda, ka mārciņas īstais svars var būt mazāks par 409,4 *g*, bet tas nevar būt mazāks par 409,2 *g*. Tā tad 409,2 *g* un 409,6 *g* ir tās robežas, kuru starpā atrodas mārciņas īstais svars x, t. i. $409{,}2<x<409{,}6$; ja pieņemsim x vienlīdzīgu ar 409,4 g, tad pielaistā kļūda nepārsniegs 0,2 g, jo ja x būtu pat ļoti tuvs 409,2 g vai 409,6 g, t. i. tuvs vienai no savām robežām, tomēr starpība starp x un 409,4 g būs mazāka par 0,2 g; tiešām, ja x stāv tuvu 409,2 g, tad $409{,}2<x<409{,}4$ un $409{,}4-x<409{,}4-409{,}2$ t. i. $409{,}4-x<0{,}2$; tāpat atrodam, ka gadījumā, ja x stāv tuvu 409,6, tad $x-409{,}4<0{,}2$. Tā tad kļūdas augstākā robeža ir 0,2 g, tikai nevaram noteikt kļūdas virziena, citiem vārdiem, nezinām, vai x vietā ņemtā nozīme 409,4 g ir ar iztrūkumu vai ar piedevām.

6. Vispār, ja kāda lieluma A aptuvenā nozīme ir a un ε kļūdas robeža un kļūdas virziens nezināms, tad A īstā nozīme atrodas divu robežu starpā, kuŗu skaitliskie lielumi attiecīgi ir $a-\varepsilon$ un $a+\varepsilon$, t. i. $a-\varepsilon<A<a+\varepsilon$; ja bez tam zinām vēl kļūdas virzienu, piem., zinām, ka kļūda ir pamazinājumā, tad A īstā nozīme ir robežu a un $a+\varepsilon$ starpā. Visos šos gadījumos teiksim, ka a ir aptuvens skaitlis ar kļūdu, kas nepārsniedz ε, vai aptuvens skaitlis ar precīzitāti līdz ε vai tuvinājumu līdz ε.

7. Pieņemsim, ka ir atrasts kāds skaitlis ar kļūdu, kas nepārsniedz ε; ja šo skaitli pārvērtīsim decimāldaļās vai noapaļosim, tad pielaidīsim jaunu kļūdu, kuŗas robežu apzīmēsim ar ε'; ja abām kļūdām ir viens un tas pats virziens, tad abas kļūdas savienosies un dos absolūto kļūdu, kuŗas robeža $\varepsilon+\varepsilon'$. Piemēram, ja esam atraduši kādu gaŗumu 45,16 m, pie kam kļūda pamazinājumā mazāka par 0,02 m, tad ņemot tikai 45,1 m, pielaidīsim otru kļūdu pamazinājumā, kuŗa nepārsniegs 0,06 m, tā tad kopējā kļūda nepārsniegs $0{,}06\ m+0{,}02\ m=0{,}08\ m$, t. i. nepārsniegs 8 cm.

Turpretīm, ja kļūdām ε un ε' ir dažādi virzieni, tad kopējā kļūda būs skaitļu ε un ε' starpība, tā tad pēc absolūtās nozīmes mazāka par lielāko no skaitļiem ε un ε'; šinī gadījumā kļūda būs vispār mazāka nekā pirmā gadījumā, tikai ne katrreiz varēs noteikt kopējās kļūdas virzienu.

Tā, piem., ja nule aplūkotā gadījumā gaŗumu pieņemtu vienlīdzīgu ar 45,17 m. tad, tā kā robežas, kuŗās ietilpst gaŗuma īstā nozīme, ir 45,16 un 45,18, nevaram pateikt, vai skaitlis 45,17 ir lielāks vai mazāks par īsto nozīmi, t. i. vai šis skaitlis ir ar iztrūkumu vai piedevām; vienu ko zinām, ka kļūda nepārsniedz 0,01 m.

Aptuvenās vienlīdzības zīme ir $\simeq$. Ja skaitlis 0,43 ir aptuvens skaitlis ar iztrūkumu, pie kam kļūda pamazinājumā nepārsniedz 0,01, tad to raksta tā: $a \simeq 0{,}43 + 0{,}01$. Ja skaitlis 4,253 ir aptuvens skaitlis un kļūda nepārsniedz 0,002, pie kam kļūdas virziens nezināms, tad to raksta tā:

$$x \simeq 4{,}253 \pm 0{,}002.$$

3. Skaitļa absolūtās kļūdas robeža un robežas, kuŗu starpā atrodas skaitlis. Skaitļu noapaļošana.

1. Ja zinām aptuveno skaitli a un pielaistās absolūtās kļūdas robežu, tad, kā redzējām, var noteikt tās robežas, kuŗu starpā svārstās tā skaitļa vai lieluma īstā nozīme, kuŗu izteic šis skaitlis; robežas rādīs skaitļa s v ā r s t ī š a n ā s l i e l u m u, kuŗu varam izteikt kā r o b e ž u s t a r p ī b u.

Piem., ja zinām, ka 8600 ir aptuvens skaitlis ar iztrūkumu, pie kam kļūda nepārsniedz 100, tad robežas, kuŗu starpā var svārstīties īstā nozīme, būs 8600 un 8700; svārstīšanās lielums ir 100; ja skaitlis 8600 būtu ņemts ar piedevām, tad robežas būtu 8500 un 8600; ari šinī gadījumā svārstīšanās lielums ir 100. Vispār, ja a ir skaitļa A aptuvenā nozīme ar iztrūkumu vai piedevām un ε kļūdas robeža, tad pirmā gadījumā robežas ir a un $a+\varepsilon$, otrā $a-\varepsilon$ un a; abos gadījumos svārstīšanās lielums ir ε. Tā tad, j a p r e c ī z ā s k a i t ļ a v i e t ā ņ e m a m v i e n u n o t ā r o b e ž ā m, t a d k ļ ū d a n e p ā r s n i e d z r o b e ž u s t a r p ī b a s v a i s k a i t ļ u s v ā r s t ī š a n ā s.

Līdz šim aplūkotos piemēros pa parastam kļūda izteikta ar kādas šķiras vienību (0,01, 0,001, 100 un tml.). Var būt gadījumi (piemērs ar mārciņas svara noteikšanu gramos), kur kļūda izteikta citādi. Piemēram skaitlis 34200 ņemts ar iztrūkumu, pie kam kļūda nepārsniedz 300. Šinī gadījumā robežas būs 34200 un 34500; protams, ari šeit svārstīšanās lielums ir robežu starpība, t. i. 300.

Parasti mēdz iekārtot tā, lai kļūda izteiktos ar kādas šķiras vienību. To var sasniegt tā, ka paaugstina kļūdas robežu līdz nākamai lielākai vienībai. Tā šinī gadījumā, ja jau kļūda nepārsniedz 300, tad bez šaubām tā nepārsniegs ari 1000, bet tad robežas būs 34200 un 35200 (ja skaitli 34200 ņemam ar iztrūkumu).

Līdz ar to rodas jautājums, vai lon paturēt ciparu 2 kā trešo zīmīgo ciparu aptuvenā skaitlī, ja jau otrais var svārstīties. Ja viņu negribam paturēt un 34200 vietā ņemsim 34000, tad noapaļojot pielaidīsim kļūdu pamazinājumā, kas nepārsniegs 200; agrākā kļūda pamazinājumā nepārsniegs 300; tā tad kopējā kļūda nepārsniedz 500 un protams nepavisam nepārsniedz 1000. Tā tad varam teikt, ka skaitlis 34000 ir aptuvens skaitlis ar iztrūkumu, pie kam kļūda nepārsniedz 1000.

Šis piemērs rāda, kā var rīkoties, ja gribam robežas paplašināt, vai citiem vārdiem — s k a i t l i v a i r ā k n o a p a ļ o t.

2. Bija runa par pēdējo zīmīgo ciparu; bet dažreiz ari nulle var spēlēt zīmīgā cipara lomu, piem., ja noapaļojam skaitli 3804 tā, lai kļūda nepārsniegtu 10, tad dabūjam 3800; šeit robežas ir 3800 un 3810, tā tad beidzamā nulle radusies no noapaļojuma, bet otrā nulle, skaitot no kreisās puses, spēlē zīmīgā cipara lomu. Līdzīgs gadījums rastos, noapaļojot daļu 0,803 līdz simtām daļām: dabūtu 0,80, pie kam šis aptuvenais skaitlis atšķirtos no 0,8, jo 0,80 rāda, ka otrā decimālzīme ir meklēta, bet izrādījusies par 0, un tāpēc robežas ir 0,80 un 0,81, bet aptuvenam skaitlim 0,8 robežas ir 0,8 un 0,9 (ja abi skaitļi būtu ņemti ar iztrūkumu).

3. Šie piemēri rāda, ka 1) nedrīkst aptuvenai decimālai daļai pierakstīt nedz nolaist patvaļīgi nulles, kā to varējām darīt ar precīzu decimāldaļu, kur $0,5 = 0,50 = 0,500 = \ldots$, ja vien 0,5 ir precīzs skaitlis; 2) veselā aptuvenā skaitlī jāatšķir nulles, kas radušās no noapaļojuma, no tām nullēm, kas spēlē zīmīgā cipara lomu. Lai pēdējo mērķi sasniegtu, tad mēdz nulles, kas radušās no noapaļojuma, rakstīt mazākā veidā, piem., 38_{00}, vai, kas daudz ieteicamāk, rakstīt tikai zīmīgos ciparus un noapaļojot daļu pielikt kā reizinātāju 10 attiecīgā pakāpē; to var rakstīt tā: $380_0 = 380 \cdot 10$; $45_{000} = 45 \cdot 10^3$; $380_{00000} = 380 \cdot 10^5$.

4. Ja ar aptuveno skaitli jāizpilda kāda darbība, tad ieteicams turēties pie šādas rakstīšanas kārtības, kas dod lielas priekšrocības sarežģītāku izteiksmju aprēķināšanā: izrakstīt visus zīmīgos ciparus, bet tos iekārtot tā, ņemot 10 attiecīgā pakāpē, lai pirmais zīmīgais cipars, skaitot no kreisās puses, būtu kā vieninieks; piem.,

$380 \cdot 10^5 = 3,80 \cdot 10^7$ (skaitli 380 esam 100 reiz pamazinājuši, tāpēc reizinātājs tikpat daudz reiz jāpalielina);

$0{,}324=3{,}24.10^{-1}$ (skaitli 0,324 esam 10 reiz palielinājuši, tāpēc reizinātājs 10 jāņem attiecīgā pakāpē);
$0{,}0048=4{,}8.10^{-3}$;
$682{,}54=6{,}8254.10^{2}$.

5. Redzējām, ka, noapaļojot skaitli, var sasniegt to, ka kļūdas augstākā robeža izteiksies kā pēdējā (skaitot no kreisās puses) zīmīgā cipara (ieskaitot ari nulli, ja tā spēlē zīmīgā cipara lomu) vienība, citiem vārdiem, ka pēdējai zīmīgais cipars varēs svārstīties par vienu vienību, pie kam zinām ari šīs svārstības virzienu.

Var noapaļošanu izdarīt tā, lai, paturot to pašu ciparu skaitu, tomēr pielaisto kļūdu padarītu mazāku, Piem., ja noapaļojot skaitli 384, ņemsim par aptuveno skaitli 380, tad kļūda 384—380=4 būs mazāka par 5; ja noapaļojot skaitli 386, ņemsim tā vietā 380, tad kļūda būs 6 un nebūs vairs mazāka par 5; bet ja ņemtu šinī gadījumā aptuveno skaitli ar piedevām, t. i. 390, tad kļūda būtu 4, tā tad mazāka par 5. Tāpat, ja noapaļojot skaitli 0,62, ņemsim tā vietā 0,6, tad kļūda būs 0,02, tā tad mazāka par 0,05; turpretīm noapaļojot 0,67 kā 0,7, ari dabūsim, ka kļūda 0,03 mazāka par 0,05. Aplūkotos gadījumos ņēmām vienreiz skaitli ar iztrūkumu, otrreiz ar piedevām, kas atkarājas, kā viegli saprotams, no atmetamā cipara lieluma: ja nākamais pēc paturamā cipara (skaitot no kreisās puses) ir mazāks par 5, tad precīzais skaitlis tuvāk apakšējai robežai, tāpēc tādā gadījumā labāk ņemt ar iztrūkumu; ja turpretim pirmais no atmetamiem cipariem (skaitot no kreisās puses) ir lielāks par 5, tad skaitļa īstā nozīme tuvāk augšējai robežai, un tāpēc skaitļa aptuveno nozīmi labāk ņemt ar piedevām. Ja atmetamais cipars ir tikai 5 un pie tam īsts pieci, t. i. ja nav cēlies no agrākā noapaļojuma, tad vienalga, vai ņemt tuvinājumu ar piedevām vai iztrūkumu; piem., ja noapaļojam skaitli 865, atmetot pēdējo ciparu, tad vienalga, vai ņemt 860 vai 870; ābos gadījumos kļūda nepārsniedz 5. Ja aiz pirmā atmetamā cipara 5 stāv vēl citi cipari, tad noapaļojot izdevīgāk ņemt skaitli ar piedevām, piem., skaitlis 852, noapaļots tā, ka atmet beidzamos divus ciparus, dos skaitli 800 ar iztrūkumu un kļūdu 52, turpretīm ar piedevām noapaļots tas dos 900 un kļūda 48; pirmā kļūda būs lielāka par 50, otra turpretīm mazāka par 50. Bet ja cipars 5 nav īsts, t. i. šis cipars cēlies no noapaļošanas, piem., ja skaitlis 0,85 būtu cēlies no skaitļa 0,848 noapaļojuma, tad noapaļojot tālāk, nevarētu ņemt, saskaņā ar mūsu mērķi, 0,9, bet gan vajadzētu ņemt 0,8, lai kļūda būtu pēc iespējas mazāka. Izņēmums būtu vienā gadījumā, ja 5 būtu dabūts no 4 un aiz 4 stāvētu 9 periodā, piem., 0,8499 . . ., jo tad 0,8499 . . . $= \frac{849-84}{900} = \frac{765}{900} = \frac{85}{100} = 0,85$ un tādā gadījumā ar noapaļošanu dabūtais 5 būtu patiesībā īstais 5; tāpēc skaitlis 0,8499 . . . noapaļojumā dos 0,85 un tālāk 0,9.

Tā tad tikai vienā gadījumā, ja pirmais (skaitot no kreisās puses) atmetamais cipars ir 5, ir vienalga, vai ņemt aptuveno skaitli ar iztrūkumu vai piedevām, citos turpretim, ja vien 5 ir īstais 5, izdevīgāk ņemt ar piedevām; tāpēc nonākam pie šāda noapaļošanas paņēmiena:

⊙ ja gribam skaitli noapaļot tā, lai kļūda būtu pēc iespējas mazāka, tad atmetot ciparus, raugamies, kāds ir pirmais, skaitot no pirmās puses, atmetamais cipars: ja tas ir mazāks par 5, tad ciparus vienkārši atmetam un par aptuveno skaitli ņemam palikušo daļu (aptuveno skaitli ņemam ar iztrūkumu); ja turpretīm pirmais atmetamais cipars ir īstais 5 vai lielāks par 5, tad beidzamo (skaitot no kreisās puses) paturamo ciparu palielinām par vienu vienību (aptuveno skaitli ņemam ar piedevām); tā rīkodamies panākam to, ka pielaistā kļūda n e p ā r s n i e d z b e i d z a m ā z ī m ī g ā c i p a r a š ķ i r a s v i e n ī b a s p u s e s.

Tā tad ja pēc šāda paņēmiena esam noapaļojuši, piem., skaitļus 0,432; 53.10^2; 0,03; 8340.10^3, tad varam teikt, ka pielaistās kļūdas attiecīgi nepārsniegs 0,0005; 50; 0,005; 500.

Vienīgā neērtība, ja nav nekas īpaši teikts, ir tā, ka nezinām, vai šie skaitļi ņemti ar iztrūkumu vai piedevām. Lai šo trūkumu novērstu, mēdz bieži pie tiem skaitļiem, kuŗi ņemti ar piedevām, likt kādu zīmi, piem., *.

6. Līdz šim aplūkotos gadījumos bija zināma kļūdas robeža un arī kļūdas virziens. Redzējām, ka tādā gadījumā viegli noteikt robežas, un par skaitļa aptuveno nozīmi varēja ņemt vienu no robežām, pie kam kļūda nepārsniedz skaitļa svārstīšanās lieluma jeb robežu starpības; ja noapaļojot izvēlamies par aptuveno nozīmi vienu no robežām, kā nule aizrādīts, tad varam kļūdu pamazināt tā, ka tā nepārsniedz puses no svārstīšanās lieluma jeb robežu starpības.

Ja tagad aplūkosim gadījumu, kur aptuvenam skaitlim zinām gan kļūdas robežu, bet nezinām tās virziena, tad varam tāpat uzrādīt robežas, kuŗu starpā svārstās skaitlis, tikai šīs robežas tad kļūst plašākas. Tā piemērā, kuŗā bija runa par mārciņas svara izteikšanu gramos, redzējām, ka šis svars ir 409,4 *g*, pie kam kļūdas robeža ir 0,2 *g*, bet virziens nezināms. Tā tad robežas, kuŗās svārstās skaitļa īstā nozīme ir 409,2 *g* un 409,6 *g*, t. i. robežu starpība ir 0,4 *g*; 409,4 ir $\frac{409{,}2+409{,}6}{2}$, t. i. robežu aritmētiskais vidusskaitlis; tā tad šinī gadījumā, kad nav zināms kļūdas virziens, nevis viena vai otra robeža dod labāku tuvinājumu, bet gan robežu aritmētiskais vidusskaitlis, jo tad kļūda būs mazāka par robežu starpības pusi.

Protams, ka šī pati sakarība pastāv ari pirmā gadījumā, ja ir zināms kļūdas virziens: ari tad, ja par aptuveno skaitli pieņemsim robežu aritmētisko vidusskaitli, pielaistās kļūdas robeža nepārsniegs robežu starpības puses, bet šinī gadījumā, kā redzējām, var rīkoties vienkāršāk.

Tā tad, ja zinām aptuveno skaitli un kļūdas robežu, tad varam atrast robežas, kuŗu starpā var svārstīties skaitļa īstā nozīme, un otrādi, ja zinām robežas, starp kuŗām var svārstīties skaitļa īstā nozīme, varam atrast aptuveno skaitli un kļūdas robežu.

4. Relatīvā kļūda. Skaitļa pareizie cipari. Skaitļa precīzitāte.

1. Līdz šim esam runājuši par skaitļa absolūto kļūdu un tās robežu. Tomēr absolūtās kļūdas vai tās robežas zināšana nedod pietiekoša jēdziena par to, cik labi izpildīti tie mērīšanas darbi, kas devuši aptuveno skaitli. Ja, piem., mums saka, ka viens gaŗums izmērīts ar kļūdu, kas nepārsniedz 1 *mm*, un otrs ar kļūdu, kas nepārsniedz 1 *m*, tad viss atkarājas no tam, cik lieli gaŗumi ir mērīti: ja pirmā gadījumā viss mērāmais gaŗums nepārsniedz 1 *cm*, otrā turpretīm lielāks par kilometru, tad pirmā gadījumā kļūda aptveŗ mērāmā lieluma desmito daļu, otrā — tūkstoto daļu; protams, ka otrā gadījumā mērīšana izdarīta labāk. Tāpēc ieved jēdzienu par relatīvo kļūdu, proti, par skaitļa relatīvo kļūdu sauc absolūtās kļūdas attiecību pret skaitli; tā, piem., ja skaitļa 584 vietā ņemsim 580, tad absolūtā kļūda būs 4, bet relatīvā $\frac{4}{584}=\frac{1}{146}$.

Relatīvo kļūdu mēdz bieži izteikt procentos; kā zināms, to var viegli izdarīt, reizinot relatīvās kļūdas izteiksmi ar 100.

Šinī gadījumā relatīvā kļūda ir $\frac{1}{164}$ jeb procentos $\frac{1}{146} \cdot 100 \approx 0{,}68\%$.

2. Tā kā absolūto kļūdu un skaitļa īsto nozīmi zinām tikai samērā retos gadījumos, tad biežāk būs jāapmierinājas, tāpat kā absolūtās kļūdas gadījumā, ar *relatīvās kļūdas augstāko robežu*; lai dabūtu relatīvās kļūdas augstāko robežu, ņemsim par minētās attiecības skaitītāju absolūtās kļūdas vietā lielāku skaitli — absolūtās kļūdas augstāko robežu, un par saucēju skaitļa īstās nozīmes vietā mazāku skaitli—skaitļa zemāko robežu; tā tad

⊙ **par relatīvās kļūdas (augstāko) robežu pieņemsim absolūtās kļūdas (augstākās) robežas attiecību pret skaitļa zemāko robežu.**

Ja apzīmēsim absolūtās kļūdas augstāko robežu ar ε, aptuvenā skaitļa a zemāko robežu ar a_1, relatīvās kļūdas augstāko robežu ar α, tad

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{a_1}.$$

Zinot relativās kļūdas robežu, var viegli dabūt absolūtās kļūdas robežu: relatīvās kļūdas robeža jāreizina ar skaitļa zemāko robežu, jo no iepriekšējās vienlīdzības

$$\varepsilon = \alpha \, . \, a_1.$$

Tā kā skaitļa zemākā robeža bieži vien nav zināma, tad šīs robežas vietā var ņemt pašu aptuveno skaitli a; tad $\varepsilon = \alpha \, . \, a$.

3. Tā kā taisni relatīvās kļūdas (augstākā) robeža noteic aptuvenā skaitļa pareizības pakāpi, tad, no vienas puses, jācenšas, lai mērījumos vai aprēķinos šī kļūda būtu pēc *iespējas maza*, un, no otras puses, lai ātri un vienkārši varētu izteikt relatīvās kļūdas robežu. Tāpēc praksē parasti mēdz relatīvās kļūdas robežu izteikt tā, ka par saucēju iekārto 10 attiecīgā pakāpē un par skaitītāju vien- vai divzīmju skaitli. Piem., ja skaitlis 4,612 ir atrasts ar absolūtu kļūdu, kas nepārsniedz 0,001, tad var ņemt 4,612 vietā 4, un tāpēc relatīvās kļūdas augstākā robeža.

$$a = \frac{1}{1000} : 4 = \frac{1}{4000} = \frac{25}{100000} = 0{,}025\%.$$

Tā kā pa lielai tiesai aptuvenos skaitļus ņem tā, ka kļūda nepārsniedz pēdējās šķiras vienības, tad tādos gadījumos vis-ērtāk relatīvās kļūdas augstāko robežu atrodam, dalot zemākās šķiras vienību ar augstākās šķiras vienību skaitu, pie kam, saprotams, var atmest komatu, jo cik reiz palielināsies vai pamazināsies zemākās šķiras vienība, tik pat daudz reiz palielināsies vai pamazināsies augstākās šķiras vienības, tā tad attiecība nemainīsies; ņemtajā piemērā redzam, ka aptuvenā skaitļa 4,612 relatīvās kļūdas augstākā robeža ir tāda pati, kā skaitļa 4612 vai skaitļa 46,12 relatīvās kļūdas augstākā robeža.

Tā tad aptuveniem skaitļiem 4356 un 43562 relatīvo kļūdu augstākā robeža ir $\frac{1}{4000}$ un $\frac{1}{40000}$ jeb 0,025% un 0,0025%.

4. Vispār, relatīvā kļūda vai tās augstākā robeža nemainās, ja aptuveno skaitli reizināsim vai dalīsim ar kādu skaitli, citiem vārdiem, pārcelsim komatu no vienas vietas uz otru. Tiešām, ja apzīmēsim aptuvenā skaitļa a absolūto kļūdu ar Δa, skaitļa īsto nozīmi ar A, tad relatīvā kļūda α izteiksies, saskaņā ar relatīvās kļūdas apzīmējumu, tā:

$$\alpha = \frac{\Delta a}{A};$$

tā kā $A = a \pm \Delta a$, tad reizinot abas puses ar m, dabūsim, ka $mA = ma \pm m\Delta a$. Šeit mA ir precīzais skaitlis, ma ir skaitļa mA tuvinājums, $m\Delta a$ absolūtā kļūda; relatīvā kļūda α_1, ko pielaidīsim, ņemot mA vietā ma, būs $\alpha_1 = \frac{m\Delta a}{mA} = \frac{\Delta a}{A} = \alpha$; līdzīgā kārtā dabūsim, ka $\frac{A}{m} = \frac{a}{m} + \frac{a\Delta}{m}$ un $\alpha_2 = \frac{\frac{\Delta a}{m}}{\frac{A}{m}} = \frac{\Delta a}{A} = \alpha$.

Tā tad aptuveniem skaitļiem 864; 8,64; 0,864 ir viena un tā pati relatīvā kļūda, kā arī relatīvās kļūdas augstākā robeža; tiešām, pirmā skaitļa absolūtās kļūdas robeža ir 1, otrā — skaitlis 0,01 un trešā 0,001; relatīvās kļūdas robežas būs $\frac{1}{864}$; $\frac{0,01}{8,64}$; $\frac{0,001}{0,864}$; visi šie skaitļi ir savā starpā vienlīdzīgi.

Līdz ar to nākam pie slēdziena, ka relatīvā kļūda pie vienas un tās pašas absolūtās kļūdas būs mazāka, ja skaitlī vairāk zīmīgo ciparu, no kuŗiem tikai pēdējais svārstīgs.

Par aptuvenā skaitļa pareiziem cipariem sauksim visus tos ciparus pēc kārtas, skaitot no kreisās puses, kuŗi ieietu precīzā skaitlī. Tā, piem., ja skaitļa 4836,42 vietā ņemsim 4836, tad šī skaitļa pareizie cipari ir 4, 8, 3, 6.

5. Pieņemsim, ka relatīvās kļūdas augstākā robeža noteikta iepriekš; ceļas jautājums, cik daudz zīmīgo ciparu jāņem vai cik to jāpatur skaitlī, lai šī skaitļa relatīvā kļūda nepārsniegtu dotās robežas. Šo jautājumu varam atrisināt tā, ka pēc dotās relatīvās kļūdas robežas atrodam absolūtās kļūdas robežu; pēdējā ļauj spriest par vajadzīgo ciparu skaitu, pie kam skaitli, sakarā ar nule teikto, varam iekārtot tā, lai tas būtu vesels skaitlis.

Piem., atrast, cik ciparu jāpatur skaitlī 43,57, lai tā relatīvā kļūda nepārsniegtu 1%. Tā kā $1\% = \frac{1}{100}$, tad relatīvās kļūdas robeža ir $\frac{1}{100}$ un tāpēc absolūtā kļūda nevar pārsniegt $\frac{1}{100} \cdot 40 = 0{,}40$; tā tad skaitli 43,57 varam noapaļot, lai absolūtā kļūda nepārsniegtu 0,1, t. i. ņemt šo skaitli kā 43,5.

II. Darbības ar aptuveniem skaitļiem.

5. Saskaitīšana.

1. Ja ar aptuveniem skaitļiem jāizpilda kādas darbības, piem., jāatrod aptuveno skaitļu summa, reizinājums u. tml., tad, pats par sevi saprotams, ari iznākums būs aptuvens skaitlis; par šī pēdējā skaitļa precīzitāti, citiem vārdiem, kļūdas (absolūtās vai relatīvās) robežu nekā bez īpaša pētījuma pateikt nevaram; nevaram ari noteikt, vai varēsim sasniegt vēlamo precīzitāti, izpildot darbības ar aptuveniem skaitļiem, piem., ieliekot tos kādā formulā.

Tāpēc, aplūkojot darbības ar aptuveniem skaitļiem, nāksies sastapties ar šādiem jautājumiem: 1) zināma aptuveno skaitļu precīzitāte; kāda precīzitāte (kļūdas augstākā robeža) būs iznākumam, ja izpildīsim ar šiem skaitļiem kādas darbības? 2) ar kādu precīzitāti jāņem dotie skaitļi, lai varētu sasniegt, izpildot darbības ar tiem, iznākumu ar iepriekš noteikto precīzitāti? 3) kā pēc iespējas vienkāršāk un ērtāk izpildīt šīs darbības?

2. Doti aptuvenie skaitļi $a, b, c, \ldots, k$, kuŗu absolūto kļūdu robežas ir attiecīgi $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \ldots \Delta k$. Ņemsim vis-

pārējāko gadījumu, kur kļūdas virziens nav zināms; tad šo skaitļu zemākās robežas būs $a-\Delta a$, $b-\Delta b$, $c-\Delta c, \ldots, k-\Delta k$ un to summa $a+b+c \ldots + k-(\Delta a+\Delta b + \ldots + \Delta k)$; līdzīgā kārtā dabūsim šo skaitļu summas augstāko robežu $(a+b+c \ldots +k) + +(\Delta a+\Delta b+ \ldots +\Delta k)$. Apzīmēsim precīzo skaitļu $A, B, C, \ldots K$ summu ar S; tā kā ar saskaitāmo pieaugšanu pieaug ari summa, tad

$$a+b+c+ \ldots + k-(\Delta a+\Delta b+\Delta c+ \ldots + \Delta k) < S < < a+b+c+ \ldots + k+(\Delta a+\Delta b+\Delta c+ \ldots + \Delta k);$$

ņemot S vietā robežu aritmetisko vidusskaitli $a+b+c+ \ldots +k$ pielaidīsim kļūdu, kuŗas robeža ir $\Delta a+\Delta b + \ldots + \Delta k$; tā tad

⊙ **aptuveno skaitļu summa dod aptuveno skaitli, kuŗa kļūdas robeža ir to kļūdu robežu summa, kas piemīt atsevišķiem saskaitāmiem,** vai īsāk:

summas kļūdas robeža ir saskaitāmo kļūdu robežu summa.

Piemēri.

1) Atrast skaitļu 38,412, 651,319 un 0,516 summu, no kuŗiem ikviens ņemts ar iztrūkumu, pie kam kļūda nepārsniedz pēdējās šķiras vienības.

Uzrakstīsim šos skaitļus citu zem cita, līdzās atzīmējot kļūdas robežu un virzienu.

$$\begin{array}{r} 38,412+0,001 \\ 651,319+0,001 \\ 0,516+0,001 \\ \hline 690,247+0,003 \end{array}$$

Tā tad doto skaitļu summas zemākā robeža ir 690,247 un augstākā 690,250. Ja gribētu izteikt šo summu tā, lai kļūda nepārsniegtu pēdējās šķiras vienas vienības, tad nāktos šo skaitli noapaļot un pieņemt, ka tas ir 690,24, pie kam kļūda no summēšanas būs 0,003 un no noapaļošanas 0,007, tā tad kļūda nepārsniegs 0,01 pamazinājumā. Ja noapaļojot ņemtu 690,25, tad kļūda nepārsniegtu 0,003 palielinājumā.

2) Atrast aptuveno skaitļu 8,31, 5,4, 39,126, 85 summu, pie kam kļūda nepārsniedz vienas pēdējās šķiras vienības pamazinājumā.

Uzrakstīsim šos skaitļus summēšanai citu zem cita ar attiecīgām kļūdas robežām

$$\begin{array}{ll} 8,31 & +0,01 \\ 5,4 & +0,1 \\ 39,126 & +0,001 \\ 85 & +1 \\ \hline 137,836 & +1,111 \end{array}$$

Summas zemākā robeža ir 137,836 un augstākā 138,947. Tā kā kļūdas augstākā robeža sniedzas vieniniekos, tad nav nekādas nozīmes paturēt decimālzīmes; tāpēc, noapaļojot 137,836 dabūjam, ka $137{,}836 \approx 137$ ar kļūdu, kuŗa nepārsniedz $1{,}111+0{,}836=1{,}947$, t. i., nepārsniedz 2 vienību pamazinājumā; pieņemot par summu 138, kļūda nepārsniegs vienas vienības, tikai kļūdas virziens būs nezināms. Ka šinī gadījumā kļūda būs mazāka par 1, varam redzēt, salīdzinot skaitli 138 ar tā robežām; ja skaitļa īstā nozīme būtu pat tuvu vienai vai otrai robežai, tā atšķirtos no skaitļa 138 mazāk nekā par 1.

3) Saskaitīt aptuvenos skaitļus 5,31, 612, 8,39, 6,03, pie kam kļūda nepārsniedz pēdējās šķiras vienības puses un kļūdas virziens nezināms.

Uzrakstot saskaitāmos citu zem cita, dabūsim

$$\begin{array}{r} 5{,}31 \pm 0{,}005 \\ 6{,}12 \pm 0{,}005 \\ 8{,}39 \pm 0{,}005 \\ 6{,}03 \pm 0{,}005 \\ \hline 25{,}85 \pm 0{,}02 \end{array}$$

Summas zemākā robeža ir 25,83 un augstākā 25,87. Pieņemot par summu 25,85, pielaidīsim kļūdu, kuŗa nepārsniegs 0,02, pie kam kļūdas virziens — būs nezināms.

Ja gribam noapaļot summu tā, lai kļūdas augstākā robeža nepārsniegtu pēdējās šķiras vienības, tad jāatmet simtās daļas un summa jāņem vai nu kā 25,8 (ar iztrūkumu) vai 25,9 (ar piedevām); abos gadījumos, kā to viegli konstatēt, salīdzinot ar robežām, kļūda nepārsniegs 0,1 [$25{,}83-25{,}8=0{,}03$; $25{,}87-25{,}8=0{,}07$; $25{,}9-25{,}83=0{,}07$; $25{,}9-25{,}87=0{,}03$; tā tad kļūdas augstākā robeža ir 0,07, tāpēc kļūda katrā ziņā nepārsniegs 0,1].

4. Tagad aplūkosim otru jautājumu: aptuveno skaitļu summa jāatrod tā, lai tās absolūtās kļūdas robeža nepārsniegtu dotā skaitļa. Ja saskaitāmie ir tādi, ka ikviena saskaitāmā precīzitāti varam palielināt, citiem vārdiem, absolūtās kļūdas robežu pēc patikas pazemināt, tad jautājums vienmēr atrisināms, pie kam saskaitāmie jāizvēlas ar tādu tuvinājumu, lai nerastos lieks darbs, t. i., lai nebūtu lieku ciparu. Ja saskaitāmie ir tādi, ka kaut viena saskaitāmā absolūtās kļūdas robežu nevaram pēc patikas pazemināt, tad jautājumu katrreiz atrisināt nevarēsim.

Ņemsim piemēru. Izteikt $\frac{1}{7}$ un $\frac{1}{3}$ decimāldaļās un atrast to summu tā, lai kļūda nepārsniegtu 0,01.

Tā kā ikvienu no dotām daļām varam izteikt kā decimāldaļu ar kļūdu, kas nepārsniedz pēdējās šķiras vienības puses, tad mums pietiks abas šīs decimāldaļas ņemt ar divām decimālzīmēm.

$\frac{1}{7} \simeq 0{,}14$ un $\frac{2}{3} \simeq 0{,}67$; tā tad summa 0,81 būs ņemta ar kļūdu, kas mazāka par $0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01$ un šinī gadījumā pat vēl stipri mazāka, jo kļūda vienam saskaitāmam būs pamazinājumā, otram palielinājumā. Noapaļošana šādā gadījumā nebūs vajadzīga.

Vispār, ja saskaitāmo kļūdas varam izteikt ar pēdējās šķiras vienības pusi, tad, ja saskaitāmie tikai divi, tos var ņemt ar tikdaudz zīmīgiem cipariem, lai pēdējā šķira būtu tā pati, kas vajadzīga summā; ja saskaitāmo vairāk nekā divi, bet ne vairāk par 10, tad jāņem par vienu šķiru vairāk, t. i. ja, piem., summa jāatrod ar kļūdu, kas nepārsniegtu 0,001, tad saskaitāmie jāņem tā, lai tanīs būtu 4 decimālzīmes. Summas kļūda sastādīsies no skaitāmo kļūdām un no noapaļojumu kļūdas.

Piemērs. Atrast skaitļu $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{3}$ summu tā, lai kļūda nepārsniegtu 0,001.

Tā kā $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142 \pm 0{,}00005$; $\sqrt{3} \simeq 1{,}7321 \pm 0{,}00005$ un $\frac{1}{3} \simeq 0{,}3333 \pm 0{,}00005$, tad summa $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{3} \simeq 3{,}4796$ ar kļūdu, kas nepārsniedz $3 . 0{,}00005 = 0{,}00015$; noapaļojot līdz tūkstotām daļām, dabūsim, ka $3{,}4796 + 0{,}0015 \simeq 3{,}479 \pm 0{,}00075$; un $3{,}4796 \pm 0{,}00015 \simeq 3{,}480 \pm 0{,}00055$; tā tad 3,479 vai 3,480 ir doto skaitļu summa ar kļūdu, kas nepārsniedz 0,001.

Ja saskaitāmo ir vairāk nekā desmit, bet to skaits nepārsniedz simta un tos var izteikt tā, ka kļūda nepārsniedz pēdējās šķiras vienības puses, tad saskaitāmie jāņem ar divi decimālzīmēm vairāk nekā vajadzīgs summai, lai summas absolūtā kļūda nepārsniegtu summas pēdējās šķiras vienības.

Tiešām, pieņemsim, ka summa jāatrod tā, lai kļūda nepārsniegtu $\frac{1}{10^n}$ (piem., $\frac{1}{10^2}$); tad katru saskaitāmo ņemam tā, lai tanī būtu $\frac{1}{10^{n+2}}$ daļas (ņemtajā piemērā $\frac{1}{10^4}$); tādā gadījumā katrs saskaitāmais būs aprēķināts ar kļūdu, kas nepārsniedz $\frac{1}{10^{n+2} . 2}$

$\left(\frac{1}{10^4 . 2}\right)$; kļūda no saskaitāmo kļūdu summēšanas nepārsniegs $\frac{100}{10^{n+2} . 2} = \frac{1}{10^n . 2}$ $\left(\frac{100}{10^4 . 2} = \frac{1}{10^2 . 2}\right)$; kļūda no noapaļošanas, atmetot beidzamos 2 ciparus, nepārsniegs $\frac{1}{10^n . 2}$ $\left(\frac{1}{10^2 . 2}\right)$; tā tad kopējā kļūda nepārsniegs $\frac{1}{10^n . 2} + \frac{1}{10^n . 2} = \frac{1}{10^n}$.

Kopsavilkums. Ja saskaitāmos varam aprēķināt tā, lai kļūda nepārsniegtu pēdējās šķiras vienības puses, tad, lai atrastu summu ar kļūdu, kas nepārsniedz $\frac{1}{10^n}$, ņemam saskaitāmos — divu saskaitāmo gadījumā ar n decimālzīmēm; ja saskaitāmo vairāk nekā 2, bet ne vairāk kā desmit — ar $(n+1)$ decimālzīmi, ja vairāk par 10, bet ne vairāk par 100 — ar $(n+2)$ decimālzīmēm (summas kļūda sastādās no saskaitāmo summēšanas un no noapaļošanas kļūdas).

Teikto viegli attiecināt uz to gadījumu, ja summas kļūda izteicas ar kādu veselu vienību šķiru, piem., tā, ka tā nepārsniedz 10^n; divu saskaitāmo gadījumā tie jāņem tā, lai beidzamā šķira būtu — tās pašas vienības, t. i. 10^n; 3 līdz 10 saskaitāmo gadījumā — lai beidzamā šķira būtu 10^{n-1} un 10—100 saskaitāmo gadījumā, lai beidzamā šķira būtu 10^{n-2}.

Piemērs. Atrast skaitļu 48656, 3254 un 54639 summu tā, lai kļūda nepārsniegtu 1000.

Saskaņā ar teikto, noapaļojam skaitļus tā, lai beidzamā šķiru vienībā būtu $10^{3-1} = 10^2$, t. i. simtnieki; tad $48656 \approx 48700$; $3254 \approx 3300$; $54639 \approx 54600$; $48700 + 3300 + 54600 =$

$= 106600 \approx 107000$. Kļūda nepārsniegs $\frac{10^2}{2} . 3 + \frac{10^3}{2} =$

$= 150 + 500 = 650$, tā tad katrā ziņā nepārsniegs 1000.

Līdzīgā kārtā var viegli parādīt, ka gadījumā, ja saskaitāmo kļūdas var izteikt tikai ar beidzamās šķiras vienību, tad, kamēr saskaitāmo skaits nav lielāks par 5, tie jāņem ar vienu zemāku šķiru, un ja saskaitāmo skaits lielāks par 5, bet nepārsniedz 50, tie jāņem ar divi zemākām šķirām nekā vajadzīgs summā-

6. Atņemšana.

1. Ņemsim divu skaitļu A un B ($A > B$) vietā aptuvenos skaitļus a un b, kuŗu kļūdu virziens nezināms un robežas ir attiecīgi Δa un Δb; tad pirmā precīzā skaitļa A robežas ir $a - \Delta a$ un $a + \Delta a$ un otrā $b - \Delta b$ un $b + \Delta b$, t. i. $a - \Delta a < A < a + \Delta a$ un $b - \Delta b < B < b + \Delta b$. Šo skaitļu starpības zemāko robežu dabūsim, ja no pirmā skaitļa zemākās robežas atņemsim otra skaitļa augstāko robežu (ar mazinātāja pieaugšanu starpība pamazinās) un augstāko — ja no pirmā skaitļa augstākās robežas atņemsim otrā skaitļa zemāko robežu, tā tad $a - \Delta a - (b + \Delta b) < A - B < a + \Delta a - (b - \Delta b)$ jeb $a - b - (\Delta a + \Delta b) < A - B < a - b + (\Delta a + \Delta b)$; tā tad, ja skaitļu A un B starpības $A - B$ vietā ņemsim $a - b$, tad starpības augstākā robeža ir $a - b + (\Delta a + \Delta b)$ un zemākā a—b—$(\Delta a + \Delta b)$; pieņemot par šo skaitļu starpību $a - b$, pielaidīsim kļūdu, kuŗa nepārsniegs $\Delta a + \Delta b$, t. i. nepārsniegs mazināmā un mazinātāja kļūdu robežu summas.

Ja a un b ir skaitļu A un B aptuvenās nozīmes ar iztrūkumu, tad

$a < A < a + \Delta a$ un $b < B < b + \Delta b$; tādā gadījumā meklējot tāpat, kā agrāk, kļūdas augstāko un zemāko robežu, atrodam, ka

$$a - b - \Delta b < A - B < a - b + \Delta a,$$

t. i., ja $A - B$ vietā ņemsim $a - b$, tad kļūda nepārsniegs Δa vai Δb, tā tad kļūdas robeža būs lielākais no skaitļiem Δa un Δb, bet kļūdas virziens būs nezināms.

Vispār, ja mazināmā un mazinātāja kļūdas ir viena virziena, tad starpības absolūtā kļūda būs mazāka par lielāko no doto skaitļu kļūdām.

P i e m ē r s. Atrast skaitļu 3,27 un $2\frac{1}{7}$ starpību, no kuŗiem pirmais ņemts ar tuvinājumu līdz $\pm 0{,}01$.

Izteiksim $2\frac{1}{7}$ kā decimāldaļu; dabūsim, ka $2\frac{1}{7} = 2{,}(142857)$. Ja ņemsim $2\frac{1}{7} \approx 2{,}14$, tad kļūda nepārsniegs 0,005; $3{,}27 - 2\frac{1}{7} \approx$ $\approx 3{,}27 - 2{,}14 \approx 1{,}13$, pie kam, saskaņā ar agrāk teikto, kļūda nepārsniegs $0{,}01 + 0{,}005$, t. i. nepārsniegs 0,015; ja starpību 1,13 noapaļosim līdz 1,1, tad kļūda nepārsniegs $0{,}015 + 0{,}03 = 0{,}0415$, tā tad nepārsniegs $\pm 0{,}1$.

Vispār, lai atrastu starpības absolūto kļūdu vai pēc iepriekš dotās starpības kļūdas izvēlētos mazināmā un mazinātāja c i p a r u s k a i t u, v a r r ī k o t i e s k ā s a s k a i t ī š a n a s g a d ī j u m ā a r d i v i s a s k a i t ā m i e m.

3. Ja vairāki skaitļi jāsaskaita un jāatņem, tad mēdz atņemamos skaitļus pārveidot to aritmētiskā papildinājumā līdz 10, 100, 1000, . . . ; tad atņemšanas vietā pieskaita šo aritmētisko papildinājumu un no iznākuma atņem 10, 100, . . .

Piem., ja jāaprēķina izteiksme 34,546+44,684—51,629, tad —51,629 vietā ņemam viņa aritmētisko papildinājumu līdz 100, t. i., pieskaitām šim skaitlim 100; tad 100—51,629=48,371; lai iznākums nemainītos, tad no tā jāatņem 100; tā tad dotos skaitļus var uzrakstīt tā:

$$
\begin{array}{l}
34{,}546 \\
44{,}684 \\
\underline{48{,}371-100} \\
127{,}601-100=27{,}601
\end{array}
$$

Skaitļa aritmētisko papildinājumu mechaniski atrodam tā, ka visus skaitļa ciparus atņemam no 9, bet beidzamo no 10.

* * *

Aplūkotie paņēmieni rāda, ka ne summas, ne starpības precīzitāte nevar pārsniegt doto skaitļu precīzitātes; tāpēc, ja, piem., summa jāaprēķina ar tuvinājumu līdz 0,001 un viens no saskaitāmiem dots ar tuvinājumu tikai līdz 0,01, tad uzdevums nav iespējams.

7. Reizināšana.

1. Ja precīzo skaitļu A un B vietā ņemam a un b, pie kam absolūto kļūdu robežas ir Δa un Δb un virziens nezināms, tad $a-\Delta a<A<a+\Delta a$ un $b-\Delta b<B<b+\Delta b$; tāpēc [ar reizinātāju pieaugšanu pieaug ari reizinājums]

$$(a-\Delta a)\ (b-\Delta b)<AB<(a+\Delta a)\ (b+\Delta b) \text{ jeb}$$

$$ab-a\Delta b-b\Delta a+\Delta a\Delta b<AB<ab+a\Delta b+b\Delta a+\Delta a\Delta b, \text{ t. i.,}$$

$$ab-[a\Delta b+\Delta a(b-\Delta b)]<AB<ab+[a\Delta b+\Delta a(b+\Delta b)]$$

tā tad, ja AB vietā ņemsim ab, tad kļūda nepārsniegs $a\Delta b+\Delta a(b-\Delta b)$ vai $a\Delta b+\Delta a(b+\Delta b)$, tā kā beidzamais skaitlis lielāks, tad par reizinājuma kļūdas robežu pieņemam $a\Delta b+$ $+\Delta a(b+\Delta b)$, t. i.,

⊙ **reizinājuma absolūtās kļūdas robeža ir summa, kuŗa sastādās no divi reizinājumiem: viens ir pirmā reizinātāja reizinājums ar otra reizinātāja absolūtās kļūdas robežu un otrs ir otrā reizinātāja augstākās robežas reizinājums ar pirmā reizinātāja kļūdas robežu.**

Ja a vietā ņemsim $a+\Delta a$, tad izteiksme kļūs lielāka, bet simetriskāka, tāpēc reizinājuma kļūdas robežu var rakstīt ari tā

$$(a+\Delta a)\Delta b+(b+\Delta b)\Delta a.$$

Lai ātrāk aprēķinātu šo kļūdas robežu, mēdz $a+\Delta a$ un $b+\Delta b$ vietā ņemt mazliet lielākus skaitļus, kuŗus dabū tā, ka skaitļu a un b visu zīmīgo ciparu (izņemot pirmo) vietā liek 0 un pirmo ciparu palielina par vienu.

Tā, piem., ja skaitļi 63,34 un 89,16 aprēķināti ar tuvinājumu līdz $\pm$ 0,01, tad to reizinājuma absolūtās kļūdas robeža nepārsniegs $70.0{,}01+90.0{,}01=0{,}7+0{,}9=1{,}6$. Ja šie skaitļi būtu doti ar kļūdas augstāko robežu $\pm$ 0,005, tad reizinājuma absolūtā kļūda nepārsniegtu $70{,}005+90.0{,}005=0{,}35+0{,}45=0{,}8$. Ja pēdējā gadījumā atradīsim reizinājumu 5647,3944, tad, tā kā absolūtās kļūdas robeža sniedzas desmitās daļās, nav nozīmes paturēt tās un protams, ari mazākas daļas; tāpēc noapaļojot skaitli 5647,3944, atrodam, ka $5647{,}3944 \simeq 5647$, pie kam reizinājuma kļūdas robeža ir $(63{,}345+89{,}165).0{,}005=152{,}510.0{,}005=0{,}762550$; no noapaļojuma rodas kļūda 0,3944, tāpēc galīgi kļūdas robeža ir $0{,}762550+0{,}3944 \simeq 1{,}15 \simeq 1{,}2$. Tā tad reizinājumā 5647 ir pareizi trīs cipari, un ceturtais var svārstīties vairāk nekā par vienu vienību.

2. Ja viens no reizinātājiem ir precīzs skaitlis, piem., a, tad $\Delta a=0$ un tādā gadījumā kļūdas robeža nepārsniegs $a.\Delta b$, t. i. nepārsniegs aptuvenā reizinātāja kļūdas robežas reizinājuma ar otru (precīzo) skaitli.

3. Ja divus aptuvenos skaitļus vai aptuveno un precīzo skaitli reizināsim tādā veidā, kā tie doti, tad vispār reizinājumā būs vairāk ciparu nekā vajadzīgs saskaņā ar iespējamo precīzitāti; lai novērstu liekās darbības, var ievest tā saucamo saīsināto reizināšanu.

Atradīsim, piem., aptuveno skaitļu 746,156 un 62,346 reizinājumu, ja skaitļi ņemti ar tuvinājumu līdz $\pm$ 0,0005.

Reizinājuma kļūdas robeža nepārsniegs, saskaņā ar agrāk teikto, $0{,}0005\,.\,800+0{,}0005\,.\,70=0{,}0005\,.\,870=0{,}435$; tā tad reizinājumu nevaram dabūt ar lielāku tuvinājumu, kā līdz 0,5, t. i. šinī gadījumā būs reizinājumā jāaprobežojas ar vieniniekiem, ja gribam, lai kļūda nepārsniedz beidzamās šķiras vienas vienības.

Tāpēc, ja izpildītu reizināšanu kā parasts, t. i. reizinātu vienu reizinātāju ar otra reizinātāja cipariem, kā tas redzams zemāk,

$$\begin{array}{r}
746{,}156\,.\,62{,}346 \\
\hline
4476936 \\
1492312 \\
2238468 \\
2984624 \\
4476936 \\
\hline
46519{,}841976
\end{array}$$

tad, noapaļojot dabūto reizinājumu 46519,841976 līdz 46520, pielaidīsim kļūdu, kuŗas robeža nepārsniegs $0{,}435 + 0{,}16 = 0{,}595$.

Tāpēc 46520 ir skaitļu 746,156 un 62,346 reizinājums ar tuvinājumu līdz 1.

Līdz ar to redzams, ka reizinājumā 46519,841976 ņemts daudz ciparu, kuŗi nekāda iespaida uz galīgo reizinājumu neatstāj un tāpēc lieki.

Tāpēc šo reizināšanu varētu izpildīt ari tā: atstājot katrā atsevišķā reizinājumā tikai simtās daļas, t. i. ņemot vērā tikai tik daudz ciparu, cik tas saskaņā ar summas precīzitātes noteikumiem vajadzīgs, lai galīgā reizinājumā, t. i. atsevišķo reizinājumu summā kļūda nepārsniegtu viena vieninieka; tā kā ar 2 reizinām tikai 746,15 un ne 746,156, tad kļūda no noapaļošanas nepārsniegs 0,01 un tāpēc reizinājuma kļūda ar 2 nepārsniegs 0,01 . 2; līdzīgi tas būs ari citos atsevišķos reizinājumos.

746,156			
62,346			
746,156 . 60=	4476936		
746,15 . 2=	149230;	kļūdas rob. no saīs. reiz.	0,01 . 2=0,02
746,1 . 0,3=	22383;	„ „ „ „ „	0,1 . 0,3=0,03
746 . 0,04=	2984;	„ „ „ „ „	1 . 0,04=0,04
740 . 0,006=	444;	„ „ „ „ „	10 . 0,006=0,06
	46519,77	kļūdas rob. no saīs. reiz.	0,15
		„ „ „ aptuv. sk. reizināš.	0,435
		„ „ „ noapaļošanas	0,23
		kopējās kļūdas robeža	0,815, t.i.
		kļūdas robeža	< 1.

Kļūdu no saīsinātās reizināšanas varētu atrast ari tā, ka vienu simto daļu, no kuŗas sākam reizināt ar vieninieku ciparu, reizinām ar visu to ciparu summu, ar kuŗiem jāreizina noapaļotais skaitlis.

Šo pašu reizināšanu var ērtāk izpildīt šādā veidā. Tā kā katrā atsevišķā reizinājumā gribam dabūt simtās daļas, tad rakstām reizinātāja vieninieku ciparu 2 zem reizināmā simtām daļām, lai no šo ciparu reizinājuma iznāktu simtās daļas; līdz ar to reizinātāja desmitnieku ciparu 6 nāksies rakstīt zem tūkstotdaļām, bet desmitās daļas zem reizināmā desmitām daļām u. t. t., citiem vārdiem, **reizinātājā ciparus nāksies uzrakstīt apgrieztā kārtībā** un reizināšanu izpildīt tā, ka reizināšanu ar kādu reizinātāja ciparu sākt no tā reizināmā cipara, zem kuŗa dotais reizinātāja cipars atrodas; atsevišķo reizinājumu beidzamie cipari izteiks vienas un tās pašas šķiras vienības, tāpēc tie stāvēs cits zem cita vienā kolonā:

```
  746,156
    64326
---------
 44769 36
  1492 30
   223 83
    29 84
     4 44
---------
 46519,77
```

$\simeq$ 46520 ar tuvināj. līdz 1.

Ņemsim vēl citus piemērus.

1) Atrast skaitļu 483754 un 17248 reizinājumu ar kļūdu, kas nepārsniedz 10^7. Rakstām reizinātāja vieninieku ciparu zem 10^5 šķiras, t. i. par 2 cipariem tālāk nekā tas vajadzīgs atsevišķā reizinājumā; pārējos ciparus pievienojam tā, lai viss reizinātājs būtu uzrakstīts apgrieztā kārtībā.

```
 483754
  84271
-------
 483754
 338625
   9674
   1932
    384
-------
 834369
```

$834369 \,.\, 10^5 \simeq 8343 \,.\, 10^7$ ar tuvinājumu līdz 10^7, jo no saīsinātās reizināšanas kļūda nepārsniegs $10^5(8+4+2+7)=10^5 \,.\, 21$; no noapaļošanas $69 \,.\, 10^5$; tā tad kopējā kļūda nepārsniegs $21 \,.\, 10^5 + 69 \,.\, 10^5 = 90 \,.\, 10^5 < 10^7$ pamazinājumā. Šeit dotie skaitļi precīzi, tā tad kļūdas no apvienoto skaitļu reizinājuma nebūs.

2) Atrast 48,757575 . . . un 0,0444 . . . reizinājumu tā, lai kļūda nepārsniegtu 0,001.

```
   48,757
   44 444
---------
   195028
    19500
     1948
      192
       16
---------
  2,16684
```

Vieniniekus nāktos rakstīt zem simtstūkstotām daļām, bet tā kā vieninieku reizinātājā nav, tad reizinātāja simtās daļas rakstām zem reizināmā tūkstotdaļām u. t. t.

Kļūda no saīsinātas reizināšanas būs $0,00001 \,.\, (4+4+4+4+4)=0,00001 \,.\, 20=0,0002$. Kļūda no aptuveno skaitļu reizinājuma vispār, jo reizinātāja beidzamie cipari nav precīzi, nepārsniegs $50 \,.\, 0,000001 + 0,05 \,.\, 0,001 = 5 \,.\, 10^{-5} + 5 \,.\, 10^{-5} = 10 \,.\, 10^{-5} = 10^{-4} = 0,0001$; tā tad reizināšanas kopējā kļūda nepārsniegs $0,0002+0,0001=0,0003$ pamazinājumā. Tā tad aptuvenā skaitļa 2,16684 robežas ir 2,16684 un 2,16714. Tāpēc, ja skaitli 2,16684 noapaļosim līdz 2,167, tad kļūda nepārsniegs 0,0003, tā tad sen nepārsniegs 0,001, tikai kļūdas virziens būs nezināms.

4. Ja reizinājuma kļūdas robeža iepriekš noteikta, tad ceļas jautājums, ar kādu tuvinājumu jāņem reizinātāji, lai kļūda nepārsniegtu dotās robežas.

Kā jau aizrādīts, reizinājuma kļūdas robeža, ja a un b ir aptuvenie reizinātāji un Δa un Δb to kļūdu robežas, ir $(a+\Delta a)\Delta b + (b+\Delta b)\Delta a$; nemot $a+\Delta a$ un $b+\Delta b$ vietā rupjos augstāko robežu tuvinājumus a' un b', dabūsim, ka reizinājuma kļūdas augstākā robeža ir $a'\Delta b + b'\Delta a$; tā kā kļūda vēl var celties no noapaļojuma, atmetot liekos ciparus, tad, apzīmējot šo kļūdu ar $\frac{\omega}{2}$, kur ω pēdējā paturētā cipara šķiras vienība, dabūsim, ka kopējās kļūdas robeža $a'\Delta b + b'\Delta a + \frac{\omega}{2} \leq \varepsilon$; ja uz $\frac{\omega}{2}$ atstāsim vienu kļūdas daļu, tad $a'\Delta b + b'\Delta a \leq \varepsilon - \frac{\omega}{2}$; sadalot vēl šo kļūdu $a'\Delta b$ un $b'\Delta a$ starpā, dabūsim, ka $a'\Delta b \leq \frac{\varepsilon - \frac{\omega}{2}}{2}$ un $b'\Delta a \leq \frac{\varepsilon - \frac{\omega}{2}}{2}$; no šīm sakarībām atradīsim, kādiem jābūt skaitļiem Δb un Δa, t. i. ar cik lielu precīzitāti jāņem reizinātāji a un b.

P i e m ē r s. Atrast riņķa garumu ar kļūdu, kas nepārsniedz 1 *cm*, ja riņķa radijs $r \approx 10,5$ *cm* $\pm$ 0,05 *cm*. Riņķa garums g izteicas ar formulu $g = 2\pi r$, kur $\pi = 3,14159\ldots$; tā kā $\varepsilon = 1$, tad $\frac{\omega}{2} = 0,5$ un tāpēc $\varepsilon - \frac{\omega}{2} = 1 - 0,5 = 0,5$. Tā kā reizinājumā ir trīs reizinātāji, no kuŗiem viens precīzs, tad šo reizinātāju reizinājuma kļūdas robežai

$2(3{,}2\Delta r+11.\Delta\pi)$ jābūt mazākai par 0,5, t. i. $2.(3{,}2\Delta r+ +11\,\Delta\pi)\leq 0{,}5$ jeb $3{,}2\Delta r+11\Delta\pi\leq 0{,}25$; tāpēc varam pieņemt, ka $3{,}2\Delta r\leq 0{,}13$ un $11\,\Delta\pi\leq 0{,}12$, kas dod, ka radijs jāņem tā, lai tā absolūtās kļūdas robeža būtu $\Delta r\leq\frac{0{,}13}{3{,}2}\approx 0{,}04$;

$\Delta\pi\leq\frac{0{,}12}{11}\approx 0{,}01$; tā tad ja ņemsim $\pi\approx 3{,}14$, tad kļūda nepārsniegs 0,005, tā tad sen nepārsniegs 0,01.

Tāpēc

$$G=2.10{,}5.3{,}14=21.3{,}14=65{,}94\approx 66\,cm\pm 1\ cm.$$

Tiešām, reizinājuma kļūdas robeža būs

$$2.(11.0{,}005+3{,}2.0{,}05)=2.0{,}215\approx 0{,}5.$$

8. Dalīšana.

1. Ja A un B ir precīzi skaitļi, a un b to aptuvenās nozīmes, Δa un Δb skaitļu a un b absolūto kļūdu robežas, tad dalījuma $A:B$ zemākā robeža būs $\frac{a-\Delta a}{b+\Delta b}$ un augstākā $\frac{a+\Delta a}{b-\Delta b}$ (ja dalāmais pieaug — dalījums pieaug, ja dalītājs pieaug — dalījums pamazinās). Tā tad $\frac{a-\Delta a}{b+\Delta b}<\frac{A}{B}<\frac{a+\Delta a}{b-\Delta b}$ un līdz ar to vai nu $\frac{a-\Delta a}{b+\Delta b}<\frac{A}{B}<\frac{a}{b}<\frac{a+\Delta a}{b-\Delta b}$ vai $\frac{a-\Delta a}{b+\Delta b}<\frac{a}{b}<\frac{A}{B}<\frac{a+\Delta a}{b-\Delta b}$; tāpēc starpība starp $\frac{A}{B}$ un $\frac{a}{b}$; citiem vārdiem, dalījuma absolūtā kļūdas robeža ir vai nu $\frac{a}{b}-\frac{a-\Delta a}{b+\Delta b}$ vai $\frac{a+\Delta a}{b-\Delta b}-\frac{a}{b}$; bet $\frac{a}{b}-\frac{a-\Delta a}{b+\Delta b}=$ $=\frac{a\Delta b+b\Delta a}{b(b+\Delta b)}$ un $\frac{a+\Delta a}{b-\Delta b}-\frac{a}{b}=\frac{b\Delta a+a\Delta b}{b(b-\Delta b)}$; pēdējā izteiksme ir lielāka par pirmo, tāpēc pieņemsim par dalījuma kļūdas robežu izteiksmi $\frac{b\Delta a+a\Delta b}{b(b-\Delta b)}$; to var pārveidot tā, ka dala skaitītāju un saucēju ar b; tad $\frac{b\Delta a+a\Delta b}{b(b-\Delta b)}=\frac{\Delta a+\frac{a}{b}\Delta b}{b-\Delta b}$.

Tā tad divu aptuvenu skaitļu a un b dalījuma kļūdas augstākā robeža ir $\frac{\Delta a+\frac{a}{b}\Delta b}{b-\Delta b}$.

Lietojot praksē šo izteiksmi, ņem $\frac{a}{b}$ vietā rupji izteiktu doto skaitļu dalījumu ar piedevām un $b-\Delta b$ vietā ņem dalītāja rupji izteiktu nozīmi ar iztrūkumu.

P i e m ē r s. Atrast skaitļu 54,685 un 6,345 dalījumu, no kuŗiem katrs ņemts ar kļūdu, kas nepārsniedz pēdējās šķiras vienības puses.

Šeit $\Delta a=0{,}0005$; $\Delta b=0{,}0005$; $\frac{a}{b}\approx 9$; $b-\Delta b\approx 6$; tāpēc dalījuma absolūtās kļūdas robeža būs $\frac{0{,}0005+9.0{,}0005}{6}=\frac{0{,}005}{6}\approx 0{,}0009.$

Tā tad dalījumu varam dabūt ar kļūdu, kas nepārsniedz 0,0009, t. i. ar tuvinājumu līdz 0,001.

Izpildīsim dalīšanu.

$$\begin{array}{r|l} 54{,}685 & 6{,}345 \\ \cline{2-2} 50{,}760 & 8{,}6185 \\ \hline 3\,9250 & \\ 3\,8070 & \\ \hline 11800 & \\ 6345 & \\ \hline 54550 & \\ 50760 & \\ \hline 37900 & \\ 31725 & \\ \hline 6175 & \end{array}$$

Dalījums 8,6185 ir ar tuvinājumu līdz $+0{,}0009$, tā tad aptuvenā skaitļa 8,6185 robežas ir 8,6185 un 8,6194; ja par aptuveno dalījumu pieņemsim 8,619, tad kļūda nepārsniegs 0,0009, tā tad sen nepārsniegs 0,001, tikai kļūdas virziens būs nezināms.

2. Ari dalīšanu daudzos gadījumos var izpildīt saīsinātā veidā.

P i e m ē r s. Atrast ar 4 zīmīgiem cipariem skaitļu 5268471523 un 684537 dalījumu.

Izpildīsim dalīšanu kā parasts.

```
5268471523 | 684537
4791759    | 7696
 4767125
 4107222
  6599032
  6160833
   4381993
   4107222
    274771
```

Lai dabūtu dalījumu ar 4 zīmīgiem cipariem, šinī gadījumā ar tuvinājumu līdz $\pm$ 1, esam lietojuši dalīšanā daudz lieku ciparu; tiešām, šos pašus dalījuma ciparus varētu dabūt tā, ka dalītājā paturētu vispirms vienu vai vairākus ciparus, skaitot no kreisās puses tā, lai ar tiem uzrakstītā skaitlī būtu vairāk vai tikpat daudz vienību nekā dalījumā jābūt ciparu; šinī gadījumā pirmais cipars ir 7, tā tad ar šo ciparu uzrakstītā skaitļa vienību skaits lielāks par 4, tāpēc pietiek šī viena cipara; tam pievienojam vēl tik daudz, cik dalījumā jābūt ciparu, t. i., šinī gadījumā 4; tā tad dabūsim dalītāju šādā veidā: 684530. Dalāmā atstājam tik daudz zīmīgo ciparu, lai tā dalījums ar dalītāja zīmīgiem cipariem dotu vienzīmju skaitli: šinī gadījumā dalāmā atstājam 6 zīmīgus ciparus, tā tad dalāmo ņemam kā 5268470000.

Tagad dalām dabūtos skaitļus tā: dabūjuši dalījuma pirmo ciparu 7, reizinām ar to dalītāja zīmīgos ciparus; dabūsim pirmo atlikumu 47676; to dalām ar 6845, atmetot dalītājā ciparu, ko atzīmējam ar punktu augšā; reizinām 6845 ar 6 un jauno atlikumu dalām ar 684, t. i., atmetam dalītāja ciparu 5, atzīmējot ar punktu u. t. t.

```
5268470000 | 684530
479171     | 7696
 47676
 41070
  6606
  6156
   450
   408
    420000
```

Parādīsim tagad, ka dalījuma kļūda nevar pārsniegt ± 1. Vispirms kļūda var rasties no dalītāja noapaļošanas un līdz ar to noapaļotā dalītāja reizināšanas ar dalījuma zīmīgiem cipariem: ar 7 tūkstošniekiem bija jāreizina 684537, bet reizinājām tikai 684530, ar 6 simtniekiem bija jāreizina 684537, bet reizinājām tikai 684500 u. t. t. Pielaistās kļūdas no noapaļotā dalītāja reizināšanas ar dalījuma attiecīgiem cipariem nepārsniedz pamazinājumā $7000 . 10 + 600 . 100 + 90 . 1000 + 6 . 10000 < 7 . 10^4 + 6 . 10^4 + 9 . 10^4 + 6 . 10^4 < 10^5 + 10^5 + 10^5 + 10^5 = 4 . 10^5$, t. i., nepārsniedz dalītāja, jo te ir 10^5 ņemts tik daudz reizes, cik ciparu dalījumā, tāpēc tad ari atdalījām dalītājā vispirms vienu (vai vispār vairākus) ciparu, kas apzīmēja 10^5 vienības un bija lielāks nekā dalītāja ciparu skaits. Aiz šī iemesla aizvien, izpildot saīsināto dalīšanu kā norādīts, dabūsim atlikumā kļūdu no dalītāja noapaļošanas mazāku par dalītāju; tāpēc te nav gadījums, ka $4 . 10^5 < 6 . 10^5$. Šī kļūda atstāj iespaidu uz atlikumiem, kas iznāk vispār lielāki, jo mazinātāji (dalītāja reizinājumi ar attiecīgiem dalījuma cipariem) ir mazāki nekā vajadzētu būt, ja dalīšanu izpildītu pilnīgi; tāpēc ari beidzamais atlikums 420000 ir lielāks par īsto beidzamo atlikumu 274771, neraugoties uz to, ka dalāmais kļūvis mazāks no beidzamo ciparu noapaļošanas.

Ja apzīmēsim no dalītāja noapaļošanas pielaisto kļūdu sumu, kas, kā redzējām, nepārsniedz $4 . 10^5$ ar s, tad īstais atlikums būs $421523 - s$; beidzamais atlikums 421523, ja tam ari pierakstām atmestos dalāmā ciparus, būs mazāks par dalītāju 684537; tāpat skaitlis s, kā redzējām, būs mazāks par $4 . 10^5$, tā tad mazāks par dalītāju; tāpēc atlikuma 421523 un pielaistās kļūdas s starpība $421523 - s$, kā tādu skaitļu starpība, no kuriem ikviens mazāks par dalītāju, ari būs mazāka par dalītāju, bet šī starpība $421523 - s$ ir dalīšanas īstais atlikums, kas mazāks par dalītāju 684537, tāpēc tālākā dalīšanā dotu dalījuma vienību šķiru, kas mazāka par vieniniekiem. Tā tad turpinot dalīšanu vai nu saīsinātā vai pilnīgā veidā, dabūtu tikai nākamās šķiras vienības; tāpēc dalījuma 7696 kļūda mazāka par vieninieku.

Tā tad

⊙ **lai izpildītu saīsinātu dalīšanu, noskaidrojam vispirms, cik zīmīgo ciparu būs dalījumā; tad dalītājā ņemam par vienu ciparu vairāk nekā dalījumā jābūt ciparu, ja dalītāja pirmais cipars vienlīdzīgs vai lielāks nekā dalījuma**

ciparu skaits, un par divi cipariem vairāk, ja dalītāja pirmais cipars mazāks nekā dalījuma ciparu skaits; dalāmā atstājam tik daudz ciparu, lai tā dalījums (nepiegriežot vērības komatiem) ar noapaļoto dalītāju būtu vienzīmju skaitlis. Pirmo dalījuma ciparu reizinām ar visiem dalītāja cipariem, otro ar visiem bez pēdējā, trešo — ar visiem bez divi pēdējiem u. t. t.; dalītāja ciparus, kas nav vairs jāreizina, ieteicams atzīmēt ar punktiem augšā vai, vēl labāk, nostrīpot.

4. Aplūkosim tagad otro uzdevumu: ar kādu tuvinājumu jāņem dalāmais un dalītājs, lai dalījumu dabūtu ar iepriekš noteikto tuvinājumu.

Pieņemsim, ka aptuveno skaitļu a un b dalījums jāatrod ar tuvinājumu līdz ε. Redzējām, ka aptuveno skaitļu dalījuma kļūdas robeža ir $\frac{\Delta a+\frac{a}{b}\Delta b}{b-\Delta b}=\frac{\Delta a}{b-\Delta b}+\frac{\frac{a}{b}\cdot\Delta b}{b-\Delta b}$; $b-\Delta b$ vietā varam ņemt rupji izteikto dalītāja zemāko robežu un $\frac{a}{b}$ vietā rupji izteiktu dalījuma augstāko robežu. Tā kā kļūda vēl var celties no noapaļojuma, tad, apzīmējot šo kļūdu ar $\frac{\omega}{2}$ kur ω ir pēdējā paturētā cipara šķiras vienība, dabūsim, ka kopējās kļūdas robeža $\frac{\Delta a}{b-\Delta b}+\frac{\frac{a}{b}\Delta b}{b-\Delta b}+\frac{\omega}{2}\leqslant\varepsilon$; ja uz $\frac{\omega}{2}$ atstāsim vienu kļūdas daļu, tad otra daļa būs

$\frac{\Delta a}{b-\Delta b}+\frac{\frac{a}{b}\Delta b}{b-\Delta b}\leqslant\varepsilon-\frac{\omega}{2}$; sadalot šo otro kļūdas dāļu, dabūsim, ka $\frac{\Delta a}{b-\Delta b}\leqslant\frac{\varepsilon-\frac{\omega}{2}}{2}$ un $\frac{\frac{a}{b}\Delta b}{b-\Delta b}\leqslant\frac{\varepsilon-\frac{\omega}{2}}{2}$.

Piemērs. Atrast skaitļu $3{,}1416\pm0{,}00005$ un $9{,}8696\pm0{,}00005$ dalījumu ar tuvinājumu līdz 0,01.

Šinī gadījumā $b-\Delta b$ vietā varam ņemt 9, $\frac{a}{b}$ vietā $\frac{1}{4}$; tad $\frac{\Delta a}{9}+\frac{\Delta b}{4\,.\,9}+\frac{\omega}{2}\leqslant0{,}01$; ω var pieņemt par 0,01; tad jābūt $\frac{\Delta a}{9}+$ $+\frac{\Delta b}{36}\leqslant0{,}005$; $\frac{\Delta a}{9}\leqslant\frac{0{,}005}{2}$; $\Delta a\leqslant0{,}02$; $\frac{\Delta b}{36}\leqslant\frac{0{,}005}{2}$; $\Delta b\leqslant0{,}09$. Ja ņemsim dalāmo ar tuvinājumu līdz 0,01, un dalītāju ar tuvinājumu līdz 0,05, tad abas nevienlīdzības būs izpildītas, un tā tad, dalot 3,14 ar 9,9, dabūsim

$$\begin{array}{r|l} 31{,}4 & \underline{99} \\ \underline{29{,}7} & 0{,}31 \text{ (ar iztrūkumu) vai } 0{,}32 \text{ (ar pied.).} \\ 170 & \\ \underline{99} & \end{array}$$

To pašu iznākumu, varētu atrast ar saīsinātās dalīšanas palīdzību, spriežot tā: tā kā dalījums jādabū ar tuvinājumu līdz 0,01, tad, kā viegli pārliecināties, dalījumā būs tikai 2 zīmīgie cipari. Tāpēc dalītājā atstājam 3 ciparus un dalāmā nāksies atstāt 4. Dalīšana dos

$$\begin{array}{r|l} 3{,}141 & \underline{9{,}86} \\ \underline{2\,958} & 0{,}31 \text{ (ar iztr.) vai } 0{,}32 \text{ (ar pied.).} \\ 183 & \\ \underline{98} & \\ 85 & \end{array}$$

9. Kāpināšana un kvadrātsaknes izvilkšana.

1. Kāpināšana ar veselu pozitīvu kāpinātāju ir atkārtota reizināšana. Tāpēc tas, kas teikts par reizinājuma absolūtās un relatīvās kļūdas robežām, attiecināms uz kāpināšanu ar veselu pozitīvu skaitli.

Tā, piem., ja a ir aptuvens skaitlis un Δ, tā absolūtās kļūdas robeža, tad $a^2 = a \cdot a$, bet reizinājuma $a \cdot a$ absolūtās kļūdas robeža ir $(a+\Delta a)\Delta a + (a+\Delta a)\Delta a = 2(a+\Delta a)\Delta a$; līdzīgā kārtā a^3 dos absolūto kļūdu, kuŗas robeža būs $3(a+\Delta a)^2\Delta a$; vispār pakāpes a^n absolūtās kļūdas robeža būs

$$n\,(a+\Delta a)^{n-1}\Delta a.$$

2. Pieņemsim, ka precīzā skaitļa A vietā ņemts aptuvens skaitlis a, kuŗa kļūdas robeža $\pm\Delta a$.

Tā kā $a - \Delta a < A < a + \Delta a$, tad $\sqrt{a-\Delta a} < \sqrt{a} < \sqrt{A} < \sqrt{a+\Delta a}$ vai $\sqrt{a-\Delta a} < \sqrt{A} < \sqrt{a} < \sqrt{a+\Delta a}$; tāpēc, ņemot $\sqrt{A}$ vietā $\sqrt{a}$, pielaidīsim kļūdu, kas mazāka nekā $\sqrt{a+\Delta a} - \sqrt{a}$ vai $\sqrt{a} - \sqrt{a-\Delta a}$. Atradīsim, kuŗa no šīm divām starpībām lielāka. Reizināsim un dalīsim izteiksmi $\sqrt{a} - \sqrt{a-\Delta a}$ ar $\sqrt{a} + \sqrt{a-\Delta a}$; tad $\sqrt{a} - \sqrt{a-\Delta a} = \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{a-\Delta a})\,(\sqrt{a} + \sqrt{a-\Delta a})}{\sqrt{a} + \sqrt{a-\Delta a}} =$

$= \frac{a-a+\Delta a}{\sqrt{a}+\sqrt{a-\Delta a}} = \frac{\Delta a}{\sqrt{a}+\sqrt{a-\Delta a}}$; līdzīgā kārtā $\sqrt{a+\Delta a} -$

$$-\sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a+\Delta a}-\sqrt{a})\,(\sqrt{a+\Delta a}+\sqrt{a})}{\sqrt{a+\Delta a}+\sqrt{a}} = \frac{\Delta a}{\sqrt{a+\Delta a}+\sqrt{a}}$$

No divām daļām $\frac{\Delta a}{\sqrt{a}+\sqrt{a-\Delta a}}$ un $\frac{\Delta a}{\sqrt{a}+\sqrt{a+\Delta a}}$ pirmā lielāka, jo tās saucējs mazāks; ņemot tanī $\sqrt{a}$ vietā $\sqrt{a-\Delta a}$, dabūsim kvadrātsaknes absolūtās kļūdas robežu šādā veidā:

$$\frac{\Delta a}{2\sqrt{a-\Delta a}}.$$

$\sqrt{a-\Delta a}$ vietā aprēķinos var ņemt rupji izteiktu saknes nozīmi ar iztrūkumu.

10. Dažādas darbības ar aptuveniem skaitļiem.

1. Redzējām, ka atsevišķo darbību rezultātā dabūjam sekošas absolūtās kļūdas robežu izteiksmes:

summa $a+b$; absolūtās kļūdas robeža $\Delta a+\Delta b$,
starpība $a-b$; „ „ „ $\Delta a+\Delta b$,
reizinājums $a\,.\,b$; „ „ „ $(a+\Delta a)\Delta b+(b+\Delta b)\Delta a$.
dalījums $a:b$; „ „ „ $\frac{\Delta a+\frac{a}{b}\Delta b}{b-\Delta b}$,
pakāpe a^n; „ „ „ $n(a+\Delta a)^{n-1}\Delta a$;
kvadrātsakne $\sqrt{a}$; „ „ „ $\frac{\Delta a}{2\sqrt{a-\Delta a}}$.

Ja jāatrod kādas izteiksmes skaitliskā vērtība, pie kam jāizpilda vairākas darbības, tad, izlietojot dabūtās atsevišķo darbību rezultātu kļūdu izteiksmes, var atrast ari kļūdas robežu vai ari pēc iepriekš dotās izteiksmes precīzitātes atrast, ar kādu tuvinājumu jāņem dotie skaitļi.

Piemēri. 1) Aprēķināt izteiksmi $x=\sqrt{\frac{3AB}{CD}}$, kur $A\simeq 16{,}4\pm 0{,}1$, $B\simeq 16{,}65\pm 0{,}01$, $C\simeq 882\pm 05$, $D\simeq 24{,}15\pm 0{,}02$; tā tad $x=\sqrt{\frac{3\,.\,16{,}4\,.\,16{,}65}{882\,.\,24{,}15}}$. Šīs izteiksmes rupju tuvinājumu dabūsim tā: $x=\sqrt{\frac{3\,.\,1{,}64\,.\,10\,.\,1{,}665\,.\,10}{8{,}82\,.\,10^2\,.\,2{,}415\,.\,10}} \simeq \sqrt{\frac{3\,.\,2\,.\,2}{9\,.\,2\,.\,10}} = \sqrt{\frac{1}{15}} \simeq \sqrt{0{,}06} \simeq 0{,}2.$

Izpildīsim pakāpeniski reizināšanu.

16,4 . 3 dos absolūtās kļūdas robežu $\pm 0,1 . 3 = \pm 0,3$; tāpēc $16,4 . 3 = 49,2$ ar tuvinājumu līdz $\pm 0,3$;

49,2 . 16,65 dos reizinājumu, kuŗa kļūda nepārsniegs $50 . 0,01 + 17 . 03 = 0,5 + 5,1 = 5,6$; tā tad reizinājums jādabū tā, lai tanī būtu beidzamais vieninieku cipars; izpildām pēc saīsināta paņēmiena reizināšanu; reizinājuma kļūda nepārsniedz $\pm 5,6$; saīsinātas reizināšanas kļūda nepārsniedz $0,01 . 2 = 0,02$; kļūda no noapaļošanas, ja atmetīsim decimālzīmes, nepārsniegs 0,17, tā tad kopējā kļūda nepārsniegs $5,6 + 0,02 + 0,17 \approx 6$; $16,65 . 49,2 \approx 819 \pm 6$.

$$\begin{array}{r} 16,650 \\ \underline{294} \\ 66600 \\ 14985 \\ \underline{332} \\ 819,17 \end{array}$$

Līdzīgā kārtā atrodam, ka

$882 . 24,15 \ldots \ldots \ldots \quad 0,5 . 25 + 0,02 . 890 = 12,5 + 17,8 = 30,3$

$$\begin{array}{r} 24,150 \\ \underline{288} \\ 193200 \\ 19320 \\ \underline{482} \\ 21300,2 \approx 21300 \pm 31. \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 0,1 . 2 = & \underline{+\ 0,2} \\ & 30,5 \\ & \underline{+\ 0,2} \\ & 30,7 \end{array}$$

Tālāk izpildām dalīšanu 819 ± 6 ar 21300 ± 31; dalījuma absolūtā kļūda nepārsniegs $\frac{6 + 0,04 . 31}{21000} \approx \frac{7}{21000} = \frac{1}{3000} \approx 0,0003.$

Dalījumā pieturēsim tikai tūkstotās daļas; tāpēc dalījumā būs tikai divi zīmīgi cipari. Izpildām dalīšanu ar saīsinātu paņēmienu. Pārnesam dalītāja komatu par 4 vietām uz kreiso pusi un tāpat dalāmā.

$$\begin{array}{r|l} 0,0819 & \underline{2,13} \\ \underline{639} & 0,039 \pm 0,001 \\ 180 & \\ \underline{189} & \end{array}$$

Kvadrātsakne no $0,039 \pm 0,001$ dos absolūtās kļūdas robežu

$$\begin{array}{rr} \frac{0,001}{2 . 0,1} = & 0,005 \\ \text{noapaļoš.} & \underline{0,003} \\ & 0,008 < 0,01. \end{array}$$

Tāpēc $\sqrt{0,039} \approx 0,197 \approx 0,20 \pm 0,01$

$$\begin{array}{r|r} \overline{290} & 29 \\ 261 & 9 \\ \hline 2900 & 387 \\ 2709 & 7 \end{array}$$

Tā tad $x=\sqrt{\frac{3\,.\,16{,}4\,.\,16{,}65}{882\,.\,24{,}15}}\approx 0{,}20\pm 0{,}01.$

Salīdzinot šo rezultātu ar aprēķinu sākumā dabūto rupjo tuvinājumu, redzam, ka abi skaitļi uzrāda apmēram to pašu rezultātu.

Vingrinājumi.

1. Kā rodas aptuvenie skaitļi un ko sauc par aptuvenā skaitļa absolūto kļūdu? Ko sauc par aptuvenā skaitļa absolūtās kļūdas robežu? Ko nozīmē izteicieni: „kļūda pamazinājumā", „kļūda palielinājumā", „tuvinājums ar iztrūkumu", „tuvinājums ar piedevām"?

2. Skaitļu 584 286, 61 523, 682, 0,543, 0,68 239 noapaļojumi ir attiecīgi 580 000, 61 500, 700, 0,5, 0,682. Atrast pielaistās absolūtās kļūdas.

3. Izteikt $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{6}$ kā decimāldaļas ar iztrūkumu, lai kļūda pamazinājumā nepārsniegtu 0,001; $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{4}{15}$ kā decimāldaļas ar piedevām, lai kļūda nepārsniegtu 0,01.

4. Atrast $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ un $\sqrt{5}$ ar tuvinājumu tā, lai kļūda pamazinājumā nepārsniegtu 0,001.

5. Noskaidrot, ko nozīmē sekošas izteiksmes:

$x\approx 0{,}03+0{,}2$; $x\approx 0{,}432-0{,}003$; $x\approx 8400\pm 200$; $x\approx 65\pm 2$; $x\approx 2000\pm 20$; $\sqrt{2}\approx 1{,}4+0{,}1$; $\frac{5}{17}\approx 0{,}3-0{,}1$; $L=43{,}2\ cm\ \pm 0{,}2\ cm$.

6. Atrast robežas, kuŗu starpā svārstās skaitļi, ja to aptuvenās nozīmes ir $5800+300$; $64\,000-1000$; 540 ± 5; $30\,000\,000+$ $+1\,000\,000$; $2{,}45\pm 0{,}005$; 200 ± 2.

7. Noapaļot pakāpeniski, apmainot pa vienam ciparam ar nulli, skaitļus 60 882, 849 563, 0,5634, 0,28016; noskaidrot, kāda pie tam rodas kļūda, kāda ir kļūdas robeža, ar kādas šķiras vienību izteikta un kādas ir robežas, kuŗu starpā svārstās skaitlis. Dabūtos noapaļojumus uzrakstīt tā, lai skaitlis pastāvētu tikai no zīmīgiem cipariem un 10 attiecīgā pakāpē.

8. Uzrakstīt parastā veidā skaitļus: $58\,.\,10^{3}$, $690\,.\,10^{5}$, $40\,.\,10^{-4}$, $495\,.\,10^{-4}$, $5{,}62\,.\,10^{5}$, $2{,}7\,.\,10^{-6}$, $3{,}150\,.\,10^{-4}$.

9. Noapaļot skaitļus 65 483, 163 289, 3482, 0,5431, 0,0828 tā, lai tanīs būtu tikai 2 zīmīgie cipari un kļūda pēc iespējas mazāka.

10. Noapaļot pakāpeniski, apmainot pa vienam ciparam ar nulli, skaitli 3,704951 tā, lai kļūda būtu pēc iespējas mazāka.

11. Sekošie aptuvenie skaitļi ņemti tā, ka kļuda pamazinājumā nepārsniedz beidzamā zīmīgā cipara šķiras vienības puses: 3,64, 5624,0, 352 . 10^3 Atrast robežas, kuŗu starpā var svarstīties skaitlis, un kļūdas robežu.

12. Aptuvenie skaitļi 0,008, 385 . 10^4, 681, 512 . 10^2 ņemti tā, ka kļūda palielinājumā nepārsniedz beidzamā zīmīgā cipara šķiras vienības. Atrast kļūdas robežu un robežas, kuŗu starpā var svārstīties skaitlis.

13. Aptuvenie skaitļi 3,54, 541,00, 384,1, 123 . 10^4 ņemti tā, ka kļūda nepārsniedz pēdējā zīmīgā cipara šķiras vienības puses. Atrast kļūdas robežu, robežas, kuŗu starpā svārstās skaitlis un svārstīšanās lielumu.

14. Uzrakstīt $\pi = 3{,}1415926 \ldots$ aptuvenās nozīmes ar tuvinājumu līdz $0{,}5 . 10^{-2}$, $0{,}5 . 10^{-3}$, $0{,}5 . 10^{-5}$.

15. Vidējais mēness āttālums no zemes ir 384 420 *km* Atrast šī attāluma zemāko un augstāko robežu, ja ņem tuvinājumu līdz 10^3; līdz $\frac{1}{2} . 10^3$.

16. Noskaidrot, ko sauc par skaitļa relatīvo kļūdu un kā atrod relatīvās kļūdas robežu.

17. Skaitli $\frac{5}{18}$ izteikt kā decimāldaļu ar tuvinājumu līdz 10^{-2}; 10^{-3}; $\frac{1}{2} . 10^{-4}$. Atrast visos šos gadījumos relatīvās kļūdas robežu.

18. Skaitlis 3800 ņemts ar tuvinājumu līdz $\pm 10^2$. Atrast relatīvās kļūdas robežu.

19. Atrast relatīvo kļūdu robežas sekošiem aptuveniem skaitļiem: 584 *m* ar tuvinājumu līdz ± 1 *m*; 39 *cm* ar tuvinājumu līdz ± 1 *cm*; 7 *mm* ar tuvinājumu līdz ± 1 *mm*. Noskaidrot, kuŗam skaitlim vislielākā un kuŗam vismazākā precīzitāte.

20. Aptuvenos skaitļos 542, 5,42, 0,542, 0,5423, 54231 beidzamais cipars var svārstīties par vienu vienību. Atrast skaitļu relatīvās kļūdas procentos.

21. Aptuvenos skaitļos 843, 28435, 0,512364 beidzamais cipars var svārstīties par vienu vienību. Neaprēķinot relatīvās kļūdas, sakārtot skaitļus pēc viņu precīzitātes, liekot pirmā vietā visprecīzāko.

22. Aptuvenos skaitļos 542, 0,849, 6152 relatīvās kļūdas attiecīgi ir 2%, 1%, 0,5%. Atrast šo skaitļu absolūtās kļūdas.

23. Aptuvenā skaitļa 42,85482 relatīvās kļūdas robeža ir $0,5 \cdot 10^{-4}$. Atrast absolūtās kļūdas robežu.

24. Atrast, cik zīmīgo ciparu jāpatur skaitļos 58492, 3685, 952, lai aptuveno skaitļu relatīvās kļūdas nepārsniegtu 1%.

25. Atrast, cik zīmīgo ciparu jāpatur skaitļos 68429, 0,5843, 32864, lai aptuveno skaitļu relatīvās kļūdas nepārsniegtu $0,5\%$.

26. Noapaļot aptuvenos skaitļus $2,56724 + 0,002$, $17,3451 + 0,034$, $2,75126 + 0,0003$ tā, lai absolūtās kļūdas robeža izteiktos ar beidzamā cipara šķiras vienību.

27. Atrast aptuveno skaitļu 3,45, 0,512, 4,23 un 327,6 summu, ja šo skaitļu absolūto kļūdu robežas ir attiecīgi 0,03, 0,001, 0,02, 0,2; noteikt summas absolūtās kļūdas robežu un noapaļot summu tā, lai kļūdas robeža izteiktos ar pēdējā zīmīgā cipara šķiras vienību.

28. Atrast skaitļu $\frac{3}{17}$, $5\frac{1}{3}$ un $1\frac{4}{5}$ summu, izteicot tos kā decimāldaļas ar tuvinājumu tā, lai kļūda pamazinājumā nepārsniegtu 0,001. Atrast absolūtās un relatīvās kļūdas robežu. Izteikt šos skaitļus kā decimāldaļas ar tuvinājumu tā, lai kļūda nepārsniegtu $\pm 0,5 \cdot 10^{-3}$. Atrast summas absolūtās un relatīvās kļūdas robežu.

29. Nosvērti vispirms 410 *g* cukura, pēc tam 560 *g* un 380 *g*, pie kam katra svēruma kļūda nepārsniedz ± 1 *g*. Atrast, cik pavisam nosvērts cukura, un novērtēt iznākuma precīzitāti.

30. Atrast skaitļu 54612, 2870, 43621 un 512 summu ar tuvinājumu līdz 100.

31. Atrast skaitļu 5,432, 6,84, 0,21437 un 0,0023 summu ar tuvinājumu līdz 0,01; līdz $0,5 \cdot 10^{-4}$.

32. Atrast skaitļu $2\frac{2}{11}$, 0,235 un 0,027856 summu ar tuvinājumu līdz $0,5 \cdot 10^{-3}$.

33. Iedzīvotāju skaits pilsētā 5 gadu laikā pieaug no 65 400 cilvēkiem uz 72 800; abi šie skaitļi doti ar tuvinājumu līdz $\pm 10^2$. Aprēķināt iedzīvotāju skaita pieaugumu un novērtēt dabūtās starpības precīzitāti.

34. Izteikt skaitļus $\frac{4}{9}$ un $\frac{3}{7}$ kā decimāldaļas ar tuvinājumu līdz 0,001, atrast viņu starpību un starpības absolūtās un relatīvās kļūdas robežas.

35. Aprēķināt izteiksmes 57,3—4,215+0,16—13,2+0,0482 skaitlisko vērtību, ja katrs no skaitļiem ir aptuvens skaitlis, kuŗa absolūtās kļūdas robeža nepārsniedz beidzamā cipara šķiras vienības puses.

36. Atrast skaitļu 43512 un 897615 reizinājumu, ņemot katrā skaitlī tikai 3 pirmos ciparus. Atrast reizinājuma absolūtās un relatīvās kļūdas robežas.

37. Atrast formulu, pēc kuŗas var aprēķināt reizinājuma kļūdas robežu, ja abi reizinātāji ir aptuvenie skaitļi ar iztrūkumu.

38. Atrast skaitļu 342516 un 16284 reizinājumu ar tuvinājumu līdz 10^7.

39. Atrast reizinājumu 512,05261.8 ar tuvināj. līdz 0,01
40. „ „ 1208,612.0,07 „ „ „ 0,1
41. „ „ 62,12056.0,8357 „ „ „ 0,001
42. „ „ 516.1,2054317 „ „ „ 0,01
43. „ „ 3508.0,0348192 „ „ „ 0,1
44. „ „ 603.3,411.0,52345 „ „ „ 0,01
45. „ „ 142,12.0,35.1,7235 „ „ „ 0,1

46. Atrast skaitļu 54,3785 un 0,727272 . . . reizinājumu tā, lai reizinājumā būtu trīs pirmie cipari precīzi.

47. Atrast skaitļu 74,5656 . . . un 0,0666 . . . reizinājumu ar tuvinājumu līdz 10^{-3}.

48. Atrast aptuveno skaitļu 58,7 un 4,15 reizinājumu ar saīsinātas reizināšanas palīdzību, ja šo skaitļu absolūtās kļūdas nepārsniedz beidzamā zīmīgā cipara šķiras vienības, un atrast reizinājuma precīzitāti.

49. Atrast formulu, pēc kuŗas var aprēķināt dalījuma kļūdas robežu tanī gadījumā, ja spraužam sev par mērķi atrast dalījumu kā aptuveno skaitli ar iztrūkumu.

50. Atrast, cik mārciņu kilogramā, ja 1 puds ir vienlīdzīgs 16,38 *kg* ar tuvinājumu līdz 0,01 un noteikt rezultāta precīzitāti (absolūto un relatīvo).

51. Atrast skaitļu 4562317 un 3482 dalījumu ar tuvinājumu līdz 100.

52. Atrast dalījumu 4,366 . . . : 0,3232 . . . ar divi zīmīgiem cipariem.

Otrā nodaļa.

III. Augļu augļu rēķini.

11. Kapitāls un augļi.

1. Jēdzienu „kapitāls" un „augļi" tuvākais noskaidrojums un tiesiskais pamatojums piekrīt oikonomiskām zinātnēm. Mēs aplūkosim vienīgi vēsturisko pusi un tad, izejot no pastāvošām attiecībām, matēmatisko pusi.

Sabiedriski-saimnieciskām attiecībām par pamatu ir darbs un atalgojums, vai vispār vērtība un pretvērtība: ja viens dod vai rada otram kādu vērtību, tad viņš aizvien, atskaitot dažus izņēmuma gadījumus, sagaida kādu pretvērtību. Tā tad vispār, ja kāds īpašums pāriet no vienām rokām otrās pavisam (pārdošana-pirkšana) vai uz laiku (rentēšana, īrēšana), pircējam vai īrniekam jādod pretvērtība — pirkšanas maksa vai īre. Ar saimnieciskās dzīves attīstību tieša vērtību apmaiņa lietās kļuva aizvien grūtāka un grūtāka. Vajadzēja atrast vispārēju starpnieku vērtību un pretvērtību izmaiņā. Par tādu kļuva nauda. No tā laikā sāka pārdošanas cenu un īri aprēķināt naudā. Līdz ar to ari naudu sāka īrēt jeb aizdot, t. i., dot uz laiku lietošanā, un tāpat kā par citu vērtību nodošanu lietošanā, ari par naudu sāka ņemt īri, ko nosauca par interesēm vai augļiem. Pašu tādā veidā uz laiku izdoto (aizdoto) naudu sāka saukt par kapitālu. Vārds kapitāls ceļas no latīņu vārda *caput* (= galva), kas norāda, ka romiešu tirgotājs šo galveno summu rakstīja savā rēķina „galvā"; romieši ari lietoja tikai vārdu *caput*. Vārds kapitāls modernā uztvērumā pirmo reiz sastopams Pizas Leonarda darbā *Liber abaci* (1228. g.) kā *capitale*, gan laikam kā arabu vārda ra's al māl = mantas galva tulkojums. Nākamos gadu simteņos šis vārds jau pilnīgi iesakņojas.

Tādai kapitāla īrei, ko parasti sauc par aizdevumu-aizņēmumu, var būt divējādas dabas pamati: 1) dzīves nepieciešamo vajadzību apmierināšana (piem., nelaimes gadījumos, iedzīvei un tml.) un 2) uzņēmumi, kas atmet peļņu. Pirmā veida aizdevumus var uzlūkot pabalsta aizdevumus, un tāpec saprotams, ka gandrīz visos laikos, daudzreiz aiz reliģioziem motīviem, redzam tieksmi aizliegt ņemt augļus par tādiem aizdevumiem. Tā kļūst saprotami likumdevēju mēģinājumi aizliegt ņemt augļus par aizdoto kapitālu. Piem., Mozus likumos redzam tādus nosacījumus. 2. Moz. 22, 25: „Ja tu maniem ļaudīm, kas ir pie tevis par nabagiem, aizdodi naudu, tad neesi pret tiem kā kāds pagaidu plēsējs; tev par to nebūs augļus dzīt." 3. Moz. 25, 36–37: „Tev no viņa nebūs ņemt pagaidus nedz augļus, bet tev būs bīties savu Dievu, lai tavs brālis pie tevis dzīvo. Savu naudu tev nebūs izdot uz pagaidiem nedz savu barību viņiem aizdot uz augļiem." 5. Moz. 23, 19–20: „No sava brāļa tev nebūs augļus dzīt, nedz naudas augļus, nedz barības augļus, nedz citus kādas lietas augļus, ar ko var augļus dzīt. No svešiem tu vari augļus dzīt, bet no sava brāļa tev nebūs augļus dzīt, lai tas kungs tavs Dievs svētī pie visa, kur tu savu roku pieliec, tai zemē, ko tu eji iemantot." Senajā Romā *Lex Genucia* 341. g. pr. Kr. aizliedza ņemt augļus, bet likums pamazām aizmirsās, un tāpēc 172. g. pr. Kr. to atjaunoja. Minēti tika senos laikos ari filozofiski motīvi pret augļu ņemšanu. Tā, piem., Aristotelis (384.–322.) saka, ka nauda esot pēc savas dabas neauglīga, tāpēc augļu ņemšana, kur nauda rada naudu, ir vispretdabiskākais iemantošanas veids. Vēlākos laikos, kad pie varas nāca baznīca, tā ari gribēja izskaust augļu ņemšanu. Tā, piem., 443. g. pāvests Leons, 1311. g. baznīcas koncils, 1530., 1548. un 1577. g. vācu valsts policijas nolikumi aizliedz ņemt augļus. Žīdi šinī ziņā baudīja izņēmumu, bet toties tiem bija jāmaksā daudz augstāki nodokļi. Ar pakāpenisku tirdzniecības un satiksmes uzplaukšanu radās vajadzība pēc tirdznieciska kredita, kas vajadzīgs kādam uzņēmumam, kad paša naudas nepietiek, pie kam uzņēmums sola peļņu. Sakarā ar to uzskati mainās, un jau 1654. g. valsts tiesa Vācijā uzskata mērenu augļu ņemšanu par atļautu. Anglijā augļu ņemšanu atļāva jau 1545. g., bet Francijā formāli atcēla šo aizliegumu tikai 1789. g.

2. Augļu ņemšana, īstenībā pretēji visiem valsts un baznīcas varas aizliegumiem, nekad nav izzudusi; tās nav varējuši izskaust nekādi motīvi. Tas pats jāsaka ari par augļu mēra augstumu jeb, kā tagad to sauc, par procentiem. Grieķijā*) piektā un ceturtā gadu simtenī pr. Kr. procentu caurmēra augstums bija Delosas templa bankā 10 no simta,

*) Dr. J. Tropfke. Geschichte der Elementarmathematik. Berlin u. Leipzig. 1921. I, 156, 157.

Atenās stārp 376. un 366. g. 12 no simta. Zemē ieliktais kapitāls starp 380. un 345. g. atmaksājas ar 6 līdz 8 no simta. Jūŗas tirdzniecības braucieniem, kur lielāks risks, naudu aizdeva par 20—33½ no simta, pie tam ne uz visu gadu, bet tikai vienam braucienam turpu un atpakaļ. Trešā gadu simtenī pr. Kr. augļu mērs nokrita uz 10 no simta, otrā g. s. uz 7—8 no simta, pie kam riskantākos gadījumos ņēma tomēr 12 no simta. Pirmā g. s. pr. Kr. augļu mērs atkal kāpa Romai maksājamo kontribuciju dēļ. Ķeizaru laikā līdz Adrianam augļu mērs bija 9, vēlāk 8 un 7 no simta.

Romā divpadsmit tabulu likums (piektā g. s. pr. Kr.) noteica augstāko augļu mēra augstumu uz 10 no simta. Tā kā šo likumu pastāvīgi pārkāpa, tad to 357. g. atjaunoja, bet 347. g. noteica augļu mēru uz 5 no simta un 341. g. pavisam aizliedza ņemt augļus. Jāpiezīmē, ka Romā augļus maksāja ik mēnešus, tāpēc *centesima* apzīmē 12 no simta. Kā jau minējām, šis likums pamazām aizmirsās. Pirmā gadu simtenī pr. Kr. Sullas laikā izveidojās augļu mērs 4 līdz 6 no simta, kas dažos atsevišķos gadījumos kāpa līdz 12 no simta. Šis skaitlis no tā laika tika noteikts ar likumu (senāta lēmumu 50. g. pr. Kr.) kā augstākais augļu mērs un palika par augstāko robežu līdz Rietumromas valsts krišanai. Justiniana laikos droši aizdevumi rentējās ar 4 līdz 6 no simta. Francijā Filips Augusts*) 1272. g. noteica augļu mēra augstāko robežu uz 48 no simta par gadu; Filipa IV. laikā, 1311. g., tas bija 20 no s.; Kārļa V. laikā 1545. g. maksimums bija 12 no s. 1900. g. 10. apr. noteica legālo augļu augstumu uz 4 no s.; civīldarījumos un uz 5 no s. komercoperācijās. Ar 1918. g. 18. apr. likumu šis augļu mērs pacelts uz 5 un 6 no s.

Zīmējoties ari uz augļu mēra augstumu var konstatēt, ka nekāds likums nav varējis to pilnīgi regulēt. Kā augstākais tā zemākais augļu mērs ir mainīgs lielums, kas atkarājas, pirmkārt, no tanī laikā valdoša naudas trūkuma vai pārpilnības un otrkārt, no aizdotās naudas nodrošinājuma, vispārējā starptautiskā stāvokļa u. c. faktoriem.

3. Augļu aprēķini pazīstami**) jau no trešā g. t. pr. Kr. Babelē. Liels izrakto māla tafelīšu skaits liecina par tirdz-

*) Theorie et Pratique des Opérations financières par A. Barriol. Paris, 1925. 8. un 9. lapp.

**) Dr. J. Tropfke. Op. cit. I., 157, 158.

niecisko darījumu apmēriem šos senajos laikos. Interesanti atzīmēt, ka ar likumu bija noteikts darīšanu gads uz 360 dienām, ko ari tagadējos laikos lieto naudas operāciju praksē. Bet toreiz šim paņēmienam bija daudz redzamāka nozīme, jo senās Babeles mēnesim bija tikai 29 vai 30 dienas, kas radīja nepieciešamību ik pēc divi vai trim gadiem palielināt pilsoņu gada dienu skaitu līdz 390, kurpretim naudas un tirdzniecisko operāciju gads palika 360 dienas garš.

Kā notika paši augļu aprēķini klasiskā senatnē, par to nav uzglabājušies nekādi dokumenti. No indiešu mācības grāmatām (piektā un sestā g. s. pēc Kr.) pazīstami augļu aprēķinu piemēri. Šeit jāatzīmē, ka sastopami ari augļu augļu aprēķini un augstais augļu mērs — 5 no s. par mēnesi. Augļu uzdevumus sastopam ari minētajā *Liber abaci* (1228. g.). Piecpadsmitajā un sešpadsmitajā gadu simtenī, sevišķi italiešu rēķinu grāmatās, sastopam daudz tirdzniecisko rēķinu vielas. Vienkāršo augļu aprēķini sastopami tik pat bieži kā augļu augļu rēķini. It īpaši jāatzīmē Lūkasa Pačioli (Luca Pacioli) darbs *Summa* (1494), kur liels nodalījums veltīts augļu aprēķiniem. Starp citu te parādīts, kā sastāda un lieto augļu aprēķināšanas tabulas, ko lietoja tirdzniecības praksē. No Italijas šādas tabeles izplatījās citās zemēs.

P r o c e n t a jēdziens guļ jau minētajā romiešu vārdā *centesima* (simtā daļa); vārds p r o c e n t s ceļas no italiešu valodas. Latīņu izteiciena *pro centum* (par simtu) vietā sešpadsmitā gadu simtenī pēc italiešu parauga *per cento* sāka lietot vārdu *pro cento*. Austrijas „*Percent*" un Anglijas „*per cent*" vēl vairāk saistīja šo nosaukumu *pro cento* ar praksi, kamēr beidzot abi vārdi sakusa vienā, kuŗu sāka ari locīt. Ar 19. g. s. šis vārds jau tā iesakņojies, ka to nevien loka, bet daudzās valodās lieto citu vārdu darinājumiem.

Procentu apzīmējums $^0/_0$ ceļas no italiešu 15. g. s. rokrakstiem. Kāda 1425. g. manuskripta nezināms rakstītājs parastā per 100 vietā raksta ꝑ 100, ꝑ *cento*, īsi ꝑ σ° (ꝑ c̊ vietā). Augšā ievietotais ^{0} cēlies no italiešu skaitļu apzīmējumiem 1^0, 2^0, . . . jeb 2̊, . . ., kas nozīmē *primo*, *secundo*.

Kapitāls un augļi var savā starpā atrasties trejādās attiecībās: 1) kapitāls un augļi paliek šķirti; 2) augļi saplūst ar kapitālu; 3) pie kapitāla nāk klāt jauns kapitāls un ari augļi saplūst ar kapitālu.

12. Vienkāršie augļi.

1. Ja kapitāls un augļi paliek šķirti, tad runā par vienkāršiem augļiem jeb vienkāršiem procentiem. Lai atvieglotu aprēķinus, pieņem šādu hipotezi: ikviens aizlienētās summas lats atnes vienus un tos pašus augļus ikviena tikpat gaŗa perioda laikā. Protams, ka varētu būt ari cita hipoteze: piem., kapitāls atnes noteiktus augļus, kamēr kapitāls nepārsniedz summas K_1, tad starp K_1 un K_2 kapitāla augļu mērs var būt citāds u. t. t. Augļu aprēķinos ari pie mums, tāpat kā daudzās citās zemēs, gadu pieņem par 360 d.; augļi krājas dienu dienā, bet tos izmaksā saskaņā ar iepriekšējo norunu.

2. Atzīmēsim kapitālu ar K, augļus ar a, procentu likmi, t. i., augļus ik par 100 vienībām gadā, ar p%, un kāpitāla apgrozības dienu skaitu ar t; tā tad kapitāls Ls 100 atnes p latu augļu 360 dienās; viens lats vienā dienā atnesīs $\frac{p}{100}$ latu augļu; šo summu apzīmēsim īsāk ar i; tā tad $i = \frac{p}{100}$ ir augļi par gadu no vienu latu liela kapitāla. Saskaņā ar šiem apzīmējumiem dabūsim, ka augļi par gadu no K latu liela kapitāla būs $K . i$; par vienu dienu augļu būs 360 reiz mazāk, t. i., $\frac{Ki}{360}$ un par t dienām t reiz vairāk, t. i.

$$a = \frac{K . i . t}{360} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Dabūtā formula ir tā saucamā vienkāršo augļu formula, kas saista savā starpā četrus lielumus: augļus par t dienām, kapitālu, dienu skaitu un augļus no viena lata par gadu; beidzamais skaitlis ļauj viegli atrast procentu likmi. Zinot trijus no šiem lielumiem, viegli varam atrast ceturto.

Vienkāršo augļu aprēķinu paņēmienus dažādos gadījumos aplūko komercaritmētika, tāpēc šo jautājumu te tālāk neaplūkosim.

13. Augļu augļu pamatformula.

1. Ja augļus, kas par noteiktu periodu sakrājas no kapitāla, pieskaita kapitālam — kapitālizē tā, ka nākamā periodā tie savukārt sāk nest augļus, tad saka, ka kapitāls atdots uz augļu augļiem jeb procentu procentiem, jeb citādi — kapitāls nes augļu augļus.

Ņemsim šādu piemēru. Kapitāls Ls 1000 atdots uz augļu augļiem. Aprēķināt, kāds kapitāls sakrāsies 5 gados, ja aprēķina 4%.

Šeit i ir 0,04; tā tad ikviens lats gada laikā atnes augļu Ls 0,04.

Pirmais gads:

sākumā kapitāls ir Ls 1000; beigās Ls $1000 + \text{Ls}\ \underbrace{1000 \cdot 0{,}04}_{\text{augļi}} =$ $= \text{Ls}\ \underbrace{1000 \cdot 1{,}04}_{1000\ \text{ņemts aiz iekavām}}$

Otrais gads:

sākumā kapitāls ir Ls $1000 \cdot 1{,}04$; beigās Ls $1000 \cdot 1{,}04 +$ $+ \text{Ls}\ \underbrace{1000 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}04}_{\text{augļi}} = \text{Ls}\ \underbrace{1000 \cdot 1{,}04^2}_{1000 \cdot 1{,}04\ \text{ņemts aiz iekavām}}$.

Trešais gads:

sākumā kapitāls ir Ls $1000 \cdot 1{,}04^2$; beigās — Ls $1000 \cdot 1{,}04^2 +$ $+ \text{Ls}\ 1000 \cdot 1{,}04^2 \cdot 0{,}04 = \text{Ls}\ 1000 \cdot 1{,}04^3$.

Ceturtais gads:

sākumā kapitāls ir Ls $1000 \cdot 1{,}04^3$, beigās — Ls $1000 \cdot 1{,}04^3 +$ $+ \text{Ls}\ 1000 \cdot 1{,}04^3 \cdot 0{,}04 = \text{Ls}\ 1000 \cdot 1{,}04^4$.

Piektais gads:

sākumā kapitāls ir Ls $1000 \cdot 1{,}04^4$; beigās — Ls $1000 \cdot 104^4 +$ $+ \text{Ls}\ 1000 \cdot 1{,}04^4 \cdot 0{,}04 = \text{Ls}\ 1000 \cdot 1{,}04^5$.

Tā tad piektā gada beigās būs sakrājies Ls $1000 \cdot 1{,}04^5$ liels kapitāls, ko īsāk varam uzrakstīt tā:

$$\mathbf{K_5 = Ls\ 1000 \cdot 1{,}04^5}.$$

Redzam, ka piecos gados sakrājies tāds kapitāls, ko dabū, reizinot sākuma kapitālu Ls 1000 ar 1,04 piektā pakāpē. Lielumu 1,04 sauc par *pieauguma* jeb *prolongācijas reizinātāju*; tas sastādās no 1 plus 0,04, citiem vārdiem, to var uzlūkot kā kapitālu, *kādā pārvēršas viens lats pēc viena gada*; vispārējā veidā tas izteicas ka $1 + i$.

Apzīmēsim to īsāk ar r; tā tad $r = 1 + i = 1 + \frac{p}{100}$. Šis reizinātājs labi jāiegaumē, jo ar to nāksies ļoti bieži sastapties.

Tā tad, ja, piem., $p=3$, tad $r=1{,}03$;
$p=3{,}5$, „ $r=1{,}035$;
$p=4$, „ $r=1{,}04$;
$p=4{,}25$, „ $r=1{,}0425$ u. t. t.

Otrādi, ja, piem., $r=1,1$, tad $p=10\%$,
$r=1,055$, „ $p=5,5\%$ u. t. t.

Aplūkosim tagad jautājumu vispārējā veidā.

Uzdevums. Atrast kapitālu, kas sakrāsies n gados no K_0 latu liela kapitāla, ja tas atdots uz augļu augļiem un par to rēķina $p\,\%$.

Apzīmēsim uzkrāto kapitālu, t i., sākuma kapitālu kopā ar augļiem, jeb tā saucamo beigu kapitālu ar K_n; tad, spriežot tāpat kā aplūkotajā piemērā, dabūsim šādu rezultātu.

Sākums.		Beigas.
	Pirmais gads:	
K_0		$K_0+\underbrace{K_0 i}_{\text{augļi}}=K_0\,(1+i)=K_0 r$;
	Otrais gads:	
$K_0 r$		$K_0 r+K_0 ri=K_0 r\,(1+i)=K_0 r^2$;
	Trešais gads:	
$K_0 r^2$		$K_0 r^2+K_0 r^2 i=K_0 r^3$;
	Ceturtais gads:	
$K_0 r^3$		$K_0 r^3+K_0 r^3 i=K_0 r^4$;

tā tad pēc četriem gadiem uzkrātais kapitāls K_4 izteicas tā:

$$K_4=K_0 r^4;$$

nomanām šādu likumību:

⊙ **beigu kapitāls izteicas kā sākuma kapitāla reizinājums ar pieauguma reizinātāju, ņemtu tādā pakāpē, cik gadu kapitāls atradies apgrozībā.**

Pieņemsim, ka šī likumība pareiza n gadiem, t. i., ka $K_n=K_0 r^n$; pierādīsim, ka tādā gadījumā viņa paliks pareiza ari tanī gadījumā, ja pāriesim uz $(n+1)$ gadu; tiešām, pēc vispārēja paņēmiena $K_{n+1}=K_n+K_n i=K_n r$, bet mēs pieņēmām, ka $K_n=K_0 r^n$; tāpēc $K_{n+1}=K_0 r^{n+1}$, t. i. ari $(n+1)$ gadam der šī likumība; bet tā kā jau četriem gadiem tā atrasta tieši, tad tā derēs ar pieciem, bet ja pieciem, tad ari sešiem u. t. t. līdz bezgalībai, t. i. kuŗam katram veselam gadu skaitam.

Tā tad

$$\underline{K_n}=K_0 r^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Šī ir augļu augļu rēķinu pamata formula.

14. Aprēķinu paņēmieni.

1. Uzkrātā kapitāla aprēķināšanai praksē visbiežāk lieto īpašas tabulas, kur var atrast visvairāk lietojamām procentu

likmēm, līdz ar to dažādām *r* nozīmēm, attiecīgās pakāpes, citiem vārdiem, var atrast uzkrāto no 1 lata kapitālu pēc 1, 2, 3,... gadiem, jo, piem., $1{,}04^5$ rāda, kāds ir beigu kapitāls, ko dod Ls 1 pēc 5 gadiem, ja tas atdots uz 4% un nes augļu augļus.

Pieauguma reizinātāju tabulas paraugs.

Gadi	3%	4%	4,25%	4,5%
1	1,03	1,04	1,0425	1,045
2	1,0609	1,0816	1,0868 0625	1,0920 25
3	1,0927 27	1,1248 64	1,1329 9552	1,1411 6613
4	1,1255 0881	1,1698 5856	1,1811 4783	1,1925 1860
5	1,1592 7407	1,2166 5290	1,2313 4661	1,2461 8194

No šādas tabulas atrodam, ka $1{,}04^5$ jeb no Ls 1 uzkrātais 5 gados kapitāls ir Ls 1,21665290 $\approx$ Ls 1,22. Tāpat viegli no tabulām atrast citu pieauguma reizinātāju nozīmes dažādām pakāpēm, citiem vārdiem, dažādiem gadiem.

Tādas tabulas var sastādīt ļoti vienkārši. Piem., ja grib dabūt dažādas reizinātāja 1,04 pakāpes, tad, ņemot vērā, ka reizināt ar 1,04 ir tik pat daudz kā reizināt ar 1+0,04, citiem vārdiem, pie skaitļa, kuŗu gribam reizināt ar 1+0,04, pieskaitīt viņa 4% jeb viņa četras simtās daļas. Tāpēc varam rīkoties šādā veidā:

1. g. beigās	1,04	
	+0,0416	pieskait. 4% no 1,04
2. g. „	1,0816	
	+0,043264	„ „ „ 1,0816
3. g. „	1,124864	
	+0,04499456	„ „ „ 1,124864
4. g. „	1,16985856	
	+0,04679434	„ „ „ 1,16985856
5. g. „	0,21665290	
u. t. t.		

Parasti aprobežojas ar 8 decimālzīmēm, noapaļojot, kur vajadzīgs, dabūtos rezultātus tā, lai kļūda nepārsniegtu beidzamās šķiras vienības puses.

Pieauguma reizinātāju un citu lielumu tabulas, ar kuŗām sastapsimies vēlāk, sakopo atsevišķā krājumā, ko parasti sauc par **finanču tabulām**; biežāk lietotās tabulas ir „Simon Spitzers Tabellen für die Zinseszinsen-und Rentenrechnung," „Tables pour les calculs d'intèrêts" par P.-A. Violeine, „Zinseszinsen-, Einlage-, Renten-und Amortisationstabellen" von Heinrich Murai u. c. Tā, piem., Spitzer'a tabulās pieauguma reizinātāji doti līdz 100 gadiem (ieslēdz.) procentu likmēm, sākot ar $\frac{1}{8}$% un beidzot ar 15%, pie kam viena procentu likme no nākamās atšķiŗas ar mazu starpību: pēc $^1/_8$% nāk $^1/_6$%, tad $^1/_4$%, $^1/_3$%, $^3/_8$%, $^1/_2$% u. t. t.

Grāmatas beigās ievietotās tabulas ir izvilkums no Spitzer'a tabulām. Lietojot pieauguma reizinātāju tabulas, viegli aprēķināt beigu kapitālu, jo nākas tikai pareizināt divus skaitļus.

Piemērs. Atrast, kāds kapitāls uzkrāsies 8 gados no Ls 58 452, kas atdoti uz 3% un nes augļu augļus.

Pēc (2) form. K = Ls 58452 . $1{,}03^8$, no tabulām atrodam, ka $1{,}03^8$ ir 1,26677009; tā kā beigu kapitāls jāatrod ar tuvinājumu līdz vienam santīmam, t. i. līdz 0,01 lata, tad, saskaņā ar saīsinātās reizināšanas paņēmieniem, atsevišķie reizinājumi jāatrod ar 4 decimālzīmēm.

$$\begin{array}{r} 1{,}26677009 \\ 25485 \\ \hline 633385045 \\ 101341600 \\ 5067080 \\ 633385 \\ 25334 \\ \hline 74045{,}2444 \end{array}$$

Tā tad K = **Ls 74045,24.**

Līdzīgā kārtā atrodam kaut kuŗu beigu kapitālu. Ja tabulās nav tik liela gadu skaita, kāds vajadzīgs (parasti gan pāri 100, pat 50 gadiem aprēķini neiet), vai ari nav attiecīgās procentu likmes, tad var rīkoties vai nu ar logaritmu palīdzību, vai ari papildināt tabulas. Ja tabulās trūkst attiecīgais gadu skaits, tad var viegli izpalīdzēties; piem., ja būtu vajadzīgs $1{,}03^{70}$ un tabulas sniedzas tikai līdz $1{,}03^{50}$, tad, ņemot vērā, ka $1{,}03^{70} = 1{,}03^{50} . 1{,}03^{20}$, dabūsim, ka $1{,}03^{70} = 4{,}38390602 . 1{,}80611123 = 7{,}91782191$. Ja turpretīm tabulās nav vajadzīgās procentu likmes, tad jāsastāda tai attiecīgo pieauguma reizinātāju tabula, kā jau parādīts, vai ari jādabū vajadzīgais skaitlis ar interpolācijas palīdzību (skat. turpmāk).

2. Beigu kapitālu var aprēķināt ari ar logaritmu palīdzību, tikai tad jālieto logaritmi ar pietiekošu decimālzīmju skaitu, jo, rēķinot ar logaritmiem, varēs, kā zināms, atrast skaitļus caurmērā ar tik daudz pareiziem cipariem, ar cik decimālzīmēm lietojam logaritmus, vai izdevīgos gadījumos par vienu ciparu vairāk. Tāpēc, lietojot pieczīmju logaritmu tabulas, varēsim atrast pēc logaritmiem skaitļus un tā tad ari beigu kapitālu tikai ar 5 vai augstākais 6 pareiziem cipariem, ja pie tam pieauguma reizinātāja logaritmus ņemsim ar 6 vai 7 zīmēm, jo, reizinot pieauguma reizinātāja logaritmu ar attiecīgo gadu skaitli, logaritma kļūdu stipri pavairojam.

Aprēķināsim augšējo piemēru ar logaritmu palīdzību, lietojot 7-zīmju logaritmu tabulas.

$K = 58452 \,.\, 1{,}03^8$; $\log K =$ | $\log 58452 = 4{,}7667994$
$\log 1{,}03 = 0{,}01283722$*) | $8 \log 1{,}03 = 0{,}1026978$

$\times 8$ $\qquad \log K = 4{,}8694972$

$$
\begin{array}{r}
0{,}10269776 \\
8694972 \quad d=59 \\
4957 \;.\;.\;.\; 74045 \\
\hline
15 \\
12 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 2 \\
\hline
30 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 5 \\
\hline
7404525
\end{array}
$$

K = Ls 74045,25.

Ar pieczīmju logaritmu tabulām tas pats piemērs dotu šādu rezultātu:

$\log K =$ | $\log 58452 = 4{,}76680$ $\qquad$ 5845 . . . . 76678 $d=8$
$8 \log 1{,}03 = 0{,}10270$ $\qquad$ 2 $\quad$ 15

58452 76680

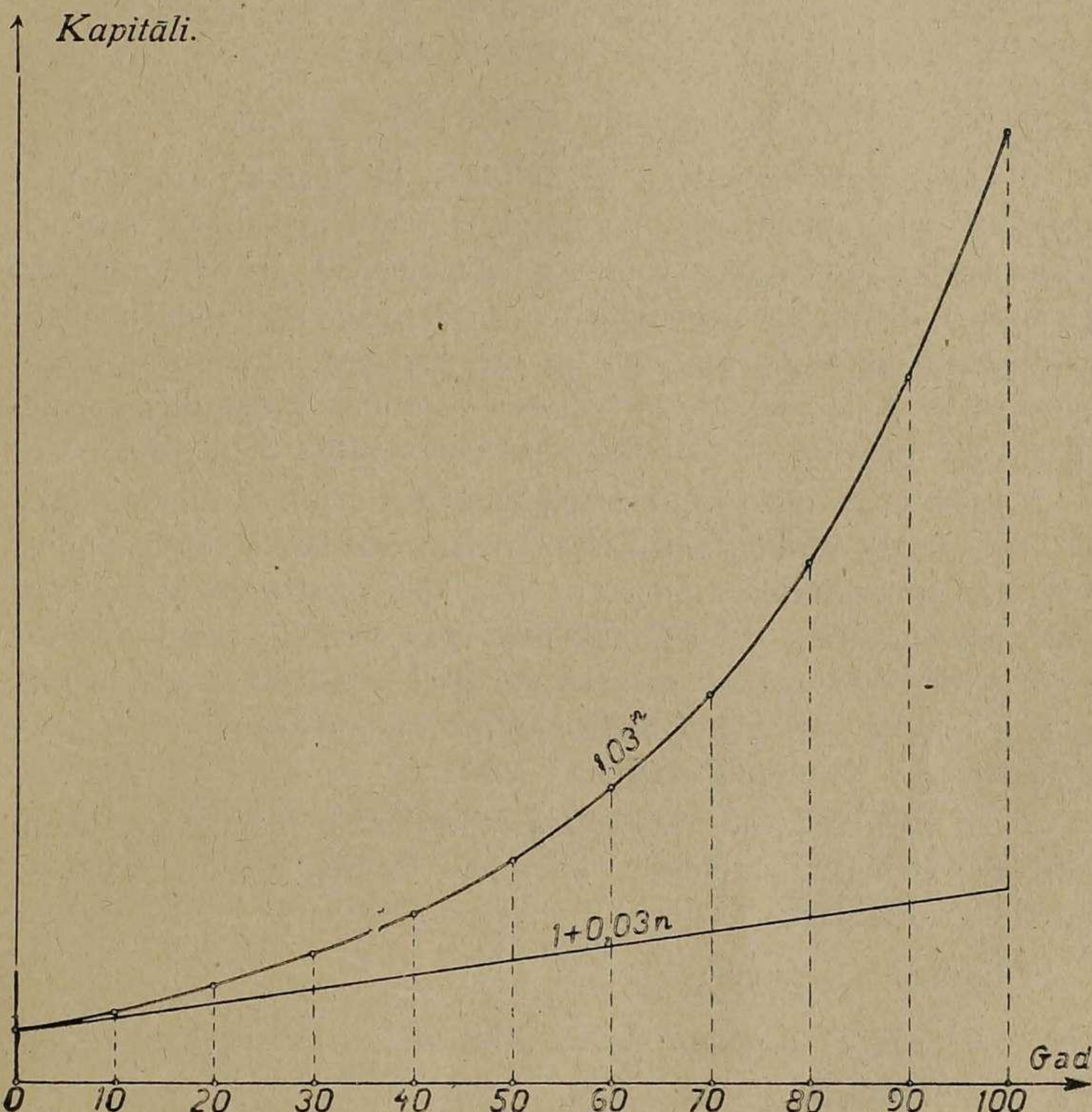
$$
\begin{array}{r}
\log K = 4{,}86950 \quad d=6 \\
947 \;.\;.\;.\; 7404 \\
\hline
3 \;.\;.\quad 5 \\
\hline
74045
\end{array}
$$

R = Ls ~~70445~~.— Ls 74045

Starpība ar iepriekšējo rezultātu 25 sant.

*) $\log$ 1,03 ņemts ar astoņām decimālzīmēm.

3. Aplūkojot pieauguma reizinātāju tabulas, redzam, ka, piem., $1{,}04^{18}=2{,}10684918$, $1{,}04^{29}=3{,}11865145$, $1{,}04^{36}=4{,}10393255, \ldots$, $1{,}04^{100}=50{,}50494818$; tas rāda, ka kapitāls, kas atdots uz 4% un nes augļu augļus, divkāršojas pēc apm. 18 gadiem, četrreiz lielāks kļūst pēc apm. 36 gadiem, bet pēc 100 gadiem sakrājas kapitāls vairāk nekā 50 reizes lielāks par sākuma kapitālu.



1 zīm.

Attēlojot kapitāla augšanu grafiski (1. zīm. ar līkni attēlots vienu latu liela kapitāla augums 100 gados, ja tas nes 3% un augļu augļus un ar taisni tā paša kapitāla augums, ja tas nes 3% un vienkāršus augļus), redzam, ka ar n pieaugšanu beigu kapitāls jo strauji aug un lielām n nozīmēm dod praktiski neiespējamus rezultātus.

Piem., ja 1 lats, noguldīts uz 4%, nestu augļu augļus 2000 gadu laikā, tad sakrātos latos izteikts kapitāls

$$1{,}04^{200} \approx 11659367763 \, . \, 10^{24}.$$

Ko nozīmētu tāds kapitāls, var paskaidrot sekošs salīdzinājums. Zelta gabals mūsu zemes lodes apmēros maksātu apm. Ls 71856 . 10^{24}. Tā tad 1 lata kapitālizācijas rezultāts 2000 gadu laikā būtu

$$\frac{11659367763 \, . \, 10^{24}}{71856 \, . \, 10^{24}} \approx 162000,$$

t. i. apm. 162000 zelta gabalu zemes lodes lielumā.

Tāpēc praksē kaut kā jāizpalīdzas, lai nerastos šādi absurdi rezultāti. To panāk, vai nu noteicot kādu maksimālo summu, kuŗu sasniedzot kapitāls vairs augļus nenes, vai ari lietojot citādu formulu. Piem., agrākās Krievijas krājkases, kas pieņēma noguldījumus uz augļu augļiem un maksāja 3,6%, izbeidza augļu pieskaitīšanu, ja kapitāls uz fiziskas personas vārda bija sasniedzis 1000 rub. un uz juridiskas personas vārda 3000 rub.

Līdz ar to kļūst saprotams aizliegums daudzās valstīs, sākot jau no senās Romas, privātām personām ņemt augļu augļus. Ari mūsu civillikumu 3426. p. saka, ka augļi aprēķināmi tikai par pašu kapitālu; bet kad noteiktā laikā nenotiks augļu maksājumi par laiku, kas nav mazāks par gadu, tad uz kreditora pieprasījumu par viņam pienākošos augļu summu aprēķina no minētā termiņa likumīgus augļus.

No formulām, kas sastādītas tā, lai ar n pieaugšanu beigu kapitāls neaugtu pārmērīgi, minamas Catalan'a un Enrico de Montel'a formulas.

Catalan'a formula šāda:

$$K_n = K_0 (1+y), \text{ kur } y = c \left[e - \left(1 + \frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}} \right]; \quad \text{pēdējā}$$

formulā e ir Nepera logaritmu baze, t. i., $e \approx 2{,}718281828$, c ir pastāvīgs skaitlis, noteikts tā, lai pie $n=1$ $y=i$, kur i ir agrāk minētais lielums, t. i. augļi par gadu no viena lata;

$$\text{tā tad } i = c \left[e - \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \right];$$

tā kā $1{,}01^{100} = 2{,}704814$, tad $e - 1{,}01^{100} = 0{,}013\,468$ un

$$c = \frac{i}{0{,}013468} \approx 74{,}25074 \; i \approx 75 \; i.$$

Aprēķinus var izdarīt tā.

Pieņemsim, ka $\left(1+\frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}} = z$; $\log z = \frac{100}{n} \log\left(1+\frac{n}{100}\right)$, no kurienes varam atrast z; tad $y = 74{,}25 \ldots i\,(e-z)$ un

$K_n = K_o\,(1+y)$.

Pēc šīs formulas līdz 100 gadiem kapitāla pieaugums pārāk daudz neatšķiŗas no tā kapitāla, ko dod mūsu pamatformula, bet pēc 100 gadiem uzkrātais kapitāls stipri ierobežojas. Tā, piem., 1 latu liels kapitāls, kas atdots uz 4% un nes augļu augļus, pēc Catalan'a formulas dos šādu beigu kapitālu pēc 100 gadiem.

$y = 74{,}25 \ldots i\,(e-z) = 74{,}25 \ldots \times 0{,}04\,(2{,}71828-2) =$ $= 2{,}13329$; $K_{100} = K_0(1+2{,}13329) = 3{,}13329\,K_0$, t. i. dod uzkrāto kapitālu apmēram trīs reiz lielāku nekā sākuma kapitāls. Pēc vienkāršu augļu aprēķiniem beigu kapitāls būtu $K_0 + K_0 \cdot i \,.\, 100 = K_0 + 4\,K_0 = 5\,K_0$, t. i. būtu piecreiz lielāks nekā sākuma kapitāls.

15. Interpolācija.

1. Ja kādā matēmatiskā rindā trūkst viens vai vairāki locekļi, tad tos var aprēķināt un ievietot pārējo locekļu stārpā ar tā saucamās i n t e r p o l ā c i j a s palīdzību. Vārdu interpolācija tagad lieto plašākā nozīmē: agrāk ar to apzīmēja paņēmienu, kas ļauj ievietot rindas trūkstošos locekļus jau esošo locekļu s t a r p ā (inter), bet tagad ar šo vārdu saprot vispār rindas papildināšanu, vai nu trūkstošie locekļi kristu esošo starpā vai ārpus tiem.

Tā tad, ja mums dota kādas funkcijas nozīmju rinda, pie kam funkcijas nozīmes ņemtas ar mainīga lieluma tādām nozīmēm, kas savā starpā atšķiŗas ar vienu un to pašu diferenci, un ja rindā ievieto starplocekļus, kas atbilst neatkarīgā mainīgā lieluma starpnozīmēm, tad saka, ka šos locekļus i n t e r p o l ē. Piem., ja pie $n=25$ zinām lielumus $(1+i)^{25}$, kas atbilst procentu likmēm $4^1/_8$, $4^1/_4$, $4^3/_8$, $4^1/_2$, $4^5/_8$, t. i., zinām rindu (sk. Spitcer'a tabulas) 2,7471 0564, 2,8307 5049, 2,9168 3735, 3,0054 3446, 3,0966 1188, kur uzrakstītie rindas locekļi ir funkcijas $f(p) = \left(1+\frac{p}{100}\right)^{25}$ nozīmes pie mainīgā lieluma p nozīmēm, kas atšķiŗas viena no otras ar diferenci $\frac{1}{8}$, tad, ja gribam šo rindu papildināt ar funkcijas $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{25}$ nozīmi lielumam $p = 4^1/_3$, to varam izdarīt i n t e r p o l ē j o t.

2. Interpolācijai visbiežāk lieto Newton'a interpolācijas formulu, ko dod tā saucamie diferenču rēķini.

Ja $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$ ir neatkarīgā mainīgā lieluma nozīmes ar vienu un to pašu diferenci h sava starpā, t. i. $x_1=x_0+h, x_2=x_1+h=x_0+2h, \ldots$ un $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$ ir attiecīgās funkcijas nozīmes, tad starpību

$f(x_1)-f(x_0)$ apzīmē ar $\Delta f(x_0)$ un sauc par pirmo diferenci (galveno)
$f(x_2)-f(x_1)$ „ „ $\Delta f(x_1)$ „ „ „ „ „
$f(x_3)-f(x_2)$ „ „ $\Delta f(x_2)$ „ „ „ „ „
u. t. t.;

starpību

$\Delta f(x_1)-\Delta f(x_0)$ apzīmē ar $\Delta^2 f(x_0)$ un sauc par otro diferenci (galveno)
$\Delta f(x_2)-\Delta f(x_1)$ „ „ $\Delta^2 f(x_1)$ „ „ „ „ „ u. t. t.,
tāpat $\Delta^2 f(x_1)-\Delta^2 f(x_0)=\Delta^3 f(x_0)$ sauc par trešo diferenci u. t. t., pie kam rindas pirmo locekli $f(x_0)$ sauc par g a l v e n o l o c e k l i un pirmās diferences $\Delta f(x_0), \Delta^2 f(x_0)$ u. t. t. sauc par g a l v e n ā m d i f e r e n c ē m.

P i e m ē r s. Ņemsim funkciju $f(x)=x^3$, kur x pieņem naturālo skaitļu rindas nozīmes; tad dabūsim šādas sakarības:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	0				
		1			
1	1		6		
		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		0
		37		6	
4	64		24		
		61			
5	125				
u. t. t.	u. t. t.	u. t. t.	u. t. t.	u. t. t.	u. t. t.

šinī piemērā $x_0=0$, $f(x_0)=0$; $\Delta f(x_0)=1$, $\Delta^2 f(x_0)=6$ u. t. t.; $h=1$.

Newton'a interpolācijas formula ir šāda:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{h}\cdot\Delta f(x_0)+\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(x)}{1.2}+$$

$$+\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)\frac{\Delta^3 f(x)}{1.2.3}+\ldots \quad (3).$$

jeb $f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{1.2.h^2}\Delta^2 f(x_0)+$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 f(x_0)+\ldots\ldots \quad (3_1).$$

Piemērs. Atrast, izlietojot iepriekšējo tabulu, $1{,}5^3$.

Pēc Newton'a formulas

$f(1{,}5)=0+1{,}5.1+1{,}5.0{,}5.3-1{,}5.0{,}5.0{,}5.1+0=$ $1{,}5+1{,}5^2-0{,}375=1{,}5+2{,}25-0{,}375=3{,}375$; tā tad $1{,}5^3=3{,}375$.

Protams, ka šinī gadījumā vieglāk būtu aprēķināt $1{,}5^3$ tieši; bet ņēmām šo piemēru tādēļ, lai parādītu Newton'a formulas lietošanu vienkāršu skaitļu gadījumā. Aplūkotā piemērā formula izbeidzas pati no sevis, jo ceturtā galvenā diference bija nulle. Citos gadījumos līdz nullei iet būtu par daudz apgrūtinoši, tāpēc aprobežojas tikai ar formulas dažiem locekļiem, (pirmiem divi, trim vai četriem) pie kam, protams, radīsies kļūda, bet šī kļūda nebūs liela, aprobežojoties jau ar trešām diferencēm.

Piemērs. Aprēķināt $f(4^1/_3)=\left(1+\frac{4^1/_3}{100}\right)^{25}$, zinot $f(4^1/_8)$, ..., $f(4^1/_2)$ (sk. augstāk).

Piezīme. Parasti izvēlas zināmus locekļus tā, lai interpolējamais loceklis būtu pret to vidu.

Pēc Newton'a formulas

$f(p)=f(p_0)+C_1\Delta f(p_0)+C_2\Delta^2 f(p_0)+C_3\Delta^3 f(p_0)$, kur

$C_1=\frac{p-p_0}{1\,h}$, $C_2=C_1.\frac{p-p_1}{2\,h}$, $C_3=C_2.\frac{p-p_2}{3\,h}$ un $p_0=4^1/_8$, $p_1=4\frac{1}{4}$, $p_2=4\frac{3}{8}$, $p_3=4\frac{1}{2}$.

Sastādām tabulu, kur attiecīgās f (p) nozīmes ņemam no pieauguma reizinātāju tabulām (sk. šī paragrafa pirmo nodalījumu).

$f(p)$	$\Delta f(p)$	$\Delta^2 f(p)$	$\Delta^3 f(p)$
$f(p_0)=2{,}7471\,0564$			
	0,0836 4485		
$f(p_1)=2{,}8307\,5049$		0,0024 4201	
	0,0860 8686		0,0000 6824
$f(p_2)=2{,}9168\,3735$		0,0025 1025	
	0,0885 9711		
$f(p_3)=3{,}0054\,3446$			

Redzam, ka trešā diference samērā ļoti maza, tāpēc varam uz tās apstāties. Aprēķināsim koeficientus C_1, C_2, C_3.

$C_1=(4^1/_3-4^1/_8):\frac{1}{8}=\frac{5}{3}$; $C_2=\frac{5}{3}\cdot(4^1/_3-4^1/_4):\frac{2}{8}=\frac{5}{9}$; $C_3=$ $=\frac{5}{9}\cdot(4^1/_3-4^3/_8):\frac{3}{8}=-\frac{5}{81}$.

Tāpēc

$$\begin{array}{l|l}
f(4^1/_3)= & f(p_0)= \dots\dots\dots\dots\dots \; 2{,}74710564 \\
 & C_1\Delta f(p_0)=\frac{5}{3}\cdot 0{,}08364485= \dots\dots \; 0{,}13940808 \\
 & C_2\Delta^2 f(p_0)=\frac{5}{9}\cdot 0{,}00244201= \dots\dots \; 0{,}00135667 \\
 & C_3\Delta^3 f(p_0)=-\frac{5}{81}\cdot 0{,}00006824= \dots\dots \; \bar{1}{,}99999579 \\
\hline
f(4^1/_3)= & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2{,}88786618
\end{array}$$

Tā tad $\left(1+\frac{4^1/_3}{100}\right)^{25}=2{,}88786618$; pareizā nozīme pēc Spitzer'a tabulām ir 2,88786612; tā tad kļūda te nepārsniedz 6 beidzamās šķiras vienības.

3. Ja Newton'a formulā aprobežosimies tikai ar pirmo diferenci, t. i. pieņemsim, ka

$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0)$, tad, ņemot vērā, ka $\Delta f(x_0)=f(x_0+h)-$ $-f(x_0)$ un pārnesot $f(x_0)$ uz kreiso pusi, dabūsim, ka $f(x)-$ $-f(x_0)=\frac{x-x_0}{h}[f(x_0+h)-f(x_0)]$ jeb, pārnesot $x-x_0$ kā dalītāju uz kreiso pusi, redzam, ka

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};$$

t. i. šī formula rāda, ka **funkcijas pieaugumi ir proporcionāli ar neatkarīgā mainīgā lieluma pieaugumiem**, citiem vārdiem, dabūjam proporcionālitātes likumu, kas vispār tad nav piemērojams, ja īstenībā proporcionālitāte nepastāv, bet praksē daudzkārt to lieto ari tad, ja proporcionālitātes nav, jo kļūda, ko tādējādi pielaižam, daudzos gadījumos nebūs liela. Šādu interpolāciju pēc proporcionālitātes likuma sauc ari par **lineāro interpolāciju**, jo gadījumā, kur funkcijas pieaugumi ir proporcionāli ar neatkarīgā mainīgā lieluma pieaugumiem, funkcijas attēls ir **taisne**. Interpolāciju ar augstākām diferencēm sauc par **hiperbolisko** interpolāciju.

Ja piemērotu nule aplūkotam piemēram proporcionālitātes likumu, t. i. pieņemtu, ka $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{25}$ pieaug proporcionāli ar p pieaugšanu, tad dabūtu šādu rezultātu. Ņemot vērā ka $4^1/_3$ ir starp $4^1/_4$ un $4^3/_8$, redzam no pieauguma reizinātāju tabulām, ka

$4\frac{3}{8}\%$ atbilst	2,91683735
$4\frac{1}{4}\%$ „	2,83075049

pieaugums $\frac{1}{8}\%$; tam atbilst pieaugums 0,08608686
pieaugums $4^1/_3\%-4^1/_4\%={}^1/_{12}\%$; tam atbilst pieaug. Δx
ja piemērosim proporcionālitātes likumu, tad $\Delta x : 0{,}08068686 = = \frac{1}{12} : \frac{1}{8}$, no kurienes $\Delta x = 0{,}08608686 \,.\, {}^2/_3 = 0{,}05379124$; tāpēc

$$f(4^1/_3) = \begin{array}{|l} f(4^1/_4) = 2{,}83075049 \\ \quad \Delta x \;\; = 0{,}05739124 \\ \hline f(4^1/_3) = 2{,}88814173 \end{array}$$

Redzam, ka te kļūda jau daudz prāvāka.

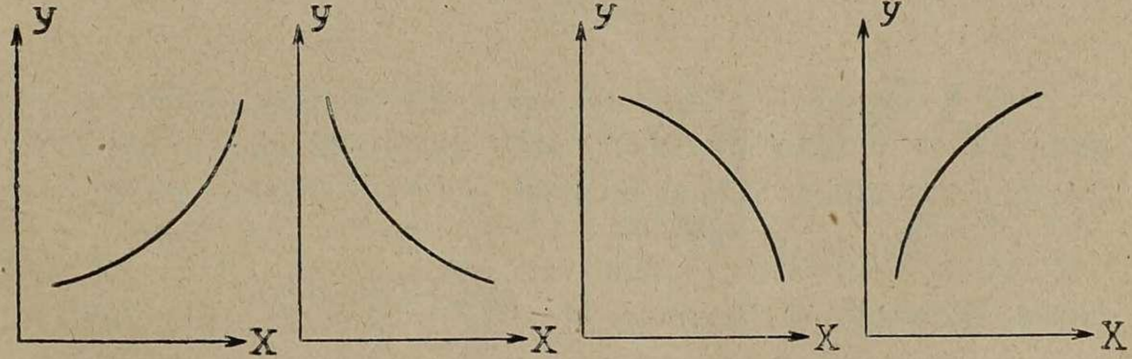
Pēc interpolācijas formulas, aprobežojoties ar divi locekļiem, dabūtu meklējamo nozīmi šādā veidā:

$$f(4^1/_3) = f(4^1/_4) + \frac{4^1/_3 - 4^1/_4}{\frac{1}{8}}\,[f(4^3/_8) - f(4^1/_4)],$$

kas dod nule dabūto rezultātu.

4. Kādu kļūdu pielaidīsim, lietojot Newton'a interpolācijas formulu ar aprobežotu locekļu skaitu?

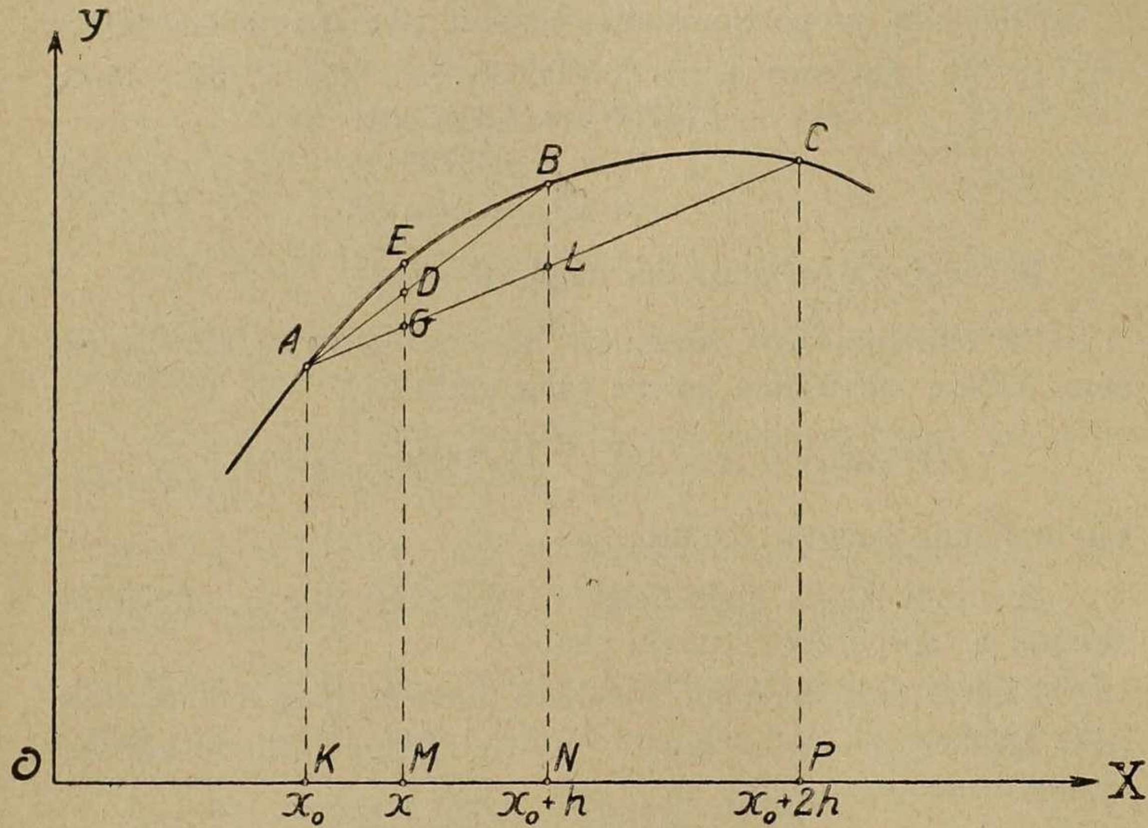
Lielākā daļa funkciju, ko lieto finanču matēmatikā, attēlotas ģeometriski, dod rēgulāru formu, proti, vienu no šādām četrām formām (2. zīm.):



2 zīm

Lai forma būtu kāda būdama, varam dabūt šādu sakarību. Pieņemsim, ka x_0, x_0+h_0 un x_0+2h ir neatkarīgo lielumu nozīmes un $f(x_0)$, $f(x_0+h)$ un $f(x_0+2h)$ attiecīgās funkcijas nozīmes; attēlojot tās grafiski, dabūsim uz funkcijas $f(x)$ grafikas (3. zīm.) punktus *A*, *B un C*.

Lineārā interpolācija starp x_0 un x_0+h atbilstu gadījumam, it kā funkcijas attēls būtu chorda AB; tāpēc nozīmei x atbilstu nevis īstā nozīmē ME, bet gan MD, tā tad kļūda izteiktos ģeometriski ar taisnes gabalu ED.



3. zīm.

Ja h nozīme ir pietiekoši maza, tad lielākais attālums starp kādu līknes punktu un chordu AC, skaitot paraleli ar asi OY, būs tas, kas atbilst vidējai nozīmei x_0+h, t. i. BL; tā tad

$$BL > EG > ED$$

tā kā $BL = BN - LN = f(x_0+h) - \frac{f(x_0+2h)+f(x_0)}{2}$, jo LN ir trapeča $ACKP$ viduslīnija, tad, apzīmējot ED ar ε, dabūsim, ka

$$\varepsilon < f(x_0+h) - \frac{f(x_0+2h)+f(x_0)}{2}$$

Šī formula vienmēr pareiza pēc absolūtās nozīmes, neatkarīgi no līknes formas.

P i e m ē r s. Iepriekšējā piemērā kļūda, ko dabūjām, piemērojot proporcionālitates likumu, nepārsniedz

$$f(4^3/_8) - \frac{f(4^1/_2)+f(4^1/_4)}{2} \approx 2{,}9168 - \frac{3{,}0054+28307}{2} = 2{,}9168-$$

$-2{,}9180 = -0{,}0012$, tā tad nepārsniedz 2 tūkstoto daļu palielinājumā. Salīdzinot dabūto rezultātu 2,88814173 ar īsto nozīmi 2,88786622, redzam, ka tiešām kļūda $2{,}88786622 - 2{,}88814173 \approx$ $\approx -0{,}0002$ īstenībā nepārsniedz pat 0,001 palielinājumā.

Ja Newton'a formulā aprobežojamies ar 5 vai pat 4 locekļiem, t. i. rēķinām ar ceturtām vai trešām diferencēm, tad kļūdas aprēķināšana ir sarežģītāka; tā kā te kļūda vispār samērā ļoti niecīga — parasti, aprobežojoties pat ar trešām diferencēm, nepārsniedz dažu beidzamās šķiras vienību, tad pie šīs kļūdas aprēķināšanas neapstāsimies.

16. Relatīvā un konformā procentu likme.

1. Līdz šim pieņēmām, kā augļus pieskaita kapitālam ik gadus. Vispār var būt, un praksē ari sastopams, cits kapitālizēšanas paņēmiens: augļus pieskaita pēc mazākām vai (reti) lielākām laika vienībām nekā gads, piem., augļus pieskaita ik pusgadus vai ik gada ceturkšņus. Galvenais jautājums te grozās ap to, kādu rēķināt procentu likmi par minēto periodu. Parasti pieņem, tāpat kā vienkāršu augļu aprēķinos, ka procentu likme ir proporcionāla ar laiku, t. i. ja par gadu ir $p^0/_0$, tad par pusgadu $\frac{p}{2}$, par gada ceturksni $\frac{p}{4}$, vispār, par gada m-to daļu $\frac{p}{m}$ un par m gadiem mp.

Šādā gadījumā beigu kapitāla aprēķināšanai der jau aplūkotie paņēmieni, tikai ar to starpību, ka gadu skaita vietā būs jāņem kapitālizācijas periodu skaits.

Piemērs. Atrast uzkrāto kapitālu, ko 6 gados, dod Ls 1500, ja tie atdoti uz $6^0/_0$ un augļus kapitalizē ik pusgadus. Kapitālizācijas periodu te $6.2=12$; procentu likme par kapitālizācijas periodu ir $\frac{6}{2}=3$, tāpēc

$K_6 =$ Ls $1500 . 1{,}03^{12} =$ Ls $1500 . 1{,}42576089 =$ Ls 2138,64.

Vispār, ja m ir kapitālizācijas perioda skaits gadā, tad kapitāls K_0, kas atdots uz $p^0/_0$ gadā n gados pārvērtīsies kapitālā K_n, kur

$$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100\,m}\right)^{mn} \quad \ldots\ldots (2_1).$$

jo r te ir $1+\frac{\frac{p}{m}}{100}$ un kapitālizācijas periodu skaits pavisam mn.

Vienā gadā dabūsim no viena lata $\left(1+\frac{p}{100\,m}\right)^m$, jo pēc pirmā perioda būs uzkrātais kapitāls $1+\frac{p}{100\,m}$, pēc otrā dabūsim $\left(1+\frac{p}{100\,m}\right)^2$, pēc trešā dabūsim $\left(1+\frac{p}{100\,m}\right)^3$, u. t. t.

2. Ņemot vērā, ka tanī gadījumā, kur augļus kapitālizē vairākas reizes gadā, kapitālam par gadu būs lielāks pieaugums, tā tad varam jau paredzēt, ka beigu kapitāls būs vispār lielāks, ja kapitālizācija notiek vairāk reizes gadā nekā tad, ja augļus kapitālizē tikai vienreiz gadā, protams, paturot visus pārējos nosacījumus tos pašus.

Piemēram, ja Ls 1 pie 6% un ar vienreizēju kapitālizāciju gadā, pārvēršas gada laikā par Ls 1,06, tad ar divreizēju kapitālizāciju Ls 1 pārvērtīsies par $\underbrace{1+0{,}03}_{\text{Kap. I pusg. beig.}}+\underbrace{1{,}03\,.\,0{,}03}_{\text{Augļi par II pusg.}}=1{,}03^2=1{,}0609$ (lat.).

Citiem vārdiem beigu kapitāls būtu tik pat liels, kā ar vienreizēju kapitālizāciju, bet tikai pie 6,09 lielas procentu likmes.

Augšējā piemērā beigu kapitāls, ja kapitālizācija būtu vienreiz gadā, iznāktu

$K_6=$ Ls $1500\,.\,1{,}06^6=$ Ls $1500\,.\,1{,}41851911=$ Ls $2127{,}78$;

ar pusgada kapitālizāciju dabūjām $K_6=$ Ls $2138{,}64$.

3. Procentu likmi, kas proporcionāla ar laiku, sauc par **relatīvo procentu likmi**. Varētu jautājumu uzstādīt ari citādi: 1) kādai jābūt procentu gada likmei, lai ar vienreizēju kapitālizāciju dabūtu to pašu beigu kapitālu, ko ar vairākreizēju kapitālizāciju gadā? 2) kādai jābūt kapitālizācijas perioda procentu likmei, lai ar vairākreizēju kapitālizāciju gadā dabūtu to pašu beigu kapitālu, ko ar vienreizēju kapitālizāciju gadā?

Piem., ar divreizēju kapitālizāciju pie 6% dabūjam gada laikā no Ls 1 uzkrāto kapitālu Ls 1,0609; to pašu dabūtu ar vienreizēju kapitālizāciju, bet pie 6,09% lielas gada likmes; tā tad 6,09% būtu **ekvivalentā** vai **konformā** procentu gada likme, kas atbilstu 3% pusgada likmei.

⊙ Vispār, par **ekvivalento** vai **konformo gada procentu likmi** sauc tādu likmi, kas dod to pašu beigu kapitālu, ar vienreizēju kapitālizāciju, kuŗu dotu daudzkārtējā kapitālizācija, un par **ekvivalento** vai **konformo kapitālizācijas perioda procentu likmi** sauc tādu likmi, kas dod ar vairākkārtēju kapitālizāciju to pašu beigu kapitālu, kuŗu dotu vienreizēja gada kapitālizācija.

Konformās procentu likmes var aprēķināt šādā veidā. Ja apzīmēsim gada procentu likmi ar p, kapitālizācijas perioda likmi ar p_1 un ja gadā ir m kapitālizācijas periodu, tad Ls 1 gada laikā ar vienreizējo kapitālizāciju pārvērtīsies sumā $1+\frac{p}{100}$ un ar vairākkārtēju kapitālizāciju summā $\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^m$; ja gribam, lai abas summas būtu vienlīdzīgas, tad

$$1+\frac{p}{100}=\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^m \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(4)}$$

Šī sakarība pēc dotā p_1 un m ļauj atrast p un pēc dotā p un m atrast p_1.

Tiešām, $\frac{p}{100}=\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^m-1$ un

$$p=100\left[\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^m-1\right].$$

Piemēram, ja $p_1=1$ un kapitālizācija notiek četrreiz gadā, tad konformais gada procents ir

$$p=100\,(1{,}01^4-1)=100\,.\,(1{,}04060401-1)=4{,}060401$$

Tā tad vienalga, vai kādu kapitālu kapitālizē ar 1% ik gada ceturkšņus vai ar 4,0604% ik gadus — uzkrātais kapitāls būs viens un tas pats.

Līdzīgā kārtā atrastas konformās gada procentu likmes, kas ievietotas sekojošā tabulā:

Relatīvā gada procentu likme	Konformā gada proc. likme, ja kapitālizē			
	ik gadus ($m=1$)	ik pusgadus ($m=2$)	ik pēc 3 mēn. ($m=4$)	ik mēnešus $m=12$
3%	3,—	3,0225	3,0339	3,0416
3½%	3,5	3,5306	3,5462	3,5567
4%	4,—	4,0400	4,0604	4,0742
4½%	4,5	4,5506	4,5765	4,5940

Šī tabula rāda, ka, piem., kapitālizējot ik mēnešus ar ⅓% t. i. 4 procentu divpadsmito daļu, dabūsim to pašu rezultātu, ko kapitālizējot vienreiz gadā ar 4,0742%. Tiešām, Ls 1000 ar vienreizēju kapitālizāciju pēc gada dos Ls $10000 . 1{,}040742 =$ $= $Ls $10407{,}42$ un Ls 1000 ar kapitālizāciju ik mēnešus, bet $^{1}/_{3}\%$ mēnesī, dos Ls $10000 . 1{,}03333333^{12} =$ Ls $10000 . 1{,}04074154 =$ Ls $10407{,}42$. Abos gadījumos beigu kapitāli vienādi.

Otrādi, ja pēc dotā p, t. i. procentu gada likmes jāatrod p_1, tad tā pati sakarība dod

$$1 + \frac{p_1}{100} = \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} \quad \text{un}$$

$$p_1 = 100\left[\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right]$$

Piem., ja $m = 2$ un $p = 4$, tad $p_1 = 100\left(\sqrt{1{,}04} - 1\right) =$ $= 100 . (1{,}019804 - 1) = 100 . 0{,}019804 = 1{,}9804$; tā tad, lai dabūtu to pašu beigu kapitālu, ko dod vienreizēja kapitālizācija pie 4% gadā, ik semestrus jākapitālizē ar $1{,}9804\%$. Līdz ar to $1{,}9804$ ir konformā semestra procentu likme, kas atbilst 4% lielai gada likmei.

Protams, izteiksmi $\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}}$ vieglāk aprēķināt ar logaritmu palīdzību, ko parasti tā ari dara.

P i e m ē r s. Aprēķināt ar 5% gada likmi konformo mēneša procentu likmi.

$$p_1 = 100\left(\sqrt[12]{1{,}05} - 1\right); \quad \sqrt[12]{1{,}05} = z;$$

$$\log z = \frac{1}{12} \log 1{,}05 = \frac{1}{12} . 0{,}0211893 =$$

$$\begin{array}{llll}
= 0{,}0017658 & & & d = 433 \\
\;\;\underline{7337} & . \; . \; . \; . & 10040 & \\
\;\;\;\;321 & & & \\
\;\;\;\;\underline{304} & & 7 & \\
\;\;\;\;\;\;170 & & 4 & \\
\hline
 & & 1004074 &
\end{array}$$

$$p_1 = 100 . (1{,}004074 - 1) = 100 . 0{,}004074 = 0{,}4074.$$

Relatīvā procentu likme būtu $\frac{5}{12}\%$, bet konformā ir $0{,}4074 \approx \frac{2}{5}$, t. i. par apm. $\frac{1}{60}\%$ mazāka nekā relatīvā.

Sekojošā tabulā dotas dažas konformās kapitālizācijas periodu likmes.

Gada proc. likme	Konformā procentu likme par		
	pusgadu	ceturksni	mēnesi
3%	1,4889	0,7417	0,2466
3,5%	1,7350	0,8637	0,2871
4%	1,9804	0,9853	0,3274
4,5%	2,2252	1,1065	0,3675

4. Sakarību

$$1+\frac{p}{100}=\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^m$$

varam uzrakstīt citādi, ja apzīmēsim $1+\frac{p}{100}$, kā jau parasts, ar r un $1+\frac{p_1}{100}$ ar r_1; tad

$$r=r_1^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4_1).$$

Tā tad, ja esam ņēmuši vajadzīgo konformo procentu likmi, tad r_1^m dod tik pat daudz kā r. Attiecīgais konformais r_1 tā tad atrodams no sakarības $r_1=\sqrt[m]{r}=r^{\frac{1}{m}}$.

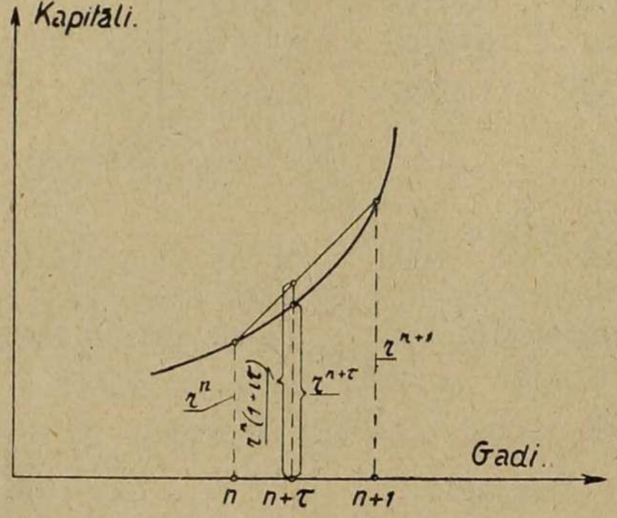
17. Pamatformulas paplašināšana.

1. Pēc atrastās pamatformulas (2) varam aprēķināt uzkrāto kapitālu par veselu gadu skaitu. Ja kapitāla augšanas laiks izteicas gados un mēnešos vai gados un dienās, tad pamatformula jāpaplašina, lai varētu atrast beigu kapitālu ari šādos gadījumos.

Pieņemsim, ka augšanas laiks ir n gadi un t dienas; ja gadā rēķina 360 dienas, tad $\frac{t}{360}=\tau$ ir attiecīgā gada daļa, un tā tad viss augšanas laiks izteiksies kā $t+\tau$. Vieglākai τ aprēķināšanai sastāda tabulu: 1, 2, 3, . . . , t dienas dod jau izteiktas kā gada daļas decimāldaļās. Šāda tabula ievietota grāmatas beigās.

Par n gadiem uzkrāto kapitālu protam aprēķināt; viss jautājums grozās ap to, kā aprēķināt uzkrāto kapitālu par gada daļu. Te var būt divi principi: 1) var pieņemt, ka kapitāls gada laikā aug tā, it kā to kapitālizētu ikdienas ar attiecīgo konformo dienas procenta likmi, un 2) var par gada daļu aprēķināt vienkāršos augļus.

Pirmā gadījumā kapitāla pieaugums gada laikā nebūs proporcionāls ar dienu skaitu, ko mums rāda jau uzkrātā kapitāla grafika (1. zīm.) vai ari kapitāla augšanas līkne pēc šī likuma starp n un $n+1$ gadu (4. zīm.): pieaugums uz gada beigām iet straujāk nekā no sākuma. Otrā gadījumā pieaugums būs proporcionāls ar dienu skaitu (taisne 4. zīm.) pēc vispārējās hipotezes par vienkāršiem augļiem (sal. **11**,3).



4. zīm.

Izejot no pirmā principa, t. i., ka kapitālizācija notiek ikdienas ar attiecīgo konformo procentu likmi, dabūsim, ka konformā dienas procentu likme būs atrodama no sakarības (sal. **16**,4)

$$r_1^{360}=r;$$

tā kā pati procentu likme mums nav vajadzīga, bet gan attiecīgais pieauguma reizinātājs, tad dabūjam, ka

$$r_1=r^{\frac{1}{360}},$$

par t dienām pieauguma reizinātājs būs $\left(r^{\frac{1}{360}}\right)^t=r^{\frac{t}{360}}=r^{\tau}$; tāpēc $(n+\tau)$ gados uzkrātais kapitāls izteiksies tā:

$$K_{n+\tau}=\underbrace{K_0\,r^n}_{\substack{n\text{ gados}\\ \text{uzkrātais}\\ \text{kapitāls}}}\,.\,\underbrace{r^{\tau}}_{\substack{t\text{ dienās}\\ \text{no Ls 1 uz-}\\ \text{krātais kapitāls}}}=K_0 r^{n+\tau}$$

jo r^{τ} dod uzkrāto t dienās kapitālu no Ls 1, bet no $K_0 r^n$ par t dienām uzkrāsies $K_0 r^n$ reizes lielāks kapitāls. Tā tad

$$\mathcal{K}_{n+\tau}=\mathcal{K}_0 r^{n+\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2_2).$$

Aprēķinus pēc šīs formulas izpilda ar logaritmu tabulu palīdzību.

Piemērs. Aprēķināt, kāds kapitāls sakrāsies 6 g. 36 dienu laikā no kapitāla Ls 1000.—, ja tas atdots uz 4% un nes augļu augļus.

Pēc nule dabūtās formulas, kurā $K_0=1000$, $n=6$, $\tau=\frac{36}{360}=0{,}1$, redzam, ka $K_{6,1}=\text{Ls } 1000 \,.\, 104^{6,1}$

$$\log K_{6,1} = \begin{array}{|l} \log 1000 \quad = 3{,}0000000 \\ 6{,}1 \log 1{,}04 = 0{,}1039031 \\ \hline \qquad\qquad\quad 3{,}1039031 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}0170333 \\ 6{,}1 \\ \hline 170333 \\ 1021998 \\ \hline 0{,}1039031 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & d=342 \\ 3{,}1039031 & \\ 8721 & \ldots\ldots 12702 \\ \hline 310 & \\ 308 & \ldots\ldots\ldots 9 \end{array}$$

$$K_{6,1} = \textbf{Ls 1270,29.}$$

2. Ja pieņem, ka pieaugums gada laikā iet proporcionāli ar dienu skaitu, citiem vārdiem, par gada daļu aprēķina vienkāršos augļus, tad

$K_{n+\tau}=K_0 r^n + K_0 r^n i\tau = K_0 r^n(1+i\tau)$; tā tad pēc šī principa

$$K_{n+\tau}=K_0 r^n(1+i\tau) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2_3).$$

Piemērs. Aprēķināt iepriekšējā piemēra uzkrāto kapitālu, rēķinot par gada daļa vienkāršos augļus.

$$K_{6,1}=\text{Ls } 1000 \,.\, 1{,}04^6(1+0{,}04 \,.\, 0{,}1)=\text{Ls } 1000 \,.\, 1{,}26531902 \,.\, 1{,}004 =$$
$$= \textbf{Ls 1270,38.}$$

$$\begin{array}{r} 1265{,}31902 \\ 4001 \\ \hline 12653190 \\ 50612 \\ \hline 1270{,}3802 \end{array}$$

Redzam, ka ar šo paņēmienu aprēķinātais beigu kapitāls ir mazliet lielāks nekā dabūtais ar pirmo paņēmienu. Tam tā ari jābūt, jo kapitāla pieauguma attēls pēc viena un otra likuma starp n un $n+1$ gadu (4. zīm.) rāda, ka pēc otrā likuma pieaugums iet vienmērīgi un it īpaši pret gada vidu būs lielāks nekā pieaugums pēc pirmā līkuma; abi pieaugumi kļūst vienlīdzīgi gada sākumā un beigās.

To var parādīt ari analitiski, ja pēc paplašinātās Newton'a binoma formulas izvirzīsim $(1+i)^{\tau}$ rindā; tad

$$(1+i)^{\tau}=1+\tau i+\frac{\tau(\tau-1)}{1.2}i^2+\frac{\tau(\tau-1)(\tau-2)}{1.2.3}i^3+\ldots\ldots$$

tā tad, ja $\tau>1$, tad vienlīdzības lābā pusē visi locekļi pozitīvi; atmetot tos, pamazināsim labo pusi, un tāpēc $(1+i)^{\tau}>1+i\tau$; ja turpretim $\tau<1$, tad trešais loceklis $\frac{\tau(\tau-1)}{1.2}i^2$ ir negatīvs, jo $\tau<1$ un $\tau-1<0$; ceturtais loceklis būs atkal pozitīvs, jo tanī ieies divi negatīvi reizinātāji, piektais atkal negatīvs u. t. t.; bet ceturtais loceklis būs pēc absolūtās nozīmes mazāks par trešo, jo reizinātāji, kas nāk katram jaunam loceklim klāt, ir īstās daļas. Tāpēc trešā un ceturtā locekļa starpība ir negatīvs skaitlis, tāpat piektā un sestā u. t. t. Tā tad paturot labā pusē tikai pirmos divus locekļus, līdz ar to atmetam rindas **negatīvo** daļu, tā tad palielinām rindu; tāpēc, ja $\tau<1$, tad

$$(1+i)^{\tau}<1+\tau i$$

t. i. kapitāls, kas uzkrājas par kādu **gada daļu** pēc augļu augļu likuma — būs mazāks par to kapitālu, kas uzkrājas pēc vienkāršo augļu likuma.

Tā tad otrais aprēķinu paņēmiens (par gada daļu vienkāršie augļi) izdevīgāks kreditoram, kaut gan starpība nav liela: pat par pusgadu, kad starpība vislielākā, tā nepārsniedz augļus par 1,8 dienu, ja rēķina 4% un par 2,7 dienas, ja rēķina 6%.*)

3. Beigu kapitāla aprēķināšanai, pieņemot, ka kapitāla pieaugums proporcionāls ar laiku, var lietot ari lineārās interpolācijas paņēmienu, kas dos to pašu rezultātu, kā aprēķinot vienkāršos augļus, jo abos gadījumos pieaugums notiek pēc tā paša likuma (proporcionālitātes likuma).

Piemērs. Aprēķināt iepriekšēja piemērā minēto beigu kapitālu ar lineārās interpolācijas palīdzību.

Pēc Newton'a interpolācijas formulas

$$r^{n+\tau}=r^n+\tau(r^{n+1}-r^n)=r^n+\tau.d=r^n+\delta$$

*) Politische Arithmetik. Dr. Emil Foerster. Berlin 1924. 25. lapp.

Šinī gadījumā $1,04^{6,1}=1,04^6+0,1d$, kur $d=1,04^7-1,04^6$

7g	1,31593178	1,26531902 . . .	6 g . . .	$1,04^6$
6g	1,26531902	0,00506128 . . .	0,1g . .	δ
1g	0,05061276	1,27038030 . . .	6,1g . .	$1,04^6+\delta$
0,1	0,00506128	$K_{6,1}$= Ls 1000 . 1,270382 = **Ls 1270,38**		

Kļūda ε mazāka par $1,04^7-\frac{1,04^6+1,04^8}{2}=1,31593178-$

$-1,31694403$; $\varepsilon<-0,001$; tā tad skaitlis 1,27033803 dabūts ar kļūdu, kas mazāka par 0,001 palielinājumā; reizinot ar Ls 1000, šo kļūdas robežu palielinām, tā tad šinī gadījumā tā nepārsniegs viena vieninieka, t. i. viena lata palielinājumā. Kā redzējām, kļūda īstenībā nepārsniedz 9 sant. palielinājumā.

Ka lineārā interpolācija dos to pašu rezultātu, ko vienkāršie augļi par gada daļu, varam redzēt no lineārās interpolācijas formulas, ko var viegli pārveidot vienkāršo augļu formulā.

Tiešām, $r^{n+\tau}=r^n+\tau(r^{n+1}-r^n)=r^n+\tau r^{n+1}-\tau r^n=$

$$=r^n[1+\tau r-\tau]=r^n[1+\tau(r-1)]=r^n(1+\tau i).$$

4. Ja interpolētu ar otrām diferencēm, t. i. Newton'a interpolācijas formulā paturētu 3 locekļus, tad rezultāts būtu tuvāks tam, ko dabūjām ar logaritmu palīdzību.

Tādā gadījumā $f(n)=1,04^n$ un $n_0=6$, $n_1=7$ un $n_2=8$;

$$f(6,1)=f(6)+\frac{6,1-6}{1}\,.\,\Delta f(6)+\frac{(6,1-6)(6,1-7)}{1\,.\,2\,.\,1^2}\,.\,\Delta^2 f(6)=$$

$$=f(6)+0,1\,\Delta f(6)-\frac{0,9}{2}\Delta^2 f(6);$$

n	$f(n)$	$\Delta f(n)$	$\Delta^2 f(n)$
6	1,2653 1902		
		0,0506 1276	
7	1,3159 3178		0,0020 2451
		0,0526 3727	
8	1,3685 6905		

$f(6,1)$ | $f(6)=$ 1,26531902

$0,1\Delta f(6)=$ 0,00506128

$\frac{-0,9\,.\,0,00202451}{2}=-0,00009110=\frac{\bar{1},99990890}{}$

1,27028920

$K_{n+\tau}=Ls$ 1000 . 1,27028920 = Ls 1270,29.

Redzam, ka kļūda nepārsniedz 1 sant.

18. Sākuma kapitāla aprēķināšana.

1. Redzējām, ka beigu kapitālu var aprēķināt ar vienu no formulām:

$$K_n = K_o r^n \dots (2)$$

$$K_n = K_o\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn} \dots (2_1)$$

$$K_{n+\tau} = K_o r^{n+\tau} \dots (2_2)$$

$$K_{n+\tau} = K_o r^n (1 + \tau i) \dots (2_3).$$

Ikvienā no šīm formulām ieiet četri lielumi: beigu kapitāls K_n, sākuma kapitāls K_0, kapitāla apgrozības laiks n (vai mn vai $n+\tau$) un pieauguma reizinātājs r (vai procentu likme p). Zinot trīs no šiem lielumiem, varēsim aprēķināt ceturto.

Ja jāaprēķina sākuma kapitāls pēc dotā beigu kapitāla, apgrozības laika un procentu likmes, tad no iepriekšējām sakarībām viegli dabūjam:

$$K_0 = \frac{K_n}{r^n} \dots (5)$$

$$K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}} \dots (5_1)$$

$$K_0 = \frac{K_{n+\tau}}{r^{n+\tau}} \dots (5_2)$$

$$K_0 = \frac{K_{n+\tau}}{r^n(1+\tau i)} \dots (5_3).$$

Piegriezīsimies vispirms formulai $K_0 = \frac{K_n}{r^n}$; redzam, ka sākuma kapitāla aprēķināšanai jādala dotais beigu kapitāls ar attiecīgo pieauguma reizinātāju, kuru varam dabūt no finanču tabulām.

P i e m ē r s. Aprēķināt, cik liels kapitāls jānogulda uz 10 gadiem, lai sakrātos Ls 10 000, ja par noguldījumu maksā 4,5% un aprēķina augļu augļus.

Pēc (5) formulas

$$K_0 = \frac{10\,000}{1{,}045^{10}} = \frac{10\,000}{1{,}55296942}$$

novērtējot aptuvumis, redzam, ka 10 000 jādala ar apm. $\frac{3}{2}$, tā tad meklējamais kapitāls būs apm. $\frac{2}{3} \cdot 10\,000 \approx 6\,700$; izpildot tiešām, pēc saīsinātās dalīšanas paņēmiena, dalīšanu un ņemot vērā, ka dalījumā jābūt 6 zīmīgiem cipariem, no kuŗiem 4 veselajā daļā atrodam

```
100000000 | 1,5529694
 93178164 |----------
--------- | 6439,28
  6821836 |
  6211876
  -------
   609960
   465888
   ------
   144112
   139761
   ------
     4351
     3104
     ----
     1247
     1240
     ----
```

Tā tad K_n = Ls 6439,28.

Tomēr dalīšanu nevar izpildīt tik ātri un ērti kā reizināšanu. Tāpēc būtu vēlams dalītāju r^n izteikt kā reizinātāju. To var izdarīt, ja sastāda attiecīgas tabulas: atrod $\frac{1}{r^n}$ izteiksmi decimāldaļas veida un sakārto tabulā tāpat kā r^n nozīmes.

Apzīmēsim $\frac{1}{r}$ ar v; reizinātāju v ar kuŗu jāreizina beigu kapitāls sākuma kapitāla atrašanai, **sauc par diskonta reizinātāju,** jo reizinot ar to mēs kapitālu it kā diskontējam, t. i., atrodam viņa vērtību pirms tā laika, kad kapitāla vērtība būs tāda, kāda tā dota. Piem., iepriekšējo piemēru varam iztulkot tā, ka jautājam, kāda ir kapitāla Ls 10 000.— vērtība pirms 10 gadiem, ja par kapitālu rēķina augļu augļus pēc 4,5%. Atradām, ka šī vērtība ir Ls 6439,28.

Sakarā ar to pieauguma reizinātāju r sauc, kā minēts, par *prolongācijas reizinātāju*, jo reizinot ar to mēs it kā prolongējam, pagarinām kapitāla tagadējo vērtību uz zināmu laiku un tā tad meklējam kapitāla vērtību *pēc* kāda laika. Tā, piem., ja jautātu, kāda ir kapitāla Ls 6439,28 vērtība pēc

10 gadiem, ja par kapitālu rēķina augļu augļus pēc 4,5%, tad atrastu, ka kapitāla vērtība ir Ls $6439{,}28 . 1{,}045^{10} =$ Ls 10 000.

Šinī nolūkā — atrast kapitālu vai citas kādas naudas vienībās izteiktas vērtības nozīmi pēc zināma laika un pirms zināma laika — mēs bieži lietosim prolongācijas un diskonta reizinātājus:

kapitāla tagadējā vērtība K; vērtība pēc n gadiem būs Kr^n

„ „ „ „ „ pirms „ „ „ $\frac{K}{r^n} = Kv^n$.

Protams, tas pats zīmējas ari uz reizinātājiem $\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}$, $r^{n+\tau}$ un $r^n(1+\tau i)$.

2. Kā nu vieglāk sastādīt diskonta reizinātāja v^n tabulas? Ja ņemam vērā, ka $r = \frac{1}{v}$ un tā tad $v = \frac{1}{r}$, tad piem., $v^{49} = \frac{v^{50}}{v} = v^{50} . r$; $v^{48} = \frac{v^{49}}{v} = v^{49} . r$ u. t. t., t. i., zinot kāda reizinātāja v^{50} nozīmi, varam atrast pakāpeniski v^{49}, v^{48}, . . . , v, reizinot ar attiecīgo r, tā tad līdzīgi tam, kā sastāda pieauguma reizinātāju tabulas, tikai jāsāk no otra gala — no augstākā gadu skaita, kāds ir tabulās. Tā tad tieši ar dalīšanu jāatrod kāds $v^n = \frac{1}{r^n}$, un tad v^{n-1}, v^{n-2}, . . ., v atradīsim ar reizināšanu, citiem vārdiem, ar attiecīgā procenta pieskaitīšanu.

Piemērs. Sastādīt tabulu v^n nozīmēm, ja $p = 4\%$ un n iet no 1 līdz 50.

Aprēķinām vispirms $v^{50} = \frac{1}{r^{50}} = \frac{1}{1{,}04^{50}} = \frac{1}{7{,}10668335}$; atrodam, ka $\frac{1}{7{,}10668335} = 0{,}14071262$;

$$
\begin{array}{rl}
v^{50} = 0{,}14071262 & \\
\underline{0{,}00562850} & \mid 4\% \text{ no } 0{,}14071262 \\
v^{49} = 0{,}14634112 & \\
\underline{0{,}00585364} & \mid 4\% \text{ no } 0{,}14634112 \\
v^{48} = 0{,}15219476 & \\
\text{u. t. t.} & \\
v^{2} = 0{,}92455621 & \\
\underline{0{,}03698225} & \mid 4\% \text{ no } 0{,}92455621 \\
v = 0{,}96153846 &
\end{array}
$$

Tāpat aprēķinām diskonta reizinātājus citām procentu likmēm un sakārtojam tos diskonta reizinātāju tabulās.

Ja ar šo tabulu palīdzību gribētu aprēķināt kapitāla Ls 10 000 vērtību pirms 10 gadiem, kad kapitāls nes augļu augļus un par to rēķina 4,5%, tad $K_0 =$ Ls $10000 \,.\, v^{10} =$ Ls $10\,000 \,.\, 0{,}64392768 =$ $=$ Ls 6439,28; dabūjam to pašu rezultātu kā Ls 10 000 dalot ar $1{,}045^{10}$.

3. Kā jau redzējām, formula $K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}$ un līdz ar to formula $K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}}$ aprēķinu ziņā ne ar ko neatšķiras no pirmās; jāņem vērā tikai relatīvā procentu likme un attiecīgais kapitālizācijas periodu skaits.

P i e m ē r s. Aprēķināt, kāds kapitāls, atdots uz 4% un kapitālizēts ik gada ceturkšņus, pārvērtīsies Ls 5000 lielā kapitālā 8 gadu laikā.

Te $K_0 =$ Ls $\frac{5000}{1{,}01^{32}} =$ Ls $5000 \; v^{32} =$ Ls $5000 \,.\, 0{,}72730411 =$ $=$ Ls 3636,52.

Trešā formula $K_0 = \frac{K_n}{r^{n+\tau}}$ ļauj aprēķināt K_0 vai nu ar logaritmu tabulu vai finanču tabulu (interpolācijas) palīdzību.

P i e m ē r s. Kāda ir kapitāla tagadējā vērtība, ja pēc 15 g. 270 dienām tas ir Ls 43560 liels, pie kam aprēķina augļu augļus pēc 4%.

Tā kā 270 d. $= \frac{270}{360}$ g. $= 0{,}75$ g., tad

$K_0 = \frac{43560}{1{,}04^{15{,}75}}$ un $\log K_0 =$

$\log 43560 =$ 1,04 . . $4{,}6390879$

$-15{,}75 \log \cancel{15{,}75} = -0{,}2682751$

$\log K_0 = \quad 4{,}3708128$

$\log 1{,}04 = 0{,}01703334$

5751		
170333400	3708128	$d = 184$
85166700	8091	23486
11923338	37	2
851665		
0,2682751		

$K_0 =$ Ls 23486,2.

Tā tad kapitāla tagadējā vērtība ir Ls 23486,2.

Ja to pašu piemēru atrisināsim pēc finanču tabulām ar lineārās interpolācijas palīdzību, pēc kuras $v^{n+\tau}=v^n+\tau\,(v^{n+1}-v^n)$ jeb citādi $v^{n+\tau}=v^n[1+\tau v-\tau]=v^n[1+\tau(v-1)]$, tad

$$K_0=43560\,.\,v^{15,75}$$

$$v^{15,75}=v^{15}+0,75(v^{16}-v^{15})=0,55526450-0,75\,.\,0,02135632=$$
$$=0,55526450-0,01601724=0,53924726$$

$$\begin{array}{r} 0,02135632 \\ 57 \\ \hline 149494240 \\ 10678160 \\ \hline 0,01601724 \end{array}$$

proporcionālo daļu par 0,75 g. nākas atņemt no v^{15}, jo ar n pieaugumu v pamazinās.

$$\begin{array}{r} 0,53924726 \\ 06534 \\ \hline 215698904 \\ 16177416 \\ 2696235 \\ 323544 \\ \hline 2348961 \end{array}$$

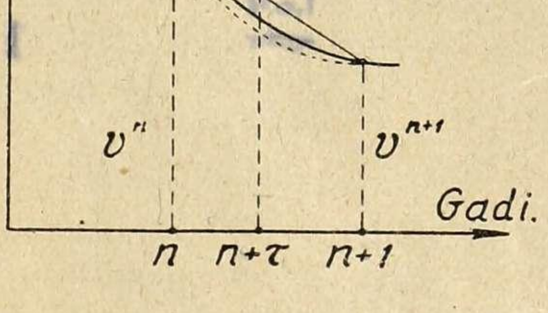
$$K_0=\text{Ls } 43560.0,53924726=\text{Ls } 23489,61$$

Redzam diezgan lielu starpību ar iepriekšējo rezultātu, kas dabūts ar logaritmu tabulu palīdzību.

Novērtējot kļūdu, dabūsim, ka kļūda ε

$$\varepsilon<v^{16}-\frac{v^{15}+v^{17}}{2}=0,53390818-$$
$$-\frac{0,55526450+0,51337325}{2}=0,53390818-0,53431887=$$
$$=-0,00041609\,;$$

tā tad kļūda nepārsniedz p a l i e l i n ā j u m ā 0,0005; reizinot ar $43560\approx50000$, palielinām kļūdu apm. 50000 reizes, t. i. kļūda aprēķinātā kapitālā var sniegties līdz Ls 25 palielinājumā. Īstenībā, kā redzam, tā nepārsniedz Ls 4. Ņemot vērā vēl otru diferenci, dabūtu mazāku starpību. Ka te dabūsim lielāku kapitālu ar interpolācijas metodi pēc finanču tabulām nekā ar logaritmisko, rāda 5. zīm. grafika, kur līkne dod funkcijas v^n attēlu (palielinātā izliekumā) starp n un $n+1$ gadu



5. zīm.

un taisne — lineārās interpolācijas resp. lineārās funkcijas no τ attēlu, proti $f(\tau)=v^{n+\tau}=v^n[1+\tau(v-1)]$.

4. Izejot no formulas $K_0=\frac{K_n}{r^n(1+\tau i)}=\frac{K_n v^n}{1+\tau i}=K_n \cdot \frac{v^n}{1+\tau i}$, varam viegli aprēķināt sākuma kapitālu K_0.

Ņemsim jau aplūkoto piemēru.

$$K_0=\text{Ls } 43560 \cdot \frac{v^{15}}{1+0{,}75 \cdot 0{,}04}=\text{Ls } 43560 \cdot \frac{0{,}55526450}{1{,}03}=$$
$$=\text{Ls } 43560 \cdot 0{,}5390917=\text{Ls } 23482{,}83.$$

Redzam, ka te rodas citāds rezultāts nekā iepriekšējos gadījumos: dabūtais sākuma kapitāls mazāks par dabūto ar logaritmēšanas vai no finanču tabulām ar lineārās interpolācijas metodi. Tā tam ari jābūt, jo $K_0=\frac{K_n v^n}{1+\tau i}$ kā τ funkcija vairs nav lineārā funkcija (τ atrodas saucējā), bet grafiski attēlota dod hiperboli (5. zīm. punktētā līkne); tāpēc šinī gadījumā lineārās interpolācijas un vienkāršo augļu paņēmieni vairs nedod viena un tā paša rezultāta, un beidzamais gadījums dod mazāku kapitālu, kā to redzam 5. zīm.

Starpība starp rezultātiem, ko dod lineārā interpolācija pēc finanču tabulām un vienkāršo augļu paņēmiens, nav liela, kā to rāda abu funkciju salīdzinājums.

Lineārā interpolācija:

$$v^{n+\tau}=v^n\,[1+\tau(v-1)]=v^n\left[1+\tau\left(\frac{1}{r}-1\right)\right]=v^n\left[1-\frac{\tau}{r}\left(r-1\right)\right]=$$
$$=v^n\,(1-\tau i v).$$

Vienkāršo augļu paņēmiens: $v^{n+\tau}=\frac{v^n}{1+\tau i}$; izpildot dalīšanu $1:(1+\tau i)$, atrodam, ka $\frac{1}{1+\tau i}=1-\tau i+(\tau i)^2-(\tau i)^3+(\tau i)^4-\ldots$ tā tad $v^{n+\tau}=v^n[1-\tau i+(\tau i)^2-(\tau i)^3+\ldots]$; tā kā $(\tau i)^2, (\tau i)^3, \ldots$ ir ļoti mazi locekļi, tad varam tos atmest bez jūtamas kļūdas un tad $v^{n+\tau}=v^n(1-\tau i)$.

Salīdzinot nule dabūto rezultātu $v^n(1-\tau i)$ ar iepriekšējo $v^n(1-\tau i v)$, redzam, ka starpība ir iekavu otrā loceklī, bet visai maza, jo v ir lielums, kas diezgan tuvs vienam (salīdz. finanču tabulās v nozīmes dažādām procentu likmēm), bet arvienu mazāks par vienu; līdz ar to $v^n(1-\tau i v)>v^n(1-\tau i)$, jo $\tau i v<\tau i$.

5. Pēc formulas $K_0 = K_n \iota^n$ jau 1584. gadā holandietis Simons Stevīns sastādījis tabulas kapitāla vienības tagadējai vērtībai, ja kapitāls maksājams pēc 1, 2, . . ., 30 gadiem pie 1%, 2%, . . ., 16%.

Prolongācijas un diskonta reizinātāji atļauj salīdzināt kapitālus, kuŗu vērtības dotas dažādos laikos, reducējot uz kaut kādu vienu laika momentu.

Piem., ja kāda vērtība pēc 10 gadiem un pie 5% izteicās kā Ls 8000 un cita vērtība pirms 5 gadiem un pie 4% izteicās kā Ls 4000, tad abu šo kapitālu vērtība tagadējā brīdī attiecīgi ir Ls 8000. v^{10}= Ls 8000 . 0,61391325= Ls 4911,31 un Ls 4000 . 1,21665290= Ls 4866,61.

19. Procentu likmes aprēķināšana.

1. No (2) formulas dabūjam, ka

$$r^n = \frac{K_n}{K_0} \quad . \; . \; . \; (6) \quad \text{jeb} \quad r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad . \; . \; . \; (6_1)$$

Tā tad zinot K_0, K_n un n varam aprēķināt r un līdz ar to procentu likmi.

Aprēķinu paņēmieni: 1) logaritmiskais; 2) ar finanču tabulām.

Piemērs. Kapitāls Ls 1500, atdots uz augļu augļiem, 9 gadu laikā pārvēršas kapitālā, Ls 2181,60 lielā. Aprēķināt procentu likmi.

1) Logaritmiskais paņēmiens.

Pēc (6_1) formulas

$$r = \sqrt[9]{\frac{2181{,}60}{1500}}\,; \quad \log r = \frac{1}{9} \qquad \begin{array}{r} \log 2181{,}60 = 3{,}3387751 \\ -\log 1500 = -3{,}1760913 \end{array}$$

$$\log r = \frac{1}{9} \, . \, 0{,}1626838 =$$

$$= 0{,}0180760 \; . \; . \; . \; 10425$$

$r = 1{,}0425$; $p = 4{,}25$.

2) Ar finanču tabulām.

Pēc (6) formulas $r^9 = \frac{2181{,}60}{1500} = 1{,}4544$.

Raugāmies pieauguma reizinātāja tabulās, kādas procentu likmes 9 gadu rindā vistuvāk pieiet 1,4544; redzam, ka 1,4544 vistūvāk pieiet reizinātājam 1,45440237, kam atbilst procentu likme $4^1/_4$. Tā tad

$$p=4{,}25\%.$$

2. Ja r^n izteiksme iekrīt divu reizinātāju starpā, tad procentu likmi atrod ar interpolācijas palīdzību.

P i e m ē r s. Aprēķināt procentu likmi, ja kapitāls Ls 6000, atdots uz augļu augļiem, 12 gados pārvēršas kapitālā, Ls 9687,17 lielā.

$$r^{12}=\frac{9687{,}17}{6000}=1{,}61452833\,;$$

pieauguma reizinātāju tabulās 12 gadu rindā neviena pavisam tuva skaitļa dabūtam skaitlim 1,61452883 nav, bet šis skaitlis atrodas skaitļu 1,60103222 un 1,62427729 starpā, tā tad meklējamā procentu likme ir 4% un $4^1/_8\%$ starpā.

Proporcionalitates likums (sal. **15**,3) dod

$$\frac{p-4}{\frac{1}{8}}=\frac{1{,}61452833-1{,}60103222}{1{,}62427729-1{,}60103222}\,;\quad \text{no kurienes}$$

$$p=4+\frac{1}{8}\cdot\frac{0{,}01349611}{0{,}02324507}$$

jeb

$4^1/_8\%$	atbilst	1,62427729	$p\%$	atbilst	1,61452833,
4%	„	1,60103222	4%	„	1,60103222

pieaugumam $^1/_8\%$ atbilst 0,02324507; pieaug. $(p-4)\%$ atbilst

$$0{,}01349611;\ \frac{p-4}{\frac{1}{8}}=\frac{0{,}01349611}{0{,}02324507}\,;$$ izpildīsim dalīšanu, pie kam dalījumā aprobežosimies ar 3 decimālzīmēm.

```
134961 | 23245
117225 | 0,577
------
 17736
 16268
------
  1468
```

$$p=4+\frac{1}{8}\cdot 0{,}577=4+0{,}072=4{,}072.$$

Ar logaritmu palīdzību aprēķināts šis pats piemērs dotu:

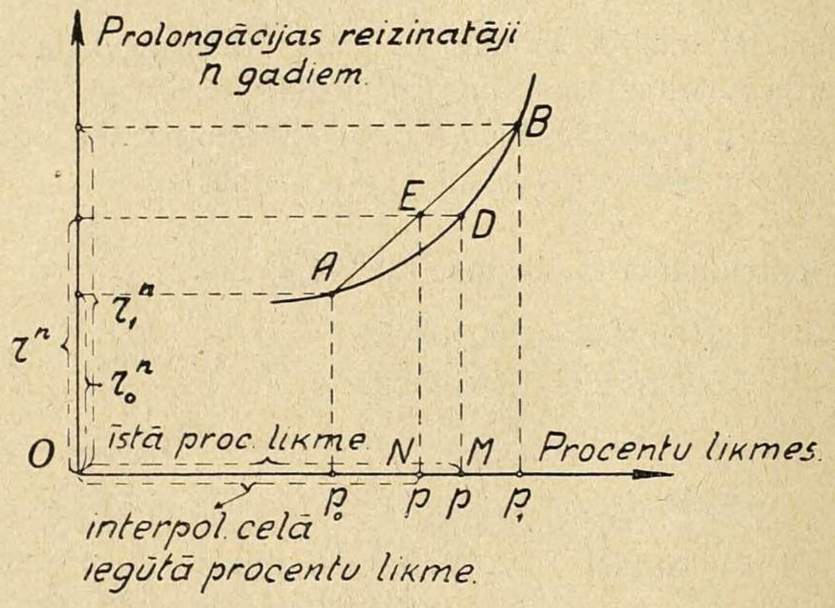
$$\log = \frac{1}{12} \left| \begin{array}{r} \log 9687{,}17 = 3{,}9861970 \\ -\log 6000 = -3{,}7781513 \end{array} \right.$$

$$\log r = \frac{1}{12} \cdot 0{,}2080457 = 0{,}0173371 \;.\;.\;.\; d = 417$$

$$\begin{array}{r} 3256 \;.\;.\;.\; 10407 \\ \hline 115 \;.\;.\;.\;.\;.\; 3 \end{array}$$

$$r = 1{,}04073\,; \quad p = 4{,}073\,\%.$$

Ar logaritmu tabulu palīdzību atradām mazliet lielāku procentu likmi nekā no financu tabulām ar lineāro interpolāciju. Tā tam ari jābūt. Tiešām, attēlojot uz horizontālas ass (6. zīm.)



6. zīm.

procentu likmes un uz vertikalās attiecīgas prolongācijas reizinātāju nozīmes n gadiem, redzam no tabulām, ka funkcija $f(p) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ mainās ne proporcionali ar p pieaugšanu, bet pieaug straujāk nekā p; tāpēc šīs funkcijas attēls ir līkne, bet lineārā interpolācija attēlojas ar taisni. Līknes punkts D atbilst dotajam r^n; šī punkta abscisa M rāda īsto procentu likmi, bet attiecīga punkta E abscisa ON, kur punkts E atrodas uz taisnes, attēlo procentu likmi, ko dabūjām lineārās interpolācijas ceļā.

Nav grūti pārliecināties, ka interpolācijas ceļā dabūtā procentu likme būs vienmēr mazāka par aprēķināto ar logaritmu palīdzību.

Lai dabūtu pareizāku procentu likmi, jāizdara vairakkārtēja interpolācija (sk. 25,5).

3. Ja kapitālizācijas laiks ir lauzts skaitlis, tad logaritmiskais paņēmiens nekādu grūtību nerada, bet finanču tabulu paņēmiens būs sarežģītāks.

P i e m ē r s. Atrast procentu likmi, ja kapitāls Ls 5000, nesdams augļu augļus, 5 g. 6 mēn. laikā pārvērties kapitālā Ls 6380,—.

Formula $K_{n+\tau}=K_0 r^{n+\tau}$ dod, ka

$r^{n+\tau}=\frac{K_{n+\tau}}{K_0}$ jeb šinī gadījumā $r^{5,5}=\frac{6380}{5000}=1,276$;

tagad jāatrod, kādu prolongācijas reizinātāju starpā, kas atbilst 5,5 g., atrodas 1,276.

Pēc lineārās interpolācijas paņēmiena prolongācijas reizinātāji, kas atbilst 5,5 gada izteiksies kā $r^5+\frac{r^6-r^5}{2}=$

$=\frac{2r^5+r^6-r^5}{2}=\frac{r^5+r^6}{2}$;

raugāmies uz r^5 un r^6 pirmo trīs decimālzīmju vidējo skaitli; piem., procentu likmei $4^1/_4$ atbilst $\frac{231+284}{2}=\frac{515}{2}\approx 257$; par maz; likmei $4^3/_8$ atbilst $\frac{239+293}{2}=\frac{532}{2}\approx 266$; tā tad šīs likmes tuvumā būs meklējamā; likmei $4^1/_2$ atbilst $\frac{246+302}{2}=$ $=\frac{548}{2}=274$; likmei $4^5/_8$ atbilst $\frac{254+312}{2}=\frac{566}{2}=283$; tā tad meklējamā likme ir $4^1/_2$ un $4^5/_8$ starpā. Aprēķinām tagad prolongācijas reizinātāju, kas atbilst likmēm $4^1/_2$ un $4^5/_8$ par laiku 5,5 gada.

	$4^1/_2\%$	$4^5/_8\%$
5 g. . . .	1,24618194	1,25365303
6 g. . . .	1,302,26012	1,31163448
5,5 g. . .	$\frac{2,54844106}{2}=1,27422053$	$\frac{2,56428751}{2}=1,28214375$

$$p=4^1/_2+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1,276\quad -1,27422053}{1,28214375-1,27422053};$$

$$p=4^1/_2+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{0,00177947}{0,00792312}=4^1/_2+\frac{0,00022243}{0,00792312}$$

$$\begin{array}{r|l} 22243 & 7923 \\ \underline{15846} & \overline{0,0281} \\ 6397 & \\ \underline{6336} & \\ 61 & \end{array} \qquad p=4,5+0,0281=\mathbf{4,5281}.$$

Ar logaritmu palīdzību dabūtu:

$$log\ r=\frac{1}{5,5} \left| \begin{array}{l} log\ 6380 = 3,8048207 \\ \underline{-log\ 5000=-3,6989700} \end{array} \right.$$

$$log\ r=\frac{1}{5,5}\cdot 0,1058507=$$

$$=0,0192456 \qquad d=415$$

$$\underline{2410} \ldots 10453$$

$$36 \qquad 1$$

$$r=1,04531$$

$$p=4,531.$$

Dabūjam mazliet lielāku procentu likmi nekā ar iepriekšēju paņēmienu, kā tas ari bija sagaidāms.

4. Visos aplūkotos procenta likmes aprēķinos varēja lietot ari diskonta reizinātāju tabulas, pie kam aprēķinu paņēmieni būtu gluži tie paši.

Piemērs. Aprēķināt, ar kādu procentu likmi jākapitālizē kapitāls K, lai tas 15 gadu laikā dubultotos.

Pēc nosacījuma $K_{15}=2K$; no otras puses, pēc (2) pamatformulas $K_{15}=Kr^{15}$; tāpēc $2K=Kr^{15}$ un $r^{15}=2$, jeb $v^{15}=0,5$. Diskonta reizinātāju tabulās pretim 15 gadiem atrodam,

ka $4^2/_3\%$ atbilst 0,50451502 | $p\%$ atbilst 0,5
$4^3/_4\%$ „ 0,49852797 | $4^3/_4\%$ „ 0,49852797

$$\frac{p-4^3/_4}{4^2/_3-4^3/_4}=\frac{0,5-0,49852797}{0,50451502-0,49852797},$$

$$p=4^3/_4-{}^1/_{12}\cdot\frac{0,5-0,49852797}{0.50451502-0,49852797}=4^3/_4-{}^1/_{12}\frac{0,00147203}{0,00598705}=$$

$$=4^3/_4-\frac{0,00012267}{0,00598705}=4,75-0,0205=\mathbf{4,7295}.$$

Ar attiecīgās grafikas palīdzību viegli pārliecināties, ka ar diskonta reizinātāju tabulām dabūsim mazliet lielāku procentu likmi nekā ar logaritmisko paņēmienu.

Ar logaritmu palīdzību dabūtu, ka

$$log\ r = {}^1/_{15}\ log\ 2 = {}^1/_{15}\ .\ 0{,}3010300 = 0{,}0200687\ .\ .\ .\ .\quad d = 415$$

$$\begin{array}{lrr} & \underline{0296}\ .\ .\ .\ . & 10472 \\ p = 4{,}7294. & 391 & \\ & \underline{374} & 9 \\ & 170 & 4 \end{array}$$

20. Kapitālizācijas laika aprēķināšana.

1. Atrastās pamatsakarības (2), (2_1), (2_2) un (2_3) ļauj aprēķināt kapitālizācijas laiku pēc dotā sākuma kapitāla, dotā beigu kapitāla un procentu likmes. Laika aprēķināšanas sakarības (2), (2_1) un (2_2) var apvienot vienā, jo tūlīt iepriekš nevar pateikt, vai kapitālizācijas laiks izteiksies ar veseliem gadiem vien vai ari ar gada daļu. Tāpēc var lietot laika aprēķināšanai šādu sakarību:

$$r^n = \frac{K_n}{K_0}\ .\ .\ .\ (6)\ \text{jeb}\ v^n = \frac{K_0}{K_n}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6')$$

Aprēķinu paņēmieni tie paši: logaritmiskais un ar finanču tabulām; abi šie paņēmieni analoģiski procentu likmes aprēķināšanas paņēmieniem. Piem., rīkojoties ar finanču tabulām, meklējam stabiņā ar doto p, kādam gadu skaitam vistuvāk pieiet r^n, kuŗu atrodam kā K_n dalījumu ar K_0. Ja tabulās ir taisni skaitlis r^n, tad n atrodam kā veselu skaitli; ja turpretīm r^n ir lielumu r^m un r^{m+1} starpā, tad lineārā interpolācija ļaus atrast gada daļu τ, kuŗu parasti aprēķina ar 3 decimālzīmēm un tad pēc gada daļu un dienu tabulas meklē dienu skaitu (ar tuvinājumu līdz 1 dienai), kas vistuvāk pieiet atrastam skaitlim τ. Bet ja nu atrodam τ ar lineārās interpolācijas palīdzību, tad tas ir tikpat daudz kā aprēķināt vienkāršos augļus par gada daļu. Līdz ar to būtu ņēmuši vērā ari sakarību (2_3), kuŗā ieiet vienkāršie augļi par gada daļu.

Piemērs. Aprēķināt laiku, kur kapitāls Ls 6452, kas atdots uz 5% un nes augļu augļus, pārvērties kapitālā Ls 8428.

Pēc (6) formulas

$$1{,}05^n = \frac{8428}{6452};\ n\,log\,1{,}05 = log\ 8428 - log\ 6452;$$

$$n = \frac{log\ 8428 - log\ 6452}{log\ 1{,}05} = \frac{3{,}9257245 - 3{,}8096944}{0{,}0211893} = \frac{0{,}1160301}{0{,}0211893} =$$

$$= 5{,}476;\ 0{,}476\ \text{g.} \approx 171\ \text{d.}$$

tā tad $n = 5$ g. 171 d.

Aprēķināsim šo pašu piemēru ar finanču tabulu palīdzību: $1{,}05^n = \frac{8428}{6452}$; izpildot dalīšanu, atrodam, ka $1{,}05^n = 1{,}30626162$

Redzam, ka šī $1{,}05^n$ nozīme ietilpst divu 5% stabiņā stāvošo nozīmju starpā

5 g. 1,27628156

6 g. 1,34009564

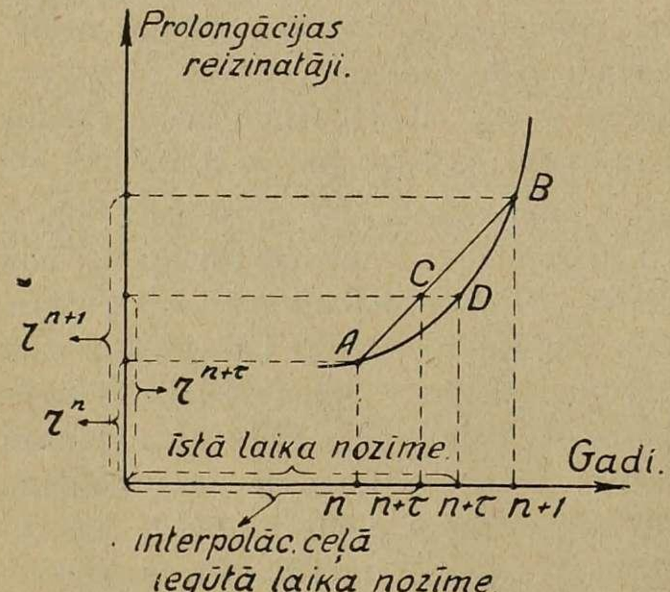
varam sastādīt sakarību

$$\frac{n-5}{6-5} = \frac{1{,}30626162 - 1{,}27628156}{1{,}34009564 - 1{,}27628156},$$

no kuŗas $n = 5 + \frac{0{,}02998006}{0{,}06381408} = 5 + 0{,}470 = 5{,}470$; $0{,}470$ g. ≈ 169 d.

tā tad te $n = 5$ g. 169 d.

Dabūjam mazāku dienu skaitu nekā ar iepriekšējo paņēmienu, kā ari jābūt, jo raugoties uz attiecīgo grafiku (7. zīm.) redzam, ka reizinātāja $r^{n+\tau}$ gaŗums sastapsies agrāk ar taisni AB (punktā C) nekā ar līkni (punktā D). Ja kapitālizācijas laiku aprēķinātu ar diskonta reizinātāja tabulām, tad viegli saprast (sal. 6. zīm.), ka dabūtu lielāku dienu skaitu nekā ar logaritmisko paņēmienu.



7. zīm.

2. Dažreiz jāaprēķina, pēc cik ilga laika kapitāls kļūst divreiz, trīsreiz u. t. t. vispār m reizes lielāks par doto kapitālu, ja tas nes augļu augļus un par to rēķina p%.

Tā kā no vienas puses $K_n = K_0 r^n$ un no otras puses $K_n = mK_0$, tad $K_0 r^n = mK_0$, no kurienes

$$r^n = m \quad . \; . \; . \; . \; (7) \quad \text{jeb} \quad n = \frac{\log m}{\log r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7_1).$$

Tā kā procentu likmei jābūt zināmai, tad ar vienu no minētiem paņēmieniem varam aprēķināt n.

Piemērs. Aprēķināt, pēc cik ilga laika uzkrātais kapitāls būs 3 reizes lielāks nekā sākuma kapitāls, ja tas atdots uz 4% un nes augļu augļus

$$1{,}04^n = 3; \quad n = \frac{\log 3}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}4771213}{0{,}0170333} = 28{,}011;$$

$$n = 28 \text{ g. } 4 \text{ d.}$$

No finanču tabulām redzam tūlīt, ka meklējamais gadu skaits ir starp 28 un 29, jo $2{,}99870332 < 3 < 3{,}11865145$.

Ar lineāro interpolāciju dabūsim, ka

$$\iota = \frac{3 - 2{,}99870332}{3{,}11865145 - 2{,}99870332} = \frac{0{,}00129668}{0{,}11994813} = 0{,}010;$$

$$n = 28 \text{ g. } 4 \text{ d.}$$

3. Ja rēķinātu ar vienkāršiem augļiem, tad dabūtu no vienas puses, ka

$K_n = K_0(1 + ni)$ un no otras, ka $K_n = mK_0$; tāpēc

$$1 + ni = m \quad \text{un} \quad n = \frac{m-1}{i} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (8).$$

Tā, piem., kapitāls pie 4% un vienkāršiem augļiem trijkāršotos laikā $n = \frac{2}{0{,}04} = 50$, t. i., 50 gados, kur tanī pašā laikā kapitāls, kas nes augļu augļus, būtu jau vairāk nekā 7 reizes lielāks.

21. Vidējais maksāšanas termiņš.

1. Par vidējo maksāšanas termiņu runā it īpaši īsa termiņa naudas operāciju jautājumos; kā zināms, lieta grozās ap to, lai vairākus maksājumus K_1, K_2 . . ., K_m, kam termiņi notek pēc n_1, n_2, . . ., n_m gadiem, atvietotu ar vienu maksājumu, kas vienlīdzīgs ar atsevišķo maksājumu summu $K_1 + K_2 + \ldots + K_m$; rodas jautājums, kādā termiņā, tā saucamā vidējā maksāšanas termiņā — citiem vārdiem, pēc cik ilga laika no tagadējā brīža vai no cita kāda laika momenta jāizdara maksājums.

Piemērs. Pašvaldības iestāde elektriskās stacijas būvei izdarījusi aizņēmumus, kas maksājami: Ls 40000 pēc 12 gadiem rēķinot 5%, Ls 10000 pēc 8 g., rēķinot 6% un Ls 8000 pēc

3 g., rēķinot 4%. Dabūjusi hipotekas aizdevumu, pašvaldības iestāde grib nomaksāt minētos parādus Ls 58000 vienā reizē. Aprēķināt, kad būtu maksāšanas termiņš, ja, pārrēķinot uz vidējo termiņu, rēķina 5%.

Ja minētās summas kapitālizē pēc augļu augļu likuma, tad varam atrast visu maksājamu t a g a d ē j o v ē r t ī b u, reizinot ar attiecīgo diskonta reizinātāju, un pēc tam aprēķināt laiku, kādā šī tagadējā vērtība dos maksājamo summu Ls 58000.

Maksājumi.	Tagadējā vērtība.
Ls 40000 pēc 12 g. . . . 5%	$40000 . v_1^{12} = 40000 . 0{,}55683742 = 22273{,}50$
„ 10000 „ 8 „ . . . 6%	$10000 . v_2^{8} = 10000 . 0{,}62741237 = 6274{,}12$
„ 8000 „ 3 „ . . . 4%	$8000 . v_3^{3} = 8000 . 0{,}88899636 = 7111{,}97$
Ls 58000 pēc x g. . . . 5%	Ls 35659,59

Tālāk jautājam, pēc cik ilga laika kapitāla Ls 35659,59 vērtība būs Ls 58000, citiem vārdiem, kad jāizdara maksājums, ja aprēķina 5% un augļu augļus.

$58000 = 35659{,}59 . 1{,}05^x$; no šīs sakarības var atrast x ar logaritmisko vai finanču tabulu paņēmienu.

$$1{,}05^x = \frac{58000}{35659{,}59} = 1{,}62649095;$$ no finanču tabulām redzam,

ka $9 \angle x \angle 10$; $$\tau = \frac{1{,}62649095 - 1{,}55132822}{1{,}62889463 - 1{,}55132822} = 0{,}969$$

$0{,}969 = 349$ d.; tā tad $x = 9$ g. 349 d.

Vidējais maksāšanas termiņš ir pēc 9 g. 349 d. no tā brīža, no kuŗa rēķināti 12, 8 un 3 gadi.

Ar logaritmu palīdzību dabūtu

$$x = \frac{\log 58000 - \log 35659{,}59}{\log 1{,}05} = \frac{4{,}7634280 - 4{,}5521764}{0{,}0211893} =$$
$$= 9{,}970;\ x = 9 \text{ g. } 349 \text{ d.}$$

Varētu ari citādi jautāt: kāda ir Ls 58000 tagadējā vērtība? tā ir $58000\, v^x$; tā tad $58000\, v^x = 35659{,}59$, no kurienes atrodam x.

2. Vispārējā veidā varam spriest tā. Ja $K_1, K_2, \ldots, K_m$ ir maksājumi pēc $n_1, n_2, \ldots, n_m$ gadiem, par kuŗiem rēķina p% un augļu augļus, tad vidējo maksāšanas termiņu, kuŗā jāsamaksā $K_1 + K_2 + \ldots + K_m$, atradīsim, vai nu diskontējot maksājumus uz tagadējo brīdi vai prolongējot tos uz attālāko kāda atsevišķa kapitāla maksāšanas termiņu, reducējot uz to pašu brīdi ari kopējo maksāšanas summu.

Maksājumi.	Tagadējā vērtība.
K_1 pēc n_1 gadiem;	$K_1 v^{n_1}$;
K_2 „ n_2 „	$K_2 v^{n_2}$;
. . . .	
K_m „ n_m „	$K_m v^{n_m}$
$(K_1+K_2+\ldots+K_m)$ pēc x g.	$K_1 v^{n_1}+K_2 v^{n_2}+\ldots+K_m v^{n_m}$;

$K_1+K_2+\ldots+K_m$ tagadējā vērtība ir $(K_1+K_2+\ldots+K_m)v^x$; tāpēc $(K_1+K_2+\ldots+K_m)v^x=K_1v^{n_1}+K_2v^{n_2}+\ldots+K_mv^{n_m}$, no kurienes

$$v^x=\frac{K_1 v^{n_1}+K_2 v^{n_2}+\ldots+K_m v^{n_m}}{K_1+K_2+\ldots+K_m} \quad \ldots\ldots (8).$$

Protams, ka procentu likmes atsevišķiem maksājumiem var būt dažādas; tad būs jāņem tikai dažādi v.

3. Ja grib reducēt visus maksājumus uz attālāko termiņu, tad var rīkoties tā. Pieņemsim, ka vistālākais maksāšanas termiņš izteicas ar n_i gadiem; tad prolongējam visus maksājumus uz šo termiņu

Maksājumi.	Vērtība pēc n_i gadiem.
K_1 pēc n_1 gadiem;	$K_1 . r^{n_i-n_1}$
K_2 „ n_2 „	$K_2 r^{n_i-n_2}$
. . . .	
K_m „ n_m „	$K_m r^{n_i-n_m}$
$(K_1+K_2+\ldots+K_m)$ pēc x g.;	$K_1 r^{n_i-n_1}+K_2 r^{n_i-n_2}+\ldots+K_m r^{n_i-n_m}$;

$K_1+K_2+\ldots+K_m$ vērtība pēc n_i g. ir $(K_1+K_2+\ldots+K_m)r^{n_i-x}$; tā tad $(K_1+K_2+\ldots+K_m)r^{n_i-x}=K_1r^{n_i-n_1}+K_2r^{n_i-n_2}\ldots+K_mr^{n_i-n_m}$,

no kurienes $$r^{n_i-x}=\frac{K_1 r^{n_i-n_1}+K_2 r^{n_i-n_2}+\ldots+K_m r^{n_i-n_m}}{K_1+K_2+\ldots+K_m} \quad . \ (8_1).$$

Formulu (8_1) viegli var pārvērst formulā (8).

Ja vidējo maksāšanas termiņu meklē tanī gadījumā, kur aprēķina vienkāršos augļus, tad rīkojas līdzīgā kārtā, tikai prolongācijas vai diskonta reizinātājs būs citāds, proti $1+ni$ vai $\frac{1}{1+ni}$.

22. Pārvaldes izdevumi un norakstījumi.

1. Dažas naudas operāciju iestādes rīkojas tā, ka gada beigās no uzkrātā kapitāla atvelk noteiktu procentu pārvaldes izdevumiem. Viegli var parādīt, ka dabūtās augļu augļu formulas vispār paliek spēkā, tikai īstenībā par noguldījumiem iznāk mazāka procentu likme. Ja ar q apzīmēsim pārvaldes izdevumu procentu likmi, tad dabūsim šādas izteiksmes pirmā, otrā, . . . vispār n - tā gada beigās uzkrātam kapitālam:

$$K_1 = K_0 r - \underbrace{K_0 r \cdot \frac{q}{100}}_{\text{pārvaldes izdevumi}} = K_0 r\left(1 - \frac{q}{100}\right); \quad K_2 = K_0 r^2\left(1 - \frac{q}{100}\right) -$$

$$- \underbrace{K_0 r^2\left(1 - \frac{q}{100}\right)\frac{q}{100}}_{\text{pārvaldes izdevumi}} = K_0 r^2\left(1 - \frac{q}{100}\right)^2 = K_0\left[r\left(1 - \frac{q}{100}\right)\right]^2;$$

$1 - \frac{q}{100}$ apzīmēsim ar r, tad $K_2 = K_1(r\mathrm{r})^2$; tapat viegli dabūjam, ka

$$K_n = K_0(r\mathrm{r})^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Šī sakarība rāda, ka visas agrākās augļu augļu formulas paliek spēkā, tikai reizinātāja r vietā jāņem $r\mathrm{r}$.

Bet var paturēt negrozītas visas agrākās formulas, tikai tad būs jārīkojas ar citādu procentu likmi — kā jau minēts, vispār zemāku nekā tas būtu bez atvilkuma pārvaldes izdevumiem; protams, ka tādā gadījumā ar prolongācijas un līdz ar to diskonta reizinātājs būs citāds.

Aprēķināsim, kāda jāņem procentu likme x, lai varētu $r\mathrm{r}$ vietā ņemt vienu reizinātāju R, ja procentu likme augļiem ir p un pārvaldes izdevumiem q.

Tā tad pēc nosacījuma

$$R = r\mathrm{r} \text{ jeb } 1 + \frac{x}{100} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{q}{100}\right);$$

izpildot reizināšanu un parastos vienkāršojumus, dabūsim

$$x = p - q - \frac{pq}{100} = p - q\left(1 + \frac{p}{100}\right) = p - qr;$$

tā tad meklējamā procentu likme x izteicas šādā veidā:

$$x = p - qr \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

P i e m ē r s. Atrast ar kādu procentu likmi faktiski jāizdara augļu augļu aprēķini, ja augļiem rēķina 5% un pārvaldes izdevumiem 0,75%.

Šeit $p=5$ un $q=0{,}75$; meklējamā procentu likme x būs

$$x=5-0{,}75.1{,}05=4{,}125\approx 4^1/_5;$$

tā tad jārēķina būs ar $4^1/_5\%$.

2. Uzņēmumos, kas saistīti ar ierīces (mašinu, ēku u. taml.) nolietošanu, parasti bilances uzstādīšanai noraksta zināmu daļu no iepriekšējā gadā iegrāmatotas vērtības. Piem., ja sākuma vērtība ir K, tad, norakstot pirmā gada beigās no katras naudas vienības i, dabūsim pirmā gada beigās norakstījumu Ki un uzņēmuma vērtību $K_1=K-Ki=K(1-i)$; rīkojoties tāpat otrā gada beigās, noraksta $K_1i=K(1-i)i$, kāpēc iegrāmatotā vērtība bilancei būs $K_2=K_1-K_1i=K(1-i)-K(1-i)i=K(1-i)^2$ u. t. t.

Pēc n gadiem vērtība K_n izteiksies tā:

$$K_n=K(1-i)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Ja, piem., mašinas vērtību pēc m gadiem aprēķina kā veca materiāla cenu ar M, tad

$$K_m=K(1-i)^m=M,$$

no kurienes $(1-i)^m=\frac{M}{K}$ un $i=1-\sqrt[m]{\frac{M}{K}}$ dod ikgadējās norakstīšanas procenta likmi. Nav grūti pārliecināties, ka tad tiešām pēc m gadiem būs jāiegrāmato tikai vērtība M.

3. Nule aplūkotā norakstīšanas paņēmiena vietā var lietot ari citu — katru gadu noraksta vienu un to pašu summu tā, lai pēc m gadiem paliktu tikai M liela vērtība; tad ikgadējais norakstījums izteiksies kā

$$\frac{K-M}{m}$$

un pēc l gadiem uzņēmuma vērtība $K_l=$

$$=K-l.\frac{K-M}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Pēdējo formulu var lietot ari tanī gadījumā, ja $M=0$, kas nav iespējams, lietojot (11) formulu, jo tad būtu $i=1$ un viss būtu jānoraksta vienā gadā. Jāatzīmē, ka parastais ikgadējais norakstījums mašīnām ir no $10\%-20\%$, fabriku ēkām $2\%-5\%$ no iepriekšējās vērtības.

4. Izteiksmi $K(1-i)^n$ var uzlūkot pēc augļu augļu for-

mulas kā sākuma kapitālu, kas n gados pārvēršas kapitālā K, ja par gada procentu likmi pieņem $\frac{100\,i}{1-i}$; tiešām, tad

$$K(1-i)^n r^n = K(1-i)^n\left(1+\frac{i}{1-i}\right)^n = K(1-i)^n \frac{1}{(1-i)^n} = K;$$

tā tad $K = K(1-i)^n\left(1+\frac{1}{1-i}\right)^n$.

Tāpēc $K(1-i)^n$ var uzlūkot kā kapitāla K tagadējo vērtību, kur kapitāls K maksājams pēc n gadiem, ja par $K(1-i)^n$ maksā augļu augļus un aprēķina kā procentu gada likmi

$$\frac{100i}{1-i} = \frac{p}{1-\frac{p}{100}} = \frac{100p}{100-p}.$$

23. Citi augļu augļu formulu lietošanas gadījumi.

1. Augļu augļu formulas var lietot visos tanīs gadījumos, kur pieaugums notiek pēc augļu augļu likuma, t. i., kur pieaugums rada savukārt tādu pat jaunu pieaugumu kā pamatlielums (pilnīgi vai ar zināmu tuvinājumu). Tā, piem., pēc augļu augļu likuma (ar zināmu tuvinājumu) notiek meža koku augšana, iedzīvotāju skaita pieaugšana u. tml.

P i e m ē r s. Meža apgabalā koksnes daudzums novērtēts uz 42 000 m^3. Novērojumi rādījuši, ka ikgadus 1000 m^3 pieaug par 3 m^3. Cik daudz koksnes būs šinī meža gabalā pēc 20 gadiem, ja to taupa.

K_0 te ir 42000, $p=0{,}3\%$, $n=20$.

$$K_{20} = 42000 \,.\, 1{,}003^{20}$$

$log\,K_{20} =$	$log\,42000 = 4{,}6232493$
$log\,1{,}003 = 0{,}00130093$	$20\,log\,1{,}003 = 0{,}0260186$
20	$log\,K_{20} = 4{,}6492679$
0,02601860	2667 . . . . . 44594.

$$K_{20} \simeq 44600\ m^3.$$

2. Redzējām, ka ar m reizēju kapitālizāciju gadā dabūjam šādu beigu kapitālu

$$K_n = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn};$$

ja m pieaug, tad $\frac{1}{m}$ pamazinās, un ar bezgalīgu m pieaugšanu

$\frac{1}{m}$ ir bezgalīgi mazs lielums, ko apzīmēsim ar α; tad doto sakarību varam pārrakstīt tā:

$$K_n = (1+i\alpha)^{\frac{n}{\alpha}} = (1+i\alpha)^{\frac{ni}{\alpha i}} = \left[(1+i\alpha)^{\frac{1}{\alpha i}}\right]^{ni}; \text{ bet } \lim_{\alpha \to 0}(1+\alpha i)^{\frac{1}{\alpha i}} = e,$$

kur e ir naturālo logaritmu bāze, pie kam $e \approx 2{,}718281828$; tāpēc

$$\lim_{m \to \infty} K_n = \lim_{\alpha \to 0}\left[(1+i\alpha)^{\frac{1}{\alpha i}}\right]^{ni} = \left[\lim_{\alpha \to 0}(1+i\alpha)^{\frac{1}{i\alpha}}\right]^{ni} = e^{ni}$$

Tā tad, ja $m \to \infty$, t. i., kapitālizācijas periodu skaits bezgalīgi aug, citiem vārdiem, notiek nepārtraukta kapitālizācija, tad uzkrātais kapitāls vai cits lielums izteiksies tā:

$$K_n = e^{ni}.$$

Vingrinājumi.

1. Atrast pieauguma reizinātāju, ja procentu likme ir *a*) $\frac{3}{4}$, *b*) $1\frac{1}{4}$, *c*) $3\frac{5}{8}$, *d*) $15^1/_2$.

2. Atrast procentu likmes, ja pieauguma reizinātājs ir *a*) 1,045; *b*) 1,0375, *c*) 1,25, *d*) 1,0855.

3. Sastādīt pieauguma reizinātāju tabulu par laiku no 1—15 g. procentu likmei *a*) 3; *b*) 5; *c*) 10.

4. Attēlot grafiski kapitāla Ls 100 augšanu 50 gadu laikā, ja kapitāls atdots *a*) uz vienkāršiem augļiem, *b*) uz augļu augļiem un par to aprēķina $5^0/_0$. Pēc grafikas novērtēt, pēc apmēram cik ilga laika kapitāls *a*) dubultojas; *b*) kļūst četrreiz lielāks.

5. Krājkase aprēķina par noguldījumiem augļu augļus pēc procentu likmes 3,5. Aprēķināt *a*) logaritmiski, *b*) ar finanču tabulu palīdzību, kāds kapitāls uzkrāsies no 1) Ls 450 liela noguldījuma 10 gados, 2) no Ls 5843,75 liela noguldījuma 8 gados.

6. Kāds rūpnieks novēlējis universitātei Ls 20 000 lielu kapitālu ar nosacījumu, ka šis kapitāls jānogulda uz augļu augļiem un tikai pēc 50 gadiem no uzkrātā kapitāla var sākt lietot ik gadus augļus. Aprēķināt, *a*) cik liels kapitāls būs uzkrājies pēc 50 gadiem, un *b*) cik daudz ik gadus varēs saņemt universitāte pēc 50 gadiem, ja aprēķina $3^1/_2{}^0/_0$.

7. Atrast pieauguma rezinātāju 20 gadiem un $4^1/_5$% *a*) ar logaritmu palīdzību, *b*) ar finanču tabulām, interpolējot ar trešām diferencēm.

8. Aprēķināt *a*) uzkrāto 12 g. laikā kapitālu no Ls 4795,65, ja aprēķina 4% un augļus kapitālizē ik 3 mēnešus; *b*) uzkrāto 8 g. laikā kapitālu no Ls 743,65, ja aprekina 4% un augļus kapitālizē ik mēnešus. Salīdzināt dabūtos rezultātus ar kapitāliem, kas uzkrātos ar vienreizēju gada kapitālizāciju.

9. Ls 1500 atnes 13 semestros 3% semestrī un tad 17 semestros $2^1/_2$% semestrī. Atrast uzkrāto kapitālu, ja kapitālizācija notiek ik semestrus.

10. Atrast konformo mēneša procentu, ja semestra kapitālizācijas procents ir 2%.

11. Aprēķināt konformo gada procentu, ja ik semestrus kapitālizē ar $2\frac{1}{4}$%.

12. Aprēķināt 1) 10 g. 250 d. laikā uzkrāto kapitālu no Ls 6580, ja procentu likme ir 4; 2) 5 g. 35. d. laikā uzkrāto kapitālu no Ls 748,35, ja procentu likme ir 5. 3) 18 g. 90 d. laikā no Ls 7500,—, ja procentu likme ir 4,5. Aprēķinus izdarīt, ņemot vērā dažādus augļu aprēķināšanas paņēmienus.

13. Sastādīt diskonta reizinātāju tabulu par laiku no 1—15 g., procentu likmei *a*) 4; *b*) 5.

14. Atrast kapitālu, kas 15 gados pārvēršas Ls 3000 lielā kapitālā, ja aprēķina 4% un augļu augļus; 2) kapitālu, kas 25 g. pārvēršas Ls 48563,85 lielā kapitālā, ja rēķina 3,5% un augļu augļus; 3) kapitālu, kas 8 g. 5 m. pārvēršas Ls 6000 lielā kapitālā, ja aprēķina 4% un augļu augļus.

15. Aprēķināt kapitāla tagadējo vērtību, ja tas pēc 12 gadiem ir Ls 2000, rēķinot 6%.

16. Pēc testamenta brālis izmaksā māsai pēc 5 gadiem no testamenta spēkā stāšanās dienas Ls 8000,—. Māsa gribētu saņemt naudu pēc pusgada no testamenta apstiprināšanas dienas. Aprēķināt, cik brālis izmaksās māsai, ja diskonta procents ir 4% un diskonts notiek pēc augļu augļu likuma.

17. Aprēķināt, cik var maksāt par kūdrāju, ja tā vērtība būs Ls 2500 tikai pēc 15 gadiem, un kapitāls rentējas ar 4%.

18. Aprēķināt procentu likmi, ja 1) 12 gadu laikā kapitāls Ls 2200,— liels pārvēršas Ls 3625,23 lielā kapitālā; ja 2) 10 g. laikā kapitāls Ls 9398 liels pārvēršas Ls 1459,48 lielā kapitālā.

19. Aprēķināt procentu likmi, lai kapitāls varētu *a*) 15, *b*) 20 gados dubultoties.

20. Augļotājs aizdod Ls 2640 uz 3 gadiem un liek parakstīt parāda zīmi par Ls 3000,— (bez procentiem). Aprēķināt, cik procentu ņēma augļotājs, ja tas aprēķina augļu augļus.

21. Aprēķināt, cik ilgi jāatrodas apgrozībā kapitālam, kas ir Ls 4500,— liels un nes augļu augļus, lai tas pārvērstos Ls 6000,— lielā summā, ja rēķina 6%.

22. Tirgotājs dāvina skolas telpu izbūvei Ls 4000,—. Pēc aprēķina šī izbūvē izmaksā Ls 5860,—. Atrast uz cik ilgu laiku jānogulda minētais kapitāls, lai tas uzkrātos Ls 5860,— lielā summā, ja par noguldījumu maksā 4,5% un aprēķina augļu augļus.

23. 40 gadu veca persona maksā apdrošināšanas biedrībai vienreizēju summu Ls 6054,— ar nosacījumu, lai minētās personas nāves gadījumā mantinieki varētu saņemt Ls 10 000. Aprēķināt, cik ilgi vajadzētu vēl dzīvot apdrošinātai personai, lai no šī līguma rastos tāds pats labums viņas mantiniekiem, kā tanī gadījumā, ja kapitāls Ls 6054,— būtu noguldīts uz augļu augļiem un nestu 4,5%.

24. Aprēķināt, cik ilgā laikā divkāršojas kapitāls, ja tas atdots uz augļu augļiem un nes *a*) 3,5%, *b*) 4%, *c*) 6%.

25. No tālāk minētiem lielumiem pēc 3 dotiem jāatrod ceturtais:

K_0	p	n	K_n
5896,64	$4^1/_2$	12	10000
19955,50	6	20	64000

26. Par īpašumu piedāvā: *A* tūlīt Ls 50000, *B* — tūlīt Ls 25 000 un pēc $2\frac{1}{2}$ gadā Ls 26 000 un *C* pēc pusgada Ls 30 000 un pēc $3\frac{1}{4}$ gada Ls 30 000. Aprēķināt, kuŗš piedāvājums izdevīgāks pārdevējam, ja aprēķiniem ņem par pamatu 6%.

27. Kādai personai *A* jānomaksā: pēc 2 gadiem Ls 2500, pēc 4 gadiem Ls 5000 un pēc 7 gadiem Ls 7500. Aprēķināt, cik personai *A* būtu jāmaksā, ja tā gribētu visus maksājumus nomaksāt *a*) tūlīt *b*) pēc 6 gadiem, liekot aprēķiniem par pamatu $4\frac{1}{2}$%.

28. Pilsētai jāmaksā par centrālā tirgus ietaisi, skaitot no 1926. g. 2. janvaŗa: pēc 2 gadiem Ls 30 000, pēc $3^1/_2$ gada

Ls 45 000, pēc $4^1/_2$ gada 60 000 un pēc 6 gadiem Ls 35 000. Aprēķinot, liekot par pamatu 6%, kad varētu nolīdzināt visu parādu vienā maksājumā.

29. Naudas iestāde *a*) maksā par noguldījumiem 5%, bet aprēķina $^1/_8$% pārvaldes izdevumiem; *b*) maksā par noguldījumiem 6% un aprēķina $^1/_4$% pārvaldes izdevumiem. Atrast, kāda ir faktiska procentu likme, pēc kuŗas noguldītājs saņem augļus.

30. Kāda uzņēmuma mašīnu vērtība ir Ls 58 500. Pēc 15 gadiem mašīnām ir vairs tikai veca materiāla vērtība Ls 5600 apmēros. Atrast, cik liels procents jānoraksta ik gadus no iepriekšējas vērtības.

31. Meža gabalā koksnes daudzums ir 257 800 m^3. Aprēķināt koksnes daudzumu pēc 12 gadiem, ja ik gadus mežs pieaug par $1^1/_5$% no iepriekšējā gada daudzuma.

32. Iedzīvotāju skaits kādā zemē pieaug ik gadus par 1% no iepriekšējā gada daudzuma. Aprēķināt iedzīvotāju skaitu pirms 8 gadiem, ja tagad ir 4 800 000.

33. Meža gabalā koksnes daudzums novērtēts uz 18 500 m^3. Aprēķināt, kad varēs sākt cirst no šī gabala, ja ikgadus koksnes daudzums pieaug par 1,5% no iepriekšējā gada daudzuma un grib cirst tikai tad, kad koksnes daudzums būs 25 000 m^3.

Trešā nodaļa.

IV. Atkārtotie noguldījumi.

24. Dažāda lieluma un izdarītie dažādos laikos noguldījumi.

1. Lai aprēķinātu beigu kapitālu, kas sakrājas no vairākiem noguldījumiem dažādos laikos, jāpiemēro katram noguldījumam augļu augļu formula uzkrātā kapitāla aprēķināšanai. Piem., ja kapitāls K_0' noguldīts uz n_1 gadiem, kapitāls K_0'' uz n_2 gadiem u. t. t., kapitāls $K_0^{(m)}$ uz n_m gadiem, tad no visiem noguldījumiem uzkrātais kapitāls K, ja aprēķina $p^0/_0$ un augļus kapitālizē ikgadus, izteiksies tādā veidā:

$$K = K_0' r^{n_1} + K_0'' r^{n_2} + \ldots + K_0^{(m)} r^{n_m}$$

Piemērs. Aprēķināt, kāds sakrāsies kapitāls uz 1930. g. 31. dec., ja 1926. g. 1. aprilī noguldīti Ls 400,— 1927. g. 1. jūlijā Ls 300,— un 1927. g. 25. nov. Ls 700,— un par noguldījumiem rēķina augļu augļus un $6^0/_0$.

Redzam, ka Ls 400 atradīsies apgrozībā (ieskaitot noguldījuma dienu) $4^3/_4$ g., Ls 300 — $3^1/_2$ g., Ls 700 — 3 g. 36 d.

Parasti rēķina līdz noguldījuma gada beigām vienkāršos augļus, tāpēc

$$K = 400\,(1+0{,}06\,.\,075)\,.\,1{,}06^4 + 300\,(1+0{,}06\,.\,0{,}5)\,.\,1{,}06^3 + 700\,(1+ +0{,}06\,.\,0{,}1)1{,}06^3 = 400\,.\,1{,}045\,.\,1{,}06^4 + (300\,.\,1{,}03 + 700\,.\,1{,}006)1{,}06^3 = =418\,.\,1{,}26247696 + 1013{,}2\,.\,1{,}191016 = 527{,}71 + 1206{,}74 = 1328{,}45.$$

Tā tad K=Ls 1328,45.

25. Kārtējie noguldījumi.

1. Ja noguldījumi ir vienlīdzīgi savā starpā un atkārtojas periodiski, t. i. ik pēc gada, pusgada vai cita perioda, tad tādus atkārtotus noguldījumus sauc par kārtējiem noguldījumiem. Piem., ja ik pēc gada nogulda k, tad n gados no atsevišķiem noguldījumiem sastādīsies kapitāls K_n tā, ka

pirmais noguld. atradīsies apgroz. n gadus un pieaugs kapitālā kr^n ;
otrais „ „ „ $n-1$ „ „ „ „ kr^{n-1};
trešais „ „ „ $n-2$ „ „ „ „ kr^{n-2};
— — — — — — — — — — — — — — —
priekšpēd. „ „ „ 2 gadi „ „ „ kr^2;
pēdējais „ „ „ 1 gadu „ „ „ kr ;
kur r ir pieauguma jeb prolongācijas reizinātājs, tā tad

$$K_n = kr^n + kr^{n-1} + kr^{n-2} + \ldots + kr^2 + kr$$

ņemot k aiz iekavām, un iekavās atstātos locekļus uzrakstot apgrieztā kārtībā, dabūjam, ka

$$K_n = k(r + r^2 + \ldots + r^{n-2} + r^{n-1} + r^n);$$

iekavās stāvošo summu apzīmēsim ar $s_{\overline{n|}}$; tad

$$K_n = K s_{\overline{n|}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

2. Lai aprēķinātu K_n, var rīkoties vai nu ar finanču vai logaritmu tabulām. Rīkojoties ar finanču tabulām, būs vispirms jāsastāda jaunas tabulas, kas dotu funkcijas $s_{\overline{n|}}$ nozīmes atkarībā no dažādiem n pie kaut kādas procentu likmes p. Šādas tabulas sastādīt visai viegli, ja jau mūsu rīcībā ir pieauguma reizinātāja tabulas, jo, kā redzam, $s_{\overline{n|}}$ sastādās kā r dažādu pakāpju summa, pie kam $s_{\overline{1|}} = r$; $s_{\overline{2|}} = r + r^2$; $s_{\overline{3|}} = r + r^2 + r^3$ u. t. t.

Tā tad, ja gribam sastādīt $s_{\overline{n|}}$ nozīmes, piem., procentu likmei 5, tad ņemam pieauguma reizinātāju tabulu procentu likmei 5 un ar pakāpenisku saskaitīšanu atrodam, ka

1 g. atbilst	$s_{\overline{1|}} = 1{,}05$	$1{,}05$
	$+\ 1{,}1025$	$1{,}05^2$
2 „ „	$s_{\overline{2|}} = 2{,}1525$	
	$+\ 1\ 157625$	$1{,}05^3$
3 „ „	$s_{\overline{3|}} = 3{,}310125$	
	$+\ 1{,}21550625$	$1{,}05^4$
4 „ „	$s_{\overline{4|}} = 4{,}52563125$	
	$+\ 1{,}27628156$	$1{,}05^5$
5 „ „	$s_{\overline{5|}} = 5{,}80191281$	

u. t. t.

Tāpat var sastādīt tabulas citām procentu likmēm; tās ļauj viegli atrast K_n pēc dotiem k, p un n.

P i e m ē r s. Atrast kapitālu, kas sakrājas 5 gados no kārtējiem noguldījumiem, Ls 200,— lieliem, ja aprēķina 5% un augļus kapitālizē ik gadus.

Pēc (13) formulas

$K_5=200 \,.\, s_{\overline{5|}}$; nule sastādītā tabula rāda, ka $s_{\overline{5|}}=5{,}80191281$; tāpēc $K_5=$ Ls $200 \,.\, 5{,}80191284=$ Ls 1160,38.

3. Logaritmiskiem aprēķiniem summu $s_{\overline{n|}}$ var pārveidot šādi. Ņemsim r aiz iekavām; tad

$r+r^2+\ldots+r^{n-1}+r^n=r(1+r+\ldots+r^{n-2}+r^{n-1})$; iekavās stāvošie locekļi veido ģeometrisko progresiju, kuras pirmais loceklis ir 1, rādītājs r un locekļu skaits n; pēc ģeometriskās progresijas summas formulas $S_n=a_1\dfrac{q^n-1}{q-1}$, atrodam, ka

$1+r+\ldots\ldots+r^{n-2}+r^{n-1}=\dfrac{r^n-1}{r-1}$, jo $a_1=1, q=r$

Tā tad

$$K_n=k \,.\, r\frac{r^n-1}{r-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13')$$

Tā kā starpību logaritmēt nevar, tad vispirms būs jāaprēķina r^n, jāieliek atrastā r^n nozīme (13′) formulā un tad jāaprēķina K_n.

Atrisināsim ar logaritmu palīdzību iepriekšējā piemēra uzdevumu.

$K_n=200 \,.\, 1{,}05 \,.\, \dfrac{1{,}05^5-1}{0{,}05}=200 \,.\, 21\,(1{,}05^5-1)=4200(1{,}05^5-1)$;

$1{,}05^5=x$; $\log x=5 \log 1{,}05=5 \,.\, 0{,}02118930=$
$=0{,}1059465$ $\qquad d=341$

```
    9187 . . . . . . . . . 12762
    ----
     278
     273 . . . . . . . . . . . 8
    ----
      50
      68 . . . . . . . . . . . . 2
```

$1{,}05^5=1{,}276282$; $K_5=$ Ls $4200.(1{,}276282-1)=$ Ls $4200.0{,}276282=$
$=$ Ls 1160,38.

4. Lielumi $s_{\overline{1|}}$, $s_{\overline{2|}}$, . . . $s_{\overline{n|}}$, kā viegli saprotams, dod beigu kapitāla izteiksmes, ja ikgadus noguldīts tiek Ls 1; tiešām, ja $k=1$, tad $K_n=s_{\overline{n|}}$; tāpēc $s_{\overline{n|}}$ tabulās ievietotos lielumus var

uzlūkot kā kapitālus, kas sakrājas no viena lata lieliem ikgadējiem noguldījumiem 1, 2, 3 . . . n gados.

Attēlojot grafiski $s_{\overline{n}|}$ augšanu, dabūsim līkni līdzīgu 1. zīm. līknei, tikai ar daudz straujāku kāpumu, jo, piem., 1. zīmējuma 100 gadiem atbilst $1{,}03^{100}$ nozīme, kas nepilnas 20 reizes lielāka par sākuma kapitālu, turpretīm $s_{\overline{100}|}$ nozīme pie $p=3\%$ ir vairāk nekā 625 reizes lielāka par sākuma kapitālu.

Tāpēc lineārā interpolācija dos jau daudz lielāku kļūdu, un būs jālieto interpolācija ar augstākām diferencēm.

5. Kārtējo noguldījumu formulā $K_n = ks_{\overline{n}|}$ vai

$K_n = kr\dfrac{r^n - 1}{r-1}$ ieiet 4 lielumi, tā ka zinot trīs no tiem var aprēķināt ceturto, pie kam jau iepriekš var paredzēt, ka aprēķini ar finanču tabulu palīdzību būs stipri līdzīgi tiem aprēķiniem, kas rodas sakarā ar aplūkotām augļu augļu formulām.

Ikgadējo noguldījumu k atrodam kā

$$k = \frac{K_n}{s_{\overline{n}|}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (13_1),$$

kur K_n dots lielums un $s_{\overline{n}|}$ atrodam no tabulām; ja izejam no (13') formulas, tad

$$k = \frac{K_n\,(r-1)}{r(r^n-1)} \quad \dots\dots\dots \quad (13_1')$$

Piemērs. Ierēdnis grib sakrāt 6 gadu laikā Ls 500, noguldot ik mēnešus vienu un to pašu summu, pie kam krājkase maksā gadā 8% un par gada daļu aprēķina vienkāršos augļus, bet gada laikā uzkrātos augļus kapitālizē ik gadus. Aprēķināt, cik liela summa ierēdnim jānogulda ik mēnešus.

Aprēķināsim vispirms, cik liela summa jānogulda ik gadus; pēc (13_1) formulas

$$k = \text{Ls}\,\frac{500}{s_{\overline{6}|}} = \text{Ls}\,\frac{500}{7{,}92280336} = \text{Ls } 63{,}11$$

Tā tad ikgadus jānogulda Ls 63,11.

Pieņemsim, ka noguldījumu sākums sakrīt ar civilgada sākumu. Tad gadskārtējā noguldījuma Ls 63,11 vietā, kas gada beigās būs 63,11 . 1,08, nāks noguldījumi ik mēnešus; apzīmēsim mēneša noguldījuma lielumu ar x; tad

pirmais nogulds. x līdz gada beigām pārv. summā $x+\frac{x\,.\,0{,}08\,.\,12}{12}$;

otrais „ „ „ „ „ „ „ $x+\frac{x\,.\,0{,}08\,.\,11}{12}$;

— — — — — — — — — — — — — — —

pēdējais „ „ „ „ „ „ „ $x+\frac{x\,.\,0{,}08\,.\,1}{12}$;

$$63{,}11\,.\,1{,}08=12x+\frac{0{,}08\,x}{12}(12+11+10+\;.\;.\;.\;+1)\ \text{jeb}$$

$$68{,}16=12x+\frac{0{,}08x\,.\,13\,.\,6}{12};\ 68{,}16=12{,}52x;\ x=\frac{68{,}16}{12{,}52}=5{,}45.$$

Tā tad ik mēnešus jānogulda Ls 5,45, lai 6 gadu laikā sakrātos Ls 500.

No $(13_1')$ formulas dabūsim, ka

$$K=\frac{500\,.\,0{,}08}{1{,}08(1{,}08^6-1)}=\frac{1000}{27(1{,}08^6-1)};$$

$z=1{,}08^6$; $\log z=6\log 1{,}08=0{,}2005428$ $d=274$

5222 15868

206

192 7

140

137 5

$z=1{,}586875$

$$K=\frac{1000}{27.0{,}586875};$$

$\log K=$ | $\log 1000 = 3{,}000000$
| $-\log 27 = \bar{2}{,}5686362$
| $-\log 0{,}586875 = 0{,}2314544$

$\log K = 1{,}8000906$ 63109

$K=$ Ls 63,11.

Mēneša noguldījumu aprēķini tādi paši, ka iepriekšējā gadījumā.

5. Kārtējo noguldījumu laiku un procentu likmi aprēķinām ar finanču tabulu palīdzību pēc jau parādītiem paņēmieniem augļu augļu rēķinos.

P i e m ē r s. Aprēķināt, cik ilgā laikā no ikgadējiem noguldījumiem, Ls 63,11 lieliem, sakrāsies Ls 500, ja aprēķina augļu augļus un 8%.

No (13) formulas dabūjam, ka

$$s_{\overline{n}|}=\frac{K_n}{k}=\frac{500}{63,11}=7,9227$$

No $s_{\overline{n}|}$ tabulām procentu likmei 8 redzam, ka 7,9227 pavisam tuvu pieiet 7,92280336, tāpēc $n=6$. Ja šinī pašā piemērā būtu zināms $n=6$ un meklējama būtu procentu likme, tad tāpat atrastu, ka $s_{\overline{6}|}=\frac{500}{63,11}=7,9227$ un $p=8\%$.

Ja dabūtā $s_{\overline{n}|}$ nozīme nepieietu pavisam tuvu tabulās stāvošam skaitlim, tad būtu jāizdara interpolācija, pie kam, kā jau aizrādīts, būtu jāņem vērā ari augstākās diferences, bet tas jādara sekojošā veidā, jo tieši piemērot interpolācijas formulu ar augstākām diferencēm būs pagrūti.

Piemērs. No ikgadējiem, Ls 1000,— lieliem noguldījumiem līdz ar augļu augļiem 15 gadu laikā sakrājies Ls 19356,83 liels kapitāls. Atrast procentu likmi.

Redzām, ka

$$s_{\overline{15}|}=\frac{19356,83}{1000}=19,35683.$$

Tabulās, kur 3% un 15 g. atbilst 19,15688130, $3^1/_4\%$ un 15 gadiem atbilst 19,55915476 un $3^1/_2\%$ un 15 gadiem atbilst 19,97102971, nav skaitļa, kas tuvu pieietu dotai $s_{\overline{15}|}$ nozīmei 19,35683; šis skaitlis ir skaitļu 19,15688130 un 19,55915476 starpā. Izlietosim lineāro interpolāciju. Pēc proporcionālitātes likuma $\frac{p-p_0}{p_1-p_0}=\frac{f(p)-f(p_0)}{f(p_1)-f(p_0)}$, kur p ir meklējamā procentu likme, $p_0=3, p_1=3^1/_4$, $f(p)=19,35683, f(p_0)=19,15688130, f(p_1)=$ $=19,55915476$; tā tad

$$\frac{p-3}{3^1/_4-3}=\frac{19,35683-10,15688130}{19,55915476-19,15688130}.$$

$$p=3+{}^1/_4\cdot\frac{0,19994870}{0,40227346}=3+{}^1/_4\cdot0,49704=3,12426;$$

tā tad $p=3,12426$; jau iepriekš zinājām, ka atrastā lineārās interpolācijas ceļā procentu likme būs par mazu, tāpat kā tas bija pēc formulas $r^n=\frac{K_n}{K_0}$, bet tikai te kļūda būs lielāka, jo funkcija straujāk aug.

Lai dabūtu pareizāku procentu likmi, aprēķināsim tagad kapitālu, kāds būtu sakrājies no minētiem noguldījumiem, ja par tiem rēķinātu 3,12426%; tā kā tādas procentu likmes tabulās nav, tad $s_{\overline{15}|}$ nozīme jāatrod interpolācijas ceļā; interpolēsim ar otrām diferencēm:

p	$f(p)$	$\Delta f(p)$	$\Delta^2 f(p)$
$p_0 = 3\%$ . .	19,1568 8130		
		0,4022 7346	
$p_1 = 3^1/_4\%$.	19,5591 5476		0,0096 0149
		0,4118 7495	
$p_2 = 3^1/_2\%$.	19,9710 2971		

Pēc interpolācijas formulas

$$f(p) = f(p_0) + \frac{p-p_0}{h}\,\Delta f(p_0) + \frac{(p-p_0)(p-p_1)}{1\,.\,2\,.\,h^2}\,.\,\Delta^2 f(p_0)$$ dabūjam,

ka $p - p_0 = 0{,}12426$; $\frac{p-p_0}{h} = \frac{0{,}12426}{^1/_4} = 0{,}49704$; $p - p_1 = 3{,}12426 -$

$-3{,}25 = -0{,}12574$; $\frac{p-p_1}{2h} = -0{,}12574\,.\,2 = -0{,}25148$;

$$\frac{(p-p_0)(p-p_1)}{h\,.\,2h} = -0{,}49704\,.\,0{,}25148 \approx -0{,}125.$$

Tā tad

$$\begin{array}{l|l} f(p) = & f(p_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 19{,}15688130 \\ & 0{,}49704\,\Delta f(p_0) = 0{,}49704\,.\,0{,}40227346 = 0{,}19994600 \\ & -0{,}125\,.\,\Delta^2 f(p_0) = -0{,}125\,.\,0{,}00960149 = \overline{1}{,}90879981 \\ \hline & f(p) \ldots\ldots\ldots\ldots = 19{,}35562711 \end{array}$$

redzam, ka pie procentu likmes 3,12426 dabūtā $s_{\overline{15}|}$ nozīme 19,35562711 ir mazāka par doto 19,35683; tā tad īstā procentu likme ir starp 3,12426 un 3,25. Lai to varētu atrast, pieņemsim tagad par $p_0 = 3{,}12426$ un par $p_1 = 3{,}25$; tad ar lineārās interpolācijas palīdzību dabūsim, ka

$$\frac{p-p_0}{p_1-p_0} = \frac{f(p)-f(p_0)}{f(p_1)-f(p_0)}, \quad \frac{p-3{,}12426}{0{,}12574} = \frac{19{,}35683 - 19{,}35562711}{19{,}55915476 - 19{,}35562711},$$

$p = 3{,}12426 + 0{,}12574\,.\,0{,}0059 = 3{,}12426 + 0{,}00074 = \mathbf{3{,}125}$.

Tā tad $p = 3{,}125\%$, ko pēc Spitzer'a tabulām varējām dabūt tieši. Redzam, ka šis paņēmiens diezgan garš, tāpēc to ari lieto tikai nepieciešamības gadījumos. Līdzīgā kārtā varētu rīkoties p atrašanai pēc formulas $r^n = \frac{K_n}{K_0}$ (sal. **19**,2), bet tur daudz īsāks logaritmiskais ceļš, un pie tam lineārās interpolācijas ceļā dabūtais lielums nedod lielas kļūdas.

Ja ar otro lineāro interpolāciju dabūtā p nozīme vēl nebūtu tuva īstai p nozīmei, tad nāktos vēl reiz atkārtot to pašu paņēmienu: aprēķināt ar augstākām diferencēm $s_{\overline{n|}}$ nozīmi, kas atbilst dabūtai jaunai p nozīmei, un tad atkal meklēt tuvāku p nozīmi, ko dabūsim jau ar daudz lielāku tuvinājumu. Pie šī jautājuma vēl nāksies atgriezties vēlāk, kad runāsim par aizņēmumu amortizāciju. (sk. 34,5).

6. Lietojot logaritmu tabulas, periodu skaita aprēķināšanai nekādas grūtības neceļas, jo no (13') formulas dabūsim, ka

$$r^n - 1 = \frac{K_n i}{k \cdot r} \text{ un } r^n = \frac{K_n i}{kr} + 1 \text{ no kuŗienes } n \log r = \log\left(\frac{K_n i}{kr} + 1\right)$$

$$\text{un } n = \frac{\log\left(\frac{K_n i}{kr} + 1\right)}{\log r};$$

te nāksies vispirms aprēķināt izteiksmi $\frac{K_n i}{kr}$ un tad n atradīsim kā divu logaritmu dalījumu.

Turpretīm r un līdz ar to p atrašanai vispār celsies lielas grūtības, jo nāksies atrisināt augstāku pakāpju nolīdzinājumus, ja vien n ir lielāks par 1.

Tāpēc tad p atrašanai parasti lieto iepriekšējā nodalījumā minēto paņēmienu ar vairākkārtēju interpolāciju.

7. Kārtējos noguldījumus var no matēmatiskā viedokļa iztulkot plašāk — tos var uzlūkot vispār kā kārtējus maksājumus. Tādā gadījumā maksājumi var iekrist kā perioda (gada, mēneša u. t. t.) sākumā, bet var iekrist ari beigās. Ja maksājumus izdara kāda perioda sākumā, tā tad maksā uz priekšu par doto periodu, tad saka, ka tie ir praenumerando maksājumi; ja maksājumus izdara par notecējušo periodu — perioda beigās, tad tādus maksājumus sauc par postnumerando maksājumiem. Līdz šim aplūkotie rēķinu paņēmieni zīmējās uz praenumerando maksājumiem. To viegli var attiecināt ari uz postnumerando maksājumiem, ja ņem vērā, ka šo maksājumu vai noguldījumu beigu vērtība izteiksies tāpat kā praenumerando maksājumiem, tikai ar to starpību, ka ikviens maksājums (noguldījums) atradīsies apgrozībā par vienu periodu mazāk; tā tad pirmais maksājums k pārvērtīsies n gados kapitālā kr^{n-1}, otrais — kapitālā kr^{n-2} u. t. t. un beidzamais nemaz nebūs pārgrozī-

jies, jo tas izdarīts paša n-tā gada beigās; tāpēc visu maksājumu kopvērtība pēc n gadiem izteiksies tā:

$$K_n' = kr^{n-1} + kr^{n-2} + \ldots + kr + k = k(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1);$$

apzīmēsim iekavās stāvošo summu $1 + r + r^2 \ldots + r^{n-2} + r^{n-1}$ ar $\ddot{s}_{\overline{n|}}$; tad

$$K'_n = k\ddot{s}_{\overline{n|}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

kur $\ddot{s}_{\overline{1|}} = 1$; $\ddot{s}_{\overline{2|}} = 1 + r$; $\ddot{s}_{\overline{3|}} = 1 + r + r^2$; $\ldots \ddot{s}_{\overline{n|}} = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = 1 + s_{\overline{n-1|}}$, jo $r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = s_{\overline{n-1|}}$

Tāpēc dabūto formulu var vēl pārrakstīt tā:

$K_n' = k(1 + s_{\overline{n-1|}})$, kur $s_{\overline{n-1|}}$ ir mums pazīstamā, tabulās ievietotā summa $r + r^2 + \ldots + r^n$; tā tad te aprēķinu paņēmieni ar finanču tabulām būs glūži tādi pat, kā praenumerando noguldījumu gadījumā, tikai būs jāatceras, ka $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ nozīmē no $s_{\overline{n|}}$ tabulām jāņem vienam gadam mazāk un jāpieskaita 1.

Pārveidojot dabūto formulu (14) pēc ģeometriskās progresijas summas likuma, redzam, ka

$$K_n' = k\frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14').$$

Tā tad ari te aprēķinu ziņā nekas jauns nenāk klāt.

26. Kārtējie noguldījumi, kur noguldījumu un kapitālizācijas periodu skaits nav viens un tas pats.

1. Var būt gadījumi, kur noguldījumu periodu skaits ir citāds nekā kapitālizācijas periodu skaits, piem., noguldījumi vai vispār maksājumi notiek tikai vienreiz gadā, turpretim augļus aprēķina divreiz gadā u. tml. Ja kapitālizācijas periodu skaits gadā ir divi, bet noguldījums par gadu tikai viens, tad procentu likme par semestru būs $\frac{p}{2}$ un attiecīgais pieauguma reizinātājs par pusgadu ir $1 + \frac{p}{2.100}$ un par gadu $\left(1 + \frac{p}{2.100}\right)\left(1 + \frac{p}{2.100}\right) = \left(1 + \frac{p}{2.100}\right)^2$; apzīmējot $1 + \frac{p}{2.100}$ ar r_1, dabūsim, ka ikviens lats gada laikā pārvēršas kapitālā r_1^2; pielīdzinot $r_1^2 = r$, varam aprēķināt konformo gadu procentu likmi un visus aprēķinus novest uz jau aplūkotiem gadījumiem.

Ja tomēr gribētu beigu kapitālu izteikt atkarībā no r_1, tad viegli dabūt, ka praenumerando noguldījumiem K_n dabū veidu:

$$K_n=k(r_1^2)^n+k(r_1^2)^{n-1}+\ldots+k(r_1^2)^2+kr_1^2=$$

$$=k[(r_1^2)^n+(r_1^2)^{n-1}+\ldots+(r_1^2)^2+r_1^2]=kr_1^2\cdot\frac{(r_1^2)^n-1}{r_1^2-1},$$ jeb galīgi

$$K_n=kr_1^2\frac{r_1^{2n}-1}{r_1^2-1};$$

ja kapitālizācijas periodu skaits gadā būtu m, tad tāpat dabūtu, ka

$$K_n=kr_1^m\cdot\frac{r_1^{mn}-1}{r_1^m-1}\ \ldots\ldots\ldots\ (15),$$

kur šeit $r_1=1+\frac{p}{m\cdot100}$.

Aprēķinus, nepārejot uz konformo gada procentu, var izdarīt pēc pieauguma reizinātāju tabulām, kas ļauj atrast r_1^m un r_1^{mn}.

P i e m ē r s. Atrast, kāds būs sakrājies 8 gados kapitāls no ikgadējiem praenumerando noguldījumiem, Ls 100 lieliem, par kuŗiem aprēķina 6% un augļus kapitālizē ik semestrus.

Pēc (15) formulas

$$K_n=100\cdot1{,}03^2\cdot\frac{1{,}03^{16}-1}{1{,}03^2-1}=106{,}09\cdot\frac{0{,}60470644}{0{,}0609}=$$

$$=106{,}09\cdot9{,}9295=1053{,}41;$$ tā tad $K_n=$ Ls 1053,41.

Vienreizēja kapitālizācija gadā dotu

$$K_n=100s_{\overline{8}|}=100\cdot10{,}4913=1049{,}13,$$ t. i.

$$K_n=\text{Ls } 1049{,}13.$$

2. Ja kapitālizācijas periodu skaits mazāks nekā noguldījumu periodu skaits, piem., ja noguldījumi (vai maksājumi) notiek ik semestrus, bet augļus kapitālizē vienreiz gadā, tad spriežam tā.

Gada laikā praenumerando noguldījumi dotu kapitālu $kr+kr^{\frac{1}{2}}$; līdz ar to pirmais noguldījums līdz n-tā gada beigām pārvērstos kapitālā $kr\cdot r^{n-1}=kr^n$, un otrais — kapitālā $kr^{\frac{1}{2}}\cdot r^{n-1}=$ $=kr^{n-\frac{1}{2}}$; trešais noguldījums pārvērstos līdz n-tā gada beigām kapitālā kr^{n-1}, ceturtais — kapitālā $kr^{n-1^1/_2}$ u. t. t.; tāpēc beigu kapitāls K_n izteiksies šādā veidā:

$$K_n=kr^n+kr^{n-\frac{1}{2}}+kr^{n-1}+kr^{n-1^1/_2}+\ldots+kr+kr^{\frac{1}{2}}=$$

$$=k(r^n+r^{n-\frac{1}{2}}+\ldots+r+r^{\frac{1}{2}});$$

iekavās ir ģeometriskās progresijas locekļu summa, kur par pirmo locekli var pieņemt $r^{\frac{1}{2}}$ un par progresijas rādītāju $r^{\frac{1}{2}}$; locekļu skaits ir $2n$; tā tad

$$K_n = k\,.\,r^{\frac{1}{2}}\frac{(r^{\frac{1}{2}})^{2n}-1}{r^{\frac{1}{2}}-1} = k\,.\,r^{\frac{1}{2}}\,.\,\frac{r^n-1}{r^{\frac{1}{2}}-1}\,;$$

vispār, ja būtu m noguldījumu gadā, bet kapitālizācija notiktu vienreiz gadā, tad tāpat atrastu, ka

$$K_n = kr^{\frac{1}{m}}\frac{r^n-1}{r^{\frac{1}{m}}-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

K_n aprēķināšanai r^n varēs dabūt no finanču tabulām, bet $r^{\frac{1}{m}}$ nāksies aprēķināt ar logaritmu tabulu palīdzību, vai ari visu izteiksmi aprēķināt ar logaritmu tabulu palīdzību.

V. Renšu rēķini.

27. Jēdziens par renti; pastāvīgās laika rentes.

1. Par **rentēm** sauc periodiski atkārtotus (ar vienu un to pašu starplaiku) maksājumus, ko kāds saņem vai izdara perioda sākumā vai beigās.

Tiesību saņemt renti var iegūt vai nu ar vienreizēju iemaksu — vienreizēju likmi, vai ari ar vairākkārtējām (atkārtotām) iemaksām, tā saucamām premijām. Rentes tiesības iegūšanu sauc par rentes pirkšanu. Vienreizējā iemaksa, ar ko iegūst tiesību saņemt renti, ir rentes tagadējā vērtība. Rentes pēc atsevišķo maksājumu lieluma var būt pastāvīgas, jeb ari rentes lielums var augt vai dilt pēc kāda likuma; pirmā gadījumā runā par pastāvīgām rentēm, otrā gadījumā — par mainīgām rentēm (augošām vai dilstošām). Rentes pēc ilguma var būt 1) rentes uz noteiktu laiku, piem., uz 10 gadiem; tādas rentes sauc par laika rentēm; 2) rentes uz tik ilgu laiku, kamēr rentes saņēmējs vai maksātājs dzīvo; tādas rentes sauc par mūža rentēm; 3) rentes uz neaprobežotu laiku; tādas rentes sauc par mūžīgām rentēm. Rentes izmaksa var notikt: ikviena perioda sākumā; tad rentes sauc par praenumerando rentēm;

2) ikviena perioda beigās; tad rentes sauc par **postnumerando rentēm**; 3) no rentes pirkšanas brīža pēc kāda laika, kas aptver vairāk nekā vienu periodu; piem., rentes sākas pēc 3 gadiem, un tad tās maksā ikgadus; tādas rentes sauc par **atbīdītām** rentēm, un laika sprīdi, kas atdala pirmo maksājumu no rentes pirkšanas brīža, sauc par **starplaiku**. Renšu maksāšanas periods var būt gads, pusgads, mēnesis u. t. j.

Aplūkosim vispirms pastāvīgās laika rentes.

2. Pieņemsim, ka ikgadējs rentes lielums ir R un laiks, kurā maksā rentes, ir n gadi, pie kam aprēķiniem par pamatu pieņem procentu likmi p. Te var rasties divi jautājumi 1) kāda ir rentes tagadējā vērtība jeb pirkšanas maksa (vienreizēja likme), 2) kāda ir rentes beigu vērtība. Uz otro jautājumu varam dot atbildi tūlīt, jo esam jau aplūkojuši, kāda ir atkārtotu pastāvīgu maksājumu — šinī gadījumā pastāvīgas rentes — beigu vērtība pēc n gadiem; tiešām, ja (13) vai (13') formulā k vietā ņemsim R, tad praenumerando rentes vērtība B pēc n gadiem izteiksies tā:

$$B = Rs_{\overline{n}|} \quad . \; . \; . \; (17) \text{ jeb } B = R \, . \, r\frac{r^n - 1}{r - 1} \quad . \; . \; . \; (17_1).$$

Līdzīgā kārtā postnumerando rentes beigu vērtību, atradīsim pēc (14) un (14') formulas kā

$$B' = R(1 + s_{\overline{n-1}|}) \; . \; . \; . \; (17') \text{ jeb } B' = R \, . \, \frac{r^n - 1}{r - 1} \; . \; . \; . \; (17_1').$$

Līdz ar to visi aprēķinu paņēmieni jau pazīstami.

Rentes tagadējās vērtības jeb pirkšanas likmes L aprēķināšanai varam iziet vai no dabūtām beigu vērtībām, tās diskontējot ar v^n, vai ari atrast sakarību L, R, n un $p^0/_0$ starpā patstāvīgi.

Pirmā gadījumā

praenumerando rente: $L = Bv^n = Rs_{\overline{n}|}\, v^n$ jeb $L = \dfrac{R(r^n - 1)}{(r-1)r^{n-1}}$. (18);

postnumerando rente: $L' = Bv^n = R(1 + s_{\overline{n-1}|})\, v^n$ jeb

$$L' = \frac{R(r^n - 1)}{(r-1)r^n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18').$$

Jau šādā veidā aprēķināt L nenāktos grūti, jo no finanču tabulām varam atrast $s_{\overline{n}|}$ un v^n, tāpat logaritmiskiem aprēķiniem neceļas nekādas grūtības. Bet tā kā renšu rēķinos rentes tagadējas vērtības aprēķināšanai piešķirama galvenā nozīme, tad vēlams izteiksmes $s_{\overline{n|}}\ v^n$ un $(1+s_{\overline{n-1|}})v^n$ padarīt vienkāršākas. To var panākt šādā ceļā.

Tā kā $s_{\overline{n|}}=r+r^2+\ldots+r^n$, tad $s_{\overline{n|}}\,v^n=\frac{s_{\overline{n|}}}{r^n}=$

$$=\frac{r+r^2+\ldots+r^n}{r^n}=\frac{r}{r^n}+\frac{r^2}{r^n}+\ldots+\frac{r^n}{r^n}=\frac{1}{r^{n-1}}+\frac{1}{r^{n-2}}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{r}+1=v^{n-1}+v^{n-2}+\ldots+v+1;$$

tā tad $s_{\overline{n|}}\,v^n=1+v+\ldots+v^{n-2}+v^{n-1}$; līdzīgā kārtā atrodam, ka $(1+s_{\overline{n-1|}})v^n=\frac{1+r+\ldots+r^{n-1}}{r^n}=v^n+v^{n-1}+\ldots+v$;

tā tad $(1+s_{\overline{n-1|}})v^n=v+v^2+\ldots+v^{n-1}+v^n$; esam dabūjuši summas $1+v+\ldots+v^{n-2}+v^{n-1}$ un $v+v^2+\ldots+v^n$, kas atgādina $s_{\overline{n|}}$, un $s_{\overline{n|}}$ tikai r vietā te stāv v. Apzīmēsim šīs dabūtās summas tā: $v+v^2+\ldots+v^n={}_{|n}a$ (atbilst postnumerando rentei) un $1+v+\ldots+v^{n-1}={}_{|n}\mathrm{a}$ (atbilst praenumerando rentei); viegli redzēt, ka

$$_{|n}\mathrm{a}=1+{}_{|n-1}a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$\text{un } {}_{|n}a={}_{|n+1}\mathrm{a}-1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19').$$

Tā tad, ņemot vērā dabūtos rezultātus, redzam, ka

$$\text{(praen. rente)} \quad L=R\,.\,{}_{|n}\mathrm{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

$$\text{vai (postnum. rente)} \quad L'=R\,.\,{}_{|n}a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20').$$

To pašu rezultātu dabūtu tieši, spriežot tā: pirmā rentes maksājuma (praenumerando rentes gad.) tagadējā vērtība ir R, otrā — Rv, trešā — Rv^2 u. t. t., tāpēc $L=R+Rv^2+\ldots+$ $+Rv^{n-1}=R(1+v+\ldots+v^{n-1})=R_{|n}\mathrm{a}$; postnumerando rentes gadījumā tāpat dabūtu, ka

$$L'=Rv+Rv^2+\ldots+Rv^n=R(v+v^2+\ldots+v^n)=R_{|n}a.$$

Ko īsti apzīmē $_{|n}\mathrm{a}$ un $_{|n}a$? Šie lielumi apzīmē tagadējo vērtību rentei (praenumerando vai postnumerando), kas ir Ls 1 liela un ilgst n gadus.

Lielumiem $_{|n}\mathrm{a}$ un $_{|n}a$ var viegli sastādīt tabulas tāpat kā lielumam $s_{\overline{n|}}$, tikai r^n nozīmju vietā jāņem attiecīgās v^n nozīmes. $_{|1}a=v$; $_{|2}a=v+v^2$; $_{|3}a=v+v^2+v^3$ u. t. t. Ja zinām $_{|n}a$ nozīmes, tad $_{|n}\mathrm{a}$ nozīmes, ka redzējām, var atrast no sakarības $_{|n}\mathrm{a}=1+{}_{|n-1}a$. Tāpēc sastāda tabulas tikai vienam no šiem divi lielumiem, un parasti lielumam $_{|n}a$, jo tas pirmkārt atbilst postnumerando rentei, kas praksē biežāk sastopama, un otrkārt $|_n a$ kā summa atgādina s_n kā summu

$(|_n a = v + v^2 + \ldots + v^n;\ s_{\overline{n|}} = r + r^2 + \ldots + r^n)$.

Lielumu $|_n a$ nozīmes ievietotas grāmatas beigās (izvilkums no Spitzer'a tabulām).

Piemērs. Atrast, par cik lielu summu var nopirkt postnumerando renti, kas ilgst 20 gadus un ir Ls 500 liela, ja aprēķiniem par pamatu pieņemti 6%.

Pēc (20') formulas

$$L = \text{Ls } 500\ |_{20}a = \text{Ls } 500 \,.\, 11{,}46992122 = \text{Ls } 5734{,}96.$$

Lietojot (18') formulu, dabūsim, ka $L = \dfrac{500(1{,}06^{20} - 1)}{0{,}06 \,.\, 1{,}06^{20}}$; šo izteiksmi varam aprēķināt vai nu ar pieauguma reizinātāju tabulu palīdzību, vai ari ar logaritmu tabulu palīdzību; pēdējā gadījumā vispirms būtu jāaprēķina $1{,}06^{20}$.

$1{,}06^{20} = z$; $\log z = 20 \,.\, 0{,}02530587 = 0{,}5061174$ $\quad d = 135$

	1125	32071
	49	
$z = 3{,}207131$	41	3
	80	1
		3207131

$$L = \frac{500 \,.\, 2{,}207131}{0{,}06 \,.\, 1{,}06^{20}};$$

$\log L =$	$\log 500$	$= 2{,}6989700$
	$\log 2{,}207131$	$= 0{,}3438281$
	$-\log 0{,}06 = -\overline{2}{,}7781513$	$= 1{,}2218487$
	$-20 \log 1{,}06 = -0{,}5061174$	$= \overline{1}{,}4938826$

$\log L$	$= 3{,}7585294$	$d = 76$
	5258 . .	573449
	36	5
		573495

$L =$ Ls 5734,95.

Tā kā sakarībās $L = R|_n a_n$ vai $L = R|_n a$ ieiet lielumi L, R, n un v (resp. p) tādā pašā veidā kā sakarībās.

$K_n = k s_{\overline{n|}}$ vai $K_n = k(1 + s_{\overline{n-1|}})$, tad aprēķina paņēmieni vispār būs tie paši, tikai nāksies lietot $_n|a$ tabulas; tāpēc pie aprēķinu jautājuma te neapstāsimies.

3. Ja rentes maksājumi sakas pēc vairāk nekā viena perioda no rentes pirkšanas brīža, tad mums ir darīšana ar atbīdīto renti. Rentes tagadējo vērtību ari te var viegli aprēķināt. Pieņemsim, ka starplaiks ir m gadi un rentes maksājumi notiek vienreiz gadā n reizes; tā tad pirmais rentes maksājums sākas pēc m gadiem no rentes pirkšanas brīža, un beidzamais būs pēc $(m+n-1)$ gada, pie kam, protams, nevajadzēs vairs runāt ne par praenumerando, ne par postnumerando renti. Tad pirmā rentes maksājuma tagadējā vērtība ir Rv^m, otrā maksājuma tagadējā vērtība ir Rv^{m+1} u. t. t. un beidzamā maksājuma tagadējā vērtība ir Rv^{m+n-1}; tāpēc

$$L = Rv^m + Rv^{m+1} + \ldots + Rv^{m+n-1} =$$

$$= \underbrace{Rv^m (1+v+\ldots+v^{n-1})}_{v^m \text{ ņemts aiz iekavām}} = Rv^m{}_{|n}a;$$

tā tad

$$L = Rv^m(1+{}_{|n-1}a) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

$$\text{jeb } L = \frac{R(r^n-1)}{r^{m+n-1}(r-1)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21_1),$$

izteiksmi $v^m{}_{|n}a$ kā Ls 1 lielas, pēc m gadiem atbīdītās un n reizes atkārtotas rentes tagadējo vērtību apzīmē ar ${}_{m|n}a$. Tā tad

$$L = R \cdot {}_{m|n}a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21').$$

Atkal redzam, ka aprēķini nekādu jaunu paņēmienu neprasa. Atbīdīto renti var pirkt ne tikai ar vienreizēju likmi L, bet ari ar ikgadējām premijām, kas ilgst visu starplaiku, t. i., m gadus un maksājamās parasti praenumerando.

Ja ikgadējas praenumerando premijas lielumu apzīmēsim ar P, m gadus atbīdītās rentes lielumu ar R, tad visu premiju maksājumu tāgadējā vērtība ir $P \cdot {}_{|m}a$, un rentes tagadējā vērtība $R \cdot {}_{m|n}a$ jeb $Rv^m{}_{|n}a$; tāpēc $P_{|m}a = Rv^m{}_{|n}a$, no kurienes atrodam premijas P lielumu šādā veidā:

$$P = \frac{Rv^m \cdot {}_{|n}a}{{}_{|m}a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Piemērs. Tirgotājs grib nopirkt Ls 2400,— lielu renti, kas sākas pēc 15 gadiem un maksājama 10 gadu laikā. Aprēķināt, 1) vienreizējo iemaksu un 2) gadskārtējo praenumerando premiju, kas maksājama pa visu starplaiku, ja aprēķiniem par pamatu pieņem 4%.

Pēc (21) formulas

$$L = \text{Ls } 2400 \,.\, v^{15} \,.\, |_{10}a = \text{L s } 2400 \,.\, v^{15}(1+|_{9}a) =$$
$$= \text{Ls } 2400 \,.\, 0{,}55526450 \,.\, 8{,}43533161;$$

parupjš aptuvens novērtējums dod

$$L \approx 2 \,.\, 10^{3} \,.\, 6 \,.\, 10^{-1} \,.\, 8 \approx 96 \,.\, 10^{2} \approx 9600;$$

precizāk izpildīti aprēķini dod

$$L = \text{Ls } 2400 \,.\, 4{,}6838402 = \text{Ls } 11241{,}22.$$

Ikgadēju premiju P atradīsim pēc (22) formulas:

$$P = \frac{2400 \,.\, v^{15}|_{10}a}{|_{15}a} = \frac{11241{,}22}{1+|_{14}a} = \frac{11241{,}22}{11{,}56312293} = 972{,}16;$$

tā tad $P =$ Ls 972,16.

28. Mainīgās laika rentes.

1. Par mainīgām laika rentēm, kā jau minēts, sauc tādas rentes, kur rentes lielums mainās pēc kaut kāda likuma. Visbiežāk praksē sastopamie likumi ir aritmētiskās un ģeometriskās progresijas likumi, t. i., kad rente pieaug (vai dilst) vai nu par vienu un to pašu noteiktu summu, vai arī katrs nākamais maksājums rodas no iepriekšēja, reizinot (vai dalot) to ar kādu pastāvīgu skaitli.

Aplūkosim kā vienkāršāku beidzamo jautājumu. Pieņemsim, ka pirmais rentes maksājums ir R, lielums, ar kuŗu reizinām kādu maksājumu, lai dabūtu nākamo, ir q; atkarībā no tam, vai q ir lielāks vai mazāks par 1, dabūsim augošu vai dilstošu renti. Tā tad otrais rentes maksājums būs Rq, trešais būs Rq^2 u/t. t.

Tāpēc praenumerando rentes tagadējā vērtība būs

$$L = R + (Rq)v + (Rq^2)v^2 + \ldots + (Rq^{n-1})v^{n-1} =$$
$$= R\underbrace{[1 + qv + (qv)^2 + \ldots + (qv)^{n-1}]}_{\text{ģeom. progr. summa ar rādīt. } qv} = R \,.\, \frac{q^n v^n - 1}{qv - 1} = R \,.\, \frac{1 - q^n v^n}{1 - qv};$$

tā tad

$$L = R\frac{1 - q^n v^n}{1 - qv} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Postnumerando rentes tagadējā vērtība L' izteiksies līdzīgā kārtā

$$L' = Rv + Rv^2q + \ldots + Rq^{n-1}v^n = Rv(1 + qv + \ldots + q^{n-1}v^{n-1}) =$$
$$= Rv\frac{1 - q^n v^n}{1 - qv} = R\frac{1 - q^n v^n}{\frac{1 - qv}{v}} = R\frac{1 - q^n v^n}{\frac{1}{v} - q} = R\frac{1 - q^n v^n}{r - q};$$

tā tad

$$\mathcal{L}'=R\frac{1-q^n v^n}{r-q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23').$$

Aprēķinot L vai L' pēc (23) vai (23') formulas, var lietot vai nu finanču tabulas, ja tanīs ir q^n reizinātāju r^n vai v^n starpā, vai ari lietot logaritmu tabulas.

Ja $q=1$, tad formulas (23) un (23'), kā viegli pārliecināties, pāriet (18) un (18') formulā.

Ja zinām rentes tagadējo vērtību, tad var viegli aprēķināt ari rentes beigu vērtību pēc n gadiem, reizinot L vai L' ar r^n; tādā kārtā dabūsim

$$B=Lr^n=R\,.\,\frac{1-q^n v^n}{1-qv}\,.\,r^n=\underbrace{R\,.\,\frac{r^n-q^n v^n r^n}{1-qv}}_{\text{reizinām ar } r^n \text{ skaitīt.}}=\underbrace{R\frac{r^n-q^n}{1-qv}}_{r^n v^n=1};$$

tāpat

$$B'=L'r^n=R\frac{1-q^n v^n}{r-q}\,.\,r^n=R\,.\,\frac{r^n-q^n}{r-q};$$

tā tad

$$B=R\frac{r^n-q^n}{1-qv} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

$$\text{un } B'=R\frac{r^n-q^n}{r-q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24').$$

Ja $q=r$, tad dabūjam nenoteikto izteiksmi $\frac{0}{0}$; lai dabūtu šādas nenoteiktas izteiksmes īsto nozīmi, ņemam vērā, ka

$$\frac{r^n-q^n}{r-q}=r^{n-1}+r^{n-2}q+\ldots+rq^{n-2}+q^{n-1},$$

ja $q=r$, tad $r^{n-2}q=r^{n-1}, \ldots, rq^{n-2}=r^{n-1}, q^{n-1}=r^{n-1}$,

$$\text{un tāpēc } \left[\frac{r^n-q^n}{r-q}\right]_{q=r}=r^{n-1}+r^{n-1}+\ldots+r^{n-1}=nr^{n-1};$$

tā tad pie $q=r$

$$B'=Rnr^{n-1};$$

tā kā

$$B=R\frac{r^n-q^n}{1-\frac{q}{r}}=R\,.\,\frac{r^n-q^n}{r-q}r, \text{ tad pie } q=r \quad B=R\,r\,.\,nr^{n-1}=Rnr^n.$$

Ja iet runa par atbīdītu mainīgu (pēc ģeom. progr. likuma) renti uz m gadiem, tad tāpat kā pastāvīgas rentes gadījumā, dabūsim, ka

$$\mathcal{L}=R\cdot\frac{1-q^n v^n}{1-qv}\cdot v^m=R\frac{v^m-q^n v^{n+m}}{1-qv}\ \text{un}\ B=R\cdot\frac{1-q^n v^n}{1-qv}\cdot v^m\cdot r^n=$$

$$=R\frac{1-q^n v^n}{1-qv}\cdot r^{n-m}=R\frac{r^n-q^n}{(r-q)r^{n-1}}\cdot r^{n-m}=R\frac{r^n-q^n}{(r-q)r^{m-1}};$$

tā tad

$$B=R\frac{r^n-q^n}{(r-q)r^{m-1}}.$$

Piemērs. Kādā pilsētā ir 1 500 000 iedzīvotāju; nodokļi caurmērā uz katru iedzīvotāju gadā ir Ls 20; iedzīvotāju skaits pieaug ik gadus par 1%. Aprēķināt visu 10 gados paredzamo nodokļu tagādējo vērtību, ņemot aprēķiniem par pamatu 6%.

Nodokļu maksājumus varam uzlūkot kā postnumerando renti, kuŗas pirmais maksājums ir Ls 20 . 1500 000= Ls 30 000 000 un turpmākie maksājumi par 1% pieaug, t. i. ikvienu turpmāko maksājumu dabūjam, reizinot iepriekšējo ar 1,01, tā tad te mums darīšana ar augošas rentes tagadējo vērtību, kur R=30 milj., q=1,01, r=1,06, n=10. Pēc (23') formulas dabūsim, nodokļu tagadējo vērtību, izteiktu miljonos latu.

$$L'=30\cdot\frac{1-v^{10}\cdot 1{,}01^{10}}{1{,}06-1{,}01}=30\cdot\frac{1-0{,}55839478\cdot 1{,}10462213}{0{,}05}=$$

$$=600\,(1-0{,}616814)=600\cdot 0{,}383186\approx 229.$$

Tā tad $L'\approx 229$ miljoni latu.

2. Ja rentes lielums mainās, pieaugot vai pamazinoties par vienu un to pašu summu, tad mums ir darīšana ar renti, kas mainās pēc aritmētiskās progresijas likuma. Pieņemsim, ka R ir rentes pirmais maksājums, d — lielums, par kuŗu pieaug vai pamazinās rentes maksājumi, n — maksāšanas periodu skaits; p — procentu likme. Aprēķināsim vispirms augošas rentes (praenumerando) beigu vērtību. Tā kā pirmais maksājums ir R, tad otrais būs $R+d$, trešais $R+2\,d$ u. t. t. un beidzamais $R+(n-1)\,d$; tāpēc

$$B=R\,r^n+(R+d)\,r^{n-1}+\ldots+[R+(n-2)d]\,r^2+[R+(n-1)\,d]\,r;$$

reizināsim dabūto vienlīdzību ar r un no tā darinātas jaunās vienlīdzības atņemsim pirmo, rakstot locekļus ar vienādām r pakāpēm vienu zem otra; tad, piem., $(R+d)r^n - Rr^n = Rr^n + dr^n - Rr^n = dr^n \ldots; Rr^2 + ndr^2 - dr^2 - Rr^2 - ndr^2 + 2dr^2 = dr^2$ u. tml.

$$\begin{array}{rll} Br = & Rr^{n+1} + (R+d)r^n + (R+2d)r^{n-1} + \ldots + [R+(n-1)d]r^2 \\ -|B = & Rr^n \quad (R+d)r^{n-1} + \ldots + [R+(n-2)d]r^2 + \\ & \qquad\qquad + [R+(n-1)d]r \\ \hline Br - B = & Rr^{n+1} + dr^n \quad + dr^{n-1} + \ldots \quad + dr^2 - Rr - ndr + dr; \end{array}$$

sakārtojam locekļus, apvienojot tos, kur nav d un savukārt tos, kur ieiet d, ņemot dr aiz iekavām;

$$B(1+i) - B = Rr^{n+1} - Rr + dr(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + 1 - n);$$

ņemot Rr no labās puses pirmiem divi locekļiem aiz iekavām un izteicot $r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + 1$ kā ģeometriskās progresijas summu, dabūjam

$$B + Bi - B = Rr(r^n - 1) + dr\left(\frac{r^n - 1}{r - 1} - n\right);$$

$$Bi = Rr(r^n - 1) + dr\left(\frac{r^n - 1}{r - 1} - n\right);$$

dalot abas puses ar $i = r - 1$, dabūjam, kā

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{R}r(r^n - 1)}{r - 1} + \frac{dr}{r - 1}\left[\frac{r^n - 1}{r - 1} - n\right] \quad \ldots\ldots (25)$$

$$\text{jeb } \mathfrak{B} = \mathfrak{R}s_{\overline{n|}} + \frac{dr}{i}[1 + s_{\overline{n-1|}} - n] \quad \ldots\ldots (25_1)$$

ja rente ir postnumerando rente, tad labās puses visos locekļos reizinātājs r būs par vienu pakāpi zemāks; tāpēc

$$\mathfrak{B}' = \frac{\mathfrak{R}(r^n - 1)}{r - 1} + \frac{d}{r - 1}\left[\frac{r^n - 1}{r - 1} - n\right] \quad \ldots\ldots (25')$$

$$\text{un } \mathfrak{B}' = \mathfrak{R}(1 + s_{\overline{n-1|}}) + \frac{d}{i}[1 + s_{\overline{n-1|}} - n] \quad \ldots (25_1').$$

Rentes tagadējo vērtību atradīsim, beigu vērtības diskontējot ar r^n; tāpēc

$$\mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{R}(r^n - 1)}{(r - 1)r^{n-1}} + \frac{d}{r - 1}\left[\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)} - \frac{n}{r^{n-1}}\right] =$$

$$= \mathfrak{R}_{|n}a + \frac{d}{i}\left({}_{|n}a - nv^{n-1}\right) \quad \ldots\ldots (26)$$

$$\mathfrak{L}' = \frac{\mathfrak{R}(r^n - 1)}{(r - 1)r^n} + \frac{d}{i}\left[\frac{r^n - 1}{r^n(r - 1)} - \frac{n}{r^n}\right] = \mathfrak{R}_{|n}a + \frac{d}{i}\left({}_{|n}a - nv^n\right). \ (26').$$

Ja rente mainās dildama, tad d jāņem ar mīnus zīmi, un tāpēc iepriekšējās formulās tā daļa, kas sākas ar d, dabū priekšā mīnus zīmi, piem.,

$$L=R\,{}_{|n}a-\frac{d}{i}\left({}_{|n}a-nv^{n-1}\right);$$

līdzīgā kārtā izveidojas citas mainīgās laika rentes formulas.

Atbīdītās mainīgās rentes tagadējo vērtību dabūsim, diskontējot praenumerando rentes tagadējo vērtību ar v^m, ja m gadi ir starplaiks; zinot sākuma vērtību, viegli atrast beigu vērtību.

P i e m ē r s. Fabrikants nopērk no izgudrotāja patenti un apņemas maksāt tam 20 gadu laikā praenumerando gada renti, kuŗas pirmais maksājums ir Ls 1000 un tā ik gadus pieaug par Ls 100. Aprēķināt, kādu summu varētu izgudrotājs saņemt tūlīt, ja aprēķiniem par pamatu liek 5%.

Pēc (26) form.

$$L=1000\,.\,{}_{|20}a+\frac{100}{0{,}05}\left({}_{|20}a-20v^{19}\right)=$$

$$=1000\,(1+{}_{|19}a)+2000(1+{}_{|19}a-20\,v^{19})=1000\,.\,13{,}08532086+$$
$$+2000(13{,}08532086-20\,.\,0{,}39573396)=13085{,}321+$$
$$+2000\,.\,5{,}17064166=13085{,}321+10341{,}283=23426{,}60$$

tā tad

$$L=\text{Ls }23426{,}60.$$

29. Mūžīgās rentes.

1. Ja gadu skaits n, kas noteic rentes ilgumu, ir neaprobežoti liels, citiem vārdiem, bezgalīgi liels, tad runā par mūžīgo renti.

Mūžīgas pastāvīgas praenumerando rentes tagadējo vērtību L_∞ viegli atradīsim no sakarības

$$L=\frac{R(r^n-1)}{r^{n-1}(r-1)}=\frac{R}{r-1}\,.\left(\frac{r^n-1}{r^{n-1}}\right)=\frac{R}{r-1}\left(r-\frac{1}{r^{n-1}}\right);$$

ņemot vērā, ka ar n augšanu $\frac{1}{r^{n-1}}$ pamazinās, un ja n tiecas uz bezgalību, tad $\frac{1}{r^{n-1}}$ tiecas uz nulli; tāpēc

$$L_\infty=\lim_{n\to\infty}L=\lim_{n\to\infty}\,.\,\frac{R}{r-1}\,.\left(r-\frac{1}{r^{n-1}}\right)=\frac{Rr}{r-1}=\frac{R\,r}{i};$$

tā tad

$$\mathcal{L}_\infty = \frac{Rr}{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

un gluži līdzīgā kārtā postnumerando rentes tagadējā vērtība ir

$$\mathcal{L}'_\infty = \frac{R}{i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27').$$

Redzam, ka mūžīgas rentes tagadējā vērtība nav nekas cits, kā kapitālizēts rentes maksājums; tā tad rentes maksājumi ir vienkāršie augļi no rentes tagadējās vērtības.

Piemērs. Atrast, ar kādu vienreizēju likmi var nopirkt postnumerando mūža renti Ls 3000, ja rēķina 4%.

Pēc (27') form.

$$L'_\infty = \text{Ls}\,\frac{3000}{0{,}04} = \text{Ls } 75000,\!—.$$

2. Atbīdītas mūžīgas rentes tagadējo vērtību atradīsim, izejot no (21_1) sakarības;

$$L = \frac{R(r^n-1)}{r^{n+m-1}(r-1)} = \frac{R}{(r-1)r^{m-1}} \cdot \frac{r^n-1}{r^n} = \frac{R}{(r-1)r^{m-1}}\left(1-\frac{1}{r^n}\right);$$

$$\mathcal{L}_\infty = \frac{R}{(r-1)r^{m-1}} = \frac{R}{i} \cdot v^{m-1} \quad \ldots\ldots \quad (28).$$

Piemērs. Atrast tagadējo vērtību mūžīgai rentei, kas sākas pēc 9 gadiem un ir Ls 600 liela, ja aprēķina 3%.

Pēc (28) formulas

$$L_\infty = \text{Ls}\,\frac{600}{0{,}03} \cdot v^8 = \text{Ls } 20000 \cdot 0{,}78940923 = \text{Ls } 15788{,}18.$$

30. Renšu pārveidošana.

1. Ja rentes maksājumu un kapitālizācijas termiņi nesakrīt, tad, lai varētu lietot finanču tabulas, jāprot pārveidot rente tā, lai rentes maksājumu termiņi sakristu ar kapitālizācijas termiņiem. Piem., ja kādas postnumerando gada rentes lielums ir R un augļus kapitālizē ik par gada $\frac{1}{m}$ daļu, tad gada rente jāpārveido m-reizes gadā maksājumā postnumerando rentē, kuras lielumu apzimēsim ar $R^{(m)}$. Tad dabūsim šādu sakarību, ņemot vērā, ka beidzamais rentes maksājums $R^{(m)}$ būs gada beigās, priekšpēdējais līdz gada beigām pārvērtīsies summā $R^{(m)} r^{\frac{1}{m}}$ u. t. t. un pirmais maksājums pārvērtīsies summā $R^{(m)} r^{\frac{m-1}{m}}$;

tāpēc $R=R^{(m)}+R^{(m)}r^{\frac{1}{m}}+R^{(m)}r^{\frac{2}{m}}+\ldots+R^{(m)}r^{\frac{m-1}{m}}=$

$$=R^{(m)}\left[1+r^{\frac{1}{m}}+\ldots+r^{\frac{m-1}{m}}\right]=R^{(m)}\frac{r^{\frac{m}{m}}-1}{r^{\frac{1}{m}}-1}=R^{(m)}\cdot\frac{r-1}{\sqrt[m]{r}-1};$$

tā tad

$$R=R^{(m)}\frac{r-1}{\sqrt[m]{r}-1}\ \ldots\ldots\ldots\ (29)$$

$$\text{un}\quad R^{(m)}=\frac{R(\sqrt[m]{r}-1)}{r-1}\ \ldots\ldots\ldots\ (29_1).$$

Praenumerando rentes gadījumā, ja tā jāpārveido vairākreizējā postnumerando rentē, reducēsim visus gada maksājumus uz gada sākumu; pirmais maksājums būs pēc $\frac{1}{m}$ gada daļas no gada sākuma, otrs — pēc $\frac{2}{m}$ gada daļām u. t. t.

tāpēc

$$R=R^{(m)}v^{\frac{1}{m}}+R^{(m)}v^{\frac{2}{m}}+\ldots+R^{(m)}v=R^{(m)}\left[v^{\frac{1}{m}}+v^{\frac{2}{m}}+\ldots+v\right]=$$

$$=R^{(m)}v^{\frac{1}{m}}\left[1+v^{\frac{1}{m}}+\ldots+v^{\frac{m-1}{m}}\right]=R^{(m)}v^{\frac{1}{m}}\frac{1-v}{1-\sqrt[m]{v}};$$

tā tad

$$R=R^{(m)}v^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{1-v}{1-\sqrt[m]{v}}\ \ldots\ldots\ldots\ (30)$$

$$\text{un}\quad R^{(m)}=\frac{R\left(1-\sqrt[m]{v}\right)}{1-v}\cdot r^{\frac{1}{m}}\ \ldots\ldots\ldots\ (30_1).$$

Ja arī daļu maksājumi ir praenumerando, tad

$$R=R^{(m)}\frac{1-v}{1-\sqrt[m]{v}}\ \ldots\ldots\ldots\ (31)$$

$$\text{un}\quad R^{(m)}=\frac{R\left(1-\sqrt[m]{v}\right)}{1-v}$$

P i e m ē r s. Postnumerando gada rente ir Ls 4800; tā jāpārveido četrreiz gadā maksājamā postnumerando rentē; atrast gada ceturkšņa rentes maksājumus, ja aprēķina 5%.

Pēc (29_1) formulas

$$R^{(4)}=\text{Ls}\ \frac{4800(\sqrt[4]{1{,}05}-1)}{0{,}05}=\text{Ls}\ 96000\,.\,0{,}01227223=$$

$$=\text{Ls}\ 1178{,}11.$$

Tā tad šinī gadījumā vienalga, vai rīkoties ar postnumerando gada renti, Ls 4800 lielu, vai ar postnumerando gada ceturkšņa renti, Ls 1178,11 lielu.

2. Līdzīgā kārtā rīkojas citos renšu pārveidošanas gadījumos.

Piemērs. Tūlītēja, 10 gadus ilgstoša praenumerando Ls 600,– liela gada rente jāpārveido 5 gadus atbīdītā un tad 8 gadu laikā maksājamā rente. Aprēķināt, cik liela ir pārveidotā rente, ja aprēķina 4%.

Aprēķināsim kā vienas, tā otras rentes tagadējo vērtību; šīm tagadējām vērtībām jābūt vienlīdzīgām; tāpēc, izlietojot (20) un (21) form., dabūsim:

$$600_{|10}a = x \,.\, v^5{}_{|8}a$$

$$\text{jeb } 600(1+{}_{|9}a) = x \,.\, v^5(1+{}_{|7}a),$$

no kurienes

$$x = \frac{600(1+{}_{|9}a)}{v^5 \,.\, (1+{}_{|7}a)} = \frac{600 \,.\, 7{,}43533161}{0{,}82192711 \;\; 7{,}0020\,5467};$$

iznākums jādabū ar tuvinājumu līdz 0,01 (līdz 1 sant.); ņemot to vērā, dabūjam skaitītāja parupju tuvinājumu kā 5000 un saucēja — kā 6; tāpēc rezultāta veselajā daļā ieies 3 zīmīgi cipari un bez tam būs vēl vajadzīgas 2 decimālzīmes, tā tad pavisam 5 zīmīgie cipari; saucējs jeb dalītājs, kuŗa pirmais cipars nebūs mazāks par 5, jāņem tāpēc pavisam ar 6 zīmīgiem cipariem, skaitītājs jeb dalāmais tā tad ar 7; tādā kārtā ar saīsinātu reizināšanu un beidzot dalīšanu dabūjam, ka

$$x = \frac{5061{,}198}{5{,}75518} = 879{,}42;$$

tā tad meklējamā rente ir Ls 879,42.

31. Grunts gabalu vērtējums.

1. Kāda izrentēta grunts gabala tagadējo vērtību var aprēķināt: 1) pēc zemes cenas un ēku vērtības, noteicot pēdējo tā, ka no izdevumiem par jaunbūvi atvelk, atkarībā no būves vecuma, nolietojuma daļu, un 2) pēc ienesīguma. Aprēķinot vērtību pēc ienesīguma, pieņemsim, ka pēc izdevumu atvilkšanas, kas iziet nodokļiem, pārvaldīšanai, remontiem u. tml., paliek ik gadus n gadu laikā (līdz būves nolietošanai) tīrs atlikums A. Pēc n gadiem grunts gabalu var pārdot vairs tikai par V', pie kam šinī summā ieiet zemes vērtība un ēku vecā materiāla vērtība. Tāpēc šī gruntsgabala tagadējā vērtība ir n-gadējas

postnumerando rentes tagadējā vērtība un pēc n gadiem maksājama vai saņemama kapitāla V' tagadējā vērtība; tāpēc

$$V = \mathcal{A}\, a_{\overline{n|}} + V'v^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

2. Ja no tīrā ienākuma katru gadu atvelk būvē ieguldītā kapitāla atmaksai (buvfondam) zināmu daļu B tā, lai šie, atvilkumi noguldīti uz augļu augļiem par $p^0/_0$, pēc n gadiem dotu kapitālu $V-V'$, t. i. tādu kapitālu, kas ļauj vērtību V' papildināt līdz V un tā tad nopirkt gruntsgabalu, līdzvērtīgu pirmajam gruntsgabalam, tad

$$V - V' = B s_{\overline{n|}} = B(1 + s_{\overline{n-1|}}) \text{ un}$$

$$B = \frac{V - V'}{1 + s_{\overline{n-1|}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33).$$

Ja nu no jaunā gruntsgabala ienākumiem tāpat krāj būvfondu, no A atvelkot ikgadus B, tad pēc nākamiem n gadiem var atkal atjaunot gruntsgabalu u. t. j.; tāpēc ienākumu $A-B$ var uzlūkot kā mūžīgu renti, kuŗas tagadējā vērtība un līdz ar to gruntsgabala vērtība šinī gadījumā izteicas kā

$$V = \frac{\mathcal{A} - B}{i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Formulā (33), pēc kuŗas aprēķinām B, ieiet V, tāpēc to tādā veidā nevar lietot, jo V aprēķināšanai pēc (34) formulas savukārt jāzin B. Uzlūkojot tāpēc (33) un (34) sakarību kā nolīdzinājumus, zīmējoties uz V un B, atrisināsim tos un dabūsim, ka

$$\begin{array}{l|l} B s_{\overline{n|}} = V - V' & i \\ B \quad = A - Vi & \end{array}$$

$$B s_{\overline{n|}}\, i + B = A - V' i \text{ jeb } B\left(i \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} + 1\right) = A - V' i$$

un beidzot

$$B = v^n(\mathcal{A} - V'i);$$

tagad, zinot B, viegli varam lietot (34) formulu.

Vingrinājumi.

1. Aprēķināt kapitālu, kāds būs sakrājies uz 1930. g. 31. decembri, ja noguldа uz augļu augļiem: 1925. g. 20. janv. Ls 450,—, 1925. g. 25. maijā Ls 100,—, 1926. g. 8. junijā Ls 600,—, 1926. g. 15. dec. Ls 800,— un 1927. g. 8. martā Ls 690,— un ja līdz 1928. g. beigām maksā par noguldījumiem $6^0/_0$, bet no 1929. g. 1. janv. $5^0/_0$.

2. Sastādīt lielumu $s_{\overline{1}|}$, $s_{\overline{2}|}$, . . . , $s_{\overline{15}|}$ tabulu procentu likmei 4.

3. Mājas īpašnieks maksā par savas mājas apdrošināšanu no mājas vērtības Ls 60 000 ik gadus 1‰ (vienu promilli). Aprēķināt, kāds kapitals sakrājas 30 gados no šiem maksājumiem, ja par tiem rēķina 6%.

4. Kāda persona maksā apdrošināšanas iestādei ik gadus Ls 150 lielu premiju tik ilgi, kamēr tā dzīvo, par ko šīs personas nāves gadījumā viņas mantinieki var saņemt Ls 8000,—. Apdrošinātā persona nomirst pēc 15 gadiem. Aprēķināt, cik liela summa no minētiem maksājumiem (premijām) būtu sakrājusies līdz nāves dienai, ja maksājumus noguldītu bankā, kas maksā 5% un aprēķina augļu augļus un cik ir pelnījusi vai zaudējusi šinī gadījumā apdrošināšanas iestāde.

5. Ierēdnis grib *a*) 3 *b*) 5 *c*) 10 un *d*) 15 gadu laika sakrāt Ls 1000,— ar mēneša noguldījumiem krājkasē, kas maksā 1) 6% un 2) 8% un aprēķina augļu augļus. Aprēķināt, cik jānogulda ik mēnešus.

6. Aprēķināt 4. uzd. minētā gadījumā, pēc cik ilga laika no apdrošināšanas dienas būs sakrājies no gadskārtējām iemaksām (premijām) līdz ar augļu augļiem tik liels kapitals, kādu saņem mantinieks nāves gadījumā.

7. Atrast, ar kādu procentu likmi jākapitālizē kārtējie noguldījumi Ls 600 lieli, lai 8 gadu laikā sakrātos Ls 5526,60 liels kapitāls.

8. Aprēķināt, ar kādu procentu likmi jākapitalizē kārtēj noguldījumi, Ls 840 lieli, lai 10 gadu laikā sakrātos Ls 10 686,25

9. Aprēķināt, kāds kapitāls sakrājies 8 gados no Ls 500 lieliem gadskārtējiem noguldījumiem, ja tos kapitālizē divreiz gadā un gada procentu likme ir 6%.

10. Atrast, kāds kapitāls sakrāsies 6 gadu laikā no noguldījumiem, Ls 400 lieliem, kuŗus izdara ik pusgadus, bet augļus kapitālizē vienreiz gadā.

11. Aprēķināt, ar kādu vienreizēju iemaksu var nopirkt 15 gadus ilgstošu postnumerando renti, ja aprēķiniem par pamatu pieņem 6%.

12. Aizņēmuma deldēšanai jāmaksā ik gadus 17 gadu laikā postnumerando Ls 1774. Aprēķināt, cik liels bijis aizņēmums, ja par to rēķina 5%.

13. Aprēķināt, cik lielu gadskārtēju postnumerando renti

varēs saņemt 18 gadu laikā, ja vienreizēji iemaksā Ls 10 000 un par noguldījumiem maksā 4,5%.

14. Atrast 5 gadus atbīdītas un tad 10 gadus ilgstošas rentes lielumu, ko var saņemt par Ls 8500 lielu vienreizēju likmi, ja aprēķiniem par pamatu pieņem 4%.

15. Kāda persona pērk 10 gadus atbīdītu un pēc tam 15 gadus ilgstošu renti, maksājot starplaikā praenumerando ik gadus Ls 500 lielu premiju. Aprēķināt, cik lielu gada renti varēs saņemt šī persona, ja aprēķiniem par pamatu liek 5%.

16. Kāda persona nogulda 1925. g. 1. maijā Ls 800 un katrā nākamā gadā par 10% vairāk nekā iepriekšējā gadā. Aprēķināt, cik liels kapitāls būs sakrājies uz 1932. g. 30. aprili, ja aprēķiniem par pamatu pieņem 3,5%.

17. Atrast, par kādu pastāvīgu summu pamazinās praenumerando gada rente, kuŗas tagadējā vērtība ir Ls 15 000 un kuŗa ilgst 12 gadus, ja tās pirmais maksājums ir Ls 2000 un aprēķiniem par pamatu pieņem 4,5%.

18. Kāda persona apņemas maksāt apdrošināšanas iestādei ik gadus praenumerando Ls 800 pirmo 10 gadu laikā un pēc tam katru gadu par Ls 50 mazāk. Kāda summa sakrātos no šiem maksājumiem 15 gadu laikā, ja par tiem aprēķinātu 4%.

19. Fabrikas būvei un iekārtai vajadzīgs Ls 300 000 liels kapitāls. Aprēķināt, par cik ilgu laiku atmaksāsies fabrika, ja ieguldītā kapitāla deldēšanai ik gadus var atlicināt Ls 25800 un par ieguldīto kapitālu rēķina 5%.

20. Kāda persona saņem 25 gadu laikā praenumerando gada renti, Ls 2000 lielu. Šī summa izrādās dzīves vajadzībām par nepietiekošu, tāpēc minētā persona grib saņemt Ls 25 000 gadā. Aprēķināt, cik ilgi varēs saņemt minētā persona palielinātu gada renti, ja aprēķiniem par pamatu pieņem 4%.

21. Rentes saņēmējs grib savu renti, kas sākās pēc 5 g., ilgst 15 gadus un kuŗas lielums ir Ls 1500, pārveidot rentē uz citiem nosacījumiem tā, lai rente sāktos pēc 3 gad. un to izmaksātu 20 semestru laikā katra semestra sākumā. Atrast, cik liels būs katra semestra maksājums, ja banka aprēķina 5% un augļu augļus.

22. Aprēķināt, cik ilgi kapitālam, Ls 10 000 lielam, jāatrodas apgrozībā uz augļu augļu augļiem, rēķinot 5%, lai pēc tam 20 gadu laikā varētu saņemt Ls 2500 lielu praenumerando gada renti.

23. Ķāda persona nogulda ik gadus bankā 10 gadu laikā zināmu summu, ļauj 10 gados tādā veidā uzkrātam kapitālam augt vēl 5 gadus un tad sāk saņemt nākamo 20 gadu laikā praenumerando gada renti, Ls 2500 lielu. Atrast, cik bija jānogulda katru gadu, ja par noguldījumiem rēķina 4% un augļus kapitālizē ik gadus.

24. Meža gabals dod pēc 15 gadiem pirmo reizi un tad katru gadu turpmāk tādu malkas daudzumu, kuŗa vērtība ir Ls 3000. Aprēķināt, kāda ir meža gabala tagadēja vērtība, ja procentu likme ir 4%.

25. Valsts budžetā 10 gadu laikā var atlicināt katru gadu dzelzceļa būvei Ls 1 000 000. Lai varētu ķerties pie būves nekavējoties, valsts izdara aizņēmumu par 5%, kuŗa deldēšanai nāk minētās budžeta summas. Aprēķināt, cik liela aizņēmuma summa.

Ceturtā nodaļa.

VI. Ilgtermiņa aizņēmumi un to deldēšana.

32. Aizņēmuma deldēšanas veidi.

1. Ilgtermiņa aizdevuma dzēšanu jeb deldēšanu, ņemot vērā, ka par aizņēmumu jāmaksā augļi un ari pats aizņēmums jādzēš, var izdarīt dažādi, pie kam tūlīt varam izšķirt divus galvenos veidus.

a) Var maksāt norunātos termiņos augļus par visu parādu vai nu par notecējušo periodu vai ari par kādu periodu uz priekšu, pie kam pirmā gadījumā runā par dekursīvo augļu aprēķināšanu, un otrā gadījumā par anticipatīvo augļu aprēķināšanu, un pašu parādu var nolīdzināt tā, ka visu summu maksā uz reizi; lai to varētu izdarīt, tad jākrāj deldēšanas fonds; šādu deldēšanas fondu var sakrāt vai nu ar nenoteikta lieluma un neperiodiskiem noguldījumiem, vai ari ar noteikta lieluma noguldījumiem noteiktā laikā tā, lai uz parāda atmaksas brīdi būtu sakrājusies tik liela summa, cik vajadzīgs parāda nomaksai; pēdējo parādu deldēšanas veidu, ko bieži lieto Anglijā un pie mums vasts zemes banka, sauc par *sinking fund*·

b) Parādu atmaksā pa daļām un par atlikušo parādu maksā augļus dekursīvi vai anticipatīvi. Bez tam pati deldēšana var notikt dažādi: *aa*) deldēšanas summa var būt pastāvīga un *bb*) deldēšanas summa var mainīties.

Atkarībā no aizņēmuma nosacījumiem rodas vēl dažādas īpatnības parāda dzēšanā; tās apskatīsim sakarā ar atsevišķiem aizņēmumu veidiem.

2. Galvenais uzdevums parādu deldēšanas rēķinos — sastādīt deldēšanas plānu, kas rādītu ikvienā brīdī parāda stāvokli: cik liels parāds vēl ko maksāt, cik jau nomaksāts, cik liela summa katrā maksāšanas temiņā vajadzīga augļiem un parāda dzēšanai. Līdz ar to viens no pirmajiem jautājumiem deldēšanas plāna sastādīšanā ir tas, lai atrastu, cik liela ikvienā gadā parāda deldēšanas summa; ja to zinām, tad pārējie jautājumi atrisināmi samērā viegli. Visbiežāk sastopams

tāds parāda dzēšanas veids, kur parādu mazina ar daļu nomaksām; tāpēc vispirms aplūkosim šo veidu pēc dekursīvo augļu aprēķināšanas paņēmiena.

33. Parāda deldēšana ar vienlīdzīgām deldēšanas summām katrā periodā.

1. Ja parāda deldēšanas summas vienlīdzīgas katrā periodā, tad tās var viegli atrast — parāda lielums jādala ar periodu skaitu un līdz ar to pavisam viegli sastādīt deldēšanas plānu.

Piemērs. Ls 100 000 liels parāds jāatmaksā 5 gadu laikā, skaitot no 1926. g. 1. apr. vienlīdzīgās daļās, katra gada 31. martā, pie kam rēķina 4% (dekursīvi). Sastādīt deldēšanas plānu.

Ikgadēja parāda deldēšanas summa te būs Ls 100 000 : 5 = = Ls 20 000; augļi pirmā gadā būs no Ls 100 000, otrā — no Ls 80 000; trešā no Ls 60 000 u. t. t. Tāpēc deldēšanas plāns izteiksies šādā veidā.

Deldēšanas plāns.

P=Ls 100 000; D=Ls 20 000; n=5; p=4%.

Termiņi	Parāds līdz maksāšanas termiņam	Maksājumi			Piezīmes
		augļi	deldēšanas summa	gada maksājumi	
1927. g. 31. m.	100 000	4000	20 000	24 000	
1928. g. 31. „	80 000	3200	20 000	23 200	
1929. g. 31. „	60 000	2400	20 000	22 400	
1930. g. 31. „	40 000	1600	20 000	21 600	
1931. g. 31. „	20 000	800	20 000	20 800	
		12 000	**100 000**	**112 000**	

2. Redzam, ka gada maksājumi sastādas no atlikušās parada daļas augļiem un parāda deldēšanas summas; šādus gada maksājumus sauc par annuitātēm (no latīņu vārda *annus* — gads), vārdu annuitāte parasti lieto plašākā nozīmē — to attiecina ne tikai uz gada maksājumiem, bet vispār uz periodiskiem (pusgada, gada ceturkšņa u. tml.) maksājumiem, kuŗos ietilpst augļi par parādu un parāda deldēšanas summa.

Šinī gadījumā annuitātes ar katru maksājumu pamazinās un, proti, pamazinās par augļiem no iepriekšējas deldēšanas summas, mūsu piemērā par augļiem no Ls 20 000, t. i. par Ls 800. Šis parāda deldēšanas veids aprēķinu ziņā ļoti vienkāršs, bet praksē to lieto retāk, jo te no sākuma ir lielākas annuitātes, kas apgrūtina maksātāju tādā ziņā, ka parasti ilgtermiņa aizņēmumu ņem kāda uzņēmuma ierīkošanai, bet uzņēmums kļūst spējīgāks maksāt ar tā attīstību, tā tad parasti vēlāk. Tāpēc lieto vai nu tādu deldēšanas veidu, kur visas annuitātes vienlīdzīgas (vai gandrīz vienlīdzīgas), vai arī kur annuitātes ar laiku pieaug (pastiprināta deldēšana).

34. Parāda deldēšana ar vienlīdzīgām annuitātēm.

1. Pieņemsim, ka parāds P jādzēž n gados ar vienlīdzīgiem maksājumiem — annuitātēm A, pie kam par parādu rēķina $p^0/_0$. Annuitāte A sastādīsies no parāda atlikušās daļas augļiem a un deldēšanas summas D.

Atradīsim vispirms annuitāti A. Protams, ka visu maksājumu tagadējai vērtībai jābūt tik lielai, kāds ir parāds. Ja annuitātes būtu vienu latu lielas, tad viņu tagadējā vērtība būtu $|_n a$, jo annuitāti, t. i. augļus un deldēšanas summu dekursīvos aprēķinos maksā par notecējušo periodu; bet ja annuitāte ir A, tad visu viņu tagadējā vērtība ir $A.|_n a$; tāpēc

$$P = A|_n a \quad . \quad . \quad . \quad (35) \text{ jeb } P = \frac{A(r^n - 1)}{r^n(r-1)} \quad . \quad . \quad . \quad (35_1).$$

Šīs sakarības ļauj viegli aprēķināt annuitāti A, jo A var uzlūkot kā postnumerando renti un P kā šādas rentes tagadējo vērtību, tāpēc

$$A = \frac{P}{|_n a} \text{ jeb } A = \frac{P . r^n (r-1)}{r^n - 1}$$

Tā tad A var viegli atrast vai nu ar finanču tabulu palīdzību, kurās ievietotas lielumu $|_n a$ nozīmes, vai ar logaritmu tabulām.

Rīkojoties ar finanču tabulām, nākas dalīt ar $|_n a$; lai atvieglotu dalīšanu, parasti dalītāju $|_n a$ izteic kā reizinātāju, pieņemot, ka $\frac{1}{|_n a} = c_{\overline{n}|}$, kur $c_{\overline{n}|}$ tā tad ir lieluma $|_n a$ apgriezsts lielums, un tad sastāda lieluma $c_{\overline{n}|}$ nozīmēm tabulas. Šādu tabulu sastādīšana būs grūtāka nekā līdz šim lietoto tabulu sastādīšana, jo te nāksies lielumus $c_{\overline{n}|}$ atrast, dalot 1 ar attiecīgo lieluma $|_n a$ nozīmi. Bet ja nu tādas tabulas reizi sastādītas, tad rīkoties ar tām var visai ērti.

Lieluma $c_{\overline{n}|}$ tabulas ievietotas grāmatas beigās (izvilkums no Spitzer'a tabulām).

Tā tad, lietojot šīs tabulas, annuitati A viegli var aprēķināt no sakarības

$$A = Pc_{\overline{n}|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35')$$

2. Kā jau minēts, annuitāte A sastādīsies no atlikušās parāda daļas augļiem un deldēšanas summas; ja pirmo deldēšanas summu apzīmēsim ar D_1, otru — ar D_2, . . . un beidzamo ar D_n, tāpat attiecīgo gadu annuitātes ar A_1, A_2, A_3, . . , A_n, tad

$$A_1 = a + D_1 = Pi + D_1;$$

otra annuitāte $A_2 = (P - D_1)i + D_2$, jo otrā gadā atlikušais parāds ir $P - D_1$;

tāpat $A_3 = (P - D_1 - D_2)i + D_3$ u. t. t.

. . . .

$$A_n = (P - D_1 - D_2 - \ldots - D_{n-1})i + D_n;$$

tā kā annuitātes vienlīdzīgas, tad

$$Pi + D_1 = (P - D_1)i + D_2 \text{ jeb } Pi + D_1 = Pi - D_1 i + D_2,$$

no kurienes $D_1 + D_1 i = D_2$ jeb $D_2 = D_1(1 + i) = D_1 r$: tā tad $D_2 = D_1 r$; tāpat dabūsim no vienlīdzības $(P - D_1)i + D_2 = (P - D_1 - D_2)i + D_3$, ka $D_3 = D_2 r$, jeb, ieliekot D_2 vietā $D_1 r$, redzam, ka $D_3 = D_1 r^2$; līdzīgā kārtā $D_4 = D_3 r = D_1 r^3$ u. t. t., un beidzot $D_n = D_{n-1} r = D_1 r^{n-1}$; tā tad $D_n = D_1 r^{n-1}$.

Tā kā $D_1 + D_2 + \ldots + D_n = P$ jeb $D_1 + D_1 r + D_1 r^2 \ldots + D_1 r^{n-1} = P$, kur iepriekšējā vienlīdzībā D_2, D_3, . . . , D_n vietā ieliktas viņu izteiksmes atkarībā no D_1 un r dažādās pakāpēs, dabūjam, ka

$D_1(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) = P$ jeb $D_1 s_{\overline{n}|} = P$, no kurienes

$$D_1 = \frac{P}{s_{\overline{n}|}} = \frac{P}{1 + s_{\overline{n-1}|}} = \frac{P(r-1)}{r^n - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Tā tad D_1 var atrast arī tieši, zinot P, $p^0/_0$ un n. Ja D_1 esam atraduši, tad D_2, D_3, . . . , D_n var viegli atrast, reizinot D_1, D_2, . . . , D_{n-1} ar r vai arī D_1 ar r attiecīgā pakāpē. Deldēšanas summas ar katru gadu pieaug, kas arī saprotams, jo annuitāte paliek tā pati, bet parāds arvienu pamazinās, tāpēc arī augļi ar katru gadu pamazinās; saprotams, ka deldēšanas summa pieaug par augļiem no iepriekšējās deldēšanas summas. Parāda atlikums pēc k gadiem P_k izteiksies tādā veidā:

$$P_k = P - (D_1 + D_2 + \ldots + D_k) = P - (D_1 + D_1 r + \ldots + D_1 r^{k-1}) =$$
$$= P - D_1 s_{\overline{k}|} = P - D_1 (1 + s_{\overline{k-1}|})\text{; tā tad}$$
$$P_k = P - D_1 (1 + s_{\overline{k-1}|}) \ldots\ldots \quad (37)$$

to var izteikt ari citādi, ieliekot D_1 vietā viņa nozīmi no (36) formulas; tāpēc

$$P_k = P - P \cdot \frac{r-1}{r^n - 1} \cdot \frac{r^k - 1}{r-1} = \underbrace{P\left(1 - \frac{r^k - 1}{r^n - 1}\right)}_{\text{P ņemts aiz iekavām}} = P \cdot \frac{r^n - r^k}{r^n - 1}\text{;}$$

tā tad

$$P_k = P \frac{r^n - r^k}{r^n - 1} \ldots\ldots\ldots \quad (37_1).$$

P i e m ē r s. Parāds, Ls 100 000 liels, jādzēš 9 gados ar vienlīdzīgām annuitātēm katra perioda beigās. Sastādīt deldēšanas plānu, ja par parādu rēķina 8%.

Pēc (35′) formulas

$A =$ Ls 100 000 . $c_{\overline{9}|} =$ Ls 100 000 . 0,16007971 $=$ Ls 1600,80.

Tāpēc deldēšanas plānu varam sastadīt tā, ka par ikkatru gadu aprēķinām augļus no parādā atlikuma un tos atņemam no annuitātes; tā dabūjam deldēšanas summu.

Mūsu piemērā augļi par pirmo gadu ir Ls 10 000 . 0,08 = Ls 800; tā kā annuitāte ir Ls 1600,80, tad D_1 = Ls 1600,80 — Ls 800 = Ls 800,80; tāpēc parāds uz otra gada sākumu būs Ls 10 000 — Ls 800,80 = Ls 9199,20 un augļi no šīs summas par otru gadu ir Ls 9199,20 . 0,08 = Ls 735,94; savukārt D_2 = Ls 1600,80 — Ls 735,94 = Ls 864,86 u. t. t.; tādā kārtā dabūjam pakāpeniski ikvienam gadam atbilstošo augļu un deldēšanas summu, kas ļauj uzstādīt d e l d ē š a n a s p l ā n u, kās, kā jau minēts, rāda, cik katru gadu no annuitātes iet augļiem un cik deldēšanai, kā ari to, cik katra perioda sākumā liels parāda atlikums, tā tad vispār dod skaidru pārskatu par parāda stāvokli; kā kreditors, tā debitors var savā gada bilancē ievest kā izstāvošo parādu, tā gada maksājumus augļiem un deldēšanai. Tāpēc parasti deldēšanas plānu sastāda jau aizņēmumu reālizējot, lai iepriekš būtu pārredzama visa parāda deldēšanas gaita. Mūsu piemērā deldēšanas plāns izteiksies šādā veidā.

Deldēšanas plāns.

Gadi	P gada sākumā	Maksājumi			Piezīmes
		a	D	A	
1	10000,—	800,—	800,80	1600,80	
2	9199,20	735,94	864,86	1600,80	
3	8334,34	666,75	934,05	1600,80	
4	7400,29	592,02	1008,78	1600,80	
5	6391,91	511,32	1089,48	1600,80	
6	5302,03	424,16	1176,64	1600,80	$D_6 = D_1 r^5 =$
7	4125,39	330,03	1270,77	1600,80	$= 1176,64$
8	2854,62	228,37	1372,43	1600,80	
9	1482,19	118,57	1482,23	1600,80	
	55089,57	**4407,16**	**10000,04**	**14407,20**	

No deldēšanas plāna redzam, ka 9. gada sākumā parāda atlikums ir Ls 1482,19 un beidzamā gada deldēšanas summa ir Ls 1482,23; starpība 4 santīmi ceļas no tam, ka noapaļota ir annuitāte (ar lielāku tuvinājumu tā ir Ls 1600,7971) un ari citas summas noapaļotas; tāpēc ari visas deldēšanas summas kopā dod Ls 10 000,04.

Sastādot deldēšanas plānu, tas jāprot pārkontrolēt. Vispirms šad tad pārkontrolējam deldēšanas summas, izejot no sakarības, kā $D_n = D_1 r^{n-1}$; piemēram šinī gadījumā $D_6 = D_1 r^5 = =800,80 \,.\, 1,46932808 = 1176,64$. Kad plāns novests līdz beigām, tad 1) beidzamai deldēšanas summai jābūt vienlīdzīgai ar parāda atlikumu beidzamā gada sākumā, t. i. $P_n = D_n$; 2) visām deldēšanas summām kopā jādod parāda summa, t. i. $\Sigma D = P$; 3) visiem augļu maksājumiem un visām deldēšanas summām kopā jādot visu annuitātu kopsuma (šinī gadījumā Ls 4407,16+ +Ls 10 000,04=Ls 14 407,20), t. i. $\Sigma A = \Sigma a + \Sigma D$; 4) nomaksāto augļu summai jābūt vienlīdzīgai ar augļiem no visu parādu atlikumu kopsumas (šinī gadījumā Ls 4407,16=Ls 55089,57 . 0,08), t. i. $\Sigma a = i \Sigma P$.

4. Sakarības (35), (35_1) vai (35'), kuŗās ieiet lielumi P, A, n un p, ļauj pēc dotiem trim lielumiem atrast ceturto. Visbiežāk nākas aprēķināt A; kā to dara, jau redzējām. Tāpat viegli aprēķināms lielums P. Kas zīmējas uz n aprēķināšanu, tad to var

izdarīt ar logaritmu vai finanču tabulām pilnīgi analoģiski tam, kā jau parādīts. Tiešām, no (35) formulas dabūjam, ka $Pr^n(r-1)=A(r^n-1)$ jeb $Ar^n-Pr^n(r-1)=A$, no kurienes

$$r^n=\frac{A}{A-P(r-1)} \quad \ldots\ldots (35_2);$$

logaritmējot šo izteiksmi, dabūjam, ka

$$n\,log\,r=log\,A-log[A-P(r-1)] \text{ un } n=\frac{log\,A-log[A-P(r-1)]}{log\,r}$$

Ja n aprēķināts ar vienu vai otru paņēmienu, dotu veselu gadu skaitu un bez tam vēl gada daļu, tad tas nozīmētu, ka dotā annuitāte ir tāda, ka beidzamā gadā vai vispār beidzamā periodā nebūs vajadzīga vairs pilna annuitāte.

Piemērs. Atrast, cik ilgā laikā varēs dzēst Ls 10 000 lielu parādu ar ikgadējām annuitātēm, Ls 700 lielām, ja par parādu rēķina 6%.

Pēc dabūtās sakarības $n=\frac{log\,700-log(700-600)}{log\,1{,}06}=$

$$=\frac{2{,}845\,0980-2}{0{,}0253059}=\frac{0{,}8450980}{0{,}0253059}=33{,}3953;$$ tā tad $n=33$ g. 142 d.

Parāda atlikums pēc 33 gadiem pēc (37) formulas ir $P_{33}=P-D_1(1+s_{\overline{32}|})$; $D_1=700-600=100$; tā tad $P_{33}=$ $=$ Ls 10000 — Ls 100 . 97,34316471 $=$ Ls 10 000 — Ls 9734,32 $=$ $=$ Ls 265,68; vienkāršie augļi no šīs parāda daļas par 142 d. ir Ls 265,68 . 0,06 . 0,3953 $=$ Ls 15,9408 . 0,3953 $=$ Ls 6,30; tā tad beidzamais maksājums pēc 33 g. un 142 d. no parāda uzņemšanas ir Ls 265,68 $+$ Ls 6,30 $=$ Ls 271,98.

Izejot no sakarības $r^n=\frac{A}{A-P(r-1)}$ vai sakarības $_{|n}a=\frac{P}{A}$ vai arī sakarības $c_{\overline{n}|}=\frac{A}{P}$, varam atrast n no finanču tabulām ar jau parādītiem paņēmieniem, lietojot lielumu r^n, $_{|n}a$ vai $c_{\overline{n}|}$ tabulas.

5. Grūtāk nāksies aprēķināt lielumu p, jo sakarība

$$r^n=\frac{A}{A-P(r-1)} \text{ jeb } r^nA-P(r^{n+1}-r^n)=A$$

ir $(n+1)$ pakāpes nolīdzinājums, zīmējoties uz r, kuŗu pratīsim atrisināt tikai tanī gadījumā, ja n ir neliels skaitlis. Tāpēc parasti p atrašanai lieto finanču tabulas, bet tad, kā jau redzējām (sk. 25,5), jālieto vairākkārtējā interpolācija. Lineārā interpolācija dod tuvinājumu apmēram līdz 0,01; katra jauna interpolācija dod 2 līdz 3 jaunas pareizas decimālzīmes.

Bieži praksē lieto ari citus paņēmienus. Viens no tiem ir šāds

Pēc (35_1) form. atrodam, ka

$$r-1=\frac{A}{P}\cdot\frac{r^n-1}{r^n},\ \text{jeb}\ i=\frac{A}{P}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)\ .\ .\ .\ (38);$$

šī sakarība rāda, ka i ir mazāks par $\frac{A}{P}$; tāpēc, ieliekot i vieta $\frac{A}{P}$, dabūsim lielumam i pirmo tuvinājumu $i_1=\frac{A}{P}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{A}{P}\right)^n}\right]$;

ieliekot tagad (38) sakarībā i vietā i_1, dabūsim otro tuvinājumu $i_2=\frac{A}{P}\left[1-\frac{1}{(1+i_1)^n}\right]$, kas būs tuvāks īstai i nozīmei; turpinot tāpat tālāk, dabūsim jaunus tuvinājumus $i_3, i_4, \ldots, i_n$, kas aizvien tuvāk pieies īstais i nozīmei. Šī metode ļauj sevišķi ātri un ērti atrast i, ja $\frac{A}{P}$ maz atšķiŗas no i.

No formulām, kas ļauj atrast i tieši kā doto lielumu funkciju, atzīmēsim angļu matēmatiķa Baily'a formulu:

$$i=h\frac{12-(n-1)h}{12-2(n-1)h}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (39),$$

$$\text{kur}\ h=\left(\frac{An}{P}\right)^{\frac{2}{n+1}}-1.$$

P i e m ē r s. Atrast procentu likmi, ja 11 gadu laikā var dzēst ar Ls 3000 lielām annuitātēm Ls 27757,87 lielu parādu.

Aprēķināsim vispirms pēc Baily'a formulas $z=\left(\frac{An}{P}\right)^{\frac{2}{n+1}}$; šinī gadījumā $z=\left(\frac{33000}{27\ 757,87}\right)^{\frac{1}{6}}$; tāpēc

$$\log z=\tfrac{1}{6}\ \left|\ \begin{array}{l} \log 33000 \quad\quad\ = 4,5185139 \\ -\log 27\ 757,87 = 5,5566138 \\ \hline \log z=\tfrac{1}{6}\,.\,0,0751277=0,0125213 \end{array}\right.$$

0,0125213 $\quad d=422$
4998 10292

215
211 $\quad$ 5

40
43 $\quad$ 1

$z=1{,}029251; \quad h=0{,}029251$

$$i=0{,}029251 \,.\, \frac{12-10\,.\,0{,}029251}{12-20\,.\,0{,}029251}=0{,}019251 \,.\, \frac{11{,}70749}{11{,}41498}=$$

$=0{,}030001$; tā tad $p=3{,}0001$; īstā p nozīme ir $3^0/_0$.

Pie jautājuma, ka Baily'a formula dabūjama, šeit nepakavēsimies.

35. Parāda deldēšana ar vienlīdzīgām annuitātēm, aprēķinot augļus anticipatīvi.

1. Par dažiem aizdevumiem, it īpaši par tā saucamiem hipotēku aizdevumiem pie mums, Austrijā, Ungārijā, Bavārijā u. c. zemēs mēdz aprēķināt augļus anticipatīvi, t. i., ne par notecējušo periodu, bet par kādu periodu u z p r i e k š u. Pieņemsim, ka šis periods ir gads. Tad, uzņemoties parādu p, kas atmaksājams n gados, pie kam par parādu rēķina $p^0/_0$ anticipatīvi, dabūsim šādu deldēšanas jeb amortizācijas gaitu.

Parādnieks samaksā tūlīt, uzņemoties parādu, augļus par gadu uz priekšu, t. i. samaksā, Pi, tā tad īstenībā dabū nevis P latus, bet $P-Pi$ jeb $P(1-i)$ latu lielu summu, kaut gan tam jāatmaksā parāds P pilnā vērtībā; gada beigās jāmaksā deldēšanas summa D_1; paliek parāds uz otro gadu $P-D_1$, par ko jāmaksā augļi uz priekšu, t. i., bez D_1 vēl jāmaksā augļi $(P-D_1)i$; tā tad pirmā gada annuitāte A_1 sastādīsies no $D_1+(P-D_1)i$, t. i., $A_1=D_1+(P-D_1)i$; otrā gada beigās parādnieks nomaksās deldēšanas summu D_2 un augļus par trešo gadu no parāda atlikuma $P-D_1-D_2$, t. i. pavisam otrā gada beigās nomaksās $D_2+(P-D_1-D_2)i$, kas līdz ar to ir otrā gada annuitāte A_2; tā tad $A_2=D_2+(P-D_1-D_2)i$; tādā pašā kārtā dabūsim $A_3=D_3+(P-D_1-D_2-D_3)i$ u. t. t.; beidzamā gada annuitāte A_n būs līdz ar to beidzamā deldēšanas summa D_n, jo augļu vairs nebūs par ko maksāt; tā tad

$$A_1=D_1+(P-D_1)i;$$
$$A_2=D_2+(P-D_1-D_2)i;$$
$$A_3=D_3+(P-D_1-D_2-D_3)i;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_n=D_n;$$

tā kā visām annuitātēm jābūt vienlīdzīgām, tad

$A_1=A_2=A_3=\dots=A_n$, un $D_1+(P-D_1)i=D_2+(P-D_1-D_2)i$;

$$D_2+(P-D_1-D_2)i=D_3+(P-D_1-D_2-D_3)i\dots;$$
$$D_{n-1}+(P-D_1-D_2-\dots-D_{n-1})i=D_n;$$

pirmā no šīm sakarībām dod, ka

$$D_1+(P-D_1)i=D_2+(P-D_1)i-D_2i \text{ jeb } D_1=D_2-D_2i;$$
$$D_2(1-i)=D_1;\quad D_2=\frac{D_1}{1-i};$$

tāpat dabūsim no otras sakarības, ka

$$D_2+(P-D_1-D_2)i=D_3+(P-D_1-D_2)i-D_3i \text{ jeb } D_2=D_3-D_3i$$

no kurienes $D_3=\frac{D_2}{1-i}$ jeb $D_3=\frac{D_1}{(1-i)^2}$ u. t. t.

tā kā $P-D_1-D_2-\dots-D_{n-1}=D_n$, tad no beidzamās sakarības dabūjam, ka $D_{n-1}+D_ni=D_n$, no kurienes $D_n=\frac{D_{n-1}}{1-i}$;

ņemot vērā iepriekš dabūtos rezultātus, redzam, ka $D_n=\frac{D_1}{(1-i)^{n-1}}$;

tā kā $D_1+D_2+\dots+D_n=P$, tad $D_1+\frac{D_1}{1-i}+\frac{D_1}{(1-i)^2}+\dots+$

$$+\frac{D_1}{(1-i)^{n-1}}=P \text{ jeb } \frac{D_1}{(1-i)^{n-1}}[(1-i)^{n-1}+(1-i)^{n-2}+\dots+$$
$$+(1-i)^2+(1-i)+1]=P;\quad \frac{D_1}{(1-i)^{n-1}}\cdot\left[\frac{1-(1-i)^n}{i}\right]=P,$$

no kurienes

$$D_1=\frac{Pi(1-i)^{n-1}}{1-(1-i)^n}\dots\dots\dots(40).$$

Zinot D_1, varam atrast nākamās deldēšanas summas D_2, $D_3,\dots,D_n$, dalot iepriekšējo ar $1-i$. Annuitāte radīsies kā $D_1+(P-D_1)i$, t. i., $A=D_1+(P-D_1)i$; protams, varam annuitāti atrast ari neatkarīgi no D_1, ņemot vērā, ka $A=D_1+Pi-D_1i=Pi+D_1(1-i)$ un ieliekot no (40) form. D_1 nozīmi; tādā kārtā

$$A=Pi+\frac{Pi(1-i)^n}{1-(1-i)^n}=P\left[i+\frac{i(1-i)^n}{1-(1-i)^n}\right]=$$

$$=P.\frac{i-i(1-i)^n+i(1-i)^n}{1-(1-i)^n}=\frac{Pi}{1-(1-i)^n};\text{ tā tad}$$

$$A=\frac{Pi}{1-(1-i)^n}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(41).$$

Savukārt, zinot A, var atrast D_1, jo $A=Pi+D_1(1-i)$, no kurienes

$$D_1=\frac{A-Pi}{1-i}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(42).$$

Tā tad, zinot P, n un p, varam atrast atkarībā no šiem lielumiem D_1 pēc (40) form., vai ari A pēc (41) form. un tad D_1 pēc (42) form. Ja zinām D_1, tad deldēšanas plānu nenāksies sastādīt grūti. Aprēķinus var viegli izdarīt ar logaritmu tabulu palīdzību. Bet kā tad rīkoties ar finanču tabulām?

2. Dabūjām šādu sakarību: $D_2=\frac{D_1}{1-i}$; dekursīvo augļu gadījumā sakarība lielumu D_1 un D_2 starpā bija tāda: $D_2=D_1r$; tā tad anticipatīvo augļu gadījumā $\frac{1}{1-i}$ izpilda r lomu dekursīvo augļu gadījumā; tāpēc, ja apzīmēsim $\frac{1}{1-i}$ ar q, tad $D_2=D_1q$, $D_3=D_2q$ u. t. t., un mūsu dabūtām formulām, ņemot vērā, ka $1-i=\frac{1}{q}$ un $i=1-\frac{1}{q}=\frac{q-1}{q}$, būs tāds veids:

$$D_1=\frac{P.\frac{q-1}{q}.\frac{1}{q^{n-1}}}{1-\frac{1}{q^n}}=\frac{P.(q-1)}{q^n-1};\text{ tā tad}$$

$$D_1=P.\frac{q-1}{q^n-1}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(40_1),$$

t. i. esam dabūjuši izteiksmi, kas gluži līdzīga (36) izteiksmei, tikai r vietā te stāv q.

Līdzīgā kārtā dabūsim, ka

$$A=\frac{P.\frac{q-1}{q}}{1-\frac{1}{q^n}}=P.\frac{(q-1)q^{n-1}}{q^n-1};\text{ tā tad}$$

$$A=\frac{P.q^{n-1}(q-1)}{q^n-1}\quad\ldots\ldots\quad(41_1)$$

Salīdzinot ar dekursīvo augļu gadījumā dabūto formulu $A=\frac{Pr^n(r-1)}{r^n-1}$, redzam mazu starpību: (41_1) form. labās puses skaitītājā ieiet q ar kāpinātāju $(n-1)$, bet tādā pat formulā dekursīvo augļu gadījumā r ar kāpinātāju n. Kāpēc rodas šāda starpība? Tas tāpēc, ka bez annuitātēm viens maksājums — augļi par vienu gadu no visa parāda, t. i. Pi — jau izdarīts, parādu uzņemoties, tā ka annuitātes zīmējas uz summas $P-Pi=$ $=P(1-i)$ deldēšanu; to vislabāk var redzēt, ja reducējam uz tagadējo brīdi visus maksājumus, kuŗu kopsummai jādod P; tiešām, ja diskontēsim ar $q, q^2, \ldots, q^n$ visus maksājumus, tad

$$P=Pi+\frac{A}{q}+\frac{A}{q^2}+\ldots+\frac{A}{q^n} \text{ jeb}$$

$$P-Pi=\frac{A}{q^n}(q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1);\ P(1-i)=\frac{A}{q^n}\cdot\frac{q^n-1}{q-1},$$

no kurienes $A=\frac{P(1-i)\cdot q^n(q-1)}{q^n-1}$; šī sakarība pilnīgi analoģiska ar $A=\frac{Pr^n(r-1)}{r^n-1}$, tikai, kā redzam, deldējamā summa ir $P(1-i)$; tā kā $1-i=\frac{1}{q}$, tad galu galā dabūjam to pašu (41_1) formulu:

$$A=\frac{P\cdot q^{n-1}(q-1)}{q^n-1}.$$

3. Tā tad D_1 un A aprēķināšanai anticipatīvo augļu gadījumā rodas analoģiskas formulas ar tām, kas dabūtas dekursīvo augļu gadījumā, pie kam šeit r lomu izpilda q, kur $q=\frac{1}{1-i}$; tāpēc q varam nosaukt par anticipatīvo pieauguma jeb prolongācijas reizinātāju; šo reizinātāju var vēl izteikt tā:

$$q=\frac{1}{1-\frac{p}{100}}=\frac{100}{100-p};\ \text{tā tad } q=\frac{100}{100-p}.$$

Tagad ceļas jautājums, vai anticipatīvo prolongācijas reizinātāju nevar atvietot ar dekursīvo prolongācijas reizinātāju, ņemot, protams, attiecīgo procentu likmi? Lai tas būtu iespējams, tad jāpastāv vienlīdzībai:

$$q = r \text{ jeb } \frac{100}{100-p} = 1 + \frac{x}{100};$$

no beidzamās sakarības, to pārveidojot, dabūjam, ka

$$\frac{x}{100} = \frac{100}{100-p} - 1; \quad \frac{x}{100} = \frac{100-100+p}{100-p};$$

$$x = \frac{100p}{100-p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

tā tad, ja procentu likmi anticipatīvo augļu gadījumā apzīmēsim ar p, tad attiecīgā — konformā — dekursīvo augļu likme izteiksies pēc (43) formulas; piem., ja $p = 4\%$ anticipatīvi, tad $x = \frac{400}{96} = 4^{1}/_{6}\%$. Sekojošā tabulā ievietotas dažas anticipatīvo augļu likmes un attiecīgās (konformās) dekursīvo augļu likmes

Anticipat. augļu %	Konformais dekursīvo augļu %
1	$1^{1}/_{99} = 1{,}01010$
1,5	$1^{9}/_{16} = 1{,}56250$
2	$2^{2}/_{49} = 2{,}04082$
2,5	$2^{22}/_{39} = 2{,}56410$
3	$3^{9}/_{97} = 3{,}09278$
3,5	$3^{121}/_{193} = 3{,}62694$
4	$4^{1}/_{6} = 4{,}16667$
4,5	$4^{136}/_{191} = 4{,}71204$
5	$5^{5}/_{19} = 5{,}26316$

Tabula rāda, ka ar anticipatīvo augļu procentu likmes pieaugšanu pieaug ari starpība starp anticipatīvo un dekursīvo augļu likmi. Tā, piem., 10% anticipatīvi ir tik pat daudz kā $11\frac{1}{9}\%$ dekursīvi.

Tā tad visās formulās, kuŗās ieiet q; varam to atvietot ar r, izmainot attiecīgi procentu likmi, t. i., ņemot p vietā $x = \frac{100p}{100-p}$. Tā parasti ari dara — anticipatīvo augļu aprēķināšanu noved uz dekursīvo, izmainot attiecīgi procentu likmi. Tāpēc tabulās nāksies ievietot, kā to dara Spitzer's, parasto procentu likmju starpā ari tādas, kā $1^{1}/_{99}$, $2^{2}/_{49}$ u. tml. (sk. iepriekšējo tabulu) kas atbilst procentu likmēm 1, 2, . . . anticipatīvi. Citās tabulās šīs likmes ievieto atsevišķā nodalījumā ar norādījumu, ka tās zīmējas uz anticipatīvo augļu aprēķināšanu.

4. Bet kā tad sastādīt vajadzīgās tabulas, jo ar procentu likmēm $2^2/_{49}$ u. tml. grūti rīkoties? To var viegli izdarīt tādējādi, ka sastāda tabulas reizinātājam q un tā apgrieztam lielumam w — anticipatīvo augļu diskonta reizinātājam.

Te ērtāk sākt no pēdējām. Tiešām, ja $q = \frac{1}{w}$, tad $w = \frac{1}{q}$ un $w = \frac{100-p}{100} = 1 - \frac{p}{100}$; $w^2 = \left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ u. t. t.; tas nozīmē, ka tabulas dažādām w pakāpēm var sastādīt analoģiski, kā sastādījām r pakāpēm tabulas, tikai te $\frac{p}{100}$ nāksies nevis pieskaitīt, bet atņemt.

P i e m ē r s. Sastādīt tabulas anticipatīvo augļu diskonta reizinātājam w, no 1 līdz 5 gadiem, ja procentu likme 4.

	1	
	—0,04	
1	0,96	$w = 1 - 0{,}04$
	—0,0384	4% no 0,96
2	0,9216	$w^2 = 0{,}96(1 - 0{,}04)$
	—,0036864	4% no 0,9216
3	0,884736 . . .	$w^3 = 0{,}9216(1 - 0{,}04)$
	—0,03538944	4% no 0,884736
4	0,84934656 . .	$w^4 = 0{,}884736(1 - 0{,}04)$
	—0,03397386	4% no 0,84934656
5	0,81537270 . .	$w^5 = 0{,}84934656(1 - 0{,}04)$ u. t. t.

Ja tabulas w dažādu procentu likmju un dažādu pakāpju nozīmēm sastādītas, tad var viegli sastādīt ari tabulas reizinātāja q dažādām pakāpēm, aprēķinot vispirms q^n kā w^n apgriezto lielumu lielākajam gadu skaitam, kādu gribam ievietot tabulās. Piem., ja gribam sastādīt procentu likmei 4 reizinātāja q pakāpju tabulas no 1 līdz 5 gadiem, tad aprēķinām tieši no iepriekšējām tabulām $q^5 = \frac{1}{w^5} = 1{,}22643302$; tad, ņemot vērā, ka $q^4 = \frac{q^5}{q} = q^5 \, . \, w$, dabūsim, ka

$$q^4 = q^5\left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1{,}22643302(1 - 0{,}04) = 1{,}17737570;$$

$$q^3 = 1{,}17737570(1 - 0{,}04) = 1{,}13028067;$$

$$q^2 = 1{,}13028067(1 - 0{,}04) = 1.08506944;$$

$$q = 1{,}08506944(1 - 0{,}04) = 1{,}04166667.$$

Ja tabulas lielumu q un w dažādām pakāpēm sastādītas, tad var viegli tālāk sastādīt tabulas, kas atbilst $s_{\overline{n}|}$, $_{|n}a$ un $c_{\overline{n}|}$ nozīmēm.

Tāpēc anticipatīvo augļu gadījumā A un D_1 varam aprēķināt pēc formulām $A = \frac{P}{_{|n}a}$ un $D_1 = \frac{P}{\mathfrak{s}_{\overline{n}|}}$, pieņemot par procentu likmi $\frac{100p}{100-p}$, kur p ir anticipatīvo augļu procentu likme.

Tā tad anticipatīvie augļi dod to pašu annuitāti (izņemot pirmo augļu maksājumu), ko dekursīvie augļi ar procentu likmi $\frac{100p}{100-p}$, amortizējot parādu $P(1-i)$, tikai deldēšanas gaita būs citāda. Lielumu $\frac{1}{_{|n}a}$ var izteikt arī kā reizinātāju un tam sastādīt īpašas tabulas, kā to dara Spitzer's.

P i e m ē r s. Sastādīt deldēšanas plānu aizņēmumam, Ls 100 000 lielam, kas izdarīts 1925. g. 1. aug., dzēšams 12 gados ar ikgadējām vienlīdzīgām annuitātēm, ja par to aprēķina 3% anticipatīvi.

Atradīsim vispirms D_1; redzējām, ka $D_1 = \frac{P}{\mathfrak{s}_{\overline{n}|}}$, pie kam procentu likme būs $3^9/_{97}$; tā tad

$$D_1 = \frac{100\,000}{1 + s_{\overline{11}|}} = \frac{100\,000}{14{,}26706922} = 7009{,}15;$$

$$D_2 = D_1 \,.\, q = D_1 \frac{100}{97} = 7009{,}15 \,.\, \frac{100}{97} = 7225{,}92;$$

$$D_3 = 7225{,}92 \,.\, \frac{100}{97} = 7449{,}41 \text{ u. t. t.}$$

Pirmais maksājums jeb atvilkums no aizdodamās summas, parādu uzņemoties, t. i., 1925. g. 1. aug., ir Ls 100 000 . 0,03 = Ls 3000; tad 1926. g. 1. aug. maksājamā annuitāte ir $D_1 + (P - D_1)i =$ $= 7009{,}15 + 92990{,}85 \,.\, 0{,}03 = 7009{,}15 + 2789{,}72 = 9798{,}87$; 1927. g. 1. aug. maksājamā annuitāte ir $7225{,}92 + 85764{,}93 \,.\, 0{,}03 =$

7225,92+2572,95=9798,87 u. t. t. Redzam, ka annuitāte iznāk Ls 9798,87; to varam pārbaudīt pēc formulas:

$$A = \frac{p}{1 + |_{11}a} = \frac{100\,000}{10,20525463} = 9798,87.$$

Tā tad rodas šāds deldēšanas plāns:

Termiņi	p	Maksājumi			Piezīmes
		D	a	A	
1925. g. 1. aug.	100000 —	—	3000,—	3000,—	
1926. „ 1. „	92990,85	7009,15	2789,72	9798,87	
1927. „ 1. „	85764,93	7225,92	2572,95	9798,87	
1928. „ 1. „	78315,52	7449,41	2349,46	9798,87	
1929. „ 1. „	70635,72	7679,80	2119,07	9798,87	
1930. „ 1. „	62718,40	7917,32	1881,55	9798,87	
1931. „ 1. „	54556,21	8162,19	1636,68	9798,87	
1932. „ 1. „	49141,58	8414,63	1384,24	9798,87	
1933. „ 1. „	37466,71	8674,87	1124,—	9798,87	
1934. „ 1. „	28523,54	8943,17	855,70	9798,87	
1935. „ 1. „	19303,78	9219,76	579,11	9798,87	
1936. „ 1. „	9798,87	9504,91	293,96	9798,87	
1937. „ 1. „	—	9798,87	—	9798,87	
	688216,11	100000,—	20586,44	120586,44	

36. Valsts ilgtermiņa aizdevumu iestādes.

1. Pie mums patlaban darbojas kā ilgtermiņa aizdevumu iestādes valsts zemes banka un Latvijas hipotēku banka. Par hipotēku sauc nekustamā īpašuma ieķīlāšanu, kas nav savienota ar šī īpašuma valdniecības nodošanu kreditora rokās. Tāpēc abas bankas ir hipotēku bankas, jo ari zemes banka izsniedz aizdevumus pret nodrošinājumu ar nekustamu īpašumu ieķīlāšanu, tikai zemes banka savu darbību izplata uz laukiem, hipotēku banka — uz pilsētām, miestiem u. c. apdzīvotām vietām ar pilsētu raksturu. Valsts zemes bankas statūti pieņemti Latvijas satversmes sapulces 1922. g. 21. marta kopsēdē. Statūtu pirmais pants nosaka, ka valsts zemes banka dibināma aizdevumu izsniegšanai uz lauku nekustamiem īpašumiem. Turpmākie panti paredz, ka ilggadēji aizdevumi izsniedzami vienīgi bankas ķīlu zīmēs, pie kam banka izsniedz aizdevumus a) zemes iegūšanai, b) mantošanas tiesību nokārtošanai, c) apbūvēšanai un meliorācijai, d) lauksaimnieciskiem pasākumiem, e) senāko hipotēku parādu nokārto-

anai. Aizdevumus izsniedz pret nekustamu īpašumu ieķīlāšanu uz 13, 18, 28, 41 un $55^1/_2$ gadiem; aizdevumi nedrīkst pārsniegt $^3/_4$ no nekustamo īpašumu bankas noteiktās vērtības. Ķīlu zīmju aizņēmēju pienākums ir līdz sava parāda dzēšanai maksāt par katriem notecējušiem 6 mēnešiem 1. maijā un 1. novembrī pastāvīgus pusgada maksājumus, kuŗos ietilpst a) rentes par aizdevumu, b) parāda deldēšanas procentuāla maksa, c) bankas izdevumu segšana. Rentes normu, kuŗu banka ņem par aizdevumu un aizdevumu termiņam piemērotu deldēšanas procentu, nosaka ar parādu dzēšanas plānu, kuŗu apstiprina finanču ministrs. No regulāriem deldēšanas maksājumiem krājas parāda deldēšanas fonds, kuŗam pieskaita ari katru pusgadu rentes par iepriekš ienākušām summām. Deldēšanas fonds uzskatāms kā ieķīlātā nekustamā īpašuma neatdalāms piederums, un tālab pie īpašuma pārdošanas vai atsavināšanas citādā ceļā, deldēšanas fonds pāriet uz jauno īpašnieku. Ar deldēšanas fondu parāds uzskatāms par dzēstu, ja fonds sasniedzis izsniegto aizdevumu summu. Par ķīlu zīmēm jāmaksā 6% gadā. Neatkarīgi no ilggadējiem ķīlu zīmju aizdevumiem, zemes banka var izsniegt ari aizdevumus skaidrā naudā uz īsiem termiņiem. Īsa termiņa aizdevumus izsniedz uz laiku, ne ilgāku par 3 gadiem; a) saimniecības ēku būvei, b) zemes nosusināšanas un applūdināšanas projektu izvešanai, c) zivju saimniecību un citu lauksaimniecisku pasākumu ierīkošanai, d) lauksaimniecības inventāra iegādāšanai. Sīkākus noteikumus par īstermiņa aizdevumiem apstiprinājis 1923. gada 13. augustā ministru kabinets, un pēc šiem noteikumiem par aizdevumiem jaunsaimniecībām, viensētās pārceļamām sādžu saimniecībām un pastāvošām izpostītām saimniecībūm, ja aizdevums nepārsniedz 2000 latu, maksājams 1% gadā bankas izdevumu segšanai. Pēc 2 gadiem, skaitot no aizdevumu izsniegšanas dienas, bet ne agrāk kā sākot ar 1925. g. 1. janvari, bez minētā 1% maksājami ari par aizdoto kapitālu 4% gadā. Par citiem aizdevumiem maksājami par kapitālu 6% un izdevumu segšanai 1%, skaitot no aizdevumu izsniegšanas dienas; tāpat jāmaksā ari jaunsaimniecību un izpostīto saimniecību īpašniekiem par to aizdevumu daļu, kas pārsniedz 2000 latu. Visi procenti maksājami par pusgadu uz priekšu, noteiktos termiņos. Par aizdevumiem zvejniecības atjaunošanai, kā ari kopmoderniecībām tāpat maksājami 6% par kapitālu un 1% izdevumu segšanai pusgadu uz priekšu.

1924. g. 8. janv. ministru kabinets apstiprinājis noteikumus par valsts zemes bankas aizdevumiem lauku sabiedrisko ēku būvēm, pēc kuŗiem valsts zemes banka izsniedz aizdevumus pagastu un miestu skolu un citu sabiedrisku ēku būvēm, b) tādu privātu biedrību un sabiedrību ēku būvēm pagastos un miestos, kuŗas ar savu darbību veicina kādu noteiktu, vispārnoderīgu mērķi. Aizdevumi jānodrošina ar nekustamu mantu. Aizdevumns izsniedz uz 3 gadiem; aizdevumu dzēšanai, ieskaitot augļus un pārvaldes izdevumus, jāmaksā divreiz gada laikā no 1. līdz 30. aprilim un no 1. līdz 31. oktobrim no ik 1000 latiem aizdevuma 51 lats. Šos maksājumus var pagarināt ar bankas atļauju uz nākamiem 3 gadiem u. t. t., bet ne vairāk kā 5 reizes, t. i. parādu var nomaksāt 18 gados. 1924. g. 17. jūlijā ministru kabinets apstiprinājis noteikumus par valsts zemes bankas aizdevumiem zemes iegūšanai bezzemniekiem un sīkzemniekiem, kuŗi nodarbojas ar lauksaimniecību un kuŗiem pieder pērkamai saimniecībai piemērots inventārs vai paša ģimenē ir piemērots darba spēks. Pirmos 2 līdz $2^1/_2$ gados par aizdevumu ņemams $1^0/_0$ gadā no kapitāla summas bankas izdevumu segšanai, bet pēc tam $4^0/_0$ gadā kā kapitāla augļi un $1^0/_0$ bankas izdevumu segšanai.

1924. g. 16. sept. ministru kabinets republikas satversmes 81. p. kārtībā izdevis papildinājumus un pārgrozījumus valsts zemes bankas statūtos, pēc kuŗiem 1. statūtu pants papildināts ar piezīmi, ka zemes bankai atļauts iegūt lauksaimnieciski izmantojamas zemes tālāk pārdošanai bezzemniekiem un sīkzemniekiem un ievesta statūtos nodaļa par lauku nekustamu mantu pirkšanu un pārdošanu.

1924. g. 4. okt. ministru kabinets republikas satversmes 81. p. kārtībā izdevis pārgrozījumus un papildinājumus valsts zemes bankas statūtos; šie pārgrozījumi zīmējas uz bankas pārvaldi.

2. Kā redzams no minētiem nosacījumiem, tad pēc 1922. g. 21. marta statūtiem, banka rēķina $6^0/_0$ *dekursīvi* un no deldēšanas summām krāj deldēšanas fondu, pie kam šis fonds jāsakrāj, resp. parāds jādzēš pēc statūtiem 13, 18, 28, 41 vai $55^1/_2$ gados. Tā tad aizdevuma dzēšanai nebūs vis jāsastāda *deldēšanas plāns*, bet *deldēšanas fonda plāns*, pie kam, protams, vispirms būs jāaprēķina annuitāte, pareizāk, pusgada maksājums. Ja Ls 1000 lielu parādu grib dzēst 18 gados, tad iznāk, ka pusgada annuitātē $1000 = A . a_{\overline{36}|}$ un $A = 1000 . c_{\overline{36}|}$ pie $3^0/_0$ par semestri; pēc finanču tabulām atrodam, ka

$A =$ Ls 1000.0,045.80379 $=$ Ls 45,80; procentos tas iztaisītu 4,58% no parāda.

Tā kā 3% aiziet augļiem, tad paliek deldēšanai 1,58%. Banka to noapaļo uz 1,6%, un tā tad par Ls 1000 iznāk pirmā deldēšana summa Ls 16,—. Šo pašu deldēšanas summu banka iekasē katru pusgadu, un tāpēc pēc 36 semestriem sakrājas

$B = 16.(1 + s_{\overline{35|}}) =$ Ls 16.63,27594427 $=$ Ls 1012,41;

dabūjām mazliet lielāku par Ls 1000 summu tāpēc, ka ņēmām par deldēšanas summu Ls 16; ja būtu ņēmuši precīzāku skaitli Ls 15,80379, tad $B =$ Ls 1000. Tā tad šinī gadījumā termiņa maksājums Ls 46 sadalās tā, ka Ls 30 norēķina augļiem un Ls 16 deldēšanas fondam, un tā to dara ikvienā maksāšanas termiņā, pierēķinot vēl ½% pārvaldes izdevumiem, tā kā viss termiņa maksājums ir Ls 46 + Ls 5 = Ls 51.

Līdzīgā kārtā atrodam parāda, Ls 1000 liela, deldēšanai 13 gados jeb 26 semestros semestra maksājumu $A =$ Ls 1000.$c_{\overline{26|}} =$ $=$ Ls 1000.0,5593829 $=$ Ls 55,93 jeb 5,593% no aizņēmuma summas; atvelkot 3% augļiem, deldēšanas procents iznāk 2,593% $\simeq$ $\simeq$ 2,6%. Bet zemes banka ir sadalījusi dzēšanu (sk. 139. lap. p. tabulas) 27 semestros, tāpēc

$A =$ Ls 1000.$c_{\overline{27|}} =$ Ls 1000.0,05456421 $=$ Ls 54,56

jeb procentos 5,456%; atvelkot 3% augļiem, deldēšanai iznāk 2,456%, ko banka noapaļo uz 2,5%, kas dod lielāku kļūdu nekā iepriekšējais noapaļojums, un tāpēc pēc 27 semestriem sakrājas no Ls 25 lieliem maksājumiem Ls 1017,73. Kopējs semestra maksājums šinī gadījumā būs Ls 30 + Ls 25 + Ls 5 = Ls 60.

Paraugam ievietojam zemes bankas 6% ķīlu zīmju aizņēmumu deldēšanas tabulas 13½ un 18 gados, kā ari sākumu un beigas 28½ un 41 gadiem (sk. 139. lap. p.).

3. Latvijas hipotēku bankas statūtus izdevis ministru kabinets 1924. g. 7. augustā republikas satversmes 81. p. kārtībā. Statūti nosaka, ka Latvijas hipotēku banka ir valsts uzņēmums aizdevumu izsniegšanai pret nekustamu mantu pilsētās, miestos un tādās apdzīvotās vietās, kuŗām pilsētas raksturs. Banka izsniedz ilgtermiņa aizdevumus pret nekustamu mantu, kas sastāv no zemes ar dzīvojamām, rūpniecības vai citu vajadzību mūŗa, jauktām vai koka ēkām ar piederumiem, ja iekīlājamās mantas bankas noteiktā vērtība iztaisa ne mazāk kā tūkstošlatu. Banka izsniedz aizdevumus uz seši līdz piecdesmit gadiem. Banka izsniedz aizdevumus ķīlu zīmēs pēc nominālvērtības.

Valsts zemes bankas deldēšanas fonds Ls 1000,— liela parāda dzēšanai, rēķinot 3% par semestri.

Termiņi	13½ g. 2½%	18 g. 1,6%	28½ g. 0,7%	41 g. 0,3%
1	25 —	16 —	7 —	3 —
2	50 75	32 48	14 21	6 09
3	77 27	49 45	21 64	9 27
4	104 59	66 93	29 29	12 55
5	132 73	84 94	37 17	15 93
6	161 71	103 49	45 29	19 41
7	191 56	122 59	53 65	22 99
8	222 31	142 27	62 26	26 68
9	253 98	162 54	71 13	30 48
10	286 60	183 42	80 26	34 39
11	320 20	204 92	89 67	38 42
12	354 81	227 07	99 36	42 57
13	390 45	249 88	109 34	46 85
14	427 16	273 38	119 62	51 26
15	464 97	297 58	130 21	55 80
16	503 92	322 51	141 12	60 47
17	544 04	348 19	152 35	65 28
18	585 36	374 64	163 92	70 24
19	627 92	401 88	175 84	75 35
20	671 76	429 94	188 12	80 61
21	716 91	458 84	200 76	86 03
22	763 42	488 61	213 78	91 61
23	811 32	519 27	227 19	97 36
24	860 66	550 85	241 01	103 28
25	911 48	583 38	255 24	109 38
26	963 82	616 88	269 90	115 66
27	1017 73	651 39	285 —	122 13
28	— —	686 93	300 55	128 79
29	— —	723 54	316 57	135 65
30	— —	761 25	333 07	142 72
31	— —	800 09	350 06	150 —
32	— —	840 09	367 56	157 50
33	— —	881 29	385 59	165 23
34	— —	923 73	404 16	173 19
35	— —	967 44	423 28	181 39
36	— —	1012 46	442 98	189 83
57	—	— —	1024 84	439 15
82	— —	— —	— —	1028 81

Pantu par izsniegto aizdevumu atmaksu grozījis ministru kabinets (satversmes 81. p. kārtībā) 1924. g. 4. oktobrī šādā veidā. Par izsniegto aizdevumu parādnieks maksā divreiz gadā bankas noteiktos termiņos augļus, deldēšanas naudas un sevišķas piemaksas bankas pārvaldīšanas izdevumu segšanai, pie kam augļi maksājami uz priekšu par laiku līdz nākošajam termiņam. Augļu norma, ko banka ņem par aizdevumu un aizdevumam piemērotu deldēšanas procentu nosaka bankas padome ar parāda dzēšanas plānu.

1925. g. 16. janv. bankai atļauts ari iegūt, pārdot un ieķīlāt nekustamu mantu, bet 1926. g. 14. septembrī atļauts izsniegt aizdevumus kuģniecības atjaunošanai.

1924. g. 11. okt. finanču ministrija apstiprinājusi instrukciju Latvijas hipotēku bankai. Pēc šīs instrukcijas hipoteku bankas ķīlu zīmes izlaižamas Ls 100 un Ls 500 nominālvērtībā, ar dzēšanas termiņiem 6, 9, 12, 18, 28, 41 un 50 gados.

Par aizdevumiem banka aprēķina: 8% augļu gadā par kapitālu un 1% gadā pārvaldes izdevumiem.

Aizdevumu deldēšanas summas, kapitāla augļi un bankas pārvaldes maksas apvienojamas vienā maksājumā, kas nomaksājams 2 reiz gadā, bankas noteiktos termiņos, pie kam augļi aprēķināmi un maksājami par pusgadu uz priekšu.

Kīlu zīmju aizdevumus banka izsniedz:

uz	6	gadiem	ar	deldējumu	Ls	6,65
„	9	„	„	„	„	3,90
„	12	„	„	„	„	2,56
„	18	„	„	„	„	1,29
„	28	„	„	„	„	0,50
„	48	„	„	„	„	0,17
„	50	„	„	„	„	0,08.

Sakarā ar to pusgada termiņa maksas, ieskaitot deldējumu, procentus un pārvaldes izdevumus:

ik	uz	Ls	100	par	6	gadīgu	terminu	Ls	11,15
„	„	„	100	„	9	„	„	„	8,40
„	„	„	100	„	12	„	„	„	7,06
„	„	„	100	„	18	„	„	„	5,79
„	„	„	100	„	28	„	„	„	5,00
„	„	„	100	„	41	„	„	„	4,67
„	„	„	100	„	50	„	„	„	4,58.

4. Tā tad redzam, ka hipotēku banka aprēķina augļus anticipatīvi. Tāpēc deldēšanas plāns Ls 100,— lielam parādam, kas dzēšams, piem., 6 gados jeb 12 semestros pie 4% pusgada likmes (anticipatīvi) un $\frac{1}{2}$% pusgada likmes pārvaldes izdevumiem, izteiksies šādā veidā.

Anticipatīvai procentu likmei 4% atbilst dekursīvi $4^1/_6$%;

$$\text{tāpēc } A = \text{Ls}\,\frac{100}{1+{}_{\overline{11|}}a} = \text{Ls}\,\frac{100}{9{,}68225667} = \text{Ls } 10{,}33;$$

$$D_1 = \text{Ls}\,\frac{100}{1+s_{\overline{11|}}} = \text{Ls}\,\frac{100}{15{,}17025919} = \text{Ls } 6{,}59;$$

$$D_2 = \frac{\text{Ls } 6{,}59}{0{,}96} = \text{Ls } 6{,}87;\quad D_3 = \frac{\text{Ls } 6{,}87}{0{,}96} = \text{Ls } 7{,}15 \text{ u. t. t.}$$

Deldēšanas plāns 6 gad. aizdevumam, Ls 100,— lielam.

Maks. termiņi	Parāds uz nāk. term.	Termiņa maksājumi				Piezīmes
		D	*a*	Pārv. izd.	Kopsuma	
Parādu uzņemot.	100,—	—	4	—	4	
1	93,41	6,59	3,74	0,50	10,83	
2	86,54	6,87	3,46	0,50	10,83	
3	79,39	7,15	3,18	0,50	10,83	
4	71,94	7,45	2,88	0,50	10,83	
5	64,18	7,76	2,57	0,50	10,83	
6	56,10	8,08	2,25	0,50	10,83	
7	47,68	8,42	1,91	0,50	10,83	
8	38,90	8,78	1,55	0,50	10,83	
9	29,76	9,14	1,19	0,50	10,83	
10	20,24	9,52	0,81	0,50	10,83	
11	10,33	9,91	0,42	0,50	10,83	
12	—	10,33	—	0,50	10,83	
	698,47	**100,00**	**27,96**	**6,—**	**133,96**	

Salīdzināsim ar hipotēku bankas izdoto deldēšanas tabulu, kuŗai šāds veids:

Deldēšanas tabula 6 gad. aizdevumam.

Parāds	Maks.	8% g.	Kapit. deldēš.	1% izdev. segš.	Term. maksāj.
100,—	1	4,—	6,65	0,50	11,15
93,35	2	3,73	6,92	0,50	11,15
86,43	3	3,45	7,20	0,50	11,15
79,23	4	3,16	7,49	0,50	11,15
71,74	5	2,87	7,78	0,50	11,15
63,96	6	2,55	8,10	0,50	11,15
55,86	7	2,23	8,42	0,50	11,15
47,44	8	1,89	8,76	0,50	11,15
38,68	9	1,54	9,11	0,50	11,15
29,57	10	1,18	9,47	0,50	11,15
20,10	11	—,80	9,85	0,50	11,15
10,25	12	—,40	10,25	0,50	11,15
		27,80	100,—	6,—	133,80

redzam starpību; ieskatoties hipotēku bankas deldēšanas tabulā, nākam pie slēdziena, ka tā sastādīta pēc dekursīvā procentu aprēķina paņēmiena. Tiešām, aprēķinot 4% dekursīvi par pusgadu, dabūsim annuitāti $A = \text{Ls } 100\, c_{\overline{12|}} = \text{Ls } 100 \,.\, 0{,}10655217 =$ $= \text{Ls } 10{,}65$; pieskaitot pārvaldes izdevumiem Ls 0,50, dabūjam termiņa maksājumu Ls 10,65 + Ls 0,50 = Ls 11,15, kā tas redzams tabulās.

37. Pastiprināta parāda deldēšana.

1. Par pastiprinātu parāda deldēšanu sauc tādu parāda atmaksu, kur annuitātes pieaug pēc zināma likuma.

Piemērs. Ls 50.000,— lielu parādu, par kuŗu jāmaksā 4% dekurs. grib dzēst ar ikgadējiem maksājumiem 5 gados, pie kam pirmais maksājums ir Ls 6000,—. Sastādīt deldēšanas plānu.

Deldēšanas plāna sastādīšanai vispirms jāaprēķina, par cik pieaugs katru gadu annuitāte. To atradīsim, ņemot vērā, ka annuitāti varam uzlūkot kā augošu pēc aritmētikas progresijas likuma postnumerando renti, bet parādu kā rentes tagadējo vērtību; tāpēc, ņemot vērā (26) form., kur jāapmaina R ar A,

L' ar P un apzīmējot ikgadējo annuitātes pieaugumu ar d, dabūsim, ka $P = A_{|n}a + \frac{d}{i}({}_{|n}a - nv^n)$, no kurienes atrodam d;

$$\frac{d}{i}[{}_{|n}a - nv^n] = P - A_{|n}a;$$

$$d = \frac{(P - A_{|n}a)i}{{}_{|n}a - nv^n} = \frac{0{,}04(50000 - 6000 \,.\, 4{,}45182233)}{4{,}45182233 - 5 \,.\, 0{,}82192711} = 2722{,}38.$$

Tā tad otrā annuitātē būs Ls 6000 + Ls 2722,38 = Ls 8722,38 u. t. t., tā ka varam viegli sastādīt deldēšanas plānu.

Gadi	P gada sāk.	Maksājumi gada beigās			Piezīmes
		a	A	D	
1	50000	2000,—	6000,—	4000,—	
2	46000	1840,—	8722,38	6888,38	
3	39117,62	1564,70	11444,76	9880,06	
4	29237,56	1169,50	14167,14	12997,64	
5	16239,92	649,60	16889,52	16239,92	
		7223,80	**57223,80**	**50000,—**	

2. Līdzīgā kārtā var rīkoties, ja annuitāte aug pēc ģeometriskās progresijas likuma.

P i e m ē r s. Ls 100 000 liels parāds dzēšams 12 gados ar ikgadējām annuitātēm, kas pieaug par 3% no iepriekšējās annuitātes. Sastādīt deldēšanas plānu, ja aprēķiniem par pamatu pieņem 4%.

Pēc (23') formulas, kurā L' jāapmaina ar P un R ar A, dabūsim, ka $P = A\frac{1 - q^n v^n}{r - q}$, no kurienes pirmā annuitāte

$$A_1 = \frac{P(r-q)}{1 - q^n v^n} = \frac{100\,000(1{,}04 - 1{,}03)}{1 - 1{,}03^{12}v^{12}} = \frac{100}{1 - 1{,}42576089 \,.\, 0{,}62459705} =$$

$$= \frac{1000}{1 - 0{,}89052603} = \frac{1000}{0{,}10947397} = 9134{,}59; \quad A_2 = 9134{,}59 \,.\, 1{,}03 =$$

$= 9407{,}63$ u. t. t. Zinot annuitātes, var viegli sastādīt deldēšanas plānu.

38. Obligācijās sadalīto uzņēmumu dzēšana.

1. Valstij, pašvaldības iestādēm, dzelzceļu sabiedrībām u. tml. nākas izdarīt tik prāvus aizņēmumus, ka grūti atrast kreditoru, kas viens pats spējīgs aizlienēt vajadzīgo summu. Tāpēc parasti aizņēmumu sadala atsevišķās ne visai lielās no-

apaļotās summās, par kuŗām izraksta īpašas zīmes, ko parasti sauc par obligācijām. Obligācijas var iegādāties (pret obligācijām aizdot naudu) vai nu tieši no attiecīgās iestādes, vai ari ar kādas bankas vai vairāku banku starpniecību, pie kam bieži nākas par obligāciju maksāt mazāku vai lielāku summu nekā ir viņas nominālvērtība, t. i., tā summa, kas stāv rakstīta uz obligācijas kā tās vērtība un kas parāda ņēmējam jāatmaksā aizņēmuma dzēšanas laikā pilnā vai pat paaugstinātā vērtībā. Obligācijas ir numurētas un augļus par aizdevumu maksā tā, ka katrai obligācijai pievieno īpašu loksni ar tā saucamiem kuponiem, uz kuŗiem atzīmēti augļu summa un datums, no kuŗa sākot var šo augļu summu saņemt.

2. Obligācijās sadalīto aizdevumu dzēšana notiek parasti tā, ka katru gadu izpērk zināmu, deldēšanas plānā iepriekš noteiktu obligāciju skaitu, pie kam bieži to, kādas īsti no visām izlaistām obligācijām izpērkamas, nosaka ar lozi. Deldēšanas plānu sastādot, nāksies ņemt vērā, ka deldēšanas summas nebūs katrreiz noapaļotas, un tāpēc noteikta obligāciju skaita izpirkšanai deldēšanas summas nāksies noapaļot, vai nu kādu summu atmetot un to pieskaitot nākamā gada deldēšanas summai, vai ari palielinot deldēšanas summu par summu, ko nāksies tad ņemt no nākamā gada deldēšanas summas; abos gadījumos būs jāņem vērā ari augļi no šīm summām.

Lai aprēķinātu, cik obligāciju jāizpērk katrā gadā, varam rīkoties vai nu tā, kā ar jau pazīstamiem paņēmieniem aprēķina annuitāti, kas ļauj atrast deldēšanas summu, vai ari aprēķina tieši katra gada deldēšanas summu, un tad, atkarībā no tās lieluma noteic izpērkamo obligāciju skaitu. Var ari tieši aprēķināt obligāciju skaitu, kas jāizpērk katrā gadā, spriežot tā.

Pieņemsim, ka parāds P sadalīts O obligācijās ar nominālvērtību N, par kuŗām maksā p% dekursīvi, dzēšams n gadu laikā, izpērkot obligācijas par nominālvērtību. Tad, apzīmējot attiecīgo un izpērkamo obligāciju skaitu ar o_1, o_2, o_3, . . . , gada annuitātes ar A_1, A_2, A_3, . . . , A_n, dabūsim, ka $A_1 = Pi + No_1 = NOi + No_1$, jo No_1 ir šinī gadījumā parāda deldēšanas summa; tāpat $A_2 = (NO - No_1)i + No_2$; $A_3 = (NO - No_1 - No_2)i + No_3$ u. t. t. $A_n = (NO - No_1 - \ldots - No_{n-1})i + No_n$; tā kā annuitātēm jābūt vienlīdzīgām, tad $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$; tāpēc $NOi + No_1 = (NO - No_1)i + No_2$, no kurienes $No_1 + No_1 i = No_2$ jeb $o_1(1+i) = o_2$ jeb $o_2 = o_1 r$; tāpat dabūsim, ka $o_3 = o_2 r = o_1 r^2$ u. t. t. un $o_n =$

$=o_{n-1}r=o_1r^{n-1}$; tā kā $o_1+o_2+o_3+\ldots+o_n=O$ jeb o_1+o_1r+ $+o_1r^2+\ldots+o_1r^{n-1}=O$ un $o_1(1+s_{\overline{n-1}|})=O$, no kurienes

$$o_1=\frac{O}{1+s_{\overline{n-1}|}}=\frac{O(r-1)}{r^n-1}\quad\ldots\ldots\quad(43)$$

zinot o_1, varam atrast $o_2, o_3, \ldots, o_n$, jo $o_2=o_1r$, $o_3=o_2r$ u. t. t

P i e m ē r s. Kāds aizņēmums sadalīts 2000 obligācijās ar nominālvērtību Ls 100 un dzēšams 6 gados. Sastādīt deldēšanas plānu, ja par aizņēmumu rēķina 5%.

Šeit parāda lielums ir Ls 200 000; $A=$ Ls $200\,000 c_{\overline{6}|}=$ $=$ Ls 200 000 . 0,19701747 $=$ Ls 39403,49; tā kā augļi par pirmo gadu ir Ls 10 000, tad $D_1=$ Ls 29403,49 ar ko var izpirkt 294 obligācijas; paliek pāri atlikums Ls 3,49, kas dod par gadu Ls 0,17 augļu, tā tad kopā pavisam Ls 3,66 jāpieskaita nākamā gada deldēšanas summai; trešā gada kopējā deldēšanas summa būs Ls 32494,50 (sk. deldēšanas plānu), par ko varēs izpirkt, noapaļojot uz augšu, 325 obligācijas; pietrūkst Ls 5,50, kas līdz ar augļiem sastāda Ls 5,77 un j ā a t ņ e m no nākamā gada deldēšanas summas (deldēšanas plānā šīs summas atzīmētas ar kursīvu) u. t. t. Tādā kārtā rodas šāds deldēšanas plāns.

$A=$ Ls 39403,49

Gadi	Parāds gada sākumā		D e l d ē š a n a					Izpērk. oblig. skaits
	o	Ls	Augļi	*D*	Atlikums	Augļi no atlikuma	Kopējā deld. summa	
1	2000	200000	10000	29403,49	—	—	29403,49	294
2	1706	170600	8530	30873,49	3,49	0,17	30877,15	308
3	1398	139800	6990	32413,49	77,15	3,86	32494,50	325
4	1073	107300	5365	34038,49	*5,50*	*0,27*	34032,72	340
5	733	73300	3665	35738,49	32,72	1,64	35772,85	358
6	375	37500	1875	37528,49	*27,15*	*1,36*	37499,98	375
				199995,94	**80,71**	**4,04**	**200080,69**	**2000**

Beidzamai kopējai deldēšanas summai būtu jābūt Ls 37500, bet tā ir par 2 sant. mazāka, kas ceļas no noapaļojumiem; kopējo ikgadējo deldēšanas summu kopsummai jābūt vienlīdzīgai ar deldēšanas summu, atlikumu un atlikumu augļu kopsumu; tiešām, šinī gadījumā Ls 199995,94 + Ls 80,71 + Ls 4,04 $=$ Ls 200 080,69; bez tam izpirkto obligāciju kopsummai jābūt vienlīdzīgai ar visu obligāciju skaitu, kas ari tiešām ir.

Ja šim pašam piemēram sastādītu deldēšanas plānu tā, ka aprēķinātu pēc (43) formulas pirmā gadā izpērkamo obligāciju skaitu, tad

$$o_1 = \frac{2000}{1+s_{\overline{5|}}} = \frac{2000}{6{,}8019\,1281} = 294{,}04\,; \quad o_2 = 290{,}4\,.\,1{,}05 = 308{,}74\,;$$

$o_3 = 308{,}74\,.\,1{,}05 = 324{,}18$; $o_4 = 324{,}18\,.\,1{,}05 = 340{,}39$; $o_5 = 357{,}41$; $o_6 = 375{,}28$; noapaļojot dabūjam, ka $o_1 = 294$, $o_2 = 309$, $o_3 = 324$, $o_4 = 340$, $o_5 = 358$, $o_6 = 375$.

Tādā kārtā izveidosies šāds deldēšanas plāns.

Gadi	Obligāciju skaits gada sākumā	Izpērkamo obligāciju skaits	a	A
1	2000	294	10000	39 400
2	1706	309	8535	39 430
3	1397	324	6985	39 385
4	1973	340	5365	39 365
5	733	358	3665	39 465
6	375	375	1875	39 375
		2000	36420	236 420

Redzam nelielu starpību ar iepriekšējo plānu: beidzamā gadījumā annuitātes nav īsti vienlīdzīgas, kas, protams, atkarājas no tam, ka obligācijas ir par apaļām summām; bez tam attiecīgos gados izpērkamo obligāciju skaits pilnīgi nesakrīt.

Kontrolējot plāna pareizību, redzam, ka

$$o_1 + o_2 + \ldots + o_n = 2000; \quad \Sigma a + \Sigma D = \Sigma A.$$

3. Ja parāds sadalīts obligācijās ar dažādām nominālvērtībām, piem., dažām obligācijām nominālvērtība ir Ls 100, citām Ls 500 u. t. t., tad katras šķiras obligāciju kopsummu var uzlūkot kā īpašu aizņēmumu un ik gadus izpērkamo obligāciju skaitu katrai šķirai aprēķināt pēc (43) form.

P i e m ē r s. Ls 800 000 liels parāds sadalīts obligācijās: 500 obligāciju par nominālvērtību Ls 1000 un 600 obligāciju par Ls 500; par parādu maksā 4% un tas dzēšams 10 gados. Sastādīt deldēšanas plānu.

$A =$ Ls 800 000 . $c_{\overline{10|}} =$ Ls 800 000 . 0,12329094 = Ls 98632,75.

Pirmā gadā izpērkamo obligāciju skaitu aprēķinām no sakarībām:

$$\frac{500}{1+s_{\overline{9}|}} \text{ un } \frac{600}{1+s_{\overline{9}|}}; \quad \frac{500}{1+s_{\overline{9}|}}=\frac{500}{12{,}00610712}=41{,}65;$$

$$\frac{600}{12{,}00610712}=49{,}98;$$

turpmākos gados izpērkamo obligāciju skaitu dabūjam, reizinot pakāpeniski ar 1,04.

Pirmā gadā izpērk. obligāc. skaits:	41,65		**41**	49,98		**50**
	+ 1,66	4%		+ 2,00	4%	
otrā „ „ „ „	43,31		**43**	51,98		**52**
	+ 1,73	4%		+ 2,08	4%	
trešā „ „ „ „	45,04		**45**	54,06		**54**

u. t. t.

Tādā kārtā varēs sastādīt šādu deldēšanas plānu.

Gadi	Parāds uz gada sākumu latos	Parāds uz gada sākumu obligācijās à Ls 1000	Parāds uz gada sākumu obligācijās à Ls 500	a	Izpērkamo oblig. skaits à Ls 1000	Izpērkamo oblig. skaits à Ls 500	D	A	Piezīmes
1	800 000	500	600	32 000	41	50	66 000	98 000	
2	734 000	459	550	29 360	43	52	69 000	98 360	
3	665 000	416	498	26 600	45	54	72 000	98 600	
4	593 000	371	444	23 720	47	56	75 000	98 720	
5	518 000	324	388	20 720	49	58	78 000	98 720	
6	440 000	275	330	17 600	51	60	81 000	98 600	
7	359 000	224	270	14 360	53	63	84 500	98 860	
8	274 500	171	207	10 080	55	66	88 000	98 080	
9	186 500	116	141	7 460	57	69	91 500	98 960	
10	95 000	59	72	3 800	59	72	95 000	98 800	
				185 700	**500**	**600**	**800 000**	**985 700**	

Aizņēmumu var sadalīt ari sērijās, parasti par 100 obligācijām serijā. Šādā gadījumā izloze notiek pēc sērijām — ja kāda sērija krīt izlozē, tad izpērkamas visas šīs sērijas obligācijas Tad deldēšanas plānu sastāda tā, ka ņem vērā dzēšamo sēriju skaitu.

4. Dažos aizņēmumos izlozētas obligācijas izpērk par lielāku vērtību nekā apzīmētā nominālvērtība, piem., par k% augstāk nekā nominālvērtība. Pieņemsim, ka obligācijas nominālvērtība ir N, obligāciju skaits ir O un par obligāciju maksā p% augļu, bet obligācijas izpērk par M. Tad parāda

nominālvērtība ir ON, bet jāsamaksā būs pavisam OM. Apzīmēsim annuitātes ar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un izpērkamo obligāciju skaitu ar $o_1, o_2, \ldots, o_n$; tad katra annuitāte sastādīsies no augļiem par parādu un izpirkšanas summas Mo_k kur o_k ir attiecīgā gadā izpērkamo obligāciju skaits.

$$A_1 = ONi + Mo_1; \quad A_2 = (ON - o_1N)i + Mo_2;$$

$$A_3 = (ON - o_1N - o_2N)i + Mo_3$$

u. t. t.; tā kā annuitātēm jābūt vienlīdzīgām, tad

$$ONi + Mo_1 = (ON - o_1N)i + Mo_2, \text{ no kurienes}$$

$$Mo_1 + No_1i = Mo_2 \text{ un } o_2 = o_1 + \frac{N}{M} o_1 i = o_1\left(1 + \frac{N}{M} i\right);$$

tā tad $o_2 = o_1\left(1 + \frac{N}{M} i\right)$; tāpat dabūsim, ka

$$o_3 = o_2\left(1 + \frac{N}{M} i\right) = o_1\left(1 + \frac{N}{M} i\right)^2 \text{ u. t. t. un } o_n = o_1\left(1 + \frac{N}{M} i\right)^{n-1};$$

apzīmēsim $\left(1 + \frac{N}{M} i\right)$ ar α; tad $o_2 = o_1\alpha, \ldots, o_n = o_1\alpha^{n-1}$;

tā kā $o_1 + o_2 + \ldots + o_n = O$ jeb $o_1 + o_1\alpha^2 + \ldots + o_1\alpha^{n-1} = O$

$$\text{tad } o_1 \cdot \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = O \text{ un } o_1 = \frac{O(\alpha - 1)}{\alpha^n - 1} \quad \ldots\ldots \quad (44)$$

zinot o_1, var viegli aprēķināt $o_2, o_3, \ldots, o_n$.

$$\text{Annuitāte } A = NOi + Mo_1 = NOi + M \cdot \frac{O(\alpha^n - 1)}{\alpha - 1} =$$

$$= NOi\left[1 + \frac{M}{Ni} \cdot \frac{\alpha - 1}{\alpha^n - 1}\right]; \text{ tā kā } 1 + \frac{Ni}{M} = \alpha, \text{ tad } \frac{Ni}{M} = \alpha - 1 \text{ un}$$

$$\frac{M}{Ni} = \frac{1}{\alpha - 1}; \text{ tāpēc } A = ONi\left[1 + \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 1)(\alpha^n - 1)}\right] = ONi\left(1 + \frac{1}{\alpha^n - 1}\right) =$$

$$= ONi \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1}; \text{ tā tad}$$

$$A = ONi \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45).$$

Piemērs. Parāds, kas sadalīts 200 obligācijās à Ls 500, jādzēš 10 gadu laikā, izpērkot obligācijas ar 10% virs nominālvērtības. Sastādīt deldēšanas plānu, ja par obligācijām maksā 5% augļu.

Deldēšanas plāna sastādīšanai vispirms jāaprēķina pirmā gadā izpērkamo obligāciju skaits; to var izdarīt pēc (44) formulas, kurā $\alpha=1+\frac{500}{550}.0{,}05=1{,}04545\ldots\simeq 1{,}045$;

$$\text{tā tad } o_1=\frac{200.0{,}045}{1{,}045^{10}-1}=\frac{200}{1+s_{\overline{9}|}}=\frac{200}{12{,}2882\,0937}=16{,}28;$$

$$o_2=16{,}28.1{,}045=17{,}01 \text{ u. t. t.}$$

Gadi	Parāds uz gada sākumu		a	Deldēšana		Izpirkšan. vajadzīgā summa	A
	Ls	O		Izpirkto oblig. skaits	Ls		
1	100 000	200	5000	16	8000	8800	13 800
2	92 000	184	4600	17	8500	9350	13 950
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

5. Ja par obligācijās sadalīto aizdevumu augļi jāmaksā anticipatīvi, tad ikgadus izpērkamo abligāciju skaitu atrodam ar paņēmienu, kas līdzīgs jau aplūkotiem. Annuitāte pirmā gada beigās A_1 sastādīsies no izpērkamo obligāciju summas No_1 (ja obligācijas izpērk par nominālo vērtību) un augļiem par atlikušo parādu, t. i. augļiem par $ON-o_1N$; tā tad $A_1=No_1+(NO-No_1)\,i$; līdzīgā kārtā $A_2=No_2+$ $+(NO-No_1-No_2)\,i$ u. t. t.; $A_n=No_n$; tā kā annuitātēm jābūt vienlīdzīgām, tad $No_1+(NO-No_1)\,i=No_2+(NO-No_1-No_2)\,i$ jeb $No_1+NOi-No_1i=No_2+NOi-No_1i-No_2i$, no kurienes $No_1=No_2(1-i)$ un $o_2=\frac{o_1}{1-i}=o_1q$; tādā pašā ceļā atrodām, ka $o_3=o_2q=o_1q^2$; $o_4=o_3q=o_1q^3$ u. t. t. un $o_n=o_1q^{n-1}$; tā kā o_1+ $+o_2+\ldots+o_n=O$, tad $o_1+o_1q+\ldots+o_1q^{n-1}=O$; ar parastiem pārveidojumiem dabūjam, ka $o_1\frac{q^n-1}{q-1}=O$ un

$$o_1=\frac{O(q-1)}{q^n-1}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46);$$

zinot o_1, atrodam o_2 kā o_1q u. t. t.

Dabūtā (46) formula atbilst (40_1) formulai, tikai P vietā te ir O un D_1 vietā o_1; tāpēc, kas teikts par D_1 aprēķināšanu, pilnā mērā attiecināms uz o_1 aprēķināšanu. Redzējām, ka D_1

varēja aprēķināt no sakarības $D_1 = \frac{P}{s_{\overline{n}|}}$, tikai par procentu likmi bija jāpieņem dekursīvā procentu likme, kas konforma ar anticipatīvo. Ja zinām $o_1, o_2, o_3, \ldots, o_n$, tad deldēšanas plāna sastādīšanā nekādas grūtības necelsies.

6. Gadījumā, ja augļus aprēķina anticipatīvi, bet obligācijas izpērk ne par nominālvērtību, bet par kādu citu vērtību M, tad gluži līdzīgā ceļā, kā tas bija dekursīvo augļu gadījumā, atradīsim, ka

$A_1 = Mo_1 + (NO - No_1)\, i$; $A_2 = Mo_2 + (NO - No_1 - No_2)\, i$ u. t. t

tāpēc $Mo_1 + (NO - No_1)\, i = Mo_2 + (NO - No_1 - No_2)\, i$ jeb

$Mo_1 + NOi - No_1 i = Mo_2 + NOi - No_1 i - No_2\, i$, no kurienes

$Mo_1 = Mo_2 - No_2 i$ jeb $o_1 = o_2 - \frac{N}{M} o_2 i$ jeb $o_1 = o_2 \left(1 - \frac{N}{M} i\right)$, no

kurienes $o_2 = \frac{o_1}{1 - \frac{N}{M} i}$; apzīmēsim $\frac{1}{1 - \frac{N}{M} i}$ ar β;

tad $o_2 = o_1 \beta$; analoģiskā kārtā, salīdzinot otrā un trešā gadu annuitātes, dabūsim, ka $o_3 = o_2 \beta = o_1 \beta^2$ u. t. t.; tāpēc $o_1 + o_1 \beta + o_1 \beta^2 + \ldots + o_1 \beta^{n-1} = O$ un $o_1(1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{n-1}) = O$, no kurienes

$$o_1 = \frac{O(\beta - 1)}{\beta^n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

zinot o_1, varēsim aprēķināt o_2, o_3 u. t. t., pēc kam viegli nāksies sastādīt deldēšanas plānu.

7. Ja obligācijas izpērk vienreiz gadā, bet augļus kapitālizē divi reizes gadā, t. i. ik semestrus, tad annuitātes var izteikt tā, ka visus augļu maksājumus par gadu reducē uz obligāciju izmaksas termiņu. Pieņemsim, ka parāds ir P, procentu likme $p\,\%$ un parāds jādeldē n gadu laikā, pie kam augļus kapitālizē divi reizes gadā (dekursīvi), tad $A_1 = \frac{Pi}{2} + \frac{Pi}{2}\frac{i}{2} + \frac{Pi}{2} + D_1$, kur $\frac{Pi}{2}$ ir augļi par pusgadu, un $\frac{Pi}{2} \cdot \frac{i}{2}$ ir pusgada augļi no kapitāla augļiem par pusgadu; tā tad $A_1 = Pi + \frac{Pi^2}{4} + D_1$; tāpat $A_2 = \frac{(P - D_1)\, i}{2} + \frac{(P - D_1)\, i^2}{4} + \frac{(P - D_1)\, i}{2} + D_2$ u. t. t. Tā kā

annuitātēm jābūt vienlīdzīgām, tad $Pi+\frac{Pi^2}{4}+D_1=(P-D_1)\,i+$ $+\frac{(P-D_1)\,i^2}{4}+D_2$ jeb $Pi+\frac{Pi^2}{4}+D_1=Pi-D_1i+\frac{Pi^2}{4}-\frac{Di^2}{4}+D_2$, no kurienes $D_1+D_1i+\frac{D_1i^2}{4}=D_2$ un

$$D_2=D_1\left(1+i+\frac{i^2}{4}\right)\quad\ldots\ldots\quad(48),$$

tā kā $1+i+\frac{i^2}{4}=\left(1+\frac{i}{2}\right)^2$, tad apzīmējot $1+\frac{i}{2}$ ar r_1, dabūjam, ka $D_2=D_1\,r_1^2$, kur r_1 atbilst relatīvai pusgada procentu likmei; tā tad, ja, piem., $p=4\%$, tad $r_1=1{,}02$ un $r_1^2=1{,}0404$. Līdzīgā kārtā atradīsim, ka $D_3=D_2r_1^2=D_1r_1^4, D_4=D_3r_1^2=D_1r_1^6$ u.t.t. Tas viss rāda, ka mūsu aprēķinos nāksies agrākā r vietā ņemt r_1^2; tāpēc $D_1\ [1+r_1^2+r_1^4+\ldots+r_1^{2(n-1)}]=P$ un šinī gadījumā

$$D_1=\frac{P(r_1^2-1)}{r_1^{2n}-1}.$$

Zinot D_1, aprēķinām $D_2, D_3, \ldots D_n$ un līdz ar to izpērkamo obligāciju skaitu.

Redzam, ka šādā ceļā aprēķinātie lielumi $D_1, D_2 \ldots D_n$ visai maz atšķirsies no aprēķinātiem pēc sakarības $D_1=\frac{P(r-1)}{r^n-1}$ un $D_2=D_1r$ u. t. t. lielumiem; tā kā obligāciju izpirkšanai tā vai tā nākas deldēšanas summas noapaļot, tad deldēšanas plāna sastādīšanai var rīkoties ari ar agrākām formulām

$$D_1=\frac{P(r-1)}{r^n-1}\ \text{un}\ D_n=D_1r; D_3=D_2r\ \text{u. t. t.}$$

39. Loteriju (prēmiju) aizņēmumi.

1. Jau minējām (sk. 38, 4), ka dažreiz obligācijas izpērk ar zināmu virsmaksu virs obligācijas vērtības. Var rīkoties ari citādi: katru gadu noteikt zināmu summu p r ē m i j ā m, kuŗas šādā vai tādā veidā sadala obligāciju starpā ar lozi; tādā gadījumā izlozē nāk ne tikai tās obligācijas, kas jāizpērk, bet ari tās, uz kuŗām krīt prēmijaš jeb tā saucamie v i n n e s t i. Šādus aizņēmumus sauc par loteriju jeb prēmiju aizņēmumiem. Izlo-

zes var notikt dažādās formās: var reizē izlozēt kā dzēšamās obligācijas, tā ari tās, uz kuŗām krīt vinnesti, noteicot, piem., ka vinnestu obligācijas būs pirmās izvilktās; tad līdz ar vinnesta izmaksu atmaksā ari obligācijas vērtību; var rīkoties ari citādi; dzēšamās obligācijas izlozēt atsevišķi un obligācijās, uz kuŗām krīt vinnesti — atsevišķi, pie kam tad parasti ar to vien, ka uz kādu obligāciju kritis vinnests, tā vēl netiek dzēsta, bet var ņemt dalību jaunā vinnestu izlozē, kamēr netiks dzēsta.

Par prēmiju aizņēmuma obligācijām vai nu maksā mazāku procentu likmi, nekā būtu jāmaksā par aizņēmumu, izlietojot šādā veidā radušos augļu starpību prēmijām, vai ari nemaksā nemaz augļu, izlietojot visu augļu summu prēmijām. Aplūkosim vispirms to gadījumu, kur tikai viena daļa augļu iet vinnestiem.

2. Pieņemsim, ka parāds P, kas sadalīts O obligācijās ar nomīnalvērtību N, par kuŗām maksā $p\,\%$ un ik gadus atvēl zināmu summu V vinnestiem, dzēšams n gados.

Aprēķinu ziņā jauns nekas te klāt nenāks, izņemot to, ka ikgadējai parastai annuitātei nāksies pievienot vēl vinnestu summu V.

P i e m ē r s. Latvijas iekšējais 1920. g. 4% aizņēmums ar prēmijām izlaists 50 000 000 Latvijas rubļu nominālvērtībā uz 50 gadiem ar šādiem noteikumiem.

Aizņēmumu izlaiž simts rubļu biļetēs. Katras simts biļetes sastāda atsevišķu sēriju. Serijas izlaiž ar tekošiem numuriem. Katras serijas biļetēm ir sava atsevišķa numerācija no 1—100. Par biļetes īpašnieku skaitās viņas uzrādītājs.

Gada rentes lielums uz biļetēm ir 4%, kas izmaksājamas divreiz gadā — pirmā aprilī un pirmā oktobrī par notecējušo pusgadu.

Aizņēmuma biļetes izpērk nominālvērtībā piecdesmit gadu laikā, skaitot no pirmās tirāžas dienas. Šim nolūkam izdara, pēc iepriekš sastādīta plāna, dzēšanas tirāžu ik gadus 2. janvārī un 1. jūlijā, pie kam dzēš katru reizi attiecīgu biļešu skaitu veselām serijām, pēc sevišķa saraksta.

Tirāžētās biļetes valsts kase nomaksā trīs mēnešus pēc tirāžas dienas, tanī pašā termiņā nomaksā ari rentes par notecējušiem kuponiem.

Neatkarīgi no biļešu dzēšanas tirāžas izdara pirmos divdesmit piecos gados ik gadus 2. janvārī un 1. jūlijā, pēc tam vienreiz gadā — 2. janvārī, prēmiju izlozi. Prēmiju izlozes izdara ar izlozes riteņa palīdzību, tirāžā laižot visu nedzēsto seriju biļetes; no viena riteņa izvelk seriju numurus, no otra — biļešu numurus un no trešā prēmijas. Katra biļete iegūst vienā izlozē tikai vienu prēmiju. Ja uz vienu biļeti krīt vairāk prēmiju, tad izsniedz tikai lielāko.

Katra gada prēmiju kopsuma pirmos divdesmit piecos gados iztaisa divus procentus no aizņēmuma pamatkapitāla kopsumas, t. i. viens miljons rubļu gadā, un katra izloze sadalās sekošās prēmijās:

1	par	....	100 000 rbļ.
2	„	50 000 rbļ.	10 0000 „
3	„	25 000 „	75 000 „
5	„	10 000 „	50 000 „
15	„	5 000 „	75 000 „
100	„	1 000 „	100 000 „
126	prēmijas par		500 000 rbļ.

Atlikušos divdesmit piecos gados izloze notiek vienreiz gadā ar 500 000 rbļ. prēmijām.

Prēmijas izsniedz valsts kase pēc trīs mēnešu notecēšanas, skaitot no izlozes dienas, pret attiecīgu aizņēmuma biļeti, pie izmaksas atvelk 10% nodokļa no prēmijas summas un uz biļetes taisa attiecīgu uzrakstu un izsniedz to īpašniekam atpakaļ. Biļeti, uz kuras kritusi prēmija, laiž ari nākošās prēmijas izlozēs, kamēr tā netiek izņemta no apgrozības ar dzēšanas tiražu.

Biļešu dzēšanas tiraža un prēmiju izloze notiek vienā un taī pašā dienā, pie kam prēmiju izloze notiek pirms dzēšanas tiražas. Kā pirmais tiražu termiņš noteikts 2. janvāris 1921. g.

No nosacījumiem redzams, ka augļus maksā divas reizes gadā dekursīvi un ari obligācijas izpērk divas reizes gādā vienā termiņā ar augļiem, maksājot 2% par pusgadu. Tā tad mums ir darīšana ar 100 deldēšanas un augļu maksāšanas termiņos sadalītu obligāciju aizņēmumu, pie kam pie parastās annuitātes pirmos 50 termiņos nāk vēl klāt prēmijām 500 000 rbļ., bet turpmākos 50 termiņos vienā termiņā šī annuitāte izkrīt. Tāpēc parasto annuitāti par semestri varam atrast pēc (35') formulas; $A = 50\,000\,000 c_{\overline{100}|} = 50\,000\,000 . 0{,}02320274 = 1\,160\,137$; pēc (43) form. varēsim aprēķināt pirmā termiņā izpērkamo obligāciju skaitu, bet tā kā izloze notiek pēc serijām, tad O šeit apzīmēs izpērkamo seriju skaitu; ņemot vērā, ka seriju būs pavisam 5000, dabūjam, ka

$$o_1 = \frac{5000}{1 + s_{\overline{99}|}} = \frac{5000}{312{,}23230591} = 16{,}01\,;$$

$o_2 = 16{,}01 . 1{,}02 = 16{,}33$; tāpat $o_3 = 16{,}66$, $o_4 = 16{,}99$, $o_5 = 17{,}33$ u. t. t., tā tad pirmā termiņā — 1920. g. 1. oktobrī — izpērk 16 serijas, otrā — 16, trešā — 17, ceturtā — 17 u. t. t.

Deldēšanas plāns izveidosies šāds:

Termiņi	Parāds serijās uz minēto termiņu	Deldēšana					A
		Izp. seriju skaits	D	Kuponi à 200 L. r. par seriju	Prēmijas		
1921. g. 1. apr.	5000	16	160000	1000000	500000		1660000
1921. g. 1. okt.	4984	16	160000	996800	500000		1658800
1922. g. 1. apr.	4968	17	160000	993600	500000		1663600
1922. g. 1. okt.	4951	17	160000	990200	500000		1660200
.	.	.	.	.	.		.
.	.	.	.	.	.		.
.	.	.	.	.	.		.

3. B e z p r o c e n t u l o t e r i j u a i z ņ ē m u m o s augļus nemaksā nemaz, toties par visām izpērkamām obligācijām maksā zināmu, ne visai lielu prēmiju, kas parasti ar katru gadu pieaug, un bez tam vēl atlicina noteiktu skaitu lielāku vinnestu. Apzīmēsim izpērkamo obligāciju (ložu) skaitu ar l_1, l_2, l_3, . . . l_n, to izpirkšanas vērtības ar t_1, t_2, . . . , t_n, lielo vinnestu skaitu skaitu ar L_1, L_2, . . . , L_n, un visu vinnestu k o p s u m m u ar V_1, V_2, . . . , V_n, annuitātēs ar A_1, A_2, . . . , A_n; tad viegli saprotams, ka $A_1 = l_1 t_1 + V_1$; $A_2 = l_2 t_2 + V_2$; . . . . ; $A_n = l_n t_n + V_n$.

Ja lielumi A_1, A_2, . . . , A_n; t_1, t_2, . . . , t_n un V_1, V_2, . . . , V_n iepriekš noteikti, tad varam no dabūtām sakarībām aprēķināt l_1, l_2, . . . , l_n; minētie lielumi jānoteic tā, lai lielumu l_1, l_2, . . . , l_n summa dotu vajadzīgo vispārējo ložu skaitu l.

Ja visas annuitātes izvēlas vienlīdzīgas tā, ka $A_1 = A_2 \ldots = A_n = A$ tad dabūtās sakarības dod, ka

$$l_1 = \frac{A - V_1}{t_1}, \quad l_2 = \frac{A - V_2}{t_2}, \quad l_3 = \frac{A - V_3}{t_3},$$

$$l_n = \frac{A - V_n}{t_n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \textbf{(49)}$$

saskaitot šīs vienlīdzības, dabūjam, ka $l_1+l_2+\ldots+l_n=$

$$=\frac{A-V_1}{t_1}+\frac{A-V_2}{t_2}+\ldots+\frac{A-V_n}{t_n} \text{ jeb}$$

$$l=A\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)-\left(\frac{V_1}{t_1}+\frac{V_2}{t_2}+\ldots+\frac{V_n}{t_n}\right). \quad (49_1)$$

no šīs sakarības varam aprēķināt pēc dotiem lielumiem l, t_1, t_2, $\ldots$, t_n un V_1, V_2, $\ldots$ V_n lielumu A un tad no iepriekšējām sakarībām l_1 l_2, $\ldots$ l_n.

4. Ja lielo vinnestu kopsumma ir pastāvīga, t. i. $V_1=V_2=$ $=\ldots=V_n=V$, tad no (49_1) sakarības

$$l=A\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)-V\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)=$$

$$=(A-V)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right) \text{ kas dod, ka}$$

$A-V=\dfrac{l}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}}$, un tāpēc (49) sakarība izteicas tā:

$$l_1=\frac{l}{t_1\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)};$$

$$l_2=\frac{l}{t_2\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)}=\frac{lt_1}{t_1\,t_2\underbrace{\left(\frac{1}{t_1}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)}_{\text{reizinām un dalām ar } t_1}}=$$

$$=\frac{l_1\,t_1}{t_2};\ \text{tāpat } l_3=\frac{l_1\,t_1}{t_3} \text{ u. t. t.}$$

P i e m ē r s. Aizņēmums Ls 200 000 sadalīts 10 000 obligācijās — par nominālvērtību Ls 200; šis aizņēmums jādzēš 5 izlozēs tā, ka katrā izlozē nāk 8 lielie vinnesti par summu Ls 33 000 un citas obligācijas izpērk pirmā gadā ar Ls 200 un katrā nākamā ar Ls 6 vairāk.

Sastādīt deldēšanas plānu.

Tā kā lielo vinnestu par visām izlozēm būs $8 . 5=40$, tad mazo vinnestu pavisam $10000-40=9960$; pēc nule dabūtām formulām

$$l_1=\frac{l}{t_1\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{t_n}\right)}=\frac{9960}{200\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{206}+\frac{1}{212}+\frac{1}{218}+\frac{1}{224}\right)}=$$

$=2108{,}13$; $l_2=\frac{l_1\ t_1}{t_2}=\frac{2108{,}13\ .\ 200}{206}=2046{,}7$; $l_3=\frac{l_1\ t_1}{t_3}=1988{,}8$; $l_4=1934{,}1$; $l_5=1882{,}3$; tāpēc rodas šāds deldēšanas plāns:

Iz-lozes	l	Vajadz. maziem vinn. summa	Vajadzīgā liel. vinn. summa	A
1	2108 à Ls 200	421 600	33 000	454 600
2	2047 à Ls 206	421 682	33 000	454 682
3	1989 à Ls 212	421 668	33 000	454 668
4	1934 à Ls 218	421 612	33 000	454 612
5	1882 à Ls 224	421 568	33 000	454 568

5. Ja turpretīm $t_1=t_2=\ .\ .\ \cdot\ t_n=t$, bet lielie vinnesti pieaug pēc aritmētiskās progresijas likuma, tā ka $V_1=V$, $V_2=V+\delta$, $V_3=V_2+\delta=V+2\delta,\ .\ .\ .\ ,\ V_n=V+(n-1)\delta$, tad ($49_1$) sakarība izteicas tā:

$$l=A\ .\ \frac{n}{t}-\frac{V+V+\delta+V+2\delta+\ .\ .\ .\ +V+(n-1)\delta}{t}=$$

$$=\frac{An-[Vn+\delta+2\delta+\ .\ .\ .\ +(n-1)\delta]}{t}=\frac{1}{t}\left[An-Vn-\frac{n\delta(n-1)}{2}\right],$$

jo $\delta+2\delta+\ .\ .\ .\ +(n-1)\delta=\frac{[\delta+(n-1)\delta](n-1)}{2}=\frac{n\delta(n-1)}{2}$ kā aritmētiskās progresijas summa, kuŗai $(n-1)$ loceklis; reizinot vienlīdzības puses ar t, dabūjam, ka $lt=n(A-V)-\frac{\delta n(n-1)}{2}$, no kurienes $n(A-V)=lt+\frac{\delta n(n-1)}{2}$ un $A-V=\frac{lt}{n}+\frac{\delta(n-1)}{2}$; ieliekot (49) sakarībā šo $A-V$ nozīmi, dabūjam, ka $l_1=\frac{\frac{lt}{n}+\frac{\delta(n-1)}{2}}{t}=$

$=\frac{l}{n}+\delta\ .\ \frac{n-1}{2t}$; tā tad $l_1=\frac{l}{n}+\delta\ .\ \frac{n-1}{2t}$; $l_2=\frac{A-(V+\delta)}{t}=$

$=\frac{A-V}{t}-\frac{\delta}{t}=l_1-\frac{\delta}{t}$; tāpat dabūjam, ka $l_3=l_1-\frac{2\delta}{t}$ u. t. t.

Piemērs. Ls 200 000 liels aizņēmums sadalīts 10 000 obligācijās, kas jādzēš 5 izlozēs tā, ka pirmā izlozē lielo vinnestu kopsumma ir Ls 35 000 un katrā nākamā pieaug par Ls 1000, bet pārējās obligācijas izpērk par Ls 210. Sastādīt deldēšanas plānu, ja lielo vinnestu skaits ir 8.

Saskaņā ar nule dabūtām formulām

$l_1 = \frac{9960}{5} + 1000 \cdot \frac{4}{420} = 2001{,}524$; $l_2 = l_1 - \frac{\delta}{t} = 2001{,}524 - 4{,}762 = 1996{,}762$; tāpat dabūjam, ka $l_3 = l_1 - \frac{2\delta}{t} = 1992{,}000$; $l_4 = 1987{,}238$; $l_5 = 1982{,}476$. Tādā kārtā dabūjam šādu deldēšanas plānu.

Izlozes	Izpērkamo obligāciju skaits	Deldēšana		A
		Obligāc. izpirkšanai vajadzīgā summa	Lieliem vinnest. vajadzīgā summa	
1	2002	420 420	35 000	455 420
2	1997	419 370	36 000	455 370
3	1992	418 320	37 000	455 320
4	1987	417 270	38 000	455 270
5	1982	416 220	39 000	455 220
	9960			
liel. vinn.	40			
	10 000			

40. Aizņēmumu kursi un rentabilitāte.

1. Ja obligāciju pircēji aiz šādiem vai citādiem iemesliem nav mierā ar piedāvāto (obligācijās rakstīto) procentu likmi, tad aizņēmumu nevar realizēt par nominālvērtību, bet nāksies apmierināties ar mazāku vērtību; ja turpretim aizdevums ļoti izdevīgs, tad rodas daudz gribētāju iegūt šādas obligācijas, un pircēji ar mieru maksāt lielāku vērtību nekā ir nominālvērtība; tā rodas tā saucamā kursa cena — par obligāciju faktiski maksājamā summa, ko aprēķina uz 100 naudas vienībām un šādā gadījumā sauc par **aizņēmuma kursu.** Ja N ir obligācijas nominālvērtība un F faktiskā vērtība, tad aizņēmuma kurss C izteiksies no sakarības $C : 100 = F : N$, t. i.

$$C = \frac{F}{N} \cdot 100 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50).$$

Piem., ja par obligāciju nominālvērtībā Ls 500 maksā Ls 450, tad aizņēmuma kurss ir $C = \frac{450}{500} \cdot 100 = 90$.

Izejot no šī jēdziena, rodas divi jautājumi: 1) kā, zinot aizņēmuma rentibilitāti, atrast tā kursu un 2) kā, zinot aizņēmuma kursu, atrast aizņēmuma rentabilitāti.

2. Pieņemsim, ka grib izlaist obligācijas par nominālvērtību kopsummā P, maksājot $p^0/_0$ un dzēšot parādu n gados; obligācijām rodas pircēji, ja tie var dabūt par savu obligācijās ieguldīto kapitālu $p_1{}^0/_0$, t. i., ja viņu kapitāla rentabilitāte ir $p_1{}^0/_0$, pie kam $p_1 > p$. Procentu likmi $p^0/_0$ sauc par n o m i n ā l o, bet $p_1{}^0/_0$ — par e f e k t ī v o. Šādā gadījumā pircēji nemaksās par obligācijām to nominālvērtības, tā ka obligāciju izlaidēji nedabūs par tām nominālvērtības P, bet kādu citu summu F, kas būs mazāka par P. Ja zināsim šo F, tad viegli varēs aprēķināt kursu, jo $C = \frac{F}{P} \cdot 100$. Tāpēc ceļas jautājums, kā aprēķināt F, ja zinām n, $p^0/_0$ un $p_1{}^0/_0$. Spriežam tā. Parāds jāsamaksā par pilnu summu P; tā deldēšanai nāksies katru gadu maksāt augļus pēc likmes $p^0/_0$ un deldēšanas summu, kas kopā dod annuitāti A, kuru atrodam no jau zināmas sakarības $A = Pc_{\overline{n|}}^{(p}$; tā tad obligāciju turētāji dabūs katru gadu A, bet viņi faktiski izdevuši tikai F, toties saņem par šo naudu procentu likmi p_1; tāpēc annuitātes A dzēsīs faktisko summu F pēc procentu likmes p_1, un $A = Fc_{\overline{n|}}^{(p_1}$; tā kā annuitātes vienlīdzīgas, tad $Pc_{\overline{n|}}^{(p} = Fc_{\overline{n|}}^{(p_1}$ un

$$F = \frac{Pc_{\overline{n|}}^{(p}}{c_{\overline{n|}}^{(p_1}}; \text{ tā tad } C = \frac{Pc_{\overline{n|}}^{(p}}{Pc_{\overline{n|}}^{(p_1}} \cdot 100 = \frac{c_{\overline{n|}}^{(p}}{c_{\overline{n|}}^{(p_1}} 100 \text{ un galīgi}$$

$$C = \frac{c_{\overline{n|}}^{(p}}{c_{\overline{n|}}^{(p_1}} \cdot 100 \quad \dots\dots\dots \quad (51).$$

Aprēķinus var viegli izdarīt pēc lieluma $c_{\overline{n|}}$ tabulām, bet bieži sastāda vēl īpašas tabulas, ievietojot tanīs jau gatavu izteiksmi lielumam C, kas atbilst dažādiem p, p_1 un n. Šo izteiksmi viegli dabūt, ņemot no tabulām gatavu $c_{\overline{n|}}^{(p}$ un reizinot to ar attiecīgu $_{|n}a^{(p_1}$.

P i e m ē r s. Grib emitēt aizņēmumu, par kuŗu maksā 4%
un kas dzēšams 25 gados; aizņēmumu var reālizēt, ja efektīvā procentu likme ir 5%. Aprēķināt aizņēmuma kursu.

Pēc (51) formulas $C = c_{\overline{25}|}^{(4} \cdot {}_{|25}a^{(5} \cdot 100 =$ $= 0{,}06401196 \cdot 14{,}09394457 \cdot 100 = 90{,}22$; tā tad aizņēmuma kurss ir 90,22.

Ja obligācijas izpērk ne par nominālvērtību N, bet par kādu citu vērtību M, tad $P = ON$, bet jāsamaksā OM, tāpēc $A = OMc_{\overline{n}|}^{(p}$ un no otras puses $A = Fc_{\overline{n}|}^{(p_1}$; tāpēc $OMc_{\overline{n}|}^{(p} =$ $= Fc_{\overline{n}|}^{(p_1}$, no kurienes $F = \dfrac{OMc_{\overline{n}|}^{(p}}{c_{\overline{n}|}^{(p_1}}$; tā tad $C = \dfrac{F}{P} \cdot 100 = \dfrac{OMc_{\overline{n}|}^{(p}}{ONc_{\overline{n}|}^{(p_1}} \cdot 100$

$$\text{un } C = \frac{M}{N} \cdot \frac{c_{\overline{n}|}^{(p}}{c_{\overline{n}|}^{(p_1}} \cdot 100 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51_1).$$

3. Dabūtā sakarība ļauj viegli atrisināt otru jautājumu: pēc dotā kursa atrast rentabilitāti, t. i., pēc dotiem lielumiem C, n un p atrast p_1; tiešām, no (51) sakarības,

$$c_{\overline{n}|}^{(p_1} = \frac{c_{\overline{n}|}^{(p}}{C} \cdot 100 \text{ jeb } \frac{1}{{}_{|n}a^{(p_1}} = \frac{100}{{}_{|n}a^{(p} \cdot C}, \text{ no kurienes}$$

$$ {}_{|n}a^{(p_1} = \frac{C \cdot {}_{|n}a^{(p}}{100} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52).$$

Pēc šīs formulas viegli atrast p_1 ar jau zināmiem paņēmieniem.

P i e m ē r s. Parāds, sadalīts obligācijās, deldējams 35 gadu laikā; par obligācijām maksā 4%; pēc 5 gadiem obligāciju kurss ir 97,03. Aprēķināt, kā rentējas kapitāls, ja obligācijas pērk pēc minētā kursa.

Aizņēmuma ilgums vēl ir 30 gadu; tapēc pēc (52) formulas ${}_{|30}a^{(x} = \dfrac{97{,}03}{100} \cdot {}_{|30}a^{(4} = 0{,}9703 \cdot 17{,}2920\,3330 = 16{,}7784\,5991$; dabūtais skaitlis finanču tabulās vistuvāk pieiet 30 gadu rindā skaitlim 16,7790 1717, kam savukārt atbilst $4^1/_4$%. Tā tad aizņēmuma rentabilitāte, pastāvot minētam kursam, ir $4^1/_4$%.

41. Kursu paritāte.

1. Atkarībā no tam, kāda ir nominālā procentu likme, ko maksā par aizdevumu, vienam un tam pašam aizņēmumam var būt dažādi kursi; piem., ja par obligācijām maksā 4%, tad būs viens kurss, un ja par obligācijām maksā 5%, tad būs cits kurss, vispār augstāks nekā pirmā gadījumā. Ja aizņēmuma kursi ir tādi, ka realizējot pēc šiem kursiem aizņēmumu, obligāciju pircēji dabū vienu un to pašu **efektīvo** procentu likmi, t. i. ja abos gadījumos ir viena un tā pati rentabilitāte, tad saka, ka pastāv kursa paritāte, jo tad aizdevumu ņēmējam vienalga, pēc kāda kursa realizēt aizņēmumu, jo faktiski viņam jāmaksā viena un tā pati procentu likme (efektīvā). Aplūkosim, kāda pastāv sakarība paritātes kursu starpā. Pieņemsim, ka aizņēmumu P var realizēt pēc kursa C, ja maksā par obligācijām p% un pēc kursa C', ja maksā p' %; pirmā gadījumā efektīvo procentu likme p_1 atradīsim pēc (52) formulas no sakarības $|_n a^{(p_1} = \frac{C\,|_n a^{(p}}{100}$; otrā gadījumā efektīvo procentu likmi p_2 atradīsim pēc tās pašas formulas no sakarības $|_n a^{(p_2} = \frac{C'\,|_n a^{(p'}}{100}$; ja nu pie-ņemam ka $p_1 = p_2$ un n viens tas pats, tad $|_n a^{(p_1} = |_n a^{(p_2}$ un līdz ar to $\frac{C\,|_n a^{(p}}{100} = \frac{C'\,|_n a^{(p'}}{100}$; bet tad C un C' ir paritātes kursi, un tāpēc iepriekšējā vienlīdzība, kuŗā varam atmest dalītāju 100, dod meklējamo sakarību paritātes kursu starpā

$$C\,|_n a^{(p} = C'\,|_n a^{(p'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53).$$

Piemērs. Par aizņēmuma obligācijām, kas dzēšamas 30 gadu laikā, maksā 4% un šī aizņēmuma kurss ir 103,11. Aprēķināt, kāds būs pie šīs pašas rentabilitātes aizņēmuma kurss, ja par obligācijām maksātu tikai 3,5%.

Pēc (53) form. $103{,}11\,|_{30} a^{(4} = C\,|_{30} a^{(3,5}$, no kurienes

$$C = \frac{103{,}11\,|_{30} a^{(4}}{|_{30} a^{(3,5}} = 103{,}11 \,.\, |_{30} a^{(4} \,.\, c_{\overline{30|}}^{(3,5} =$$

$$= 103{,}11 \,.\, 17{,}29203330 \,.\, 0{,}05437133 = 96{,}94.$$

Tā tad paritātes kurss ir **96,94**.

2. Paritātes kursu sakarība ļauj viegli noteikt, kāds no aizdevuma piedāvājumiem izdevīgāks: jāizvēlas viens kurss par izejas punktu un jāaprēķina, kāds būs tam paritātes kurss; ja piedāvātais aizņēmuma kurss ir lielāks par paritātes kursu, tad tas aizdevuma ņēmējam izdevīgāks nekā pirmais piedāvājums, ja turpretim otrā piedāvājuma kurss ir mazāks par paritātes kursu, tad tas aizdevuma ņēmējam neizdevīgāks par pirmo piedāvājumu.

P i e m ē r s. Aizņēmumu, kas dzēšams 40 gados, piedāvā realizēt pie 4% pēc kursa 80 un pie 5% pēc kursa 95. Aprēķināt, kurš no piedāvājumiem izdevīgāks aizdevuma ņēmējam.

Aprēķināsim, kāds ir paritātes kurss pie 5% ar kursu 80 pie 4%; pēc (53) form.

$C = 80\,_{|40}a^{(4} \cdot c^{(5}_{\overline{40}|} = 80 \,.\, 19{,}7927\,7388 \,.\, 0{,}0582\,7826 = 92{,}28$; tā tad paritātes kurss ar kursu 80 pie 4% būtu 92,28 pie 5%, tā kā otrs piedāvājums ir pēc kursa 95 pie 5%, tad tas ir augstāks par pirmā piedāvājuma kursa paritātes kursu un tāpēc izdevīgāks ir piedāvājuma pēc kursa 95 pie 5%.

42. Aizņēmumu konvertēšana.

1. Var gadīties, ka aizņēmuma augļu procentu likme ar laiku izrādās par augstu, jo bieži aizņēmums jāizdara neizdevīgos apstākļos; tādā gadījumā aizņēmuma kurss ceļas un pārsniedz nominālo vērtību, bet aizdevuma ņēmējam tas nav izdevīgi, jo tam jāmaksā par aizdevumu augļi pēc augstākās procentu likmes nekā ir tanī brīdī valdošā procentu likme. Tādos gadījumos, ja tas paredzēts aizdevumā nosacījumos, mēdz aizdevumu uzteikt, t. i. pasludināt, ka parāds tiks samaksāts pirms deldēšanas termiņa beigām, pie kam bieži vajadzīgās izpirkšanas summas iegūšanai izlaiž jaunu aizņēmumu, bet par zemāku procentu likmi, tā kā faktiski iznāk agrāko obligāciju apmaiņa pret jaunām ar zemāku procentu likmi. Tādu aizņēmuma pārveidošanu, kur rodas vai nu cita procentu likme vai cits deldēšanas laiks, sauc par **aizņemuma konvertēšanu.** Tādu aizņēmuma konvertēšanu piespiedu kārtā, piem., izdarīja 1883. g. Francija ar savu valsts aizņēmumu, pārejot no 5% uz 4%.

Sakarā ar to rodas šādi jautājumi: 1) kāda būs konvertētā aizdevuma annuitāte, ja aizdevuma atmaksas laiks paliek tas pats, 2) kāds būs aizdevuma atmaksas laiks, ja annuitāte paliek tā pati un 3) cik par vienu jaunu obligāciju jādod veco.

Pieņemsim, ka parāds P deldējams n gados, maksājot $p\%$; pēc k gadiem izdara parāda konvertēšanu, pārejot no $p\%$ uz $p_1\%$. Atradīsim jauno annuitāti A_1, ja paliek tas pats deldēšanas ilgums, tā tad vēl $n-k$ gadi.

Līdzšinējā annuitāte $A = Pc_{\overline{n}|}^{(p}$; parāda P atlikumu pēc k gadiem P_k izteiksies kā vēl atlikušo annuitātu tagadējā vērtība t. i.

$$P_k = \frac{A}{r} + \frac{A}{r^2} + \ldots + \frac{A}{r^{n-k}} = \frac{A}{r^{n-k}} \cdot \frac{r^{n-k}-1}{r-1} =$$

$= A\,{}_{\overline{n-k}|}a^{(p}$; ja procentu likme būs p_1, tad annuitāte būs A_1, un tāpēc citādi izteikts parāda atlikums dos

$P_k = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_1}{r_1^2} + \ldots + \frac{A_1}{r_1^{n-k}} = A_1\,{}_{\overline{n-k}|}a^{(p_1}$, kur r_1 atbilst procentu likmei p_1, tā tad

$$A_1\,{}_{\overline{n-k}|}a^{(p_1} = A\,{}_{\overline{n-k}|}a^{(p}, \quad \ldots\ldots \quad (54),$$

no kurienes $A_1 = \dfrac{A\,{}_{\overline{n-k}|}a^{(p}}{{}_{\overline{n-k}|}a^{(p_1}} = \underbrace{Pc_{\overline{n}|}^{(p} \cdot {}_{\overline{n-k}|}a^{(p} \cdot c_{\overline{n-k}|}^{(p_1}}_{A \text{ vietā ņemtas } Pc_{\overline{n}|}^{(p}}$; tā tad

dabūjam ka $$A_1 = Pc_{\overline{n}|}^{(p}\, c_{\overline{n-k}|}^{(p_1}\, {}_{\overline{n-k}|}a^{(p} \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

šī formula ļauj atrast jauno annuitāti.

Ja gribam paturēt to pašu annuitāti A, bet ņemt $(n-k)$ gadu vietā citu gadu skaitu, tad (54) sakarībā $A_1 = A$ un $n-k=x$; tāpēc dabūjam, ka

$$_{\overline{x}|}a^{(p_1} = {}_{\overline{n-k}|}a^{(p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

no šīs sakarības var atrast x, ja doti p, p_1, n un k.

P i e m ē r s. Parāds Ls 70 000 liels, par kuŗu maksā 5%, dzēšams 30 gados. Parādu grib pēc 10 gadiem konvertēt tā, lai jaunā procentu likme būtu 4%. Aprēķināt 1) jauno annuitāti, ja paliek tas pats deldēšanas laiks un 2) atlikušo deldēšanas laiku, ja paliek tā pati annuitāte.

Pēc (55) form. $A_1 = 70\,000\,{}_{\overline{20}|}a^{(5} \cdot c_{\overline{30}|}^{(5} \cdot c_{\overline{20}|}^{(4} =$

$= 70\,000 : 12{,}46221034 \,.\, 0{,}06505144 \,.\, 0{,}07358175 = 4175{,}45$;

tā tad $A_1 =$ Ls 4175,45.

Pēc (56) form. $_{\overline{x}|}a^{(4} = {}_{\overline{20}|}a^{(5} = 12{,}4622103{,}4$, kas rāda, ka $17 < x < 18$; precīzāku x nozīmi atrodam interpelējot.

2. Pieņemsim, ka no parāda, kuŗa deldēšanas laiks vēl n gadi un par kuŗu maksā p%, atrodas apgrozībā O obligāciju ar nominālvērtību N; tās grib apmainīt pret O_1 obligācijām ar nominālvērtību N_1, par kuŗām maksā p_1% un kas dzēšams n_1 gados. Aprēķināt, cik jaunu obligāciju varēs dabūt par veco, ja konvertēšanu izdara, ņemot par pamatu procentu likmi p_1.

Parāda ON annuitāte A ir $A = ONc_{\overline{n|}}^{(p}$;

„ O_1N_1 „ A „ $A = O_1N_1c_{\overline{n_1|}}^{(p_1}$ aprēķinot visu annuitātu tagadējo vērtību, jāņem par pamatu procentu likmi p_1, dabūjam pirmā gadījumā, ka $K_0 = A\,{}_{|n_1}a^{(p_1} = ONc_{\overline{n|}}^{(p}\,{}_{|n_1}a^{(p_1}$
un otrā gadījumā, ka

$K_0^1 = A_1\,{}_{|n_1}a^{(p_1} = O_1N_1c_{\overline{n_1|}}^{(p_1}\,{}_{|n_1}a^{(p_1} = O_1N_1$; izejot no vienvērtības principa, jāpieņem, ka $K_0 = K_0^1$ un tāpēc

$$ONc_{\overline{n|}}^{(p}\,{}_{|n}a^{(p_1} = O_1N_1, \text{ no kurienes}$$

$$\frac{O_1}{O} = \frac{N}{N_1}\cdot c_{\overline{n|}}^{(p}\,{}_{|n}a^{(p_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Šī formula, kas rāda, kāda sakarība ir starp janno un veco obligaciju skaitu, atļauj aprēķināt, cik jaunu obligāciju var dabūt par vienu vecu.

P i e m ē r s. No aizņēmuma, kas dzēšams 20 gados, atrodas apgrozībā 1000 obligāciju ar Ls 200 nominālvērtību, par kuŗām maksā 5%; šo aizņēmumu grib konvertēt, izlaižot obligācijas ar nominālvērtību Ls 400, par kuŗām maksā 4% un kas dzēšamas 15 gados; konvertēšanas procents ir 4%. Aprēķināt, cik jauno obligāciju var dabūt par vienu veco.

Pēc (57) form.

$$\frac{O_1}{1000} = \frac{200}{400}\,c_{\overline{20|}}^{(5} \cdot {}_{|20}a^{(4} = 0{,}5 . 0{,}08024259 . 13{,}59032634 = 0{,}54526;$$

$O_1 = 545{,}26$; tā tad uz 1000 vecām obligācijām nāk 545,26 jaunas, jeb par vienu vecu var dabūt 0,545 vecas obligācijas.

* *
*

Vingrinājumi.

1. Ls 200 000 liels parāds jādzēš 10 gados, atmaksājot katru gadu vienu un to pašu parāda deldēšanas summu kopā ar augļiem par notecējušo periodu. Sastādīt deldēšanas plānu, ja

par periodu jāmaksā 5% un pirmais maksājums ir 1926. g. 25. maijā.

2. Ls 300 000 liels parāds jādzēš 12 gados ar vienlīdzīgām annuitātēm katra perioda beigās. Sastādīt deldēšanas plānu, ja par parādu rēķina 6%.

3. Aprēķināt, cik ilgā laikā var dzēst Ls 1 200 000 latu lielu pilsētas parādu, par kuŗu maksā 4% augļu un amortizē ar 3% no sākuma perioda, tā tad katra perioda beigās maksā pavisam 7% no sākuma parāda summas.

4. Pašvaldības iestāde grib deldēt savu Ls 1 200 000 lielu aizņēmumu ar Ls 5434,47 lielām annuitātēm 27 gados. Aprēķināt, kādu procentu likmi minētā pašvaldības iestāde grib maksāt par aizņēmumu.

5. Pilsēta deldē ar ikgadēju Ls 8000 lielu annuitāti savu Ls 100 000 lielu parādu, maksājot pirmo 10 gadu laikā 4%, pēc tam $3\frac{1}{2}$% augļiem. Aprēķināt, cik ilgā laikā parāds būs dzēsts.

6. Aprēķināt, cik procentu jāmaksā augļiem, ja Ls 2 500 000 lielu parādu var dzēst 20 gados ar Ls 179 904 lielu annuitāti.

7. Atrast anticipatīvo prolongācijas reizinātāju procentu likmēm: 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{3}{4}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6.

8. Aprēķināt dekursīvo procentu likmi, kas būtu konforma ar sekojošām anticipatīvām: $3\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{2}$, 6, 8, 10.

9. Sastādīt anticipatīvo prolongāciju un diskonta reizinātāju tabulas procentu likmei 5 no 1—15 gadiem.

10. 1924. g. 4. maijā pašvaldības iestāde aizņēmusies Ls 60 000, par ko jāmaksā augļiem 6% anticipatīvi; parāds jādzēš 10 gadu laikā ar vienlīdzīgām annuitātēm. Sastādīt deldēšanas plānu.

11. Sastādīt deldēšanas fonda pārskatu pēc valsts zemes bankas nosacījumiem, ja fonds jāsakrāj *a*) 15, *b*) 20 gados. Ls 1000 liela parāda dzēšanai.

12. Sastādīt deldēšanas plānu pēc Latvijas hipotēku bankas nosacījumiem Ls 100 liela parāda dzēšanai *a*) 9, *b*) 12 gados.

13. Aprēķināt, kāda iznāk faktiskā dekursīvo augļu likme pēc Latvijas hipotēku bankas nosacījumiem, ja Ls 100 liels parāds jādzēš 6 gados.

14. Ls 50 000 liels aizņēmums jādzēš 8 gados tā, ka katra gada annuitāte par Ls 1000 lielāka nekā iepriekšējā gada annuitāte; sastādīt deldēšanas plānu, ja par parādu rēķina 5%.

15. Sastādīt deldēšanās plānu Ls 20 000 aizņēmuma dzēšanai, ja tas jādzēš 10 gados, par parādu maksā $3\frac{1}{2}\%$ un annuitāte ikgadus pieaug par 2% no iepriekšējas annuitātes.

16. Ls 500 000 liels aizņēmums sadalīts obligācijās ar nominālvērtību Ls 200, par kuŗām maksā 4% augļu gadā. Aizdevums jādzēš 12 gados. Sastādīt deldēšanas plānu.

17. Aizņēmums Ls 300 000 liels, sadalīts 1000 obligācijās ar nominālvērtību Ls 100 un 400 obligācijās ar nominālvērtību Ls 500; par obligācijām maksā 6% par notecējušu periodu. Sastādīt deldēšanas plānu, ja parāds jādzēš 12 gados.

18. Ls 200 000 liels parāds sadalīts 2000 obligācijās ar nominālvērtību Ls 100, par kuŗām maksā 4% augļu. Parāds jādzēš 15 gados, izpērkot obligācijas par Ls 125. Sastādīt deldēšanas plānu.

19. Aizņēmums, kas noslēgts 1924. g. 15. aprilī, sadalīts 600 obligācijās ar nominālvērtību Ls 200, par kuŗām jāmaksā 4% anticipatīvi. Parāds dzēšams 9 gados. Sastādīt deldēšanas plānu *a*) ja obligācijas izpērk par nominālvērtību, *b*) ja tās izpērk par Ls 250.

20. Loteriju aizņēmums sadalīts 5000 obligācijās ar nominālvērtību Ls 200, jādzēš 10 izlozēs tā, ka katrā izlozē ir 15 lielo vinnestu par summu Ls 10 000 un pārējās obligācijas izpērk pirmos divi gados par nominālvērtību, bet nākamos par Ls 210. Sastādīt 1) deldēšanas plānu 2) aprēķināt, kāda iznāktu caurmēra procentu likme par aizdevumu.

21. Iepriekšējā uzdevumā minētais aizņēmums jādzēš tā, ka obligācijas izpērk par Ls 205, bet lielo vinnestu kopsumma Ls 40 000 ar katru nākamo gadu pieaug par Ls 5000.

22. Aizņēmums dzēšams 25 gados ar vienlīdzīgām annuitātēm, obligācijas izpērk par nominālvērtību un par tām maksā 3%. Atrast, kāds būs aizņēmuma kurss, ja aizdevējs grib dabūt *a*) 4%, *b*) $4\frac{1}{2}\%$, *c*) 5% efektīvi.

23. Obligācijās sadalīts aizņēmums dzēšams 20 gados; par obligācijām maksā 4%; pēc 10 gadiem efektīvā procentu likme ir $3{,}5\%$. Aprēķināt aizņēmuma kursu.

24. Obligācijās sadalīts aizņēmums dzēšams 15 gados par obligācijām maksā $3\frac{1}{2}\%$ nomināli. Aprēķināt obligāciju rentabilitāti, ja aizņēmuma obligāciju kurss ir 96,54.

25. Obligacijās sadalīts aizņēmums dzēšams 30 gados;

par obligācijām maksā $4^0/_0$; pēc 20 gadiem obligāciju kurss ir 102,54. Aprēķināt obligāciju rentabilitāti šinī laikā.

26. Aprēķināt kāds būtu paritātes kurss pie $5^0/_0$ aizņēmumam, kas dzēšams 28 gados un kuŗa kurss pie $4^0/_0$ ir 95,68.

27. 40 semestros deldējama aizņēmuma kurss pie $3^0/_0$ par semestri ir 100 (al pari); aprēķināt, kāds būtu kurss pie $2^0/_0$ par semestri.

28. Aizņēmuma realizēšanai, kas dzēšams 20 gados, ienāk trīs piedāvājumi; viens pie $3^1/_2{}^0/_0$ pēc kursa 95,62, otrs pie $3^0/_0$ pēc kursa 91,35 un trešais pie $4^1/_2{}^0/_0$ pēc kursa 105. Aprēķināt kuŗš no piedāvājumiem izdevīgākais.

29. Obligācijās sadalīts aizņēmums, par kuŗām maksā $4^1/_2{}^0/_0$ un jādzēš 30 gadu laikā; pēc 15 gadiem grib aizņēmumu konvertēt, maksājot uz priekšu par obligācijām tikai $3^1/_2{}^0/_0$. Aprēķināt, cik ilgā laikā varēs dzēst aizņēmumu, ja paliek tā pati annuitāte.

30. No aizņēmuma, par kuŗu maksā $5^0/_0$, atrodas apgrozībā vēl 1250 obligācijas ar nominālvērtību Ls 200, kas izpērkamas 10 gadu laikā. Šo aizņēmumu konvertē tā, ka par jaunām, obligācijām, kuŗu vērtība Ls 100, maksā tikai $4^0/_0$, konvertēšanai par pamatu ņem $4^0/_0$ un parādu grib dzēst minētā laikā. Aprēķināt, cik jaunu obligāciju var dabūt par vienu vecu.