II. daļa

Apdrošināšanas matēmatika

Pirmā nodaļa.

I. Varbūtību rēķinu elementi.

1. Jēdziens par matēmatisko varbūtību.

1. Apdrošināšanas rēķini dibinās uz statistiskiem datiem; pēdējo iztulkošana un novērtēšana pieder varbūtību rēķiniem. Tāpēc, pirms pārejam uz apdrošināšanas rēķinu aplūkošanu pēc būtības, kur mūs interesēs galvenā kārtā matēmatiskā puse, jāaplūko varbūtību rēķinu elementi.

Matēmatikas materiāls ir skatlis; skaitlis izteic priekšmetu vai īpašību attiecības; tas ir mūsu gara produkts, tomēr jau stipri objektivizēts.

Varbūtību rēķini skaitli lieto īpašā nozīmē; tas izteic skaitliski — kvantitatīvi — mūsu domu un cerību, mūsu sagaidīšanas stāvokli pret notikumiem. Kā tas iespējams?

Mēs domājam jēdzienos, t. i. mūsu domu materiāls ir tā saucamie jēdzieni; mēs radām jēdzienus un saistām tos spriedumos, apgalvodami vai noliegdami vienu jēdzienu zīmējoties uz otru; no jau dabūtiem spriedumiem ar prāta slēdzienu palīdzību dabūjam jaunus spriedumus. Piemēram domas: „šodien ir trešdiena", „šī ēka nav Latvijas universitātes ēka" — ir spriedumi, kur jēdzienus „šī diena" un „trešdiena" apgalvojam vienu par otru, turpretim jēdziens „šī ēka" un „Latvijas universitātes ēka" noliedzam vienu zīmējoties uz otru.

Spriedumus mēdz, starp citu, sadalīt kategoriskos un hipotetiskos jeb nosacījuma spriedumos. Nupat minētie piemēri bija kategorisko spiedumu paraugi, kur vienu jēdzienu apgalvojam vai noliedzam, zīmējoties uz otru jēdzienu bez kāda nosacījuma, iebilduma t. i. apgalvojam vai noliedzam kategoriski. Turpretim spriedumi: „ja ķermeni saspiež, tad tā temperatūra ceļas", vai vispār: „ja A ir B, tad C ir D" — ir nosacījuma spriedumi, kur viens spriedums ir domājams kā cēlonis, otrs — kā sekas.

Sakarību hipotetisko spriedumu starpā attaisno pieredzes vai pierādījuma ceļā. Matēmatiskie spriedumi ir hipotetiskie spriedumi, piem., ja skaitļa ciparu summa dalās ar 3, tad ari skaitlis dalās ar 3; ja velk trijstūrī augstumus, tad tie krustojas vienā punktā u. tml. Matēmatikā šādus spriedumus attaisno galvenā kārtā ar pierādījumu. Pēc matēmatikas parauga ari dabas zinātnēs un citur lieto hipotetiskos spriedumus, bet tur tos bieži attaisno ar pieredzes datu konstatējumu; piem., ja gāzi saspiež, tad tās apjoms pamazinās u. tml. Hipotetiskie spriedumi parasti izteic n e p i e c i e š a m ī b u: ja *A* ir *B*, tad *C* ir nepieciešami, neizbēgami *D*.

Bieži hipotetiskos spriedumus lieto citādā formā, tā saucamā disjunktivo vai sadalīto spriedumu formā, kuŗu vispārējs veids šāds: ja *A* ir *B*, tad *C* ir vai nu *D* vai *E* vai *F*; ja *A* notiek, tad rodas *B* vai *C* vai *D*. Disjunktīvos spriedumos secinājuma n e p i e c i e š a m ī b a zīmējas uz visiem seku spriedumiem, bet uz katru atsevišķu seku spriedumu zīmējoties ir izteikta tikai i e s p ē j a m ī b a. Piem., spriedumā: ja skaitli dala ar 3, tad atlikums ir vai nu 0, vai 1 vai 2, secinājums zīmējas uz atlikumu: atlikums k a t r ā z i ņ ā ir 0, 1 vai 2, bet zīmējoties uz vienu spriedumu — atlikums ir 0 — izteikta tikai i e s p ē j a m ī b a. Līdzīgā kārtā to varam teikt, piem., par šādiem spriedumiem: ja caur trijstūŗu virsotni velk taisni, tad tā krusto vai nekrusto pretējo malu; ja gāzi saspiež, tad tās apjoms mainās vai nemainās u. tml.

D i s j u n k t ī v i e spriedumi dod mums zināšanas, jo saista cēloni ar sekām, bet tas vēl par maz: a r k a t r u d i s j u n k t ī v o s p r i e d u m u s a i s t ā s z i n ā m a s k a i t l i s k a p u s e, jo viens vai otrs no disjunktīvā sprieduma seku spriedumiem var aptvert lielāku vai mazāku lauku; piem., spriedumā, ja skaitļa dala ar 5, tad skaitlis dalās vai nedalās ar 5; šeit ir divi seku spriedumi: skaitlis dalās ar 5; skaitlis nedalās ar 5; pirmā sprieduma reālizēšanas lauks ir daudz šaurāks, jo no visiem iespējamiem atlikumiem: 0, 1, 2, 3, 4 tikai viens atlikums 0 ļauj reālizēties pirmajam spriedumam (skaitlis dalās ar 5), bet pārēji četri ļauj realizēties jaunam spriedumam (skaitlis nedalās ar 5), tā tad ja visus 5 atlikumus uzlūkosim kā abu seku spriedumu reālizēšanas lauku, tad piektā daļa no šī lauka zīmēsies uz pirmo spriedumu, četras piektdaļas uz otro. Cits piemērs: urnā ar necaurredzamām sienām atrodas 1 balta, 2 melnas un 3 sarkanas bumbiņas; no šīs urnas ņemākā pagadas vienu bumbiņu, kuŗa var būt balta vai melna vai sarkana; baltas bumbiņas izvilkšanas gadījums aptveŗ šaurāku lauku, jo ir tikai viena sestā daļa no visu iespējamību laukiem, turpretim sarkanas bumbiņas izvilkšanas gadījums aptveŗ pusi no visu iespējamību lauka. Tā tad var būt spriedums, kas, izejot no dažām zināšanām, ļauj noskaidrot mūsu domu skaitlisko pusi: ja zinām visu iespējamību reālizēšanās lauku un to, kuŗa apmēros būs viens no disjunktīvā sprieduma locekļiem reālizēts, tad pēdējā lauka attiecība pret visu iespējamību lauku izteic v a r b ū t ī b a s s p r i e d u m u par disjunktīvā sprieduma locekli.

Ja disjunktīvo spriedumu sadalīsim pēc formas hipotetiskos spriedumos, tad nebūs vairs nepieciešamības, bet būs tikai varbūtība; piem., spriedumu: ja skaitli dala ar 5, tad šis skaitlis dalās vai nedalās ar 5 — var sadalīt divos pēc formas hipotetiskos spriedumos: ja skaitli dala ar 5, tad šis skaitlis v a r b ū t nedalās ar 5; ja skaitli dala ar 5, tad v a r b ū t šis skaitlis nedalās ar 5; ja izlaižam vārdu v a r b ū t, tad spriedums nebūs pareizs; protams to varētu izteikt ari, piem., tādā formā: ja skaitli dala ar 5, tad viņš var dalīties ar 5 u. tml. Nule teiktais ļauj mums nākt pie šādiem tālākiem secinājumiem.

2. Ir parādības, kuŗu cēloņi zināmi; tāpēc tās varam jau iepriekš paredzēt: ja darbosies zināmie cēloņi, tād notiks iepriekš zināmas parādības. Piem., paceļot akmeni un palaižot brīvu, jau iepriekš zinām, ka tas kritīs uz zemi. Parādības, kuŗas nevaram paredzēt, vai nu tāpēc, ka nezinām parādību cēloņus vai ari tāpēc ka šie cēloņi ļoti sarežģīti un dažādi, sauc par g a d ī j u m a p a r ā d ī b ā m vai g a d ī j u m i e m. Piemēram, metot kubveidīgu spēļu kauliņu uz galda, zinām, ka tas uzkritīs ar vienu no savām plāksnēm, bet ar kuŗu īsti, atkarājas no daudziem apstākļiem, tā ka iepriekš pateikt to nevaram, un tāpēc sakām, ka var būt viens no sešiem g a d ī j u m i e m (kubam sešas plāksnes). Nevarēdami spriest par kādas parādības izcelšanos n e a p š a u b ā m i, mēs tomēr meklējam kaut kādus pamatus, kas ļautu spriest, ka dažas parādības vairāk, dažas mazāk v a r b ū t ī g a s, t. i. ka mums ir pamats gaidīt drīzāk vienas parādības rašanos nekā otras. Piem., ja zinām, ka no 1000 lozēm tikai viena ir ar vinnestu, bet pārējās tukšas, tad, velkot vienu no 1000 lozēm, mums ir pamats sagaidīt, ka drīzāk izvilksim tukšo nekā pilno (ar vinnestu) lozi, kaut gan vispār varam izvilkt vai pilno vai tukšo lozi.

Cits piemērs. Ja uzrakstām, kā pagadās, kādu skaitli, tad mums ir pamats drīzāk gaidīt, ka šis skaitlis nedalīsies ar 5 nekā dalīsies, jo pēdējais gadījums iespējams tikai tad, ja skaitļa beidzamais cipars ir 5 vai 0, bet pavisam ir 10 cīparu, kas var atrasties beidzamā vietā.

Tā tad varbūtības jēdziens ir saistīts ar tādiem jautājumiem, uz kuŗiem var atbildēt tikai tā, ka jabūt vienam no gadījumiem: vai A, vai B, vai C, . . . , vai K.

Matēmatikas uzdevums atrast, kuŗš no šiem gadījumiem drīzāk sagaidāms, vairāk varbūtīgs, un šo varbūtības pakāpi izteikt skaitliski.

3. Ikvienu parādību, kas var rasties mēģinājumā vai novērojumā, sauksim par notikumu vai gadījumu.

Gadījumus $A, B, C, \ldots, K$ sauksim par vienīgi iespējamiem, ja vienam no tiem katrā ziņā jānotiek; piem., uzrakstot, kā pagadās, skaitli, zinām, ka tā beidzamais cipars ir viens no desmit cipariem; tā tad beidzamais cipars var būt viens no 10 dažādiem cipariem, bet vienam kautkādam no šiem cipariem katrā ziņā jābūt beidzamam. Ja viens gadījums izslēdz pārējos, tad gadījumus sauc par nesavietojamiem (vienā pašā laikā nevar rasties reizē divi gadījumi), piem., nevar vienā un tanī pašā skaitlī divi cipari būt par beidzamo ciparu, bet var būt tikai viens beidzamais cipars. Divus gadījumus sauc par vienlīdzīgi iespējamiem, ja nav nekāda pamata gaidīt vienu vairāk nekā otru; vairākus gadījumus sauc par vienlīdzīgi iespējamiem, ja ik pa divi tie vienlīdzīgi iespējami.

Pieņemsim, ka gadījumi

$$A, B, C, \ldots, K$$

ir vienīgi un vienlīdzīgi iespējami un nesavietojami; tad par ikviena gadījuma varbūtības mēru pieņem daļu, kuŗas skaitītājs 1 un saucējs visu gadījumu skaits. Piem., varbūtība, ka metot spēļu kauliņu dabūsim 3 acis, ir $\frac{1}{6}$, jo pavisam var būt 6 gadījumi un pieņemam, ka tie gadījumi ir nesavietojami, vienīgi un vienlīdzīgi iespējami.

Pieņemsim, ka vienīgi iespējamie un nesavietojamie gadījumi

$$A, B \text{ un } C$$

nav vienlīdzīgi iespējami, bet tos var sadalīt atsevišķos vienlīdzīgi iespējamos gadījumos; pieņemsim, ka

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ ir gadījuma A atsevišķie veidi
$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_p$ " " B " "
$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$ " " C " "

tā tad, lai notiktu gadījums A, jābūt vienam un tikai vienam no gadījumiem $a_1, a_2, \ldots, a_k$, lai notiktu gadījums B, jābūt vienam no gadījumiem $b_1, b_2, \ldots, b_p$ u. t. t.

Gadījumi $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_m$, kuŗu pavisam ir $k+p+m=n$, ir nesavietojami; bez tam, kā jau aizrādīts, pieņemam, ka tie ir vienlīdzīgi iespējami.

Pieņemot tādus nosacījumus, par gadījumu A, B un C varbūtībām sauc daļas

$$\frac{k}{n}, \frac{p}{n} \text{ un } \frac{m}{n}.$$

Gadījumus $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sauc par labvēlīgiem gadījumiem notikumam A, gadījumus $b_1, b_2, \ldots, b_k$ sauc par labvēlīgiem gadījumiem notikumam B u. t. t.

Šie gadījumi kopā dod visu jautājumā vienlīdzīgi iespējamo gadījumu skaitu $k+p+m=n$.

Tā tad varam teikt, ka

⊙ **par notikuma varbūtību sauc daļu, kuŗas skaitītājs ir visu šim notikumam labvēlīgo gadījumu skaits, un saucējs visu vienlīdzīgi iespējamo gadījumu skaits, t. i.**

$$v=\frac{l}{n}.$$

4. Pēc šī apzīmējuma varbūtība ir racionāls skaitlis, kas atrodas 0 un 1 starpā. Varbūtība sasniedz nozīmi 1, ja visi gadījumi labvēlīgi notikumam, t. i., ja notikums ir neapšaubāms; piem., varbūtība izņemt no kastītes, kuŗā ir 3 baltas bumbiņas, vienu baltu bumbiņu, ir 1, citiem vārdiem, mēs katrā mēģinājumā izņemsim balto bumbiņu. Ja notikumam nav neviena labvēlīga gadījuma, tad varbūtība ir 0, un notikums neiespējams, piem., nule minētajā piemērā nav iespējams izņemt melnu bumbiņu, ja kastītē nav nevienas melnas bumbiņas. Jo vairāk varbūtība tuvojas skaitlim 1, jo notikums iespējamāks; jo tā tuvāka nullei, jo notikums mazāk iespējams.

P i e m ē r s. Kastītē atrodas 2 baltas un 7 melnas bumbiņas; kāda ir varbūtība izvilkt baltu un kāda varbūtība izvilkt melnu bumbiņu?

Pavisam ir 9 nesavietojami, vienīgi un vienlīdzīgi iespējami gadījumi, no kuŗiem 2 ir labvēlīgi pirmam notikumam, kuŗa varbūtību apzīmēsim ar v_1, un 7 labvēlīgi otram notikumam, kuŗa varbūtību apzīmēsim ar v_2. Pēc varbūtības apzīmējuma

$$v_1 = \frac{2}{9}; \quad v_2 = \frac{7}{9}.$$

5. Bieži, aprēķinot visu jautājumā iespējamo gadījumu un kādam notikumam labvēlīgo gadījumu skaitu, jālieto kombinatorikas formulas.

P i e m ē r i. 1) Urnā atrodas 8 baltas un 4 melnas bumbiņas; atrast cik liela varbūtība, ka ņemot vienā reizē kā pagadās divas bumbiņas, tās abas būs melnas.

Visas 12 bumbiņas var grupēties pāŗos, pie kam viens pāris atšķirsies no otra tikai ar elementiem; tāpēc visu mēģinājumā iespējamo gadījumu ir $C_{12}^2 = \binom{12}{2} = \frac{12\,.\,11}{2\,.\,1} = 66$; 4 melnās bumbiņas var kombinēties pāŗos $C_4^2 = \binom{4}{2} = \frac{4\,.\,3}{2\,.\,1} = 6$ gadījumos.

Tā tad ir 6 labvēlīgi un 66 mēģinājumā iespējami gadījumi, tāpēc meklējamā varbūtība ir

$$v = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}.$$

Atrast, cik liela varbūtība ar diviem spēļu kauliņiem uzmest 7 acis.

Tā kā ikviena no 6 pirmā kauliņa acīm var uzkrist reizē ar ikvienu no 6 otra kauliņa acīm, tad pavisam mēģinājumā iespējamo gadījumu būs tik daudz, cik var būt otrās klases variaciju ar atkārtojumiem no 6 elementiem, t. i., pavisam būs mēģinājumā $6^2 = 36$ iespējamie gadījumi. Labvēlīgi gadījumam būs šādi acu sakopojumi:

uz I kaul.	uz II kaul.
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

tā tad pavisam 6 labvēlīgi gadījumi, tāpēc $v = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2. Varbūtību saskaitīšana.

1. ⊙ Varbūtība, ka notiks viens no nesavietojamiem gadījumiem, bez norādījuma, kuŗš īsti, ir vienlīdzīga ar šo gadījumu varbūtību summu.

Pieņemsim, ka mēģinājumā vispār iespējamo n gadījumu starpā ir m_1 labvēlīgu notikumam A gadījumu, m_2 — labvēlīgu notikumam B un m_3 — labvēlīgu notikumam C. Ja notikuma A varbūtību apzīmēsim ar v_1, notikuma B — ar v_2, notikuma C — ar v_3, tad pēc apzīmējuma

$$v_1 = \frac{m_1}{n}; \quad v_2 = \frac{m_2}{n}; \quad v_3 = \frac{m_3}{n}$$

labvēlīgu gadījumu, lai iestātos notikums A, vai A, vai C, ir $m_1 + m_2 + m_3$; tāpēc varbūtība v, ka notiks A vai B vai C, ir

$$v = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{n}; \text{ tā kā } \frac{m_1 + m_2 + m_3}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \frac{m_3}{n}, \text{ tad}$$

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Tā tad varbūtību saskaitīšanu lieto tur, kur var būt viens, vai otrs, vai trešs u. t. t. gadījums.

P i e m ē r s. No urnas, kuŗā 6 baltas, 8 melnas un 2 sarkanas bumbiņas, izņem vienu bumbiņu. Atrast, cik liela varbūtība — izņemt balto vai sarkano bumbiņu.

Pēc (1) formulas $v = v_1 + v_2 = \frac{6}{16} + \frac{2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

2. Pieņemsim, ka kāda gadījuma A varbūtība ir p; aprēķināsim šī gadījuma n e n o t i k š a n a s varbūtību q. Gadījuma A notikšana un nenotikšana ir pretējie notikumi, t. i., tādi, kas pilnīgi izsmeļ mēģinājumu un ir nesavietojami.

Pēc varbūtību saskaitīšanas formulas summa $p+q$ ir varbūtība, ka notiks viens vai otrs no pretējiem gadījumiem, bet tā kā viens no pretējiem gadījumiem katrā ziņā notiks, tad $p+q=1$ un $q=1-p$.

Ja notikums A neapšaubāms, tad tam pretējs ir neiespējams; bet tad notikuma A varbūtība ir 1 un pretēja notikuma varbūtība nulle. Ja turpretīm notikums A neiespējams ($p=0$), tad tam pretējs notikums ir neapšaubāms ($q=1$).

Praktiskos jautājumos nākas pieņemt notikumus, kuŗu varbūtība maz atšķiŗas no 1, par neapšaubāmiem, un notikums, kuŗu varbūtība ļoti maza, par neiespējamu.

Līdz ar to viens no varbūtību rēķinu galvenākiem uzdevumiem pastāv iekš tam, lai uzmeklētu gadījumus, kuŗu varbūtības tuvas 1 vai 0.

3. Varbūtību reizināšana.

1. ⊙ **Varbūtība, ka notiks vienlaikus divi neatkarīg viens no otra gadījumi, ir vienlīdzīga ar šo notikumu varbūtību reizinājumu.**

Ja gadījumi ir tādi, ka viena gadījuma varbūtība nav atkarīga no tam, vai pārējie ir notikuši vai ne, tad tādus gadījumus sauc par neatkarīgiem gadījumiem.

Piemērs. Vienā urnā 10 bumbiņas, no kuŗām 3 baltas, otrā urnā 12 bumbiņas, no kuŗām 5 baltas. Aprēķināt, cik liela varbūtība, ņemot no abām urnām (vienlaikus vai vienu pēc otras) pa vienai bumbiņai, izvilkt abas baltās bumbiņas.

Lai aprēķinātu meklējamo varbūtību, jāaprēķina visu iespējamo gadījumu skaits un minētam notikumam (divu baltu bumbiņu izņemšanai) labvēlīgo gadījumu skaits.

Ikviena pirmās urnas bumbiņa var kombinēties ar ikvienu otrās urnas bumbiņu; tā tad pavisam iespējamo gadījumu skaits ir $10 . 12$; labvēlīgās notikumam kombinācijas ir tās, kur kāda pirmās urnas baltā bumbiņa kombinējas ar kādu otrās urnas balto bumbiņu; šādu gadījumu skaits ir $3 . 5$; tā tad meklējamā varbūtība v izteicas tā:

$$v=\frac{3 . 5}{10 . 12}=\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{12};$$

$\frac{3}{10}$ ir varbūtība izvilkt no pirmās urnas balto bumbiņu, $\frac{5}{12}$ — varbūtība izvilkt no otrās urnas balto bumbiņu. Redzam, ka meklējamā sarežģītā notikuma varbūtība ir atsevišķo gadījumu varbūtību reizinājums.

Ņemsim tagad vispārējo gadījumu. Ja kādam notikumam A no n_1 iespējamiem gadījumiem ir l_1 labvēlīgo un notikumam B no n_2 iespējamiem gadījumiem l_2 labvēlīgo, tad pirmā notikuma varbūtība $v_1 = \frac{l_1}{n_1}$ un otrā notikuma varbūtība $v_2 = \frac{l_2}{n_2}$.

Varbūtību, ka notiks abi minētie gadījumi (kā viens, tā otrs), atradīsim, aprēķinot šī sarežģītā notikuma vispār iespējamo gadījumu skaitu un tam labvēlīgo gadījumu skaitu.

Tā kā notikumam A ir n_1 iespējamo un notikumam B ir n_2 iespējamo gadījumu, tad ikviens no n_1 gadījumiem var kombinēties ar ikvienu no n_2 gadījumiem, tā tad pavisam būs $n_1\ n_2$ iespējamo gadījumu; tāpat ikviens no labvēlīgiem l_1 gadījumiem var kombinēties ar ikvienu no labvēlīgiem l_2 gadījumiem, tā tad pavisam labvēlīgo gadījumu būs $l_1 . l_2$.

Tāpēc meklējamā varbūtība v izteiksies tā:

$$v = \frac{l_1 . l_2}{n_1 . n_2} = \frac{l_1}{n_1} . \frac{l_2}{n_2} \text{ jeb } \nu = \nu_1 . \nu_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Teikto par divi gadījumiem var viegli vispārināt vairākiem gadījumiem.

Tā tad varbūtību reizināšanu lieto tur, kur jābūt kā vienam, tā otram, tā trešam u. t. t. gadījumam.

Piemērs. Varbūtība uzmest ar spēļu kauliņu 6 acis, kā redzējām, ir $^1/_6$. Ja jautāsim, cik liela varbūtība ar divi spēļu kauliņiem uzmest 12 acis (vai ar vienu divi reizes no vietas pa 6 acīm), tad šī varbūtība izteiksies ar atsevišķo notikumu varbūtību reizinājumu un tā tad būs $^1/_{36}$.

3. Ja divi notikumi ir atkarīgi viens no otra un tiem jānotiek kā vienam, tā otram, tad nonākam pie līdzīgas šo notikumu varbūtības aprēķināšanas.

⊙ **Varbūtība, ka notiks vienlaikus divi gadījumi, ir vienlīdzīga ar pirmā gadījuma varbūtību, pareizinātu ar otra gadījuma varbūtību, kas aprēķināta tā, it kā pirmais gadījums jau būtu noticis.**

Pieņemsim, ka no visiem n mēģinājumā vienlīdzīgi iespējamiem gadījumiem pirmie m gadījumi labvēlīgi notikumam A, citi tam nav labvēlīgi; pieņemsim, ka no minētiem m gadījumiem pirmie k gadījumi ir labvēlīgi notikumam B, citi tam nav labvēlīgi.

Tad notikuma A varbūtība $v_1 = \frac{m}{n}$; notikuma B varbūtība, pieņemot, ka gadījums A jau noticis, ir $v_2 = \frac{k}{m}$, jo tas var notikt tikai tad, ja ir iestājies viens no pirmiem m gadījumiem; beidzot, varbūtība v, ka abi gadījumi A un B notikuši vienlaikus vai viens pēc otra, ir $v = \frac{k}{n}$, jo abiem gadījumiem, lai tie notiktu abi, labvēlīgi būs tikai pirmie k gadījumi.

Tā kā $\frac{k}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m}$, tad $\nu = \nu_1 \cdot \nu_2$

Piemērs. No kāršu spēles izvelk vienu pēc otras divas kārtis, atrast varbūtību, ka abas izvilktās kārtis ir figūras.

Kāršu spēlē ir 52 kārtis un to starpā 12 figūras; tā tad varbūtība izvilkt pirmo reizi figūru ir $^{12}/_{52} = {}^3/_{13}$; ja pirmā kārts izvilkta, tad paliek 51 kārts un to starpā 11 figūras; tā tad varbūtība izvilkt otro reizi figūru ir $\frac{11}{51}$. Varbūtība izvilkt figūras divreiz no vietas pēc varbūtību reizināšanas likuma, ir $\frac{3}{13} \cdot \frac{11}{51} = \frac{11}{221}$.

Šo pašu rezultātu varētu dabūt ari citādi. Aprēķināsim cik var būt gadījumu, velkot divas kārtis; to ir $C_{52}^{2} = \binom{52}{2} = \frac{52 \cdot 51}{1 \cdot 2}$; labvēlīgu gadījumu, lai izvilktās kārtis abas būtu figūras, ir $C_{12}^{2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2}$; tāpēc varbūtība izvilkt vienu pēc otras divas figūras vai, kas vienalga, velkot divas kārtis, izvilkt abas figūras, ir

$$\frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} : \frac{52 \cdot 51}{1 \cdot 2} = \frac{12 \cdot 11}{52 \cdot 51} = \frac{11}{221}$$

4. Mēģinājumu atkārtošana.

1. Aplūkosim šādu uzdevumu. Urnā atrodas 2 baltas un 3 melnas bumbiņas; no urnas velk bumbiņu un liek atkal atpakaļ. Aprēķināt 1) kāda varbūtība, velkot 4 reizes, izvilkt vienreiz baltu un 3 reizes melnu bumbiņu un 2) kāds varbūtīgākais izvilkto balto un melno bumbiņu skaits, ja vlek 5 reizes bumbiņu.

Šinī uzdevumā mums ir darīšana ar tā saucamo m ē ģ i n ā j u m u a t k ā r t o š a n u, t. i. ar gadījumu, kur tā iekārtojam apstākļus, lai viens no nesavietojamiem notikumiem varētu reālizēties.

Minētā uzdevumā notikumi ir vai nu baltas vai melnas bumbiņas izvilkšana; velkot bumbiņu, mēs iekārtojam apstākļus tā, lai rastos melna vai balta bumbiņa.

Ja bumbiņu velk un liek atkal atpakaļ 4 reizes, tad vispār var būt šādi gadījumi: var izvilkt 1) visas 4 reizes baltu bumbiņu; 2) 3 reizes baltu un 1 reizi melnu; 3) 2 reizes baltu un 2 reizes melnu; 4) 1 reizi baltu un 3 reizes melnu un beidzot 5) visas 4 reizes melnu; varbūtība izvilkt baltu bumbiņu ir $\frac{2}{5}$ un varbūtība izvilkt melnu bumbiņu $\frac{3}{5}$; ja kārtība, kādā jāizvelk bumbiņas, būtu noteikta, piem., būtu jāizvelk pirmo reizi balta, un pārējās 3 reizes melna bumbiņa, tad varbūtība izvilkt šādā kārtībā bumbiņas izteiktos pēc neatkarīgo notikumu varbūtību reizinājuma likuma kā $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3$; tā kā kārtība te nav noteikta, bet balto bumbiņu var izvilkt vai nu pirmo, vai otru vai trešo vai ceturto reizi, tad varbūtība izvilkt vispār vienu baltu un trīs melnas bumbiņas, izteiksies kā $4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{2^3 \cdot 3^3}{5^4} = \frac{216}{5^4}$. Līdz ar to esam atrisinājuši mūsu uzdevuma pirmo jautājumu.

Aplūkosim tagad otru jautājumu: kāds varbūtīgākais izvilkto balto bumbiņu skaits, ja velk 5 reizes, liekot katrreiz izvilkto bumbiņu atkal atpakaļ. Te var būt 6 dažādi gadījumi: no visām 5 reizēs izvilktām bumbiņām 1) visas ir baltas, 2) 4 ir baltas; 3) 3 ir baltas; 4) 2 ir baltas; 5) 1 ir balta un 6) neviena nav balta; ja kārtība būtu noteikta, piem., tā, ka baltās bumbiņas rodas no sākuma, tad visos minētos gadījumos varbūtības izteiktos tā:

1) varb. izv. visas 5 reizes baltu bumb. . . . . $(\frac{2}{5})^5$;
2) „ „ pirmās 4 „ „ un 1 reizi melnu bumb. $(\frac{2}{5})^4 \cdot \frac{3}{5}$;
3) „ „ „ 3 „ „ „ 2 reizes „ „ $(\frac{2}{5})^3 \cdot (\frac{3}{5})^2$;
4) „ „ „ 2 „ „ „ 3 „ „ „ $(\frac{2}{5})^2 \cdot (\frac{3}{5})^3$;
5) „ „ pirmo reizi „ „ 4 „ „ „ $\frac{2}{5} \cdot (\frac{3}{5})^4$;
6) „ „ visas 5 reizes melnu bumbiņu . . . . $(\frac{3}{5})^5$;

tā kā pirmā gadījumā ir tikai viens iespējams sarindojums, tad varbūtība v_1 izvilkt 5 reizes balto bumbiņu izteiksies tā: $v_1 = \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{32}{5^5}$, otrā gadījumā melnā bumbiņa var rasties vai nu pirmo, vai otro, . . . , vai piekto reizi; tā tad iespējami pavisam 5 dažādi sarindojumi; tāpēc varbūtība v_2 izvilkt 4 reizes baltu un 1 reizi melnu bumbiņu izteiksies tā: $v_2 = 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{240}{5^5}$; koeficientu 5 varam arī vēl tā atrast, ja jautājam, cik iespējams dažādu permutāciju no 5 elementiem (5 bumbiņām), kuru starpā 4 viena veida vienādi elementi un 1 cita veida; šādu permutāciju skaita pēc zināmas formulas ir $\frac{P_5}{P_4 \cdot P_1} = 5$; tā tad $v_2 = \frac{P_5}{P_4 \cdot P_1} \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{240}{5^5}$, līdzīgā kārtā trešā gadījumā atradīsim $v_3 = \frac{P_5}{P_3 \cdot P_2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 10 \cdot \frac{8}{5^3} \cdot \frac{9}{5^2} = \frac{720}{5^5}$; $v_4 = \frac{P_5}{P_2 \cdot P_3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{1080}{5^5}$; $v_5 = \frac{P_5}{P_1 \cdot P_4} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \frac{3}{5} = 5 \cdot \frac{2^4 \cdot 3}{5^5} = \frac{810}{5^5}$; $v_6 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{5^5}$; redzam, ka no visām varbūtībām vislielākā ir $v_4 = \frac{1080}{5^5}$, kas atbilst tam gadījumam, ka velkot 5 reizes bumbiņu, dabūjam 2 reizes baltu un 3 reizes melnu bumbiņu. Tā tad visvarbūtīgākais izvilkto balto un melno bumbiņu skaits ir 2 baltas un 3 melnas, kas, kā redzam, atbilst balto un melno bumbiņu skaitam urnā.

2. Aplūkosim tagad šo jautājumu vispārējā veidā. Pieņemsim, ka v ir kāda notikuma A iestāšanās varbūtība un $1-v$ šī notikuma neiestāšanās varbūtība; tad, piem., varbūtība, lai notikums A iestātos 2 reizes, ja iekārtojam tā apstākļus, ka notikums var iestāties vai neiestāties, t. i. izdarām mēģinājuma atkārtošanu, pēc varbūtību reizināšanas likuma ir $v \cdot v = v^2$; notikuma A neiestāšanās varbūtība divi reizes no vietas ir $(1-v)^2$ u. t. t.; ja mēģinājumu gribam atkārtot 5 reizes, tad varbūtība, ka notikums A iestāsies 2 reizes un neiestāsies 3 reizes, izteiksies, ja kārtība noteikta, kā $v^2(1-v)^3$; ja kārtība nav noteikta, bet vispār no 5 reizēm notikums A iestājas 2 reizes un 3 rei-

zes neiestājas, tad šīs reizes var grupēties dažādi, un tāpēc kāda viena noteikta sarindojuma vietā mums radīsies tik daudz jaunu cik var izdarīt permutāciju no 5 elementiem, no kuŗiem 3 viena veida vienādi un 2 otra veida vienādi; tā tad pavisam iespējami $\frac{P_5}{P_2 \cdot P_3}$ sakārtojumi; tāpēc varbūtība $v_{2,5}$, ka notikums piecos mēģinājumos iestājas 2 reizes un 3 reizes neiestājas, izteicas tā:

$$v_{2,5} = \frac{P_5}{P_2 \cdot P_3} v^2(1-v)^3;$$

spriežot līdzīgā kārtā, atradīsim, ka varbūtība $v_{m,n}$ notikumam n mēģinājumos iestāties m reizes un $n-m$ reizes neiestāties izteicas tā:

$$v_{m,n} = \frac{P_n}{P_m P_{n-m}} v^m (1-v)^{n-m} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Tā kā

$$\frac{P_n}{P_m P_{n-m}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots3.2.1}{m(m-1)\ldots3.2.1(n-m)(n-m-1)\ldots3.2.1} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m(m-1)\ldots3.2.1} = \frac{V_n^m}{P_m} = C_n^m,$$

tad (3) formulu var vēl pārveidot tā:

$$\nu_{m,n} = C_n^m \nu^m (1-\nu)^{n-m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3_1).$$

P i e m ē r s. Aprēķināt, cik liela varbūtība, ka, metot 6 reizes naudas gabalu, parādīsies 3 reizes raksts un 3 reizes ģērbonis.

Varbūtība uzmest rakstu ir $\frac{1}{2}$ un pretējā varbūtība — neuzmest rakstu, t. i., uzmest ģērboni, arī ir $\frac{1}{2}$; tāpēc pēc (3_1) formulas

$$v_{3,6} = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6.5.4}{3.2.1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{20}{64} \approx 0{,}31 = 31\%.$$

Tā tad varbūtība uzmest 3 reizes rakstu un 3 reizes ģērboni ir aptuvumis 0,31.

Pirmā acumirklī liekas it kā pretruna, jo raksta uzmešanas varbūtība ir 0,5, tā tad no 6 reizēm it kā būtu pamats sagaidīt 3 reizes rakstu. Kā mazliet vēlāk redzēsim, tā tas arī ir; tikai ja jautājam, cik liela varbūtība, lai no 6 reizēm **taisni** 3 reizes rastos raksts, tad rezultāts tāds, kā nule dabūjām.

Ņemsim šo pašu piemēru citādā formulējumā.

Aprēķināt, cik liela varbūtība, ka sviežot 10 reizes naudas gabalu, dabūsim 5 reizes rakstu. Pēc (3_1) formulas

$$v_{5,10} = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024} \approx 0{,}25 = 25\%.$$

Bet ja tagad jautāsim, cik liela varbūtība, ka no 10 reizēm uzmetīsim 4, 5 vai 6 reizes rakstu, tad varbūtība izteiksies kā atsevišķo varbūtību summa, t. i., ka

$$C_{10}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + C_{10}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{210+252+210}{1024} \approx 0{,}66 = 66\%.$$

Tā tad varbūtība, ka no 10 reizēm taisni 5 reizes uzmetīsies raksts, ir tikai apm. 25%, bet varbūtība, ka uzmetīsies 4, 5 vai 6 reizes raksts, ir apm. 66%.

3. Pārejot uz jautājumu vispārējā veidā, kā var atrast visvarbūtīgāko notikuma atkārtošanās skaitu, ja zinām šī notikuma varbūtību, apzīmēsim notikuma A atkārtošanās skaitu ar m; notikuma iestāšanās varbūtību apzīmēsim ar p, pretējo varbūtību ar q, tā ka $p+q=1$, un mēģinājumu skaitu ar n; visvarbūtīgākais atkārtošanās skaits būs tā m nozīme, pie kuŗas varbūtība $v_{m,n}$ ir vislielākā.

Apzīmēsim varbūtīgāko atkārtošanās skaitu ar μ; tad pēc nosacījuma varbūtībai $v_{\mu,n}$ jābūt vislielākai, tā tad arī lielākai par divi blakus varbūtībām $v_{\mu-1,n}$ un $v_{\mu+1,n}$ tā, ka

$$v_{\mu-1,n} < v_{\mu,n} \geqq v_{\mu+1,n}$$

otrā nevienlīdzībā liekam arī vienlīdzības zīmi, jo, kā tas būs redzams tālāk, var būt divi atkārtošanās skaiti μ un $\mu+1$, kuŗu varbūtības vienlīdzīgas un pie tam lielākas nekā visas pārējās varbūtības.

Pēc (3) formulas

$$v_{\mu-1,n} = \frac{P_n}{P_{\mu-1} \cdot P_{n-\mu+1}} \cdot p^{\mu-1} q^{n-\mu+1};$$

$$v_{\mu,n} = \frac{P_n}{P_\mu \cdot P_{n-\mu}} \cdot p^\mu q^{n-\mu};$$

$$v_{\mu+1,n} = \frac{P_n}{P_{\mu+1} P_{n-\mu-1}} \cdot p^{\mu+1} q^{n-\mu-1};$$

tāpēc iepriekšējas nevienlīdzības pieņem šādu veidu:

$$\frac{P_n}{P_{\mu-1}P_{n-\mu+1}}p^{\mu-1}q^{n-\mu+1} < \frac{P_n}{P_\mu P_{n-\mu}}p^\mu q^{n-\mu} \text{ jeb}$$

$$\frac{n(n-1)\ldots.3.2.1}{(\mu-1)(\mu-2)\ldots3.2.1.(n-\mu+1)(n-\mu)\ldots3.2.1}p^{\mu-1}q^{n-\mu+1} <$$

$$< \frac{n(n-1)\ldots3.2.1}{\mu(\mu-1)\ldots3.2.1(n-\mu)(n-\mu-1)3.2.1}p^\mu q^{n-\mu};$$

pēc saīsināšanas ar vienlīdzīgiem reizinātājiem dabūjam, ka $\frac{q}{n-\mu+1} < \frac{p}{\mu}$ jeb, atsvabinoties no saucējiem, kas ir pozitīvi skaitļi, dabūjam $q\mu < pn - p\mu + p$; pārnesot $p\mu$ uz kreiso pusi un ņemot μ aiz iekavām, iekavās dabūsim $p+q$, kas dod 1; tāpēc $\mu(p+q) < pn+p$ un

$$\mu < pn+p;$$

tāpat no otras nevienlīdzības

$$\frac{P_n}{P_\mu P_{n-\mu}}.p^\mu q^{n-\mu} \geqslant \frac{P_n}{P_{\mu+1}P_{n-\mu-1}}p^{\mu+1}q^{n-\mu-1},$$

pēc saīsināšanas dabūjam, ka

$\frac{q}{n-\mu} \geqslant \frac{p}{\mu+1}$ jeb $q\mu + q \geqslant pn - p\mu$; pārnesot q uz labo pusi, $p\mu$ uz kreiso un ņemot μ aiz iekavām, dabūsim, ka $\mu(p+q) \leqslant pn-q$ jeb

$$\mu \leqslant pn-q;$$

savienojot dabūtās μ robežas, redzam, ka

$$np-q \leqslant \mu < np+p \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

tā tad varbūtīgākais notikuma A iestāšanās skaits n mēģinājumos atrodas skaitļu $np-q$ vai $np+p$ starpā vai ari vienlīdzīgs ar pirmo no tiem.

Skaitļi $np-q$ un $np+p$ atšķiŗas viens no otra par 1, jo

$$np+p-(np-q)=p+q=1;$$

tāpēc, ja viens no šiem skaitļiem ir daļskatlis, tad ari otrs ir daļskaitlis un tad šo divu skaitļu starpā ir tikai viens vesels skaitlis, kas pēc (4) formulas būs varbūtīgākais notikuma A atkārtošanās skaits; ja turpretim viens no šiem skaitļiem ir vesels skaitlis, tad ari otrs ir vesels skaitlis, un viņu starpā nav neviena vesela skaitļa; šinī gadījumā $\mu=np-q$ būs viens no visvarbūtīgākiem notikuma A atkārtošanās skaitiem, bet $\mu+1$ būs otrs šāds skaits, jo vienlīdzības zīme $np-q$ un μ starpā atbilst vienlīdzības zīmei varbūtību $v_{\mu,n}$ un $v_{\mu+1,n}$ starpā.

Piemērs. Aprēķināsim pēc dabūtās formulas (4) iepriekšējā piemēra meklējamo visvarbūtīgāko raksta uzmešanas skaitu 10 mēģinājumos; šeit $n=10$; $p=\frac{1}{2}$; $q=\frac{1}{2}$; tāpēc $5-\frac{1}{2}\leqslant\mu<5+\frac{1}{2}$ un $\mu=5$.

Piecos mēģinājumos dabūto balto bumbiņu varbūtīgākais skaits, ja vienas baltas bumbiņas izvilkšanas varbūtība ir $\frac{2}{5}$, izteiksies kā
$5\cdot\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\leqslant\mu<5\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}$, jeb $1\frac{2}{5}\leqslant\mu<2\frac{2}{5}$, jo te $n=5$; $p=\frac{2}{5}$; $q=\frac{3}{5}$; tā tad $\mu=2$.

Ja tagad meklēsim balto bumbiņu varbūtīgāko skaitu 4 mēģinājumos, tad

$$4\cdot\tfrac{2}{5}-\tfrac{3}{5}\leqslant\mu<4\cdot\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{5} \text{ jeb } 1\leqslant\mu<2; \text{ tāpēc } \mu=1,$$

bet arī $\mu+1=2$ ir ar tik pat lielu varbūtību. Tiešām, aprēķinot $v_{1,4}$ un $v_{2,4}$, dabūjam, ka $v_{1,4}=\frac{P_4}{P_1P_3}(\frac{2}{5})\cdot(\frac{3}{5})^3=4\cdot\frac{54}{5^4}=\frac{216}{5^4}$ un

$$v_{2,4}=\frac{P_4}{P_2\cdot P_2}(\tfrac{2}{5})^2(\tfrac{3}{5})^2=6\cdot\frac{4\cdot 9}{5^4}=\frac{216}{5^4}.$$

4. Ja sakarībā $np-q\leqslant\mu<np+p$ dalīsim visus locekļus ar n, tad dabūsim, ka

$$p-\frac{q}{n}\leqslant\frac{\mu}{n}<p+\frac{p}{n}\ \ldots\ldots\ldots \quad (5);$$

dabūtā sakarība rāda, ka varbūtīgākā notikuma A atkārtošanās skaita μ attiecība pret visu mēģinājumu skaitu n tuvojas notikuma A varbūtībai p, ja mēģinājumu skaits n aug, jo tad $\frac{q}{n}$ un $\frac{p}{n}$ pamazinās un pie pietiekoši liela n ir kaut cik mazi; citiem vārdiem, ja varam kāda notikuma A varbūtību p aprēķināt jau iepriekš un tad izdarīt mēģinājumus, tad, jo lielāks šis mēģinājumu skaits n, jo tuvāk $\frac{\mu}{n}$ pieies iepriekš aprēķinātai varbūtībai p jeb μ pieies tuvāk reizinājumam $p\cdot n$.

5. Lielo skaitļu likums.

1. Redzējām (4,3), ka notikuma A visvarbūtīgākais iestāšanās skaits n mēģinājumos atrodas šādās robežās:

$$np-q\leqslant\mu<np+p$$

kur p ir notikuma A iestāšanās varbūtība un q ir neiestāšanās varbūtība.

Pieņemsim, ka notikuma A iestāšanās varbūtība p paliek viena un tā pati n mēģinājumos; par notikuma A faktisko iestāšanos gadījumu skaitu m J. Bernulli (J. Bernoulli) pierādījis šādu teoremu (darbā „Ars conjectandi").

⊙ **Ar varbūtību, kaut cik tuvu vienam, var apgalvot, ka notikuma $\mathcal{A}$ rašanās skaita m attiecība pret visu mēģinājumu skaitu n pēc patikas tuvu pieiet varbūtībai p, ja vien ņemam pietiekoši lielu n**; matēmatisko simbolu formā tas dod, ka $\frac{m}{n} - p < \varepsilon$ ar varbūtību lielāku par $1-\eta$, ja n izvēlas pietiekoši lielu; var pierādīt, ka izvēloties n tik lielu, lai $n > \frac{1}{4\varepsilon^2\eta}$, dabūsim ar varbūtību, lielāku nekā $1-\eta$, ka starpība starp $\frac{m}{n}$ un p būs mazāka par ε.

Bernulli teoremu var formulēt dažādi, bet ikvienu no šiem formulējumiem sauc parasti par **lielo skaitļu likumu,** jo tas rāda, ka pietiekoši daudz reizes atkārtojot mēģinājumu, mēs dabūsim, ar augošu varbūtību, ka mēģinājumos dabūtais faktiskais notikuma iestāšanās gadījumu skaits m kaut cik tuvu pieiet iepriekš aprēķinātam skaitam pn. Jāuzsver, ka Bernulli teorema runā tikai par varbūtību, ka $\frac{m}{n}$ pieiet kaut cik tuvu p; lai $\frac{m}{n}$ īsti būtu p, varbūtība ļoti maza; tāpēc tad ari (4,2) piemēros varbūtība dabūt, piem., 10 metienos, taisni 5 reizes rakstu bija maza, bet varbūtība dabūt vienu no tuviem skaitļiem skaitlim 5 deva jau varbūtību, lielāku par pusi.

2. Ir izdarīti daudzi eksperimenti, lai pārbaudītu lielo skaitļu likumu. Minēsim dažus no tiem. G. Biffons (G. Buffon) 1777. gadā pirmais izdarīja šādus mēģinājumus, mezdams 4040 reizes naudas gabalu, pie kam raksts radās 2048 reizes un ģērbonis 1922. Cüriches astronoms R. Volfs (R. Wolf) ir metis divus spēļu kauliņus, no kuriem viens bijis nokrāsots sarkans, 20 000 reizes un pierakstījis rezultātus, cik acu uzmests ar vienu un cik ar otru; tā kā ikkuŗu divu acu kombinācijas varbūtība ir

$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, tad var sagaidīt katru kombināciju $2000 . \frac{1}{36} \approx 556$ reizes. Īstenībā Volfs dabūjis šādus rezultātus.

	Baltais kauliņš						
	Acu skaits	1	2	3	4	5	6
Sarkanais kauliņš	1	547	587	500	462	421	690
	2	609	655	497	535	651	684
	3	514	540	468	438	587	629
	4	462	507	414	413	509	611
	5	551	562	499	506	658	672
	6	563	598	519	487	609	646

6. Varbūtība a priori un a posteriori.

1. Līdz šim nodarbojāmies ar notikumiem, kuŗu varbūtības var aprēķināt iepriekš, neizdarot nekādu mēģinājumu, bet ņemot vērā vispār iespējamo gadījumu un notikumam labvēlīgo gadījumu skaitu. Šādas varbūtības sauc par varbūtībām a priori jeb apriorām varbūtībām; izejot no tām, dabūjam varbūtību saskaitīšanas un varbūtību reizināšanas teoremas, mēģinājumu atkārtošanas izredzes u. tml.

Bet ir daudz tādu parādību, kur mums zināmi tikai kāda notikuma atkārtošanās mēģinājumu rezultāti, bet nav zināmā šī notikuma apriorā varbūtība, jo to gŗūti vai neiespējami aprēķināt, ņemot vērā vispāriespējamo un labvēlīgo gadījumu skaitu, bet tomēr tāda varbūtība vai vismaz tās aptuvena nozīme vajadzīga. Šādos gadījumos iziet no tā saucamās empīriskās varbūtības jeb varbūtības a posteriori, pieņemot par to mēģinājumos dabūtā notikuma A atkārtošanās skaita attiecību pret visu mēģinājumu skaitu; to citādi sauc vēl par relatīvo atkārtošanos.

1. Piemērs. No urnas, par kuŗu zināms, ka tanī ir trejādas krāsas bumbiņas: melnas, baltas un sarkanas, velk pa vienai bumbiņai, liekot izvilkto atkal atpakaļ. Pēc 600 mēģinājumiem dabūti šādi rezultāti: melna bumbiņa izvilkta 102 reizes, baltā 198 reizes un sarkanā 310 reizes. Aprēķināt varbūtības a posteriori.

Saskaņā ar aposteriorās varbūtības apzīmējumu, par šo varbūtību pieņem notikuma relatīvo atkārtošanos; šinī gadījumā melnās bumbiņas relatīvā atkārtošanās ir $\frac{102}{600} \approx \frac{1}{6}$, baltās bumbiņas $\frac{198}{600} \approx \frac{1}{3}$ un sarkanās: $\frac{310}{600} \approx \frac{1}{2}$.

2. Ja mēģinājumu skaits, kas dod mums aposteriorās varbūtības, ir pietiekoši liels, tad nonākam pie ļoti svarīga secinājuma — tā saucamās **Bernulli apgrieztās teoremas:**

ja n neatkarīgos mēģinājumos, kuŗos notikumam $\mathcal{A}$ ir viena un tā pati nezināmā varbūtība p, notikums $\mathcal{A}$ iestājas m reizes un $n-m$ reizes neiestājas, tad pie pietiekoši liela mēģinājumu skaita varam ar varbūtību, kaut cik tuvu vienam, apgalvot, ka p pēc patikas maz atšķirsies no relatīvās atkārtošanās $\frac{m}{n}$.

Tāpat kā Bernulli teoremu, tā ari šo apgrieztu teoremu atstājam nepierādītu.

Apgrieztai Bernulli teoremai ārkārtīgi svarīga nozīme, jo tā ļauj pēc aposteriorās varbūtības spriest par aprioro varbūtību un tad šo pēdējo savukārt izlietot nākamo notikumu relatīvās atkārtošanās aprēķināšanai.

Tā tad vispār varam rīkoties tā: ja nav iespējams aprēķināt kāda notikuma A varbūtību a priori, tad ņemam vērā n mēģinājumus, kur notikums A iestājas m reizes; ja tagad izdarīsim n_1 jaunus mēģinājumus, tad **pie pietiekoši lielām n un n_1 nozīmēm** varam ar varbūtību, kaut cik tuvu vienam, apgalvot, ka sagaidāmā notikuma A relatīvā atkārtošanās $\frac{m_1}{n_1}$ pēc patikas maz atšķirsies no relatīvās atkārtošanās $\frac{m}{n}$ agrākos n mēģinājumos.

Tādā kārtā no izdarītiem mēģinājumiem varam spriest par nākošiem, ja vien mēģinājumu **skaits ir pietiekoši liels.**

Šis rezultāts dod mums iespēju rīkoties ar statistiskiem datiem: ja no tiem dabūjam kāda notikuma aposterioro varbūtību, tad to varam izlietot kā aprioro varbūtību turpmāko notikumu aprēķināšanai, bet, kā jau vairākkārt uzsvērts, ja vien mēģinājumu vai novērojumu skaits ir pietiekoši liels.

Piemērs. Statistiskie dati dod, ka no 100 000 personām 10 gadu vecumā sasniedz 11 gadu vecumu 99592 personas. Pieņemot, ka cilvēka mirstības varbūtība ir atkarīga no vecuma, atrast varbūtību, kāda ir 10 gadus vecai personai nomirt, nesasniedzot 11 gadu.

Apzīmēsim meklējamo varbūtību ar q_{10}; dabūjam vispirms varbūtību a posteriori, ņemot vērā, ka no 100 000 personām 10 gadu vecumā nomirst 408 personas; šeit mums 100 000 personas ir it kā mēģinājumu skaits un 408 minētā notikuma (nāves) iestāšanās gadījumu skaits; tādā kārtā varbūtība a posteriori ir $\frac{408}{100\,000}=0{,}00408$; to pieņemam kā mirstības varbūtību 10 gadus vecai personai ari turpmāk; tā tad $q_{10}=0{,}00408$.

Par mirstības varbūtībām sīkāk runāsim nākamās nodaļās.

7. Matēmatiskā cerība.

1. J. Bernulli, viens no varbūtības rēķinu nodibinātājiem („Ars conjectandi" 1713. g.) nosauca par **spēles dalībnieka likteni** vinnesta reizinājumu ar šī vinnesta varbūtību. Tagad spēles dalībnieku likteni parasti sauc par **matēmatisko cerību.**

Tā tad **par personas matēmatisko cerību uz kādu vērtību sauc šīs vērtības (izteiktas naudas vienībās) reizinājumu ar varbūtību šo vērtību dabūt.** Ja apzīmēsim matēmatisko cerību ar c, vinnestu (pozitīvu vai negatīvu) ar P, varbūtību šo vinnestu saņemt, tad

$$c=pv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Piemērs. Ja loterejā no 1000 lozēm uz vienu krīt vinnests Ls 5000, tad matēmatiskā cerība uz vinnestu, pērkot vienu lozi, ir Ls $5000 \cdot {}^{1}/_{1000}=$ Ls 5. Matēmatiskās cerības jēdzienu var paplašināt uz vairākiem gadījumiem šādā veidā.

Pieņemsim, ka kādas personas intereses saistās ar kādu nesavietojamu gadījumu rindu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tā, ka ar kāda notikuma A_n reālizēšanos rodas vinnests (vai zaudējums — negatīvs vinnests) P_n; pieņemsim tālāk, ka notikumu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ varbūtības attiecīgi ir $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$, pie kam $v_1+v_2+\ldots+ +v_n=1$; tad **par personas matēmatisko cerību uz vairākiem nesavietojamiem vinnestiem sauc atsevišķo vinnestu matēmatisko cerību summu**; apzīmējot to ar c, dabūjam, ka

$$c=P_1\nu_1+P_2\nu_2+\ldots+P_n\nu_n \quad \ldots\ldots (6_1)$$

šeit $P_1, P_2, \ldots P_n$ var būt pozitīvi vai negatīvi.

Piemērs. Kāda persona spēlē var vinnēt Ls 200 un zaudēt Ls 100: vinnesta varbūtība ir $^3/_5$ un zaudējuma varbūtība ir $^2/_5$. Tad sagaidāmā vinnesta (pozitīva vai negatīva) matēmatiskā cerība izteiksies tā:

$$c=\text{Ls } 200 \cdot \frac{3}{5}+(-\text{Ls } 100) \cdot \frac{2}{5}=\text{Ls } 120-\text{Ls } 40=\text{Ls } 80.$$

3. Pieņemsim, ka kādā spēlē piedalās m personas un ieliek naudas summas $w_1, w_2, \ldots, w_n$, kas kopā dod vinnestu $S=w_1+w_2+\ldots+w_n$; pieņemsim, ka varbūtība pirmai personai vinnēt spēli ir v_1, otrai, trešai, $\ldots$ attiecīgi $v_2, v_3, \ldots, v_m$. Lai spēle būtu taisnīga, t. i. lai vienam dalībniekam nebūtu priekšrocību, salīdzinot ar citiem, likmēm $w_1, w_2, \ldots, w_n$ jābūt proporcionālām ar varbūtībām vinnēt, t. i.

$$w_1 : w_2 : w_3 : \ldots : w_n = v_1 : v_2 : v_3 : \ldots : v_n;$$

izlietojot vairāku vienlīdzīgu attiecību īpašību, ka visu pirmo locekļu summa stāv tādā attiecībā pret visu otro locekļu summu, ka viens no pirmiem locekļiem pret attiecīgo otro, dabūjam, ka

$$\frac{w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n}{v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n}=\frac{w_1}{v_1}; \text{ bet } w_1+w_2+\ldots+w_n=S$$

un $v_1+v_2+\ldots+v_n=1$, jo katrā ziņā viens no dalībniekiem spēli vinnēs; tāpēc iepriekšējā vienlīdzība pieņem tādu veidu: $\frac{S}{1}=\frac{w_1}{v_1}$, no kurienes $w_1=Sv_1$; līdzīgā kārtā varam dabūt, ka $w_2=Sv_2$; $w_3=Sv_3, \ldots$; reizinājums Sv_1 ir spēles matēmatiskā cerība un w_1 dalības nauda; tā tad redzam, ka **neizmantošanas spēlē dalības naudai jābūt vienlīdzīgai ar spēles matēmatisko cerību.** Tas pats zīmējas uz gadījumu, ja matēmatisko cerību aprēķinām pēc (6_1) formulas.

Piemērs. Ierīkota spēle tā, ja kāds ar divi kauliņiem uzmet 12 acis, tad viņš dabū Ls 45, bet ja citu acu skaitu, tad zaudē savu dalības naudu. Atrast, cik var maksāt par vienu metienu, lai spēle būtu taisnīga.

Tā kā vinnesta summa $S=45$ un varbūtība vinnēt $v=\frac{1}{36}$,

tad $w=S.v=45.\frac{1}{36}=\frac{5}{4}=1{,}25$; tā tad par vienu metienu (piedalīšanos spēlē) var maksāt Ls 1,25.

Piezīme. Beidzamais piemērs runā par spēli; ari iepriekšējie piemēri (kauliņu mešana, bumbiņu vilkšana u. tml.) ir līdzīgas dabas. Tādus piemērus ņēmām aiz šādiem iemesliem. Vispirms krīt svarā vēsturiskie iemesli, jo pirmais varbūtību rēķinu jautājums 1650. g. atrisināts un līdz ar to nodibināti varbūtību rēķini sakarā ar šādu gadījumu: divi spēles dalībnieki A un B iemaksā vienlīdzīgas naudas summas un norunā mest kauliņus, pie kam tas, kas būs pirmais vinnējis 5 partijas, dabū visu ielikto naudu; pēc tam, kad A vinnējis 4 spēles un B 3 spēles, tiem jāpārtrauc spēle, kuŗu vairs ari vēlāk nevar turpināt; rodas jautājums, kā lai sadala ielikto summu A un B starpā. Franču matēmatiķis Paskals atrisināja šo jautājumu tā: A saka otram spēles dalībniekam: „Puse no visas summas pieder bez šaubām man, jo pat tanī gadījumā, ja tu vinnētu nākamo partiju, mūsu šanses dabūt visu summu būtu vienlīdzīgas; kas zīmējas uz otro visas summas pusi, tad mūsu šanses to dabūt ir vienlīdzīgas, tāpēc dalīsim to uz pusēm." Tā tad dalībnieks A dabū $^3/_4$ un dalībnieks B dabū $^1/_4$ no visas summas.

Ari vēlākie matēmatiķu darbi par varbūtību rēķiniem daudz nodarbojas ar laimes spēlēm. Otrkārt, lietojām minētos piemērus tāpēc, ka tanīs vieglāk aprēķināt iespējamo un labvēlīgo gadījumu skaitu, un treškārt, šos paņēmienus, kuŗus lietojām minētos piemēros, viegli attiecināt uz sarežģītākiem gadījumiem, saprotot vārdu „spēle" plašākā nozīmē.

Vingrinājumi.

1. Aprēķināt, cik liela varbūtība

1) no 12 kārtīm izvilkt iepriekš noteikto;

2) no 500 lozēm, kuŗu starpā viena pilna (ar vinnestu), izvilkt pilno;

3) ar spēļu kauliņu (kubu, uz kuŗa sešām plāksnēm ir atzīmētas 1, 2, 3, . . . 6 „acis“) uzmest 4;

4) ar spēļu kauliņu uzmest 1 vai 2;

5) ar speļu kauliņu neuzmest ne 1, ne 6;

6) no urnas, kuŗā 2 baltas un 10 melnas bumbiņas, izņemt *a*) balto; *b*) melno bumbiņu;

7) no urnas, kuŗā 12 baltas un 6 melnas bumbiņas, izņemt *a*) balto; *b*) melno bumbiņu;

8) no urnas, kuŗā 12 baltas, 4 melnas un 8 sarkanas bumbiņas, izņemt *a*) baltu; *b*) melnu; *c*) sarkanu bumbiņu.

2. Urnā bija baltas un melnas bumbiņas; pēdējo par 12 mazāk nekā pirmo. Aprēķināt, cik bija melno bumbiņu, ja varbūtība izņemt melno bumbiņu bija $\frac{1}{3}$.

Aprēķināt 3.—15. uzd. varbūtības.

3. Izņemt no urnas, kuŗā 4 baltas, 6 melnas un 8 sarkanas bumbiņas 1) vienu baltu vai vienu melnu; 2) vienu baltu vai vienu sarkanu;

4. Ar vienu kauliņu uzmest 1) 1 vai 4; 2) 5 vai 6 vai 1; 3) 2 vai 5 vai 4 vai 1.

5. Ar divi kauliņiem uzmest vienā reizē

1) kopā 7 acis vai 3 vai 5;

2) 8 vai 9 acis;

3) 2 vai 3 vai 6 acis.

6. No urnas, kuŗā 8 baltas un 6 melnas bumbiņas, izņemt reizē 1) divas baltas; 2) divas melnas bumbiņas; 3) vienu melnu un vienu baltu bumbiņu.

7. Loterijā no 1000 lozēm, kuŗu starpā 100 pilnas, izvilkt 1) 2 pilnas; 2) divas tukšas; 3) vienu pilnu un vienu tukšu.

8. Ar divi spēļu kauliņiem uzmest vienā metienā 1) 1 un 6; 2) divas vienādas acis; 3) kopā 5 acis; 4) kopā 8 acis.

9. No urnas, kuŗā 5 baltas un 4 melnas bumbiņas, vienā reizē izvilkt 1) 3 baltas; 2) 3 melnas; 3) 2 baltas un 1 melnu; 4) 2 melnas un 1 baltu.

10. Loterijā, kuŗā 1000 lozes ar 200 vinnestiem, vienā reizē izvilkt 1) 3 vinnestus; 2) 3 tukšas lozes; 3) 2 vinnestus un vienu tukšu.

11. Ar vienu spēļu kauliņu, sviežot to divas reizes uzmest 1) papriekš 4, tad 5 acis; 2) papriekš 1 un tad atkal 1; 3) papriekš nepāŗu skaitli un tad pāŗu skaitli.

12. No urnas, kuŗā 6 baltas, 10 melnas un 4 sarkanas bumbiņas, izņemt vienu pēc otras (izņemto neliek atpakaļ):

1) baltu un tad melnu bumbiņu; 2) baltu un tad sarkanu; 3) melnu un atkal melnu; 4) sarkanu un atkal sarkanu.

13. Ar vienu kauliņu, metot to 4 reizes pēc kārtas, uzmest papriekš 5, tad atkal 5, tad 4 un atkal 4 acis.

14. Ar kauliņu uzmest 3 reizes no vietas 1 aci.

15. Ar divi kauliņiem uzmest 1) papriekš 6 un tad 10; 2) papriekš 1 un tad 12.

16. Urnā atrodas *a* baltas, *b* melnas un *c* sarkanas bumbiņas. Aprēķināt, cik liela varbūtība

1) ņemot trīs bumbiņas vienā reizē, izņemt *a*) tikai melnas, *b*) tikai baltas, *c*) katru savādā krāsā;

2) ņemot citu pēc citas un pēc tam noliekot atpakaļ, izņemt *a*) papriekš baltu, tad sarkanu bumbiņu; *b*) pēc kārtas 2 sarkanas; *c*) papriekš vienu pēc otras 2 sarkanas un tad melnu.

17. Aprēķināt, cik liela varbūtība, sviežot kauliņu pēc kārtas 6 reizes, katru reizi dabūt 1 aci.

18. Aprēķināt, cik reizes jāsviež

1) divi kauliņi, lai varbūtība uzmest kopā 12 acis, būtu lielāka nekā uzmest citu kādu acu skaitu;

2) divi kauliņi, lai varbūtība uzmest vienlīdzīgu acu skaitu būtu lielāka nekā citu kādu acu sakopojumu;

3) trīs kauliņi, lai varbūtība uzmest trīs acis, būtu lielāka nekā varbūtība uzmest citu kādu acu skaitu.

19. Varbūtība noteikt iepriekš laiku, atkarājas no temperatūras, mākoņu daudzuma, vēja un nokrišņu varbūtību noteikšanas. Temperatūru, mākoņu daudzumu un vēju var iepriekš noteikt ar varbūtību $\frac{4}{5}$, nokrišņu daudzumu ar varbūtību $\frac{2}{3}$. Aprēķināt, cik liela varbūtība noteikt iepriekš laiku.

20. Varbūtība nodzīvot diviem brāļiem vēl 10 gadus ir (pēc mirstības tabelēm) vecākam $\frac{1}{4}$ un jaunākam $\frac{2}{5}$. Atrast varbūtību, ka abi brāļi pēc 10 gadiem būs pie dzīvības.

21. Loterijā no 100 000 lozēm pirmā izlozē (pirmā klasē) izvelk 2 500, otrā 5 000, trešā 10 000 un ceturtā 30 000 vinnestus. Aprēķināt, cik liela varbūtība kādas lozes īpašniekam vinnēt tikai ceturtā izlozē.

22. No 20 gadu vecām 100 000 personām nomirst, nesasniedzot 21 mūža gadu, 349 personas. Aprēķināt, kāda varbūtība 20 gadus vecai personai sasniegt 21 mūža gadu.

23. No 20 gadus vecām 100 000 personām sasniedz 50 mūža gadus 78 724 personas. Atrast varbūtību 1) 20 gadus vecai personai sasniegt 50 mūža gadus un 2) 20 gadus vecai personai nomirt starp 20 un 50 mūža gadiem.

24. No 20 gadus vecām 100 000 personām sasniedz 64 mūža gadus 50 000. Aprēķināt, cik liela varbūtība 20 gadus vecai personai nomirt pirms 64 mūža gadu sasniegšanas.

25. *A* spēlē ar *B* tā, ka saņem vinnestu, ja ar 2 kauliņiem uzmet 6, 7 vai 8 acis; ja ir cits acu skaits, tad vinnestu saņem *B*. Atrast, cik lielu summu var ielikt *B*, lai spēle būtu taisnīga, ja *A* liek Ls 2.

26. Spēļu namā maksā Ls 15, ja kāds var ar 2 kauliņiem uzmest 12 acis. Aprēķināt, cik var maksāt par vienu metienu.

27. 30 gadus vecu personu ir 95 867 un 55 gadu vecu 70 903. Kāda 30 gadus veca persona slēdz ar apdrošināšanas iestādi līgumu, pēc kuŗa apdrošināšanas iestāde izmaksā Ls 10 000, ja persona sasniedz 55 mūža gadus. Aprēķināt, cik var maksāt par apdrošināšanu minētā persona, ja nerēķina augļus un iestādes izdevumus.

28. Tā saucamā ruletes spēle (piem., Monte Karlo) starp citu atļauj likt spēles dalībniekiem uz vienu no 37 numuriem (0, 1, 2, 3, . . . , 36) kādu summu, pie kam, ja iznāk tas numurs, uz kuŗa likta minētā summa, tad spēles turētājs (banka) izmaksā 35 reizes vairāk nekā uzliktā summa; ja uz 25 likts Ls 1, tad gadījumā, ja iznāk 25. numurs, banka izmaksā Ls 35, bet ja iznāk cits numurs, tad spēles dalībnieks pazaudē savu likmi. Noskaidrot, vai pie šāda noteikuma spēle būs neizmantošanas spēle.

Otrā nodaļa.

II. Apdrošināšana un tās veidi.

8. Apdrošināšana no juridiskā un saimnieciskā viedokļa.

1. No juridiskā viedokļa apdrošināšana ir līgums, ar kuŗu viens kontrahents pret zināmu atlīdzību apņemas otram kontrahentam vai trešai personai izdarīt norunātu maksājumu vai maksājumus gadījumā, ja iestāsies vai neiestāsies kāds notikums, kuŗā ieinteresēts viens kontrahents (kas kaut ko nodod apdrošināšanai) un kuŗš apdrošināšanas līgumu slēdzot nav nosakāms. Tā tad apdrošināšanā raksturīgs ir tas, ka ar līgumu saistās kā vienai, tā otrai līguma pusei nezināms moments, zīmējoties uz kādu notikumu, vai nu tādā ziņā nezināms, ka notikums kaut kad var notikt vai pavisam nenotikt, vai ari tā, ka notikums gan katrā ziņā notiks, tikai nav zināms, kad īsti. Pirmā veida nezināmais moments ir, piem., ugunsgrēks, zīmējoties uz kādu ēku, kas var kaut kad ciest no ugunsgrēka, bet var ari neciest; otra veida nezināmais moments ir, piem., cilvēka nāve — vienreiz cilvēkam tā kā tā jāmirst, bet kad īsti, tas vispār (izņemot dažus nopietnus slimības gadījumus) nav nosakāms. Apdrošināšanas līguma pirmtekstu sauc par **polisi** (no grieķu vārda polyptychon — daudzlapis); to līguma slēdzēju pusi, kas apņemas izmaksāt norunātu summu līguma iestāšanās vai neiestāšanās gadījumā, sauc par apdrošināšanas ņēmēju vai apdrošinātāju, to pusi, kas pret zināmu atlīdzību sagaida norunātu summu, sauc par apdrošināšanas lietotāju vai apdrošināto; maksājumus sauc par prēmijam.

Mūsu likumos (agr. Balt. prov. likumos) atrodam sekošus apdrošināšanas līguma nosacījumus.

Par apdrošināšanas līgumu.

4359. Apdrošināšanas līguma viena puse uzņemas, ar zināmas prēmijas saņemšanu, atbildību par zaudējumu, kuŗu varētu ciest otra puse, ja iestātos kāds, bez tā vainas, noteikts notikums.

4360. Aizliegts vienu un to pašu priekšmetu apdrošināt viņa pilnā vērtībā vairāk nekā vienu reizi; pretējā gadījumā par derīgu atzīstams tikai pirmais apdrošināšanas līgums. Bet nav aizliegts apdrošināt vienu un to pašu priekšmetu pie vairākām personām dažādās viņa vērtības daļās, nedz ari apdrošināt sava apdrošinātāja maksāšanas spēju.

4361. Apdrošināšanas līgums ir nederīgs, ja viņu noslēdzot zināja — apdrošināšanas lietotājs, ka nelaime jau notikusi, bet apdrošinātājs, ka sagaidāmā nelaime novērsta.

4362. Kad iestāsies tas zaudējums, par kuŗa atlīdzību ir notikusi apdrošināšana, tad apdrošināšanas lietotājam nekavējoties par to jāziņo apdrošinātājam, pretējā gadījumā nesot atbildību par visu zaudējumu, kas cēlies aiz nokavēšanās.

P i e z ī m e. Sīkāki noteikumi par jūŗas apdrošināšanu ievietoti Tirdzniecības nolikumos, bet par cita veida apdrošināšanām ar šo mērķi dibinātās biedrībās — to statūtos.

2. No saimnieciska viedokļa apdrošināšana ir iekārtojums, kas padara iespējamu atsevišķam vairāku personu kopības loceklim pret vienreiz vai vairāk reizes maksājumu atlīdzību (prēmijām) gādāt par nākamām materiālām vajadzībām. Kā tas iespējams? Pieņemsim, ka kādā vietā ir 2000 māju ar apmēram vienādu vērtību. Piedzīvojumi rāda, ka caurmērā gadā nodeg viena māja. Protams, ka tas, kam māja nodeg, nonāk ar to grūtā, pat bezizejas stāvoklī. Bet ja nu norunā, ka ikviens no šiem 2000 māju īpašniekiem maksā gadā $^1/_{2000}$ daļu no savas mājas vērtības, tad no visām šīm iemaksām (prēmijām) sastādās kapitāls, kuŗu var izsniegt tam, kam būs nodegusi māja. Tādā kārtā ikviens var justies drošs, ka gadījumā, ja viņu piemeklētu ugunsgrēka nelaime, tas dabū iespēju atkal par jaunu uzcelt māju, pie kam gadskārtējas maksas (prēmijas) neiznāk lielas. Tāpat tas ir citos gadījumos: ja, piem., kāda persona, būdama vēl spēka gados, varēdama strādāt un nopelnīt savai ģimenei pārtiku, saslimst un nomirst, tad ģimene var nokļūt grūtā stāvoklī. Ari te var izpalīdzēties tā, ka sadodas kopā vairāki apm. viena vecuma cilvēki, pieņemsim 3000, un norunā maksāt katru gadu zināmus maksājumus (prēmijas) tā, lai no šiem maksājumiem sanāktu summa, kuŗu varētu izsniegt to personu piederīgiem, kas tanī gadā nomirst. Ja statistika rāda, ka no zināma vecuma 1000 cilvēkiem katru gadu nomirst 1, tad no 3000 cilvēkiem varētu sagaidīt 3 mirējus un tāpēc varētu paredzēt, ka no maksājumiem uzkrātā summa būtu jāsadala 3 daļās.

Tāpat tas ir ar citiem neparedzamiem gadījumiem: krusas postījumiem, transporta zaudējumiem u. tml.

Attēlojot šādā kārtā apdrošināšanas saimniecisko būtību, minējām, ka ieinteresētās personas sadodas kopā, citiem vārdiem, dibina biedrību; tā tas ari mēdz būt, un šādos gadījumos apdrošināšanas iestādi sauc par savstarpējo apdrošināšanas biedrību, kuŗā biedri savstarpēji nodrošina cits cita varbūtējos zaudējumus.

Bet var būt un īstenībā ari ir cita iespējamība: viena vai vairākas personas (parasti akciju sabiedrība) uzņemas uz sevi risku, pieņemot apdrošināšanā, piem., mājas pret ugunsgrēkiem, pie kam apdrošināšanas devēji savā starpā nekādās attiecībās nestāv: katram atsevišķi no tiem ir darīšana tikai ar apdrošināšanas iestādi. Par darīšanu vešanu un risku tad šādā gadījumā apdrošināšanas iestāde bez parastām prēmijām ņem īpašu atlīdzību, kas biedrībai var atnest — un parasti ari atnes peļņu. Šādas apdrošināšanas akciju biedrības uzdevumus var uzņemties ari pašvaldības iestādes vai valsts.

Visos gadījumos tomēr viena lieta ļoti svarīga: apdrošināšanas iestādes un apdrošināšanas lietotāju pienākumiem pie pietiekoši liela apdrošināšanu skaita un pietiekoši ilgā laikā jābūt vienlīdzīgiem.

9. Apdrošināšanas veidi un īsa vēsture.

1. Apdrošināšanas veidus var klasificēt dažādi; piem., tos iespējams klasificēt atkarībā no notikuma, ar kuŗu saistās apdrošināšana; notikums, kuŗa iestāšanās moments nezināms, 1) var notikt vai ari nemaz nenotikt, piem., ugunsgrēks kādā mājā, 2) tam katrā ziņā jānotiek, piem., cilvēkā nāve. Atkarībā no tam, ar ko saistās notikums, izšķiŗ a) lietu un īpašuma apdrošināšanu un b) personu jeb cilvēku apdrošināšanu.

Kas zīmējas uz lietu un īpašuma apdrošināšanu, tad te var minēt ēku, kustama īpašuma un preču apdrošināšanu pret uguni, lauku apdrošināšanu pret krusu, lopu apdrošināšanu pret sērgām, pret piespiestu nokaušanu vai vērtības pamazināšanos no slimībām, kuģu un kuģu lādiņu apdrošināšanu pret jūŗas briesmām, mantas pret bojājumiem no transporta, kustamu īpašumu pret zādzībām un tml. Visos šinīs gadījumos ir darīšana ar lietām, kuŗas var ciest zaudējumu savā būtībā. Bet var apdrošināt ari savus pienākumus kas jāizpilda pret citiem un ar kuŗiem saistās īpašuma intereses. Piem., ja apdrošināšanas iestāde, pieņemot kādu apdrošināšanu, atrod, ka atbildība viņai vienai pašai par lielu, tā var apdrošināt vienu daļu no apdrošināšanas summas citā apdrošināšanas iestādē; tā rodas tā saucamā pārapdrošināšana. Līdzīga veida ir apdrošināšana pret kursa zaudējumiem vērtspapīru izlozēs u. tml. No apdrošināšanas nozarēm, kas saistās ar cilvēku, vispirms var minēt apdrošināšanu pret slimībām, nelaimes gadījumiem un darba nespēku: apdrošināšanas iestāde apņemas maksāt norunātu summu (vienreizēju vai periodisku) slimību, nelaimes vai darba nespēka gadījumos.

Nule minētā apdrošināšanas veidā līdz ar cilvēka dzīvību jāņem vērā ari viņa darba spēju mazināšanās. Gadījumā, ja apdrošināšana saistās tikai ar to nezināmo notikumu, cik ilgi cilvēks dzīvo, runā par dzīvības apdrošināšanu tās dažādos veidos.

Pagaidām no daudzpusīgajiem dzīvības apdrošināšanas veidiem, kuŗos var atšķirt vai nu vienreizēju izmaksu no apdrošināšanas iestādes puses (kapitāla apdrošināšanu) vai ari periodiski atkārtotas izmaksas (rentes apdrošināšanu), minēsim apdrošināšanu nāves gadījumos, apdrošināšanu uz nodzīvošanu un jaukto apdrošināšanu. Apdrošināšanā nāves gadījumiem apdrošināšanas iestāde izmaksā apdrošinātās personas nāves gadījumā tās mantiniekiem norunātu summu; apdrošināšanā uz nodzīvošanu apdrošināšanas iestāde izmaksā norunātu summu, ja apdrošinātā persona sasniedz iepriekš noteikto vecumu; jauktā apdrošināšanā apdrošināšanas iestāde izmaksā norunātu summu vai nu personas nāves gadījumā vai ari tanī gadījumā, ja apdrošinātā persona sasniedz iepriekš noteikto vecumu.

Rentes apdrošināšanā apdrosināšanas iestāde apņemas apdrošinātai personai, sākot no zināma momenta, maksāt periodiski noteiktos termiņos, norunātus maksājumus vai nu visu mūžu, vai ari zināmu laika sprīdi, ja šinī laika sprīdī apdrošinātā persona atradīsies pie dzīvības.

Personu apdrošināšanas nozarē ietilpst ari tā saucamā sociālā apdrošināšana, kuŗas mērķis ir rūpēties par saimnieciskā ziņā vājāko pilsoņu daļu. No minētiem apdrošināšanas veidiem sociālā apdrošināšana atšķiŗas ar to, ka pašas apdrošinātās personas nesedz apdrošināšanas prēmijas pilnā mērā, bet vai nu valsts vai darba devēji vai ari abi kopā uzņemas uz sevis zināmu prēmijas daļu; bez tam parasti šāda apdrošināšana ir obligātoriska.

2. Apdrošināšanas sākumi nav noteikti zināmi. Ar lielu varbūtību var pieņemt, ka tā bijusi pazīstama Vakarazijas un Ēģiptes nomadu tautām. Jau diezgan noteikti var atzīmēt, ka to ir praktizējuši ebreji, jo Babilones Talmudā atrodamas pēdas, ka tikusi lietota savstarpēja apdrošināšana pret lopu nāvi. Talmudā minēts sekojošais: „Kad ēzeļu dzinēju starpā, kas apvienojušies karavanē, viens no tiem pazaudē lopu bez vainas vai no nolaidības no viņa puses, tas dabū vietā ēzeli no vispārējas masas līdzekļiem." Šī reparticija, piebilst Talmuda teksts, jāizdara natūrā, bet nekad naudā.

No kāda Aristoteļa teksta var taisīt slēdzienu, ka 4. g. simt. pr. Kr. Babilonē bijis organizēts kaut kas līdzīgs zaudējumu apdrošināšanai, kuŗi ceļas no kaŗa vergu bēgšanas. Grieķijā bija sastopamas filantropiskas biedrības ar reliģiozu raksturu, kuŗu organizācija atgādina mūsu dienu savstarpējas palīdzības biedrības. Romā jūŗas braucējiem kapitālisti aizdeva naudu pret paaugstinātu procentu likmi *(foenus nauticum)*, kas līdz ar to jāuzlūko kā apdrošināšanas prēmija, jo kuģa lādiņa bojā iešanas gadījumā aizdevējs savu naudu atpakaļ nedabūja. Vārda īstā nozīmē apdrošināšana nodibinājusies un izplatījusies, sākot no 13. un 14. g. simt. pēc Kr. jūŗas apdrošināšanas veidā Holandē, kā to konstatē Amsterdamas kronikas, Spānijā, Venecijā, Marseļā u. c. Līdz ar to sāk likumu ceļā normēt apdrošināšanu: 1435. g. katalaņu valodā parādās Barselonas pavēle — *las Capitulos de Barcelona.* Anglijā rodas nolikumi par apdrošināšanu jau 1601. g.

Apdrošināšanas citi veidi attīstās samērā lēnāk. Jau 1530. g. Londonā un 1545. g. Parīzē dibinās biedrības ar nolūku sniegt nelielu palīdzību cietušiem no ugunsgrēka. Tūlīt pēc lielā Londonas ugunsgrēka Nikolajs Barbons dibina *Fire office* — starpniecības iestādi, kuŗā tie, kas gribēja apdrošināt savu māju pret uguns bojājumiem, iesniedza ziņas par to vērtību, kādā grib apdrošināt māju, un citas personas izteica gatavību, ar zināmiem nosacījumiem uzņemties atlīdzību ugunsgrēku gadījumā. Tomēr īstas ugunsapdrošināšanas akciju biedrības dibinās, sākot ar 1680. g., no kuŗām biedrība ar nosaukumu *The Hand in Hand*, dibināta 1696. g., pastāv vēl šodien. Kustamu mantu apdrošināšanai 1710. g. nodibināta akciju sabiedrība *Sun fire office* ar

£ 500 000 lielu pamatkapitālu un 1782. g. dibinājās ar £ 1 800 000 lielu akciju kapitālu *Phoenix Assurance Company*, kas 1786. g. atvēra nodaļu Hamburgā. Pēc tam apdrošināšanas biedrības — gan akciju, gan savstarpējās — izplatās par visām zemēm.

Personu apdrošināšanas sākumi rodas, bez šaubām, jūras apdrošināšanā, vergu apdrošināšanas veidā, kurus pielīdzināja jūras ceļā pārvadājamām precēm. Tikko var sameklēt 15. g. simtenī dažus dzīvības apdrošināšanas līgumus, proti Dženovā (notarizēts akts 1427. g.). Anglijā 1583. g. 18. jūnijā noslēgts līgums par William'a Gibbons'a dzīvību un proti uz nākamiem 12 mēnešiem. Kad Gibbons's 1584. g. 20. maijā nomira, apdrošinātāja iestāde negribēja izmaksāt norunātās summas, jo mēnesī esot 4 nedēļas un 12 mēnešos 4×12 nedēļas jeb 336 dienas, tā tad līgums notecējis jau 19. maijā, pirms miršanas. Pretējā puse apgalvoja, ka mēnesis jāsaprot kā kalendara mēnesis, un tā tad līgums varēja notecēt tikai 1584. g. 17. jūnijā. Lieta nonāca tiesā un vilkās līdz 1587. gadam, kad izšķīra lietu par labu apdrošinātās personas mantiniekiem. Sakarā ar spekulāciju (derībām, spēli), kas stipri attīstās šinī laikā un zīmējas uz cilvēku dzīvību, rodas aizliegumi apdrošināt dzīvību: Francijā 1570. g., Holandē 1574. g., Zviedrijā 1666. g., Anglijā, kur šāda spekulācija pieņēma jo plašus apmērus, spekulatīvo dzīvības apdrošināšanu aizliedza 1774. g. Nopietnas dzīvības apdrošināšanas biedrības, no kurām pirmā dibināta 1762. g. ar nosaukumu *The Equitable Society*, turpina darboties, bet šīm biedrībām nebija drošu pamatu, kā aprēķināt maksājamo prēmiju apmērus. Tikai tad, kad izveidojās varbūtību teorija, radās mirstības tabulas un nodibinājās apdrošināšanas matēmatika, var runāt par dzīvības apdrošināšanu vārda modernā nozīmē; te sākums būtu saskatāms 1782. g., kad *The Equitable* sāka strādāt pēc Dr. Price'a mirstības tabulām.

Francijā pirmā dzīvības apdrošināšanas biedrība *La Compagnie royale d'assurance* radās 1787. g.

Apdrošināšana p r e t n e l a i m e s g a d ī j u m i e m savā tagadējā formā ir vēl jaunāka nekā agrāk minētie apdrošināšanas veidi. Tāpat kā dzīvības apdrošināšana, apdrošināšana pret nelaimes gadījumiem ari radusies kā jūras apdrošināšanas nozare (Visbijas jūras reglaments 1541. g. paredzēja kuģa personāla apdrošināšanu pret nelaimes gadījumiem). Holandes valdība 1665. g. izstrādāja atlīdzības tarifu brīvprātīgajiem par ievainojumiem kara dienestā. Pirmās apdrošināšanas biedrības pret nelaimes gadījumiem dibinātas Anglijā 1845. g., Vācijā 1853. g.

Ar satiksmes un rūpniecības attīstību apdrošināšana pret nelaimes gadījumiem sevišķi attīstījusies 19. g. s. otrā pusē; blakus privātai neobligātoriskai apdrošināšanai izveidojusies piespiestā apdrošināšana, ari pret slimības un darba nespējas gadījumiem (sociālā apdrošināšana).

2. Mūsu dzimtenē kā vecākā apdrošināšanas biedrība minama Rīgas apdrošināšanas biedrība, dibināta 1765. g. un 1765. g. 9. sept. (v. st.) pilsētas rāts apstiprināta „*Brandt Assecurations Societet*"; darbību uzsākusi 1765. g. 22. nov. (v. st.). Šī biedrība varēja apdrošināt mūŗa namus tikai Iekšrīgā līdz Elizabetes ielai, ieskaitot namus, kas uz šīs ielas atradās pret kanāla pusi. Priekšpilsētas namu apdrošināšanai pret uguni 1804. g. 1. janv. uzsākusi darbību „*Vorstädtische Brand-Assecurations Anstalt*". 1861. g. nodibināja „Kurzemes savstarpīgo uguns apdrošināšanas biedrību". Strādnieku apdrošināšanai pret nelaimes gadījumiem pirmos pamatus deva Rīgas rūpnieku grupa, 1898. g. nodibinādama biedrību ar nosaukumu „Gegenseitige Rigasche Versicherungsgesellschaft für Fabrikanten und Handwerker gegen Unfalle ihrer Arbeiter und Angestellten". No latviešu pasākumiem apdrošināšanas laukā vēl minami: „Latviešu savstarpīgā dzīvības apdrošināšanas biedrība" (dib. 1906. g.), kas diezgan ātri uzplauka, bet ar Krievijas finanču sabrukumu zaudēja visus savus kapitālus.

10. Apdrošināšanas saimnieciskā nozīme un aprēķinu pamati.

1. Cik ļoti lielā mērā piepēži nelaimes gadījumi (ugunsgrēks, krusa, pāragra nāve, slimības, bezdarbs) veicina postu un trūkumu, visiem zināms. Ikvienam tāpēc jādomā, kā izpalīdzēties šādos gadījumos. Varētu krāt, atlicinot no saviem ienākumiem zināmu daļu, fondu nebaltām dienām, ko daudzi ari dara. Bet mēģināt nodrošināt sevi un savējos tikai šādā ceļā, varam tomēr nonākt tāpat gŗūtā stāvoklī, jo nelaimes gadījums var pienākt ātrāk nekā iekrātais kapitāls būs pieaudzis tik liels, kā vajadzīgs. Tāpēc apdrošināšana ir vislabākais paņēmiens nodrošināt sevi vai savējus nelaimes gadījumos, jo apdrošināšanas iestāde uzņemas atbildību parasti jau no apdrošināšanas līguma slēgšanas brīža, ja iestāsies līgumā minētais neparedzamais notikums.

Aiz šī iemesla modernā valstī apdrošināšanai piekrīt ļoti liela loma saimnieciskā dzīvē, un tāpēc apdrošināšanu izved gan labprātīgā gan spaidu ceļā aizvien plašāk un plašāk, un nākotnē apdrošināšanas nozīme pieaug vēl vairāk. Minēsim tikai dažus skaitļus no pirmskaŗa laikmeta (par kaŗa laiku iestājušies dabiskie traucējumi, kas gan atkal sāk izzust) apdrošināšanas iestāžu datiem lielākās valstīs, lai raksturotu apdrošināšanas nozīmi. Tā, piem., 1912. g. Francijā pret ugunsgrēku bija pavisam tuvu pie 13 miljoniem apdrošinātāju, kuŗiem bija garantēta summa, apm. 294 miljardi zelta franku, un izmaksāts 134 miljoni zaudējumu atlīdzības. 1913. g. beigās Francijā dzīvības apdrošināšanas līgumu bija 943 000 nāves gadījumam par $6^1/_2$ miljarda franku un 199 000 renšu līgumu par $138^1/_2$ miljonu franku. 1912. g. Vācijā apdrošināšanas biedrībās, kas bija padotas valsts uzraudzībai, dzīvības apdrošināšanas līgumu nāves gadījumā bija 13 miljonu par summu $15^1/_2$ miljardi zelta marku un 75 000 renšu apdrošināšanas līgumu par $31^1/_4$ miljonu marku. Ziemeļamerikas savienotās valstīs 1912. g. bija apdrošināts ar dzīvības apdrošināšanas līgumiem apaļos skaitļos 13 miljardu dolaru.

Ari pie mums beidzamos gados sāk stipri attīstīties apdrošināšanas lietas. Bez daudzām ugunsapdrošināšanas u. c. biedrībām un slimo kasēm nodibinājušās ari vairākas akciju un savstarpējās dzīvības apdrošināšanas biedrības.

Apdrošināšanas saimniecisko nozīmi neizteic tas vien, ka kāda atsevišķa persona nodrošina sevi vai savējos neparedzamos gadījumos, bet liela loma piekrīt ari tiem kapitāliem, kas sakrājas no prēmiju maksām; šos kapitālus var ieguldīt hipotēkās, obligācijās, nekustamos īpašumos, valsts aizņēmumos vai bankās un tā sekmēt kapitāla apgrozījumus.

Ne par velti tāpēc dažas valstis, piem., Zviedrija ievedusi jau 1913. g. obligātorisku tautas apdrošināšanu *Lag om allmän Pensionsförsäkring den 30 Juni 1913*), pēc kuŗa apdrošināmi visi iedzīvotāji no 16 gadiem līdz 67 gadiem, izņemot ierēdņus, kas saņem valsts pensiju, tā ka ikviens var saņemt pensiju, kas sasniedzis 67 gadus un zaudējis darba spējas. Darba devēji neko nepiemaksā, bet gan krietnas piemaksas dod valsts un pašvaldības iestādes. No iedzīvotājiem prēmijas, samērā nelielas, iekasē kopā ar nodokļiem.

2. Kā jau minēts, katrā apdrošināšanas veidā sastopamas trīs raksturīgas pazīmes. Pirmkārt, apdrošināšanu rada rūpes par

nākamību, lai pasargātu sevi no zaudējumiem vai ari nodrošinātu sev vai citiem kādu krājumu. Otrkārt, apdrošināšana saistās ar nezināmu momentu, pie kam lietu vai dažu personu apdrošināšanas gadījumos jautājums grozās ap zaudējumu vai kādu vajadzību iespējamībām, pie kam zaudējumi vai vajadzību apmierināšana var atsevišķā gadījumā ari nemaz nenotikt. Te nezināšana atsevišķam apdrošināšanas ņēmējam ir tā, vai apdrošinātājam maz jebkad būs jāizpilda savi pienākumi, piem., vai maz jebkad nodegs apdrošinātā māja. Apdrošināšanā nāves gadījumam šī vārda īstā nozīmē vienmēr būs apdrošinātājam jāizmaksā līgumā minētā summa; nezināmais moments te ir tas, ka atsevišķa persona nezina, kad īsti pienāks nāves brīdis; ja apdrošināmais zinātu, ka tam būs lemts ilgi dzīvot, tad nemaz neapdrošinātos, jo varētu apdrošināmo summu vai pat vēl vairāk sakrāt ar ietaupījumiem. Trešā pazīme ir tā, ka apdrošināšanas iestādei jāuztur līdzsvars starp saviem ienākumiem un izdevumiem. Šinī nolūkā tai jāsavāc pietiekoši liels skaits apdrošināmo un tā jānosaka viņu iemaksas, lai varētu no tām sniegt vajadzīgos maksājumus atsevišķām apdrošinātām personām. Nepieciešamos pamatus šeit sniedz statistiskie dati, kas ļauj aprēķināt kāda notikuma varbūtību a posteriori un no tās, saskaņā ar lielo skaitļu likumu, paredzēt, nākamo notikumu varbūtību a priori. Ja zinām kāda notikuma varbūtību, tad varam aprēķināt apdrošinātāja un apdrošināmā savstarpējos pienākumus, ja vien apdrošināšanas līgumu skaits pietiekoši liels.

Tā tad bez statistiskiem datiem nevar pareizi nostādīt apdrošināšanas lietu, jo trūkst matēmatisko pamatu. Tomēr dažām apdrošināšanas nozarēm nav statistiskā materiāla vai ari tas visai nepietiekošs; tāpēc apdrošināšanas iestāde šiem apdrošināšanas veidiem nevar zināt riska, ko tā uzņemas. Prēmiju likmes tādos gadījumos nosaka pa lielākai daļai tikai konkurence, vai ari apdrošināšanas iestādei jārīkojas ar mainīgām prēmiju likmēm.

Uz visdrošākiem statistiskiem pamatiem nostādīta dzīvības apdrošināšana, jo no dažādām masu parādībām visilgāk un vispamatīgāk ir novērota cilvēku mirstība. Par vecākām, zinātniski konstruētām mirstības tabulām jāuzlūko slavenā angļu astronoma Edmunda Halleja mirstības tabulas, kas parādījās 1693. g. Tagad dažādu mirstības tabulu — pie tam tādu, kas radušās no novērojumiem par apdrošinātām personām, ir diezgan daudz. Pie šī jautājuma atgriezīsimies nākamā nodaļā.

Bez mirstības tabulām, kas ļauj noteikt miršanas varbūtību, labi izveidotas ir ari dzīvības apdrošināšanas aprēķinu metodes, jo jau pirms Halleja holandietis Jan's de Witt's 1671. g. aprēķināja mūža rentes tagadējo vērtību, pie kam viņš lietoja pilnīgi hipotētisku nāves gadījumu sadalījumu pēc vecumiem, jo nebija no novērojumiem smeltu mirstības tabulu. Īstenībā par apdrošināšanas matēmatiku var runāt tikai tādos apdrošināšanas gadījumos, kur apdrošināšanas līgumus slēdz uz ilgu laiku, pie kam risks mainās ar laiku, kā, tas, piem., ir dzīvības apdrošināšanā, kur mirstības varbūtība, atskaitot pašu agro bērnību, līdz ar vecumu pieaug, jo tādos gadījumos vajadzīgi diezgan sarežģīti aprēķinu paņēmieni. Tāpēc apdrošināšanas matēmatikas tipiska pārstāve ir dzīvības apdrošināšana. Tās paraugam sāk sekot apdrošināšana pret slimībām, nelaimes gadījumiem, darba nespēku u. c., kaut gan statistiskie dati šīm nozarēm vēl nav tik pilnīgi un droši kā dzīvības apdrošināšanai. Kas zīmējas uz lietu apdrošināšanu, kur parasti ir pastāvīgs, neatkarīgs no laika risks, prēmiju aprēķini ir ļoti vienkārši: kolīdz ir zināmi vajadzīgie statistiskie dati, nav vajadzīgas nekādas matēmatikas formulas. Pēc lielo skaitļu likuma, ja kādai iestādei ir pietiekoši liels un caurmērā tas pats apdrošināto objektu skaits, tā dažādos gados izmaksā apmēram vienu un to pašu summu pa ugunsgrēka nodarītiem zaudējumiem.

Apdrošināšanas matēmatikas izveidošanā lielā loma piekrīt Londonas aktuāru institūtam (*Institute of Actuaries*), kuru 1848. g. nodibināja angļu apdrošināšanas matēmatiķi — tā, sauktie aktuāri. Londonas aktuāru institūts izdod kopš 1850. g. savu žurnālu, izdevis tā saucamo „*Text book*" (zināmā mērā apdrošināšanas enciklopēdija; pilnīgs nosaukums *Institute of Actuaries textbook of the principles of interest, life annuities and assurances and their practical application*. Part. I. Interest by R. Todhunter. Part. II. Life contingencies by G. King 2 ed. London 1901/1902), nodibinājis internacionālus apzīmējumus un veicis ari citus darbus (piem., mirstības tabulas). Līdzīgi institūti pastāv Francijā, Beļģijā u. c. Tā kā visu aprēķinu pamatos ir tā saucamās mirstības tabulas, tad tagad piegriezīsimies jautājumam, kā tās sastāda un lieto.

Trešā nodaļa.

III. Miršanas varbūtība un mirstības tabulas.

11. Mirstības tabulu sastādīšana. Miršanas varbūtība.

1. Kā jau minēts, lai dzīvības apdrošināšanas lietu nostādītu uz drošiem pamatiem, vajadzīga tā saucamā mirstības tabula, kas savā vienkāršākā veidā rāda, cik daudz no viena un tā paša vecuma personu skaita sasniedz nākamo mūža gadu, cik daudz nodzīvo vēl divus gadus u. t. t., vai citiem vārdiem, cik daudz vienāda vecuma personu nomirst gadu pēc gada. Piem., ja tabula rāda, ka no 100 000 jaunpiedzimušiem nodzīvo vienu gadu 76 614, divus gadus 72 631, trīs gadus 70 999 u. t. t., tad tas nozīmē, ka no 100 000 jaunpiedzimušiem pirmā mūža gadā nomirst 23 386, otrā mūža gadā 3 983, trešā mūža gadā 1 632 u. t. t. Dzīvo personu skaitu, kas nodzīvojušas x gadus un vēl nav sasniegušas $x+1$ gadu, tā tad vecumā starp x un $x+1$ gadu, apzīmē ar l_x, bet personu skaitu, kas nomirst vecumā starp x un $x+1$ gadu, apzīmē ar d_x. Tādā kārtā minētā piemēra $l_0=100\,000$, $l_1=76\,614$, $l_2=72\,631$, $l_3=70\,999$ u. t. t. un $d_0=23\,386$, $d_1=3\,983$, $d_2=1\,632$ u. t. t. Zinot l_0, l_1, l_2 . . ., var viegli atrast d_0, d_1, d_2, . . ., jo $d_0=l_0-l_1$, $d_1=l_1-l_2$, $d_2=l_2-l_3$ u. t. t.; vispār $d_x=l_x-l_{x+1}$. Liktos, ka atrisināt šo jautājumu var visai viegli, kā to savā laikā izteicis ievērojamais franču matēmatiķis Laplass (Laplace; 1749.—1827.) darbā *Essai philosophique sur les probabilités* (1814.): „Mirstības tabulas sastādīšana ļoti vienkārša: ņem no dzimušu un mirušu reģistra lielu skaitu bērnu, seko tiem pa visu viņu mūžu, noteicot, cik daudzi no tiem vēl dzīvo katra gada beigās, un tā dabūtos skaitļus pieraksta līdzās attiecīgam gadam." Tomēr šādā tiešā ceļā sastādīt mirstības tabulu nav gandrīz iespējams, jo tas prasa, lai būtu uzglabāti pagājušā gadu simteņa civilaktu reģistrācijas dokumenti par lielu reģistrējamo skaitu, un šie dokumenti jāizstudē; ja gribētu rīkoties citādi, t. i. neņemtu ziņas par pagājušo laiku, tad tabulu varētu nobeigt

tikai pēc apm. 100 gadiem. Bet ari tad, ja ar visām grūtībām izdotos tādas tabulas sastādīt, tās neattēlotu īstenības, jo parasti notiek diezgan lielas pārmaiņas: reģistrētie jaunpiedzimušie visi nepaliek uz vietas; daudzi izceļo uz citurieni, pat uz citām zemēm, tāpat daudzi ieceļo; it īpaši tas zīmējas uz vecākiem cilvēkiem. Aiz minētiem iemesliem parasti nelieto šo tiešo metodi mirstības tabulu sastādīšanai, bet rīkojas citādi.

2. Minējām, ka pirmo zinātnisko mirstības tabulu sastādījis Edmunds Hallejs. Kā viņš to izdarījis? Hallejs izgāja no divi hipotezēm. Viņš, pirmkārt, pieņēma hipotezi par stacionāro iedzīvotāju skaitu; pēc šīs hipotezes katru gadu ir tik pat daudz dzimstību, kā mirstību, t. i. visu dzimušo kopskaits katru gadu ir tik pat liels kā mirušo kopskaits. Uz šādām domām Halleju pamudināja publicētie Breslavas pilsētas mirušo un dzimušo reģistri par 1687.—1691. gadiem. Šinī laika sprīdī bija pavisam 6193 dzimšanas un 5869 miršanas gadījumi un katru gadu caurmērā (tuvu īstenībai) 1238 dzimšanas un 1174 miršanas gadījumi. Gada pārpalikums 1238—1174=64 personas nevarēja neko daudz pavairot iedzīvotāju skaitu, jo apmēram tik pat daudz pieaugušu tika iesaukti kaŗa dienestā. Otrkārt, Hallejs pieņēma hipotezi, ka katru gadu vienā un tanī pašā vecumā, piem., starp 40 un 41 gadu nomirst viens un tas pats iedzīvotāju skaits, citiem vārdiem d_x ir katru gadu viens un tas pats skaitlis.

Ja Halleja hipotezes pareizas, tad viena paša gada mirušo reģistrs, pēc kuŗa var redzēt, cik daudz mirstības gadījumu katrā vecumā, ir tanī pašā laikā ari mirstības tabula. Tiešām, d_0 mirstības gadījumi apzīmē to, ka no l_0 jaunpiedzimušiem pirmā mūža gadā nomirst d_0; d_1 mirstības gadījumi nozīmē, ka no tiem pašiem l_0 jaunpiedzimušiem nomirst otrā mūža gadā d_1 u. t. t. Kas novērots vienā gadā, būs pēc Halleja hipotezēm katrā nākamā gadā tiklab uz vispārējo (dzimušo un mirušo) skaitu, kā uz mirušo skaitu atsevišķos mūža gados. Tā tad tiešām viena gada mirušo reģistrs Hallejam deva jau mirstības tabulu. Halleja dabūtie skaitļi šādi: $l_1=1000$, $l_2=855$, $l_3=798$; $l_4=760$, $l_5=732$ u. t. t.

Ja pieņem Halleja hipotezes, tad var izlietot ari tautas skaitīšanas datus mirstības tabulas sastādīšanai, ja vien šinīs datos atzīmēti iedzīvotāju vecumi t. i. ja ir zināmi skaitļi, kas rāda, cik daudz cilvēku ir pirmā dzīvības gadā, cik daudz otrā, trešā u. t. t.

Pieņemsim, ka ω ir vislielākais vecums, kādu var sasniegt cilvēks; tas nozīmē, ka neviens cilvēks nepārsniedz $\omega+1$ gada, citiem vārdiem, visi, kas sasnieguši ω gadu vecumu, nomirst starp ω un $\omega+1$ gadu, tā tad $l_{\omega+1}=0$. Apzīmējot iedzīvotāju skaitu dažādos vecumos ar $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_\omega$, dabūsim, ka $l_\omega=d_\omega$, jo visi, kas sasnieguši ω gadu vecumu, nomirst, nesasniedzot $\omega+1$ gada; $l_{\omega-1}=d_\omega+d_{\omega-1}$, jo no personām $\omega-1$ gadu vecumā viena daļa nomirst starp $\omega-1$ un ω gadu, pārējie starp ω un $\omega+1$ u. t. t.; tāpat

$$l_{\omega-2}=d_\omega+d_{\omega-1}+d_{\omega-2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l_k=d_\omega+d_{\omega-1}+\ldots+d_k;$$

$$l_{k-1}=d_\omega+d_{\omega-1}+\ldots+d_k+d_{k-1};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l_0=d_\omega+d_{\omega-1}+\ldots+d_k+d_{k-1}+\ldots+d_0.$$

No šīm sakarībām redzam, ka

$$l_{k-1}-l_k=d_{k-1}.$$

Pēdējā vienlīdzība rāda, ka miršanas gadījumu skaitu, kas katru gadu rodas starp $k-1$ un k dzīvības gadu, dabū, atņemot personu skaitu k gadu vecumā no personu skaita $(k-1)$ gadu vecumā; l_k un l_{k-1} dod tautas skaitīšana.

Tomēr hipoteze par stacionāro iedzīvotāju skaitu nekur nav attaisnojusies. No tā laika, kad pēc zināmiem periodiem sākuši visās valstīs izdarīt tautas skaitīšanu, skaidri redzam, ka gandrīz visur ir pārmaiņas iedzīvotāju skaitā: ar maziem izņēmumiem, visur novērojama iedzīvotāju skaita pieaugšana. Pēc kāda likuma notiek pieaugšana, to nav izdevies izteikt matēmatiskas formulas veidā. Gan Eilers 1760. gadā izteica hipotezi, ka iedzīvotāju skaita pieaugšana notiekot pēc ģeometriskās progresijas likuma, tomēr īstenība ari šo hipotezi nav attaisnojusi. Tāpēc jāmeklē citi ceļi mirstības tabulu sastādīšanai. Jāpiezīmē, ka mirstības tabulas var sākties ar ikkuru vecumu.

3. Ja l_x ir dzīvo personu skaits vecumā x un d_x ir mirušo skaits stārp x un $x+1$ gadu, tad x gadus vecas personas miršanas varbūtība (varbūtība x gadus vecai personai nomirt, nesasniedzot $x+1$ gadu), ko parasti apzīmēsim ar q_x, izteiksies tā: $q_x = \frac{d_x}{l_x}$; pretējā varbūtība

$$1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

ir x gadus vecas personas dzīvošanas varbūtība [varbūtība x gadu vecai personai sasniegt $(x+1)$ gadu]; šo varbūtību parasti apzīmēsim ar p_x; ta tad $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$.

Var runāt ari par varbūtību x gadus vecai personai sasniegt $x+n$ gadus; ja to apzīmēsim ar ${}_np_x$, tad ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$. Varbūtība x gadus vecai personai nomirt tuvāko n gadu laikā ir $\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_np_x$, jo minētos n gados nomirst $l_x - l_{x+n}$ personas.

Mirstības tabulas sastādīšanai par izejas punktu der q_x. Ja zināsim lielumus q_x, t. i. q_0, q_1, q_2, q_3, . . . , tad mirstības tabulu var konstruēt ļoti viegli. Jāizvēlas gadu skaits, no kuŗa gribam sākt tabulu, un jāpieņem pēc patikas kāds noapaļots skaitlis par dzīvo personu skaitu šinī vecumā. Piem., ja gribam sākt tabulu ar 10 gadiem, tad jāizvēlas kāds skaitlis, piem., 10 000, par dzīvo personu skaitu šinī vecumā, tā tad $l_{10} = 10\,000$. Ja zināsim q_{10} (miršanas varbūtību), tad personu skaits, kas nomirst starp 10 un 11 gadiem, t. i. d_{10}, izteiksies kā $d_{10} = 100000 \,.\, q_{10}$ un l_{11} izteiksies kā $l_{11} = 10\,000 - 10\,000 q_{10} = 10\,000(1 - q_{10})$. Līdzīgā kārtā $d_{11} = 10\,000(1 - q_{10})q_{11}$ un $l_{12} = l_{11} - d_{11} = l_{11} - l_{11}q_{11} = 10\,000(1 - - q_{10}) - 10\,000(1 - q_{10})q_{11} = 10\,000(1 - q_{10})(1 - q_{11})$. Tāpat $d_{12} = = l_{12}q_{12}$ un $l_{13} = l_{12} - d_{12} = l_{12} - l_{12}q_{12} = 10\,000(1 - q_{10})(1 - q_{11})(1 - q_{12})$ u. t. t. Tā tad zinot q_0, q_1, q_2, . . . , q_{10}, varam sastādīt mirstības tabulu, izejot no kaut kuŗa vecuma un kaut kuŗa dzīvo personu skaita šinī vecumā.

4. Kā tad nu atrast q_x dažādiem vecumiem? To varētu atrast, novērojot pietiekoši lielu x gadu vecu personu skaitu laikā stārp viņu x - to un $(x+1)$ - o dzimšanas dienu. Īstenībā nebūs viegli paturēt acīs veselu gadu ikvienu no prāva (lielo skaitļu likums!) personu skaita, jo viena daļa no tiem, kas no sākuma ņemti novērošanā, aizies (izceļos) no novērotāja redzes lauka, citi pienāks klāt.

Apzīmēsim ar L_x to personu skaitu, kas ar savu x - to dzimšanas dienu tiek ņemtas novērošanā; pieņemsim, ka novērošanas laikā starp x un $(x+1)$ gadu nāk klāt B_x personas un aiziet no novērošanas lauka C_x personas vecumā starp x un $(x+1)$ gadu, t. i. no L_x+B_x personu skaita, pie kam novērotājs nezina, kādas no šīm C_x personām sasniedz savu $(x+1)$ dzimšanas dienu, kādas ne. Apzīmēsim beidzot ar D_x to personu skaitu, kas novērošanas laikā no novērošanā ņemtām personām mirušas vecumā starp x un $x+1$ gadu. Šinī skaitā D_x ieiet visas tās personas, kas mirušas no L_x personām, ka ari tās, ko deva B_x novērošanas laikā, kuŗš, zīmējoties uz personu skaitu B_x, neilga veselu gadu, jo dažas no B_x personām varēja būt pienākušas gada vidū vai pat paša gada beigās. Skaitā D_x neietilpst turpretim viss mirušo personu skaits, kas vecumā starp x un $(x+1)$ gadu mirušas L_x+B_x personu starpā, jo trūkst miršanas gadījumi personu C_x starpā, kas pirms $x+1$ gadu sasniegšanas aizgājušas no novērojumu lauka. Tagad rodas jautājums, kā novērtēt skaitļus B_x un C_x, jo visas personas, kas ieiet šinīs skaitļos, nav tikušas novērotas visu gadu, bet tikai kādu gada daļu? Skaidra lieta, ka šīs personas nevar ienest kopsummā ar to pašu vērtību kā personas, kuŗas novērotas veselu gadu; piem., ja novērojumi par 100 personām sniedzas tikai vienu mēnesi, tad rezultāti būs citi nekā gadījumā, ja šīs 100 personas būtu novērotas visu gadu. Tāpēc katru tādu personu var ievest aprēķinos, reizinot ar to gada daļu, kuŗā persona novērota. Piem., ja novērojumu laukā ienākušas 12 personas starp x un $x+1$ gadu tikai beidzamo triju mēnešu jeb ceturtdaļ gada laikā, tad tās var ievest vispārējos aprēķinos tikai kā $12 . \frac{1}{4} = 3$ personas, kas it kā būtu novērotas visu gadu. Pieņemot hipotezi, kas tuva īstenībai, ka nāves gadījumi sadalās vienmērīgi pa visu gadu un ari iestāšanās novērojumu laukā, kā ari izstāšanās no tā sadalās vienmērīgi pa visu gadu, varam teikt, ka katra no personām B_x un C_x ir caurmērā novērota pusgada, tāpēc skaitļus B_x un C_x var ievest aprēķinos ar pusvērtību, t. i. $\frac{B_x}{2}$ un $\frac{C_x}{2}$. Tā ta D_x mirušie rodas it kā no $L_x + \frac{B_x}{2} - \frac{C_x}{2}$ dzīvo personu skaita, un tāpēc

$$q_x = \frac{D_x}{L_x + \frac{B_x}{2} - \frac{C_x}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (7).$$

Dabūto formulu var piemērot vai nu kādas valsts vai citas territorijas daļas visiem iedzīvotājiem, ja zināms

a) tautas skaitīšanā dabūtais dzīvo personu skaits kalendara gada beigās, sakārtots pēc dzimšanas gadiem un *b*) visu mirušo personu skaits tautas skaitīšanas gadā un vēl nākamā gadā, sakārtots kā pēc dzimšanas gadiem, tā pēc vecumiem. Pieņemsim, ka 1925. g. 31. dec. izdarīta tautas skaitīšana, kas dod visu 1900. g. dzimušo personu skaitu, kuŗu apzīmēsim kā L_{1925}^{1900}; bet tik liels dzīvo personu skaits ir bijis 1925. g. beigās; šī gada sākumā dzīvo personu skaits ir bijis lielāks, vispirms par 1925. g. mirušo skaitu, vecumā starp 25 un 26 gadiem no 1900. g. dzimušiem; šo skaitu apzīmēsim ar $D_{25-26,1925}^{1900}$ un to var dabūt no 1925. gadā mirušo reģistriem. Tā tad summa $L_{1925}^{1900} + D_{25-26,1925}^{1900}$ rāda vienīgi visu to personu skaitu, kas 1925. g. sasniegušas 25 mūža gadus. Šinī skaitā ieiet ari visas tās personas, kas dzimušas 1900. g. un 1925. g. iecelojušas, bet neieiet personas, kas dzimušas 1900 g. un 1925. g. izceļojušas. Pēc lietas būtības kā vienas tā otras grupas personu skaits ņemts ar pilnu vērtību, turpretim pēc iepriekšēja aizrādījuma [sk. (7) form.] tas jāņem tikai ar pusvērtību, tā tad izteiksmē $L_{1925}^{1900} + D_{25-26,1925}^{1900}$ skaitļi $B_{25-26,1925}^{1900}$ un $C_{25-26,1925}^{1900}$ jau ieiet un ar pilnu vērtību; lai tos dabūtu tikai ar pusvērtību, jāatņem $\frac{B_{25-26,1925}^{1900}}{2}$ un jāpieskaita $\frac{C_{25-26,1925}^{1900}}{2}$ tāpēc (7.) formulā saucējs izteiksies vispirms kā $L_{1925}^{1900} + D_{25-26,1925}^{1900} - \frac{B_{25-26,1925}^{1900}}{2} + \frac{C_{25-26,1925}^{1900}}{2}$. Tā kā daudzi no 1900. gadā dzimušiem starp 25 un 26 mūža gadiem dzīvos vēl ari 1926. g. un tāpēc tie jānovēro, tad 1926. g. var nākt klāt $B_{25-26,1926}^{1900}$ personas un iet projām $C^{1900}_{25-26,1926}$ personas. Tā kā šo personu skaitu ņemam tikai ar pusvērtību, tad viss (7) formulas saucējs izteiksies tā:

$$L^{1900}_{1925} + D^{1900}_{25-26,1925} - \frac{B^{1900}_{25-26,1925}}{2} + \frac{C^{1900}_{25-26,0925}}{2} +$$

$$+ \frac{B^{1900}_{25-26,1926}}{2} - \frac{C^{1900}_{25-26,1926}}{2}.$$

Bez jūtamas kļūdas var pieņemt, ka divos viens otram sekojošos gados vienāda vecuma iecelotāju un tāpat ari izceļotāju skaita starpība ir viena un tā pati, t. i.

$B^{1900}_{25-26,1925} - C^{1900}_{25-26,1925} = B^{1900}_{25-26,1926} - C^{1900}_{25-26,1926}$; tāpēc saucēja minētās starpības iznīcinās, un paliek tikai $L^{1900}_{1925} + D^{1900}_{25-26,1925}$. Tagad jāatrod tikai mirušo personu skaits, kas dzimušas 1900. g. un mirušas vecumā starp 25 un 26 mūža gadiem.

Vienu daļu, proti $D^{1900}_{25-26,1925}$, deva jau 1925. g. mirušo reģistrs, pārējo dos 1926. g. mirušo reģistrs, no kuŗa jāņem personas, kas dzimušas 1900. g. un mirušas vecumā starp 25 un 26 mūža gadiem; pieņemsim, ka šādu personu skaits ir $D^{1900}_{25-26,1926}$. Tagad mums ir visi vajadzīgie dati, lai atrastu pēc (7) formulas q_{25}, proti

$$q_{25} = \frac{\mathfrak{D}^{1900}_{25-26,1925} + \mathfrak{D}^{1900}_{25-26,1926}}{\mathfrak{L}^{1900}_{1925} + \mathfrak{D}^{1900}_{25-26,1935}}.$$

Ja ņemtum vērā vēl ari citas tautas skaitīšanas datus, piem., 1920. g. skaitīšanas datus, tad q_{25} izteiktos šādā veidā.

$$q_{25} = \frac{D^{1900}_{25-26,1925} + D^{1900}_{25-26,1926} + D^{1885}_{25-26,1920} + D^{1885}_{25-26.1921}}{L^{1900}_{1925} + D^{1900}_{25-26,1925} + L^{1885}_{1920} + D^{1885}_{25-26,1920}}$$

kur lielumu D un L nozīmes rāda indeki.

Ar šādu paņēmienu var atrast ari citas miršanas varbūtības un tad, kā jau aizrādīts, sastādīt tautas mirstības tabulu.

Bez minētā paņēmiena lieto ari citus.

Tabulas, kas radušās no datiem par visu tautu — tā saucamās tautas mirstības tabulas — pilnā mērā neapmierina apdrošināšanas iestādes, it īpaši tās, kas pieņem dzīvības apdrošināšanu par prāvām summām. Prakse ir, piem., pierādījusi, ka personas, kas apdrošina rentes, uzrāda mazāku mirstību nekā tautas mirstības tabulas. Tāpēc radās doma sastādīt apdrošināšanas biedrību lietošanai tabulas no tiem datiem, kas ir apdrošināšanas iestāžu rīcībā par tā saucamām *normāli* apdrošinātām personām, kuŗas gan pēc sava dzīves veida, gan materiālā stāvokļa vispār veido īpašu grupu pārējo tautas locekļu starpā.

5. Lai sastādītu mirstības tabulas, izejot no apdrošināšanas iestāžu datiem, katra apdrošināšanas biedrība patur apdrošināto personu tik ilgi novērojumu laukā, kamēr pastāv līgums, pie kam apdrošināšanas līguma attiecības var izbeigties vai nu ar apdrošinātās personas nāvi, vai ar līguma notecēšanu vai līguma pārtraukšanu, par ko katra apdrošināšanas biedrība taisa atzīmes. Tādā kārtā apdrošināšanas biedrībām ir dati, kas tām ļauj, vienojoties par kādu noteiktu skaitīšanas termiņu (piem., Austrijas-Ungarijas biedrība par tādu pieņēma 1900. g. 31. dec.), sastādīt par ikvienu personu, kas kādreiz bijusi vai vēl ir apdrošināta, *skaitīšanas kartiņu*; personas, kas noslēgušas apdrošināšanas līgumu pēc skaitīšanas termiņa, netiek skaitītas līdz, bet toties tiek ņemtas vērā personas, kas skaitīšanas termiņā bijušas apdrošinātas un pēc tam izbeigušas līguma attiecības. Kartiņā atzīmē dažādus datus, bet katrā ziņā *dzimšanas dienu, līguma slēgšanas un līguma izbeigšanās dienu*; pērsonām, kas skaitīšanas termiņā bijušas vēl apdrošinātas, pēdējā datuma vietā atzīmē skaitīšanas datumu. No kartiņās atzīmētiem datiem viegli aprēķināt *vecumu līguma slēgšanas dienā* un *novērošanas ilgumu*.

Kartiņas ar visiem vajadzīgiem datiem apdrošināšanas iestādes iesūta centrālai iestādei, kas uzņēmusies apstrādāt visus savāktos materiālus.

Šajā centrālajā skaitīšanas vietā sakārto vispirms kartiņas pēc *vecumiem līguma slēgšanas dienā*; tad katra atsevišķa vecuma kartiņas grupē tālāk pēc novērojumu ilguma un tās savukārt pēc tā, vai apdrošinātā persona novērošanas gadā mirusi, pārtraukusi (dzīva būdama) līgumu vai ari sasniegusi skaitīšanas termiņu. Tādā kārtā visas kartiņas sadalīsies šādās grupās:

vecums līg. slēgš. dienā 20 g. 21 g. 22 g. u. t. t.

novēroš. ilgums 0—1 g. 1—2 g. 2—3 g. u. t. t. 0—1 g. 1—2 g. 2—3 g. u. t. t.

mirušas pārtr. dzīvas mirušas pārtr. dzīvas u. t. t.

9

Piem., kartiņu sagrupējums pēc vecumiem līguma slēgšanas dienā devis 57 g. vecumam kartiņu skaitu 1213; tālākais sadalījums izrādījies tāds:

1213

novērož. ilgums (0—1 g.) 56 (1—2 g.) 122 (2—3 g.) 87 u. t. t.

8 (mir.) 37 (pārtr.) 11 (dzīv.) 40 (mir.) 70 (pārtr.) 12 (dzīvas) u. t. t.

Tādā ceļā dabūtie dati ļauj sagrupēt skaitli 1213 un pēc tam sakārtot tabulu, kuŗas dažādo kolonnu nozīmes rāda attiecīgie virsraksti (sk. tab. 213. lpp.).

Tā, piem., 7. kolonna kā 2., 3. un 4. kolonnas summa rāda, cik pavisam personu, kas 57 gadu vecumā slēgušas līgumu, novērotas no 0 līdz 1 gadam (56), no tad 1—2 gadiem (tā tad jau vecumā starp 58 un 59 mūža gadiem) 122 personas u. t. t., no kuŗām pirmā novērošanas gadā miŗušas 8 (tā tad vecumā starp 57 un 58 mūža gadiem), pārtraukušas līgumu 37 personas, atradušās līguma attiecībās ar kādu apdrošināšanas biedrību skaitīšanas dienā 11; otrā novērošanas gadā mirušas (vecumā starp 58 un 59 gadiem) 40, pārtraukušas 70, atradušās līguma attiecībās skaitīšanas brīdī 12 u. t. t. Īpaši jāatzīmē 8. kolonnas skaitļi: tie rodas, pakāpeniski saskaitot no apakšas 7. kolonnas skaitļus un tā tad rāda — pirmā rinda, cik p a v i s a m p e r s o n u, k a s l ī g u m a s l ē g š a n a s b r ī d ī b i j u š a s 57 g a d u s v e c a s u n n o v ē r o t a s l ī d z v i e n a m g a d a m (1213 p e r s.); šīs kolonnas otrās rindas skaitlis rāda, cik ir bijis tādu personu, kas 57 gadu vecumā slēgušas līgumu un novērotas ne mazāk par vienu gadu (1157) u. t. t. Kā te izlietot (7) formulu? Skaidra lieta, ka $L_{57}=0$, $B_{57}=1213$; $\frac{C_{57}}{2}=24$ (6. kolonnas skaitlis) un $D_{57}=8$; tā tad no šiem datiem būtu varbūtība 57 gadus vecai personai nomirt pirmā apdrošināšanas gadā

$$q_{57}=\frac{8}{\frac{1213}{2}-24}=\frac{\text{2. kolonnas pirmais sk.}}{\frac{\text{pirmais 8. kol. sk.}}{2}-\text{6. kol. pirm. sk.}}=\frac{\text{2. kol. sk.}}{\text{9. kol. sk.}};$$

otrās un pārējo rindu skaitļi dod (7) formulas saucēju mazliet citādi: $L_{58}=$ 8. kol. sk. (1157); $B_{58}=0$, $\frac{C_{58}}{2}=$ 6. kol. sk. (41) u. t. t. kas izteikti 9. kolonnā; tā tad varbūtība 57 gadus vecai per-

Vecums līguma slēgšanas dienā **57** gadi. **A.**

Līgumu noslēgušas 1213 personas.

Novērošanas ilgums	No novērošanā ņemtām personām: mirušas	pārtrauk. līgumu dzīvas būdamas	skaitīš. termiņā dzīvas	3. un 4. kolonnas summa	5. kolonnas puse	2., 3. un 4. kolonnas summa	7. kolonnas summa no apakšas	Pirmā rinda: 8. kol. puse bez 6. kol.; turpmākās rindas: 8. kol. bez 6. kol.
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0 līdz 1 g.	8	37	11	48	24	56	1213	582,5
1 „ 2 „	40	70	12	82	41	122	1157	1116
2 „ 3 „	37	22	28	50	25	87	1035	1010
3 „ 4 „	37	18	29	47	23,5	84	948	924,5
4 „ 5 „	35	15	21	36	18	71	864	846
5 „ 6 „	31	13	35	48	24	79	793	769
6 „ 7 „	33	9	52	61	30,5	94	714	683,5
7 „ 8 „	25	11	59	70	35	95	620	585
8 „ 9 „	32	6	50	56	28	88	525	497
9 „ 10 „	19	5	36	41	20,5	60	437	416,5
10 „ 11 „	19	4	42	46	23	65	377	354
11 „ 12 „	15	1	29	30	15	45	312	297
12 „ 13 „	22	1	29	30	15	52	267	252
13 „ 14 „	15	—	18	18	9	33	215	206
14 „ 15 „	20	2	15	17	8,5	37	182	173,5
15 „ 16 „	7	—	7	7	3,5	14	145	141,5
16 „ 17 „	12	—	6	6	3	18	131	128
17 „ 18 „	11	—	11	11	5,5	22	113	107,5
18 „ 19 „	9	1	9	10	5	19	91	86
19 „ 20 „	14	—	7	7	3,5	21	72	68,5
20 „ 21 „	4	—	6	6	3	10	51	48
21 „ 22 „	8	1	2	3	1,5	11	41	39,5
22 „ 23 „	8	—	—	—	—	8	30	30
23 „ 24 „	4	1	1	2	1	6	22	21
24 „ 25 „	4	—	1	1	0,5	5	16	15,5
25 „ 26 „	4	—	1	1	0,5	5	11	10,5
26 „ 27 „	2	—	1	1	0,5	3	6	5,5
27 „ 28 „	1	—	—	—	—	1	3	3
28 „ 29 „	—	1	—	1	0,5	1	2	1,5
29 „ 30 „	—	—	—	—	—	—	1	1
30 „ 31 „	—	—	—	—	—	—	1	1
31 „ 32 „	—	—	—	—	—	—	1	1
32 „ 33 „	1	—	—	—	—	1	1	1
	477	218	518	736	368	1213	10397	9422,5

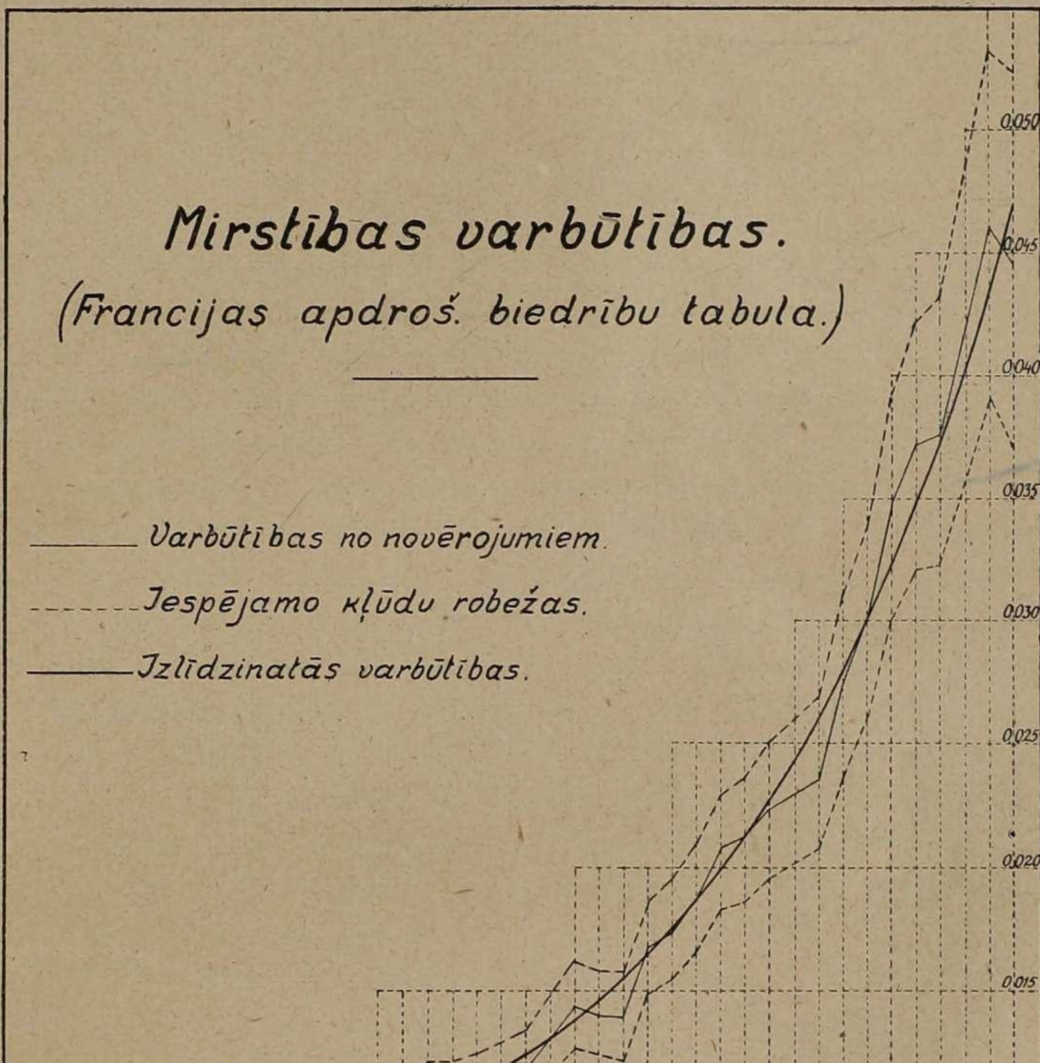
sonai nomirt otrā apdrošināšanas gadā izteicas kā attiecīgs otrās kolonnas skaitļa dalījums ar devītās kolonnas skaitli. Lai tagad varētu izlietot visus 2. un 9. kolonnas skaitļus varbūtības aprēķināšanai, kāda ir zināma vecuma personai nomirt pirmā apdrošināšanas gadā, pieņemsim hipotezi, ka varbūtība 59 gadus vecai personai nomirt pirmā apdrošināšanas gadā ir tikpat liela, kā varbūtība 58 gadus vecai personai nomirt 2. apdrošināšanas gadā vai ka 57 g. vecai personai nomirt 3. apdrošināšanas gadā u. t. t.; lietosim šo pašu hipotezi dažādiem vecumiem. Tad rodas iespēja izmantot visus nule aplūkotās tabulas *A* un citu līdzīgu tabulu (citiem vecumiem sastādītu) skaitļus, proti, 2. un 9. kolonnas skaitļus, kā (7) formulas skaitītāju un saucēju. Ņemsim piemēram 40 gadu vecumu.

Vecums līguma slēgšanas dienā	Novērošanas ilgums	2. kol. skaitļi	9. kolonnas skaitļi
40	0 līdz 1 g.	41	5061
39	1 „ 2 „	103	10659
38	2 „ 3 „	101	9656
37	3 „ 4 „	124	9053
36	4 „ 5 „	91	8326
35	5 „ 6 „	97	8112,5
34	6 „ 7 „	75	7423
33	7 „ 8 „	65	6292
32	8 „ 9 „	55	5406,5
31	9 „ 10 „	59	4282
30	10 „ 11 „	37	3381
29	11 „ 12 „	32	2579,5
28	12 „ 13 „	26	1782,5
27	13 „ 14 „	15	1153
26	14 „ 15 „	11	775,5
25	15 „ 16 „	3	531
24	16 „ 17 „	3	267
23	17 „ 18 „	2	145
22	18 „ 19 „	—	72
21	19 „ 20 „	—	44
20	20 „ 21 „	—	9
19	21 „ 22 „	—	4
18	22 „ 23 „	—	3
17	23 „ 24 „	—	1
16	24 „ 25 „	—	—
15	25 „ 26 „	—	1
14	26 „ 27 „	—	1
		940	85020,5

No šīs tabulas

$$q_{40} = \frac{940}{85020{,}5} = 0{,}01106.$$

Tādā pašā kārtā aprēķina citas varbūtības. Kad varbūtības aprēķinātas, tad var sastādīt mirstības tabulas, kā jau parādīts.



1. zīm.

6. Aprakstītā ceļā dabūtā mirstības tabulas nedos skaitļus, kādus varētu sagaidīt a priori, jo būtu jāpieņem, ka mirstības

dažādiem vecumiem iet cik necik vienmērīgi, bez lieliem lēcieniem uz vienu vai otru pusi; ģeometriskā interpretācijā šī apriorā doma reālizētos tā, ka gala punkti, ko dod ģeometriski attēlotās mirstības varbūtības, veido līkni ar mierīgu gaitu, bez asiem lūzumiem uz vienu vai otru pusi. Īstenībā dabūtie skaitļi parasti dod citu ainu, kas atkarājas, pirmkārt, no kļūdām, kādas piemīt katrai empīriskai lieluma noteikšanai, un, otrkārt, no traucējumiem „normālā“ novērojamās parādības gaitā, jo, piem., var īsākā vai garākā laika sprīdī rasties pastiprinātā veidā īpaši mirstības cēloņi. Lai izlīdzinātu šādas, aiz gadījuma radušās nevienmērības mirstības tabulā, lieto dažādas tabulu izlīdzināšanas metodes, kas līdz ar to ir viens no svarīgākiem un bieži lietotiem punktiem tabulu sastādīšanas praksē.

Lietojot mirstības tabulu izlīdzināšanas grafisko metodi, rīkojas tā. Uz abscisu ass atzīmē gadus (vecumus) un ar attiecīgo ordinātu apzīmē mirstības varbūtību. Tādā kārtā radīsies punktu rinda, kuŗa attēlos no novērojumiem dabūtu mirstības gaitu. Grafiskā izlīdzināšana notiek tā, ka dabūtos punktus apmaina ar citiem, kas dod savā gaitā vairāk vienmērības. Šinī nolūkā velk nepārtrauktu līkni dabūto punktu laukā tā, ka daži punkti paliek augstāk, daži zemāk, tomēr visi pēc iespējas tuvu līknei. Par galīgi izlīdzinātiem mirstības varbūtības lielumiem pieņem tos, kuŗus dod līknes ordinātas. 1. zīm. rāda mirstības varbūtības pēc franču tabulām; smalkākā nepārtrauktā līnija attēlo novērojumu datus, treknākā ir izlīdzināšanas līkne, kuŗas ordinātas dod izlīdzinātas miršanas varbūtības. Punktētās līnijas rāda iespējamo kļūdu robežas.

Ar tā saucamo mēchanisko metodi no novērotiem datiem dabū izlīdzinātos, lietojot kādu noteiktu vienu un to pašu rēķinu paņēmienu. Tā, piem., Wittstein's (Mathematische Statistik, Hannover, 1867, p. 30) lieto kaut kādu novēroto lielumu rindas $u_0, u_1, u_2, \ldots u_x, \ldots$ izlīdzināšanai šādu paņēmienu: jāņem ik pa pieciem līdzās stāvošiem locekļiem un jāatrod šo locekļu vidējais aritmētiskais skaitlis, kas jāņem attiecīgās grupas vidējā locekļa vietā jau kā izlīdzināts loceklis; piem., ja atzīmēsim trešo izlīdzināto locekli ar u'_3, tad $u'_3 = \frac{u_1+u_2+u_3+u_4+u_5}{5}$ u. t. t.

Ja jauna rinda vēl nav pietiekoši izlīdzināta, tad ar to rīkojas tāpat kā ar pirmatnējo.

Trešā izlīdzināšanas metode ir analitiskā metode. Tās pamatdoma ir — izteikt mirstības varbūtību vai, citādi, dzīvo personu skaitu ikvienā vecumā kā gadu skaita (vecuma) un dažu pastāvīgu lielumu funkciju, t. i. izteikt l_x vispār šādā veidā:

$$l_x = f(a, b, \ldots, k, x).$$

Šādā veidā viegli varētu izteikt l_x, ja vispār eksistētu kāds mirstības likums, kas derētu ikvienai vietai un ikvienam laika sprīdim. Mirstību iespaido tik daudz dažādu faktoru, ka maz ticams kādreiz izteikt visus šos faktorus analitiski.

Toties ir atrastas empīriskas formulas, kas zināmās robežās uzrāda labus rezultātus, ļaujot izteikt dzīvo personu skaitu kā vecuma funkciju un tādā ceļā izlīdzināt novērojumu datus. Dažādu citu formulu starpā te jāmin Gompertz'a un Makeham'a formulas. Angļu aktuārs Gompertz's 1825.g. lika priekšā lietot šādu

formulu: $l_x = kg^{c^x}$,

kur k, g un c ir pastāvīgi lielumi. Gompertz's pats aprobežoja šīs formulas lietošanu vecumiem no 10 vai 15 gadiem līdz 55 vai 60 gadiem, piezīmēdams, ka uz bērna gadiem šī formula nav attiecināma, tāpat vecumam pāri par 60 gadiem formulā jāņem citi pastāvīgi lielumi.

1860. g. Makeham's papildināja Gompertz'a formulu šādā veidā:

$$l_x = k \cdot s^x g^{c^x}$$

kur k, s, g un c ir pastāvīgi lielumi, kuŗa der visiem vecumiem, sākot apmēram ar 20 gadiem, un pazīstama kā Gompertz'a-Makeham'a formula. Šo formulu visvairāk lieto mirstības tabulu izlīdzināšanai. Pastāvīgos lielumus izvēlas, izejot no novērojumu materiāliem tā, lai šie lielumi vispārējos vilcienos attēlotu pēc iespējas tuvu novērojumu materiālus.

12. Biežāk lietojamās mirstību tabulas.

1. Miršanas varbūtībās, kas der par pamatu šāda vai citāda veida mirstības tabulām, novērojama diezgan liela dažādība atkarībā no tā statistiskā materiāla, kas izlietots tabulas sastādīšanai. Tā, piem., nav vienu un tās pašu miršanas varbūtību dažādām zemēm, dažādiem dzimumiem, dažādām profesijām u. tml. Tāpēc rodas jautājums, kādas mirstības tabulas lietot vienā vai otrā gadījumā? Apdrošināšanas praksē sastopamas galvenā kārtā trejāda veida mirstības tabulas, kas radušās no novērojumiem *a*) par visiem zemes iedzīvotājiem *b*) par personām, kas bijušas apdrošinātas nāves gadījumam un *c*) par

personām, kas apdrošinājušas mūža renti vai kapitālu nodzīvošanas gadījumam.

Tabulas, kas radušās no novērojumiem par visiem kādas zemes iedzīvotājiem — tā saucamās tautas mirstības tabulas — diezgan stipri atšķiras no tabulām, ko dod novērojumi par tā saucamiem normāli apdrošinātām personām, t. i. tādām personām, kas kaut kādā apdrošināšanas iestādē tikušas apdrošinātas par prāvāku summu, jo pa lielai tiesai šo personu kontingents sastādās vispār no vidusšķirām. Bez šīs apdrošināto personu pašizlases nāk klāt ari apdrošināšanas iestādes izlase, jo parasti personas, kas apdrošinās nāves gadījumam, izmeklē ārsts. Šī pašizlase vēl lielākā mērā notiek ar rentēm apdrošinātām personām, kuŗas ārsts neizmeklē, bet kuŗas it kā instinktīvi jūt, ka tās vēl ilgi dzīvos, un tāpēc apdrošina sev mūža renti, pie kam izrādās, kā šāda sevis novērtēšana pilnīgi attaisnojas: rentēm apdrošinātie, it īpaši rentēm apdrošinātās (sievietes) uzrāda nesalīdzināmi mazāku miršanas varbūtību nekā nāves gadījumam pat ārsta izmeklētas personas. Diezgan prāva starpība ir ari mirstības ziņā vīriešu un sieviešu starpā, jo sievietes, sevišķi lielākā vecumā, izrāda vispār mazāku miršanas varbūtību.

Tāpēc lielākas apdrošināšanas biedrības lieto normāliem apdrošināšanas gadījumiem tabulas, ko devuši novērojumi par apdrošinātām personām, jo tās atbilst vairāk šo iestāžu vajadzībām.

2. No vairāk lietojamām mirstības tabulām, kas radušās no novērojumiem par apdrošinātām personām, jāmin sekojošas.

a) 23 vācu biedrību mirstības tabulas (Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften, Berlin, 1883); tās radušās no novērojumiem par 858500 apdrošinātām personām (līdz 1875. g. beigām. 21 Vācijas iestādē, 1 Austrijas un 1 Šveices, un publicētas 1883, gadā. No šī materiāla, grupējot personas vairākās kategorijās sastādītas vairākas tabulas.

aa) Normāli apdrošinātas un pilnīgi ārsta izmeklētas personas.

M I. (vīrieši), *W* I. (sievietes) un *M* u. *W* I. (ievietotas grāmatas pielikumā);

bb) pret paaugstinātām prēmijām apdrošinātas un pilnīgi ārsta izmeklētas personas.

M II. (vīrieši) *W* II. (sievietes) *M* u. *W* II. (vīrieši un sievietes);

cc) nepilnīgi ārsta izmeklētas personas (miršanas kašu apdrošinājumi).

M III. (vīrieši), *W* III. (sievietes, *M* u. *W* III. (vīrieši un sievietes).

Šīs tabulas lieto lielākā daļa Vācijas un Šveices biedrību normāliem apdrošinājumiem.

Ari Latvijas apdrošināšanas iestādes turas pie šīm tabulām.

b) Vācu renšu apdrošinātāju tabula (Die deutsche Rentner-Sterbetafel) dibinās uz novērojumu materiāliem līdz 1889. g. 31. dec. 24 Vācijas, 11 Austrijas un 3 Šveices apdrošināšanas biedrībās par 16 968 renšu apdrošinātājiem (šīs tabulas ievietotas grāmatas pielikumā).

c) Austrijas-Ungarijas mirstības tabulas, vienas no jaunākām un labi izstrādātām tabulām, radušās no novērojumiem (laikā starp 1876. g. 1. janv. un 1900. g. 31. dec.), 18 Austrijas, 3 Ungarijas un 10 ārzemju Austrijā vai Ungarijā operējošām biedrībām un publicētas 1909. gadā. Novērojumi aptver 813 421 vīrieti un 129 500 sievietes.

d) Francijā lieto četru Francijas biedrību tabulas (*Assurances Générales*, *Union*, *Nationale*, *Phénixe*) publicētas 1890. g. (no novērojumiem par laiku no 1819—1874); tās ir

aa) *Table RF* (*Rentiers français*; *table de mortalité des rentiers viagers*)

bb) *Table AF* (*Assurés français*, *table de mortalité en cas de décès*); ievietota grāmatas pielikumā.

Tabulās vīrieši no sievietēm nav atdalīti.

e) Anglijā visvairāk lieto 20 angļu apdrošināšanas biedrību tabulas H^{M} (saīsināts — healthy males) un $H^{M(5)}$; beidzamā tabula zīmējas uz personām, kas bijušas apdrošinātas ne mazāk par 5 gadiem (Tabulu pilnīgs nosaukums: *The mortality experiences of life insurance companies collected by the Institut of Actuaries. London*, 1869). Novērojumi sniedzas līdz 1862. g. beigām.

60 angļu biedrību tabulas aptver novērojumus no 1863. līdz 1893. g.

3. Tautas mirstības tabulas lieto tur, kur apdrošināmās personas rodas no plašākām tautas aprindām un kur apdrošināmā summa nav liela (bēru kases, tautas apdrošināšanas biedrības), pie kam apdrošinātās personas ārsts neizmeklē. Lielākās apdro-

šināšanas biedrības tautas mirstības tabulas lieto bieži miršanas varbūtību salīdzināšanai. No tautas mirstības tabulām pielikumā ievietotas Šveices un Vācijas tautas mirstības tabulas.

13. Varbūtīgais un vidējais mūža ilgums.

1. Pieņemsim, ka pēc kaut kādām tabulām dzīvo personu skaits x gadu vecumā ir l_x; tad par varbūtīgo mūža ilgumu (*probable life-time*) x gadu vecai personai sauc laiku m, pēc kuŗa šis skaits l_x dotā tabulā būs vairs tikai puse, t. i.

$$l_{x+m}=\frac{1}{2}l_x,$$

jo tādā gadījumā varbūtība x gadu vecai personai nodzīvot vēl m gadus izteiksies kā

$$_mp_x=\frac{l_{x+m}}{l_x}=\frac{{}^1/_2 l_x}{l_x}=\frac{1}{2};$$

tā tad varbūtība nodzīvot vēl m gadus tikpat liela, kā nomirt šinīs gados.

Parasti skaitlis m neizteicas kā vesels gadu skaits, bet ietveŗ sevī ari gada daļas. Šo skaitli viegli atrast no tabulām interpolācijas ceļā.

Tā, piem., pēc 23 vācu biedrību tabulām varbūtīgais mūža ilgums 41 gadu vecai personai izteiksies tā:

$$l_{m+41}=\frac{1}{2}l_{41}=\frac{1}{2}.81903=40951;$$

redzam, ka 40951 ietilpst skaitļu 43189 un 40887 starpā, kuŗi atbilst 66 un 67 gadiem. Lineārā interpolācija dod, ka

$$\frac{m+41-66}{67-66}=\frac{40951-43189}{40887-43189},$$

$$m-25=\frac{2238}{2302};\quad m=25+0,9722=25 \text{ g. } 350 \text{ d.}$$

tā tad 41 g. vecai personai varbūtīgais mūža ilgums ir 25 g. 350 d.

2. Bez varbūtīgā mūža ilguma lieto vēl citu jēdzienu — jēdzienu par v i d ē j o m ū ž a i l g u m u. Ja no l_x personām pēc mirstības tabulas dzīvo zināms personu skaits vēl vienu gadu, cits mazāks skaits vēl 2 gadi u. t. t. Lai dabūtu vidējo gadu skaitu, kuŗu vēl dzīvos x gadus veca persona, jādala gadu skaits, kuŗu x gadu vecas personas nodzīvos visas kopā, ar l_x.

Pieņemsim, ka kautkādā mirstības tabulā ievietotie skaitļi l_x, l_{x+1}, ... rodas tā, ka personas, kam pēc tabulām jāmirst starp x un $x+1$ mūža gadu, nomirst gada sākumā; tad l_x personas nodzīvo pirmā gadā kopā $x+1$ gadu, otrā gadā $x+2$ gadi u. t. t.; tāpēc l_x personas nodzīvo vēl pavisam kopā

$$l_{x+1}+l_{x+2}+l_{x+3}+\ \ldots \text{ gadus,}$$

un tāpēc vidējais mūža ilgums ir

$$\frac{l_{x+1}+l_{x+2}+l_{x+3}}{l_x}+\ \ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

Ja turpretim pieņemsim, ka attiecīgās personas nomirst gada beigās, tad l_x gadus vecās personas nodzīvos pavisam kopā

$$l_x+l_{x+1}+l_{x+2}+\ \ldots \text{ gadus,}$$

un vidējais mūža ilgums izteiksies kā

$$\frac{l_x+l_{x+1}+l_{x+2}+\ldots}{l_x}\ \ldots\ldots\ldots (\beta).$$

Vistuvāk pieiesim īstenībai, ja pieņemsim, ka miršana notiek vienmērīgi visā gada laikā; tad par vidējo mūža ilgumu var pieņemt dabūto izteiksmju (α) un (β) aritmētisko vidusskaitli. Apzīmējot vidējo mūža ilgumu ar e_x^0, dabūjam, ka

$$e_x^0=\frac{l_{x+1}+l_{x+2}+l_{x+3}+\ldots}{l_x}+\frac{1}{2}\ \ldots\ldots (8).$$

Ceturtā nodaļa.

IV. Netto prēmijas vienas personas apdrošināšanas gadījumos.

14. Apdrošināšana uz nodzīvošanu.

1. Kā jau minēts (7,3) apdrošināšanu var uzlūkot kā spēli vārda plašā nozīmē, un tāpēc prēmijas, kas maksājamas par apdrošināto personu, aprēķināmas pēc tā principa, uz kuŗa dibinās neizmantošanas spēles, t. i., lai vienreizēja prēmija (likme) būtu vienlīdzīga ar apdrošināmās personas matēmatisko cerību uz apdrošināšanas līgumā apzīmēto summu (it kā vinnestu). No šī principa tad ari vadās, aprēķinot netto prēmijas. Tāpēc visos netto prēmiju aprēķināšanas gadījumos, kur prēmijas nāksies aprēķināt tieši, arvienu jautāsim, kāda ir apdrošināmās personas vai tās mantinieku matēmatiskā cerība līguma slēgšanas brīdī; šī izteiksme līdz ar to rādīs vienreizējas netto prēmijas lielumu, kuŗu izteiksim, pieņemot, ka apdrošināma summa ir viens lats. To darām formulu vienkāršības dēļ, jo atraduši prēmijas lielumu vienu latu lielai apdrošināmai summai, dabūsim viegli prēmijas lielumu ari citai kādai apdrošināmai summai, reizinot atrastās prēmijas lielumu, kas zīmējas uz vienu latu lielu apdrošināmo summu, ar faktiskās apdrošināmās summas latu skaitu.

2. Apdrošināšana uz nodzīvošanu pastāv zināma kapitāla apdrošināšanā, kas saņemams tad, ja apdrošinātā persona pēc noteikta laika vēl dzīvo; ja apdrošinātā persona nomirst agrāk, tad vispār apdrošināšanas iestādei nekādu pienākumu nav: iemaksātā vienreizējā vai iemaksātās gadskārtējas prēmijas paliek apdrošināšanas iestādei, ja vien par to nav kāds īpašs papildu līgums (sk. turpmāk — apdrošināšana ar prēmiju atmaksām). Tāpēc šādu apdrošināšanas līguma saturu var izteik tā:

x gadus veca persona apdrošina dzīvību ar nosacījumu, ka viņa saņems Ls 1 kapitālu pēc *n* gadiem, ja tanī laikā vēl dzīvos; pretējā gadījumā iemaksātās prēmijas paliek apdrošināšanas iestādei. Aprēķināt vienreizēju netto prēmiju.

Apzīmēsim meklējamo vienreizējo netto prēmiju ar simbolu ${}_nE_x$, kur indeks x rāda apdrošināmās personas vecumu līguma slēgšanas brīdī un indeks n rāda, uz cik gadiem tiek slēgts līgums. Vecumu līguma slēgšanas brīdī parasti noteic pilnos gados, pie kam nepilnu gadu, mazāku par pusgadu, atmet, bet lielāku par pusgadu rēķina par veselu gadu. Tā, piem., 43 g. 5 m. 4 d. vecu personu līguma slēgšanas brīdī pieņem vienkārši par 43 gadu vecu personu, bet 43 g. 8 mēn. 16 d. vecu personu par 44 g. vecu. Uzlūkojot apdrošināšanu kā neizmantošanas spēli vārda plašākā nozīmē, pie kam apdrošināmā x gadus veca persona cer vinnēt 1 latu, ja tā nodzīvo n gadus, jautājam, kāda ir šīs personas matēmatiskā cerība dabūt pēc n gadiem 1 latu; matēmatiskās cerības lielums rādīs ari vienreizējas prēmijas lielumu.

Kā tad izteiksies minētās personas matēmatiskā cerība? Vispirms varbūtība x gadus vecai personai nodzīvot vēl n gadus būs ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$; ceramās summas lielums pēc n gadiem ir 1 lats; tā tad šīs summas tagadējā vērtība ir $\frac{\text{Ls } 1}{r^n} = \text{Ls } 1 \,.\, v^n =$ $= \text{Ls } v^n$, kur v ir diskonta reizinātājs; tāpēc apdrošināmās personas matēmatiskā cerība izteiksies tā (sagaidāmās summas reizinājumu ar varbūtību saņemt šo summu):

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} \,.\, v^n \quad \text{un}$$

$$ {}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \,.\, v^n ;$$

mūsu uzdevums jau atrisināts, jo visi labās puses lielumi zināmi: l_{x+n} un l_x ņemam no attiecīgās mirstības tabulas, v^n ņemam no diskonta reizinātāju tabulas, pie kam, protams jāizvēlas procentu likme. Procentu likmi parasti izvēlas tādu, lai tā nebūtu augstāka par turpmākā laikā paredzamo parasto diskonta procentu likmi. Pirms pasaules kaŗa parastā procentu likme apdrošināšanas rēķinos bija 3,5%, dažos gadījumos 4%. Pēc pasaules kaŗa diskonta procentu likme vispār ir kāpusi, tāpēc dažas zemes, piem., Francija, pārgājušas uz 4,25% un pat 5%. Protams, jo augstāka procentu likme, jo mazāks būs v^n un līdz ar to mazāka vienreizēja prēmija, tā tad tā izdevīgāka apdrošināmām personām, bet var kļūt bīstama apdrošināšanas iestādei, ja tā nevar par saviem kapitāliem dabūt tādu procentu likmi, kāda paredzēta prēmijas aprēķinos. Parasti rēķinu atvieglināšanai bez tiem skaitļiem, kas jau minēti, mirstības tabulās ievieto vēl citus skaitļus, un vispirms reizinājumus $l_x v^x$, kur l_x dzīvo personu skaits vecumā x un v^x diskonta reizinātājs, kas atbilst x gadiem; šādus reizinājumus sauc par diskontētiem dzīvo personu skaitļiem un apzīmē ar D_x; tā tad

$$D_x = l_x v^x \quad \text{. . . . . (9)}$$

līdzīgā kārtā $D_{x+1} = l_{x+1} v^{x+1}$ u. t. t. un $D_{x+n} = l_{x+n} v^{x+n}$. Skaitļus D_x, D_{x+1}, . . . ari ievieto mirstības tabulās, un to lielums atkarājas pie vieniem un tiem pašiem l_x, l_{x+1}, . . . lielumiem no procentu likmes. Ņemot to vērā, dabūto vienreizējas prēmijas izteiksmi varam pārveidot tā: reizinām labās puses saucēju un skaitītāju ar v^x; tad

$$_nE_x = \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x};$$

$$\text{tāpēc} \quad _nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \quad \text{. . . . . (10).}$$

Dabūtā (10) formula ļauj aprēķināt vienreizēju netto prēmiju aplūkojamā apdrošināšanas gadījumā, pie kam skaitli D_{x+n} un D_x jāņem no renšu apdrošinātāju tabulām.

Piemērs. 38 g. veca persona grib apdrošināt Ls 5000 lielu kapitālu, kas izmaksājams pēc 20 gadiem, ja tanī laikā apdrošināmā persona vēl dzīvos. Aprēķināt vienreizēju netto prēmiju.

Pēc (10) formulas un III. mirstības tabulas

$$_{20}E_{38} = \frac{D_{58}}{D_{38}} = \frac{10512}{25652} = 0{,}40983.$$

Tā tad viena lata liela kapitāla apdrošināšanai netto prēmija būtu Ls 0,40983, bet Ls 5000 liela kapitāla apdrošināšanai netto prēmija būs Ls 0,40983 . 5000 = **Ls 2049,15.**

Ja kapitāls 2049,15 būtu noguldīts uz augļu augļiem, tad pie 3,5% tas 20 gadu laikā pārvērstos summā

$$K_{20} = \text{Ls } 2049{,}15 . 1{,}035^{20} = \text{Ls } 204915 . 1{,}98978886 = \text{Ls } 4077{,}37.$$

Tā tad minētā persona, noguldot Ls 2049,15 uz augļu augļiem pie 3,5%, pēc 20 gadiem varētu saņemt Ls 4071,37, bet apdrošināšanas gadījumā Ls 5000, tikai pirmā gadījumā noguldītā summa paliktu vienmēr noguldītāja vai tā mantinieku rīcībā, apdrošināšanas gadījumā turpretim tā iet zudībā, ja apdrošināmā persona nomirst, nesasniedzot 58 g. vecumu.

3. To pašu (10) sakarību var dabūt, spriežot vēl tā.

Pieņemsim, ka šādu apdrošināšanas līgumu slēdz visas x gadus vecas personas l_x; tad apdrošināšanas iestāde no vienreizējām prēmijām ieņems ${}_nE_x \cdot l_x$ latu, bet izmaksās pēc n gadiem l_{x+n} personām pa vienam latam, t. i. l_{x+n} latu, kuŗu vērtība līguma slēgšanas brīdī ir $l_{x+n}v^n$; tā kā abām šīm summām jābūt vienlīdzīgām, tad

$${}_nE_x l_x = l_{x+n}v^n, \text{ no kurienes}$$

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}v^n}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Kā aprēķināt gada prēmiju, kas maksājama k gadus, kur $k \lesseqgtr n$, par to runāsim vēlāk.

Dabūtā (10) formula ļauj nostādīt jautājumu citādi: cik lielu summu var saņemt ar Ls 3000 lielu vienreizēju netto prēmiju 38 g. veca persona pēc 20 g., ja tā vēl dzīvos,

Tā kā Ls 1 liela kapitāla saņemšanai, kā redzējām, jāmaksā Ls 0,40983 liela vienreizēja netto prēmija, tad ar Ls 3000 lielu prēmiju var apdrošināt Ls 3000:0,40983 $\approx$ Ls 7320.— lielu summu.

15. Renšu apdrošināšana.

1. M ū ž a r e n t e s. Par m ū ž a r e n t ē m sauc periodiski atkārtotus maksājumus, ko kāda persona saņem vai izdara tik ilgi, kamēr dzīvo. Ja iet runa par mūža renšu apdrošināšanu, tad tas nozīmē, ka kāda persona, pret vienreizēju prēmiju, grib apdrošināt sev vienu latu lielu mūža renti — praenumerando vai postnumerando, tā tad tik ilgi, kamēr dzīvo.

x g a d u s v e c a p e r s o n a a p d r o š i n a s e v v i e n u l a t u l i e l u p r a e n u m e r a n d o v a i p o s t n u m e r a n d o m ū ž a r e n t i. A p r ē ķ i n ā t v i e n r e i z ē j u n e t t o p r ē m i j u.

Apzīmēsim vienreizēju netto prēmiju viena lata lielas praenumerando rentes apdrošināšanai ar a_x. Apdrošinātai personai ir izredzes saņemt kā pirmā, tā otrā, tā trešā u. t. t. gadā Ls 1 lielu renti, ja tā vēl dzīvos, pie kam viena lata vērtība līguma slēgšanas brīdī būs Ls 1 (praenumerando rentes pirmais maksājums), vai Ls v (otrā gada maksājums), vai Ls v^2 u. t. t.; varbūtības saņemt šīs summas izteiksies kā 1 (pirmo rentes maksājumu praenumerando rentes gadījumā saņems tūlīt), tad otrā gadā kā $\frac{l_{x+1}}{l_x}$ (varbūtība nodzīvot vienu gadu), tad trešā gadā kā $\frac{l_{x+2}}{l_x}$ (varbūtība nodzīvot 2 gadus) u. t. t.

Tā tad apdrošināmās x gadu vecas personas matēmatiskā cerība uz vienu latu lielu mūža renti izteiksies tā:

$$1+\frac{l_{x+1}}{l_x}.v+\frac{l_{x+2}}{l_x}.v^2+\frac{l_{x+3}}{l_x}.v^3+\ldots$$

kur daudzpunkts apzīmē, ka locekļi, līdzīgi uzrakstītiem, iet līdz tabulas beigām; rīkojoties tāpat, kā apdrošināšanā uz nodzīvošanu, t. i. reizinot un dalot katru locekli, sākot no otra, ar v^x, dabūsim šo matēmatisko cerību tādā veidā:

$$1+\frac{l_{x+1}\cdot v^{x+1}}{l_x v^x}+\frac{l_{x+2}\cdot v^{x+2}}{l_x v^x}+\frac{l_{x+3}\cdot v^{x+3}}{l_x v^x}+\ldots=$$

$$=1+\frac{D_{x+1}}{D_x}+\frac{D_{x+2}}{D_x}+\frac{D_{x+3}}{D_x}+\ldots=\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots}{D_x}.$$

$$\text{Tāpēc } a_x=\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots}{D_x}$$

Tā kā ar šāda veida summu $D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots$ nākas bieži sastapties, tad to atrod, saskaitot lielumus D_x, D_{x+1}, D_{x+2}, . . līdz tabulu beigām, sākot no kaut kāda D_x, apzīmē ar N_x un ievieto mirstības tabulā līdz ar skaitļiem D_x; tā tad

$$N_x=D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(11)}.$$

$$N_{x+1}=D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots \quad \text{u. t. t. un tāpēc}$$

$$a_x=\frac{N_x}{D_x}\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(12)}.$$

Postnumerando rentes gadījumā apdrošinātās personas matēmatiskā cerība izteiksies tā (nebūs pirmā rentes maksājuma, salīdzinot ar praenumerando renti):

$$\frac{l_{x+1}}{l_x}v+\frac{l_{x+2}}{l_x}v^2+\frac{l_{x+3}}{l_x}v^3+\ldots=$$

$$=\frac{D_{x+1}}{D_x}+\frac{D_{x+2}}{D_x}+\frac{D_{x+3}}{D_x}+\ldots=\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\ldots}{D_x}=$$

$$=\frac{N_{x+1}}{D_x}; \text{ tā tad}$$

$$a_x=\frac{N_{x+1}}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12')$$

$$\text{un } a_x=\mathbf{a}_x-1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

2. Dabūtās sakarības (12) un (12') var atrast ari citādi, spriežot tā: pieņemsim, ka visas l_x personas noslēdz mūža rentes apdrošināšanas līgumus. Tad apdrošināšanas iestāde saņems no prēmiju maksām Ls $\mathbf{a}_x l_x$; savukārt tai būs jāizmaksā: pirmā apdrošināšanas gadā (līgumu slēdzot, ja ir praenumerando rente) Ls $1 . l_x$; otrā apdrošināšanas gadā dzīvas būs vairs tikai l_{x+1} personas, tāpēc nāksies izmaksāt Ls $1 . l_{x+1}$, kuŗas summas vērtība līguma slēgšanas brīdī ir Ls $1 . l_{x+1} . v$; trešā apdrošināšanas gadā — Ls $1 . l_{x+2} v^2$ u. t. t., tāpēc

$$\mathbf{a}_x l_x=l_x+l_{x+1}v+l_{x+2}v^2+l_{x+3}v^3+\ldots, \text{ no kurienes}$$

$$\mathbf{a}_x=1+\frac{l_{x+1}}{l_x}v+\frac{l_{x+2}}{l_x}v^2+\ldots=\frac{N_x}{D_x}.$$

P i e m ē r s. 35 gadi veca persona grib nodrošināt postnumerando mūža renti, Ls 2000 lielu. Aprēķināt vienreizēju netto prēmiju.

Pēc (12') form. un III mirst. tab.

$$a_{35}=\frac{N_{36}}{D_{35}}=\frac{541191}{28849}=18{,}759.$$

Tā tad vienreizēja netto prēmija būs Ls 2000 . 18,759= = Ls 37518.

3. Atradām, ka $\mathbf{a}_x=\frac{N_x}{D_x}$ izteic vienu latu lielas praenumerando mūža rentes v i e n r e i z ē j o prēmiju jeb šādas rentes t a g a-

15*

d ē j o v ē r t ī b u, t. i. vērtību līguma slēgšanas brīdī, kad persona ir x gadus veca. Citādi to var izteikt vēl tā: a_x apzīmē t ā d u i k g a d ē j u m a k s ā j u m u t a g a d ē j o v ē r t ī b u, k u ŗ i i l g s t v i s u m ū ž u u n i r v i e n u l a t u l i e l i. Taisni šādā nozīmē visvairāk lietosim mūža rentes vienreizējas prēmijas jeb m ū ž a r e n t e s t a g a d ē j ā s v ē r t ī b a s izteiksmi: ja gribam ņemt ikgadēju, vienu latu lielu mūža maksājumu vietā viņu tagadējo vērtību, tad tā ir a_x vai a_x.

P i e m ē r s. 48 gadus vecai personai jāmaksā ikgadus praenumerando Ls 200 tik ilgi, kamēr tā dzīvo. Aprēķināt, ar kādu vienreizēju maksājumu tā var atvietot savus pienākumus.

Pēc nule teikta, visu vienu latu lielu maksājumu tagadēja vērtība ir a_{48}; tāpēc no saviem pienākumiem minētā persona var atsvabināties, samaksājot vienreizēji Ls $200 . a_{48} =$ Ls $200 . 15{,}984 =$ $=$ Ls 3196,8.

Protams, ari otrādi: ja kādai personai jāmaksā vienreizēji zināma summa A, tad šī persona var vienreizēju maksājumu atvietot ar ikgadējiem, visu mūžu ilgstošiem maksājumiem P, kuŗu lielumu atradīsim no sakarības

$$A = P a_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

kur a_x apzīmē vienu latu lielu mūža maksājumu tagadējo vērtību, tāpēc P latu lielu maksājumu tagadējā vērtība ir Pa_x, kam, pēc nosacījuma, jābūt vienlīdzīgai ar maksājamo summu A; tā tad

$$P = \frac{A}{a_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14').$$

Dabūtā sakarība (14') ir ļoti svarīga: **tā ļauj atrast visu mūžu maksājamās praenumerando gada prēmijas P lielumu, ja zināma vienreizēja prēmija.**

4. Renšu apdrošināšanas līgumu var izlietot ari citādi: mūža rentes maksājumi nesākas tūlīt, bet pēc m gadiem no apdrošināšanas brīža (protams, ja apdrošinātā persona tad vēl dzīvos) un tad ilgst visu mūžu; šādā gadījumā runā par a t b ī d ī t u m ū ž a r e n t i (p e n s i j u).

x g a d u s v e c a p e r s o n a a p d r o š i n a s e v v i e n u l a t u l i e l u m ū ž a r e n t i, k a s s ā k a s p ē c m g a d i e m. A p r ē ķ i n ā t v i e n r e i z ē j o n e t t o p r ē m i j u.

Apzīmēsim uz m gadiem atbīdītas, vienu latu lielas mūža rentes vienreizēju netto prēmiju ar ${}_{m|}a_x$ (to varam uzlūkot kā praenumerando renti, tikai pirmais maksājums ir pēc m gadiem. Apdrošinātās personas matēmatiskā cerība izteiksies līdzīgi tam, kā jau aplūkotos gadījumos, tikai pirmais maksājums (Ls 1) saistīsies ar varbūtību x gadus vecai personai nodzīvot m gadus, t. i. ar varbūtību $\frac{l_{x+m}}{l_x}$, pie kam šī maksājuma matēmatiskās cerības tagadējā vērtība ir $\frac{l_{x+m}}{l_x}.v^m$; otrā maksājuma (Ls 1) varbūtība ir $\frac{l_{x+m+1}}{l_x}$ un tagadējā vērtība $\frac{l_{x+m+1}}{l_x}.v^{m+1}$ u. t. t.

tāpēc $_{m|}a_x=\frac{l_{x+m}}{l_x}v^m+\frac{l_{x+m+1}}{l_x}.v^{m+1}+\ldots$ jeb

(reizinot un dalot katru labās puses locekli ar v^x)

$$_{m|}a_x=\frac{l_{x+m}\cdot v^{x+m}}{l_x v^x}+\frac{l_{x+m+1}v^{x+m+1}}{l_x v^x}+\ldots;$$

ievedot jau pazīstamos apzīmējumus D_x un N_x, dabūsim, ka

$$_{m|}a_x=\frac{D_{x+m}}{D_x}+\frac{D_{x+m+1}}{D_x}+\ldots+\frac{D_{x+m}+D_{x+m+1}+\ldots}{D_x}=$$

$$=\frac{N_{x+m}}{D_x},\text{ jo } D_{x+m}+D_{x+m+1}+D_{x+m+2}+\ldots=N_{x+m};$$

$$\text{tā tad } _{m|}a_x=\frac{N_{x+m}}{D_x}\ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

P i e m ē r s. 45 gadi veca persona grib apdrošināt sev Ls 600 lielu mūža renti, kas sākas pēc 10 gadiem. Aprēķināt vienreizēju netto prēmiju.

Pēc (15) form. un III mirst. tabulas atrodam, ka

$$_{10|}a_{45}=\frac{N_{55}}{D_{45}}=\frac{167266}{19314}=8{,}6604;$$

lai varētu saņemt Ls 600 latu lielu renti, tad vienreizēja netto prēmija būs Ls 600.8,6604= Ls 5196,24.

5. Var apdrošināt ne tikai m ū ž a, bet ari l a i k a rentes, t. i. rentes, kuŗas maksājamas ne visu mūžu, bet tikai tuvāko n gadu laikā, ja apdrošinātā persona dzīvo. Šādas rentes tagadējo vērtību jeb vienreizēju netto prēmiju apzīmēsim ar $_{|n}a_x$ (praenumerando) vai $_{|n}a_x$ (postnumerando); šis apzīmējums atšķiŗas no agrāk lietotā (sk. I d. 105. lap. p.) $_{|n}a$ ar to, ka beidzamā apzī-

mējumā nav indeka x, jo šī rente nav saistāma ar cilvēka dzīvību: $_{|n}a$ apzīmēja tādas vienu latu lielas praenumerando rentes tagadējo vērtību, kas maksājama n gadus neatkarīgi no tam, vai saņēmējs dzīvo vai ir miris; turpretim $_{|n}a_x$ dod tādas vienu latu lielas praenumerando rentes tagadējo vērtību, kas maksājama n gadu laikā, bet tikai tad, ja rentes saņēmēja persona dzīvo. Tā tad nonākam pie šāda formulējuma.

x gadus veca persona apdrošina vienu latu lielu praenumerando (vai postnumerando) renti uz n gadiem, kas maksājama tad, ja minētā persona dzīvo. Aprēķināt vienreizēju netto prēmiju.

Apdrošinātās personas matēmatiskā cerība izteiksies līdzīgi tam, kā mūža rentes gadījumā, tikai ar to starpību, ka beidzamais maksājums var būt praenumerando laika rentes gadījumā pēc $n-1$ gada, un varbūtība to saņemt ir $\frac{l_{x+n-1}}{l_x}$, pie kam matēmatiskās cerības tagadējā vērtība ir $\frac{l_{x+n-1}}{l_x} v^{n-1}$; postnumerando laika rentes gadījumā pēdējais maksājums var būt pēc n gadiem un varbūtība to saņemt ir $\frac{l_{x+n}}{l_x}$, pie kam tagadējā vērtība izteiksies kā $\frac{l_{x+n}}{l_x} v^n$.

Tāpēc $_{|n}a_x = 1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} v + \ldots + \frac{l_{x+n-1}}{l_x} v^{n-1}$;

reizinot un dalot labās puses locekļus (sākot no otrā) ar v^x, dabūjam, ka

$$_{|n}a_x = 1 + \frac{l_{x+1} v^{x+1}}{l_x v^x} + \ldots + \frac{l_{x+n-1} v^{x+n-1}}{l_x v^x} \quad \text{jeb}$$

$$_{|n}a_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \ldots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x};$$

kā tagad izteikt īsāk summu $D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}$? Līdzīgu summu, tikai ar turpinājumu līdz tabulas beigām, t. i. $D_x + D_{x+1} + \ldots$ (līdz tabulas beigām) apzīmējām ar N_x; tāpēc

$$D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1} + D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots = N_x$$

un līdzīgā kārtā $D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots = N_{x+n}$;

ja tagad no augšējās vienlīdzības atņemsim apakšējo, tad visi locekļi sākot no D_{x+n} līdz tabulas beigām kā apakšējā, tā augšējā vienlīdzība iznīcināsies, un tāpēc

$$D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots+D_{x+n-1}=N_x-N_{x+n};$$

uz šī pamata dabūsim, ka

$$|_n a_x=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Gluži analoģiskā kārtā

$$|_n a_x=\frac{l_{x+1}}{l_x}v+\frac{l_{x+2}}{l_x}v^2+\ldots+\frac{l_{x+n}}{l_x}v^n=$$

$$=\frac{l_{x+1}v^{x+1}}{l_x v^x}+\frac{l_{x+2}v^{x+2}}{l_x v^x}+\ldots+\frac{l_{x+n}v^{x+n}}{l_x v^x}=$$

$$=\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots+D_{x+n}}{D_x};$$

tā kā $D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots+D_{x+n}+D_{x+n+1}+\ldots=N_{x+1}$

$$D_{x+n+1}+\ldots=N_{x+n+1},$$

tad, atņemot apakšējo vienlīdzību no augšējās, dabūjam, ka

$D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots+D_{x+n}=N_{x+1}-N_{x+n+1}$, un tāpēc

$$|_n a_x=\frac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16').$$

P i e m ē r s. 50 g. veca persona grib apdrošināt sev 20 g. ilgstošu postnumerando gada renti, Ls 500 latu lielu. Aprēķināt vienreizēju netto prēmiju.

Pēc (16′) form. un III mirst. tabulas dabūjam ka

$$|_{20}a_{50}=\frac{N_{51}-N_{71}}{D_{50}}=\frac{222677-34753{,}9}{15536}=12{,}096;$$

lai varētu saņemt Ls 500 lielu renti, tad netto prēmijai jābūt Ls 500 . 12,096= Ls 6048.

Lielumi $|_n a_x$ un $|_n a_x$ tāpat kā a_x un a_x, starp citu atļauj atrast tagadējo vērtību visiem ikgadējiem maksājumiem, kas ir vienu latu lieli un izdarāmi n gadu laikā, kamēr persona šinī laikā dzīvo, vai ari otrādi, ļauj apmainīt kādu vienreizēju maksājumu Ls $|_n a_x$ vai Ls $|_n a_x$ lielu, ar ikgadējiem, vienu latu lieliem praenumerando vai postnumerando maksājumiem n gadu laikā, kamēr persona šinī laikā dzīvo. Tāpēc (14) un (14') sakarību varam papildināt ar tādām

$$\mathcal{A}=P\,_{|n}a_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14_1)$$

un $$P=\frac{\mathcal{A}}{_{|n}a_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14'_1).$$

6. Ari laika rentes var būt atbīdītas. Apzīmēsim vienreizēju netto prēmiju, kas jāmaksā, lai varētu apdrošināt x gadus vecai personai n gadus ilgstošu ikgadēju laika renti (stipendiju), kas sākas pēc m gadiem un izmaksājama tik ilgi, kamēr persona minētā laikā dzīvo, ar $_{m|n}a_x$. Saskaņā ar agrāk teikto, viegli atradīsim, ka

$$_{m|n}a_x=\frac{l_{x+m}}{l_x}v^m+\frac{l_{x+m+1}}{l_x}v^{m+1}+\ldots+\frac{l_{x+m+n-1}}{l_x}v^{m+n-1};$$

jeb $$_{m|n}a_x=\frac{l_{x+m}v^{x+m}}{l_xv^x}+\frac{l_{x+m+1}v^{x+m+1}}{l_xv^x}+\ldots+$$

$$+\frac{l_{x+m+n-1}v^{x+m+n-1}}{l_xv^x}, \text{ kas dod}$$

$$_{m|n}a_x=\frac{D_{x+m}+D_{x+m+1}+\ldots+D_{x+m+n-1}}{D_x};$$

ar līdzīgu paņēmienu, kā iepriekšējā gadījumā, atrodam, ka

$$D_{x+m}+D_{x+m+1}+\ldots+D_{x+m+n-1}=N_{x+m}-N_{x+m+n}$$

un tāpēc $$_{m|n}a_x=\frac{\mathcal{N}_{x+m}-\mathcal{N}_{x+m+n}}{\mathcal{D}_x} \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

16. Gada prēmiju aprēķināšana.

1. (14) un (14_1) sakarības, proti $A=Pa_x$ un $A=P_{|n}a_x$ ļauj vienreizējas prēmijas vietā ņemt gada prēmijas, kas ilgst vai nu visu mūžu vai zināmu laiku (ne vairāk par n gadiem); šinīs sakarībās A apzīmē vispār vienreizējo prēmiju kaut kuŗam apdrošināšanas veidam un P apzīmē praenumerando gada prēmiju (apdrošināšanas prēmijas ir visas praenumerando prēmijas, jo pirmo prēmiju maksā, līgumu noslēdzot); tāpēc gada prēmijas atradīsim pēc formulas

$$P=\frac{A}{a_x} \text{ vai } P=\frac{A}{_{|n}a_x}$$

2. Apdrošināšanā uz nodzīvošanu atradām vienreizēju prēmiju šādā veidā ${}_nE_x=\frac{D_{x+n}}{D_x}$;

tāpēc gada prēmija, ko maksās apdrošinātā persona k gadu laikā, kur $k \leqslant n$, būs

$$ {}_kP_x=\frac{{}_nE_x}{{}_{|k}a_x}=\frac{D_{x+n}\cdot D_x}{D_x(N_x-N_{x+k})}=\frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+k}}$$

ja $k=n$, tad

$$ {}_nP_x=\frac{{}_nE_x}{{}_{|n}a_x}=\frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11_1).$$

3. Līdzīgā kārtā, ja atbīdīto mūža vai laika renti gribētu apdrošināt ar gada prēmijām, pie kam prēmiju maksāšanas laiks k būs mazāks vai vienlīdzīgs ar m ($k \leqslant m$), jo nav jēgas maksāt gada prēmiju tad, kad jau sākas rentes saņemšana, tad tāpat, kā iepriekšējā gadījumā, dabūsim:

$$ {}_kP_x=\frac{{}_{m|}a_x}{{}_{|k}a_x}=\frac{N_{x+m}.D_x}{D_x(N_x-N_{x+k})};\ {}_kP_x=\frac{N_{x+m}}{N_x-N_{x+k}} \quad \ldots (15_1)$$

un
$$ {}_kP_x=\frac{{}_{m|n}a_x}{{}_{|k}a_x}=\frac{(N_{x+m}-N_{x+m+n})D_x}{D_x(N_x-N_{x+k})}=$$

$$=\frac{N_{x+m}-N_{x+m+n}}{N_x-N_{x+k}} \quad \ldots\ldots\ldots (17_1).$$

P i e m ē r s. 35 gadus veca persona apdrošina sev mūža renti, kas sākas pēc 20 gadiem un ir Ls 600 liela, maksājot ikgadēju prēmiju pa visu starplaiku. Aprēķināt ikgadēju netto prēmiju.

Pēc (15_1) form. un III mirst. tabulas

$$ {}_{20}P_{35}=\frac{N_{55}}{N_{35}-N_{55}}=\frac{167266}{570040-167266}=0{,}4153$$

tā tad vienu latu lielas mūža rentes apdrošināšanai gadskārtēja netto prēmija būtu Ls 0,4153, bet Ls 600 lielas rentes apdrošināšanai tā būs Ls 249,18.

17. Rentes, kas maksājamas vairākas reizes gadā.

1. Bieži rodas vajadzība rentes maksājumus izdarīt ne vis vienreiz, bet vairākas reizes, pieņemsim, k reizes gadā, tā kā katrā maksājumā iznāk $\frac{1}{k}$ lata. Lai atrastu tādas praenumerando

rentes vienreizējo netto prēmiju $\mathrm{a}_x^{(k)}$, jābūt mirstības tabulai, kas dotu mirstības varbūtības (vai dzīvo personu skaitu) ik pēc gada k-tās daļas; ja tāda tabula ir, tad atrast rentes vienreizēju prēmiju var ar jau aplūkoto paņēmienu, izteicot miršanas varbūtības ik pēc gada k-tās daļas un aprēķinot apdrošinātās personas matēmatisko cerību, reducētu uz līguma slēgšanas brīdi. Bet tādu tabulu sastādīt nākas grūti, tāpēc parādīsim, kā var atrast ar pietiekošu praksē tuvinājumu $\mathrm{a}_x^{(k)}$ izteiksmi, lietojot parasto mirstības tabulu ar miršanas varbūtībām ik pēc gada.

2. Redzējām, ka mūža rentes tagadējā vērtība, ja renti maksā katra gada sākumā (praenumerando), ir a_x, bet ja maksā katra gada beigās (postnumerando), tad a_x, pie kam $a_x = \mathrm{a}_x - 1$; tā tad, ja rentes izmaksu laika starpība ir 1 gads, tad renšu tagadējās vērtības atšķiras par 1 latu; ja rentes izmaksas notiek gada vidū, tad, pieņemot, ka m i r š a n a s g a d ī j u m i s a d a l ā s p a v i s u g a d u v i e n m ē r ī g i, var teikt, ka rentes tagadējā vērtība ir $\mathrm{a}_x - \frac{1}{2}$; vispār, ja izmaksas notiek pēc $\frac{l}{k}$ gada daļas, skaitot no sākuma (līguma slēgšanas brīža), tad rentes tagadējā vērtība ir $\mathrm{a}_x - \frac{k}{l}$, t. i. saskaņā ar pieņēmumu par vienmērīgo miršanas gadījumu sadalījumu gada laikā rodas tālākā konsekvence, ka r e n t e s t a g a d ē j ā v ē r t ī b a p a m a z i n ā s p r o p o r c i o n ā l i a r l a i k u:

ja renti maksā gada sākumā, tad tās tagadējā vērtība ir a_x;
„ „ „ „ beigās „ „ „ „ „ $\mathrm{a}_x - 1$;
„ „ „ „ vidū „ „ „ „ „ $\mathrm{a}_x - \frac{1}{2}$;
„ „ „ pēc $\frac{l}{k}$ gada daļas no sākuma, tad „ „ $\mathrm{a}_x - \frac{k}{l}$;

ņemot to vērā, spriežam tālāk tā: ja vienu latu lielu mūža renti maksā katru gadu gada sākumā, tad vienreizēja prēmija ir a_x;
„ „ „ pēc $\frac{1}{k}$ gada daļ. no sāk, tad „ „ „ $\mathrm{a}_x - \frac{1}{k}$;
„ „ „ $\frac{2}{k}$ „ daļām „ „ „ „ „ $\mathrm{a}_x - \frac{2}{k}$;
— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —
„ „ „ $\frac{k-1}{k}$ „ „ „ „ „ „ „ $\mathrm{a}_x - \frac{k-1}{k}$,

tāpēc vienreizēja prēmija, lai varētu saņemt vienu latu lielu praenumerando renti k reizes gadā, izteiksies kā summa

$$a_x+a_{x-\frac{1}{k}}+a_{x-\frac{2}{k}}+\ldots+a_{x-\frac{k-1}{k}}=ka_x-\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\ldots+\frac{k-1}{k}\right);$$

lai varētu saņemt $\frac{1}{k}$ lata lielu praenumerando renti k reizes gadā, vienreizēja prēmija būs k reizes mazāka, t. i. būs

$$\frac{ka_x-\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\ldots+\frac{k-1}{k}\right)}{k},$$

bet tas ir meklējamais lielums $a_x^{(k)}$, tāpēc

$$a_x^{(k)}=a_x-\frac{1}{k^2}\Big[1+2+\ldots+(k-1)\Big]=a_x-\frac{k\,.\,(k-1)}{k^2\,.\,2}=a_x-\frac{k-1}{2k},$$

jo $1+2+\ldots+(k-1)$ ir aritmētiskās progresijas summa, kuŗa dod $\frac{(k-1)k}{2}$. Tā tad

$$a_x^{(k)}=a_x-\frac{k-1}{2k}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(18)$$

Ja $k=2$, tad $\frac{k-1}{2k}=0{,}25$; ja $k=4$, tad $\frac{k-1}{2k}=0{,}375$ u. t. t.

3. Postnumerando rentes gadījumā $a_x^{(k)}$ atšķirsies no $a_x^{(k)}$ ar vienu maksājumu, t. i. ar $\frac{1}{k}$ lata daļu, tāpēc $a_x^{(k)}=a_x^{(k)}-\frac{1}{k}$; bet pēc (18) form.

$$a_x^{(k)}=a_x-\frac{k-1}{2k} \text{ jeb } a_x^{(k)}=a_x-\frac{k-1}{2k}-\frac{1}{k}=a_x-\frac{k-1+2}{2k}=a_x-\frac{k+1}{2k}$$

$$\text{tā tad } a_x^{(k)}=a_x-\frac{k+1}{2k}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(18_1)$$

Šinī gadījumā, ja $k=2$, tad $a_x^{(2)}=a_x-0{,}75$; ja $k=4$, tad $a_x^{(4)}=a_x-0{,}625$ u. t. t.

4. Līdzīgā kārtā varam rīkoties ari citos rentes gadījumos. Piemēra dēļ aplūkosim atbīdīto mūža renti.

Redzējām, ka ${}_{m|}a_x=\frac{N_{x+m}}{D_x}$; reizinot un dalot labo pusi ar D_{x+m}, dabūjam, ka ${}_{m|}a_x=\frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}\cdot\frac{D_{x+m}}{D_x}=a_{x+m}\cdot\frac{D_{x+m}}{D_x}$; ja tagad pāriesim uz k reizes gadā maksājamu renti, tad iepriekšējā vienlīdzība pārveidojas tādā:

$${}_{m|}\mathrm{a}_x^{(k)} = \mathrm{a}^{(k)}_{x+m} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x}; \text{ pēc (18) form. } \mathrm{a}^{(k)}_{x+m} = \mathrm{a}_{x+m} - \frac{k-1}{2k};$$

tāpēc

$${}_{m|}\mathrm{a}_x^{(k)} = \left(\mathrm{a}_{x+m} - \frac{k-1}{2k}\right) \frac{D_{x+m}}{D_x} = \mathrm{a}_{x+m} \frac{D_{x+m}}{D_x} - \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} =$$

$$= {}_{m|}\mathrm{a}_x - \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{\mathfrak{D}_{x+m}}{\mathfrak{D}_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Piemērs. 48 gadus veca persona apdrošina sev postnumerando mūža renti Ls 2500 par gadu, maksājamu ik pusgadus. Aprēķināt vienreizēju netto prēmiju.

Pēc (18) form. un III. mirst. tabulas $a_{48} = \mathrm{a}_{48} - 0{,}75 = 15{,}984 - 0{,}75 = 15{,}234$; ja gada rente ir Ls 2500, tad vienreizējā netto prēmija izteiksies kā Ls 1500 . 25,234= **Ls 3808,5.**

18. Mainīgās rentes.

1. Ja rentes maksājumi nav vienlīdzīgi, tad mums ir darīšana ar mainīgo renti.

Aprēķināsim praenumerando mūža rentes tagadējo vērtību x gadus vecai personai, ja rentes pirmais maksājums ir Ls 1, bet ikviens nākamais pieaug par α latiem. Apzīmēsim vienreizējo prēmiju šinī gadījumā ar $v\mathrm{a}_x$; viegli saprast, ka ar pieņēmienu, kādu lietojām a_x atrašanai, dabūsim:

$$v\mathrm{a}_x = \frac{D_x + (1+\alpha)D_{x+1} + (1+2\alpha)D_{x+2} + (1+3\alpha)D_{x+3} + \ldots}{D_x},$$

jo otrais maksājums nebūs Ls 1, bet Ls $(1+\alpha)$, trešais — Ls $(1+2\alpha)$ u. t. t.; iepriekšējo izteiksmi var pārveidot tādā, atšķiŗot skaitītāja locekļus ar reizinātāju α:

$$v\mathrm{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + \alpha(D_{x+1} + 2D_{x+2} + 3D_{x+3} + \ldots)}{D_x};$$

$D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots = N_x$; iekavās stāvošo izteiksmi varam pārveidot tā:

$$+\left|\begin{array}{rl} D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots & = N_{x+1} \\ D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots & = N_{x+2} \\ D_{x+3} + \ldots & = N_{x+3} \\ \ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

$$\overline{D_{x+1} + 2D_{x+2} + 3D_{x+3} + \ldots = N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots}$$

izteiksmi $N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots$ (līdz tabulas beigām) apzīmēsim īsāk ar S_x; summu S_x sastāda no lielumiem $N_x, N_{x+1}, \ldots$ tāpat kā N_x no $D_x, D_{x+1}, D_{x+2} \ldots$, un to ievieto mirstības tabulās līdz ar agrāk minētiem skaitļiem;

tā tad $N_{x+1}+N_{x+2}+N_{x+3}+\ldots=S_{x+1}$, un tāpēc

$$\nu a_x=\frac{\mathfrak{N}_x+\alpha S_{x+1}}{\mathfrak{D}_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

$$\nu a_x=\frac{\mathfrak{N}_{x+1}+\alpha S_{x+2}}{\mathfrak{D}_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20_1).$$

Ja $\alpha=1$, tad $\nu a_x=\dfrac{N_x+S_{x+1}}{D_x}=\dfrac{S_x}{\mathfrak{D}_x}$ un $\nu a_x=\dfrac{S_{x+1}}{\mathfrak{D}_x}$

Ja α negatīvs lielums, t. i. rente ik gadus pamazinās par vienu, tad (20) un (20_1) formulas pārveidojas tādās

$$\nu a_x=\frac{N_x-\alpha S_{x+1}}{D_x} \quad \text{un} \quad \nu a_x=\frac{N_{x+1}-\alpha S_{x+2}}{D_x}.$$

2. Rente var mainīties ari tā, ka tā dažus gadus paliek pastāvīga. Aprēķināsim piemēra dēļ praenumerando mūža rentes tagadējo vērtību x gadu vecai personai, ja rente ik pēc 5 gadiem pieaug par $\frac{1}{3}$ sākuma vērtības, kamēr tās vērtība nav divreiz tik liela kā sākuma rente.

Tā tad pirmos 5 gados rentes lielums ir Ls 1, nākamos piecos gados — Ls $1\frac{1}{3}$, vēl nākamos piecos — Ls $1\frac{2}{3}$ un tad turpmāk — Ls 2. Šādas rentes tagadējā vērtība, kā viegli saprotams, izteiksies tā:

$$\frac{D_x+D_{x+1}+\ldots+D_{x+4}+1\tfrac{1}{3}(D_{x+5}+\ldots+D_{x+9})+}{D_x}$$
$$\frac{+1\tfrac{2}{3}(D_{x+10}+\ldots+D_{x+14})+2(D_{x+15}+\ldots)}{D_x}.$$

Skaitītāja lielumus var sakārtot tā:

$$\begin{array}{r|l}
 & D_x+\ldots+D_{x+4}+ \\
 & +D_{x+5}+\ldots+D_{x+9}+D_{x+10}+\ldots+D_{x+14}+D_{x+15}+\ldots=N_x; \\
+ & \tfrac{1}{3}(D_{x+5}+\ldots+D_{x+9}+D_{x+10}+\ldots+D_{x+14}+D_{x+15}+\ldots)=\tfrac{1}{3}N_{x+5}; \\
 & \qquad\qquad \tfrac{1}{3}(D_{x+10}+\ldots+D_{x+14}+D_{x+15}+\ldots)=\tfrac{1}{3}N_{x+10}; \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \tfrac{1}{3}(D_{x+15}+\ldots)=\tfrac{1}{3}N_{x+15}; \\
\hline
\end{array}$$

$$D_x+\ldots+D_{x+4}+1\tfrac{1}{3}(D_{x+5}+\ldots+D_{x+9})+1\tfrac{2}{3}(D_{x+10}+\ldots+D_{x+14})+$$
$$+2(D_{x+15}+\ldots)=N_x+\tfrac{1}{3}N_{x+5}+\tfrac{1}{3}N_{x+10}+\tfrac{1}{3}N_{x+15}=$$
$$=N_x+\tfrac{1}{3}(N_{x+5}+N_{x+10}+N_{x+15});$$

tā tad aplūkojamās rentes tagadējā vērtība vai vienreizēja netto prēmija ir

$$\frac{N_x+\frac{1}{3}(N_{x+5}+N_{x+10}+N_{x+15})}{D_x}.$$

Līdzīgā kārtā var atrast vienreizēju prēmiju citiem mainīgās rentes gadījumiem.

Piemērs. 46 gadus veca persona apdrošina postnumerando mūža renti, kuŗas lielums pirmos 5 gados ir Ls 300, bet pēc tam Ls 450. Aprēķināt vienreizēju netto prēmiju.

Ja šinī gadījumā rentes lielumu pirmos piecos gados ir Ls 1, tad nākamos gados tas būs Ls $1\frac{1}{2}$; tāpēc rentes tagadējā vērtība izteiksies tā

$$\frac{D_{x+1}+\ .\ .\ .\ +D_{x+5}+1\frac{1}{2}(D_{x+6}+\ .\ .\ .)}{D_x}=$$

$$=\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+\ .\ .\ .\ +\frac{1}{2}(D_{x+6}+\ .\ .\ .)}{D_x}=$$

$$=\frac{N_{x+1}+\frac{1}{2}N_{x+6}}{D_x}=\frac{N_{47}+\frac{1}{2}N_{52}}{D_{46}}$$

ieliekot šinī izteiksmē pēc III mirst. tabulas lielumu N_{47}, N_{52} un D_{46} nozīmes, dabūjam

$$\frac{289182+\frac{1}{2}\,.\,207834}{18514}=21{,}232.$$

ja sākuma rente ir Ls 300, tad vienreizēja netto prēmija izteiksies kā Ls 300 . 21,232= **Ls 6369,6.**

19. Apdrošināšana nāves gadījumam.

Līdz šim aplūkotos apdrošināšanas veidos apdrošināšanas iestādes pienākumi (izmaksas) saistījās ar apdrošinātās personas dzīvību tādējādi, ka šīs izmaksas bija jāizdara tikai tad, ja apdrošinātā persona dzīvo. Apskatīsim tagad gadījumus, kur apdrošināšanas summa izmaksājama tad, ja apdrošinātā persona nomirst.

Aprēķinu vienkāršības dēļ pieņemsim (pagaidām), ka apdrošināšanas summu izmaksā (mantiniekiem) tā gada beigās, kuŗā nomirst apdrošinātā persona, t. i., ja persona nomirst starp $x+n-1$ un $x+n$ mūža gadiem, tad apdrošināšanas summu izmaksā pēc n pilniem gadiem no līguma slēgšanas dienas, ja līgumu slēdzot apdrošināšanā persona bija x gadus veca. Tādā kārtā dabūjam šādu formulējumu.

x gadus veca persona apdrošina dzīvību tā, ka šīs personas nāves gadījumā polisē uzrādītā persona (vispār mantinieki) saņem Ls 1 (gada beigās). Aprēķināt *a*) vienreizēju netto prēmiju, *b*) ikgadēju mūža prēmiju *c*) ikgadēju, ne vairāk kā k gadus ilgstošu prēmiju.

Lai aprēķinātu vienreizēju netto prēmiju, kuŗu apzīmēsim ar A_x, atradīsim apdrošinātās personas (pareizāk, tās mantinieku) matēmatisko cerību. Apdrošinātā persona var nomirt vai nu pirmā, vai otrā, vai trešā u. t. t. apdrošināšanas gadā; attiecīgās varbūtības nomirt pirmā, otrā, trešā u. t. t. apdrošināšanas gadā būs $\frac{d_x}{l_x}, \frac{d_{x+1}}{l_x}, \frac{d_{x+2}}{l_x}$ u. t. t., tā kā pēc nosacījuma apdrošināšanas summu izmaksā gada beigās, tad pirmās izmaksas matēmatiskā cerība, reducēta uz līguma slēgšanas brīdī, ir $\frac{d_x}{l_x}v$, otras — $\frac{d_{x+1}}{l_x}v^2$, trešās — $\frac{d_{x+2}}{l_x}v^3$ u. t. t.; tāpēc

$$A_x=\frac{d_x}{l_x}v+\frac{d_{x+1}}{l_x}v^2+\frac{d_{x+2}}{l_x}v^3+\ldots \text{ (līdz tabulas beigām);}$$

reizinot un dalot ikvienu labās puses locekli ar v_x, dabūto izteiksmi pārveidojam tādā:

$$A_x=\frac{d_xv^{x+1}}{l_xv^x}+\frac{d_{x+1}v^{x+2}}{l_xv^x}+\frac{d_{v+2}v^{x+3}}{l_xv^x}+\ldots;$$

ievedīsim jaunu simbolu C_x, analoģisku ar D_x, tā, lai $C_x=d_xv^{x+1}$; tad $d_{x+1}v^{x+2}=C_{x+1}$, $d_{x+2}v^{x+3}=C_{x+2}$ u. t. t.; lielumu C_x, C_{x+1}, $C_{x+2}, \ldots$ sauksim par diskontētiem mirušo personu skaitļiem; tādā kārtā iepriekšējā izteiksme izveidojas tādā:

$$A_x=\frac{C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\ldots}{D_x};$$

summu $C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\ldots$ (līdz tab. beigām), pēc analoģijas ar summu $D_x+D_{x+1}+\ldots$, apzīmēsim ar M_x; tādā kārtā

$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots$ (līdz tabulas beigām) un beidzot

$$\mathcal{N}_x = \frac{\mathcal{M}_x}{\mathcal{D}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Lielumus C_x, C_{x+1}, ... un M_x, M_{x+1}, ... ievieto mirstības tabulā līdz ar skaitļiem l_x un d_x (sk. IV. mirst. tab.). Tabulas, kā jau aizrādīts, lieto tās, kas ņemtas no novērojumiem par šādā veidā apdrošinātām personām.

2. Šo pašu rezultātu varētu dabūt, spriežot tā: pieņemsim, ka visas x gadus vecas personas noslēdz apdrošināšanas līgumus nāves gadījumam pēc minētiem nosacījumiem; tad apdrošināšanas iestāde ieņem no prēmijām Ls $A_x . l_x$, bet tad būs jāizmaksā pirmā apdrošināšanas gada beigās Ls d_x, jo mirst d_x personas; šī summa, reducēta uz līguma slēgšanas brīdī, dod Ls $d_x v$; otrā gada beigās nāksies izmaksāt Ls d_{x+1}, kas līguma slēgšanas brīdī reprezentē vērtību $d_{x+1}v^2$ u. t. t.; ienākumiem un izdevumiem jābūt līdzsvarā, tāpēc

$$A_x l_x = d_x v + d_{x+1} v^2 + d_{x+2} v^3 + \ldots, \text{ no kurienes}$$

$$A_x = \frac{d_x v}{l_x} + \frac{d_{x+1} v^2}{l_x} + \frac{d_{x+2} v^3}{l_x} + \ldots \text{ jeb } A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

3. Ja zinām vienreizēju prēmiju, tad jau aprādītā ceļā varam viegli atrast ikgadēju mūža prēmiju, vai prēmiju, kas ilgst ne vairāk kā n gadus (prēmiju maksājumi izbeidzas ar apdrošinātās personas nāvi), proti

$$b)\ P_x = \frac{A_x}{\mathrm{a}_x} \text{ un } c)\ {}_nP_x = \frac{A_x}{{}_{|n}\mathrm{a}_x}.$$

ieliekot A_x, a_x un ${}_{|n}\mathrm{a}_x$ izteiksmes, dabūjam, ka

$$P_x = \frac{M_x \cdot D_x}{D_x \cdot N_x} = \frac{M_x}{N_x} \text{ un } {}_nP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}};$$

$$\text{tā tad } \mathcal{P}_x = \frac{\mathcal{M}_x}{\mathcal{N}_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21_1)$$

$$\text{un } {}_n\mathcal{P}_x = \frac{\mathcal{M}_x}{\mathcal{N}_x - \mathcal{N}_{x+n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21_2).$$

4. Izteicot lielumus d_x, d_{x+1}, d_{x+2}, kā starpības $l_x - l_{x+1}$, $l_{x+1} - l_{x+2}$, $l_{x+2} - l_{x+3}$, dabūjam A_x izteiksmi šādā veidā:

$$A_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} v + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} v^2 + \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{l_x} v^3 + \ldots;$$

sakārtojot locekļus ar + un — zīmēm vienkopus, dabūsim

$$A_x=\left(\frac{l_x}{l_x}v+\frac{l_{x+1}}{l_x}v^2+\frac{l_{x+2}}{l_x}v^3+\ldots\right)-\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}v+\frac{l_{x+2}}{l_x}v^2+\ldots\right);$$

ņemot summas pirmajā daļā v aiz iekavām reizinot un dalot katru labās puses locekli ar v^x, dabūjam, ka

$$A_x=v\,.\,\frac{D_x+D_{x+1}+\ldots}{D_x}-\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+\ldots}{D_x}=v\,.\,\mathrm{a}_x-a_x;$$

tā kā $v=\frac{1}{r}$ un $a_x=\mathrm{a}_x-1$, tad

$$A_x=\mathrm{a}_x\,.\,\frac{1}{r}-(\mathrm{a}_x-1)=1-\mathrm{a}_x+\mathrm{a}_x\,.\,\frac{1}{r}=1-\mathrm{a}_x\left(1-\frac{1}{r}\right)=1-\frac{r-1}{r}\mathrm{a}_x\,;$$

apzīmējot $\frac{r-1}{r}$ ar d, dabūsim galīgā veidā

$$A_x=1-d\mathrm{a}_x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

kur a_x ir mūža rentes tagadējā vērtība, tikai ņemta ne pēc renšu apdrošināšanas tabulām, bet pēc tabulām, kuŗas lieto apdrošināšanai nāves gadījumiem (mūsu tabulās IV. un V. tabula; par pēdējām sk. turpmāk); d nozīme atkarājas no procentu likmes; ja p=3,5%, tad d=0,03381643, ja p=4,25%, tad d=0,04076738

Ņemot vērā (22) sakarību, atrodam, ka

$$P_x=\frac{1-d\mathrm{a}_x}{\mathrm{a}_x}=\frac{1}{\mathrm{a}_x}-d;\ \text{tā. tad}$$

$$P_x=\frac{1}{\mathrm{a}_x}-d \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (22_1)$$

Šī formula ļoti ērta aprēķiniem, jo lielumus a_x, kas tik bieži jālieto, parasti ievieto mirstības tabulā līdz ar agrāk minētiem skaitļiem; tāpēc P_x aprēķināšanai šinī gadījumā jāizdara viena dalīšana un atņemšana. Nereti ari lielums A_x un attiecīgo P_x ievieto tabulās, jo apdrošināšana nāves gadījumam — viens no visbiežāk lietojamiem apdrošināšanas veidiem. Tā kā

$$A_x=\frac{M_x}{D_x}\ \text{un}\ A_x=1-d\mathrm{a}_x=1-d\frac{N_x}{D_x},\ \text{tad}\ \frac{M_x}{D_x}=1-\frac{dN_x}{D_x},$$

$$M_x=D_x-dN_x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

dabūtā sakarība ļauj M_x izteikt ar lielumu D_x un N_x palīdzību

P i e m ē r s. 48 gadus veca persona apdrošina dzīvību ar nosacījumu, lai tās mantinieki nāves gadījumā varētu saņemt Ls 3000. Aprēķināt ikgadēju netto mūža prēmiju.

Pēc (22_1) form. un IV. mirst. tabulas

$$P_{48}=\frac{1}{a_{48}}-d=\frac{1}{14,1623}-0,03381643=0,07061-0,03382=0,03676.$$

Tik liela gadskārtēja prēmija jāmaksā, ja apdrošināšanas summa ir Ls 1; ja apdrošināšanas summa ir Ls 3000, tad ikgadējā prēmija ir Ls 3000 . 0,03676 $\doteq$ Ls 110,28.

5. Ja apdrošināšana nāves gadījumam noslēgta ar tādu nosacījumu, ka apdrošināšanas summu izmaksā tikai tad, ja nāve nav iestājusies tuvāko m gadu laikā, tad ir darīšana ar tā saucamo atbīdīto apdrošināšanu nāves gadījumam. Šāda veida līgumus slēdz bieži tā saucamā tautas apdrošināšanā, kur apdrošinātās personas ārsts neizmeklē.

x gadus veca persona apdrošina dzīvību ar nosacījumu, ka šīs personas nāves gadījumā, ja tā nenomirst tuvāko m gadu laikā, tās mantinieki saņem Ls 1 lielu apdrošināšanas summu. Aprēķināt *a*) vienreizējo netto prēmiju, *b*) gadskārtējo mūža prēmiju un *c*) ne ilgāk par *n* gadiem maksājamo prēmiju. (Ja nāve iestājas tuvāko m gadu laikā, tad apdrošināšanas summa netiek izmaksāta).

Apzīmēsim vienreizēju netto prēmiju šinī gadījumā ar ${}_{m|}A_x$. Tā kā apdrošināšanas summu var dabūt ne agrāk kā pēc m gadiem no apdrošināšanas līguma slēgšanas dienas un varbūtība to saņemt ir $\frac{l_{x+m}-l_{x+m+1}}{l_x}$, tad matēmatiskā cerība uz pirmo iespējamo maksājumu, reducēta uz līguma slēgšanas brīdi, ir $\frac{l_{x+m}-l_{x+m+1}}{l_x}v^{m+1}$; līdzīgā kārtā izteicas matēmatiskās cerības uz maksājumu citos gados, tāpēc

$$ {}_{m|}A_x=\frac{l_{x+m}-l_{x+m+1}}{l_x}v^{m+1}+\frac{l_{x+m+1}-l_{x+m+2}}{l_x}v^{m+2}+\ldots=$$

$$=\frac{d_{x+m}}{l_x}v^{m+1}+\frac{d_{x+m+1}}{l_x}v^{m+2}+\ldots;$$ izpildot

parastos pārveidojumus (reizinot un dalot ar v^x), dabūsim, ka

$$ {}_{m|}A_x=\frac{C_{x+m}}{D_x}+\frac{C_{x+m+1}}{D_x}+\frac{C_{x+m+2}}{D_x}+\ldots=$$

$$=\frac{C_{x+m}+C_{x+m+1}+C_{x+m+2}}{D_x}+\ldots=\frac{M_{x+m}}{D_x};$$

tā tad $$_{m|}\mathcal{N}_x = \frac{\mathcal{M}_{x+m}}{\mathcal{D}_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Gadskārtējo mūža vai noteikta laika prēmiju atrašanai dabūjam sakarības

$$P_x = \frac{_{m|}A_x}{a_x} = \frac{M_{x+m}\,.\,D_x}{D_x\,.\,N_x} = \frac{M_{x+m}}{N_x} \quad \ldots\ldots \quad (23_1)$$

un

$$_{n}P_x = \frac{_{m|}A_x}{_{n|}a_x} = \frac{M_{x+m}\,.\,D_x}{D_x(N_x - N_{x+n})} = \frac{M_{x+m}}{N_x - N_{x+n}} \quad \ldots \quad (23_2)$$

P i e m ē r s. 35 gadus veca persona apdrošina dzīvību nāves gadījumam tā, ka šīs personas nāves gadījumā, ja vien apdrošinātā persona nenomirst tuvāko 2 gadu laikā, apdrošināšanas iestāde izmaksā polīsē minētai personai Ls 5000. Aprēķināt ikgadēju netto mūža prēmiju.

Pēc (23_1) form. un IV. mirst. tabulas

$$P_{35} = \frac{M_{37}}{N_{35}} = \frac{10\,008,93}{464693,46} = 0,02\,154\,;$$

tā tad uz Ls 1 lielu apdrošināšanas summu gadskārtēju mūža prēmija būs Ls 0,02154, bet uz Ls 5000 lielu apdrošināšanas summu tā būs **Ls 107,70.**

6. Apdrošināšanu nāves gadījumam var noslēgt ari tikai uz noteiktu laiku, piem., n gadiem; tā tad te nosacījums tāds, ka apdrošināšanas iestāde izmaksā apdrošināmo summu tikai tad, ja apdrošinātā persona mirst tuvāko n gadu laikā. Šādu apdrošināšanas veidu sauc par **īso** a p d r o š i n ā š a n u n ā v e s g a d ī j u m a m.

x g a d u s v e c a p e r s o n a a p d r o š i n a d z ī v ī b u n ā v e s g a d ī j u m a m u z n g a d i e m a r n o s a c ī j u m u, k a š ī s p e r s o n a s m a n t i n i e k i v a i p o l ī s e s u z r ā d ī t ā j a p e r s o n a s a ņ e m Ls 1, j a a p d r o š i n ā t ā p e r s o n a n o m i r s t t u v ā k o n g a d u l a i k ā. A p r ē ķ i n ā t a) v i e n r e i z ē j u n e t t o p r ē m i j u u n b) g a d s k ā r t ē j u n e t t o p r ē m i j u, k a s m a k s ā j a m a t i k i l g i, k a m ē r a p d r o š i n ā t ā p e r s o n a d z ī v ō, b e t n e i l g ā k p a r n g a d i e m.

Apzīmēsim vienreizēju netto prēmiju ar $_{|n}A_x$. Šīs prēmijas lielumu dabūsim tāpat, kā prēmijas A_x lielumu, tikai ar to starpību, ka beidzamā varbūtējā izmaksa notiks pēc n gadiem, t. i.

tad, ja apdrošinātā persona nomirst starp $x+n-1$ un $x+n$ mūža gadiem, līdz ar ko varbūtība saņemt šo maksājumu būs

$$\frac{d_{x+n-1}}{l_x}$$

Tāpēc

$$_{|n}A_x=\frac{d_x}{l_x}v+\frac{d_{x+1}}{l_x}v^2+\ldots+\frac{d_{x+n-1}}{l_x}v^n\,;$$

ar jau pazīstamo pārveidojumu (reizinām un dalām katru labās puses locekli ar v^x) dabūjam, ka

$$_{|n}A_x=\frac{C_x+C_{x+1}+\ldots+C_{x+n-1}}{D_x}\,;$$

summu $C_x+C_{x+1}+\ldots+C_{x+n-1}$ izteicam ar lielumiem M_x tāpat, kā summu $D_x+D_{x+1}+\ldots+D_{x+1-n}$ ar lielumiem N_x, t. i. $C_x+C_{x+1}+\ldots+C_{x+n-1}=M_x-M_{x+n}$; tāpēc

$$_{|n}A_x=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}\quad\ldots\ldots\ldots(24).$$

Gadskārtēju prēmiju, kas maksājama ne ilgāk par n gadiem, dabūsim pēc jau pazīstamās sakarības

$$_nP_x=\frac{_{|n}A_x}{_{|n}a_x}=\frac{(M_x-M_{x+n})D_x}{D_x(N_x-N_{x+n})}=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

tā tad

$$_nP_x=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}\quad\ldots\ldots\ldots(24_1)$$

Ja prēmiju maksājumi vilktos ne ilgāk par k gadiem, kur $k\leqslant n$, tad viegli saprotams, ka

$$_kP_x=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+k}}\quad\ldots\ldots\ldots(24_1')$$

Piemērs. 46 gadus veca persona apdrošina dzīvību nāves gadījumam ar nosacījumu, ka apdrošinātās personas mantinieki saņem Ls 3000, ja persona nomirst tuvāko 20 gadu laikā. Aprēķināt gadskārtējo netto prēmiju, kas maksājama pa visu apdrošināšanas laiku.

Pēc (24_1) form. un IV. mirst. tabulas

$$_{\overline{20|}}A_{46}=\frac{M_{46}-M_{66}}{\mathcal{N}_{46}-\mathcal{N}_{66}}=\frac{7874,67-3204,14}{232493,99-37130,005}=$$
$$=\frac{4670,53}{195363,985}=0,02391;$$

uz Ls 3000 gadskārtējā netto prēmija tā tad būs

Ls 0,02391 . 3000= **Ls 71,73.**

7. Ari īsā apdrošināšana var būt atbīdīta. Šādā gadījumā vienreizējo prēmiju vienu latu lielas summas apdrošināšanai apzīmēsim ar $_{m|n}A_x$.

x gadus veca persona apdrošina dzīvību ar nosacījumu, ka apdrošināšanas iestāde izmaksā tās mantiniekiem vienu latu, ja apdrošinātā persona nomirst *n* gadu laikā, skaitot šos *n* gadus pēc *m* gadiem no apdrošināšanas līguma slēgšanas dienas. Aprēķināt *a*) vienreizēju netto prēmiju un *b*) ikgadēju netto prēmiju, kas maksājama ne ilgāk par *k* gadiem, kur $k \leqslant m+n$.

Vienreizējas netto prēmijas $_{m|n}A_x$ izteiksmi dabūsim, apvienojot divus iepriekšējus gadījumus, šādā veidā

$$_{m|n}A_x=\frac{d_{x+m}}{l_x}v^{m+1}+\ldots+\frac{d_{x+m+n-1}}{l_x}v^{m+n}, \text{ jeb}$$

$$_{m|n}A_x=\frac{C_{x+m}+C_{x+m+1}+\ldots+C_{x+m+n-1}}{D_x}, \text{ no kurienes}$$

$$_{m|n}\mathcal{A}_x=\frac{\mathcal{M}_{x+m}-\mathcal{M}_{x+m+n}}{\mathcal{D}_x} \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

Gada prēmiju, kas maksājama *k* gadu laikā, kur $k \leqslant m+n$, dabūsim ar jau zināmu paņēmienu $_kP_x=\frac{_{n|m}A_x}{_{|k}a_x}$, no kurienes

$$_k\mathcal{P}_x=\frac{\mathcal{M}_{n+m}-\mathcal{M}_{n+m+n}}{\mathcal{N}_x-\mathcal{N}_{x+k}} \quad \ldots\ldots (25_1)$$

8. Visos aplūkotos dzīvības apdrošināšanas veidos nāves gadījumam netto prēmijas esam aprēķinājuši ar nosacījumu, ka apdrošināšanas summu izmaksā miršanas gada beigās. Šis pieņēmums mums atļāva dabūt samērā vienkāršā veidā vajadzīgās sakarības. Praksē parasti šo nosacījumu atmet, ievedot citu, proti, ka apdrošināšanas summa izmaksājama vai nu pēc 3 mēneš. vai, kā tas ir biežāk, tūlīt pēc apdrošinātās personas nāves,

kolīdz nokārtotas vajadzīgās formalitātes (iesniegti nepieciešamie dokūmenti). Kā tad, saskaņā ar beidzamo nosacījumu, izveidosies netto prēmijas?

Pielaidīsim, kā jau to esam darījuši, ka mirstības gadījumi gada laikā sadalās vienmērīgi. Tad ar praksē pietiekošu tuvinājumu var visas izmaksas, kas notiek tūlīt pēc nāves, reducēt uz gada vidu. Šādā gadījumā, piem., vienreizēja prēmija A_x, kuŗu tagad, kad izmaksas notiek tūlīt pēc nāves, apzīmēsim ar $\bar{A}_x$, dabūjam līdzīgi tam, kā A_x gadījumā:

$$\bar{A}_x = \frac{d_x v^{\frac{1}{2}} + d_{x+1} v^{1\frac{1}{2}} + \ldots}{l_x},$$

reizinot un dalot vienlīdzības labo pusi ar $v^{\frac{1}{2}}$, dabūjam, ka

$$\bar{A}_x = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots}{l_x} = \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \cdot A_x = r^{\frac{1}{2}} A_x;$$

tā tad

$$\bar{A}_x = A_x \sqrt{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26);$$

lielums $\sqrt{r}$, pie, piem., $3^1/_2{}^0/_0$, ir $\sqrt{1{,}035} \approx 1{,}01735 \approx 1{,}02$.

Redzam, ka šinī gadījumā $\bar{A}_x$ rodas no A_x, palielinot to par $2^0/_0$. Tā bieži vien ari dara, t. i. palielina pēc parastās sakarības atrasto A_x par $2^0/_0$; tas pats zīmējas ari uz gada prēmiju. Ja izmaksa notiek pēc 3 mēnešiem no nāves, tad netto prēmiju nāktos palielināt par $1^0/_0$. Pa lielai tiesai, ja vien uzmanīgi izvēlēta mirstības tabula un procentu likme, nav jūtamas vajadzības ievest minēto koriģējumu, t. i. daudzas apdrošināšanas iestādes lieto dabūtās formulas ari tanīs gadījumos, ja izmaksa notiek tūlīt pēc nāves. Franču apdrošināšanas iestādes turpretim viscaur lieto koriģētas formulas tādā veidā, ka pieņem par lielumu C_x nevis $d_x v^{x+1}$, bet gan $d_x v^{x+\frac{1}{2}}$, t. i. pieņem, ka

$$d_x v^{x+\frac{1}{2}} = \bar{C}_x; \text{ tādā gadījumā}$$

$$\bar{A}_x = \frac{d_x v^{\frac{1}{2}} + d_{x+1} v^{1\frac{1}{2}} + \ldots}{l_x} = \frac{d_x v^{x+\frac{1}{2}} + d_{x+1} v^{x+1\frac{1}{2}}}{l_x v^x} + \ldots =$$

$$= \frac{\bar{C}_x + \bar{C}_{x+1} + \ldots}{D_x} = \frac{\bar{M}_x}{D_x}; \text{ tā tad } \bar{A}_x = \frac{\bar{M}_x}{D_x}.$$

Protams, ja tā izvēlēti skaitļi C_x, tad nav vairs vajadzības likt uz A_x un M_x strīpas, lai atšķirtu tos no parastajiem A_x un M_x (kad izmaksa notiek gada beigās); tāpēc ari pēc franču tabulām $A_x = \frac{M_x}{D_x}$, bet šeit jau A_x aprēķināts ar nosacījumu, ka izmaksa notiek tūlīt pēc nāves. Tas jāņem vērā, lietojot V. un VI. mirstības tabulu.

20. Apdrošināšana uz noteiktu termiņu.

1. Apdrošināšanā uz noteiktu termiņu (*à terme fixe*) apdrošināšanas iestāde apņemas izmaksāt noteiktā termiņā (pēc n gadiem) norunātu summu neatkarīgi no tam, vai apdrošinātā persona mirusi vai dzīvo, par ko apdrošinātā persona maksā ikgadējas prēmijas tik ilgi, kamēr dzīvo, bet, protams, ne ilgāk par n gadiem. Skaidra lieta, ka šī apdrošināšana ar vienreizēju prēmiju maksu vairs nebūs apdrošināšana, jo nebūs nezināmā momenta, bet vienkāršs noguldījums, kuram pēc n gadiem jādod norunātā summa.

x gadus veca persona apdrošina dzīvību ar tādu nosacījumu, ka apdrošināšanas iestāde izmaksā Ls 1 lielu summu pēc n gadiem, neatkarīgi no tam, vai apdrošinātā persona dzīvo vai tā mirusi. Aprēķināt ikgadējo netto prēmiju, kādu maksās apdrošinātā persona, kamēr tā dzīvo, bet ne ilgāk par k gadiem, kur $k \leqslant n$.

Apdrošinātās personas matēmatiskā cerība ir Ls v^n, jo varbūtība saņemt vienu latu lielu summu, kuras tagadējā vērtība ir v^n, ir 1; apdrošināšanas iestādes matēmatiskā cerība izteicas kā ${}_kP_x \,.\, {}_{|k}a_x$, kur ${}_kP_x$ ir ikgadējā prēmija. Tāpēc

$${}_kP_x \cdot {}_{|k}a_x = v^n \text{ un } {}_kP_x = \frac{v^n}{{}_{|k}a_x} = \frac{v^n D_x}{N_x - N_{x+k}}.$$

$$\text{Tā tad } {}_kP_x = \frac{v^n \mathcal{D}_x}{\mathcal{N}_x - \mathcal{N}_{x+k}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27).$$

Šo apdrošināšanas veidu lieto bieži pūra naudas nodrošināšanai.

Piemērs. Tēvs grib nodrošināt savai 3 gadus vecai meitai Ls 4000 lielu pūra naudu, kas izmaksājama pēc 15 gadiem neatkarīgi no tam, vai tēvs vai meita miruši vai dzīvo. Aprēķināt ikgadēju netto prēmiju, ja tēvam apdrošināšanas līgumu slēdzot, ir 38 gadi, pie kam tēvs maksā šo prēmiju tik ilgi, kamēr dzīvo, bet ne ilgāk par 15 gadiem.

Pēc (27.) form. un IV. mirst. tabulas

$$ {}_{15}P_{38} = \frac{v^{15}D_{38}}{N_{38} - N_{53}} = \frac{0{,}59689062 \, . \, 22931{,}75}{389\,394{,}84 - 137\,364{,}89} = \frac{13627{,}73}{252029{,}95} = 0{,}05409. $$

Tā tad, lai nodrošinātu Ls 4000, ikgadējā netto prēmija būs Ls 0,05409 . 4000= **Ls 216,36.**

21. Jauktā apdrošināšana.

1. Līdz šim aplūkotie apdrošināšanas veidi ir it kā apdrošināšanas veidu elementi, no kuriem var kombinēt dažādus jaunus apdrošināšanas gadījumus. Kā visbiežāk no visiem apdrošināšanas līgumiem lietojamais apdrošināšanas veids ir tā saucamā jauktā apdrošināšana, kura sastādās no apdrošināšanas uz nodzīvošanu (kapitāla apdrošināšanas) un īsās apdrošināšanas nāves gadījumam.

x gadus veca persona apdrošina dzīvību ar nosacījumu, ka apdrošināšanas iestāde izmaksā Ls 1 lielu summu, ja apdrošinātā persona nodzīvo n gadus, vai ari izmaksā to pašu summu, ja apdrošinātā perona nomirst tuvāko n gadu laikā. Aprēķināt *a*) vienreizējo, *b*) ikgādējo prēmiju, maksājamu tik ilgi, kamēr apdrošinātā persona dzīvo, bet ne ilgāk par k gadiem, kur $k \leqslant n$.

Apzīmēsim vienreizējo prēmiju ar $A_{\overline{xn|}}$. Tad, saskaņā ar nosacījumu, vienreizēja prēmija sastādīsies no ${}_nE_x$ un ${}_{|n}A_x$; tāpēc

$$ \mathcal{A}_{\overline{xn|}} = {}_n\mathcal{E}_x + {}_{|n}\mathcal{A}_x = \frac{\mathcal{D}_{x+n} + \mathcal{M}_x - \mathcal{M}_{x+n}}{\mathcal{D}_x} \quad . \; . \quad (28). $$

$$ {}_k\mathcal{P}_x = \frac{\mathcal{A}_{\overline{xn|}}}{{}_{|k}\mathrm{a}_x} = \frac{\mathcal{D}_{x+n} + \mathcal{M}_x - \mathcal{M}_{x+n}}{\mathcal{N}_x - \mathcal{N}_{x+k}} \quad . \; . \; . \quad (28_1). $$

Ņemot vērā (22) sakarību, varam dabūtās formulas pārveidot citādi, ieliekot M_x un M_{x+n} vietā to izteiksmes. Tā kā $M_x = D_x - dN_x$ un $M_{x+n} = D_{x+n} - dN_{x+n}$, tad

$$ A_{\overline{xn|}} = \frac{D_{x+n} + D_x - dN_x - D_{x+n} + dN_{x+n}}{D_x} = $$

$$ = \frac{D_x - d(N_x - N_{x+n})}{D_x} = 1 - d \, {}_{|n}\mathrm{a}_x ; $$

tā tad $\mathcal{A}_{x\overline{n|}}=1-d_{|n}a_x$ . . . . (28')

un $_kP_x=\frac{1}{_{|k}a_x}-\frac{d_{|n}a_x}{_{|k}a_x}$; ja $k=n$, tad

$$_nP_x=\frac{1}{_{|n}a_x}-d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28_1').$$

Jauktai apdrošināšanai parasti lieto mirstības tabulu apdrošināšanai nāves gadījumam, bet ne renšu apdrošinātāju tabulu, kaut gan $A_{x\overline{n|}}$ izteiksmē ieiet apdrošināšana uz nodzīvošanu. Austriešu mirstības tabulu sastādītāji sakārtojuši šim apdrošināšanas veidam īpašu mirstības tabulu.

Piemērs. 38 gadus veca persona apdrošina dzīvību pēc jauktā apdrošināšanas veida uz 15 gadiem, pie kam izmaksājamā summa ir Ls 4000. Aprēķināt ikgadēju netto prēmiju, kas maksājama pa visu apdrošināšanas laiku.

Pēc (28_1) formulas un IV. mirst. tabulas

$$_{15}P_{38}=\frac{D_{38}}{N_{38}-N_{53}}-0{,}0338\,1643=\frac{22931{,}75}{389\,394{,}84-137\,364{,}89}-$$
$$-0{,}03381643=0{,}09099-0{,}03382=0{,}05717.$$

Ja apdrošināšanas summa ir Ls 4000, tad ikgadējā prēmija ir Ls 0,05717 . 4000=Ls **228,68.** Salīdzinot šo prēmiju ar iepriekšējā piemēra rezultātu, kur apdrošināšanas summa, apdrošinātās personas vecums un līguma ilgums ir tie paši lielumi, redzam, ka pēc jauktā apdrošināšanas veida prēmija ir mazliet lielāka. Tas tāpēc, ka pēc jauktā apdrošināšanas veida apdrošināšanas summu var nākties izmaksāt ari jau pirms 15 gadiem.

2. Protams, ka var būt ari citas iespējamas kombinācijas: piem., var apdrošināt dzīvību nāves gadījumam uz visu mūžu un bez tam kapitālu uz nodzīvošanu u. tml. Visos šos gadījumos aprēķinu princips tas, ka meklējamā prēmija rodas no atsevišķo prēmiju summēšanas.

V. Netto prēmijas saistītā dzīvības apdrošināšanā.

22. Saistītās rentes.

1. Par saistīto dzīvības apdrošināšanu sauc tādu apdrošināšanu, kas atkarājas no vairāku personu dzīves ilguma. Šeit aplūkosim tikai tos saistītās apdrošināšanas gadījumus, kas atkarājas no divu personu dzīves ilguma (atraitņu un bāriņu pensijas u. tml.), jo tie praksē sastopami visbiežāk. Pēc analoģijas varēs aplūkot tos apdrošināšanas veidus, kas atkarājas no triju un vairāku cilvēku dzīves ilguma.

Lai varētu aprēķināt netto prēmijas saistītās apdrošināšanas gadījumiem, būtu jāsastāda mirstības tabulas, kas rādītu pāŗu iziršanu, t. i. rādītu, cik no zināma skaita pāŗiem, kuŗos kaut kādā veidā saistītas (visbiežāk radniecības saitēm) viena persona x, otra y gadus veca, izirst (vienas vai abu personu nāves dēļ) pāŗu pirmā, otrā, trešā un tālākos gados, vai citiem vārdiem, cik no pāŗiem dzīvo vēl kā pāŗi pirmā, otrā, trešā un tālākos gados. Ja apzīmēsim pāŗu skaitu, kur viena persona x, otra y gadus veca, ar l_{xy}, tad jautājums grozās ap to, lai atrastu skaitļus $l_{x+1:y+1}$, $l_{x+2:y+2}$ u. t. t. vai attiecīgi d_{xy}, $d_{x+1:y+1}$ u. t. t., kur $d_{xy}=l_{xy}-l_{x+1:y+1}$ rāda izirušo (nāves dēļ) pāŗu skaitu pirmā gadā, $d_{x+1:y+1}=l_{x+1:y+1}-l_{x+2:y+2}$ rāda izirušo (nāves dēļ) pāŗu skaitu otrā gadā u. t. t.

Tā kā starpība starp vecumiem x un y var būt diezgan dažāda (0, 1, 2, 3, . . . , 30 un vairāk gadu), tad nāktos novērot pāŗu iziršanu dažādām vecuma starpībām, kas rada lielas grūtības, tāpēc praksē šādu paņēmienu līdz šim nekur nelieto. Tā vietā ņem palīgā varbūtību reizināšanas likumu, jo te mums ir darīšana ar divu neatkarīgu notikumu (abu personu dzīvošanas vai abu miršanas vai vienas personas dzīvošanas un otras miršanas) varbūtībām. Var rīkoties ari tā: ņem no kādas tabulas l_x un no tās pašas (vai citas, piem., vīriešu skaitu no vienas, sieviešu no otras) tabulas l_y; no visām l_x un l_y personām var veidot pavisam $l_x l_y$ pāŗus; tāpat no l_{x+1} un l_{y+1} personām var veidot $l_{x+1}\, l_{y+1}$ pāŗus u. t. t.; šie $l_{x+1}\, l_{y+1}$ pāŗi ir palikuši pēc viena gada no $l_x\, l_y$ pāŗiem; tāpat pēc divi gadiem ir vairs tikai $l_{x+2}\, l_{y+2}$ pāŗi u. t. t. Tāpēc pieņem, ka $l_{xy}=l_x\, l_y$; $l_{x+1:\, y+1}=l_{x+1}\, l_{y+1}$ u. t. t. Protams, ka šeit, tāpāt ari rīkojoties ar neatkarīgu notikumu varbūtībām, mēs rīkojamies ar personām, kas saistītas pāŗos pilnīgi mēchaniski, un tiešām vienas personas nāve neatstāj iespaida uz otras personas dzīves ilgumu. Īstenībā saistītā apdrošināšana praksē zīmējas gandrīz tikai uz radniecības saitēm pāŗos saistītām personām (vīrs un sieva, brālis un māsa, tēvs un dēls, tēvs un meita u. tml.), kur vienas personas nāve bez šaubām atstāj iespaidu uz otras personas dzīves ilgumu. Tomēr, kā jau minēts, nākas iziet no mēchaniskās saistības, pie kam novērojumi rāda, ka šāds paņēmiens pietiekošā mērā atbilst apdrošināšanas iestāžu vajadzībām.

2. Aplūkosim tagad saistīto mūža renti, kuŗu saņem divas personas — viena x, otra y gadus veca — tik ilgi, kamēr abas dzīvo; ja viena no tām (vai abas) nomirst, tad rentes maksājumi izbeidzas.

Divu personu pāris, no kuŗām viena x, otra y gadus veca, apdrošina sev saistīto praenumerando mūža renti, Ls 1 lielu. Aprēķināt vienreizēju netto prēmiju.

Apzīmēsim meklējamo prēmiju ar $\mathfrak{a}_{xy}$; varbūtība saņemt pirmo rentes maksājumu būs 1, varbūtība saņemt otro rentes maksājumu būs $\frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y}$ (pēc varbūtību reizināšanas likuma, jo rentes otro maksājumu varēs saņemt tikai tad, ja abas personas vēl dzīvos pēc gada), varbūtība saņemt trešo rentes maksājumu ir $\frac{l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+2}}{l_y}$ u. t. t.;

tāpēc

$$\mathfrak{a}_{xy}=1+\frac{l_{x+1}\, l_{y+1}}{l_x\, l_y}v+\frac{l_{x+2}\, l_{y+2}}{l_x\, l_y}v^2+\ldots=$$

$$=\frac{l_x\, l_y+l_{x+1}\, l_{y+1}v+l_{x+2}\, l_{y+2}v^2+\ldots}{l_x\, l_y};$$

dabūto izteiksmi var pārveidot ar dažādiem paņēmieniem. Viens no pārveidojumu paņēmieniem ir tāds, ka reizina un dala labo pusi ar v^x (vai ari ar v^y); tad

$$\mathfrak{a}_{xy}=\frac{l_x v^x l_y+l_{x+1}v^{x+1}l_{y+1}+\ldots}{l_x v^x l_y}=\frac{D_x l_y+D_{x+1}l_{y+1}+\ldots}{D_x l_y};$$

ievedīsim apzīmējumu $\mathfrak{D}_x l_y = \mathfrak{D}_{xy}$ un $\mathfrak{D}_{xy} + \mathfrak{D}_{x+1:y+1} + \ldots = \mathfrak{N}_{xy}$; tad

$$a_{xy} = \frac{\mathfrak{N}_{xy}}{\mathfrak{D}_{xy}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

Saprotams, ka

$$a_{xy} = \frac{\mathfrak{N}_{x+1:y+1}}{\mathfrak{D}_{xy}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29')$$

3. Protams, ka varēja pieņemt ari $D_y l_x = D_{xy}$; lai nebūtu pārpratums, tad par x pieņem vecākās personas gadu skaitu un to diskontē ar v^x. Lieto ari tādu apzīmējumu:

$$D_{xy} = l_x v^{\frac{x}{2}} l_y v^{\frac{y}{2}} = v^{\frac{x+y}{2}} l_x l_y.$$

Mēs turēsimies pie apzīmējuma $D_{xy} = D_x l_y$, kur x ir lielākais gadu skaits. Kā tagad aprēķināt a_{xy}. Šinī nolūkā jāaprēķina izteiksmes $D_x l_y + D_{x+1} l_{y+1} + D_{x+2} l_{y+2} + \ldots$ dažādiem vecumiem y un dažādām starpībām starp x un y. Piem., ja gribam aprēķināt $a_{25:23}$, tad jāaprēķina izteiksme $D_{25} l_{23} + D_{26} l_{24} + D_{27} l_{25} + \ldots$, kur skaitļus $D_{25}, D_{26}, \ldots$ un $l_{23}, l_{24}, \ldots$ ņemam no mirstību tabulām. Bet ja nu reizi esam šādu izteiksmi aprēķinājuši, tad, piem., $a_{26:24}$ aprēķināšanai vairs nav jāaprēķina par jaunu visa izteiksme $D_{26} l_{24} + D_{27} l_{25} + \ldots$, jo tā ir iepriekšējā izteiksme bez pirmā locekļa. Tādā kārtā vienai un tai pašai vecumu starpībai starp x un y gadiem attiecīgo a_{xy} nozīmju aprēķināšana iet samērā viegli. Citai gadu starpībai, piem., $a_{26:23}$ visa izteiksme $D_{26} l_{23} + D_{27} l_{24} + \ldots$ jāaprēķina par jaunu.

Tādā ceļā sastāda īpašu a_{xy} nozīmju tabulu, ņemot biežāk sastopamās gadu starpības 0, 1, 2, 3, 4, un 5 gadi; tad aprēķina vēl starpības, kas izteicas ar 10, 15 vai 20 gadiem, bet pārējām starpībām a_{xy} atrod interpolācijas ceļā. Piemēram paraugs no tādas tabulas.

a_{xy} nozīmes.

Jaunākās personas vecums	Gadu starpība							
	0	1	2	3	4	5	10	15
21	17,770	17,692	17,610	17,522	17,430	17,332	16,763	16,039
22	17,616	17,536	17,451	17,360	17,265	17,165	16,578	15,832
23	17,457	17,374	17,287	17,194	17,096	16,993	16,388	15,618

Pēc šīs tabulas, piem., $a_{26:21} = 17,430$; $a_{21:21} = 17,770$.

4. Ja mirstības tabulas izlīdzinātas pēc Gompertz'a-Makeham'a likuma, tad var rīkoties vēl tā: tā kā pēc šī likuma

$$l_x = ks^x g^{c^x} \text{ un } l_y = ks^y g^{c^y}, \text{ tad}$$

$$a_{xy} = \frac{k^2 s^{x+y} g^{c^x + c^y} + k^2 s^{x+y+2} g^{c^{x+1}+c^{x+1}} v + \ldots}{k^2 s^{x+y} g^{c^x + c^y}};$$

šo izteiksmi var saīsināt ar $k^2 s^{x+y}$; tad

$$a_{xy} = \frac{g^{c^x + c^y} + s^2 g^{(c^x + c^y)c} v + \ldots}{g^{c^x + c^y}};$$

ievedīsim tagad jaunus skaitļus z un t tā, ka tie ar x un y stāvētu tādā sakarībā, ka $c^x + c^y = c^z + c^t$, tad iepriekšējā sakarībā labā puse paliek pēc lieluma nemainīta, un tāpēc $a_{xy} = a_{zt}$; ja pieņemsim vēl, ka $t = z$, tad

$a_{xy} = a_{zz}$, pie kam z atrodam no sakarības $2c^z = c^x + c^y$; to logaritmējot, dabūjam, ka $\log 2 + z \log c = \log(c^x + c^y)$, no kurienes

$$z = \frac{\log(c^x + c^y) - \log 2}{\log c};$$

no šīs sakarības var aprēķināt z un tādā kārtā a_{xy} dažādiem vecumiem novest uz vieniem un tiem pašiem vecumiem, t. i. uz vecumiem ar starpību nulle; līdz ar to atvieglinās a_{xy} nozīmju tabulas sastādīšana. Praksē pietiek, ja reducē dažādus vecumus uz vienu vecumu tā: ņem no vecākās personas gadiem (x) trīs ceturtdaļas un jaunākās personas gadiem vienu ceturtdaļu un tās saskaita; tā dabū reducēto vecumu, t. i. pieņem, ka $z = \frac{3x + y}{4}$, kur x ir vecākās personas gadi. Tā piem., ja vecākai personai 24 gadi un jaunākai 21 gads, tad $z = \frac{72 + 21}{4} = \frac{93}{4} \simeq 23$ un tāpēc $a_{24:21} \simeq a_{23:23}$; tiešām no augstāk ievietotās tabulas redzam, ka $a_{24:21} = 17{,}522$ un $a_{23:23} = 17{,}457$.

Pareizākai reducēšanai uz vidējo vecumu ievietota finanču tabulās (pielikumā) VII. tabula, pēc kuŗas $a_{24:21} = a_{23:23}$. Attiecīgie lielumi D_{xx}, N_{xx}, C_{xx} un M_{xx} ievietoti VI. tabulā.

5. Ja protam aprēķināt a_{xy}, tad viegli var aprēķināt ari citu saistītas rentes veidu netto prēmijas. Viens no tādiem renšu apdrošināšanas veidiem ir tā saucamās pārdzīvošanas rentes (atraitņu un bāriņu pensijas).

x gadus vecs vīrs apdrošina savai y gadus vecai sievai praenumerando mūža renti, Ls 1 lielu, ar to nosacījumu, ka šo renti sieva sāk saņemt tad, kad vīrs ir miris, bet sieva dzīvo. Aprēķināt *a*) vienreizēju netto prēmiju, *b*) ikgadēju mūža prēmiju, kamēr abas personas dzīvo.

Šādas rentes vienreizēju prēmiju apzīmēsim ar $a_{x|y}$. Lai atrastu $a_{x|y}$ lielumu, spriedīsim tā: ja y gadus vecā sieva sāktu saņemt mūža praenumerando renti tūlīt, tad vienreizēja prēmija būtu a_y, bet viņa nesaņems tik ilgi, kamēr abas personas (vīrs un sieva) dzīvo, tā tad no a_y jāatņem saistītās mūža rentes tagadējā vērtība, lai dabūtu $a_{x|y}$; tāpēc

$$a_{x|y} = a_y - a_{xy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30).$$

Ja prēmijas maksā ikgadus tik ilgi, kamēr abas personas dzīvo, tad

$$P_{x|y} = \frac{a_{x|y}}{a_{xy}} = \frac{a_y}{a_{xy}} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30_1).$$

Piemērs. 28 gadus vecs vīrs un 25 gadus veca sieva noslēdz apdrošināšanas līgumu ar nosacījumu, ka sieva pēc vīra nāves saņem Ls 400 latu lielu mūža renti. Aprēķināt ikgadēju netto prēmiju.

Pēc (30) formulas

$$P_{28|25} = \frac{a_{25}}{a_{25:28}} - 1\,;$$

pēc VII. tab. $a_{28:25} \simeq a_{27:27}$; no VI. tab. $a_{27:27} = \frac{N_{27:27}}{D_{27:27}} =$

$$= 3147088{,}6 . 0{,}0000049707397 = 15{,}643\,;$$

pec V. tab. $a_{25} = \frac{N_{25}}{D_{25}} = 5163112{,}6 . 0{,}0000035527109 = 18{,}343\,;$

$$P_{28|25} = \frac{18{,}343}{15{,}643} - 1 = 1{,}173 - 1 = 0{,}173.$$

Tā tad nāksies maksāt Ls 0,173 . 400 = Ls 69,20 lielu netto gada prēmiju tik ilgi, kamēr vīrs dzīvos.

6. **Bāriņu pensijas** parasti apdrošina ne uz visu mūžu, bet tikai līdz zināmam vecumam, piem., līdz 25 gadu vecumam. Tādā kārtā rodas šāds apdrošināšanas veids.

x gadus vecs tēvs apdrošina savam y gadus vecam dēlam Ls 1 lielu praenumerando gada renti, kuŗu var sākt saņemt dēls tad, kad tēvs būs miris, bet ne ilgāk ka līdz $y+n$ gadu vecumam. Aprēķināt *a*) vienreizēju, *b*) ikgadēju netto prēmiju, kas jāmaksā tēvām tik ilgi, kamēr abi dzīvo, bet ne ilgāk par n gadiem.

Apzīmēsim vienreizēju netto prēmiju šinī gadījumā ar $_{|n}a_{x|y}$. Spriežot tāpat, kā iepriekšējā gadījumā, atradīsim, ka

$$_{|n}a_{x|y} = {}_{|n}a_y - {}_{|n}a_{xy} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

un
$$_nP_{x|y} = \frac{_{|n}a_{x|y}}{_{|n}a_{xy}} = \frac{_{|n}a_y - {}_{|n}a_{xy}}{_{|n}a_{xy}} = \frac{_{|n}a_y}{_{|n}a_{xy}} - 1 \quad \ldots \quad (31_1),$$

kur $_{|n}a_{xy}$ nozīme, pēc analoģijas ar a_{xy} un $_{|n}a_x$, ir tāda:

$$_{|n}a_{xy} = \frac{D_{xy} + D_{x+1:y+1} + \ldots + D_{x+n-1:y+n-1}}{D_{xy}} =$$
$$= \frac{N_{xy} - N_{x+n:y+n}}{D_{xy}}.$$

Tā kā izteiksmes a_{xy} un $_{|n}a_{xy}$ pēc savas struktūras pilnīgi analoģiskas, tad ari lielumu $_{|n}a_{xy}$ var ar to pašu paņēmienu kā a_{xy} novest uz $_{|n}a_{zz}$.

√ Piemērs. 32 gadus vecs tēvs apdrošina savam 2 gadus vecam dēlam bāriņu pensiju līdz pilniem 25 mūža gadiem, Ls 600 lielu, izmaksājamu ik gadus praenumerando pēc tēva nāves.

Aprēķināt ikgadēju netto prēmiju.

Pēc VII. tab. $a_{32:2} = a_{25:25}$; pēc (31_1) form. un VI. tab.

$$_{23}P_{32|2} = \frac{_{|23}a_2}{_{|23}a_{32:2}} - 1 = \frac{_{|23}a_2}{_{|23}a_{25:25}} - 1 = \frac{N_2 - N_{25}}{D_2} : \frac{N_{25:25} - N_{48:48}}{D_{25:25}} - 1 =$$
$$= \frac{17216680{,}1 - 5163112{,}6}{862\,608{,}2} : \frac{3583801{,}7 - 615472{,}37}{224\,275{,}5} - 1 =$$
$$= \frac{(17216680{,}1 - 5163112{,}6) \,.\, 0{,}000001592748}{(3583801{,}7 - 615472{,}37) \,.\, 0{,}0000044588018} - 1 =$$
$$= \frac{13{,}973}{14{,}235} - 1 = 1{,}056 - 1 = 0{,}056.$$

Tā tad ikgadēja netto prēmija būs Ls 0,056.600 = Ls **33,60.**

Saistītā apdrošināšana uz nodzīvošanu praksē reti sastopama, tāpēc pie tās nepakavēsimies. Bez tam nav nekādu grūtību dabūt attiecīgo prēmiju izteiksmes.

23. Saistītā apdrošināšana nāves gadījumam.

1. Divas personas — viena x gadus veca un otra y gadus veca (vīrs un sieva vai citādi pārī saistītas personas) — noslēdz saistītu dzīvības apdrošināšanu nāves gadījumam tā, ka pēc vienas vai otras (protams ari abu) personas nāves apdrošināšanas iestāde izmaksā (gada beigās) Ls 1 lielu apdrošināšanas summu. Aprēķināt *a*) vienreizēju, *b*) ikgadēju netto prēmiju, kas maksājama tik ilgi, kamēr abas personas dzīvo.

Apzīmēsim vienreizēju netto prēmiju šinī gadījumā ar A_{xy}. Izejot no mūsu pieņēmuma, ka $l_{xy}=l_x l_y$, $l_{x+1:y+1}=l_{x+1}l_{y+1}$ u. t. t., dabūjam, ka izirušo pirmā gadā pāŗu skaits $d_{xy}=l_{xy}-l_{x+1:y+1}=l_x\,l_y-l_{x+1}\,l_{y+1}$; tāpat $d_{x+1:y+1}=l_{x+1}\,l_{y+1}-l_{x+2}\,l_{y+2}$ u. t. t.

Tāpēc

$$A_{xy}=\frac{l_x\,l_y-l_{x+1}\,l_{y+1}}{l_x\,l_y}v+\frac{l_{x+1}\,l_{y+1}-l_{x+2}\,l_{y+2}}{l_x\,l_y}v^2+\ldots$$

sagrupējot pa sevi locekļus ar $+$ un $-$ zīmēm, dabūjam, ka

$$A_{xy}=\frac{l_x\,l_y}{l_x\,l_y}v+\frac{l_{x+1}\,l_{y+1}}{l_x\,l_y}v^2+\ldots-\left(\frac{l_{x+1}\,l_{y+1}}{l_x\,l_y}v+\right.$$

$$\left.+\frac{l_{x+2}\,l_{y+2}}{l_x\,l_y}v^2+\ldots\right)=v\left(\frac{l_x\,l_y}{l_x\,l_y}+\frac{l_{x+1}\,l_{y+1}}{l_x\,l_y}v+\ldots\right)-$$

$$-\left(\frac{l_{x+1}\,l_{y+1}}{l_x\,l_y}v+\frac{l_{x+2}\,l_{y+2}}{l_x\,l_y}v^2+\ldots\right);$$

pirmās iekavās stāv saistītās praenumerando mūža rentes tagadējā vērtība, otrās iekavās tās pašas, tikai postnumerando rentes tagadējā vērtība, tāpēc

$$A_{xy}=v\text{a}_{xy}-a_{xy}=\frac{1}{r}\,\text{a}_{xy}-(\text{a}_{xy}-1)=1-\text{a}_{xy}\left(1-\frac{1}{r}\right)=1-d\text{a}_{xy};$$

tā tad $\mathcal{A}_{xy}=1-d\text{a}_{xy}$ . . . . (32).

Ikgadējo prēmiju dabūsim ar jau zināmo paņēmienu, tikai te būs jārīkojas ar saistīto renti.

$$P_{xy}=\frac{A_{xy}}{a_{xy}}=\frac{1-da_{xy}}{a_{xy}}=\frac{1}{a_{xy}}-d;$$

$$P_{xy}=\frac{1}{a_{xy}}-d \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32_1).$$

Redzam pilnīgu analoģiju ar apdrošināšanu vienas personas nāves gadījumam.

Līdzīgā kārtā var atrast $_{|n}A_{xy}$, $_{m|}A_{xy}$, $_{m|n}A_{xy}$ un attiecīgās gada prēmijas.

Piemērs. 41 gadu vecs vīrs un 38 gadus veca sieva noslēdz saistītas apdrošināšanas līgumu nāves gadījumam tā, ka apdrošināšanas iestāde izmaksā Ls 3000 pēc apdrošināto personu pirmā nāves gadījuma.

Aprēķināt ikgadējo netto prēmiju.

Pēc VII. tab. $a_{41:38}=a_{40:40}$; (32_1), formula un VI. tabula dod, ka

$$P_{41:38}=\frac{1}{a_{41:38}}-d=\frac{1}{a_{40:40}}-d=\frac{D_{40:40}}{N_{40:40}}-0{,}04077=\frac{95739{,}73}{1236071{,}60}-$$

$$-0{,}04077=0{,}07745-0{,}04077=0{,}03668;$$

tāpēc meklējamā gada prēmija bus Ls 0,03668 . 3000=Ls 110,04.

2. Aplūkosim vēl vienu saistītās apdrošināšanas veidu.

Viena x gadus veca persona un otra y gadus veca persona apdrošina dzīvību nāves gadījumam tā, ka apdrošināšanas iestāde izmaksā (miršanas gada beigās) Ls 1 lielu summu, ja x gadus veca persona nomirst un y gadus vecā persona dzīvo. Aprēķināt a) vienreizēju prēmiju, b) ikgadēju prēmiju, ko maksās x gadus vecā persona tik ilgi, kamēr abas personas dzīvo.

Apzīmēsim vienreizējo prēmiju šinī gadījumā ar $A_{x|y}$. Pirmā gadā apdrošināšanas summu varēs saņemt tad, ja x gadus vecā persona būs mirusi, bet y vecā persona dzīvos: pirmā varbūtība ir $\frac{l_x-l_{x+1}}{l_x}$, otrā varbūtība ir $\frac{l_{y+1}}{l_y}$; tā kā apdrošināšanas summu izmaksā tikai tad, ja abi šie notikumi ir kopā, tad varbūtība saņemt pirmā gada apdrošināšanas summu izteiksies, kā minēto divu varbūtību reizinājums: $\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y}$; tāpat varbūtība saņemt apdrošināšanas summu otrā gadā izteiksies kā $\frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+2}}{l_y}$ u. t. t., tāpēc

$$A_{x|y} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+1}}{l_y} \cdot v + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+2}}{l_y} v^2 + \ldots ;$$

sakārtojot locekļus ar $+$ un $-$ zīmēm atsevišķi, dabūjam, ka

$$A_{x|y} = \left(\frac{l_x \, l_{y+1}}{l_x \, l_y} v + \frac{l_{x+1} \, l_{y+2}}{l_x \, l_y} v^2 + \ldots \right) - \left(\frac{l_{x+1} \, l_{y+1}}{l_x \, l_y} v + \frac{l_{x+2} \, l_{y+2}}{l_x \, l_y} v^2 + \ldots \right)$$

ņemsim no pirmās grupas locekļiem aiz iekavām $\frac{v}{l_y}$ un tad reizināsim un dalīsim ar l_{y+1}, atstājot l_{y+1} kā reizinātāju iekavu priekšā, bet l_{y+1} kā dalītāju ienesot iekavās; tad

$$A_{x|y} = \frac{v l_{y+1}}{l_y} \left(\frac{l_x \, l_{y+1}}{l_x \, l_{y+1}} + \frac{l_{x+1} \, l_{y+2}}{l_x \, l_{y+1}} v^2 + \ldots \right) -$$

$$- \left(\frac{l_{x+1} \, l_{y+1}}{l_x \, l_y} v + \frac{l_{x+2} \, l_{y+2}}{l_x \, l_y} v^2 + \ldots \right);$$

izteiksme, kas stāv pirmās iekavās, ir, kā viegli saprotams, $a_{x:y+1}$, jo visur izteiksmes a_{xy} reizinātāja l_y vietā stāv l_{y+1}; otro iekavu izteiksme ir $a_{xy} = a_{xy} - 1$; bez tam, reizinot un dalot reizinātāju iekavu priekšā ar v^x, dabūjam, ka

$$\mathcal{A}_{x|y} = \frac{\mathfrak{D}_{y+1}}{\mathfrak{D}_y} \cdot a_{x:y+1} - a_{xy} + 1 \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

ikgadējo prēmiju atrodam, kā jau parasts

$$P_{x|y} = \frac{\mathcal{A}_{x|y}}{a_{xy}} = \frac{\frac{D_{y+1}}{D_y} a_{x:y+1} + 1}{a_{xy}} - 1 \quad \ldots \ldots \quad (33_1)$$

Piemērs. 42 g. vecs vīrs apdrošina dzīvību ar nosacījumu, ka viņa 35 g. vecā sieva saņem zināmu summu, ja vīrs būs miris, bet sieva vēl dzīvos; vīrs grib maksāt tik ilgi, kamēr abi dzīvo, ikgadēju netto prēmiju, Ls 200 lielu. Aprēķināt, kādu summu varēs saņemt sieva.

Pēc (33_1) form. un VII., VI. un V. tab.

$$P_{42|35} = \frac{\frac{D_{36}}{D_{35}} \cdot a_{42:36} + 1}{a_{42:35}} - 1 = \frac{\frac{D_{36}}{D_{35}} a_{39:39} + 1}{a_{39:39}} - 1 =$$

$$= \frac{D_{36}}{D_{35}} + \frac{1}{a_{39:39}} - 1 = \frac{164722,2}{173120,2} + \frac{101702,9}{1337774,5} - 1 =$$

$$= 0,95149 + 0,07602 - 1 = 0,02751;$$

tā tad vienu latu lielai apdrošināšanas summai, ikgadējā netto prēmija ir Ls 0,02751, bet ar Ls 200 lielu gada prēmiju varēs nodrošināt Ls $\frac{200}{0,02751} \approx$ Ls 7270.

VI. Brutto prēmijas. Apdrošināšana ar prēmiju atmaksām.

24. Brutto prēmiju aprēķināšana.

1. Līdz šim esam aplūkojuši netto prēmiju aprēķināšanu biežāk sastopamiem apdrošināšanas veidiem. Protams, ka ar netto prēmijām parasti apdrošināšanas iestāde nevar iztikt, jo visi ieņēmumi no netto prēmijām iziet (vai mazākais tiem jāiziet, ja miršanas gadījumi norisinās saskaņā ar mirstības tabulu) apdrošināšanas summu izmaksai. Bet jāsedz vēl dažādi izdevumi, kas saistīti ar apdrošināšanas iestādes uzturēšanu: algas, telpas, sludinājumi, atlīdzība aģentiem, dividendes par ieguldīto kapitālu u. t. j. Parasti visi izdevumi sadalās trijās grupās: vispirms vienreizēji jeb līguma slēgšanas izdevumi, otrkārt, ikgadējie inkaso izdevumi pa prēmiju maksājumu laiku un, treškārt, ikgadējie jeb ilgstošie pārvaldes izdevumi.

Vienreizējie jeb līguma slēgšanas izdevumi, kā jau pats nosaukums rāda, saistās ar jauno apdrošināšanas līguma slēgšanu un sastādās galveno kārt no atlīdzības aģentam (parasti 20—30‰ no apdrošināšanas summas), tad no atlīdzības ārstam par izmeklēšanu, kur tāda vajadzīga un pastāv, no citiem atalgojumiem, kas saistīti ar līguma slēgšanu, sludinājumiem u. t. j. Šos vienreizējus izdevumus parasti izteic procentos vai promilēs no apdrošināšanas summas. Mēs šos izdevumus, cik tālu tie zīmējas uz vienu latu lielu apdrošināšanas summu, apzīmēsim ar α.

Inkaso izdevumu galveno daļu sastāda atlīdzība aģentam par prēmiju iekasēšanu, parasti procentos (2—3%) no iekasētām gada prēmijām. Tāpēc šos izdevumus izteic procentos no gada prēmijas pa visu prēmiju maksāšanas laiku. Tos uz Ls 1 lielu prēmiju (brutto) apzīmēsim ar β.

Ilgstošos pārvaldes izdevumus sastāda nodokļi, inventāra amortizācija, algas un dividendes, telpu īre un uzturēšana u. t. j. Pārvaldes izdevumus izteic procentos no apdrošināšanas summas un apzīmē uz Ls 1 lielu apdrošināšanas summu ar γ; šie izdevumi jāpierēķina prēmijai pa visu līguma pastāvēšanas laiku. Tādā kārtā, ja kādam apdrošināšanas veidam, kur apdrošināšanas summa ir Ls 1 un līgums slēgts uz n gadiem, vienreizēja netto prēmija ir Π_x, tad, apzīmējot brutto prēmiju ar Π'_x, vispirms varam teikt, ka inkaso izdevumi būs $\Pi'_x\beta$; tādā kārtā apdrošināšanas iestādei paliek

$\Pi'_x - \Pi'_x\beta = \Pi'_x(1-\beta)$, ar ko jāsedz 1) netto prēmija, 2) pārējie izdevumi. Tā kā α ir vienreizējie izdevumi, bet γ ir ikgadējie, kas ilgst pa visu līguma pastāvēšanas laiku (n gadiem vai visu mūžu), tad šo beidzamo izdevumu tagadējā vērtība būs ${}_{|n}a_x\gamma$ (vai $a_x \cdot \gamma$); tāpēc

$$\Pi'_x(1-\beta) = \Pi_x + \alpha + {}_{|n}a_x \cdot \gamma, \text{ no kurienes}$$

$$\Pi'_x = \frac{1}{1-\beta}[\Pi_x + \alpha + {}_{|n}a_x\gamma] \quad \ldots\ldots \quad (34).$$

Šī formula dod iespēju aprēķināt vienreizēju brutto prēmiju Π'_x.

Piemērs. Francijas apdrošināšanas iestādes parasti aprēķina apdrošināšanā nāves gadījumiem vienreizējiem izdevumiem 1% no apdrošināšanas summas, inkaso izdevumus 6% no brutto prēmijas un 3,5% pastāvīgiem izdevumiem. Aprēķināt vienreizēju brutto prēmiju, kādu maksās 35 gadus veca persona, apdrošinot dzīvību nāves gadījumam par Ls 5000.

Tā tad šeit $\alpha = 0{,}01$, $\beta = 0{,}06$ un $\gamma = 0{,}0035$.

Pēc (34) form. un V. tab.

$$A'_{35}=\frac{1}{0,94}[A_{35}+0,01+a_{35}\,.\,0,0035]=$$

$$=\frac{1}{0,94}[0,3295+0,01+14,0731\,.\,0,0035]=$$

$$=\frac{100}{94}\,.\,[0,3295+0,01+0,049256]=\frac{38,88}{94}=0,4136\,;$$

tā tad uz Ls 5000 brutto prēmija būs **Ls 2068.**

2. Rentes apdrošināšanas gadījumos parasti inkaso izdevumus un pārvaldes izdevumus izteic procentos no rentes lieluma, bet vienreizējus izdevumus no brutto prēmijas; tādā kārtā šinī gadījumā

$$a'_x=\frac{1}{1-\alpha}[a_x+\beta\,a_x+\gamma\,a_x]=\frac{a_x(1+\beta+\gamma)}{1-\alpha}.$$

Piemērs. Mūža rentes apdrošināšanai ar vienreizēju prēmiju vienreizējus izdevumus aprēķina 3% no vienreizējas brutto prēmijas, inkaso izdevumus 1% no rentes un pārvaldes izdevumus 4% no rentes. Aprēķināt vienreizēju brutto prēmiju.

$$a'_x=\frac{a_x(1+0,01+0,04)}{0,97}=\frac{1,05a_x}{0,97}.$$

3. Brutto gada prēmiju viegli aprēķināt, zinot vienreizēju brutto prēmiju; pēc vispārējas sakarības

$$\Pi'_x=P'_x\,{}_{|k}a_x$$

kur P'_x brutto gada prēmija, bet ${}_{|k}a_x$ laika rentes tagadējā vērtība, ja prēmiju maksājumi ilgst k gadus (k var nebūt vienlīdzīgs ar n, kur n apdrošināšanas līguma ilgums); ja prēmiju maksājumi ilgst visu mūžu, tad

$$\Pi'_x=P'_x a_x$$

tādā kārtā

$$P'_x=\frac{\Pi'_x}{{}_{|k}a_x}\ \text{jeb}\ P'_x=\frac{\Pi'_x}{a_x}\,;$$

ņemot vērā (34) formulu, dabūjam, ka

$$P'_x=\frac{1}{1-\beta}\cdot\frac{\Pi_x+\alpha+{}_{|n}a_x\gamma}{{}_{|k}a_x};$$ tā kā $\frac{\Pi_x}{{}_{|k}a_x}=P_x$ (netto prēmija), tad

$$P'_x=\frac{1}{1-\beta}\left[P_x+\frac{\alpha}{{}_{|k}a_x}+\frac{{}_{|n}a_x\gamma}{{}_{|k}a_x}\right]\quad\ldots\ldots\quad(34_1)$$

ja apdrošināšanas līgums slēgts uz visu mūžu un ari prēmijas maksā visu mūžu, tad $\frac{{}_{|n}a_x}{{}_{|k}a_x}$ pārvēršas izteiksmē $\frac{a_x}{a_x}=1$ un

$$P'_x=\frac{1}{1-\beta}\left[P_x+\frac{\alpha}{a_x}+\gamma\right] \quad \ldots\ldots (34_2).$$

Piemērs. 41 g. veca persona apdrošina dzīvību nāves gadījumam ar ikgadējām prēmiju maksām visu mūžu par Ls 3000. Aprēķināt ikgadēju brutto prēmiju, ja vienreizējiem izdevumiem aprēķina 1% no apdrošināšanas summas, inkaso izdevumiem 6% no brutto prēmijas un pārvaldes izdevumiem 3,5% no apdrošināšanas summas.

Pēc (34_2) form. un IV. mirst. tabulas

$$P'_{41}=\frac{1}{0,94}\left[P_{41}+\frac{0,01}{a_{41}}+0,0035\right]=$$

$$=\frac{1}{0,94}[0,02794+0,00062+0,0035]=\frac{100}{94}.0,03206=0,03410;$$

tā tad uz Ls 3000 brutto gada prēmija būs Ls 0,03410.3000 = = **Ls 102,30.**

4. Aplūkotā veidā aprēķinātā brutto prēmija, ja vien mirstības tabula un procentu likme, kā ari lielumi α, β un γ izvēlēti „uzmanīgi", sedz visus izdevumus; parasti visus šos lielumus izvēlas tā, lai varētu vēl cerēt uz zināmu atlikumu — rezervi neparedzētu izdevumu segšanai. Tāpēc tādā veidā aprēķinātu prēmiju mēdz saukt vēl par pietiekošu prēmiju. Ja bez tam vēl grib dabūt līdzekļus kādu citu vajadzību apmierināšanai, piem., īpašu drošības fondu uzkrāšanai un dividendēm par ieguldīto kapitālu, tad pie jau minētiem lielumiem α, β un γ var nākt klāt vēl citi. Minēsim šeit, piem., gadījumu, kad apdrošināšanas iestāde apņemas maksāt ari apdrošinātām personām dividendes. Protams, ka šādā veidā apdrošinātai personai nāksies maksāt augstāku prēmiju nekā gadījumā, ja dividendes nevēlas saņemt, jo dividendes citur rasties nevar, kā vienīgi no palielinātām attiecīgos apmēros prēmijām.

Piemēram ņemsim gadījumu, kur apdrošinātais, sākot ar sesto prēmiju maksājumu līdz prēmiju maksājumu beigām, saņem kā dividendi δ-to daļu no savas brutto prēmijas, kur δ ir īstā daļa. Tad sagaidāmās dividendes tagadējā vērtība izteiksies kā ${}_{5|k-5}a_x.\delta P'_x$; redzējām, ka pietiekošo gada prēmiju tagadējā vērtība izteicas kā $P'_x\,{}_{|k}a_x$, no kuŗām nāca nost inkaso izdevumu tagadējā vērtība $P'_x\,{}_{|k}a_x\beta$; tādā kārtā sakarības vietās, no kuŗas dabūjām (34) formulu, radīsies tāda:

$$P'_x\,{}_{|k}a_x - P'_x\beta\,{}_{|k}a_x - {}_{5|k-5}a_x\delta P'_x = \Pi_x + \alpha + {}_{|n}a_x\gamma$$

$$\text{jeb}\quad P'_x[(1-\beta)\,{}_{|k}a_x - {}_{5|k-5}a_x\delta] = \Pi_x + \alpha + {}_{|n}a_x\gamma,$$

$$\text{no kurienes}\quad P'_x = \frac{\Pi_x + \alpha + {}_{|n}a_x\gamma}{(1-\beta)\,{}_{|k}a_x - {}_{5|k-5}a_x\delta}.$$

Ja pieņemsim, ka $\alpha=0{,}04$, $\beta=0{,}03$, $\gamma=0{,}005$, $\delta=0{,}1$ un $k=n$, tad

$$P'_x = \frac{\Pi_x + 0{,}04 + 0{,}005\,{}_{|n}a_x}{0{,}97\,{}_{|n}a_x - 0{,}1\,{}_{5|n-5}a_x}.$$

5. Praksē bieži lieto vienkāršākus aprēķinu veidus. Tā, piem., dažas biedrības aprēķina brutto gada prēmiju apdrošināšanai nāves gadījumam ar mūža prēmijām maksāt pēc tādas sakarības*)

$$P'_x = P_x\left(1+\frac{1}{20}\right) + \frac{1}{500},$$

un jauktai apdrošināšanai

$$P'_{x\overline{n}|} = P_{x\overline{n}|}\left(1+\frac{1}{20}\right) + \frac{1}{500} + \frac{1}{10}P_x,$$

kur P_x ir netto prēmija apdrošināšanai nāves gadījumam.

Ļoti bieži brutto prēmiju aprēķina vienkārši pēc formulas

$$P'_x = P_x(1+k),$$

kur k ir īstā daļa; ja apdrošināšanas vecums ir 20 g., tad $k=0{,}28$, t. i. $P'_{20} = 1{,}28P_{20}$, un tad ar katru gadu līdz 45 g. pamazinās par 0,003, tā ka $P'_{48} = 1{,}23P_{48}$, un paliek turpmāk pastāvīgs. Līdzīgā kārtā rīkojas ari ar vienreizējām prēmijām, parasti pieņemot, ka

$$\Pi'_x = 1{,}05\Pi_x.$$

6. Prēmijas bieži maksā mazākos laika sprīžos nekā viens gads, piemēram, pa gada ceturtdaļām. Tad attiecīgā maksājuma atrašanai (14) vai (14_1) sakarībās a_x vietā jāņem $4 . a_x^{(4)}$, vispār $m . a_x^{(m)}$, ja maksājumi notiek m reizes gadā.

*) Dr. Loewy. Versicherungsmathematik. 4. Aufl. 1924. p. 74.

Praksē parasti rīkojas tā, ka apdrošināšanas līgumā paredz tikai gada prēmijas, bet atļauj tās maksāt pa daļām, uzskatot tādā gadījumā gada prēmiju kā aizdevumu. Tāpēc mazākās laika vienībās maksājamām gada prēmijas daļām pierēķina zināmu procentu.

25. Apdrošināšana ar prēmiju atmaksām.

1. Apdrošināšanas līgums var būt noslēgts tādā veidā, ka apdrošinātā persona vai tās mantinieki var apdrošināšanas summas ari nesaņemt, kā tas ir, piem., apdrošināšanā uz nodzīvošanu vai atbīdītas apdrošināšanas gadījumos, ja apdrošinātā persona nomirst pirms n gadu notecēšanas vai starplaikā; šādos gadījumos visas izdarītās iemaksas apdrošinātai personai pazūd. Lai tas nenotiktu, tad šādos gadījumos mēdz slēgt apdrošināšanas līgumu ar p r ē m i j u a t m a k s ā m, t. i. apdrošinātai personai atmaksā visas iemaksātās brutto prēmijas (bez augļiem), ja rodas nāves gadījums pirms n gadiem (apdrošināšanā uz nodzīvošanu) vai pirmo m gadu laikā (atliktā apdrošināšana).

2. Pieņemsim, ka gada prēmijas kaut kādam apdrošināšanas veidam ir: Π_x — netto prēmija, Π'_x — brutto prēmija, Π_x^a — netto prēmija ar prēmiju atmaksām, Π'^a_x — brutto prēmija ar prēmiju atmaksām; pieņemsim, ka brutto prēmija izteicas atkarībā no netto prēmijas tā: $\Pi'_x=\Pi_x(1+k)$. Tad Π'^a_x sastādīsies no divām prēmijām: netto prēmijas apdrošināšanai bez prēmiju atmaksām un prēmijas, kura nodrošina x gadus vecai personai nāves gadījumā tuvāko m gadu laikā iemaksātās brutto prēmijas Π'^a_x saņemšanu.

Tāpēc $$\Pi_x^a=\Pi_x+\Pi'^a_x{}_{|m}A_x \quad \text{jeb}$$

$$\Pi_x^a=\Pi_x+\Pi_x^a(1+k)_{|m}A_x, \quad \text{no kurienes}$$

$$\Pi_x^a[1-(1+k)_{|m}A_x]=\Pi_x \quad \text{un}$$

$$\Pi_x^a=\frac{\Pi_x}{1-(1+k)_{|m}A_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

Zinot netto prēmiju, brutto prēmiju var aprēķināt pēc jau zināmiem paņēmieniem.

2. Ja apdrošināšanas līgums slēgts ar gada prēmiju maksām, tad spriežam tā. Pieņemsim, ka gada prēmiju maksājumi ir Ls 1; tad apdrošināšanas iestāde atmaksā, ja apdrošinātā persona nomirst pirmā apdrošināšanas gadā, Ls 1; ja nomirst otrā apdrošināšanas gadā, tad atmaksā Ls 2; ja trešā, tad atmaksā Ls 3 u. t. t., un ja beidzamā, tad m latus; visu šo maksājumu tagadējā vērtība izteiksies tā

$$\frac{d_x}{l_x}v+\frac{2d_{x+1}}{l_x}v^2+\frac{3d_{x+2}}{l_x}v^3+\ldots+\frac{md_{x+m-1}}{l_x}v^m;$$

šo izteiksmi, kā zināms, viegli pārveidot tādā:

$$\frac{C_x+2C_{x+1}+3C_{x+2}+\ldots+mC_{x+m-1}}{D_x};$$

skaitītāju var pārveidot tā:

$$+\left|\begin{array}{rl} C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\ldots\ldots+C_{x+m-1} & =M_x \qquad -M_{x+m} \\ C_{x+1}+C_{x+2}+\ldots\ldots+C_{x+m-1} & =M_{x+1} \quad -M_{x+m} \\ C_{x+2}+\ldots\ldots+C_{x+m-1} & =M_{x+2} \quad -M_{x+m} \\ \ldots\ldots\ldots & \\ C_{x+m-1} & =M_{x+m-1}-M_{x+m} \end{array}\right.$$

$C_x+2C_{x+1}+3C_{x+2}+\ldots+mC_{x+m-1}=M_x+M_{x+1}+\ldots+$ $+M_{x+m-1}-mM_{x+m}$; summu $M_x+M_{x+1}+\ldots+M_{x+m-1}+\ldots$ (līdz tabulas beigām) apzīmēsim ar R_x; to ievieto tabulās līdz ar skaitļiem C_x un M_x; tad $M_x+M_{x+1}+\ldots+M_{x+m-1}=$ $=R_x-R_{x+m}$; tādā kārtā visu iemaksāto prēmiju tagadējā vērtība jeb vienreizēja prēmija, ar kuŗu var iegūt tiesības saņemt pirmā miršanas gadā Ls 1, otrā Ls 2 u. t. t., izteiksies tā:

$$\frac{R_x-R_{x+m}-mM_{x+m}}{D_x};$$

gada prēmiju, kas maksājama šos m gadus, atradīsim pēc pazīstamā paņēmiena, dalot vienreizēju prēmiju ar $_{|m}a_x$; dabūsim

$$\frac{R_x-R_{x+m}-mM_{x+m}}{N_x-N_{x+m}};$$

tā tad tāda ir gada prēmija, lai iegūtu tiesību saņemt, ja apdrošinātā persona nomirst tuvāko m gadu laikā, pirmā miršanas gadā Ls 1, otrā — Ls 2 u. t. t; lai saņemamās summas būtu P'^a_x, tad dabūtā izteiksme jāreizina ar P'^a_x;

$$P^a_x = P_x + P'^a_x \cdot \frac{R_x - R_{x+m} - mM_{x+m}}{N_x - N_{x+m}};$$

tā kā $P'^a_x = P^a_x(1+k)$, tad

$$P^a_x - P^a_x(1+k)\frac{R_x - R_{x+m} - mM_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} = P_x, \text{ no kurienes}$$

$$P^a_x = \frac{P_x}{1 - \frac{(1+k)(R_x - R_{x+m} - mM_{x+m})}{N_x - N_{x+m}}} \quad \ldots \quad (35_1)$$

Kā zināms, skaitļus M_x un līdz ar to skaitļus R_x, ja vajadzīgs, var izteikt ar skaitļiem N_x un S_x. Tiešām, tā kā $M_x = D_x - dN_x$, tad $M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots - d(N_x + N_{x+1} + \ldots) = N_x - dS_x$; tāpēc $R_x - R_{x+m} - mM_{x+m} = N_x - N_{x+m} - d(S_x - S_{x+m}) - m(D_{x+m} - dN_{x+m}) = N_x - N_{x+m} - mD_{x+m} - d(S_x - S_{x+m} - mN_{x+m})$. Sakarā ar to

$$P^a_x = \frac{P_x}{1 - \frac{(1+k)[N_x - N_{x+m} - mD_{x+m} - d(S_x - S_{x+m} - mN_{x+m})]}{N_x - N_{x+m}}}.$$

Šo izteiksmi var lietot gadījumos, kur tabulā nav skaitļu M_x un R_x.

3. Speciālos gadījumos formula iznāk mazliet vienkāršāka. Piem., atbīdītai apdrošināšanai nāves gadījumam ar ikgadēju prēmiju maksām visu mūžu varam spriest tā: visu netto prēmiju P^a_x tagadējā vērtība ir $P^a_x a_x$; visu vienu latu lielu iemaksāto prēmiju tagadējā vērtība, kā jau redzējām, ir

$$\frac{R_x - R_{x+m} - mM_{x+m}}{D_x};$$

$$\text{tāpēc } P^a_x a_x = {}_{m|}A_x + P^a_x(1+k) \cdot \frac{R_x - R_{x+m} - mM_{x+m}}{D_x},$$

$$\text{no kurienes } P^a_x = \frac{{}_{m|}A_x}{a_x - \frac{(1+k)(R_x - R_{x+m} - mM_{x+m})}{D_x}}, \text{ un beidzot}$$

$$P^a_x = \frac{M_{x+m}}{N_x - (1+k)[R_x - R_{x+m} - mM_{x+m}]} \quad . \; . \; (35_2).$$

P i e m ē r s. 36 gadus veca persona noslēdz apdrošināšanas līgumu par Ls 10 000 pēc atbīdītas nāves apdrošināšanas veida ar ikgadēju prēmiju maksām visu mūžu; starplaiks 10 g. Aprēķināt ikgadēju prēmiju, ja pārvaldes izdevumiem netto prēmiju palielina par 25%.

Tā kā šeit $k=0,25$, tad pēc (35_2) form. un V. mirst. tabulas

$$P^a_{36}=\frac{M_{46}}{N_{36}-1,25(R_{36}-R_{46}-10M_{46})}=$$

$$=\frac{42\,787,97}{2\,703\,019,5-1,25(1266\,669-768\,769,6-427\,879,7)}=0,01712;$$

$$P'^a_{36}=0,01712\,.\,1,25=0,021\,40;$$

uz Ls 10 000 ikgadējā prēmija būs **Ls 214.**

Vingrinājumi.

1. 32 gadus veca persona noslēdz uz 25 gadiem apdrošināšanas līgumu uz nodzīvošanu par Ls 10 000. Aprēķināt 1) vienreizēju netto un brutto prēmiju, ja pēdējo dabū, pieskaitot netto prēmijai 10% un 2) ar kādu procentu likmi būtu rentējies kapitāls, ja apdrošinātā persona nodzīvotu 25 gadus.

2. 40 gadus veca persona, kas loterijā vinnējusi Ls 4000, slēdz apdrošināšanas līgumu uz nodzīvošanu, lai tā varētu pēc 20 gadiem saņemt zināmu summu. Aprēķināt 1) kādu summu varēs saņemt minētā persona, ja pie netto prēmijas pārvaldes izdevumiem pieskaita 12%, un 2) kāda summa būtu sakrājusies 20 gadu laikā, ja minētā persona noguldītu naudu uz augļu augļiem ar procentu likmi 5.

3. 62 gadus veca persona noslēdz mūža postnumerando rentes apdrošināšanas līgumu, pēc kuŗa tā var saņemt ikgadus Ls 2000 lielu renti. Aprēķināt vienreizēju netto un brutto prēmiju, ja aprēķinus izdara pēc IV. mirst. tab. un tāpēc netto prēmijai bez 5% palielinājuma, pieskaita vēl 7,5% drošības piedevu.

4. Atraitne 54 g. vecumā iemaksā apdrošināšanas iestādei Ls 10 000, lai varētu saņemt ikgadēju postnumerando mūža renti. Aprēķināt 1) rentes lielumu, ja iestāde netto prēmiju pārvaldes izdevumu segšanai palielina par 10%; 2) cik ienestu kapitāls gadā, ja to noguldītu uz augļiem par 4%; 3) ar kādu procentu likmi ir rentējies kapitāls, ja apdrošinātā persona nomirst 86 g. vecumā.

5. Kāda firma grib apdrošināt savam 35 g. vecam ierēdnim vecuma pensiju Ls 3000 apmērā, kas maksājama, sākot ar 65. mūža gadu. Aprēķināt vienreizēju netto un brutto prēmiju, ja rēķina 10% pārvaldes izdevumiem.

6. 38 gadus veca persona iemaksā savu Ls 8000 lielu mantojumu apdrošināšanas iestādei tādā nolūkā, lai varētu saņemt, sākot ar 60. mūža gadu ikgadēju mūža renti. Aprēķināt rentes lielumu, ja netto prēmijai pierēķina 12% pārvaldes izdevumu.

7. Kādai 42 gadus vecai personai pēc testamenta novēlēta, sākot ar 60. mūža gadu, ikgadējā, Ls 2500 liela mūža rente. Minētā persona apdrošina sev tādā pašā lielumā postnumerando gada renti līdz tam laikam, kamēr sāks saņemt testamentā novēlēto renti. Aprēķināt, cik liela vienreizēja prēmija jāmaksā par šo laika renti, ja pārvaldes izdevumiem pierēķina 8%.

8. Pēc iepriekšējā uzdevuma datiem aprēķināt vienreizēju prēmiju, ja rente, ko grib apdrošināt minētā persona, sāktos pēc 5 gadiem.

9. 35 gadus vecai personai jāmaksā pēc apdrošināšanas līguma visu mūžu Ls 200 liela gada prēmija praenumerando. Aprēķināt, ar kādu vienreizēju prēmiju var atvietot šos maksājumus, ja netto prēmijai pieskaita 10% pārvaldes izdevumu.

10. 40 gadus veca persona maksā par apdrošināšanu vienreizēji Ls 3000. Aprēķināt, kāda tai būtu jāmaksā gada prēmija, ko tā maksātu tik ilgi, kamēr dzīvo, bet ne ilgāk par 20 gadiem, ja pārvaldes izdevumiem pierēķina 12% pie netto prēmijas.

11. 35 gadus veca persona noslēdz apdrošināšanas līgumu uz nodzīvošanu par Ls 8000, kuŗus tā saņems, ja nodzīvos 25 gadus. Aprēķināt 1) ikgadēju, pa visu apdrošināšanas laiku maksājamu netto prēmiju; 2) summu, kas būtu sakrājusies 25 gadu laikā no netto prēmiju maksājumiem, rēķinot 4%.

12. 30 g. veca persona apdrošina sev vecuma pensiju tā, lai tai no 65. mūža gada maksātu Ls 3000 lielu gada renti, kamēr viņa dzīvo. Prēmijas maksājamas pa visu starplaiku. Aprēķināt gada prēmiju, ja pārvaldes izdevumiem rēķina 10% no brutto prēmijas un bez tam vēl palielina brutto prēmiju par 5% drošības piedevām.

13. 30 gadus vecs tirgotājs maksā katru gadu apdrošināšanas iestādei līdz 50 gadu vecumam Ls 300, lai pēc šī vecuma sasniegšanas varētu saņemt no apdrošināšanas iestādes kādu summu. Aprēķināt 1) cik lielu summu varēs saņemt tirgotājs, ja apdrošināšanas iestāde pieskaita netto prēmijai 15% pārvaldes izdevumiem; 2) kāda summa būtu sakrājusies no minētām iemaksām 25 gadu laikā, ja rēķinātu 3,5%.

14. 60 gadus veca persona apdrošina mūža renti Ls 1200 gadā, kas maksājama ceturtdaļām gada postnumerando. Aprēķināt 1) vienreizēju prēmiju, ja netto prēmijai pieskaita 8%; 2) vienreizēju prēmiju, ja netto prēmijai pieskaita 10%, bet renti maksā ik mēnešus praenumerando.

15. Aprēķināt vienreizēju prēmiju, kas jāmaksā 45 gadus vecai personai, ja tā apdrošina sev postnumerando mūža renti, kuras pirmais maksājums ir Ls 2000 liels, un tad tā ik pēc 5 gadiem pieaug par Ls 100, kamēr sasniedz Ls 3000 un tad paliek pastāvīga līdz mūža beigām. Pārvaldes izdevumiem aprēķina 10% no netto prēmijas.

16. 36 gadus veca persona apdrošina dzīvību nāves gadījumam par Ls 6000. Aprēķināt 1) vienreizēju netto prēmiju; 2) ikgadēju netto mūža prēmiju un 3) ikgadēju prēmiju, kas maksājama ne ilgāk par 15 gadiem.

17. 32 gadus veca persona noslēdz apdrošināšanas līgumu, pēc kura tā iemaksā Ls 4000 apdrošināšanai nāves gadījumiem. Pēc 5 gadiem tā grib vēl iemaksāt Ls 1000. Aprēķināt, kādu summu varēs saņemt pēc šīs personas nāves, ja tā nomirst 40 g. vecumā un apdrošināšanas iestāde pierēķina netto prēmijai 12% pārvaldes izdevumiem.

18. 38 gadus veca persona maksā ikgadēju, ne vairāk par 20 gadiem ilgstošu prēmiju, Ls 250 lielu, pēc apdrošināšanas līguma nāves gadījumam. Aprēķināt, kādu summu varēs saņemt pēc šīs personas nāves, ja pārvaldes izdevumiem pierēķina 20% pie netto prēmijas.

19. 35 gadus veca persona apdrošina dzīvību nāves gadījumam tā, ka mantinieki saņem Ls 3000, ja apdrošinātā persona nomirst ne jaunāka par 40 gadiem. Aprēķināt ikgadēju mūža prēmiju, ja pārvaldes izdevumiem pierēķina 24% pie netto prēmijas.

20. 25 gadus vecas personas dzīvība apdrošināta uz 10 gadiem par Ls 20 000. Aprēķināt gada prēmiju, kas maksājama pa visu apdrošināšanas laiku, ja pārvaldes izdevumiem pierēķina 25% pie netto prēmijas.

21. Persona, kas dzimusi 1900. g. 3. sept., noslēdz 1926. g. 9. augustā jauktas apdrošināšanas līgumu par Ls 5000 uz 25 gadiem. Aprēķināt ikgadējo prēmiju, kas maksājama pa visu apdrošināšanas laiku, ja pārvaldes izdevumiem pierēķina 22% pie netto prēmijas.

22. 30 gadus vecs tēvs apdrošina savai 1 gadu vecai meitiņai kapitālu, Ls 5000 lielu, kas izmaksājams pēc 20 gadiem neatkarīgi no tam, vai tā šinī laikā dzīvotu vai ne. Prēmijas maksā ik gadus pa visu apdrošināšanas laiku, pie kam prēmiju maksas izbeidzas ar tēva nāvi. Pārvaldes izdevumiem pierēķina pie netto prēmijas 20%. Aprēķināt ikgadēju prēmiju.

23. 32 gadus veca persona noslēdz uz 25 gadu jauktas apdrošināšanas līgumu par Ls 15 000, ar ikgadējām prēmiju maksām 15 gadu laikā. Aprēķināt ikgadēju prēmiju, ja netto prēmijai pieskaita 28% pārvaldes izdevumiem.

24. 42 gadus vecs vīrs un 38 gadus veca sieva apdrošina atraitnes pensiju, maksājot ikgadēju mūža prēmiju, Ls 300 lielu. Aprēķināt apdrošināmās rentes lielumu, ja pārvaldes izdevumiem pie netto prēmijas pierēķina 12%.

25. Viena 41 g. veca un otra 38 g. veca persona noslēdz saistītu dzīvības apdrošināšanu nāves gadījumam par Ls 4000. Aprēķināt ikgadēju mūža prēmiju, ja pārvaldes izdevumiem pie netto prēmijas pierēķina 24%.

26. 38 g. vecais vīrs apdrošina savai 26 g. vecai sievai savas nāves gadījumā Ls 15 000 lielu kapitālu. Aprēķināt 1) vienreizēju netto prēmiju; 2) ikgadēju mūža prēmiju, ja netto prēmijai pierēķina 20% pārvaldes izdevumiem.

27. 25 gadus veca persona noslēdz dzīvības apdrošināšanas līgumu nāves gadījumam par Ls 30 000. Aprēķināt 1) vienreizēju, 2) ikgadēju prēmiju, kas maksājama visu mūžu, ja vienreizējiem izdevumiem aprēķina 35‰ no apdrošināšanas summas, inkaso izdevumiem 3% no brutto prēmijas un ilgstošiem izdevumiem 2‰ no apdrošināšanas summas; 3) par cik procentiem palielinās netto prēmija.

28. Iepriekšējā uzdevuma dati, tikai apdrošināšana slēgta uz 15 gadiem un prēmijas maksā pa visu apdrošināšanas laiku. Aprēķināt vienreizēju un ikgadēju prēmiju.

29. 35 gadus veca persona noslēdz jauktās apdrošināšanas līgumu uz 20 gadiem par Ls 12 000. Prēmijas maksā ik gadus pa visu apdrošināšanas laiku. Aprēķināt 1) ikgadēju prēmiju, ja pārvaldes izdevumi tie paši, kas 27. uzdevumā; 2) par cik procentiem palielinās netto prēmija.

30. 40 gadus veca persona apdrošina uz 10 gadiem atbīdītu, Ls 2000 lielu gada renti ar prēmiju atmaksām. Aprēķināt 1) vienreizēju prēmiju; 2) ikgadēju prēmiju, kas maksājama 10 gadu laikā, ja pārvaldes izdevumiem pierēķina 10% no netto prēmijas.

31. 36 gadus veca persona apdrošina dzīvību nāves gadījumam par Ls 6000 ar nosacījumu, ka šī summa izmaksājama tad, ja apdrošinātā persona nenomirst tuvāko 10 gadu laikā; pretējā gadījumā izmaksājamas iemaksātās prēmijas. Aprēķināt ikgadēju prēmiju, ja pārvaldes izdevumiem pierēķina pie netto prēmijas 20%.

Piektā nodaļa.

VII. Prēmiju rezerves (polises vērtības) aprēķināšana.

26. Netto prēmiju metode.

1. Apdrošināšanas iestādei, noslēdzot darbības gadu, jābūt skaidrībā par to, kādas summas ierakstāmas aktīvā un kādas pasīvā, jābūt skaidrībā par to, kādas summas jātur gatavībā, lai varētu izpildīt apdrošināšanas līgumus, un kādas var uzlūkot kā peļņu. Pieņemsim, ka kāda persona noslēdz apdrošināšanu nāves gadījumam par Ls 3000, maksājot vienreizēju prēmiju Ls 1004,85. Iemaksātā prēmija līdz gada darbības beigām pieaugs par attiecīgiem augļiem un pārvērtīsies, pieņemsim, Ls 1020 lielā summā. Apdrošinātā persona pirmā gadā nenomirst. Kā lai uzlūko uzkrāto summu Ls 1020? Kā peļņu? Taču ne: lai gan nav bijis jāizmaksā pēc šī līguma, toties izmaksas bijušas pēc citiem līdzīga veida apdrošināšanas līgumiem. Katrā ziņā viena šīs summas daļa rezervējama paredzamām turpmākām izmaksām; varbūt vienu daļu varētu uzlūkot kā peļņu, ja mirstība būtu bijusi mazāka nekā paredzēts tabulās vai ari faktiskā procentu likme augstāka nekā paredzēts aprēķinos.

No otras puses var gadīties, ka persona, kas noslēgusi apdrošināšanas līgumu, gribētu aiz kaut kādiem iemesliem, piem., ja vairs apdrošinātā persona nespēj maksāt gada prēmijas, līgumu izbeigt, partraukt; rodas jautājums, kā tad aprēķināties. Būtu nepareizi — to apdrošināšanas iestādes ari nedara — nekā neatlīdzināt par izdarītām iemaksām. Lai nu varētu spriest, cik lielos apmēros atlīdzināt par izdarītiem prēmiju maksājumiem, jāzina polises vērtība. Polises vērtību no svara zināt ari tad, ja pret to kā drošību grib izdarīt aizņēmumu. Ka polisei ir zināma vērtība, pats par sevi saprotams, jo ar katru polisi parasti saistās zināma izmaksa no apdrošināšanas iestādes puses.

Lai par visām šīm lietām būtu skaidrība, bet it īpaši skaidrība par to, kādas summas apdrošināšanas iestādei jātur rezervē, lai varētu pildīt visus savus pienākumus pret apdrošinātām personām, aplūkosim piemēram kādu apdrošināšanas veidu. Pieņemsim, ka visas mirstības tabulā paredzētās personas apdrošina dzīvību nāves gadījumiem uz visu mūžu par Ls 1 lielu summu ar vienreizējām prēmiju maksām gada sākumā. Tad apdrošināšanas iestāde ieņems no prēmijām pavisam $l_x A_x$; līdz gada beigām šī summa pieaugs Ls $l_x A_x r$ lielā summā; no tās jāizmaksā par pirmā gadā mirušām d_x personām Ls d_x; tā tad gada beigās paliks Ls $(A_x l_x r - d_x)$; šī summa ir tā saucamā prēmiju rezerve pirmā gada beigās, jo prēmijas tā aprēķinātas, lai netto prēmiju maksas segtu visas pēc tabulas paredzamās izmaksas. Līdz otra gada beigām summa Ls $(A_x l_x r - d_x)$ būs pārvērtusies summā Ls $(A_x l_x r - d_x) r =$ $=$Ls $A_x l_x r^2 - d_x r$ un no tās būs jāizmaksā par visām d_{x+1} mirušām personām Ls d_{x+1}; tāpēc otra gada beigās prēmiju rezerve ir $A_x l_x r^2 - d_x r - d_{x+1}$. Spriežot līdzīgā kārtā, atradīsim, ka pēc t gadiem prēmiju rezerve šinī gadījumā izteiksies tā:

$$A_x l_x r^t - (d_x r^{t-1} + d_{x+1} r^{t-2} + \ldots + d_{x+t-1}).$$

Viegli redzēt, ka šī prēmiju rezerve rodas tā, ka visas līdz t-tā gada beigām izdarītās izmaksas, reducētas uz šo brīdi, atņem no ieņemtiem un uz šo pašu brīdi reducētiem prēmiju maksājumiem.

Tāpat dabūtu prēmiju rezervi citos apdrošināšanas veidos, piem., praenumerando mūža rentei:

$$a_x l_x r^t - (l_x r^t + l_{x+1} r^{t-1} + \ldots + l_{x+t-1} r).$$

Tā tad var teikt, ka prēmiju rezerve sastādās no visām apdrošināšanas iestādes netto prēmiju iemaksām, reducētām uz prēmiju rezerves aprēķināšanas brīdi, bez visām līdz tam brīdim izdarītām izmaksām.

Tā kā īstenībā visas tabulā paredzētās personas līgumu neslēdz, tad dabūtās prēmiju rezerves attiecina uz ikvienu, tanī brīdī pie dzīvības esošu personu, un tad, izejot no vienas personas prēmiju rezerves, ko biežāk sauc **par polises vērtību,** aprēķina faktiski apdrošināto personu prēmiju rezervi.

Tā tad polises vērtības atrašanai nāksies iepriekšējās izteiksmes dalīt ar l_{x+t}, jo tik daudz tanī brībī ir dzīvo personu.

Polises vērtību apzīmēsim ar ${}_tV_x$, kur x ir apdrošinātās personas vecums līguma slēgšanas brīdī un t ir gadu skaits, kas pagājis no apdrošināšanas brīža, liekot, ja vajadzīgs, iekavās tā apdrošināšanas veidu simbolu, uz kuŗu zīmējas polises vērtība.

Tāpēc

$$ {}_tV_x = \frac{A_x\, l_x r^t - (d_x r^{t-1} + d_{x+1} r^{t-2} + \ldots + d_{x+t-1})}{l_{x+t}} = $$

$$ = \frac{A_x\, l_x r^t}{l_{x+t}} - \frac{d_x r^{t-1} + \ldots + d_{x+t-1}}{l_{x+1}}; $$

reizinot un dalot labās puses locekļus ar v^{x+t}, dabūsim, ka

$$ {}_tV_x = \frac{A_x\, l_x v^{x+t} v^{-t}}{l_{x+t} v^{x+t}} - \frac{d_x v^{-(t-1)} v^{x+t} + \ldots + d_{x+t-1} v^{x+t}}{l_{x+t} v^{x+t}} \text{ un} $$

$$ {}_tV_x = \frac{A_x D_x}{D_{x+t}} - \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+t-1}}{D_{x+t}} = \frac{M_x \cdot D_x}{D_x \cdot D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} = $$

$$ = \frac{M_x}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{D_{x+t}} + \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} = A_{x+t}; $$

tā tad ${}_t\mathcal{V}[\mathcal{A}_x] = \mathcal{A}_{x+t}$.

Līdzīgā kārtā dabūsim, ka

$$ {}_tV[\mathrm{a}_x] = \frac{\mathrm{a}_x\, l_x v^{-t}}{l_{x+t}} - \frac{l_x v^{-t} + l_{x+1} v^{-(t-1)} + \ldots + l_{x+t-1} v^{-1}}{l_{x+t}}; $$

reizinot un dalot labās puses locekļus ar v^{x+t}, nonākam pie sakarības

$$ {}_tV[\mathrm{a}_x] = \frac{\mathrm{a}_x D_x}{D_{x+t}} - \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+t}} = \frac{N_x}{D_{x+t}} - \frac{N_x}{D_{x+t}} + \frac{N_{x+n}}{D_{x+t}} = $$

$$ = \frac{N_{x+n}}{D_{x+t}} = \mathrm{a}_{x+t}; $$

tā tad ${}_t\mathcal{V}[\mathrm{a}_x] = \mathrm{a}_{x+t}$.

Ko rāda dabūtās polises vērtības izteikmes? A_{x+t} un a_{x+t} ir vienreizējas prēmijas, kas jāmaksā $x+t$ gadus vecai personai, lai iegūtu to pašu tiesību, ko ieguvusi x gadus veca persona; bet tā kā vienreizēja prēmija izteic visus apdrošināšanas iestādes turpmākos pienākumus, jo ar tādu nosacījumu šīs prēmijas tiek aprēķinātas, tad nākam pie slēdziena, ka vienreizēju prēmiju gadījumos polises vērtība vai prēmiju rezerve izteicas ar vienreizēju prēmiju attiecīga vecuma personai.

Tā tad vispār

$$ {}_t\nu[\Pi_x]=\Pi_{x+t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36) $$

kur Π_x un Π_{x+t} ir kaut kāda apdrošināšanas veida vienreizējas prēmijas x un $x+t$ gadus vecai personai uz vienu latu lielu apdrošināšanas summu. Ja apdrošināšanas summa ir K latu, tad polises vērtība būs K reizes lielāka.

2. Kā tad izteiksies polises vērtība, ja maksā gadskārtējas prēmijas? Ņemsim to pašu apdrošināšanas veidu — apdrošināšanu nāves gadījumam ar gadskārtējām prēmiju maksām visu mūžu? Kā zināms,

$$ P_x=\frac{A_x}{\mathrm{a}_x}=\frac{M_x}{N_x} \cdot $$

Spriedīsim tāpat, kā vienreizējas prēmijas gadījumā. Apdrošināšanas iestāde pirmā gadā saņems Ls $P_x l_x$, kas līdz gada beigām pārvērtīsies par Ls $P_x l_x r$, un izdos pirmā gada beigās Ls d_x; tādā kārtā prēmiju rezerve pirmā gada beigās izteiksies kā Ls $P_x l_x r - d_x$; otrā gada sākumā nāks klāt Ls $P_x l_{x+1}$, tā tad līdz gada beigām uzkrāsies summa $(P_x l_x r - d_x + P_x l_{x+1})\,r = P_x\, l_x r^2 + P_x l_{x+1} r - d_x r$, no kuŗas iet izmaksām d_{x+1}; tā tad otra gada beigās prēmiju rezerve būs

$$ P_x\, l_x r^2 + P_x\, l_{x+1} r - d_x r - d_{x+1}\,; $$

spriežot tāpat tālāk, atradīsim, ka pēc t gadiem prēmiju rezerve būs

$$ P_x\, l_x\, r^t + P_x l_{x+1} r^{t-1} + \ldots + P_x\, l_{x+t-1} r - (d_x r^{t-1} + \ldots + d_{x+t-1}) \cdot $$

Tā tad atkal redzam, ka prēmiju rezerve izteicas ar visiem līdz prēmiju rezerves brīdim ienākušiem prēmiju maksājumiem, reducētiem uz minēto brīdi, bez izdarītām līdz tam laikam izmaksām, reducētām uz to pašu brīdi. Dalot dabūto izteiksmi ar tanī brīdī visu dzīvo personu skaitu l_{x+t}, redzam, ka polises vērtība izteiksies tā:

$$ P_x \cdot \frac{l_x r^t + l_{x+1} r^{t-1} + \ldots + l_{x+t-1} r}{l_{x+t}} - \frac{d_x\, r^{t-1} + \ldots + d_{x+t-1}}{l_{x+t}}\,; $$

izpildot parastos pārveidojumus (dalot un reizinot labo pusi ar v^{x+t}), nonākam pie izteiksmes

$$P_x \cdot \frac{D_x+D_{x+1}+\cdots+D_{x+t-1}}{D_{x+t}} - \frac{C_x+\cdots+C_{x+t-1}}{D_{x+t}} =$$

$$= P_x \cdot \frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}} = \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_x}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} -$$

$$-\frac{M_x}{D_{x+t}} + \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} = A_{x+t} - P_x \mathrm{a}_{x+t}$$

tā tad

$$_tV[P(A_x)] = A_{x+t} - P_x \mathrm{a}_{x+t}$$

Sī sakarība rāda, ka polises vērtība izteicas ar visu apdrošināšanas iestādes pienākumu (paredzamo izmaksu tagadējā vērtība), kuŗu izteic vienreizēja prēmija A_{x+t}, un paredzamo ienākumu (prēmiju maksas, reducētas uz aprēķinu brīdi) starpību. Tas saprotams jau a priori, jo apdrošināšanas iestādei taisni tik daudz jārezervē paredzamām izmaksām, cik ir liela paredzamo izmaksu tagadējā vērtība, pamazināta par paredzamo prēmiju maksājumu ieņēmumu) tagadējo vērtību.

Tā tad vispārējā veidā polises vērtība kaut kādam apdrošināšanas veidam izteiksies tā

$$_tV_x = \Pi_{x+t} - P_{x} \cdot {}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t} \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

ja prēmiju maksājumi neilgst visu mūžu, bet tikai n gadus, no kuŗiem vēl palicis $n-t$ gadu prēmiju maksām;

vai

$$_tV_x = \Pi_{x+t} - P_x \mathrm{a}_{x+t} \quad \ldots \ldots \quad (37_1)$$

ja prēmiju maksas ilgst visu mūžu.

Viegli redzēt, ka (36) formula ietilpst (37) formulā, jo ja jau ir maksāta vienreizēja prēmija, tad gada prēmija ir nulle, t. i. $P_x=0$ un (37) formula pāriet (36) formulā

$$_tV_x = \Pi_{x+t} \,.$$

Tā tad turpmākiem prēmiju rezerves vai polises vērtības aprēķiniem varam lietot formulu

$$_tV_x = \Pi_{x+t} - P_{x} \cdot {}_{|n-t}\mathrm{a}_{x+t} \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

kur Π_{x+t} ir vienreizēja prēmija $x+t$ gadus vecai personai attiecīgā apdrošināšanas veidā, P_x ir ikgadēja prēmija x gadus vecai personai un $_{|n-t}a_{x+t}$ laika rentes tagadējā vērtība $x-t$ gadus vecai personai $n-t$ gadu laikā; ja prēmijas maksā visu mūžu, tad zīmīte $_{|n-t}$ atkrīt; $_{|n-t}a_{x+t}$ jāpieņem par nulli, ja $t \geqslant n$, jo tad vairs faktiski prēmiju turpmāk nebūs.

3. Prēmiju rezerves aprēķināšanai izgājām no operācijām, kas izdarītas no līguma slēgšanas dienas līdz t - tā gada beigām, zīmējoties uz prēmiju iemaksām un apdrošināšanas summas izmaksām, t. i. raudzījāmies uz to, kas bijis; tāpēc šādu paņēmienu sauc par retrospektivo metodi. Redzējām, ka izteiksme, ko tādā kārtā dabūjām, prēmiju rezerves vai polises vērtības aprēķināšanai, rādīja tanī pašā laikā ar nākotnes operāciju plānu: kādi ir nākotnē paredzamie izdevumi un ieņēmumi. Izejot no paredzamiem izdevumiem un ienākumiem, ari varētu aprēķināt polises vērtību, pie kam, protams dabūtu to pašu izteiksmi. Piem., lai atrastu $_tV(A_x)$, spriežam tā: apdrošināšanas iestādei būs jāizmaksā $(t-1)$-ā gada beigās par visām d_{x+t} mirušām personām Ls d_{x+t}, tad pēc diviem gadiem Ls d_{x+t+1} u. t. t.; tāpēc visi paredzamie izdevumi, reducēti uz aprēķinu brīdi, izteiksies tā:

$$_tV(A_x)=\frac{d_{x+t}v+d_{x+t+1}v^2+\ldots}{l_{x+t}}=\frac{C_{x+t}+C_{x+t+1}+\ldots}{D_{x+t}}=$$
$$=\frac{M_{x+t}}{D_{x+t}}=A_{x+t}.$$

Šādu polises vērtības aprēķinu veidu sauc par prospektīvo metodi. Protams, ka abas metodes dod vienu un to pašu rezultātu, kuŗu vispārējā veidā izteic (37) formula. Tāpēc atsevišķiem apdrošināšanas veidiem vairs nav par jaunu katrā gadījumā jālieto ne retrospektīvā, ne prospektīvā metode, bet (37) formulā jāieliek attiecīgie lielumi.

4. Parādīsim tagad, kā atsevišķos apdrošināšanas veidos izteiksies polises vērtība pēc (37) formulas.

Mūža rentes.

$$_tV(a_x)=a_{x+t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

$$_tV(\alpha_x)=\alpha_{x+t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38').$$

Atbīdītās mūža rentes:

1) Vienreizējā prēmija.

$$a)\ t<m;\ _tV(_{m|}a_x)=_{m-t|}a_{x+t}=\frac{\mathfrak{N}_{x+m}}{\mathfrak{D}_{x+t}} \quad \ldots \quad (39).$$

$$b)\ t\geqslant m;\ _tV(_{m|}a_x)=a_{x+t} \quad \ldots\ldots \quad (39_1).$$

2) Ikgadējās prēmijas.

a) $t<m$; ${}_tV[P({}_{m|}a_x)] = {}_{m-t|}a_{x+t} - P_{x|m-t}a_{x+t} =$

$$= \frac{N_{x+m}}{D_{x+t}} - \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+m}}{D_{x+t}};$$

ņemsim $\frac{N_{x+m}}{D_{x+t}}$ aiz iekavām un iekavās palikušos locekļus atņemsim, tad

$$ {}_tV[P({}_{m|}a_x)] = \frac{N_{x+m}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+m} - N_{x+t} + N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} =$$

$$= \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}};$$

$$ {}_t\mathcal{V}[\mathcal{P}({}_{m|}a_x)] = \mathcal{P}_x \cdot \frac{\mathcal{N}_x - \mathcal{N}_{x+t}}{\mathcal{D}_{x+t}} \quad \ldots\ldots (40).$$

$$ t \geqslant m;\ {}_t\mathcal{V}[\mathcal{P}({}_{m|}a_x)] = a_{x+t} \quad \ldots\ldots (40_1).$$

Laika rentes.

$$ {}_tV({}_{|n}a_x) = {}_{|n-t}a_{x+t} = \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \quad \ldots\ldots (41).$$

Apdrošināšana uz nodzīvošanu.

1) Vienreizējas prēmijas.

$$ {}_t\mathcal{V}[{}_n\mathcal{E}_x] = {}_{n-t}\mathcal{E}_{x+t} = \frac{\mathcal{D}_{x+n}}{\mathcal{D}_{x+t}} \quad \ldots\ldots (42).$$

2) Gadskārtējas prēmijas.

$$ {}_tV[P({}_nE_x)] = {}_{n-t}E_{x+t} - P_x \cdot {}_{|n-t}a_{n+t} =$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} =$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+n} - N_{x+t} + N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} =$$

$$= \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}} = P_x \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}};$$

$$ {}_t\mathcal{V}[\mathcal{P}({}_n\mathcal{E}_x)] = \mathcal{P}_x \frac{\mathcal{N}_x - \mathcal{N}_{x+t}}{\mathcal{D}_{x+t}} \quad \ldots\ldots (42_1).$$

Apdrošināšana nāves gadījumam uz visu mūžu.

1) Vienreizēja prēmija.

$$ {}_t\mathcal{V}(\mathcal{A}_x) = \mathcal{A}_{x+t} = 1 - d a_{x+t} \quad \ldots\ldots (43).$$

2)Gadskārtējas, visu mūžu maksājamas prēmijas.

$${}_tV[P(A_x)]=A_{x+t}-P_x a_{x+t} \quad \ldots\ldots (44),$$

jeb $${}_tV[P(A_x)]=1-da_{x+t}-\left(\frac{1}{a_x}-d\right)a_{x+t}=1-\frac{a_{x+t}}{a_x} \quad . \ (44_1).$$

3) Gadskārtējas, ne vairāk par n gadiem ilgstošas prēmijas.

$$a)\ t<n;\ {}_tV[P(A_x)]=A_{x+t}-P_{x.}\,{}_{|n-t}a_{x+t}=$$

$$=1-da_{x+t}-P_x\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}=1-da_{x+t}-P_x\left(a_{x+t}-\frac{N_{x+n}}{D_{x+t}}\right)=$$

$$=1-(P_x+d)a_{x+t}+P_x\frac{N_{x+n}}{D_{x+t}} \quad \ldots\ldots (45);$$

$$b)\ t\geqslant n;\ {}_tV[P(A_x)]=A_{x+t}=1-da_{x+t} \quad .\ .\ (45_1).$$

Atbīdīta dzīvības apdrošināšanas nāves gadījumam.

1) Vienreizēja prēmija.

$$a)\ t<m;\ {}_tV({}_{m|}A_x)={}_{m-t|}A_{x+t}=\frac{M_{x+m}}{D_{x+t}} \quad .\ .\ (46).$$

$$b)\ t\geqslant m;\ {}_tV({}_{m|}A_x)=A_{x+t}=1-da_{x+t} \quad .\ .\ .\ (46_1).$$

Gadskārtējas mūža prēmijas.

$$a)\ t<m;\ {}_tV[P({}_{m|}A_x)]={}_{m-t}A_{x+t}-P_{x\,|m-t}a_{x+t}=$$

$$=\frac{M_{x+m}}{D_{x+t}}-\frac{M_{x+m}}{N_x-N_{x+m}}\cdot\frac{N_{x+t}-N_{x+m}}{D_{x+t}}=\frac{M_{x+m}}{D_{x+t}}\cdot\frac{N_x-N_{x+t}}{N_x-N_{x+m}}=$$

$$=P_x\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}} \quad \ldots\ldots\ldots (47);$$

$$b)\ t\geqslant m;\ {}_tV[P({}_{m|}A_x)]=A_{x+t}-P_x a_{x+t} \quad .\ .\ .\ (47_1).$$

Dzīvības apdrošināšanas nāves gadījumam uz laiku.

1) Vienreizēja prēmija.

$${}_tV({}_{|n}A_x)={}_{|n-t}A_{x+t}=\frac{M_{x+t}-M_{x+n}}{D_{x+t}} \quad .\ .\ .\ (48).$$

2) Gadskārtējas, pa visu apdrošināšanas laiku maksājamas prēmijas.

$${}_tV[P({}_{|n}A_x)]={}_{|n-t}A_{x+t}-P_{x.\,|n-t}a_{x+t} \quad .\ .\ .\ (48_1).$$

Jaukta apdrošināšana.

1) Vienreizēja prēmija

$$ {}_tV(A_{x\,\overline{n|}}) = A_{x+t\,:\,\overline{n-t|}} = \frac{D_{x+n} + M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} = $$

$$ = 1 - d\,{}_{|n-t}a_{x+t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49). $$

2) Gadskārtējas, visu apdrošināšanas laiku maksājamas prēmijas.

$$ {}_tV[P(A_{x\,\overline{n|}})] = A_{x+t\,:\,\overline{n-t|}} - P_x \,.\, {}_{|n-t}a_{x+t} = $$

$$ 1 - d \,.\, {}_{|n-t}a_{x+t} - \left(\frac{1}{{}_{|n}a_x} - d\right) {}_{|n-t}a_{x+t} = 1 - \frac{{}_{|n-t}a_{x+t}}{{}_{|n}a_x} \,. \quad (50) $$

[sal. (28′) un (28′₁) form.].

Apdrošināšana uz noteiktu termiņu.

$$ {}_tV_x = v^{n-t} - P_x\,{}_{|n-t}a_{x+t} \quad \ldots\ldots \quad (51). $$

Saistītā mūža rente.

$$ {}_tV(a_{xy}) = a_{x+t\,:\,y+t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52). $$

Saistītā pārdzīvošanas rente.

1) Vienreizēja prēmija.

$$ {}_tV(a_{x|y}) = a_{y+t} - a_{x+t\,:\,y+t} \quad \ldots\ldots \quad (53). $$

2) Gadskārtējas mūža prēmijas.

$$ {}_tV[P(a_{x|y})] = a_{y+t} - a_{x+t\,:\,y+t} - P_{x|y}\,a_{x+t\,:\,y+t} = $$

$$ = a_{y+t} - (P_{x|y} + 1)\,a_{x+t\,:\,y+t} \quad \ldots\ldots \quad (53_1). $$

Saistītā apdrošināšana nāves gadījumam (līdz pirmās personas miršanai).

1) Vienreizēja prēmija.

$$ {}_tV(\mathcal{A}_{xy}) = \mathcal{A}_{x+t\,:\,y+t} = 1 - d\,a_{x+t\,:\,y+t} \quad \ldots \quad (54). $$

2) Gadskārtējas prēmijas.

$$ {}_tV[P(A_{xy})[= \mathcal{A}_{x+t\,:\,y+t} - P_{xy} \cdot a_{x+t\,:\,y+t} = $$

$$ = 1 - d\,a_{x+t\,:\,y+t} - P_{xy}\,a_{x+t\,:\,y+t} = 1 - (d + P_{xy})\,a_{x+t\,:\,y+t} \,.\, (54_1). $$

Saistīta apdrošināšana nāves gadījumam uz pārdzīvošanu.

1) Vienreizēja prēmija.

$$ {}_tV(A_{x|y}) = A_{x+t\,|\,y+t} = \frac{D_{y+t+1}}{D_{x+t}} \cdot a_{x+t\,:\,y+t+1} - $$

$$ - a_{x+t\,:\,y+t} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55). $$

2) Gadskārtējas prēmijas.

$$ {}_tV[P(\mathcal{A}_{x|y})] = \mathcal{A}_{x+t\,|\,y+t} - P_{x|y} \cdot a_{x+t\,:\,y+t} \quad . \quad (55_1). $$

Apdrošināšana ar prēmiju atmaksām.

1) Vienreizēja prēmija.

$$ {}_t\mathcal{V}\left[\Pi_x^a\right]=\Pi_{x+t}^a=\frac{\Pi_{x+t}}{1-(1+k)\,{}_{|m-t}\mathcal{N}_{x+t}} \quad \ldots \; (56). $$

2) Gadskārtējas prēmijas.

$$ {}_t\mathcal{V}\left[\mathcal{P}(\Pi_x^a)\right]=\Pi_{x+t}^a-\mathcal{P}_x^a\cdot {}_{|m-t}\mathrm{a}_{x+t} \quad \ldots \; (56_1). $$

Piemēri. 1) 48 gadus veca persona apdrošina dzīvību nāves gadījumam par Ls 3000 ar ikgadēju mūža prēmiju maksu. Aprēķināt polises vērtību pēc 5 un 10 gadiem.

Redzējām (**19**,4), ka P_x=0,03676 un uz Ls 3000 prēmija ir Ls **110,28.** Pēc (37) vai (44$_1$) formulas

$$ {}_5V_{48}=A_{53}-P_{48}\mathrm{a}_{53}=1-\frac{\mathrm{a}_{53}}{\mathrm{a}_{48}}=1-\frac{12{,}5563}{14{,}1623}= $$

$=1-0{,}88661=0{,}11339$; uz Ls 3000 tā dod Ls **340,17;**

${}_{10}V_{48}=1-\frac{\mathrm{a}_{58}}{\mathrm{a}_{48}}=1-\frac{10{,}9170}{14{,}1623}=0{,}22915$; uz Ls 3000 dabūjam Ls **687,45.**

Redzam, ka polises vērtība pieaug, kā tam ari vajaga būt, jo miršanas varbūtība kļūst arvien lielāka un līdz ar to apdrošināšanas summas izmaksa nāk arvienu tuvāk.

2) 38 gadus veca persona apdrošina dzīvību pēc jauktā apdrošināšanas veida uz 15 gadiem par Ls 4000 ar ikgadējām prēmiju maksām pa visu apdrošināšanas laiku. Aprēķināt polises vērtību pēc 10 gadiem.

Redzējām (**21**,1), kā ikgadēja prēmija ${}_{15}P_{38}$=0,05717; uz Ls 4000 ikgadējā prēmija ir **Ls 228,68.**

Pēc (37) vai (50) form. dabūjam, ka

$$ {}_{10}V[P(A_{\overline{38:15|}})]=1-\frac{{}_{|5}\mathrm{a}_{48}}{{}_{|15}\mathrm{a}_{38}}= $$

$$ =1-\frac{N_{48}-N_{53}}{N_{38}-N_{53}}\cdot\frac{D_{38}}{D_{48}}=1-\frac{64414{,}01}{252029{,}95}\cdot\frac{22931{,}55}{14247{,}57}\approx $$

$\approx 1-\frac{6.10^5.\,2.10^5}{3.\,10^6.\,10^5}\approx 1-0{,}4\approx 0{,}6$; precīzāki aprēķini dod $1-0{,}39220=$ $=0{,}60780$; uz Ls 4000 polises vērtība ir **Ls 2431,20.**

27. Pamazinātās rezerves metode (Dr. Zillmer'a metode).

1. Aplūkotā netto metode prēmiju rezerves aprēķināšanai dod matēmatiski pareizu rezervi, kas vajadzīga apdrošināšanas iestādei turpmāko izdevumu segšanai, cik tālu tie zīmējas uz apdrošināmo summu izmaksām. Tāpēc ari pārraudzības iestādes visās valstīs ļoti stingri seko, lai ikvienai apdrošināšanas iestādei būtu kārtībā rezerve — pareizi aprēķināta un uzglabāta, jo no tam atkarājas līgumu izpildīšana ar apdrošinātām personām. Tomēr daži apstākļi spiež meklēt citus paņēmienus prēmiju rezerves aprēķiniem. Viens no tādiem apstākļiem — lielie vienreizējie izdevumi, kas saistās ar jaunu līgumu slēgšanu: apdrošināšanas iestādei tie jāizmaksā tūliņ, bet ieņemt tos atpakaļ ar gadskārtējām prēmiju maksām iestāde var tikai ilgākā laikā (sk. brutto prēmiju aprēķināšanu). Tāpēc var rasties tāds apstāklis, ka tanī gadā, kur daudz jaunu līgumu, vienreizējie izdevumi aprij visas piemaksas pie netto prēmijām, un iestādes darbībā ceļas traucējums. Lai šādus gadījumus novērstu, Dr. A. Zillmer's (*Dr. A. Zillmer, Beiträge zur Theorie der Prämienrezerve*, Stettin 1863) ir nācis ar priekšlikumu a t v i l k t v i e n r e i z ē j o s i z d e v u m u s n o a t t i e c ī g ā s p r ē m i j u r e z e r v e s t ā, k a r e d u c ē u z p r ē m i j u r e z e r v e s b r ī d i v i s u s t u r p m ā k o s v i e n r e i z ē j u i z d e v u m u m a k s ā j u m u s, k o a p d r o š i n ā t ā p e r s o n a m a k s ā k o p ā a r n e t t o p r ē m i j u, u n t o s a t ņ e m (i t k ā a i z ņ e m a s) n o p r ē m i j u r e z e r v e s, l a i p ē c t a m k a t r u g a d u t o a r a t t i e c ī g ā m s u m m ā m (p i e d e v ā m p i e n e t t o p r ē m i j a s) p a p i l d i n ā t u

Ņemsim piemēram dzīvības apdrošināšanu nāves gadījumam ar mūža prēmiju maksām. Redzējām, ka brutto prēmijas dabūšanai pie netto prēmijas starp citu jāpieskaita $\frac{\alpha}{\mathrm{a}_x}$, kur α ir vienreizēji izdevumi, izteikti kā daļa no Ls 1 liela apdrošināmā kapitāla; tādā kārtā apdrošinātā persona sedz ikgadus vienu daļu no vienreizējiem izdevumiem α. Ja nu tagad aprēķinām prēmiju rezervi, teiksim, pēc viena gada, tad visu šo maksājumu tagadējā vērtība būs $\frac{\alpha}{\mathrm{a}_x} \cdot \mathrm{a}_{x+1}$, t. i. gandrīz visi vienreizēji izdevumi; tāpēc prēmiju rezerve (polises vērtība), kuŗu tagad apzīmēs ar ${}_tV'_x$, pēc viena gada izteiksies tā:

$$ {}_1V'_x = A_{x+1} - P_x\, \mathrm{a}_{x+1} - \frac{\alpha}{\mathrm{a}_x} \cdot \mathrm{a}_{x+1}\,; $$

ja prēmiju rezervi aprēķināsim pēc 2 gadiem, dabūsim šādu izteiksmi

$$_{2}V'_{x}=A_{x+2}-P_{x}\,\mathrm{a}_{x+2}-\frac{\alpha}{\mathrm{a}_{x}}\,\mathrm{a}_{x+2}\,,$$

kur $\frac{\alpha}{\mathrm{a}_x}\cdot\mathrm{a}_{x+2}<\frac{\alpha}{\mathrm{a}_x}\mathrm{a}_{x+1}$, jo $\mathrm{a}_{x+2}<\mathrm{a}_{x+1}$; tā tad ar laiku atņemamā summa kļūst arvienu mazāka, kas ari saprotams, jo nāk jau līdz ar prēmiju maksām atpakaļ ar attiecīgā vienreizējo izdevumu daļa.

Pārpratumu novēršanai jāpiezīmē, ka šos vienreizējus izdevumus, reducētus uz prēmiju rezerves aprēķinu brīdi, atņēmām tikai vienreiz, bet ne katru gadu, kā tas varētu likties no pirmā acu uzmetiena, ja salīdzinām, piem., $_{1}V'_{x}$ un $_{2}V'_{x}$, jo vienā gadījumā atņemam $\frac{\alpha}{\mathrm{a}_x}\mathrm{a}_{x+1}$ un otrā $\frac{\alpha}{\mathrm{a}_x}\mathrm{a}_{x+2}$; te nav jāaizmirst, ka $_{2}V'_{x}$ neesam dabūjuši no $_{1}V'_{x}$, bet patstāvīgi.

Pēc t gadiem prēmiju rezerve (polises vērtība) izteiksies tā:

$$_{t}V'_{x}=A_{x+t}-P_{x}\mathrm{a}_{x+t}-\frac{\alpha}{\mathrm{a}_{x}}\mathrm{a}_{x+t} \text{ jeb}$$

$$_{t}V'_{x}=A_{x+t}-\left(P_{x}+\frac{\alpha}{\mathrm{a}_{x}}\right)\mathrm{a}_{x+t}\,.$$

Vispār

$$_{t}V'_{x}=\Pi_{x+t}-\left(P_{x}+\frac{\alpha}{{}_{|n}\mathrm{a}_{x}}\right)_{n-t}\mathrm{a}_{x+t}\quad\ldots\ldots\quad(57)$$

kur prēmiju maksājumi ilgst n gadus,

vai $$_{t}V'_{x}=\Pi_{x+t}-\left(P_{x}+\frac{\alpha}{\mathrm{a}_{x}}\right)\mathrm{a}_{x+t}\quad\ldots\ldots\quad(57_1)$$

kur prēmiju maksājumi ilgst visu mūžu.

Šīs ir vispārējas formulas, kas atbilst (37) vai (37') formulai un ļauj aprēķināt tā saucamo Zillmer'a rezervi, vai, kā vēl citādi mēdz teikt, „cilmerēto" rezervi.

Redzam, ka tā atšķiŗas no (37) form. tikai ar to, ka ikgadējas netto prēmijas vietā ņem prēmiju, kas palielināta par vienreizēju izdevumu gadskāŗtējo daļu, t. i. ņem tā saucamo rezerves prēmiju netto prēmijas vietā.

2. Ja ir pietiekoši liela vienreizējo izdevumu procentu likme, tad var iznākt, ka pirmā gada beigās prēmiju rezerve ir negatīva, ja $\Pi_{x+1} < \left(P_x + \frac{\alpha}{a_x}\right) a_{x+1}$.

Tā kā tas nav vēlams, tad var atrast maksimālo α nozīmi — tā saucamo Zillmer'a maksimumu — tā, lai pie šīs α nozīmes prēmiju rezerve pēc viena gada būtu nulle. Tad pie ikkuŗas mazākās α nozīmes prēmiju rezerve būs pozitīvs lielums.

Pēc (57_1) formulas un nosacījuma

${}_1V'_x = \Pi_{x+1} - \left(P_x + \frac{\alpha}{a_x}\right) a_{x+1} = 0$; dalot abas puses ar a_{x+1},

dabūsim, ka $\frac{\Pi_{x+1}}{a_{x+1}} - P_x - \frac{\alpha}{a_x} = 0$, jeb $P_{x+1} - P_x - \frac{\alpha}{a_x} = 0$,

$$\text{no kurienes } \alpha = (P_{x+1} - P_x)\, a_x \quad \ldots \ldots \quad (58).$$

Ja par α pieņemsim Zillmer'a maksimumu, tad (57_1) formula pārveidojas tādā:

$${}_tV'_x = \Pi_{x+t} - (P_x + P_{x+1} - P_x)\, a_{x+t} \text{ jeb}$$

$${}_tV'_x = \Pi_{x+t} - P_{x+1} a_{x+t} \quad \ldots \ldots \quad (57_1')$$

Šī formula rāda, ka prēmiju rezerves aprēķināšanu ar Zillmer'a maksimumu var saukt vēl par prēmiju rezerves aprēķināšanu „pēc $x+1$ metodes".

28. Inventāra prēmiju metode.

1. Francijā un Beļģijā turas pie tā saucamās inventāra prēmiju metodes prēmiju rezerves aprēķināšanai.

Šinī metodē iziet no tā apstākļa, ka ilgstošus pārvaldes izdevumus aprēķina pa visu līguma pastāvēšanas laiku, bet iekasē tikai pa prēmiju saņemšanas laiku. Lai šie ilgstošie pārvaldes izdevumi sadalītos vienmērīgāk pa visu laiku, var prēmiju rezervi aprēķinot, rīkoties ar tā saucamiem inventāra prēmijām, t. i. prēmijām, kam pieskaitīti ilgstošie pārvaldes izdevumi, kuŗus kā Ls 1 lielas apdrošināmās summas (kapitāla vai rentes) daļu apzīmējām ar γ.

Tā, piem., inventāra premija apdrošināšanai nāves gadījumam ar mūža prēmiju maksām izteiksies kā

$$A_x + \gamma a_x$$

Līdz ar to

$${}_tV_x = A_{x+t} + \gamma a_{x+t}$$

Ko šī formula rāda? To, ka ilgstošus pārvaldes izdevumus pieskaitām rezervei — katru gadu savu daļu, lai tādā kārtā, ja vajadzīgs, varētu ņemt no prēmiju rezerves ari vajadzīgo daļu pārvaldes izdevumiem. Skaidra lieta, ka ar katru gadu šī pieskaitāmā summa paliek mazāka, jo $\mathfrak{a}_{x+t}$ ar t pieaugšanu pamazinās. Tā tad vispār

$$_{t}V'_{x}=\Pi_{x+t}+\gamma_{|n-t}\mathfrak{a}_{x+t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

ja apdrošināšanas līgums ilgst n gadus, vai

$$_{t}V_{x}=\Pi_{x+t}+\gamma\mathfrak{a}_{x+t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58_1)$$

ja apdrošināšanas līgums ilgst visu mūžu.

2. Ja apdrošināšanas līgums slēgts ar gadskārtējām prēmiju maksām, tad protams, ari gadskārtējas prēmijas rezerves aprēķiniem jāņem ne netto, bet palielinātas par pārvaldes izdevumiem, t. i. inventāra prēmijas, kuŗas, kā redzējām (34_1) formulā, vispārējā veidā izteicas kā

$$P_x+\gamma\frac{_{|n}\mathfrak{a}_x}{_{|k}\mathfrak{a}_x}$$

kur n ir apdrošināšanas līguma ilgums, k prēmiju maksājumu ilgums. Tāpēc

$$_{t}V'_{x}=\Pi_{x+t}+\gamma_{|n-t}\mathfrak{a}_{x+t}-\left(P_x+\gamma\frac{_{|n}\mathfrak{a}_x}{_{|k}\mathfrak{a}_x}\right)_{|k-t}\mathfrak{a}_{x+t} \quad \ldots \quad (59)$$

Ja $k=n$, tad iepriekšējā formula pāriet tādā:

$$_{t}V'_{x}=\Pi_{x+t}+\gamma_{|n-t}\mathfrak{a}_{x+t}-P_{x|n-t}\mathfrak{a}_{x+t}-\gamma_{|n-t}\mathfrak{a}_{x+t}=$$
$$=\Pi_{x+t}-P_{x|n-t}\mathfrak{a}_{x+t}$$

Šinī gadījumā esam nonākuši pie netto prēmiju metodes, kas ari saprotams, jo ja līguma ilgums un prēmiju maksāšanas ilgums sakrīt, tad nav vajadzības pēc īsākā laikā iegūto pārvaldes izdevumu sadalīšanas gaŗākam laikam.

Tā kā pa lielākai daļai (izņemot reņšu apdrošināšanu, kādu līgumu nav vispār samērā daudz) apdrošināšanas līguma laiks un prēmiju maksājumu laiks ir viens un tas pats, tad inventāra prēmiju metode dod gandrīz tos pašus rezultātus, kā netto prēmiju metode.

29. Rezerves aprēķinu prakse.

1. Ar aplūkotiem rezerves aprēķinu paņēmieniem varam atrast meklējamo rezervi pilnu gadu skaitam, rēķinot no apdrošināšanas brīža vecuma. Praksē apdrošināšanas līgumus slēdz

visa gada laikā, bet prēmiju rezervi aprēķina uz kalendāra gada beigām, tā tad nākas aprēķināt prēmiju rezervi vecumiem, kuŗi izteicas kā jaukti skaitļi (veseli skaitļi ar daļām).

Pieņemsim, 1) ka līgumi slēgti vienmērīgi pa visu gadu, 2) ka rezerve gada laikā mainās proporcionāli ar laiku. Tad kā tālākais secinājums rodas tas, ka var pieņemt par visu apdrošināšanas līgumu slēgšanas brīdi gada vidu, t. i. pirmo jūliju.

Tādā kārtā prēmiju rezervi nāksies aprēķināt pirmā apdrošināšanas kalendara gada beigās $(x+\frac{1}{2})$ gadus vecām personām, otra apdrošināšanas kalendara gada beigās $(x+1\frac{1}{2})$ gadus vecām personām u. t. t.

Tā kā esam pieņēmuši prēmiju rezerves maiņu, proporcionālu ar laiku, tad prēmiju rezerve ${}_{t+\frac{1}{2}}V_x$ izteiksies kā vidējais aritmētiskais skaitlis starp ${}_tV_x$ un ${}_{t+1}V_x$, t. i.

$$ {}_{t+\frac{1}{2}}V_x = \frac{{}_tV_x + {}_{t+1}V_x}{2} = \frac{\Pi_{x+t} - P_x a_{x+t} + \Pi_{x+t+1} - P_x a_{x+t+1}}{2} \text{ jeb} $$

$$ {}_{t+\frac{1}{2}}V_x = \tfrac{1}{2}(\Pi_{x+t} + \Pi_{x+t+1}) - \tfrac{1}{2}(a_{x+t} + a_{x+t+1})P_x \quad . \quad . \quad (60) $$

Ja $t=o$, t. i. prēmiju rezervi aprēķinām pirmā apdrošināšanas gada beigām, tad

$$ {}_{\frac{1}{2}}V_x = \tfrac{1}{2}(\Pi_x + \Pi_{x+1}) - \tfrac{1}{2}(a_x + a_{x+1})P_x $$

Šādu prēmiju rezerves apreķināšanas paņēmienu visbiežāk lieto praksē gada bilances sastādīšanai.

2. Lai atvieglotu prēmiju rezerves aprēķinus, parasti rīkojas tā: grupē viena vecuma un viena veida apdrošinājumus tā, ka 1) saskaita apdrošināšanas kapitālus vai rentes, 2) saskaita attiecīgās gada prēmijas (netto vai citādas) un tad piemēro attiecīgo formulu. Pieņemsim, ka visu apdrošināmo kapitālu (vai renšu) kopsumma ir K, visu gada prēmiju kopsumma ir k, tad pēc (37') formulas

$$ {}_tV_x = K \cdot \Pi_{x+t} - k \cdot a_{x+t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61) $$

jo P_x zīmējas uz Ls 1 lielu kapitālu, bet uz K latu lielu kapitālu prēmiju kopsumma ir k, pie kam nav no svara, kādā vecumā līgums slēgts, t. i. kādas ir atsevišķas prēmijas, kas zīmējas uz Ls 1 lielu apdrošināšanas kapitālu. Tiešām, pieņemsim piemēram, ka divas 1897. gadā dzimušas personas noslēgušas apdrošināšanas līgumu — viena 25 g. vecumā par Ls 3000, otra 28 g. vecumā par Ls 2000, ar ikgadējām mūža prēmiju maksām.

Polises vērtība abām personām 30 g. vecumā izteiksies tā:

1) ${}_5V_{25}=[\Pi_{30}-P_{25}a_{30}]3000$;

2) ${}_2V_{28}=[\Pi_{30}-P_{28}a_{30}]2000$;

tā kā 30 gadu vecumu abas personas sasniedz 1927. g., tad prēmiju rezerve šinī gadā par abiem apdrošināšanas līgumiem izteiksies ar summu

$$5000 \cdot \Pi_{30}-(P_{25} \cdot 3000+P_{28} \cdot 2000)a_{30},$$

kas ir iepriekšējās formulas atsevišķs gadījums.

Tā kā rezervi aprēķina gada beigām, bet līgumus pieņem kā slēgtus 1. jūlijā, tad, kā jau aizrādīts, Π_{30} vietā būs jāņem

$$\frac{\Pi_{30}+\Pi_{31}}{2} \text{ un } a_{30} \text{ vietā } \frac{a_{30}+a_{31}}{2}$$

P a r a u g s.

Rezerve.

31. XII. 1925.

Apdrošināšana nāves gadījumam ar ikgadējām prēmiju maksām

Dzimšanas gads	Pašreizējais vecums	100Π	Apdrošināšanas kapitāli K	Prēmiju kopsumma K	a	$K\Pi$	ka	Rezerve
1861	64	69,28*)	15000	1010	8,611**)	10392	8697	1695
1862	63	68,11	25000	1470	8,915	17028	15780	1248

u. t. t.

Jauktā apdrošināšana.

Dzimšanas gads	Līguma izbeigšanās gads	$x+t$	$n-t$	100Π	K	k	a	$K\Pi$	ka	Rezerves
1885	1928	40	3	91,10	128000	1470	2,400	11661	3528	8133

u. t. t.

30. Līguma pārtraukšana.

1. Gadas, ka apdrošinātā persona grib savu līgumu aiz kaut kādiem iemesliem pārtraukt, piem., aiz tā iemesla, ka nespēj vairs tālāk maksāt gadskārtējas prēmijas. Šādos gadījumos

*) Aritmētiskais vidusskaitlis starp Π_{64} un Π_{65}.
**) " " " a_{64} un a_{65}.

ir trejāda veida iespējamības: a) līgums izbeidzas bez kaut kādiem pienākumiem no apdrošināšanas iestādes puses; tas notiek tanīs apdrošināšanas veidos, kur apdrošināšanas iestādei var rasties iespēja ari neizmaksāt apdrošināšanas summu, piem., apdrošināšanā uz nodzīvošanu, atbīdītās rentes apdrošināšanā u. c.; b) pārējos apdrošināšanas veidos apdrošināšanas iestāde izmaksā zināmu summu kā polises atpirkšanas summu, ja līgums slēgts ar vienreizēju prēmiju vai gada prēmijas maksātas ne mazāk par 3 gadiem; c) līgumu pārveido citādā līgumā.

2. Ka līgums var izbeigties bez kaut kādiem pienākumiem no apdrošināšanas iestādes puses minētos apdrošināšanas veidos, ir skaidrs no pašas lietas būtības: apdrošinot, piem., personu uz nodzīvošanu, prēmijas aprēķina ar to pieņēmumu, ka viena daļa tādā veidā apdrošināto personu nomirst pirms apdrošināšanas summas izmaksas termiņa; tāpat tas ir, piem., atbīdītā rentē; tāpēc apdrošinātā persona, pārtraucot līgumu, nevar pretendēt ne uz kādu atlīdzību. Ja turpretim apdrošināšanas iestādei agri vai vēlu tā kā tā apdrošināšanas summa jāizmaksā (piem., jauktā apdrošināšanā), vai apdrošināšanā nāves gadījumam, tad liktos taisnīgi maksāt zināmu summu, polises atpirkšanas summu, ko parasti visas apdrošināšanas iestādes ari dara. Bet kā tad nu aprēķināt atpirkšanas summu? Bez šaubām, te par pamatu jāņem polises vērtība atpirkšanas brīdī. Tomēr apdrošināšanas iestāde nevarēs maksāt pilnu polises vērtību, it īpaši ja tā aprēķināta pēc netto metodes, jo 1) nebūs samaksāti pārvaldes izdevumi, kas aprēķināti uz visu apdrošināšanas laiku un 2) atsevišķas polises vertība īstenībā neattaisno sava nosaukuma, jo tā radās kā vidējais aritmētiskais skaitlis, kuŗu dabūjām, dalot prēmiju rezervi visām l_x gadus vecām apdrošinātām personām ar l_{x+t}, pie kam visi aprēķini dibinājas uz lielo skaitļu likuma; atsevišķa persona un atsevišķa polise par sevi vairs pilnīgi neatbilst minētiem pamatprincipiem. Tāpēc apdrošināšanas iestādes neizmaksā polises pilnas vērtības, ja tā aprēķināta pēc netto prēmijas, bet parasti 1) atvelk visus vēl nesegtos vienreizējos pārvaldes izdevumus; 2) no tā pamazinātās polises vērtības izmaksā no 75%—90%. Ja rezervi aprēķina pēc Zillmer'a metodes, tad, protams, atvelk tikai zināmu procentu. Cik īsti procentu no polises vērtības maksāt, to noteic pagaidām tikai pieredze. Mēdz vēl rīkoties

ari tā, kā rīkojas ar mainīgu procentu skalu: sāk, piem., ar 60% no polises vērtības kā polises atpirkšanas summu un tad par katru turpmāko apdrošināšanas gadu paaugstina, piem., par 2%, kamēr nenonāk pie, teiksim, 90%. Francija parasti izmaksā 85% no polises vērtības, kas pamazināta par nedzēstiem vienreizējiem pārvaldes izdevumiem un aprēķināta pēc inventāra prēmiju metodes.

P i e m ē r s. 30 gadus veca persona noslēgusi apdrošināšanas līgumu nāves gadījumam par Ls 3000 ar ikgadējām mūža prēmiju maksām. Pēc 20. maksājuma tā vairs nevar savas prēmijas maksāt. Aprēķināt, cik liela būs polises atpirkšanas summa, ja apdrošināšanas iestāde strādā ar Zillmer'a maksimumu vienreizējiem izdevumiem un izmaksā 90% no „cillmerētās" polises vērtības.

Pēc ($57_1'$) form. un IV. tab.

$$ {}_{20}V_{30} = A_{50} - P_{31} \cdot a_{50} = \frac{M_{50}}{D_{50}} - \frac{M_{31}}{N_{31}} \cdot 13{,}5278 = $$

$=0{,}27362$; uz Ls 3000 polises vērtība būs Ls 820,86. Polises atpirkšanas summa būs Ls 820,86 . 0,9 = **Ls 738,77.**

3. Ja līgumu nepārtrauc, bet pārveido citā, tad tanī gadījumā, kur šī pārveidošanas vajadzība rodas aiz tā iemesla, ka netiek vairs tālāk maksātas gada prēmijas, pārveidošana var notikt divējādā ceļā: 1) tiek reducēta (pamazināta) apdrošināšanas summa; 2) apdrošināšanas summa paliek tā pati, tikai samazinās apdrošināšanas līguma ilguma laiks. Abos gadījumos apdrošinātā persona nekādas prēmijas tālāk nemaksā, t. i., šī persona dabū jaunu, brīvu no prēmiju maksām polisi. Šinī gadījumā rīkojas tā, ka n e p a m a z i n ā t u p o l i s e s v ē r t ī b u uzlūko kā vienreizēju b r u t t o p r ē m i j u, pēc kuŗas tad aprēķina jauno (reducēto) apdrošināšanas summu vai jauno apdrošināšanas līgumu, vai ari p o l i s e s a t p i r k š a n a s s u m m u uzlūko kā v i e n r e i z ē j u n e t t o p r ē m i j u turpmākai tāda paša veida apdrošināšanai ar pamazinātu apdrošināšanas summu vai līguma ilgumu. Francijā par nedzēstiem vienreizējiem izdevumiem pamazināto polises vērtību uzlūko kā i n v e n t ā r a p r ē m i j u.

Jauktā apdrošināšanā (ari apdrošināšanā uz noteiktu terminu) bieži rīkojas vēl tā, ka reducēto summu aprēķina proporcionāli ar iemaksātām prēmijām, salīdzinot ar visu prēmiju maksājumu skaitu. Piem., ja jauktā apdrošināšana noslēgta uz

20 gadiem, un pavisam prēmijas maksātas 4 reizes, tad reducēta apdrošināšanas summa būs $\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$ no līgumā minētās summas.

Piemērs. Ņemot vērā iepriekšējā piemēra datus, aprēķināt reducēto apdrošināšanas summu, ja polises atpirkšanas summu uzlūko kā vienreizēju prēmiju.

Tā kā līguma pārveidošanas brīdī persona ir 50 g. veca, tad vienreizēja prēmija uz Ls 1 lielu apdrošināšanas summu $A_{50}=0{,}54254$; reducētā summa būs Ls $\frac{738{,}77}{0{,}54254}\approx$ Ls 1355.

Ja apdrošināšanas summu paturētu to pašu, bet saīsinātu apdrošināšanas laiku, t. i. atstātu apdrošināšanu ne uz visu mūžu, bet tikai uz zināmu laiku, tad šī laika aprēķināšanai spriežam tā: vienreizēja netto prēmija saīsināta dzīvības apdrošināšana nāves gadījumam 50 g. vecai personai izteicas kā ${}_{|n}A_{50}=\frac{M_{50}-M_{50+n}}{D_{50}}$, ja apdrošināšanas summa ir Ls 1; ja apdrošināšanas summa ir Ls 3000, tad vienreizēja netto prēmija ir Ls $3000\,.\,\frac{M_{50}-M_{50+n}}{D_{50}}$, kas pēc nosacījuma ir Ls 738,77; tā tad

$$3000\,.\,\frac{M_{50}-M_{50+n}}{D_{50}}=738{,}77, \text{ no kurienes}$$

$$M_{50}-M_{50+n}=\frac{738{,}77\,.\,D_{50}}{3000} \text{ un}$$

$$M_{50+n}=M_{50}-0{,}24626D_{50}\approx 3810.$$

Tabulā redzam, ka 3810 ir starp 3908,58 un 3670,87, kas nozīmē, ka $50+n$ ir starp 63 un 64 gadiem, tā tad n ir starp 13 un 14 gadiem, tuvāk 13 gadiem. Tā tad līgumu ilgumu var noteikt uz 13 gadiem, t. i., ja minētā persona nomirst tuvāko 13 gadu laikā, skaitot no līguma pārveidošanas dienas, tad apdrošināšanas iestāde izmaksā Ls 3000. Pēc 13 gadiem ikkuŗas līguma attiecības izbeidzas.

31. Darbības gada noslēgšana.

1. Lai dabūtu pārskatu par īpašuma stāvokli, apdrošināšanas iestādei starp citu jāuzstāda bilance.

Parasti pasīvā ieiet šādi galvenie posteņi.

1) Akciju vai paiju kapitāls.

2) Prēmiju rezerve.

3) Prēmiju pārnesumi (tās samaksāto prēmiju daļas, kas krīt uz jaunu darbības gadu).
4) Izstāvošie maksājumi (par kuŗiem darbības gadā zināms, ka tie jāmaksā, bet nav vēl izmaksāti).
5) Apdrošināto personu dividendu fonds.
6) Pasīva saldi, aprēķinos ar pārapdrošinātājiem (bieži biedrības vienu daļu no apdrošināmas summas pārapdrošina citā apdrošināšanas iestādē).
7) Dažādas citas rezerves.
8) Dažādi kreditori.
9) Gada peļņa.

Aktīvā ievietojami šādi posteņi.

1) Prasības no akcionāriem (nenomaksātais akciju kapitāls).
2) Kase.
3) Noguldījumi.
4) Īpašumi (brutto vērtība bez hipotēku parādiem).
5) Vērtspapīri pēc kursa un augļi par tiem.
6) Vekseļi portfelī.
7) Hipoteku aizdevumi.
8) Aizdevumi pret vērtspapīriem.
9) Aizdevumi pret biedrības izdotām polisēm.
10) Citi aizdevumi.
11) Aktīva saldi aprēķinos ar pārapdrošinātājiem.
12) Dažādi debitori.
13) Inventāra vērtība pēc attiecīgas amortizācijas.
14) Iztrūkums.

Atkarībā no tam, ko dod atsevišķo posteņu sumēšana aktīvā un pasīvā, rodas vai nu iztrūkums vai peļņa kas rāda, kādi rezultāti bijuši iestādes darbībai pārskata gadā.

2. Pārskatā par ieņēmumiem un izdevumiem ieies šādi galvenie posteņi.

Ieņēmumi.

1) Dažādu fondu pārnesums no pagājušā gada:
a) prēmiju rezerve;

b) prēmiju pārnesumi;
c) citi fondi.

2) Izstāvošo maksājumu rezerve no pagājušā gada.
3) Prēmiju maksas:
a) apdrošināšanas nāves gadījumam un jauktas;
b) apdrošināšanas uz nodzīvošanu;
c) renšu apdrošināšanas;
d) citas apdrošināšanas.
4) Ienākumi no kapitāliem.
5) Citi ienākumi.

— — — — —

Izdevumi.

1) Apdrošināšanas summu un renšu izmaksas.
2) Izdevumi par atpirktām polisēm.
3) Dividendes maksājumi apdrošinātām personām.
4) Pārvaldes izdevumi.
a) organizācijas izdevumi;
b) vienreizējie līguma slēgšanas izdevumi;
c) tekošie pārvaldes izdevumi;
d) inkaso atlīdzības;
e) ārstu izdevumi.
5) Dažādi norakstījumi.
6) Rezerve izstāvošiem maksājumiem.
7) Fonda stāvoklis darbības gada beigās:
a) prēmiju rezerve;
b) prēmiju pārnesumi;
c) citi fondi.

— — — — —

Vingrinājumi.

1. 39 gadus veca persona apdrošina dzīvību nāves gadījumam par Ls 5000 ar ikgadējām mūža prēmiju maksām. Aprēķināt 1) ikgadējo netto un brutto prēmiju, ja vienreizējiem izdevumiem rēķina 1% no apdrošināšanas kapitāla, inkaso izdevumiem 6% no brutto prēmijas, ilgstošiem pārvaldes izdevumiem 3,5‰ no apdrošināšanas kapitāla, 2) polises vērtību pēc 10 gadiem *a*) pēc netto, *b*) pēc Zillmer'a metodes; 3) polises atpirkšanas summu pēc 20 gadiem, ja izmaksā 90% no Zillmer'a rezerves; 4) reducēto apdrošināšanas summu, ja līgumu pārtrauc pēc 20 gadiem un polises atpirkšanas summu pieņem par netto prēmiju; 5) gadu skaitu, kādu vēl līgums pastāvēs spēkā, ja negrib reducēt apdrošināšanas summu, bet gan līguma ilgumu.

2. Pieņemot tos pašus pārvaldes izdevumus, kā iepriekšējā uzdevumā, aprēķināt 1) ikgadēju prēmiju, kuŗu maksās 40 gadus veca persona, kas noslēdz jauktas apdrošināšanas līgumu uz 15 gadiem par Ls 6000 ar prēmiju maksām pa visu apdrošināšanas laiku; 2) polises vērtību pēc 8 un 10 gadiem pēc netto metodes; 3) reducēto apdrošināšanas summu, ja līgumu pārtrauc pēc 10 gadiem.

3. 28 gadus veca persona apdrošina dzīvību nāves gadījumam uz 20 gadiem par Ls 6000 ar ikgadējām prēmiju maksām pa visu apdrošināšanas laiku, pie kam pārvaldes izdevumiem pieskaita 20% no netto prēmijas. Aprēķināt 1) gadskārtējo prēmiju; 2) reducēto pēc 12 gadiem summu, ja redukcijai par pamatu pieņem pēc netto metodes aprēķinātu polises vērtību un uzlūko to kā brutto prēmiju, aprēķinot pārvaldes izdevumiem 10%.

4. 42 gadus veca persona noslēdz uz 30 gadiem atbīdītās apdrošināšanas līgumu nāves gadījumam par Ls 10 000 ar ikmēneša mūža prēmiju maksām. Aprēķināt 1) mēneša prēmiju, ja pārvaldes izdevumi kā 1. uzdevumā, bet par sadalīšanu mēneša maksājumos vēl pieskaita 6% pie gada brutto prēmijas; 2) polises vērtību pēc 2 un 8 gadiem; 3) reducēto apdrošināšanas summu, ja pēc 20 gadiem pārtrauc prēmiju maksas.

5. 35 gadus vecs tēvs savam 6 gadus vecam dēlam apdrošina zināmu summu, kas katrā ziņā pēc 14 gadiem (à terme fixe) un maksā par to ik semestrus Ls 60. Aprēķināt 1) apdrošināto summu, ja pārvaldes izdevumiem aprēķina 15% un par gada prēmijas sadalījumu semestros vēl 2%; 2) polises vērtību pēc 10 gadiem, ja *a*) tēvs vēl dzīvo; *b*) tēvs ir miris.

6. 42 gadus veca persona apdrošina uz 18 gadiem atbīdītu mūža renti ar Ls 3000 gadā un prēmiju atmaksām. Aprēķināt 1) vienreizēju prēmiju, ja pārvaldes izdevumiem pierēķina 10%; 2) polises vērtību pēc 15 gadiem.

7. 38 gadus vecs vīrs apdrošina savai 32 gadus vecai sievai atraitņu pensiju Ls 4000 gadā. Aprēķināt 1) gada prēmiju, kuŗu maksā tik ilgi, kamēr abas personas dzīvo, ja pār-

valdes izdevumiem pierēķina 20%; 2) polises vērtību, ja *a*) abas personas dzīvo; *b*) vīrs jau ir miris.

8. 42 gadus vecs vīrs apdrošina savai 36 gadus vecai sievai pēc savas nāves kapitālu, Ls 10 000 lielu. Aprēķināt 1) gada prēmiju, ja pārvaldes izdevumiem pieskaita 15% pie netto prēmijas un 2) polīses vērtību pēc 12 gadiem.

Sestā nodaļa.

VIII. Apdrošināšana slimības gadījumiem.

32. Vispārējie jēdzieni.

1. No citiem apdrošināšanas veidiem, kur rīkojas pēc dzīvības apdrošināšanas paņēmieniem, aplūkosim apdrošināšanu slimības gadījumiem.

Šeit mums nāksies sastapties ar jauna veida tabulām: līdz šim kā izstrīpošanas moments no tabulas bija personas nāves gadījums, bet tagad ņemsim vērā ne tikai miršanas gadījumus, bet ari invaliditātes (darba nespējas) gadījumus; tādas tabulas rāda aktivitātes kārtību, t. i. rāda, cik no visām darba spējīgām (aktīvām) personām, kuru skaitu apzīmēsim ar l_x^a, ir vēl darba spējīgu pēc viena gada (l_{x+1}^a), divi gadiem (l_{x+2}^a) u. t. j. Tā tad dzīvo personu skaits kaut kādā vecumā x sadalās divi grupās: viena ir aktīvo grupa (l_x^a), otra — invalīdu grupa (l_x^i), t. i.

$$l_x = l_x^a + l_x^i \, .$$

Protams, ka ari šeit vajadzīgie skaitļi jāsavāc statistikas ceļā. No novērojumiem par aktīviem un invalīdiem rodas izstāšanās varbūtības no aktīvo skaita; izejot no tās, var konstruēt aktīvitātes tabulas. Viena no tādām Dr. *G. Schaertlin*'a aktīvitātes tabula — ievietota mūsu tabulās kā VIII. tabula.

Ja ar l_x^a apzīmēts aktīvo personu skaits x gadu vecumā, tad gluži analoģiski ar agrāk aplūkotiem skaitļiem rodas skaitļi D_x^a, N_x^a, a_x^a u. c.

2. Ja jau invaliditātes jēdziens ir diezgan stiepjams, tad tas vēl vairāk sakāms par slimību, kas ir zināmā mērā subjektīvs, neskaidrs jēdziens. Galvenos statistiskos materiālus par slimošanu dod tā saucamās slimo kases, tomēr šī statistika ir neizkopta, kaut gan slimo kasu ir daudz. Vienas kases kontrolē slimības gadījumus stingrāk, citas mīkstāk, vienas izsniedz

pabalstus kronisko slimību gadījumos, citas ne u. t. j., tāpēc dažādu kasu materiāli nav vienvērtīgi, nerunājot jau par dažādām zemēm. Vēl grūtāk slimības gadījumus novērtēt pēc vecumiem, jo saslimšanu gadījumi mazāk atkarīgi no vecuma nekā nāves gadījumi. Tomēr ir savākti statistiskie dati, kas zīmējas uz saslimšanas gadījumiem un kas ļauj sastādīt tabulas, kuŗas rāda, cik daudz dienas gadā slimo kāda vecuma persona.

Šotlandē jau 1820. g. kāda biedrība izsolījusi prēmijas par pareizām ziņām, kā sadalās apdrošinātās slimo kases personas pēc vecuma un slimošanas. Līdzīgi pētījumi Anglijā; te var minēt pag. gadu simt. pusē radušos *Ansell*'a, *Neison*'a un *A. G. Finlaison*'a darbus. Francijā minami *M. G. Hubbard*'a darbi. Vācijā pirmie pētījumi pieder Dr. *K. Heym*'am, tālāk minams *G. Behm*'a darbs par dzelzceļnieku saslimšanas un slimību ilguma gadījumiem. Šveicē ar šiem jautājumiem nodarbojas prof. Dr. *H. Kinkelin*'s un prof. Dr. *Ch. Moser*'s.

Visi šie pētījumi rāda, ka faktori, no kuŗiem atkarājas saslimšanas, ļoti dāžādi, tie ir: vecums, dzimums, profesija, dzīves vieta, algas apmērs, kontroles stingrība; piespiedu vai brīvprātīga kase.

Pielikumā IX. tabula rāda no dažādiem avotiem smeltu slimības dienu skaitu dažādos vecumos.

2. Apdrošināšana slimības gadījumos lieta grozās pa lielai daļai ap pastāvīgu slimības naudu: pa visu slimības laiku parasti izmaksā katru dienu vienu un to pašu summu. Apdrošināšanu slimības gadījumiem noslēdz 1) uz visu mūžu, 2) uz dienesta laiku; 3) uz noteiktu laiku.

33. Apdrošināšana uz visu mūžu.

1. x gadus veca persona apdrošinās uz visu mūžu slimības gadījumam ar nosacījumu, ka kase izmaksā pa visu slimības laiku, bet ne ilgāk par vienu gadu, Ls 1 dienā. Aprēķināt a) vienreizēju prēmiju b) gadskārtēju prēmiju.

Apzīmēsim vienreizēju prēmiju ar Z_x, slimības dienu skaitu x gadus vecai personai gadā ar k_x. Pieņemsim, ka slimības dienas sadalās pa visu gadu vienmērīgi; tad visas gada izmaksas var reducēt uz gada vidu.

Pieņemsim tālāk, ka apdrošinātas visas l_x personas; tad kase saņems Ls $Z_x \cdot l_x$; tai būs jāizmaksā pirmā apdrošināšanas gadā (gada vidū) Ls $l_x k_x$, otrā $l_{x+1} k_{x+1}$ u. t. t.; reducējot šīs izmaksas uz līguma slēgšanas brīdi, dabūsim sakarību

$$Z_x l_x = l_x k_x v^{\frac{1}{2}} + l_{x+1} k_{x+1} v^{1\frac{1}{2}} + \ldots \text{ (līdz tabulas beigām);}$$

no kurienes $Z_x = \dfrac{l_x k_x v^{\frac{1}{2}} + l_{x+1} k_{x+1} v^{1\frac{1}{2}} + \ldots}{l_x}$;

ņemot labā pusē $v^{\frac{1}{2}}$ aiz iekavām, tad reizinot un dalot izteiksmes labo pusi ar v^x, dabūjam, ka

$$Z_x = v^{\frac{1}{2}} \frac{D_x k_x + D_{x+1} k_{x+1} + \ldots}{D_x}$$

apzīmēsim $D_x k_x$ ar B_x, kur B_x ir diskontētais dzīvo personu slimo dienu skaits un $B_x + B_{x+1} + B_{x+2} + \ldots = K_x$, tad

$$Z_x = v^{\frac{1}{2}} \frac{K_x}{D_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62).$$

2. Gadskārtējas prēmijas izteiksies pēc vispārēja paņēmiena:

$$P_x = \frac{Z_x}{a_x} = v^{\frac{1}{2}} \frac{K_x \cdot D_x}{D_x \cdot N_x} = v^{\frac{1}{2}} \frac{K_x}{N_x} \quad \ldots\ldots \quad (62_1).$$

Lai varētu izpildīt aprēķinus, jāsastāda skaitļi B_x un K_x un jāsakārto tabulā.

34. Apdrošināšana uz dienesta laiku.

1. Šeit ar iepriekšējo veidu būs tā starpība, ka par pamatu būs jāliek aktīvitātes tabulas, jo dienesta laiks aprobežojas ar personas aktīvitātes ilgumu.

Apzīmējot šinī gadījumā vienreizējo prēmiju ar Z_x^a, kur Z_x^a tā tad apzīmē summu, kas jāmaksā vienreizēji x gadus vecai personai, lai pa visu dienesta (aktīvitātes) laiku apdrošinātu sev par katru slimības dienu Ls 1, bet ne ilgāk, kā vienu gadu.

Spriežot tāpat kā iepriekšējā gadījumā, dabūsim, ka

$$l_x^a Z_x^a = v^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{l_x^a k_x + l_{x+1}^a k_{x+1} + \ldots}{l_x^a} = \frac{v^{\frac{1}{2}} D_x^a k_x + D_{x+1}^a k_{x+1} + \ldots}{D_x^a}$$

$$\text{un } Z_x^a = v^{\frac{1}{2}} \frac{K_x^a}{D_x^a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63),$$

kur $B^a_x = D^a_x k_x$ un $K^a_x = B^a_x + B^a_{x+1} + \ldots$

2. Gadskārtējas prēmijas dabūsim, kā jau parasts:

$$\mathcal{P}^a_x = \frac{\mathfrak{Z}^a_x}{\mathrm{a}^a_x} = \nu^{\frac{1}{2}} \frac{\mathcal{K}^a_x}{\mathcal{N}^a_x} \quad \ldots\ldots\ldots (63_1).$$

Ja prēmijas maksā tikai n gadu laikā, tad

$$_n\mathcal{P}^a_x = \frac{\nu^{\frac{1}{2}} \mathcal{K}^a_x}{\mathcal{N}^a_x - \mathcal{N}^a_{x+n}} \quad \ldots\ldots\ldots (63'_1).$$

35. Apdrošināšana uz noteiktu laiku.

1. Aprēķināt, kādu *a*) vienreizēju *b*) gadskārtēju prēmiju maksās x gadus veca persona, lai slimības gadījumā saņemtu par katru slimības dienu, bet ne ilgāk kā vienu gadu, Ls 1 lielu summu, paturot apdrošināšanas līgumu spēkā tuvāko n gadu laikā.

Apdrošināšanu var izdarīt vai nu pēc vispārējām mirstības tabulām, vai pēc aktīvitātes tabulām.

Pirmā gadījumā

$$_{|n}Z_x = v^{\frac{1}{2}} \frac{l_x k_x + l_{x+1} k_{x+1} + \ldots + l_{x+n-1} k_{x+n-1}}{l_x},$$

$$\text{jeb} \quad _{|n}\mathfrak{Z}_x = \nu^{\frac{1}{2}} \frac{\mathcal{K}_x - \mathcal{K}_{x+n}}{\mathcal{D}_x} \quad \ldots\ldots\ldots (64).$$

Otrā gadījumā

$$_{|n}\mathfrak{Z}^a_x = \nu^{\frac{1}{2}} \frac{\mathcal{K}^a_x - \mathcal{K}^a_{x+n}}{\mathcal{D}^a_x} \quad \ldots\ldots\ldots (65).$$

2. Gada prēmijas, ja prēmijas maksā pa visu apdrošināšanas laiku, izteiksies pēc jau pazīstamiem paņēmieniem, kā

$$_n\mathcal{P}_x = \frac{_{|n}\mathfrak{Z}_x}{_{|n}\mathrm{a}_x} = \nu^{\frac{1}{2}} \frac{\mathcal{K}_x - \mathcal{K}_{x+n}}{\mathcal{N}_x - \mathcal{N}_{x+n}} \quad \ldots\ldots (64_1)$$

$$\text{un} \quad _n\mathcal{P}^a_x = \frac{_n\mathfrak{Z}^a_x}{_{|n}\mathrm{a}^a_x} = \nu^{\frac{1}{2}} \frac{\mathcal{K}^a_x - \mathcal{K}^a_{x+n}}{\mathcal{N}^a_x - \mathcal{N}^a_{x+n}} \quad \ldots\ldots (65_1).$$

36. Apdrošināšana ar starplaiku.

1. Bieži slimo kasu statutos sastopams noteikums, ka apdrošinātai personai tiesība saņemt slimības gadījumā izmaksas,

kas sākas ne tūlīt, bet pēc kāda laika no apdrošināšanas dienas. Šis starplaiks ilgst parasti 3 mēnešus un īstenībā maz iespaido kā vienreizēju, tā gadskārtējo prēmiju, kāpēc vienreizējas vai gadskārtējas prēmijas aprēķināšanai šo papildu nosacījumu bieži neņem vērā. Ja tomēr gribētu to ievērot, tad varam spriest tā.

Pieņemsim, ka starplaiks pirmā apdrošināšanas gadā ilgst t dienas. Tā kā šis starplaiks zīmējas tikai uz pirmo apdrošināšanas gadu, tad kases pienākumi var mainīties tikai pirmā gadā, kad, kā redzējām, tai būtu jāparedz izmaksām $\frac{v^{\frac{1}{2}}B_x}{D_x}$; no šīs summas uz vienu dienu, ja pieņemsim, ka gadā dienu ir $365\frac{1}{4}=m$, krīt $\frac{1}{m}\cdot\frac{v^{\frac{1}{2}}B_x}{D_x}$ un uz t dienām $\frac{t}{m}\cdot\frac{v^{\frac{1}{2}}B_x}{D_x}$. Atņemot šo summu no visa gada pienākumiem, dabūsim, ka pirmā apdrošināšanas gadā kases pienākumi ir $v^{\frac{1}{2}}\frac{B_x}{D_x}\left(1-\frac{t}{m}\right)$. Ņemot vērā pārējo gadu pienākumus $\frac{v^{\frac{1}{2}}}{D_x}K_{x+1}$, dabūsim vienreizēju prēmiju apdrošināšanai uz visu mūžu

$$\mathfrak{Z}_x=\frac{v^{\frac{1}{2}}}{D_x}\left[K_{x+1}+B_x\left(1-\frac{t}{m}\right)\right]=\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\mathfrak{D}_x}\left[\mathfrak{K}_x-\frac{t}{m}\mathfrak{B}_x\right] \quad \ldots (66)$$

un attiecīgi gada prēmija

$$\mathfrak{P}_x=\frac{v^{\frac{1}{2}}\left[\mathfrak{K}_x-\frac{t}{m}\mathfrak{B}_x\right]}{\mathfrak{N}_x} \quad \ldots\ldots\ldots (66_1)$$

2. Vēl biežāk sastopami noteikumi, ka kase nemaksā vispār par pirmām slimības dienām, lai tās iekristu kuŗā apdrošināšanas gadā iekrizdamas. To dara nolūkā, lai izsargātu kasi no maksājumiem par simulētiem vai ļoti niecīgiem, iedomātiem slimības gadījumiem. Protams, šis starplaiks nevar būt liels, parasti 2—3 dienas, kaut gan ir kases, kas ieved starplaiku no 7—14 dienām, bet toties, ja slimība velkas ilgāk, izmaksā ari par pirmām slimības dienām. Beidzamā gadījumā prēmiju aprēķinos starplaiks nav nemaz jāņem vērā.

Ja nu pieņemsim, ka par pirmām t dienām kase nemaksā, tad kases pienākumi izteiksies atsevišķos gados, saskaņā ar iepriekš teikto, kā

$$\frac{v^{\frac{1}{2}}}{D_x}B_x\left(1-\frac{t}{m}\right),\quad \frac{v^{\frac{1}{2}}}{D_x}B_{x+1}\left(1-\frac{t}{m}\right),\quad \frac{v^{\frac{1}{2}}}{D_x}B_{x+2}\left(1-\frac{t}{m}\right) \text{ u. t. t.}$$

Tāpēc vienreizēja prēmija apdrošināšanai uz visu mūžu izteiksies tā:

$$\mathfrak{Z}_x = \frac{v^{\frac{1}{2}}}{D_x}\left[K_x - \frac{t}{m}K_x\right] = \frac{v^{\frac{1}{2}} \cdot \mathfrak{K}_x\left(1-\frac{t}{m}\right)}{\mathfrak{D}_x} \quad \ldots\ldots (67)$$

gada prēmija būs

$$P_x = \frac{v^{\frac{1}{2}} K_x\left(1-\frac{t}{m}\right)}{N_x} \quad \ldots\ldots\ldots (67_1)$$

37. Prēmiju maksājumu pārtraukums par slimības laiku.

1. Būtu zināmā mērā neloģiski, ja kase maksā pa slimības laiku pabalstu un prasa pa to pašu laiku prēmiju maksas. Tāpēc daudzas kases ieved savos statūtos nosacījumus, ka pa slimības laiku prēmijas nav iekasējamas. Šādā gadījumā kasei nāk klāt it kā jauns pienākums — atlaist, it kā atmaksāt prēmiju maksājumus pa slimības laiku. Tāpēc pie prēmiju lieluma, kas aprēķinātas pēc iepriekšējām formulām, nāks klāt tā daļa, kas zīmējas uz prēmiju neiekasēšanu, vai citiem vārdiem, prēmiju atmaksām pa slimības laiku.

Pieņemsim, ka gada prēmija kaut kādam apdrošināšanas veidam ar nosacījumu, ka pa slimības laiku prēmijas netiek ņemtas, ir, zīmējoties uz Ls 1 lielu izmaksu par katru slimības dienu, π_x. Uz vienu dienu, ja gadā dienu skaits $356\frac{1}{4} = m$, iznāk $\frac{\pi_x}{m}$ liels prēmijas maksājums, kas, kā jau teikts, kasei itkā jāatmaksā pa slimības laiku. Ja tai būtu jāatmaksā Ls 1 pa katru slimības dienu, tad tādu maksājumu tagadējā vērtība, kā redzējām, ir Z_x, bet $\frac{\pi_x}{m}$ lielu maksājumu tagadējā vērtība būs $\frac{\pi_x}{m} Z_x$; tādā kārtā vienreizēja prēmija izteiksies kā $Z_x + \frac{\pi_x}{m} Z_x$ un gada prēmija π_x pēc parastā paņēmiena kā

$$\pi_x = \frac{Z_x + \frac{\pi_x}{m} Z_x}{a_x} = \frac{P_x a_x + \frac{\pi_x}{m} P_x a_x}{a_x} = P_x + \frac{\pi_x}{m} P_x,$$ no kurienes

$$\pi_x = \frac{m P_x}{m - P_x} \quad \ldots\ldots\ldots (68)$$

Starpība, salīdzinot ar agrākām formulām, nav visai liela.

38. Redukcijas reizinātājs.

1. Līdz šim esam pieņēmuši, ka kase izsniedz pabalstu pa slimības laiku, kas ilgst veselu gadu.

Praksē bieži sastopami gadījumi, ka pabalsta laiks nav vis vesels gads, bet gada daļa, piem., 3, 6 vai 9 mēneši. Protams, ka tādā gadījumā prēmijas būs mazākas, *bet tomēr tās nemazināsies proporcionāli ar laiku*, t. i. piem., nosacījumam, ka pabalsts izsniedzams ne ilgāk par pusgadu, *neatbilst* vienreizēja vai gada prēmija, kas ir divreiz mazāka par attiecīgām prēmijām, ja pabalstu izsniedz veselu gadu. Lai noteiktu, kāda daļa no prēmijas, kas atbilst pilna gada pabalsta ilgumam, jāņem prēmijai, kas atbilst mazāka ilguma pabalstam, iziet no slimības dienu skaita, kas iznāk uz pabalsta laika (3, 6 vai 9 mēnešiem), attiecības pret slimības dienu skaitu visa gada laikā. Kaut kāda pabalsta perioda vidēja slimības dienu skaita attiecību pret vidējo slimības dienu skaitu gadā sauc par redukcijas reizinātāju un apzīmē ar $R^{(t)}$, kur t ir pabalstāmo slimības dienu skaits.

Ar šo reizinātāju, kas vispār lielāks par nulli un mazāks vai vienlīdzīgs ar 1, bet nav, kā jau minēts, proporcionāls ar laiku, jāreizina tās prēmijas, kuras esam dabūjuši līdz šim, lai dabūtu prēmijas, kas atbilst t dienu ilgam pabalsta laikam. Tā tad, kā jau minēts,

$$R^{(t)}=\frac{k^{(t)}}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

kur $k^{(t)}$ apzīmē slimības dienu skaitu t dienu laikā, un

$$Z_x^{(t)}=R^{(t)}Z_x \text{ un } P_x^{(t)}=R^{(t)}P_x \quad \ldots\ldots \quad (70),$$

kur $Z_x^{(t)}$ un $P_x^{(t)}$ ir prēmijas, kas zīmējas uz t dienu ilgu pabalsta laiku.

2. Lai atrastu $R^{(t)}$ spriežam tā. Pieņemsim, ka no kādā kasē apdrošinātām personām l personas (vienalga, kādā vecumā) pieteikušas slimības gadījumus — pavisam k dienu. No šīm l personām slimo ne ilgāk kā kādu gada daļu, pieņemsim, gada n-to daļu, l_1 personas, uz kurām iznāk k_1 slimības dienu. Tā tad šīs l_1 personas ir pa gada $\frac{1}{n}$ daļu izveseļojušās, pie kam katrai no tām slimība var but bijusi dažāda ilguma. Atlikušās $l-l_1$ personas tā tad ir slimojušas visu šo pirmo periodu, t. i. gada n-to daļu; tāpēc par katru no šīm personām kasei ir bijis jāizmaksā par tik daudz slimības dienām, cik dienu ilgst minē-

tais periods, t. i. par $\frac{m}{n}$ dienām, kur $m=365\frac{1}{4}$; kopā par minētām personām iznāk $\frac{m}{n}(l-l_1)$ slimību dienu, bez tam vēl, kā redzējām, bija jāizmaksā par k_1 slimības dienu personām, kas izveseļojušās pirmā periodā.

Tā tad pirmā periodā (gada n-tā daļā) kasei jāizmaksā par

$$k_1+\frac{m}{n}(l-l_1)$$

slimības dienām. Saskaņā ar (69) formulu, ja redukcijas reizinātāju šim pirmam periodam apzīmēsim ar $R^{(1)}$, dabūsim, ka

$$R^{(1)}=\frac{k_1+\frac{m}{n}(l-l_1)}{k}.$$

Līdzīgā kārtā spriežot, atradīsim redukcijas reizinātāju pirmiem divi periodiem. Saskaņā ar iepriekš teikto, pirmā periodā atlīdzināmo slimības dienu bija $k_1+\frac{m}{n}(l-l_1)$; tagad nāks klāt k_2 slimības dienas, ko noslimojušas l_2 personas otrā periodā un līdz tā beigām izveseļojušās; personas, kas slimojušas visu otro periodu, ir $l-l_1-l_2$ ar $\frac{m}{n}$ slimības dienām katrā, tā tad pavisam ar $\frac{m}{n}(l-l_1-l_2)$ slimības dienām. Tā tad par pirmiem divi periodiem kasei jāmaksā par

$$k^{(2)}=k_1+k_2+\frac{m}{n}(l-l_1-l_2)+\frac{m}{n}(l-l_1-l_2)=k_1+k_2+\frac{m}{n}(2l-2l_1-l_2)$$

slimības dienām; tāpēc

$$R^{(2)}=\frac{k^{(2)}}{k}=\frac{k_1+k_2+\frac{m}{n}(2l-2l_1-l_2)}{k}.$$

Līdzīgā kārtā atrodam, ka

$$R^{(3)}=\frac{k^{(3)}}{k}=\frac{k_1+k_2+k_3+\frac{m}{n}(3l-3l_1-2l_2-l_3)}{k}$$

kur $R^{(3)}$ apzīmē redukcijas reizinātāju $\frac{3}{n}$ gada daļām, pie kam ar n visbiežāk izteic nedēļu skaitu gadā, t. i. $n=52^1/_7$. Redukcijas reizinātājs t periodiem (t nedēļām) izteiksies analoģiskā veidā

$$R^{(t)}=\frac{k_1+k_2+\ldots+k_t+\frac{m}{n}\left[tl-tl_1-(t-1)\,l_2-\ldots-2l_{t-1}-l_t\right]}{k}.$$

Lai varētu aprēķināt pēc dabūtās formulas redukcijas reizinātāju, jābūt attiecīgiem statistiskiem datiem, kas dod skaitļus k_1, k_2, ... un l_1, l_2, ...

Tā prof. Dr. Ch. Moser's no Bernas kantona slimo kasu materiāliem par laiku no 1883—1894 atradis redukcijas reizinātājiem šādas nozīmes.

Atlīdzības laiks		Vīriešiem	Jauktam sastāvam
Nedēļas	Dienas		
1	1—7	0,237	0,221
2	8—14	0,403	0,380
3	15—21	0,508	0,486
4	22—28	0,582	0,562
5	29—35	0,637	0,618
6	36—42	0,678	0,662
7	43—49	0,712	0,697
8	50—56	0,739	0,726
9	57—63	0,763	0,751
10	64—70	0,784	0,773
11	71—77	0,801	0,792
12	78—84	0,817	0,808
13	85—91	0,830	0,822
17	92—119	0,872	0,867
21	120—147	0,902	0,898
26	148—182	0,928	0,926
39	183—273	0,973	0,973
$52^1/_2$	274—365	1,000	1,000

39. Caurmēra prēmijas un grupu prēmijas.

Ne visas slimo kases aprēķina prēmijas pēc vecumiem: dažas ņem no visiem apdrošinātiem vienādas caurmēra prēmijas (uz Ls 1 lielu izmaksu), citas ņem caurmēra prēmijas noteiktām vienāda vecuma grupām, piem., vienādas visām personām, kas uzsāk apdrošināšanu vecumā no 20—30 gadiem. Tā kā šādos gadījumos jaunākā persona maksās vairāk nekā tai pienāktos, vecāka turpretim mazāk, tad šāds paņēmiens, no savstarpējā palīdzības viedokļa, būtu attaisnojams, tikai viena lieta jāņem vērā: caurmēra vai grupu prēmijas jānoteic tā, lai kases ieņākumi un izdevumi būtu līdzsvarā, t. i., lai būtu ievērots neizmantošanas spēles princips. Lai, ņemot vērā šo principu, aprēķinātu caurmēra prēmiju, spriežam tā. Redzējām, ka kases pienākumi pret x gadus vecu, uz visu mūžu apdrošinātu personu izteicas kā Z_x; tāpat pienākumi pret $x+1$ gadu vecu personu būs Z_{x+1} u. t. t. Ja nu apdrošinātas x gadu vecumā l_x personas, $x+1$ gada vecumā l_{x+1} persona u. t. t., tad kases pienākumi izteiksies ar summu

$$l_x Z_x + l_{x+1} Z_{x+1} + \ldots = \Sigma l_x Z_x;$$

visu x gadus vecu personu Ls 1 lielu ikgadēju maksājumu tagadējā vērtība ir $l_x a_x$, $x+1$ gadu vecu personu Ls 1 lielu maksājumu tagadējā vērtība ir $l_{x+1} a_{x+1}$ u. t. t.; ja apzīmēsim caurmēra prēmiju ar P_c, tad visu apdrošināto personu maksājumu tagadējā vērtība izteiksies kā

$$P_c l_x a_x + P_c l_{x+1} a_{x+1} + \ldots = P_c (l_x a_x + l_{x+1} a_{x+1} + \ldots) = P_c \Sigma l_x a_x ;$$

tā kā paredzamiem izdevumiem un ienākumiem jābūt vienlīdzīgiem, tad $\Sigma l_x Z_x = P_c \Sigma l_x a_x$, no kurienes

$$P_c = \frac{\Sigma l_x Z_x}{\Sigma l_x a_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72).$$

Dabūtā formula viegli piemērojama ari citiem apdrošināšanas veidiem.

2. Pēc dabūtās (72) formulas var aprēķināt ari **g r u p u p r ē m i j a s** atsevišķo vecumu grupām. Bet šinī gadījumā bieži rīkojas vienkāršāk, pieņemot par grupas prēmiju to, kas atbilst grupas lielākā vecuma individuālai prēmijai. Piem., ja grupā apvienojas, kā parasti mēdz būt, pa 5 vai pa 10 gadi, tad, ja grupā apvienotas personas no 20—24 gadiem (ieskaitot), tad visas šīs grupas personas maksā tādu prēmiju, kāda jāmaksā 24 gadus vecai personai. Ar to kasei, protams, rodas lielāks ienākums, kas ļauj tai uzkrāt rezerves neparedzētiem gadījumiem.

3. Ja ar apdrošināšanu slimības gadījumiem savienojas citi apdrošināšanas veidi, piem., apdrošināšana nāves gadījumiem, tad prēmija summējas no atsevišķo apdrošināšanas veidu prēmijām.

Ieteicama literatūra.

P o l i t i s k ā a r i t m ē t i k ā.

Textbook, I. p. (Institut of Actuaries textbook of the principles of interest, life annuities and assurances and their practical application).

A. B a r r i o l. Théorie et Pratique des Opérations Financières.

W. L u d w i g. Lehrbuch der politischen Arithmetik.

H. R e n f e r. Lehrbuch der politischen Arithmetik.

A p d r o š i n ā š a n ā.

Textbook, II. p.

H. P o t e r i n d u M o t e l. Théorie des Assurances sur la Vie.

R e n é P o u s s i n. Trailé élémentaire des Assurances sur la Vie.

C o r n e i l l e L. L a n d r é. Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung.

A l f r e d L o e w y. Versicherungsmathematik.

H u g o B r o g g i. Versicherungsmathematik.

A. P a t z i g. Lehrbuch der Versicherungsrechnung.

A. P a t z i g. Aufgabensammlung zum Lehrbuch der Versicherungsrechnung.

H. R e n f e r. Beiträge zur Krankenversicherung.

III

Finanču tabulas

A. Augļu augļu tabulas
B. Mirstības tabulas

Pielikums L. Auseja «Finanču matēmatikai»

A

Dienas, izteiktas gada decimāldaļās.

Gads = 360 d.

Dienas	Gada daļas	Dienas	Gada daļas	Dienas	Gada daļas	Dienas	Gada daļas	Dienas	Gada daļas	Dienas	Gada daļas	Dienas	Gada daļas	Dienas	Gada daļas
1	0,00278	51	0,14167	101	0,28056	151	0,41944	201	0,55833	251	0,69722	301	0,83611	351	0,97500
2	0,00556	52	0,14444	102	0,28333	152	0,42222	202	0,56111	252	0,70000	302	0,83889	352	0,97778
3	0,00833	53	0,14722	103	0,28611	153	0,42500	203	0,56389	253	0,70278	303	0,84167	353	0,98056
4	0,01111	54	0,15000	104	0,28889	154	0,42778	204	0,56667	254	0,70556	304	0,84444	354	0,98333
5	0,01389	55	0,15278	105	0,29167	155	0,43056	205	0,56944	255	0,70833	305	0,84722	355	0,98611
6	0,01667	56	0,15556	106	0,29444	156	0,43333	206	0,57222	256	0,71111	306	0,85000	356	0,98889
7	0,01944	57	0,15833	107	0,29722	157	0,43611	207	0,57500	257	0.71389	307	0,85278	357	0,99167
8	0,02222	58	0,16111	108	0,30000	158	0,43889	208	0,57778	258	0,71667	308	0,85556	358	0,09444
9	0,02500	59	0,16389	109	0,30278	159	0,44167	209	0,58056	259	0,71944	309	0,85833	359	0,99722
10	0,02778	60	0,16667	110	0,30556	160	0,44444	210	0,58333	260	0,72222	310	0,86111	360	1,00000
11	0,03056	61	0,16944	111	0,30833	161	0,44722	211	0,58611	261	0,72500	311	0,86389		
12	0,03333	62	0,17222	112	0,31111	162	0,45000	212	0,58889	262	0,72778	312	0,86667		
13	0,03611	63	0,17500	113	0,31389	163	0,45278	213	0,59167	263	0,73056	313	0,86944		
14	0,03889	64	0,17778	114	0,31667	164	0,45556	214	0,59444	264	0,73333	314	0,87222		
15	0,04167	65	0,18056	115	0,31944	165	0,45833	215	0,59722	265	0,73611	315	0,87500		
16	0,04444	66	0,18333	116	0,32222	166	0,46111	216	0,60000	266	0,73889	316	0,87778		
17	0,04722	67	0,18611	117	0,32500	167	0,46389	217	0,60278	267	0,74167	317	0,88056		
18	0,05000	68	0,18889	118	0,32778	168	0,46667	218	0,60556	268	0,74444	318	0,88333		
19	0,05278	69	0,19167	119	0,33056	169	0,46944	219	0,60833	269	0,74722	319	0,88611		
20	0,05556	70	0,19444	120	0,33333	170	0,47222	220	0,61111	270	0,75000	320	0,88889		
21	0,05833	71	0,19722	121	0,33611	171	0,47500	221	0,61389	271	0,75278	321	0,89167		
22	0,06111	72	0,20000	122	0,33889	172	0,47778	222	0,61667	272	0,75556	322	0,89444		
23	0,06389	73	0,20278	123	0,34167	173	0,48056	223	0,61944	273	0,75833	323	0,89722		
24	0,06667	74	0,20556	124	0,34444	174	0,48333	224	0,62222	274	0,76111	324	0,90000		
25	0,06944	75	0,20833	125	0,34722	175	0,48611	225	0,62500	275	0,76389	325	0,90278		
26	0,07222	76	0,21111	126	0,35000	176	0,48889	226	0,62778	276	0,76667	326	0,90556		
27	0.07500	77	0,21389	127	0,35278	177	0,49167	227	0,63056	277	0,76944	327	0,90833		
28	0,07778	78	0,21667	128	0,35556	178	0,49444	228	0,63333	278	0,77222	328	0,91111		
29	0,08056	79	0,21944	129	0,35833	179	0,49722	229	0,63611	279	0,77500	329	0,91389		
30	0,08333	80	0,22222	130	0,36111	180	0,50000	230	0,63889	280	0,77778	330	0,91667		
31	0,08611	81	0,22500	131	0,36389	181	0,50278	231	0,64167	281	0,78056	331	0,91944		
32	0,08889	82	0,22778	132	0,36667	182	0,50556	232	0,64444	282	0,78333	332	0,92222		
33	0,09167	83	0,23056	133	0,36944	183	0,50833	233	0,64722	283	0,78611	333	0,92500		
34	0,09444	84	0,23333	134	0,37222	184	0,51111	234	0,65000	284	0,78889	334	0,92778		
35	0,09722	85	0,23611	135	0,37500	185	0,51389	235	0,65278	285	0,79167	335	0,93056		
36	0,10000	86	0,23889	136	0,37778	186	0,51667	236	0,65556	286	0,79444	336	0,93333		
37	0,10278	87	0,24167	137	0,38056	187	0,51944	237	0,65883	287	0,79722	337	0,93611		
38	0,10556	88	0,24444	138	0,38333	188	0,52222	238	0,66111	288	0,80000	338	0,93889		
39	0,10833	89	0,24722	139	0,38611	189	0,52500	239	0,66389	289	0,80278	339	0,94167		
40	0,11111	90	0,25000	140	0,38889	190	0,52778	240	0,66667	290	0,80556	340	0,94444		
41	0,11389	91	0,25278	141	0,39167	191	0,53056	241	0,66944	291	0,80833	341	0,94722		
42	0,11667	92	0,25556	142	0,39444	192	0,53333	242	0,67222	292	0,81111	342	0,95000		
43	0,11944	93	0,25833	143	0,39722	193	0,53611	243	0,67500	293	0,81389	343	0,95278		
44	0,12222	94	0,26111	144	0,40000	194	0,53889	244	0,67778	294	0,81667	344	0,95556		
45	0,12500	95	0,26389	145	0,40278	195	0,54167	245	0,68056	295	0,81944	345	0,95833		
46	0,12778	96	0,26667	146	0,40556	196	0,54444	246	0,68333	296	0,82222	346	0,96111		
47	0,13056	97	0,26944	147	0,40833	197	0,54722	247	0,68611	297	0,82500	347	0,96389		
48	0,13333	98	0,27222	148	0,41111	198	0,55000	248	0,68889	298	0,82778	348	0,96667		
49	0,13611	99	0,27500	149	0,41389	199	0,55278	249	0,69167	299	0,83056	349	0,96944		
50	0,13889	100	0,27778	150	0,41667	200	0,55556	250	0,69444	300	0,83333	350	0,97222		

Mēneši	
1	0,08333
2	0,16667
3	0,25000
4	0,33000
5	0,41667
6	0,50000
7	0,58333
8	0,66667
9	0,75000
10	0,83333
11	0,91667

Ja gada daļa jāizteic vairāk nekā ar 5 decimālzīmēm, tad var ceturto decimālzīmi atkārtot tik daudz reizes, cik vajadzīgs

I r^n

Gadi	$^1/_4$ %	$^1/_2$ %	1 %	2 %	$2\,^2|_{49}$% = 2% antic.
1	1,0025	1,005	1,01	1,02	1,0204 0816
2	1,0050 0625	1,0100 25	1,0201	1,0404	1,0412 3282
3	1,0075 1877	1,0150 7513	1,0303 01	1,0612 08	1,0624 8247
4	1,0100 3756	1,0201 5050	1,0406 0401	1,0824 3216	1,0841 6578
5	1,0125 6266	1,0252 5125	1,0510 1005	1,1040 8080	1,1062 9162
6	1,0150 9406	1,0303 7751	1,0615 2015	1,1261 6242	1,1288 6900
7	1,0176 3180	1,0355 2940	1,0721 3535	1,1486 8567	1,1519 0714
8	1,0201 7588	1,0407 0704	1,0828 5671	1,1716 5938	1,1754 1545
9	1,0227 2632	1,0459 1058	1,0936 8527	1,1950 9257	1,1994 0352
10	1,0252 8313	1,0511 4013	1,1046 2213	1,2189 9442	1,2238 8114
11	1,0278 4634	1,0563 9583	1,1156 6835	1,2433 7431	1,2488 5831
12	1,0304 1596	1,0616 7781	1,1268 2503	1,2682 4179	1,2743 4521
13	1,0329 9200	1,0669 8620	1,1380 9328	1,2936 0663	1,3003 5226
14	1,0355 7448	1,0723 2113	1,1494 7421	1,3194 7876	1,3268 9006
15	1,0381 6341	1,0776 8274	1,1609 6896	1,3458 6834	1,3539 6945
16	1,0407 5882	1,0830 7115	1,1725 7864	1,3727 8571	1,3816 0148
17	1,0433 6072	1,0884 8651	1,1843 0443	1,4002 4142	1,4097 9743
18	1,0459 6912	1,0939 2894	1,1961 4748	1,4282 4625	1,4385 6880
19	1,0485 8404	1,0993 9858	1,2081 0895	1,4568 1117	1,4679 2735
20	1,0512 0550	1,1048 9558	1,2201 9004	1,4859 4740	1,4978 8505
21	1,0538 3352	1,1104 2006	1,2323 9194	1,5156 6634	1,5284 5413
22	1,0564 6810	1,1159 7216	1,2447 1586	1,5459 7967	1,5596 4707
23	1,0591 0927	1,1215 5202	1,2571 6302	1,5768 9926	1,5914 7661
24	1,0617 5 04	1,1271 5978	1,2697 3465	1,6084 3725	1,6239 5572
25	1,0644 1144	1,1327 9558	1,2824 3200	1,6406 0599	1,6570 9767
26	1,0670 7247	1,1384 5955	1,2952 5631	1,6734 1811	1,6909 1599
27	1,0697 4015	1,1441 5185	1,3082 0888	1,7068 8648	1,7254 2448
28	1,0724 1450	1,1498 7261	1,3212 9097	1,7410 2421	1,7606 3723
29	1,0750 9553	1,1556 2197	1,3345 0388	1,7758 4469	1,7965 6860
30	1,0777 8327	1,1614 0008	1,3478 4892	1,8113 6158	1,8332 3327
31	1,0804 7773	1,1672 0708	1,3613 2740	1,8475 8882	1,8706 4619
32	1,0831 7892	1,1730 4312	1,3749 4068	1,8845 4059	1,9088 2264
33	1,0858 8687	1,1789 0·33	1,3886 9009	1,9222 3140	1,9477 7820
34	1,0886 0159	1,1848 0288	1,4025 7699	1,9606 7603	1,9875 2878
35	1,0913 2309	1,1907 2689	1,4166 0276	1,9998 8955	2,0280 9059
36	1,0940 5140	1,1966 8052	1,4307 6878	2,0398 8734	2,0694 8020
37	1,0967 8653	1,2026 6393	1,4450 7647	2,0806 8509	2,1117 1449
38	1,0995 2850	1,2086 7725	1,4595 2724	2,1222 9879	2,1548 1070
39	1,1022 7732	1,2147 2063	1,4741 2251	2,1647 4477	2,1987 8643
40	1,1050 3301	1,2207 9424	1,4888 6373	2,2080 3966	2,2436 5962
41	1,1077 9559	1,2268 9821	1,5037 5237	2,2522 0046	2,2894 4859
42	1,1105 6508	1,2330 3270	1,5187 8989	2,2972 4447	2,3361 7203
43	1,1133 4149	1,2391 9786	1,5339 7779	2,3431 8936	2,3838 4902
44	1,1161 2485	1,2453 9385	1,5493 1757	2,3900 5314	2,4324 9900
45	1,1189 1516	1,2516 2082	1,5648 1075	2,4378 5421	2,4821 4183
46	1,1217 1245	1,2578 7892	1,5804 5885	2,4866 1129	2,5327 9779
47	1,1245 1673	1,2641 6832	1,5962 6344	2,5363 4351	2,5844 8754
48	1,1273 2802	1,2704 8916	1,6122 2608	2,5870 7039	2,6372 3218
49	1,1301 4634	1,2768 4161	1,6283 4834	2,6388 1179	2,6910 5325
50	1,1329 7171	1,2832 2581	1,6446 3182	2,6915 8803	2,7459 7270

Gadi	$2\frac{1}{2}$ %	3 %	$3\frac{9}{97}$ % = 3 % antic.	$3\frac{1}{2}$ %	$3\frac{121}{193}$ % = $3\frac{1}{2}$ % antic.
1	1,025	1,03	1,0309 2784	1,035	1,0362 6943
2	1,0506 25	1,0609	1,0628 1220	1,0712 25	1,0738 5433
3	1,0768 9063	1,0927 27	1,0956 8268	1,1087 1788	1,1128 0242
4	1,1038 1289	1,1255 0881	1,1295 6977	1,1475 2300	1,1531 6313
5	1,1314 0821	1,1592 7407	1,1645 0492	1,1876 8631	1,1949 8769
6	1,1596 9342	1,1940 5230	1,2005 2054	1,2292 5533	1,2383 2922
7	1,1886 8575	1,2298 7387	1,2376 5004	1,2722 7926	1,2832 4271
8	1,2184 0290	1,2667 7008	1,2759 2788	1,3168 0904	1,3297 8519
9	1,2488 6297	1,3047 7318	1,3153 8956	1,3628 9735	1,3780 1575
10	1,2800 8454	1,3439 1638	1,3560 7171	1,4105 9876	1,4279 9559
11	1,3120 8666	1,3842 3387	1,3980 1208	1,4599 6972	1,4797 8818
12	1,3448 8882	1,4257 6089	1,4412 4956	1,5110 6866	1,5334 5925
13	1,3785 1104	1,4685 3371	1,4858 2429	1,5639 5606	1,5890 7694
14	1,4129 7382	1,5125 8972	1,5317 7762	1,6186 9452	1,6467 1186
15	1,4482 9817	1,5579 6742	1,5791 5219	1,6753 4883	1,7064 3716
16	1,4845 0562	1,6047 0644	1,6279 9194	1,7339 8604	1,7683 2866
17	1,5216 1826	1,6528 4763	1,6783 4221	1,7946 7555	1,8324 6494
18	1,5596 5872	1,7024 3306	1,7302 4970	1,8574 8920	1,8989 2739
19	1,5986 5019	1,7535 0605	1,7837 6258	1,9225 0132	1,9678 0041
20	1,6386 1644	1,8061 1123	1,8389 3049	1,9897 8886	2,0391 7141
21	1,6795 8185	1,8602 9457	1,8958 0463	2,0594 3147	2,1131 3099
22	1,7215 7140	1,9161 0341	1,9544 3777	2,1315 1158	2,1897 7305
23	1,7646 1068	1,9735 8651	2,0148 8430	2,2061 1448	2,3691 9487
24	1,8087 2595	2,0327 9411	2,0772 0030	2,2833 2849	2,3514 9727
25	1,8539 4410	2,0937 7793	2,1414 4361	2,3632 4498	2,4367 8474
26	1,9002 9270	2,1565 9127	2,2076 7383	2,4459 5856	2,5251 6553
27	1,9478 0002	2,2212 8901	2,2759 5240	2,5315 6711	2,6167 5185
28	1,9964 9502	2,2879 2768	2,3463 4268	2,6201 7196	2,7116 5995
29	2,0464 0739	2,3565 6551	2,4189 0998	2,7118 7798	2,8100 1031
30	2,0975 6758	2,4272 6247	2,4937 2163	2,8067 9370	2,9119 2778
31	2,1500 0677	2,5000 8035	2,5708 4704	2,9050 3148	3,0175 4174
32	2,2037 5694	2,5750 8276	2,6503 5777	3,0067 0759	3,1269 8626
33	2,2588 5086	2,6523 3524	2,7323 2760	3,1119 4235	3,2404 0027
34	2,3153 2213	2,7319 0530	2,8168 3258	3,2208 6033	3,3579 2774
35	2,3732 0519	2,8138 6245	2,9039 5111	3,3335 9045	3,4797 1787
36	2,4325 3532	2,8982 7833	2,9937 6403	3,4502 6611	3,6059 2525
37	2,4933 4870	2,9852 2668	3,0863 5467	3,5710 2543	3,7367 1010
38	2,5556 8242	3,0747 8348	3,1818 0894	3,6960 1132	3,8722 3845
39	2,6195 7448	3,1670 2698	3,2802 1540	3,8253 7171	4,0126 8233
40	2,6850 6384	3,2620 3779	3,3816 6536	3,9592 5972	4,1582 2003
41	2,7521 9043	3,3598 9893	3,4862 5295	4,0978 3381	4,3090 3630
42	2,8209 9520	3,4606 9589	3,5940 7521	4,2412 5799	4,4653 2259
43	2,8915 2008	3,5645 1677	3,7052 3217	4,3897 0202	4,6272 7730
44	2,9638 0808	3,6714 5227	3,8198 2698	4,5433 4160	4,7951 0601
45	3,0379 0328	3,7815 9584	3,9379 6596	4,7023 5855	4,9690 2177
46	3,1138 5086	3,8950 4372	4,0597 5872	4,8669 4110	5,1492 4536
47	3,1916 9713	4,0118 9503	4,1853 1827	5,0372 8404	5,3360 0555
48	3,2714 8956	4,1322 5188	4,3147 6111	5,2135 8898	5,5295 3943
49	3,3532 7680	4,2562 1944	4,4482 0733	5,3960 6459	5,7300 9268
50	3,4371 0872	4,3839 0602	4,5857 8075	5,5849 2686	5,9379 1987

Gadi	4 %	$4^1/_8$ %	$4^1/_6$ % = 4 % antic.	$4^1/_4$ %	$4^3/_8$ %
1	1,04	1,0412 5	1,0416 6667	1,0425	1,0437 5
2	1,0816	1,0842 0156	1,0850 6944	1,0868 0625	1,0894 1406
3	1,1248 64	1,1289 2488	1,1302 8067	1,1329 9552	1,1370 7593
4	1,1698 5856	1,1754 9303	1,1773 7570	1,1811 4783	1,1868 2300
5	1,2166 5290	1,2239 8212	1,2264 3302	1,2313 4661	1,2387 4651
6	1,2653 1902	1,2744 7138	1,2775 3440	1,2836 7884	1,2929 4167
7	1,3159 3178	1,3270 4332	1,3307 6500	1,3382 3519	1,3495 0786
8	1,3685 6905	1,3817 8386	1,3862 1354	1,3951 1018	1,4085 4883
9	1,4233 1181	1,4387 8244	1,4439 7243	1,4544 0237	1,4701 7284
10	1,4802 4428	1,4981 3222	1,5041 3795	1,5162 1447	1,5344 9291
11	1,5394 5406	1,5599 3017	1,5668 1037	1,5806 5358	1,6016 2697
12	1,6010 3222	1,6242 7729	1,6320 9413	1,6478 3136	1,6716 9815
13	1,6650 7351	1,6912 7873	1,7000 9805	1,7178 6419	1,7448 3494
14	1,7316 7645	1,7610 4398	1,7709 3547	1,7908 7342	1,8211 7147
15	1,8009 4351	1,8336 8704	1,8447 2445	1,8669 8554	1,9008 4773
16	1,8729 8125	1,9093 2663	1,9215 8797	1,9463 3243	1,9840 0981
17	1,9479 0050	1,9880 8636	2,0016 5414	2,0290 5156	2,0708 1024
18	2,0258 1652	2,0700 9492	2,0850 5639	2,1152 8625	2,1614 0819
19	2,1068 4918	2,1554 8633	2,1719 3374	2,2051 8591	2,2559 6980
20	2,1911 2314	2,2444 0015	2,2624 3098	2,2989 0631	2,3546 6848
21	2,2787 6807	2,3369 8165	2,3566 9894	2,3966 0983	2,4576 8522
22	2,3699 1879	2,4333 8215	2,4548 9473	2,4984 6575	2,5652 0895
23	2,4647 1554	2,5337 59[illegible]6	2,5571 8201	2,6046 5054	2,6774 3684
24	2,5633 0416	2,6382 7672	2,6637 3126	2,7153 4819	2,7945 7471
25	2,6658 3633	2,7471 0564	2,7747 2006	2,8307 5049	2,9168 3735
26	2,7724 6978	2,8604 2375	2,8903 3340	2,9510 5739	3,0444 4898
27	2,8833 6858	2,9784 1623	3,0107 6395	3,0764 7732	3,1776 4363
28	2,9987 0332	3,1012 7590	3,1362 1245	3,2072 2761	3,3166 6553
29	3,1186 5145	3,2292 0353	3,2668 8797	3,3435 3478	3,4617 6965
30	3,2433 9751	3,3624 0817	3,4030 0830	3,4856 3501	3,6132 2207
31	3,3731 3341	3,5011 0751	3,5448 0032	3,6337 7450	3,7713 0054
32	3,5080 5875	3,6455 2819	3,6925 0033	3,7882 0992	3,9362 9494
33	3,6483 8110	3,7959 0623	3,8463 5451	3,9492 0884	4,1085 0784
34	3,7943 1634	3,9524 8736	4,0066 1928	4,1170 5021	4,2882 5506
35	3,9460 8899	4,1155 2747	4,1735 6175	4,2920 2485	4,4758 6622
36	4,1039 3255	4,2852 9298	4,3474 6016	4,4744 3590	4,6716 8537
37	4,2680 8986	4,4620 6131	4,5286 0433	4,6645 9943	4,8760 7160
38	4,4388 1345	4,6461 2134	4,7172 9618	4,8628 4491	5,0893 9973
39	4,6163 6599	4,8377 7384	4,9138 5019	5,0695 1581	5,3120 6097
40	4,8010 2063	5,0373 3202	5,1185 9394	5,2849 7024	5,5444 6364
41	4,9930 6145	5,2451 2196	5,3318 6869	5,5095 8147	5,7870 3392
42	5,1927 8391	5,4614 8324	5,5540 2989	5,7437 3868	6,0402 1666
43	5,4004 9527	5,6867 6943	5,7854 4780	5,9878 4758	6,3044 7614
44	5,6165 1508	5,9213 4866	6,0265 0812	6,2423 3110	6,5802 9697
45	5,8411 7568	6,1656 0430	6,2776 1263	6,5076 3017	6,8681 8496
46	6,0748 2271	6,4199 3547	6,5391 7982	6,7842 0445	7,1686 6805
47	6,3178 1562	6,6847 5781	6,8116 4565	7,0725 3314	7,4822 9728
48	6,5705 2824	6,9605 0407	7,0954 6422	7,3731 1580	7,8096 4778
49	6,8333 4937	7,2476 2487	7,3911 0856	7,6864 7322	8,1513 1987
50	7,1066 8335	7,5465 8939	7,6990 7141	8,0131 4834	8,5079 4012

I

r^n

Gadi	$4^1/_2$ %	$4^5/_8$ %	$4^3/_4$ %	$4^7/_8$ %	5 %
1	1,045	1,0462 5	1,0475	1,0487 5	1,05
2	1,0920 25	1,0946 3906	1,0972 5625	1,0998 7656	1,1025
3	1,1411 6613	1,1452 6612	1,1493 7592	1,1534 9554	1,1576 25
4	1,1925,1860	1,1982 3468	1,2039 7128	1,2097 2845	1,2155 0625
5	1,2461 8194	1,2536 5303	1,2611 5991	1,2687 0271	1,2762 8156
6	1,3022 6012	1,3116 3448	1,3210 6501	1,3305 5197	1,3400 9564
7	1,3608 6183	1,3722 9758	1,3838 1560	1,3954 1638	1,4071 0042
8	1,4221 0061	1,4357 6634	1,4495 4684	1,4634 4293	1,4774 5544
9	1,4860 9514	1,5021 7053	1,5184 0031	1,5347 8577	1,5513 2822
10	1,5529 6942	1,5716 4592	1,5905 2433	1,6096 0658	1,6288 9463
11	1,6228 5305	1,6443 3455	1,6660 7423	1,6880 7490	1,7103 3936
12	1,6958 8143	1,7203 8502	1,7452 1276	1,7703 6855	1,7958 5633
13	1,7721 9610	1,7999 5283	1,8281 1037	1,8566 7402	1,8856 4914
14	1,8519 4492	1,8832 0064	1,9149 4561	1,9471 8688	1,9799 3160
15	1,9352 8244	1,9702 9867	2,0059 0552	2,0421 1224	2,0789 2818
16	2,0223 7015	2,0614 2499	2,1011 8604	2,1416 6521	2,1828 7459
17	2,1133 7681	2,1567 6589	2,2009 9237	2,2460 7139	2,2920 1832
18	2,2084 7877	2,2565 1632	2,3055 3951	2,3555 6737	2,4066 1923
19	2,3078 6031	2,3608 8020	2,4150 5264	2,4704 0128	2,5269 5020
20	2,4117 1402	2,4700 7090	2,5297 6764	2,5908 3334	2,6532 9771
21	2,5202 4116	2,5843 1168	2,6499 3160	2,7171 3646	2,7859 6259
22	2,6336 5201	2,7038 3610	2,7758 0335	2,8495 9687	2,9252 6072
23	2,7521 6635	2,8288 8852	2,9076 5401	2,9885 1471	3,0715 2376
24	2,8760 1383	2,9597 2461	3,0457 6758	3,1342 0480	3,2250 9994
25	3,0054 3446	3,0966 1188	3,1904 4154	3,2869 9729	3,3863 5494
26	3,1406 7901	3,2398 3018	3,3419 8751	3,4472 3841	3,5556 7269
27	3,2820 0956	3,3896 7232	3,5007 3192	3,6152 9128	3,7334 5632
28	3,4296 9999	3,5464 4467	3,6670 1668	3,7915 3673	3,9201 2914
29	3,5840 3649	3,7104 6773	3,8411 9998	3,9763 7414	4,1161 3560
30	3,7453 1813	3,8820 7686	4,0236 5698	4,1702 2238	4,3219 4238
31	3,9138 5745	4,0616 2292	4,2147 8068	4,3735 2073	4,5380 3949
32	4,0899 8104	4,2494 7298	4,4149 8276	4,5867 2986	4,7649 4147
33	4,2740 3018	4,4460 1110	4,6246 9445	4,8103 3294	5,0031 8854
34	4,4663 6154	4,6516 3912	4,8443 6743	5,0448 3667	5,2533 4797
35	4,6673 4781	4,8667 7743	5,0744 7488	5,2907 7246	5,5160 1537
36	4,8773 7846	5,0918 6588	5,3155 1244	5,5486 9762	5,7918 1614
37	5,0968 6049	5,3273 6468	5,5679 9928	5,8191 9663	6,0814 0694
38	5,3262 1921	5,5737 5530	5,8324 7925	6,1028 8246	6,3854 7729
39	5,5658 9908	5,8315 4148	6,1095 2201	6,4003 9798	6,7047 5115
40	5,8163 6454	6,1012 5027	6,3997 2431	6,7124 1738	7,0399 8871
41	6,0781 0094	6,3834 3310	6,7037 1121	7,0396 4773	7,3919 8815
42	6,3516 1548	6,6786 6688	7,0221 3750	7,3828 3056	7,7615 8756
43	6,6374 3818	6,9875 5522	7,3556 8903	7,7427 4355	8,1496 6693
44	6,9361 2290	7,3107 2965	7,7050 8426	8,1202 0230	8,5571 5028
45	7,2482 4843	7,6488 5090	8,0710 7576	8,5160 6216	8,9850 0779
46	7,5744 1961	8,0026 1025	8,4544 5186	8,9312 2019	9,4342 5818
47	7,9152 6849	8,3727 3097	8,8560 3832	9,3666 1717	9,9059 7109
48	8,2714 5557	8,7599 6978	9,2767 0014	9,8232 3976	10,4012 6965
49	8,6436 7107	9,1651 1838	9,7173 4340	10,3021 2270	10,9213 3313
50	9,0326 3627	9,5890 0511	10,1789 1721	10,8043 5118	11,4673 9979

Gadi	$5^{5}\|_{19}$ % = = 5 % antic.	6 %	$6^{18}\|_{47}$ % = = 6 % ant c.	7 %	8 %
1	1,0526 3158	1,06	1,0638 2979	1,07	1,08
2	1,1080 3324	1,1236	1,1317 3382	1,1449	1,1664
3	1,1663 5078	1,1910 16	1,2039 7214	1,2250 43	1,2597 12
4	1,2277 3766	1,2624 7696	1,2808 2143	1,3107 9601	1,3604 8896
5	1,2923 5543	1,3382 2558	1,3625 7599	1,4025 5173	1,4693 2808
6	1,3603 7414	1,4185 1911	1,4495 4893	1,5007 3035	1,5868 7432
7	1,4319 7278	1,5036 3026	1,5420 7333	1,6057 8148	1,7138 2427
8	1,5073 3977	1,5938 4807	1,6405 0354	1,7181 8618	1,8509 3021
9	1,5866 7344	1,6894 7896	1,7452 1653	1,8384 5921	1,9990 0463
10	1,6701 8257	1,7908 4770	1,8566 1333	1,9671 5136	2,1589 2500
11	1,7580 8632	1,8982 9856	1,9751 2056	2,1048 5195	2,3316 3900
12	1,8506 1781	2,0121 9647	2,1011 9209	2,2521 9159	2,5181 7012
13	1,9480 1874	2,1329 2826	2,2353 1073	2,4098 4500	2,7196 2373
14	2,0505 4605	2,2609 0396	2,3779 9014	2,5785 3415	2,9371 9362
15	2,1584 6952	2,3965 5819	2,5297 7675	2,7590 3154	3,1721 6911
16	2,2720 7318	2,5403 5168	2,6912 5186	2,9521 6375	3,4259 4264
17	2,3916 5598	2,6927 7279	2,8630 3389	3,1588 1521	3,7000 1805
18	2,5175 3261	2,8543 3915	3,0457 8073	3,3799 3228	3,9960 1950
19	2,6500 3433	3,0255 9950	3,2401 9227	3,6165 2754	4,3157 0106
20	2,7895 0982	3,2071 3547	3,4470 1305	3,8696 8446	4,6609 5714
21	2,9363 2612	3,3995 6360	3,6670 3516	4,1405 6237	5,0338 3372
22	3,0908 6960	3,6035 3742	3,9011 0124	4,4304 0174	5,4365 4041
23	3,2535 4695	3,8197 4966	4,1501 0770	4,7405 2986	5,8714 6365
24	3,4247 8626	4,0489 3464	4,4150 0819	5,0723 6695	6,3411 8074
25	3,6050 3817	4,2918 7072	4,6968 1722	5,4274 3264	6,8484 7520
26	3,7947 7702	4,5493 8296	4,9966 1407	5,8073 5292	7,3963 5321
27	3,9945 0213	4,8223 4594	5,3155 4688	6,2138 6763	7,9880 6147
28	4,2047 3909	5,1116 8670	5,6548 3711	6,6488 8836	8,6271 0639
29	4,4260 4114	5,4183 8790	6,0157 8416	7,1142 5705	9,3172 7490
30	4,6589 9068	5,7434 9117	6,3997 7038	7,6122 5504	10,0626 5689
31	4,9042 0071	6,0881 0064	6,8082 6636	8,1451 1290	10,8676 6944
32	5,1623 1654	6,4533 8668	7,2428 3655	8,7152 7080	11,7370 8300
33	5,4340 1741	6,8405 8988	7,7051 4527	9,3253 3975	12,6760 4964
34	5,7200 1833	7,2510 2528	8,1969 6305	9,9781 1354	13,6901 3361
35	6,0210 7192	7,6860 8679	8,7201 7346	10,6765 8148	14,7853 4429
36	6,3379 7044	8,1472 5200	9, 767 8028	11,4239 4219	15,9681 7184
37	6,6715 4784	8,6360 8712	9,8689 1519	12,2236 1814	17,2456 2558
38	7,0226 8193	9,1542 5235	10,4988 4595	13,0792 7141	18,6252 7563
39	7,3922 9677	9,7035 0749	11,1689 8505	13,9948 2041	20,1152 9768
40	7,7813 6502	10,2857 1794	11,8818 9899	14,9744 5784	21,7245 2150
41	8,1909 1055	10,9028 6101	12,6403 1807	16,0226 6989	23,4624 8322
42	8,6220 1110	11,5570 3267	13,4471 4689	17,1442 5678	25,3394 8187
43	9,0758 0116	12,2504 5463	14,3054 7541	18,3443 5475	27,3666 4042
44	9,5534 7491	12,9854 8191	15,2185 9086	19,6284 5959	29,5559 7166
45	10,0562 8938	13,7646 1083	16,1899 9028	21,0024 5176	31,9204 4939
46	10,5855 6777	14,5904 8748	17,2233 9391	22,4726 2338	34,4740 8534
47	11,1427 0291	15,4659 1673	18,3227 5948	24,0457 0702	37,2320 1217
48	11,7291 6096	16,3938 7173	19,4922 9732	25,7289 0651	40,2105 7314
49	12,3464 8522	17,3775 0403	20,7364 8651	27,5299 2997	43,4274 1899
50	12,9963 0023	18,4201 5427	22,0600 9204	29,4570 2506	46,9016 1251

Gadi	2 %	3 %	$3\,{}^{9}/_{97}$ % = = 3 % antic.	$3^{1}/_{2}$ %	4 %
1	0,9803 9216	0,9708 7379	0,97	0,9661 8357	0,9615 3846
2	0,9611 6878	0,9425 9591	0,9409	0,9335 1070	0,9245 5621
3	0,9423 2233	0,9151 4166	0,9126 73	0,9019 4271	0,8889 9636
4	0,9238 4543	0,8884 8705	0,8852 9281	0,8714 4223	0,8548 0419
5	0,9057 3081	0,8626 0878	0,8587 3403	0,8419 7317	0,8219 2711
6	0,8879 7138	0,8374 8426	0,8329 7200	0,8135 0064	0,7903 1453
7	0,8705 6018	0,8130 9151	0,8079 8284	0,7859 9096	0,7599 1781
8	0,8534 9037	0,7894 0923	0,7837 4336	0,7594 1156	0,7306 9021
9	0,8367 5527	0,7664 1673	0,7602 3106	0,7337 3097	0,7025 8674
10	0,8203 4830	0,7440 9391	0,7374 2413	0,7089 1881	0,6755 6417
11	0,8042 6304	0,7224 2128	0,7153 0140	0,6849 4571	0,6495 8093
12	0,7884 9318	0,7013 7988	0,6938 4236	0,6617 8330	0,6245 9705
13	0,7730 3253	0,6809 5134	0,6730 2709	0,6394 0415	0,6005 7409
14	0,7578 7502	0,6611 1781	0,6528 3628	0,6177 8179	0,5774 7508
15	0,7430 1473	0,6418 6195	0,6332 5119	0,5968 9062	0,5552 6450
16	0,7284 4581	0,6231 6694	0,6142 5365	0,5767 0591	0,5339 0818
17	0,7141 6256	0,6050 1645	0,5958 2604	0,5572 0378	0,5133 7325
18	0,7001 5937	0,5873 9461	0,5779 5126	0,5383 6114	0,4936 2812
19	0,6864 3076	0,5702 8603	0,5606 1272	0,5201 5569	0,4746 4242
20	0,6729 7133	0,5536 7575	0,5437 9434	0,5025 6588	0,4563 8695
21	0,6597 7582	0,5375 4928	0,5274 8051	0,4855 7090	0,4388 3360
22	0,6468 3904	0,5218 9250	0,5116 5610	0,4691 5063	0,4219 5539
23	0,6341 5592	0,5066 9175	0,4963 0641	0,4532 8563	0,4057 2633
24	0,6217 2149	0,4919 3374	0,4814 1722	0,4379 5713	0,3901 2147
25	0,6095 3087	0,4776 0557	0,4669 7471	0,4231 4699	0,3751 1680
26	0,5975 7928	0,4636 9473	0,4529 6546	0,4088 3767	0,3606 8923
27	0,5858 6204	0,4501 8906	0,4393 7650	0,3950 1224	0,3468 1657
28	0,5743 7155	0,4370 7675	0,4261 9521	0,3816 5434	0,3334 7747
29	0,5631 1231	0,4243 4636	0,4134 0935	0,3687 4815	0,3206 5141
30	0,5520 7089	0,4119 8676	0,4010 0707	0,3562 7841	0,3083 1867
31	0,5412 4597	0,3999 8715	0,3889 7686	0,3442 3035	0,2964 6026
32	0,5306 3330	0,3883 3703	0,3773 0755	0,3325 8971	0,2850 5794
33	0,5202 2873	0,3770 2625	0,3659 8832	0,3213 4271	0,2740 9417
34	0,5100 2817	0,3660 4490	0,3550 0867	0,3104 7605	0,2635 5209
35	0,5000 2761	0,3553 8340	0,3443 5841	0,2999 7686	0,2534 1547
36	0,4902 2315	0,3450 3243	0,3340 2766	0,2898 3272	0,2436,6872
37	0,4806 1093	0,3349 8294	0,3240 0683	0,2800 3161	0,2342 9685
38	0,4711 8719	0,3252 2615	0,3142 8663	0,2705 6194	0,2252 8543
39	0,4619 4822	0,3157 5355	0,3048 5803	0,2614 1250	0,2166 2061
40	0,4528 9042	0,3065 5684	0,2957 1229	0,2525 7247	0,2082 8904
41	0,4440 1021	0,2976 2800	0,2868 4092	0,2440 3137	0,2002 7793
42	0,4353 0413	0,2889 5922	0,2782 3569	0,2357 7910	0,1925 7493
43	0,4267 6875	0,2805 4294	0,2698 8862	0,2278 0590	0,1851 6820
44	0,4184 0074	0,2723 7178	0,2617 9196	0,2201 0231	0,1780 4635
45	0,4101 9680	0,2644 3862	0,2539 3820	0,2126 5924	0,1711 9841
46	0,4021 5373	0,2567 3653	0,2463 2006	0,2054 6787	0,1646 1386
47	0,3942 6836	0,2492 5876	0,2389 3046	0,1985 1968	0,1582 8256
48	0,3865 3761	0,2419 9880	0,2317 6254	0,1918 0645	0,1521 9476
49	0,3789 5844	0,2349 5029	0,2248 0967	0,1853 2024	0,1463 4112
50	0,3715 2788	0,2281 0708	0,2180 6530	0,1790 5337	0,1407 1262

II

Gadi	$4^1/_6$ % = 4 % antic.	$4^1/_4$ %	$4^1/_2$ %	$4^3/_4$ %	5 %
1	0,96	0,9592 3261	0,9569 3780	0,9546 5394	0,9523 8095
2	0,9216	0,9201 2721	0,9157 2995	0,9113 6414	0,9070 2948
3	0,8847 36	0,8826 1603	0,8762 9660	0,8700 3737	0,8638 3760
4	0,8493 4656	0,8466 3408	0,8385 6134	0,8305 8460	0,8227 0247
5	0,8153 7270	0,8121 1902	0,8024 5105	0,7929 2086	0,7835 2617
6	0,7827 5779	0,7790 1105	0,7678 9574	0,7569 6502	0,7462 1540
7	0,7514 4748	0,7472 5281	0,7348 2846	0,7226 3964	0,7106 8133
8	0,7213 8958	0,7167 8926	0,7031 8513	0,6898 7077	0,6768 3936
9	0,6925 3400	0,6875 6764	0,6729 0443	0,6585 8785	0,6446 0892
10	0,6648 3264	0,6595 3730	0,6439 2768	0,6287 2349	0,6139 1325
11	0,6382 3933	0,6326 4969	0,6161 9874	0,6002 1335	0,5846 7929
12	0,6127 0976	0,6068 5822	0,5896 6386	0,5729 9604	0,5568 3742
13	0,5882 0137	0,5821 1819	0,5642 7164	0,5470 1293	0,5303 2135
14	0,5646 7331	0,5583 8676	0,5399 7286	0,5222 0804	0,5050 6795
15	0,5420 8638	0,5356 2279	0,5167 2044	0,4985 2797	0,4810 1710
16	0,5204 0292	0,5137 8685	0,4944 6932	0,4759 2169	0,4581 1152
17	0,4995 8681	0,4928 4110	0,4731 7639	0,4543 4051	0,4362 9669
18	0,4796 0334	0,4727 4926	0,4528 0037	0,4337 3796	0,4155 2065
19	0,4604 1920	0,4534 7650	0,4333 0179	0,4140 6965	0,3957 3396
20	0,4420 0243	0,4349 8945	0,4146 4286	0,3952 9322	0,3768 8948
21	0,4243 2234	0,4172 5607	0,3967 8743	0,3773 6823	0,3589 4236
22	0,4073 4944	0,4002 4563	0,3797 0089	0,3602 5607	0,3418 4987
23	0,3910 5547	0,3839 2866	0,3633 5013	0,3439 1987	0,3255 7131
24	0,3754 1325	0,3682 7689	0,3477 0347	0,3283 2446	0,3100 6791
25	0,3603 9672	0,3532 6321	0,3327 3060	0,3134 3624	0,2953 0277
26	0,3459 8085	0,3388 6159	0,3184 0248	0,2992 2314	0,2812 4073
27	0,3321 4161	0,3250 4709	0,3046 9137	0,2856 5455	0,2678 4832
28	0,3188 5595	0,3117 9577	0,2915 7069	0,2727 0124	0,2550 9364
29	0,3061 0171	0,2990 8467	0,2790 1502	0,2603 3531	0,2429 4632
30	0,2938 5764	0,2868 9177	0,2670 0002	0,2485 3013	0,2313 7745
31	0,2821 0334	0,2751 9594	0,2555 0241	0,2372 6027	0,2203 5947
32	0,2708 1920	0,2639 7692	0,2444 9991	0,2265 0145	0,2098 6617
33	0,2599 8644	0,2532 1527	0,2339 7121	0,2162 3050	0,1998 7254
34	0,2495 8698	0,2428 9235	0,2238 9589	0,2064 2530	0,1903 5480
35	0,2396 0350	0,2329 9026	0,2142 5444	0,1970 6473	0,1812 9029
36	0,2300 1936	0,2234 9186	0,2050 2817	0,1881 2862	0,1726 5741
37	0,2208 1858	0,2143 8068	0,1961 9921	0,1795 9772	0,1644 3563
38	0,2119 8584	0,2056 4094	0,1877 5044	0,1714 5367	0,1566 0536
39	0,2035 0641	0,1972 5750	0,1796 6549	0,1636 7893	0,1491 4797
40	0,1953 6615	0,1892 1582	0,1719 2870	0,1562 5673	0,1420 4568
41	0,1875 5151	0,1815 0199	0,1645 2507	0,1491 7110	0,1352 8160
42	0,1800 4945	0,1741 0263	0,1574 4026	0,1424 0678	0,1288 3962
43	0,1728 4747	0,1670 0492	0,1506 6054	0,1359 4919	0,1227 0440
44	0,1659 3357	0,1601 9657	0,1441 7276	0,1297 8443	0,1168 6133
45	0,1592 9623	0,1536 6577	0,1379 6437	0,1238 9922	0,1112 9651
46	0,1529 2438	0,1474 0122	0,1320 2332	0,1182 8088	0,1059 9668
47	0,1468 0740	0,1413 9206	0,1263 3810	0,1129 1731	0,1009 4921
48	0,1409 3511	0,1356 2787	0,1208 9771	0,1077 9695	0,0961 4211
49	0,1352 9770	0,1300 9868	0,1156 9158	0,1029 0878	0,0915 6391
50	0,1298 8579	0,1247 9489	0,1107 0965	0,0982 4228	0,0872 0373

Gadi	$5^5\|_{19}$ % = 5 % antic.	6 %	$6^{18}/_{47}$ % = 6 % antic.	7 %	8 %
1	0,95	0,9433 9623	0,94	0,9345 7944	0,9259 2593
2	0,9025	0,8899 9644	0,8836	0,8734 3873	0,8573 3882
3	0,8573 75	0,8396 1928	0,8305 84	0,8162 9788	0,7938 3224
4	0,8145 0625	0,7920 9366	0,7807 4896	0,7628 9521	0,7350 2985
5	0,7737 8094	0,7472 5817	0,7339 0402	0,7129 8618	0,6805 8320
6	0,7350 9189	0,7049 6054	0,6898 6978	0,6663 4222	0,6301 6963
7	0,6983 3730	0,6650 5711	0,6484 7759	0,6227 4974	0,5834 9040
8	0,6634 2043	0,6274 1237	0,6095 6894	0,5820 0910	0,5402 6888
9	0,6302 4941	0,5918 9846	0,5729 9480	0,5439 3374	0,5002 4897
10	0,5987 3694	0,5583 9478	0,5386 1511	0,5083 4929	0,4631 9349
11	0,5688 0009	0,5267 8753	0,5062 9821	0,4750 9280	0,4288 8286
12	0,5403 6009	0,4969 6936	0,4759 2031	0,4440 1196	0,3971 1376
13	0,5133 4208	0,4688 3902	0,4473 6510	0,4149 6445	0,3676 9792
14	0,4876 7498	0,4423 0096	0,4205 2319	0,3878 1724	0,3404 6104
15	0,4632 9123	0,4172 6506	0,3952 9180	0,3624 4602	0,3152 4170
16	0,4401 2667	0,3936 4628	0,3715 7429	0,3387 3460	0,2918 9047
17	0,4181 2034	0,3713 6442	0,3492 7983	0,3165 7439	0,2702 6895
18	0,3972 1432	0,3503 4379	0,3283 2304	0,2958 6392	0,2502 4903
19	0,3773 5360	0,3305 1301	0,3086 2366	0,2765 0833	0,2317 1206
20	0,3584 8592	0,3118 0473	0,2901 0624	0,2584 1900	0,2145 4821
21	0,3405 6163	0,2941 5540	0,2726 9987	0,2415 1309	0,1986 5575
22	0,3235 3354	0,2775 0510	0,2563 3787	0,2257 1317	0,1839 4051
23	0,3073 5687	0,2617 9726	0,2409 5760	0,2109 4688	0,1703 1528
24	0,2919 8902	0,2469 7855	0,2265 0015	0,1971 4662	0,1576 9934
25	0,2773 8957	0,2329 9863	0,2129 1014	0,1842 4918	0,1460 1790
26	0,2635 2009	0,2198 1003	0,2001 3553	0,1721 9549	0,1352 0176
27	0,2503 4409	0,2073 6795	0,1881 2740	0,1609 3037	0,1251 8682
28	0,2378 2689	0,1956 3014	0,1768 3975	0,1504 0221	0,1159 1372
29	0,2259 3554	0,1845 5674	0,1662 2937	0,1405 6282	0,1073 2752
30	0,2146 3876	0,1741 1013	0,1562 5561	0,1313 6712	0,0993 7733
31	0,2039 0683	0,1642 5484	0,1468 8027	0,1227 7301	0,0920 1605
32	0,1937 1148	0,1549 5740	0,1380 6745	0,1147 4113	0,0852 0005
33	0,1840 2591	0,1461 8622	0,1297 8341	0,1072 3470	0,0788 8893
34	0,1748 2461	0,1379 1153	0,1219 9640	0,1002 1934	0,0730 4531
35	0,1660 8338	0,1301 0522	0,1146 7662	0,0936 6294	0,0676 3454
36	0,1577 7921	0,1227 4077	0,1077 9602	0,0875 3546	0,0626 2458
37	0,1498 9025	0,1157 9318	0,1013 2826	0,0818 0884	0,0579 8572
38	0,1423 9574	0,1092 3885	0,0952 4856	0,0764 5686	0,0536 9048
39	0,1352 7595	0,1030 5552	0,0895 3365	0,0714 5501	0,0497 1341
40	0,1285 1216	0,0972 2219	0,0841 6163	0,0667 8038	0,0460 3093
41	0,1220 8655	0,0917 1905	0,0791 1193	0,0624 1157	0,0426 2123
42	0,1159 8222	0,0865 2740	0,0743 6522	0,0583 2857	0,0394 6411
43	0,1101 8311	0,0816 2962	0,0699 0330	0,0545 1268	0,0365 4084
44	0,1046 7395	0,0770 0908	0,0657 0911	0,0509 4643	0,0338 3411
45	0,0994 4026	0,0726 5007	0,0617 6656	0,0476 1349	0,0313 2788
46	0,0944 6824	0,0685 3781	0,0580 6057	0,0444 9859	0,0290 0730
47	0,0897 4483	0,0646 5831	0,0545 7693	0,0415 8747	0,0268 5861
48	0,0852 5759	0,0609 9840	0,0513 0232	0,0388 6679	0,0248 6908
49	0,0809 9471	0,0575 4566	0,0482 2418	0,0363 2410	0,0230 2693
50	0,0769 4498	0,0542 8836	0,0453 3073	0,0339 4776	0,0213 2123

Gadi	2 %	3 %	$3\frac{9}{97}$ % = 3 % antic.	$3\frac{1}{2}$ %	4 %
1	1,02	1,03	1,0309 2784	1,035	1,04
2	2,0604	2,0909	2,0937 4004	2,1062 25	2,1216
3	3,1216 08	3,1836 27	3,1894 2272	3,2149 4288	3,2464 64
4	4,2040 4016	4,3091 3581	4,3189 9249	4,3624 6588	4,4163 2256
5	5,3081 2096	5,4684 0988	5,4834 9741	5,5501 5218	5,6329 7546
6	6,4342 8338	6,6624 6218	6,6840 1795	6,7794 0751	6,8982 9448
7	7,5829 6905	7,8923 3605	7,9216 6799	8,0516 8677	8,2142 2626
8	8,7546 2843	9,1591 0613	9,1975 9587	9,3684 9581	9,5827 9531
9	9,9497 2100	10,4638 7931	10,5129 8543	10,7313 9316	11,0061 0712
10	11,1687 1542	11,8077 9569	11,8690 5715	12,1419 9192	12,4863 5141
11	12,4120 8973	13,1920 2956	13,2670 6922	13,6019 6164	14,0258 0546
12	13,6803 3152	14,6177 9045	14,7083 1879	15,1130 3030	15,6268 3768
13	14,9739 3815	16,0863 2416	16,1941 4308	16,6769 8636	17,2919 1119
14	16,2934 1692	17,5989 1389	17,7259 2070	18,2956 8088	19,0235 8764
15	17,6392 8525	19,1568 8130	19,3050 7289	19,9710 2971	20,8245 3114
16	19,0120 7096	20,7615 8774	20,9330 6483	21,7050 1575	22,6975 1239
17	20,4123 1238	22,4144 3537	22,6114 0704	23,4996 9130	24,6454 1288
18	21,8405 5863	24,1168 6844	24,3416 5675	25,3571 8050	26,6712 2940
19	23,2973 6980	25,8703 7449	26,1254 1933	27,2796 8181	28,7780 7858
20	24,7833 1719	27,6764 8572	27,9643 4982	29,2694 7068	30,9692 0172
21	26,2989 8354	29,5367 8030	29,8601 5445	31,3289 0215	33,2479 6979
22	27,8449 6321	31,4528 8370	31,8145 9222	33,4604 1373	35,6178 8858
23	29,4218 6247	33,4264 7022	33,8294 7652	35,6665 2821	38,0826 0412
24	31,0302 9972	35,4592 6432	35,9066 7682	37,9498 5669	40,6459 0829
25	32,6709 0572	37,5530 4225	38,0481 2043	40,3131 0168	43,3117 4462
26	34,3443 2383	39,7096 3352	40,2557 9426	42,7590 6024	46,0842 1440
27	36,0512 1031	41,9309 2252	42,5317 4666	45,2906 2734	48,9675 8298
28	37,7922 3451	44,2188 5020	44,8780 8934	47,9107 9930	51,9662 8630
29	39,5680 7921	46,5754 1571	47,2969 9932	50,6226 7728	55,0849 3775
30	41,3794 4079	49,0026 7818	49,7907 2095	53,4294 7098	58,3283 3526
31	43,2270 2961	51,5027 5852	52,3615 6799	56,3345 0247	61,7014 6867
32	45,1115 7020	54,0778 4128	55,0119 2576	59,3412 1005	65,2095 2742
33	47,0338 0160	56,7301 7652	57,7442 5336	62,4531 5240	68,8579 0851
34	48,9944 7763	59,4620 8181	60,5610 8594	65,6740 1274	72,6522 2486
35	50,9943 6719	62,2759 4427	63,4650 3705	69,0076 0318	76,5983 1385
36	53,0342 5453	65,1742 2259	66,4588 0108	72,4578 6930	80,7022 4640
37	55,1149 3962	68,1594 4927	69,5451 5576	76,0288 9472	84,9703 3626
38	57,2372 3841	71,2342 3275	72,7269 6470	79,7249 0604	89,4091 4971
39	59,4019 8318	74,4012 5973	76,0071 8010	83,5502 7775	94,0255 1570
40	61,6100 2284	77,6632 9753	79,3888 4547	87,5095 3747	98,8265 3633
41	63,8622 2330	81,0231 9645	82,8750 9842	91,6073 7128	103,8195 9778
42	66,1594 6777	84,4838 9234	86,4691 7363	95,8486 2928	109,0123 8169
43	68,5026 5712	88,0484 0911	90,1744 0580	100,2383 3130	114,4128 7696
44	70,8927 1027	91,7198 6139	93,9942 3278	104,7816 7290	120,0293 9204
45	73,3305 6447	95,5014 5723	97,9321 9875	109,4840 3145	125,8705 6772
46	75,8171 7576	99,3965 0095	101,9919 5747	114,3509 7255	131,9453 9043
47	78,3535 1927	103,4083 9598	106,1772 7574	119,3882 5659	138,2632 0604
48	80,9405 8966	107,5406 4785	110,4920 3685	124,6018 4557	144,8337 3429
49	83,5794 0145	111,7968 6729	114,9402 4417	129,9979 1016	151,6670 8366
50	86,2709 8948	116,1807 7331	119,5260 2492	135,5828 3702	158,7737 6700

Gadi	$4\frac{1}{6}$ % = 4 % antic.	$4\frac{1}{4}$ %	$4\frac{1}{2}$ %	$4\frac{3}{4}$ %	5 %
1	1,0416 6667	1,0425	1,045	1,0475	1,05
2	2,1267 3611	2,1293 0625	2,1370 25	2,1447 5625	2,1525
3	3,2570 1678	3,2623 0177	3,2781 9113	3,2941 3217	3,3101 25
4	4,4343 9248	4,4434 4959	4,4707 0973	4,4981 0345	4,5256 3125
5	5,6608 2550	5,6747 9620	5,7168 9166	5,7592 6336	5,8019 1281
6	6,9383 5990	6,9584 7504	7,0191 5179	7,0803 2837	7,1420 0845
7	8,2691 2489	8,2967 1023	8,3800 1362	8,4641 4397	8,5491 0888
8	9,6553 3843	9,6918 2041	9,8021 1423	9,9136 9081	10,0265 6432
9	11,0993 1087	11,1462 2278	11,2882 0937	11,4320 9112	11,5778 9254
10	12,6034 4882	12,6624 3725	12,8411 7879	13,0226 1545	13,2067 8716
11	14,1702 5919	14,2430 9083	14,4640 3184	14,6886 8969	14,9171 2652
12	15,8023 5332	15,8909 2219	16,1599 1327	16,4339 0245	16,7129 8285
13	17,5024 5137	17,6087 8638	17,9321 0937	18,2620 1281	18,5986 3199
14	19,2733 8685	19,3996 5980	19,7840 5429	20,1769 5842	20,5785 6359
15	21,1181 1130	21,2666 4534	21,7193 3673	22,1828 6395	22,6574 9177
16	23,0396 9927	23,2129 7777	23,7417 0689	24,2840 4998	24,8403 6636
17	25,0413 5341	25,2420 2933	25,8550 8370	26,4850 4236	27,1323 8467
18	27,1264 0980	27,3573 1557	28,0635 6246	28,7905 8187	29,5390 0391
19	29,2983 4354	29,5625 0149	30,3714 2277	31,2056 3451	32,0659 5410
20	31,5607 7452	31,8614 0780	32,7831 3680	33,7354 0215	34,7192 5181
21	33,9174 7346	34,2580 1763	35,3033 7795	36,3853 3375	37,5052 1440
22	36,3723 6819	36,7564 8338	37,9370 2996	39,1611 3710	40,4304 7512
23	38,9295 5019	39,3611 3392	40,6891 9631	42,0687 9111	43,5019 9887
24	41,5932 8145	42,0764 8211	43,5652 1015	45,1145 5869	46,7270 9882
25	44,3680 0151	44,9072 3260	46,5706 4460	48,3050 0023	50,1134 5376
26	47,2583 3490	47,8582 8999	49,7113 2361	51,6469 8774	53,6691 2645
27	50,2690 9886	50,9347 6732	52,9933 3317	55,1477 1966	57,4025 8277
28	53,4053 1132	54,1419 9493	56,4230 3316	58,8147 3634	61,3227 1191
29	56,6721 9929	57,4855 2971	60,0070 6966	62,6559 3632	65,4388 4750
30	60,0752 0759	60,9711 6472	63,7523 8779	66,6795 9329	69,7607 8988
31	63,6200 0791	64,6049 3922	67,6662 4524	70,8943 7398	74,2988 2937
32	67,3125 0824	68,3931 4914	71,7562 2628	75,3093 5671	79,0637 7084
33	71,1588 6275	72,3423 5798	76,0302 5646	79,9340 5119	84,0669 5938
34	75,1654 8203	76,4594 0819	80,4966 1800	84,7784 1862	89,3203 0735
35	79,3390 4378	80,7514 3304	85,1639 6581	89,8528 9350	94,8363 2272
36	83,6865 0394	85,2258 6895	90,0413 4427	95,1684 0594	100,6281 3886
37	88,2151 0827	89,8904 6838	95,1382 0476	100,7364 0522	106,7095 4580
38	92,9324 0444	94,7533 1328	100,4644 2398	106,5688 8447	113,0950 2309
39	97,8462 5463	99,8228 2910	106,0303 2306	112,6784 0648	119,7997 7424
40	102,9648 4857	105,1077 9933	111,8466 8760	119,0781 3079	126,8397 6295
41	108,2967 1726	110,6173 8080	117,9247 8854	125,7818 4201	134,2317 5110
42	113,8507 4715	116,3611 1949	124,2764 0402	132,8039 7950	141,9933 3866
43	119,6361 9495	122,3489 6707	130,9138 4220	140,1596 6853	150,1430 0559
44	125,6627 0307	128,5912 9817	137,8499 6510	147,8647 5278	158,7001 5587
45	131,9403 1570	135,0989 2834	145,0982 1353	155,9358 2854	167,6851 6366
46	138,4794 9552	141,8831 3279	152,6726 3314	164,3902 8039	177,1194 2185
47	145,2911 4117	148,9556 6594	160,5879 0163	173,2463 1871	187,0253 9294
48	152,3866 0538	156,3287 8174	168,8593 5720	182,5230 1885	197,4266 6259
49	159,7777 1394	164,0152 5496	177,5030 2828	192,2403 6225	208,3479 9572
50	167,4767 8535	172,0284 0330	186,5356 6455	202,4192 7945	219,8153 9550

Gadi	$5^{5}\|_{19}$ % = 5 % antic.	6 %	$6^{18}\|_{47}$ % = 6 % antic.	7 %	8 %
1	1,0526 3158	1,06	1,0638 2979	1,07	1,08
2	2,1606 6482	2,1836	2,1955 6360	2,2149	2,2464
3	3,3270 1560	3,3746 16	3,3995 3575	3,4399 43	3,5061 12
4	4,5547 5326	4,6370 9296	4,6803 5718	4,7507 3901	4,8666 0096
5	5,8471 0870	5,9753 1854	6,0429 3317	6,1532 9074	6,3359 2904
6	7,2074 8284	7,3938 3765	7,4924 8209	7,6540 2109	7,9228 0336
7	8,6394 5562	8,8974 6791	9,0345 5542	9,2598 0257	9,6366 2763
8	10,1467 9539	10,4913 1598	10,6750 5896	10,9779 8875	11,4875 5784
9	11,7334 6883	12,1807 9494	12,4202 7549	12,8164 4796	13,4865 6247
10	13,4036 5140	13,9716 4264	14,2768 8882	14,7835 9932	15,6454 8746
11	15,1617 3832	15,8699 4120	16,2520 0938	16,8884 5127	17,9771 2646
12	17,0123 5612	17,8821 3767	18,3532 0147	19,1406 4286	20,4952 9658
13	18,9603 7487	20,0150 6593	20,5885 1220	21,5504 8786	23,2149 2030
14	21,0109 2091	22,2759 6988	22,9665 0234	24,1290 2201	26,1521 1393
15	23,1693 9044	24,6725 2808	25,4962 7908	26,8880 5355	29,3242 8304
16	25,4414 6362	27,2128 7976	28,1875 3094	29,8402 1730	32,7502 2569
17	27,8331 1960	29,9056 5255	31,0505 6483	32,9990 3251	36,4502 4374
18	30,3506 5221	32,7599 9170	34,0963 4556	36,3789 6479	40,4462 6324
19	33,0006 8653	35,7855 9120	37,3365 3783	39,9954 9232	44,7619 6430
20	35,7901 9635	38,9927 2668	40,7835 5089	43,8651 7678	49,4229 2144
21	38,7265 2247	42,3922 9028	44,4505 8605	48,0057 3916	54,4567 5516
22	41,8173 9208	45,9958 2769	48,3516 8729	52,4361 4090	59,8932 9557
23	45,0709 3903	49,8155 7735	52,5017 9499	57,1766 7076	65,7647 5922
24	48,4957 2529	53,8645 1200	56,9168 0318	62,2490 3772	72,1059 3995
25	52,1007 6347	58,1563 8272	61,6136 2040	67,6764 7036	78,9544 1515
26	55,8955 4049	62,7057 6568	66,6102 3447	73,4838 2328	86,3507 6836
27	59,8900 4262	67,5281 1162	71,9257 8135	79,6976 9091	94,3388 2983
28	64,0947 8171	72,6397 9832	77,5806 1846	86,3465 2927	102,9659 3622
29	68,5208 2285	78,0581 8622	83,5964 0261	93,4607 8632	112,2832 1111
30	73,1798 1353	83,8016 7739	89,9961 7299	101,0730 4137	122,3458 6800
31	78,0840 1424	89,8897 7803	96,8044 3936	109,2181 5426	133,2135 3744
32	83,2463 3078	96,3431 6471	104,0472 7591	117,9334 2506	144,9506 2044
33	88,6803 4819	103,1837 5460	111.7524 2118	127,2587 6481	157,6266 7007
34	94,4003 6651	110,4347 7987	119,9493 8424	137,2368 7835	171,3168 0368
35	100,4214 3844	118,1208 6666	128,6695 5770	147,9134 5984	186,1021 4797
36	106,7594 0888	126,2681 1866	137,9463 3798	159,3374 0202	202,0703 1981
37	113,4309 5672	134,9042 0578	147,8152 5317	171,5610 2017	219,3159 4540
38	120,4536 3865	144,0584 5813	158,3140 9911	184,6402 9158	237,9412 2103
39	127,8459 3542	153,7619 6562	169,4830 8416	198,6351 1199	258,0565 1871
40	135,6273 0044	164,0476 8356	181,3649 8315	213,6095 6983	279,7810 4021
41	143,8182 1099	174,9505 4457	194,0053 0122	229,6322 3972	303,2435 2312
42	152,4402 2209	186,5075 7724	207,4524 4811	246,7764 9650	328,5830 0530
43	161,5160 2326	198,7580 3188	221,7579 2352	265,1208 5125	355,9496 4572
44	171 0694 9817	211,7435 1379	236,9765 1439	284,7493 1084	385,5056 1738
45	181,1257 8754	225,5081 2462	253,1665 0467	305,7517 6260	417,4260 6677
46	191,7113 5531	240,0986 1210	270,3898 9858	328,2243 8598	451,9001 5211
47	202,8540 5822	255,5645 2882	288,7126 5806	352,2700 9300	489,1321 6428
48	214,5832 1918	271,9584 0055	308,2049 5539	377,9989 9951	529,3427 3742
49	226,9297 0440	289,3359 0458	328,9414 4190	405,5289 2947	572,7701 5642
50	239,9260 0463	307,7560 5886	351,0015 3394	434,9859 5454	619,6717 6893

Gadi	2 %	3 %	$3^{9}\|_{97}$ % = 3 % antic.	$3^{1}/_{2}$ %	4 %
1	0,9803 9216	0,9708 7379	0,97	0,9661 8357	0,9615 3846
2	1,9415 6094	1,9134 6970	1,9109	1,8996 9428	1,8860 9467
3	2,8838 8327	2,8286 1135	2,8235 73	2,8016 3698	2,7750 9103
4	3,8077 2870	3,7170 9840	3,7088 6581	3,6730 7921	3,6298 9522
5	4,7134 5951	4,5797 0719	4,5675 9984	4,5150 5238	4,4518 2233
6	5,6014 3089	5,4171 9144	5,4005 7184	5,3285 5302	5,2421 3686
7	6,4719 9107	6,2302 8296	6,2085 5469	6,1145 4398	6,0020 5467
8	7,3254 8144	7,0196 9219	6,9922 9804	6,8739 5554	6,7327 4487
9	8,1622 3671	7,7861 0892	7,7525 2910	7,6076 8651	7,4353 3161
10	8,9825 8501	8,5302 0284	8,4899 5323	8,3166 0532	8,1108 9578
11	9,7868 4805	9,2526 2411	9,2052 5463	9,0015 5104	8,7604 7671
12	10,5753 4122	9,9540 0399	9,8990 9699	9,6633 3433	9,3850 7376
13	11,3483 7375	10,6349 5533	10,5721 2408	10,3027 3849	9,9856 4785
14	12.1062 4877	11,2960 7314	11,2249 6036	10,9205 2028	10,5631 2293
15	12,8492 6350	11,9379 3509	11,8582 1155	11,5174 1090	11,1183 8743
16	13,5777 0931	12,5611 0203	12,4724 6520	12,0941 1681	11,6522 9561
17	14 2918 7188	13,1661 1847	13,0682 9125	12,6513 2059	12,1656 6885
18	14,9920 3125	13,7535 1308	13,6462 4251	13,1896 8173	12,6592 9697
19	15,6784 6201	14,3237 9911	14,2068 5524	13,7098 3742	13,1339 3940
20	16,3514 3334	14,8774 7486	14,7506 4958	14,2124 0330	13,5903 2634
21	17,0112 0916	15,4150 2414	15,2781 3009	14,6979 7420	14,0291 5995
22	17,6580 4820	15,9369 1664	15,7897 8619	15,1671 2484	14,4511 1533
23	18,2922 0412	16,4436 0839	16,2860 9260	15,6204 1047	14,8568 4167
24	18,9139 2560	16,9355 4212	16,7675 0983	16,0583 6760	15,2469 6314
25	19,5234 5647	17,4131 4769	17,2344 8453	16,4815 1459	15,6220 7994
26	20,1210 3576	17,8768 4242	17,6874 4999	16,8903 5226	15,9827 6918
27	20,7068 9780	18,3270 3147	18,1268 2650	17,2853 6451	16,3295 8575
28	21,2812 7236	18,7641 0823	18,5530 2170	17,6670 1885	16,6630 6322
29	21,8443 8466	19,1884 5459	18,9664 3105	18,0357 6700	16,9837 1463
30	22,3964 5555	19,6004 4135	19,3674 3812	18,3920 4541	17,2920 3330
31	22,9377 0152	20,0004 2849	19,7564 1497	18,7362 7576	17,5884 9356
32	23,4683 3482	20,3887 6553	20,1337 2252	19,0688 6547	17,8735 5150
33	23,9885 6355	20,7657 9178	20,4997 1085	19,3902 0818	18,1476 4567
34	24,4985 9172	21,1318 3668	20,8547 1952	19,7006 8423	18,4111 9776
35	24,9986 1933	21,4872 2007	21,1990 7794	20,0006 6110	18,6646 1323
36	25,4888 4248	21,8322 5250	21,5331 0560	20 2904 9381	18,9082 8195
37	25,9694 5341	22,1672 3544	21,8571 1243	20,5705 2542	19,1425 7880
38	26,4406 4060	22,4924 6159	22,1713 9906	20,8410 8736	19,3678 6423
39	26,9025 8883	22,8082 1513	22,4762 5709	21,1024 9987	19,5844 8484
40	27,3554 7924	23,1147 7197	22,7719 6937	21,3550 7234	19,7927 7388
41	27,7994 8945	23,4123 9997	23,0588 1029	21,5991 0371	19,9930 5181
42	28,2347 9858	23,7013 5920	23,3370 4598	21,8348 8281	20,1856 2674
43	28,6615 6233	23,9819 0213	23,6069 3460	22,0626 8870	20,3707 9494
44	29,0799 6307	24,2542 7392	23,8687 2657	22,2827,9102	20,5488 4129
45	29,4901 5987	24,5187 1254	24,1226 6477	22,4954 5026	20,7200 3970
46	29,8923 1360	24,7754 4907	24,3689 8483	22,7009 1813	20,8846 5356
47	30,2865 8196	25,0247 0783	24,6079 1528	22,8994 3780	21,0429 3612
48	30,6731 1957	25,2667 0664	24,8396 7782	23,0912 4425	21,1951 3088
49	31,0520 7801	25,5016 5693	25,0644 8749	23,2765 6450	21,3414 7200
50	31,4236 0589	25,7297 6401	25,2825 5286	23,4556 1787	21,4821 8462

Gadi	$4^{1}/_{6}$% = 4% antic.	$4^{1}/_{4}$ %	$4^{1}/_{2}$ %	$4^{3}/_{4}$ %	5 %
1	0,96	0,9592 3261	0,9569 3780	0,9546 5394	0,9523 8095
2	1,8816	1,8793 5982	1,8726 6775	1,8660 1808	1,8594 1043
3	2,7663 36	2,7619 7585	2,7489 6435	2,7360 5545	2,7232 4803
4	3,6156 8256	3,6086 0993	3,5875 2570	3,5666 4004	3,5459 5050
5	4,4310 5526	4,4207 2895	4,3899 7674	4,3595 6090	4,3294 7667
6	5,2138 1305	5,1997 4000	5,1578 7248	5,1165 2592	5,0756 9206
7	5,9652 6053	5,9469 9280	5,8927 0094	5,8391 6556	5,7863 7340
8	6,6866 5010	6,6637 8206	6,5958 8607	6,5290 3633	6,4632 1276
9	7,3791 8410	7,3513 4970	7,2687 9050	7,1876 2418	7,1078 2168
10	8,0440 1674	8,0108 8700	7,9127 1818	7,8163 4767	7,7217 3493
11	8,6822 5607	8,6435 3669	8,5289 1692	8,4165 6102	8,3064 1422
12	9,2949 6582	9,2503 9491	9,1185 8078	8,9895 5706	8,8632 5164
13	9,8831 6719	9,8325 1310	9,6828 5242	9,5365 6998	9,3935 7299
14	10,4478 4050	10,3908 9986	10,2228 2528	10,0587 7803	9,8986 4094
15	10,9899 2688	10,9265 2265	10,7395 4573	10,5573 0599	10,3796 5804
16	11,5103 2981	11,4403 0949	11,2340 1505	11,0332 2768	10,8377 6956
17	12,0099 1662	11,9331 5059	11,7071 9143	11,4875 6819	11,2740 6625
18	12,4895 1995	12,4058 9985	12,1599 9180	11,9213 0615	11,6895 8690
19	12,9499 3915	12,8593 7636	12,5932 9359	12,3353 7580	12,0853 2086
20	13,3919 4159	13,2943 6581	13,0079 3645	12,7306 6902	12,4622 1034
21	13,8162 6392	13,7116 2188	13,4047 2388	13,1080 3725	12,8211 5271
22	14,2236 1337	14,1118 6751	13,7844 2476	13,4682 9332	13,1630 0258
23	14,6146 6883	14,4957 9617	14,1477 7489	13,8122 1319	13,4885 7388
24	14,9900 8208	14,8640 7307	14,4954 7837	14,1405 3765	13,7986 4179
25	15,3504 7880	15,2173 3627	14,8282 0896	14,4539 7389	14,0939 4457
26	15,6964 5964	15,5561 9787	15,1466 1145	14,7531 9703	14,3751 8530
27	16,0286 0126	15,8812 4496	15,4513 0282	15,0388 5158	14,6430 3362
28	16,3474 5721	16,1930 4072	15,7428 7351	15,3115 5282	14,8981 2726
29	16,6535 5892	16,4921 2539	16,0218 8853	15,5718 8814	15,1410 7358
30	16,9474 1656	16,7790 1717	16,2888 8854	15,8204 1827	15,3724 5103
31	17,2295 1990	17,0542 1311	16,5443 9095	16,0576 7854	15,5928 1050
32	17,5003 3910	17,3181 9003	16,7888 9086	16,2841 7999	15,8026 7667
33	17,7603 2554	17,5714 0531	17,0228 6207	16,5004 1049	16,0025 4921
34	18,0099 1252	17,8142 9766	17,2467 5796	16 7068 3579	16,1929 0401
35	18,2495 1602	18.0472 8792	17,4610 1240	16,9039 0052	16,3741 9429
36	18,4795 3538	18,2707 7978	17,6660 4058	17,0920 2913	16,5468 5171
37	18,7003 5396	18,4851 6046	17,8622 3979	17,2716 2686	16,7112 8734
38	18,9123 3980	18,6908 0140	18,0499 9023	17,4430 8053	16,8678 9271
39	19,1158 4621	18,8880 5890	18,2296 5572	17 6067 5946	17,0170 4067
40	19,3112 1236	19,0772 7472	18,4015 8442	17,7630 1619	17,1590 8635
41	19,4987 6387	19,2587 7671	18,5661 0949	17,9121 8729	17,2943 6796
42	19,6788 1331	19,4328 7934	18,7235 4975	18,0545 9407	17,4232 0758
43	19,8516 6078	19,5998 8426	18,8742 1029	18,1905 4327	17,5459 1198
44	20,0175 9435	19,7600 8082	19,0183 8305	18,3203 2770	17,6627 7331
45	20,1768 9058	19,9137 4659	19,1563 4742	18,4442 2692	17,7740 6982
46	20,3298 1495	20,0611 4781	19,2883 7074	18,5625 0780	17,8800 6650
47	20,4766 2235	20,2025 3987	19,4147 0884	18,6754 2511	17,9810 1571
48	20,6175 5746	20,3381 6774	19,5356 0654	18,7832 2206	18,0771 5782
49	20,7528 5516	20,4682 6642	19,6512 9813	18,8861 3085	18,1687 2173
50	20,8827 4096	20,5930 6131	19,7620 0778	18,9843 7312	18,2559 2546

Gadi	$5^{5}\|_{19}$ % = 5 % antic.	6 %	$6^{18}\|_{47}$ % = 6 % antic.	7 %	8 %
1	0,95	0,9433 9623	0,94	0,9345 7944	0,9259 2593
2	1,8525	1,8333 9267	1,8236	1,8080 1817	1,7832 6475
3	2,7098 75	2,6730 1195	2,6541 84	2,6243 1604	2,5770 9699
4	3,5243 8125	3,4651 0561	3,4349 3296	3,3872 1126	3,3121 2684
5	4,2981 6219	4,2123 6379	4,1688 3698	4,1001 9744	3,9927 1004
6	5,0332 5408	4,9173 2433	4,8587 0676	4,7665 3966	4,6228 7966
7	5,7315 9137	5,5823 8144	5,5071 8436	5,3892 8940	5,2063 7006
8	6,3950 1181	6,209[illegible] 9381	6 1167 5330	5,9712 9851	5,7466 3894
9	7,0252 6122	6,8016 9227	6,6897 4810	6,5152 3225	6,2468 8791
10	7,6239 9815	7,3600 8705	7,2283 6321	7,0235 8155	6,7100 8140
11	8,1927 9825	7,8868 7458	7,7346 6142	7,4986 7435	7,1389 6426
12	8,7331 5833	8,3838 4394	8,2105 8173	7,9426 8631	7,5360 7802
13	9,2465 0042	8,8526 8296	8,6579 4683	8,3576 5075	7,9037 7594
14	9,7341 7540	9 2949 8393	9,0784 7002	8,7454 6800	8,2442 3698
15	10,1974 6663	9,7122 4899	9,4737 6182	9,1079 1402	8,5594 7869
16	10,6375 9330	10,1058 9527	9,8453 3611	9,4466 4861	8,8513 6916
17	11,0557 1363	10,4772 5969	10,1946 1594	9,7632 2300	9,1216 3811
18	11,4529 2795	10,8276 0348	10,5229 3899	10.0590 8692	9,3718 8714
19	11,8302 8155	11,1581 1649	10,8315 6265	10,3355 9525	9,6035 9920
20	12,1887 6747	11,4699 2122	11,1216 6889	10,5940 1426	9,8181 4741
21	12,5293 2910	11,7640 7662	11,3943 6876	10,8355 2734	10,0168 0316
22	12,8528 6265	12,0415 8172	11,6507 0663	11,0612 4051	10,2007 4366
23	13,1602 1951	12,3033 7898	11,8916 6423	11,2721 8739	10,3710 5895
24	13,4522 0854	12,5503 5753	12,1181 6438	11,4693 3401	10,5287 5828
25	13,7295 9811	12,7833 5616	12,3310 7452	11,6535 8319	10,6747 7619
26	13,9931 1821	13.0031 6619	12.5312 1004	11,8257 7868	10,8099 7795
27	14,2434 6229	13,2105 3414	12,7193 3744	11,9867 0905	10,9351 6477
28	14,4812 8918	13,4061 6428	12,8961 7720	12,1371 1126	11,0510 7849
29	14,7072 2472	13,5907 2102	13,0624 0656	12,2776 7408	11,1584 0601
30	14,9218 6349	13,7648 3115	13,2186 6217	12,4090 4119	11,2577 8334
31	15,1257 7031	13,9290 8599	13,3655 4244	12,5318 1420	11,3497 9939
32	15,3194 8180	14,0840 4339	13.5036 0989	12,6465 5533	11,4349 9944
33	15 5035 0771	14,2302 2961	13,6333 9330	12,7537 9003	11,5138 8837
34	15,6783 3232	14,3681 4114	13,7553 8970	12,8540 0937	11,5869 3367
35	15,8444 1570	14,4982 4636	13,8700 6632	12,9476 7231	11,6545 6822
36	16,0021 9492	14,6209 8713	13,9778 6234	13,0352 0777	11,7171 9279
37	16,1520 8517	14,7367 8031	14,0791 9060	13,1170 1661	11,7751 7851
38	16,2944 8091	14,8460 1916	14,1744 3916	13,1934 7346	11,8288 6899
39	16,4297 5687	14,9490 7468	14,2639 7281	13.2649 2847	11,8785 8240
40	16,5582 6903	15,0462 9687	14,3481 3445	13,3317 0885	11,9246 1333
41	16,6803 5557	15,1380 1592	14,4272 4638	13,3941 2042	11,9672 3457
42	16,7963 3780	15.2245 4332	14,5016 1160	13,4524 4900	12,0066 9867
43	16,9065 2091	15,3061 7294	14.5715 1490	13,5069 6168	12,0432 3951
44	17,0111 9486	15,3831 8202	14,6372 2401	13,5579 0811	12,0770 7362
45	17,1106 3512	15,4558 3209	14,6989 9057	13,6055 2160	12,1084 0150
46	17,2051 0336	15.5243 6990	14,7570 5113	13,6500 2019	12,1374 0880
47	17.2948 4819	15,5890 2821	14,8116 2806	13,6916 0765	12,1642 6741
48	17,3801 0578	15 6500 2661	14,8629 3038	13,7304 7444	12,1891 3649
49	17,4611 0049	15.7075 7227	14,9111 5456	13,7667 9855	12,2121 6341
50	17,5380 4547	15,7618 6064	14,9564 8528	13,8007 4630	12,2334 8464

Gadi	2 %	3 %	$3^9\|_{37}$% = 3 % antic.	$3^1/_2$ %	4 %
1	1,02	1,03	1,0309 2784	1,035	1,04
2	0,5150 4950	0,5226 1084	0,5233 1362	0,5264 0049	0,5301 9608
3	0,3467 5467	0,3535 3036	0,3541 6120	0,3569 3418	0,3603 4854
4	0,2626 2375	0,2690 2705	0,2696 2421	0,2722 5114	0,2754 9005
5	0,2121 5839	0,2183 5457	0,2189 3336	0,2214 8137	0,2246 2711
6	0,1785 2581	0,1845 9750	0,1851 6558	0,1876 6821	0,1907 6190
7	0,1545 1196	0,1605 0635	0,1610 6808	0,1635 4449	0,1666 0961
8	0,1365 0980	0,1424 5639	0,1430 1450	0,1454 7665	0,1485 2783
9	0,1225 1544	0,1284 3386	0,1289 9016	0,1314 4601	0,1344 9299
10	0,1113 2653	0,1172 3051	0,1177 8628	0,1202 4137	0,1232 9094
11	0,1021 7794	0,1080 7745	0,1086 3361	0,1110 9197	0,1141 4904
12	0,0945 5960	0,1004 6209	0,1010 1932	0,1034 8395	0,1065 5217
13	0,0881 1835	0,0940 2954	0,0945 8837	0,0970 6157	0,1001 4373
14	0,0826 0197	0,0885 2634	0,0890 8717	0,0915 7073	0,0946 6897
15	0,0778 2547	0,0837 6658	0,0843 2975	0,0868 2507	0,0899 4110
16	0,0736 5013	0,0796 1085	0,0801 7661	0,0826 8483	0,0858 2000
17	0,0699 6984	0,0759 5253	0,0765 2110	0,0790 4313	0,0821 9852
18	0,0667 0210	0,0727 0870	0,0732 8025	0,0758 1684	0,0789 9333
19	0,0637 8177	0,0698 1388	0,0703 8855	0,0729 4033	0,0761 3862
20	0,0611 5672	0,0672 1571	0,0677 9362	0,0703 6108	0,0735 8175
21	0,0587 8477	0,0648 7178	0,0654 5304	0,0680 3659	0,0712 8011
22	0,0566 3140	0,0627 4739	0,0633 3208	0,0659 3207	0,0691 9881
23	0,0546 6810	0,0608 1390	0,0614 0208	0,0640 1880	0,0673 0906
24	0,0528 7110	0,0590 4742	0,0596 3915	0,0622 7283	0,0655 8683
25	0,0512 2044	0,0574 2787	0,0580 2320	0,0606 7404	0,0640 1196
26	0,0496 9923	0,0559 3829	0,0565 3726	0,0592 0540	0,0625 6738
27	0,0482 9309	0,0545 6421	0,0551 6685	0,0578 5241	0,0612 3854
28	0,0469 8967	0,0532 9323	0 0538 9958	0,0566 0265	0,0600 1298
29	0,0457 7835	0,0521 1467	0 0527 2473	0,0554 4538	0,0588 7993
30	0,0446 4992	0,0510 1926	0,0516 3306	0,0543 7133	0,0578 3010
31	0,0435 9635	0,0499 9893	0,0506 1647	0,0533 7240	0,0568 5535
32	0,0426 1061	0,0490 4662	0,0496 6791	0,0524 4150	0,0559 4859
33	0,0416 8653	0,0481 5612	0,0487 8118	0,0515 7242	0,0551 0357
34	0,0408 1867	0,0473 2196	0,0479 5078	0,0507 5966	0,0543 1477
35	0,0400 0221	0,0465 3929	0,0471 7186	0,0499 9835	0,0535 7732
36	0,0392 3285	0,0458 0379	0 0464 4012	0,0492 8416	0,0528 8688
37	0,0385 0678	0,0451 1162	0,0457 5170	0,0486 1325	0,0522 3957
38	0,0378 2057	0,0444 5934	0,0451 0315	0,0479 8214	0,0516 3192
39	0,0371 7114	0,0438 4385	0,0444 9139	0,0473 8775	0,0510 6083
40	0,0365 5575	0,0432 6238	0,0439 1364	0,0468 2728	0,0505 2349
41	0,0359 7188	0,0427 1241	0,0433 6737	0,0462 9822	0,0500 1738
42	0,0354 1729	0,0421 9167	0,0428 5032	0,0457 9828	0,0495 4020
43	0,0348 8993	0,0416 9811	0,0423 6043	0,0453 2539	0,0490 8989
44	0,0343 8794	0,0412 2985	0,0418 9583	0,0448 7768	0,0486 6454
45	0,0339 0962	0,0407 8518	0,0414 5479	0,0444 5343	0,0482 6246
46	0,0334 5342	0,0403 6254	0,0410 3577	0,0440 5108	0,0478 8205
47	0,0330 1792	0,0399 6051	0,0406 3733	0,0436 6919	0,0475 2189
48	0,0326 0184	0,0395 7777	0,0402 5817	0,0433 0646	0,0471 8065
49	0,0322 0396	0,0392 1314	0,0398 9709	0,0429 6167	0,0468 5712
50	0,0318 2321	0,0388 6550	0,0395 5297	0,0426 3371	0,0465 5020

Gadi	$4\frac{1}{6}\% = 4\%$ antic.	$4\frac{1}{4}$ %	$4\frac{1}{2}$ %	$4\frac{3}{4}$ %	5 %
1	1,0416 6667	1,0425	1,045	1,0475	1,05
2	0,5314 6258	0,5320 9608	0,5339 9756	0,5359 0049	0,5378 0488
3	0,3614 8899	0,3620 5965	0,3637 7336	0,3654 8967	0,3672 0856
4	0,2765 7295	0,2771 1502	0,2787 4365	0,2803 7592	0,2820 1183
5	0,2256 7988	0,2262 0704	0,2277 9164	0,2293 8090	0,2309 7480
6	0,1917 9821	0,1923 1731	0,1938 7839	0,1954 4512	0,1970 1747
7	0,1676 3727	0,1681 5221	0,1697 0147	0,1712 5735	0,1728 1982
8	0,1495 5172	0,1500 6493	0,1516 0965	0,1531 6196	0,1547 2181
9	0,1355 1634	0,1360 2944	0,1375 7447	0,1391 2803	0,1406 9008
10	0,1243 1600	0,1248 3012	0,1263 7882	0,1279 3699	0,1295 0458
11	0,1151 7743	0,1156 9338	0,1172 4818	0,1188 1337	0,1203 8889
12	0,1075 8512	0,1081 0349	0,1096 6619	0,1112 4018	0,1128 2541
13	0,1011 8214	0,1017 0340	0,1032 7535	0,1048 5950	0,1064 5577
14	0,0957 1356	0,0962 3806	0,0978 2032	0,0994 1565	0,1010 2397
15	0,0909 9242	0,0915 2043	0,0931 1381	0,0947 2113	0,0963 4229
16	0,0868 7848	0,0874 1022	0,0890 1537	0,0906 3531	0,0922 6991
17	0,0832 6452	0,0838 0017	0,0854 1758	0,0870 5063	0,0886 9914
18	0,0800 6713	0,0806 0681	0,0822 3690	0,0838 8343	0,0855 4622
19	0,0772 2045	0,0777 6427	0,0794 0734	0,0810 6766	0,0827 4501
20	0,0746 7178	0,0752 1983	0,0768 7614	0,0785 5047	0,0802 4259
21	0,0723 7847	0,0729 3083	0,0746 0057	0,0762 8907	0,0779 9611
22	0,0703 0562	0,0708 6234	0,0725 4565	0,0742 4846	0,0759 7051
23	0,0684 2440	0,0689 8552	0,0706 8249	0,0723 9969	0,0741 3683
24	0,0667 1077	0,0672 7631	0,0689 8703	0,0707 1867	0,0724 7090
25	0,0651 4455	0,0657 1452	0,0674 3903	0,0691 8513	0,0709 5246
26	0,0637 0863	0,0642 8306	0,0660 2137	0,0677 8192	0,0695 6432
27	0,0623 8847	0,0629 6736	0,0647 1946	0,0664 9444	0,0682 9186
28	0,0611 7159	0,0617 5493	0,0635 2081	0,0653 1016	0,0671 2253
29	0,0600 4722	0,0606 3500	0,0624 1461	0,0642 1829	0,0660 4551
30	0,0590 0604	0,0595 9825	0,0613 9154	0,0632 0945	0,0650 5144
31	0,0580 3992	0,0586 3654	0,0604 4345	0,0622 7550	0,0641 3212
32	0,0571 4175	0,0577 4276	0,0595 6320	0,0614 0929	0,0632 8042
33	0,0563 0527	0,0569 1065	0,0587 4453	0,0606 0455	0,0624 9004
34	0,0555 2498	0,0561 3469	0,0579 8191	0,0598 5574	0,0617 5543
35	0,0547 9597	0,0554 0999	0,0572 7045	0,0591 5794	0,0610 7171
36	0,0541 1391	0,0547 3220	0,0566 0578	0,0585 0680	0,0604 3446
37	0,0534 7492	0,0540 9745	0,0559 8402	0,0578 9843	0,0598 3979
38	0,0528 7553	0,0535 0226	0,0554 0169	0,0573 2932	0,0592 8423
39	0,0523 1262	0,0529 4350	0,0548 5567	0,0567 9637	0,0587 6462
40	0,0517 8339	0,0524 1839	0,0543 4315	0,0562 9675	0,0582 7816
41	0,0512 8530	0,0519 2438	0,0538 6158	0,0558 2791	0,0578 2229
42	0,0508 1607	0,0514 5918	0,0534 0868	0,0553 8756	0,0573 9471
43	0,0503 7362	0,0510 2071	0,0529 8235	0'0549 7362	0,0569 9333
44	0,0499 5605	0,0506 0708	0,0525 8071	0,0545 8417	0,0566 1625
45	0,0495 6165	0,0502 1657	0,0522 0202	0,0542 1750	0,0562 6173
46	0,0491 8884	0,0498 4760	0,0518 4471	0,0538 7203	0,0559 2820
47	0,0488 3618	0,0494 9873	0,0515 0734	0,0535 4630	0,0556 1421
48	0,0485 0235	0,0491 6864	0,0511 8858	0,0532 3900	0,0553 1843
49	0,0481 8614	0,0488 5612	0,0508 8722	0,0529 4891	0,0550 3965
50	0,0478 8643	0,0485 6005	0,0506 0215	0,0526 7490	0,0547 7674

V

Gadi	$5^{5}\|_{19}$ % = 5 % antic.	6 %	$6^{18}\|_{47}$ % = 6 % antic.	7 %	8 %
1	1,0526 3158	1,06	1,0638 2979	1,07	1,08
2	0,5398 1107	0,5454 3689	0,5483 6587	0,5530 9179	0,5607 6923
3	0,3690 2071	0,3741 0981	0,3767 6363	0,3810 5166	0,3880 3351
4	0,2837 3775	0,2885 9149	0,2911 2650	0,2952 2812	0,3019 2080
5	0,2326 5758	0,2373 9640	0,2398 7505	0,2438 9069	0,2504 5645
6	0,1986 7863	0,2033 6263	0,2058 1608	0,2097 9580	0,2163 1539
7	0,1744 7161	0,1791 3502	0,1815 8099	0,1855 5322	0,1920 7240
8	0,1563 7188	0,1610 3594	0,1634 8542	0,1674 6776	0,1740 1476
9	0,1423 4346	0,1470 2224	0,1494 8246	0,1534 8647	0,1600 7971
10	0,1311 6477	0,1358 6796	0,1383 4391	0,1423 7750	0,1490 2949
11	0,1220 5842	0,1267 9294	0,1292 8814	0,1333 5690	0,1400 7634
12	0,1145 0611	0,1192 7703	0,1217 9405	0,1259 0199	0,1326 9502
13	0,1081 4902	0,1129 6011	0,1155 0082	0,1196 5085	0,1265 2181
14	0,1027 3084	0,1075 8491	0,1101 5072	0,1143 4494	0,1212 9685
15	0,0980 6357	0,1029 6276	0,1055 5469	0,1097 9462	0,1168 2954
16	0,0940 0623	0,0989 5214	0,1015 7094	0,1058 5765	0,1129 7687
17	0,0904 5097	0,0954 4480	0,0980 9099	0,1024 2519	0,1096 2943
18	0,0873 1392	0,0923 5654	0,0950 3049	0,0994 1260	0,1067 0210
19	0,0845 2884	0,0896 2086	0,0923 2278	0,0967 5302	0,1041 2763
20	0,0820 4275	0,0871 8456	0,0899 1456	0,0943 9293	0,1018 5221
21	0,0798 1273	0,0850 0455	0,0877 6265	0,0922 8900	0,0998 3225
22	0,0778 0368	0,0830 4557	0,0858 3170	0,0904 0577	0,0980 3207
23	0,0759 8657	0,0812 7848	0,0840 9252	0,0887 1393	0,0964 2217
24	0,0743 3724	0,0796 7901	0,0825 2075	0,0871 8902	0,0949 7796
25	0,0728 3535	0,0782 2672	0,0810 9593	0,0858 1052	0,0936 7878
26	0,0714 6370	0,0769 0435	0,0798 0075	0,0845 6103	0,0925 0713
27	0,0702 0765	0,0756 9717	0,0786 2045	0,0834 2573	0,0914 4810
28	0,0690 5463	0,0745 9255	0,0775 4236	0,0823 9193	0,0904 8891
29	0,0679 9379	0,0735 7961	0,0765 5557	0,0814 4865	0,0896 1854
30	0,0670 1576	0,0726 4891	0,0756 5062	0,0805 8640	0,0888 2743
31	0,0661 1234	0,0717 9222	0,0748 1926	0,0797 9691	0,0881 0728
32	0,0652 7636	0,0710 0234	0,0740 5427	0,0790 7292	0,0874 5081
33	0,0645 0153	0,0702 7293	0,0733 4931	0,0784 0807	0,0868 5163
34	0,0637 8229	0,0695 9843	0,0726 9878	0,0777 9674	0,0863 0411
35	0,0631 1372	0,0689 7386	0,0720 9771	0,0772 3396	0,0858 0326
36	0,0624 9143	0,0683 9483	0,0715 4170	0,0767 1531	0,0853 4467
37	0,0619 1151	0,0678 5743	0,0710 2681	0,0762 3685	0,0849 2440
38	0,0613 7047	0,0673 5812	0,0705 4953	0,0757 9505	0,0845 3894
39	0,0608 6517	0,0668 9377	0,0701 0670	0,0753 8676	0,0841 8513
40	0,0603 9279	0,0664 6154	0,0696 9547	0,0750 0914	0,0838 6016
41	0,0599 5076	0,0660 5886	0,0693 1330	0,0746 5962	0,0835 6149
42	0,0595 3679	0,0656 8342	0,0689 5785	0,0743 3591	0,0832 8684
43	0,0591 4877	0,0653 3312	0,0686 2704	0,0740 3590	0,0830 3414
44	0,0587 8482	0,0650 0606	0,0683 1897	0,0737 5769	0,0828 0152
45	0,0584 4318	0,0647 0050	0,0680 3188	0,0734 9957	0,0825 8728
46	0,0581 2229	0,0644 1485	0,0677 6422	0,0732 5996	0,0823 8991
47	0,0578 2069	0,0641 4768	0,0675 1452	0,0730 3744	0,0822 0799
48	0,0575 3705	0,0638 9766	0,0672 8148	0,0728 3070	0,0820 4027
49	0,0572 7016	0,0636 6356	0,0670 6389	0,0726 3853	0,0818 8557
50	0,0570 1890	0,0634 4429	0,0668 6063	0,0724 5985	0,0817 4286

$3^1/_2\%$ I. Vācu valsts mirstības tab. vīriešiem 1891./1900.

x	l_x	D_x	N_x	x	l_x	D_x	N_x
0	100 000	100 000	1 733 564				
1	76 614	74 023	1 633 564	51	48 092	8320	110 068
2	72 631	67 802	1 559 541	52	47 150	7881	101 748
3	70 999	64 037	1 491 739	53	46 179	7458	93 867
4	69 945	60 953	1 427 702	54	45 176	7049	86 409
5	69 194	58 259	1 366 749	55	44 133	6653	79 360
6	68 641	55 839	1 308 490	56	43 047	6270	72 707
7	68 214	53 616	1 252 651	57	41 922	5900	66 437
8	67 874	51 544	1 199 035	58	40 760	5542	60 537
9	67 599	49 599	1 147 491	59	39 558	5197	54 995
10	67 369	47 759	1 097 892	60	38 308	4863	49 798
11	67 167	46 006	1 050 133	61	37 008	4539	44 935
12	66 983	44 328	1 004 127	62	35 657	4225	40 396
13	66 811	42 719	959 799	63	34 255	3922	36 171
14	66 641	41 170	917 080	64	32 799	3628	32 249
15	66 462	39 671	875 910	65	31 294	3345	28 621
16	66 259	38 212	836 239	66	29 743	3071	25 276
17	66 017	36 785	798 027	67	28 155	2809	22 205
18	65 731	35 387	761 242	68	26 531	2557	19 396
19	65 405	34 021	725 855	69	24 877	2317	16 839
20	65 049	32 691	691 834	70	23 195	2087	14 522
21	64 674	31 404	659 143	71	21 494	1869	12 435
22	64 292	30 163	627 739	72	19 784	1662	10 566
23	63 912	28 970	597 576	73	18 080	1467	8 904
24	63 539	27 827	568 606	74	16 391	1285	7 437
25	63 168	26 729	540 779	75	14 730	1116	6 152
26	62 796	25 673	514 050	76	13 109	959,6	5 036,1
27	62 420	24 657	488 377	77	11 543	816,4	4 076,5
28	62 043	23 679	463 720	78	10 049	686,7	3 260,1
29	61 663	22 738	440 041	79	8 640	570,5	2 573,4
30	61 274	21 831	417 303	80	7 330	467,6	2 002,9
31	60 873	20 954	395 472	81	6 129	377,8	1 535,3
32	60 459	20 108	374 518	82	5 044	300,4	1 157,5
33	60 030	19 290	354 410	83	4 075	234,5	857,1
34	59 581	18 498	335 120	84	3 225	179,3	622,6
35	59 111	17 732	316 622	85	2 497	134,1	443,3
36	58 618	16 989	298 890	86	1 893	98,24	309,21
37	58 099	16 270	281 901	87	1 405	70,45	210,97
38	57 557	15 573	265 631	88	1 018	49,32	140,52
39	56 992	14 898	250 058	89	718	33,61	91,20
40	56 402	14 246	235 160	90	492	22,25	57,59
41	55 785	13 613	220 914	91	327	14,29	35,34
42	55 142	13 001	207 301	92	211	8,908	21,048
43	54 470	12 409	194 300	93	132	5,384	12,140
44	53 768	11 834	181 891	94	79	3,113	6,756
45	53 037	11 279	170 057	95	46	1,752	3,643
46	52 282	10 742	158 778	96	26	0,9565	1,8913
47	51 507	10 225	148 036	97	14	0,4976	0,9348
48	50 708	9 726	137 811	98	7	0,2404	0,4372
49	49 875	9 243	128 085	99	4	0,1327	0,1968
50	49 002	8 774	118 842	100	2	0,0641	0,0641

II. Šveices tautas mirstības tabulas 1881.—1888.

$3^1/_2$% vīriešiem

x	l_x	D_x	N_x	a_x	A_x	x	l_x	D_x	N_x	a_x	A_x
16	7274	4194,96	89 757,7	21,3966	0,2764	56	4471	651,246	7361,23	11,3033	0,6178
17	7245	4036,94	85 562,7	21,1949	0,2833	57	4348	611,913	6709,98	10,9656	0,6292
18	7212	3882,66	81 525,8	20,9974	0,2899	58	4219	573,679	6098,07	10,6298	0,6405
19	7173	3731,08	77 643,1	20,8098	0,2963	59	4084	536,544	5524,39	10,2962	0,6518
20	7131	3583,80	73 912,1	20,6239	0,3026	60	3942	500,375	4987,85	9,9682	0,6629
21	7086	3440,76	70 328,3	20,4398	0,3088	61	3796	465,548	4487,47	9,6391	0,6740
22	7039	3302,35	66 887,5	20,2545	0,3151	62	3647	432,149	4021,92	9,3068	0,6853
23	6990	3168,47	63 585,1	20,0681	0.3214	63	3496	400,248	3589,78	8,9689	0,6967
24	6941	3039,86	60 416,7	19,8748	0,3279	64	3340	369,457	3189,53	8,6330	0,7081
25	6891	2915,91	57 376,8	19,6772	0,3346	65	3179	339,757	2820,07	8,3003	0,7193
26	6840	2796,45	54 460,9	19.4750	0,3414	66	3011	310,919	2480,31	7,9774	0,7302
27	6788	2681,34	51 664,5	19,2682	0,3484	67	2841	283,444	2169,39	7,6537	0,7412
28	6734	2570,06	48 983,1	19,0591	0,3555	68	2667	257,087	1885,95	7,3358	0,7519
29	6680	2463,24	46 413,1	18,8423	0,3628	69	2492	232,094	1628,86	7,0181	0,7627
30	6624	2359,99	43 949,8	18,6229	0,3702	70	2314	208,228	1396,77	6,7079	0,7732
31	6568	2260,90	41 589,8	18,3952	0,3779	71	2133	185,450	1188,54	6,4090	0,7833
32	6509	2164,83	39 328,9	18,1672	0,3857	72	1950	163,806	1003,09	6,1236	0,7929
33	6449	2072,34	37 164,1	17,9334	0,3936	73	1769	143,576	839,29	5,8456	0,8023
34	6387	1983,01	35 091,8	17,6962	0,4016	74	1590	124,684	695,71	5,5798	0,8113
35	6322	1896,45	33 108,7	17,4583	0,4096	75	1416	107,285	571,03	5,3225	0,8200
36	6255	1812,90	31 212,3	17,2168	0,4178	76	1247	91,285	463,74	5,0801	0,8282
37	6188	1732,84	29 399,4	16,9660	0,4263	77	1085	76,740	372,46	4,8535	0,8359
38	6119	1655,57	27 666,6	16,7112	0,4349	78	933	63,758	295,72	4,6381	0,8432
39	6050	1581,55	26 011,0	16,4465	0,4438	79	792	52,292	231,96	4,4358	0,8500
40	5979	1510,13	24 429,4	16,1770	0,4530	80	663	42,295	179,67	4,2479	0,8564
41	5904	1440,76	22 919,3	15,9078	0,4621	81	548	33,776	137,37	4,0671	0,8625
42	5825	1373,41	21 478,5	15,6388	0,4712	82	446	26,560	103,59	3 9004	0,8681
43	5744	1308,52	20 105,1	15,3648	0,4804	83	360	20,714	77,03	3,7190	0,8742
44	5662	1246,22	18 796,6	15,0829	0,4900	84	285	15,844	56,32	3,5548	0,8798
45	5578	1186,21	17 550,4	14,7954	0,4997	85	223	11 978	40,48	3,3793	0,8857
46	5493	1128,64	16 364,2	14,4990	0,5097	86	171	8,874	28,50	3,2115	0,8914
47	5406	1073,20	15 235,5	14,1963	0,5199	87	128	6,418	19,63	3,0578	0,8966
48	5317	1019,84	14 162,3	13,8868	0,5304	88	94	4,554	13,21	2,9002	0,9019
49	5225	968,298	13 142,5	13,5728	0,5410	89	67	3,136	8,65	2,7593	0,9067
50	5127	918,007	12 174,2	13,2616	0,5515	90	47	2,126	5,52	2,5957	0,9122
51	5026	869,490	11 256,2	12,9457	0,5622	91	32	1,398	3,39	2,4258	0,9180
52	4921	822,536	10 386,7	12,6277	0,5730	92	21	0,887	1,99	2,2486	0,9240
53	4813	777,280	9 564,2	12,3047	0,5839	93	13	0,530	1,11	2,0876	0,9294
54	4703	733,831	8 786,9	11,9740	0,5951	94	8	0,315	0,58	1,8292	0,9381
55	4589	691,829	8 053,1	11,6402	0,6064	95	4	0,152	0,26	1,7165	0,9420

$3^1/_2{}^0/_0$ **III. Vācu renšu apdrošinātāju**

x	l_x	D_x	N_x	S_x	a_x
25	100 000	42 315	928 629	1631 1744	21,946
26	99 646	40 739	886 314	1538 3115	21,756
27	99 289	39 220	845 575	1449 6801	21,560
28	98 929	37 757	806 355	1365 1226	21,357
29	98 562	36 345	768 598	1284 4871	21,148
30	98 188	34 982	732 253	1207 6273	20,932
31	97 805	33 668	697 271	1134 4020	20,710
32	97 412	32 398	663 603	1064 6749	20,483
33	97 010	31 174	631 205	998 3146	20,248
34	96 596	29 991	600 031	935 1941	20,007
35	96 171	28 849	570 040	875 1910	19,759
36	95 732	27 746	541 191	818 1870	19,505
37	95 279	26 681	513 445	764 0679	19,244
38	94 810	25 652	486 764	712 7234	18,975
39	94 321	24 657	461 112	664 0470	18,701
40	93 811	23 694	436 455	617 9358	18,421
41	93 277	22 768	412 761	574 2903	18,133
42	92 751	21 860	389 993	533 0142	17,840
43	92 120	20 986	368 133	494 0149	17,542
44	91 490	20 137	347 147	457 2016	17,239
45	90 821	19 314	327 010	422 4869	16,931
46	90 108	18 514	307 696	389 7859	16,620
47	89 349	17 738	289 182	359 0163	16,303
48	88 539	16 982	271 444	330 0981	15,984
49	87 678	16 249	254 462	302 9537	15,660
50	86 766	15 536	238 213	277 5075	15,333
51	85 799	14 843	222 677	253 6862	15,002
52	84 775	14 170	207 834	231 4185	14,667
53	83 695	13 516	193 664	210 6351	14,328
54	82 558	12 882	180 148	191 2687	13,985
55	81 353	12 265	167 266	173 2539	13,638
56	80 078	11 664	155 001	156 5273	13,288
57	78 729	11 080	143 337	141 0272	12,937
58	77 305	10 512	132 257	126 6935	12,582
59	75 803	9 958,8	121 745,1	113 4677,5	12,225
60	74 220	9 421,2	111 786,3	101 2932,4	11,866
61	72 555	8 898,3	102 365,1	90 1146,1	11,504
62	70 798	8 389,2	93 466,8	79 8781,0	11,141
63	69 946	7 893,5	85 077,6	70 5314,2	10,778
64	66 999	7 411,2	77 184,1	62 0236,6	10,414

mirstības tabulas (vīrieši un sievietes) $3^1/_2\%$

l_x	D_x	N_x	S_x	a_x	x
64 956	6 942,2	69 772,9	543 052,5	10,051	65
62 796	6 484,4	62 830,7	473 279,6	9,6895	66
60 520	6 038,1	56 346,3	410 448,9	9,3318	67
58 128	5 603,3	50 308,2	354 102,6	8,9783	68
55 624	5 180,6	44 704,9	303 794,4	8,6293	69
53 012	4 770,4	39 524,3	259 089,5	8,2853	70
50 298	4 373,1	34 753,9	219 565,2	7,9472	71
47 491	3 989,4	30 380,8	184 811,3	7,6154	72
44 603	3 620,1	26 391,4	154 430,5	7,2901	73
41 648	3 266,0	22 771,3	128 039,1	6,9722	74
38 657	2 928,9	19 505,3	105 267,8	6,6595	75
35 648	2 609,6	16 576,4	85 762,5	6,3520	76
32 640	2 308,6	13 966,8	69 186,1	6,0500	77
29 654	2 026,5	11 658,2	55 219,3	5,7529	78
26 714	1 763,8	9 631,7	43 561,1	5,4607	79
23 843	1 521,0	7 867,9	33 929,4	5,1728	80
21 065	1 298,4	6 346,9	26 061,5	4,8884	81
18 376	1 094,3	5 048,5	19 714,6	4,6133	82
15 806	909,45	3 954,16	14 666,05	4,3479	83
13 384	744.05	3 044,71	10 711,89	4,0921	84
11 137	598,19	2 300,66	7 667,18	3,8461	85
9 088	471,63	1 702,47	5 366,52	3,6098	86
7 256	363,81	1 230,84	3 664,05	3,3832	87
5 653	273,86	867,03	2 433,21	3,1660	88
4 285	200,57	593,17	1 566,18	2,9575	89
3 149	142,41	392,60	973,01	2,7569	90
2 237	97,746	250,193	580,414	2,5597	91
1 521	64,213	152,447	330,221	2,3741	92
985	40,178	88,234	177,774	2,1962	93
602	23,725	48,056	89,540	2,0257	94
345	13,137	24,331	41,484	1,8520	95
183	6,7326	11,1943	17,1532	1,6621	96
89	3,1636	4,4617	5,9589	1,4098	97
32	1,0990	1,2981	1,4972	1,1829	98
6	0,19910	0,19910	0,19910	1,0000	99

$3^1/_2\%$ **IV. 23 vācu biedrību mirstības**

x.	l_x	d_x	D_x	N_x	M_x	a_x
20	100 000	919	50 256,59	1031 223,70	15 384,28	20,5192
21	99 081	908	48 110,85	980 967,11	14 938,04	20,3897
22	98 173	887	46 057,92	932 856,26	14 512,05	20,2540
23	97 286	861	44 098,35	886 798,34	14 109,99	20,1096
24	96 425	835	42 230,02	842 699,99	13 732,91	19,9550
25	95 590	816	40 448,62	800 469,97	13 379,58	19,7898
26	94 774	804	38 747,18	760 021,35	13 045,97	19,6149
27	93 970	797	37 119,30	721 274,17	12 728,38	19,4312
28	93 173	795	35 559,88	684 154,87	12 424,20	19,2395
29	92 378	800	34 064,22	648 594,99	12 131,05	19,0404
30	91 578	808	32 627,26	614 530,77	11 846,03	18,8349
31	90 770	818	31 245,79	581 903,51	11 567,89	18.6234
32	89 952	831	29 917,11	550 657,72	11 295,83	18,4061
33	89 121	841	28 638,38	520 740,61	11 028,79	18,1833
34	88 280	856	27 408,83	492 102,23	10 767,68	17,9541
35	87 424	873	26 225,18	464 693,40	10 510,90	17,7194
36	86 551	889	25 085,31	438 468,22	10 257,88	17,4791
37	85 662	906	23 988,07	413 382,91	10 008,93	17,2329
38	84 756	928	22 931,75	389 394,84	9 763,80	16,9806
39	83 828	950	21 913,69	366 463,09	9 521,21	16,7230
40	82 878	975	20 932,70	344 549,40	9 281,27	16,4599
41	81 903	1006	19 986,91	323 616,70	9 043,34	16,1914
42	80 897	1035	19 073,82	303 629,79	8 806,15	15,9187
43	79 862	1063	18 193,03	284 555,97	8 570,37	15,6409
44	78 799	1092	17 343,84	266 362,94	8 336,40	15,3578
45	77 707	1117	16 525,11	249 019,10	8 104,18	15,0691
46	76 590	1140	15 736,78	232 493,99	7 874,67	14,7739
47	75 450	1169	14 978,31	216 757,21	7 648,36	14,4714
48	74 281	1204	14 247,57	201 778,90	7 424,14	14,1623
49	73 077	1246	13 542,65	187 531,33	7 201,01	13,8475
50	71 831	1303	12 861,58	173 988,68	6 977,91	13,5278
51	70 528	1362	12 201,23	161 127,10	6 752,49	13,2058
52	69 166	1425	11 560,98	148 925,87	6 524,83	12,8818
53	67 741	1490	10 939,89	137 364,89	6 294 70	12,5563
54	66 251	1556	10 337,45	126 425,00	6 062,21	12,2298
55	64 695	1621	9 753,298	116 087,548	5 827,63	11,9024
56	63 074	1691	9 187,361	106 334,250	5 591,51	11,5740
57	61 383	1759	8 638,695	97 146,889	5 353,53	11,2456
58	59 624	1832	8 107,385	88 508,194	5 114,35	10,9170
59	57 792	1900	7 592,540	80 400,809	4 873,67	10,5894

tabulas (vīrieši un sievietes). $3^1/_2\%$

l_x	d_x	D_x	N_x	M_x	a_x	x
55 892	1976	7 094,612	72 808,269	4 632,49	10,2625	60
53 916	2038	6 612,357	65 713,657	4 390,15	9,9380	61
51 878	2097	6 147,259	59 101,300	4 148,66	9,6143	62
49 781	2149	5 699,301	52 954,041	3 908,58	9,2913	63
47 632	2197	5 268,857	47 254.740	3 670,87	8,9687	64
45 435	2246	4 855,878	41 985,883	3 436,06	8,6464	65
43 189	2302	4 459,745	37 130,005	3 201,14	8,3256	66
40 887	2355	4 079,264	32 670.260	2 974,47	8,0089	67
38 532	2399	3 714,307	28 590,996	2 747,46	7,6975	68
36 133	2432	3 365,270	24 876,689	2 524,03	7,3922	69
33 701	2452	3 032,622	21 511,419	2 305,18	7,0933	70
31 249	2455	2 716,885	18 478,797	2 092,00	6,8015	71
28 794	2436	2 418,782	15 761,912	1 885,77	6,5165	72
26 358	2406	2 139,276	13 343,130	1 688,06	6,2372	73
23 952	2360	1 878,261	11 203,854	1 499,39	5,9650	74
21 592	2299	1 635,937	9 325,593	1 320,58	5,7005	75
19 293	2210	1 412,320	7 689,656	1 152,28	5,4447	76
17 083	2103	1 208,251	6 277,336	995,97	5,1954	77
14 980	1982	1 023,681	5 069,085	852,26	4,9518	78
12 998	1848	858,2007	4 045,4044	721,40	4,7138	79
11 150	1730	711.2903	3 187,2037	603,51	4,4809	80
9 420	1599	580,6074	2 475,9134	496,883	4,2644	81
7 821	1443	465,7508	1 895,3060	401,660	4,0694	82
6 378	1264	366,9742	1 429,5552	318.633	3,8955	83
5 114	1080	384,2964	1 062,5810	248,365	3,7376	84
4 034	896	216,6737	778,2846	190,356	3,5920	85
2 138	715	162,8482	561,6109	143,858	3,4487	86
2 423	566	121,4907	398,7627	108,007	3,2822	87
1 857	442	89,96242	277,27195	80,587	3,0821	88
1 415	344	66,23161	187,30953	59,898	2,8281	89
1 071	347	48,43485	121,07792	44,341	2,4998	90
724	261	31,63492	72,64307	29,179	2,2963	91
463	188	19,54649	41,00815	18,1598	2,0980	92
275	126	11,21709	21,46166	10,4914	1,9133	93
149	77	5,872099	10,244574	5,5257	1,7446	94
72	42	2,741569	4,372475	2,5937	1,5949	95
30	19	1,103691	1,630906	1,04854	1,4777	96
11	8	0,3910018	0,5272148	0,37317	1,3484	97
3	2	0,1030308	0,1362130	0,098424	1,3221	98
1	1	0,03318221	0,03318221	0,032060	1,0000	99

V. Francijas 4 biedrību mirstības

4,25%

Gadi	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x
10	571 610,4	11 483 607,1	201 671 628	2 038,0	105 629	3 330 574
11	546 311,4	10 911 996,7	190 188 021	1 956,8	103 591	3 224 944
12	522 123,2	10 365 685,3	179 276 024	1 978,0	101 634	3 121 353
13	498 900,3	9 843 562,1	168 910 339	2 062,2	99 656,5	3 019 718
14	476 541,8	9 344 661,8	159 066 777	2 176,6	97 594,3	2 920 062
15	454 982,6	8 868 120,0	149 722 115	2 296,1	95 417,7	2 822 468
16	434 185,4	8 413 137,4	140 853 995	2 400,8	93 121,6	2 727 050
17	414 133,4	7 978 952,0	132 440 858	2 473,8	90 720,8	2 633 928
18	394 827,4	7 564 818,6	124 461 906	2 505,4	88 247,0	2 543 208
19	376 277,6	7 169 991,2	116 897 087	2 488,5	85 741,6	2 454 961
20	358 500,5	6 793 713,6	109 727 096	2 423,3	83 253,1	2 369 219
21	341 512,0	6 435 213,1	102 933 382	2 313,8	80 829,8	2 285 966
22	325 323,2	6 093 701,1	96 498 169	2 170,9	78 516,0	2 205 136
23	309 934,5	5 768 377,9	90 404 468	2 009,8	76 345,1	2 126 620
24	295 330,8	5 458 443,4	84 636 090	1 854,0	74 335,3	2 050 275
25	281 475,2	5 163 112,6	79 177 647	1 732,0	72 481,3	1 975 940
26	268 303,8	4 881 637,4	74 014 534	1 681,65	70 749,28	1 903 459
27	255 718,8	4 613 333,6	69 132 897	1 634,74	69 067,63	1 832 709
28	243 692,7	4 357 614,8	64 519 563	1 591,00	67 432,89	1 763 642
29	232 199,8	4 113 922,1	60 161 949	1 550,45	65 841,89	1 696 209
30	221 215,1	3 881 722,3	56 048 027	1 513,09	64 291,44	1 630 367
31	210 714,7	3 660 507,2	52 166 304	1 478,90	62 778,35	1 566 076
32	200 676,0	3 449 792,5	48 505 797	1 447,05	61 299,45	1 503 297
33	191 077,8	3 249 116,5	45 056 005	1 418,31	59 852,40	1 441 998
34	181 899,0	3 058 038,7	41 806 888	1 391,89	58 434,09	1 382 145
35	173 120,2	2 876 139,7	38 748 849	1 368,46	57 042,20	1 323 711
36	164 722,2	2 703 019,5	35 872 710	1 347,26	55 673,74	1 266 669
37	156 687,4	2 538 297,3	33 169 690	1 328,66	54 326,48	1 210 995
38	148 998,3	2 381 609,9	30 631 393	1 311,95	52 997,82	1 156 669
39	141 639,2	2 232 611,6	28 249 783	1 297,88	51 685,87	1 103 671
40	134 593,7	2 090 972,4	26 017 172	1 285,74	50 387,99	1 051 985
41	127 847,5	1 956 378,7	23 926 199	1 275,63	49 102,25	1 001 597
42	121 386,1	1 828 531,2	21 969 821	1 267,45	47 826,62	952 494,9
43	115 196,1	1 707 145,1	20 141 289	1 261,09	46 559,17	904 668,3
44	109 264,8	1 591 949,0	18 434 144	1 256,59	45 298,08	858 109,1
45	103 579,7	1 482 684,2	16 842 195	1 253,52	44 041,49	812 811,0
46	98 129,25	1 379 104,48	15 359 511,1	1 252,08	42 787,97	768 769,6
47	92 902,53	1 280 975,23	13 980 406,7	1 252,00	41 535,89	725 981,6
48	87 888,91	1 188 072,70	12 699 431,4	1 253,16	40 283,89	684 445,7
49	83 078,56	1 100 183,79	11 511 358,8	1 255,59	39 030,73	644 161,8
50	78 461,92	1 017 105,23	10 411 175,0	1 258,67	37 775,14	605 131,1
51	74 030,47	938 643,31	9 394 069,7	1 262,69	36 516,47	567 355,9
52	69 775,78	864 612,84	8 455 426,4	1 267,45	35 253,78	530 839,5
53	65 689,86	794 837,06	7 590 813,6	1 272,41	33 986,33	495 585,7
54	61 765,63	729 147,20	6 795 976,5	1 277,76	32 713,92	461 599,4
55	57 996,16	667 381,57	6 066 829,3	1 282,85	31 436,16	428 885,4
56	54 375,38	609 385,41	5 399 447,8	1 287,77	30 153,31	397 449,3
57	50 897,37	555 010,03	4 790 062,4	1 292,17	28 865,54	367 296,0
58	47 556,85	504 112,66	4 235 052,4	1 295,56	27 573,37	338 430,4
59	44 349,21	456 555,81	3 730 939,7	1 297,88	26 277,81	310 857,1

tabulas (vīrieši un sievietes).

4,25%

D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	Gadi
41 270,08	412 206,60	3 274 383,9	1 298,65	24 979,93	284 579,3	60
38 315,67	370 936,52	2 862 177,3	1 297,67	23 681,28	259 599,3	61
35 482,71	332 620,85	2 491 240,8	1 294,32	22 383,61	235 918,1	62
32 768,52	297 138,14	2 158 619,9	1 288,58	21 089,29	213 534,4	63
30 170,58	264 369,62	1 861 481,8	1 279,66	19 800,71	192 445,2	64
27 687,31	234 199,04	1 597 112,2	1 267,62	18 521,05	172 644,4	65
25 317,06	206 511,73	1 362 913,1	1 251,74	17 253,43	154 123,4	66
23 058,99	181 194,67	1 136 401,4	1 231,85	16 001,69	136 870,0	67
20 912,44	158 135,68	975 206,8	1 207,69	14 769,84	120 868,3	68
18 877,09	137 223,24	817 071,1	1 178,80	13 562,15	106 098,4	69
16 953,00	118 346,15	679 847,8	1 145,204	12 383,35	92 536,29	70
15 140,23	101 393,15	561 501,7	1 106,523	11 238,14	80 152,95	71
13 439,27	86 252,92	460 108,5	1 062,979	10 131,62	68 914,80	72
11 850,29	72 813,65	373 855,6	1 014,482	9 068,643	58 783,18	73
10 373,61	60 963,36	301 042,0	961,242	8 054,161	49 714,54	74
9 009,248	50 589,746	240 078,632	903,659	7 092,919	41 660,37	75
7 756,925	41 580,498	189 488,886	842,177	6 189,260	34 567,46	76
6 615,859	33 823,573	147 908,388	777,332	5 347,083	28 378,20	77
5 584,824	27 207,714	114 084,815	710,124	4 569,751	23 031,11	78
4 661,643	21 622,890	86 877,102	641,256	3 859,627	18 461,36	79
3 843,552	16 961,247	65 254,212	571,808	3 218,371	14 601,74	80
3 126,827	13 117,695	48 292,965	502,954	2 646,563	11 383,36	81
2 506,765	9 990,868	35 175,270	435,764	2 143,609	8 736,802	82
1 977,781	7 484,103	25 184,402	371,390	1 707,845	6 593,193	83
1 533,408	5 506,322	17 700,300	310,827	1 336,455	4 885,348	84
1 166,471	3 972,914	12 193,978	255,127	1 025,628	3 548,893	85
869,043 2	2 806,442 9	8 221,063 8	204,898	770,501	2 523,265	86
632,936 7	1 937,399 7	5 414,620 9	160,753	565,603	1 752,764	87
449,691 0	1 304,463 0	3 477,221 2	122,932	404,850	1 187,161	88
310,958 2	854,772 0	2 172,758 2	91,400	281,918	782,311	89
208,764 3	543,813 8	1 317,986 3	65,888	190,518	500,393	90
135,721 8	335,049 5	774,172 5	45,965	124,630	309,876	91
85,170 23	199,327 68	439,122 99	30,898	78,665	185,246	92
51,436 58	114,157 45	239,795 31	19,963	47,767	106,581	93
29,787 63	62,720 87	125,637 85	12,355	27,804	58,814	94
16,472 79	32,933 24	62,916 98	7,287	15,449	31,010	95
8,663 998	16,460 453	29,983 735	4,072	8,162	15,561	96
4,323 025	7,796 455	13,523 282	2,160	4,090	7,399	97
2,031 084	3,473 430	5,726 826	1,078	1,930	3,309	98
0,892 963 5	1,442 346 4	2,253 395 9	0,509	0,852	1,379	99

VI. Francijas 4 biedrību mirstības tabulas

4,25%

Gadi	D_{xx}	N_{xx}	$\frac{1}{D_{xx}}$	C_{xx}	M_{xx}
10	495 405,6	8 904 259,4	0,000 002 018 548 0	3 526,2	135 186,5
11	471 755,7	8 408 853,8	0,000 002 119 741 2	3 373,3	131 660,3
12	449 219,7	7 937 098,1	0,000 002 226 082 2	3 397,0	128 287,0
13	427 579,0	7 487 878,4	0,000 002 338 749 1	3 527,3	124 890,0
14	406 693,2	7 060 299,4	0,000 002 458 856 0	3 706,5	121 362,7
15	386 483,1	6 653 606,2	0,000 002 587 435 3	3 890,8	117 656,2
16	366 916,6	6 267 123,1	0,000 002 725 415 0	4 046,2	113 765,4
17	347 995,5	5 900 206,5	0,000 002 873 600 4	4 144,8	109 719,2
18	329 749,2	5 552 211,0	0,000 002 032 607 8	4 171,3	105 574,4
19	312 220,9	5 222 461,8	0,000 003 202 860 5	4 115,8	101 403,1
20	295 461,4	4 910 240,9	0,000 003 384 536 9	3 980,6	97 287,3
21	279 517,7	4 614 779,5	0,000 003 577 591 0	3 774,5	93 306,7
22	264 425,6	4 335 261,8	0,000 003 781 782 1	3 517,0	89 532,2
23	250 201,1	4 070 836,2	0,000 003 996 785 0	3 234,2	86 015,2
24	236 833,4	3 820 635,1	0,000 004 222 377 4	2 964,0	82 781,0
25	224 275,5	3 583 801,7	0,000 004 458 801 8	2 751,4	79 817,0
26	212 437,6	3 359 526,2	0,000 004 707 264 6	2 654,47	77 065,6
27	201 177,3	3 147 088,6	0,000 004 970 739 7	2 563,75	74 411,1
28	190 464,9	2 945 911,3	0,000 005 250 311 2	2 478,69	71 847,4
29	180 272,5	2 755 446,4	0,000 005 547 157 8	2 399,23	69 368,7
30	170 573,4	2 575 173,9	0,000 005 862 578 8	2 325,26	66 969,5
31	161 342,1	2 404 600,5	0,000 006 198 010 3	2 256,64	64 644,2
32	152 554,5	2 243 258,4	0,000 006 555 034 4	2 192,00	62 387,6
33	144 188,5	2 090 703,9	0,000 006 935 365 9	2 132,42	60 195,6
34	136 221,8	1 946 515,4	0,000 007 340 968 9	2 076,59	58 063,1
35	128 634,5	1 810 293,6	0,000 007 773 964 2	2 025,42	55 986,6
36	121 406,7	1 681 659,1	0,000 008 236 777 7	1 977,67	53 961,1
37	114 520,3	1 560 252,4	0,000 008 732 076 3	1 933,78	51 983,5
38	107 957,6	1 445 732,1	0,000 009 262 895 8	1 892,62	50 049,7
39	101 702,9	1 337 774,5	0,000 009 832 561 3	1 855,15	48 157,1
40	95 739,73	1 236 071,60	0,000 010 444 985	1 820,23	46 301,9
41	90 053,99	1 140 331,87	0,000 011 104 450	1 787,92	44 481,7
42	84 631,60	1 050 277,88	0,000 011 815 917	1 757,94	42 693,8
43	79 459,62	965 646,28	0,000 012 585 009	1 730,02	40 935,8
44	74 525,91	886 186,66	0,000 013 418 152	1 704,09	39 205,8
45	69 818,73	811 660,75	0,000 014 322 804	1 679,45	37 501,7
46	65 327,49	741 842,02	0,000 015 307 492	1 656,23	35 822,3
47	61 042,16	676 514,53	0,000 016 382 120	1 633,95	34 166,0
48	55 953,33	615 472,37	0,000 017 558 236	1 612,31	32 532,1
49	53 052,39	558 519,04	0,000 018 849 292	1 591,22	30 919,8
50	49 331,13	505 466,65	0,000 020 271 176	1 569,76	29 328,6
51	45 782,59	456 135,52	0,000 021 842 364	1 548,17	27 758,8
52	42 399,88	410 352,93	0,000 023 584 972	1 526,07	26 210,6
53	39 176,71	367 953,05	0,000 025 525 370	1 502,69	24 684,6
54	36 107,82	328 776 34	0,000 027 694 832	1 478,16	23 181,9

divām tā paša vecuma personām.

4,25%

D_{xx}	N_{xx}	$\frac{1}{D_{xx}}$	C_{xx}	M_{xx}	Gadi
33 188,07	292 668,52	0,000 030 131 309	1 451,63	21 703,7	55
30 413,35	259 480,45	0,000 032 880 298	1 423,14	20 252,1	56
27 779,63	229 067,10	0,000 035 997 600	1 392,24	18 828,9	57
25 283,55	201 287,47	0,000 039 551 408	1 358,41	17 436,7	58
22 922,38	176 003,92	0,000 043 625 487	1 321,60	16 078,3	59
20 693,52	153 081,54	0,000 048 324 306	1 281,41	14 756,7	60
18 594,86	132 388,02	0,000 053 778 302	1 237,76	13 475,3	61
16 624,54	113 793,16	0,000 060 152 040	1 190,26	12 237,5	62
14 781,06	97 168,62	0,000 067 654 147	1 139,15	11 047,3	63
13 062,77	82 387,56	0,000 076 553 442	1 084,10	9 908,10	64
11 468,47	69 324,79	0,000 087 195 589	1 025,59	8 824,00	65
9 996,466	57 856,319	0,000 100 035 35	963,551	7 798,41	66
8 645,230	47 859,853	0,000 115 670 72	898,494	6 834,86	67
7 412,791	39 214,623	0,000 134 901 96	830,933	5 936,37	68
6 296,774	31 801,832	0,000 158 811 48	761,347	5 105,44	69
5 294,405	25 505,058	0,000 188 878 64	690,624	4 344,09	70
4 402,158	20 210,653	0,000 227 161 31	619,455	3 653,47	71
3 615,997	15 808,495	0,000 276 548 90	548,917	3 034,01	72
2 930,968	12 192,498	0,000 341 184 21	479,898	2 485,09	73
2 341,469	9 261,530	0,000 427 082 31	413,404	2 005,20	74
1 841,121	6 920,061	0,000 543 147 35	350,429	1 591,79	75
1 422,853	5 078,940	0,000 702 813 29	291,836	1 241,36	76
1 079,020	3 656,087	0,000 926 766 88	238,350	949,526	77
801,589 8	2 577,067 2	0,001 247 520 9	190,616	711,176	78
582,220 6	1 775,477 4	0,001 717 562 0	148,932	520,560	79
412,620 7	1 193,256 8	0,002 423 533 3	113,447	371,628	80
284 688 2	780,636 1	0,003 512 614 9	84,064 2	258,181 3	81
190 749 8	495 947 9	0,005 242 469 5	60,432 6	174,117 1	82
123,785 4	305,198 1	0,008 078 497 1	42,032 4	113,684 5	83
77,572 04	181,412 74	0,012 891 243	28,193 9	71,652 1	84
46 796 48	103,840 70	0,021 369 129	18,184 7	43,458 2	85
27 078 52	57,044 22	0,036 929 640	11,231 9	25 273 5	86
14,974 02	29,965 70	0,066 782 334	6,619 97	14,041 6	87
7,879 935	14,991 678	0,126 904 60	3,707 01	7,421 62	88
3,928 024	7,111 743	0,254 580 93	1,962 63	3,714 61	89
1,845 685	3,183 719	0,541 804 26	0,977 32	1,751 98	90
0,813 245 0	1,338 033 8	1,229 641 7	0,455 61	0,774 66	91
0,333 867 3	0,524 788 8	2,995 202 0	0,197 38	0,319 05	92
0,126 945 5	0,190 921 5	7,877 396 2	0 079 014	0,121 669	93
0,044 383 57	0,063 976 02	22,530 860	0,029 022	0,042 655	94
0,014 150 13	0.019 592 45	70,670 729	0,009 692	0,013 633	95
0,004 080 743	0,005 442 318	245,053 41	0,002 916	0,003 941	96
0,001 059 141	0.001 361 575	944,161 35	0,000 788 4	0,001 024 8	97
0 000 243 730 1	0 000 302 434 4	4 102,899 1	0 000 188 7	0,000 236 4	98
0,000 049 112 99	0,000 058 704 30	20 361,212	0,000 039 70	0.000 047 71	99

VII. Palīga tabula saistītai apdrošināšanai.

Gadu starpība (1)	Gadu skaits, kas jāpieskaita jaunākās personas gadiem (2)	Gadu starpība (1)	Gadu skaits, kas jāpieskaita jaunākās personas gadiem (2)	Gadu starpība (1)	Gadu skaits, kas jāpieskaita jaunākās personas gadiem (2)
1	1	11	7	21	15
2	1	12	8	22	16
3	2	13	8	23	17
4	2	14	9	24	17
5	3	15	10	25	18
6	3	16	11	26	19
7	4	17	11	27	20
8	5	18	12	28	21
9	5	19	13	29	22
10	6	20	14	30	23

VIII. Aktīvitātes tabulas (pēc Schaertlin'a). $3^1/_2\%$

x	l^a_x	D^a_x	N^a_x	a^a_x	x	l^a_x	D^a_x	N^a_x	a^a_x
20	67630	33988,5	659498	19,4036	51	43642	7550,00	76577,2	10,1427
21	67130	32596,4	625509	19,1895	52	42292	7069,03	69027,2	9,7647
22	66607	31248,7	592913	18,9740	53	40897	6604,70	61958,2	9,3809
23	66069	29948,1	561664	18,7546	54	39457	6156,66	55353,5	8,9908
24	65515	28692,8	531716	18,5313	55	37993	5727,75	49196,8	8,5892
25	64957	27486,4	503023	18,3008	56	36494	5315,72	43469,0	8,1774
26	64393	26326,3	475537	18,0632	57	34952	4918,95	38153,3	7,7564
27	63820	25209,7	449211	17,8190	58	33325	4531,37	33234,3	7,3343
28	63236	24134,3	424001	17,5684	59	31616	4153,62	28702,9	6,9103
29	62641	23098,8	399867	17,3112	60	29751	3776,42	24549,3	6,5007
30	62019	22096,0	376768	17.0514	61	27736	3401,59	20772,9	6,1068
31	61379	21128,5	354672	16,7864	62	25547	3027,18	17371,3	5,7384
32	60722	20195,5	333543	16,5157	63	23258	2662,75	14344,1	5,3869
33	60043	19294,4	313347	16,2403	64	20901	2311,98	11681,3	5,0525
34	59343	18424,6	294053	15,9598	65	18549	1982,43	9369,33	4,7262
35	58637	17589,7	275628	15,6699	66	16251	1678,10	7386,90	4,4019
36	57910	16784,2	258038	15,3739	67	14069	1403,65	5708,80	4,0671
37	57161	16006,9	241254	15,0719	68	11959	1152,79	4305,15	3,7345
38	56399	15259,4	225247	14,7612	69	9902	922,229	3152,36	3,4182
39	55614	14538,2	209988	14,4439	70	7944	714.850	2230,13	3,1197
40	54792	13838,9	195450	14,1232	71	6125	532,527	1515,276	2,8454
41	53950	13165,5	181611	13,7945	72	4484	376,669	982,749	2,6091
42	53091	12517,7	168445	13,4565	73	3116	252,902	606.080	2,3965
43	52207	11893,1	155927	13,1107	74	2052	16[illegible],913	353,178	2,1948
44	51305	11292,3	144034	12,7551	75	1268	96,071	192,265	2,0013
45	50385	10714,8	132742	12,3887	76	724	53,000	96,194	1,8150
46	49429	10156,1	122027	12,0151	77	373	26,382	43,194	1,6373
47	48410	9610,34	111871	11,6407	78	168	11,481	16,813	1,4645
48	47332	9078,58	102260,9	11,2640	79	62	4,094	5,332	1,3026
49	46176	8557,35	93182,3	10,8892	80	17	1,084	1,239	1,1421
50	44946	8047,73	84624,9	10,5154	81	2,5	0,154	0,154	1,0000

IX. Dažādas slimības dienu tabulas.

Gadi	Heym's I	Heym's II	Behm's	Kinkelin's	Moser's	Duma's	Ženevas kantons
16		5,681		6,32	6,87		4,89
17		5,722	5,20	6,16	6,65	6,54	4,90
18		5,768	5,28	6,02	6,36	6,61	4,91
19		5,819	5,36	5,89	5,90	6,69	4,92
20	6,7174	5,875	5,44	5,78	5,39	6,77	4,94
21	6,5798	5,773	5,52	5,68	5,12	6,87	4,96
22	6,5483	5,671	5,61	5,60	4,96	6,97	4,99
23	6,4765	5,409	5,70	5,53	4,88	7,08	5,02
24	6,4603	5,319	5,79	5,47	4,84	7,19	5,05
25	6,4540	5,167	5,89	5,44	4,85	7,32	5,09
26	6,5602	5,061	5,99	5,42	4,88	7,45	5,13
27	6,7281	4,975	6,10	5,41	4,98	7,59	5,17
28	6,8341	5,015	6,22	5,42	5,11	7,74	5,22
29	6,9088	5,207	6,35	5,44	5,25	7,90	5,27
30	6,9142	5,335	6,49	5,48	5,41	8,07	5,32
31	6,9648	5,429	6,64	5,53	5,61	8,24	5,38
32	6,9357	5,677	6,80	5,60	5,83	8,43	5,44
33	7,1287	5,787	6,97	5,68	6,05	8,62	5,50
34	7,2394	5,837	7,15	5,78	6,27	8,83	5,56
35	7,5675	5,944	7,34	5,90	6,48	9,04	5,62
36	7,6301	6,022	7,54	6,03	6,67	9,26	5,69
37	7,7378	6,203	7,75	6,17	6,84	9,49	5,76
38	7,7877	6,505	7,98	6,33	6,99	9,72	5,84
39	7,9314	6,814	8,23	6,51	7,12	9,97	5,93
40	7,9522	7,174	8,50	6,70	7,24	10,23	6,02
41	8,2733	7,574	8,79	6,90	7,36	10,50	6,11
42	8,4248	7,803	9,10	7,12	7,49	10,77	6,22
43	8,5554	7,886	9,43	7,36	7,63	11,06	6,34
44	8,7333	7,961	9,78	7,61	7,78	11,35	6,47
45	8,9553	7,991	10,15	7,88	7,96	11,66	6,60
46	9,0630	7,996	10,54	8,16	8,18	11,97	6,75
47	9,4276	8,188	10,95	8,45	8,46	12,29	6,90
48	9,8492	8,465	11,38	8,76	8,82	12,63	7,07
49	10,3338	8,691	11,83	9,09	9,27	12,97	7,25
50	10,7021	8,885	12,30	9,43	9,82	13,32	7,45
51	11,2019	9,234	12,79	9,79	10,41	13,69	7,66
52	11,6348	9,689	13,30	10,16	11,02	14,06	7,89
53	11,8386	10,259	13,83	10,55	11,65	14,45	8,14
54	11,9366	11,105	14,38	10,95	12,28	14,84	8,42
55	12,3615	12,273	14,95	11,37	12,92	15,24	8,71
56	12,8136	13,255	15,54	11,80	13,56	15,66	9,02
57	13,3110	14,103	16,15	12,25	14,20	16,08	9,35
58	14,3582	14,754	16,78	12,72	14,84	16,52	9,70
59	15,7819	15,032	17,43	13,19	15,48	16,97	10,08
60	17,1143	17,114	18,10	13,69	16,12	17,42	10,48
61	18,465	18,465	18,79	14,20	16,76	17,89	10,90
62	19,598	19,598	19,50	14,72	17,40	18,37	11,35
63	21,048	21,048	20,23	15,26	18,04	18,86	11,83
64	21.917	21,917	20,98	15,81	18,68	19,36	12,34
65	22,821	22,821	21,75	16,38	19,32	19,87	12,87
66	24,196	24,196	22,54	16,97	19,96	20,39	13,44
67	25,892	25,892	23,35	17,57	20,61	20,93	14,03
68	27,356	27,356	24,18	18,18	21,26	21,47	14,66
69	29,977	29,977	25,03	18,81	21,92	22,03	15,32
70	33,204	33,204	25,90	19,46	22,59	22,60	16,02
71	36,375	36,375	26,79	20,12	23,27	23,18	16,75
72	40,204	40,204	27,70	20,80	23,96	23,78	17,51
73	43,273	43,273	28,63	21,49	24,67	24,37	18,31
74	46,231	46,231	29,58	22,19	25,41	24,98	19,16
75	49,455	49,455	30,55	22,92	26,19	25,61	20,04
76	52,696	52,696	31,54	23,65	27,02	26,25	20,96
77	57,083	57,083	32,55	24,40	27,92	26,89	21,92
78	61,467	61,467	33,58	25,17	28,92	27,56	22,92
79	65,082	65,082	34,63	25,95	30,04	28,23	23,97
80	98,764	68,764	35,70	26,75	31,31		25,06

Tabulās ievietoto apzīmējumu nozīmes.

A. Finanču tabulas.

I. $r^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$; p — procentu likme, n — gadu skaits. II. $v^n = \frac{1}{r^n}$.

III. $s_{\overline{n|}} = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \frac{r(r^n - 1)}{r - 1}$.

IV. $_{|n}a = v + v^2 + \ldots + v^n = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n} = \frac{r^n - 1}{(r-1)r^n}$.

V. $c_{\overline{n|}} = \frac{1}{_{|n}a}$.

B. Mirstības tabulas.

x — vecums, l_x — dzīvo personu skaits x gadu vecumā, d_x — miršanas gadījumi starp x un $x+1$ g.

I. $D_x = l_x v^x$; $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots$

II. $D_x = l_x v^x$; $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots$; $a_x = \frac{N_x}{D_x}$;

$A_x = 1 - d a_x$; $d = \frac{r-1}{r} = 0{,}03381643$ ($p = 3{,}5\%$).

III. $D_x = l_x v^x$; $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots$; $S_x = N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+2} + \ldots$; $a_x = \frac{N_x}{D_x}$.

IV. $D_x = l_x v^x$; $N_x = D_x + D_{x+1} D_{x+2} + \ldots$; $C_x = d_x v^{x+1}$;

$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots$; $a_x = \frac{N_x}{D_x}$.

V. $D_x = l_x v^x$; $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots$; $S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots$; $C_x = d_x v^{x+\frac{1}{2}}$; $M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots$; $R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \ldots$; $d = 0{,}04076738$.

VI. Tās pašas nozīmes, kas V. tabulā, tikai zīmējas uz 2 personām.

VIII. $D_x^a = l_x^a v^x$; $N_x^a = D_x^a + D_{x+1}^a + D_{x+2}^a + \ldots$; $a_x^a = \frac{N_x^a}{D_x^a}$.

Saturs.

Ievads.

I daļa.

Politiskā aritmētika.

Pirmā nodaļa.

I. Aptuvenie skaitļi.

II. Darbības ar aptuveniem skaitļiem.

Otrā nodaļa.

III. Augļu augļu rēķini.

Trešā nodaļa.

IV. Atkārtotie noguldījumi.

V. Renšu rēķini.

Ceturtā nodaļa.

VI. Ilgtermiņa aizņēmumi un to deldēšana.

II daļa.

Apdrošināšanas matēmatika.

Pirmā nodaļa.

I. Varbūtību rēķinu elementi.

Otrā nodaļa.

II. Apdrošināšana un tās veidi.

Trešā nodaļa.

III. Miršanas varbūtība un mirstības tabulas.

Ceturtā nodaļa.

IV. Netto prēmijas vienas personas apdrošināšanas gadījumos.

V. Netto prēmijas saistītā dzīvības apdrošināšanā.

VI. Brutto prēmijas. Apdrošināšana ar prēmiju atmaksām.

Piektā nodaļa.

VII. Prēmiju rezerves (polises vērtības) aprēķināšana.

Sestā nodaļa.

VIII. Apdrošināšana slimības gadījumiem.

Galvenās no pamanītām drukas kļūdām.

		Iespiests	Jābūt
29. lapp.	12. rindā no augš.	64326	62326
52. „	18. „ „ „	90269776	10269776
52. „	2. „ „ ap.	Ls 70445	Ls 74045
58. „	2. „ „ augš.	$5\frac{3}{8}$	$4\frac{3}{8}$
71. „	1. „ „ „	$\frac{2}{3}.100000$	$\frac{2}{3}.10000$
73. „	10. „ „ ap.	$-15{,}75 \log 15{,}75$	$-15{,}75 \log 1{,}04 =$ $= -0{,}2682751$
74. „	1. „ „ ap.	izkritis „attēlu palielinātā ieliekumā"	
87. „	2. „ „ augš.	4,1125	4,2125
94. „	8. „ „ „	$+k$	$+kr$
95. „	9. „ „ „	r^{n-}	r^{n-1}
102. „	4. „ „ „	$(k_1^2)^2$	$(r_1^2)^2$
107. „	11. „ „ „	Kv^{m+n-1}	Rv^{m+n-1}
108. „	2. „ „ ap.	Rv^2	Rv^2q
110. „	17. „ „ „	tormulas	formulas
113. „	4. „ „ augš.	$L\infty$	$L'\infty$
114. „	13. „ „ ap.	$+1$	$+v$
117. „	4. „ „ augš.	1%	1‰
117. „	8. „ „ ap.	Kapitālizē	Kapitālizē ar 4,5%
117. „	6. „ „ „	ilgstošu	ilgstošu Ls 2500 lielu
124. „	7. „ „ augš.	r^{k-1}	r^k-1
124. „	8. un 12. r. „	Ls 100 000	Ls 10 000
131. „	14. rindā no „	$\frac{Pr^n(r-1)}{q^n-1}$	$\frac{Pr^n(r-1)}{r^n-1}$
143. „	2. „ „ „	$\frac{a}{i}$	$\frac{d}{i}$
143. „	4. „ „ „	iespiests 50000—6000.4,45182233	jābūt 0,04(50000—6000.4,45182233)
162. „	13. „ „ „	$C^{(v}_{\overline{n-k\|}}$	$C^{(p_1}_{\overline{n-k\|}}$
173. „	19. „ „ „	pt	p
229. „	12. „ „ „	$+\frac{D_{x+m}+\cdots}{D_x}$	$=\frac{D_{x+m}+\cdots}{D_x}$