

Латвийский Государственный
университет им. Петра Стучки

К. А. ШТЕЙНС

ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ КОМЕТ

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени доктора физико -
математических наук

Рига 1963

В в е д е н и е .

До настоящего времени в изучении физики комет и их орбит достигнуты большие успехи, однако всё ещё нет единого мнения о том, как образовались кометы. Для решения этого вопроса нужно знать строение комет и изучить процессы, которые происходят в ядре кометы при её прохождении вблизи Солнца. Необходимо также продолжать тщательное определение элементов орбит комет, т.к. соответствующий материал является единственным критерием правильности многих выводов космогонии комет. Необходимо также изучать возмущения со стороны звезд и больших планет на движение комет, изучать диффузию комет, дезинтеграцию, условия их открытия и т.д. Этим вопросам и посвящена настоящая работа. Однако мы не ограничились только исследованием указанных проблем, которые необходимы при обосновании любой гипотезы происхождения комет, а пытались вопрос о происхождении комет решить со своей точки зрения. Мы надеемся, что наши усилия внесут некоторую ясность в этот вопрос, который ещё не решен и носит дискуссионный характер.

Некоторые этапы происхождения комет для нас всё же остались не ясны. Так, в настоящей работе не затрагивается вопрос о происхождении кометного облака. Мы считаем, что эту проблему следует решать в теории происхождения Солнечной системы. Действительно, исследования Рассела [1] показывают, что орбиты почти параболических комет не имеют тенденции к концентрации вблизи орбит планет, т.е. что облако возникло очень давно. Многократные исследования распределения элементов орбит комет показывают, что наблюдается их более или менее равномерное распределение. Мы считаем, что небольшие отклонения от равномерного распределения, которые установлены Оппенгеймом и Витковским, получаются из-за селекции открытия комет. Таким образом исследование эффекта Витковского-Оппенгейма также подтверждает нашу точку зрения, что распределение орбит почти параболических комет не дает сведений об их возникновении. Поэтому исследование в настоящей работе начинается с предположения, что кометное облако уже существует. По вопросу образования кометного облака мы можем сказать только следующее. Гипотезы образования облака при взрыве гипотетической планеты или при извержении комет из планет нам кажутся искусственными. Более правдоподобным нам представляется воз-

никновение кометного облака при образовании Солнечной системы, как это предположил Б.Ю. Левин [2].

О размерах кометного облака можно судить непосредственно по наблюдениям комет. Определение первоначальных орбит комет /гл. I/ показывает, что существуют кометы, которые пришли из очень далеких областей Солнечной системы. Так, например, комета 1898 ^{viii} пришла из области, находящейся на расстоянии 200 000 а.е., а 1902 111 - 400 000 а.е. от Солнца. Статистика элементов орбит комет показывает, что примерно у 30% орбит большие полуоси имеют очень большие значения.

Вблизи Солнца кометы очень быстро гибнут в его лучах, и силы притяжения Юпитера и остальных планет быстро рассеивают почти параболические кометы в межзвездное пространство. Следовательно, должен быть некоторый источник, пополняющий число комет, орбиты которых имеют малые перигельные расстояния ($q < 3-5$ а.е.).

Литтлтон [3] считает, что кометы рождаются на очень больших расстояниях от Солнца при встрече Солнечной системы с межзвездными пылевыми облаками. Таким образом, в гипотезе Литтлтона источником пополнения комет с малыми q является непосредственно сам процесс образования комет. В гипотезе образования Солнечной системы, в гипотезе

взрыва гипотетической планеты и в гипотезе извержения пополнение комет с малыми q может происходить только при помощи возмущений со стороны звезд на движение комет.

Возмущения со стороны звезд на движение комет исследуются в настоящей работе /гл. II/ по двум схемам, а именно : предполагаем, что возмущающая звезда перемещается относительно Солнца равномерно по прямой с весьма большой скоростью, или что звезда относительно Солнца не перемещается. В обоих случаях определяются изменения перигельного расстояния q . В результате рассмотрения этих схем получается, что в зависимости от знака возмущения со стороны звезд, комета может быть как выведена, так и, спустя известное время, введена в область, где она постепенно разрушается, одновременно испытывая сильные возмущения со стороны планет. Вне этой области, оставаясь на значительном расстоянии от Солнца, комета практически в течение долгого времени сохраняет свои запасы газов. Наши исследования, являясь обобщением исследований Сорта [4], полностью подтверждают заключения Сорта.

Несмотря на некоторые достижения в вопросе изучения возмущений со стороны звезд на движение комет, остается неясным, которая гипотеза верна:

новой результат Оорта, который мы назовём первым законом диффузии. Он заключается в том, что вследствие диффузии комет, орбиты которых имеют меньшие значения больших полуосей, имеют также и меньшие наклонности, т.е. эти орбиты концентрируются к плоскости орбиты Юпитера. В отличие от остальных исследователей, мы изучали также зависимость диффузии от перигельного расстояния орбит комет. Дело в том, что разрушение комет, т.е. дезинтеграция комет происходит более интенсивно вблизи Солнца, чем на больших расстояниях. Зависимость дезинтеграции комет от q , т.е. зависимость потенциального возраста комет от перигельного расстояния их орбит в работе выводится на основе теории Б.Ю. Левина о выделении вещества из ядра кометы [7]. Диффузия комет происходит таким образом, что больше чем половина всех новых комет, попадающих в зону планет, навсегда удаляется в межзвездное пространство, а у орбит остальных комет уменьшается большая полуось a , причем перигельные расстояния не изменяются. Прекращение этого процесса накопления возмущений, т.е. диффузии, зависит от q , т.к. имеет место дезинтеграция, интенсивность которой зависит от перигельного расстояния q . Диффузия невидимых комет ($q > 3a.e.$) дает орбиты с меньшими значениями боль-

ших полуосей a , чем диффузия видимых комет т.к. более интенсивная дезинтеграция прекращает более быстро процесс диффузии комет. Следовательно, и среднее арифметическое обратных величин больших полуосей орбит комет с меньшими перигельными расстояниями должно быть меньше соответствующего среднего арифметического для комет, перигельные расстояния орбит которых больше. Это полностью подтверждается данными наблюдений. Таким образом, нам удалось установить второй закон диффузии комет, который заключается в следующем :

вследствие диффузии орбиты, имеющие большие перигельные расстояния, имеют в среднем меньшие эксцентриситеты, т.е. меньшие значения больших полуосей.

Мы установили также третий закон диффузии комет, а именно : вследствие диффузии в потоке комет с данным q содержится тем больше новых комет, чем меньше перигельные расстояния q имеют орбиты комет. Так для комет с $q = 1$ а.е. новые кометы составляют по Оорту [4] примерно 30%, а в потоке комет с $q = 4,5$ а.е. по нашим подсчетам новых комет 3% - 5%. Чтобы выяснить влияние учета диффузии при определении распределения элементов орбит короткопериодических комет ^и при определении относительного количества короткопериодических

комет следует рассматривать фиктивный случай, когда поток комет с $q = 1$ а.е. и $q = 4,5$ а.е. одинаково интенсивны. На основе третьего закона диффузии следует, что вследствие диффузии при этом предположении поток всех комет с $q = 4,5$ а.е. в 5 - 10 раз интенсивней чем поток всех комет с $q = 1$ а.е. Первый и второй законы диффузии комет можно получить непосредственно из наблюдений. Третий закон нельзя получить так просто, т.к. селекция открытия комет искажает статистические данные. Таким образом, третий закон количественно получается только на основе той или иной теории диффузии комет. Правильность соответствующей теории диффузии проверяется при сравнении теоретической кривой $v = v(z)$ с наблюдениями, где v - число комет, прошедших через перигелии за год, для которых $40 \text{ а.е.} < a = \frac{1}{2} < \infty$. В настоящее время разработано несколько теорий диффузии комет, однако, второй и третий законы диффузии исследованы только нами.

Рассмотрим вопрос о возникновении короткопериодических комет. Согласно мнению Г.Фейе [8] и Г.Н.Рассела [1], характерной особенностью комет группы Юпитера являются малые минимальные расстояния d между орбитами этих комет и орбитой Юпитера. Кометы группы Юпитера составляют основную массу короткопериодических комет. Шульхоф [9] показал,

что величина d более или менее постоянна. Примерно у 60% всех короткопериодических комет $d < 0,16$ а.е., а интервал $0,16 < d < 0,7$ а.е. покрывается более или менее равномерно. С точки зрения эволюции орбит комет это означает, что по крайней мере 50% короткопериодических комет возникли из долгопериодических путем больших возмущений, т.е. путем захвата. Можно допустить, что остальные 50% комет группы Юпитера возникли вследствие диффузии.

Захват комет рассматривали Х.А.Ньютон [10], [11], Б.М.Циголев [12], С.К.Всехсвятский [13] и другие исследователи. Однако эти работы устарели, т.к. они не учитывают диффузии комет. Согласно третьему закону диффузии нельзя считать, что короткопериодические кометы образуются путём захвата почти параболических, т.е. новых комет, т.к. эти кометы составляют сравнительно малый процент числа комет, подвергающихся захвату. Отличие в ориентации и форме орбит почти параболических комет и орбит основного потока долгопериодических комет, которое образовалось в результате диффузии комет, характеризуются первым и вторым законами диффузии. Таким образом, в отличие от Ньютона и других исследователей, рассматривавших равномерное распределение скоростей для потока почти параболических комет, следует рассматривать поток

долгопериодических комет, в котором орбиты преимущественно имеют малые наклонности и перигелии которых концентрируются вдоль орбиты Блутера. Это, грубо говоря, кометы с $q = 5.2 \text{ a. l.}$, т.е. невидимые кометы. Для подсчета захвата невидимых комет пригоден так называемый вариант учета индивидуальных свойств движения комет. Этот вариант был разработан нами в 1958 г. путем преобразования гидродинамического варианта по идее акад. В.Г. Фесенкова [14] и его результаты сравнены с наблюдениями. Мы получили очень хорошее совпадение для теоретического и эмпирического распределений элементов орбит короткопериодических комет, однако при этом оставалось неясным, почему гидродинамический вариант требуется исправлять, учитывая индивидуальные свойства движения комет, т.к. тогда не были известны законы диффузии.

В настоящей работе рассматриваются также и другие варианты определения распределения элементов орбит короткопериодических комет /гл. У1/. Во всех случаях мы рассматриваем только большие возмущения. Исследование нескольких вариантов необходимо, т.к. о распределении орбит комет, подлежащих захвату, т.е. о распределении орбит невидимых комет, мы имеем весьма неточные сведения. С другой стороны, подсчет видимого распределения

элементов захваченных комет требует данные об условиях открытия комет, которые также плохо известны. Сравнивая результаты, полученные в разных вариантах, а также в процессе вычислений, мы убедились в следующем :

Во-первых, вариант, учитывающий индивидуальные свойства движения комет, хорошо представляет видимое распределение орбит короткопериодических комет. В настоящее время этот вариант правильнее называть \equiv вариантом, учитывающим диффузию комет.

Во-вторых, основной причиной отсутствия короткопериодических комет с обратными движениями является то, что эти кометы возникают из числа долгопериодических, орбиты которых имеют малые перигельные расстояния, т.е. возникают из видимых долгопериодических комет. Согласно второму и третьему законам диффузии, среди долгопериодических комет, попадающих в сферу действия Юпитера, видимые долгопериодические кометы практически не встречаются, поэтому не встречаются и короткопериодические кометы с обратными движениями и малыми перигельными расстояниями.

В третьих, уменьшение числа короткопериодических комет с возрастанием больших полуосей их орбит объясняется селекцией открытия этих комет, т.к. перигельные расстояния орбит этих комет на-

ходятся вне зоны видимости.

В-четвертых, объяснить видимое распределение орбит короткопериодических комет захватом только параболических /т.е. новых/ комет нельзя. На это указывает то, что вариант, основывающийся на формулах выделения газа, который предложен Б.Ю. Левиным, в сочетании с гидродинамическим вариантом захвата параболических комет без учета диффузии дает неудовлетворительные результаты.

Следует отметить, что для определения большой полуоси орбит короткопериодических комет безразлично, происходит ли захват параболических ($\frac{1}{a} = 0$) или долгопериодических комет ($\frac{1}{a} < 0.02 a \cdot e^{-1}$).

Накопление малых возмущений и единичные большие изменения элементов орбит почти параболических комет не могут привести к образованию эллипсов с малыми эксцентриситетами, если возмущающим телом является только Юпитер. Это видно из критерия Тиссерана. Раньше считалось, что существование комет с почти круговыми орбитами указывает на несостоятельность теории захвата. Нам удалось доказать, что это не так. Рассмотрим кратко эту проблему /гл. У11/. Если короткопериодические кометы возникли из долгопериодических путем захвата, и на движение их не влияли никакие посторонние эффекты, то, согласно исследованиям Шульхофа [9],

движение комет подчиняется не только критерию Тиссерана, но и сохраняются постоянными минимальные расстояния между орбитами короткопериодических комет и орбитой Юпитера. Обозначим эти расстояния через d . Если это так, то легко можно найти кометы, на которые действовало только притяжение Юпитера и которые подвергались большим возмущениям. Это кометы с малыми значениями d . Оказывается, что среди этих комет нет таких, которые не подчиняются критерию Тиссерана, т.е. нет круговых орбит. Более того легко убедиться, что их орбиты получились путем эволюции тех почти параболических орбит, перигелии которых находились вблизи орбиты Юпитера. Таким образом, при помощи критерия Тиссерана нам удалось доказать справедливость законов диффузии. Короткопериодические кометы с круговыми орбитами возникли путем двойного захвата. Сначала они были захвачены Сатурном, а потом Юпитер их направил в сферу видимости. Это подтверждается непосредственными вычислениями А.В.Фокина [15].

Как мы видели, в эволюции комет следует рассматривать несколько этапов.

Первый этап - это образование кометного облака Оорта.

Второй этап - направление почти параболичес-

ких комет кометного облака посредством возмущающего действия со стороны звезд в зону планет Солнечной системы.

Третий этап - диффузия комет, т.е. накопление малых возмущений при удалении некоторого числа комет в межзвездное пространство. Диффузия комет, которая является диффузией с поглащающим барьером, зависит от двух причин - от удаления комет в межзвездное пространство и дезинтеграции комет. При достаточно прочной связи комет с Солнцем, т.е. при достаточно малых значениях больших полуосей орбит, эффект отрыва комет от Солнечной системы перестает влиять на распределение орбит комет. Так как дезинтеграция комет также слабо зависит от значения большой полуоси, то при достаточно малых значениях этой величины статистическая теория накопления малых возмущений больших полуосей комет должна перерасти в соответствующую теорию классической небесной механики с учетом дезинтеграции комет в зависимости от q . Здесь мы имеем дело с классическими теориями Лапласа и Пуанкаре, согласно которым отсутствуют вековые изменения больших полуосей. По нашим исследованиям теорию диффузии комет можно применять начиная с параболических орбит до эллиптических, большие полуоси которых не меньше чем 40 а.е.

Четвертый этап - большие возмущения комет и перемещение комет из одной группы в другую, Мы рассмотрели статистику больших возмущений в случае, если комета один раз проходит через сферу действия Юпитера. Вурком [16] рассмотрел качественно теорию больших возмущений, если при переходе от класса долгопериодических в класс короткопериодических комета несколько раз проходит через сферу действия Юпитера. Большое значение имеет осциляция перигельных расстояний короткопериодических комет, т.е. изменения перигельных расстояний при умеренных возмущениях, которые меняют перигельные расстояния сразу на несколько астрономических единиц. Вопрос об осциляции перигельных расстояний очень важен, так как за счет этого процесса многие кометы ошибочно считались погибшими. Статистическая теория больших и умеренных возмущений только начинает развиваться. Пионерами этих важных работ следует считать Вуркома [16], Е.И.Казимирчак-Полонскую [17] и Уиппла [18]. В основе этой теории лежат исследования Шульхофа о постоянстве минимальных расстояний между орбитами этих комет и орбитой Юпитера.

Кроме эволюции орбит комет, в настоящей работе рассматривается вопрос об отношении чисел

открытых коротко и долгопериодических комет /гл. У11/. Вурком [16] впервые показал, что для решения этой проблемы следует подсчитать число вновь захваченных комет за единицу времени, и это число сравнить с числом погибших комет за то же время. При подсчетах Вурком применил статистическую теорию больших и умеренных возмущений в расширенной группе комет Юпитера. В эту группу входят кометы, большие полуоси орбит которых находятся в пределах от 2,6 а.е. до 50 а.е. Орбиты комет расширенной группы комет Юпитера пересекают тор, описанный сферой действия Юпитера под углом заключенными в определенных пределах. Вурком показал, что имеется интенсивная диффузия комет из расширенной группы в группу комет Юпитера. Он считает, что все кометы гибнут только в сфере видимости. При этих предположениях получается, что гипотеза захвата комет может объяснить только $1/20$ часть действительно погибших короткопериодических комет. Но Вурком не учел диффузии почти параболических комет. Учет диффузии показывает, что в расширенной группе комет Юпитера должно быть в 20 раз больше комет, чем подсчитал Вурком, т.е. что теория захвата может объяснить относительное количество короткопериодических комет.

В нашей работе также рассматривается разра-

ботанный нами метод для определения числа захваченных комет в течение некоторого промежутка времени /гл. У11/. Результаты, полученные этим методом также показывают, что теория захвата может объяснить относительное количество короткопериодических комет.

В заключение нашего краткого обзора об эволюции орбит комет отметим, что вопрос о происхождении комет еще далеко не решен. Мы считаем, что открытие нами законы диффузии и соответствующие статистические зависимости открывают некоторые возможности для дальнейших исследований этой проблемы.

ГЛАВА 1

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КОМЕТ К СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ.

§ 1. Выбор вида оскулирующих орбит.

Для каждой вновь открытой кометы вычисляются предварительные элементы оскулирующей орбиты по трем наблюдениям. Элементы орбит улучшаются на основе всех наблюдений, полученных за одно появление. Методы вычислений орбит достаточно хорошо разработаны уже в трудах Гаусса и Эйлера. Распространение арифмометров способствовало дальнейшему развитию теории орбит. Более интенсивно развивалась теория улучшения орбит, где следует отметить работы Т. Банахевича [19], [20], Эккерта и Брауэра [21], Н. С. Самойловой-Яхонтовой [22], [23] и М. Ф. Субботина [24].

Для решения вопросов космогонии комет их движение рассматривается на больших промежутках времени. Так как сила гравитации не является единственной силой действующей на кометы, то возможно предполагать, что развитая в настоящее время тео-

рия движения комет на основе учета только сил гравитации имеет место только на сравнительно малых промежутках времени, а на более длительных — неудовлетворительно представляет движение комет. Для выяснения этого фундаментального вопроса большую роль играют исследования движения отдельных комет за большие промежутки времени. Здесь, в первую очередь, мы должны отметить тщательное исследование движения кометы Энке-Баклунда. Вскоре после открытия кометы в 1818 г. Энке установил, что период обращения, освобожденный от планетных возмущений, систематически укорачивается. Исследованиями последнего времени было установлено, что эти аномалии в движении периодических комет являются не исключением, а скорее-правилом. Комета Энке имеет очень большую и переменную величину аномалии. Очевидно, аномалии в движении комет вызваны реактивными силами. Классические работы Баклунда охватывают промежуток времени от открытия кометы до 1914 г. С 1937 по 1954 г. движение кометы было тщательно исследовано С.Г.Маковером [25], [26]. За период с 1931 г. по 1937 г. комету исследовала С.И.Лучич [27]. Больших успехов в изучении отдельных комет достигли также польские астрономы, из которых отметим М.М.Каменского [28]. Вычисления показывают, что для космогонических целей

классическая теория движения комет вполне удовлетворительна.

В настоящей работе не рассматриваются новые методы вычисления орбит комет, а также точные методы определения возмущений, хотя разработка новых, более эффективных методов очень важна, так как многие вопросы в космогонии комет не изучаются только потому, что они требуют слишком больших вычислений. Так, например, выполнить свою работу И.В.Галибина [5] смогла только после того, как С.Г.Маковер [6] разработал простую методику вычислений возмущений орбит комет.

Подробное изучение орбит отдельных комет представляет большую ценность для космогонии комет. Э.Стремгрен [29] стремился при помощи вычислений элементов орбит комет выяснить вопрос о том, являются ли кометы членами Солнечной системы. Теория и результаты этих вычислений рассматриваются в §§ 1, 2, 3 и 3.

Характер орбиты кометы определяется значением эксцентриситета e или значением большой полуоси a . Если $e < 1$ ($a > 0$), то комета имеет эллиптическую орбиту, если же $e > 1$ ($a < 0$), то орбита кометы - гипербола. Эллиптические кометы разделяются на долго- и короткопериодические. Однако такое подразделение является условным, т.к. нет резкой границы между этими группами. Долгопериодические

кометы имеют периоды обращения несколько сот лет или больше. Однако иногда мы долгопериодическими кометами будем называть кометы, у которых период несколько десятков лет. Обычно кометы наблюдаются только несколько недель из-за быстрого уменьшения яркости при их удалении от Солнца. Поэтому, учитывая также малую точность наблюдений, для комет, у которых $e \approx 1$, невозможно достаточно точно определить орбиту и период обращения и обычно для упрощения вычисляют параболическую орбиту. Однако, эти так называемые параболические кометы в действительности могут быть как эллиптическими, так и гиперболическими. На элементы орбит значительное влияние оказывают возмущения со стороны больших планет Солнечной системы. Поэтому по значениям a и e , относящимся к моменту оскуляции

близ прохождения через перигелий, невозможно установить, принадлежит ли комета к Солнечной системе или нет. Поэтому Трэн [30], [31] ввел понятие первоначальной орбиты кометы, т.е. оскулирующей орбиты на таком расстоянии от Солнца, где возмущения со стороны планет становятся практически незаметными. Э.Стремгрен [32], [33] показал, что оскулирующие гелиоцентрические элементы с увеличением расстояния кометы от Солнца не стремятся к какому - либо определенному пределу, а все время

испытывают колебания с периодами обращения больших планет вокруг Солнца, и предложим отнести элементы кометы к центру масс Солнечной системы. В связи с этим возможны следующие приближенные рассуждения. Если комета находится достаточно далеко от Солнца, то силы притяжения отдельных планет к Солнцу, действующие на комету, взаимно параллельны и их результирующая проходит через центр масс Солнечной системы и по величине примерно обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра масс, т.к. расстояния отдельных тел Солнечной системы до кометы примерно равны этому расстоянию. Равнодействующую с той же степенью точности можно считать пропорциональной массе Солнечной системы. Учитывая это Э. Стремгрен ввел оскулирующие орбиты предполагая, что в центре масс сосредоточена вся масса Солнечной системы и оси координат неподвижны. Таким образом, для выяснения вопроса о том, остается ли данная комета K в Солнечной системе или нет, вводится два рода элементов и, следовательно, два рода полуосей. Элементы оскулирующих орбит, которые определены для движений комет в подвижных осях ξ, η, ζ с началом, помещенным в центре Солнца C , будем отмечать индексом нуль.

Имеем для ограниченной задачи трех тел следующую систему дифференциальных уравне -

ний движения кометы $K(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + K^2 \frac{\xi}{\rho^3} = \frac{\partial R}{\partial \xi} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + K^2 \frac{\eta}{\rho^3} = \frac{\partial R}{\partial \eta} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + K^2 \frac{\zeta}{\rho^3} = \frac{\partial R}{\partial \zeta} \end{cases}, \quad (1)$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ и $\rho_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$,

$$R = K^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta_0} - \frac{\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \zeta \zeta_1}{\rho_1^3} \right), \quad (2)$$

$$\Delta_0^2 = (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2, \quad (3)$$

ξ_1, η_1, ζ_1 - координаты Юпитера, t - время, m_1 - масса Юпитера, K^2 - постоянная притяжения.

Элементы оскулирующих орбит, которые определены для движения комет в неподвижных осях x, y, z /барицентрическая система/ с началом, помещенным в центре масс Солнечной системы σ , будем отмечать индексом единица. Оси обеих систем остаются все время взаимно параллельными и плоскости x, y и ξ, η совпадают. При расчете считается, что в центре масс σ помещено тело с массой $1+m_1$.

Обозначим:

$$\vec{OS} = \vec{r}_s = -m_1 \vec{r}_1; \quad \vec{OK} = \vec{r}; \quad \vec{SK} = \vec{\rho}. \quad (4)$$

Подставляя

$$x = \xi + x_s, \quad y = \eta + y_s, \quad z = \zeta \quad (5)$$

в уравнения (1), с точностью до величин первого порядка относительно массы возмущающей планеты m_1 , получим уравнения аналогичные уравнениям (1), только с той разницей, что в возмущающей функции ρ_1^3 будет заменено на τ_1^3 . Прибавляя к обеим частям этих уравнений величины $K^2 m_1 x \tau^{-3}$, $K^2 m_1 y \tau^{-3}$, $K^2 m_1 z \tau^{-3}$, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} + K^2 (1+m_1) \frac{x}{\tau^3} = \frac{\partial R_1}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 (1+m_1) \frac{y}{\tau^3} = \frac{\partial R_1}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + K^2 (1+m_1) \frac{z}{\tau^3} = \frac{\partial R_1}{\partial z} \end{array} \right. , \quad (6)$$

где

$$\Delta_1^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2, \\ R_1 = K^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta_1} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\tau^3} - \frac{1}{\tau} \right). \quad (7)$$

Э. Стремгрен [34] вывел уравнения движения комет в системе x, y, z , учитывая также члены высших порядков относительно m_1 .

Если комета ($K(x, y, z)$) удалится весьма далеко от Солнечной системы, то, согласно нашим замечаниям, она будет двигаться относительно неподвижных осей весьма медленно, незначительно отклоняясь от конического сечения и почти удовлетворяя закону площадей. Поэтому по значению $\frac{1}{a_1}$ судят о принадлежности данной кометы к Солнечной системе.

В противоположность этому, движение кометы относительно подвижных осей, как показывает формула (5), невыгодно представить при помощи оскулирующих конических сечений, ибо x_s и y_s в движении кометы вносят кажущиеся периодические колебания. Итак, вдали от Солнца оскулирующие кеплеровы элементы, которые соответствуют относительному движению, для описания движения комет непригодны.

Учитывая формулу

$$\dot{x} = \dot{\xi} + \dot{x}_s, \quad \dot{y} = \dot{\eta} + \dot{y}_s, \quad \dot{z} = \dot{\zeta} \quad (8)$$

и связь, которая существует в данный момент между квадратом скорости и большой полуосью в невозмущенном движении ($R = R_1 = 0$) и пренебрегая массой кометы, с точностью до малых величин первого порядка относительно возмущающей массы m_1 , получим следующую формулу [35], имеющую место при $S/a_0 \approx 0$ и $1/a_0 \approx 0$

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_0} + \frac{2m_1}{\rho} + \frac{2m_1 S_1}{\rho^2} \cos(\vec{P}_1, \vec{P}) + \\ + 2m_1 \sqrt{\frac{2}{\rho_1 \rho}} \cos(\vec{P}, \vec{\xi} \eta) \cos(\vec{P}_{\xi \eta}, \vec{P}_1). \quad (9)$$

Вблизи перигелия $\cos(\vec{P}_1, \vec{P})$ в третьем члене со временем меняется весьма быстро. Следовательно, сам этот член, который здесь играет главную роль, также меняется быстро. Из этого в свою очередь следует, что a_1 также сильно меняется, ибо вблизи

перигелия, вообще говоря, a_0 меняется медленно.

Это возможно показать также следующим образом. В перигелии комета движется быстро, поэтому возможно считать, что Юпитер неподвижен, пока комета проходит от значения истинной аномалии $\nu=0^\circ$ до $\nu=90^\circ$. Если Юпитер неподвижен, то имеет место теорема сохранения энергии, следовательно

$$\Delta \frac{1}{a_1} = \Delta R_1 = \Delta k^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta_1} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r^3} - \frac{1}{r} \right).$$

Так как r^3 по сравнению с ρ_1^3 величина малая, то $\Delta \frac{1}{a_1}$, вообще говоря, гораздо больше $\Delta \frac{1}{a_0}$. Итак, вблизи Солнца оскулирующие кеплеровы элементы, соответствующие абсолютному движению для описания движения комет, непригодны.

Если долгота перигелия орбиты $\omega \cong 90^\circ$ и наклонность орбиты $i \cong 90^\circ$, то при $\rho = \rho_1$

$$\frac{1}{a_1} \cong \frac{1}{a_0} + \frac{2m_1}{\rho_1}, \quad (10)$$

т.к. $\cos(\vec{\rho}, \xi, \eta)$ и $\cos(\vec{\rho}_1, \vec{\rho})$ невелики. С другой стороны, кометы в этом случае находятся далеко от возмущающей планеты. Следовательно, можно ожидать, что кометы, у которых $\omega \cong 90^\circ$ и $i \cong 90^\circ$ будут, судя по a_0 , наблюдаться вблизи Солнца как гиперболические, хотя в действительности они принадлежат к Солнечной системе. Из восьми рассмотренных Стремгренем комет к этой группе принадлежат пять.

§ 2. Метод Э. Стремгрена и новая формула для оценки невычисленной части возмущений.

Чтобы выяснить вопрос, пришла ли данная комета из межзвездного пространства или нет, Э. Стремгрен и вслед за ним другие ученые определяли для первоначальных орбит значение $\frac{1}{a_1}$. Э. Стремгрен применял следующий порядок вычислений:

1. Определение возмущений прямоугольных координат по методу Энке. 2. Переход на барицентрические элементы. 3. Определение возмущений первого порядка элемента $\frac{1}{a_1}$. 4. Оценка невычисленной части.

Остановимся более подробно на пунктах 3 и 4. Дифференциальное уравнение для $\frac{1}{a_1}$ имеет следующий вид

$$\frac{d\frac{1}{a_1}}{dt} = -\frac{2m_1}{k\sqrt{p_1}} \left(e_1 S_1 \sin v_1 + \frac{p_1}{2} T_1 \right), \quad (11)$$

где e_1 - эксцентриситет, p_1 - параметр эллипса. Частные производные функции R_1 по координатам кометы x, y, z дают составляющие возмущающей силы по осям x, y, z . Чтобы определить составляющие ускорения S_1 по радиусу вектору и T_1 по перпендикуляру к радиусу вектору в сторону движения кометы,

учтем, что направляющие косинусы по S_1 суть $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, а по T_1 — $\cos(j_T, x)$, $\cos(j_T, y)$, $\cos(j_T, z)$ причем

$$x \cos(j_T, x) + y \cos(j_T, y) + z \cos(j_T, z) = 0. \quad (12)$$

Следовательно,

$$S_1 = K^2 \left[-\frac{z - z_1 \cos(OJ, OK)}{\Delta_1^3} + \frac{1}{r^2} + \frac{2z_1}{r^3} \cos(OJ, OK) \right], \quad (13)$$

$$T_1 = K^2 \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{r^3} \right) z_1 \cos(OJ, j_T) \quad (14)$$

Соотношения между $\angle OJ, OK$, $\angle OJ, j_T$ и элементами имеют следующий вид:

$$\cos(OJ, OK) = \cos(\omega_1 + \nu_1) \cos \alpha + \sin(\omega_1 + \nu_1) \sin \alpha \cos i_1, \quad (15)$$

$$\cos(OJ, j_T) = -\sin(\omega_1 + \nu_1) \cos \alpha + \cos(\omega_1 + \nu_1) \sin \alpha \cos i_1. \quad (16)$$

Здесь α есть долгота Юпитера в его плоскости, отсчитываемая от точки пересечения плоскостей орбит Юпитера и кометы. От этой же точки отсчитывается также долгота перигелия кометы ω_1 . При $t=0$, $\nu_1=0$, $\alpha=\alpha_0$. Наклонность орбиты кометы относительно плоскости орбиты Юпитера обозначена через i_1 . Интегрируя численно (11) при помощи (13)–(16) возможно определить $\Delta \frac{1}{\alpha}$. Результаты вычислений Э. Стремгрена [36] представлены в таблице I.

Комета	/вблизи Солнца/ $1 : a$	$1 : a_1$ /первоначальное значение/
1882 <u>II</u>	+0.0118963 ± 0.0002710	+0.0121488
1886 <u>I</u>	-0.0006944 ± 0.0000220	-0.0000071
1886 <u>II</u>	-0.0004770 ± 0.0000091	+0.0003166
1886 <u>IX</u>	-0.0005765 ± 0.0000276	+0.0000630
1890 <u>II</u>	-0.0002151 ± 0.0000101	+0.0000718
1897 <u>I</u>	-0.0008722 ± 0.0000476	+0.0000368
1898 <u>VII</u>	-0.0006074 ± 0.0000096	-0.0000157
1902 <u>III</u>	+0.0000810 ± 0.0000184	-0.0000168

Э. Стремгрен на основе таб. I сделал заключение, что не имеется ни одной кометы, о которой можно было бы с уверенностью утверждать, что она не имеет эллиптическую орбиту.

Стремгрен отсюда сделал вывод, что кометы не приходят из межзвездного пространства. Согласно гипотезе Литтлтона, кометы рождаются из межзвездного пылевого облака и мы наблюдаем их приближения к Солнцу по эллиптическим орбитам. Витковский считает, что по гипотезе Литтлтона кометы имеют межзвездное происхождение. Следовательно, решая только вопрос об эллиптичности или гиперболичности первоначальных орбит комет, мы далеки от решения вопроса о происхождении комет. Мы увидим дальше, что точные данные $1 : a_1$ могут быть использованы для получения важных выводов космогонии комет.

Э. Стремгрен был уверен, что у всех комет $\frac{1}{a_1} > 0$ и поэтому было предпринято более детальное вычисление орбиты кометы 1902 III. Выяснилось [37], что если учесть возмущения не только от Юпитера и Сатурна, но также и от Нептуна, то для кометы 1902 III значение $\frac{1}{a_1} > 0$.

Э. Стремгрен вычислял значение $\frac{1}{a_1}$ на времени 12 лет назад и заканчивал исследование оценкой невычисленной части возмущений до $t = -\infty$.

Если подставить (13) - (16) в уравнение (11), то получим ($e_1 = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{d \frac{1}{a_1}}{dt} = & \frac{2km_1}{\sqrt{p_1}} \left[-r \sin v_1 \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{r^3} \right) + \frac{3r \cos(OJ, OK) \sin}{r^3} \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{r^3} \right) 2r \cos \frac{v_1}{2} \cos x \right] = -\frac{2km_1}{\sqrt{p_1}} \left[-\frac{\sin v_1}{r^2} \sum_2^{\infty} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n P_n^1 \right. \\ & \left. + 2 \cos \frac{v_1}{2} \cos x \left(\frac{r_1}{r^3} \right) \sum_1^{\infty} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n P_n^3 \right], \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$\cos x = \sin \left(-\omega_1 - \frac{v_1}{2} \right) \cos \Delta + \cos \left(-\omega_1 - \frac{v_1}{2} \right) \sin \Delta \cos i_1, \quad (18)$$

а P_n^3 - сферический многочлен.

При оценке $\Delta \frac{1}{a_1}$ Стремгрен использует следующие неравенства

$$-\frac{(n+1)(n+2)}{2} \leq P_n^3 \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad (19)$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1. \quad (20)$$

Стремгрен заменяет в правой части уравнения (17) соответствующие величины их наибольшими значениями и интегрирует полученное таким образом неравенство. При интегрировании первая часть с множителем $\sin v_1$ не представляет никаких трудностей, и в результате получается простое выражение. Чтобы получить простое выражение также при интегрировании второй части с множителем $\cos \frac{v_1}{2}$, Стремгрен учитывает, что

$$\cos \frac{v_1}{2} = \frac{\sin v_1}{2 \sin \frac{v_1}{2}} \leq \frac{\sin v_1}{2 \sin \frac{v_2}{2}} \quad (21)$$

где v_2 значение величины v_1 , от которого начинается оценка. Чтобы еще больше упростить результат, Стремгрен учитывает неравенство

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} < \frac{(n+2)(n+3)}{2} \quad (22)$$

и получает

$$|\Delta \frac{1}{a_1}| < m_1 \left(1 + \frac{1}{|\sin \frac{v_2}{2}|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2} \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n+1} \right). \quad (23)$$

М. Дирикс [38] не применяет неравенство (22), а в остальном, по сути дела, поступает так же, как Стремгрен, хотя методика ^{выбора} формулы для оценки $\Delta \frac{1}{a_1}$ у него совершенно отлична от методики Стремгрена. Полученная им формула несколько сложнее, но точнее.

Для понижения значения оценки Э. Стремгрен советовал заменять единицу в неравенстве (20) для данной кометы конкретным значением $\cos x_0$, ибо при $i \neq 0$ величина $\cos x$ может находиться в более узких пределах, чем $[-1; +1]$. Возможно уточнить также неравенство (19), однако тогда не следует прибегать к разложению в ряд, а учесть, что функция $\Delta_1^{-3} - \tau^{-3} - 3\tau, \tau^{-4} \cos(\angle OF, OK)$ при определенном значении ν_1 и переменном положении Юпитера, имеет только один минимум при $\tau = \Delta_1$, т.е. при $\cos(\angle OF, OK) = \frac{\tau_1}{2\tau}$.

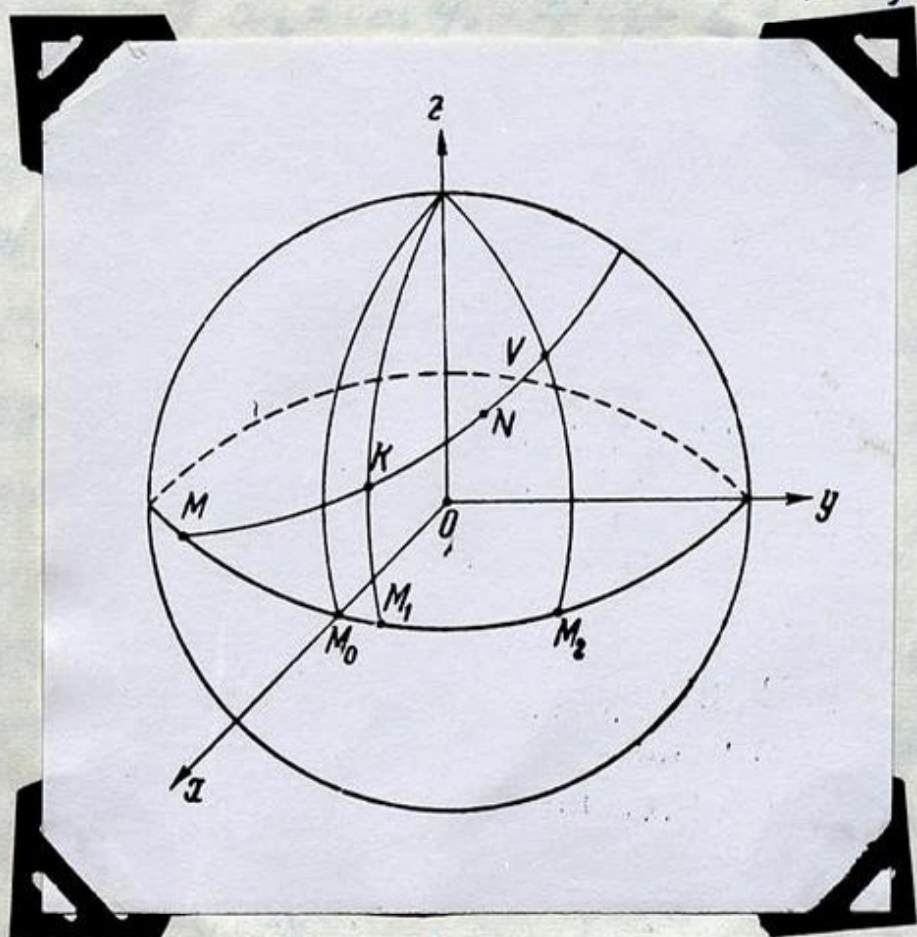


Рис. 1.

По формулам (15), (18) и формуле

$$\Delta_1^2 = z^2 + \tau_1^2 - 2z\tau_1 \cos(\angle OF, OK) \quad (24)$$

для определенного значения ν_1 , при $\tau > \tau_1$, имеем

$$|\cos x| \leq \sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2(\omega_1 + \frac{\nu_1}{2})} = \cos x_0, \quad (25)$$

$$|\cos(\angle OK, OM_1)| \leq \sqrt{1 - \sin^2 i \cdot \cos^2(\omega_1 + \nu_1)} = \cos \gamma_0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} (\tau - x_1 \tau_1)^2 &\leq \tau^2 + \tau_1^2 - 2\tau\tau_1 \cos \gamma_0 \leq \Delta_1^2 \leq \\ &\leq \tau^2 + \tau_1^2 + 2\tau\tau_1 \cos \gamma_0 \leq (\tau + x_2 \tau_1)^2, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} \frac{\tau_1^2}{\tau^3} &\leq \frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\tau^3} - \frac{3\tau_1 \cos(\angle OK, OM_1)}{\tau^4} \leq \\ &\leq \frac{1}{(\tau + x_{1,2} \tau_1)^3} - \frac{1}{\tau^3} \mp \frac{3x_{1,2} \tau_1}{\tau^4}. \end{aligned} \quad (28)$$

При этом, например,

$$x_1 = \cos \gamma_0; \quad x_2 = \cos \gamma_0 + \frac{1}{2} \frac{\tau_1}{\tau_0} \leq 1. \quad (29)$$

Формулу (26) и аналогично формулу (25) возможно найти более просто из геометрических соображений. Пусть на рис. 1 $\cup MK$ представляет орбиту кометы K , $\cup MM_1$ - круговую орбиту Юпитера. Очевидно, что в случае максимального значения $\cos \angle KM_1$, угол $\angle KM_1M = 90^\circ$, следовательно из $\triangle MKM_1$,

$$\sin \angle KM_1 = \sin(\angle OM_1, OK) = \sin(\omega_1 + \nu_1) \sin i. \quad (30)$$

Из формулы (30) следует неравенство (26). Левая часть неравенства (28) получается непосредственно из условия минимума функции $\Delta_1^{-3} - \tau^{-3} - 3\tau_1 \tau^{-4} \cos(\angle OM_1, OK)$ при $\cos(\angle OM_1, OK) = \frac{\tau_1}{2\tau}$. Так как рассматриваемая функция имеет только один минимум, то наибольшее значение функции должно быть на концах рассматриваемого интервала, на что и указывает правая часть неравенства (28). Экстремальные значения для $\cos x$, $\cos(\angle OM_1, OK)$ и т.д. для всего интервала $[\nu_2, \pm 180^\circ]$,

$[\tau_2, \pm \infty]$ или $[t_2, \pm \infty]$ возможно найти очень просто, так как для этого следует только рассмотреть, как изменяется значение величин $\sin^2(\omega_1 + \nu_1)$ и $\cos^2(\omega_1 + \frac{\nu_1}{2})$ при изменении ν_1 от ν_2 до $\pm 180^\circ$. Подставляя значения (25) - (27) и обозначая величины для всего интервала с индексом нуль в уравнении (17), получим

$$\begin{aligned}
 & -2m_1 \left\{ \frac{3\tau_1^2}{2\tau^4} + \frac{\tau_1 \cos \alpha_0^\circ}{|\sin \frac{\nu_2}{2}|} \left[\frac{1}{(\tau \mp \alpha_{1,2}^\circ \tau_1)^3} - \frac{1}{\tau^3} \right] \right\} \leq \\
 & \leq \frac{d \frac{1}{a_2}}{d\tau} \leq -2m_1 \left\{ -\tau \left[\frac{1}{(\tau \mp \alpha_{1,2}^\circ \tau_1)^3} - \frac{1}{\tau^3} \mp \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{3\alpha_{1,2}^\circ \tau_1}{\tau_4} \right] \mp \frac{\tau_1 \cos \alpha_0^\circ}{|\sin \frac{\nu_2}{2}|} \left[\frac{1}{(\tau \mp \alpha_{1,2}^\circ \tau_1)^3} - \frac{1}{\tau^3} \right] \right\}. (31)
 \end{aligned}$$

В правой части неравенства следует рассмотреть все 4 случая сложений членов с квадратными скобками. Интегрируя, получим [39]

$$\begin{aligned}
 & -2m_1 \left[\frac{\tau_1^2}{2\tau_2^3} + \frac{\tau_1^2 \alpha_{1,2}^\circ \cos \alpha_0^\circ (\tau_2 \mp \frac{\alpha_{1,2}^\circ \tau_1}{2})}{\tau_2^2 |\sin \frac{\nu_2}{2}| (\tau_2 \mp \alpha_{1,2}^\circ \tau_1)^2} \right] \leq \\
 & \leq \Delta \frac{1}{a_1} \leq 2m_1 \left[\frac{\tau_1^2 \alpha_{1,2}^{\circ 2} (2\tau_2 \mp \frac{3}{2} \alpha_{1,2}^\circ \tau_1)}{\tau_2^2 (\tau_2 \mp \alpha_{1,2}^\circ \tau_1)^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\tau_1^2 \alpha_{1,2}^\circ \cos \alpha_0^\circ (\tau_2 \mp \frac{1}{2} \alpha_{1,2}^\circ \tau_1)}{\tau_2^2 |\sin \frac{\nu_2}{2}| (\tau_2 \mp \alpha_{1,2}^\circ \tau_1)^2} \right]. (32)
 \end{aligned}$$

Если предположить $\cos x_0 = 1$, то можно считать $x_2 = x_1$, и, следовательно, крайним пределом является

$$\frac{1}{|\sin \frac{v_2}{2}|} = 1 + \nu; \quad \mp x_{1,2} = -1.$$

В этом случае получается формула, по которой М. Дирикис предлагает оценивать $\Delta \frac{1}{a_1}$, т.е.

$$|\Delta \frac{1}{a_1}| \leq 2m_1 r_1^2 \left[\frac{3r_2 - 2r_1}{r_2^2 (r_2 - r_1)^2} + \frac{\nu(r_2 - \frac{r_1}{2})}{r_2^2 (r_2 - r_1)^2} \right]. \quad (33)$$

Приведем следующий пример. Стремгрен получил для кометы 1890 II от Юпитера $|\Delta(\frac{1}{a_1})| < 0,0000142$

($r_2 = 27,8$, $v_2 = -149,7$) По данным Дирикиса от Юпитера $|\Delta(\frac{1}{a_1})| \leq 0,0000121$. По формуле (32) имеем от

Юпитера ($x_1^0 = 0,598$, $x_2^0 = 0,691$, $\cos x_0 = 0,598$).

$$-0,0000023 < \Delta \frac{1}{a_1} < 0,0000031.$$

Формула (32) является более сложной, чем формулы Стремгрена и Дирикиса. Однако вычисления оценки по формуле (32) требуют несравненно меньше времени, чем сами вычисления возмущений.

Стремгрен [40] пытался также построить аналитическую теорию движения параболических комет, в которой при интегрировании считал, что элементы постоянны и $e = 1$. Однако эта теория не получила ни практического, ни теоретического применения. М. Дирикис нашел в этом методе в разложении пертурбационной функции ошибку при члене $\cos^6 \frac{v_i}{2} \sin v_i \cos v_i$. М. Дирикис рассмотрел некоторые частные случаи. Согласно М. Дирикису ^{не} целесообразно прибегать к

разложению в ряд пертурбационной функции для решения задачи о первоначальной форме какой - либо кометы.

§ 3. Принадлежность комет и Солнечной системе.

Первая работа по теории статистики элементов почти параболических комет возникла в связи с гипотезой Гершеля, согласно которой кометы суть небесные тела, образовавшиеся от сгущения туманного вещества, которое разбросано в межзвездном пространстве. Когда эти сгущения проникают в ту часть пространства, где уже преобладает сила притяжения Солнца, то они начинают двигаться по эллиптическим или гиперболическим орбитам. Так как скорости их относительно Солнца равновероятны по всем направлениям, то сгущения должны двигаться без всякого преимущественного направления, со всякими углами наклонений, что согласуется с наблюдениями. Чтобы проверить гипотезу Гершеля, Лаплас описал вокруг Солнца сферу радиусом в 50 000 а.е. и считал, что в этой сфере комету притягивает только Солнце. Лаплас предположил, что на поверхности сферы действия скорости комет

распределяются равномерно по всем направлениям и подсчитал видимое распределение орбит комет по e . Он пришел к заключению, что по гипотезе Гершеля не должны наблюдаться гиперболические кометы. Скиапарелли [41] снова рассмотрел задачу Лапласа, причем принял во внимание движение Солнца. Он пришел к выводу, что кометы вместе с Солнцем принадлежат к одному и тому же звездному потоку, компоненты которого движутся в пространстве с почти равными и параллельными скоростями. Заключение Лапласа и Скиапарелли основываются на гипотезе о принятом законе распределения скоростей на сфере действия Солнца. Фабри [42] показал, что возможен такой закон распределения, что даже в том случае, если считать, что сфера действия Солнца неподвижна, то в сферу видимости попадают много гиперболических комет. Он старался доказать, что независимо от принятого закона распределения при сравнительно больших значениях скорости движения сферы действия Солнца в сфере видимости преобладают гиперболические орбиты. Он доказал следующую теорему: Независимо от функции распределения скоростей на сфере действия Солнца количество комет, относительная скорость которых в перигелии больше, чем скорость Солнца, превышает количество комет, относительная начальная

скорость которых меньше, чем скорость Солнца. Теорема имеет место в сфере видимости. Так как скорость Солнца относительно звезд достигает нескольких десятков километров в секунду, то из теоремы Фабри непосредственно следует, что среди почти параболических комет должны были присутствовать и гиперболические, если бы кометы входили в Солнечную систему из межзвездного пространства. Таким образом следует считать, что задачу, поставленную Лапласом, решил Фабри. Н.Д.Моисеев [43]-[49] дал самый общий вывод формул, по которым возможно подсчитать распределение элементов комет вблизи Солнца в предположении, что имеет место гипотеза Гершеля. Он указал также на некоторые недостатки в работе Скиапарелли и Фабри. Однако исследования Фабри не доказывают, что почти параболические кометы образовались именно вблизи Солнца. Гипотеза происхождения комет Литтлтона [3] посредством акреции также не противоречит результатам исследований Фабри. В гипотезе Литтлтона предполагается, что при прохождении Солнца через межзвездное облако, частицы облака, описывая вследствие притяжения Солнца гиперболические относительные орбиты, пересекаются на прямой движения Солнца и теряют вследствие взаимных ударов свои скорости. Таким образом образуются сгустки частиц с малыми отно-

сительными скоростями. Это почти параболические кометы, которые все имеют слегка эллиптические орбиты. Вполне возможно, что появится некоторая другая гипотеза, которая подобно гипотезе акреции сможет объяснить, почему не наблюдаются гиперболические кометы, и которая также не будет предполагать, что кометы образовались вблизи Солнца. Что касается гипотезы акреции, то следует отметить, что она не позволяет построить модель комет, которая не противоречила бы современным представлениям физики комет.

Работы, начатые Э. Стремгреном о первоначальных орбитах почти параболических комет, с точки зрения работ Фабри, имеют большое значение, так как они дают данные о распределении почти параболических орбит по $\frac{1}{a_1}$. Идея Стремгрена проверки принадлежности каждой кометы к Солнечной системе при помощи непосредственных вычислений практически неосуществима.

Из ниже представленной таблицы непосредственно видно, что имеется несомненный перевес слегка эллиптических первоначальных орбит над гиперболическими. С другой стороны, видно, что имеется сравнительно большое количество комет, у которых орбиты очень мало отличаются от парабол. Эти факты должны быть объяснены любой гипотезой происхожде-

ния комет. В настоящее время только гипотеза кометного облака Оорта может претендовать на объяснение этих фактов.

Таблица 11

№	Комета	Оскулирующее значение эксцентриситета e	Первоначальное значение $1 : a_1$	Автор
1	1853 III	1.000246 $\pm 5 \cdot 10^{-6}$	+0.000083	H. Wittner (38)
2	1863 I	1.000047 $\pm 48 \cdot 10^{-6}$	+0.000528	E. H. Bilo and I. van Houten Groe- neveld H. O. Rasmu- sen (38)
3	1863 VI	1.000650 $\pm 65 \cdot 10^{-6}$	+0.000012	E. H. Bilo and I. van Houten Groeneveld Ström- gren E. (38)
4	1882 I	0.999994 $\pm 1 \cdot 10^{-6}$	+0.000144	E. H. Bilo and I. van Houten Groeneveld Ström- gren E. (38)
5	1882 II	0.999908 $\pm 2 \cdot 10^{-6}$	+0.012149	E. H. Bilo and I. van Houten Groeneveld Ström- gren E. (38)
6	1886 I	1.000446 $\pm 14 \cdot 10^{-6}$	-0.000007	E. Ström- gren (38)

7	1886	<u>II</u>	1.000229 $\pm 4.10^{-6}$	+0.000317	A. Thraen (38)
8	1886	<u>IX</u>	1.000382 $\pm 18.10^{-6}$	+0.000063	E. Stromgren (38)
9	1889	<u>I</u>	1.001255 $\pm 110.10^{-6}$	+0.000042	G. V. Biesbroek (38)
10	1890	<u>II</u>	1.000410 $\pm 19.10^{-6}$	+0.000072	E. Stromgren (38)
11	1892	<u>II</u>	1.000345 $\pm 64.10^{-6}$	+0.000353	E. H. Bilo and I. van Houten Groeneveld
12	1897	<u>I</u>	1.000927 $\pm 51.10^{-6}$	+0.000040	E. Stromgren (38)
13	1898	<u>YII</u>	1.001034 $\pm 16.10^{-6}$	-0.000016	E. Stromgren (38)
14	1898	<u>YIII</u>	0.999355 $\pm 186.10^{-6}$	+0.000010	E. H. Bilo and I. van Houten Groeneveld
15	1899	<u>I</u>	1.000350 $\pm 4.10^{-6}$	-0.000027	E. Stromgren (38)
16	1902	<u>III</u>	0.999968 $\pm 7.10^{-6}$	+0.000005	E. Stromgren (38)
17	1904	<u>I</u>	1.001365 $\pm 22.10^{-6}$	+0.000217	E. Sinding (38)
18	1905	<u>IV</u>	1.001481 $\pm 26.10^{-6}$	+0.000045	E. H. Bilo and I. van Houten Groeneveld
19	1905	<u>YI</u>	1.000185 $\pm 65.10^{-6}$	+0.000621	A. A. Михайлов / 38 /
20	1907	<u>I</u>	1.001024 $\pm 82.10^{-6}$	+0.000025	E. Stromgren (38)
21	1908	<u>III</u>	1.000692 $\pm 51.10^{-6}$	+0.000158	G. v. Biesbro- eck (38)
22	1910	<u>I</u>	0.999972 $\pm 13.10^{-6}$	+0.000692	E. Sinding (38)
23	1910	<u>III</u>	0.999812 $\pm 1.10^{-6}$	+0.000473	E. H. Bilo and I. van Houten Groeneveld

24	1912	$\overline{11}$	0.999514	+0.001356	E. H. Bilo and I. van Houten- Groeneveld
25	1914	$\overline{111}$	1.003672 $\pm 296.10^{-6}$	-0.000066	"- "-
26	1914	\overline{y}	1.000162 $\pm 4.10^{-6}$	+0.000012	G. v. Biesbroeck (38)
27	1915	$\overline{11}$	1.000235 $\pm 61.10^{-6}$	+0.000140	E. H. Bilo and I. van Houten- Groeneveld
28	1917	$\overline{111}$	0.999495 $\pm 10.10^{-6}$	+0.000021	"- "-
29	1919	\overline{y}	1.000215 $\pm 63.10^{-6}$	+0.000018	"- "-
30	1922	$\overline{11}$	1.000360 $\pm 39.10^{-6}$	+0.000039	E. Gennaro (38)
31	1925	\overline{I}	1.000629 $\pm 34.10^{-6}$	+0.000054	E. Stromgren (38)
32	1925	$\overline{y11}$	1.001941 $\pm 76.10^{-6}$	+0.000066	M. Я. Шмакова /38/
33	1925	$\overline{y111}$	1.000428	+0.000115	G. v. Biesbroeck (38)
34	1927	\overline{IV}	0.998065	+0.000653	E. H. Bilo and I. van Houten- Groeneveld
35	1930	\overline{IV}	1.000379 $\pm 26.10^{-6}$	+0.000515	M. A. Дирдикис /38/
36	1932	\overline{yI}	1.001376 $\pm 2.10^{-6}$	+0.000044	G. v. Biesbroeck (38)
37	1936	\overline{I}	1.00197 $\pm 87.10^{-5}$	+0.000205	"- "-
38	1937	\overline{IV}	1.000160 $\pm 34.10^{-6}$	+0.000045	E. H. Bilo and I. van Houten- Groeneveld
39	1942	\overline{IV}	1.000893	+0.000261	
40	1944	\overline{IV}	1.002085 $\pm 35.10^{-6}$	+0.000000	E. H. Bilo and I. van Houten- Groeneveld

ГЛАВА 11

ВОЗМУЩЕНИЕ СО СТОРОНЫ ЗВЕЗД НА ДВИЖЕНИЕ КОМЕТ.

§ 4. Основные проблемы.

Впервые вопросы о возмущениях со стороны звезд на движение комет рассматривались акад. В.Г.Фесенковым в 1922 г. [50]. В 1951 г. он опять вернулся к рассмотрению этих вопросов [51]. Согласно Фесенкову возможны две точки зрения:

1/ кометы непрерывно зарождаются в Солнечной системе именно как короткопериодические; природа долгопериодических комет в таком случае остается неопределенной;

2/ кометы образуют чрезвычайно обильный комплекс малых тел, окружающих Солнце на расстоянии в десятки тысяч астрономических единиц. Орбиты отдельных тел этого комплекса подвергаются возмущениям со стороны соседних звезд и время от времени проникают в ближайшие окрестности Солнца.

Большие возмущения со стороны планет обуславливают превращение части тел этого комплекса в семейства короткопериодических комет.

Первая точка зрения, согласно Фесенкову, не может быть обоснована и, повидимому, приводит к распределению орбит короткопериодических комет, не соответствующему действительности. В. Фесенков не признает гипотезы С.К. Всехсвятского, так как она игнорирует то обстоятельство, что большие планеты окружены в высшей степени протяженными атмосферами, состоящими из уплотненных газов, и что скорость ускользания с их поверхности достигает нескольких десятков километров в секунду. Поэтому Фесенков останавливается лишь на второй точке зрения.

Предполагается, что астероиды и метеориты могли возникнуть в результате распада, сопровождавшегося взрывом, некоторой планеты, обращавшейся ранее между орбитами Марса и Юпитера. Фесенков исследует эту возможность. Он предполагает, что обломки массой в 10^{15} и меньше при взрыве отбрасываются на весьма большие расстояния, фактически с параболическими или гиперболическими скоростями. Однако уже на расстоянии в десять тысяч астрономических единиц и большем они будут подвержены заметным возмущениям со стороны ближайших

ших звезд. Фесенков показывает, что, вследствие этих неизбежных возмущений, кометные орбиты подвергнутся значительному рассеянию. Поэтому, как правило, кометы, ушедшие далеко за пределы Солнечной системы, уже не вернутся обратно в близкое соседство с Солнцем и поэтому смогут на весьма продолжительное время сохранить свой первоначальный запас газов, не расходуя его в холодном межзвездном пространстве. Более того, он считает, что подобные холодные тела могут в течение миллионов лет окклюдировать в себе новые газы, всегда имеющиеся в межзвездном пространстве. Только после того, как под действием тех же возмущений со стороны соседних звезд, меняющих с течением времени свои взаимные расположения, отдельные кометы из общего рассеянного комплекса окажутся направленными на Солнце и пройдут около него на близком расстоянии, их газовое содержание под действием нагревания начнет освобождаться, и перед нами явится типичная комета, которую мы будем считать новой, хотя она уже существовала на больших расстояниях от Солнца со времени распада первоначальной планеты. Из сказанного следует, что, по мнению В.Г. Фесенкова, возмущения со стороны звезд сыграли существенную роль как при образовании облака комет, которое находится в настоящее время

вокруг Солнца, так и при пополнении числа комет, в настоящее время проходящих близко от Солнца. Последние быстро рассеиваются вследствие возмущений от планет в межзвездное пространство и гибнут в лучах Солнца.

Если допустить, что возможен выброс комет из планет, и предположить, что раньше этот процесс был чрезвычайно интенсивным, то между гипотезой взрыва планеты и гипотезой извержения с точки зрения эволюции кометных орбит нет ни малейшей разницы. Допустить, что мы наблюдаем первоначальное расположение орбит комет, как это делает С.К. Всехсвятский, невозможно, так как Рассел показал что орбиты почти параболических комет не имеют тенденции к концентрации вблизи орбит больших планет. Следовательно, в течение времени, прошедшего от момента образования комет до настоящего времени, под влиянием возмущений со стороны звезд ориентация орбит почти параболических комет основательно переменилась. Чтобы выяснить, какая из гипотез происхождения комет имеет место, мы должны изучать проблему возмущений со стороны звезд на движение комет и ~~чтательно~~ анализировать данные таблицы 11. По этому вопросу, по нашему мнению, некоторые успехи имел только Оорт в своей гипотезе кометного облака.

Нам кажется, что выяснить вопрос об образовании кометного облака весьма трудно и что решение этого вопроса главным образом связано с решением вопроса о происхождении Солнечной системы. Так, например, если выяснится, что планеты образовались вследствие сгущения частиц или газа, окружающего Солнце, то для образования кометного облака и малых планет не надо будет вводить гипотезу взрыва гипотетической планеты. В связи с этим следует отметить работу Б.Ю.Левина [2], в которой он показывает, что кометное облако могло образоваться во время образования планет, когда происходило интенсивное сгущение частиц. Некоторые сгустки, т.е. кометы, были выброшены на большие расстояния от Солнца, так как на них действовали возмущения со стороны больших планет. В гипотезе акреции образование кометного облака также получается естественным путем. Таким образом, во всех упомянутых гипотезах происхождения комет возмущения со стороны звезд играют существенную роль. Это естественно, так как мы непосредственно наблюдаем много комет, которые удаляются от Солнца на такие большие расстояния, где возмущения со стороны звезд сильно искажают их оскулирующие орбиты. /см. таб. 11/. Относительно образования кометного облака мы ограничимся этими рассуждени-

ями и дальше будем рассматривать только процесс его эволюции в настоящее время. Для этого следует рассмотреть теорию возмущений со стороны звезд на движение почти параболических комет. Возмущения от звезд на движение данной кометы не удастся вычислить, так как неизвестно расположение звезд вокруг Солнца в далеком прошлом и в будущем. Оценка порядка возмущений со стороны ближайших звезд рассматривалась с двух точек зрения, а именно, либо предполагалось, что возмущающая звезда перемещается относительно Солнца равномерно по прямой и с весьма большой скоростью, либо, что звезда относительно Солнца не перемещается. Последний случай должен описывать медленные относительные движения звезд. Если применить теорию быстро движущих звезд для медленно движущих звезд, то получим явно неправильные результаты. В обоих случаях, кроме основного вопроса принадлежности комет к Солнечной системе, исследовались также вопросы об изменении перигельного расстояния q , эксцентриситета e и направления на перигелий кометы. Особенно важным являются исследования изменения q , ибо кометы вблизи Солнца быстро гибнут в лучах Солнца, и планеты своими возмущающими действиями удаляют некоторую часть комет в межзвездное пространство. Таким образом, имеется весьма интен-

сивно действующий механизм уничтожающий кометы, перигельные расстояния орбит которых имеют малые значения. Фесенков и Оорт считает, что эта группа комет пополняется вследствие возмущений со стороны звезд из облака комет Оорта содержащего, примерно, 10^{11} комет. В зависимости от знака возмущения со стороны звезд, комета может быть как выведена, так и, спустя известное время, введена в зону видимости, в которой она исчерпывает содержание своих газов и где имеются сильные возмущения со стороны планет. Вне этой зоны, оставаясь на значительном расстоянии от Солнца, комета практически неопределенно долгое время сохраняет свои запасы газов.

Первую схему рассматривали Эпик [52] и Оорт [4]. Ими предполагалось, что за все время возмущающего действия со стороны звезды комета остается неподвижной. Если комета находится достаточно далеко как от Солнца, так и от прямой, по которой с большой скоростью движется возмущающая звезда, то такое допущение правдоподобно. Исследования этого случая носят статистический характер. Исследования Эпика относятся к метеоритам и только частично выясняют интересующие нас вопросы. В своих исследованиях Оорт обнаружил ошибку, поэтому нам пришлось их провести заново. В общих чер-

так мы старались придерживаться идеей Оорта и Эпика.

Второй случай был исследован акад. В.Г.Фесенковым. В.Г.Фесенков исходил из уравнений Гаусса. В этих уравнениях он считал долготу возмущающей звезды постоянной и ограничивался рассмотрением вековых возмущений. При помощи осреднений он получил ответ в явном виде и оценил порядок возмущений величин a и μ .

Так как в теории академика В.Г.Фесенкова имеются некоторые математические трудности, то задача неподвижной звезды была нами исследована заново с точки зрения задачи двух притягивающих неподвижных центров. Здесь мы так же, как акад. В.Г.Фесенков, рассмотрели случай движения отдельной звезды, не используя статистический метод. Это нам кажется вполне естественным, так как случай неподвижной звезды является случаем особым и может осуществляться весьма редко.

§ 5. Размеры кометного облака, согласно задаче двух центров.

В §§ 5, 6, 7 рассматривается случай неподвижной возмущающей звезды. Мы исследуем плоскую задачу двух неподвижных центров с одинаковыми массами, принимая за один центр Солнце, а за другой — возмущающую звезду. Как известно, эта задача решается в квадратурах, и решение приводится к эллиптическим интегралам. Таким образом, точность решений и выводы не подлежат сомнению. Казалось бы, что можно возразить против реальности самой схемы, где так же, как у В.Г. Фесенкова, не учитывается взаимное притяжение обоих центров. Однако, ограниченная задача трех точек, если даже ее точно решить, дает приближенный результат, ибо в действительности вблизи Солнца находятся не только одна, но несколько звезд, притяжение которых схема не учитывает.

В проблеме двух неподвижных центров с одинаковыми массами уравнения движения приводятся к следующему виду [53]:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{2(\lambda)}} = \frac{\dot{\mu}}{\sqrt{2(\mu)}} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2 - \mu^2}, \quad (34)$$

где

$$\mathcal{L}(\lambda) = (\lambda^2 - d^2)(h\lambda^2 + 2K^2m\lambda + \mathcal{L}), \quad (35)$$

$$\mathcal{M}(\mu) = (\mu^2 - d^2)(h\mu^2 + \mathcal{L}), \quad (36)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2), \quad \mu = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2), \quad (37)$$

τ_1, τ_2 - расстояния от неподвижных центров C_1 и C_2 до кометы K , $2d$ - расстояние между неподвижными центрами, m - масса каждого притягивающего центра, t - время, K - постоянная тяготения. Постоянные интегрирования h и \mathcal{L} связаны с начальными данными, обозначенными индексом нуль, следующим образом :

$$h = \frac{1}{2}v_0^2 - K^2m\left(\frac{1}{\tau_{10}} + \frac{1}{\tau_{20}}\right), \quad (38)$$

$$\mathcal{L} = \frac{(\lambda_0^2 - \mu_0^2)^2}{2(\lambda_0^2 - d^2)} \dot{\lambda}_0^2 - h\lambda_0^2 - 2K^2m. \quad (39)$$

Здесь v_0 - начальная скорость кометы. Случай $\lambda_0 = d$ у нас не будет особенным, так как мы правую часть (39) выразим через параметры.

Интегрированию системы дифференциальных уравнений движения в проблеме двух неподвижных центров (34) посвящено много работ. Эйлер [54], Лежандр [55] и другие ученые показали, что интегрирование приводится к эллиптическим интегралам, и провели в некоторых случаях анализ движения. Применить непосредственно найденные ими формулы и

анализ невозможно, так как мы рассматриваем более узкую задачу, которая требует введения иного вида начальных условий. Кроме точного решения, для упрощения вычислений нами выведены некоторые приближенные формулы. Применимость всех таких формул проверялась сравнением приближенных результатов с точными, что дало хорошее совпадение [56], [57].

Орбиту кометы вблизи Солнца характеризует оскулирующий эллипс. Величина и положение эллипса определяются большой полуосью a , перигельным расстоянием q и долготой перигелия $\tilde{\omega}$ / угол между отрезком, соединяющим центры C_1 и C_2 , и большой осью эллипса/. Именно при помощи этих трех величин мы выразим начальные условия. Нас интересуют только траектории, которые удаляются от Солнца на большие расстояния и опять возвращаются назад к Солнцу. Следовательно, мы будем считать величину q/d за малую величину первого порядка ($q/d \approx 10^{-5}$), а величина $S = \frac{a}{d}$ у нас, вообще говоря, будет величиной нулевого порядка.

Связь начальных данных a , q и $\tilde{\omega}$ с начальными данными l_0 , μ_0 , \dot{l}_0 , $\dot{\mu}_0$ можно получить при помощи следующих формул невозмущенного движения для момента прохождения через перигелий :

$$r_{10} = q; \quad \frac{dr_{10}}{dt} = 0; \quad v_0^2 = K^2 m \left(\frac{2}{q} - \frac{1}{a} \right);$$

$$q^2 \frac{d(w+\tilde{\omega})}{dt} \Big|_{w=0} = K \sqrt{mq(2-q/a)}, \quad (40)$$

где w - истинная аномалия кометы, и формулу

$$r_{20}^2 = 4d^2 + q^2 - 4dq \cos(w+\tilde{\omega}). \quad (41)$$

Так как q/d есть малая величина первого порядка, то формулы (40) и (41) для перигелия можно привести к следующему виду :

$$r_{10} = q, \quad r_{20} = 2d \left[1 - \frac{q}{2d} \cos \tilde{\omega} + \frac{1}{8} \left(\frac{q}{d} \right)^2 (1 - \cos^2 \tilde{\omega}) \right], \quad (42)$$

$$\dot{\lambda}_0 = -\dot{\mu}_0 = \frac{\kappa \sqrt{m} \sin \tilde{\omega}}{\sqrt{2q}} \left(1 - \frac{q}{4sd} + \frac{q \cos \tilde{\omega}}{2d} \right). \quad (43)$$

Подставляя значения (42) и (43) в формулу (38) и (39) после простых преобразований получаем :

$$h = -\frac{\kappa^2 m}{2sd} (1 + S + \Delta h), \quad (44)$$

$$\mathcal{L} = \kappa^2 m d \left(2 \cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{1}{2s} - \frac{3}{2} + \Delta \mathcal{L} \right), \quad (45)$$

где Δh и $\Delta \mathcal{L}$ - малые величины первого порядка, имеющие следующий вид :

$$\Delta h = \frac{qs \cos \tilde{\omega}}{2d}, \quad (46)$$

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{q}{4sd} [-4 \cos \tilde{\omega} + S(-4 + \cos \tilde{\omega})]. \quad (47)$$

Учитывая формулы (44) - (47), формуле (35) можно придать следующий вид :

$$\mathcal{L}(\lambda) = h(\lambda-d)(\lambda+d)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2),$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{2Sd}{1+S} \left[1 \pm \frac{1}{2S} \sqrt{(1-S)^2 + 4S(1+S)\cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}} + \Delta\lambda \right]. \quad (48)$$

Здесь $\Delta\lambda$ — малая величина первого порядка вида :

$$\Delta\lambda = \frac{q}{d} \left\{ -\frac{S \cos \tilde{\omega}}{2(1+S)} \pm \frac{1}{4S(1+S)\sqrt{(1-S)^2 + 4S(1+S)\cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}}} \left[-2 \cos \tilde{\omega} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2S(1+2\cos \tilde{\omega}) - S^2(4+\cos \tilde{\omega} + \cos^2 \tilde{\omega}) - S^3(2+3\cos \tilde{\omega} + \cos^2 \tilde{\omega}) \right] \right\} \quad (49)$$

Учитывая формулы (44) — (47), формуле (36)

можно придать следующий вид :

$$\mathcal{M}(\mu) = k(\mu-d)(\mu+d)(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2),$$

где

$$\mu_{1,2} = \pm d \left(\sqrt{\frac{1-3S+4S\cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}}{1+S}} + \Delta\mu \right), \quad (50)$$

где $\Delta\mu$ есть малая величина первого порядка вида:

$$\Delta\mu = \frac{1}{2(\sqrt{1+S})^3 \sqrt{1-3S+4S\cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}}} \frac{q}{d} \left[-2 \cos \tilde{\omega} - \right. \\ \left. - 2S(1+\cos \tilde{\omega}) + S^2(-2+\cos \tilde{\omega} - \cos^2 \tilde{\omega}) \right]. \quad (51)$$

Нас интересует вопрос о принадлежности комет к Солнечной системе. Мы будем считать, что комета принадлежит к Солнечной системе, если орбита кометы не удаляется в бесконечность и не охватывает возмущающей звезды.

Рассмотрим второе условие. Если орбита ко —

меты не охватывает возмущающей звезды, то в эллиптических координатах существует некоторая гипербола $\mu = \mu_m$, которую орбита уже не пересекает. Следовательно,

$$-d \leq \mu \leq \mu_m < d . \quad (52)$$

Рассмотрим, при каких значениях корней μ_1 и μ_2 выполняется неравенство (52). Из равенства :

$$\frac{d\mu}{\sqrt{h(\mu-d)(\mu+d)(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)}} = \frac{\sqrt{2} dt}{\lambda^2 - \mu^2} , \quad (53)$$

учитывая, что $\mu_1 = -\mu_2$, $h < 0$, $-d \leq \mu \leq d$, видно, что знаменатель выражения в левой части равенства принимает реальные значения, т.е. движение возможно, если

$$(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \geq 0 . \quad (54)$$

Если корни $\mu_1 = -\mu_2$ мнимые, то неравенство (54) на значения μ никаких ограничений не налагает, и μ может меняться в интервале $[-d, d]$, и, следовательно, неравенство (52) не выполняется. Рассмотрим случай действительных корней. Если $\mu_1 > d$, то движение невозможно, ибо (54) не имеет места. Следовательно, такого случая при реальных начальных условиях, рассматриваемых нами, не будет. Случай $\mu_1 = d$ из рассмотрения исключается.

Если же $\mu_1 < d$, то неравенство (54) выполняется, и μ меняется в интервале (52), причем $\mu_m = \mu_1$, ибо в начальный момент $\mu < 0$. Таким образом, для того,

чтобы орбита кометы не охватывала возмущающей звезды, необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения $M_1(\mu) = h\mu^2 + \alpha = 0$ были действительны.

Для того, чтобы комета не могла удалиться в бесконечность, необходимо и достаточно, чтобы орбита кометы была заключена в некотором эллипсе $\lambda = \lambda_m > d$ координатной сети, т.е.

$$\lambda \leq \lambda_m < \infty \quad (55)$$

Рассуждая таким же образом, как в предыдущем случае, мы убеждаемся, что для выполнения неравенства (55) необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\mathcal{L}_2(\lambda) = h\lambda^2 + 2k^2m\lambda + \alpha = 0$ имело один положительный и один отрицательный корни. Это условие выполняется и является необходимым, когда $M_1(\mu) = 0$ имеет действительные корни, что следует из сопоставления уравнений $M_1(\mu) = h\mu^2 + \alpha = 0$ и $\mathcal{L}_1(\lambda) = h\lambda^2 + 2k^2m\lambda + \alpha = 0$. Таким образом, необходимое и достаточное условие, чтобы комета являлась членом Солнечной системы, заключается в существовании действительных корней уравнения $M_1(\mu) = 0$. Уравнение $M_1(\mu) = 0$ имеет действительные корни, если

$$\frac{1 - 3S + 4S \cos^2 \frac{\bar{\omega}}{2}}{1 + S} + \Delta_1 \mu \geq 0, \quad (56)$$

где $\Delta_1 \mu$ — малая величина первого порядка. Следовательно, если $3 - 4 \cos^2 \frac{\bar{\omega}}{2} > 0$, то при

$$s < \frac{1 - \Delta_2 M}{3 - 4 \cos^2 \frac{\bar{\omega}}{2}} \quad (57)$$

или тем более при

$$s < \frac{1}{3} - \Delta_3 M \quad (58)$$

корни $M, (M) = 0$ действительны. Если же $3 - 4 \cos^2 \frac{\bar{\omega}}{2} < 0$, то при всех положительных значениях $s > 0$ корни уравнения $M, (M) = 0$ действительны. Итак, все кометы, большие полуоси которых меньше одной шестой расстояния между обеими рассматриваемыми звездами, принадлежат к Солнечной системе. Вообще говоря, к Солнечной системе, если была бы правильна схема двух точек, принадлежат так же кометы, движущиеся по более вытянутым эллипсам, и даже кометы, которые вблизи Солнца движутся по гиперболам. Такие орбиты имеют направление на перигелий в интервале $-60^\circ \leq \bar{\omega} \leq 60^\circ$, большие полуоси в интервале $d < -a < \infty$, а эксцентриситеты примерно в интервале $1 < e < 1 + 10^{-5}$.

§ 6. Изменение q , a , и $\bar{\omega}$
согласно задаче
двух центров.

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (34) приводит к эллиптическим интегралам. Для приведения эллиптических интегралов к нормальной форме необходимо знать относительные величини -

ны корней уравнений $M(\mu)=0$ и $L(\lambda)=0$. В предыдущем параграфе мы установили, что для комет Солнечной системы корни уравнений $M(\mu)=0$ и $L(\lambda)=0$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$d > \mu_1 > 0 > \mu_2 > -d, \quad (59)$$

$$\lambda_1 > d > 0 > \lambda_2 > -d. \quad (60)$$

Покажем, что эти неравенства имеют место также и в случае приближенных формул (48) - (50). Для этого достаточно проанализировать экстремальные значения корней, т.е. следует рассмотреть случаи, когда $\lambda_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ отличаются от значений $\pm d$ и нуль на малую величину первого порядка. Случай $\mu_{1,2}=0$ соответствует границам Солнечной системы, и этот случай исключаем, подбирая соответствующие значения S . Главная часть $\mu_{1,2}$ равна $\pm d$ при $\tilde{\omega}=0$. В этом случае $|\mu_{1,2}| < d$, ибо, согласно формуле (51) мы имеем $\Delta \mu = -\frac{q}{d} < 0$. Главная часть $\lambda_2 < 0$. Главная часть λ_1 /при $S > 0$ / принимает наименьшее значение d , если $\tilde{\omega}=180^\circ$. Так как $\Delta \lambda_{\tilde{\omega}=180^\circ} = \frac{1+S}{2S} \frac{q}{d} > 0$, то $\lambda_1 > d$. Главная часть λ_2 /при $S > 0$ / значение $-d$ принять не может. Таким образом мы убедились, что неравенства (59) и (60) имеют место как в точных, так и в случае приближенных формул.

Учитывая эти неравенства, видим, что при помощи подстановки

$$\lambda = -d + \frac{2d(\lambda_1 + d)}{2d + (\lambda_1 - d) \sin^2 \varphi} \quad (61)$$

мы имеем

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\mathcal{L}(\lambda)}} = \frac{2F(K, \varphi)}{\sqrt{-2hd(\lambda_1 - \lambda_2)}} + C_1, \quad (62)$$

где F — эллиптический интеграл первого рода и

$$K^2 = \frac{(\lambda_1 - d)(\lambda_2 + d)}{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (63)$$

Подобным образом при помощи подстановки

$$\mu = d + \frac{2d(d + \mu_1)}{-d - \mu_1 + (-d + \mu_1) \sin^2 \psi} \quad (64)$$

имеем

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \frac{2F(K_1, \psi)}{(d + \mu_1) \sqrt{-h}} + C_2, \quad (65)$$

где

$$K_1^2 = \left(\frac{d - \mu_1}{d + \mu_1} \right)^2. \quad (66)$$

Из формулы (34) следует, что φ и ψ одновременно убывают или возрастают.

Уравнение траектории имеет следующий вид :

$$-\frac{F(K, \varphi)}{\sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}} + \frac{F(K_1, \psi)}{(d + \mu_1)} = -\frac{F(K, \varphi_0)}{\sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}} + \frac{F(K_1, \psi_0)}{(d + \mu_1)}, \quad (67)$$

где

$$\sin^2 \varphi_0 = \frac{4d(\lambda_1 - d) - 2d\varrho(1 - \cos \tilde{\omega})}{(\lambda_1 - d)[4d + \varrho(1 - \cos \tilde{\omega})]}, \quad (68)$$

$$\sin^2 \gamma_0 = \frac{q(d+\mu_1)(1+\cos \tilde{\omega})}{(-d+\mu_1)[-4d+q(1+\cos \tilde{\omega})]} \quad (69)$$

Чтобы установить, какие знаки следует брать для $\sin \varphi_0$ и $\sin \gamma_0$, необходимо учесть, что начальные условия выбраны при минимальном значении r . Это условие показывает, что $\sin \varphi_0 \cos \varphi_0$ и $\sin \gamma_0 \cos \gamma_0$ должны иметь одинаковые знаки. Однако и тогда формулы (68) и (69) не определяют φ_0 и γ_0 однозначно. Чтобы выяснить, какие значения для φ_0 и γ_0 следует брать, перепишем (67) в следующем виде:

$$-\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}} + \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \gamma} (d+\mu_1)} = 0. \quad (70)$$

Очевидно, имеем два случая: 1) $0 < \gamma_0 < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ т.е., $\sin^2 \varphi$ и $\sin^2 \gamma$ одновременно возрастают и 2) $0 > \gamma_0 > -\frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{\pi}{2} + \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, т.е., $\sin^2 \varphi$ и $\sin^2 \gamma$ одновременно убывают.

При исследовании траекторий (67) нас первым делом интересует вопрос, насколько приблизятся к Солнцу после одного оборота траекторий, выходящие из окрестности Солнца. Для решения этого вопроса выведем приближенную формулу. Уравнениям (61), (64) и (67) удовлетворяют значения $\varphi + \pi$ и $\gamma + \pi$. Относительно (61) и (64) это очевидно, а для уравнения (67) это справедливо только прибли-

ленно, ибо

$$F(k, \varphi + \pi) - F(k, \varphi) = 2K(k) \approx 2K(k_1) = F(k_1, \gamma + \pi) - F(k_1, \gamma)$$

и в уравнении (67) отношение коэффициентов при функциях $F(k, \varphi)$ и $F(k_1, \gamma)$ стремится к единице, если $S \rightarrow 0$. Следовательно, после одного оборота φ и γ увеличиваются приблизительно на π . Если кроме этого обстоятельства учтем, что $\varphi_0 \approx \pm \frac{\pi}{2}$ и $\gamma_0 \approx 0$ /за исключением случаев $\tilde{\omega} \approx 0, \pi$ /, то можем написать следующие приближенные формулы, имеющие место для координат φ и γ после одного оборота:

$$F(k, \varphi_0) = \pm K(k) + \frac{\varphi_0 \mp \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-k^2}}; \quad F(k_1, \gamma_0) = \gamma_0; \quad (72)$$

$$F(k, \varphi) = 2K(k) \pm K(k) + \frac{\varphi \mp \frac{\pi}{2} - \pi}{\sqrt{1-k^2}}; \quad F(k_1, \gamma) = 2K(k_1) + (\gamma - \pi); \quad (73)$$

$$\lambda = d + 2d \frac{\lambda_1 - d}{\lambda_1 + d} \left(\varphi \mp \frac{\pi}{2} - \pi \right)^2 \quad (74)$$

$$\mu = -d - 2d \frac{-d + \mu_1}{d + \mu_1} (\gamma - \pi)^2.$$

Подставляя значения (72) - (74) в уравнение траектории (67), получим

$$\begin{aligned} & - \frac{\varphi - \pi \mp \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-k^2} \sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}} + \frac{\gamma - \pi}{d + \mu_1} = \\ & = \frac{2\sqrt{1-k^2} K(k) - (\varphi_0 \mp \frac{\pi}{2})}{\sqrt{1-k^2} \sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}} - \frac{2K(k_1) - \gamma_0}{d + \mu_1}. \quad (75) \end{aligned}$$

Учитывая формулы (37) и (74) для радиуса, имеем следующую приближенную формулу

$$r_1 = \lambda + \mu = 2d \left[\frac{\lambda_1 - d}{\lambda_1 + d} \left(\varphi - \pi \mp \frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{-d + \mu_1}{d + \mu_1} (\gamma - \pi)^2 \right]. \quad (76)$$

Дифференцируя r_1 (76), приравнявая эту производную нулю

$$\frac{dr_1}{d(\varphi - \pi \mp \frac{\pi}{2})} = 0 \quad (77)$$

и учитывая (75), получим следующее условие

$$\gamma - \pi = \frac{(d + \mu_1)(\lambda_1 - d)(d - \lambda_2)}{d(\lambda_1 + \lambda_2)} \left[\frac{2\sqrt{1 - k^2} K(k) - (\varphi_0 \mp \frac{\pi}{2})}{\sqrt{1 - k^2} \sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}} - \frac{2K(k_1) - \gamma_0}{d + \mu_1} \right] \quad (78)$$

при котором r_1 принимает минимальное значение

$$r_{1m} =$$

$$= \frac{2(d^2 - \mu_1^2)(\lambda_1 - d)(d - \lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[\frac{2\sqrt{1 - k^2} K(k) - (\varphi_0 \mp \frac{\pi}{2})}{\sqrt{1 - k^2} \sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}} - \frac{2K(k_1) - \gamma_0}{d + \mu_1} \right]^2. \quad (79)$$

Сравнение с точными вычислениями показывает, что формула (79) дает весьма хорошие результаты.

Проверим, дает ли формула (79) для минимального значения $r'_{1m} = r_{1m}(t=0)$ правильный результат.

Очевидно,

$$r'_{1m} = \frac{2(d^2 - \mu_1^2)(\lambda_1 - d)(d - \lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[\frac{-\sin(\varphi_0 \mp \frac{\pi}{2})}{\sqrt{1 - k^2} \sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}} + \frac{\sin \gamma_0}{d + \mu_1} \right]. \quad (80)$$

Формула (80) получается из формулы (79) при $K(k) = K(k_1) = 0$ и $\varphi_0 \mp \frac{\pi}{2} = \sin(\varphi_0 \mp \frac{\pi}{2})$, $\gamma_0 = \sin \gamma_0$. Так как

$$\sqrt{1-K^2} \sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)} = \sqrt{(\lambda_1 + d)(d - \lambda_2)}, \quad (81)$$

то

$$r'_m = \frac{q}{2d(\lambda_1 + \lambda_2)} \left[\sqrt{1 - \cos \tilde{\omega}} \sqrt{d^2 - \mu_1^2} + \sqrt{1 + \cos \tilde{\omega}} \sqrt{(\lambda_1 - d)(d - \lambda_2)} \right]^2.$$

Учитывая, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{4sd}{1+s}, \quad (83)$$

$$\sqrt{d^2 - \mu_1^2} = \sqrt{\frac{M_1(d)}{h}} = 2d \sqrt{\sin^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}} \sqrt{\frac{s}{1+s}}, \quad (84)$$

$$\sqrt{(\lambda_1 - d)(d - \lambda_2)} = \sqrt{\frac{L(d)}{h}} = 2d \sqrt{\cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2}} \sqrt{\frac{s}{1+s}}, \quad (85)$$

получаем

$$r'_m = q. \quad (86)$$

Таким образом мы убедились, что формула (80) дает значения перигельного расстояния для обратного и прямого движений.

Чтобы ясно представить себе возможные изменения кометных орбит от возмущений звезд, мы вычислили перигельные расстояния после одного оборота кометы в нескольких случаях по формуле (79) полагая $d = 10^5$ а.е. Случаи $\tilde{\omega} = 0$ и $\tilde{\omega} = \pi$ из этого рассмотрения исключены, так как изменение Δq в этих случаях, очевидно, мало. Действительно, орбита кометы расположена в области, ограниченной эллипсом $\lambda = \lambda_1$ и гиперболой $\mu = \mu_2$. В случае $\tilde{\omega} = \pi$

эллипс $\lambda = \lambda_1 \approx d + q$ имеет очень малое перигельное расстояние q , следовательно, и орбита кометы всегда будет иметь очень малое перигельное расстояние. В случае $\tilde{\omega} = 0$ гипербола $\mu = \mu_2 = -d + q$ имеет очень малое перигельное расстояние q , следовательно, и орбита кометы всегда будет иметь очень малое перигельное расстояние.

Величина возмущений зависит от трех начальных данных: 1/ от отношения S большей оси $2a$ к расстоянию между Солнцем и звездой $2d$, 2/ от направления $\tilde{\omega}$ на перигелий и 3/ от перигельного расстояния кометы q . На графике /рис.2/ представлены результаты вычислений минимального расстояния r_{im} /перигельного расстояния после одного оборота кометы/ по формуле (79) в зависимости от начальных данных S , $\tilde{\omega}$ и q .

Перигельное расстояние после одного оборота представляет собой радиус-вектор, амплитудой является начальное направление на перигелий, а начальные значения S и q отмечены на соответствующей кривой. Сравнение двух кривых, имеющих одинаковые S и q , дает значения q после двух оборотов кометы, ибо одна кривая соответствует прямому, а другая - обратному движению кометы.

Некоторый космогонический интерес представляет вопрос об изменении $\tilde{\omega}$ и a . Рассмотрим этот

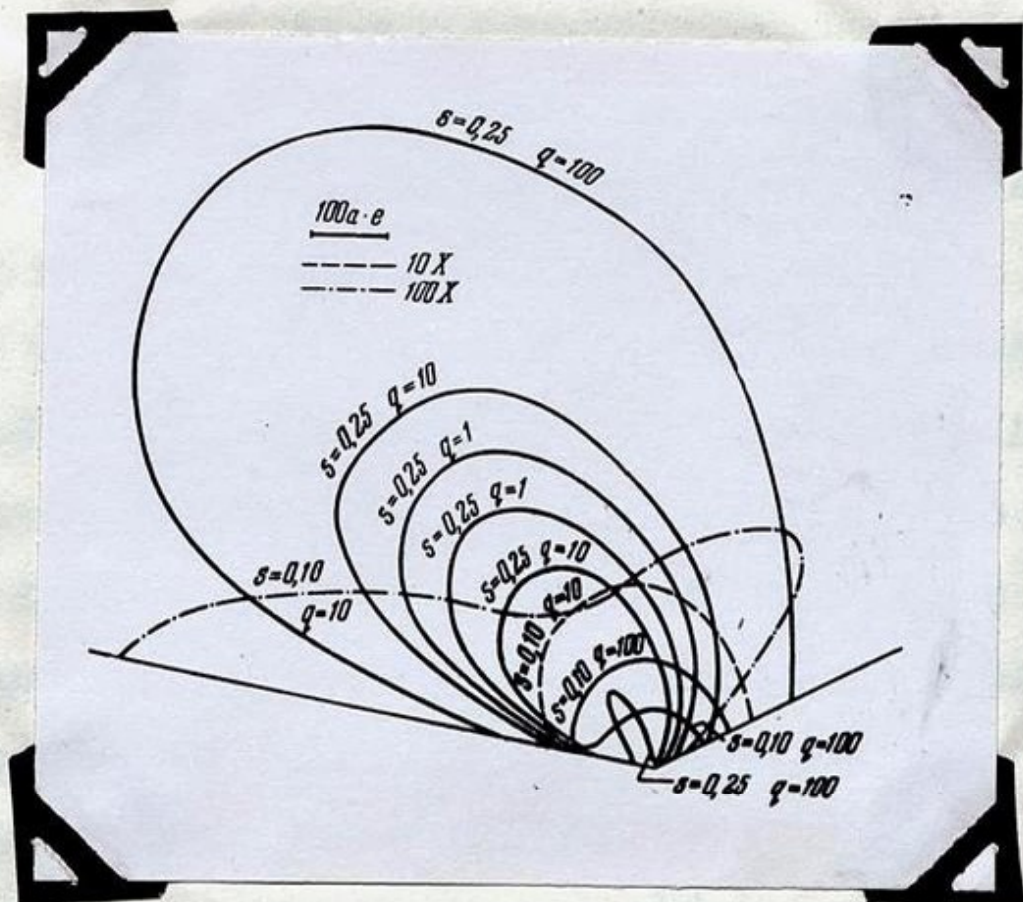


Рис. 2. Для штриховых кривых масштаб увеличен в 10 раз ; для штрихпунктирных кривых - в 100 раз.

вопрос. Мы установили, что перигельное расстояние после одного оборота кометы остается величиной нулевого порядка. Из этого следует, что возмущения большой полуоси и перигельного расстояния от звезд суть малые величины первого порядка. Действительно, если в формулах (44) и (45) учесть только главные члены и приравнять правые части этих равенств для начального положения кометы и положения кометы после одного оборота, то сразу получим

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 \quad (87)$$

где индексом один обозначены соответствующие величины после одного оборота кометы.

В теории возмущений от звезд в движениях комет часто приходится использовать значение периода обращения комет. Это значение берется из невозмущенного движения. Представляет интерес сравнить значение периода, полученного из вычислений возмущенного и невозмущенного движений.

Из формулы (34) следует

$$\sqrt{2} t = \int \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{2}(\lambda)} - \int \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{C}(\mu)} + C. \quad (89)$$

Делая подстановку (61) и (64) и учитывая, что

$\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 \approx \frac{\pi}{2}$ получим

$$\frac{\sqrt{2h}}{4} \Pi \approx \frac{1}{\sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}} \int_0^{\pi/2} \left[-d + \frac{2d(d + \lambda_1)}{2d + (\lambda_1 - d)\sin^2\varphi} \right]^2 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} +$$

$$+ \frac{1}{d + \mu_1} \int_0^{\pi/2} \left[d + \frac{2d(d + \mu_1)}{-d - \mu_1 + (-d + \mu_1)\sin^2\varphi} \right]^2 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\varphi}}. \quad (90)$$

С другой стороны, для невозмущенного движения

имеем

$$\Pi = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi a^{3/2}}{k} \quad (91)$$

Мы вычислили для случая $q = 100$, $\bar{\omega} = 120^\circ$, $s = 0,25$ период Π по формуле (90) и получили $\Pi = 1,0 \cdot 10^9$ / дней/.

В невозмущенном движении имеем $T = 1,4 \cdot 10^9$ /дней/.

Возмущения от Юпитера рассеивают в межзвездное пространство кометы, проходящие мимо Юпитера. Если кометы принадлежат к Солнечной системе, то эта группа комет должна непрерывно пополняться. Мы установили, что возмущающее действие звезд меняет перигельные расстояния комет в пределах нескольких десятков астрономических единиц. Следовательно, возмущения от звезд в состоянии обеспечить кометы с малыми перигельными расстояниями.

§ 7. Случай неодинаковых масс.

В проблеме двух неподвижных центров уравнения движения приводятся к следующему виду [57]:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{L(\lambda)}} = \frac{\dot{\mu}}{\sqrt{N(\mu)}} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda^2 - \mu^2}, \quad (92)$$

где

$$L(\lambda) = (\lambda^2 - d^2) [h\lambda^2 + k^2(m_1 + m_2)\lambda + \alpha], \quad (93)$$

$$N(\mu) = (\mu^2 - d^2) [h\mu^2 + k^2(m_1 - m_2)\mu + \alpha], \quad (94)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} (z_1 + z_2), \quad (95)$$

$$\mu = \frac{1}{2} (z_1 - z_2). \quad (96)$$

Постоянные интегрирования h и α связаны с начальными данными с точностью до величин нулевого порядка следующим образом :

$$h = -\frac{k^2}{2sd} (m_1 + sm_2), \quad (97)$$

$$\alpha = k^2 d \left(2m_1 \cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2} + \frac{m_1}{2s} - m_1 - \frac{m_2}{2} \right). \quad (98)$$

Здесь m_1 - масса Солнца, m_2 - масса звезды, а остальные буквы имеют те же значения, как в предыдущих §§ этой работы.

Рассмотрим вопрос о принадлежности комет к Солнечной системе [57]. Мы будем считать, что комета принадлежит к Солнечной системе, если орбита кометы не удаляется в бесконечность

$$d \leq \lambda \leq \lambda_m < +\infty \quad (99)$$

и не охватывает возмущающую звезду

$$-d \leq \mu \leq \mu_m < d. \quad (100)$$

Выясним, при каких значениях корней уравнений

$$\mathcal{L}_1(\lambda) = h\lambda^2 + k^2(m_1 + m_2)\lambda + \alpha = h(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0, \quad (101)$$

$$\mathcal{M}_1(\mu) = h\mu^2 + k^2(m_1 - m_2)\mu + \alpha = h(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) = 0 \quad (102)$$

выполняются неравенства (99) и (100). Если корни уравнений (101) и (102) комплексные, то функции $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{M}_1(\mu)$ при всех действительных значениях λ и μ имеют один и тот же знак. Перемена знака подкоренных выражений $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\mathcal{M}(\mu)$ в формуле (92) может

возникнуть лишь только из-за множителей $(\lambda^2 - d^2)$ и $(\mu^2 - d^2)$. Следовательно, в случае комплексных корней переменные λ и μ могут меняться в интервале

$$-d \leq \mu \leq d, \quad (103)$$

$$d \leq \lambda < +\infty \quad (104)$$

и неравенства (99) и (100) не выполняются. Если уравнение (102) имеет комплексные корни, то и уравнение (101) имеет комплексные корни, так как $h^{-1}(m_1 - m_2) > h^{-1}(m_1 + m_2)$. Корни уравнения (102) с точностью до малых величин нулевого порядка

$$\mu_{1,2} = \frac{sd}{m_1 + sm_2} \left[m_1 - m_2 \pm \pm s^{-1} \sqrt{m_1^2 (1-s)^2 + 4sm_1(m_1 + sm_2) \cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2} - 4s^2 m_1 m_2} \right], \quad (105)$$

а также корни уравнения (101)

$$\lambda_{1,2} = \frac{sd}{m_1 + sm_2} \left[m_1 + m_2 \pm s^{-1} \sqrt{m_1^2 (1-s)^2 + 4sm_1(m_1 + sm_2) \cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2} - 4s^2 m_1 m_2} \right] \quad (106)$$

действительны, если

$$m_1^2 (1-s)^2 + 4sm_1(m_1 + sm_2) \cos^2 \frac{\tilde{\omega}}{2} - 4s^2 m_1 m_2 \geq 0, \quad (107)$$

тем более, если

$$s \leq \frac{1 - 2\sqrt{l}}{1 - 4l}, \quad (108)$$

$$l = \frac{m_2}{m_1}. \quad (109)$$

Если $l=1$, то $s \leq \frac{1}{3}$, а при $l \rightarrow \infty$ величина $\frac{1-2\sqrt{l}}{1-4l}$ монотонно убывает /рис.3/.

Вопрос об отрыве комет от Солнца должен быть исследован также при действительных значениях корней уравнений (101) и (102), однако нас интересуют только те случаи, для которых s имеет значения меньше, чем соответствующие значения s фор-

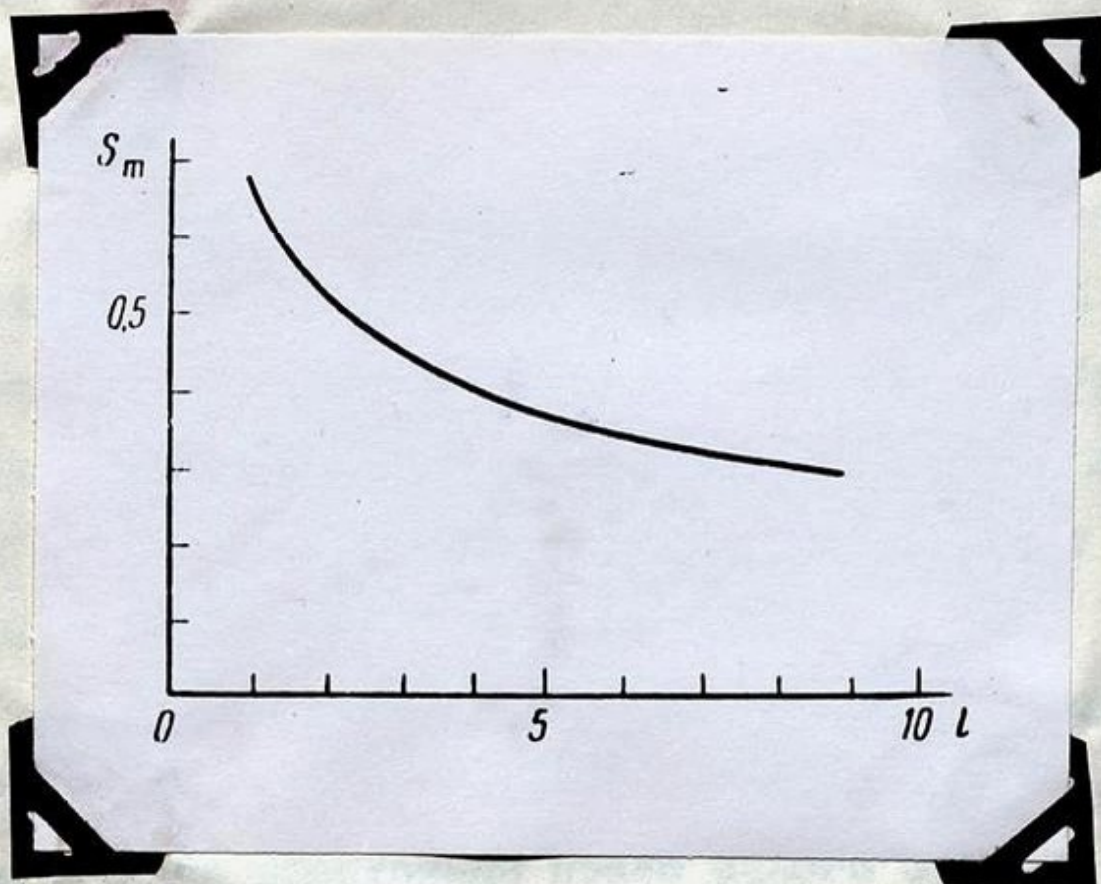


Рис. 3.

мулы (108). Неравенство (104) выполняется при всех возможных действительных значениях $\lambda_{1,2}$. Это видно из того, что в начальный момент подкоренное выражение $\mathcal{L}(\lambda_0) = h(\lambda_0^2 - d^2)(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2) > 0$, т.е.

$(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2) < 0$. Следовательно, один из корней должен быть больше λ_0 , т.е. больше d . Судя по знаку

$\omega(\mu)$, неравенство (103), кроме случая комплексных корней, может не выполняться в двух случаях, а именно: 1/ $\mu_0 < d < \mu_1$; $\mu_0 < d < \mu_2$ и 2/ $\mu_0 > \mu_1$; $\mu_0 > \mu_2$. Первый случай невозможен, ибо $\mu_1 + \mu_2 = -h^{-1}(m_1 - m_2) < 0$. Так как $\mu_0 \approx -d$, то во втором случае $\mu_1 \mu_2 = g d^2$, где с точностью до малых величин нулевого порядка $g \gg 1$. Учитывая (94), (97) и (98), имеем:

$$S = \frac{m_1(1+g)}{2m_1 \cos \tilde{\omega} + m_2(1-g)} \quad (110)$$

Из формулы (110) следует, что во втором случае положительные значения S должны находиться в промежутке $[+1, +\infty]$. Следовательно, формула (108) /рис.3/ определяет те максимальные значения больших полуосей комет, при которых кометы независимо от значений $\tilde{\omega}$ остаются в Солнечной системе.

На основе рассуждений, аналогичных рассуждениям, сделанным для случая одинаковых масс, для перигельного расстояния после одного оборота в случае, удовлетворяющем условию (110), получаем следующую формулу:

$$r_{1m} = \frac{2(d + \mu_1)(d + \mu_2)(\lambda_1 - d)(d - \lambda_2)}{\mu_1 + \mu_2 + \lambda_1 + \lambda_2} \times \left[\frac{2\sqrt{1-\kappa^2} K(\kappa) - (\psi_0 \mp \frac{\pi}{2})}{\sqrt{1-\kappa^2} \sqrt{2d(\lambda_1 - \lambda_2)}} - \frac{2K(\kappa_1) - \psi_0}{\sqrt{(d + \mu_1)(d - \mu_2)}} \right]^2 \quad (111)$$

где φ_0 и γ_0 - начальные значения переменных φ и γ , которые определяются формулами

$$\lambda = -d + \frac{2d(d + \lambda_1)}{2d + (\lambda_1 - d)\sin^2\varphi}, \quad (112)$$

$$\mu = d + \frac{2d(d - \mu_2)}{-(d - \mu_2) - (d + \mu_2)\sin^2\gamma}. \quad (113)$$

§ 8. Оценка ширины зоны
возмущений от звезд $\Delta \frac{1}{a}$.
Обобщенная формула
Орта.

Основные формулы для определения возмущений со стороны звезды на скорость кометы в случае быстро движущейся звезды были выведены Эпиком [52].

Во-первых, рассмотрим, как изменится скорость кометы K , если мимо нее пройдет звезда Z с большей постоянной скоростью \vec{v}_* относительно Солнца.

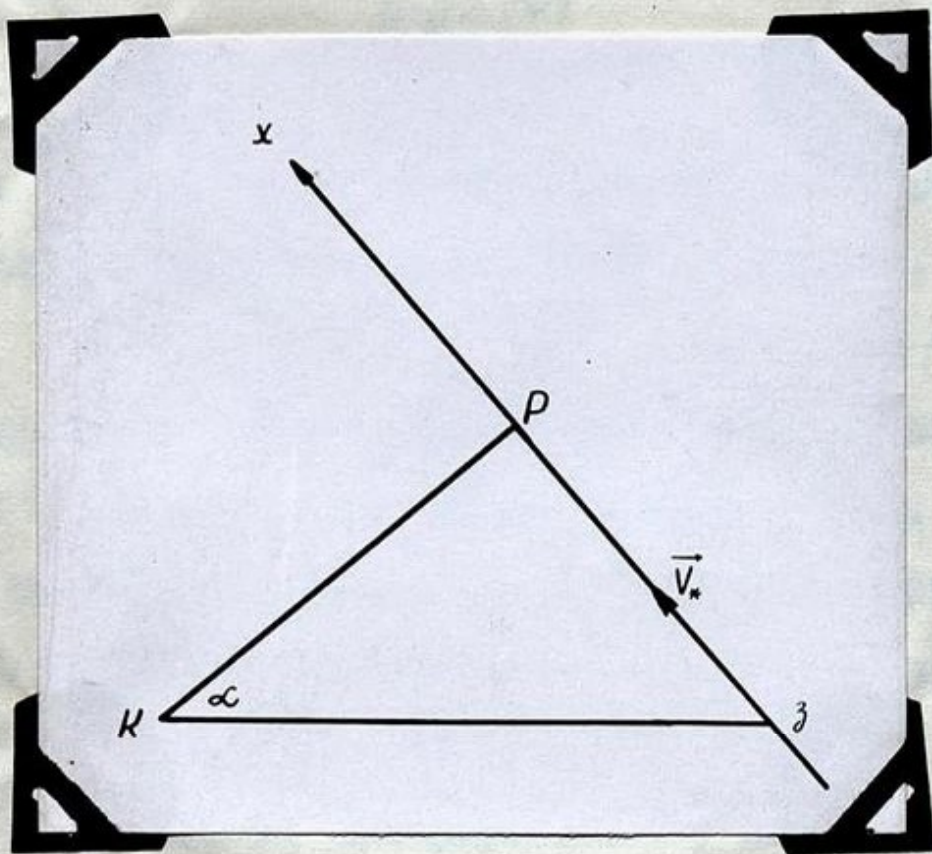


Рис. 4.

Составляющая силы притяжения со стороны звезды на комету по направлению KP имеет следующий вид :

$$F_{\alpha} = \frac{\kappa^2 m M}{\xi^2} \cos^3 \alpha, \quad \kappa P \perp x, \quad \kappa P = \xi, \quad (114)$$

где m — масса кометы, M — масса звезды, κ^2 — постоянная притяжения.

Приращение соответствующей составляющей скорости

$$\Delta u = \frac{2}{m} \int_0^{\infty} F_{\alpha} dt \quad (115)$$

учитывая, что

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad (116)$$

$$x = \xi \operatorname{tg} \alpha \quad (117)$$

имеет вид

$$\Delta u = \frac{2 \kappa^2 M}{\xi v_x}. \quad (118)$$

Так как остальные составляющие не меняются, то Δu представляет изменение всей скорости, т.е.

$$\Delta u = \Delta v \quad (119)$$

Из формулы (118) видно, что достаточно большие изменения скорости получаются только тогда, когда звезда проходит достаточно близко к комете или к Солнцу. Если рассматривается случай отрыва кометы от Солнечной системы, то звезда должна приблизиться к комете и, следовательно, нет надобности учитывать возмущения со стороны звезды на движение Солнца. То же самое будет, если звезда подойдет близко к Солнцу. Условие удаления комет

от Солнечной системы имеет следующий вид:

$$\Delta v \approx \kappa \sqrt{\frac{2m_0}{R}} \quad (120)$$

где R - расстояние кометы до Солнца. Если рассматриваются изменения перигельного расстояния, то следует учесть возмущение со стороны звезды Z на комету K и Солнце C одновременно

$$\begin{aligned} &CP_1 \perp x, \quad CP_1 = D_1, \quad KP_2 \perp x, \quad KP_2 = D, \quad CC_1 \perp KP_2, \\ &C_1L \perp KP_2, \quad C_1L \perp KP_2, \quad \angle CPC = \gamma, \quad \angle CKP_2 = \alpha, \quad \angle CKC_1 = \beta, \\ &CK = R. \end{aligned}$$

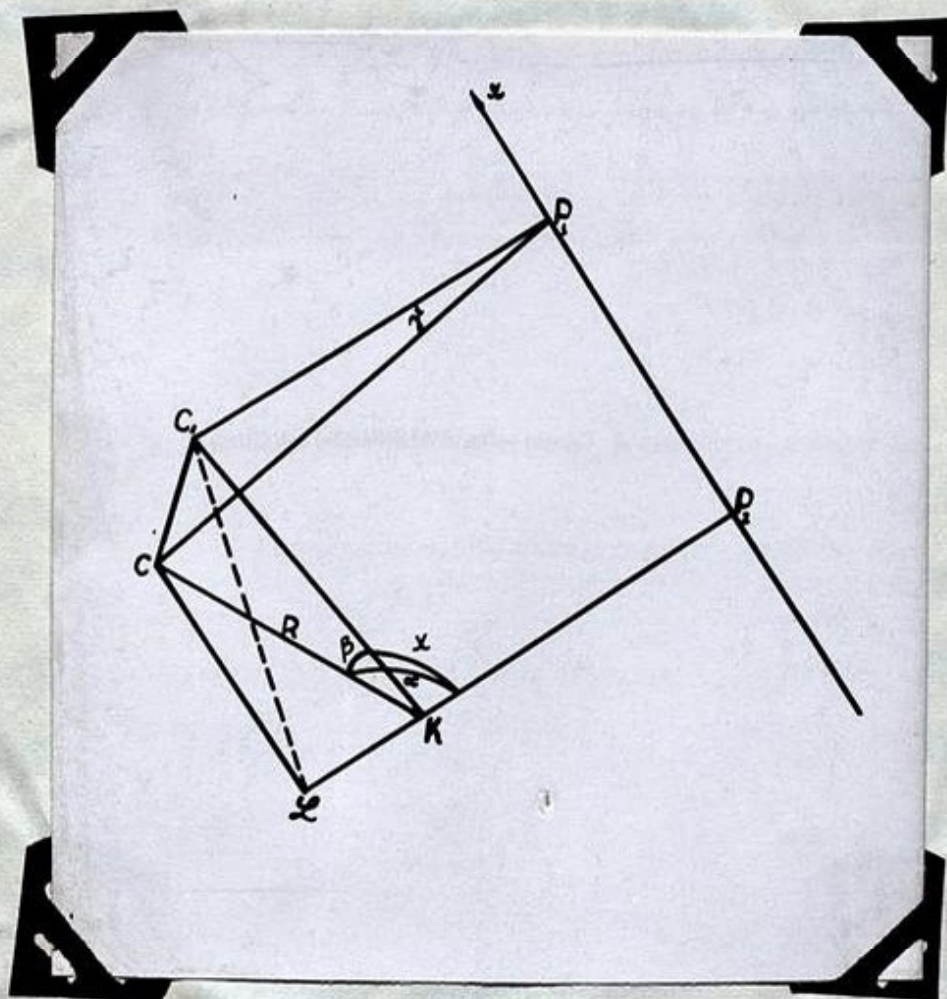


Рис. 5.

Из $\triangle CLK$ следует $LK = -R \cos \alpha$ (121)

следовательно, $C_1P_1 = P_2L = D - R \cos \alpha$, (122)

а из ΔCC_1K

$$CC_1 = R \sin \beta. \quad (123)$$

Следовательно,

$$D_1^2 = (CP_1)^2 = R^2 \sin^2 \beta + D^2 - 2DR \cos \alpha + R^2 \cos^2 \alpha, \quad (124)$$

$$\cos \gamma = \frac{D - R \cos \alpha}{D_1}. \quad (125)$$

Приращение скорости кометы направлено по $KP_2 \parallel C_1P_1$, приращение скорости Солнца направлено по CP_1 . По абсолютной величине приращение скорости определяется формулой (118). Следовательно,

$$\Delta v^2 = \frac{4k^4 M^2}{v_*^2} \left[\frac{1}{D^2} + \frac{1}{D_1^2} - \frac{2}{DD_1} \cos \gamma \right]. \quad (126)$$

Учитывая (124), (125) и (126), получаем [58]

$$\Delta v^2 = \frac{4k^4 M^2}{v_*^2 D^2} \frac{R^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \alpha)}{R^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \alpha) - 2DR \cos \alpha + D^2}. \quad (127)$$

Оорт рассмотрел частный случай формулы (127) при $\beta = 180^\circ - \alpha$. Позже он рассмотрел общий случай при условии, что звезда не возмущает движение кометы и Солнца одновременно. Как Эпик, так и Оорт осредняли соответствующие формулы. Эпик осреднял каждый член в отдельности, но осреднение по D не производил, поэтому исследования Эпика мы использовать не можем. Оорт умножал упрощенную правую часть формулы (127) на $\frac{1}{2} \sin \alpha d\alpha$ и интегрировал в пределах от 0 до π .

Введем вместо α угол x

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \chi. \quad (128)$$

β и χ возможно интерпретировать как высоту и азимут в системе координат, в которой пл. KP_1P_2 является горизонтом, а KP_1 представляет направление NS .

Согласно Оорту, число звезд, массы которых находятся в пределах от M до $M + dM$ и которые перемещаются со скоростями относительно Солнца в пределах от v_* до $v_* + dv_*$ и проходят в секунду на расстоянии от кометы между \mathcal{D} и $\mathcal{D} + d\mathcal{D}$, определяются формулой

$$j'(M) dM 2\pi \mathcal{D} d\mathcal{D} v_* \frac{4\ell^3}{\sqrt{\pi}} v_*^2 e^{-\ell^2 v_*^2} dv_*. \quad (129)$$

Функция $j'(M)$ представляет число звезд с массой M в одном см^3 . Соответствующие данные Оорт брал из работы [59] и получил $\int M^2 j'(M) dM = 0.040$ /солнечных масс/ 2 в парсеке, или $5,4 \cdot 10^9$ pc^2/cm^3 , а $\frac{\ell}{2} = 1,41 \cdot 10^{-7} \text{cm}/\text{cm}^2$

Среднее изменение квадрата скорости определяется формулой

$$\begin{aligned} \overline{\Delta v^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{M=0}^{\infty} \int_{v_*=0}^{\infty} \int_{\mathcal{D}=0}^{\infty} \int_{\chi=0}^{2\pi} \int_{\beta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta v^2 \cos \beta j'(M) \times \\ &\times 2\pi \mathcal{D} v_* \frac{4\ell^3}{\sqrt{\pi}} v_*^2 e^{-\ell^2 v_*^2} dM dv_* d\mathcal{D} d\chi d\beta = \\ &= 6,1 \cdot 10^{-11} \int_{\mathcal{D}=0}^{\infty} \int_{\chi=0}^{2\pi} \int_{\beta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{R^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos^2 \chi) \cos \beta d\mathcal{D} d\chi d\beta}{R^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos^2 \chi) - 2\mathcal{D} R \cos \beta \cos \chi + \mathcal{D}^2} \end{aligned} \quad (130)$$

Формула (130) является обобщением формулы Оорта. В формуле (130), в отличие от формулы Оорта, учитывается одновременное влияние Солнца и звезды на движение кометы. Интеграл (130) является несобственным и приводит к ∞ большим значениям. Следуя Оорту, при определении $\overline{\Delta v^2}$ из интеграла исключим те значения скоростей, которые превышают значения скорости освобождения, т.е.

$$\frac{3,61}{D^2} \cdot \frac{R^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos^2 \alpha)}{R^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos^2 \alpha) - 2DR \cos \beta \cos \alpha + D^2} > \frac{1}{R}. \quad (131)$$

Коэффициент 3,61 определен при средней массе звезд равной 1,4 Солнечных масс и средней скорости звезд, 31 км/сек, R в а.е.

При помощи подстановки

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin \varphi \cos \left(\frac{\gamma - \delta}{2} + \frac{\pi}{2} \right), \\ \cos \beta \cos \alpha &= \sin \varphi \sin \left(\frac{\gamma - \delta}{2} + \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (132)$$

$$D = \frac{R \sin \varphi \sin \frac{\gamma + \delta}{2}}{\cos \left(\delta - \frac{\pi}{2} \right)}$$

имеем:

$$\overline{\Delta v^2} = 6,1 \cdot 10^{-11} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\delta=0}^{\pi} \int_{\gamma=-\delta}^{\delta} \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi - \cos \delta} d\varphi d\delta d\gamma, \quad (133)$$

причем следует интегрировать по тем значениям, которые удовлетворяют неравенству

$$\sin \varphi \geq 2 \sqrt{\frac{3,61}{R}} \frac{\sin^2 \delta}{\cos \gamma - \cos \delta} = \nu \frac{\sin^2 \delta}{\cos \gamma - \cos \delta}, \quad (134)$$

т.е. в пределах от значения, соответствующего знаку равенства, до $\frac{\pi}{2}$. Если мы переменим порядок интегрирования, то нижний предел будет φ_0 , где

$$\sin \varphi_0 = \nu \frac{\sin^2 \delta}{\cos \gamma - \cos \delta}. \quad (135)$$

Однако тогда интегрирование по γ не надо будет проводить в пределах от $-\delta$ до $+\delta$, а в более узких пределах, а именно от $-\gamma_0$ до $+\gamma_0$, где

$$\cos \gamma_0 = \cos \delta + \nu \sin^2 \delta, \quad (136)$$

так как

$$\frac{\nu \sin^2 \delta}{\cos \gamma - \cos \delta} \leq 1. \quad (137)$$

Таким образом,

$$\overline{\Delta v^2} = 6,1 \cdot 10^{-11} \int_{\delta=0}^{\pi} \int_{\gamma=-\gamma_0}^{\gamma_0} \int_{\varphi=\varphi_0}^{\pi/2} \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\cos \gamma - \cos \delta} d\varphi d\gamma d\delta =$$

$$= 12,2 \cdot 10^{-11} \int_{\delta=0}^{\pi} \int_{\gamma=0}^{\gamma_0} \frac{\sin \delta \sqrt{[\cos \gamma - \cos \delta]^2 - \nu^2 \sin^4 \delta}}{(\cos \gamma - \cos \delta)^2} d\gamma d\delta, \quad (138)$$

причем, как видно из (137) и (138), интегрирование по γ происходит по всем действительным значениям подинтегральной функции. Если произвести подстановку

$$\cos \gamma = \frac{[1 - \nu \sin^2 \delta] x + t \cos \delta}{x \cos \delta + [1 - \nu \sin^2 \delta] t}, \quad (139)$$

где \mathcal{X} - меньший корень уравнения

$$\mathcal{X}^2 \nu - \mathcal{X}(1 + \nu^2 \sin^2 \delta) + \nu = 0, \quad (140)$$

то интеграл приводится к нормальной форме эллиптических интегралов. Если ввести обозначения

$$s = \sin \delta, \quad c = \cos \delta, \quad (141)$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \frac{1 + \nu^2 s^2 - \sqrt{(1 + \nu^2 s^2)^2 - 4\nu^2}}{2\nu} = \\ &= \frac{2\nu}{1 + \nu^2 s^2 + \sqrt{(1 + \nu^2 s^2)^2 - 4\nu^2}}. \end{aligned} \quad (142)$$

Если, кроме подстановки (139), применим подстановку

$$t = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}, \quad (143)$$

то получим:

$$\begin{aligned} \Delta \nu^2 &= 12.2 \cdot 10^{-11} \int_{s=0}^{\pi} \frac{\nu \sqrt{(1 - \mathcal{X} \nu^2 s^2)^2 - \mathcal{X}^2 c^2} \sqrt{1 - 2\mathcal{X} \nu + \mathcal{X}^2 \nu^2 s^2}}{\mathcal{X}} \int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} [1 - \\ &- \mathcal{X} \nu + \nu c \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}]^{-2} \frac{k^2 \sin^2 u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du d\delta, \end{aligned} \quad (144)$$

где

$$k = \sqrt{1 - \mathcal{X}^2}. \quad (145)$$

Так как

$$\mathcal{X}(s=0) = (1 - \sqrt{1 - 4\nu^2})(2\nu)^{-1} = \nu + \nu^3 + 2\nu^5 + \dots,$$

$$\mathcal{X}(s=1) = \nu,$$

то \mathcal{X} меняется в узких пределах. Следовательно, k

мало отличается от K_0 , где

$$K_0 = \sqrt{1 - \nu^2} \quad (146)$$

и $\sqrt{1 - K^2 \sin^2 u}$ мало отличается от Δ , где

$$\Delta = \sqrt{1 - K_0^2 \sin^2 u} \quad (147)$$

Учитывая разложения

$$\mathcal{L} = \nu + c^2 \nu^3 + (c^2 + c^4) \nu^5 + \dots, \quad (148)$$

$$\sin^2 u = \frac{1 - \Delta^2}{1 - \nu^2} = (1 - \Delta^2)(1 + \nu^2 + \nu^4 + \dots), \quad (149)$$

$$\sqrt{1 - K^2 \sin^2 u} = \Delta + \left(\frac{1}{\Delta} - \Delta\right)(c^2 \nu^4 + \dots) \quad (150)$$

и аналогичные, а также соотношения

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\Delta^3} = \frac{1}{\nu^2} E, \quad \int_0^{\pi/2} \Delta^3 du = \frac{2}{3} E + \nu^2 \frac{-K + 2E}{3}, \quad (151)$$

без труда получаем:

$$\Delta \nu^2 = 12,2 \cdot 10^{-11} \left[K - E + \nu^2 \frac{K - E}{4} + \dots \right], \quad (152)$$

где полные эллиптические интегралы следует брать по модулю

$$K_0^2 = 1 - \nu^2 = 1 - \frac{4 \cdot 3,61}{R}.$$

Если мы не учтем последний член в квадратных скобках (152), то относительная ошибка будет меньше 10^{-3} . По формуле (152) имеем:

R	$25 \cdot 10^3$	$50 \cdot 10^3$	$100 \cdot 10^3$	$200 \cdot 10^3$
$\Delta \nu^2 (152)_{303,10^8 \text{ лет}}$	$1,49 \cdot 10^8$	$1,62 \cdot 10^8$	$1,75 \cdot 10^8$	$1,87 \cdot 10^8$
$\Delta \nu^2 \text{ по Оерту}$	$1,64 \cdot 10^8$	$1,72 \cdot 10^8$	$1,84 \cdot 10^8$	$1,94 \cdot 10^8$

Очевидно, что Оорт, предполагая, что возмущения от звезд действуют на комету и Солнце отдельно, получил практически те же самые результаты. Так как нас интересует только порядок $\overline{\Delta v^2}$, то мы будем считать $\overline{\Delta v^2} = 2 \cdot 10^8 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}}\right)^2 = 6.6 \cdot 10^{-9} \left(\frac{\text{а.е.}}{\text{д}}\right)^2$ за $3 \cdot 10^9$ лет. Приблизительно возможно считать, что перигельное расстояние определяется трансверсальной составляющей скорости кометы v_c

$$q = \frac{v_c^2 R^2}{2 \kappa^2}, \quad (153)$$

где κ^2 постоянная притяжения. Поступая аналогично Оорту, получаем:

$$\Delta q = \frac{\overline{\Delta v^2} R^2}{6 \kappa^2}. \quad (154)$$

Оценим область тех комет, у которых за один оборот q в среднем изменяется больше, чем на определенную величину Δq_0 , т.е., у которых

$$\Delta q > \Delta q_0.$$

Согласно формуле (154), для этих комет

$$a^{\frac{3}{2}} > \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^9 \cdot 0,0172^2}{2 \cdot 6,6} \Delta q_0 = 2 \cdot 10^{14} \Delta q_0. \quad (155)$$

По формуле (155) получаем:

Δq	0,1 а.е.	1,0 а.е.	5,0 а.е.	100 а.е.
$\frac{1}{a}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$0,80 \cdot 10^{-4}$	$0,52 \cdot 10^{-4}$	$0,22 \cdot 10^{-4}$

Если вследствие возмущений со стороны звезд у кометы перигельное расстояние за один оборот изменится в два раза больше, чем расстояние до Плутона, то, очевидно, орбиту такой кометы можно называть неустойчивой. Следовательно, неустойчивы орбиты, у которых $a \approx 50.000 \text{ а.е.}$. Вполне устойчивы орбиты, у которых $a \approx 5.000 \text{ а.е.}$. Согласно анализу распределения обратных величин больших полуосей в интервале $\frac{1}{a} [0; 0,0004]$, по Оорту, находится значительная часть /около 20 %/ всех почти параболических комет.

§ 9. О необходимости дальнейших исследований.

Проблема возмущений со стороны звезд на движение комет возникает при решении двух вопросов. Во-первых, при исследовании вопроса о том, как возникло такое кометное облако, которое мы наблюдаем. Главной особенностью облака является то, что максимум числа комет с малыми перигельными расстояниями /порядка 1 а.е./ находится в области почти параболических комет, что указывает на большие размеры облака и что орбиты почти параболических комет не имеют тенденции к концентрации, вблизи орбит планет, т.е., что облако возникло очень давно. Мы уже отмечали, что по вопросу об-

разования кометного облака, как с точки зрения взрыва гипотетической планеты, так и с точки зрения теории извержения не имеется никаких существенных исследований. Нам кажется наиболее естественной гипотеза возникновения облака в процессе образования Солнечной системы. Во-вторых, изучение возмущений со стороны звезд на движение комет необходимо при исследовании вопроса о том, можно ли, действием этих возмущений объяснить восстановление числа комет с малыми q , разрушенными в лучах Солнца или рассеянными возмущающим действием планет. Мы установили, что возмущения со стороны звезд могут в среднем изменить перигельные расстояния в несколько ^{десять} астрономических единиц, если большие полуоси соответствующих орбит комет примерно равны 50.000 а.е. Подобные оценки получил Оорт. По Оорту кометное облако имеет ~~перевале~~ ^{одно} больше размеры и ^{оно} распространяется даже дальше, чем на расстояние до ближайших звезд. Он считает, что диаметр облака около 200 000 а.е. Фесенков считает, что размеры кометного облака определяются кометами, которые достаточно сильно связаны с Солнцем, т.е. силы притяжения которых к Солнцу значительно больше, чем силы возмущений со стороны звезд. В.Г.Фесенков оценивает радиус облака величиной несколько десятков тысяч а.е., что сов-

падает с нашими исследованиями, которые приводятся в § 6. Однако, как видно из таблицы 11, значительная часть комет пришла из гораздо больших расстояний и, следовательно, оценка Оорта, которая обобщена в § 8 [58], более правильна.

С.К. Всехсвятский [60] критиковал работу Оорта [4] и утверждал, что вследствие возмущений со стороны звезд, кометы не могут быть направлены в Солнечную систему, т.к. тогда следовало бы наблюдать значительную часть гиперболических комет. Это утверждение неправильно, ибо по исследованиям Скианарели, Фабри и Моисеева при равномерном распределении скоростей комет по направлениям на сфере действия Солнца, если скорости распределены по модулям даже равномерно в сфере видимости наблюдаются почти только эллиптические кометы. Так как вследствие возмущений со стороны звезд скорости комет могут принять весьма малые значения, то тем более нет основания ожидать появления гиперболических комет в сфере видимости, что соответствует наблюдениям. Следует отметить, что первоначальные орбиты комет 1886 1, 1898 У11, 1899 1, 1914 111-гиперболические. Несмотря на некоторые выше отмечанные достижения по изучению вопроса возмущений со стороны звезд на движение комет, открытым остается вопрос о том, могут ли

возмущения со стороны звезд обеспечить достаточно быстрый — приток почти параболических комет в сферу видимости или нет, т.е. эти исследования не дадут ответ на вопрос, правильна ли гипотеза Литтлтона или же гипотезы, которые предполагают, что кометы когда-то были выброшены из окрестности Солнца, т.е. гипотеза Ольберса, гипотеза извержения, гипотеза О.Ю.Шмидта и т.д. По нашему мнению, этот вопрос может быть решен при помощи исследований возмущений со стороны звезд на движение комет. Для этого следует построить статистическую теорию возмущений со стороны звезд на движение комет, которая совместно изучала бы изменения больших полуосей и перигельных расстояний орбит комет. Для решения этого важного вопроса следует улучшить также наблюдательную службу за кометами и расширить работу по определению первоначальных значений больших полуосей орбит комет.

Всё выше сказанное, по сути дела, относится к вопросу о принадлежности комет к Солнечной системе, которым мы в дальнейшем не будем заниматься. Мы просто учтем, что вблизи Солнца существует сильный поток почти параболических комет.

В заключение отметим, что в настоящее время весьма интенсивно дискутируется вопрос о принадлежности комет к Солнечной системе с точки зрения

анализа распределения элементов орбит почти параболических комет, т.е. проводится анализ эффекта Витковского - Оппенгейма. По этому вопросу укажем на следующие работы [61] - [65]. Наблюдается приблизительно равномерное распределение элементов орбит комет. Однако имеются некоторые небольшие отклонения от равномерного распределения, притом разные исследователи получают противоречивые результаты. Мы считаем, что соответствующие отклонения от равномерного распределения получаются из-за селекции открытия комет.

ГЛАВА 111

СРЕДНЕЕ ИЗМЕНЕНИЕ ОБРАТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ БОЛЬШОЙ ПОЛУОСИ ВСЛЕДСТВИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ПЛАНЕТ.

§ 10. Проверка Гипотезы Оорта.

В теории диффузии почти параболических комет следует знать числовое значение величины

$$Q = \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\delta) \delta^2 d\delta \right]^{-1} = \left[\frac{1}{2} \overline{\delta^2} \right]^{-1}, \quad (156)$$

где $\varphi(\delta) d\delta$ есть вероятность того, что обратная величина большой полуоси $\frac{1}{a_1}$ при прохождении кометы через Солнечную систему изменяется на величину в пределах от δ до $\delta + d\delta$.

Оорт [4] предположил, что

$$\varphi(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2}. \quad (157)$$

В таком случае средние значения

$$\overline{|\delta|} = 2 \int_0^{\infty} \varphi(\delta) \delta d\delta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \quad (158)$$

$$\overline{\delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\delta) \delta^2 d\delta = \frac{1}{2h^2}, \quad (159)$$

следовательно,

$$\overline{\delta^2} = \frac{\pi}{2} (\overline{|\delta|})^2. \quad (160)$$

Для определения $\overline{|\delta|}$ Оорт использовал вычисленные Г.Фэйем [66] значения $\Delta \frac{1}{\alpha_0}$ для 146 почти параболических комет. Возмущения обратных величин больших полуосей Фэе вычислил для движения комет в интервале $\nu[-180^\circ, 0^\circ]$. Для определения $\overline{|\delta|}$ следует знать δ при движении комет в интервале $\nu[-180^\circ, +180^\circ]$. Я.Оорт предположил, что значения δ , соответствующие интервалам $\nu[-180^\circ, 0^\circ]$ и $\nu[0^\circ, +180^\circ]$, независимы, следовательно,

$$|\overline{\delta}[\nu(-180^\circ, +180^\circ)]| = \sqrt{2} |\overline{\delta}[\nu(-180^\circ, 0^\circ)]|, \quad (161)$$

причем, соответствующее значение δ определяется, как $\sqrt{\text{разность}}$ значения обратной величины большой полуоси и среднего значения. Он также считал, что

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{\alpha_0} [\nu(-180^\circ, 0^\circ)] - \Delta \frac{1}{\alpha_0} [\nu(0^\circ, 180^\circ)] &= \\ = \delta [\nu(-180^\circ, 0^\circ)] - \delta [\nu(0^\circ, +180^\circ)], \end{aligned} \quad (162)$$

т.е.

$$\overline{\Delta \frac{1}{\alpha_0} [\nu(-180^\circ, 0^\circ)]} = -\overline{\Delta \frac{1}{\alpha_0} [\nu(0^\circ, +180^\circ)]}. \quad (163)$$

Оорт проверил, что данные Фэе подчиняются нормальному закону (157) при $|\overline{\delta}| = 0,000344$. Данные Фэе представлены в таб. III.

Таблица 111

$\frac{1}{\alpha}$	Число комет по данным Фэе.	Число комет согласно (157)
0.0000 - 0.0002	50	52
0.0002 - 0.0004	45	42
0.0004 - 0.0006	33	28
0.0006 - 0.0008	9	15
0.0008 - 0.0010	3	6
$\frac{1}{\alpha} > 0.0010$	6	3

В настоящее время известно несколько комет, у которых $\Delta \frac{1}{\alpha}$ вычислено при изменении истинной аномалии от $\nu = -180^\circ$ до $\nu = +180^\circ$. Соответствующие данные сопоставлены в таб. IV. Здесь изменения $\Delta \frac{1}{\alpha}, [\nu(-180^\circ, 0^\circ)]$ взяты из работы М. Дирикиса [38] и Г. Фэе [66], а $\Delta \frac{1}{\alpha}, [\nu(0^\circ, 180^\circ)]$ по вычислениям Галибиной [5].

Из таблицы непосредственно видно, что предположения Оорта примерно имеют место. То обстоятельство, что $\overline{\delta} \neq 0$, очевидно, можно объяснить тем, что при выяснении вопроса о первоначальном характере орбит обращают, главным образом, внимание на те кометы, у которых $\frac{1}{\alpha} < 0$. Что же

Таблица IV

Комета	$\Delta \frac{1}{a_i}$ $\nu(0^\circ, +180^\circ)$	δ $\nu(0^\circ, +180^\circ)$	$\Delta \frac{1}{a_i}$ $\nu(-180^\circ, 0^\circ)$	δ $\nu(-180^\circ, 0^\circ)$	δ $\nu(-180^\circ, +180^\circ)$
1864 ^{III}	+612.10 ⁻⁶	+182.10 ⁻⁶	-392.10 ⁻⁶	+217.10 ⁻⁶	+220.10 ⁻⁶
1889 ^I	+97.10 ⁻⁶	-333.10 ⁻⁶	-734.10 ⁻⁶	-125.10 ⁻⁶	-637.10 ⁻⁶
1889 ^{II}	+1176.10 ⁻⁶	+746.10 ⁻⁶	-979.10 ⁻⁶	-370.10 ⁻⁶	+197.10 ⁻⁶
1892 ^I	+550.10 ⁻⁶	+120.10 ⁻⁶	+171.10 ⁻⁶	+780.10 ⁻⁶	+721.10 ⁻⁶
1892 ^{II}	+718.10 ⁻⁶	+288.10 ⁻⁶	-998.10 ⁻⁶	-389.10 ⁻⁶	-280.10 ⁻⁶
1897 ^I	+511.10 ⁻⁶	+81.10 ⁻⁶	-912.10 ⁻⁶	-303.10 ⁻⁶	-401.10 ⁻⁶
1898 ^{VI}	-160.10 ⁻⁶	-590.10 ⁻⁶	-592.10 ⁻⁶	+17.10 ⁻⁶	-752.10 ⁻⁶
1899 ^I	+948.10 ⁻⁶	+518.10 ⁻⁶	-1046.10 ⁻⁶	-437.10 ⁻⁶	-98.10 ⁻⁶
1904 ^I	+1024.10 ⁻⁶	+594.10 ⁻⁶	-720.10 ⁻⁶	-111.10 ⁻⁶	+304.10 ⁻⁶
1907 ^I	+222.10 ⁻⁶	-208.10 ⁻⁶	-524.10 ⁻⁶	+85.10 ⁻⁶	-302.10 ⁻⁶
1908 ^{III}	+310.10 ⁻⁶	-120.10 ⁻⁶	-890.10 ⁻⁶	-281.10 ⁻⁶	-580.10 ⁻⁶
1914 ^{III}	-90.10 ⁻⁶	-520.10 ⁻⁶	+54.10 ⁻⁶	+663.10 ⁻⁶	-36.10 ⁻⁶
1914 ^V	+197.10 ⁻⁶	-233.10 ⁻⁶	-158.10 ⁻⁶	+451.10 ⁻⁶	+39.10 ⁻⁶
1930 ^{IV}	+185.10 ⁻⁶	-245.10 ⁻⁶	-697.10 ⁻⁶	-88.10 ⁻⁶	-512.10 ⁻⁶
1932 ^V	+377.10 ⁻⁶	-53.10 ⁻⁶	-639.10 ⁻⁶	-30.10 ⁻⁶	-262.10 ⁻⁶
1936 ^I	+201.10 ⁻⁶	-229.10 ⁻⁶	-692.10 ⁻⁶	-83.10 ⁻⁶	-491.10 ⁻⁶
$\overline{\Delta \frac{1}{a_i}}, \delta$	+430.10 ⁻⁶	000.10 ⁻⁶	-609.10 ⁻⁶	-000.10 ⁻⁶	-179.10 ⁻⁶
$ \delta(-180^\circ, +180^\circ) $ (161)		447.10 ⁻⁶		392.10 ⁻⁶	365.10 ⁻⁶

касается предположения (161), то, очевидно, что оно черезчур строгое и множитель $\sqrt{2}$ несколько

преувеличен.

По данным Г. Фэе можно определить зависимости $D=D(i)$ и $D=D(q)$. Результаты представлены в таблицах \bar{V} и \bar{VI} .

Таблица \bar{V}

i	\bar{V}
$0^\circ - 30^\circ$	$548 \cdot 10^{-6}$
$30^\circ - 60^\circ$	$608 \cdot 10^{-6}$
$60^\circ - 90^\circ$	$714 \cdot 10^{-6} / 492 \cdot 10^{-6}$
$90^\circ - 120^\circ$	$342 \cdot 10^{-6}$
$120^\circ - 150^\circ$	$453 \cdot 10^{-6}$
$150^\circ - 180^\circ$	$510 \cdot 10^{-6}$

В интервале $60^\circ - 90^\circ$ находится комета 1840 \bar{III} , которая имела со стороны Юпитера сильные возмущения, так как она близко подошла ^K к нему. Если этот исключительный случай не учитывать, то получается величина, которая дана в скобках. Если составить среднее из значений δ для интервалов $[0^\circ, 90^\circ]$ и $[90^\circ, 180^\circ]$ и подсчитать отношение значений для этих интервалов, то имеем [67]

$$\frac{D \text{ /для прямого движения/}}{D \text{ /для обратного движения/}} \approx 0,4.$$

А. Вурком теоретически получил

$$\frac{D \text{ /для прямого движения/}}{D \text{ /для обратного движения/}} \approx 0,5.$$

Зависимость $\bar{\delta} = \bar{\delta}(q)$ представлена в таблице VI.

Таблица VI

Перигельное расстояние q	$\overline{ \delta }$
0.0 а.е. - 0.5 а.е.	$384 \cdot 10^{-6}$
0.5 а.е. - 1.0 а.е.	$688 \cdot 10^{-6} / 555 \cdot 10^{-6} /$
1.0 а.е. - 1.5 а.е.	$455 \cdot 10^{-6}$
1.5 а.е. - 2.0 а.е.	$311 \cdot 10^{-6}$

Данные таблицы VI явно не сходятся с теорией. Очевидно, это потому, что они искажены селекцией наблюдений. Так, например, в интервале 1,5 а.е. - 2,0 а.е. имеются почти исключительно кометы, у которых $\omega \approx 90^\circ$. По видимому точные значения $\bar{\delta}^2 = \bar{\delta}^2(i, q)$ можно найти только при помощи теории.

§ 11. Метод фиктивных комет.

Большим недостатком определения \mathcal{D} по δ является ограниченность наблюдательного материала. Поэтому для исследования возмущающего действия планет, нами [35] был предложен метод фиктивных комет. Мы рассмотрели 12 фиктивных комет, по-разному расположенных в перигелии относительно Юпи-

тера, и подсчитали возмущения от Юпитера при движении комет от $\nu=0^\circ$ до $\nu=162^\circ$. Несомненно, что 12 фиктивных комет — это слишком малое количество, чтобы полученное на основе этих подсчетов значение для \mathcal{D} можно было бы считать надежным, однако исследование показало, что предлагаемый метод является весьма эффективным.

Интегрирование дифференциального уравнения для обратной величины большой полуоси велось вначале в относительной системе координат. При $\tau=5,2 \text{ a.e.}$ осуществлялся переход на барицентрическую систему координат и дальше определялась величина $\frac{1}{a_1}$. Для относительной системы координат имеем аналогично (13), (14)

$$S = K^2 \left[- \frac{\rho - \tau_1 \cos(KS_0\mathcal{F})}{\Delta_1^3} - \frac{\cos(KS_0\mathcal{F})}{\tau_1^2} \right], \quad (164)$$

$$T = K^2 \left(\frac{\tau_1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\tau_1^2} \right) \cos(\vec{S}_0\mathcal{F}, \vec{j}_T), \quad (165)$$

где через Δ_1 обозначено расстояние кометы \mathcal{K} от Юпитера \mathcal{F} , через S_0 обозначено Солнце, а \vec{j}_T — единичный вектор положительного направления T .

Подставляя выражения для S и T в формулу $\sqrt{\frac{(11)}{}}$ учитывая известные [(15), (16)] соотношения между $KS_0\mathcal{F}$, $(\vec{S}_0\mathcal{F}, \vec{j}_T)$ и элементами орбиты, получим :

$$\frac{d\frac{1}{a_0}}{dt} = \frac{-4km_2 \cos \frac{\psi}{2}}{\sqrt{\mu}} \left[-\frac{p \sin \frac{\psi}{2}}{\Delta_1^3} + \left(\frac{r_1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{r_2} \right) \cos \chi \right], \quad (166)$$

где

$$\cos \chi = \cos \varrho \cos \left(\omega + \frac{\psi}{2} + 90^\circ \right) + \sin \varrho \sin \left(\omega + \frac{\psi}{2} + 90^\circ \right) \cos i. \quad (167)$$

В формуле (167) долгота Юпитера ϱ считается от восходящего узла Ω . Чтобы показать, что 12 рассмотренных орбит комет представляют все кометы, задача исследовалась также качественно [35].

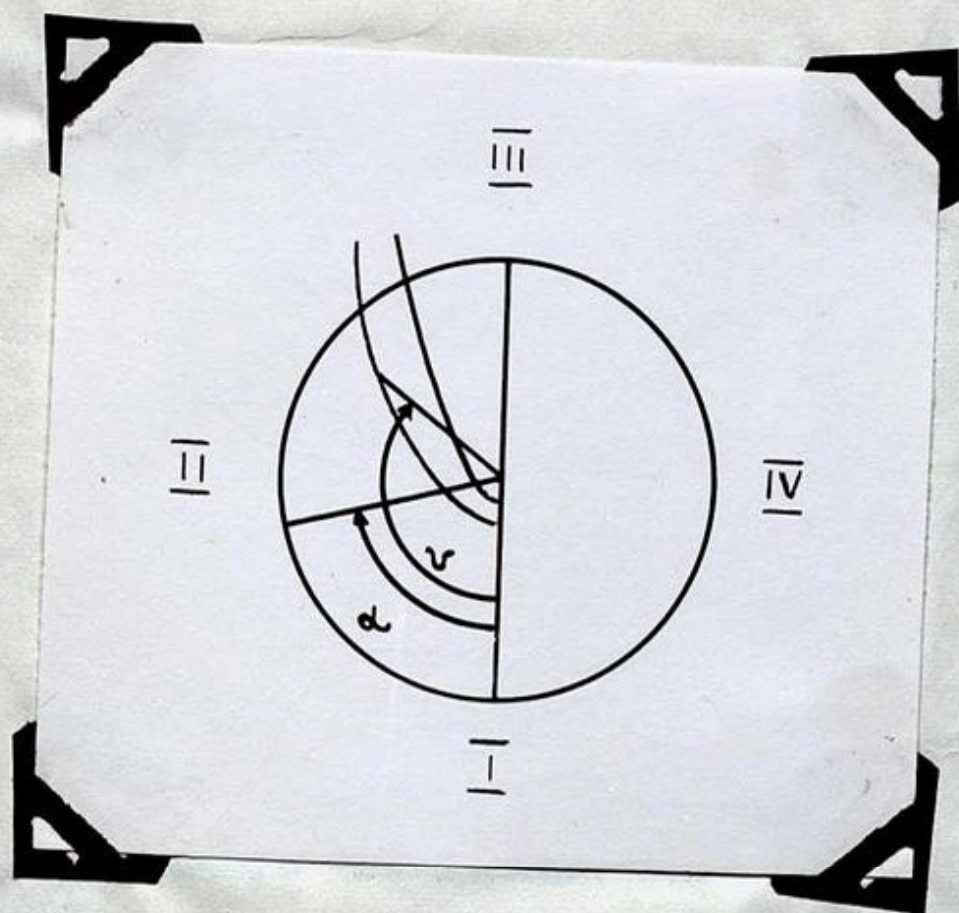


Рис. 6.

Исследуем движение восьми идеальных комет, находящихся в плоскости Юпитера. Пусть эти кометы имеют $q=0,7 \text{ а.е.}$ и $q=0,3 \text{ а.е.}$. Начальные условия

определим следующим образом. Если Юпитер находится в одном из следующих положений: $\overline{I} (\alpha = 345^\circ)$, $\overline{II} (\alpha = 75^\circ)$, $\overline{III} (\alpha = 165^\circ)$, $\overline{IV} (\alpha = 255^\circ)$, то кометы находятся в перигелии /рис. 6/. Численное интегрирование дает следующие результаты :

Таблица $\overline{Y11}$ Значения $\Delta \frac{1}{a_0}$

	\overline{I}	\overline{II}	\overline{III}	\overline{IV}
$q = 0,7$	-0,0001	+0,0003	+0,0002	-0,0001
$q = 0,3$	-0,0001	+0,0002	-0,0000	-0,0000

После перехода в барицентрическую систему, получаем :

Таблица $\overline{Y111}$ Значения $\Delta \frac{1}{a_1}$

	\overline{I}	\overline{II}	\overline{III}	\overline{IV}
$q = 0,7$	+0,0002	+0,0015	+0,0005	-0,0005
$q = 0,3$	+0,0004	+0,0013	+0,0008	-0,0004

Из данных, приводимых в таблицах $\overline{Y11}$ и $\overline{Y111}$ видно, что приращения $\Delta \frac{1}{a_1}$ мало зависят от величины перигельного расстояния параболы. Поэтому в дальнейшем ограничимся вычислениями только для $q = 0,7 \text{ а.е.}$

Пространственное движение исследуется только для случаев $i = 90^\circ, \omega = 0^\circ; i = 90^\circ, \omega = 90^\circ$. Соответствующие результаты представлены в таблицах \overline{IX} и \overline{X} .

Таблица $\overline{\text{IX}}$. Значения $\Delta \frac{1}{a_0}$

$i = 90^\circ$	$\overline{\text{I}}$	$\overline{\text{II}}$	$\overline{\text{III}}$	$\overline{\text{IV}}$
$\omega = 0^\circ$	+0.0001	-0.0001	+0.0001	+0.0002
$\omega = 90^\circ$	+0.0001	+0.0002	+0.0001	-0.0001

Таблица $\overline{\text{X}}$. Значения $\Delta \frac{1}{a_1}$

$i = 90^\circ$	$\overline{\text{I}}$	$\overline{\text{II}}$	$\overline{\text{III}}$	$\overline{\text{IV}}$
$\omega = 0^\circ$	-0.0001	+0.0002	+0.0010	+0.0006
$\omega = 90^\circ$	+0.0008	+0.0006	+0.0004	+0.0003

Рассмотрим изменение величины $\frac{1}{a_2}$ для кометы, у которой $q = 0,7 a. e.$, если Юпитер находится в положениях $\overline{\text{I}}$, $\overline{\text{II}}$, $\overline{\text{III}}$, $\overline{\text{IV}}$. Вычисления по формуле (11) дают, что величина $\frac{1}{a_2}$ при движении кометы от перигелия до $\nu = 162^\circ$ изменяется на величины, которые приводятся в табл. $\overline{\text{XI}}$.

Таблица $\overline{\text{XI}}$. Значения $\Delta \frac{1}{a_2}$

		$\overline{\text{I}}$	$\overline{\text{II}}$	$\overline{\text{III}}$	$\overline{\text{IV}}$
$i = 0^\circ$		+0.0002	+0.0020	+0.0003	-0.0003
$i = 90^\circ$	$\omega = 0^\circ$	-0.0001	+0.0002	+0.0009	+0.0004

В случае $\omega = 90^\circ$, мы можем ограничиться результатами, приводимыми в таблице $\overline{\text{X}}$. Действительно, в этом случае кометы находятся на сравнительно далеких расстояниях от Юпитера, и, следовательно,

возмущения по сравнению с величинами, данными в табл. \bar{X} малы. Легко убедиться, что среднее значения для 12 комет равно $\Delta \frac{1}{a_i} = 0.00047$, т.е. $\overline{|\delta|} = 0.00041$.

§ 12. Анализ метода Вурко- ма. Подсчеты Керра.

Метод Вуркома для нахождения среднего значения квадратов изменений обратной величины большой полуоси при прохождении кометы через Солнечную систему состоит из двух частей. Во-первых, Вурком определил изменение обратной величины большой полуоси орбиты параболической кометы δ при её движении из межзвездного пространства к Солнцу и обратно как функцию двух аргументов, а именно: минимального расстояния между кометой и Юпитером Δ_m и углом ω между невозмущенной орбитой Юпитера и невозмущенной орбитой кометы. Угол ω следует вычислять для минимального расстояния между орбитами. Вурком определил методом Фейэ δ для нескольких фиктивных комет и получил при помощи осреднения $\delta = \delta(\Delta_m, \omega)$. Во-вторых, Вурком определил при помощи теории вероятности количество орбит, у которых Δ_m находится в промежутке $[\Delta_m, \Delta_m + d\Delta_m]$ и ω между $\omega, \omega + d\omega$. Легко сообразить, что на основе

этих данных можно подсчитать $\varphi(\delta)$ (156).

Вообразим, как это делал Вурком, что вокруг Солнца описана сфера, радиус которой равен расстоянию от Солнца до Юпитера, и что на этой сфере находится окружность, по которой перемещается Юпитер. Через каждую точку этой сферы проходит бесконечное число орбит комет с данным значением q , и все они образуют коническую поверхность. Пересечем эту коническую поверхность плоскостью перпендикулярно ее оси /рис.7./ . Линия пересечения будет представлять собой окружность. Вурком предполагает, что число комет данного класса тем больше, чем больший этому классу соответствует интервал центрального угла $\Delta\varphi$ окружности пересечения.

Если бы все кометы двигались по орбитам, перпендикулярным выше упомянутой сфере, то кометы, расстояния орбит которых до орбиты Юпитера меньше некоторой величины d , проходили бы через пояс на сфере шириной $2d$, расположенном симметрично по обе стороны орбиты Юпитера. Так как касательные к орбитам комет наклонены относительно поверхности сферы и притом угол наклона зависит от значения q то ширина соответствующего пояса также зависит от q . Вурком считает, что вероятность того, что орбита кометы находится от орби-

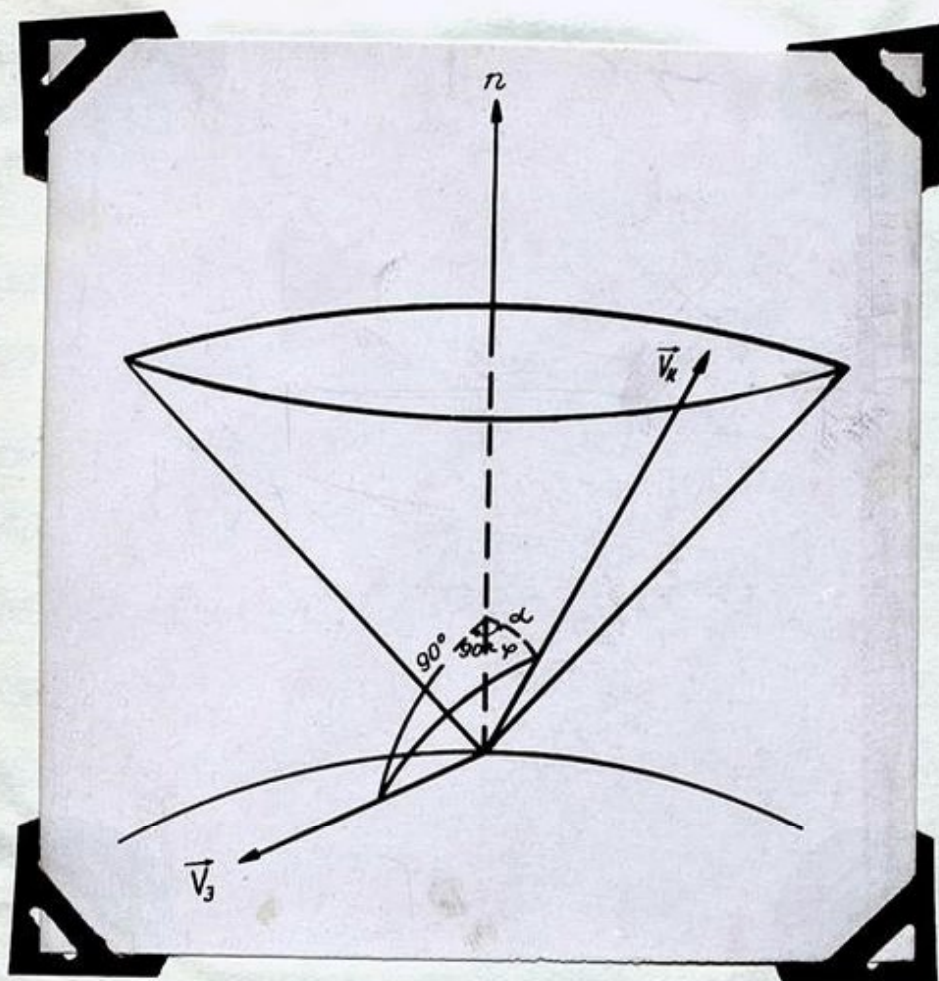


Рис. 7.

ты Спитера меньше, чем на расстоянии d , пропорциональна площади упомянутого пояса, и выводит следующую формулу для определения этой площади

$$w(d) = \frac{d}{a_j} f(q); \quad f(1) = 1,06, \quad f(4,5) = 2,10.$$

Коэффициент пропорциональности определяется на основе того, что все орбиты комет с одинаковыми значениями q проходят через упомянутую сферу равномерно. Следовательно, метод Вуркома имеет место при любом распределении комет по q , однако, мы имеем право сравнивать результаты при разных значениях q только в относительном смысле.

Если две кометы движутся друг за другом по одной и той же параболе, то δ имеет разные значе-

ния в зависимости от расположения комет относительно Юпитера, т.е. расстояния h , которое следует пройти Юпитеру до точки минимального расстояния между орбитами в момент, когда комета находится в соответствующей точке своей орбиты. Вурком считает, что количество комет данного класса пропорционально длине Δh , выраженной в длинах окружности, по которой движется Юпитер.

Величины φ , h , d , которые определяют число комет, связаны с величинами ω и Δm , которые определяют δ следующим образом:

$$\Delta m^2 = \frac{2h^2 \sin^2 \omega}{3 - 2\sqrt{2} \cos \omega} + d^2 \quad (168)$$

$$\cos \omega = \sin \alpha \sin \varphi, \quad (169)$$

где α - величина, постоянная для данной кометы и зависящая от значения φ . Вывод формулы (168) мы рассмотрим в § 20. Формула (169) получается непосредственно из рис. 7.

Имея связь между величинами φ , h , d и ω , Δm и зная $\delta = \delta(\omega, \Delta m)$, без труда можно найти величину $\varphi(\delta)$.

Вурком получив следующие результаты:

$1/q = 1 \text{ a.e.}$, $\mathcal{D} = 3,3 \cdot 10^6$; для прямого движения $\mathcal{D}_1 = 2,4 \cdot 10^6$;
 для обратного $\mathcal{D}_2 = 5,5 \cdot 10^6$ $2/q = 4,5 \text{ a.e.}$, $\mathcal{D} = 1,2 \cdot 10^6$. Этими результатами будем пользоваться в дальнейшем.

Возмущения со стороны больших планет на движение комет при их прохождении через Солнечную систему исследовал также Керр [68], причем делал это аналогично методу, описанному в § 11, рассматривая движение очень большого числа комет. Вычисления он проводил на электронно-счетной машине. Керр подсчитал значения \bar{b} для 28 значений q и представил зависимость \bar{b} от q формулой

$$\bar{b} = \sqrt{\bar{b}^2} \cdot 10^5 = -9,24q + 80,8.$$

Из соответствующего рисунка, приведенного в упомянутой работе Керра, видно, что эта формула плохо представляет его вычисления. Однако формула

$$\bar{b} = \sqrt{\bar{b}^2} \cdot 10^5 = 63 + 16 \sin [82^\circ + 57^\circ q] \quad (170)$$

очень хорошо соответствует результатам вычислений. Для $q = 1 \text{ а.е.}$ значения \bar{b} , полученные Керром и Вурком совпадают. Для $q = 4,5 \text{ а.е.}$ согласно Вуркому $\bar{b} = 128$, а согласно (170), $\bar{b} = 57$. Решения задачи у Керра и Вуркома различны, и поэтому трудно сказать, почему получились столь различные значения для \bar{b} . Нам кажется, что различие могло получиться по следующим причинам:

Во-первых, Керр исследовал изменения обратной величины большой полуоси δ в пределах от $-3 \cdot 10^{-3} \text{ а.е.}^{-1}$ до $+3 \cdot 10^{-3} \text{ а.е.}^{-1}$, а Вурком в пределах от $-14 \cdot 10^{-3}$ до $+14 \cdot 10^{-3} \text{ а.е.}^{-1}$. Значения \bar{b} не зависят от

величины выбранного интервала только в том случае, если δ распределяется по нормальному закону. Керр показал, что δ распределяется по нормальному закону в интервале $[-3 \cdot 10^{-3}; 3 \cdot 10^{-3} \text{ а. е.}^{-1}]$ при малых значениях q лучше чем при больших, а в более широком интервале распределение δ не исследовалось. Во-вторых, Вурком определял \mathcal{D} только для комет, которые не проходят через сферу действия Юпитера, а Керр определял \mathcal{D} , т.е. \mathcal{B} для всех комет. К сожалению, Керр не исследует зависимость \mathcal{B} от наклона орбит комет i , а только отмечает, что $|\delta(i=90^\circ)| < |\delta(i=0)|$ и приводит соответствующие графики. Однако он всё же говорит, что справедливость этой общей закономерности нарушается, если рассматривать случай, когда орбиты комет близко подходят к Юпитеру.