

### § 13. Проблема Тарасашвили.

С проблемой определения  $\vartheta$  исторически тесно связан вопрос об определении систематического изменения обратной величины большой полуоси  $\bar{\delta}$  при перемещении комет из межзвездного пространства к Солнцу. Здесь в первую очередь следует отметить исследования Тарасашвили [69] и Синдингга [70]. Синдингг при оценке среднего изменения  $\bar{\delta}$  использовал интеграл Якоби в абсолютной и относительной системах координат. Здесь будет рассмотрено некоторое обобщение метода Тарасашвили [69].

Мы уже отмечали, что величина  $\frac{1}{a_0(q_0)} - \frac{1}{a_1(r)}$  в среднем у комет становится отрицательной, если  $t \rightarrow \infty$ . Чтобы объяснить это, Тарасашвили заменил в уравнениях (1) и (6) возмущающую функцию  $R_i$  через ее однократное осредненное значение и считал, что Юпитер движется по окружности. Осреднение он производил по средней аномалии Юпитера. В результате этого выражения  $\frac{\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1}{r^3}$  и  $\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r^3}$  обращаются в нуль. Тарасашвили производил осреднения только при движении кометы вдаль от Солнца,



т.к. для больших расстояний от Солнца можно считать, что за время обращения Юпитера вокруг Солнца комета не перемещалась. Таким образом, исследования Тарасанвили справедливы относительно любой кометы. Мы применим осреднения для любого расстояния от Солнца, так как хотим найти изменение  $\frac{1}{a}$  для кометы, которая представляет в среднем все кометы. Так как после осреднения пертурбационная функция зависит только от координат кометы, то имеет место закон сохранения энергии, т.е.

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\kappa^2}{r} = \frac{2\kappa^2 m_1 K(x)}{\pi \sqrt{r^2 + r_1^2 + 2r r_1 \cos \psi}}, \quad (171)$$

где

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}},$$

$$x^2 = \frac{4r r_1 \cos \psi}{r^2 + r_1^2 + 2r r_1 \cos \psi},$$

где в свою очередь  $r_{xy}$  есть проекция  $r$  на плоскость Юпитера, а  $v$  - скорость кометы. Так как при определении  $\frac{1}{a_1}$  мы должны предполагать, что в начале координат сконцентрирована масса  $1+m_1$ , то

$$v^2 = \kappa^2 (1+m_1) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} \right). \quad (172)$$

Формулы (171), (172) определяют  $\frac{1}{a_1}$  как функцию от гелиоцентрического расстояния. При помощи этих формул можно определить возмущения. Если учесть



в формуле (9) члены, которые не зависят от положения Юпитера, то имеем:

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_0} + \frac{2m_1}{\rho} \cong \frac{1}{a_0} + \frac{2m_1}{c}. \quad (173)$$

При помощи формул (171) и (173) имеем

$$\frac{1}{a_0(q_0)} - \frac{1}{a_1(\infty)} = \frac{-4m_1 K(x)}{\pi \sqrt{q_1^2 + \kappa_1^2 + 2q_{xy} \kappa_1}}.$$

Предположим, что  $q_0$  в Солнечной системе распределяются равномерно, то

$$q_{xy} = \frac{\pi}{4} q.$$

Вычисления показывают, что величина  $\frac{1}{a_0(q_0)} - \frac{1}{a_1(\infty)}$  слабо зависит от  $q$  в интервале  $q=0, q=2.5$  а. е. В этом промежутке примерно имеем:

$$\frac{1}{a_1(\infty)} - \frac{1}{a_0(q_0)} = 0,00036.$$

Синдигр получил несколько большую величину. Полученное значение примерно совпадает со значениями приведенными в § 10 и § 11.



## ГЛАВА 1У

### ДИФФУЗИЯ ПОЧТИ ПАРАБО- ЛИЧЕСКИХ КОМЕТ.

#### § 14. Вывод основного уравнения. Случай Вуркома.

Обозначим через  $\nu(\frac{1}{a}, t) d\frac{1}{a}$  число комет, проходящих в течение года через перигелии, если большие полуоси орбит комет заключены в промежутке  $[\frac{1}{a}, \frac{1}{a} + d\frac{1}{a}]$ . Если обозначить через  $\mathcal{N}(\frac{1}{a}, t)$  общее число комет с определенным значением  $\frac{1}{a}$ , то

$$\mathcal{N}(\frac{1}{a}, t) = a^{3/2} \nu(\frac{1}{a}, t). \quad (174)$$

Обозначим через  $\varphi(\delta)$  вероятность того, что при прохождении комет через перигелии значение  $\frac{1}{a}$



под влиянием Юпитера изменилось на некоторую величину  $\delta$ . Вурком считает, что выражение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v\left(\frac{1}{a} - \delta, t\right) \psi(\delta) d\delta - v\left(\frac{1}{a}, t\right)$$

представляет собой изменение числа комет  $v$  вследствие возмущений. Формулы (166) и [71]

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m \cdot q^{\frac{1}{2}}}{\kappa} \left[ -\frac{q}{(1+e)^{\frac{1}{2}}} \sin v S + \right.$$

$$\left. + \frac{4z \sin^2 \frac{1}{2} v}{(1+e)^{\frac{3}{2}}} (1 + e \cos^2 \frac{1}{2} v) T \right]$$

показывают, что возмущения со стороны планет изменяют обратную величину большой полуоси  $\frac{1}{a}$  и перигельное расстояние  $q$  почти [параболических комет, примерно одинаково. Изменения  $q$  порядка 0,02 а.е. или даже 0,1 а.е. несущественны при определении  $v = v(q)$ , однако, изменение  $z = \frac{1}{a}$  порядка 0,02 а.е. переводит комету из класса почти параболических в класс короткопериодических комет. Таким образом, мы предполагаем,



что возмущающее действие со стороны планет изменяет только большую полуось орбиты кометы существенно не меняя другие элементы орбит комет, т.е. мы предполагаем устойчивость остальных элементов. Ясно, что такие рассуждения невозможны, если рассматриваются значения  $\delta$  порядка  $0,1 \text{ а.е.}^{-1}$  и больше, т.к. в этом случае нет основания предполагать, что остальные элементы изменились только незначительно. С другой стороны, при значениях  $\frac{1}{a} \approx 0,025 \text{ а.е.}^{-1}$  и больше при определении  $\psi(\delta)$  нельзя считать, что мы имеем дело с независимыми прохождениями комет через перигелий. Таким образом, рассматриваемая теория имеет применение только для случая  $a \geq 40 \text{ а.е.}$

Испарение газов и приливные силы разрушают кометы, и их число уменьшается. Вурком считал этот процесс незначительным. Чтобы учесть влияние дезинтеграции, необходимо знать время существования или потенциальный возраст кометы  $T$ . Назовем потенциальным возрастом комет промежуток времени, который просуществовала бы комета, если бы она вращалась около Солнца по орбите с определенным перигелийным расстоянием и большой полуосью изменяющейся в данных пределах. Если это известно, то, предполагая, что первоначальные запасы всех комет одинаковы, легко подсчитать, сколько комет разрушается в течение года. После учета дезинтеграции



получаем

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \int_{-\delta_0}^{+\delta_0} v\left(\frac{1}{a} - \delta, t\right) \varphi(\delta) d\delta - v\left(\frac{1}{a}, t\right) - \frac{v\left(\frac{1}{a}, t\right) a^{3/2}}{T} \quad (175)$$

В отличие от Вуркома, мы вместо пределов  $\pm\infty$  берём пределы  $\pm\delta_0$ , так как мы /а фактически и Вурком/ рассматриваем только случай малых возмущений. Если функцию  $v\left(\frac{1}{a} - \delta, t\right)$  разложить в ряд и учесть только главную часть, то получим [58]

$$z^{-3/2} \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} - \frac{v(z, t)}{z^{3/2} T}, \quad (176)$$

где

$$\mathcal{D} = \left[ \frac{1}{2} \int_{-\delta_0}^{+\delta_0} \varphi(\delta) \delta^2 d\delta \right]^{-1}, \quad (177)$$

$$z = \frac{1}{a}.$$

Решение уравнения (176) описывает процесс диффузии при помощи некоторой характеристики  $\mathcal{D}$ , значение которой меняется в зависимости от выбора исследуемых орбит. Вурком, например, рассматривает только те кометы, которые к Юпитеру подходят не ближе чем на  $0,3 a.e.$  В этом случае  $\delta$  будет порядка  $10^{-2} a.e.$  Уравнение (176) отличается от уравнения Вуркома членом  $-va^{3/2}T^{-1}$ , который представляет собой дезинтеграцию. То обстоятельство, что гиперболические кометы удаляются из Солнечной системы в межзвездное пространство, учитывается посредством



граничного условия  $v(t,0)=1$ . Литтлтон [72] и Кендал [73][74] уделяли особое внимание математически строгому учету выхода гиперболических комет из Солнечной системы. Они показали, что учет выхода гиперболических комет при помощи граничного условия  $v(t,0)=1$  оправдывает себя, т.к. приводит к правильным результатам. Граничное условие  $v(t,z=0)=1$  устанавливает, что в зону планет непрерывно входит постоянный поток параболических комет. Отличие орбит новых комет от парабол при решении проблемы диффузии не имеет существенного значения.

Вурком решил уравнение (176) методом преобразования Лапласа без члена, который представляет собой деинтеграцию, при условии  $v(0,t)=1, v(z,0)=0$  и получил

$$v(z,t) = e^{-\frac{4D\sqrt{z}}{t}} \left[ 1 + \frac{4D\sqrt{z}}{t} \right]. \quad (178)$$

Правильность полученного ответа легко проверить, подставляя  $T=\infty$  и полученное значение  $v$  в уравнение (176). Если теперь перейти к пределу  $t \rightarrow \infty$ , то получим  $v=1$ , что явно противоречит наблюдениям. Поэтому Вурком предполагает, что процесс не установился. Длительность процесса  $t$  определяется из наблюдений. По данным каталогов легко подсчитать, что

$$\frac{v(0,02)}{v(0)} = 0.01.$$

Учитывая (178) и значение  $v(0,02):v(0)=0,01$  легко по-



лучить, что поток почтипараболических комет образовался примерно  $10^6$  лет назад. Чтобы оценить точность теоретического подсчета, вводится величина

$$K = \frac{\int_0^{0.002} v dv}{\int_0^{\infty} v dv}, \quad (178)$$

которая характеризует теоретический учет комет с малыми  $Z$ . По данным каталога [75] легко подсчитать, что  $K \approx 75\%$ . Так как значения  $Z = \frac{1}{a}$  определяются неточно вследствие коротких промежутков времени наблюдения за кометами в перигелиях и малой точности определения координат комет, то  $K$  также определяется неточно. Большинство комет из-за недостатка наблюдательного материала считаются параболическими. Так, за время с 1850 - 1936 г.г. было открыто 97 параболических комет, т.е. 97 комет, для которых нельзя было точно определить элементы орбит, в том числе  $Z$ . Если предположить, что  $Z$  у параболических комет распределяется так же, как у комет, у которых значения  $Z$  сравнительно хорошо известны, то получим  $K = 66\%$ .

Так как

$$\int_0^Z e^{-b\sqrt{z}} (1 + b\sqrt{z}) dz = -2 e^{-b\sqrt{z}} \left[ z + \frac{3\sqrt{z}}{b} + \frac{3}{b^2} \right] + \frac{6}{b^2}, \quad (179)$$



$$\text{то } K = 1 - \frac{1}{3} e^{-\beta \sqrt{z_0}} [\beta^2 z_0 + 3\beta \sqrt{z_0} + 3], \quad (180)$$

$$\text{где } \beta = \frac{4D}{t}, \quad z_0 = 0,002.$$

Вычисления по формуле (180) дают  $K = 44\%$  при  $t = 10^6$ . Однако, следует подчеркнуть, что значение  $K$  в значительной мере зависит от значения  $t$ , т.е. от значения отношения  $V(0,02) : V(0)$ , которое мы приняли равным на основе данных наблюдений 0,01. В свою очередь  $V(0,02)$  зависит не только от диффузии комет, которая учитывает только малые возмущения, а также и от больших возмущений. Следовательно, величина  $V(0,02)$  теоретически имеет несколько неопределённое значение. Если предположить, что  $V(0,02) : V(0) = 0,005$ , то  $K = 50\%$ , т.е. несколько лучше совпадает со значением, полученным из наблюдений. Мы убедились, что изменения в  $a$  вследствие диффузии сравнительно большие, и поэтому не имеет значения вопрос о том, какое значение большой полуоси  $a$  мы рассматриваем: первоначальное  $a_1$  или оскулирующее вблизи перигелия  $a_0$ . Различие между теорией и наблюдениями возможно объяснить эффектом новых комет /см. § 18/. Однако, несмотря на то, что теория диффузии Вуркома примерно соответствует данным наблюдений, признать ее правильной мы не можем, так как она не учитывает дезинтеграцию комет.



## § 15. Потенциальный возраст комет.

С.В. Орлов [76] вычислил, как долго будет существовать комета Галлея. На основе этого подсчета нами была получена формула для определения продолжительности жизни или потенциального возраста комет, в которой имеется неопределенный множитель, характеризующий первоначальное количество запаса газов. Познакомимся в общих чертах с подсчетом Орлова. Яркость кометы в звездных величинах можно представить следующей эмпирической формулой:

$$H = H_0 + 2,5n \lg r, \quad (181)$$

где  $n$  — некоторая постоянная.

Освещенность  $E$ , даваемая светилом, звездная величина которого  $H$ , равна

$$E = c 10^{-0,4H} = c_1 r^{-n}, \quad (182)$$

где  $c$  и  $c_1$  — некоторые постоянные. Соответствующий поток

$$F = c_2 r^{-n}. \quad (183)$$

С другой стороны, согласно теории Цанстра [77] и Вурма [78], [79] световой поток, посылаемый нам головой кометы, может быть выражен формулой

$$F = c_3 \frac{\mathcal{N}}{g^2} W B_{1 \rightarrow 2} g_\nu h \nu, \quad (184)$$

где  $\mathcal{N}$  — число молекул, находящихся в основном электронном состоянии,  $h$  — постоянная Планка,  $g_\nu$  —



плотность энергии для частоты  $\nu$  Солнечной радиации,  $B_{1 \rightarrow 2}$  - вероятность перехода с основного электронного уровня на ближайший к нему,  $W$  - коэффициент дилуции, т.е.  $W = \frac{1}{4} \frac{R_a^2}{r^2}$ , где  $R_a$  - радиус Солнца,  $\rho$  - расстояние от головы кометы до наблюдателя. Приравнивая формулы (183) и (184), имеем

$$N = C_4 r^{2-n}. \quad (185)$$

Пусть  $\tau$  - время, необходимое для того, чтобы молекула, выброшенная из ядра кометы по направлению к Солнцу, достигла оболочки и затем углубилась в хвост на расстояние  $\xi_0$  от ядра / район, по которому определяется видимая яркость головы/.

Тогда, согласно механической теории кометных форм,

$$\tau = C_5 \sqrt{\xi_0} r^2, \quad (186)$$

где  $C_1, C_2, C_3, \dots$  - некоторые величины не зависящие от расстояния кометы до Солнца.

Очевидно, что отношение

$$N_1 = \frac{N}{\tau} = C_6 r^{1-n} \xi_0^{-1/2} \quad (187)$$

дает нам число молекул, теряемых ядром за единицу времени.

В теории Бесселя

$$\xi_0 = C_8 r^2. \quad (188)$$

Из наблюдений получается, что  $n = 4$ .

Таким образом получим

$$N_1 = \frac{5}{r^4}. \quad (189)$$

Это число и будем называть вариантом С.В. Орлова.



Согласно Орлову, комета теряет при каждом прохождении одинаковое количество газов. На основе этой гипотезы нетрудно вычислить продолжительность жизни кометы  $T$ . Получается следующая зависимость  $T$  от элементов орбиты кометы:

$$T = S_1 a^{3/2} \left[ \int_0^{T_0} \frac{dt}{r^4} \right]^{-1} = S_1 \kappa r^{5/2} a^{3/2} \left[ \int_0^{2\pi} (1 + e \cos v)^2 dv \right]^{-1} = S_2 r^{5/2} a^{3/2} [2 + e^2]^{-1}, \quad (192)$$

где  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  - некоторые постоянные,  $T_0$  - время обращения кометы вокруг Солнца.

Формула (181) является эмпирической. Поэтому неизвестно, на сколь больших расстояниях от Солнца она справедлива. Б.Ю. Левин [80] рассмотрел процесс выделения газов из ядра кометы в результате десорбции. Вследствие этого процесса из ядра кометы с  $1 \text{ см}^2$  поверхности в секунду испаряется следующее количество молекул сорбированных газов:

$$n = n^* \sqrt{\frac{\kappa T^{\circ}}{2\pi m}} e^{-\frac{L}{\kappa T^{\circ}}}, \quad (191)$$

где  $n^*$  - концентрация молекул в поверхностном слое,  $m$  - масса молекулы,  $L$  - теплота сорбции,  $T^{\circ}$  - абсолютная температура.

В отношении дальнейшей судьбы молекул Левин [80] высказывает две гипотезы: 1/если средняя



продолжительность жизни молекул до их фотодиссоциации мала, то этот процесс происходит в районе головы кометы и обуславливает исчезновение молекул ; 2/ если продолжительность их жизни достаточно велика, то они уносятся лучевым давлением прочь от головы кометы и образуют разреженный хвост - обычно невидимый. Левин предполагает, что вторая гипотеза в действительности имеет место.

Сила света головы кометы пропорциональна общему числу молекул, находящихся в голове, и плотности солнечного излучения  $\mathcal{S}_v$ . Общее число молекул пропорционально числу образующихся молекул, т.е. пропорционально  $\mathcal{N}_1$ , умноженному на среднюю продолжительность их жизни  $\tau_1$  /согласно первой гипотезе/ или на среднюю продолжительность их пребывания в районе головы  $\tau$  /согласно второй гипотезе/. Средняя продолжительность жизни  $\tau_1 \sim \frac{1}{\mathcal{S}_v}$  и поэтому из первой гипотезы сразу получается

$$J = \mathcal{N}_1 \tau_1 \mathcal{S}_v \sim \mathcal{N}_1. \quad (190)$$

Принимая вторую гипотезу, Левин считает, что согласно фонтанной теории кометы  $\tau \sim r^{-2}$ , т.е. считает, что  $\xi_0$  следует определять по формуле (188).

Таким образом, согласно Левину, вариант именуемый нами, вариантом С.В. Орлова, соответствует значению  $n=4$ . При определении абсолютных величин комет С.К. Всехсвятский [75] предполагал  $n=4$ . При определе-



нии продолжительности жизни комет С.В. Орлов исходил из эмпирической формулы и определял  $T$ . В свою очередь Б.Ю. Левин на основе формулы адсорбции нашел формулу, которая позволяет определить зависимость яркости комет как функцию от расстояний их до Солнца. Эмпирическая формула (181) и формула Б.Ю. Левина примерно одинаково хорошо представляют наблюдения. Поэтому следовало ожидать, что формулы для  $T$  полученные Б.Ю. Левиным и С.В. Орловым, не могут давать различные результаты для распределения элементов короткопериодических комет. Однако мы получили, что вариант С.В. Орлова хорошо соответствует наблюдениям, в то время как формула Б.Ю. Левина плохо представляет наблюдения в случае определения распределения элементов короткопериодических комет. Если расстояния комет до Солнца не слишком малы, то нет расхождений между вариантами С.В. Орлова и Б.Ю. Левина. Так как в нашем подсчете именно малые расстояния играли существенную роль, то мы получили несоответствие теории Б.Ю. Левина с наблюдениями. Таким образом мы обнаружили, что при малых значениях  $q$  наше определение распределения элементов короткопериодических комет сильно зависит от избранного варианта для  $T$ , т.е., что задача поставлена не корректно. Теория Левина - это первая физическая теория видения газов с поверхности ядра кометы и, таким



образом, является теоретической основой для формул, по которым определяют время существования комет и яркость комет как функцию расстояний от Солнца. Огромную роль, которую сыграла эта теория и её значения в настоящее время неоднократно отмечалось в мировой литературе.

Нами был рассмотрен еще один вариант определения потенциального возраста комет. Непосредственно наблюдался распад комет на несколько частей / непрерывное выделение метеоритов. Естественно предположить, что разрушение вследствие силы притяжения равно  $\frac{dt}{r^3}$ . Общее разрушение  $P$  за один период обращения  $T_0$  определяется формулой

$$P = a^{-3/2} \int_0^{T_0} \frac{dt}{r^3} = S_4 a^{-3/2} r^{-3/2}, \quad (193)$$

где  $S_4$  — некоторая постоянная. Если предположить, что "разрушение" представляет собой непрерывное истощение кометы, то

$$T = S_5 a^{3/2} r^{3/2}, \quad (195)$$

где  $S_5$  — некоторая постоянная.

Бобровников [81] считает, что разрушение кометы за один оборот пропорционально  $\int \frac{dt}{r^2}$ , а общее разрушение пропорционально кроме того числу оборотов кометы со времени ее образования или  $a^{-3/2}$ . Разрушение получается пропорциональным  $a^{-2}(1-e^2)^{-1/2}$ . Бобровников называет функцией дезинтеграции вели-



чину

$$\Phi(a, e) = \lg a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (194)$$

С.К.Всехсвятский, О.И.Бабич и В.В.Казюгинский [13] не учитывают дезинтеграцию в распределении элементов орбит комет и считают такой учет формальным и ненужным. По их мнению, мы наблюдаем короткопериодические кометы, которые недавно были выброшены из Юпитера и других тел Солнечной системы. В действительности учет дезинтеграции необходим даже тогда, когда кометы проходят через перигелий более одного раза. Обычно гиперболические кометы после захвата проходят через перигелий только один раз или не проходят совсем. По нашему мнению, абсурдно считать, что периодические кометы существуют только один оборот. Следовательно, необходимо учесть дезинтеграцию при подсчетах распределений элементов орбит комет. Наблюдения показывают, что короткопериодические кометы существуют по крайней мере в течение нескольких десятков оборотов, следовательно, несостоятельно указание в работе, что учет дезинтеграции по формулам (192) и (195) неправилен из-за короткой жизни комет. Значение большой полуоси со временем меняется, что мы не учли при выводе формул для потенциального возраста. Так как значение большой полуоси орбиты кометы при диффузии меняется в небольших пре-



делах, то мы считаем, что в формулах (192) и (195) соответствующие значения  $a$  соответствуют их средним значениям. Более подробно этот вопрос рассматривается <sup>у</sup> Д.Г. Кендала [73], [74].

В этих формулах учтены три фактора дезинтеграции комет. Постоянные  $S_2$  и  $S_5$  соответствуют количеству вещества в комете.  $a^{3/2}$ , как известно, равно времени обращения кометы, а  $q$  есть ближайшее расстояние кометы от Солнца. Нам кажется очевидным, что в среднем, чем больше вещества в комете, тем больше время существования кометы, а также, чем ближе комета подходит к Солнцу, тем быстрее она разрушается. Орбиты комет за небольшим исключением сильно вытянуты и, следовательно, кометы в течение почти всего периода обращения находятся вблизи своих афелиев. Таким образом, чем больше значение  $a^{3/2}$ , тем дольше существуют кометы. Ясно, что формулы (192) и (195) не могут претендовать на большую строгость, особенно при больших значениях  $a$ . В дальнейшем мы рассмотрим для возраста комет формулы типа

$$T = S q^n a^{m+3/2}, \quad (196)$$

где  $m$  и  $n$  — некоторые постоянные. Вполне возможно, что при помощи формул типа (196) нельзя выразить точно возраст кометы при всех значениях  $a$ .



С.В. Орлов [82] разработал так называемую "новую теорию головы", где принимается, что само ядро кометы есть центр сил отталкивания. Мы не использовали эту теорию, т.к. О.В. Добровольский [83] доказал несостоятельность ее. Вопросами связанными с определением потенциального возраста комет занимался также Б.А. Воронцов - Вельяминов [84].

§ 16. Решение и анализ  
 дифференциального  
 уравнения диффузии  
 для нестационарного  
 состояния.

Математические трудности заставили нас определять возраст кометы по следующей формуле [85]:

$$T = 5q^{5/2} a^{1/2}. \quad (197)$$

Чтобы выяснить влияние неравномерности потока параболических комет и облегчить решение уравнения (176), мы решаем его при следующем граничном условии:  $v(0, t) = t^2$  (198) в отличие от Вуркома, который считал  $v(0, t) = 1$ .



Уравнение (176) решаем формально при помощи преобразования Лапласа. Если учесть начальное условие  $v(z, 0) = 0$ , преобразованное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dz^2} - \mathcal{D} p z^{-3/2} \bar{v} - \mathcal{D} c z^{-1} \bar{v} = 0, \quad (199)$$

где

$$\bar{v}(z, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v(z, t) dt,$$

$$c = s^{-1} q^{-5/2}.$$

Для уравнения (199) имеем граничное условие

$$\bar{v} \Big|_{z=0} = \frac{2}{p^3}. \quad (200)$$

После подстановки

$$z = \left( \frac{\xi}{4\sqrt{cd}} \right)^2, \quad \bar{v} = e^{-\xi/2} \eta \quad (201)$$

уравнение (199) примет вид:

$$\xi \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + (\gamma - \xi) \frac{d\eta}{d\xi} - a\eta = 0, \quad (202)$$

где

$$\gamma = -1, \quad a = -\frac{1}{2} + p\sqrt{\frac{\mathcal{D}}{c}}. \quad (203)$$

Уравнение (202) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \eta(p) &= K(p) \Gamma(a) \Upsilon(a, \gamma, \xi) = \\ &= K(p) \int_0^{\infty} e^{-\xi \tau} \tau^{a-1} (1+\tau)^{\gamma-a-1} d\tau, \quad (204) \end{aligned}$$



причем  $K(\rho)$  следует определить из условия (200).

На основе формул (201) и (204) имеем:

$$\bar{v}(z, \rho) = K(\rho) e^{-2\sqrt{cD}z} \int_0^{\infty} e^{-4\tau\sqrt{cD}z} \times \\ \times \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^a \tau^{-1} (1+\tau)^{-2} d\tau. \quad (205)$$

Легко убедиться<sup>6)</sup>, что под знаком интеграла можно выполнить предельный переход  $z \rightarrow 0$ . Следовательно, учитывая (200) и (203), имеем при  $\text{Re} \rho > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{D}}$ :

$$\bar{v}|_{z=0} = \frac{2}{\rho^2} = K(\rho) \int_0^{\infty} \tau^{a-1} (1+\tau)^{-a-2} d\tau = \\ = K(\rho) B(a, 2) = K(\rho) \frac{\Gamma(a)\Gamma(2)}{\Gamma(a+2)} = \frac{K(\rho)}{\rho^2 \lambda^2 - \frac{1}{4}}, \quad (206)$$

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{D}{c}}. \quad (207)$$

На основе (206) получаем:

$$K(\rho) = 2 \left( \frac{\lambda^2}{\rho} - \frac{1}{4\rho^2} \right). \quad (208)$$

Применяя формулу обращения и меняя порядок интегрирования, что, как легко понять, в нашем случае законно, и с учетом (203) имеем

$$v = e^{-2\sqrt{cD}z} \int_0^{\infty} e^{-4\tau\sqrt{cD}z} \tau^{-3/2} (1+\tau)^{-3/2} \frac{1}{\pi i} \times$$



$$\times \left[ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\rho t} \left( \frac{\lambda^2}{\rho} - \frac{1}{4\rho^3} \right) e^{-\rho \lambda \ln \frac{1+\tau}{\tau}} d\rho \right] d\tau, \quad (209)$$

ТАК КАК

$$\left( \frac{\tau}{1+\tau} \right)^\alpha = e^{\alpha \ln \frac{\tau}{1+\tau}} = e^{-\frac{1}{2} \ln \frac{\tau}{1+\tau}} \times$$

$$\times e^{-\rho \lambda \ln \frac{1+\tau}{\tau}} = \sqrt{\frac{1+\tau}{\tau}} e^{-\rho \lambda \ln \frac{1+\tau}{\tau}}.$$

Внутренний интеграл вычисляется согласно элементарным правилам операционного исчисления. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \nu(z, t) = & 2e^{-2\sqrt{cDz}} \int_0^\infty e^{-4\tau\sqrt{cDz}} \tau^{-3/2} (1+\tau)^{-3/2} \left[ \lambda^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} \left( t - \lambda \ln \frac{1+\tau}{\tau} \right)^2 \right] h \left( t - \lambda \ln \frac{1+\tau}{\tau} \right) d\tau, \quad (210) \end{aligned}$$

где  $h(x) = 0$  при  $x \leq 0$ ,  $h(x) = 1$  при  $x > 0$ .

Подстановка  $x = t - \lambda \ln \frac{1+\tau}{\tau}$  дает:

$$\nu = \frac{2}{\lambda} e^{-\frac{1}{2}\mu} \int_0^t e^{-\mu \left( e^{\frac{t-x}{\lambda}} - 1 \right)^{-1}} \left( e^{\frac{t-x}{2\lambda}} - e^{-\frac{t-x}{2\lambda}} \right) \times$$

$$\times \left( \lambda^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx, \quad (211)$$

где

$$\mu = 4\sqrt{cDz}. \quad (212)$$



Можно проверить, что формула (211) действительно дает требуемое решение дифференциального уравнения (176).

Решение (211) содержит сложный интеграл, В настоящем параграфе постараемся найти асимптотическое выражение решения при больших значениях  $t$ .

Запишем решение в виде

$$v = \frac{2}{\lambda} e^{-\mu/2} (J_1 - J_2) \quad (213)$$

и положим

$$f(\tau, \mu) = e^{-\mu(e^{\tau/\lambda} - 1)^{-1}} \quad (214)$$

После подстановки  $\tau = t - x$  и интегрирования по частям при  $\mu \neq 0$  имеем:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^t e^{\tau/2\lambda} \left[ \lambda^2 - \frac{(t-\tau)^2}{8} \right] f(\tau, \mu) d\tau = \\ &= \int_0^t e^{3\tau/2\lambda} \left[ \frac{1}{4} (t-\tau)^2 + \lambda(t-\tau) \right] f(\tau, \mu) \mu (e^{\tau/\lambda} - 1)^{-2} d\tau; \\ J_1 - J_2 &= \int_0^t e^{-\tau/2\lambda} f(\tau, \mu) \left\{ \left[ \frac{1}{4} (t-\tau)^2 + \lambda(t-\tau) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \mu (1 - e^{-\tau/\lambda})^{-2} - \left[ \lambda^2 - \frac{(t-\tau)^2}{8} \right] \right\} d\tau. \quad (215) \end{aligned}$$

Если  $\tau$  принимает достаточно большие значения, то

$$(1 - e^{-\tau/\lambda})^{-2} < 2. \quad (216)$$



Так как  $f(\tau, \mu) \rightarrow 1$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , то

$$\int_t^{\infty} e^{-\tau/2\lambda} f(\tau, \mu) \left\{ \left[ \frac{1}{4}(t-\tau)^2 + \lambda(t-\tau) \right] \mu (1 - e^{-\tau/\lambda})^{-2} - \left[ \lambda^2 - \frac{(t-\tau)^2}{8} \right] \right\} d\tau = O(e^{-t/2\lambda}). \quad (217)$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 &= A(\mu) \frac{t^2}{4} + B(\mu)t + C(\mu) + O(e^{-t/2\lambda}) = \\ &= \frac{t^2}{4} [A(\mu) + O(\frac{1}{t})], \end{aligned} \quad (218)$$

причем

$$A(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-\tau/2\lambda} f(\tau, \mu) \left[ \mu (1 - e^{-\tau/\lambda})^{-2} + \frac{1}{2} \right] d\tau. \quad (219)$$

При помощи подстановки  $(e^{\tau/\lambda} - 1)^{-1} = y$  согласно формуле (204), получаем:

$$\begin{aligned} A(\mu) &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-\mu y} y^{-\frac{1}{2}} (1+y)^{-\frac{3}{2}} \left[ \mu (1+y)^2 + \frac{1}{2} \right] dy = \\ &= \lambda \sqrt{\pi} \left[ \mu \Psi\left(\frac{1}{2}, 2, \mu\right) + \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{1}{2}, 0, \mu\right) \right]. \end{aligned} \quad (220)$$

Используя формулу [86]:

$$\Psi(a, y, \mu) = \mu^{1-y} \Psi(a-y+1, 2-y, \mu), \quad (221)$$



окончательно имеем :

$$A(\mu) = \sqrt{\pi} \mu \left[ \Upsilon\left(\frac{1}{2}, 2, \mu\right) + \frac{1}{2} \Upsilon\left(\frac{3}{2}, 2, \mu\right) \right]. \quad (222)$$

Согласно известным разложениям для функции  $\Upsilon$  [86], при малых значениях  $\mu$  имеем разложение

$$\begin{aligned} \Upsilon(a, n+1, \mu) &= \frac{(-1)^{n-1}}{n! \Gamma(a-n)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k \mu^k}{(n+1)_k k!} \ln \mu + \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(n+1)_k} \left[ \Upsilon(a+k) - \Upsilon(1+k) - \Upsilon(1+k+n) \right] \frac{\mu^k}{k!} \left. \right\} + \\ &+ \frac{(n-1)!}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu^{k-n}}{k!} \frac{(a-n)_k}{(1-n)_k}. \quad (223) \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \Upsilon\left(k+\frac{1}{2}\right) - \Upsilon(1+k) - \Upsilon(2+k) + \frac{1}{k} &= \gamma - 2 \ln 2 + \\ &+ 2H_{2k} - 3H_k + \frac{1}{k(k+1)}, \quad (224) \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \Omega(\mu) &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \mu \left[ \Upsilon\left(\frac{1}{2}, 2, \mu\right) + \frac{1}{2} \Upsilon\left(\frac{3}{2}, 2, \mu\right) \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2k-1}{2}}{(k-1)! (k+1)!} \mu^{k+1} \left[ \ln \frac{\mu}{4} + \right. \\ &+ \left. \gamma + 2H_{2k} - 3H_k - \frac{1}{k(k+1)} \right], \quad (225) \end{aligned}$$



где  $H_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}$ , а  $\gamma$  - постоянная Эйлера,  $\gamma = 0.57722$ .

При больших  $\mu$  имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\Psi(a, \gamma, \mu) \sim \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\gamma - a - 1}{n} \frac{\Gamma(n+a)}{\mu^{n+a}}, \quad (226)$$

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{1}{2}, 2, \mu\right) + \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{3}{2}, 2, \mu\right) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\mu}} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\mu^{k + \frac{1}{2}}} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)}{\mu^{k + \frac{3}{2}}} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{m+1} \frac{\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)}{\mu^{m + \frac{3}{2}}} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)}{\mu^{k + \frac{3}{2}}} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{\frac{1}{2}}{k+1} \Gamma\left(k + \frac{5}{2}\right)}{\mu^{k + \frac{3}{2}}}. \quad (227) \end{aligned}$$

Следовательно, при больших  $\mu$  имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\Omega(\mu) \sim \frac{\sqrt{\pi\mu}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{k} \Gamma\left(k + \frac{5}{2}\right)}{(k+1) \mu^k}. \quad (228)$$

Из формул (213), (218), (222) и (225) при больших значениях  $t$  следует



$$v(x, t) = e^{-\frac{1}{2}t} t^2 [\Omega(y) + O(\frac{1}{t})]. \quad (229)$$

Нами было подсчитано несколько значений  $v(x, t)$  при разных  $t$ . В зависимости от выбранного значения  $t$ , мы получили разные виды кривых  $v = v(x)$ . При очень малых значениях  $t$  приблизительно имеем  $v(0.02) : v(0) \cong 0$ . С ростом  $t$  значение величины  $v(0.02) : v(0)$  также растёт. Значение  $v(0.02) : v(0)$  зависит также от величины  $c$ .

Мы рассмотрим только один частный случай, когда  $c = 10^{-5}$ , который в стационарном случае дает

$$v(0.02) : v(0) = 0.37$$

при

$$t = 5.5 \cdot 10^5$$

$$v(0.02) : v(0) = 0.01,$$

а для  $t = 50 \cdot 10^5$  имеем (211):

$$v(0.02) : v(0) = 0.27.$$

Можно предположить, что и в остальных случаях процесс диффузии устанавливается через несколько миллионов лет.



Теперь сделаем несколько заключений качественного характера о стационарном процессе. На основе формулы (229) мы приходим к заключению, что неравномерность потока параболических комет практически не играет роли в определении относительного распределения

$$\frac{v(z, t)}{v(0, t)} = e^{-2\sqrt{cAz}} \left[ \Omega(\sqrt{cAz}) + O\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (230)$$

Для случая Вуркома имеется:

$$\frac{v(z, t)}{v(0, t)} = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right). \quad (231)$$

Если  $c \rightarrow 0$ , то согласно формуле (225) относительное распределение стремится к 1, следовательно, решение Вуркома является частным случаем решения (230).

Численные значения для относительного распределения (230) мы подсчитали по формулам (225), (228) и при помощи численного интегрирования по формуле (220). Результаты вычислений представлены на рисунке непрерывной кривой. На основе данных, помещенных в каталогах комет, нам известно, что функция  $v(z, t) : v(0, t)$  имеет максимальное значение при  $z = 0$ . При дальнейшем возрастании  $z$  она чрезвычайно быстро убывает и асимптотически стремится к нулю. Как видно из рисунка, кривая распределения (230) качественно правильно соответствует дейст-



вительности, однако уменьшение значений  $\nu(z, t): \nu(0, t)$  вблизи  $z = \int^m = 0$  происходит слишком медленно. На основе сказанного выше мы имеем право утверждать,

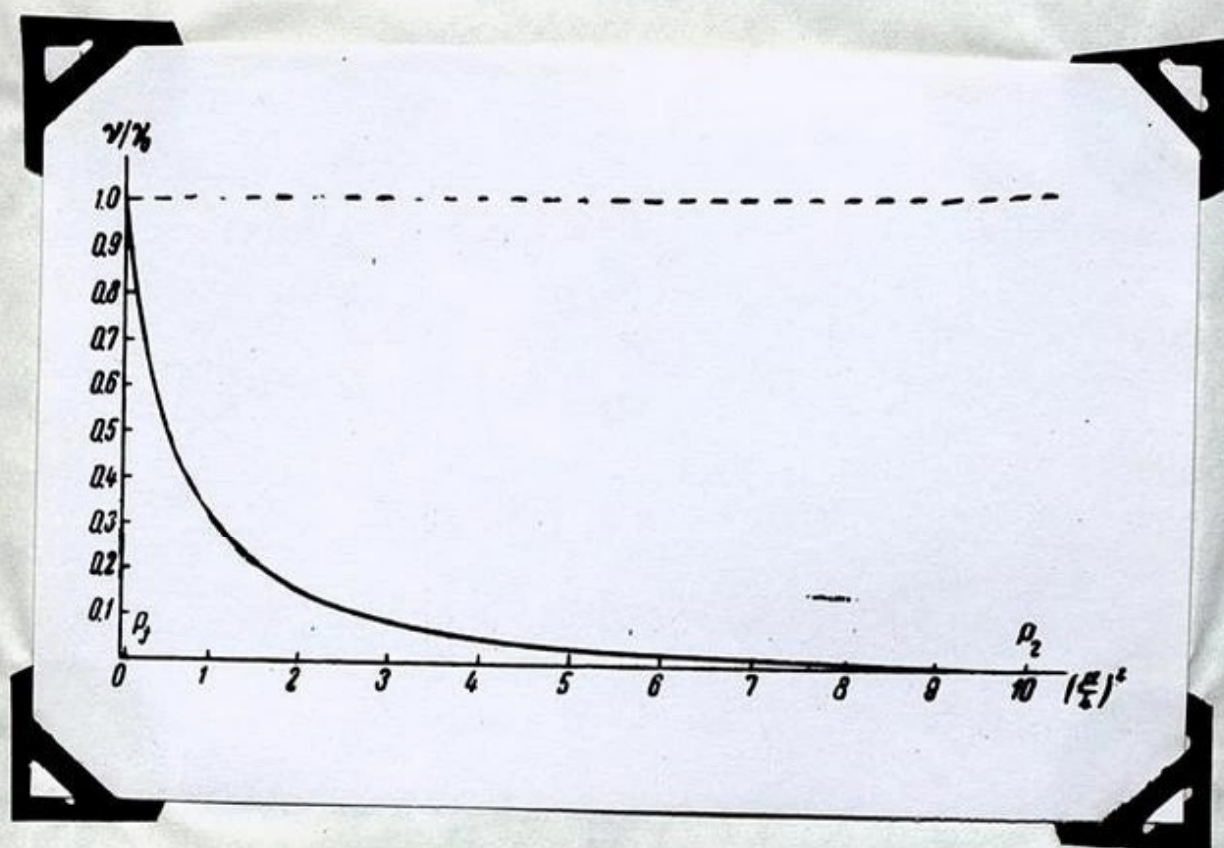


Рис. 8.

что именно дезинтеграция определяет распределение комет по  $z$ , так как при  $c \rightarrow 0$  формула (230) дает качественно неправильный результат (231), который получил Вурком без учета дезинтеграции.

Распределение комет (230) при значениях  $q = 1 \text{ а.е.}$  и  $q = 4,5 \text{ а.е.}$  представляется одной и той же кривой, с той только разницей, что масштабы шкал осей  $z = z(\nu)$  в этих случаях различны. Если при  $q = 1$  некоторому значению  $z_0$  на рисунке соответствует точ-



ка  $P_f \left[ \left( \frac{M_f}{4} \right)^2 \right]$ , то, согласно формуле (212), тому же значению при  $q = 4,5 a.e.$  соответствует точка

$$\left( \frac{M_f}{4} \right)^2 = \left( \frac{M_z}{4} \right)^2 \frac{D(4,5)}{(4,5)^{5/2} D(1)}. \quad (232)$$

А. Вурком подсчитал, что  $D(4,5) : D(1) = 0,37$ . Следовательно,  $M_f^2 = 0,008 M_z^2$ , т.е. точка  $P_f \left[ \left( \frac{M_f}{4} \right)^2 \right]$  находится на рисунке левее точки  $P_z$ . Представим далее, что  $OP_f$  вместе с кривой растягивается равномерно до тех пор, пока точки  $P_f$  и  $P_z$  совпадут. Очевидно, что кривая /штриховая/, соответствующая значению  $q = 4,5 a.e.$  будет располагаться над кривой, соответствующей значению  $q = 1 a.e.$  /непрерывная кривая/. Следовательно, плотность потока комет с данным значением  $q$  увеличивается при увеличении значения  $q$ . Неучет этого факта, очевидно, был причиной того, что подсчеты числа захваченных короткопериодических комет давали, по сравнению с данными наблюдений заниженные значения. Вурком подсчитал, что значения  $D$  для орбит комет с прямым движением меньше соответствующих значений  $D$  для орбит с обратным движением. Учитывая это, при помощи рассуждений, подобных вышеизложенным, приходим к заключению, что равновероятное распределение орбит комет с прямым и обратным движением должно наблюдаться только при  $z \rightarrow 0$ , а при  $z \gg 0$  должен обнаружиться перевес комет с прямым движением. Переход



должен быть плавным, что полностью подтверждается наблюдениями.

§ 17. У р а в н е н и е д и ф ф у з и и  
д л я с т а ц и о н а р н о г о с о с -  
т о я н и я .

Основные результаты по исследованию диффузии для стационарного состояния были получены Оортом [4]. Он предполагал, что возмущения со стороны Юпитера на движение комет распределяются по нормальному закону и что все кометы при приближении к Солнцу дезинтегрируются одинаково. Основное уравнение диффузии он пишет в виде следующего интегрального уравнения:

$$n(z) = (1-k)N \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} + (1-k) \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{+\infty} n(z-\Delta) e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta \quad (233)$$

где  $N$  - количество тех комет, которые в течение года впервые проходят через сферу видимости,  $n(z)$  - число старых комет, у которых  $z = \frac{1}{a}$ ,  $k$  - вероятность того, что комета разрушится при прохождении через перигелий,  $\Delta$  - изменение  $z$  из-за возмущений со стороны Юпитера,  $h$  - некоторая постоянная. Для сравнительно больших значений  $z$  Оорт получил

$$n(z) = C e^{-z/p}, \quad (234)$$



где

$$\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{1-k}{k}} \quad (235)$$

При малых значениях  $z$  Оорт решает интегральное уравнение методом последовательных приближений. Для сравнения с наблюдениями Оорт рассматривает два значения  $k$  ( $k=0,019, k=0,003$ ). Он приходит к следующим основным заключениям: 1/ Формула (234) правильно отражает наблюдаемое распределение комет по  $z$ . Чтобы полностью согласовать теорию с наблюдениями, следует ввести понятие новых комет, т. е. почти параболических комет с большой яркостью. 2/ При больших значениях  $z$  комет с прямым движением больше, чем с обратным движением. Соответствующие подсчеты прекрасно совпадают с наблюдениями. У Оорта  $k$  — постоянная величина. Один из рассмотренных нами вариантов соответствует теории Оорта ( $T = ca^{3/2}$ ), однако, величина  $c$ , которая аналогична величине  $k$  у Оорта, является у нас функцией от  $q$ . Мы рассмотрим вопросы, которые исследовал Оорт, а также несколько новых вопросов, которые возникают в связи с тем, что  $c$  не является величиной постоянной, а функцией от перигельного расстояния  $q$ . Это поможет нам выяснить, как возникают короткопериодические кометы.

Чтобы перейти от уравнения для нестационар-



ного состояния (176) к уравнению для стационарного состояния, следует считать, что  $\vartheta$  не является функцией от времени. Однако, вообще говоря, такой переход может дать уравнение, решение которого не эквивалентно решению уравнения (176) при  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому мы рассмотрим следующую теорему.

**Теорема.** При достаточно больших значениях  $t$  решение уравнения (176) при граничных и начальных условиях

$$\vartheta(0, t) = \varphi(t), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \vartheta(z, t) = 0, \quad \vartheta(z, 0) = 0 \quad (236)$$

сколь угодно мало отличается от решения уравнения

$$\frac{1}{\mathcal{D}} \frac{d^2 \vartheta}{dz^2} - \frac{\vartheta}{T z^{3/2}} = 0 \quad (237)$$

при граничных условиях

$$\vartheta(0) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \vartheta(z) = 0.$$

Функция  $\varphi$  - непрерывна и монотонна, имеющая непрерывные первые и вторые производные, и такая, что  $\varphi(0) = 0$ , а при  $t \geq 1$ ,  $\varphi(t) = 1$ ; величина  $T$  определяется равенством (196)

$$T = c^{-1} z^{-m-3/2}, \quad (238)$$

где  $c$  и  $m$  - постоянные.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим разность упомянутых решений:  $\vartheta(z, t) - \vartheta_0(z) = u(z, t)$ . Из существования решения (176) и его свойств следует, что  $u(z, t)$  удовлетворяет уравнению (176) со следующими граничными условиями:

$$u(0, t) = \varphi(t) - 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u(z, t) = 0, \quad u(z, 0) = -\vartheta_0(z). \quad (239)$$



Так как на границе области функция  $u(z, t)$  не может быть положительной, то, вследствие принципа максимума, во всей области  $S : 0 \leq t < \infty, 0 \leq z < \infty$  имеем

$$u(z, t) \leq 0. \quad (240)$$

Из того, что  $\frac{\partial v}{\partial t}$  тоже удовлетворяет уравнению (176), а также исходя из условия (239) и свойств функции  $\varphi(t)$ , следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \geq 0. \quad (241)$$

Требуется доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $t_\varepsilon$ , что при  $t > t_\varepsilon$  справедливо неравенство  $u(z, t) > -\varepsilon$ .

Допустим противоположное. Тогда можно найти такое  $\varepsilon_1 > 0$ , что для любых  $\bar{t}_n \geq 1$  существуют такие  $z_n$  и  $t_n (0 \leq z_n < \infty, t_n > \bar{t}_n)$ , для которых  $u(z_n, t_n) \leq -\varepsilon_1$ . Используя граничные условия, можно выбрать  $z_n$  таким образом, чтобы

$$\frac{\partial^2 u(z_n, t_n)}{\partial z_n^2} \geq 0, \quad (242)$$

причем существуют такие  $z_*$  и  $z^*$ , что

$$0 < z_* \leq z_n \leq z^* < \infty. \quad (243)$$

Последовательности  $\{t_n\}$  при  $t_n \rightarrow \infty$  соответствует последовательность  $\{z_n\}$ , имеющая предельную точку  $\bar{z}$ , которая находится в интервале  $z_* \leq \bar{z} \leq z^*$  и для которой при всех  $t \geq 0$  имеет место неравен-



$$u(\bar{z}, t) \leq -\varepsilon, \quad (244)$$

Так как функция  $u(z, t)$  удовлетворяет уравнению (176), то для точек  $(\bar{z}, t)$ ,  $0 \leq t < \infty$  в силу (241), (242) и (244) будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D \bar{z}^{3/2} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} - c \bar{z}^{m+3/2} u \geq \\ &\geq c \bar{z}^{m+3/2} \varepsilon, > c z_*^{m+3/2} \varepsilon = K > 0, \quad (245) \end{aligned}$$

т.е.  $u(\bar{z}, t)$  может принять положительные значения, что противоречит (240). Это и доказывает наше утверждение. Теорема существования решения уравнения (176), которую мы использовали при доказательстве, а также более детальное доказательство этой теоремы даны в трудах обсерватории [87].

На основе доказанной теоремы в случае стационарного состояния диффузии следует искать то решение дифференциального уравнения (237), которое удовлетворяет условиям

$$\partial|_{t \rightarrow 0} = 1, \quad \partial|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (246)$$

В настоящем параграфе рассмотрим случай

$$T = c^{-1} a^{3/2}. \quad (247)$$

Легко проверить, что [88]

$$\partial = e^{-\sqrt{cD} z}. \quad (248)$$



## § 18. Законы диффузии.

Мы уже отметили, что у Оорта и у остальных исследователей, с одной стороны, и у нас, с другой — постановка вопроса при исследовании диффузии отличается. У Оорта коэффициент дезинтеграции  $K$  не зависит от перигельного расстояния орбиты кометы  $q$ , а у нас коэффициент пропорциональности в формуле для потенциального возраста  $T = ca^{3/2}$  зависит от  $q$ . Более того, мы учитываем, что возмущения со стороны планет практически изменяют только большие полуоси орбит почти параболических комет и не изменяют перигельные расстояния  $q$ . Поэтому мы можем рассматривать поток долгопериодических комет с данным значением  $q$ , который возник из потока новых комет с данным  $q$  вследствие диффузии. В настоящем параграфе мы проверим основной результат Оорта, который заключается в том, что при больших значениях обратной величины большой полуоси орбиты вследствие диффузии комет с прямым движением больше, чем с обратным движением. Проверим этот результат для  $q = 1a.e.$  и сформулируем первый закон диффузии:

Вследствие диффузии, чем меньше большая полуось орбиты кометы тем, в среднем, меньше наклон-



ность орбиты. Рассмотрим случай  $v = e^{-\sqrt{cD}z}$  [88]

Для сравнения теории с наблюдениями необходимо иметь формулу для числа комет, которые проходят через перигелия в данном интервале  $[0, z]$ :

$$n = \int_0^z e^{-\sqrt{cD}z} dz = \frac{1}{\sqrt{cD}} (1 - e^{-\sqrt{cD}z}) \quad (249)$$

Обозначим через  $n_1$  число комет с прямым движением, а через  $n_2$  - с обратным. Тогда на основе предыдущей формулы получим

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \frac{1 - e^{-\sqrt{cD_1}z}}{1 - e^{-\sqrt{cD_2}z}}, \quad (250)$$

где  $D_1, D_2$  - соответственно значения  $D$  для прямого и для обратного движения. Легко убедиться, что при  $z \rightarrow 0$

$$\left. \frac{n_1}{n_2} \right|_{z=0} = 1$$

Величину  $c(1) = S^{-1}$ , т.е. при  $q = 1 \text{ a.e.}$  определим двумя независимыми путями. Во-первых, учтем, что в промежутке  $[0; 0,002]$  согласно данным, взятым из каталога [89], сосредоточено примерно 75% комет. По формуле (249) имеем  $S^{-1} = 7$ , т.е. средний потенциальный возраст комет при  $q = 1$  равен примерно 7 оборотам.

С другой стороны, при  $z = 20 \cdot 10^{-3} \text{ a.e.}$  ещё наблюдается вполне реальное влияние диффузии, а именно:

$$V(0.02) : V(0) = 0.01.$$



Это дает:

$$s^{-1} = 60.$$

Различные значения для  $s$  указывают на то, что теория только приблизительно объясняет данные наблюдений.

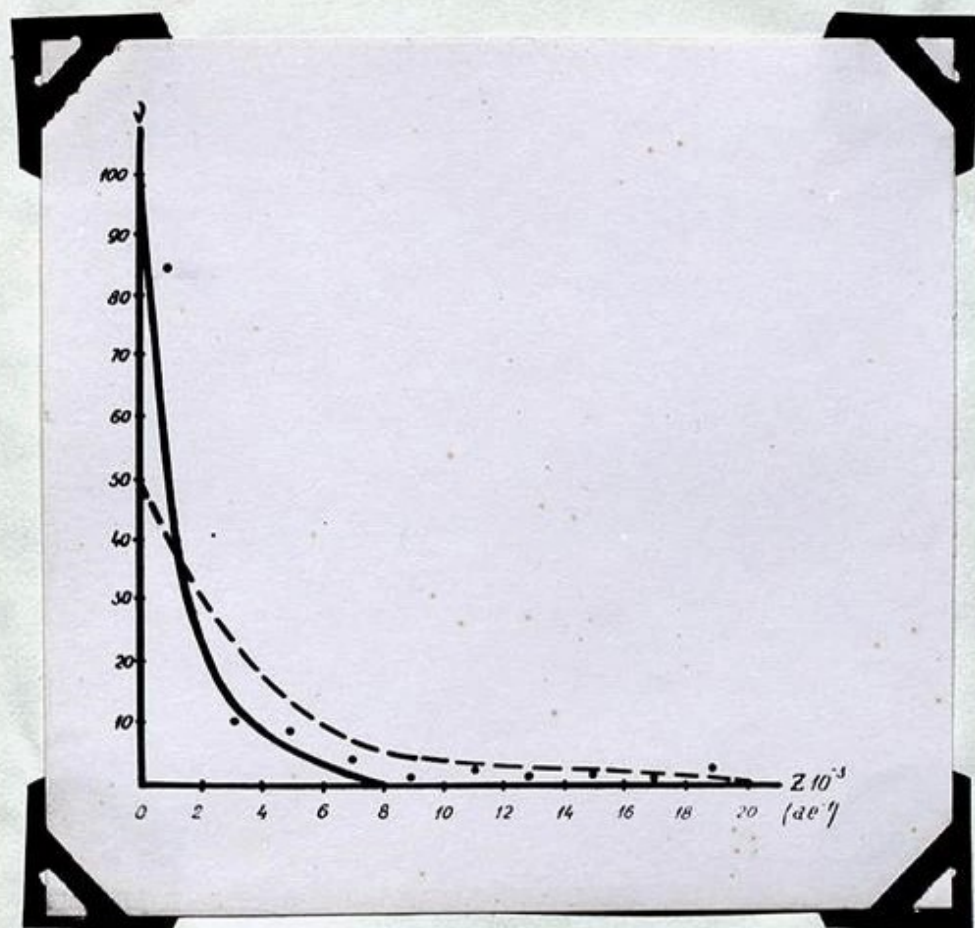


Рис. 9.

Рисунок 9 показывает, как теоретические кривые для обоих вариантов совпадают с наблюдениями. Очевидно, случаи, соответствующие возрастам  $s^{-1} = 7$  и  $s^{-1} = 60$  являются крайними при сравнении теории с наблюдениями, если допустить, что (247) действительно имеет место. При построении графика рис. 9 не учитывалось 30% почти параболических комет.



Вурком вычислил, что при  $q = 1$  а.е. для комет с прямым движением  $D = 2,4 \cdot 10^6$ , а для комет с обратным движением  $D = 5,5 \cdot 10^6$ . Отсюда следует, что диффузия комет с прямыми движениями протекает более интенсивно. Следовательно, для параболических комет прямые и обратные движения должны наблюдаться в одинаковом количестве, а у комет с большими полуосями, равными нескольким десяткам астрономических единиц, должны преобладать прямые движения. Формула (250) позволяет определить соотношение между количеством комет с прямым и обратным движением как функцию от  $z$ . Эту величину можно также определить из наблюдений. Для сравнения с наблюдениями более эффективно рассматривать величину

$$x = \frac{n_1(z) - n_1(z_1)}{n_2(z) - n_2(z_1)} = \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \frac{e^{-\sqrt{cD_1}z_1} - e^{-\sqrt{cD_1}z}}{e^{-\sqrt{cD_2}z_1} - e^{-\sqrt{cD_2}z}} \quad (251)$$

При  $z_1 = 0$  и  $z \rightarrow 0$ , независимо от значений  $D_1$  и  $D_2$ , имеем  $x = 1$ , а наблюдения дают  $x = 0,84$ . При  $z_1 = 25 \cdot 10^{-3}$  и  $z = 5 \cdot 10^{-3}$  следует различать два случая: если  $S^{-1} = 7$  /об./, то  $x = 7$ , если же  $S^{-1} = 60$  /об./, то  $x = 2,5$ . Наблюдения дают  $x = 2,4$ . Следовательно, случай  $S^{-1} = 60$  /об./ почти точно подтверждается распределением комет по наклонностям плоскостей орбит. При этом сравнении были использованы дан-



ные всех комет, у которых  $0 \leq q \leq 5 \text{ а. е.}$ . Из рис. 14 видно, что при  $q = 4.5 \text{ а. е.}$  отношение  $\mathcal{D}_1 (i < 90^\circ)$ :  $\mathcal{D}_2 (i > 90^\circ)$  будет меньше, чем при  $q = 1 \text{ а. е.}$ , т.е. концентрация орбит комет к плоскости Юпитера будет при  $q = 4.5 \text{ а. е.}$  больше чем при  $q = 1,0 \text{ а. е.}$

Качественные исследования в § 16 показали, что теория диффузии предвидит нарастание плотности потока комет с данным  $q$  с увеличением перигелийного расстояния от Солнца. В настоящем параграфе выясним количественную сторону этого явления. Чтобы оценить увеличение плотности, сравним количество комет, перигелии которых находятся на расстояниях от Солнца, равных расстояниям Юпитера и Земли от Солнца. Отношение числа этих комет подсчитаем по формуле

$$\frac{n(q=4.5)}{n(q=1.0)} = \frac{\int_0^{Z_1} v(4.5) dv}{\int_0^{Z_1} v(1.0) dv} \quad (252)$$

Расстояние Юпитера от Солнца принято равным  $q = 4.5 \text{ а. е.}$ , так как Вурком подсчитал значение  $\mathcal{D}$  для этой величины  $q$ . Верхний предел интегралов  $Z_1$  в формуле (252) равен тому значению обратной величины большой полуоси, до которого распространяется диффузия. Так как при  $q=1$  интенсивность потока



долгопериодических комет быстро уменьшается при  $z = 0.02 \text{ a. e.}^{-1}$ , то можно считать  $z_1 = \infty$ , т.е. практически то же значение интеграла дает  $z_1 = \infty$ . На расстоянии Юпитера, т.е. при  $q = 4.5 \text{ a. e.}$  для случаев  $m = 1$  и  $m = 0$  безразлично равен ли верхний предел  $z_1 = 0.03$  или  $z_1 = \infty$ . Следовательно, можно считать, что  $z_1 = \infty$ . Для случая  $m = -1$  значения интегралов (252) сильно зависят от того, берём мы пределом  $z_1 = 0.03$  или  $z_1 = \infty$ . Мы отметили, что уравнение диффузии правильно описывает этот процесс только при  $z < z_0$ , где  $z_0$  приблизительно равно  $0.02 \text{ a. e.}^{-1}$ . В случае  $m = -1$  мы не имеем права считать  $z_1 = \infty$ , поэтому не будем подсчитывать увеличение плотности потока комет, а удовлетворимся замечанием, что в случае  $m = -1$  предвидится очень большое увеличение плотности потока комет с увеличением расстояния от Солнца. Вычисления показывают, что в варианте С.В. Орлова для случая  $m = 0$  имеем десятикратное увеличение плотности потока комет с данным значениям  $q$ , а в варианте гравитационного разрушения имеем примерно пятикратное увеличение плотности потока комет на расстоянии от Солнца, равном расстоянию Юпитера от Солнца по сравнению с плотности на расстоянии  $1 \text{ a. e.}$  от Солнца. Выше изложенные рассуждения, к сожалению, не могут быть проверены из-за недостатка наблюдательного матери-



ала. Следовательно, мы только теоретически доказали следующий третий закон диффузии. В потоке комет с данным  $q$  вследствие диффузии тем больше содержится новых комет, чем меньше перигельные расстояния  $q$  имеют орбиты комет.

Рассмотрим второй закон диффузии. Среднее относительное значение большой полуоси для случая  $m=0$  определяется следующей формулой:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^z e^{-\sqrt{c_i D} z} z dz}{n} = \frac{1 - e^{-\sqrt{c_i D} z} (1 + \sqrt{c_i D} z)}{\sqrt{c_i D} (1 - e^{-\sqrt{c_i D} z})} \quad (253)$$

Если верхний предел интервала  $0 \leq q \leq z$  выберем  $z = 0.03 a.e.$ , то получим следующую приближенную формулу:

$$\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{c_i D}} \quad (254)$$

В варианте С.В. Орлова

$$\bar{z} = \frac{c' q^{5/4}}{\sqrt{D}} \quad (255)$$

В варианте гравитационного разрушения среднее значение растет несколько медленнее, а именно,

$$\bar{z} = \frac{c'' q^{3/4}}{\sqrt{D}} \quad (256)$$

где  $c'$  и  $c''$  - некоторые постоянные.

Формулу (254) будем сравнивать с наблюдениями только в промежутке  $q [0, 1, 1.75 a.e.]$ . При меньших



значениях  $q$  имеется несколько комет, которые произошли в результате деления одной кометы. При больших значениях  $q$  число открытых комет начинает резко убывать, а в действительности число комет увеличивается. Это объясняется тем, что при  $q > 1,75 a.e.$  яркость комет слишком мала для наблюдений на столь далеком расстоянии от Земли. В настоящее время мы открываем мало комет с  $q > 1,75 a.e.$ , но все они имеют исключительные свойства. На рис. 10 видно, что кометы, у которых  $q > 1,75 a.e.$ , судя по абсолютной величине, не могут быть использованы для анализа, так как их средняя абсолютная величина резко отличается от средней абсолютной величины остальных комет. Они, по видимому, являются новыми, так как мы можем открыть на больших расстояниях только кометы с большими абсолютными яркостями.

Так как Вурком подсчитал значение  $D$  только для  $q=1$ , то мы предположили, что  $D$  есть величина, постоянная во всем интервале  $0,1 a.e. \leq q \leq 1,75 a.e.$  Это вполне законно, так как движение комет возмущается Солнечной системой в целом.

На рис. 11 представлены четыре варианта:

I,  $s^{-1} = 60; T \sim q^{5/2};$  II,  $s^{-1} = 60; T \sim q^{3/2};$  III,  $s^{-1} = 7; T \sim q^{5/2};$   
 IV,  $s^{-1} = 7; T \sim q^{3/2}$ , вычисленные по формуле (254) в интервале  $z [0, \frac{1}{40}]$ .

Соответствующие теоретические



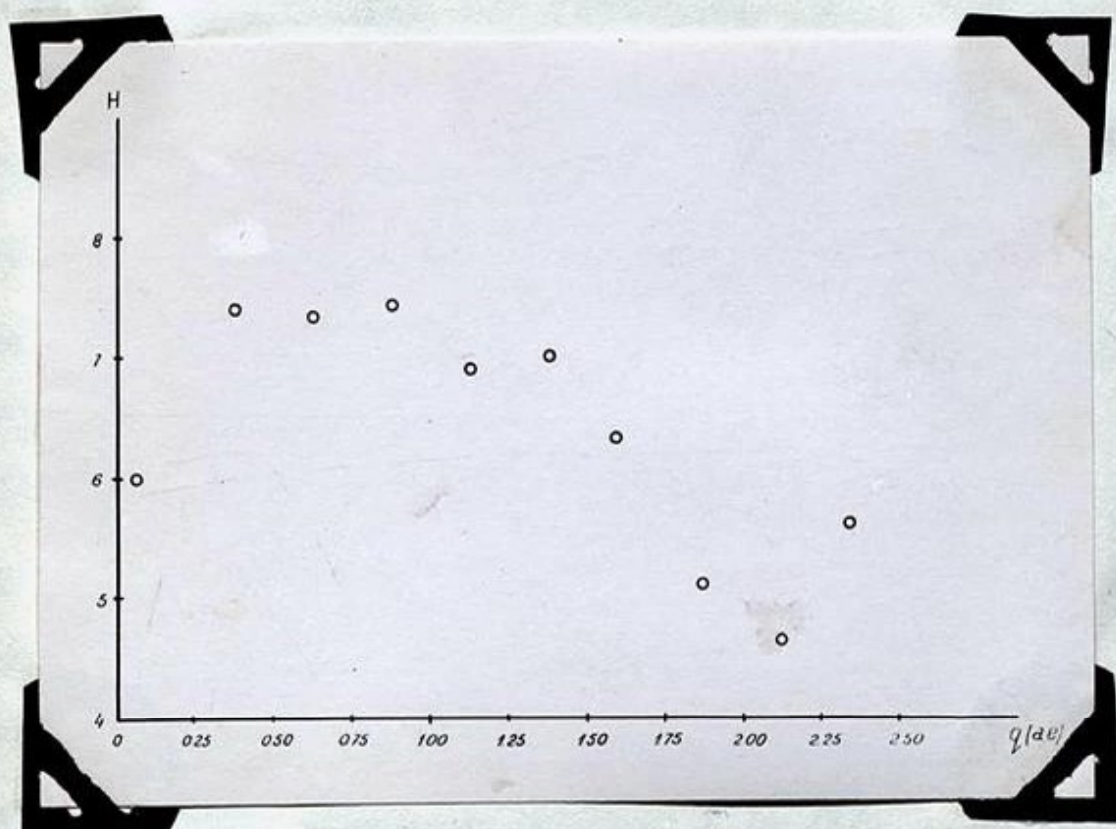


Рис. 10.

кривые можно сравнить непосредственно с данными наблюдений. Долгопериодические кометы нами были разделены на восемь групп. В первую группу вошли кометы с перигельным расстоянием в пределах от  $q = 0.1$  до  $q = 0.25$ , во вторую группу от  $q = 0.25$  до  $q = 0.50$ , и т.д. Для каждой группы мы вычислили среднее арифметическое значение  $\bar{z}$ .

Соответствующее построение возможно обосновать следующим образом. Пусть впервые комета /т.е. по Оорту новая комета/ приближается к Солнцу. С вероятностью 50% она покидает Солнечную систему и уходит в межзвездное пространство. Ос-



тальные 50% комет движутся по эллипсам. При следующем прохождении вероятность удаления уже только 40%, а оставшиеся кометы движутся уже по эллипсам меньших размеров. Этот процесс накопления малых возмущений, т.е. диффузия комет, со временем должен остановиться, т.к. кометы разрушаются в лучах Солнца и под влиянием приливных сил. Разрушение комет, т.е. дезинтеграция комет происходит более интенсивно вблизи Солнца, чем на больших расстояниях от Солнца. По этому диффузия вблизи Солнца не дает орбиты с малыми значениями больших полуосей. Следовательно, и среднее арифметическое обратных величин больших полуосей орбит комет с меньшими перигелийными расстояниями должны быть меньше соответствующих средних арифметических для комет, перигелийные расстояния орбит которых больше. Как видно из рис. 11, это полностью подтверждается данными наблюдений.

Таким образом, как эмпирически, так и теоретически доказан второй закон диффузии: вследствие диффузии орбиты, имеющие большие перигелийные расстояния, имеют в среднем меньшие эксцентриситеты, т.е. меньшие значения больших полуосей.

Рассмотренные три закона диффузии имеют очень большое значение при исследовании эволюции орбит комет. Перечислим в общих чертах те факты,



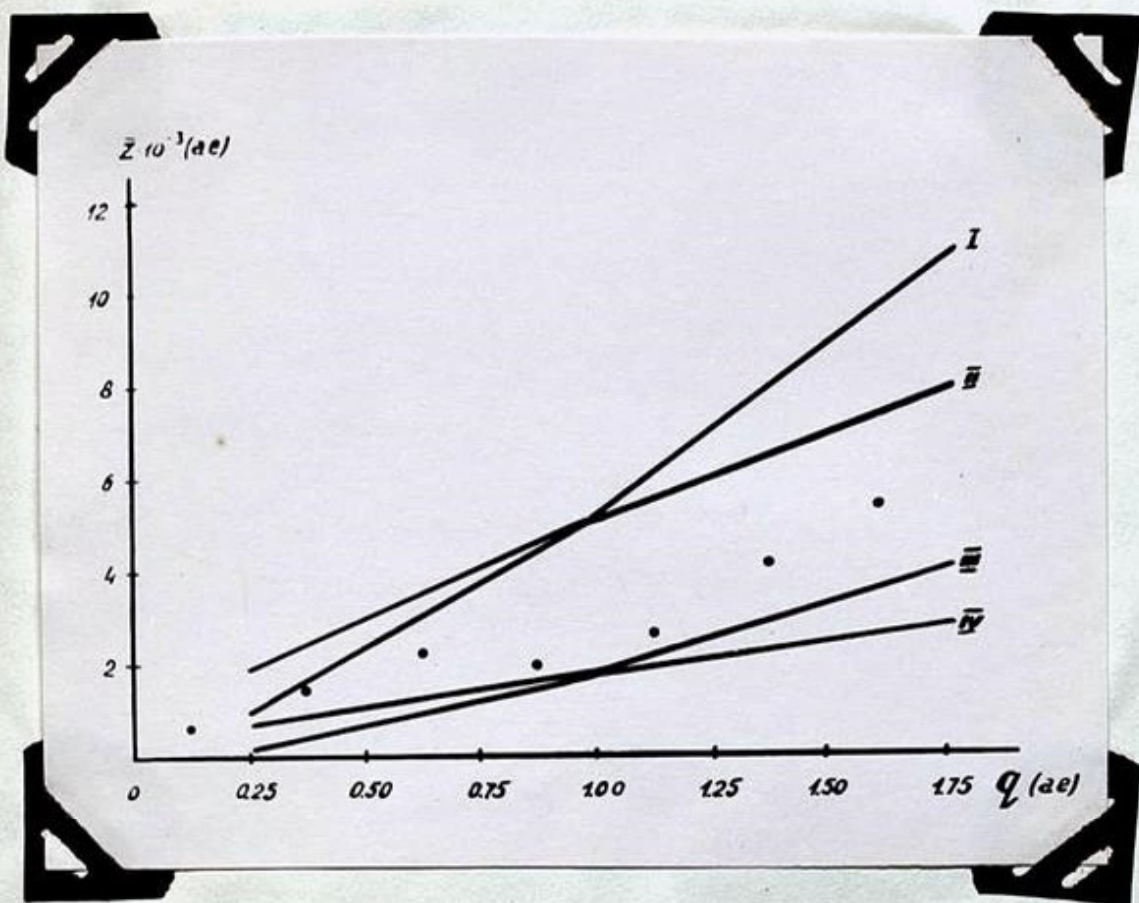


Рис. 11 .

которые доказывают справедливость законов диффузии.

Во-первых, правильность теории диффузии основывается на совпадении теории с наблюдениями, что показано на рис. 9. При построении графика числа комет  $\bar{v}$ , проходящих через перигелии в единицу времени ( $q = 1 \text{ a.e.}$ ) в зависимости от значения обратной величины большой полуоси комет /рис.9/ учитывались кометы открытые с 1700 г., у которых  $0,75 \text{ a.e.} < q < 1,25 \text{ a.e.}$  В следующем параграфе будет показано, что мы имеем право суммировать, при сравнении теории с наблюдениями, обе теоре-



тические кривые показанные на рисунке, следовательно мы имеем хорошее совпадение теории с наблюдениями.

Во-вторых, первый закон диффузии о концентрации плоскостей орбит долгопериодических комет к плоскости Юпитера при  $q \approx 1a.e.$  подтверждается непосредственно наблюдениями. При  $q \approx 5,0a.e.$  для его доказательства необходимо доказать неравенство:

$$D(q=5,0, i < 90^\circ) < D(q=5,0, i > 90^\circ).$$

Неравенство можно проверить по одному из методов изложенных в гл. III, однако это пока не сделано. Мы ограничились указанием на рис. 14 из которого, например, видно, что  $|\delta(\omega=30^\circ)| > |\delta(\omega=150^\circ)|$ . Кометы с  $\omega=30^\circ$  прямого движения, а кометы с  $\omega=150^\circ$  имеют обратное движение. Следовательно, упомянутое неравенство имеет место. Это справедливо для комет, которые не проходят через сферу действия Юпитера.

В-третьих, второй и третий законы диффузии об увеличении плотности потока комет с данным  $q$  при увеличении значения  $q$  подтверждаются непосредственно наблюдениями. Это видно из рис. 11. При построении графика среднего значения обратной величины большой полуоси от расстояния перигелия кометы /рис. 11/ учитывались кометы, открытые с 1700 г. у которых  $a > 40a.e.$  На рис. 11 видно, что



увеличение среднего значения имеется при значениях от  $q=0$  до  $q \cong 1.75a.e.$  и соответствует теории. При больших значениях сравнения теории с наблюдениями не возможно, т.к. имеется сильная селекция наблюдений и данных наблюдений очень мало. На это указывает рис. 10. При построении графика абсолютных величин комет как функции от перигельных расстояний орбит /рис. 10/ учитывались кометы, открытые с 1700 г., у которых  $a > 40a.e.$  Оно показывает, что при  $q > 1.75a.e.$  открываем почти только новые кометы, т.е. кометы, у которых  $\frac{1}{a} = 0$ . Поэтому при  $q > 1.75a.e.$  искажается ход кривой на рис. 11.

Второй и третий законы диффузии при  $q \cong 5a.e.$  можно доказать теоретически. Они следуют из формул (269) и (270). Теоретически увеличение плотности мало зависит от значения  $D$ . Используя значения  $D$ , вычисленные Вуркомом и Керром, получается примерно десятикратное увеличение потока /при данном  $q$  / при значении  $q \cong 5.0a.e.$  по сравнению с  $q \cong 1a.e.$  Таким образом, мы считаем, что доказательство второго и третьего законов диффузии никаких дополнительных исследований не требует.



## § 19. Проблема новых комет.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели для потенциального возраста комет выражение

$$T = C^{-1} z^{-m-3/2}$$

в случае, если  $m=0$ . В § 17 мы пришли к заключению, что имеется избыток комет с малыми значениями  $z$  по сравнению с теорией. Оорт, который открыл это явление, объясняет его селекцией открытия комет: кометы с малыми значениями  $z$  являются в среднем более "новыми", имеют большой запас газов и светят, следовательно, ярче. Установить, какой процент составляют новые кометы, по фотометрическим или спектроскопическим данным невозможно. Поэтому мы вводим величину

$$K = \frac{\int_0^{0,002} v dz}{\int_0^{\infty} v dz}, \quad (257)$$

которая характеризует количество комет с малыми  $z$ . Чем больше величина  $K$ , тем меньше комет следует отнести к числу "новых". В настоящем параграфе рассмотрим случаи  $m=1, 0, -1, -3/2$  и установим, который из этих случаев дает наилучший результат с точки зрения объяснения избытка почти параболических комет.



ческих комет. В § 14 мы установили, что, согласно наблюдениям,  $K$  равно, примерно, 66% - 75%.

Кроме того, рассмотрим различные эффекты, которые могут влиять на значение  $K$ . Во всех упомянутых случаях определения  $C$  будем считать, что

$$V(0,02) : V(0) = 0,01. \quad (258)$$

Число 0,01 соответствует данным каталогов. Подставляя в уравнение (237) значение величины (238) и применяя подстановку

$$z_1 = (cD)^{\frac{1}{m+2}} z, \quad (259)$$

получим уравнение

$$\frac{d^2 v}{dz_1^2} - v z_1^m = 0. \quad (260)$$

При условиях типа (236) уравнение (260) имеет следующее решение:

$$v(z_1) = C_0 \sqrt{z_1} K_{\frac{1}{m+2}} \left( \frac{2}{m+2} z_1^{\frac{m+2}{2}} \right), \quad (261)$$

где  $K_{\frac{1}{m+2}}(z)$  есть функция Бесселя, а  $C_0$  - некоторая постоянная.

Обозначим

$$z_2 = \frac{2}{m+2} z_1^{\frac{m+2}{2}} \quad (262)$$

и

$$C_1 = C_0 \left( \frac{m+2}{2} \right)^{\frac{1}{m+2}}, \quad (263)$$

тогда имеем

$$v(z_2) = C_1 z_2^{\frac{1}{m+2}} K_{\frac{1}{m+2}}(z_2), \quad (264)$$



$$z_2 = \frac{2}{m+2} \sqrt{cD} z^{\frac{m+2}{2}}. \quad (265)$$

в случае  $m = -1$

$$z_2 = 2\sqrt{cD}z, \quad v(z_2) = c_1 z_2 K_1(z_2), \quad (266)$$

$$\int_0^z v(z) dz = \frac{c_1}{2cD} \int_0^{z_2} z_2^2 K_1(z_2) dz_2 =$$

$$= \frac{c_1}{2cD} \left[ 2 - z_2^2 K_0(z_2) - 2z_2 K_1(z_2) \right], \quad (267)$$

$$\int_0^\infty v(z) dz = \frac{c_1}{cD}. \quad (268)$$

В случае  $m = 0$  значение интеграла  $\int_0^z v(z) dz$  также легко определить, что и сделано в § 17. В остальных случаях соответствующие интегралы определялись численными методами. Результаты вычислений представлены в таблице XII.

Таб. XII

$m$	$K$
1	31%
0	37%
-1	44%
-3/2	42%

Очевидно, что для случая  $m = 0$  значение  $K$  близко



к максимальному значению. В случае  $m = -1$  мы имеем лучшее совпадение с наблюдениями, т.е. в этом случае для согласования теории с наблюдениями следует вводить наименьшее количество новых комет. По нашему мнению, это не указывает на то, что формула при  $m = -1$  более правильна чем при  $m = 0$ . Вопрос о том, какие значения  $m$  более правильны, следует решить физике комет. По нашему мнению  $m = 0$  является самым надежным случаем. Мы считали необходимым проверить, как меняется кривая диффузии в зависимости от значения  $m$ , т.к. формула потенциального возраста  $T$  является приближенной. Если соответствующая зависимость оказалась бы очень сильной, то мы заключили бы, что исследовать диффузию на основе формулы  $m = 0$  невозможно, т.к. в таком случае задача оказалась бы математически некорректно поставленной. Однако наши опасения оказались напрасными.

В § 14 показано, что теория Вуркома для нестационарного процесса диффузии также приводит к излишку почти параболических комет. Сложнее определить совместное влияние дезинтеграции и эффекта нестационарности процесса диффузии. Нестационарность диффузии может возникнуть из-за нестационарности потока новых комет. Уравнение диффузии нестационарного состояния аналитически реше-



но только в предположении, что поток параболических комет нарастает пропорционально квадрату времени, т.е. при несколько искусственных граничных условиях. Мы уже утверждали, что граничные условия не играют роли при установлении относительного распределения комет. Можно убедиться в том, что относительное распределение комет по  $z$  не зависит в большой мере от граничного условия. Сделаем это для случая

$$\Gamma = c^{-1} a^{\frac{1}{2}}, \quad (269)$$

Следует сравнить формулы (211) с решением дифференциального уравнения (237) для  $m = -1$ :

$$\nu = 2\sqrt{cRz} K_1(2\sqrt{cRz}). \quad (270)$$

При значениях  $0 < cRz \leq 1$  значения  $\nu$ , полученные при помощи формул (211) и (270) различаются на несколько процентов. Асимптотические разложения при больших значениях  $cRz$  для обеих формул одинаковы, и мы имеем

$$\frac{\nu(z, t)}{\nu(a, t)} = \sqrt{\pi} \sqrt{cRz} e^{-2\sqrt{cRz}}. \quad (271)$$

Таким образом, мы убеждаемся, что несколько нереальные граничные условия практически не играют никакой роли. Мы рассмотрели только один частный случай, т.е. когда приток новых комет начался  $t = 5,5 \cdot 10^5$  л. тому назад и  $c = 10^{-5}$ . При помощи численного интегрирования было найдено, что  $K = 47\%$ .



При том же самом законе дезинтеграции для установившегося процесса имеем  $K = 44\%$ . Если дезинтеграция отсутствует, то  $K = 44\%$ . Следовательно, при учете обоих эффектов нужно также предположить, что имеет место излишек новых комет.

В заключение настоящего параграфа припомним, влияние каких эффектов нами было исследовано в проблеме новых комет : 1/ Влияние звездных возмущений /§ 8/ ; 2/ Неопределенность понятий "малых" и "больших" возмущений со стороны Юпитера /§ 14/ ; 3/ Неточность формулы для определения потенциального возраста комет /§ 8/ ; 4/ Приближенность уравнения теории диффузии /§ 16/ ; 5/ Неточность определения орбит почти параболических комет /§ 14/. Мы убедились, что совокупность упомянутых эффектов не в состоянии объяснить наблюдаемый излишек почти параболических комет по сравнению с теорией. Эффект новых комет при сравнении теории с наблюдениями можно учесть двумя способами : 1/ отбросить некоторую часть параболических комет или 2/ предположить, что кометы имеют различные первоначальные запасы газов.

В обоих случаях возможно теорию согласовать с наблюдениями. Справедливость первого способа очевидна. Во втором случае следует рассмотреть



несколько групп комет, например, две. Диффузия в этих группах происходит независимо. Пусть потенциальный возраст комет первой группы при  $q = 1 \text{ a. e.}$  есть 7 об., а у второй - 60 об. В таком случае мы уже имеем законы распределений этих групп по  $\xi$ . Они показаны на рис. 9. Закон распределения по  $\xi$  комет обеих групп получим, суммируя соответствующим образом обе кривые. Легко сообразить, что подбирая интенсивность потоков этих групп, мы сумеем получить кривую распределения, которая хорошо удовлетворит наблюдениям. Мы убедились, что распределение короткопериодических комет по абсолютным яркостям также указывает на существование новых комет. Об этом свидетельствует тот факт, что кометы, имеющие большие абсолютные величины, приходят из далёких областей пространства. Это мы установили для комет, у которых  $q > 2 \text{ a. e.}$



## ГЛАВА V

### БОЛЬШИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ.

#### § 20. Метод Х. А. Ньютона.

В космогонии при сравнении теории с наблюдениями во многих случаях от данных наблюдений и от вычислений не требуется большой точности. Так, например, рассматривая наблюдаемое распределение короткопериодических комет по  $a$ , достаточно знать их значения примерно с точностью до  $\pm 0,1$  а.е., так как мы при сравнении с теорией подсчитываем числа комет, у которых  $a$  имеются в интервале  $[2,6 \text{ а.е.} - 2,8 \text{ а.е.}]$ ,  $[2,8 \text{ а.е.} - 3,0 \text{ а.е.}]$  и т. д. Ввиду малого числа открытых короткопериодических комет, а так же большой зависимости открытия комет от разных неизвестных нам причин и неточности теории, не имеет смысла производить более детальное изучение материала, полученного в результате наблюдений. В связи с этим в небесной меха-



нике были созданы методы для грубо приближенного подсчета больших возмущений. Большими возмущениями мы будем называть возмущения в движении комет со стороны Юпитера, если кометы приближаются к нему на расстояние  $0,3$  а.е. или меньше, т.е. проходят через сферу действия Юпитера, радиус которой  $\rho = 0,3$  а.е.. Однако, при прохождении через сферу действия элементы орбит комет во многих случаях изменяются мало, т.е. в пределах ошибок вычислений. Поэтому в приближенной теории более надежными являются подсчеты, когда происходят особенно большие изменения в элементах орбит комет.

Х.А.Ньютон вывел очень простую формулу для определения изменения величины  $\chi = \frac{1}{a}$ , которая имеет большое значение. При выводе этой формулы мы откажемся от обычно применяемой методики изложения [90], [91].

Х.А.Ньютон учитывает в возмущающей функции (2) только ее главную часть. Следовательно, имеем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + K^2 \frac{\xi}{\rho^3} = -K^2 m_1 \frac{\xi - \xi_1}{\Delta_0^3} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + K^2 \frac{\eta}{\rho^3} = -K^2 m_1 \frac{\eta - \eta_1}{\Delta_0^3} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + K^2 \frac{\zeta}{\rho^3} = -K^2 m_1 \frac{\zeta - \zeta_1}{\Delta_0^3} \end{array} \right. \quad (272)$$



Умножая уравнение системы (272) соответственно на

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d(\xi - \xi_1)}{dt} + \frac{d\xi_1}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{d(\eta - \eta_1)}{dt} + \frac{d\eta_1}{dt},$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d(\xi - \xi_1)}{dt} + \frac{d\xi_1}{dt}$$

и суммируя, получим:

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{2k^2 m_1}{\Delta_0^2} v_J \cos \varphi_0, \quad (273)$$

$$P = v^2 - \frac{2k^2}{\rho} - \frac{2k^2 m_1}{\Delta_0}, \quad (274)$$

где  $\varphi_0$  - угол между радиус-вектором Юпитер-комета и скоростью Юпитера  $v_J$ . Предположим, что при движении кометы в сфере действия Юпитера можно не учитывать силу притяжения Солнца. Тогда можно считать, что комета перемещается относительно Юпитера по гиперболе. Вообще, вектор скорости Юпитера не будет лежать в плоскости относительного движения кометы. Поэтому вместо угла  $\varphi_0$  введем угол  $\theta_1$  в относительной плоскости орбиты кометы, который будем отсчитывать от проекции вектора скорости Юпитера на эту плоскость. Тогда

$$\cos \varphi_0 = \cos \theta_1 \cos \delta, \quad (275)$$

где  $\delta$  - угол между  $\vec{v}_J$  и относительной плоскостью движения кометы. Закон площадей в случае относительного движения имеет следующий вид:

$$\Delta_0^2 d\theta_1 = \rho_0 v_k' dt, \quad (276)$$

где  $v_k'$  - относительная скорость в бесконечно дале-



ной точке или практически то же самое, что скорость вступления кометы в сферу действия, а  $\rho_0$  — перпендикуляр, опущенный из центра Юпитера на асимптоту. При помощи (276) исключаем из (273) время  $t$ . После разделения переменных  $(\rho, \theta)$ , интегрирования и учета формулы (275), вследствие симметрии положения гиперболы относительно сферы действия имеем:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a} = - \frac{4m \cdot v_j \cos \varphi^0 \sin \alpha}{\rho_0 v_k'}, \quad (277)$$

где  $\varphi^0$  — угол между скоростью Юпитера и направлением перипланеты,  $2\alpha$  — угол между асимптотами,  $a, a_1$  — значения большой полуоси соответственно после и перед прохождением кометы через сферу действия.

Будем считать, что Юпитер и комета перемещаются прямолинейно, т.е. комета в относительном движении перемещается по асимптоте гиперболы, которая совпадает с касательной к относительной орбите в точке вступления ее в сферу действия.

Х.А. Ньютон показал, что  $\rho_0$ ,  $\varphi^0$  и  $\alpha$  можно заменить следующими величинами: углом  $\omega$  между орбитами кометы и Юпитера, наименьшим расстоянием  $d$  между орбитами кометы и Юпитера и расстоянием  $h$ , которое должен пройти Юпитер до точки наибольшего сближения орбит



когда комета в этой точке уже находится. Чтобы выразить  $\rho_0$ ,  $\varphi^0$  и  $\alpha$  через  $\omega$ ,  $d$  и  $h$ , мы учтем, что расстояния между точками в относительном и абсолютном движениях одинаковы.

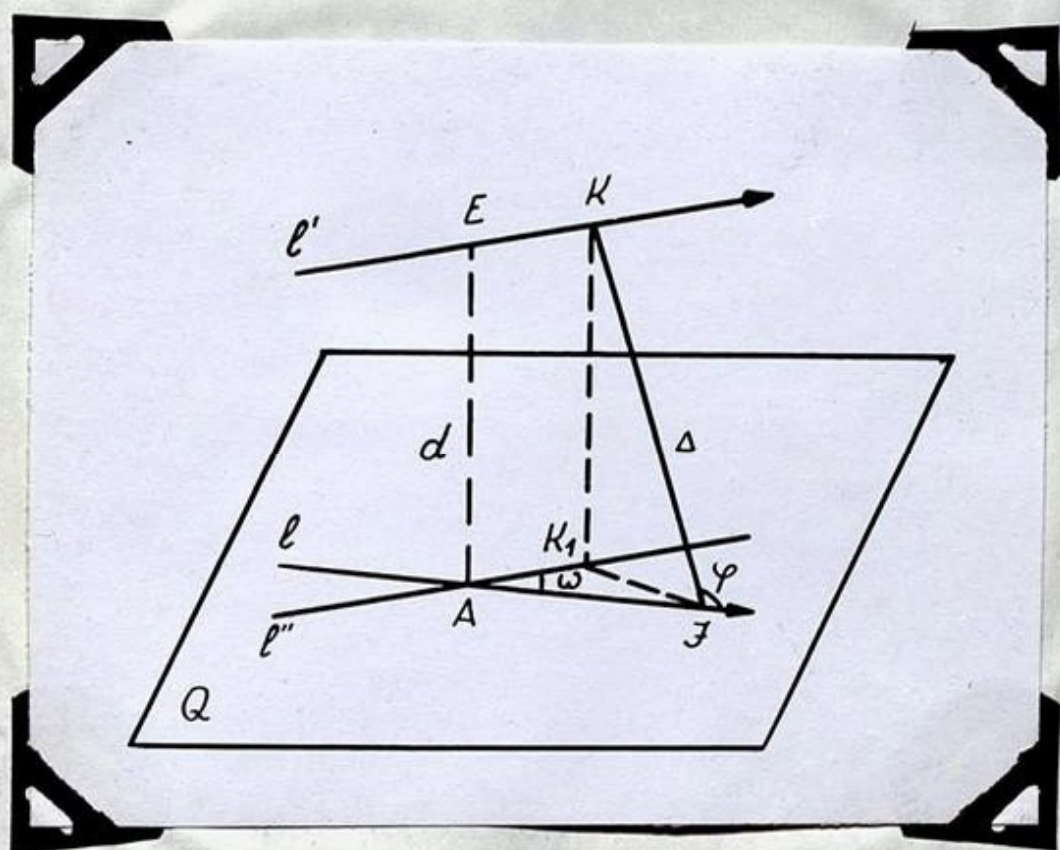


Рис. 12.

На рис. 12 прямая  $l$  представляет путь Юпитера,  $l'$  - путь кометы, плоскость  $Q$  проходит через  $l$  параллельно прямой  $l'$ ,  $l''$  - проекция прямой  $l'$  на плоскость  $Q$ . Точки, соответствующие наикратчайшему расстоянию  $d$  между  $l$  и  $l'$  суть  $A$  и  $E$ . Пусть, в данный момент комета находится в точке  $K$ , а Юпитер - в точке  $F$ , и расстояние между ними есть  $KF = \Delta$ .



Так как комета и Юпитер движутся равномерно,

то

$$EK = AK_1 = v_k t,$$

$$AF = h + v_f t.$$

При  $t=0$  имеем  $EK=0$ ,  $AF=h$ , следовательно, если  $h > 0$ , то  $h$  есть расстояние, которое планета прошла от точки  $A$ , /если же  $h < 0$ , то  $h$  - расстояние, которое планета должна пройти до точки  $A$  / в момент, когда комета находилась в точке  $E$ .

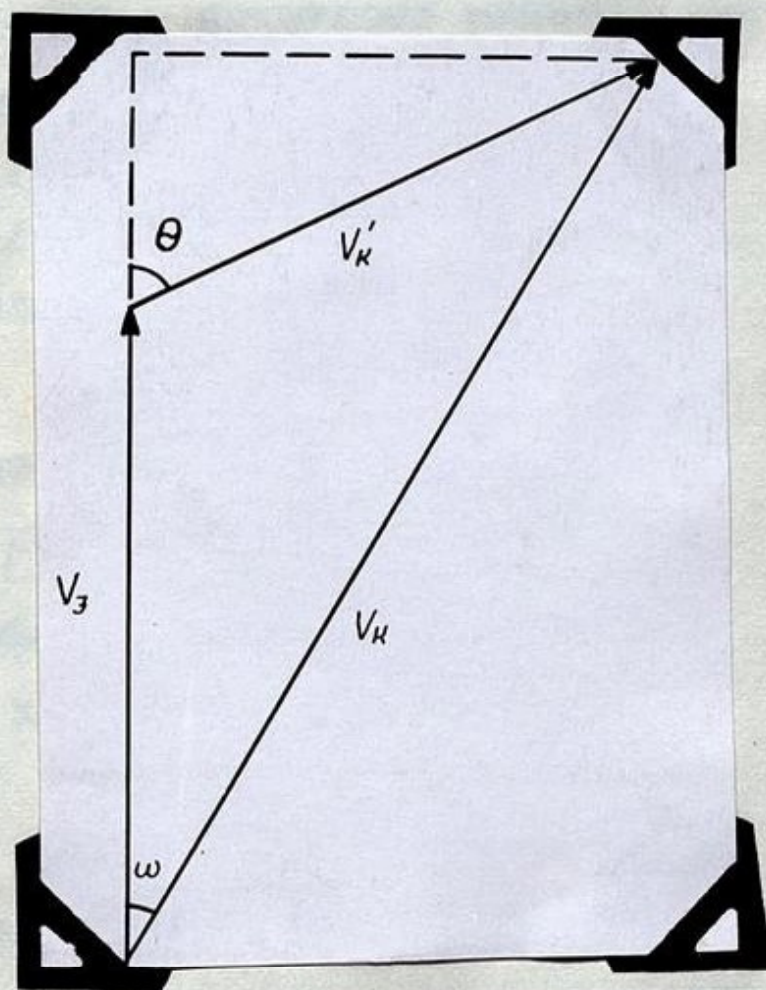


Рис. 13.

Из рис. 12 следует

$$\Delta^2 = t^2(v_f^2 + v_k^2 - 2v_f v_k \cos \omega) + 2h t(v_f - v_k \cos \omega) + d^2 + h^2. \quad (278)$$



Более простые формулы получаются, если перейти к углу между относительной скоростью кометы  $v'_k$  и скоростью Юпитера  $v_J$ .

Из рис. 13 непосредственно следует

$$v_k'^2 = v_J^2 + v_k^2 - 2 v_J v_k \cos \omega, \quad (279)$$

$$v_k' \cos \theta = v_k \cos \omega - v_J, \quad (280)$$

следовательно,

$$\Delta^2 = v_k'^2 t^2 - 2 h v_k' t \cos \theta + d^2 + h^2. \quad (281)$$

Момент, когда  $\Delta$  принимает минимальное значение, определяется формулой

$$\frac{d(\Delta^2)}{dt} = 0 = 2 v_k'^2 t - 2 h v_k' \cos \theta, \quad (282)$$

следовательно,

$$\Delta_m^2 = d^2 + h^2 \sin^2 \theta. \quad (283)$$

Вследствие инвариантности расстояний

$$p_0^2 = B^2 = \Delta_m^2 = d^2 + h^2 \sin^2 \theta, \quad (284)$$

где  $B$  - мнимая полуось гиперболы.

Так как

$$A \approx \frac{m_1 R}{s^2}, \quad (285)$$

где  $A$  - большая полуось гиперболы,  $R$  - радиус-вектор Солнце-Юпитер,  $s = v_k' : v_J$ , то, учитывая формулу (284), можно определить  $\alpha$  по следующей формуле

$$\sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (286)$$



В момент  $t_1$ , когда комета находится в точке пересечения асимптот, ее расстояние до Юпитера равно  $\sqrt{A^2+B^2}$ . Следовательно, учитывая формулы (281) и (284) имеем:

$$A^2 + d^2 + h^2 \sin^2 \theta = v_k^2 t_1^2 - 2h v_k t_1 \cos \theta + d^2 + h^2$$

или

$$t_1 = \frac{A + h \cos \theta}{v_k}, \quad (287)$$

так как из обоих моментов тот, который соответствует точке пересечения асимптот, является более поздним.

Из рисунка (12) следует

$$\text{proj}_{AZ} AK_1 + \text{proj}_{AZ} K_1 J = AJ$$

или

$$v_k t \cos \omega - \Delta \cos \varphi = h + v_f t.$$

Так как при  $t = t_1$  имеем  $\varphi = \varphi^0$ , то

$$\cos \varphi^0 = \frac{A \cos \theta - h \sin^2 \theta}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (288)$$

Подставляя значения для  $\Delta$  (286),  $\varphi^0$  (288) в формулу (287) и учитывая (284), мы получим  $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a}$  как функцию от  $\omega(\theta)$ ,  $h$ ,  $d$  и  $S$ , т.е.

$$\delta = \frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} = \frac{4m_1}{S} \frac{A \cos \theta - h \sin^2 \theta}{A^2 + d^2 + h^2 \sin^2 \theta}. \quad (289)$$

При выводе основной формулы Х.А. Ньютона (289) допускался ряд приближений. Так, предполагалось, что в сфере действия Юпитера комета движется по



гиперболе. Основная формула (289) широко применялась в гипотезе захвата комет. Поэтому важно выяснить точность и пределы применения приближенной теории определения возмущений Х.А. Ньютона.

Сравним ее с подсчетами Вуркома, которые он проделал для определения величины  $Q$ . Вурком применял видоизмененный метод Фэйе, который неоднократно сравнивался с точными вычислениями и, несомненно, дает неплохие результаты.

А. Вурком рассматривал захват параболических комет, поэтому

$$v_k^2 = 2 v_f^2$$

следовательно, учитывая (279) и (280), имеем:

$$s^2 = 3 - 2\sqrt{2} \cos \omega, \quad (290)$$

$$s \cos \theta = \sqrt{2} \cos \omega - 1, \quad (291)$$

и формула (283) превращается в формулу (168). При  $\Delta_m \geq 0.3 \text{ а.е.}$  большая полуось гиперболы  $A \approx 0$ . Следовательно, учитывая (283), имеем:

$$\delta = \pm \frac{4m_1}{s} \frac{\sqrt{\Delta_m^2 - d^2}}{\Delta_m^2} \sin \theta. \quad (292)$$

Как видно,  $\delta = \delta(\Delta_m, d, \theta)$ , причем  $\theta = \theta(\omega)$ . Следовательно, о соотношении  $\delta = \delta(\Delta_m, \omega)$  можно говорить только в смысле некоторого среднего значения. Рассмотрим следующее среднее значение



$$\delta = \pm \frac{4m_1 \sin \theta}{5 \Delta_m^3} \int_0^{\Delta_m} \sqrt{\Delta_m^2 - d^2} \, dd =$$

$$= \frac{\pi m_1 \sin \theta}{5 \Delta_m} = \pm \frac{\sqrt{2} \pi m_1 \sin \omega}{\Delta_m (3 - 2\sqrt{2} \cos \omega)} \quad (293)$$

На рис. 14 представлены значения  $\delta$ , полученные Вуркомом по методу Фэйе /сплошные кривые/, и значения  $\delta$ , полученные по формуле (293) /пунктирные кривые/. Очевидно, что подсчеты возму-

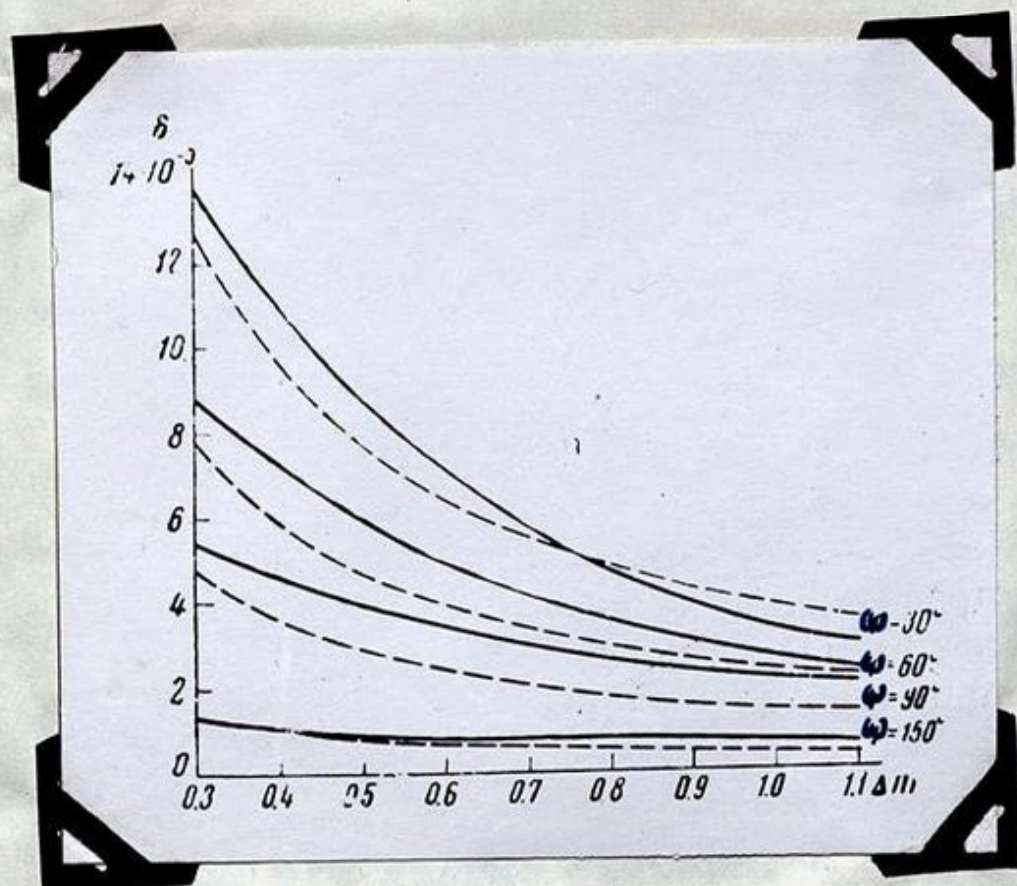


Рис. 14. Возмущения от Юпитера на обратную величину большой полуоси комет как функция угла между невозмущенными орбитами Юпитера и комет  $\omega$  и кратчайшего расстояния комета-Юпитер  $\Delta_m$ . Сплошные кривые-подсчет Вуркома. Штриховые кривые-по формуле (293).



чений у Вуркома и по формуле Х.А. Ньютона совпадают по порядку даже при сравнительно малых возмущениях  $\delta$ .

## § 21. Метод сферы действия

Если комета подходит близко к Юпитеру или другой большой планете, то при определении орбиты кометы выгодно перенести начало координат в центр планеты. В этом, по сути дела, состоит метод сферы действия. В космогонии комет, как правило, для облегчения вычислений планетоцентрических орбит допускается ряд упрощений. Предполагается, например, что в сфере действия Юпитера комету притягивает только Юпитер, что Юпитер перемещается равномерно по прямой, т.е. что относительная система координат является инерциальной, не учитывается то, что при входе в сферу действия и при выходе из нее комета относительно Солнца имеет разные значения потенциальной энергии и т.д. Имеются разные варианты подсчетов, в которых учитываются те или другие факторы. В настоящем параграфе мы рассмотрим наиболее простой случай, при помощи которого Тиссеран [92] вычислил свой знаменитый пример. Тиссеран показал, что если параболическая комета, перемещаясь в направлении движения Юпитера, обгоняет его, передвигаясь по



траектории Юпитера, то орбита кометы превращается в эллипс с афелием на орбите Юпитера, с большой полуосью примерно 3,2 а.е., эксцентриситетом  $e=0.64$ , перигелийным расстоянием  $q = 1.1 \text{ а.е.}$ . Оказывается, что кометы с приблизительно такими орбитами составляют около 70% всех короткопериодических комет. Это кометы семейства или группы Юпитера.

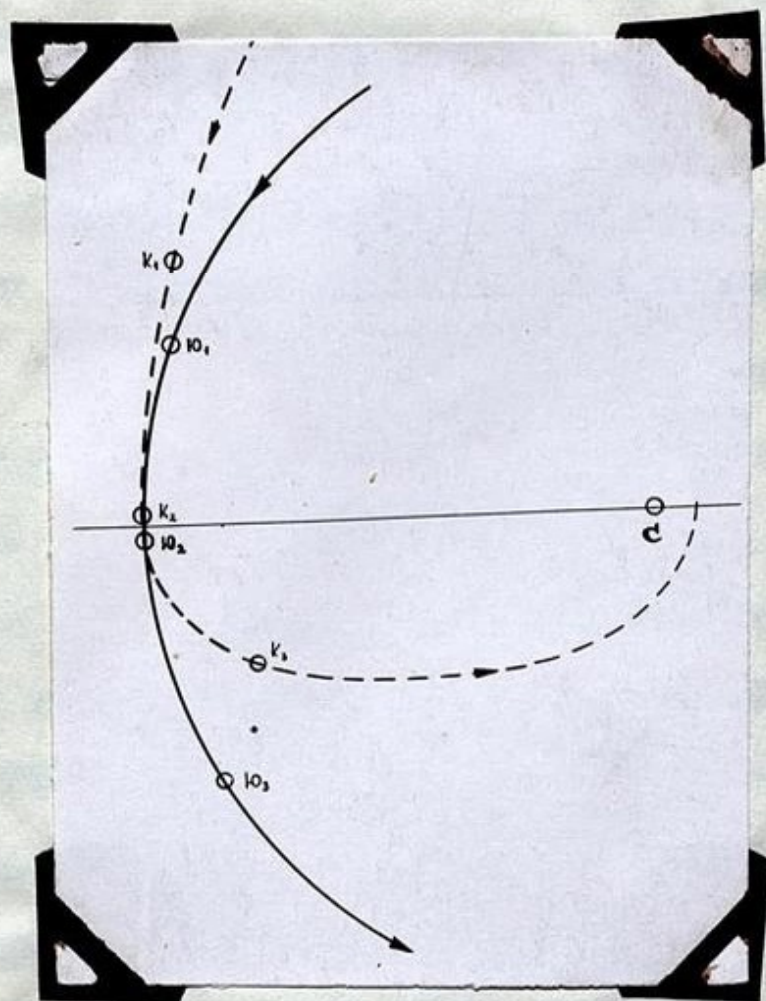


Рис. 15. Движения Юпитера и кометы в примере Тиссерана.

Так как возможны другие случаи приближения кометы к Юпитеру, то следует ожидать, что при захвате должны образовываться эллипсы разных размеров и даже явно выраженные гиперболы, которые не наблюдаются.



Шульхоф и Каландро [90] рассмотрели менее упрощенные варианты и установили ряд особенностей орбит комет, образовавшихся путем захвата. Шульхоф установил, что у комет группы Юпитера действительно наблюдаются теоретически предсказанные свойства. Шульхоф и Каландро составили ряд таблиц, по которым легко установить, каким будет вид орбиты после захвата в данном конкретном случае.

Определение возмущений состоит в следующем:

1/ Определение относительной скорости в момент входа кометы в сферу действия по формуле сложения скоростей. 2/ Определение движения кометы в относительном движении вокруг Юпитера по гиперболе. Этот подсчет не представляет трудности, так как нам известен вектор скорости в данной точке входа кометы в сферу действия. В плоском случае нас интересует только угол поворота относительной скорости, так как при выходе из сферы действия относительная скорость по модулю равна относительной скорости при входе в сферу действия.

3/ Определение абсолютной скорости кометы после выхода из сферы действия. Абсолютная скорость полностью определяет орбиту после захвата, так как вне сферы действия притяжением Юпитера пренебрегаем и считаем, что комета после выхода из сферы действия находится еще на орбите Юпитера.



Так как мы допускаем ряд упрощений, то ясно, что точность результатов не может быть большой. Этот метод хорошие результаты может дать в случае очень больших возмущений. При рассмотрении очень больших возмущений вычисления можно упростить, учитывая, что в этом случае относительная скорость при входе и выходе из сферы действия почти точно направлена к Юпитеру. Следовательно, в каждой точке на сфере действия можно указать направление, по которому следует двигаться комета, чтобы получилось очень большое возмущение.

Рассмотрим случай на плоскости. <sup>93)</sup> Если комета входит в сферу действия в точке  $A$ , то она должна двигаться в направлении движения Юпитера /пример Тиссерана/, а если комета входит в сферу действия в точке  $B$ , то она должна двигаться под углом  $45^\circ$  в направлении движения Юпитера, ибо только тогда относительная скорость будет направлена к Юпитеру.

Если направления скоростей комет будут несколько отличаться от указанных /примерно на  $\pm 5^\circ$ /, то возмущения получатся очень большими, однако кометы не будут выходить из круга действия в тех же точках, в которых вошли.

Весь расчет движения кометы в сфере действия сводится к определению точки выхода из круга



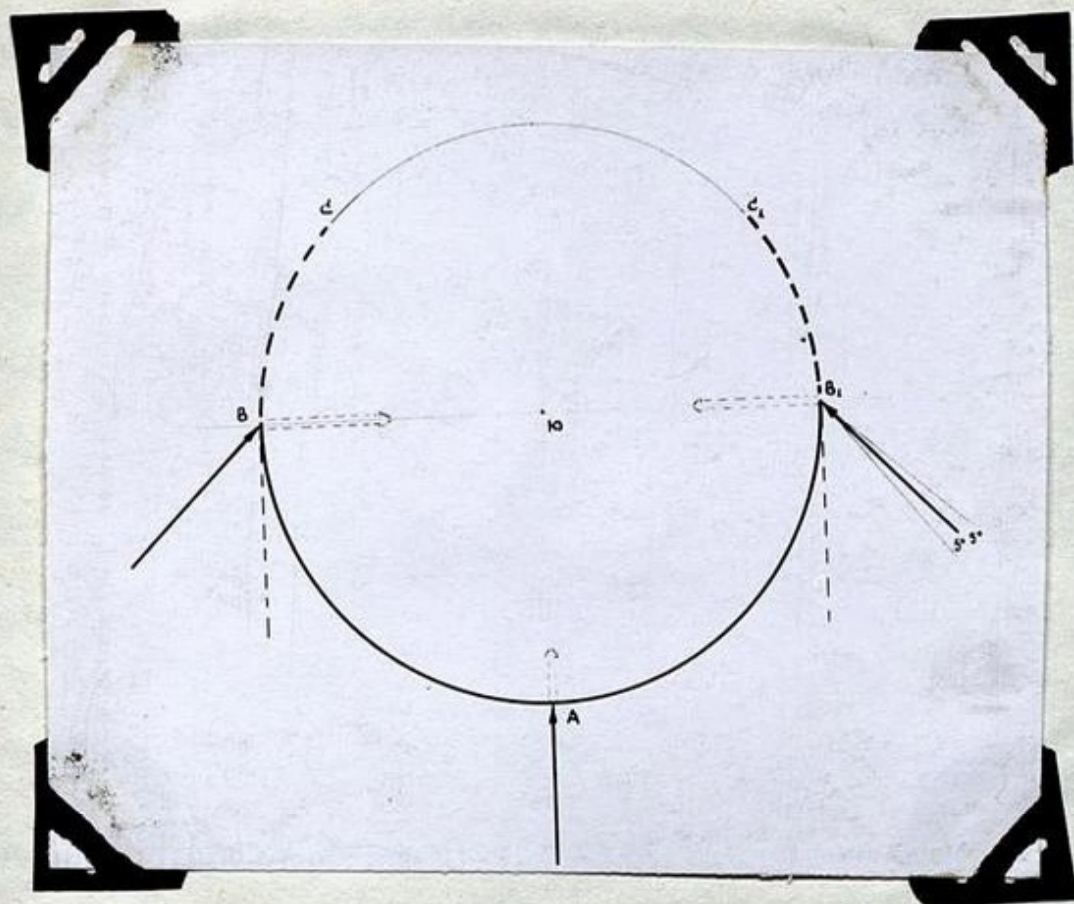


Рис. 16. Движение комет в случае очень больших возмущений.

действия, т.е. к нахождению угла поворота относительной скорости. Во многих случаях угол поворота может принять все значения от  $0^\circ - 360^\circ$  и, следовательно, его вычислять нет необходимости. Рассмотрим случай очень больших возмущений когда кометы входят в круг действия через точку  $B$ . Приближенно можно считать, что относительная скорость для углов  $45^\circ \pm 5^\circ$  равна скорости Юпитера. Если комета выйдет из круга действия через точку  $A$ , то ее абсолютная скорость равна нулю, следовательно,  $a = 2,6 \text{ а.е.}$ ,  $q = 0$ . Если же комета из круга действия выйдет через другую точку, то



возможны только прямые движения, так как модуль скорости Юпитера больше модуля относительной скорости кометы. Гиперболы получаются при выходе через дугу  $\cup BCC_1B_1$ , причем  $q \gg 2,5 \text{ a.e.}$ . Подобные рассуждения показывают, что вход кометы в круг действия через дугу  $\cup BAB_1$  дает прямые движения. Гиперболы в этом случае имеют перигельные расстояния больше  $q \gg 2,5 \text{ a.e.}$ , т.е. кометы практически не будут видны. Таким образом, если комета входит в круг действия через  $\cup BAB_1$ , то при очень больших возмущениях получаются эллиптические орбиты прямого движения. Если комета входит в круг действия через дуги  $\cup BC$  или  $\cup B_1C_1$ , то получаются обратные движения, а если через дугу  $\cup CC_1$ , то только движения по гиперболам. Вычисления В.Ф.Проскурина [94] показывают, что подобное правило имеет место в точной теории.

При вступлении параболической кометы в сферу действия Юпитера ее относительная скорость не меньше  $5,4 \text{ км/сек}$ , а именно  $-v_3(\sqrt{2}-1)$ , где  $v_3$  — скорость Юпитера. Это налагает некоторые условия на значения элементов захваченных комет. [Таких условий нет в гипотезе извержения, так как эта гипотеза допускает существование любых значений скоростей кометы при выходе её из сферы действия Юпитера.] Одним из таких условий является следую-



цее : при захвате параболических комет не могут возникнуть кометы с круговыми орбитами. Уже Тиссеран установил, что значения элементов некоторых комет группы Юпитера выходят за пределы, предвиденные теорией захвата, и предположил, что эти кометы произошли из долгопериодических, у которых  $\frac{1}{a} > 0$ . По нашему мнению, в этом случае следует предположить, что соответствующая короткопериодическая комета возникла из параболической под влиянием возмущений со стороны Сатурна или других планет, а не только под влиянием возмущений со стороны Юпитера. Некоторые ученые считали объяснение Тиссерана о возникновении комет с аномальными элементами орбит мало вероятным и утверждали, что теория захвата не в состоянии объяснить их возникновение. Установим предельный критерий захвата комет, аналогичный критерию захвата в случае плоской задачи [95]. Рассмотрим неподвижную систему координат с началом в центре Солнца, ось  $x$ -ов, которой направлена к Юпитеру, ось  $y$ -ов - по направлению движения Юпитера. Согласно закону площадей, пренебрегая размерами сферы действия, имеем:

$$\Omega = 0, \quad (294)$$

$$R v \sin \beta = k \sqrt{\mu} \sin i, \quad (295)$$

$$R (v \sin \alpha \cos \beta + v_z) = k \sqrt{\mu} \cos i, \quad (296)$$



где  $v$  - скорость кометы относительно Юпитера, сферические координаты которой  $\alpha, \beta$ ;  $R$  - радиус орбиты Юпитера;  $\Omega, i, p$  - соответственно долгота восходящего узла, наклонность и параметр орбиты кометы.

Интеграл энергии имеет следующий вид:

$$K^2 \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right) = v^2 + 2vv_z \sin \alpha \cos \beta + v_z^2, \quad (297)$$

где  $K^2$  - постоянная притяжения,  $a$  - большая полуось орбиты кометы.

Исключая из (296) и (297) величину  $\sin \alpha \cos \beta$ , получим:

$$\sqrt{\frac{p}{R}} \cos i = \frac{3}{2} - \frac{R}{2a} - \frac{Rv^2}{2K^2}. \quad (298)$$

При данном значении  $a$  величина  $\sqrt{\frac{p}{R}} \cos i$  имеет максимальное значение, если  $v$  принимает минимальное значение, а именно - 5,4 км/сек. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{p}{R}} \cos i = \sqrt{2} - \frac{R}{2a}. \quad (299)$$

Из уравнения (297) видно, что при  $v = 5,4 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$  большая полуось должна быть больше, чем  $3,14 a.e. \approx 0,25 R(\sqrt{2}-1)^{-1}$ . Чтобы определить минимальные значения  $v$  для меньших значений  $a$ , учтем, что при данном значении абсолютной скорости кометы, т.е. при данном значении  $a$ , наименьшая относительная скорость по-



лучается, если комета из сферы действия выходит через точки  $\alpha = 270^\circ$ . Следовательно, по формулам (295), (296) и (297) имеем:

$$R/R \cos^2 i = (2 - R/a) \cos^2 i, \quad (300)$$

тем более

$$R/R \cos^2 i \leq 2 - R/a. \quad (301)$$

Формулы (299) и (300) представляют собой предельный критерий захвата параболических комет.

Формулу (299) можно получить, если в критерии Тиссерана постоянную определить при условии  $\frac{1}{a} = 0$ ,

$$q = R, \quad i = 0.$$

## § 22. Осцилляция перигельных расстояний.

Уже в самом начале практики вычисления орбит комет пришлось столкнуться со случаями, когда кометы очень близко приближаются к Юпитеру, вследствие чего сильно изменяются элементы их орбит. Возникли трудности отождествления комет в случае больших возмущений. Тиссеран [92], Шульхоф [9] и другие ученые разработали несколько критериев, по которым можно установить, представляют ли две системы элементов, определенные на основе наблюдений через большой промежуток времени, одну и ту же комету, или это две разные



кометы. Большие изменения в элементах орбит возможны только в том случае, если кометы подходят к Юпитеру ближе, чем на  $0,2 - 0,1$  а.е. Шульхоф показал, что через некоторое время после больших возмущений короткопериодическая комета должна опять сблизиться с Юпитером, т.к. кратчайшее расстояние между орбитами мало меняется. Таким образом, имеется группа комет /примерно 30 % всех короткопериодических комет/, у которых через 50 - 100 лет сильно меняются элементы орбит. Примером такой кометы может служить комета Вольфа I, орбита которой определена весьма точно проф. Каменским [28]. За период 1750 - 1884 г.г. комета имела 3 сближения с Юпитером; теснейшее из них состоялось 31 X 11 4 1756 г., когда кратчайшее расстояние между ними равнялось  $0,076$  а.е., что и вызвало огромные возмущения в движении кометы. Другое тесное сближение произошло в 1922 г. Наименьшее расстояние равнялось  $0,25$  а.е. В результате испытанных возмущений расстояние афелия и наклонность орбиты  $i$  мало изменились; но остальные элементы и особенно период обращения, а также перигельное расстояние  $q$  подвергались очень существенным изменениям. Так орбита перед 1756 г. имела  $q = 1,26$  а.е., в период 1757 - 1875 г.г.  $q = 2,42$  а.е., в период 1875 - 1922 г.г.  $q = 1,61$  а.е., а с 1922 г.  $q = 2,45$  а.е. Еще боль-



шие изменения произошли с кометой Остерма, которая по очень точным вычислениям Фокина [15] перед 1936 г. двигалась между орбитами Юпитера и Сатурна, и <sup>э</sup>потому комета не могла наблюдаться. В результате больших возмущений элементы орбиты изменились исключительно сильно, и она начала двигаться по орбите между Юпитером и Марсом. Следующее сближение кометы с Юпитером должно произойти в 1961 г.

Проф. Дубяго [96] исследовал движение кометы Шайн-Шальдека в период от 1949 до 1928 г. по данным 1949 г. и обнаружил, что раньше эта комета двигалась почти по окружности, а после приближения к Юпитеру стала двигаться по эллипсу. Перигельное расстояние изменилось от  $q=4,2 \text{ а.е.}$  на  $q=2,2 \text{ а.е.}$

Приведенные примеры показывают, что вследствие возмущений со стороны планет перигелии комет могут быть то введены в сферу видимости, то из нее выведены. На это явление особое внимание обратил Вурком. Он считает, что осцилляцией перигельных расстояний следует объяснить потерю 10 комет за 200 лет с 1715 г. по 1915 г. Вурком считает, что эти потерянные кометы не дезинтегрировались, а стали невидимыми. Орбиты всех этих комет подходят близко к орбите Юпитера. Он указывает, что кометы Брукса II, Вольфа I, Комас-Сола, Швассман-Вахмана II перед открытием имели значи-



тельно большие перигелийных расстояний и поэтому не были видны, т.е. находились вне сферы видимости. Число потерянных комет возрастает также потому, что трудно отождествить кометы, если элементы их перетерпели большие изменения. Так в каталоге С.К.Всехсвятского комета Вольф 11 введена в список потерянных комет, однако, в действительности, как это выяснили Краковские астрономы, эта комета идентична комете 1952 11 [110]. Комета Вольф 11 в 1948 г. приблизилась к Юпитеру и сильно изменила свои элементы. Теория движения комет в случае тесных сближений с Юпитером весьма сложная. Этот важный вопрос рассматривался в работах Е.И.Казимирчак-Полонской [17]. Там можно также найти подробные сведения об истории открытий многих комет.

Мы считаем, что приведенные примеры показывают, что действительно осцилляция перигелиев комет существует и что ее можно объяснить некоторое количество потерянных комет. Несомненно, что некоторую часть из потерянных комет следует приписать просто невозможности на основе наблюдений, сделанных во время одного прохождения, определить точные орбит комет. На это указывает также то, что подавляющее большинство потерянных комет на-



блюдалось только в одном прохождении.

В заключении настоящего параграфа следует еще раз указать на чрезвычайно большое значение точных определений орбит комет и на необходимость увеличить точность и количество наблюдений комет.



## ГЛАВА VI

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОМЕТ ГРУППЫ ЮПИТЕРА.

§ 23. Распределение комет по большим полуосям и параметрам орбит.

/ Плоская задача /.

Согласно мнению Г.Фейе [8] и Г.Н.Рассела [1] характерной особенностью комет группы Юпитера являются малые минимальные расстояния  $d$  между орбитами этих комет и орбитой Юпитера. Кометы группы Юпитера составляют основную массу короткопериодических комет. Шульхоф [9] показал, что величина  $d$  для всех комет более или менее постоянна. Примерно для 60% всех короткопериодических комет  $d < 0,16$  а.е., а интервал  $0,16 \leq d \leq 0,7$  а.е. покрывается более или менее равномерно. С точки зрения эволюции орбит комет, это означает, что по крайней мере 50% короткопериодических комет воз-



никли из долгопериодических путем больших возмущений, т.е. путем захвата. Можно допустить, что остальные 50% комет группы Юпитера возникли вследствие диффузии.

Проблему захвата комет рассматривали Х.А. Ньютон [90], Б.М. Щиголев [12], С.К. Всехсвятский [13] и другие исследователи. Однако эти работы устарели, т.к. они не учитывают диффузию комет. Диффузия комет являясь диффузией с поглощающим барьером зависит от двух причин - от рассеяния комет в межзвездное пространство и от дезинтеграции комет. При достаточно прочной связи комет с Солнцем, т.е. при достаточно малых значениях больших полуосей орбит, эффект отрыва комет от Солнечной системы, по нашему мнению, перестает влиять на эволюцию орбит комет. Так как дезинтеграция комет слабо зависит от значения большой полуоси, то при достаточно малых значениях, а теория диффузии должна перерасти в теорию классической небесной механики с учетом дезинтеграции в зависимости от  $q$ . Здесь мы имеем дело с классическими теоремами Лапласа и Пуанкаре<sup>Пуассона</sup>, согласно которым отсутствуют вековые изменения больших полуосей. Мы считаем на основе исследований 1У гл., что теорию диффузии комет можно применять, начиная с параболических орбит до эллиптических, большие оси которых не меньше,



чем 40 а.е.

При подсчетах захвата в какой-то мере можно использовать классические результаты Х.А.Ньютона и других авторов, т.к. поправка за диффузию в определении обратной величины большой полуоси будет не больше  $1/40$  а.е.<sup>-1</sup>, а само изменение порядка  $1/3$  а.е.<sup>-1</sup>

С точки зрения современных представлений на эволюцию орбит комет в подсчетах Х.А.Ньютона рассматривался захват новых комет. Ориентация плоскостей орбит и концентрация перигелиев у потока новых комет и у потока, который образовался в следствие диффузии сильно отличаются. По наблюдениям известно, что полюса орбит новых, т.е. почти параболических комет, распределены на небесной сфере равномерно, а плоскости орбит потока комет, которые образовались вследствие диффузии, сильно концентрируются к плоскости орбиты Юпитера. Согласно второму и третьему закону диффузии, на расстоянии 5 а.е. от Солнца, где происходит захват комет Юпитером, поток новых комет составляет весьма малый процент от всего потока долгопериодических комет и содержит главным образом кометы, перигелии орбит которых концентрируются вдоль орбиты Юпитера, т.е. невидимые кометы. Ясно, что распределение элементов орбит короткопериодических



комет главным образом зависит от распределения элементов орбит тех комет, которые составляют поток, из которого происходит захват. Следовательно, подсчеты Ньютона несоответствуют действительности.

Первый, второй и третий законы диффузии характеризуют качественно, а не количественно распределение орбит потока долгопериодических комет по сравнению с потоком новых комет, другими словами, он нам плохо известен. С другой стороны, для подсчета видимого распределения элементов захваченных комет требуются данные об условиях открытия комет, которые также плохо известны. Для исследования вопроса о захвате комет, где имеются столь много количественно неизвестных данных, мы считаем необходимым подсчитать распределение элементов короткопериодических комет различными вариантами, т.е. принимая разные гипотезы относительно распределения элементов орбит потока долгопериодических комет, различные гипотезы о законах дезинтеграции комет и т.д. Сравнивая результаты, полученные разными вариантами, мы сможем установить в какой мере влияет тот или другой количественно плохо нам известный фактор на полученный теоретически результат о видимом распределении элементов орбит короткопериодических



комет. После выяснения роли отдельных факторов, сравнивая теорию с наблюдениями, мы сможем сказать с некоторой степенью достоверности, можно ли объяснить видимое распределение элементов короткопериодических комет путем захвата долгопериодических, или нет. Подобным образом поступал Б.М.Шиголев [12], рассматривая захват комет. Он исследовал для плоской задачи гипотезы В.Г.Фесенкова и Х.А.Ньютона по формуле Х.А.Ньютона.

По принципиальным вопросам захвата отметим еще следующее. В своей работе Шази [97] старался доказать, что захват комет невозможен. Не оспаривая справедливости этого утверждения, можно поставить вопрос о том, как долго комета будет совершать движение по эллиптической орбите относительно центрального тела. С этой схемой, которую называют схемой временного захвата в задаче трех тел, занимались Проскурии [98], [99], [94], и Румянцева. В виду очень короткой жизни комет проблема Шази не имеет значения в теории захвата комет.

В настоящем параграфе и в § 24 мы рассмотрим ряд вариантов, которые были предложены в то время, когда не были известны законы диффузии. Поэтому в этих §§ мы будем говорить, что захватываются параболические кометы, что не верно.

В настоящем параграфе заново исследуется



распределение комет группы Юпитера с учетом распределения орбит параболических комет, длительности существования короткопериодических комет и вероятности открытия короткопериодических комет. Рассмотрение ведется в плоскости, так как наклоны орбит комет группы Юпитера малы. Это не вполне законно. Хотя все члены семейства короткопериодических комет обладают малыми наклонами, все же в исходном семействе долгопериодических комет встречаются любые наклоны. В § 24 будет рассмотрена пространственная задача. Там будет <sup>оценен</sup> дан порядок допущенной неточности. Так как пространственная задача приводит к вычислениям четырехкратных интегралов, то она будет рассчитана менее точно, чем плоская задача. Поэтому мы считали необходимым рассмотреть плоский случай отдельно.

Схема исследования в общих чертах остается классической. Предполагается, что вокруг Солнца имеется стационарный рой параболических комет. Постоянство роя обеспечивается возмущениями от звезд. Юпитер своим возмущающим действием из роя параболических комет преобразовывает кометы в короткопериодические. Считается, что Юпитер вокруг Солнца вращается по окружности радиуса  $R$ . Если комета находится далеко от Юпитера, то он



на движение кометы не влияет. Внутри сферы действия комету притягивает только Юпитер. Динамические эффекты поворота сферы действия не учитываются. Вследствие предполагаемой симметрии, прохождение параболической кометы через сферу действия Юпитера рассматривается только при одном определенном положении Юпитера.

Опишем путь кометы, которая подлежит захвату. Орбита параболической кометы определяется перигельным расстоянием  $q$  и долготой перигелия  $\omega$ . Долгота перигелия отсчитывается от прямой  $с\text{ }J$ , соединяющей Солнце  $С$  и Юпитер  $J$ . Положение кометы на орбите не фиксируется, так как предполагается, что по орбите в обоих направлениях перемещается непрерывный поток комет. Комета пересекает сферу действия в точке  $K(\alpha, \rho)$ , где  $\alpha$  есть угол в полярной системе координат Юпитера, полюс которой  $J$ , а полярная ось  $с\text{ }J$ . Через  $\rho$  обозначен радиус сферы действия Юпитера. Угол между скоростью кометы  $\vec{v}_2$  и  $с\text{ }J$  обозначается через  $\beta$ . В сферу действия комета входит с относительной скоростью  $\vec{v}_2$ , которая определяется координатами  $\alpha$  и  $\beta_1$ . Для определения движения кометы внутри сферы действия вводятся координаты  $(\alpha, \beta_2)$ , где  $\beta_2 = \beta_1 - \alpha$  — есть угол между нормалью сферы действия в точке входа и относительной



скоростью. В сфере действия комета описывает ги-  
 перболу и выходит из сферы действия в точке  $\alpha + 2\gamma$ .  
 Относительная скорость кометы  $\vec{v}'_n (v'_n = v'_n)$  образует  
 с нормалью в этой точке угол  $\Pi - \beta_2$ . Абсолютная  
 скорость  $\vec{v}_a = \vec{v}'_n + \vec{v}'_z$ , где  $\vec{v}'_z$  есть скорость Юпитера,  
 образует с  $C\mathcal{F}$  угол  $\beta_3$ . Эллиптическая орбита за-  
 хваченной кометы определяется большой полуосью  $a$   
 и параметром  $\mu$ . Задачей настоящего § является  
 определение теоретического распределения захва-  
 ченных комет  $f(a, \mu)$ . Задача решается по следующей  
 формуле:

$$\int |f(a, \mu)| da d\mu = \int |f_1(q, \omega) \frac{Q(q, \omega)}{Q(\alpha, \beta)} \frac{Q(\alpha, \beta)}{Q(\alpha + \beta_2, \beta_2)} \times \\
 \times v'_n \cos \beta_2 \frac{Q(\alpha + \beta_2, \beta_2)}{Q(a, \mu)} f_2(a, \mu) f_3(a, \mu)| da d\mu. \quad (301)$$

Здесь функция  $f_1(q, \omega)$  представляет собой  
 функцию распределения параболических комет, функ-  
 ция  $f_2(a, \mu)$  - вероятность длительности существо-  
 вания короткопериодических комет, а  $f_3(a, \mu)$  есть  
 функция распределения открытия комет. Якобиан  

$$\left| \frac{Q(\alpha + \beta_2, \beta_2)}{Q(a, \mu)} \right|$$
 определяется как площадь между кривыми  $a = c_i$ ,  $\mu =$   
 $= c'_j$  в прямоугольной системе координат  $\alpha + \beta_2, \beta_2$ .  
 Такой прием более прост и, кроме того, в резуль-  
 тате непосредственно получаются пределы интегри-



рования.

Из  $\triangle CKJ$  имеем:

$$(CK)^2 = R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cos \alpha, \quad (302)$$

$$\sin \angle CKJ = \frac{\rho}{CK} \sin \alpha. \quad (303)$$

Будем считать величину  $\rho:R \approx 0.06$  малой величиной первого порядка и в дальнейшем ограничимся только малыми величинами первого порядка.

Следовательно,

$$CK = R \left[ 1 + \frac{\rho}{R} \cos \alpha \right], \quad (304)$$

$$\angle CKJ = \frac{\rho}{R} \sin \alpha. \quad (305)$$

Парабола пересекает сферу действия Юпитера в двух точках. Будем считать каждую параболу дважды, так как кометы по параболам перемещаются как в прямом, так и в обратном направлениях. Тогда каждой параболе соответствует одна определенная пара значений  $\alpha, \beta$ . Направления на параболе выбираются так, чтобы в относительном движении кометы перемещались, внутрь сферы действия.

На основе известного свойства параболы, что угол между осью параболы и радиусом-вектором вдвое больше угла между касательной к параболе и радиусом-вектором, легко установить следующее ра-



венство:

$$\omega = 2\beta - \pi - \angle KCF. \quad (306)$$

Формулы (305) и (306) дают

$$\omega = 2\beta - \pi - \frac{p}{R} \sin \alpha. \quad (307)$$

Так как

$$CK = \frac{2q_r}{1 + \cos(\omega - \angle KCF)}, \quad (308)$$

то

$$q = \frac{R}{2} \left\{ 1 - \cos 2\beta + (1 - \cos 2\beta) \frac{p}{R} \cos \alpha - \right. \\ \left. - 2 \sin 2\beta \frac{p}{R} \sin \alpha \right\}. \quad (309)$$

Учитывая формулы (307) и (309), легко получаем:

$$\left| \frac{\mathcal{D}(q, \omega)}{\mathcal{D}(\alpha, \beta)} \right| = 2p |\sin \beta \cos(\alpha - \beta)|. \quad (310)$$

Комета встречает сферу действия, обладая абсолютной скоростью

$$v_k = \sqrt{2} v_j \left[ 1 - \frac{p}{2R} \cos \alpha \right]. \quad (311)$$

В сфере действия комета перемещается с относительной скоростью  $\vec{v}_2 = \vec{v}_k - \vec{v}_4$ , следовательно,

$$v_2 \cos \beta_1 = v_2 \cos(\alpha + \beta_2) = v_k \cos \beta, \quad (312)$$

$$v_2 \sin \beta_1 = v_2 \sin(\alpha + \beta_2) = v_k \sin \beta - v_4. \quad (313)$$

Откуда следует, что



$$v_2 = v_1 \left[ -\sin(\alpha + \beta_2) + \sqrt{2 - 2 \rho/R \cos \alpha - \cos^2(\alpha + \beta_2)} \right]. \quad (314)$$

Учитывая малость величин  $\rho/R \approx 0,06$ ,  $|\pi - \beta_2| < 9^\circ$  для случая  $\alpha \leq 5,2$ , формулу (314) заменяем формулой

$$v_2 = v_1 \left[ -\sin(\alpha + \beta_2) + \sqrt{2 + 2 \rho/R \cos(\alpha + \beta_2) - \cos^2(\alpha + \beta_2)} \right]. \quad (315)$$

При определении якобиана

$$\left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\alpha + \beta_2, \beta_2)} \right| = \left| \frac{\partial \beta}{\partial(\alpha + \beta_2)} + \frac{\partial \beta}{\partial \beta_2} \right|. \quad (316)$$

удовлетворимся малыми величинами нулевого порядка. Тогда член  $\frac{\partial \beta}{\partial \beta_2}$  можно отбросить, так как  $\beta_2 = (\alpha + \beta_2) - \alpha$  входит в формулы только с множителем  $\rho/R$ . Следовательно,

$$\left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\alpha + \beta_2, \beta_2)} \right| = \frac{v_2}{v_1 \sqrt{2 + 2 \rho/R \cos(\alpha + \beta_2) - \cos^2(\alpha + \beta_2)}}. \quad (317)$$

На основе формул (312), (313) и (309) получаем следующую приближенную формулу:

$$q = \frac{R}{2} \left[ 1 + \frac{v_2}{v_1} \sin(\alpha + \beta_2) \right]^2. \quad (318)$$

Эта формула весьма точна, ибо, если бы мы при выводе ее учли также члены с множителем  $\rho/R$ , то получили бы формулу для  $q$  с множителем  $\left[ 1 + \frac{v_2}{v_1} \sin(\alpha + \beta_2) \right]$ .

. Подставляя в выражение (310) значения из формул (312) и (313), получим:



$$\left| \frac{D(q, \omega)}{D(\alpha, \beta)} \right| = \rho \left| \left[ 1 + \frac{v_2}{v_3} \sin(\alpha + \beta_2) \right] \left[ \sin \alpha + \frac{v_2}{v_3} \cos \beta_2 \right] \right| \approx$$

$$\approx \rho \left| \left[ 1 + \frac{v_2}{v_3} \sin(\alpha + \beta_2) \right] \left[ \frac{v_2}{v_3} + \sin(\alpha + \beta_2) \right] \right| =$$

$$= \rho \sqrt{\frac{2q}{R}} \sqrt{2 + 2 \frac{\rho}{R} \cos(\alpha + \beta_2) - \cos^2(\alpha + \beta_2)}. \quad (319)$$

Учитывая формулу (317), окончательно получаем:

$$\left| \frac{D(q, \omega)}{D(\alpha + \beta_2, \beta_2)} \right| v_2 = \frac{\sqrt{2} \rho v_2^2}{\sqrt{R} v_3} \sqrt{q}. \quad (320)$$

Угол поворота кометы при движении вокруг

Юпитера определяется из выражения конического сечения

$$\rho = \frac{P}{1 + E \cos \varphi}, \quad (321)$$

где  $P$  - параметр, а  $E$  - линейный эксцентриситет гиперболы.  $P$  находится из закона сохранения площадей по формуле

$$P = \frac{g^2 v_2^2 \sin^2 \beta_2}{k^2 m'}, \quad (322)$$

где  $m'$  - масса Юпитера,  $k^2$  - постоянная притяжения.

Для движения вокруг Юпитера ещё имеем закон сохранения энергии



$$v_z^2 = \kappa^2 m' \left[ \frac{2}{\rho} - \frac{1}{A} \right], \quad (323)$$

где  $A$  - большая полуось орбиты, и соотношение

$$E^2 = 1 - \frac{\rho}{A}. \quad (324)$$

На основе формул (321), (322) и (323) легко получить

$$\sin^2 \beta_2 = \frac{[2\kappa^2 m' \operatorname{tg}^2 \varphi + \rho v_z^2] \pm \sqrt{[2\kappa^2 m' \operatorname{tg}^2 \varphi + \rho v_z^2]^2 - 4\kappa^4 m' \operatorname{tg}^2 \varphi (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}}{2\rho v_z^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}, \quad (325)$$

или для значений  $2\varphi$ , достаточно близких к  $360^\circ$ , более удобную формулу:

$$\sin \beta_2 = \pm \frac{\kappa^2 m' \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\rho} v_z \sqrt{2 \operatorname{tg}^2 \varphi \kappa^2 m' + \rho v_z^2}}. \quad (326)$$

Из круга действия комета выходит в точке  $\alpha + 2\varphi$  под углом с нормалью  $\pi - \beta_2$ . Переход в неподвижное пространство произойдет согласно следующим формулам:

$$v_a \cos \beta_3 = v_z \cos (\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi), \quad (312')$$

$$v_a \sin \beta_3 = v_z \sin (\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi) + v_f, \quad (313')$$

$$v_a^2 = v_z^2 + 2v_z v_f \sin (\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi) + v_f^2. \quad (327)$$

Учитывая, что радиус-вектор Солнце-комета для точки выхода равен

$$r' = R \left[ 1 + \frac{\rho}{R} \cos (\alpha + 2\varphi) \right], \quad (328)$$

мы имеем, согласно интегралу энергии, для завле-



ченных комет и (327)

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{R} = \frac{-2\rho}{R^2} \cos(\alpha + 2\varphi) - \frac{v_2^2 + 2v_1 v_2 \sin(\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi)}{k^2} \quad (329)$$

Учитывая малость множителя  $2\rho/R^2$ , мы можем в первом члене правой части формулы (329) выражение  $\alpha + 2\varphi$  заменить на  $\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi$ . Тогда формула (329) дает

$$v_2 = -v_1 \sin(\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi) \pm \sqrt{v_1^2 \sin^2(\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi) - \frac{2k\rho^2}{R^2} \cos(\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi) - k^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)} \quad (330)$$

Аналогично, на основе закона сохранения площадей, для завлеченных комет имеем

$$v_2 = \frac{\frac{k\sqrt{r}}{R} - v_1 - \frac{\rho v_1}{R} \cos(\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi)}{\sin(\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi)} \quad (331)$$

Для прямых движений  $\sqrt{r} > 0$ , а для обратных движений  $\sqrt{r} < 0$ .

Определение фазовых траекторий:  $a(\alpha + \beta_2, \beta_2) = \text{const}$  и  $\sqrt{r}(\alpha + \beta_2, \beta_2) = \text{const}$  производилось следующим путем. Для значений  $a = 2, 6; 2, 8, \dots$  и значений  $\sqrt{r} = -2, 4; -2, 2; \dots; +1, 3; \dots; +2, 2$  при определенных значениях  $\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi$  определялось  $v_2$  по формулам (330) и (331). По раньше составленной таблице  $v_2$  аргумента  $(\pi + \beta_2 + \alpha)$  (315) определялись соответствующе-



шие значения  $\pi + \beta_2 + \alpha$ . В первом приближении  $2\varphi$  определялось по формуле  $2\varphi = (\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi) - (\pi + \beta_2 + \alpha) + 2\beta_2 \approx (\pi - \beta_2 + \alpha + 2\varphi) - (\pi + \beta_2 + \alpha)$ . Для приближенных значений  $(2\varphi, \pi + \alpha + \beta_2)$  по формуле (325) определялись приближенные значения  $\pi - \beta_2$ . Во втором приближении учитывалось отличие  $2\beta_2$  от  $360^\circ$ . Результаты вычислений нанесены на график /рис. 17/. На оси абсцисс отложены  $\pi + \alpha + \beta_2 = \alpha + \beta''$ , а на оси ординат  $\beta'' = \pi + \beta_2$  с противоположным знаком. Непрерывные кривые представляют  $a = \text{const.}$ , а штриховные  $\sqrt{r} = \text{const.}$ . Значения якобиана  $\left| \frac{P(\alpha + \beta_2, \beta_2)}{A(\alpha, r)} \right| da d\sqrt{r}$  пропорциональны площадям соответствующих фигур. Так обозначенные крестиками площади пропорциональны числу комет с прямым движением, у которых  $3.2 < a < 3.6$ ;  $0.6 < \sqrt{r} < 1.0$ , а пунктирная площадь пропорциональна числу захваченных комет с обратным движением, у которых  $2.6 < a < 2.8$ ;  $0.4 < \sqrt{r} < 0.8$ . Это получено в предположении, что  $\alpha + \beta''$  и  $\beta''$  распределены равномерно и что не имеется ни селекций наблюдений, ни дезинтеграции комет. Учитывая остальные множители в формуле (301), мы уточняем решение.

Так как кометы распадаются на рой метеорных тел и перестают светиться, то мы не наблюдаем непосредственно то распределение комет группы Олимпера, которое устанавливается только захватом



Юпитера. Чтобы найти наблюдаемое распределение, следует учесть продолжительность жизни коротко-периодической кометы, ибо чем дольше она существует, тем больше вероятность ее открытия.

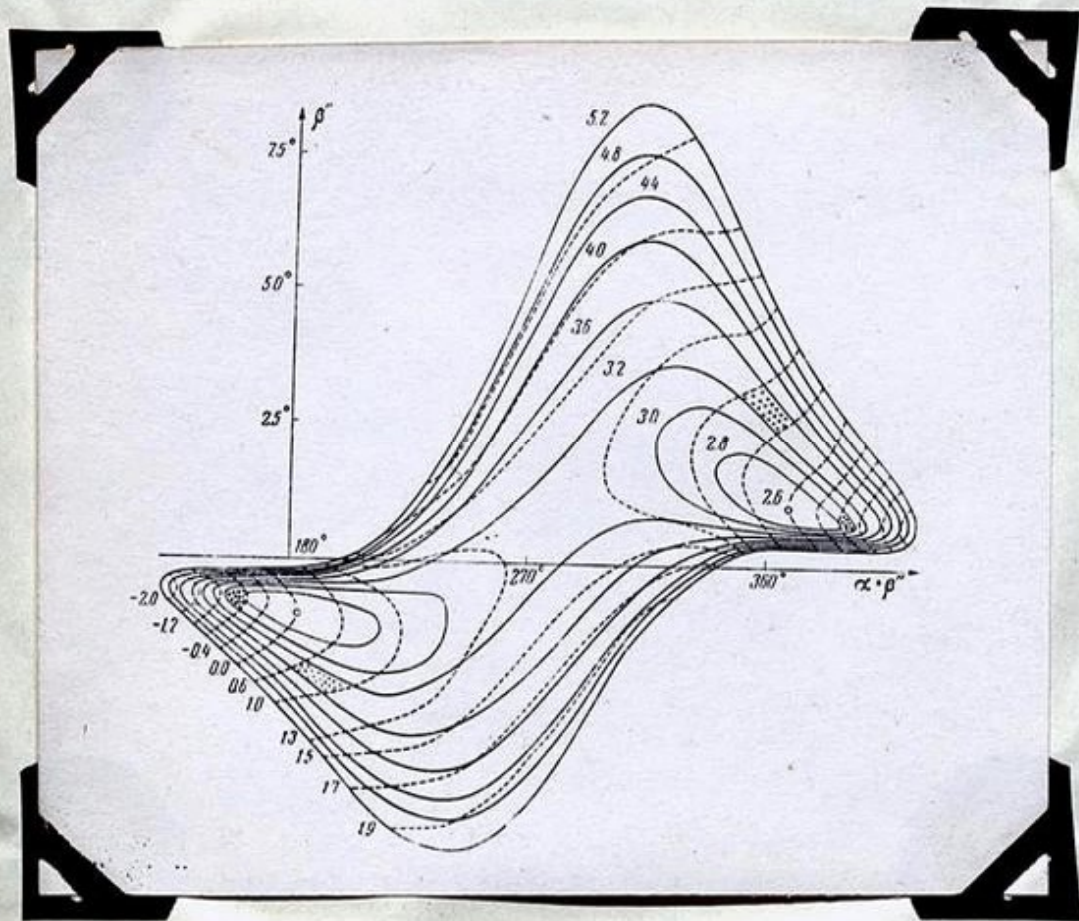


Рис. 17.

Согласно § 15, имеем две гипотезы для функции  $f_2(a, \mu)$ . Там же приводятся соответствующие формулы (192) и (195). Функцию  $f_1(q, \omega)$  и одновременно функцию  $f_3(a, \mu)$  определим эмпирическим путем. Для этого достаточно предположить, что функции открытия короткопериодических и долгопериодических комет имеют одинаковый вид и что при достаточно малых  $q$  долгопериодических комет  $f_3(a, \mu) \equiv 1$ . В



таком случае, при малых  $q$  из рисунка 18 видно, что примерно  $f_1(q, \omega) = sq$ , где  $s$  - некоторая постоянная, значение которой нас здесь не интересует. Функцию  $f_3(a, p)$  снимаем непосредственно с графика /рис. 18/ и получаем таблицу XIII.

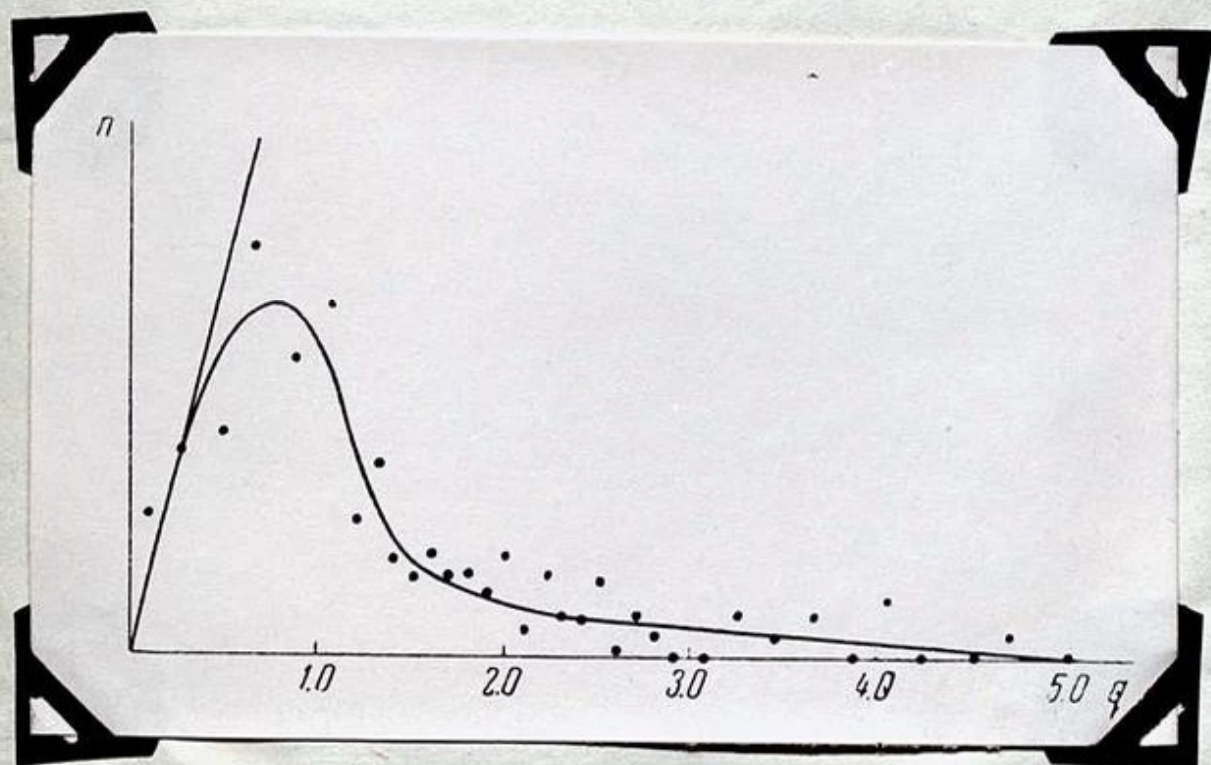


Рис. 18.

По измеренным элементарным площадям /рис. 17/, формулам (301), (314), (318), (320), (192), (195) и табл. XIII в предположении  $f_1 = sq$ , мы получили следующие результаты /см. табл. XIV и XV/. В скобках приводится число открытых короткопериодических комет согласно каталогу [89], у которых  $i < 10^\circ$ . Не учитывались 6 комет, так как их невозможно



Таблица X111

$q$	$f_3$	$q$	$f_3$	$q$	$f_3$
0,0 - 0,3	1	1,0	0,43	1,8	0,056
0,4	0,83	1,2	0,24	2,0	0,048
0,6	0,73	1,4	0,12	2,0 - $q$	5,0 - $q$
0,8	0,58	1,6	0,074	-	const.

причислить к кометам группы Юпитера.

Данные, приведенные в табл. XIV и XV, показывают, что развитая нами теория как в варианте С.В. Орлова, так и в варианте гравитационного разрушения комет хорошо совпадает с наблюдениями. То обстоятельство, что характеристики некоторых из открытых комет несколько выходят за пределы, предвиденные теорией, получило объяснение уже у Тиссерана. Гипотеза, которая основывается на формуле Б.Ю. Левина, плохо представляет наблюдения.

Из рис. 17 видно, что короткопериодические кометы с обратными движениями возникают из параболических, у которых  $q \approx 0$ . Эти параболические кометы входят в сферу действия при  $\alpha [130^\circ - 180^\circ]$  или при  $\alpha [0^\circ - 45^\circ]$ . Очевидно, что проблема существования короткопериодических комет с обратными движениями с точки зрения захвата комет



Таблица XIV

Распределение 26 короткопериодических комет группы Юпитера в варианте гравитационного разрушения.

$\sqrt{r}$ \ a	2.6- -2.8	2.8- -3.0	3.0- -3.2	3.2- -3.4	3.4- -3.6	3.6- -3.8	3.8- -4.0
0.0-0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2-0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.4-0.6	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.6-0.8	0.2	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.8-1.0	0.1	0.8	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1
1.0-1.2	-	1.1	1.2	0.5	0.3	0.2	0.2
1.2-1.3	..	/1/	/2/	2.0	0.7	0.3	0.2
1.3-1.4	-	/1/	/1/	1.7	1.4	0.4	0.2
1.4-1.5	-	-	/2/	0.8	0.8	0.4	0.2
1.5-1.6	-	-	/2/	/1/	/1/	/2/	0.2
1.6-1.7	-	-	/1/	-	0.4	0.5	0.2
1.7-1.8	-	-	-	-	/3/	0.2	0.5
1.8-1.9	-	-	-	-	/1/	/2/	/1/
1.9-2.0	-	-	-	-	-	-	0.1
2.0-2.2	-	-	-	-	-	-	/1/
	-	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-	-



Таблица XIV

/продолжение/

Распределение 26 короткопериодических комет группы Юпитера в варианте гравитационного разрушения.

$\sqrt{r}$ \ a	4.0- -4.2	4.2- -4.4	4.4- -4.6	4.6- -4.8	4.8- -5.0	5.0- -5.2
0.0-0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2-0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.4-0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.6-0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.8-1.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
1.0-1.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1
		/1/				
1.2-1.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
1.3-1.4	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
1.4-1.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
1.5-1.6	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
1.6-1.7	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
1.7-1.8	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1
1.8-1.9	0.0	0.3	0.4	0.1	0.1	0.1
					/1/	
1.9-2.0	-	-	0.0	0.2	0.3	0.2
2.0-2.2	-	-	-	-	0.0	0.2

Общее число короткопериодических комет с обратным движением 0.17.



Таблица XV

Распределение 26 короткопериодических комет группы Юпитера в варианте С. В. Орлова .

$\sqrt{r}$ \ a	2.7- -2.8	2.8- -3.0	3.0- -3.2	3.2- -3.4	3.4- -3.6	3.6- -3.8	3.8- -4.0
0.0-0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2-0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.4-0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.6-0.8	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.8-1.0	0.0	0.3	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0
1.0-1.2	-	0.7	0.7	0.3	0.2	0.2	0.2
		/1/	/2/				
1.2-1.3	-	-	1.6	0.6	0.2	0.1	0.1
		/1/	/1/				
1.3-1.4	-	-	1.7	1.4	0.4	0.2	0.2
			/2/		/1/		
1.4-1.5	-	-	-	1.0	0.9	0.4	0.2
			/2/	/1/	/1/	/2/	
1.5-1.6	-	-	-	-	0.5	0.7	0.3
			/1/		/3/		
1.6-1.7	-	-	-	-	-	0.4	0.7
					/1/	/2/	/1/
1.7-1.8	-	-	-	-	-	-	0.2
							/1/
1.8-1.9	-	-	-	-	-	-	-
							/1/
1.9-2.0	-	-	-	-	-	-	-
2.0-2.2	-	-	-	-	-	-	-



Таблица  $\overline{XV}$ 

/продолжение/

Распределение 26 короткопериодических комет группы Юпитера в варианте С. В. Орлова .

$\sqrt{p}$ \ a	4.0- -4.2	4.2- -4.4	4.4- -4.6	4.6- -4.8	4.8- -5.0	5.0- -5.2
0.0-0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2-0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.4-0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.6-0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.8-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0-1.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
		/1/				
1.2-1.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
1.3-1.4	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
1.4-1.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
1.5-1.6	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1
1.6-1.7	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1
1.7-1.8	0.7	0.4	0.2	0.1	0.2	0.2
1.8-1.9	0.0	0.5	0.8	0.3	0.3	0.3
					/1/	
1.9-2.0	-	-	0.1	0.5	0.7	0.4
2.0-2.2	-	-	-	-	0.1	0.6

Общее число короткопериодических комет с обратным движением 0.077.



тесно связана с вопросом о том, в какой мере в потоке комет, который проходит через сферу действия Юпитера, представлены кометы, орбиты которых имеют малые перигельные расстояния. Как видно из рис. 17, в нашем случае теория предвидит значительную часть короткопериодических комет с обратными движениями, что не соответствует наблюдениям ( $\sqrt{p} < 0$ ).

В таблицах  $\overline{X1U}$  и  $\overline{XU}$  показано, что в окончательном результате мы не получаем короткопериодических комет с обратными движениями. Это потому, что мы учли дезинтеграцию короткопериодических комет. Таким образом, учет дезинтеграции по формулам (192) и (195) привел к отсутствию комет с обратными движениями, а учет дезинтеграции по формуле Б.Ю.Левина не дал такого результата. Так как учет дезинтеграции по формуле Б.Ю.Левина не хуже чем в остальных вариантах, значит теоретическое решение проблемы о существовании короткопериодических комет ненадежно, и мы, следовательно, не имеем право утверждать, что теория захвата может объяснить распределение элементов орбит короткопериодических комет.

Из рис. 17 также видно, что захват дает сравнительно много комет с большим значением  $a$ , однако в видимом теоретическом распределении таких



комет практически нет. Это объясняется условиями открытия комет.

Мы предположили, что условия открытия комет с  $q[0,0; 1.0a.e.]$  хорошие, а дальше, с ростом перигельного расстояния быстро ухудшаются /см. таб. XIV/.

Ясно, что качественно это правильно, однако численные значения функции  $f_3$  ненадежны.

Нашу точку зрения о том, что уменьшение числа открытых комет с возрастанием  $a$  следует объяснять условиями открытия комет, подтверждают исследования и других авторов.

В совместной работе С.К. Всехсвятского, О.И. Бабич и В.В. Казютинского [13] также была исследована плоская задача. Как и следовало ожидать, были получены те же результаты, что и у Х.А. Ньютона, так как вычисления основывались на том же самом предположении, т.е. на предположении равномерного распределения параболических комет. С.К. Всехсвятский на основе своих исследований считает теорию захвата несостоятельной. Из вышеуказанной работы [13] можно легко увидеть влияние условий видимости на распределение комет по большим полуосям. Если рассмотреть 216 орбит, то после захвата получится 39 эллипсов с  $e < 0,98$ , которые только нас и интересуют, из них 9 с периодом меньше 15 лет, что составляет 23%. В сфере видимости,