

**DR. ERNST SCHRÖDER**

WEILAND PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER  
TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU KARLSRUHE IN BADEN

# ABRISS DER ALGEBRA DER LOGIK

BEARBEITET IM AUFTRAG  
DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

**DR. EUGEN MÜLLER**

PROFESSOR AN DER OBERREALSCHULE ZU KONSTANZ

IN DREI TEILEN

ERSTER TEIL: ELEMENTARLEHRE

MIT 4 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1909

Dr. ERNST SCHRODER  
VON DER UNIVERSITÄT GIESSEN  
GEOMETRIE VORLESUNG IM KARL-GRUBER SAAL

# ABRISS DER ALGEBRA DER LOGIK

BEARBEITET IM AUFTRAG  
DER FÜRSTENBERG-MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

Dr. EUGEN WILHELM  
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN

IN DREI THEILEN

ERSTER THEIL: ELEMENTARLEHRE

MIT FIGUREN IM TEXT



BEZUG NEHMEN AUF

ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

1895



## Vorwort.

In dem umfangreichen handschriftlichen Nachlaß Schröders, und so auch in dem nach seinem Tode im Druck erschienenen Band II, 2 seiner „Vorlesungen über die Algebra der Logik“, finden sich kurze, nur andeutende Entwürfe und einzelne Bemerkungen zu einem „Abriß“ der Algebra der Logik, jedoch keine ausgeführte Darstellung irgendeines Teils dieses Abrisses. Immerhin läßt sich die Absicht des Verfassers erkennen, nicht bloß einen Auszug aus seinem größeren Werk, den „Vorlesungen“, zu geben, sondern zugleich auch die Begründung und Entwicklung der Disziplin in manchen nicht unwesentlichen Punkten zu verbessern, wobei, wie in den „Vorlesungen“, die neuere einschlägige Literatur und auch private Mitteilungen an den Verfasser zweckentsprechend benützt werden sollten. Offenbar legte Schröder kein geringes Gewicht auf die Verwirklichung des geplanten Abrisses, die ihm leider nicht mehr beschieden war. — Wenn in der Tat die Algebra der Logik — wenigstens in Deutschland — bis heute noch nicht die verdiente Beachtung und Würdigung gefunden hat, so lag dies vielleicht auch an dem Mangel einer kurzen, wenn auch vollständigen einführenden Darlegung ihrer wichtigsten Methoden und Ergebnisse.\*) Solchem Mangel versucht nunmehr der Abriß abzuhelpfen. — Der einstweilen vorliegende erste Teil behandelt die Voraussetzungen und Grundlagen der Gebietstheorie, sodann einen elementaren Teil dieser selbst, in möglichster Anlehnung an das handschriftliche Material und an das Hauptwerk, jedoch — der ausgesprochenen Absicht Schröders gemäß — mit Berücksichtigung neuerer Forschungen.

Nur auf diese Elementarlehre beziehen sich übrigens ausschließlich die nachgelassenen Aufzeichnungen von Schröders Hand. Doch ist damit im wesentlichen auch schon der Weg vorgezeichnet für die Fortsetzung des Abrisses, von dem ein zweiter Teil, die Lehre von den Gebietsfunktionen und von der Auflösung der Gleichungen und Ungleichungen enthaltend, binnen kurzem erscheinen wird.

---

\*) In Frankreich dürfte zur Verbreitung und Förderung des algebraisch-logischen Gedankens in Schröderscher Auffassung Herr Couturat wesentlich beigetragen haben durch seine Schrift: „L'Algèbre de la Logique“, 100 Seiten, Paris bei Gauthier-Villars, 1905 — in der Sammlung „Scientia“, Série Phys.-Math. No. 24.



# Inhalt.

Vorwort . . . . .	Seite III
-------------------	--------------

## Allgemeine Voraussetzungen. Bezeichnungen.

	Seite		Seite
§ 1. Die Dinge und deren Beziehungen . . . . .	1	metrische Beziehungen und Aussagen . . . . .	3
§ 2. Zeichen für Dinge und Beziehungen. Identität . . . . .	1	§ 6. Unsymmetrische Beziehungen . . . . .	3
§ 3. Binäre Beziehungen . . . . .	2	§ 7. Allgemeine und spezielle Symbole . . . . .	4
§ 4. Proposition oder Aussage. Aussagen-Identität . . . . .	2	§ 8. Verallgemeinerung und Spezialisierung . . . . .	5
§ 5. Subjekt und Prädikat. Sym-		§ 9. Die Gebietstheorie. Axiome, Theoreme und Relationen . . . . .	6

## Voraussetzungen aus der Aussagentheorie.

§ 10. Sekundäre Elemente . . . . .	6	§ 17. Absolute Prämissen . . . . .	13
§ 11. Die sekundäre Subsumtion . . . . .	7	§ 18. Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation . . . . .	15
§ 12. Aussagen-Multiplikation . . . . .	8	§ 19. Aussagen-Negation . . . . .	16
§ 13. Transitivität der Subsumtion . . . . .	9	§ 20. Notwendigkeit sekundärer Voraussetzungen . . . . .	17
§ 14. Unsymmetrie der Subsumtion . . . . .	10		
§ 15. Aussagen-Gleichheit . . . . .	10		
§ 16. Reflexivität . . . . .	12		

## Gebietstheoretische Voraussetzungen.

§ 21. Elemente-System . . . . .	18	§ 27. Das Axiom III. . . . .	22
§ 22. Primäre Subsumtion . . . . .	19	§ 28. Die Axiome IV und V . . . . .	22
§ 23. Gebiete . . . . .	20	§ 29. Die Axiome VI . . . . .	23
§ 24. Die Axiome . . . . .	20	§ 30. Die Axiome VII . . . . .	24
§ 25. Das Axiom I . . . . .	21	§ 31. Definition, Postulat und Prinzip . . . . .	24
§ 26. Das Axiom II . . . . .	21	§ 32. Veranschaulichung der Gebiete . . . . .	25

## Deduktion der Theorie.

### Schlüsse aus den drei ersten Axiomen.

§ 33. Symmetrie der Gleichheit . . . . .	27
§ 34. Reflexivität . . . . .	28
§ 35. Transitivität der Gebietegleichheit . . . . .	28
§ 36. Vertauschung gleicher Prädikate bzw. Subjekte . . . . .	28

§ 37. Gleichheit als immanente Identität . . . . .	29
--	----

### Sätze über Null und Eins.

#### Schlüsse aus den Axiomen I—V.

§ 38. Spezielle Theoreme . . . . .	30
§ 39. Eindeutigkeit . . . . .	30
§ 40. Null als Prädikat, Eins als Subjekt . . . . .	31



	Seite		Seite
<b>Multiplikation und Addition.</b>		§ 53. Eindeutigkeit der Negation . . .	37
<b>Schlüsse aus den Axiomen I—VI.</b>		§ 54. Doppelte Negation . . . . .	38
§ 41. Das Produkt als Subjekt, die Summe als Prädikat . . . . .	31	§ 55. Kontraposition von Gleichungen	38
§ 42. Eindeutigkeit . . . . .	31	§ 56. Obverse Gebiete . . . . .	39
§ 43. Kommutativität . . . . .	31	§ 57. Null- und Eins-Form für Sub- sumtionen . . . . .	39
§ 44. Assoziativität . . . . .	32	§ 58. Der Kontrapositionssatz für Sub- sumtionen . . . . .	39
§ 45. Äquivalenz zwischen Subsum- tion und Gleichung . . . . .	32	§ 59. Disjunkt-komplementär ist ob- vers . . . . .	39
§ 46. Umformung einer Gleichung .	33	§ 60. Veranschaulichung der Nega- tion . . . . .	40
§ 47. Tautologie und Absorptionssätze	33	§ 61. Null- und Eins-Form der Gleich- ungen . . . . .	40
§ 48. Das Eins-Produkt und die Null- Summe . . . . .	34	§ 62. Produkt- und Summen-Ent- wicklung . . . . .	41
§ 49. Beiderseitige Multiplikation und Addition . . . . .	35	§ 63. Entwicklung von Faktoren und Summanden . . . . .	42
§ 50. Überschiebende Multiplikation und Addition . . . . .	35	§ 64. Negation von Produkt und Summe . . . . .	42
<b>Sätze über Negation und Distribution.</b>		§ 65. Dualität . . . . .	43
<b>Schlüsse aus VII und den übrigen Axiomen.</b>		§ 66. Der Distributionssatz . . . . .	43
§ 51. Erste Distributions-Subsumtion	36	§ 67. Umformung von Subsumtionen	44
§ 52. Disjunkt-komplementäres Ge- biet . . . . .	37	§ 68. Fortfallen von Faktoren und Summanden . . . . .	45
		§ 69. Übungsaufgaben . . . . .	45
<b>Der zweiwertige Gebietekalkul.</b>			
§ 70. Das Zweigebietesystem . . . . .	47	§ 74. Spezialisierung der Sekundär- Aussagen . . . . .	49
§ 71. Die speziellen Propositionen .	47	§ 75. Die Zweiwertigkeits - Voraus- setzung . . . . .	49
§ 72. Zweiwertige Symbole . . . . .	48		
§ 73. Synthetische Begründung des Zweigebietekalkuls . . . . .	48		







## Allgemeine Voraussetzungen. Bezeichnungen.

### § 1. Denkelemente: Die Dinge und deren Beziehungen.

Alles Denken hat zwei Arten von Ergebnissen, die indessen meist sofort wieder als „Elemente“ des Denkens verarbeitet werden zu weiteren Ergebnissen derselben beiden und vielleicht auch anderer Arten: Es werden Denkgegenstände oder Gedankendinge, kurz: „Dinge“, auch „Elemente“ im engeren Sinn, erdacht, — d. h. gedacht, vorgestellt, erkannt, — mögen dieselben nun ihrem Stoffe nach der Wahrnehmung, der Anschauung, der Phantasie oder dem denkenden Verstand selbst entstammen, — und es werden zwischen diesen Dingen „Beziehungen“, Zusammenhänge, gemeinsame Gesichtspunkte erdacht, — festgestellt oder festgesetzt.

Auf einer gewissen Stufe der Ausbildung in der Kunst des Denkens werden die Dinge zu Begriffen, und es werden deren Beziehungen in Urteilen ausgesprochen.

Die nähere Untersuchung beider Betätigungen, des Erdenkens von Dingen und von Beziehungen der Dinge untereinander, muß hier beiseite bleiben. Es genügt, die beiden Arten von Ergebnissen oder Denkelementen unterschieden zu haben.

§ 2. Zeichen für Dinge und Beziehungen. Identität. Es seien die Buchstaben  $a, b, c, \dots$  Symbole oder Zeichen für Dinge, die Buchstaben  $A, B, C, \dots$  solche für Beziehungen der Dinge zueinander. Und zwar hat man sich z. B. unter dem Zeichen  $a$ , als dessen Bedeutung, Sinn oder auch „Wert“, irgendein Ding vorzustellen, unter  $b$  sodann irgendein „anderes“, das sich von dem Ding  $a$  irgendwie unterscheidet, — oder vielmehr unterscheiden kann, jedoch nicht notwendig unterscheiden muß.

Statt: die beiden Zeichen  $a$  und  $b$ , oder  $A$  und  $B$ , stellen ein und dasselbe Element dar, sagt man auch: die beiden Zeichen — oder die beiden Elemente  $a$  und  $b$  bzw.  $A$  und  $B$  sind „identisch“, — kurz geschrieben:  $a \equiv b, A \equiv B$ .



Ein wiederholt in derselben Überlegung vorkommendes Elementzeichen entspricht immer wieder demselben Element, oder ist „mit sich selbst identisch“, während es bei Gebrauch verschiedener Buchstabenzeichen ohne weitere Erläuterung dahingestellt und allenfalls späterer Festsetzung vorbehalten bleibt, ob die Zeichen identisch sein sollen oder nicht.

Ist Identität zwischen zwei Zeichen einmal festgestellt, so kann zur Bezeichnung des durch beide dargestellten Elements jederzeit nach Belieben das eine oder das andere Zeichen verwendet, auch das eine durch das andere nachträglich ersetzt oder mit dem anderen vertauscht werden.

### § 3. Binäre Beziehungen. Mit

$aZb$

sei ausgedrückt, daß „das Ding  $a$  zu dem Ding  $b$  in der Beziehung  $Z$  stehe“.  $Z$  ist dann eine „binäre“ Beziehung, d. i. eine solche zwischen nur zwei Dingen.

Sind z. B. die Dinge  $a$  und  $b$  Zahlen, und ist etwa  $a$  die kleinere von beiden, so ist mit „die Zahl  $a$  ist kleiner als die Zahl  $b$ “, kurz geschrieben:

$$a < b,$$

eine binäre Beziehung der Zahl  $a$  zur Zahl  $b$  gegeben; — desgleichen eine andere gleichfalls binäre mit

$$a = b, \text{ oder } a - 2b = c, \text{ oder } a + b < 10,$$

mit jeder Gleichung oder Ungleichung, worin die Zahlen  $a$  und  $b$  vorkommen.

Die Gleichung

$$a - 2b = c,$$

oder auch die Beziehung der Zahl  $a$  zu zwei andern  $b$  und  $c$  als deren arithmetisches Mittel oder halbe Summe

$$a = \frac{b + c}{2}$$

kann als Beispiel einer „ternären“ Beziehung — zwischen drei Dingen, den Zahlen  $a, b, c$  — dienen. Usw.

Im folgenden wird vorzugsweise nur von binären Beziehungen die Rede sein.

§ 4. **Proposition oder Aussage. Aussagen-Identität.** Der Ausdruck der Geltung oder des Bestehens einer Beziehung  $Z$  zwischen zwei Dingen  $a$  und  $b$ ,



$$aZb,$$

sowie auch die damit dargestellte Dingebeziehung selbst, heiße eine (binäre) Proposition oder Aussage.

Wird dasselbe Ding, das zunächst als Bedeutung des Buchstabens  $a$  gedacht wurde, außerdem auch mit  $c$  bezeichnet, so kann die Proposition  $aZb$  auch mit

$$cZb$$

wiedergegeben werden; desgleichen auch mit

$$cYb \text{ oder } aYb,$$

wofern die Beziehung  $Y$  mit  $Z$  identisch ist; usw. Diese Propositionen sind dann sämtlich auch ihrerseits als identische, als solche von einerlei Bedeutung anzusehen.

**§ 5. Subjekt und Prädikat. Symmetrische Beziehungen und Aussagen.** In der Proposition  $aZb$  heiße von den beiden Dingen oder „Aussage-Gliedern“  $a$  und  $b$  das erste, dem Beziehungszeichen  $Z$  voranstehende  $a$  das „Subjekt“ der Aussage, das nachfolgende  $b$  deren „Prädikat“.

Nun kann z. B. eine Zahl  $a$  als Subjekt zu einer anderen  $b$  als Prädikat nicht anders in der Beziehung der „Gleichheit“ stehen,  $a = b$ , wie etwa  $\frac{1}{2} = 1$ , als daß zugleich umgekehrt  $b = a$ , die andere zur ersteren ebenfalls in dieser Beziehung steht. Ist dagegen eine Zahl  $a$  kleiner als eine andere  $b$ ,  $a < b$ , so kann unmöglich zugleich  $b < a$ , diese kleiner als jene sein.

Eine Beziehung  $Z$  kann somit die besondere Eigenschaft haben, daß, wenn jemals irgendein Ding  $a$  in der Beziehung  $Z$  zu einem anderen  $b$  steht,  $aZb$ , dann stets notwendig auch die durch Vertauschung von Subjekt und Prädikat „umgekehrte“ Proposition  $bZa$  Geltung hat. In diesem Falle heißt die Beziehung  $Z$ , sowie auch jede Proposition  $aZb$  mit der Beziehung  $Z$  „umkehrbar“ oder „symmetrisch“.

Bei symmetrischen Propositionen ist die Unterscheidung zwischen Subjekt und Prädikat unwesentlich; beide Dinge stehen „zueinander“ in der symmetrischen Beziehung  $Z$ . Z. B. zwei Zahlen sind „einander“ gleich.

**§ 6. Unsymmetrische Beziehungen.** Eine unsymmetrische Beziehung  $Y$  andererseits kann so geartet sein wie die des „Kleiner-seins“ bei Zahlen, daß mit der Proposition  $aYb$  stets die umgekehrte  $bYa$  als unvereinbar, als widersprechend erscheint; oder aber die Umkehrung  $bYa$  ist mit der ursprünglichen Proposition  $aYb$  weder gefordert noch



ausgeschlossen; es gibt derartige Dinge  $a$  und  $b$ , für welche sowohl  $aYb$  wie  $bYa$  gilt, und daneben andere Dingepaare  $a, b$ , für die wohl  $aYb$  erfüllt ist, nicht aber  $bYa$ . Ist z. B. für zwei Zahlen  $a$  und  $b$

$$a \leq b,$$

$a$  „kleiner oder gleich“  $b$ , „höchstens so groß wie“, „nicht größer als“  $b$ , so gilt hier zugleich

$$b \leq a,$$

falls man sich unter  $a$  und  $b$  zwei gleich große Zahlen  $a = b$  vorstellt; dagegen ist diese Umkehrung falsch, sobald  $a < b$  angenommen wird.

§ 7. **Allgemeine und spezielle Symbole.** Ein Ding  $a$  kann als Subjekt zu einem Prädikat  $b$  in mehreren verschiedenen Beziehungen  $Z, Y, X, \dots$  stehen:

$$aZb, aYb, aXb, \dots$$

Und es können mehrere Dinge  $a, b, c, \dots$  zu anderen  $e, f, g, \dots$  zugleich in einer und derselben Beziehung  $Z$  stehen:

$$aZe, bZf, cZg, \dots$$

In der Zahlenlehre will nun z. B. die Proposition

$$\frac{ab}{b} = a, \quad .$$

als Beziehung etwa der Zahl  $a$  zur Zahl  $b$ , nicht bloß besagen, daß Multiplikation *einer gewissen* Zahl  $a$  mit einer gleichfalls besonders bestimmten Zahl  $b$  und darauf folgende Division mit dieser Zahl  $b$  wieder auf die erste  $a$  zurückführe oder sich gegenseitig aufhebe, sondern daß dies allgemein für je zwei *beliebige* Zahlen  $a$  und  $b$  zutrefte, daß *jede* Zahl  $a$  mit jeder  $b$  in der gedachten Beziehung stehe; — ebenso die andere Proposition

$$a \cdot 1 = a,$$

daß *jede beliebige* Zahl  $a$  durch Multiplikation mit der einen besonderen oder *speziellen* Zahl 1 ungeändert bleibt, — während etwa die Proposition  $7 \cdot 1 = 7$  als *Spezialfall* der vorigen dasselbe nur von der Zahl 7 statt im allgemeinen von jeder Zahl  $a$  behauptet. — In der (quadratischen) Gleichung

$$x^2 = 9$$

endlich hat man sich unter  $x$  zwar nicht jeden beliebigen Zahlenwert vorzustellen, aber doch einen beliebigen von den beiden Werten  $+3$  und  $-3$ , die „der Gleichung genügen“, dieselbe „erfüllen“ oder „befriedigen“.



Somit kann ein jedes der Buchstabenzeichen  $a, b, c, \dots, Z, Y, X, \dots$  in Propositionen auch zur Bezeichnung eines beliebigen unter mehreren oder allen in Betracht kommenden Elementen, Dingen oder Beziehungen dienen, als Zeichen von allgemeiner Bedeutung oder als „allgemeines Symbol“, im Gegensatz zu den Zeichen von besonderer Bedeutung, den „besonderen“ oder „speziellen Symbolen“, wie etwa den Zifferzeichen für besondere Zahlen. — Desgleichen sind „allgemeine Propositionen“, worin wenigstens ein allgemeines Elementesymbol vorkommt, zu unterscheiden von „speziellen Aussagen“ mit durchweg speziellen Symbolen.

In dem vorliegenden ersten Teil der Algebra der Logik wird es sich nur um einige wenige spezielle Beziehungen und Beziehungszeichen handeln. Dagegen sollen die Buchstabenzeichen für Dinge zumeist im Sinne allgemeiner Symbole gebraucht und verstanden werden.

§ 8. **Verallgemeinerung und Spezialisierung.** Eine allgemeine Proposition kann synthetisch oder induktiv, durch „Verallgemeinerung“, aus ihren besonderen Fällen entstanden sein, — wie etwa die Zahlenproposition

$$\frac{ab}{b} = a \quad \text{aus} \quad \frac{1 \cdot b}{b} = 1, \quad \frac{2 \cdot b}{b} = 2, \quad \frac{3 \cdot b}{b} = 3, \dots$$

$$\text{oder aus} \quad \frac{1 \cdot 1}{1} = 1, \quad \frac{2 \cdot 1}{1} = 2, \quad \frac{1 \cdot 2}{2} = 1, \quad \frac{2 \cdot 2}{2} = 2, \dots,$$

$$\text{ähnlich} \quad x^2 = 9 \quad \text{aus} \quad (+3)^2 = 9 \quad \text{und} \quad (-3)^2 = 9,$$

auf Grund der Übereinstimmung unter diesen einzelnen Aussagen: Die eine verwandelt sich in die andere, sobald man darin ein gewisses spezielles Symbol durchweg ersetzt durch ein anderes spezielles; vermittelt eines neuen (in den Einzelaussagen nicht schon vorkommenden) allgemeinen Buchstabensymbols an Stelle jener speziellen Zeichen — hier Ziffern — erfolgt die Vereinigung der Einzelaussagen zu einer einzigen allgemeinen — oder allgemeineren Proposition.

Insofern jene aus irgendwelchen Wahrnehmungen geschöpften Einzelpropositionen den Anlaß zur Aufstellung und auch die — vorerst einzige — Gewähr für die Richtigkeit dieser allgemeinen Proposition abgeben, sagt man auch, man habe die letztere aus jenen „hergeleitet“, gefolgert, — man habe aus jenen auf diese geschlossen, usw.

Ist umgekehrt eine allgemeine Proposition irgendwoher als eine richtige gegeben oder bekannt, so lassen sich daraus — in analytischer Herleitung, deduktiv oder durch „Spezialisierung“ — spezielle oder doch speziellere Propositionen als besondere Fälle leicht gewinnen.



### § 9. Die Gebietetheorie. Axiome, Theoreme, Relationen.

Wie die Zahlenlehre die Beziehungen der Zahlen untereinander untersucht und zusammenstellt, so werden im folgenden Dinge einer gewissen anderen allgemeineren Art, die wir „Gebiete“ nennen, hinsichtlich ihrer Beziehungen zueinander den Gegenstand einer „Gebietetheorie“ bilden. Welcher Art diese Dinge sind, wird festgesetzt werden durch gewisse allgemeine Propositionen, die sog. „Axiome“, die von allen in Betracht zu ziehenden Dingen, von allen Gebieten als Bedeutungen der allgemeinen Symbole gelten sollen; nur auf diejenigen Dinge, von denen die Axiome gelten, bezieht sich die Theorie; nur von solchen — und von allen solchen — wird in derselben die Rede sein. Indem somit die Axiome insgesamt die Gebiete charakterisieren und definieren, sind sie innerhalb der Gebietetheorie von schlechthin allgemeiner oder absoluter Geltung. Daher wird auch vor allem deren Spezialisierung — diese einfachste, in Sinn und Zweck der allgemeinen Buchstabensymbole begründete Schlußweise — auf die nächstliegenden „Theoreme“ oder Lehrsätze führen.

Einige andere Hilfsmittel zur Herleitung von Theoremen aus Axiomen gehören einer besonderen Hilfsdisziplin, der „Propositionentheorie“, an. Von ihnen wird zunächst die Rede sein. Die übrigen Herleitungsmethoden werden ihren Berechtigungsausweis selbst erst von den Axiomen hernehmen. — Die Theoreme aber, in deren Gesamtheit der Inhalt der Theorie sich ausspricht, werden durchweg den Axiomen als ihren Quellen entspringen und deshalb absolute Geltung innerhalb der Theorie für sich in Anspruch nehmen im gleichen Sinne wie die Axiome.

Neben diesen absolut gültigen oder „absoluten“ — teils speziellen, teils schlechthin allgemeinen Aussagen, auch wohl „Formeln“ genannt, werden in der Gebietetheorie auch Propositionen von beschränkter Allgemeinheit auftreten — wie in der Zahlenlehre etwa die Proposition  $x^2 = 9$  oder  $a < b$ , — die nämlich Geltung haben oder auch nicht, je nach Wahl der Dinge, die man sich unter den allgemeinen Symbolen vorstellt, — Propositionen von bedingter oder relativer Geltung oder kurz „Relationen“.

### Voraussetzungen aus der Aussagentheorie.

§ 10. **Sekundäre Elemente.** Ist eine Proposition aus einer anderen hergeleitet, so besteht zwischen beiden Propositionen eine bestimmte Beziehung, nämlich diejenige von Grund und Folge, die „Folgerungsbeziehung“, die sich auch selbst in Form einer Proposition wird



aussprechen lassen. Die beiden ursprünglichen einzelnen Propositionen können dann als Glieder der Gesamtproposition erscheinen, der Grund naturgemäß als erstes Aussageglied oder Subjekt, die Folge als Prädikat.

So werden bei weiterer Verarbeitung vorhandener Elemente auch Propositionen zu Dingen, die als solche der sekundären Art oder als „Sekundärdinge“ von den „primären“ oder ursprünglichen Dingen unterschieden und etwa auch mit besonderen Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  bezeichnet seien. Dieselben treten miteinander in „sekundäre Beziehungen“  $A, B, C, \dots$ , in dieselben wie die primären, oder auch in andere.

Eine Theorie der Sekundärdinge und ihrer Beziehungen wird unter dem Namen einer Aussagenlehre oder Propositionentheorie im zweiten Teile des Abrisses §§ 76 ff. zu entwickeln sein. Diese Theorie wird somit „sekundäre Propositionen“ oder Aussagen über Aussagen enthalten, wie etwa

$$\alpha Z \beta \text{ oder } (aYb)Z(cXd).$$

Hier, wie in den nachfolgenden Fällen, sind bei Sekundärpropositionen die sie zusammensetzenden primären Aussagen in Klammern zu schreiben, sofern sie ausführlich angegeben und nicht bloß durch einfache Buchstabenzeichen  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  angedeutet sind.

§ 11. **Die sekundäre Subsumtion.** Es läßt sich indessen keinerlei Theorie über irgendwelche Dinge primärer oder auch sekundärer Art aufstellen, ohne daß man einige Tatsachen aus jener Propositionentheorie von vornherein voraussetzt. Gewisse sekundäre Elemente finden sich schon im Begriffe einer primären deduktiven Theorie selbst mit eingeschlossen.

Insofern nämlich in einer solchen Theorie stets die einzelnen Theoreme als Folgerungen aus den Axiomen erscheinen müssen, ist damit jedenfalls die Folgerungsbeziehung benötigt. Diese Beziehung, aus später zu erläuternden Gründen auch „Subsumtion“ oder „Einordnung“ genannt, — §§ 22, 84 u. a. — sei dargestellt mittels eines besonderen Beziehungszeichens  $\Leftarrow$  „sub“, — und zwar werde, wenn aus einer Proposition  $\alpha$  die andere  $\beta$  abgeleitet ist oder folgt, stets die erstere als Subjektaussage oder „Prämisse“, Bedingungssatz, vorangestellt, während  $\beta$  die Prädikataussage, „Konklusion“ oder Folge ist. Es bedeutet also „ $\alpha$  sub  $\beta$ “,

$$\alpha \Leftarrow \beta:$$

aus  $\alpha$  folgt  $\beta$ , oder: wenn die Aussage  $\alpha$  richtig ist, so trifft auch  $\beta$  zu; die Proposition  $\alpha$  ist eingeordnet der anderen  $\beta$ . — Eine Sekundärproposition dieser Art mag auch selbst „eine Subsumtion“ heißen.



Zahlenbeispiele: — vergl. § 8 —

$$\left(\frac{ab}{b} = a\right) \in \left(\frac{79 \cdot 96}{96} = 79\right);$$

$$(a = b) \in (ac = bc),$$

d. h. Gleiches,  $a$  und  $b$ , mit der nämlichen Zahl  $c$  multipliziert, ergibt Gleiches;

$$(a = b) \in (a^2 = b^2),$$

Gleiches, quadriert, gibt Gleiches.

Bisher war angenommen, daß  $\alpha$  und  $\beta$  in  $\alpha \in \beta$  primäre Propositionen bedeuten. Es kann aber auch eine solche Subsumtion  $\alpha \in \beta$  selbst wieder aus einer anderen  $\gamma \in \delta$  folgen, — in Zeichen:

$$(\gamma \in \delta) \in (\alpha \in \beta).$$

Z. B.: Daß, wenn  $x = 3$  ist, notwendig  $x^2 = 9$  sich ergeben muß, folgt aus dem allgemeinen Satz, daß die Quadrate gleicher Zahlen gleich sind,

$$\{(a = b) \in (a^2 = b^2)\} \in \{(x = 3) \in (x^2 = 9)\}.$$

Es können also in einer Sekundäraussage, und insbesondere in einer Subsumtion  $\alpha \in \beta$ , die einzelnen Teilaussagen  $\alpha$  und  $\beta$  auch selbst noch von sekundärer Art sein.

§ 12. **Aussagen-Multiplikation.** Ist von drei Zahlen  $a, b, c$  vorausgesetzt  $a < b$  und  $b < c$ , oder  $a < b < c$ , so folgt aus beiden Prämissen zusammen die Konklusion  $a < c$ . Man schreibt

$$(a < b)(b < c) \in (a < c).$$

Ebenso bedeutet

$$(a = b)(b = c) \in (a = c):$$

Sind zwei Zahlen  $a$  und  $c$  gleich einer dritten  $b$ , so sind sie unter sich gleich. Hiernach versteht sich auch

$$(a < b)(b < c)(c < d) \in (a < d).$$

Folgt allgemein irgendeine Proposition  $\kappa$  als Konklusion nicht aus einer Aussage allein, wohl aber aus dem Zusammentreffen oder der gleichzeitigen, „simultanen“ Geltung zweier oder mehrerer Propositionen  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , so treten diese als Prämissen einfach nebeneinander oder vereinigen sich, wie wir sagen, multiplikativ als „Faktoren“ zu einem „Propositionen-Produkt“  $\alpha\beta\gamma\dots$ , nämlich zu der Sekundäraussage, daß sie alle zusammen gelten;

$$\alpha\beta\gamma\dots \in \kappa.$$

Hierzu noch weitere Beispiele über Zahlen  $a, b, c, \dots$ :

$$(a = b)(c = d) \in (ac = bd),$$



Gleiches, mit Gleichem multipliziert, gibt Gleiches. Ferner aus § 6:

$$(a \leq b)(b \leq a) \in (a = b).$$

Ergibt sich eine Konklusion  $\kappa$  schon aus einer Prämisse  $\alpha$  allein, so wird  $\kappa$  auch gelten, wenn man neben  $\alpha$  noch andere Prämissen  $\beta, \gamma, \dots$  als gültig voraussetzt:

$$(1) \quad (\alpha \in \kappa) \in (\alpha\beta\gamma \dots \in \kappa).$$

Hier beginnt die Reihe der propositionentheoretischen Sätze, die als „selbstverständlich“ vorausgesetzt und — mit fortlaufender Numerierung — zum bevorstehenden Gebrauch bereitgestellt werden.

Gestattet eine Proposition  $\alpha$  mehrere Schlüsse auf verschiedene Konklusionen  $\kappa, \lambda, \mu, \dots$ , so wird, wofern nur  $\alpha$  statt hat, daraus die Geltung aller Konklusionen  $\kappa, \lambda, \mu, \dots$  zusammen, also ihr Produkt folgen;

$$(2) \quad (\alpha \in \kappa)(\alpha \in \lambda)(\alpha \in \mu) \dots \in (\alpha \in \kappa\lambda\mu \dots).$$

Auch die Faktoren eines Produkts können, wie die Subsumtionsglieder — vgl. den vorigen § 11 — Sekundäraussagen sein.

Folgt  $\kappa$  aus  $\alpha$  und desgleichen  $\lambda$  aus  $\beta$ , so ist mit dem Zusammenbestehen beider Prämissen  $\alpha$  und  $\beta$  auch die gleichzeitige Geltung der Konklusionen  $\kappa$  und  $\lambda$  gefordert:

$$(3) \quad (\alpha \in \kappa)(\beta \in \lambda) \in (\alpha\beta \in \kappa\lambda).$$

Man sagt, die Konklusion sei hier aus den beiden Prämissen durch beiderseitiges oder „überschiebendes Multiplizieren“ zu erhalten.

§ 13. **Transitivität der Subsumtion.** Wenn  $x = 3$  ist, so wird man, um etwa darnach die Größe  $7x^2$  zu bestimmen, zunächst

$$(x = 3) \in (x^2 = 9)$$

schließen, und sodann weiter

$$(x^2 = 9) \in (7x^2 = 63),$$

womit auch

$$(x = 3) \in (7x^2 = 63)$$

als erwiesen gelten wird.

Allgemein: folgt aus einer Proposition  $\alpha$  eine andere  $\beta$ , und aus dieser sodann eine dritte  $\gamma$ ,  $\alpha \in \beta \in \gamma$ , so ist  $\gamma$  mittelbar auch als eine Folgerung von  $\alpha$  anzusehen,

$$(4) \quad (\alpha \in \beta)(\beta \in \gamma) \in (\alpha \in \gamma),$$

und ebenso in einer fortlaufenden Reihe von Konklusionen

$$\alpha \in \beta \in \gamma \in \delta \in \dots$$

jede als Folgerung einer jeden vorangehenden. Um dieser Eigenschaft



willen heißt die Subsumtion eine „transitive“ Sekundärbeziehung. — Die Zahlenbeziehungen der Gleichheit und des „Kleiner-seins“ sind — den Bemerkungen im vorigen § 12 zufolge — transitive Primärbeziehungen.

Die meisten Theoreme der Gebiete- und jeder anderen Theorie folgen aus den Axiomen nur mittelbar, unmittelbar dagegen aus vorangehenden, schon früher aus den Axiomen hergeleiteten Theoremen.

§ 14. **Unsymmetrie der Subsumtion.** Für zwei gleiche Zahlen  $a$  und  $b$  gilt stets

$$(a = b) \in (b = a),$$

wie schon unter § 5 erwähnt. — Offenbar ist überhaupt eine Beziehung  $Z$  als eine symmetrische gekennzeichnet durch die *allgemeine* sekundäre Proposition

$$(aZb) \in (bZa)$$

— § 5 — oder auch ebensogut durch

$$(bZa) \in (aZb).$$

Auch in einem Zahlenbeispiel des § 11 ist der Schluß umkehrbar:

$$(ac = bc) \in (a = b),$$

Gleiches,  $ac$  und  $bc$ , durch dieselbe (von Null verschiedene) Zahl  $c$  dividiert, ergibt Gleiches. — Zwischen den beiden (relativen — § 9, Schluß) Zahlenpropositionen  $a = b$  und  $ac = bc$  besteht somit auch eine *symmetrische* Sekundärbeziehung.

Dagegen läßt sich die andere Zahlensubsumtion

$$(a = b) \in (a^2 = b^2)$$

des § 11 nicht umkehren: aus  $a^2 = b^2$  folgt nicht notwendig  $a = b$ ; es könnte vielmehr bei dieser Voraussetzung auch  $a = -b$  sein; es folgt nur die Übereinstimmung von  $a$  mit  $b$  dem absoluten Betrag nach, abgesehen vom Vorzeichen.

Die Folgerungsbeziehung ist also im allgemeinen nicht symmetrisch; und zwar kommt dieser Sekundärbeziehung jene (zweite) Art von Unsymmetrie zu, wie sie für primäre Beziehungen in § 6 an dem Beispiel der mit  $\leq$  dargestellten Zahlenbeziehung erläutert wurde: Es gibt sowohl umkehrbare als auch nicht umkehrbare Subsumtionen.

§ 15. **Aussagengleichheit.** Gesetzt, es sei  $\alpha \in \beta$ ; jede Konklusion  $\gamma$  aus  $\beta$ ,  $\beta \in \gamma$ , folgt wegen der Transitivität dann auch aus  $\alpha$ . Dagegen bleibt dahingestellt, ob man nicht aus  $\alpha$  mehr schließen kann



als aus  $\beta$ . — Ist nun aber die Subsumtion  $\alpha \in \beta$  umkehrbar, gilt auch  $\beta \in \alpha$ , so lassen sich offenbar auch aus  $\alpha$  nur ganz dieselben Schlüsse ziehen wie aus  $\beta$ , und keine anderen.

Zwei Propositionen  $\alpha$  und  $\beta$ , von denen man irgendwie zeigen kann, daß sie in den beiderseitigen Folgerungen durchaus übereinstimmen, — daß nichts aus der einen von beiden folgt, was sich nicht auch aus der anderen herleiten ließe, sollen einander „gleiche“ oder „äquivalente“ Propositionen heißen: „ $\alpha$  gleich  $\beta$ “,

$$\alpha = \beta.$$

Es ist also

$$(5) \quad (\alpha \in \beta) (\beta \in \alpha) \in (\alpha = \beta).$$

Beispiele für Zahlen  $a, b, c, \dots$ :

$$(a < b) = (b > a), \quad (a = b) = (b = a), \\ (a = b) = (ac = bc).$$

Allgemein gilt für jede *symmetrische* Beziehung  $Z$  zwischen beliebigen Dingen  $a, b$  — vgl. § 14 — die Äquivalenz

$$(aZb) = (bZa).$$

Besteht übrigens die Aussagengleichheit in der Identität der Folgerungen, so muß ihr selbst auch — einer Sekundärbeziehung — die Eigenschaft der Symmetrie zukommen,

$$(6) \quad (\beta = \alpha) = (\alpha = \beta),$$

sowie die der Transitivität — vgl. § 13, (4) —

$$(7) \quad (\alpha = \beta) (\beta = \gamma) \in (\alpha = \gamma),$$

entsprechend der — selbstverständlichen — Symmetrie und Transitivität der Identität als einer bloßen Beziehung zwischen mehreren Zeichen oder Vorstellungen eines Dinges — § 2 —.

Aus einer fortlaufenden Reihe eingeordneter und gleicher Aussagen wie

$$\alpha \in \beta \in \gamma = \delta = \varepsilon \in \zeta$$

wird man daher leicht die Folgerungs- und allenfalls auch die Gleichheitsbeziehung zwischen zwei beliebigen unter diesen Aussagen entnehmen können, z. B.

$$\alpha \in \delta, \quad \gamma = \varepsilon, \quad \beta \in \varepsilon, \quad \alpha \in \zeta.$$

Zur kurzen Andeutung, daß eine Subsumtion oder Gleichung aus einer solchen fortlaufenden Reihe herausgehoben sei, mag der Dreipunkt  $\therefore$  dienen — vgl. auch § 17 —; z. B. hier:

$$\therefore \gamma \in \zeta.$$



§ 16. **Reflexivität.** In Zahlenbeispielen des vorstehenden § 15 ist freilich ein und dasselbe Zeichen verwendet für die sekundäre Aussagengleichheit und für die primäre Zahlengleichheit. Verwechslungen der Aussagengleichheit mit andern sonst gebräuchlichen Bedeutungen des Gleichheitszeichens werden sich immerhin leicht vermeiden lassen.

Zwei gleiche Aussagen brauchen nicht notwendig identisch zu sein oder dasselbe zu besagen — vgl. das Zahlenbeispiel

$$(a = b) = (ac = bc).$$

Wohl aber sind umgekehrt zwei identische Aussagen stets einander gleich, und es ist jede Aussage sich selbst gleich,

$$(8) \quad \alpha = \alpha,$$

— eine Eigenschaft der Gleichheitsbeziehung, die man „Reflexivität“ nennt.

Auch die Aussagensubsumtion ist eine reflexive Beziehung: Aus jeder Aussage, sofern sie wahr ist, läßt sich selbstverständlich zunächst auch schließen, daß sie selbst gilt,

$$(8') \quad \alpha \Leftarrow \alpha.$$

Hier bietet sich nun schon die Möglichkeit, aus den bisherigen Aussagensätzen, insbesondere aus (5) § 15 und (1) § 12, einige Schlüsse zu ziehen mittels des analytischen Verfahrens der Spezialisierung. Die Einzelheiten dieses Verfahrens sind im nachfolgenden § 17 noch näher zu beleuchten.

So könnte — nebenbei — aus der Subsumtion (8') die Gleichung (8) folgen mit Hilfe von (5), indem man hierin dem Zeichen  $\beta$  denselben Wert beilegt wie dem  $\alpha$ , oder indem man statt  $\beta$  durchweg  $\alpha$  setzt, wonach die Prämissen beide  $\alpha \Leftarrow \alpha$  laut (8') erfüllt sind. —

Läßt sich etwa zeigen, daß alles, worauf man je aus einer Aussage  $\beta$  schließen könnte, auch aus einer anderen Aussage  $\alpha$  folgen muß, so gehört zu diesen gemeinsamen Konklusionen wegen der Reflexivität der Subsumtion (8')  $\beta \Leftarrow \beta$  jedenfalls auch  $\beta$  selbst, und es ist somit  $\alpha \Leftarrow \beta$  — vgl. den Anfang des vorigen § 15 —. Wenn nun zudem aus  $\alpha$  nicht mehr folgt als aus  $\beta$ , d. h. wenn  $\alpha = \beta$  ist — § 15 —, so muß außer  $\alpha \Leftarrow \beta$  auch umgekehrt  $\beta \Leftarrow \alpha$  sein; von zwei gleichen Aussagen gilt keine ohne die andere,

$$(5') \quad (\alpha = \beta) \Leftarrow (\alpha \Leftarrow \beta), \quad (\alpha = \beta) \Leftarrow (\alpha \Leftarrow \beta) (\beta \Leftarrow \alpha).$$

Dies, mit (5) zusammengehalten, ergibt aber eben wieder gemäß (5), — indem man darin  $\alpha = \beta$  für  $\alpha$  und  $(\alpha \Leftarrow \beta) (\beta \Leftarrow \alpha)$  für  $\beta$  substituiert, — die Gleichung

$$(5'') \quad (\alpha = \beta) = (\alpha \Leftarrow \beta) (\beta \Leftarrow \alpha).$$



Weiterhin kann man in (1) § 12 der Prämisse  $\alpha \in \kappa$  vermöge (8)' dadurch genügen, daß man als Konklusion  $\kappa$  aus  $\alpha$  diese Aussage  $\alpha$  selbst nimmt:  $(\alpha \in \alpha) \in (\alpha\beta\gamma \dots \in \alpha)$ . Für diesen Wert von  $\kappa$  gilt somit auch die Konklusion als allgemeine Formel

$$(9) \quad \alpha\beta\gamma \dots \in \alpha, \quad \alpha\beta \in \alpha, \quad \alpha\beta \in \beta.$$

Man schließt auch leicht von (9) auf (1) zurück: (9)  $\alpha\beta \in \alpha$  ergibt mit der Prämisse  $\alpha \in \kappa$  zusammen wegen der Transitivität (4) § 13 in der Tat die Konklusion  $\alpha\beta \in \kappa$ ,

$$(\alpha\beta \in \alpha) (\alpha \in \kappa) \in (\alpha\beta \in \kappa);$$

diese Konklusion schreibt man dann der einen — relativen — Prämisse  $\alpha \in \kappa$  allein zu; absolut gültige Prämissen, wie  $\alpha\beta \in \alpha$ , können jederzeit fortgelassen werden — § 17 —.

Endlich erhält man in ähnlicher Weise die Umkehrung des Satzes (2) § 12: Ist  $\alpha \in \kappa\lambda$  vorausgesetzt, so ergänzt man nach (9) dazu die Prämissen  $\kappa\lambda \in \kappa$  und  $\kappa\lambda \in \lambda$ , wonach (4) die Konklusionen  $\alpha \in \kappa$  und bzw.  $\alpha \in \lambda$  liefert, oder nach (2) das Konklusionenprodukt

$$(\alpha \in \kappa\lambda) \in (\alpha \in \kappa) (\alpha \in \lambda);$$

diese Subsumtion vereinigt sich aber wieder vermöge (5) mit (2) zu der Äquivalenz

$$(2)' \quad (\alpha \in \kappa\lambda) = (\alpha \in \kappa) (\alpha \in \lambda).$$

§ 17. **Absolute Prämissen.** An den Schlüssen von (8)' auf (8) zurück mittels (5), sowie von (1) auf (9) verdeutlicht man sich leicht den Gebrauch von voraussetzungsweise oder erwiesenermaßen gültigen Sekundärsubsumtionen, hier von (5) und (1), in der Theorie überhaupt. — Solche Subsumtionen geben in Form hypothetischer Urteile einen Folgerungszusammenhang zwischen Prämissen und Konklusionen der relativen Aussagenart. Dabei ist aber stets nur an diejenigen Spezialisierungen gedacht, für welche die Prämissen erfüllt sind und absolute Geltung haben. Und nur für solche Spezialisierungen schließt man sodann auf die gleichfalls absolute, nicht mehr an die Prämissen gebundene Geltung der entsprechend spezialisierten Konklusionen. Diese treten also aus dem sekundären Zusammenhang heraus als selbständige Theoreme oder Formeln.

Der Dreipunkt  $\therefore$  — gesprochen etwa: „folglich“ — mag auch hier, im gleichen Sinne wie bei Transitivitätsschlüssen — § 15 —, die vorangegangene Isolierung eines Theorems andeuten; also z. B.



$$(\alpha \underset{(8)'}{\Leftarrow} \alpha) (\alpha \underset{(8)'}{\Leftarrow} \alpha) \underset{(5)}{\Leftarrow} (\alpha = \alpha),$$

$$\therefore \alpha = \alpha; \quad (8)$$

$$(\alpha \underset{(8)'}{\Leftarrow} \alpha) \underset{(1)}{\Leftarrow} (\alpha\beta \Leftarrow \alpha), \quad \therefore \alpha\beta \Leftarrow \alpha. \quad (9)$$

Durch die Nummern unterhalb der Beziehungszeichen sind die zur Stelle beizuziehenden Sätze angegeben.

Dagegen bieten der Rückschluß von (9) auf (1) und die Herleitung von (2)' im vorigen § 16 Beispiele der Entstehung oder der Bestätigung von sekundären Subsumtionen als Theoreme. Behufs Beweises solcher Subsumtionen sind die vorangehenden Sätze jederzeit sämtlich zur Verfügung und können nach Bedarf neben die Prämissen relativer Geltung eintreten als die selbstverständlichen, sonst stillschweigend mit vorausgesetzten „absoluten Prämissen“ aller möglichen Konklusionen. — So lautet ein Beispiel des § 11

$$(x = 3) \Leftarrow (x^2 = 9)$$

vollständiger: Wenn  $x = 3$  ist, — und wenn übrigens die gewöhnlichen Rechengesetze gelten, insbesondere der Satz: Gleiches, quadriert, gibt Gleiches — vgl. § 11 —, und wenn  $3^2 = 9$  ist, usw. —, dann ist  $x^2 = 9$ ;

$$(x = 3) \{ (a = b) \Leftarrow (a^2 = b^2) \} (3^2 = 9) \Leftarrow (x^2 = 9).$$

Nachdem sodann die absoluten Prämissen ihre Dienste getan zur eingehenderen Begründung der Konklusionen, pflegt man erstere in der endgültigen Fassung der Sekundärtheoreme als überflüssig wieder fortzulassen.

Aus einer relativen Prämisse  $\alpha$  — und ebenso aus mehreren — folgt eine andere Relation  $\kappa$  — abgesehen von dem Fall axiomatischer Festsetzung  $\alpha \Leftarrow \kappa$  — überhaupt nur vermöge irgendwelcher vorangehender Sätze, mögen diese nun als absolute Prämissen ausdrücklich angegeben sein oder nicht; aus der Relation  $\alpha$  läßt sich ebensoviel und nicht mehr schließen als aus ihrem Produkt  $\alpha \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots$  mit beliebigen, schon als absolut gültig bekannten Propositionen  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ , d. h. — § 15 — es besteht die Subsumtion und bzw. die Äquivalenz

$$(\varepsilon) \quad \alpha \Leftarrow \alpha \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots, \quad \alpha = \alpha \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots$$

Insofern hier die Symbole  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$  nicht beliebige, sondern nur absolute Aussagen bedeuten dürfen, ist der Satz ( $\varepsilon$ ) von besonderer — relativer — Art, wogegen alle andern hier aufzustellenden und zu numerierenden Aussagensätze schlechthin allgemein, für beliebige Aussagen als Werte ihrer Symbole  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa, \lambda, \mu, \dots$  gelten.



Der erwähnte Schluß von (9) auf (1) lautet nunmehr in vollständiger Darstellung

$$\begin{aligned} & (\alpha \notin x) \underset{(e)}{\Leftarrow} (\alpha\beta \underset{(9)}{\Leftarrow} \alpha) (\alpha \underset{(4)}{\Leftarrow} x) \underset{(4)}{\Leftarrow} (\alpha\beta \notin x) > \\ & \therefore (\alpha \notin x) \Leftarrow (\alpha\beta \notin x); \end{aligned} \quad (1)$$

desgleichen der Beweis von (2)' — minder einfach, indem man zunächst Hilfssätze (2)<sub>1</sub>, (2)<sub>2</sub> und (2)<sub>3</sub> — Umkehrung von (2) — aufstellt:

$$\begin{aligned} & (\alpha \notin x\lambda) \underset{(e)}{\Leftarrow} (\alpha \notin x\lambda) (x\lambda \underset{(9)}{\Leftarrow} x) \underset{(4)}{\Leftarrow} (\alpha \notin x) \\ & \therefore (\alpha \notin x\lambda) \underset{(4)}{\Leftarrow} (\alpha \notin x). \end{aligned} \quad (2)_1$$

Ebenso zeigt man, daß

$$\begin{aligned} & (\alpha \notin x\lambda) \Leftarrow (\alpha \notin \lambda); \quad (2)_2 \\ & \{(\alpha \notin x\lambda) \underset{(2)_1}{\Leftarrow} (\alpha \notin x)\} \{(\alpha \notin x\lambda) \underset{(2)_1}{\Leftarrow} (\alpha \notin \lambda)\} \Leftarrow \\ & \underset{(2)}{\Leftarrow} \{(\alpha \notin x\lambda) \Leftarrow (\alpha \notin x) (\alpha \notin \lambda)\} \end{aligned}$$

usw. — oder, dasselbe in noch weiterer Abkürzung,

$$(2)_1(2)_2 \underset{(2)}{\Leftarrow} \therefore (\alpha \notin x\lambda) \Leftarrow (\alpha \notin x) (\alpha \notin \lambda); \quad (2)_3$$

endlich, ebenso abgekürzt,

$$(2)_3(2) \underset{(5)}{\Leftarrow} \therefore (\alpha \notin x\lambda) = (\alpha \notin x) (\alpha \notin \lambda). \quad (2)'$$

### § 18. Kommutativität und Assoziativität des Produktes.

Bedeutet das Produkt  $\alpha\beta$  die gleichzeitige Geltung der beiden Aussagen  $\alpha$  und  $\beta$ , so muß es gleichgültig sein, welche von beiden an erster Stelle erwähnt wird, — so hat  $\beta\alpha$  dieselbe Bedeutung oder ist identisch mit  $\alpha\beta$ . Die Faktoren eines Produktes sind umstellbar; das Produkt ist in „kommutativer“ oder symmetrischer Weise aus seinen Faktoren zusammengesetzt, — wie ein Zahlenprodukt.

Da identische Aussagen stets auch einander eingeordnet und gleich sind, so hat man damit den „Kommutationssatz“

$$(10) \quad \beta\alpha \Leftarrow \alpha\beta, \quad \beta\alpha = \alpha\beta.$$

Andererseits wird man in einem Zahlenbeispiel des § 12:

$$a < b < c < d,$$

aus der Transitivität der vorliegenden Zahlenbeziehung

$$(a < b) (b < c) \Leftarrow (a < c)$$

die Konklusion  $a < d$  mittels Zerteilung des Prämissenproduktes auf



verschiedenen Wegen gewinnen: entweder — mit Beizug von (3), (8)' und (4)

$$[(a < b) (b < c)] (c < d) \Leftarrow (a < c) (c < d) \Leftarrow (a < d),$$

oder auch

$$(a < b) [(b < c) (c < d)] \Leftarrow (a < b) (b < d) \Leftarrow (a < d).$$

Diese Schlußweisen beruhen außer auf den genannten Sätzen noch auf einer besonderen Eigenschaft des Produktes von mehr als zwei, z. B. von drei, Aussagen  $\alpha, \beta, \gamma$ : Wird etwa das Produkt  $\alpha\beta$  mit  $\varrho$ ,  $\beta\gamma$  mit  $\sigma$  bezeichnet, so kann man das Produkt  $\alpha\beta\gamma$  aller drei Einzelaussagen auch darstellen durch  $\varrho\gamma$  oder  $(\alpha\beta)\gamma$ , und durch  $\alpha\sigma$  oder  $\alpha(\beta\gamma)$ ; d. h. statt: Es gelten alle drei Aussagen, kann man ohne Unterschied auch sagen: es gelten zwei von ihnen mit der dritten zusammen; man darf die Faktoren nach Belieben zu Teilprodukten zusammenfassen oder „assoziieren“. — Indem man wieder nach (8)' und (8) von Identität auf Subsumtion und Äquivalenz schließt, ergibt sich der „Assoziationsatz“:

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha\beta\gamma \Leftarrow (\alpha\beta)\gamma \Leftarrow \alpha(\beta\gamma) \Leftarrow (\alpha\beta)\gamma \Leftarrow \alpha\beta\gamma, \\ \alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma). \end{cases}$$

Auf Grund der Sätze (10) und (11) läßt sich nunmehr die „überschiebende Multiplikation“ von Gleichungen auf diejenige für Subsumtionen (3) § 12 gründen:

$$\begin{aligned} (\alpha = \beta) (\gamma = \delta) &\stackrel{(5')(8)}{\Leftarrow} [(\alpha \Leftarrow \beta) (\beta \Leftarrow \alpha)] [(\gamma \Leftarrow \delta) (\delta \Leftarrow \gamma)] \Leftarrow \\ &\stackrel{(11)}{\Leftarrow} (\alpha \Leftarrow \beta) (\beta \Leftarrow \alpha) (\gamma \Leftarrow \delta) (\delta \Leftarrow \gamma) \stackrel{(10)(11)}{\Leftarrow} [(\alpha \Leftarrow \beta) (\gamma \Leftarrow \delta)] [(\beta \Leftarrow \alpha) (\delta \Leftarrow \gamma)] \Leftarrow \\ &\stackrel{(9)(4)}{\Leftarrow} (\alpha\gamma \Leftarrow \beta\delta) (\beta\delta \Leftarrow \alpha\gamma) \stackrel{(5)}{\Leftarrow} (\alpha\gamma = \beta\delta) \\ (12) \quad &\therefore (\alpha = \beta) (\gamma = \delta) \Leftarrow (\alpha\gamma = \beta\delta). \end{aligned}$$

Dieser Satz (12) wieder ermöglicht eine Ergänzung zu den Sätzen (2) § 12 und (2)' § 16 mit kurzer Herleitung:

$$\begin{aligned} (\alpha = \beta\gamma) &\stackrel{(5)''}{=} (\alpha \Leftarrow \beta\gamma) (\beta\gamma \Leftarrow \alpha) \stackrel{(2)'(12)}{=} (\alpha \Leftarrow \beta) (\alpha \Leftarrow \gamma) (\beta\gamma \Leftarrow \alpha) \\ (2)'' \quad &\therefore (\alpha = \beta\gamma) = (\alpha \Leftarrow \beta) (\alpha \Leftarrow \gamma) (\beta\gamma \Leftarrow \alpha). \end{aligned}$$

§ 19. **Aussagen-Negation.** Um auszudrücken, daß aus einer Aussage  $\alpha$  eine andere  $\beta$  nicht folge, oder daß  $\alpha \Leftarrow \beta$  falsch sei oder nicht gelte, — also zur „Verneinung“ oder „Negation“ der Folgebeziehung, dient das Zeichen  $\Leftarrow$  und die „Unsubsumtion“

$$\alpha \Leftarrow \beta$$



„ $\alpha$  nicht sub  $\beta$ “; z. B. für Zahlen  $a, b$

$$\text{aus § 14: } (a^2 = b^2) \not\Leftarrow (a = b),$$

$$\text{aus § 5: } (a < b) \not\Leftarrow (b < a),$$

$$\text{aus § 6: } (a \leq b) \not\Leftarrow (b \leq a).$$

Ebenso setzt man für „ $\alpha$  ist nicht gleich  $\beta$ “ die Ungleichung

$$\alpha \neq \beta;$$

z. B.

$$(a = b) \neq (a^2 = b^2).$$

Auch primäre Propositionen sollen durch einen — wagrecht übersetzten — „Negationsstrich“ verneint oder negiert erscheinen, wie etwa

$$\overline{aZb} \quad \text{oder} \quad a\overline{Z}b,$$

„das Ding  $a$  steht nicht in der Beziehung  $Z$  zum Ding  $b$ “, oder: die Proposition  $aZb$  ist falsch, unrichtig, ungültig.

Im Gegensatz zur Unsubsumtion  $\alpha \not\Leftarrow \beta$  bedeutet hiernach die Subsumtion

$$\alpha \Leftarrow \overline{\beta}:$$

Aus der Proposition  $\alpha$  folgt, sofern sie richtig ist, daß  $\beta$  nicht gilt; oder: Die Geltung von  $\alpha$  widerspricht derjenigen von  $\beta$ ; usw.

Zahlenbeispiele aus den §§ 5 und 6:

$$(a < b) \Leftarrow \overline{(b < a)}$$

$$(a \leq b) = \overline{(b < a)}$$

$$\overline{(a \leq b)} = (b < a)$$

$$\overline{(a < b)} \Leftarrow (b < a).$$

§ 20. **Notwendigkeit sekundärer Voraussetzungen.** Es sind hiermit vier sekundäre Elemente eingeführt: Die Subsumtion und die Äquivalenz, die Multiplikation und die Negation. Drei von ihnen sind nicht allein unerlässlich bei Begründung einer jeden deduktiven Theorie, sondern sie gehören schon von vornherein zum Begriff einer solchen Theorie überhaupt — § 9 —, nämlich außer der Subsumtion — § 11 — das Produkt und die Negation: Insofern die Theorie sich aus allen Axiomen und Theoremen als gleichzeitig — unbedingt oder absolut — gültigen Propositionen zusammensetzen und deren Produkt vorstellen wird, — und insofern der Gedanke an etwaige gegenteilige Meinungen — der Anlaß und Anstoß zur Aufstellung einer Theorie überhaupt — zugleich zur ausdrücklichen Ablehnung und Verneinung solcher ent-



gegenstehender Annahmen nötigen und so zu Theoremen und Axiomen verneinenden Inhalts führen wird.

Nur die Aussagenäquivalenz wäre freilich allenfalls entbehrlich und ersetzbar durch Subsumtionenprodukte wie die aus (5)'' § 16 und (2)'' § 18. Doch wäre es äußerst beschwerlich und unzweckmäßig, mit der Subsumtion als einziger Aussagenbeziehung sich zu behelfen und auf die mittels der Äquivalenz zu erzielende Ausdrucks- und Gedanken-kürzung ganz zu verzichten.

Auch die sekundären Voraussetzungen (1)–(12) §§ 12–18 könnten wohl an Zahl und Inhalt um etwas verringert werden. Es war hier aber nicht die Frage, mit welchem Minimum von aussagentheoretischen Voraussetzungen der Gebietekalkül sich noch begründen lasse; sondern es kam vielmehr nur an auf eine *vollständige* Aufzählung aller für gewöhnlich stillschweigend benutzten Aussagensätze, von denen auch hier bei Aufstellung der Gebietetheorie Gebrauch gemacht werden soll.

Angesichts der immerhin ziemlich umfangreichen aussagentheoretischen Zurüstungen könnte man daran denken, hier sogleich die weiteren Teile der Aussagentheorie anzuschließen, oder auch diese letztere — womöglich mit einfacheren Voraussetzungen — insgesamt als ein Ganzes der Gebietetheorie voranzustellen. Allein von vornherein ist begreiflich: Soll die Aussagentheorie ihren Inhalt und Gegenstand — soll sie die Gesetze der Herleitung von Theoremen aus anderen und aus Axiomen selbst wieder herleiten aus ihren Axiomen, so muß von eben diesen Gesetzen ein nicht allzu unbeträchtlicher Teil axiomatisch vorausgesetzt werden. In der Tat wird jeder Versuch nach dieser Richtung hin lehren, daß die dazu erforderlichen Voraussetzungen im wesentlichen auch zur Begründung der allgemeinen Gebietetheorie ausreichen. Die Aussagentheorie ist nämlich nichts anderes als die Theorie eines besonderen — besonders einfachen — Gebietesystems — vgl. §§ 76 ff. im zweiten Teil dieses Abrisses.

## Gebietstheoretische Voraussetzungen.

§ 21. **Elementesystem.** Es sind nunmehr auch die Primärelemente soweit als nötig zu bestimmen.

Diese Elemente müssen vor allem „zu einem System zusammengehören“. Die Dinge  $a, b, c, \dots$  gehören mit der Beziehung  $Z$  zusammen zu einem Elementesystem, wenn jedes Ding  $p$  aus der Reihe der Dinge  $a, b, c, \dots$  zu jedem andern Ding  $q$  unter ihnen überhaupt in irgendeiner Beziehung steht, und zwar entweder in der Beziehung  $Z$ ,



$pZq$ , oder aber, wo nicht, doch in einer damit in Widerspruch stehenden Beziehung, so daß  $p\bar{Z}q$  zu setzen ist. — Hierbei sei nicht nur  $Z$  eine einzige bestimmte — spezielle — Beziehung, sondern es sei auch unter  $\bar{Z}$  eine in gleicher Weise bestimmte Beziehung, oder wohl auch eine Alternative zwischen mehreren solchen Beziehungen zu verstehen.

Zur Erläuterung diene hier wieder ein Zahlenbeispiel. Zwei Zahlen  $a$  und  $b$  sind stets entweder einander gleich  $a = b$ , oder aber ungleich  $a \neq b$ ; unter dem letzteren Fall pflegt man sich weiter nur die beiden Möglichkeiten vorzustellen, daß  $a$  kleiner sei als  $b$ ,  $a < b$ , oder aber umgekehrt  $b < a$ . — Das System, dem nebst den Zahlen als Dingen diese Gleichheitsbeziehung — mit dieser Verneinung — angehört, ist das System der reellen Zahlen. — Ist hingegen nur die eine Zahl  $a$  reell, z. B. 2 oder  $\sqrt{4}$ , die andere  $b$  imaginär,  $\sqrt{-4}$  oder  $2i$ , so stehen  $a$  und  $b$  zwar wohl überhaupt in irgendwelchen Beziehungen zueinander, z. B. in der:  $b^2 = -a^2$ , oder auch: Es sind beides Zahlen; aber es trifft keine der drei oben gedachten Beziehungen zu;  $\sqrt{4}$  ist weder gleich groß wie  $\sqrt{-4}$ , noch auch kleiner oder größer; man kann also auch nicht  $\sqrt{4} \neq \sqrt{-4}$  setzen in demjenigen bestimmten Sinne, wie dies bei zwei reellen Zahlen geschehen könnte. — Diese beiden Zahlen gehören mit der gedachten Beziehung der Zahlengleichheit — oder auch z. B. mit der des „Kleiner-seins“ — nicht zu einem System.

§ 22. **Primäre Subsumtion.** Wir beschränken von nun an die Untersuchung weiterhin auf solche Elementesysteme, denen (mindestens) eine binäre — § 3 — „reflexive“ und „transitive“ Beziehung angehört.

Eine Beziehung  $Z$  heißt reflexiv, wenn jedes Ding  $p$  des Systems, zu dem  $Z$  gehört, mit sich selbst in dieser Beziehung steht,  $pZp$  — § 16 —.

Und daß eine Beziehung  $Z$  transitiv sei, will sagen — § 13 —: So oft im System die Proposition  $pZq$  neben der  $qZr$  besteht, — wobei das Prädikat  $q$  in der einen Proposition mit dem Subjekt der andern übereinstimmt —, so stehen auch die beiden nicht gemeinsamen Glieder  $p$  und  $r$  in der gleichen Beziehung  $Z$ ,

$$(pZq) (qZr) \in (pZr);$$

man kann hier auch Prämissen samt Konklusion vereinigt denken in der fortlaufenden oder Doppelproposition

$$pZqZr.$$



Eine binäre, reflexive und transitive, einem Elementesystem zugehörige Beziehung, sonst beliebiger Art, möge — nach einem wichtigen Spezialfall — „Subsumtion“ oder „Einordnung“ heißen und mittels des Zeichens  $\Subset$  „sub“ dargestellt werden:

$$a \Subset b,$$

„ $a$  sub  $b$ “, oder: Das Ding  $a$  ist eingeordnet dem Ding  $b$ .

Man kann diese Beziehung z. B. als Ein- oder Unterordnung eines Begriffes  $a$  unter den andern Begriff  $b$  deuten, — ebensogut aber auch im Gegenteil als Überordnung des Begriffes  $a$  über  $b$ , da auch diese Begriffsbeziehung reflexiv und transitiv ist. Auch die unter den Zeichen  $=$ ,  $\leq$  und  $\geq$  dem reellen Zahlensystem zugehörigen Beziehungen stellen ebensoviele besondere Arten der Einordnung vor.

Daß hier für die primäre Einordnung dieselbe Benennung und Bezeichnung gewählt ist wie oben — § 11 — für die sekundäre — transitive und reflexive — Folgerungsbeziehung, wird sich später vollends rechtfertigen — § 84 u. a. — Eine Verwechslung der primären mit der sekundären Subsumtion schließt sich beim Gebrauch beider Beziehungen nebeneinander von selbst aus.

§ 23. **Gebiete.** In der Voraussetzung der Zugehörigkeit einer Einordnungsbeziehung zu einem Elementesystem liegt zugleich auch eine Voraussetzung über die Dinge des Systems.

Solche Dinge, von denen jedes zu jedem entweder in einer Einordnungsbeziehung steht, — und zwar stets in der nämlichen, — oder aber in einer andern gegenteiligen Beziehung, mögen fortan — im weiteren Sinne — „Gebiete“ eines Systems oder einer „Gebiete-Mannigfaltigkeit“ heißen.

Im engeren Sinne enthält der Gebiete-Begriff, wie er im folgenden untersucht werden soll, noch eine Reihe von Eigenschaften mehr.

§ 24. **Die Axiome.** Die sämtlichen Eigenschaften der Gebiete  $a, b, \dots$  im engeren Sinne, d. i. ihre Beziehungen untereinander, sind gegeben durch die folgenden Axiome.

- |                 |   |
|-----------------|---|
| I               | $a \Subset a$ , Identitäts- oder Tautologieaxiom.                             |
| II              | $(a \Subset b) (b \Subset c) \Subset (a \Subset c)$ , Subsumtionsschluß.      |
| III             | $(a \Subset b) (b \Subset a) = (a = b)$ , Gleichheitsdefinition.              |
| IV <sub>x</sub> | $0 \Subset a$ , Nullpostulat.   IV <sub>+</sub> $a \Subset 1$ , Einspostulat. |
| V               | $1 \Subset 0$ , Existenzpostulat.   |



$$VI_x \quad (x \in a) (x \in b) = (x \in ab), \quad | \quad VI_+ \quad (a \in y) (b \in y) = (a + b \in y),$$

Produktdefinition. Summendefinition.

$$VII_{x+} \quad (a + z) (\bar{a} + z) = z = az + \bar{a}z,$$

Negations- oder Distributionsprinzip.

Hierin ist einem jeden der Buchstabenzeichen  $a, b, c, x, y, z$  die Bedeutung „jedes beliebige Gebiet der Mannigfaltigkeit“ beizulegen, und nur die beiden Ziffernsymbole 0 und 1 werden sich als spezielle oder eindeutige durch die Axiome  $IV_x, IV_+$  und  $V$  gekennzeichnet finden. Die Axiome sind hiernach durchweg allgemeine Aussagen — mit Ausnahme des Existenzaxioms  $V$ .

Die beigeetzten Benennungen der einzelnen Axiome entstammen ihrem hauptsächlichsten Gebrauch und werden sich auch durch diesen vollends von selbst erklären.

Bei der folgenden vorläufigen kurzen Erläuterung der Axiome mag, wenn  $a \in b$  ist, das Subsumtionssubjekt  $a$  bequemlichkeitshalber auch als „Untergebiet“ (Minor), wohl auch als „Teilgebiet“ von  $b$ , dem „Obergebiet“ (Maior), bezeichnet werden.

§ 25. **Das Axiom I.** Jedes Gebiet ist sich selbst eingeordnet, ist sein eigenes Unter- und Obergebiet, sein Subjekt und Prädikat. Die Subsumtion ist eine reflexive Beziehung.

Eine Subsumtion von der Form  $a \in a$  mit gleichlautenden — identischen — Subsumtionsgliedern, die also nach Axiom  $I$  stets als richtig anzusehen ist, mag auch eine „tautologische“ heißen.

§ 26. **Das Axiom II.** Alle Teilgebiete  $a$  eines Gebietes  $b$  sind auch jedem Obergebiet  $c$  des letzteren  $b$  eingeordnet. Das Prädikat  $c$  eines Prädikates  $b$  ist auch Prädikat zu des letzteren Subjekt  $a$ . Die Subsumtionsbeziehung ist transitiv.

Bei Anwendung dieses Axioms mag des öfteren Gebrauch gemacht werden von der abgekürzten Darstellung in Gestalt einer „fortlaufenden“ oder „Doppelsubsumtion“

$$a \in b \in c,$$

wobei das Gebiet  $b$  als „mittleres oder Zwischengebiet“, „Zwischenwert“ von  $a$  und  $c$ , auch als „liegend zwischen“ dem „untersten“ Gebiet  $a$  und dem „obersten“  $c$  bezeichnet werde.

Durch die Axiome  $I$  und  $II$  zusammen sind die beiden Begriffe der Subsumtion und des Gebietes im weiteren Sinne in Rücksicht aufeinander ausreichend bestimmt.



§ 27. **Das Axiom III.** Ein Gebiet sei „gleich“ einem anderen, mag bedeuten, daß ein jedes von beiden Gebieten dem andern eingeordnet sei. — Doch setzt eine solche Aussagendefinition stets notwendig nicht nur Äquivalenz, sondern Identität zwischen Subjekt- und Prädikataussage — § 15 — und könnte unmittelbar nur dargestellt werden mittels eines Identitätszeichens wie etwa  $\equiv$ ,

$$(a = b) \equiv (a \Leftarrow b) (b \Leftarrow a).$$

In der Tat ist das Axiom III — in immanentem Sinne, vgl. § 37 — lediglich als eine Zusammenfassung der drei meist einzeln anzuwendenden Teilsubsumtionen — § 18 (2)'' — anzusehen: Wenn je zwei Gebiete einander gegenseitig eingeordnet sind, so sind es zwei gleiche Gebiete, und umgekehrt: Von zwei gleichen Gebieten ist stets das eine dem andern eingeordnet,

$$III' \quad (a \Leftarrow b) (b \Leftarrow a) \Leftarrow (a = b),$$

$$III'' \quad (a = b) \Leftarrow (a \Leftarrow b),$$

$$III''' \quad (a = b) \Leftarrow (b \Leftarrow a).$$

Hiermit und mit der *Äquivalenz III* ist die Gebietegleichheit  $a = b$  in einer für den gebietstheoretischen Gebrauch ausreichenden Weise gekennzeichnet.

Es verschlägt daher nichts, auch das Axiom III selbst als Definition anzusprechen, anstatt nur etwa zu sagen, das Axiom ersetze oder enthalte die Definition, oder diese sei mit jenem zugleich vorausgesetzt.

In ähnlicher Weise wäre eine — übrigens ebenfalls leicht zu vermeidende Verwechslung der Gebietegleichheit mit der Primärzeichen-Identität — § 2, vgl. auch unten § 37 — zwar nicht berechtigt, aber zumeist gewissermaßen unschädlich, wie sich noch weiterhin zeigen wird. — Wären mit  $a = b$  die beiden Gebiete  $a$  und  $b$  als identisch bezeichnet, so würden offenbar die Teilaxiome III'' und III''' dem Sinne nach mit dem Axiom I zusammenfallen.

Die Zugehörigkeit der Gleichheit zum Gebietesystem folgt aus der mit § 22 vorausgesetzten Zugehörigkeit der Subsumtionsbeziehung. Denn gilt dieser Voraussetzung zufolge für zwei beliebige Gebiete  $a$  und  $b$  stets entweder 1°)  $a \Leftarrow b$  oder aber 2°)  $a \Leftarrow b$ , sowie in jedem dieser beiden Fälle wieder außerdem entweder 3°)  $b \Leftarrow a$  oder 4°)  $b \Leftarrow a$ , so ist auch stets entweder  $a = b$ , nämlich im Falle 1°) 3°), oder aber  $a \neq b$  in jedem der drei übrigen Fälle 1°) 4°), 2°) 3°) und 2°) 4°).

§ 28. **Die Axiome IV und V.** Durch diese Axiome wird die Untersuchung auf Systeme von solchen Gebieten eingeschränkt, die



sämtlich zwischen (mindestens) einem gemeinsamen untersten Gebiet 0, Null und einem obersten 1, Eins liegen,

$$0 \in a \in 1,$$

wobei dieses jenem nicht eingeordnet ist,  $1 \notin 0$ .

Diese Axiome führen also, wie auch die weiter folgenden, keine neuen Beziehungsbegriffe mehr ein, sondern neue Gebiete, hier ein Null- und ein Einsgebiet.

Die Subsumtionsbeziehung wird übrigens durch  $V$  — im Verein mit den beiden Axiomen *IV*, die auf  $0 \in 1$  schließen lassen werden, — ausdrücklich als eine unsymmetrische hingestellt, nachdem schon die Zusammenfassung einer Subsumtion mit ihrer Umkehrung im Gleichheitsbegriff — Axiom *III* — auf diese Unsymmetrie vorläufig anspielt.

Während ferner die Axiome *I* und *IV* die Geltung gewisser Subsumtionen fordern, setzt nunmehr  $V$  nebenbei fest, daß doch nicht ein jedes Gebiet jedem anderen eingeordnet sei, und läßt so die Subsumtion  $a \in b$ , allgemein betrachtet, als Relation erscheinen — vgl. § 9 —.

Die besondere Art der Numerierung  $IV_x$  und  $IV_+$  wird sich später erklären.

§ 29. **Die Axiome VI** enthalten die Definitionen der beiden Gebieteknüpfungen, nämlich der „Multiplikation“ und der „Addition“. Ein „Produkt“  $ab$ , auch  $a \cdot b$  (oder  $a \times b$ ), „ $a$  mal  $b$ “, zweier beliebiger Gebiete  $a$  und  $b$ , der „Faktoren“, ist hiernach ein Gebiet, dem alle gemeinsamen Untergebiete  $x$  der Faktoren eingeordnet sind, und auch nur solche, — darunter jedenfalls das Nullgebiet 0, wogegen die „Summe“  $a + b$ , „ $a$  plus  $b$ “ zweier „Summandengebiete“ oder „Summenglieder“  $a$  und  $b$  selbst eingeordnet ist allen gemeinsamen Obergebieten  $y$  der Summanden, und zwar ausschließlich solchen, also auch dem Gebiet 1.

Hier ist die Unterscheidung beider Axiome an der gemeinsamen Nummer *VI* durch angehängtes Mal- bzw. Pluszeichen leicht verständlich.

Die Aussagenfaktoren der beiden Äquivalenzen *VI* — § 18 (2)“ — seien entsprechend den Teilaxiomen des Gleichheitsaxioms *III* — § 27 — numeriert:

$$\begin{array}{l|l} VI'_x & (x \in a)(x \in b) \in (x \in ab) \\ VI''_x & (x \in ab) \in (x \in a) \\ VI'''_x & (x \in ab) \in (x \in b) \\ \hline VI'_+ & (a \in y)(b \in y) \in (a + b \in y) \\ VI''_+ & (a + b \in y) \in (a \in y) \\ VI'''_+ & (a + b \in y) \in (b \in y). \end{array}$$

Die Teilaxiome  $VI'_x$  und  $VI''_+$ , wie auch *III'* werden sich im Gebrauch als die wichtigeren erweisen.



§ 30. **Die Axiome VII** bestimmen beide zusammen das „Negat“ oder die „Verneinung“  $\bar{a}$  „a Strich“ oder „a nicht“, „non a“ eines beliebigen Gebietes  $a$  mittels gewisser Beziehungen beider Gebiete  $\bar{a}$  und  $a$  zu einem jeden (anderen) beliebigen Gebiet  $z$ : Letzteres ist stets sowohl gleich dem Produkt seiner beiden Summen mit  $a$  und  $\bar{a}$ , als auch gleich der Summe seiner Produkte mit den nämlichen beiden Gebieten.

Doch wird sich der Negatbegriff später vermöge anderer Eigenschaften — § 52 — weit leichter verdeutlichen lassen. — Vgl. auch § 32.

Die Klammern — vgl. § 10 — sollen stets bei möglichst sparsamer Anwendung alle Mißverständnisse ausschließen. Setzt man fest, wie in der Arithmetik: In Klammer muß stehen eine jede Summe, wenn dieselbe als Faktor in einem Produkt vorkommt, — so braucht keine Klammer gesetzt zu werden, wenn umgekehrt ein Produkt die Rolle eines Summanden übernimmt. — Also hätte in VII der Ausdruck  $(a+z)(\bar{a}+z)$  einen anderen Sinn, wenn man die Klammern entfernte:

$$a + z\bar{a} + z \equiv a + (z\bar{a}) + z \equiv (a + z\bar{a}) + z,$$

— vgl. § 44 Theoreme 8), — ferner

$$a + z(\bar{a} + z) \equiv a + [z(\bar{a} + z)];$$

dagegen ist

$$az + \bar{a}z \equiv (az) + (\bar{a}z),$$

zu unterscheiden von

$$a(z + \bar{a}z),$$

und von

$$a(z + \bar{a})z \equiv [a(z + \bar{a})]z, \quad \text{usw.}$$

§ 31. **Definition, Postulat und Prinzip.** Nach dem Gesagten setzen die Axiome gewisse Beziehungen zwischen gewissen Dingen fest — vgl. § 1 —. Hierdurch werden beiderlei Elemente, Dinge und Beziehungen, in Rücksicht aufeinander bis zu gewissem Grad bestimmt. Von diesen Elementen wird die Theorie in der Tat keinen anderen Gebrauch machen als den durch die Axiome selbst ermöglichten und vorgeschriebenen, — wenn man absieht von der Benutzung auch der „allgemeinen“ und der „aussagentheoretischen Voraussetzungen“ §§ 1—9 bzw. 10—19. Somit sind diese Grundelemente der Theorie durch die Axiome für ihre bevorstehende Anwendung hinreichend gekennzeichnet oder „definiert“, d. h. man kann die Definition leicht aus einem oder mehreren Axiomen zusammen schöpfen oder ablesen.

Der Aufbau der Theorie auf den Axiomen erfordert außerdem die begriffliche Möglichkeit und Wirklichkeit aller mit den Axiomen defi-



nierten Grundelemente. Die Axiome enthalten zugleich schon den Gedanken an solche Wirklichkeit und die Forderung derselben. Man hat somit die Axiome auch als Ausdruck dieser Forderungen oder „Postulate“ anzusehen.

Bei jedem Axiom endlich ist die unmittelbare Voraussetzung und Quelle aller Theoreme, die daraus folgen, in dem zu erblicken, was das Axiom noch sagt, abgesehen von seinem definierenden und postulierenden Inhalt, — in dem reinen Urteilsgehalt, — in der Behauptung der Gültigkeit der betreffenden Beziehung zwischen den darin gedachten Dingen, wenn man Dinge und Beziehung als begrifflich bestimmt und gegeben hinnimmt. Diesem Urteilsgehalt nach mag das Axiom etwa als ein „Prinzip“ der Theorie bezeichnet werden.

Bei Anwendung eines Axioms kann neben dem Prinzip bisweilen auch der Definitions- oder der Postulatgehalt in den Vordergrund treten.

Das Wort „Axiom“ könnte, zumal wenn etwa von evidenten, allgemein denknotwendigen u. dgl. Axiomen die Rede wäre, an die transzendente Frage erinnern, ob unter unseren grundlegenden Begriffen und Prinzipien sich solche befinden, ohne die wir nicht streng mathematisch oder überhaupt nicht wissenschaftlich denken könnten. Diese Frage soll hier in keiner Weise berührt werden.

§ 32. **Veranschaulichung der Gebiete.** Zu der durch die Axiome verlangten Denkmöglichkeit des Gebietesystems, — zur Möglichkeit der folgerichtigen Ausgestaltung einer Gebietetheorie gehört selbstverständlich vor allem, daß die Axiome einander nicht widersprechen. Ein etwaiger, zunächst vielleicht verborgener Widerspruch unter ihnen müßte sich im Gebietekalkül und eben durch diesen früher oder später herausstellen.

Gelingt es indessen, als Verwirklichung und Veranschaulichung des Elementesystems einen konkreten Denkbereich bekannter Art, worin die Axiome sämtlich Geltung haben, nachzuweisen und unmittelbar vor Augen zu stellen als wirklich, also möglich, so ist damit der Beweis, daß die Axiome miteinander verträglich sind, zum voraus erbracht.

Zu dem Ende können als Gebiete betrachtet werden die irgendwie, z. B. kreisförmig begrenzten Flächenstücke einer ebenfalls begrenzten Fläche — Fig. 1 —.

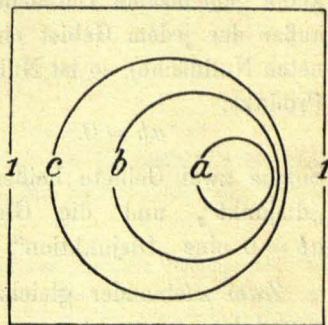


Fig. 1.



Ein Flächengebiet  $a$  sei einer anderen Fläche  $b$  eingeordnet  $a \in b$ , wenn  $a$  ein Teil der Fläche  $b$  ist. Ist dann zugleich  $b$  wieder eine Teilfläche eines dritten Gebietes  $c$ , so gehört auch  $a$  als Teil dem Gebiet  $c$  an; d. h. das Axiom *II* trifft zu. Ein jedes Flächenstück läßt sich übrigens tautologisch als sein eigenes Teilgebiet auffassen —  $a \in a$ , Axiom *I*. Andererseits kann offenbar hier die gegenseitige Einordnung zweier Gebiete  $a$  und  $b$  oder — Axiom *III* — die Gleichung  $a = b$  nur bedeuten, daß die Flächen  $a$  und  $b$  zusammenfallen oder identisch sind; es ist dann das Gebiet  $a$ , auch  $b$  genannt, sich selbst gleich und sich selbst eingeordnet.

Um ferner den Axiomen *IV* und *V* Genüge zu tun, verstehe man unter der Fläche 1 die gesamte Fläche, der alle einzelnen Flächen als Teile eingeordnet sind, — unter der Fläche 0 aber, die allen anderen Flächen als gemeinsamer Teil zugehören soll, entweder, da auseinanderliegende Flächen „nichts“ miteinander gemein haben, eben *das Nichts*, —

eine Fläche von der Ausdehnung Null, — oder aber ein beliebiges unter den Flächenstücken, wofern man dann als sonstige Gebiete  $a, b, c, \dots$  stets nur solche Flächen in Betracht zieht, denen diese Nullfläche als Teil angehört.

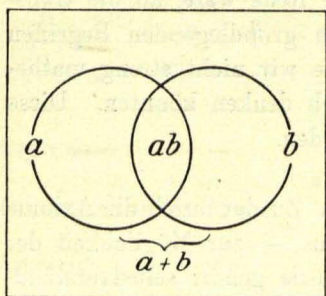


Fig. 2.

Im Hinblick auf die Axiome *VI* wird man weiter — Fig. 2 — das den beiden beliebigen kreisförmigen Flächengebieten  $a$  und  $b$  gemeinsame (in der Fig. 2 nicht kreisförmige) Flächenstück als deren Produkt  $ab$  ansprechen, als ihre Summe  $a + b$  dagegen die aus  $a$  und  $b$  sich zusammensetzende Fläche.

Besitzen zwei Gebiete  $a$  und  $b$  keine gemeinsame Teilfläche (bzw. außer der jedem Gebiet eingeordneten Nullfläche), so ist Null deren Produkt:

$$ab = 0.$$

Solche zwei Gebiete heißen dann „disjunkt“, und die Gleichung  $ab = 0$  eine „Disjunktion“.

Setzen zwei Gebiete  $a$  und  $b$  (mit oder bzw. ohne gemeinsames Flächenstück) das gesamte Einsgebiet zusammen, so ist dieses ihre Summe:

$$a + b = 1.$$

Zwei Gebiete, deren Summe das Einsgebiet ist, sollen „komplementäre“ Gebiete heißen.

Zwei zueinander gleichzeitig disjunkte und komplementäre Gebiete  $a$  und  $b$

$$(ab = 0)(a + b = 1)$$



mögen ferner als „obverse“ Gebiete bezeichnet werden.\*) Das eine  $a$  von beiden ist dann das, was von der gesamten Einsfläche nicht zum anderen  $b$  gehört und übrigbleibt, wenn man  $b$  aus dem Einsgebiet fortläßt, — wobei allerdings die Nullfläche, falls vorhanden, nicht fortgelassen werden darf.

Betrachtet man nun von zwei obversen Gebieten das eine als Negat des anderen, so ist damit den Axiomen VII Rechnung getragen, wie allerdings erst aus §§ 59 und 60 zu ersehen sein wird.

Wie die Axiome, so lassen sich auch alle Theoreme und abgeleiteten Begriffe der Gebietetheorie stets an den hier betrachteten Flächenfiguren erläutern und nachweisen. In häufigen Fällen kann der Anblick der Figuren auch zur vorläufigen Auffindung neuer Gebietstheoreme führen.

## Deduktion der Theorie.

### Schlüsse aus den drei ersten Axiomen.

§ 33. **Symmetrie der Gleichheit.** Die Eigenschaften der Reflexivität und der Transitivität, die das Wesen der Subsumtion ausmachen, werden auch der Gleichheitsbeziehung zukommen, wogegen sich diese von jener durch die Symmetrie unterscheidet.

Um zunächst die letztere zu beweisen, sei etwa die Gleichung

$$b = a$$

vorausgesetzt. Aus derselben folgt nach dem Teilaxiom III''' § 27  $a \in b$ , und ebenso nach Axiom III''  $b \in a$ ,

$$(b = a) \underset{III'''}{\in} (a \in b), \quad (b = a) \underset{III''}{\in} (b \in a),$$

endlich aus beiden Konklusionen in dieser Reihenfolge nach III'  $a = b$ . Also — § 12 (2) —

$$1) \quad (b = a) \in (a = b) \quad \text{oder} \quad (b = a) = (a = b)$$

— vgl. §§ 14 und 15 —.

Man kann auch einfach, in Erinnerung an die Kommutativität des Aussagenprodukts — § 18 (10) — und an die Symmetrie und Tran-

\*) Der Ausdruck „obvers“ ist einer Abhandlung von Kempe entnommen: On the relation between the logical theory of classes and the geometrical theory of points. — Proceed. Lond. Math. Soc. Vol. 21, p. 147. — Vgl. über diese Abhandlung: Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band II, 2, Seite 564 ff.



sitivität der Aussagengleichheit — § 15 (6) und (7) — den ganzen Beweis darstellen in der kurzen Form

$$(b = a) \underset{III}{=} (b \in a) (a \in b) = (a \in b) (b \in a) \underset{III}{=} (a = b).$$

§ 34. **Reflexivität.** Gibt man in *III'* dem allgemeinen Symbol *b* den nämlichen Wert wie dem Symbol *a* und ersetzt demgemäß jenes Symbol *b* durch *a*, so lauten die Prämissen beide übereinstimmend  $a \in a$  und sind nach Axiom *I* erfüllt, und darum desgleichen in

$$(a \underset{I}{\in} a) (a \underset{I}{\in} a) \underset{III'}{\in} (a = a)$$

auch die Konklusion

$$2) \quad \therefore a = a,$$

— vgl. § 17 —.

Eine Gleichung, deren beide Glieder wie im Theorem 2) gleich lauten oder zeichenidentisch sind — § 2 und unten § 37 —, heiße eine „tautologische Gleichung“ oder eine „Tautologie“ — vgl. § 25 —, das Theorem 2) selbst aber der erste oder der „Gleichungs-Tautologiesatz“

§ 35. **Die Transitivität** der Gebietegleichheit

$$3) \quad (a = b) (b = c) \in (a = c)$$

ergibt sich, wenn man statt der vollständigen Prämissen  $a = b$  und  $b = c$  zunächst nur die nach *III''* darin enthaltenen Teilprämissen  $a \in b$  und  $b \in c$  zu einem Subsumtionsschluß nach *II* auf die Konklusion  $a \in c$  vereinigt, und ebenso die anderen Teilvoraussetzungen  $c \in b$  und  $b \in a$  nach *III'''* zu dem Schluß auf  $c \in a$  nach *II*, worauf endlich die beiden Konklusionen nach *III'* zu der weiteren  $a = c$  führen.

In kurzer Darstellung — § 18 (12), (10) und (11), § 12 (3) u. a.

$$\begin{aligned} (a = b) (b = c) &\underset{III}{=} (a \in b) (b \in a) (b \in c) (c \in b) = \\ &= (a \in b) (b \in c) (c \in b) (b \in a) \underset{II}{\in} (a \in c) (c \in a) \underset{III}{=} (a = c). \end{aligned}$$

§ 36. **Vertauschung gleicher Prädikate bzw. Subjekte.** Dem Transitivitätssatz ähnlich sind noch die beiden anderen Theoreme: Von zwei gleichen Gebieten

$b_1 = b$  sei dem einen  $b_1$  ein drittes Gebiet  $a$  eingeordnet,  $a \in b_1$ ; dann ist  $a$  auch dem anderen  $b$  eingeordnet,

$$4)_x \quad (a \in b_1) (b_1 = b) \in (a \in b)$$

$a = a_1$  sei das eine  $a_1$  einem dritten Gebiet  $b$  eingeordnet,  $a_1 \in b$ ; dann ist auch das andere  $a$  eingeordnet demselben Gebiet  $b$ ,

$$4)_+ \quad (a = a_1) (a_1 \in b) \in (a \in b),$$



oder: in einer Subsumtion darf man stets

das Prädikat

das Subjekt

ersetzen durch ein demselben gleiches Gebiet; die Subsumtion bleibt richtig, wofern sie zuvor richtig war.

Denn aus der vorausgesetzten Gleichung folgt nach *III''* die entsprechende Einordnung

$$(b_1 = b) \underset{III''}{\Leftarrow} (b_1 \Leftarrow b) \quad | \quad (a = a_1) \underset{III''}{\Leftarrow} (a \Leftarrow a_1),$$

und aus dieser Konklusion in Verbindung mit der anderen Prämisse vermöge *II*

$$(a \Leftarrow b_1)(b_1 \Leftarrow b) \underset{II}{\Leftarrow} (a \Leftarrow b) \quad | \quad (a \Leftarrow a_1)(a_1 \Leftarrow b) \underset{II}{\Leftarrow} (a \Leftarrow b).$$

Beide Sätze 4)<sub>x</sub> und 4)<sub>+</sub> sind vereinigt in dem weiteren Theoreme

$$(a = a_1)(a_1 \Leftarrow b_1)(b_1 = b) \Leftarrow (a \Leftarrow b),$$

in kurz andeutender Darstellung

$$a = a_1 \Leftarrow b_1 = b,$$

wozu der Beweis auch lauten kann:

$$(a = a_1)(a_1 \Leftarrow b_1)(b_1 = b) \underset{III''}{\Leftarrow} (a \Leftarrow a_1)(a_1 \Leftarrow b_1)(b_1 \Leftarrow b) \underset{II}{\Leftarrow} (a \Leftarrow b),$$

mit Benutzung der Sätze § 12 (3), § 16 (8)', § 13 (4).

§ 37. **Gleichheit als immanente Identität.** Den bisherigen Sätzen von der Vertauschbarkeit gleicher Gebiete als Gleichungsglieder — Theorem 3) — und als Subsumtionsglieder — Theorem 4)<sub>x</sub> und 4)<sub>+</sub> — werden sich in der Folge noch weitere anreihen, wonach gleiche Gebiete in Propositionen auch stets für einander eintreten können als Faktoren in Produkten — Theorem 16)<sub>x</sub> und 19)<sub>x</sub> §§ 49 und 50 —, als Summanden in Summen — Theorem 16)<sub>+</sub> und 19)<sub>+</sub> — und als Neganden — Theorem 22) § 55 —, kurz in allen vorkommenden und erdenklichen Fällen, — als ob gleiche Gebiete identisch wären, wie etwa in dem Flächengebietesystem des § 32. Ihrem Auftreten als Gebiete nach sind sie in der Tat von identischen nicht zu unterscheiden; als *Gebiete* des vorliegenden Systems sind *gleiche Gebiete* ein und dasselbe Gebiet, mögen sie auch in irgendeiner anderen Hinsicht als verschiedene *Dinge* erscheinen; sie sind, wie wir sagen wollen, gebietsidentisch oder „immanent identisch“, — ihre Symbole sind „immanent gleich- oder eindeutig“, im Gegensatz zu den von vornherein schlechthin identischen Gebieten und Zeichen, d. i. den verschiedenen Zeichen für ein und dasselbe Ding — § 2 —, die etwa auch „zeichenidentisch“



heißen können, — ein Gegensatz freilich, der nur von Belang werden kann bei Anwendung oder Ausdeutung einer Gebietetheorie in einem „Denkbereich“ von Dingen, und zwar von Dingen anderer Art als die Flächengebiete des § 32. — Ein Beispiel solcher Anwendung wird der Propositionenkalkül — §§ 76 ff. — darbieten. — Bei allgemeiner abstrakter Behandlung der Gebietetheorie kann von Identität und Eindeutigkeit nur im immanenten Sinn die Rede sein.

### Sätze über Null und Eins.

#### Schlüsse aus den Axiomen I—V.

§ 38. **Spezielle Theoreme.** Von den Gebieten 0 und 1 gilt selbstverständlich alles, was für die Gebiete überhaupt durch die Axiome festgesetzt ist, z. B. durch das Axiom I (und auch durch  $IV_x$  und  $IV_+$ )

$$0 \in 0, \quad 1 \in 1,$$

und außerdem durch  $IV_x$  und durch  $IV_+$

$$0 \in 1,$$

— sowie auch alles, was als Theorem aus den Axiomen gefolgert wird, z. B. der Tautologiesatz 2)

$$0 = 0, \quad 1 = 1.$$

Ferner folgt aus  $V$  in Verbindung mit III

$$0 + 1,$$

da man andernfalls — mit Rücksicht auf die Zugehörigkeit der Gleichheitsbeziehung zum System — §§ 27 und 21 — aus  $0 = 1$  nach III'' auf  $1 \in 0$  schließen könnte, im Widerspruch mit  $V$ .

§ 39. **Eindeutigkeit.** Andererseits unterscheiden sich diese beiden Gebiete 0 und 1 infolge der Axiome  $IV$  und  $V$  wesentlich von allen andern: Sollten etwa mehrere Gebiete 0 vorhanden sein, so wären dieselben alle einander gleich, — und desgleichen auch alle etwaigen Einsen unter sich. —

Denn jede Null, z. B.  $O'$ , muß nach  $IV_x$  eingeordnet sein einem jeden Gebiet, also auch jeder andern Null  $O''$ , für welche letztere aber dasselbe gilt,

$$(O' \in_{IV_x} O'') (O'' \in_{IV_x} O') =_{III} (O' = O'').$$

Es gibt also — im immanenten Sinn, § 37 — im System nur ein einziges Nullgebiet 0, und ebenso nur ein Einsgebiet 1; 0 und 1 sind eindeutige oder spezielle Symbole.



§ 40. **Null als Prädikat, Eins als Subjekt.** Weiß man daher von irgendeinem Gebiet  $p$  bzw.  $q$ ,

daß es dem Nullgebiet eingeordnet ist, | daß demselben das Einsgebiet eingeordnet ist,

$$p \in 0, \quad | \quad 1 \in q,$$

so kann ein solches Gebiet nur eine Null bzw. Eins sein;

$$\begin{array}{l|l} (p \in 0) = (p \in 0)(0 \in p) = (p = 0) & (1 \in q) = (1 \in q)(q \in 1) = (1 = q) \\ \text{5)}_x \quad \therefore (p \in 0) = (p = 0). & \text{5)}_+ \quad \therefore (1 \in q) = (1 = q). \end{array}$$

Man kann in diesen Theoremen einen einfachen Zeichenausdruck für die auch schon im vorigen § 39 erwiesene Eindeutigkeit der Gebiete 0 und 1 erblicken und deshalb die Benennung „Eindeutigkeitsätze“ gebrauchen.

### Multiplikation und Addition.

#### Schlüsse aus den Axiomen I—VI.

§ 41. **Das Produkt als Subjekt, die Summe als Prädikat.** Auch das Gebieteprodukt  $ab$  und die Gebietesumme  $a + b$  sind Gebiete, die wie andere den Axiomen und Theoremen unterliegen, z. B. dem Axiom I; daraus ergibt sich aber

$$\begin{array}{l|l} (ab \in ab) \in (ab \in a) & (a + b \in a + b) \in (a \in a + b) \\ \text{I} \quad \text{VI}_x'' & \text{I} \quad \text{VI}_+'' \\ (ab \in ab) \in (ab \in b) & (a + b \in a + b) \in (b \in a + b) \\ \text{I} \quad \text{VI}_x''' & \text{I} \quad \text{VI}_+''' \\ \text{6)}_x \quad \therefore ab \in a, \quad ab \in b. & \text{6)}_+ \quad \therefore a \in a + b, \quad b \in a + b. \end{array}$$

§ 42. **Eindeutigkeit.** Daß Produkt und Summe zweier Gebiete durch diese (immanent) eindeutig bestimmt sind, läßt sich ähnlich wie für 0 und 1 in § 39 nachweisen. Wäre nämlich — um den Beweis nur für das Produkt  $ab$  durchzuführen —  $(ab)'$  neben  $ab$  ein zweiter Wert des Produktes von  $a$  und  $b$ , so hätte man — § 18 (12), § 15 (7) —

$$\begin{aligned} \{(ab)' \in a\} \{(ab)' \in b\} \{ab \in a\} \{ab \in b\} &= \{(ab)' \in ab\} \{ab \in (ab)'\} = \\ \text{6)}_x \quad \text{6)}_x \quad \text{6)}_x \quad \text{6)}_x \quad \text{VI}_x &= \\ \text{III} \quad \{(ab)' = ab\} &\quad \therefore (ab)' = ab. \end{aligned}$$

§ 43. **Kommutativität.** Als solcher zweiter Produktwert  $(ab)'$  kann etwa das Produkt  $ba$ , mit vertauschten Faktoren, gelten, das einer Um-



stellung der Prämissen in  $VI'_x$  entspricht. — Man erhält so die „Kommutationssätze“ der Multiplikation und desgleichen der Addition

$$7)_x \quad ab = ba \quad | \quad 7)_+ \quad b + a = a + b.$$

Beweis für  $7)_x$ , wie oben,

$$(ab \in b)_{6)_x} (ab \in a)_{6)_x} (ba \in a)_{6)_x} (ba \in b)_{6)_x} \stackrel{VI_x}{=} (ab \in ba)_{6)_x} (ba \in ab)_{6)_x} \stackrel{III}{=} (ab = ba).$$

§ 44. **Assoziativität.** Zum Beweis der Assoziationsätze

$$8)_x \quad a(bc) = (ab)c = abc \quad | \quad 8)_+ \quad (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$$

sind als Hilfssätze zunächst die Teilsubsumtionen herzuleiten, aus denen die Gleichungen nach  $III$  sich zusammensetzen, — z. B. für den Multiplikationssatz  $8)_x$  — § 12 (3), § 16 (5)', § 13 (4) —

$$\begin{aligned} & [ \{ a(bc) \in a \}_{6)_x} \{ a(bc) \in bc \in b \}_{6)_x} ] \{ a(bc) \in bc \in c \}_{6)_x} \in \\ & \in \{ a(bc) \in ab \}_{II\ VI_x} \{ a(bc) \in c \}_{VI_x} = \{ a(bc) \in (ab)c \}_{VI_x} \\ & \{ (ab)c \in ab \in a \} [ \{ (ab)c \in ab \in b \} \{ (ab)c \in c \} ] \in \\ & \in \{ (ab)c \in a \} \{ (ab)c \in bc \} = \{ (ab)c \in a(bc) \}. \end{aligned}$$

Multiplikation und Addition von Gebieten sind also kommutative und assoziative Operationen, wie die gleichnamigen Zahlenrechnungsarten, und man kann wie bei diesen von Produkten und Summen mit drei und mehr Operanden — Faktoren bzw. Summanden sprechen.

Klammern — vgl. §§ 10 und 30, auch zu § 18 — sind hiernach nicht nötig, wenn ein Produkt als Faktor, und wenn eine Summe als Summand erscheint.

§ 45. **Äquivalenz zwischen Subsumtion und Gleichung.** Von vielfachem Gebrauche ist die folgende Äquivalenz dreier Subsumtionen

$$9)'_x \quad (a \in ab) = (a \in b) \quad | \quad 9)'_+ \quad (a \in b) = (a + b \in b),$$

von denen die erste und die letzte sich mit ihren nach  $6)_{x+}$  ohnehin gültigen Umkehrungen auch vermöge  $III$  in Gleichungen zusammenziehen können — § 17 ( $\varepsilon$ ) —

$$9)_{x+} \quad (a = ab) = (a \in b) = (a + b = b).$$

Beweis von  $9)'_{x+}$ :

$$(a \in ab) \stackrel{VI_x}{=} (a \in a) \stackrel{I}{=} (a \in b) \stackrel{(e)}{=} (a \in b) \stackrel{(e)}{=} (a \in b) \stackrel{I}{=} (b \in b) \stackrel{VI_+}{=} (a + b \in b)$$



§ 46. **Umformung einer Gleichung.** Auch eine Gleichung  $a = b$  gestattet äquivalente Umformungen in ähnlicher Weise: Durch überschiebende Multiplikation — § 18 (12) — der obigen Sekundäräquivalenz  $9)_{x+}$  mit der andern

$$(b \notin ab) = (b \notin a) = (a + b \notin a),$$

die nach eben diesem Theorem  $9)_{x+}$  gleichfalls gilt, erhält man unter Anwendung von  $VI_x$  und  $VI_+$  leicht

$$10) \quad (a = b) = (a + b \notin ab) = (a + b = ab).$$

Man kann auch diesem Theorem den Satz

$$(a \notin c) (b \notin c) (a \notin d) (b \notin d) = (a + b \notin cd)$$

vorausschicken, der sich leicht ergibt durch Anwendung der Axiome  $VI_+$  und  $VI_x$  nacheinander, und der beide gewissermaßen in sich vereinigt; setzt man hierin  $a$  für  $c$  und  $b$  für  $d$ , so gelangt man zu Theorem 10) — mit Rücksicht auf  $I$  und  $(\epsilon)$  § 17 —.

§ 47. **Tautologie- und Absorptionssätze.** Vermöge der Theoreme  $9)_{x+}$  kann man eine Subsumtion auf zwei verschiedene Arten in eine Gleichung „umwandeln“. Durch solche Umwandlung gewinnt man aus den Axiomen  $I$  und  $IV_{x+}$ , sowie aus den Theoremen  $6)_{x+}$  bzw. die folgenden neuen Sätze:

11) <sub>x</sub>	$aa = a$	11) <sub>+</sub>	$a = a + a$
12) <sub>x</sub>	$\begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot 1 = a \end{cases}$	12) <sub>+</sub>	$\begin{cases} 1 = 1 + a \\ a = 0 + a \end{cases}$
13) <sub>x</sub>	$a(a + b) = a.$	13) <sub>+</sub>	$a = a + ab.$

Andere Beweise für diese Theoreme, unabhängig von  $9)_{x+}$  liegen nahe. — Übrigens lassen auch sonst die hier gegebenen Beweise vielfach Abänderungen zu.

Die Sätze  $11)_{x+}$  heißen auch „Tautologiesätze“, nämlich die Sätze vom „tautologischen Produkt“  $aa$  und bzw. von der „tautologischen Summe“  $a + a$  — vgl. das Axiom  $I$  § 25 und das Theorem 2) § 34 —, während die Theoreme  $13)_{x+}$  den Namen „Absorptionsgesetze“ führen: Es werden z. B. nach  $13)_{+}$  in einer Summe wie  $a + ab$  diejenigen Glieder —  $ab$  —, in denen andere Glieder —  $a$  — als Faktoren enthalten sind, von diesen „absorbiert“, d. h. können wegfallen oder auch nach Belieben hinzutreten ohne Wertänderung der Summe.

So enthalten die Sätze  $11)–13)$  gewisse Rechenregeln, die zur Vereinfachung und Erweiterung gegebener Gebietsausdrücke dienen



können und übrigens nur zum Teil mit den arithmetischen Rechengesetzen übereinstimmen. Man hat beispielsweise

$$abbcaacd = abcd$$

$$abc(b+c) + (cd + def + a)a = a$$

$$a(b+c) + b+c+d + (b+c)c = b+c+d.$$

Weitere Rechenexempel folgen unter § 69.

Wer etwa — infolge einer vom Rechnen mit Zahlen herrührenden Gewohnheit — zum Beweis der Theoreme 13)<sub>x+</sub> oder anstelle der Anwendung dieser Theoreme — hier schon Gebrauch machen wollte von „distributiver“ Multiplikation einer Summe oder umgekehrt vom „Ausscheiden“ eines gemeinsamen Faktors von Summengliedern — nach einem „Distributionsgesetz“ des Inhalts

$$\mathcal{A}) \quad a(b+c) = ab+ac$$

— vgl. unten Theorem 32)<sub>x</sub> § 66 —, sei einstweilen verwiesen auf Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik, I, S. 617 ff. und II, 2, S. 409 ff., wo gezeigt wird, daß dieses Gesetz  $\mathcal{A}$ ) sich aus unseren Axiomen nicht ohne Hilfe des „Distributionsaxioms“ VII herleiten läßt. \*)

§ 48. **Das Eins-Produkt und die Null-Summe.** Die Theoreme 12)<sub>x+</sub> regeln das Rechnen mit den Gebieten 0 und 1. Das erste Theoremepaar besagt:

Das Nullgebiet ist disjunkt | Das Einsgebiet ist komplementär — § 32 — zu jedem beliebigen andern Gebiet und zu sich selbst. — Die beiden andern lehren unter anderm, daß im Gebietekalkül ein Produkt erst dann = 1 wird, wenn jeder Faktor einzeln = 1 ist, und daß, wenn eine Summe = 0 werden oder, wie man in Anlehnung an die arithmetische Ausdrucksweise auch sagt, „verschwinden“ soll, dann die Summanden alle einzeln verschwinden müssen. Man hat hiefür in besonderer Darstellung:

$$\begin{array}{l|l} (1 = ab) = (1 \notin ab) = & (a + b = 0) = (a + b \notin 0) = \\ \begin{array}{l} \text{\scriptsize 5)+} \\ = (1 \notin a) (1 \notin b) = \\ \text{\scriptsize VI}_x \\ = (1 = a) (1 = b) \\ \text{\scriptsize 5)+} \end{array} & \begin{array}{l} \text{\scriptsize 5)_x} \\ = (a \notin 0) (b \notin 0) = \\ \text{\scriptsize VI}_+ \\ = (a = 0) (b = 0) \\ \text{\scriptsize 5)_x} \end{array} \\ \hline 14)_x \quad \therefore (1 = ab) = (1 = a) (1 = b). & 14)_+ \quad \therefore (a + b = 0) = (a = 0) (b = 0). \end{array}$$

\*) Der Herausgeber beabsichtigt, eine Bearbeitung der Axiomatik der Gebietstheorie mit Berücksichtigung der bemerkenswerten Untersuchungen von Huntington, besonders in „Sets of independent Postulates for the Algebra of Logic“, Americ. Math. Soc., Vol. 5, p. 288 ff., demnächst zu veröffentlichen.



§ 49. **Beiderseitige Multiplikation und Addition.** Gewissen Sätzen aus der Größenlehre entsprechen die Gebietstheoreme: Zwei eingeordnete oder gleiche Gebiete bleiben eingeordnet bzw. gleich, wenn man beiden ein und dasselbe beliebige Gebiet multiplikativ oder additiv beifügt;

$$15)_x \quad (a \in b) \in (ac \in bc)$$

$$16)_x \quad (a = b) \in (ac = bc)$$

$$15)_+ \quad (a \in b) \in (a + c \in b + c)$$

$$16)_+ \quad (a = b) \in (a + c = b + c).$$

Beweise von 15)<sub>x+</sub>:

$$(a \in b) =$$

$$= (ac \in a) (a \in b) (ac \in c)$$

$$\in (ac \in b) (ac \in c)$$

$$= (ac \in bc)$$

VI<sub>x</sub>

$$(a \in b) =$$

$$= (a \in b) (b \in b + c) (c \in b + c)$$

$$\in (a \in b + c) (c \in b + c)$$

$$= (a + c \in b + c).$$

VI<sub>+</sub>

Beweis von 16)<sub>x</sub>:

$$(a = b) = (a \in b) (b \in a) \in (ac \in bc) (bc \in ac) = (ac = bc).$$

Bemerkt sei noch, daß im Gegensatz zu analogen Zahlentheoremen, wonach z. B. bei positiven Zahlen  $a, b, c$

$$(a \leq b) = (ac \leq bc)$$

gilt — vgl. § 15 —, die vorstehenden Gebietstheoreme nicht umkehrbar sind: In der beistehenden Figur 3, wo  $a, b, c$  drei Kreisflächen sind, ist  $ac$ , die kleine Zweieckfläche  $PQ$ , ein Teil des größeren Zweiecks  $bc$  oder  $RS$ ,  $ac \in bc$ , ohne daß  $a \in b$  wäre.

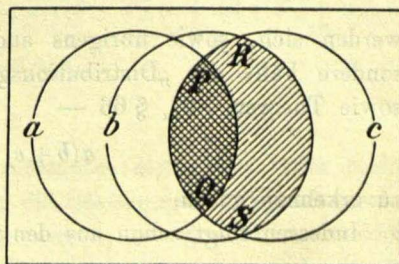


Fig. 3.

§ 50. **Überschiebende Multiplikation und Addition.** Gleichfalls an die Größenlehre erinnern die Sätze von der „überschiebenden Multiplikation und Addition“ für Subsumtionen und Gleichungen — vgl. §§ 12 und 18 —: Eingeordnetes oder Gleiches, mit Eingeordnetem multipliziert oder zu Eingeordnetem addiert, ergibt Eingeordnetes; und Gleiches, mit Gleichem multipliziert oder zu Gleichem addiert, gibt Gleiches;



$$\begin{array}{l|l}
 17)_x (a \in b) (c \in d) \in (ac \in bd) & 17)_+ (a \in b) (c \in d) \in (a+c \in b+d) \\
 18)_x (a \in b) (c = d) \in (ac \in bd) & 18)_+ (a \in b) (c = d) \in (a+c \in b+d) \\
 19)_x (a = b) (c = d) \in (ac = bd) & 19)_+ (a = b) (c = d) \in (a+c = b+d).
 \end{array}$$

Von diesen Theoremen lassen sich offenbar die beiden letzten Paare auf das erste  $17)_{x+}$  stützen, und zwar  $18)_{x+}$  vermöge der Subsumtion

$$(a \in b) (c = d) \in_{III'} (a \in b) (c \in d),$$

$19)_{x+}$  aber ganz wie oben  $16)_x$  § 49 auf  $15)_x$  zurückgeführt wurde; auf  $15)_{x+}$  geht übrigens auch  $17)_{x+}$  zurück; z. B.  $17)_x$

$$(a \in b) (c \in d) \in_{15)_x} (ac \in bc) (bc \in bd) \in_{II} (ac \in bd).$$

Die Sätze  $16)_{x+}$  und  $19)_{x+}$  behaupten die Vertauschbarkeit gleicher Gebiete als Faktoren und als Summanden — § 37 —.

### Sätze über Negation und Distribution.

#### Schlüsse aus VII und den übrigen Axiomen.

§ 51. **Die erste Distributionssubsumtion.** Die Negations- oder Distributionsaxiome  $VII)_{x+}$

$$(a + z) (\bar{a} + z) = z = az + \bar{a}z$$

werden sich, sowie übrigens auch die Theoreme  $13)_{x+}$  § 47, als besondere Fälle des „Distributionsgesetzes“  $\Delta$ ) — vgl. auch oben § 47, sowie Theorem  $32)_x$  § 66 —

$$\Delta) \quad a(b + c) = ab + ac$$

zu erkennen geben.

Indessen folgt schon aus den früheren Axiomen

$$(z \in a + z) (z \in \bar{a} + z) = \{z \in (a + z) (\bar{a} + z)\} \quad | \quad (az \in z) (\bar{a}z \in z) = (az + \bar{a}z \in z)$$

$\begin{matrix} 6)_+ & 6)_+ & VI)_x & & 6)_x & 6)_x & VI)_+ \end{matrix}$

$$VII')_{x+} \quad \therefore az + \bar{a}z \in z \in (a + z) (\bar{a} + z),$$

sowie ferner

$$(ab \in a) (ab \in b \in b + c) (ac \in a) (ac \in c \in b + c) \in$$

$\begin{matrix} 6)_x & 6)_x & 6)_+ & & 6)_x & 6)_x & 6)_+ \end{matrix}$

$$\in_{II VI)_x} \{ab \in a(b + c)\} \{ac \in a(b + c)\} =_{VI)_+} \{ab + ac \in a(b + c)\}$$

$$\Delta') \quad \therefore ab + ac \in a(b + c),$$







entsprechend den Theoremen  $20)_{x+}$ , während der Wert  $b$  für  $z$  in der zweiten Doppelprämisse

$$(a + b)(c + b) = b = ab + cb$$

mit Rücksicht auf die schon ermittelten Werte  $a + b = 1$  und  $ab = 0$  ähnlich wie oben

$$c + b = b = cb,$$

oder endlich  $c = b$  richtig liefert — als Spezialisierungskonklusion der Prämissen.

§ 54. **Doppelte Negation.** Hieraus und aus der Symmetrie der Axiome  $VII_{x+}$  in bezug auf die beiden Gebiete  $a$  und  $\bar{a}$  — eine Vertauschung beider bewirkt keine Änderung der Axiome — ergibt sich, daß das Negat  $\bar{\bar{a}}$  von  $\bar{a}$  wieder mit  $a$  zusammenfällt:

$$(\bar{a} + z)(a + z) = z = \bar{a}z + az$$

bedeutet auch nach dem am Schluß des vorigen § 53 Bemerkten, daß  $a$  das Negat von  $\bar{a}$  ist,

$$21) \quad \bar{\bar{a}} = a.$$

Ebenso  $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$ , usw.

§ 55. **Kontraposition von Gleichungen.** Zwei gleiche Gebiete  $a$  und  $b$ ,  $a = b$ , die nach  $4)_{x+}$  die nämlichen Unter- und Obergebiete, sowie nach  $16)_{x+}$  und  $19)_{x+}$  gleiche Produkte und Summen mit einem dritten oder bzw. mit zwei anderen gleichen Gebieten besitzen, haben endlich auch gleiche Negate — vgl. § 37 —:

$$(a = b) \Leftarrow$$

$$z = (a + z) \underset{VII_x}{=} (\bar{a} + z) \underset{16)_{x+}}{=} (b + z) (\bar{a} + z) \quad \Bigg| \quad z = \underset{VII_+}{a}z + \underset{16)_{x+}}{\bar{a}}z = bz + \bar{a}z,$$

womit nach dem Eindeutigkeitssatz § 53 das Gebiet  $\bar{a}$  auch Negat von  $b$  ist,

$$(a = b) \Leftarrow (\bar{a} = \bar{b}).$$

Hier wird aber das sekundäre  $\Leftarrow$  Zeichen in  $=$  verwandelt werden dürfen, da nach eben diesem Satz auch umgekehrt

$$(\bar{a} = \bar{b}) \Leftarrow \underset{21)}{(a = \bar{a} = \bar{b} = b)}$$

gilt, — somit nach  $III$

$$22) \quad (a = b) = (\bar{a} = \bar{b}).$$

Die eine dieser beiden äquivalenten Primärgleichungen heißt auch „Kontraposition“ der anderen.



§ 56. **Obverse Gebiete.** Dieses Kontrapositionstheorem läßt in der Gestalt

$$22)' \quad (\bar{a} = b) = (\bar{b} = a)$$

die Symmetrie der Beziehung zwischen einem Gebiete  $a$  und dessen Negat  $b$  besonders hervortreten; man bezeichnet die beiden Gebiete  $a$  und  $b$  oder  $\bar{a}$  als zueinander „obverse“ — vgl. § 32 —.

Speziell sind 0 und 1 obvers,

$$23) \quad \bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0,$$

da die Axiome  $VII_{x+}$  erfüllt sind, wenn man darin 0 für  $a$  und 1 für  $\bar{a}$  einführt:

$$(0 + z)(1 + z) = z \cdot 1 = z, \quad 0 \cdot z + 1 \cdot z = 0 + z = z.$$

$12)_{+} 19)_{x} \quad 12)_{x} \quad 12)_{x} 19)_{+} \quad 12)_{+}$

§ 57. **Null- und Einsform für Subsumtionen.** Die folgenden Theoreme können zu Umformungen von Subsumtionen und Gleichungen dienen in ähnlicher Weise wie die Theoreme  $9)_{x+}$  § 45.

$$(a \in b) \in$$

$$\begin{array}{l|l} \in (a\bar{b} \in b\bar{b} = 0) \in (a\bar{b} = 0) & \in (a + \bar{a} = 1 \in \bar{a} + b) \in (1 = \bar{a} + b) \\ 15)_{x} \quad 20)_{x} \quad 4)_{x} 5)_{x} & 15)_{+} \quad 20)_{+} \quad 4)_{+} 5)_{+} \\ \therefore (a \in b) \in (a\bar{b} = 0) & \therefore (a \in b) \in (1 = \bar{a} + b) \end{array}$$

Die Umkehrung dieser Subsumtionen ergibt sich — nebst den nach  $III$  dann entstehenden Äquivalenzen  $24)_{x+}$  — wie folgt.

$$\begin{array}{l|l} \in (a\bar{b} = 0) \in & (1 = \bar{a} + b) \in \\ \in (a = ab + a\bar{b} = ab + 0 = ab) & \in \{(a+b) \cdot 1 = a+b = (a+b)(\bar{a}+b) = b\} \\ 16)_{+} \quad VII_{+} & 16)_{x} \quad 12)_{x} \quad VII_{x} \\ \in (a \in b) & \in (a \in b); \\ 3) 9)_{x} & 3) 9)_{+} \end{array}$$

$$24)_{x+} \quad (a\bar{b} = 0) = (a \in b) = (1 = \bar{a} + b).$$

§ 58. **Der Kontrapositionssatz für Subsumtionen,** — aus dem auch derjenige  $22)$  für Gleichungen fließen würde, —

$$25) \quad (a \in b) = (\bar{b} \in \bar{a}),$$

folgt nunmehr sowohl aus  $24)_{x}$  wie aus  $24)_{+}$ :

$$(a \in b) = (a\bar{b} = \bar{b}\bar{a} = 0) = (\bar{b} \in \bar{a}) \quad | \quad (a \in b) = (1 = \bar{a} + b = \bar{\bar{b}} + \bar{a}) = (\bar{\bar{b}} \in \bar{a}).$$

$24)_{x} \quad 21) \quad 24)_{x} \quad 24)_{+} \quad 21) \quad 24)_{+}$

§ 59. **Disjunkt-komplementär ist obvers.** Mit  $24)_{x+}$  sind neue Ausdrücke gefunden dafür, daß zwei Gebiete



$a$  und  $b$  disjunkt sind,

$$(ab = 0) = (a \notin \bar{b}) = (b \notin \bar{a})$$

$a$  und  $b$  komplementär sind,

$$(a + b = 1) = (\bar{a} \notin b) = (\bar{b} \notin a).$$

Sollen daher etwa  $a$  und  $b$  sowohl disjunkt als komplementär sein, so sind sie obvers,  $b$  ist Negat zu  $a$ , und umgekehrt, — da dann  $b \notin \bar{a}$  neben  $\bar{a} \notin b$ , also  $b = \bar{a}$  wird,

$$26) \quad (ab = 0)(a + b = 1) = (\bar{a} = b) = (\bar{b} = a).$$

$\bar{a}$  ist also schon durch die Eigenschaften 20)<sub>x+</sub> § 52 hinreichend gekennzeichnet als Negat von  $a$ . Oder, mit Bezug auf den Schluß von § 53: Wenn ein Gebiet  $b$  an Stelle von  $\bar{a}$  mit  $a$  zusammen den Axiomen VII)<sub>x+</sub> nur genügt für die Werte 0 und 1 von  $z$ , so genügt  $b$  denselben auch für jeden beliebigen anderen Wert von  $z$ . — Vgl. § 126 im zweiten Teil des Abrisses.

§ 60. **Veranschaulichung der Negation.** Da hiernach die Theoreme 20)<sub>x+</sub> — oder auch 26) — den Axiomen VII)<sub>x+</sub> äquivalent sind, so erhebt sich die Frage, ob es nicht anginge, anstatt VII) den einfacheren und anschaulicheren Inhalt der Theoreme 20)<sub>x+</sub> unter der Zahl der Axiome vorauszusetzen, — eine Frage indessen, deren endgültige Erledigung der Axiomatik zufällt — vgl. die Note zu § 47 —.

Immerhin ist auch ohne weiteres evident, daß, wie das Axiom VII)<sub>x+</sub> verlangt, von zwei Gebieten  $z$  und  $a$  das eine  $z$  stets aus einem mit dem anderen  $a$  gemeinsamen Teil  $az$  und einem nicht zu  $a$  gehörigen Teil  $\bar{a}z$  additiv bestehen muß, wobei der eine oder andere Teil auch Null sein kann. — Für zwei Gebiete  $a$  und  $z$  derart, daß weder  $az$  noch  $\bar{a}z$  — noch auch  $a\bar{z}$  Null ist, sind beide Axiome VII)<sub>x+</sub> veranschaulicht durch die Figur 4, worin die Gesamtfläche 1 sich aus den

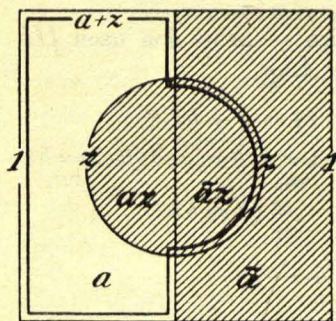


Fig. 4.

beiden Rechtecken  $a$  und  $\bar{a}$  zusammensetzt, die Kreisfläche  $z$  in die beiden Halbkreise  $az$  und  $\bar{a}z$  zerfällt und die schraffierte Fläche  $\bar{a} + z$  mit der geränderten  $a + z$  den Kreis  $z$  gemein hat.

§ 61. **Null- und Einsform der Gleichungen.** Nachdem die Theoreme 24)<sub>x+</sub>, wie auch schon 9)<sub>x+</sub>, die Umwandlung einer Subsumtion in eine Gleichung lehren, jedoch 24)<sub>x+</sub> in eine solche mit 0 und bzw. 1 als Gleichungsglied einerseits des Gleichheitszeichens, — eine



Umwandlung, durch welche z. B. aus dem Axiom *I* die Theoreme 20)<sub>x+</sub> entstehen, — so wird sich ebenso auch eine Gleichung  $a = b$  einerseits des Gleichheitszeichens „auf Null und auf Eins bringen“ lassen:

$$\begin{aligned}
 (a = b) &= (a \in b)(b \in a) = \\
 &= (a\bar{b} = 0)(\bar{a}b = 0) = (a\bar{b} + \bar{a}b = 0) \quad \Bigg| \quad = (1 = \bar{a} + b)(1 = a + \bar{b}) = \\
 &= \dots \quad \Bigg| \quad = \{1 = (\bar{a} + b)(a + \bar{b})\} \\
 27)_{x+} \quad \therefore (a\bar{b} + \bar{a}b = 0) &= (a = b) = \{1 = (\bar{a} + b)(a + \bar{b})\}.
 \end{aligned}$$

Hierzu wird unter § 68 noch eine Ergänzung 27)<sub>x+</sub> folgen.

Die der Subsumtion  $a \in b$  nach 24)<sub>x+</sub> äquivalenten Gleichungen gehen in der Tat aus denen in 9)<sub>x+</sub> hervor durch „Auf-Null-bringen“, — was sich allerdings erst mittels der Theoreme 31)<sub>x+</sub> § 64 zeigen läßt.

§ 62. **Produkt- und Summenentwicklung eines Gebietes.** Bei Anwendung der Axiome *VII* bedient man sich häufig des Ausdrucks, das Gebiet  $z$  sei „nach  $a$  (und  $\bar{a}$ ) entwickelt“ in ein Produkt (zweier Summen) durch *VII*<sub>x</sub>; in eine Summe (zweier Produkte) durch *VII*<sub>+</sub>. — Nun kann nach eben diesen Axiomen jedes Gebiet  $a$  auch ebenso nach zwei und mehr Gebieten  $b, c, \dots$  entwickelt werden, indem man die Entwicklungsfaktoren bzw. -summanden von  $a$  nach  $b$  ihrerseits nach  $c$  entwickelt, usw.

$$\begin{aligned}
 a &= (a+b)(a+\bar{b}) & \Bigg| & \quad a = ab + a\bar{b} \\
 &= (a+b+c)(a+b+\bar{c})(a+\bar{b}+c)(a+\bar{b}+\bar{c}) & \Bigg| & \quad = abc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} \\
 &= \dots & \Bigg| & \quad = \dots
 \end{aligned}$$

Es gilt dies vor allem auch für die Gebiete 0 und 1, die in 20)<sub>x+</sub> nach einem einzigen Gebiet  $a$  entwickelt sind,

$$\begin{aligned}
 28)_{x+} \quad 0 &= a\bar{a} & \Bigg| & \quad 1 = a + \bar{a} \\
 &= (a+b)(a+\bar{b})(\bar{a}+b)(\bar{a}+\bar{b}) & \Bigg| & \quad = ab + a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} \\
 &= (a+b+c)(a+b+\bar{c})(a+\bar{b}+c)\dots & \Bigg| & \quad = abc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + \dots \\
 &= \dots & \Bigg| & \quad = \dots
 \end{aligned}$$

Im Laufe der weiteren Entwicklungen entstehen bei jedem weiter hinzukommenden Gebiet aus jedem vorhandenen Entwicklungsfaktor bzw. -summand deren zwei neue; die Zahl der Faktoren bzw. Summanden beträgt somit bei zwei Gebieten, nach denen entwickelt wird,  $2 \cdot 2$ , bei drei Gebieten  $2 \cdot 2 \cdot 2$  oder  $2^3$ , usw., allgemein bei  $n$  Gebieten  $2^n$ .







fach zusammengesetzten Ausdrücken „ausführt“, d. h. zurückführt auf Negation der Operanden und Bestandteile.

§ 65. **Dualität.** Die Theoreme 31)<sub>x+</sub> ermöglichen übrigens zusammen mit den andern Negationsgesetzen, besonders 21), 22), 23) und 25), je zwei hier beiderseits des Mittelstriches einander gegenübergestellte — einander „dual entsprechende“ — Propositionen aufeinander zurückzuführen, z. B.  $VI'_+$  auf  $VI'_x$  in § 29: Es ist in  $VI'_x$  nach 25)

$$(x \in a) = (\bar{a} \in \bar{x}), \quad (x \in b) = (\bar{b} \in \bar{x})$$

$$(x \in ab) = (\bar{a}\bar{b} = \bar{a} + \bar{b} \in \bar{x}),$$

also folgt durch Substitution in  $VI'_x$

$$(\bar{a} \in \bar{x})(\bar{b} \in \bar{x}) \in (\bar{a} + \bar{b} \in \bar{x})$$

oder nach entsprechendem Bezeichnungswechsel das Axiom  $VI'_+$ .

Man gelangt hiernach zu dem folgenden „Dualitätsgesetz“: Wenn man in einem Theorem oder Axiom alle etwa vorkommenden Primärsubsumtionen umkehrt und gleichzeitig die Gebiete-Multiplikationszeichen mit Additionszeichen, sowie das Gebietssymbol 0 mit 1 vertauscht, so erhält man wieder eine richtige Aussage, das „duale Gegenstück“ der ursprünglichen. — Die im System der Theorie einzeln, ohne duales Gegenstück hingestellten Sätze, z. B. 26), sind sämtlich „zu sich selbst dual“, d. h. sie ändern sich nicht bei der hier beschriebenen „dualen Umwandlung“. — Die sekundären Beziehungs- und Operationszeichen bleiben von dieser Umwandlung unberührt. — Vgl. § 121 im zweiten Teil des Abrisses. —

§ 66. **Der Distributionssatz.** Schon in § 47 wurde ein Distributionsgesetz

$$\mathcal{A}) \quad a(b + c) = ab + ac$$

erwähnt und gewissermaßen vermißt, und in § 51 ist gezeigt, wie die „erste Subsumtion“ dieses Gesetzes

$$\mathcal{A}') \quad ab + ac \in a(b + c)$$

schon aus den Axiomen  $I$ — $VI$  folgt. Inzwischen sind nun die Mittel erworben zum Nachweis der noch übrigen umgekehrten Subsumtion  $\mathcal{A})''$  und damit des ganzen Satzes  $\mathcal{A})$ .

Wird nämlich\*) zur Abkürzung

$$a(b + c) = p, \quad ab + ac = q$$

\*) Nach einem im wesentlichen von Herrn Korselt herrührenden Beweisverfahren — vgl. Schröder, Vorlesungen, II, 2, S. 422.







bekanntlich von wesentlicher Bedeutung sind. — Zunächst ein Theorem von Peirce:

$$(ab \Leftarrow c) = (ab\bar{c} = 0) = \begin{array}{l} \text{24)}_x \\ = (a \Leftarrow \bar{b}\bar{c} = \bar{b} + c) \\ \text{24)}_x \quad \text{31)}_x \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (a \Leftarrow b + c) = (1 = \bar{a} + b + c) = \\ \text{24)}_+ \\ = (\bar{a} + \bar{b} = a\bar{b} \Leftarrow c) \\ \text{24)}_+ \quad \text{31)}_+ \end{array} \right.$$

$$33) \quad \therefore (ab \Leftarrow c) = (a \Leftarrow \bar{b} + c).$$

D. h. anstatt ein Gebiet als Faktor im Subsumtionssubjekt zu setzen, darf man auch dessen Negat dem Prädikat als Summanden beifügen; und umgekehrt, ein Prädikatssummand kann, negiert, zum Subjektfaktor werden; ein zu sich selbst dualer Satz. — Dagegen läßt sich ein Summand des Subjekts, sowie ein Faktor des Prädikats nicht auf die andere Seite versetzen.

### § 68. Fortfallen von Faktoren und Summanden.

$$(ac \Leftarrow b)(a \Leftarrow b + c) = (ac \Leftarrow b)(a\bar{c} \Leftarrow b) = (ac + a\bar{c} = a \Leftarrow b)$$

<sub>33)</sub> <sub>VII+</sub> <sub>VII+</sub>

$$34) \quad \therefore (ac \Leftarrow b)(a \Leftarrow b + c) = (a \Leftarrow b),$$

— Theorem von Peirce —. Multipliziert man hier links des Gleichheitszeichens die beiden Aussagenfaktoren bzw. mit den nach 6)<sub>x+</sub> richtigen Subsumtionen  $ac \Leftarrow c$  und  $c \Leftarrow b + c$  (nicht überschiebend), so hat man gemäß  $VI_{x+}$  den weiteren Satz

$$35) \quad (ac \Leftarrow bc)(a + c \Leftarrow b + c) = (a \Leftarrow b),$$

und aus dessen doppelter Anwendung endlich kraft  $III$

$$35) \quad (ac = bc)(a + c = b + c) = (a = b),$$

— zwei Schrödersche Theoreme —.

Bilden nämlich zwei Gebiete mit einem dritten gleiche Produkte oder gleiche Summen, so brauchen die beiden darum noch nicht einander gleich zu sein — § 49 —; sie sind es vielmehr sicher erst dann, wenn beides zugleich zutrifft.

Vermöge dieses Satzes wäre die Eindeutigkeit der Negation — § 53 — aus den Theoremen 20)<sub>x+</sub> unmittelbar einzusehen.

§ 69. Übungsaufgaben. Folgende Gebietsausdrücke sind zu negieren. — Anwendungen der Theoreme 31)<sub>x</sub>, 32)<sub>x</sub>, 20)<sub>x</sub>, 13)<sub>x</sub> u. a.

$$1. x = a + bc, \quad \bar{x} = \bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}.$$

$$2. x = a + b(c + d), \quad \bar{x} = \bar{a}(\bar{b} + \bar{c}\bar{d}).$$

$$3. x = (a + \bar{b})(\bar{a} + b) = ab + \bar{a}\bar{b}, \quad \bar{x} = (\bar{a} + \bar{b})(a + b) = \bar{a}b + a\bar{b}.$$



$$4. x = (a + bc)(b + c) = a(b + c) + bc,$$

$$\bar{x} = (\bar{a} + \bar{b}\bar{c})(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{b}\bar{c}.$$

$$5. x = (\bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d})(e + f) = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})\bar{e}\bar{f},$$

$$\bar{x} = abcd + e + f.$$

Die folgenden Ausdrücke sind durch Umformung möglichst zu vereinfachen — mittels Theorem 32)<sub>x</sub>, 11)<sub>x</sub>, 13)<sub>x+</sub>.

$$6. (a + bc)c = ac + bc = (a + b)c.$$

$$7. a(ab + bc) = ab + abc = ab.$$

$$8. (ab + ac + bc)abc = abc.$$

$$9. (ab + ac + bc)(a + b + c) = ab + ac + bc.$$

$$10. a + b(c + d) + (a + bx)c = a + b(c + d).$$

$$11. (a + b)(b + c) = a(b + c) + b = ac + b.$$

$$12. (a + b)(b + c)(c + d) = (ac + b)(c + d) = ac + bc + bd.$$

$$13. (a + b)(b + c)(c + d)(d + e) = (ac + b)(ce + d) = \\ = c(ae + ad + be) + bd.$$

Für die folgenden Umformungen sind außer den bisherigen namentlich noch die Theoreme 29)<sub>x+</sub> und 20)<sub>+</sub>, sowie die Entwicklung eines Gebiets nach einem anderen gemäß Axiom VII<sub>+</sub> beizuziehen.

$$14. a(b + c) + \bar{c} = ab + ac + \bar{c} = ab + a + \bar{c} = a + \bar{c}.$$

$$15. a(b + c)(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = a\bar{b} \cdot b\bar{c} = 0.$$

$$16. (a + \bar{b}\bar{c})(ac + \bar{b}) = ac + a\bar{b} + \bar{b}\bar{c} = ac + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} = \\ = ac + \bar{b}\bar{c}.$$

$$17. a + \bar{b} + \bar{c} + b(a\bar{c} + \bar{a}c) = a + \bar{b} + \bar{c} + a\bar{c} + \bar{a}c = \\ = a + \bar{b} + \bar{c} + c = 1.$$

$$18. \{a\bar{b}c + b(\bar{a} + \bar{c})\} \{a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}(b + c)\} = b(\bar{a} + \bar{c}) \cdot \bar{a}(b + c) = \bar{a}b.$$

$$19. a(b\bar{c} + \bar{b}c) + \bar{c} + ab + \bar{a}\bar{b} = a\bar{b} + \bar{c} + ab + \bar{a}\bar{b} = a + \bar{b} + \bar{c}.$$

$$20. a\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{c} + \bar{a}c + bc = a(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{a}(b + c) + bc = \\ = a \cdot \bar{b}\bar{c} + \bar{a}(b + c) + bc = a + b + c.$$

$$21. \bar{a}(b\bar{c} + \bar{b}c) + ab + ac + bc = (\bar{a}\bar{b} + ab + a + b)c + (\bar{a}b + ab)\bar{c} \\ = c + b.$$

22. Sei  $x = ab + ac + bc$  in Faktoren zu zerlegen;

$$\bar{x} = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{c})(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c},$$

$$x = (a + b)(a + c)(b + c).$$



## Der zweiwertige Gebietekalkul.

§ 70. **Das Zweigebietesystem.** Zur weiteren Entwicklung der Gebietetheorie — zur Lehre von den Funktionen und von der Auflösung der Gleichungen — werden aussagen-theoretische Hilfsmittel in ausgehnterem Umfange beizuziehen sein, als solche mit den §§ 10—19 voraussetzungsweise eingeführt wurden, und es ist deshalb — im zweiten Teil dieses Abrisses — vor allem die Aussagentheorie zu begründen und so weit als nötig durchzuführen. Dieselbe wird sich aber als eine Gebietetheorie erweisen, und zwar als Theorie eines Gebietesystems mit möglichst wenigen — mit nur zwei Gebieten. Daher soll nun zunächst dieser „Zweigebietekalkul“ kurz behandelt werden, und zwar vorerst nur als Beispiel zum allgemeinen Gebietekalkul, noch ohne aussagen-theoretische Deutung.

Ein Gebietesystem kann nämlich, wegen Axiom *V* neben Axiom *I*, nicht aus einem Gebiet allein bestehen — vgl. §§ 28 und 38.

Enthält aber ein System nicht mehr als zwei Gebiete, so können diese wegen der Null- und Einspostulate *IV*<sub>×+</sub> und *V* keine anderen sein als eben die Gebiete 0 und 1.

§ 71. **Die speziellen Propositionen.** Es lassen sich leicht sämtliche Beziehungen und Knüpfungen zwischen den Gebieten 0 und 1 den Gebietsaxiomen und -theoremen entnehmen und vollständig zusammenstellen, nämlich

die Subsumtionen und bzw. die Unsubsumtion

$$0 \in 0, \quad 1 \in 1, \quad 0 \in 1, \quad 1 \notin 0,$$

die Gleichungen und Ungleichungen

$$0 = 0, \quad 1 = 1, \quad 0 \neq 1, \quad 1 \neq 0,$$

endlich die Produkte, Summen und Negate

$$0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 + 0 = \bar{1}$$

$$1 = 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = \bar{0}.$$

Damit sind auch die Werte aller jemals vorkommenden, aus 0 und 1 in noch so verwickelter Weise durch Multiplikation, Addition und Negation aufgebauten Gebietsausdrücke, sowie deren Beziehungen von vornherein bestimmt.



§ 72. **Zweiwertige Symbole.** Sind  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  allgemeine Symbole für die Gebiete dieses Systems, d. h. solche, deren jedes nur entweder 0 oder 1 bedeuten kann, so wird auch jedem daraus zusammengesetzten Ausdruck, z. B.  $\alpha\beta + \bar{\gamma}$ , einer der beiden Werte 0 und 1 zukommen, sobald die Werte der Einzelsymbole bestimmt sind.

Man kann somit auch leicht die Richtigkeit eines jeden beliebigen Gebietstheorems oder -axioms — z. B. des Axioms  $VII_x$

$$(\alpha + \xi)(\bar{\alpha} + \xi) = \xi$$

im zweiwertigen Kalkul nachprüfen, indem man den darin vorkommenden Symbolen einzeln die Werte 0 und 1 nacheinander in allen möglichen Zusammenstellungen beilegt, — etwa wie das folgende Schema andeutet, worin die zusammengehörigen Werte kolonnenweise untereinander stehen.

$\xi =$	0	0	1	1
$\alpha =$	0	1	0	1
	$\bar{\alpha} =$	1	0	1
$\alpha + \xi =$	0	1	1	1
$\bar{\alpha} + \xi =$	1	0	1	1
$(\alpha + \xi)(\bar{\alpha} + \xi) =$	0	0	1	1 = \xi.

§ 73. **Synthetische Begründung des Zweigebietekalkuls.** Sind die Propositionen des § 71 einmal bewiesen, so kann man auf dieselben alle weiteren Theoreme des zweiwertigen Gebietekalkuls lediglich mittels „vollständiger Spezialisierung“, wie gezeigt, gründen, ohne weiterhin noch auf die Axiome oder andere Theoreme zurückzugreifen. Und man wird auch die Axiome und damit den ganzen Zweigebietekalkul — in synthetischer Weise — § 8 — aus den speziellen Aussagen des § 71 herleiten können, wenn diese Aussagen zuvor als richtig festgesetzt werden.

In der Tat erscheint dann z. B. das Axiom  $I \alpha \in \alpha$ , wo  $\alpha$  nur 0 und 1 bedeuten kann, lediglich als Zusammenfassung — als Produkt — der beiden ersten Subsumtionen des § 71,

$$(\alpha \in \alpha) \equiv (0 \in 0)(1 \in 1),$$

das Axiom  $VII_x$  als Produkt seiner vier oben gedachten richtigen Spezialisierungen, usw., eine jede allgemeine Formel des Gebietekalkuls — zunächst von der primären Aussagenart — ebenso als Produkt ihrer Spezialisierungen für alle möglichen Zusammenstellungen von 0 und 1 als Werte ihrer allgemeinen Symbole. Die Zahl der Spezialaussagen-



Faktoren ist z. B. 2, wenn nur *ein* allgemeines Symbol vorhanden ist; sie ist bei zwei Symbolen  $2 \cdot 2$ , bei drei Symbolen  $2 \cdot 2 \cdot 2$  oder  $2^3$ , usw., bei  $n$  Symbolen  $2^n$ . — In den Propositionen des Gebietekalküls finden sich selten mehr als drei allgemeine Symbole.

§ 74. **Spezialisierung der Sekundäraussagen.** Bei Sekundärsubsumtionen, wie Axiom *II* oder *III'*, verringert sich noch die Zahl der speziellen Aussagenfaktoren, deren Richtigkeit etwa zu prüfen wäre, da solche Sekundäraussagen nur die Geltung der Konklusionen behaupten für die Fälle, wo die Prämissen erfüllt sind. Nun wird z. B. die Relation  $\alpha \in \beta$ , sofern sie als Prämisse von *II* erfüllt sein soll, nur eine der drei in § 71 als richtig hingestellten Subsumtionen bedeuten können, und es hat daher die Spezialisierung  $\alpha = 1, \beta = 0$  von vornherein auszuschneiden, — ebenso desgleichen, wenn  $\beta = 1$  gesetzt wird, für die zweite Prämisse  $\beta \in \gamma$  die Annahme  $\gamma = 0$ , — wonach statt 8 nur noch die 4 Wertezusammenstellungen bleiben:

$$\begin{array}{cccc} \alpha = 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta = 0 & 0 & 1 & 1 \\ \gamma = 0 & 1 & 1 & 1. \end{array}$$

Ähnliches gilt von den Sekundärgleichungen; dieselben lassen sich aus den Spezialisierungen ihrer Teilsubsumtionen multiplikativ zusammensetzen.

Sonach überzeugt man sich leicht, daß die Festsetzungen des § 71 ausreichen zur Synthese und Verifikation des Inhalts sämtlicher Gebietsaxiome. Der Zweigebietekalkül läßt sich also statt auf die Gebietsaxiome auch auf die Spezialaussagen des § 71 als axiomatische Festsetzungen gründen.

§ 75. **Die Zweiwertigkeits-Voraussetzung.** Zu den bisher bekannten, allgemein-gebietstheoretischen Sätzen kommen im zweiwertigen Kalkül noch einige Formeln, die im allgemeinen Gebietekalkül keine Geltung haben und lediglich aus der Voraussetzung der Zweiwertigkeit hervorgehen.

Diese Voraussetzung läßt sich zunächst auch selbst mittels der Formelsprache darstellen in der Gestalt: Ist ein allgemeines Symbol  $\alpha$  nicht gleich Null, so ist es gleich Eins,

$$[1] \quad (\alpha \neq 0) \in (\alpha = 1),$$

und kontraponiert

$$[1]_1 \quad (\alpha \neq 1) \in (\alpha = 0),$$



oder auch in Anbetracht, daß die Umkehrung

$$(\alpha = 0) \notin (\alpha + 1)$$

zufolge  $V$  schon im allgemeinen und somit auch im zweiwertigen Kalkül ohnehin gilt,

$$[2] \quad \begin{cases} (\alpha = 0) = (\alpha + 1) = (\bar{\alpha} = 1) \\ (\alpha = 1) = (\alpha + 0) = (\bar{\alpha} = 0). \end{cases}$$

Zwei ungleiche Gebiete sind hier also stets auch obvers,

$$[3] \quad (\alpha + \beta) \notin (\beta = \bar{\alpha}),$$

$$[4] \quad \begin{cases} (\alpha = \bar{\beta}) = (\alpha + \beta) = (\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = (\bar{\alpha} = \beta), \\ (\alpha = \beta) = (\bar{\alpha} + \beta) = (\alpha + \bar{\beta}) = (\bar{\alpha} = \bar{\beta}). \end{cases}$$

Die Zweiwertigkeits-Voraussetzung in der Form [2] ergibt weiter in Verbindung mit der Kontraposition des Theorems 24)<sub>x</sub> und mit Theorem 14)<sub>x</sub> (oder auch mit 24)<sub>+</sub> und 14)<sub>+</sub>)

$$[5] \quad (\alpha \notin \beta) = (\alpha \bar{\beta} + 0) = (\alpha \bar{\beta} = 1) = (\alpha = 1)(\bar{\beta} = 1) = (\alpha = 1)(\beta = 0),$$

entsprechend der Bemerkung, daß die Relation  $\alpha \notin \beta$ , wofern sie erfüllt sein soll, unter den speziellen Festsetzungen des § 71 nur die einzige Unsubsumtion  $1 \notin 0$  bedeuten kann.

Stets kann auch das Verfahren der vollständigen Spezialisierung zur Bestätigung der aufgestellten Sätze dienen.





Schröder, Dr. E., weiland Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende.

I. Band: Die sieben algebraischen Operationen. [X u. 360 S.] gr. 8. 1873. Geh. n. M. 8.—

Das vorliegende Buch ist der erste Band eines früher vom Verfasser beabsichtigten ausführlichen Werkes über die Anfangsgründe des rein analytischen Teiles der Mathematik, dessen zweiter Band die Lehre von den natürlichen Zahlen d. h. die wissenschaftliche Begründung der gemeinen Arithmetik, die Elemente der Zahlentheorie, der Kombinatorik und der Größenlehre enthalten sollte, und dessen dritter und vierter Band die analytischen Zahlen behandeln bzw. die Analysis des Endlichen zum Abschluß bringen sollte. Dabei war es die Absicht des Verfassers, sein besonderes Augenmerk auf tünlichste Vollständigkeit und Vielseitigkeit, Gründlichkeit und Strenge in der Behandlung und zweckentsprechende Anordnung des Materials zu richten und jeden Band zu einem in sich abgeschlossenen Ganzen auszugestalten. Es macht daher der nunmehr allein vorliegende erste Band durchaus den Anspruch auf selbständigen Wert, wenn er zugleich auch bestimmt war, das größere Werk einzuleiten.

Abriß der Arithmetik und Algebra für Schüler an Gymnasien und Realschulen.

I. Heft: Die sieben algebraischen Operationen. [48 S.] gr. 8. 1874. Geh. n. M. —. 60.

Dieser „Abriß der Arithmetik und Algebra“ sollte dem ausführlichen „Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende“ des Verfassers parallel gehend in 4 Heften erscheinen und für die Hand der Schüler bestimmt sein. Von ihm liegt entsprechend dem einen Bande des Lehrbuchs jetzt nur das erste Heft vor.

der Operationskreis des Logikkalküls. [VI u. 37 S.] gr. 8. 1877. Geh. n. M. 1.50.

Die Schrift entwickelt eine durchaus elementare Methode, die Probleme der deduktiven Logik mittelst eleganter Rechnung zu lösen — wodurch diese Disziplin in die große Kette der rein mathematischen Wissenschaften endgültig eingereiht ist.

Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). 3 Bände.

- I. Band. Mit vielen Figuren im Text. [XII u. 717 S.] gr. 8. 1890. Geh. n. M. 16.—  
II. — 1. Abteilung. Mit vielen Figuren im Text. [XV u. 400 S.] gr. 8. 1891. Geh. n. M. 12.—  
II. — 2. Abteilung. Herausgegeben im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Dr. Eugen Müller, Professor an der Oberrealschule zu Konstanz. Mit einem Bildnis Ernst Schröders und Figuren im Text. [XXIX u. 206 S.] gr. 8. 1905. Geh. n. M. 8.—  
III. — 1. Abteilung. Mit vielen Figuren im Text. [VIII u. 649 S.] gr. 8. 1895. Geh. n. M. 16.—  
III. — 2. Abteilung (Schluß). [In Vorbereitung.]

Seit dem Erscheinen des Verfassers „Operationskreis des Logikkalküls“ hat die rechnerische Behandlung der deduktiven Logik, die hier mit dem Namen exakte Logik belegt wird, bedeutende Fortschritte gemacht. Insbesondere ist durch die Arbeiten von Ch. S. Peirce, in die der Verfasser nicht unwesentlich eingreift, die Theorie so weit entwickelt und vollendet worden, daß für einen ersten und Hauptteil des ganzen Lehrgebäudes eine endgültige Darstellung und Anordnung ermöglicht wurde. Mit dem Bestreben, solche zu verwirklichen, verbindet der Verfasser zugleich die Absicht, von der schon ansehnlichen Literatur, welche besonders in englischer Sprache einschlägig existiert, das Wertvollste in einheitlicher Darstellung zu einem Handbuche zu vereinigen.

Ursprünglich war die Absicht, den ganzen Stoff auf zwei Bände zu verteilen, von denen der erste und die erste Abteilung des zweiten Bandes den Aussagenkalkül, die zweite Abteilung des zweiten Bandes den Beziehungskalkül enthalten sollte. Indessen der überreiche Stoff über die Logik der Beziehungen überhaupt (der Logik der Relative) erforderte für sich einen besonderen (dritten) Band, von dem der Verfasser zunächst eine erste Abteilung publizierte. Für die zweite Abteilung des zweiten Bandes war eine Ergänzung des Aussagenkalküls vom Verfasser vorgesehen, die nunmehr der Herausgeber auf Grund des reichlich hinterlassenen Materials zusammengestellt hat. Ebenso liegt für die Schlußlieferung des dritten Bandes das Material in den Manuskripten Schröders vor.

„... Der unermüdliche Fleiß und der große Scharfsinn, mit dem Schröder es verstanden hat, die an sich schwierigen und durch häufigen Wechsel der Bezeichnungen fast unverständlichen Ideen von Peirce aus dessen Abhandlungen herauszuziehen und in einem lesbaren Buche darzustellen, verdient hohe Anerkennung. Er hat auch an sehr vielen Stellen Eigenes zu der Theorie beigetragen, um sie auszugestalten und abzurunden. Wenn man sich die wenigen Rechnungsregeln zu eigen gemacht hat, ist es auch nicht schwierig, die Rechnungen in dem Buche zu verfolgen, da sie meistens sehr ausführlich gegeben sind, so daß auch der wenig Geübte sich von der Richtigkeit überzeugen kann...“ (Zeitschr. f. Mathematik u. Physik.)



**Schoenflies, Dr. Arthur**, Professor an der Universität Königsberg i. Pr., die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 2 Teile.

I. Teil. Mit Figuren im Text. [VI u. 251 S.] gr. 8. 1900. Geh. n. M. 8.—  
II. — Mit 26 Figuren im Text. [X u. 431 S.] gr. 8. 1908. Geh. n. M. 12.—

Vorstehender Bericht über die Mengenlehre enthält in seinem ersten Teile in 3 Abschnitten: 1. Die allgemeine Theorie der unendlichen Mengen. 2. Die Theorie der Punktmengen. 3. Anwendungen auf Funktionen reeller Variabler. Dabei nimmt in den beiden ersten Abschnitten die Darstellung die Form eines Lehrbuches an, weil der Verfasser nur so hoffen konnte, bei einem in seinen Einzelheiten noch wenig gekannten Gebiete, sich in den Teilen, die die Anwendungen enthalten, knapper und doch verständlich ausdrücken zu können.

Der zweite Teil ist vorzugsweise den geometrischen Anwendungen gewidmet. Insbesondere hat hier derjenige Teil, der im Mittelpunkt der Analysis situs steht, und in dem die geometrisch invarianten Eigenschaften der geometrischen Gebilde zum Ausdruck kommen, eine zusammenhängende Darstellung erfahren. Außerdem enthält dieser Teil Nachträge zum ersten Teil. Im übrigen ergibt sich der Inhalt aus folgenden Kapitelüberschriften: 1. Allgemeine Mengensätze. 2. Die geordneten Mengen. 3. Punktmengensätze. 4. Die gestaltlichen Grundbegriffe. 5. Die geometrischen Invarianten der Analysis situs. 6. Die stetige Kurve. 7. Die Kurvenmengen und der Funktionalraum.

**Schüler, Wilhelm Friedrich**, die Arithmetik und Algebra in philosophischer Begründung. Vorlesungen. In 3 Teilen.

I. Teil: Die vier Spezies mit ganzen und gebrochenen positiven und negativen Größen und die Determinanten. [VI u. 140 S.] gr. 8. 1873. Geh. n. M. 4.—

Das Buch ist hauptsächlich für Lehrer und solche die es werden wollen berechnet und namentlich für diejenigen Lehrer, welche keine besonderen mathematischen Studien gemacht haben, aber dennoch in der Lage sind, mathematischen Unterricht geben zu müssen. Der Verfasser hat die Form des freien Vortrags gewählt, insoweit die Strenge der Wissenschaft die Freiheit der Rede gestattet.

**Simon, Dr. Max**, Professor am Lyceum und Honorarprofessor an der Universität Straßburg i. E., Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis. Mit 9 Textfiguren. [VI u. 108 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. M. 3.20.

Die vorliegende Schrift bezweckt, den Studierenden die Ziele des arithmetisch-algebraischen Unterrichts der neunklassigen höheren Schulen zu zeigen und sie anzuleiten, den zusammenfassenden Überblick auf der obersten Stufe methodisch zu geben. — Die Schrift zerfällt in zwei nebeneinander herlaufende Teile: die Entwicklung des Zahlbegriffs vom Zählen an bis zu den komplexen Zahlen und die Auflösung der algebraisch auflösbaren Gleichungen. Der Begründung des Begriffs und der Rechnungsregeln der Irrationalzahlen ist besondere Sorgfalt gewidmet. Der Verfasser hat sich dabei wesentlich an die Georg Cantorsche Methode gehalten, weil sie s. E. wesentliche Vorzüge vor der Dedekindschen und Weierstraßschen besitzt. Eine geringfügige Modifikation ist durch die Auffassung des Verfassers vom Grenzbegriff als einer Kategorie, d. h. eines irreduziblen Grundvermögens der Vernunft bedingt. Die ganze Entwicklung wird beherrscht von der Ausbildung des Funktionsbegriffs, dessen zentrale Stellung im Unterricht der Verfasser schon seit mehr als 20 Jahren betont hat.

über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert. Mit 28 Figuren im Text. [VIII u. 278 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. M. 8.—, in Leinw. geb. n. M. 9.—

Das vorstehende ist ein Bericht über die historische Entwicklung der Elementar-Geometrie im 19. Jahrh., wobei der Verf. unter Elementar-Geometrie das verstanden hat, was an Geometrie, von Kegelschnitten und projektiver Geometrie abgesehen, auf den höheren Lehranstalten gelehrt werden kann. (Eine Ausnahme macht die Verdoppelung des Würfels.) Die Arbeit umfaßt dementsprechend 34 Artikel, in denen jeweils für die einzelnen Kapitel resp. Gegenstände der Elementar-Geometrie ein zusammenfassender Überblick vorangestellt ist, woran sich ein ausführliches Literaturverzeichnis mit sich anschließenden kritischen Bemerkungen reiht. Ein kurzer Nachtrag zur Methodik und ein Namenregister beschließen das Buch.

„Obwohl sich die Literatur über Elementargeometrie im letzten Jahrhundert außerordentlich vermehrt hat, gab es doch bisher kein zusammenfassendes Werk, aus dem man sich über irgendein spezielles Gebiet orientieren konnte. . . . Es ist nun das Verdienst des Verf., daß er durch die Abfassung des vorliegenden Werkes hierin einen vollständigen Wandel geschaffen hat, indem er sich der außerordentlich mühevollen und zeitraubenden Arbeit unterzog, die vorhandene Literatur zusammenzusuchen und nach sachlichen Gesichtspunkten zu ordnen. . . . Das vorliegende Buch kann nicht dringend genug zur Anschaffung und zum eingehenden Studium empfohlen werden.“  
(Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturkunde.)