

МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

MECHANICS
OF COMPOSITE
MATERIALS

2021

6

ЛАТВИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
LATVIAN ACADEMY of SCIENCES

**МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ
МАТЕРИАЛОВ**

**MECHANICS
of COMPOSITE MATERIALS**

2021 ● Т. 57 ● 6 ● 1023—1230

Ноябрь—декабрь
November—December

<https://doi.org/10.22364/mkm.57.6>

Выходит 6 раз в год с января 1965 г.
Issued since 1965, bimonthly

ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РИГА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *A. K. Chate*
EDITOR-IN-CHIEF *A. K. Chate*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

X. Альтенбах (зам. главного редактора, Германия), *Я. Андерсонс* (зам. главного редактора, Латвия), *А. Анискевич* (Латвия), *Я. Варна* (Швеция), *А. Красников* (Латвия), *О. Старкова* (Латвия), *С. В. Шешенин* (Россия)

EDITORIAL BOARD

H. Altenbach (ass. editor, Germany), *J. Andersons* (ass. editor, Latvia), *A. Aniskevich* (Latvia), *J. Varna* (Sweden), *A. Krasnikovs* (Latvia), *O. Starkova* (Latvia), *S. V. Sheshenin* (Russia)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

М. Айдогду (Турция), *С. Д. Акбаров* (Турция), *А. Артеиру* (Португалия), *Л. Асп* (Швеция), *Е. Барканов* (Латвия), *В. Беккер* (Германия), *В. Н. Бурлаенко* (Украина), *И. Гузь* (Великобритания), *Нгуен Дин Дык* (Вьетнам), *Г. Кан* (Китай), *В. Карвелли* (Италия), *В. А. Касьянов* (Латвия), *А. Катунин* (Польша), *Сон С. Ким* (Южная Корея), *Е. Конту* (Греция), *Е.-М. Крачун* (Румыния), *А. Кривоцов* (Россия), *В. Кулаков* (Латвия), *Г. Куликов* (Россия), *С. В. Ломов* (Бельгия, Россия), *Ю. Маяк* (Эстония), *Г. Михасёв* (Беларусь), *А. Муц* (Польша), *В. Н. Паймушин* (Россия), *Л. Плачиди* (Италия), *Т. Садовский* (Польша), *С. Б. Сапожников* (Россия), *М. Ди Скьюва* (Италия), *Р. Талрея* (США), *Ю. Токовий* (Украина), *В. Хван* (Южная Корея)

ADVISORY BOARD

M. Aydogdu (Turkey), *S. D. Akbarov* (Turkey), *A. Arteiro* (Portugal), *L. Asp* (Sweden), *E. Barkanov* (Latvia), *W. Becker* (Germany), *V.N. Burlayenko* (Ukraine), *I. Guz'* (United Kingdom), *Nguyen Dinh Duc* (Vietnam), *G. Kang* (China), *V. Carvelli* (Italy), *V.A. Kasyanov* (Latvia), *A. Katunin* (Poland), *Seong S. Kim* (South Korea), *E. Kontou* (Greece), *E. M. Craciun* (Rumania), *A. Krivtsov* (Russia), *V. Kulakov* (Latvia), *G. Kulikov* (Russia), *S. V. Lomov* (Belgium, Russia), *J. Majak* (Estonia), *G. Mikhasev* (Belarus), *A. Muc* (Poland), *V. N. Pajmushin* (Russia), *L. Placidi* (Italy), *T. Sadowski* (Poland), *S. B. Sapozhnikov* (Russia), *M. Di Sciuva* (Italy), *R. Talreja* (USA), *Yu. Tokovyy* (Ukraine), *W. Hwang* (Korea)

ПОЧЕТНАЯ РЕДКОЛЛЕГИЯ

Л. Агаловян (Армения), *А. Богданович* (США), *А. Н. Гузь* (Украина), *А. Дуда* (Германия), *А. Д. Заманов* (Азербайджан), *М. Калнинь* (Латвия), *В. В. Коврига* (Россия), *С. Т. Милейко* (Россия), *Ю. М. Плескачевский* (Беларусь), *В. А. Поляков* (Латвия), *Р. Рикардс* (Латвия), *Н. Щербина* (Украина)

HONORARY BOARD

L. Aghalovyan (Armenia), *A. Bogdanovich* (USA), *A. N. Guz'* (Ukraine), *A. Duda* (Germany), *A. D. Zamanov* (Azerbaijan), *M. Kalniņš* (Latvia), *V. V. Kovriga* (Russia), *S. T. Mileiko* (Russia), *Yu. M. Pleskachevskii* (Belarus), *V. A. Polyakov* (Latvia), *R. Rikards* (Latvia), *N. Shcherbina* (Ukraine)

Журнал издается на английском языке Springer Science+Business Media, Inc. (США, ISSN 0191-5665) и аннотируется в следующих изданиях:

The Journal is published in English by Springer Science+Business Media, Inc. (USA, ISSN 0191-5665) and is abstracted or indexed in:

Science Citation Index Expanded (SciSearch), Journal Citation Reports/Science Edition, SCOPUS, INSPEC, Chemical Abstracts Service (CAS), Google Scholar, EBSCO, CSA, Academic OneFile, Academic Search, ChemWeb, CSA, Environmental Sciences, Current Contents/Engineering, Computing and Technology, Earthquake Engineering Abstracts, EI-Compendex, Gale, INIS Atomindex, OCLC, Polymer Library, Reaction Citation Index, Referativnyi Zhurnal (VINITI), SCImago, Summon by ProQuest.

*И. О. Кондаков**, *А. В. Чернов*, *А. Н. Шаныгин*, *С. Б. Сапожников*

*Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского,
научный центр мирового уровня "Сверхзвук", Московская обл., г. Жуковский, Россия*

ЗАЩИТА СИЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОМПОЗИТНОЙ СЕТЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ОТ НИЗКОСКОРОСТНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

I. O. Kondakov, A. V. Chernov, A. N. Shanygin, and S. B. Sapozhnikov

PROTECTION OF AIRCRAFT LATTICE SHELL MADE OF UD CFRP RIBS FROM LOW-VELOCITY IMPACTS

Keywords: composite, lattice structure, low-velocity impact, composite aircraft

The paper considers new protection pads located under a lattice shell of aircraft made of UD CFRP ribs and the problems arising from low-velocity impacts (LVI). It is shown that the aerodynamic sheathing and the load-bearing lattice shell should be separated by protective pads made of an elastoplastic material to absorb the impact energy without damaging the ribs. With finite element modeling, the calculation models were developed to assess the strength of UD CFRP ribs. On the example of the lattice shell of a business-class aircraft with a diameter of 2 m, rational parameters of the shell protection under LVI with an energy of up to 50 J were determined. Variation of the thickness of the protective pads allows to ensure the required maximum level of damage to the lattice shell. The results of impact tests on the shell fragments and their residual compressive strength are in good agreement with the calculated by FEM.

Ключевые слова: композит, конструкция сетчатая, удар низкоскоростной, самолет композитный

Рассмотрены новые конструкции силовых схем летательных аппаратов на основе сетчатых оболочек из однонаправленного

*Автор, с которым следует вести переписку: ivan.kondakov@tsagi.ru
Corresponding author: ivan.kondakov@tsagi.ru

углепластика и проблемы, возникающие при защите их элементов от низкоскоростных ударных воздействий. Показано, что аэродинамическая обшивка и силовой сетчатый каркас должны быть разделены защитным слоем из упругопластического материала, способного поглощать энергию удара без повреждения каркаса. На основе метода конечных элементов разработаны расчётные модели, позволяющие дать оценку прочности элементов каркаса из однонаправленного углепластика. На примере сетчатой оболочки самолета бизнес-класса диаметром 2 м найдены рациональные параметры защиты каркаса при ударах с энергией до 50 Дж. Вариация толщины защитного слоя позволяет обеспечить требуемый максимальный уровень повреждений каркаса. Результаты экспериментальных исследований удара по фрагментам каркаса и их остаточной прочности при сжатии хорошо согласуются с расчётными.

Введение

Традиционная схема конструкции корпуса летательного аппарата (ЛА) из лёгких сплавов состоит из тонкостенного силового набора (шпангоуты и лонжероны) и тонкой обшивки, работающей в основном на сдвиг [1, 2]. Обшивка создает наружный контур ЛА и выдерживает дополнительные аэродинамические нагрузки. Случайные локальные ударные воздействия (удары градом, гравием со взлётно-посадочной полосы или инструментом при техническом обслуживании) воспринимаются обшивкой, которая поглощает энергию падающего тела за счёт прогибов и пластических деформаций [3, 4].

Для современных конструкций ЛА из композитных материалов случайные удары по обшивке приводят к локальным повреждениям (разрывам волокон и расслоениям [5, 6]), которые наиболее существенно снижают прочность обшивок при сжатии, облегчая потерю устойчивости. Чтобы исключить катастрофические последствия таких ударов, толщину обшивок приходится увеличивать в 2—3 раза [7, 8], что существенно снижает весовую эффективность от применения композитов в конструкциях ЛА.

Новым решением, позволяющим значительно снизить остроту названной проблемы, является патент [9], в котором предложено выполнять несущий элемент фюзеляжа самолета в виде сетчатого силового каркаса из однонаправленного углепластика (рис. 1).

Сетчатый каркас способен выдерживать весь комплекс внутренних усилий фюзеляжа за счёт наличия спиральных и кольцевых рёбер. Наружная тонкая обшивка выполняет лишь вспомогательную роль — создает гладкую аэродинамическую форму.

Однако непосредственный контакт обшивки с силовыми рёбрами не обеспечивает достаточной прочности рёбер при локальном ударе, поскольку однонаправленный углепластик обладает низкой прочностью при растяжении поперек волокон [10, 11].

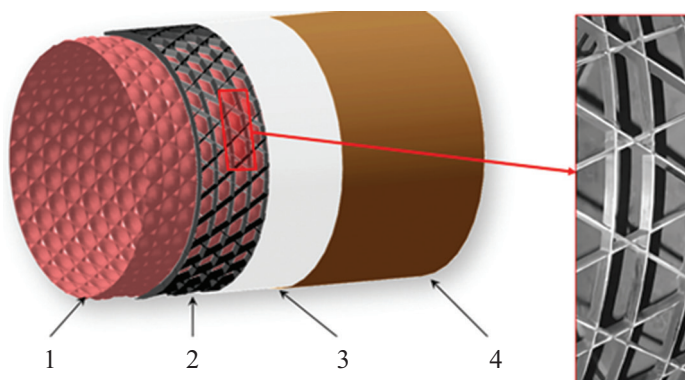


Рис. 1. Сетчатая оболочка и ее основные части: 1 — волнообразная гибкая гермообшивка; 2 — жесткий сетчатый композитный каркас; 3 — легкий изолирующий наполнитель; 4 — гладкая гибкая “аэродинамическая” обшивка. На врезке — фото фрагмента реальной оболочки.

Таким образом, возникает новая научная проблема — разработка методов снижения повреждений однонаправленного композита при локальном контактном ударном воздействии при минимальном утяжелении конструкции силового сетчатого каркаса ЛА. В литературе по этой теме публикаций нет. Решению названной проблемы посвящена данная статья, в которой предложен специальный элемент-прокладка, рассеивающий кинетическую энергию удара за счёт больших пластических деформаций. Прокладка изготовлена из термопластичного полимера и расположена между внешней обшивкой и силовым каркасом.

Рассмотрен пример: часть фюзеляжа самолёта бизнес-класса с наружным диаметром 2 м и длиной 4 м, в которой сетчатая оболочка должна быть защищена от удара падающим телом с энергией до 50 Дж.

1. Материалы, образцы и технология производства

Основной материал сетчатого каркаса — однонаправленный углепластик, содержащий высокопрочные волокна HTA40 E13 6K 400 tex ([12] Teijin Carbon, Япония) и терморепактивную матрицу на основе эпоксидной смолы ЭХД-МД ([13] ЦНИИСМ, Россия). Объёмная доля волокон в ребрах не превышает 40%, поскольку технология изготовления сетчатого каркаса — намотка жгута из углеродных волокон, пропитанного смолой, на оправку, содержащую спиральные и кольцевые канавки. Эти канавки имеют неизменную глубину и ширину, поэтому в узлах пересечения канавок происходит удвоение объёмной доли до предельно возможного значения ~80%. Эта технология успешно используется в космических конструкциях [14] и адаптирована для авиационной конструкции в рамках программы FP7 POLARBEAR [15] в 2015 году.

Механические свойства углепластика (трансверсально-изотропный материал), экспериментально определённые в ЦНИИСМ, следующие: модули упругости в направлении волокон и в плоскости изотропии $E_1 = 102$ ГПа, $E_2 = 8$ ГПа; модуль сдвига в плоскости 12 $G_{12} = 3$ ГПа; $G_{23} = 2,9$ ГПа; коэффициенты Пуассона при нагружении в направлении волокон и в плоскости изотропии $\mu_{12} = 0,3$, $\mu_{23} = 0,4$; плотность $\rho = 1,44$ г/см³. Прочностные характеристики углепластика: $F_{1t} = 1500$ МПа, $F_{2t} = 40$ МПа, $F_{1c} = 800$ МПа, $F_{2c} = 100$ МПа, $F_{12} = 60$ МПа.

Важно отметить, что в направлении, ортогональном волокнам, деформации разрушения композита весьма малы и составляют $\varepsilon_2 \approx F_{2t} / E_2 = 40/8000 = 0,05\%$.

В качестве энергопоглощающего материала выбран термопласт АБС (акрил бутадиен стирол). Детали сложной формы из него (демпфирующие прокладки) произведены методом 3D-печати из заготовки в виде филамента диаметром 1,75 мм (производитель Picaso-3D [16], Россия) на принтере Picaso Designer Pro 3D [17]). Механические свойства АБС-пластика при статических испытаниях следующие [18]: $E = 2,20$ ГПа, $\mu = 0,35$, предел текучести $\sigma_y = 41$ МПа, модуль упрочнения $E_t = 0,02$ ГПа, $\rho = 1,05$ г/см³.

На рис. 2 приведены X-образные образцы-фрагменты сетчатого каркаса и прокладки из АБС-пластика. Образцы-фрагменты имели рёбра из однонаправленного углепластика размером $250 \times 8 \times 8$ мм, а прокладки —

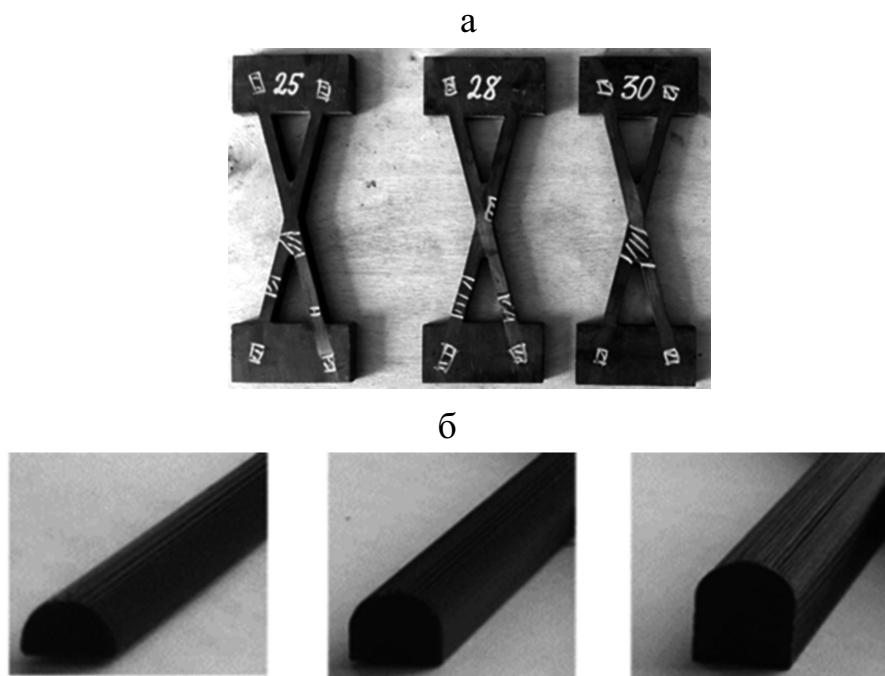


Рис. 2. Фрагменты сетчатого каркаса $250 \times 90 \times 8$ мм (а) и защитные прокладки из АБС-пластика шириной 8 мм и высотой 4, 6 и 8 мм соответственно (б).

200×8×4 (6 или 8) мм. Концы ребер углепластика залиты эпоксидным компаундом в области размером 40×90 мм, обеспечивая совместную работу при испытаниях. Угол между осями ребер равен 30°.

2. Математическое моделирование процесса удара (МКЭ)

Моделирование ударного нагружения X-образного фрагмента крупногабаритной конструкции требует корректного задания граничных условий, обеспечивающих эквивалентность такой упрощенной задачи с задачей удара по полноразмерной оболочке. Иными словами, необходимо в расчётах (и затем в экспериментах) правильно задать эквивалентную жёсткость основания. Для расчёта жёсткости изогридный сетчатый каркас (см. рис. 1) диаметром 2 м и толщиной 8 мм был заменен эквивалентной изотропной оболочкой толщиной 8 мм с осреднёнными по правилу смеси упругими свойствами $E_{\text{eqv}} = E_1 \cdot V_{\text{ribs}} / 3$. Согласно классической теории слоистых пластин эта формула точна для квазиизотропных укладок слоёв, у которых $E_1 \gg E_2$, G_{12} (см. данные выше). Здесь E_1 — модуль упругости углепластика вдоль волокон, V_{ribs} — “объёмная доля” ребер в эквивалентной сплошной оболочке. В изогридной оболочке расстояние между ребрами равно $A = 120$ мм. Тогда при ширине ребер $b = 8$ мм $V_{\text{ribs}} = A / b = 8 / 120 = 0,067$. Отсюда следует, что $E_{\text{eqv}} = E_1 \cdot V_{\text{ribs}} / 3 = 102 \cdot 0,067 / 3 \approx 2,3$ ГПа. Плотность эквивалентной оболочки $\rho_{\text{eqv}} = \rho \cdot V_{\text{ribs}} = 1440 \cdot 0,067 = 96$ кг/м³.

Далее рассмотрим ударное нагружение по гладкой оболочке с энергией 50 Дж (диаметр стального шара 2 дюйма, масса 538 г, скорость 13 м/с) в пакете ANSYS (явная динамическая формулировка). 3D-модель оболочки и сетка конечных элементов со сгущением в зоне удара показаны на рис.3.

Эквивалентная сплошная оболочка (см. рис. 3) при ударном нагружении деформируется локально. К моменту начала отскока (время 2,0 мс) шара перемещение составляет 20,6 мм (рис. 4), расчётное максимальное

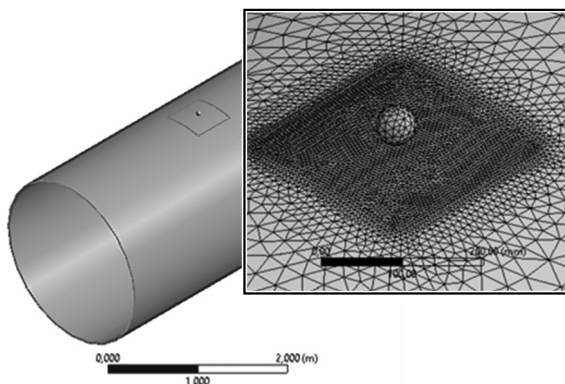


Рис. 3. Сплошная оболочка и фрагмент сетки КЭ.

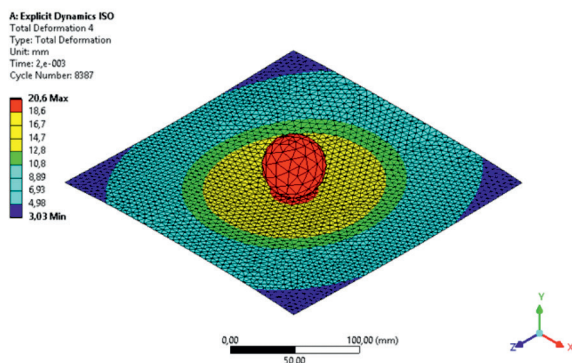


Рис. 4. Картина перемещений в оболочке для времени 2 мс.

контактное усилие равно 4,2 кН (рис. 5). Усилие в контакте определено умножением массы ударника на ускорение, полученное дифференцированием средней скорости ударника. Такой метод обработки обусловлен большими осцилляциями ускорения, получаемого в процессе расчёта МКЭ, из-за волновых эффектов по толщине образца.

Учитывая близкий к линейному закон возрастания усилия P и перемещения U (см. рис. 5), можно определить эквивалентную квазистатическую жёсткость фрагмента оболочки размером 250×250 мм при контакте $C = P / U \approx 5 / 25 = 0,20$ кН/мм. Эта величина будет необходима далее для назначения жёсткости упругого основания в ходе расчётов динамики деформирования фрагмента сетчатой оболочки при ударе индентором.

Стоит обратить внимание на то, что контактное усилие в начале процесса не равно нулю. Это произошло потому, что для вычисления усилия контакта использовали произведение ускорения на массу ударника. Ускорение получали дифференцированием средней скорости ударника, которую аппроксимировали полиномом. В полиноме линейный член был

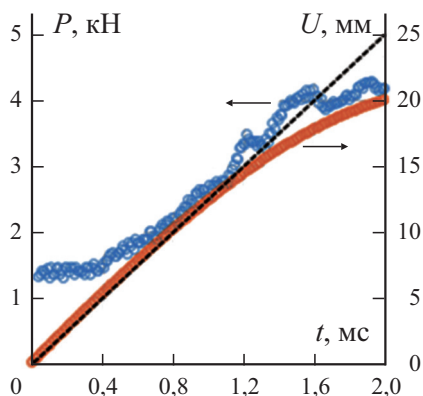


Рис. 5. Усилие и перемещение в контакте сферы с оболочкой в функции времени. (---) — линейная аппроксимация.

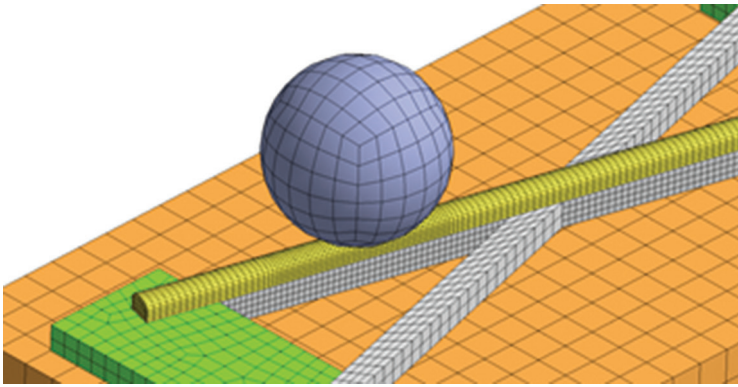


Рис. 6. Трёхмерная модель с сеткой конечных элементов.

небольшим, но ненулевым. Среднее ускорение ударника, выдаваемое ANSYS напрямую, имело значительные осцилляции из-за волновых процессов по толщине образца при отсутствии искусственного демпфирования.

Для имитации удара с энергией 50 Дж по X-образному фрагменту на рис. 6 приведена трехмерная модель с сеткой конечных элементов. Здесь жёлтым показана защитная прокладка, серым — ребра, зелёным — заливка концов ребер эпоксидным компаундом, коричневым — упругое основание ($300 \times 150 \times 50$ мм).

Конечно-элементное моделирование проведено со стандартными установками явного решателя “по умолчанию”. Объёмные конечные элементы имели одну точку интегрирования, подложка X-образного фрагмента выполнена из упругого материала и располагалась на жёстком основании. В X-образном фрагменте все контактные пары имели тип ‘bonded’ (склейка, алгоритм поверхность—поверхность). Расчётное время выбирали из условия включения первой контактной фазы с максимальными контактными напряжениями. Это составило около 1 мс, при

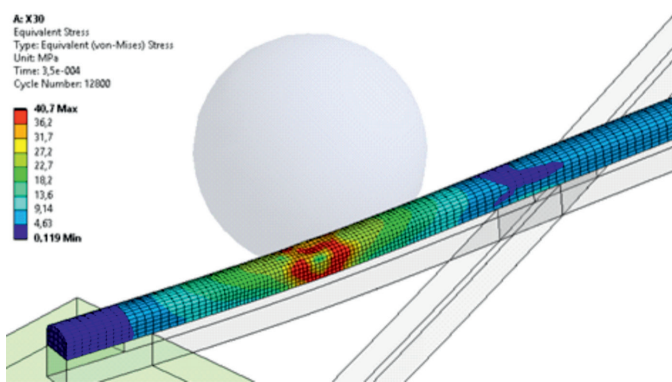


Рис. 7. Распределение эквивалентных напряжений в защитной прокладке ($t = 0,35$ мс).

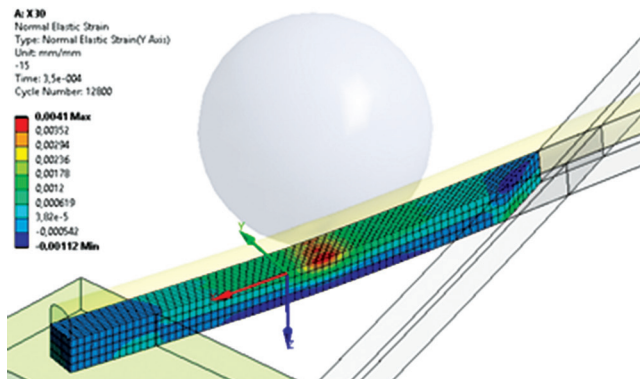


Рис. 8. Распределение поперечных деформаций ε_y в ребре ($t = 0,35$ мс).

этом процессорное время составило около 60 мин (использован много-процессорный кластер с 10 ядрами).

Распределение эквивалентных по Мизесу напряжений в защитной прокладке (рис. 7), поперечных деформаций в ребре (рис. 8) и перемещений (рис. 9) показано в критический момент времени $t = 0,35$ мс (в этот момент времени поперечные деформации достигают наибольшего значения 0,41%).

Получено, что прокладка толщиной 6 мм способна защитить ребро сетчатой оболочки из однонаправленного углепластика от удара с энергией 50 Дж. Повреждений поперек волокон при этом не произойдет, так как максимальные поперечные деформации в процессе удара составляют около 0,4%. Вес такой прокладки — около 85% от веса ребра.

Для подтверждения достоверности расчётов можно указать, что энергия песочных часов (hourglass energy) составляла менее 1% от общей энергии системы в каждом расчётном случае.

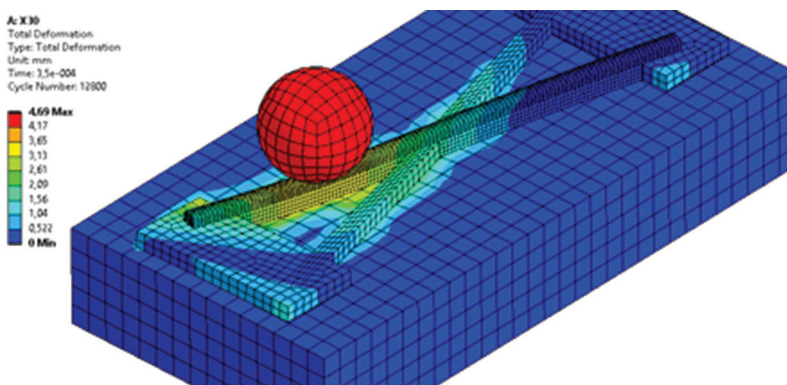


Рис. 9. Распределение перемещений ($t = 0,35$ мс).

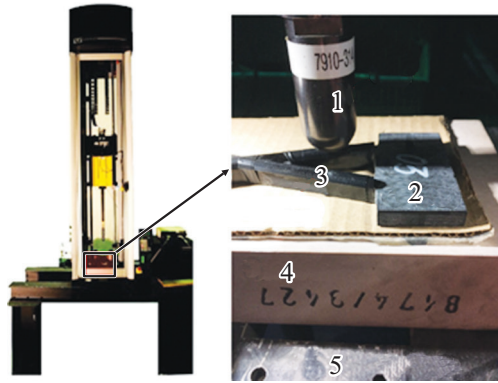


Рис. 10. Копер Instron DynaTup 9250 HV и схема испытаний [20]: 1 — боёк; 2 — образец; 3 — защитная прокладка; 4 — подложка; 5 —испытательный стол.

3. Экспериментальные исследования (механические испытания, удар, дефектоскопия)

При ударных испытаниях фрагмента сетчатой оболочки на копре с падающим грузом (рис. 10) в качестве подложки предложено использовать слой гофрокартона СОТОКОМ (поставщик КАТФУЛ [19]) суммарной толщиной 50 мм. Этот слой при сжатии Х-образного фрагмента сетчатой оболочки на испытательной машине даёт жёсткость $C \approx 0,205$ кН/мм, обеспечивая близкие к требуемым максимальное перемещение ударника и контактное усилие.

При испытаниях защитные элементы из АБС-пластика были закреплены на ребрах оборачиванием самоклеющейся ПХВ-лентой толщиной 100 мкм. Испытания проведены при энергии удара от 10 до 50 Дж. На рис.11 приведены фотографии образцов после испытаний. Ударные

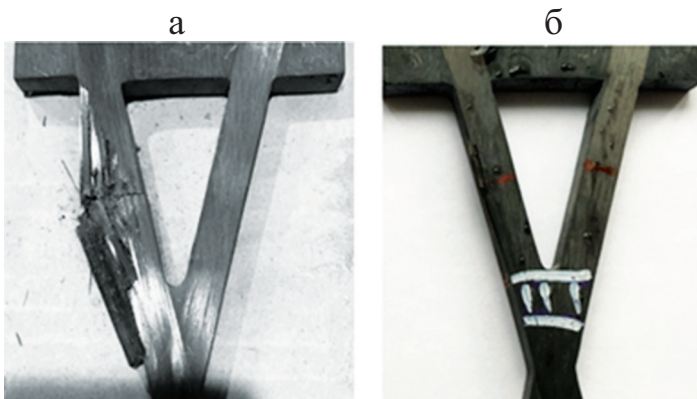


Рис. 11. Х-образные образцы после испытаний при ударе 30 Дж: без защитной прокладки (а) и с прокладкой толщиной 4 мм (б).

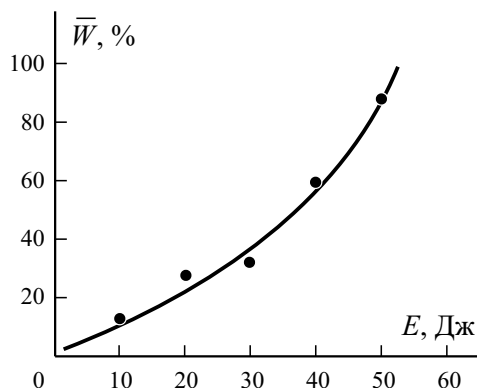


Рис. 12. Вес защитных элементов W (% от веса ребра), необходимый для обеспечения полной защиты ребра в зависимости от энергии удара. Точки — эксперимент.

испытания завершались исследованием повреждения образцов визуальным осмотром на предмет наружных трещин и ультразвуковым контролем (прибор SiteScan D-20 [21]).

На рис. 12 приведена зависимость веса защитных элементов, необходимых для обеспечения полной защиты (без внутренних повреждений ребра), от энергии падающего тела. Данная зависимость представляет собой аппроксимацию, полученную по экспериментальным данным, приведенным на графике. Экспериментальные значения для каждой точки были получены следующим образом. Образец с защитной прокладкой подвергался ударному воздействию с выбранным уровнем энергии по описанному методу, после чего проводили его неразрушающий контроль. В случае, если повреждения после удара не были обнаружены, образец подвергался сжимающему воздействию для определения остаточного модуля упругости (стандарт ASTM D7012). Если модуль упругости образца совпадал с неповрежденным в пределах погрешности $\pm 5\%$, он считался полностью неповрежденным. В этом случае испытания повторялись с аналогичным образцом на больший уровень энергии удара. В случае, если повреждения образца были незначительны, уменьшали толщину защитной прокладки и испытания повторялись для того же уровня энергии удара. Для каждого из испытанных образцов проводили взвешивание защитных элементов.

Получено, что для полной защиты однонаправленного композитного ребра от “сертификационного” удара с энергией 50 Дж потребуется “добавить” около 90% веса за счёт защитной прокладки (согласуется с результатами расчётов, п.2). Для защиты от удара 35 Дж необходима прокладка весом лишь 40% от веса ребра.

Выводы и задачи на будущее

По результатам проведенных расчётных и экспериментальных исследований эффективности защиты ребер сетчатой силовой структуры фюзеляжа

самолёта из однонаправленного углепластика от ударных воздействий, сделаны следующие выводы:

— установка защитной прокладки из АБС-термопласта позволяет обеспечить большее время контактного взаимодействия (растянуть ударный импульс) по сравнению с ударом без защиты, снизить контактные усилия и обеспечить высокий уровень защиты ребер от ударных повреждений;

— для полной защиты однонаправленного композитного ребра от “сертификационного” удара с энергией 50 Дж потребуется защитная прокладка весом около 90% от веса ребра, а для защиты от удара 35 Дж — лишь 40% от веса ребра;

— использование более сложной формы прокладки или выполнение 3D-печати с программируемыми внутренними полостями могут привести к снижению массы прокладки при сохранении необходимого уровня защиты.

Работа подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня “Сверхзвук” на 2020—2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение от 8 декабря 2020 г. № 075-11-2020-023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *David J. P., Azar J. J.* Aircraft structures. — 2nd ed. — 1982.
2. *Sun C. T., Adnan A.* Mechanics of aircraft structures. — John Wiley & Sons, 2021.
3. *Lang N. C., Kwon Y. W.* Investigation of the effect of metallic fuselage dents on compressive failure loads // *J. Aircraft.* — 2007. — Vol. 44, No. 6. — P. 2026—2033.
4. *Anghileri M. et al.* A survey of numerical models for hail impact analysis using explicit finite element codes // *Int. J. Impact Eng.* — 2005. — Vol. 31, No. 8. — P. 929—944.
5. *Zhou J. et al.* Low-velocity impact behavior and residual tensile strength of CFRP laminates // *Composites: Part B.* — 2019. — Vol. 161. — P. 300—313.
6. *Brostow W., Lobland H. E. H.* Brittleness of materials: implications for composites and a relation to impact strength // *J. Mater. Sci.* — 2010. — Vol. 45, No. 1. — P. 242—250.
7. *Lindsay T. C.* Designing composite structures for low-velocity impact. — Delaware Univ. Newark Center for Composite Materials, 1990.
8. *Heimbs S. et al.* Low velocity impact on CFRP plates with compressive preload: test and modelling // *Int. J. Impact Eng.* — 2009. — Vol. 36, No. 10—11. — P. 1182—1193.
9. URL: <https://patents.google.com/patent/RU2558493C1/en> (дата обращения: 12.07.2021)
10. *Zhang B. et al.* Blast response of hierarchical anisogrid stiffened composite panel: considering the damping effect // *Int. J. Mech. Sci.* — 2018. — Vol. 140. — P. 250—259.
11. *Baker D. et al.* Optimal design and damage tolerance verification of an isogrid structure for helicopter application // 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf. — 2004. — P. 1502.
12. URL: https://www.teijinacarbon.com/fileadmin/PDF/Datenbl%C3%A4tter_en/Product_Data_Sheet_TSG01en_EU_Filament_.pdf (дата обращения 12.07.2021)
13. *Molochov V. P.* Development of composite pressure vessels for space applications // *Mech. Compos. Mater. Constr.* — 2010. — Vol. 16, No. 4. — P. 587—596.

14. *Vasiliev V. V., Barynin V. A., Razin A. F.* Anisogrid composite lattice structures—Development and aerospace applications // *Compos. Struct.* — 2012. — Vol. 94, No. 3. — P. 1117—1127.

15. *Dubovikov E., Fomin V., Glebova M.* Damage tolerance and repair of UD-ribs of lattice composite fuselage structures // 30th Congr. Int. Council Aeronautical Sci. — 2016.

16. URL: <https://picaso-3d.ru/ru/> (дата обращения 12.07.2021)

17. URL: <https://picaso-3d.ru/ru/products/designer-pro-250/> (дата обращения 12.07.2021).

18. *Sapozhnikov S. B. et al.* Experimental and FEM short-term tensile strength assessment of U-and sharp V-notched specimens made of ductile material // *PNRPU Mech. Bullet.* — 2018. — No. 2. — P. 96—106.

19. URL: <http://cartful.ru/> (дата обращения 12.07.2021)

20. URL: <https://www.metrologyworld.com/doc/dynatup-9250-impact-tester-0001> (дата обращения 12.07.2021)

21. URL: https://sonatest.com/application/files/6015/0530/5482/Sitescan_D_Series_brochure.pdf (дата обращения 12.07.2021)

Поступила в редакцию 24.08.2021

Окончательный вариант поступил 22.11.2021

Received Aug. 24, 2021 (Nov. 22, 2021)

*А. В. Хохлов**

*НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, лаборатория
“Полимерные композиты для Севера”, Якутск, Россия*

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ СЛОЕВ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ, НАГРУЖЕННОЙ ВНУТРЕННИМ И ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

*A. V. Khokhlov**

CREEP AND LONG-TERM STRENGTH OF A LAMINATED THICK-WALLED TUBE OF NONLINEAR VISCOELASTIC MATERIALS LOADED BY EXTERNAL AND INTERNAL PRESSURES

Keywords: multilayer thick-walled tubes, nonlinear viscoelasticity, creep, rupture time, long-term strength curve, Rabotnov constitutive equation, relaxation modulus, integral equations, laminated composites

An exact solution to the creep and long-term strength problem for pressurized thick-walled tubes consisting of several layers of physically nonlinear viscoelastic materials obeying the Rabotnov constitutive equation with two arbitrary material functions for each layer (creep compliance and a function that governs the physical nonlinearity) was constructed and studied. All layer materials are homogeneous, isotropic, and incompressible, and the tube is loaded by internal and external pressures creating a plain strain state, i.e., zero axial displacements are given on the edge of tube cross sections. Closed expressions were found for displacement, strain, and stress fields in relation to the single unknown function of time and integral operators involving this function, pairs of (arbitrary) material functions of each tube layer, preset pressure values and ratios of tube layers radii, and an integral equation to determine this unknown function was derived. Expressions and three creep failure criteria with three

*Автор, с которым следует вести переписку: andrey-khokhlov@ya.ru
Corresponding author: andrey-khokhlov@ya.ru

measures of damage (the effective shear strain, the maximum shear strain, or the maximum principal strain) were used to derive formulas for the creep rupture time of a tube to mark the layer in which the fracture will occur earlier and to find a simple strength parameter for the tube (depending on layers thicknesses and their fracture strains) which should be increased to enhance its long-term strength. Assuming that the relaxation moduli of layer materials are proportional to a single (arbitrary) function of time and the material functions that govern the nonlinearity coincide with a power function with a positive exponent, an exact solution of the resolving functional equation was constructed. All integrals involved in the general representation of the tube stress field were calculated and reduced to simple algebraic formulas convenient for an analysis. Explicit formulas were derived for the creep rupture time of the tube, and closed equations for the long-term strength curves based on three creep failure criteria mentioned above were found. The general properties of the long-term strength curves were studied for arbitrary material functions of the constitutive relation and compared with each other. It is proved that the long-term strength curves (rupture time as a function of pressures difference) are decreasing and convex down and that their shape is controlled mainly by the compliance functions of layer materials rather than by the radii of tube layers and the nonlinearity of the governing physical function, because they influence only the factor responsible for the long-term strength in tension along the pressure axis.

Ключевые слова: трубы толстостенные, вязкоупругость нелинейная, ползучесть, время до разрушения, кривые длительной прочности, определяющее соотношение Работнова, функция нелинейности, уравнения интегральные, композиты слоистые

Построено и исследовано точное решение задачи о ползучести и длительной прочности толстостенной трубы, состоящей из нескольких слоев нелинейно-вязкоупругих изотропных материалов (полимеров, дисперсно-наполненных композитов, металлов и сплавов), каждый из которых подчиняется определяющему соотношению Работнова с разными парами произвольных материальных функций и постулату несжимаемости, при нагружении давлениями на внутренней и внешней поверхностях трубы и задании нулевого осевого перемещения на торцах трубы. Деформации и напряжения в любой точке трубы в любой момент времени выражены явными формулами (содержащими интегральные операторы) через одну функцию времени, которая находится из нелинейного интегрального уравнения, зависящего от материальных функций слоев трубы, их относительных толщин и заданных на границах трубы давлений. На их основе выведено уравнение для времени разрушения трубы при ползучести

для трех вариантов деформационного критерия разрушения. Указан слой, в котором произойдет разрушение в зависимости от заданных предельных значений деформации слоев и их относительных толщин, найдена простая расчетная характеристика трубы, которую следует повышать при проектировании слоев трубы, чтобы повысить ее длительную прочность. Для модели многослойной трубы с пропорциональными друг другу функциями сдвиговой релаксации материалов слоев и со степенной функцией нелинейности (с любым показателем) построено точное решение ключевого интегрального уравнения, вычислены все интегральные операторы и выведены простые алгебраические формулы для деформаций и напряжений в любой точке трубы в любой момент времени и для времени разрушения трубы при ползучести. Выведены уравнения кривых длительной прочности для трех вариантов деформационного критерия разрушения, аналитически исследованы их свойства. Доказано, что они убывают и выпуклы вниз, что их форма определяется в основном функцией ползучести материалов слоев и слабо зависит от материальной функции, задающей нелинейность, и от отношения радиусов слоев трубы (хотя от них и зависят время разрушения и слой, в котором оно произойдет).

Введение

Настоящая работа опирается на статьи [1, 2], в которых построено и аналитически исследовано точное решение квазистатической задачи об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) полого цилиндра из физически нелинейного несжимаемого однородного изотропного материала, подчиняющегося определяющему соотношению (ОС) вязкоупругости Работнова

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$L(t) := \Pi \sigma, \quad L_0(t) := \Pi_0 \sigma_0,$$

$$\Pi y = \int_0^t \Pi(t-\tau) dy(\tau), \quad \Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t-\tau) dy(\tau), \quad (2)$$

при нагружении внутренним и внешним давлениями, медленно меняющимися во времени, и задании нулевого осевого перемещения оснований цилиндра. Поля перемещений, деформаций и напряжений в любой момент времени выражены через одну функцию времени, которая находится в результате решения нелинейного функционального уравнения, содержащего материальные функции (МФ) ОС (1) и заданную нагрузку (см. далее). В частности, показано, что построенные поля деформаций и напряжений совпадают в частных случаях (при специальном выборе одной из МФ) с известными классическими решениями для несжимаемого материала в

рамках линейной теории вязкоупругости, упругости и упругопластичности с произвольным упрочнением [1].

ОС (1) содержит четыре произвольных МФ $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$ (функции сдвиговой и объемной ползучести), $\Phi(x)$, $\Phi_0(x)$ (функции нелинейности) и описывает изотермические процессы деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих материалов, связывая истории изменения тензоров напряжений $\sigma(t)$ и малых деформаций $\varepsilon(t)$ в точке тела; $\sigma_0 = \sigma_{ii}(t)/3$ — среднее напряжение, $\sigma = (1,5s_{ij}s_{ij})^{0,5}$ — интенсивность напряжений (второй инвариант девиатора $\mathbf{s} = \sigma - \sigma_0\mathbf{I}$). Напряжение и время считаются обезразмеренными.

В настоящей работе результаты [1, 2] использованы для построения точного решения задачи о ползучести и длительной прочности толстостенной трубы из нескольких слоев нелинейно-вязкоупругих несжимаемых материалов (например полимеров, дисперсно-наполненных композитов, металлов и сплавов), каждый из которых подчиняется ОС (1) с разными парами произвольных МФ $\{\Pi_i, \Phi_i\}$ (допущение о несжимаемости материала оставляет в ОС только две МФ — см. далее). В частности, любой из слоев может быть задан упругим, упругопластическим (с упрочнением, но без наследственных свойств, без ползучести) или линейно-вязкоупругим при надлежащем выборе МФ [1]. Основные задачи работы: 1) аналитически исследовать эволюцию деформированного состояния многослойной трубы в условиях ползучести под действием постоянных внутреннего и внешнего давлений, 2) получить общее выражение для времени разрушения трубы через величины давлений, толщины слоев, их МФ и предельные значения деформации для каждого слоя при использовании трех вариантов деформационного критерия разрушения (в качестве меры поврежденности выбраны интенсивность деформаций или максимальная деформация сдвига или растяжения), 3) вывести уравнения соответствующих кривых длительной прочности и аналитически исследовать их свойства при произвольных МФ ОС (1). Эти задачи не решены в общем виде даже для трубы из изотропного материала, подчиняющегося линейному ОС вязкоупругости с произвольными функциями сдвиговой и объемной ползучести, хотя задача о расчете толстой трубы в рамках теории упругости и упругопластичности является классической и хорошо исследована [3—6].

Статические и динамические задачи об НДС однородных полых цилиндров и многослойных толстостенных труб, нагруженных давлением на внутренней и внешней поверхностях, в рамках теории упругости (задача Ламе, задача Гадолина и др.) и разных вариантов упругопластичности являются классическими в силу обилия приложений их результатов (расчет артиллерийских стволов, газопроводов, шлангов, обделок туннелей, скважин, шахт, процессов запрессовки, проектирование труб и баллонов, расчет на ползучесть поверхностно упрочненных труб и труб, подвергающихся агрессивному воздействию среды, моделирование поведения кровеносных сосудов и т.п.) и благодаря возможности построить точное решение (при тех или иных упрощающих предположениях) или хотя бы достаточно

простой и эффективный аналитически проработанный алгоритм вычисления приближенного решения. Эти задачи хорошо исследованы (и продолжают активно исследоваться) в случае упругих и упругопластических изотропных и трансверсально-изотропных материалов без упрочнения и с линейным упрочнением [3—15] и в теории установившейся ползучести (как правило, для степенной зависимости скорости ползучести от напряжения) [16—19]. Строили и решения в рамках линейной вязкоупругости, но, как правило, не для произвольных функций сдвиговой и объемной ползучести, а только для их конкретных классов, задаваемых конечным набором параметров (например, задаваемых конечными суммами экспонент, т.е. рядами Прони) и в пространстве преобразований Фурье или Лапласа (Лапласа—Карсона) [20—23], нередко — без восстановления оригиналов (из-за сложности или невозможности точного восстановления). При этом в большинстве случаев используется одно из трех дополнительных упрощающих допущений, позволяющих (в частности) уменьшить количество независимых материальных функций: 1) о несжимаемости материала, 2) о линейно-упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения (т.е. об отсутствии объемной ползучести), 3) о независимости коэффициента Пуассона от времени. Качественные свойства построенных полей деформаций и напряжений не подвергали системному аналитическому исследованию в общем виде при произвольных МФ, а, как правило, рассчитывали на компьютерах для конкретных функций релаксации с несколькими параметрами. В случае нелинейной вязкоупругости построение решений резко усложняется из-за несправедливости принципа соответствия Вольтерры и неприменимости классических интегральных преобразований.

1. Определяющее соотношение Работнова, ограничения на материальные функции

Нелинейное ОС (1) — один из простейших вариантов обобщения одноосного соотношения Работнова [23—27, 17, 21] с двумя МФ $\varphi(u)$, $\Pi(t)$ ($\varphi = \Phi^{-1}$)

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t > 0, \quad (3)$$

на сложное напряженное состояние в предположениях изотропности и тензорной линейности материала, отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров (независимости объемной деформации $\theta = \varepsilon_{ii}(t)$ от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций — от σ_0) и пренебрежения влиянием их третьих инвариантов. Данная работа продолжает цикл [28—31] по системному аналитическому изучению ОС (1) с целью выявления комплекса моделируемых ОС (1) реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния его МФ и феноменологических ограничений на них, разработки способов идентификации,

верификации и настройки ОС. Такой анализ до сих пор не был проведен для ОС (1). Подробные обзоры литературы и областей приложения ОС (3) приведены в [29—31].

Одноосное ОС (3) предложено Ю. Н. Работновым для описания нелинейной ползучести как обобщение одномерного линейного ОС вязкоупругости

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) = \mathbf{P}\sigma, \quad \sigma(t) = \int_0^t \mathbf{R}(t - \tau) d\varepsilon(\tau) = \mathbf{R}\varepsilon, \quad t > 0, \quad (4)$$

посредством введения дополнительной МФ $\varphi(u)$ [23—26, 17, 21]. В (4) и (3) функции ползучести и релаксации $\Pi(t)$, $R(t)$, связаны интегральным уравнением

$$\mathbf{R}\Pi = h(t), \text{ или } \mathbf{P}R = h(t), \quad t > 0 \quad (5)$$

($h(t)$ — функция Хевисайда), выражающим условие взаимной обратности операторов (4) и (3) [19]. В англоязычных работах ОС (3) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости (QLV), а его автором считается Y. C. Fung [32—41]. В работах [17, 21, 23—27] и др. ОС (3) применяли к описанию одномерного поведения графита, металлов и сплавов, композитов, а в [32—41] — связок, сухожилий и других биологических тканей.

В одномерном случае (3) обратное ОС имеет вид $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$ (композиция оператора действия функции φ и линейного оператора \mathbf{R} из (4)). Обращение трехмерного ОС (1) для любых возрастающих МФ Φ и Φ_0 —

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_0\varphi_0(\theta), \quad \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon), \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon(t)^{-1}e_{ij}(t), \quad (6)$$

где $\varphi = \Phi^{-1}$, $\varphi_0 = \Phi_0^{-1}$, $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0\mathbf{I}$ и $\varepsilon = (\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij})^{0.5}$ — девиатор и интенсивность деформаций, а функции релаксации $R(t)$, $R_0(t)$ связаны с Π и Π_0 уравнениями вида (5). Из трех МФ φ , Π , R в ОС (3) лишь две независимы, а в ОС (1) — четыре независимых МФ.

На функции ползучести и релаксации в ОС (1) (или (6)) наложим те же минимальные ограничения, что и в линейной теории вязкоупругости [42, 43]: $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$, $R(t)$, $R_0(t)$ предполагаем положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, функции Π и Π_0 — возрастающими и выпуклыми вверх, а R и R_0 — убывающими и выпуклыми вниз на $(0; \infty)$, R и R_0 могут иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в точке $t = 0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$, $\delta(t)$ — дельта-функция). Из этих условий следует существование предела $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$ ($y(0) := y(0+)$ — предел функции $y(t)$ справа в точке $t = 0$). На МФ φ и φ_0 в ОС (6) и на МФ Φ и Φ_0 в ОС (1) наложим следующие минимальные требования [29—31]: функция $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(0; \omega)$, $\omega > 0$, а $\varphi_0(u)$ — на множестве $(\omega_-; 0) \cup (0; \omega_+)$ (где $\omega_- \omega_+ < 0$), причем $\varphi(0+) = 0$ и $\varphi_0(0+) = \varphi_0(0-) = 0$ (иначе процессу $\varepsilon(t) \equiv 0$ соответствует ненулевой отклик $\sigma(t)$). Из возрастания φ и φ_0 следует существование обратных функций $\Phi(x) = \varphi^{-1}$, $x \in (0; X)$, $X := \sup \varphi(u)$ и $\Phi_0(x) = \varphi_0^{-1}$, $x \in (\underline{x}; \bar{x})$, где $\underline{x} = \varphi_0(\omega_- + 0)$, $\bar{x} = \varphi_0(\omega_+ - 0)$, и обратимость ОС (1). При-

меры семейств функций, которые удобно использовать для задания МФ Φ , Φ_0 или φ , φ_0 , приведены в [29—31].

Отметим, что ОС (1) (т.е. (6)) с $\varphi(x) = x$, $\varphi_0(x) = x$ в трехмерном случае не совпадает с линейным ОС вязкоупругости для изотропных сред

$$s_{ij}(t) = \frac{2}{3} \mathbf{R} e_{ij}, \quad \sigma_0 = \mathbf{R}_0 \theta, \quad (7)$$

так как ОС (7) не обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров деформаций и напряжений в случае сложных нагружений. Эти два ОС совпадают лишь на множестве процессов простых нагружений $\sigma_{ij} = \gamma(t) \bar{\sigma}_{ij}$ (или простых деформирований $\varepsilon_{ij} = \gamma(t) \bar{\varepsilon}_{ij}$), где $\dot{\gamma} > 0$, а $\bar{\sigma}$ — постоянный тензор, на которых ОС (7) обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров. Из построенного в [1] решения задачи об НДС трубы следует, что в любой точке трубы реализуется процесс простого деформирования, и потому НДС для ОС (1) с МФ $\varphi(x) = Ax$ совпадает с НДС для линейно-вязкоупругой несжимаемой среды [1].

Если задать ФП постоянной (пренебечь сдвиговой ползучестью), то ОС (1) для несжимаемого материала вырождается в ОС для упрочняющегося упругопластического несжимаемого материала (без наследственности) с произвольной МФ $\Phi(x)$, связывающей интенсивности напряжений и деформаций в точности так, как в деформационной теории пластичности, а построенное решение задачи об НДС трубы из материала, подчиняющегося ОС (1), превращается (как показано в [1]) в классическое решение [3—6].

2. Постановка и решение задачи для однородной толстостенной трубы

Рассмотрим задачу об определении НДС полого цилиндра из наследственного несжимаемого материала, подчиняющегося ОС (1) с произвольными материальными функциями, под действием давлений $p_1(t)$ и $p_2(t)$, заданных на внутренней и внешней поверхности цилиндра при $t > 0$. Считаем, что давления меняются медленно: так, чтобы влиянием инерционных членов в уравнениях движения можно было пренебечь (квазистатическая постановка). Будем использовать цилиндрическую систему координат, ось z направим вдоль оси цилиндра. Пусть r_1 и r_2 — внутренний и внешний радиусы ненагруженного цилиндра (при $t = 0$). Тогда краевые условия будут иметь вид

$$\sigma_r |_{r_1} = -p_1(t), \quad \sigma_r |_{r_2} = -p_2(t), \quad \sigma_{r\theta} |_{r_1} = \sigma_{rz} |_{r_1} = 0, \quad \sigma_{r\theta} |_{r_2} = \sigma_{rz} |_{r_2} = 0. \quad (8)$$

Задача осесимметрична, и в любой точке (r, θ, z) в любой момент времени все компоненты перемещений, деформаций и напряжений не зависят от угла θ и

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &\equiv 0, \quad \sigma_{\theta z} \equiv 0, \quad u_\theta \equiv 0, \\ \varepsilon_\theta(r, t) &= r^{-1}(u_{\theta,\theta} + u_r) = r^{-1}u_r, \quad \varepsilon_r(r, t) = u_{r,r}, \quad \varepsilon_z(r, t) = u_{z,z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Предполагаем, что труба закреплена на торцах так, что $u_z = 0$ и касательные напряжения на торцах отсутствуют: $\sigma_{z\theta} = 0\varphi$ и $\sigma_{rz} = 0$. Тогда труба находится в состоянии плоской деформации, u_r и σ_z не зависят от z и (помимо (9)) справедливы равенства

$$\sigma_{rz} \equiv 0, S_\theta(x) > S_z(x) > S_r(x), \varepsilon_{r\theta} \equiv 0, \varepsilon_z \equiv 0, u_z \equiv 0,$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}(u_{r,z} + u_{z,r}) \equiv 0, \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}(u_{\theta,z} + r^{-1}u_{z,\theta}) \equiv 0.$$

Поэтому тензоры деформаций и напряжений диагональны: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{diag}\{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{diag}\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z\}$, а зависимости ненулевых компонент от координат имеют вид $u_r(r, t)$, $\varepsilon_r(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$, $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_\theta(r, t)$, $\sigma_z(t)$. Будем считать материал несжимаемым. Тогда $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{s} := \mathbf{diag}\{\sigma_r - \sigma_0, \sigma_\theta - \sigma_0, \sigma_z - \sigma_0\}$, а ОС (1) (и обратное ему ОС (6)) сводится к одномерному ОС $\boldsymbol{\varepsilon} = \Phi(\Pi\boldsymbol{\sigma})$ с двумя МФ (Φ , Π или φ , R), связывающему интенсивности напряжений и деформаций, и условию подобия девиаторов (6): $s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t)^{-1}e_{ij}(t)$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon})$ (первое уравнение ОС (6) не используем, и среднее напряжение σ_0 находим из решения краевой задачи, как обычно бывает при допущении несжимаемости).

В работе [1] (в предположениях плоской деформации трубы и однородности, изотропности и несжимаемости материала) поля перемещений, деформаций и напряжений в трубе из материала, подчиняющегося ОС (1) с двумя произвольными МФ $\Pi(t)$ и $\Phi(x)$ (или $R(t)$ и $\varphi(x)$ в (6)) выражены через одну (искомую) функцию времени $y(t)$:

$$u_r(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2}y(t)r_1/\bar{r}, \quad u_\theta \equiv 0, \quad u_z \equiv 0, \quad (10)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2}y(t)\bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_r(r, t) = -\varepsilon_\theta(r, t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}y(t)\bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_z \equiv 0, \quad (11)$$

$$\sigma_r(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2)], \quad (12)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) + 2\varphi(|y(t)|/\bar{r}^2)], \quad (13)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) + \varphi(|y(t)|/\bar{r}^2)]. \quad (14)$$

При этом $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$ и $\sigma_0 = \sigma_z$. Интенсивности деформаций и напряжений —

$$\boldsymbol{\varepsilon}(r, t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\varepsilon}_\theta = |y(t)|/\bar{r}^2, \quad \boldsymbol{\sigma}(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_r - \sigma_\theta| = \mathbf{R}\boldsymbol{\varphi}(|y(t)|/\bar{r}^2). \quad (15)$$

В формулах (10)–(15) $\bar{r} := r/r_1 \in [1, r_2/r_1]$, $z(t) = \text{sgn } p(t)$, $p(t) := p_1(t) - p_2(t)$,

$$F(s) := \int_0^s \varphi(x)x^{-1}dx, \quad s > 0 \quad (16)$$

(из $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$ следует возрастание $F(s)$), а $y(t)$ — решение уравнения

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(q|y(t)|)], \quad (17)$$

или эквивалентного ему уравнения

$$F(Y(t)) - F(qY(t)) = P(t), \quad P(t) := \sqrt{3}\Pi[zp(t)] = \sqrt{3}\Pi|p(t)|, \quad t > 0. \quad (18)$$

Здесь $Y := |y(t)|$, $q := (r_1/r_2)^2 \in (0;1)$, а $P(t)$ — известная функция, если задана функция ползучести и разность давлений $p(t)$. Из (15) и (11) следует, что $Y(t) = \varepsilon(t, r_1) = \varepsilon(t, r_2) / q$ — интенсивность деформаций, а $y(t)$ — измеримая в испытаниях физическая величина, пропорциональная окружной деформации на поверхности трубы: $y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_\theta(r_2, t) / q$. Интеграл от на-

пряжения (13) по отрезку $[r_1, r_2]$ равен $p_1(t)r_1 - p_2(t)r_2$, т.е. выполнено условие равновесия половины трубы в проекции на ось, ортогональную z .

После определения $y(t)$ из уравнения (18) (в общем случае приближённого, хотя в [1] получено и аналитическое решение для важного класса МФ) можно вычислить поля перемещений и напряжений (10)—(14). В [1] исследованы свойства НДС (11)—(14).

В случае ОС (1) с ФР $R(t) = E = \text{const}$ и произвольной МФ φ общее решение (12), (11) превращается в решение для случая нелинейной упругости материала (или упругопластичности при активном нагружении), поскольку МФ φ связывает интенсивности деформаций и напряжений в точности так, как в деформационной теории пластичности, и задает упрочнение материала. Действие оператора \mathbf{R} на произвольную функцию (см. (2)) сводится к умножению на E и формулы (12)—(14) упростятся и совпадут с классическими решениями [3—6]. Если дополнительно $\varphi(x) = x$, то $F(s) = s$ и поле напряжений совпадет с решением квазистатической задачи в рамках линейной теории упругости:

$$\sigma_r = -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} E (q - \bar{r}^{-2}) y(t),$$

$$\sigma_\theta = -p_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} E (q + \bar{r}^{-2}) y(t), \quad \sigma_z = -p_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} E q y(t).$$

3. Решение задачи о нагружении давлениями двухслойной трубы

При тех же основных допущениях (несжимаемость материала, плоская деформация, те же краевые условия) рассмотрим квазистатическую задачу об определении напряжений и деформаций в трубе, состоящей из двух слоев разных однородных изотропных вязкоупругих материалов (с радиусами границ r_0, r_1, r_2), каждый из которых подчиняется нелинейному ОС (1) (т.е. (6)) с разными (произвольными) парами МФ $\{R_i, \varphi_i\}$, $i = 1, 2$, под действием давлений $p_0(t)$ и $p_2(t)$, $t > 0$, заданных на вну-

тренней и внешней поверхности трубы (при $r = r_0$ и $r = r_2$). Считаем, что давления меняются медленно: так, что влиянием инерционных членов в уравнениях движения можно пренебречь.

Пусть $p_1(t) = -\sigma_r(r_1, t)$ — неизвестное давление на границе слоев $r = r_1$ (поверхностная плотность силы их контактного взаимодействия). Для каждого слоя справедливы формулы (10)—(18) с заменой МФ R, φ на $\{R_i, \varphi_i\}$, $y(t)$ — на $y_i(t)$ (а для внутреннего слоя еще нужно пару радиусов r_1, r_2 заменить на r_0, r_1). Интегральное уравнение (17) для искомой функции $y_i(t)$ каждого слоя имеет вид

$$p_0 - p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_1(t) \mathbf{R}_1 [F_1(|y_1(t)|) - F_1(q_1 |y_1(t)|)], \quad (19)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_2(t) \mathbf{R}_2 [F_2(|y_2(t)|) - F_2(q_2 |y_2(t)|)], \quad (20)$$

где $z_1(t) = \text{sgn}(p_0(t) - p_1(t))$, $z_2(t) = \text{sgn}(p_1(t) - p_2(t))$, $q_1 := (r_0/r_1)^2$,

$q_2 := (r_1/r_2)^2$, $q_i \in (0; 1)$, а радиальное перемещение (10) в любой точке трубы —

$$u(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-1} y_1(t), \quad r \in [r_0, r_1], \quad u(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_1^2 r^{-1} y_2(t), \quad r \in [r_1, r_2] \quad (u_\theta \equiv 0, \quad u_z \equiv 0) \quad (21)$$

Так как касательные напряжения и перемещения равны нулю, условия сопряжения на границе слоев $r = r_1$ — непрерывность $\sigma_r(r_1, t)$ (уже использована в (19), (20)) и перемещения (21), т.е. тождество $r_0^2 y_1(t) = r_1^2 y_2(t)$, или

$$y_2(t) = q_1 y_1(t). \quad (22)$$

Определив функции $p_1(t)$, $y_1(t)$ и $y_2(t)$ из системы уравнений (19), (20), (22), можно вычислить поля перемещений, деформаций и напряжений по формулам (10)—(14) для каждого слоя трубы. Эту систему можно решить методом исключения неизвестных и свести к одному интегральному уравнению для $y = y_1(t)$. Для упрощения формул будем рассматривать случай нагрузки $p_0(t) \geq p_2(t)$, $t > 0$, когда $z_i(t) = 1$, $y_i(t) \geq 0$. Сложим (19) и (20) (исключая $p_1(t)$) и подставим (22):

$$\mathbf{R}_1 [F_1(y(t)) - F_1(q_1 y(t))] + \mathbf{R}_2 [F_2(q_1 y(t)) - F_2(q_1 q_2 y(t))] = \sqrt{3} (p_0 - p_2). \quad (23)$$

После определения $y(t)$ из интегрального уравнения (23) (в общем случае приближенного, хотя далее будет получено и аналитическое решение для одного класса МФ) можно вычислить $y_2(t)$ и $p_1(t)$ по формулам (22), (19) (или (20)) и поля перемещений, деформаций и напряжений в каждом слое трубы по (10)—(14):

$$p_1(t) = p_0(t) - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1 [F_1(y(t)) - F_1(q_1 y(t))] =$$

$$= p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(q_1 y(t)) - F_2(q_2 q_1 y(t))], \quad (24)$$

$$u(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-1} y(t) \text{ при } r \in [r_0, r_1] \cup [r_1, r_2], t > 0, u \equiv 0, u_z \equiv 0, \quad (25)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-2} y(t), \varepsilon_r(r, t) = -\varepsilon_\theta(r, t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-2} y(t), \varepsilon_z \equiv 0 \quad (26)$$

(в силу (22) формулы (21) сливаются). По (12)—(14) напряжения в каждом слое трубы выражаются разными формулами (через свою пару МФ): при $r \in [r_0, r_1]$

$$\sigma_r(r, t) = -p_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1 [F_1(y(t)) - F_1(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad (27)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1 [F_1(y(t)) - F_1(y(t) r_0^2 r^{-2}) + 2\varphi_1(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad (28)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1 [F_1(y(t)) - F_1(y(t) r_0^2 r^{-2}) + \varphi_1(y(t) r_0^2 r^{-2})]; \quad (29)$$

а при $r \in (r_1, r_2]$ —

$$\sigma_r = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(q_1 y(t)) - F_2(q_1 y(t) r_1^2 r^{-2})],$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(q_1 y(t)) - F_2(q_1 y(t) r_1^2 r^{-2}) + 2\varphi_2(q_1 y(t) r_1^2 r^{-2})],$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(q_1 y(t)) - F_2(q_1 y(t) r_1^2 r^{-2}) + \varphi_2(q_1 y(t) r_1^2 r^{-2})];$$

подстановка $q_1 r_1^2 = r_0^2$, $q_2 q_1 = r_0^2 r_2^{-2}$ и второго выражения (24) для $p_1(t)$ дает

$$\sigma_r(r, t) = -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(r_0^2 r_2^{-2} y(t)) - F_2(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad (30)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(r_0^2 r_2^{-2} y(t)) - F_2(y(t) r_0^2 r^{-2}) + 2\varphi_2(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad (31)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2 [F_2(r_0^2 r_2^{-2} y(t)) - F_2(y(t) r_0^2 r^{-2}) + \varphi_2(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad (32)$$

где $y(t)$ — решение уравнения (23). Интенсивность напряжений вычисляем по (15):

$$\sigma(r, t) = \mathbf{R}_1 [\varphi_1(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad r \in [r_0, r_1], \quad (33)$$

$$\sigma(r, t) = \mathbf{R}_2 [\varphi_2(y(t) r_0^2 r^{-2})], \quad r \in (r_1, r_2].$$

Радиальное напряжение (как и деформации) непрерывно на границе слоев $r = r_1$, а окружное и осевое напряжения, вообще говоря, имеют разрыв

первого рода. Вычислим их скачки в точке $r = r_1$. Из (29) и (32) при $r = r_1$ получим

$$\begin{aligned} \sigma_z(r_1 - 0, t) &= -p_0(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1[F_1(y(t)) - F_1(q_1 y(t))] + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1[\varphi_1(q_1 y(t))], \\ \sigma_z(r_1 + 0, t) &= -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2[F_2(q_1 q_2 y(t)) - F_2(q_1 y(t))] + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2[\varphi_2(q_1 y(t))], \\ \sigma_z(r_1 + 0, t) - \sigma_z(r_1 - 0, t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2[\varphi_2(q_1 y(t))] - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1[\varphi_1(q_1 y(t))], \quad t > 0, \end{aligned} \quad (34)$$

поскольку сумма всех остальных слагаемых тождественно равна нулю в силу (23). Скачок (34) зависит от времени и может обращаться в нуль в некоторые моменты. Аналогично вычисляем скачок окружного напряжения на границе слоев $r = r_1$:

$$\sigma_\theta(r_1 + 0, t) - \sigma_\theta(r_1 - 0, t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_2[\varphi_2(q_1 y(t))] - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{R}_1[\varphi_1(q_1 y(t))], \quad t > 0. \quad (35)$$

В любой момент времени он в два раза больше скачка осевого напряжения (34). Скачок интенсивности напряжений (33) в $\sqrt{3}$ раз больше скачка (34).

4. Решение задачи о ползучести трубы из материалов с пропорциональными функциями релаксации и степенной функцией нелинейности

В случае $R_i = G_i R(t)$ уравнение (23) принимает вид

$$\mathbf{R}[G_1 F_1(y(t)) - G_1 F_1(q_1 y(t)) + G_2 F_2(q_1 y(t)) - G_2 F_2(q_1 q_2 y(t))] = \sqrt{3}(p_0 - p_2).$$

Применив обратный \mathbf{R} оператор Π , получим функциональное уравнение для $y(t)$

$$\begin{aligned} G_1 F_1(y(t)) - G_1 F_1(q_1 y(t)) + G_2 F_2(q_1 y(t)) - G_2 F_2(q_1 q_2 y(t)) &= P(t), \\ P(t) &:= \sqrt{3} \Pi p(t). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $P(t) \geq 0$ — известная функция, если задана опорная функция релаксации $R(t)$ (и следовательно, функция ползучести, связанная с ней интегральным уравнением (5)) и разность давлений $p = p_0(t) - p_2(t) \geq 0$, $t > 0$ (например, в задаче о ползучести трубы при постоянной при $t > 0$ нагрузке $p(t) = \bar{p}h(t)$ имеем $P(t) = \sqrt{3} \bar{p} \Pi(p)$).

Рассмотрим двухслойную трубу из материалов с МФ

$$R_i = G_i R(t), \quad \varphi_i(x) = Ax^\alpha, \quad \alpha, A > 0, \quad G_i > 0, \quad (37)$$

где функция $R(t)$ (положительная, убывающая, выпуклая вниз) и показатель степени произвольны. Модель (37) обеспечивает классическую сте-

пенную зависимость кривых ползучести (и скорости ползучести) каждого материала от уровня напряжения (от его интенсивности при трехосном НДС) [29] и степенную аппроксимацию диаграмм деформирования [31]. В частности, при $R(t) = \text{const}$ получим слой упругопластических материалов со степенной функцией упрочнения и разными модулями сдвига.

Построим аналитическое решение ключевого интегрального уравнения (23), вычислим все интегральные операторы, входящие в общее представление для поля напряжений (27)—(32), и выведем простые алгебраические формулы для деформаций и напряжений в любой точке трубы. По (16) $F_i(s) = A\alpha^{-1}s^\alpha$, и уравнение (36) упрощается:

$$W y(t)^\alpha = P(t), \quad W := A\alpha^{-1}[G_1(1 - q_1^\alpha) + G_2q_1^\alpha(1 - q_2^\alpha)].$$

Здесь $W(q_1, q_2, \alpha) > 0$, так как $q_i \in (0; 1)$ и $q_i^\alpha \in (0; 1)$ при $\alpha > 0$, и решение $y(t)$ находим аналитически для произвольных функции релаксации в (37) и нагружения $p(t) \geq 0$:

$$y(t) = a(q_i, G_i, \alpha)P(t)^{1/\alpha} = [\sqrt{3}W^{-1}p\Pi(t)]^{1/\alpha}, \quad a(q_i, G_i, \alpha) = W^{-1/\alpha} > 0, \quad t > 0. \quad (38)$$

Подстановка $y(t)$ в формулы (25), (26) дает выражения

$$u(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} a(q_i, G_i, \alpha) r_0^2 r^{-1} P(t)^{1/\alpha} \quad \text{при } r \in [r_0, r_1] \cup [r_1, r_2], \quad (39)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = u / r = \frac{\sqrt{3}}{2} a r_0^2 r^{-2} P(t)^{1/\alpha}, \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta, \quad \varepsilon = a r_0^2 r^{-2} P(t)^{1/\alpha} \quad (40)$$

для перемещения и деформаций. Их зависимость от времени полностью определяется функцией $P(t)^{1/\alpha}$, зависящей от программы нагружения $p(t)$ и функции релаксации $R(t)$. Влияние относительных толщин слоев трубы характеризуется множителем $a(q_i, G_i, \alpha)$ из (38). При фиксированном t модули деформаций (40) — убывающие функции r .

Однородность функций φ_i в (37) и $F_i = \varphi_i(x) / \alpha$ позволяет вычислить все интегральные операторы в формулах (27)—(32) и получить для напряжений в любой точке трубы простые алгебраические формулы. Сначала необходимо вычислить функции, на которые действуют операторы $\mathbf{R}_i = G_i \mathbf{R}$ в (27)—(32):

$$F_1(y(t)) = A\alpha^{-1}a^\alpha P(t) = w(q_1, q_2, \alpha)P(t),$$

где

$$w = [G_1(1 - q_1^\alpha) + G_2q_1^\alpha(1 - q_2^\alpha)]^{-1} = A(W\alpha)^{-1},$$

$$F_1(y(t)r_0^2 r^{-2}) = w r_0^{2\alpha} r^{-2\alpha} P(t), \quad \varphi_1(y(t)r_0^2 r^{-2}) = \alpha w r_0^{2\alpha} r^{-2\alpha} P(t), \quad (41)$$

$$F_1(y(t)) - F_1(y(t)r_0^2 r^{-2}) = w(1 - r_0^{2\alpha} r^{-2\alpha})P(t),$$

$$F_1(y(t)) - F_1(y(t)r_0^2 r^{-2}) + 2\varphi_1(y(t)r_0^2 r^{-2}) = w[1 + (2\alpha - 1)r_0^{2\alpha} r^{-2\alpha}]P(t), \quad (41)$$

$$F_1(y(t)) - F_1(y(t)r_0^2 r^{-2}) + \varphi_1(y(t)r_0^2 r^{-2}) = w[1 + (\alpha - 1)r_0^{2\alpha} r^{-2\alpha}]P(t).$$

Все функции пропорциональны $P(t)$, и вычисление всех интегральных операторов $\mathbf{R}_1 = G_1 \mathbf{R}$ в (27)–(29) сводится к вычислению образа $\mathbf{R}_1 P(t) = G_1 \mathbf{R} P(t) = \sqrt{3} G_1 \mathbf{R} \Pi p(t) = \sqrt{3} G_1 p(t)$ (поскольку $\mathbf{R} \Pi = \mathbf{I}$) и умножению на выражение, не зависящее от времени. Поэтому формулы (27)–(29) для напряжений при $r \in [r_0, r_1)$ принимают вид

$$\sigma_r(r, t) = -p_0(t) + G_1 w [1 - (r / r_0)^{-2\alpha}] p(t), \quad (42)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_0(t) + G_1 w [1 + (2\alpha - 1)(r / r_0)^{-2\alpha}] p(t), \quad (43)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_0(t) + G_1 w [1 + (\alpha - 1)(r / r_0)^{-2\alpha}] p(t). \quad (44)$$

В этих формулах $w(q_i, G_i, \alpha) > 0$, поскольку $q_i \in (0; 1)$ и $q_1^\alpha \in (0; 1)$ при $\alpha > 0$. Из (41) также следует оценка $w > 1 / (G_1 + q_1^\alpha G_2)$.

Так как у модели (37) $F_1(x) = F_2(x)$, то вычисление напряжений при $r \in (r_1, r_2]$ по формулам (30)–(32) отличается только множителем в операторе $\mathbf{R}_2 = G_2 \mathbf{R}$ и наличием множителя $r_0^2 r_2^{-2} = q_1 q_2$ в аргументе функции $F_2(s) = A\alpha^{-1} s^\alpha$ в первом слагаемом под знаком оператора в каждой из формул (30)–(32). Постоянный множитель $(q_1 q_2)^\alpha$ выносится из оператора, и потому при $r \in (r_1, r_2]$

$$\sigma_r(r, t) = -p_2(t) + G_2 w q_1^\alpha q_2^\alpha [1 - (r / r_2)^{-2\alpha}] p(t), \quad (45)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_2(t) + G_2 w q_1^\alpha q_2^\alpha [1 + (2\alpha - 1)(r / r_2)^{-2\alpha}] p(t), \quad (46)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_2(t) + G_2 w q_1^\alpha q_2^\alpha [1 + (\alpha - 1)(r / r_2)^{-2\alpha}] p(t). \quad (47)$$

Функции релаксации и ползучести модели (37) не входят в формулы для напряжений (42)–(47), т.е. напряжения не зависят от наследственных свойств материала и предыстории нагружения, а зависят лишь от величин давлений $p_i(t)$ в данный момент времени (для модели (37) напряжения такие же, как в квазистатической задаче для трубы из нелинейно-упругого материала). Для произвольных функций нелинейности это не так: напряжения зависят от наследственных свойств материала и предыстории нагружения.

Зависимости напряжений (42)–(47) от r (интервалы монотонности и выпуклости, наличие точек экстремума) в любой момент времени определяются поведением функций

$$S_r(x) = 1 - x^{-2\alpha}, \quad S_z(x) = 1 + (\alpha - 1)x^{-2\alpha}, \quad S_\theta(x) = 1 + (2\alpha - 1)x^{-2\alpha}$$

($x = r/r_0 \geq 1$ для $r \in [r_0, r_1]$ и $x = r/r_2$, $0 < r_1/r_2 \leq x \leq 1$ для $r \in [r_1, r_2]$), поскольку $w > 0$, $q_i > 0$, $G_i > 0$ и $p(t) \geq 0$, т.е. полностью определяются величиной α и знаком $x - 1$. На знак напряжений еще влияют отношения $p_2(t)/p_0(t)$ и q_i .

Поскольку $S_\theta(x) > S_z(x) > S_r(x)$ при $\alpha > 0$, $S_r(x) > 0$ при $x > 1$ и $S_r(x) < 0$ при $x < 1$, то из (42)—(47) в любой момент времени, когда $p(t) > 0$, следуют неравенства

$$\sigma_\theta(r, t) > \sigma_z(r, t) > \sigma_r(r, t), \quad -p_0(t) < \sigma_r(r, t) < -p_2(t) \leq 0, \quad r \in (r_0, r_1) \cup (r_1, r_2).$$

Так как $\alpha > 0$ и $S_r(x)$ возрастает при $x > 0$, то в любой момент времени, когда $p(t) > 0$, напряжение $\sigma_r(r)$ возрастает по r (а $|\sigma_r(r)|$ убывает). Осевое напряжение $\sigma_z(r)$ в любой момент времени (когда $p(t) > 0$) возрастает по r на каждом из интервалов (r_0, r_1) и (r_1, r_2) , если $\alpha \in (0; 1)$ (как и функция $S_z(x)$), убывает, если $\alpha > 1$, и постоянно по сечению лишь при $\alpha = 1$ (т.е. в случае линейно-вязкоупругого материала). Окружное напряжение (43), (46) возрастает на каждом из интервалов (r_0, r_1) и (r_1, r_2) , если $\alpha \in (0; 0,5)$, убывает, если $\alpha > 0,5$, и не зависит от координат при $\alpha = 0,5$. Так как при любом $\alpha > 0$ в любой момент времени $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_\theta(r, t)$, $\sigma_z(r, t)$ монотонны по r , то наибольшее и наименьшее значения они принимают на границах слоев при $r = r_i$.

Интенсивность напряжений (и максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}(r, t) = \sigma(r, t) / \sqrt{3}$) выразим по формуле (33) как

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{3}G_1\alpha w p(t) (r/r_0)^{-2\alpha}, \quad r \in [r_0, r_1], \\ \sigma &= \sqrt{3}G_2\alpha w p(t)(r/r_0)^{-2\alpha}, \quad r \in (r_1, r_2]. \end{aligned} \tag{48}$$

При любом $\alpha > 0$ в любой момент времени, кроме тех, когда $p(t) = 0$, интенсивность напряжений убывает по r на каждом из двух интервалов, максимальна на внутренней границе каждого слоя и при $r = r_1$ имеет скачок $\bar{\sigma}(t) = \sqrt{3}(G_2 - G_1)\alpha w(q_i, G_i, \alpha)q_1^\alpha p(t)$.

Поэтому максимальное значение интенсивности напряжений в сечении трубы равно

$$\sigma_{\max} = \sqrt{3}\alpha w p(t) \max\{G_1, G_2q_1^\alpha\}.$$

Формулы (34), (35) для скачков осевого и окружного напряжений на границе слоев трубы $\bar{\sigma}_z(t)$ и $\bar{\sigma}_\theta(t)$ дают для модели (37) $\bar{\sigma}_z(t) = \bar{\sigma}(t) / \sqrt{3}$, $\bar{\sigma}_\theta(t) = 2\bar{\sigma}_z(t)$.

При $\alpha = 1$ (т.е. в случае линейно-вязкоупругих материалов) все компоненты тензора напряжений (42)—(47) совпадают с решением задачи для трубы из несжимаемых линейно-упругих материалов, в частности σ_z не зависит от r .

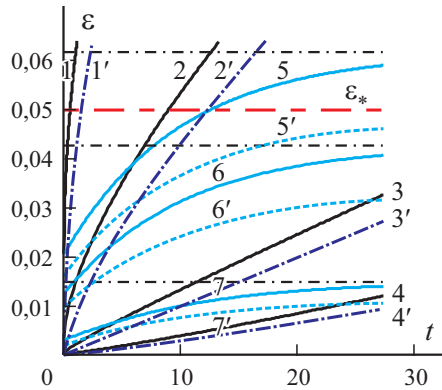


Рис. 1. Кривые ползучести двухслойной трубы при $r_1/r_2 = 0,8$, $r_0/r_2 = 0,6$ и постоянной разности давлений $p = 0,02$, порождаемые моделями (37). Пояснения в тексте.

На рис. 1 приведены кривые ползучести трубы при $r_1 / r_2 = 0,8$, $r_0 / r_2 = 0,6$ (т.е. $q_2 = 0,64$, $q_1 = 9 / 16$) и постоянной разности давлений $p = 0,02r$, порождаемые моделями (37) с $A = 1$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2G_1$ и $\alpha = 1; 0,7; 0,5; 0,4$ и функцией ползучести

$$\Pi = Bt^m + b, \quad m \in (0; 1], \quad B > 0, \quad b \geq 0 \quad (49)$$

(как в модели Максвелла с дробной производной, если $b > 0$) или $\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$, $\beta > \gamma$, $\lambda > 0$ (как в модели Кельвина, $1/\beta$ и $1/(\beta - \gamma)$ — длительный и мгновенный модули, $1/\lambda$ — время ретардации). Это графики интенсивности деформаций на внутренней поверхности трубы $\varepsilon(r_0, t) = u_1(t)$, построенные по формуле (38) для восьми моделей вида (49) с параметрами $m = 0,5$, $B = 1$, $b = 0,5$ (кривые 1—4 при $\alpha = 1; 0,7; 0,5; 0,3$) или $b = 0$ (штрих-пунктирные кривые 1'—4') и трех моделей с $\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$, $\lambda = 0,1$, $\beta = 1,5$, $\gamma = 1$ при $\alpha = 1; 0,9; 0,7$ (кривые 5—7, штрих-пунктирные прямые — их горизонтальные асимптоты при $t \rightarrow \infty$). Интенсивность деформаций на внешней границе трубы $\varepsilon(r_2, t)$ отличается от $\varepsilon(r_0, t)$ множителем $r_0^2 r_2^{-2} = q_1 q_2 = 0,36$. Графики деформации $\varepsilon_\theta(r_1, t)$ отличаются от $\varepsilon(r_1, t)$ лишь множителем $\sqrt{3} / 2$.

Если переставить слои трубы, не меняя их толщину (сделать более жесткий слой внутренним: $G_1 = 2G_2 = 2$), то коэффициент w (41) уменьшится и понизятся деформации (40) (ср. кривые ползучести 5'—7' и кривые 5—7). Докажем общее утверждение: если $\eta = G_2 / G_1 > 1$ и q_i фиксированы, то $w_{21} < w_{12}$ тогда и только тогда, когда $q_1^{-\alpha} + q_2^\alpha > 2$ (при этом условии об относительной толщине слоев изготовление внутреннего слоя из более жесткого материала понижает деформации). Действительно, согласно (41) $(w_{21}^{-1} - w_{12}^{-1}) / G_1 = (\eta - 1)[(1 - q_1^\alpha) - q_1^\alpha(1 - q_2^\alpha)]$ и $w_{21} < w_{12}$ равносильно $(1 - q_1^\alpha) - q_1^\alpha(1 - q_2^\alpha) > 0$.

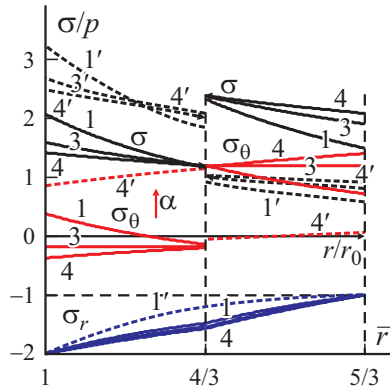


Рис. 2. Зависимость напряжений $\sigma(\bar{r})$, $\sigma_\theta(\bar{r})$, $\sigma_r(\bar{r})$ от радиальной координаты $\bar{r} = r / r_0$ при $r_1/r_2 = 0,8$, $r_0/r_2 = 0,6$ под действием постоянных давлений $p_0 = 2$, $p_2 = 1$ в предположении, что материалы слоев трубы описываются моделями (37) с $G_1 = 1$, $G_2 = 2G_1$ и показателями $\alpha = 1; 0,5; 0,3$ (кривые 1,3,4). Пояснения в тексте.

На рис. 2 приведены кривые напряжений $\sigma(\bar{r})$ (черные), $\sigma_\theta(\bar{r})$ (красные), $\sigma_r(\bar{r})$ (синие) в зависимости от радиальной координаты $\bar{r} = r / r_0$ в трубе с $r_1/r_2 = 0,8$, $r_0/r_2 = 0,6$ (как на рис. 1) под действием постоянных давлений $p_0 = 2$, $p_2 = 1$ в предположении, что материалы слоев трубы описываются моделями (37) с $A = 1$, $G_1 = 1$, $G_2 = 2G_1$ и показателями $\alpha = 1; 0,5; 0,3$ (кривые 1, 3, 4 — нумерация, как на рис. 1). Окружное напряжение $\sigma_\theta(\bar{r})$ постоянно в каждом слое при $\alpha = 0,5$ (кривая 3), а при $\alpha < 0,5$ возрастает в пределах каждого слоя (кривая 4) и принимает наибольшее значение при $r = r_2$. Интенсивность напряжений максимальна при $r \rightarrow r_1 + 0$. Штриховые кривые 1', 3', 4' — графики напряжений в трубе при той же толщине слоев, но с более жестким материалом во внутреннем слое: $G_1 = 2G_2 = 2$. Как и следовало ожидать, окружные напряжения и интенсивность напряжений во внешнем слое существенно упали (σ_θ — почти до нуля), но возросли во внутреннем слое. Модуль радиального напряжения также уменьшился (см. кривую 1'), в частности, снизилось давление $p_1 = |\sigma_r(r_1)|$ на границе слоев.

5. Решение задачи для многослойной трубы

Построенное для двухслойной трубы решение обобщается на задачу о многослойной трубе, состоящей из любого количества слоев вязкоупругих материалов (с радиусами внешних границ r_i , $i = 1; \dots; n$), каждый из которых подчиняется нелинейному ОС (1) с разными парами МФ $\{R_i, \varphi_i\}$, нагруженной давлениями $p_0(t)$ и $p_n(t)$, $t > 0$, на внутренней и внешней поверхности трубы (при $r = r_0$ и $r = r_n$). Радиальное перемещение в любой точке трубы описывается формулами

$$u_i(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_{i-1}^2 r^{-1} y_i(t) \text{ при } r \in [r_{i-1}, r_i], \quad i = 1; \dots; n, \quad (50)$$

условия непрерывности радиального перемещения (50) на границах слоев $r = r_i, \quad i = 1; \dots; N - 1$, имеют вид $r_{i-1}^2 y_i(t) = r_i^2 y_{i+1}(t)$, т.е. $y_{i+1}(t) = q_i y_i(t)$, или

$$y_{i+1}(t) = Q_i y_1(t), \quad Q_i := q_1 \dots q_i = (r_0 / r_i)^2, \quad i = 1; \dots; n - 1. \quad (51)$$

Интегральное уравнение (17) для неизвестной функции $y_i(t)$ каждого слоя имеет вид

$$p_{i-1} - p_i = \frac{1}{\sqrt{3}} z_i(t) \mathbf{R}_i [F_i(|y_i(t)|) - F_i(q_i |y_i(t)|)], \quad q_i := (r_{i-1} / r_i)^2, \quad i = 1; \dots; n, \quad (52)$$

где $p_i(t)$ — давления на границах слоев. Система из $2n - 1$ уравнения для неизвестных функций $y_i(t)$ и $p_i(t), \quad i = 1; \dots; n - 1$, сводится к одному интегральному уравнению для функции $y = y_1(t)$ в результате сложения всех уравнений (52):

$$\sum_1^n \mathbf{R}_i [F_i(Q_{i-1} y(t)) - F_i(Q_i y(t))] = \sqrt{3} (p_0 - p_n), \quad (53)$$

т.е.

$$\sum_1^n \int_0^t R_i(t - \tau) [\varphi_i(Q_{i-1} y(\tau)) - \varphi_i(Q_i y(\tau))] \frac{\dot{y}(\tau)}{y(\tau)} d\tau = \sqrt{3} (p_0 - p_n),$$

где $Q_0 = 1, \quad Q_i = q_i Q_{i-1} < Q_{i-1} < 1$. После определения $y(t)$ из уравнения (53) по формулам (51) легко вычисляем функции $y_i(t)$ для каждого слоя, последовательно определяем все давления на границах слоев $p_i(t)$ и, наконец, по формулам (10)—(14) вычисляем поля перемещений и напряжений в каждом слое трубы. В частности,

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-1} y(t), \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-2} y(t), \quad (54)$$

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta, \quad \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}} |\varepsilon_\theta| \text{ при } r \in [r_0, r_n], \quad t > 0$$

(деформации непрерывны, разрывы есть только у напряжений $\sigma_\theta(\bar{r})$ и $\sigma_z(\bar{r})$ — см. (35)).

Рассмотрим многослойную трубу из материалов с МФ (37), где опорная функция релаксации $R(t)$ (положительная, убывающая, выпуклая вниз) и параметры $\alpha, G_i > 0$ произвольны. Применив к (53) оператор Π , обратный \mathbf{R} , получим функциональное уравнение для $y(t)$, обобщающее (36):

$$\sum_1^n G_i [F_i(Q_{i-1} y(t)) - F_i(Q_i y(t))] = P(t), \quad P(t) := \sqrt{3} \Pi p(t). \quad (55)$$

Здесь $P(t) \geq 0$ — известная функция, если задана $R(t)$ ($P = \sqrt{3} p \Pi(t)$ в случае ползучести).

6. Зависимость времени разрушения многослойной трубы от давлений для критерия разрушения по максимальной деформации растяжения

Результаты испытаний образцов и элементов конструкций показывают, что при постоянной нагрузке, даже достаточно малой и вызывающей напряжения, которые значительно ниже предела прочности, деформация образца нарастает во времени (наблюдается ползучесть) и через некоторое время t_* после приложения нагрузки происходит разрушение (вследствие ползучести и связанных с ней механизмов накопления повреждений). Время жизни t_* зависит от нагрузки, температуры и других параметров и может измеряться годами. График зависимости t_* от нагрузки (или напряжения в образце) $t_*(\sigma)$ или обратной зависимости $\sigma(t_*)$ называется кривой длительной прочности (КДП). Данные испытаний разных вязкоупругопластичных материалов [7, 16—18, 44—46] показывают, что КДП $t_*(\sigma)$ всегда убывают, $t_*(\sigma) \rightarrow +\infty$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$ и $t_*(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \sigma_*$, где $\sigma_0 \geq 0$ — (условный) порог ползучести, $\sigma_* > 0$ — предел мгновенной прочности σ_* .

Для прогнозирования времени жизни при ползучести и моделирования длительной прочности вязкоупругопластичных материалов к выбранному (или построенному) ОС, описывающему их деформирование, необходимо добавить критерий разрушения, характеризующий момент разрушения t_* по достижении критических значений некоторой меры поврежденности $\omega(t)$ (скалярной, векторной или тензорной [7, 16—18, 44—46]). Простейший тип критериев разрушения — классические деформационные критерии разрушения, постулирующие, что $\omega(t) = C\varepsilon(t)$, и разрушение происходит в момент $t = t_*$, когда некоторая мера деформации $\varepsilon(t, \sigma)$ достигает предельного значения ε_* : $\varepsilon(t_*, \sigma) = \varepsilon_*$. Они могут описывать две разные ситуации: разрушение материала или элемента конструкции. Важно, чтобы выбранные критерий разрушения и ОС хорошо взаимодействовали друг с другом, т.е. позволяли вывести уравнения теоретических кривых ползучести $\varepsilon = \varepsilon(t; \sigma, T)$ и кривой длительной прочности $t_* = f(\sigma, T)$ (или $\sigma = F(t_*, T)$, где t_* — время разрушения при заданных напряжении σ и температуре T), *аналитически* исследовать в общем виде зависимость свойств КДП от (произвольных) материальных функций (МФ) и параметров ОС и критерия разрушения и указать ограничения на них, обеспечивающие совпадение качественных свойств теоретических КДП с типичными свойствами экспериментальных КДП [46, 47].

Найдем время разрушения многослойной трубы при ползучести, используя деформационный критерий разрушения. Рассмотрим случай $p := p_0 - p_2 > 0$; тогда функция $y = y_1(t) > 0$ и возрастает по t [1], и в силу (54) $\varepsilon_\theta(r, t) > 0$ и $\varepsilon_\theta(r, t)$ возрастает по t и убывает по r (это верно и для интенсивности деформаций $\varepsilon(r, t)$). Примем условие прочности трубы в виде системы деформационных условий прочности всех ее слоев

$$\max \{ \varepsilon_\theta(r, t) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i \} < \varepsilon_{*i}, \quad i = 1; \dots; n. \quad (56)$$

т.е. примем за критерий разрушения условие достижения максимальной

растягивающей деформацией $\varepsilon_\theta(r, t)$ в некоторой точке хотя бы одного из слоев предельного значения ε_{*i} для материала этого слоя. Пусть t_{*i} — верхняя грань множества значений t , для которых выполнено условие прочности (56) i -го слоя. Тогда время разрушения трубы равно $t_* = \min\{t_{*i}\}$. Поскольку в любой момент времени деформация $\varepsilon_\theta(r, t)$ убывает по r (см. (54)), то в пределах каждого слоя окружная деформация ε_θ принимает наибольшее значение на внутренней границе слоя, условие прочности (56) эквивалентно системе неравенств $\varepsilon_\theta(r_{i-1}, t) < \varepsilon_{*i}$ и все t_{*i} — корни уравнений $\varepsilon_\theta(r_{i-1}, t) = \varepsilon_{*i}$, $i = 1; \dots; n$, или

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} c_i \varepsilon_{*i}, \quad c_i = r_{i-1}^2 r_0^{-2} = 1 / Q_{i-1} = c_{i-1} / q_{i-1}. \quad (57)$$

Очевидно, $1 < c_i < c_{i+1} < r_{n-1}^2 r_0^{-2}$. Так как $y(t) > 0$ и возрастает по t , то каждое уравнение (57) имеет не более одного корня t_{*i} , а время разрушения $t_* = \min\{t_{*i}\}$ — корень уравнения

$$y(t) = c \varepsilon_*, \quad \varepsilon_* := \min\{c_i \varepsilon_{*i} \mid i = 1; \dots; n\}, \quad c_i = r_{i-1}^2 r_0^{-2}, \quad c = 2 / \sqrt{3}, \quad (58)$$

где $y(t)$ — решение интегрального уравнения (53); c_i, ε_{*i} — известные параметры; ε_* — критическая величина произведения $c_i \varepsilon_{*i}$ для самого слабого слоя трубы, в котором раньше произойдет разрушение (при проектировании трубы следует стремиться к увеличению значения ε_* , чтобы повысить ее долговечность, так как из (58) и возрастания $y(t)$ следует возрастание t_* с ростом ε_*). Подставив в (53) $t = t_*$, получим уравнение для t_* , т.е. уравнение кривой длительной прочности трубы.

Для модели с $R_i = G_i R(t)$, $G_i > 0$, уравнение (53) принимает вид (55), и подстановка в него $t = t_*$, $y(t_*) = c \varepsilon_*$ из (58) и $P = \sqrt{3} p \Pi(t)$ дает гораздо более простое уравнение для t_* :

$$\Pi(t_*) = C(q, \varepsilon_*) / p, \quad (59)$$

$$C(q, \varepsilon_*) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_1^n G_i [F_i(Q_{i-1} c \varepsilon_*) - F_i(Q_i c \varepsilon_*)], \quad (60)$$

$$\varepsilon_* = \min\{c_i \varepsilon_{*i}\}, \quad c_i = r_{i-1}^2 r_0^{-2}.$$

Здесь $C(q, \varepsilon_*) > 0$ — известная постоянная, зависящая от параметров q_i, G_i, ε_* и функций нелинейности слоев φ_i , но не зависящая от давления и функции ползучести $\Pi(t)$ ($C(q, \varepsilon_*) > 0$ вследствие возрастания функций φ_i и F_i и неравенств $Q_i < Q_{i-1}$).

В силу возрастания $\Pi(t)$ уравнение (59) для t_* имеет не более одного решения. Поскольку при $t > 0$ $\Pi(0) < \Pi(t) < \Pi(\infty)$, где $\Pi(0) \geq 0$ и $\Pi(\infty) \leq \infty$, то возможны ровно три случая:

1) если $\Pi(0) < C(q, \varepsilon_*) / p < \Pi(\infty)$, то уравнение (59) имеет ровно одно решение и время разрушения $t_*(p)$ определяется по формуле

$$t_* = \Psi(C(q, \varepsilon_*) / p), \quad C(q, \varepsilon_*)E_\infty < p < C(q, \varepsilon_*)E, \quad (61)$$

где $\Psi := \Pi^{-1}$ — обратная функция для $\Pi(t)$ (она определена на промежутке $[\Pi(0), \Pi(\infty))$), а $E := 1/\Pi(0)$ и $E_\infty := 1/\Pi(\infty)$ — мгновенный и длительный модули линейного ОС вязкоупругости (4) [43];

2) если $\Pi(\infty) < \infty$ ($\Pi(t)$ ограничена) и $C(q, \varepsilon_*)/p \geq \Pi(\infty)$, т.е. $E_\infty > 0$ и $p \leq C(q, \varepsilon_*)E_\infty$, то уравнение (59) не имеет решений и разрушение не происходит в течение сколь угодно большого времени;

3) если $C(q, \varepsilon_*)/p \leq \Pi(0)$ (для этого необходимо, чтобы $\Pi(0) > 0$), т.е. $p \geq p_*$, где $p_* = C(q, \varepsilon_*)E$, то разрушение наступает сразу в момент приложения нагрузки $t = 0$ (т.е. $t_* = 0$), а p_* — предельная величина давления для трубы согласно деформационному критерию разрушения.

Уравнение КДП (61) показывает, что форма и основные качественные свойства КДП $t_*(p)$, характер ее зависимости от разности давлений p определяются в основном функцией ползучести и слабо зависят от МФ φ_i , задающих нелинейность материалов слоев трубы в ОС (1), и от отношения радиусов: ведь φ_i и q_i влияют только на положительный коэффициент (60), вызывающий растяжение КДП (61) вдоль оси p , и потому не влияют на наличие точек экстремума или перегиба, на характер монотонности или выпуклости, на горизонтальные асимптоты. Этот результат тем интереснее, что МФ φ сильно влияет (как доказано в [8, 10]) на качественное разнообразие форм кривых ползучести, порождаемых ОС (1), в частности, делает возможным моделирование третьей стадии кривых ползучести (линейное ОС вязкоупругости на это не способно, так как порождает только выпуклые вверх кривые ползучести).

В силу монотонного возрастания $\Pi(t)$ функция $\Psi := \Pi^{-1}$ тоже возрастает, и потому зависимость (КДП) $t_*(p)$ (61) убывает, а из выпуклости вверх и возрастания $\Pi(t)$ следует выпуклость Ψ и $t_*(p)$ вниз при любых МФ ОС (1), подчиняющихся минимальным ограничениям, наложенным в п. 2. Конечно, обратная функция

$$p = p(t_*) = C(q, \varepsilon_*) / \Pi(t_*), \quad t_* > 0,$$

тоже возрастает и выпукла вниз. КДП $p(t_*)$ обладает горизонтальной асимптотой $p = C(q, \varepsilon_*)E_\infty$ при $t_* \rightarrow \infty$, а КДП $t_*(p)$ — вертикальной асимптотой $p = C(q, \varepsilon_*)E_\infty$, к которой стремится справа. Если $\Pi(\infty) < \infty$, то $E_\infty > 0$, а если $\Pi(\infty) = \infty$, то $E_\infty = 0$ и асимптота имеет вид $p = 0$. Если $\Pi(0) = 0$, то $E = \infty$, $\Psi(0) = 0$ и КДП (61) обладает асимптотой $t_* = 0$ при $p \rightarrow \infty$, а КДП $p(t_*)$ — вертикальной асимптотой $t_* = 0$.

Например, для моделей трубы с произвольными МФ φ_i и функцией ползучести (49) имеем $E = b^{-1}$, $E_\infty = 0$, $\Psi = ((x - b)/B)^{1/m}$,

$$t_*(p) = B^{-1/m} (C(q, \varepsilon_*)p^{-1} - b)^{1/w}, \quad p \in (0; p_*), \quad p_* = C(q, \varepsilon_*)/b.$$

В частности, для моделей со степенной функцией ползучести $\Pi = Bt^m$, $m \in (0; 1]$, будет $E = \infty$, $E_\infty = 0$, $p_* = \infty$, КДП принимает вид $t_* = (C/B)^{1/m} p^{-1/m}$, или $p = C(q, \varepsilon_*) B^{-1} t_*^{-m}$, и в осях $\lg t_* - \lg p$ КДП представляется прямой линией с угловым коэффициентом $-m < 0$. КДП такой формы часто наблюдаются в испытаниях многих материалов.

В случае $p_0 - p_2 < 0$ имеем $\varepsilon_\theta(r, t) < 0$, но время разрушения выражено той же формулой (61), поскольку $\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta$ в силу условия несжимаемости.

7. Время разрушения для меры поврежденности, равной интенсивности деформации

Если выбрать в качестве меры поврежденности каждого слоя максимальную деформацию сдвига $\gamma_{\max} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) / 2$ (а не максимальную деформацию растяжения $\varepsilon_1 = \varepsilon_\theta$), то получим в точности такое же время разрушения (61) (при тех же предельных значениях деформаций ε_{*i}), так как в каждом слое $\varepsilon_z \equiv 0$ и $\gamma_{\max} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) / 2 = (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) / 2 = \varepsilon_\theta$.

Если принять в качестве условия прочности систему ограничений на *интенсивность* деформации $\varepsilon(r, t)$ в пределах каждого слоя трубы

$$\max \{ \varepsilon(r, t) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i \} < \varepsilon_{*i}, \quad i = 1; \dots; n,$$

т.е. принять за критерий разрушения достижение интенсивностью деформации хотя бы в одном из слоев предельного для материала слоя значения ε_{*i} , то получим качественно аналогичный результат, как и в случае меры поврежденности $\varepsilon_\theta(r, t)$, поскольку $\varepsilon(r, t)$ отличается от $\varepsilon_\theta(r, t)$ лишь множителем $c = 2 / \sqrt{3}$ (см. (54)) и тоже достигает наибольшего в пределах каждого слоя значения на его внутренней границе. Поэтому все формулы (57)—(61) и следствия из них сохранятся ($c = 1$ вместо $c = 2 / \sqrt{3} > 1$ в (58)—(60)), и критерий разрушения $\varepsilon(r_{i-1}, t) = \varepsilon_{*i}$ для некоторого i даст для времени разрушения $t_{**} = \min \{ t_{**i} \}$ уравнение $y(t_{**}) = \varepsilon_*$ (t_{**i} — корни уравнений $\varepsilon(r_{i-1}, t) = \varepsilon_{*i}$). Так как $y(t)$ возрастает, то $t_{**} < t_*$ для любых МФ и p , а вместо (59) получим (в случае $R_i = G_i R(t)$)

$$\Pi(t_{**}) = C_2(q, \varepsilon_*) / p, \quad \varepsilon_* := \min \{ c_i \varepsilon_{*i} \},$$

$$C_2(q, \varepsilon_*) := \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_1^n G_i [F_i(Q_{i-1} \varepsilon_*) - F_i(Q_i \varepsilon_*)],$$

где $C_2(q, \varepsilon_*) > 0$ — постоянная, зависящая от параметров G_i, q_i, ε_* и МФ φ_i , но не зависящая от p и функции ползучести $\Pi(t)$. Аналогично (61) найдем

$$t_{**} = \Psi(C_2(q, \varepsilon_*) / p), \quad E_\infty C_2(q, \varepsilon_*) < p < E C_2(q, \varepsilon_*). \quad (62)$$

Таким образом, зависимость времени разрушения от G_i , q_i и ε_* будет иная, но КДП (62) получается из (61) растяжением вдоль оси p с коэффициентом $k = C_2(q, \varepsilon_*) / C(q, \varepsilon_*) < 1$.

8. Кривые длительной прочности моделей со степенной функцией нелинейности

Рассмотрим модель (37) с произвольной функцией релаксации (ползучести) и произвольным показателем α . Тогда по (16) $F_i(s) = A\alpha^{-1}s^\alpha$ и потому $C_2(q, \varepsilon_*) = W\varepsilon_*^\alpha / \sqrt{3}, W = A\alpha^{-1} \sum_1^n G_i(Q_{i-1}^\alpha - Q_i^\alpha) = A\alpha^{-1} \sum_1^n G_i Q_{i-1}^\alpha (1 - q_i^\alpha)$,

$$(63)$$

и $C(q, \varepsilon_*) = c^\alpha C_2(q, \varepsilon_*)$, т.е. КДП (62) получается из (61) сжатием вдоль оси давления с коэффициентом $k = C_2 / C = c^{-\alpha} = (\sqrt{3} / 2)^\alpha > 1$, не зависящим от G_i , q_i и ε_* . Для модели (37) решение $y(t)$ интегрального уравнения (23) выражено формулой (38):

$$y(t) = [\sqrt{3}W^{-1}p\Pi(t)]^{1/\alpha} = [\sqrt{3}A^{-1}\alpha wp\Pi(t)]^{1/\alpha}, t \geq 0. \quad (64)$$

Его подстановка в (10), (11) дает выражения для полей перемещений и деформаций в условиях ползучести при постоянных давлениях. В силу (64) кривые ползучести $\varepsilon(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$ и $\varepsilon_r(r, t)$ ограничены на полуоси $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда ограничена $\Pi(t)$. Примеры кривых ползучести двухслойной трубы приведены на рис. 1.

На рис. 3 приведены КДП (62) двухслойной трубы с $r_1 / r_2 = 0,8$, $r_0 / r_2 = 0,6$ (т.е. $q_2 = 0,64$, $q_1 = 9/16$) при постоянной разности давлений $p = 0,02$ и предельной интенсивности деформации $\varepsilon_* = 0,05$, порождаемые моделями (37), (49) с показателями $\alpha = 1; 0,7; 0,5$, что и на рис. 1

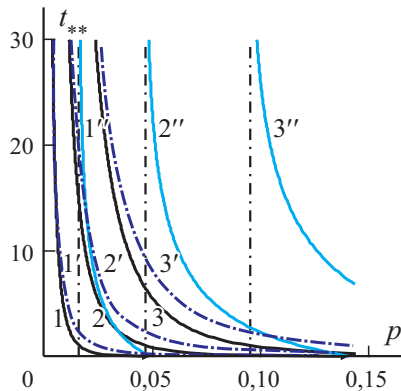


Рис. 3. Кривые длительной прочности (62) трубы ($r_1 / r_2 = 0,8$, $r_0 / r_2 = 0,6$) при постоянной разности давлений $p = 0,02$ и $\varepsilon_* = 0,05$, порождаемые моделями (37), (49), с показателями $\alpha = 1; 0,7; 0,5$, что и на рис. 1.

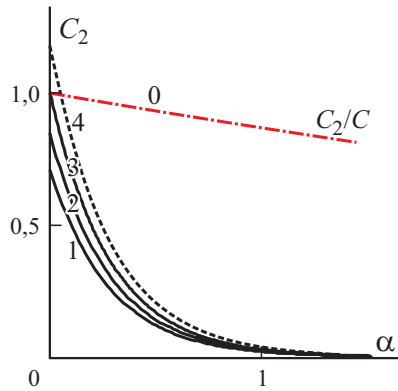


Рис. 4. Зависимость коэффициента C_2 (63), определяющего длительную прочность трубы, от показателя α при относительной толщине слоев трубы $r_0 / r_2 = 0,6$ и $r_1 / r_2 = 0,9; 0,8; 0,7; 0,6$. Пояснения в тексте.

(нумерация кривых сохранена). КДП 1—3 (для $b=0,5$ с функцией ползучести (49)) и 1'—3' (штрих-пунктирные кривые для $b=0$) имеют общую вертикальную асимптоту $p=0$, а КДП 1''—3'' моделей с функцией ползучести $\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$ — асимптоты $p = p_{\min}(q, \varepsilon^*, \alpha)$, $p_{\min} = E_{\infty} C_2 = C_2 / \beta > 0$ (штриховые прямые на рис. 3), т.е. моделируют материалы с ненулевым порогом ползучести p_{\min} .

На рис. 4 приведены зависимости коэффициента C_2 (63) от показателя α при относительной толщине слоев двухслойной трубы $r_0 / r_2 = 0,6$ и $r_1 / r_2 = 0,9; 0,8; 0,7; 0,6$ (кривые 1—4). Чем толще внешний (более жесткий) слой, тем больше $C_2(\alpha)$ и время разрушения (62). Кривая 0 — график отношения $k(\alpha) = C_2 / C = c^{-\alpha}$, т.е. коэффициент сжатия КДП (62) вдоль оси p для получения КДП (61), порождаемой критерием разрушения по максимальной растягивающей деформации $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$.

Заключение

Построено точное решение квазистатической задачи об определении напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы, состоящей из любого количества (соединенных без натяга, ненапряженных) слоев нелинейно-вязкоупругих изотропных материалов, каждый из которых подчиняется ОС Работнова (1) с разными парами произвольных материальных функций и постулату несжимаемости при нагружении давлениями на внутренней и внешней поверхностях трубы, медленно меняющимися во времени. В частности, некоторые слои могут быть нелинейно-упругими, упругопластическими или линейно-вязкоупругими. Система из $2n-1$ нелинейных интегральных уравнений для неизвестных функций, описывающих поле деформаций каждого слоя, и радиального напряжения на границе слоев сведена к одному интегральному уравне-

нию (53) для одной неизвестной функции времени, зависящему от МФ слоев трубы, их относительных толщин и заданных на границах трубы давлений. Перемещения, деформации и напряжения в любой точке трубы в любой момент времени выражены через эту функцию времени явными формулами (24)—(32). На основе этих выражений получено решение задачи о ползучести и длительной прочности многослойной трубы. Используются три варианта деформационного критерия разрушения: в качестве меры поврежденности выбраны максимальная деформация растяжения в каждом слое трубы, или интенсивность деформаций, или максимальная деформация сдвига. В зависимости от заданных предельных значений деформации слоев и их относительных толщин указан слой, в котором произойдет разрушение (см. (58)), выведено уравнение для времени разрушения трубы $t_*(p)$ при ползучести, найдена простая характеристика многослойной трубы (см. ε_* в (58)), которую следует повышать при проектировании слоев трубы, чтобы повысить ее долговечность.

Для модели многослойной трубы (37) с пропорциональными функциями сдвиговой релаксации слоев и со степенной функцией нелинейности (с любым показателем) построено точное решение ключевого интегрального уравнения (23), вычислены все интегральные операторы в общих выражениях для напряжений (27)—(32), выведены простые алгебраические формулы (39), (40), (42)—(47) для деформаций и напряжений в любой точке трубы в любой момент времени и для времени разрушения трубы $t_*(p)$ при ползучести. Для трех вариантов деформационного критерия разрушения выведены уравнения КДП (61), (62) и аналитически исследованы их общие свойства. Доказано, что форма и основные качественные свойства КДП $t_*(p)$, определяются в основном функцией ползучести материалов слоев и слабо зависят от функции φ , задающей нелинейность в ОС (1), и от отношения радиусов слоев трубы (хотя от них зависят время разрушения и слой, в котором оно произойдет): ведь φ и q_i влияют только на коэффициенты $C(q_i, \varepsilon_*)$ и $C_2(q_i, \varepsilon_*)$, вызывающие растяжение КДП (61) и (62) вдоль оси p , и потому не влияют на существование точек экстремума или перегиба, на характер монотонности или выпуклости, на горизонтальные асимптоты КДП $t_*(p)$. Для всех трех критериев разрушения доказано, что КДП $t_*(p)$ убывает и выпукла вниз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хохлов А. В. Особенности эволюции напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы из нелинейно-вязкоупругого материала под действием постоянных давлений // *Механика композиц. материалов и конструкций*. — 2020. — Т. 26, № 2. — С. 224—246. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2020.26.02.224_246.06
2. Khokhlov A. V. Deformation and long-term strength of a thick-walled tube of physically non-linear viscoelastic material under constant pressure // *Rus. Metallurgy (Metally)*. — 2020. — No. 10. — P. 1079-1087. DOI: 10.1134/S0036029520100122
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. — 306 с.

4. *Nadai A. L.* Theory of flow and fracture of solids. Vol.1. — N.-Y.: McGraw-Hill, 1950. — 572 p.
5. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. — Oxford: Clarendon Press, 1950. — 356 p.
6. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Упругопластические деформации полых цилиндров. — М.: Изд-во МГУ, 1960. — 227 с.
7. *Gao X.-L.* An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material // *Int. J. Pressure Vessels and Piping*. — 1992. — Vol.52, No. 1. — P. 129–144.
8. *Wong H., Simionescu O.* An analytical solution of thermoplastic thick-walled tube subject to internal heating and variable pressure, taking into account corner flow and nonzero initial stress // *Int. J. Eng. Sci.* — 1996. — Vol.34, No. 11. — P. 1259–1269.
9. *Gao X.-L.* Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory // *Int. J. Solids Struct.* — 2003. — Vol. 40. — P. 6445–6455.
10. *Zhao W., Seshadri R., Dubey R. N.* On thick-walled cylinder under internal pressure // *J. Pressure Vessel Technol.* — 2003. — Vol. 125, No. 3. — P. 267–273.
11. *Шарафутдинов Г. З.* Осесимметричная деформация толстостенной трубы из высокоэластичного материала // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. — 2009. — № 2. — С. 108–120.
12. *Радченко В. П., Кубышкина С. Н.* Математическая модель реологического формирования и разрушения толстостенной трубы // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. — 1998. — Вып. 6. — С. 23–34. doi: 10.14498/vsgtu4
13. *Радченко В. П., Цветков В. В.* Напряжённо-деформированное состояние цилиндрического образца из сплава Д16Т в условиях осевого растяжения и кручения при ползучести // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. — 2013. — Вып. 3 (32). — С.77–86.
14. *Зингерман К. М., Левин В. А.* Обобщение задачи Ламе—Гадолина для больших деформаций и ее аналитическое решение // *Прикл. математика и механика*. — 2013. — Т. 77, вып. 2. С. 322–336.
15. *Бухалов В. И., Попов А. Л., Челюбеев Д. А.* Задача Гадолина в упругопластической постановке // *Прикл. математика и механика*. — 2018. — Т. 82, вып. 6. — С. 804–812.
16. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. — М.: Физматгиз, 1960. — 456 с.
17. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
18. *Локощенок А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. — М.: Физматлит, 2016. — 504 с.
19. *Cristensen R. M.* Theory of Viscoelasticity. An introduction. — N.-Y., L.: Acad. Press, 1971. — 256 p.
20. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе). — М.: Наука, 1972. — 328 с.
21. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977. — 384 с.
22. *Tschoegl N. W.* The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. — Heidelberg: Springer, 1989. — 769 p.
23. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последствием // *Прикл. математика и механика*. — 1948. — Т.12, № 1. — С. 53–62.
24. *Дергунов Н. Н., Паперник Л. Х., Работнов Ю. Н.* Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории // *Журнал прикл. механики и техн. физики*. — 1971. — № 2. — С. 76–82.

25. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степанычев Е. И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // *Механика полимеров*. — 1971. — № 1. — С. 74—87.
26. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степанычев Е. И. Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии // *Механика полимеров*. — 1973. — № 5. — С. 779—785.
27. Суворова Ю. В. О нелинейно-наследственном уравнении Ю. Н. Работнова и его приложениях // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. — 2004. — № 1. — С. 174—181.
28. Khokhlov A. V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions // *Moscow Univ. Mech. Bulletin*. — 2017. — Vol. 72. — No. 5. — P. 103-107. doi: 10.3103/S0027133017050016
29. Хохлов А. В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупруго-пластичных материалов // *Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естествен. науки*. — 2017. — № 3. — С. 93—123. doi: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123
30. Khokhlov A. V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 4. — P. 473—486. doi: 10.1007/s11029-018-9757-1
31. Khokhlov A. V. Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials // *Mech. Solids*. — 2019. — Vol. 54, No. 3. — P. 384—399. doi: 10.3103/S002565441902002X
32. Fung Y. C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation // *Biomechanics, Its Foundations and Objectives* / Eds. Y. C. Fung et al. — New Jersey: Prentice-Hall, 1972. — P. 181—208.
33. Fung Y. C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. — N.-Y.: Springer, 1993. — 568 p.
34. Funk J. R., Hall G. W., Crandall J. R., Pilkey W. D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments // *J. Biomech. Eng.* — 2000. — Vol. 122. — P. 15—22.
35. Sarver J. J., Robinson P. S., Elliott D. M. Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments // *J. Biomech. Eng.* — 2003. — Vol. 125, No. 5. — P. 754—758.
36. Abramowitch S. D., Woo S. L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory // *J. Biomech. Eng.* — 2004. — Vol. 126. — P. 92—97.
37. Nekouzadeh A., Pryse K. M., Elson E. L., Genin G. M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling // *J. Biomech.* — 2007. — Vol. 40. — No. 14. — P. 3070—3078.
38. De Frate L. E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model // *Biomech. Modeling Mechanobiology*. — 2007. — Vol. 6. — No. 4. — P. 245—251.
39. Duenwald S. E., Vanderby R., Lakes R. S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment // *Acta Mechanica*. — 2009. — Vol. 205. — P. 23—33.
40. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. — 461 p.
41. De Pascalis R., Abrahams I. D., Parnell W. J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*. — 2014. — Vol. 470. — 20140058.

42. *Khokhlov A. V.* Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification // *Mech. Solids*. — 2018. — Vol. 53, No 3. — P. 307—328. DOI: 10.3103/S0025654418070105

43. *Хохлов А. В.* Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента Пуассона в рамках линейной теории вязкоупругости // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. — 2019. — Т. 23, № 4. — С. 671—704. doi: 10.14498/vsgtu1710

44. *Махутов Н. А.* Деформационные критерии разрушения и расчёт элементов конструкций на прочность. — М.: Машиностроение, 1981. — 272 с.

45. *Betten J.* Creep Mechanics. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 367 p.

46. *Khokhlov A. V.* Fracture criteria under creep with strain history taken into account, and long-term strength modeling // *Mech. Solids*. — 2009. — Vol. 44, No. 4. — P. 596–607. doi: 10.3103/S0025654409040104

47. *Хохлов А. В.* Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования повреждённости при ступенчатых нагружениях // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*. — 2016. — Т. 20, №3. — С. 524—543. doi: 10.14498/vsgtu1512

Поступила в редакцию 05.02.2021

Окончательный вариант поступил 28.06.2021

Received Feb 5, 2021 (June 28, 2021)

Х. Хури Мусса^а, Г. Шаллита^{а}, В. Яред^б, М. Аби Ризк^б*

^а*Équipe MMC, CRSI, Lebanese University, Faculty of Engineering, Roumieh, El-Metn, Lebanon*

^б*Advanced Plastic Industries – API company, Dbayeh highway, Seaside road, Dbayeh, El-Metn, Lebanon*

АНАЛИЗ С ПРЕДСКАЗАНИЕМ ВЛИЯНИЯ КОМПОЗИТНОГО СЛОЯ ИЗ ПОЛИПРОПИЛЕНА, НАПОЛНЕННОГО ТАЛЬКОМ, НА КОЛЬЦЕВУЮ ЖЕСТКОСТЬ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИКОВОЙ ТРУБЫ¹

H. Khoury Moussa, G. Challita, W. Yared, and M. Abi Rizk*

PREDICTIVE ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF A POLYPROPYLENE-TALC COMPOSITE LAYER ON THE RING STIFFNESS OF A MULTILAYER PLASTIC PIPE

Keywords: plain pipe, multilayer pipe, polypropylene-talc composite, ring stiffness, finite-element modeling

The ring stiffness of a multilayer sewage pipe reinforced with a composite polypropylene-talc layer, was investigated. The ring stiffnesses of plain and multilayer polypropylene pipes were determined experimentally and analyzed analytically. A finite-element model was developed to predict the ring stiffness of different multilayer pipe configurations as a function of layer thicknesses and talc content in the composite layer. The results obtained well agreed with experimental data.

Ключевые слова: труба гладкая, труба многослойная, композит пропиленовый наполненный тальком, жесткость кольцевая, моделирование конечно-элементное

Исследована кольцевая жесткость многослойной канализационной трубы с композитным слоем из полипропилена (ПП), наполненного тальком. Кольцевая жесткость гладкой и многослойной труб из ПП определена экспериментально и проанализирована

*Автор, с которым следует вести переписку: georges.challita@ul.edu.lb

Corresponding author: georges.challita@ul.edu.lb

¹Перевод с англ.

численно. Для предсказания кольцевой жесткости многослойных труб разной конфигурации в зависимости от толщины слоя и содержания талька в композитном слое разработана конечно-элементная модель. Полученные численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Введение

Большинство старых канализационных труб сделаны из жестких материалов, таких как бетон или глина, — хрупких и выходящих из строя при ударе камнем или движении грунта. Кроме того, выделение серной кислоты из бытовых/городских сточных вод вызывает внутреннюю коррозию бетона, что еще больше ослабляет конструкцию и является серьезной проблемой в жарком сухом климате [1—3]. Смещение грунта и проникновение корней деревьев создает проблемы для традиционных канализационных систем [4]. В настоящее время большинство требований, предъявляемых к современным системам канализационных труб, способны удовлетворить системы из гибких пластиковых труб [5—10]. По сравнению с жесткими материалами пластиковые трубы демонстрируют превосходный набор свойств. В [11] разработали конечно-элементную модель полиэтиленовой трубы, подверженной внутреннему давлению, остаточным напряжениям и нагрузкам от грунта. Оценено и обсуждено влияние каждой из нагрузок на эксплуатационный ресурс трубы. Результаты показали, что срок службы полиэтиленовых труб может превышать 100 лет. Поливинилхлорид, полиэтилен высокой плотности (ПЭВП) и стеклопластики широко используют в системах канализации. Однако за последние несколько десятилетий постепенно возросла популярность полипропилена (ПП) в качестве материала для труб безнапорных канализационных систем в силу некоторых его преимуществ по сравнению с другими материалами: удельная жесткость, термостойкость, химическая стойкость в широком диапазоне pH, хорошая абразивная стойкость и отличные долговременные свойства [12—14]. Кроме того, включение в полипропиленовую матрицу неорганических наполнителей в виде частиц — эффективный способ улучшения ее механических характеристик. В настоящее время для этой цели широко используют такие неорганические материалы, как карбонат кальция, каолин, слюду, тальк и стеклянные шарики. Как показали в [15], модуль Юнга полипропилена можно повысить, добавив в него тальк и волластонит. В [16] провели эксперименты с композитами на основе ПП, наполненными тальком, каолином и CaCO_3 , и сравнили их механические свойства. В [17] показали, что модуль упругости при изгибе полипропилена с тальком возрастает с увеличением содержания наполнителя; оптимальное наполнение тальком — 30—50% по массе. Результаты испытания на растяжение, проведенного в [18] при скорости деформирования 5 мм/мин, показали, что модуль упругости ненаполненного ПП увеличился с 1,89 до 4,9 ГПа при содержании талька 40% по массе. В [19] использовали по-

липропиленовый войлок вместе с бананово-полиэфирным войлоком для ремонта канализационной трубы из полиэфир-полиэтилентерефталата. ПП и другие полимеры использовали в [20] в качестве наполнителей в металлических цилиндрах и экспериментально и численно исследовали их влияние на поперечную деформацию при действии осевых сжимающих нагрузок.

Еще одну главу в историю успеха полиолефиновых труб, применяемых для снабжения питьевой водой, газом, в системах канализации и в промышленности, добавляют разработки систем многослойных труб. Растущие требования к сантехнике требуют улучшения существующих систем канализационных труб. При использовании многослойной технологии пластиковые канализационные трубы смогут удовлетворить эти требования. В [21] с помощью подхода механики разрушения исследовали разрушение трехслойной композитной пластиковой трубы, состоящей из двух защитных слоев и основного слоя из ПЭВП. Установили, что при определенных условиях можно задерживать распространение трещины на поверхности раздела слоев, что значительно увеличит долговечность трубы. В [22] представили новую методологию предсказания длительного поведения многослойных пластиковых труб с металлическими прослойками, однослойных труб и кесонных труб. Используя эту методологию, можно было бы выявить слой, в котором начинается разрушение при ползучести под внутренним давлением, и количественно оценить остаточное сопротивление гидростатическому давлению остальных слоев. Кроме того, в [23] предложили новый подход к оценке долговечности полиэтиленовой многослойной трубы путем измерения основных параметров разрушения и расчета соответствующих значений вязкости разрушения полиэтиленовых труб с использованием конечно-элементного моделирования (МКЭ). В [24] представлены результаты испытаний на циклическую усталость неармированного полипропиленового блок-сополимера и кинетики роста трещин в срединном слое, армированном минералами, при разных коэффициентах нагружения. Показано, что медленный рост трещин может иметь место как в армированных, так и неармированных трубах из полипропиленового блок-сополимера. Однако в пределах стандартизованных диапазонов нагружения, по-видимому, он не является решающей модой разрушения в течение требуемого срока эксплуатации упомянутых труб. В [25] с помощью МКЭ исследовали влияние граничных условий на разрушение первого слоя и распределение напряжений в многослойной композитной трубе. Многослойные трубы используют везде, где желательны преимущества термопластов, а также требуется высокая жесткость, например, для канализационных безнапорных труб.

Основное свойство безнапорной трубы — кольцевая жесткость, характеризующая ее способность противостоять прогибу кольца Δ под действием радиальной силы F , как показано на рис. 1. Кольцевая жесткость трубы зависит от жесткости материала и конструкции стенки трубы.

В [26] провели испытания на кольцевую жесткость стеклопластиковых труб с прямоугольным, эллиптическим, яйцевидным и круглым попе-

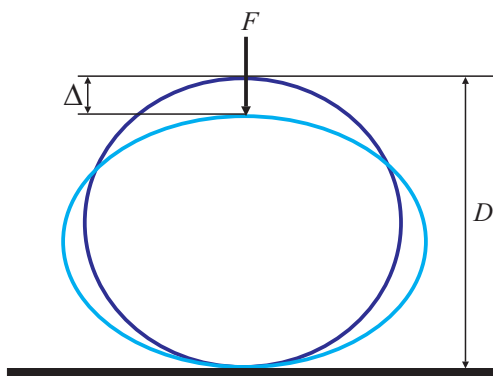


Рис. 1. Прогиб кольца трубы Δ под действием вертикальной силы F .

речным сечением. Установили, что круглые трубы — наиболее жесткие и гибкие среди всех испытанных. Жесткость гибких труб из стеклопластика исследовали в [27] с использованием испытания на сжатие между параллельными плитами, моделирования МКЭ и теоретического анализа. Многочисленные данные о жесткости гибких гладких труб опубликованы в [8, 28—30]. Для расчета модуля упругости в [31] провели испытания на сжатие между параллельными плитами труб из четырех марок ПП. Результаты показали, что модуль упругости и кольцевая жесткость трубы пропорциональны. Кольцевую жесткость многослойных ПП труб измерили в [32] с применением устройства, используемого при испытании на сжатие между параллельными плитами.

В настоящее время многие производители канализационных труб выпускают многослойные композитные трубы с высокой кольцевой жесткостью, обладающие отличной ударной, абразивной, химической стойкостью и сопротивлением термическим напряжениям. Однако до сих пор нет единого мнения об оптимальной конфигурации таких труб.

Цель настоящего исследования — проектирование пластиковой трубы из ПП, наполненной тальком, и ее численное моделирование МКЭ с упором на повышение кольцевой жесткости по сравнению с гладкими трубами из ПП. Приведены экспериментальные результаты испытаний на растяжение и сжатие между параллельными плитами. На основе коммерческого программного обеспечения Abaqus/CAE разработана эффективная численная конечно-элементная модель стандартизированного испытания на кольцевую жесткость по международному стандарту ISO 9969 [33]. Разработанную модель впоследствии использовали для предсказания кольцевой жесткости многослойных труб других конфигураций с разной толщиной слоев и разным содержанием талька в композитном слое.

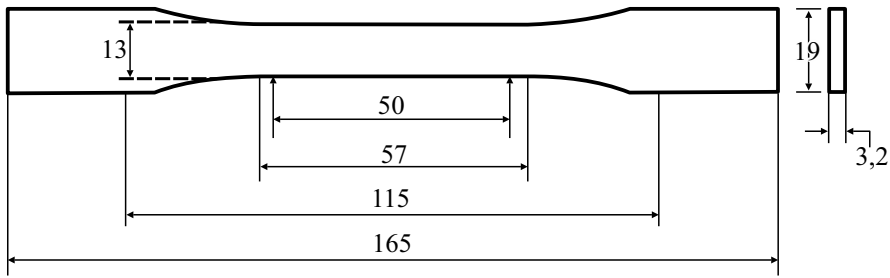


Рис. 2. Образец для испытания на растяжение (размеры указаны в миллиметрах) [35].

1. Экспериментальный анализ

1.1. Материалы. В настоящей работе проанализировали два типа пластика: высокомолекулярный полипропиленовый блок-сополимер BorECO BA212E (Borouge, Borealis Group, 1 George Street # 18-01 Singapore 049145) и композит 1014 TCP 60 MB на основе ПП, наполненного тальком (Masterpak Nile, INDEVCO Group, Менофия, Египет). BorECO BA212E обладает высокой жесткостью, ударной вязкостью и низкой скоростью течения расплава. 1014 TCP 60 MB — это экономичная маточная смесь на основе талька с носителем из сополимера ПП, способствующая стабильности процесса экструзии и улучшающая эксплуатационные характеристики.

Согласно стандарту BS EN 14758-1 [34] содержание талька в матрице ПП не должно превышать 50% по массе. Поэтому 1014 TCP 60 MB с содержанием талька ~ 60% по массе разбавили полипропиленом. Путем разбавления 1014 TCP 60 MB с помощью BorECO BA212E получили два материала Mat20 и Mat30, содержащие 20 и 30% по массе талька соответственно. Следует отметить, что для проверки данных поставщика испытания на растяжение также провели на исходном материале 1014 TCP 60 MB для сравнения с материалами, полученными после разбавления.

1.2. Методы. 1.2.1. *Испытание на растяжение.* Модуль Юнга — это важнейшее свойство, определяющее кольцевую жесткость. Испытания на растяжение провели для труб из разных материалов по стандарту ASTM D638 [35], рекомендующего определение свойств при растяжении неарми-

Табл. 1

Значения модуля упругости при растяжении E и коэффициента Пуассона ν материалов

Материал	E , МПа	ν
BorECO BA212E	1585	0,45
Mat20	2200	0,43
Mat30	2400	0,42
1014 TCP 60 MB	4173	0,38

рованных и армированных пластиков на приталенных образцах (рис. 2). Образцы изготовила компания Advanced Plastic Industries (Zouk Mosbeh, Ливан, www.api.com.lb) литьем под давлением в пресс-форме при температуре от 200 до 225 °С на машине ВМВ Мс150 (6901181, Италия).

Испытания образцов на растяжение до разрушения выполнили на машине (UTM-1352-50 KN, JJ test, Китай) со скоростью деформирования 5 мм/мин при комнатной температуре. Данные о нагрузке и деформации, записанные в ходе испытаний, использовали для определения значений модуля Юнга и коэффициента Пуассона (все результаты — средние значения пяти измерений для каждого материала, табл. 1).

1.2.2. Испытания на сжатие между параллельными плитами. Образцы труб для испытаний изготовила компания Advanced Plastic Industries с использованием обычных одношнековых экструдеров AMUT (внешний слой EA60, SUALCE/CL, V3689DL — экструдером А; средний слой EA75, RAASE/C, V3689DO — экструдером В; внутренний слой EA60, SUALCE / CL, V3689AJ — экструдером С). Температурный профиль имел семь зон нагрева Z1-Z7: 200, 205, 205, 210, 210, 210 и 210 °С от бункера до фильерной головки. Для определения кольцевой жесткости труб провели их испытания на сжатие между параллельными плитами по стандарту ISO 9969 [33] с использованием испытательной машины ACQUATI G. (Via Vismara, 30, Arese (MI), Италия) (рис. 3). Кольцевую жесткость определяли, используя измеренные значения силы F и прогиба Δ образца трубы, деформированного с постоянной скоростью прогиба. Для каждой конфигурации трубы выполнили по пять испытаний и вычислили средние значения кольцевой жесткости.

Образец трубы длиной 300 мм, закрепленный между двумя горизонтальными и параллельными плоскими стальными плитами, сжимали радиально с постоянной скоростью деформирования 5 мм/мин до достижения прогиба, равного по меньшей мере 0,03 от внутреннего диаметра трубы. В ходе испытания записывали зависимость сила–прогиб.

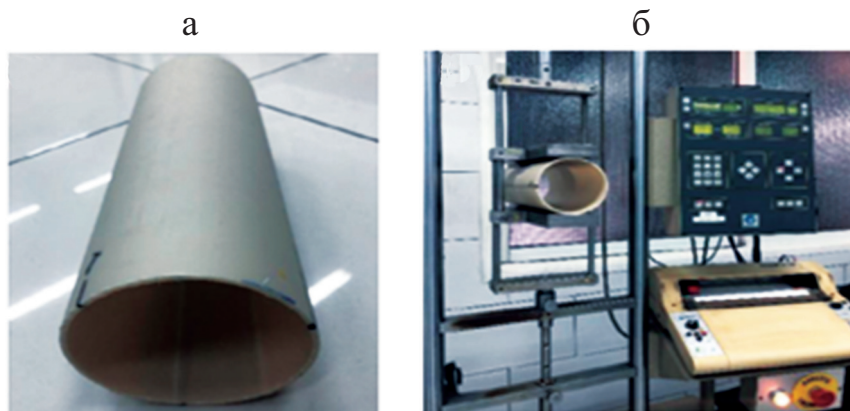


Рис. 3. Испытание на сжатие между параллельными плитами: а — испытываемый образец; б — испытательная машина.

Кольцевую жесткость SN вычисляли по величине силы F , необходимой для достижения прогиба Δ , равного 3% внутреннего диаметра трубы D , по формуле [33]

$$SN = \frac{F(0,0186 + 0,025\Delta / D)}{\Delta \cdot L} \cdot 10^6, \quad (1)$$

где $\Delta / D = 0,03$; L — длина трубы.

Численный анализ

Разработали эффективную численную конечно-элементную модель испытания для определения кольцевой жесткости термопластичных труб с круглым поперечным сечением по международному стандарту ISO 9969 [33].

2.1. Конечно-элементная модель разработана и решена с помощью программного обеспечения Abaqus/CAE и Abaqus/Standard соответственно.

2.1.1. Материалы. Материалы труб, использованные при моделировании МКЭ, считали изотропными. Смоделировали два типа труб А и В с модулями Юнга 1389 и 1700 МПа соответственно и коэффициентом Пуассона 0,44 [31]. Отметим, что эти два материала не использовали для изготовления образцов в настоящей работе; их выбрали в качестве дополнительных материалов для проверки модели с целью расширения диапазона материалов.

Композитный материал (ПП + тальк) считали изотропным (частицы талька ориентированы случайным образом) с большим модулем Юнга, чем у ненаполненного ПП.

2.1.2. Типы конечных элементов. Для моделирования трубы можно использовать два распространенных типа элементов — твердотельные и оболочечные. Оболочечный элемент обычно используют для тонкостенных конструкций постоянной толщины [36]. Поскольку это имеет место для рассматриваемых труб, выбрали оболочечный конечный элемент.

При испытании труб на радиальное сжатие используют пару твердых и жестких плит, передающих требуемое усилие сжатия испытываемому образцу. Плиты должны быть плоскими, гладкими, с чистыми поверхностями для хорошего контакта с образцом; их жесткость и твердость должны быть достаточно большими для предотвращения их изгиба или деформирования, способных отрицательно повлиять на результаты испытаний. Поэтому плиты моделировали с помощью жестких конечных элементов.

2.1.3. Граничные условия. В ходе испытаний верхнюю плиту перемещали с постоянной скоростью, нижняя плита была закреплена. При моделировании взаимодействия между контактирующими поверхностями использовали контакт типа поверхность—поверхность [37]. Поверхность трубы рассматривали в качестве подчиненной, а поверхности верхней и нижней плит — в качестве главных [37]. Взаимодействие между контак-

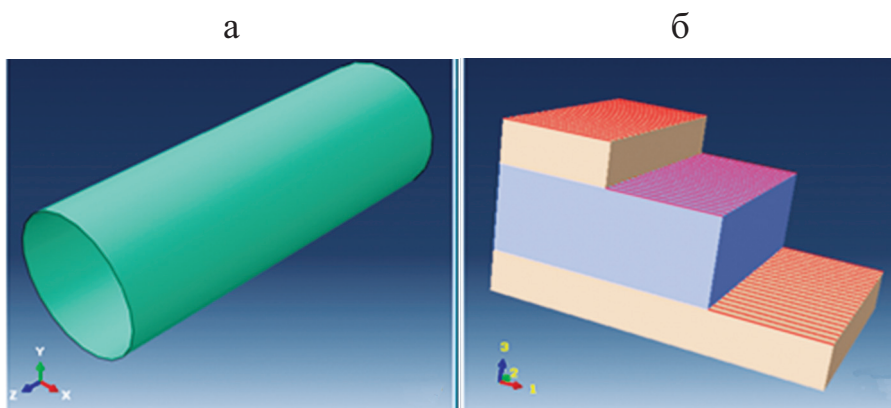


Рис. 4. Модель трубы, созданная посредством Abaqus/CAE (а) и схема поперечного сечения трехслойной трубы (б).

тирующими телами предполагали без учета трения. Для минимизации проникновения подчиненной поверхности в главную и предотвращения передачи растягивающего напряжения через поверхность раздела выбрали жесткую контактную взаимосвязь [37].

Для численного определения кольцевой жесткости многослойной трубы ее поперечное сечение смоделировали как составное. На рис. 4 показан набор слоев трехслойной трубы, крайние слои которой сделаны из непонпленного ПП, а средний — из ПП, наполненного тальком.

2.1.4. *Исследование сходимости решения МКЭ.* Смоделировали трубы А и В длиной 100 мм, средним диаметром 110 мм и толщиной 5 мм. Численные результаты МКЭ сопоставили с экспериментальными данными испытаний на жесткость, проведенных в [31].

Сходимость решения МКЭ при определении кольцевой жесткости при измельчении конечно-элементной сетки иллюстрируют данные рис. 5. Видно, что расчетное значение кольцевой жесткости не зависело от из-

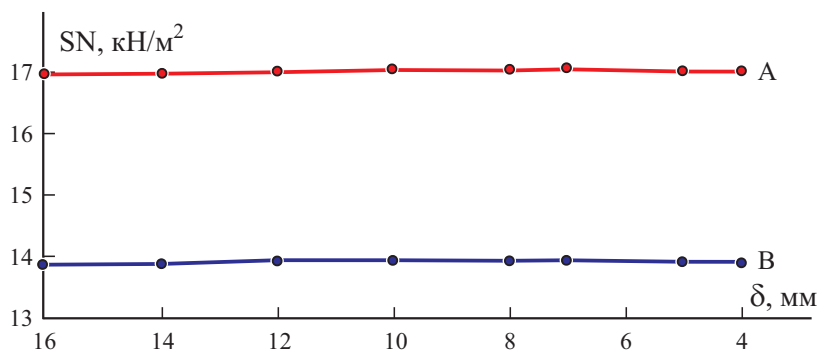


Рис. 5. Зависимость кольцевой жесткости SN от размера конечного элемента δ при расчете МКЭ труб А и В.

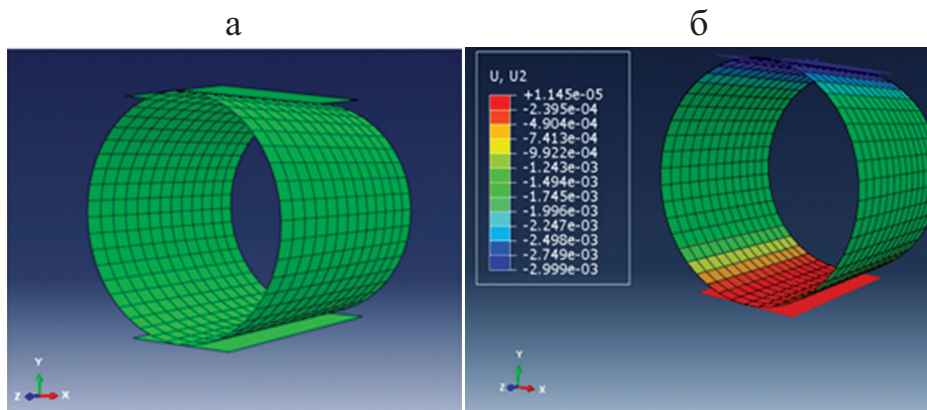


Рис. 6. Конечно-элементная модель трубы: исходная геометрия (а) и радиальное перемещение u нагруженной трубы (метры) (б).

мельчения сетки. Модель с более крупной сеткой способна обеспечить значение кольцевой жесткости, аналогичное вычисляемому с более мелкой сеткой. Однако другие выходные переменные (например, распределение напряжений) нельзя точно вычислить с помощью грубой сетки. Поэтому с учетом умеренных вычислительных затрат выбрали конечный элемент размером 8 мм.

В [36] описали и подтвердили правильность конечно-элементных моделей для проверки кольцевой жесткости, а также изучили их сходимость по отношению к размеру элемента δ для разных моделей оболочек. Промонстрировали, что расчетная кольцевая жесткость не зависела от измельчения сетки.

2.2. Проверка модели. Разработанную модель МКЭ проверили путем сравнения результатов численного моделирования с экспериментальными данными, приведенными в литературе и полученными от производителя труб компании Advanced Plastic Industries.

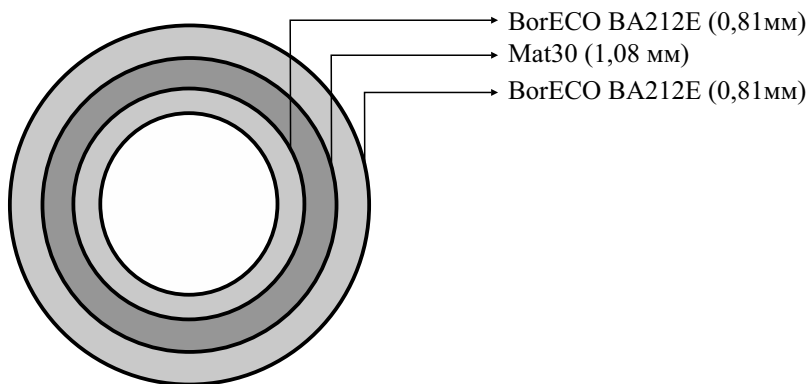


Рис. 7. Вид поперечного сечения образца трубы API-3. Размер слоев указан в табл. 2.

Спецификация образцов

Образец	Тип трубы	Материал	Длина	Диаметр	Толщина
			мм		
API-1	Однослойная	BorECO BA212E	300	110	2,7
API-2	Однослойная	BorECO BA212E	300	110	3,4
API-3	Трехслойная	Внутренний слой BorECO BA212E	300	110	0,81
		Средний слой Mat30	300	110	1,08
		Наружный слой BorECO BA212E	300	110	0,81

Для определения модуля упругости в [31] провели испытания на кольцевую жесткость по стандарту ISO 9969 [33] на образцах длиной 100 мм. Рассмотрели четыре материала:

A — коммерческий полипропиленовый блок-сополимер PP-B;

B — высокомодульный полипропилен PP-НМ;

C — блок-сополимер полипропилена PP-B с высокой скоростью течения расплава;

D — блок-сополимер полипропилена PP-B, наполненного 30% CaCO_3 .

Внешний диаметр всех образцов 110 мм, толщина стенки 5 мм. Вертикальное перемещение верхней плиты $\Delta = 3$ мм; использовали конечно-элементную сетку с элементами размером 8 мм. Конечно-элементная модель образца трубы из ПП показана на рис. 6.

Испытания по определению кольцевой жесткости провели в компании Advanced Plastic Industries на двух гладких полипропиленовых трубах с разной толщиной стенки (API-1 и API-2) и многослойной трубе (API-3) (рис. 7). Спецификация труб приведена в табл. 2.

2.3. Параметрическое исследование провели на образце трубы диаметром 110 мм с толщиной стенки 3,9 мм (рис. 8). Толщину композитного слоя варьировали от 0 до 100% от общей толщины трубы, а содержание

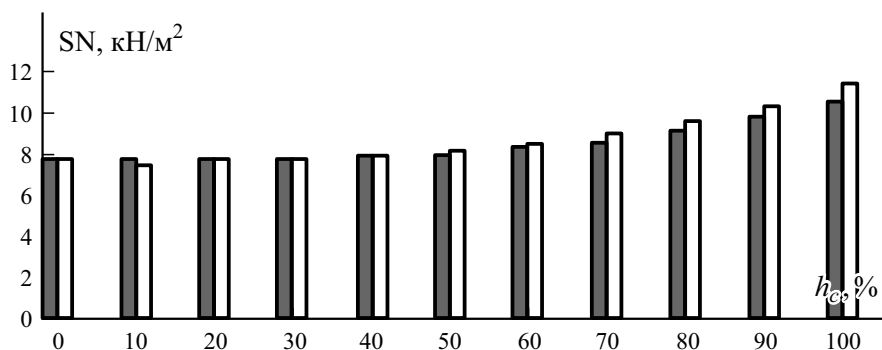


Рис. 8. Кольцевая жесткость SN как функция относительной толщины h_c композитного слоя труб из ПП, наполненного 20 (■) и 30% по массе (□) талька.

Табл. 3

Экспериментальные (exp) и численные (num) результаты испытаний на сжатие между параллельными плитами

Материал	A	B	C	D	API-1	API-2	API-3
Прогиб, мм	3	3	3	3	3,138	3,096	3,138
F_{exp} , Н	224,5	264,34	233,02	329	127,95	235,2	131,84
SN_{exp} , кН/м ²	14,48	17,05	15,03	21,22	2,63	4,9	2,71
F_{num} , Н	215,75	264,05	215,93	314,16	123,06	245,28	126,98
SN_{num} , кН/м ²	13,92	17,03	13,93	20,26	2,53	5,11	2,61
Относительная ошибка, %	3,90	0,11	7,32	4,52	3,8	4,29	3,69

наполнителя — от 20 до 30% по массе. Установили, что толщина композитного слоя и содержание наполнителя существенно влияют на механические характеристики многослойной трубы, особенно на ее кольцевую жесткость.

Результаты и обсуждение

Из данных табл. 3 видно, что корреляция между численными результатами по модели МКЭ и экспериментальными данными приемлема. Максимальная относительная ошибка 7,3% для полипропиленового блок-сополимера с высокой текучестью расплава при среднем времени расчета около одной минуты. Такая относительно небольшая ошибка приемлема с практической точки зрения, и модель может быть использована для предсказания кольцевой жесткости одно- и многослойных труб из термопласта. Более того, модель может быть эффективным инструментом для исследования других конфигураций труб, что значительно уменьшает экспериментальные затраты.

Добавление композитного слоя толщиной 40% от общей толщины стенки и 30% по массе талька, добавленного в полипропиленовую матрицу, увеличивало кольцевую жесткость на ~3% (API-1 по сравнению с API-3, см. табл. 3).

Из данных рис. 8 видно, что кольцевая жесткость возрастала с увеличением толщины композитного слоя, но различие значений кольцевой жесткости при 20 и 30% по массе наполнения ПП тальком мало. Максимальная относительная разность у многослойных труб с 20 и 30% по массе наполнения тальком 5,6%. Это небольшое различие обусловлено приближенными значениями модуля упругости при растяжении материалов Mat20 и Mat30 (2200 и 2400 МПа соответственно). Согласно европейскому стандарту EN 1852-1 [38] труба должна иметь кольцевую жесткость, равную или превышающую 8 кН/м², чтобы быть классифицированной как SN 8; это отраслевой стандарт для канализационных труб. Поэтому следует выбирать толщину композитного слоя большей 50% от общей толщины трубы. Уменьшения затрат на материалы можно ожидать для труб с толщиной композитного слоя 70 и 80% от общей толщины трубы ($SN = 9,02$ и $9,62$ кН/м² соответственно). Использование

большого содержания талька в многослойной композитной трубе может повысить ее кольцевую жесткость до 20% по сравнению с однослойной.

Заключение

В настоящем исследовании разработана и проверена численная модель для расчета кольцевой жесткости многослойных композитных труб. Кольцевую жесткость трубы оценивали в ходе испытаний на сжатие между параллельными плитами и анализа МКЭ. Полученные результаты свидетельствуют о хорошем согласовании с максимальной относительной погрешностью 7,3%. Предложенная модель может быть использована для эффективного предсказания кольцевой жесткости многослойных термопластичных труб в зависимости от толщины композитного слоя и содержания в нем талька.

Добавление композитного слоя к гладкой полипропиленовой трубе повысило ее кольцевую жесткость до значений, принятых международными стандартами для систем канализации. При общей толщине трубы 3,9 мм и внешнем диаметре 110 мм кольцевая жесткость возросла на ~ 20%, что достигнуто за счет применения многослойной конфигурации, в которой толщина композитного слоя составляла 80% от общей толщины трубы. Таким образом, многослойные трубы могут иметь большую кольцевую жесткость, чем гладкие трубы такой же толщины.

Благодарность. Авторы признательны за поддержку исследовательской группе ЕЗМ из IUT-Saint Nazaire (Франция).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mori T., Nonaka T., Tazaki K., Koga M., Hikosaka Y., and Noda S. Interactions of nutrients, moisture and pH on microbial corrosion of concrete sewer pipes // *Water Res.* — 1992. — Vol. 26, No. 1. — P. 29—37.
2. Yuan L. and Kyriakides S. Liner wrinkling and collapse of bi-material pipe under axial compression // *Int. J. Solids Struct.* — 2015. — Nos. 60—61. — P. 48—59.
3. Mu S., Zhou H., Shi L., Liu J., Cai J., and Wang F. Research on performance and microstructure of sewage pipe mortar strengthened with different anti-corrosion technologies // *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* — 2017. — No. 250. — P. 012036.
4. Ridgers D., Rolf K., and Stål Ö. Management and planning solutions to lack of resistance to root penetration by modern pvc and concrete sewer pipes // *Arboric. J.* — 2006. — Vol. 29, No. 4. — P. 269—290.
5. Farshad M. and Necola A. Strain corrosion of glass fibre-reinforced plastics pipes // *Polym. Test.* — 2004. — Vol. 23, No. 5. — P. 517—521.
6. Klaiber F. W., Lohnes R. A., and Wipf T. J. Investigation of High-Density Polyethylene Pipe for Highway Applications, Final report: Phase I. Iowa DOT Project HR-373. ISU-ERI-AMES 96407, Iowa State University, College of Engineering, Department of Transportation, Iowa, USA, 1996.
7. Frank T. PE-HD spiral pipes for sewage pipelines—electrofusion socket welding up to DN 1800 // *Proc. Plastics Pipes.* — 2001. — Vol. 13.

8. *Chaallal O., Arockiasamy M., and Godat A.* Laboratory tests to evaluate mechanical properties and performance of various flexible pipes // *J. Perform. Constr. Facil.* — 2015. — Vol. 29, No. 5. — P. 04014130.
9. *Martins J. D. N., Freire E., and Hemadipour H.* Applications and market of PVC for piping industry // *Polímeros.* — 2009. — Vol. 19, No. 1. — P. 58—62.
10. *Yuan Y., Liu C., and Huang M.* The structure and performance of short glass fiber/high-density polyethylene/polypropylene composite pipes extruded using a shearing-drawing compound stress field // *Materials.* — 2019. — Vol. 12, No. 8. — P. 1323.
11. *Poduška J., Hutař P., Frank A., Kučera J., Sadílek J., Pinter G., and Náhlik L.* Soil load on plastic pipe and its influence on lifetime // *J. Mech. Eng.* — 2019. — Vol. 69, No. 3. — P. 101—106.
12. *Jansen N.* Polypropylene: a tried and proven pipe material // *3R Int.* — 1998. — P. 113—116.
13. Brochure, Borouge. Polypropylene materials for non-pressure sewage and drainage systems URL:http://www.borouge.com/IndustrySolution/PDF%20Files/BorEco/2011%2012_Polypropylene%20materials%20for%20Non-Pressure%20Sewage%20Drainage%20Systems.pdf (accessed 28 august, 2019)
14. *Wassenaar J.* Polypropylene materials for sewerage & drainage pipes with reduced energy and carbon footprints // *J. Mater. Sci. Eng. B.* — 2016. — Vol. 6, No. 6.
15. *Hadal R. S. and Misra R. D. K.* The influence of loading rate and concurrent microstructural evolution in micrometric talc- and wollastonite-reinforced high isotactic polypropylene composites // *Mater. Sci. Eng., A.* — 2004. — Vol. 374, Nos. 1—2. — P. 374—389.
16. *Leong Y. W., Abu Bakar M. B., Ishak Z. A. Mohd., Ariffin A., and Pukanszky B.* Comparison of the mechanical properties and interfacial interactions between talc, kaolin, and calcium carbonate filled polypropylene composites // *J. Appl. Polym. Sci.* — 2004. — Vol. 91, No. 5. — P. 3315—3326.
17. *Kant S., Urmila, Kumar J., and Pundir G.* Study of talc filled polypropylene-a concept for improving mechanical properties of polypropylene // *Int. J. Res. Eng. Technol.* — 2013. — Vol. 2, No. 4. — P. 411—415.
18. *Zhou Y., Rangari V., Mahfuz H., Jeelani S., and Mallick P. K.* Experimental study on thermal and mechanical behavior of polypropylene, talc/polypropylene and polypropylene/clay nanocomposites // *Mater. Sci. Eng., A.* — 2005. — Vol. 402, Nos. 1—2. — P. 109—117.
19. *Kobayashi S., Suna K., and Yasuda T.* Mechanical properties and fracture behavior of nonwoven fabric reinforced plastics for rehabilitation of sewage pipes // *Adv. Compos. Mater.* — 2012. — Vol. 21, Nos. 5—6. — P. 413—423.
20. *Xu L., Gao G., Wang X., Wang J., and Chen X.* A model to characterize the lateral expansion of a cylinder containing a polymer filler subjected to compression // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2010. — doi:10.1082/15376494.2018.1545414
21. *Hutař P., Zouhar M., Náhlik L., Ševčík M., and Máša B.* Multilayer polymer pipes failure assessment based on a fracture mechanics approach // *Eng. Fail. Anal.* — 2013. — Vol. 33. — P. 151—162.
22. *Farshad M.* Determination of the long-term hydrostatic strength of multilayer pipes // *Polym. Test.* — 2005. — Vol. 24, No. 8. — P. 1041—1048.
23. *Nezbedová E., Fiedler L., Majer Z., Vlach B., and Kněsl Z.* Fracture toughness of multilayer pipes // *Strength Mater.* — 2008. — Vol. 40, No. 1. — P. 134—137.
24. *Arbeiter F., Ševčík M., Pinter G., Andreas F., and Hutař P.* Polypropylene multi layer pipe lifetime assessment under realistic loading conditions — 2014. — doi: 10.13140/RG.2.1.1162.2807
25. *González-Estrada O. A., León J. S., and Pertuz A.* Influence of the boundary condition on the first ply failure and stress distribution on a multilayer composite pipe by the finite element method // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2019. — No. 1159. — P. 012013.

26. *Seibi A. C., Kalfat I., Molki A., Webb T., and Flores R.* Shape factor for glass-reinforced plastic pipes with noncircular shapes under diametral loading — an experimental study // *Exp. Tech.* — 2015. — Vol. 39, No. 4. — P. 64—69.

27. *Park J.-S., Hong W.-H., Lee W., Park J.-H., and Yoon S.-J.* Pipe stiffness prediction of buried gfrp flexible pipe // *Polym. Polym. Compos.* — 2014. — Vol. 22, No. 1. — P. 17—24.

28. *Farshad M. and Necola A.* Effect of aqueous environment on the long-term behavior of glass fiber-reinforced plastic pipes // *Polym. Test.* — 2004. — Vol. 23, No. 2. — P. 163—167.

29. *Lee J. H., Kim S. H., Choi W. C., and Yoon S. J.* Pipe stiffness prediction of buried glass fiber reinforced polymer plastic (GFRP) and polymer mortar pipe // *Key Eng. Mater.* — 2017. — Vol. 753. — P. 3—7.

30. *Thomas N. K., George S. P., John S. M., and George S. P.* Stress analysis of underground GRP pipe subjected to internal and external loading conditions // *Int. J. Adv. Mech. Eng.* — 2014. — Vol. 4, No. 4. — P. 435—440.

31. *Thornblom K., Nilsson S. F. and Salberg S. E.* Durability of Non-Pressure Polypropylene Pipe Materials. — SP Report 2007, Borealis AB. SP Technical Research Institute of Sweden; Goteborg, 2007.

32. *Wierzbicki L. and Szymiczek M.* Mechanical and chemical properties of sewage pipes // *Arch. Mater. Sci. Eng.* — 2012. — Vol. 53. — P. 38—45.

33. ISO 9969:2007 (E). Thermoplastics pipes — Determination of ring stiffness, Switzerland, 2007.

34. BS-EN-14758-1:2012. Plastics piping systems for non-pressure underground drainage and sewerage — Polypropylene with mineral modifiers (PP-MD) Part 1: Specifications for pipes, fittings and the system, London, 2012.

35. D20 Committee, ASTM D638. Test Method for Tensile Properties of Plastics, ASTM International. US, 2014.

36. *Fuerle F., Sienz J., Innocente M., Pittman J. F. T., Samaras V., and Thomas S.* Ring stiffness evaluation and optimization of structured- wall PE pipes // 24th Annu. Meet., PPS-24, Italy, 2008.

37. Abaqus/CAE User's Guide. Version 6.14. Dassault Systèmes Simulia Corp, Providence, RI.

38. EN 1852-1:2009. Plastics piping systems for non-pressure underground drainage and sewerage - Polypropylene (PP) - Part 1: Specifications for pipes, fittings and the system, CEN, Brussels, 2009.

Поступила в редакцию 19.02.2021

Окончательный вариант поступил 28.04.2021

Received Feb. 19, 2021 (Apr. 28, 2021)

С. В. Бочкарев^{а}, А. Ф. Сальников^а, А. Л. Галиновский^б*

*^аПермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ),
Россия*

^бМГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ АКУСТИЧЕСКОЙ
ПРОВОДИМОСТИ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ДЛЯ ВЕРИФИКАЦИИ
ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ АНАЛИЗЕ ДЕФЕКТОВ
В ПОЛИМЕРНОМ КОМПОЗИТНОМ МАТЕРИАЛЕ**

S. V. Bochkarev^{}, A. F. Salnikov, and A. L. Galinovsky*

**MATHEMATICAL ALGORITHM FOR ESTIMATING THE ACOUSTIC
CONDUCTIVITY OF THE WAVEFRONT FOR VERIFICATION
OF A DIAGNOSTIC MODEL IN AN ANALYSIS OF DEFECTS
IN A POLYMER COMPOSITE MATERIAL**

Keywords: control, defect, model, wave diagnostics, laser

The modal analysis is considered as one of the lines of technical diagnostics for evaluating the quality of polymer composite materials (PCMs). It allows one to link the structure of modal characteristics of PCM element base in the amplitude-frequency domain. In the course of modal analysis, the complex construction of PCM as a heterogeneous material is transformed into a set of easy-to-understand independent systems with one degree of freedom. This structural approach is used to analyze the structure of PCM components. A laser is used to form an external action, with the help of which PCM components can form a wave field when vibrations pass through its thickness. Vibrations and deformations of PCM structural elements under a mechanical excitation are considered as the intrinsic vibration forms (vibration modes) of PCM elements — the filler and matrices. High-frequency laser actions extracts a constant wavefront, which is used for constructing an algorithm for recognition of the structure of PCM, including the detection of possible defects, such as changes in its density and various stratifications. To assess

*Автор, с которым следует вести переписку: bochkarev@msa.pstu.ru
Corresponding author: bochkarev@msa.pstu.ru

the technical condition of structural elements of PCM, a mathematical model was developed to assess the effect of defects on passage of a wave and the excitation of modal vibrations by the element base of PCM. The mathematical algorithm for estimating the acoustic conductivity of the wavefront, together with experimental data, was used for constructing a wave diagnostics algorithm. It made it possible to create an algorithm for technical diagnostics of PCM elements. An experiment was conducted on the laser action on a carbon fiber panel with specially created defects. The frequency values found in various zones of carbon fiber showed a qualitative and quantitative change in the structure of PCM. It is shown that, to construct an effective model for diagnosing the technical condition of PCM elements, more experimental are required studies.

Ключевые слова: контроль, дефект, модель, диагностика волновая, лазер

Рассмотрен модальный анализ как одно из направлений технической диагностики для оценки качества полимерных композитных материалов, позволяющий связать структуру модальных характеристик элементной базы полимерного композитного материала (ПКМ) в амплитудно-частотной области. В ходе модального анализа сложная конструкция ПКМ как гетерогенного материала преобразуется в набор простых для понимания независимых систем с одной степенью свободы. Такой подход использован при анализе структуры компонентов ПКМ. Для формирования внешнего воздействия, с помощью которого компоненты ПКМ дают возможность формировать волновое поле при прохождении колебаний по его толщине, применен лазер. Вибрация и деформации элементов конструкций ПКМ при механическом возбуждении рассмотрены как собственные формы (моды) колебаний элементов ПКМ — наполнителя и связующего. Высокочастотное лазерное воздействие извлекает постоянный волновой фронт, необходимый при построении алгоритма распознавания структуры ПКМ, в том числе и при определении возможных дефектов (изменение плотности, различные расслоения). Для оценки технического состояния конструктивных элементов из ПКМ разработана математическая модель, позволяющая определить влияние дефектов нахождение волны и возбуждения модальных колебаний элементной базой ПКМ. Математический алгоритм оценки акустической проводимости волнового фронта применен в построении алгоритма волновой диагностики; в совокупности с экспериментальными данными это дает возможность построить алгоритм технической диагностики элементов из ПКМ. Проведен эксперимент по лазерному воздействию на углепластиковую панель со специально нанесенными дефектами. Полученные значения частотных проявлений в различных зонах углепластика

свидетельствуют о качественном и количественном изменении в структуре ПКМ. Для построения эффективной модели диагностирования технического состояния элементов из ПКМ необходимо проведение большого количества экспериментальных исследований.

Введение

Сложность проблемы гарантированного определения качества и надежности изделий из полимерных композитных материалов (ПКМ) определяется не только тем, что они являются сложными объектами для контроля вследствие неоднородности структуры, анизотропии как гетерогенного материала, но и технологией их производства с учетом специфических физических свойств матрицы и армирующего материала.

Особенность технологии производства изделий из ПКМ заключается в принципе технологического “совмещения” — совмещения процессов получения композитного материала и конструкции, так как они протекают одновременно, что приводит к неравномерному армированию, скрытым структурным неоднородностям, обуславливающим в конечном итоге отклонение физико-механических характеристик материала от закладываемых в технических требованиях. Вследствие этого вопрос контроля ПКМ очень актуален, особенно для изделий ответственного назначения в ракетной, авиационной и космической технике.

Существующие средства технической диагностики используют различные методы контроля. При неразрушающем контроле ПКМ применяют метод на основе контроля теплового поля [1—3], создавая его статической нагрузкой [4], а также тепловизионный метод [5] как в процессе производства, так и в процессе эксплуатации отсеков космических аппаратов, ракетных двигателей и т.п. Такие методы позволяют обнаруживать только нарушения сплошности достаточно больших размеров, но не позволяют выявлять микротрещины, пересекающиеся дефекты, дефекты малых размеров, микропоры, и поэтому существует сложность интерпретации полученных результатов.

Используя ультразвуковой способ [6—8], можно определять физические параметры композита: массовую долю волокон, модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона, расслоения [9, 10], площадь и размеры дефектов [11], прочностные характеристики, пористость [12, 13]. Для контроля пористости, неоднородности структуры использовали метод лазерно-ультразвуковой дефектоскопии [14, 15], для анализа дефектов элементов конструкций [16—18] — акустическую эмиссию или ультразвуковой метод [19].

В [20] для оценки структурных параметров углеродных КМ по ультразвуковым эхограммам предложен метод обработки нейронной сети, который менее вычислительно интенсивен по сравнению с методами обработки ультразвукового сигнала.

Для повышения точности и достоверности определения расслоения [21], прочности при сдвиге и сжатии предложено размещать оптические волокна с брэгговскими решетками послойно в слоях конструкции из ПКМ в процессе их изготовления [22—24], а в [25] — для измерения деформаций элементов анизотропной сетчатой конструкции. В [26] показано, что интегрированная волоконно-оптическая система диагностики может успешно применяться для контроля технического состояния конструкций из ПКМ при эксплуатации в режиме реального времени.

Задачей мониторинга состояния конструкции (SHM, structural health monitoring), является сбор (с помощью датчиков) данных по критическим конструктивным элементам, чтобы получать индикаторы обнаруживаемых в конструкции аномалий и тем самым следить за надежностью и безопасностью конструкции [27].

В последнее время в литературе большое внимание обращено на метод ультразвуковой диагностики [28, 29], который можно использовать для экспресс-диагностики материалов, выбора информативных признаков при решении конкретных задач диагностики и технологических режимов ультразвукового воздействия в ходе технологической подготовки производства изделий ракетно-космической техники.

Общий недостаток практически всех существующих методов и средств неразрушающего контроля заключается в следующем: методы позволяют осуществлять автоматизированный контроль изделий из ПКМ больших габаритов с обнаружением дефектов, но не определяют вид дефектов и их принадлежность к слоям изделия, т.е. не позволяют определять глубину залегания дефектов.

Таким образом, необходимо решить задачу выбора контрольно-диагностических средств, базирующуюся на технико-экономических показателях, в зависимости от их разрешающей способности и технологической себестоимости реализации. Возможность достижения необходимого уровня надежности отдельного контрольно-технологического элемента изделия может быть достигнута путем реализации трехкратного анализа качества и устранения последствий возможного брака в ходе выполнения рассматриваемой технологической операции.

Применяемые методы, основанные на волновых процессах в ПКМ, являются косвенными и основаны на установлении корреляционных связей между параметрами диагностики (акустическими характеристиками материала) и физико-механическими характеристиками полимерных композитных материалов путем сопоставления результатов неразрушающих и разрушающих испытаний [30]. Собственно, и акустические, и физико-механические характеристики материала обусловлены структурой и составом материала, поэтому между ними существует корреляционная связь. Однако при использовании традиционных волновых методов диагностики эта связь не всегда достаточно корректна в оценке структуры композитных материалов, поскольку нет обоснованных знаний о структурной комбинации матрицы и наполнителя, полученной в процессе изготовления изделия. Поэтому исследования и разработки проводятся в направлении изыскания

принципиально новых информативных параметров диагностики, притом таких, которые позволят определять свойства ПКМ с высокой точностью и достоверностью непосредственно в детали или конструкции без их разрушения, а также в направлении решения задачи сочетания параметров диагностики с определяемыми характеристиками ПКМ с целью установления их более тесных корреляционных связей [31, 32]. Для оценки эффективности того или иного метода контроля необходимо создать опытные образцы (образцы-свидетели), имитирующие различные виды дефектов: расслоения, неприклеи ПКМ к металлу и пр. [33].

Цель данной работы — разработка теоретических основ и волнового контроля диагностики технического состояния конструктивных элементов из ПКМ. Новизна заключается в разработке алгоритма определения собственных частот акустических колебаний панелей из ПКМ, основанного на оценке минимальных акустических потерь в частотной области.

Теоретическая часть

Одно из направлений технической диагностики, использующее модальный анализ, — связь модальных характеристик элементов ПКМ в амплитудно-частотной области как один из возможных способов рассмотрения возбуждаемых вибраций в конструкции ПКМ. Вибрация и деформации элементов конструкций ПКМ при механическом возбуждении на собственных (парциальных) частотах этих элементов характеризуются конкретными формами, которые можно рассматривать как собственные формы (моды) колебаний элементов ПКМ — наполнителя и матрицы. В типовых условиях эксплуатации характер вибрации будет сложным, включающим все собственные формы. Но изучив каждую собственную форму отдельно, можно будет анализировать все имеющиеся типы вибрации. Кроме того, в ходе модального анализа сложная конструкция, трудно воспринимаемая в своей целостности, преобразуется в набор простых для понимания независимых систем с одной степенью свободы. Это очень важный подход, который может быть использован при анализе структуры компонентов ПКМ. С помощью лазера можно формировать внешнее воздействие, которое даст возможность элементам ПКМ формировать волновое поле при прохождении колебаний по их толщине. В данном случае высокочастотное лазерное воздействие, подобно смычку скрипки, извлекает постоянный волновой фронт. Этот фронт может быть использован в построении алгоритма распознавания структуры ПКМ, в том числе в определении возможных дефектов, поскольку собственная частота элементной базы (наполнителя и матрицы и их парциальные частоты) будут четко формировать либо гармонию колебаний ПКМ, либо какофонию — как следствие физических причин нарушения связей в ПКМ: изменение плотности, различные расслоения и тому подобные отклонения от рабочей структуры ПКМ.

Для формирования оценки технического состояния конструктивных элементов из ПКМ наряду с физическим моделированием влияния определенных дефектов на волновое поле необходима разработка математической модели, позволяющей оценить влияние этих дефектов на прохождение волны и возбуждение модальных колебаний элементной базой ПКМ.

Математическая модель в этом случае должна строиться на уравнениях совместного движения упругой и вязкоупругой части композита [32]

$$\rho_s \frac{\partial^2 u_i^\varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}^{s\varepsilon}}{\partial x_j} + f_i(x, t), \quad x \in \Omega_{s\varepsilon}, \quad s=1, 2, \quad (1)$$

$$\left[\mathbf{u}^\varepsilon \right]_{S_\varepsilon} = 0, \quad \left[\sigma_{ij}^\varepsilon n_j \right]_{S_\varepsilon} = 0, \quad (2)$$

где $f(x, t)$ — вектор объемной силы; x — координата-направление движения волны; t — время; \mathbf{u} — вектор перемещений; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений волнового поля; ε — относительная толщина вязкоупругого слоя; ρ_s — плотность среды; n_j — количество слоев в направлении распространения акустической волны; $\Omega_{s\varepsilon}$ ($s = 1, 2$) n — единичный вектор нормали к поверхности $S_\varepsilon = \partial\Omega_{1\varepsilon} \cap \partial\Omega_{2\varepsilon}$; квадратные скобки означают скачок заключенной в них величины при переходе через S_ε .

Усредненная модель углепластика, соответствующая модели (1) и (2), построена при условии $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i(x, t), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

и описывает поведение сплошного вязкоупругого материала плотностью $\rho_0 = \rho_1(1-d) + \rho_2d$ определяющим соотношением

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ijkh} e_{kh}(\mathbf{u}) + g_{ijkh}(t) \cdot e_{kh}(\mathbf{u}). \quad (4)$$

Здесь ρ_1, ρ_2 — плотность упругих и вязкоупругих слоев; d — относительный параметр толщины слоя ($0 < d < 1$); e_{kh} — компоненты тензора деформаций; kh — ортогональное направление деформаций; $\alpha_{ijkh}, g_{ijkh}(t)$ — постоянные коэффициенты свертков и ядра свертков соответственно (находим с помощью решения вспомогательных периодических задач).

Взяв за основу условия прохождения акустической волны через слоистый материал ПКМ, используем частотные зависимости, значения импеданса и жесткости, рассмотренные в [32] для вязкоупругого слоистого материала, а также полученные амплитудные зависимости и значения проводимости волнового фронта по телу панели ПКМ в виде

$$A_1(\omega) = \frac{(\eta_1^2(\omega) + \rho^2 c^2)(-1 + \exp[-2\beta(\omega)h])}{(\eta(\omega) - i\rho c)^2 - (\eta(\omega) + i\rho c)^2 \exp[-2\beta(\omega)h]}, \quad (5)$$

$$A_4(\omega) = -\frac{4i\rho c\eta(\omega)\exp[-\beta(\omega)h]}{(\eta(\omega) - i\rho c)^2 - (\eta(\omega) + i\rho c)^2 \exp[-2\beta(\omega)h]}, \quad (5)$$

где

$$\eta(\omega) = \sqrt{\frac{\rho}{2} \left(\sqrt{|C(\omega)| - C_1(\omega)} \right) - i\sqrt{|C(\omega)| + C_1(\omega)}},$$

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{|C(\omega)|} \sqrt{\frac{\rho}{2} \left(\sqrt{|C(\omega)| - C_1(\omega)} \right) + i\sqrt{|C(\omega)| + C_1(\omega)}},$$

ω — круговая частота; $\omega = 2\pi f$; f — частота волны при возбуждении колебаний; c — скорость звука в элементах панели; $C_1(\omega)$ и $C(\omega)$ — жесткость материала элементов панели матрицы и наполнителя соответственно.

Приняв, что $g(t) = 0$, а $C_0 = \text{const}$ — осреднённая жёсткость панели по толщине, $\beta = \omega / c_0$ — коэффициент отражения от элементов панели, $\eta = i\rho_0 c_0$, получим известные выражения для прохождения акустической волны для однородного слоя:

— давление в волне p и перемещения u будут связаны зависимостями

$$p_0(x_1, t) = \rho c \omega \exp(\pi / 2) u_0(x_1, t),$$

$$p_1(x_1, t) = \rho c \omega \exp(\pi / 2) u_1(x_1, t),$$

$$p_4(x_1, t) = \rho c \omega \exp(\pi / 2) u_4(x_1, t);$$

— коэффициенты отражения от слоя и коэффициенты прозрачности (проводимости) по давлению будут равны

$$V(\omega) = A_1(\omega) \exp(i\pi), W(\omega) = A_4(\omega);$$

— интенсивность волны при прохождении по толщине композитной панели будет определяться зависимостью

$$I_0 = \frac{|p_0|^2}{2\rho c}, \quad I_h = \frac{|p_4|^2}{2\rho c}.$$

Для нахождения модальной частоты панели из ПКМ необходимо определить максимальное значение амплитуды волнового фронта $A_1(\omega)$, $A_4(\omega)$ для наполнителя и для матрицы (минимум потерь). Для этого необходимо найти точки перегиба производной амплитуды по частоте. Используя аппарат математического анализа, необходимо взять первую производную по частоте от амплитудных зависимостей и значения проводимости волнового фронта по телу панели (система уравнений (5)). После определенных математи-

ческих преобразований модальная частота в первом приближении будет сведена к известной формуле

$$f = \frac{an}{2l},$$

где a — приведенная скорость звука в материале панели; $n = 1, 2$ — целые числа, соответствующие моде колебаний; l — характерная длина формирования стоячей волны в материале. Приведенные параметры скорости звука зависят от физико-механических свойств материалов, формирующих ПКМ.

При толщине пластины 2 мм и соотношении (%) наполнитель (углеволокно)/матрица 55/45 при плотности углепластика 1450 кг/м³ значение собственной частоты для углеволокна будет равно 175 Гц, а для матрицы — 150 Гц.

Приведенный математический алгоритм оценки акустической проводимости волнового фронта может быть использован в построении алгоритма волновой диагностики и в совокупности с экспериментальными данными — в построении алгоритма технической диагностики элементов из ПКМ.

Экспериментальная часть

Основная проблема в построении математической модели — создание априорного временного сигнала бездефектной структуры образца пластины по толщине.

Для оценки эффективности того или иного метода контроля необходимо создать опытные образцы (образцы-свидетели), имитирующие различные виды дефектов: расслоения, несклеи ПКМ к металлу и пр. [33].

Зона генерирования акустической сферической волны с определенной амплитудой и частотой может быть сформирована облучением лазером в локальной точке композитного образца. Поскольку характеристики наполнителя и матрицы разные, то частотную составляющую композитного материала будем искать через осредненное значение скорости звука в данном материале в зависимости от количества слоев и различных дефектов, возникающих в ходе технологического процесса изготовления ПКМ и изделия. В зависимости от геометрии панели будет устанавливаться определенное волновое поле на частоте собственных (модальных) колебаний панели, т. е. на определённой осредненной скорости звука будет формироваться парциальная (собственная) частота по толщине панели. При наличии дефекта в структуре материала акустическая волна будет его огибать и проходить через него в зависимости от ориентации этого дефекта по отношению к фронту волны, тем самым меняя амплитудную и частотную составляющие волны, смещая или размывая частоту модальной характеристики. Геометрия и величина дефекта будут влиять на уровень “размыва” спектральной линии, огибающей спектр полученного сигнала.

Алгоритм модального анализа предполагает возбуждение колебаний и отклик конструкции на это возбуждение в частотном диапазоне импульса.

Диагностику по модальным характеристикам строили с использованием лазера в качестве нагрузочного элемента панели и сравнительного анализа

возникающего при этом нагружении волнового поля в композитном образце, что позволит провести оценку его технического состояния и определить зоны с локальными отклонениями (дефектами) в структуре материала.

Для эксперимента по лазерному воздействию в МИЦ МГТУ им. Н. Э. Баумана “Композиты России” методом вакуумной инфузии была вручную послойно выложена панель ПКМ ($500 \times 250 \times 2$ мм) из восьми слоев углеродного волокна с зонами дефектов диаметром 26—28 мм [34]: зона (образец) 1 — бездефектная (своеобразный эталон); зона 2 — нанесено машинное полусинтетическое масло марки ЛУКОЙЛ люкс SAE 5W-40, API SJ/CF вместо связующего; зона 3 — нанесена водоотталкивающая универсальная смазка WD-40; зона 4 — подвергнута механическому воздействию глубокими надрезами. В образцах 2, 3 имитировали межслойное расслоение, в образце 4 — разрыв волокон с нарушением адгезии. Панель укладывали на стол лазерного гравера на вибропоглощающий пакет, состоящий из войлока и двух слоев плотной бумаги, прижимали грузом, на датчик перед его установкой на панель наносили ультразвуковой гель.

Лазерное воздействие оказывали с помощью лазера Perfect laser pedb-400 мощностью 30 Вт с длиной волны 1060 нм: размер пятна 50 мкм, длительность импульса 200 нс в центр каждой из четырех областей панели. Датчик акустической эмиссии устанавливали на расстоянии 100 мм от места воздействия лазерного луча на поверхность панели на бездефектную область, перемещая каждый раз при изменении зоны воздействия лазера с целью сохранения неизменного расстояния от точки воздействия до датчика акустической эмиссии. Для рассматриваемого режима лазерного воздействия минимальный размер дефекта в ПКМ может быть 1,5—2,0 мм.

Сигнал акустической эмиссии регистрировали с помощью системы “Малахит АС-15А/2” с активными преобразователями ДР15И АТ с приме-

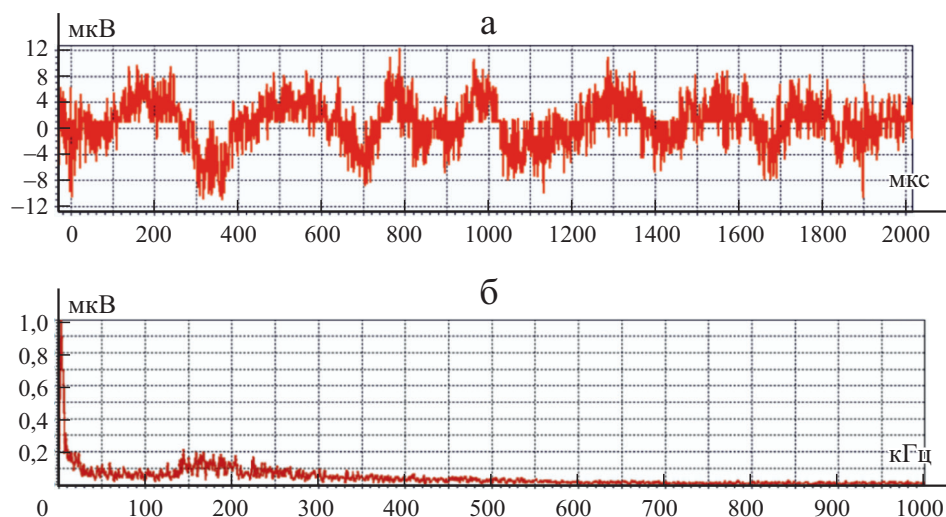


Рис. 1. Временной сигнал (а) и спектр сигнала (б) возбужденной волны в зоне 1.

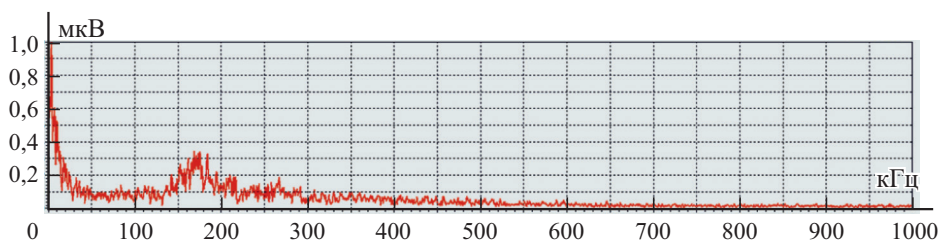


Рис. 2. Спектр сигнала возбужденной волны в зоне 2.

нением программного комплекса AEstudio. Регистрировали форму волны и спектр сигнала. Запись сигнала начиналась по достижении порогового значения амплитуды сигнала.

На рис. 1 приведены волновое поле бездефектного образца, зафиксированное при прохождении возбужденных колебаний при лазерном облучении, и спектр сигнала. Анализ временного и спектрального сигналов этой области указывает на деструктивную зону частотной области практически с постоянным значением амплитуд на частотах 140 и 168 Гц и “размыв” на частоте 170 Гц, но меньшей амплитуды. Можно предположить, что модальные характеристики этих частот связаны с конструктивной структурой матрицы и наполнителя ПКМ. А характер размыва временного сигнала с определенной последовательностью изменения амплитуды во времени подтверждает наличие определенной неравномерной по толщине плотности материала, обусловленной разным значением физико-механических свойств наполнителя и матрицы. “Размыв” в спектре сигнала на частоте 170 Гц показывает эту зону границы наполнителя и матрицы. В первом приближении данный сигнал может быть принят за условно “идеальную” укладку наполнителя в теле матрицы ПКМ.

На рис. 2 приведен спектр волнового сигнала зоны 2. Наличие полусинтетического масла в матрице ПКМ привело к существенному размыву парциальных частот матрицы в диапазоне от 140 до 165 Гц, при этом парциальная частота наполнителя 170 Гц практически не “размыта”.

Наличие водоотталкивающей универсальной смазки привело к изменению парциальной частоты наполнителя до 190 Гц (рис. 3), а существенно изменило парциальные частоты связующего на частоте 165 Гц.

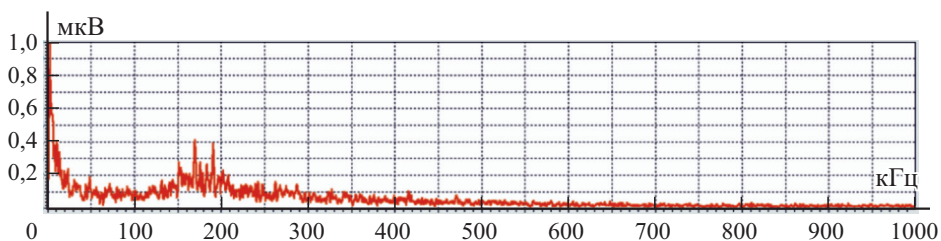


Рис. 3. Спектр сигнала возбужденной волны в зоне 3.

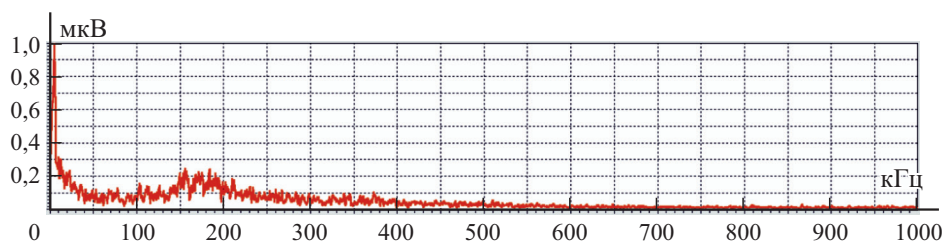


Рис. 4. Спектр сигнала возбужденной волны в зоне 4.

Механическое воздействие обусловило существенное разделение зоны парциальных частот ПКМ, появилась дополнительная частотная область от 165 до 180 Гц. На рис. 4 можно выделить смещение частот связующего в более низкую область 155 Гц, а парциальная частота наполнителя практически осталась в границах частот “идеального” образца.

Приведенные примеры частотных проявлений в различных зонах свидетельствуют о том, что влияние того или иного изменения в структуре ПКМ может быть выявлено качественно и количественно. Для построения достаточно эффективной модели диагностирования технического состояния элементов из ПКМ необходимо проведение значительного объема экспериментальных исследований с целью накопления априорной информации по влиянию конкретных физических отклонений при изготовлении изделий или получении повреждений в процессе их эксплуатации.

Заключение

На основе доработанной теории прохождения акустической волны через композитный материал получен новый алгоритм определения собственных (модальных) частот акустических колебаний панелей из ПКМ, основанный на оценке минимальных акустических потерь в частотной области, что является новым теоретическим вкладом в разработку диагностических моделей по анализу технического состояния композитных конструкций.

Положенная в основу теоретическая модель определения модальных частот позволила разработать волновой метод диагностирования для ПКМ, основанный на прохождении акустических волн через ПКМ и возможность их анализа по измененным модальным частотам при возбуждении этих колебаний в структуре материала по направлению распространения волнового фронта акустической волны, позволило разработать новый подход в оценке технического состояния по структурному анализу изменения этих частот при прохождении акустических и генерируемых волн элементной базой материала изделия.

Математический аппарат, используемый в структуре диагностической модели, позволяет в зависимости от геометрии изделия, процентных соотношений наполнителя и матрицы, а также учитывая имеющиеся микропоры в структуре самого углеродного волокна и в слоях матрицы, получить

диапазон собственных частот элементной базы ПКМ, анализ которых в сочетании с экспериментальными данными даст возможность проводить классификацию возможных дефектов по толщине ПКМ.

Исследования выполнены в рамках гранта РФФИ 18-29-18081.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патент US № 7,829,855 Methods and apparatus for determining fibre orientation/ Reid Matthew E., Fedosejevs Robert. —2010.11.09.

2. Патент РФ №2 666 159 Устройство комплексного автоматизированного неразрушающего контроля качества многослойных изделий/ Шишкин С. Р., Архипенков О. А., Уланов А. С., Будадин О. Н., Рыков А. Н. — 2018.—№ 25. — С. 1—20.

3. Кузнецов А. О., Будадин О. Н., Монахова Е. Г., Гуськов А. В. Тепловой метод оценки стабильности технологий изготовления изделий из композитных материалов при их массовом производстве// Контроль. Диагностика. — 2017. — № 11. — С. 20—24.

4. Степанова Л. Н., Чернова В. В., Кабанов С. И. Анализ модового состава сигналов акустической эмиссии при одновременном тепловом и статическом нагружении образцов из углепластика Т800// Контроль. Диагностика. — 2018. — № 11. — С. 4—13.

5. Заец Н. П., Карпенко О. Н., Чижов И. А., Олешко В. С. Способ теплового контроля авиационных конструкций из полимерных композиционных материалов// Конструкции из композиционных материалов. — 2018. — № 1. — С.62—68.

6. Патент РФ №2 473 894 Ультразвуковой способ контроля плотности в процессе эксплуатации деталей из высоконаполненных композитных материалов на основе октогена/ Костюков Е. Н., Вахмистров С. А., Михайлов А. Л., Колмаков О. В. — 2013. — № 3. — С. 1—5.

7. Патент US № 8236914 Self-assessing mechanochromic materials/ Stephanie L. Potisek, Douglas A. Davis, Scott R. White, Nancy R. Sottos, Jeffrey S. Moore. — 2012.08.07.

8. Патент РФ №2443975 Способ визуализации и контроля динамических деформаций поверхности и ударных нагрузок/ Банишев А. Ф., Банишев А. А.—2012. — № 6. — С. 1—7.

9. Imielińska K, Castaings M, Wojtyra R, Haras J, Le Clezio E, Hosten B. Air-coupled ultrasonic C-scan technique in impact response testing of carbon fibre and hybrid: Glass, non-destructive testing of low-velocity impacted composite material laminates. 21 carbon and Kevlar/epoxy composites// J. Mater. Proc. Technol.—2004. — No. 157—158. — P. 513—522.

10. Chiachio J, Bochud N, Chiachio M, Cantero S, Rus G. A multilevel Bayesian method for ultrasound-based damage identification in composite laminates// Mech. Systems Signal Proc.—2017.— No. 88.—P.462—477.

11. Рыков А. Н., Артемьев Б. В. Опыт практического определения погрешности суммарной площади дефектов при автоматизированном ультразвуковом контроле изделий из полимерных композиционных материалов// Контроль. Диагностика. — 2018. — № 1. — С. 18—24.

12. Бойчук А. С., Чертищев В. Ю., Диков И. А., Генералов А. С., Славин А. В. Влияние морфологии пор на ультразвуковой контроль пористости в углепластике эхоимпульсным методом// Контроль. Диагностика. — 2018. — № 8. — С. 22—29.

13. Батаев В. А., Степанова Л. Н., Лапердина Н. А., Чернова В. В. Акустико-эмиссионный контроль ранней стадии развития дефектов при статическом нагружении образцов из углепластика// Контроль. Диагностика. — 2018. — № 8. — С. 14—20.
14. Соколовская Ю. Г., Карабутов А. А. Лазерно-ультразвуковая дефектоскопия конструкций из мультиаксиальных полимерных композиционных материалов// Конструкции из композиционных материалов. — 2018. — № 1. — С. 56—61.
15. Соколовская Ю. Г., Жаринов А. Н., Карабутов А. А. Применение лазерно-ультразвукового метода для контроля неоднородностей распределения полимерной матрицы в углепластиковых конструкциях// Контроль. Диагностика. — 2018. — № 9. — С. 48—53.
16. Степанова Л. Н., Чернова В. В. Анализ структурных коэффициентов сигналов акустической эмиссии при статическом нагружении образцов из углепластика с ударными повреждениями// Контроль. Диагностика. — 2017. — № 6. — С. 34—41.
17. Барсук В. Е., Анохин Г. Г., Степанова Л. Н. Прочностные испытания элементов авиационных конструкций из углепластика с использованием метода акустической эмиссии и тензометрии // Полет. — 2016. — № 7. — С. 53—60.
18. Башков О. В., Проценко А. Е., Брянский А. А., Ромашко Р. В. Диагностика полимерных композитных материалов и анализ технологий их изготовления с использованием метода акустической эмиссии//Механика композит. материалов. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 765—774.
19. Кумар М. Р., Гош А., Каруппанан Д. Численное и экспериментальное определение характеристик вторично склеенного композитного соединения внахлестку ультразвуковым методом// Механика композит. материалов. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 379—390.
20. Диков И. А., Бойчук А. С., Далин М. А., Чертищев В. Ю., Генералов А. С. Связь прочностных характеристик, пористости и данных ультразвукового контроля для образцов из ПКМ, полученных по автоклавной и инфузионной технологиям// Контроль. Диагностика. — 2018. — № 11. — С. 40—51.
21. Ковалев А., Ручевский С., Кулаков В., Весоловский М. Оптимальное расположение электродов для определения расслоения в композитном материале методом процентного изменения электрического сопротивления//Механика композит. материалов. — 2019. — Т. 55, № 6. — С. 1173—1184.
22. Федотов М. Ю., Будадин О. Н., Васильев С. А., Медведков О. И., Козельская С. О. Возможности контроля внешних механических воздействий волоконно-оптической системой диагностики, встроенной в углепластики различных типов// Контроль и диагностика. — 2019. — № 3. — С. 38—47.
23. Патент РФ № 2633288 Способ диагностики надежности и предельного ресурса эксплуатации многослойных конструкций из композитных материалов/ Будадин О. Н., Кульков А. А., Козельская С. О., Каледин В. О. — 2017. — № 29. — С. 1—27.
24. Патент РФ 2641638 Композитная конструкция со встроенной измерительной системой/Хант Дж. Х. (US), Белк Дж. Х. (US). — 2018. — № 2. — С.1—4.
25. Анискович В. А., Будадин О. Н., Заикина Н. Л., Кутюрин В. Ю., Муханова Т. А., Разин А. Ф., Соловей А. В., Водопьянов В. А. Измерение деформаций с использованием волоконно-оптических датчиков в процессе прочностных испытаний анизотропных конструкций из композиционных материалов// Контроль. Диагностика. — 2018. — № 7. — С. 44—49.
26. Федотов М. Ю., Будадин О. Н., Васильев С. А., Медведков О. И., Козельская С. О. Исследование интегрированной волоконно-оптической системы диагностики углепластика после воздействия теплового и тепловлажностного старения// Контроль. Диагностика. — 2018. — № 11. — С. 26—31.
27. Патент US № 20070118313 Systems and methods for detecting discontinuous fibers in composite laminates/Vaccaro Christopher M. — 2007. — May 24. — P. 1—11.

28. Барзов А. А., Галиновский А. Л., Голубев Е. С., Сысоев Н. Н., Федянин А. А., Филимонов А. С. Ультразвуковая экспресс-диагностика анизотропии поверхностного слоя материалов и изделий ракетно-космической техники // Инж. журн.: Наука и инновации. — 2018. — № 6(78). — С. 1—14.

29. Barzov A. A., Bochkarev S. V., Galinovski A. L. Functionally deterministic model of hydroerosion in studying the physically latent ability of a composite material to defect formation // Mech. Compos. Mater. — 2020. — Vol. 56, No. 4. (Russian Original Vol. 56, No. 4, July-August, 2020). — P. 497—504.

30. Сальников А. Ф. Диагностика технического состояния крупногабаритных деталей газотурбинных двигателей по модальным характеристикам // Вест. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Аэрокосм. техника. — 2018. — № 55. — С. 61—69.

31. Карабутов А. А., Подымова Н. Б., Соколовская Ю. Г. Локальные соотношения Крамерса—Кронига для коэффициента затухания и фазовой скорости продольных ультразвуковых волн в полимерных композитах // Акуст. журн. Физ. акустика. — 2019. — Т. 65, № 2. — С. 182—189.

32. Шамаев А. С., Шумилова В. В. Прохождение плоской звуковой волны через слоистый композит с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // Акуст. журн. — 2015. — Т. 61, № 1. — С. 10—20.

33. Соколовская Ю. Г., Подымова Н. Б., Карабутов А. А. Лазерный оптико-акустический метод количественной оценки пористости углепластиков на основе измерения их акустического импеданса // Акуст. журн. — 2020. — Т. 66, № 1. — С. 86—94.

34. Галиновский А. Л., Бочкарев С. В., Нелюб В. А. Технологии производства и диагностики композитных конструкций летательных аппаратов: учеб. пособие / А. Л. Галиновский, С. В. Бочкарев, В. А. Нелюб. — Старый Оскол: ТНТ, 2019.—384 с.

35. Прохорова М. А., Юлиана Зонляйн, Цзя Чжэньюань. Создание дефектной композиционной панели для отработки методов диагностики // Политехн. молодеж. журн. — 2020. — № 06(47). — 10 с.

Поступила в редакцию 23.12.2020

Окончательный вариант поступил 24.03.2021

Received Dec. 23, 2020 (March 24, 2021)

А. Н. Полилов, О. Ю. Склемина, Н. А. Татусь*

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия

МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ АРМИРОВАНИЯ СИММЕТРИЧНЫМИ ПАРАМИ СЛОЕВ НА ПРИМЕРЕ КОМПОЗИТНОГО БАЛЛОНА ДЛЯ СЖАТОГО ГАЗА

A. N. Polilov, O. Yu. Sklemina and N. A. Tatus'

DESIGN METHOD OF REINFORCEMENT STRUCTURE WITH SYMMETRIC PAIRS OF LAYERS BY THE EXAMPLE OF COMPOSITE GAS TANK

Keywords: fiber-reinforced plastic, strength criterion, wound pressure vessel, symmetrical pair of layers, safety factor, ply-by-ply calculation method, optimum design

A simple method for calculating wound fiber-reinforced composite gas tanks, with a symmetric reinforcement structure, using pairs of layers (plies) is proposed. The calculation with pairs of layers instead of monolayers turns out to be simpler and uses elastic and strength parameters that are reliably determined in experiments. The using of simple strength criteria is substantiated, which, under a biaxial tension, led to a limiting surface bounded by three rectilinear segments that determine various fracture mechanisms. A simple way to optimize the reinforcement structure using a thread model is shown. The goal of the optimization considered was the achievement of a minimum difference between the safety factors for all pairs of layers. An increasing critical pressure in the composite pressure vessel was achieved by a simple selection of the number of layers and reinforcement angles.

Ключевые слова: материал композитный волокнистый полимерный (ПКМ), критерий прочности, сосуд давления намоточный, пара слоев симметричная, коэффициент запаса, метод расчета послойный, проектирование оптимальное

*Автор, с которым следует вести переписку: polilovan@mail.ru
Corresponding author: polilovan@mail.ru

Предложена простая схема расчета композитных, намотанных волокнами, сосудов давления, структура армирования которых состоит из симметричных пар слоёв. Расчет через пары слоёв оказывается проще, чем через монослои, так как опирается на надежно определяемые в экспериментах упругие и прочностные параметры. Обосновано применение простых критериев прочности, приводящих при двухосном растяжении к предельной поверхности, ограниченной тремя прямыми отрезками, определяющими разные механизмы разрушения. Показан простой способ оптимизации структуры армирования с использованием нитяной модели. Цель оптимизации — достижение минимального различия коэффициентов запаса для всех пар слоёв. Повышение критического давления в композитном баллоне достигается простым подбором количества слоёв и углов армирования.

Введение

Использование полимерных волокнистых композитов чрезвычайно перспективно не только для космической и авиационной техники, но и для наземного транспорта, оно обуславливает новые возможности дизайна, снижение массы и энергоёмкости производства, экономию топлива, уменьшение количества деталей, отсутствие коррозии.

Одними из объектов, в которых применение композитов очень эффективно, можно считать сосуды давления, и поэтому расчетам композитных оболочек [1—3] и баллонов [4, 5], в том числе металлокомпозитных [6, 7] и многополостных [8] посвящено много работ. Применительно к сосудам давления одним из основных преимуществ волокнистых композитов (наряду с безопасным видом разрушения, высокой удельной прочностью и коррозионной стойкостью) можно считать возможность выбора оптимальной структуры армирования [9, 10], согласованной с возникающим полем напряжений [11]. Это определяет большой интерес к исследованию композитных баллонов не только технологов, изучающих влияние разных факторов [12, 13], но и механиков [14], использующих современные программные комплексы [15] в расчетах донной части баллонов и зоны полюсных отверстий. Наряду с оптимизацией структуры армирования важным направлением следует считать топологическую оптимизацию формы композитных изделий. Особое прикладное значение имеют попытки анализа влияния статистического разброса свойств материалов, геометрических размеров изделия, приложенных нагрузок [16], что предлагается учитывать методом рассчитанных интервалов [17].

В данной работе рассмотрена гораздо более простая задача подбора структуры армирования на основе критериев прочности, учитывающих разные механизмы разрушения. Исследовали А-структуру армирования цилиндрической части стеклопластикового баллона для газового топлива. Подобные баллоны выпускали в США и массово использовали на лёгких

грузовиках в качестве ёмкости для альтернативного автомобильного топлива.

Цели настоящей работы — обоснование послынного метода расчета напряжений в симметричных парах слоев и способа поиска равнонапряженной структуры армирования, обеспечивающей повышение критического давления. Как альтернатива классическим критериям прочности [18—21] применяются простые критерии, учитывающие направленные механизмы разрушения [22—24]. При уточненном анализе несущей способности следует использовать алгоритмы учета деградации свойств в процессе прогрессирующего разрушения [25—28].

Для иллюстрации достижения поставленных целей решены следующие прямые задачи для простой модели композитной трубы в условиях двухосного растяжения:

— рассчитаны напряжения во всех парах слоев для исходной А-структуры армирования, а затем для улучшенных В- и С-структур;

— на основе модели ромба построены предельные поверхности для всех пар слоев;

— при условно выбранном начальном давлении определены коэффициенты запаса для всех пар слоев, а по минимальному коэффициенту запаса оценено критическое давление;

— на основании нитяной модели выбраны более эффективные В- и С-структуры армирования, приближающиеся к равнонапряженным;

— показано, насколько можно повысить критическое давление за счет даже незначительного улучшения структуры армирования (при тех же прочностных и упругих свойствах с сохранением общего количества пар слоев, т.е. при прежней массе баллона).

Предлагаемая методика решения обратной задачи поиска оптимальной структуры армирования, обладающей равными коэффициентами запаса для всех пар слоев, осуществляется на основе серии прямых задач для улучшенных структур армирования, выбранных на базе простейшей нитяной модели, что позволяет избежать чрезвычайно громоздких вычислительных процедур, характерных для большинства подобных исследований.

1. Преимущества метода расчета композитных баллонов через пары слоев

1.1. Нитяная модель. Наиболее простая схема проектирования намоточных сосудов давления заключается в использовании “нитяной модели” [1], согласно которой все напряжения воспринимаются только равнонапряженными волокнами.

Для известных средних осевых $\bar{\sigma}_z$ и окружных $\bar{\sigma}_\theta$ напряжений в цилиндрической части баллона средним радиусом R

$$\bar{\sigma}_z = \frac{pR}{2h}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{pR}{h}, \quad (1)$$

нитяная модель позволяет оценить наименьшую допустимую толщину стенки h (обеспечивающую минимально возможную массу баллона) для выбранных углов армирования. В предельном состоянии при действии критического внутреннего давления p^* напряжение в слоях достигает предела прочности σ_0 вдоль волокон, что из (1) соответствует выполнению двух условий:

$$\frac{p^* R}{2\sigma_0} = \sum_{i=1}^m h_i \cos^2 \alpha_i, \quad \frac{p^* R}{\sigma_0} = \sum_{i=1}^m h_i \sin^2 \alpha_i. \quad (2)$$

Например, при числе семейств волокон $m=1$ из двух уравнений (2) находим два параметра $h_1 = h = \frac{3p^* R}{2\sigma_0}$; $\alpha_1 = \alpha^* = 54^\circ 44'$ ($\operatorname{tg}^2 \alpha^* = 2$). Если

число семейств $m \geq 2$, то число параметров структуры (толщин h_i и углов α_i) становится больше числа уравнений (2), и надо задавать значения углов, чтобы определить необходимые толщины слоёв. Например, при армировании цилиндрической части баллона двумя семействами волокон — 1) с ориентацией $\pm\alpha_1$ и толщиной слоя h_1 и 2) с ориентацией $\pm\alpha_2$, толщиной h_2 можно выбрать углы армирования ($0^\circ/90^\circ$), ($\pm 30^\circ/90^\circ$), ($\pm 45^\circ/90^\circ$), ($0^\circ/\pm 60^\circ$) и другие, но чтобы $\alpha_1 < \alpha^*$, $\alpha_2 > \alpha^*$, и тогда легко убедиться, что суммарная толщина стенки $h = h_1 + h_2 = 3p^* R / (2\sigma_0)$ остаётся прежней. Отсюда следует, что по нитяной модели любая труба (баллон) с равнонапряженными волокнами имеет одинаковую массу, и эта масса — минимально возможная при заданных геометрии баллона, прочности вдоль волокон и внутреннем давлении.

1.2. Послойный метод расчета композитных симметрично намотанных труб. Традиционный послойный (ply-by-ply) метод компьютерного расчета напряжений в слоях композитных пластин (laminates) удобно применять не к однонаправленным препрегам, а к парам симметрично намотанных слоев ($\pm\alpha_i$), что сопряжено с рядом преимуществ. Пара слоев ортотропна, что упрощает формулы преобразований тензора модулей упругости. Прочность пары слоев оценивается при корректных испытаниях симметрично намотанных ортотропных труб, в то время как прочности монослоя вынужденно определяются при растяжении однонаправленных пластинок под углами к волокнам, и при этом в неортотропных образцах возникают дополнительные деформации и изгибающие моменты, влияние которых трудно оценить аналитически.

Прямая задача послойного метода расчета композитного баллона (рис. 1) формулируется в следующем виде.

Заданы форма, размеры баллона и внутреннее давление, а также структура армирования цилиндрической части, т.е. углы намотки $\pm\alpha_i$ и число n_i ($i=1, \dots, m$) пар слоев ($\pm\alpha_{1n_1} / \pm\alpha_{2n_2} / \dots / \pm\alpha_{mn_m}$). Общее число монослоев $N = 2 \sum_{i=1}^m n_i$, и расчеты можно провести, отнеся нагрузку не к

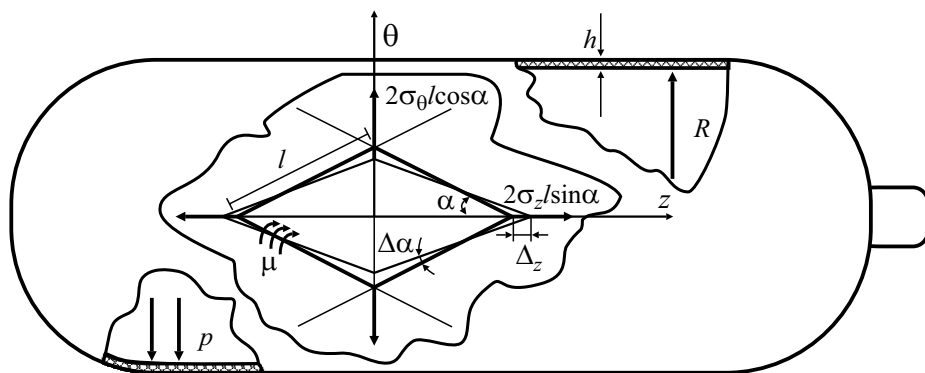


Рис. 1. Схемы баллона и ромбического элемента структуры армирования при двухосном растяжении под действием внутреннего давления p .

толщине стенки, а к числу слоев, которое точно задано, а толщина может локально изменяться из-за условий намотки.

Требуется рассчитать напряжения $\sigma_z(\alpha_i)$ и $\sigma_\theta(\alpha_i)$ в каждой паре слоев и определить, при каком давлении баллон начнет разрушаться и какое предельное давление он сможет выдержать.

Для начала расчета напряжений в парах слоев нужно знать четыре независимые технические упругие константы для однонаправленного композита (отмечены верхним индексом 0) в осях 1-2, связанных с направлением волокон (рис. 2): модули Юнга E_1^0, E_2^0 , модуль сдвига G_{12}^0 , коэффициент Пуассона ν_{12}^0 ; $\nu_{21}^0 = \nu_{12}^0 E_2^0 / E_1^0$.

На **первом этапе**, чтобы далее применять известные формулы преобразования тензоров, надо пересчитать технические константы в тензорные компоненты модулей упругости и податливостей:

$$E_{11}^0 = E_1^0 \Delta_0^{-1}, \quad E_{12}^0 = E_2^0 \nu_{12}^0 \Delta_0^{-1}, \quad E_{22}^0 = E_2^0 \Delta_0^{-1}, \quad \Delta_0 = 1 - \nu_{12}^0 \nu_{21}^0, \quad E_{66}^0 = G_{12}^0, \quad (3)$$

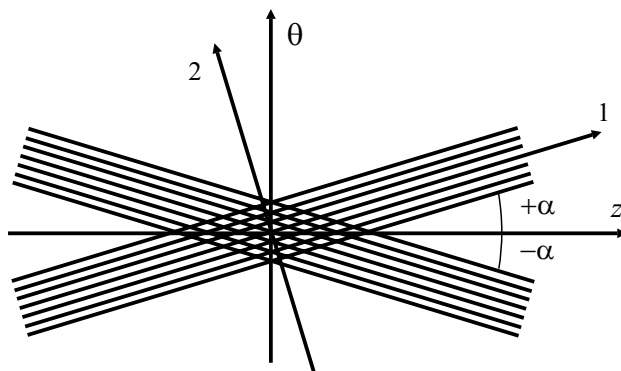


Рис. 2. Схема поворота системы координат для пары слоев.

$$S_{11}^0 = \frac{E_{22}^0}{\Delta} = \frac{1}{E_1^0}, \quad S_{22}^0 = \frac{E_{11}^0}{\Delta} = \frac{1}{E_2^0}, \quad S_{12}^0 = -\frac{E_{12}^0}{\Delta} = -\frac{\nu_{12}^0}{E_1^0},$$

$$\Delta = E_{11}^0 E_{22}^0 - (E_{12}^0)^2, \quad S_{66}^0 = \frac{1}{E_{66}^0} = \frac{1}{G_{12}^0}. \quad (4)$$

В (3), (4) применена обычная замена пары индексов на один: $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 12 \rightarrow 6, zz \rightarrow z, \theta\theta \rightarrow \theta$, чтобы можно было внешне представить четырехвалентный тензор модулей в виде квадратной матрицы, а тензор напряжений второго ранга — в виде вектора.

На *втором этапе* необходимо пересчитать для каждой пары слоёв $(\pm\alpha_i)$ (см. рис. 2) компоненты модулей упругости и податливостей в проекциях на оси $z - \theta$, привязанные к баллону:

$$E_{zz}(\alpha) = E_{11}^0 c^4 + E_{22}^0 s^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2,$$

$$E_{z\theta}(\alpha) = (E_{11}^0 + E_{22}^0 - 4E_{66}^0) s^2 c^2 + E_{12}^0 (s^4 + c^4), \quad (5)$$

$$E_{\theta\theta}(\alpha) = E_{11}^0 s^4 + E_{22}^0 c^4 + 2(E_{12}^0 + 2E_{66}^0) s^2 c^2,$$

$$S_{zz}(\alpha) = S_{11}^0 c^4 + S_{22}^0 s^4 + (2S_{12}^0 + S_{66}^0) s^2 c^2,$$

$$S_{z\theta}(\alpha) = (S_{11}^0 + S_{22}^0 - S_{66}^0) s^2 c^2 + S_{12}^0 (s^4 + c^4), \quad (6)$$

$$S_{\theta\theta}(\alpha) = S_{11}^0 s^4 + S_{22}^0 c^4 + (2S_{12}^0 + S_{66}^0) s^2 c^2.$$

В (5), (6) принято $c = \cos \alpha_i, s = \sin \alpha_i$.

На *третьем этапе* нужно вычислить эффективные модули упругости для слоистого композита, считая, что в тонкостенной трубе деформации всех слоёв равны средним деформациям композита $\bar{\varepsilon}_z, \bar{\varepsilon}_\theta$:

$$\bar{E}_{ks} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^m n_i E_{ks}(\alpha_i), \quad k, s = z, \theta. \quad (7)$$

Эффективные податливости композита определяем из (4):

$$\bar{S}_{zz} = \bar{E}_{\theta\theta} \bar{\Delta}^{-1}, \quad \bar{S}_{\theta\theta} = \bar{E}_{zz} \bar{\Delta}^{-1}, \quad \bar{S}_{z\theta} = -\bar{E}_{z\theta} \bar{\Delta}^{-1}, \quad \bar{\Delta} = \bar{E}_{zz} \bar{E}_{\theta\theta} - \bar{E}_{z\theta}^2. \quad (8)$$

При симметричных парах слоёв композит остается ортотропным, поэтому в плоском случае тензоры модулей и податливостей определяются не шестью, а четырьмя независимыми компонентами (8), лишь три из которых важны при двухосном растяжении.

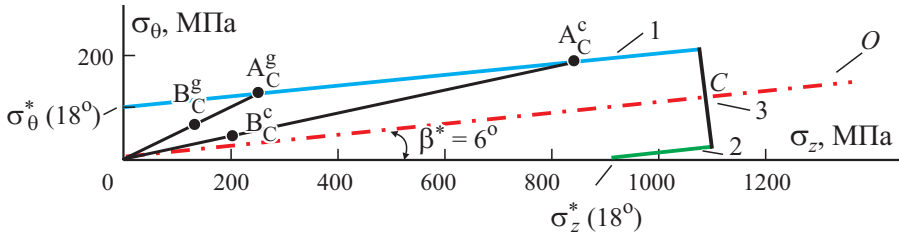


Рис. 3. Предельная поверхность в пространстве напряжений для пары слоев $\pm 18^\circ$ при двухосном растяжении.

На **четвертом этапе** через средние напряжения (1) и податливости (8) рассчитываем средние деформации

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz}\bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z\theta}\bar{\sigma}_\theta, \quad \bar{\varepsilon}_\theta = \bar{S}_{z\theta}\bar{\sigma}_z + \bar{S}_{\theta\theta}\bar{\sigma}_\theta. \quad (9)$$

Пятый этап — это расчет осевых и окружных напряжений в парах слоев:

$$\begin{aligned} \sigma_z(\alpha_i) &= E_{zz}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_z + E_{z\theta}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_\theta, \\ \sigma_\theta(\alpha_i) &= E_{z\theta}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_z + E_{\theta\theta}(\alpha_i)\bar{\varepsilon}_\theta; \end{aligned} \quad (10)$$

эти напряжения — точка B в координатах $\sigma_z — \sigma_\theta$ (рис. 3—6), в которых для каждой пары слоев по обоснованным далее критериям прочности строится предельная поверхность в виде трех отрезков 1-2-3 либо участка эллипса 4. С ростом давления пропорционально растут напряжения в каждой паре слоев, и соответствующая им точка смещается вдоль луча OB пока не достигнет некоторой точки A на предельной поверхности. Отно-

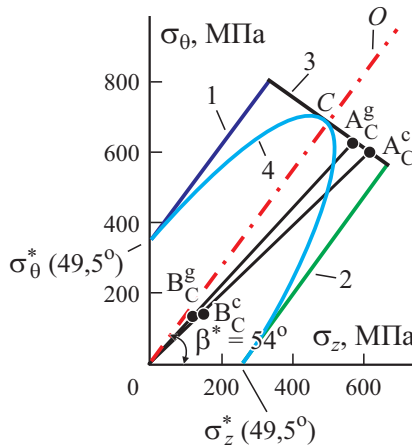


Рис. 4. Предельная поверхность для пары слоев $\pm 49,5^\circ$; прямые 1, 2 — условия перекашивания ромба (см. рис. 1); прямая 3 — условие разрыва волокон; 4 — предельный эллипс.

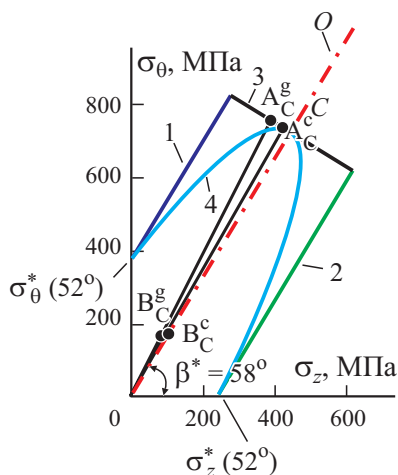


Рис. 5. Предельные поверхности (см. рис. 4) для пары слоев $\pm 52^\circ$.

шение OA/OB определяет коэффициент запаса k для каждой пары слоев при условно выбранном начальном давлении. За критическое давление p^* можно принять соответствующее первому выходу луча нагружения на предельную поверхность (в точку A) для самой нагруженной пары слоев, обладающей наименьшим коэффициентом запаса при начальном давлении.

Оценка условия окончательного разрушения по первому нарушению критерия прочности хотя бы в одной паре слоев (“first ply criterion”) может оказаться слишком консервативной, с завышенным запасом прочности. Более аккуратный результат даёт анализ последовательных разрушений в парах слоёв, но для такого анализа критерии прочности должны учитывать разные механизмы разрушения, а традиционные критерии [7—11]

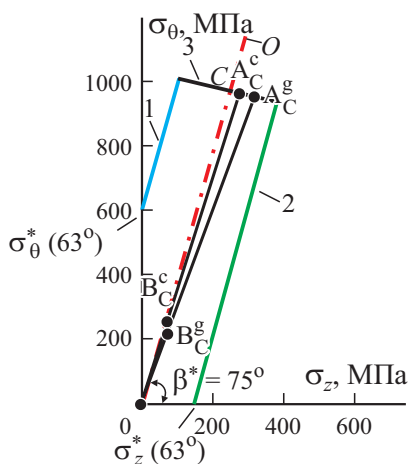


Рис. 6. Предельная поверхность для пары слоев $\pm 63^\circ$.

в отличие от [12—16] такой возможности не дают. В данной работе при оценке коэффициентов запаса, для наглядности, использовали критерий первого разрушения; важно отметить, что предельная поверхность в виде трёх прямых отрезков позволяет судить о механизме разрушения, а в виде гладкого эллипса – нет.

2. Построение предельных поверхностей

2.1. Критерии прочности по модели ромба. Для симметрично намотанных труб была предложена [14, 15] и обоснована [16, 17] на базе экспериментов [18—21] модель ячейки в виде ромба (с длиной стороны l) из нерастяжимых стержней (см. рис. 1), повороту которых (изменению угла α) при двухосном растяжении силами $P_z = 2\sigma_z l \sin \alpha$, $P_\theta = 2\sigma_\theta l \cos \alpha$ (условная толщина пары слоёв в ячейке принята равной единице) препятствует суммарный момент $M = 2\mu l^2 \sin \alpha \cos \alpha$, пропорциональный площади ромба. Здесь μ — отнесенный к единице площади распределенный момент от касательных напряжений, возникающих при сдвиге матрицы.

Силы P_z , P_θ , приложенные к вершинам ромба, совершают работу при смещениях вершин: $\Delta_z = (2l \cos \alpha)' d\alpha = -2l \sin \alpha \cdot d\alpha$; $\Delta_\theta = 2l \cos \alpha \cdot d\alpha$, и эту работу можно приравнять к работе суммарного момента при изменении угла ромба $d\alpha$:

$$|P_z \Delta_z + P_\theta \Delta_\theta| = M d\alpha. \quad (11)$$

Разрушение матрицы начинается по достижении критического значения распределенного момента μ^* , которое определяет прочность $\sigma_z^*(45^\circ) = \sigma_{45} = \mu^* / 2$ при растяжении трубы с намоткой ($\pm 45^\circ$). Критерий (11) приводит в координатах $\sigma_z - \sigma_\theta$ к двум уравнениям прямых линий 1, 2 (см. рис. 3—6) с углом наклона $\beta^* = \arctg \operatorname{tg}^2 \alpha$:

$$|\sigma_z \operatorname{tg} \alpha - \sigma_\theta \operatorname{ctg} \alpha| = \sigma_{45} \Rightarrow$$

$$1) \sigma_\theta = t^2 \sigma_z + t \sigma_{45} \text{ при } \sigma_z < \operatorname{tg} \beta^* \sigma_\theta, \operatorname{tg} \beta^* = \operatorname{tg}^2 \alpha = t^2, \quad (12)$$

$$2) \sigma_\theta = t^2 \sigma_z - t \sigma_{45} \text{ при } \sigma_z > \operatorname{tg} \beta^* \sigma_\theta, \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}.$$

Прямыми скобками в (12) обозначено абсолютное значение, а минус в скобках связан с тем, что напряжения σ_z , σ_θ искажают ромб в противоположных направлениях, “мешая” друг другу: одно стремится увеличить, а другое — уменьшить угол α .

Из (12) получаем очень простые выражения для прочности трубы в зависимости от угла намотки ($\pm\alpha$) при одноосном растяжении в осевом $\sigma_z^*(\alpha)$ или окружном $\sigma_\theta^*(\alpha)$ направлениях:

$$\sigma_z^*(\alpha) = \sigma_z^*(45^\circ)t^{-1} = \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \sigma_\theta^*(\alpha) = \sigma_{45} \operatorname{tg} \alpha. \quad (13)$$

Для симметричной намотки ($\pm 45^\circ$) растягивающие и окружные напряжения геометрически равнозначны, но окружные напряжения в баллонах для сжатого газа создаются внутренним давлением, и потеря несущей способности может определяться не потерей прочности волокон или матрицы, а потерей герметичности, поэтому, строго говоря, $\sigma_z^*(45^\circ) \neq \sigma_\theta^*(45^\circ)$, но для сохранения простоты методики не будем это учитывать, считая, что герметичность обеспечивается внутренним лайнером или дополнительными герметизирующими слоями. Поэтому принято

$$\begin{aligned} \sigma_z^*(45^\circ) &= \sigma_\theta^*(45^\circ) = \sigma_{45}, \quad \sigma_z^*(0^\circ) = \sigma_\theta^*(90^\circ) = \sigma_0, \\ \sigma_z^*(90^\circ) &= \sigma_\theta^*(0^\circ) = \sigma_{90}, \quad \sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

Если необходимо учесть пусть небольшую, но всё же ненулевую прочность при осевом растяжении трубы с окружной намоткой $\sigma_z^*(90^\circ) = \sigma_{90}$ (фактически прочность матрицы), то можно вместо (13) использовать чуть более сложные зависимости

$$\sigma_z^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{ctg} \alpha + \sigma_{90}, \quad \sigma_\theta^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{tg} \alpha + \sigma_{90}. \quad (14)$$

При $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha \rightarrow \infty$, и мы вынуждены в (13) ограничить осевую прочность для малых углов и окружную прочность для углов, близких к 90° , значением прочности σ_0 вдоль волокон. Таким образом, зависимость прочности при осевом растяжении от угла разориентации разбивается на два участка: на первом (при достаточно больших углах) прочность определяется механизмом перекашивания ромба, а на втором (при малых углах) — разрывом волокон. Угол смены механизмов разрушения определяется равенством критических напряжений для двух механизмов — перекашивания и разрыва:

$$\begin{aligned} \sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha) &= \begin{cases} \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha, & \alpha > \alpha_0, \\ \approx \sigma_0, & \alpha \leq \alpha_0, \end{cases} \\ \sigma_\theta^*(\alpha) &= \begin{cases} \sigma_{45} \operatorname{tg} \alpha, & \alpha < 90^\circ - \alpha_0, \\ \approx \sigma_0, & \alpha \geq 90^\circ - \alpha_0, \end{cases} \quad \operatorname{ctg} \alpha_0 = \sigma_0 / \sigma_{45}. \end{aligned} \quad (15)$$

Например, при $\sigma_0 = 1200$ МПа, $\sigma_{45} = 300$ МПа из [19] имеем

$$\operatorname{ctg} \alpha_0 = \sigma_0 / \sigma_{45} = 1200 / 300 = 4 \Rightarrow \alpha_0 = 0,245 = 14^\circ. \quad (16)$$

Для уточнения зависимости (15) воспользуемся согласно [16, 17] критерием разрушения в виде достижения критического значения линейной комбинацией нормальных и касательных напряжений вдоль волокон (ось 1):

$$\sigma_1 + m_0 \tau_{12} = \sigma_0,$$

$$\sigma_1 = \sigma_z \cos^2 \alpha, \quad \tau_{12} = \sigma_z \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha) = \frac{\sigma_0}{\cos^2 \alpha + m_0 \sin \alpha \cos \alpha}, \quad \alpha \leq \alpha_0 \quad (17)$$

$$\sigma_z^*(\alpha) = \sigma_\theta^*(90^\circ - \alpha) = \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow$$

$$\alpha_0 \Leftrightarrow \frac{\sigma_0}{\cos^2 \alpha_0 + m_0 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} = \sigma_{45} \operatorname{ctg} \alpha_0.$$

Для приближенного решения нижнего уравнения (17) воспользуемся двумя упрощающими допущениями:

1) угол α_0 мал, поэтому ограничимся линейным приближением, полагая $\sin \alpha_0 \approx \alpha_0$, $\cos \alpha_0 \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha_0^2 \approx 1$;

2) ввиду сложности экспериментального определения m_0 в малом диапазоне углов $\alpha \in [0; \alpha_0]$ положим произвольно $m_0 = 0,3$. Тогда из (17)

$$\sigma_0 \alpha_0 \approx \sigma_{45} (1 + 0,3 \alpha_0) \Rightarrow \quad (18)$$

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{45}}{\sigma_0 - 0,3 \sigma_{45}} = 0,27 = 15,5^\circ.$$

Различие оценок (18) и (16) невелико (10%), и поправки (15), (17) играют роль только для малых углов (или близких к 90° при окружном растяжении), поэтому при построении предельных зависимостей для углов намотки, например, 30° , 45° или 60° подобные уточнения необязательны.

При малых углах, например $\pm 16^\circ$ можно оценивать осевую прочность по усложненной формуле (14), приняв $\sigma_{90} = 100$ МПа:

$$\sigma_z^*(\alpha) = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{ctg} \alpha + \sigma_{90} \Rightarrow \sigma_z^*(16^\circ) = 690 \text{ МПа}. \quad (19)$$

По аналогии с (17), используя (14) и (19), можно записать уточненное условие равенства критических напряжений для разных механизмов разрушения

$$\frac{\sigma_0}{\cos^2 \alpha_0 + m_0 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0} = (\sigma_{45} - \sigma_{90}) \operatorname{ctg} \alpha_0 + \sigma_{90} \Rightarrow$$

$$\alpha_0 \approx \frac{\sigma_{45} - \sigma_{90}}{\sigma_0 - m_0 \sigma_{45} + (1 - m_0) \sigma_{90}} = \frac{200}{1180} \approx 10^\circ.$$
(20)

Оценка (20) получена при тех же упрощающих допущениях, что и (18), и $m_0 = 0,3$.

2.2. Построение предельных поверхностей в виде трех отрезков или эллипса. Часть предельной поверхности для пар слоёв ($\pm\alpha$), связанных с разрушением матрицы, строим в осях σ_z — σ_θ с помощью проведения двух прямых линий 1 и 2 (см. рис. 3—6) под оптимальным углом $\beta^* = \arctg \operatorname{tg}^2 \alpha$ через точки $\sigma_z^*(\alpha)$, $\sigma_\theta^*(\alpha)$ на осях, соответствующих прочностям при одноосном растяжении. В простейшем случае эти прочности можно принять в виде (13) или (14), а для малых углов (или близких к 90°) — в виде (15) или (17).

На оптимальном луче O надо указать точку C , соответствующую разрыву волокон по нитяной модели. В этой точке напряжение вдоль волокон считается равным пределу прочности σ_0 , а проекции этого напряжения на оси определяются из (2) соотношениями

$$\sigma_{zC} = \sigma_0 \cdot \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cdot \frac{c^2}{s^2 + c^2} = \sigma_0 \frac{1}{1 + t^2},$$

$$\sigma_{\theta C} = \sigma_0 \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_0 \cdot \frac{s^2}{s^2 + c^2} = \sigma_0 \frac{t^2}{1 + t^2}.$$
(21)

Отрезок прямой 3, соответствующий разрыву волокон, должен быть перпендикулярен лучу O : $\sigma_\theta = t^2 \sigma_z$; поэтому уравнение прямой 3 должно иметь вид (с неизвестным K)

$$\sigma_\theta = -\frac{\sigma_z}{t^2} + K.$$

Из условия прохождения прямой 3 через точку C с координатами (21)

$\Rightarrow K = \sigma_0 \frac{t^4 + 1}{t^2(t^2 + 1)}$, и уравнение прямой 3 будет иметь вид

$$t^2 \sigma_\theta + \sigma_z = \sigma_0 (1 + t^4) (1 + t^2)^{-1}.$$
(22)

Чтобы аппроксимировать кусочно-линейную предельную поверхность единым уравнением, можно провести наклонный эллипс через три точки: две — на осях (13) и точку C (21) на оптимальном луче O . Уравнение эллипса 4 (см. рис. 4, 5) приобретает вид

$$t^2\sigma_z^2 + t^{-2}\sigma_\theta^2 - \sigma_z\sigma_\theta \left(2 - \frac{\sigma_{45}^2(1+t^2)^2}{t^2\sigma_0^2} \right) = \sigma_{45}^2, \quad t = \operatorname{tg}\alpha. \quad (23)$$

Для определения коэффициентов запаса при выбранном давлении можно использовать предельную поверхность в виде эллипса (23), но он, как и другие тензорно-полиномиальные критерии [18—20], не даёт возможности различить условия разных видов разрушения: разрыва волокон (прямая 1) или растрескивания матрицы вследствие перекашивания ромбической ячейки (прямые 1 или 2). Поэтому в данной работе для определения коэффициентов запаса использовали предельную поверхность в виде прямоугольника, ограниченного тремя отрезками прямых (12), (22). При этом необходимо для каждой пары слоев рассчитать напряжения σ_{zB} , $\sigma_{\theta B}$, соответствующие точке B на рис. 3—6. Луч OB определяется уравнением

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_{\theta B}} = \frac{\sigma_z}{\sigma_{zB}}, \quad (24)$$

и при продолжении он пересечет предельные прямые 1, 2 или 3 в некоторой точке A , координаты которой находим совместным решением уравнений (24) и (12) — прямые 1, 2 или (22) — прямая 3. Отношение длин отрезков OA к OB определяет коэффициент запаса $k = \sigma_{zA} / \sigma_{zB} = \sigma_{\theta A} / \sigma_{\theta B}$:

— для случая пересечения с прямой 1 —

$$k = \frac{\sigma_{45}}{\sigma_{zB}} \left(\frac{\sigma_{\theta B}}{\sigma_{zB}} \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha \right)^{-1};$$

— для пересечения с прямой 2 —

$$k = \frac{\sigma_{45}}{\sigma_{zB}} \left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sigma_{\theta B}}{\sigma_{zB}} \operatorname{ctg}\alpha \right)^{-1};$$

— для пересечения с прямой 3 —

$$k = \frac{\sigma_{\theta A}}{\sigma_{\theta B}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_{\theta B}} \frac{t^4 + 1}{t^2(t^2 + 1)} \left(1 + \frac{\sigma_{zB}}{\sigma_{\theta B}t^2} \right)^{-1}.$$

Табл. 1

Схемы армирования баллонов со структурами армирования А, В и С (всего число слоев $N = 28$; n_i — число пар слоёв)

i	$\pm\alpha_i$, град	n_i		
		А	В	С
1	16	2	0	0
2	18	4	4	2
3	52	2	2	2
4	63	2	2	2
5	90	4	6	4
1-С	49	0	0	4

3. Рациональное проектирование структуры армирования

3.1. Исходная структура армирования. В качестве примера рассмотрим выбранную из некоторых технологических соображений реальную А-структуру армирования пятью семействами пар слоев (табл. 1) баллонов из стеклопластика, массово используемых в легких грузовиках для хранения газового топлива.

Размеры цилиндрической части баллона: толщина стенки $h = 8$ мм, средний радиус $R = 150$ мм. Примем начальное (расчетное) давление $p = 100$ атм = 10 МПа. Тогда из (1)

$$\bar{\sigma}_z \approx 93,7 \text{ МПа}, \bar{\sigma}_\theta \approx 187,5 \text{ МПа}. \quad (25)$$

Для расчета напряжений послойным методом примем для однонаправленного стеклопластика условные упругие свойства, пересчитанные по формулам (3), равные

$$E_{11}^0 = 45 \text{ ГПа}, E_{22}^0 = 9 \text{ ГПа}, G_{12}^0 = 7 \text{ ГПа}, E_{12}^0 = 3 \text{ ГПа}. \quad (26)$$

Эти данные качественно соответствуют реальным, но их точное значение не играет принципиальной роли в иллюстрации предлагаемого метода проектирования.

Упругие эффективные свойства однонаправленного композита можно рассчитывать [2, 24] по моделям Фойгта и Рейсса, Хашина—Штрикмана и других, зная модули упругости волокон и матрицы и объемную долю волокон. Здесь эти известные соотношения не приводим, считая, что более надёжные значения упругих свойств композитов можно получить только в макроэкспериментах, а не на основании приближенных верхних и нижних оценок, основанных на гипотезах о равенстве деформаций (Фойгт) или напряжений (Рейсс) в компонентах.

Табл. 2

Значения модулей упругости (ГПа) пар слоев для стеклопластика (индекс g) и углепластика (индекс c)

$\pm\alpha_i$, град	$E_{zz}^g(\alpha_i)$	$E_{\theta\theta}^g(\alpha_i)$	$E_{z\theta}^g(\alpha_i)$	$E_{zz}^c(\alpha_i)$	$E_{\theta\theta}^c(\alpha_i)$	$E_{z\theta}^c(\alpha_i)$
16	41,0	10,3	4,4	122,0	10,9	11,1
18	39,8	10,7	4,7	117,6	11,6	12,9
49,5	19,3	24,9	7,9	36,2	56,7	31,0
52	17,9	26,6	7,7	32,0	63,3	30,1
63	13,1	34,3	6,3	17,2	94,2	21,8
90	9,0	45,0	3,0	9,0	140,0	3,0

В силу линейности задачи все напряжения пропорциональны внутреннему давлению, поэтому для оптимального проектирования структуры армирования важны не конкретные коэффициенты запаса прочности, а лишь соотношения между ними. Задачей оптимального проектирования считаем построение такой структуры армирования, при которой коэффициенты запаса прочности в разных парах слоев принимают примерно равные значения. Эта обратная задача оптимизации решается на основе серии прямых задач, и поэтому расчетные схемы должны быть достаточно простыми, чтобы ускорить процесс подбора путем перебора.

Использование критериев прочности, основанных на модели ромба, требует знания всего трёх параметров: прочностей однонаправленного композита вдоль σ_0 и поперек σ_{90} волокон и прочности σ_{45} при растяжении трубы с намоткой $\pm 45^\circ$. Значения этих параметров для иллюстрации метода могут быть приняты равными

$$\sigma_0 = 1200 \text{ МПа}, \sigma_{90} = 100 \text{ МПа} \text{ и } \sigma_{45} = 300 \text{ МПа}; \quad (27)$$

на их основе были построены предельные поверхности для всех используемых в А-баллоне углов намотки, часть из которых представлена на рис. 3—6. Многочисленные попытки напрямую связать прочность композита с прочностями волокон и матрицы с использованием распределения Вейбулла для прочности волокон и модели типа Дау—Даниэльса—Розена

Табл. 3

Значения средних деформаций (%) для А-, В-, С-структур баллонов из стекло- и углепластика

Материал	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$ А	$\bar{\varepsilon}_\theta(\alpha_i)$ А	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$ В	$\bar{\varepsilon}_\theta(\alpha_i)$ В	$\bar{\varepsilon}_z(\alpha_i)$ С	$\bar{\varepsilon}_\theta(\alpha_i)$ С
Glass	0,253	0,672	0,346	0,551	0,338	0,555
Carbon	0,0965	0,258	0,156	0,195	0,153	0,198

Табл. 4

Значения напряжений (МПа) в точках В в парах слоев для А-, В- и С-структур из стеклопластика со свойствами (26) при $p=10$ МПа

$\pm\alpha_i$, град	$\sigma_z(\alpha_i)$ А	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ А	$\sigma_z(\alpha_i)$ В	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ В	$\sigma_z(\alpha_i)$ С	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ С
16	133,3	80,3	-	-	-	-
18	132,3	83,8	164	75,2	161	75,2
49,5	-	-	-	-	109	165
52	97,0	198,2	105	175	104	176
63	75,5	246,4	79,5	210	79	211
90	42,9	310	47,7	258	47,1	260

для прочности пучка волокон эффективной длины не приводят к надёжному результату, как и использование экспериментов на микропластиках, поэтому входными параметрами предложено считать значения прочности, непосредственно определенные на модельных трубчатых образцах.

Средние деформации вычисляли по закону Гука (табл. 3)

$$\bar{\varepsilon}_i = \bar{S}_{ij} \bar{\sigma}_j, \quad i, j = z, \theta \quad (28)$$

через компоненты эффективной матрицы податливостей, которые рассчитывали по формулам (4) для значений (26) при вычислении эффективных модулей по формулам (7) через данные табл. 2. Например, для А-структуры

$$\begin{aligned} \bar{S}_{zz} &= \bar{E}_{\theta\theta} \bar{\Delta}^{-1} = 4,29 \cdot 10^{-2} \text{ ГПа}^{-1}, \quad \bar{S}_{\theta\theta} = \bar{E}_{zz} \bar{\Delta}^{-1} = 3,98 \cdot 10^{-2} \text{ ГПа}^{-1}, \\ \bar{S}_{z\theta} &= -\bar{E}_{z\theta} \bar{\Delta}^{-1} = -0,794 \cdot 10^{-5} \text{ ГПа}^{-1}, \quad \bar{\Delta} = \bar{E}_{zz} \bar{E}_{\theta\theta} - \bar{E}_{z\theta}^2 = 608,5 \text{ ГПа}^2, \end{aligned} \quad (29)$$

Табл. 5

Значения напряжений (МПа) в точках В в парах слоев для А-, В- и С-структур из углепластика со свойствами (26), (27), (31) при $p=10$ МПа

$\pm\alpha_i$, град	$\sigma_z(\alpha_i)$ А	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ А	$\sigma_z(\alpha_i)$ В	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ В	$\sigma_z(\alpha_i)$ С	$\sigma_\theta(\alpha_i)$ С
16	146	38,9	-	-	-	-
18	147	42,4	208	42,6	205,5	42,7
49,5	-	-	-	-	117	160
52	108	193	108	170	108,6	171,4
63	73,1	265	69,3	218	69,5	220
90	16,5	365	19,9	278	19,7	282

Табл. 6

Коэффициенты запаса $k = OA/OB$ для пар слоёв при внутреннем давлении $p = 10$ МПа и критическое давление $p^* = p \cdot k_{\min}$ (МПа) для А-, В- и С-структур армирования баллона из стеклопластика (g) со свойствами (26), (27) и углепластика (с) со свойствами (26), (31), (27)

$\pm\alpha$, град Структура	± 16 , град	± 18 , град	$\pm 49,5$, град	± 52 , град	± 63 , град	90, град	p^*	%
A-g	1,2	1,4	-	3,8	3,8	2,3	12	100
B-g	-	1,7	-	4,0	4,4	2,1	17	141
C-g	-	1,7	4,3	4,0	4,4	2,1	17	142
A-c	3,2	3,6	-	4,0	3,6	5,9	32	267
B-c	-	3,9	-	4,3	4,3	5,0	39	325
C-c	-	4,0	4,3	4,3	4,3	5,1	40	333

$$\bar{\varepsilon}_z = \bar{S}_{zz}\bar{\sigma}_z + \bar{S}_{z\theta}\bar{\sigma}_\theta = 2,53 \cdot 10^{-3}, \quad (30)$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \bar{S}_{z\theta}\bar{\sigma}_z + \bar{S}_{\theta\theta}\bar{\sigma}_\theta = 6,72 \cdot 10^{-3}.$$

Через среднюю деформацию рассчитывали напряжения в парах слоёв вначале для А-структуры, а затем для В- и С-структур. Рассчитанные послойным методом напряжения для пар слоёв приведены в табл. 4, а внутри предельных поверхностей в пространстве напряжений на рис. 3—6 показаны точками *B*.

Для исследования влияния на результаты модуля упругости вдоль волокон все расчеты (табл. 5) были проделаны также для модуля упругости, примерно соответствующего однонаправленному углепластику; в данных (26) использована единственная замена:

$$E_{11}^0 = 140 \text{ ГПа}, \quad (31)$$

а все остальные упругие (26) и прочностные (27) свойства оставлены прежними. Выбор других упругих и прочностных свойств, определенных на современных композитных материалах, не вносит существенных изменений в методику и результаты оптимизации.

3.2. Подбор рационального количества пар слоёв. В табл. 6 приведены значения коэффициентов запаса для пар слоёв в исходной А-структуре (см. табл. 1). Как видно, они сильно различаются для разных углов, т.е. выбранная схема армирования далека от оптимальной. В этом можно убедиться на основе анализа нитяной модели, согласно которой из (2) сред-

нее взвешенное от квадратов синусов (SIN) должно вдвое превосходить подобное среднее от квадратов косинусов (COS):

$$2 \sum_{i=1}^m n_i \cos^2 \alpha_i = \sum_{i=1}^m n_i \sin^2 \alpha_i \Rightarrow \frac{\text{SIN}}{\text{COS}} = 2; \tag{32}$$

для А $\Leftrightarrow \frac{\text{SIN}}{\text{COS}} = \frac{\sin^2 16^\circ + 2 \sin^2 18^\circ + \sin^2 52^\circ + \sin^2 63^\circ + 2}{\cos^2 16^\circ + 2 \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 63^\circ} \approx 1,11 \ll 2??!$

Ситуацию несложно исправить, изменив количество пар слоев с разной ориентацией.

Способ 1. В-структура. Оставляем те же углы армирования и общее количество пар слоев, меняя лишь соотношения между числами пар слоев. Поскольку пары слоев с ориентацией $63^\circ > 55^\circ = \alpha^*$ перегружены, а слои $16^\circ < \alpha^*$ недогружены, заменяем все пары слоёв с ориентацией 16° на слои 90° . Теперь условие оптимальности (32) выполняется более точно:

$$\frac{2 \sin^2 18^\circ + \sin^2 52^\circ + \sin^2 63^\circ + 3}{2 \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 63^\circ} \approx 1,92 \approx 2 !!$$

Из данных табл. 6 видно, что вариант В лучше, чем вариант А. Найти необходимое число x заменяемых пар слоев можно из простого уравнения (объединив для краткости 16° и 18°):

$$\frac{(6-x) \sin^2 18^\circ + 2 \sin^2 52^\circ + 2 \sin^2 63^\circ + (4+x)}{(6-x) \cos^2 18^\circ + 2 \cos^2 52^\circ + 2 \cos^2 63^\circ} = 2 \Rightarrow x = 2,13 \approx 2.$$

Значит, замена двух пар 16° на 90° дает структуру, близкую к рациональной. При оптимальном проектировании кроме числа слоев можно менять также углы намотки и модули упругости (например, варьируя стеклянные, углеродные и органические (Kevlar) волокна), что приведет к требуемому перераспределению напряжений в слоях, обеспечивая максимально близкие коэффициенты запаса для пар слоев с разными углами намотки.

Способ 2. С-структура. Выберем из условия (32) для четырех пар слоев другой угол армирования ψ — вместо двух пар 16° и двух пар 18° — при сохранении других углов ориентации и числа пар слоёв:

$$\frac{2 \sin^2 \psi + \sin^2 18^\circ + \sin^2 52^\circ + \sin^2 63^\circ + 2}{2 - 2 \sin^2 \psi + \cos^2 18^\circ + \cos^2 52^\circ + \cos^2 63^\circ} = 2 \Rightarrow$$

$$\sin^2 \psi = 0,5782; \psi = 0,864 \approx 49,5^\circ.$$

Таким образом, если две пары слоёв под углом 16° и две пары слоев под углом 18° заменить на четыре пары слоев под углом $49,5^\circ$, то полу-

чится равнонапряженная структура (по нитяной модели). Заметим, что подбор угла можно проводить “плавно”, а не только по целым числам пар слоев, что делает метод *C* более эффективным, чем *B*, как видно из данных табл. 6.

3.3. Оценка критического давления. Расчет напряжений послойным методом и определение коэффициентов запаса по предельным поверхностям для каждой пары слоев (см. рис. 3—6) позволяют оценить критическое давление через минимальный коэффициент запаса (см. табл. 6), если принять за условие окончательного разрушения выход из строя хотя бы одной, наиболее нагруженной пары слоев. Из данных табл. 6 видно, что для исходной А-структуры критическое давление равно $p_A^* = p \cdot k_{A\min} = 10 \cdot 1,2 \approx 12$ МПа; критическое давление для В-структуры — $p_B^* = 10 \cdot 1,7 \approx 17$ МПа выше, чем для А-структуры на 41%, как и для С-структуры: $p_C^* = 10 \cdot 1,7 = 17$ МПа.

Таким образом, даже простейшие способы создания почти равнонапряженной структуры армирования путем подбора всего одного параметра на основе нитяной модели могут существенно повысить критическое давление.

3.4. Использование высокомодульных волокон (углепластика). Все предыдущие расчеты были также проведены для данных, соответствующих упругим свойствам углепластика, с сохранением всех прежних упругих и прочностных свойств (26), (27) кроме модуля упругости вдоль волокон (31). Оптимизация по нитяной модели, как видно из данных табл. 6, для углепластика оказывается еще более эффективной, чем для стеклопластика, так как с ростом продольного модуля упругости поведение композита приближается к нитяной модели, согласно которой работают только высокомодульные и высокопрочные волокна, а роль матрицы не учитывается. Луч нагружения при улучшении структуры армирования упирается в прямую 3, соответствующую разрыву волокон, а не разрушению связующего (прямые 1 и 2), что означает более “правильное” распределение нагрузок на прочные волокна и приводит к росту критического давления.

3.5. Учет деградации свойств при нагружении. Более строгий анализ требует рассмотрения процессов последовательного разрушения, и используемые линейные критерии (12), (22) оказываются удобнее, чем эллиптическая аппроксимация (23) предельной поверхности. Если для пары слоев луч нагружения упирается в прямую 3, то пару слоёв можно считать вышедшей из строя, так как эта ситуация соответствует разрыву волокон. Если же луч нагружения упирается в прямые 1 или 2, можно считать, что в данной паре слоев разрушается матрица, и следует повторить расчет с уменьшенными значениями упругих свойств для данной пары слоев.

Если выполнено условие разрыва волокон, то данная пара слоев должна быть исключена при очередной итерации расчета. Если разрушилась полимерная матрица, то в этих парах слоёв назначают существенно пониженные модули сдвига и Юнга поперек волокон, а далее вновь проводится послойный расчет, начиная с этапа 2. При такой процедуре пошагово добавляется внутреннее давление до тех пор, пока все пары слоёв не выйдут из строя. Подробный анализ рассмотренных модельных задач здесь не приводится, но подобные подходы к описанию прогрессирующего разрушения широко используются [25—28].

Выводы

1. Новый подход, основанный на послойном методе расчета для симметричных пар слоёв, оказывается более простым и надёжным, чем традиционный расчет по монослоям.

2. Предложена простая методика решения обратной задачи подбора равнонапряженной структуры армирования на основе нитяной модели, позволяющая избежать громоздких вычислительных процедур, характерных для традиционных методов оптимального проектирования.

3. Использование критериев прочности, учитывающих разные механизмы разрушения, позволяет построить предельные поверхности для каждой пары слоев и, добиваясь равнонагруженности всех пар слоев, обеспечить повышение расчетного критического давления в баллоне для сжатого газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1977. — 144 с.

2. *Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов В. Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1984. — 264 с.

3. *Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андрияшин В. А.* Методы расчета цилиндрических оболочек из композиционных материалов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 264 с.

4. *Huang Ch., Ren M., Li T., Chang X., Lei Y.* Trans-scale modeling framework for failure analysis of cryogenic composite tanks // *Composites: Part B*. — 2016. — Vol. 85. — P. 41—49.

5. *Grogan D. M., Ó Brádaigh C. M., McGarry J. P., Leen S. B.* Damage and permeability in tape-laid thermoplastic composite cryogenic tanks // *Composites: Part A*. — 2015. — Vol. 78. — P. 390—402.

6. *Амелина Е. В., Буров А. Е., Голушко С. К., Лепихин А. М., Москвичев В. В., Юрченко А. В.* Расчетно-экспериментальная оценка прочности металлокомпозитного бака высокого давления // *Вычислит. технологии*. — 2016. — Т. 21, № 5. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27249206> (дата обращения: 20.05.2021)

7. Буров А. Е., Лепихин А. М. Количественное моделирование несущей способности металлокомпозитного бака высокого давления // Пробл. машиностроения и надежности машин. — 2016. — № 5. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27178560> (дата обращения: 25.06.2021)

8. Sklemina O. Yu., Polilov A. N., Tatus' N. A. Analytical and finite element method of calculation of multi-shell gas tanks // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., Moscow, 4–6 December, 2020.

9. Masakazu K., Iwasaki K., Reis P., Butter Bez C., De Medeiros R. Methodology for composite pressure vessel optimization based on CLT // 5th Brazilian Conference on Composite Materials (BCCM5), Jan., 2021.

10. Mahdy W., Kamel H. Design of optimum filament wound pressure vessel with integrated end domes // Int. Conf. Aerospace Sciences and Aviation Technology 16 (AEROSPACE SCIENCES), May, 2015.

11. Zhang L. W., Pan Z., Liew K. M. Adaptive surrogate-based harmony search algorithm for design optimization of variable stiffness composite materials // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2021. — Vol. 379. — P.113754.

12. Cohen D., Mantell S. C., Zhao L. The effect of fiber volume fraction on filament wound composite pressure vessel strength // Composites: Part B. — 2001. — Vol. 32. — No. 5. — P. 413—429.

13. Guo Z., Li Z., Cui J., Li Y., Luan Y. The effect of winding patterns on the mechanical behavior of filament-wound cylinder shells // Multidiscipline Modeling Mater. Struct. — 2019. — Vol. 16. — No. 3. — P. 508—518.

14. Geng P., Wang Q., Xing J. Analytical model for stress and deformation of multiple-winding-angle filament-wound composite pipes/vessels under multiple combined loads // Appl. Math. Modelling. — 2021. — Vol. 94. — P. 576—596.

15. Heidari-Rarani M., Ahmadi-Jebeli M. Finite element modeling of failure in IV type composite pressure vessel using WCM plug-in in ABAQUS software // Modares Mech. Eng. — 2018. — Vol. 18, — No. 4. — P. 191—200.

16. Hwang T. K., Hong C. S., Kim C. G. Probabilistic deformation and strength prediction for a filament wound pressure vessel // Composites: Part B. — 2003. — Vol. 34, — No. 5. — P. 481—497.

17. Rao S. S., Alazwari M. A. Failure modeling and analysis of composite laminates: Interval-based approaches // J. Reinf. Plastics Compos. — 2020. — Vol. 39. — P. 817—836.

18. Малмейстер А. К. Геометрия теорий прочности // Механика полимеров. — 1966. — № 4. — С. 519—534.

19. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопrotивление жестких полимерных материалов. — Рига: Зинатне, 1967. — 398 с.

20. Tsai S. W., Wu E. M. A general theory of strength for anisotropic materials // J. Compos. Mater. — 1971. — Vol. 2, — No. 1. — P. 191—206.

21. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites // J. Appl. Mech. — 1980. — Vol. 47. — P. 329—334.

22. Полилов А. Н. Схема расчёта прочности косоугольно армированных композитов при плоском напряженном состоянии // Механика композит. материалов. — 1980. — № 2. — С. 221—226.

23. Полилов А. Н., Татусь Н. А. Экспериментальное обоснование критериев прочности волокнистых композитов, проявляющих направленный характер разрушения // Вестн. ПНИПУ — 2012. — № 2. — С. 140—166.

24. Полилов А. Н. Этюды по механике композитов. — М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 320 с.

25. *Lapczyk I., Hurtado J. A.* Progressive damage modeling in fiber-reinforced materials // *Composites: Part A*. — 2007. — Vol. 38. — P. 2333—2341.

26. *Kozlov M. V., Sheshenin S. V.* Modeling the progressive failure of laminated composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2016. — Vol. 51. — P. 695—706.

27. *Hoos K., Iarve E. V., Braginsky M., Zhou E., Mollenhauer D. H.* Static strength prediction in laminated composites by using discrete damage modeling // *J. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 51. — P. 1473—1492.

28. *Zhu H., Guo Z. X., Zhu M., Cui J. J., He Q., Li Y. C.* A progressive FE failure model for laminates under biaxial loading // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56, — No. 2. — P. 207—214.

Поступила в редакцию 30.06.2021

Окончательный вариант поступил 18.10.2021

Received June 30, 2021 (Oct. 18, 2021)

В. И. Демичев^а, А. Ю. Сергеев^{а,б}, Т. А. Мотова^а, Л. А. Демченко^а,
К. В. Михайловский^а*

^аАО “Композит”, Королев, Московская обл., Россия

*^бФедеральный исследовательский центр химической физики им. Н. Н. Семенова РАН,
Москва, Россия*

ПОЛИМЕР-КОМПОЗИТНЫЕ ЕМКОСТИ С ВЫСОКИМ МАССОВЫМ СОВЕРШЕНСТВОМ ДЛЯ ХРАНЕНИЯ И ТРАНСПОРТИРОВКИ ГАЗОВ ПОД ДАВЛЕНИЕМ

V. I. Demichev, A. Yu. Sergeev, T. A. Motova, L. A. Demchenko, and K. V. Mikhailovskii*

POLYMER-COMPOSITE VESSELS WITH A HIGH MASS PERFECTION FOR THE STORAGE AND TRANSPORTATION OF A HIGH-PRESSURE GAS

Keywords: polymer-composite vessel, liner, strength, deformability, carbon-fiber-reinforced polymer, methane

Results of a design analysis, and calculations of technological aspects of manufacturing light polymer-composite high-pressure vessels with a sealing polymer liner, supported by a strength shell based on a CFRP of Russian production, are presented. The physical and mechanical properties of the sealing liner and reinforcing shells were investigated. The materials used for the polymer composite vessel were analyzed and selected. In order to ensure the strength of the reinforcing shell, design calculations were carried out, and a method for producing a polymer-composite vessel with a high mass perfection index is proposed.

Ключевые слова: емкость полимер-композитная, лайнер, прочность, деформативность, углепластик, метан

Представлены результаты проектного анализа, расчетов и технологических аспектов изготовления легких полимер-композитных баллонов высокого давления с герметизирующим полимерным лайнером, подкрепленных силовой оболочкой на основе угле-

*Автор, с которым следует вести переписку: sergeevandrey89@gmail.com
Corresponding author: sergeevandrey89@gmail.com

пластиков российского производства. Проанализированы проблемы создания полимер-композитных баллонов. Исследованы физико-механические свойства герметизирующего лайнера и армирующей оболочки. Проанализированы и выбраны материалы для получения полимер-композитной емкости. Проведены проектные расчеты для обеспечения прочности армирующей оболочки. Предложен способ получения полимер-композитного баллона с высоким показателем массового совершенства.

Введение

В настоящее время в рамках реализации программы развития энергетики Российской Федерации актуализировались вопросы добычи, транспортировки и переработки природного газа и водорода. При использовании этих видов топлива вместо продуктов переработки нефти выброс токсичных веществ в окружающую среду снижается. В качестве альтернативного топлива для автомобилей можно использовать не только сжиженный углеводородный газ (СУГ) пропан-бутан, но и экологически чистый природный газ — метан. Кроме того, расход метана как моторного топлива в двигателе внутреннего сгорания оказывается экономичнее бензина в отличие от пропан-бутана. Существует два способа хранения природного газа на транспортном средстве: в газообразном состоянии при высоком давлении и в сжиженном состоянии при низкой температуре. Так как при атмосферном давлении плотность метана в тысячу раз ниже плотности бензина ($0,7 \text{ кг/м}^3$ метана и 700 кг/м^3 бензина), то на транспортном средстве метан хранится в специальных газовых баллонах в сжатом (компримированном) виде под давлением 20—25 МПа.

Водород удобно хранить в жидком состоянии, но это требует создания хранилищ, обладающих суперизоляцией, и специально оборудованных заправочных станций. Поэтому в настоящее время наиболее востребованным является способ хранения водорода под давлением 20 МПа и выше, не имеющий перечисленных недостатков. Сосуды высокого давления являются важным элементом автомобиля, работающего на газомоторном топливе, и заслуживают отдельного рассмотрения.

В истории развития баллонов для хранения и транспортировки газов принята их классификация на основе применяемых материалов и конструкций. Классификация включает пять основных типов конструкций: цельнометаллические (тип I), металлокомпозитные (два подтипа) (тип II и тип III), полимер-композитные (тип IV) и безлейнерные композитные баллоны (тип V).

Для характеристики массового совершенства емкостей используют показатель, измеряемый в километрах и вычисляемый в соответствии с выражением [1]

$$\mu = \frac{PV}{M},$$

где P — разрушающее давление, кгс/см²; V — объем ёмкости, см³; M — масса ёмкости, кг.

На предприятии АО “Композит” разработана и внедрена технология серийного производства металлокомпозитных баллонов (МКБ) (тип III), конструкция которых состоит из тонкого металлического лейнера, заключённого по всей поверхности в армирующую оболочку из композитного материала по типу “кокон”.

На сегодняшний день существуют различные технологии изготовления тонкостенных металлических лейнеров: раскатка, порошковая металлургия, сварка компонентов, полученных методом пластического деформирования листовых заготовок и т.д. Все эти технологии сложны и дорогостоящи, кроме того, масса металлического лейнера существенно сказывается на массе баллона в целом, поэтому такие ёмкости характеризуются относительно низким показателем массового совершенства μ (12—16 км).

Полимер-композитные баллоны, содержащие лейнер из термопластичного материала, являются альтернативным техническим решением на сегодняшний день. Лейнеры такого типа изготавливаются из модифицированного полиэтилена, кристаллизуемого полиэтилентерефталата и других полимеров методом раздувания заготовки в пресс-форме или ротационным формованием. Полимер-композитные ёмкости, содержащие лейнер из полиэтилена, имеют довольно высокие предельные деформации и стойкость к циклическим нагрузкам, что делает его наиболее перспективным материалом для разработки такого типа баллонов. Использование полимерного лейнера позволяет получать ёмкости с показателем массового совершенства $\mu = 20$ —25 км.

Цель настоящей работы — разработка способа изготовления полимер-композитного баллона с показателем массового совершенства μ не менее 20 км.

1. Постановка задачи

Полимер-композитный баллон предназначен для приема, хранения и расхода сжатого газа. Баллон состоит из внешней силовой оболочки, изготовленной с использованием полимерных композитных материалов, воспринимающих основную нагрузку от действия сжатого газа, и герметичной внутренней оболочки (лейнера) из эластичного полимера. В днищах по оси цилиндра имеются полюсные отверстия: на переднем — со специальным штуцером, на заднем — металлический фланец.

Задний фланец служит в качестве технологической заглушки и закрывает заднее полюсное отверстие в днище силовой оболочки. Передний фланец служит для крепления запорной арматуры заправочно-расходного узла (рис. 1). Технические характеристики полимер-композитного баллона следующие: общая длина (с учетом штуцера) $L = 1680 \pm 20$ мм, длина цилиндрической части $l = 1413$ мм, диаметр цилиндрической части $d = 310 \pm 10$ мм, вместимость $V = 100 \pm 0,15$ л.

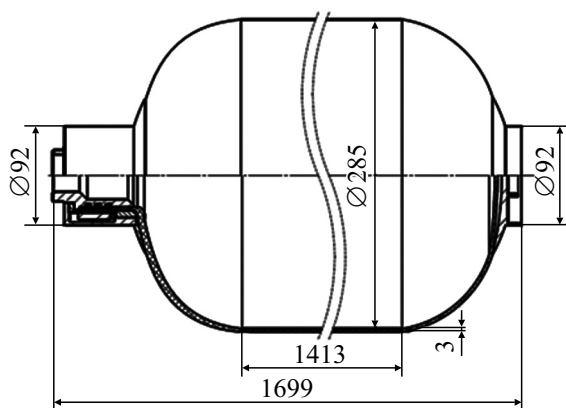


Рис. 1. Схема полимерного лайнера с запорной арматурой.

Композитную оболочку изготавливают спирально-кольцевым методом непрерывной намотки на лайнер пакетов композитной ленты.

Полимерный лайнер в конструкции выполняет одновременно роль конструктивного внутреннего герметизирующего элемента и оправки для намотки изделия и изготавливается отдельно методом ротационного формования в специальной форме. Использование лайнеров из термопластов требует специальных конструкций узлов, обеспечивающих герметизацию горловин лайнеров и металлических фланцев. Несмотря на наличие многочисленных конструктивных решений, проблема надёжного соединения термопластичного лайнера с металлическим фланцем остается актуальной. Она осложняется тем, что полиэтилен имеет высокий коэффициент температурного расширения и высокие пластические деформации, что в конечном счете в процессе эксплуатации приводит к разгерметизации соединений.

В предлагаемой конструкции (рис. 2) заправочно-расходного узла горловина лайнера по своим внутренней и наружной поверхностям

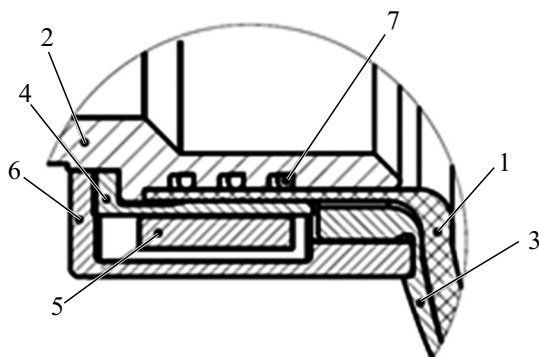


Рис. 2. Конструкция заправочно-расходного узла: 1 — полимерный лайнер; 2 — втулка-ниппель; 3 — фланец; 4 — разрезная втулка; 5 — кольцо; 6 — крышка; 7 — уплотняющие манжеты.

герметично обжата с внутренней стороны ниппелем с уплотнением (2), с наружной — двумя металлическими элементами заправочно-расходного узла, необходимого для эксплуатации баллона, — втулками: разрезной (4) и стяжной (5).

При использовании полимерного лайнера внутри баллона возникает проблема совместимости его деформирования с корпусом из композитного материала, возникающая вследствие различия их физико-механических характеристик. Эта проблема имеет свои особенности и требует дополнительных проработок и экспериментальных исследований.

Давление разрушения или разгерметизации баллона должно быть не менее 480 кгс/см².

2. Исследование и выбор материалов конструкции

2.1. Герметизирующая оболочка. *2.1.1. Анализ литературы по исследованию материалов для получения полимерного лайнера (герметизирующей оболочки).* В данной работе перед авторами стояла задача выбора материала лайнера для получения полимер-композитных баллонов исходя из анализа существующего опыта их применения.

В работе [2] рассмотрена технология изготовления емкости типа IV, рассчитанной на давление 70 МПа и содержащей металлические штуцеры, полиэтиленовый лайнер, обеспечивающий герметичность по газам, и композитный слой, обеспечивающий прочность структуры. Методом конечных элементов исследовано напряженно-деформированное состояние емкости и процесс потери устойчивости лайнера при сжатии. Авторы [3] исследовали прочность и долговечность полимер-композитных баллонов методом конечных элементов. Разработке полимер-композитной емкости типа IV посвящены работы [4—8], в которых проанализированы технологические параметры при получении пластиковых лайнеров методом ротационного формования. Сформулированы требования к термопластам для ротационного формования, приведены оптимальные режимы формования изделий: продолжительность нагрева в зависимости от размера частиц материала, скорость вращения формы и характер охлаждения для линейного полиэтилена низкой плотности. В качестве материала для лайнера использовали полиэтилен низкой плотности марки UR-644 и UR-754.

Анализ возможных причин трещинообразования полимерных материалов, применяемых для изготовления лайнеров композитных баллонов, представлен в работе [9]. Авторы справедливо отмечают, что при отсутствии адгезионной связи между лайнером и оболочкой возможна ситуация, когда предельные деформации в лайнере окажутся выше допустимых. Это совместно с действием химически агрессивных сред приведет к преждевременному растрескиванию лайнера. Авторы также указывают на возможность возникновения трещины в результате ползучести и усадки материала в зоне горловины баллона, где имеется неравномерное поле внутренних напряжений, возникающих при переработке материала

в преформу. При механическом разрушении с временной выдержкой наблюдались несквозные трещины в материале. По результатам исследований авторы сделали вывод о непригодности полиэтилентерефталата для получения лейнера в высоконагруженных баллонах (тип IV).

В научной публикации [10] приведены результаты испытаний образцов, вырезанных из пластикового лейнера, полученного методом ротационного формования полиэтилена высокой плотности. В экспериментах предел прочности при растяжении и модуль упругости снижались с повышением температуры.

Результаты исследования полиуретана и полиамида как перспективных материалов для получения лейнеров для полимер-композитных баллонов давления под водород представлены в [11]. Авторы работы [12] исследовали полимер-композитный баллон (тип IV) с лейнером из полиамида 6. Оценены кристалличность материала, физико-механические свойства. Проведены испытания на циклическую прочность баллонов. В [13] рассмотрена потеря устойчивости пластикового лейнера в составе емкости высокого давления для хранения водорода. Авторы справедливо отмечают, что в процессе хранения водорода происходит диффузия молекул газа в материал лейнера. При скорости сброса давления, превышающей скорость обратной диффузии молекул газа, при сбрасывании давления возникают напряжения в материале, которые могут стать причиной преждевременного разрушения емкости.

По результатам проведенного анализа научной литературы можно отметить, что в качестве перспективного материала лейнера для емкостей типа IV наиболее часто используется полиэтилен высокой и низкой плотности и полиамид.

В качестве основного материала лейнера для изготовления рассматриваемого баллона в настоящей работе выбран полиэтилен низкой плотности.

2.1.2. Физико-механические свойства полимерного лейнера. На предприятии “ЭкоПромСпб” были изготовлены опытные образцы лейнера из полиэтилена низкой плотности. Образцы в виде лопаток получали путем вырубki в направлении оси симметрии лейнера с использованием специального ножа. Образцы испытывали в соответствии с ГОСТ 11262—2017 при комнатной температуре. Скорость деформации в экспериментах $d\varepsilon / dt = 0,22 \text{ мин}^{-1}$. Диаграмма напряжение—деформация для участка деформации до 8% представлена на рис. 3. Результаты испытаний девяти образцов (предел прочности при растяжении σ_1^+) следующие: 1 — 17,32 МПа, 2 — 16,17, 3 — 16,20, 4 — 15,94, 5 — 17,18, 6 — 16,23, 7 — 16,54, 8 — 14,54, 9 — 15,71 МПа; среднее значение — 16,20 МПа. Результаты испытаний образцов согласуются с приведенными в работе [14].

Плотность полиэтилена определяли методом гидростатического взвешивания: $\rho = 0,93 \text{ г/см}^3$.

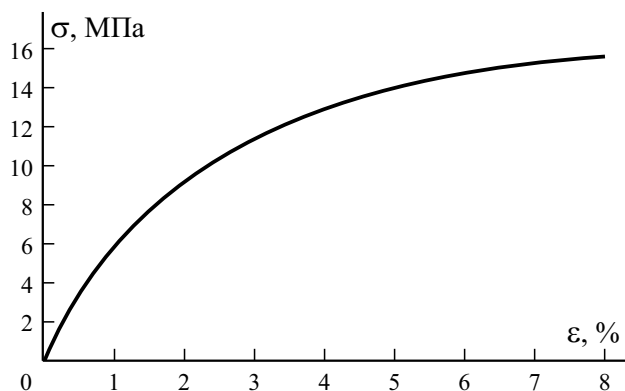


Рис. 3. Типичная диаграмма напряжение—деформация σ — ϵ для образцов, вырезанных из полимерного лайнера. Скорость деформации $d\epsilon / dt = 0,22 \text{ мин}^{-1}$.

2.2. Материалы силовой оболочки баллона. В изготовленной силовой оболочке, нагруженной внутренним давлением, доминирующим видом нагружения в каждом сечении будет двухосное растяжение [14]. В связи с этим при выборе материала важную роль играет предел прочности при растяжении вдоль волокон σ_1^+ к удельному весу материала. В силу того что конструкция баллона предусматривает наличие внутреннего полимерного лайнера, при анализе материалов в качестве базовой характеристики учитывается удельный модуль упругости рассматриваемого материала.

2.2.1. Выбор армирующего материала. Среди полимерных композитных материалов, наиболее используемых в баллонах, практическое применение нашли стекло-, органо- и углепластики.

Удельная прочность стеклопластиков на основе стеклянных волокон 90—120 км. С учетом потерь при циклическом и длительном нагружении она равна 30—45 км. Для рассматриваемого типа конструкции баллона стеклопластики практически неприемлемы из-за низкого модуля упругости — $E = 5000\text{—}7000 \text{ кгс/мм}^2$.

Удельная прочность органопластиков на основе арамидных волокон — до 250 км. С учетом эксплуатационных нагрузок удельная прочность данного материала — до 140 км; и он может быть рассмотрен в качестве армирующего материала для разрабатываемой конструкции, однако его удельный модуль упругости тоже низок — до 9000 кгс/мм^2 .

Удельная прочность углепластиков на основе высокопрочных углеродных волокон — до 280 км. С учетом потерь при циклическом и длительном нагружении она составляет до 225 км, а модуль упругости — до $30\,000 \text{ кгс/мм}^2$.

Таким образом, в качестве основного материала для рассматриваемой конструкции предполагается использование углепластика.

В настоящее время среди выпускаемых отечественной промышленностью углеродных наполнителей наилучшим сочетанием высокой

прочности и модуля упругости обладают волокна UMATEX Group (АО «Химпром инженеринг»).

Основные характеристики волокна [15]: прочность при растяжении $\sigma_1^+ = 4,9$ (490) ГПа (кгс/мм²), модуль упругости $E_1 = 260$ (26 000) ГПа (кгс/мм²), плотность $\rho = 1,78$ г/см³.

2.2.2. *Выбор связующего материала.* Для высоконагруженных силовых элементов изделий применяются, как правило, связующие на основе эпоксидных смол. Традиционно используемые до настоящего времени связующие при достаточно высокой степени реализации прочности в композитных материалах не всегда в полной мере удовлетворяют требованиям к ряду изделий по теплостойкости.

В качестве связующего для данной конструкции выбрано эпоксидное связующее марки ЭДУ ТУ ВЗ-753-92, представляющее собой продукт совмещения эпоксидно-диановой смолы ЭД-22 или ЭД-20 ГОСТ 10587—84 с алифатической смолой ДЭГ-1 ТУ 2225-027-002-03306—97 и ускорителя Алкофен МА (УП-606/2) с температурой полимеризации 80 °С.

Углепластики на основе этого связующего характеризуются более высокой теплостойкостью (сохранение прочности при 110 °С — 82—92% от исходной).

Характеристики однонаправленных углепластиков на основе углеродных волокон УМТ49-12К-ЕР (линейная плотность 760 текс, диаметр волокна 6,9 мкм) и эпоксидного связующего ЭДУ (содержание связующего 40 %) следующие: разрушающее напряжение при растяжении в направлении армирования 270—290 кгс/мм², модуль упругости при растяжении в направлении армирования 17 500—18 000 кгс/мм², $\rho = 1,53$ г/см³

Характеристики композитного материала существенно зависят от технологии его изготовления. Поэтому образцы для определения его характеристик должны быть изготовлены по той же технологии, что и изделие.

В силу того что корпуса баллонов давления изготавливают методом намотки, целесообразно определять прочность волокна и ее реализацию в изделии по результатам испытаний микропластиков и кольцевых образцов. Испытания микропластиков (пять образцов) проводили в соответ-

Табл. 1

Результаты испытаний микропластика

Показатель	Образец					Среднее значение
	1	2	3	4	5	
Линейная плотность, текс	750					-
Плотность волокна, г/см ³	1,78					-
Разрывная нагрузка при растяжении, кН	1,875	1,847	1,833	1,866	1,879	1,860
Разрушающее напряжение при растяжении, ГПа	4,45	4,39	4,25	4,43	4,46	4,40

Табл. 2

Результаты испытаний образцов в виде колец

Образец	Толщина	Ширина	Площадь поперечного сечения, мм ²	Разрывная нагрузка, кН	Прочность, ГПа	Модуль упругости, Е, ГПа
1	1,07	10,95	11,72	44,40	1,89	181,0
2	1,07	10,89	11,65	43,16	1,85	182,0
3	1,01	10,92	11,03	44,28	2,01	193,0
4	1,07	10,96	11,73	41,60	1,77	170,0
5	1,17	10,92	12,78	40,14	1,57	166,0
6	1,11	10,91	12,11	39,56	1,63	195,0
7	1,12	10,95	12,26	41,46	1,69	173,0
8	1,14	10,92	12,45	43,97	1,77	160,0
Среднее значение	1,10	10,93	11,97	42,32	1,77	177,5

ствии с ГОСТ 6943.10—2015 и ASTM D 4018-99, испытания колец — в соответствии с ГОСТ 25.603—82. Результаты испытаний представлены в табл. 1, 2.

3. Проектирование и расчёт силовой оболочки полимер-композитного баллона

Исходные данные:

- эксплуатационное давление (рабочее) $P_{\text{work}} = 200 \text{ кг/см}^2$,
- коэффициент безопасности (требуемый запас прочности) $f = 2,4$,
- длина цилиндрической части $L = 1413 \text{ мм}$,
- радиус цилиндрической части $a = 142,5 \text{ мм}$,
- радиус полюсного отверстия $r_0 = 46 \text{ мм}$.

Физико-механические характеристики силовой оболочки:

- разрушающее напряжение при растяжении в направлении армирования в кольцевых слоях $\sigma_r = 1,77 \text{ ГПа}$ (177 кгс/мм^2),
- разрушающее напряжение при растяжении в направлении армирования в спиральных слоях $\sigma_h = 1,46 \text{ ГПа}$ (146 кгс/мм^2),
- модуль упругости материала при растяжении в направлении армирования $E_1 = 177,5 \text{ ГПа}$,
- линейная плотность жгута $T = 750 \cdot 10^{-6} \text{ г/мм}$,
- объемная плотность волокна $\gamma = 1,78 \cdot 10^{-3} \text{ г/мм}^3$,
- плотность углепластика $\rho = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{ г/мм}^3$,
- массовое содержание связующего $\varphi_m = 0,4$.

Основные параметры баллона давления, определяемые в проектировании, — контуры днищ силовой оболочки, углы армирования и количество армирующего материала.

В случае комбинированного баллона форма днищ углепластиковой оболочки определяется формой днищ полимерного лейнера, являющегося составной частью баллона и используемого в качестве оправки для намотки углепластиковой оболочки.

Для указанных исходных данных намотка производится по линиям с геодезическим отклонением. Угол укладки армирующего материала на экваторе днища находим из условия геодезического расположения нити (жгута) армирующего материала по поверхности днища

$$\varphi_0 = \arcsin \bar{r}_0 \approx 19^\circ,$$

где \bar{r}_0 — относительный радиус полюсного отверстия баллона, определяемый по формуле

$$\bar{r}_0 = \frac{r_0}{a} = \frac{46}{142,5} \approx 0,32.$$

Намотка силовой оболочки производится углеродной жгутовой лентой (ширина ленты 18 мм).

3.1. Расчет прочности и жесткости силовой оболочки корпуса. Толщину монослоя намоточного углепластика δ (мм) (кольцевого слоя и элементарного спирального слоя у экватора днища) находим по формуле

$$\delta = \frac{nT}{B\rho(1-\varphi_m)},$$

где n — количество жгутов в ленте, шт.; T — линейная плотность жгута, текс; B — ширина ленты, мм; ρ — плотность сухого жгута, г/см³.

Проектные толщины силовой оболочки рассчитываем по формулам, приведенным в [14]:

— общая толщина спиральных слоев на экваторе днища равна

$$h_h = \frac{fP_{\text{work}}a}{2\sigma_h \cdot \cos^2\varphi},$$

где f — коэффициент безопасности (требуемый запас прочности); φ — угол укладки армирующего материала на экваторе днища.

— общая толщина кольцевых слоев на цилиндрической части оболочки равна

$$h_r = h_h (3\cos^2\varphi - 1).$$

Результаты расчета следующие: $n = 6$ шт., $T = 760$ текс, $B = 18$ мм, $\rho = 1,53$ г/см³, $\delta_h = \delta_h = 0,27$ мм, $h_h = 3,28$ мм, $h_r = 5,5$ мм.

3.2. Проверочный расчет напряжений для выбранных фактических толщин. При проведении расчетов принято, что в сосуде при действии

внутреннего давления реализуется безмоментное напряженно-деформируемое состояние. Напряжения в ленте при расчетном давлении:

— напряжение в спиральном слое в произвольной точке меридиана дна определяем как

$$\sigma_h = \frac{fP_{\text{work}}a}{2h_h \cdot \cos^2\varphi},$$

— напряжения в кольцевых слоях материала на цилиндрической части оболочки — как

$$\sigma_r = \frac{fP_{\text{work}}a - \sigma_h h_h \cdot \sin^2\varphi}{h_r}.$$

Результаты расчета следующие: $\sigma_h = 116$ кгс/мм², $\sigma_r = 117$ кгс/мм², запас прочности в спиральных слоях $\eta_h = 1,26$, $\eta_r = 1,50$.

3.3. Жесткостные характеристики и деформативность баллона. В рамках жесткостного расчета определяем деформации и перемещения цилиндрической части баллона, деформативность которой существенно превосходит деформативность днищ. Сначала вычисляем жесткость углепластиковой цилиндрической части по формулам

$$B_{11} = Eh_h \cdot \cos^4\varphi,$$

$$B_{12} = Eh_h \cdot \cos^2\varphi \sin^2\varphi,$$

$$B_{22} = Eh_h \cdot \sin^4\varphi + Eh_r.$$

Осевая и окружная относительные деформации цилиндрической части ε_0 и ε_r определяем как

$$\varepsilon_0 = fP_{\text{work}}a \frac{0,5B_{22} - B_{12}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2},$$

$$\varepsilon_r = fP_{\text{work}}a \frac{B_{11} - 0,5B_{12}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}.$$

Максимальные радиальные перемещения баллона W и осевое удлинение U его цилиндрической части длиной L определяем по формулам

$$W = \varepsilon_r a,$$

$$U = \varepsilon_0 L.$$

Результаты расчета следующие: $P_{\text{calc}} = 4,8$ МПа, $\varepsilon_0 = \varepsilon_r = 0,0066$, радиальное перемещение точек цилиндрической части 0,94 мм, осевое удлинение цилиндрической части 9,3 мм.

Общий вес баллона с углепластиковым усилением и заправочно-расходным узлом 23 кг, коэффициент массового совершенства конструкции $\mu = 21$ км.

4. Технология производства полимер-композитного баллона с высоким массовым совершенством

Для изготовления силовой оболочки баллона выбран способ “мокрой” намотки по схеме спирально-кольцевой намотки на 5-координатном одношпиндельном станке РПН-Н-600, оборудованном системой ЧПУ. Технологический режим формования оболочек методом “мокрой” намотки определяют параметрами, обуславливающими качество производимых изделий. К ним относятся технологическое натяжение ленточного полуфабриката при намотке, контактное давление формования (контактное давление на наматываемую поверхность), температура ленточного полуфабриката.

Технологическое натяжение предназначено для создания натяжения в гибкой винтовой системе формируемой оболочки с целью придания ей конструктивной жесткости и прочности. Значение натяжения для углепластиков лежит в диапазоне $q_t = (0,02—0,07) \cdot q_{fr}$ (q_{fr} — разрушающая нагрузка на ленту). В нашем случае натяжение наполнителя равно 2,5 кгс/нить.

Контактное формование предназначено для создания натяга в технологической системе оболочка—оправка. Контактное давление обеспечивает уплотнение наматываемой структуры, заданную ей плотность, отжим избытка связующего и не должно быть ниже 0,049 МПа.

Оптимальная температура формования зависит от рецептуры применяемого связующего, его технологического состояния и скорости намотки. В экспериментах температура переработки связующего была равной 35 ± 5 °С, скорость подачи ленточного полуфабриката 24 м/мин, время отверждения связующего ЭДУ и композитных материалов на его основе

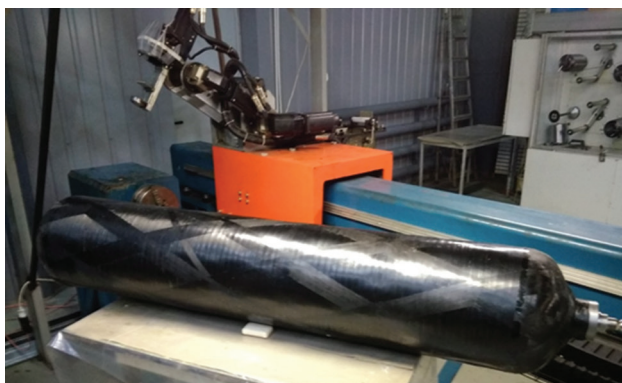


Рис. 4. Полимер-композитный баллон (тип IV).

(при толщине стенки до 5 мм) при 80 °С составляло 8—10 ч. Полученный образец баллона высокого давления представлен на рис. 4.

Заключение

В результате проведенных исследований произведен выбор материалов для получения полимер-композитных баллонов (тип IV) для хранения и транспортировки сжатого газа — метана. В качестве армирующего материала выбрано углеродное волокно УМТ49-12К-EP, в качестве связующего — эпоксидное связующее марки ЭДУ. Предложена конструкция герметичного заправочно-расходного узла. Произведен расчет толщины спиральных и кольцевых слоев. Установлено, что предельные деформации оболочки не превышают предельные деформации полимерного лайнера, что гарантирует высокую стойкость к знакопеременным нагрузкам. Коэффициент массового совершенства баллона объемом 100 л для хранения метана под давлением 200 кгс/см² равен 21 км.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турусов Р. А., Сергеев А. Ю., Мемарианфард Х. Проблемы герметичности намоточного композита при формировании емкости с высоким массовым совершенством // Сб. тез. III Междунар. конф. “Деформирование и разрушение композитных материалов и конструкций”. Москва, 23—25 октября, 2018.
2. Zhang Q., Hu Hui, Jia X. et al. Design of a 70 MPa type IV hydrogen storage vessel using accurate modeling techniques for dome thickness prediction // Compos. Struct. — 2020. — Vol. 236. — P. 111915.
3. Ma K., et al. Effects of crack position on fatigue life of large seamless storage vessels made of 4130X for hydrogen refueling station. // Int. J. Hydrogen Energy. — 2019. — Vol. 44. — P. 22559—22568.
4. Igumenov M. S., Lavrov N. A. Adhesion of linear low-density polyethylene and oligomers // Polymer Sci. Ser. D. — 2017. — Vol. 10, No. 1. — P. 55—58.
5. Lavrov N. A., Igumenov M. S. A technique for production of high-pressure vessel from polymer composite materials // Polymer Science. Ser. D. — 2018. — Vol. 11, No. 1. — P. 113—116.
6. Igumenov M. S., Lavrov N. A. Features of the rotational moulding of thermoplastics // Journal: International Polymer Science and Technology. — 2017. — Vol. 44, No. 10. — P. 39—45.
7. Лавров Н. А., Игуменов М. С. Сосуд высокого давления из полимерных композитных материалов // Пласт. массы. — 2018. — № 5—6. — С. 45—47.
8. Лавров Н. А., Игуменов М. С. Технология производства сосудов высокого давления из полимерных композитных материалов // Все материалы. Энциклопедический справочник. — 2017. — №7. — С.19—23.
9. Калинин А. Н., Лебедев И. К., Мороз Н. Г. Эксплуатационные особенности конструкций композитных баллонов с полимерным лайнером // Аграр. науч. журн.- 2018. — № 12. — С. 58—62.

10. *Mahl M., Jelic C., Baier H.* Thermo-mechanical behavior of polyethylene under mechanical loads at cryogenic and elevated temperatures // *Int. J. Pressure Vessels and Piping*. — 2017. — Vol.150. — P. 11—18.

11. *Dao D. Q., Luche J., Bustanante-Valencia L.* Polyamide 6 and polyurethane used as liner for hydrogen composite cylinder: an estimation of fire behaviors // *Fire Technol.* — 2016. — Vol. 52. — P. 397—420.

12. *Wang D., Liao B., Hua Z., Gu C.* Experimental analysis on residual performance of used 70 MPa type IV composite pressure vessels // *J. Failure Analysis Prevention*. — Vol.19(7) DOI: 10.1007/s11668-019-00581-6

13. *Yersak T. A., Baker D. R., Yanagisawa Y. et al.* Predictive model for depressurization - induced blistering of type IV tank liners for hydrogen storage // *Int. J. Hydrogen Energy*. — 2017. — Vol. 42. — P. 28910—28917.

14. *Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композитных материалов. — М.: Машиностроение, 1977. — 144 с.

15. URL: [TDS_Umatex UMT49-12K-EP_ru.pdf](#)

Поступила в редакцию 21.04.2021

Окончательный вариант поступил 09.07.2021

Received Apr. 21, 2021 (July 9, 2021)

*В. М. Ахундов**

Национальная металлургическая академия Украины, Днепрпетровск, Украина

**МЕТОД НЕЯВНЫХ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ В МЕХАНИКЕ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ
И КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ**

*V. M. Akhundov**

**THE IMPLICIT FINITE DIFFERENCE METHOD
IN THE DEFORMATION MECHANICS OF HOMOGENEOUS
AND PIECEWISE HOMOGENEOUS BODIES**

Keywords: method of finite differences, piecewise homogeneous body, round fibers, square fibers, isotropic cylinder, centrifugal forces

The method of implicit finite differences for solving problems of deformation mechanics of piecewise homogeneous bodies is presented. The method is based on approximating the sought-for quantities by polynomials with indeterminate coefficients. It allows one to approximate the derivatives in resolving equations based on a grid with an irregular, in general, arrangement of nodal points. Relations were given for one-, two-, and three-dimensional approximations of the second-order of accuracy. This method was applied to studying the deformation of an elastic rotating cylinder whose matrix is reinforced in the circumferential directions with one layer of round fibers. The material configuration of the cylinder at large displacements and deformations are presented together with the stresses of contact interaction between the matrix and fibers. Its deformation characteristic, which reflects the continuation of the solution of the problem in terms of rotation speed, is determined. The results obtained are compared with the solution of the problem for a cylinder with square fibers at the same filling found by the methods of implicit finite differences and the traditional method of finite differences. Boundary-value problems for a thick-walled cylinder made of an isotropic material are also solved in nonlinear and linear

*Автор, с которым следует вести переписку: akhundov@ua.fm
Corresponding author: akhundov@ua.fm

formulations with uniform and nonuniform distributions of nodal points across the cylinder thickness, and the results obtained are compared with the exact solution of the corresponding linear problem.

Ключевые слова: метод конечных разностей, тело кусочно-однородное, волокна круглого сечения, волокна квадратного сечения, цилиндр изотропный, силы центробежные

Изложен метод неявных конечных разностей для решения задач механики деформирования кусочно-однородных тел. Метод основывается на аппроксимации искомых величин полиномами с неопределенными коэффициентами, позволяет аппроксимировать производные в разрешающих уравнениях на основе сетки с нерегулярным, в общем, расположением узловых точек. Соотношения неявных конечных разностей приведены для одно-, двух- и трехмерных аппроксимаций второго порядка точности. Метод применили для исследования деформирования эластичного цилиндра под воздействием вращения, матрица которого армирована по окружным направлениям одним слоем волокон круглого сечения. Представлена материальная конфигурация цилиндра при больших перемещениях и деформациях вместе с напряжениями контактного взаимодействия матрицы и волокон. Построена его деформационная характеристика, которая отражает продолжение решения задачи по скорости вращения. Результаты сопоставлены с решением задачи для цилиндра с волокнами квадратного сечения вместо круглого при одинаковом наполнении на основе схемы неявных конечных разностей и традиционного метода конечных разностей. Решены также краевые задачи для толстостенного цилиндра из изотропного материала в нелинейной и линейной постановках при равномерном и неравномерном распределении узловых точек по толщине цилиндра, результаты сравнены с результатами точного решения соответствующей линейной задачи.

Постановка проблемы

Задачи о деформировании композитных тел обычно решаются на основе моделирования их материала с исходным строением как однородного анизотропного с макроскопически эквивалентными свойствами. Преимущество подхода, основанного на определении механических характеристик материала тела по механическим свойствам составляющих компонентов в том, что для его реализации требуются сравнительно небольшие вычислительные ресурсы, сопоставимые с численным исследованием однородного тела. Однако на его основе не выявляются непосредственно внутренние поля в компонентах материала, анализ разрушения имеет ограниченный характер. К тому же формулы для расчетов эффективных модулей основаны

на линейных соотношениях механики деформирования, при которых они применимы в диапазоне достаточно малых деформаций. В случае больших деформаций обычно используют некоторые из эффективных модулей, которые определяют из натуральных экспериментов при частных видах деформирования материала. Выявленные при этом механические характеристики могут быть использованы для исследования тела из испытанного материала лишь при соответственно ограниченных деформациях.

Остановившись в основном на исследованиях цилиндрических тел волокнистого строения, отметим работу [1], где рассмотрена безмоментная цилиндрическая оболочка, однонаправленно армированная волокнами, на основе использования эффективных модулей ее материала. В [2, 3] изучали оболочки из четного количества слоев с перекрестным расположением волокон. Материал каждого из слоев учитывается с помощью его эффективных модулей. Основным материалом цилиндрической оболочки, армированной малорастяжимыми волокнами по перекрестной схеме, рассмотрен как физически нелинейный в [4]. В [5] исследована артерия в виде круговой цилиндрической трубы из двух слоев при больших деформациях, в которых армирующими элементами являются коллагеновые волокна. Потенциальный закон при нелинейно-упругом поведении требует трех материальных констант для каждого из слоев, чтобы учесть совместную реакцию стенки сосуда на воздействие осевого растяжения, давления и кручения, определяемых из эксперимента. В [6] изучали также вязкоупругое деформирование артерии на основе моделирования ее материала как эффективно ортотропного.

Наиболее общий подход в исследовании тел с волокнистой структурой основан на применении модели кусочно-однородной среды. В данной модели матрицу и волокна рассматриваем как контактно взаимодействующие компоненты на основе уравнений механики деформирования с выявлением внутренних полей композитной структуры. В качестве примера укажем работу [7], где представлено исследование металлокомпозита с медной матрицей и вольфрамовыми волокнами при макроскопически однородном поперечном сжатии. Методом конечных элементов (МКЭ) рассчитаны внутренние поля для ограниченной области материала с небольшим количеством нерегулярно расположенных волокон при упругопластическом деформировании компонентов. Конечно-элементное моделирование процессов деформирования волокнистых композитов при больших пластических деформациях и деформациях ползучести изложено в [8]. В [9] построена конечно-элементная модель для характеристики напряженно-деформированного состояния при одноосном растяжении однонаправленно армированного материала. В [10] с помощью сетки плоских конечных элементов исследовано поведение упругопластической балки, армированной в поперечном направлении упругими волокнами квадратного сечения. В [11] на базе соотношений линейной теории упругости решена задача о краевых эффектах в слоистом композитном материале с изотропными слоями постоянной толщины при одноосном нагружении, приближенное решение задачи производится вариационно-разностным методом. В [12] с помощью метода конечных элементов в двух-

мерной постановке исследовано обжатие между двумя жесткими плитами пучка круглых волокон в режимах малой и конечной упругих деформаций.

В рамках двухуровневой каркасной теории отметим применение модели кусочно-однородной среды для блоков представления материала среды [13]. В [14] решение задачи для тела в целом по каркасной теории завершается решением экстремальных задач по высокоградиентной схеме подхода для сборок блоков возле граничной поверхности тела. При круглых волокнах армирующих систем решения микрокраевых задач для блоков материала или их сборок производятся методом локальных вариаций [15] на базе конечно-элементной аппроксимации [16]. В [17] решена задача о больших упругих деформациях многослойного цилиндра с кольцевыми волокнами квадратного сечения под воздействием вращения. Правильные формы осевого сечения цилиндра и сечений волокон в нем обусловили возможность решения задачи о его деформировании методом конечных разностей (МКР). В [18] с помощью метода конечных разностей исследовано поведение трехслойной трубы, армированной волокнами квадратного сечения и нагруженной внутренним давлением.

Важное преимущество МКР по сравнению с МКЭ при исследовании проблематики на основе дифференциальных уравнений — это достаточно простое формирование численных аналогов уравнений задачи в узловых точках её дискретной схемы. Однако данная процедура обычно выполняется на основе стандартной сетки узловых точек, которую можно применять для тела, ограниченного координатными поверхностями. Известны случаи использования неравномерного расположения узловых точек возле граничной поверхности тела неправильной конфигурации, когда они расположены на пересечениях линий сетки с его границей. Применяемые формулы для производных в таких точках имеют частный характер (см., например, [19]). Нерегулярное расположение узловых точек внутри тела и на его граничной поверхности, какое может быть в случае МКЭ, на базе МКР не учитывается.

Существенным обстоятельством является определение напряжений по схеме метода конечных разностей с такой же точностью, с какой находят перемещения, когда в решаемой краевой задаче данные величины рассматривают как взаимно независимые и определяют вместе на основе сформированной системы уравнений. В МКЭ в форме перемещений деформации и напряжения определяют с помощью численного дифференцирования по координатным переменным предварительно найденных из решения задачи перемещений. Данная операция является источником существенных погрешностей, с которыми могут находить указанные величины при сравнительно незначительных погрешностях самих перемещений.

В настоящей работе в рамках расширения возможностей МКР применительно к исследованиям тел кусочно-однородного строения изложена более общая схема метода. Данная схема предполагает наличие неравномерного распределения узловых точек дискретного аналога тела в решаемой для него задаче. Неравномерное распределение узловых точек учитывается на основе полиномиальных аппроксимаций искомых величин с неопреде-

ленными коэффициентами. Коэффициенты аппроксимаций вычисляют в процессе численной реализации задачи, исходя из значений аппроксимируемой функции в узловых точках. Подход применительно к численному дифференцированию одномерных функций как метод неопределенных коэффициентов представлен в [20]; распространяется на вычисление частных производных в двух- и трехмерной проблематиках под названием метода неявных конечных разностей (МНКР). Указанный метод можно применять для решения задач механики деформирования; он основан на прогнозировании решения задачи с последующим его уточнением. Это в одинаковой мере имеет место как для линейных, так и нелинейных формулировок задач.

Схема неявных конечных разностей

Рассмотрим двухмерный случай аппроксимации производных по координатам x и y (обозначим вместо $\hat{\theta}^1$ и $\hat{\theta}^2$). Координаты x и y в общем криволинейные, могут быть прямоугольными декартовыми. В поверхности переменных x и y выделим девять компактно расположенных узловых точек сетки численного решения краевой или экстремальной задачи (рис. 1). Точки расположены неравномерно по приращениям координат с переходом от одной точки к другой, на рисунке их соединили между собой криволинейными отрезками (это может быть отрезок координатной линии или контур разделения областей смежных материалов). Узловые точки дискретной схемы, как и при использовании МКЭ, могут располагаться на произвольных (некоординатных) кривых, порядок которых определяется количеством тех точек, через которые кривые проходят.

Аппроксимируемую функцию, как, например, одну из компонент вектора перемещения или тензора напряжений, обозначим как u . Исходя из значений функции в узловых точках $1, \dots, 9$, искомую величину u в урав-

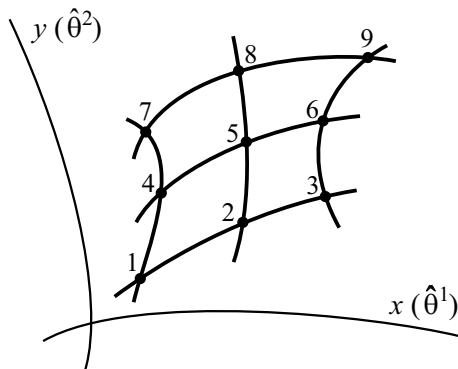


Рис. 1. Конфигурация положений девяти узловых точек для аппроксимации производной по координатам $x (\hat{\theta}^1)$ и $y (\hat{\theta}^2)$.

нениях задачи аппроксимируем полным полиномом второго порядка по обоим координатным переменным:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2. \quad (1.1)$$

Соответствующие выражения первых производных по координатам имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_2 + a_4y + 2a_5x + 2a_7xy + a_8y^2 + 2a_9xy^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= a_3 + a_4x + 2a_6y + a_7x^2 + 2a_8xy + 2a_9x^2y. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Выражения для производных более высокого порядка очевидны и их не приводим. Обозначим значения координат x и y узловых точек $1, \dots, 9$ как $x_1, y_1, \dots, x_9, y_9$, а значения функции в этих точках — как u_1, \dots, u_9 соответственно. Записав выражения значений функции для каждой из узловых точек с помощью (1.1), придем к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов a_1, \dots, a_9

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4x_1y_1 + \dots + a_9x_1^2y_1^2, \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_9 &= a_1 + a_2x_9 + a_3y_9 + a_4x_9y_9 + \dots + a_9x_9^2y_9^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение данной системы уравнений можно доводить, как в случае обычно применяемого МКР, до получения конечных формул для a_i и применять производные (1.2) в уравнениях задачи, выраженные непосредственно через узловые значения искомой величины. Но данные коэффициенты даже при сравнительно небольшом количестве узловых точек в рассматриваемой конфигурации их расположения находят с помощью столь громоздких выкладок, что такая реализация задачи нецелесообразна.

Решение системы конечно-разностных уравнений задачи о деформировании тела по схеме неявных коэффициентов производим на основе задания начального приближения узловых значений искомых величин и его последующего уточнения. Узловые значения величин уточняем с помощью одного из методов решения систем нелинейных уравнений; в качестве удобного метода назовём дискретный метод Ньютона [21]. Данный метод не требует представления в явном виде уравнений, необходимо знать лишь способ вычисления выражения их левых частей (слева от знака равенства нулю). Метод обладает высокой эффективностью на основе продолжения решения по параметрам нагружения исследуемого тела. В случае линейной задачи продолжения ее решения не требуется, одна итерация метода приводит к искомому решению при любом начальном приближении узловых значений.

СЛАУ (1.3) решаем на основе алгоритма компьютерного решения задачи о деформировании однородного или кусочно-однородного тела. В результате коэффициенты аппроксимации a_1, \dots, a_9 для текущей узловой точки определяем в зависимости от значений функции u_1, \dots, u_9 в узлах включающей конфигурации точек. Линейная форма зависимостей между указанными величинами при рассматриваемом подходе не является востребованной (как особенность рассматриваемого подхода), поэтому приведем их в общем виде:

$$a_1 = a_1(u_1, u_2, \dots, u_9), \dots, a_9 = a_9(u_1, u_2, \dots, u_9)$$

(напоминаем, СЛАУ относительно узловых значений искомым функций и при решении линейной задачи в явном виде не формируется).

Определив a_i , вычисляем в узловой точке требуемые производные (1.2), переходя по ходу численной реализации задачи от одной узловой точки к другой. Это могут быть производные по x и y для точки 5, центральной в конфигурации расположения точек 1, ..., 9. Для других точек производные определяются на основе своих прилегающих конфигураций (наборов) узловых точек, для которых они являются центральными. В случае нахождения производных в точках, расположенных в граничной поверхности тела или в поверхности раздела его составляющих компонентов, используется та же конфигурация узловых точек, которая применяется для вычисления центральных производных.

В качестве другого набора узловых точек для аппроксимации производных на рис. 2 показана конфигурация из восьми неравномерно расположенных узловых точек. Взаимное расположение точек может отличаться от приведенного, но на форму применяемой аппроксимации это не повлияет. На рис. 3 показаны две конфигурации с тремя узловыми точками в каждой из них, расположенными на координатных линиях x и y .

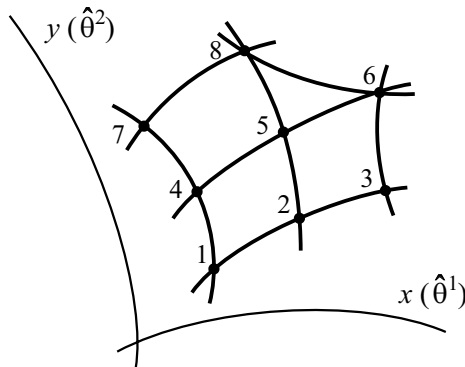


Рис.2. Конфигурация положений восьми узловых точек для аппроксимации производной по координатам $x(\hat{\theta}^1)$ и $y(\hat{\theta}^2)$.

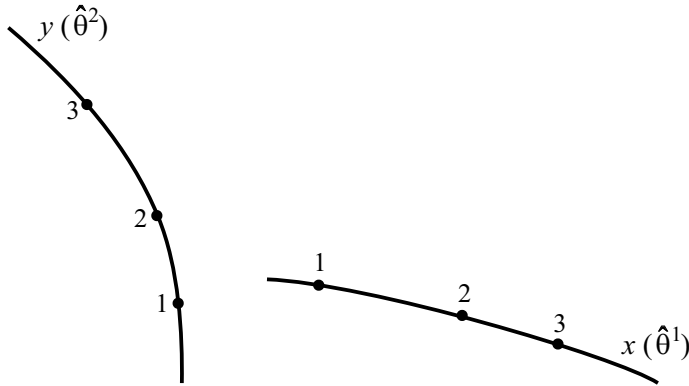


Рис. 3. Конфигурация положений на базе трех узловых точек, расположенных на каждой из координатных линий.

В случае конфигурации из восьми точек для функции и ее производных применяем аппроксимации

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_2 + a_4y + 2a_5x + 2a_7xy + a_8y^2, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a_3 + a_4x + 2a_6y + a_7x^2 + 2a_8xy;$$

в случае конфигурации из трех точек, расположенных вдоль x -координатной линии — аппроксимации

$$u = a_1 + a_2x + a_3x^2; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = a_2 + 2a_3x, \tag{1.6}$$

а расположенных вдоль y -координатной линии —

$$u = a_1 + a_2y + a_3y^2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a_2 + 2a_3y. \tag{1.7}$$

Соответствующие СЛАУ для определения коэффициентов a_i в (1.4)—(1.7) через значения u_i функции в узловых точках (x_i, y_i) не приводим в силу их очевидности.

При расположении трех узловых точек на координатной линии при равных расстояниях h между ними как приращения координаты при переходе от одной точки к смежной с ней другой выкладки на основе аппроксимаций (1.6), (1.7) существенно упрощаются. В этих случаях приходим к известным формулам [19] для правой, центральной и левой производных по координате в данных точках в соответствии с их расположением на линии. Так, если точки 1, 2, 3 расположены на x -линии и

разделены равными координатными расстояниями h , то для производных по x в этих точках найдем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_1 = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2h}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_2 = \frac{u_3 - u_1}{2h}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_3 = \frac{u_1 - 4u_2 + 3u_3}{2h}. \quad (1.8)$$

Аналогично двумерным аппроксимациям (1.1), (1.2) и (1.4), (1.5), одномерным (1.6) и (1.7) строится и трехмерная аппроксимация величин и их производных на основе, в общем случае, системы криволинейных пространственных координат x, y, z . Данная аппроксимация второго порядка в наиболее полном виде основывается на использовании 27 узловых точек. Положения этих точек определяют конфигурацию косоугольного шестигранника с кривыми гранями и расположением восьми точек в его вершинах, шести — на гранях, 12 — на ребрах и одной — внутри тела. Соответствующие представления аппроксимируемой функции и ее производных записываем как

$$u = \sum_{i,j,k=0}^2 a_{ijk} x^i y^j z^k, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{j,k=0,i=1}^2 i a_{ijk} x^{i-1} y^j z^k, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i,k=0,j=1}^2 j a_{ijk} x^i y^{j-1} z^k, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{i,j=0,k=1}^2 k a_{ijk} x^i y^j z^{k-1}.$$

Могут также применяться аппроксимирующие полиномы при отсутствии узловых точек на гранях и внутри шестигранника конфигурации их расположения. На рис. 4 изображена конфигурация второго порядка из 20 узловых точек, восемь из которых располагаются в вершинах конфигура-

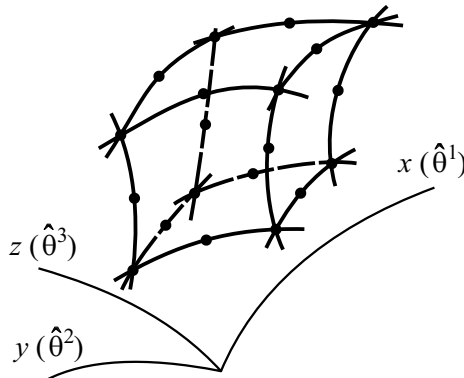


Рис. 4. Конфигурация положений 20 узловых точек для аппроксимации производных по координатам $x(\hat{\theta}^1)$, $y(\hat{\theta}^2)$ и $z(\hat{\theta}^3)$.

ции, а остальные 12 — на ее контурных ребрах. Аппроксимацию функции для данного набора узловых точек представим в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
 u = & a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7xz + a_8x^2 + a_9y^2 + a_{10}z^2 + \\
 & + a_{11}xyz + a_{12}xy^2 + a_{13}xz^2 + a_{14}yz^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2z + a_{17}y^2z + \\
 & + a_{18}x^2yz + a_{19}y^2xz + a_{20}z^2xy,
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

соответствующие производные очевидны. Полином (1.11) содержит те произведения степеней координатных переменных $x^i y^j z^k$, которые включаются функциями формы трехмерного конечного элемента второго порядка из серендипова семейства [3].

В МНКР производные на основе применяемой конфигурации узловых точек, в отличие от МКЭ, обычно вычисляются для центральной из них. С переходом к другой узловой точке используется иная, включающая ее совокупность узловых точек, — как это имеет место в применяемом методе конечных разностей с определенными коэффициентами. Данный порядок, как и в случае МКР, нарушается на граничной поверхности тела и на поверхностях раздела в нем разнородных материалов. Подход достаточно просто алгоритмируется и может быть распространен на аппроксимации более высоких порядков.

Вместе с тем может применяться и неявная схема метода конечных элементов. Данная версия метода конечных элементов основана на вычислении по неявной схеме коэффициентов a_{ijk} аппроксимации перемещений (1.9) и их производных (1.10). Аппроксимация производится исходя из одной и той же совокупности узловых точек конечного элемента, пока вычисления выполняются для области данного КЭ, — в соответствии с кусочной гладкостью аппроксимируемой функции.

Выполнение трудоемкой процедуры по формированию матрицы жесткости тела (конструкции) не требуется. К тому же ее осуществление возможно лишь на базе линейной или линеаризованной постановки задачи. В случае неявной схемы МКЭ в узловых точках, общих для смежных КЭ, суммируются непосредственно сами уравнения, относящиеся к вариациям перемещений этих точек. Данная процедура более проста, чем формирование матрицы жесткости, ее можно применять как к линейным, так и геометрически и физически нелинейным задачам. Получаемые уравнения метода решаются относительно узловых перемещений на основе непосредственного выполнения в уравнениях операции численного интегрирования. Интегрирование производится по каждому конечному элементу на базе очередного приближения значений его узловых перемещений. В качестве метода, уточняющего приближение узловых перемещений, можно применять дискретный метод Ньютона или один из методов оптимизации [22] с продолжением по истории нагружения.

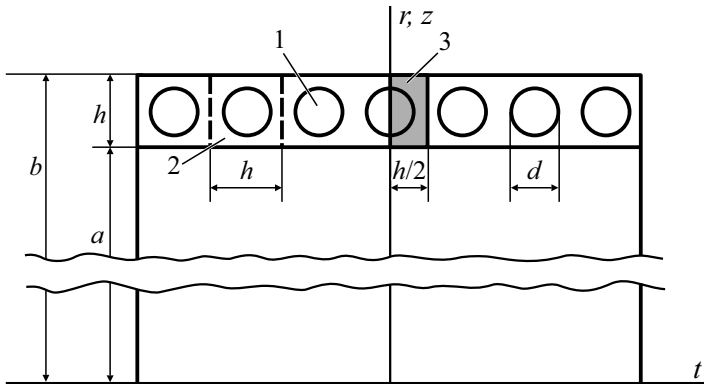


Рис. 5. Осевое сечение цилиндрического тела в исходном состоянии: 1 — волокно круглого сечения; 2 — кольцевой элемент; 3 — половина кольцевого элемента справа от центрального сечения.

Условия постановки задачи

Схема однослойного круглого цилиндра с волокнами кругового сечения, расположенными в нем по окружным направлениям, представлена на рис. 5. Цилиндрическое тело моделировали как сборку кольцевых элементов вдоль горизонтального направления (образующей). Кольцевой элемент представляет собой кольцо квадратного сечения $h \times h$ из эластомерного материала, включающее волокно круглого сечения диаметром d из более жесткого эластомера в качестве его сердцевины. Внутренний радиус цилиндра $r = a$, внешний радиус $r = a + h = b$.

Исследовали осесимметричное деформирование цилиндра под воздействием вращательного движения в условиях деформации, когда перемещения в поперечных по отношению к оси цилиндра граничных поверхностях кольцевых элементов имеют место в плоскостях исходного расположения. В силу условий симметрии задачу решали для правой половины кольцевого элемента, заключенной между поперечными сечениями цилиндра, одно из которых проходит через осевую линию волокна кольцевого элемента ($t = 0$), а другое — через матрицу посередине между осевыми линиями двух волокон в смежных кольцевых элементах ($t = h/2$).

Применяли материальные цилиндрические координаты $\hat{\theta}^1, \hat{\theta}^2, \hat{\theta}^3$, обозначаемые как t, φ, r в отсчетной конфигурации цилиндрического тела (осевая, окружная и радиальная координаты соответственно). Осевая координата t отсчитывается от поперечного сечения цилиндра, в котором расположена осевая линия волокна кольцевого элемента. Наряду с радиальной координатой r применяли координату $z = r - a$, отмеряемую от внутренней поверхности цилиндра радиусом a . Физические компоненты векторных и тензорных величин отмечаем координатными индексами, заключенными в круглые скобки. Величины, относящиеся к матрице и волокнам, отмечаем индексом n ; значение $n = 0$ отвечает матрице, $n = 1$ — волокну, также применяем индексы m и f соответственно.

Уравнения математической модели

Исходили из кинематических уравнений нелинейной механики, определяющих компоненты меры деформации Коши—Грина [23]. Для компонент данного тензора при осесимметричной деформации матрицы и волокна в кольцевом элементе цилиндра приходим к выражениям, в соответствии с которыми они определяются как функции осевой и радиальной координат t и r :

$$\begin{aligned}
 g_{n(11)} &= \lambda_{n1}^2 = \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}\right)^2, \\
 g_{n(22)} &= \lambda_{n2}^2 = \left(1 + \frac{u_{n(3)}}{r}\right)^2, \\
 g_{n(33)} &= \lambda_{n3}^2 = \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}\right)^2, \\
 g_{n(13)} &= \lambda_{n1}\lambda_{n3} \cos \omega_{n13} = \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r} + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r}, \\
 & n = 0, 1
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

(компоненты векторных и тензорных величин, равные нулю в условиях симметрии решаемой задачи, не приводим), где λ_{n1} , λ_{n2} , λ_{n3} — кратности удлинений по направлениям координатных линий $\hat{\theta}^1$, $\hat{\theta}^2$, $\hat{\theta}^3$ (t , ϕ , r) соответственно; ω_{n13} — координатный угол между $\hat{\theta}^1$ - и $\hat{\theta}^3$ -координатными линиями.

В случае сжимаемых материалов матрицы и волокон компоненты симметричных тензоров напряжений Пиола—Кирхгофа связаны с компонентами тензоров деформации соотношениями

$$J_n \sigma_{n(ij)} = 2 \sum_{p=1}^q \frac{\partial W_n}{\partial I_p} \cdot \frac{\partial I_p}{\partial g_{n(ij)}}, \quad i, j = 1, \dots, 3, \quad n = 0, 1 \quad (J_n = |g_{n(ij)}|^{1/2}), \tag{3.2}$$

где $W_n = W_n [I_1(g_{n(ij)}), I_2(g_{n(ij)}), \dots, I_q(g_{n(ij)})]$ — упругий потенциал материала матрицы ($n = 0$) или волокна ($n = 1$), определяемый в зависимости от инвариантов I_1, I_2, \dots, I_q тензора его деформации; J_n — кратность изменения локального объема компоненты материала.

Уравнения равновесия МДТТ при больших (конечных) деформациях приводят к следующим уравнениям равновесия для связующего и волокна при осесимметричной деформации в метрике отсчетной конфигурации:

$$\frac{\partial t_{n(11)}}{\partial t} r + \frac{\partial t_{n(31)}}{\partial r} r + t_{n(31)} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial t_{n(13)}}{\partial t} r + \frac{\partial t_{n(33)}}{\partial r} r + t_{n(33)} - t_{n(22)} + \rho_n r F_{n(3)} = 0, \quad (3.3)$$

$$n = 0, 1.$$

Здесь $t_{n(ij)}$ — физические компоненты несимметричного тензора напряжений Пиола для матрицы и волокна, из которых отличные от нуля определяются выражениями

$$\begin{aligned} t_{n(11)} &= J_n \sigma_{n(11)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \right) + J_n \sigma_{n(13)} \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}, \\ t_{n(13)} &= J_n \sigma_{n(13)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r} \right) + J_n \sigma_{n(11)} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} t_{n(31)} &= J_n \sigma_{n(31)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial t} \right) + J_n \sigma_{n(33)} \frac{\partial u_{n(1)}}{\partial r}, \\ t_{n(33)} &= J_n \sigma_{n(33)} \left(1 + \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial r} \right) + J_n \sigma_{n(31)} \frac{\partial u_{n(3)}}{\partial t}, \\ t_{n(22)} &= J_n \sigma_{n(22)} \left(1 + \frac{u_{n(3)}}{r} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Во втором из уравнений (3.3) при изменении расстояний от материальных точек цилиндра до его оси под воздействием вращения радиальная компонента плотности массовых сил равна

$$F_{n(3)} = (r + u_{n(3)}) \omega^2, \quad n = 0, 1,$$

где $\omega = 2\pi f$ — угловая скорость вращения; f — количество оборотов вращения в секунду.

Компоненты $J\sigma_{(ij)}$ симметричного тензора напряжений Пиола—Кирхгофа выражены через компоненты p_{ij} векторов напряжений на $\hat{\theta}^i$ -координатных поверхностях, отнесенные к нормированному векторному базису системы координат в деформированной конфигурации цилиндра, по формулам [24]

$$\begin{aligned} J\sigma_{(11)} &= \lambda_1^{-1} \lambda_2 \lambda_3 \sin \omega_{23} p_{11}, \quad J\sigma_{(22)} = \lambda_2^{-1} \lambda_1 \lambda_3 \sin \omega_{13} p_{22}, \\ J\sigma_{(33)} &= \lambda_3^{-1} \lambda_1 \lambda_2 \sin \omega_{12} p_{33}, \quad J\sigma_{(13)} = \lambda_2 \sin \omega_{23} p_{13}, \\ J\sigma_{(31)} &= \lambda_2 \sin \omega_{12} p_{31} \quad (= J\sigma_{(13)}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

(индекс “ n ” принадлежности матрице или волокну опускаем).

Формулировка краевой задачи и схема ее численного решения

Геометрические уравнения (3.1), физические (определяющие) уравнения (3.2) и уравнения равновесия (3.3) вместе с (3.4), (3.5) являются разрешающими уравнениями краевой задачи для кусочно-однородного цилиндра. Компоненты векторов перемещений $u_{n(1)}$, $u_{n(3)}$ и компоненты тензоров напряжений $t_{n(11)}$, $t_{n(13)}$, $t_{n(31)}$, $t_{n(33)}$ в матрице и волокнах принимали в качестве основных величин. Содержащиеся в разрешающих уравнениях компоненты тензора меры деформации $g_{n(11)}$, $g_{n(22)}$, $g_{n(33)}$, $g_{n(13)}$ и компоненту тензора напряжений $t_{n(22)}$ выражали через основные величины с помощью (3.1), (3.2) и (3.5).

Граничные условия для связующего и волокна цилиндра, при которых решали краевую задачу, выражают отсутствие осевых перемещений в поверхностях $t = 0$ и $t = h/2$ и поперечных сдвигов из этих поверхностей:

$$u_{n(1)}|_{t=0} = 0, \quad g_{n(13)}|_{t=0} = 0, \quad u_{n(1)}|_{t=h/2} = 0, \quad g_{n(13)}|_{t=h/2} = 0, \quad (4.1)$$

$$n = 0, 1.$$

При свободных от нагрузок внутренней и внешней поверхностях $r = a$ и $r = b$ условия в них приводим к тривиальному виду

$$t_{m(31)}|_{r=a} = 0, \quad t_{m(33)}|_{r=a} = 0, \quad (4.2)$$

$$t_{m(31)}|_{r=b} = 0, \quad t_{m(33)}|_{r=b} = 0,$$

где индексом m отметили величины в граничных поверхностях как относящиеся к матрице (связующему).

Условия совместного деформирования задавали равенствами компонент векторов перемещений и напряжений для матрицы и волокна между собой в границах их раздела

$$u_{m(1)}(t, r) = u_{f(1)}(t, r), \quad u_{m(3)}(t, r) = u_{f(3)}(t, r), \quad (4.3)$$

$$t_{m(11)}(t, r)\mathring{n}_1 + t_{m(31)}(t, r)\mathring{n}_3 = t_{f(11)}(t, r)\mathring{n}_1 + t_{f(31)}(t, r)\mathring{n}_3, \quad (4.4)$$

$$t_{m(13)}(t, r)\mathring{n}_1 + t_{m(33)}(t, r)\mathring{n}_3 = t_{f(13)}(t, r)\mathring{n}_1 + t_{f(33)}(t, r)\mathring{n}_3,$$

$$(t, r) \in A_{mf},$$

где \mathring{n}_1 , \mathring{n}_3 — компоненты вектора ориентации поверхности (контура) A_{mf} раздела матрицы с волокном в недеформированном состоянии.

Производные первого порядка от основных величин по осевой и радиальной координатам t и r аппроксимировали с помощью конечно-разностных соотношений второго порядка точности по схеме неявных коэффициентов (1.2), (1.5) или из соотношений (1.6), (1.7) в зависимости от позиционирования узловых точек.

Для каждой из внутренних точек конечно-разностной сетки узловых точек в поперечном сечении кольцевого элемента формируются разностные аналоги двух уравнений равновесия (3.3) и четырех физических уравнений (3.4). Уравнения (3.4) в дискретном виде образуем с использованием определяющих соотношений (3.2) и деформационных (3.1). В точках граничных поверхностей кольцевого элемента с применением (3.1) составляем конечно-разностные аналоги двух соответствующих граничных условий из (4.1), (4.2) и четырех физических уравнений (3.4).

Если узловая точка принадлежит границе раздела составляющих компонентов A_{mf} , то такую точку рассматриваем как сдвоенную, одна из сдвоенных точек считается принадлежащей матрице, а другая — волокну. На одной стороне поверхности раздела компонентов материала формируем два уравнения непрерывности перемещений (4.3) и физические уравнения для материала в ней (3.4); на другой — два уравнения непрерывности напряжений (4.4) вместе с физическими уравнениями для материала в этой же стороне (3.4). Таким образом, всего составляем по шесть уравнений для каждой из совмещенных узловых точек, как и для всех остальных узловых точек в сечении кольцевого элемента.

Особенностью применяемой схемы численного решения задачи является формирование конечно-разностных аналогов уравнений равновесия только во внутренних точках областей, занимаемых в теле отдельными компонентами (матрицей и волокнами) материала. Тогда как численные аналоги физических уравнений формируются во всех узловых точках дискретной схемы задачи: во внутренних точках, точках во внешней граничной поверхности тела и в поверхностях раздела фазовых материалов.

Сформированную систему нелинейных уравнений относительно основных величин в узловых точках двумерной области $0 \leq t \leq h/2$, $a \leq r \leq a+h$ решали на основе процедуры дискретного метода Ньютона. Устойчивую реализацию краевой задачи обеспечивали продолжением решения по угловой скорости вращения цилиндра. В результате решения краевой задачи при задаваемой конечной скорости вращения с привлечением (3.6) определяли узловые значения компонент вектора перемещений $u_{n(i)}$ и тензора напряжений $t_{n(ij)}$, деформаций λ_{ni} , ω_{nij} и напряжений p_{nij} для матрицы ($n=0$) и волокна ($n=1$).

Компоненты вектора напряжений на границе раздела матрицы с волокном относительно системы координат в исходном состоянии, отнесенные к единице деформированной площади, вычисляли по формулам

$$\sigma_{(1)} = (\dot{n}_{(1)} t_{(11)} + \dot{n}_{(3)} t_{(31)})(dA / d\dot{A})^{-1},$$

$$\sigma_{(3)} = (\dot{n}_{(1)} t_{(13)} + \dot{n}_{(3)} t_{(33)}) (dA / d\dot{A})^{-1},$$

$$dA / d\dot{A} = J(g^{(ij)} \dot{n}_{(i)} \dot{n}_{(j)})^{1/2}, \quad i, j = 1, 3$$

(индекс принадлежности компоненте материала для применяемых здесь величин опускаем), где $\dot{n}_{(1)}$, $\dot{n}_{(3)}$ — отличные от нуля компоненты единичного вектора внешней нормали поверхности раздела волокна с матрицей в недеформированном состоянии; $dA/d\dot{A}$ — кратность локального изменения площади поверхности раздела компонентов в результате деформирования; J — кратность локального изменения объема материала по одну или другую сторону раздела; $g^{(ij)}$ — компоненты тензора, обратного мере деформации Коши—Грина.

Нормальное и касательное напряжения контактного взаимодействия σ_n и τ_n находили как

$$\sigma_n = \sigma_{(1)}n_{(1)} + \sigma_{(3)}n_{(3)}, \quad \tau_n = -\sigma_{(1)}n_{(3)} + \sigma_{(3)}n_{(1)}$$

(растягивающее напряжение σ_n и касательное на стороне волокна τ_n , направленное против часовой стрелки, положительны). Здесь $n_{(1)}$, $n_{(3)}$ —

отличные от нуля компоненты вектора ориентации $\mathbf{n} = n_{(i)}\dot{\mathbf{r}}_i = n_m\mathbf{r}^m$, $i, m = 1, 3$, деформированной поверхности раздела относительно системы цилиндрических координат в исходной конфигурации; $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_3$ — базисные векторы с осевым и радиальным направлениями, единичной длины и ортогональные между собой для используемых координат. Компоненты $n_{(1)}$, $n_{(3)}$ вектора ориентации поверхности раздела в деформированном состоянии определяли через компоненты n_1 , n_3 данного вектора относительно деформированного координатного базиса по формуле

$$n_{(i)} = n_m g^{(mk)} \left(\delta_k^i + \frac{\partial u_{(i)}}{\partial \hat{\theta}^k} \right), \quad i, m, k = 1, 3 \quad (\hat{\theta}^1 = t, \hat{\theta}^3 = r). \quad (4.5)$$

Формулы связи между компонентами векторов ориентаций деформированной и недеформированной поверхностей в свою очередь имеют вид [23]

$$n_m = \left(g^{(jl)} \dot{n}_{(j)} \dot{n}_{(l)} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{n}_{(m)}, \quad m, j, l = 1, 3 \quad (4.6)$$

Соотношения (4.5) получили, используя зависимости между взаимными и основными векторами деформированного базиса $\mathbf{r}^m = g^{(mk)}\mathbf{r}_k$, $k, m = 1, 3$, и зависимости между векторами деформированного и исходного базисов $\mathbf{r}_k = (\delta_k^i + \partial u_{(i)} / \partial \hat{\theta}^k)\dot{\mathbf{r}}_i$, $i, k = 1, 3$. Величины $n_{(i)}$ и n_m определяем, вычисляя в (4.5) и (4.6) односторонние производные по координатным переменным t ($\hat{\theta}^1$) и r ($\hat{\theta}^3$) из контактной поверхности.

Результаты численного исследования

Результаты численного исследования представляем для тонкостенного цилиндра, внутренний радиус которого $a = 100$ мм, толщина стенки $h = 1$ мм,

внешний радиус $b = a + h = 101$ мм (см. рис. 5). Волокна в нем кольцевые круглого сечения диаметром $d_f = \sqrt{4 \cdot 0,36 / \pi} = 0,677$ мм. Расстояние между осевыми линиями смежных волокон равно толщине стенки цилиндра $h = 1$ мм. Коэффициент армирования цилиндра $k_f = \pi d^2 / 4 / h^2 = 0,36$, плотность материалов матрицы и волокон $\rho_m = \rho_f = 1,1 \cdot 10^3$ кг/м³. Физические уравнения для материала матрицы строили, используя потенциал Левинсона—Буржеса [4]

$$W_m = \frac{E_m}{4(1+\nu_m)} \left[\beta_m (I_1 - 3) + (1 - \beta_m)(I_2 I_3^{-1} - 3) + 2(1 - 2\beta_m)(\sqrt{I_3} - 1) + \left(2\beta_m + \frac{4\nu_m - 1}{1 - 2\nu_m} \right) (\sqrt{I_3} - 1)^2 \right], \quad (5.1)$$

где I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора меры деформации Коши—Лагранжа. Параметры E_m, ν_m характеризуют жесткость и сжимаемость материала; β_m — дополнительная константа материала. Для модуля упругости связующего принимали $E_m = 4$ МПа, параметр сжимаемости $\nu_m = 0,46$, параметр β_m считали равным единице. Поведение материала волокон моделировали потенциалом Блейтца [4]

$$W_f = \frac{E_f}{4(1+\nu_f)} \left[(I_1 - 3) - \frac{2}{1 - 2\nu_f} \ln \sqrt{I_3} + \frac{4\nu_f}{1 - 2\nu_f} (\sqrt{I_3} - 1) \right]$$

с модулем упругости $E_f = 68$ МПа и параметром сжимаемости $\nu_f = 0,40$.

Результаты приводим на основе сетки узловых точек 25×25 для целого поперечного сечения кольцевого элемента, считая две совмещенные точки на контуре раздела матрицы и волокна как одну.

На рис. 6 для большей наглядности изобразили материальные конфигурации поперечного сечения полного кольцевого элемента, заключенного между сечениями цилиндра $t = 0$ и $t = h$, в исходном и деформированном при $\omega = 2\pi \cdot 130$ с⁻¹ состояниях. Визуализацию координатных линий и контура сечения волокна производили с помощью интерполяционных кубических сплайнов. Ограничивающие поверхности цилиндрического тела под воздействием вращения приобретают волнообразную форму (гофрируются) с периодом вдоль образующей, равным периоду армирования h . Стрелы прогибов волнообразования (двойные амплитуды) во внутренней и внешней поверхностях оболочки, определяемые как

$$f_a = |u(3) |_{t=0, r=a} - u(3) |_{t=h/2, r=a}|,$$

$$f_b = |u(3) |_{t=0, r=b} - u(3) |_{t=h/2, r=b}|,$$

несущественно различаются между собой. При указанной скорости вращения $f_a = 0,102$ мм, $f_b = 0,098$ мм их различие равно 4%. Срединная

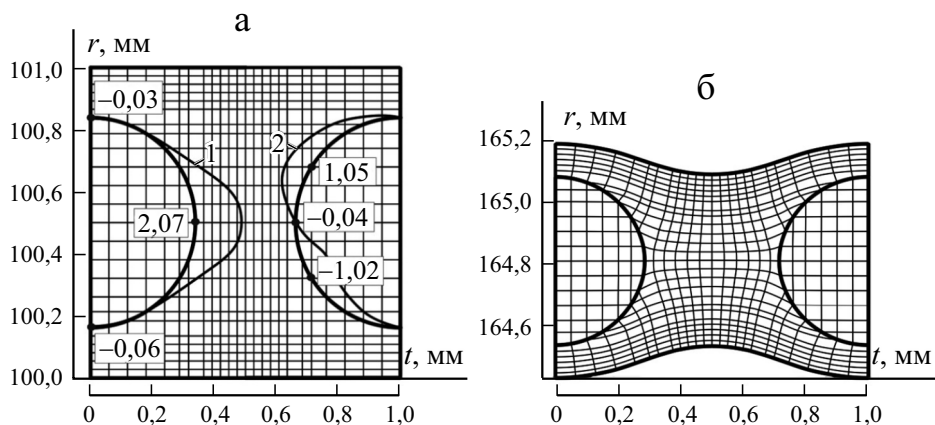


Рис. 6. Исходная (а) и деформированная (б) при $\omega = 2\pi \cdot 130 \text{ с}^{-1}$ конфигурации осевого сечения кольцевого элемента цилиндра с волокнами круглого сечения: 1 и 2 — распределения нормального σ_n и касательного τ_n напряжений соответственно на левой и правой половинах контура раздела матрицы и волокна; для характерных точек на левой половине контура указаны значения σ_n , на правой половине контура — значения τ_n .

поверхность $z = h/2$ ($r = a + h/2$) в деформированном теле остается практически цилиндрической. В целом материальная конфигурация цилиндрического тела в деформированном состоянии близка к цилиндрически симметричной относительно поверхности $r = a + h/2$ в силу тонкой стенки тела.

Площадь сечения кольцевого элемента, поперечного по отношению к его осевой линии, как и поперечного сечения волокна, в достигнутом состоянии становится в 1,5 раза меньше, чем в исходном. В целом объем, занимаемый материалом цилиндра, возрастает на 8% по сравнению с исходным состоянием — как следствие сжимаемости материалов матрицы и волокна. Поперечное сечение волокна в деформированном состоянии приобретает слабую эллипсоидальность, характеризуемую отношением между осями сечения с ориентациями по t - и r -направлениям, равным 1,06. Данное изменение геометрии при деформировании объясняется слабыми удлинением и укорочением по t - и r -направлениям в поперечном сечении волокна под воздействием мягкой матрицы.

Были также проведены расчеты цилиндров, армированных волокнами квадратного сечения, по методу неявных конечных разностей. Результаты совпали с результатами расчетов данных цилиндров по методу конечных разностей — в силу вырождения формул (1.2) или (1.5) в формулы МКР с определенными коэффициентами (1.8) для производных по соответствующим координатам t и r в качестве x .

На рис. 7 приведены исходная и деформированная при $\omega = 2\pi \cdot 130 \text{ с}^{-1}$ конфигурации кольцевого элемента цилиндра с волокнами квадратного

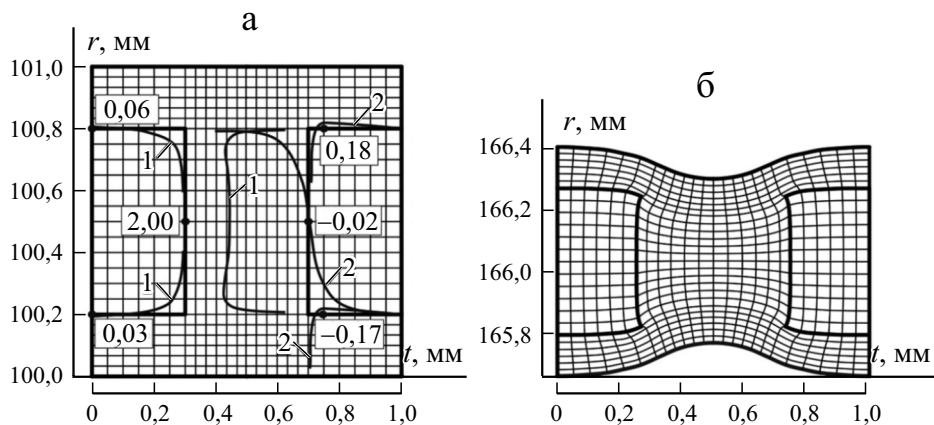


Рис. 7. То же для кольцевого элемента цилиндра с волокнами квадратного сечения.

сечения $\delta \times \delta = 0,6 \times 0,6$ мм (площадь поперечного сечения та же, что и круглых волокон при одинаковом наполнении $k_f = 0,36$). Остальные геометрические и физические параметры цилиндра такие же, как у рассмотренного с круглыми волокнами. Отметим несколько большие амплитуды волнообразования во внутренней и внешней поверхностях, когда $f_a = 0,106$ мм, $f_b = 0,103$ мм. При этом в деформированном состоянии площади поперечного сечения кольцевого элемента и волокна в нем практически такие же, как для цилиндра с круглыми волокнами.

Вместе с изображениями недеформированных конфигураций кольцевых элементов с круглым и квадратным волокнами (рис. 6—а и 7—а) представили графики распределения нормального σ_n и касательного τ_n напряжений на поверхности раздела волокна с матрицей со стороны волокна. Кривые строили, откладывая на нормалях к разделяющим контурам величины соответствующих напряжений. График нормального напряжения σ_n построили на границе раздела для левой половины волокна, а касательного напряжения τ_n — на границе раздела для правой половины волокна.

Отметим малые напряжения обжатия на поверхности круглого волокна и растяжения на поверхности квадратного волокна в достаточно узких окрестностях центрального сечения $t = 0$ по сравнению с растягивающими напряжениями на поверхностях волокон в окрестностях их срединных окружностей $t = d/2$, $z = h/2$ и $t = \delta/2$, $z = h/2$. Значения растягивающих напряжений на этих окружностях оказываются близки: $\sigma = 2,07$ и $2,00$ МПа для волокон круглого и квадратного сечений соответственно. Результаты в случае волокон квадратного сечения для его угловых точек (окружных линий) являются формальными в силу их особого (нерегулярного) характера [25]. С увеличением степени дискретизации напряжения в этих точках сильно возрастают, а окрестности этих точек сильно уменьшаются. Поэтому при подходе к данным точкам приводимые кривые напряжений обрываем.

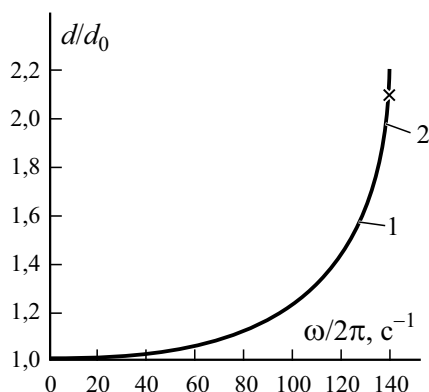


Рис. 8. Зависимость кратности изменения диаметров цилиндров с волокнами круглого (1) и квадратного (2) сечений от скорости вращения $\omega/2\pi$; “x” — конечная точка кривой зависимости для цилиндра с круглыми волокнами.

На рис. 8 показаны зависимости кратности изменения диаметральных размеров d/d_0 цилиндрических тел с волокнами круглого и квадратного сечений от угловой скорости вращения ω . В данной зависимости $d_0 = 2b$ и $d = d_0 + 2u_b$ — диаметры цилиндра в исходном и деформированном состояниях; $u_b = u_{(3)}|_{t=0, z=h}$ — перемещение в радиальном направлении точек внешней поверхности цилиндра по месту сечения $t = 0$. Обе кривые совпадают в пределах погрешности их графического представления на задаваемом интервале изменения скорости вращения. Исключением является малая окрестность значения $\omega = 2\pi \cdot 140 \text{ с}^{-1}$, близкого к предельному значению скорости вращения, на которой диаметр цилиндра с квадратными волокнами заметно больше, чем с круглыми волокнами.

В табл. 1 приведены значения радиальных перемещений $u_{(3)}|_{t=0, z=0}$ и $u_{(3)}|_{t=0, z=h}$ внутренней и внешней поверхностей цилиндров с волокнами круглого и квадратного сечений при разной скорости вращения. В диапазоне $0 \leq \omega/2\pi \leq 115 \text{ с}^{-1}$ значения $u_{(3)}$ цилиндра с круглыми волокнами незначительно превосходят соответствующие перемещения цилиндра с квадратными волокнами, различия изменяются примерно от 1% при малых скоростях вращения до 0 при $\omega/2\pi \approx 115 \text{ с}^{-1}$. При $\omega/2\pi > 115 \text{ с}^{-1}$ перемещения цилиндра с квадратными волокнами становятся большими, чем с круглыми волокнами. При этом существенные различия достигаются лишь вблизи предельной скорости вращения, практически одинаковой для обоих цилиндров. На это влияет неодинаковое распределение армирующего материала в цилиндрах с волокнами с разной формой поперечного сечения.

Аналитическое решение в конечных формулах исходной задачи и даже предельной при волокнах из связующего материала, которая остаётся геометрически и физически нелинейной, не представляется возможным. Чтобы убедиться в достоверности реализации предельной задачи, наряду с ней решили соответствующую задачу по соотношениям линейной теории

Табл. 1

Значения перемещения внутренней и внешней поверхностей цилиндров с круглыми (числитель) и квадратными (знаменатель) волокнами

$\omega/2\pi$	20	40	100	120	130	135	140
$u_{(3)} _{t=0, z=0}$, мм	0,6271	2,6052	22,915	43,582	64,431	81,984	110,78
	0,6208	2,5790	22,743	43,664	65,663	85,424	122,79
Разность, %	1,00	1,01	0,75	-0,19	-1,91	-4,20	-10,8
$u_{(3)} _{t=0, z=h}$, мм	0,6235	2,5905	22,802	43,391	64,180	81,690	110,43
	0,6171	2,5641	22,628	43,468	65,401	85,114	122,40
Разность, %	1,03	1,02	0,76	-0,18	-1,90	-4,19	-10,8

упругости, формально — в двухмерной постановке с дискретизациями в случае цилиндров с волокнами квадратного и круглого сечений. Перемещения на основе данных дискретизаций совпали между собой, а также с результатами точного аналитического решения по конечным формулам из [26], до пятой значащей цифры включительно. Результаты решения предельной задачи в нелинейной постановке продемонстрировали высокую сходимость к точному решению соответствующей линейной задачи с уменьшением скорости вращения цилиндрического тела.

Решили также задачу для толстостенного цилиндра из изотропного материала в нелинейной и линейной одномерных постановках, результаты по которым сопоставили с результатами аналитического решения. Внутренний и внешний радиусы цилиндра $a = 100$ мм, $b = 200$ мм. Материал цилиндра такой, как связующее в армированных волокнами цилиндрах, граничные условия аналогичны. Численные решения выполняли на базе узловых точек с равномерным и неравномерным расположением по радиальной координате (рис. 9). Неравномерное расположение точек получали исходя из равномерного смещением точек с четными номерами относительно точек с нечетными номерами при неизменяемом положении последних. В случае аппроксимации второго порядка (по трём точкам) результаты расчётов практически не зависели от взаимного расположения точек, хотя соседние промежутки между ними могли различаться в десятки раз. Но при некотором дальнейшем сближении чётных точек с нечетными практически скачкообразно происходила потеря устойчивости расчёта. Результаты расчётов получались с высокой точностью при сравнительно небольшом количестве узловых точек.

Качественно иная картина — при линейной (по двум точкам) аппроксимации. Количество узловых точек при их равномерном расположении потребовалось на порядок больше, чем в случае аппроксимации второго порядка, для достижения одинаковой с ней погрешности в пределах 1% по отношению к точным результатам. При сближении положений четных точек с нечетными устойчивость расчёта сохраняется. Точность результатов решения задачи снижается с уменьшением расстояния между сближаемы-

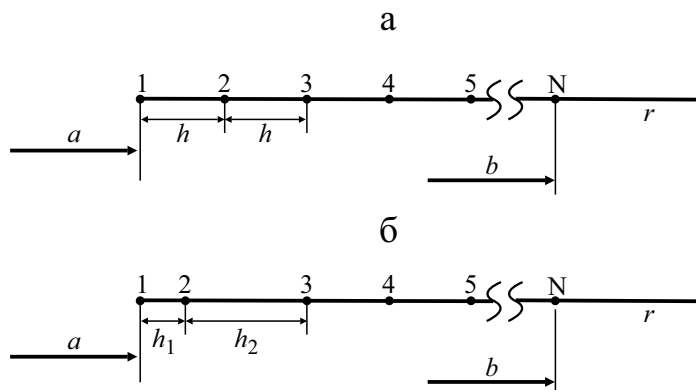


Рис. 9. Равномерное (а) и неравномерное (б) расположение узловых точек по радиальной координате для изотропного цилиндра: $a = 100$ мм, $b = 200$ мм; N — общее нечетное количество узловых точек; $h_1 + h_2 = 2h$.

ми точками. Стремится к той точности, которая достигается при меньшем в два раза количестве одинаковых промежутков между узловыми точками, получаемых при изъятии точек с четными номерами.

В табл. 2 приведены значения радиального перемещения u_a внутренней поверхности цилиндра, найденные при $\omega = 2\pi \cdot 10 \text{ с}^{-1}$ из решения краевой задачи в линейной постановке. Аппроксимации первого и второго порядков выполняли с использованием равномерного расположения узловых точек $h_1 = h_2 = h$ и неравномерного, когда соседние промежутки между точками были равны $h_1 = 0,2h$, $h_2 = 1,8h$. В круглых скобках — различие значений перемещения из численного решения задачи и перемещения $u_a = 3,394251$, найденного по формулам точного решения (точное значение перемещения внешней поверхности $u_b = 1,939572$). Изменение этих различий с переходом от одной плотности расположения узлов к другой достаточно чётко отражает линейную и квадратичную сходимость для применяемых аппроксимаций. Такая же точность результатов достигается по всем величинам деформированного состояния во всех узловых точках по толщине стенки цилиндра.

В табл. 3 представлены значения радиального перемещения внутренней и внешней поверхностей цилиндра при разной скорости вращения из численного решения краевой задачи в нелинейной и линейной постановках и точного решения линейной задачи. Численные решения задачи были выполнены на базе аппроксимации второго порядка при общем количестве точек дискретизации $N = 161$. Данные представлены для равномерного по толщине цилиндра расположения узловых точек, поскольку неравномерность расположения, особенно при таком их количестве, практически не сказывается. При больших перемещениях численное и аналитическое решения линейной задачи имеют, разумеется, формальный характер. Из решения нелинейной задачи нашли угловую скорость вращения $\omega = 2\pi \cdot 37 \text{ с}^{-1}$ как

Табл. 2

Значения перемещения внутренней поверхности изотропного цилиндра ($a = 100$ мм, $b = 200$ мм) при $\omega = 2\pi \cdot 10$ с⁻¹ из решений краевой задачи в линейной постановке

N	Аппроксимация первого порядка		Аппроксимация второго порядка	
	$h_1 = h_2 = h$	$h_1 = 0,2h$ $h_2 = 1,8h$	$h_1 = h_2 = h$	$h_1 = 0,2h$ $h_2 = 1,8h$
11	3,835521 (13,0005%)	4,117346 (21,3035%)	3,427536 (0,9806%)	3,428572 (1,0112%)
21	3,609545 (6,3429%)	3,747731 (10,4141%)	3,402725 (0,2497%)	3,403911 (0,2846%)
41	3,500575 (3,1325%)	3,568789 (5,1422%)	3,396381 (0,0628%)	3,396773 (0,0743%)
81	3,447084 (1,5565%)	3,480947 (2,5542%)	3,394784 (0,0157%)	3,394893 (0,0189%)
161	3,420585 (0,7758%)	3,437453 (1,2728%)	3,394384 (0,0039%)	3,394413 (0,0048%)

близкую к предельной, при которой в условиях отсутствия разрушения конфигурация цилиндра неограниченно развивается. Приведенные резуль-

Табл. 3

Значения перемещения внутренней (числитель) и внешней (знаменатель) поверхностей изотропного цилиндра ($a = 100$ мм, $b = 200$ мм) под воздействием вращения из решений краевой задачи в нелинейной и линейной постановках и точного решения линейной задачи

$\frac{\omega}{2\pi}$, с ⁻¹	Нелинейная теория упругости	Линейная теория упругости	Точное решение по линейной теории упругости
2,5	<u>0,21274</u>	<u>0,21215</u>	<u>0,21214</u>
	0,12161	0,12123	0,12122
5	<u>0,85807</u>	<u>0,84860</u>	<u>0,84856</u>
	0,49109	0,48492	0,48489
10	<u>3,55213</u>	<u>3,39438</u>	<u>3,39425</u>
	2,04292	1,93967	1,93957
20	<u>16,6025</u>	<u>13,5775</u>	<u>13,5770</u>
	9,78121	7,75868	7,75829
30	<u>54,3049</u>	<u>30,5495</u>	<u>30,5483</u>
	34,2008	17,4570	17,4562
35	<u>118,090</u>	<u>41,5812</u>	<u>41,5796</u>
	81,4048	23,7610	23,7598
37	<u>220,022</u>	<u>46,4691</u>	<u>46,4673</u>
	166,709	26,5541	26,5527

таты отражают характер сходимости результатов нелинейного решения задачи к линейному с уменьшением скорости вращения цилиндра.

Заключение

Изложен метод неявных конечных разностей (МНКР), который удобно использовать при нерегулярном расположении узловых точек дискретной схемы тела в задаче о его деформировании. Данный метод можно использовать при исследовании тел с неправильной конфигурацией и неправильными формами включений. Применяемый метод позволяет исходя из формулировки краевой задачи в перемещениях и напряжениях как независимых между собой основных величин разрешающей системы уравнений определять напряжения с более высокой точностью, чем МКЭ в форме метода перемещений. Отметим и более простую реализацию проблематики, особенно нелинейной, с помощью МНКР, чем в случае МКЭ на базе вариационной формулировки, использующей кусочную аппроксимацию искомых функций. (Разумеется, если задача решается на основе экстремальной формулировки, предполагающей прямую оптимизацию функционала состояния, то конечно-элементная аппроксимация альтернативы по схеме конечных разностей не имеет.)

Получение на основе изложенного подхода результатов высокой точности продемонстрировали на примерах исследования вращающихся цилиндров с волокнами круглого и квадратного сечений. Поведение цилиндров с разными волокнами при одинаковом наполнении заметно различается лишь при приближении скорости вращения к предельной, когда сказывается неодинаковое распределение материала волокон в цилиндрах при разной форме их поперечных сечений. Достоверность компьютерной реализации непосредственно подтверждается результатами решения задачи для цилиндра, армированного квадратными волокнами, методом конечных разностей с определенными коэффициентами.

Возможности подхода были также проиллюстрированы результатами решения краевой задачи в нелинейной и линейной постановках для вращающегося толстостенного цилиндра из изотропного материала. Краевую задачу решали с применением аппроксимации первого и второго порядков для основных величин на базе равномерного и неравномерного распределения узловых точек по толщине стенки цилиндра. Результаты численных реализаций сопоставили с результатами аналитического решения линейной задачи в конечных формулах. Выявили высокую точность решения задачи в случае квадратичной аппроксимации при достаточно неплотной сетке узловых точек, которая практически не зависела от их неравномерного расположения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопrotивление полимерных и композитных материалов. — Рига: Зинатне, 1980. — 572 с.
2. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. — М.: Машиностроение, 1988. — 288 с.
3. Куричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. — К.: Наук. думка, 2002. — 655 с.
4. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. — Л.: Машиностроение, 1986. — 336 с.
5. Holzapfel G. A., Gasser T. C., and Ogden R. W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models // J. Elasticity. — 2000. — Vol. 61. — P. 1—48.
6. Holzapfel G. A., Gasser T. C., and Stadler M. A structural model for the viscoelastic behavior of arterial walls: Continuum formulation and finite element analysis // Eur. J. Mech. A / Solids. — 2002. — Vol. 21. — P. 441—463.
7. Poole W. J., Embury J. D., MacEwen S., and Kocks U. Large strain deformation of a copper–tungsten composite system. 1. Strain distribution // Philosoph. Mag. A. — 1994. — Vol. 69, No. 4. — P. 645—665.
8. Nicolaou P. D., Piehler H. R., and Saigal S. Process parameter selection for the consolidation of continuous fiber reinforced composites using finite element simulations // Int. J. Mech. Sci. — 1995. — Vol. 37, No. 7. — P. 669—690.
9. Gotoh M. and Idris A. B. M. Finite-element simulation of deformation of fiber-reinforced materials in the plastic range. Model proposition and tensile behaviors // JSME Int. J. Ser. A. Mech. Mater. Eng. — 1997. — Vol. 40, No. 2. — P. 149—157.
10. Banks-Sills L. and Leiderman V. Macro-mechanical material model for fiber reinforced metal matrix composites // Composites: Part B. — 1999. — Vol. 30, Jan. — P. 443—452.
11. Коханенко Ю. В. Численное исследование краевых эффектов в слоистых композитах при одноосном нагружении // Прикл. механика. — 2010. — Т. 46, № 5. — С. 29—45.
12. Sockalingam S., Gillespie J. W., and Keefe M. On the transverse compression response of Kevlar KM2 using fiber-level finite element model // Int. J. Solids Struct. — 2014. — Vol. 51, June. — P. 2504—2517.
13. Ахундов В. М. Формоизменения торообразного тела с перекрестным расположением волокон на основе двухуровневой каркасной теории // Механика композит. материалов. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 359—378.
14. Ахундов В. М. Метод расчета приповерхностного эффекта в кусочно-однородных телах при больших деформациях на основе двухуровневого подхода // Механика композит. материалов. — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 253—278.
15. Черноусько Ф. Л., Баничук В. П. Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973. — 238 с.
16. Зенкевич О. К., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. — М.: Мир, 1986. — 312 с.
17. Ахундов В. М., Кострова М. М. Нелинейное деформирование кусочно-однородного цилиндра под воздействием вращения // Механика композит. материалов. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 345—360.
18. Ахундов В. М., Наумова И. Ю., Забродская А. А. Эластоармированная труба из трех слоев с кольцевыми волокнами под воздействием внутреннего давления // Вісник Запорізького нац. ун-ту. — 2019. — № 1. — С. 4—13.

19. *Шун Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ. — М.: Мир, 1982. — 238 с.
20. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
21. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975. — 558 с.
22. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2002. — 824 с.
23. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
24. *Ахундов В. М.* Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 1. Разработка методики расчета композитных материалов // *Механика композит. материалов.* — 1998. — Т. 34, №6. — С. 733—745.
25. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. — М.: Наука, 1981. — 688 с.
26. *Пономарев С. Д.* Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев и др. — 1959. — Т. 3. — С. 32—41.

Поступила в редакцию 26.10. 2020

Окончательный вариант поступил 18.06.2021

Received Oct. 26, 2020 (June 18, 2021)

Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко*

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В НЕЙТРОННОМ ПОТОКЕ

E. I. Starovoitov and D. V. Leonenko

DEFORMATION OF AN ELASTIC CIRCULAR SANDWICH PLATE IN A NEUTRON FLOW

Keywords: three-layer circular plate, elasticity, neutron flow

The deformation of an elastic circular three-layer plate with an asymmetric thickness under neutron irradiation is considered. To describe the kinematics of the package, polyline hypotheses are used. In the thin load-carrying layers, Kirchhoff's hypotheses are assumed. In a relatively thick aggregate with an incompressible thickness, the Timoshenko hypothesis of straightness and incompressibility of the deformed normal is employed. The operation of filler in the tangential direction is taken into account, and the corresponding boundary-value problem is formulated. A system of differential equations of equilibrium is obtained by the Lagrange variational method, and boundary conditions on the plate contour are formulated. The solution of the boundary-value problem is reduced to finding three desired functions: the deflection, shear, and radial displacement of the median plane of the filler. An inhomogeneous system of ordinary linear differential equations is written for these functions. The boundary conditions prescribed correspond to the spherical support of the plate contour, and its numerical parametric analysis is carried out.

Ключевые слова: пластина круговая трехслойная, упругость, поток нейтронный

Рассмотрено деформирование упругой круговой трехслойной несимметричной по толщине пластины при нейтронном облуче-

*Автор, с которым следует вести переписку: edstar0@yandex.by
Corresponding author: edstar0@yandex.by

нии. Для описания кинематики пакета использованы гипотезы ломаной линии. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В несжимаемом по толщине относительно толстом заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении. Приведена постановка соответствующей краевой задачи. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом Лагранжа. Сформулированы граничные условия на контуре пластины. Решение краевой задачи сведено к нахождению трех искомых функций — прогиба, сдвига и радиального перемещения срединной плоскости заполнителя. Для этих функций выписана неоднородная система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию контура пластины. Проведен его численный параметрический анализ.

Введение. Вопросам расчета напряженно-деформированного состояния композитных, в том числе трехслойных, элементов конструкций уделяется большое внимание, так как во многих случаях они являются составляющими сложных и ответственных сооружений. Необходимость оценки прочностных характеристик подобных элементов, работающих в условиях комплексных внешних воздействий, обуславливает необходимость создания соответствующих расчетных моделей для описания их деформирования при разных нагрузках, включая радиационные. Этой проблеме посвящены многие работы.

Результаты, связанные с динамическим воздействием на трехслойные элементы конструкций, в том числе опирающихся на упругое основание, геометрия и движение которых описывается с помощью тех или иных гипотез, приведены в публикациях [1—11]. Свободные, вынужденные и нестационарные колебания трехслойных пластин и оболочек, в том числе связанных с упругим основанием, исследовали в [1—4]. Кинематические предположения принимали соответствующими гипотезе прямой линии. Решение получено в перемещениях в виде разложения в ряды по системам собственных функций. Численно исследованы частоты и амплитуды колебаний. Работы [5—11] посвящены развитию математических моделей ударных и нестационарных воздействий на неоднородные и трехслойные системы, в том числе с подвижными границами. В [12] предложена модель динамического изгиба композитной эллиптической пластины с жестким заполнителем.

В [13—18] проведен анализ квазистатического нагружения слоистых оболочек, пластин и балок при конечных прогибах. В [19, 20] рассмотрено деформирование жесткопластичных армированных пластин с учетом 2D напряженного состояния в волокнах. Изгиб и предельный анализ

ортотропных сандвич-пластин с ячеистым наполнителем исследовали в [21—23]. Изотермическое упругопластическое и физически нелинейное деформирование трехслойных круговых пластин рассмотрено в [24—28]. Термосиловое нагружение трехслойных пластин проанализировано в работах [29—32].

Влияние нейтронного облучения на механические свойства материалов описано в монографии [33]. В [34] исследовано деформирование трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем в нейтронном потоке.

В настоящей работе представлена постановка и получено аналитическое решение краевой задачи о нагружении трехслойной упругой круговой пластины в условиях нейтронного облучения. Исследовано распространение нейтронного потока по толщине пластины и его влияние на ее деформирование.

1. Постановка задачи. Внешние несущие слои несимметричной по толщине трехслойной круговой пластины предполагаем тонкими, толщиной $h_1 \neq h_2$. Для них приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности деформированных нормалей к срединной поверхности слоев. Заполнитель считается жестким, достаточно толстым ($h_3 = 2c$), учитывается его работа в тангенциальном направлении. Для заполнителя справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали, которая поворачивается относительно срединной поверхности на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Постановка задачи и ее решение проведены в цилиндрической системе координат r, φ, z . Срединная плоскость заполнителя принята за координатную, ось z направлена перпендикулярно вверх, к первому слою.

Предположим, что на внешнюю поверхность $z = c + h_1$ круговой трехслойной пластины подводится нейтронный поток плотностью $\varphi_0 = \text{const}$ в направлении, противоположном внешней нормали (рис. 1). В силу симметрии нагружения тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют:

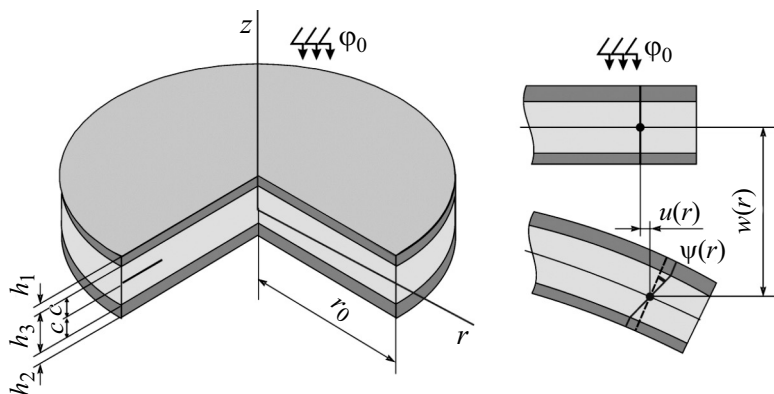


Рис. 1. Расчетная схема.

$u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ . Далее эти функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 , относительная толщина k -го слоя обозначена как h_k . На контуре предполагаем жесткую диафрагму, препятствующую относительному сдвигу слоев, т.е. $\psi = 0$ при $r = 1$.

Согласно экспериментальным данным при малых деформациях в линейном приближении можно считать, что изменение объема материала в слоях θ_{Ik} прямо пропорционально интегральному нейтронному потоку [33]

$$\theta_{Ik} = B_k I_k(z), \quad (1)$$

где $I_k(z) = \varphi_k(z)t$ — интегральный нейтронный поток в k -м слое; φ_k — интенсивность потока, нейтрон/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$), дошедшего за время t к поверхности с координатой z в k -м слое; B_k — константа материала, получаемая из опыта.

Влияние нейтронного облучения на параметры упругости (модуль Юнга, коэффициент Пуассона и т. д.) незначительно и далее не учитывается.

Если на поверхность пластины $z = c + h_1$ параллельно оси z падают нейтроны с интенсивностью φ_0 , то интенсивность потока нейтронов, доходящих до плоскости, параллельной границе $z = \text{const}$, будет убывать по экспоненте [33]. В нашем случае в верхнем слое интенсивность потока нейтронов будет равна

$$\varphi_1(z) = \varphi_0 \exp(-\mu_1(h_1 + c - z)), \quad \mu_1 = \sigma_1 n_0 = \sigma_1 \frac{A_0 \rho_1}{A_1}, \quad (2)$$

где μ_1 — величина макроскопического эффективного сечения (1/см); σ_1 — эффективное сечение, отнесенное к одному ядру; n_0 — количество ядер в 1 см^3 ; A_0 — число Авогадро; ρ_1 — плотность; A_1 — атомный вес; нижний индекс — номер слоя, если другое не указано.

Для алюминия $\sigma_1 = 0,21 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, $A_0 = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$, плотность $\rho_1 = 2,7 \text{ г/см}^3$, $A_1 = 27 \text{ а.е.м.}$ Подставив эти данные в (2), получим $\mu_1 = 1,26 \text{ м}^{-1}$. Отметим, что величина μ_1 обратна величине свободного пробега нейтронов, которая для быстрых нейтронов в алюминии равна $\lambda_1 = 14,1$ — $15,9 \text{ см}$, в полиэтилене — $5,5$ — $13,9 \text{ см}$.

Следовательно, к моменту времени t через сечение z внешнего слоя пройдет интегральный поток, равный

$$I_1(z, t) = \varphi_0 t \exp(-\mu_1(c + h_1 - z)). \quad (3)$$

При $z = c + h_1$ величина $I_0 = \varphi_0 t$ дает суммарный поток нейтронов на единицу площади поверхности тела. В реакторах $\varphi_0 \approx 10^{17} - 10^{18}$ нейтрон/(м²·с), а величина I_0 достигает значений $10^{23} - 10^{27}$ нейтрон/м², причем θ_I достигает значений около 0,1. Следовательно, в зависимости от энергии нейтронов и облучаемого материала значение параметра B может быть равным $10^{-28} - 10^{-23}$ м²/нейтрон.

При $z = c$ из формулы (2) получим интенсивность нейтронного потока на границе перехода из первого слоя 1 к заполнителю 3:

$$\varphi_{13} = \varphi_1(c) = \varphi_0 \exp(-\mu_1 h_1). \quad (4)$$

В заполнителе интенсивность потока нейтронов на плоскости $z = \text{const}$ и интегральный поток к моменту t будут равны

$$\varphi_3(z) = \varphi_{13} \exp(-\mu_3(c - z)), \quad I_3(z, t) = \varphi_{13} t \exp(-\mu_3(c - z)). \quad (5)$$

На границе $z = -c$ (из заполнителя 3 к нижнему несущему слою 2) из соотношения (5) найдем интенсивность нейтронного потока:

$$\varphi_{32} = \varphi_3(-c) = \varphi_{13} \exp(-2\mu_3 c). \quad (6)$$

В нижнем слое интенсивность потока нейтронов на плоскости $z = \text{const}$ и интегральный поток к моменту t будут равны

$$\varphi_2(z) = \varphi_{32} \exp(-\mu_2(-c - z)), \quad I_2(z, t) = \varphi_{32} t \exp(-\mu_2(-c - z)). \quad (7)$$

Таким образом, формулы (2)–(7) позволяют рассчитать интегральный нейтронный поток в слоях трехслойной пластины на плоскостях с координатой $z = \text{const}$.

Принимаем, что материалы слоев пластины в процессе деформирования проявляют упругие свойства. Для описания их деформирования используем физические уравнения состояния, учитывающие радиационное изменение объема (1):

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad (8)$$

$$\sigma^{(k)} = K_k (3\varepsilon^{(k)} - B_k I_k) \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi),$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ — девиаторные, а $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k — модули сдвига и объемного деформирования; $s_{rz}^{(3)}$, $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ — касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе.

При принятых кинематических гипотезах выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (9)$$

где запятая в нижнем индексе означает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Обобщенные внутренние усилия и моменты вводим соотношениями

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, & M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), & Q &= \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_{rz}^{(k)}$ — компоненты тензора напряжений.

Система уравнений равновесия упругой трехслойной пластины в обобщенных усилиях (10) приведена в [31]. При отсутствии внешней силовой нагрузки она будет однородной. Система получена без использования уравнений связи напряжений и деформаций, поэтому остается справедливой и в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= 0, & H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q &= 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

На границе пластины $r = 1$ должны выполняться силовые граничные условия

$$T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0, \quad (12)$$

где T_r^0, M_r^0, Q^0 — заданные усилия на контуре.

Выразив напряжения в формулах (10) через деформации с помощью закона Гука (8), а затем деформации — через перемещения (9) с помощью соотношений Коши [5], получим для обобщенных внутренних усилий выражения через искомые функции, в которые войдет интегральный нейтронный поток к моменту t :

$$\begin{aligned}
 T_r &= \sum_{k=1}^3 \left[h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) - K_k B_k \int_{h_k} I_k dz \right] + \\
 &+ c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} - \\
 &- \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \\
 &- \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r}, \\
 T_\varphi &= \sum_{k=1}^3 \left[h_k (K_k^- u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^+) - K_k B_k \int_{h_k} I_k dz \right] + \\
 &+ c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \psi_{,r} + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \frac{\psi}{r} - \\
 &- \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \\
 &- \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r}, \tag{13} \\
 M_r &= \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \\
 &+ \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\
 &+ \left[cK_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\
 &+ \left[cK_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
 &- \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r} - \\
 & \quad - \sum_{k=1}^3 K_k B_k \int_{h_k} I_k z dz, \tag{13} \\
 & H_r = c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) u_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{u}{r} + \\
 & + \left[c^2 (K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \left[c^2 (K_1^- h_1 + K_2^- h_2) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
 & - \left[c \left(K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
 & - \left[c \left(K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r} - \\
 & - K_3 B_3 \int_{h_3} I_3 z dz - A \left(K_1 B_1 \int_{h_1} I_1 dz - K_2 B_2 \int_{h_2} I_2 dz \right), \\
 & Q = 2cG_3\psi, \quad K_k + \frac{4}{3}G_k \equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3}G_k \equiv K_k^-.
 \end{aligned}$$

Соотношения для обобщенных моментов M_φ , H_φ следуют из (13), если в одноименных внутренних усилиях поменять местами параметры K_k^+ и K_k^- .

Подставив полученные выражения внутренних усилий (13) в уравнения (11) и проведя необходимые преобразования, получим систему однородных дифференциальных уравнений равновесия для определения искомых функций $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ в задаче о деформировании трехслойной круговой пластины в нейтронном потоке:

$$\begin{aligned}
 & L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0, \\
 & L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2cG_3\psi = 0, \tag{14} \\
 & L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь дифференциальные операторы L_2 (оператор Бесселя), L_3 и коэффициенты a_i определяются соотношениями

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \\
 a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\
 a_3 &= h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \\
 a_4 &= c^2 \left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \\
 a_5 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\
 a_6 &= h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Следует отметить, что интегральный нейтронный поток в систему (14) явным образом не входит, так как его производные по радиальной координате равны нулю, а в разностях обобщенных усилий в уравнениях (11)₁, (11)₂ соответствующие слагаемые сокращаются.

2. Общее решение краевой задачи. Точное общее аналитическое решение системы уравнений (14) можно выписать в виде

$$\begin{aligned}
 \psi &= C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r), \\
 w &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi \, dr - \frac{1}{4b_3} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_6 \ln r + C_4, \\
 u &= \frac{a_3}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r},
 \end{aligned} \tag{16}$$

где $I_1(\beta r)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка, $K_1(\beta r)$ — функция Макдональда; интегралы берутся в пределах от 0 до r ; L_2^{-1} , L_3^{-1} — интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам L_2 , L_3 :

$$\begin{aligned}
 L_2^{-1}(f) &\equiv \frac{1}{r} \int r \int f \, dr \, dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f \, dr \, dr \, dr, \\
 \beta^2 &= \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}.
 \end{aligned}$$

Все интегралы, встречающиеся в решении (16) и далее, являются определенными с переменным верхним пределом, т.е.

$$\int f(x)dx \equiv \int_0^r f(z)dz .$$

Из граничных условий интерес представляют те, в которых ограничения накладываются на внутренние усилия. В этом случае интегральный нейтронный поток входит в решение краевой задачи через константы интегрирования. Например, при шарнирном опирании контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = M_r = 0 \text{ при } r = 1 . \quad (17)$$

Подставив решение (16) в (17) и учитывая ограниченность перемещений в центре пластины, получим следующие константы интегрирования:

$$\begin{aligned} C_1 = C_2 = C_3 = C_6 = C_8 = 0 , \\ C_5 = -t \left[\frac{\varphi_0 K_1 B_1}{\mu_1} \left(h_1 + c - \frac{1}{\mu_1} - \left(c - \frac{1}{\mu_1} \right) \exp(-\mu_1 h_1) \right) + \right. \\ \left. + \frac{\varphi_{32} K_2 B_2}{\mu_2} \left(\left(c + h_2 + \frac{1}{\mu_2} \right) \exp(-\mu_2 h_2) - c - \frac{1}{\mu_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\varphi_{13} K_3 B_3}{\mu_3} \left(c - \frac{1}{\mu_3} + \left(c + \frac{1}{\mu_3} \right) \exp(-2\mu_3 c) \right) \right] , \quad (18) \end{aligned}$$

$$C_4 = -\frac{C_5 r^2}{4b_3} \Big|_{r=1} , \quad C_7 = -\frac{a_3}{a_1 b_3} C_5 .$$

Следовательно, соотношения (16), (18) дают аналитическое решение краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины в нейтронном потоке.

3. Численные результаты получены для пластины, материалы слоев которой Д16Т—фторопласт—Д16Т. Принято, что: $B_1 = B_2 = B_3 = 10^{23}$ м²/нейтрон, что обеспечивает объемную деформацию в слоях 3—3,5 %; для дюралюминия $\mu_1 = 1,26$ см, для фторопласта $\mu_3 = 3,21$ см, время действия нейтронного потока 1 ч.

На рис. 2 показано изменение величины нейтронного потока по высоте пластины в зависимости от толщины верхнего несущего слоя $h_1 = 0,01, 0,02, 0,04$. Толщина остальных слоев принята постоянной: $h_2 = 0,04, h_3 = 0,4$, интенсивность потока $\varphi_1 = 10^{18}$ нейтрон/(м²·с). Увеличение толщины

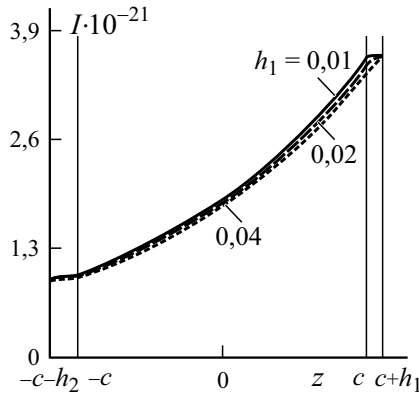


Рис. 2. Зависимость величины нейтронного потока I от толщины верхнего слоя h_1 .

несущего слоя в малой степени влияет на изменение величины нейтронного потока.

Изменение прогиба w вдоль радиуса и распределение линейных деформаций ε_r^k по высоте поперечного сечения на контуре ($r = 1$) пластины при облучении нейтронными потоками интенсивностью $\varphi_1 = 10^{17}$, 10^{18} нейтрон/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$) иллюстрируют данные рис. 3. Относительная толщина слоев равна $h_1 = 0,02$; $h_2 = 0,06$; $h_3 = 0,4$.

Следует отметить, что при воздействии нейтронного облучения происходит увеличение объемной деформации в каждом слое, при этом верхний слой облучается потоком большей интенсивности, что вызывает прогиб, направленный вверх. Радиальная деформация в верхнем слое и примыкающей части заполнителя положительна, что свидетельствует об

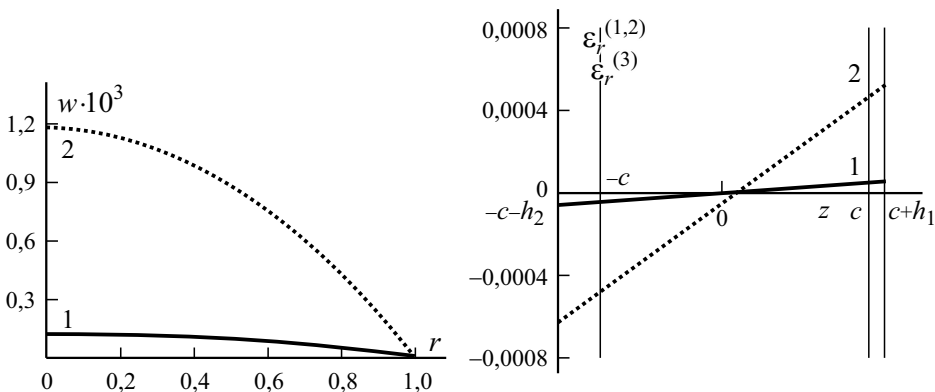


Рис. 3. Прогиб w и радиальные деформации ε_r^k при нейтронном облучении: $\varphi_1 = 10^{17}$ (1); 10^{18} нейтрон/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$) (2).

их растянутости. Усиление интенсивности потока на порядок вызывает примерно такое же увеличение прогиба и деформации. Нейтронное облучение не оказывает влияния на сдвиги в заполнителе.

Численные результаты для перемещений получены при облучении нейтронным потоком интенсивностью $\varphi_1 = 10^{18}$ нейтрон/(м²·с).

Зависимость прогиба от толщины верхнего слоя $h_1 = 0,01, 0,02, 0,04, 0,06$ при постоянной толщине заполнителя $h_3 = 0,4$ и нижнего слоя $h_2 = 0,04$ показана на рис. 4. С увеличением толщины верхнего слоя прогиб увеличивается. В силу этого прогиб меняет знак и тогда существует такое значение $h_1 = h_1^*$, при котором прогиб равен нулю. Для определения этого значения в решении (16) положим $w(h_1^*) = 0$. Это возможно, если выполняется уравнение, следующее из условия $C_5 = 0$:

$$\begin{aligned}
 & -t \left[\frac{\varphi_0 K_1 B_1}{\mu_1} \left(h_1 + c - \frac{1}{\mu_1} - \left(c - \frac{1}{\mu_1} \right) \exp(-\mu_1 h_1) \right) + \right. \\
 & + \frac{\varphi_{32} K_2 B_2}{\mu_2} \left(\left(c + h_2 + \frac{1}{\mu_2} \right) \exp(-\mu_2 h_2) - c - \frac{1}{\mu_2} \right) + \\
 & \left. + \frac{\varphi_{13} K_3 B_3}{\mu_3} \left(c - \frac{1}{\mu_3} + \left(c + \frac{1}{\mu_3} \right) \exp(-2\mu_3 c) \right) \right] = 0. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Уравнение (19) исследовали численно. Было получено, что при выбранных параметрах пластины и величины нейтронного потока критическая толщина верхнего слоя $h_1^* \approx 0,012$. Если $h_1 < h_1^*$, то прогиб направлен вниз, в случае $h_1 = h_1^*$ прогиб приблизительно нулевой, при $h_1 > h_1^*$ пластина выпукла вверх.

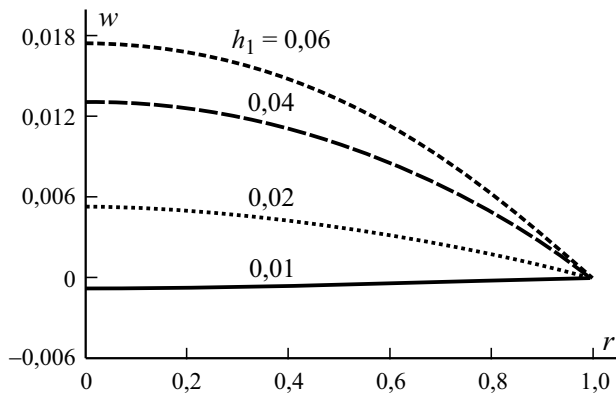


Рис. 4. Зависимость прогиба w от толщины верхнего слоя пластины h_1 .

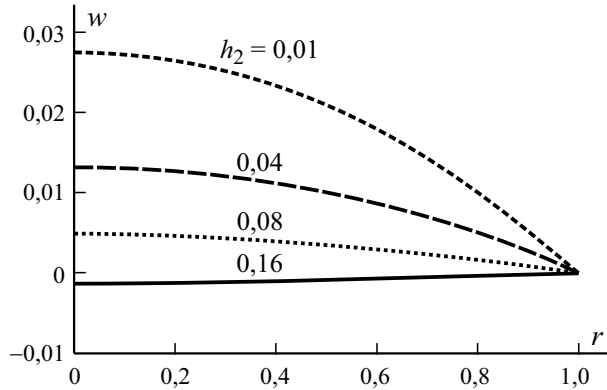


Рис. 5. Зависимость прогиба w от толщины нижнего слоя пластины h_2 .

На рис. 5 представлена зависимость прогиба от толщины нижнего слоя $h_2 = 0,01, 0,04, 0,08, 0,16$ при постоянной толщине заполнителя $h_3 = 0,4$ и верхнего слоя $h_1 = 0,04$. С увеличением толщины нижнего слоя прогиб последовательно уменьшается. При численном исследовании уравнения (19) ($h_3 = 0,4, h_1 = 0,04$) было получено, что при выбранных параметрах пластины и величины нейтронного потока критическая толщина нижнего слоя $h_2^* = 0,134$. Если $h_2 < h_2^* = 0,134$, то прогиб направлен вниз, в случае $h_2 = h_2^*$ прогиб приблизительно нулевой, при $h_2 > h_2^*$ пластина выпукла вверх.

Зависимость прогиба от толщины заполнителя $h_3 = 0,2, 0,3, 0,4, 0,5$ при постоянной толщине несущих слоев $h_1 = h_2 = 0,04$ показана на рис. 6. В этом случае увеличение толщины заполнителя вызывает уменьшение прогиба пластины.

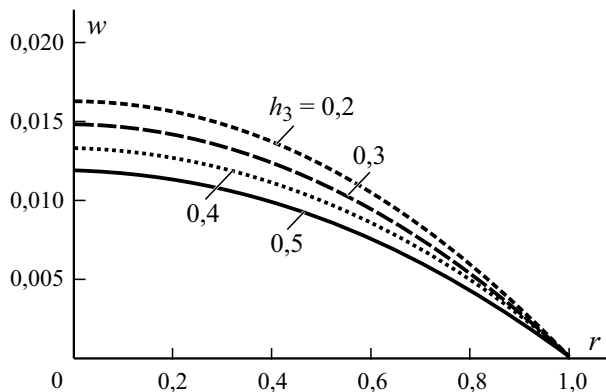


Рис. 6. Зависимость прогиба w от толщины заполнителя h_3 .

Заключение. Предложенная постановка краевой задачи и полученное общее решение уравнений равновесия позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние упругих трехслойных круговых пластин в нейтронном потоке при шарнирном опирании контура. Численные расчеты показали возможность возникновения напряженно-деформированного состояния в пластине только за счет нейтронного воздействия и его существенную зависимость от геометрических и упругих параметров материалов слоев.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T20P-047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovsky D. V.* Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation // *Mech. Compos. Mater.* — 2015. — Vol. 51, No. 5. — P. 561—570.
2. *Starovoitov E. I., Kubenko V. D., Tarlakovskii D. V.* Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation // *Russian Aeronautics.* — 2009. — Vol. 52, No. 2. — P. 151—157.
3. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2016. — Vol. 52, No. 5. — P. 665—672.
4. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation // *Int. Appl. Mech.* — 2011. — Vol. 47, No. 5. — P. 580—589.
5. *Mikhailova E. Yu., Fedotenkov G. V.* Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction) // *Mech. Solids.* — 2011. — Vol. 46, No. 2. — P. 239—247.
6. *Fedotenkov G. V., Tarlakovskiy D. V.* Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries // *J. Math. Sci.* — 2009. — Vol. 162, No. 2. — P. 246—253.
7. *Ivañez I., Moure M. M., Garcia-Castillo S. K., Sanchez-Saez S.* The oblique impact response of composite sandwich plates // *Compos. Struct.* — 2015. — No. 133. — P. 1127—1136.
8. *Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V.* Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // *J. Machinery Manufacture and Reliability.* — 2014. — Vol. 43, No. 2. — P. 145—152.
9. *Suvorov Ye. M., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V.* The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. // *J. Appl. Math. Mech.* — 2012. — Vol. 76, No. 5. — p. 511—518.
10. *Paimushin V. N., Gazizullin R. K.* Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 3. — P. 407—436.
11. *Paimushin V. N., Firsov V. A., and Shishkin V. M.* Modeling the dynamic response of a carbon-fiber-reinforced plate at resonance vibrations considering the internal friction in the material and the external aerodynamic damping // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 4. — P. 609—630.

12. *Romanova T. P.* Modeling the dynamic bending of rigid-plastic hybrid composite elliptical plates with a rigid insert // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 5. — P. 809—828.
13. *Paimushin V. N.* Theory of moderately large deflections of sandwich shells having a transversely soft core and reinforced along their contour // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 1. — P. 3—26.
14. *Škec L., Jelenić G.* Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // *Acta Mech.* — 2014. — Vol. 225, No. 2. — P. 523—541.
15. *Belinha J., Dints L. M.* Nonlinear analysis of plates and laminates using the element free Galerkin method // *Compos. Struct.* — 2007. — Vol. 78, No. 3. — P. 337—350.
16. *Wang Zh., Lu G., Zhu F., Zhao L.* Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection // *J. Eng. Mech.* — 2017. — Vol. 143, No. 9.
17. *Takele K. T.* Interfacial strain energy continuity assumption-based analysis of an orthotropic sandwich plate using a refined layer-by-layer theory // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 3. — P. 419—444.
18. *Zadeh H.V., Tahani M.* Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load // *Int. J. Recent Adv. Mech. Eng.* — 2017. — Vol.6, No.1.
19. *Romanova T. P., Yankovskii A. P.* Constructing yield loci for rigid-plastic reinforced plates considering the 2d stress state in fibers // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 54, No. 6. — P. 697—718.
20. *Romanova T. P., Yankovskii A. P.* Yield loci of reinforced plates made from rigid-plastic unequiresistant materials considering the two-dimensional stress state in fibers 1. Unidirectional reinforcement // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 55, No. 6. — P. 699—714.
21. *Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. A.* Comparison of bending properties for cellular core sandwich panels // *Mater. Sci. Appl.* — 2013. — Vol. 4, No. 8. — P. 471—477.
22. *Lee C. R., Sun S. J., Kam T. Y.* System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates // *AIAA J.* — 2007. — Vol. 45, No. 9. — P. 2312—2322.
23. *Julien D., Karam S.* Limit analysis of multi-layered plates. Pt. I: The homogenized Love—Kirchhoff model // *J. Mech. Phys. Solids.* — 2008. — Vol. 56, No. 2. — P. 561—580.
24. *Xie Z.* An approximate solution to the plastic indentation of circular sandwich panels // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 2. — P. 361—370.
25. *Kudin A., Al-Omari M. A. V., Al-Athamneh B. G. M., Al-Athamneh H. K. M.* Bending and buckling of circular sandwich plates with the nonlinear elastic core material // *Int. J. Mech. Eng. Inform. Technol.* — 2015. — Vol. 3, No. 8. — P. 1487—1493.
26. *Yankovskii A. P.* Refined modeling of flexural deformation of layered plates with a regular structure made from nonlinear hereditary materials // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53, No. 6. — P. 1015—1042.
27. *Moskvitin V. V., Starovoitov E. I.* Deformation and variable loading of two-layer metal-polymer plates // *Mech. Compos. Mater.* — 1985. — Vol. 21, No. 3. — P. 267—273.
28. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Suleyman M.* Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2007. — Vol. 43, No. 1. — P. 75—84.
29. *Zenkour A. M., Alghamdi N. A.* Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates // *J. Sandwich Struct. Mater.* — 2009. — Vol. 12, No. 1. — P. 7—46.

30. *Zenkour A. M., Alghamdi N. A.* Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2010. — Vol. 17, No. 6. — P. 419—432.

31. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Tarlakovskii D. V.* Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads // *Mech. Compos. Mater.* — 2018. — Vol. 54, No. 3. — P. 299—312.

32. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Deformation of an elastoplastic three-layer circular plate in a temperature field // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55, No. 4. — P. 503—512.

33. *Ильюшин А. А., Огибалов П. М.* Упругопластические деформации полых цилиндров — М.: Изд-во МГУ, 1960. — 224 с.

34. *Starovoitov E. I., Leonenko D. V.* Deformation of a three-layer rod with a compressible core in a neutron flow // *Int. Appl. Mech.* — 2020. — Vol. 56, No. 1. — P. 81—91.

Поступила в редакцию 22.12.2020

Окончательный вариант поступил 25.03.2021

Received Dec. 22, 2020 (March 25, 2021)

C. Агуиб^{a}, Н. Шух^a, А. Сеттет^a, А. Нур^a, М. Мелусси^{a,б}, Т. Джедид^a*

*^aDepartment of Mechanical Engineering, Dynamic of Engines and Vibroacoustic Laboratory,
F.S.I., M.B. Boumerdes University, Algeria*

*^бLaboratory of Condensed Matter Physics, University of Nice-Sophia Antipolis, CNRS, UMR
7336, 06100 Nice, France*

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ БАЛКИ ИЗ ГИБРИДНОГО КОМПОЗИТА С РЕГУЛИРУЕМЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ¹

S. Aguib, N. Chikh, A. Settet, A. Nour, M. Meloussi, and T. Djedid*

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF THE TENSILE BEHAVIOR OF A HYBRID COMPOSITE BEAM WITH ADJUSTABLE MECHANICAL PROPERTIES

Keywords: tensile test, hybrid composite beam, adjustable mechanical properties, experimental analysis

Magnetorheological elastomer beam samples were tested in uniaxial tension in magnetic fields of different intensities up to the final rupture. The samples deformed nonlinearly. Their maximum elongation reached 70% and the tensile strength increased by 120% with growing intensity of magnetic field applied.

Ключевые слова: испытание на растяжение, балка композита гибридного, свойства механические регулируемые, анализ экспериментальный

Образцы балок из магнитореологического эластомера испытаны на одноосное растяжение в магнитных полях разной интенсивности вплоть до разрушения. Образцы деформировались нелинейно. С увеличением напряженности приложенного магнитного поля их максимальное удлинение достигало 70%, а прочность при растяжении возросла на 120%.

*Автор, с которым следует вести переписку: s.aguib@univ-boumerdes.dz
Corresponding author: s.aguib@univ-boumerdes.dz

¹Перевод с англ.

Введение

В настоящее время материалы и конструкции с высокой способностью деформирования и виброизоляции — объекты серьезного изучения в силу их важности для развития авиастроения, гражданского строительства и машиностроения. Разработка новых сложных конструкций, иногда называемых “умными”, поглощающих вибрации, — предмет новейших исследований в области инженерных материалов. Большой интерес вызвали первые композитные сэндвич-балки и пластины с вязкоупругой сердцевиной, иногда включающие магнитореологические эластомеры (МРЭ) с частицами железа, улучшающими жесткость и устойчивость конструкций при воздействии магнитного поля. Некоторые предыдущие исследования уже были посвящены использованию вязкоупругой сердцевины из МРЭ и других материалов в композитных сэндвич-конструкциях. В [1] аналитически методом динамической жесткости исследовали свободные колебания трехслойных симметричных сэндвич-балок. Собственные частоты и соответствующие моды колебаний сэндвич-балок вычислили с помощью алгоритма Виттрика—Уильяма. Точный метод динамической жесткости также использовали в [2] для определения изгибного поведения трехслойной сэндвич-балки с лицевыми слоями разной толщины. Ее собственные значения вычислили с помощью алгоритма Виттрика—Уильяма. В [3] выполнили анализ свободных колебаний трехслойной балки с использованием экспериментальных данных и аналитического подхода, основанного на методе динамической жесткости. Ее слои неодинаковой толщины рассчитывали по теории балок Тимошенко. В [4] изучали зависящую от магнитного поля жесткость умных сэндвич-балок, имеющих мягкую сердцевину из МРЭ и не-МРЭ и токонепроводящие верхний и нижний лицевые слои для исключения эффектов, вызванных магнитоупругими нагрузками, возникающими в колеблющемся теле. Результаты показали, что модуль упругости, зависящий от магнитного поля, изменяет частоту антирезонанса и лишь немного — резонансную частоту.

Композитная сэндвич-балка с сердцевиной из МРЭ и токопроводящими лицевыми слоями под действием однородного магнитного поля была рассмотрена в [5, 6]. В [7, 8] исследовали затухание колебаний и сдвиг частоты с помощью нового адаптивно настраиваемого виброгасителя (АНВГ), основанного на свойствах МРЭ, управляемых приложенным магнитным полем. Результаты показали, что такой АНВГ может изменить собственную частоту с 25,5 до 82 Гц. В [9] разработали другой АНВГ с многослойными листами из МРЭ. В [10] провели экспериментальное и численное исследование вибрационных характеристик сэндвич-балок со стальными лицевыми слоями и сердцевиной из МРЭ. Демпфирующие свойства сердцевины изучали при разной напряженности приложенного магнитного поля. В [11] методом конечных элементов (МКЭ) численно исследовали свободные и вынужденные колебания композитной сэндвич-балки с вязкоупругим внутренним слоем с помощью теории дефор-

мирования высокого порядка, основанной на независимых поперечных перемещениях по толщине верхнего и нижнего лицевого слоев. Этот анализ более сложен и реалистичен, чем стандартная теория Мида и Маркуса [12], основанная на нескольких упрощающих предположениях и обычно используемая для моделирования трехслойных сэндвич-балок. В [13] провели аналитическое исследование с использованием метода Галеркина. В работе рассматривали свободные колебания симметричной сэндвич-балки с сердцевинной из МРЭ, подверженной разным граничным условиям, и исследовали области параметрической неустойчивости конструкции, подверженной периодической осевой нагрузке. Свободные и вынужденные колебания той же композитной конструкции, что и в [13], в [14] исследовали методом конечных элементов. В [15] области параметрической неустойчивости сэндвич-балки с сердцевинной из МРЭ также исследовали с помощью МКЭ. В [16] динамическое поведение сэндвич-пластины, содержащей МРЭ, проанализировали экспериментально и с помощью двух численных подходов — модели, имеющейся в программном обеспечении MATLAB, разработанной методом аппроксимации Ритца, и моделирования на основе инструментов МКЭ. Затем сравнили результаты обоих численных методов с экспериментальными данными. Нелинейную динамику геометрически несовершенной сэндвич-балки с сердцевинной из МРЭ и лицевыми слоями из алюминия экспериментально изучали в [17]. В [18] исследовали собственную частоту, коэффициент потерь и свободные колебания вращающейся магнитореологической конической сэндвич-балки. Для разработки соответствующего определяющего уравнения для вращающейся конструкции использовали метод Ритца и уравнение Лагранжа. В [19] изготовили и испытали первую композитную сэндвич-конструкцию с сотовым наполнителем, содержащим МРЭ. Динамические свойства этой новой конструкции проанализировали и оценили при испытаниях на свободные и вынужденные колебания. Результаты показали, что амплитуды и частоты колебаний изменяются с увеличением напряженности магнитного поля. В [20] представили экспериментальное, численное и аналитическое исследование поведения при изгибе и сдвиге свободно опертых железобетонных балок, состоящих из двух слоев бетона разных марок. Факторы, влияющие на характеристики сэндвич-балки с МРЭ в ее сердцевине, определены в [21]. В [22] изучали влияние разных микроструктур на макроскопический отклик МРЭ. В [23], используя эквивалентную линейную однослойную теорию оболочек из слоистых композитов, исследовали свободные и вынужденные колебания тонких цилиндрических сэндвич-панелей с сердцевинной из МРЭ.

Было выполнено несколько работ по определению вибрационных и изгибных свойств конструкций с МРЭ, но отсутствует исследование их поведения при растяжении. Поэтому в настоящей работе изучали поведение при растяжении гибридной алюминиевой магнитореологической эластомерной балки в ходе испытаний на растяжение до разрушения под действием магнитных полей разной интенсивности.

1. Теоретическая формулировка

Изменение фазы можно описать линейной зависимостью между напряжением σ и деформацией ε

$$\sigma = E^* \varepsilon, \quad (1)$$

где E^* — комплексный модуль вязкоупругого материала [23], равный

$$E^* = E' + iE'' = E'(1 + i\eta). \quad (2)$$

Здесь E' и E'' — модули накопления и потерь соответственно. Отношение модуля потерь к модулю накопления обозначим как η и назовем коэффициентом потерь:

$$\eta = \operatorname{tg} \delta = \frac{E''}{E'}. \quad (3)$$

1.1. Геометрическая модель композитной с андвич-балки с МРЭ изображена на рис. 1. Балки состоят из лицевых слоев и сердцевины. Верхний и нижний лицевые слои упругие, неповрежденные и токопроводящие. Сердцевина сделана из вязкоупругого МРЭ с диспергированными в нем ферромагнитными частицами.

Введем следующие предположения:

- МРЭ несжимаем, поперечные перемещения одинаковы во всех трех слоях;
- МРЭ деформируется только при растяжении; его сдвиговую деформацию не учитываем;

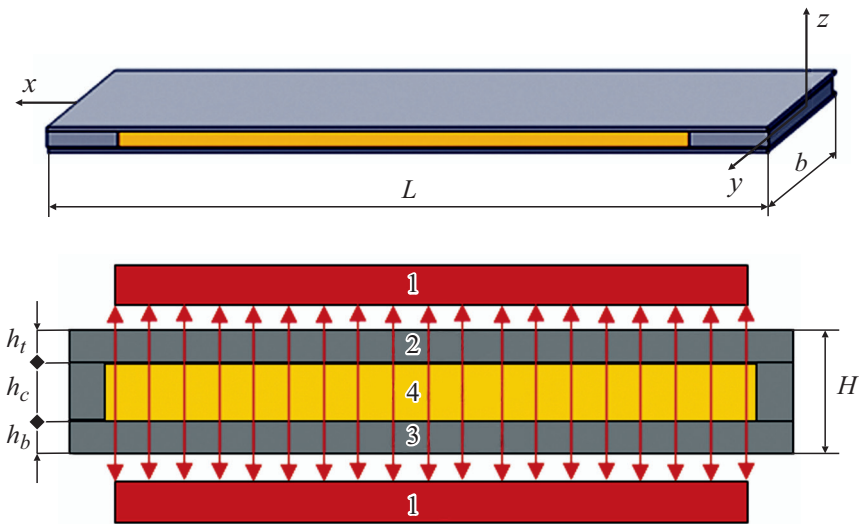


Рис. 1. Геометрическая модель балки: 1 — магнит; 2 и 3 — верхний и нижний лицевые слои соответственно; 4 — сердцевина из МРЭ.

— в ходе деформирования сцепление между слоями идеальное, без проскальзывания или расслоения.

2. Экспериментальные процедуры

Балки подвергали испытаниям на растяжение с постоянной скоростью перемещения 2 мм/мин до разрушения в магнитных полях напряженностью $B = 0,1, 0,3, 0,5$ Тл.

2.1. Разработка МРЭ. Эластомер получали следующим образом. Смесь силиконового масла и полимера RTV141A выливали в сосуд и перемешивали вручную в течение 10 мин для получения хорошо гомогенизированного гелевого эластомера. В другой сосуд помещали частицы железа микрометрического размера, вводимые в эластомер. Полученный гель перемешивали с частицами железа в течение 15 мин. Эластомер, изготовленный таким способом, содержал 30% частиц железа. Затем эластомер дегазировали в вакууме в течение 10 мин для удаления пузырьков воздуха, проникших при перемешивании, и полученную смесь хранили герметично закрытой при низкой температуре. Этапы этой процедуры показаны на рис. 2. Полученный эластомер включал 1,064 г силиконового масла, 1,0385 г RTV141 (А), 7,559 г частиц железа и 0,104 г RTV141 (В). Частицы железа содержат 0,1% нерастворимых примесей.

Характеристики эластомера RTV141 приведены в таблице.

2.2. Образцы балок с магнито реологическим эластомером. Из подготовленного эластомера изготовили (см. [16]) образцы балок для испытаний (рис. 3) длиной $L = 200$ мм, шириной $b = 30$ мм и толщиной $H = 44$ мм ($h_t = h_b = 1$ мм и $h_c = 2$ мм). Плотность лицевого слоя из алюминия $\rho = 2700$ кг/м³, модуль упругости $E = 67$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,34$.

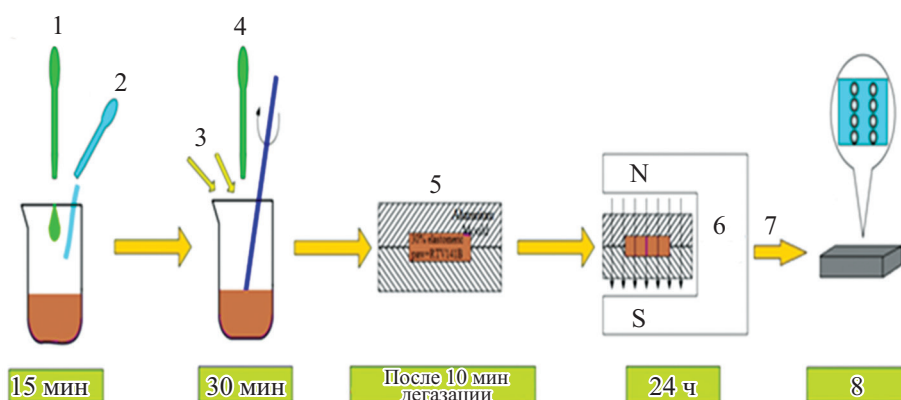


Рис. 2. Этапы изготовления МРЭ: 1 — силиконовое масло; 2 — RTV141A; 3 — частицы железа; 4 — гель эластомера; 5 — дегазация; 6 — воздействие магнитным полем; 7 — анизотропный образец МРЭ; 8 — окончание процесса.

Характеристики эластомера RTV141A

Характеристика	Изначальный	Катализатор	Смешанный
Вязкость, Па·с	3,5	0,65	4
Модуль Юнга, кПа	—	—	700
Удлинение при разрыве	—	—	120%
Время выдержки, ч	—	—	4(60°) 2(100°)
Плотность	—	—	1,02
Цвет	Прозрачный	Прозрачный	—



Рис. 3. Образец балки с МРЭ.

Образец балки, подвергнутый растяжению силой в магнитном поле, показан на рис. 4.

2.3. Экспериментальное устройство для испытания на растяжение. Испытания на одноосное растяжение образцов балок с МРЭ проводили на универсальной испытательной машине № 0350-08151 (WinTest Analysis) (рис. 5) в механической лаборатории Высшей школы территориальной противовоздушной обороны (ESDAT, Регая, Алжир). Индукционная катушка I излучала магнитное поле, покрывающее всю площадь балки.

3. Результаты и обсуждение

На рис. 6—*a* представлены зависимости сила—удлинение $F—\Delta$ образцов в магнитном поле разной напряженности B . Видно, что диаграммы деформирования сильно нелинейны и возрастают с увеличением напряженности магнитного поля B . При этом максимальное удлинение дости-



Рис. 4. Образец балки с МРЭ, нагруженный растяжением в магнитном поле.

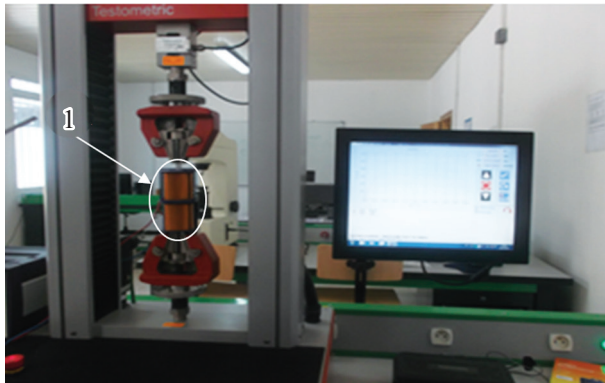


Рис. 5. Машина Testometric M350 для одноосных испытаний на растяжение и сжатие.
1 — индукционная катушка.

гает 70%. Кроме того, жесткость МРЭ также возрастает с увеличением напряженности магнитного поля.

Зависимости нагрузки F от времени t при разных значениях B представлены на рис. 6—б. Видно, что магнитное поле интенсивностью $B = 0,5$ Тл увеличило время до разрушения на 30%, а максимальную нагрузку — на

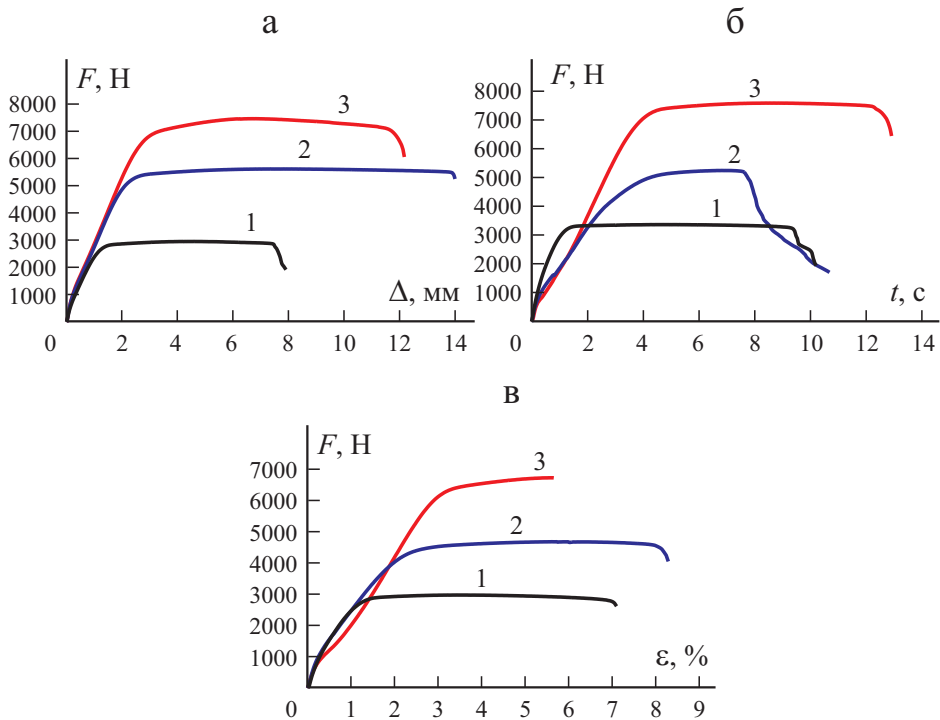


Рис. 6. Зависимости растягивающей силы F от удлинения Δ (а); времени t (б); деформации ε (в) при интенсивности магнитного поля $B = 0,1$ (1), $0,3$ (2), $0,5$ Тл (3).

120%. Это увеличение объясняется силами притяжения между частицами железа под действием магнитного поля. Вязкоупругость эластомера с частицами железа в сочетании с влиянием магнитного поля приводит к сильно нелинейному поведению балок с МРЭ.

Зависимости $F—\varepsilon$, приведенные на рис. 6—в, свидетельствуют о том, что слой МРЭ сильно влияет на механическое поведение балок. Установлено, что напряжение при напряженности магнитного поля $B = 0,5$ Тл почти в два раза больше, чем при $B = 0,3$ Тл, и в три раза больше, чем при $B = 0,1$ Тл. На этих зависимостях можно выделить три участка. На начальном участке сравнительно малых деформаций ($F \leq 3000$ Н при $B = 0,1$ Тл; $F \leq 4500$ Н при $B = 0,3$ Тл и $F \leq 6000$ Н при $B = 0,5$ Тл) нагрузка F быстро возрастала. На участке с практически постоянной силой ($F \approx 3000$ Н при $B = 0,1$ Тл, $F \approx 4500$ Н при $B = 0,3$ Тл и $F \approx 6000$ Н при $B = 0,5$ Тл) быстро возрастала деформация. Третий короткий участок связан с усталостным разрушением. В ходе испытаний происходило довольно быстрое разрушение алюминиевых лицевых слоев.

Таким образом, в настоящей работе установлено следующее.

— Балки с МРЭ в магнитных полях продемонстрировали большие (до 70%) сильно нелинейные деформации растяжения.

— Деформационная способность балок с МРЭ прямо пропорциональна напряженности приложенного магнитного поля.

— Быстрое увеличение жесткости балок с МРЭ с увеличением интенсивности магнитного поля имела место при малых удлинениях (менее 1 мм).

— Время деформирования образцов с МРЭ при растяжении до разрушения возрастало с увеличением напряженности магнитного поля.

— При напряженности приложенного магнитного поля $B = 0,5$ Тл максимальная нагрузка возросла на 120%.

— На диаграммах деформирования образцов с МРЭ можно выделить три участка: быстрого увеличения нагрузки при малых деформациях; быстрого увеличения деформации при постоянной нагрузке; участок усталостного разрушения образцов.

Благодарность. Авторы благодарны руководству Высшей школы территориальной противовоздушной обороны (Регая, Алжир), сотруднице лаборатории физики конденсированного состояния (LPMC) Университета Ниццы Софии Антиполис (Франция) за поддержку данного исследования. Авторы также благодарны Джорджу Боссису, почетному директору по исследованиям, и доктору Кужиру Павлу из LPMC за их помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Banerjee J. R.* Free vibration of sandwich beams using the dynamic stiffness method // *Comput. Struct.* — 2003. — Vol. 81. — P. 1915—1922.
2. *Howson W. P. and Zare A.* Exact dynamic stiffness matrix for flexural vibration of three-layered sandwich beams // *J. Sound Vib.* — 2005. — Vol. 282. — P. 753—767.

3. *Banerjee J. R., Cheung C. W., Morishima R., Perera M., and Njuguna J.* 'Free vibration of a three-layered sandwich beam using the dynamic stiffness method and experiment // *Int. J. Solids Struct.* — 2007. — Vol. 44. — P. 7543—7563.

4. *Zhou G. Y. and Wang Q.* Magnetorheological elastomer-based smart sandwich beams with nonconductive skins // *Smart Mater. Struct.* — 2005. — Vol. 14. — P. 1001.

5. *Zhou G. Y. and Wang Q.* Use of magnetorheological elastomer in an adaptive sandwich beam with conductive skins. Part I: Magnetoelastic loads in conductive skins // *Int. J. Solids Struct.* — 2006. — Vol. 43. — P. 5386—5402.

6. *Zhou G. Y. and Wang Q.* Use of magnetorheological elastomer in an adaptive sandwich beam with conductive skins. Part II: Dynamic properties // *Int. J. Solids Struct.* — 2006. — Vol. 43. — P. 5403—5420.

7. *Deng H., Gong X., and Wang L.* Development of an adaptive tuned vibration absorber with magnetorheological elastomer // *Smart Mater. Struct.* — 2006. — Vol. 15. — P. 111—116.

8. *Deng H. and Gong X.* Application of magnetorheological elastomer to vibration absorber // *Communications in Nonlinear Sci. Numer. Simulation.* — 2008. — Vol. 13. — P. 1938—1947.

9. *Sun S., Deng H., Yang J., Li W., Du H., Alici G., and Nakano M.* An adaptive tuned vibration absorber based on multilayered MR elastomers // *Smart Mater. Struct.* — 2015. — Vol. 24. — P. 045045.

10. *Choi W., Xiong Y., and Sheno R.* Vibration characteristics of sandwich beams with steel skins and magnetorheological elastomer cores // *Adv. Struct. Eng.* — 2010. — Vol. 13. — P. 837—847.

11. *Arvin H., Sadighi M., and Ohadi A. R.* A numerical study of free and forced vibration of composite sandwich beam with viscoelastic core // *Compos. Struct.* — 2010. — Vol. 92. — P. 996—1008.

12. *Mead D. J. and Markus S.* The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions // *J. Sound Vib.* — 1969. — Vol. 10. — P. 163—175.

13. *Nayak B., Dwivedyn S., and Murthy K.* Dynamic analysis of magnetorheological elastomer-based sandwich beam with conductive skins under various boundary conditions // *J. Sound Vib.* — 2011. — Vol. 330. — P. 1837—1859.

14. *Nayak B., Dwivedyn S., and Murthy K.* Vibration analysis of a three-layer magnetorheological elastomer embedded sandwich beam with conductive skins using finite element method // *Proc. Institution Mech. Eng., Part C, J. Mech. Eng. Sci.* — 2013. — 227. — P. 714—729.

15. *Nayak B., Dwivedyn S., and Murthy K.* Dynamic stability of a rotating sandwich beam with magnetorheological elastomer core // *Eur. J. Mech. A/Solids.* — 2014. — Vol. 47. — P. 143—155.

16. *Aguib S., Nour A., Zahloul H., Bossis G., Chevalier Y., and Lançon P.* Dynamic behavior analysis of a magnetorheological elastomer sandwich plate // *Int. J. Mech. Sci.* — 2014. — Vol. 87. — P. 118—136.

17. *Yildirim T., Ghayesh M., Li W., and Alici G.* Experimental nonlinear dynamics of a geometrically imperfect magneto-rheological elastomer sandwich beam // *Compos. Struct.* — 2016. — Vol. 138. — P. 381—390.

18. *Navazi H., Bornassi S., and Haddad H.* Vibration analysis of a rotating magnetorheological tapered sandwich beam // *Int. J. Mech. Sci.* — 2017. — Vol. 122. — P. 308—317.

19. *Eloy F. S., Gomes G. F. A., Ancelotti A. C., Cunha Jr. S. S., Bombard A. J. F. C., and Junqueira D. M.* Experimental dynamic analysis of composite sandwich beams with magnetorheological honeycomb core // *Eng. Struct.* — 2018. — Vol. 176. — P. 231—242.

20. *Ataria Y. R. and Wang B. C.* Bending and shear behaviour of two layer beams with one layer of rubber recycled aggregate concrete in tension // *Structures*. — 2019. — Vol. 20. — P. 214—225.

21. *Barman H. and Hegde S.* Comprehensive review of parameters influencing the performance of magnetorheological elastomers embedded in beams // *Mater. to Day*. — 2020. — Vol. 26. — P. 2130—2135.

22. *Zabihyan R., Mergheim J., Pelteret J. P., Brands B., and Steinmann P.* FE2 simulations of magnetorheological elastomers: influence of microscopic boundary conditions, microstructures and free space on the macroscopic responses of MREs // *Int. J. Solids Struct.* — 2020. — Nos. 193—194. — P. 338—356.

23. *Mikhasev G. I., Eremeyev V. A., Wilde K., and Maevskaya S. S.* Assessment of dynamic characteristics of thin cylindrical sandwich panels with magnetorheological core // *J. Intelligent Mater. Systems Struct.* — 2019. — Vol. 30, Nos. 18—19. — P. 2748—2769.

Поступила в редакцию 13.01.2020

Окончательный вариант поступил 28.04.2021

Received Jan. 13, 2020 (Apr. 28, 2021)

Чун Кё Ли^а, Бён Ку Ли^{б*}

^а*Department of Civil Engineering, University of Seoul, Korea*

^б*Department of Civil and Environmental Engineering, Wonkwang University, Korea*

СВЯЗАННЫЕ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АКСИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ КРУГЛОИЗОГНУТОЙ БАЛКИ¹

*Joon Kyu Lee and Byoung Koo Lee**

COUPLED FLEXURAL-TORSIONAL FREE VIBRATION OF AN AXIALLY FUNCTIONALLY GRADED CIRCULAR CURVED BEAM

Keywords: flexural-torsional vibration, circular curved beam, AFG material, natural frequency, mode shape

The coupled flexural-torsional free vibration of circular horizontally curved beams made of an axially functionally graded (AFG) material were investigated. Beams with rectangular and elliptical cross sections were designed to obey quadratic functions of Young's modulus and the mass density in the axial direction. Using the Timoshenko and St. Venant beam theories, the governing differential equations of motion were derived. Based on the trial eigenvalue method together with the numerical integration method, the differential equations were solved to obtain the natural frequencies. For validation purposes, the frequencies computed in this study and ADINA were compared. Parametric studies were also performed to clarify how the natural frequency of the flexural-torsion coupling depends on modular ratio, cross-sectional shape, aspect ratio, slenderness ratio, and opening angle of the beams.

Ключевые слова: колебания изгибно-крутильные, балка круглоизогнутая, материал аксиально-функционально-градиентный, частота собственная, форма моды

Исследовали связанные изгибно-крутильные колебания круглоизогнутых балок из аксиально-функционально-градиентного

*Автор, с которым следует вести переписку: bkleest@wku.ac.kr
Corresponding author: bkleest@wku.ac.kr

¹Перевод с англ.

материала. Балки прямоугольного и эллиптического поперечного сечения проектировали, используя квадратичные функции изменения модуля Юнга и плотности в осевом направлении. Посредством теории балок Тимошенко и Сен-Венана вывели определяющие дифференциальные уравнения движения. Собственные частоты балок определили с помощью метода пробных собственных значений в комбинации с методом численного интегрирования. Для проверки достоверности предложенного метода сравнили частоты, вычисленные в настоящей работе и с помощью программного обеспечения ADINA. Параметрические исследования выполнили для оценки влияния отношения модулей упругости, формы поперечного сечения, отношения размеров и угла раскрытия балок на собственную частоту связанных изгибно-крутильных колебаний.

Введение

Изогнутые балки, расположенные на горизонтальной плоскости, часто используют в качестве общепринятых конструктивных элементов в разных технических приложениях [1]. После того как в 1984 г. предложили функционально-градиентные материалы (ФГМ) для защиты от суровых тепловых условий, их применение активно расширили до передовых инженерных практик [2]. С точки зрения строительной инженерии понимание вибрационного поведения конструктивных элементов очень необходимо при проектировании, строительстве и обслуживании общественных сооружений [3].

В целом, ФГМ делят на две категории: поперечно- (ПФГМ) и аксиально-функционально-градиентные (АФГМ) материалы.

Многие исследования, цитируемые в открытой литературе, посвящены математическим формулировкам и историческим обзорам конструктивного поведения балок, колонн, арок и изогнутых балок, изготовленных из ФГМ. В [4] рассмотрена устойчивость однородных балок при статических и динамических нагрузках; в [5] вычислили собственные частоты балок из гибридных ФГМ; в [6] изучали критические нагрузки потери устойчивости консольных балок из ФГМ, используя энергетический принцип; в [7] рассчитали критическую нагрузку потери устойчивости методом линейных возмущений, дополненным методом Рэлея—Ритца; в [8], используя метод Рэлея—Ритца, проанализировали статическую и динамическую устойчивость колонн, имеющих форму моды Дункана; в [9] изучали свободные колебания и потерю устойчивости конических балок-колонн с полужесткими соединениями.

В [10] определили собственные частоты неоднородных балок из ФГМ с разными граничными условиями на концах, используя регуляризацию интегрального уравнения Фредгольма; в [11] изучали устойчивость

конических динамических колонн, решили дифференциальное уравнение колебаний и методом дифференциальных квадратур определили геометрию моды потери устойчивости; в [12] изучали поперечно-крутильную устойчивость двутавровой конической балки из АФГМ; в [13] использовали геометрически нелинейную модель балки, основанную на модифицированной теории моментных напряжений.

В [14, 15] проанализировали свободные колебания арки из ПФГМ, свойства которого зависели от температуры окружающей среды. Для исследования свободных и вынужденных плоских колебаний параболических арок из АФГМ в [16] разработали новый метод, основанный на технике дополнительных функций; в [17] исследовали свободные колебания параболических арок из АФГМ; в [18] изучали конические криволинейные балки Тимошенко из ФГМ; в [19] исследовали собственные частоты изогнутых балок, надлежащим образом оптимизировав распределение в них материала; в [20] использовали метод пробных собственных значений, дополненный методом численного интегрирования для расчета собственных частот круговых арок из АФГМ.

В [21, 22] проанализировали свободные колебания изогнутых балок из ФГМ, опирающихся на упругое основание и подверженных жестким термическим условиям. В [21] рассматривали балки из ПФГМ, свойства которых зависят от температуры окружающей среды. В [22] исследовали балки из ПФГМ, опирающиеся на упругое основание.

Во многих предыдущих исследованиях изучали типичные изогнутые балки [23, 24], свойства поперечного сечения которых, а не свойства материала, изменялись вдоль осевой координаты. Однако в настоящее время инженеров интересует практическое применение балок из АФГМ. Поэтому для соответствующих математических формулировок и численных методов решения необходимо разработать методы предсказания собственных частот балок из АФГМ, искривленных в горизонтальной плоскости.

Настоящая работа посвящена уникальному численному подходу к исследованию связанных изгибно-крутильных свободных колебаний круглоизогнутой в горизонтальной плоскости балки из АФГМ. С помощью уравнений динамического равновесия элемента изогнутой балки, а также теорий Тимошенко и Сен-Венана получены обыкновенные дифференциальные уравнения, определяющие формы мод колебаний таких балок. В параметрическом исследовании использовали квадратичную функцию свойств материала и рассмотрели прямоугольные и эллиптические поперечные сечения. Для расчета собственных частот и форм колебаний определяющие дифференциальные уравнения решили методом пробных собственных значений в комбинации с численным интегрированием. Сравнили собственные частоты, рассчитанные в настоящей работе и с помощью автоматического динамического инкрементального нелинейного анализа (программное обеспечение ADINA). В параметрических

исследованиях изучали влияние граничных условий на концах балки, формы поперечного сечения, вращательной и крутильной инерции, отношения модулей упругости, отношения плотностей, отношения размеров, коэффициента гибкости и угла раскрытия на собственные частоты; представили типичный пример форм мод колебаний.

1. Постановка задачи

На рис. 1—*а* показана конфигурация круглоизогнутой балки из АФГМ радиусом r с углом раскрытия α , расположенной на горизонтальной плоскости (x, y) . Ось изогнутой балки определена в полярных координатах (r, θ) с помощью базовой линии aO . Концы балки a при $\theta = 0$ и b при $\theta = \alpha$ либо шарнирно закреплены, либо защемлены. Поперечное сечение балки одинаково по всей длине дуги \overline{ab} , т.е. площадь A , момент инерции I , полярный момент I_p и постоянная кручения J постоянны от $\theta = 0$ до $\theta = \alpha$. Балка изготовлена из АФГМ, модуль Юнга E и плотность ρ которого изменяются в зависимости от координаты θ . Значения E и ρ на концах a и b обозначим как $E_a(E_b)$ и $\rho_a(\rho_b)$ соответственно, а в середине балки c при $\theta = \alpha/2$ — как E_c и ρ_c .

На рис. 1—*б* показана перерезывающая сила Q , изгибающий M и крутящий T моменты, поперечная сила инерции F_w , вращательный C_ψ и крутящий C_ϕ моменты силы инерции, действующие на элемент балки. Изгибно-крутильные колебания балки из плоскости подвержены гармоническому движению, координаты которого пропорциональны $\sin(\omega_i t)$, например, $w_{\theta,t} = w_\theta \sin(\omega_i t)$, где $w_\theta (= w)$ — амплитуда прогиба, ω_i — собственная частота, i — номер моды, t — время.

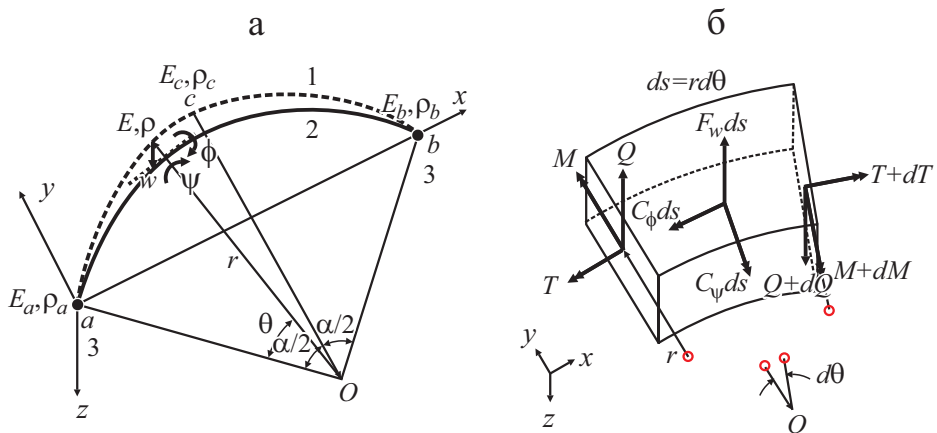


Рис. 1. Геометрия круглоизогнутой балки (а) и нагрузки на криволинейный элемент балки (б): 1, 2 — недеформированный и деформированный; 3 — шарнирно закрепленный/защемленный.

Уравнения динамического равновесия записаны исходя из диаграммы свободного тела, показанной на рис. 1—б:

$$\frac{dQ}{d\theta} - rF_w = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dM}{d\theta} - rQ + T + rC_\psi = 0, \quad (2)$$

$$M - \frac{dT}{d\theta} + rC_\phi = 0. \quad (3)$$

Полный угол поворота $dw/d\theta$ и внутренние силы Q , M , T криволинейной балки задают в теории Тимошенко как [25—27]

$$\frac{dw}{d\theta} = r(\psi + \beta), \quad (4)$$

$$Q = kGA\beta = kGA\left(\frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta} - \psi\right), \quad (5)$$

$$M = \frac{EI}{r} \left(\phi - \frac{d\psi}{d\theta}\right), \quad (6)$$

$$T = \frac{GJ}{r} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta}\right), \quad (7)$$

где β — коэффициент сдвигового перекашивания; k — коэффициент коррекции сдвига; G — модуль сдвига.

Силу инерции F_w , изгибающий C_ψ и крутильный C_ϕ моменты инерции зададим как [28]

$$F_w = -\rho A \omega_i^2 w, \quad (8)$$

$$C_\psi = -R_\psi \rho I \omega_i^2 \psi, \quad (9)$$

$$C_\phi = -R_\phi \rho I_p \omega_i^2 \phi. \quad (10)$$

В уравнениях (9) и (10) показатели моментов инерции R_ψ и R_ϕ определим следующим образом:

$$R_\psi = 1, \text{ если } C_\psi \text{ учитывается; } R_\psi = 0, \text{ если } C_\psi \text{ не учитывается,} \quad (11)$$

$$R_\phi = 1, \text{ если } C_\phi \text{ учитывается; } R_\phi = 0, \text{ если } C_\phi \text{ не учитывается,}$$

где, как видно из уравнения (10), рассматривается теория балки Сен-Венана, не учитывающая деформацию коробления. Рассчитываемые собственные частоты подразделяем на два типа — с изгибной и крутильной

модами в соответствии с показателями моментов инерции R_ψ и R_ϕ , определяемыми согласно (11).

Из уравнений (5)—(7) получим первые производные $dQ/d\theta$, $dM/d\theta$, $dT/d\theta$:

$$\frac{dQ}{d\theta} = kA \frac{dG}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta} - \psi \right) + kGA \left(\frac{1}{r} \frac{d^2w}{d\theta^2} - \frac{d\psi}{d\theta} \right), \quad (12)$$

$$\frac{dM}{d\theta} = \frac{I}{r} \frac{dE}{d\theta} \left(\phi - \frac{d\psi}{d\theta} \right) + \frac{EI}{r} \left(\frac{d\phi}{d\theta} - \frac{d^2\psi}{d\theta^2} \right), \quad (13)$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{J}{r} \frac{dG}{d\theta} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) + \frac{GJ}{r} \left(\frac{d\psi}{d\theta} + \frac{d^2\phi}{d\theta^2} \right). \quad (14)$$

Модуль сдвига G выразим известным соотношением

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (15)$$

Подстановка внутренних сил (5)—(7), сил инерции (8)—(10) и первых производных (12)—(14) в уравнения (1)—(3) приводит к дифференциальным уравнениям шестого порядка

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} = -\frac{r}{E} \frac{dE}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta} - \psi \right) - \frac{2(1+\nu)}{k} r^2 \frac{\rho}{E} \omega_i^2 w + r \frac{d\psi}{d\theta}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\theta^2} = & -\frac{k}{2(1+\nu)} \frac{r^2}{(I/A)} \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{d\theta} - \psi \right) - \frac{1}{E} \frac{dE}{d\theta} \left(\frac{d\psi}{d\theta} - \phi \right) - \\ & -R_\psi r^2 \frac{\rho}{E} \omega_i^2 \psi + \frac{1}{2(1+\nu)(I/J)} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) + \frac{d\phi}{d\theta}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{d\theta^2} = & -\frac{d\psi}{d\theta} - \frac{2(1+\nu)I}{J} \left(\frac{d\psi}{d\theta} - \phi \right) - \frac{1}{E} \frac{dE}{d\theta} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) - \\ & -R_\phi \frac{2(1+\nu)I_p}{J} r^2 \frac{\rho}{E} \omega_i^2 \phi. \end{aligned} \quad (18)$$

На шарнирно закрепленном конце при $\theta = 0$ или $\theta = \alpha$ прогиб w , изгибающий момент M и угол закручивания ϕ равны нулю:

$$w = 0, \quad \frac{d\psi}{d\theta} = 0, \quad \phi = 0. \quad (19)$$

На защемленном конце при $\theta = 0$ или $\theta = \alpha$ прогиб w , полный угол поворота $dw/d\theta$ и угол закручивания ϕ равны нулю:

$$w = 0, \quad \frac{dw}{d\theta} = 0, \quad \phi = 0. \quad (20)$$

2. Свойства материала аксиально-функционально-градиентной балки

В данном разделе функции E и ρ в уравнениях (16)—(20) определены применительно к круглоизогнутой балке из АФГМ. В открытой литературе используют разные виды функций: линейные [2, 6, 8, 13], экспоненциальные [5, 12, 16, 17], полиномиальные [7—12, 22] и периодические [8, 10]. В настоящей работе выбрана квадратичная функция E по переменной θ . Для этого сначала введем следующее отношение модулей упругости m_E :

$$m_E = \frac{E_a}{E_c}. \quad (21)$$

Затем квадратичную функцию E при (r, θ) определим как

$$E = \frac{4E_c}{\alpha^2} (m_E - 1) (\theta^2 - \alpha\theta + c_E), \quad c_E = \frac{m_E \alpha^2}{4(m_E - 1)}, \quad (22)$$

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{4E_c}{\alpha^2} (m_E - 1) (2\theta - \alpha). \quad (23)$$

Функцию ρ выберем пропорциональной функции E [2, 4—20]. Введя отношение плотностей m_ρ , предположим, что

$$\rho = \frac{4\rho_c}{\alpha^2} (m_\rho - 1) (\theta^2 - \alpha\theta + c_\rho), \quad c_\rho = \frac{m_\rho \alpha^2}{4(m_\rho - 1)}, \quad (24)$$

$$m_\rho = \frac{\rho_a}{\rho_c}. \quad (25)$$

Свойства A , I , I_p , J , k взяты из [29, 30] для балки прямоугольного поперечного сечения

$$A = BD, \quad I = \frac{BD^3}{12}, \quad I_p = \frac{(BD^3 + DB^3)}{12}, \quad J = \left[\frac{1}{3} - 0,21 \frac{D}{B} \left(1 - \frac{D^4}{12B^4} \right) \right] BD^3, \quad (26a)$$

$$k = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$$

и эллиптического поперечного сечения

$$A = \frac{\pi BD}{4}, \quad I = \frac{\pi BD^3}{64}, \quad I_p = \frac{\pi(BD^3 + B^3D)}{64}, \quad J = \frac{\pi B^3 D^3}{16(B^2 + D^2)}, \quad (266)$$

$$k = \frac{12(1+\nu)(B^2 + 3D^2)D^2}{\nu B^4 + (16+10\nu)B^2 D^2 + (40+37\nu)D^4},$$

где B и D — ширина и высота соответственно.

3. Обезразмеривание

Для вывода безразмерных дифференциальных уравнений и представления наиболее распространенных результатов параметрических исследований ввели безразмерные параметры

$$\delta = \frac{w}{r}, \quad (27)$$

$$a = \frac{D}{B} \leq 1, \quad (28)$$

$$s = \frac{r}{\sqrt{I/A}}, \quad (29)$$

$$\Omega_i = \omega_i r \sqrt{\rho_c / E_c} \quad (30)$$

для балки прямоугольного поперечного сечения

$$\lambda_I = \frac{I}{J} = \frac{1}{4 \left[1 - 0,63a \left(1 - a^4 / 12 \right) \right]}, \quad \lambda_{I_p} = \frac{I_p}{J} = \frac{1 + 1/a^2}{4 \left[1 - 0,63a \left(1 - a^4 / 12 \right) \right]} \quad (31a)$$

и эллиптического поперечного сечения

$$\lambda_I = \frac{I}{J} = \frac{1+a^2}{4}, \quad \lambda_{I_p} = \frac{I_p}{J} = \frac{(1+a^2)^2}{4a^2}, \quad (316)$$

где δ — безразмерный боковой прогиб; a — отношение размеров; s — коэффициент гибкости; Ω_i — частотный параметр; λ_I и λ_{I_p} — отношения жесткостей I и I_p к J соответственно.

Используя свойства материала и поперечного сечения (21)—(26), параметры балки (27)—(31), приводим к безразмерному виду дифференциальные уравнения (16)—(18), управляющие связанными изгибно-крутильными свободными колебаниями круглоизогнутой балки из АФГМ:

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2} = h_1 \left(\frac{d\delta}{d\theta} - \psi \right) + \frac{2(1+\nu)}{k} h_2 \Omega_i^2 \delta + \frac{d\psi}{d\theta}, \quad (32)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} = -\frac{k s^2}{2(1+\nu)} \left(\frac{d\delta}{d\theta} - \psi \right) + h_1 \left(\frac{d\psi}{d\theta} - \phi \right) + R_\psi h_2 \Omega_i^2 \psi + \frac{1}{2(1+\nu) \lambda_I} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) + \frac{d\phi}{d\theta}, \quad (33)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = -\frac{d\psi}{d\theta} - 2(1+\nu) \lambda_I \left(\frac{d\psi}{d\theta} - \phi \right) + h_1 \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) + 2R_\phi (1+\nu) \lambda_{I_p} h_2 \Omega_i^2 \phi. \quad (34)$$

Здесь h_1 и h_2 — функции полярной координаты θ :

$$h_1 = -\frac{2\theta - \alpha}{\theta^2 - \alpha\theta + c_E}, \quad h_2 = -\frac{m_\rho - 1}{m_E - 1} \frac{\theta^2 - \alpha\theta + c_\rho}{\theta^2 - \alpha\theta + c_E}, \quad (35)$$

где коэффициент k , определяемый для прямоугольного поперечного сечения уравнением (26а), а для эллиптического сечения — уравнением (26б), запишем исходя из отношения размеров a как

$$k = \frac{12(1+\nu)(1+3a^2)a^2}{\nu + (16+10\nu)a^2 + (40+37\nu)a^4}. \quad (36)$$

Используя параметр балки (27), запишем размерные граничные условия (19) и (20) в безразмерном виде:

— для шарнирно закрепленного конца при $\theta = 0$ или $\theta = \alpha$

$$\delta = 0, \quad \frac{d\psi}{d\theta} = 0, \quad \phi = 0, \quad (37)$$

— для защемленного конца при $\theta = 0$ или $\theta = \alpha$

$$\delta = 0, \quad \frac{d\delta}{d\theta} = 0, \quad \phi = 0. \quad (38)$$

4. Результаты и обсуждение

На основе приведенных математических формулировок, разработали вычислительную программу на алгоритмическом языке FORTRAN для предсказания частотного параметра Ω_i и форм мод колебаний

$(\delta, \psi, \phi)_i$. Метод решения, описанный в [20, 24, 27], использовали для решения дифференциальных уравнений (32)—(34) при граничных условиях на концах, описываемых уравнениями (37) и (38). Рассмотрели следующие условия: шарнирно закрепленные (Ш—Ш), шарнирно закрепленный и защемленный (Ш—З) и защемленные концы (З—З). Входные параметры балки включали граничные условия на концах, форму поперечного сечения (прямоугольная или эллиптическая), параметры m_E , m_ρ , ν , a , s , α и показатели инерции R_ψ и R_ϕ .

Метод пробных собственных значений, усовершенствованный методом поиска определителя [31], применили для вычисления величины Ω_i в уравнениях (32)—(34), а затем для расчета $(\delta, \psi, \phi)_i$ применили численный метод Рунге—Кутты [31]. В методе Рунге—Кутта размер шага $\Delta\theta$ определили в соответствии с заданным коэффициентом расщепления n полной длины балки:

$$\Delta\theta = \frac{\alpha}{n}. \quad (39)$$

Перед параметрическим исследованием для получения подходящего значения n провели анализ сходимости, результаты которого представлены на рис. 2. Видно, что решение для параметра Ω_i , полученное при $n=30$ примерно за 0,3 с, согласуется с таковым при $n=200$ с точностью до четырех значащих цифр.

Для проверки достоверности математической формулировки и разработанного метода решения значения собственных частот ω_i , предсказанные в настоящей работе, сравнили с полученными посредством программного обеспечения ADINA. Предсказанные безразмерные

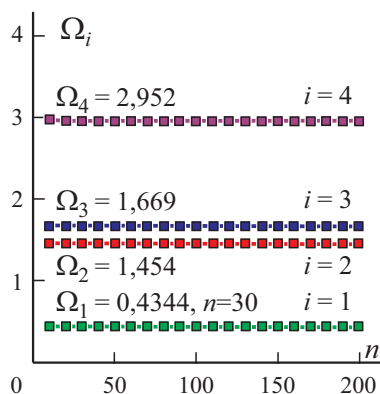


Рис. 2. Анализ сходимости в зависимости от коэффициента расщепления n для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—З при $m_E = 0,5$, $m_\rho = 0,5$, $\nu = 0,3$, $a = 0,5$, $s = 50$; $\alpha = \pi/4$, $R_\psi = 1$, $R_\phi = 1$ (расчетные значения параметров — для рис. 2—8).

Табл. 1

Сравнение значений собственных частот ω_i , рассчитанных в настоящей работе и посредством ADINA

Условие на концах	Свойства материала, геометрия	i	ω_i , рад/с		Ошибка, %
			Настоящая работа	ADINA	
Ш—Ш	Прямоугольная ($B = 0,1$ м, $D = 0,05$ м)	1	191,45	195,78	2,26
		2	1056,2	1063,7	0,71
	ФГМ: от Al до ZrO ₂ до Al; $A\alpha = \pi/2$	3	2495,0	2512,0	0,68
		4	4471,7	4509,4	0,84
Ш—З	Круглоизогнутая ($D = 0,075$ м)	1	187,87	189,06	0,64
		2	735,76	737,02	0,17
	Однородный материал ZrO ₂ ; $\alpha = 3\pi/4$	3	1638,7	1641,8	0,19
		4	2866,4	2872,7	0,22
З—З	Эллиптическая ($B = 0,1$ м; $D = 0,05$ м)	1	143,57	141,43	1,48
		2	371,15	365,68	1,47
	АФГМ: от ZrO ₂ до Al до ZrO ₂ ; $\alpha = \pi/2$	3	738,90	728,22	1,45
		4	1860,4	1833,4	1,45

частоты Ω_i преобразовали к собственным частотам ω_i (рад/с) согласно уравнению

$$\omega_i = \frac{\Omega_i}{r} \sqrt{\frac{E_c}{\rho_c}}$$

Для сравнения рассмотрели балку из АФГМ радиусом $r = 1$, состоящего из чистого алюминия (Al) и чистого диоксида циркония (ZrO₂). Свойства материалов следующие: Al — $E = 70$ ГПа, $\rho = 2700$ кг/м³; ZrO₂ — $E = 140$ ГПа, $\rho = 5400$ кг/м³, $\nu = 0,3$, $R_\psi = R_\phi = 1$. Сравнение результатов представлено в табл. 1, где указаны граничные условия на концах, форма поперечного сечения с размерами B и D , а также угол раскрытия α . Значения частот, предсказанные в настоящей работе и с помощью ADINA, хорошо согласуются друг с другом с погрешностью 2,3%. Это означает, что разработанные теоретические и численные методы корректно работают при анализе свободных колебаний круглоизогнутых балок из АФГМ.

Затем изучили взаимосвязь между частотным параметром Ω_i и параметрами балки из АФГМ, включающими граничные условия на концах, показатели вращательной R_ψ и крутильной R_ϕ инерции, форму поперечного сечения (прямоугольная или эллиптическая), отношение модулей упругости m_E , отношение плотностей m_ρ , коэффициент Пуассона ν , отношение размеров a , коэффициент гибкости s и угол раскрытия α . Формы мод колебаний балки определили при $1 \leq m_E \leq 5$, $1 \leq m_\rho \leq 5$,

Табл. 2

Влияние вращательной и крутильной инерции на параметр частоты Ω_i

Условие на концах	Показатель инерции		Ω_i					
	R_ψ	R_ϕ	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
Ш—Ш	0	0	0,2851	1,197	-	2,621	-	-
	1	0	0,2844	1,185	-	2,569	-	4,309
	1	1	0,2832	1,180	1,668	2,561	3,576	4,295
Ш—З	0	0	0,4375	1,476	-	3,023	-	4,944
	1	0	0,4363	1,460	-	2,963	-	4,806
	1	1	0,4344	1,454	1,669	2,952	3,577	4,788
З—З	0	0	0,6192	1,787	-	3,460	-	5,486
	1	0	0,6173	1,767	-	3,391	-	5,337
	1	1	0,6144	1,668	1,760	3,378	3,577	5,317

Примечание: Прямоугольное поперечное сечение; $m_E = 0,5$, $m_\rho = 0,5$, $\nu = 0,3$, $a = 0,5$, $s = 50$, $\alpha = \pi/4$.

$0,3 \leq \nu \leq 0,4$, $0 < a \leq 1$, $0 < s \leq 300$ и $0 < \alpha \leq \pi$. Результаты параметрических исследований представлены в табл. 2—4 и на рис. 3—8.

В табл. 2 приведены значения частотного параметра $\Omega_{i=1-6}$ для трех типов граничных условий. Типы колебаний делятся на изгибные и крутильные, определяемые показателями инерции R_ψ и R_ϕ соответственно. В данной таблице цифры, набранные жирным шрифтом, соответствуют модам кручения, а нормальным шрифтом — модам изгиба. В случае $R_\psi = R_\phi = 1$ наблюдали уменьшение значений Ω_i . Различие значений частот около 4% или меньше означает, что влияние изгибной и крутильной инерции нельзя игнорировать. Исключение крутильной инерции при $R_\phi = 0$ не повлияло на крутильную частоту. При всех рассмотренных граничных условиях изгибным колебаниям соответствовали первая, вторая, четвертая и шестая моды, а крутильным — третья и пятая. Однако порядок следования изгибных и крутильных мод колебаний может быть иным при других значениях параметров балки.

Данные табл. 3 иллюстрируют влияние формы поперечного сечения балки на частотный параметр Ω_i . Различие значений частот балок с прямоугольным и эллиптическим сечениями около 0,5% или меньше. Значение параметра Ω_i балки с эллиптическим сечением был немного больше, чем с прямоугольным, для первой, второй и третьей мод, но меньше для четвертой. Значения для третьей крутильной моды набраны жирным шрифтом; остальные моды являются изгибающими, независимо от граничных условий.

Табл. 3

Влияние формы поперечного сечения на параметр частоты Ω_i

Условие на концах	Форма поперечного сечения	Ω_i			
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
Ш—Ш	Прямоугольная	0,2832	1,180	1,668	2,561
	Эллиптическая	0,2847	1,181	1,790	2,559
Ш—З	Прямоугольная	0,4344	1,454	1,669	2,952
	Эллиптическая	0,4356	1,454	1,790	2,950
З—З	Прямоугольная	0,6144	1,668	1,760	3,388
	Эллиптическая	0,6157	1,761	1,790	3,376

Примечание: Прямоугольное поперечное сечение; $m_E = 0,5$, $m_p = 0,5$, $\nu = 0,3$, $a = 0,5$, $s = 50$, $\alpha = \pi/4$.

Данные табл. 4 иллюстрируют влияние коэффициента Пуассона ν на частотный параметр Ω_i , который уменьшается по мере увеличения значений ν . Этот эффект более выражен при более высоких модах. Различие значений частот для четвертой моды около 1% или меньше. Значения для третьей крутильной моды набраны жирным шрифтом; остальные моды являются изгибающими, независимо от граничных условий.

На рис. 3 показаны зависимости частотного параметра Ω_i от отношения модулей упругости m_E . Увеличение отношения m_E повышало значение Ω_i , что более заметно для более высоких мод. Первая, вторая и четвертая

Табл. 4

Влияние коэффициента Пуассона ν на параметр частоты Ω_i

Условия на концах	ν	Ω_i			
		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
Ш—Ш	0,3	0,2832	1,180	1,668	2,561
	0,35	0,2827	1,178	1,639	2,554
	0,4	0,2821	1,176	1,612	2,547
Ш—З	0,3	0,4344	1,454	1,669	2,952
	0,35	0,4339	1,451	1,640	2,944
	0,4	0,4335	1,449	1,613	2,936
З—З	0,3	0,6144	1,668	1,760	3,378
	0,35	0,6141	1,640	1,758	3,370
	0,4	0,6138	1,612	1,754	3,361

Примечание: Прямоугольное поперечное сечение; $m_E = 0,5$, $m_p = 0,5$, $\nu = 0,3$, $a = 0,5$, $s = 50$, $\alpha = \pi/4$.

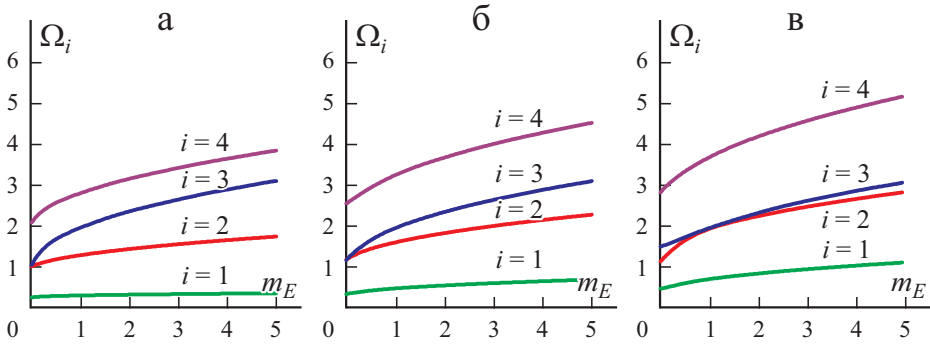


Рис. 3. Зависимость частотного параметра Ω_i от величины m_E для балки с граничными условиями Ш—Ш (а); Ш—3 (б); 3—3 (в): $i=1, 2, 4$ — изгибные моды; $i=3$ — крутильная мода.

моды — изгибные, а третья — крутильная, независимо от граничных условий при данном наборе параметров балки. Интересно, что вторая и третья моды имели двойные корни при некотором значении m_E , при котором их частотные кривые пересекаются друг с другом.

Зависимость частотного параметра Ω_i от отношения плотностей m_ρ проиллюстрирована на рис. 4. Увеличение отношения m_ρ уменьшало значение Ω_i , что сильнее выражено для более высоких мод. При данном наборе параметров балки первая, вторая и четвертая моды — изгибные, а третья — крутильная.

На рис. 5 показаны зависимости частотного параметра Ω_i от отношения сторон a . Буквами F и T отмечены участки, соответствующие

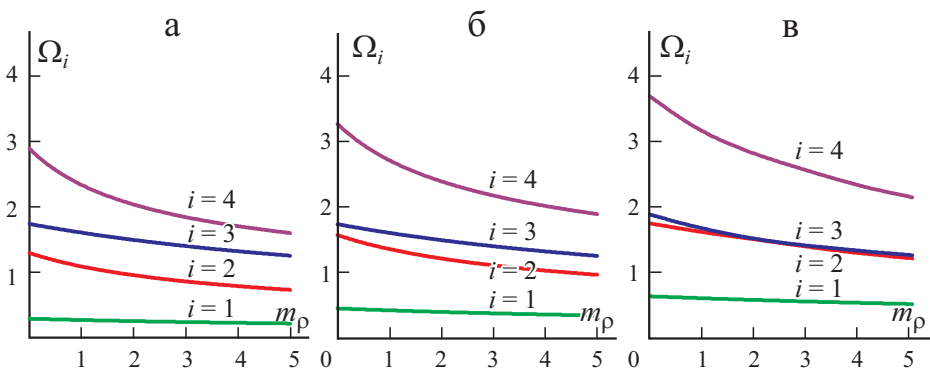


Рис. 4. Зависимость частотного параметра Ω_i от величины m_ρ для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—Ш (а); Ш—3 (б); 3—3 (в): $i=1, 2, 4$ — изгибные моды; $i=3$ — крутильная мода.

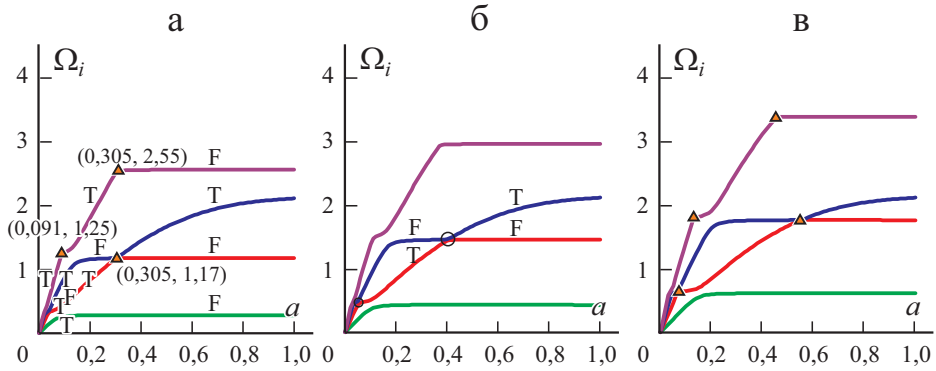


Рис. 5. Зависимость частотного параметра Ω_i от величины a для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—Ш (а); Ш—З (б); З—З (в): \blacktriangle — координаты двойных корней; F и T — изгибная и крутильная моды соответственно; \circ — изменение направления второй и третьей мод; зависимости мод $i = 1, 2, 3, 4$ следуют снизу вверх.

изгибной и крутильной модам соответственно. Переходы мод видны на рис. 5—а и в при симметричных граничных условиях на концах балки. Частотные зависимости второй и третьей мод балки с шарнирно закрепленными концами (см. рис. 5—а) пересекаются в точке (0,305, 1,17). Это означает, что существуют двойные корни $\Omega_2 = \Omega_3 = 1,17$ при $a = 0,305$, соответствующие изгибной и крутильной модам. Таким образом, при $a = 0,305$ форма колебаний изменяется с крутильной на изгибную во второй моде и наоборот — в третьей. Такая же ситуация характерна для балки с защемленными концами (см. рис. 5—в). Однако в случае балки с шарнирно закрепленным и защемленным концами (см. рис. 5—б) ча-

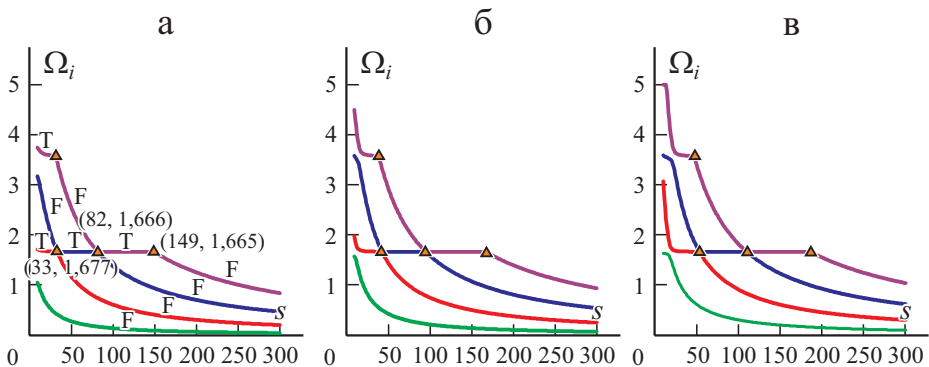


Рис. 6. Зависимость частотного параметра Ω_i от величины s для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—Ш (а); Ш—З (б); З—З (в). Обозначения те же, что на рис. 5.

стотные кривые сближаются друг с другом, но не пересекаются, демонстрируя так называемое явление изменения направления [32] и отсутствие двойных корней, обозначенных темным треугольником. При $a \rightarrow \infty$ все частотные кривые сходятся к общей горизонтальной асимптоте.

На рис. 6 приведены зависимости частотного параметра Ω_i от коэффициента гибкости s . Нисходящие участки кривых на рис. 6—*a* соответствуют изгибной моде, а горизонтальные — крутильной. Переход мод имеет место при всех рассмотренных типах граничных условий, включая случай шарнирно закрепленного и защемленного концов (см. рис. 6—*б*), что отличается от случая, проиллюстрированного на рис. 5—*б* (влияние отношения сторон a). Интересно, что на крутильную моду коэффициент гибкости s практически не влияет.

Зависимости частотного параметра Ω_i от угла раскрытия α приведены на рис. 7. Видно, что с увеличением угла α величина Ω_i уменьшается. Переход мод наблюдали при всех типах граничных условий. Во всех таблицах и на рисунках первая мода — изгибная, независимо от комбинации параметров балки $m_E, m_p, \nu, a, s, \alpha$, включая граничные условия и форму поперечного сечения.

Данные рис. 8 иллюстрируют формы мод колебаний $(\delta, \psi, \phi)_i$ относительно θ/α при разных граничных условиях. Если геометрия конструкционного элемента симметрична, например, в случае Ш—Ш и З—З, а также при симметричных свойствах материала, форма колебаний будет либо симметричной, либо антисимметричной относительно срединной линии балки (см. рис. 8—*a, в*). Формы мод колебаний балки в случае Ш—З асимметричны (см. рис. 8—*б*). Положения максимальной амплитуды и узловой точки, представленные в форме мод на рис. 8, используют при проектировании конструкций и их техническом обслуживании.

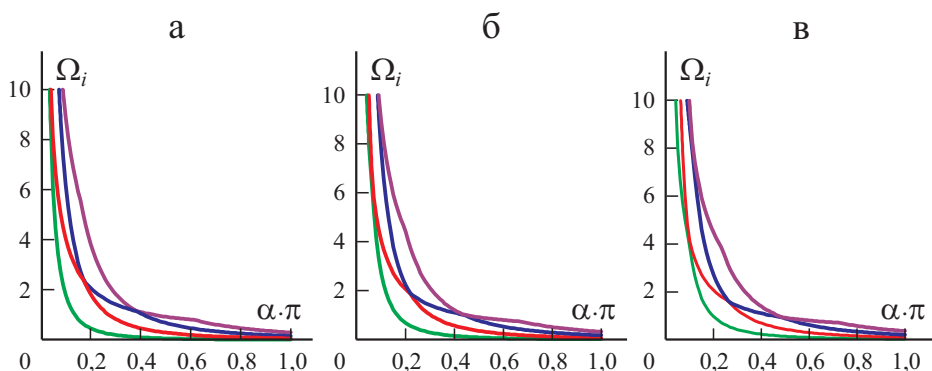


Рис. 7. Зависимость частотного параметра Ω_i от величины α для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—Ш (*a*); Ш—З (*б*); З—З (*в*). Зависимости мод $i = 1, 2, 3, 4$ следуют снизу вверх.

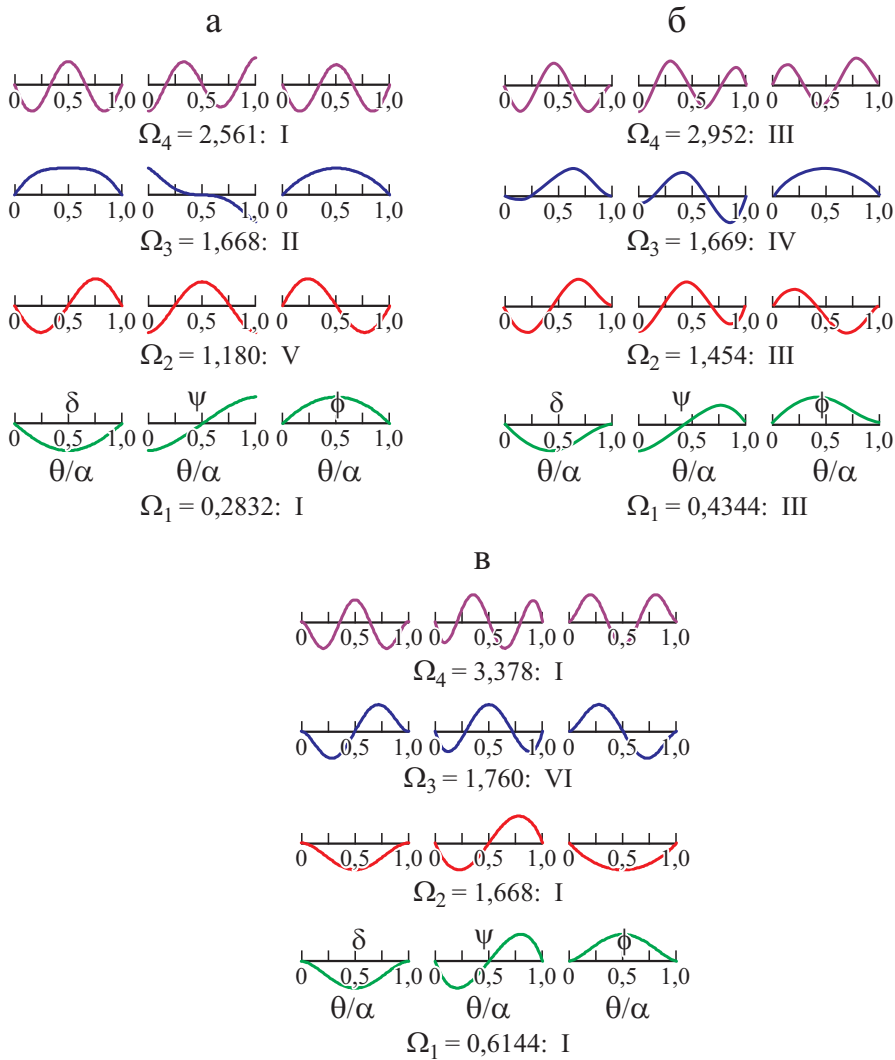


Рис. 8. Типичные формы мод колебаний для балки прямоугольного поперечного сечения с граничными условиями Ш—Ш (а); Ш—З (б); З—З (в): I — симметричная изгибная мода; II — симметричная крутильная мода; III — изгибная мода; IV — крутильная мода; V — антисимметричная изгибная мода; VI — антисимметричная крутильная мода.

Заключение

В настоящей работе исследовали свободные колебания из плоскости в сочетании с изгибно-крутильными колебаниями круглоизогнутых балок, изготовленных из аксиально-функционально-градиентного материала. С учетом уравнений динамического равновесия для элемента круглоизогнутой балки дифференциальные уравнения, управляющие свободными колебаниями балок вывели с использованием теорий Тимо-

шенко и Сен-Венана. Для описания свойств ФГМ выбрали квадратичную функцию и рассмотрели прямоугольное и эллиптическое поперечные сечения балок. Для вычисления собственных частот дифференциальные уравнения решали методом пробных собственных значений, дополненным методом численного интегрирования. Предсказанные значения собственных частот, полученные в настоящей работе и с помощью программного обеспечения ADINA, хорошо согласуются друг с другом. Выполнили параметрические исследования влияния граничных условий на концах балки, формы поперечного сечения, вращательной и крутильной инерции, отношения модулей упругости, отношения плотностей, отношения размеров, коэффициента гибкости и угла раскрытия на частотные характеристики балок.

Благодарность. Авторы признательны за финансовую поддержку Корейскому национальному исследовательскому фонду (грант NRF-2020R1C1C1005374) и доктору Хи Мин Юн, директору Sunkoo Engineering (Корея) за помощь в вычислении собственных частот круглоизогнутых балок из АФГМ с помощью программного обеспечения ADINA.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Norris C. H., Wilbur J. B., and Utku S. Elementary Structural Analysis. — N. Y.: McGraw-Hill Inc., 1976.
2. Horibe T. and Mori K. Large deflections of tapered cantilever beams made of axially functionally graded materials // Mech. Eng. J. — 2018. — Vol. 5. — P. 1—10.
3. Rao S. S. Vibration of Continuous Systems. — Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
4. Li X. F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Bernoulli—Euler beam // J. Sound. Vib. — 2008. — Vol. 318. — P. 1210—1229.
5. Kukla S. and Rychlewska J. Free vibration analysis of functionally graded beam // J. Appl. Math. Comput. Mech. — 2013. — Vol. 12. — P. 39—44.
6. Chandran G. and Rajendran M. G. Study on buckling of column made of functionally graded material // Int. J. Mech. Prod. Eng. — 2014. — Vol. 2. — P. 52—54.
7. Ranganathan S., Abed F., and Aldadah M. G. Buckling of slender columns with functionally graded micro-structures // Mech. Adv. Mater. Struct. — 2016. — Vol. 23. — P. 1360—1367.
8. Elishakoff I., Eisenberger M., and Delmas A. Buckling and vibration of functionally graded material columns sharing Duncan's mode shape, and new cases // Structures. — 2018. — Vol. 5. — P. 170—174.
9. Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R. Exact natural frequencies and buckling loads of functionally graded material tapered beam-columns considering semi-rigid connections // J. Vib. Control. — 2018. — Vol. 24. — P. 1787—1808.
10. Huang Y. and Li X. F. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross section // J. Sound Vib. — 2010. — Vol. 329. — P. 2291—2303.

11. *Shahba A. and Rajasekaran S.* Free vibration and stability of tapered Euler—Bernoulli beams made of axially functionally graded materials // *Appl. Math. Model.* — 2012. — Vol. 36. — P. 3094—3111.
12. *Soltani M. and Asgarian B.* Lateral-torsional stability analysis of a simply supported axially functionally graded beam with a tapered I-section // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56. — P. 39—53.
13. *Akgoz B. and Civalek O.* Free vibration analysis of axially functionally graded Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple stress theory // *Compos. Struct.* — 2013. — Vol. 98. — P. 314—322.
14. *Malekzadeh P., Atashi M. M., and Karami G.* In-plane free vibration of functionally graded circular arches with temperature-dependent properties under thermal environment // *J. Sound Vib.* — 2009. — Vol. 326. — P. 837—851.
15. *Malekzadeh P.* Two-dimensional in-plane free vibrations of functionally graded circular arches with temperature-dependent properties // *Compos. Struct.* — 2009. — Vol. 91. — P. 38—47.
16. *Noori A. R., Aslan T. A., and Temel B.* An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with non-uniform cross section // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 200. — P. 701—710.
17. *Rajasekaran S.* Free vibration of tapered arches made of axially functionally graded materials // *Struct. Eng. Mech.* — 2013. — Vol. 45. — P. 569—594.
18. *Zhou Z., Chen M., and Xie K.* NURBS-based free vibration analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko curved beams // *Appl. Math. Mech.* — 2020. — Vol. 41. — P. 567—586.
19. *Tsiatas G. C. and Charalampakis A. E.* Optimizing the natural frequencies of axially functionally graded beams and arches // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 160. — P. 256—266.
20. *Lee J. K. and Lee B. K.* In-plane free vibration of circular arches made of axially functionally graded materials // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* — 2019. — Vol. 19. — P. 1950084.
21. *Malekzadeh P., Haghghi M. R. G., and Atashi M. M.* Out-of-plane free vibration of functionally graded circular curved beams in thermal environment // *Compos. Struct.* — 2010. — Vol. 92. — P. 541—552.
22. *Malekzadeh P., Haghghi M. R. G., and Atashi M. M.* Out-of-plane free vibration analysis of functionally graded circular curved beams supported on elastic foundation // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* — 2010. — Vol. 2. — P. 635—652.
23. *Lee S. Y. and Chao J. C.* Exact solutions of out-of-plane vibration of curved non-uniform beam // *J. Appl. Mech.* — 2000. — Vol. 68. — P. 186—191.
24. *Lee B. K., Oh S. J., Mo J. M., and Lee T. E.* Out-of-plane free vibrations of curved beams with variable curvature // *J. Sound Vib.* — 2008. — Vol. 318. — P. 227—246.
25. *Borg S. F. and Gennaro J. J.* *Advanced Structural Analysis.* — N. Y.: Van Nostrand Reinhold, 1959.
26. *Timoshenko S. P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *Philos. Mag.* — 1921. — No. 41. — P. 744—746.
27. *Lee J. K. and Jeong S.* Flexural and torsional free vibrations of horizontally curved beams on Pasternak foundation // *Appl. Math. Model.* — 2016. — Vol. 40. — P. 2242—2256.
28. *Chopra A. K.* *Dynamics of Structures.* — Upper Saddle River: Prentice Hall Inc., 2001.

29. *Cowper G. R.* The shear coefficient in Timoshenko beam theory // *J. Appl. Mech.* — 1966. — Vol. 33. — P. 335—340.

30. *Young W. C. and Budynas R. G.* Roark's Formulas for Stress and Strain. — N. Y.: McGraw-Hill Inc., 2001.

31. *Burden R. L., Faires D. J., and Burden A. M.* Numerical Analysis. — Boston: Cengage Learning, 2016.

Поступила в редакцию 25.01.2021

Окончательный вариант поступил 05.05.2021

Received Jan. 25, 2021 (May 5, 2021)

*М. Алсади**

University of Technology, Materials Engineering Department, Baghdad 10066, Iraq

**ИЗУЧЕНИЕ РАССЛОЕНИЯ И ИЗГИБНОГО ПОВЕДЕНИЯ
ЭПОКСИДНЫХ КОМПОЗИТОВ, АРМИРОВАННЫХ
УГЛЕРОДНЫМИ И ОРГАНИЧЕСКИМИ ВОЛОКНАМИ
И ЧАСТИЦАМИ КАРБИДА КРЕМНИЯ¹**

*M. Alsaadi**

**A STUDY ON THE DELAMINATION AND FLEXURAL BEHAVIOR
OF CARBON- AND ARAMID-FIBER-REINFORCED EPOXY
COMPOSITES WITH SILICON CARBIDE PARTICLE INCLUSIONS**

Keywords: SiC particle, carbon fiber, aramid fiber, interlaminar fracture, Mode-II delamination, flexural properties

The interlaminar fracture of Mode-II delamination and flexural behavior of carbon- and aramid-fiber-reinforced epoxy (CFRE and AFRE) composites filled with silicon carbide (SiC) particles were investigated. End-notched flexure tests were performed to obtain their Mode-II fracture toughness properties with the aim to enhance the Mode-II delamination behavior of both the composites. The results obtained showed that SiC particles improve the delamination and the flexural characteristics of AFRE-SiC composites more than those of CFRE-SiC composites. The highest values of their Mode-II delamination toughness were obtained at 5 wt.% of SiC particles. Scanning electron micrographs showed that the particles increase the adhesion strength between the matrix and fibers, reduce the interlayer region, and hinder the formation of plastic zones.

Ключевые слова: частицы карбида кремния, волокно углеродное, волокно органическое, разрушение межслойное, расслоение по моде II, свойства изгибные

*Автор, с которым следует вести переписку: mohamadalsaadi@gmail.com
Corresponding author: mohamadalsaadi@gmail.com

¹Перевод с англ.

Исследовали межслойное разрушение расслоением по моде II и изгибное поведение эпоксидных композитов, армированных углеродными (CFRE) и органическими (AFRE) волокнами, наполненных частицами карбида кремния (SiC). Испытания на изгиб образцов из этих композитов с концевым надрезом провели для определения характеристик вязкости разрушения по моде II с целью улучшения их поведения при расслоении по моде II. Полученные результаты показали, что частицы SiC улучшают характеристики расслоения и изгиба композитов AFRE-SiC больше, чем композитов CFRE-SiC. Наибольшие значения вязкости разрушения при расслоении по моде II достигнуты при содержании 5% по массе частиц SiC. Микрофотографии, полученные с помощью сканирующего электронного микроскопа, показали, что частицы увеличивают адгезионную прочность между матрицей и волокнами, уменьшают область прослойки и препятствуют образованию пластических зон.

Введение

В силу превосходных механических свойств композиты из волокнисто-армированных композитов играют жизненно важную роль в автомобильной, авиационной и других отраслях машиностроения. Многие исследователи показали, что материальные характеристики полимерных композитов можно улучшить, наполнив их микро- или наночастицами [1—7]. Однако наполнение композитов частицами каучуков или термопластов, повышая их сопротивление расслоению, уменьшало модуль упругости и прочность [8, 9]. Поэтому в качестве упрочняющих добавок выбрали жесткие наполнители, такие как Al_2O_3 , нанокремнезем, частицы SiC и углеродные нанотрубки [10—13]. В [14—21] механические свойства композитов с полимерной матрицей улучшали путем их наполнения частицами SiC. В [19] установили, что модуль упругости при изгибе и коэффициент интенсивности напряжений эпоксидных композитов с частицами SiC на ~ 110 и 95% соответственно больше, чем эпоксидных композитов с частицами диоксида кремния, и на ~ 70 и 55% больше, чем композитов с частицами Al_2O_3 . Введение в композит микрочастиц SiC увеличивало прочность при изгибе и модуль упругости на 10 и 95% соответственно [20]. В [21] исследовали влияние массового содержания и размера частиц SiC на механические свойства композитов с поливинилиденфторидной матрицей. Установили, что на прочность при растяжении и модуль упругости существенно влияют содержание и размер частиц SiC. При использовании частиц SiC ударная и сдвиговая прочности композита AFRE увеличились на 34 и 21% соответственно.

Расслоение по моде II можно рассматривать в качестве основной моды разрушения слоистых композитов при сдвиге. Два смежных слоя из разной ткани обуславливают несоответствие жесткости при растяжении и

изгибе, которое в сочетании с низкой прочностью полимерной матрицы делает слоистые композиты чувствительными к расслоению. Испытание на изгиб образца с концевым надрезом ENF (End Notched Flexure, далее “образец ENF”) — лучший метод для изучения поведения слоистых композитных материалов при расслоении по моде II [22—26]. Прочность и модуль упругости при изгибе, вязкость разрушения при расслоении по моде II эпоксидного стеклопластика при введении в него частиц SiC возросли на ~ 2, 24 и 47% соответственно [25]. В [26] испытания композита CFRE с пробковым наполнителем провели методом ENF для определения вязкости межслойного разрушения по моде II. Пробковый наполнитель превратил хрупкий композит CFRE в очень эластичный материал, который можно использовать в разных конструкциях в машиностроении.

Превосходные механические характеристики композитов, армированных органическими волокнами, также исследовали в [27—34]. Характеристики и применение органических волокон рассмотрели в [33]. В [34] использовали рубленые органические волокна в слоистых композитах CFRE; их межслойная вязкость разрушения по моде II возросла на ~ 90%.

Из приведенного обзора литературы следует, что в нескольких работах исследовали механические свойства и расслоение полимерных слоистых композитов, но не оценивали влияние жестких частиц на сопротивление расслоению композитов AFRE. Цель данной работы — изучение и сравнение влияния содержания частиц SiC на расслоение по моде II и изгибные характеристики эпоксидных слоистых тканых угле- и органопластиков.

1. Эксперименты

1.1. Материалы. Армирующие материалы, использованные в настоящем исследовании, — ткани из углеродных T300 (полотняное переплетение) и органических кевлар 49 (саржевое переплетение) волокон. Ткани и эпоксидную смолу Epikote MGS LR160 с отвердителем Epikure MGS LH260 поставила компания DOST Chemical Materials Industry (Турция). Наполнитель из частиц SiC плотностью 2,49 г/см³ и диаметром 35 мкм получен от компании Eti Mine Works General Management (Турция). Связующее изготовлено из смеси эпоксидной смолы и отвердителя в массовом соотношении 100:40. Слоистые композиты для испытаний на изгиб и ENF изготовили с массовым содержанием частиц SiC 5, 10, 15 и 20%.

1.2. Обработка материалов. Образцы композитов изготовили путем предварительного смешивания порошкового наполнителя частиц SiC с эпоксидной смолой в механической мешалке при постоянной скорости 1000 об/мин в течение 27 мин. Затем полученную смесь последовательно нанесли на 16 слоев ткани. Для моделирования предварительной трещины в срединную плоскость слоистых композитов на одном краю вставили тефлоновую пленку толщиной 12 мкм. Затем слоистые композиты поме-

Характеристики слоистых композитов

Слоистый композит	Содержание SiC, % по массе	Плотность, г/см ³	Толщина, мм	Объемное содержание волокон, %
CFRE	0	1,476	3,71	59,85
CFRE-SiC ₅	5	1,401	4,15	57,46
CFRE-SiC ₁₀	10	1,409	4,29	58,21
CFRE-SiC ₁₅	15	1,428	4,37	59,53
CFRE-SiC ₂₀	20	1,445	4,51	58,56
AFRE	0	1,231	4,63	55,64
AFRE-SiC ₅	5	1,224	5,22	54,39
AFRE-SiC ₁₀	10	1,238	5,25	53,50
AFRE-SiC ₁₅	15	1,234	5,36	54,43
AFRE-SiC ₂₀	20	1,239	5,38	54,97

стили в плоскую пресс-форму для отверждения и в течение 1 ч подвергали воздействию давления 300 кПа и температуры 80 °С. Изготовленные слоистые композиты разрезали с помощью станка с ЧПУ для получения образцов для испытаний на разрушение по моде II аналогично [22—24] и для испытания на изгиб по стандарту ASTM D 790. Испытали по пять образцов; средние значения плотности, толщины и объемного содержания волокон приведены в табл. 1.

1.3. Экспериментальные испытания. *1.3.1. Испытания по моде II.* Критическую скорость высвобождения энергии деформирования $G_{IIС}$ при нагружении по моде II композитов CFRE и AFRF без наполнителя и наполненных частицами SiC определили в ходе испытаний методом ENF, проведенных при трехточечном изгибе образцов размером 120×20 мм с длиной пролета 76 мм на испытательной машине серии Shimadzu AG-X [22] со скоростью деформирования 1 мм/мин [22—24]. Как только трещина в образцах начинала распространяться, нагрузку уменьшали и завершали испытание. Значения $G_{IIС}$ вычисляли по формуле [22—25]

$$G_{IIС} = \frac{9P\delta a^2}{2b(2L^3 + 3a^3)}, \quad (1)$$

где a — длина трещины; L — длина пролета; b — длина образца; P — приложенная нагрузка.

1.3.2. Изгибные испытания. Испытания на трехточечный изгиб образцов размером 185,0×12,7 мм выполнили по стандарту ASTM D 790 [35] на испытательной машине серии Shimadzu AG-X. Отношение пролета к толщине образцов 32:1. Скорость перемещения захватов 3 мм/мин в

соответствии со стандартом ASTM D790. Прочность композитов при изгибе σ_F , модуль упругости E_F и деформацию ε_F вычисляли по формулам [35]

$$\sigma_F = \frac{3P_{\max}L}{2bh^2} \left[1 + 6 \left(\frac{D}{L} \right)^2 - 4 \frac{h}{L} \frac{D}{L} \right], \quad (2)$$

$$E_F = \frac{mL^3}{4bh^3}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_F = \frac{6Dh}{L^2}, \quad (4)$$

где h — толщина образца; D — максимальный прогиб.

2. Результаты и обсуждение

2.1. Расслоение по моде II. Разрушение расслоением по моде II инициировала сдвигающая сила между слоями ткани. Процессы расслоения включают два механизма: когезионное разрушение эпоксидной матрицы между двумя смежными слоями ткани и расслоение поверхности раздела волокно/матрица. В ходе расслоения высвобождается энергия, называемая также вязкостью межслойного разрушения по моде II, или критической энергией деформирования.

Зависимости нагрузка—перемещение $P—\delta$ композитов CFRE-SiC и AFRE-SiC, полученные в ходе испытаний методом ENF, показаны на рис. 1. В табл. 2 приведены характеристики слоистых композитов при расслоении по моде II. Из данных рис. 1 видно, что при максимальной нагрузке P_{\max} зарождается трещина, нагрузка уменьшается и трещина распространяется до вплоть окончательного разрушения. В целом в ком-

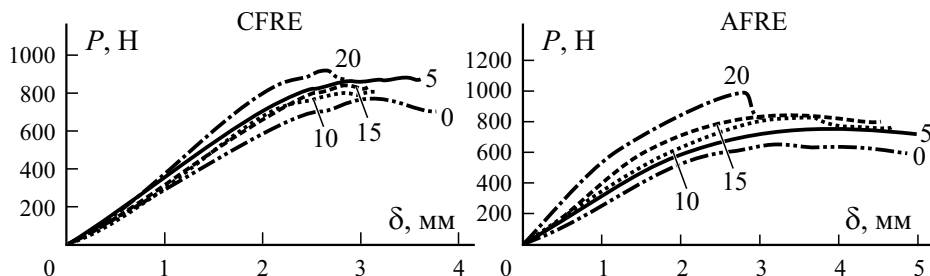


Рис. 1. Зависимость нагрузка—перемещение $P—\delta$ образцов композитов CFRE-SiC и AFRE-SiC в испытаниях методом ENF. Цифры у кривых — содержание SiC, % по массе.

Табл. 2

Характеристики межслоистого разрушения композитов по моде II

Композит	Содержание SiC, % по массе	Нагрузка P_{\max} , Н	Перемещение при P_{\max} , мм	Вязкость разрушения G_{IIc} , Дж/м ²	Приращение G_{IIc} , %
CFRE	0	766 (± 17)	3,07 ($\pm 0,06$)	1515 (± 26)	—
CFRE-SiC ₅	5	870 (± 21)	3,63 ($\pm 0,09$)	2034 (± 43)	34,3
CFRE-SiC ₁₀	10	801 (± 23)	2,98 ($\pm 0,17$)	1537 (± 45)	1,4
CFRE-SiC ₁₅	15	837 (± 19)	2,90 ($\pm 0,13$)	1565 (± 36)	3,3
CFRE-SiC ₂₀	20	914 (± 15)	2,62 ($\pm 0,15$)	1542 (± 31)	1,8
AFRE	0	651 (± 24)	3,24 ($\pm 0,11$)	1358 (± 29)	—
AFRE-SiC ₅	5	756 (± 16)	4,03 ($\pm 0,18$)	1962 (± 37)	44,5
AFRE-SiC ₁₀	10	827 (± 15)	3,65 ($\pm 0,12$)	1944 (± 33)	43,1
AFRE-SiC ₁₅	15	849 (± 13)	3,41 ($\pm 0,19$)	1865 (± 24)	37,3
AFRE-SiC ₂₀	20	986 (± 25)	2,88 ($\pm 0,16$)	1829 (± 31)	34,6

политах CFRE и AFRÉ нагрузка P_{\max} возрастала с увеличением содержания частиц SiC. Значения перемещения при максимальной нагрузке равны $\sim 3,07$ мм при $P_{\max} = 766$ Н (CFRE) и 3,24 мм — при 651 Н (AFRE). По мере увеличения содержания частиц SiC значение максимальной силы P_{\max} возрастало, а перемещения δ уменьшались. Например, для композитов CFRE-SiC и AFRÉ-SiC с 20% по массе частиц SiC максимальное перемещение равно 2,62 мм при $P_{\max} = 914$ Н и 2,88 мм — при 986 Н соответственно. Из данных рис. 1 видно, что зависимости нагрузка—перемещение $P—\delta$ композитов из органических волокон более нелиней-

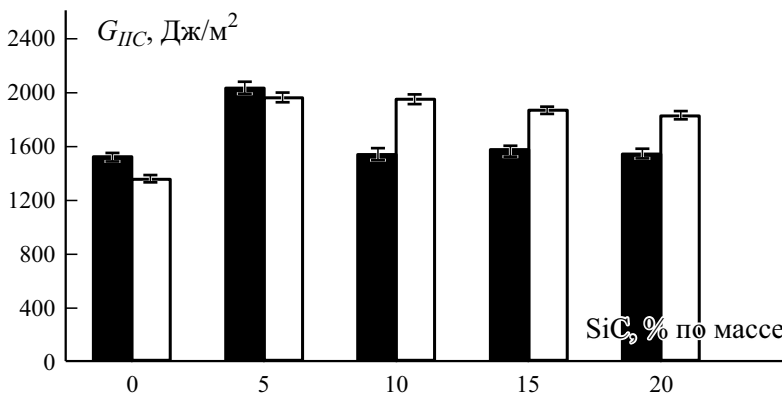


Рис. 2. Диаграмма вязкости разрушения расслоением по моде II G_{IIc} композитов CFRE-SiC (■) и AFRÉ-SiC (□) с разным массовым содержанием частиц SiC.

ны, поскольку распространение трещины и пластическая деформация в области вершины трещины обусловили нелинейное расслоение по моде II [36, 37]. В образцах ENF сдвигающая нагрузка в вершине трещины не вызвала повышенного трения между её поверхностями. Зависимости на рис. 1 не демонстрируют зарождения нестабильной трещины, способной вызвать резкое падение нагрузки при почти постоянном перемещении. Поэтому скорость высвобождения энергии деформирования G_{IIc} возрастала по мере распространения трещины, тем самым компенсируя тенденцию к нестабильности. Объяснение этого явления заключается в накоплении пластических деформаций.

Наибольшие значения величины G_{IIc} , вычисляемой по формуле (1), для композитов CFRE-SiC и AFRE-SiC с 5% по массе частиц SiC были равны 2034 и 1962 Дж/м², что соответствует увеличению на 34,3 и 44,5% по сравнению с композитами без частиц SiC (см. табл. 2 и рис. 2). Видно, что с увеличением массового содержания частиц SiC от 5 до 20% вязкость разрушения композитов CFRE-SiC и AFRE-SiC уменьшалась, но все же осталась больше, чем композитов без наполнителя. Уменьшение вязкости разрушения связано с тем, что при увеличении максимальной нагрузки уменьшалось соответствующее ей перемещение. Кроме того, следует отметить, что вязкость разрушения по моде II композитов CFRE-SiC

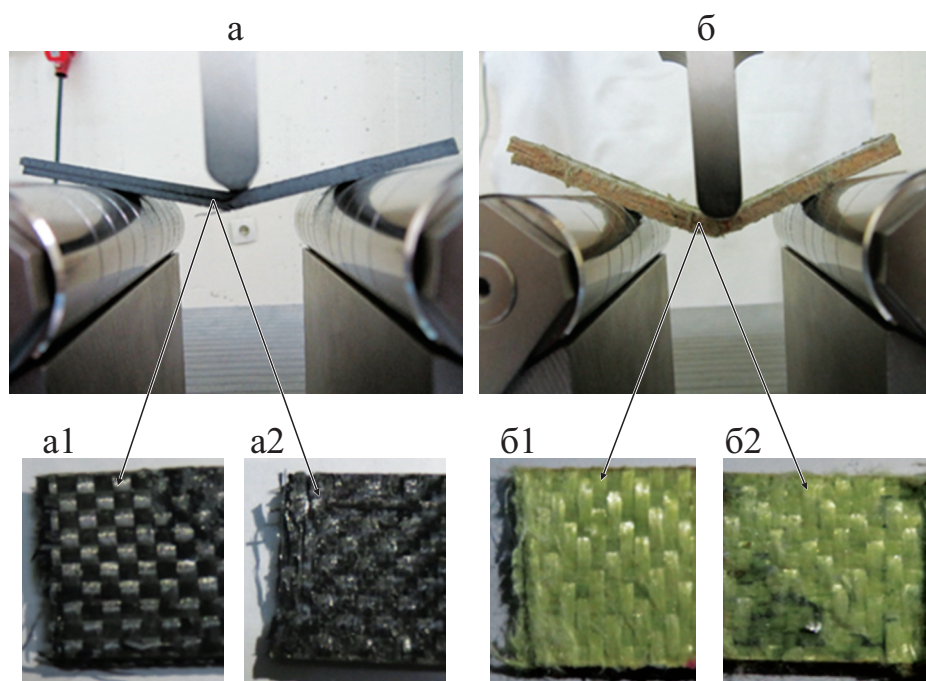


Рис. 3. Поверхности разрушения образцов ENF композитов CFRE (*a* и *a1*), CFRE-SiC₅ (*a2*), AFRE (*б* и *б1*), AFRE-SiC₅ (*б2*).

снизилась в большей степени, чем композитов AFRE-SiC. Это можно объяснить тем фактом, что сила адгезии между твердыми частицами SiC и эластичной тканью из органических волокон больше, чем между частицами и тканью из хрупких углеродных волокон.

2.2. Механизм расслоения по моде II. По достижении максимума сдвигового напряжения при нагружении по моде II в образце ENF возникла трещина, распространившаяся от кончика вставленной пленки к середине пролета образца. На рис. 3 показаны поверхности разрушения образцов ENF из композитов без наполнения частицами SiC и с наполнением. В образцах с 5% по массе частиц SiC, особенно в образце AFRE-SiC₅, видны выдернутые волокна. Для объяснения результатов расслоения по моде II с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) сделали микрофотографии поверхностей расслоения композитов без наполнения и наполненных частицами SiC (5% по массе) — CFRE-SiC₅ и AFRE-SiC₅ (рис. 4). Наличие частиц SiC в прослойке образцов оказало влияние на поверхность разрушения. Микрофотографии композитов CFRE и AFRE на рис. 4—*а, в* свидетельствуют о выдергивании и повреждении волокон в середине пролетов образцов, а микрофотографии на рис. 4—*б, г* — о том, что трещина распростра-

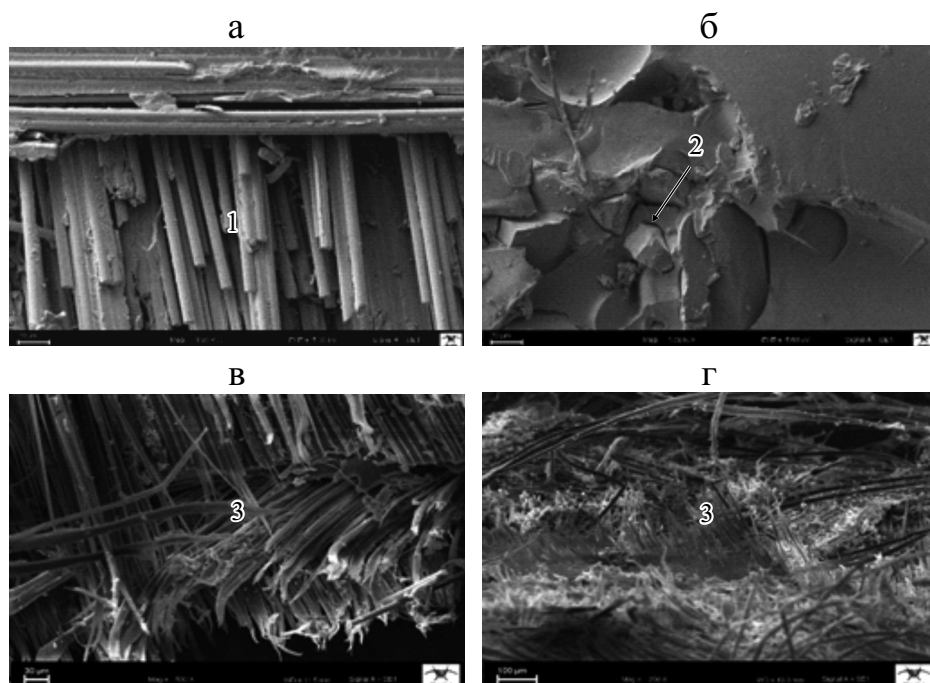


Рис. 4. Микрофотографии СЭМ поверхностей разрушения образцов ENF композитов CFRE (*а*), CFRE-SiC₅ (*б*), AFRE (*в*), AFRE-SiC₅ (*г*): 1 — выдернутые волокна; 2 — гребни; 3 — оголенные волокна.

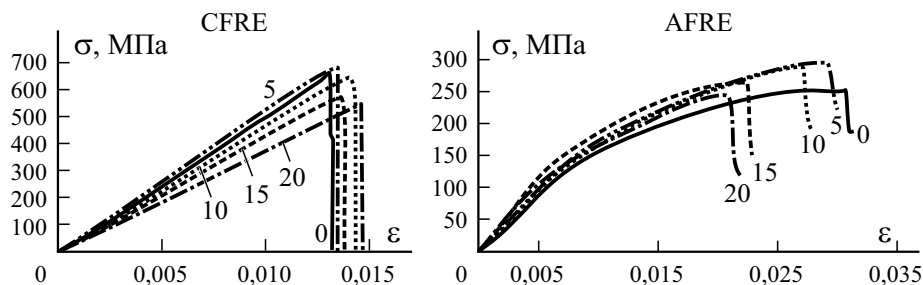


Рис. 5. Диаграммы деформирования σ — ε композитов CFRE с разным массовым содержанием частиц SiC при изгибе (цифры у кривых, % по массе).

нилась сквозь область частиц SiC, обладающих слабым сцеплением с волокнами и матрицей. Кроме того, на поверхности разрушения наблюдали гребни, обусловившие значительную вязкость разрушения [38, 39]. Высокая адгезионная прочность уменьшала область прослойки и препятствовала образованию пластической зоны. На микрофотографиях СЭМ образцов AFRE-SiC видны оголенные органические волокна, лишенные эпоксидной матрицы в ходе распространения трещины в силу агрегации частиц SiC; вязкость расслоения по моде II снижалась с увеличением их количества.

2.3. Изгибные характеристики. На рис. 5 представлены диаграммы деформирования σ — ε при изгибе композитов CFRE-SiC и AFRE-SiC. Видно, что начальные линейные участки диаграмм композитов CFRE-SiC больше, чем композитов AFRE-SiC, а предельные деформации композитов CFRE меньше, чем композитов AFRE в силу большей деформативности органических волокон. Как правило, предельная деформация об-

Табл. 3

Механические характеристики композитов

Тип композита	Содержание SiC, % по массе	Изгибающая нагрузка, Н	Изгибная прочность, МПа	Изгибный модуль, ГПа
CFRE	0	621 (± 11)	645 (± 15)	45,3 ($\pm 0,73$)
CFRE-SiC ₅	5	719 (± 13)	680 (± 17)	48,4 ($\pm 0,89$)
CFRE-SiC ₁₀	10	756 (± 16)	643 (± 21)	47,7 ($\pm 0,61$)
CFRE-SiC ₁₅	15	713 (± 10)	571 (± 14)	46,9 ($\pm 0,73$)
CFRE-SiC ₂₀	20	692 (± 09)	557 (± 12)	46,1 ($\pm 1,42$)
AFRE	0	337 (± 03)	253 (± 06)	20,5 ($\pm 0,36$)
AFRE-SiC ₅	5	445 (± 06)	297 (± 10)	23,7 ($\pm 0,14$)
AFRE-SiC ₁₀	10	416 (± 14)	289 (± 17)	23,2 ($\pm 0,50$)
AFRE-SiC ₁₅	15	393 (± 08)	264 (± 11)	22,6 ($\pm 0,85$)
AFRE-SiC ₂₀	20	365 (± 10)	245 (± 13)	20,9 ($\pm 0,92$)

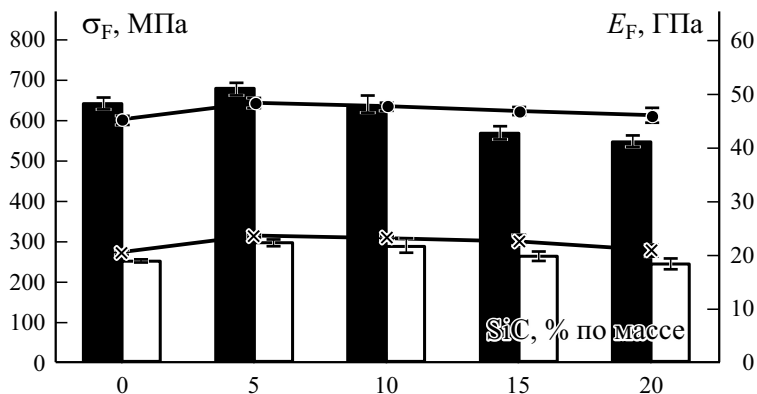


Рис. 6. Сравнение изгибной прочности σ_F (■, □) и изгибного модуля E_F (—●—, —*—) композитов CFRE (■, —●—) и AFRE (□, —*—) с разным массовым содержанием частиц SiC.

разцов композита CFRE несколько возрастала с увеличением содержания микрочастиц SiC, а композита AFRE наоборот уменьшалась. Это различие можно объяснить разной эластичностью углеродных и органических тканей.

Значения прочности и модуля упругости при изгибе композитов CFRE-SiC и AFRE-SiC приведены в табл. 3 и на рис. 6. Установили, что прочность и модуль упругости при изгибе композита CFRE без наполнителя больше, чем композита AFRE без наполнителя на ~ 84 и 121% соответственно за счет высокой прочности и жесткости тканей из углеродных волокон. Исследуемые типы композитов продемонстрировали максимальные значения изгибной прочности при содержании 5% по массе частиц SiC — 680 МПа (CFRE-SiC₅) и 297 МПа (AFRE-SiC₅), превышающие таковые композитов CFRE и AFRE без наполнителя на 5,4 и 17,4% соответственно. Увеличение содержания частиц SiC в композитах привело к уменьшению их изгибной прочности, достигшей значений 557 и 245 МПа композитов CFRE-SiC₂₀ и AFRE-SiC₂₀ соответственно. Такое поведение можно объяснить увеличением толщины слоистого композита с увеличением содержания частиц SiC.

Модуль упругости при изгибе продемонстрировал ту же тенденцию, что и изгибная прочность. Максимальные значения модуля упругости, равные 48,4 и 23,7 ГПа, имели композиты CFRE-SiC и AFRE-SiC с 5% по массе частиц SiC соответственно. Хотя введение большего количества частиц SiC уменьшало изгибный модуль упругости композитов, он все равно был больше, чем ненаполненных композитов CFRE и AFRE.

Заключение

В настоящей работе изучали расслоение по моде II и свойства при изгибе эпоксидных композитов на основе тканей из углеродных и органических волокон, наполненных частицами SiC. Полученные результаты можно резюмировать следующим образом.

— Вязкость расслоения по моде II G_{II} определяли по зависимостям нагрузка—перемещение, полученным при испытаниях методом ENF. Наибольшие значения G_{II} , равные 2034 и 1962 Дж/м², получены на образцах композитов CFRE-SiC₅ и AFRE-SiC₅ соответственно по сравнению с 1515 и 1358 Дж/м² композитов без наполнителя.

— Максимальные значения прочности при изгибе (680 и 297 МПа) продемонстрировали композиты CFRE-SiC₅ и AFRE-SiC₅, которые на 5,4 и 17,4% больше, чем композитов без наполнителя.

— Наибольшее увеличение модуля упругости при изгибе (6,8 и 15,6%) показали композиты CFRE-SiC₅ и AFRE-SiC₅ соответственно.

— С помощью микрофотографий СЭМ выяснили причины повышенной межслойной трещиностойкости композитов по моде II.

— На поверхности разрушения наблюдали гребни, способствовавшие значительной вязкости разрушения образцов ENF. Увеличение адгезионной прочности уменьшило область прослойки и препятствовало образованию пластической зоны.

— Избыточное содержание частиц SiC снизило вязкость разрушения расслоением по моде II, прочность и модуль упругости при изгибе, вызвав агрегацию частиц SiC, ухудшившую передачу нагрузок между частицами SiC и матрицей.

— Увеличение вязкости разрушения при расслоении и изгибных характеристик эпоксидных композитов с органическими волокнами при введении частиц SiC было большим, чем композитов с углеродными волокнами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alsaadi M., Bulut M., Erklığ A., and Jabbar A.* Nano-silica inclusion effects on mechanical and dynamic behavior of fiber reinforced carbon/Kevlar with epoxy resin hybrid composites // *Composites: Part B.* — 2018. — Vol. 152. — P. 169—179.
2. *Rybak A., Jarosinski L., Gaska K., and Kapusta C.* Graphene nanoplatelet-silica hybrid epoxy composites as electrical insulation with enhanced thermal conductivity // *Polym. Compos.* — 2018. — Vol. 39. — P. 1682—1691.
3. *Alsaadi M. and Erklığ A.* Effect of perlite particle contents on delamination toughness of S-glass fiber reinforced epoxy matrix composites // *Composites: Part B.* — 2018. — Vol. 141. — P. 182—190.

4. Zhang T., Chen J., Wang K., and Zhao Y. Improved interlaminar crack resistance of glass fiber/poly (phenylene sulfide) thermoplastic composites modified with multiwalled carbon nanotubes // *Polym. Compos.* — 2019. — Vol. 40, No. 11. — P. 4186—4195.
5. Chakraborty D., Saha S., Dey S., and Pramanik S. Enhanced mechanical toughness of carbon nanofibrous-coated surface modified Kevlar reinforced polyurethane/epoxy matrix hybrid composites // *J. Appl. Polym. Sci.* — 2019. — Vol. 137. — P. 48802.
6. Shakil U. A., Hassan S. B., Yahya M. Y., and Nauman S. Mechanical properties of electrospun nanofiber reinforced/interleaved epoxy matrix composites. A review // *Polym. Compos.* — 2020. — Vol. 41. — P. 2288—2315.
7. Vigneshwaran S., Uthayakumar M., Arumugaprabu V., Deepak R., and Johnson J. Influence of filler on erosion behavior of polymer composites: A comprehensive review // *J. Reinf. Plast. Compos.* — 2018. — Vol. 37, No. 15. — P. 1011—1019.
8. Dadfar M. R. and Ghadami F. Effect of rubber modification on fracture toughness properties of glass reinforced hot cured epoxy composites // *Mater. Des.* — 2013. — Vol. 47. — P. 16—20.
9. Van der Heijden S., Daelemans L., De Schoenmaker B., De Baere L., Rachier H., and Van Paepegem W. Interlaminar toughening of resin transfer moulded glass fibre epoxy laminates by polycaprolactone electrospun nanofibres // *Compos. Sci. Technol.* — 2014. — Vol. 104. — P. 66—73.
10. Urdániz J. L. and Ivanković A. Enhancing mode-I and mode-II fracture toughness of epoxy and carbon fibre reinforced epoxy composites using multi-walled carbon nanotubes // *Mater. Des.* — 2018. — Vol. 143. — P. 81—92).
11. Quan D., Carolan D., Rouge C., Murphy N., and Ivankovic A. Carbon nanotubes and core-shell rubber nanoparticles modified structural epoxy adhesives // *J. Mater. Sci.* — 2017. — Vol. 52, No. 8. — P. 4493—508.
12. Carolan D., Ivankovic A., Kinloch A. J., Sprenger S., and Taylor A. C. Toughened carbon fibre-reinforced polymer composites with nanoparticle-modified epoxy matrices // *J. Mater. Sci.* — 2017. — Vol. 52, No. 3. — P. 1767—1788.
13. Quan D., Pearson R. A., and Ivankovic A. Interaction of toughening mechanisms in ternary nanocomposites // *Polym. Compos.* — 2018. — Vol. 39, No. 10. — P. 3482—3496.
14. Bulut M., Alsaadi M., and Erklig A. A comparative study on the tensile and impact properties of Kevlar, carbon, and S-glass/epoxy composites reinforced with SiC particles // *Mater. Res. Express.* — 2018. — Vol. 5, No. 2. — P. 025301.
15. Alsaadi M., Uгла A. A., and Erklig A. A comparative study on the interlaminar shear strength of carbon, glass, and Kevlar fabric/epoxy laminates filled with SiC particles // *J. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 51, No. 20. — P. 2835—2844.
16. Bai C., Zheng J., Rizzi G. A., and Colombo P. Low-temperature fabrication of SiC/geopolymer cellular composites // *Composites: Part B.* — 2018. — Vol. 137. — P. 23—30.
17. Kim M. S., Rhee K. Y., and Park S. J. Pitch coating of SiC and its effects on the thermal stability and oxidation resistance of SiC/epoxy composites // *Composites: Part B.* — 2016. — Vol. 94. — P. 218—223.
18. Kwon D. J., Shin P. S., Kim J. H., Baek Y. M., Park H. S., DeVries K. L., and Park J. M. Interfacial properties and thermal aging of glass fiber/epoxy composites reinforced with SiC and SiO₂ nanoparticles // *Composites: Part B.* — 2017. — Vol. 130. — P. 46—53.
19. Roulin A., Cantwell W., and Kausch H. Parameters determining the strength and toughness of particulate-filled epoxy resins // *Polym. Compos.* — 1987. — Vol. 8. — P. 314—323.

20. *Bhagyashekar M. S. and Rao R. M.* Characterization of mechanical behavior of metallic and non-metallic particulate filled epoxy matrix composites // *J. Reinf. Plast. Compos.* — 2010. — Vol. 29, No. 1. — P. 30—44.
21. *Wu Q., Li L., Zhang Y. D., and Shui W. J.* Absorption and mechanical properties of SiCp/PVDF composites // *Composites: Part B.* — 2017. — Vol. 131. — P. 1—7.
22. *Lee S. M.* Mode II delamination failure mechanisms of polymer matrix composites // *J. Mater. Sci.* — 1997. — Vol. 32. — P. 1287—1295.
23. *Lee J. J., Lim J. O., and Huh J. S.* Mode II interlaminar fracture behavior of carbon bead-filled epoxy/glass fiber hybrid composite // *Polym. Compos.* — 2000. — Vol. 21. — P. 343—352.
24. *Seyhan A., Tanoglu M., and Schulte K.* Mode I and mode II fracture toughness of E-glass non-crimp fabric/carbon nanotube (CNT) modified polymer based composites // *Eng. Fracture Mech.* — 2008. — Vol. 75. — P. 5151—5162.
25. *Alsaadi M. and Erklığ A.* A comparative study on mode I and mode II interlaminar behavior of borax and SiC particles toughened S-glass fabric/epoxy composite // *Arabian J. Sci. Eng.* — 2017. — Vol. 42, No. 11. — P. 4759—4769.
26. *de Moura M. F., Fernandes R., Silva F. G., and Dourado N.* Mode II fracture characterization of a hybrid cork/carbon-epoxy laminate // *Composites: Part B.* — 2015. — Vol. 76. — P. 44—51.
27. *Tarantili P. A. and Andreopoulos A. G.* Mechanical properties of epoxies reinforced with chloride-treated aramid fibers // *J. Appl. Polym. Sci.* — 1997. — Vol. 65, No. 2. — P. 267—276.
28. *Vaughan D. J.* The use of coupling agents to enhance the performance of aramid reinforced composites // *Polym. Eng. Sci.* — 1978. — Vol. 18, No. 2. — P. 167—169.
29. *Zhang J. M., Cortés-Ballesteros B., and Peijs T.* All-aramid composites by partial fiber dissolution in mixed solvents // *Polym. Compos.* — 2018. — Vol. 39, No. 9. — P. 3013—3021.
30. *Das C. K., Nayak G. C., and Rajasekar R.* Kevlar Fiber-Reinforced Polymer Composites // *Polymer Composites. Ch. 7.* — Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, USA, 2012. — P. 209—274.
31. *Alsaadi M. and Erklığ A.* Effects of clay and silica nanoparticles on the Charpy impact resistance of a carbon/aramid fiber reinforced epoxy composite // *Mater. Testing.* — 2019. — Vol. 61, No. 1. — P. 65—70.
32. *Liu T. M., Zheng Y. S., and Hu J.* Surface modification of aramid fibers with new chemical method for improving interfacial bonding strength with epoxy resin // *J. Appl. Polym. Sci.* — 2010. — Vol. 118, No. 5. — P. 2541—2552.
33. *Singh T. J. and Samanta S.* Characterization of Kevlar fiber and its composites: A review // *Mater. Today: Proc.* — 2015. — Vol. 2, Nos. 4—5. — P. 1381—1387.
34. *Sohn M. S., and Hu X. Z.* Mode II delamination toughness of carbon-fibre/epoxy composites with chopped Kevlar fibre reinforcement // *Compos. Sci. Technol.* — 1994. — Vol. 52, No. 3. — P. 439—448.
35. ASTM D790-10 “Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials. — ASTM International, West Conshohocken, PA, 2010.
36. *Carlsson L. A., Gillespie J. W., and Trethewey B. R.* Mode-II interlaminar fracture of graphite/epoxy and Graphite/PEEK // *J. Reinf. Plast. Compos.* — 1986. — Vol. 5. — P. 170—187.

37. *Bilisik K., Erdogan G., Sapançi E., and Gungor S.* Mode-II fracture of nanostitched para-aramid/phenolic nanoprepreg composites by end-notched flexure // *J. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 54, No. 24. — P. 3537—3557.

38. *Sajith S., Arumugam V., and Dhakal H. N.* Effects of curing pressure on mode II fracture toughness of uni-directional GFRP laminates // *Polym. Testing.* — 2015. — Vol. 48. — P. 59—68.

39. *Chai H.* Observation of deformation and damage at the tip of cracks in adhesive bonds in shear and assessment of a criterion for fracture // *Int. J. Fract.* — 1993. — Vol. 60. — P. 311—326.

Поступила в редакцию 02.07.2020

Окончательный вариант поступил 05.05.2021

Received July 2, 2020 (May 5, 2021)

УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ЖУРНАЛЕ
“МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ” В 2021 ГОДУ

Т. 57, № 1

<i>Сорренти М., Ди Скьяво М., Маяк Ю., Ауриемма Ф.</i> Статический отклик и критические нагрузки многослойных композитных балок, определяемые посредством уточненной зигзагообразной теории и метода вейвлет Хаара	3
<i>Шешенин С. В., Артамонова Н. Б., Клементьев П. Д., Киселев Ф. Б., Мурадханов Р. Р., Орлов Е. А., Чжан Цян.</i> Исследование упругих и упругопластических свойств дисперсного композита на основе численных экспериментов	27
<i>Пупурс А., Лоукил М., Варна Я.</i> Изгибная жесткость поврежденных ортогонально армированных композитов	45
<i>Буслаева О. С., Сапожников С. Б., Безмельницын А. В., Игнатова А. В., Кудрявцев О. А.</i> Тонкие индикаторные покрытия для оценки остаточной прочности стеклопластика после локального контактного воздействия	69
<i>Гунчаускас Р., Веверис А., Анджс М., Гравитис Я., Лиития Т., Тамминен Т.</i> Свойства древесно-стружечных плит из серой ольхи, склеенной разными лигнинами промышленных побочных потоков	83
<i>Уймаз Б.</i> Характеристики потери устойчивости пластин из функционально-градиентного материала, подверженных линейно изменяющимся нагрузкам в плоскости	97
<i>Саху П., Гунта М. К.</i> Динамические механические свойства биокомпозита, армированного сизалевыми волокнами, обработанными бикарбонатом натрия, при разных частотах	113
<i>Кондратьев А. В., Гайдачук В. Е.</i> Математический анализ технологических параметров получения супертонких препрегов плетением углеродных волокон	125
<i>Гао Д. Я., Яо В. С., Вэнь В. Д., Хуан Цз.</i> Эквивалентный спектральный метод для оценки усталостной долговечности слоистых композитов при случайном вибрационном нагружении	139
<i>Юй Т. Ц., Не Г. Цз., Чжун Чж., Чу Ф. Я., Цао Цз.</i> Аналитическое решение задачи изгиба прямоугольных ортотропных пластин с переменной жесткостью в плоскости	161
Правила для авторов	175

Т. 57, № 2

<i>Янелюкстис Р., Миронов Д.</i> Конструкции из умных композитов со встроенными датчиками для мониторинга нагрузок и повреждений. Обзор	189
<i>Шилько С. В., Черноус Д. А., Панин С. В., Чой Х.</i> Метод прогнозирования параметров пластического деформирования дисперсно-армированных материалов на основе модифицированной модели Мори—Танака	223

<i>Акбаров С. Д., Багиров Е. Т.</i> Дисперсия крутильных волн в полом двухслойном цилиндре с начальными неоднородными термическими напряжениями	233
<i>Давар А., Азарафза Р., Файез М. С., Фаллахи С., Джам Дж. И.</i> Динамический отклик композитной цилиндрической оболочки, подкрепленной сеткой ребер жесткости и армированной углеродными нанотрубками, при радиальной импульсной нагрузке	261
<i>Атлуханова Л. Б., Козлов Г. В., Долбин И. В.</i> Теоретическая оценка прочности при сдвиге контакта полимер—углеродные нанотрубки: Фрактальная модель	291
<i>Яо Л., Ван Ш., Мэн С., Чжан Ч.</i> Численное и экспериментальное исследование сопротивления разрыву стеклопластиковых труб с термопластичной матрицей при действии внутреннего давления	299
<i>Нуруллаев Э. М.</i> Влияние γ -излучения на структуру и механические характеристики полимерного композитного материала на основе низкомолекулярных каучуков	319
<i>Мионов А., Доронкин П.</i> Анализ чувствительности системы мониторинга вертолета к дефектам композитной лопасти	331
<i>Хан М. ЗР., Сривастава С. К., Гунта М. К.</i> Характеристики полимерных гибридных древесных композитов, наполненных микрочастицами TiO_2	351
<i>Инь Д. Я., Чжу Ч. Ф., Чэнь С. Ч., Бао Цз. С.</i> Конечно-элементный анализ и экспериментальное исследование процесса водоструйной развертки отверстий в углерод-углеродных композитах.	365
<i>Шебанов С. М.</i> Экстремальные значения прочности единичных филаментов и нити из параарамидного волокна после обработки водной суспензией углеродных наночастиц	381

Т. 57, № 3

<i>Шешенин С. В., Икунь Ду.</i> Гомогенизация резинокордного слоя при умеренно больших деформациях	395
<i>Малахов А. В., Полилов А. Н., Ли Д., Тянь С.</i> Повышение несущей способности композитных пластин в зоне болтовых соединений за счёт применения криволинейных траекторий и переменной объёмной доли волокон	411
<i>Митрофанов О.</i> Оценка устойчивости и геометрически нелинейного поведения квадратных композитных панелей несимметричной структуры при сдвиге	429
<i>Славский С., Качмарчик Й., Шимичек М., Пакела В.</i> Численное исследование влияния армирующего материала на поглощение энергии в многослойных композитах при ударе	441
<i>Айдин Л., Артем Х. С., Деведжи Х. А.</i> Одно- и многокритериальная оптимизация размеростабильных композитов с помощью генетических алгоритмов	457
<i>Львов Г. И.</i> Использование концепции наложенных связей в теории пластичности композитов	481

<i>Чепурненко А. С., Литвинов С. В., Языев С. Б.</i> Применение метода контактного слоя в сочетании с методом конечных элементов для прогнозирования длительной прочности адгезионных соединений при нормальном отрыве	501
<i>Гилев В. Г., Русаков С. В., Чудинов В. С., Рахманов А. Ю., Кондюрин А. В.</i> Моделирование кинетики отверждения эпоксидного связующего композитного материала аэрокосмического назначения при нарушении стехиометрии	517
<i>Ли И. Д., Ло Х. Б., Янь И., Е Цз. С., Го Ф. Л.</i> Экспериментальный и конечно-элементный анализ свойств композитных труб, намотанных волокном, с металлическими вставками	535
<i>Бакар М., Пишибылек М., Бялковская А., Журовский В., Гануликова Б., Сточек Р.</i> Влияние условий перемешивания и содержания монтмориллонита на механические свойства хлоропренового каучука	553
<i>Сяо Ю., Ли Чж., Лю Чж., Цзан М., Чжу Ю.</i> Влияние проектирования материала и настройки слабых связей на энергопоглощение тонкостенных композитных балок при поперечном нагружении	573
<i>Цзян Ю. П., У Цз., Чжу Я.</i> Мезоскопическая модель композитов, наполненных частями, с сетчатыми микроструктурами	591

Т. 57, № 4

<i>Белов П. А., Лурье С. А.</i> Развитие концепции “разделенной анизотропии” в теории градиентной анизотропной упругости	611
<i>Янковский А. П.</i> Анализ теплового отклика в армированных пластинах при динамическом нагружении взрывного типа	629
<i>Хванг С. Ф., Ву С. И.</i> Ударное поведение и энергопоглощение композитных труб, изготовленных из ткани или препрегов углеродных волокон	645
<i>Гарбин Д. Ф., Тонатто М. Л., Амику С. К.</i> Поведение сэндвич-панелей стеклопластик/полиуретан при сжатии и изгибе: экспериментальное и численное исследование	659
<i>Шешенин С. В., Гритченко М. Э., Чистяков П. В.</i> Осреднение вязкоупругих свойств резинокордного слоя при плоском напряженном состоянии	673
<i>Бойко Д. С., Токовый Ю. В.</i> Определение трехмерных напряжений в полубесконечном упругом трансверсально-изотропном композите	689
<i>Сердюк А. О., Сердюк Д. О., Федотенков Г. В.</i> Напряженно-деформированное состояние композитной пластины под воздействием нестационарной подвижной нагрузки	705
<i>Демирджан Г., Киса М., Озен М., Аджикгоз А.</i> Поведение эпоксидных нанокомпозитов, армированных стекловолокнами, при квазистатическом вдавливании	721
<i>Подыман Г. С., Двойнос Я. Г., Новик В. А.</i> Моделирование процесса гомогенизации полиэтиленовых композиций в одношнековом экструдере с перемешивающим элементом Мэддока	739

<i>Вольфсон С. И., Хасанова А. Д., Казаков Ю. М., Хусаинов А. Д., Баранец И. В.</i> Структура и свойства маслобензостойких термопластичных вулканизатов, содержащих модифицированный технический углерод	751
<i>Абиди А., Бен Салем С., Безази А., Бумедири Х.</i> Сравнительное изучение влияния технологий фрезерования и резки гидроабразивной струей на поведение эпоксидных слоистых углепластиков при растяжении	767
<i>Кун Л. М., Чжэн В., Ван С. Б., У Г. Д., Ци Я. Я., Сюэ Я. Цз., Ван Б. Ч., Сюй Х. М.</i> Влияние укладки и угла несоосности на механические свойства волокнисто-армированных стеклопластиков	783

Т. 57, № 5

<i>Каблов Е. Н., Старцев В. О.</i> Влияние внутренних напряжений на старение полимерных композиционных материалов. Обзор	805
<i>Анискевич К., Старкова О.</i> Оценка вязкопластической деформации ПЭВП, наполненного многостенными углеродными нанотрубками, с использованием соотношения скоростей реакции	823
<i>Кудрявцев О. А., Оливенко Н. А., Сапожников С. Б., Игнатова А. В., Безмельницын А. В.</i> Оценка повреждений и остаточной прочности слоистого композита после низкоскоростного удара с использованием индикаторных покрытий	839
<i>Футч Т., Ким Г., Стеркенбург Р.</i> Влияние альтернативного топлива для турбинных двигателей на механические свойства эпоксидного волокнисто-армированного углепластика	853
<i>Ань В. Т. Т., Хуон В. Т., Нгуен Ф. Д., Дык Н. Д.</i> Нелинейный динамический анализ полых сферических оболочек типа сэндвич из пористого композита, армированного пластинками графена	869
<i>Бакулин В. Н., Бойцова Д. А., Недбай А. Я.</i> Параметрический резонанс подкрепленной шпангоутами трехслойной цилиндрической композитной оболочки	887
<i>Михаськив В. В., Стасюк Б. М.</i> Эффективные модули упругости коротковолокнистого композита при скользящем контакте на межфазных поверхностях	901
<i>Беляк О. А., Суворова Т. В.</i> Прогнозирование механических свойств антифрикционных композитных материалов	917
<i>Кудимова А. Б., Наседкин А. В., Наседкина А. А., Раджагопал А.</i> Компьютерное моделирование композитов, состоящих из пьезокерамической матрицы с металлическими включениями и порами	933
<i>Чебаков М. И., Данильченко С. А.</i> Моделирование износа сферического шарнирного соединения с тонким композитным покрытием	947
<i>Ли Я. Ц., Чжан Д. Х.</i> Распределение локальных напряжений в волокнисто-армированных композитах с учетом термических напряжений отверждения	959
<i>Мирзаэй А., Дарбанди А. Х., Тагавиан С. Х.</i> Экспериментальное исследование влияния z-штифтов с нанесенным адгезивом на механическое поведение соединений внахлестку	975

Чаттерджи Д., Гош А., Чакраворти Д. Анализ разрушения первого слоя в косоугольных пластинах из слоистых композитов при разных граничных условиях на кромках . . . 989

Роберт Дмитриевич Максимов 1013

Т. 57, № 6

Кондаков И. О., Чернов А. В., Шаныгин А. Н., Сапожников С. Б. Защита силовых элементов композитной сетчатой оболочки летательного аппарата от низкоскоростных локальных ударных воздействий 1025

Хохлов А. В. Ползучесть и длительная прочность толстостенной трубы из нескольких слоев нелинейно-вязкоупругих материалов, нагруженной внутренним и внешним давлением 1037

Хури Мусса Х., Шаллита Г., Яред В., Аби Ризк М. Анализ с предсказанием влияния композитного слоя из полипропилена, наполненного тальком, на кольцевую жесткость многослойной пластиковой трубы 1065

Бочкарев С. В., Сальников А. Ф., Галиновский А. Л. Математический алгоритм оценки акустической проводимости волнового фронта для верификации диагностической модели при анализе дефектов в полимерном композитном материале 1079

Полилов А. Н., Склемина О. Ю., Татусь Н. А. Метод проектирования структуры армирования симметричными парами слоев на примере композитного баллона для сжатого газа 1093

Демичев В. И., Сергеев А. Ю., Мотова Т. А., Демченко Л. А., Михайловский К. В. Полимер-композитные емкости с высоким массовым совершенством для хранения и транспортировки газов под давлением 1115

Ахундов В. М. Метод неявных конечных разностей в механике деформирования однородных и кусочно-однородных тел 1129

Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Деформирование упругой трехслойной круговой пластины в нейтронном потоке 1155

Агуиб С., Ших Н., Сеттет А., Нур А., Мелусси М., Джедид Т. Экспериментальный анализ поведения при растяжении балки из гибридного композита с регулируемыи механическими свойствами 1171

Ли Чун Кё, Ли Бён Ку. Связанные изгибно-крутильные свободные колебания аксиально-функционально-градиентной круглоизогнутой балки 1181

Алсади М. Изучение расслоения и изгибного поведения эпоксидных композитов, армированных углеродными и органическими волокнами и частицами карбида кремния 1201

Указатель статей, опубликованных в журнале “Механика композитных материалов” в 2021 году 1215

Авторский указатель за 2021 год 1220

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЗА 2021 ГОД

- Аби Ризк М. 6 1065**
Абиди А. 4 767
Агуиб С. 6 1171
Аджикгоз А. 4 721
Азарафза Р. 2 261
Айдин Л. 3 457
Акбаров С. Д. 2 233
Алсади М. 6 1201
Амику С. 4 659
Анджс М. 1 83
Анискевич К. 5 823
Ань В. Т. Т. 5 869
Атлуханова Л. Б. 2 291
Артамонова Н. Б. 1 27
Артем Х. С. 3 457
Ауриемма Ф. 1 3
Ахундов В. М. 6 1129
- Багиров Е. Т. 2 233**
Бакар М. 3 553
Бакулин В. Н. 5 887
Бао Цз. С. 2 365
Баранец И. В. 4 751
Безази А. 4 767
Безмельницын А. В. 1 69, 5 839
Белов П. А. 4 611
Беляк О. А. 5 917
Бен Салем С. 4 767
Бойко Д. С. 4 689
Бойцова Д. А. 5 887
Бочкарев С. В. 6 1079
Бумедири Х. 4 767
Буслаева О. С. 1 69
Бялковская А. 3 553
- Ван Б. Ч. 4 783**
Ван С. Б. 4 783
Ван Ш. 2 299
Варна Я. 1 45
Веверис А. 1 83
Вольфсон С. И. 4 751
Ву С. И. 4 645
Вэнь В. Д. 1 139
- Гайдачук В. Е. 1 125**
Галиновский А. Л. 6 1079
Гануликова Б. 3 553
Гао Д. Я. 1 139
Гарбин Д. Ф. 4 659
Гилев В. Г. 3 517
Го Ф. Л. 3 535
Гош А. 5 989
Гравитис Я. 1 83
Гритченко М. Э. 4 673
Гупта М. К. 1 113, 2 351
- Давар А. 2 261**
Данильченко С. А. 5 947
Дарбанди А. Х. 5 975
Двойнос Я. Г. 4 739
Деведжи Х. А. 3 457
Демирджан Г. 4 721
Демичев В. И. 6 1115
Демченко Л. А. 6 1115
Джам Дж. И. 2 261
Джедид Т. 6 1171
Ди Скьюва М. 1 3
Долбин И. В. 2 291
Доронкин П. 2 331
Дык Н. Д. 5 869
- Е Цз. С. 3 535**
- Журовский В. 3 553**
- Игнатова А. В. 1 69, 5 839**
Икунь Ду. 3 395
Инь Д. Я. 2 365
- Каблов Е. Н., 5 805**
Казаков Ю. М. 4 751
Качмарчик Й. 3 441
Ким Г. 5 853
Киса М. 4 721
Киселев Ф. Б. 1 27
Клементьев П. Д. 1 27
Козлов Г. В. 2 291
Кондаков И. О. 6 1025
Кондратьев А. В. 1 125
Кондюрин А. В. 3 517
Кудимова А. Б. 5 933
Кудрявцев О. А. 1 69, 5 839
Кун Л. М. 4 783

- Леоненко Д. В. **6 1155**
 Ли Д. **3 411**
 Ли И. Д. **3 535**
 Ли Чж. **3 573**
 Ли Я. Ц. **5 959**
 Ли Бён Ку **6 1181**
 Ли Чун Кё **6 1181**
 Лиитгия Т. **1 83**
 Литвинов С. В. **3 501**
 Ло Х. Б. **3 535**
 Лоукил М. **1 45**
 Лурье С. А. **4 611**
 Львов Г. И. **3 481**
 Лю Чж. **3 573**
- Малахов А. В. 3 411**
 Маяк Ю. **1 3**
 Мелусси М. **6 1171**
 Мирзаэй А. **5 975**
 Миронов А. **2 331**
 Мироновс Д. **2 189**
 Митрофанов О. **3 429**
 Михайловский К. В. **6 1115**
 Михаськив В. В. **5 901**
 Мотова Т. А. **6 1115**
 Мурадханов Р. Р. **1 27**
 Мэн С. **2 299**
- Наседкин А. В. 5 933**
 Наседкина А. А. **5 933**
 Нгуен Ф. Д. **5 869**
 Не Г. Цз. **1 161**
 Недбай А. Я. **5 887**
 Новик В. А. **4 739**
 Нур А. **6 1171**
 Нуруллаев Э. М. **2 319**
- Озен М. 4 721**
 Оливенко Н. А. **5 839**
 Орлов Е. А. **1 27**
- Пакела В. 3 441**
 Панин С. В. **2 223**
 Подыман Г. С. **4 739**
 Полилов А. Н. **3 411, 6 1093**
 Пупурс А. **1 45**
 Пшибылек М. **3 553**
- Раджагопал А. 5 933**
 Рахманов А. Ю. **3 517**
 Русаков С. В. **3 517**
- Сальников А. Ф. **6 1079**
 Сапожников С. Б. **1 69, 5 839, 6 1025**
 Саху П. **1 113**
 Сергеев А. Ю. **6 1115**
 Сердюк А. О. **4 705**
 Сердюк Д. О. **4 705**
 Сегтет А. **6 1171**
 Склемина О. Ю. **1 93**
 Славский С. **3 441**
 Сорренти М. **1 3**
 Сривастава С. К. **2 351**
 Старкова О. **5 823**
 Старовойтов Э. И. **6 1155**
 Старцев В. О. **5 805**
 Стасюк Б. М. **5 901**
 Стеркенбург Р. **5 853**
 Сточек Р. **3 553**
 Суворова Т. В. **5 917**
 Сюй Х. М. **4 783**
 Сюэ Я. Цз. **4 783**
 Сяо Ю. **3 573**
- Тагавиан С. Х. 5 975**
 Тамминен Т. **1 83**
 Тагусь Н. А. **6 1093**
 Токовый Ю. В. **4 689**
 Тонатто М. Л. **4 659**
 Тупчаускас Р. **1 83**
 Тянь С. **3 411**
- У Г. Д. 4 783**
 У Цз. **3 591**
 Уймаз Б. **1 97**
- Файез М. С. 2 261**
 Фаллахи С. **2 261**
 Федотенков Г. В. **4 705**
 Футч Т. **5 853**
- Хан М. ЗР. 2 351**
 Хасанова А. Д. **4 751**
 Хванг С. Ф. **4 645**
 Хохлаев А. В. **6 1037**
 Хуан Цз. **1 139**
 Хуон В. Т. **5 869**
 Хури Мусса Х. **6 1065**
 Хусаинов А. Д. **4 751**
- Цао Цз. 1 161**
 Цзан М. **3 573**
 Цзян Ю. П. **3 591**
 Ци Я. Я. **4 783**

Чакраворти Д. **5** 989
Чаттерджи Д. **5** 989
Чебаков М. И. **5** 947
Чепурненко А. С. **3** 501
Чернов А. В. **6** 1025
Черноус Д. А. **2** 223
Чжан Д. Х. **5** 959
Чжан Цян **1** 27
Чжан Ч. **2** 299
Чжэн В. **4** 783
Чжу Ч. Ф. **2** 365
Чжу Ю. **3** 573
Чжу Я. **3** 591
Чжун Чж. **1** 161
Чистяков П. В. **4** 673
Чой Х. **2** 223
Чу Ф. Я. **1** 16
Чудинов В. С. **3** 517
Чэнь С. Ч. **2** 365

Шаллита Г. **6** 1065
Шаныгин А. Н. **6** 1025
Шебанов С. М. **2** 381
Шешенин С. В. **1** 27, **3** 395, **4** 673
Шилько С. В. **2** 223
Шимичек М. **3** 441
Ших Н. **6** 1171

Юй Т. Ц. **1** 161

Языев С. Б. **3** 501
Янелюкстис Р. **2** 189
Янковский А. П. **4** 629
Янь И. **3** 535
Яред В. **6** 1065
Яо В. С. **1** 139
Яо Л. **2** 299

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Кондаков И. О., Чернов А. В., Шаныгин А. Н., Сапожников С. Б.</i> Защита силовых элементов композитной сетчатой оболочки летательного аппарата от низкоскоростных локальных ударных воздействий	1025
<i>Хохлов А. В.</i> Ползучесть и длительная прочность толстостенной трубы из нескольких слоев нелинейно-вязкоупругих материалов, нагруженной внутренним и внешним давлением	1037
<i>Хури Мусса Х., Шаллита Г., Яред В., Аби Ризк М.</i> Анализ с предсказанием влияния композитного слоя из полипропилена, наполненного тальком, на кольцевую жесткость многослойной пластиковой трубы	1065
<i>Бочкарев С. В., Сальников А. Ф., Галиновский А. Л.</i> Математический алгоритм оценки акустической проводимости волнового фронта для верификации диагностической модели при анализе дефектов в полимерном композитном материале	1079
<i>Полилов А. Н., Склемина О. Ю., Татусь Н. А.</i> Метод проектирования структуры армирования симметричными парами слоев на примере композитного баллона для сжатого газа	1093
<i>Демичев В. И., Сергеев А. Ю., Мотова Т. А., Демченко Л. А., Михайловский К. В.</i> Полимер-композитные емкости с высоким массовым совершенством для хранения и транспортировки газов под давлением	1115
<i>Ахундов В. М.</i> Метод неявных конечных разностей в механике деформирования однородных и кусочно-однородных тел	1129
<i>Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В.</i> Деформирование упругой трехслойной круговой пластины в нейтронном потоке	1155
<i>Агуиб С., Ших Н., Сеттет А., Нур А., Мелусси М., Джедид Т.</i> Экспериментальный анализ поведения при растяжении балки из гибридного композита с регулируемыми механическими свойствами	1171
<i>Ли Чун Кё, Ли Бён Ку.</i> Связанные изгибно-крутильные свободные колебания аксиально-функционально-градиентной круглоизогнутой балки	1181
<i>Алсади М.</i> Изучение расслоения и изгибного поведения эпоксидных композитов, армированных углеродными и органическими волокнами и частицами карбида кремния	1201
Указатель статей, опубликованных в журнале “Механика композитных материалов” в 2021 году	1215
Авторский указатель за 2021 год	1220

CONTENTS

<i>Kondakov I. O., Chernov A. V., Shanygin A. N., and Sapozhnikov S. B.</i> Protection of aircraft lattice shell made of UD CFRP ribs from low-velocity impacts	1025
<i>Khokhlov A. V.</i> Creep and long-term strength of a laminated thick-walled tube of nonlinear viscoelastic materials loaded by external and internal pressures	1037
<i>Khoury Moussa H., Challita G., Yared W., and Abi Rizk M.</i> Predictive analysis of the influence of a polypropylene-talc composite layer on the ring stiffness of a multilayer plastic pipe	1065
<i>Bochkarev S. V., Salnikov A. F., and Galinovsky A. L.</i> Mathematical algorithm for estimating the acoustic conductivity of the wavefront for verification of a diagnostic model in an analysis of defects in a polymer composite material	1079
<i>Polilov A. N., Sklemina O. Yu., and Tatus' N. A.</i> Design method of reinforcement structure with symmetric pairs of layers by the example of composite gas tank	1093
<i>Demichev V. I., Sergeev A. Yu., Motova T. A., Demchenko L. A., and Mikhailovskii K. V.</i> Polymer-composite vessels with a high mass perfection for the storage and transportation of a high-pressure gas	1115
<i>Akhundov V. M.</i> The implicit finite difference method in the deformation mechanics of homogeneous and piecewise homogeneous bodies	1129
<i>Starovoitov E. I. and Leonenko D. V.</i> Deformation of an elastic circular sandwich plate in a neutron flow	1155
<i>Aguib S., Chikh N., Settet A., Nour A., Meloussi M., and Djedid T.</i> Experimental analysis of the tensile behavior of a hybrid composite beam with adjustable mechanical properties	1171
<i>Lee Joon Kyu and Lee Byoung Koo.</i> Coupled flexural-torsional free vibration of an axially functionally graded circular curved beam	1181
<i>Alsaadi M.</i> A study on the delamination and flexural behavior of carbon- and aramid-fiber-reinforced epoxy composites with silicon carbide particle inclusions	1201
Contents of the journal <i>Mekhanika Kompozitnykh Materialov</i> in 2021	1215
Author's index for 2021	1220

Вниманию читателей!

Подписаться на журнал “Механика композитных материалов” (индекс 79676) на 2022 г. можно через каталог “Урал-Пресс” или в редакции. В каталоге указаны два индекса, по которым журнал можно выписать сразу на календарный год или оформить подписку на один номер:

индекс **6115_01** — для оформления подписки на год (6 номеров);
индекс **009416** — для оформления подписки на один номер
(по желанию подписчика).

У компании «Урал-Пресс» есть подразделение «Деловая-Пресса», принимающее подписку online. Подписку можно оформить на сайте, пройдя по ссылке:

<http://ej.uz/mkmpod>

или написать на e-адрес: *podpiska@delpress.ru* письмо с просьбой рассчитать стоимость заказа и получить счет на оплату.

В онлайн-формате прошел IV форум «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии»

2 и 3 декабря 2021 г. состоялся масштабный международный форум (<https://forum.emtc.ru/>) в отрасли новых материалов, проводимый НОЦ «Композиты России» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Форум прошел в рамках программы мероприятий Года науки и технологий и программы «Приоритет-2030». В 2021 году Форум объединил два современных формата: онлайн и виртуальную реальность (VR).

В рамках первого дня прошло пленарное заседание «Цифровое материаловедение». Прямая трансляция велась с площадок МИА «Россия сегодня» и МГТУ им. Н.Э. Баумана. Модератором пленарного заседания выступил директор НОЦ «Композиты России» Владимир Нелюб. Он отметил, что МГТУ им. Баумана — победитель программы «Приоритет-2030». “Сейчас перед нами вызов и одновременно возможность произвести трансформацию в обучении материаловедению и создать новые материалы и продукты.” О практической работе в отрасли рассказал заместитель директора по науке «Композиты России» Александр Полежаев.

“Когда мы создавали заявку на «Приоритет-2030», разрабатывали трек по новым материалам, то основывались на собственном 10-летнем опыте. Принимая это во внимание, мы разработали концепцию, которую назвали «Материалы как сервис»”, — отметил он.

Данная платформа будет доступна даже для тех компаний-производителей, у которых нет собственных технических подразделений, своеобразный маркетплейс, куда может обратиться компания с идеей своего продукта, не вдаваясь в технические тонкости производства.

Затем обсудили отрасль гражданского строительства. Научный руководитель НИИ СМиТ НИУ МГСУ Андрей Пустовгар рассказал о системе на основе искусственного интеллекта, прогнозирующей срок службы строительных материалов. “Очень важно контролировать жизненный цикл материала, в том числе на стадии утилизации. В связи с этим сейчас заметен тренд на использование природоподобных материалов”.

Михаил Иванов, доцент кафедры «Экология и промышленная безопасность» МГТУ им. Н.Э. Баумана продолжил тему важности проработки жизненного цикла материала таким образом, чтобы в цикл закладывалась разумная утилизация.

«Сегодня вся наша деятельность оценивается с точки зрения нашего воздействия на окружающую среду», — отметил он.

Тренды современного материаловедения обсуждали спикеры из разных университетов и компаний, которые поделились своим опытом и наблюдениями: Ольга Оспенникова, советник президента АО «ТВЭЛ», Владимир Лазарев, начальник лаборатории стабилизированных лазерных систем МГТУ им. Н. Э. Баумана, Игорь Сиротин, декан факультета нефтегазохимии и полимерных материалов РХТУ им. Д. И. Менделеева, Андрей Новиков, доцент кафедры физической и коллоидной химии РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина.

Моделирование процесса полимеризации с помощью цифровых технологий, геном материалов, работа с трендовыми материалами — направления, развивающиеся в РХТУ.

А в РГУ нефти и газа им. Губкина ведутся проекты по использованию природного сырья для производства композиционных материалов, например целлюлозы.

В рамках пленарного заседания обсудили и еще одну программу поддержки — НТИ. Заместитель директора Центра НТИ «Цифровое материаловедение: новые материалы и вещества» МГТУ им. Н. Э. Баумана Александр Калинин рассказал об актуальных направлениях работы. В их числе не только научные проекты: база данных по материалам, синтез новых термопластов, моделирование свойств материалов, инженерное ПО, но и образовательные. Тему подготовки кадров продолжила Маргарита Стоянова, замдиректора Центра НТИ. Она также модерировала отраслевую конференцию «Ключевые тренды развития и повышения качества высшего технического образования на базе новых образовательных сетевых технологий в университетах РФ и мира». Свою работу также начали семь научно-производственных секций, доклады были заслушаны и во второй день Форума. По итогам будет издан сборник научных статей, индексируемый Scopus.

В рамках Форума также прошла «битва» молодых ученых Science Slam Composite forum. Пять исследователей из разных вузов встретились на одной сцене, чтобы интересно и понятно рассказать о своем исследовании, а зрители выбирали победителя онлайн-голосованием. На Science Slam рассказали, что такое полимерные композиционные материалы и как их создают, объяснили, как повысить электрохимическую стабильность солнечных батарей, показали, как создать устройство для «космической доставки», разобрали оптические свойства алмазов для квантовых устройств и рассмотрели, как в научной лаборатории исследуют композиты для авиации, чтобы путешествия становились дешевле и безопаснее.

Трансляция из научных лабораторий продолжилась и во второй день форума. Специалисты НОЦ «Композиты России» МГТУ им. Н. Э. Баумана провели четыре мастер-класса в форматах онлайн и виртуальной реальности. В лаборатории Центра показали и рассказали, как изготовить футбольные шитки из композиционных материалов методом вакуумной инфузии. А в виртуальной лаборатории также методом вакуумной инфузии изготавливали крыло беспилотного летательного аппарата.

Посмотреть мастер-классы можно в записи в аккаунтах Instagram:

- мастер-класс по изготовлению шитков (live) — https://www.instagram.com/p/CXBD0oPo_YU/;

- VR-мастер-класс — <https://www.instagram.com/p/CXBNq0GIIdUS/> Кстати, каждый желающий может самостоятельно обучиться в нашей виртуальной лаборатории — <https://drive.google.com/drive/folders/1INMTTsAMjDhqLO6rMKXenpA5VHoYbjLQ>.

Запись пленарного заседания и других мероприятий Форума можно посмотреть — <https://www.youtube.com/watch?v=1H8uprriw5Q>.

Фотографии: <https://disk.yandex.ru/d/Xt3VcBQKlffEFA>

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Список некоторых планируемых конференций

2022—2023

PHENMA 2021

10th Anniversary International Conference on Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications

May 23-27, 2022, Rostov-on-Don, Russia

<https://phenma2021.sfedu.ru/>

ICSMT 2022

The 7th International Conference on Smart Materials Technologies

April 20-22, 2022, Moscow, Russian Federation

<http://icsmt.org/>

Composite-Expo 2022

14th Edition of the International Specialized Exhibition on Raw Materials, Equipment and Technologies for Composites' Producing

March 29-31, 2022, Moscow, Russia

<http://www.composite-expo.com/>

DeMEASS2020

10th Design, Modelling and Experiments of Advanced Structures and Systems Conference

May 1-4, 2022, Scopello (Sicily), Italy

<http://www.mul2.polito.it/demeass2020/index.php>

Composite-Sandwich Conference

May 24-25, 2022, Halle (Saale), Germany

<https://www.faserverbund-sandwich.de/en/home/>

Engineering Mechanics 2022

27/28th International Conference

May 9 -12, 2022, Žďár Highlands, Czech Republic

<https://www.engmech.cz/im/im/>

IUTAM Symposium on Enhancing Material Performance by Exploiting Instabilities and Damage Evolution

June 5-10, 2022, Warsaw, Poland

<http://iutam2022warsaw.ippt.pan.pl/importantdates.html>

ECCM20

The 20th European Conference on Composite Materials

June 26-30, 2022, Lausanne, Switzerland

<https://eccm20.org/>

ECF23

23rd European Conference on Fracture – ECF23

June 27 — July 1, 2022, Madeira Island, Portugal

<https://www.ecf23.eu/>

DRAF 2022

International Symposium on Dynamic Response and Failure of Composite Materials

June 28 — July 01, 2022, Island of Ischia, Italy

<https://www.drafconference.com/>

MDA 2022

The 4th International Conference on Materials Design and Applications 2022

July 07-08, 2022, FEUP, Porto, Portugal

<https://web.fe.up.pt/~mda2022/>

EUCASS-3AF

9th European Conference for AeroSpace Sciences

June 27 — July 01, 2022, Lille Grand Palais, France

<https://www.eucass-3af-2022.eu/>

ICEM-2022

19th International Conference on Experimental Mechanics

July 17-21, 2022 Kraków, Poland

<https://icem19.org/en>

CMM-SolMech 2022

24th International Conference on Computer Methods in Mechanics (CMM) and the 42nd Solid Mechanics Conference (SolMech)

September 5-8, 2022, Świnoujście, Poland

<http://cmm-solmech.ippt.pan.pl/index.html>

ICAS 2022

33rd Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences

September 4 – 9, 2022, Stockholm Sweden

<https://icas2022.com/>

DRMS2023

The first International Conference on Durability, Repair and Maintenance of Structures

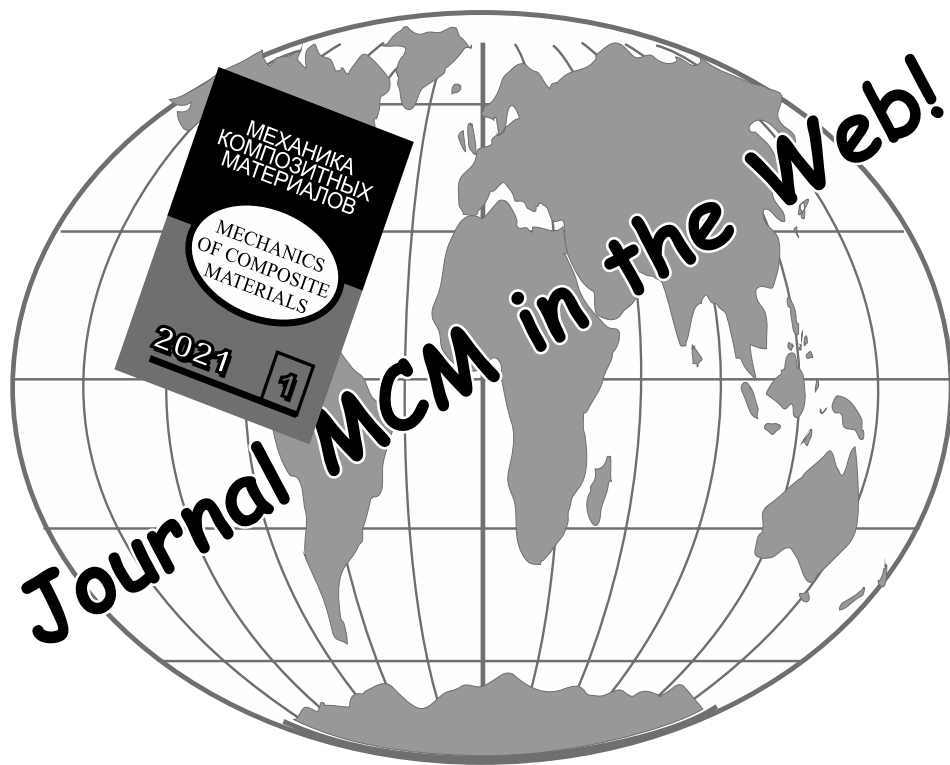
March 16-17, 2023, University of Porto (FEUP), Porto, Portugal

<https://web.fe.up.pt/~drms2023/>

Modern Materials and Manufacturing 2023

April 25-27, Tallinn, Estonia

<https://taltech.ee/en/mmm2021>



Адрес редакции:

ул. Айзкрауклес, 23, Рига, LV-1006 Латвия
<https://www.apgads.lu.lv/journals/mkm/>
e-mail: mcm@pmi.lv, tatjana.gubina@pmi.lv

Address:

23 Aizkraukles St., Riga, LV-1006 Latvia
<https://www.apgads.lu.lv/en/journals/mkm/>
e-mail: mcm@pmi.lv, tatjana.gubina@pmi.lv

Редактор *Т. В. Губина*

Редактор английского текста *А. Лагздиньш*

Перевод для издания журнала на английском языке *В. Кулакова, А. Лагздиньша*

Компьютерная верстка *А. В. Пумтурс*

Корректор *С. А. Видинеев*

Отпечатано в типографии SIA "Eiro Print", ул. Апес, 5А – 89, Рига, LV-1039 Латвия