Inženieris A. Razums

Mechanika

Rīgā, 1921.

Inženieris A. Razums.

Mechanika.

1. Kinematika.
2. Dinamika.
3. Statika.
4. Cietā ķermeņa dinamika.
5. Piemēri.

Prof. Bīmaņa kgm. labai
piemiņai no
9/XII 21. A. Razums

Rīgā, 1921.
Komanditsabiedrības „Daile un Darbs" izdevums.

Iespiests Valstspapīru spiestuvē.

Priekšvārds.

Mechanikas kurss domāts techniskām un vidusskolām, kā arī pašizglītībai techniskiem arodniekiem, kuŗiem pietiekošas zināšanas elementarā matematikā.

Minētais kurss ir viens no pirmajiem techniskiem izdevumiem latviešu valodā, tādēļ definējumos var būt ieviesušās izteiksmes nenoteiktības un valodas kļūdas, par kuŗām lūdzu mani atvainot.

Kursa sadalījums, sevišķi sākumā, ņemts no Цингеръ „Механика". Grāmatu iespiežot jaunie termini lietoti tikai pa daļai.

Pieņemtos internacionalos matematikas un mechanikas terminus principiali neatrodu par lietderīgu pārlatviskot.

Rīgā, 1921. gadā. *A. Razums.*

Grāmatu sarakstot izlietoju sekošu literaturu:

Professor Dr. Friedrich Poske „Oberstufe der Naturlehre".
Professor Dr. W. Donle „Lehrbuch der Experimentalphysik".
Professor Dr. W. Weiler „Physikbuch".
Professor Leopold v. Pfaundler „Die Physik des täglichen Lebens".
Professor G. Ch. Mehrtens „Statik und Festigkeitslehre".
Max Fischer „Statik und Festigkeitslehre".
Профессоръ Рижскаго Политехническаго Института Р. Г. Геннигъ „Форономія", „Динамика", „Статика".

Mechanika kā zinātne.

§ 1. Jau dziļā senatnē cilvēks interesējās par kustības parādību dabā, tomēr tikai 17. gadusimtenī šo parādību sāka sistematiski izpētīt zinātnieki Galileo Galilejs (1564.—1642. g.) un Izaaks Ņutons (J. Newton 1642.—1727. g.). Minētie zinātnieki lika pamatus jaunai zinātnei, kas pētīja un izskaidroja kustības, un nosauca šo zinātni par mechaniku. Mechanikas jēdzienu varam definēt šādi:

Mechanika ir mācība par kustību un tās cēloņiem.

Mechanika attīstoties ieguva milzīgu praktisku nozīmi un palika par pamatu visai technikai. Tagad mechaniku mēdz sadalīt divās galvenās daļās: teoretiskā mechanikā un praktiskā mechanikā.

Teoretiskā mechanika pēta un izskaidro kustības; praktiskā mechanika māca, kā šīs kustības izmantot technikā.

Mēs galvenā kārtā nodarbosimies ar teoretisko mechaniku. Tā kā teoretiskās mechanikas uzdevums ir pārāk plašs, tad šo zinātni sadala vēl divās galvenās daļās: kinematikā jeb foronomijā un dinamikā jeb kinetikā.

Šos jēdzienus var definēt šādi:

Kinematika jeb foronomija ir mācība par kustībām, kuras izpēta neatkarīgi no tiem spēkiem, kas šīs kustības rada. Citiem vārdiem — tā ir mācība par iedomātām ģeometrisku ķermeņu, plāksmu, liniju un punktu kustībām.

Kinematika ir zinātne, kuras pamatos likti jēdzieni par ģeometriskām figurām un laiku, kurā šo elementu kustības novēro, bet ne kustību iemesli.

Dinamika jeb kinetika ir mācība par materialo ķermeņu kustībām, sakarā ar spēkiem, kas kustības rada.

Galvenā praktiskās mechanikas pamatdaļa ir dinamika.

Lai visā dinamikas materialā varētu labāki orientēties, šo zinātni dala vēl divās galvenās daļās:

1) Kinetikā — mācībā par ķermeņu kustībām zem spēku iespaida un

2) statikā — mācībā par ķermeņu līdzsvara stāvokli zem spēku iespaida.

Definējot mechaniku — lietojām terminus — „kustība“ un „spēks“.

Kustība ir ķermeņa vietas maiņa telpā kaut kādā laika brīdī.

Spēks ir ķermeņa kustības vaj jau uzsāktās kustības virziena maiņas iemesls.

Mechaniku dala vēl pēc agregatstāvokļa dabā, jo materiali var būt cieti, šķidri un gāzveidīgi. Tādēļ mechaniku iedala:

1) Cieto ķermeņu mechanikā jeb ģeomechanikā.
2) Šķidro ķermeņu mechanikā jeb hidromechanikā.
3) Gāzveidīgo ķermeņu mechanikā jeb aeromechanikā.

Šinī grāmatā aplūkosim tikai ģeomechaniku.

I. Kinematika (foronomija).

§ 2. Par ko spriedīsim elementarajā kinematikā?

Lai dabūtu jēdzienu par elementaro kinematiku, aplūkosim tikai dažus visvienkāršākos un raksturīgākos kustības piemērus, pie kam izvēlēsimies tādus gadījumus, kas būs noderīgi vēlāk dinamikā.

Aplūkosim viena ģeometriska punkta kustības un tad dažus cietu ķermeņu kustību gadījumus.

§ 3. Punkta un ķermeņa kustības.

Ceļš, kādu noiet kustošs punkts, sauc par punkta kustības trajektoriju.

Punkta kustības raksturs pilnīgi zināms, ja ir zināma trajektorija un vieta, kur punkts atrodas uz trajektorijas katrā momentā.

Ķermeņa kustība ir pilnīgi zināma, ja zinām katra ķermenim piederīga punkta kustības.

Ja ķermenis kustas, tad katrs ķermeņa punkts var kustēties savādāki. Tikai atsevišķā gadījumā visi ķermeņa punkti kustas pa vienādām trajektorijām; šādu kustību nosauc par virzes jeb translatorisko kustību.

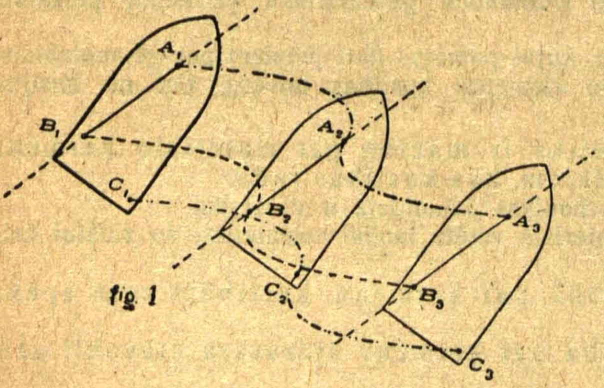


fig. 1

Virze ir tāda kustība, kur katra taisna linija, kas savieno kaut kuŗus no diviem ķermeņa punktiem, ķermenim kustoties pārvietojas pati sev paraleli.

Piem., ķermenim kustoties taisnā linija, kas savieno punktus A un B, ieņem pakāpeniski sekošus stāvokļus: $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ u. t. t., pie kam visas šīs linijas ir paralelas $A B$ (fig. 1.). Šinī gadījumā visi ķermeņa punkti, piem. A, B, C u. t. t., kustas pa vienādām trajektorijām $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $C_1 C_2 C_3$ u. t. t.

Ķermeņa virzes jeb translatoriskās kustības noteikšanai pilnīgi pietiek, ja pārzinām kaut kāda ķermeņa punkta kustības, jo tad pēc augšminētā zināsim arī pārējo punktu kustības.

Vēlāk aplūkosim arī griezes kustību un savienotu griezes un translatorisko kustību.

§ 4. Absolutā un relativā kustība.

Par kustību dabūjam jēdzienu tikai tad, ja salīdzinām kustošā punkta stāvokli ar citiem mierā esošiem punktiem vaj ķermeņiem, starp kuŗiem punkts kustas. Punkts kustas relativi, ja izrādās, ka citi punkti atrodas mierā tikai attiecībā uz kustošos punktu, bet ja pētam tālāk, attiecībā uz citiem punktiem un ķermeņiem dabā, tad izrādās, ka arī mierā esošie punkti kustas.

Ja iedomājamies telpā dažus punktus, kas atrodas absolutā mierā, tad kustības, kuŗas salīdzinām ar šiem punktiem, nosauc par absolutām.

Realā dabā nav punktu, kas atrastos pilnīgā mierā, tādēļ arī miera un kustības stāvoklis var būt tikai relativs.

Ja pasažieris brauc automobilī, viņš sēd mierīgi uz sēdekļa un attiecībā pret automobili atrodas miera stāvoklī, bet kopā ar automobili kustas attiecībā pret šoseju; šoseja atrodas miera stāvoklī pret zemes lodi, bet pēdējā griežas ap zemes lodes asi, zemes lodes ass griežas ap sauli.

Viena un ta paša ķermeņa — pasažiera — kustības ir dažādas, ja tās attiecina pret šoseju, zemes lodi, sauli.

§ 5. Dažādi kustības veidi. Vienmērīgā kustība.

Katru punkta kustību varam raksturot pēc trajektorijas virziena un pēc ātruma. Attiecībā uz trajektoriju, punkta kustības var būt taisnvirziena un līkumainas. Pirmā gādījumā punkts kustas pa taisnu liniju, otrā pa līku liniju.

Līkumainās kustības var būt dažādas. Piem. pulksteņa rādītājs kustas pa aploci, planetas griežas ap sauli pa elipsu, ja sviežam gumijas bumbiņu, tad tā kustas pa parabolu u. t. t.

Neatkarīgi no virziena, kustības raksturo ātruma veids, un mēs atšķiŗam vienmērīgu un nevienmērīgu kustību.

Par vienmērīgu kustību nosauc tādu kustību, kur punkts vienādos laika sprīžos noiet vienādus attālumus.

Par nevienmērīgu kustību nosauc tādu kustību, kur punkts vienādos laika sprīžos noiet nevienādus attālumus.

Jāatzīmē, ka par vienmērīgu kustību varam atzīt tikai tādu kustību, kur noietie attālumi ir vienādi kaut kādos vienādos laika sprīžos. Ja piem. katrā sekundē noietie attālumi ir vienādi, tad tiem jābūt vienādiem arī $^1/_2$ sekundē, $^1/_4$ sekundē u. t. t. Neapstrīdami vienmērīga kustība būs kaut kāda punkta, kuŗu atzīmējam uz zemes virsas, griešanās ap zemes asi.

§ 6. Vienmērīgās kustības ātrums.

Par vienmērīgās kustības ātrumu nosauc to attālumu (ceļu), kuŗu punkts noiet noteikta laika vienībā. Tā tad ātrumu atrodam, dalot noieto attālumu ar laiku, kādā šis attālums noiets.

Piem. *Punkts, vienmērīgi kustoties, noiet 5 sekundēs 75 cm.; kāds ir punkta ātrums?

$$\frac{75 \text{ cm.}}{5 \text{ sek.}} = 15 \text{ cm. vienā sekundē.}$$

Par ātruma vienību nosauc tādu ātrumu, kas mērīts lineari cm. vienā sekundē. Tā tad par pamata gaŗuma mēru pieņem 1 santimetru un par pamata laika mēru 1 sekundi. Ātrumu apzīmē ar santimetriem sekundē — $\frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$ Var būt zināms ātrums arī, piem., asīs stundā, verstēs stundā, kilometros minutē u. t. t. Tomēr visos gadījumos, kad mechanikas un technikas grāmatās nav apzīmēts, kādās mēra vienībās ātrums mērīts, jāsaprot $\frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$

Piem. * Automobils 0,0001 sek. noiet 1 mm., kāds būs automobila ātrums cm./sec. vaj kilometru stundās? Atbilde: 1000 cm./sec. un 36 klm./stundā $\left(\frac{\text{kl.}}{\text{h.}}\right)$.

* Pulksteņa stundu rādītāja gaŗums 1,5 cm., minušu rādītāja gaŗums 2 cm., un sekundu — 0,6 cm. Aprēķināt, ar kādu ātrumu cm./sec. kustas rādītāju gali.

* Attālums no zemes līdz stāvošai zvaigznei Vegai ir 32 „gaismas gadi", t. i. gaisma no Vegas līdz zemei nokļūst 32 gados. Aprēķināt kilom. attālumu no Vegas līdz zemei.

Dažādu ķermeņu vidējie ātrumi.

Ķermeņa nosaukums.		Vidējais ātrums mm., km.,m./sec.u.stundā.	Vidējais ātrums $\frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$
Gliemezis		1,6 mm./sec.	0,16
Kājnieks		5,5 km./h.	$1{,}5.10^2$
Slidu skrējējs		13 m./sec.	$1{,}3.10^3$
Vējš	mērens	7 m./sec.	$0{,}7.10^3$
	stiprs	12 m./sec.	$1{,}2.10^3$
	viesulis . . . līdz	50 m./sec.	5.10^3
Kamielis soļiem		4 km./h.	$1{,}1.10^2$
Jājams zirgs	līdz	25 m./sec.	$2{,}5.10^3$
Bezdelīga		65 m./sec.	$6{,}5.10^3$
Okeana kuģu ātrums	parastais	30 km./h.	$0{,}83.10^3$
	maksimums	45 km./h.	$1{,}25.10^3$
Lokomotive		160 km./h.	$4{,}4.10^3$
Automobils	līdz	150 km./h.	$4{,}2.10^3$
Lielgabala lode, sākuma ātrums	līdz	940 m./sec.	$9{,}4.10^4$
Punkts uz zemes virsas	uz ekvatora	464 m./sec.	$4{,}64.10^4$
zemei apgriežoties	uz platuma 45°	328 m./sec.	$3{,}28.10^4$
diennaktī	„ „ 60°	232 m./sec.	$2{,}32.10^4$
Zemes griešanās ap sauli		29,8 km./sec.	$2{,}98.10^6$
Skaņa gaisā (pie 0°)		332 m./sec.	$3{,}32.10^4$
Gaisma (tukšumā)		300000 km./sec.	3.10^{10}

§ 7. Vienmērīgās kustības formulas.

Iedomāsimies punktu, kas vienmērīgi kustas pa taisnu liniju AB (fig. 2.). Atzīmēsim uz taisnās kaut kādu punktu O un pieņemsim to par attālumu mērīšanas sākumu. Visus attālumus, kas mērīti pa labi no punkta O, nosauksim par **pozitiviem** un tos, kas mērīti pa kreisi no punkta O — par **negativiem**. Šādi katram punktam uz linijas O būs pozitivs vaj negativs attālums, piem., $+s_0$; $+s$; $-s_1$ u. t. t.

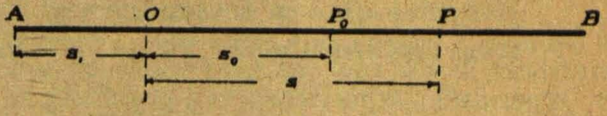


fig. 2

Ātrumu v pieņemsim par pozitivu, ja punkts kustas pa labi no O, un par negativu, ja punkts kustas pa kreisi no O.

Lai varētu aprēķināt laiku, pieņemsim kādu momentu par **sākuma laiku** un katru vēlāko laika brīdi skaitīsim par **pozitivu laiku** un katru agrāko laika brīdi par **negativu laiku**. Šādi, ja atzīmējam laiku ar t, katram vēlākam laika brīdim ir pozitivs skaitlis un katram agrākam — negativs skaitlis.

Pieņemsim, ka punkts kustas vienmērīgi pa liniju AB un ka tanī momentā, kad sākām kustošos punktu novērot, tas atradās P_0.

Punkta ātrums ir v, novērojums ilgst t sekundes; pēc laika t kustošais punkts atradīsies atstatu no sākuma punkta par

$$s = s_0 + vt.$$

Šī ir **vienmērīgās kustības formula.**

Atsevišķā gadījumā, ja attālumu atzīmējumu sākums, t. i. punkts O, sakrīt ar novērojumu sākumu, tad $s_0 = O$, un formula top vienkāršāka

$$s = vt.$$

Šinī formulā t ir laiks, v — ātrums un s — noietais attālums.

Ja zinām taisnās linijas stāvokli telpā un visus datus kustības nolīdzinājuma atrisināšanai, tad pilnīgi pārzinām šī punkta kustības un stāvokli telpā.

No trim lielumiem formulā vienmēr varam atrast trešo, ja divi ir zināmi, tādēļ

$$t = \frac{s}{v},$$

$$v = \frac{s}{t}.$$

Piem. * Lokomotive vienmērīgi kustoties nobrauc 20 sekundēs 100 m. Kāds ir lokomotives ātrums?

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100}{20} = 5 \text{ m.}$$

* Vienmērīgi braucoša automobila ātrums $20 \frac{m.}{sec.}$. Kādu attālumu nobrauc automobils $1^1/_2$ stundā?

$$v = 20 \frac{m.}{sec.}$$
$$t = 1{,}50 \cdot 60 \cdot 60 = 5400 \text{ sec.}$$
$$s = vt = 20 \text{ m.} \cdot 5400 = 10800 \text{ m.} = 108 \text{ klm.}$$

* Cik ilgā laikā vilciens nobrauc 200 klm., ja vilciena ātrums ir $10 \frac{m.}{sec.}$?

$$v = 10 \frac{m.}{sec.}$$
$$s = 200 \times 1000 = 200000 \text{ m.}$$
$$t = \frac{s}{v} = \frac{200000}{10} = 20000 \text{ sec.} = \frac{20000}{60.60} = 55{,}_{55} \text{ stundās.}$$

* Sākuma momenta attālums $s_0 = -20$ cm. un vienmērīgās kustības ātrums $v = -10 \frac{cm.}{sec.}$ Atrast attālumus s' un s'' laika sprīžiem $t' = 5$ sec. un $t'' = -5$ sec.

* Pa vienu un to pašu taisno liniju vienmērīgi kustas divi punkti. Pirmam punktam $s' = -70$ cm. un ātrums $v' = 23 \frac{cm.}{sec.}$; otram punktam $s'' = 50$ cm. un $v'' = -17 \frac{cm.}{sec.}$. Kādā vietā un kādā laikā punkti sastapsies?

* Gaismas ātrums ir $300000 \frac{cm.}{sec.}$ Cik leels būs gaismas ātrums, mērīts $\frac{m.}{sec.}$ un $\frac{cm.}{sec.}$?

§ 8. Kustības attēlošanas grafiskā metode.

Ar vienmērīgās kustības formulas palīdzību vienmērīgā kustība ir pilnīgi noteikta, bet lai labāki varētu kustību pārredzēt, lieto vēl grafisko metodi.

Grafisko metodi zinātnē vispār un mechanikā sevišķi, bieži lieto daudzu jautājumu atrisināšanai. Pēc grafiskās metodes mechaniskos uzdevumus atrisina ar zīmēšanas palīdzību. Ja uzdevumi atrisināti ar formulu palīdzību, tad tādu atrisinājumu nosauc par analitisku. Dažu mechanikas uzdevumu un konstrukciju aprēķināšanai var lietot abas metodes — papildinot vienu metodi ar otru vaj lietojot abas metodes paraleli, lai ar analitisko sasniegtu neapšaubāmu matematisku pareizību un ar grafisko varētu pilnīgi pārredzēt dažādu kustību, spēku u. t. t. darbību.

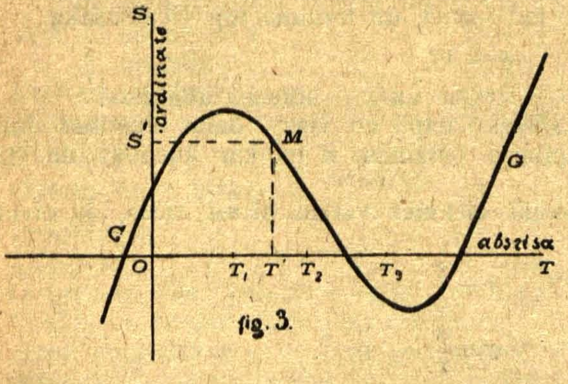


fig. 3.

Šeit lietosim grafisko metodi kustību izpētīšanai. Pieņemsim, ka punkts kustas pa taisno liniju AB visādi, ātrāki un lēnāki, pa labi un pa kreisi no sākuma punkta O. Pieņemsim, ka kustības formula zināma katram momentam t, kādēļ varam aprēķināt katru attālumu s attiecībā uz laiku t.

Zīmēsim taisno OT (fig. 3.) un atmērīsim no punkta O vienādus nogriežņus OT_1, T_1T_2, T_2T_3 u. t. t., piem., *1 cm.* gaŗumā. Pieņemsim, ka katrs nogrieznis attēlo vienādus laika sprīžus, piem. *1 sec.* Pieņemsim arī, ka punkts O attēlo sākuma momentu, t. i., $t=0$, katru nākošo sekundi attēlo nogriežņi, kas atrodas pa labi no O, bet katru agrāko sekundi — nogriežņi, kas atrodas pa kreisi no O, pirmie ir pozitivi un otrie — negativi.

Lai varētu atzīmēt attālumus s, kas attiecas uz laikiem t, zīmēsim no punkta O perpendikularu liniju OS. Nogriežņus uz leju no O skaitīsim par negativiem un uz augšu no O par pozitiviem. Pieņemsim, ka attālumi arī mērīti cm.

Ja atzīmēsim starp šīm divām perpendikularām linijām (fig. 3.) kaut kādu punktu M un vilksim no M perpendikularus uz liniju OT un OS, tad dabūsim uz OT nogriezni OT', kuŗu nosauc par punkta M abscisu, un uz OS nogriezni OS', kuŗu nosauc par punkta M ordinatu. Abus nogriežņus OT' un OS' nosauc par punkta M koordinatiem, bet savstarpēji perpendikularās linijas OT un OS — par koordinatu asīm. Liniju OT, uz kuŗas atliek abscisas, nosauc par abscisu asi, bet liniju OS, uz kuŗas atliek ordinatas, — par ordinatu asi. Punktu O nosauc par koordinatu sākumu.

Pieņemsim, ka koordinatu sistemā punkts M atzīmē kustošā punkta stāvokli attālumam s' laikā t'. Ja atzīmēsim ģeometriskā punkta M stāvokli dažādos momentos t, tad dabūsim vienlaidu liniju, piem. GG. Vienlaidu liniju GG nosauc par izpētamās kustības grafiku.

Šinī grafikā ordinatas t ir proporcionalas attālumiem s, un šo grafiku nosauc par attālumu grafiku.

No uzzīmētās attālumu grafikas, bez kaut kādiem aprēķiniem, skaidri redzam kustības vispārējo raksturu. No sākuma punkts kustas pa labi samērā ātri, tad lēnāki, tad kustas uz kreiso pusi, tad atkal ātrāki uz labo.

§ 9. Attālumu grafika vienmērīgai kustībai.

Pēc formulas

$$s = s_0 + vt$$

pie vienmērīgās kustības varam katram laikam t aprēķināt attālumu s, tā tad varam arī zīmēt attālumu grafiku.

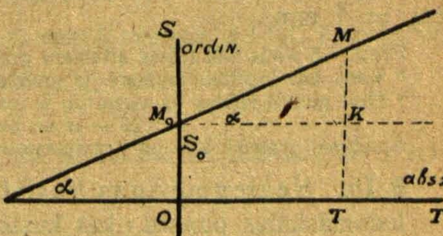


fig. 4

Zīmēsim koordinatu asis OT un OS (fig. 4.). Laika momentam $t=0$ lai būtu $S=S_0$; tad grafika griezīs ordinatu asi punktā M_0 un ordinata OM_0 attēlos attālumu S_0. Lai varētu atzīmēt grafiku piem. momentā t', uz abscisas asi atliekam laiku t' (kas atzīmējas piem. punktā T), velkam perpendikularu un uz tā atliekam nogriezni TM, kas izsaka attālumu S_0+vt.

Abscisa OT vaj M_0K (kas ir viens un tas pats) ir laikam t' proporcionala. Ordinatas pieaugšana par vt' attēlota nogriezni KM un arī ir proporcionala t'. Tā kā katra punkta grafikai nogriežņi KM ir proporcionali nogriežņiem M_0K, tad vienmērīgās kustības grafika ir taisna linija. M_0K proporcionala laikam t, bet KM proporcionala attālumam, kāds noiets laikā t, tādēļ attieksme $\frac{KM}{KM_0}$ ir proporcionala ātrumam.

$$\frac{KM}{M_0K} = tg\ \alpha,$$ kur α ir leņķis starp grafiku un asi.

Vienmērīgās kustības attālumu grafikā leņķa tangenss ir proporcionals kustības ātrumam. Leņķis rodas no slīpās grafikas krustošanās ar abscisu asi.

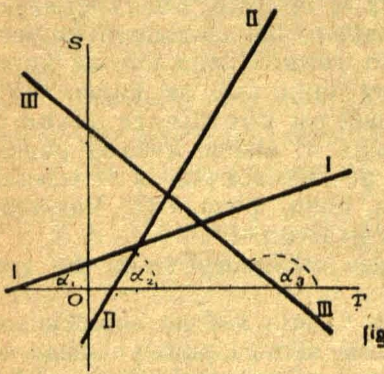


fig. 5

Jo leņķis α lielāks, jo kustība ātrāka. Fig. 5. otra grafika norāda uz ātrāku kustību nekā pirmā grafika.

Negatīvais ātrums rada leņķi α lielāku par 90^0 (grafikā, linija III.).

Grafiku zīmēšanai ieteicams iegādāties kvadratos linijētu papīru. Ja kvadrata katra mazākā mala ir 1 mm. un lielākā 1 cm., tad tādu papīru mēdz technikā nosaukt par milimetru papīru; ja papīrs dalīts kvadratos, kam katra mala ir $\frac{1}{100}$ ass, tad papīru nosauc par ass iedalījumu papīru. Vispār papīru kvadratētu kaut kādos linearos mēros nosauc par koordinatu papīru.

Fig. 6. attēlota grafika pēc formulas

$$s = 10 + 5t.$$

Grafikā 1 sekundei pieņemts proporcionals 1 cm., bet 1 santimetram no noietā ceļa — 1 mm., t. i. laika mērogs 1 sek. = 1 cm., attālumu mērogs 1 cm. = 1 mm.

Piem. * Kāda izskatīsies attālumu grafika, ja $s_0 = o$.
* Kāds būs kustības raksturs, ja grafika paralela ordinatu asij?
* Divi punkti kustas pa vienu un to pašu taisno, pirmās kustības formula:
$s = 28 - 4t$ un otrās $s_1 = -35 + 5t$.
Aprēķināt grafiski, kad un kur sastapsies abi punkti.

§ 10. Nevienmērīgās kustības ātrums.

Iedomāsimies punktu, kas kustas pa trajektoriju, piem. taisnu liniju, nevienmērīgi — dažreiz ātrāki, tad lēnāki, tad apstājas un atkal sāk kustēties u. t. t.

Sekosim kustībai kādu laiku, piem. no t_1 līdz t_2. Pieņemsim, ka pirmā momentā t_1 punktu šķiŗ punkta O attālums s_1, bet momentā t_2 attālums s_2. Tā tad laika sprīdī $t_2 - t_1$ punkts nogājis attālumu $s_2 - s_1$.

Tā kā par nevienmērīgu nosauc tādu kustību, kur vienādos laika sprīžos kustošais punkts (ķermenis) noiet nevienādus attālumus, tad nevienmērīgai kustībai trūkst pastāvīga ātruma.

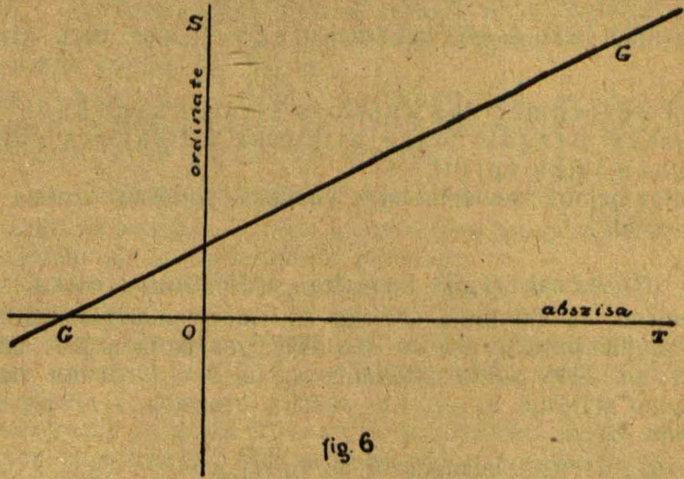


fig. 6

Lai tomēr varētu kaut kādi noteikt nevienmērīgās kustības ātrumu, pieņemam nevienmērīgās kustības vidējo ātrumu, t. i. tādu, ar kuŗu kustošais punkts tanī pat laika sprīdī (t_2-t_1), kādā punkts noiet nevienmērīgi kustoties noteikto attālumu (s_2-s_1), noietu to pašu attālumu vienmērīgi kustoties.

Formula vidējam ātrumam tā tad ir:

$$v_1 = \frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}.$$

Piem. * Ķermenis nevienmērīgi kustoties noiet 5 sekundēs 250 cm. Kāds ir ķermeņa vidējais ātrums?

$$v = \frac{s}{t} = \frac{250}{5} = 50\ \frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$$

Ar šīs formulas palīdzību varam aprēķināt noieto attālumu (s_2-s_1), ja zinām vidējo ātrumu v_1 un laiku t_2-t_1

$$s_2-s_1 = v_1\ (t_2-t_1).$$

Tāpat varam aprēķināt laiku (t_2-t_1), ja zinām vidējo ātrumu v_1 un attālumu (s_2-s_1)

$$t_2-t_1 = \frac{s_2-s_1}{v_1}.$$

Ja pieņemam laika sprīdi $t_2 - t_1$ ļoti īsu, tad var apmēram pielaist, ka šinī īsajā laika sprīdī punkts kustas vienmērīgi; tad attieksme $\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$ šinī laika sprīdī noteic patieso kustības ātrumu.

Sacītais būs jo pareizāks, jo laika sprīdis būs īsāks. Ja bezgalīgi samazinām laiku t_2-t_1, tad attieksme $\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$ dos **īsto ātrumu** momentā t_1.

Tā tad **nevienmērīgās kustības ātrumu kaut kādā laika momentā nosaka bezgali maza attāluma attieksmes robeža pret bezgala mazu laika sprīdi.**

Vispārīgi ņemot, nevienmērīgās kustības patiesais ātrums katrā momentā būs citāds.

§ 11. Nevienmērīgās kustības attālumu grafika.

Piēņemsim, ka līkā linija GG (fig. 7.) ir nevienmērīgās kustības grafika. Atzīmēsim grafikā punktus M_1 un M_2, attiecīgos momentus t_1 un t_2. Ordinatas T_1M_1 un T_2M_2 attēlo attālumus s_1 un s_2. Ordinatu starpība M_2K attēlo attālumu starpību s_2-s_1 un abscisu starpība T_1T_2 un M_1K attēlo laika starpību t_2-t_1.

Vidējais ātrums laika sprīdī no t_1-t_2 ir

$$\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} = \frac{M_2K}{M_1K} = tg\alpha,$$

kur α ir leņķis starp chordu, kas savelk loku M_1M_2 un abscisu ass virzienu.

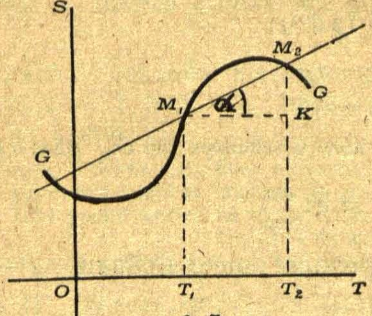


fig. 7.

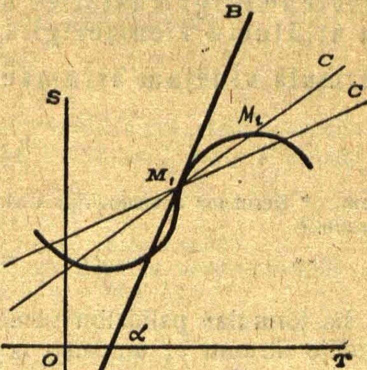


fig. 8.

Tā tad nevienmērīgās kustības attālumu grafikā leņķa, kas atrodas starp chordu un abscisas asi, tg **ir proporcionals vidējam ātrumam laika sprīdī starp tiem momentiem, starp kuŗiem zīmēta grafika.**

Saīsināsim laika starpību starp t_2 un t_1, t. i. ņemsim momentu t_2 arvienu tuvāki pie momenta t_1. Vidējais ātrums laikā $t_2—t_1$ tad vienmēr tuvināsies momenta t_1 patiesajam ātrumam un būs ar to pilnīgi vienāds pie bezgala mazas laika starpības $t_2—t_1$.

Ja moments t_2 tuvinājas momentam t_1, tad grafikā punkts M_2 tuvojas punktam M_1. Šinī tuvināšanās procesā sekante M_1M_2 attiecīgi mainās, un tanī momentā, kad M_2 sakūst ar punktu M_1, sekante top par tangenti, kas pieskaļas grafikai punktā M_1 (fig. 8.).

Tā tad leņķa, kas sastāv no tangentes un abscisu ass, *tg* proporcionals īstajam kustības ātrumam, kāds novērojams momentā, kad tangente pieskaļas grafikai.

§ 12. Vienmērīgi-paātrinātā kustība. Paātrinājums.

Nevienmērīgās kustības ātrumu maiņa var norisināties noteiktās robežās pēc vienkāršākiem vaj komplicētākiem likumiem.

Še aplūkosim vienkāršākos gadījumus un pirmā kārtā vienmērīgi-paātrinātu kustību.

Ja kustības ātrums vienādos laika sprīžos pieaug par vienu un to pašu lielumu, tad tādu kustību sauc par vienmērīgi-paātrinātu.

Par iesākuma ātrumu nosauc to attālumu, kādu noietu kustošs punkts vienmērīgi pirmā sekundē, ja nebūtu ātruma pieaugšanas. To ātrumu, par kuŗu iesākuma ātrums pieaug katrā nākošā sekundē, sauc par paātrinājumu.

Pēdējo ātrumu, kādu kustošs punkts iemantojis pa visu vienmērīgi-paātrinātās kustības laiku (pie kam tas vaj nu apstājas, vaj tālāk kustoties vairs nepaātrinājas), nosauc par gala ātrumu.

Momentā t_1 punkta ātrums ir v_1, bet momentā t_2 ir v_2. Starpība starp $v_2—v_1$ ir ātruma pieaugšana laikā $t_2—t_1$ un paātrinājums ir:

$$\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=p \dots (1).$$

Kā pamatmērus vienmērīgi-paātrinātās kustības mērīšanai pieņem kā gaŗuma mēru *1 cm.* un laika mēru *1 sec.* Tā tad paātrinājuma (mērīšanas) vienība būs tāds paātrinājums, kur vienā sekundē ātrums pieaug par 1 cm./sec. Šo vienību apzīmē 1 $\frac{cm.}{sec.^2}$ un izrunā — viens santimetrs sekundē kvadratā $\left(\frac{\frac{cm.}{sec.}}{sec.} = \frac{cm.}{sec.^2} = cm. sec.^{-2}\right)$.

Kā vienmērīgi-paātrinātās kustības piemēru dabā varam mīnēt ķermeņa brīvu krišanu tukšā tęlpā ar paātrinājumu $g = 981\ \frac{cm.}{sec.^2}$ (Šis paātrinājums ir vidējs, jo uz ekvatora $g = 978\ \frac{cm.}{sec.^2}$ un uz poliem $g = 983 \frac{cm.}{sec.^2}$)

§ 13. Vienmērīgi-paātrinātās kustības formulas.

Pieņemsim, ka punkts kustas ar paātrinājumu p, sākuma ātrums ir v_0, gala ātrums v un kustības laiks t.

Tā tad kustošā punkta ātrums ir:

1	sekundes	sākumā	v_0
1	„	beigās	$v_0 + p$
2	„	„	$v_0 + 2p$
3	„	„	$v_0 + 3p$
—	„	„	
t	„	„	$v_0 + tp$

Pēdējā matemātiskā izteiksme ir formula gala ātrumam

$$v = v_0 + pt \quad . \; . \; . \quad (2a).$$

Atsevišķā gadījumā, kūr sākuma ātrums $v_0 = o$, formula ir sekoša:

$$v = pt \quad . \; . \; . \quad (2b).$$

Formulas ($2a$) un ($2b$) var lietot vienmērīgi-paātrinātās kustības ātruma noteikšanai kaut kuŗā momentā t, ja atzīmējam ar t kaut kādu momentu starp kustības sākumu un beigām.

Formulā ($2a$) ir četri lielumi v, v_0, p un t. Ja zinām trīs lielumus, tad ar vienkāršas atrisināšanas palīdzību varam atrast ceturto.

No formulas $v = v_0 + pt$ atvasinam formulu laikam

$$t = \frac{v - v_0}{p}$$

un formulu paātrinājumam

$$p = \frac{v - v_0}{t}.$$

Minētās formulās trūkst attāluma (noieta ceļa) s, un, lai atrastu formulu s aprēķināšanai, domāsim sekoši:

Ja punkts visu laiku kustētos vienmērīgi tikai ar iesākuma ātrumu v_0, tad tas noietu ceļu $s_0 = v_0 t$; bet ja punkts visu laiku kustētos vienmērīgi tikai ar gala ātrumu, tad tas noietu ceļu $s_1 = vt$.

Tā kā pēc mūsu noteikumiem ātrums pieaug vienmērīgi, tad patiesi noietais attālums (ceļš) būs vidējais aritmetiskais starp s_0 un s_1, jeb starp $v_0 t$ un vt (kas ir tas pats)

$$s = \frac{s_0 + s_1}{2} = \frac{v_0 t + vt}{2} = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t.$$

Piem. * Ķermeņa sākuma ātrums $v_0 = 2$ m., gala ātrums $v = 10$ m. un paātrinājums $p = 1$ m. Aprēķināt, cik ilgi ķermenis kustas, kamēr tas ieguvis ātrumu $v = 10$ m., un kādu attālumu ķermenis nogājis.

$$t = \frac{v - v_0}{t} = \frac{10 - 2}{1} = 8 \text{ sec.}$$

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{2 + 10}{2} \cdot 8 = 48 \text{ m.}$$

Tā kā grūti aprēķināt vienmērīgi-paātrinātās kustības noieto attālumu kaut kurā momentā t, tad ar elementarās matematikas palīdzību aprēķināsim s kaut kādam laika sprīdim t,ja zinām tikai iesākuma ātrumu v_0, paātrinājumu p un t.

Ja punkts kustētos vienmērīgi-paātrināti, tad tas noietu tādu pat attālumu, kā ja kustētos visu laiku vidējā ātrumā $\frac{v_0+v}{2}$, t. i. ar vidējo ātrumu, ko dabūjam kā vidējo aritmetisko no iesākuma ātruma v_0 un momenta t ātruma v. Formulā (2a) v vietā liksim tā vērtību, tad

$$s=\frac{v_0t+vt}{2}=\frac{v_0t+(v_0+pt)t}{2}=\frac{v_0t+v_0t+pt^2}{2}=\frac{2v_0t+pt^2}{2}=$$

$$=v_0t+\frac{p}{2}t^2.$$

Ja līdz sākuma ātrumam v_0 jau ir noiets zināms attālums s_0, tad vispārējiem gadījumiem dabūjam formulu

$$s=s_0+v_0t+\frac{p}{2}t^2 \ldots\ldots (3a).$$

Atsevišķā gadījumā, kad $s_0=0$, dabūjam agrāko formulu

$$s=v_0t+\frac{p}{2}t^2 \ldots\ldots (3b).$$

Ja sākumā punkts atrodas mierā, t. i. sākuma ātrums $v_0=0$, tad

$$s=\frac{p}{2}t^2 \ldots\ldots (3c).$$

Ja punkts kustas vienmērīgi - paātrināti, pie kam $s_0=0$ un $v_0=0$, tad punkta ātrums katrā momentā t ir:

$$v=pt.$$

Formula attālumam ir:

$$s=p\frac{t^2}{2}$$

un formula laikam ir:

$$t=\sqrt{\frac{2s}{p}}$$

Liksim ātrumu formulā t vietā minēto izteiksmi, tad dabūsim sekošo formulu:

$$v=pt=p\sqrt{\frac{2s}{p}}=\sqrt{\frac{2s.p^2}{p}}=\sqrt{2sp}.$$

Pēdējā formulā ātrumu izteic ar attālumu un paātrinājumu. Formula sevišķi svarīga daudzu technisku uzdošanu atrisināšanai.

Piem. * Ķermenis no sākuma kustas ar ātrumu $5\frac{\text{m.}}{\text{sec.}}$, nākošā momentā iemanto paātrinājumu $0{,}6 \frac{\text{m.}}{\text{sec}^2}$ un šādi ķermenis kustas 16 sekundes. Kādu ceļa garumu ķermenis noiet?

$$s = v_0 t + \frac{p}{2} t^2 = 5 \,.\, 16 + \frac{0{,}6}{2}(16)^2 = 80 + 0{,}3(16)^2 = 156{,}8 \text{ m.}$$

* Vilciens atiet no stacijas vienmērīgi-paātrināts ar paātrinājumu $1{,}2 \frac{\text{m.}}{\text{sec}^2}$ un šādi kustas 40 sec. Kāds būs vilciena ātrums pēc šī laika un cik tālu vilciens nogājis?

$$v = v_0 + pt = 0 + 1{,}2 \,.\, 40 = 48 \text{ m.}$$

$$s = \frac{p}{2} t^2 = \frac{1{,}2}{2}(40)^2 = 960 \text{ m.}$$

* Vilciens vienmērīgi-paātrināti kustoties atiet no stacijas ar paātrinājumu $30 \frac{\text{cm.}}{\text{sec}^2}$. Kāds būs vilciena ātrums pēc pus minutes? Cik tālu no stacijas tad vilciens atradīsies? Kāds būs vilciena ātrums, kad tas atradīsies no stacijas $s = 125$ m.?

* No 45 kalibru 15 collīga lielgabala stobra izšauj lodi ar ātrumu $v = 900 \frac{\text{m.}}{\text{sec.}}$. Aprēķināt lodes paātrinājumu stobrā, pieņemot, ka kustība stobrā ir vienmērīgi-paātrināta. Par 15 collu lielgabalu nosauc tādu lielgabalu, kuŗa stobra iekšējais diametrs ir 15 collu. Par 45 kalibra lielgabalu nosauc tādu lielgabalu, kuŗa stobrs ir 45 reiz gaŗāks nekā stobra iekšējais diametrs.

§ 14. Vienmērīgi-palēninātā kustība.

Vienmērīgi-paātrinātai kustībai tieši pretēja ir vienmērīgi-palēninātā kustība, kur kustības ātrums kaut kādos vienādos laika sprīžos samazinās par vienu un to pašu lielumu. Palēninājumu apzīmē tāpat ar p kā paātrinājumu, tikai jāievēro, ka paātrinājums ir pozitivs (+), bet palēninājums negativs (—).

Ja ņemam abzoluto p vērtību, tad p ar negativu zīmi noderīgs pelēninātai kustībai un tādēļ visas formulas, kādas atvasinājam vienmērīgi-paātrinātai kustībai, noderīgas arī vienmērīgi-palēninātai, ja visur, kur agrāki ņēmām $+p$, tagad ņemam $-p$.

Tādēļ, piem., ātruma formula ir:

$$v = v_0 - pt \;.\,.\,.\,.\; (2'a).$$

Attālumu formulas:

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{p}{2} t^2 \;.\,.\,.\,.\,.\; (3'a),$$

$$s = v_0 t - \frac{p}{2} t^2 \;.\,.\,.\,.\,.\; (3'b).$$

u. t. t.

Piem. * Lokomotive, kuŗas ātrums $10 \frac{\text{m.}}{\text{sec.}}$, tormazē un tādēļ tā zaudē katru sekundi no sava ātruma 0,5 m. Kāds būs lokomotives ātrums pēc 4 sec.? Cik drīz lokomotive apstāsies? Kādu attālumu tā noies no tā laika, kad tā sāka tormazēt, līdz tam laikam, kad tā apstāsies?

$v = v_0 - pt = 10 - 0{,}5 \,.\, 4 = 8$ m., t. i. pēc 4 sec. lokomotives ātrums ir $8 \frac{\text{m.}}{\text{sec.}}$.

Lai lokomotive apstātos, nepieciešami, ka $v = 0$, jeb, kas tas pats,

$$v - pt = 0$$
$$v = pt$$
$$t = \frac{v}{p} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ sec.}$$

* Vilciens kustas vienmērīgi ar ātrumu $v_0 = 50 \frac{\text{km.}}{\text{h}}$. Kādā momentā vilciens sāk kustēties vienmērīgi palēnināti, lai, nogājis 500 m., apstātos. Aprēķināt vilciena palēninājumu.

§ 15. Brīvā krišana.

Ķermenim, kas krīt telpā, no kuŗas izpumpēts gaiss, piemīt vienmērīgi-paātrināta kustība ar paātrinājumu caurmērā $9,81 \frac{\text{m.}}{\text{sec.}^2} = 981 \frac{\text{cm.}}{\text{sec}^2}$. Šo skaitli mēdz atzīmēt ar g (=gravitas). Telpā, kas pildīta ar gaisu, paātrinājums ir tikai sākumā $981 \frac{\text{cm.}}{\text{sec}^2}$, bet vēlāki ķermeņa kustības palēnām pāriet vienmērīgā kustībā (piem. lietus piles). Tā kā praktiskos mechaniskos aprēķinos pārāk lieli kritiena augstumi negadas un gaisa pretestība nav sevišķi ievērojama, tad kļūdas, kādas varētu rasties, aprēķinot ķermeņa krišanu gaisā, bet ne tukšā telpā, nav svarīgas, kādēļ ķermeņa krišanu ar gaisu pildītā telpā aprēķina tāpat, kā telpā bez gaisa. Ķermeņa brīvās krišanas ceļu apzīmē ar h un laiku, kā paŗasts, ar t.

Ja sviežam ķermeni uz augšu vertikalā virzienā, tad ķermenis iemanto palēnināti-paātrinātu kustību, jo uz augšu ķermenis kustas vienmērīgi-palēnināti, bet uz leju vienmērīgi-paātrināti, un nokrīt tanī pat vietā, no kuŗas tas ir sviests uz augšu. Visaugstākā punktā ķermeņa ātrums būs $= 0$.

Formulas brīvās sviešanas un krišanas aprēķināšanai ir:

$$v = v_0 \mp gt \text{ un } s = v_0 t \mp \frac{g}{2} t^2.$$

Tanī momentā, kad ķermenis sasniedz visaugstāko punktu, $v = 0$, ķermeņa kustēšanās laiku uz augšu aprēķina pēc formulas

$$v_0 - gt = 0, \text{ no kurienes } t = \frac{v_0}{g}.$$

Lai dabūtu vislielāko augstumu h, kādu sasniegs ķermenis, liksim s vietā tā izteiksmi ar t.

$$s = h = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Tagad aprēķināsim, ar kādu ātrumu ķermenis, krītot no augšas uz leju, pienāks tanī vietā, no kuŗas tas sviests. Tā kā ķermenis kritīs uz leju vienmērīgi-paātrināti bez sākuma ātruma, tad beigu ātrumu dabūjam no formulas $h = \frac{v_0^2}{2g}$, kur

$$v_0 = \sqrt{2gh} = v,$$

t. i. ātrums, ar kuŗu ķermenis atgriezīsies uz to pašu punktu, no kuŗa sviests, ir vienāds ar iesākuma ātrumu, ar kādu tas sviests.

Piem. * Akmens krīt akā un sasniedz ūdeni pēc 3,5 sec. Cik dziļa ir aka?

$$h = \frac{g}{2}t^2 = \frac{9{,}81}{2}(3{,}5)^2 = 60 \text{ m.}$$

* Cik ilgā laikā un ar kādu ātrumu nokritīs uz zemi akmens, kas sviests no Eifeļa torņa Parizē (Eifeļa torņa augstums 300 m.).?

* Lode izšauta vertikali uz augšu ar iesākuma ātrumu 500 m.; kādu augstumu sasniegs lode un pēc kāda laika tā nokritīs atpakaļ.

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(500)^2}{2 \cdot 9{,}81} = 12742 \text{ m.}$$

$$t = \frac{v}{g} = \frac{500}{9{,}81} = 50{,}97 \text{ sec.}$$ (vienai krišanai, piem. uz augšu, vajaga laika tikai $\frac{t}{2}$).

* Bumba sviesta vertikali uz augšu ar sākuma ātrumu $v_0 = 8 \frac{\text{m.}}{\text{sec.}}$. Kādā laikā bumba sasniegs lielāko augstumu un kāds būs šis augstums?

§ 16. Vienmērīgi-paātrinātās kustības attālumu grafika.

Lai dabūtu jēdzienu par vienmērīgi-paātrinātās kustības attālumu grafiku, lietosim vienkāršākās formulas (3*c*), kur $s = 0$ un $v_0 = 0$; tad

$$s = \frac{pt^2}{2}.$$

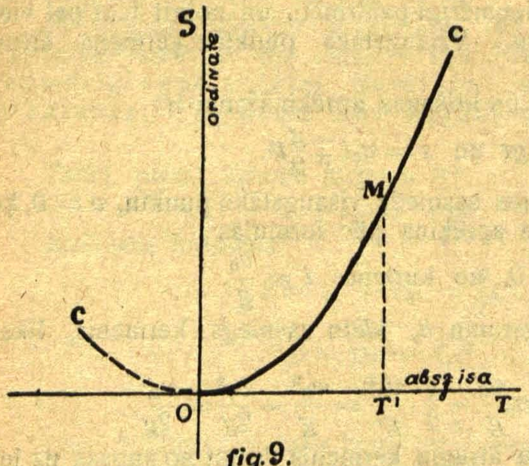


fig. 9.

Ja $t = 0$, tad arī $s = 0$ un tādā gadījumā grafikas punkts sakrīt ar koordinata sākumu *O* (fig. 9.). Katrs tālākais grafikas punkts, piem. *M'*, izpilda noteikumu, ka ordinata *T'M'* ir proporcionala abscisas *OT'* kvadratam, jo pēc formulas attālums ir proporcionals laikam kvadratā. Šo punktu ģeometriskā vieta ir linija, kuŗu sauc par parabolu (*CC*). Tā parabolas daļa, kas attiecināma uz negativu laiku *t*, apzīmēta ar punktliniju.

Ja ņemam skaitlisku piemēru, tad parabolu viegli uzzīmēt. Fig. 10. uzzīmēta parabola pēc nolīdzinājuma

$$s = \frac{6t^2}{2},$$

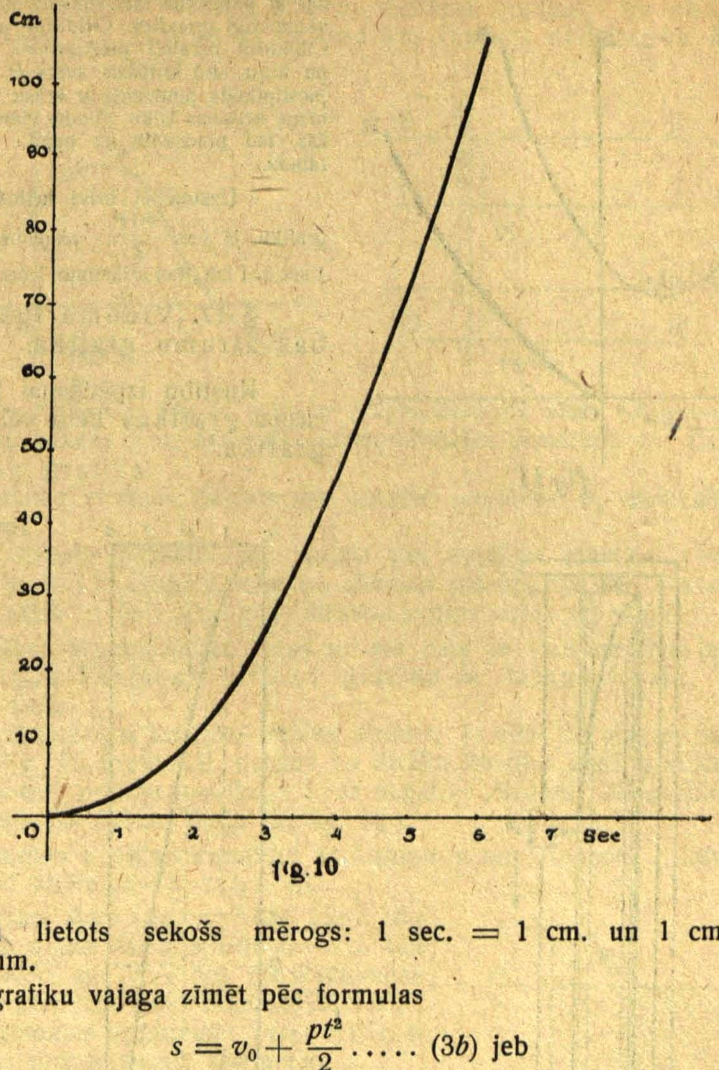


fig. 10

pie kam lietots sekošs mērogs: 1 sec. = 1 cm. un 1 cm. attāluma = 1 mm.

Ja grafiku vajaga zīmēt pēc formulas

$$s = v_0 + \frac{pt^2}{2} \ldots\ldots (3b) \text{ jeb}$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{pt^2}{2} \ldots\ldots (3a),$$

tad grafika arī būs parabola, tikai tās sākums nesakritīs ar koordinata sākumu. Fig. 11. redzamas grafikas: pirmā *BB* formulai 3*b*, otrā *AA* formulai 3*a*.

Krītošs ķermenis var pats uzzīmēt savu grafiku, ja lietojam Morena mašinu. (Arthur Morin — franču zinātnieks 1795.—1880.) Mašina sastāv no vertikala cilindra *Z* (fig. 12. un 13.),

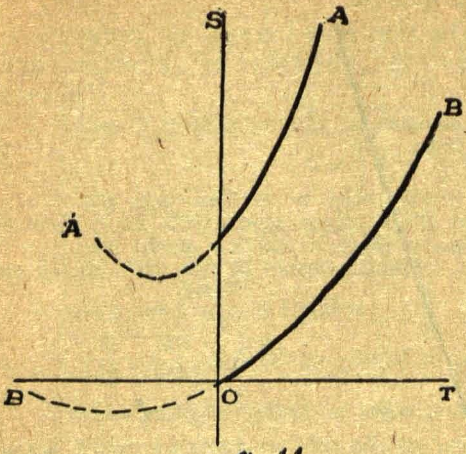


fig. 11

kas ar pulksteņa mechanisma palīdzību var vienmērīgi griezties. Cilindrim aptin papīru. Cilindrim paraleli piestiprināts valdziņš d, pa kuŗu slīd krītošais svars P. Pie svara piestiprināta pindzelīte ar krāsu. Ja pa ķermeņa krišanas laiku cilindrs vienmērīgi griežas, tad pindzelīte uz papīra uzzīmē parabolu.

* Uzzīmējiet brīvi krītoša ķermeņa grafiku, ja $s = \frac{981 t^2}{2}$, pieņemiet grafikā 1 sec. = 1 cm., bet attālumus 1 cm. = 0,1 cm.

§ 17. Vienmērīgās kustības ātrumu grafika.

Kustību izpētīšanai bez attālumu grafikas lieto vēl ātrumu grafiku.

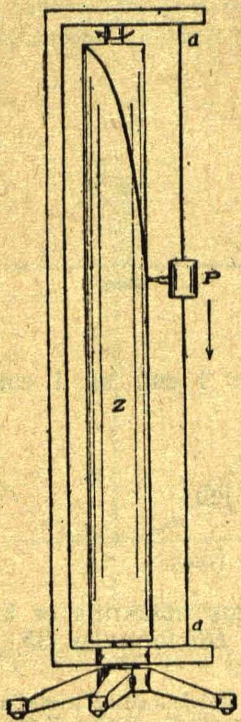


fig. 12

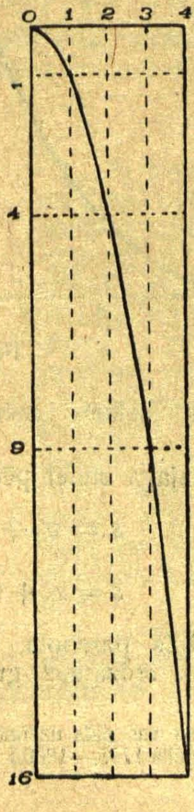


fig. 13

Ātrumu grafiku konstruē analogi attālumu grafikai. Uz abscisu ass atskaita laika sprīžus un uz ordinatām laikam attiecīgos ātrumus.

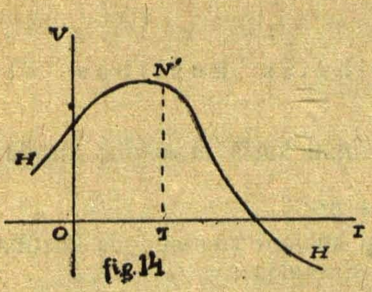


fig. 14

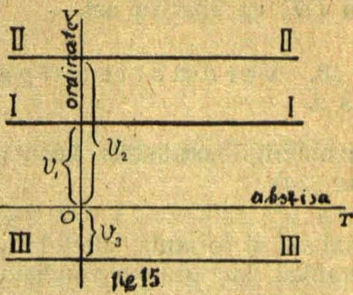


fig. 15

Linija *HH* (fig. 14.) ir punktu *N* ģeometriskā vieta. Abscisas ir proporcionalas laikam t un ordinatas proporcionalas ātrumiem v. Linija *HH* ir ātrumu grafika.

Ordinatas virspus abscisu ass nozīmē pozitivus v, zem abscisu ass — negativus.

Pēc ātrumu grafikas var spriest par kustības raksturu. Piem., pēc grafikas (fig. 14.) kustības ātrums no sākuma pieaug, tad ātri samazinās līdz nullei un tālāk ar lēni pieaugošu ātrumu punkts virzās atpakaļ (t. i. negativi).

Kustības ātrums paliek viens un tas pats pa visu kustības laiku, tādēļ vienmērīgās kustības ātrumu grafika ir taisna linija, paralela abscisu asij.

Jo vienmērīgai kustībai lielāks ātrums, jo tālāk no abscisu ass atrodas grafika. Fig. 15. grafika II. norāda uz ātrāku kustību nekā grafika I.

Ja notiek pretēja kustība, t. i. ar negativu ātrumu, tad grafika atrodas zem abscisu ass (piem. linija III. fig. 15.).

Ja punkts kustas vienmērīgi ar ātrumu v no momenta t_1 līdz momentam t_2, tad attālums $s = v(t_2 - t_1)$.

Ņemsim daļu no grafikas (fig. 16.) N_1N_2, kas attēlo laika sprīdi $t_2 - t_1$; tad ordinatas N_1T_1 un N_2T_2 būs proporcionalas ātrumam v un taisna leņķa laukums $N_1N_2T_2T_1$ būs proporcionals produktam $v(t_2 - t_1)$, t. i. laukums ir proporcionals attālumam s.

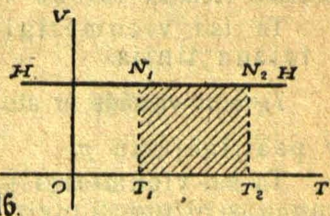


fig. 16.

Tā tad ātrumu grafikā laukumu ierobežo grafika, abscisu ass un divas ordinatas, proporcionalas diviem laika momentiem; laukumam ir proporcionals punkta noietais attālums laika sprīdī starp šiem diviem momentiem.

Šis likums attiecināms ne tikai uz vienmērīgo kustību, bet arī visādām kustībām ar citādu raksturu.

Piem., ja HH (fig. 17.) ir kaut kādas kustības ātrumu grafika, tad laukuma $N_1N_2T_2T_1$ lielums proporcionals tam attālumam, kādu nogājis kustošais punkts laikā no t_1 līdz t_2. Laiks t_1 attēlots ar liniju OT_1 un laiks t_2 ar liniju OT_2 uz abscisu ass.

§ 18. Vienmērīgi - paātrinātās kustības ātrumu grafika.

Vienmērīgi-paātrinātās kustības ātrumu katrā momentā atrodam pēc formulas (2a)

$$v = v_0 + pt.$$

Grafiski šī formula attēlota pilnīgi analogi vienmērīgās kustības attālumu grafikai, kur grafiku zīmējam pēc formulas $s = s_0 + vt$.

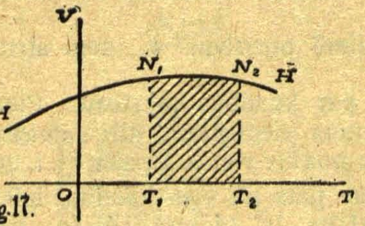


fig. 17.

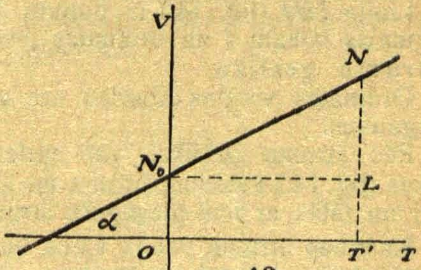


fig. 18

Pieņemot, ka $t = 0$, ātrums $v = v_0$, grafika (fig. 18.) griezīs ordinatu asi punktā N_0, kuŗa ordinata ON_0 proporcionala v_0. Katrā tālākā grafikas punktā, piem. N', abscisa OT' vaj N_0L proporcionala laikam t', bet diference LN' proporcionala pt', t. i. arī proporcionala t'.

No N_0L un LN' proporcionalitates varam spriest, ka punkta N ģeometriskā vieta ir taisna linija.

Tā tad vienmērīgi-paātrinātai kustībai ātrumu grafika ir taisna linija.

$Tg\ \alpha$ ir vienāds ar attieksmi $\frac{LN'}{N_0L}$ un proporcionals $\frac{pt'}{t'}$, t. i. vienāds ar paātrinājumu p.

Tā tad vienmērīgi-paātrinātās kustības ātrumu grafikā leņķa tangenss proporcionals paātrinājumam.

Ar grafikas palīdzību varam atrast nolīdzinājumu attāluma s noteikšanai, kādu noiet punkts vienmērīgi-paātrināti kustoties laika sprīdī no sākuma momenta līdz kaut kādam momentam t'.

Šis attālums proporcionals laukumam $N_0N'T'O$, kas ir trijstūŗa $N_0N'L$ un četrstūŗa $N_0LT'O$ laukumu zuma.

Trijstūŗa laukuma lielums ir $\frac{N'L \cdot N_0L}{2}$ un proporcionāls $\frac{pt^2}{2}$, četrstūŗa lielums ir $ON_0 \cdot OT'$ un proporcionals v_0t.

Tādēļ attālums s būs v_0t un $\frac{pt^2}{2}$ zuma

$$s = v_0t + \frac{pt^2}{2}.$$

Piem. * Uzzīmējiet ķermeņa ātrumu grafiku, kad ķermenis sviests vertikali uz augšu un tad krīt atkal atpakaļ.

§ 19. Ātruma un paātrinājuma attēlošana ar vektoriem.

Ja mums, piem. jānosaka temperatura punktā O, tad to varam izdarīt ar termometra palīdzību; dabūjot, piem. n gradu pēc R., mūsu jautājums ar skaitļa palīdzību pilnīgi apgaismots.

Ja gribam noteikt ātrumu vaj paātrinājumu, tad ar skaitļa palīdzību vien to nevaram izdarīt, mums vēl jānorāda ātruma un paātrinājuma virziens. Tā tad bez skaitļa vajadzīgs arī virziens. Šādus matematiskus lielumus nosauc par vektorialiem lielumiem.

Piem. punkta O ātrums vēl nav pilnīgi noteikts, ja zinām tikai ātruma lielumu $n\frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$, jāzin arī, kādā virzienā LL' (fig. 19.) un uz kādu pusi punkts virzīsies.

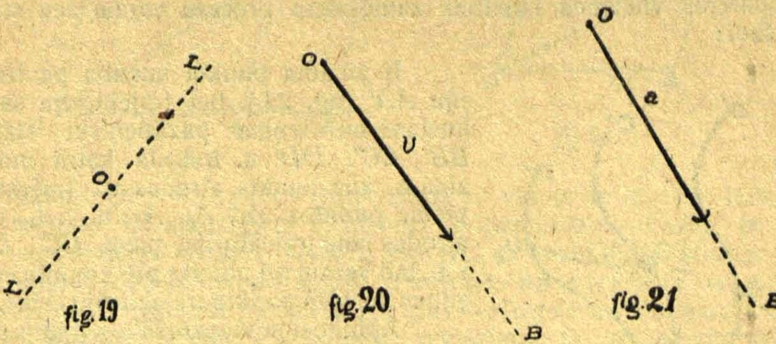


fig. 19 fig. 20 fig. 21

Punkta O ātrums ir pilnīgi noteikts, ja tas zīmēts kā vektors, t. i. kā linijas nogrieznis, ar gaŗumu, proporcionalu ātruma lielumam, un ar tādu pat virzienu, kāds ir ātrumam.

Vektorus zīmē kā bultas. Bultas sākums sakrīt ar to punktu, kuŗa ātrumu bulta attēlo, bet bultas gals norāda ātruma virzienu.

Ja, piem. 1 $\frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$ ātrumu atzīmēsim ar nogriezni = 2 mm., tad bulta (fig. 20.) ar 30 mm. gaŗumu norāda, ka punkts O kustas uz punktu B ar ātrumu $15 \frac{cm.}{sec.}$

Analogi var ar vektoru palīdzību attēlot paātrinājumus, tikai tad, lai varētu ātruma bultas atšķirt no paātrinājuma bultām, pirmajām galā zīmē asu jumtiņu, otrām noapaļotu (fig. 21.).

Līkumainas kustības ātruma vektors kaut kādā momentā ir trajektorijas tangente attiecīgā punktā.

§ 20. Ātrumu zumēšana.

Pieņemsim, ka kaut kāds punkts A kustas attiecībā pret punktu B, bet punkts B kustas savukārt attiecībā pret punktu C. Lai zinātu, kā kustas punkts A attiecībā pret C, ātrumi A un B jāzumē.

A kustību attiecībā pret B un B kustību pret C, nosauc par komponentām (jeb saskaitāmām) kustībām, bet A kustību pret C, kuŗu dabūjam divas iepriekšējās kustības rezultējot, nosauc par rezultējošo kustību.

Kā komplicētās kustības piemēru varam pievest pasažiera staigāšanu vagonā. Pasažiera kustība attiecībā pret vagonu ir viena komponente, vagona kustība attiecībā pret ceļu ir otra komponente, bet pasažiera kustība attiecībā pret ceļu ir rezultējošā kustība, kuŗas lielumu dabūjam, zumējot abas komponentes.

Rezultējošās kustības noteikšanu, ja zināmas komponentās kustības, nosauc par kustību zumēšanu.

Vispārējos vilcienos kustības zumēšanas procesu varam sev stādīties priekšā šādi:

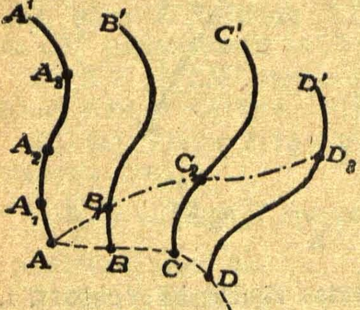


fig. 22

Ir zināma punkta kustība pa trajektoriju AA' (fig. 22.), bet trajektorija savukārt kustas un ieņem pakāpeniski stāvokļus BB', CC', DD' u. t. t. Ja katrā momentā zinām, kur punkts atrodas uz trajektorijas, piem. punktos A_1, A_2, A_3 u. t. t., un kur atrodas pate trajektorija, piem. CC', DD' u. t. t., tad varam arī noteikt pie komplicētās kustības kustošā punkta trajektoriju $AB_1C_2D_3$...

Aplūkosim vienkāršākos gadījumus — kur trajektorija ir taisna linija, trajektorijas kustība ir translatoriska, pie kam katrs trajektorijas punkts kustas taisnā virzienā.

§ 21. Divu taisnvirziena vienmērīgu kustību zumēšana.

Pa taisno OB (fig. 23.) kustas punkts B, kas pēc vienādiem laika sprīžiem nonāk punktos B_1, B_2, B_3 u. t. t. Tanī pat laikā taisnā OB pārvietojas vienmērīgi (virzes kustībā), pie kam punkts O kustas pa taisno OA un tanīs pat vienādos laika sprīžos nonāk punktos A_1, A_2, A_3 u. t. t. Tādejādi katra komponente kustas taisnā virzienā un vienmērīgi. Ja katrā brīdī atzīmēsim punkta B stāvokli, tad dabūsim punkta komplicētās kustības trajektorijas atsevišķos punktus C_1, C_2, C_3 u. t. t.

Kustības noteikumi norāda, ka attālumi OA_1, OA_2, OA_3 u. t. t. ir attālumiem C_1A, C_2A_2, C_3A_3 u. t. t. proporcionali, tādēļ trajektorija $OC_1C_2C_3\ldots$ ir taisna linija.

Tā kā $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 =$ u. t. t. un C_1A_1, C_2A_2, C_3A_3 u. t. t. ir paralelas linijas, tad attālumi OC_1, C_1C_2, C_2C_3 u. t. t., kuŗus punkts noiet komplicētā kustībā vienādos laika sprīžos, ir viens ar otru vienādi; tādēļ šinī gadījumā komplicētā kustība ir vienmērīga.

Ja komponentās kustības ir taisnvirziena un vienmērīgas, tad rezultējošā kustība ir taisnvirziena un vienmērīga.

§ 22. Ātrumu paralelograms.

Fig. 23. rāda, ka rezultējošā kustība ir no komponentām kustībām OB_1 un OA_1 konstruēta paralelograma diagonale OC_1, tāpat linija OC_2 ir paralelograma $OA_2C_2B_2$ diagonale u. t. t.

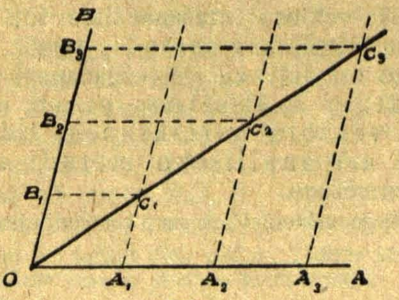


fig 23

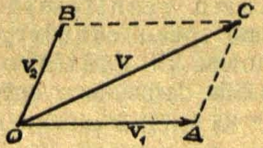


fig 24

Attālumi OA_1, OB_1, OC_1 attiecināmi uz vienu un to pašu laika sprīdi, un to gaŗums ir attiecīgiem ātrumiem proporcionals. Tādēļ, ja OA_1 un OB_1 ir komponento ātrumu vektori, tad OC_1 ir rezultējošā ātruma vektors. Rezultējošais ātrums pēc lieluma un virziena ir no komponentiem ātrumiem konstruēta paralelograma diagonale. Šis likums pareizs kā ātruma vektoriem, tā arī citiem vektoriem. Rezultējošo vektoru V (fig. 24.) nosauc arī par saskaitāmo vektoru v_1 un v_2 zumu.

§ 23. Vairāku ātrumu zumēšana.

Tā kā paralelogramā (fig. 24.) nogrieznis $OB = AC$ un paralels AC, tad rezultējošo ātrumu varam atrast, ja no kaut kāda punkta O (fig. 25.) velkam liniju 01, proporcionalu un paralelu ātrumam

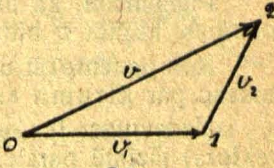


fig 25

v_1, un tad no nogriežņa gala velkam liniju *1 2*, proporcionalu un paralelu ātrumam v_2. Ja savienojam punktu *0* ar punktu *2*, tad dabūjam rezultējošo ātrumu pēc lieluma un virziena. Pēdējā konstrukcijā ir taš pats ātruma paralelograms, tikai uz papīra uzzīmēta paralelograma viena puse.

Lietojot pēdējo paņēmienu, varam uzzīmēt rezultējošo vektoru ne tikai no diviem komponentiem ātrumiem, bet no bezgala daudzām komponentēm.

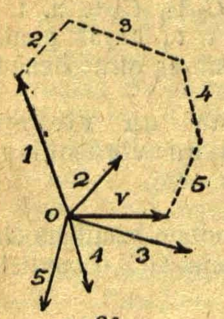


fig. 26

Ja no punkta *0* (fig. 26.) uzzīmēti komponentie ātrumi, tad velkam no kaut kāda komponenta ātruma vektora, piem. *1* gala liniju, paralelu un vienāda garuma ar vektoru *2*; no punktlinijas *2* gala velkam liniju *3*, paralelu un vienādu ar vektoru *3*; no punktlinijas *3* gala velkam liniju *4*, paralelu un vienādu ar vektoru *4* u. t. t. Pēdējās — pēdējam vektoram — paralelās punktlinijas galu savienojam ar sākuma punktu un dabūjam rezultējošo ātrumu *V* pēc virziena un lieluma. Ar pievestā paņēmiena palīdzību varam atrast rezultējošo vektoru arī tad, ja komponentie vektori neatrodas vienā plāksmā, bet izkaisīti telpā.

Rezultējoša vektora atrašanai līdz šim lietojām tikai grafisku (zīmēšanas) metodi, tomēr, ja aprēķinam jābūt ļoti pareizam, tad jālieto analitiskā (rēķināšananas) metode. Tā kā ātrumu rezultējošā vektora aprēķināšanas pamati ne ar ko neatšķiŗas no spēku rezultējošā vektora noteikšanas, tad pamatīgāki aplūkosim kā grafisko, tā arī analitisko metodi statikā, kad mums būs darīšana ar spēku zumēšanu.

Piem. * Kā aprēķināt analitiski rezultējošo vektoru *V*, ja starp komponentiem ātrumiem v_1 un v_2 ir leņķis 90° $\left(\text{jeb } \frac{\pi}{2}\right)$.

* Kādos apstākļos rezultējošais vektors ir vienāds ar nulli?

* Kādos apstākļos rezultējošais vektors ir vienāds ar vienu no komponentiem vektoriem?

* Airētājs airē šķērsām pār upi ar ātrumu $v_1 = 2\frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$, upes tece velk laivu uz leju ar ātrumu $1{,}5\frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$ Kāds būs laivas virziens un ātrums attiecoties uz upes krastiem?

§ 24. Ātruma sadalīšana komponentos ātrumos.

Pieņemsim, ka punkts *A* kustas ar ātrumu v. Jāatrod divas komponentas kustības, kuŗām v būtu rezultējošā kustība.

Komponento ātrumu atrašanu ar zināma rezultējošā ātruma palīdzību nosauc par ātrumu sadalīšanu.

Uzdevums ir ģeometrisks, kur no zināmas diagonales (rezultējošā vektora) jāzīmē paralelograms.

Ja nav vairāk nekādu blakus noteikumu, tad uzdošana ir pilnīgi nenoteikta, jo varam konstruēt bezgalīgi daudz paralelogramu, kuŗu diagonale būs dotais taisnās nogrieznis AB (fig. 27.).

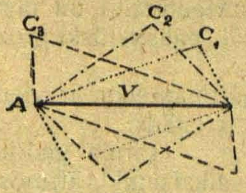


fig. 27

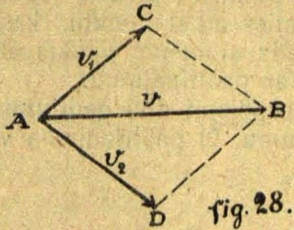


fig. 28.

Lai uzdošana būtu noteikta, jāzin tādi noteikumi, kas pielaiž tikai vienu trijstūŗa konstruēšanu pie dotās trijstūŗa malas.

Piem., jāzin viens no sekošiem noteikumiem:

a) komponento vektoru lielums (gaŗums);
b) komponento vektoru virzieni;
c) viena komponentā vektora lielums (gaŗums) un virziens;
d) viena komponentā vektora virziens, otra gaŗums u. t. t.

Kā piemēru minēsim ātruma sadalīšanu, ja zinām vienas komponentes lielumu un virzienu. Ātrums v jāsadala divos ātrumos, pie kam vienai no komponentēm jābūt v_1 (fig. 28.).

Savienosim punktus C un B un vilksim no punkta A taisno, paralelu CB, un no punkta B taisno, paralelu AC. Četrstūris $ACBD$ ir paralelograms un tā mala AD ir vektors v_2, kuŗu vajadzēja atrast un kuŗa lielums un virziens nosaka otro komponenti.

Piem. * Sadalīt doto vektoru v divās komponentēs, ja zināmi komponentu virzieni.
* Sadalīt vektoru v divās komponentēs, ja zināmi vienas komponentes virziens un otras lielums.
* Cik var būt atbilžu uzdošanai?
* Kādos apstākļos iespējama tikai viena atbilde?
* Kādos apstākļos uzdošanu nevar izrēķināt?

§ 25. Taisnvirziena un līkumainu kustību paātrinājums.

Pieņemsim, ka punkts kustas taisnā virzienā un vienmērīgi ar ātrumu v. Kaut kādā momentā punktam piedodam vēl otru ātrumu v^1.

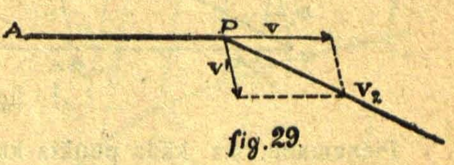


fig. 29

Ievērosim divus gadījumus: 1) kad v^1 virziens vienāds ar v virzienu, 2) kad v^1 virziens ir citāds.

Pirmā gadījumā mainīsies tikai punkta kustības ātrums; punkts kustēsies tanī pat virzienā ar jaunu ātrumu $= v + v^1$.

Otrā gadījumā mainīsies punkta ātrums un virziens; punkts kustēsies PV_2 virzienā (fig. 29.) ar ātrumu v_2, kuŗa lielumu un virzienu nosaka no ātrumiem v un v^1 konstruēta diagonale, kuŗas sākuma punkts sakrīt ar momentu, kad punktam piedots jaunais ātrums.

Iedomāsimies atkal punktu, kas kustas vienmērīgi un taisnā virzienā, bet no kaut kāda momenta punkta ātrums sāk pakāpeniski grozīties, piem. punkts kustas ar paātrinājumu.

Šeit arī iespējami divi gadījumi: 1) paātrinājumam ir vienāds virziens ar sākuma ātrumu, 2) paātrinājuma virziens ir citāds.

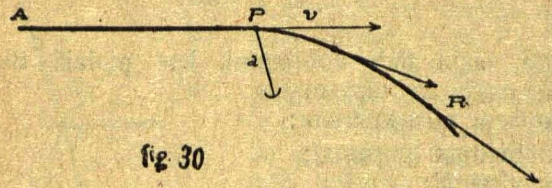


fig. 30

Pirmā gadījumā mainas tikai punkta ātrums, bet virziens paliek iepriekšējais un punkts kustas pa to pašu taisno ar paātrinājumu.

Otrā gadījumā, kad paātrinājuma virziens pieslienas sākuma ātrumam zem leņķa, punkta kustības virziens pastāvīgi mainās un pati kustība tā tad ir līkumaina (fig. 30.).

§ 26. Vienmērīgi paātrinātu taisnvirziena kustību zumēšana.

Aplūkosim vienmērīgi paātrinātas taisnvirziena kustības bez sākuma ātrumiem.

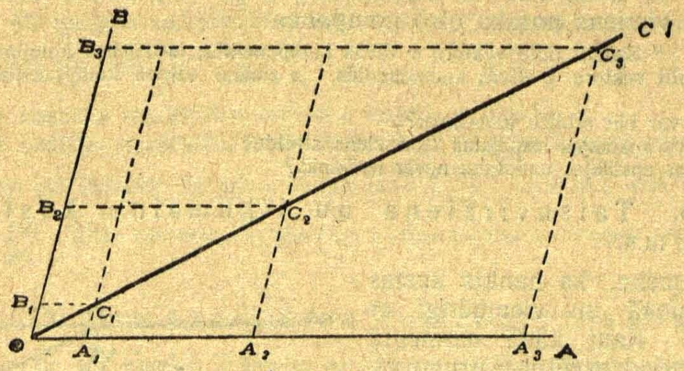


fig. 31

Pieņemsim, ka kāds punkts kustas viemērīgi-paātrināti bez sākuma ātruma pa taisno OB (fig. 31.) un ieņem pakāpeniski pēc vienādiem laika sprīžiem stāvokļus punktos B_1, B_2, B_3 . . . . Tanī pat brīdī taisnā OB pārvietojas pa liniju OA pati sev paraleli un punkts O ieņem pakāpeniski, tanīs pat agrāki minētos laika sprīžos, stāvokļus A_1, A_2, A_3 . . . ., t. i., taisnās OB punkts O arī kustas vienmērīgi-paātrināti.

Punkti C_1, C_2, C_3 . . . . tad attēlos rezultējošās kustības trajektoriju. Attālumi OA ir proporcionali attālumiem OB, jo abi šie attālumi ir proporcionali vienādiem laika sprīžiem t: attālumi OB kaut kādā momentā t vienādi ar $\frac{p_1 t_1^2}{2}$ un attālums OA tanī pat momentā vienāds ar $\frac{p_2\ t_1^2}{2}$ kur p_1 un p_2 ir attiecīgo kustību paātrinājumi. Tādēļ punkta C ģeometriskā vieta ir taisna līnija.

Attālumi OC ir proporcionali attālumiem AO un OB un proporcionali t_1^2; agrāki redzējām, ka, ja attālums pieaug laika kvadratam proporcionali, tad kustība ir vienmērīgi-paātrināta.

Tā tad rezultējošā kustība ir arī vienmērīgi-paātrināta. Tādēļ divu vienmērīgi-paātrinātu taisnvirziena komponentu kustību (bez sākuma ātrumiem) rezultējošā kustība ir arī vienmērīgi-paātrināta taisnvirziena kustība.

Attālumi AO, OB un OC, kuŗus noiet vienos un tanīs pat laika sprīžos, ir attiecīgiem paātrinājumiem proporcionali; tādēļ vektorus OA_1 un OB_1 varam uzlūkot kā komponentos paātrinājumus un vektoru OC_1 kā rezultējošo paātrinājumu (fig. 32.).

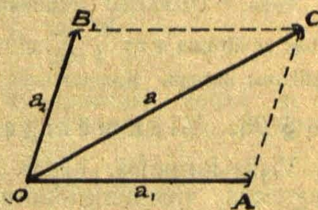


fig. 32

Paātrinājumu paralelograma likumu varam definēt:

Rezultējošās kustības paātrinājums pēc virziena un lieluma ir no komponento kustību paātrinājumiem konstruēta paralelograma diagonale.

Piem. * Zināmas komponentas kustības $s_1 = 5t^2$ un $s_2 = 12t^2$ ar savstarpēji perpendikularu virzienu. Noteikt rezultējošās kustības virzienu un paātrinājumu.

§ 27. Vienmērīgu un vienmērīgi-paātrinātu taisnvirziena kustību zumēšana.

Pieņemsim, ka pa taisno OB kustas vienmērīgi kāds punkts un vienādos laika sprīžos ieņem stāvokļus B_1, B_2, B_3 u. t. t. Savukārt taisnā OB tanīs pašos laika sprīžos kustas pati sev paraleli ar vienmērīgi paātrinātu kustību un punkts O ieņem stāvokļus A_1, A_2, A_3 u. t. t. (fig. 33.).

Rezultējošās kustības trajektoriju attēlo punkti C_1, C_2, C_3 u. t. t. Savienojot šos punktus, atradīsim rezultējošās kustības trajektoriju, kas būs — parabola.

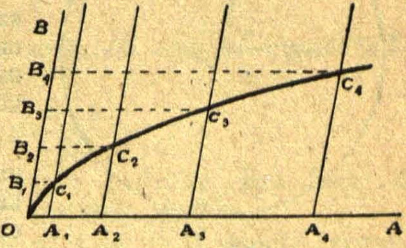


fig. 33

Tā tad šinī gadījumā rezultējošā kustība nav vienmērīga, ne vienmērīgi-paātrināta.

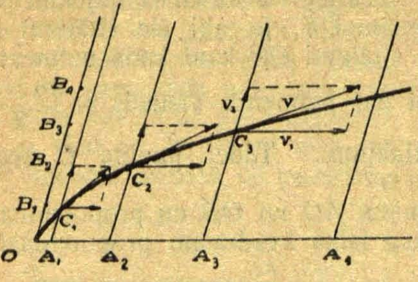


fig 34

Katrā momentā varam noteikt rezultējošās kustības lielumu un virzienu. Vektors v būs rezultējošais ātrums, kas konstruēts kā diagonale no komponentiem ātrumiem v_1 un v_2, pie kam v_2 paliek visu laiku viens un tas pats, bet v_1 ar laiku vienmērīgi pieaug (fig. 34.).

Rezultējošā ātruma v virziens ir rezultējošās kustības tangente attiecīgos laika sprīžos punktos C_1, C_2, C_3 u. t. t.

Kustības paātrinājuma lielums nemainas un vienmēr virzas pa v_1, tā tad kustības paātrinājums nesakrīt ar kustības virzienu.

Piem. * Uzzīmējiet rezultējošās kustības trajektoriju, kas zumējas no vienmērīgas kustības ar ātrumu $v = \frac{10 \text{ cm.}}{4 \text{ sec.}}$ un vienmērīgi paātrinātās kustības ar paātrinajumu $p = 4 \frac{\text{cm.}}{\text{sec.}^2}$, bez sākuma ātruma. Komponentās kustības savstarpēji perpendikularas.

§ 28. Vienmērīgā kustība pa aploci.

Visas formulas, kādas atrisinājām vienmērīgai taisnvirziena kustībai, ir pareizas vienmērīgi-līkumainai kustībai un tādēļ arī vienmērīgai kustībai pa aploci.

Pieņemsim, ka punkts kustas vienmērīgi pa aploci, kuŗas radiuss ir R. Ja t sekundēs punkts nogājis loku S *cm.*, tad attieksme $\frac{s}{t}$, kas ir vienāda ar vienā sekundē noietu attālumu, ir punkta ātrums

$$v = \frac{s}{t} \frac{cm.}{sec.}$$

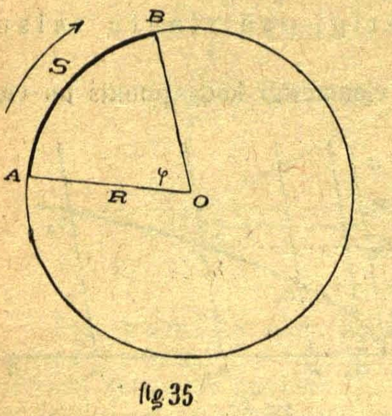


fig 35

Šādi aprēķinātu ātrumu nosauc par ātrumu pa aploci (fig. 35.).

Tā kā aploces jēdzienu ved vienmēr sakarā ar radiusu vaj diametru, tad arī vienmērīgās kustības pa aploci attiecināmas uz radiusu vaj diametru un apgriezienu skaitu kādā laika vienībā, pieņemtu 1 minutē.

Aploces gaŗums ir $C = \pi d = 2\pi R$, un ja aploce apgriežas minutē (jeb 60 sekundēs) n reizes, tad kaut kāda uz aploces esošā punkta noietais attālums būs

$$\pi d n = 2\pi R n$$

un vienā sekundē noietais attālums vaj **ātrums pa aploci ir**:

$$v = \frac{\pi d . n}{60} = \frac{2\pi R n}{60} = \frac{\pi R n}{30}, \text{ jeb pie:}$$

$\pi = 3,14$:

$$v = \frac{nd}{19,1} = \frac{nR}{9,55}.$$

Piem. * Mašinas ritenis apgriežas minutē 50 reizes, riteņa radiuss ir 0,4 m. Aprēķināt riteņa ātrumu ritenim vienmērīgi kustoties.

$$v = \frac{nR}{9,55} = \frac{50.0,4}{9,55} = 2,1 \text{ (apmēr.).}$$

No minētām formulām var atvasināt formulas priekš d, r un n:

$$d = \frac{19,1}{n} v,$$

$$r = \frac{9,55}{n} v,$$

$$n = \frac{19,1 . v}{d} = \frac{9,55 . v}{R}.$$

Noieto loku AB varam raksturot ar centralo leņķi φ, pie kam ņemam φ ne kā gradu skaitli, bet abzolutā vērtībā. Ja t sekundēs kustošais punkts nogājis leņķi φ, tad attieksme $\frac{\varphi}{t}$, kas ir vienāda ar vienā sekundē noietu leņķi, ir punkta **leņķisks ātrums**, un noieto attālumu nosauc par **leņķisko pārvietojumu**. Tā tad leņķiskais ātrums ir

$$w = \frac{\varphi}{t}.$$

Noietā loka garums $s = \varphi R$.

Ja dalām abas nolīdzinājuma puses ar t, tad dabūjam

$$\frac{s}{t} = \frac{\varphi R}{t}, \text{ jeb}$$

$$v = wR,$$

t. i., **ātrums pa aploci ir vienāds ar leņķisko ātrumu, reizinātu uz radiusu.**

Ar pēdējās formulas palīdzību varam aprēķināt leņķisko ātrumu atkarībā no apgriezienu skaita minutē

$$w = \frac{v}{R} = \frac{2\pi R n}{60 . R} = \frac{\pi . n}{30},$$

t. i. **leņķiskais ātrums nav atkarīgs no radiusa, bet tikai no apgriezienu skaita minutē**, jo arī π ir abstrakts skaitlis.

Ja viena apgrieziena laiku apzīmējam ar f un vienā minutē ķermenis apgriežas n reizes, tad viena apgrieziena laika ilgums 1 sec. ir:

$$f = \frac{60}{n}.$$

Ja laiks un apgriezienu skaits mērīti sekundēs, tad [pievestās formulas pieņem šādu vispārēju veidu:

$$v = \frac{2\pi R}{t}; \ w = \frac{2\pi}{t},$$

$$v = 2\pi Rn; \ w = 2\pi n.$$

Piem. * Kāds ir leņķiskais ātrums, ja ritenis minutē apgriežas 90 reizes?
* Kādā laikā apgriežas ūdensrats, kuŗa diametrs 2,4 m. un ātrums pa aploci 1,2 m.?
* Vilciens noiet stundā 45 klm. Cik reizes minutē apgriežas ritenis, kuŗa radiuss = 1,2 m.?
* Aprēķināt turbīnes ātrumu pa aploci un leņķisko ātrumu, ja turbīnes diametrs ir 0,6 m. un turbīne apgriežas 350 reizes minutē.

§ 29. Vienmērīgās kustības paātrinājums pa aploci.

Ja kāds punkts kustas vienmērīgi, tad tā raksturīgais virziens ir taisna linija, kas sakrīt ar trajektorijas virzienu.

Lai vienmērīgās kustības trajektorija kļūtu līka linija, tad nepieciešami, ka ātrums pieaug, pie kam pieauguma virziens nesakrīt ar kustības virzienu, bet darbojas uz sākuma ātruma virzienu zem kaut kāda leņķa. Kā agrāk novērojām (§ 23.), ja vienmērīgam sākuma ātrumam dodam no kaut kāda momenta paātrinājumu, kas darbojas citādā virzienā nekā sākuma ātrums, tad punkts kustas pa līkumainu trajektoriju. Atsevišķos gadījumos, ja dodam taisnvirziena kustībai zināmu noteiktu paātrinājumu, viss paātrinājums izlietojas punkta virziena maiņai un punkts tad pa līkumaino trajektoriju kustas vienmērīgi, bez nojaušama paātrinājuma. Tā tad, lai punkts kustētos vienmērīgi pa kaut kādu līku liniju ar vienmērīgu ātrumu v, punktam jāpiedod paātrinājums c, kas taisnvirziena trajektoriju pārvērš līkumainā. Šo paātrinājumu nosauc par centripetalo (centrtieces) paātrinājumu un tā lielums ir

$$c = \frac{v^2}{R},$$

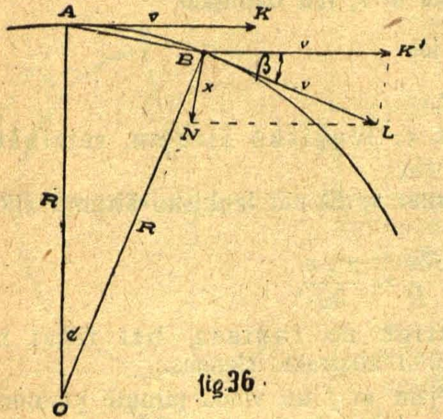


fig.36.

kur R nozīmē trajektorijas lieces radiusu.

Pievesto formulu var ļoti vienkārši zinātniski atvasināt ar diferencialo rēķināšanas palīdzību; šeit pievedīsim ne visai zinātnisku elementaru aprēķināšanas veidu.

Vienmērīgā kustība pa aploci ir kustība ar paātrinājumu.

Pieņemsim, ka punkts kustas vienmērīgi pa aploci, kuŗas radiuss ir R (fig. 36.). Aprēķināsim ātruma pieaugšanu ļoti mazā laika sprīdī $t = \frac{1}{n}$ sec., kuŗā punkts noiet ļoti mazu loku AB. Laika sprīdis t ir tik mazs, ka bez kaut kādas taustāmas kļūdas loku AB varam pieņemt pilnīgi vienādu ar chordu AB.

Punktā A iesākuma vienmērīgais ātrums ir v, kas attēlots ar vektoru AK; pēc t sec. kustošais punkts atrodas punktā B, pie kam tā ātrums ir tas pats vienmērīgais v un attēlots ar vektoru BL, vienādu ar vektoru AK. Jāaprēķina, kāds vektors ir zumēts ar AK, lai dabūtu vektoru BL, vienādu ar vektoru AK, bet ar virzienu pa BL, un ne AK, pa kuŗu punkts kustas ar iesākuma ātrumu.

Zīmēsim vektoru BK' vienādu un paralelu AK un sadalīsim BL divos vektoros, no kuŗiem viens vektors ir BK'.

Otru komponenti dabūjam, uzzīmējot paralelogramu $BK'LN$, kur $BN = K'L$ ir otra komponente. Apzīmēsim to ar x. Šis x ir ātruma pieaugums laikā $t = \frac{1}{n}$ sec. Ja paātrinājumu, tas ir ātruma pieaugumu 1 sec., apzīmēsim ar c, tad

$$x = \frac{c}{n} \text{ un } c = n \,.\, x.$$

Aprēķināsim x lielumu sakarā ar zināmiem datiem v un R. Trijstūŗi AOB un $K'BL$ ir līdzīgi, jo tie abi vienlīdzsānīgi, un leņķi α un β ir vienādi, jo tos ierobežo savstarpēji normalas malas.

Pamatojoties uz trijstūŗu līdzību, dabūjam sekošu attieksmi:

$$\frac{K'L}{K'B} = \frac{AB}{AO}, \text{ jeb}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{AB}{R}.$$

Chordu AB varam pieņemt par vienādu ar loku AB, un loka AB gaŗums ir tas attālums, kuŗu kustošais punkts noiet t sec.

$$AB = vt = \frac{v}{n}.$$

Tā tad:

$$\frac{x}{v} = \frac{v}{Rn} \text{ un tādēļ } x = \frac{v^2}{Rn};$$

liekot x vietā vienādu izteiksmi $\frac{c}{n}$, dabūjam

$$\frac{c}{n} = \frac{v^2}{Rn}, \text{ jeb } c = \frac{v^2}{R}.$$

Tā tad vienmērīgas kustības paātrinājums pa aploci ir vienāds ar vienmērīga ātruma kvadratu, dalītu ar radiusu.

Attiecīgi varam paātrinājumu c izteikt ar leņķiska ātruma w, laika t, jeb apgriezienu skaita n palīdzību

$$c = w^2 R; \; c = \frac{4\pi^2 R}{t^2}; \; c = 4\pi^2 R n^2.$$

Paātrinājuma c virzienu katrā momentā raksturo ātruma pieaugšanas x virziens. Varam dabūt c virzienu kā robežu (lim.) no x virziena, kad loks AB kļūst bezgali mazs, t. i., kad punkts B sakūst ar punktu A.

Ja punkts B tuvojas punktam A, tad leņķis β bezgala samazinās, un kad B sakūst ar A, tad tas vienāds ar nulli. Tāpat leņķis NBL, kad β traucas uz nulli, tuvojas taisnam leņķim un robežā (lim. β), kad $\beta = 0$, ir vienāds ar $\frac{\pi}{2}$ (jeb 90°). Tā tad x robežas virziens ir aploces radiuss.

Tādēļ vienmērīgās kustības pa aploci paātrinājuma virziens katrā momentā iet pa aploces radiusu un traucas uz centru.

Šo paātrinājumu nosauc par centripetalo paātrinājumu.

Piem. * Aprēķināt kaut kāda punkta, kas atrodas uz ekvatora, centripetalo paātrinājumu vienreizējas zemes apgriešanās laikā (24 stundās).

* Zemes attālums no mēneša ir 384000 km. (apm. 60 reiz lielāks nekā zemes radiuss). Periods, kuŗā mēnesis apgriežas ap zemi (sideriskais mēnesis), līdzinās 27,3 diennaktīm. Aprēķināt mēneša centripetalo paātrinājumu.

§ 30. Kustošā punkta projekcijas kustība.

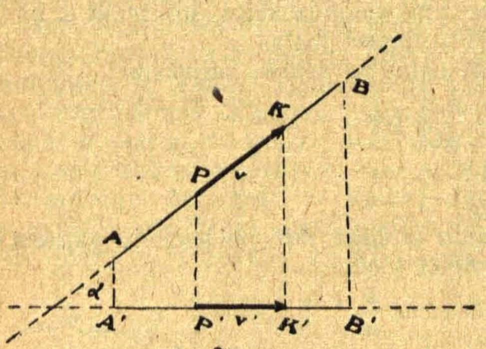


fig. 37

Pieņemsim, ka punkts P (fig. 37.) kustas vienmērīgi pa taisno AB. Katrā momentā vilksim uz taisno $A'B'$ no punktiem P perpendikularus un dabūsim punktus P', kuŗus nosauc par punkta P projekcijām uz taisnās $A'B'$. Tāpat kā var projektēt punktus, var projektēt linijas, figuras u. t. t.

Bez kaut kādiem pierādījumiem redzams, ka, ja punkts P kustas vienmērīgi, tad tā projekcija P' arī kustas vienmērīgi. Ja kādā laika sprīdī punkts P noiet attālumu AB, tad projekcija P' tanī pat sprīdī noiet attālumu $A'B'$, kas ir trajektorijas AB projekcija. Tā kā abas taisnās zīmētas zem leņķa α, tad

$$A'B' = AB \cos \alpha.$$

Ja vektors PK attēlo punkta P ātrumu v, tad projekcija $P'K'$ attēlos PK projekcijas ātrumu v' uz taisnās $A'B'$.

$$P'K' = PK \cos \alpha, \text{ jeb } v^1 = v \cos \alpha.$$

Minēto teoremu formulē šādi: projekcijas ātrums ir ātruma projekcija.

Pieņemsim, ka punkts P (fig. 38.) kustas pa taisno AB vienmērīgi-paātrināti. Pieņemsim, ka momentā t_1 ātrums ir v_1, attēlots ar vektoru P_1K_1, momentā t_2 ātrums ir v_2, attēlots ar vektoru P_2K_2, kuŗa gaŗums par K_1K_2 lielāks nekā P_1K_1 gaŗums.

Projekcijas ātrums momentā t_1 attēlots ar vektoru $P'_1K'_1 = P_1K_1 \cos \alpha$ un projekcijas ātrums brīdī t_2 ar vektoru $P'_2K'_2 = P_2K_2 \cos \alpha$. Ātruma pieaugšanas projekcija ir $K'_1K'_2 = K_1K_2 \cos \alpha$.

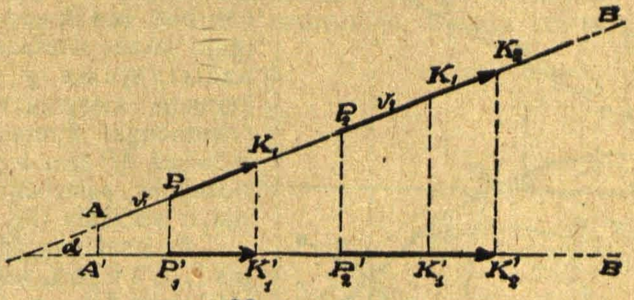


fig. 38.

Ja visu laiku punkta P ātrums pieaug proporcionali laikam (vienmērīgi-paātrināta kustība), tad arī punkta P' ātrums pieaug proporcionali laikam, kādēļ projekcijas P' kustība ir vienmērīgi-paātrināta.

Ātrumu pieaugumi K_1K_2 un $K'_1K'_2$ proporcionali punkta P un tā projekcijas P' paātrinājumiem.

Tādēļ: projekcijas paātrinājums ir paātrinājuma projekcija. Minētie noteikumi pareizi arī kaut kuŗai līkumainai kustībai.

Pieņemsim, ka punkts P kustas pa kādu līku liniju AB (fig. 39.). Tā kā trajektorija ir līkumaina, tad kaut kuŗā momentā punkta vienmērīgai kustībai ir taisnvirziena vienmērīgs ātrums, piem. v, un paātrinājums uz radiusa, piem. a, kādi lielumi attēloti ar vektoriem PK un PL. Tad punkta projekcijas P' ātrums un paātrinājums tanī pat momentā ir vektori $P'K'$ un $P'L'$ kā vektoru PK un PL projekcijas.

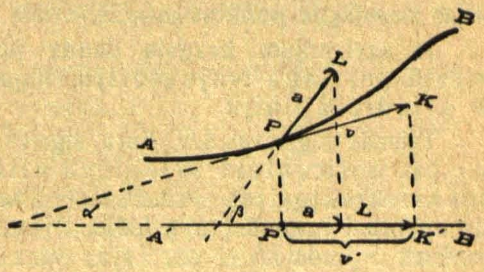


fig 39

Tā tad ātruma projekcija:

$$v' = v \cos \alpha$$

un paātrinājumu projekcija:

$$a' = a \cos \beta.$$

Pamatojoties uz to, ka projekcija var noteikt patiesās kustības raksturu, varam kustības projektēt arī uz koordinatu sistemas un tā ļoti atvieglināt aprēķinus.

§ 31. Slīpais sviediens.

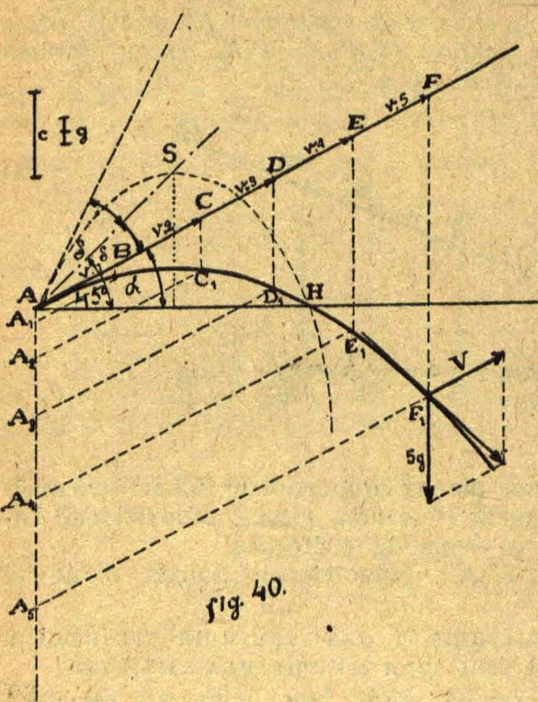


fig. 40.

Sviedīsim kādu ķermeni gaisa iztukšotā telpā (t. i. neievērosim gaisa pretestību) zem leņķa α no horicontales. Ķermeņa kustībai būs iesākuma ātrums v (kuŗu izsauc sviešanas spēks) un paātrinājums g (kuŗu izsauc ķermeņa smagums). Iesākuma (vienmērīga) ātruma trajektorija ir taisnā AF zem leņķa α no horicontales, paātrinājuma trajektorija ir vertikala (fig. 40.).

Ar iesākuma ātrumu ķermenis 1, 2, 3 u. t. t. sekundēs noiet attālumus $AB = v \,.\, 1$, $AC = v \,.\, 2$, $AD = v \,.\, 3$ u. t. t. Tanī pat laikā paātrinājums noiet attālumus $AA_1 = \frac{g}{2} \,.\, 1^2$, $AA_2 = \frac{g}{2} \,.\, 2^2$, $AA_3 = \frac{g}{2} \,.\, 3^2$ u. t. t. Paralelogramu, konstruētu uz AB, AA_1, tad AC, AA_2, tad AD, AA_3 u. t. t., punkti B_1, C_1, D_1, u. t. t. attēlo kustošā punkta (ķermeņa) trajektorijas atsevišķus punktus pirmās, otrās, trešās u. t. t. sekundes beigās.

Ja savienojam bezgala daudz punktu $AB_1C_1D_1 \ldots$ tad dabūjam sviestā ķermeņa trajektoriju, kuŗas forma ir parabole. To nosauc par sviediena liniju.

Taisnās nogriezni AH, kuŗu atgriež parabole no horicontalās linijas, nosauc par horicontalu sviediena attālumu. Punktu S — par sviediena trajektorijas virsotni. Paraboles daļu no iesākuma punkta līdz virsotnei nosauc par sviediena trajektorijas augšas virzienu un no virsotnes S lihds H — par lejas virzienu.

Ar vienu un to pašu iesākuma ātrumu (v) sviestais ķermenis piesavinās vienādu horicontalu sviediena attālumu, ja v leņķis (δ) (elevacijas leņķis) no 45^0 leņķa atšķiŗas ar vienu un to pašu lielumu. Tā vienlaidu linijas un punktlinijas attālumi AH ir vieni un tie paši.

Iesākuma ātrums ir v un paātrinājuma gala ātrums piektā sekundē ir g_5, rezultējošo ātrumu atrodam, ja konstruējam no šiem diviem ātrumiem paralelogramu. (Fig. 40. piektās sekundes beigās uzzīmētās konstrukcijas rezultējošais ātrums ir V.)

Gaisā sviediena linija drusku savādāka, jo ar gaisa pretestību horicontalais sviediena attālums samazinās un dabūjam fig. 40a punktēto liniju, kuŗu nosauc par ballistisko liniju. Ballistiskai linijai liela nozīme artileristiem.

Ja no kaut kāda trajektorijas punkta P (fig. 41.), kuŗu kustošais punkts sasniedzis laikā t, velkam perpendikularu PP uz horicontalo virzienu no sākuma punkta A, tad punkta P momentalo stāvokli varam pilnīgi noteikt,

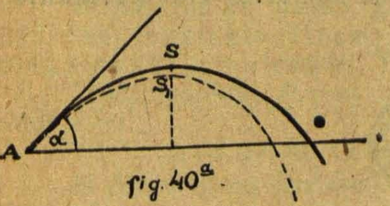


fig. 40a.

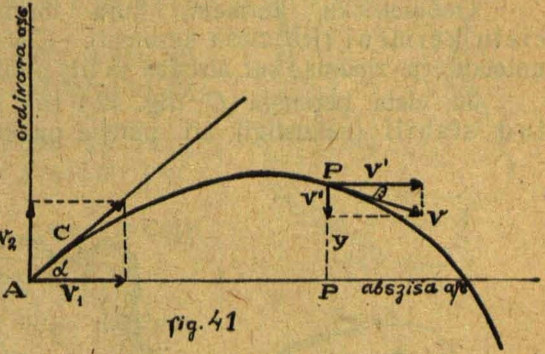


fig. 41

ja zinām taisnās gaŗumu $AP = x$ (uz abscisu ass) un $PP = y$ (uz ordinatu ass). Tā tad punktu P projektējam uz abscisu asi (x asi) un ordinatu asi (y asi).

Ja iesākuma ātrumu v sadalam horicontalā un vertikalā komponentē, tad horicontalā komponente ir $v_1 = v \cos\alpha$ un vertikalā $v_2 = v \sin\alpha$. Horicontalās projekcijas ātrums ir $v' = v_1 = v \cos\alpha$, t. i. kustība ir vienmērīga. Vertikalā virzienā darbosies arī paātrinājums, tāpat kā pie vertikalas ķermeņa sviešanas uz augšu, tādēļ vertikalās projekcijas ātrums ir $v'' = v \sin\alpha - gt$.

Laika sprīdī t noietie attālumi horicontalā un vertikalā virzienā ir:

$$\text{(abscisu ass) } x = v \,.\, \cos\alpha \,.\, t$$

$$\text{(ordinatu ass) } y = v \,.\, \sin\alpha \,.\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Vietu, kuŗā punkts P kaut kādā laika brīdī atrodas uz attālumu grafikas, pilnīgi varam noteikt ar pievesto formulu palīdzību.

Ar projekciju ātrumu $v' = v \cos\alpha$ un $v'' = v \sin\alpha - gt$ dabūjam rezultējošo ātrumu (ātrumu pa trajektoriju) ar formulas

$$v = \sqrt{v'^2 + v''^2}$$ palīdzību un leņķi

β, zem kāda vektors zīmējams no horicontalās, no formulas

$$\cos\beta = \frac{v'}{v}.$$

Piem. * Cik augstu virs horicontales atradīsies sviediena linijas galotne, ja ķermeņa iesākuma ātrums ir v un elevacijas leņķis α? $\left[\text{atbilde } \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}\right]$

* Zem kāda leņķa ir lielgabala stobrs no horicontales, ja šāviens pēc *t sec.* trāpa ķermeni, kuŗa horicontales attālums no lielgabala ir *am* un vertikalais augstums no horicontales *bm*? [pieņemot, ka $a = 200$ m.; $b = 20$ m.; $t = 6$ sec.; $g = 9{,}8$ m. sec.^{2}, atbilde ir $tg\alpha = \frac{2b+gt^2}{2a}$; $\alpha = 44^0\ 28'\ 46{,}5''$].

§ 32. Cieta ķermeņa kustība.

Ģeometrisku ķermeni, kuŗa formas nemainas, nosaucam par cietu ķermeni (jeb ciešu ķermeni). Cieta ķermeņa stāvoklis telpā pilnīgi noteikts, ja zināms, kur atrodas tā trīs punkti, kas nestāv uz vienas taisnās.

Ja cieta ķermeņa C (fig. 42.) trīs punkti A_1, A_2 un A_3 stabili, tad stabili (nekustīgi) arī pārējie punkti un līdz ar to viss ķermenis.

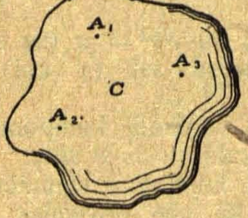


fig.42

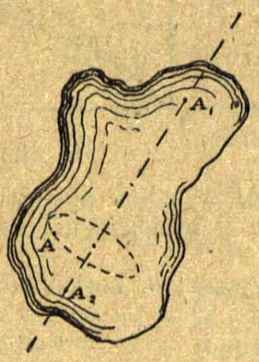


fig.43

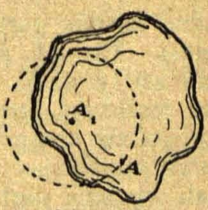


fig.44.

Ja cieta ķermeņa divi punkti A_1 un A_2 (fig. 43.) stabili, tad stabili arī visi punkti, kas atrodas uz taisnās A_1A_2, kuŗa savieno šos divus punktus. Ķermenis var griezties ap taisno kā ap asi, pie kam kaut kāds punkts A griežoties veido aploci, kas atrodas asij A_1A_2 perpendikularā laukumā, un kuŗas centrs atrodas uz ass.

Ja cieta ķermeņa viens punkts A_1 (fig. 44.) stabils, tad kaut kuŗa ķermeņa punkts A var griezties pa bumbas virsu, kur bumbas centrs sakritīs ar punktu A_1.

Ja neviens cieta ķermeņa punkts nav nostiprināts, tad ķermenis var grozīties telpā pēc patikas ar kaut kādu virzes vaj griezes kustību. Virzes kustību, kombinētu ar griezes kustību, nosauc par skrūvveidīgu kustību.

Aplūkosim visvienkāršākos cietā ķermeņa kustības veidus.

§ 33. Cietā ķermeņa griešanās ap asi.

Aplūkosim kaut kādu ķermeni (fig. 45.), kas griežas ap asi. Tā kā ķermeņa stāvoklis telpā pilnīgi noteikts, ja zinām, kur atrodas tā trīs punkti, tad arī ķermeņa kustība būs pilnīgi noteikta, ja zināsim, kā griežas kaut kāds punkts P (kas neatrodas uz ass) ap asi.

Punkts P_1 ķermenim griežoties veido aploci, kuŗas radiuss r_1 ir vienāds ar P_1 attālumu no ass. Ja punkts P_1 kustas vienmērīgi, tad arī kaut kāds cits ķermeņa punkts, piem. P_2, kustēsies pa savu aploci ar radiusu r_2 — vienmērīgi u. t. t. Tā tad šinī gadījumā viss ķermenis griežas vienmērīgi ap savu asi.

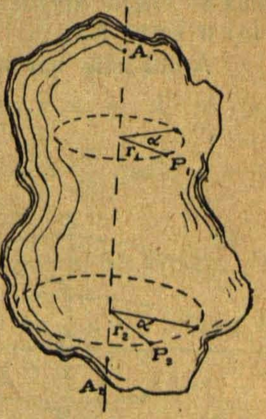


fig. 45

Ja punkts P_1 pārvietojas pa leņķi α, tad arī kaut kāds cits punkts, piem. P_2, pārvietosies pa to pašu leņķi α.

Tā tad, ja ķermenis griežas ap savu asi, tad leņķiskie ātrumi w visiem ķermeņa punktiem vienādi.

Tādēļ punktu P_1 un P_2 lineariskais ātrums ir:

$$v_1 = wr_1 \text{ un } v_2 = wr_2.$$

Ja dalām vienu izteiksmi ar otru, dabūjam proporciju

$$v_1 : v_2 = r_1 : r_2.$$

Tā tad, ja ķermenis griežas ap savu asi, tad tā dažādu punktu linearais ātrums tieši proporcionals punktu attālumiem no griešanās ass.

Tā kā punktu P_1 un P_2 linearais ātrums ir wr_1 un wr_2, tad punktu centripetalais paātrinājums ir:

$$c_1 = \frac{w^2 r_1^2}{r_1} = w^2 r_1.$$

$c_2 = \frac{w_2 r_2^2}{r_2} = w^2 r$, ja dalām vienu izteiksmi ar otru, dabūjam proporciju:

$$c_1 : c_2 = r_1 : r_2.$$

Tā tad, ja ķermenis griežas ap savu asi, tad tā dažādo punktu centripetalais paātrinājums tieši proporcionals punktu attālumiem no griešanās ass.

Piem. * Jupitera radiuss apm. 11 reiz lielāks par zemes radiusu. Kaut kādş punkts uz Jupitera ekvatora apgriežas ap Jupitera asi apm. 9 stundās, 55 min.

Kāds ir šīs griešanās leņķiskais ātrums un kāda attieksme ir starp šo leņķisko ātrumu un zemes griešanās leņķisko ātrumu?

Kāds ir šī Jupitera punkta linearais ātrums un kā tas attiecas pret kaut kāda zemes ekvatora punkta linearisko ātrumu?

§ 34. Harmoniskā kustība (vibracija, šūpošanās, svārstīšanās).

Harmoniskā kustība sastopama dabā bieži. Piem., ja ņemam kādu spirali, stīgu vaj gumiju, abus galus A un B nostiprinam un no O

(fig. 46.) velkam, piem., stīgu uz *C*, tad, pateicoties savai elastībai, stīga atlieksies līdz *D*, pēc tam aizies pār punktu *O* atpakaļ uz *C* un tad atkal kustēsies pa to pašu ceļu, pie kam attālumi arvienu samazināsies, līdz stīga nonāks miera stāvoklī *AOB*. Šādu stīgas vibraciju nosauc par harmonisku kustību.

Aplūkosim harmonisko kustību no kinematiskā redzes viedokļa.

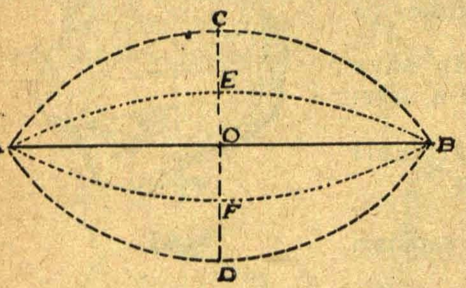


fig. 46.

fig. 47

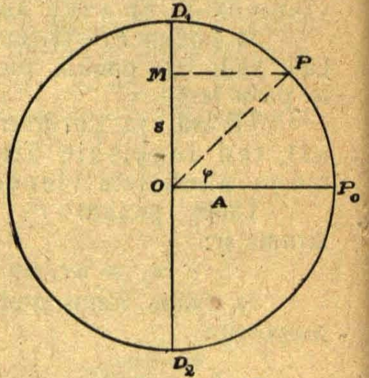


fig. 48

Ja punkts kustas pa taisno uz priekšu un atpakaļ (fig. 47.), vaj uz augšu un leju, ejot caur punktu *A* vienā un otrā virzienā, tad šādu kustību nosauc par harmonisko kustību. Pieņemsim, ka punkts sāk kustēties no *A* un noiet līdz *B*, tad atpakaļ caur *A* līdz *C* un beidzot atgriežas punktā *A*. Ja punkts pastāvīgi atkārto šādu kustību, tad pēdējo nosauc arī par periodisko svārstību.

Harmonisko kustību var uzlūkot kā vienmērīgi pa aploci kustošā punkta, kas projektēts uz diametra, projekcijas kustību.

Pieņemsim, ka punkts *P* (fig. 48.) kustas vienmērīgi pa aploci virzienā, pretējā pulksteņa rādītāja kustībai. Aplūkosim, kā kustēsies uz diametra D_1D_2 punkta *P* projekcija, kuŗu atzīmēsim ar *M*. Tanī laikā, kad punkts *P* kustas pa aploci, punkta *P* projekcija *M* harmoniski kustas pa diametru D_1D_2.

Kustību, kuŗu izdara *M*, punktam *P* vienreiz apgriežoties pa aploci, nosauc par pilnu svārstību.

Laiku, kādā notiek pilna svārstība, nosauc par svārstības periodu.

Punkta *P* stāvokli varam noteikt ar leņķi φ, kuŗu nosauc par svārstības fazi. Svārstības fazes skaita no radiusa, perpendikulara diametram, uz kuŗa pētī punkta projekcijas kustības.

Kamēr punkts P apiet visu aploci, leņķis φ mainās no O līdz 2π (no 0^0 līdz 360^0).

Ja kaut kādā momentā punkta P stāvokli nosaka leņķis φ, tad projekcijas M stāvokli nosaka taisnās nogrieznis s, kas ir

$$s = A \sin \varphi.$$

Ja $\varphi = 0$, jeb $\varphi = \pi$, tad $s = 0$. Ja $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tad $s = + A$, tā tad projekcija M sastop punktu P diametra galā D_1. Ja $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, tad $s = -A$, tā tad projekcija M sastop punktu P diametra galā D_2.

Aploces radiusu, kas vienāds ar vislielāko M attālumu no punkta O, nosauc par svārstības amplitudi.

Pieņemsim, ka kustības sākumā M sakrīt ar O un $\varphi = 0$, punkts P apiet aploci laikā T, tad punkta P leņķiskais ātrums ir $w = \frac{2\pi}{T}$.

Pēc t sekundēm no kustības sākuma leņķis būs

$$\varphi = \frac{2\pi t}{T},$$

un

$$s = A \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Pēdējo formulu nosauc par harmoniskās kustības formulu.

Ja valdziņa galā piestiprinam bumbiņu un griežam to, kā norādīts fig. 49., tad spogulī E, kas nostādīts perpendikulari bumbiņas kustības aplocei, novērosim harmonisku kustību.

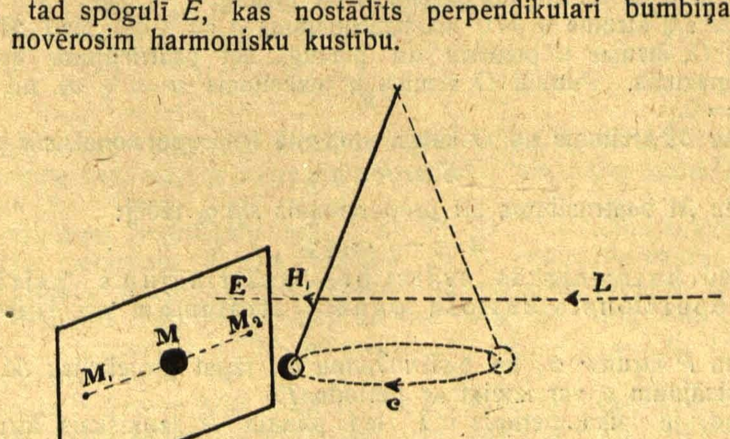


fig. 49

§ 35. Harmoniskās kustības ātrums un paātrinājums.

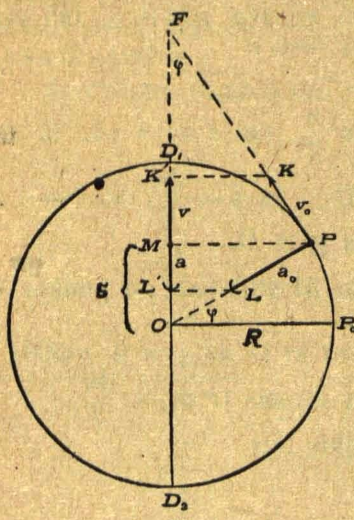


fig. 50

Pieņemsim, ka punkta P (fig. 50.) linearais ātrums v_0 attēlots ar vektoru PK un centripetalais paātrinājums a_0 ar vektoru PL.

Šo vektoru projekcijas ir MK^1 un ML^1.

$MK^1 = PK \cos \varphi$, jeb $v = v_0 \cos \varphi$.

Leņķis POD_1 vienāds ar $\frac{\pi}{2} - \varphi$, tādēļ

$ML^1 = PL \sin \varphi$, jeb $a = a_0 \sin \varphi$.

Paātrinājums a ir negativs, jo tas virzās no augšas uz leju.

Kad projekcija M kustas no O līdz D, tad tās ātrums pamazinās, bet paātrinājums pieaug, jo ātrums un paātrinājums ir tieši pretēja virziena.

Punkta D_1 ātrums $v = 0$, bet paātrinājums sasniedz savu maksimumu un ir negativs $a = - a_0$.

M, kustoties no D_1 uz O, ātruma un paātrinājuma virzieni iet uz leju un ātrums ar paātrinājumu ir negativi. Kustība ir paātrināta un, jo vairāk punkts tuvinās punktam O, jo paātrinājums samazinās un punktā O ātrums ir maksimals $v = -v_0$ un paātrinājums $a = 0$.

Kad punkts M kustas no O līdz D_2, negativais ātrums samazinās un pozitivais (no lejas uz augšu) paātrinājums pieaug.

Punktā D_2 ātrums $v = 0$ un paātrinājums $a = +a_0$. Kad M kustas no D_2 līdz O, ātrums ir pozitivs un pieaug, bet paātrinājums arī pozitivs un samazinās. Punktā O ātrums ir maksimals $v = + v_0$ un paātrinājums $a = 0$.

Punkta M attālums no O katrā momentā ir proporcionals $sin\ \varphi$, tādēļ:

$$S = R \sin \varphi.$$

Punkta M paātrinājums arī proporcionals $sin\ \varphi$, tādēļ:

$$a = -a_0 \sin \varphi.$$

Tā tad harmoniskās svārstības paātrinājums katrā momentā proporcionals kustošā punkta attālumam no trajektorijas vidus.

Punkta P ātrumu v_0 un paātrinājumu a_0, tāpat projekcijas M ātrumu v un paātrinājumu a var izteikt ar periodu T.

Tā tad, ja laika periods ir T, tad punkta P leņķiskais ātrums ir $w = \frac{2\pi}{T}$ un linearais ātrums

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T}.$$

Paātrinājums $a_0 = \frac{v_0^2}{R}$ un tādēļ

$$a_0 = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Leņķis katrā momentā ir $\varphi = \frac{2\pi t}{T}$ un tādēļ punkta ātrums katrā momentā ir

$$v = \frac{2\pi R}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}$$ un paātrinājums

katrā momentā

$$a = -\frac{4\pi^2 R}{T^2} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

§ 36. Harmoniskās kustības attālumu grafika. Ja punkts P (fig. 51.) vienmērīgi kustas pa aploci, bet punkta projekcija M harmoniski svārstās, un ja dalām aploci vairāk vienādās daļās, piem. 8, un katru reizi atzīmējam projekcijas M stāvokli atkarībā no laika momentiem, kuŗi ir katrs $^1/_8$ no perioda, tad varam uzzīmēt attiecīgos attālumus S.

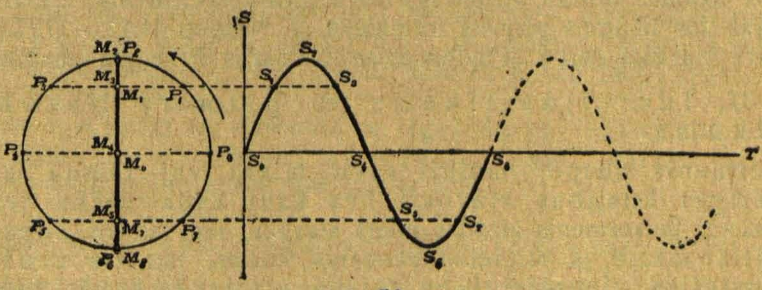


fig. 51

Uzzīmēsim koordinatu asis S un T; uz T atliksim nogriezni, proporcionalu periodam T, un dalīsim to 8 vienādās daļās; katrā dalīšanas punktā vilksim perpendikularus ar gaŗumu, proporcionalu attiecīgiem attālumiem S attiecīgos laika brīžos. (Fig. 51.) ordinatas ņemtas vienādas, t. i., proporcija $=$ 1, tad punkti S_1, S_2, S_3 .... u. t. t. attēlo attālumu grafiku.

Punktą S ģeometriskā vieta ir līka linija, kuŗu nosauc par sinosoidu. (Līko nosauc par sinosoidu tādēļ, ka katra punkta ordinata proporcionala attiecīgam leņķa sinusam.

II. Dinamika.

A. Materiala punkta kustības.

Dinamika ir mācība par materialo ķermeņu kustībām zem spēku iespaida.

Spēku un kustību attieksmes dibinās uz nedaudziem mechanikas pamatlikumiem.

Šos likumus nevar uzlūkot kā neapšaubāmu patiesību, jo likumu pareizību pierāda tikai tas, ka visi novērojumi dabā tos pilnīgi apstiprina un neviena parādība nerunā tiem pretim; tomēr šie likumi pieņemami, kā piem. ģeometriska aksioma.

Tā tad mechanikas pamatlikumi ir daudzu un dažādu novērojumu kopojums.

Šos likumus nosauc arī par Ņutona pamatlikumiem, t. i. zinātnieka vārdā, kas šos likumus pirmais formulējis (J. Newton 1642.—1727.) un minējis savā klasiskā darbā „Phylosophiae Naturalis Principia mathematica".

§ 37. Inercijas likums jeb pirmais Ņutona pamatlikums.

Ķermenis nespēj mainīt savu miera vaj taisna virziena vienmērīgas kustības stāvokli bez kaut kāda spēka iespaida. Tas nozīmē: ja ķermenis atrodas miera stāvoklī, tad tas arī cenšas mūžīgi palikt mierā, ja turpretim ķermenis kustas, tad tas cenšas mūžīgi kustēties vienmērīgi un taisnā virzienā, kamēr kāds ārējs iemesls maina tā ātrumu vaj virzienu, vaj arī aptur pašu kustību.

Piem. ripa, ja tā reiz iekustināta, kustēsies ar to pašu ātrumu un tanī pat virzienā mūžīgi, kaut gan spēks, kas ripu iekustinājis, neatstāj uz to vairs nekādu iespaidu; tikai ceļa nelīdzenumi, gaisa spiediens, berze u. t. t. ir tie iemesli, kas pamazām aptur ripas kustību.

§ 38. Spēks.

Spēks izbīda ķermeni no miera stāvokļa vaj groza ķermeņa jau pastāvošo vienmērīgo-taisnvirziena kustību. Ja nedarbotos spēki, tad ķermenis atrastos mūžīgā mierā.

Spēku pirmiemesli mechaniķi maz interesē, bet gan spēku darbība, piem. ķermeņa kustības virziens, ātruma maiņa, ķermeņa molekulu savstarpējā stāvokļa maiņa u. t. t., ar vārdu sakot, viss, kas uz ķermeņa stāvokli atstāj iespaidu kā darbojošais spēks.

Spēkus sadala divās galvenās kategorijās: aktivos un pasivos spēkos.

Pirmie ir dzinēji jeb motora spēki, kuŗi spēj ķermeni kustināt. Otrie ir tādi spēki, kuŗi pretojas pastāvošai kustībai vaj groza ķermeņa pastāvošo kustību; tos nosauc arī par šķēršļiem (pretspēkiem).

Piem. ūdensspēks, kas griež ūdensdzirnavas, tvaikspēks, kas liek lokomotivei strādāt, zirgspēks, naftas-motora spēks, vējspēks, cilvēkspēks u. t. t. ir aktivi spēki; gaisa pretestība kustībai, berze, baļķa stiprums u. t. t. ir pasivi spēki.

Arī aktivs spēks var darīt uz ķermeni tādu pat iespaidu, kā pasivs spēks, ja tas darbojas pastāvošai kustībai tieši pretēji un pastāvošo kustību traucē, piem., ja ar cilvēka spēku apturam spara ratu.

Ja uz ķermeni darbojas viens vaj vairāk spēku un ķermenis nekustas, tad par tādu ķermeni saka, ka tas atrodas līdzsvarā un paši spēki savstarpēji līdzsvarojas.

Ja spēks ir ķermeņa molekulu (sastāvdaļu) darbības rezultats, tad tādu spēku nosauc par iekšējo spēku. Piem., ja saspiežam atsperi, tad pateicoties atsperes iekšējiem spēkiem (elastībai) atspere cenšas ieņemt savu agrāko stāvokli; tāpat valgs, pateicoties savam stiprumam (iekšējam spēkam), pretojas pārraušanai.

Ja spēks darbojas tikai īsu sprīdi (momentu) — piem. trieciens — tad tādu spēku nosauc par pēkšņu spēku. Ja spēks darbojas ilgāku laiku, piem. ķermeņa smagums, sutas spēks lokomotivē, tad tādu spēku nosauc par pastāvīgu spēku.

Pastāvīgie spēki var darboties ar ilgstošu spriegumu, piem. ūdenskrituma spēks, vaj pārmaiņas spriegumu, piem. pulvera spēks, kas sadegdams rada stobrā gazes, kas izbīda lodi.

§ 39. Ķermeņa masa un paātrinājums.

Ikdienišķā sarunā par masu saucam materijas daudzumu kaut kādā ķermenī. Zeme pievelk kaut kādu ķermeņa molekulu, kas savukārt spiež uz savām kaimiņienēm, tā tad visu ķermeņa molekulu kopspiediens ir ķermeņa svars.

Ja kaut kāds pastāvīgs spēks darbojas uz kaut kādu ķermeņa molekulu vaj ķermeni, tad tāds spēks rada vienmēr paātrinājumu, jo tas vienādā laika sprīdī par vienādu ātrumu palielina ķermeņa kustību.

Tā kā pie pastāvīgiem spēkiem pieder zemes pievilkšanas spēks (ķermeņa svars), tad tas rada ķermeņa kustības paātrinājumu un pēdējais ir proporcionals spēkam. Brīva krišana ir šādas paātrinātas kustības piemērs.

Paātrinājumi γ_1, γ_2, γ_3 . . . . kuŗus vairāki spēki p_1, p_2, p_3 . . . . . rada tā paša ķermeņa kustībā, ir spēkam proporcionali, tā tad

$$\frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{p_2}{\gamma_2} = \frac{p_3}{\gamma_3} \ldots\ldots = m.$$

Šī proporcija ir pastāvīga vienam noteiktam ķermenim, un pastāvīgo attieksmi starp spēku un no spēka radīto paātrinājumu vienam un tam pašam ķermenim nosauc par ķermeņa masu.

Tā tad katra ķermeņa masa ir konstanta, kurpretim ķermeņa svars ir grozīgs un atkarīgs no ķermeņa stāvokļa citu ķermeņu starpā un visur uz zemes lodes nav viens un tas pats.

Ja ķermeņa svaru dažādās vietās uz zemes lodes apzīmējam kā pastāvīgu spēku P_1, P_2, P_3.... un no šā spēka radīto paātrinājumu ar g_1, g_2, g_3...., tad proporcija paliek agrākā

$$\frac{P_1}{g_1} = \frac{P_2}{g_2} = \frac{P_3}{g_3} \ldots\ldots = m.$$

Tā tad dabūjam masu, ja ķermeņa svaru dalām ar paātrinājumu. Tā kā zemes pievilkšanas spēka paātrinājums pie mums ir 9,81 m./sec.^{2}, jeb apmēram 10, tad apm. $\frac{P}{10} = m$, t. i. ķermeņa masa ir apmēram viena desmitā daļa no ķermeņa svara.

Uz mēneša paātrinājums ir 0,27 $\frac{\text{cm.}}{\text{sec.}^2}$, tādēļ tas pats ķermenis uz mēneša svērs $\frac{0{,}27}{980} = \frac{1}{3600}$ no svara, kāds ķermenim ir uz zemes.

Šautenes lode uz mēneša gandrīz pilnīgi zaudē savu svaru, bet masa paliek viena un tā pate, tādēļ uz mēneša izšautā lode ievainos tāpat, kā uz zemes virsus.

§ 40. Spēka impulss.

Pastāvīgs spēks, darbodamies uz ķermeni, katrā momentā maina ķermeņa kustību, tādēļ spēka iespaida rezultats ir atkarīgs no laika, kuŗā spēks darbojas uz ķermeni.

Spēka darbības mēru nosauc par spēka impulsu jeb vienkārši par impulsu.

Tā tad impulss ir produkts no spēka lieluma P uz laika sprīdi t, kuŗā spēks darbojas uz ķermeni.

$$\text{Spēka impulss} = Pt.$$

Vienādi impulsi nevienādiem ķermeņiem dod nevienādus ātrumus, kas atkarīgi no ķermeņa masas. Piem., ja ar vienu un to pašu spēku sviedīsim lielu akmeni un mazu, tad mazā akmeņa ātrums būs lielāks nekā lielā akmeņa ātrums.

Tā tad masa m nosaka ķermeņa inerciju; lai dotu ķermeņiem vienu un to pašu ātrumu, tad lielākai ķermeņa masai vajadzīgs lielāks impulss.

Lai vienādām masām dotu dažādus ātrumus, tad jo lielāku ātrumu grib sasniegt, jo lielāku vajaga impulsu.

§ 41. Kustības moments.

Ja ķermenis, kuŗa masa ir m, kustas ar ātrumu v, tad produktu $m.v$ nosauc par kustības momentu.

Kustības moments ir masa, reizināta ar ātrumu.

Kustības moments $= mv$.

Varam pierādīt, ka kustības moments ir vienāds ar spēka impulsu, jo

$$m = \frac{P}{g} \text{ un } g = \frac{P}{m}.$$

Pēc t sec., ķermeņa ātrums, ja tā iesākuma ātrums $v_0 = O$, ir

$$v = gt;$$

liekot g vietā $\frac{P}{m} . t$, dabūjam $v = \frac{P}{m} . t$, jeb

$$m . v = P . t.$$

Nolīdzinājuma kreisā puse ir kustības moments, labā — spēka impulss.

§ 42. Otrais Ņutona pamatlikums.

Ķermeņa kustības momenta maiņa ir proporcionala spēka impulsam un iet tajā pat virzienā, kādā virzās spēks, jeb izteicot vienkārši: kustības maiņa ir proporcionala darbojošamies spēkam un tā paša virziena, kāda virziena ir spēks.

Pēc šī likuma varam noteikt spēka lielumu un virzienu pēc spēka darbības uz ķermeņa masu.

$m . v = Pt$, ja dalām nolīdzinājumu ar t, tad dabūjam $\frac{m . v}{t} = P$; tā kā $\frac{v}{t}$ nav nekas cits kā ātruma pieaugšana vienā sec. (paātrinājums), tad $\frac{v}{t} = g$ un

$$P = m . g.$$

Tā spēks ir proporcionals masai, pavairotai ar paātrinājumu.

§ 43. Masas un spēka vienība.

Ja esam izvēlējušies spēka vaj masas mērīšanai kaut kādu vienību, tad ar formulas $\frac{P}{g} = m$ palīdzību varam izteikt: ar spēka vienības palīdzību masas vienību vaj arī otrādi: ar masas vienības palīdzību spēka vienību.

Sakarā ar to, kādu vienību esam izvēlējušies par galveno, dabūjam divas mēru sistemas.

Ja pieņemam par masas vienību viena grama svaru, tad attiecīga spēka vienība ir 1 gr. masas paātrinājums 1 cm. vienā sekundē; šo spēka vienību nosauc par dinu *(dyna)*.

$$1\ dyna = 1\ gr.\ \frac{cm.}{sec.^2} = 1\ gr.\ cm.\ sec.^{-2}$$

(grieķiski dynamis — spēks).

Viena grama paātrinājums ar zemes pievilkšanas spēku ir 981 cm. jeb 981 dina.

Šinī sistemā kā pamats ņemts konstants lielums — masa, tādēļ šo sistemu dēvē par abzoluto mēru sistemu.

Tā kā šinī sistemā par gaŗuma mēru pieņem *1 cm.*, par smaguma mēru *1 gr.* un par laika mēru *1 sec.*, tad šo sistemu vienkārši apzīmē ar pirmajiem burtiem

CGS.

Tā kā viena dina ir ļoti mazs mērs, tad bieži lieto mēru, kas miljonu reizes lielāks par dinu.

$$1\ megadyna = 10^6\ dyn.$$

Viena grama svars pie mums ir 981, uz pola 983, uz ekvatora 978, uz planetas Marss — 395 dinas.

CGS sistemu lieto zinātniskos pētījumos un teoretiskā mechanikā, bet mašinu konstruēšanā un inženieru būvēs, kur katra būve ir saistīta ar zināmu vietu virs zemes, mēdz lietot kā spēka mēru vienkārši ķermeņa svaru, piem. 1 klgr., 1 pudu u. t. t. Šādu praktisku spēka mēru sistemu nosauc par gravitacijas sistemu.

Piem. * Cik dinām līdzinās viena puda svars?

$$1\ \text{puds} = 980 \cdot 16000\ \text{din.} = 15{,}7 \cdot 10^6\ \text{din.}$$

(1 = puds 16000 gr.).

§ 44. Atvuda mašina un brivās krīšanas likumu eksperimentacija.

Pieņemsim, ka ķermenis sākumā atrodas mierā, bet tad uz ķermeni sāk darboties pastāvīgs spēks. Pēc Ņutona otrā likuma tad ķermenis kustēsies taisnā virzienā ar vienādu paātrinājumu, t. i. vienmērīgi-paātrināti.

Kā pastāvīgu spēku varam uzlūkot zemes pievilkšanas spēku. Katrs neatbalstīts ķermenis krīt uz zemi zem zemes pievilkšanas spēka iespaida.

Pirmais krišanas likums. Gaisa tukšā telpā visi ķermeņi (dzelzs gabali, papīrs, spalva u. t. t.) krīt ar vienādu ātrumu. Zemes pievilkšanas spēks darbojas uz katru molekulu vienādi, un jo lielāka kustošā ķermeņa masa, jo lielāks arī zemes pievilkšanas spēks, bet katras molekulas spēks paliek viens un tas pats, tādēļ arī dažādu masu ātrums ir vienāds.

Tā tad pēc formulas $mv = Pt$, ātrums v atkarīgs tikai no t.

Otrais krišanas likums. Brīvi krītošā ķermeņa ātrums pieaug proporcionali laikam. Zemes pievilkšanas spēks katrā sekundē darbojas vienmērīgi un tādēļ katrā sekundē izsauc vienu un to pašu ātrumu. Piem., ja pirmā sekundē ātrums ir 10 m., tad otrā sekundē tas pieaugs par 10 m. un būs 2 . 10 m.

Trešais krišanas likums. Krišanas attālums pirmā sekundē ir uz pusi tik liels kā pēdējā. $S_1 = \frac{g}{2}$. Tā kā kustība ir vienmērīgi paātrināta, tad attālums ir aritmetiskais vidējais starp sākuma un beigu attālumu: $s = (o+g) : 2 = \frac{g}{2}$.

Ceturtais krišanas likums. Krišanas attālumi katrā sekundē pieaug kā nepāra skaitļi:

attālums s_1 pirmā sekundē $= \frac{o+g}{2} = 1\frac{g}{2}$

" s_2 otrā " $= \frac{g+2g}{2} = 3\frac{g}{2}$

" s_3 trešā " $= \frac{2g+3g}{2} = 5\frac{g}{2}$

" s_t t " $= \frac{(t-1)g+tg}{2} = (2t-1)\frac{g}{2}$.

Piektais krišanas likums. Krišanas attālums t sekundēs ir vienāds ar produktu no laika kvadrāta uz $^1/_2$ paātrinājumu: $s = \frac{1}{2}gt^2$.

Kopējais attālums S_1 pirmās sekundes beigās ... $1\frac{g}{2}$

" " S_2 otrās " " $1\frac{g}{2} + 3\frac{g}{2} = 4\frac{g}{2}$

" " S_3 trešās " " $4\frac{g}{2} + 5\frac{g}{2} = 9\frac{g}{2}$

" " S_t t " " $= t^2 \cdot \frac{g}{2}$

Sestais krišanas likums. Tā kā $v = gt$, tad $t = \frac{v}{g}$, ja šo izteiksmi liekam formulā $s = \frac{1}{2}gt^2$, tad dabūjam jaunu formulu attālumam

$$s = \frac{1}{2}g(v:g)^2 = \frac{v^2}{g}.$$

Septītais krišanas likums. No formulas $s = {}^1/_2\, gt^2$, dabūjam formulu laika noteikšanai $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$.

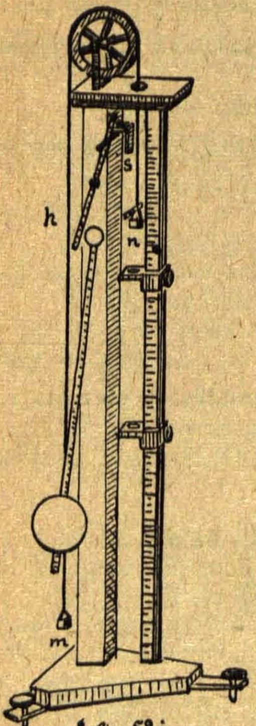
Astotais krišanas likums. Beigu ātrums ir $v = \sqrt{2gs}$, ko dabūjam no $S = \frac{v^2}{2g}$.

Devītais krišanas likums. Krišanas attālumi ir proporcionali laikiem kvadratā $s : s_1 = t^2 : t^2_1$.

Par šo krišanas likumu pareizību var pārliecināties ar Atvuda mašīnas palīdzību (George Atvood 1745.— 1807.).

Fig. 52., 53. un 54. uzzīmēta Atvuda mašina un daži Atvuda mašinas detaļi. Uz galdiņa, apm. 160 cm. no zemes, piestiprināts ritenītis. Pār ritenīti pārlikts zīda diegs, kuŗa abos galos piestiprināti vienādi svari m un n. Viegls papildu svars r rada smagumu $(m+n+r)$ kustēšanos. Krišanas augstumus nolasa no skalas cm. vaj pēdās. Laiku atskaita sekundu svārsts, kas piestiprināts pie mašinas. Svariņam r jāuzņem pasivie spēki, kuŗi rodas no ritenīša un diega berzēšanās, un jāizsauc bumbiņu kustība. Ja abi spēki (svariņi

m un *n*) ir vienādi, tad tie atrodas līdzsvarā, bet ja pagrūžam kādu no svariņiem, tad novērojam pilnīgi vienmērīgu kustību.



Ja uz *m* uzliekam svariņu *r*, tad *m*+*r* pārvelk *n* un bumbiņas kustas. Spēks, kas rada kustību, šinī gadījumā ir $r-x$ (ja x ir tas spēka leelums, kas pārvar berzēšanos). Pieņemsim, ka $(r-x)$ masa ir M_1 un ja spēks $(r-x)$ vilktu tikai savu masu, tad paātrinājums būtu $g = 981 \frac{cm.}{sec^2}$, bet spēkam $(r-x)$ jāvelk arī masa $2M$, jo katras bumbiņas *m* un *n* masa ir M, tādēļ paātrinājums, kuru novērosim uz mašinas, būs mazāks

$$g^1 = g \cdot \frac{M_1}{2M + M_1}.$$

Pieņemsim, ka $M = 240$ gr. un $M_1 = 10$ gr., tad

$$g^1 = 980 \cdot \frac{10}{480 + 10} \frac{cm.}{sec.^2} = 20 \frac{cm.}{sec.^2}.$$

Tā kā kustība vienmērīgi paātrināta, tad ātrums pēc t sekundēm ir

$$v = g^1.t = 20t \frac{cm.}{sec.},$$

tā tad pēc 1 sekundes būs $20 \frac{cm.}{sec.}$, pēc divām — $40 \frac{cm.}{sec.}$, pēc

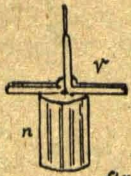


fig. 52

fig. 53.

fig. 54.

trim — $60 \frac{cm.}{sec.}$ un t. t.

Tāpat arī attālumi t sekundēs ir

$$s = g^1 \frac{t^2}{2} = 10t^2 \text{ cm.};$$

tā tad attālumi pēc 1 sekundes ir 10 cm., pēc 2 sek. 40 cm., pēc 3 sekundēm 90 cm. u. t. t.

Tā tad ar Atvuda mašinas palīdzību var eksperimentēt visus krišanas likumus.

45. Spēku iespaida (darbības) neatkarības likums.

Spēka iespaids (darbība) uz ķermeni nav atkarīgs no tā, vaj ķermenis atrodas mierā vaj kustas ar inerciju, vaj zem citu spēku iespaida. Tā tad katru spēka darbību uz ķermeni varam aplūkot kā patstāvīgu, neatkarīgu no agrāki darbojošamies spēkiem, un darbības rezultatu, piem. ātruma maiņu, trajektorijas maiņu u. t. t., varam uzlūkot kā viena vaj vairāku atsevišķu patstāvīgu spēku darbības rezultatu.

Pieņemsim, ka materials punkts*) O kustas aiz inercijas ar ātrumu v; tanī pat laikā uz punkta darbojas spēks F, kas rada paātrinājumu a (fig. 55.). Ja spēka F nebūtu, punkts kustētos vienmērīgi v virzienā, bet ja inercijas kustības nebūtu, punkts kustētos spēka F virzienā ar vienmērīgi-paātrinātu ātrumu. Tā kā abi spēki darbojas vienā laikā, tad

*) Par materialu punktu saucam bumbiņu ar bezgala mazu radiusu un ikviena lieluma masu.

punkts kustas, kā norādījām kinematikā, pa līku trajektoriju (parabolu) ar nevienmērīgi pieaugošu ātrumu.

Tā kā katrs spēks, kas darbojas uz ķermeni ir pastāvīgs, tad' varam šos pastāvīgos spēkus zumēt un atrast spēku, kuŗu likt patstāvīgo spēku vietā un sasniegt ar šo jauno spēku tos pašus kustības un trajektorijas maiņas rezultatus, kā vairāku spēku kopdarbībā.

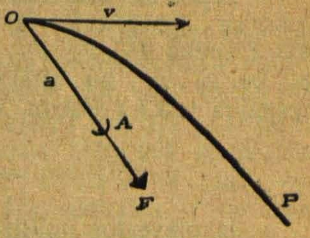


fig. 55

Par spēka virzienu uzlūko to virzienu, pa kuŗu kustētos inerts ķermenis, ja uz to darbotos tikai viens pats minētais spēks. To ķermeņa punktu, uz kuŗu darbojas spēks, nosauc par spēka iedarbes punktu.

Lai pilnīgi noteiktu spēka darbību telpā, nepieciešami zināt 1) spēka iedarbes punktu, 2) spēka virzienu, 3) spēka lielumu.

Katru spēku var attēlot grafiski kā nogriezni, kuŗa gaŗums un virziens izteic spēka lielumu un virzienu. Tā tad ar vektoru palīdzību varam spēkus attēlot grafiski. Lai varētu atšķirt spēka vektorus no citiem, spēka vektoru galos zīmē jumtiņus.

Vektora sākums sakrīt ar spēka darbības punktu, vektora virziens sakrīt ar spēka virzienu un vektora gaŗums attēlo linearā mēra vienībā attiecīgu svara vienību. Vektoru zīmēšanai varam pieņemt mērogu pēc patikas, piem. 1 klg. = 1 mm., 1 pud. = 1 cm. u. t. t.

Tā kā spēka lielums proporcionals masas un paātrinājuma produktam, tad, ja spēki P_1 P_2, P_3.... darbojas uz vienu un to pašu ķermeni, t. i. uz vienu un to pašu masu, — tie ir proporcionali paātrinājumiem, kuŗus spēki spēj radīt:

$$P_1 : P_2 : P_3 \ldots\ldots = p_1 : p_2 : p_3 \ldots\ldots$$

Ja vienādi spēki darbojas uz diviem atsevišķiem ķermeņiem, kuŗu masas nav vienādas, piem. divi vienādi spēki P darbojas uz ķermeņiem ar masām m un m_1, tad $P = mp$ un $P = m_1 p_1$ un

$$\frac{P}{P} = \frac{mp}{m_1 p_1} = 1 \text{ un tādēļ}$$

$$m : m_1 = p_1 : p,$$

tas ir — paātrinājumi apgriezti proporcionali masām.

Ja divi nevienādi spēki divām nevienādām masām piedod vienādus paātrinājumus, tad spēki ir proporcionali masām

$$P : P_1 = \mathrm{m} : \mathrm{m}_1$$

(piem. ķermeņa smagums tieši proporcionals masai, tādēļ visi ķermeņi, neatkarīgi no to masas lieluma, tukšā telpā krīt ar vienādu paātrinājumu).

Ja attēlojam spēkus grafiski ar vektoru palīdzību, kas ir proporcionali spēku lielumiem (klgr., pud. u. t. t.), tad vektoŗi savstarpēji attiecas kā paātrinājumi, kuŗus katrs spēks, darbojoties patstāvīgi rada. Tāpat šie paātrinājumi attiecas kā attālumi, kādus ķermenis noietu noteiktā laika sprīdī zem katra spēka iespaida. Ja katra spēka P_1, P_2, P_3.... paātrinājumi kaut kādā notēiktā laika sprīdī ir p_1, p_2, p_3.... un attālumi, kādus ķermenis zem katra atsevišķa spēka iespaida laikā t noietu, ir s_1, s_2, s_3...., tad, ja nav iesākuma ātruma,

$$s_1 = \frac{p_1}{2}t^2;\ s_2 = \frac{p_2}{2}t^2;\ s_3 = \frac{p_3}{2}t^2 \ldots.$$

Ja pievestos nolīdzinājumus savstarpēji dalām, tad

$$s_1 : s_2 : s_3 = p_1 : p_2 : p_3.$$

Fig. 56. trīs spēki $P_1 = 2$ klg.; $P_1 = 1$ klg.; $P_3 = 3$ klg., kuŗu kopējais iedarbes punkts ir A, attēloti ar vektoriem AB, AC, AD, kas proporcionali feeliem mēriem.

Ja katrs spēks darbotos atsevišķi, tad tie radītu ķermeņa paātrinājumus, kas attiektos kā

$$AB : AC : AD = 2 : 1 : 3.$$

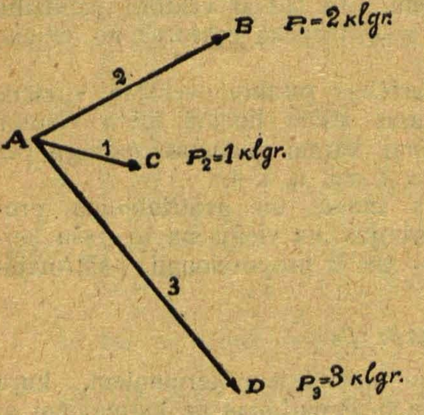


fig. 56.

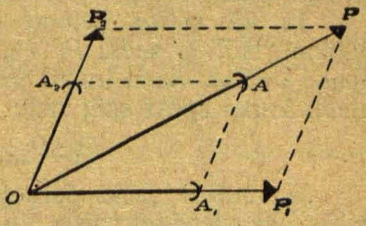


fig. 57

Tas nozīmē: ja darbotos, piemēram, spēks P_1 viens pats, un kaut kādā laika sprīdī pārvietotu ķermeni no A līdz B, tad — ja darbotos spēks P_2 viens pats, tas tanī pat laika sprīdī pārvietotu ķermeni no A līdz C un spēks P_3 atkal no A līdz D.

§ 46. Spēku paralelograma likums.

Spēku darbības neatkarības likuma loģiskais slēdziens ir paralelograma likums.

Piņemsim, ka uz materialu punktu O (fig. 57.) darbojas vienā un tanī pat laikā divi spēki P_1 un P_2, kas attēloti ar vektoru OP_1 un OP_2 palīdzību. Paātrinājumi a_1 un a_2, kuŗus rada minētie spēki, proporcionali spēku lielumiem. Vektori OA_1 un OA_2, kas attēlo paātrinājumus a_1 un a_2, proporcionali vektoriem OP_1 un OP_2, jo

$$P_1 = ma_1 \text{ un } P_2 = ma_2 \text{ (} m \text{ ir ķermeņu masa).}$$

Kinēmatikā mācījāmies, ka divi paātrinājumi a_1 un a_2, kā kustības komponentes, rada rezultējošo kustību a, kuŗas lielumu un virzienu pilnīgi nosaka diagonale OA no paralelograma, kuŗa malas ir OA_1 un OA_2. Tā kā OA_1 virziens sakrīt ar OP_1 virzienu un OA_2 virziens ar OP_2 virzienu un OA_1 ir proporcionala OP_1 un OA_2 proporcionala OP_2, tad uz malām OP_1 un OP_2 konstruētā paralelograma diagonale OP būs tā paša virziena, kā diogonale OA un tās gaŗums būs proporcionals $P = ma$, kas ir komponento spēku P_1 un P_2 rezultējošais spēks.

Tā tad, ja divi spēki darbojas uz vienu un to pašu punktu, tad rezultējošā spēka lielumu un virzienu nosaka uz komponentiem spēkiem konstruēta paralelograma diagonale.

Viss tas, ko agrāki mācījāmies par ātrumu vektoru zumēšanu un sadalīšanu, ir arī attiecināms uz spēku vektoriem. Vēlāk, statikā, spēku vektorus aplūkosim pamatīgāki.

§ 47. Ķermeņa kustība citu kustošos ķermeņu starpā.

Pieņemsim, ka ir kaut kāda grupa jeb, kā mēdz teikt „sistema" no materialiem punktiem A, B, C, D, E, kuŗi atrodas mierā. Pieņemsim, ka kaut kāds punkts P zem kaut kāda spēka iespaida kustąs šo punktu starpā pa trajektoriju PP (fig. 58.).

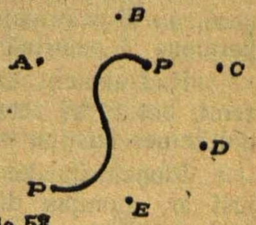


fig. 58.

Iedomāsimies tagad, ka punktu sistema neatrodas mierā, bet kustas vienmērīgi un taisnā virzienā ar virzes (translatorisku) kustību, t. i. visi punkti kustas tā, kā kad tie piederētu vienam ķermenim.

Ja tagad uz punktu P darbosies tie paši spēki kā pirmā gadījumā, tad P kustības zumējas no kustības, kuŗu rada darbojošies spēki un no kustības inercijas dēļ, kopā ar pārējo punktu sistemu.

Tā kā inercijas dēļ punkts kustēsies tāpat kā pārējie sistemas punkti, tad, pamatojoties uz spēku darbības neatkaramības likumu, punkta P kustība, attiecībā pret punktu sistemu, būs tāda pat, kā kad sistema atrastos mierā.

Ķermenis, kas pieder pie kaut kādas sistemas, zem spēku iespaida kustas attiecībā pret sistemu vienādi, kad sistema atrodas mierā, kā arī tad, kad tā kustas vienmērīgi un taisnā virzienā ar ikkuŗu ātrumu.

Piemēram, ja no peldoša kuģa masta sviežam akmeni uz kuģa deķi, akmens krīt pa to pašu trajektoriju, pa kuŗu tas kristu, ja kuģis stāvētu mierā, jo inercijas dēļ akmens kustas kopā ar kuģi, tā kā tas pieder pie tās pašas sistemas, pie kuŗas pieder kuģis.

Ja kuģa kustība nebūtu virzes, taisnvirziena un vienmērīga, tad krītošā akmeņa trajektorija būtu savādāka nekā uz kuģa, kas atradās mierā.

§ 48. Trešais Ņutona pamatlikums.

Katrs iespaids uz ķermeni rada ķermeņa pretiespaidu, vienādu ar iespaidu un ar tieši pretēju virzienu.

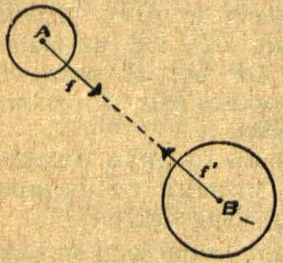


fig. 59.

Šis likums apstiprina sekošo: ja ir spēks f, kas darbojas uz kaut kādu ķermeni A (fig. 59.), tad visādā ziņā ir arī kaut kāds otrs ķermenis B, uz kuŗa darbojas spēks f^1, vienāds ar spēku f ar tieši pretēju virzienu, un ja ķermeņus kaut kādi neaiztur, tad tie viens otram trauksies pretim, ja spēki ir pozitivi; ja spēki ir negativi, — tad ķermeņi viens no otra attālināsies.

Ja ķermeņa A masa ir m ķermeņa B masa m_1 un attiecīgie paātrinājumi p un p_1, tad $mp = m_1p_1$ un $p : p_1 = m_1 : m$, t. i. paātrinājumi pretēji (apgriezti) proporcionali masām.

Ja ķermeņa B masa ļoti liela, salīdzinot ar ķermeņa A masu, tad ķermeņa B paātrinājums un, protams, pārvietošanās būs mazi samērā ar ķermeņa A paātrinājumu un pārvietošanos.

Kad akmens krīt uz zemi, zeme to pievelk; akmens savukārt pievelk zemi, bet tā kā zemes masa, salīdzinot ar akmeņa masu, ir milzīgi liela, tad zemes kustību nevaram nojaust.

Pieņemsim, ka divas vienādas koka bumbiņas (fig. 60.) esam savienojuši ar gumijas diegu un nolikuši uz pilnīgi līdzena galda. Izstiepsim diegu un ļausim bumbiņām kustēties. Gumijas diegs savilksies un tuvinās bumbiņas. Bumbiņas kustēsies viena otrai pretim ar vienādu ātrumu un noies vienādus attālumus līdz apstāsies, jo bumbiņu masas ir vienādas. Ja tagad vienas bumbiņas vietā piestiprināsim tikpat lielu dzelzsbumbiņu (fig. 61.), kuŗas masa, protams, lielāka nekā koka masa, un eksperimentu atkārtosim, tad bumbiņas nekustēsies vairs vienādi. Tā kā dzelzs masa apmēram 20 reiz lielāka par koka masu, tad dzelzs bumbiņas paātrinājums būs apm. 20 reiz mazāks nekā koka bumbiņas paātrinājums.

fig. 60

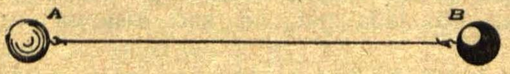


fig. 61

Piezīme: Darbības un pretdarbības vienādības likums norāda, ka vienā un tanī pašā laikā vienādi arī impulsi, un tā kā impulsi ir vienādi, tad vienādi arī kustības momenti, tadēļ, ja ķermeņu masas ir m_1 un m_2 un attiecīgie ātrumi v_1 un v_2, tad

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \text{ un}$$
$$v_1 : v_2 = m_2 : m_1$$

t. i. ātrumi pretēji proporcionali masām.

Piem. * Lai pārrautu valgu, aiz katra tā gala stiepjam ar 1 pud. spēku katrā rokā. Tā kā valgs nav pārtrūcis, tad piestiprinam vienu valga galu pie naglas un velkam aiz otra gala abām rokām, t. i. ar 2 pud. Vai otrreiz savelkam valgu stiprāki kā pirmo reizi?

* No sešcollīga lielgabala, kas sveŗ 75 tonnas, izšauj 1075 kg. smagu lodi ar iesākuma ātrumu 702 $\frac{\text{m.}}{\text{sec.}}$. Kāds būs lielgabala atsituma ātrums?

§ 49. Krišana pa slīpu plāksmu.

Pieņemsim, ka smags materials punkts *M* kustas pa slīpu cietu plāksmu *AB*, kuŗa ar horicontu sastāda leņķi α (fig. 62.). Punkta masa ir *m* un zemes pievilkšanas spēka paātrinājums ir *g*.

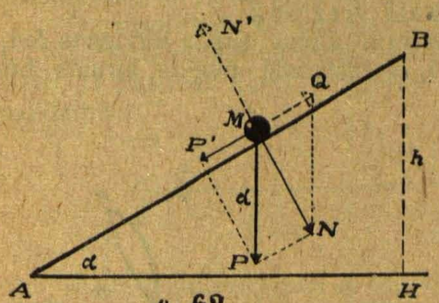


fig.62

Zemes pievilkšanas spēks, attiecībā pret horicontu, darbojas perpendikularā virzienā. Punkta smagums ir *mg*, kas apzīmēts ar proporcionalu spēka vektoru *MP*.

Sadalīsim *MP* vektoros *MN* un *MP*^{1}, no kuŗiem viens ir perpendikulars un otrs paralels plāksmai *AB*. Spēkam, kas attēlots ar vektoru *MN*, plāksma izsauks vienlīdzīgu un tieši pretēju spēku *MN*^{1} un tādēļ punkts pa šī spēka virzienu kustēties nevar (izņemot gadījumu, ja plāksma salūzt).

Vektors *MP*^{1} attēlo to vienīgo spēku, zem kuŗa iespaida punkts kustēsies.

Ja punkta kustības ir kaut kādi aprobežotas, kā šinī gadījumā, tad punktu nosauc par nebrīvu.

Šķēršļus, kas padara kustību par nebrīvu, nosauc par kustības saitēm (šinī gadījumā slīpā plāksma). To darbojošos spēka komponenti *MN*, kuŗu līdzsvaro saites pretestība, nosauc par zaudēto spēku, un to komponenti *MP*^{1}, kas rada punkta kustību, nosauc par darbības spēku.

Leņķi *MPP*^{1} un *BAH* ir vienādi, jo to malas ir savstarpēji perpendikularas; katrs no šiem leņķiem mērījams ar to pašu mēru α, un $MP^1 = MP \sin \alpha$.

Tā tad spēks, kas kustina punktu M, ir $mg \sin \alpha$ un punkts *M* slīd pa plāksmu ar paātrinājumu g^1, kas ir

$$g^1 = g \sin \alpha.$$

Tā kā g^1 visu laiku paliek viens un tas pats, tad punkta kustība ir vienmērīgi-paātrināta. Ja punkts sākuma momentā atrodas mierā, tad pēc *t sec* tā ātrums ir

$v = g\, sin\, \alpha\, t$ un t *sec.* noietais āttālums

$$s = \frac{g\, sin\, \alpha}{2} \cdot t^2.$$

Ja atrodam pēc šīs formulas t un tā izteiksmi liekam iepriekšējā formulā, tad dabūjam

$$v = \sqrt{2gs\, sin\, \alpha}.$$

Pieņemsim, ka punkts M nogājis attālumu s, vienādu ar BA; tad ātrums punktā A ir:

$$v = \sqrt{2g\, BA\, sin\, \alpha}.$$

Tā kā BA sin $\alpha = BH =$ h, tad

$$v = \sqrt{2gh},$$

tas ir: pa slīpu plāksmu krītoša materiala punkta ātrums ir vienāds ar ātrumu, kādu iemantotu materialais punkts brīvi krītot no tāda pat augstuma vertikalā virzienā.

Ja materials punkts (fig. 63.) krīt kaut kādos slīpos virzienos BA_1, BA_2, BA_3. . . ., tad punktos A_1, A_3, A_3,H materialā punkta ātrums būs vienāds.

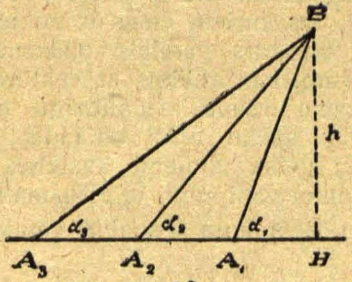


fig. 63

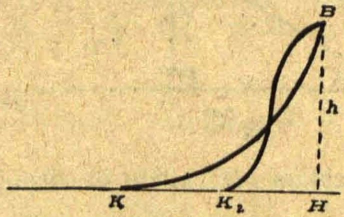


fig. 64

Ja materials punkts (fig. 64.) krīt pa līku slīpu liniju, piem. BK_1 vaj BK_2, tad tas sasniegs punktus K vaj K_2 ar tādu pat ātrumu, kā ja tas kristu pa vertikalo liniju h.

Piezīme. Materialā punkta kustības pa slīpu plāksmu nav atkarīgas no tā, vaj punkts bez berzēšanās slīd pa slīpo plāksmu vaj veļas. Turpretim ķermenis slīdot bez berzēšanās kustēsies ar virzes, bet pie velšanās ar virzes un griezes kustību. Pirmā gadījumā paātrinājums būs tāds pat kā materialam punktam, bet otrā gadījumā paātrinājums būs savādāks — mazāks.

§ 50. **Fiktivie inercijas spēki. D'Alambera teorema.** (Jean le Rond D'Alembert 1717.—1783.)

Ja materials punkts M (fig. 62.) krīt pa slīpu plāksmu AB zem sava smaguma iespaida $MP = mg$, tad spēku MP varam sadalīt divos komponentos spēkos: **zaudētā spēkā** MN, kuŗu līdzsvaro plāksmas pretestība, un **darbības spēkā** MP^1, kas kustina punktu ar paātrinājumu $g^1 = g \sin \alpha$; šī spēka lielums ir mg^1.

Tagad atbildēsim uz jautājumu: ar kādu jaunu spēku jāzumē smaguma spēks MP, lai kustošais punkts atrastos mierā, nepavairojot punkta spiedienu uz plāksmu.

Punkta spiedienu uz plāksmu nepavairos tikai tāds spēks, kas, zumēts ar darbības spēku MP, nepavairos spēku MN. Tādēļ, pieņemot par rezultējošo spēku MN, par vienu komponenti MP, dabūjam otru komponenti MQ; šis spēks ir darbības spēkam ar tieši pretēju virzienu un tik pat liels.

Spēku, kas vienāds ar darbības spēku MP^1 **un kuŗa virziens ir pretējs, nosauc par fiktivo inercijas spēku.**

No minētā piemēra varam atvasināt šādu noteikumu: **Ja iedomājamies fiktivu spēku, kas aptur materialā punkta kustību, tad fiktivais inercijas spēks līdzsvaro darbības spēku, bet saitu pretestība ir tāda pat, kā pie materialā punkta kustības.**

Šo noteikumu nosauc par D'Alambera teoremu.

Pateicoties šai teoremai, daudzi kustības jautājumi vienkāršāki atrisināmi, ja kustības darbības spēkus līdzsvarojam ar fiktivo inercijas spēku palīdzību.

fig.65.

Piem. * Materiali punkti A, kuŗa masa $m_1 = 2$ gr., un B, kuŗa masa $m_2 = 5$ gr., saistīti ar diegu, ka masa tik niecīga, ka to varam neievērot. Uz punktu B darbojas spēks BP un velk punktu pa savu virzienu ar paātrinājumu $a = 50 \frac{\text{cm.}}{\text{sec.}^2}$ (fig. 65.). Spēka lielums tad ir $(m_1 + m)\, a = 350$ *din.* Kāds ir diega spriegums pa kustības laiku?

Pamatojoties uz D'Alambera teoremu, uzdevumu būsim atrisinājuši, ja atbildēsim uz jautājumu: kādi spēki jāpieliek diega galiem, lai sistemas līdzsvara stāvoklī diegu stieptu tāpat kā pa kustības laiku?

Punktu A velk spēks $m_1 a = 100$ *din.* un punktu B — $m_2 a = 250$ *din.* Inercijas spēkiem jābūt vienādiem ar šiem spēkiem un jābūt ar pretēju virzienu. Pie punkta A tad jāpieliek fiktivs inercijas spēks $AK = 100$ *din.* Tā kā diegs atrodas līdzsvarā, tad uz punktu B arī darbosies līdzīgs spēks 100 *din.*, tikai ar pretēju virzienu, t. i. pa labi. Tiešām uz punktu B darbojas sekoši spēki: $BP = (m_1 + m_2)\, a = 350$ *din.* pa labi un fiktivs inercijas spēks $BL = 250$ *din.* — pa kreisi; šo abu spēku rezultējošais spēks ir 350 *din.* — 250 *din.* = 100 *din.* ar virzienu pa labi. Tā tad pa kustības laiku diegu stiepj uz katru pusi ar spēku = 100 *din.* Diegs velk punktu A pa labi, bet pateicoties inercijai, punkts A turas pretim un stiepj diegu tā, kā kad uz punktu A darbotos inercijas spēks AK.

§ 51. Kustība pa aploci. Centripetalais (centrtieces) un centrifugalais (centrbēgu) spēks. Centrifugalais inercijas spēks.

Pieņemsim, materials punkts M kustas vienmērīgi pa aploci. Aploces radiuss ir $OM = R$ (fig. 66.).

Iz kinematikas (§ 28., 29.) zinām, ka šādai kustībai ir centripetals paātrinājums $C = \frac{v^2}{R}$ ar virzienu pa radiusu no M uz O, jo pretējā gadījumā punkts kustētos taisnā virzienā, pēc pirmā Ņutona likuma. Pamatojoties uz otro Ņutona likumu, dabūjam spēku, kas rada paātrinājumu C, ja reizinam paātrinājumu ar masu.

$F = m\frac{v^2}{R}$, kur m ir vienmērīgi pa aploci kustoša punkta masa. Tā

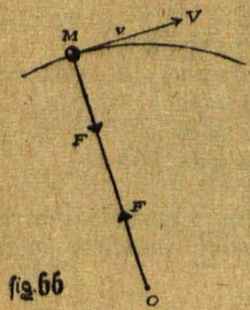


fig. 66

kā spēka virzienam jāsakrīt ar paātrinājuma virzienu, tad varam spēku F attēlot ar vektora MF palīdzību, kuŗa virziens arī ir pa radiusu.

Šo spēku, kas rada vienmērīgu kustību pa aploci, nosauc par centripetalo spēku.

Protams, šis spēks tikai novirza pastāvošu tainsvirziena vienmērīgu kustību (radītu, piem., caur triecienu) ar ātrumu v no taisna virziena pa aploces virzienu. Ja spēks F darbotos uz mierā esošu punktu, tad punkts kustētos pa spēka virzienu no M uz O, t. i. pa taisnu liniju. Tas nojaužams arī no tā, ka paātrinājums C nepaātrina vienmērīgo kustību pa aploci.

Pamatojoties uz trešo Ņutona likumu, spēka F darbība rada vienādu pretdarbību pretējā virzienā.

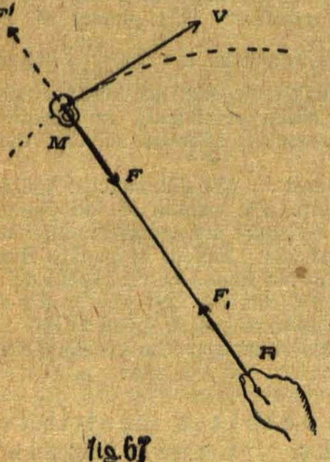


fig. 67

Šo pretdarbības spēku, kuŗa virziens ir pa radiusu no centra uz aploci, nosauc par centrifugalo spēku.

Daudzās kustībās pa aploci viegli var novērot centripetalā un centrifugalā spēka darbību.

Planetai vienmērīgi kustoties pa elipsi ap sauli centripetalais spēks ir spēks, ar kuŗu saule pievelk planeti, un centrifugalais — ar kuŗu planete pievelk sauli.

Ja bumbiņa kustas pa aploces veidīgu kanalu, tad centripetalais spēks ir tas spēks, ar kuŗu kanala malas pretojas bumbiņas taisnvirziena kustībai (šis spēks pielikts bumbiņai); centrifugalais spēks ir tas, ar kuŗu bumbiņa spiež uz kanala malu (šis spēks pielikts kanala malai).

Piesiesim diega galā kādu svaru un otru diega galu turēsim rokā un dosim svaram kustību pa aploci (fig. 67).

Centripetalais spēks pielikts bumbiņai un darbojas virzienā no bumbiņas uz roku, bet centrifugalais spēks pielikts rokai un darbojas virzienā no rokas uz bumbiņu. Bumbiņas svaru neievērosim. Centripetalais spēks *MF* pastāvīgi bumbiņu novirza no taisnvirziena kustības pa tangenti, pa kuŗu bumbiņa kustētos inercijas dēļ, uz aplocveidīgu trajektoriju, t. i. pievelk svaru centram. Viss centripetalais spēks izlietojas trajektorijas izliekšanai, jo bumbiņas ātruma peeaugšanu pa aploci šis spēks nerada; tāpat nenovērojam bumbiņas tuvošanos rokai.

Lai trajektorija vienmēr kļūtu izliekta, nepieciešami vajadzīgs, ka centripetalais spēks darbojas nepārtraukti un nepārtraukti ar vienu un to pašu spēku stiepj diegu.

Izpētīsim tagad, kādu spēku vajadzētu pielikt bumbiņai *M*, ja bumbiņa atrastos mierā, lai diegu stieptu tāpāt kā bumbiņai kustoties pa aploci.

Tā kā centripetalais spēks rada centripetalo paātrinājumu *C*, tad tas ir darbības spēks; tādēļ, pamatojoties uz D'Alambera teoremu, bumbiņai jāpieliek fiktivs inercijas spēks MF^1, vienāds ar *MF* un tieši pretējā virzienā, t. i. pa radiusu.

Tā tad pa kustības laiku diegs izstiepts tā, itkā uz to darbotos spēks MF^1. Ka tāda spēka faktiski nav, varam spriest no tā, ka, ja pa kustības laiku diegs pārtrūktu, bumbiņa kustētos pa tangenti, bet ne fiktiva inercijas spēka virzienā, t. i. no centra pa radiusu uz āru.

Fiktivo spēku MF^1 nosauc par centrifugalo inercijas spēku. Centrifugalais inercijas spēks ir fiktivs inercijas spēks un pielikts bumbiņai; tadēļ šo fiktivo spēku nevar jaukt ar faktisko centrifugalo spēku, kas darbojas uz roku.

Kā jau kinematikā norādījām, centripetalo ātrumu var izteikt ar leņķisko ātrumu *w*, ar laika periodu *T* un apgriezienu skaitu *n*. Šinīs pašās funkcijās varam izteikt arī centripetalo spēku un lietot, pēc vajadzības, sekošās formulas:

$$F = m\frac{v^2}{R} = m \,.\, w^2R = m\frac{4\pi^2R}{T^2} = m \,.\, 4\pi^2Rn^2.$$

§ 52. Griešanās (rotacijas) piemēri.

Griezīsim (fig. 68.) ap asi *AA* ripu, kuŗas eerāmējumam *KK'* piestiprināts tievs stienītis *dd'*, uz kuŗa uzmaukta bumbiņa *M*. Bumbiņas caurums tik liels, ka tā var pa stienīti brīvi kustēties.

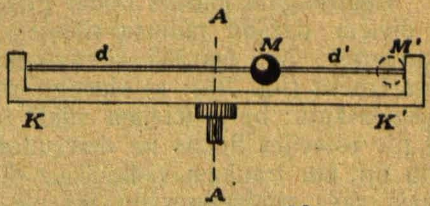


fig. 68

Ja kustības sākumā bumbiņa atrodas netālu no centra, piem. punktā *M*, tad tā līdz ar ripas griešanos traucas uz āru, līdz atduŗas pret ierāmējumu, piem. punktā *M'*.

No trieciena (fig. 69.) bumbiņa iemanto ātrumu v, kuŗam inercijas dēļ jāiet taisnā virzienā, bet stienītis AA griežas ap centru A un ieņem stāvokli A^1A^1 zem leņķa δ; tomēr ātrums v inercijas dēļ pretojas piespiestai virziena maiņai un tādejādi bīda bumbiņu uz āru, līdz tā atduŗas pret ierāmējumu, kas ar savu pretestību rada kustībai pa aploci vajadzīgo centripetalo spēku.

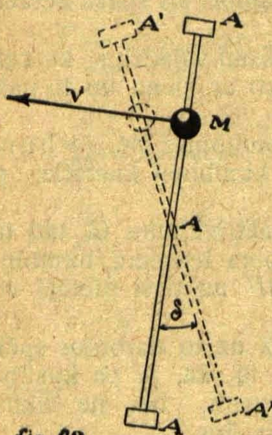


fig. 69

Pieņemsim, ka starp bumbiņu un ierāmējumu atrodas atspere (fig. 69a) un viss priekšmets griežas ar leņķisko ātrumu w. Griežoties bumbiņa spiežas uz atsperi un c e n t r i p e t a l a i s spēks vienāds ar to spēku, ar kādu atspere spiež uz bumbiņu. Šis spēks ar virzienu uz centru ir

$$F = m w^2 r,$$

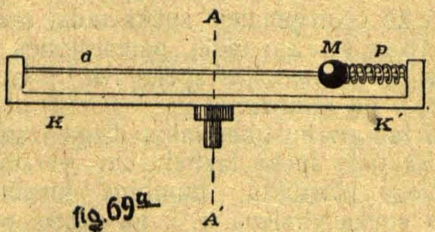


fig. 69a

kur m — bumbiņas masa, r — radiuss no ripas centra līdz bumbiņas centram. Šim spēkam tieši pretēji darbojas pilnīgi vienāds c e n t r i f u g a l a i s spēks, ar kuŗu atspere spiež uz ierāmējumu.

Pamatojoties uz D'Alambera teoremu (lai atsperi miera stāvoklī saspiestu tāpat kā pa kustības laiku), bumbiņai jāpieliek vienāds spēks F ar virzienu no centra uz ierāmējumu, t. i. centrifugalais inercijas spēks.

Izmēģinot viegli pārliecināties par sekošo: 1) jo lielāks ripas leņķiskais ātrums, jo tuvāk ierāmējumam piespiežas bumbiņa un atspere ir vairāk saspiesta; 2) jo lielāka bumbiņas masa pie viena un tā paša leņķiskā ātruma, jo tuvāki ierāmējumam piespiežas bumbiņa.

§ 53. C e n t r i f u g a l ā m a š i n a.

Centrifugalā mašina noder griešanās likumu novērošanai. Tā sastāv no diviem dažādu radiusu riteņiem, uz kuŗiem uzmesta siksna. Lielāko riteni griež, bet mazākā riteņa centrā piestiprina tos priekšmetus, kuŗus vēlas izpētīt (fig. 70.): a) elastīgs gredzens griežoties saspiežas un pieņem elipsa izskatu; b) ja ielejam stikla traukā (fig. 71.) ūdeni un dzīvsudrabu, tad pie rotacijas ūdens un dzīvsudrabs traukā traucas uz augšu un ieņem vietu tur, kur traukam vislielākais diametrs, pie kam dzīvsudrabs, kā smagākais, rada gredzenu vistuvāki pie trauka ārpuses; c) kaut kāds smags priekšmets, kas piestiprināts diegā centrifugalās mašinas stienim, pie rotacijas traucas ieņemt horicontalu stāvokli.

Centrifugalpumpji ierīkoti šādi (fig. 72.): slēgtās makstīs ātri griežas lāpstiņas un dod šķidrumam inercijas dēļ taisnvirziena ātrumu un šķidrumu grūž laukā pa cauruli; tā makstīs rodas tukšums, kas uzsūc sevī atkal tālāko šķidrumu pa otru cauruli, kas piestiprināta makstu centram (figurā balta ripa).

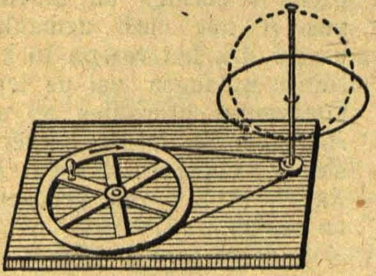


Fig. 70.


Fig. 71.

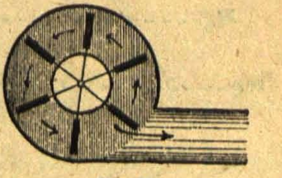


Fig. 72.

Centrifugalais susinātājs (fig. 73.) sastāv no cilindriska sieta, kas ātri griežas ap savu asi. Mitrais priekšmets (piem. veļa), kas atrodas sietā, griežas līdz ar sietu; šķidrumu piles, kas nav saistītas ar cilindri, iemanto ātrumu un inercijas dēļ traucas taisnā virzienā pa tangenti un šādi atdalas no mitrā priekšmeta.

Piem. * Slidu skrējējs (fig. 74.) kustas ar ātrumu v pa aploci, kuŗas radiuss ir r. Par kādu leņķi α slidu skrējējs izlieksies, skaitot no vertikālā stāvokļa?

Pieņemsim, ka slidu skrējējs apstājies; tad bez slidotāja svara $mg = OP$ uz viņu darbosies vēl centrifugalais inercijas spēks $OP_1 = \frac{mv^2}{r}$.

Pamatojoties uz D'Alambera teoremu, šinī gadījumā ir līdzsvara stāvoklis. Rezultējošā spēka OT virziens dodas uz slidu skrējēja atbalsta punktu.

Trijstūrī OTP ir

$$tg\alpha = \frac{PT}{OP} = \frac{v^2}{rg}, \text{ jeb}$$

$$\alpha = arc.\, tg\left(\frac{v^2}{rg}\right).$$

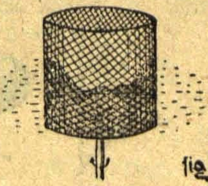


fig.73

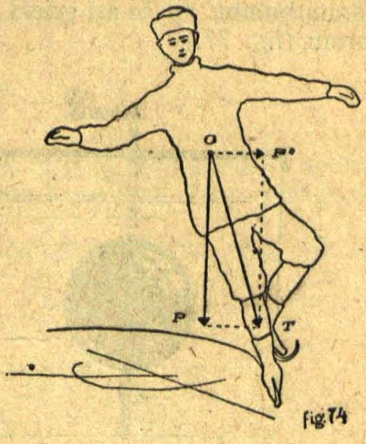


fig.74

§ 54. Zemes lodes forma.

Pieņemsim, ka masivs gredzens (stīpa) B griežas ap asi AA (fig. 75.), pie kam gredzena forma griežoties nemainās. Pamatojoties uz D'Alambera teoremu, pa griešanās laiku uz gredzenu darbojas tādi pat spēki, kādi darbotos uz gredzenu, kas atrastos mierā, ja visos tā punktos būtu pielikti attiecīgie centrifugalie inercijas spēki P_1, P_2, P_3 u. t. t. (Tā kā katra gredzena punkta leņķiskais ātrums viens un tas pats, tad šie spēki ir proporcionali attiecīgiem griešanās radiusiem r_1, r_2, r_3....) Šie spēki cenšas izstiept gredzenu uz sāniem.

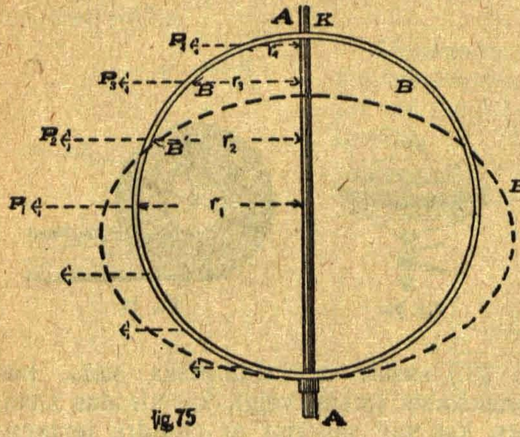


fig.75

Tagad pieņemsim, ka gredzens ir elastīgs un tā virspuse *K* nav cieši uzmaukta uz asi *AA*, bet var pa to kustēties uz augšu vai uz leju. Gredzenam griežoties ap asi *AA* gredzena forma pārvērtīsies par elipsi B¹, jo spēki P_1, P_2, P_3 u. t. t. velk gredzenu uz sāniem.

Līdzīgu formas maiņu varam novērot šķidrumos. Ja maisam ūdeni un spirtu tā, ka šī maisījuma blīvums ir vienāds ar kaut kādas eļļas blīvumu, tad eļļa šinī šķidrumā negrimst un arī neuzpeld. Pateicoties daļiņu (molekulu) saistībai, eļļa pieņem bumbas veidu (Plato izmēģinājumi) (fig. 76. un 77.). Ja izduram caur eļļas bumbu asi, tad varam bumbu ap šo asi griezt. Pa griešanās laiku bumba pieņem elipsoida formu (fig. 77.).

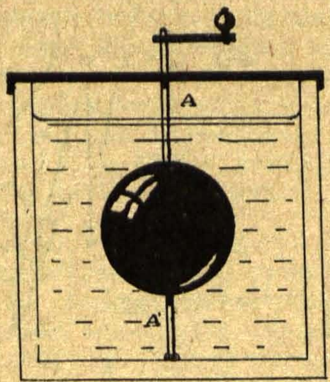


fig.76

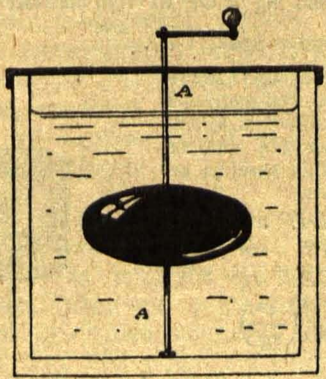


fig.77

Novērojumi pierādījuši, ka arī zeme nav bumba, bet elipsoids. Šī parādība izskaidrojas ar to, ka tad, kad zeme vēl bija šķidrums, tā griežoties mainījuse savu bumbas formu pret elipsoidu, tāpat kā eļļas bumba griežoties pārvēršas par elipsoidu.

Zemes radiuss polu virzienā ir $R_p = 6357$ *km.*, bet ekvatora virzienā $R_e = 6378$ *km.* (t. i. par 21 *km.* garāks).

Zeme ir saspiesta par attieksmi:

$$\frac{R_e - R_p}{R_e} \cong \frac{1}{300}.$$

Saspiestas ir arī citas planetas. Piem. Jupitera saspiešanas attieksme ir $\frac{1}{16}$ un Saturna $\frac{1}{10}$.

§ 55. G r a v i t a c i j a.

Ņutons par gravitaciju nosauca pasaules telpā izplatīto masu savstarpēju pievilkšanas spēju.

Galvenais ķermeņu (planetu u. t. t.) savstarpējais pievilkšanas likums pēc Ņutona ir šāds:

Divi pasaules ķermeņi savstarpēji pievelkas ar spēku, kas ir proporcionals produktam no ķermeņu masām un pretēji proporcionals kvadrata attālumam starp ķermeņu smaguma centriem.

$$p = \frac{m_1 \cdot m_2}{a^2} \cdot k,$$

k ir gravitacijas koeficients.

Ja pieņemam m_1 un m_2 par masas vienībām un a par attāluma vienību, tad

$$p = \frac{1 \cdot 1}{1^2} \cdot k = k,$$

k noteikšanai jāzin zemes vidējais blīvums.

CGS — sistemā k ir vienāds ar to savstarpējo pievilkšanas spēku, kāds ir starp divām masām, no kuŗām katra ir 1 *kg.* un kuŗu smaguma centru savstarpējs attālums ir 1 *cm.*

Ja m_1 ir zemes lodes masa, m_2 kaut kāda akmeņa masa, tad uz zemes virsus akmeņa smagums ir

$$p = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_1^2}.$$

Akmeņa smagums, izteikts ar masu un paātrinājumu, ir

$$p = m_2 g, \text{ tā tad}$$

$$k = \frac{r_1^2 \cdot g}{m_1},$$ kur r_1 ir zemes lodes radiuss

un g vidējais paātrinājums $= 981 \frac{\text{cm.}}{\text{sec.}^2}$

$$g = 981 = \frac{m_1}{r_1^2} k$$

Pēc šīs formulas varam aprēķināt kaut kādas planetas paātrinājumu attiecībā pret zemi vaj arī planetu savstarpējo paātrinājumu, ja ar r_1 apzīmējam divu ķermeņu smaguma centru attālumu.

Mēnesis griežas ap zemi pa aploci, kuŗas radiuss ir apm. 60 zemes ekvatoru radiuss, jeb apm. 384400 km. Mēnesis apgriežas ap zemi laikā $T = 27{,}3$ diennaktīm.

Tā tad centripetalais mēneša paātrinājums ir

$$c = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 \,.\, 3{,}844 \,.\, 10^{10}}{(27{,}3 \,.\, 60 \,.\, 60)^2} = \infty\ 0{,}27 \frac{cm.}{sec.^2}.$$

Šo pašu paātrinājumu uz mēneša dabūjam, ja aprēķinam par pamatu ņemam gravitacijas likumu.

Uz zemes virsus ķermeņi krīt ar paātrinājumu $g = \infty\, 981 \frac{cm.}{sec^2}$. Apskatīsim, kāds paātrinājums ir ķermenim, kas attālināts no zemes virsus par 60 zemes radiusiem.

Vispār ņemot ķermenis, attālinoties no zemes virsus, zaudē savā svarā. Ja m_2 pieņemam vienādu ar masas vienību, m_1 ir zemes masa un r_1 zemes radiuss, tad masas vienības svars jeb vispār svara lielums uz zemes virsus ir:

$$p = k \frac{m_1}{r_1^2},$$

un augstumā h pār zemes virsu:

$$p' = k \frac{m_1}{(r_1 + h)^2}.$$

Minētās formulas rāda, ka svara pamazināšanās piem. viena metra augstumā pār zemes virsu ir pārāk niecīgs skaitlis.

Tā kā ķermeņa smagums proporcionals masām un paātrinājums attiecībā uz zemi vienāds, vaj tas attiecināts uz mazu akmentiņu vaj uz tik lielu ķermeni kā mēnesis, tad smagumu (spēku) vietā varam rēķināties tikai ar paātrinājumiem. Tā kā pievilkšanas spēks pēc Ņutona likuma ir pretēji proporcionals smagumu centru attāluma kvadratam, tad paātrinājums uz mēneša ir

$$\gamma = \frac{1}{60^2} \cdot g = \infty\, 0{,}27 \frac{cm.}{sec.^2}.$$

Tā tad pēc Ņutona likuma (gravitacijas) aprēķinātais paātrinājums γ pilnīgi sakrīt ar agrāki aprēķināto centripetalo paātrinājumu uz mēneša.

Piezīme. Ja ķermenis būtu pacelts līdz mēnesim un tad tam no turienes ļautu krist uz zemi, tad pirmā sekundē ķermenis noietu tikai 0,14 cm. un spēks, ar kuŗu zeme pievilktu ķermeni, būtu tikai $\frac{1}{60^2}$ daļa no ķermeņa svara. Puda bumba, piem., svērtu drusku vairāk par 1 zolotņiku.

Paātrinājumu uz saules varam aprēķināt sekošā kārtā. Saules masa ir 355000 reiz lielāka par zemes masu; saules radiuss ir 112 reiz lielāks par zemes radiusu. Masas vienība uz saules iemanto paātrinājumu

$$\gamma = \frac{m.k}{r^2} \text{ un uz zemes } g = \frac{m_1.k}{r^2_1}.$$

Abu paātrinājumu attieksme ir

$$\frac{\gamma}{g} = \frac{m.r_1^2}{m_1.r^2} = \frac{355000.r_1^2}{1.r^2} = \frac{355000}{1}.\frac{1}{112^2} \text{ jeb}$$

$$\gamma = \frac{9,81.355000}{112^2} = \infty 278 \frac{m.}{\text{sec.}^2}.$$

Tā tad paātrinājums uz saules ir apm. 28,3 reiz lielāks nekā uz zemes.

§ 56. Zemes griešanās iespaids uz smaguma spēku.

Iedomāsimies riteni (fig. 78.), caur kuŗa riepu izvilktas atsperes p, kas piespiež riepai metala bumbiņas k.

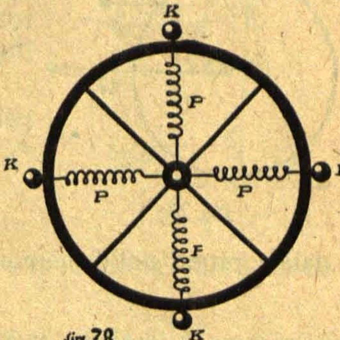


fig. 78

Ja ritenis griežas pats savā laukumā, tad katra bumbiņa k kustas pa aploci. Atsperes piespiešanas spēks ritenim griežoties pa daļai darbojas kā centripetalais spēks, kas dod bumbiņai kustības virzienu pa aploci, un pa daļai atkal, kā agrāki, piespiež bumbiņu riepai.

Ritenim griežoties bumbiņas spiediens ir vienāds ar atsperes spēku bez centripetalā spēka.

Ar D'Alambera teoremas palīdzību varam šo parādību izteikt arī sekoši: bumbiņas spiediens uz riepu ir vienāds ar darbības spēku (atsperes spiedienu) un fiktivo centrifugalo inercijas spēku (pēdējais tieši pretējs centripetalajam spēkam) zumu.

Jo ātrāki ritenis griežas, jo vairāk spēka vajadzīgs bumbiņas noturēšanai aploces veidīgā trajektorijā un jo mazāk bumbiņa spiež uz riepu.

Pietiekošā ātrumā visu atsperes spiediena spēku uzņems centripetalais spēks un bumbiņas nespiedīs vairs uz riepu; vēl lielākā griešanās ātrumā atspere izstiepsies un bumbiņas attālināsies no riepas.

Līdzīgi atsperei darbojas zemes pievilkšanas spēks. Spēks, ar kuŗu ķermeņi traucas uz zemes centru, pa daļai darbojas kā centripetalais spēks ķermeņiem griežoties līdz ar zemi ap zemes asi un tikai pa daļai kā smaguma spēks jeb svars.

Pieņemsim, ka zeme ir apaļa bumba ar radiusu $R = 6371$ $km.$ (šādas bumbas tilpums ir vienāds ar zemes tilpumu). Uz poliem zemes pievilkšanas spēka paātrinājums ir $g = 983,11 \frac{cm.}{sec^2}$.

Šī bumba vienreiz apgriežas laikā $T = 24$ stundas. Kāds ir paātrinājums uz bumbas ekvatora?

Šis paātrinājums ir vienāds ar paātrinājumiem uz poliem bez centripetalā paātrinājuma C, kuŗu iemanto materials punkts uz ekvatora.

$$C = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4 . \pi^2 . 6371 . \pi^5}{(24 . 60 . 60)^2} = \backsim 2{,}67 \frac{cm.}{sec.^2}.$$

Tā tad krišanas paātrinājums uz ekvatora ir

$$g' = g - c = 983{,}11 - 2{,}67 = 980{,}44 \frac{cm.}{sec.^2}.$$

Patiesībā šis paātrinājums ir mazāks $\left(g' = 978{,}10 \frac{cm.}{sec.^2}\right)$, jo zeme nav apaļa bumba, bet elipsoids.

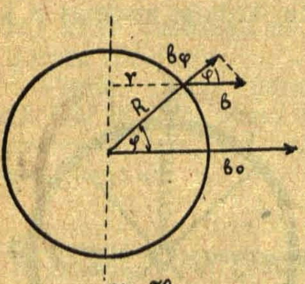


fig. 79.

Krišanas paātrinājumu ķermenim, kas neatrodas uz ekvatora, bet uz kaut kāda platumā φ, varam aprēķināt sekoši. Ģeografiskā platuma φ rotacijas radiuss (griešanās radiuss ap zemes asi) (fig. 79.) ir $\gamma = R \cos \varphi$.

Ja zemes asij centripetalais perpendikularais paātrinājums uz ekvatora ir b_0 un platumā γ ir b, tad

$$b_0 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \text{ un } b = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r.$$

Ja dalām pirmo nolīdzinājumu ar otru, tad dabūjam

$$b = b_0 \cos \varphi.$$

Paātrinājums b jāsadala divās komponentēs, no kuŗām viena iet pa radiusu R un otra pa radiusu r (centripetalais paātrinājums).

$$b_\varphi = b \cos \varphi = b_0 \cos \varphi^2.$$

Tā tad ģeografiskā platumā φ brīvi krītoša ķermeņa paātrinājums ir

$g_\varphi = G_\varphi - b_0 \cos \varphi^2$, kad G_φ ir abzolutais paātrinājums platumā φ.

Ja zeme grieztos 17 reiz ātrāki nekā tagad, tad visu smaguma paātrinājumu uz ekvatora uzņemtu centripetalais spēks un ķermeņi būtu bez smaguma.

§ 57. Matematiskais (vienkāršais) svārsts (pendula).

Matematiskais svārsts ir smags materials punkts, kas piekārts noteikta gaŗuma (svārsta gaŗuma) diegam; aprēķinos diega masu un smagumu neievēro.

Par fizisko svārstu nosauc kaut kuŗu ķermeni, kas spēj šūpoties zem sava smaguma iespaidā. Šimbrīžam aplūkosim matematisko jeb vienkāršo svārstu.

Matematiskais svārsts atrodas līdzsvarā, kad diegs ieņem vertikalu virzienu (fig. 80.). Ja diegu atvelkam pa leņķi α no līdzsvara stāvokļa un laižam svārstam brīvi kustēties, tad tas zem sava smaguma iespaida kustas bezgala ilgi un kustēšanās amplitude $A_1 A_0$ paliek viena un tā pati, ja tikai kaut kādi ārēji spēki kustību netraucē.

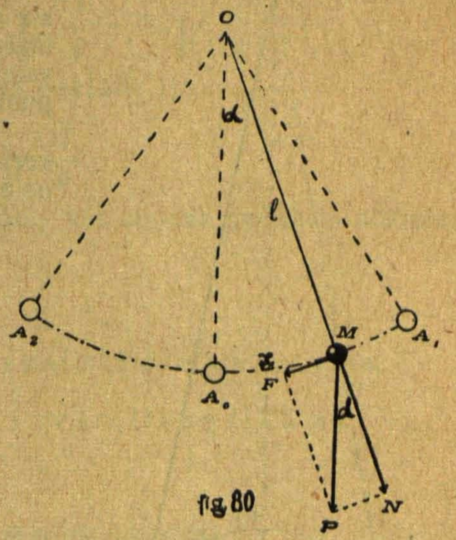


fig. 80

Katrā kustības momentā uz svārstu darbojas smagums $MP = mg$, kur m — ir svārsta masa un g — smaguma spēka paātrinājums.

Šo spēku varam sadalīt divos komponentos spēkos: zaudētā spēkā MN, kuŗu līdzsvaro diega stiprums, un darbības spēkā MF, kas piedod svārstam paātrinājumu.

Apzīmēsim svārsta gaŗumu OM ar l, svārsta attālumu no līdzsvara stāvokļa kaut kādā noteiktā momentā — ar x (t. i. loka A_0M gaŗums) un leņķi MOA_0 tanī pat momentā ar α.

No figuras redzams, ka darbības spēks

$$MF = MP \sin \alpha = mg \sin \alpha.$$

Leņķa α abzolutā vērtība ir $\frac{x}{l}$ un tā kā leņķis α ir ļoti mazs, tad $\sin \alpha$ vietā varam pieņemt leņķa α abzoluto vērtību $\frac{x}{l}$;

$$\text{spēks } MF = mg\,\frac{x}{l}$$

un punkta M paātrinājums tad ir

$$c = \frac{g}{l} \cdot x.$$

Tā kā g un l ir pastāvīgi lielumi, tad paātrinājums c ir katrā momentā proporcionals attālumam x.

Tā tad svārsta paātrinājums katrā kustības momentā ir proporcionals svārsta attālumam no līdzsvara stāvokļa. Tādēļ svārsta kustība ir harmoniska kustība.

Svārsta kustības trajektorija ir loks $A_1 A_0 A_2$, kuŗu pie maza leņķa α varam uzlūkot par taisnu liniju.

(Ar elementarās matematikas palīdzību varam uzstādīt svārsta kustības likumus tikai tad, ja izpētam mazas svārstības amplitudes.)

Iedomāsimies aploci, kas konstruēta us $A_1 A_0 A_2$ kā uz diametra (fig. 81.).

Iedomāsimies uz aploces kaut kādu punktu B, kas kustas vienmērīgi, un ja punkta B kustībai dosim attiecīgo ātrumu, tad šīs punkta projekcijas kustības uz taisno $A_2 A_0 A_1$ sakritīs ar svārsta kustībām.

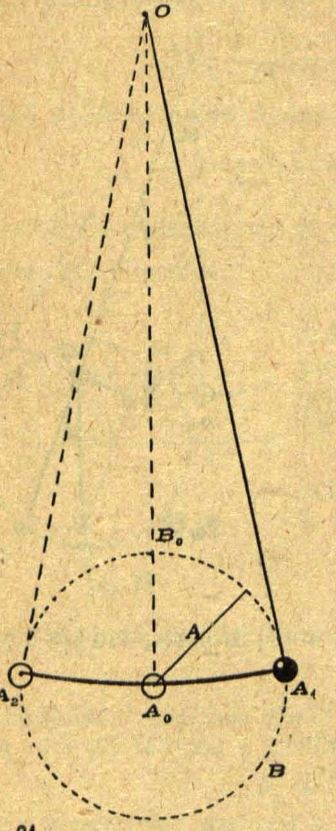


fig. 81

Kad svārsts iet caur punktu A_0, svārsta ātrumam jāsakrīt ar punkta B ātrumu; tāpēc attiecīgo vienmērīgo punkta B ātrumu varam noteikt, ja zinām svārsta ātrumu punktā A_0.

Svārsta ātrums punktā A_0 ir tas ātrums, kuŗu iemanto svārsta bumbiņa, brīvi krītot no augstuma $A_1H = KA_0$ (fig. 82.) (§ 49.). Šis ātrums ir

$$v = \sqrt{2gKA_0}.$$

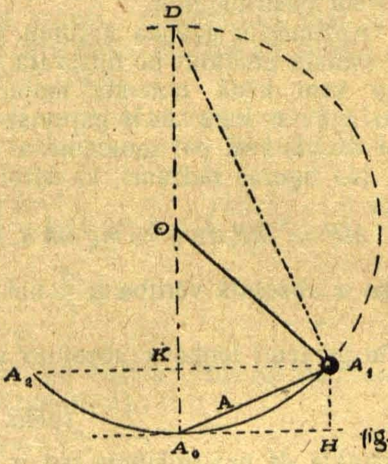


fig. 82

Augstumu KA_0 var izteikt ar svārsta gaŗumu L un amplitudi (loku vaj chordu, kas pie mazas amplitudes viens un tas pats) $A_0A_1 = A$. Trijstūŗi A_0DA_1 un A_0A_1K (fig. 82.) ir taisnleņķīgi ar savstarpēji perpendikularām malām un tādēļ līdzīgi.

Varam rakstīt sekošu proporciju:

$$\frac{A_0D}{A} = \frac{A}{KA_0}, \text{ jeb } A^2 = 2l \,.\, KA_0, \text{ tādēļ}$$

$$KA_0 = \frac{A^2}{2l} \text{ un}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gA^2}{2l}} = A\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Svārsta pilns svārstības periods ir laiks, kuŗā svārsts noiet attālumu $A_1A_0A_2A_0A_1$ (fig. 81.). Šinī pašā laikā T^1 papildu punkts B noiet pilnu aploci, kuŗas radiuss ir A, t. i. punkts B noiet attālumu $2\pi A$.

$$\text{Tādēļ } T^1 = \frac{2\pi A}{v_0} = \frac{2\pi A}{A}\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Tā tad svārsta svārstības pilns periods ir:

$$T^1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

bet vienkāršās svārstības periods, kas attiecas uz noieto attālumu $A_1A_0A_2$, ir vienāds ar šī perioda pusi

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Pēdējo izteiksmi nosauc par matemātiskā svārsta formulu.

§ 58. Matemātiskā svārsta svārstības likumi.

Matemātiskā svārsta formula

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ izteic sekošus likumus:}$$

1) Svārsta svārstības perioda lielums tieši proporcionals kvadrata saknei no svārsta gaŗuma.

2) Svārsta svārstības perioda lielums pretēji proporcionals kvadrata saknei no smaguma spēka paātrinājuma.

3) Perioda lielums nav atkarīgs no masas lieluma.

4) Perioda lielums nav atkarīgs no svārstības amplitudes lieluma. (Jāievēro, ka formula ir pareiza tikai mazām amplitudēm, piem. pie $\alpha = 5^0$ formula ir matemātiski pareiza, bet pie lielākiem leņķiem tikai apmēram pareiza.)

Ar svārsta formulas palīdzību varam zināmā noteiktā vietā uz zemes lodes konstruēt tik gaŗu svārstu, ka tā periods T ir pilnīgi noteikts, piem. 1 sec., 1 min. u. t. t.

Svārstu, kuŗa vienkāršas svārstības periods ir 1 sec., nosauc par sekundu svārstu.

Ja $g = 981 \frac{\text{cm.}}{\text{sec.}^2}$, sekundu svārsta gaŗums ir

$$L = \frac{gT^2}{\pi^2} = \frac{981}{\pi^2} = \infty\ 99{,}3 \text{ cm.}$$

Sekundu svārsta gaŗums ir proporcionals smaguma spēka paātrinājumam; tādēļ dažādos punktos uz zemes virsus konstruējot sekundu svārstu (t. i. tādu svārstu, kuŗa vienkāršās svārstības periods ir 1 sec.), varam noteikt smaguma spēka paātrinājumu šajos punktos.

Punkti uz zemes virsus	g	L
Uz pola	983,11	99,610
Uz platuma 45° . . .	980,61	99,357
Uz ekvatora	978,10	99,103

B. Darbs un energija. (Energetika.)

§ 59. Mechanisks darbs.

Ja kāds spēks darbojas pārvarot pretestību un pārvieto savu iedarbes punktu, tad spēks paveic mechanisku darbu.

Par darba vienību nosaucam darbu, kāds vajadzīgs, lai pārvarētu pretestību, vienādu ar spēka vienību un pārvietotu spēka iedarbes punktu spēka virzienā par attāluma vienību. Piem., lai pārvarētu pretestību, kuŗas lielums ir P spēka vienības — attālumā, kas ir s attāluma vienības, vajadzīgs mechanisks darbs

$$A = P \,.\, s.$$

Piem., ja vienu kilogramu svara pārvietojam vertikalā virzienā viena metra attālumā, tad paveicam darbu 1 kilogramometrs (kgm). Ja paceļam 10 kg. par 5 m., tad paveicam mechanisku darbu $10 \times 5 = 50$ kgm.

Pretestības, kādas jāpārvar darbības spēkam, var būt dažādas, piem. berze, vēja spēks un vispār dažādi pasivi spēki.

Ja iedomājamies, ka ķermenim ir kaut kāda iesākuma kustība, tad, lai ķermenis kustētos vienmērīgi, darbības spēkam jāpārvar tikai pasivie spēki, t. i. tam jābūt pilnīgi vienādam tikai ar pretestībām; ja darbības spēks lielāks par pretestībām, tad ķermenis kustas paātrināti, bet ne vienmērīgi.

Tā kā pie darba pretestībām jābūt pilnīgi vienādām ar darbības spēku, tad par darba mēru varam uzlūkot produktu no spēka ar noieto attālumu, ja spēka iedarbes punkts pārvietojas spēka virzienā.

Ja spēka iedarbes punkts pārvietojas spēka virzienā, tad darbu nosauc par pozitivu, bet ja spēka iedarbes punkts pārvietojas pret spēka virzienu, tad tādu darbu nosauc par negativu.

$$A = -P \,.\, s.$$

Piem., ja ķermeni sviež vertikali uz augšu, tad ķermenis veic, attiecībā uz ķermeņa smaguma spēku, negativu darbu. Tāpat, ja uzvelkam pulksteņa svārstu, tad roka izpilda pozitivu darbu un bumbu svars — negativu darbu.

§ 60. Darba vienība.

Abzolutā mēru sistemā „*CGS*“ par darba vienību nosauc „erg'u“. „Erg's“ ir tāds darbs, kuŗu paveic, kad pārvar pretestību 1 dinas lielumā uz attālumu 1 cm. gaŗumā:

$$1\ ergs = 1\ dyn. \times 1\ cm.$$

Tā kā ergs ļoti mazs lielums, tad kā lielāku mēru lieto „*mega-ergu*“, kas ir:

$$1\ mega\text{-}ergs = 10^6\ erg'iem.$$

Technikā lieto „technisko darba vienību“, t. i. kilogramometru (kgm.). Tā kā 1 kg. = 981000 dyn un 1 m. = 100 cm., tad 1 kgm. = 98100000 erg'iem = 9,81 . 10^7 erg. Pēc angļu fiziķa J. P. Joule (izrunāt Džaul) vienību „10^7 ergi“ nosauc par 1 džaulu.

Tā tad 1 kgm. = 9,81 džaula, vaj 1 džauls apmēram $^1/_{10}$ kgm.

Ja ratus velk pa horicontalu ceļu, tad darbs pastāv ceļa berzes spēka pārvarēšanā. Pie vienmērīgas taisnvirziena kustības pa ideali līdzenu ceļu darbības spēka nevajaga un tādēļ nevar būt arī darba.

§ 61. Darba lielums, kad spēka virziens nesakrīt ar materiala punkta pārvietošanās virzienu.

Ja, piem. (fig. 83.), darbības spēka virziens ir *AF* un materiala punkta pārvietojuma virziens *AA*, tad darbs ir

$$A = P \,.\, s \,.\, cos\ \alpha,$$

t. i. darbs ir produkts no pārvietojuma attāluma un darbības spēka projekcijas uz pārvietojuma virzienu.

Agrākā darba formula $A = P \,.\, s$ ir tikai vispārējās formulas $A = P \,.\, s\ cos\ \alpha$ atsevišķs gadījums, kad $\alpha = O$ vaj $\alpha = \pi$ (vaj 180°). Ja $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (vaj 90°), tad spēka darbs ir vienāds ar nulli.

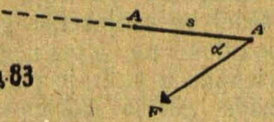


fig. 83

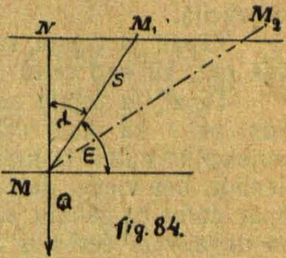


fig. 84.

Piem., smaguma spēka darbs ir vienāds ar nulli, ja ķermeni pārvietojam horicontalā virzienā.

Piem., jāvelk ķermenis ar smagumu *Q* pa kādu slīpu plāksmu MM_1, kuŗas gaŗums ir S un slīpums ε (fig. 84.). Smaguma (pretestības) spēks vienmēr ir vertikals, tā tad virzienā *MN* ar leņķi α pret plāksmas virzienu. Lai varētu vilkt ķermeni pa plāksmu, mums jāpārvar spēka (pretestības) komponente ar virzienu pa plāksmu. Šī spēka komponente ir $Q\ sin\ \varepsilon$, vaj $Q\ cos\ \alpha$, tā tad darbs ir

$$A = Q\ cos\ \alpha \,.\, S = Q \,.\, S\ cos\ \alpha.$$

No minetās formulas varam spriest, ka ir vajadzīgs tas pats darbs, ja paceļam ķermeni vertikalā virzienā *MN*, jo $MN = S\ cos\ \alpha$, tas ir *MN* ir S (attāluma) projekcija uz pārvaramās pretestības virzienu. Ja mums tas pats ķermenis būtu jāpaceļ, piem., pa plāksmu MM_2, kuŗas slīpums ir cits — tad patērēsim agrāko darbu; tā tad spēka darbs pie ķermeņa pacelšanas atkarīgs tikai no augstumu diferencēm, bet ne no noietā attāluma un tā virziena. Tas pats noteikums ir arī tad, kad noietais attālums ir līka vaj lauzīta linija (fig. 85.).

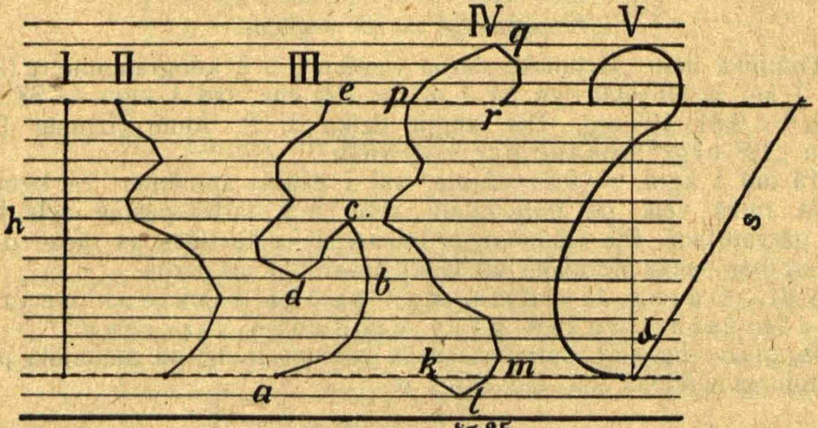


fig. 85

Ja ceļam (fig. 85.) smagumu, piem. pa ceļu II, tad spēka darbs pie pacelšanas tāds pat, kā kad celtu smagumu pa ceļu I, jo ceļš I ir ceļa II projekcija.

Tāpat, ja ceļam smagumu pa ceļu III, tad spēka darbs pie pacelšanas tāds pat, kā kad celtu smagumu pa ceļu I, jo ceļš I ir ceļa III projekcija.

Tāpat, ja ceļam smagumu pa ceļu IV, tad spēka darbs pie pacelšanas tāds pat, kā kad celtu smagumu pa ceļu I, jo gabalu kl un lm projekciju zuma ir nulle, tādēļ ka projekcijas gaŗumi vienādi, bet viens darbs pozitivs un otrs negativs; tāpat darbs pa gabalu pqr vienāds ar nulli, jo pozitivais un negativais darbs ir vienāds, pārējā līkā un lauzītā ceļa projekcija ir linija I.

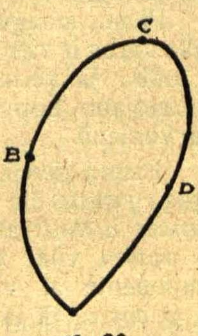


fig. 86.

Tāpat, ja ceļam smagumu pa ceļu V, tad spēka darbs pie pacelšanas ir tāds pat, kā kad celtu smagumu pa pirmo ceļu.

Ja atzīmējam ceļu I ar h, kas vienāds ar projekciju no kaut kāda slīpą ceļa zem leņķa α, t. i. $h = s \cos \alpha$, tad

$$A = Q \,.\, h.$$

Ja spēks pārvieto smagumu pa kaut kādu noslēgtu ceļu (fig. 86.), tad spēka darbs vienāds ar nulli, jo pozitiva darba rezultatu iznīcina negativa darba rezultats.

§ 62. Darba grafika.

Pieņemsim, ka materials punkts zem spēka P iespaida kustas šā spēka virzienā, pārvarēdams tieši pretēju pretestību, kuŗas lielums, protams, arī ir P.

Ja punkts noiet kaut kādu attālumu S, tad spēka darbs ir produkts no spēka ar noieto attālumu

$$A = P . S.$$

Ja zīmējam koordinatu sistemu, uz abscisu ass atliekam attālumus S un uz ordinatu ass spēku P, abus lielumus kaut kādā linearu vienību mērogā, tad dabūjam taisnleņķīgu četrstūri, kas ir „darba diagrama" (fig. 87.). Ja pretestības ir nevienādas (variablas), tad tās pārvarēt var tikai vienāds spēks, tā tad spēks, kas darba laikā nav viena un tā paša lieluma, un tādēļ darba diagrama nebūs četrstūris, bet norobežota vaj nu ar lauztu vaj līku liniju.

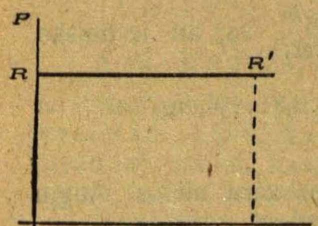


fig. 87

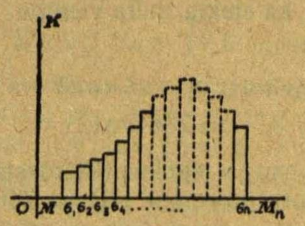


fig. 88

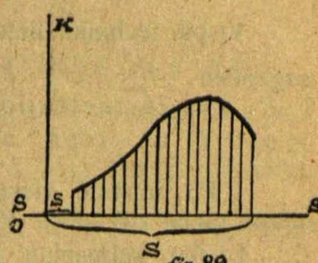


fig. 89

Piem., kaut kādu masu grūž no punkta M līdz M_1 (fig. 88.) un ceļš $MM_1 = \sigma_1 = (s_1 - s)$ pretojas ar spēku K_1, no punkta M_1 līdz $M_2 = \sigma_2 = s_2 - s_1$ ar spēku K_2 u. t. t. līdz attālumam S.

Tā tad kopēju spēka darbu dabūsim kā atsevišķu darbu zumu

$$\Sigma A_s^S = K_1 (s_1 - s) + K_2 (s_2 - s_1) \ldots\ldots + K_n (s - s_{n-1})\ ^*).$$

Ja katrā vietā spēka lielums dažāds, tad darba diagrama norobežota ar līku liniju (fig. 89.). Pēdējā diagramā darbs sākas tikai tad, kad materials punkts nogājis attālumu S pa ideali līdzenu ceļu. (Šī diagrama ir elastīgu spēku pretestības diagrama — ar šiem spēkiem iepazīsimies vēlāki.)

Gadījumā, ja ceļa virziens nesakrīt ar spēka virzienu, uz ordinatu ass jāatliek nogriežņi, proporcionali $P \cos \alpha$. Šinī gadījumā arī var mainīties spēks P un tāpat leņķis α un diagrama atkal var būt ierobežota ar lauztu vaj līku liniju.

---

*) Ar Σ parasti apzīmē daudz mazu lielumu zumu, bet **indeksi** pie burta A apzīmē robežas, kādās ņemta daudzo mazo lielumu zuma.

§ 63. Darba efekts (darbspēja).

Par darba efektu (darbspēju) saucam kaut kāda spēka darbu zināmā noteiktā laikā. Par efekta vienību uzskata tādu efektu, kas laika vienībā paveic 1 darba vienību.

CGS vienību sistēmā efekta vienība ir 1 ergs 1 sekundē $\left(\frac{\text{erg.}}{\text{sec.}}\right)$. Ja, piem., t sekundēs paveikts darbs A ergu vērtībā, tad darba efekts ir

$$W = \frac{A \ ergu}{t \ sec.}.$$

Elektrotechnikā lieto vienību:

$$1 \ vats = 1 \ joule \ sec.^{-1} = 10^7 \ erg. \ sec.^{-1}.$$

Kā lielākus mērus lieto:

$$1 \ kilovats = 1000 \ \text{vatiem} = 1000 \ \text{joulu sec.}^{-1}.$$

Vispār technikā lieto kā efekta mēra vienību: $1 \frac{kgm}{sec.}$, vaj arī technisko zirgspēku

$$1 \ P.S = 75 \ \text{metrkilogramiem sekundē} = 75 . 9{,}81 . 10^7 \ \text{erg. sec.}^{-1} =$$
$$= 736 \ \text{vati}.$$

1 PS nozīmē viena zirga spēku (Pferdestärke) vācu mēros. Angļu mēros viens zirgspēks (Horsepower) 1 HP = 746 vatiem.

Lauku kuļmašīnu lokomobiles ir apm. 5—12 HP, personu vilcienu lokomotives apm. 500 HP, kalnainos apvidos lokomotives efekts ir apm. 1800 HP, kuģu mašinas apm. 10000 HP u. t. t.

Tā kā efekts $= \frac{\text{darbs}}{\text{laiks}}$, tad darbs = efektam $\times$ laiku; tādēļ darbu arī varam apzīmēt ar efektu uz laiku. Šis apzīmējums darbam pieņemts elektrotechnikā, kur

$$1 \ vatstunda = (1 \ \text{joule sec}^{-1}) \times (3600 \ \text{sec}^{1}) = 3600 \ joule = 3{,}6 \cdot 10^{10} \ \text{erg.}$$
$$(\backsim 360 \ \text{kgm.}).$$

$$1 \ \text{kilovatstunda} = 1000 \ \text{vatstundām}.$$

Vatstundas apzīmē ar *(Wh)*.

Kilovatstundas apzīmē ar *(KWh)*.

Mašinas, vispārīgi ņemot, ir darba rīki, ar kuru palīdzību darbu pārvieto no viena ķermeņa uz otru. Tā kā pie mašinas darbības viens ķermenis nevar pārvietot uz otru savu pilno darbu, jo piem., mašinas daļu berze, gaisa pretestības u. t. t. patērē zināmu darbu, tad katras mašinas darbu dala divās kategorijās: 1) noderīgajā jeb efektivajā darbā un 2) kaitīgo pretestību darbā. Noderīgo darbu pilnīgi pārvieto no viena ķermeņa uz otru, bet kaitīgo pretestību darbu izlieto mašinas pretestību pārvarēšanai un uz otru ķermeni tas neatstāj nekādu iespaidu.

Noderīgā darba un kaitīgo pretestību darba zumu nosauc par mašinas pilno darbu.

Mašinas noderīgo darbu vienā sekundē nosauc par efektivo mašinas darbspēju.

Attiecību starp noderīgo un pilno mašinas darbu nosauc par mašinas izmantojuma koeficientu $\beta = \frac{N}{M}$, kur N ir noderīgais darbs un M — pilnais darbs, jeb

$$N = \beta . M$$

mašinas noderīgais darbs ir produkts no mašinas izmantojuma koeficienta un pilnā darba.

Mašinas koeficients norāda uz mašinas labumu, t. i. uz to, cik daudz vaj cik maz mašina zaudē veltīgu darbu mašinas daļu berzes u. t. l. pretestību pārvarēšanā un cik darba mašina var pārdot citam ķermenim.

§ 64. Enerģija. Kustības jeb kinetiskā enerģija.

Spēju paveikt darbu nosauc par enerģiju. Par kustības jeb kinetisko enerģiju nosauc tādu enerģiju, kuŗa ir ikvienai kustošai masai, kas, pateicoties savam ātrumam, spēj paveikt darbu (agrāki šo enerģiju dēvēja par dzīvo spēku).

Pieņemsim, ka brīvs materials punkts m, kas atrodas mierā, zem spēka P iespaida sāk kustēties ar ātrumu v_1.

Ja punkts noiet attālumu s, tad paveiktais darbs ir

$$A = P . s$$

Tā kā zem pastāvīga spēka iespaida punkta kustība ir vienmērīgi-paātrināta un ātrums v_1 ir gala ātrums, tad šī ātruma izteiksme ar s palīdzību ir:

$$v_1 = \sqrt{2gs}, \text{ jeb}$$

$$s = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Izteicot spēku caur masu un paātrinājumu, varam rakstīt sekošu formulu:

$$A = P . s = mg\frac{v_1^2}{2g} = \frac{m\,v_1^2}{2} = K$$

(ar K apzīmēta kinetiskā enerģija).

Šī izteiksme norāda, ka padarītā darba lielums nav atkarīgs no spēka lieluma, bet no m un v_1, tā tad starp liela un maza spēka darbību pastāv tikai tā starpība, ka liels spēks dod ātrumu v_1 uz īsa attāluma īsā laikā, bet mazs spēks dod to pašu ātrumu v uz gaŗa attāluma ilgā laikā.

Izteiksmi $\frac{mv^2}{2}$ nosauc par kustības jeb kinetiskās enerģijas formulu. Materiala punkta kinetiskās enerģijas lielums vienāds ar darba lielumu, kāds jāveic punktam, lai tas iemantotu to kustības ātrumu.

Iekams strādnieks ar savu muskuļu palīdzību ceļ kaut kādu smagumu, zirgs velk ratus, lokomotive vagonus u. t. t., mēs jau iepriekš iedomājamies, ka strādnieks, zirgs, lokomotive u. t. t. spēj izpildīt noteikto mechanisko darbu, t. i. strādnieks, zirgs, lokomotive u. t. t. satveŗ sevī zināmu daudzumu kustības enerģijas. Tādēļ šo enerģiju agrāki dēvēja par dzīvo spēku.

Piem., ja ķermeni, kuŗa smagums ir $P = mg$, ceļam uz augšu par attālumu h, tad pie pacelšanas esam patērējuši darbu $A = P . h$, bet savukārt ķermenis ir iemantojis kinetisko enerģiju krist atpakaļ un sasniegt gala ātrumu v. Ķermenim krītot

$$h = \frac{v^2}{2g}, \text{ tā tad } A = P . \frac{v^2}{2g} = mg \frac{v^2}{2g} = {}^1/_2\, m v^2 = K.$$

Tā tad patērētais (pazaudētais) darbs vienāds ar iemantoto kustības (kinetisko) enerģiju.

Otrādi, ja ķermenis ar kaut kādu tam dotu ātrumu paceļas uz kādu augstumu, tad ķermeņa ceļa augstākā punktā patērētā kustības (kinetiskā) enerģija vienāda ar paveikto (iemantoto) darbu. Ja kustības enerģija ir K, tad $K = {}^1/_2 mv^2$, bet tā kā ķermenis paceļas augstumā $h = \frac{v^2}{2g}$, tad

$$K = {}^1/_2\, m\, 2gh = Ph = A.$$

Tā kā zaudējot kustības enerģiju iemantojam tādu pat darbu, bet zaudējot darbu iemantojam tādu pat kustības enerģiju, tad kustības enerģijas dimensijas vienādas ar darba dimensijām un tādēļ kustības enerģiju, tāpat kā darbu, mērī ergos vaj kilogramometros.

Darba un kustības (kinetiskās) enerģijas vienādība pastāv arī tad, kad uz ķermeni darbojas konstants (pastāvīgs) spēks, kad pastāvošo ātrumu ar kāda jauna spēka palīdzību pavairo vaj pamazina, kad darbojas spēki, kuŗi katru brīdi maina savu lielumu (variabli spēki) u. t. t., ar vārdu, šis likums ir vispārējs.

Pieņemsim, ka materials punkts kustas zem spēku iespaida un kaut kādā momentā punkta ātrums ir v_1, bet kaut kādā vēlākā momentā v_2.

Lai mierā esošs punkts iegūtu ātrumu v_1, jāpatērē darbs A_1.

$$A_1 = Ps_1 = \frac{mv_1^2}{2} = K_1.$$

Lai mierā esošs punkts iegūtu ātrumu v_2, jāpatērē darbs A_2.

$$A_2 = Ps_2 = \frac{mv_2^2}{2} = K_2.$$

Lai punkta ātrumu no v_1 pavairotu līdz v_2, vajadzīgs darbs

$$A = A_2 - A_1 = P(s_2 - s_1) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2};$$

$$A = K_2 - K_1.$$

Tā tad spēka darbs vienāds ar kustoša ķermeņa kustības (kinetiskās) enerģijas pieaugšanu.

Šo noteikumu dēvē par kinetiskās enerģijas teoremu.

§ 65. Potenciālā enerģija.

Katrs pacelts ķermenis satur sevī zināmu daudzumu enerģijas, jo tas krītot spēj paveikt darbu. Šo enerģiju nosauc par ķermeņa stāvokļa enerģiju jeb potencialo enerģiju.

Ja ķermenis krīt zem sava smaguma spēka iespaida, tad tas var izpildīt darbu $A = Ph$; galējais ķermeņa ātrums ir $v = \sqrt{2gh}$ un tādēļ ķermeņa kustības enerģija ir $\frac{mv^2}{2} = \frac{m(2gh)}{2} = Ph$. Tā tad pacelts ķermenis iemantojis enerģiju (spēju izpildīt darbu) vienādu ar darbu, kāds vajadzīgs, paceļot ķermeni taī pašā augstumā. Tā tad katrā paceltā ķermenī ir enerģijas krājums, kuŗu nosauc par potencialo enerģiju.

Potencialās enerģijas piemēri: uzvilkts pulkstenis, uzvilkts šaujamais loks, suta lokomotive, šaujamā pulvera ķimiskā enerģija, akumulatora elektriskā enerģija, magnetiskā enerģija, paceltā ķermeņa enerģija u. t. t.

Kustības (kinetiskās) enerģijas piemēri: izšautas lodes enerģija, kaut kuŗa ķermeņa siltums, skaņas un gaismas kustība, elektriska strāva, ķermeņa krišanas enerģija u. t. t.

§ 66. Krītoša ķermeņa pilnā enerģija.

Pieņemsim, ka ķermenis, kuŗa smagums $P = mg$, krīt no augstuma H. (Lai nebūtu jārēķinās ar varbūtēju griešanos krišanas sākumā, zem ķermeņa šeit saprotam materialu punktu.) Pa krišanas laiku ķermeņa potenciālā enerģija mazinājās, bet kinetiskā — pieaug.

Pierādīsim, ka katrā ķermeņa krišanas momentā tā pilnā enerģija, t. i. potencialās un kinetiskās enerģijas zuma, ir pastāvīga lieluma.

Pieņemsim, ka kaut kādā momentā ķermenis no krišanas sākuma nogājis attālumu h (fig. 90.), t. i. ķermeņa attālums no zemes virsus ir $H-h$.

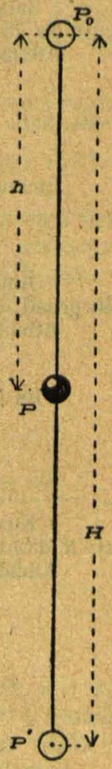


fig. 90

Ķermeņa potenciālā enerģija ir:

$$E_p = P(H-h).$$

Ķermeņa kinetiskā enerģija ir:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(2gh)}{2} = mgh = P \, . \, h.$$

Enerģiju zuma ir:

$$E = E_p + K = Ph + P(H-h) = PH.$$

Šis nolīdzinājums ir pareizs kaut kuŗam augstumam h, t. i. kaut kuŗam krišanas momentam.

Pa krišanas laiku ķermeņa pilnā enerģija ir pastāvīgs lielums, tikai enerģija maina savu formu no potencialās pāriedama kinetiskā.

Krišanas sākumā visa ķermeņa enerģija ir potenciala, bet krišanas beigās tā visa pārvēršas kinetiskā.

Tikko pierādītā teze par potencialās un kinetiskās enerģijas zumas pastāvību ir pasaules enerģijas pāstāvības (uzglabāšanās) likuma atsevišķs gadījums.

Piem. * Kāds darbs jāpaveic, paceļot 1000 kgr. smaguma par 10 m.?

* Ar mechaniska darba palīdzību (180 kgr.m.) rati par līdzenu bruģi pārvietojas pa 9 m. Cik liela berzes pretestība, ja pieņem, ka visu ceļa gaŗumu aktivais spēks līdzsvarojas berzes pretestībai?

Atbilde: Mēs zinām, ka

$$P \, . \, s = 180 \text{ kgr.m., tā tad}$$

$$P = \frac{180}{s} = \frac{180}{9} = 20 \text{ kgr.}$$

* Sutas āmurs, kuŗa svars 500 kgr., izdara vienā minutē 50 sitienus; āmura krišanas augstums 75 cm. Aprēķināt sutas āmura efektu.

Atbilde: Sekundē āmurs krīt $^{50}/_{60} = {^5}/_6$ reizes, tā tad tā ātrums sekundē ir:

$$v = 0{,}75 \, . \, {^5}/_6 = 0{,}625 \text{ m., bet}$$

efekts, kuŗu apzīmēsim ar burtu R, ir:

$$R = 500 \, . \, 0{,}625 = 312{,}5 \text{ kgm/sec.}$$

Efektu zirgspēkos dabūsim, ja 312,5 dalīsim ar 75, tā tad efekts ir

$$N = \frac{E}{75} = \ldots .$$

* Āmurs, kuŗa svars 20 klgr., krīt no augstuma 2 m. uz pāli. Cik dziļu iesitīs āmurs pāli gruntī, ja zinām, ka grunts pretestība ir 180 klgr.?

Atbilde: Kad āmurs atsitas pret pāli, pālis uzņem sevī darbu

$$A = P \, . \, s = 20 \, . \, 2 = 40 \text{ kgr. m.}$$

Visu šo darba krājumu uzņem grunts pretestība, kuŗas darbs ir

$$A' = P' . \, s' = 40 \text{ kgr m. un tādēļ}$$

$$s' = \frac{40}{P'} = \frac{40}{180} = \frac{2}{9} \text{ m.}$$

* Kustoša lokomotive ar tenderi sveŗ 2500 pud. Ātrums ir 36 verstes stundā. Cik liels ir darba krājums?

Atbilde: Kinetiskā enerģija ir

$$P \, . \, s = \frac{mv^2}{2} \text{ un masa } m = \frac{P}{g}, \text{ tādēļ}$$

$$P \, . \, s = \frac{P. \, v^2}{2g}, \text{ bet ātrums sekundē ir:}$$

$$v = \frac{36 \, . \, 500 \, . \, 7}{60 \, . \, 60} \text{ pēd., tādēļ darba krājums ir:}$$

$$P \, . \, s = \frac{2500 \left(\frac{36 \, . \, 500 \, . \, 7}{60 \, . \, 60}\right)}{32{,}2} \quad \text{(g pēdās ir 32,2)}$$

* Kādu mechanisku darbu var izpildīt spara rats, kuŗa radiuss ir 2 m. un svars 600 kgr., kad spara rats maina savu apgriezienu skaitu no $n = 10$ uz $n_1 = 4$ vienā minutē?

Atbilde: spara rata masa ir

$$m = \frac{P}{g} = \frac{600}{9{,}81} = 612.$$

Ātrums pa aploci pie apgriezienu skaita $n = 10$ ir:

$$v = \frac{2\pi r . n}{60} = \frac{2 . 3{,}14 . 2 . 10}{60} = 2{,}1 \text{ m.},$$

bet pie apgriezienu skaita $n_1 = 4$ ātrums ir:

$$v = \frac{2\pi r . n_1}{60} = \frac{2 . 3{,}14 . 2 . 4}{60} = 0{,}84 \text{ m.},$$

tādēļ

$$P . s = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{612 . (2{,}1)^2}{2} - \frac{612 . (0{,}84)^2}{2} = 1134 \text{ klgr./m.}$$

§ 67. Berze.

Materialam punktam vaj ķermenim kustoties ar virzes kustību darbības spēka darbs ir vienāds ar kinetiskās enerģijas pieaugšanu tikai tad, kad punkts vaj ķermenis ir brīvs, t. i. kad uz tiem nedarbojas kaut kādi spēki, kas traucē kustību.

Praktiķā vienmēr varam novērot spēkus, kas lielākā vaj mazākā mērā traucē kustības, un šie spēki ir berze un apkārtnes pretestība.

Berzi sadala divās kategorijās: pirmās kategorijas berze jeb slīdes berze un otrās kategorijas berze jeb rites berze.

a) I. kategorijas berze. Pieņemšim, ka kaut kāds smags ķermenis, kuŗa forma piemēram ir paralelepipeds (fig. 91.), guļ uz plāksmas *AB*. Uz ķermeni darbojas smaguma spēks *P*, kas nerada ķermeņa kustības, jo spēku *P* līdzsvaro vienāds pretspēks *P'*, ar kuŗu plāksma savukārt spiež uz paralelepipedu.

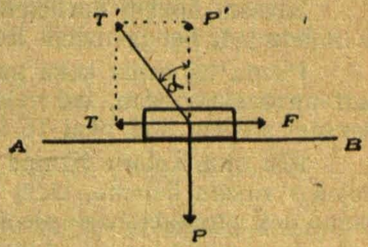


fig.91

Pieņemsim, ka uz ķermeni darbojas spēks *F*, kas cenšas ķermeni vilkt pa plāksmu.

Ja spēks *F* nav pietiekoši liels, tad ķermenis nekustēsies, jo tieši pretēji spēkam *F* darbosies spēks *T*, kuŗu nosauc par berzes spēku.

(Spēkam *F* darbojoties plāksmas pretestība zumējas no diviem komponentiem spēkiem *P'* un *T*, kuŗu kopspēks ir *T'* un kas pieslejas perpendikularajam spēkam *P'* zem kaut kāda leņķa α.)

Ja spēks *F* pieaug, tad pieaug arī līdzsvara spēks *T*, bet tikai līdz zināmai robežai, jo spēks *T* nevar pieaugt bezgali. Kad spēks *F* ir vienāds ar berzes robežas spēku *T*, tad ķermenis atrodas vēl līdzsvarā, bet ja spēks *F* par bezgali mazu lielumu pāraug spēku *T*, tad ķermenis sāk kustēties.

Ja ķermenis jau kustas, tad kustības uzturēšanai vajaga mazāka spēka nekā kustības uzsākšanai.

Ja darbības spēks pa kustības laiku ir vienāds ar berzes spēku, tad ķermenis kustas vienmērīgi. Ja darbības spēks lielāks, tad tas ne tikai pārvar berzes pretestību, bet dod ķermenim arī paātrinājumu.

Turpmāk par berzes spēku sauksim tikai berzes spēku pie pastāvošas kustības, kur tas pilnīgi vienāds ar darbības spēku.

Ne pārāk ātrām kustībām franču zinātnieks Kulons (Charles-Auguste de Coulomb 1736.—1806.) ar mēģinājumu palīdzību atradis sekošus likumus:

1) Berzes spēks tieši proporcionals spiediena spēkam starp virsmām, kuŗas slīd viena pār otru.

2) Berzes spēks nav atkarīgs no to virsmu lieluma, kuŗas savstarpēji berzējas.

3) Berzes spēks nav atkarīgs no ātruma, ar kādu viena virsma slīd pār otru.

Pamatojoties uz pirmo Kulona likumu berzes spēks, ar kuŗu ķermenis slīd pa plāksmu, ir $N = f \cdot P$, kur P ir smaguma spēks, ar kuŗu ķermenis piespiežas virsmai, bet f koeficients, kuŗu nosauc par berzes koeficientu.

Savukārt $f = \frac{N}{P}$, tādēļ, ja zinām divu ķermeņu savstarpējās berzes spēku un smaguma spēku, tad varam noteikt berzes koeficientu.

Berzes koeficienta lielums atkarīgs no slīdošo virsmu materiala, no tā, cik virsmas līdzenas vaj grubuļainas un vaj virsmas eļļotas vaj ne.

Pie vismazākās eļļošanas (ar ūdeni, eļļu, ziepēm u. t. t.) ļoti jūtami samazinās berzes koeficients. Ļoti laba eļļa, kādu lieto dažādās smalkās mašinās, berzi samazina līdz minimumam, tā ka Kulona likumi nav vairs pilnīgi pareizi.

Sausam kokam koeficients f ir apm. 0,36 līdz 0,5, sausiem metaliem 0,13 līdz 0,4, bet ja metali ieziesti ar eļļu, tad tas samazinās līdz 0,07.

Piem., lai ozola koka gabals ar svaru 100 kg. slīdētu pa horicontalu līdzenu ozola virsmu, tad vajadzīgs spēks 48 kg., bet ja virsma ieziesta ar sausām ziepēm, tad tikai 16 kg.

Pēc otrā Kulona likuma berzes spēks nav atkarīgs no savstarpēji berzējošos virsmu lieluma, tādēļ berzes spēks uz katra kvadratsantimetra laukuma tieši proporcionals spiedienam, kāds attiecas uz katru kvadratsantimetru.

Fig. 91. $tg\alpha = \frac{T}{P} = \frac{N}{P} = f.$

b) II. kategorijas berze. Berzei, kad ķermenis rit pa virsmu (piem. ritenis pa ceļu), Kulons atradis sekošus likumus:

1) Berzes spēks tieši proporcionals spiediena spēkam.

2) Berzes spēks apgriezti proporcionals tā ķermeņa radiusam, kas rit pa virsmu.

Šie likumi attēlojami formulā:

$N_1 = f_1 \frac{P}{r}$, kur f_1 nosauc par II. kategorijas berzes koeficientu.

Vispāri ņemot rites berzes koeficients daudzkārt mazāks nekā slīdes berzei.

Piem. f_1 ratu ritenim pa dažādiem ceļiem ir sekošs: pa vienkāršu lauka ceļu 0,05 līdz 0,1, šoseju apm. 0,02, dzelzsceļa sliedēm 0,002 līdz 0,01.

c) Apkārtnes pretestība. Ja ķermenis kustas — šķidrumā vaj gazēs (ūdens, gaiss u. t. t.), tad darbības spēkam šī apkārtne lielākā vaj mazākā mērā pretojas.

Apkārtnes pretestība pastāv iekš tā, ka kustošam ķermenim jāpārvar apkārtnes inercija, jo apkārtne var būt pilnīgi mierā (inerta) vaj kaut kādi kustēties inercijas dēļ. Apkārtnes dažādi slāņi var kustēties savādāki un starp slāņiem arī tad rodas berze, kuŗa jāpārvar kustošam ķermenim; šo berzi nosauc par apkārtnes iekšējo berzi.

Tā kā apkārtnes iekšējās kustības var būt ļoti dažādas, tad ķermeņa kustībām apkārtnē ir dažādi komplicēti likumi, ar kuŗiem tuvāki nākas iepazīties technikā.

Vispāri ņemot, ar ķermeņa kustības ātruma pieaugšanu gazēs (piem. gaisā) apkārtnes pretestība arī pieaug. Mazos ātrumos pretestība, piem., proporcionala ātrumiem, lielos ātrumos pretestība proporcionala ātrumiem kvadratā u. t. t.

Ja ķermenis krīt no liela augstuma gaisā, tad sākumā ķermenis krīt paātrināti ar paātrinājumu, kas vienmēr samazinās, jo apkārtnes pretestība pieaug tādēļ, ka ātrums pieaug. Kad pretestība top vienāda ar ķermeņa smaguma spēku, ķermenis tālāki krīt ar vienmērīgu ātrumu.

Jo ķermenis lielāks un vieglāks, jo ātrāki krišana top vienmērīga un krišanas ātrums mazāks.

Tādas pat parādības vēl taustamāki novērojamas, ja ķermenis krīt ūdenī.

§ 68. Spēka darbs kustībā ar berzi un pretestībām.

Aplūkosim tikai visvienkāršāko gadījumu, kad berze un apkārtnes pretestības dod kaut kādu kopēju, vienu kopspēku N_1, kuŗa lielums izpētāmā laika brīdī paliek konstants. Nosauksim vienkāršības dēļ spēku N_1 par pretestības spēku. Pieņemsim, ka materials punkts ar masu m kustas, kustības spēks ir F, bet pretestības spēks N_1. Pieņemsim, ka punkts nogājis attālumu s, pie kam punkta sākuma ātrums ir v_1 un gala ātrums v_2.

Spēkam F jābūt lielākam par pretestības spēku N_1, jo tam ne tikai jālīdzsvaro spēks N_1, bet jādod arī masai m paātrinājums. Spēks, kas dod paātrinājumu, ir vienāds ar diferenci $F—N_1$.

Šī spēka darbs uz ceļa s ir vienāds ar kinetiskās (kustības) enerģijas pieaugšanu

$$(F - N_1) . s = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = J_2 - J_1, \text{ no kurienes}$$

$$P . s = N_1 . s + J_2 - J_1.$$

Tā tad darbu $P.s$ patērē darbā, kas pārvar pretestības $N_1 s$ un kustības (kinetiskās) enerģijas pieaugšanu $J_2 - J_1$.

Atsevišķā gadījumā, kad $P = N_1$, ātrums v_2 ir vienāds ar ātrumu v_1, t. i. kustība ir vienmērīga, tad

$$P . s = N_1 . s.$$

Visu darbu $P.s$ patērē darbā, kas pārvar pretestības.

Piezīme. Pieņemsim, ka smagums P pacelts uz augstumu H un atrodas mierā. Visa ķermeņa enerģija būs potencialā enerģija (stāvokļa enerģija) PH. Ja tagad smagums krīt un noiet attālumu h apkārtnē ar pretestībām (piem. ūdenī, gaisā u. t. t.), tad tas iemanto ātrumu $v' < \sqrt{2gh}$. Ķermeņa kinetiskā enerģija mazāka nekā tanī gadījumā, ja ķermenis krīt tukšumā, bet patencialo enerģiju ķermenis pazaudē tādu pat kā kad kristu tukšumā. Tomēr jāiegaumē, ka ķermenis savu patencialo enerģiju kaut kādi pazaudēt nevar, bet tikai pārvērš to citā enerģijas veidā, piem. dod ķermeņa aizkustinātam gaisam kinetisko enerģiju, rada, pateicoties berzei, siltumu u. t. t.

Piem. * Ja cilvēks iet pa līdzenu horicontalu laukumu, tad berzes koeficients ir $f = 0{,}08$, t. i. darbs, kādu paveic cilvēks noiedams kaut kādu attālumu pa līdzenu horicontalu laukumu, ir vienāds ar darbu, kāds jāveic, lai paceltu tādā pat augstumā (vienādu ar noieto gabalu) smagumu, kuŗa svars ir vienāds ar 0,08 daļu no cilvēka svara.

Aprēķināt apm. darba daudzumu, kādu paveicat, kad noejat pa horicontalu ceļu attālumu 4 km.

Cik liels būs darbs tanī gadījumā, ja ceļš ir slīps zem 20°?

* Vilciena vispārējais smagums ir 18000 pud. Berzes koeficients $f = 0{,}006$.

Kāds spēks vajadzīgs, lai vilciens kustētos vienmērīgi?

Kāds spēks vajadzīgs, lai vilciens kustētos ar paātrinājumu 40 cm/sec²?

§ 69. Bumbu trieciens.

Aplūkosim tikai vienkāršākos gadījumus, kad bumbas kuštas pa taisnu liniju, kas savieno bumbu smagumu centrus.

Kad divas materialas bumbas (piem. tērauda) kustoties piesitas, tad tās viena uz otru izdara spiedienu, no kuŗa bumbas lielākā vaj mazākā mērā maina savu formu, deformējas. Savukārt deformacija rada iekšējos bumbas materiala sprieguma spēkus, kas cenšas bumbām dot agrāko formu un līdz ar to bumbas vienu no otras atgrūst.

Elastīgas bumbas (piem. tērauda, ziloņkaula u. t. t.) viegli iemanto savu agrāko formu un nepārcieš pārāk lielas deformacijas, turpretim neelastīgas (plastiskas) bumbas (svina, vaska u. t. t.) tik pat kā nemaz nespēj iemantot savu agrāko formu un pārcieš lielas deformacijas.

Aplūkosim tikai galējās varbūtības, t. i., kad bumbas absoluti neelastīgas (pārciestās deformacijas pilnīgi paliek spēkā) un kad bumbas ideali elastīgas (bumbu forma pēc pārciestās deformacijas pilnīgi atjaunojas).

a) A b s o l u t i n e e l a s t ī g u b u m b u t r i e c i e n s. Pieņemsim, ka bumba A, kuŗas masa ir m_1, kustas ar ātrumu v_1 (fig. 92. un 93.) un bumba B, kuŗas masa ir m_2, — ar ātrumu v_2. Ātrumus uz labo pusi pieņemsim par pozitiviem un uz kreiso pusi — par negativiem.

Ja abas bumbas kustas uz vienu pusi, piem. labo, tad v_1 vajaga būt lielākam nekā v_2.

Tā kā trieciena momentā spēki, kas darbojas uz abām bumbām, vienādi un darbojas vienādi ilgu laika sprīdi, tad abu spēku impulsi arī vienādi, un tadēļ, pēc Ņutona trešā likuma, abām bumbām v i e n ā d i m a i n ā s k u s t ī b a s m o m e n t s (§ 40. un 41.). Bumbas A kustības moments pamazinās par tikdaudz, par cikdaudz pieaug bumbas B kustības moments.

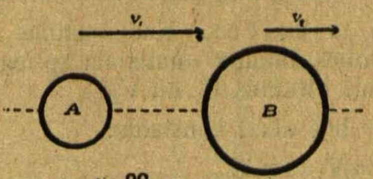


fig. 92

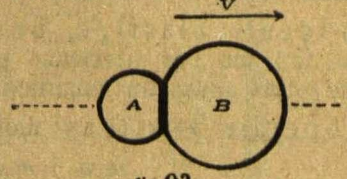


fig. 93

Tā tad abu bumbu vispārējais kustības moments paliek bez pārmaiņas kā trieciena momentā, tā arī pēc trieciena.

$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)V$, kur V ir kopējs ātrums, ar kādu bumbas kustēsies pēc trieciena.

$$\text{Tadēļ } V = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Atsevīšķā gadījumā, kad bumbu masas ir vienādas, kopējais bumbu ātrums pēc trieciena ir:

$$V = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Ja vienādas bumbas kustas viena otrai pretim, tad

$$V = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

Ja šinī gadījumā arī bumbu ātrumi ir vienādi, tad

$V = 0$, t. i. pēc trieciena bumbas apstājas.

Vispārējā gadījumā, kad kustas bumbas ar dažādām masām un dažādos ātrumos, k u s t ī b a s m o m e n t s, kuŗu piesitoties zaudē bumba A (un kuŗu iemanto bumba B), ir:

$m_1v_1 - m_1V$, vaj liekot V vietā tā izteiksmi

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2).$$

Bumbai piesitoties bumbas *B* kustības (kinetiskās) enerģijas pieaugums mazāks nekā bumbas *A* kinetiskās enerģijas zaudējums. Šis zaudējums ir

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} \text{un}$$

liekot *V* vietā tā izteiksmi, dabūjam

$$\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2.$$

Šī izteiksme vienmēr pozitiva, jo masas un ātrumu diference vienmēr pozitivi lielumi.

Pazaudētā kinetiskā enerģija pāriet darbā, kāds vajadzīgs, lai bumbas deformētos, un arī izsauc starp abām bumbām, tām piesitoties, siltumu.

b) Ideali elastīgu bumbu trieciens. Kad bumbas pilnīgi elastīgas, tad tās pēc trieciena, pateicoties bumbu materiala spriegumam, viena no otras atlēks un iemantos jaunus ātrumus V_1 un V_2.

Kopējais kustības moments būs atkal konstants:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2.$$

Bumbas *A* kustības moments pieaug (negativi) par

$$m_1 (V_1 - v_1) = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \text{ un tādēļ pēc}$$

$$\text{trieciena } V_1 = \frac{2 m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}.$$

Tāpat atrodam ātrumu V_2 bumbai *B* pēc trieciena.

$$V_2 = \frac{2 m_1 v_1 - (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}.$$

Pamatojoties uz V_1 un V_2 formulām varam pierādīt, ka kopējā kinetiskā enerģija pēc bumbu trieciena paliek bez pārmaiņas:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Tā kā ideali elastīgas bumbas pēc trieciena neiemanto nekādas deformacijas, tad pamatojoties vienkārši uz enerģijas pastāvības likumu varam noteikt, ka kopējā kinetiskā enerģija pēc bumbu trieciena ir vienāda ar kinetisko enerģiju, kāda bija pēdējā momentā pirms bumbu trieciena.

Atsevišķos gadījumos, kad bumbu masas $m_1 = m_2$, tad $V_1 = V_2$ un $V_2 = v_1$, t. i. pēc trieciena bumbas apmainās ātrumiem: bumba *A* pēc trieciena kustas ar bumbas *B* agrāko ātrumu un otrādi.

Ja vēl $v_2 = 0$, tad $V_1 = 0$ un $V_2 = v_1$, t. i. bumba A, atsizdamās pret nekustošos bumbu B — apstājas, bet bumba B kustas tālāki ar bumbas A ātrumu.

c) **Ideali elastīgas bumbas atsišanās pret elastīgu sienu** (fig. 94.). Šo gadījumu var uzlūkot kā tādu, kur bumba A piesitas bumbai B (sienai), kuŗas masa bezgali liela, t. i. $m_2 = \infty$ un tādēļ $V_2 = 0$. Šeit varam aplūkot divus gadījumus: kad bumba A kustas ar ātrumu v_1 pa trajektoriju perpendikularu sienai, un gadījumu, kad bumba kustas pa trajektoriju, kas pieslejas sienai zem kaut kāda par 90° mazāka leņķa.

Pirmā gadījumā **bumba atlēks no sienas ar savu agrāko ātrumu un kustēsies pa to pašu trajektoriju, pa kuŗu tā tuvinājās sienai.**

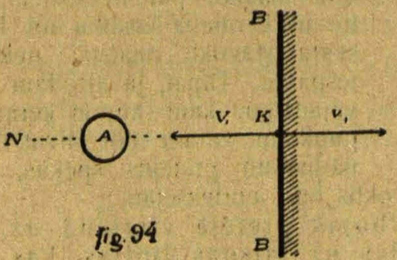


fig. 94

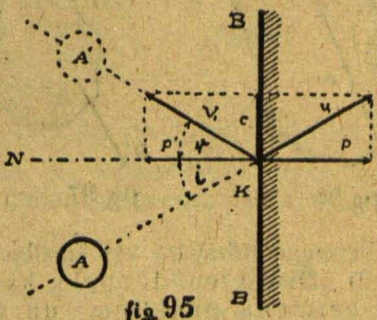


fig. 95

Šo noteikumu varam pierādīt matematiski. Ja formulā, kas nosaka ātrumu V_1 pēc trieciena, daļām rādītāju un skaitītāju ar m_2, tad

$$V_1 = \frac{2v_2 + \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) v_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}, \text{ ja tagad}$$

$v_2 = 0$ un $\frac{m_1}{m_2} = 0$ (jo $m_2 = \infty$), dabūjam, ka

$$V_1 = -v_1.$$

Ja bumba atsitas pret sienu slīpi, tad ātrums pēc trieciena ir vienāds ar ātrumu pirms trieciena un piesišanās leņķis i (starp tuvošanās trajektoriju AK un perpendikularu KN fig. 95.) ir vienāds ar bumbas atlēkšanas leņķi r (starp atlēkšanas trajektoriju KA' un to pašu perpendikularu).

III. Statika.

§ 70. Spēku darbība uz cietu ķermeni.

1) Divi vienādi spēki, kas darbojas uz kaut kādu vienu cieta ķermeņa punktu un ir ar tieši pretēju virzienu, nemaina ķermeņa stāvokli.

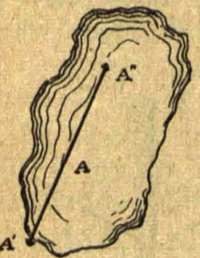


fig.96

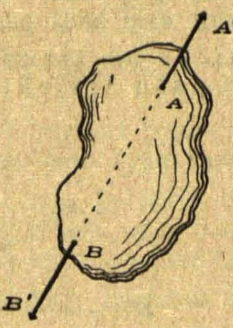


fig.97

Fig. 96. ar vektoriem AA' un AA'' attēlotie spēki savstarpēji iznīcinās nemainīdami ķermeņa stāvokli. Tādēļ, ja uz kādu ķermeņa punktu darbojas spēki, kas tieši pretēji, t. i., kuŗu kopspēks ir 0, tad tādus spēkus varam uzlūkot par neesošiem, jo tie uz ķermeņa kustību un līdzsvara stāvokli neatstāj nekādu iespaidu. Tāpat, ja atrodam par vajadzīgu, kaut kuŗam ķermeņa punktam varam dot divus vienādus un pretējus spēkus, pie kam ķermeņa līdzsvara vaj kustības stāvoklis būs iepriekšējais.

2) Divi vienādi spēki, kas darbojas pretējā virzienā uz diviem ķermeņa punktiem un atrodas uz taisnās linijas, kas iet caur minētiem punktiem, nemaina ķermeņa miera vaj kustības stāvokli.

Fig. 97. un 98. ar vektoriem AA' un BB' attēlotie vienādie spēki savstarpēji iznīcinās, pie kam šādi spēki uz ķermeņa kustību vaj līdzsvara stāvokli neatstāj nekādu iespaidu. (Šeit par cietu ķermeni saukts absoluti ciets ķermenis, jo pretējā gadījumā fig. 97. un 98. attēlotie spēki saspiedīs vaj izstieps ķermeni.)

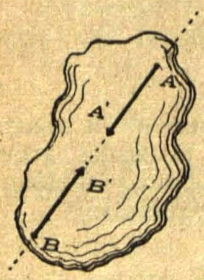


fig 98

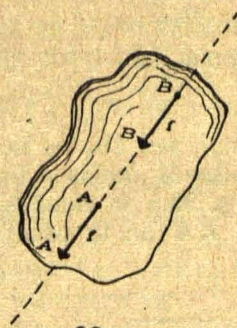


fig 99

Pamatojoties uz diviem minētiem noteikumiem, varam pierādīt sekošu teoremu:

Spēka iespaids uz ķermeni ir agrākais, ja spēka iedarbes punktu pārceļam spēka virzienā.

Pieņemsim, ka uz ķermeni darbojas spēks AA' (fig. 99.). Pierādīsim, ka tādu pat iespaidu uz ķermeni atstās spēks BB', kas ir vienāds ar spēku AA' un kuŗa darbības punkts atrodas uz spēka AA' virziena.

Iedomāsimies, ka punktā *B* (fig. 100.) darbojas divi vienādi spēki *BB'* un *BB''*. Tā kā šie spēki savstarpēji iznīcinās, tad tie neatstāj nekādu iespaidu uz spēka *AA'* darbību.

Varam arī neievērot spēkus *AA'* un *BB''*, jo tie arī savstarpēji līdzsvarojas (iznīcinās), paliek tikai spēks *BB'*, kuŗa darbība tad vienāda ar spēka *AA'* darbību.

§ 71. Spēku zumēšanas metodes vienā plāksmā.

Agrāki (§ 46.) mācījāmies, ka, ja divi spēki darbojas uz vienu un to pašu punktu, tad kopspēka lielumu un virzienu nosaka paralelograma diagonale, kas konstruēta uz komponentiem spēkiem.

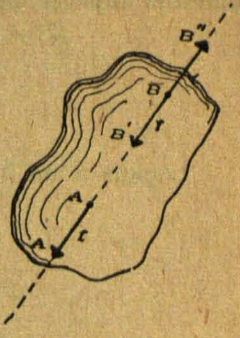


fig.100

Aplūkosim divas metodes, ar kuŗu palīdzību var atrast kopspēku.

a) Grafiskā metode. Ar šo metodi jau iepazīnāmies agrāki un, lai dabūtu vispārēju jēdzienu par spēku zumēšanu, atkārtosim to vēlreiz.

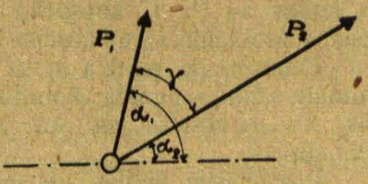


fig.101

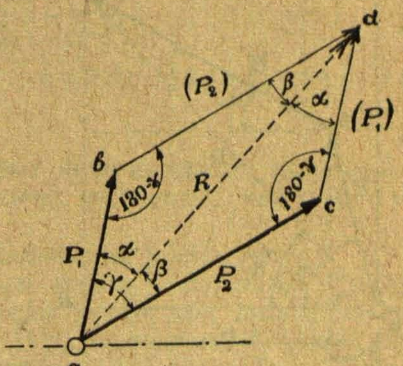


fig 102

Pieņemsim, ka fig. 101. attēloti spēki P_1 un P_2, tad fig. 102. velkam no kaut kāda punkta linijas *ab* un *ac*, kas paralelas spēkiem P_1 un P_2, un kuŗu gaŗums mērogā izsaka spēku lielumu. Konstruējam tagad attiecīgo paralelogramu un dabūjam kopspēka *R* lielumu un virzienu.

Protams, pietiek, ja konstruējam tikai trijstūri, piem. *abd* vaj *acd*.

b) Analitiskā metode. Trijstūrī *abd* vaj *acd* (fig. 102.) ir zināmas divas malas P_1 un P_2 un no tām ieslēgts leņķis $(180^0 - \gamma)$; leņķi γ zinām no uzdevuma, jo abiem spēkiem P_1 un P_2 ir doti to lielums un virziens.

Trešo trijstūŗa malu *R* varam aprēķināt vaj nu ar trigonometrijas, vaj analitiskās ģeometrijas palīdzību.

1) Kopspēka R aprēķins ar trigonometrijas palīdzību. Trigonometrijā trijstūŗu aprēķināšanai zinām sekošu formulu:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \cos (180^0 - \gamma), \text{ tā kā}$$
$$\cos 180^0 - \gamma = - \cos \gamma, \text{ tad}$$
$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \gamma, \text{ jeb}$$
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \gamma} \; . \; . \; . \; (1)$$

Leņķus α un β dabūjam no formulas:

$$\sin \alpha : \sin (180 - \gamma) = P_2 : R, \text{ tādēļ}$$
$$\sin \alpha = \frac{\sin \gamma \; . \; P_2}{R} \; . \; . \; . \; (2), \text{ un tāpat}$$
$$\sin \beta = \frac{\sin \gamma \; . \; P_1}{R}$$

(jo $\sin (180 - \gamma) = \sin \gamma$).

Kopspēka lielumu atrodam ar formulas (1) un virzienu ar formulas (2) palīdzību.

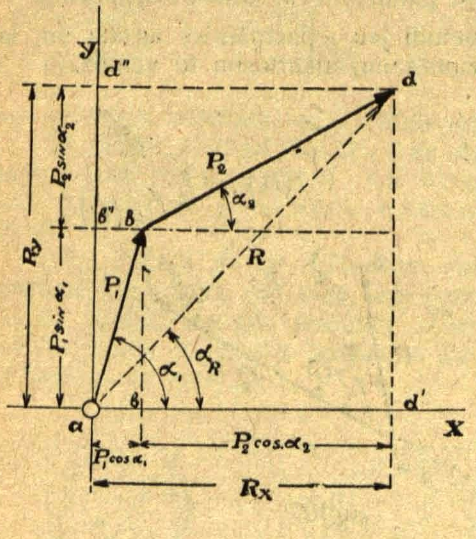


fig. 103

2) Kopspēka R aprēķins ar analitiskās ģeometrijas palīdzību. Pēc fig. 103. jāatrod gaŗums $a\,d$ (t. i. kopspēka lielums) un leņķis α_R (t. i. kopspēka virziens, skaitot leņķi α_R no abscisu ass).

Zīmēsim no punkta a, kā koordinātu sākuma punkta, koordinatu asis x — abscisu asi un y — ordinatu asi.

Projektēsim linijas ab un bd uz abām asīm, tad

$$ab' = P_1 \cos \alpha_1; \; b'd' = P_2 \cos \alpha_2;$$
$$ab'' = P_1 \sin \alpha_1; \; b''d'' = P_2 \sin \alpha_2,$$

kur leņķi α_1 un α_2 nosaka spēku vektoru P_1 un P_2 slīpumu, attiecībā uz abscisu asi.

Apzīmēsim liniju ad' ar R_x un liniju ad'' ar R_y, tad

$$R_x = P_1 \; . \; \cos \alpha_1 + P_2 \; . \; \cos \alpha_2;$$
$$R_y = P_1 \; . \; \sin \alpha_1 + P_2 \; . \; \sin \alpha_2.$$

Ja ar šo formulu palīdzību aprēķinām R_x un R_y lielumu, tad kopspēku R dabūjam kā

$$R = \sqrt{R^2_x + R^2_y}$$

un R virzienu ar vienu no sekošām formulām:

$$\sin \alpha_R = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \alpha_R = \frac{R_x}{R}; \quad tg \alpha_R = \frac{R_y}{R_x}; \quad ctg \alpha_R = \frac{R_x}{R_y}.$$

Kopspēka R aprēķins ar analitiskās ģeometrijas palīdzību piemērojams tad, kad zināmi leņķi α_1 un α_2. Techniskos aprēķinos šie leņķi pa lielākai daļai zināmi, tādēļ šo metodi praktikā lieto ļoti plaši.

Piem.* $P_1 = 25$ kg., $P_2 = 40$ kg., $\alpha_1 = 75°$, $\alpha_2 = 30°$ (tā tad $\gamma = 45°$) (fig. 101.).

Aprēķinām analitiski kopspēka R lielumu un virzienu.

a) Trigonometrisks aprēķins (fig. 102.):

$$R = \sqrt{625 + 1600 + 2 \,.\, 25 \,.\, 40 \,.\, 0{,}707} = \sqrt{3639} = 60{,}32 \text{ kg.}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin 45° \,.\, 40}{60{,}32} = 0{,}469;$$

$$\alpha = 27°57'; \quad \beta = 17°3'.$$

b) Aprēķins ar analitiskās ģeometrijas palīdzību:

$$R_x = P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 = 25 \,.\, \cos 75° + 40 \,.\, \cos 30° =$$
$$= 6{,}47 + 34{,}64 = 41{,}11 \text{ kg.}$$
$$R_y = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 = 25 \,.\, \sin 75° + 40 \sin 30° =$$
$$= 24{,}15 + 20{,}00 = 44{,}15 \text{ kg.}$$

Tā tad:

$$R = \sqrt{41{,}11^2 + 44{,}15^2} = \sqrt{1690{,}03 + 1949{,}22} = 60{,}32 \text{ kg.}$$

R virzienu varam aprēķināt ar kaut kuŗu virziena formulu, piem.:

$$tg\,\alpha_R = \frac{44{,}15}{41{,}11} = 1{,}074; \quad \alpha_R = 47°3'.$$

Ja vēlamies, varam vēl aprēķināt leņķus α un β:

$$\alpha = 75° - 47°3' = 27°57';$$
$$\beta = 47°3' - 30° = 17°3'.$$

§ 72. Vairāku uz vienu punktu darbojošos spēku zumēšana.

a) Grafiskā metode.

Kinematikā § 23. aplūkojām vairāku ātrumu vektoru zumēšanu, tagad atkārtosim vektoru zumēšanas paņēmienu gadījumam, kad jāatrod vairāku doto spēku kopspēks.

Fig. 104. spēki P_1, P_2, P_3, P_4 darbojas uz punktu m.

Vispirms zumēsim kaut kādus divus spēkus, piem. P_1 un P_2 kopspēkā R_{1-2}, kādēļ konstruēsim (fig. 105.) spēku trijstūri abc, kuŗa divas malas ir dotie spēki un trešā kopspēks R_{1-2}. Tālāk zumējot ar R_{1-2} kaut kādu no pārpalikušiem spēkiem, piem. P_3, dabūjam atkal spēku R_{1-3}, kuŗu varam atkal zumēt ar pēdējo pārpalikušo spēku P_4 un šādi atrast meklēto kopspēku R_{1-4}, kas pēc lieluma un virziena pilnīgi līdzvērtīgs dotiem spēkiem P_1, P_2, P_3 un P_4.

Fig. 105. norāda, ka linijas ac un ad nemaz nav jāzīmē un pietiek, ja zīmējam tikai liniju ae, kas pēc lieluma un virziena nosaka doto spēku kopspēka lielumu un virzienu.

Fig. 105. nosauc par spēku poligonu. Šo poligonu dabūjam, ja no kaut kāda punkta konstruējam, piem., spēka P_1 vektoru, paralelu dotam spēkam P_1, tad no šī vektora gala (punkta b) konstruējam vektoru P_2, paralelu spēkam P_2 u. t. t. Pēdējo spēka poligona punktu e savienojam ar konstrukcijas sākuma punktu a un dabūjam pēc lieluma un virziena kopējo rezultējošo spēku R_{1-4}.

Spēku plānā (fig. 104.) šo spēku varam attēlot, ja velkam no punkta *m* liniju, paralelu *ae*, un atliekam uz tās vektoru R_{1-4}.

b) Analitiskā metode.

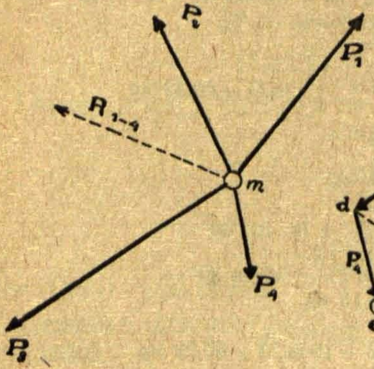


fig. 104.

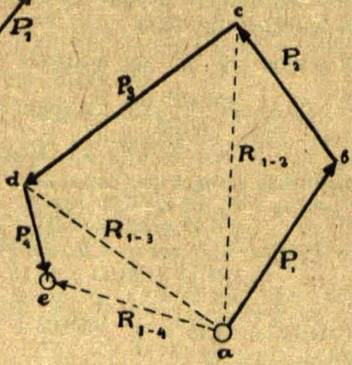


fig 105.

Kopspēku varam aprēķināt vaj nu ar trigonometrijas, vaj analitiskās ģeometrijas palīdzību.

Trigonometrisks aprēķins pārāk komplicēts, jo vispirms jāatrod divu spēku kopspēks, tad šim spēkam jāpieskaita tālākais dotais spēks un jāatrod no pirmā kopspēka un dotā spēka atkal jauns kopspēks u. t. t.

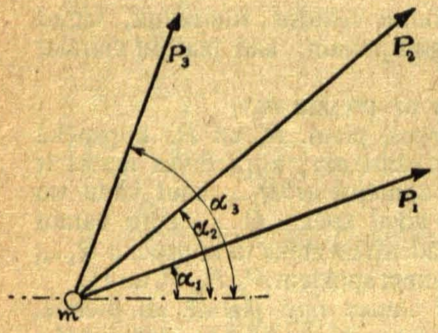


fig. 106.

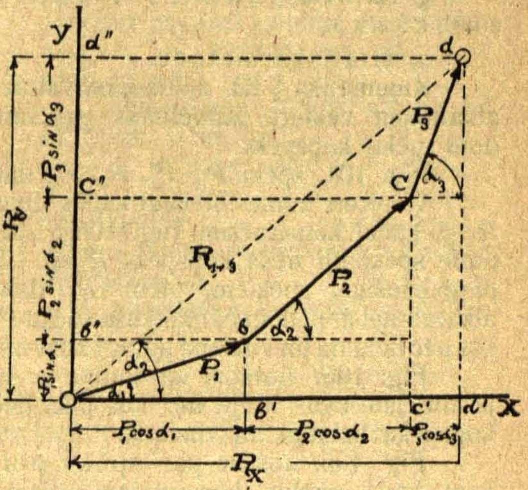


fig 107.

Tādēļ vairāku spēku zumēšanai praktikā trigonometrisko metodi lieto reti, bet kopspēku aprēķina ar analitiskās ģeometrijas palīdzību.

Piem. fig. 106. doti trīs spēki: P_1, P_2 un P_3; iedomāsimies fig. 107. šo doto spēku „spēku poligonu".

Konstruēsim koordinatu sistemu un projektēsim dotos un kopspēku uz koordinatu asīm, tad

$$R_x = P_1 cos\alpha_1 + P_2 cos\alpha_2 + P_3 cos\alpha_3 \ldots (1)$$
$$R_y = P_1 sin\alpha_1 + P_2 sin\alpha_2 + P_3 sin\alpha_3 \ldots (2)$$
$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} \quad \ldots (3)$$

R virzienu varam atrast ar vienu no sekošām formulām

$$sin\alpha_R = \frac{R_y}{R}; \quad cos\alpha_R = \frac{R_x}{R}; \quad tg\alpha_R = \frac{R_y}{R_x}; \quad ctg\alpha_R = \frac{R_x}{R_y} \ldots (4)$$

Ar šīs metodes palīdzību spēku poligonu nemaz nevajaga zīmēt, bet tikai lietot pēc kārtas pievestās formulas.

Formulās (1. un 2.) var būt arī negativi locekļi.

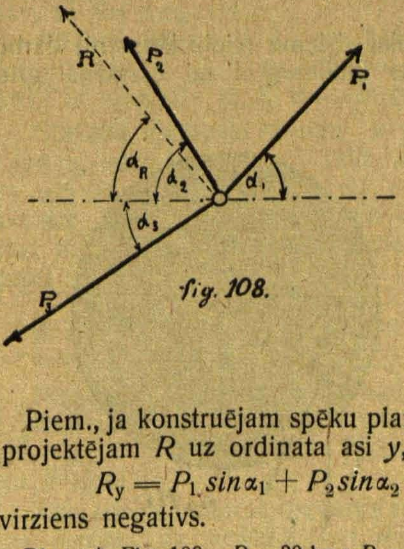


fig. 108.

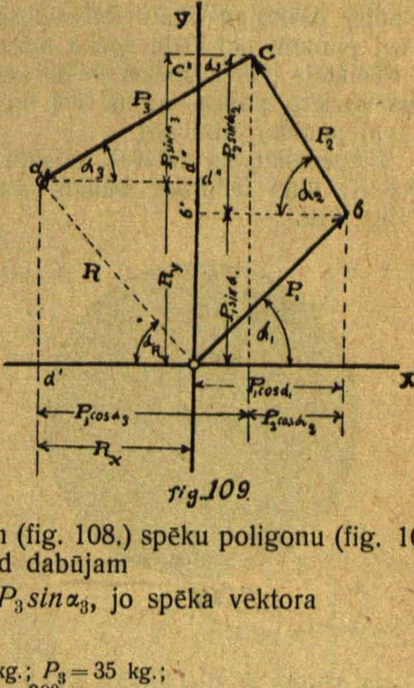


fig. 109.

Piem., ja konstruējam spēku planam (fig. 108.) spēku poligonu (fig. 109.) un projektējam R uz ordinata asi y, tad dabūjam

$R_y = P_1 sin\alpha_1 + P_2 sin\alpha_2 - P_3 sin\alpha_3$, jo spēka vektora P_3 virziens negativs.

Piem.* Fig. 108. $P_1 = 30$ kg.; $P_2 = 25$ kg.; $P_3 = 35$ kg.; $\alpha_1 = 45^0$; $\alpha_2 = 60^0$; $\alpha_3 = 30^0$.

Aprēķināt kopspēka R virzienu un lielumu.

$$R_x = +30 . cos\ 45^0 - 25 . cos\ 60^0 - 35 . cos\ 30^0 = -21,6 \text{ kg.},$$
$$R_y = +30 . sin\ 45^0 + 25 . sin\ 60^0 - 35 . sin\ 30^0 = +25,4 \text{ „}$$

$$R = \sqrt{(-21,6)^2 + (25,4)^2} = 33,4 \text{ kg.}$$

$$tg\,\alpha_R = \frac{25,4}{21,6} = 1,17; \quad \alpha_R = 49^0 30'.$$

Piem.* Aprēķināt ar analitiskās ģeometrijas palīdzību kopspēku, kad uz kaut kādu punktu darbojas sekoši spēki:

$P_1 = 200$ kg.	ar virzienu no horiconta (abscisu ass)	$\alpha_1 = 20^0$;
$P_2 = 80$ „	„ „ „ „ „ „	$\alpha_2 = 60^0$;
$P_3 = 120$ „	„ „ „ „ „ „	$\alpha_3 = 75^0$;
$P_4 = 130$ „	„ „ „ „ „ „	$\alpha_4 = 130^0$;
$P_5 = 90$ „	„ „ „ „ „ „	$\alpha_5 = 175^0$.

§ 73. Spēku moments. Cietu ķermeni nosauc par brīvu, ja katrs spēks, kas uz to darbojas, rada ķermeņa kustību; ja ķermeņa kustība kaut kādi ierobežota, tad šādu ķermeni nosauc par nebrīvu.

Ķermenis, atsevišķā gadījumā, var būt nebrīvs, ja kaut kāda ķermeņa viena taisnā linija vaj viens ķermeņa punkts nostiprināts. Tad ķermenis nespēj translatoriski kustēties, bet spēj tikai griezties ap nostiprināto punktu vaj liniju.

Kad uz cietu ķermeni (vaj cieši saistītu spēku sistemu, kas viens un tas pats) darbojas tikai viens spēks, kuŗa virziens traucas caur nekustošos asi vaj punktu, tad šādu spēku līdzsvaro nostiprinātā ass vaj punkts. Teiktais paliek spēkā, ja uz ķermeni darbojas vairāki spēki, kuŗu kopspēka virziens traucas uz asi vaj nostiprināto punktu. Tā tad šādus spēkus ass (vaj punkts) līdzsvaro.

Pieņemsim, ka uz cieši saistītu spēku sistemu (cietu ķermeni) darbojas spēks K, kuŗa iedarbes punkts atrodas attālumā d no ķermeņa griezes ass (fig. 110.).

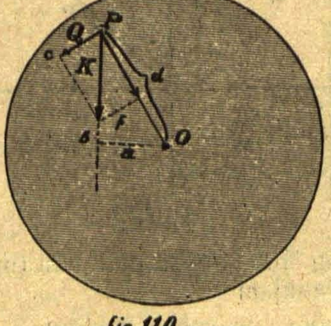


fig. 110

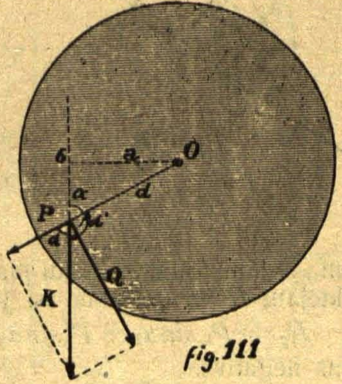


fig. 111

Ja spēks K darbojas ar kaut kādu virzienu plāksmā un pieslejas slīpi d virzienam, tad spēka radītā griezes spēja ir ekvivalenta ar spēka Q griezes spēju, kuŗš spēks ir K projekcija uz linijai d perpendikularu virzienu, pie kam Q un K iedarbes punktiem jāsakrīt.

Spēku K varam sadalīt divos komponentos spēkos virzienā pa d un virzienā perpendikulari d; pirmo spēku līdzsvaro ass, bet otrs spēks Q rada griezes kustību.

Ja spēks K pieslejas d virzienam zem asa leņķa, tad komponente, kas traucas uz centru, spiež ķermeni (fig. 110.). Ja spēks K pieslejas d virzienam zem lielāka par 90° leņķa, tad komponente, kas traucas uz centru, stiepj ķermeni (fig. 111.).

Tā kā (fig. 110.) trijstūŗi bPO un fPc ir līdzīgi (tāpat arī figurā 111.), tad $Q : K = a : d$, kur a ir spēka virziena attālums no ass.

Tāpēc:

$$K \cdot a = Q \cdot d.$$

Spēku K un tam ekvivalento spēku Q nosauc par griezes spēkiem un a vaj b nosauc par spēka K vaj Q pleciem.

§ 74. Statiskais jeb griezes moments.

Par statisko momentu nosauc produktu no spēka lieluma ar spēka virziena attālumu no ass (t. i. spēks uz spēka plecu, attiecinātu uz griezes asi).

Ja pieņemam griezes kustību pulksteņa rādītāja virzienā par pozitivu, tad pretēja virziena kustība ir negativa un attiecīgie momenti pozitivi vaj negativi.

Kā no figuras 110. un 111. redzams, spēka K vietā var likt griezes spēku Q, kas darbojas uz to pašu punktu un kuŗa moments ir vienāds ar K momentu.

Statiskā momenta vienība ir produkts no spēka, kuŗa lielums ir 1 dina, ar plecu, kuŗa gaŗums ir 1 cm. (1 din. cm.), vaj praktiskā mēru sistemā — produkts no spēka, kuŗa lielums ir 1 kg., ar plecu, kuŗa gaŗums ir 1 cm. (1 kg. cm.).

§ 75. Līdzsvara stāvoklis ķermenim griežoties.

Pieņemsim, ka ķermenis (fig. 112.) var griezties ap asi O un uz ķermeņa punktiem A un B darbojas vienā plāksmā divi spēki P un Q.

Abu spēku iedarbes punktus pārcelsim spēka virzienā uz punktu C, kur abi virzieni sastopas.

Ar paralelograma likuma palīdzību aprēķināsim kopspēku R, kuŗa virzienam, līdzsvara gadījumā, jātraucas uz asi O.

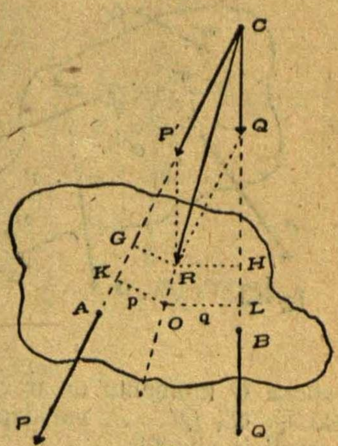


fig. 112

Pierādīsim, ka līdzsvara gadījumā abu spēku P un Q momentiem jābūt vienādiem.

Vilksim no O perpendikularus $OK = p$ un $OL = q$ un no R perpendikularus RG un RH uz spēku virzieniem.

Trijstūŗi $CP'R$ un $CQ'R$ ir vienādi, tādēļ

$CP' . RG = CQ' . RH$ (jo katra šo produktu puse dod trijstūŗa laukuma mēru),

tādēļ $CP' : CQ' = RH : RG$.

Attieksme $CP' : CQ'$ ir vienāda ar spēku $P : Q$ attieksmi, tādēļ

$RH : RG = OL : OK = q : p$, jeb

$P : Q = q : p$ un

$P . p = Q . q$, jeb $P . p - Q . q = 0$.

Tā tad līdzsvara stāvoklī momenti, kas traucas griezt ķermeni katrs uz pretēju pusi, ir vienādi.

Šo noteikumu varam definēt šādi:

Ķermenis, kas griežas ap asi, atrodas līdzsvarā, ja momentu zuma, attiecinot uz griezes asi, ir vienāda ar nulli.

Šis noteikums nepieciešams arī tad, kad uz ķermeni darbojas vairāki spēki: $\Sigma P . p = 0$.

Pēc tikko minētā, spēks Q līdzsvaro spēku P, un pamatojoties uz līdzsvara likumu, varam spēku P līdzsvarot ne tikai ar Q vien, bet ar kaut kādu citu spēku Q', Q'' vaj Q''' u. t. t. (fig. 113.), kuŗa moments ir vienāds

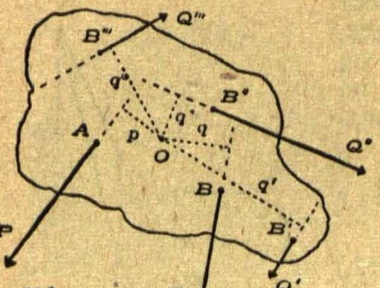


fig. 113

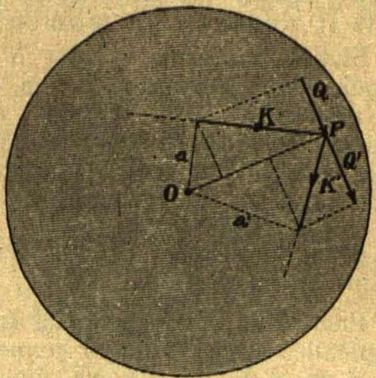


fig. 114

ar spēka Q momentu un ir vienāda rakstura (pozitivs vaj negativs). Tā tad spēki Q, Q', Q'' . . . var izpildīt viens otra vietu tanī gadījumā, kad to momenti ir vienādi.

$Q . q = Q' . q' = Q'' . q'' = \ldots$ u. t. t.

Ja izpildam pievesto noteikumu, tad kaut kādā spēku sistemā (cietā ķermenī) varam ikvienu spēku apmainīt ar kaut kādu citu spēku, kuŗa virziens var nesakrist ar pirmā spēka virzienu, bet kuŗu moments ir vienāds.

§ 76. Divu spēku samainīšana.

Pierādīsim § 75. sacītā pareizību ar sekošā piemēra palīdzību. Uz ķermeni (fig. 114.) darbojas divi spēki K un K', to pleci ir a un a'. Pārcelsim K un K' uz punktu P, kurā abu spēku virzieni sastopas, un kuŗa attālums no ass ir d. Šādi katru no dotiem spēkiem varam apmainīt pret griezes darbības spēkiem Q un Q_1. Ja šie spēki ir vienādi $Qd = Q'd$, tad arī $Ka = K'a'$, kādēļ varam vienu spēku samainīt ar otru.

§ 77. Paralelu spēku zumēšana.

Divu vienāda virziena paralela spēku kopspēka (R) lielums ir vienāds ar komponento spēku (K_1 un K_2) zumu un darbojas tanī pat virzienā; kopspēka iedarbes punkts atrodas starp abiem komponentiem uz linijas (AB), kas savieno komponento spēku iedarbes punktus, un dala to apgriezti proporcionali komponento spēku lielumiem.

Lai minēto likumu pierādītu, vispirms aplūkosim, kādi noteikumi jāizpilda, lai dotie spēki K_1 un K_2 līdzsvarotos (fig. 115.). Pieņemsim, ka abus spēkus līdzsvaro spēks R'.

Līdzsvara stāvoklim jābūt arī tad, kad ierobežojam spēku sistemas kustību linijas AB virzienā (piem. linija AB var kustēties tikai pa sliedēm). Ja R' būtu ar slīpu virzienu uz AB, tad varam atrast komponento spēku, kas darbojas AB virzienā, kas nav pielaižams, tādēļ $R' \perp AB$.

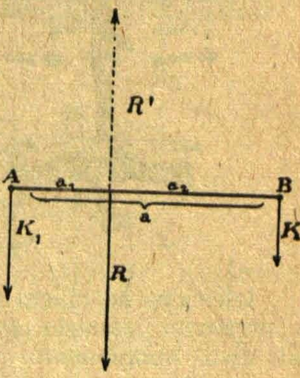


fig. 115

Tagad iedomāsimies, ka sistema var griezties ap asi, kas traucas caur punktu A un ir perpendikulara figurai; tad, lai sistema atrastos līdzsvarā, nepieciešami, ka

$$K_2 \,.\, a = R' a_1.$$

Iedomāsimies atkal, ka ass traucas caur punktu B, tad, lai sistema atrastos līdzsvarā, nepieciešami, ka

$$K_1 \,.\, a = R' a_2.$$

Ja abus nolīdzinājumus zumējam, tad dabūjam

$$K_1 + K_2 = R',$$

un ja abus nolīdzinājumus dalām, tad dabūjam

$$K_1 : K_2 = a_2 : a_1, \text{ jeb}$$
$$K_1 \,.\, a_1 = K_2 \,.\, a_2.$$

Tā kā spēks R, kuŗa virziens tieši pretējs R', līdzsvarojas ar R, tad pats par sevi saprotams, ka spēks R ir kopspēks no komponentiem spēkiem K_1 un K_2.

Pierādīto likumu varam demonstrēt uz instrumenta (fig. 116.), kur svars, piem. 300 kg., līdzsvaro spēkus 100 kg. un 200 kg., ja kopspēka iedarbes punkts dala komponento spēku iedarbes punktu attālumus attiecībā 1 : 2.

Divu pretēja virziena paralelu spēku kopspēka lielums ir vienāds ar komponento spēku lieluma diferenci un ir tā paša virziena, kāds ir lielākam spēkam; kopspēka iedarbes punkts atrodas aiz lielākā spēka uz linijas, kas savieno komponento spēku iedarbes punktus apgriezti proporcionali komponento spēku lielumiem, t. i.:

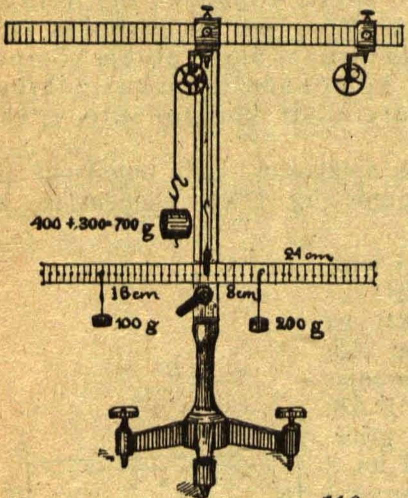


fig. 116

$$R = K_1 - K \text{ un}$$
$$a_1 : a_2 = K_2 : K_1.$$

Šī likuma pierādījums attiecināms uz agrāki minēto pierādījumu, ja vispirms K_1 un R' uzlūkojam kā komponentos spēkus un K_2 kā līdzsvara spēku. Ja liekam tieši pretēji spēkam K_2 darboties līdzīgam spēkam K_2', tad varam spēku K_2' uzlūkot kā kopspēku.

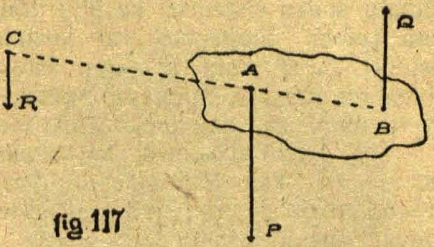


fig 117

Ieteicams lasītājiem pašiem pierādīt šī likuma pareizību. Pamatojoties uz minētiem paralelo spēku zumēšanas likumiem, varam kopspēku R sadalīt divos komponentos spēkos.

§ 78. Spēku pāris.

Pieņemsim, ka uz ķermeni (fig. 117.) darbojas divi paraleli spēki P un Q, kuŗu virzieni ir pretēji.

Pamatojoties uz likumiem, kas nosaka kopspēku, viegli nojaužams, ka jo spēku P un Q lielumi paliek vienādāki, jo mazāks top kopspēka lielums un jo attālāki no A un B atrodas kopspēka iedarbes punkts.

Kopspēka lielums ir

$$R = P - Q$$

un attālumu CA nosaka proporcija

$$\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P}$$

un tā tad:
$$\frac{CA}{CB - CA} = \frac{Q}{P - Q}, \text{ jeb}$$
$$\frac{CA}{AB} = \frac{P - Q}{Q} \text{ un}$$
$$CA = AB \cdot \frac{Q}{P - Q}.$$

Ja attālums AB un spēka lielums Q nemainās, bet spēka P lielums samazinās līdz kamēr paliek vienāds ar spēku Q, tad attālums CA visu laiku pieaug un tad, kad $P = Q$, kopspēks ir (fig. 118.):
$$R = P - Q = 0$$
un attālums
$$CA = AB \cdot \frac{Q}{0} = \infty.$$

Pamatojoties uz matematisko pierādījumu atrodam, ka tad, kad abi spēki P un Q ir vienādi, kopspēks $R = 0$ un tā iedarbes punkts atrodas bezgala tāli.

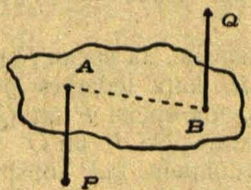


fig. 118

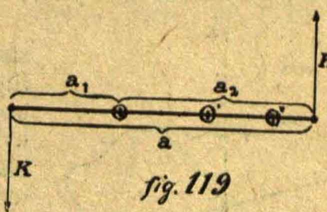


fig. 119

Tā tad: divi vienādi paraleli spēki ar pretējiem virzieniem nezumējas vienā spēkā.

Šādus divus spēkus nosauc par spēku pāri, kuŗa nozīme mechanikā sevišķi svarīga.

Zem spēka pāŗa iespaida ķermenis var tikai griezties.

§ 79. Spēku pāŗa moments.

Nostiprināsim ķermeni, piem. punktā O (fig. 119.), un aprēķināsim momentu zumu attiecībā uz šo punktu:
$$K \cdot a_1 + K \cdot a_2 = K(a_1 + a_2) = K \cdot a.$$

Ja nostiprinām kaut kādus citus punktus, piem. O' vaj O'' un aprēķinām momentu zumas attiecībā uz šiem punktiem, tad dabūjam tādu pat rezultatu M (moments) $= K \cdot a$.

Attālumu a, kāds ir starp abu spēku iedarbes punktiem, nosauc par spēka pāŗa plecu. Produktu $K \cdot a$ nosauc par spēka pāŗa momentu.

Minēsim bez pierādījumiem sekošus likumus spēku pārim:

1) Ja uz ķermeni (vaj spēku sistemu) darbojas spēku pāris, tad iespējam šo pāri samainīt ar bezgala daudz ekvivalentiem pāŗiem, kas uz ķermeni atstāj tādu pat iespaidu kā dotais pāris.

2) Ja uz ķermeni (vaj spēku sistemu) darbojas divi vaj vairāki pāŗi, tad vienmēr varam šos spēka pāŗus zumēt vienā rezultējošā pārī.

3) Doto spēku pāri vienmēr varam sadalīt divos vaj vairākos pāŗos.

4) Kaut kādu spēku sistemu, kas darbojas uz ķermeni, var vienmēr zumēt vienā kopspēku pārī un vienā atsevišķā kopspēkā.

§ 80. Paralelu spēku centrs. Masas centrs. Smaguma centrs.

Ja komponenti paraleli spēki nemaina savus lielumus un iedarbes punktus, tad kopspēks arī nemaina savu lielumu un iedarbes punktu, un ja komponentie spēki maina savu virzienu, palikdami paraleli, tad kopspēks arī maina savu virzienu un paliek vienmēr paralels komponentiem spēkiem.

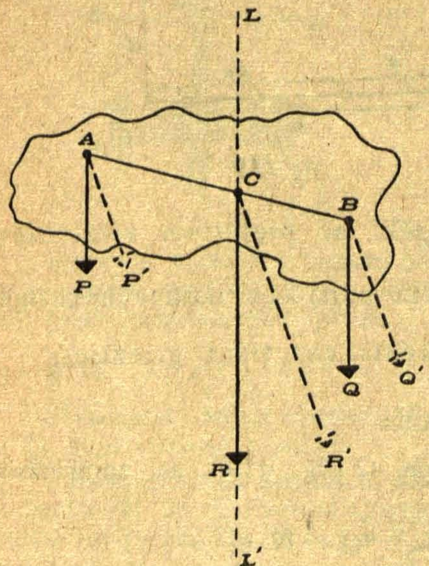


fig. 120

Pieņemsim, ka spēku P un Q kopspēks ir R, kuŗa iedarbes punkts ir C (fig. 120.). Ja spēku P un Q vietā darbojas vienādi spēki P' un Q' ar agrākiem iedarbes punktiem, tad kopspēka R' lielums būs vienāds ar spēka R lielumu, tā iedarbes punkts sakritīs ar spēka R iedarbes punktu un būs paralels spēkiem P' un Q'.

Sacītais pareizs ne tikai diviem komponentiem spēkiem, bet vairākiem komponentiem spēkiem. Divu vaj vairāku paralelu spēku kopspēka iedarbes punktu nosauc par paralelu spēku centru.

Paralelo spēku centrs nemaina savu stāvokli, ja komponentie spēki nemaina savus lielumus un iedarbes punktus. Tā kā katru spēku varam izteikt ar masas un paātrinājuma palīdzību un masas (vienā vietā uz zemes virsas) ir proporcionalas spēkiem, tad, ja spēku vietā liekam masas, minētais likums ir pareizs arī masām; šinī gadījumā masas kopspēka iedarbes punktu nosauc par masas centru.

Kaut kādu cietu ķermeni varam uzlūkot kā sastāvošu no daudzām molekulām, kuŗu masu centru varam atrast ar tikko minēto noteikumu palīdzību. Tā kā smaguma spēki proporcionali masām ($P = mg$), tad ķermeņa masas centrs sakrīt ar tā smaguma centru.

Ja ķermenis dabā kaut kādi maina savu stāvokli, tad ķermeņa smaguma centrs nemainās (fig. 121. *a* un *b*).

§ 81. Dažādu ķermeņu smaguma centrs (punkts).

Minēsim tikai visvienkāršāko ķermeņu smaguma centru noteikšanu, pie kam vienkāršāko figuru smaguma centrus minēsim bez pierādījumiem.

1) Homogena tieva stieņa smaguma punkts atrodas stieņa vidū.

2) Homogena gredzena smaguma punkts atrodas gredzena ģeometriskā centrā.

3) Homogenas apmales (rāmja), kuŗas forma ir paralelograms, smaguma centrs atrodas diagonaļu krustošanās punktā.

4) Homogenas apmales, kuŗas forma ir trijstūris, smaguma centrs atrodas tāda trijstūŗa bisektrisu krustošanās punktā, kuŗa stūŗi atstutējas apmales malu vidos.

Smaguma spēks (fig. 122.), kas darbojas uz apmali, sastādās no trim spēkiem, kuŗi ir proporcionali katrai trijstūŗa malai un darbojas trijstūŗa malu centros — punktos A', B' un C'.

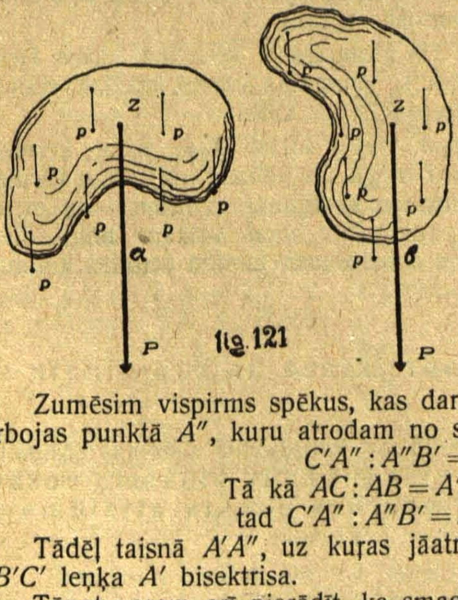


fig. 121

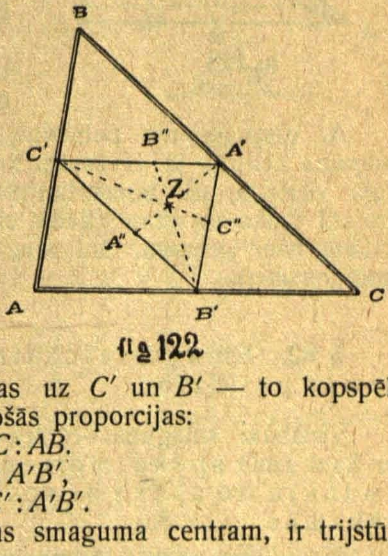


fig. 122

Zumēsim vispirms spēkus, kas darbojas uz C' un B' — to kopspēks darbojas punktā A'', kuŗu atrodam no sekošās proporcijas:

$$C'A'' : A''B' = AC : AB.$$

Tā kā $AC : AB = A'C' : A'B'$,

tad $C'A'' : A''B' = A'C' : A'B'$.

Tādēļ taisnā $A'A''$, uz kuŗas jāatrodas smaguma centram, ir trijstūŗa $A'B'C'$ leņķa A' bisektrisa.

Tāpat varam arī pierādīt, ka smaguma centrs atrodas uz bisektrisām $B'B''$ un $C'C''$; tā tad smaguma centrs atrodas punktā, kur bisektrisas krustojas.

5) Homogenas plāksmas, kuŗas forma ir ripa vaj pareizs daudzstūris, smaguma centrs sakrīt ar figuras ģeometrisko centru.

6) Homogenas plāksmas, kuŗas forma ir paralelograms, smaguma centrs atrodas punktā, kuŗā krustojas paralelograma diagonales.

7) Homogenas plāksmas, kuŗas forma ir trijstūris, smaguma centrs atrodas punktā, kuŗā krustojas trijstūŗa medianas.

Trijstūŗainu plāksmu (fig. 123.) varam uzlūkot kā daudzu stienīšu ķopojumu, kas guļ paraleli kaut kuŗai no trijstūŗa malām, piem. malai *AC*. Šo centru ģeometriskā vieta ir mediana. Tāpat varam uzlūkot plāksmu kā sastāvošu no daudziem stienīšiem, kas guļ paraleli kādai citai trijstūŗa malai, un atkal atradīsim, ka smaguma centrs atrodas uz medianas. Tā tad medianu krustošanās pilnīgi noteic smaguma centra stāvokli.

8) Homogenas virsmas, kuŗas forma sferala, smaguma centrs atrodas sferas ģeometriskajā centrā.

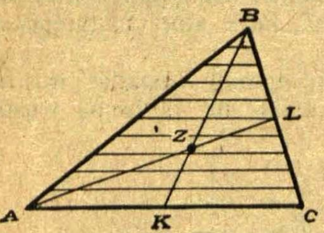


fig. 123

9) Homogena ķermeņa, kuŗa forma ir paralelepipeds, smaguma centrs atrodas punktā, kuŗā krustojas paralelepipeda diagonales.

10) Homogena ķermeņa, kuŗa forma ir bumba, smaguma centrs sakrīt ar bumbas ģeometrisko centru.

11) Homogena ķermeņa, kuŗa forma ir cilindrs, smaguma centrs atrodas cilindra ģeometriskās ass vidū.

Ar eksperimenta palīdzību varam viegli atrast kaut kāda ķermeņa smaguma centru, ja piekaŗam ķermeni diegā un velkam liniju caur ķermeni diega virzienā, uz kuŗas linijas jāatrodas smaguma centram. Ja otrreiz ķermeni piekaŗam kaut kādā citā punktā un atkal velkam liniju diega virzienā caur ķermeni, tad abu liniju krustošanās punktā atrodas ķermeņa smaguma centrs.

§ 82. Smaguma centra noteikšana ar koordinatu sistemas palīdzību.

Vislabāki smaguma ceutru noteikt ar koordinatu sistemas palīdzību. Par kaut kāda spēka momentu uz kaut kādu plāksmu nosauc produktu no spēka ar spēka iedarbes punkta attālumu no plāksmas.

Pierādīsim sekošu noteikumu:

Divu paralelu vienāda virziena spēku kopspēka moments uz kaut kādu plāksmu ir vienāds ar paralelo spēku momentu zumu uz to pašu plāksmu.

Fig. 124. paralelie spēki ir K_1 un K_2, kopspēks K_0 un spēku iedarbes punktu attālums no „momentu plāksmas" ir A_1B_1, A_2B_2, A_0B_0. Vilksim caur punktu A_0 liniju $C_1C_2 \parallel B_1B_2$, tad varam rakstīt, ka

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{A_1A_0}{A_2A_0}=\frac{A_1C_1}{A_2C_2}$$

un $K_1 . A_1C_1 = K_2 . A_2C_2$, vaj $K_1(A_0B_0 - A_1B_1) = K_2(A_2B_2 - A_0B_0)$, jeb beidzot $K_0 . A_0B_0 = K_1 . A_1B_1 + K_2 . A_2B_2$.

Pierādīto noteikumu var attiecināt arī uz vairākiem spēkiem, kā arī uz spēkiem, kas atrodas virspus vaj apakšpus plāksmas.

Ja vēlamies noteikt kaut kāda punkta stāvokli telpā, tad jāzīmē trīsasīga koordinatu sistema, kur asis viena otrai perpendikularas (fig. 125.). Ja tad projektējam punktu uz koordinatu asīm, tad dabūjam punkta koordinatu gaŗumus x_0, y_0 un z_0, ar kuŗu palīdzību pilnīgi nosakām punkta stāvokli telpā.

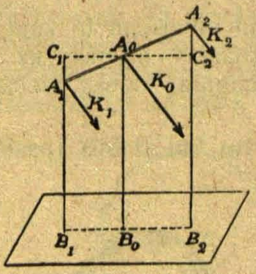


fig. 124

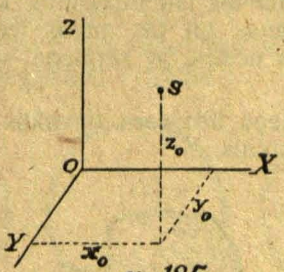


fig. 125

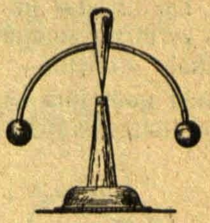


fig. 126

Ja atsevišķu ķermeņu masu smaguma centri ir $P_1, P_2 \dots$ un to koordinatas $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$, bet kopspēks $R = \Sigma P$ un kopspēka (smaguma centra) koordinatas x_0, y_0, z_0, tad moments uz plāksmu, piem. yz, ir $R . x_0 = \Sigma P . x$, uz plāksmu xz ir $R . y_0 = \Sigma P . y$ un uz plāksmu yx ir $R . z_0 = \Sigma P . z$, tādēļ

$$x_0 = \frac{\Sigma P . x}{\Sigma P};\ y_0 = \frac{\Sigma P . y}{\Sigma P} \text{ un } z_0 = \frac{\Sigma P . z}{\Sigma P}, \text{ jo } R = \Sigma P.$$

Tā kā spēks proporcionals masai ($P = mg$), tad masu centram koordinatas atrodam no sekošām formulām

$$x_0 = \frac{\Sigma m . x}{\Sigma m};\ y_0 = \frac{\Sigma m . y}{\Sigma m} \text{ un } z_0 = \frac{\Sigma m . z}{\Sigma m}.$$

Smaguma centrs var arī atrasties ārpus tā ķermeņa masas, uz kuŗu tas attiecas; piem. (fig. 126.) divu bumbiņu ar lokveidīgu savienojumu smaguma centrs atrodas virspusē no tās linijas, kas savieno abu bumbiņu atsevišķos smaguma centrus.

Kaut kāds spēks var dot kādam ķermenim tikai tad virzes kustību, kad spēka virziens traucas caur ķermeņa smaguma centru.

Kaut kādu citu spēku, kas nav ar virzienu caur ķermeņa smaguma (masu) centru, var sadalīt spēkā un spēku pārī, pie kam spēku pāris dod ķermenim griezes kustību, un tikai tas spēks, kuŗa virziens iet caur ķermeņa smaguma punktu, dod virzes kustību.

§ 83. Vienā punktā piestiprināta smaga ķermeņa līdzsvara stāvoklis.

Tā kā ķermeņa smaguma spēku kopspēks traucas caur smaguma centru un ir vienāds pēc lieluma ar atsevišķo ķermeņa molekulu smaguma spēku zumu, tad smaguma spēka iespaids uz ķermeni ir tāds pat, kā kad viss ķermeņa smagums koncentrētos ķermeņa smaguma centrā.

Ja ķermeni atbalstām smaguma centrā, tad kaut kuŗā stāvoklī ķermenis atradīsies līdzsvarā.

Tomēr, ķermeni varam arī tad līdzsvarot, kad atbalstām to kaut kādā punktā, kas atrodas uz vienas un tās pašas vertikalās taisnās, uz kuŗas atrodas ķermeņa smaguma centrs, jo ķermeņa smaguma spēks vienmēr ir ar vertikalu virzienu.

Šādā gadījumā ķermeņa līdzsvara stāvoklis var būt stabils (pastāvīgs), labils (svārstīgs) vaj indiferents.

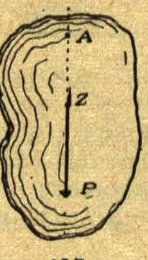


fig. 127

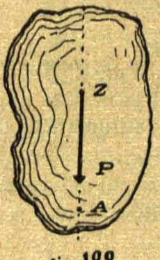


fig. 128

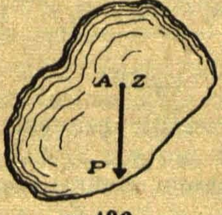


fig. 129

Ja ķermenis piestiprināts punktā virs smaguma centra (fig. 127.), tad līdzsvara stāvoklis ir stabils, ja ķermeni drusku atliecam, smaguma centrs atgriezīs ķermeni agrākā stāvoklī.

Ja ķermenis piestiprināts punktā, kas atrodas uz vertikalās zem smaguma centra (fig. 128.), tad ķermeņa līdzsvars ir labils, jo, ja drusku ķermenis izies no līdzsvara stāvokļa, tūdaļ smaguma centrs centīsies vēl vairāk izbīdīt ķermeni no līdzsvara stāvokļa.

Ja ķermenis piestiprināts smaguma centrā (fig. 129.), tad ķermeņa stāvoklis ir indiferents, jo neatkarīgi no tā, kā ķermeni pagriezīsim, tas vienmēr būs līdzsvarā.

§ 84. Smaga ķermeņa līdzsvara stāvoklis uz horicontalas plāksmas.

Smags ķermenis, kuŗam ar plāksmu ir viens kopējs punkts (atbalstās uz plāksmas vienā punktā), atrodas līdzsvarā, ja vertikala linija savieno smaguma centru ar atbalsta punktu.

Ja ķermenim niecīgi nosveŗoties no līdzsvara stāvokļa ķermeņa smaguma centrs cenšas ieņemt augstāku stāvokli — līdzsvara stāvoklis ir stabils.

Ja šinī pašā gadījumā smaguma centrs cenšas ieņemt zemāku stāvokli, līdzsvara stāvoklis ir labils.

Ja smaguma centrs šinī operacijā savu stāvokli nemaina, tad līdzsvara stāvoklis ir indiferents.

Pieņemsim, ka uz plāksmas atrodas homogena materiala bumba (fig. 130.). Tā kā bumbas stāvoklim mainoties šādas bumbas smaguma centrs nemainās, tad bumba kaut kuŗā stāvoklī uz plāksmas atradīsies līdzsvarā.

Pieņemsim, ka viens bumbas segments izgatavots no kaut kāda smagāka materiala kā pārējā bumba (fig. 131.).

Bumbas smaguma centrs *Z* tad nesakritīs ar tās ģeometrisko centru *C*, bet pazemināsies smagākā segmenta virzienā.

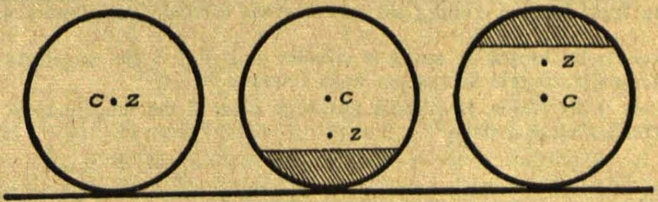


fig. 130 fig. 131 fig. 132

Šāda bumba ir stabilā līdzsvarā, kad smaguma centrs ieņem viszemāko stāvokli (fig. 131.), un labilā līdzsvarā, kad smaguma centrs ieņem visaugstāko stāvokli (fig. 132.).

Ķermenis, kas gulstas uz plāksmu diviem saviem punktiem (kuŗiem tā tad ir ar plāksmu kopēja linija), atrodas līdzsvara stāvoklī, kad vertikale, kas vilkta caur smaguma centru, traucas arī caur taisno, kas savieno atbalsta punktus (vaj taisno kopējo ķermeņa un plāksmas liniju). Trīs līdzsvara stāvokļa noteikumi ir tādi pat kā bumbai, kuŗai viens kopējs punkts ar plāksmu.

Kā piemēru varam pieņemt cilindri un ar to eksperimentēt tāpat kā ar bumbu.

Ja ķermenim ir ar plāksmu trīs kopēji punkti (t. t. ķermenis gulstas uz to ar savu plāksmu), tad tas atrodas līdzsvarā, ja caur smaguma centru vilkta vertikale neiziet no ķermeņa atbalsta konturas.

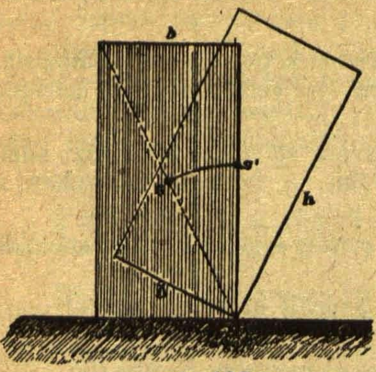


fig. 133

Šinī gadījumā līdzsvara stāvoklis ir stabils, jo tiklīdz ķermeni paliecam, smaguma centrs paaugstinās un smaguma spēks velk ķermeni atpakaļ agrākā stāvoklī.

Pieņemsim, ka kaut kāds ķermenis (fig. 133.) guļ ar savu šaurāko plāksmu uz plāksmas. Ķermenim griežoties ap šķautni *a*, ķermeni nedrīkst tālāki paliekt par vietu, kur vertikale caur smaguma centru traucas caur šķautni; ja ķermeni paliec vēl tālāki, tad tas apkrīt. Mazākais leņķis, pie kuŗa ķermenis apkrīt, ir ķermeņa s t a b i l i t a t e s ģ e o m e t r i s ķ a i s m ē r s (krišanas leņķis).

Paralelepipeda (fig. 133.) krišanas leņķis ir $sas' = \alpha$ un $tg\alpha = \frac{b}{z}$ ir stabilitates mērs.

Ja paralelepipeds nav homogens, tad krišanas leņķis ir jo lielāks, jo zemāki ir smaguma centrs.

Piem. * Koka cilindrs, kuŗa radiuss ir 5 cm. un augstums 20 cm., atbalstās ar pamatu uz plāksmas.

Par kādu leņķi jāatliec cilindra ass no līdzsvara stāvokļa, lai cilindrs vairs neatrastos līdzsvarā?

* Cik liels ir šis leņķis, ja apakšējā cilindra daļa līdz 5 cm. augstumā izgatavota no svina, kuŗa blīvums ir 20 reiz lielāks par koka blīvumu?

* Cik liels ir šis leņķis, ja cilindra apakšējai daļai 5 cm. augstumā ir divreiz lielāks radiuss nekā cilindra virsējai daļai?

§ 85. S v i r a.

Visplašākā nozīmē par sviru var nosaukt ikkuŗu ķermeni, kas griežas ap asi. Šaurākā nozīmē par sviru sauc stieni (taisnu vaj līku), kas spēj griezties ap atbalsta punktu *O* (fig. 134.) un pārvietoties vienā plāksmā.

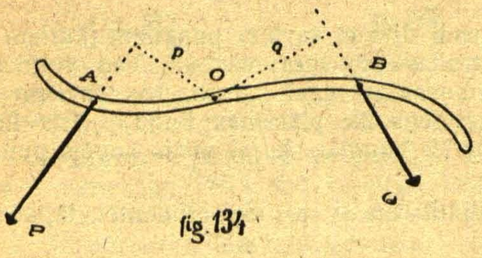


fig. 134

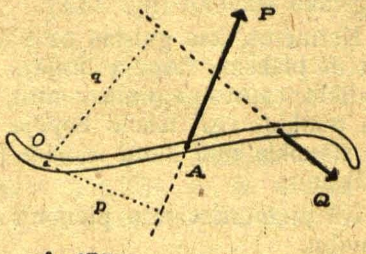


fig. 135

Attālumus *p* un *q*, kuŗus skaita no atbalsta punkta perpendikulari uz spēkiem, nosauc par sviras pleciem.

Atšķiŗ pirmās un otras šķiras sviras.

Par pirmās šķiras sviru nosauc tādu sviru, kur spēku iedarbes punkti atrodas abās pusēs, skaitot no atbalsta punkta (fig. 135.). Par otrās šķiras sviru nosauc tādu sviru, kur spēku iedarbes punkti atrodas vienā pusē, skaitot no atbalsta punkta (fig. 135.). Lai spēku sistema atrastos līdzsvarā, uz asi (atbalsta punktu) attiecinātai spēku statisko momentu zumai nepieciešami jābūt vienādai ar nulli.

Fig. 135. moments $Q.q$ ir pozitivs, jo tas traucas griezt sviru pulksteņa rādītāja virzienā, bet moments $P.p$ ir negativs, jo tas traucas griezt sviru pret pulksteņa rādītāja virzienu. Pēc fig. 135. vaj 136.

$$Q.q - P.p = 0, \text{ jeb}$$
$$Q.q = P.p, \text{ tādēļ}$$
$$\frac{Q}{P} = \frac{p}{q}.$$

Tā tad svira atrodas līdzsvarā, ja spēku lielums apgriezti proporcionals sviras pleciem.

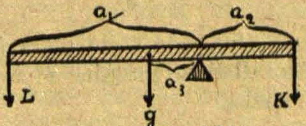


fig. 136.

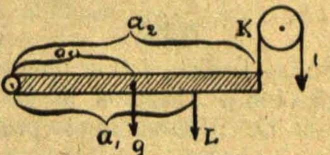


fig. 137.

Minētās formulās aplūkojām matematisko sviru, t. i. neievērojām pašas sviras svaru. Ja gribam ievērot sviras svaru, tad dabūjam tā saukto fizisko sviru. Ja svira ir homogens taisns stienis, kuŗa smaguma centrs ir sviras vidū, un ja smaguma spēks ir piem. G, tad (fig. 136. un 137.) fiziskai svirai ir

$$L.a_1 + G.a_3 = K.a_2.$$

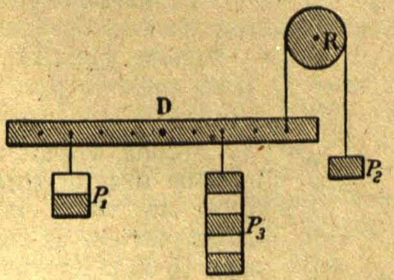


fig. 138

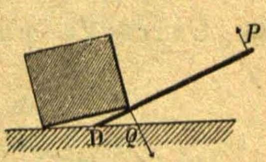


fig. 139

Sviras formulas var eksperimentali pierādīt ar fiziskās sviras palīdzību (fig. 138.), kuŗai var piekārt svarus P_1, P_2, P_3 .... Vienkāršas fiziskās sviras piemēri: laužamais stienis (fig. 139.), riekstu spiežamais (fig. 140.), tvaika katla drošības ventils (fig. 141.), ķerra (fig. 142.) un aires (fig. 143.).

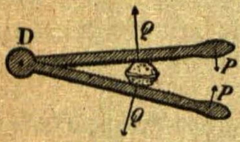


fig. 140

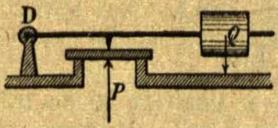


fig. 141

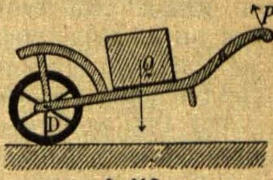


fig. 142

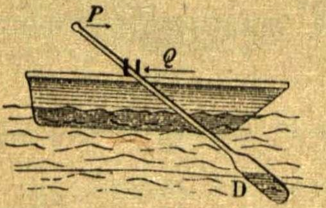


fig. 143

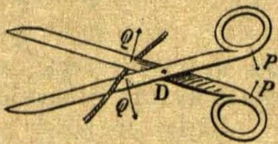


fig. 144

Dubultas fiziskās sviras piemēri: šķēres (fig. 144.), bezmērs (fig. 145.) un atslēga (146.). Figurās ar D apzīmēti atbalsta punkti, P — darbības spēks un ar Q — pārvaramais pretestības spēks.

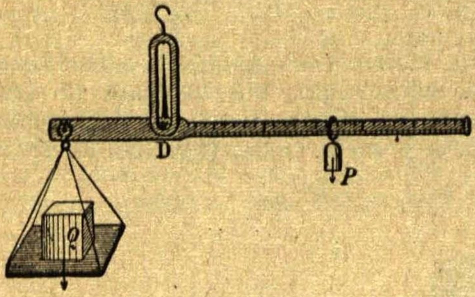


fig. 145

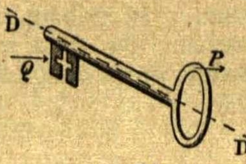


fig. 146

§ 86. Svira kā mašina.

Mašina, vispāri ņemot, ir darba rīks, ar kuŗa palīdzību no viena ķermeņa darbu pārvieto uz otru ķermeni (§ 63.). Kā vienkāršākās mašinas piemērs ir svira.

Ja sviras vienā galā A (fig. 147.) piekaŗam svaru

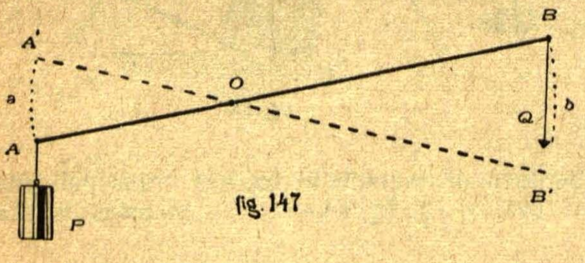


fig. 147

P, aiz otra gala B velkam ar roku un ceļam svaru, tad svira ir mašina, kuŗa rokas spēku Q virzienā uz leju pārveido spēkā, kas paceļ virzienā uz augšu svaru P. (Šinī gadījumā spēks Q mazāks par spēku P.) Spēki P un Q ir apgriezti proporcionali sviras pleciem:

$$P : Q = OB : OA, \text{ jeb}$$
$$P . OA = Q . OB.$$

Pieņemsim, ka svira pārvietojusēs no AB uz $A'B'$. Vertikalos attālumus starp punktiem A un A' apzīmēsim ar a un starp punktiem B un B' ar b (darbs ir vienāds, vaj ķermenis pārvietojas pa loku vaj tieši horicontali uz augšu. § 61.).

Spēku P un Q paveiktie darbi svirai pārvietojoties ir $P . a$ un $Q . b$. Attālumi a un b tieši proporcionali plecu gaŗumiem OA un OB, tādēļ

$$P . a = Q . b.$$

D a r b ī b a s   s p ē k a   d a r b s   i r   v i e n ā d s   a r   p ā r v a r ē t o   p r e t e s t ī b a s   s p ē k a   d a r b u.

Šis likums pareizs katrai mašinai, kuŗā nav jāpārvar kaitīgās pretestības. Šis likums ir atsevišķs gadījums no enerģijas pastāvības likuma.

Lietojot sviru varam ar maza spēka Q palīdzību pārvarēt lielu pretestību P, bet par to spēks Q noies lielāku attālumu nekā pretestība P.

Ja gribam iemantot attālumu, tad ar sviras palīdzību liels spēks, noiedams mazu attālumu, spēj pacelt mazu spēku uz lielu attālumu.

Pēdējā formulā attēloto darba vienādības likumu varam definēt šādi: A r   s v i r a s   p a l ī d z ī b u   t i k d a u d z   p e l n ī j a m   s p ē k ā,   c i k   z a u d ē j a m   n o i e t ā   a t t ā l u m ā,   j e b   a r   s v i r a s   p a l ī d z ī b u   t i k d a u d z   p e l n ī j a m   s p ē k ā,   c i k   z a u d ē j a m   ā t r u m ā, jo vienmērīgi sviru pārvietojot ātrumi ir proporcionali noietajiem attālumiem.

Pēdējā izteiksmē šo likumu pirmais definējis Galilejs un to nosauc par „mechanikas zelta likumu".

§ 87. S l ī p ā   p l ā k s m a   k ā   m a š i n a.

Slīpā plāksma, tāpat kā svira, ir vienkāršākais mašinas piemērs. Ja ceļam pa slīpo plāksmu svaru ar spēku Q (fig. 148.), kuŗa virziens paralels plāksmai, tad pārvaram ķermeņa smaguma spēku P, kas ir lielāks nekā darbības spēks Q, tomēr:

D a r b ī b a s   s p ē k a   (Q)   d a r b s   i r   v i e n ā d s   a r   p r e t e s t ī b a s   s p ē k a   (P)   d a r b u.

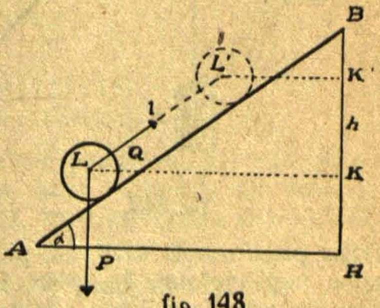


fig. 148.

Kā atceramies no § 49., vienmērīgai smaguma P virzīšanai vajadzīga tā kopspēka P komponente, kas paralela plāksmai un kuŗas lielums ir:

$$Q = P . \sin \alpha.$$

Pieņemsim, ka svars aizvirzīts par attālumu $LL' = l$ un tā tad vertikalā virzienā pacelts par attālumu $KK' = h$.

Tad spēka Q darbs ir $Q . l$ un spēka P darbs ir $P . h$.

Tā kā $h = l \sin \alpha$, jeb $l = \frac{h}{\sin \alpha}$, tad

$$Q . l = P . \sin \alpha . \frac{h}{\sin \alpha} = P . h.$$

Tā kā $\sin \alpha$ izteic attiecību $\frac{h}{l}$ jeb $\frac{BH}{AB}$, t. i. plāksmas augstuma mēra attiecību pret gaŗuma mēru, tad:

S v a r u c e ļ o t p a s l ī p u p l ā k s m u t i k d a u d z p e l n ī j a m s p ē k ā, c i k r e i z p l ā k s m a s g a ŗ u m s l i e l ā k s p a r p l ā k s m a s a u g s t u m u u n t i k p a t d a u d z z a u d ē j a m a t t ā l u m ā (vaj pie vienmērīga ātruma — ātrumā). Svira un slīpa plāksma ir visvienkāršākās mašinas un citas mašinas — līdz viskomplicētākām — ir tikai dažādu sviru vaj slīpo plāksmu kombinējumi. Var kombinēt arī sviru un slīpo plāksmu.

Vienkāršākie sviras kombinējumi ir: piestiprinātie trīši, vaļējie trīši, I. šķiras trice, II. šķiras trice, diferencialtrīsis, grieztuves, zobu rati, transmisiju vārpstas u. t. t. Uz sviras likumiem pamatoti dažādi svari.

Vienkāršākie slīpās plāksmas kombinējumi ir vadzis un skrūve.

§ 88. P i e s t i p r i n ā t a i s (v i e n k ā r š a i s) t r ī s i s.

Pieņemsim, ka svars P piestiprināts vienā virves galā un virve var brīvi kustēties trīša rievā. Otrā virves galā pielikts darbības spēks Q (fig. 149.).

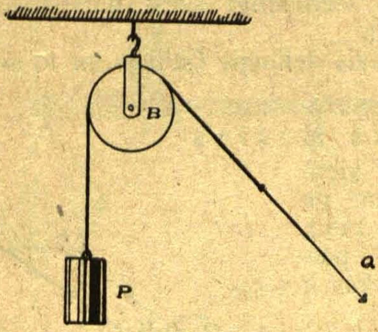


fig. 149

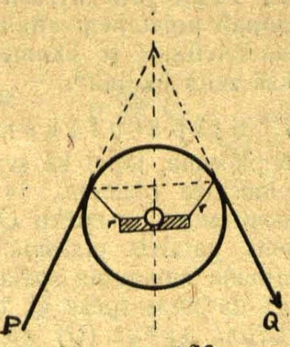


fig. 150

Trīsis piestiprināts savā asī, piem., pie griestiem. Lai smagumu vienmērīgi celtu, nepieciešami, ka spēks Q būtu vienāds ar spēku P. Ja spēks Q pārvietojas par kaut kādu attālumu s, tad smagums paceļas par tādu pat attālumu s un darbības spēka darbs līdzinās smaguma spēka darbam:

$$Q . s = P . s, \text{ jeb}$$
$$Q = P .$$

Tā tad piestiprinātais trīsis maina tikai spēka virzienu, bet nemaina spēka lielumu.

Ar momentu palīdzību spēku vienādība pierādāma sekoši. Figurā 150. r ir smaguma spēka plecs un r_1 ir darbības spēka plecs. Tā kā trīša radiuss ir viens un tas pats, tad $r = r_1$.

Lai trīsis atrastos līdzsvarā, nepieciešami, ka statisko momentu zuma, attiecināta uz trīša asi, būtu vienāda ar nulli. Spēks Q darbojas pulksteņa rādītāja virzienā un spēks P pret pulksteņa rādītāja virzienu, tādēļ

$$Q \cdot r_1 - P \cdot r = 0, \text{ jeb}$$
$$Q \cdot r_1 = P \cdot r \text{ un tā kā } r_1 = r, \text{ tad}$$
$$Q = P.$$

§ 89. Brīvais trīsis.

Brīvā trīsī smaguma spēks P piestiprināts pie trīša ass, bet pats trīsis brīvi kustas trīša rievā ieliktā virvē, kuŗas viens gals piestiprināts un otrā galā darbojas spēks Q (fig. 151.).

Ja spēks Q pārvietojas par attālumu s, tad svars P paceļas par attālumu $\frac{s}{2}$.

No darba formulas dabūjam:

$$Q \cdot s = P\frac{s}{2} \text{ un tādēļ}$$
$$Q = \frac{P}{2}.$$

Ar brīvā trīša palīdzību pelnījam spēkā divreiz, bet zaudējam attālumā arī divreiz.

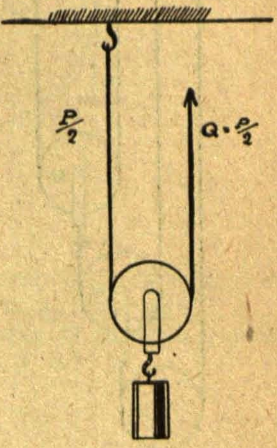


fig. 151

§ 90. I. šķiras trice (potencialtrīsis).

Šī trice kombinēta no vairākiem brīviem trīšiem (fig. 152.).

Svars P piestiprināts pie trīša B_3 ass, virve pārsviesta pār trīsi B_3 un piestiprināta pie trīša B_2 ass. Tās virves gals, kuŗa pārsviesta pār trīsi B_2, piestiprināts pie trīša B_1 ass un virves galā, kuŗa pārsviesta pār trīsi B_1, darbojas darbības spēks Q.

Ja darbības spēka Q darbības punkts pārvietojas par attālumu s, tad trīsis B_1 paceļas par attālumu $\frac{s}{2}$, trīsis B_2 par attālumu $\frac{s}{4}$ un trīsis B_3 par attālumu $\frac{s}{8}$.

No darba formulas dabūjam:

$$Q \cdot s = \mathrm{P} \cdot \frac{s}{8}, \text{ jeb}$$

$$Q = \frac{P}{8}, \text{ tā tad pelnījam spēkā 8 reizes.}$$

Ar I. šķiras trices palīdzību, kas konstruēta no n brīviem trīšiem, pelnījam spēkā 2^n reizes.

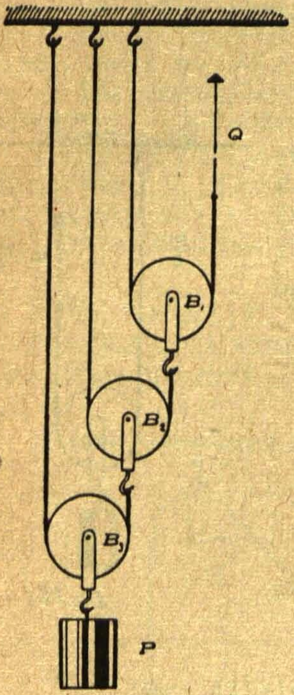


fig. 152

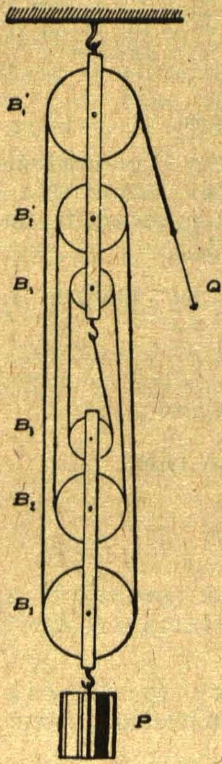


fig. 153

§ 91. II. šķiras trice (produkttrīsis).

Šinī tricē brīvie trīši kombinēti ar piestiprinātiem trīšiem.

Visi piestiprinātie trīši atvienoti vienā komplektā un visi brīvie trīši otrā komplektā (fig. 153.).

Svars P piekārts brīviem trīšiem. Virve ar vienu galu piesieta piestiprinātam trīšu komplektam un pēc kārtas pārvilkta pār vienu brīvu un vienu piestiprinātu trīsi. Virves galā darbojas spēks Q.

Pieņemsim, ka spēka Q iedarbes punkts pārvietojas par attālumu s; tad visi brīvie trīši pacelsies par tādu pat augstumu s, un tā tad katrs virves gabals, kas savieno brīvos trīšus ar piestiprinātiem, saīsināsies par vienādu daļu. Tā kā mūsu piemērā virves gabalu un trīšu ir 6, tad katra virves gabala saīsināšanās būs vienāda ar $\frac{s}{6}$.

Rakstot darba formulu

$$Q \cdot \mathrm{s} = \mathrm{P} \cdot \frac{s}{6}, \text{ dabūjam, ka}$$

$$Q = \frac{P}{6},$$

t. i. pelnījam spēkā 6 reiz.

Ar otrās šķiras trici, kas sastāv no n brīviem un n piestiprinātiem trīšiem, pelnījam spēkā $2 . n$ reizes un tikpat zaudējam attālumā (vaj ātrumā).

§ 92. Grieztuves.

Šī mašina sastāv no rata B, kuŗa radiuss ir R, un vārpstas A, kuŗas radiuss — r (fig. 154.), un kas uzmaukti uz kopēju asi.

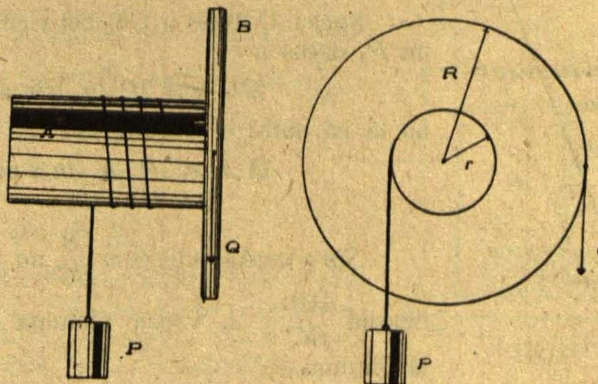


fig.154

Ap vārpstu aptīta virve, kuŗas vienas gals piestiprināts vārpstai, bet otram galam piekārts svars; darbības spēks Q darbojas uz rata aploci.

Ja vārpsta un rats pārvietojas pa leņķi δ, tad spēka Q iedarbes punkts pārvietojas par attālumu $R\delta$ un svars P par attālumu $r . \delta$.

Rakstot darba formulu

$$Q . R\delta = P . r\delta, \text{ dabūjam, ka}$$

$$Q = P . \frac{r}{R}.$$

Ar grieztuvju palīdzību pelnījam spēkā tikreiz, cikreiz vārpstas radiuss mazāks par rata radiusu, un tikpat daudz zaudējam attālumā.

§ 93. Vadzis.

Vadzis ir vienkārša, no divām slīpām plāksmām kombinēta mašina.

Vienkāršības dēļ pieņemsim, ka vadzis ir prizmveidīgs, kuŗa forma ir vienādmalu trijstūris ACB (fig. 155.). Leņķi ACB apzīmēsim ar 2α.

Ja vadzis zem spēka Q iespaida, kas darbojas uz punktu L, traucas uz leju, tad tas spēj pārvarēt spēkus P_1 un P_2, kuŗu virziens ir perpendikulars vadža sāniem AC un CB.

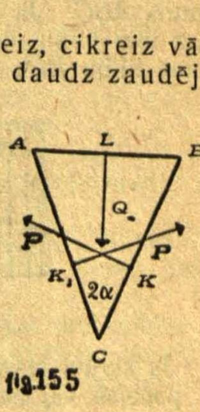


fig.155

Vadža līdzsvara stāvoklī (tāpat arī vadzim vienmērīgi kustoties, piem. plaisā) spēkiem P_1 un P_2 jābūt vienādiem.

Pieņemsim, ka vadzis vienmērīgi no stāvokļa ACB nonācis stāvoklī $A'C'B'$ (fig. 156.). Tad spēka Q iedarbes punkts pārvietojies par $LL' = CC' = h$, bet spēka P_1 (un arī P_2) iedarbes punkts pārvietojies par $K'K = CC'' = k$.

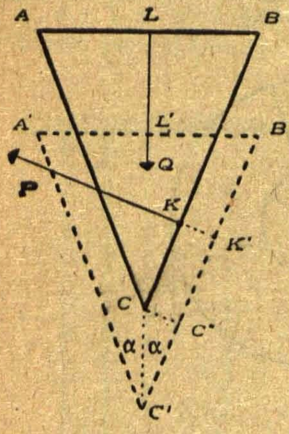


fig. 156

No trijstūŗa $CC'C''$ dabūjam

$$k = h \sin \alpha.$$

Spēka Q darbs ir Qh, bet vienādu spēku P_1 un P_2 darbs ir

$$2P \,.\, k = 2P \,.\, h \,.\, \sin \alpha,$$

un tā kā darbi ir vienādi, tad

$$Q \,.\, h = 2P \,.\, h \sin \alpha \text{ un}$$
$$Q = 2P \,.\, \sin \alpha.$$

$Sin\, \alpha$ izsaka attieksmi $\frac{LB}{BC}$ un $2 \sin \alpha$ — attieksmi $\frac{AB}{BC}$, t. i. vadža platuma attieksmi pret tā gaŗumu.

Tā tad $Q = P \,.\, \frac{AB}{BC}$.

Ar vadža palīdzību pelnījam spēkā tikreiz, cikreiz vadža platums šaurāks par tā gaŗumu.

§ 94. Skrūve.

Skrūve ir cilindrisks stienis, uz kuŗa uzgriezts vītes griezums. Iedomāsimies cilindri (fig. 157.), pie kuŗa ar vienu katetu BC piesliets taisnstūŗa trijstūris ABC. Ja tinam trijstūri ap cilindri, tad hipotenuza AB apzīmē uz cilindra līku liniju, kuŗu nosauc par vītes liniju. Vienreiz aptītais trijstūris apzīmē liniju BB', kuŗas augstumu p nosauc par vītes kāpi.

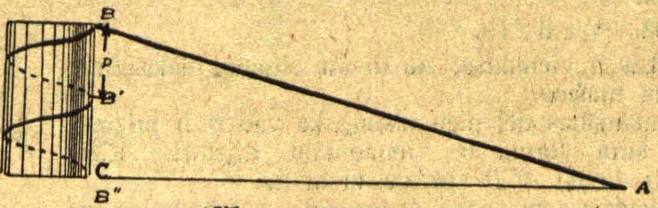


fig. 157

Ja skrūvi ieskrūvējam uzgrieznī, tad tā vienreiz apgriežoties (pa leņķi 2π) paceļas vai pazeminās par attālumu, kas ir vienāds ar vītes kāpi.

Ja skrūvi pagriežam par leņķi α, tad skrūve pazeminās par attālumu $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot p$.

Pieņemsim, ka kopējamo spiedu (fig. 158.) darbības spēks pielikts roktuŗa BB galā, attālumā r no skrūves centra.

Ja rokturi un skrūvi pagriežam par leņķi α, tad spēka Q iedarbes punkts noiet attālumu $\alpha \cdot r$.

Skrūves apakšgals, kas spiež uz kopējamo dēlīti ar spēku P, noiet attālumu $\frac{\alpha}{2\pi}p$.

Rakstot darba formulu

$Q \cdot \alpha r = P \cdot \frac{\alpha}{2\pi}p$, dabūjam, ka

$$Q = P \cdot \frac{p}{2\pi r}.$$

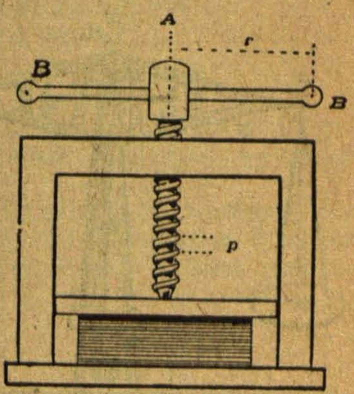


fig.158

Ar skrūves palīdzību pelnījam spēkā tikreiz, cikreiz vītes kāpe mazāka par aploces gaŗumu, kuŗu noiet darbības spēka iedarbes punkts.

§ 95. Enerģijas pastāvības likums mašinās.

Mašinas darbības spēks paveic darbu un tā tad zaudē zināmu enerģijas daudzumu, bet kā rezultats ir atkal darbs, ar kuŗu mašina pārvar pretestības.

Idealās mašinās, kur berzes un apkārtnes pretestības nav, visa mašinas zaudētā enerģija E pārvar pretestības enerģiju e un $E = e$.

Tā kā dabā nav mašinu bez berzes, tad daļu enerģijas patērē berzes pārvarēšanai, bet enerģijas zuma paliek tā pati. Ja berzes pārvarēšanai izlietojam enerģiju ε, tad

$$E = e + \varepsilon \quad (§§ 65., 66.),$$

kur e ir „noderīgais“ darbs un ε „zaudētais“ darbs.

Ar vārdu sakot, enerģija dabā nevar ne rasties, ne arī pazust, bet tikai kļūt pārvesta no viena priekšmeta uz otru.

Tā kā enerģija nevar rasties pati no sevis, tad neiespējami arī konstruēt „perpetuum mobile“ (mūžīgo motoru), kas varētu paveikt darbu pats no sevis, t. i. bez enerģijas patērēšanas.

Iedomāsimies kaut kādu mechanismu, piem. ratu, kas var griezties ap asi. Ja ratu pagrūdīsim, tas sāks griezties, bet pateicoties berzei tas ar laiku apstāsies.

Ja pieņemam, ka rats var kustēties ideali, bez ceļa pretestībām un berzes, kas realā dabā nav sasniedzams, tad, ja ratu pagrūstu, tas varētu kustēties vienmērīgi mūžīgi, bet paveikt kaut kādu darbu tas tomēr nevarētu, jo darbs prasa enerģijas patērēšanu.

Lai kā kombinējam sviru un slīpo plāksmu, nekad nevarēsim konstruēt mašīnu, kas varētu strādāt bez enerģijas patērēšanas, tādēļ „perpetuum mobile" konstruēt nav iespējams.

§ 96. Svari.

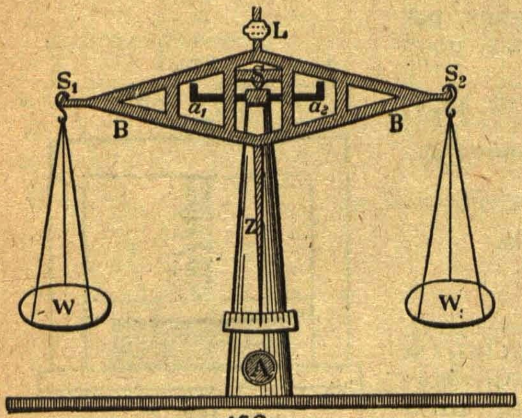


fig. 159

Svari ir aparats masu un svaru (smagumu) salīdzināšanai (fig. 159.). Galvenā svaru sastāvdaļa ir svaru svārsteklis *BB* — svira ar diviem vienāda garuma pleciem.

Svārstekļa galos un vidū ir atbalstu punkti S_1, S un S_2, kas konstruēti no sevišķi stipra materiala — tērauda vaj achata. Ar knaģu palīdzību uz atbalstu punktiem S_1 un S_2 uzkārti svaru šķīvji *W* un W_1, kas var ap atbalsta punktu kā asi grozīties.

Pareizu svārstekļa stāvokli norāda svārsteklim piestiprināts rādītājs *Z*.

Ja svari tukši vaj abos šķīvjos ir vienāds svars — svaru svārsteklim jābūt pilnīgi horicontalam.

Lai panāktu šādu horicontalu stāvokli, sviras smaguma centram jāatrodas vertikali zem vidējā atbalsta punkta *S*.

Lai svari būtu jūtīgi, t. i. pie mazas svaru diferences uz šķīvjiem svārsteklis jūtami atietu no horicontalā stāvokļa, sviras pleciem jābūt gariem. Tādēļ, lai svārsteklis no svara neizliektos, to konstruē formveidīgu, pie kam smaguma centrs nedrīkst atrasties pārāk tālu zem vidējā atbalsta punkta *S*. Ļoti jūtīgu svaru smaguma centru var regulēt ar uzgriežņa *L* palīdzību. Lai aizsargātu atbalsta punkta dilšanu svariem dīkā stāvot, ar skrūves *A* un aparata a_1 a_2 palīdzību svārstekli var izcelt no vidējā atbalsta punkta *S*.

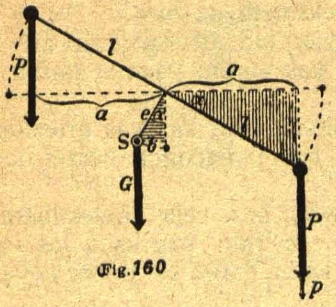


Fig. 160

Pieņemsim, ka uz viena šķīvja uzlikts mazs svariņš *p* (fig. 160.) un α ir leņķis, pa kuru svira atiet no horicontalā stāvokļa, *g* — svaru svārstekļa un šķīvju kopējs svars un *e* — smaguma centra attālums no vidējā atbalsta punkta *S*. Lai svari atrastos līdzsvara stāvoklī, uz griezes asi attiecinātai momentu zumai nepieciešami jābūt vienādai ar nulli.

Spēki P un G, kas atrodas pa kreisi no ass, rada momentus ar pulksteņa rādītājam pretēju virzienu (t. t. negativus), bet spēks $P+p$ rada pozitivu momentu, tādēļ:

$$(P+p)a - P.a - G.b = 0, \text{ jeb}$$
$$(P+p).l\cos\alpha - P.l\cos\alpha - G.e\sin\alpha = 0, \text{ jeb}$$
$$P.l\cos\alpha + G.e\sin\alpha = (P+p).l\cos\alpha, \text{ un}$$
$$G.e\sin\alpha = p.l\cos\alpha, \text{ jeb}$$
$$tang\,\alpha = \frac{p.l}{G.e}.$$

Tā tad leņķis α ir lielāks, jo lielāks ir l un jo mazāki ir G un e. Tādēļ svaru svārsteklim jābūt pēc iespējas garākam un tā smaguma centram tuvāki atbalsta punktam S.

T i l t v e i d ī g u s s v a r u s (fig. 161.) lieto lielu smagumu svēršanai. Svaru Q liek uz tilta AB, kuŗa viens gals var griezties atbalsta punktā B un otrs gals A ar stieņa palīdzību savienots ar divplecu sviru. Atbalsta punkts B gulstas uz vienādi ierīkoto tiltu CD.

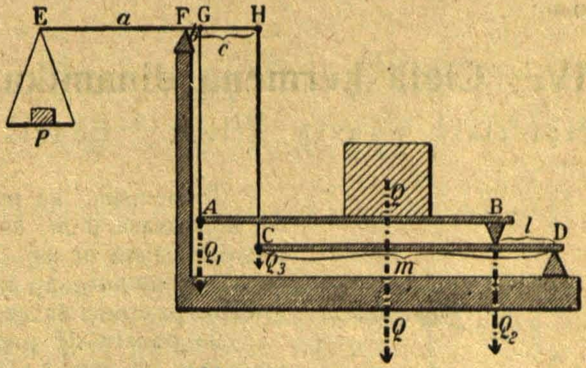


fig. 161

Svara Q spēku varam sadalīt divi paralelos spēkos Q_1 un Q_2, kas darbojas punktos A un B un kuŗu zuma ir vienāda ar Q. Spēku Q_2 varam pārmainīt ar spēku Q_3, kas darbojas punktā C un kuŗa lielumu aprēķina no statisko momentu zumas, ja pie līdzsvara momentus attiecinām uz punktu D (asi):

$$-Q_2.l - Q_3.m = 0;$$
$$Q_2.l = Q_3.m,$$
$$Q_3 = \frac{l}{m}.Q_2.$$

Svira $EFGH$ atrodas līdzsvarā, ja uz punktu F (asi) attiecināta spēku momentu zuma ir vienāda ar nulli:

$$Q_1.b + Q_3.c - P.a = 0,$$
$$P.a = Q_1.b + Q_3.c = Q_1.b + \left(\frac{l}{m}Q_2\right).c.$$

Ja svari konstruēti tā, ka $\frac{b}{c}=\frac{l}{m}$, tad ir vienalga, kurā vietā uz tilta AB atrodas smagums Q, jo liekot $\frac{l}{m}$ vietā $\frac{b}{c}$ dabūjam sekošu formulu:

$$P.a = Q_1 . b + \frac{b}{c} . Q_2 . c = (Q_1 + Q_2) . b = Qb, \text{ jeb}$$

$$P = \frac{b}{a} . Q.$$

Ja attieksme $\frac{b}{a}=\frac{1}{10}$, tad tādus svarus nosauc par decimalsvariem. Tādā gadījumā svaru Q līdzsvaro uz svaru šķīvja svaru bumba, kuŗas svars ir $P=\frac{Q}{10}$.

Ja izvēlamies attieksmi $\frac{b}{a}=\frac{1}{100}$, tad tādus svarus nosauc par centesimalsvariem.

IV. Cietā ķermeņa dinamika.

§ 97. Materiala punkta grieze. Leņķisks paātrinājums.

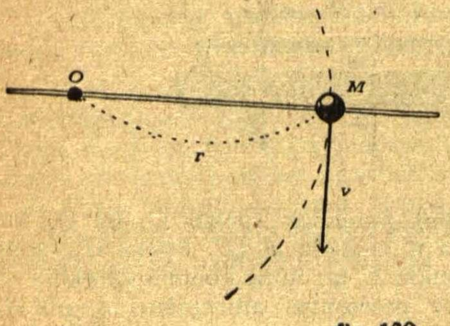


fig. 162

Pieņemsim, ka materials punkts M, kuŗa masa ir m, saistīts ar stipru bezsvara stieni ar asi O (perpendikularu zīmējumam), ap kuŗu punkts var griezties pa aploci ar radiusu r (fig. 162.).

Ja punktu M pagrūžam aploces tangentes virzienā, tad punkts inercijas dēļ kustas vienmērīgi ar kaut kādu ātrumu, kuŗu var apzīmet kā aploces periferisko ātrumu v, vaj ar leņķisku ātrumu w (§ 28.); šie ātrumi saistās sekošā attieksmē:

$$v = w . r.$$

Šinī gadījumā punkts kustas inercijas dēļ pa līku liniju, jo spēks, kas dod punktam centripetalo paātrinājumu un padara punkta trajektoriju līkumainu, ietilpst stieņa iekšējos spēkos (stieņa spiešanas spēks); tādēļ arī nevajaga kaut kāda āreja spēka, kas izloka punkta trajektoriju, jo punkts ir cieši saistīts ar asi.

Šo spēku līdzsvaro ass O pretestība.

Ka stieņa iekšējais spēks neatstāj uz punkta M kustību nekādu iespaidu, nojaužams no tam, ka punkts visu laiku kustas perpendikulari radiusam (stienim), kādā virzienā darbojas stieņa spriegums, ar darbu attiecībā uz punkta kustību vienādu ar nulli.

Ja darbs ir vienāds ar nulli, tad arī iekšējā spēka kinetiskā enerģija ir vienāda nulli un tādēļ uz punkta kustību stieņa iekšējais spēks neatstāj nekādu iespaidu.

Pieņemsim tagad, ka punkts M griežas zem pastāvīga spēka P iespaida, kas darbojas uz punktu M, stienim vienmēr perpendikularā virzienā.

Zem pastāvīga spēka P iespaida punkts kustēsies paātrināti un kā linearais, tā arī leņķiskais ātrums vienmērīgi pieaugs. Ja kaut kādā momentā t_1 linearais ātrums ir v_1 un kaut kādā nākošā momentā t_2 ātrums ir v_2, tad paātrinājums

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Pilnīgi anologi atrodam leņķisko paātrinājumu (vienmērīgu leņķiskā ātruma pieaugšanu vienā sekundē):

$$\beta = \frac{w_2 - w_1}{t_2 - t_1}.$$

Tā kā $v_1 = w_1 \,.\, r$ un $v_2 = w_2 \,.\, r$, tad

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{w_2 . r - w_1 . r}{t_2 - t_1} = \frac{w_2 - w_1}{t_2 - t_1} . r = \beta . r.$$

L i n e a r a i s p u n k t a p a ā t r i n ā j u m s v i e n ā d s a r l e ņ ķ i s k o p a ā t r i n ā j u m u, r e i z i n ā t u a r r a d i u s u.

§ 98. Materiala punkta inercijas moments.

Ap zīmējumam perpendikularu asi xx (fig. 163.) griežas materials punkts M, kuŗu ciets bezsvara stienis savieno ar asi. Punkta M masa ir m, pie kam griezi rada asij perpendikulars spēks K. Spēka K iedarbes punkts atrodas no ass attālumā b. Kāds ir leņķiskais paātrinājums, kuŗu zem pastāvīga spēka iespaida iemanto punkts M?

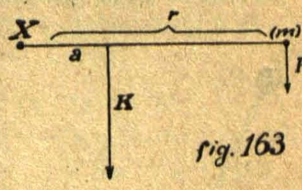


fig. 163

Mainīsim spēku K ar spēku K', kas darbojas tieši uz punkta M masu. Spēka griezes darbība paliek tā pati, ja spēka statiskais moments nemainās, tādēļ jāizpilda noteikums; pēc kuŗa

$$K' . r = K . b \text{ un tādēļ}$$

$$K' = K . \frac{b}{r} . (\S 76.).$$

Izteiksim spēku K_1 ar punkta masas m palīdzību. Zinām, ka spēks ir vienāds ar masu, reizinātu ar paātrinājumu, tā tad spēka K' radītais linearais paātrinājums

$$a = \frac{K'}{m}.$$

Tā kā pēc § 97.

$$a = \beta \, . \, r, \text{ tad}$$

$$\frac{K'}{m} = \beta \, . \, r;$$

$$\frac{K \, . \, b}{m \, . \, r} = \beta \, . \, r \text{ un}$$

$$\beta = \frac{K \, . \, b}{m \, . \, r^2}.$$

Vienai noteiktai masai produkts $m \, . \, r^2$ ir vienmēr pastāvīgs, jo abi reizinātāji nav atkarīgi no spēku iespaida, bet no pašas sistemas konstrukcijas. Produktu $m \, . \, r^2$ nosauc par inercijas momentu (Trägheitsmoment) un apzīmē techniskā literaturā ar J. (Techniskos aprēķinos inercijas moments bieži sastopams, tādēļ ieteicams tā būtību labi atcerēties.)

Tā tad ar inercijas momenta palīdzību izteiktais leņķiskais paātrinājums

$$\beta = \frac{K \, . \, b}{m \, . \, r^2} = \frac{K \, . \, b}{J}.$$

Apzīmēsim statisko momentu ar M, tad

$$\beta = \frac{M}{J}.$$

Pēdējā formula pilnīgi analoga dinamikas pamatformulai, pēc kuŗas paātrinājums vienāds ar spēku, dalītu ar masu. Šeit spēkam analogs ir statiskais moments (griezes moments), masai analogs inercijas moments un paātrinājumam analogs leņķiskais paātrinājums.

§ 99. Materialu punktu sistemas grieze.

Pieņemsim, ka mums vairāki materiali punkti, piem. trīs, kas ar bezsvara stieņiem saistīti ar asi O, ap kuŗu punktu sistema var brīvi griezties (fig. 164).

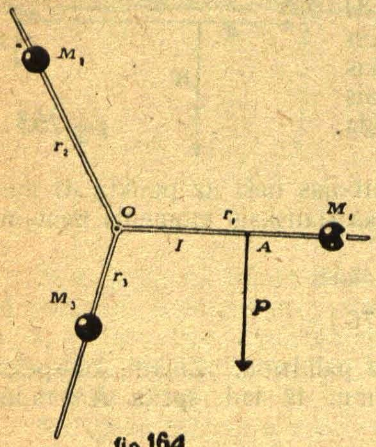


fig. 164

Punktu attālumus no ass apzīmēsim ar r_1, r_2 un r_3.

Pieņemsim, ka uz punktu darbojas pastāvīgs spēks P, kuŗa iedarbes punkts ir A ar attālumu l no ass.

Tā kā visi sistemas punkti cieši saistīti, tad zem spēka P iespaida sistema kustēsies ar kopēju leņķisko paātrinājumu β.

Iedomāsimies, ka spēka P vietā darbojas tieši uz punktiem M_1, M_2 un M_3 spēki f_1, f_2 un f_3, kuŗu iespaids uz sistemas griezi tāds pat kā spēka P iespaids. Tādā gadījumā spēku f_1, f_2 un f_3 momentu zumai jābūt vienādai ar spēka P momentu.

$$P \, . \, l = f_1 \, . \, r_1 + f_2 \, . \, r_2 + f_3 \, . \, r_3.$$

Izteiksim spēkus f_1, f_2 un f_3 ar masas un paātrinājumu palīdzību. Ja punktu M_1, M_2 un M_3 linearie paātrinājumi ir a_1, a_2 un a_3, tad

$$f_1 = m_1 a_1;\ f_2 = m_2 a_2;\ f_3 = m_3 a_3.$$

Tā kā linearais paātrinājums katram punktam citāds, tad tā vietā ņemsim labāki paātrinājuma izteiksmi ar leņķisko paātrinājumu, kas visiem punktiem, kā piederošiem vienai sistemai, kas griežas ap vienu un to pašu asi, ir viens un tas pats:

$$f_1 = \beta \,.\, m_1 r_1;\ f_2 = \beta \,.\, m_2 r_2;\ f = \beta \,.\, m_3 r_3.$$

Liksim momentu nolīdzinājumā spēku f_1, f_2 un f_3 vietā to lielumu, izteiktu ar leņķiskā paātrinājuma palīdzību:

$$P \,.\, l = \beta\,(m_1 \,.\, r_1^2 + m_2 \,.\, r_2^2 + m_3 \,.\, r_3^2).$$

Zuma, kas ieslēgta iekavās, noteiktai sistemai konstanta un ir sistemas inercijas moments J, tādēļ

$$P.\, l = \beta \,.\, J, \text{ jeb}$$

$$\beta = \frac{P \,.\, l}{J} = \frac{M}{J}, \text{ kur } M \text{ ir statiskais moments.}$$

Pierādījām formulas pareizību triju materialu punktu griezei; pierādīsim, ka formula ir pareiza, ja ap asi griežas ļoti daudz cieši saistītu ar asi materialu punktu.

Pieņemsim, ka ir n punkti, kuŗu masas ir m_1, m_2, m_3 . . . . . m_n un kuŗu attālumi no ass ir r_1, r_2, r_3 . . . . r_n. Ja uz šo sistemu darbojas kaut kāds pastāvīgs spēks, kuŗa statiskais moments ir $P \,.\, l$, tad

$$P \,.\, l = f_1 \,.\, r_1 + f_2 \,.\, r_2 + f_3 \,.\, r_3 + \,.\,.\,.\,.\,.\, + f_n \,.\, r_n, \text{ tā kā}$$

$$f_1 = \beta \,.\, m_1 r_1;\ f_2 = \beta \,.\, m_2 r_2;\ f_3 = \beta \,.\, m_3 r_3;\ .\,.\,.\,.\ f_n = \beta \,.\, m_n \,.\, r_n, \text{ tad}$$

$$P \,.\, l = \beta\ (m_1 \,.\, r_1^2 + m_2 \,.\, r_2^2 + m_3 \,.\, r_3^2 + \,.\,.\,.\,.\, + m_n \,.\, r_n^2), \text{ jeb}$$

$$P \,.\, l = \beta \Sigma m r^2,\text{*) jeb}$$

$$P.\, l = \beta \,.\, J \text{ un}$$

$$\beta = \frac{P \,.\, l}{J} = \frac{M}{J}.$$

---

*) § 98. vienu spēku samainījām ar otru, kuŗa darbība uz ķermeņa griezi ir tāda pat kā pirmā spēka; tāpat varam vienu masu samainīt ar otru, jo masas ir proporcionalas spēkiem, pie kam jaunās masas leņķisks paātrinājums var palikt tāds pat kā agrākās masas. Tādēļ daudzu masu m_1, m_2, m_3 . . . m_n vietā varam likt masas, kuŗu attālums no griezes ass ir viens un tas pats r, piem. 1 cm., tad atrodot jauno masu zumu un radiusu $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \,.\,.\,.\,.\, r_n^2$ vietā liekot jauno radiusu r, dabūjam $\Sigma m \,.\, r^2$, kuŗu varam nosaukt par „vietnieku masu“.

§ 100. Cieta ķermeņa grieze ap asi.

Pieņemsim, ka ciets ķermenis griežas ap kaut kādu asi OO' (fig. 165.). Cietu ķermeni varam aplūkot kā bezgali daudz materialu punktu zumu.

Katram punktam dabūjam produktu mr^2, visa šo produktu zuma ir inercijas moments

$$J = \Sigma m \,.\, r^2$$

attiecināts uz griezes asi OO'.

Ja ķermenis griežas ap asi OO' zem spēka P iespaida, kuŗa moments ir $P \,.\, l$, tad

$$P \,.\, l = M = \beta \,.\, J.$$

Spēka statiskais moments ir vienāds ar produktu no leņķiskā paātrinājuma ar ķermeņa inercijas momentu, attiecinātu uz griezes asi.

$$\text{Tālāki } \beta = \frac{P \,.\, l}{J} = \frac{M}{J}.$$

Šīs formulas pareizību varam pierādīt ar eksperimenta palīdzību.

Ap asi horicontali griežas viegls koka stienis, kuŗa griezi ar trīša palīdzību rada svars P (fig. 166.).

Uz stienīti dažādos attālumos no griezes centra var piestiprināt svarus (masas) (lai stienītis neliektos, tad masas jāliek pa pārim).

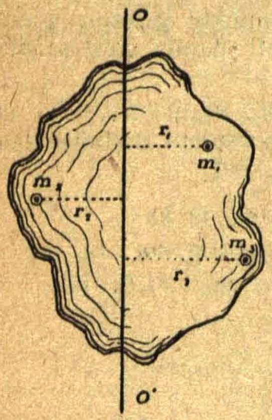


fig. 165

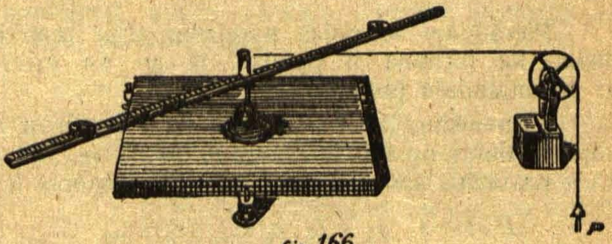


fig. 166

Vienādos laikos noietos leņķiskos paātrinājumus varam izmērīt ar svara P pazemināšanos tanīs pat laika sprīžos.

Statiskais moments ir $P \,.\, l$, kur l ir trīša radiuss. Svara pazeminašanās attālums kaut kādā laikā ir h, tādēļ $h = \frac{at^2}{2}$ un linearais paātrinājums ir $a = \frac{2h}{t^2}$, kas ir proporcionals leņķiskam paātrinājumam β.

Ja svaru P pavairojam 2, 3 vaj 4 reizes, tad attālums h un arī leņķiskais paātrinājums pavairojas 2, 3 vaj 4 reizes. Ja pavairojam starp svariem M attālumus r 2, 3 vaj 4 reizes, tad attālums h un tādēļ arī leņķiskais paātrinājums samazināsies 4, 9 vaj 16 reizes ($2^2, 3^2$ vaj 4^2), jo inercijas moments pavairojas 4, 9 vaj 16 reizes.

§ 101. Inercijas momenta aprēķināšana.

Inercijas momenti aprēķināmi ar augstākās matematikas palīdzību, un praktiskās mechanikās bieži lietotu ķermeņu formām tie izrēķināti un pievesti tabulās.

Minēsim vienkāršākos inercijas momentus.

1) Homogena gredzena inercijas moments uz asi, kas traucas caur gredzena centru un ir perpendikulara gredzena plāksmai, ir

$$J = m \cdot r^2 \text{ (fig. 167.),}$$

kur m ir gredzena masa un r — radiuss.

2) Homogena taisna stieņa inercijas moments uz asi (OO), kas vilkta caur stieņa centru perpendikulari stienim, ir

$$J = \frac{1}{12} m \cdot l^2 \text{ (fig. 168.),}$$

kur m ir stieņa masa un l — stieņa garums.

3) Tā paša stieņa inercijas moments uz asi, kas vilkta perpendikulari stienim caur tā galu ($O'O'$), ir

$$J = \frac{1}{3} m \cdot l^2.$$

4) Homogenas ripas inercijas moments uz ripai perpendikularu asi, kas traucas caur ripas centru, ir

$$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \text{ (fig. 169.),}$$

kur r^2 ir ripas radiuss.

5) Tās pašas ripas inercijas moments uz asi, kas sakrīt ar kaut kādu no ripas diametriem, ir

$$J = \frac{1}{4} m \cdot r^2 \text{ (fig. 170.).}$$

6) Homogena apaļa cilindra inercijas moments uz asi, kas sakrīt ar cilindra ģeometrisko asi, ir

$$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2.$$

7) Homogenas bumbas inercijas moments uz asi, kas traucas caur bumbas centru, ir

$$J = \frac{2}{5} m \cdot r^2.$$

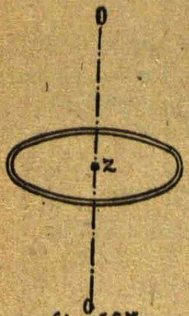


fig. 167.

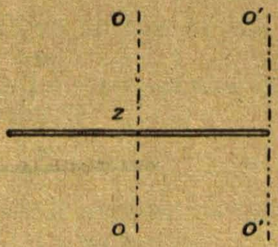


fig. 168

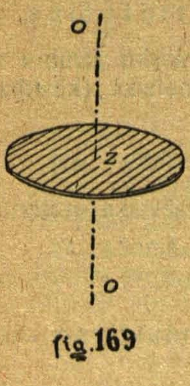


fig. 169

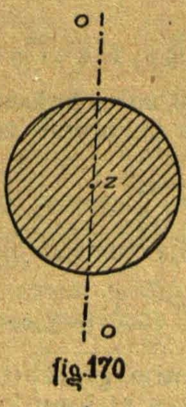


fig. 170

Ja inercijas momenti, kas attiecas uz kaut kādu ķermeņa asi, jāpārnes uz kādu otru asi, paralelu pirmajai, tad var rīkoties pēc teoremas, kuņu minēsim bez pierādījumiem.

Ja ķermeņa, kuŗa masa m, inercijas moments uz asi OO (fig. 171.), kas iet caur ķermeņa smaguma centru, ir J_0, tad inercijas moments uz kaut kādu citu asi $O'O'$, kas iet paraleli pirmajai asij un kuŗa atrodas atstati no centra attālumā x, ir

$$J = J_0 + m \cdot x^2.$$

Piem. jāatrod vienāda materiala taisna stieņa (fig. 172.) inercijas moments uz asi, kuŗas attālums no stieņa smaguma centra ir x. Zinot, ka

$$J_0 = \frac{1}{12} m \cdot l^2, \text{ tad}$$

$$J = J_0 + m \cdot x^2 = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m \cdot x^2,$$

ja piem. $x = \frac{1}{2} l$, t. i ass iet caur stieņa galu, tad

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Par inercijas momenta vienības mēru CGS sistemā pieņem 1 gr. masas, kas attālināta no griezes ass par 1 cm. inercijas momenta.

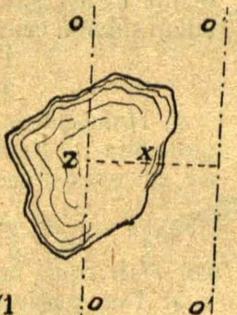


fig. 171

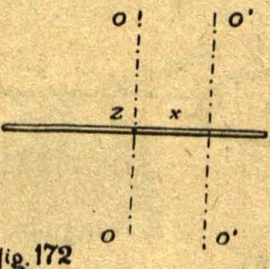


fig. 172

§ 102. Kinetiskā enerģija ķermenim griežoties.

Pieņemsim, ka ķermenis griežas ap asi ar kaut kādu leņķisku ātrumu w. Katra ķermeņa punkta, kad v ir linearais ātrums, kinetiskā (kustības) enerģija ir

$$\frac{mv^2}{2}.$$

Visu punktu kinetiskā enerģija zumējas no katra atsevišķa materiala punkta kinetiskās enerģijas, tādēļ

$$K = \Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma \frac{mr^2w^2}{2} = \frac{1}{2} w^2 \Sigma mr^2 = \frac{1}{2} J \cdot w^2.$$

Kinetiskā enerģija ķermenim griežoties ir produkts no inercijas momenta puses ar leņķisko ātrumu kvadratā.

Ja ķermenis kustas virzes kustībā un tanī pat laikā griežas, tad kopēja ķermeņa kinetiskā enerģija ir

$$K = K_1 + K_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{J.w^2}{2}.$$

Par virzes kustības ātrumu tad jāpieņem ķermeņa smaguma punkta ātrums.

§ 103. Ķermeņa rites kustība pa slīpu plāksmu. Ja ķermenis slīd pa slīpu plāksmu bez berzes (§ 49.), tad tā ātrums ir

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Ja ķermenis pa slīpo plāksmu neslīd, bet rit, tad rites ātrumu varam atrast ar enerģijas pastāvības likuma palīdzību. Kustības sākumā ķermenim ir zināms daudzums potencialās enerģijas. Kad ķermenis ritēdams noiet vertikali mērītu attālumu h, tad potencialā enerģija samazinās par

$$P \,.\, h = mgh.$$

Šīs potencialās enerģijas daudzums pāriet kinetiskā (kustības) enerģijā, kas virzes un griezes kustībā ir

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J.w^2}{2},$$

kur v ir virzes kustības linearais ātrums, w leņķiskais ātrums un J inercijas moments.

Pieņemsim, ka pa slīpu plāksmu rit apaļš cilindrs, kuŗa radiuss ir r un kuŗa inercijas moments ir

$$J = \frac{1}{2} m \,.\, r^2.$$

Ja cilindrs noritējis vertikali mērītu attālumu h, tad

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{mr^2w^2}{2},$$

jeb pēc nolīdzinājuma dalīšanas ar m

$$gh = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2w^2}{2},$$

tā kā $v = w \,.\, r$, jeb $w = \frac{v}{r}$, tad

$$g \,.\, h = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

No pēdējās formulas redzams, ka ķermenim ritot pa slīpu plāksmu $^2/_3$ no potencialās enerģijas pārvēršas kinetiskā virzes kustības enerģijā un $^1/_3$ kinetiskā griezes kustības enerģijā.

No pēdējās formulas varam aprēķināt ķermeņa virzes kustības v ātrumu un griezes leņķiskās kustības w ātrumu:

$$v = \sqrt{^2/_3\, 2gh}; \quad w = \frac{\sqrt{^2/_3\, 2gh}}{r}.$$

§ 104. Fiziskais svārsts (pendula).

Par fizisko svārstu var nosaukt ikkuŗu ķermeni, kas zem sava smaguma spēka iespaida var svārstīties ap horicontalu asi. Fig. 173. horicontala ass iet caur punktu O un ja svārsta smaguma centrs Z atradīsies uz vienas vertikalas linijas ar O, tad svārsts atradīsies līdzsvarā. Tiklīdz atvilksim svārstu par kaut kādu leņķi α no līdzsvara stāvokļa, svārsts sāks harmoniski svārstīties.

Salīdzināsim fizisko svārstu ar matematisko (fig. 174.) un aprēķināsim, kādā gaŗumā jābūt matematiskā svārsta bezsvara diegam l, lai diegs kustētos vienādi ar taisno OZ.

Lai taisnās OZ un om kustētos vienādi pie vienādiem leņķiem α, nepieciešami, ka taisno leņķiskie paātrinājumi ir vienādi.

Spēks, ar kuŗu kustas matematiskais svārsts (§ 57.) ir

$$F = mg \cdot sin\,\alpha.$$

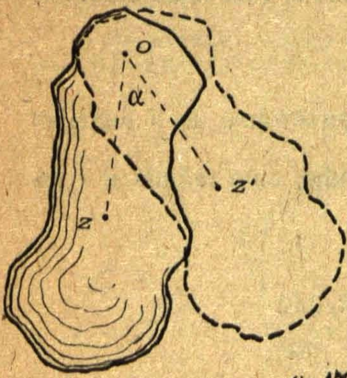


fig. 173

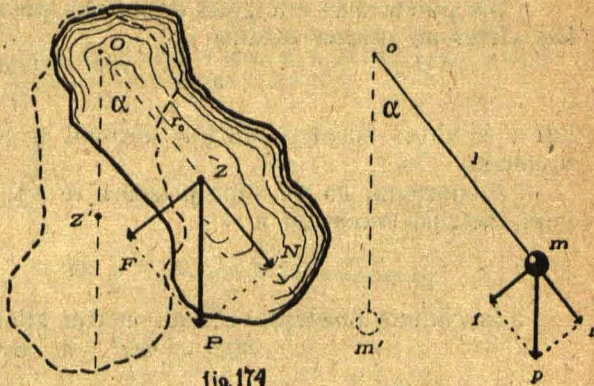


fig. 174

Tādēļ punkta m linearais paātrinājums

$$a = g \cdot sin\,\alpha$$

un punkta m un diega om leņķiskais paātrinājums

$$\beta_1 = \frac{a}{l} = \frac{g \cdot sin\,\alpha}{l}.$$

Fiziskā svārsta leņķiskais paātrinājums ir vienāds ar darbības spēka statisko momentu, dalītu ar svārsta inercijas momentu, kas attiecināts uz griezes asi.

Darbības spēks

$$F = M_0 g \cdot sin\,\alpha$$ (kur M_0 ir fiziskā svārsta masa).

Spēka statiskais moments ir

$$M_0\, g \cdot r_0 \cdot sin\,\alpha$$

un leņķiskais paātrinājums

$$\beta=\frac{M_0\, g\, .\, r_0\, .\, sin\, \alpha}{J},$$

kur J ir inercijas moments uz griezes asi.

Pielīdzinot abas formulas β_1 un β:

$$g\frac{sin\, \alpha}{l}=\frac{M_0 g\, .\, r_0\, .\, sin\, \alpha}{J}$$

dabūjam

$$l=\frac{J}{M_0\, .\, r_0}.$$

Matematiskā svārsta garumu l, kas kustas tāpat kā dotais fiziskais svārsts, nosauc par fiziskā svārsta reducēto garumu.

Matematiskā svārsta svārstības periods ir

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

tā tad fiziskā svārsta periods ir

$$T=\pi\sqrt{\frac{J}{M_0 g\, .\, r_0}}.$$

Vilksim pa fizisko svārstu taisno, kas savieno griezes ass centru ar smaguma centru, un no smaguma centra atliksim uz taisno reducēto garumu l; dabūjam punktu C (fig. 175.), kuru nosauc par svārstības centru.

Šim centram ir sekoša īpašība: ja visa fiziskā svārsta masa būtu koncentrēta vienā punktā — svārstības centrā — tad fiziskais svārsts svārstītos tāpat kā tad, kad tā forma ir agrākā. Šo slēdzienu varam taisīt pamatojoties uz tām formulām, kuras dabūjam, salīdzinot fizisko svārstu ar matemātisko.

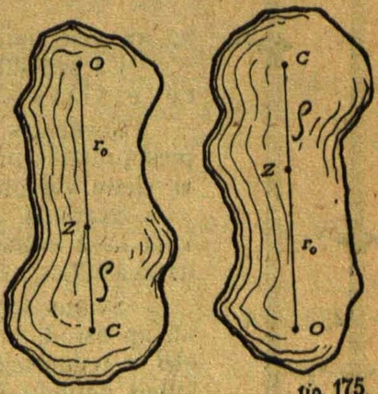


fig. 175.

§ 105. Reversijas svārsts.

Ja fiziskā svārsta svārstības centru pieņemsim par griezes asi, tad griezes centrs kļūst par svārsta svārstības centru.

Fiziskā svārsta reducētais garums ir

$$l=\frac{J}{M_0\, .\, r_0},$$

kur J ir inercijas moments.

Šis inercijas moments (§ 101.) ir

$$J = J_0 + M_0 r_0^2,$$

kur J_0 ir inercijas moments uz asi, kas iet caur ķermeņa (fiziskā svārsta) smaguma centru.

Tā tad

$$l = \frac{J_0 + M_0 r_0^2}{M_0 r_0} = \frac{J_0}{M_0 r_0} + r_0.$$

Fig. 175. redzams, ka

$$\rho = \frac{J_0}{M_0 r_0}.$$

Pieņemsim tagad, ka punkts C ir griezes punkts, tad fiziskā svārsta reducētais garums ir

$$l' = \frac{J'}{M_0 \rho},$$

kur J' ir inercijas moments uz asi, kas traucas caur C.

$$J' = J_0 + M_0 \rho^2$$

un tādēļ:

$$l' = \frac{J_0 + M_0 \rho^2}{M_0 \rho} = \frac{J_0}{M_0 \rho} + \rho.$$

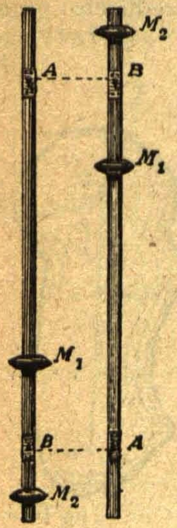


fig. 176

Fig. 175. redzams, ka

$$\frac{J_0}{M_0 \rho} = r_0,$$

tādēļ:

$$l' = r_0 + \rho = l,$$

ko arī vēlējāmies pierādīt.

Uz svārstības un smaguma centru attieksmi pamatota **reversijas svārsta** konstrukcija (fig. 176.).

Reversijas svārsts konstruēts no stipra stieņa, pie kuŗa piestiprinātas prizmas A un B. Gulstoties uz atbalsta punktu ar vienu vaj otru prizmu, svārsts var svārstīties.

Svari M_1 un M_2 var kustēties un tos var nostiprināt kaut kuŗā svārsta punktā un tādēļ ar to palīdzību var mainīt uz svārstības asi attiecināta inercijas momenta lielumu.

Svarus M_1 un M_2 piestiprina tā, lai svārstības periodi kā ap asi A, tā arī ap asi B būtu vienādi, tad attālums AB ir reducētais gaŗums. Ja izmērījam šo gaŗumu un svārstības periodu T, tad ar formulas

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

palīdzību varam aprēķināt smaguma spēka paātrinājuma lielumu kaut kuŗā punktā zemes virsū.

§ 106. Ķermeņa griezes brīvās asis.

Par griezes brīvajām asīm nosauc tādas taisnas linijas, kas vilktas caur ķermeni un ap kuŗām griežoties ķermeņa centrifugalie inercijas spēki savstarpēji līdzsvarojas.

Ja ķermenis griežas ap kaut kādu asi, kas iet caur ķermeni (fig. 177.), tad vispārēji ķermenis spiež uz asi. Atsevišķos gadījumos asis var būt tā vilktas caur ķermeni, ka uz tām nedarbojas nekādi spēki, vaj mechaniski izteicoties — spēki, kas darbojas uz asi, savstarpēji līdzsvarojas.

Iedomāsimies, ka ķermenis ir apstājies un visos tā punktos darbojas fiktivie centrifugalie inercijas spēki (§ 50.). Atsevišķos gadījumos šie spēki var līdzsvaroties un tad ass ir pilnīgi brīva.

Brīvo asu noteikumus var pierādīt tikai ar augstākās matematikas palīdzību, tādēļ pievedīsim tikai vispārējos jēdzienus par šīm asīm, bez pierādījumiem.

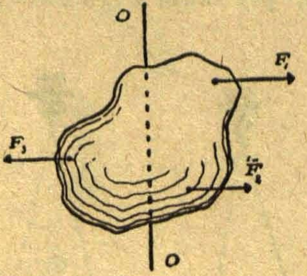


fig. 177.

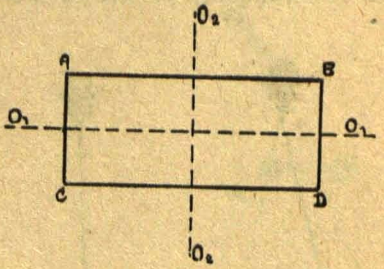


fig. 178.

1. Brīvajām asīm jāiet caur ķermeņa smaguma centru.
2. Uz brīvās ass ķermeņa inercijas momenta lielums ir maksimalais vaj minimalais, salīdzinot ar citām asīm, kuŗas arī iet caur ķermena centru.
3. Ķermenī, neatkarīgi no tā formas, vienmēr ir mazākais trīs savstarpēji perpendikularas brīvās asis.

Minēsim dažus vienkāršākos piemērus:

1. Homogenai plāksmai, kuŗas forma ir četrstūris, brīvo asu virzieni attēloti figurā 178.
2. Homogenam stienim ir viena brīva ass, kas sakrīt ar stieņa asi, un bezgala daudz brīvu asu, kuŗas perpendikularas stieņa asij stieņa smaguma centrā.
3. Homogenai bumbai ir bezgala daudz brīvo asu, kas iet caur bumbas smaguma centru.

Technikā brīvās asis nosauc arī par neitralajām asīm.

§ 107. Brīva ķermeņa grieze.

Ķermenis var brīvi griezties, kad tas nav kaut kādi cieši saistīts ar griezes asi, bet griežoties var pats ieņemt stāvokli, kāds ķermenim izdevīgāks. (Saistītu ar asi ķermeņa griezi aplūkojām § 97.—102., kādai kustībai ir maz kas kopējs ar griezi, kādu aplūkosim šinī §.)

Agrāki (§ 53.) jau aplūkojām dažus brīva ķermeņa griezes piemērus. Ja piekaŗam smagu stieni vieglā diegā centrifugalās mašinas asij un sākam centrifugalo mašinu griezt, tad sākumā stienis griežas turēdamies apm. vertikalā stāvoklī, bet tad ātri cenšas ieņemt tādu horicontalu stāvokli, pie kuŗa stieņa smaguma centrs atrodas uz griezes radiusa virziena (fig. 179.a un b). Šādā stāvoklī stienis ir stabils un ātrumam palielinoties tas vairs necenšas ieņemt kaut kādu citu stāvokli.

Liekot stieņa vietā gredzenu, novērosim pie griezes parādību (fig. 180.), ka gredzena stabilais griezes stāvoklis ir tad, kad gredzens nonāk horicontalā virzienā.

Vispār:

B r ī v s ķ e r m e n i s g r i e ž a s s t a b i l i a p a s i, k a s s a k r ī t a r v i e n u n o b r ī v a j ā m (neitralajām) ķ e r m e ņ a a s ī m, p i e k a m ķ e r m e n i s g r i e ž o t i e s

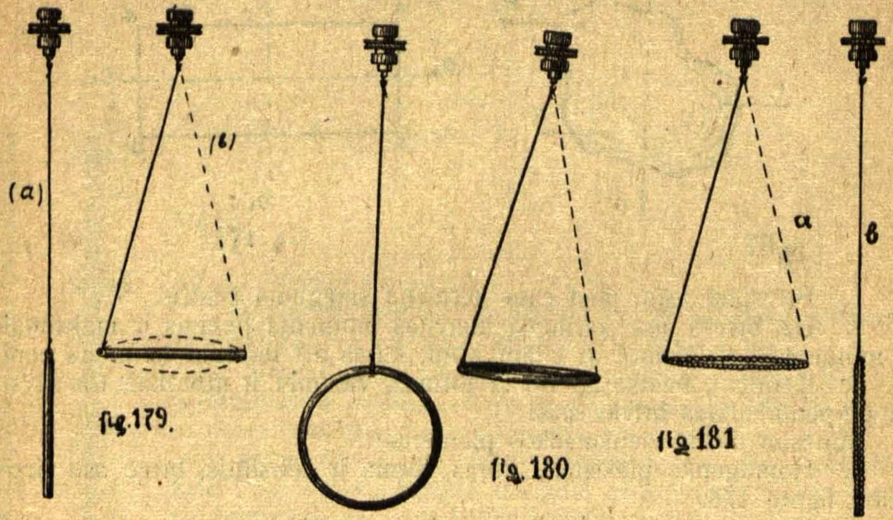


fig. 179. fig. 180 fig. 181

v i s v a i r ā k s t a b i l s t a d, k a d t a s g r i e ž a s a p b r ī v o a s i, u z k u ŗ u i n e r c i j a s m o m e n t s i r m a k s i m a l s.

Ja griežam uz centrifugalās mašinas piem. virves gredzenu, tad sākumā gredzens saspiežas (fig. 181.b) un ieņem vertikalu stāvokli, bet pie lielāka ātruma gredzens pāriet horicontalā stāvoklī (fig.181.a), pie kam tas izliecas tā, kā kad būtu no cieta materiala ar visur vienādu radiusu, un šādā stāvoklī griezes laikā ir stabils.

T ā t a d b r ī v i g r i e ž o t i e s ķ e r m e n i s c e ņ š a s i e ņ e m t t ā d u f o r m u, p i e k u ŗ a s i n e r c i j a s m o m e n t s u z g r i e z e s a s i i r v i s l i e l ā k a i s.

§ 108. Ķermeņa virzes-griezes kustības.

Dabā visbiežāki novērojams virzes kustības kombinējums ar griezes kustību. Kā piemēru minēsim sviesta ķermeņa kustības.

Agrāki § 31., runājot par sviesta ķermeņa kustību, sapratām tikai ķermeņa smaguma punkta kustību vaj materiala punkta kustību. Ja turpretim sviežam kaut kādu ķermeni, kas sastāv no ļoti daudzām molekulām, tad sviesta ķermeņa kustība zumējas no virzes un griezes kustībām, piem. fig. 182.

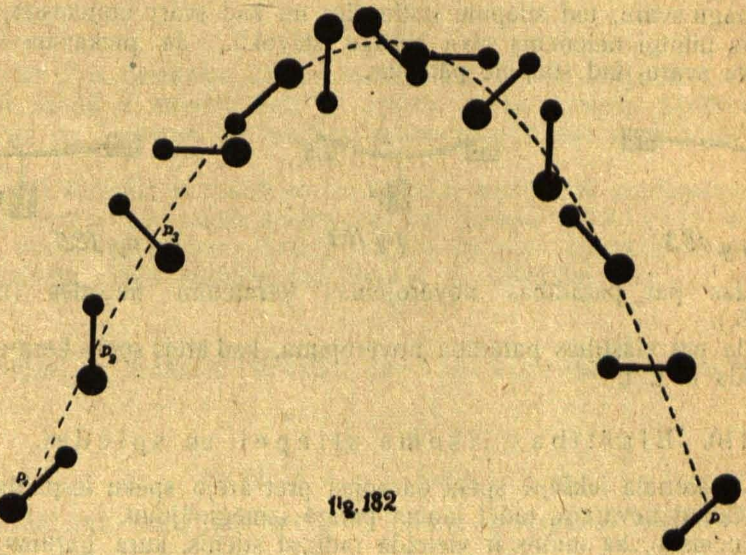


Fig. 182

Tādēļ arī dinamikas sākumā ievedām jēdzienu „materialais punkts“, par kuŗu saucama ķermeņa smaguma centra (punkta) kustība, pie kam smaguma centrā visa ķermeņa masa domāta koncentrēta vienā punktā. Ja aplūkotu vesela liela ķermeņa kustību, tad iepriekš būtu jāizslēdz varbūtēja ķermeņa grieze un tad tikai varētu izpētīt virzes kustību.

No molekulu darbības mechanikas.

§ 109. Cietā ķermeņa formas maiņas.

Kad ārēji spēki darbojas uz ķermeni, tie maina ķermeņa formu. Tādus ķermeņus, kuŗu forma pēc spēku darbības necenšas atjaunot savu agrāko formu, nosauc par plastiskiem, kurpretim tādus ķermeņus, kas savu formu atjauno — par elastīgiem.

Kad uz ķermeni darbojas spēki, kas cenšas ķermeni vērpt, saīsināt, pagarināt, izliekt, bīdīt vaj pārgriezt, un ja ķermenis pats no sevis atdabū savu agrāko formu, tad ķermenis ir elastīgs pret minēto spēku darbību.

Katrai ārējo spēku darbībai ķermenis atbild ar savu iekšējo molekularo spēku darbību, tādēļ elastību rada iekšējie molekularie spēki. Tā kā ķermenis var būt elastīgs pret stiepi, spiedi, lieci, vērpi un bīdi, tad saka, ka ķermeņa elastība ir stiepes, spiedes, lieces u. t. t. elastība.

Ja vertikali piestiprinātas stiepules (drāts) galā kaŗam dažāda svara bumbas, tad novērojam, ka stiepule izstiepjas, pie kam, kad svarus atņemam, stiepule atkal ieņem agrāko stāvokli. Tomēr šī parādība novērojama tikai līdz zināmai robežai, tā saucamai „elastības robežai", jo kad uzkārsim pārāk smagu svaru, tad stiepule izstiepsies un kad svaru noņemsim, tad stiepule vairs pilnīgi neieņems savu agrāko stāvokli. Ja piekārsim stiepulei vēl lielāku svaru, tad stiepule pārtrūks.

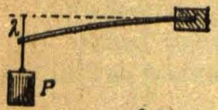


fig. 183

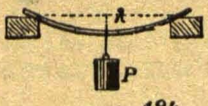


fig. 184

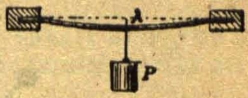


fig. 185

Tādas pat parādības novērojamas ķermenim liecoties (fig. 183., 184., 185.).

Šāda pat elastības parādība novērojama, kad ārējs spēks ķermeni spiež, vērpj, bīda u. t. t.

§ 110. Elastības likums stiepei un spiedei.

Kā materiala iekšējie spēki darbojas pret ārējo spēku iespaidu, teoretiski aprēķināt nevaram, tādēļ jāņem palīgā izmēģinājumi.

Pieņemsim, ka mums ir vienāda radiusa stienis, kuŗa gaŗums ir l un kuŗa šķērsgriezuma laukums ir F cm^2. Pieņemsim, ka viena stieņa gals ir nostiprināts un pats stienis atrodas vertikalā stāvoklī. Piekārsim stieņa otrā galā svaru P_1 kg. un mērīsim, par kādu gabalu λ stienis izstiepies. Ārēja spēka iespaids uz visām ķermeņa daļām ir vienāds un visas ķermeņa daļiņas ar saviem iekšējiem spēkiem (elastību) pretojas ārējam spēkam. Elastības spēka darbu uz 1 cm.^{2} nosauc par materiala sprieguma vienību.

Par gaŗuma vienību mechanikā pieņemts cm. un ja dalīsim spēka P_1 radīto izstiepumu ar stieņa gaŗumu, tad dabūsim, par cik stienis uz katru gaŗuma vienību izstiepies, kādu attieksmi nosauc par stiepumu.

Tā tad

$$\text{spriegums } \sigma_1 = \frac{P_1}{F}; \text{ stiepums } \varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{l}.$$

Ja otrreiz ņemam divreiz lielāku svaru, tad

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{F} = \frac{2P_1}{F} = 2\sigma_1; \quad \varepsilon_2 = \frac{\lambda_2}{l}.$$

Turpinot šādi izmēģinājumus atrodam lielāko daļu materialiem, ka stiepums ir proporcionals spriegumam.

Attieksmi $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ apzīmē ar E un nosauc par „elastības moduli"

$$\frac{\sigma}{\varepsilon}=E,$$

un kaut kādam noteiktam materialam šis skaitlis ir pastāvīgs.

Aprēķināsim pēdējo formulu attiecībā uz ε, tad

$$\varepsilon\,.\,E=\sigma,$$

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}.$$

Tā kā E ir pastāvīgs katram materialam (visās techniskās rokas grāmatās šie skaitļi ir minēti), tad, ja zinām σ, kas viegli aprēķināms no doto spēku un ķermeņa dimensijām, ε varam aprēķināt ar minētās formulas palīdzību.

Minētā formula ir viena no svarīgākām praktiskās mechanikas formulām. To nosauc pēc angļu zinātnieka, kas pirmais 1678. gadā minēja šo formulu, par Hūka formulu (raksta: Hook) vaj par „elastības formulu".

Ja zinām Hūka formulu, tad pietiek, ja izrēķinām

$$\sigma=\frac{P}{F},$$

un ε dabūjam ar formulas palīdzību, pie kam varam abas formulas kombinēt:

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}=\frac{P}{F\,.\,E},$$

$$\text{un tā kā } \varepsilon=\frac{\lambda}{l}, \text{ tad } \lambda=\varepsilon\,.\,l$$

un pagarinājumu, kuŗu rada spēks P, varam aprēķināt ar sekošās formulas palīdzību

$$\lambda=l\,.\,\frac{P}{E\,.\,F}=\frac{P\,.\,l}{E\,.\,F}.$$

Šās pašas formulas lietojamas arī ķermeņa saspiešanā. Daudz komplicētākas ir formulas par lieci, vērpi un tā tālāk, kuŗas aplūko sevišķā praktiskās mechanikas daļā „mācībā par materialu stiprumu".

§ 111. Molekulu teorija.

Molekulu teorija māca, ka katrs ķermenis sastāv no ļoti daudzām vismazākām daļiņām — molekulām, starp kuŗām darbojas spēki, kuŗus nosauc par molekulu spēkiem.

Molekulu jēdziens kā materijas sastāvdaļa bija pazīstams Demokritam senā senātnē; vēlākā laikā pie molekulu teorijas atgriezās Džons Daltons (1808. g.) un vēl vēlāki daudzi zinātnieki izstrādājuši šās teorijas pamatus visos sīkumos.

Tā kā pie ikkuŗa šķidra vaj cieta ķermeņa formas maiņas rodas ķermeņa iekšējie spēki, kas pretojas ārējiem spēkiem, tad pieņem, ka iekšējie spēki darbojas savstarpēji uz ķermeņa molekulām. Tie ir savstarpēji molekulu pievilkšanas spēki, kad ķermeni stiepjam, un atgrūžoši spēki, kad ķermeni spiežam.

Pamatojoties uz molekularo teoriju varam atšķirt cieto, šķidro un gazveidīgo ķermeņu iekšējo būtni pēc iekšējo molekulu spēku darbības.

Cieta ķermeņa molekulas savstarpēji kustoties atrodas stabilā līdzsvarā.

Šķidra ķermeņa molekulas savstarpēji kustoties neatrodas stabilā stāvoklī, bet kustas savstarpēji kā gadas.

Gazu molekulas kustas virzes kustībā ar ļoti lielu ātrumu un tādēļ mazā sprīdī uz trauka malām ļoti daudz reiz atsitas.

V. Piemēri.

A. Uzdevumi.

1. Lokomotive kustas ar ātrumu 10 m/sec. Cik lielu ceļa gabalu noskries lokomotive 2 stundās un 20 minutēs?

2. Ar sutas ceļamo krānu smagumu paceļ 10 sekundēs 15 metru augstu. Cik liels ir celšanas ātrums?

3. Sutas veseris izdara minutē 45 sitienus; kritiena augstums ir 60 cm. Cik liels ir vesera kritiena ātrums?

4. Vertikals zāģu gaters izdara minutē 150 griezienus. Katra grieziena gaŗums ir 0,85 m. Ar kādu ātrumu kustas zāģi?

5. No astronomijas zinām, ka mēnesis apgriežas ap zemes lodi 28 diennaktīs; mēneša attālums no zemes ir 50000 jūdzes. Cik liels ir mēneša apgriešanās ātrums?

6. Cik ilgā laikā noies torpedu laiva 400 jūŗas jūdzes ar ātrumu 10 m/sec.? (1 jūŗas jūdze = 1852 m.)

7. Ogļraktuvēs no 180 m. dziļas šachtas izceļ ogles 30 sekundēs. Ar kādu ātrumu izdara celšanu?

8. Ūdens ātrumu var apmēram noteikt, ja iesviež ūdenī koku un novēro, kādu attālumu koks nopeldēs zināmā laikā. Pieņemsim, ka koks nopeldēs 5 minutēs 200 m. Kāds būs ūdens ātrums?

9. Ūdens rats griežas ar ātrumu 2,1 m.; rata radiuss ir 2,4 m. Cik ilgā laikā rats apgriezīsies vienu reizi?

10. Jānoēvelē 1,5 m. gaŗa un 0,5 m. plata čuguna līdzināmā plātne. Ēveles tērauda griezēja pabīdījums katru reizi ir 1,5 mm.; ēveļmašinas slidas ātrums darbības laikā ir 0,15 m., bet atpakaļvirzoties otrtik liels. Tērauda griezējs pirms darbības un pēc darbības izbīdās par 40 mm. Cik laika vajadzīgs plātnes vienreizējai noēvelēšanai?

11. Jānoēvelē sķērsām 1200 mm. gaŗa un 700 mm. plata dzelzs plātne. Ēveles ātrums turp un atpakaļ ir 800 mm. Cik ilgā laikā var vienreiz plātni noēvelēt? (Ēveles ātrums $v = 0{,}170$ m/sec.)

12. Pumpja 400 mm. gaŗš misiņa cilindrs jānovirpā un jāizurbj. Pumpja sienām jābūt 12 mm. biezām un izurbtajam cauruma diametram — 200 mm. Cik ilgā laikā tas izdarāms, ja urbšanas un virpāšanas ātrums $v = 0{,}15$ m.; griezēja pabīdījums 0,5 mm.?

13. Tvaikdaļa kastes vāka atloks (flanšs) ir 35 mm. biezs; tanī jāizurbj 20 caurumi 26 mm. diametrā. Cik ilgā laikā tas izdarāms, ja urbja aploces ātrums ir 0,10 m/sec., urbja pabīdījums pēc viena apgrieziena 0,25 mm.?

14. Dzelzsēveļmašinas slidu ātrums = 0,1 m/sec., skaidas platums = 0,004 m.; noēvelējamā laukuma gaŗums = 2 m. un platums — 0,5 m.; viss slidu noietais ceļa gaŗums = 2,140 m. Cik ilgs laiks vajadzīgs laukuma vienreizējai noēvelēšanai?

15. Cik liels ir zobrata ātrums uz iedaļas aploci, ja zobrats apgriežas 100 reizes minutē un ja iedaļas aploces diametrs ir 900 mm.

16. Dzensiksnas skriemelis diametrā=0,75 m. un griežas ar periferisko ātrumu 5 m/sec. Kādam jābūt apgriezienu skaitam, lai sasniegtu minēto ātrumu?

17. Gludināmā akmeņa ripa apgriežas 100 reizes minutē un tās periferiskais ātrums ir 10 m/sec. Cik lielam jābūt ripas diametram?

18. Jānovirpā dzelzs vārpsta 7 cm. diametrā. Cik reizes minutē vārpstai jāapgriežas, ja vārpstas periferiskais ātrums ir 0,13 m/sec.?

19. Cik daudz laika jāpatērē 200 mm. bieza skriemeļa novirpāšanai, ja tas apgriežas 5 reizes minutē un ja skaidas platums ir 0,5 mm.?

20. Ceļamam krānam (fig. 186.) ir 2 zobratu pāŗi, kuŗu kopējais pārnesums $= \frac{1}{72}$. Kloķa radiuss $R = 410$ mm., tā periferiskais ātrums $v = 0{,}8$ m/sec.; tītuvja radiuss $r = 260$ mm., krāna celšanas augstums $s = 5$ m.: svars guļ uz 4 ķēdēm. Jāaprēķina:
1) Cik reizes minutē strādnieks apgriež kloķi?
2) Cik reizes minutē apgriežas tītuvis?
3) Cik liels ir svara ātrums?
4) Cik ilgā laikā var uzcelt visu svaru 5 m. augstu?

21. Ceļamā krānā (fig. 186.) ir riči, ar kuŗu palīdzību var pabīdīt sāniski ceļamo priekšmetu 3 m. attālumā. Ričus dzen ar koniskiem un cilindriskiem zobratiem, kuŗu kopējais pārnesums $= \frac{1}{25}$. Riču riteņu diametrs = 300 mm. Cik ilgā laikā ceļamo priekšmetu var pabīdīt sāniski par 3 m.?

22. Uz virpām jānovirpā vārpsta diametrā 80 mm. un 3 m. gaŗa. Tērauda griezēja virzīšanos vārpstas ass virzienā noteic pašdarbīgā suporta pārvietošanās minētā virzienā; suporta pārvietošanos 1″ (= 25,4 mm.) ga-

ŗumā izdara ar 48 vītes kāpēm. Cik daudz laika vajadzīgs vārpstas novirpāšanai, ja vārpstas periferiskais ātrums $= 0{,}13$ m/sec.?

23. Ar kādu paātrinājumu p kustas ķermenis, kas uz ceļa gabala $s = 500$ m. sasniedz ātrumu $v = 100$ m.?

24. Cik lielu attālumu noies ķermenis 7 sekundēs ar sākuma ātrumu $v = 3$ m/sec. un paātrinājumu $p = 5$ m/sec.^{2}?

25. Cik lielu attālumu noies ķermenis 3 minutēs, ja ātrums mainās no 2,5 m/sec. uz 7,5 m/sec.?

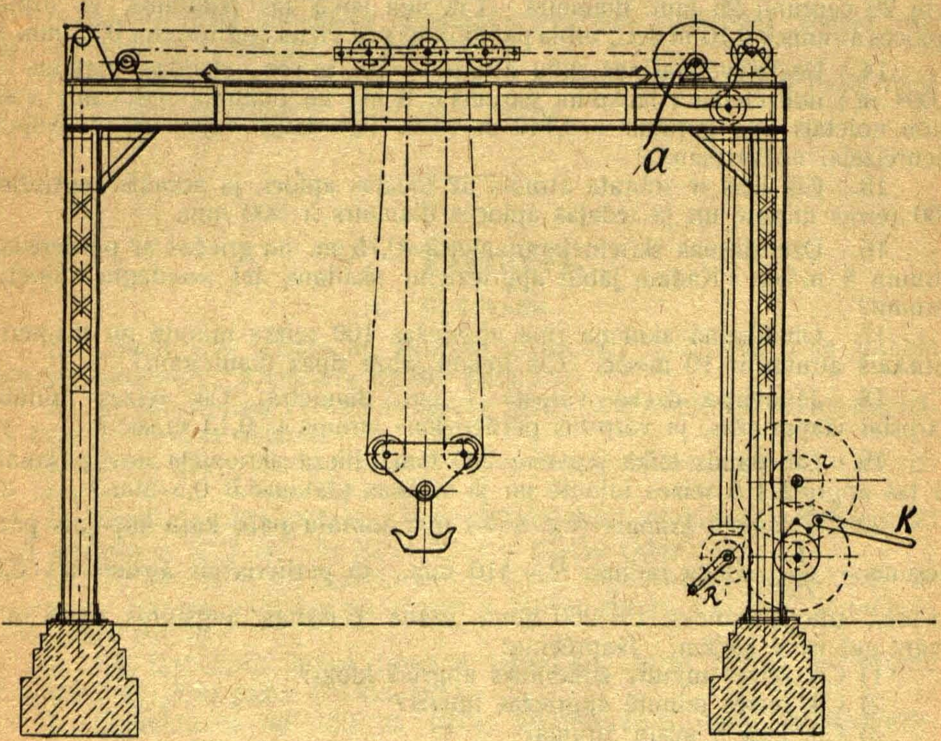


fig. 186.

26. Cik lielu attālumu noies ķermenis, kuŗa sākuma ātrums ir $v_0 = 5$ m/sec., paātrinājums $p = 3$ m/sec.^{2} un beigu ātrums $v = 9$ m/sec.?

27. Ķermenis zem spēka iespaida iemanto ātrumu $v_0 = 2$ m/sec. kustības sākumā un $v = 24$ m/sec. kustības beigās. Cik ilgi ķermenis kustējies?

28. Dzelzsceļa vilciens zināmā momentā sasniedzis ātrumu 10 m/sec. Sākot no šī momenta ātrums pamazinājies katrā sekundē par 0,5 m.

1) Cik lielu ātrumu vilciens sasniegs pēc 15 sekundēm?

2) Pēc cik ilga laika vilciens apstāsies?

3) Cik lielu attālumu noskries vilciens no bremzēšanas sākuma, kamēr apstāsies?

29. Cik lielu ātrumu sasniedz no 40 m. augstuma krītošs ķermenis un cik ilgā laikā tas nokrīt?

30. Dzelzsceļa vilciens kustas ar ātrumu 16 m/sec. Pēc 150 m. ceļa gabala noskriešanas vilcienam jāapstājas. Cik liels ir palēninājums?

Dzensiksnas un virves pārvadi.

Mechaniska spēka pārvadīšanai ar griezes kustības palīdzību vajadzīga dzinēja vārpsta un dzenamā vārpsta. Uz katras vārpstas atrodas pa nostiprinātam skriemelim jeb ratam. Tāda ierīce pārvada mechanisko spēku ar dzensiksnām, virvēm, ķēdēm vaj zobratiem. Mazākus spēkus pārvada arī ar berzes ratu palīdzību.

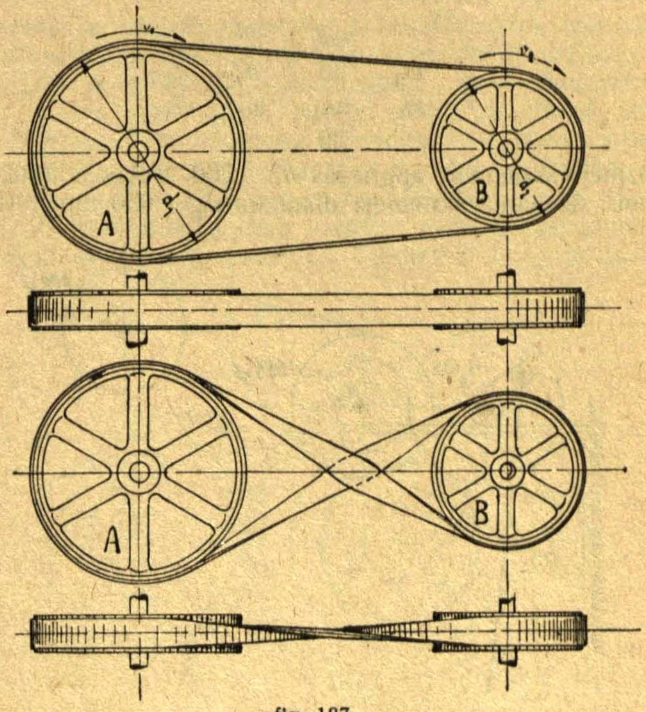


fig. 187.

Kustību pārvadīt no skriemeļa A uz skriemeli B (fig. 187.) var tikai tad, ja starp skriemeli un siksnu vaj virvi ir pietiekoši liela berze.

Apzīmēsim divu kopdarbojošos skriemeļu ātrumus ar v_1 un v_2, diametrus ar d_1 un d_2, apgriezienu skaitu minutē ar n_1 un n_2.

Dzinēja skriemeļa ātrums pa aploci ir

$$v_1 = \frac{\pi d_1 n_1}{60};$$

dzenamā skriemeļa ātrums

$$v_2 = \frac{\pi d_2 n_2}{60}.$$

Tā kā $v_1 = v_2$, tad

$$\frac{\pi d_1 n_1}{60} = \frac{\pi d_2 n_2}{60};$$

$$d_1 n_1 = d_2 n_2; \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Apzīmējot skriemeļu leņķiskos ātrumus ar w_1 un w_2 dabūjam attieksmi $\frac{w_2}{w_1} = \varphi$, ko nosauc par pārnesumu.

$$\varphi = \frac{w_2}{w_1} = \frac{\frac{\pi n_2}{30}}{\frac{\pi n_1}{30}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{d_1}{d_2}.$$

31. Dzinējs skriemelis apgriežas $n_1 = 200$ reizes minutē, tā diametrs $d_1 = 500$ mm.; dzenamā skriemeļa diametrs $d_2 = 650$ mm. Cik liels ir n_2?

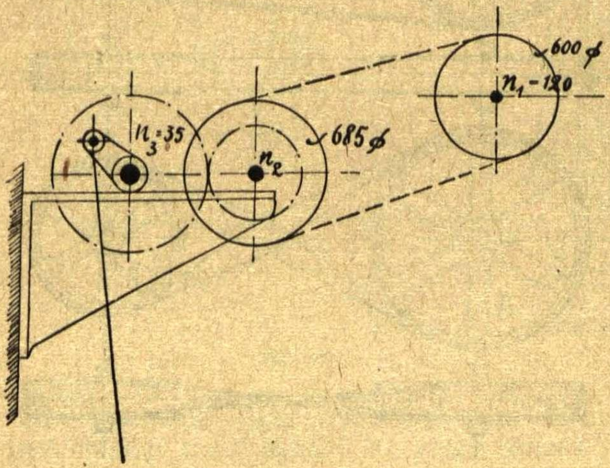


fig. 188.

32. Transmisijas pumpja dzīšanai ir sekoša ierīce (fig. 188.): transmisijas vārpstas skriemelis dzen ar siksnas pārvadu otru vārpstu, kuŗa ar zobratu pāri dzen trešo vārpstu un uz tās nostiprināto pumpja kloķi un līdz ar to pumpi. Transmisijas vārpsta apgriežas $n_1 = 120$ reizes minutē

un tās skriemeļa diametrs $d_1 = 600$ mm. Pumpja kloķis apgriežas $n_2 = 35$ reizes minutē. Cik liels ir kopējais pārnesums un kādu var izvēlēties siksnas pārnesumu un līdz ar to dzenamā skriemeļa diametru?

33. Centrifugalo pumpi dzen ar lokomobili; tās spara rats dzen ar siksnas pārvadu pumpja skriemeli. Spara rata diametrs $d_1 = 1000$ mm. un apgriežas $n_1 = 100$ reizes minutē. Centrifugalā pumpja apgriezienu skaits $n_2 = 900$ reizes minutē. Cik liels ir pumpja skriemeļa diametrs? Cik liels abu skriemeļu ātrums un cik liels ir pārnesums?

34. Transmisijas vārpsta apgriežas $n_1 = 80$ reizes minutē un dzen ar divreizēju pārvadu ēveļmašinas vārpstu. Ēveļmašinas vārpstas skriemeļa diametrs $d_4 = 60$ cm., transmisijas vārpstas skriemeļa diametrs $d_1 = 100$ cm. Uz starpvārpstas atrodas dzenamais skriemelis ar diametru $d_2 = 35$ cm. (dzīts no transmisijas) un dzinējs skriemelis ar diametru $d_3 = 70$ cm. (dzen ēveļmašinas skriemeli). Cik reizes apgriežas ēveļmašinas vārpstas skriemelis?

35. Transmisijas vārpsta apgriežas $n_1 = 200$ reizes minutē un dzen ar divreizēju siksnas pārvadu gludināmo ripu, kuŗas aploces ātrums ir $v = 20$ m/sec. un diametrs $D = 300$ mm. Abu dzensiksnu ātrums $v_1 = 6$ m/sec., ātruma zaudējums siksnu slīdes dēļ kopā iztaisa 4%. Apzīmēsim ar d_1 transmisijas skriemeļa diametru, ar d_2 transmisijas dzenamā skriemeļa diametru, tā apgriezienu skaitu ar n_2. Uz skriemeļa d_2 vārpstas atrodas skriemelis, kas dzen gludināmās ripas vārpstu, un tā diametru apzīmēsim ar d_3. Uz gludināmās ripas vārpstas atrodas dzenamais skriemelis ar diametru d_4 un apgriezienu skaitu n_3. Cik lieli ir d_1, d_2, d_3 un d_4, n_2 un n_3?

Zobrati.

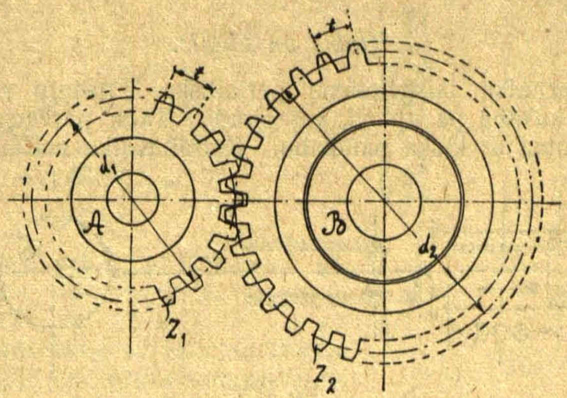


fig. 189.

Kustības pārvadīšana no viena zobrata uz otru notiek tādā kārtā, ka dzinēja rata *A* zobi iespiežas dzenamā rata *B* attiecīgos iedobumos (fig. 189.), pie kam rati griežas dažādos virzienos.

Aprēķinos apzīmēsim ar t — abu ratu iedaļu, t. i. attālumu uz iedaļas aploci starp diviem blakus stāvošiem zobiem, z_1 un z_2 — abu ratu zobu skaitu, d_1 un d_2 — iedaļas aploces diametrus, n_1 un n_2 — apgriezienu skaitu minutē.

Arī šinī gadījumā, tāpat kā pie skriemeļiem, $n_1 d_1 = n_2 d_2$.

Dzinēja rata iedaļas aploces garums ir $\pi d_1 = z_1 t$.

Dzenamā rata $\pi d_2 = z_2 t$.

Ja formulā $n_1 d_1 = n_2 d_2$ liekam d_1 vietā $\frac{z_1 t}{\pi}$ un d_2 vietā $\frac{z_2 t}{\pi}$, tad dabūjam

$$n_1 \cdot \frac{z_1 t}{\pi} = n_2 \cdot \frac{z_2 t}{\pi} \text{ un } n_1 z_1 = n_2 z_2.$$

Pārnesums

$$\varphi = \frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2}.$$

36. 100 HP stipra turbine ar stāvvārpstu apgriežas 96 reizes minutē un pārvada spēku uz guļošu vārpstu, kas apgriežas 144 reizes minutē, ar zobratu palīdzību. Abu ratu iedaļa $t = 75$ mm. Cik zobu uz guļošās vārpstas dzenamam ratam, cik liels katra rata iedaļas aploces diametrs, cik liels iedaļas aploces ātrums un leņķiskie ātrumi?

37. Ūdens rats apgriezdamies 8 reizes minutē dzen ar starpvārpstas palīdzību transmisiju, kas apgriežas 60 reizes minutē. Uz ūdensrata vārpstas atrodas cilindrisks zobrats ar 75 zobiem, kas dzen starpvārpstas ratu ar 30 zobiem. Uz tās pašas vārpstas atrodas konisks zobrats, kas dzen transmisijas vārpstas konisku zobratu. Cik zobu transmisijas vārpstas zobratam? Kādi ir iedaļas aploces diametri, ja cilindrisko zobratu iedaļa $t_1 = 75$ mm. un konisko — 62 mm.? Cik liels ir starpvārpstas apgriezienu skaits?

Kloķis un klanis.

Mašinu technikā taisnvirziena periodiska šurp-turp virzošās kustība bieži jāpārvērš kustībā pa aploci, vaj otrādi. Tādu pārvēršanu izdara gandrīz bez izņēmuma ar kloķa palīdzību. Katrai tvaika mašinai kloķa radiuss

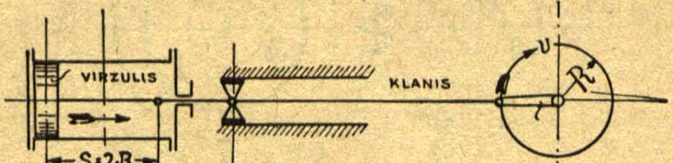


fig. 190.

(fig. 190.) ir puse no virzuļa gājiena; kloķa tapa kustas ar vienmērīgu ātrumu v. Apzīmēsim ar R aploces radiusu, pa kuŗu kustas kloķa tapa, virzuļa gājienu metros ar s, virzuļa vidējo ātrumu ar c m/sec., kloķa apgriezienu skaitu minutē ar n.

Tā kā $s = 2R$ un kloķim apgriežoties n reizes minutē virzulis nostaigājis $2sn$ attālumu, tad varam sastādīt sekošu nolīdzinājumu:

$$c = \frac{2s \,.\, n}{60}, \text{ no kuŗa dabūjam}$$

$$s = \frac{60 \,.\, c}{2n} \text{ un } n = \frac{60 \,.\, c}{2s}.$$

38. Ar cik lielu ātrumu kustas tvaika mašinas virzulis ar 500 mm. gājienu, ja kloķis apgriežas 100 reizes minutē.

39. Plēšu virzulis izdara minutē 25 gājienus; virzuļa vidējais ātrums ir 1,5 m/sec. Cik liels ir plēšu virzuļa gājiens?

40. Cik dubultgājienu jāizdara pumpim ar virzuļa gājienu 0,2 m., lai virzulis sasniegtu ātrumu 0,2 m/sec.?

41. Tvaika mašina ar 350 mm. lielu virzuļa diametru un 700 mm. virzuļa gājienu apgriežas 80 reizes minutē. Šīs mašinas spara rata diametrs 5 reizes lielāks par kloķa radiusu. Cik liels ir virzuļa vidējais ātrums, kloķa tapas ātrums un spara rata ātrums?

42. Tvaika mašinas kloķis ar radiusu 0,3 m. apgriežas 90 reizes minutē. Cik liels ir kloķa tapas ātrums un vidējais virzuļa ātrums?

43. Lielgabala lodi izšauj AD virzienā (fig. 191.) ar $v = 350$ m/sec. ātrumu. Elevacijas leņķis $\alpha = 35°$. Cik ilgi lode skries, cik lielu attālumu noskries un cik augsti pacelsies?

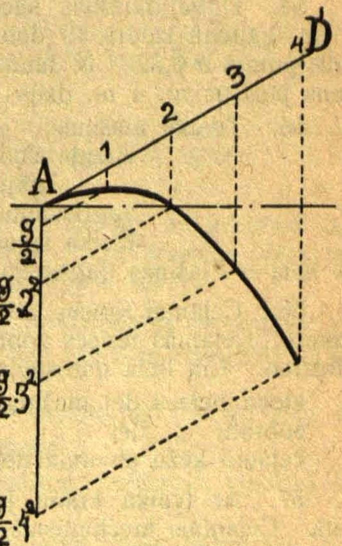


fig. 191.

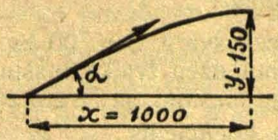


fig. 192.

44. Tie paši dati, kas uzdevumā 43. Cik lielu attālumu noskries lode, ja elevacijas leņķis $\alpha = 45^0$ (fig. 192.).

45. Granatu izšauj ar sākuma ātrumu $v = 300$ m/sec., pie kam granatas noskrietam attālumam jābūt vienādam ar lielāko pacelšanās augstumu. Cik liels ir elevacijas leņķis un cik liels ir granatas noskrietais attālums?

46. Zem kāda leņķa jāizšauj lielgabala lode, lai no 1000 m. attāluma trāpītu 150 m. augstu baznīcas torņa galu? Lodei jāsasniedz torņa gals 4 sekundēs.

47. Kāds darbs jāpatērē, lai paceltu 2000 kg. smagu priekšmetu 8 m. augstu?

48. 1500 kg. smags priekšmets jāpaceļ 1 minutē 15 m. augstu. Cik lielai jābūt darbspējai un cik liels ir celšanas ātrums?

49. Cik lielu smagumu var pacelt braucamais krēsls ar 10000 kg. darbspējas 20 m. augstu?

50. Cik liela ir būvkrāna darbspēja, ja ar to 2 minutēs jāpaceļ 15 m. augstu 1500 kg. liels svars?

51. Ar tvaika krānu 1 minutē jāpaceļ 15 m. augstu 6000 kg. liels svars. Cik zirgspēku šim nolūkam vajadzīgs?

52. Pumpim jāuzpumpē 1 stundā 100 m.^{3} ūdens 25 m. augstu. Cik zirgspēku lielai jābūt tvaika mašinai, kuŗa dzen pumpi?

53. Pilsētai ar 30000 iedzīvotājiem jāierīko ūdensapgādāšanas ietaise. Ūdens patēriņš uz katra iedzīvotāja ir 100 litru dienā. Pumpim jāuzsūc ūdens 4,4 augstu, bet jāuzspiež 45 m. augstu, skaitot no mašinmājas grīdas. Darba laiks 10 stundas dienā. Pumpja izmantojuma koeficients nedrīkst būt zemāks par 0,8. Cik daudz darbspējas vajadzīgs pumja dzīšanai?

54. Dubultdarbības sūcspiedpumpis ar virzuli 20 cm. diametrā un 40 cm. gājienu izdara 19 dubultgājienus minutē. Ūdens izmantojuma koeficients pumpī ir 0,82. Cik daudz zirgspēku vajadzīgs pumpja dzīšanai, ja tam ūdens jāuzsūc no 4 m. dziļas akas un jāuzspiež 50 m. augstu?

55. Tvaika mašinas:
virzuļa diametrs ir 30 cm.
„ gājiens „ 70 „
apgriezienu skaits 80
tvaika spiediens 6 atm. $= 6$ kg/cm^2.
Cik liela ir mašinas darbspēja, neievērojot berzi?

56. Ceļamai ierīcei jābūt spējīgai pacelt svaru $Q = 700$ kg. ar 0,3 m. ātrumu. Ceļamās ierīces zobratu mechanismu dzen tvaika mašina ar kloķa palīdzību. Cik liela darbspēja jāattīsta tvaika mašinai, ja ievēro zaudējumus:

kloķa berzes dēļ mašinas izmantojuma koeficients . . $y_1 = 0,85$
zobratu „ dēļ „ „ . . $y_2 = 0,9$
ceļamo ķēžu stīvuma dēļ „ „ . . $y_3 = 0,96$

57. Ar tvaika krānu jāpaceļ 1 minutē 5 m. augstu 25000 kg. liels svars. Ceļamais mechanisms sastāv no diviem zobratu pārvadiem un 2 nostiprinātiem skrituļiem, pār kuŗiem tek ķēde, kas tur brīvu skrituli, pie kuŗa piekārts svars. Ķēdes viens gals tinas ap tītuvja spoli, otrs piestiprināts. Cik liela darbspēja jāattīsta tvaika mašinai, ja

brīvā skrituļa izmantojuma koeficients . . . . . . $y_1 = 0,98$
katra piestiprināta skrituļa izmantojuma koeficients . $y_2 = 0,96$
zobratu pāŗa izmantojuma koeficients . . . . $y_3 = 0,9$
ķēdes tītuvja spoles „ „ . . . . . . $y_4 = 0,95$

58. Gludināma tecele apgriežas 100 reizes minutē un tās diametrs ir 1,2 m. Pretestība, kuŗa jāpārvar caur gludināma priekšmeta piespiešanu, ir 45 kg. Cik darbspējas patērē gludināma tecele?

59. 5000 kg. smaga spara rata radiuss ir 2 m. Cik daudz darba atdod spara rats, ja tā apgriezienu skaits no 20 nokrīt uz 5?

60. Cik daudz spara dod spara rata čuguna gredzens, ja tā šķērsgriezuma laukums ir 0,045 m^2, un ja spara rats apgriežas 60 reizes minutē un tā vidējais diametrs ir 4 m.?

61. Dzensiksnas vilcējas daļas spriegums $T = 300$ kg., velkamās — $t = 150$ kg. Siksnas skriemelis apgriežas $n = 100$ reizes minutē un tā diametrs $d = 1000$ mm. Cik daudz zirgspēku pārvada siksna.

62. Braucamais krēsls kopā ar ceļamo priekšmetu sveŗ 500 kg. un tam jāceļ ar ātrumu 0,3 m/sec. Cik darbspējas patērē braucamais krēsls, ja uz berzi uziet $^1/_4$ HP, un cik reizes jāapgriežas virves tītuvja spolei, ja tās diametrs ir 220 mm.?

63. Cik smagam jābūt tvaika veserim, ja tas, izdarot 50 sitienus minutē, no 75 cm. augsta kritiena rada efektu 600 kgm/sec.?

64. Spara rata ārējais radiuss ir 2 m., iekšējais — 1,8 m. Spara rata vaiņags šķērsgriezumā ir taisnleņķis un sveŗ 6000 kg. Cik liels spars pie 80 un 160 apgriezieniem minutē?

65. Ar kaņepāju virvi dzīts ritulis apgriežas 100 reizes minutē un tā radiuss ir 1,5 m. Uz rituļa aploci darbojas 250 kg. liels spēks. Cik darbspējas dod minētais spēks?

66. Dzelzsēveļmašinas kustošā daļa sveŗ 1000 kg. un kustas ar 0,2 m. ātrumu; apstrādājamais priekšmets sveŗ 300 kg. Cik kustošā daļa patērē darba ēvelējot priekšmetu, ja tās berzes koeficients ir 0,07?

67. 90 tonnu smags dzelzsceļa vilciens, noskriedams no pieturas vietas 60 sekundēs 150 m., sasniedz ātrumu 10 m/sec. Kopējas kustības pretestības ir 0,005 no vilciena svara.

1) Cik darba jāpatērē pārvarot pretestības uz 150 m. gaŗa ceļa?
2) Cik darba vajaga kustības radīšanai?
3) Cik liela efekta vajaga līdz kustības radīšanai, vilciena iekustināšanai un braukšanai?
4) Cik lielam jābūt spiedienam uz katru riteni, ja bremzē 16 riteņus un ja vilciens apstājas pēc tvaika noslēgšanas noskriedams 50 m. (bremzes berzes koeficients = 0,4)?

68. Gulošas tvaika mašinas cilindra diametrs $D = 400$ mm.; virzuļa gājiens $S = 700$ mm.; apgriezienu skaits minutē $n = 85$. Cik liels kustošo daļu (virzuļa, virzuļa kāta, kreickopfa, klaņa un kloķa) spars, kuŗu kopējo svaru aprēķina pēc formulas $G = 20\,\text{kg} + 0{,}005\,D$ (D centimetros)?

Ūdensratu un turbiņu darbspēja.

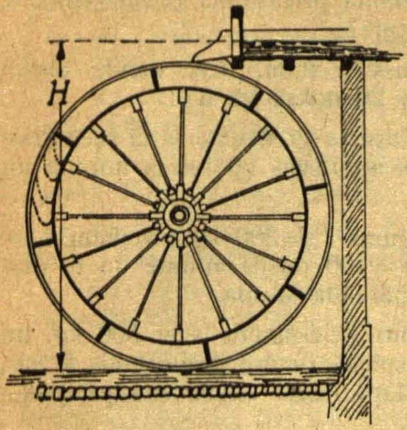


fig. 193.

Ja grib būvēt ūdensratu (fig. 193.) vaj turbini (fig. 194.), tad jāzin krituma augstums H un krituma ūdens caurteces daudzums sekundē Q, jeb krituma un ūdensrata vaj turbines efektivie zirgspēki. Darbspēju aprēķina kilogrammetros. Ja apzīmēsim kritumu ar H metros, t. i. starpību starp augšējo un apakšējo ūdens līmeni, ar Q — ūdens daudzumu kubikmetros sekundē un 1m³ — ūdens svaru ar $\gamma = 1000$ kg., tad

$$E = QH.\gamma \quad \text{un}$$

$$N = \frac{QH.\gamma}{75} HP.$$

Tā kā ūdensratā daudz zaudējumu, kā piem. ūdens berze, gaisa pretestība, tapu

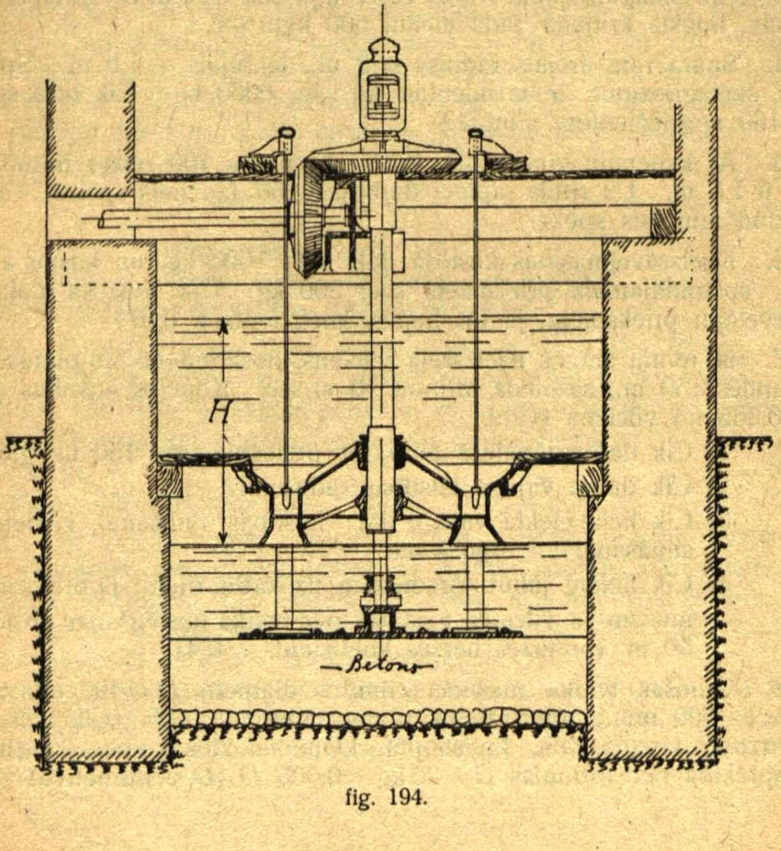


fig. 194.

berze u. t. t., tad noderīgais efekts, kādu attīsta ūdensrats vaj turbine, būs mazāks par to efektu, ko dod kritums. Apzīmējot ūdensrata vaj turbines noderīgo efektu ar N_e, dabūsim

$$N_e = \eta N.$$

Izmantojuma koeficients η ūdensratos svārstās starp 0,3 — 0,7, atkarībā no krituma augstuma, ūdens daudzuma un ratu sistemas. Turbinēs η ir lielāks un labi būvētās turbinēs η = 0,70 — 0,80.

69. Upes straumes izmantošanai jāierīko ūdensrats. Izpētot upi atrod, ka tanī var izmantot 4 m. kritumu un ka tās straume dod 20 m^3 ūdens minutē. Cik lielu darbspēju var attīstīt ūdensrats?

70. Fabrikas dzīšanai jābūvē turbine, kuŗas izmantojuma koeficients ir 0,70 un kuŗa rada 30 efektivus zirgspēkus. Kritums, kur turbine jābūvē, ir 5 m. Kādu ūdens daudzumu sekundē turbinei jāpievada.

71. Daugavas izmantojamais kritums pie Pļaviņām ir 15,75 m. un vidējais ūdens daudzums, kas šinī vietā notek $Q = 400$ m^3/sec. Enerģijas izmantošanai ietaisītas vairākas atsevišķas turbines; uz katras turbines vārpstas atrodas pa dinamomašinai. Cik darbspējas var attīstīt turbines, ja to izmantojuma koeficients ir 0,8? Cik elektriskas enerģijas var ražot turbiņu dzītas dinamomašinas, ja to izmantojuma koeficients ir 0,9?

72. Daugavas izmantojamais kritums pie Kokneses ir 21,5 un vidējais ūdens daudzums $Q = 432$ m^3/sec. Cik darbspējas var attīstīt turbines, ja to izmantojuma koeficients ir 0,8? Cik elektriskas enerģijas var ražot turbiņu dzītas dinamomašinas, ja to izmantojuma koeficients ir 0,9?

73. Daugavas izmantojamais kritums pie Aizkraukles $H = 8{,}50$ m. un vidējais ūdens daudzums $Q = 436$ m^3/sec. Cik darbspējas attīsta turbines, ja to izmantojuma koeficients ir 0,8? Cik elektriskas enerģijas dod turbiņu dzītas dinamomašinas, ja to izmantojuma koeficients ir 0,9?

74. Daugavas izmantojamais kritums pie Ķeguma $H = 15$ m. un vidējais ūdens daudzums $Q = 440$ m^3/sec. Cik darbspējas var attīstīt turbines, ja to izmantojuma koeficients ir 0,8, un cik elektriskas enerģijas dod turbiņu dzītas dinamomašinas, ja to izmantojuma koeficients ir 0,9?

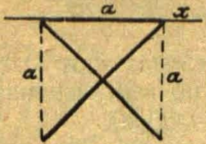
75. Daugavas izmantojamais kritums pie Doles $H = 12{,}7$ m. un ūdens daudzums $Q = 453$ m^3/sec. Cik darbspējas var attīstīt turbines, ja to izmantojuma koeficients ir 0,8, un cik elektriskas enerģijas var dot turbiņu dzītas dinamomašinas, ja to izmantojuma koeficients ir 0,9?

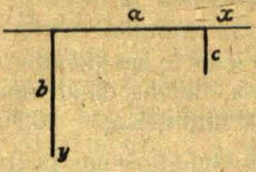
76. 40 kg. smags ķermenis apskrej ap aploci, kuŗas radiuss ir 5 m., 1 minutē. Cik liels ir centrifugalais spēks?

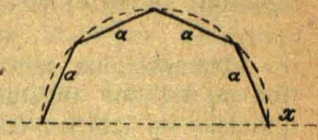
77. Spara rata gredzena vidējais radiuss ir 2,383 m. Rats sveŗ 6500 kg. un apgriežas 75 reizes minutē. Cik liels spara rata centrifugalais spēks, — centrifugalais paātrinājums un cik reizes centrifugalais spēks ir lielāks par spara rata svaru?

Atrast smaguma centra koordinatas uz uzrādītām asīm katrai no sekošām figurām, sastādītām ar vienmērīgu masu apkŗautām linijām.

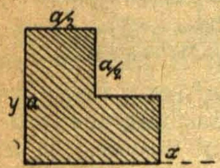

Nr. 78.

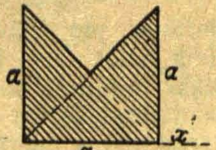

Nr. 79.

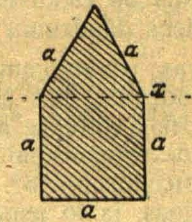

Nr. 80.

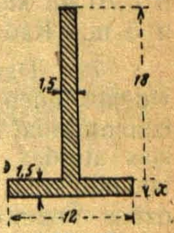

Nr. 81.

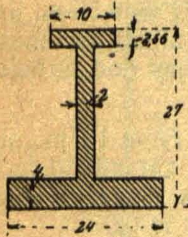
Atrast smaguma centra koordinatas uz uzrādītām asīm sekošiem ar vienmērīgu masu apkŗautiem laukumiem.

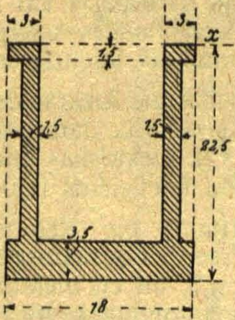

Nr. 82.

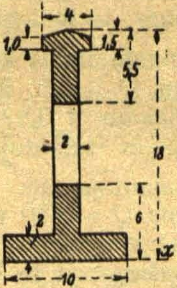

Nr. 83.

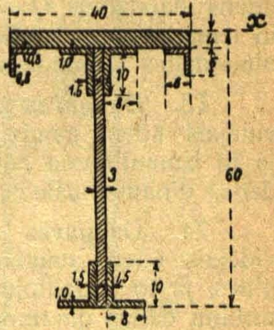

Nr. 84.


Nr. 85.


Nr. 86.


Nr. 87.


Nr. 88.


Nr. 89.

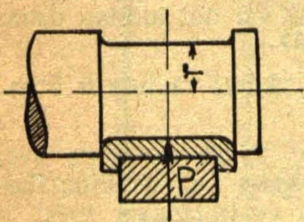


fig. 195.

90. Tapa, kuŗas radiuss ir r, spiež uz gultni ar spēku P (fig. 195.). Tapai griežoties rodas berze, tā tad spēka zaudējums. Cik liela ir berzes pretestība, ja berzes koeficients ir μ? Cik liels ir tapas berzes moments? Cik darbspējas patērē tapas berze?

91. Tapa spiež uz gultni ar spēku P ass virzienā (fig. 196.). Tapas ārējais radiuss ir r_a. Aprēķināt berzes momentu un darba zaudējumu:

1) ja berzes laukums ir tapas gredzens, kuŗa ārējais radiuss ir r_α un iekšējais — r_1;
2) ja berzes laukums ir ripa ar radiusu $r = r_\alpha$.

92. Aprēķināt bumbveidīgās tapas berzes momentu, ja bumbas radiuss ir r (fig. 197.).

93. Spara rata vaiņags sveŗ 2250 kg. un tā radiuss ir 1,5 m. Rats apgriežas 65 reizes minutē. Ar bremzes palīdzību spara ratu var apturēt pēc 2,5 apgriezieniem. Berzes koeficients kokam ar dzelzi $\mu = 0{,}5$. Ar cik lielu spēku jāspiež bremze uz berzes laukumu?

94. 150 tonnu = 150000 kg. smags dzelzsceļa vilciens jāaptur, bremzējot 10 asu riteņus. Bremze ar 200 cm² lielu laukumu spiež uz riteni ar 10 kg./cm². Vilciena ātrums ir 6 m/sec.; $\mu = 0{,}05$. Cik tālu vilciens noskries kamēr apstāsies?

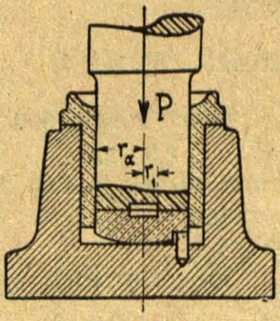


fig. 196.

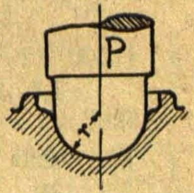


fig. 197.

95. Tvaika mašinas spara rats sveŗ $G = 4700$ kg., tā vārpsta $Q = 750$ kg. Tapas apgriežas 77 reizes minutē un to diametrs $d = 210$ mm. Cik darbspējas jāzaudē uz tapu berzi, ja $\mu = 0{,}5$?

96. 50 m. gaŗa dzelzs vārpsta apgriežas 140 reizes minutē un tās diametrs ir 120 mm. Cik darbspējas iet zudumā vārpstas dēļ berzes gultnēs, ja $\mu = 0{,}07$?

97. Tapas, kuŗas diametrs ir 14 cm., ass virzienā spiež 9000 kg. liels spēks. Tapa apgriežas 110 reizes minutē. Cik daudz darbspējas iet zudumā berzes dēļ, ja tapa jauna un ja $\mu = 0{,}07$?

B. Uzdevumu atrisinājumi.

1. $s = v \, . \, t = 10\,(2 \, . \, 60 \, . \, 60 + 20 \, . \, 60) = 10 \, . \, 8400 = 84000$ m. $= 84$ klm.

2. $v = \frac{s}{t} = \frac{15}{10} = 1{,}5$ m.

3. $v = \frac{s}{t} = \frac{0{,}6}{\frac{60}{45}} = 0{,}45$ m.

4. Zāģu gaters, izdarot 150 griezienus, apgriežas 300 reizes minutē; vienreiz apgriežas $t = \frac{60}{300}$ sekundēs $v = \frac{s}{t} = \frac{0,85}{\frac{60}{300}} = 4,25$ m.

5. $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi \,.\, r}{28 \,.\, 24 \,.\, 60 \,.\, 60} = \frac{2\pi \,.\, 50000}{2419200} \cong 0,13$ jūdzes.

6. $t = \frac{s}{v} = \frac{1852 \,.\, 400}{10} = 74080$ sec. $= 20,6$ stundās.

7. $v = \frac{s}{t} = \frac{180}{30} = 6$ m.

8. $v = \frac{s}{t} = \frac{200}{5 \,.\, 60} = \frac{200}{300} = 0,66$ m/sec.

9. $t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi \,.\, r}{v} = \frac{2\pi \,.\, 2,4}{2,1} \cong 7,2$ sec.

10. $t = \frac{s}{v} = \frac{(1500 + 2 \,.\, 40) \,.\, 500}{1,5 \,.\, 150} + \frac{(1500 + 2 \,.\, 40) \,.\, 500}{1,5 \,.\, 300} =$
$= 3511 + 1755 = 5266$ sec. $= 1$ st. 27 min. 46 sek. $\cong 1$ st. 28 min.

11. $t = \frac{s}{v} = \frac{800 \,.\, 1200}{2 \,.\, 170} = 2824$ sec. $\cong 47$ min.

12. Novirpāšanai vajadzīgs $t = \frac{s}{v} = \frac{(200 + 2 \,.\, 12)\, \pi \,.\, 400}{150 \,.\, 0,5} \cong 1$ st. 30 min., izurbšanai $t = \frac{s}{v} = \frac{200 \,.\, \pi \,.\, 400}{150 \,.\, 0,5} = 56$ min.

13. $t = \frac{s}{v} = \frac{\frac{35 \,.\, 20 \,.\, \pi \,.\, 26}{0,25}}{100} = 2296$ sec. $\cong 38$ min.

14. Blakus stāvošu skaidu daudzums: $0,5 : 0,004 = 125$. Slidas noietais ceļš vienreiz laukumu noēvelējot: $125 : 2,140 = 267,5$. Vajadzīgais laiks $t = \frac{s}{v} = \frac{267,5}{0,1} = 2675$ sec. $\cong 45$ min.

15. $v = \frac{2\pi r \,.\, n}{1000 \,.\, 60} = \frac{\pi \,.\, 900 \,.\, 100}{1000 \,.\, 60} = 4,7$ m/sec.

16. $n = \frac{v \,.\, 60}{\pi \,.\, d} = \frac{5 \,.\, 60}{\pi \,.\, 0,75} \cong 127.$

17. $2\, r = \frac{100 \,.\, 60\, v}{\pi \,.\, n} = \frac{100 \,.\, 60 \,.\, 10}{\pi \,.\, 100} = 191$ cm.

18. $n = \frac{v \,.\, 60}{\pi \,.\, d} = \frac{0,13 \,.\, 60 \,.\, 100}{\pi \,.\, 7} \cong 36$ reizes.

19. $t=\frac{60}{n}\cdot\frac{200}{0,5}=4800$ sec. $=1$ st. 20 min.

20. 1) $n=\frac{v\,.\,60}{2\pi\,.\,r}=\frac{0,8\,.\,60}{2\pi\,.\,0,410}=18,7.$

2) $n_1=\frac{0,8\,.\,60}{2\pi\,.\,0,410\,.\,72}=0,26.$

3) $v=\frac{2\pi\,.\,r\,.\,n}{60}=\frac{2\pi\,.\,26\,.\,0,26}{\frac{60\,.\,100}{4}}=0,00175$ m/sec.

4) $t=\frac{s}{v}=\frac{5}{0,00175}=2856$ sec $\cong 48$ min.

21. Skrituli *a* griež ar kloķa vārpstu. Skritulis apgriežas $n=\frac{60\,.\,0,8}{2\pi\,.\,0,41\,.\,25}=0,74$ reizes. Riču ātrums $v=\frac{2\pi\,.\,0,15\,.\,0,74}{60}=0,0116$ m/sec. Priekšmeta 3 m. sāniskai pabīdīšanai vajadzīgs laiks

$$t=\frac{3}{0,0116}\cong 260 \text{ sec.} = 4,3 \text{ min.}$$

22. Virpu sāniskais pabīdījums pēc vienreizējas apgriešanās ir $\frac{25,4}{48}\cong 0,5$ mm., apgriezienu skaits minutē $n=\frac{0,13\,.\,60}{\pi\,.\,0,08}=31$. Vienreizējam apgriezienam ir vajadzīgs laiks $t_1=\frac{60}{n}=\frac{60}{31}\cong 2$ sec. Lai visu vārpstu novirpātu, tai jāapgriežas $\frac{3000}{0,5}=6000$ reizes. Novirpāšanai vajadzīgs laiks $t=6000\,.\,2=12000$ sec. $=3$ st. 20 min.

23. $p=\frac{v^2}{2s}=\frac{100^2}{2\,.\,500}=10$ m.

24. $s=3\,.\,7+5\,.\,\frac{7^2}{2}=21+122,5=143,5$ m.

25. $s=\frac{2,5+7,5}{2}\,.\,180=900$ m.

26. $s=\frac{9^2-5^2}{2\,.\,3}=9,333$ m.

27. $t=\frac{v-v_0}{p}=\frac{24-2}{2}=11$ sec.

28. 1) $v=v_0+pt=10-0,5\,.\,15=2,5$ m/sec.

2) $t=\frac{v_0}{p}=\frac{10}{0,5}=20$ sec.

3) $s = \frac{v_0^2}{2p} = \frac{10^2}{2 \cdot 0,5} = 100$ m.

29. 1) $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 40} \cong 28$ m/sec.

2) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40}{9,81}} = 2,85$ sec.

30. $v = v_0 - pt = 0;\ v = pt = 16.$

$$s = \frac{v_0}{2} \cdot t = 150.$$

$$t = \frac{s}{\frac{v_0}{2}} = \frac{150}{\frac{16}{2}} \cong 19 \text{ sec.}$$

$$p = \frac{v_0}{t} = \frac{16}{19} \cong 0,842 \text{ m/sec}^2.$$

31. $\varphi = \frac{d_1}{d_2} = \frac{500}{650} = 0,77.$

$\varphi = \frac{n_2}{n_1}$ jeb $n_2 = \varphi n_1 = 0,77 \cdot 200 = 154$ reizes minutē.

32. $\varphi = \frac{n_2}{n_1} = \frac{35}{120} = \frac{1}{3,43}.$

Ja pieņem zobratu pārnesumu $\varphi_2 = \frac{1}{3}$, tad dzensiksnu pārnesums

$$\varphi_1 = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{1}{3,43}}{\frac{1}{3}} = 1,14,$$

dzenamā skriemeļa diametrs

$$d_2 = \varphi_1 \cdot d_1 = 1,14 \cdot 600 \cong 685 \text{ mm.}$$

33. No formulas $d_1 n_1 = d_2 n_2$ dabūjam

$$d_2 = \frac{d_1 n_1}{n_2} = \frac{1000 \cdot 100}{900} \cong 110 \text{ mm.}$$

Siksnas vaj skriemeļu ātrums

$$v = \frac{\pi \cdot d_1 n_2}{60} = \frac{\pi \cdot 1000 \cdot 100}{1000 \cdot 60} \cong 5,2 \text{ m/sec.},$$

$$\text{pārnesums } \varphi = \frac{n_2}{n_1} = \frac{900}{100} = 9.$$

34. Apzīmēsim starpvārpstas apgriezienu skaitu ar n_2 un ēveļmašinas vārpstas — ar n_3;

$\frac{n_3}{n_2}=\frac{d_3}{d_4}$; $\frac{n_2}{n_1}=\frac{d_1}{d_2}$; vairojot pirmo nolīdzinājumu ar otru dabūjam

$$\frac{n_3}{n_2}\cdot\frac{n_2}{n_1}=\frac{d_3}{d_4}\cdot\frac{d_1}{d_2};\ n_3=\frac{n_1\,d_1\,d_3}{d_2\,d_4}=\frac{80\,.\,100\,.\,70}{35\,.\,60}=266 \text{ reizes minutē.}$$

35. No formulas $v=\frac{\pi D\,.\,n_3}{60}$ dabūjam

$$n_3=\frac{60\,.\,v}{\pi D}=\frac{60\,.\,20}{\pi\,.\,0{,}3}\cong 1270 \text{ reizes minutē.}$$

Apzīmējot pārvadu pārnesumu ar φ_1 un φ_2, to kopējo pārnesumu φ dabūjam

$$\varphi=\varphi_1\cdot\varphi_2=\frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{n_3}{n_2}=\frac{n_3}{n_1}=\frac{1270}{200}=6{,}35,$$

tā kā $4^0/_0$ ir ātruma zaudējums, tad

$$\varphi=6{,}35\,.\,1{,}04=6{,}6.$$

Tā kā ātrumi abiem pārvadiem vienādi, tad arī $\varphi_1=\varphi_2$

$$\text{un } \varphi_1\,\varphi_2=6{,}6;\ \varphi_1=2{,}57;\ \varphi_2=2{,}57;$$

$$n_2=\frac{n_1}{2{,}57}=\frac{1270}{2{,}57}=494;$$

$$v_1=\frac{\pi d_4 n_3}{60};\ d_4=\frac{v_1\,.\,60}{\pi n_3}=\frac{6\,.\,60}{3{,}14\,.\,127}\cong 0{,}09 \text{ m.} \cong 9 \text{ cm.};$$

$$d_3=\varphi_2 d_4=2{,}57\,.\,9=23{,}13 \text{ cm.}$$

Ja izvēlamies $d_2=12$ cm., tad

$$d_1=\varphi_1\,.\,12=30{,}85 \text{ cm.}$$

36. $$z_2=\frac{n_1\,z_1}{n_2}=\frac{96\,.\,60}{144}=40.$$

$$d_1=\frac{z_1\,t}{\pi}=\frac{60\,.\,75}{3{,}14}\cong 1433 \text{ mm.}$$

$$d_2=\frac{z_2 t}{\pi}=\frac{40\,.\,75}{\pi}\cong 955 \text{ mm.}$$

$$v=v_1=v_2=\frac{\pi d_1\,n_1}{60}=\frac{\pi\,.\,1{,}433\,.\,96}{60}\cong 7{,}2 \text{ m/sec.}$$

$$w_1=\frac{\pi n_1}{30}=\frac{\pi\,.\,96}{30}\cong 10.$$

$$w_2=\frac{\pi n_2}{30}=\frac{\pi\,.\,144}{30}\cong 15.$$

37. Ņemot vērā formulu $n_1 z_1 = n_2 z_2$ šim gadījumam sastādīsim sekošus nolīdzinājumus: $n_1 z_1 = n_2 z_2$ un $z_3 n_2 = z_4 n_3$, dalot vienu ar otru dabūsim:

$$\frac{z_4 n_3}{z_1 n_1} = \frac{z_3 n_2}{z_2 n_2} \text{ un}$$

$$z_4 = \frac{z_1 n_1 z_3}{z_2 n_3} = \frac{75 . 75 . 8}{30 . 60} = 25.$$

Cilindrisko zobratu iedaļas aploces diametri būs:

$$d_1 = \frac{z_1 t}{\pi} = \frac{75 . 75}{\pi} \cong 1790 \text{ mm.}$$

$$d_2 = \frac{z_2 t}{\pi} = \frac{30 . 75}{\pi} \cong 716{,}5 \text{ mm.}$$

Konisko zobratu vidējie iedaļu aploces diametri:

$$dm_3 = \frac{z_3 t}{\pi} = \frac{75 . 62}{\pi} \cong 1480{,}5 \text{ mm.}$$

$$dm_4 = \frac{z_4 t}{\pi} = \frac{25 . 62}{\pi} \cong 493{,}5 \text{ mm.}$$

Starpvārpstas apgriezienu skaits

$$n_2 = \frac{n_1 z_1}{z_2} = \frac{8 . 75}{30} = 20.$$

38. $$c = \frac{2 s n}{60} = \frac{2 . 0{,}5 . 100}{60} = 1{,}66 \text{ m/sec.}$$

39. $$s = \frac{60 c}{2 n} = \frac{60 . 1{,}5}{2 . 25} = 1{,}8 \text{ m.}$$

40. $$n = \frac{60 c}{2 s} = \frac{60 . 0{,}2}{2 . 0{,}2} = 30.$$

41. 1) $$c = \frac{2 s n}{60} = \frac{2 . 0{,}7 . 80}{60} = 1{,}86 \text{ m.}$$

2) $$v = \frac{2 \pi R n}{60} = \frac{2 \pi . 0{,}35 . 80}{60} \cong 2{,}93 \text{ m.}$$

3) $$v_1 = \frac{2 \pi R_1 n}{60} = \frac{2 \pi . 5 . \frac{0{,}7}{2} . 80}{60} = 14{,}66 \text{ m.}$$

42. $$v = \frac{2 \pi \mathrm{R} n}{60} = \frac{2 \pi . 0{,}3 . 90}{60} = 2{,}83 \text{ m/sec.}$$

$$c = \frac{2 s n}{60} = \frac{2 . 0{,}6 . 90}{60} = 1{,}8 \text{ m/sec.}$$

43. Lodes skriešanas laiks

$$t = \frac{2\,v\,sin\,\alpha}{g} = \frac{2\,.\,350\,sin\,35^0}{9{,}81} = 41 \text{ sec.};$$

lodes noskrietais attālums

$$l = \frac{v^2\,sin\,2\,\alpha}{g} = \frac{350^2\,.\,sin\,2\,.\,35^0}{9{,}81} = 11700 \text{ m.};$$

lodes pacelšanās augstums

$$H = \frac{v^2\,sin^2\,\alpha}{2\,g} = \frac{350^2\,.\,0{,}57^2}{2\,.\,9{,}81} = 2025 \text{ m.}$$

44. Attālums, kuŗu noskries lode, sasniegs maksimumu pie

$$sin\,2\,\alpha = sin\,2\,.\,45^0 = 1;$$

$$l\,max = \frac{v^2\,sin\,2\,\alpha}{g} = \frac{350^2\,.\,1}{9{,}81} = 12480 \text{ m.}$$

45. Elevacijas leņķi dabūjam no nolīdzinājuma

$$\frac{v^2\,sin\,2\,\alpha}{g} = \frac{v^2\,sin^2\,\alpha}{2\,g}, \text{ tā tad } 2\,sin\,2\,\alpha = sin^2\,\alpha$$

un tā kā $sin^2\,\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$,

tad $4\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha = sin^2\,\alpha$; $4\,cos\,\alpha = sin\,\alpha\;tg = 4$; $\alpha = 76^0$.

Granatas noskrietais attālums

$$l = \frac{v^2\,sin\,2\,\alpha}{g} = \frac{300^2\,.\,sin\,2\,.\,76^0}{9{,}81} = \frac{300\,.\,cos\,62^0}{9{,}81} = 4300 \text{ m.}$$

46. $$x = vt\,cos\,\alpha = 4v\,cos\,\alpha = 1000;\; y = vt\,sin\,\alpha - \frac{1}{2}\,gt^2;$$

$$y + \frac{1}{2}\,gt^2 = v\,t\,sin\,\alpha;\; 150 + 0{,}5\,.\,9{,}81\,.\,4^2 = 4\,v\,sin\,\alpha;$$

$$tg\,\alpha = \frac{4\,v\,.\,sin\,\alpha}{4\,v\,cos\,\alpha} = \frac{150 + 0{,}5\,.\,9{,}81\,.\,4^2}{1000} = 0{,}228;\; \alpha = 12^0\,50'.$$

Granatas ātrums $v = \frac{1000}{4\,cos\,12^0\,50'} = 256{,}4$ m.

47. $A = P\,.\,s = 2000\,.\,8 = 16000$ kgm.

48. $$N = \frac{P\,.\,v}{75} = \frac{1500\,.\,15}{60\,.\,75} = 5\;HP;$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{15}{60} = 0{,}25 \text{ m/sec.}$$

49. $$P = \frac{A}{s} = \frac{10000}{20} = 500 \text{ kg.}$$

50. $$W = P\,.\,v = P\,.\,\frac{s}{t} = 1500\,.\,\frac{15}{2\,.\,60} = 187{,}5 \text{ kgm.}$$

51. $N = \frac{P \cdot v}{75} = \frac{6000 \cdot 15}{60 \cdot 75} = 20\ HP.$

52. $N = \frac{P \cdot v}{75} = \frac{100 \cdot 1000 \cdot 25}{3600 \cdot 75} \cong 9\ HP.$

53. Ūdens patēriņš stundā: $\frac{30000 \cdot 100}{10 \cdot 1000} = 300$ m.^{3},

sekundē $Q = \frac{300}{60 \cdot 60} = 0{,}084$ m.^{3}=84 litri, ūdens jāpaceļ $H = 45 + 4{,}4 = 49{,}4$ m. augstu, tā kā pumpja izmantojuma koeficients $\eta = 0{,}8$, tad

$$N = \frac{Q \cdot H \cdot 1000}{75 \cdot \eta} = \frac{0{,}084 \cdot 49{,}4}{75 \cdot 0{,}8} \cong 70\ HP.$$

54. Pumpja virzuļa laukums $F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 3{,}14$ dcm.^{2}, tā tad vienā gājienā pumpim jāpaceļ $3{,}14 \cdot 4 = 12{,}56$ dcm.$^3 = 12{,}56$ kg.

Pumpis pacels 19 dubultgājienos 1 minutē teoretiski $12{,}56 \cdot 2 \cdot 19 = 477{,}3$ kg.; īstais ūdens daudzums, ko pumpis pacels, būs: $477{,}3 \cdot 0{,}82 \cong 391$ kg.

Ūdens jāpaceļ $50 + 4 = 54$ m. augstu, tā tad jāpadara darbs sekundē: $A = \frac{P \cdot s}{60} = \frac{391 \cdot 54}{60} = 352$ kgm., jeb zirgspēkos $N = \frac{A}{75} = \frac{352}{75} = 4{,}7\ HP.$

55. Virzuļa laukums, uz kuŗa spiež tvaiks, ir

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 30^2}{4} = 706{,}86 \text{ cm.};$$

spiediens uz virzuli $P = 706{,}86 \cdot 6 = 4241$ kg.;

virzuļa ātrums $v = \frac{2 S \cdot n}{60} = \frac{2 \cdot 0{,}7 \cdot 80}{60} = 1{,}87$ m., tā tad

$$N = \frac{P \cdot v}{75} = \frac{4241 \cdot 1{,}87}{75} \cong 106\ HP.$$

56. Tvaika mašinas un ceļamo mechanismu izmantojuma koeficients $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 = 0{,}85 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 = 0{,}735.$

Tvaika mašinas darbspēja

$$N = \frac{Q \cdot v.}{75 \cdot \eta} = \frac{700 \cdot 0{,}3}{75 \cdot 0{,}735} \cong 4\ HP,$$

lai gan teoretiski vajadzīgs tikai

$$N = \frac{Q \cdot v}{75} = \frac{700 \cdot 0{,}3}{75} = 2{,}8\ HP.$$

57. Mechanismam jāceļ puse no svara, t. i. 12500 kg., jo otru pusi nes piestiprinātais ķēdes gals; ķēdi velk ar spēku

$$P = \frac{12500}{\eta_1\ \eta_2^2} = \frac{12500}{0{,}98 \cdot 0{,}96^2} \cong 13900 \text{ kg.}$$

Kopējais zobratu un ķēdes spoles izmantojuma koeficients

$$\eta = \eta_3 \,.\, \eta_3 \,.\, \eta_4 = 0{,}9 \,.\, 0{,}9 \,.\, 0{,}95 \cong 0{,}75.$$

Svara celšanai vajadzīgs

$$N = \frac{P \,.\, v}{\eta \,.\, 75} = \frac{13900 \,.\, 5}{60 \,.\, 75 \,.\, 0{,}75} = 20{,}6\ HP \cong 21\ HP.$$

58. Gludināmā tecele pa savu aploci noskrien vienā sekundē

$$s = \frac{\pi \,.\, d\, n}{60} = \frac{\pi \,.\, 1{,}2 \,.\, 100}{60} = 6{,}28 \text{ m}.$$

$$N = \frac{P \,.\, s}{75} = \frac{45 \,.\, 6{,}28}{75} \cong 3{,}8\ HP.$$

59. Sākuma ātrums $v = \frac{2\pi\, r \,.\, n}{60} = \frac{2\pi \,.\, 2 \,.\, 20}{60} \cong 4{,}19$ m/sec., beigu ātrums $v_1 = \frac{2\pi \,.\, r \,.\, n_1}{60} = \frac{2\pi \,.\, 2 \,.\, 5}{60} \cong 1{,}04$ m.

$$P \,.\, s = m\frac{v^2}{2} - m\frac{v_1^2}{2} = \frac{G}{g} \,.\, \frac{v^2}{2} - \frac{G}{g} \,.\, \frac{v_1^2}{2} = \frac{5000}{9{,}81 \,.\, 2}(4{,}19^2 - 1{,}04^2) \cong 3960 \text{ kgm}.$$

60. $P \,.\, s = \frac{G}{g} \,.\, \frac{v^2}{2}$ čuguna specifiskais svars $\gamma = 7{,}3$, t. i. 1 dcm^3. sver 7,3 kg., spara rata vaiņaga svars $G = \pi\, d \,.\, F \,.\, \gamma = \pi \,.\, 40 \,.\, 4{,}5 \,.\, 7{,}3 = 4130$ kg.; smaguma punkta ātrums $v = \frac{\pi d \,.\, n}{60} = \frac{\pi \,.\, 4 \,.\, 60}{60} = 12{,}56$ m/sec., tā tad spara rata gredzena spars ir $P \,.\, s = \frac{G}{g} \,.\, \frac{v^2}{2} = \frac{4130}{9{,}81} \,.\, \frac{12{,}56^2}{2} \cong 33217$ kgm., darbspēja zirgspēkos $\frac{33217}{75} = 443\ HP.$

61. Siksnas ātrums ir $v = \frac{\pi d n}{60} = \frac{\pi \,.\, 1 \,.\, 100}{60} \cong 5{,}23$ m/sec.

Siksna velk ar spēku $P = T - t = 300 - 150 = 150$ kg. un pārvada

$$N = \frac{P \,.\, v}{75} = \frac{150 \,.\, 5{,}23}{75} \cong 10{,}5\ HP.$$

62. Neievērojot berzi braucamais krēsls patērē

$$N_1 = \frac{P \,.\, v}{75} = \frac{500 \,.\, 0{,}3}{75} = 2\ HP.$$

Viss patēriņš $N = 2 + 0{,}25 = 2{,}25\ HP.$

Tītuvja spoles apgriezienu skaits $n = \frac{60 \,.\, v}{\pi\, d} = \frac{60 \,.\, 0{,}3}{\pi \,.\, 0{,}22} \cong 26$ reizes minutē.

63. Vesera ātrums $v = \frac{50 \,.\, 0{,}75}{60} \cong 0{,}625$ m/sec.

Vesera svars $P = \frac{E}{v} = \frac{600}{0{,}625} \cong 960$ kg.

64. Spara rata vidējais radiuss $r_m = \frac{2+1,8}{2} = 1,9$ m.
Ātrums uz aploci ar $r_m = 1,9$ un pie $n = 80$

$$v = \frac{2\pi\, r_m\, n}{60} = \frac{2\,.\,\pi\,.\,1,9\,.\,80}{60} = 16 \text{ m/sec.}$$

Spars $P\,.\,s = \frac{G}{g}\,.\,\frac{v^2}{2} = \frac{6000}{9,81}\,.\,\frac{16^2}{2} \cong 78336$ kgm.

Ja $n = 160$

$$v = \frac{2\pi\,.\,1,9\,.\,160}{60} = 32 \text{ m.}$$

$$P\,.\,s = \frac{6000}{9,81}\,.\,\frac{32^2}{2} \cong 313344 \text{ kgm.}$$

65. Ritu|u ātrums $v = \frac{2\pi\,.\,r\,.\,n}{60} = \frac{2\pi\,.\,1,5\,.\,100}{60} = 15,7$ m.,

$$E = P\,.\,v = 250\,.\,15,7 = 3925 \text{ kgm/sec.,}$$

$$N = \frac{P\,.\,v}{75} = \frac{3925}{75} \cong 52\ HP.$$

66. Kopējais svars ir $1000 + 300 = 1300$ kg.
Berzes pretestība būs $W = 1300\,.\,0,07 = 91$ kg.
Darbs, ko patērē pārvarot berzi

$$W\,.\,v = 18,2 \text{ kg/sec.;}$$

$$N = \frac{18,2}{75} = 0,24\ HP.$$

67. 1) Pārvaramā pretestība ir $\frac{90000}{20} = 450$ kg.
tā tad

$$\frac{450\,.\,150}{75\,.\,60} = 15\ HP.$$

2) $A = \frac{Mv^2}{2} = \frac{90000}{9,81}\,.\,\frac{10^2}{2} = 458700$ kgm.

3) Kustības radīšanai vajaga

$$\frac{458700}{75\,.\,60} \cong 102\ HP,$$

vilciena iekustināšanai vajaga

$$15 + 102 = 117\ HP,$$

braukšanai ar 10 m/sec. ātrumu

$$\frac{450\,.\,10}{75} = 60\ HP.$$

4) Iekrātais darbs vilcienam kustoties

$$A = 458700 \text{ kgm.},$$

tā tad uz riteņu aplocēm pretestība ir

$$\frac{458700}{50} = 9174 \text{ kg.}$$

Tā kā vilciena pretestība ir 450 kg., tad bremzēšanai paliek 9174—450 = 8724 kg. Spiediens uz bremzējamiem riteņiem

$$\frac{8724}{0,4} = 21810 \text{ kg.}$$

uz katru riteni spiediens ir $\frac{21810}{16} \cong 1363$ kg.

68. Kloķa ātrums $v = \frac{2\pi R . n}{60} = \frac{\pi . S . n}{60} = \frac{\pi . 0,7 . 85}{60} = 3,12$ m/sec.;
kustošo daļu svars $G = 20 + 0,005 . 40^3 = 340$ kg.,
kustošo masu spars $A = \frac{G}{g} . \frac{v^2}{2} = \frac{340}{9,81} . \frac{3,12^2}{2} \cong 170$ kgm.

69. Upes kritums var dot $N = \frac{Q . H . \gamma}{75} = \frac{20 . 4 . 1000}{60 . 75} \cong 18\ HP$.
Pieņemot, ka šinī gadījumā izmantojuma koeficients būs vislielākais, t. i. 0,70, dabūsim, ka ūdens rata noderīga darbspēja $N_e = N . \eta = 18 . 0,70 = 12,6\ HP$.

70. $N = \frac{N_e}{\eta} = \frac{30}{0,7} \cong 43\ HP$; $Q = \frac{N . 75}{H . \gamma} = \frac{43 . 75}{5 . 1000} = 0,645$ m³/sec.

71. Turbines $N_e = \frac{QH . \gamma}{75} . \eta = \frac{400 . 15,75 . 1000}{75} . 0,8 \cong 67000\ HP$
dinamomašinas dod
$N_d = N_e . \eta_1\ 736 = 67000 . 0,9 . 736 = 44500000\ W = 44500\ KW$.

72. $N_e = \frac{QH . \gamma}{75} . \eta = \frac{432 . 21,5 . 1000}{75} . 0,8 = 99000\ HP$;
$N_d = N_e\ \eta_1 . 736 = 99000 . 0,9 . 736 = 65500000\ W$ (vati) =
= 65500 KW (kilovati).

73. $N_e = \frac{436 . 8,5 . 1000}{75} . 0,8 = 39600\ HP$;
$N_d = 39600 . 0,9 . 736 = 26300000\ W = 26300\ KW$.

74. $N_e = \frac{440 . 15 . 1000}{75} = 0,8 = 70400\ HP$;
$N_d = 70400 . 0,9 . 736 = 46600000\ W = 46600\ KW$.

75. $N_e = \frac{453 . 12,7 . 1000}{75} . 0,8 = 61500\ HP$;
$N_d = 61500 . 0,9 . 736 = 40800000\ W = 40800\ KW$.

76. Centrifugalais spēks $P = m \,.\, p$, kur m ir masa un p — paātrinājums;

$$m = \frac{G}{g}, \quad p = \frac{4\pi^2 R}{t^2}, \text{ tā tad } P = \frac{G}{g} \cdot \frac{4\pi^2 R}{t^2} = \frac{40}{9{,}81} \cdot \frac{4\pi^2 \,.\, 5}{60^2} = 0{,}22 \text{ kg.}$$

77. Aploces ātrums $v = \frac{2\pi R \,.\, n}{60} = \frac{2\pi \,.\, 2{,}383 \,.\, 75}{60} \cong 18{,}9$ m/sec.;

centrifugalais spēks $P = m \,.\, \frac{v^2}{R} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{6500}{9{,}81} \cdot \frac{18{,}9^2}{2{,}383} \cong 97500$ kg.;

centrifugalais paātrinājums $p = \frac{v^2}{R} = \frac{18{,}9^2}{2{,}383} = 150$ m/sec^2;

tā ka centrifugalais spēks būs $\frac{150}{9{,}82} \cong \frac{150}{10} = 15$ reizes lielāks.

78. Smaguma centra koordinatas ir:

$$x_0 = \frac{\Sigma (mx)}{\Sigma m}; \quad y_0 = \frac{\Sigma (my)}{\Sigma m}; \quad z_0 = \frac{\Sigma (mz)}{\Sigma m}.$$

Tā kā figura guļ vienā plāksmā, tad $z_0 = 0$. Smaguma centrs atrodas uz simetrijas ass y, kuŗa iet caur a vidu un paralela b, tādēļ $x_0 = 0$. Tā kā masa ir proporcionala liniju gaŗumiem a un b, tad $m_1 = \alpha a$ un $m_2 = \alpha b$. Smaguma centrs atradīsies uz y ass atstatu no ass z

$$y_0 = \frac{\Sigma (my)}{\Sigma m} = \frac{\alpha \,.\, a \frac{a}{2} + \alpha b \,.\, 0 + \alpha \,.\, b \,.\, 0}{\alpha a + \alpha b + \alpha b} = \frac{a^2}{a + 2b}.$$

79. $z_0 = 0$; $x_0 = 0$; $y_0 = \frac{\Sigma (my)}{\Sigma m}$. Tā kā masas proporcionalas liniju gaŗumiem, tad masas vietā varam likt liniju gaŗumus:

$$y_0 = \frac{2 \frac{a}{2} \sqrt{2 a^2}}{a + 2a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} = \frac{a \,.\, 1{,}414}{1 + 2 \,.\, 1{,}414} = 0{,}369\, a.$$

80.
$$x_0 = \frac{\frac{a}{2} \cdot a + ca}{a + b + c} = \frac{a(a + 2c)}{2(a + b + c)},$$

$$y_0 = \frac{\frac{b}{2} \cdot b + \frac{c}{2} \cdot c}{a + b + c} = \frac{b^2 + c^2}{2(a + b + c)}.$$

81. $z_0 = 0$; $x_0 = 0$;

$y_0 = \frac{\Sigma(my)}{\Sigma m} = \frac{y_1 m + y_2 m + y_3 m + y_4 m}{4m}$, kur y_1, y_2, y_3, y_4 ir atsevišķo liniju smaguma centra ordinatas, m — linijas a masa. Tā kā $y_1 = y_3$ un $y_2 = y_4$, tad

$$y_0 = \frac{2y_1 + 2y_2}{4} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Atrodot y_1 un y_2 izteiksmi ar a

$$y_1 = \frac{a}{2} \sin 67{,}5^\circ \text{ un } y_2 = \frac{a \sin 67{,}5 + \frac{a \sin 67{,}5^\circ}{\sin 45^\circ}}{2}$$

dabūjam $y_0 = \dfrac{\dfrac{a}{2} \sin 67{,}5^\circ + \dfrac{a \sin 67{,}5^\circ + a \dfrac{\sin 67{,}5^\circ}{\sin 45^\circ}}{2}}{2} = 0{,}789a.$

82. Tā kā figura atrodas vienā plāksmā, tad $z^0 = 0$; ja apzīmējam ar F laukumu, tad koordinatas laukumiem būs $x_0 = \dfrac{\Sigma(mx)}{\Sigma m} = \dfrac{\Sigma(F \,.\, x)}{\Sigma F}$,

$$y_0 = \frac{\Sigma my}{\Sigma m} = \frac{\Sigma(F \,.\, y)}{\Sigma F}.$$

Šinī gadījumā $x_0 = y_0$.

$$\Sigma F = 3\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2;$$

$$\Sigma(F \,.\, x) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 . -\frac{a}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 . \frac{a}{4} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 . \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{4}\right) = \frac{5}{16}a^3;$$

$$x_0 = y_0 = \frac{\frac{5}{16}a^3}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{5}{12}a.$$

83. $x_0 = 0$, jo ir simetrijas ass y.

$$y_0 = \frac{\Sigma(F \,.\, y)}{\Sigma F};$$

$$\Sigma F = \frac{3}{4}a^2;$$

$$\Sigma(F \,.\, y) = a^2 \,.\, \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{3} \,.\, \frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{2} - \frac{5a^3}{24} = \frac{7}{24}a^3;$$

$$y_0 = \frac{\frac{7}{24} \,.\, a^3}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{7}{18}a.$$

84. $x_0 = 0$; $\Sigma F = a^2 + \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$;

$$\Sigma(F \,.\, y) = a^2 \,.\, \frac{1}{2}a + \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3} \,.\, \frac{a}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{3}{8}a^3.$$

$$y_0 = \frac{\frac{3}{8}a^3}{a^2\left(1+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)} = \frac{3}{26}a\left(4-\sqrt{3}\right).$$

85. $$y_0 = \frac{(18-1{,}5)\,.\,1{,}5\left(\frac{18-1{,}5}{2}+1{,}5\right)+12\,.\,1{,}5\,.\,\frac{1{,}5}{2}}{(18-1{,}5)\,.\,1{,}5+12\,.\,1{,}5} = 5{,}96.$$

86. $$y_0 = \frac{24\,.\,4\,.\frac{4}{2}+(27-4-2{,}66)\,.\,2\,.\left(\frac{27-4-2{,}66}{2}+4\right)+10\,.\,2{,}66\left[(27-2{,}66)+\frac{2{,}66}{2}\right]}{24\,.\,4+(27-4-2{,}65)\,.\,2+10\,.\,2{,}66} = 8{,}89.$$

87. $y_0 = 14{,}88.$

88. $y_0 = 6{,}19.$

89. $y_0 = 19{,}8.$

90. Berzes pretestība

$$W = P\,.\,\mu.$$

Tapas berzes moments

$$M = W\,.\,r = P\,.\,\mu\,.\,r.$$

Apzīmējot tapas aploces ātrumu ar v m/sec. patērētais darbs sekundē būs

$$A = W\,.\,v,\text{ jeb zirgspēkos}$$

$$N = \frac{A}{75} = P\,.\,\mu\,\frac{2\pi\,.\,r.n}{60\,.\,75} = 0{,}0014\,P\,.\,\mu\,.\,r\,.\,n.$$

91. 1) Berzes moments pēc lieluma atradīsies starp $P\mu . r_a$ un $P\mu\,.\,r_i$ un būs $P\mu\,\rho$, kur atkarīgs no tā, kā sadalās spiediens uz laukuma. Jaunās tapās spiediens sadalās vienmērīgi, tā tad uz gredzenveidīga laukuma tā smaguma centrs sakrīt ar vidēja spiediena punktu.

Tā kā smaguma centrs $\rho = \frac{2}{3}\cdot\frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2}$, tad

tapas berzes moments $M = \frac{2}{3}\,P\,.\,\mu\,\frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2}.$

Darba zaudējums

$$N = \frac{2}{3}\,P\,.\,\mu\,\frac{2\pi\,n}{60.75}\cdot\frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2} = 0{,}00093\,P.\mu.n\,\frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2}.$$

2) Ja berzes laukums ir ripa, tad

$r_i = 0$ un $r_a = r$;

$M = \frac{2}{3}\,P\,.\,\mu\,.\,r;$

$N = \frac{2}{3}\,P\,.\,\mu\,.\,r\,\frac{2\pi\,.\,n}{60.75} = 0{,}00093\,P.\mu\,.\,r\,.\,n.$

92. Šinī gadījumā

$$M = \frac{\pi}{2} P \,.\, \mu \,.\, r.$$

93. $v = \frac{2\pi R \,.\, n}{60} = \frac{2\pi \,.\, 1{,}5 \,.\, 65}{60} = 10{,}22$ m.;

spara rata vaiņaga spars

$$A = \frac{G}{g} \,.\, \frac{v^2}{2} = \frac{2250}{9{,}81} \,.\, \frac{10{,}22^2}{2} = 11985 \text{ kgm.},$$

pie 2,5 apgriezieniem vaiņags noskrien ceļu $s = 2{,}5 \,.\, 2\pi \,.\, 1{,}5 = 23{,}55$ m.

Tā kā berzes darbam jābūt vienādam ar sparu, tad

$$P\mu \,.\, s = A;\ P = \frac{A}{\mu s} = \frac{11985}{0{,}5 \,.\, 23{,}55} \cong 1080 \text{ kg}.$$

94. Kopējais bremžu spiediens uz riteņiem

$$P = 20 \,.\, 200 \,.\, 10 = 40000 \text{ kg}.$$

Iekrātais spars vilcienam kustoties

$$A = \frac{G}{g} \,.\, \frac{v^2}{2} = \frac{150000}{9{,}81} \,.\, \frac{6^2}{2} = 275220 \text{ kgm.};$$

tā kā $A = P \,.\, \mu \,.\, s$, tad

$$s = \frac{A}{P \,.\, \mu} = \frac{275220}{40000 \,.\, 0{,}5} = 13{,}7 \text{ m}.$$

95. Vērā ņemamais kopējais svars ir

$$P = G + Q = 4700 + 750 = 5450 \text{ kg}.$$

Ja pieņemam, ka vienai tapai jānes kopējais svars, tad

$$N = 0{,}0014\ P\mu \,.\, r \,.\, n = 0{,}0014 \,.\, 5450 \,.\, 0{,}05 \,.\, 0{,}105 \,.\, 77 \cong 3{,}1\ HP.$$

96. Vārpstas šķērsgriezums $\pi r^2 = \pi \,.\, 0{,}06^2 = 0{,}0113\ m^2$.

Vārpstas tilpums $50 \,.\, 0{,}0113 = 0{,}565\ m^3$.

Tā kā 1 m^3 dzelzs sveŗ 7800 kg.,

tad visa vārpsta svērs $0{,}565 \,.\, 7800 \cong 4400$ kg.

un darbspējas zaudējums

$$N = 0{,}0014 \,.\, 4400 \,.\, 0{,}07 \,.\, 0{,}06 \,.\, 140 \cong 3{,}62\ HP.$$

97. $N = 0{,}00093 P\mu \,.\, r \,.\, n = 0{,}00093 \,.\, 9000 \,.\, 0{,}07 \,.\, 0{,}07 \,.\, 110 = 4{,}5\ HP.$

Saturs.

I. Kinematika (foronomija).

II. Dinamika.

A. Materialā punkta kustības.

B. Darbs un enerģija. (Enerģetika).

III. Statika.

IV. Cietā ķermeņa dinamika.

No molekulu darbības mechanikas.

V. Piemēri.