

МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

MECHANICS
OF COMPOSITE
MATERIALS

2022

1

ЛАТВИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
LATVIAN ACADEMY of SCIENCES

**МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ
МАТЕРИАЛОВ**

**MECHANICS
of COMPOSITE MATERIALS**

2022 ● Т. 58 ● 1 ● 1—220

Январь—февраль
January—February

<https://doi.org/10.22364/mkm.58.1>

Выходит 6 раз в год с января 1965 г.
Issued since 1965, bimonthly

ЛАТВИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
РИГА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *A. K. Chate*
EDITOR-IN-CHIEF *A. K. Chate*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

X. Альтенбах (зам. главного редактора, Германия), *Я. Андерсонс* (зам. главного редактора, Латвия), *А. Анискевич* (Латвия), *Я. Варна* (Швеция), *А. Красников* (Латвия), *О. Старкова* (Латвия), *С. В. Шешенин* (Россия)

EDITORIAL BOARD

H. Altenbach (ass. editor, Germany), *J. Andersons* (ass. editor, Latvia), *A. Aniskevich* (Latvia), *J. Varna* (Sweden), *A. Krasnikovs* (Latvia), *O. Starkova* (Latvia), *S. V. Sheshenin* (Russia)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

М. Айдогду (Турция), *С. Д. Акбаров* (Турция), *А. Артеиру* (Португалия), *Л. Асп* (Швеция), *Е. Барканов* (Латвия), *В. Беккер* (Германия), *В. Н. Бурлаенко* (Украина), *И. Гузь* (Великобритания), *Нгуен Дин Дык* (Вьетнам), *Г. Кан* (Китай), *В. Карвелли* (Италия), *В. А. Касьянов* (Латвия), *А. Катунин* (Польша), *Сон С. Ким* (Южная Корея), *Е. Конту* (Греция), *Е.-М. Крачун* (Румыния), *А. Кривцов* (Россия), *В. Кулаков* (Латвия), *Г. Куликов* (Россия), *С. В. Ломов* (Бельгия, Россия), *Ю. Маяк* (Эстония), *Г. Михасёв* (Беларусь), *А. Муц* (Польша), *В. Н. Паймушин* (Россия), *Л. Плачиди* (Италия), *Т. Садовский* (Польша), *С. Б. Сапожников* (Россия), *М. Ди Скьюва* (Италия), *Р. Талreja* (США), *Ю. Токовий* (Украина), *В. Хван* (Южная Корея)

ADVISORY BOARD

M. Aydogdu (Turkey), *S. D. Akbarov* (Turkey), *A. Arteiro* (Portugal), *L. Asp* (Sweden), *E. Barkanov* (Latvia), *W. Becker* (Germany), *V. N. Burlayenko* (Ukraine), *I. Guz* (United Kingdom), *Nguyen Dinh Duc* (Vietnam), *G. Kang* (China), *V. Carvelli* (Italy), *V. A. Kasyanov* (Latvia), *A. Katunin* (Poland), *Seong S. Kim* (South Korea), *E. Kontou* (Greece), *E. M. Craciun* (Rumania), *A. Krivtsov* (Russia), *V. Kulakov* (Latvia), *G. Kulikov* (Russia), *S. V. Lomov* (Belgium, Russia), *J. Majak* (Estonia), *G. Mikhasev* (Belarus), *A. Muc* (Poland), *V. N. Pajmushin* (Russia), *L. Placidi* (Italy), *T. Sadowski* (Poland), *S. B. Sapozhnikov* (Russia), *M. Di Sciuva* (Italy), *R. Talreja* (USA), *Yu. Tokovyy* (Ukraine), *W. Hwang* (Korea)

ПОЧЕТНАЯ РЕДКОЛЛЕГИЯ

Л. Агаловян (Армения), *А. Богданович* (США), *А. Н. Гузь* (Украина), *А. Дуда* (Германия), *А. Д. Заманов* (Азербайджан), *М. Калнинь* (Латвия), *В. В. Коврига* (Россия), *С. Т. Милейко* (Россия), *Ю. М. Плескачевский* (Беларусь), *В. А. Поляков* (Латвия), ***Р. Рикардс*** (Латвия), *Н. Щербина* (Украина)

HONORARY BOARD

L. Aghalovyan (Armenia), *A. Bogdanovich* (USA), *A. N. Guz* (Ukraine), *A. Duda* (Germany), *A. D. Zamanov* (Azerbaijan), *M. Kalniņš* (Latvia), *V. V. Kovriga* (Russia), *S. T. Mileiko* (Russia), *Yu. M. Pleskachevskii* (Belarus), *V. A. Polyakov* (Latvia), ***R. Rikards*** (Latvia), *N. Shcherbina* (Ukraine)

Журнал издается на английском языке Springer Science+Business Media, Inc. (США, ISSN 0191-5665) и аннотируется в следующих изданиях:

The Journal is published in English by Springer Science+Business Media, Inc. (USA, ISSN 0191-5665) and is abstracted or indexed in:

Science Citation Index Expanded (SciSearch), Journal Citation Reports/Science Edition, SCOPUS, INSPEC, Chemical Abstracts Service (CAS), Google Scholar, EBSCO, CSA, Academic OneFile, Academic Search, ChemWeb, CSA, Environmental Sciences, Current Contents/Engineering, Computing and Technology, Earthquake Engineering Abstracts, EI-Compendex, Gale, INIS Atomindex, OCLC, Polymer Library, Reaction Citation Index, Referativnyi Zhurnal (VINITI), SCImago, Summon by ProQuest.

Н. Триведи^а, С. Дас^а, Е.-М. Крачиун^{б}*

^аDepartment of Mathematical Sciences, Indian Institute of Technology (BHU), Varanasi - 221005, India

^бFaculty of Mechanical, Industrial and Maritime Engineering, “Ovidius” University of Constanta, Bd. Mamaia 124, 900527, Constanta, Romania

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ В ДВУХ РАЗНЫХ МОДЕЛЯХ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ¹

*N. Trivedi, S. Das, and E.-M. Craciun**

THE MATHEMATICAL STUDY OF AN EDGE CRACK IN TWO DIFFERENT SPECIFIED MODELS UNDER TIME-HARMONIC WAVE DISTURBANCE

Keywords: edge crack, composites, stress intensity factor, orthotropic strip, time-harmonic wave

This article determines the stress intensity factor (SIF) at the tip of an edge crack in two models considered. Problem-1 is an orthotropic strip of finite thickness bonded by an orthotropic half-plane, and Problem-2 is an orthotropic vertical semi-infinite strip of the same depth. Edge cracks have been invaded perpendicularly by time-harmonic elastic waves. The considered models have been taken to the transformed plane by using the Fourier transform technique, where the Schmidt method is used to find the unknown coefficients. The Analytical expression of the SIF is derived for both the problems. The variations of normalized SIF for the different crack lengths and depth of the strips for the problems considered have been calculated numerically, and their behaviour has been depicted graphically for different particular cases.

Ключевые слова: трещина краевая, композиты, коэффициент интенсивности напряжений, полоса ортотропная, волна гармоническая

*Автор, с которым следует вести переписку: emcraciun@yahoo.com
Corresponding author: emcraciun@yahoo.com

¹Перевод с англ.

Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине краевой трещины определен в двух рассмотренных моделях. Задача 1 — ортотропная полоса конечной толщины, соединенная с ортотропной полуплоскостью; задача 2 — ортотропная вертикальная полубесконечная полоса такой же толщины. Краевые трещины прорастали перпендикулярно гармоническим упругим волнам. Рассмотренные модели перенесены в преобразованную плоскость с помощью преобразования Фурье, а для нахождения неизвестных коэффициентов использовали метод Шмидта. Для обеих задач получено аналитическое выражение для КИН. Изменения нормализованного КИН для трещин разной длины и полосы разной толщины в указанных задачах вычислили численно и их поведение отображали графически для разных частных случаев.

Введение

Композитные материалы имеют огромное значение в строительстве механических конструкций. Эти легкие и устойчивые материалы изготавливают из двух или более материалов с одинаковыми или разными физическими свойствами, обуславливающими их гибкость, долговечность, способность выдерживать большие нагрузки, рентабельность производства. Композиты широко используют в конструкциях автомобилей, самолетов, сверхскоростных поездов, мостов и многих других механических конструкций. Разрушение композитов — серьезная проблема для исследователей. Существует множество причин разрушения композитного материала, но в настоящей работе рассмотрено разрушение, обусловленное внутренними и внешними трещинами, в частности краевыми трещинами. Проблема краевых трещин в композитной среде очень сложна, и ее активно изучают многие исследователи во всем мире. Большая часть аэрокосмической промышленности рассматривает волокнисто-армированные композиты как альтернативные материалы для конструкций самолетов в силу их легкости, гибкости и способности выдерживать большие нагрузки. Спектр применения композитов очень широкий — от бытовой техники до космических кораблей.

Краевые трещины — особо опасный тип трещин, поскольку более уязвимы, чем внутренние трещины. Решение проблемы краевых трещин может быть сложной задачей, поскольку они чаще встречаются в повседневной практике, их тенденция к распространению больше, возможность торможения меньше. Инженеры и исследователи имеют дело с краевыми трещинами в течение нескольких последних десятилетий, и тем не менее решение проблемы этих трещин по-прежнему актуально. Очень важную роль в борьбе с краевыми трещинами играет КИН. Из обзора литературы следует, что многие исследователи внесли свой вклад в решение проблем краевых трещин в композитных и ортотропных средах. КИН для краевой

трещины, расположенной в упругой полуплоскости, изучали в [1], а в упругодинамической среде — в [2]. В [3] исследовали некоторые проблемы краевых трещин в бесконечной полосе. В [4] провели анализ напряжений полубесконечной пластины с наклонной краевой трещиной. Краевую трещину в неоднородной полуплоскости при термическом нагружении изучали в [5]. Влияние нестационарного термического и динамического нагружения на краевую трещину в функционально-градиентном материале проанализировали в [6] и [7] соответственно. В [8—11] определили значения КИН для краевой трещины в ортотропных материалах. В [12] получили эффект рассеяния краевой направленной волны при наличии краевой трещины. В [13] представили результаты исследования трещины на поверхности раздела между разнородными ортотропными материалами.

Уже проведены и все еще продолжаются многочисленные исследования композитных материалов [14—16], а также их преимуществ для улучшения жизни человека и экономии человеческих ресурсов. В [17] представлена модель снижения жесткости многослойного эпоксидного углепластика, предназначенного для аэрокосмической промышленности. В [18] исследовали поведение эпоксидных композитов при растяжении с высокой скоростью деформирования. В [19] изучали способы улучшения абляционных и межфазных свойств сцепления композитов на основе этиленпропилендиеновых мономеров. В [20] исследовали волокнисто-армированные слоистые композиты для аэрокосмической техники с целью уменьшения массы конструкции. В [21] изучали влияние скорости нагружения на разрушение волокнисто-армированных углепластиков, а в [22] — их применение для упрочнения бетонной конструкции. В [23] рассмотрена возможность применения метода весовых функций для ортотропного образца с надрезом на одной кромке. В [24] разработали теоретическую модель для системы краевой и внутренних трещин. В [25] исследовали влияние гармонического по времени возмущения на поведение трех коллинеарных трещин. Волновое возмущение также изучали в [26] для множественных трещин в сэндвич-среде. В [27—29] исследовали влияние термического удара и термических напряжений на распространение трещин. В [30, 31] изучали полимерные композиты и деформирование армированных композитов соответственно.

Когда композитная конструкция работает в реальной окружающей среде, ее поверхности открыты для всех типов волн и давления, присутствующих в среде и воздействующих на нее. Волновые возмущения — основной вид возмущения, обусловленного окружающей средой. Гармонические волновые возмущения в силу гармонических волн, налетающих на поверхность, создают давление на поверхность трещины, влияющее на скорость ее распространения и поле напряжений вокруг трещины.

В настоящем исследовании предложены две математические модели краевой трещины. Краевая трещина в вертикальной полубесконечной ортотропной полосе конечной толщины h , соединенной с ортотропной полуплоскостью, рассмотрена в задаче 1, а в задаче 2 — краевая трещина

в такой же вертикальной полубесконечной ортотропной полосе, но без учета полуплоскости. Задачи решали методом преобразования Фурье для получения пары интегральных уравнений, а неизвестные определяли методом Шмидта [32]. Получено приближенное аналитическое выражение коэффициента интенсивности напряжений (КИН) при гармоническом волновом возмущении в вершине краевой трещины. Для обеих задач дано графическое представление КИН при изменении волновых чисел и длины трещины по отношению к разной толщине полосы. Сравнение КИН краевой трещины в обеих задачах — важная особенность настоящей работы.

1. Математическая формулировка

Рассмотрим краевую трещину конечной длины ($0 < x < a$) в двух разных задачах. В задаче 1 краевая трещина расположена в вертикальной ортотропной полосе конечной толщины h , соединенной с ортотропной полуплоскостью (рис. 1—а). В задаче 2 рассмотрим краевую трещину в ортотропной полосе такой же толщины, но без ортотропной полуплоскости (рис. 1—б). Уравнения перемещений для обеих задач имеют вид

$$C_{11}^{(j)} \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial y^2} + \left(1 + C_{12}^{(j)}\right) \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial x \partial y} + \frac{\omega^2}{C_T^{(j)2}} u^{(j)} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial x^2} + C_{22}^{(j)} \frac{\partial^2 v^{(j)}}{\partial y^2} + \left(1 + C_{12}^{(j)}\right) \frac{\partial^2 u^{(j)}}{\partial x \partial y} + \frac{\omega^2}{C_T^{(j)2}} v^{(j)} = 0, \quad (2)$$

где $C_{ik}^{(j)}$ — упругие постоянные; $C_T^{(j)} = \left(C_{66}^{(j)} / \rho\right)^{1/2}$; верхние индексы

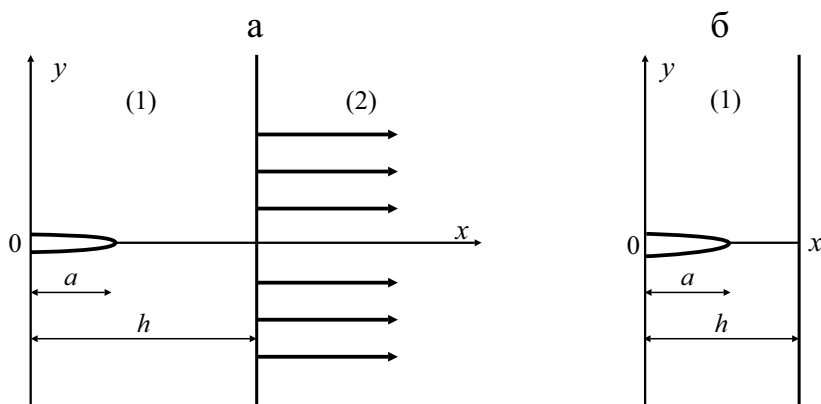


Рис. 1. Геометрия трещины в задачах 1 (а) и 2 (б).

$j = 1, 2$ относятся к среде 1 и 2 соответственно. Соответствующие напряжения имеют вид

$$\sigma_{xx}^{(j)} = C_{66}^{(j)} \left(C_{11}^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + C_{12}^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} \right), \quad (3)$$

$$\sigma_{yy}^{(j)} = C_{66}^{(j)} \left(C_{12}^{(j)} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + C_{22}^{(j)} \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{xy}^{(j)} = C_{66}^{(j)} \left(\frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Рассмотрим падающие упругие волны, движущиеся в отрицательном направлении оси y . Соответствующие перемещения определим как

$$u^{(j)} = 0, \quad v^{(j)} = \varepsilon_v \exp \left[i\omega y / C_T^{(j)} \sqrt{C_{22}^{(j)}} \right],$$

где ε_v — амплитуда; ω — круговая частота; $C_{66}^{(j)}$ — модуль упругости; ρ — плотность материала.

Общие граничные условия для обеих задач следующие:

— на границе $y = 0$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x, 0) = -p, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (6)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad (7)$$

$$v^{(1)}(x, 0) = 0, \quad a < x < h; \quad (8)$$

— на границе $x = 0$

$$\sigma_{xx}^{(1)}(0, y) = 0, \quad |y| < \infty, \quad (9)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(0, y) = 0, \quad |y| < \infty. \quad (10)$$

Условия непрерывности на поверхности раздела $x = h$ для задачи 1 следующие:

$$u^{(1)}(h, y) = u^{(2)}(h, y), \quad |y| < \infty, \quad (11)$$

$$v^{(1)}(h, y) = v^{(2)}(h, y), \quad |y| < \infty, \quad (12)$$

$$\sigma_{yy}^{(1)}(h, y) = \sigma_{yy}^{(2)}(h, y), |y| < \infty, \quad (13)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(h, y) = \sigma_{xy}^{(2)}(h, y), |y| < \infty. \quad (14)$$

Граничные условия на поверхности раздела $x = h$ для задачи 2 следующие:

$$\sigma_{xx}^{(1)}(h, y) = 0, |y| < \infty, \quad (15)$$

$$\sigma_{xy}^{(1)}(h, y) = 0, |y| < \infty. \quad (16)$$

Компоненты напряжений стремятся к нулю при удалении от трещины.

2. Решение задачи

Преобразование Фурье имеет вид

$$\bar{g}(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-i\zeta x) dx, \quad g(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\zeta) \exp(i\zeta x) d\zeta. \quad (17)$$

Применив указанное преобразование к уравнению (1), получим

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + q_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} + r_j \right) (\underline{u}_i, \underline{v}_i) = 0, \quad (18)$$

где

$$q_j = \zeta^2 \left(2C_{12}^{(j)} - C_{11}^{(j)} C_{12}^{(j)} + C_{12}^{(j)2} \right) / C_{22}^{(j)} + \left(1 + C_{22}^{(j)} \right) \frac{\omega^2}{C_{22}^{(j)} C_T^{(j)2}},$$

$$r_j = \left(\zeta^2 C_{11}^{(j)} - \frac{\omega^2}{C_T^{(j)2}} \right) \left(\zeta^2 - \frac{\omega^2}{C_T^{(j)2}} \right) / C_{22}^{(j)}. \quad (19)$$

Решение можно предположить в виде

$$\begin{aligned} \underline{u}^{(1)}(\xi, y) = & A^{(1)}(\xi) \exp\left(\gamma_1^{(1)} y\right) + \\ & + B^{(1)}(\xi) \exp\left(-\gamma_1^{(1)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)} \xi\right) + C^{(1)}(\xi) \exp\left(\gamma_2^{(1)} y\right) + \\ & + D^{(1)}(\xi) \exp\left(-\gamma_2^{(1)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)} \xi\right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\underline{v}^{(1)}(\xi, y) = \alpha_1^{(1)} A^{(1)}(\xi) \exp\left(\gamma_1^{(1)} y\right) - \alpha_1^{(1)} B^{(1)}(\xi) \exp\left(-\gamma_1^{(1)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)} \xi\right) +$$

$$+\alpha_2^{(1)}C^{(1)}(\xi)\exp\left(\gamma_2^{(1)}y\right)-\alpha_2^{(1)}D^{(1)}(\xi)\exp\left(-\gamma_2^{(1)}y\right)\operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)}\xi\right), \quad (21)$$

$$\underline{u}^{(2)}(\xi,y)=A^{(2)}(\xi)\exp\left(-\gamma_1^{(2)}\xi\right)\operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)}y\right)+B^{(2)}(\xi)\exp\left(-\gamma_2^{(2)}\xi\right)\operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)}y\right), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \underline{v}^{(2)}(\xi,y) &= -\alpha_1^{(2)}A^{(2)}(\xi)\exp\left(-\gamma_1^{(2)}\xi\right)\operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)}y\right)- \\ & -\alpha_1^{(2)}B^{(2)}(\xi)\exp\left(-\gamma_2^{(2)}\xi\right)\operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)}y\right), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\gamma_k^{(j)}$ — корни уравнения (18);

$$\alpha_k^{(j)} = \left(\frac{\gamma_k^{(j)} - \zeta^2 C_{11}^{(j)} / \gamma_k^{(j)} + \omega^2 / \left(C_T^{(j)2} \gamma_k^{(j)} \right)}{i\zeta \left(1 + C_{12}^{(j)} \right)} \right), \quad k=1,2; j=1,2.$$

Выражения для напряжений запишем как

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{xy}^{(1)}(\xi,y) \setminus C_{66}^{(1)} &= i\zeta C_{12}^{(1)} \left(\left(A^{(1)} \exp\left(\gamma_1^{(1)}y\right) + \right. \right. \\ & + B^{(1)} \exp\left(-\gamma_1^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)}\xi\right) + C^{(1)} \exp\left(\gamma_2^{(1)}y\right) \left. \right) + \\ & + D^{(1)} \exp\left(-\gamma_2^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)}\xi\right) \left. \right) + C_{22}^{(1)} \left(\alpha_1^{(1)} \gamma_1^{(1)} \left(A^{(1)} \exp\left(\gamma_1^{(1)}y\right) + \right. \right. \\ & + B^{(1)} \exp\left(-\gamma_1^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)}\xi\right) \left. \right) + \alpha_2^{(1)} \gamma_2^{(1)} \left(C^{(1)} \exp\left(\gamma_2^{(1)}y\right) + \right. \\ & \left. \left. + D^{(1)} \exp\left(-\gamma_2^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)}\xi\right) \right) \right), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{xy}^{(1)}(\xi,y) \setminus C_{66}^{(1)} &= \gamma_1^{(1)} \left(A^{(1)} \exp\left(\gamma_1^{(1)}y\right) - \right. \\ & - B^{(1)} \exp\left(-\gamma_1^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)}\xi\right) \left. \right) + \gamma_2^{(1)} \left(C^{(1)} \exp\left(\gamma_2^{(1)}y\right) - \right. \\ & - D^{(1)} \exp\left(-\gamma_2^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)}\xi\right) \left. \right) + i\zeta \left(\alpha_1^{(1)} A^{(1)} \exp\left(\gamma_1^{(1)}y\right) - \right. \\ & \left. - \alpha_1^{(1)} B^{(1)} \exp\left(-\gamma_1^{(1)}y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)}\xi\right) + \alpha_2^{(1)} C^{(1)} \exp\left(\gamma_2^{(1)}y\right) - \right. \end{aligned}$$

$$-\alpha_2^{(1)} D^{(1)} \exp\left(-\gamma_2^{(1)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)} \xi\right), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{yy}^{(2)}(\xi, y) \setminus C_{66}^{(2)} = & i\xi C_{12}^{(2)} \left(A^{(2)} \exp\left(-\gamma_1^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)} \xi\right) + \right. \\ & \left. + B^{(2)} \exp\left(-\gamma_2^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)} \xi\right) \right) + \\ & + C_{22}^{(2)} \left(\alpha_1^{(2)} \gamma_1^{(2)} A^{(2)} \exp\left(-\gamma_1^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)} \xi\right) + \right. \\ & \left. + \alpha_2^{(2)} \gamma_2^{(2)} B^{(2)} \exp\left(-\gamma_2^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)} \xi\right) \right), \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{xy}^{(2)}(\xi, y) \setminus C_{66}^{(2)} = & -\gamma_1^{(2)} A^{(2)} \exp\left(-\gamma_1^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)} \xi\right) - \\ & -\gamma_2^{(2)} B^{(2)} \exp\left(-\gamma_2^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)} \xi\right) + \\ & + i\xi \left(-\alpha_1^{(2)} A^{(2)} \exp\left(-\gamma_1^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(2)} \xi\right) - \right. \\ & \left. -\alpha_2^{(2)} B^{(2)} \exp\left(-\gamma_2^{(2)} y\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)} \xi\right) \right). \quad (27) \end{aligned}$$

Для задачи 1, используя граничные условия (7), (9), (10) и условия непрерывности (11)—(14), получим

$$B^{(1)} = \nabla_1 A^{(1)},$$

$$C^{(1)} = (\nabla_3 + \nabla_2 \nabla_1) A^{(1)},$$

$$D^{(1)} = \nabla_4 A^{(1)}, \quad (28)$$

$$A^{(2)} = \nabla_5 A^{(1)},$$

$$B^{(2)} = \nabla_6 A^{(1)},$$

$$\nabla_1 = \frac{\left(\gamma_1^{(1)} + i\xi\alpha_1^{(1)}\right) + \left(\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)}\right) \nabla_3 \left[1 - \beta_6 \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(2)} h\right)\right]}{\left\{\left(\gamma_1^{(1)} + i\xi\alpha_1^{(1)}\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)} h\right) + \left(\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)}\right) \nabla_2 \left[1 - \left(\beta_5 + \beta_6 \operatorname{ch}\left(\gamma_2^{(1)} h\right)\right)\right]\right\} \operatorname{ch}\left(\gamma_1^{(1)} h\right)},$$

$$\nabla_2 = \frac{-(1 + \beta_5 - \beta_4\beta_5)}{(1 + \beta_6 - \beta_3 - \beta_4\beta_6)}, \quad \nabla_3 = \frac{-1}{(1 + \beta_6 - \beta_3 - \beta_4\beta_6)},$$

$$\nabla_4 = \frac{\beta_5\nabla_1 + \beta_6(\nabla_3 + \nabla_2\nabla_1)}{\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h)}, \quad \nabla_5 = (\beta_3\nabla_1 + \beta_3\nabla_2\nabla_1 + \beta_4\nabla_4)\exp(\gamma_1^{(2)}h),$$

$$\beta_1 = -2\phi_6 + \frac{2\phi_5\alpha_1^{(2)}}{\alpha_1^{(1)}},$$

$$\beta_2 = \phi_7 + \phi_5 - \frac{\phi_3\left(\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(1)}\right)}{\alpha_1^{(1)}} - \frac{(\phi_1 - \phi_3)\left(\phi_6 - \phi_5 - \left(\phi_5 / \alpha_1^{(1)}\right)\left(\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)}\right)\right)}{(\phi_2 - \phi_1)},$$

$$\beta_3 = \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{(\phi_3 - \phi_1 + (\phi_4 / \phi_8)\beta_2)}, \quad \beta_4 = \frac{(\phi_2 - \phi_1 + (\phi_4 / \phi_8)\beta_1)}{(\phi_3 - \phi_1 + (\phi_4 / \phi_8)\beta_2)},$$

$$\beta_5 = \frac{-2\alpha_1^{(1)}}{\left(\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(1)}\right) - \left(\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(1)}\right)\beta_4},$$

$$\beta_6 = \frac{\left(\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)}\right) + \left(\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(1)}\right)\beta_3}{\left(\alpha_2^{(1)} + \alpha_1^{(1)}\right) - \left(\alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(1)}\right)\beta_4},$$

$$\phi_1 = C_{66}^{(1)}\left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}\alpha_1^{(1)}\gamma_1^{(1)}\right), \quad \phi_2 = C_{66}^{(1)}\left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)}\alpha_2^{(1)}\gamma_2^{(1)}\right),$$

$$\phi_3 = C_{66}^{(2)}\left(i\xi C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}\alpha_1^{(2)}\gamma_1^{(2)}\right), \quad \phi_4 = C_{66}^{(2)}\left(i\xi C_{12}^{(2)} + C_{22}^{(2)}\alpha_2^{(2)}\gamma_2^{(2)}\right),$$

$$\phi_5 = C_{66}^{(1)}\left(i\xi\alpha_1^{(1)} + \gamma_1^{(1)}\right), \quad \phi_6 = C_{66}^{(1)}\left(i\xi\alpha_2^{(1)} + \gamma_2^{(1)}\right),$$

$$\phi_7 = C_{66}^{(2)}\left(-i\xi\alpha_1^{(2)} - \gamma_1^{(2)}\right), \quad \phi_8 = C_{66}^{(2)}\left(-i\xi\alpha_2^{(2)} - \gamma_2^{(2)}\right),$$

Для задачи 2, используя граничные условия (7), (15), (16), получим

$$\begin{aligned} B^{(1)} &= (f_1 + f_2 f_4) A^{(1)}, \\ C^{(1)} &= f_4 A^{(1)}, \\ D^{(1)} &= f_3 A^{(1)}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$A^{(2)} = 0,$$

$$B^{(2)} = 0,$$

$$f_1 = \frac{\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) - 1}{\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) - \operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h)}, \quad f_2 = \frac{(\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)})[\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) - 1]}{\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) - \operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h)},$$

$$f_3 = \frac{-(\gamma_1^{(1)} + i\xi\alpha_1^{(1)})[\operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) - 1]}{(\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)})[\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) - 1]}, \quad (29)$$

$$f_4 = \frac{(\gamma_1^{(1)} + i\xi\alpha_1^{(1)})[\operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) - 1] + (\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)})f_1f_3\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h)}{f_2(\gamma_1^{(1)} + i\xi\alpha_1^{(1)})\operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) + (\gamma_2^{(1)} + i\xi\alpha_2^{(1)})[1 - f_2f_3\operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h)]}.$$

Граничные условия (6) и (8) с помощью выражений (28) и (29) приводят к соотношениям

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{v}^{(1)}(\xi, 0) R(\xi) \cos(\xi x) d\xi = -\frac{p}{C_{66}^{(1)}}, \quad 0 \leq x < a, \quad (30)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bar{v}^{(1)}(\xi, 0) \cos(\xi x) d\xi = 0, \quad a < x, \quad (31)$$

где для задачи 1

$$R(\xi) = \left[\left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \alpha_1^{(1)} \gamma_1^{(1)} \right) \left(1 + \nabla_1 \operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) \right) + \left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \alpha_2^{(1)} \gamma_2^{(1)} \right) \left(\nabla_3 + \nabla_2 \nabla_1 + \nabla_4 \operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) \right) \right] /$$

$$\left\{ \alpha_1^{(1)} \left[1 - \nabla_1 \operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) \right] + \alpha_2^{(1)} \left[\nabla_3 + \nabla_2 \nabla_1 - \nabla_4 \operatorname{ch}(\gamma_2^{(1)}h) \right] \right\}, \quad h > 0, \quad (32)$$

для задачи 2

$$R(\xi) = \left\{ \left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \alpha_1^{(1)} \gamma_1^{(1)} \right) \left[1 + (f_1 + f_2 f_4) \operatorname{ch}(\gamma_1^{(1)}h) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(i\xi C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \alpha_2^{(1)} \gamma_2^{(1)} \right) \left[f_4 + (f_1 f_3 + f_1 f_2 f_4) \operatorname{ch} \left(\gamma_2^{(1)} h \right) \right] \Bigg\} / \\
 & / \left\{ \alpha_1^{(1)} \left[1 - (f_1 + f_2 f_4) \operatorname{ch} \left(\gamma_1^{(1)} h \right) \right] + \alpha_2^{(1)} \left[f_4 - (f_1 f_3 + f_1 f_2 f_4) \operatorname{ch} \left(\gamma_2^{(1)} h \right) \right] \right\}, \\
 & h > 0. \tag{33}
 \end{aligned}$$

Представив $v^{(1)}(x, 0)$ в виде ряда

$$\begin{aligned}
 \pi C_{66}^{(1)} v^{(1)}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} \cos \left\{ (2n-1) \sin^{-1} (x/a) \right\}, \quad 0 < x < a, \tag{34} \\
 &= 0, \text{ где-либо еще,}
 \end{aligned}$$

удовлетворим условие (31). Преобразование Фурье уравнения (34) приводит к соотношению

$$C_{66}^{(1)} v^{(1)}(\xi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} \frac{(2n-1)}{2\xi} J_{2n-1}(\xi a), \tag{35}$$

где $c_n^{(1)}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению; $J_{2n-1}(\xi a)$ — функция Бесселя первого порядка.

Выражение для нормального напряжения получим в виде

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x, 0) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} (2n-1) \int_0^{\infty} \frac{R(\xi)}{\xi} J_{2n-1}(\xi a) \cos(\xi x) d\xi. \tag{36}$$

Для нахождения коэффициентов $c_n^{(1)}$ используем метод Шмидта [32], с помощью которого выражение (30) с учетом выражения (36) можно свести к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} Q_n^{(1)}(x) = -p, \quad 0 \leq x < a, \tag{37}$$

где

$$Q_n^{(1)}(x) = \frac{(2n-1)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(\xi)}{\xi} J_{2n-1}(\xi a) \cos(\xi x) d\xi. \tag{38}$$

Построим систему ортогональных функций $W_n(x)$ из системы функций $Q_n^{(1)}(x)$, удовлетворяющих условию ортогональности:

$$\int_0^a W_n(x) W_m(x) dx = N_n \delta_{nm}, \quad W_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_{in}}{S_{nn}} Q_i^{(1)}(x). \tag{39}$$

Здесь $N_n = \int_0^a [W_n(x)]^2 dx$; $W_1(x) = Q_1^{(1)}(x)$; S_{in} — кофакторы элементов s_{in} матрицы S_n :

$$S_n = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}, \quad s_{in} = \int_0^a Q_i^{(1)}(x) Q_n^{(1)}(x) dx. \quad (40)$$

Уравнение (37) можно переписать в виде ортогонального набора функций $Q_n^{(1)}(x)$ как

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} Q_n^{(1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n W_n(x) = -p. \quad (41)$$

Теперь, с учетом последних двух равенств для получения значения q_n и используя это значение и первые два равенства, получим значения $c_n^{(1)}$:

$$c_n^{(1)} = \sum_{i=n}^{\infty} d_j \frac{S_{nj}}{S_{ji}}, \quad (42)$$

где $d_j = \frac{-1}{N_j} \int_0^a p W_j(x) dx$. Для большого значения ξ величину R^L можно оценить как $\frac{R(\xi)}{\xi} \rightarrow R^L$, т.е.

$$R^L = \frac{R(\xi_l)}{\xi_l}, \quad (43)$$

где ξ_l считается очень большим значением ξ . Теперь для оценки интеграла в уравнении (36) используем выражение

$$\int_0^{\infty} J_n(xz) \cos(yz) dz = \frac{-x^n \sin \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{y^2 - x^2} \{y + \sqrt{y^2 - x^2}\}^n}, \quad y > x. \quad (44)$$

С помощью уравнений (38), (43) и (44) функцию $Q_n^{(1)}(x)$ можно записать как

$$Q_n^{(1)}(x) = \frac{(2n-1)}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \left(R(\xi) / \xi - R^L \right) J_{2n-1}(\xi a) \cos(\xi x) d\xi + \right. \\ \left. + R^L [(-a)^{2n-1} \sin((2n-1)\pi/2) / \sqrt{(x^2 - a^2)} \{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}\}^{2n-1}]. \quad (45)$$

Коэффициент интенсивности динамических напряжений по моде I (K_{Ia}) для обеих задач в вершине $x = a$ краевой трещины определяем как

$$K_{Ia} = \{2\pi(x-a)\}^{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow a^+} \sigma_{yy}^{(1)}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} (2n-1) (-1)^n R^L / (\pi a)^{1/2}. \quad (46)$$

Значения упругих постоянных

Эпоксидный композит	C_{11}	C_{22}	C_{12}	C_{66}	ρ , г/см ³
	ГПа				
Углепластик (среда (1))	155,36	16,31	3,67	7,40	1,60
Стеклопластик (среда (2))	46,09	12,60	2,86	5,50	2,10

2. Результаты и обсуждение

Для численного анализа представленных математических моделей в задаче 1 использовали эпоксидный углепластик для вертикальной ортотропной полосы и эпоксидный стеклопластик для полуплоскости, а в задаче 2 — эпоксидный углепластик для ортотропной полосы. Значения упругих постоянных композитов приведены в таблице.

Безразмерный динамический КИН по моде I (K_{Ia}) для обеих задач в вершине $x = a$ краевой трещины численно вычислили с использованием выражения (46). Изменения безразмерного КИН представлены графически для вертикальной полосы толщиной $h = 2, 4, 6$ при разных значениях длины трещины и волнового числа $a\omega / C_T^{(1)}$. Расчеты показали, что чем меньше толщина полосы h , тем больше значение КИН.

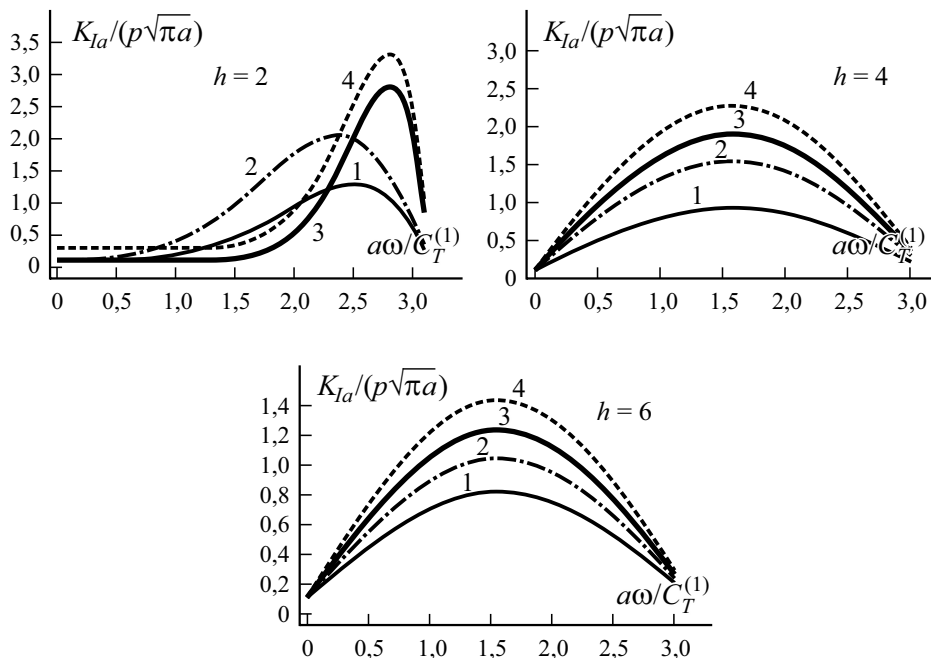


Рис. 2. Зависимость нормированного КИН $K_{Ia} / (p\sqrt{\pi a})$ от волнового числа $a\omega / C_T^{(1)}$ при $a/h = 0,4$ (1); $0,5$ (2); $0,6$ (3); $0,7$ (4) и разных значениях h для задачи 1.

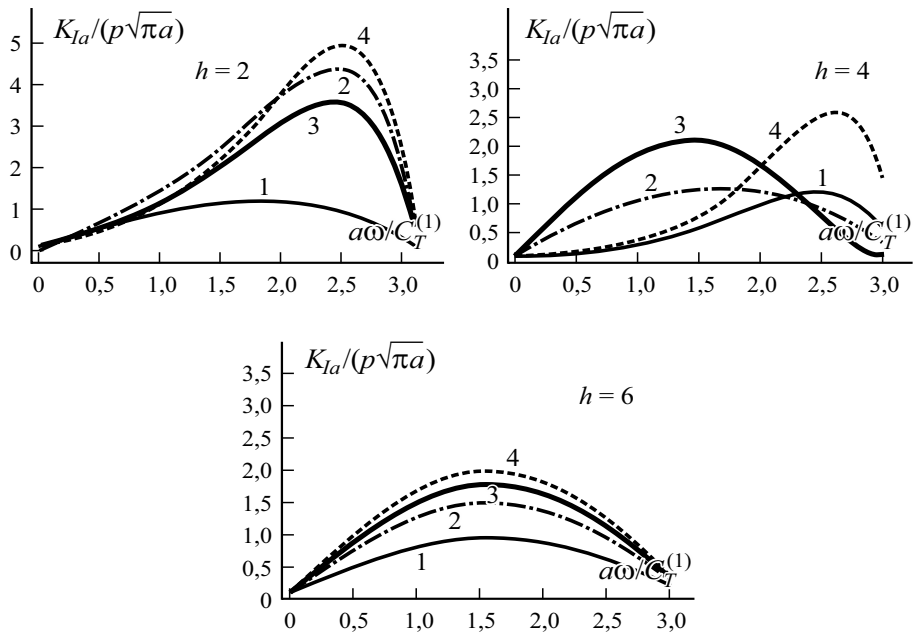


Рис. 3. Зависимость нормированного КИН $K_{Ia}/(p\sqrt{\pi a})$ от волнового числа $a\omega/C_T^{(1)}$ при $a/h = 0,4$ (1); 0,5 (2); 0,6 (3); 0,7 (4) и разных значениях h для задачи 2.

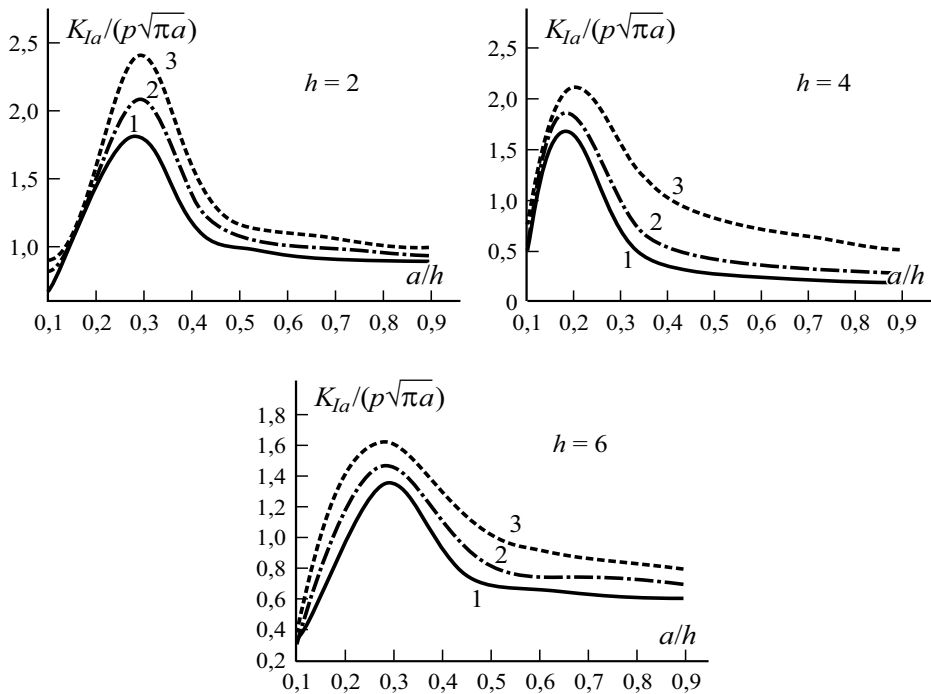


Рис. 4. Зависимость нормированного КИН $K_{Ia}/(p\sqrt{\pi a})$ от отношения a/h при $a\omega/C_T^{(1)} = 0,5$ (1); 1,5 (2); 2,5 (3) и разных значениях h для задачи 1.

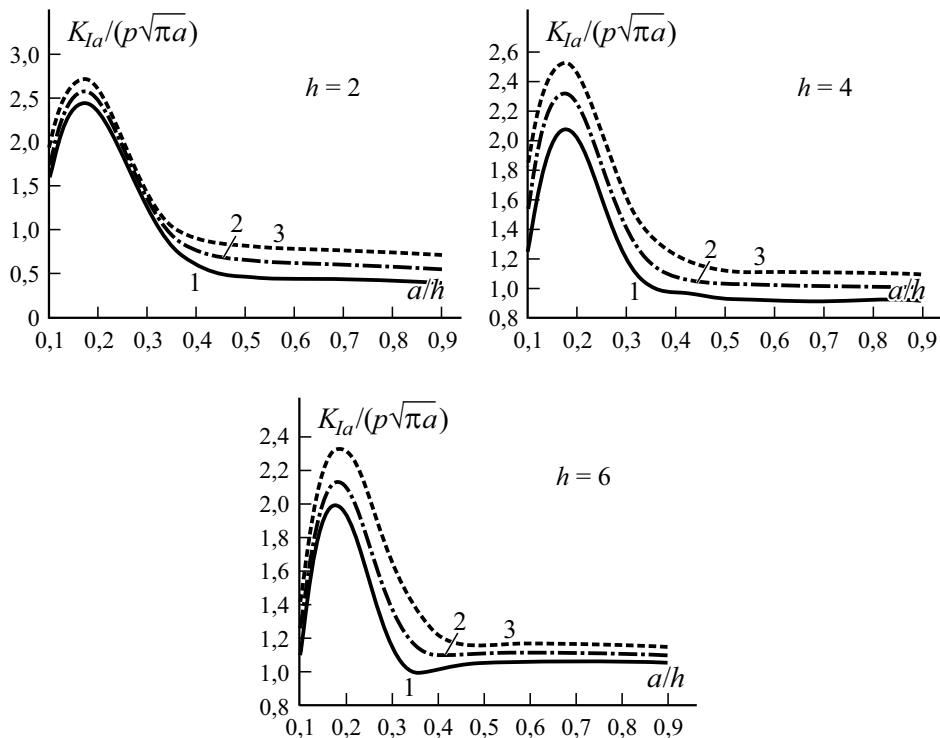


Рис. 5. То же для задачи 2.

Зависимости нормированных значений КИН $K_{Ia}/(p\sqrt{\pi a})$ от волнового числа $a\omega/C_T^{(1)}$ при разном отношении a/h и разной толщине ортотропной полосы h , рассчитанные по моделям задач 1 и 2, приведены на рис. 2 и 3 соответственно. Видно, что значения КИН возрастали с увеличением отношения a/h и волнового числа при расчете по обоим моделям. Зависимости нормированных значений КИН $K_{Ia}/(p\sqrt{\pi a})$ от отношения a/h при разных значениях волнового числа $a\omega/C_T^{(1)}$ и разной толщине ортотропной полосы h , рассчитанные по моделям задач 1 и 2, приведены на рис. 4 и 5 соответственно. Видно, что чем больше значение $a\omega/C_T^{(1)}$, тем больше значение КИН. Обе модели демонстрируют одинаковый характер изменения нормированных значений КИН. При этом значения КИН, рассчитанные по модели задачи 2, больше рассчитанных по модели задачи 1.

Заключение

В настоящем исследовании достигнуты две важные цели: 1) получение приближенного аналитического выражения КИН для краевой трещины для обеих рассмотренных задач при действии гармонической волны на поверхности трещины; 2) графическое представление нормированного КИН в вершине трещины $x = a$ для обеих задач при разных значениях волнового числа $a\omega / C_T^{(1)}$ и отношения a / h .

Дальнейшие исследования будут посвящены краевой трещине в композитном материале, ослабленном внутренними трещинами в материале, а также краевой трещине, расположенной на поверхности раздела двух или более композитных материалов.

Благодарность. Авторы выражают сердечную благодарность рецензентам за конструктивные предложения по улучшению рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sneddon I. N. and Das S. C.* The stress intensity factor at the tip of an edge crack in an elastic half-plane // *Int. J. Eng. Sci.* — 1971. — Vol. 9. — P. 25—36.
2. *Achenbach D., Keer L. M., and Mendelsohn D. A.* Elastodynamic analysis of an edge crack // *J. Appl. Mech.* — 1980. — Vol. 47. — P. 551—556.
3. *Gupta G. D. and Erdogan F.* The problem of edge cracks in an infinite strip // *J. Appl. Mech.* — 1974. — Vol. 41. — P. 1001—1006.
4. *Hasebe N. and Inohara S.* Stress analysis of a semi-infinite plate with an oblique edge crack // *Ingenieur-Archiv.* — 1980. — Vol. 49. — P. 51—62.
5. *Jin Z. H. and Noda N.* Edge crack in a nonhomogeneous half plane under thermal loading // *J. Therm. Stresses.* — 1994. — Vol. 17. — P. 591—599.
6. *Jin Z. H. and Paulino G. H.* Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material // *Int. J. Fract.* — 2001. — Vol. 107. — P. 73—98.
7. *Guo L., Wu L.-Z., and Zeng T.* The dynamic response of an edge cracks in a functionally graded orthotropic strip // *Mech. Res. Commun.* — 2005. — Vol. 32. — P. 385—400.
8. *Das S., Chakraborty S., Srikanth N., and Gupta M.* Symmetric edge cracks in an orthotropic strip under normal loading // *Int. J. Fract.* — 2008. — Vol. 153. — P. 77—84.
9. *Das S., Prasad R., and Mukhopadhyay S.* Stress intensity factor of an edge crack in composite media // *Int. J. Fract.* — 2011. — Vol. 172. — P. 201—207.
10. *Singh A., Das S., and Craciun E.-M.* Thermal stress intensity factor for an edge crack in orthotropic composite media // *Composites: Part B.* — 2018. — Vol. 153. — P. 130—136.
11. *Singh A., Das S., and Craciun E.-M.* Effect of thermomechanical loading on an edge crack of finite length in an infinite orthotropic strip // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55. — P. 285—296.
12. *Chiu W. K., Rose L. R. F., and Vien B. S.* Scattering of the edge-guided wave by an edge crack at a circular hole in an isotropic plate // *Procedia Eng.* — 2017. — Vol. 188. — P. 309—316.

13. *Lee G. H. and Beom H. G.* Interfacial edge crack between dissimilar orthotropic thermoelastic materials under uniform heat flow // *J. Mech. Sci. Technol.* — 2014. — Vol. 28. — P. 3041—3050.
14. *L'vov G. I.* Using the Concept of Imposed Constraints in the Plasticity Theory of Composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2021. — Vol. 57. — P. 337—348.
15. *Seyfullayev A. I., Rustamova M. A., and Kerimova S. A.* A problem of fatigue fracture mechanics of a two-layer material with edge cracks // *Mech. Compos. Mater.* — 2017. — Vol. 53. — P. 415—424.
16. *Solovyev D. N., Dadunashvili S. S., Mironov A., Doronkin P., and Mironovs D.* Mathematical modeling and experimental investigations of a main rotor made from layered composite materials // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56. — P. 103—110.
17. *Whitworth H. A.* Modeling stiffness reduction of graphite/epoxy composite laminates // *J. Compos. Mater.* — 1987. — Vol. 21. — P. 362—372.
18. *Naik N. K., Yernamma P., Thoram N. M., Gadipatri R., and Kavala V. R.* High strain rate tensile behavior of woven fabric e-glass/epoxy composite // *Polym. Test.* — 2010. — Vol. 29. — P. 14—22.
19. *Jia X., Zeng Z., Li G., Hui D., Yang X., and Wang S.* Enhancement of ablative and interfacial bonding properties of epdm composites by incorporating epoxy phenolic resin // *Composites: Part B.* — 2013. — Vol. 54. — P. 234—240.
20. *Linganiso L. Z. and Anandjiwala R. D.* Fibre-Reinforced Laminates in Aerospace Engineering // *Advanced Composite Materials for Aerospace Engineering*, Ch. 4. — Woodhead Publ., 2016. — P. 101—127.
21. *Miao C. and Tippur H. V.* Effect of Loading Rate on Fracture Behavior of Carbon Fiber Reinforced Polymer Composites // *Challenges in Mechanics of Time Dependent Materials, Fracture, Fatigue, Failure and Damage Evolution*. Ch. 4. — Springer, Cham, 2020. — P. 21—28.
22. *Yuhazri M. Y., Zulfikar A. J. and Ginting A.* Fiber reinforced polymer composite as a strengthening of concrete structures: A review // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* — 2020. — Vol. 1003. — P. 012135.
23. *Xu W., Zhang C., Wu X. R., and Yu Y.* Weight function method and its application for orthotropic single edge notched specimens // *Compos. Struct.* — 2020. — Vol. 252. — P. 112695.
24. *Petrova V. and Schmauder S.* A theoretical model for the study of thermal fracture of functionally graded thermal barrier coatings with a system of edge and internal cracks // *Theor. Appl. Fract. Mech.* — 2020. — Vol. 108. — P. 102605.
25. *Ito S.* Dynamic stress intensity factors of three collinear cracks in an orthotropic plate subjected to time-harmonic disturbance // *J. Mech.* — 2016. — Vol. 32. — P. 491—499.
26. *Trivedi N., Das S., and Altenbach H.* Study of collinear cracks in a composite medium subjected to time-harmonic wave disturbance // *Z. Angew. Math. Mech.* — 2021. — Vol. 101. — P. e202000307.
27. *Sadowski T. and Neubrand A.* Estimation of the crack length after thermal shock in FGM strip // *Int. J. Fract.* — 2004. — Vol. 127. — P. L135—L140.
28. *Ivanov I. V., Sadowski T., and Pietras D.* Crack propagation in functionally graded strip under thermal shock // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* — 2013. — Vol. 222. — P. 1587—1595.
29. *Burlayenko V. N., Altenbach H., Sadowski T., Dimitrova S. D., and Bhaskar A.* Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements // *Appl. Math. Model.* — 2017. — Vol. 45. — P. 422—438.
30. *Kondratiev A. V., Gaidachuk V. E., and Kharchenko M. E.* Relationships between the ultimate strengths of polymer composites in static bending, compression, and tension // *Mech. Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 55. — P. 259—266.

31. *L'vov G. I. and Kostromitskaya O. A.* Numerical modeling of plastic deformation of unidirectionally reinforced composites // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56. — P. 1—14.

32. *Yau W. F.* Axisymmetric slipless indentation of an infinite, elastic cylinder // *SIAM J. Appl. Math.* — 1967. — Vol. 15. — P. 219—227.

Поступила в редакцию 09.08.2021

Окончательный вариант поступил 16.11.2021

Received Aug. 9, 2021 (Nov. 16, 2021)

О. Митрофанов, Мазен Осман*

*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
Россия*

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЛАДКИХ КОМПОЗИТНЫХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ОБЕСПЕЧЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРОЧНОСТИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ

О. Mitrofanov and Mazen Osman*

DESIGNING OF SMOOTH COMPOSITE PANELS PROVIDING STABILITY AND STRENGTH AT POSTBUCKLING BEHAVIOR

Keywords: postbuckling state, stability, rectangular panels, orthotropic material, compression, shear.

Buckling of skin is admissible for upper load-bearing panels of a wing box and mechanization units of a light aircraft in case of loads close to operating level. Method of determining the optimum parameters of composite skin under action of compressive and shear flows is considered. Peculiarities of the optimum design problem are formulated as follows. Firstly, two loading levels are considered when designing the panels. At the first level, panel buckling is not admissible. At the second level, subject to the admissibility of postbuckling behavior, the panel thickness is calculated from the conditions for reaching the critical stresses determined accounting for the geometrically nonlinear relations. Secondly, the thickness and width of the rectangular panel are taken as variable parameters. Thirdly, in order to determine the optimum parameters of the panel, the conditions of realization of the minimum stability margin at the first loading level and minimum strength margin at the second loading level are taken into account. The stability and strength margins at the corresponding loading levels have to be equal unit. The loading levels above-mentioned, in general case, have to be coincided with the operating and ultimate loads considered when designing the aircraft structures, but can be given by an aircraft designer based on the

*Автор, с которым следует вести переписку: oleg1mitrofanov@yandex.ru
Corresponding author: oleg1mitrofanov@yandex.ru

special design conditions. It was noted that analytical solutions of the geometrically nonlinear problems have to be used in determining the design parameters according to the technique of postbuckling state. The relations presented take into account the membrane stresses arising at buckling of a thin panel. The technique developed can be applied at the early design stages. The relations for designing the hinge-supported orthotropic panels in compression, shear and combined loading are presented.

Ключевые слова: состояние закритическое, устойчивость, панели прямоугольные, материал ортотропный, сжатие, сдвиг

Для сжатых несущих панелей кессонов крыла и агрегатов механизации легкого самолета допускается потеря устойчивости тонких обшивок при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. В работе рассмотрена методика определения оптимальных параметров обшивки из композитных материалов при воздействии сжимающими и сдвиговыми потоками. Особенности постановки задачи оптимального проектирования следующие. Во-первых, при проектировании панелей предложено рассматривать два уровня нагружения: на первом не допускается потеря устойчивости панели; на втором при условии допустимости закритического поведения вычисляют толщину панели из условий достижения предельных по прочности напряжений, определенных с учетом геометрически нелинейных соотношений. Во-вторых, в качестве переменных параметров принята толщина и ширина прямоугольной панели. В-третьих, для определения оптимальных параметров панелей учитывается условие реализации минимальных запасов по устойчивости при первом уровне нагружения и по прочности при проектировании по закритическому состоянию при втором уровне нагружения. Запасы по устойчивости и по прочности на соответствующих уровнях нагружения должны быть равны единице. Указанные уровни нагружения в общем случае не обязательно должны совпадать с эксплуатационными и расчетными нагрузками, рассматриваемыми при проектировании авиационных конструкций, но могут назначаться разработчиком воздушного судна из специальных расчетных условий. Отмечено, что при определении параметров по закритическому состоянию должны быть использованы аналитические решения геометрически нелинейных задач. Указанные соотношения соответствуют методологии проектирования по закритическому состоянию. Приведенные в работе соотношения учитывают мембранные напряжения, возникающие при потере устойчивости тонких панелей. Представленная методика может быть применима на ранних этапах проектирования. В работе приведены соотношения для проектирования шарнирно опертых ортотропных панелей при сжатии, сдвиге и комбинированном нагружении.

Введение

При проектировании сжатых несущих панелей кессонов крыла и агрегатов механизации самолетов малой и средней грузоподъемности допускается потеря устойчивости обшивки при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. Рассмотрим гладкие панели из композитных материалов, нагруженные сжимающими и сдвиговыми потоками. Как правило, большой интерес при проектировании указанных элементов авиационных конструкций вызывают задачи и поверочных расчетов, и оптимального проектирования панелей минимального веса. Отметим, что решения задач оптимального армирования композитных панелей при ограничениях по прочности получены достаточно давно и приведены, например, в монографиях [1—4]. Актуальным вопросам расчетов устойчивости и закритического поведения гладких и подкрепленных панелей посвящены монографии [5, 6]. Кроме того, в работе [6] приведены результаты широких экспериментальных исследований подкрепленных композитных панелей.

В работах [7, 8] отмечено, что потенциал композитных панелей тонкостенных конструкций, склонных к потере устойчивости, не используется в полной мере из-за отсутствия нормативных документов в авиакосмической отрасли. С таким утверждением следует согласиться и в настоящее время, поскольку технические специалисты используют в основном циркуляр [9].

Решения прикладных задач, касающиеся оптимального проектирования композитных панелей с учетом деградации характеристик композитных материалов, приведены в работах [10—12]. Следующее направление, имеющее практическую значимость, связано с численными и экспериментальными исследованиями прочности композитных панелей с учетом низкоскоростных ударных воздействий [13, 14]. Также следует отметить работы, посвященные оптимальному проектированию трехслойных композитных панелей [15, 16]. Широкому параметрическому моделированию композитного крыла посвящена работа [17].

Анализ закритического поведения является сложным и актуальным направлением для проектирования и численных исследований [18, 19] тонкостенных композитных конструкций. Большой обзор работ, посвященных расчетам и алгоритмам оптимизации подкрепленных металлических и композитных панелей при обеспечении условий устойчивости и прочности при закритическом поведении, представлен в [20]. Отметим, что наиболее перспективные разработки по оптимальному проектированию композитных панелей при закритическом поведении связаны с возможным варьированием переменными жесткостями, в том числе связанными с изменением угла армирования. В [21—26] предложены различные методики расчета и проектирования оптимальных композитных панелей с переменными углами армирования. Несомненно, интересными являются работы [27, 28], посвященные аналитическому подходу к оптимизации укладки композитных панелей при геометрически нелинейном поведении с учетом переменного угла армирования слоистого пакета.

Другое важное направление, активно развиваемое авторами работ [29, 30], связано с вероятностным подходом к оптимизации композитных конструкций при анализе их надежности и прочности при закритическом состоянии.

Отдельно следует выделить главу монографии [31], которая посвящена задачам оптимального проектирования композитных панелей при закритическом поведении. В работе объединены возможности нелинейного конечно-элементного моделирования и анализа возможных форм перестроения для последующего эффективного проектирования панелей. Также следует отметить работу [32], посвященную анализу и проектированию панелей при закритическом поведении с учетом умеренного развития геометрически нелинейного поведения при вторичном изменении параметров волнообразования при нагружении.

В [33, 34] изложена методология проектирования тонких композитных панелей по закритическому состоянию при допустимости потери устойчивости при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. В этом случае при использовании аналитических решений геометрически нелинейных задач возможно определение минимальных толщин панелей при достижении предельных по прочности напряжений.

В данной работе предложено определять оптимальные параметры гладких композитных панелей (рис. 1) исходя из обеспечения минимальных запасов (равных единице) на двух уровнях нагружения:

- на уровне 1 необходимо обеспечить устойчивость,
- на уровне 2 допустима потеря устойчивости и необходимо обеспечить статическую прочность при геометрически нелинейном поведении панели.

В общем случае указанные уровни нагружения 1 и 2 могут не совпадать с эксплуатационными и расчетными нагрузками. Отметим, что указанные уровни нагружения при введении дополнительных коэффициентов могут назначаться разработчиком воздушного судна в специальных расчетных условиях. Например, для обшивок сжатых панелей многозамкнутого закрылка самолета малой и средней грузоподъемности возможно допущение потери устойчивости обшивки между продольными стенками (рис. 2) при сжимающих нагрузках ниже эксплуатационного уровня. Это также отно-

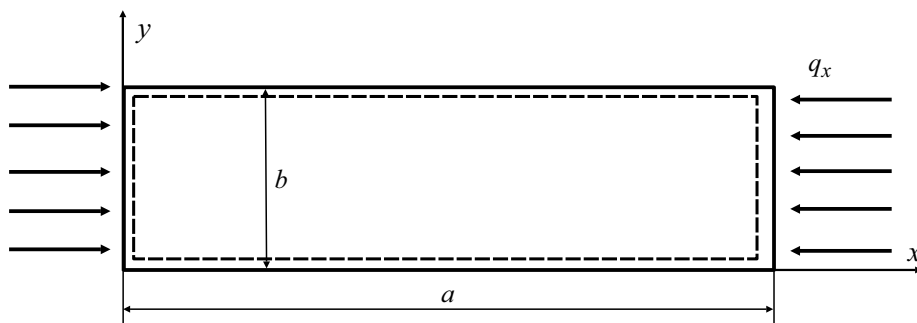


Рис. 1. Схема прямоугольной ортотропной панели при действии сжимающих усилий.

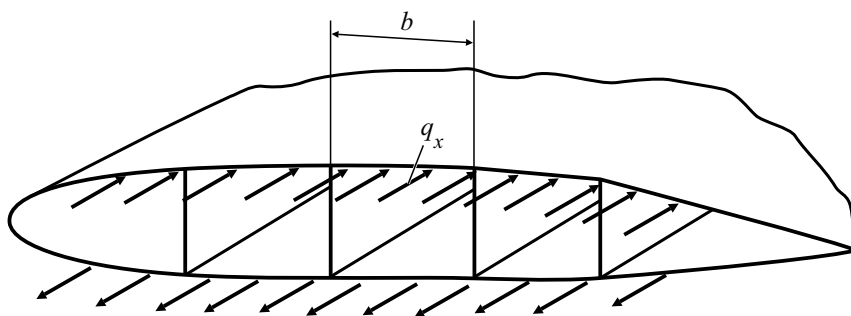


Рис. 2. Поперечное сечение многослойного закрылка.

сится к нижним панелям фюзеляжа при действии сжатия. Для удобства дальнейших рассуждений обозначим отношение нагрузок двух указанных уровней через коэффициент ω , который не обязательно будет совпадать с коэффициентом безопасности, принятым при разработке авиационных конструкций.

Формально задача проектирования панелей минимального веса может быть представлена следующим образом: при заданных потоках необходимо определить толщину и ширину гладкой композитной панели (целевая функция — вес $V(\delta, b) \rightarrow \min$) при ограничениях по устойчивости и по прочности при закритическом поведении, которые выполняются в виде равенства единице соответствующих запасов.

В настоящей работе рассмотрим одновременно соотношения методик проектирования по устойчивости и по закритическому состоянию. Исследуем прямоугольные ортотропные панели с геометрическими параметрами $a \gg b$ толщиной δ при шарнирном опирании при сжатии, сдвиге и комбинированном нагружении. Цель — разработка методики проектирования гладких композитных панелей с учетом указанных условий и запись замкнутых аналитических соотношений для определения толщины и ширины панели.

1. Исходные соотношения и предлагаемая методика проектирования

Запишем основные соотношения геометрически нелинейной задачи для ортотропных гладких панелей. Условие совместности деформаций имеет вид

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \quad (1)$$

где

$$L_1(F) = \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4},$$

$$L_2(W) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

нелинейное уравнение типа Кармана —

$$L_3(F, W) - L_4(W) = 0, \quad (2)$$

где

$$L_3(F, W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

$$L_4(W) = \frac{1}{\delta} \left[D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right].$$

Здесь и далее E_x, E_y — модули упругости в направлении осей x и y ; G_{xy} — модуль сдвига в плоскости композитного пакета; μ_{xy} — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение вдоль оси x при растяжении вдоль оси y ; условие ортотропии $E_x \mu_{xy} = E_y \mu_{yx}$; D_E, D_C, D_3 — изгибные жесткости ортотропной панели; δ — толщина панели; F — функция напряжений.

Приведем дополненный по отношению к материалам работ [33, 34] алгоритм определения оптимальных параметров ортотропных панелей, который в данном случае будет включать следующие пункты:

1) исходя из геометрических параметров, граничных условий и характера нагружения панели необходимо определить возможную форму прогиба при потере устойчивости панели, которая, как правило, может быть описана известной тригонометрической функцией (с точностью до неизвестной величины амплитуды);

2) определить коэффициент $\omega = q^d / q^{st}$ — отношение расчетной (разрушающей) нагрузки и критической нагрузки, при которой потеря устойчивости не допускается;

3) при известных геометрических параметрах (в частности, длине и ширине панели) и жесткостных характеристиках, обусловленных укладкой КМ, для рассматриваемых гладких ортотропных панелей вычислить числа полуволн при потере устойчивости по известным соотношениям механики композитных конструкций [1];

4) провести аналитическое решение геометрически нелинейной задачи методом Бубнова—Галеркина, позволяющим получить замкнутые аналитические соотношения и, в частности, нелинейные уравнения, связывающие толщину, ширину панели и амплитуду прогиба;

5) записать равенства для определения напряжений через функцию напряжений, из которых получаем выражение для мембранных напряжений в зависимости от амплитуды прогиба;

6) исследовать на экстремум выражения для напряжений по координатам x и y и определить точки, в которых напряжения могут достичь максимальных по модулю значений;

7) из условия достижения напряжениями предельных значений, например, $\bar{\sigma}_x$, определить амплитуду прогиба при напряжениях $\sigma = \bar{\sigma}_x$ (см.

п. 5). Подставив полученное равенство в геометрически нелинейное уравнение (см. п. 4), в итоге запишем нелинейное уравнение относительно толщины панели;

8) в общем случае надо записать линейные соотношения (см. п. 4) и аналитически решить задачу устойчивости. Как правило, выражения для определения критических напряжений потери устойчивости гладких ортотропных панелей известны. Аналитически переписать полученное соотношение относительно ширины панели;

9) подставить полученное в п. 8 соотношение в выражение, являющееся решением геометрически нелинейной задачи, в п. 7 и получить нелинейное уравнение относительно толщины панели;

10) провести численное решение нелинейного уравнения и определить оптимальную толщину гладкой ортотропной панели. Вычислить ширину ортотропной панели (см. п. 8). Исходя из конструктивных и технологических ограничений уточнить значения толщины и ширины панели.

Теперь рассмотрим применение приведенных пунктов при различных вариантах нагружения композитных панелей.

2. Определение оптимальных параметров гладких композитных панелей при сжатии

Рассмотрим соотношения, приведенные в табл. 1, поясняющие место методологии проектирования по закритическому состоянию в общей те-

Табл. 1

Расчетные соотношения для определения толщины ортотропной прямоугольной панели при одноосном сжатии при шарнирном опирании [34]

Условия для проектирования панелей	Соотношения для определения напряжений	Соотношения для определения минимальной толщины панелей
Статическая прочность	$\sigma = \frac{P}{\delta b}$	$\delta = \frac{P}{\sigma b}$
Устойчивость	$\bar{\sigma}_{cr} = K \left(\frac{\delta}{b} \right)^2, K = \frac{2\pi^2}{12} \times$ $\times \left[\sqrt{E_x \bar{E}_y + \mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy}} \right]$	$\delta^2 = b^2 \frac{\bar{\sigma}_{st}}{K}$
Закритическое состояние	$\sigma_x = -\frac{f^2}{8} E_x \frac{\pi^2 m^2}{a^2} - p_x,$ $\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = p_x \left(\frac{m}{a} \right)^2$	$\delta^3 + \delta \frac{E_{mn} \bar{\sigma}_x}{D_{mn} E_{\alpha\beta}} -$ $-\frac{q_x^d}{D_{mn}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{E_{mn}}{E_{\alpha\beta}} \right) = 0$

ории проектирования тонкостенных конструкций. Представленные соотношения иллюстрируют возможность определения толщины панелей при ограничениях по статической прочности, устойчивости и закритическому состоянию.

В табл. 1 введены следующие обозначения: K , \bar{D}_{mn} , E_{mn} , $E_{\alpha\beta}$ — коэффициенты, зависящие от жесткостных соотношений композитной структуры панели (приведены далее); $\bar{\sigma}$ — допускаемые по условиям прочности нормальные напряжения; $\bar{\sigma}_{st}$ — допускаемые по условиям устойчивости нормальные напряжения, определяемые разработчиком воздушного судна; $q_x^d = p_x \delta$ — действующий на панель сжимающий поток на расчетном уровне нагружения; $\bar{E}_x = \frac{E_x}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}$, $\bar{E}_y = \frac{E_y}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}$.

Дадим необходимые пояснения для приведенных соотношений. Представим прогиб прямоугольной панели в виде

$$W = f \sin\left(\frac{\pi mx}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

где f — амплитуда прогиба; m — число полуволн в продольном направлении.

В результате рассмотрения геометрически нелинейного уравнения совместности деформаций (1) может быть определена функция напряжений [34]

$$F = A_1 f^2 \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) + A_2 f^2 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - \frac{p_x y^2}{2},$$

где

$$A_1 = \frac{E_y a^2}{32 b^2 m^2}, \quad A_2 = \frac{E_x b^2 m^2}{32 a^2}.$$

Тогда мембранные продольные напряжения потерявшей устойчивость панели вычисляем по формуле

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{E_x f^2 m^2 \pi^2}{8 a^2} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - p_x. \quad (3)$$

При решении геометрически нелинейной задачи методом Бубнова—Галеркина может быть получено уравнение

$$\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = \left(\frac{m}{a}\right)^2 p_x, \quad (4)$$

где

$$E_{mn} = \left(\frac{m^4 E_x}{a^4} + \frac{E_y}{b^4}\right) \frac{\pi^2}{16}, \quad (5)$$

$$\bar{D}_{mn} = \pi^2 \left[\frac{\bar{E}_x}{12} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \left(\frac{m}{ab} \right)^2 + \frac{\bar{E}_y}{12} \left(\frac{1}{b} \right)^4 \right]. \quad (6)$$

Далее будем считать, что продольные напряжения (3) достигают предельных по прочности значений $\bar{\sigma}_x$ в потенциально-критических точках при условии выполнения равенства $\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) = 1$. Тогда, выразив из уравнения (3) амплитуду прогиба, получим соотношение

$$f^2 = (\bar{\sigma}_x - p_x) \frac{1}{E_{\alpha\beta}}, \quad (7)$$

где $E_{\alpha\beta} = \frac{E_x \pi^2 m^2}{8a^2}$.

Подставляя прогиб (7) в уравнение (4), получим искомое нелинейное выражение, указанное в табл. 1, относительно толщины

$$\delta^3 + \delta \frac{E_{mn} \bar{\sigma}_x}{D_{mn} E_{\alpha\beta}} - \frac{q_x^d}{D_{mn}} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{E_{mn}}{E_{\alpha\beta}} \right) = 0,$$

где q_x^d — сжимающий поток при расчетном уровне нагружения.

Теперь уточним соотношения, введя два уровня нагружения при проектировании и рассмотрев два переменных параметра — толщину и ширину прямоугольной панели. Запишем выражение при проектировании по устойчивости не через критические напряжения, а через действующий на эксплуатационном уровне сжимающий поток

$$b^2 = \frac{\pi^2}{6q_x^{\text{exp}}} \delta^3 \left[\sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} + \mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy} \right]. \quad (8)$$

Также следует учесть, что используемое соотношение верно при определении числа полуволн m [1]

$$m = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{E_y}{E_x}}, \quad (9)$$

из которого следует, что число m зависит от соотношения жесткостных параметров и соотношений сторон.

Таким образом, для получения уравнения для определения толщины панели необходимо в выражение (7) подставить обозначения (5), (6), затем соотношение для чисел полуволн m (9) и далее исключить ширину b с помощью уравнения (8). Итоговое выражение относительно толщины

после указанных преобразований включает сжимающие потоки, действующие на двух уровнях нагружения:

$$\delta = \frac{2q_x^d - q_x^{st}}{\bar{\sigma}_x}. \quad (10)$$

В инженерных расчетах авиационных конструкций при условии $q_x^{st} = q_x^{\text{exp}}$ следует учитывать величину коэффициента безопасности $f_{\text{safety}} = 1,5$. Тогда для определения толщины получим более простое равенство

$$\delta = \frac{2q_x^{\text{exp}}}{\sigma_x}, \quad (11)$$

которое вместе с уравнением (8) определяет оптимальные параметры композитной панели. Также отметим, что в данном случае не указаны дополнительные коэффициенты безопасности, вводимые при проектировании композитных конструкций и, как уже было отмечено, вводимые разработчиком воздушного судна в специальные расчетные условия и зависящие от многих конкретных условий. Причем на дополнительные коэффициенты безопасности обычно умножают нагрузки на двух указанных уровнях нагружения.

3. Определение оптимальных параметров гладких композитных панелей при сдвиге

Представим аналогичные рассуждения при рассмотрении задачи оптимального проектирования гладких ортотропных панелей при действии касательных потоков. Также рассмотрим соотношения, приведенные в табл. 2, с помощью которых можно убедиться в правомерности представленных рассуждений для случая сдвига.

В табл. 2 приняты следующие обозначения: Q — действующая перерезывающая сила; $\bar{\tau}_d$ — допускаемые по условиям прочности касательные напряжения; $\bar{\tau}_{st}$ — допускаемые по условиям устойчивости касательные напряжения, которые определяются разработчиком воздушного судна; $q_{xy}^d = p_{xy}\delta$ — действующий на панель сдвиговой поток при расчетном уровне нагружения; $B_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$, G_α — жесткостные коэффициенты, обозначения для которых приведены далее.

Теперь рассмотрим случай действия на ортотропную прямоугольную панель касательных потоков. Воспользуемся для описания прогиба равенством вида [35]

$$W = f \cdot \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s}, \quad (12)$$

где α — тангенс угла наклона волн при выпучивании; s — расстояние между узловыми линиями.

Табл. 2

Расчетные соотношения для определения толщины ортотропной прямоугольной панели при сдвиге

Условия для проектирования панелей	Соотношения для вычисления напряжений	Соотношения для определения минимальной толщины панелей
Статическая прочность	$\tau = \frac{Q}{\delta b}$	$\delta = \frac{Q}{\bar{\tau}_d b}$
Устойчивость	$\tau_{cr} = K_\tau \left(\frac{\delta}{b} \right)^2$, $K_\tau = \frac{2\pi^2}{12} \times$ $\times \sqrt{\bar{E}_y (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})} \sqrt{4 + 3\theta + \frac{1}{\theta}}$, $\theta = \sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} / (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})$ [35]	$\delta^2 = b^2 \frac{\bar{\tau}_{st}}{K_\tau}$
Закритическое состояние	$\tau_{xy} = -f^2 \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} - p_{xy}$, $f^2 B_{\alpha\beta} \delta + D_{\alpha\beta} \delta^3 = \frac{2\alpha\pi^2}{s^2} q_{xy}^d$	$\delta^3 + \delta \frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} \bar{\tau}_{xy} b^2}{D_{\alpha\beta} \pi^2 \alpha} +$ $+ \frac{q_{xy}^d}{\pi^2 D_{\alpha\beta}} \left(\frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} b^2}{\alpha} - \frac{2\alpha}{s^2} \right) = 0$

Тогда из уравнения совместности деформаций (1) получим функцию напряжений

$$F = \frac{f^2}{32} \left\{ \frac{1}{G_\alpha} \left(\frac{s}{b} \right)^2 \cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s} + \left(\frac{b}{s} \right)^2 E_x \cos \frac{2\pi y}{b} \right\} - \frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2} + p_{xy} xy, \quad (13)$$

где

$$G_\alpha = \frac{1}{E_y} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_x} \right) \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{E_x}.$$

Будем считать, что прочностное разрушение в данном случае возможно по достижении предельных касательных напряжений $\bar{\tau}_{xy}$. Запишем выражение для мембранных касательных напряжений [34]

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Delta_{xy} - p_{xy},$$

где $\Delta_{xy} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s}$, и далее будем считать, что при действии

максимальных напряжений в критических точках имеем $\cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s} \rightarrow 1$.

Используя далее процедуру метода Бубнова—Галеркина с учетом геометрически нелинейного уравнения (2), в общем виде при $f \neq 0$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{s^2} \left[\frac{\pi^2 f^2}{16G_\alpha} \left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 + \frac{E_x}{16} \frac{\pi^2 f^2}{s^2} + p_x \right] + \left[-\frac{\pi^2 f^2}{16G_\alpha} + p_y \right] \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) + \\ & + \frac{\alpha \pi^2}{s^2} \left(\frac{\pi^2 f^2}{8b^2 G_\alpha} + 2p_{xy} \right) - \frac{\bar{E}_x \delta^2}{12} \frac{\pi^4}{s^4} - \\ & - 2 \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \delta^2 \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right) \frac{\pi^2}{s^2} - \\ & \frac{\bar{E}_y \delta^2}{12} \left[\left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right)^2 + \frac{4\pi^4 \alpha^2}{b^2 s^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При малых прогибах выражение (14) перепишем в виде

$$\begin{aligned} q_{xy} \alpha = p_{xy} \delta \alpha = & \frac{\bar{E}_x \delta^3}{12} \frac{\pi^2}{s^2} + 2 \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \delta^3 \left[\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\alpha^2 \pi^2}{s^2} \right] + \\ & + \frac{\bar{E}_y \delta^3}{12} \frac{s^2}{\pi^2} \left[\frac{\pi^4}{b^4} + \frac{\alpha^4 \pi^4}{s^4} + \frac{6\pi^4 \alpha^2}{b^2 s^2} \right], \end{aligned}$$

который совпадает с равенством из работы [35]. При некоторых упрощениях путем аналитической минимизации можно определить критический сдвиговой поток ортотропной панели по известной формуле [35]

$$q_{xy}^{cr} = \frac{2\pi^2}{b^2} \frac{\delta^3}{12} \sqrt{\bar{E}_y (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})} \sqrt{4 + 3\theta + \frac{1}{\theta}}, \quad (15)$$

где $\theta = \sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} / (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})$, при этом критические параметры волнообразования вычисляем из соотношений [35]

$$\alpha^4 \left[\frac{3\lambda}{\lambda_1} + 1 \right] + \alpha^2 \left[3\sqrt{\lambda_1} - \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda_1}} \right] - \lambda_1 - \lambda = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} + 2\lambda\alpha - \frac{1}{\alpha\gamma^2} + \alpha^3 = 0, \quad (17)$$

где

$$\gamma = \frac{b^2}{s^2}, \quad \lambda_1 = \frac{E_x}{E_y}, \quad \lambda = \frac{(\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})}{\bar{E}_y}.$$

Учитывая введение двух уровней нагружения, перепишем равенство (15) в виде

$$b^2 = \frac{\pi^2}{q_{xy}^{st}} \frac{\delta^3}{6} \sqrt{\bar{E}_y (\bar{E}_x \mu_{xy} + 2G_{xy})} \sqrt{4 + 3\theta + \frac{1}{\theta}}. \quad (18)$$

Далее при действии только касательных потоков на расчетном уровне из уравнения (14) имеем

$$\delta^3 + \delta \frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} \bar{\tau}_{xy} b^2}{D_{\alpha\beta} \pi^2 \alpha} + \frac{q_\alpha^d}{\pi^2 D_{\alpha\beta}} \left(\frac{8G_\alpha B_{\alpha\beta} b^2}{\alpha} - \frac{2\alpha}{s^2} \right) = 0, \quad (19)$$

где

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{b^4} \frac{1}{16G_\alpha} \left\{ \left[\left(\frac{\alpha b}{s} \right)^2 + E_x G_\alpha \frac{b^4}{s^4} \right] + \left[\frac{b^2}{s^2} + \alpha^2 \frac{b^4}{s^4} \right] + 2\alpha \frac{b^2}{s^2} \right\}, \quad (20)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{b^4} \frac{1}{12} \left\{ \bar{E}_x \frac{b^4}{s^4} + 2(\mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy}) \left[\frac{b^2}{s^2} + \alpha^2 \frac{b^4}{s^4} \right] + \bar{E}_y \left[\left(1 + \frac{\alpha^2 s^2}{b^2} \right)^2 + \frac{4\alpha^2 b^2}{s^2} \right] \right\}. \quad (21)$$

Теперь распишем процедуру получения итогового громоздкого уравнения для определения толщины с учетом того, что ширина панели b также является переменной величиной. Во-первых, определим критические параметры волнообразования α_{cr} и γ_{cr} , зависящие от жесткостных соотношений, по формулам (16), (17). Во-вторых, подставим обозначения для G_α , $B_{\alpha\beta}$ (20) и $D_{\alpha\beta}$ (21) в уравнение (19). Далее, используя обозначения для s и b (16), можно получить одно громоздкое уравнение относительно толщины δ , включающее в себя два уровня действующих потоков и решаемое численным образом. После определения оптимальной толщины панели по формуле (18) можно вычислить оптимальную ширину прямоугольной панели.

4. Определение оптимальных параметров композитных панелей при комбинированном нагружении

Рассмотрим случай комбинированного нагружения продольными сжимающими и касательными потоками. Будем считать, что компоненты нагружения изменяются пропорционально одному параметру: $q_x = \xi \bar{q}_x$, $q_{xy} = \xi \bar{q}_{xy}$. При рассмотрении задач устойчивости и закритического поведения будем использовать вид прогиба, описываемый соотношением (12). Тогда функция напряжения F и решение геометрически нелинейной задачи сохраняют вид соотношений (13) и (14).

При действии комбинации потоков при малых прогибах выражение (14) перепишем в виде

$$q_x^{st} + q_{xy}^{st} \alpha = \frac{\pi^2}{b^2} \left\{ \frac{\bar{E}_x \delta^3}{12} \frac{b^2}{s^2} + 2 \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \delta^3 \left[1 + \frac{\alpha^2 b^2}{s^2} \right] + \frac{\bar{E}_y \delta^3}{12} \left[\frac{s^2}{b^2} + \frac{\alpha^4 b^2}{s^2} + 6\alpha^2 \right] \right\},$$

где $q_x^{st} = p_x^{st} \delta$, $q_{xy}^{st} = p_{xy}^{st} \delta$ — действующие потоки, соответствующие уровню нагружения, при котором необходимо обеспечить устойчивость.

Далее при использовании параметра $\gamma = b^2/s^2$ и системы уравнений

$$\partial \xi / \partial \alpha = 0, \quad \partial \xi / \partial \gamma = 0$$

можно по аналогии со случаем сдвига и работы [36] численным образом определить критические параметры волнообразования при потере устойчивости (α_{cr}, γ_{cr}). В соответствии с предложенным приемом сведения задачи оптимизации к одному уравнению потребуются выражения относительно ширины панели.

Отметим еще раз практические достоинства результатов работы [35], в которой получены аналитические решения задач устойчивости для ортотропных панелей и формула для критических касательных потоков (15). Указанное уравнение было следствием более общей решаемой задачи устойчивости, предполагающей комбинированное нагружение. В работе [35] было получено аналитическое решение задачи устойчивости при одновременном действии сжимающих и касательных напряжений и записано выражение

$$\sigma_x^{exp} \delta + \frac{(\tau_{xy}^{exp} \delta)^2}{\frac{2\pi^2}{b^2} \left(2D_y + D_3 \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \right)} = \frac{2\pi^2}{b^2} (D_3 + \sqrt{D_x D_y}),$$

которое так же, как и формула (15), имеет применение для практических

расчетов. Переписывая приведенное уравнение через действующие потоки для первого уровня нагружения, при которых необходимо обеспечить устойчивость, имеем

$$q_x^{\text{st}} b^2 + \frac{(q_{xy}^{\text{st}})^2 b^4}{2\pi^2 \delta^3 \left[\frac{3\bar{E}_y}{12} + \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} \right) \sqrt{\frac{E_y}{E_x}} \right]} - 2\pi^2 \delta^3 \left(\frac{\mu_{xy} \bar{E}_x}{12} + \frac{G_{xy}}{6} + \frac{\sqrt{E_x \bar{E}_y}}{12} \right) = 0 \quad (22)$$

и получаем квадратное уравнение относительно величины b^2 . Отметим, что практическая значимость полученного в работе [35] уравнения заключается в возможности аналитического определения минимальной толщины ортотропной панели при заданной нагрузке, укладке и ширине панели.

Далее в рассматриваемой задаче определения толщины ортотропной панели с минимальными запасами для второго уровня нагружения при комбинированном нагружении необходимо воспользоваться комплексным критерием прочности. Считая, что на панель действуют потоки (так как при постановке задачи проектирования толщины и напряжения неизвестны), воспользуемся следующим выражением для критерия прочности с учетом умножения на толщину:

$$\frac{(\sigma_x \delta)^2}{\bar{\sigma}_x^2} + \frac{(\tau_{xy} \delta)^2}{\bar{\tau}_{xy}^2} = \delta^2. \quad (23)$$

Здесь $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\tau}_{xy}$ — предельные по остаточной прочности напряжения композитного пакета при наличии дефектов 1-й категории [9]. Отметим, что данный прием использован в работе [36], где рассмотрен вариант нагружения при действии двухосного сжатия и сдвига.

Мембранные напряжения в срединной поверхности потерявшей устойчивость прямоугольной ортотропной панели определяем как

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -f^2 \Delta_x - p_x, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2 \Delta_{xy} - p_{xy}, \quad (24)$$

где

$$\Delta_x = -\frac{\pi^2}{8} \left\{ \frac{\alpha^2}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s} + \frac{E_x}{s^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right\},$$

$$\Delta_{xy} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\alpha}{G_\alpha b^2} \cos \frac{2\pi(x-\alpha y)}{s}.$$

Теперь запишем полученные выражения для случая совместного действия продольными сжимающими $q_x^d = p_x \delta$ и касательными $q_{xy}^d = p_{xy} \delta$ потоками. Перепишем выражения (24) с учетом действия потоков в виде

$$\sigma_x \delta = -\delta \Delta_1 f^2 - q_x^d, \quad \tau_{xy} \delta = -\delta \Delta_{xy} f^2 - q_{xy}^d. \quad (25)$$

Далее нелинейное уравнение (14) перепишем в виде

$$f^2 B_{\alpha\beta} \delta + D_{\alpha\beta} \delta^3 = \frac{\pi^2}{s^2} q_x^d + \frac{2\alpha\pi^2}{s^2} q_{xy}^d. \quad (26)$$

Проведем следующие преобразования уравнений (23), (25) и (26). Сначала подставим потоки из (25) в критерий прочности (23). Далее, подставив амплитуду прогиба из (26) в полученное на предыдущем шаге рассуждений соотношение, запишем искомое нелинейное уравнение для определения толщины как

$$\begin{aligned} & \bar{\tau}_{xy}^2 \left[-\Delta_1 \frac{\frac{\pi^2}{s^2} (q_x + 2\alpha q_{xy}) - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_x \right]^2 + \\ & + \bar{\sigma}_x^2 \left[\Delta_2 \frac{\frac{\pi^2}{s^2} (q_x + 2\alpha q_{xy}) - D_{\alpha\beta} \delta^3}{B_{\alpha\beta}} - q_{xy} \right]^2 = \delta^2 \bar{\sigma}_x^2 \bar{\tau}_{xy}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Для получения искомого громоздкого уравнения для определения оптимальной толщины при рассмотрении двух уровней нагружения надо подставить величины b^2 при аналитическом решении квадратного уравнения (22) в записанное равенство (27).

5. Пример определения параметров композитной панели при сжатии

Рассмотрим панели из углепластика со следующими характеристиками: $E_1 = 125$ ГПа, $E_2 = 9$ ГПа, $G_{12} = 5$ ГПа, $\mu_{21} = 0,28$, $\bar{\sigma}_1 = 0,9$ ГПа. Положим, что при стандартной укладке $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$ и относительной толщине $h_0 = 0,4$, $h_{45} = 0,5$, $h_{90} = 0,1$ предел прочности при сжатии равен $\bar{\sigma}_x = 459$ МПа. В табл. 3, 4 приведены результаты расчетов при разных уровнях нагружения. Приведенный параметр $\Delta = 100/\omega$ (%) показывает процент нагрузки, при которой принята возможность допустимости потери устойчивости. Из данных табл. 3, 4 видно, что допустимость или недопустимость ранней потери устойчивости может приводить к разным рекомендациям при разработке конструкций.

Табл. 3

Оптимальные параметры углепластиковой панели при изменении уровня нагрузки, при которой допустима потеря устойчивости

$q_x^{st} \cdot 10^3$, ГПа·м	0,4	0,359	0,24	0,182	0,15
$q_x^d \cdot 10^3$, ГПа·м	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
ω	1,5	1,67	2,5	3,3	4
Δ , %	67	60	40	30	25
δ , мм	1,74	1,83	2,09	2,22	2,29
b , мм	47,6	54,2	80,8	101,3	116,9

Рассмотрим также традиционный вопрос проектирования композитных конструкций об оптимальной укладке. В данном случае для шарнирно опертой панели при сжатии параметры панели определяем по формулам (8) и (10). Целесообразно рассматривать безразмерный параметр $\zeta = \delta / b$. Из указанных уравнений можно получить соотношение

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{6q_x^{st}}{\pi^2 \left[\sqrt{E_x E_y} + \mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy} \right]}} \frac{\bar{\sigma}_x}{(2q_x^d - q_x^{st})},$$

а для авиационных конструкций с учетом коэффициента безопасности $f_{safety} = 1,5$ имеем

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{3\bar{\sigma}_x}{\pi^2 \left[\sqrt{E_x E_y} + \mu_{xy} \bar{E}_x + 2G_{xy} \right]}}.$$

Отметим, что здесь также опущены дополнительные коэффициенты безопасности, вводимые при проектировании композитных конструкций по указанным ранее причинам. Для оценки оптимального армирования в

Табл. 4

Оптимальные параметры углепластиковой панели при изменении уровня разрушающей нагрузки

$q_x^{st} \cdot 10^3$, ГПа·м	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
$q_x^d \cdot 10^3$, ГПа·м	0,6	0,668	1,0	1,32	1,6
ω	1,5	1,67	2,5	3,3	4
Δ , %	67	60	40	30	25
δ , мм	1,74	2,04	3,48	4,88	6,1
b , мм	47,6	60,3	134,7	223,1	311,8

Табл. 5

Оптимальные параметры углепластиковой панели при изменении угла армирования при уровнях нагружения $q_x^{st} \cdot 10^3 = 0,4$ ГПа·м и $q_x^d \cdot 10^3 = 0,6$ ГПа·м

Параметр	$\pm\varphi$, град			
	10	20	30	40
$\bar{\sigma}_x$, ГПа	0,827	0,6	0,33	0,168
ζ	0,067	0,048	0,03	0,02
δ , мм	0,97	1,33	2,43	4,75
b , мм	14,4	27,9	80,8	241,4

табл. 5 показано изменение параметра ζ в зависимости от угла армирования при использовании структуры $\pm\varphi^\circ$. Предел прочности $\bar{\sigma}_x$ ($\pm\varphi^\circ$) при этом определялся по условию разрушения монослоя КМ вдоль волокон. Отметим, что реализация прочностных и жесткостных характеристик панели со структурой $\pm\varphi^\circ$ возможна и при стандартной укладке $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$. Отметим также, что полученные соотношения учитывают прочностные, но не конструктивные и не технологические ограничения. При разработке конструкций, как правило, реализуется компромиссное решение.

6. Пример возможного применения методики определения оптимальных параметров сжатых панелей

Рассмотрим многозамкнутый закрылок самолета малой грузоподъемности при допустимости потери устойчивости обшивки между продольными стенками (рис. 2, 3). На ранних этапах проектирования, как правило, исходными данными являются геометрические параметры (например, координаты внешних поверхностей, но не толщина обшивок) закрылка, а также внешние нагрузки и соответствующие силовые факторы (изгибающий и крутящий моменты, а также перерезывающая сила). На начальном этапе проектирования исходя из величины изгибающего момента и координат внешних поверхностей и используя балочную теорию, можно определить расчетные нормальные потоки. В этом случае вкладом продольных поясов (носящих конструктивный характер) в восприятие изгибающего момента, как правило, пренебрегают. Причем на максимальной высоте сечения будет действовать максимальный сжимающий поток. Пример сечения рассматриваемой конструкции показан на рис. 2, 3. Используя формулы (8) и (11), можно вычислить толщину сжатой панели и шаг установки продольных стенок исходя из ранее рассмотренных условий обеспечения устойчивости и прочности при закритическом состоянии.



Рис. 3. Фрагмент поперечного сечения конструктивно-подобного образца многослойного закрывка.

Заключение

В настоящей работе получены следующие результаты.

1. Предложена методика проектирования оптимальных гладких композитных панелей в новой постановке задачи при ограничениях по устойчивости и прочности при закритическом поведении. В методике учитываются два уровня нагружения, при которых обеспечивается устойчивость и прочность при геометрически нелинейном поведении панели с минимальными запасами, равными единице.

2. Приведены аналитические соотношения при реализации методики при сжатии, сдвиге и комбинированном нагружении, что соответствует достижению цели работы. Даны пояснения особенностей реализации методики для каждого вида нагружения. В случае сжатия шарнирно опертой панели получены инженерные аналитические соотношения для получения рекомендаций при выборе оптимальных параметров.

3. Практическая значимость работы заключается в возможности получения оптимальных параметров гладких композитных панелей на ранних этапах проектирования, когда переменными параметрами могут быть толщина и ширина панели (шаг стрингеров) при заданных погонных нагрузках. Также методика может быть использована при выборе шага установки стенок для многозамкнутых конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vasiliev V. V., Morozov E. V.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures. — Amsterdam: Elsevier, 2018.
2. *Тетерс Г. А., Рикардс Р. Б., Нарусберг В. Л.* Оптимизация оболочек из слоистых композитов. — Рига: Зинатне, 1978.
3. *Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1977.

4. Баничук Н. В., Кобелев В. В., Рикардс Р. Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1988.
5. Kollár L., Springer G. *Mechanics of Composite Structures*. — Cambridge University Press, 2009. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511547140>
6. Falzon B. G., Aliabadi M. H. *Buckling and Postbuckling Structures: Experimental, Analytical and Numerical Studies*. — Imperial College London, UK, 2008. <https://doi.org/10.1142/p506>
7. Degenhardt R., Teßmer J. Advances in computational stability analysis of composite aerospace structures // AIP Conf. Proc. — 2010. — Vol. 1281. — P. 1608 — 1611. <https://doi.org/10.1063/1.3498128>
8. Degenhardt R., Castro S., Arbelo M., Zimmerman R., Khakimova R., Kling A. Future structural stability design for composite space and airframe structures // *Thin-Walled Struct.* — 2014. — Vol. 81. — P. 29—38. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.02.020>
9. Advisory Circular 20-107B, U.S. Department of Transportation Federal Aviation Administration, 2009. https://www.faa.gov/documentLibrary/media/Advisory_Circular/AC20-107B.pdf
10. Kalnins K., Auzins J., Rikards R. Metamodeling approach for analysis of post-buckling in composite panels with structural degradation // 11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conf., Portsmouth, Virginia, USA, 06 — 08 Sept., 2006. <https://doi.org/10.2514/6.2006-7104>
11. Kalnins K., Auzins J., Rikards R. Fast simulation procedure for ribbed composite structures with material degradation // *Mech. Compos. Mater.* — 2007. — Vol. 43, No. 2. — P. 225—232. <https://doi.org/10.1007/s11029-007-0022-2>
12. Kalnins K., Bisagni C., Rikards R., Eglitis E., Cordisco P., Chate A. Metamodels for the optimization of damage tolerant composite structures // ICAS 2008 — 26th Congr. Int. Council of the Aeronautical Sciences, Anchorage, Alaska, USA, September 14-19, 2008, ICAS 2008. 3. — P. 2151—2157.
13. Liu H., Liu J., Ding Y., Zhou J., Shao K., Blackman B., Kinloch A., Falzon B., Dear J. Effects of impactor geometry on the low-velocity impact behaviour of fibre-reinforced composites: An experimental and theoretical investigation // *Appl. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 27. — P. 533—553. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10443-020-09812-8>
14. Liu H., Falzon B. G., Tan W. Experimental and numerical studies on the impact response of damage-tolerant hybrid unidirectional/woven carbon-fibre reinforced composite laminates // *Composites: Part B*. — 2017. — Vol. 136. — P. 101—118. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.10.016>
15. Kondratiev A., Potapov O., Tsaritsynskyy A., Nabokina T. Optimal design of composite shelled sandwich structures with a honeycomb filler // *Adv. Des., Simulation and Manufacturing IV*. — 2021. — P. 546—555. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-77719-7_54
16. Kondratiev A., Gaydachuk V. Weight-based optimization of sandwich shelled composite structures with a honeycomb filler // *Eastern-European J. Enterprise Technol.* — 2019. — Vol. 1, No. 1. — P. 24—33. <http://dx.doi.org/10.15587/1729-4061.2019.154928>
17. Михайловский К. В., Барановски С. В. Методика проектирования крыла из полимерных композиционных материалов на основе параметрического моделирования. Ч. 3. Выбор и обоснование оптимальных схем армирования силовых элементов // *Изв. вузов. Машиностроение*. — 2018. — № 5 (698) — С. 75—84. <http://doi.org/10.18698/0536-1044-2018-5-75-84>
18. Maksimović K., Maksimović M., Vasović-Maksimović I., Rasuo B., Maksimović S. Postbuckling and failure analysis of layered composite panels // *FME Trans.* — 2020. — Vol. 48, No. 2. — P. 447—453. <http://dx.doi.org/10.5937/fme2002447M>

19. Zhang F., Wu M., Hou X., Han C., Wang X., Xu X. Post-buckling reliability analysis of stiffened composite panels based on adaptive iterative sampling // Eng. Comput. — 2021. — Vol. 22, May. — P. 1—11. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00366-021-01424-5>
20. Ni X., Prusty G., Hellier A. Buckling and post-buckling of isotropic and composite stiffened panels: A review on optimisation (2000-2015) // Trans. Roy. Inst. Naval Architects. Part A: Int. J. Maritime Eng. — 2016. — Vol. 158, Part A3. — P. A-251—A-268. <https://doi.org/10.5750/ijme.v158iA3.994>
21. Madeo A., Groh R. M. J., Zucco G., Weaver P., Zagari G., Zinno, R. Post-buckling analysis of variable-angle tow composite plates using Koiter's approach and the finite element method // Thin-Walled Struct. — 2017. — Vol. 110, January. — P. 1—13 <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2016.10.012>
22. White S., Raju G., Weaver P. Initial post-buckling of variable-stiffness curved panels // J. Mech. Phys. Solids. — 2014. — Vol. 71, November. — P. 132—155 <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2014.07.003>
23. Quadros H., Hernandez J. A lagrange parametrization for the design of variable stiffness laminates // Struct. Multidisciplinary Optimization. — 2018. — Vol. 58, February. P. 129—137. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-017-1882-2>
24. Wu Z., Raju G., Weaver P. Framework for the buckling optimization of variable-angle tow composite plates // AIAA J. — 2015. — Vol. 53, No. 12. — P. 1—17. <http://dx.doi.org/10.2514/1.J054029>
25. Liguori F. S., Zucco G., Madeo A., Magisano D., Leonetti L., Garcea G., Weaver P. Koiter method and solid shell finite elements for postbuckling optimisation of variable angle tow composite structures // Proc. XXIV AIMETA Conf. — 2019. — P. 1731—1742 http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-41057-5_139
26. Wu Wen, Ba R., Lei Z., Geng C., Zhang X., Peng K., Guo J., Ma Y. Buckling analysis of stiffened composite panels with variable stiffness // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. — 2019. — Vol. 504, No. 1. Article number 012059. <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/504/1/012059>
27. Selyugin S. Locally orthotropic lay-up as an optimal solution for vat post-buckled composite plates experiencing large deflections above von Karman limits // engrXiv Preprints. — 2021. — P. 1—11. <http://dx.doi.org/10.31224/osf.io/4a6hz>
28. Selyugin S. Composite plates in postbuckling: dual extremal variational principles, energy features, stability, lay-up optimality conditions via complementary energy approach // engrXiv Preprints. — 2019. — P. 1—17. <http://dx.doi.org/10.31224/osf.io/3vbj6>
29. López C., Bacarreza O., Baldomir A., Hernandez S., Aliabadi M. H. Reliability-based design optimization of composite stiffened panels in post-buckling regime // Struct. Multidisciplinary Optimization. — 2017. — Vol. 55. — P. 1121—1141. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-016-1568-1>
30. Farokhi H., Bacarreza O., Aliabadi M. H. Probabilistic optimisation of mono-stringer composite stiffened panels in post-buckling regime // Struct. Multidisciplinary Optimization. — 2020. — Vol. 62. — P. 1395—1417. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00158-020-02565-9>
31. Faggiani A., Falzon B. G. Chapt. 8. Optimization of postbuckling-stiffened composite aerostructures // Buckling and Postbuckling Structures. II. Experimental, Analytical and Numerical Studies / Eds. B. G. Falzon and M. H. F. Aliabadi. — Queen's Univ. Belfast, UK, 2018. — P. 253—284. https://doi.org/10.1142/9781786344335_0008
32. Wu Z., Raju G., Weaver P. Analysis and design for the moderately deep postbuckling behavior of composite plates // J. Aircraft. — 2016. — Vol. 54, No. 1. — P. 1—9. <http://dx.doi.org/10.2514/1.C033875>

33. *Mitrofanov O.* Applied design of minimum weight composite wing panels taking into account skin post-buckling behavior // *Aerospace MAI J.* — 2002. — Vol. 9, No. 1. — P. 35—42. <http://vestnikmai.ru/publications.php?ID=32669>

34. *Mitrofanov O. V.* Designing Load-Bearing Panels of Aircraft Structures for Post-Buckling State. — Moscow: MAI, 2020.

35. *Balabukh L. I.* Stability of plywood plates // *Air Fleet Technol.* — 1937. — Vol. 9. — P. 19—37.

36. *Mitrofanov O., Osman M., Gavrioliak V.* Composite panels design based on post-buckling state with combined loading // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2021. — Vol. 1925, No. 1. — P. 1—9. Article number 012055. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1925/1/012055>

Поступила в редакцию 30.09.2021

Окончательный вариант поступил 10.01.2022

Received Sept. 30, 2021 (Jan. 10, 2022)

*Д. Д. Власов**, *А. Н. Полилов*

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия

**ВОЗМОЖНОСТЬ ПРЕДСКАЗАНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ
ВЯЗКОУПРУГИХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ
НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ КОМПОНЕНТ
КОМПЛЕКСНОГО МОДУЛЯ**

D. D. Vlasov and A. N. Polilov*

**THE POSSIBILITY OF CREEP PREDICTION OF VISCOELASTIC
POLYMER COMPOSITES USING FREQUENCY DEPENDENCES
OF COMPLEX MODULUS COMPONENTS**

Keywords: polymer fibrous composites, linear viscoelasticity, creep theory, complex modulus, vibration tests

The method of creep estimation of polymer composite materials based on the rheological characteristics obtained in vibration tests is considered. Difficulties of application of short-term vibration test results for creep prediction are analyzed. The type of experimental dependencies for the components of complex modulus required for the application of viscoelastic creep theory is substantiated. Convenient analytical approximations of these dependencies are proposed, which allow one to restore the creep kernel in the form of an exponential kernels. Stability of the restored creep kernel parameters to inaccuracy of experimental determination of frequency dependencies of complex modulus of carbon fiber-reinforced plastic is analyzed.

Ключевые слова: композиты волокнистые полимерные, вязкоупругость линейная, теория ползучести, модуль комплексный, испытания вибрационные

Обсуждена возможность восстановления функции ползучести по экспериментальным зависимостям компонент комплексного мо-

*Автор, с которым следует вести переписку: danila_vlasov_98@mail.ru
Corresponding author: danila_vlasov_98@mail.ru

дуля от частоты гармонического нагружения. Проанализированы сложности применения результатов кратковременных вибрационных испытаний для предсказания ползучести. Обоснован вид экспериментальных зависимостей компонент комплексного модуля, необходимых для применения математического аппарата линейной вязкоупругости. Предложены удобные аналитические аппроксимации этих зависимостей, позволяющие восстановить ядро ползучести в виде экспоненциального ядра. Проанализирована чувствительность параметров восстановленного ядра ползучести к погрешностям экспериментального определения частотных зависимостей комплексного модуля углепластика.

Введение

Явления, связанные с длительным деформированием материалов, называют — в широком смысле — ползучестью, которая проявляется, в частности, в росте деформаций при постоянном напряжении (собственно, “ползучесть” — в узком смысле), в снижении напряжений со временем при фиксированной деформации (релаксация), а также в затухании колебаний и сдвиге фаз при вибрационных испытаниях. Все эти внешне разные явления управляются одними и теми же реологическими свойствами материалов, поэтому адекватность предлагаемых определяющих уравнений проверяется возможностью описания этих разных явлений единым набором материальных параметров.

Среди широкого класса традиционных и современных моделей вязкоупругости особое место занимают наследственные теории ползучести, опирающиеся на интегральные операторы с разностными ядрами [1—4]. Именно “гибкость” уравнений наследственной теории ползучести позволяет применять её к самым различным классам материалов и явлений.

Изучение ползучести полимерных композитных материалов (ПКМ) становится обязательным этапом проектирования силовых композитных конструкций.

Традиционно именно экспериментальное нахождение кривых ползучести при постоянной нагрузке считается наиболее простым и корректным, так как нагрузка задаётся “мёртвым грузом”, а деформация определяется непосредственно на образце. Испытание на релаксацию требует, казалось бы, более простого оборудования, но фиксируя деформацию образца, мы вынуждены измерять напряжение (усилие) по динамометру, входящему в цепь нагрузки, и изменение его деформации при снижении усилия не позволяет строго выдерживать условие постоянства деформации образца. Но стандартные испытания на ползучесть являются длительными и требуют периодических измерений деформаций в течение нескольких дней или месяцев. Поэтому значительный интерес вызывает проверка возможности оценки параметров ползучести по сдвигу фаз между циклически изменяющимися напряжениями и деформациями [5—9].

Цель настоящей работы — анализ трудностей, связанных с описанием ползучести на основе кратковременных вибрационных испытаний (динамического механического анализа, ДМА), и в обосновании требований к необходимому объему и точности экспериментальных данных.

Связь динамических характеристик материала с ползучестью

Возможность связать частотные зависимости компонент комплексного модуля с параметрами ползучести рассматривали еще в середине прошлого века [1—3, 5—8]. Реализация некоторых методов (ряды Прони и т.д.) проанализирована в [10—13]. Подобные результаты могут быть получены и с помощью использования традиционных моделей вязкоупругих тел, однако в настоящей работе применена наследственная модель линейной вязкоупругости.

Необходимо отметить, что авторы рассматривают только одномерные изотермические процессы без учета анизотропии и температурных эффектов, и принято, что материал не подвержен старению. В рамках данных ограничений для описания процессов ползучести и релаксации используем соответствующие интегральные уравнения [1—3]

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 + K^*), \quad (1)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0(1 - R^*), \quad (2)$$

где $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ — мгновенная упругая деформация; σ_0 — мгновенное напряжение; E — модуль Юнга.

Интегральные операторы ползучести K^* и релаксации R^* определяем как

$$K^* u = \int_{-\infty}^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad R^* v = \int_{-\infty}^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau,$$

где $K(t-\tau)$, $R(t-\tau)$ — ядра ползучести и релаксации; $t-\tau > 0$.

Поскольку вязкоупругие свойства полимерных композитов проявляются также при вынужденных колебаниях (с частотой ω), уравнения (1) и (2) (с учетом описанных ограничений) можно применить к гармоническому закону изменения деформаций:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp i\omega t. \quad (3)$$

Возникающее напряжение будет отставать на фазовый угол δ механических потерь:

$$\sigma = \sigma_0 \exp[i(\omega t + \delta)]. \quad (4)$$

Аддитивным слагаемым в (4) можно пренебречь для достаточно большого времени испытаний. Формально постоянное слагаемое обращается

в нуль при использовании $-\infty$ в качестве нижнего предела в интегральных операторах.

Подстановка выражений (3) и (4) в соотношение, описывающее процесс релаксации (2), позволяет получить связь частотной зависимости компонент комплексного модуля с ядром релаксации:

$$E'(\omega) = E(1 - R_C), \quad (5)$$

$$E''(\omega) = ER_S. \quad (6)$$

$$\text{где } R_C = \int_0^{\infty} R(z) \cos \omega z dz; \quad R_S = \int_0^{\infty} R(z) \sin \omega z dz.$$

Аналогично определяем компоненты податливости при использовании уравнения ползучести (1).

Таким образом, ядра ползучести и релаксации, в принципе, восстанавливаются на основе частотных зависимостей вязкоупругих характеристик материала. В данном случае ядро релаксации определяем с помощью обратных интегралов Фурье:

$$R(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{E'(\omega)}{E} - 1 \right) \cos \omega t d\omega, \quad (7)$$

$$R(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{E''(\omega)}{E} \right) \sin \omega t d\omega. \quad (8)$$

Способ восстановления ядра ползучести по ядру релаксации является отдельной задачей, и в настоящей работе его не рассматриваем. Процедуры, кратко записанные уравнениями (1)—(8), изложены в классической литературе [1—3]. Существуют немногочисленные примеры практического описания процессов релаксации конструкционных материалов по зависимостям компонент комплексного модуля от частоты [12, 13].

Подобная методика видится авторам простой и перспективной, если бы с её помощью удавалось корректно описать ползучесть без проведения длительных квазистатических испытаний. Однако очевидно, что исходные зависимости $E'(\omega)$ и $E''(\omega)$ для реализации методики должны соответствовать определенным жестким требованиям, что накладывает ограничения на область её применимости.

Требования к асимптотике частотной зависимости комплексного модуля материала

Рассмотрим значения, принимаемые компонентами комплексного модуля в ходе динамического нагружения (ДМА) вязкоупругого материала при вынужденных гармонических колебаниях в широком диапазоне частот.

Модуль накопления (действительная часть комплексного модуля) при убывании частоты стремится к статическому значению длительного модуля E'_0 , которое нельзя точно определить ни при монотонном нагружении, ни при колебаниях, так как скорость деформации при этом должна быть равной нулю. Его обычно определяют как отношение напряжения к установившейся деформации ползучести, если она ограничена горизонтальной асимптотой. В случае неограниченной ползучести длительный модуль приходится полагать равным нулю. С ростом частоты колебаний значения $E'(\omega)$ возрастают, приближаясь к пределу E'_∞ , который идентичен динамическому модулю Юнга E , поскольку при больших частотах колебаний реологические эффекты практически не проявляются. Динамический модуль Юнга в принципе может быть определен по скорости распространения самой быстрой волны дилатации, если корректно оценить влияние эффекта Пуассона при развитии волны в стержне. Динамический модуль определяется также в специальных высокоскоростных испытаниях при скоростях деформации порядка 10^2 обратных секунд. Он незначительно (на 5—10%) превышает модуль Юнга, определяемый на стандартных образцах при скоростях движения захватов в тех пределах (2—10 мм/мин), в которых влияние скорости на модуль пренебрежимо мало. Но прямая оценка значения E'_∞ при сверхвысоких частотах колебаний связана с проблемами виброразогрева, влияние которого сложно оценить расчетным путём.

Зависимость мнимой части комплексного модуля имеет обратный вид — при небольших частотах модуль потерь равен статическому значению E''_0 , а при увеличении частоты реологические процессы “не успевают” проявиться, поэтому его значение уменьшается до динамического E''_∞ , практически равного нулю. Формально подобные зависимости компонент комплексного модуля могут быть немонотонными, что не противоречит термодинамике и интегрируемости соответствующих функций, но для определенности, исходя из доступных экспериментальных данных, монотонное стремление компонент модуля к асимптотическим значениям в нуле и на бесконечности просто постулируется.

На основе этих заключений вводятся следующие, естественные ограничения на частотную зависимость компонент комплексного модуля:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{E'(\omega)}{E'_\infty} - 1 \right) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{E''(\omega)}{E''_0} = 0. \quad (10)$$

Экспериментальные данные, соответствующие ограничениям (9) и (10), не только согласуются с описанной “физикой” процесса, но и обеспечивают интегрируемость в соотношениях (7) и (8), поскольку обратные косинус- и синус-интегралы Фурье будут обладать признаком сходимости.

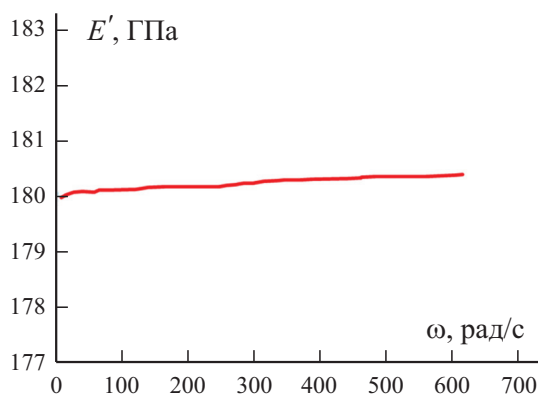


Рис. 1. Экспериментальная зависимость модуля накопления E' углепластика от частоты ω [15].

К сожалению, в доступной литературе применительно к конструкционным материалам можно найти очень немного экспериментальных результатов, отвечающих сформулированным требованиям. Опубликованные данные [14] относятся к мягким полимерам или к резиноподобным материалам, модули Юнга которых на два-три порядка ниже, чем стекло- или углепластика. Для конструкционных полимерных материалов результаты вибрационных испытаний имеют вид отрезка в небольшом диапазоне частот без анализа асимптотики. Пример такой зависимости показан на рис. 1.

В публикациях [10—13] приведены именно такие экспериментальные данные, и в связи с этим предложенные там методики различными способами “обходят” прямое использование экспериментов. В данной работе авторы акцентируют внимание именно на необходимом виде результатов ДМА для компонент комплексного модуля.

Аппроксимация экспериментальных данных

Анализ реальных экспериментальных данных приводит к выводу, что существует по крайней мере три принципиальные причины сложности использования зависимостей компонент комплексного модуля от частоты вибрационного нагружения.

Во-первых, статическое значение длительного модуля невозможно непосредственно определить из опыта (при нулевых скоростях деформации), а его нахождение путем экстраполяции результатов вибрационных испытаний приводит к широкому произволу, обеспечивая большой разброс значений предельной деформации ограниченной ползучести.

Во-вторых, принципиально важна асимптотика на очень большие частоты (на “бесконечные скорости”), но получить такие результаты на существующем вибрационном оборудовании не представляется возможным, а определение динамического модуля по скорости волн или при высокоскоростных испытаниях — это отдельная экспериментальная проблема,

требуемая принципиально иного оборудования по сравнению с ДМА. Поэтому надежное определение асимптотики компонент комплексного модуля на бесконечности затруднено.

В-третьих, точно определить характерную точку перегиба на экспериментальной зависимости $E'(\omega)$ крайне сложно, а значение соответствующей частоты заметно влияет на восстановленную кривую ползучести.

Все эти и подобные сложности обусловлены одной и той же проблемой: аппроксимация зависимости $E'(\omega)$ на всём частотном диапазоне по её ограниченному участку оказывается неустойчивой — экспериментальные данные могут быть описаны с одинаковой точностью совершенно различным набором параметров выбранной модели.

Для аппроксимации частотных зависимостей авторы предлагают использовать сигмовидные (S-образные) кривые, поскольку они удовлетворяют требованиям (9) и (10) и качественно отражают особенности динамических процессов.

Изменение модуля накопления предложено аппроксимировать соотношением

$$E'(\omega) = E'_0 + (E'_\infty - E'_0) \frac{\omega^2}{\omega^2 + k^2}. \quad (11)$$

Зависимость модуля потерь может быть по аналогии аппроксимирована соотношением

$$E''(\omega) = E''_0 + (E''_\infty - E''_0) \frac{\omega^2}{\omega^2 + s^2}. \quad (12)$$

Параметры k и s уравнений (11), (12) отвечают за характер перехода от статических (длительных) значений компонент комплексного модуля к динамическим и определяются феноменологически из условия наилучшего согласования с экспериментом, но, к сожалению, явных точек перегиба на реальных частотных зависимостях обнаружить не удастся.

Данные рис. 2 иллюстрируют качественный характер таких зависимостей, и чтобы надежно оценить их параметры, надо получить экспериментальные данные в достаточно широком диапазоне частот. Программа испытаний для получения подобных зависимостей должна быть следующей: частота колебаний изменяется в диапазоне нескольких десятичных порядков, причем начальные значения частоты должны были бы соответствовать порядкам 10^{-2} — 10^{-1} , что сложно реализовать. Частоту необходимо увеличивать до тех пор, пока её рост не перестанет влиять на значение модуля с выбранной степенью точности.

Восстановление функции ползучести на основе предложенной аппроксимации

Для проверки применимости соотношений (11) и (12) к описанию ползучести полимерных композитов на основе экспериментальной зависимости модуля накопления углепластика от частоты (см. рис. 1) были

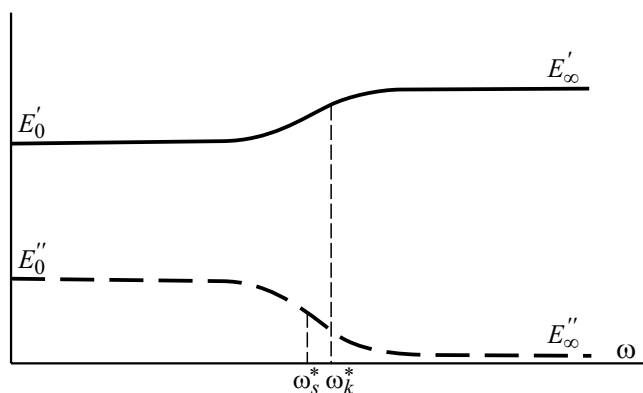


Рис. 2. Характерные виды частотных зависимостей модуля накопления (—) и модуля потерь (- - -).

восстановлены ядро, функция, а также кривые ползучести материала для разных значений параметров соотношения (11), описывающего имеющийся эксперимент.

Полученные методом ДМА результаты не удовлетворяют необходимым, указанным ранее требованиям, в связи с чем для апробации методики полученная экспериментальная зависимость была доработана согласно уравнению (11) на основе базовых значений параметров зависимости модуля накопления от частоты: $E'_0 = 20$ ГПа, $E'_\infty = 180$ ГПа, $k = 0,5$ рад/с.

Статическое значение модуля накопления (при нулевой частоте) не может быть определено экспериментально, и фактически оно оценивается отношением постоянного приложенного напряжения к установившейся деформации ограниченной ползучести. Динамическое значение модуля накопления однонаправленных ПКМ, которое можно определить по скорости волны растяжения—сжатия или при высокоскоростных испытаниях, незначительно (на 5—10%) отличается от значения модуля Юнга, определенного при стандартных испытаниях на растяжение. Значение параметра k , входящего в выражение (11), выбирали в достаточной мере произвольно, чтобы получить качественное согласование с экспериментом. В результате задача аппроксимации и восстановления кривых ползучести оказывается неустойчивой. Имеющийся ограниченный набор экспериментальных данных можно с одинаковой точностью описать совершенно разным набором параметров аппроксимирующего выражения (11), варианты изменения которых представлены в таблице.

На основе доработанной зависимости, удовлетворяющей асимптотическим требованиям, было восстановлено ядро ползучести, которое для выражения (11) имеет вид экспоненты

$$K(t - \tau) = C \exp[-a(t - \tau)], \quad (13)$$

где константы экспоненциальной функции C и a , а также модуль E свя-

Варианты изменения параметров соотношения (11)

Параметр	Итерация		
	1	2	3
E'_0 , ГПа	5	20	50
E'_∞ , ГПа	170	180	190
k , рад/с	0,05	0,5	5

заны с параметрами выражения (11) следующим образом:

$$E'_0 = \frac{Ea}{a+C}, \quad E'_\infty = E, \quad k = a+C.$$

Тогда на основе ядра (13) выражение (1) для процесса ползучести при $\sigma = \text{const}$ можно переписать как

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma - \sigma \left(\frac{C}{a} (\exp(-at) - 1) \right) \right). \quad (14)$$

Восстановленная с помощью выражения (14) и базовых значений параметров E'_0 , E'_∞ , k кривая ползучести углепластика при постоянном значении напряжения $\sigma = 200$ МПа (рис. 3) имеет горизонтальную асимптоту и описывает ограниченную ползучесть, однако вид начального этапа ползучести качественно согласуется с экспериментальными кривыми. Рассчитанные кривые ползучести приведены лишь в качестве иллюстрации применяемой методики, и наблюдаемое быстрое достижение предельной деформации связано с произвольным выбором параметров.

Для описания неограниченной ползучести можно использовать, например, ядро Абеля [16]:

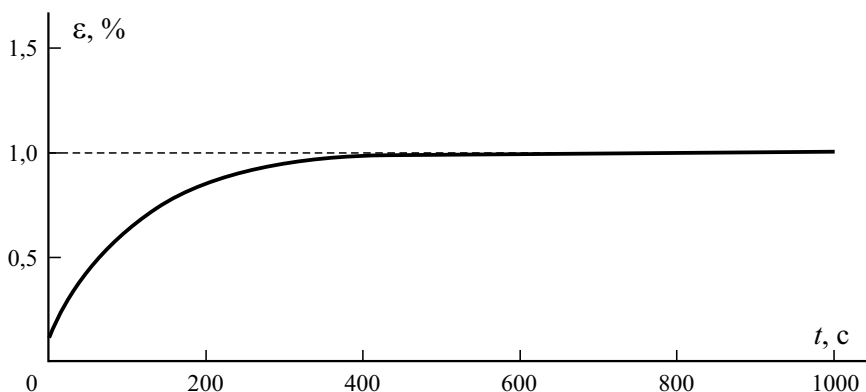


Рис. 3. Восстановленная кривая ползучести с разностным ядром в виде экспоненциальной функции.

$$K(t) = \frac{bt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},$$

где b , α — параметры ядра Абеля; а $\Gamma(1+\alpha)$ — гамма-функция, равная

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} f^{z-1} e^{-f} df.$$

Для ядра Абеля известен вид резольвенты в виде дробно-экспоненциальной \mathcal{E}_α -функции (R -function) Работнова [1—3]:

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta, t) = bt^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}.$$

Восстановление ядер подобного вида с помощью обратного преобразования Фурье является отдельной нетривиальной задачей, предполагающей другой вид аппроксимирующего соотношения типа (11), и эту процедуру в настоящей работе не рассматривали. Также следует отметить, что усложнение ядра ползучести не позволит обойти главную проблему — сложность устойчивого определения параметров по ограниченному эксперименту.

Корректность восстановления кривых ползучести

Важно проверить, каким образом повлияет на восстановленную кривую ползучести изменение параметров (см. таблицу) аппроксимирующего выражения (11). Длительный модуль E'_0 отвечает за предельную деформацию установившейся ограниченной ползучести (рис. 4). Динамический модуль E_∞ определяет мгновенную упругую деформацию (рис. 5). О возможных значениях параметра k , который отвечает за скорость перехода от статического значения к динамическому (рис. 6), можно только догадываться, поскольку точное определение этого параметра по имеющимся экспериментальным данным (см. рис. 1) не представляется возможным. Все три параметра, на основе которых восстанавливаются кривые ползучести, сложно определить сколь-нибудь надежно из ограниченного набора экспериментально полученных значений $E'_i(\omega_i)$.

Формально можно выбрать три характерных значения модуля накопления при разных частотах и после подстановки величин E'_i , ω_i в (11) из полученных трех уравнений найти эти три параметра. Но найденные значения параметров будут существенно зависеть от выбранных точек. Другой способ — применение методов регрессионного анализа (метод наименьших квадратов) для нахождения трех параметров зависимости (11) для любого числа экспериментальных точек. Однако ограниченный диапазон экспериментальных частот не позволяет надежно обеспечить требуемую асимптотику в нуле и на бесконечности.

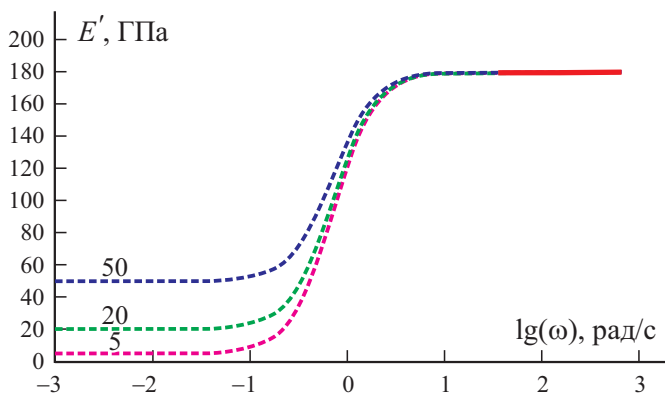


Рис. 4. Частотная зависимость модуля накопления при разных значениях длительного модуля E'_0 (цифры у кривых, ГПа) и неизменных значениях E'_∞ и k .

Учитывая, что динамический модуль E'_∞ может быть определен в независимом высокоскоростном эксперименте, можно оставить в соотношении (11) два неизвестных параметра — E'_0 , k , а соотношение (11) свести к уравнению прямой линии:

$$\frac{E'_\infty - E'_0}{E'(\omega) - E'_0} = 1 + \frac{k^2}{\omega^2} \Rightarrow ay = 1 + k^2x, \tag{15}$$

$$a = E'_\infty / E'_0 - 1, \quad y = (E'(\omega) / E'_0 - 1)^{-1}, \quad x = \omega^{-2}.$$

Тогда нанесенные в новых координатах (x, y) экспериментальные данные можно попытаться экстраполировать прямой линией, и будет наглядно видно, насколько характер аппроксимации (11) согласуется с экспериментом.

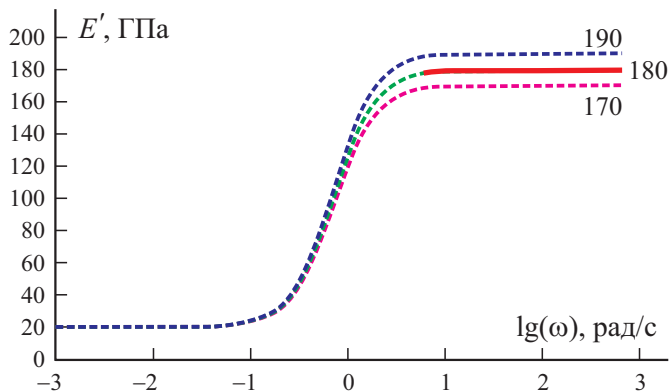


Рис. 5. Частотная зависимость модуля накопления при разных значениях динамического модуля E'_∞ (цифры у кривых, ГПа) и неизменных значениях E'_0 и k .

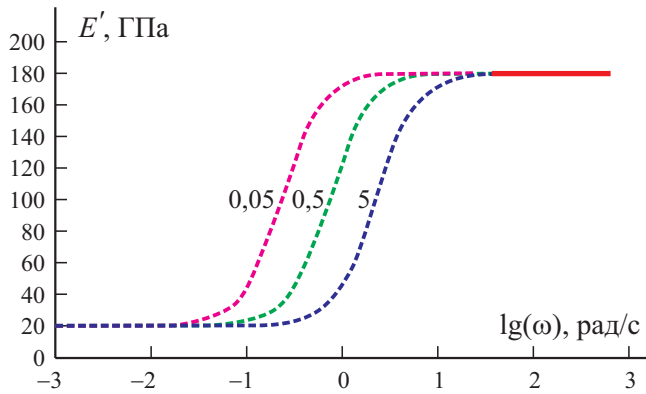


Рис. 6. Частотная зависимость модуля накопления при разных значениях параметра k (цифры у кривых, рад/с) и неизменных значениях E'_0 и E'_∞ .

Для анализа чувствительности результатов к точности оценки параметров аппроксимации (11) были восстановлены кривые ползучести (14) при разных вариациях исходных данных (см. таблицу).

Приведенные на рис. 7—9 результаты расчетов показывают существенное влияние параметров аппроксимации (11) на восстановленные характеристики ползучести. Увеличение различия между статическим и динамическим значениями модуля накопления отражает рост реологических, наследственных эффектов, что проявляется в росте деформации ползучести (рис. 7). Изменение динамического модуля при этом сказывается на значении мгновенной деформации (рис. 8). Более подвержены ползучести материалы, в которых реологические эффекты перестают быть существенными при более высоких частотах (при большем значении параметра k). Чем раньше начинается затухание роста модуля восстановления, что связано с точкой перегиба частотной зависимости, тем скорее происходит

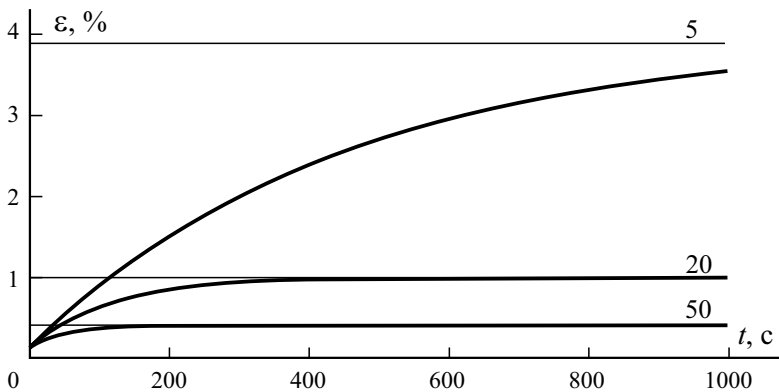


Рис. 7. Восстановленные кривые ползучести при разных значениях E'_0 (цифры у кривых, ГПа) и неизменных значениях E'_∞ и k .

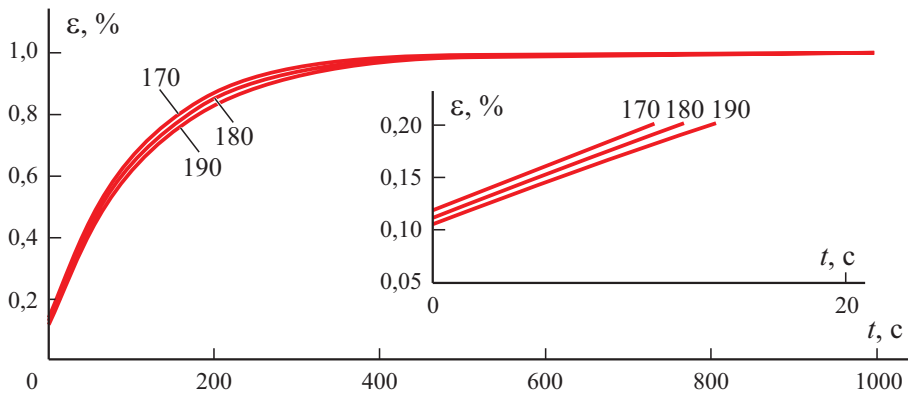


Рис. 8. Восстановленные кривые ползучести при разных значениях E'_{∞} (цифры у кривых, ГПа) и неизменных значениях E'_0 и k .

выход на горизонтальную асимптоту и тем менее заметны реологические эффекты (рис. 9). Покажем, как связан параметр k с точкой перегиба функции $E'(\omega)$. Поскольку определение параметра k происходит феноменологически, из условия наилучшего соответствия экспериментальным данным, удобно установить связь значения этого параметра со значением условной частоты ω^* в точке “перегиба”. Необходимо отметить, что для предложенной сигмовидной зависимости (11) (см. рис. 2) справедлива асимптотика

$$\frac{dE'}{d\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0; \omega \rightarrow \infty} 0.$$

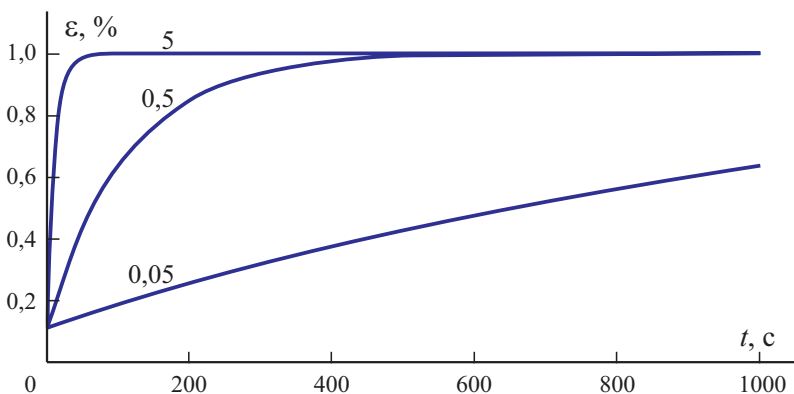


Рис. 9. Восстановленные кривые ползучести при разных значениях параметра перехода k (цифры у кривых, рад/с) и неизменных значениях E'_0 и E'_{∞} .

Приравнивая нулю вторую производную от выражения (11), можно связать условную частоту ω_k^* со значением параметра k : $k = \omega_k^* \sqrt{3}$. Аналогично для зависимости модуля потерь $s = \omega_s^* \sqrt{3}$.

Основная сложность заключается в экспериментальном определении частоты ω_k^* , соответствующей точке перегиба (равенству нулю второй производной) на экспериментальной зависимости $E'(\omega)$. Если учесть, что частотная шкала при большом диапазоне часто принимается логарифмической, то становится ясным, что даже небольшое отклонение от значения частоты ω_k^* приведет к существенной погрешности восстановленных параметров функции ползучести.

Таким образом, несмотря на корректность всех преобразований, использование ограниченных экспериментальных данных по частотным зависимостям компонент комплексного модуля приводит к неустойчивым результатам. Определение экспериментальных зависимостей в большом диапазоне частот, с правильной и явно выраженной асимптотикой, является необходимым условием для прогнозирования ползучести. Но даже получение исчерпывающих зависимостей компонент комплексного модуля с необходимой асимптотикой не гарантирует приемлемой точности восстановленных характеристик ползучести из-за сильной чувствительности результатов решения обратной задачи к погрешностям первичных экспериментов.

Анализ и обсуждение результатов

1. Прогнозирование ползучести на основе соотношений линейной вязкоупругости требует экспериментального определения частотных зависимостей компонент комплексного модуля в широком диапазоне частот и с высокой точностью.

2. При вынужденных колебаниях всегда происходит диссипация энергии, которая частично преобразуется в тепло. Повышение температуры приводит к изменению вязкоупругих свойств, поэтому, строго говоря, должна решаться связанная задача термовязкоупругости, но в стандартных экспериментах на вибрационное нагружение не удаётся строго следить за ростом температуры и заранее неизвестны параметры определяющих соотношений, учитывающих влияние температуры на вязкоупругие свойства. Поэтому в первом приближении процесс считается изотермическим, хотя учёт повышения температуры служит дополнительным источником погрешностей восстановления ядер ползучести и релаксации по результатам вибрационных испытаний.

3. Результаты анализа приводят к выводу о том, что статический (длительный) модуль нельзя определить при обычных механических испытаниях. Динамический модуль можно определить независимо: по скорости распространения волны растяжения—сжатия или в высокоскоростных испытаниях. Высокие частоты нельзя реализовать без повышения тем-

пературы, а значит, экспериментальное определение зависимостей комплексного модуля корректно лишь при промежуточных частотах, и оно может служить лишь для сравнительной оценки параметров перехода от статики к динамике.

4. Предложены удобные варианты аналитического описания частотных зависимостей компонент комплексного модуля с требуемой асимптотикой; с их помощью формально возможно восстановление ядра ползучести, однако отмечена сильная зависимость результатов от точности получения экспериментальных данных в широком диапазоне частот нагружения.

Заключение

Представлены новые результаты анализа известной задачи прогнозирования ползучести материала без проведения длительных экспериментов. Предложены удобные варианты аналитического описания частотных зависимостей компонент комплексного модуля от частоты вынужденных колебаний. При обосновании формальных преобразований отмечены требования к асимптотическому поведению компонент комплексного модуля, обеспечивающие корректность применения преобразований Фурье для восстановления оператора ползучести по результатам вибрационных испытаний. Применение данного подхода должно опираться на экспериментальные данные, полученные в достаточно широком частотном диапазоне. Подобная методика позволила бы сократить время по сравнению с традиционными испытаниями на ползучесть, однако процедура восстановления кривых ползучести по частотным зависимостям комплексного модуля оказывается крайне чувствительной к точности аппроксимации экспериментальных данных, и поэтому её практическое применение остается крайне ограниченным, сталкиваясь с трудно преодолимыми проблемами.

Конфликт интересов. Авторы подтверждают отсутствие конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 2014. — 752 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977. — 384 с.
3. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
4. *Полшлов А. Н.* Этюды по механике композитов. — М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 320 с.
5. *Ferry J. D.* Viscoelastic Properties of Polymers. — New York: Wiley, 1980. — 641 p.
6. *Gross B.* Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity. — Paris, 1953. — 75 p.
7. *Lakes R. S.* Viscoelastic Solids. — London: CRC Press LLC, 1999. — 205 p.

8. *Betten J.* Creep Mechanics. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. — 367 p.
9. *Хохлов А. В.* Кривые длительной прочности, порождаемые линейной теорией вязкоупругости в сочетании с критериями разрушения, учитывающими историю деформирования // Тр. МАИ. — 2016. — № 91. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75559> (дата обращения: 20.04.2021)
10. *Mead D. W.* Numerical interconversion of linear viscoelastic material functions // J. Rheol. — 1994. — No. 38. — P. 1769—1795.
11. *Park S. W., Schapery R. A.* Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I. A numerical method based on Prony series // Int. J. Solids Struct. — 1999. — No. 36. — P. 1653—1675.
12. *Schapery R. A., Park S. W.* Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part II. An approximate analytical method // Int. J. Solids Struct. — 1999. — No. 36. — P. 1677—1699.
13. *Dacol V., Caetano E., Correia J. R.* A new viscoelasticity dynamic fitting method applied for polymeric and polymer-based composite materials // Materials. — 2020. — Vol. 13. — 5213.
14. *Rouleau L., Prik R., Bert P., Wim D.* Characterization and modeling of the viscoelastic behavior of a self-adhesive rubber using dynamic mechanical analysis tests // J. Aerospace Technol. Management. — 2015. — Vol. 7, No. 2. — P. 200—208.
15. *Власов Д. Д., Малышева Г. В.* Определение характеристик ползучести и релаксации полимерных волокнистых композитов с помощью динамических характеристик материала // Материалы междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых учёных ПЕРСПЕКТИВА, 2021. — Т. 4. — С. 60—63.
16. *Суворова Ю. В., Алексеева С. И., Куприянов Д. Ю.* Моделирование длительной ползучести георешеток типа FORTRAC на основе полиэтилентетрафталата // Высокомолекуляр. соединения. Сер. Б. — 2005. — Т. 47, № 6. — С. 1058—1061.

Поступила в редакцию 06.07.2021

Окончательный вариант поступил 11.10.2021

Received July 6, 2021 (Oct. 11, 2021)

Ю. Л. Макаревич^а, В. Д. Онискив^{б}, В. Ю. Столбов^б, И. Гитман^в*

^аУральский научно-исследовательский институт композитных материалов, Россия

^бПермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия

^вУниверситет Шеффилда, Англия

ВЛИЯНИЕ ГАММА-ОБЛУЧЕНИЯ НА ПРОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА БАЗАЛЬТОКОМПОЗИТОВ

Yu. L. Makarevich, V. D. Oniskiv, V. Yu. Stolbov, and I. Gitman*

EFFECT OF GAMMA IRRADIATION ON STRENGTH PROPERTIES BASALT COMPOSITES

Keywords: basalt composites, multilayer carbon nanotubes, gamma irradiation, basalt roving, strengthening effect.

The problem of improving the strength properties of polymer composite materials based of roving made of basalt complex filaments and epoxy resin as a binder was considered. The main objective of the research is to analyze the physical and mechanical characteristics of basalt composites, as well as the possibilities of their modification by embedding the multiwalled carbon nanotubes and the effect of gamma radiation at different doses. The experimental results for both the pure binder and the basalt composite were presented. It was concluded that the complex modification based on gamma irradiation and embedding the multiwalled carbon nanotubes increases more than 20% the compressive strength on the specimens made of EDT-10P epoxy binder. The strength and elastic modulus investigations carried out on the ring specimens made of basalt composite, subjected to nanomodification and gamma irradiation, showed in increase in the strength characteristics at certain radiation doses within 10—15%. Hypotheses, explaining the strengthening effect associated with changes in the intermolecular interactions under an action of gamma-quantum flux were proposed.

*Автор, с которым следует вести переписку: oniskivf@gmail.com
Corresponding author: oniskivf@gmail.com

Ключевые слова: базальтокомпозиты, нанотрубки углеродные многослойные, гамма-облучение, ровинг базальтовый, воздействие упрочняющее

Рассмотрена проблема улучшения прочностных свойств полимерных композитных материалов на основе ровинга из базальтовых комплексных нитей и эпоксидного связующего. Исследованы физико-механические характеристики базальтокомпозитов, а также возможности их модификации путем введения в исследуемый материал многослойных углеродных нанотрубок (МУНТ) и радиационного воздействия разных доз гамма-облучения. Приведены результаты экспериментов как для связующего материала, так и базальтокомпозита в целом. Установлено, что предел прочности при сжатии образцов из эпоксидного связующего ЭДТ-10П благодаря комплексной модификации за счет гамма-облучения и внедрения МУНТ повышается более чем на 20%. Результаты исследования предела прочности и модуля упругости кольцевых образцов из базальтопластика, подвергнутых наномодификации и гамма-облучению, показали рост прочностных характеристик при определенных дозах облучения в пределах 10—15%. Сделаны предположения, объясняющие возникновение эффекта упрочнения, связанного с изменением межмолекулярного взаимодействия под действием потока гамма-квантов.

Введение

Цель работы — изучение прочностных характеристик базальтокомпозитов, а также возможности их комплексной модификации путем введения в материал многослойных углеродных нанотрубок (МУНТ) и радиационного воздействия разных доз гамма-облучения.

Как следует из аналитических обзоров исследований полимерных композитных материалов (ПКМ), их уникальные свойства по сравнению со свойствами традиционных металлических сплавов, однозначно свидетельствуют о перспективности использования ПКМ в различных отраслях машиностроения [1—7]. Отмечено, что достаточно высокая цена органо- и углекомпозитов серьезно сдерживает их более широкое применение в изделиях. Между тем современные экономические условия требуют использования композитов не только с высоким комплексом характеристик, но и доступных, со сравнительно низкой стоимостью. Кроме того, большие потенциальные возможности улучшения характеристик композитных материалов (КМ) заложены в применении недорогих и эффективных наполнителей, в число которых, безусловно, входит базальт — излившаяся вулканическая порода, широко распространенная на поверхности нашей планеты. Например, в РФ известно более 200 крупных месторождений базальтовых пород, из них около 50 месторождений эксплуатируются в настоящее время.

Известно, что эпоксидные олигомеры и полимеры являются одним из лучших видов связующего для различных наполнителей. Достоинства эпоксидных связующих — хорошая адгезия к большинству наполнителей, отсутствие выделения летучих побочных продуктов при смене фазового состояния, пониженная усадка по сравнению с фенольными и полиэфирными материалами. Эпоксидные олигомеры и полимеры применяются в различных областях техники благодаря удачному сочетанию несложной технологии переработки с высокими физико-механическими характеристиками (ФМХ), теплостойкостью, адгезией к разным материалам, стойкостью к различным средам, а также способностью переходить в твердую фазу при атмосферном давлении с малой усадкой [8—10].

Реальной возможностью, способствующей использованию ПКМ и созданию новых технологий, может стать модификация известных КМ, а также освоение композитов, обеспечивающих конкурентоспособные цены при производстве изделий различного назначения. На основе публикаций [11—22] можно сделать однозначный вывод о значительной активности исследований в части изучения и применения результатов модификации КМ. В данной работе модификация достигается путем введения в состав композитов многослойных углеродных нанотрубок (МУНТ), гамма-облучения, а также их совместного использования. Новизна проведенных исследований заключается в установлении влияния комплексной модификации на свойства отдельных составляющих и базальтокомпозита в целом. Авторы некоторых статей отмечают позитивные изменения физико-механических и иных свойств материалов в результате отдельных видов модификации. Например, в [12] отмечено, что МУНТ являются оптимальными упрочняющими наполнителями, причем для матриц любого химического состава. В процессе такой модификации возникают новые межмолекулярные связи и надмолекулярные структуры, позволяющие повысить прочностные характеристики полимерных материалов, улучшить износостойкость, теплопроводность, стойкость к повреждению солнечной радиацией и пр.

Как известно [13—15], радиационное воздействие инициирует в материале процессы радиационного структурирования, деструкции и окисления. Структурирование (сшивки) — по сути, процесс возникновения химических связей между фрагментами одной макромолекулы, разными молекулами или молекулярными кластерами. Конкуренция двух процессов сшивки и деструкции, по-видимому, является основным фактором, определяющим изменение свойств материала. Поэтому важно знать зависимость каждого процесса от дозы гамма-облучения материала с учетом свойств наполнителя и связующего в композите.

Одним из актуальных направлений в расширении использования композитных материалов является изучение проблем и возможностей освоения ПКМ на основе базальтового волокна. В настоящее время в мире ежегодно производится более 1 млн тонн базальтового непрерывного волокна (БНВ), которое характеризуется повышенной адгезией к

эпоксидным связующим. Ежегодный рост производства и потребления БНВ по данным [23] составляет 10—14%. Изготовление базальтокомпозитов вполне возможно на уже имеющемся стандартном оборудовании. К уникальным свойствам базальтового волокна относятся экологичность, высокая термическая и химическая стойкость, высокая (выше, чем у стали) прочность, морозостойкость, низкая тепло- и электропроводность, высокая монолитность и трещиностойкость. Кроме того, запасы базальтового сырья в мире практически не ограничены, что в известной степени положительно сказывается и на его ценовых показателях — около 2 \$/кг при цене высокопрочного углеродного волокна до 50 \$/кг.

Потенциально базальтокомпозиты по своим физико-механическим и эксплуатационным характеристикам, являясь экологически чистым и достаточно дешевым конструкционным материалом, востребованы в строительной, транспортной, нефтегазоперерабатывающей отраслях промышленности, в энергетике и ЖКХ, в том числе в экстремальных условиях Крайнего Севера [22]. Химический состав базальта, разумеется, зависит от месторождения, но в основном это окислы кремния, алюминия, железа, титана в разных пропорциях и некоторые другие элементы и их соединения.

Необходимо отметить, что исследования свойств модифицированных базальтокомпозитов носят комплексный характер и требуют привлечения знаний физики, химии, механики, материаловедения и иных наук. Предлагаемые в данной работе виды модификаций позволяют создавать активные радикалы для “наносборки” в рассматриваемых молекулярных средах без использования каких-либо химических реагентов. Поэтому результаты подобных исследований в настоящее время весьма актуальны, и они зачастую позволяют сделать важный шаг в направлении создания новых материалов с уникальными эксплуатационными свойствами.

1. Материалы и методы исследования

При исследовании прочностных свойств базальтокомпозита были испытаны образцы из модифицированных эпоксидных смол, базальтового ровинга и непосредственно самого композитного материала. Все образцы были разбиты на четыре группы, содержащие от трех до шести образцов в каждой. Образцы были подвергнуты предварительной обработке концентрированными потоками гамма-квантов и получили различные дозы радиационного воздействия.

Одной из основных составных частей полимерного композитного материала является связующее. Поэтому первоначально было изучено влияние модификации на его прочностные свойства. В настоящее время наиболее широкое применение получили связующие на основе терморезистивных эпоксидных смол, обладающие высокими прочностными характеристиками. В качестве представителей этого класса материалов были использованы полимерные матрицы на основе эпоксидно-диановой смолы ЭД-20 и

эпоксидного связующего ЭДТ-10П. Они достаточно часто применяются в изделиях, работающих в сложных и экстремальных условиях.

Стандартные образцы диаметром 20 мм и высотой 30 мм были изготовлены группами по пять образцов.

Состав полимерной матрицы на основе смолы ЭД-20 следующий: 100 частей смолы ЭД-20, 10 частей полиэтиленполиамина (ПЭПА). Перед добавкой отвердителя смола ЭД-20 подвергалась обработке ультразвуковым диспергатором и последующему вакуумированию для удаления компонентов олигомера (главным образом эпихлоргидрина).

Состав полимерной матрицы, выполненной из связующего ЭДТ-10П, следующий: 100 частей смолы КДА, 10 частей триэтаноламинтитаната (ТЭАТ-1), 2 части продукта АДЭ-3.

В процессе изготовления часть образцов подвергали модифицированию путем добавления многослойных углеродных нанотрубок (МУНТ-СООН) с массовой концентрацией 0,075% (МУНТ-А) и 0,15% (МУНТ-М). Отметим, что в отличие от МУНТ, имеющих чистую поверхность без химических связей, МУНТ-СООН содержит карбоксильные группы СООН, что делает МУНТ химически более активным для взаимодействия со связующим. Кроме того, известно [24, 25], что гамма-облучение создает дополнительные поверхностные дефекты, увеличивая концентрацию функциональных групп на границах нанотрубок и тем самым делая наноматериал активным наполнителем. Некоторые исследования, в частности [26], показывают, что группы СООН играют роль дополнительного армирующего элемента. В отмеченной работе установлено, что при незначительной массовой концентрации МУНТ (не более 1%) модуль упругости повышается до 16%.

Для обеспечения равномерности распределения МУНТ в материале проводили обработку ультразвуковым диспергатором с частотой 30 кГц. Специальные оптические исследования, подтверждающие равномерность распределения МУНТ, не осуществляли.

Часть изготовленных образцов, как модифицированных, так и немодифицированных, подвергали воздействию гамма-облучения.

Для облучения образцов использовали радиоактивные источники, содержащие радионуклид Co^{60} (кобальт 60). Отметим, что гамма-кванты имеют нулевой электрический заряд и обладают очень высокой проникающей способностью. Средняя энергия гамма-квантов примерно 1,25 МэВ. Время экспозиции определяли дозами облучения D от 5 до 30 Мрад. Облучение образцов осуществляли в защитной инертной атмосфере азота. Равномерность процесса облучения обеспечивалась оптимальным распределением источников излучения вдоль оси их размещения, а также вращением образцов вокруг этой прямой [19, 20]. Суммарная доза гамма-облучения следующая:

— для первой группы образцов (101—112) из смолы ЭД-20 $D = 0, 10, 20$ и 30 Мрад;

Табл. 1

Группы образцов из смолы ЭД-20 и КДА

Модификатор	D, Мрад			
	0	10	20	30
ЭД-20				
-	101	102	103	104
МУНТ-А	105	106	107	108
МУНТ-М	109	110	111	112
КДА				
	0	5	10	15
-	201	202	203	204
МУНТ-А	205	206	207	208
МУНТ-М	209	210	211	212

— для второй группы образцов (201—212) из смолы КДА $D = 0, 5, 10$ и 15 Мрад (диапазон доз облучения был сужен по результатам анализа испытаний образцов первой группы, при которых гамма-облучение дозами выше 20 Мрад приводило к глубокой деструкции образцов).

Классификация групп образцов из смол ЭД-20 и КДА приведена в табл. 1.

В рамках исследования также были проведены испытания образцов микропластика на основе базальтового ровинга по определению разрывной нагрузки на растяжение. Испытаниям подвергались образцы, выполненные с использованием эпоксидного связующего ЭДТ-10П. Как и в ранее рассмотренном эксперименте, в данном случае в качестве модификатора в смолу КДА добавляли многослойные углеродные нанотрубки с группой COOH . Концентрация используемых модификаторов $0,075\%$ по массе (МУНТ-А) и $0,15\%$ по массе (МУНТ-М).

Табл. 2

Основные характеристики базальтового ровинга

Показатель	Требование НТД	Результат испытаний
Диаметр элементарного волокна, мкм	$13 \pm 0,5$	13,21
Линейная плотность, текс	1200 ± 60	1214
Удельная разрывная нагрузка, мН/текс	Не менее 650	715
Содержание веществ, удаляемых при прокаливании, %	Не менее 0,4	0,5
Влажность, %	Не более 0,1	0,01

Табл. 3

Группы образцов из базальтопластика

Номер группы	Количество, шт.	Модификатор	D , Мрад
601	6	-	-
602	3	МУНТ-А	-
603	3	МУНТ-М	-
605	3	-	10
606	4	МУНТ-А	10
607	6	МУНТ-М	10

В качестве наполнителя использовали ровинг из базальтовых комплексных нитей марки НРБ13-1200-КВ-12. Некоторые основные его характеристики приведены в табл. 2.

Часть образцов базальтопластика дополнительно подвергали гамма-облучению с суммарной дозой до 10 Мрад.

Классификация и количество образцов в группах приведены в табл. 3.

На завершающем этапе исследования были испытаны на прочность модифицированные образцы из базальтокомпозита. Изготовление образцов осуществляли на производственных мощностях Уральского НИИ композитных материалов по принятым технологическим процессам. Известно, что основным параметром, характеризующим прочность конструкций из ПКМ, изготовленных методом намотки жгутом или нитью, является предел прочности при растяжении, определяемый на кольцевых образцах.

В качестве связующего использованы полимерные матрицы на основе смол КДА и ЭД-20. Образцы, выполненные из смолы ЭД-20, модификации углеродными нанотрубками не подвергались.



Рис. 1. Кольцевые образцы для испытаний на разрыв.

Табл. 4

Группы образцов модифицированного базальтокомпозиата

Номер группы	Количество, шт.	Модификатор	Смола/связующее	D , Мрад
401	4	-	ЭД-20	0
402	3	-	ЭД-20	5
403	3	-	ЭД-20	10
404	3	-	ЭД-20	15
405	4	-	ЭДТ-10П	0
406	3	-	ЭДТ-10П	5
407	3	-	ЭДТ-10П	10
408	3	-	ЭДТ-10П	15
409	4	МУНТ-А	ЭДТ-10П	0
410	4	То же	ЭДТ-10П	5
411	3	"	ЭДТ-10П	10
412	3	"	ЭДТ-10П	15
413	4	МУНТ-М	ЭДТ-10П	0
414	3	То же	ЭДТ-10П	5
415	4	"	ЭДТ-10П	10

Часть кольцевых образцов дополнительно подвергали гамма-облучению в диапазоне доз от 5 до 15 Мрад. Источник облучения — кобальт 60 (Co^{60}). Облучение кольцевых образцов осуществляли в защитной инертной атмосфере азота.

Образцы в виде колец из базальтокомпозиата представлены на рис. 1.

Классификация и количество образцов из базальтокомпозиата на связующем из смолы ЭД-20 (образцы 401—404) и связующем ЭДТ-10П (образцы 405—415) приведены в табл. 4.

В ходе испытаний оценивали модуль упругости E и предел прочности σ .

Испытания на прочность всех модифицированных образцов проводили на разрывной машине ZD-20 со шкалой нагружения 4 т по методике, изложенной в ОСТ-92-1473-7В.

2. Результаты и обсуждение

Первоначально рассмотрим результаты исследования влияния модификации на прочностные свойства связующего.

Следует отметить, что при испытании образцов из смолы ЭД-20 (см. табл. 1) получены небольшие разбросы (в пределах 1%) от среднегрупповых значений модуля упругости и предела прочности при сжатии.

Разбросы результатов испытаний внутри групп образцов из смолы КДА (см. табл. 1) по значениям модуля упругости также незначительны и практически не превышают 2—4%. Однако при измерении предела прочности при сжатии было зафиксировано заметное увеличение разброса данных. Отмечено несколько значительных отличий от среднegrupповых значений на шести образцах, которые были исключены из рассмотрения “как искажающие реальные результаты исследований”. Корректировка результатов путем исключения некоторых образцов существенно снизила уровень разброса внутри групп образцов до 2—9%.

Графики изменения предела прочности $\sigma_{\text{com}}^{\text{ult}}$ и модуля упругости E_{ult} для разных групп образцов из смолы ЭД-20 и связующего ЭД-10П приведены на рис. 2 и 3.

Из графиков на рис. 2 видно, что предел прочности при сжатии $\sigma_{\text{com}}^{\text{ult}}$ для образцов из ЭД-20 практически не зависит от дозы гамма-облучения и находится в диапазоне 135—145 МПа. Это позволяет сделать предварительный вывод о радиационной стойкости данного связующего в рамках указанных доз облучения. Отмеченное качество весьма характерно для эпоксидных полимеров, содержащих в своем составе ароматические кольца. При этом образцы, модифицированные МУНТ, как видно из экспериментов, в процессе радиационного воздействия несколько снижают характеристики прочности.

Иная картина наблюдается для эпоксидной смолы КДА. Значение $\sigma_{\text{com}}^{\text{ult}}$ образцов, изготовленных из ЭДТ-10П, изменяется в значительных пределах (от 135 до 280 МПа) в зависимости от вида модификации и превышает предел прочности образцов из ЭД-20 зачастую более чем на 50%. Была выявлена явно выраженная чувствительность материала к радиационному воздействию. При этом наибольшее упрочнение на-

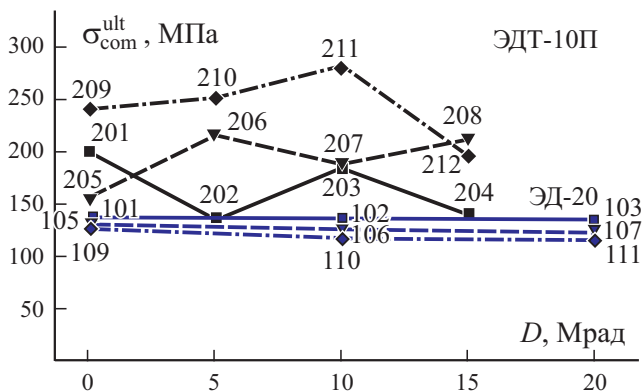


Рис. 2. Зависимость предела прочности при сжатии $\sigma_{\text{com}}^{\text{ult}}$ образцов эпоксидного связующего от дозы облучения D (цифры — номера образцов согласно табл. 1): (—■—) — исходные; (- -▼- -) — МУНТ-А; (-·-◆-·-) — МУНТ-М.

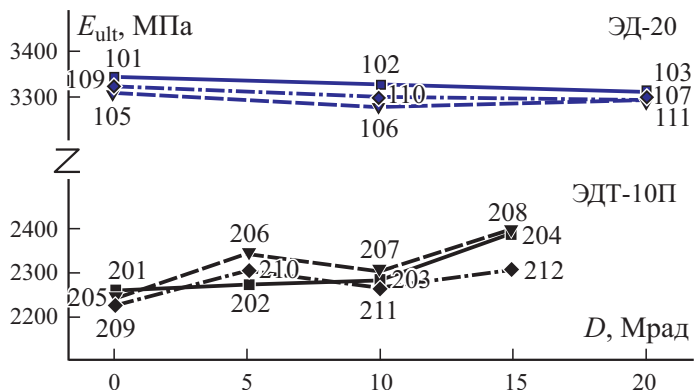


Рис. 3. Зависимость модуля упругости E_{ult} образцов эпоксидного связующего от величины D (цифры — номера образцов согласно табл. 1): (—■—) — исходные; (- -▼- -) — МУНТ-А; (-·-♦-·-) — МУНТ-М.

блюдается для образцов с МУНТ-М, обработанных гамма-квантами с дозой 10 Мрад.

На рис. 3 приведены результаты испытаний образцов на модуль упругости после их обработки гамма-квантами. Из данных рисунка видно, что модули упругости образцов из ЭД-20 практически не изменяются под воздействием гамма-излучения до дозы облучения 20 Мрад. Значения модулей упругости укладываются в интервал 3250—3340 МПа. Что касается образцов из ЭДТ-10П, то, как и в приведенном выше случае, для предела прочности здесь имеет место некоторое увеличение значений модуля упругости (примерно 10%, в абсолютных значениях — от 2240 до 2410 МПа). При этом значения E_{ult} образцов из ЭДТ-10П существенно меньше, чем образцов из ЭД-20 (примерно на 40%).

Эксперименты также показали, что при гамма-облучении образцов дозой свыше 20 Мрад возникает существенный спад физико-механических характеристик эпоксидных связующих. Подобный эффект также зафиксирован в [22] в экспериментах с облучением эпоксидного композита с наполнителем из цеолита на электронном линейном ускорителе ускоренными электронами при дозе свыше 10 Мрад. По химическому составу цеолит близок к базальту, что позволяет переносить на качественном уровне результаты экспериментов на исследуемые материалы. Наиболее вероятной причиной этого явления может быть деструкция молекулярных связей эпоксидной смолы, вызванная высокой дозой облучения. В связи с этим при модифицировании материала очень важно знать рациональные дозы облучения, при которых происходит рост прочностных свойств связующего. Из результатов, приведенных на рис. 2, видно, что при дозе облучения 15 Мрад образцов из ЭДТ-10П достигаются наибольшие в исследованном диапазоне радиационных доз значения модуля упругости.

Дальнейшее увеличение дозы облучения приводит к рискам деструкции молекулярных связей и, на взгляд авторов, является нецелесообразным.

Следует отметить, что введение многослойных углеродных нанотрубок с последующим гамма-облучением образцов из ЭДТ-10П в процессе испытаний дало положительный результат — рост предела прочности при сжатии в диапазоне доз облучения от 5 до 10 Мрад. Логично предположить, что основная причина заключается в использовании указанного связующего для данной композиции. Триэтаноламинтитанат содержит значительное количество атомов водорода, что способствует созданию в процессе облучения активных радикалов. Их взаимодействие определяет изменения в механическом поведении материала. Замечено, что монотонный рост модуля упругости при увеличении дозы облучения наблюдается только у исходных образцов (группы 201—204). Совместное влияние облучения и введения в материал МУНТ, по-видимому, имеет очень сложный характер и зависит от многих факторов, что обуславливает необходимость проведения дополнительных исследований.

Далее рассмотрим результаты испытаний на прочность модифицированного микропластика. Графики изменения разрывной нагрузки P_{ult} по результатам испытаний образцов из базальтопластика представлены на рис. 4. Как показали эксперименты, образцы из базальтового волокна имеют приемлемый разброс значений разрывной нагрузки (не более 8% от среднего значения по группе). Из данных рисунка следует, что введение МУНТ-А в образцы из базальта не дало существенных изменений ($\pm 3,5\%$). Облучение образцов, модифицированных МУНТ-М, показало незначительное относительно исходного варианта увеличение разрывной нагрузки (примерно на 4,5%).

Таким образом, облучение образцов из базальтового волокна гамма-излучением дозой 10 Мрад не выявило существенного изменения разрывной нагрузки для немодифицированных образцов и привело к

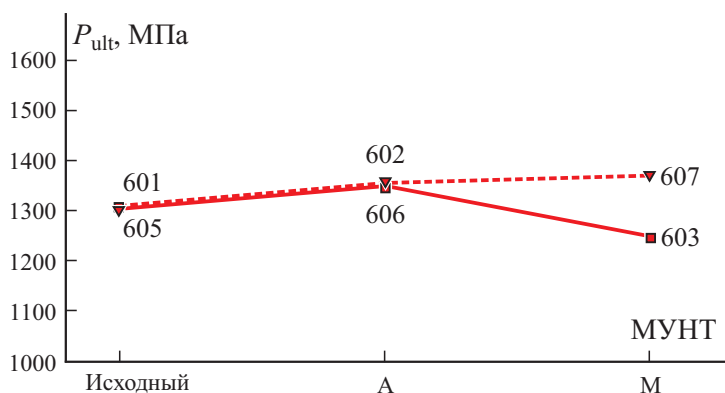


Рис. 4. Разрывная нагрузка P_{ult} исходных (■) и облученных ($D = 10$ Мрад, ▼) образцов из базальтопластика (цифры — номера образцов согласно табл. 2).

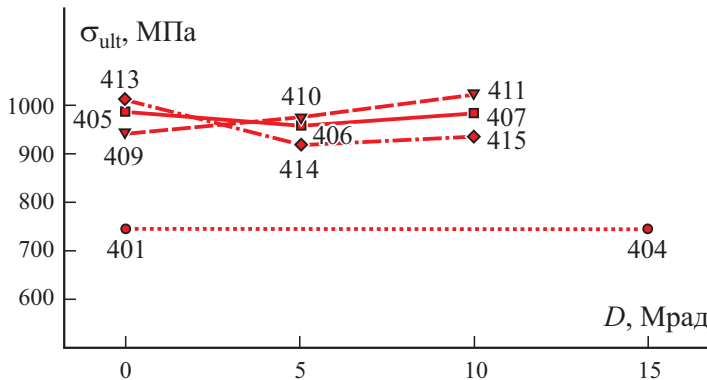


Рис. 5. Зависимость предела прочности σ_{ult} образцов из базальтокомпозита от величины D (цифры — номера образцов согласно табл. 4): (···●···) — ЭД-20; (—■—) — исходные с ЭДТ-10П; (- -▼- -) — МУНТ-А; (-·-◆-·-) — МУНТ-М.

её незначительному увеличению на 4—5% для образцов, модифицированных МУНТ-А и МУНТ-М.

Особый интерес представляют результаты испытаний на прочность комплексно модифицированных базальтокомпозитов. Графики изменения свойств ПКМ, изготовленных на основе базальтового волокна с разными связующими, приведены на рис. 5, 6.

Отметим, что в группах 402, 403, 408 и 412 наблюдали существенный разброс измеряемых характеристик от средних по группе значений (возможно, из-за нарушений технологии изготовления образцов). По результатам статистической обработки эти группы образцов были исключены из

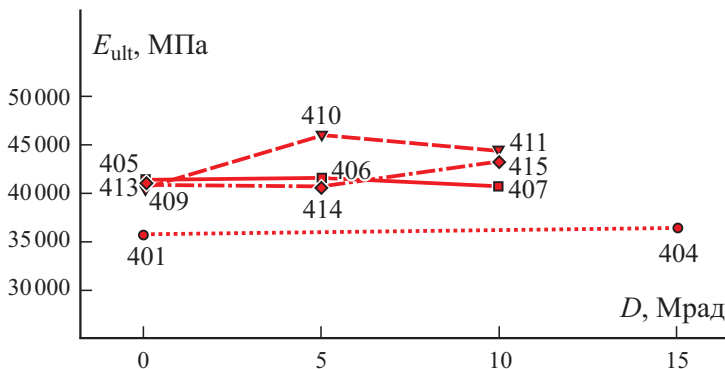


Рис. 6. Зависимость модуля упругости E_{ult} образцов из базальтокомпозита от величины D (цифры — номера образцов согласно табл. 4): (···●···) — ЭД-20; (—■—) — исходные с ЭДТ-10П; (- -▼- -) — МУНТ-А; (-·-◆-·-) — МУНТ-М.

анализа как искажающие реальные результаты исследований. Для остальных групп разброс данных не превышал 10%, что считали приемлемым.

Как следует из данных, приведенных на рис. 5, 6, в результате модификации МУНТ и гамма-облучения значения σ_{ult} образцов меняются незначительно, модуль упругости E_{ult} в группе образцов 411 вырос на 5%, а в группе 410 — на 10,5%.

Согласно результатам можно отметить следующее.

Образцы, выполненные из базальтопластика с использованием смолы ЭД-20, по величине предела прочности уступают образцам, изготовленным со связующим ЭДТ-10П, на 10—15%. Вместе с тем необходимо еще раз отметить неизменность прочностных характеристик образцов, изготовленных с использованием связующего из смолы ЭД-20 в рассматриваемом диапазоне доз облучения.

Модификация путем введения МУНТ-А (0,075%) и гамма-облучением 5—10 Мрад не даёт существенного увеличения прочностных характеристик рассмотренных базальтокомпозитов. Определенные положительные изменения относятся к модулю упругости. Уместно отметить, что гамма-облучение базальтового волокна приводит к разрыву напряженных валентных связей (Si—O, Al—O) с образованием вакансии и атома кислорода. Однако низкая подвижность возникших радикалов, по-видимому, не приводит к образованию в значимых количествах новых межмолекулярных связей, влияние которых было бы заметно в проведенных экспериментах. Не следует исключать из рассмотрения и процессы рекомбинации, восстанавливающие прежние связи.

Кроме того, анализ результатов испытаний кольцевых образцов базальтокомпозитов свидетельствует о необходимости обратить повышенное внимание на разработку и стабилизацию технологических процессов внедрения МУНТ в композитные материалы и строгий контроль за их выполнением, включая контроль равномерности объемного распределения МУНТ.

Заключение

По результатам испытаний первой группы образцов (смола ЭД-20) удалось установить целесообразный диапазон дозы гамма-облучения для дальнейших исследований стандартных образцов: 5—15 Мрад. Облучение дозой свыше 20 Мрад приводит к значительному разрушению молекулярных связей. При этом увеличение дозы облучения вместе с ростом модуля упругости обуславливает снижение прочности.

Введение в состав образцов смолы углеродных нанотрубок (МУНТ-М с массовым содержанием 0,15%) с последующим гамма-облучением дало положительный результат. Рост предела прочности при сжатии образцов из ЭДТ-10П относительно исходных (номинальных) образцов в диапазоне доз облучения 5 и 10 Мрад составил 25 и 40% соответственно.

Воздействие гамма-облучения $D = 10$ Мрад на исходные образцы из базальтопластика повышает прочность при разрыве образцов с МУНТ на 4—5%.

Предел прочности кольцевых образцов из базальтопластика со связующим ЭДТ-10П превосходит аналогичный показатель для образцов со связующим ЭД-20 на 10—15%.

Модификация введением МУНТ-А и гамма-облучением 5—10 Мрад увеличивает прочностные характеристики базальтокомпозитов. По сравнению с исходными образцами наблюдается рост предела прочности до 15% и модуля упругости — до 8%.

Проведенные исследования прочностных свойств модифицированного базальтокомпозита позволили получить исходную картину влияния факторов модификации, включая рациональный диапазон доз облучения и процент введения многослойных углеродных нанотрубок, на эффективность использования рассмотренного материала. Несомненно, полученные результаты могут быть отправной точкой для дальнейшего изучения с целью более глубокого понимания протекающих физико-механических процессов при создании новых композитных материалов на основе базальта.

Исследования проведены при финансовой поддержке Пермского края в виде гранта по проекту: “Модели, методы и цифровые технологии для создания функциональных композитных и полимерных материалов с помощью их обработки концентрированными потоками гамма-квантов в разных газовых средах” (Соглашение № С-26/581).

Благодарность. Авторы выражают благодарность профессору, д-ру техн. наук Г. И. Шайдуровой (ПНИПУ) и С. М. Никулину (УНИИКМ) за плодотворное обсуждение результатов исследований и участие в проведении экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каблов Б. Н. Современные материалы — основа инновационной модернизации России // *Металлы Евразии*. — 2012. — № 3. — С. 10—15.
2. Гуменюк Н. С и др. Применение композитных материалов в судостроении // *Современные наукоёмкие технологии*. — 2013. — № 8. — С.116—117.
3. Weng D., Lee H. K., Levon K., Mao J., Scrivens W. A., Stephens E. B., Tour J. M. The influence of buckminsterfullerenes and their derivaties on polymer properties. // *Eur. Polym. J.* — 1999. — Vol. 35. — P. 867—878.
4. Юрков А. Л., Малахо А. П., Авдеев В. В. Углеродные футеровочные катодные материалы для получения алюминия электролизом — вопросы совершенствования свойств // *Новые огнеупоры*. — 2020. — № 1. — С. 9—13.
5. Шорникова О. Н., Максимова Н. В., Авдеев В. В. Углеродные материалы для электрохимических конденсаторов. — М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010. — 52 с.

6. *Елецкий А. В.* Механические свойства углеродных наноструктур и материалов на их основе // Успехи физ. наук. — 2007. — Т. 177, № 3. — С.233—274.
7. *Shepilevsky E., Penyazkov O., Filatov S. et al.* Modification of materials by carbon nanoparticles // Solid State Phenomena. — 2018. — Vol. 271. — P. 70—75.
8. *Татаринцева О. С., Зимин Д. Е., Самойленко В. В.* Оптимизация рецептуры эпоксидного связующего для изготовления стекло- и базальтопластиковой арматуры // Ползунов. вестн. — 2013. — № 3. — С. 263—267.
9. *Татаринцева О. С., Зимин Д. Е., Самойленко В. В.* Влияние модификации на технологические и механические свойства эпоксидангидридного связующего // Механика композиц. материалов и конструкций. — 2015. — Т. 21, № 4. — С. 489—500.
10. *Старовойтова И. А.* Изучение физико-механических характеристик наномодифицированного базальтового ровинга и композитного материала на его основе // Изв. Казан. ГАСУ. — 2016. — № 3. — С. 217—222.
11. *Andrews R., Jacques D., Qian D., Rantell T.* Multiwall carbon nanotubes: synthesis and application // Acc. Chem. Res. — 2002. — Vol. 35. — P. 1008—1017.
12. *Раков В. Г.* Химия и применение углеродных нанотрубок // Успехи химии. — 2001. — Т. 70, вып. 10. — С. 934—973.
13. *Гинзбург Б. М., Туйчиев Ш., Рашидов Д., Табаров С., Иващенко П. И.* Влияние многостенных углеродных нанотрубок на деформационные кривые при растяжении полимерных аморфно-кристаллических термопластов // Письма в журн. техн. физики. — 2010. — Т. 36, вып. 17. — С.54—60.
14. *Виноградская Е. Л., Вдовина А. И., Перлова Н. А.* Влияние гамма-излучения на структуру и свойства полиэтилена. // Пласт. массы. — 1977. — № 1. — С. 107—117.
15. *Gerasimov G. Ya.* Radiation stability of carbon nanostructures // J. Eng. Phys. Thermophys. — 2010. — Vol. 83, No. 2. — P. 393—400.
16. *Зимин Д. Е.* Наномодификация эпоксидного связующего для создания базальтопластика с улучшенными эксплуатационными свойствами // Ползунов. вестн. — 2013. — № 3. — С. 282—285.
17. *Tatarintseva O. S., Zimin D. E., Khodakova N. N.* The role of surface effects at the filler—binder in the forming of the mechanical characteristics of plastics / Int. Polym. Sci. Technol. — 2014. — Vol. 41, Iss. 5. — P. 17—20.
18. *Кадыкова Ю. А., Бредихин П. А., Арзамасцев С. В., Калганова С. Г.* Комплексно-модифицированные базальтопластики // Вестн. Воронеж. ГУИР. — 2018. — Т. 80, № 2. — С. 297—301.
19. *Онискив В. Д., Столбов В. Ю., Хатямов Р. К.* Об одной задаче управления процессом гамма-облучения полиэтиленов // Прикл. математика и вопр. управления. — 2019. — № 3. — С. 119—130.
20. *Oniskiv V., Stolbov V., Oniskiv L.* Optimization of the processing of functional materials using gamma irradiation // Adv. Intel. Systems Comput. — 2020. — Vol. 114. — P. 489—498.
21. *Лебедев М. П.* Наномодификация базальтокомпозитов для условий Арктики // Тр. VII Евраз. симп. по проблемам надёжности материалов и машин для регионов холодного климата, 10—12 декабря, 2014. — С. 198—205.
22. *Пронина А. Е., Мельникова Т. В., Назаренко О. Б.* Влияние радиационной обработки на свойства эпоксидных композитов, наполненных природным цеолитом // Физико-технические проблемы в науке, промышленности и медицине: Сб. тез. докл. 9-й Международ. науч.-практ. конф. — Томск, 2019. — С.67.
23. *Оснос М. С., Оснос С. П.* Базальтовые непрерывные волокна — основа для создания новых промышленных производств и широкого применения армирующих и композитных материалов // Композит. мир. — 2019. — № 1. — С. 58—65.

24. *Jinxue Guo, Yuguo Li, Shengwei Wu and Wenxin Li*. The effects of gamma-irradiation dose on chemical modification of multi-walled carbon nanotubes // *Nanotechnology*. — 2005. — Vol. 16, No. 10. — P. 2385.

25. *Anson-Casaon A., Puertolas J. A., Pascual F. J. et al.* The effect of gamma-irradiation on few-layered graphene materials // *Appl. Surface Sci.* — 2014. — Vol. 301. — P. 264—272.

26. *Жарикова Е. Ф., Очертянова Л. И., Василенко И. В. и др.* Новый магнитный материал на основе модифицированных многослойных углеродных нанотрубок и производных железа // *Изв. РАН. Сер. хим.* — 2013. — № 3. — С. 645.

Поступила в редакцию 10.02.2021

Окончательный вариант поступил 18.08.2021

Received Feb. 2, 2021 (Aug. 18, 2021)

М. Резаи-Паджанд, А. Р. Масуди, А. Алепахамбар*

Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Iran

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ ДВУНАПРАВЛЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ ТОНКОСТЕННОЙ С-ОБРАЗНОЙ БАЛКИ¹

M. Rezaiee-Pajand, A. R. Masoodi, and A. Alepaighambar*

LATERAL-TORSIONAL BUCKLING OF A BIDIRECTIONAL EXPONENTIALLY GRADED THIN-WALLED C-SHAPED BEAM

Keywords: lateral-torsional buckling, bidirectional exponentially functionally graded material, monosymmetric C-shaped beam, lateral bracing, thin-walled section

Based on the Euler—Bernoulli beam theory, an analytical closed-form solution to the lateral-torsional buckling moment of a bidirectional exponentially functionally graded monosymmetric C-shaped beam is proposed. The Young's and shear moduli of the beam vary along its height and length direction. An exponential function is used to describe the variation in material properties along both the directions. For calculating the effective material properties along these directions, the rule of mixture is employed. Moreover, the effect of distributed lateral bracing is considered in the solution presented. Several numerical examples are solved to illustrate the high accuracy and performance of the solution.

Ключевые слова: потеря устойчивости изгибно-крутильная, материал функционально-градиентный экспоненциально двунаправленный, балка С-образная моносимметричная, связь боковая, сечение тонкостенное

На основе теории балок Эйлера—Бернулли предложено аналитическое решение для определения критического момента

*Автор, с которым следует вести переписку: rezaiee@um.ac.ir
Corresponding author: rezaiee@um.ac.ir

¹Перевод с англ.

изгибно-крутильной формы потери устойчивости двунаправленной экспоненциально функционально-градиентной моносимметричной С-образной балки. Модули Юнга и сдвига балки изменяются по высоте и длине. Для описания изменения свойств материала в обоих направлениях использованы экспоненциальные функции. Для расчета эффективных свойств материала в этих направлениях применено правило смеси. В представленном решении учтено влияние распределенных боковых связей. Для демонстрации высокой точности и производительности решения решено несколько численных примеров.

Введение

Потеря устойчивости при продольном изгибе с кручением — одна из важнейших мод разрушения балок с тонкостенным поперечным сечением. Такое разрушение более существенно при моносимметричном поперечном сечении балки. Отметим, что определение критической нагрузки такой конструкции при продольном изгибе с кручением сложнее, чем для двутавровой балки. Разрушение при поперечной потере устойчивости широко изучено для однородных конструкций [1, 2]. Многие тонкостенные конструкционные элементы изготавливают из двутавровых балок. Очевидно, что поведение при местной, поперечной и крутильной формах потери устойчивости С-образных балок имеет фундаментальное значение в силу тонкостенности их поперечного сечения и малой жесткости при кручении. Это диктует необходимость изучения моды разрушения при потере устойчивости тонкостенных балок, особенно с моносимметричным поперечным сечением.

За последнее десятилетие опубликовано несколько новых работ о потере устойчивости тонкостенных балок при продольном изгибе с кручением. В первые годы XXI века в [3, 4] провели интересное исследование потери устойчивости тонкостенных двутавровых балок из композитных материалов при продольном изгибе с кручением. В [5] проанализировали закритическое поведение тонкостенных балок открытого сечения после поперечной потери устойчивости. Прочность стальных угловых профилей после поперечной потери устойчивости исследовали в [6]. В [7] аналитически изучали эффекты докритического деформирования тонкостенных балок с открытым коническим поперечным сечением при потере устойчивости, обусловленной продольным изгибом с кручением. В [7—12] изучали изгибно-крутильную форму потери устойчивости балок с переменным поперечным сечением. В [13] исследовали поведение конических толстостенных балок с произвольным поперечным сечением при изгибно-крутильной потере устойчивости. В [9, 14] для описания нелинейных откликов тонкостенных двутавровых балок при изгибно-крутильной потере устойчивости в вычислительном методе использовали оболочечный конечный элемент.

В некоторых работах изучали поведение тонкостенных балок разного сечения, изготовленных из разных типов композитных материалов, при продольном изгибе с кручением [15—21]. В [22—28] исследовали применение изотропных и неоднородных функционально-градиентных материалов (ФГМ). Например, в [29] определили критический момент при изгибно-крутильной потере устойчивости конических двутавровых балок из ФГМ с непрерывными боковыми связями. Хотя было проведено много исследований для изучения поведения композитных балок при изгибе [30], анализ изгиба при поперечном кручении балок из ФГМ с разным поперечным сечением, в том числе *S*- и *Z*-образным, все еще может быть разработан с использованием аналитического решения. Недавно в [31] проанализировали продольный изгиб с кручением конической двутавровой свободно опертой балки из ФГМ методом дифференциальных квадратур. Свойства балки непрерывно изменялись вдоль ее оси.

Из приведенного обзора литературы следует, что изучение поведения композитных тонкостенных балок при потере устойчивости следует продолжать. Цель настоящей работы — получение аналитического решения задачи потери устойчивости при продольном изгибе с кручением тонкостенной балки из двунаправленного ФГМ с боковыми связями и *S*-образным поперечным сечением. Для этого использовали теорию балок Эйлера—Бернулли и предположения Сен-Венана о кручении. Решение получено методом минимизации полной потенциальной энергии. Кроме того, для распределения модулей Юнга и сдвига использовали экспоненциальные функции и правило смеси, а коэффициент Пуассона предположили постоянным.

1. Методологические предположения

Для упрощения формулировок в каждой процедуре использовали введенные предположения. Сначала рассматривали крутильные деформации на основе теории Сен-Венана для тонкостенных балок без учета влияния сдвиговой деформации. Иными словами, приняли теорию балки Эйлера—Бернулли. Соответственно сечение балки при деформации оставалось плоским. Рассматривали малые деформации. Материалы балки считали линейно-упругими, характеристики которых изменялись в обоих направлениях. Модули упругости и сдвига изменяли по высоте поперечного сечения и длине балки согласно экспоненциальным функциям. Характер изменения модулей Юнга и сдвига, а также коэффициента Пуассона считали постоянным для всей балки. В результате *S*-образное поперечное сечение балки имеет одну ось симметрии.

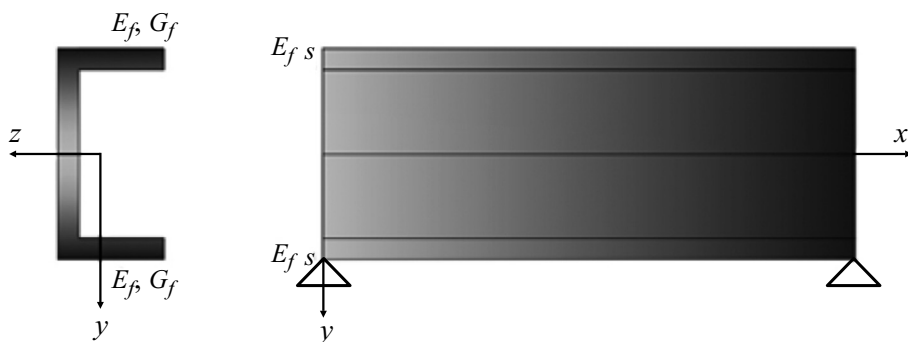


Рис. 1. Схема изменения свойств материала балки в продольном и поперечном направлениях.

2. Определение свойств ФГМ

Рассмотрим балку из ФГМ, эффективные механические свойства которого определили по правилу смеси исходя из характеристик составляющих ее материалов, включая модули Юнга и сдвига [32]:

$$P_f = P_c V_c + P_m V_m, \quad (1)$$

$$V_c + V_m = 1, \quad (2)$$

где нижние индексы c и m обозначают керамическую и металлическую фазы ФГМ соответственно. Изменения механических свойств в продольном (по длине L) и поперечном (по высоте h) направлениях балки представим следующим образом:

$$E(y) = E_f(x)P \quad G(y) = G_f(x)P, \quad P = \exp\left[\alpha\left(\left|y/h\right| + 0,5\right)\right], \quad (3)$$

$$E_f(x) = E_{f,s}Q \quad G_f(x) = G_{f,s}Q, \quad Q = \exp(\gamma x/L), \quad (4)$$

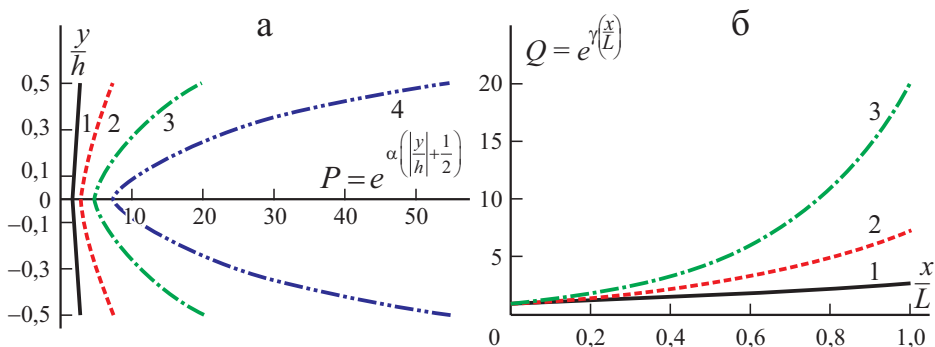


Рис. 2. Вид функций $P(y/h)$ (а) и $Q(x/L)$ (б): цифры у кривых — значения α (а) и γ (б).

где x и y — продольное и поперечное направление соответственно; нижний индекс s указывает начальное поперечное сечение балки; нижний индекс f, s указывает состояние ФГМ в начале балки. Схематически балка изображена на рис. 1. Зависимости $P(y/h)$ и $Q(x/L)$ иллюстрируют данные рис. 2.

3. Предложенная схема

Поскольку жесткость элемента балки при кручении меньше ее осевой жесткости, разрушение балки может происходить по моде продольного изгиба с кручением. В настоящем исследовании балка подвержена действию сосредоточенных моментов относительно осей z и y , приложенных на обоих концах. Основная цель исследования — определение максимального изгибающего момента, который можно приложить к балке, путем построения и минимизации функции полной потенциальной энергии конструкции. На рис. 3 показана геометрия балки и ее сечения, где t_w , h , t_f , b_f — толщина стенки, высота сечения, толщина и ширина полки соответственно.

Точки C и S — центры площади и сдвига С-образного поперечного сечения соответственно. Горизонтальные расстояния центров площади и сдвига от середины стенки обозначены как z_c и z_0 соответственно. Эти параметры вычисляем по формулам [33]

$$z_c = \frac{0,5b_f^2 t_f e^\alpha}{b_f t_f e^\alpha + \frac{t_w h}{\alpha} (e^\alpha - e^{\alpha/2})}, \quad (5)$$

$$z_0 = \frac{t_f b_f^2 h^2 e^\alpha}{4I_z}. \quad (6)$$

Балка в продольном направлении непрерывно связана с пружинами жесткостью R (боковая связь), а ее поперечное сечение постоянно. Полная потенциальная энергия балки $\Pi = U + V$, где U — потенциальная энергия

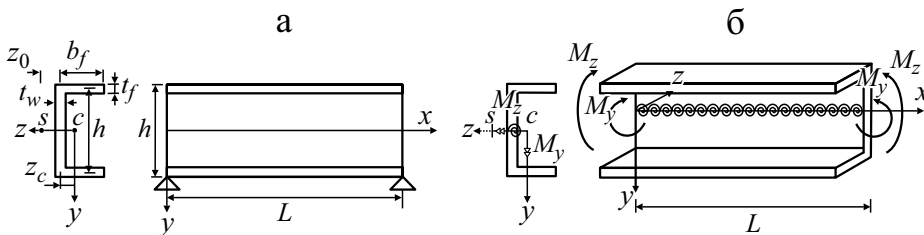


Рис. 3. С-образная балка под действием внешних изгибающего M_z и поперечного M_y моментов.

ее продольного изгиба с кручением; V — работа внешних нагрузок [33, 34]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_y [w'']^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_z [v'']^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_w [\phi'']^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L G_f(x) J(x) [\phi']^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L R[\phi]^2 dx, \quad (7)$$

$$V = - \int_0^L E_f(x) M_y v'' \phi dx + \int_0^L E_f(x) M_y \beta [\phi']^2 dx + \int_0^L E_f(x) M_z w'' \phi dx. \quad (8)$$

Здесь w и v — прогибы балки в направлениях z и y соответственно; ϕ — угол закручивания; I_y и I_z — полярные моменты инерции относительно осей y и z соответственно; I_w — депланационный момент инерции. В силу функций изменения модулей упругости и сдвига ось упругой симметрии балки совмещена с осью z . Геометрическая ось симметрии С-образного поперечного сечения также совпадает с осью z . Поэтому взаимодействие изгиба с растяжением балки в функции ее энергии деформирования не учитывали. Поскольку балка — продольно-призматическая, также не учитывали изгибно-крутильное взаимодействие. Поскольку модули Юнга и сдвига изменяются вдоль продольной оси балки, вариационное исчисление не использовали в силу большой сложности вывода основных дифференциальных уравнений при таком подходе. Прибегли к простому и эффективному способу получения определяющих уравнений, применив метод Ритца при выборе гармонических функций для величин w , v и ϕ . Следует отметить, что один из наиболее существенных моментов — выполнение всех граничных условий в выбранных функциях. В настоящем исследовании оба конца балки имели шарнирное опирание в направлениях z и y . Рассмотрели три типа граничных условий опирания концов балки: свободно опертые (SS), защемленный—подвижный (CF) и защемленные (CC):

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w(L) = 0, \quad w''(L) = 0, \\ v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad v''(L) = 0, \\ \phi_{SS}(0) = 0, \quad \phi_{SS}''(0) = 0, \quad \phi_{SS}(L) = 0, \quad \phi_{SS}''(L) = 0, \\ \phi_{CF}(0) = 0, \quad \phi_{CF}'(0) = 0, \quad \phi_{CF}(L) \neq 0, \quad \phi_{CF}'(L) = 0, \\ \phi_{CC}(0) = 0, \quad \phi_{CC}'(0) = 0, \quad \phi_{CC}(L) = 0, \quad \phi_{CC}'(L) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Функции, выбранные для прогиба балки, можно представить в виде

$$w(x) = \sum_{k=1}^{m+2} w_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad (10)$$

$$v(x) = \sum_{k=1}^{m+2} v_k \sin \frac{k\pi x}{L}, \quad (11)$$

$$\phi_{SS}(x) = \sum_{k=1}^{m+2} \phi_k \sin \frac{k\pi x}{L},$$

$$\phi_{CF}(x) = \sum_{k=1}^{m+2} \phi_k \left(1 - \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L} \right), \quad (12)$$

$$\phi_{CC}(x) = \sum_{k=1}^{m+2} \phi_k \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{L} \right),$$

где w_k и v_k — прогибы в направлениях z и y соответственно; ϕ_k — угол закручивания; k — номер моды потери устойчивости, возрастающий от 1 до $m+2$. Необходимо отметить, что балка имеет $m+1$ моду потери устойчивости. После этого потенциальную энергию деформирования С-образного поперечного сечения переписывали с учетом выбранных функций деформирования. Энергию деформирования в силу продольного изгиба можно выразить как

$$U^{by} = \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_y [w'']^2 dx, \quad (13)$$

где

$$I_y = \frac{t_f b_f^3}{6} + 2t_f b_f \left(\frac{b_f}{2} - z_c \right)^2 e^\alpha + \frac{2h}{\alpha} \left(e^\alpha - e^{\alpha/2} \right) \left(z_c^2 t_w + \frac{t_w^3}{12} \right). \quad (14)$$

Соответствующая процедура получения соотношения для полярного момента инерции I_y вокруг оси y представлена в Приложении. Используя формулы (7) и (14), получим выражение для потенциальной энергии деформирования при продольном изгибе

$$\begin{aligned} U^{by} = & -(8,1174w_k^2 k^4 E_{f,s} (19,7392e^{2\alpha} h^2 k^2 t_w^4 + 19,7392e^\alpha h^2 k^2 t_w^4 - \\ & - 19,7392e^{(\gamma+2\alpha)} h^2 k^2 t_w - 19,7392e^{(\gamma+\alpha)} h^2 k^2 t_w^4 - 39,4784e^{1,5\alpha} h^2 k^2 t_w^4 + \\ & + 39,4784e^{(\gamma+1,5\alpha)} h^2 k^2 t_w^4 + 19,7392e^{(\gamma+1,5\alpha)} \alpha h k^2 b_f t_f t_w^3 + \\ & + 78,9568e^{2\alpha} \alpha h k^2 b_f^3 t_f t_w + 19,7392e^{2\alpha} \alpha h k^2 b_f t_f t_w^3 - \\ & - 78,9568e^{(\gamma+2\alpha)} \alpha h k^2 b_f^3 t_f t_w - 19,7392e^{(\gamma+2\alpha)} \alpha h k^2 b_f t_f t_w^3 - \\ & - 78,9568e^{1,5\alpha} \alpha h k^2 b_f^3 t_f - 19,7392e^{1,5\alpha} \alpha h k^2 b_f t_f t_w^3 + \\ & + 78,9568e^{(\gamma+1,5\alpha)} \alpha h k^2 b_f^3 t_f t_w + 19,7392e^{2\alpha} \alpha^2 k^2 b_f^4 t_f^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -19,7392e^{(\gamma+2\alpha)}\alpha^2k^2b_f^4t_f^2) / (L^3\alpha\gamma(39,4784e^\alpha\alpha k^2b_ft_f + \\
 & +e^\alpha\alpha\gamma^2b_ft_f + 39,4784e^\alpha hk^2t_w + e^\alpha\gamma^2ht_w - 39,4784e^{0,5\alpha}hk^2t_w - e^{0,5\alpha}\gamma^2ht_w.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Энергия деформирования U^{bz} при изгибе относительно оси z и полярный момент инерции I_z относительно оси z запишем как

$$U^{bz} = \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_z [v'']^2 dx, \tag{16}$$

$$I_z = \frac{b_ft_fh^2e^\alpha}{2} + \frac{2t_w h^3}{\alpha} \left[\frac{e^\alpha}{4} - \frac{e^\alpha}{\alpha} + \frac{2(e^\alpha - e^{\alpha/2})}{\alpha^2} \right]. \tag{17}$$

Выражение для определения величины I_z приведено в Приложении. Окончательное выражение энергии деформирования U^{bz} при изгибе относительно оси z имеет вид

$$\begin{aligned}
 U^{bz} = & -\frac{1}{\alpha^3 L^3 (39,4784k^2 + \gamma^2)\gamma} 24,3523v_k^2 k^4 h^2 E_{f,s} (19,7392e^{(\gamma+\alpha)}\alpha^3 k^2 b_ft_f + \\
 & +19,7392e^{(\gamma+\alpha)}\alpha^2 hk^2 t_w - 78,9568e^{(\gamma+\alpha)}\alpha hk^2 t_w + 157,9137e^{0,5\alpha} hk^2 t_w - \\
 & -19,7392e^\alpha \alpha^3 k^2 b_ft_f - 19,7392e^\alpha \alpha^2 hk^2 t_w + 78,9568e^\alpha \alpha hk^2 t_w + \\
 & +157,9137e^{(\gamma+\alpha)} hk^2 t_w - 157,9137e^{(\gamma+0,5\alpha)} hk^2 t_w - 157,9137e^\alpha hk^2 t_w). \tag{18}
 \end{aligned}$$

Энергию деформирования U^w в силу искривления и депланационный момент инерции I_w можно быть определить с помощью выражений

$$U^w = \frac{1}{2} \int_0^L E_f(x) I_w [\phi'']^2 dx, \tag{19}$$

$$I_w = \left(I_y + Az_c^2 - Az_0 z_c \right) \frac{h^2}{4}, \tag{20}$$

$$A = 2b_ft_f e^\alpha + \frac{2t_w h}{\alpha} (e^\alpha - e^{\alpha/2}). \tag{21}$$

Площадь поперечного сечения балки можно вычислить по формуле (21). Выражения для вычисления депланационного момента инерции приведены в Приложении. Энергию деформирования в силу искривления можно вычислить по формулам (7) и (19). Потенциальную энергию кручения по Сен-Венану при свободном кручении балки и постоянную кручения находим с помощью соотношений

$$U^{st} = \frac{1}{2} \int_0^L G_f(x) J [\phi']^2 dx, \tag{22}$$

$$J = \frac{2}{3} b_f t_f^3 e^\alpha + \frac{2ht_w^3(e^\alpha - e^{\alpha/2})}{3\alpha}. \quad (23)$$

Подробно определение постоянной кручения представлено в Приложении. Энергию деформирования при кручении по Сен-Венану можно найти с помощью формул (7) и (22). Выражения для расстояний центров сдвига и площади от середины стенки также приведены в Приложении. На рис. 3 представлена геометрия С-образной балки и приложенные к ней нагрузки. Потенциальную энергию, обусловленную боковыми пружинами, выразим как

$$U^R = \frac{1}{2} \int_0^L R[\phi]^2 dx. \quad (24)$$

Подставив (12) в уравнение (24), получим потенциальную энергию, обусловленную боковыми пружинами, работающими на кручение, в виде

$$\begin{aligned} U_{SS}^R &= \frac{R[\phi_k]^2 L}{4}, \\ U_{CF}^R &= \frac{3R[\phi_k]^2 L}{4}, \\ U_{CC}^R &= \frac{3R[\phi_k]^2 L}{4}. \end{aligned} \quad (25)$$

С-образное поперечное сечение несимметрично относительно оси y . Скручивание создает продольное напряжение относительно оси сдвига, влияющее на сопротивление продольному изгибу с кручением балки с одной осью симметрии. Это влияние, известное как эффект Вагнера, характеризует параметр β , вычисляемый по формуле [33]

$$\begin{aligned} \beta = & \left\{ \frac{2h^3 t_w z_c}{\alpha} \left[\frac{e^\alpha}{4} - \frac{e^\alpha}{\alpha} + \frac{2(e^\alpha - e^{\alpha/2})}{\alpha^2} \right] + \frac{2h}{\alpha} z_c^3 t_w (e^\alpha - e^{\alpha/2}) + \right. \\ & \left. + \frac{t_f e^\alpha}{4} \left[h^2 (z_c^2 - (b_f - z_c)^2) + 2(z_c^4 - (b_f - z_c)^4) \right] \right\} / 2I_y - z_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно Вагнеру, прочность при кручении балки с одной осью симметрии изменяется от $G_f(x)J$ до $G_f(x)J + G_f(x)\beta M_y$. За счет внешних нагрузок функцию энергии можно выразить как

$$V = \frac{M_y v_k \pi^2 k^2 \phi_k}{2L} + \frac{M_y \beta [\phi_k]^2 k^2 \pi^2}{2L} - \frac{M_z \phi_k w_k k^2 \pi^2}{2L}. \quad (27)$$

На основании изложенного общую потенциальную энергию деформирования конструкции найдем, объединив энергию деформирования при продольном изгибе относительно осей z и y с потенциальной энергией деформирования при кручении по Сен-Венану, а также энергией, обусловленной внешними моментами. Поскольку функция полной потенциальной энергии слишком сложна, ее упростили, используя депланационный момент инерции, постоянную кручения, моменты инерции и параметр Вагнера. После выполнения необходимых вычислений получили следующие простые аналитические выражения:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{SS} = & -\frac{E_{f,s}I_y w_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2)\gamma} - \\
 & -\frac{E_{f,s}I_w \phi_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2)\gamma} + \\
 & + \frac{G_{f,s}J\phi_k^2 \pi^2 k^2 (+2e^\gamma \pi^2 k^2 - 2\pi^2 k^2 + e^\gamma \gamma^2 - \gamma^2)}{2L(4\pi^2 k^2 + \gamma^2)\gamma} - \\
 & - \frac{E_{f,s}I_z v_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2)\gamma} + \frac{M_y v_k \phi_k \pi^2 k^2}{2L} + \\
 & + \frac{M_y \beta [\phi_k]^2 \pi^2 k^2}{2L} + \frac{1}{4} R(\phi_k)^2 L - \frac{M_z w_k \phi_k \pi^2 k^2}{2L}, \quad (28) \\
 \Pi_{CF} = & -\frac{E_{f,s}I_y w_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2)\gamma} + \\
 & + \frac{1}{2L^3 (16\pi^2 k^2 - 16\pi^2 k + 4\pi^2 + \gamma^2)\gamma} (\phi_k^2 \pi^4 I_2 E_{f,s} (-16\gamma^2 k^4 + 32\gamma^2 k^3 - 24\gamma^2 k^2 + \\
 & + 8\gamma^2 k - 128\pi^2 k^6 + 384\pi^2 k^5 - 480\pi^2 k^4 + 320\pi^2 k^3 + 24\pi^2 k - 384e^\gamma \pi^2 k^5 + \\
 & + 480e^\gamma \pi^2 k^4 - 8e^\gamma \gamma^2 k - 24e^\gamma \pi^2 k + 128e^\gamma \pi^2 k^6 - 32e^\gamma \gamma^2 k^3 + 24e^\gamma \gamma^2 k^2 + \\
 & + 16e^\gamma \gamma^2 k^4 - 320e^\gamma \pi^2 k^3 + 2e^\gamma \pi^2 + e^\gamma \gamma^2 - 120\pi^2 k^2 - 2\pi^2 - \gamma^2 + 120e^\gamma \pi^2 k^2)) \\
 & - \frac{G_{f,s}J\phi_k^2 \pi^2}{2L(16\pi^2 k^2 - 16\pi^2 k + 4\pi^2 + \gamma^2)\gamma} (-16e^\gamma \pi^2 k^4 + 32e^\gamma \pi^2 k^3 + 16\pi^2 k^4 - \\
 & - 24e^\gamma \pi^2 k^2 - 32\pi^2 k^3 + 8e^\gamma \pi^2 k + 24\pi^2 k^2 - e^\gamma \pi^2 - 8\pi^2 k + \pi^2) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{E_{f,s} I_z v_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma} - \\
 & \frac{M_y v_k \phi_k \pi k (2 \cos^3(k\pi) k^2 - 2 \cos^3(k\pi) k - 2 \cos(k\pi) k - 4k^2 + \cos(k\pi) + 4k - 1)}{L(3k^2 - 4k + 1)} - \\
 & - \frac{M_y \beta (\phi_k)^2 \pi (-4\pi k^2 + 4\pi k - \pi)}{2L} + \frac{3R(\phi_k)^2 L}{4} + \\
 & + \frac{M_z w_k \phi_k \pi k (2 \cos^3(k\pi) k^2 - 2 \cos^3(k\pi) k - 2 \cos(k\pi) k - 4k^2 + \cos(k\pi) + 4k - 1)}{L(3k^2 - 4k + 1)}, \tag{29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{CC} = & - \frac{E_{f,s} I_y w_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma} + \\
 & + \frac{8E_{f,s} I_w \pi^4 k^4 \phi_k^2 (e^\gamma \gamma^2 + 8e^\gamma \pi^2 k^2 - 8\pi^2 k^2 - \gamma^2)}{L(16\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma} - \\
 & - \frac{8G_{f,s} J \phi_k^2 \pi^2 k^2 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{L(16\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma} - \frac{E_{f,s} I_z v_k^2 \pi^4 k^4 (-2e^\gamma \pi^2 k^2 + 2\pi^2 k^2)}{2L^3 (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma} + \\
 & + \frac{2M_y v_k \phi_k \pi k (\cos^3(k\pi) - 3 \cos(k\pi) + 2)}{3L} + \frac{2M_y \beta [\phi_k]^2 \pi^2 k^2}{L} + \\
 & + \frac{3}{4} R(\phi_k)^2 L - \frac{2M_z w_k \phi_k \pi k (\cos^3(k\pi) - 3 \cos(k\pi) + 2)}{3L}. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Для определения критического изгибающего момента балки полную потенциальную энергию конструкции минимизировали методом Ритца. Для этого производные выражений (28) — (30) по w_k , v_k , ϕ_k приравняли к нулю:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_k} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_k} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_k} = 0. \tag{31}$$

Уравнения (31) можно записать в матричной форме как

$$\begin{bmatrix} \{C_{11}\} & \{C_{12}\} & \{C_{13}\} \\ \{C_{21}\} & \{C_{22}\} & \{C_{23}\} \\ \{C_{31}\} & \{C_{32}\} & \{C_{33}\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_k\} \\ \{v_k\} \\ \{\phi_k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}. \tag{32}$$

Детерминант матрицы коэффициентов [C] приравняем к нулю.

4. Результаты и обсуждение

Для проверки представленной формулы для определения критического момента потери устойчивости результаты, полученные в настоящем исследовании, сопоставили с полученными другими исследователями. В частном случае критический момент можно определить для С-образной свободно опертой балки без поперечного момента относительно оси y . Для проверки результатов рассмотрели балку UPE160 [35] со следующими геометрическими характеристиками: $b_f = 0,07$ м, $t_f = 0,95$ см, $t_w = 0,55$ см, $h = 0,141$ м, $I_y = 8,83 \cdot 10^6$ м⁴, $I_z = 1,05 \cdot 10^6$ м⁴, $I_w = 4,66 \cdot 10^6$ м⁴, $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$.

Результаты сравнения критического момента балок разной длины с полученными с помощью эталонного решения и расчета методом конечных элементов (МКЭ) приведены в табл. 1. Видно хорошее согласование представленных результатов.

Кроме того, численно исследовали влияние показателей степени, связанных с механическими свойствами материала в направлениях x и y , на критический момент потери устойчивости балки. Геометрические характеристики и свойства материала С-образной балки следующие: $b_f = 0,15$ м, $t_f = 0,02$ м, $t_w = 0,01$ м, $h = 0,5$ м, $E_{f,s} = 100$ ГПа, $\nu = 0,3$.

4.1. С-образная балка из однонаправленного экспоненциально функционально-градиентного материала (ОЭФГМ), нагруженная поперечным и изгибающим моментами. Рассмотрим балку из ФГМ, экспоненциально градиентного только в направлении оси y ; в продольном направлении свойства постоянны (параметр $\gamma = 0$) (рис. 4). Ввиду отсутствия боковой связи константу жесткости R считали равной нулю. С учетом граничных условий, использованных в данном примере, критические моменты потери устойчивости запишем как

$$M_{cr,SS} = \frac{\sqrt{\left\{ E_{f,s} \left[E_{f,s} I_w \pi^4 k^4 + L^2 k^2 \pi^2 (G_{f,s} J + 2M_y \beta) \right] I_z - M_y^2 L^4 \right\} I_y I_z}}{L^2 I_z} \quad (33)$$

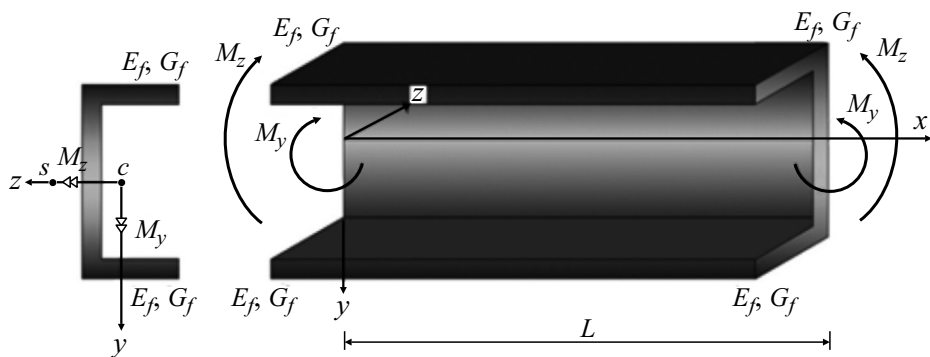


Рис. 4. С-образная балка из ОЭФГМ без боковых связей.

Табл. 1

Значения критического момента потери устойчивости M_{cr} (кН·м) свободно опертых однородных С-образных балок

Длина балки, м	[35]	МКЭ	Настоящая работа
1,200	121,76	115,77	117,73
1,800	65,88	63,93	64,54
2,500	42,44	41,38	41,81
3,000	28,25	27,57	27,84

$$\begin{aligned}
 M_{cr,CF} = 1,5 \left[I_y I_z \left(-\frac{4}{9} L^4 M_y^2 k^2 (k-1)^2 + \frac{8}{9} (k-1) M_y^2 L^4 (k-0,5) k + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{16}{9} (k-1) M_y^2 L^4 (k-0,5)^2 k \cos^3(k\pi) - \frac{4}{9} M_y^2 L^4 (k-0,5)^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{16}{9} M_y^2 L^4 (k-0,5)^3 \cos(k\pi) + 4E_{f,s}^2 (k-1)^2 \left(k - \frac{1}{3} \right)^2 I_w I_z (k-0,5)^4 k^2 \pi^6 + \right. \right. \\
 \left. \left. + E_{f,s} (k-1)^2 (G_{f,s} J + 2M_y \beta) L^2 \left(k - \frac{1}{3} \right)^2 I_z (k-0,5)^2 k^2 \pi^4 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{16}{9} M_y^2 L^4 (k-0,5)^4 \right]^{0,5} / \left\{ L^2 I_z \left[(k^2 - k) \cos(k\pi) \right]^3 + \right. \\
 \left. + (k-0,5) \cos(k\pi) - 2(k-0,5)^2 \right\}, \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{cr,CC} = \left\{ \left[16L^4 M_y^2 (-2 - \cos^3(k\pi) + 3\cos(k\pi)) \right] + \right. \\
 \left. + E_{f,s} k^4 I_z \pi^4 L^2 (G_{f,s} J + 2M_y \beta) + \right. \\
 \left. + 4E_{f,s}^2 I_w I_z \pi^6 k^6 I_y I_z \right\}^{0,5} / \left[L^2 I_z (\cos(k\pi) + 2)(\cos(k\pi) - 1) \right]^2. \quad (35)
 \end{aligned}$$

Модуль Юнга верхней полки равен 100 ГПа, модуль упругости в продольном направлении постоянен, а в поперечном направлении изменяется согласно формуле (3). Балка нагружена сосредоточенными изгибающими моментами M_z и M_y . Значения критических моментов, обусловленных моментом $M_y = 1000$ кН·м, приведены в табл. 2.

Полученные результаты показывают, что увеличение длины балки, к которой приложен изгибающий момент M_y , уменьшает значения критического момента потери устойчивости. Увеличение показателя степени α обусловило экспоненциальное увеличение критического момента по-

тери устойчивости. Расчет трех мод потери устойчивости (первой, третьей и пятой) продемонстрировал возможность и точность формулировки, предложенной для предсказания критического момента потери устойчивости С-образных балок. Установили, что для первой моды значения критического момента потери устойчивости балки с защемленными и подвижными концами (CF) меньше, чем балок с граничными условиями защемления (CC) и свободного опирания (SS), а для пятой моды наоборот больше. Кроме того, при малых значениях показателя степени α с увеличением длины балки значения критического момента потери устойчивости стремятся к нулю.

4.2. С-образная балка из двунаправленного экспоненциально функционально-градиентного материала (ДЭФГМ), нагруженная изгибающими моментами. Смоделировали С-образную балку из ДЭФГМ без

Табл. 2

Значения критических моментов потери устойчивости (МН·м) в 1-й, 3-й и 5-й модах ($k = 1, 3, 5$) С-образных балок из ОЭФГМ разной длины L и с разными условиями опирания (SS, CF, CC), нагруженных поперечными моментами $M_y = 1000$ кН·м

$L = 1$ м					$L = 5$ м				
k	α	SS	CF	CC	k	α	SS	CF	CC
1	1,0	13,29249	10,43925	32,77327	1	1,0	-----	-----	0,690856
	1,5	22,03629	17,30670	52,99423		1,5	0,000000	0,000000	1,733469
	2,0	36,05533	28,31745	85,51939		2,0	1,068730	0,827867	3,227929
	2,5	58,60743	46,02996	137,9224		2,5	2,424230	1,899062	5,566335
	3,0	94,96860	74,58804	222,4777		3,0	4,436300	3,481637	9,300513
	3,5	153,6979	120,7139	359,1005		3,5	7,614704	5,979080	15,30884
	4,0	248,6966	195,3258	580,1370		4,0	12,71722	9,987209	25,01256
3	1,0	126,1857	829,2124	896,1635	3	1,0	4,208464	31,32348	34,47599
	1,5	203,1728	1332,263	1439,307		1,5	7,528328	51,92404	56,55179
	2,0	327,0589	2141,928	2313,529		2,0	12,77137	84,95471	92,00008
	2,5	526,7058	3446,881	3722,557		2,5	21,15872	138,0913	149,0643
	3,0	848,8887	5552,899	5996,562		3,0	34,64987	223,7650	241,1007
	3,5	1369,500	8956,104	9671,245		3,5	56,41724	362,1423	389,7786
	4,0	2211,804	14462,28	15616,67		4,0	91,61113	585,9777	630,2936
5	1,0	351,9323	4484,610	4153,098	5	1,0	13,29261	176,3799	163,8742
	1,5	565,4299	7199,462	6666,579		1,5	22,03630	285,7237	264,9735
	2,0	909,0625	11569,21	10712,45		2,0	36,05533	461,5685	427,5984
	2,5	1462,902	18612,32	17233,56		2,5	58,60743	744,8533	689,6129
	3,0	2356,724	29979,22	27758,03		3,0	94,96860	1201,925	1112,389
	3,5	3801,089	48347,72	44765,21		3,5	153,6979	1940,432	1795,503
	4,0	6137,981	78066,99	72281,95		4,0	248,6966	3135,218	2900,685

$L = 10 \text{ м}$				
k	α	CF	CF	CC
1	1,0	-----	-----	-----
	1,5	-----	-----	0
	2,0	0	0	0,602994
	2,5	0,636763	0,481029	1,416772
	3,0	1,489988	1,162396	2,607227
	3,5	2,744466	2,151348	4,482034
3	4,0	4,725825	3,709297	7,489073
	1,0	0,000000	6,168344	7,444872
	1,5	1,293759	11,84855	13,30775
	2,0	2,930312	20,66322	22,57124
	2,5	5,356367	34,69056	37,39192
	3,0	9,181851	57,21008	61,23219
5	3,5	15,31190	93,51540	99,69799
	4,0	25,19740	152,1949	161,8905
	1,0	2,609962	41,65551	39,15566
	1,5	5,024488	69,63977	64,90529
	2,0	8,767401	114,4496	106,1935
	2,5	14,72177	186,4946	172,6142
	3,0	24,27991	302,6243	279,7063
	3,5	39,68869	490,1695	452,6779
	4,0	64,59325	793,5199	732,4721

боковых связей (константа жесткости $R = 0$), нагруженную изгибающими моментами на концах (рис. 5). Модули Юнга и сдвига изменяются экспоненциально в продольном и поперечном направлениях. Поперечный изгибающий момент относительно оси y равен нулю. Длина

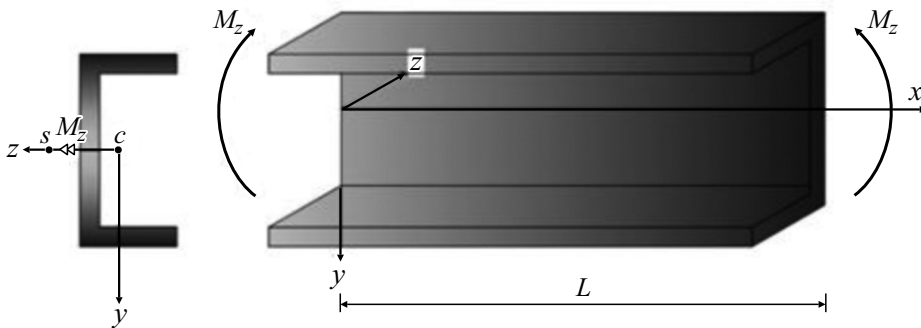


Рис. 5. С-образная балка из ДЭФГМ без боковых связей.

балки $L = 10$ м. В зависимости от граничных условий на концах балки критический момент потери устойчивости вычисляем как

$$M_{cr,SS} = \frac{1}{I_z (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma L^2} \left\{ \sqrt{8} \left[(E_{f,s} k^4 I_z \pi^4 (2E_{f,s} I_w \pi^4 k^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2G_{f,s} J L^2 \pi^2 k^2 + G_{f,s} J L^2 \gamma^2) (e^\gamma)^2 - 2I_z E_{f,s} (2E_{f,s} I_w \pi^6 k^6 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2L^2 k^4 G_{f,s} J \pi^4 + L^2 \gamma^2 k^2 G_{f,s} J \pi^2) k^2 \pi^2 e^\gamma + \right. \right. \\ \left. \left. + 2E_{f,s}^2 I_w I_z \pi^8 k^8 + 2E_{f,s} L^2 k^6 I_z G_{f,s} J \pi^6 + k^4 E_{f,s} G_{f,s} J \gamma^2 I_z L^2 \pi^4 \right) I_z I_y \right]^{0,5} \right\}, \quad (36)$$

$$M_{cr,CF} = 0,5 \left\{ \sqrt{576} \left[(\gamma^2 + 16\pi^2 (k - 0,5)^2) (\pi^8 I_z E_{f,s} (k - 1)^2 k^4 (0,5 E_{f,s} I_w \gamma^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4E_{f,s} I_w \pi^2 (k - 0,5)^2 + G_{f,s} J L^2) (k - \frac{1}{3})^2 (k - 0,5)^4 (e^\gamma)^2 - 2\pi^4 I_z E_{f,s} (k - 1)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 0,5\pi^4 I_w E_{f,s} (k - 0,5)^4 \gamma^2 + \pi^4 (4I_w E_{f,s} \pi^2 (k - 0,5)^2 + G_{f,s} J L^2) (k - 0,5)^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi^4 (k - \frac{1}{3})^2 e^\gamma + 0,5\pi^8 k^4 (k - 0,5)^4 I_z E_{f,s}^2 (k - 1)^2 I_w (k - \frac{1}{3})^2 \gamma^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi^8 I_z (4E_{f,s} I_w \pi^2 (k - 0,5)^2 + G_{f,s} J L^2) E_{f,s} (k - 1)^2 k^4 (k - \frac{1}{3})^2 (k - 0,5)^4 \right) (4\pi^2 k^2 + \right. \\ \left. + \gamma^2) I_z I_y \right]^{0,5} / (16\pi^2 k^2 - 16\pi^2 k + 4\pi^2 + \gamma^2) ((k^2 - k) \cos^3(k\pi) + \\ \left. + (0,5 - k) \cos(k\pi) - 2(k - 0,5)^2) I_z (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) \gamma L^2 \right\}, \quad (37)$$

$$M_{cr,CC} = \left\{ 2I_z (16\pi^2 k^2 + \gamma^2) (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) (\cos(k\pi) + 2) (\cos(k\pi) - 1)^2 \gamma L^2 \right. \\ \times \left[\sqrt{576} (I_z (4\pi^2 k^2 + \gamma^2) I_y (16\pi^2 k^2 + \gamma^2) (+E_{f,s} I_z \pi^8 k^8 (0,5 E_{f,s} I_w \gamma^2 + \right. \\ \left. + G_{f,s} J L^2 + 4E_{f,s} I_w \pi^2 k^2) (e^\gamma)^2 - 2(4E_{f,s} I_w \pi^6 k^6 + \right. \\ \left. + k^4 (G_{f,s} J L^2 + 0,5 E_{f,s} I_w \gamma^2) \pi^4) \pi^4 I_z E_{f,s} k^4 e^\gamma + \right. \\ \left. \left. + 4E_{f,s}^2 I_w I_z \pi^{10} k^{10} + E_{f,s} I_z k^8 (0,5 E_{f,s} I_w \gamma^2 + G_{f,s} J L^2) \pi^8 \right) \right]^{0,5} \right\}^{-1}. \quad (38)$$

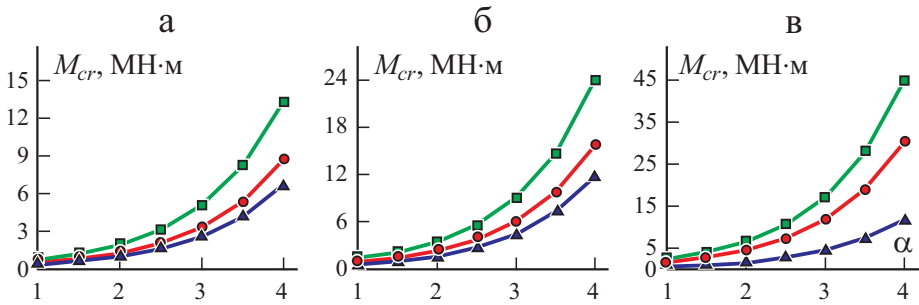


Рис. 6. Изменение критического момента потери устойчивости M_{cr} первой моды ($k = 1$) балки из ДЭФГМ в зависимости от параметра α при граничных условиях СС (■), SS (●), CF (▲) и $L = 10$ м, $M_y = 0$; $\gamma = 1$ (а), 2 (б), 3 (в).

Численные результаты получили для первой моды потери устойчивости. Влияние экспоненциального изменения свойств материала в продольном и поперечном направлениях и разных граничных условиях опирания концов балки на критический момент M_{cr} иллюстрируют данные рис. 6.

4.3. С-образная свободно опертая балка из ОЭФГМ с непрерывной боковой связью. Рассмотрена балка длиной 5 м, нагруженная изгибающими моментами. Модули Юнга и сдвига экспоненциально изменяются только в продольном направлении ($\alpha = 0$). Соотношения, используемые для расчета значений центров площади и сдвига, момента инерции относительно оси y , депланационного момента, площади поперечного сечения балки, постоянная кручения и характеристики Вагнера следующие:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} z_c = \frac{b_f^2 t_f}{2b_f t_f + t_w h}, \quad (39)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} z_0 = \frac{t_f b_f^2 h^2}{4I_z}, \quad (40)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_y = \frac{t_f b_f^3}{6} + 2t_f b_f \left(\frac{b_f}{2} - z_c \right)^2 + h \left(z_c^2 t_w + \frac{t_w^3}{12} \right), \quad (41)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_z = \frac{b_f t_f h^2}{2} + \frac{t_w h^3}{12}, \quad (42)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_w = \left(I_y + A z_c^2 - A z_0 z_c \right) \frac{h^2}{4}, \quad (43)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A = 2b_f t_f e^\alpha + t_w h, \quad (44)$$

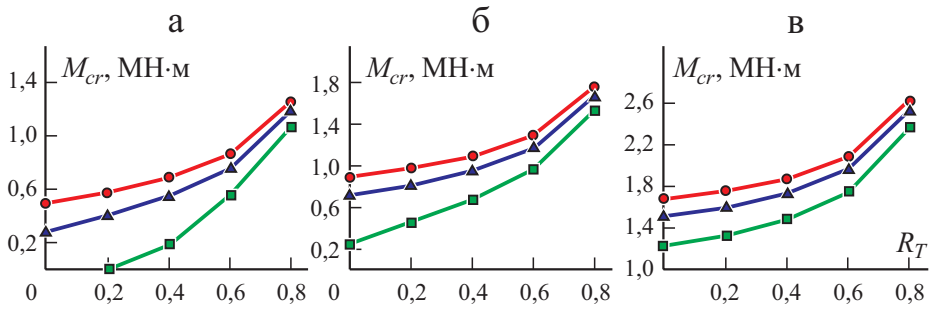


Рис. 7. Изменение критического момента потери устойчивости M_{cr} первой моды ($k = 1$) балки из ОЭФГМ в зависимости от параметра боковых связей R_T при $L = 5$ м; $M_y = 0$ (●), 200 (▲), 500 (■) кН·м; $\gamma = 1$ (а), 2 (б), 3 (в).

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J = \frac{2}{3} b_f t_f^3 + \frac{h t_w^3}{3}, \quad (45)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta = \frac{\frac{h^3 t_w z_c}{12} + h z_c^3 t_w + \frac{t_f}{4} \left\{ h^2 \left[(z_c^2 - (b_f - z_c)^2) + 2 \left[z_c^4 - (b_f - z_c)^4 \right] \right] \right\}}{2I_y} - z_0. \quad (46)$$

Численные результаты показали, что значения критического момента потери устойчивости однородной С-образной балки, рассчитанные при заданных параметрах, точные. Поэтому предложенные формулировки можно использовать для анализа продольного изгиба с кручением С-образных балок из ФГМ. Отметим, что рассматривали балку с непрерывными боковыми связями, для учета которых использовали безразмерный коэффициент R_T , определенный как [36—38]

$$R_T = \frac{1}{1 + \frac{10G_{f,s}J_s}{RL}}, \quad R = \frac{10G_{f,s}J}{L} \frac{R_T}{1 - R_T}. \quad (47)$$

Изменение критического момента потери устойчивости для первой моды при разных значениях параметра γ иллюстрируют данные рис. 7.

Закключение

Исследовали потерю устойчивости С-образной моносимметричной балки из ФГМ при продольном изгибе с кручением. Модули Юнга и сдвига материала балки экспоненциально изменяются по высоте и длине. Распределение составляющих материалов предполагали симметричным по высоте. В результате поперечное сечение балки обладало моносимметрией. Использовали теорию балок Эйлера—Бернулли и Сен-Венана.

Определили полную потенциальную энергию балки при действии на ее концах сосредоточенных изгибающих моментов относительно продольной и поперечной осей и непрерывной связи по всей длине. Критический момент потери устойчивости балки при разных граничных условиях нашли путем минимизации полной потенциальной энергии. Точность и обоснованность предложенных формулировок подтвердили сравнением численных результатов с тестовыми решениями.

Основные результаты настоящей работы следующие.

— Поскольку изменение модулей Юнга и сдвига по высоте ($\gamma \neq 0$) и длине балки ($\alpha \neq 0$) считали экспоненциальным, то, как и ожидали, критический момент потери устойчивости экспоненциально возрастал с изменением показателей степени α и γ .

— Влияние граничных условий опирания концов балки на критический момент потери устойчивости зависит от номера моды. Для первой моды значения критического момента балки с граничными условиями CF близки или даже меньше таковых балки с граничными условиями SS. Для третьей и пятой мод значения критического момента балки с граничными условиями CF близки или больше таковых балки с граничными условиями SS.

— Наличие непрерывной связи по длине балки увеличило критический момент потери устойчивости.

— Увеличение длины балки при действии на ее концах поперечных изгибающих моментов уменьшило критический момент потери устойчивости в первой моде, особенно при наличии непрерывной боковой связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Attard M. M.* Lateral buckling analysis of beams by the FEM // *Comput. Struct.* — 1986. — Vol. 23, No. 2. — P. 217—231.
2. *Mottram J.* Lateral-torsional buckling of thin-walled composite I-beams by the finite difference method // *Compos. Eng.* — 1992. — Vol. 2, No. 2. — P. 91—104.
3. *Lee J. and Kim S. E.* Flexural-torsional buckling of thin-walled I-section composites // *Comput. Struct.* — 2001. — Vol. 79, No. 10. — P. 987—995.
4. *Lee J., Kim S. E., and Hong K.* Lateral buckling of I-section composite beams // *Eng. Struct.* — 2002. — Vol. 24, No. 7. — P. 955—964.
5. *Mohri F., Azrar L., and Potier-Ferry M.* Lateral post-buckling analysis of thin-walled open section beams // *Thin-Walled Struct.* — 2002. — Vol. 40, No. 12. — P. 1013—1036.
6. *Trahair N.* Lateral buckling strengths of steel angle section beams // *J. Struct. Eng.* — 2003. — Vol. 129, No. 6. — P. 784—791.
7. *Andrade A. and Camotim D.* Lateral-torsional buckling of prismatic and tapered thin-walled open beams: assessing the influence of pre-buckling deflections // *Steel Compos. Struct.* — 2004. — Vol. 4, No. 4. — P. 281—301.
8. *Andrade A. and Camotim D.* Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications // *J. Eng. Mech.* — 2005. — Vol. 131, No. 6. — P. 586—597.
9. *Andrade A., Camotim D., and Dinis P. B.* Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA // *Comput. Struct.* — 2007. — Vol. 85, Nos. 17—18. — P. 1343—1359.

10. *Challamel N., Andrade A., and Camotim D.* An analytical study on the lateral-torsional buckling of linearly tapered cantilever strip beams // *Int. J. Struct. Stability Dynamics.* — 2007. — Vol. 7, No. 3. — P. 441—456.

11. *Andrade A., Providência P., and Camotim D.* Elastic lateral-torsional buckling of restrained web-tapered I-beams // *Comput. Struct.* — 2010. — Vol. 88, Nos. 21—22. — P. 1179—1196.

12. *Rezaiee-Pajand M., Masoodi A. R., and Bambaeechee M.* Tapered beam-column analysis by analytical solution // *Proc. Institution of Civil Engineers—Structures and Buildings.* — 2019. — Vol. 172, No. 11. — P. 789—804.

13. *Asgarian B., Soltani M., and Mohri F.* Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross sections // *Thin-Walled Struct.* — 2013. — Vol. 62. — P. 96—108.

14. *Kala Z. and Kala J.* Lateral-torsional buckling analysis of I-beams using shell finite elements and nonlinear computation methods // *AIP Conf. Proc.* — 2012. — P. 2066—2069.

15. *Sapkás Á. and Kollár L. P.* Lateral-torsional buckling of composite beams // *Int. J. Solids Struct.* — 2002. — Vol. 39, No. 11. — P. 2939—2963.

16. *de Oliveira J. P. S., Calenzani A. F. G., Fakury R. H., and Ferreira W. G.* Elastic critical moment of continuous composite beams with a sinusoidal-web steel profile for lateral-torsional buckling // *Eng. Struct.* — 2016. — Vol. 113. — P. 121—132.

17. *Jiao P., Borchani W., Soleimani S., and McGraw B.* Lateral-torsional buckling analysis of wood composite I-beams with sinusoidal corrugated web // *Thin-Walled Struct.* — 2017. — Vol. 119. — P. 72—82.

18. *Ahmadi H. and Rasheed H. A.* Lateral torsional buckling of anisotropic laminated thin-walled simply supported beams subjected to mid-span concentrated load // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 185. — P. 348—361.

19. *Bouakaz K., Daouadji T. H., Meftah S. A., Ameer M., Tounsi A., and Bedia E. A. A.* A numerical analysis of steel beams strengthened with composite materials // *Mech. Compos. Mater.* — 2014. — Vol. 50, No. 4. — P. 491—500.

20. *Paimushin V. N., Ivanov V. A., Lukankin S. A., Polyakova N. V., Firsov V. A., and Kholmogorov S. A.* Exact analytical and numerical solutions of stability problems for a straight composite bar subjected to axial compression and torsion // *Mech. Compos. Mater.* — 2009. — Vol. 45, No. 2. — P. 113—136.

21. *Numayr K. S. and Qablan H. A.* Effect of torsion and warping on the free vibration of sandwich beams // *Mech. Compos. Mater.* — 2005. — Vol. 41, No. 2. — P. 109—118.

22. *Rezaiee Pajand M., Masoodi A., and Mokhtari M.* Static analysis of functionally graded non-prismatic sandwich beams // *Adv. Comput. Des.* — 2018. — Vol. 3, No. 2. — P. 165—190.

23. *Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.* Stability analysis of frame having FG tapered beam-column // *Int. J. Steel Struct.* — 2018. — Vol. 19, No. 2. — P. 1—23.

24. *Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.* Analyzing FG shells with large deformations and finite rotations // *World J. Eng.* — 2019. — Vol. 16, No. 5. — P. 636—647.

25. *Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.* Stability analysis of frame having FG tapered beam-column // *Int. J. Steel Struct.* — 2019. — Vol. 19, No. 2. — P. 446—468.

26. *Rezaiee-Pajand M., Rajabzadeh-Safaei N., and Masoodi A. R.* An efficient curved beam element for thermo-mechanical nonlinear analysis of functionally graded porous beams // *Structures.* — 2020. — Vol. 28. — P. 1035—1049.

27. *Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.* Hygro-thermo-elastic nonlinear analysis of functionally graded porous composite thin and moderately thick shallow panels // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2020. — Online: <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1780524>

28. *Rezaiee-Pajand M., Sobhani E., and Masoodi A. R.* Semi-analytical vibrational analysis of functionally graded carbon nanotubes coupled conical-conical shells // *Thin-Walled Struct.* — 2021. — Vol. 159. — P. 107272.
29. *Rezaiee Pajand M., Masoodi A., and Alepeighambar A.* Lateral-torsional buckling of functionally graded tapered I-beams considering lateral bracing // *Steel Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 28, No. 4. — P. 403—404.
30. *Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.* Exact natural frequencies and buckling load of functionally graded material tapered beam-columns considering semi-rigid connections // *J. Vib. Control.* — 2018. — Vol. 24, No. 9. — P. 1787—1808.
31. *Soltani M. and Asgarian B.* Lateral-torsional stability analysis of a simply supported axially functionally graded beam with a tapered I-section // *Mech. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 56, No. 1. — P. 39—54.
32. *Elishakoff I. E., Pentaras D., and Gentilini C.* *Mechanics of Functionally Graded Material Structures.* — World Scientific, 2015.
33. *Zhang L. and Tong G. S.* Lateral buckling of simply supported C-and Z-section purlins with top flange horizontally restrained // *Thin-Walled Struct.* — 2016. — Vol. 99. — P. 155—167.
34. *Zhang W. F., Liu Y. C., Hou G. L., Chen K. S., Ji J., Deng Y., and Deng S. L.* Lateral-torsional buckling analysis of cantilever beam with tip lateral elastic brace under uniform and concentrated load // *Int. J. Steel Struct.* — 2016. — Vol. 16, No. 4. — P. 1161—1173.
35. *Ekström C. M. and Wesley D.* *Lateral-Torsional Buckling of Steel Channel Beams.* — Master's Thesis, Chalmers University of Technology, 2017.
36. *Shooshtari A., Moghaddam S. H., and Masoodi A. R.* Pushover analysis of gabled frames with semi-rigid connections // *Steel Compos. Struct.* — 2015. — Vol. 18, No. 6. — P. 1557—1568.
37. *Masoodi A. R. and Moghaddam S. H.* Nonlinear dynamic analysis and natural frequencies of gabled frame having flexible restraints and connections // *KSCE J. Civil Eng.* — 2015. — Vol. 19, No. 6. — P. 1819—1824.
38. *Masoodi A. R.* Analytical solution for optimum location of belt truss based on stability analysis // *Proc. Institution of Civil Engineers—Structures and Buildings.* — 2019. — Vol. 172, No. 5. — P. 382—388.

Приложение

Формулы для расчета значений центров площади и сдвига, моментов инерции относительно осей y и z , площади поперечного сечения, постоянной кручения и параметра Вагнера β следующие:

$$z_c = \frac{\int E_{(y)} y dA}{\int E_{(y)} dA} = \frac{\int \exp[\alpha |y/h| + 0,5] y dA}{\int \exp[\alpha |y/h| + 0,5] dA}, \quad (\text{A-1})$$

$$z_0 = \frac{hb_f Q_{y=0,5h}}{2I_z} = \frac{hb_f \int \exp[\alpha |y/(2h)| + 0,5] y dA}{2I_z}, \quad (\text{A-2})$$

$$I_y = \int \exp[\alpha |y/(2h)| + 0,5] z^2 dA, \quad (\text{A-3})$$

$$I_z = \int \exp\left[\alpha|y/(2h)| + 0,5\right] y^2 dA, \quad (A-4)$$

$$J = ht_w^3 \int_{web} \exp\left[\alpha|y/(2h)| + 0,5\right] dy + 2b_f t_f^3 \exp\left[\alpha|y/(2h)| + 0,5\right], \quad (A-5)$$

$$\beta = \frac{\int (x^3 + xy^2) \exp(\alpha|y/(2h)| + 0,5) dA}{2I_y} - x_0. \quad (A-6)$$

Следует отметить, что указанные зависимости получены с учетом изменения параметров экспоненты, связанных с модулями Юнга и сдвига материала в продольном и поперечном направлениях.

Поступила в редакцию 02.07.2020

Окончательный вариант поступил 05.05.2021

Received July 2, 2020 (May 5, 2021)

*А. Дашдемир**

*Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences, Kastamonu University, Kastamonu
37150, Turkey*

МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С НАЧАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ ПОСРЕДСТВОМ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ¹

*A. Daşdemir**

MODAL ANALYSIS OF FORCED VIBRATION FOR A PIEZOELECTRIC PLATE WITH INITIAL STRESS BY FINITE ELEMENT SIMULATION

Keywords: forced vibration, initial stress, piezoelectric material, frequency response, poling direction

A modal analysis of forced vibrations caused by a time-harmonic force from a piezoelectric plate standing on a rigid foundation is presented. A 3D linearized elasticity theory for solids under initial stress (TLTESIS) is used. It is assumed that a uniformly distributed normal loadings acting on the lateral surfaces of the plate yield the initial stress state. The piezoelectric plate is under the action of a time-harmonic force poled in various directions. A mathematical model is developed, and the problem solved employing the 3D finite-element method (3D-FEM). Some numerical results illustrating the influence of changes in the poling direction and other important factors, such as the initial stress, on the dynamic behavior of the plate are presented.

Ключевые слова: колебания вынужденные, напряжение начальное, материал пьезоэлектрический, отклик частотный, направление поляризации

Работа посвящена модальному анализу вынужденных колебаний, обусловленных гармонической по времени силой в пьезоэлектрической пластине, покоящейся на упругом основании.

*Автор, с которым следует вести переписку: ahmetdasdemir37@gmail.com
Corresponding author: ahmetdasdemir37@gmail.com

¹Перевод с англ.

Исследование проведено в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости твердых тел с начальным напряжением в предположении о том, что равномерно распределенные нормальные нагрузки, действующие на боковые поверхности пластины, приводят к начальному напряженному состоянию. Кроме того, предполагали, что пьезоэлектрическую пластину под действием гармонической во времени силы можно поляризовать в разных направлениях. С помощью разработанной математической модели решение получено методом трехмерных конечных элементов. Численные результаты иллюстрируют влияние на динамическое поведение пластины изменений направления поляризации, а также других важных факторов, таких как начальное напряжение.

Введение

В последнее время количество исследований, касающихся пьезоэлектрических конструкций существенно возросло благодаря их широкому применению в технике. В отличие от чистых упругих твердых тел пьезоэлектрические чувствительны к изменениям во внешней среде и реагируют на них. В силу этого удивительного свойства можно реализовать много потенциальных приложений, например, контроль колебаний и шума, создать умные устройства, некоторые преобразователи и акустические фильтры. Изучение таких материалов и соответствующих механических проблем становится все более актуальным. Два интересных исследования, имеющих важные области применения, выполнены в [1, 2]. Исчерпывающая информация, связанная с основами механических конструкций, использующих пьезоэлектрические материалы, изложена в фундаментальных монографиях [3, 4].

Проблемы, связанные с распространением электроупругих волн в изотропных и пьезоэлектрических средах, рассматривают давно. Однако наличие разных факторов обуславливает нелинейность процедуры решения связанных задач, например, если необходимо учитывать статическое начальное напряженное состояние твердого тела или конфигурации системы. В начале XX века предприняли первые попытки построения линеаризованных уравнений (также известных как трехмерные линеаризованные уравнения). Многие ученые, начиная с работ [5, 6], внесли свой вклад в развитие этой теории. Отметим фундаментальные исследования, описанные в [7—10]. Со временем упомянутую теорию развивали в [11—16]. Трехмерная линеаризованная теория упругости твердых тел с начальными напряжениями (ТЛТУНН), предложенная в [17] и развиваемая в [18], очень актуальна и сегодня. Существует множество работ, посвященных указанной теории и ее вариантам. В [19] представлен анализ задачи динамического поля напряжений, обусловленных вынужденными колебаниями двухслойной пластины-полосы на упругом основании при наличии начального напряжения. В [20] исследовали дисперсионные соотношения,

соответствующие скорости крутильных поверхностных волн в однородном слое конечной толщины на предварительно напряженном неоднородном полупространстве. В [21] проанализировали влияние равномерного приложенного начального напряжения на радиальные поверхности полого составного цилиндра. В [22] исследовали влияние начального напряженного состояния на дисперсионные соотношения упругих волн в пьезоэлектрическом фонном кристалле. В [23] решили задачи как свободных, так и вынужденных колебаний в предварительно напряженной пластине с двумя параллельными цилиндрическими полостями. В [24] рассмотрели динамический отклик предварительно напряженной сандвич-системы с пьезоэлектрической сердцевинкой и упругими лицевыми слоями, а затем распространили исследование на случай наличия несовершенных контактных взаимодействий слоев системы [25]. Также следует упомянуть важные работы [26—28].

В настоящей работе представлен модальный анализ задачи вынужденных колебаний пьезоэлектрической двухосно предварительно напряженной пластины конечных размеров, выполненный посредством модели кусочно-однородного тела. Предполагали, что на пластину действует гармонически изменяемая во времени сила; кроме того, предполагали, что поляризацию пластины можно выполнять в разных направлениях. Насколько известно автору настоящей работы, данная проблема изучена, а математическая модель, объясняющая влияние разных направлений поляризации на эффективные свойства системы, отсутствует. Для восполнения этого пробела посредством ТЛТУНН разработана модальная математическая модель рассматриваемой задачи и для численных расчетов применен метод конечных элементов (МКЭ). В частности, сравнили и обсудили влияние разных направлений поляризации на динамическое поведение пластины.

1. Постановка задачи о вынужденных колебаниях

Представим предварительно напряженную трансверсально-изотропную пьезоэлектрическую пластину, покоящуюся на упругом основании, в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Геометрические параметры пластины: длина сторон $2a_1$ и $2a_3$ в направлении осей Ox_1 и Ox_3 соответственно, толщина h в направлении оси Ox_2 . Опишем геометрию пластины как

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq 2a_1, -h \leq x_2 \leq 0, 0 \leq x_3 \leq 2a_3\}. \quad (1)$$

Пусть $\Gamma = \Gamma_1^\pm \cup \Gamma_2^\pm \cup \Gamma_3^\pm$ — граница объема V , где Γ_i^\pm указывает части внешней поверхности, остающиеся в положительном и отрицательном направлениях оси Ox_i соответственно. Здесь и далее $i, j, k = 1, 2, 3$.

Пластина подвержена одноосным нагружениям в направлении осей Ox_1 и Ox_3 , создающим двухосное начальное напряженное состояние. Соответственно в пьезоэлектрической пластине имеют место начальные напря-

жения и электрические смещения. Обратите внимание на то, что начальные напряжения и электрические смещения взаимосвязаны. Объясним эту взаимосвязь позднее. Далее свяжем пластину с упругим основанием и приложим к ней механическую нагрузку, гармонически изменяющуюся по времени. Тогда все поля в задаче — гармонические по времени. Поэтому можно обозначить динамическую силу, смещения и электрический потенциал как

$$p_0(t) = p_0 \delta^* e^{i\omega t}, \quad u_j(x_1, x_2, x_3, t) = u_j(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t},$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi(x_1, x_2, x_3) e^{i\omega t}$$

соответственно и дискретизировать временной множитель в определяющих уравнениях и связанных условиях граничного контакта. Здесь i — комплексная единица, δ^* — дельта-функция Дирака двух переменных, определяемая как $\delta(x_1 - a_1) \delta(x_3 - a_3)$. Применим правило преобразования координат $\hat{x}_j = x_j / h$, чтобы иметь возможность исследовать задачу в более простой геометрии. Далее символ “крышечка” над координатами x_j опустим. Таким образом, имеем следующую краевую задачу:

$$T_{ji,j} + \rho \omega^2 h^2 u_i = 0, \tag{2}$$

$$S_{i,i} = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_{2\ell} |_{\Gamma_2^+} = 0, \quad \sigma_{22} |_{\Gamma_2^+} = -p_0 \delta^*, \tag{4}$$

$$T_{ij} |_{\Gamma_\ell^\pm} = 0, \quad S_i |_{\Gamma_\ell^\pm} = 0, \tag{5}$$

$$u_i |_{\Gamma_2^-} = 0, \quad \varphi |_{\Gamma_2^\pm} = 0, \tag{6}$$

где T_{ij} — первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа; S_i — тензор электрической плотности; σ_{ij} — тензор напряжений; ρ — плотность пластины; нижние индексы после запятой означают частное дифференцирование. Отметим, что на протяжении всей работы использовано правило суммирования по повторяющимся индексам. Здесь и далее $\ell = 1, 3$. Физический смысл указанных граничных условий можно описать следующим образом: уравнения (4) — механические условия отсутствия усилий на свободной поверхности пластины; уравнения (5) — механические и электрические разомкнутые состояния (open conditions) на боковых поверхностях соответственно; уравнения (6) — механические и электрические состояния короткого замыкания (short conditions) на нижней поверхности пластины и свободной и нижней поверхностях (\pm) соответственно.

В приведенных соотношениях использованы следующие обозначения:

$$T_{ji} = \sigma_{ij} + \sigma_{jk}^0 u_{i,k}, \quad (7)$$

$$S_i = D_i + D_i^0 u_{j,i}, \quad (8)$$

где D_i — тензор электрического смещения; верхний индекс 0 относится к величинам, связанным с начальными напряжениями. Соотношения деформация—перемещение и напряженность электрического поля—электрический потенциал имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ и } E_i = -\varphi_{,i}. \quad (9)$$

Далее используем уравнения состояния

$$\sigma_{ij} = \tilde{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \tilde{e}_{kij} E_k, \quad (10)$$

$$D_i = \tilde{e}_{ikl} \varepsilon_{kl} + \gamma_{ik} E_k, \quad (11)$$

где \tilde{C}_{ijkl} — тензор упругих постоянных; \tilde{e}_{kij} — тензор пьезоэлектрических постоянных; γ_{ij} — тензор диэлектрических постоянных. Отметим, что уравнения (10) и (11) описывают тензоры четвертого и третьего порядков постоянных материала. Используя сокращенную запись Фойгта

$$ij \rightarrow p \text{ и } kl \rightarrow q \equiv 11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6, \quad (12)$$

тензоры \tilde{C}_{ijkl} и \tilde{e}_{kij} можно записать как C_{pq} и e_{kp} .

В матричной форме уравнения состояния (10) и (11) имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & -\tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{e}}^T & \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где верхний индекс T означает транспонирование матрицы. В уравнениях (13) использованы следующие вектор-матричные обозначения: $\tilde{\mathbf{C}} = [\tilde{c}_{pq}]$ — 6×6 матрица механических постоянных; $\tilde{\mathbf{e}} = [\tilde{e}_{ip}]$ — 3×6 матрица пьезоэлектрических постоянных; $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = [\tilde{\gamma}_{ij}]$ — 3×3 матрица диэлектрических постоянных γ_{ij} с учетом правила (Г2). Соответственно в зависимости от направления поляризации пьезоэлектрического материала элементы матриц $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{e}}$, $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ могут изменяться. Следует отметить, что матрица $\tilde{\mathbf{M}} = [\tilde{m}_{fh}]$ — 9×9 симметричная матрица относительно главной диагонали, где $f, h = 1, 2, \dots, 9$.

Приведем остальные обозначения:

$$\mathbf{S} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}\}^T, \quad (14)$$

$$\mathbf{D} = \{D_1 \quad D_2 \quad D_3\}^T, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad 2\varepsilon_{12}\}^T, \quad (16)$$

$$\mathbf{E} = \{E_1 \quad E_2 \quad E_3\}^T. \quad (17)$$

2. Методология решения

В настоящем разделе опишем применение МКЭ для моделирования задачи, описываемой уравнениями (2)—(6). Введем пробные функции w_i и ϕ , удовлетворяющие условиям граничного контакта в уравнениях (4)—(6). Интегрирование по объему V результирующего уравнения, получаемого суммированием после умножения уравнений (2) и (3) на w_i и ϕ соответственно, дает

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \left[T_{ij,j} w_i + \rho \omega^2 h^2 u_i w_i + S_{i,i} \phi \right] dV = \\ &= \int_V \left[(T_{ij} w_i)_{,j} - T_{ij} w_{i,j} + (S_i \phi)_{,i} - S_i \phi_{,i} \right] dV + \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i w_i dV. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя известную теорему Гаусса, перепишем уравнение (18) как

$$\begin{aligned} &\int_V \left[T_{ij} w_{i,j} + S_i \phi_{,i} \right] dV = \\ &= \int_{\Gamma} \left[T_{ij} w_i \cos(n, x_j) + S_i \phi \cos(n, x_i) \right] d\Gamma + \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i w_i dV, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\cos(n, x_i)$ — направляющий косинус. Теперь вычислим граничный интеграл в правой части уравнения (19). С учетом частей границы $\Gamma = \Gamma_1^\pm \cup \Gamma_2^\pm \cup \Gamma_3^\pm$ и условий граничного контакта в уравнениях (4)—(6) указанный интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[T_{ij} w_i \cos(n, x_j) + S_i \phi \cos(n, x_i) \right] d\Gamma &= \int_{\Gamma_k^\pm} T_{ij} w_i \cos(n, x_j) d\Gamma_k + \\ &+ \int_{\Gamma_k^\pm} S_i \phi \cos(n, x_i) d\Gamma_k = - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* w_2 d\Gamma_2^+. \end{aligned} \quad (20)$$

В результате получим

$$\int_V \left[T_{ij} w_{i,j} + S_i \phi_{,i} \right] dV = - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* w_2 d\Gamma_2^+ + \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i w_i dV. \quad (21)$$

В явном виде уравнение (21) можно записать как

$$\int_V \left[\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^w + \theta_{ij}^\sigma w_{i,j} + D_i \phi_{,i} + \theta_{ij}^D \phi_{,i} \right] dV = - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* w_2 d\Gamma_2^+ + \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i w_i dV, \quad (22)$$

где $\theta_{ij}^\sigma = \sigma_{kj}^0 u_{i,k}$; $\theta_{ij}^D = D_i^0 u_{j,i}$; $\varepsilon_{ij}^w = (w_{i,j} + w_{j,i})/2$ — соотношение деформации для тестовой функции w_i . Это завершает построение слабой формы (weak form) рассматриваемой задачи.

Затем, основываясь на вариационном принципе Гамильтона, построим вариационную формулировку трехмерной пьезоэлектрической пластины с использованием одной из указанных слабых форм. Рассматривая пробные функции w_i и ϕ и соответствующие функции перемещения δu_i и электрического потенциала $\delta \phi$, удовлетворяющие условиям граничного контакта в (4)—(6), запишем уравнение (22) как

$$\begin{aligned} \int_V \left[\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \theta_{ij}^\sigma \delta u_{i,j} + D_i \delta \phi_{,i} + \theta_{ij}^D \delta \phi_{,i} \right] dV = \\ = - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* u_2 d\Gamma_2^+ + \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i \delta u_i dV. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассмотрим интеграл в левой части уравнения (23). Для выделения механических составляющих величин используем для них символ “крышечка”, т.е. $\hat{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}$, и запишем подынтегральное выражение (13) как

$$\begin{aligned} & \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \theta_{ij}^\sigma \delta u_{i,j} + D_i \delta \phi_{,i} + \theta_{ij}^D \delta \phi_{,i} = \\ & = (\hat{\sigma}_{ij} + r_{kij}) \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k} \delta u_{i,j} + (r_{kij} u_{i,j} - s_{kn} \phi_{,n}) \delta \phi_{,k} = \\ & = (\hat{\sigma}_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k}) \delta u_{i,j} + r_{kij} (\phi_{,k} \delta u_{i,j} + u_{i,j} \delta \phi_{,k}) - s_{kn} \phi_{,n} \delta \phi_{,k} = \\ & = p_{mjkl} u_{k,l} \delta u_{i,j} + r_{kij} (\phi_{,k} \delta u_{i,j} + u_{i,j} \delta \phi_{,k}) - s_{kn} \phi_{,n} \delta \phi_{,k} = \\ & = \frac{1}{2} \delta (p_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j}) + \delta (r_{kij} \phi_{,k} u_{i,j}) - \frac{1}{2} \delta (s_{kn} \phi_{,n} \phi_{,k}) = \\ & = \frac{1}{2} \delta (p_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} + 2r_{kij} \phi_{,k} u_{i,j} - s_{kn} \phi_{,n} \phi_{,k}), \end{aligned} \quad (24)$$

где использованы соотношения

$$p_{ijkn} = C_{ijkn} + \sigma_{in}^0, \quad r_{ijk} = e_{ijk} + \frac{1}{2} D_k^0, \quad s_{kn} = \gamma_{kn}. \quad (25)$$

В итоге запишем уравнение (23) как

$$\delta \left(\frac{1}{2} \rho \omega^2 h^2 \int_V u_i^2 dV - \frac{1}{2} \int_V \left[p_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} + 2r_{kij} \varphi_{,k} u_{i,j} - s_{kn} \varphi_{,n} \varphi_{,k} \right] dV - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* u_2 d\Gamma_2^+ \right) = 0. \quad (26)$$

Введя выражения

$$P = \frac{1}{2} \int_V \left[p_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} + 2r_{kij} \varphi_{,k} u_{i,j} - s_{kn} \varphi_{,n} \varphi_{,k} \right] dV, \\ K = \frac{1}{2} \rho h^2 \int_V u_i^2 dV \text{ и } M = \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* u_2 d\Gamma_2^+,$$

сводим рассматриваемую задачу к решению функционала

$$\delta(\omega^2 K - P - M) = 0, \quad (27)$$

где P , K , M — потенциальная и кинетическая энергии и виртуальная работа, произведенная внешней силой, соответственно. Отметим, что уравнение (27) можно также записать в виде

$$\delta(\omega^2 K - P_\sigma - P_m + P_e) = 0, \quad (28)$$

где

$$K = \frac{1}{2} \rho h^2 \int_V u_i^2 dV, \quad P_\sigma = \frac{1}{2} \int_V p_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} dV - \int_{\Gamma_2^+} p_o \delta^* u_2 d\Gamma_2^+, \\ P_m = \int_V \left[r_{kij} \varphi_{,k} u_{i,j} \right] dV, \quad P_e = \frac{1}{2} \int_V s_{kn} \varphi_{,n} \varphi_{,k} dV;$$

P_σ , P_m , P_e — механическая, смешанная и электрическая энергии соответственно. Отметим, что представление в форме (28) вместо (27) иногда может быть более пригодным. Например, при $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{22} = \tilde{c}_{33} = \lambda + 2\mu$, $\tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{21} = \tilde{c}_{13} = \tilde{c}_{31} = \tilde{c}_{23} = \tilde{c}_{32} = \lambda$, $\tilde{c}_{44} = \tilde{c}_{55} = \tilde{c}_{66} = \mu$ и $\tilde{e}_{ij} = \tilde{\gamma}_{ij} = 0$ в матрицах \tilde{C} , \tilde{e} , $\tilde{\gamma}$ исходная задача сводится к случаю вынужденных колебаний в трехмерной предварительно напряженной упругой пластине. Однако в этом случае соответствующие строки и столбцы в операторах матрицы-вектора следует удалить. В противном случае в процедуре решения могут иметь место неопределенные случаи. Здесь λ и μ — константы Ламе.

Для численного решения задачи используем традиционную формулировку МКЭ. Пусть V_h — область конечно-элементной сетки, а именно: $V_h \subset V$ и $V_h = \bigcup_m V^{em}$. В соответствии с традиционной процедурой будем

искать слабое решение для перемещений $\mathbf{u}_h = [u_{1h} \ u_{2h} \ u_{3h}] \in V_{uh}$, электрических полей $\mathbf{E}_h = [E_{1h} \ E_{2h} \ E_{3h}] \in V_{Eh}$ и их виртуальных вариаций $\delta \mathbf{u}_h$ и $\delta \mathbf{E}_h$ в виде

$$\mathbf{u}_h \cong \mathbf{N}_{uh} \tilde{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{E}_h \cong \mathbf{N}_{Eh} \tilde{\mathbf{E}}, \quad \delta \mathbf{u}_h \cong \mathbf{N}_{uh} \delta \tilde{\mathbf{U}} \quad \text{и} \quad \delta \mathbf{E}_h \cong \mathbf{N}_{Eh} \delta \tilde{\mathbf{E}}, \quad (29)$$

где $\tilde{\mathbf{U}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$ — глобальные векторы узловых перемещений и узловых значений напряженности электрического поля соответственно; \mathbf{N}_{uh} — матрица функций формы перемещений; \mathbf{N}_{Eh} — вектор-строка функций формы для напряженности электрического поля. В настоящей работе использованы четырехугольные восьмиузловые конечные элементы, но в зависимости от желаемой сходимости решения МКЭ этот выбор может быть изменен. Узловые степени свободы элемента представим в виде единых векторов

$$\mathbf{u}_h^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^e & \mathbf{u}_2^e & \mathbf{u}_3^e \end{bmatrix}^T = \\ = \begin{bmatrix} u_{11}^e & u_{12}^e & \dots & u_{18}^e & | & u_{21}^e & u_{22}^e & \dots & u_{28}^e & | & u_{31}^e & u_{32}^e & \dots & u_{38}^e \end{bmatrix}^T$$

и

$$\mathbf{E}_h^e = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^e & \mathbf{E}_2^e & \mathbf{E}_3^e \end{bmatrix}^T = \\ = \begin{bmatrix} E_{11}^e & E_{12}^e & \dots & E_{18}^e & | & E_{21}^e & E_{22}^e & \dots & E_{28}^e & | & E_{31}^e & E_{32}^e & \dots & E_{38}^e \end{bmatrix}^T.$$

В соответствии с общим принципом применения МКЭ при подстановке уравнения (29) в функционал (27) (или уравнение (28)) для V_h и Γ_h получаем

$$\left\{ \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} \right\} \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uE} \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{F}_u, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_{uE} \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{EE} \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{F}_E, \quad (31)$$

где $\mathbf{K}_{uu} = \sum \mathbf{K}_{uu}^{em}$, $\mathbf{K}_{uE} = \sum \mathbf{K}_{uE}^{em}$, $\mathbf{K}_{EE} = \sum \mathbf{K}_{EE}^{em}$, $\mathbf{M}_{uu} = \sum \mathbf{M}_{uu}^{em}$ — глобальные матрицы жесткости и массы, суммированные ($\sum \bullet$) из соответствующих локальных матриц; \mathbf{F}_u и \mathbf{F}_E — векторы узловых сил. Из уравнения (27) следуют явные формы матриц элементов:

$$\mathbf{M}_{uu}^{em} = \int_{V^{em}} \mathbf{N}_{uh}^e \cdot \mathbf{N}_{uh}^{eT} dV^{em}, \quad \mathbf{K}_{uu}^{em} = \int_{V^{em}} \mathbf{S}_{uh}^{eT} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{S}_{uh}^e dV^{em}, \quad (32)$$

$$\mathbf{K}_{uE}^{em} = \int_{V^{em}} \mathbf{N}_{Eh}^{eT} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{N}_{Eh}^e dV^{em}, \quad \mathbf{K}_{EE}^{em} = \int_{V^{em}} \mathbf{S}_{Eh}^{eT} \cdot \mathbf{\varepsilon} \cdot \mathbf{S}_{Eh}^e dV^{em}, \quad (33)$$

$$\mathbf{S}_{uh}^e = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{N}_{uh}^{eT}, \quad \mathbf{S}_{Eh}^e = \nabla \mathbf{N}_{Eh}^{eT}, \quad (34)$$

$$\mathbf{L}(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (35)$$

Систему уравнений (30) и (31) можно переписать в виде

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (36)$$

где

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uE} \\ \mathbf{K}_{uE} & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{E}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_E \end{Bmatrix}. \quad (37)$$

Отметим, что глобальные матрицы жесткости \mathbf{K} и массы \mathbf{M} в уравнении (37) являются симметричными и положительно определенными, поскольку слабая форма в уравнении (21) является положительно определенной. Следовательно, матричное уравнение (36) имеет решение для алгоритма МКЭ в рамках теории упругости. При оценке упомянутого матричного уравнения получаем значения перемещений, связанных с динамическим откликом пьезоэлектрической пластины, затем можем выразить компоненты относительного напряжения и электрического смещения, используя обобщенный закон Гука. В заключение отметим, что предложенную процедуру решения можно применять при решении некоторых вариантов рассматриваемой задачи или аналогичной задачи для упругих сред.

3. Численные приложения и примеры

В разделе 1 указано, что уравнения состояния (10), (11) и (13) могут различаться в зависимости от выбора направления поляризации. В разделе 2 описан ход решения для наиболее общего случая. Используя эти данные, можно получить определенные численные результаты для любого частного случая. С целью уменьшения объема настоящей работы представим численный анализ, основанный на предположении о том, что пьезоэлектрическая пластина поляризована только в направлении осей Ox_1 , Ox_2 или Ox_3 соответственно. В приложении А представлены элементы матриц уравнения (13) для всех рассматриваемых случаев. Результаты численных расчетов для пьезоэлектрической пластины, поляризованной в направлении осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 , приведены на рис. 2—4—а, б, в соответственно. Для идентификации соответствующих численных результатов используем верхний индекс $[\bullet]$; например, $\sigma_{22}^{[1]}h/p_0$ — значение напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ при поляризации в направлении оси Ox_1 . Отметим, что количество конечных элементов в направлении осей Ox_1 , Ox_2 , и Ox_3 равно 50, 12 и 50 соответственно; общее количество узловых степеней свободы модели равно 135 252.

Введем обозначения

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\tilde{c}_{33}}}, \quad \eta_\ell = \frac{\sigma_{\ell\ell}^0}{\tilde{c}_{33}}, \quad \kappa_\ell = \frac{D_\ell^0}{2\tilde{c}_{33}}, \quad a_* = \frac{a_1}{a_3}, \quad h_* = \frac{h}{2a_*}, \quad (38)$$

где Ω — безразмерный частотный параметр; η_ℓ — параметр начального напряжения; κ_ℓ — параметр начального электрического смещения; a_* — отношение размеров; h_* — отношение толщин. Напомним, что существуют взаимосвязи между механическими начальными напряжениями и электрическими начальными смещениями. При рассмотрении уравнений состояния при поляризации в направлении осей Ox_1 и Ox_3 с условиями граничного контакта (5) указанные соотношения легко получить в виде

$$D_1^0 = \frac{e_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}e_{31}}{c_{33}(c_{11} + c_{12}) - 2c_{13}^2} \sigma_{11}^0 \quad \text{и}$$

$$D_3^0 = \frac{(c_{11} - 2c_{12} + c_{22})c_{13}e_{31} + (c_{12}^2 - c_{11}c_{22})e_{33}}{(c_{11} - 2c_{12} + c_{22})c_{13}^2 + (c_{12}^2 - c_{11}c_{22})c_{33}} \sigma_{33}^0. \quad (39)$$

Отметим, что уравнения (39) линейны. Это согласуется с хорошо известными электромеханическими соображениями. Для конкретных примеров в качестве материала пластины выбран титанат бария (BaTiO_3) с $c_{44} = 44$ ГПа, $e_{15} = 11,4$ Кл/м² и $\gamma_{11} = 1,115$ нФ/м, как указано в [25]. В настоящей работе анализировали результаты, относящиеся к нижней поверхности пластины при $\Omega = 0$, $\eta = \eta_1 = \eta_3$, $\eta = 0$, $a_* = 1$ и $h_* = 0,2$, если не указано иное.

Сначала выполнили проверку достоверности разработанного алгоритма расчета и работу вычислительной программы. Для этого провели математическое исследование динамического поведения предварительно

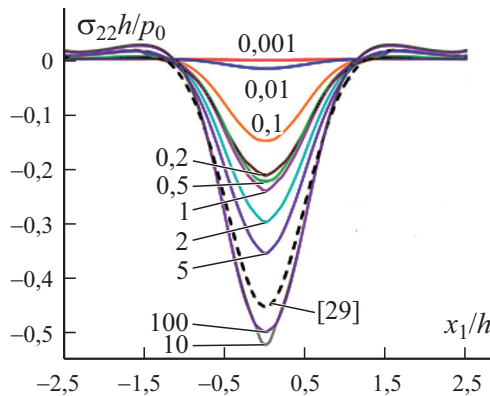


Рис. 1. Зависимость напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ от координаты x_1/h при поляризации в направлении оси Ox_2 и $x_3/h = a_3/h$. Цифры у кривых — значения a_* .

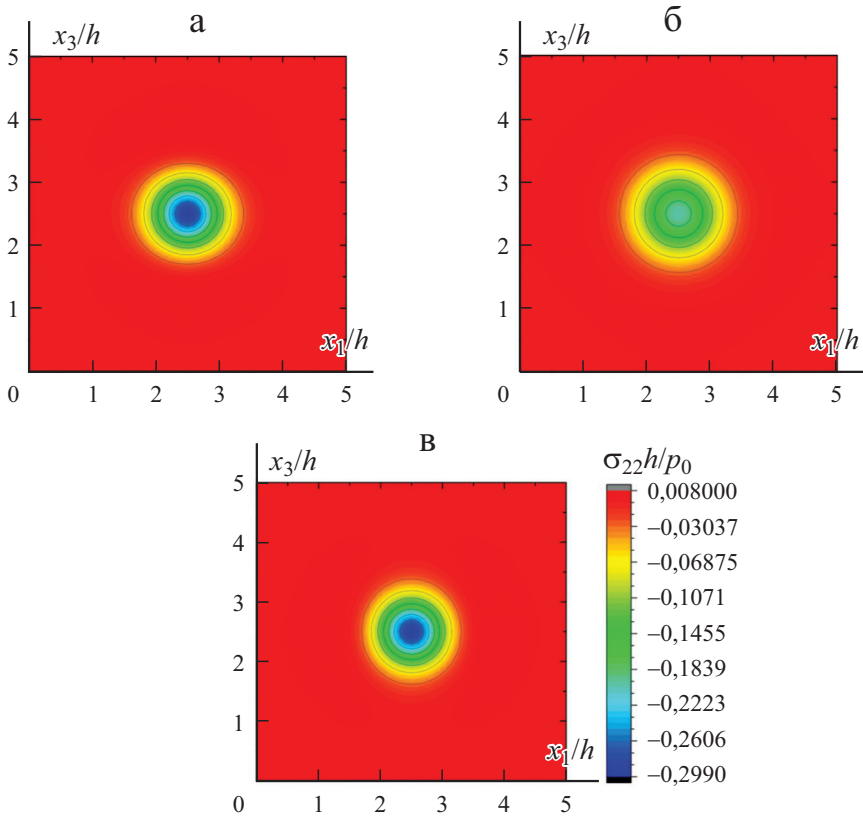


Рис. 2. Распределения напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ на плоскости Ox_1x_3 при поляризации в направлении осей Ox_1 (а), Ox_2 (б), Ox_3 (в).

напряженной пьезоэлектрической пластины-полосы под действием гармонической во времени силы [29]. Задача, рассматриваемая в настоящей работе, приобретает форму, аналогичную рассмотренной в [29] при $a_* \rightarrow \infty$ и фиксированных значениях других надлежащих параметров. Данные рис. 1 свидетельствуют о том, что результаты расчета настоящей работы приближаются к представленным в [29] при $x_3/h = a_3/h$ и $a_* \rightarrow \infty$, что доказывает эффективность предложенного алгоритма.

На рис. 2 представлена проекция трехмерных графиков нормального напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ на плоскость Ox_1x_3 . Наименьшее значение напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ имеет место в случае поляризации в направлении оси Ox_2 : $\sigma_{22}^{[2]}h/p_0 < \sigma_{22}^{[1]}h/p_0 = \sigma_{22}^{[3]}h/p_0$. Таким образом, с точки зрения изоляции напряжений наиболее целесообразна поляризация в направлении оси Ox_2 . На рис. 2 видны области разной интенсивности напряжения $\sigma_{22}h/p_0$: сильного (синего цвета), среднего (зеленого цвета) и слабого (оранжевого цвета) воздействия. Формы зон сильного и среднего воздействия — круговые на рис. 2—б и эллипсоидальные с центром в точке (2,5, 2,5) на рис. 2—а, в. Главная ось эллипсов лежит на прямой

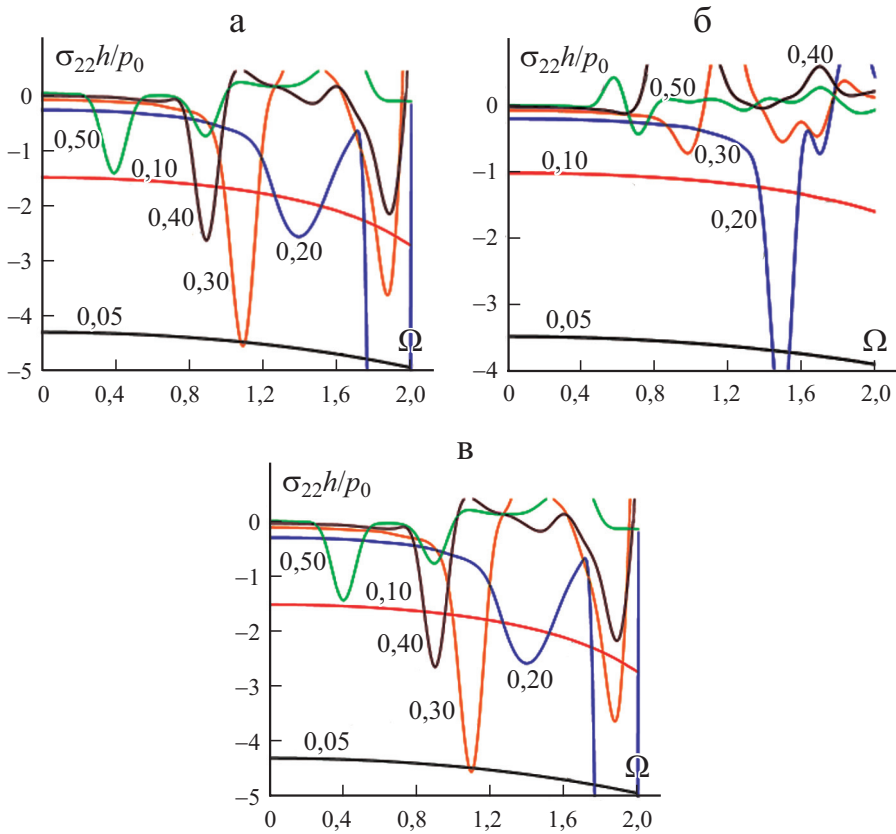


Рис. 3. Зависимость напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ от величины Ω при поляризации в направлении осей Ox_1 (а), Ox_2 (б), Ox_3 (в). Цифры у кривых — значения h^* .

$x_3/h = 2,5$ (см. рис. 2—а) и прямой $x_1/h = 2,5$ (см. рис. 2—в). Имеем очень любопытную ситуацию. Точки фокуса граничного эллипса зоны среднего воздействия совпадают с вершинами одной из зон сильного воздействия. Например, на рис. 2—в фокусные точки соответствующего эллипса — $F_1 \approx (2,5, 2,15)$ и $F_2 \approx (2,5, 2,85)$, являющиеся практически вершинами другого эллипса. Из полученных результатов следует, что при поляризации в направлении оси Ox_2 трехмерное распределение напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ имеет форму прямого кругового конуса, а при поляризации в направлении осей Ox_1 и Ox_3 — правильного эллиптического конуса. Общий результат анализа сводится к тому, что выбор направления поляризации вдоль оси Ox_2 обеспечивает наименьшие и наиболее равномерные напряжения.

Рассмотрим частотный отклик пластины на приложенную гармонически изменяющуюся во времени силу. Зависимости напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ от частоты Ω при поляризации в направлении осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 показаны на рис. 3. Видно, что при поляризации в направлении осей Ox_1 и Ox_3 зависимости весьма похожи. Зависимости $\sigma_{22}h/p_0$ — Ω немоно-

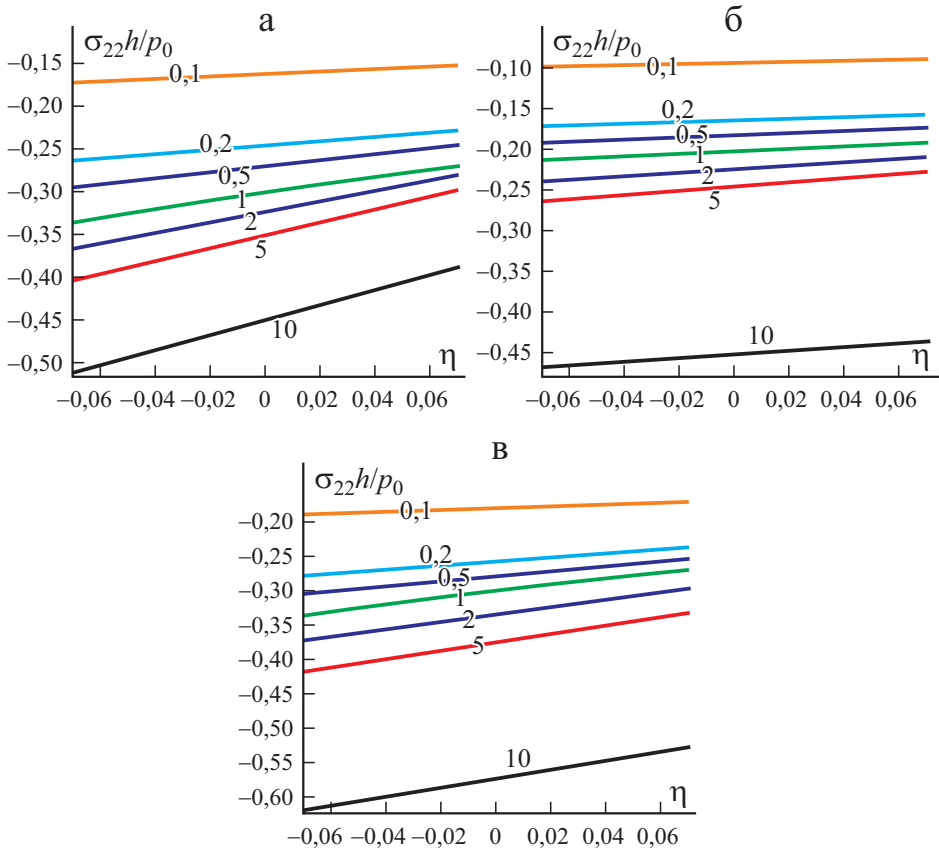


Рис. 4. Зависимость напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ от величины η при поляризации в направлении осей Ox_1 (а), Ox_2 (б), Ox_3 (в). Цифры у кривых — значения a^* .

тонные. Абсолютные значения напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ возрастают с уменьшением отношения толщины h_* . Распределения $\sigma_{22}h/p_0$ имеют экстремальные значения для определенных значений Ω^* , которые назовем “резонансными”. Отметим, что поляризация в направлении оси Ox_2 увеличивает значения Ω^* , что означает большую устойчивость системы. При поляризации в направлении оси Ox_2 зависимость $\sigma_{22}h/p_0 — \Omega$ имеет наибольшее количество пульсаций; в этом случае направление поляризации совпадает с направлением гармонической силы по времени.

На рис. 4 показаны зависимости $\sigma_{22}h/p_0 — \eta$ при определенных значениях отношения сторон a^* , построенные в предположении о том, что отношение a^* изменяется за счет изменения длины a_3 при фиксированном значении a_1 . Знак параметра начального напряжения η — положительный (отрицательный) — указывает на приложенную к пластине силу растяжения (сжатия). Видно, что напряжение $\sigma_{22}h/p_0$ уменьшается при увеличении отношения a^* . Напряжение в пластине возрастает с увеличением начального сжатия, но уменьшается с увели-

чением начального растяжения. Это естественный результат, согласующийся с хорошо известными механическими результатами. Данные рис. 4 свидетельствуют о том, что влияние параметра начального напряжения η возрастает с увеличением отношения a^* . Сравнение данных рис. 4—*a* и 4—*б* доказывает, что выбор поляризации пластины в направлении Ox_1 , а не Ox_3 приводит к уменьшению значений напряжения $\sigma_{22}h/p_0$ при $a^* < 1$, т.е. $\sigma_{22}^{[2]}h/p_0 < \sigma_{22}^{[1]}h/p_0 < \sigma_{22}^{[3]}h/p_0$. Напротив, при $a^* > 1$ наблюдаем противоположный эффект: $\sigma_{22}^{[2]}h/p_0 < \sigma_{22}^{[3]}h/p_0 < \sigma_{22}^{[1]}h/p_0$. Это означает, что в пластине, поляризованной в направлении относительно длинной кромки, развивается менее напряженное состояние. Причина этого факта заключается в том, что поляризация пластины в направлении более длинной кромки имеет большую эффективную площадь.

Заключение

В работе описаны вынужденные колебания предварительно напряженной пьезоэлектрической пластины, покоящейся на упругом основании. Сложность проблемы — в отсутствии аналитического выражения, связанного с общим подходом для оценки динамического отклика такой механической системы в рамках ТЛТУНН. Кроме того, пьезоэлектрические материалы могут иметь разные уравнения состояния в зависимости от направления поляризации. В работе представлено модальное исследование для оценки рассматриваемой и подобной ей задач.

Приведены некоторые результаты для трех частных случаев. Полученные численные результаты доказывают, что наилучшую изоляцию напряжений можно реализовать при направлении поляризации, параллельном приложенной динамической силе, при котором рассматриваемая система становится более устойчивой. Установлено, что вертикальная поляризация пластины увеличивает резонансный отклик системы. Кроме того, существует тесная количественная и качественная взаимосвязь между отношением сторон и направлением поляризации. Влияние параметра начального напряжения на распределение напряжений ослабевает по мере уменьшения отношения длин сторон пластины. Численные результаты получены для конкретного пьезоматериала — титаната бария ($BaTiO_3$). Однако предложенная модель позволяет проведение более широкого исследования в других случаях и при других пьезоматериалах.

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность анонимным рецензентам за их конструктивные комментарии и предложения, существенно улучшившие качество статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kumar P., Mahanty M., Chattopadhyay A. and Singh A. K.* Effect of interfacial imperfection on shear wave propagation in a piezoelectric composite structure: Wentzel—Kramers—Brillouin asymptotic approach // *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* — 2019. — Vol. 30, Nos. 18—19. — P. 2789—2807.
2. *Mahanty M., Chattopadhyay A., Kumar P. and Singh A. K.* Effect of initial stress, heterogeneity and anisotropy on the propagation of seismic surface waves, // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2020. — Vol. 27, No. 3. — P. 177—188.
3. *Yang J.* An Introduction to the Piezoelectricity. — N. Y.: Springer, 2005.
4. *Tiersten H. F.* Linear Piezoelectric Plate Vibrations: Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations Piezoelectric Plates. —N. Y.: Springer, 2013.
5. *Southwell R. V.* On the general theory of elastic stability // *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A.* — 1914. — No. 213. — P. 187—244.
6. *Biezeno C. B. and Hencky H.* On the general theory of elastic stability // *Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.* — 1928. — No. 31. — P. 569—592.
7. *Biot M. A.* Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress // *Philos. Mag. Ser.* — 1939. — Vol. 7, No. 27. — P. 468—489.
8. *Neuber H.* Die Grundgleichungen der elastischen Stabilität in allgemeinen Koordinaten und ihre Integration // *ZAMM.* — 1943. — Vol. 23. — P. 321—330.
9. *Treffitz E.* Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts // *ZAMM.* — 1933. — Vol. 12, No. 2. — P. 160—165.
10. *Green A. E., Rivlin R. S., and Shield R. T.* General theory of small deformations superposed on large elastic deformation // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* — 1952. — No. 211. — P. 211—292.
11. *Guz A. N.* Three-dimensional theory of elastic stability under finite subcritical deformations // *J. Appl. Mech.* — 1972. — Vol. 8, No. 12. — P. 25—44.
12. *Zubov L. M.* Theory of small deformations of prestressed thin shells // *J. Appl. Math. Mech.* — 1976. — Vol. 40, No. 1. — P. 73—82.
13. *Tiersten H. F.* Perturbation theory for linear electroelastic equations for small fields superimposed on a bias // *J. Acoust. Soc. Am.* — 1978. — Vol. 64, No. 3. — P. 832—837.
14. *Ogden R. W.* Nonlinear Elastic Deformations. — N. Y.: Ellis Horwood/Halsted Press, 1984.
15. *Akbarov S. D. and Guz A. N.* Mechanics of Curved Composites. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2000.
16. *Reddy J. N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. — CRC press, 2003.
17. *Guz A. N.* Fundamentals of the Three-dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. — N. Y.: Springer, 1999.
18. *Akbarov S. D.* Dynamics of Pre-Strained Bi-Material Elastic Systems: Linearized Three-Dimensional Approach. — N. Y.: Springer, 2015.
19. *Akbarov S. D., Yildiz A. and Erozu M.* Forced vibration of the pre-stressed bi-layered plate-strip with finite length resting on a rigid foundation // *Appl. Math. Model.* — 2011. — Vol. 35, No. 1. — P. 250—256.
20. *Gupta S., Majhi D. K., Kundu S. and Vishwakarma S. K.* Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space // *Appl. Math. Comput.* — 2012. — Vol. 218, No. 9. — P. 5655—5664.
21. *Hu W. T. and Chen W. Y.* Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model // *J. Cent. South Univ.* — 2014. — Vol. 21, No. 2. — P. 753—760.

22. *Guo X. and Wei P.* Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses // *Ultrasonics*. — 2016. — Vol. 6. — P. 72—85.

23. *Yesil U. B.* Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities // *Comput. Mater. Continua*. — 2017 — Vol. 53, No. 1. — P. 1—22.

24. *Daşdemir A.* Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core // *Int. Appl. Mech.* — 2018. — Vol. 54, No. 4. — P. 480—493.

25. *Daşdemir A.* Effect of imperfect bonding on the dynamic response of a pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and a piezoelectric core // *Acta Mech. Solida Sin.* — 2017. — Vol. 30, No. 6. — P. 658—667.

26. *Guz A. N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses // *Int. Appl. Mech.* — 2002. — Vol. 38, No. 1. — P. 23—59.

27. *Akbarov S. D.* Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses // *Int. Appl. Mech.* — 2007. — Vol. 43, No. 12. — P. 1305—1324.

28. *Akbarov S. D.* *Stability Loss and Buckling Delamination*. — Berlin: Springer, 2012.

29. *Daşdemir A.* A mathematical model for forced vibration of pre-stressed piezoelectric plate-strip resting on rigid foundation // *МАТЕМАТИКА: МЛИАМ*, — 2018. — Vol. 34, No. 2. — P. 419—431.

Поступила в редакцию 15.01.2020

Окончательный вариант поступил 12.07.2021

Received Jan. 15, 2020 (July 12, 2021)

Приложение А

Пьезоэлектрические материалы можно поляризовать в разных направлениях. При этом в зависимости от рассматриваемого случая изменяется матрица $\tilde{\mathbf{M}}$ уравнений состояния. В работе представлен модальный анализ и обсуждены численные результаты, полученные для трех случаев. Матрица $\tilde{\mathbf{M}}$ при поляризации в направлении осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_{33} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & e_{33} & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 & 0 \\ & & & c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ & & & & & c_{44} & 0 & e_{15} & 0 \\ & & & & & & -\gamma_{33} & 0 & 0 \\ & & & & & & & -\gamma_{11} & 0 \\ \text{sym} & & & & & & & & -\gamma_{11} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 \\ & c_{33} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ & & & & c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & c_{44} & e_{15} & 0 & 0 \\ & & & & & & -\gamma_{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & & -\gamma_{33} & 0 \\ \text{sym} & & & & & & & & -\gamma_{11} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ & c_{22} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ & & & c_{44} & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ & & & & & c_{66} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & -\gamma_{11} & 0 & 0 \\ & & & & & & & -\gamma_{11} & 0 \\ \text{sym} & & & & & & & & -\gamma_{33} \end{pmatrix}$$

СООТВЕТСТВЕННО.

Л. Герайше^{a}, М. Тарфауи^b, Х. Османи^c*

^aLMT, University of Jijel, 18000 Jijel, Algeria

^bENSTA Bretagne, IRDL - UMR CNRS 6027, F-29200 Brest, France

^cLMNM/IOMP, University of Setif-1, 19000 Setif, Algeria

ВЛИЯНИЕ СТАРЕНИЯ В ГОРЯЧЕЙ ВОДЕ НА КОМПРЕССИОННЫЕ СВОЙСТВА ЭПОКСИДНЫХ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ¹

L. Gueraiche, M. Tarfaoui, and H. Osmani*

EFFECTS OF HOT-WATER AGING ON THE COMPRESSION PROPERTIES OF E-GLASS/EPOXY COMPOSITES AT VARYING STRAIN RATES

Keywords: glass-fiber-reinforced plastics, unidirectional reinforcement, hygrothermal effects, compressive strength, property approximation

The effects of hot-water aging on the quasi-static and dynamic compression properties of unidirectional E-glass/epoxy laminates were investigated. E-glass/epoxy specimens were aged in water at 60°C for 4900 h and then aged and unaged specimens were tested in tension at a rate of $1.3 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ and by a split Hopkinson pressure bar apparatus at varying strain rates. Their diffusion behavior was successfully described by the two-stage model whose parameters were found by the nonlinear regression method. The strain-rate-sensitivity of aged and unaged E-glass-reinforced epoxy specimens in the longitudinal direction was studied. Their dynamic and static compression properties were compared for specimens with the same dimensions. Empirical models were proposed to predict dynamic properties as functions of strain rate. SEM micrographs showed a low degradation of the resin matrix and fiber-matrix interface at hot-water aging for a time up to 4900 h.

*Автор, с которым следует вести переписку: gueraiche.larbi@univ-jijel.dz
Corresponding author: gueraiche.larbi@univ-jijel.dz

¹Перевод с англ.

Ключевые слова: стеклопластики волокнисто-армированные, армирование однонаправленное, эффекты гидротермические, прочность при сжатии, аппроксимация свойств

Исследовано влияние старения в горячей воде на квазистатические и динамические свойства при сжатии однонаправленных слоистых эпоксидных стеклопластиков. Образцы стеклопластика выдерживали в воде при 60 °С в течение 4900 ч. Затем состаренные и несостаренные образцы испытывали на сжатие с использованием универсальной испытательной машины для квазистатических испытаний со скоростью деформирования $1,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ и с помощью разрезного стрержня Гопкинсона при разной скорости деформирования для динамических испытаний. Диффузию влаги успешно описали двухэтапной моделью, параметры которой определили методом нелинейной регрессии. Изучили чувствительность к скорости деформирования состаренных и несостаренных образцов стеклопластика в продольном направлении. Сравнили динамические и статические свойства при сжатии образцов одного размера. Предложили эмпирические модели для предсказания динамических свойств в зависимости от скорости деформирования. СЭМ-микрофотографии продемонстрировали малую степень деградации матрицы и поверхности раздела волокно—матрица при старении в горячей воде в течение до 4900 ч.

Введение

Композитные материалы, используемые в судостроении, подвержены воздействию морской среды, ударам других судов, плавучих обломков, доков, посадки на мель, а также в ходе изготовления [1, 2]. Поэтому очень важно понимать влияние разных условий окружающей среды, например, старения в горячей воде, на механические свойства композитных материалов при ударных нагрузках.

Для объяснения процессов влагопоглощения, наблюдаемых в волокнисто-армированных стеклопластиках, можно использовать разные модели диффузии. Самая простая — одномерная изотропная модель Фика [3], но часто наблюдаются отклонения от нее, особенно для волокнисто-армированных пластиков с высоким содержанием пустот [4]. В [5] продемонстрировали нефиковское поведение однонаправленных эпоксидных стеклопластиков. Двухэтапное описание поведения с регулируемыми стадиями диффузии и релаксации, предложенное в [6], успешно применили при изучении влагопоглощения эпоксидными стеклопластиками. Возможные механизмы влагопоглощения связаны с объемным распределением воды в полимерной сетке и ее поглощением на поверхности вакуолей [7]. Модель типа Ленгмюра использовали для предсказания двухэтапной диффузии влаги в эпоксидных композитах [8]. Эта модель аномальной диффузии

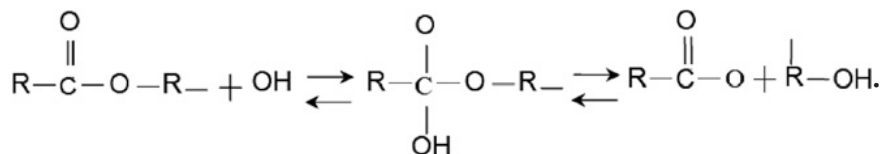
рассматривает существование подвижных и связанных молекул воды внутри полимерной сетки.

Чувствительность волокнисто-армированных композитов к скорости деформирования и ориентации волокон широко исследовали на образцах, не подвергавшихся воздействию воды. В [9] динамическое поведение однонаправленных эпоксидных стеклопластиков с ориентацией волокон $0, 10, 30, 45, 60, 90^\circ$ при скорости деформирования 265 с^{-1} изучали с использованием разрезного стержня Гопкинсона (РСГ). Установили, что композиты при всех рассмотренных ориентациях волокон чувствительны к скорости деформирования. Динамическая прочность превышала квазистатическую почти на 100% при ориентации волокон 0° , на 80% — при 10° и примерно на 45% — при всех остальных ориентациях. Разрушение преимущественно путем расщепления в силу растяжения имело место при ориентации 0° и от сдвига — при других ориентациях. В [10] динамические характеристики толстых однонаправленных (с укладкой $[0^\circ]$ и $[90^\circ]$) и ортогонально армированного (с укладкой $[(0^\circ_8 / 90^\circ_8)_2 / \bar{0}^\circ_8]_s$) эпоксидных углепластиков при скорости деформирования до 1800 с^{-1} определяли методом падающего груза и РСГ. Однонаправленный с укладкой $[0^\circ]$ и ортогонально армированный углепластики продемонстрировали значительное увеличение прочности и предельной деформации с повышением скорости деформирования и лишь небольшое увеличение модуля упругости. Углепластик с укладкой $[90^\circ]$ с повышением скорости деформирования продемонстрировал увеличение модуля упругости и прочности, но без значительных изменений предельной деформации. В [11] исследовали чувствительность к скорости деформирования ортогонально армированных угле- и стеклопластиков с укладкой $[0^\circ/90^\circ]$ при скорости деформирования 10^{-3} и 450 с^{-1} . С повышением скорости деформирования наблюдали увеличение динамической прочности стеклопластика, тогда как разрушающая деформация образцов обоих композитов уменьшалась. В [12] исследовали реакцию однонаправленного (с укладкой $[0^\circ]_{32}$) и ортогонально армированного (с укладкой $[0^\circ/90^\circ]_{16}$) эпоксидных углепластиков при высокоскоростном сжатии с использованием установки РСГ при трех разных скоростях деформирования. Образцы ортогонально армированного углепластика испытывали при нагружении в плоскости и по толщине. Образцы однонаправленного углепластика нагружали вдоль и поперек армирующих волокон. Динамическая прочность (за исключением таковой ортогонально армированного углепластика, нагруженного по толщине) и жесткость значительно возросли по сравнению со статическими значениями в исследуемом диапазоне скоростей деформирования.

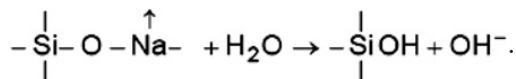
В [13—15] исследовали влияние укладки слоев в эпоксидном стеклопластике на его поведение при динамическом сжатии в плоскости в диапазоне скорости деформирования $200—2000 \text{ с}^{-1}$ при ориентации волокон $0, \pm 20, \pm 30, \pm 45, \pm 60, \pm 70, 90^\circ$. Результаты показали высокую чувствительность материала к скорости деформирования и ориентации волокон. Акты разру-

шения были разными в зависимости от укладки слоев в стеклопластике. В [16] динамическое сжатие состаренных образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[\pm 55^\circ]_{20}$ изучали с использованием РСГ в диапазоне скорости деформирования $560\text{—}1025\text{ с}^{-1}$. Динамический модуль упругости зависел от скорости деформирования, но наблюдали пороговый эффект динамической прочности и предельной деформации. Пороговый эффект объяснили вязкоупругой природой полимерной матрицы, характером накопления повреждений, зависящим от времени, и значительным повышением температуры в образцах. Образцы стеклопластика с укладкой $[\pm 55^\circ]_{20}$ разрушались преимущественно в силу расслоения, сдвига и расщепления на несколько блоков.

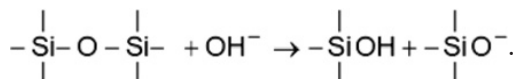
Дегградация физических свойств полимеров происходит в силу комбинации процессов физического и химического старения. К физическим процессам относят пластификацию, релаксацию и набухание полимера. Первичный процесс химической дегградации — это гидролиз полимерной матрицы [17]. Полярная природа молекулы воды позволяет ей устанавливать водородные связи с гидроксильными группами, общими для полимерных цепей, разрывая существовавшие ранее межцепочные водородные связи. Такие модификации водородной связи между полимером и молекулами воды приводят к пластификации с увеличением сегментарной подвижности и набуханию с увеличением длины межцепочной связи, как показано в уравнении [18]



Дегградация стекловолокон в воде происходит путем выщелачивания и травления. Главная реакция при растворении стекла в воде — выщелачивание, означающее диффузию ионов щелочных металлов из стекла, как показано в уравнении [18]



Травление — вторая важная реакция, в которой ионы гидроксила разрушают $\text{Si}-\text{O}-\text{Si}$, как показано в уравнении [18]



Разрушение поверхности раздела между волокнами и матрицей затруднено. В [19] предположили, что это происходит за счет трех механизмов повреждения: осмотического растрескивания матрицы, потери межповерхностного сцепления и расслоения.

Почти во всех предыдущих работах, в которых исследовали влияние погружения в горячую воду и влаги на механические свойства волокнисто-армированных композитов, сделан вывод о негативном влиянии ста-

рения в горячей воде. Диффузия воды в композитах с полимерной матрицей способна вызвать набухание, пластификацию, уменьшение остаточной прочности и температуры стеклования T_g , деградацию характеристик материала. В [20] исследовали влияние старения в горячей воде на разрушение при растяжении механических соединений эпоксидных стеклопластиков и наблюдали уменьшение их прочности при более высокой температуре воды; деградация происходила постепенно при длительном погружении. В [21] изучали влияние гигротермического старения на свойства эпоксидных углепластиков при динамическом сжатии по толщине. Углепластики продемонстрировали чувствительность характеристик разрушения к скорости деформирования при одинаковой энергии удара и при низких, и при высоких температурах. Наблюдали, что поглощенная энергия линейно зависела от скорости деформирования при низких температурах и была относительно постоянной при высоких температурах. В [22] изучали влияние гигротермического старения на поведение клеевых композитных соединений при высоких скоростях деформирования. Результаты показали, что воздействие температуры 50 °С и относительной влажности 80% уменьшает максимальное напряжение с увеличением времени старения при нагрузках с высокой скоростью деформирования.

Таким образом, выполнено значительное количество исследований волокнисто-армированных несостаренных композитов при малых и высоких скоростях деформирования и стеклопластиков, подвергнутых гидротермальному старению, при квазистатических нагрузках. Однако мало или совсем отсутствуют работы по экспериментальному изучению влияния эффектов гигротермического старения на свойства однонаправленных эпоксидных стеклопластиков при динамическом сжатии. Поэтому цель данного исследования — оценка влияния старения в горячей воде при температуре 60 °С в течение 4900 ч на модуль упругости, максимальное напряжение и соответствующую деформацию однонаправленного эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ при испытаниях на сжатие с помощью РСГ и квазистатического нагружения с использованием универсальной испытательной машины Zwick. Свойства состаренных и несостаренных слоистых композитов оценивали экспериментально. Полученные результаты показали, что старение в горячей воде ухудшает свойства эпоксидных стеклопластиков при сжатии.

1. Материалы и методы

1.1. Материал и процесс изготовления. Целевой однонаправленный эпоксидный стеклопластик с укладкой $[0^\circ]_{40}$ изготовили из ткани E-стекловолокон 2400 текс и связующего, включающего преполимер EPO-LAM, отвердитель EPO-LAM 2020 и ускоритель 2020 (Axson Technologies). Ткань полотняного переплетения: 90% пряжей в основе и 10% в утке. Однонаправленные панели с укладкой $[0^\circ]_{40}$ изготовили способом инфузии. Для изготовления стеклопластика из смолы EPO-LAM с температурой стеклования 80 °С и максимальными значениями механических свойств,

Табл. 1

Механические свойства чистой смолы EPO-LAM 2020 после отверждения при температуре 60 °С в течение 16 ч или 24 ч при комнатной температуре

Свойство	Стандарт	Значение
Модуль упругости при изгибе, МПа	ISO 178 :2001	3100
Прочность при изгибе, МПа	ISO 178 :2001	126
Прочность при растяжении, МПа	ISO 527 :1993	78
Твердость по Шору D 15	ISO 868 :2003	88
Температура стеклования, °С	ISO 11359: 2002	80
Время извлечения из формы при комнатной температуре без ускорителя, ч	LT 051: 1998	48
Полное время отверждения при комнатной температуре, дни	—	7

указанными в табл. 1, панели отверждали при 60 °С в течение 16 ч. Квадратные панели размером 500×500 мм разрезали на кубические образцы размером 13×13×13 мм (рис. 1). Объемное содержание стекловолокон, определенное путем выжигания, ~ 53%.

1.2. Процесс старения. Для ускорения старения образцов однонаправленного эпоксидного стеклопластика использовали климатическую камеру Ascott. Образцы стеклопластика размером 13×13×13 мм перед испытанием на сжатие с помощью РСГ погрузили в водопроводную воду при температуре 60 °С на время до 4900 ч. Значение водопоглощения усредняли по данным пяти образцов. Первые четыре дня мониторинг водопоглощения проводили ежедневно, т.е. каждые 24 ч, а затем с интервалом 168 ч (через семь дней) до достижения 4900 ч выдержки. Для каждого измерения водопоглощения образец вынимали из водяной бани, очищали и взвешивали на прецизионных весах Precisa XT220A ($\pm 0,1$ мг). После взвешивания образец снова погружали в воду. Температура стеклования T_g смолы EPO-LAM 2020

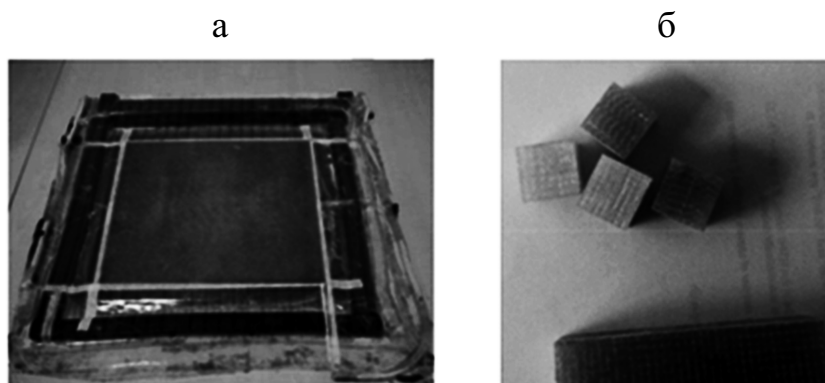


Рис. 1. Панели, изготовленные методом инфузии (а) и кубические образцы (б).

равна 80 °С, что объясняет выбор температуры старения 60 °С в соответствии данными работы [23], рекомендовавшей температуру термического старения эпоксидных смол на 20 °С меньше температуры стеклования.

Содержание воды M_t , поглощенной каждым образцом, рассчитывали в соответствии с его массой до w_0 и после w_t экспонирования:

$$M_t = \frac{w_t - w_0}{w_0} \cdot 100\% . \quad (1)$$

Изменение размеров кубических образцов (длины L , ширины W и высоты H) измеряли штангенциркулем с точностью до 10^{-2} мм. Для проведения этих измерений при комнатной температуре образцы извлекали из контейнеров для кондиционирования. Для измерения размеров образцов из эпоксидного стеклопластика использовали три образца в сухом состоянии и после 4900 ч содержания в воде при 60 °С.

1.3. Испытания на сжатие с помощью разрезного стержня Гопкинсона (РСГ), часто называемого стержнем Кольского, обычно используют для изучения поведения материалов при высокой скорости деформирования $\dot{\epsilon}$ в диапазоне от 102 до 104 с⁻¹. Установка РСГ лаборатории IRDL (Франция), использованная в настоящем исследовании, состояла из ударника (0,4 м) с закругленным концом, падающего стержня (1,985 м) и передающего стержня (1,845 м) (рис. 2). Три стержня диаметром 20 мм изготовлены из мартенситностареющей стали. Ударник приводили в движение с начальной скоростью удара, зависящей от давления пневматической пушки. Удар по свободному торцу падающего стержня вызвал волну сжимающего напряжения, которая распространялась через падающий стержень к поверхности раздела падающий стержень—образец. В силу несоответствия импеданса образец—стержень часть волны напряжения отражалась в падающем стержне, проходила сквозь образец и передающий стержень. Пара полумостов

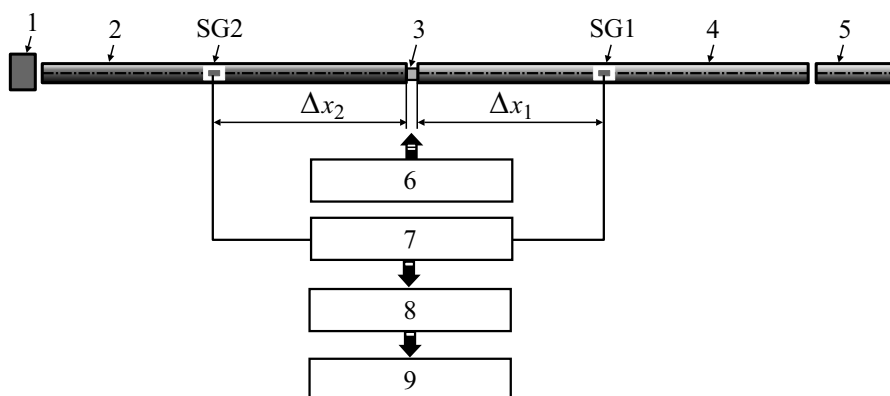


Рис. 2. Схема установки разрезного стержня Гопкинсона (лаборатория IRDL, Франция): 1 — ограничитель; 2 — передающий стержень; 3 — образец; 4 — падающий стержень; 5 — ударник; 6 — высокоскоростная фотография; 7 — мосты Уитсона; 8 — цифровой осциллограф Nicolet Odyssey; 9 — компьютер.

Уитстона, расположенных на расстоянии $\Delta x_1 = 0,9635$ м и $\Delta x_2 = 0,959$ м от поверхностей раздела образец—стержень, использовали для регистрации волн деформации (см. рис. 2).

Напряжения тензодатчиков преобразовывали в значения падающей ε_i , отраженной ε_r и прошедшей ε_t деформаций с помощью уравнения

$$\varepsilon(t) = \frac{2\Delta Em(t)}{k(U_0 - 2\Delta Em(t))} = \frac{1}{\frac{kU_0}{2\Delta Em(t)} - k}, \quad (2)$$

где $\varepsilon(t)$, U_0 , $\Delta Em(t)$ — деформация, питающее и выходное напряжение полумоста соответственно; k — коэффициент тензочувствительности ($k = k_{\text{inc}} = k_{\text{trans}} = 2,105$). Измерения напряжения тензодатчиков регистрировали с помощью высокоскоростной системы сбора данных Nicolet Odyssey 3,26 с частотой отсчетов 1 МГц.

Для определения динамической зависимости между напряжениями и деформациями для РСГ необходимо обеспечить шесть условий [16]:

- 1) стержни должны оставаться упругими;
- 2) распространение волны напряжения в стержнях одномерное;
- 3) поверхности раздела образец—стержень всегда остаются плоскими;
- 4) эффекты инерции и трения в образце должны быть минимизированы;
- 5) скорость деформирования должна быть равномерной, а напряжение образца должно быть в равновесии;
- 6) образец должен быть несжимаемым.

После переноса историй тензодатчиков на поверхности образца с помощью быстрого преобразования Фурье для коррекции дисперсии инженерное напряжение, скорость деформирования и деформацию вычислили следующим образом:

$$\sigma(t) = \frac{EA}{2A_s} \left[\varepsilon_i(t) + \varepsilon_r(t) + \varepsilon_t(t) \right] \quad (\text{трехволновой анализ}), \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\frac{2c_b}{L_s} \varepsilon_r(t), \quad (4)$$

$$\varepsilon(t) = -\frac{2c_b}{L_s} \int_0^t \varepsilon_r(t) dt, \quad (5)$$

где E , A , c_b — модуль Юнга, площадь поперечного сечения и скорость упругих волн в стержнях соответственно; L_s и A_s — первоначальная длина и площадь поперечного сечения образца соответственно.

Истинное напряжение $\sigma_T(t)$ и истинную деформацию $\varepsilon_T(t)$ получили из инженерного напряжения и деформации:

$$\sigma_T(t) = (1 - \varepsilon(t))\sigma(t), \quad (6)$$

$$\varepsilon_T(t) = -\ln(1 - \varepsilon(t)), \quad (7)$$

где $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ — техническое напряжение и деформация соответственно. (Для получения более подробной информации о настройке установки разрезного стержня Гопкинсона для сжатия, предположениях о достоверности, ограничивающих импульсах и поправке на дисперсию см. [16].)

Испытания на динамическое сжатие состаренных и несостаренных образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ проводили в плоскости вдоль волокон в диапазоне скорости деформирования $\dot{\varepsilon} = 500\text{—}710 \text{ с}^{-1}$. При анализе экспериментальных результатов учитывали величину первого пика скорости деформирования.

Испытания на динамическое сжатие состаренных образцов можно разделить на испытания при низком давлении, демонстрирующие упругий отклик с небольшим повреждением, и испытания при высоком давлении с преобладающим макроскопическим повреждением. На основе метода проб и ошибок выбрали четыре значения давления удара P : низкое (1,3 бар), два промежуточных (1,5 и 1,6 бар) и разрушающее (2 бар), соответствующих средним скоростям деформирования 564, 596, 606 и 663 с^{-1} . Было сложно провести динамические испытания состаренных и несостаренных образцов при одинаковых скоростях деформирования, поскольку их проводили при фиксированных значениях P . Тем не менее удары с давлением 0,7, 0,8 и 0,9 бар позволили провести динамические испытания на сжатие несостаренных образцов стеклопластика в диапазоне скорости деформирования $\dot{\varepsilon} = 500\text{—}710 \text{ с}^{-1}$. Для обеспечения воспроизводимости результатов при каждом значении давления удара испытали не менее двух образцов. Историю повреждения образцов стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ отслеживали по месту с помощью высокоскоростной видеокамеры Photron Fastcam и изучили состояние образцов после динамического сжатия.

1.4. Квазистатические испытания. Для сравнения динамического отклика на сжатие с квазистатическим на универсальной испытательной машине Zwick при постоянной скорости перемещения траверсы 1 мм/мин ($1,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$) выполнили квазистатические испытания на сжатие в плоскости как состаренных, так и несостаренных образцов однонаправленного эпоксидного стеклопластика, имеющих одинаковые размеры. Для воспроизводимости результатов выполнили четыре испытания. Зависимости нагрузка—перемещение в каждом испытании регистрировали с использованием программного обеспечения для испытания материалов testXpert II.

1.5. Определение характеристик с помощью СЭМ. Для анализа механизмов деградации эпоксидного стеклопластика при старении в горячей воде использовали сканирующий электронный микроскоп (СЭМ) MP12000040 (UDCMA, Сетиф, Алжир).

2. Результаты и обсуждение

2.1. Водопоглощение и изменение размеров. На рис. 3 показана зависимость водопоглощения M_t как функции квадратного корня времени \sqrt{t} для однонаправленного эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$. Данные рисунка по длительному водопоглощению иллюстрируют двухэтапную диффузию, начинающуюся с быстрой диффузии по закону Фика, за которой следует медленное постепенное увеличение водопоглощения. На первом этапе водопоглощение линейно зависело от величины \sqrt{t} , что можно объяснить диффузией воды в уже существующие элементы свободного объема (дефекты и поры) композита и водопоглощением эпоксидной смолы [24]. Вторая стадия характеризует релаксацию полимера, включающую более крупномасштабное и, следовательно, более медленное сегментное движение и приводит к перераспределению элементов свободного объема и зависящему от времени дополнительному водопоглощению [25]. Постепенная деградация эпоксидной матрицы и поверхности раздела волокно—матрица обусловили увеличение полостей (рис. 4) и вынудило образцы однонаправленного стеклопластика продолжать водопоглощение [20]. Диффузионное поведение однонаправленного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ успешно описано двухэтапной диффузионной моделью, предложенной в [6]:

$$M_t \approx M_{\infty 0} (1 + k\sqrt{t}) \left\{ 1 - \exp \left[-7,3 \left(\frac{Dt}{h^2} \right)^{0,75} \right] \right\}, \quad (8)$$

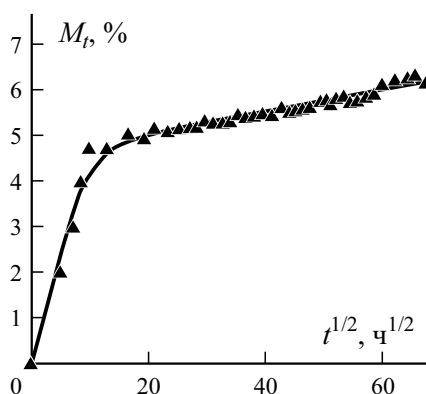


Рис. 3. Зависимость водопоглощения M_t от квадратного корня времени t однонаправленного эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$, состаренного погружением в воду при 60°C : (—) — подгонка методом наименьших квадратов экспериментальных данных с помощью модели двухэтапной диффузии (8) при

$$M_{\infty 0} = 4,56\%, \quad k = 0,0053 \text{ ч}^{-1/2}, \quad h = 0,013 \text{ м}, \quad D = 3,37 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{ч}.$$

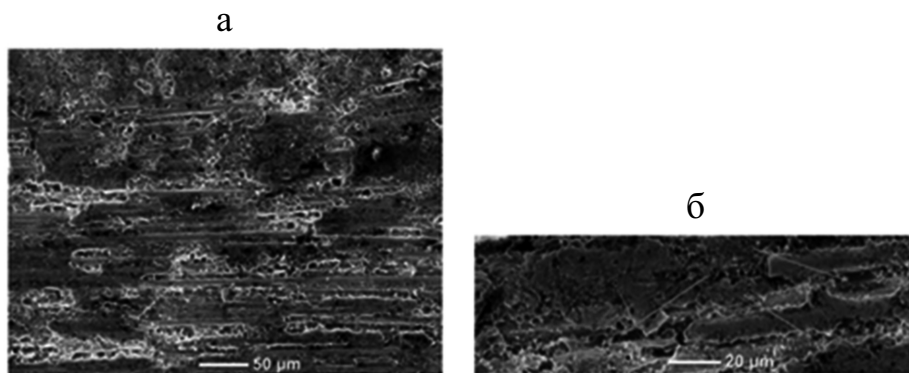


Рис. 4. Микрофотографии СЭМ фронтальной поверхности разрушения состаренного образца эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$, сделанные с увеличением 250 (а) и 700 \times (б), демонстрирующие малое повреждение поверхности раздела волокно—матрица и смолы даже после 4900 ч погружения в горячую воду (а) и локальную потерю сцепления и уменьшение количества смолы вокруг волокон (указано стрелками) (б).

где $M_{\infty 0}$ — максимальное водопоглощение (псевдоравновесное значение) на первой стадии с преобладанием диффузии; член $(1 + k\sqrt{t})$ характеризует управляемую релаксацией вторую стадию, где k связан со скоростью релаксации; D — коэффициент диффузии; t — время; h — толщина образца [26, 27]. Параметры модели двухэтапной диффузии, определенные с помощью программы Excel методом наименьших квадратов, путем аппроксимации экспериментальных гравиметрических данных, приведены на рис. 3.

Как видно из данных табл. 2, длина образцов возрастала с увеличением времени старения, т.е. в направлении стекловолокон происходило набухание стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$, которое представляло предпочтительный путь для диффузии воды. Наблюдали усадку в поперечном направлении и по толщине, где волокна препятствовали диффузии воды.

Табл. 2

Изменение размеров образцов в силу водопоглощения при 60 $^\circ$ C

Время, ч	Номер образца	L , мм	H , мм	W , мм	Объем, мм ³
0	1	12,95	12,55	13,03	2117,67
	2	12,88	12,54	13,13	2120,69
	3	12,06	12,53	12,95	1956,90
4900	1	13,50	12,37	12,36	2064,06
	2	13,15	12,53	12,86	2118,94
	3	13,67	12,50	12,38	2115,43

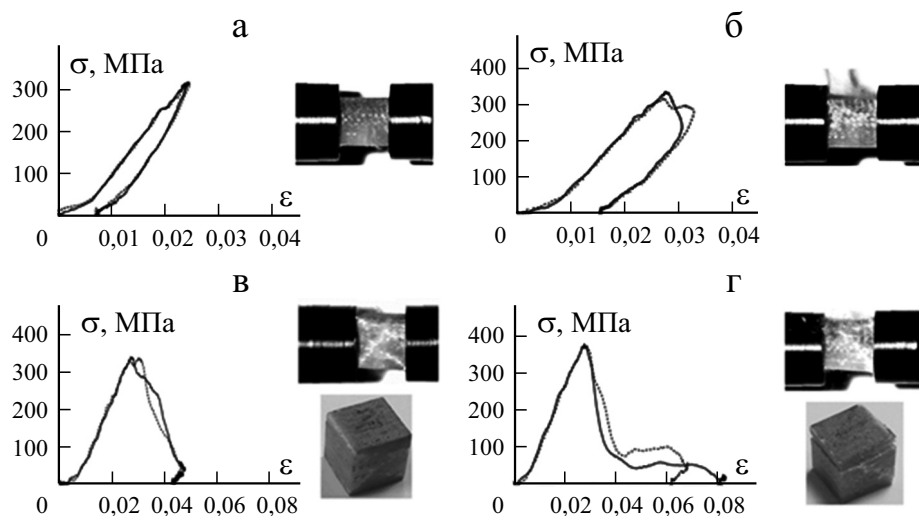


Рис. 5. Воспроизводимость кривых напряжение—деформация σ — ε и состояние состаренных образцов однонаправленного эпоксидного стеклопластика при $\dot{\varepsilon} = 546$ (а); 596 (б); 606 (в); 663 с⁻¹ (г) и $P = 1,3, 1,5, 1,6, 2$ бар. (—) и (- - -) — испытание 1 и 2.

Зависимость между водопоглощением и изменением размеров в продольном направлении волокон была линейной.

2.2. Механическое поведение. Динамические испытания провели на состаренных и несостаренных образцах эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$. Данные рис. 5 и 6 демонстрируют хорошую повторяемость результатов при каждом значении давления удара.

На рис. 7 приведены кривые деформирования напряжение—деформация σ — ε состаренных и несостаренных образцов стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$, подвергнутых статическому и динамическому сжатию в плоскости в направлении волокон. Состаренные образцы подвергли удару при четырех значениях $P = 1,3, 1,5, 1,6$ и 2 бар, соответствующих средней скорости

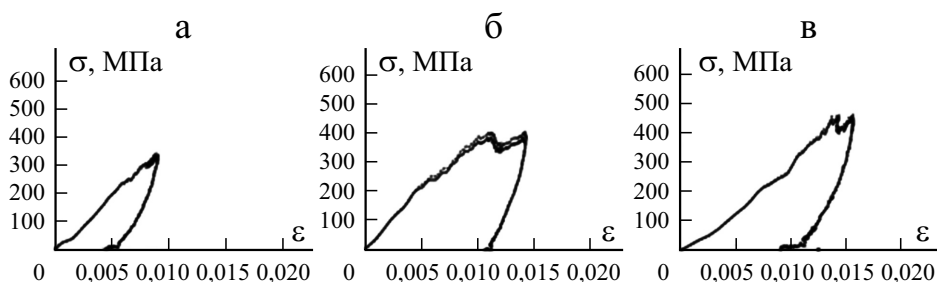


Рис. 6. Воспроизводимость кривых напряжение—деформация σ — ε несостаренных образцов эпоксидного стеклопластика, испытанных при динамическом сжатии и $\dot{\varepsilon} = 519$ (а); 611 (б); 733 с⁻¹ (в) и $P = 0,7, 0,8, 0,9$ бар. (—) и (- - -) — испытание 1 и 2.

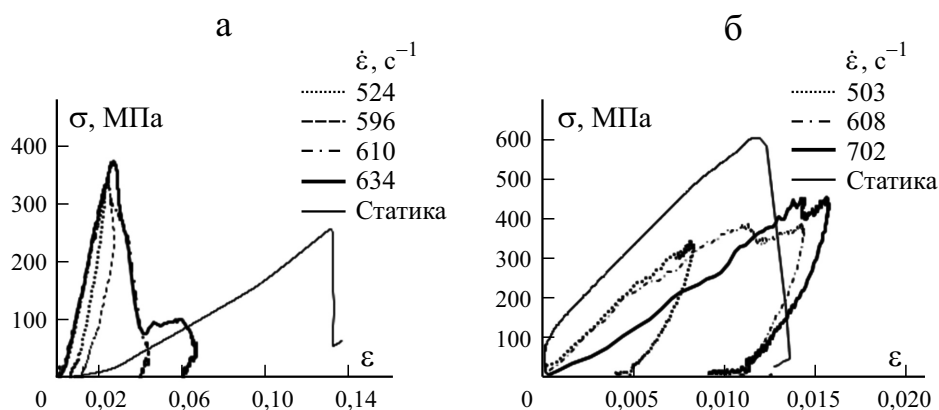


Рис. 7. Типичные кривые напряжение—деформация σ — ε состаренных (а) и несостаренных (б) образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$, испытанных динамическим сжатием в плоскости с разной скоростью деформирования $\dot{\varepsilon}$.

деформирования $\dot{\varepsilon} = 546, 596, 606$ и 663 c^{-1} (см. рис. 5). Зависимости скорость деформирования—время на рис. 8—а — экспериментальные кривые реальных образцов, а не усредненные. Эволюция скорости деформирования чувствительна к величине давления удара P в камере пневматической пушки. Сначала скорость деформирования быстро возрастала при испытании неповрежденного образца при давлении 1,3 бар, а затем уменьшалась и оставалась почти постоянной. Скорость деформирования достигла отрицательных значений, соответствующих упругому последствию образца. Скорость деформирования не была постоянной во второй фазе при ударе с давлением от 1,5 до 2 бар (см. рис. 8—а). Наличие второго пика на кривых скорость деформирования—время свидетельствует о появлении макроскопических повреждений [14, 15]. Критическое давление их появления при-

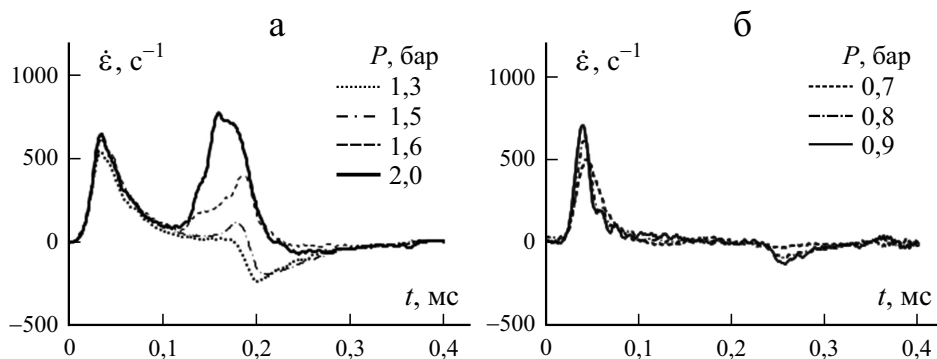


Рис. 8. Типичные кривые скорость деформирования—время $\dot{\varepsilon}$ — t состаренных (а) и несостаренных (б) образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$, испытанных динамическим сжатием в плоскости с разным давлением удара P .

мерно 1,5 бар. Когда давление удара достигло 2 бар (скорость деформирования 663 с^{-1}), второй пик зависимости скорости деформирования от времени превысил первый; однако упругое последствие образца стало незначительным. Основные характеристики динамического сжатия для состаренных и несостаренных образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$, подвергнутых нагружению в плоскости при разном давлении удара, приведены в табл. 3.

Типичные кривые напряжение—деформация, полученные в статических и динамических испытаниях со скоростью деформирования 524, 596, 610 и 634 с^{-1} , показаны на рис. 7—*a*. Видно, что поведение состаренных образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ при динамическом сжатии при начальной линейной упругой деформации было одинаковым и модуль упругости практически не зависел от скорости деформирования. Динамическая жесткость состаренных образцов была больше статической. Среднее значение жесткости при статическом нагружении 2,8 ГПа, а при динамическом — 17,1, 17,4, 16,2 и 18,0 ГПа со скоростью деформирования 546, 596, 606 и 663 с^{-1} соответственно. Это свидетельствует о наличии механизма ужесточения при увеличении скорости деформирования от квазистатической до динамической, который может быть связан с изменением последовательности прогрессирующего разрушения стеклопластика при малой скорости деформирования, когда за разрушением матрицы следует разрушение волокон [11]. Максимальное напряжение, соответствующее моменту потери несущей способности образца, при динамическом нагружении было больше, чем при статическом, и возрастало с увеличением скорости деформирования. Среднее значение максимального напряжения при квазистатическом нагружении 254 МПа и 319, 326, 341 и 373 МПа — при динамическом со скоростью 546, 596, 606 и 663 с^{-1} соответственно. Увеличение максимального напряжения со скоростью деформирования может быть связано с поведением при сдвиге и изменением мод разрушения [28]. Испытания выявили остаточную деформацию образцов, возрастающую с увеличением скорости деформирования. В силу разных мод разрушения кривые напряжение—деформация продемонстрировали разную степень нелинейности. Деформация, соответствующая максимальному напряжению, при статическом нагружении была больше, чем при динамическом. Аналогичную тенденцию наблюдали в [11] и высказали предположение о том, что при малых скоростях нагружения у образцов эпоксидного стеклопластика было достаточно времени для распределения приложенной нагрузки, чтобы подвергнуться постоянной деформации. Однако при быстром нагружении материал имел тенденцию к более хрупкому поведению, обусловившему меньшую деформацию при максимальном напряжении. Значение деформации при максимальном напряжении практически не зависело от скорости деформирования и у состаренных образцов было больше. При максимальном напряжении среднее значение деформации при статическом нагружении 13,08% и 2,49, 2,73, 2,82 и 2,71% — при динамическом со скоростью деформирования 546, 596, 606 и 663 с^{-1} соответственно.

Табл. 3

Свойства состаренных и несостаренных образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ при динамическом сжатии в плоскости с разным давлением удара P

Номер испытания	$L \times W \times H$, мм	P , бар	$\dot{\epsilon}$, с^{-1}	E_c , ГПа	σ_{\max} , МПа	$\epsilon_{\sigma_{\max}}$, %
Несостаренные образцы						
1	12,61×12,51×13,87	0,7	503	45,2	341	0,88
2	12,87×12,73×13,54		535	46,4	331	0,87
Среднее			519	45,8	336	0,88
STDEV.P			16	0,6	5	0,01
1	12,11×12,42×13,32	0,8	608	49,6	384	1,40
2	12,34×12,69×13,66		614	57,7	403	1,41
Среднее			611	53,7	394	1,41
STDEV.P			3	4,0	10	0,01
1	11,91×12,38×13,52	0,9	702	31,6	451	1,55
2	12,63×12,56×13,11		763	31,9	462	1,56
Среднее			734	31,8	457	1,56
STDEV.P			31	0,2	6	0,01
Состаренные образцы						
1	13,23×13,13×12,73	1,3	524	17,2	317	2,36
2	13,19×13,01×12,78		567	17,1	321	2,62
Среднее			546	17,1	319	2,49
STDEV.P			22	0,0	2	0,13
1	13,31×13,00×12,70	1,5	597	18,5	335	2,75
2	13,09×13,35×12,71		595	16,2	317	2,70
Среднее			596	17,4	326	2,73
STDEV.P			1	1,2	9	0,02
1	13,42×13,10×12,80	1,6	611	15,9	342	2,71
2	13,00×13,14×12,74		601	16,5	340	2,92
Среднее			606	16,2	341	2,82
STDEV.P			5	0,3	1	0,10
1	13,15×13,08×12,60	2	692	17,8	376	2,76
2	13,08×13,03×12,70		634	18,3	370	2,66
Среднее			663	18,0	373	2,71
STDEV.P			29	0,2	3	0,05

На рис. 7—б и 8—б показаны типичные кривые напряжение—деформация и скорость деформирования—время несостаренных образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ при статическом и динамическом нагружении со скоростью 503 с^{-1} (0,7 бар), 608 с^{-1} (0,8 бар) и 702 с^{-1} (0,9 бар). После динамического нагружения сжатием в несостаренных образцах не

выявили явных признаков макроскопических повреждений, но могли быть микроскопические дефекты. Из данных рис. 8—б видно, что скорость деформации быстро увеличивалась до максимального значения, которое возросло с увеличением давления удара, а затем уменьшалось и оставалось почти постоянным. Упругое последствие образцов было практически незначительным. Испытания на динамическое сжатие с помощью РСГ провели при фиксированном давлении 0,7, 0,8 и 0,9 бар, соответствующем средней скорости деформирования 519, 611 и 733 с⁻¹. Для сравнения результатов динамического нагружения состаренных и несостаренных образцов экспериментальные данные интерполировали при одинаковой скорости деформирования по формулам (10), (12) и (14), полученным путем подгонки динамических свойств (см. рис. 7—б). Динамическая жесткость несостаренных образцов была немного больше статической, что также может быть связано с изменением последовательности прогрессирующего разрушения стеклопластика при малых скоростях деформирования [11]. Среднее значение жесткости при статическом нагружении 46,6 ГПа и 45,8, 53,7, 31,8 ГПа — при динамическом со скоростью деформирования 519, 611 и 733 с⁻¹ соответственно. Интерполированные значения модуля упругости при динамическом сжатии 50,1, 53,4, 53,3, 48,2 ГПа при скорости 546, 596, 606, 663 с⁻¹ соответственно показали небольшую тенденцию увеличения—уменьшения с увеличением скорости деформирования. Значение статической жесткости 46,6 ГПа было меньше, чем интерполированные значения динамической жесткости. В отличие от состаренных образцов максимальное напряжение несостаренных образцов при динамическом нагружении было меньше, чем при статическом. Максимальное напряжение при квазистатическом нагружении 600 МПа и 354, 385, 391, 422 МПа — при динамическом со скоростью деформирования 546, 596, 606, 663 с⁻¹ соответственно. Деформация, соответствующая максимальному напряжению, при статическом нагружении была близка к таковой при динамическом нагружении со скоростью 546 с⁻¹. Значение деформации, соответствующей максимальному напряжению при статическом нагружении 1,16% и 1,07, 1,34, 1,38, 1,54% — при динамическом со скоростью 546, 596, 606, 663 с⁻¹ соответственно. Максимальное напряжение и соответствующая ему деформация несостаренных образцов возрастали с увеличением скорости деформирования.

Использование эмпирических соотношений, чувствительных к скорости деформирования, позволяет получить надежные данные для инженерных применений при моделировании динамического отклика композитных материалов. Наилучшая подгонка характеристик динамического сжатия в плоскости на основе экспериментальных данных о деформировании эпоксидного стеклопластика с укладкой [0°]₄₀ позволила предложить следующие нелинейные эмпирические модели состояния:

$$E_c = 23,58 \cdot 10^{-5} \dot{\varepsilon}^2 - 0,278\dot{\varepsilon} + 98,7 \text{ (состаренный)}, \quad (9)$$

$$E_c = -12,4 \cdot 10^{-4} \dot{\varepsilon}^2 + 1,483\dot{\varepsilon} - 390 \text{ (несостаренный)}, \quad (10)$$

$$\sigma_{\max} = 31,75 \cdot 10^{-4} \dot{\varepsilon}^2 - 3,37 \dot{\varepsilon} + 1211,7 \text{ (состаренный)}, \quad (11)$$

$$\sigma_{\max} = 350,4 \ln(\dot{\varepsilon}) - 1854,3 \text{ (несостаренный)}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{\sigma_{\max}} = -5,39 \cdot 10^{-5} \dot{\varepsilon}^2 + 0,0671 \dot{\varepsilon} - 18,08 \text{ (состаренный)}, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{\sigma_{\max}} = -2,12 \cdot 10^{-5} \dot{\varepsilon}^2 + 0,0297 \dot{\varepsilon} - 8,83 \text{ (несостаренный)}. \quad (14)$$

2.3. Моды разрушения. Для отслеживания истории повреждения образцов использовали высокоскоростную видеокамеру Photron FASTCAM. Фотографии и изображения, сделанные Photron в реальном времени и приведенные на рис. 5, демонстрируют моды разрушения образцов однонаправленного стеклопластика после динамического нагружения сжатием в плоскости. Начало макроскопического повреждения выявили по наличию второго пика на зависимости скорости деформирования от времени, который соответствовал падению напряжения в образце, как показано на рис. 9. Зависимости напряжения и скорости деформирования от времени на рис. 9 позволяют выделить зоны, которые можно резюмировать следующим образом [14].

Для испытаний без повреждения (рис. 9—а).

Зона 1: характеризуется быстрым увеличением скорости деформирования $\dot{\varepsilon}$, что можно объяснить самоустановкой образцов между стержнями установки РСГ. Действительно, параллельность поверхностей образца, соприкасающихся со стержнями РСГ, не была гарантирована на 100% в силу наличия зазора и небольшого нелинейного увеличения напряжения в этой зоне.

Зона 2: обеспечение идеального контакта обусловило увеличение напряжения σ и уменьшение скорости деформирования $\dot{\varepsilon}$.

Зона 3: эволюция напряжения σ транслирует случайный сигнал, развивающийся вокруг среднего значения при стремлении скорости дефор-

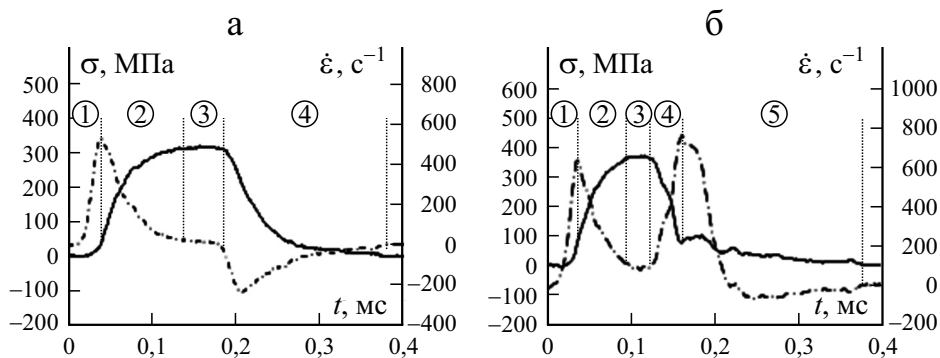


Рис. 9. Зависимость напряжения σ (—) и скорости деформирования $\dot{\varepsilon}$ (- · - · -) от времени t образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$: испытание без повреждения при $P = 1,3$ бар (524 с^{-1}) (а) и с повреждением при $P = 2$ бар (634 с^{-1}) (б).

мирования $\dot{\epsilon}$ к нулю, когда образец достигает максимального сжатия при максимальном напряжении.

Зона 4: В этой зоне изменился знак $\dot{\epsilon}$; напряжение σ начало уменьшаться; образец начал релаксировать. Такое поведение можно объяснить упругим последствием образца, выявленным при анализе стереотипов, снятых высокоскоростной видеокамерой. В конце этой зоны оба сигнала исчезли одновременно.

Для испытаний с повреждением (рис. 9—б).

Зона 1: наблюдения, аналогичные в зоне 1 при испытаниях без повреждения.

Зона 2: наблюдения, аналогичные в зоне 2 при испытаниях без повреждения.

Зона 3: развитие напряжения представляет собой динамическое сжатие с постоянным средним значением σ и $\dot{\epsilon}$. Колебания сигналов по достижении максимального значения напряжения в этой зоне более выраженные, чем в испытании без повреждения, что можно объяснить появлением повреждений на микроскопическом уровне.

Зона 4: накопление микроскопических повреждений привело к появлению макроскопических дефектов, обусловивших быстрое уменьшение напряжения с быстрым увеличением скорости деформирования $\dot{\epsilon}$.

Зона 5: поврежденный образец стал более компактным, что обусловило резкое падение величины $\dot{\epsilon}$. В этой зоне напряжение всегда уменьшается, но менее заметно, чем в зоне 4. Появление повреждений вызывает ослабление упругого последствия или его исчезновение, если образец был полностью поврежден.

Основные моды разрушения образцов однонаправленного стеклопластика, подвергнутых квазистатической нагрузке, — микропотеря устойчивости волокон, образование изломов, раздробление, разрушение от сдвига и расслоение. Наиболее заметна мода разрушения от сдвига, типичная для хрупких материалов, подвергающихся поперечному растяжению в силу эффекта коэффициента Пуассона.

При динамическом нагружении моды разрушения изменялись с увеличением скорости деформирования. При давлении 1,3 бар (скорость деформирования 546 с^{-1}) состаренные образцы однонаправленного стеклопластика выдержали постоянную деформацию 9,5% без видимых макроскопических повреждений (см. рис. 7). По мере развития сжатия и достижения давления удара 1,5 бар (скорость деформирования 596 с^{-1}) наблюдали побеление состаренных образцов в силу возникновения микроскопических повреждений. Размер и частота повреждений стали более значительными с увеличением давления удара до 1,6 бар (скорость деформирования 606 с^{-1}), при котором преобладала мода разрушения от сдвига по диагонали и из противоположных углов образца. Разрушение от сдвига вызвало отделение блока внешних слоев в образце (см. рис. 5—в). При давлении 2 бар (скорость деформирования 663 с^{-1}) образцы разрушались в силу сдвигового разрушения слоев по диагонали с после-

дующим макроскопическим расслоением, отделившим верхние внешние слои и вызвавшим смятие образцов, принявших форму, близкую к Y , как показано на рис. 5—г.

Несостаренные образцы однонаправленного эпоксидного стеклопластика оставались неповрежденными и не демонстрировали макроскопических повреждений вплоть до динамического нагружения со скоростью 663 с^{-1} . Однако в них могут быть микроскопические повреждения. Эволюцию повреждений несостаренных образцов однонаправленного эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ изучали в [14] при нагружении давлением до 1,6 бар; появление повреждений в образцах наблюдали уже при давлении 1,2 бар.

2.4. Влияние старения в горячей воде на квазистатические и динамические свойства. Ожидали, что старение в горячей воде уменьшит динамическую реакцию на сжатие слоистых эпоксидных стеклопластиков [20, 29]. В настоящей работе исследовали влияние старения в горячей воде на квазистатические и динамические свойства образцов из однонаправленного эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ путем сравнения результатов при сжатии несостаренных и состаренных образцов, испытанных при разной скорости деформирования. Основные результаты обобщены в табл. 4 (результаты квазистатических испытаний включили для справки) и показаны на рис. 10.

Деградация свойств эпоксидного стеклопластика при старении в горячей воде в основном может быть обусловлена деградацией свойств матрицы, поверхности раздела волокно—матрица или и того, и другого.

Как следует из данных табл. 4, при старении в горячей воде произошло значительное уменьшение жесткости эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$. Модуль упругости при сжатии уменьшился при статическом нагружении на 94,0% и на 65,9, 67,4, 69,6, 62,7% — при динамическом со

Табл. 4

Динамические и статические свойства состаренных и несостаренных образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ при сжатии в плоскости с разной скоростью деформирования и их процентное различие в силу старения в горячей воде

$\dot{\epsilon}$, с^{-1}	E_c , ГПа			σ_{\max} , МПа			$\epsilon_{\sigma_{\max}}$, %		
	Несостаренные	Состаренные	Δ , %	Несостаренные	Состаренные	Δ , %	Несостаренные	Состаренные	Δ , %
Статика	46,6	2,8	-94,0	600	254	-57,7	1,16	13,08	1027,6
546	50,1	17,1	-65,9	354	319	-9,9	1,07	2,49	132,7
596	53,4	17,4	-67,4	385	326	-15,3	1,34	2,73	103,7
606	53,3	16,2	-69,6	391	341	-12,8	1,38	2,82	104,3
663	48,2	18,0	-62,7	422	373	-11,6	1,54	2,71	76,0

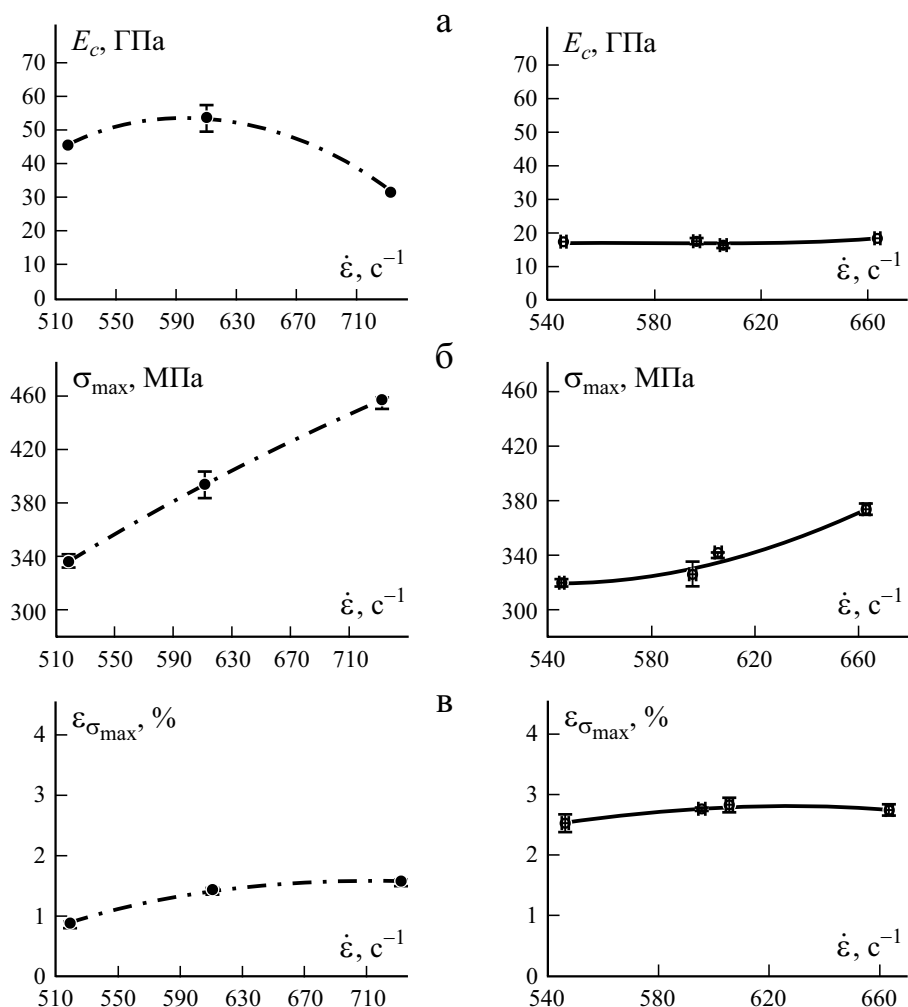


Рис. 10. Влияние старения в горячей воде на модуль упругости при сжатии E_c (а), максимальное напряжение σ_{\max} (б) и деформацию при максимальном напряжении $\varepsilon_{\sigma_{\max}}$ (в) состаренных (○) и несостаренных (●) образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой $[0^\circ]_{40}$ при разной скорости деформирования $\dot{\varepsilon}$. Сплошная и штрих-пунктирная линии — подгоночные тренды.

скоростью деформирования 546, 596, 606, 663 c^{-1} соответственно. Уменьшение модуля упругости при сжатии может быть связано с пластифицирующим действием воды (6,52%), увеличившем подвижность молекулярных цепочек эпоксидной смолы [30].

Из данных табл. 4 видно, что максимальное напряжение в силу старения в горячей воде снизилось при динамическом нагружении в меньшей степени, чем при квазистатическом. Уменьшение максимального напряжения состаренных образцов по отношению к несостаренным при статическом нагружении 57,7% и 9,9, 15,3, 12,8, 11,6% — при динамическом со скоро-

стью деформирования 546, 596, 606, 663 с⁻¹ соответственно. Вполне удовлетворительное ослабление эпоксидного стеклопластика с укладкой [0°]₄₀ при динамическом нагружении связано с малой деградацией эпоксидной матрицы и межповерхностного сцепления в стеклопластике (см. рис. 4).

При статическом нагружении состаренные образцы продемонстрировали большие деформации при максимальном напряжении, чем при динамическом. Как следует из данных табл. 4, состаренные образцы подвергались большим деформациям при максимальных напряжениях, чем несостаренные.

Заключение

В настоящей работе представлены результаты экспериментального исследования влияния старения в горячей воде на динамические и квазистатические характеристики при сжатии эпоксидного стеклопластика с укладкой [0°]₄₀. Образцы стеклопластика выдерживали в воде при температуре 60 °С в течение 4900 ч. Испытания на сжатие с помощью разрезного стержня Гопкинсона и квазистатические испытания провели на состаренных и несостаренных образцах эпоксидного стеклопластика. По результатам настоящего исследования установлено следующее.

- Диффузионное поведение эпоксидного стеклопластика с укладкой [0°]₄₀ успешно описано с помощью двухэтапной модели диффузии. Через 4900 ч водопоглощение достигло 6,52%. Параметры двухэтапной модели определили методом нелинейной регрессии.

- Изменение размеров образцов продемонстрировало набухание образцов в продольном направлении (вдоль волокон Е-стекла), представляющем наиболее легкий путь для диффузии воды, и усадку образцов в поперечном направлении и по толщине, где волокна препятствовали диффузии воды. Связь между водопоглощением и изменением размеров в продольном направлении была линейной.

- Динамические свойства, такие как модуль упругости при сжатии, максимальное напряжение и соответствующая ему деформация, состаренных и несостаренных образцов эпоксидного стеклопластика с укладкой [0°]₄₀ чувствительны к скорости деформирования. Предложены эмпирические модели для оценки динамических свойств стеклопластика при скорости деформирования в диапазоне 546—663 с⁻¹, облегчающие проектирование и оптимизацию стеклопластиковых конструкций без использования экспериментальных исследований, временно- и материальнозатратных, для получения надежных данных для инженерного использования при моделировании динамического отклика.

- Процесс повреждения образцов однонаправленного эпоксидного стеклопластика при старении в горячей воде отслеживали с помощью высокоскоростной видеокамеры Fastcam. При давлении 1,6 бар (скорость деформирования 610 с⁻¹) преобладающая мода разрушения — полосы сдвига. При давлении 2 бар (скорость деформирования 634 с⁻¹) основные

моды разрушения — полосы сдвига и расслоение.

- Микрофотографии СЭМ продемонстрировали, что деградация свойств однонаправленного стеклопластика при старении в горячей воде может быть связана в основном с деградацией свойств эпоксидной матрицы и поверхности раздела волокно—матрица.

- Модуль упругости при сжатии уменьшился при статическом нагружении на 94,0% и на 65,9, 67,4, 69,6, 62,7% — при динамическом со скоростью деформирования 546, 596, 606, 663 с⁻¹ соответственно; максимальное напряжение состаренных образцов снизилось по сравнению с несостаренными при статическом нагружении на 57,7% и на 9,9, 15,3, 12,8, 11,6% — при динамическом со скоростью деформирования 546, 596, 606, 663 с⁻¹ соответственно. Состаренные образцы при статическом нагружении продемонстрировали большие деформации при максимальном напряжении, чем при динамическом. Состаренные образцы при максимальных напряжениях подвергались большим деформациям, чем несостаренные. Приращения деформации при максимальном напряжении в силу старения в горячей воде при статическом нагружении 1027,6% и 132,7, 103,7, 104,3, 76% — при динамическом со скоростью деформирования 546, 596, 606, 663 с⁻¹ соответственно. Точная и надежная оценка процентного изменения квазистатических и динамических характеристик при сжатии в силу старения в горячей воде может помочь проектировщикам установить коэффициенты долговечности (life-cycle knock-down factors) для композитных конструкций, изготовленных из однонаправленного эпоксидного стеклопластика с укладкой [0°]₄₀.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Главного управления научных исследований и технологических разработок DGRSDT (MESRS) Алжира.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sutherland L.* A review of impact testing on marine composite materials: Part III. damage tolerance and durability // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 188, March. — P. 512—518.
2. *Rubino F., Nisticò A., Tucci F., and Carlone P.* Marine application of fiber reinforced composites: A review // *J. Mar. Sci. Eng.* — 2020. — Vol. 8, No.1. — P. 26.
3. *Joliff Y., Bélec L., and Chailan J. F.* Modified water diffusion kinetics in an unidirectional glass/fibre composite due to the interphase area: Experimental, analytical and numerical approach // *Compos. Struct.* — 2013. — Vol. 97, March. — P. 296—303.
4. *Harper B. D., Staab G. H., and Chen R. S.* A note on the effects of voids upon the hygral and mechanical properties of AS4/3502 graphite/epoxy // *J. Compos. Mater.* — 1987. — Vol. 21, No.3. — P. 280—289.
5. *Kumosa L., Benedikt B., Armentrout D., and Kumosa M.* Moisture absorption properties of unidirectional glass/polymer composites used in composite (non-ceramic) insulators // *Composites: Part A.* — 2004. — Vol. 35, No. 9. — P. 1049—1063.
6. *Bao L.-R., Yee A. F., and Lee C. Y.-C.* Moisture Absorption and hygrothermal aging in a bismaleimide resin // *Polymer.* — 2001. — Vol. 42, No. 17. — P. 7327—7333.

7. Machado J. J. M., Marques E. A. S., Barbosa A. Q., and da Silva L. F. Effect of hygrothermal aging on the quasi-static behaviour of CFRP joints varying the overlap length // *Compos. Struct.* — 2019. — Vol. 214, Apr. — P. 451—462.
8. Carter H. G. and Kibler K. G. Langmuir-type model for anomalous moisture diffusion in composite resins // *J. Compos. Mater.* — 1978. — Vol. 12, No. 2. — P. 118—131.
9. Kumar P., Garg A., and Agarwal B. Dynamic compressive behaviour of unidirectional gfrp for various fibre orientations // *Mater. Lett.* — 1986. — Vol. 4, No. 2. — P. 111—116.
10. Hsiao H. M., Daniel I. M., and Cordes R. D. Dynamic compressive behavior of thick composite materials // *Exp. Mech.* — 1998. — Vol. 38, No. 3. — P. 172—180.
11. Ochola R. O., Marcus K., Nurick G. N., and Franz T. Mechanical behaviour of glass and carbon fibre reinforced composites at varying strain rates // *Compos. Struct.* — 2004. — Vol. 63, No. 3. — P. 455—467.
12. Hosur M., Alexander J., Vaidya U., and Jeelani S. High strain rate compression response of carbon/epoxy laminate composites // *Compos. Struct.* — 2001. — Vol. 52, Nos. 3—4. — P. 405—417.
13. Tarfaoui M. and Nachtane M. Staking lay-up effect on dynamic compression behaviour of E-glass/epoxy composite materials: Experimental and numerical investigation // *Adv. Mater. Lett.* — 2018. — Vol. 9, No. 11. — P. 816—822.
14. Tarfaoui M., Nême A., and Choukri S. Damage kinetics of glass/epoxy composite materials under dynamic compression // *J. Compos. Mater.* — 2009. — Vol. 43, No. 10. — P. 1137—1154.
15. Mostapha T. Experimental Investigation of Dynamic Compression and Damage Kinetics of Glass/Epoxy Laminated Composites under High Strain Rate Compression, Ch.16 // *Advances in Composite Materials* /Eds. Brahim Attaf. — London: Ecodesign and Analysis, IntechOpen Limited, 2011.
16. Gueraiche L., Tarfaoui M., Osmani H., and El Malki A. Aboulghit. A practical note for SHPB test with new algorithms for delimiting pulses // *Compos. Struct.* — 2015. — Vol. 126, Aug. — P. 145—158.
17. Antoon M. K. and Koenig J. L. The structure and moisture stability of the matrix phase in glass-reinforced epoxy composites // *J. Macromol. Sci. Part C.* — 1980. — Vol. 19, No. 1. — P. 135—173.
18. Chen Y., Davalos J. F., Ray I., and Kim H.-Y. Accelerated aging tests for evaluations of durability performance of FRP reinforcing bars for concrete structures // *Compos. Struct.* — 2007. — Vol. 78, No. 1. — P. 101—111.
19. Bradshaw R. D. and Brinson L. C. Physical aging in polymers and polymer composites: An analysis and method for time-aging time superposition // *Polym. Eng. Sci.* — 1997. — Vol. 37, No. 1. — P. 31—44.
20. Soykok I. F., Sayman O., and Pasinli A. Effects of hot water aging on failure behavior of mechanically fastened glass fiber/epoxy composite joints // *Composites: Part B.* — 2013. — Vol. 54, Nov. — P. 59—70.
21. Wosu S., Hui D., and Daniel L. Hygrothermal effects on the dynamic compressive properties of graphite/epoxy composite material // *Composites: Part B.* — 2012. — Vol. 43, No. 3. — P. 841—855.
22. Nachtane M., Tarfaoui M., Sassi S., El Moumen A., and Saifaoui D. An investigation of hygrothermal aging effects on high strain rate behaviour of adhesively bonded composite joints // *Composites: Part B.* — 2019. — Vol. 172, Sept. — P. 111—120.
23. Gentry T., Bank L., Barkatt A., and Prian L. Accelerated test methods to determine the long-term behavior of composite highway structures subject to environmental loading // *J. Compos. Technol. Res.* — 1998. — Vol. 20, No. 1. — P. 38—50.

24. *Ma S., He Y., Hui L., and Xu L.* Effects of hygrothermal and thermal aging on the low-velocity impact properties of carbon fiber composites // *Adv. Compos. Mater.* — 2020. — Vol. 29, No. 1. — P. 55—72.

25. *Berens A. R. and Hopfenberg H. B.* Diffusion and relaxation in glassy polymer powders: 2. Separation of diffusion and relaxation parameters // *Polymer.* — 1978. — Vol. 19, No. 5. — P. 489—496.

26. *Bao L.-R. and Yee A. F.* Moisture diffusion and hygrothermal aging in bismaleimide matrix carbon fiber composites-part I: Uni-weave composites // *Compos. Sci. Technol.* — 2002. — Vol. 62, No. 16. — P. 2099—2110.

27. *Zhang J., Cheng X., Guo X., Bao J., and Huang W.* Effect of environment conditions on adhesive properties and material selection in composite bonded joints // *Int. J. Adhes. Adhes.* — 2020. — Vol. 96, Jan. — P. 102302.

28. *Hsiao H. M. and Daniel I. M.* Strain rate behavior of composite materials // *Composites: Part B.* — 1998. — Vol. 29, No. 5. — P. 521—533.

29. *Wang J., Ganga Rao H., Liang R., and Liu W.* Durability and prediction models of fiber-reinforced polymer composites under various environmental conditions: A critical review // *J. Reinf. Plast. Compos.* — 2016. — Vol. 35, No. 3. — P. 179—211.

30. *Nogueira P., Ramirez C., Torres A., Abad M. J., Cano J., Lopez J., López-Bueno I., and Barral L.* Effect of water sorption on the structure and mechanical properties of an epoxy resin system // *J. Appl. Polym. Sci.* — 2001. — Vol. 80, No. 1. — P. 71—80.

Поступила в редакцию 30.07.2020

Окончательный вариант поступил 12.10.2021

Received July 30, 2020 (Oct. 12, 2021)

*A. M. Кумар**, *Р. Парамешваран*, *Р. Раджасекар*, *Ч. Моганаприя*,
Р. Маниваннан

School of Building and Mechanical Sciences, Kongu Engineering College, Erode, Tamilnadu, India

ОБЗОР СВЕРЛЕНИЯ ВОЛОКНИСТО-АРМИРОВАННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ¹

*A. M. Kumar**, *R. Parameshwaran*, *R. Rajasekar*, *C. Moganapriya*, and *R. Manivannan*

A REVIEW ON DRILLING OF FIBER-REINFORCED POLYMER COMPOSITES

Keywords: drilling, composite materials, numerical models, drill geometry, thrust force, delamination

The drilling is a very important machining process to increase the joining efficiency of assembled parts. In this review, the consolidation of various composite materials with different fibers are discussed. Different drill tools, their materials and geometries, and drilling methods, such as conventional, vibration-assisted, and high-speed ones, are considered, and various numerical models for determining the critical thrust force and delamination are analyzed. It is concluded that unconventional geometries and materials give better results in reducing the thrust force and delamination compared than the traditional materials and geometrical shapes of drill tools.

Ключевые слова: сверление, материалы композитные, модели численные, геометрия сверла, сила осевой подачи, расслоение

Процесс сверления — очень важный процесс механической обработки для повышения эффективности соединения собранных деталей. В обзоре объединены различные композитные материалы с разной ориентацией волокон, включая угле- и стекловолокна, кевлар, композит, армированный натуральным волокном, и ламинат волокно / металл. Перечислены различные материалы

*Автор, с которым следует вести переписку: amohanmech2006@gmail.com
Corresponding author: amohanmech2006@gmail.com

¹Перевод с англ.

сверлильного инструмента, геометрия и методы сверления (обычное, вибрационное вспомогательное, высокоскоростное). Рассмотрены численные модели, используемые для определения критической силы тяги и расслоения. Нетрадиционная геометрия и материалы обеспечивают лучшие результаты по снижению силы тяги и расслоения по сравнению с традиционными материалами и геометрическими формами буровых инструментов.

Введение

В настоящее время в разных областях наблюдают увеличение спроса на волокнисто-армированные полимерные композиты: CFRP (углепластики), GFRP (стеклопластики), KFRP (органопластики) и т.д., используемые в промышленности благодаря их превосходным механическим свойствам. При выполнении конструкционной работы неизбежно возникает необходимость крепления слоистых композитов с другими материалами. В основном для соединения компонентов сборки используют болты и заклепки, поскольку в силу анизотропии и армирования механическая обработка деталей из композитов труднее, чем обработка традиционных материалов. Механическая обработка приводит к возникновению разных дефектов (например, расслоений в силу отрыва или выдергивания) и уменьшению прочности. Общая классификация композитных материалов представлена на рис. 1.

Расслоение — основной дефект, возникающий при сверлении. В проведенных ранее исследованиях установили, что 60% деталей самолетов

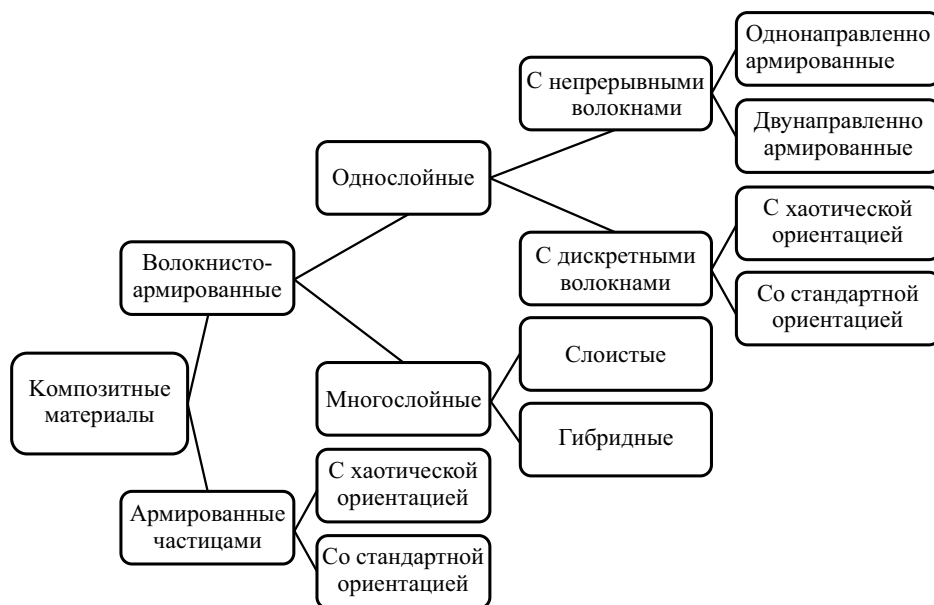


Рис. 1. Основная классификация композитных материалов.



Рис. 2. Параметры сверления композитных материалов.

браковали из-за расслоений в отверстиях. Для сведения брака к минимуму и повышения эффективности соединения следует избегать расслоений и других дефектов, обусловленных сверлением.

В отношении механической обработки композитных материалов опубликовано несколько обзоров [1—6]. Основные параметры сверления композитных материалов приведены на рис. 2.

1. Композитные материалы и ориентация волокон

Разные композитные материалы и ориентация в них волокон указаны в табл. 1. В [7] рассмотрено расслоение на входе и выходе углепластика (однонаправленного и тканого), изготовленного из препрега. В исследовании для сверления использовали ступенчатое сверло из карбида вольфрама и установили, что срок службы инструмента можно увеличить, выполняя сверление тканых композитов с силой осевой подачи, меньшей 125 Н, и крутящим моментом, меньшим 65 Н·мм. В [8] численными и экспериментальными методами исследовали высверливание отверстий

Композитные материалы и ориентация волокон в них

Материал	Слой/лист	Источник
CFRP	Однонаправленный	[7, 10—13, 15, 17, 20—32]
	Двунаправленный и тканый	[7—9, 34—47]
GFRP	Однонаправленный	[21, 48—58]
	Тканый	[59—70]
	Двунаправленный	[35, 65]
	Мат из рубленой стеклопряди	[71, 72]
Композит/металл	CFRP/титан	[73—76]
	GFRP/GLARE	[77—80]
	CFRP/алюминий	[79, 81—86]
KFRP	Алюминий/CFRP/титан	[87, 88]
	Органопластик/керамика	[3, 4, 89]
Натуральное волокно	Сизаль, банан, розелла, койр	[6, 18, 90—93]

в образцах углепластика. Количество слоев под резцом варьировали от одного до шести, увеличивая нагрузку с 360 до 1935 Н. В ходе сверления использовали сверла из разных материалов и установили, что твердосплавный инструмент создает большую силу осевой подачи, чем сверло из быстрорежущей стали. В [9] изучали расслоение при сверлении однонаправленного стеклопластика и предложили спиральное сверло с углом заточки 90° при вершине. В [10] изучали, как скорость резания влияет на износ инструмента и силу осевой подачи, а также проанализировали, как температура боковой поверхности зависит от скоростей подачи и резания при сверлении [11]. В [12] сообщили, что в случае углепластика для нейтрализации эффекта скошенной кромки необходимо предварительное сверление сверлом с двойным кручением (с двумя бороздками). При использовании специального режущего инструмента предварительное сверление углепластика не требовалось. В [13] выполнили сверление углепластика, используя три разных сверла (два с покрытием и одно без покрытия), ни у одного из которых не уменьшился износ или повреждение композита. Сверла спиральной и С-образной формы, применяемые для сверления однонаправленных углепластиков, создавали меньшую силу осевой подачи. Для предсказания силы осевой подачи, непрорезанной толщины при максимальной силе осевой подачи и расслоения при сверлении также использовали конечно-элементную модель [14]. Сравнение экспериментальных и численных моделей выполнили для однонаправленных углепластика и стеклопластика. Отмечено, что силы, возникающие между волокнами и инструментом, обусловили смятие композитов. В [15] для предсказания расслоения на выходе из отверстия, просверленного в композите с длинными волокнами, применили численный метод. В [16]

отметили увеличение износа боковой поверхности при использовании сверла из карбида вольфрама для сверления тканого углепластика при высоких скоростях шпинделя и высокой температуре боковой поверхности, обусловленной сильным истиранием порванных волокон и сверла. На силу резания в большей степени влияли углы заточки и ориентация волокон [17, 18]. В [19] исследовали сверление одно- и многонаправленных углепластиков с помощью концевой фрезы.

В [34] изучали силу осевой подачи и крутящий момент при сверлении углепластиков с использованием твердосплавного сверла-коронки и наблюдали, что оно создает минимальную силу осевой подачи и крутящий момент по сравнению с твердосплавным сверлом. В [37] отметили, что расслоение тканых композитов можно уменьшить на 60—80% на выходе сверла. В [38] показали, что сила осевой подачи, крутящий момент и расслоение возрастают с увеличением скорости подачи и уменьшаются с увеличением скорости шпинделя. В [71] оптимизировали параметры сверления стеклопластика с рублеными волокнами.

1.1. Слоистые композиты с металлическими волокнами. Сверление композитов с металлическими волокнами — процесс утомительный в силу разных свойств их составляющих. В [73] установили, что коэффициент износа инструмента из карбида вольфрама с титановым покрытием больше, чем из поликристаллического алмаза с титановым покрытием. Изменение модуля упругости вызывает изменение диаметра отверстия по всей толщине слоистых материалов с металлическими волокнами. Для уменьшения стоимости высверливания отверстий в волокнисто-армированных материалах использовали сверла с твердосплавным покрытием. В [74] изучали сверление набора из углепластика на основе бисмалеимидной смолы и пластины из титанового сплава с использованием сверл из быстрорежущей стали, быстрорежущей легированной и твердосплавной стали. Сверло из твердосплавной стали продемонстрировало наилучшие результаты с точки зрения повреждения поверхности, термического повреждения и стойкости инструмента. В [87] отметили, что срок службы твердосплавных сверл без покрытия больше, чем твердосплавных сверл с алмазным покрытием при сверлении набора слоев титан/однонаправленный углепластик/алюминий.

В [76] для уменьшения расслоения и образования заусенцев, возникающих при традиционном высверливании отверстий в наборе углепластик/титан, использовали спиральную фрезу. В [77, 94] исследовали округлость отверстия, повреждения на входе и выходе и образование стружки композита GLARE (на основе эпоксидной матрицы, армированной стеклянными и алюминиевыми волокнами) при сверлении. Отмечено, что скорость вращения шпинделя и скорость подачи в наибольшей степени влияли на толщину и высоту заусенцев.

Геометрия и материал сверл

Геометрия и тип	Материал	Источник
Твист-сверло	Быстрорежущая сталь	[14, 49, 51, 61, 64, 90, 91, 95]
	Победит без покрытия	[33, 35, 41, 42, 60, 71, 73, 78, 81]
	Победит с покрытием	[31, 38, 42]
	Поликристаллический алмаз	[9]
	Закаленная сталь	[35]
Ступенчатая	Быстрорежущая сталь/победит	[42, 96]
Четырехгранная пирамида	То же	[39, 65]
Шпоночная фреза	" "	[41, 97—99]
С прямыми канавками	Победит	[35, 41, 65, 100]
Керновое долото	Поликристаллический алмаз	[34, 89]
	Наконечник покрыт алмазной крошкой	[95]
Специальная	Торец из твердого сплава, быстрорежущей стали, поликристаллического алмаза	[9, 20]

2. Геометрия и материал сверл

В табл. 2 указаны материалы и геометрия сверл. Большинство исследований проведено с использованием только твист-сверла (twist drill). Материал сверла также сильно влияет на срок службы и расслоение композита при сверлении. Среди разных типов сверл наибольшее внимание исследователей привлекли сверла из быстрорежущей и твердосплавной стали.

В [51] исследовали силу осевой подачи, создаваемую при сверлении волокнисто-армированного стеклопластика 5-миллиметровым твист-сверлом с углом спирали 30° . Для уменьшения износа инструмента его меняли после каждых пяти экспериментов. Использовали сверла с углами заточки 118° и 135° и сверло из быстрорежущей стали с углом наклона спирали 30° [49]. В [14] изучали расслоение в углепластике при сверлении спиральным, шпоночным и специальным ступенчатым сверлами. Ступенчатое сверло продемонстрировало наилучшие результаты, создав меньшее расслоение. В [9] исследовали силу осевой подачи при сверлении сверлами из быстрорежущей и твердосплавной стали и с поликристаллическим алмазным покрытием. Сверла из быстрорежущей стали создали наибольшую силу осевой подачи.

3. Методы сверления

Для высверливания отверстий в многослойных композитах применяли лишь несколько нетрадиционных методов механической обработки, среди

Методы сверления

Метод	Источник	Примечание
Традиционный	[14, 21, 31, 34, 35, 38, 39, 49, 51, 62, 65, 71, 78, 89—91, 95]	Скорость резания < 100 м/мин (обычно скорость вращения шпинделя < 8000 об/мин). Стандартное твист-сверло, шпоночная фреза
С низкочастотной поддержкой	[25, 61, 86, 102]	Скорость резания < 200 м/мин, наибольшая скорость шпинделя 22000 об/мин
Высокоскоростной	[16, 31, 34, 102]	Скорость резания > 200 м/мин, победитовое твист-сверло

которых можно отметить гидроабразивную, электроэрозионную и некоторые другие [101]. Для высверливания отверстий в многослойных композитах с помощью традиционной механической обработки используют некоторые специальные методы. В настоящем обзоре основное внимание уделено высокоскоростному сверлению, сверлению с низкочастотной поддержкой и с опорной пластиной (см. табл. 2).

3.1. Традиционное сверление. В табл. 3 указаны методы сверления отверстий с использованием разных сверл, разделенные на три группы: традиционный, с низкочастотной поддержкой и высокоскоростной.

3.2. Сверление с низкочастотной поддержкой (СНП) в течение последних нескольких лет в основном использовали исследователи и в промышленности. Операция сверления сочетает низкоамплитудное колебание с низкочастотной подачей. Традиционный процесс сверления — это непрерывный процесс резания, а СНП — прерывистый. Традиционное сверление создает большую силу осевой подачи, а при тех же условиях резания с помощью СНП уменьшает ее на 20—30%.

3.3. Высокоскоростное сверление в последние годы в силу высокой производительности вызывает все больший интерес. Как и при применении СНП, сила осевой подачи, развиваемая при высокоскоростном сверлении, значительно меньше. Однако этот способ очень дорог по сравнению с традиционным сверлением. Цель его использования — уменьшение расслоения за счет сочетания высокой скорости резания, низкой скорости подачи и заданного угла сверла при высверливании отверстия.

3.4. Использование опорной плиты при сверлении слоистых композитов уменьшает расслоение на 60—70%. Этот метод также позволяет увеличить скорость изготовления при высокой скорости подачи.

4. Расслоение, вызванное сверлением

Расслоение, обусловленное сверлением, — это потеря сцепления в слоистых композитах в силу большой силы осевой подачи, возникающей при сверлении.

Табл. 4

Численные модели для расчета критической силы осевой подачи

Источник	Условие сверления	Критическая сила осевой подачи
1	2	3
[81]	CFRP/Al и CFRP; толщина плиты 4,2 мм; скорость шпинделя 2020 и 2750 об/мин; скорость подачи 0,05, 0,1 и 0,15 мм/об; твист-сверло; двойной конус M1, M2 и M3; диаметр сверла 6,35 мм	$\left(\frac{G_I}{G_{IC}}\right)^\alpha + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}}\right)^\alpha = 1$
[104]	Льняное волокно; толщина пластины 1,4, 2,14 и 2,68 мм; скорость подачи 0,03, 0,06 и 0,12 мм/об; твист-сверло с углом заточки 118, 110, 100, 90, 80, 70°; диаметр сверла 6 мм; скорость резки 15, 20 и 25 м/мин	<p>Сосредоточенная нагрузка $T_1 = \pi\sqrt{32G_{IC}D'}$, эквивалентная равномерно распределенная нагрузка $T_2 = \frac{\pi\sqrt{32G_{IC}D'}}{1-1/2s^2}$, равномерно распределенная нагрузка</p> $T_3 = \frac{\pi\sqrt{32G_{IC}D'}}{\sqrt{J^2\left(1-\frac{1}{2}S^2\right)^2 + (1-J)^2\left(1-\frac{1}{2}\tau^2S^2\right)^2}}$
[105]	CFRP; толщина пластины от 0,3 до 0,82 мм (1, 2 и 3 слоя); скорость подачи 0,03 мм/об; скорость шпинделя 2000, 0,06 и 0,12 об/мин; сверло диаметром 6 мм с твердосплавными вставками диаметром 6 мм	<p>Модель Чжанга $F_Z = \sqrt{\frac{\pi G_{IC}}{\xi(C_3 - K)}}$,</p> $K = \frac{\pi}{2} \left[\frac{A_{11}}{\xi} (3C^2 + C_4^2) + 2A_{12} (C_1C_2 + C_4C_5) + \frac{2A_{16}}{\xi} (2\xi C_1C_4 + 3C_1C_5 + C_2C_4) + A_{26} (3\xi C_2C_4 + 2C_2C_5 + \xi C_1C_5) + \frac{16D_{11}}{\xi} (3D_{11} + 2\xi^2 D_{12} + 3\xi^4 D_{22} + 4\xi^2 D_{66}) + \frac{A_{66}}{\xi} \left[\xi (C_1 + C_2)^2 + 3\xi^2 C_4^2 + 3C_5^2 + 2\xi C_4C_5 \right] + \frac{2B_{11}}{\xi} C_1C_3 + 8B_{12}C_3 (\xi C_1 + C_2) + 24B_{16}C_3 \left(C_4 + \frac{C_5}{\xi} \right) + 24B_{22}\xi^2 C_2C_3 + 24B_{26}C_3 (C_5 + \xi C_4) \right],$

Продолжение табл. 4

1	2	3
---	---	---

модель Гурураджа $F_G = \sqrt{\frac{\pi G_{IC}}{\xi \left(\frac{C_3}{3} - K \right)}}$,

модель Чжанга

$$F = \sqrt{\frac{\pi G_{IC}}{\xi \left[\left(\alpha^2 C_3 - (1-\alpha)^2 \frac{C_3}{3} \right) - \left(\alpha^2 K + (1-\alpha)^2 K \right) \right]}}$$

[15] Диаметр сверла 4,8 мм;
скорость резки 1,5 м/мин

Изотропная $F_Z = \pi \left[\frac{8G_{IC} E h^3}{3(1-\nu^2)} \right]^{1/2}$ и

ортотропная модель $F_Z = 8\pi \left(\frac{G_I D}{\frac{1}{3} - \frac{D'}{8D}} \right)^{1/2}$,

где $D = \frac{1}{8}(3D_{11} + 2D_{12} + 4D_{66} + 3D_{22})$,

$$D' = \frac{D_{11} + D_{22}}{2} + \frac{D_{12} + D_{66}}{3}$$

[106] Материал СС160 ЕТ 443;
толщина пластины 6 мм;
скорость шпинделя 2800
об/мин; скорость подачи
0,02, 0,06 и 0,12 мм/об;
скорость резки 53 м/мин;
твист-сверло с углом за-
точки 120 и 85°, четырех-
гранное пирамидальное,
специальное ступенчатое
и кинжальное

Изотропный материал и концентрическая

нагрузка $F_{crit} = \pi \left[\frac{8G_{IC} E_1 h^3}{3(1-\nu_{I2}^2)} \right]^{1/2}$,

ортотропный материал и точечная нагрузка

$$F_{crit} = 8\pi \left[\frac{2G_{IC} D}{1 - (D' / 8D)} \right]^{1/2}$$

ортотропный материал и равномерно распре-

ленная нагрузка $F_{crit} = 8\pi \left[\frac{G_{IC} D}{(1/3) - D' / 8D} \right]^{1/2}$

[107] CFRP; толщина пла-
стины 4,2 мм; скорость
шпинделя 2000 об/мин;
скорость подачи 0,02 мм/об;
твист-сверло диаметром
6 мм

Модель Чжанга $F_C = \sqrt{\frac{\pi G_{IC}}{\xi (C_3 - K)}}$,

модель Хоченга $F_C = \pi \sqrt{\frac{8G_{IC} E h^3}{3(1-\nu^2)}}$,

Продолжение табл. 4

1	2	3
		<p>модель Гурураджа $F_C = \sqrt{\frac{\pi G_{IC}}{\xi \left[\left(\frac{C_3}{3} \right) - K \right]}}$,</p> <p>модель Гурураджа с учетом температурного эффекта $F_C = \sqrt{\frac{\pi (K^* + G_{IC})}{\xi \left[\left(\frac{C_3}{3} \right) - K \right]}}$</p> <p>Твист-сверло</p> $F_A = \pi \sqrt{32 G_{IC} M} = \pi \left[\frac{8 G_{IC} E h^3}{3(1-\nu^2)} \right]^{1/2},$ <p>кольцевое сверло $F_S = \pi \sqrt{\frac{32 G_{IC} M}{1-2s^2+s^4}}$,</p> <p>“подсвечниковое” сверло</p> $F_C = \pi (1+\alpha) \sqrt{\frac{32 G_{IC} M}{1+\alpha^2(1-2s^2+s^4)}}$ <p>сверло-коронка</p> $F_{CR} = \pi \beta (2-\beta) \sqrt{\frac{32 G_{IC} M}{\left\{ \left[1-(1-\beta)^4 \right] - (1/2)s^2 \left[1-(1-\beta)^6 \right] \right\}}}$ <p>ступенчатое сверло</p> $(F_T)_i = \pi \left[1-(i\xi)^2 \right] \sqrt{\frac{32 G_{IC} M}{\left\{ \left[1-(i\xi)^4 \right] - (1/2)s^2 \left[1-(i\xi)^6 \right] \right\}}}$ <p style="text-align: center;">$i = 1 - n$</p>
<p>[97]</p>	<p>—</p>	<p>Однонаправленный CFRP; толщина пластины 20 мм; скорость шпинделя 1492 об/мин; твист-сверло диаметром 16 мм; скорость резки 75 м/мин</p> $F_{IC} = 8\pi (1+\nu_{r\theta}) \sqrt{\frac{G_{IC} D}{\left(\frac{7+8\nu_{r\theta} + \nu_{r\theta}^2}{3} \right) \frac{D'}{8D}}}$ $D' = \frac{(D_{11} + D_{22})(9 + 2\nu_{r\theta} + \nu_{r\theta}^2)}{2} + \frac{(D_{12})(25 + 2\nu_{r\theta} + \nu_{r\theta}^2) + 2D_{66}(1 + 2\nu_{r\theta} + \nu_{r\theta}^2)}{3}$
<p>[108]</p>		

Продолжение табл. 4

1	2	3
---	---	---

$$F_{2C} = 32\pi D(1 - \nu_{r\theta}^2)(a^2 - b^2)^2 \sqrt{\frac{-9G_{ICP}(C_1 + C_2 + C_3)}{(3C_1 + C_2 + C_3)}},$$

C_1, C_2, C_3 — переменные, зависящие от a, b, D
и D_{ij}

$$C_1 = 96 \left[\left(-2D_{11} - 2D_{22} + \frac{8}{3}D_{66} - \frac{4}{3}D_{12} \right) \nu_{r\theta} + \right. \\ \left. + \frac{16}{3}D - \frac{1}{3}D_{11} - \frac{1}{3}D_{22} - 4D_{66} + \right. \\ \left. C_2 = 72 \left[\left(-16D + 3D_{11} - 3D_{22} + 4D_{66} - 2D_{12} \right) \nu_{r\theta}^2 + \right. \\ \left. + \frac{32}{3}D - 6D_{11} - 6D_{22} - 8D_{66} - 4D_{12} \right] \nu_{r\theta} + \\ \left. + \frac{80}{3}D - \frac{7}{3}D_{11} - \frac{7}{3}D_{22} - \frac{52}{3}D_{66} + \frac{38}{3}D_{12} \right] b^2 + \\ + a^2 \left[\left(-\frac{16}{3}D + D_{11} + D_{22} + \frac{4}{3}D_{66} + \frac{2}{3}D_{12} \right) \nu_{r\theta}^2 \times \right. \\ \left. \times \left(-\frac{32}{3}D - 2D_{11} - 2D_{22} - \frac{8}{3}D_{66} - \frac{4}{3}D_{12} \right) \right] \nu_{r\theta} + 16D - \\ - \frac{5}{3}D_{11} - \frac{5}{3}D_{22} - \frac{28}{3}D_{66} + 6D_{12} \left. \right] (1 + \nu_{r\theta})^2 (a^2 - b^2) b^4 \ln \left(\frac{b}{a} \right), \\ C_3 = 3 \left[\left(-\frac{208}{3}D + 13D_{11} + 13D_{22} + \frac{52}{3}D_{66} + \frac{26}{3}D_{12} \right) \nu_{r\theta}^4 \right. \\ - 416D \nu_{r\theta}^3 + \left(-\frac{640}{3}D - 66D_{11} - 66D_{22} - \frac{680}{3}D_{66} + \frac{284}{3}D_{12} \right) \nu_{r\theta}^2 \\ + (416D - 112D_{11} - 112D_{22} - 384D_{66} + 160D_{12}) \nu_{r\theta} + \\ + \frac{848}{3}D - 27D_{11} - 27D_{22} - \frac{524}{3}D_{66} + \frac{362}{3}D_{12} \left. \right] b^4 \\ - 2 \left[\left(-\frac{16}{3}D + D_{11} + D_{22} + \frac{4}{3}D_{66} + \frac{2}{3}D_{12} \right) \nu_{r\theta}^2 \times \right. \\ \left. \left(-\frac{128}{3}D + 2D_{11} + 2D_{22} + \frac{8}{3}D_{66} + \frac{4}{3}D_{12} \right) \right] \nu_{r\theta} - \frac{112}{3}D +$$

1	2	3
		$\times +9D_{11} - 9D_{22} + \frac{4}{3}D_{66} + \frac{50}{3}D_{12} \Big] a^2 b^2 (v_{r\theta} - 1)^2 +$ $+ \left[\left(-\frac{16}{3}D + D_{11} + D_{22} + \frac{4}{3}D_{66} + \frac{2}{3}D_{12} \right) v_{r\theta}^2 \times \right.$ $\times \left. \left(-\frac{128}{3}D + 2D_{11} + 2D_{22} + \frac{8}{3}D_{66} + \frac{4}{3}D_{12} \right) \right] v_{r\theta} - \frac{112}{3}D +$ $+ 9D_{11} - 9D_{22} + \frac{4}{3}D_{66} + \frac{50}{3}D_{12} \Big] a^4 (v_{r\theta} - 1)^2 (a^2 - b^2)^2.$

4.1. Оценку расслоения можно выполнить разными методами, но обычно используют отношение F_d максимального диаметра D_{\max} к номинальному $D_{\text{ном}}$:

$$F_d = D_{\max} / D_{\text{ном}}.$$

Измерение расслоения с помощью коэффициента F_d неясно, поскольку несколько волокон отрываются и выдергиваются на значительной ширине, как видно из данных рис. 3, и поэтому трудно определить площадь расслоения просверленного отверстия.

4.2. Методы уменьшения расслоения при сверлении. Следует избегать расслоения при сверлении слоистых композитов, поэтому развиваемая сила осевой подачи должна быть меньше критической, что зависит от геометрии сверла и толщины прорезаемых слоев.

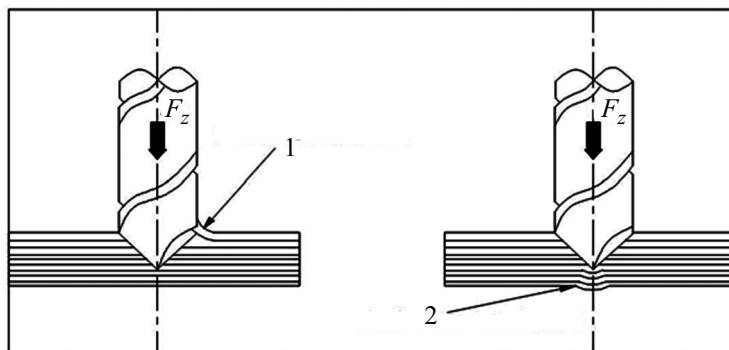


Рис. 3. Расслоение при сверлении отрывом (1) и выталкиванием (2).

5. Сила осевой подачи

Установлено, что сила осевой подачи, возникающая при сверлении слоистых композитов, — основная причина расслоения, напрямую влияющая на площадь области расслоения. Исследователи пришли к выводу, что при силе осевой подачи меньше критической область расслоения будет минимальной [103]. Если сила осевой подачи больше критической, ее величина прямо пропорциональна площади расслоения.

В [59] отмечено, что скорость резания не сильно влияет на расслоение, но скорость подачи прямо пропорциональна силе осевой подачи. Также исследовали влияние скорости резания на силу осевой подачи при сверлении тканых стеклопластиков. При использовании нового сверла скорость резания незначительно влияла на силу осевой подачи, но существенно возрастала при использовании сверла с предварительным износом. В [28] указали, что угол заточки сверла сильно влияет на силу осевой подачи при сверлении слоистых углепластиков и стеклопластиков. Срок службы сверла зависит от силы осевой подачи.

Расслоение, возникающее при использовании твист-сверла с применением низкочастотной поддержки, на 20—30% меньше, чем при традиционном сверлении. Следует отметить, что при высоких скоростях резания (больше 80 м/мин) скорость подачи не сильно влияет на силу осевой подачи, но при нормальной скорости она возрастает с увеличением скорости подачи.

5.1. Численная модель для определения критической силы осевой подачи (табл. 4). В [81] исследовали влияние силы осевой подачи на расслоение на выходе из отверстия при сверлении набора слоев углепластик/алюминий. При анализе использовали две численные модели. В одной рассмотрели выход сверла с учетом одного слоя, а во второй — с учетом слоя алюминия. В [104] отметили, что скорость подачи влияет на силу осевой подачи. В данном исследовании использовано три численных метода: классическая теория изгиба пластин, механика упругого разрушения и механика косоугольного резания. Предложенную модель можно использовать для устранения расслоений путем онлайн-мониторинга силы осевой подачи. В [105] исследовали критическую силу осевой подачи в разных местах возникновения расслоения. В [106] показали, что скорость подачи и геометрия режущей кромки сверла уменьшают количество дефектов расслоения.

Заключение

Данный обзор дает представление о разных методах сверления, материалах сверл, расслоении, возникающем при сверлении волокнисто-армированных композитов и развитии силы осевой подачи. Рассмотрены нетрадиционные сверла, такие как керновое долото, ступенчатые сверла и сверла с прямыми канавками. Среди разных методов сверления высокоскоростное является высокоэффективным и производит отверстия хо-

рошего качества. Разными исследователями предложены и исследованы численные модели силы осевой подачи и коэффициента расслоения. Общий вывод данного обзора заключается в том, что при низких скоростях подачи и высоких скоростях сверления расслоение уменьшается, а срок службы инструмента увеличивается. Для понимания прочности соединения сборки деталей необходимы дальнейшие исследования оценки качества просверленных отверстий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mishra R., Malik J., Singh I., and Davim J. P.* Neural network approach for estimating the residual tensile strength after drilling in uni-directional glass fiber reinforced plastic laminates // *Mater. Des.* — 2010. — Vol. 31, No. 6. — P. 2790—2795.
2. *Hrechuk A., Bushlya V., and Ståhl J. E.* Hole-quality evaluation in drilling fiber-reinforced composites // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 204. — P. 378—387.
3. *Kumar A. M., Parameshwaran R., Krishnaraj V., and Rajasekar R.* Effects of thrust force variation during the drilling of pure and chemically treated Kevlar based polymer composite // *Mater. Testing.* — 2019. — Vol. 61, No. 9. — P. 907—913.
4. *Parameshwaran R., Rajasekar R., Ragavendra V. H., and Praveenraj N.* Effect of thrust force, torque, and induced temperature on Kevlar reinforced composites during drilling process // *Mater. Today: Proc.* — 2020.
5. *Angadi S., Ashrith H., Gaitonde V., Karnik S., and Doddamani M.* Experimental investigations on hole quality in drilling of cenosphere reinforced epoxy composite // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., IOP Publ.*, 2019.
6. *Lotfi A., Li H., Dao D. V., and Prusty G.* Natural fiber-reinforced composites: A review on material, manufacturing, and machinability // *J. Thermoplast. Compos. Mater.* — 2019. — 0892705719844546.
7. *Shyha I., Soo S. L., Aspinwall D., and Bradley S.* Effect of laminate configuration and feed rate on cutting performance when drilling holes in carbon fibre reinforced plastic composites // *J. Mater. Processing Technol.* — 2010. — Vol. 210, No. 8. — P. 1023—1034.
8. *Rahmé P., Landon Y., Lachaud F., Piquet R., and Lagarrigue P.* Analytical models of composite material drilling // *Int. J. Adv. Manufacturing Technol.* — 2011. — Vol. 52, Nos. 5—8. — P. 609—617.
9. *Madhavan S. and Prabu S. B.* Experimental investigation and analysis of thrust force in drilling of carbon fibre reinforced plastic composites using response surface methodology // *Int. J. Modern Eng. Res.* — 2012. — Vol. 2, No. 4. — P. 2719—2723.
10. *Lin S. and Chen I.* Drilling carbon fiber-reinforced composite material at high speed // *Wear.* — 1996. — Vol. 194, Nos. 1—2. — P. 156—162.
11. *Chen W.-C.* Some experimental investigations in the drilling of carbon fiber-reinforced plastic (CFRP) composite laminates // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 1997. — Vol. 37, No. 8. — P. 1097—1108.
12. *Piquet R., Ferret B., Lachaud F., and Swider P.* Experimental analysis of drilling damage in thin carbon/epoxy plate using special drills // *Composites: Part A.* — 2000. — Vol. 31, No. 10. — P. 1107—1115.
13. *Durao L., De Moura M., and Marques A. T.* Numerical simulation of the drilling process on carbon/epoxy composite laminates // *Composites: Part A.* — 2006. — Vol. 37, No. 9. — P. 1325—1333.
14. *Durão L. M. P., Magalhães A., Marques A. T., Baptista A., and Figueiredo M.* Drilling of fibre reinforced plastic laminates // *Mater. Sci. Forum, Trans. Tech. Publ.*, 2008.

15. *Zitoune R. and Collombet F.* Numerical prediction of the thrust force responsible of delamination during the drilling of the long-fibre composite structures // *Composites: Part A.* — 2007. — Vol. 38, No. 3. — P. 858—866.

16. *Rawat S. and Attia H.* Characterization of the dry high speed drilling process of woven composites using Machinability Maps approach // *CIRP Ann.* — 2009. — Vol. 58, No. 1. — P. 105—108.

17. *Jahromi A. S. and Bahr B.* An analytical method for predicting cutting forces in orthogonal machining of unidirectional composites // *Compos. Sci. Technol.* — 2010. — Vol. 70, No. 16. — P. 2290—2297.

18. *Rezghi Maleki H., Hamedi M., Kubouchi M., and Arao Y.* Experimental investigation on drilling of natural flax fiber-reinforced composites // *Mater. Manuf. Processes.* — 2019. — Vol. 34, No. 3. — P. 283—292.

19. *Kalla D., Sheikh-Ahmad J., and Twomey J.* Prediction of cutting forces in helical end milling fiber reinforced polymers // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 2010. — Vol. 50, No. 10. — P. 882—891.

20. *Marques A. T., Durão L. M., Magalhães A. G., Silva J. F., and Tavares J. M. R.* Delamination analysis of carbon fibre reinforced laminates: evaluation of a special step drill // *Compos. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 69, No. 14. — P. 2376—2382.

21. *Kishore R., Tiwari R., Dvivedi A., and Singh I.* Taguchi analysis of the residual tensile strength after drilling in glass fiber reinforced epoxy composites // *Mater. Des.* — 2009. — Vol. 30, No. 6. — P. 2186—2190.

22. *Park K. Y., Choi J. H., and Lee D. G.* Delamination-free and high efficiency drilling of carbon fiber reinforced plastics // *J. Compos. Mater.* — 1995. — Vol. 29, No. 15. — P. 1988—2002.

23. *Bhatnagar N., Ramakrishnan N., Naik N., and Komanduri R.* On the machining of fiber reinforced plastic (FRP) composite laminates // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 1995. — Vol. 35, No. 5. — P. 701—716.

24. *Murphy C., Byrne G., and Gilchrist M.* The performance of coated tungsten carbide drills when machining carbon fibre-reinforced epoxy composite material // *Proc. Institution Mech. Eng. Part B, J. Eng. Manuf.* — 2002. — Vol. 216, No. 2. — P. 143—152.

25. *Linbo Z., Lijiang W., and Xin W.* Study on vibration drilling of fiber reinforced plastics with hybrid variation parameters method // *Composites: Part A.* — 2003. — Vol. 34, No. 3. — P. 237—244.

26. *Wang X., Wang L., and Tao J.* Investigation on thrust in vibration drilling of fiber-reinforced plastics // *J. Mater. Process. Technol.* — 2004. — Vol. 148, No. 2. — P. 239—244.

27. *Zitoune R., Collombet F., Lachaud F., Piquet R., and Pasquet P.* Experiment–calculation comparison of the cutting conditions representative of the long fiber composite drilling phase // *Compos. Sci. Technol.* — 2005. — 65, Nos. 3—4. — P. 455—466.

28. *Durão L., De Moura M., and Marques A.* Numerical prediction of delamination onset in carbon/epoxy composites drilling // *Eng. Fracture Mech.* — 2008. — Vol. 75, No. 9. — P. 2767—2778.

29. *Durão L. M. P., Gonçalves D. J., Tavares J. M. R., de Albuquerque V. H. C., and Marques A. T.* Comparative analysis of drills for composite laminates // *J. Compos. Mater.* — 2012. — Vol. 46, No. 14. — P. 1649—1659.

30. *Rao G. V. G., Mahajan P., and Bhatnagar N.* Micro-mechanical modeling of machining of FRP composites—Cutting force analysis // *Compos. Sci. Technol.* — 2007. — Vol. 67, Nos. 3—4. — P. 579—593.

31. *Iliescu D., Gehin D., Gutierrez M., and Girot F.* Modeling and tool wear in drilling of CFRP // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — Vol. 50, No. 2. — P. 204—213.

32. *Amini S., Baraheni M., and Moeini Afzal M.* Statistical study of the effect of various machining parameters on delamination in drilling of carbon fiber reinforced composites // *Compos. Sci. Technol.* — Vol. 5, No. 1. — P. 41—50.
33. *Rawat S. and Attia H.* Wear mechanisms and tool life management of WC-Co drills during dry high speed drilling of woven carbon fibre composites // *Wear.* — 2009. — Vol. 267, Nos. 5—8. — P. 1022—1030.
34. *Liu D., Xu H. H., Zhang C. Y., and Yan H. J.* Drilling force in high speed drilling carbon fiber reinforced plastics (CFRP) using half core drill // *Adv. Mater. Res.: Trans. Tech. Publ.*, 2010.
35. *Lazar M.-B. and Xirouchakis P.* Experimental analysis of drilling fiber reinforced composites // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 2011. — Vol. 51, No. 12. — P. 937—946.
36. *Sadek A., Meshreki M., and Attia M.* Characterization and optimization of orbital drilling of woven carbon fiber reinforced epoxy laminates // *CIRP Ann.* — 2012. — Vol. 61, No. 1. — P. 123—126.
37. *Tsao C., Hocheng H., and Chen Y.* Delamination reduction in drilling composite materials by active backup force // *CIRP Ann.* — 2012. — Vol. 61, No. 1. — P. 91—94.
38. *Phadnis V. A., Makhdum F., Roy A., and Silberschmidt V. V.* Drilling in carbon/epoxy composites: experimental investigations and finite element implementation // *Composites: Part A.* — 2013. — Vol. 47. — P. 41—51.
39. *Krishnamoorthy A., Boopathy S. R., and Palanikumar K.* Delamination prediction in drilling of CFRP composites using artificial neural network // *J. Eng. Sci. Technol.* — 2011. — Vol. 6, No. 2. — P. 191—203.
40. *Gaitonde V., Karnik S., Rubio J. C., Correia A. E., Abrao A., and Davim J. P.* Analysis of parametric influence on delamination in high-speed drilling of carbon fiber reinforced plastic composites // *J. Mater. Process. Technol.* — 2008. — Vol. 203, Nos. 1—3. — P. 431—438.
41. *Faraz A., Biermann D., and Weinert K.* Cutting edge rounding: An innovative tool wear criterion in drilling CFRP composite laminates // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 2009. — Vol. 49, No. 15. — P. 1185—1196.
42. *Shyha I., Aspinwall D., Soo S. L., and Bradley S.* Drill geometry and operating effects when cutting small diameter holes in CFRP // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 2009. — Vol. 49, Nos. 12—13. — P. 1008—1014.
43. *Davim J. P. and Reis P.* Drilling carbon fiber reinforced plastics manufactured by autoclave—experimental and statistical study // *Mater. Des.* — 2003. — Vol. 24, No. 5. — P. 315—324.
44. *Davim J. P. and Reis P.* Study of delamination in drilling carbon fiber reinforced plastics (CFRP) using design experiments // *Compos. Struct.* — 2003. — Vol. 59, No. 4. — P. 481—487.
45. *Davim J. P. and Reis P.* Damage and dimensional precision on milling carbon fiber-reinforced plastics using design experiments // *J. Mater. Process. Technol.* — 2005. — Vol. 160, No. 2. — P. 160—167.
46. *Davim J. P., Rubio J. C., and Abrao A.* A novel approach based on digital image analysis to evaluate the delamination factor after drilling composite laminates // *Compos. Sci. Technol.* — 2007. — Vol. 67, No. 9. — P. 1939—1945.
47. *Tsao C. and Hocheng H.* Taguchi analysis of delamination associated with various drill bits in drilling of composite material // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 2004. — Vol. 44, No. 10. — P. 1085—1090.
48. *Lasri L., Nouari M., and El Mansori M.* Modelling of chip separation in machining unidirectional FRP composites by stiffness degradation concept // *Compos. Sci. Technol.* — 2009. — Vol. 69, No. 5. — P. 684—692.

49. *Kilickap E.* Optimization of cutting parameters on delamination based on Taguchi method during drilling of GFRP composite // *Expert Systems with Applications*. — 2010. — Vol. 37, No. 8. — P. 6116—6122.
50. *Baskaran G., Gowri S., and Krishnamurthy R.* Study on vital static properties of fine blanking of GFRP composites with that of conventional drilling // *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* — 2010. — Vol. 50, Nos. 5—8. — P. 659—666.
51. *Karimi N. Z., Heidary H., Minak G., and Ahmadi M.* Effect of the drilling process on the compression behavior of glass/epoxy laminates // *Compos. Struct.* — 2013. — Vol. 98. — P. 59—68.
52. *Mathew J., Ramakrishnan N., and Naik N.* Investigations into the effect of geometry of a trepanning tool on thrust and torque during drilling of GFRP composites // *J. Mater. Process. Technol.* — 1999. — Vol. 91, Nos. 1—3. — P. 1—11.
53. *Ramkumar J. Aravindan S., Malhotra S., and Krishnamurthy R.* An enhancement of the machining performance of GFRP by oscillatory assisted drilling // *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* — 2004. — Vol. 23, Nos. 3—4. — P. 240—244.
54. *Ramkumar J., Malhotra S., and Krishnamurthy R.* Effect of workpiece vibration on drilling of GFRP laminates // *J. Mater. Process. Technol.* — 2004. — Vol. 152, No. 3. — P. 329—332.
55. *Capello E.* Workpiece damping and its effect on delamination damage in drilling thin composite laminates // *J. Mater. Process. Technol.* — 2004. — Vol. 148, No. 2. — P. 186—195.
56. *Rao G. V. G., Mahajan P., and Bhatnagar N.* Machining of UD-GFRP composites chip formation mechanism // *Compos. Sci. Technol.* — 2007. — Vol. 67, Nos. 11—12. — P. 2271—2281.
57. *Mkaddem A., Demirci I., and El Mansori M.* A micro-macro combined approach using FEM for modelling of machining of FRP composites: Cutting forces analysis // *Compos. Sci. Technol.* — 2008. — Vol. 68, Nos. 15—16. — P. 3123—3127.
58. *Ghasemi F. A., Hyvadi A., Payganeh G., and Arab N. B. M.* Effects of drilling parameters on delamination of glass-epoxy composites // *Australian J. Basic Appl. Sci.* — 2011. — Vol. 5, No. 12. — P. 1433—1440.
59. *Khashaba U., El-Sonbaty I., Selmy A., and Megahed A.* Machinability analysis in drilling woven GFR/epoxy composites: Part I: Effect of machining parameters // *Composites: Part A*. — 2010. — Vol. 41, No. 3. — P. 391—400.
60. *Işık B. and Ekici E.* Experimental investigations of damage analysis in drilling of woven glass fiber-reinforced plastic composites // *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* — 2010. — Vol. 49, Nos. 9—12. — P. 861—869.
61. *Mehbudi P., Baghlani V., Akbari J., Bushroa A., and Mardi N.* Applying ultrasonic vibration to decrease drilling-induced delamination in GFRP laminates // *Procedia Cirp.* — 2013. — Vol. 6. — P. 577—582.
62. *Chakladar N. D., Pal S. K., and Mandal P.* Drilling of woven glass fiber-reinforced plastic—an experimental and finite element study // *Int. J. Adv. Manufacturing Technol.* — 2012. — Vol. 58, Nos. 1—4. — P. 267—278.
63. *Kentli A.* Experimental study on peck drilling of GFRP and prediction of drilling-induced damage using ANN // *Sci. Res. Essays*. — 2011. — Vol. 6, No. 7. — P. 1546—1554.
64. *Jayabal S. and Natarajan U.* Influence of cutting parameters on thrust force and torque in drilling of E-glass/polyester composites // *Indian J. Eng. Mater. Sci.* — 2010. — Vol. 17, No. 6. — P. 463—470.
65. *Palanikumar K.* Experimental investigation and optimisation in drilling of GFRP composites // *Measurement*. — 2011. — Vol. 44, No. 10. — P. 2138—2148.
66. *Velayudham A., Krishnamurthy R., and Soundarapandian T.* Evaluation of drilling characteristics of high volume fraction fibre glass reinforced polymeric composite // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 2005. — Vol. 45, Nos. 4—5. — P. 399—406.

67. *Velayudham A., Krishnamurthy R., and Soundarapandian T.* Acoustic emission based drill condition monitoring during drilling of glass/phenolic polymeric composite using wavelet packet transform // *Mater. Sci. Eng., A.* — 2005. — Vol. 412, Nos. 1—2. — P. 141—145.
68. *Arul S., Vijayaraghavan L., Malhotra S., and Krishnamurthy R.* Influence of tool material on dynamics of drilling of GFRP composites // *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* — 2006. — Vol. 29, Nos. 7—8. — P. 655—662.
69. *Arul S., Vijayaraghavan L., Malhotra S., and Krishnamurthy R.* The effect of vibratory drilling on hole quality in polymeric composites // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 2006. — Vol. 46, Nos. 3—4. — P. 252—259.
70. *Rubio J. C., Abrao A., Faria P., Correia A. E., and Davim J. P.* Effects of high speed in the drilling of glass fibre reinforced plastic: evaluation of the delamination factor // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 2008. — Vol. 48, No. 6. — P. 715—720.
71. *Murthy B., Rodrigues L., and Devineni A.* Process parameters optimization in GFRP drilling through integration of Taguchi and response surface methodology // *Res. J. Recent Sci.* — 2012. — Vol. 2277. — P. 2502.
72. *Panneerselvam T., Raghuraman S., and Vidyasundar A.* A study to minimise delamination value during drilling chopped strand mat GFRP material // *Int. J. Mach. Machinability Mater.* — 2014. — Vol. 15, Nos. 3—4. — P.136—146.
73. *Park K.-H., Beal A., Kwon P., and Lantrip J.* Tool wear in drilling of composite/titanium stacks using carbide and polycrystalline diamond tools // *Wear.* — 2011. — Vol. 271, No. 11—12. — P. 2826—2835.
74. *Ramulu M., Branson T., and Kim D.* A study on the drilling of composite and titanium stacks // *Compos. Struct.* — 2001. — Vol. 54, No. 1. — P. 67—77.
75. *Kim D. and Ramulu M.* Drilling process optimization for graphite/bismaleimide-titanium alloy stacks // *Compos. Struct.* — 2004. — Vol. 63, No. 1. — P. 101—114.
76. *Denkena B., Boehnke D., and Dege J.* Helical milling of CFRP-titanium layer compounds // *CIRP J. Manufacturing Sci. Technol.* — 2008. — Vol. 1, No. 2. — P. 64—69.
77. *Giasin K. and Ayvar-Soberanis S.* An investigation of burrs, chip formation, hole size, circularity and delamination during drilling operation of GLARE using ANOVA // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 159. — P. 745—760.
78. *Park S. Y., Choi W. J., Choi C. H., and Choi H. S.* Effect of drilling parameters on hole quality and delamination of hybrid GLARE laminate // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 185. — P. 684—698.
79. *Pawar O. A., Gaikhe Y. S., Tewari A., Sundaram R., and Joshi S. S.* Analysis of hole quality in drilling GLARE metal fiber laminates // *Compos. Struct.* — 2015. — Vol. 123. — P. 350—365.
80. *Tyczynski P., Lemanczyk J., and Ostrowski R.* Drilling of CFRP, GFRP, glare type composites // *Aircraft Eng. Aerospace Technol. An Int. J.* — 2014. — Vol. 86, No. 4. — P. 312—322.
81. *Zitoun R., Krishnaraj V., and Collombet F.* Study of drilling of composite material and aluminium stack // *Compos. Struct.* — 2010. — Vol. 92, No. 5. — P. 1246—1255.
82. *Brinksmeier E. and Janssen R.* Drilling of multi-layer composite materials consisting of carbon fiber reinforced plastics (CFRP), titanium and aluminum alloys // *CIRP Ann.* — 2002. — Vol. 51, No. 1. — P. 87—90.
83. *Kim G. W. and Lee K. Y.* Critical thrust force at propagation of delamination zone due to drilling of FRP/metallic strips // *Compos. Struct.* — 2005. — Vol. 69, No. 2. — P. 137—141.
84. *Sánchez Carrilero M., Álvarez M., Ares E., Astorga J., Cano M., and Marcos Bárcena. M.* Dry drilling of metal fiber laminates CF/AA2024. A preliminary study // *Mater. Sci. Forum, Trans. Tech. Publ.* — 2006.

85. *Giasin K., Ayvar-Soberanis S., and Hodzic A.* An experimental study on drilling of unidirectional GLARE fibre metal laminates // *Compos. Struct.* — 2015. — Vol. 133. — P. 794—808.
86. *Kuo C., Li Z., and Wang C.* Multi-objective optimisation in vibration-assisted drilling of CFRP/Al stacks // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 173. — P. 196—209.
87. *Shyha I., Soo S. L., Aspinwall D. K., Bradley S., Dawson S., and Pretorius C. J.* Drilling of titanium/CFRP/aluminium stacks // *Key Eng. Mater., Trans. Tech. Publ.* — 2010. — Vols. 447—448. — P. 624—633.
88. *Brinksmeier E., Fangmann S., and Rentsch R.* Drilling of composites and resulting surface integrity // *CIRP Ann.* — 2011. — Vol. 60, No. 1. — P. 57—60.
89. *Zheng L., Zhou H., Gao C., and Yuan J.* Hole drilling in ceramics/Kevlar fiber reinforced plastics double-plate composite armor using diamond core drill // *Mater. Des.* — 2012. — Vol. 40. — P. 461—466.
90. *Chandramohan D. and Rajesh S.* Study of machining parameters on natural fiber particle reinforced polymer composite material // *Academic J. Manuf. Eng.* — 2014. — Vol. 12, No. 3. — P. 72—77.
91. *Jayabal S. and Natarajan U.* Drilling analysis of coir-fibre-reinforced polyester composites // *Bull. Mater. Sci.* — 2011. — Vol. 34, No. 7. — P.1563—1567.
92. *Rezghi Maleki H., Hamed M., Kubouchi M., and Arao Y.* Experimental study on drilling of jute fiber reinforced polymer composites // *Compos. Mater.* — 2019. — Vol. 53, No. 3. — P. 283—295.
93. *Choudhury M. R., Srinivas M. S., and Debnath K.* Experimental investigations on drilling of lignocellulosic fiber reinforced composite laminates // *J. Manuf. Processes.* — 2018. — Vol. 34. — P. 51—61.
94. *Panchagnula K. K. and Palaniyandi K.* Drilling on fiber reinforced polymer/nanopolymer composite laminates: a review // *J. Mater. Res. Technol.* — 2018. — Vol. 7, No. 2. — P. 180—189.
95. *Tsao C. and Chiu Y.* Evaluation of drilling parameters on thrust force in drilling carbon fiber reinforced plastic (CFRP) composite laminates using compound core-special drills // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 2011. — Vol. 51, No. 9. — P. 740—744.
96. *Qiu X., Li P., Li C., Niu Q., Chen A., Ouyang P., and Ko T. J.* Study on chisel edge drilling behavior and step drill structure on delamination in drilling CFRP // *Compos. Struct.* — 2018. — Vol. 203. — P. 404—413.
97. *Hocheng H. and Tsao C.* Comprehensive analysis of delamination in drilling of composite materials with various drill bits // *J. Mater. Process. Technol.* — 2003. — Vol. 140, Nos. 1—3. — P. 335—339.
98. *Hocheng H. and Tsao C.* Effects of special drill bits on drilling-induced delamination of composite materials // *Int. J. Machine Tools Manuf.* — 2006. — Vol. 46, Nos. 12—13. — P. 1403—1416.
99. *Abrão A., Rubio J. C., Faria P., and Davim J.* The effect of cutting tool geometry on thrust force and delamination when drilling glass fibre reinforced plastic composite // *Mater. Des.* — 2008. — Vol. 29, No. 2. — P. 508—513.
100. *Krishnamoorthy A., Boopathy S. R., and Palanikumar K.* Delamination analysis in drilling of CFRP composites using response surface methodology // *Compos. Mater.* — 2009. — Vol. 43, No. 24. — P. 2885—2902.
101. *Shunmugam M. and Kanthababu M.* Advances in unconventional machining and composites // *Proc. AIMTDR 2018, Springer Nature, 2019.*
102. *Meshreki M., Sadek A., and Attia H.* High-speed drilling of thick woven carbon fiber reinforced epoxy laminates // *Can. Aeronautics Space J.* — 2014. — Vol. 60, No. 3. — P. 90—97.

103. *Mudhukrishnan M., Hariharan P., and Palanikumar K.* Measurement and analysis of thrust force and delamination in drilling glass fiber reinforced polypropylene composites using different drills // *Measurement*. — 2020. — Vol. 149. — P. 106973.

104. *Karimi N. Z., Heidary H., and Minak G.* Critical thrust and feed prediction models in drilling of composite laminates // *Compos. Struct.* — 2016. — Vol. 148. — P. 19—26.

105. *Zhang L., Wang L., and Liu X.* A mechanical model for predicting critical thrust forces in drilling composite laminates // *Proc. Institution Mech. Eng., Part B, J. Eng. Manuf.* — 2001. — Vol. 215, No. 2. — P. 135—146.

106. *Durão L. M. P., Gonçalves D. J., Tavares J. M. R., de Albuquerque V. H. C., Vieira A. A., and Marques A. T.* Drilling tool geometry evaluation for reinforced composite laminates // *Compos. Struct.* — 2010. — Vol. 92, No. 7. — P. 1545—1550.

107. *Saoudi J., Zitoune R., Gururaja S., Mezlini S., and Hajjaji A. A.* Prediction of critical thrust force for exit-ply delamination during drilling composite laminates: thermo-mechanical analysis // *Int. J. Machining Machinability of Mater.* — 2016. — Vol. 18, Nos. 1—2. — P. 77—98.

108. *Rahme P., Landon Y., Lachaud F., Piquet R., and Lagarrigue P.* Delamination-free drilling of thick composite materials // *Composites: Part A*. — 2015. — Vol. 72. — P. 148—159.

Поступила в редакцию 16.10.2020

Окончательный вариант поступил 09.06.2021

Received Oct. 16, 2020 (June 9, 2021)

*Е. Селахи**

Department of Mechanical Engineering, Marvdasht Branch, Islamic Azad University, Marvdasht, Iran

**АНАЛИЗ РАЗРУШЕНИЯ ГИБРИДНЫХ КЛЕЕБОЛТОВЫХ
ВЕРТИКАЛЬНЫХ Т- И L-ОБРАЗНЫХ КОМПОЗИТНЫХ
СОЕДИНЕНИЙ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ОСЕВЫМ
И ИЗГИБАЮЩИМ НАГРУЗКАМ¹**

*E. Selahi**

**A FAILURE ANALYSIS OF HYBRID BOLTED-BONDED VERTICAL
T AND L JOINTS WITH COMPOSITE ADHERENDS SUBJECTED
TO AXIAL AND BENDING LOADS**

Keywords: bonded-bolted joint, delamination, failure criterion, finite-element analysis, vertical T and L joints.

Employing the ANSYS Workbench software and a 3D finite-element simulation, a failure analysis of hybrid bonded-bolted vertical T and L joints, with laminated composite adherends, subjected to axial and bending loads is performed. First, the convergence behavior of the joints are examined to select an appropriate and optimized number of elements and then the failure study of each T and L hybrid composite joint for three quasi-static loading cases are performed in three steps, to determine the failure load and failure mode in each case. To demonstrate the validity and precision of the simulations presented, the results obtained are compared with the numerical and experimental data available in the literature. Results indicated that the effectiveness of replacing a bonded joint with a vertical hybrid joint depended on the failure mode. Generally, if the damage mode was delamination of adherend layers or failure of the adhesive layer, this replacement led to significant saving in the cost of raw materials and production.

*Автор, с которым следует вести переписку: selahi@miau.ac.ir
Corresponding author: selahi@miau.ac.ir

¹Перевод с англ.

Ключевые слова: соединение клееболтовое, расслоение, критерий разрушения, анализ конечно-элементный, соединения вертикальные Т- и L-образные

С помощью программного обеспечения ANSYS Workbench и трехмерного моделирования методом конечных элементов (МКЭ) выполнен анализ разрушения гибридных клееболтовых вертикальных Т- и L-образных соединений из слоистых композитов, подверженных осевым и изгибающим нагрузкам. Сначала с целью выбора надлежащего количества конечных элементов исследовали сходимость решений МКЭ, а затем анализ разрушения каждого гибридного Т- и L-образного композитного соединения выполнили для трех случаев квазистатического нагружения для определения разрушающей нагрузки и моды разрушения. Для демонстрации достоверности и точности представленного моделирования полученные результаты сравнили с численными и экспериментальными данными, доступными в литературе. Результаты показали, что эффективность замены вертикального клеевого соединения на гибридное клееболтовое зависит от моды разрушения. Как правило, если мода повреждения — расслоение слоев адгерентов или разрушение клеевого слоя, то такая замена приводит к значительной экономии затрат на сырье и изготовление.

Введение

Одна из основных задач при проектировании и изготовлении композитных конструкций — их соединение друг с другом. Соединения снижают несущую способность. В большинстве конструкций в силу ограничений на размер компонентов, накладываемых производственным процессом и транспортировкой, изготовление монолитных конструкций невозможно. Поэтому конструкции часто изготавливают из более мелких деталей, которые затем соединяют на месте монтажа. Создание клеевых соединений — самый распространенный метод соединения композитных конструкций. Эти соединения обладают высокой прочностью при сдвиге, но низкой при отрыве. Создание гибридных клееболтовых соединений позволит обеспечить одновременное сопротивление сдвигу и отрыву.

На анализ клеевых соединений были направлены значительные усилия. Первая попытка анализа клеевых соединений предпринята в работе [1], где клеевой слой соединения с односторонней нахлесткой смоделировали в виде непрерывных сдвиговых пружин. В этой модели не учитывали эффекты изгибающего момента, обусловленные эксцентриситетом осей приложения нагрузки. В [2] модель модифицировали, описав клеевой слой как равномерно распределенные поперечные нормальные и сдвиговые пружины. В [3] для анализа распределения напряжений в клеевых соединениях с двойным скосом и одно- и двухсторонней нахлесткой использовали метод конечных элементов (МКЭ). В [4] для моделирования композитных соеди-

нений с двухсторонней нахлесткой применили трехмерный анализ МКЭ. Математическая модель для анализа композитных клеевых соединений внахлестку с линейным и нелинейным поведением представлена в [5, 6].

В [7] исследовали разрушение Т-образных соединений из слоистого углепластика на основе углеволокон T700 и бисмалеимидного связующего под действием растягивающей нагрузки, используя конечно-элементную модель и эксперимент. Поведение Т-образного соединения из тканого эпоксидного углепластика рассмотрено в [8]. В [9] экспериментально и численно определили распределение напряжений, эволюцию повреждений, прочность и моды разрушения односторонних клеевых L-образных алюминий/композитных соединений. Методы экспериментального проектирования для изучения прочности клеевых Т-образных соединений представлены в [10]. В [11] использовали модель когезионной зоны для оценки влияния геометрии на прочность клеевых соединений с односторонней нахлесткой с адгерентами из слоистых композитов при одноосных растягивающих нагрузках.

В области гибридных клееболтовых соединений проведено лишь несколько исследований, в которых рассматривали гибридные соединения внахлестку. В [12] для изучения распределения напряжений в болтовых, клеевых и гибридных соединениях из слоистых композитов использовали анализ МКЭ. В [13] определили прочность и усталостную долговечность гибридных клееболтовых соединений из углепластика. Анализ свойств клееболтовых стальных соединений встык представлен в [14]. В [15] разработали полуаналитический метод решения для анализа напряжений в гибридных клееболтовых соединениях слоистых композитов внахлестку под действием плоскостных и поперечных нагрузок. В [16] на основе анализа МКЭ смоделировали клеевые соединения внахлестку и гибридные соединения с помощью эластичных адгезивов.

В [17] изучали конструкционное поведение клееболтовых соединений с двухсторонней нахлесткой из стальных пластин и гибридного слоистого угле- и стеклопластика. В [18] для анализа гибридных композитных соединений использовали программное обеспечение ANSYS. В [19] исследовали распределение нагрузки в клееболтовых композитных соединениях с односторонней нахлесткой. В [20] поведение болтовых, клеевых и гибридных ступенчатых соединений внахлестку толстых панелей из эпоксидного углепластика изучали как численно, так и экспериментально. В [21] программное обеспечение ABAQUS [22] применили при изучении свойств гибридных соединений с односторонней нахлесткой стальных и композитных адгерентов.

Вертикальные соединения находят широкое применение в судостроительной, аэрокосмической и многих других отраслях промышленности. Т-образные соединения — традиционные вертикальные соединения шпангоута с боковыми, нижними и палубными панелями; L-образные соединения используют для соединения боковых панелей с днищем и панелями палубы морских и аэрокосмических конструкций. Вертикальные соединения обладают значительным плечом момента, способным существенно

увеличивать перемещения и напряжения, снижающие несущую способность вертикальных соединений по сравнению с соединениями внахлестку.

Цель настоящего исследования — изучение влияния на несущую способность замены традиционных вертикальных клеевых соединений на гибридные клееболтовые. Насколько известно автору, в настоящее время нет опубликованных исследований по разрушению гибридных клееболтовых вертикальных Т- и L-образных соединений с композитными адгерентами. Настоящее исследование посвящено анализу разрушения гибридных вертикальных клееболтовых Т- и L-образных соединений с адгерентами из слоистых композитов.

1. Постановка задачи

На рис. 1 показаны конфигурации образцов гибридных клееболтовых вертикальных L- (*a*) и Т-образных (*б*) соединений. В обоих соединениях основные адгеренты — комбинации слоев однонаправленного эпоксидного стеклопластика (UD GFRP), однонаправленного эпоксидного углепластика (UD CFRP) и тканого эпоксидного углепластика (W CFRP) с последовательностью укладки [UD GFRP/W CFRP/UD CFRP]. Последовательность укладки слоев в накладках — [UD GFRP/W CFRP/UD GFRP].

Табл. 1

Механические свойства слоистых композитов, адгезива, болта и гайки [22]

Материал	Механические свойства
Однонаправленный эпоксидный углепластик	$E_1 = 123,3 \text{ ГПа}, E_2 = E_3 = 7,78 \text{ ГПа}, G_{12} = G_{13} = 5,0 \text{ ГПа}, G_{23} = 3,08 \text{ ГПа}, \nu_{12} = \nu_{13} = 0,27, \nu_{23} = 0,42, S_{ut-1} = 1632 \text{ МПа}, S_{ut-2} = S_{ut-3} = 34 \text{ МПа}, S_{12} = S_{13} = 80 \text{ МПа}, S_{23} = 55 \text{ МПа}, \rho = 1518 \text{ кг/м}^3, h = 0,5 \text{ мм}$
Тканый эпоксидный углепластик	$E_1 = E_2 = 59,16 \text{ ГПа}, E_3 = 7,5 \text{ ГПа}, G_{12} = 17,5 \text{ ГПа}, G_{13} = G_{23} = 2,7 \text{ ГПа}, \nu_{12} = 0,04, \nu_{13} = \nu_{23} = 0,3, S_{ut-1} = S_{ut-2} = 513 \text{ МПа}, S_{ut-3} = 50 \text{ МПа}, S_{uc-1} = S_{uc-2} = -437 \text{ МПа}, S_{uc-3} = -150 \text{ МПа}, S_{us-12} = 120 \text{ МПа}, S_{us-13} = S_{us-23} = 55 \text{ МПа}, \rho = 1451 \text{ кг/м}^3, h = 1,0 \text{ мм}$
Однонаправленный эпоксидный стеклопластик	$E_1 = 45 \text{ ГПа}, E_2 = E_3 = 10 \text{ ГПа}, G_{12} = G_{13} = 5,0 \text{ ГПа}, G_{23} = 3,85 \text{ ГПа}, \nu_{12} = \nu_{13} = 0,3, \nu_{23} = 0,4, X_T = 1100 \text{ МПа}, Y_T = Z_T = 35 \text{ МПа}, X_C = -675 \text{ МПа}, Y_C = Z_C = -120 \text{ МПа}, S_{12} = S_{13} = 80 \text{ МПа}, S_{23} = 46 \text{ МПа}, \rho = 2000 \text{ кг/м}^3, h = 0,5 \text{ мм}$
Эпоксидный адгезив	$E = 3780 \text{ МПа}, G = 1400 \text{ МПа}, \nu = 0,35, S_{ut} = 54,6 \text{ МПа}, \rho = 1160 \text{ кг/м}^3, h = 0,5 \text{ мм}$
Болты и гайки	$E = 200 \text{ ГПа}, G = 77 \text{ ГПа}, \nu = 0,3, S_{ut} = 460 \text{ МПа}, S_y = 250 \text{ МПа}, \rho = 7850 \text{ кг/м}^3, D_b = 8 \text{ мм}$

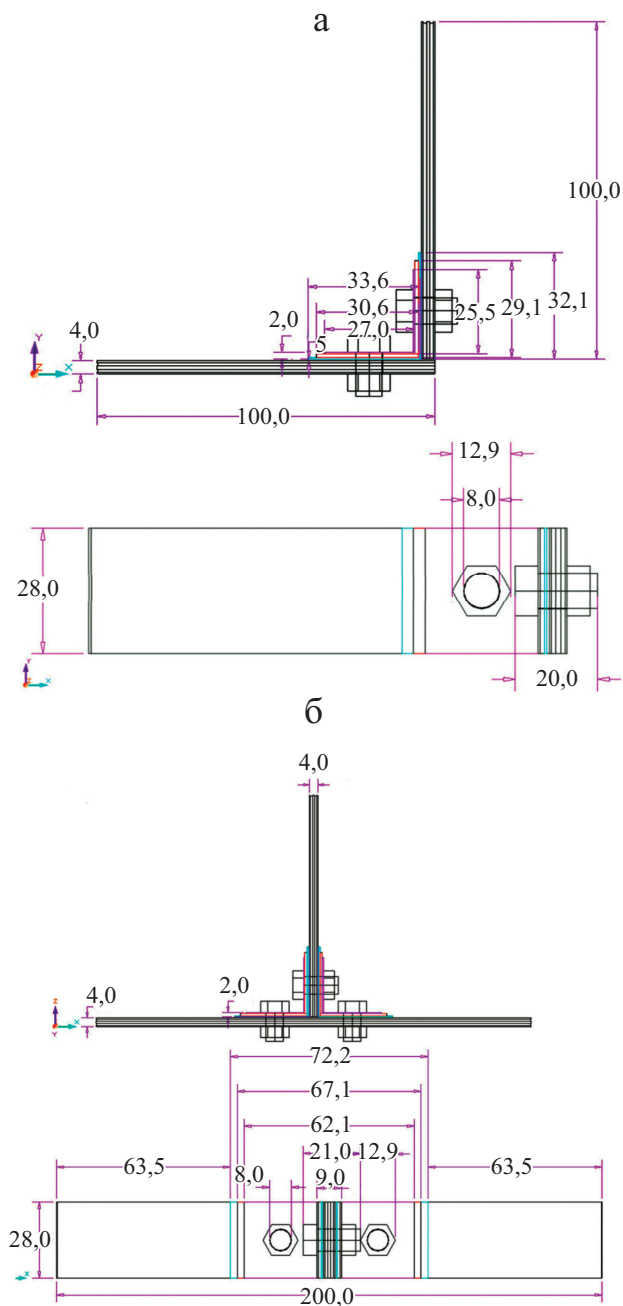


Рис. 1. Конфигурация гибридных клееболтовых вертикальных L- (а) и Т-образных (б) соединений. Все размеры указаны в миллиметрах.

В рассматриваемых гибридных клееболтовых соединениях прирост массы по сравнению с клеевыми составил 33% для вертикального Т-образного соединения и 34% — для вертикального L-образного. Для повышения устойчивости к старению в наружных слоях использовали стеклопластик,

а в остальных — высокопрочный углепластик, а для обеспечения необходимой прочности в поперечном направлении использовали слои из тканого углепластика. Значения механических свойств слоистых композитов, эпоксидного адгезива и металлических болтов и гаек приведены в табл. 1: E_i , G_{ij} и ν_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — модули упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона соответственно; ρ и h — плотность и толщина слоистого композита соответственно; S_{ut} , S_{uc} , S_{us} , S_y — прочности при растяжении, сжатии, сдвиге и предел текучести при растяжении соответственно. Нижние индексы 1, 2, 3 означают направление продольное, поперечное и по толщине.

2. Методы и алгоритм решения

В настоящем исследовании рассматривали состояние клеевого контакта на поверхности раздела двух слоев слоистых композитов, а также клеевого слоя и адгерентов. Контакт моделировали, используя опцию многоточечного ограничения (multi-point constraint). На поверхностях раздела болтов и стенок отверстий, а также композитных слоев с гайками или головками болтов предполагали условие фрикционного контакта, для описания которого выбрали опцию чистого штрафа. Допуская большие деформации, анализ проводили в три этапа [23]:

1) приложение силы предварительного растяжения F и предварительного крутящего момента T , как показано в уравнении (1);

2) определение перемещений, обусловленных предварительным нагружением;

3) постепенное приложение возрастающих осевых или изгибающих нагрузок вплоть до разрушения.

Нагрузку предварительного крутящего момента определяли как

$$T = \mu F D_b, \quad (1)$$

где μ — коэффициент трения скольжения; D_b — диаметр болта. Выбрали значения силы $F = 1000$ Н и коэффициента пары трения (адгерент и болт или гайка) $\mu = 0,2$ [17]. На горизонтальных концах адгерентов задавали условия неподвижной границы. На третьем этапе нагрузку прикладывали к вертикальному свободному концу адгерентов, как показано на рис. 2. Зависящие от времени выражения сил третьего этапа нагружения имеют следующий вид: в случае вертикального L-образного соединения

$$F_a = 50t \text{ (Н)}, \quad (2)$$

$$F_{sh} = 10t \text{ (Н)}, \quad (3)$$

$$F_b = 5t \text{ (Н)} \quad (4)$$

и вертикального T-соединения

$$F_a = 100t \text{ (Н)}, \quad (5)$$

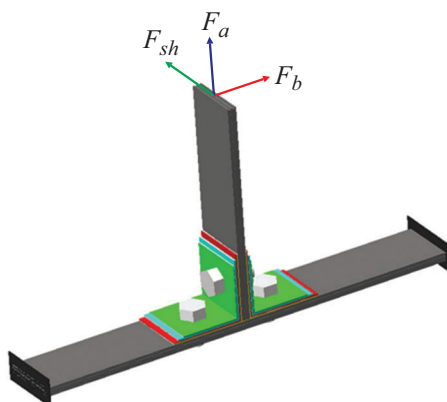


Рис. 2. Нагружение и граничные условия гибридного вертикального Т-образного соединения.

$$F_{sh} = 50t \text{ (Н)}, \tag{6}$$

$$F_b = 5t \text{ (Н)}. \tag{7}$$

Разрушение гибридных болтовых соединений разделили на три типа — разрушение адгерента, адгезива и болтов. Каждый из этих типов разрушения подразделили на следующие моды разрушения.

i. Разрушение адгерента:

- разрушение волокон при растяжении;
- разрушение волокон при сжатии;
- разрушение матрицы при растяжении;
- разрушение матрицы при сжатии;
- расслоение.

ii. Разрушение адгезива:

- при сдвиге;
- при отрыве.

iii. Разрушение болта.

В силу критерия разрушения Хашина [24] адгерент разрушается при выполнении хотя бы одного из пяти уравнений (8)—(12), описывающих соответствующую моду разрушения:

i) разрушение волокна при растяжении ($\sigma_1 \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{S_{13}} \right)^2 \geq 1; \tag{8}$$

ii) разрушение волокна при сжатии ($\sigma_1 < 0$)

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_C} \right)^2 \geq 1; \tag{9}$$

iii) разрушение матрицы при растяжении ($\sigma_2 \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_2}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 \geq 1; \quad (10)$$

iv) разрушение матрицы при сжатии ($\sigma_2 < 0$)

$$\left(\frac{\sigma_2}{2S_{23}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_{23}}\right)^2 - 1\right] \left(\frac{\sigma_2}{Y_C}\right) + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 \geq 1; \quad (11)$$

v) расслоение ($\sigma_2 \geq 0$)

$$\left(\frac{\sigma_3}{Z_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 \geq 1. \quad (12)$$

3. Обсуждение и примеры

3.1. Проверка достоверности. Для демонстрации достоверности и точности представленного моделирования полученные результаты сравнили с экспериментальными и численными, доступными в литературе. Примечательно, что несмотря на отсутствие в доступной литературе аналогичных моделей для рассматриваемой проблемы, решения могут быть проверены путем сравнения с решениями для гибридной односторонней нахлестки и клеевых вертикальных Т-образных соединений, как будет показано далее.

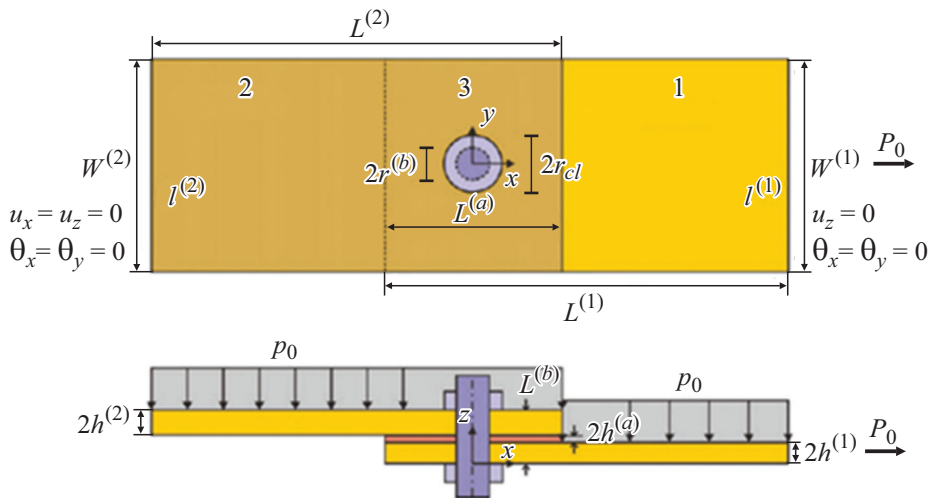


Рис. 3. Схема гибридного соединения внахлестку [15] адгерентов слоистых композитов 1 (I) и 2 (2). 3 — область нахлестки.

Табл. 2

Размеры гибридного соединения внахлестку [15]

Деталь	Размер
Композитный адгерент	$L_1 = L_2 = 84$ мм, $W_1 = W_2 = 24$ мм, $h_1 = h_2 = 2$ мм
Слой адгезива	$L_a = W_a = 24$ мм, $t_a = 0,2$ мм
Болт и гайка	$r_b = 2$ мм, $r_{cl} = 3$ мм

Табл. 3

Механические свойства компонентов гибридного соединения [15]

Деталь	Механические свойства
Композитный адгерент	$E_L = 180$ ГПа, $E_T = 10,3$ ГПа, $G_{LT} = 7,17$ ГПа, $\nu_{LT} = 0,28$
Адгезив	$G = 414$ МПа, $\nu = 0,34$
Болт и гайка	$E = 193$ ГПа, $\nu = 0,3$

Во-первых, сравнили распределения поперечных сдвиговых и отрывных напряжений на средней линии клеевого слоя гибридного соединения с односторонней нахлесткой, рассчитанные с помощью конечно-элементного моделирования и представленные в [15]. На рис. 3 показана схема гибридного соединения внахлестку. Поведение адгерентов из слоистых композитов трансверсально-изотропное, а болтов, гаек и адгезива — изотропное. В табл. 2 и 3 представлены геометрия и механические свойства соединения. Нижние индексы L и T относятся к величинам, характеризующим свойства в продольном и поперечном направлениях. Соединение подвергали действию осевой силы $P_0 = 24$ кН и поперечного давления $p_0 = 500$ кПа. Данные рис. 4 демонстрируют хорошее согласование распределений от-

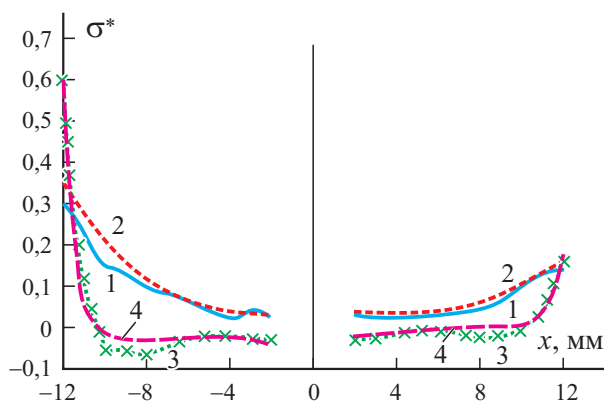


Рис. 4. Сравнение распределений сдвиговых τ_{xz}^* (1, 2) и отрывных σ_z^* (3, 4) напряжений, рассчитанных в настоящей работе (1, 4) и [15] (2, 3).

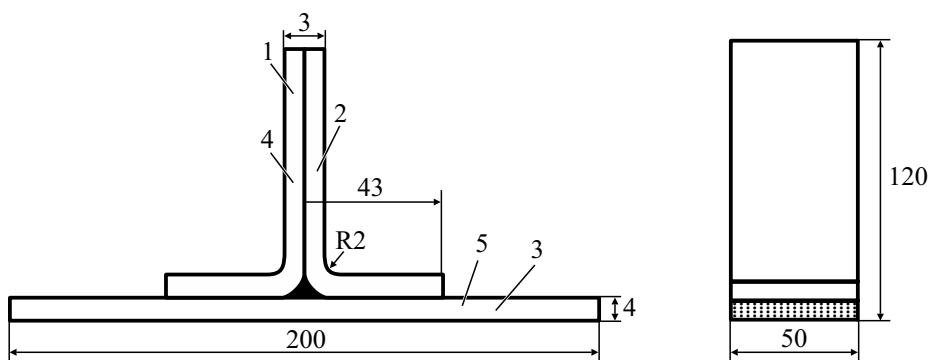


Рис. 5. Схема клевого вертикального Т-образного соединения [7]: 1, 2, 3 — слои 1, 2, 3; 4 — стойка; 5 — опорная плита.

рывных и сдвиговых напряжений в клеевом слое, рассчитанных с помощью представленного решения МКЭ и приведенных в [15].

Во-вторых, смоделировали разрушение композитных клеевых вертикальных Т-образных соединений, подвергнутых растягивающим нагрузкам, и сравнили их разрушающую нагрузку с экспериментальными результатами, представленными в [7]. На рис. 5 схематически показана конфигурация клевого вертикального Т-образного соединения, адгеренты которого изготовлены из углепластика на основе волокон Т700 и бисмалеимидной смолы QY8911. Механические свойства композитных адгерентов и бисмалеимидной смолы приведены в табл. 4. Последовательность укладки слоистых композитов 1 и 2 $[-45^\circ/0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$, а слоистого композита 3 — $[45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ/0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ/0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ/45^\circ/-45^\circ]$.

Разрушающие нагрузки при разных модах, рассчитанные с помощью МКЭ, хорошо согласуются с экспериментальными результатами, представленными в [7] (табл. 5).

3.2. Гибридные L-образные соединения. Прежде всего провели анализ сходимости решения МКЭ для выбора оптимального количества конечных элементов. Для этой цели, уменьшая размер элемента, исследовали чувствительность вертикальных гибридных L-образных соединений к

Табл. 4

Механические свойства композитных адгерентов и смолы [7]

Материал	Механические свойства
Эпоксидный углепластик Т700- QY8911	$E_1 = 131$ ГПа, $E_{22} = E_{33} = 10,4$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = 6,09$ ГПа, $G_{23} = 3,4$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,31$, $t = 0,12$ мм, $S_{ut-1} = 2920$ МПа, $S_{ut-2} = S_{ut-3} = 63$ МПа, $S_{uc-1} = -1392$ МПа, $S_{uc-2} = S_{uc-3} = -240$ МПа, $S_{12} = S_{13} = 150$ МПа, $S_{23} = 133$ МПа
Эпоксидная смола	$E = 3$ ГПа, $G = 1,15$ ГПа

Табл. 5

Сравнение разрушающих нагрузок F^{ult} (Н) в разных модах, определенных в ходе конечно-элементного моделирования и полученных экспериментально в [7]

Мода разрушения	МКЭ	Эксперимент	Различие, %
Расслоение адгерента	1228	1200	2,3
Разрушение адгерента	1287	1348	4,5
Потеря сцепления между адгерентом и заливкой	1564	1602	2,4

максимальному перемещению, сдвиговому напряжению в слое адгезива, напряжению болта по Мизесу и критериям разрушения. Результаты для гибридных L-образных соединений, нагруженных осевой силой 65 Н на свободной стороне, представлены в табл. 6. Видно, что результаты расчетов в четвертом и пятом случаях очень близки. Поэтому для дальнейшего исследования гибридного вертикального L-образного соединения выбрана конечно-элементная модель для четвертого случая с 13 751 элементом.

Затем проанализировали результаты разрушения гибридного L-образного соединения, полученные при тех же условиях нагружения, что и в предыдущем разделе. На рис. 6 показано изменение коэффициентов запаса прочности болтов, композитных адгерентов и клеевого слоя, обусловленное сдвиговыми и отрывными напряжениями в гибридном L-образном соединении, подверженном квазистатической осевой F_a (а), поперечной F_{sh} (б) и изгибающей F_b (в) нагрузке. Каждая мода разрушения начинается, когда соответствующий коэффициент запаса достигает единицы или становится меньше. Представленные диаграммы характеризуют запасы прочности только в гибридных соединениях.

Установлено, что в случае осевой нагрузки разрушение гибридного L-образного соединения происходило в слое однонаправленного эпоксидного углепластика при нагрузке 450 Н, а отрыв клеевого слоя — при нагрузке 1200 Н. Разрушение клеевого L-образного соединения (с такой же геоме-

Табл. 6

Результаты анализа сходимости решения МКЭ для гибридного L-образного соединения, подверженного осевой силе 65 Н

Случай	Количество элементов	δ_x^{max} , мм	σ_{shear}^{max} , МПа	σ_V^{M-max} , МПа	χ
1	2385	2,824	2,53	45,72	0,604
2	5775	2,820	2,42	45,70	0,603
3	9941	2,817	1,73	37,46	0,446
4	13 751	2,770	1,74	36,72	0,440
5	18 246	2,785	1,61	34,45	0,443

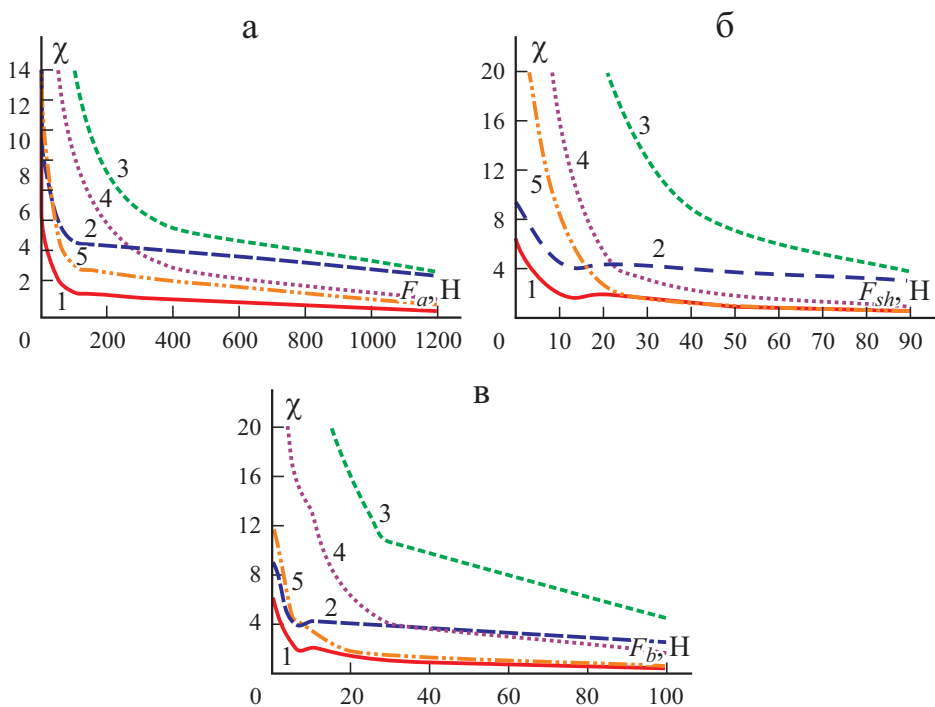


Рис. 6. Коэффициенты запаса χ для болта, композитных адгерентов и слоя адгезива, обусловленные сдвиговыми и отрывающими напряжениями в гибридных L-образных соединениях, подверженных квазистатической осевой F_a (а), поперечной F_{sh} (б) и изгибающей F_b (в) нагрузке: 1 — разрушение адгерента; 2 — разрушение болта; 3 и 4 — разрушение адгезива при сдвиге и отрыве; 5 — расслоение.

трией) произошло в слое однонаправленного эпоксидного углепластика при $F_a = 430$ Н, а отрыв клевого слоя — при 620 Н. Из данных рис. 6 также видно, что в гибридном L-образном соединении, подвергнутом поперечной нагрузке, расслоение адгерентов произошло при $F_{sh} = 50$ Н, а отрыв клевого слоя — при 90 Н. В аналогичном чисто клеевом соединении адгерент расслоился при $F_{sh} = 30$ Н, а отрыв клевого слоя имел место при 60 Н. Наконец, видно, что при изгибе разрушение гибридного L-образного соединения произошло в слое однонаправленного эпоксидного углепластика при $F_b = 30$ Н, а отрыв клевого слоя — при 120 Н. В аналогичном чисто клеевом L-образном соединении адгерент расслоился при нагрузке 13 Н, а слой адгезива оторвался при 40 Н. Таким образом, в случае изгибающей нагрузки несущая способность гибридного L-образного соединения при разрушении композитного адгерента только на 23% больше, чем при использовании чисто клевого L-образного соединения, тогда как при разрушении клевого слоя несущая способность гибридного L-образного соединения в три раза больше, чем клевого.

Табл. 7

Результаты анализа сходимости решения МКЭ для гибридного Т-образного соединения, подверженного осевой силе 100 Н

Случай	Количество элементов	δ_x^{\max} , МПа	$\sigma_{\text{shear}}^{\max}$, МПа	$\sigma_V^{M-\max}$, МПа	χ
1	2950	0,239	15,4	13,87	0,392
2	5022	0,228	13,5	12,46	0,341
3	8889	0,212	11,1	10,48	0,295
4	17 265	0,218	11,7	10,74	0,302

3.3. Гибридные Т-образные соединения. Сначала продемонстрируем сходимость решения МКЭ в случае гибридного Т-образного соединения. В табл. 7 представлены результаты анализа сходимости для гибридного Т-образного соединения, подвергнутого действию осевой силы 100 Н, приложенной на свободной стороне. Расчет по модели, содержащей 8889 конечных элементов (т.е. третий случай), оказался подходящим для определения максимальных перемещений, напряжений и мод разрушения. Эту модель МКЭ использовали в последующих расчетах.

Затем выполнили анализ разрушения гибридного Т-образного соединения при указанной нагрузке и граничных условиях. На рис. 7 проиллюстрированы изменения коэффициентов запаса прочности болтов, композитных адгерентов и клеевого слоя, обусловленные отрывными и сдвиговыми напряжениями, при квазистатической, осевой F_a , поперечной F_{sh} и изгибающей F_b нагрузке.

Полученные результаты продемонстрировали, что расслоение гибридного Т-образного соединения, подверженного осевой нагрузке, произошло при $F_a = 250$ Н, а отрыв клеевого слоя — при 550 Н. В чисто клеевом Т-образном соединении (с такой же геометрией) расслоение имело место при 130 Н, а отрыв клеевого слоя — при 410 Н. Таким образом, увеличение несущей способности гибридного соединения составило 92%. Результаты, представленные на рис. 7, свидетельствуют о том, что в гибридном Т-образном соединении, подвергнутом поперечной нагрузке, расслоение адгерентов началось при $F_{sh} = 60$ Н, а отрыв клеевого слоя — при 400 Н. В аналогичном чисто клеевом Т-образном соединении адгерент расслоился при 50 Н, а клеевой слой оторвался при 225 Н. При действии изгибающей нагрузки разрушение гибридного Т-образного соединения произошло в слое однонаправленного эпоксидного углепластика при $F_b = 30$ Н, а отрыв клеевого слоя — при 170 Н. Эта нагрузка для аналогичного клеевого Т-образного соединения равна 25 и 70 Н соответственно. Таким образом, при действии изгибающей нагрузки использование гибридного Т-образного соединения вместо чисто клеевого при разрушении композитного адгерента не привело к значительному увеличению несущей способности, тогда как при разрушении в моде отрыва клеевого слоя она возросла на 250%.

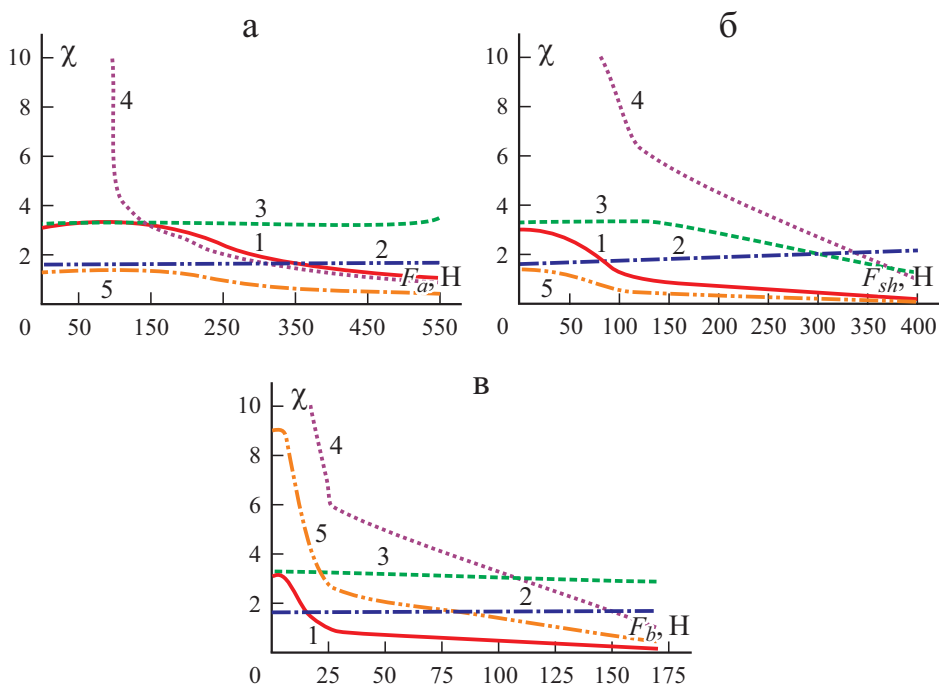


Рис. 7. Коэффициенты запаса χ для болта, композитных адгерентов и слоя адгезива, обусловленные сдвиговыми и отрывающими напряжениями в гибридных Т-образных соединениях, подверженных квазистатической осевой F_a (а), поперечной F_{sh} (б) и изгибающей F_b (в) нагрузке: 1 — разрушение адгерента; 2 — разрушение болта; 3 и 4 — разрушение адгезива при сдвиге и отрыве; 5 — расслоение.

Как правило, эффективность применения гибридного соединения зависит от моды разрушения. В случае разрушения клеевого слоя использование гибридного соединения существенно увеличивает несущую способность.

Заключение

В настоящей работе с использованием программного обеспечения ANSYS Workbench разработали и реализовали трехмерную конечно-элементную модель гибридных клееболтовых Т- и L-образных соединений с адгерентами из слоистого композита. Для демонстрации точности предложенного моделирования МКЭ сравнили результаты расчета с доступными экспериментальными и численными решениями, найденными в литературе. Установлено их хорошее согласование.

Проведен анализ сходимости решений МКЭ с целью выбора оптимального количества конечных элементов в моделях гибридных Т- и L-образных соединений. Представлены результаты анализа разрушения гибридных клееболтовых вертикальных Т- и L-образных соединений,

подверженных квазистатической осевой, поперечной и изгибающей нагрузке. Основные выводы настоящего исследования следующие.

— В гибридных соединениях преобладающие факторы разрушения — напряжения, обусловленные предварительным растяжением и предварительным моментом затяжки болтов.

— В вертикальных L-образных соединениях замена клеевого соединения на гибридное увеличила массу на 34%, а несущую способность при действии осевой, сдвиговой и изгибающей нагрузки — на 5, 67 и 142% соответственно. Таким образом, эта замена не рекомендуется в случае осевых нагрузок.

— В случае вертикальных T-образных соединений при замене клеевого соединения на гибридное клееболтовое несущая способность при действии осевой, сдвиговой и изгибающей нагрузки возрастала на 92, 20 и 20% соответственно, а масса — на 33%. Таким образом, такая замена рекомендуется только в случае осевых нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Volkersen O.* Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten // *Luftfahrtforschung.* — 1938. — Vol. 15, P. 41—47.
2. *Goland M. and Reissner E.* The stresses in cemented joints // *J. Appl. Mech.* — 1944. — Vol. 11, No. 19. — P. A17—A27.
3. *Adams R. D., Coppedale J., and Peppiatt N. A.* Failure analysis of aluminum-aluminum bonded joints // *J. Adhes.* — 1978. — Vol. 2. — P. 105—119.
4. *Bogdanovich A. E. and Kizhakkethara I.* Three-dimensional finite element analysis of double-lap composite adhesive bonded joint using submodeling approach // *Composites: Part B.* — 1999. — Vol. 30, No. 6. — P. 537—551.
5. *Selahi E., Tahani M., and Yousefsani S. A.* Analytical solutions of stress field in adhesively bonded composite single-lap joints under mechanical loadings // *Int. J. Eng.* — 2014. — Vol. 27, No. 3. — P. 457—486.
6. *Selahi E. and Kadivar M. H.* Non-linear analysis of adhesive joints in composite structures // *Int. J. Adv. Des. Manuf. Technol.* — 2016. — Vol. 9, No. 1. — P. 101—110.
7. *Wu H., Xiao J., Wen S., Yang F., and Yang J.* Numerical and experimental investigation into failure of T700/bismaleimide composite T-joints under tensile loading // *Compos. Struct.* — 2015. — Vol. 30. — P. 63—74.
8. *Koricho E. G. and Belingardi G.* An experimental and finite element study of the transverse bending behaviour of CFRP composite T-joints in vehicle structures // *Composites: Part B.* — 2015. — Vol. 79. — P. 430—443.
9. *Domingues N. R. E., Campilho R. D. S. G., Carbas R. J. C., and da Silva L. F. M.* Experimental and numerical failure analysis of aluminium/composite single L-joints // *Int. J. Adhes. Adhes.* — 2016. — Vol. 64. — P. 86—96.
10. *Sutherland L. S., Amado C., and Guedes Soares C.* Statistical experimental design techniques to investigate the strength of adhesively bonded T-joints // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 159. — P. 445—454.
11. *Moya-Sanz E. M., Inés Ivañez I., and Garcia-Castillo S. K.* Effect of the geometry in the strength of single-lap adhesive joints of composite laminates under uniaxial tensile load // *Int. J. Adhes. Adhes.* — 2017. — Vol. 72. — P. 23—29.
12. *Chan W. S. and Vedhagiri S.* Analysis of composite bonded/bolted joints used in repairing // *J. Compos. Mater.* — 2001. — Vol. 35, No. 12. — P. 1045—1061.

13. Kelly G. Load transfer in hybrid (bonded/bolted) composite single-lap joints // Compos. Struct. — 2005. — Vol. 69, No. 1. — P. 35—43.
14. Ding K. and Dhanasekar M. Flexural behaviour of bonded-bolted butt joints due to bolt looseness // Adv. Eng. Software. — 2007. — Vol. 38, Nos. 8—9. — P. 598—606.
15. Barut A. and Madenci E. Analysis of bolted–bonded composite single-lap joints under combined in-plane and transverse loading // Compos. Struct. — 2009. — Vol. 88, No. 4. — P. 579—594.
16. Hoang-Ngoc C. T. and Paroissien E. Simulation of single-lap bonded and hybrid (bolted/bonded) joints with flexible adhesive // Int. J. Adhes. Adhes. — 2010. — Vol. 30, No. 3. — P. 117—129.
17. Duc Hai N. and Mutsuyoshi H. Structural behavior of double-lap joints of steel splice plates bolted/bonded to pultruded hybrid CFRP/GFRP laminates // Constr. Build. Mater. — 2012. — Vol. 30. — P. 347—359.
18. Venkateswarlu S. and Rajasekhar K. Modelling and analysis of hybrid composite joint using fem in Ansys // J. Mech. Civ. Eng. — 2013. — Vol. 6. — P. 1—6.
19. Bodjona K., Raju K., Lim G. H. and Lessard L. Load sharing in single-lap bonded/bolted composite joints. Part I: Model development and validation // Compos. Struct. — 2015. — Vol. 129. — P. 268—275.
20. Chowdhury N. M., Kong Chiu W., Wang J., and Chang P. Experimental and finite element studies of bolted, bonded and hybrid step lap joints of thick carbon fibre/epoxy panels used in aircraft structures // Composites: Part B. — 2016. — Vol. 100. — P. 68—77.
21. Cheng X., Zhang J., Zhang J., Liu P., Cheng Y., and Xu Y. Numerical analysis on tensile properties of composite hybrid bonded/bolted joints with flanging // Steel Compos. Struct. — 2018. — Vol. 26, No. 3. — P. 265—272.
22. ANSYS Workbench V. 16, Engineering data sources.
23. Nonlinear contact analysis techniques using ANSYS, mechanics development group. — ANSYS Incorporation.
24. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1980. — Vol. 47. — P. 329—324.

Поступила в редакцию 09.10.2020

Окончательный вариант поступил 22.04.2021

Received Oct. 9, 2020 (Apr. 22, 2021)

Цз. Чжэн^а, К. Махарадж^б, Цз. Лю^в, Х. Чай^а, Х. Лю^{в*}, Дж. П. Деар^{в*}

^а*The First Aircraft Institute, No.1 East Renmin Road, Yanliang District, Xi'an, Shaanxi 710089, P. R. China*

^б*Department of Mechanical and Manufacturing Engineering, The University of the West Indies, St. Augustine, Republic of Trinidad and Tobago*

^в*Department of Mechanical Engineering, Imperial College London, London SW7 2AZ, United Kingdom*

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ НАЧАЛА ПОВРЕЖДЕНИЯ В ВОЛОКНИСТО-АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТАХ¹

J. Zheng, C. Maharaj, J. Liu, H. Chai, H. Liu, and J. P. Dear**

A COMPARATIVE STUDY ON THE FAILURE CRITERIA FOR PREDICTING THE DAMAGE INITIATION IN FIBER-REINFORCED COMPOSITES

Keywords: failure criteria, composite laminates, stress analysis, analytical analysis, finite-element analysis (FEA)

In this research, the maximum stress, Hashin, Puck, LaRC03, and Northwestern University (NU) criteria are analyzed based literature data, analytical results obtained using a MATLAB program, and numerical results obtained from an Abaqus finite-element model. The applicability and reliability of these failure criteria for predicting damage in thermoplastic laminates are evaluated based on analytical and numerical results. According to numerical results, the maximum stress criterion provided the most conservative prediction, but the Hashin and Northwestern University (NU) criteria gave reasonable and sensible outcomes at an acceptable running time. The Puck and LaRC03 criteria showed more accurate predictions, but at longer running times.

Ключевые слова: критерии разрушения, композиты слоистые, анализ напряжений, анализ аналитический, анализ конечно-элементный

*Автор, с которым следует вести переписку: haibao.liu@imperial.ac.uk
Corresponding author: haibao.liu@imperial.ac.uk

¹Перевод с англ.

С учетом литературных данных, результатов аналитических расчетов, с помощью программного обеспечения MATLAB и численных конечно-элементных расчетов с помощью программного обеспечения ABAQUS проанализировали критерий разрушения максимального напряжения, критерии Хашина, Пака, LaRC03 и Северо-Западного университета (СЗУ). Применимость и надежность этих критериев разрушения для предсказания повреждения термопластичных слоистых композитов оценили с помощью аналитических и численных результатов. Установили, что критерий максимального напряжения обеспечивает наиболее консервативный прогноз, а критерии Хашина и СЗУ — обоснованные результаты при приемлемом времени вычислений. Критерии Пака и LaRC03 обеспечили более точное предсказание, но потребовали большего времени вычислений.

Введение

Ранее уже изучали критерии разрушения слоистых композитов, в том числе в ходе всемирного соревнования алгоритмов, предсказывающих разрушение слоистых композитов (World-Wide Failure Exercise — WWFE) [1—7]. Однако остается еще много проблем, требующих разрешения: выявление сложных механизмов разрушения композитных материалов, устранение неадекватного понимания механизмов разрушения и трудностей в разработке адекватных моделей мод разрушения. В силу сложного поведения при разрушении даже простых однонаправленных композитов трудно предсказать поведение всего многообразия слоистых композитов [8]. Инженеры провели множество экспериментов для получения полного представления о механизмах разрушения слоистых композитов при разных условиях нагружения и ограничениях [9].

В авиационной промышленности требуются материалы с высокой прочностью или хорошими характеристиками в разных условиях и ситуациях. По сравнению с термореактивными материалами термопластичные композиты обладают превосходной вязкостью разрушения, позволяющей лучше проектировать легкие, устойчивые к повреждениям конструкционные компоненты, которые можно переплавить и изменить их форму путем нагревания выше температуры переработки. Наивысшая рабочая температура углепластика на основе полиэфирэфиркетона (CF/PEEK), армированного 30% углеродных волокон, может достигать 310 °C [10, 11].

В большинстве предыдущих работ рассмотрены критерии разрушения для термореактивных волокнисто-армированных композитов. В [12] провели несколько экспериментов на образцах эпоксидного углепластика IM7/8552 в диапазоне от квазистатических до динамических скоростей деформации и установили набор критериев текучести, способных предсказать текучесть композитов с преобладанием матрицы. В [13] предложили новую теорию текучести/разрушения, основанную на экспериментальных

результатах, полученных при исследовании эпоксидных слоистых углепластиков IM7/8552 и AS4/3501–6 для предсказания их текучести и разрушения в условиях многоосного напряженного состояния. В [14] оценили применимость пяти разных критериев разрушения и методов развития повреждений с помощью конечно-элементного анализа для эпоксидного слоистого углепластика T700GC/M21 при низкоскоростных ударах. Некоторые работы по моделированию, включая критерии разрушения, выполняли для термопластичных материалов в [15—17]. Установили хорошую корреляцию между экспериментальными и численными результатами, но ни в одной из этих работ не сравнивали применимость и точность разных критериев разрушения для термопластичных композитов.

В настоящей работе рассмотрены преимущества и ограничения разных критериев разрушения, предсказательную способность которых проанализировали с использованием аналитических и численных результатов, полученных с помощью программного обеспечения MATLAB и ABAQUS.

1. Краткий обзор критериев разрушения

1.1. Категории критериев разрушения. Предложено множество теорий разрушения, пригодных для конструкций из композитных материалов [18], которые можно разделить на разные категории. В настоящей работе критерии разрушения обсуждены по четырем категориям: макро- и микроскопические, основанные на напряжениях или деформациях, не зависящие и зависящие от моды разрушения, неинтерактивные и интерактивные.

1.1.1. Макро- и микроскопические критерии разрушения. Результаты WWFE показывают, что пять наиболее эффективных критериев разрушения [3] основаны на макроскопических наблюдениях, включая критерии Зиновьева [19, 20], Богетти [21, 22], Пака [23, 24], Кунтце [25, 26] и Цая [27]. Поэтому в настоящей работе основной упор сделан на макроскопические критерии разрушения.

1.1.2. Критерии разрушения, основанные на напряжениях и деформациях. Один из типичных критериев, основанных на деформациях, — критерий максимальной деформации [27, 28]. Примеры критериев, основанных на напряжениях, — критерии Цая—Хилла [29], Хашина [30], Пака [23, 24], LaRC [31, 32] и Хоффмана [33].

1.1.3. Критерии, зависящие и не зависящие от моды разрушения [34]. Критерий разрушения, представленный в виде математической кривой/поверхности в пространстве напряжений/деформаций, предсказывающий возникновение повреждения материала, но не определяющий напрямую моду разрушения или характер повреждения, классифицируют как критерий, не зависящий от моды разрушения, и обычно описывают полиномиальным уравнением.

Критерии разрушения, зависящие от моды, обычно включают несколько разных уравнений или наборов уравнений, определяющих конкретную

моду разрушения: критерии Хашина—Ротема [35], Хашина [30], Пака [23, 24] и LaRC [31, 32].

1.1.4. Неинтерактивные и интерактивные критерии разрушения. При сравнении напряжения (или деформации) монослоев с соответствующими значениями прочности по отдельности неинтерактивные критерии разрушения позволяют предсказать разрушающие нагрузки и моды. Например, на разрушение при поперечном растяжении не влияет наличие продольного сдвига. Такие критерии можно назвать “не зависящими от моды”, поскольку они напрямую не определяют моды разрушения или характер повреждения. К ним относят критерии максимального напряжения [28] и Цая—Хилла [29]. Критерии, предсказывающие разрушающие нагрузки с помощью одного квадратного полиномиального уравнения или уравнения высшего порядка, включающего все компоненты напряжений (или деформаций), классифицируют как интерактивные критерии разрушения. Уравнения этих критериев непосредственно определяют моды разрушения, поэтому их называют “критериями, зависящими от моды разрушения”. К ним относят критерии Хашина—Ротема [35], Хашина [30], Сана [9], Пака [23, 24] и LaRC [31, 32].

1.2. Обзор некоторых широко используемых критериев разрушения. В настоящей работе рассмотрены пять типичных критериев разрушения (максимального напряжения, Хашина, Пака, LaRC03 и Северо-Западного университета (СЗУ)). Характеристики и возможности этих критериев разрушения приведены в табл. 1.

В критерии максимального напряжения используют только два индекса для различения мод разрушения волокна и матрицы. Этот критерий применен в [36] при анализе гофрированной пластины и квадратных труб. В [37], исследуя тонкостенную композитную балку С-образного попереч-

Табл. 1

Возможности разных критериев разрушения

Возможность	Критерий				
	Максимального напряжения/деформации	Хашина	Пака	LaRc03	СЗУ
Год разработки	1957	1973	1998	2003	2008
Растяжение волокна	√	√	√	√	√
Сжатие волокна	√	√	√	√	√
Растяжение матрицы	√	√	√	√	√
Сжатие матрицы	√	√	√	√	√
Взаимодействие σ_{22} — τ_{12}	—	—	√	√	√
Плоскость разрушения	—	—	√	√	—
Перехлест волокон	—	—	—	√	—
Прочность по месту	—	—	—	√	—
Скорость деформирования	—	—	—	—	√

ного сечения, подвергнутую чистому изгибу, установили, что наилучшее согласование между численными и экспериментальными результатами дает критерий максимального напряжения в направлении волокон.

В критерии Хашина применяют четыре индекса для различения мод разрушения: растяжения и сжатия волокна, растяжения и сжатия матрицы. Критерий Хашина пригоден для вычислительных процедур и используется уже несколько десятилетий. Однако в [38] обнаружили, что он не всегда хорошо коррелирует с экспериментальными результатами. В [39] применили критерий Хашина при моделировании разрушения слоистых композитных материалов с использованием оболочечных конечных элементов. В [40] установили, что включение сдвигового напряжения в критерий Хашина для описания разрушения волокна при растяжении занижает значение прочности.

Некоторые феноменологические критерии разрушения также основаны на критерии Хашина. Критерии СЗУ и Пака — два типичных примера. Теория СЗУ рассматривает два типа поперечного разрушения — с преобладанием нормального напряжения и с преобладанием сдвигового напряжения. В [41] получили хорошее предсказание разрушения первого слоя композита с помощью критерия СЗУ. В [42] использовали трехмерную версию критерия разрушения Пака для создания модели анизотропного повреждения (основанную на механизмах разрушения слоев) слоистых волокнисто-армированных композитов и получили хорошее согласование с экспериментальными данными испытаний на растяжение образцов с открытым отверстием.

Плоскость разрушения (введенная Хашиным) включена в критерий Пака для описания сжатия матрицы путем применения теории Мора—Кулона.

Критерий LaRC03, разработанный Давила, включает прочность по месту (*in situ*) и шесть неэмпирических уравнений для предсказания разрушения волокнисто-армированных слоистых композитов. В этом критерии соосность волокон рассматривали как локальную область волнистости с вовлеченным углом перегиба волокон (*fiber kinking angle*). Критерий LaRC03 использовали в [43] для оценки макроскопического разрушения однонаправленных волокнисто-армированных композитов.

Математические выражения этих критериев разрушения варьируются от простых уравнений до полиномиальных соотношений и могут быть охарактеризованы следующим образом.

1) Критерии, основанные на феноменологии, точны при описании разных мод разрушения композитов. Ранее их проверку провели для напряженных состояний в плоскости. В настоящее время для этой цели используют трехосные эксперименты.

2) Разрушение волокна при растяжении в этих критериях в значительной степени описывают критерии максимального напряжения/деформации. Основное выражение для разрушения матрицы при растяжении также не сильно отличается от критерия Хашина, за исключением включенной

концепции прочности по месту. В этих критериях разрушения для получения более точных предсказаний, особенно для слоистых композитов с разными углами ориентации волокон в слоях, используют прочность по месту (не только прочности по месту при продольном и поперечном сдвиге, но и прочности по месту при поперечном растяжении и сжатии) вместо прочности слоистых композитов.

3) Для описания разрушения волокна при сжатии ($\sigma_{11} < 0$) концепцию перегиба волокон взяли из критерия Пака, в котором для определения условия разрушения использовано сжимающее напряжение в волокне, а не в слоистом композите. Критерий LaRC03 для описания критерия разрушения волокна включает гипотезу полосы перегиба в дополнение к критерию разрушения матрицы при растяжении и сжатии.

Для описания сжатия матрицы Хашин ввел понятие плоскости разрушения и указал угол плоскости разрушения, который можно определить с помощью теории разрушения Мора. Поскольку этот метод слишком сложен, Хашин использовал квадратичную аппроксимацию для получения модели разрушения. Затем Пак развил свой способ для нахождения плоскости разрушения и разработал выражение для разрушения матрицы при сжатии, учитывающее взаимодействие поперечного сжатия и сдвиговых напряжений в плоскости.

1.3. Резюме. Основываясь на предыдущем обсуждении, преимущества и ограничения рассмотренных критериев разрушения можно сформулировать следующим образом.

1. Критерии максимального напряжения/деформации

Преимущества. Используют простые выражения для описания мод разрушения волокна и матрицы. Если известны значения основных прочностей слоя, то можно легко получить огибающую кривую прочности. Эти критерии широко распространены в инженерной практике и полезны для предсказания разрушения волокна в слоистом композите в задачах моделирования.

Ограничения. В этих критериях не учтены ни эффект Пуассона, ни механизмы разрушения волокна и матрицы, ни другие факторы, способные повлиять на разрушение композитов. Поэтому предсказания на их основе могут оказаться неприемлемыми для конечно-элементного моделирования при некоторых условиях нагружения.

2. Критерий разрушения Хашина

Преимущества. Этот феноменологический критерий позволяет различать разные моды разрушения. Простейший способ аппроксимации взаимодействия между разными эффектами — отказ от простого линейного взаимодействия. Критерий Хашина также пригоден для вычислительных процедур и широко используется в инженерной практике в силу его консервативных предсказаний.

Ограничения. Критерий не учитывает тот факт, что умеренное поперечное сжатие может увеличить прочность слоя при сдвиге. Кроме

того, при сжатии волокна не учитывается влияние сдвига в плоскости, значительно снижающее эффективную прочность слоя при сжатии.

3. Критерий разрушения Пака

Преимущества. Использует разные выражения для описания разных мод разрушения.

Ограничения. Включает 11 материальных параметров, некоторые из которых не являются физическими и их трудно определить количественно. Необходимы испытания для определения угла разрушения термопластичных слоистых композитов.

4. Критерий разрушения LaRC03

Преимущества. Использует разные выражения для предсказания разных мод разрушения при напряженных состояниях в плоскости и учитывает взаимодействие между напряжениями σ_{22} и τ_{12} . Введение концепции прочности по месту способно обеспечить более точное предсказание прочности слоистого композита.

Ограничения. Многие параметры, входящие в критерий, затрудняют его использование в инженерной практике. Угол разрушения вычисляют итерационно, что делает этот критерий времязатратным. Расчет прочности по месту для разных слоистых композитов неубедительный.

5. Критерий разрушения СЗУ

Преимущества. Достаточно простой, точный и позволяющий описать прочность слоистых композитов в трехмерных напряженных состояниях. Прочность новых материалов можно легко оценить, проведя несколько макроскопических испытаний монослоя и установив зависимость прочностей на поперечное растяжение, сжатие и сдвиг в плоскости от скорости деформирования.

Ограничения. Параметры, входящие в критерий, зависят от модулей упругости слоистого композита. Прогноз может превышать реальную прочность слоистого композита в условиях комбинированного нагружения.

2. Предсказательные способности разных критериев разрушения

Приведенный обзор показывает, что предсказательная способность феноменологических критериев разрушения лучше, чем других критериев. Поэтому будем сравнивать именно эти критерии при рассмотрении свойств углепластика на основе углеродных волокон AS4 и полиэфирэфиркетоновой матрицы (РЕЕК). Свойства углепластика следующие [44—47]: модули упругости $E_{11} = 127,6$ ГПа, $E_{22} = 10,3$ ГПа, $G_{12} = 10,3$ ГПа, $\nu_{12} = 0,32$, прочность $X_T = 2280$ МПа, $X_C = 1300$ МПа, $Y_T = 86$ МПа, $Y_C = 200$ МПа, $S_{12} = 152$ МПа.

2.1. Сравнение аналитических результатов. Для сравнения разных критериев разрушения с помощью MATLAB разработали вычислительную программу для определения огибающих кривых прочности в плоскостях

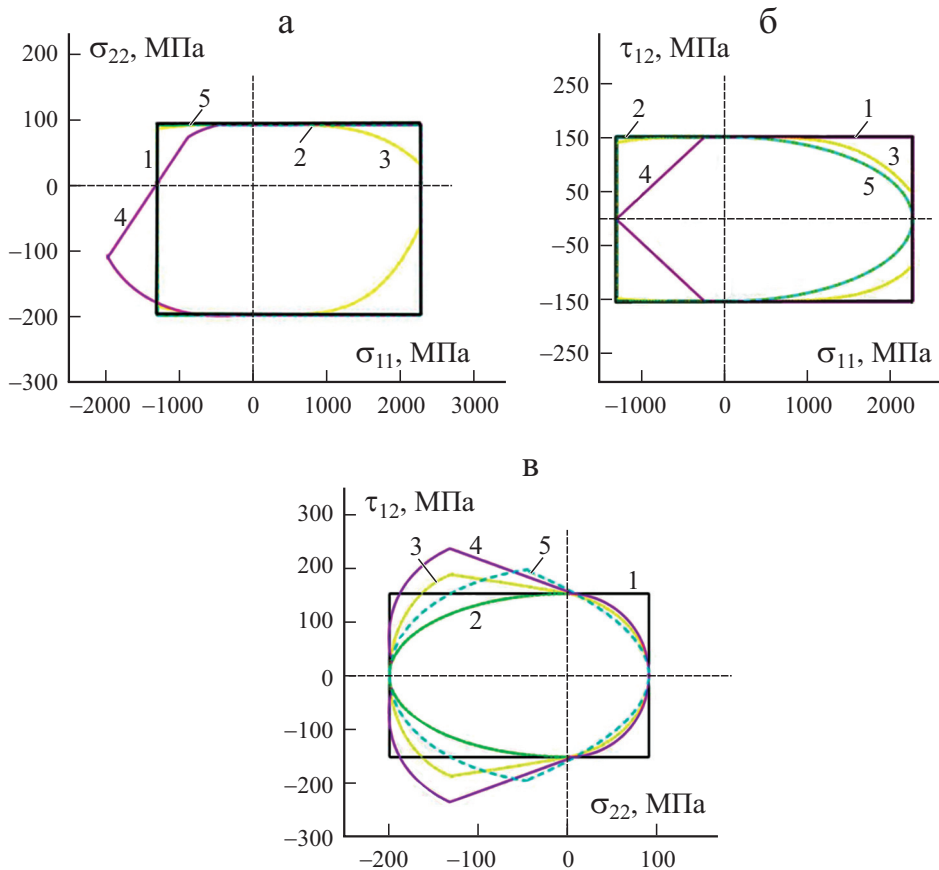


Рис. 1. Теоретические огибающие кривые прочности в плоскости σ_{11} — σ_{22} (а); σ_{11} — τ_{12} (б); σ_{22} — τ_{12} (в) для эпоксидного углепластика AS4/PEEK, рассчитанные по критериям максимального напряжения (1); Хашина (2); Пака (3); LaRC03 (4); СЗУ (5).

σ_{11} — σ_{22} , σ_{11} — τ_{12} и σ_{22} — τ_{12} (рис. 1). Огибающие кривые прочности предоставляют следующую информацию.

1. В условиях одноосного нагружения все критерии разрушения могут соответствовать точкам, являющимся значениями прочности материала X_T , X_C , Y_T , Y_C , $\pm S_{12}$.

2. Для критерия максимального напряжения огибающая является простейшей, все формы которой квадратные при разном комбинированном напряженном состоянии в плоскости, а границей этих трех огибающих являются значения прочности материала.

3. Для критерия Хашина огибающая кривая прочности в плоскости σ_{11} — σ_{22} (см. рис. 1—а) совпадает с таковой по критерию максимального напряжения. В плоскости σ_{11} — τ_{12} (см. рис. 1—б) при $\sigma_{11} < 0$ огибающая такая же, как и по критерию максимального напряжения, т.е. критерий Хашина не учитывает взаимодействие напряжений сдвига в плоскости

и продольного сжатия, в то время как при $\sigma_{11} > 0$ огибающая кривая имеет вид параболы. В плоскости $\sigma_{22} - \tau_{12}$ (см. рис. 1—в) огибающая кривая полностью заключена в огибающую критерия максимального напряжения и обеспечивает наиболее консервативный прогноз разрушения при $\sigma_{22} < 0$.

4. Огибающая кривая для критерия Пака более сложная в силу большого количества параметров. В плоскостях $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ и $\sigma_{11} - \tau_{12}$ огибающие кривые заключены в квадратную огибающую критерия максимального напряжения.

5. Критерий LaRC03 также включает в себя большое количество параметров. В плоскости $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ при $\sigma_{11} \geq 0$ его огибающая совпадает с огибающей критерия максимального напряжения, но при $\sigma_{11} \leq 0$ существенно отличается, особенно в третьем квадранте. В плоскости $\sigma_{11} - \tau_{12}$ при $\sigma_{11} \geq 0$ этот критерий предсказывает те же результаты, что и критерий максимального напряжения, но при $\sigma_{11} \leq 0$ предсказание является наиболее консервативным из пяти рассмотренных критериев. В плоскости $\sigma_{22} - \tau_{12}$ критерий LaRC03 дает предсказания, аналогичные критерию Пака.

6. Огибающая кривая по критерию СЗУ такая же, как по критериям максимального напряжения и Хашина на плоскости $\sigma_{11} - \sigma_{22}$, и такая же, как по критерию Хашина на плоскости $\sigma_{11} - \tau_{12}$. На плоскости $\sigma_{22} - \tau_{12}$ критерий СЗУ, как и критерии Пака и LaRC03, демонстрирует, что умеренное поперечное сжатие может увеличить прочность слоя при сдвиге, но при $\sigma_{22} > 0$ этот прогноз оказался наиболее консервативным среди рассмотренных критериев.

2.2. Влияние угла плоскости разрушения на критерии разрушения.

При анализе разрушения при сжатии матрицы угол разрушения α_0 необходимо определить как для критерия Пака, так и для критерия LaRC03. Пак установил, что при поперечном сжатии большинство однонаправленных эпоксидных углепластиков разрушаются в силу поперечного сдвига

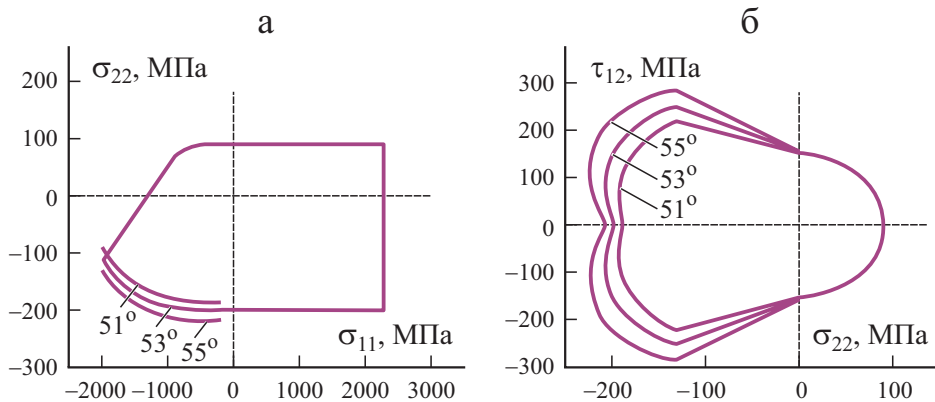


Рис. 2. Огибающие кривые прочности, рассчитанные по критерию разрушения LaRC03 в плоскостях $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ (а) и $\sigma_{11} - \tau_{12}$ (б).

в плоскости, ориентированной под углом $\alpha_0 = 53 \pm 2^\circ$. При использовании критериев Пака и LaRC03 для предсказания начала разрушения слоистых композитов часто используют это значение угла разрушения. Для термопластичных материалов угол α_0 не измеряли. Для напряженного состояния в плоскости при поперечном сжатии огибающие кривые по критерию LaRC03 при $\alpha_0 = 51, 53$ и 55° различаются, что демонстрируют данные рис. 2. Это обусловлено тем, что некоторые параметры, входящие в критерий LaRC03, зависят от угла α_0 .

Критерий Пака является полуэмпирическим, рекомендуемые для него параметры приведены в [23, 24]. Они определены для термоактивных композитов с углом $\alpha_0 = 53^\circ$. В настоящей работе именно это значение угла разрушения для рассматриваемого термоактивного композита использовали при создании его конечно-элементной модели.

2.3. Сравнение численных результатов. Для дальнейшего сравнения предсказательных возможностей указанных критериев разрушения разработали конечно-элементную модель, включающую модели повреждения, основанные на разных критериях разрушения. Посредством конечно-элементной модели провели виртуальные испытания на трехточечный изгиб, результаты которых использовали для сравнения [44].

2.3.1. Конечно-элементную модель разработали с помощью программного обеспечения ABAQUS 2018. Размеры образца на трехточечный изгиб $120 \times 13 \times 3$ мм, радиус нагружающего валика и неподвижных опор 5 мм, пролет опоры 96 мм. Эксперименты выполняли со скоростью нагружения 1 мм/с. Как правило, при испытаниях на трехточечный изгиб может возникнуть несколько мод разрушения: растяжение/сжатие волокна, растяжение/сжатие матрицы и расслоение с сильным и сложным взаимодействием между ними. Распространение расслоений в композитных структурах — трехмерное явление, поскольку расслоения часто распространяются не самоподобным образом и могут переходить в другие слои и распространяться вдоль других поверхностей раздела [14]. Возникающие микротрещины часто влияют на направление и форму роста расслоения. Поэтому при моделировании следует использовать трехмерные конечные элементы,

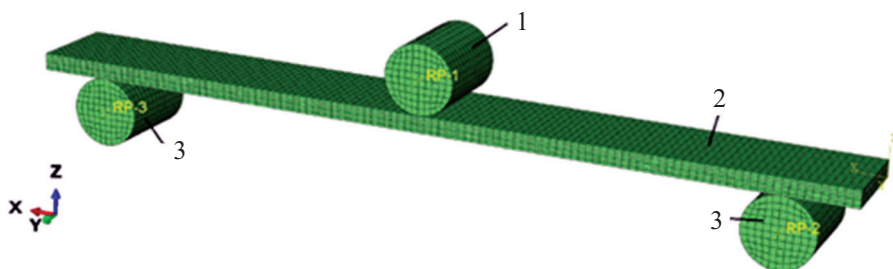


Рис. 3. Конечно-элементная модель, разработанная с помощью программного обеспечения ABAQUS 2018: 1 — нагружающий валик; 2 — композитный образец; 3 — неподвижная опора.

как показано на рис. 3. В настоящей работе использовали твердотельные конечные элементы C3D8R размером 1×1 мм. Межповерхностное разрушение между композитными слоями смоделировали с использованием модели когезионной поверхности, встроенной в программное обеспечение ABAQUS, и задействовали общий алгоритм для управления глобальным контактом [44].

2.3.2. Краткий обзор моделей разрушения. 2.3.2.1. Закон состояния. Для выявления отклика материала до начала растрескивания матрицы и т. д. и получения более точного предсказания поведения при ударе слоистого композита и моделирования любого постоянного вдавливания, возникающего в силу моделируемого удара, разработали расширенную трехмерную пластическую модель. Определяющее соотношение для модели можно получить, объединив классическую упругую модель с расширенной пластической моделью в виде [45]

$$\left\{ \begin{matrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ d\varepsilon_{12} \\ d\varepsilon_{13} \\ d\varepsilon_{23} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{21}/E_{11} & -\nu_{31}/E_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_{22} & 1/E_{22} & -\nu_{32}/E_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_{33} & -\nu_{23}/E_{33} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\sigma_{12} \\ d\sigma_{13} \\ d\sigma_{23} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} d\varepsilon_{11}^p \\ d\varepsilon_{22}^p \\ d\varepsilon_{33}^p \\ d\varepsilon_{12}^p \\ d\varepsilon_{13}^p \\ d\varepsilon_{23}^p \end{matrix} \right\}, \quad (1)$$

где $d\varepsilon_{ij}$ и $d\sigma_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) — приращения тензоров деформаций и напряжений соответственно; ν_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$) — коэффициенты Пуассона; E_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, i = j$) — модули Юнга при растяжении и сжатии, которые обычно считают равными для слоистых композитов [46]; G_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$) — модули сдвига. Параметр $d\varepsilon_{ij}^p$ ($i, j = 1, 2, 3$), представляющий приращение тензора пластической деформации, имеет вид

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_{11}^p \\ d\varepsilon_{22}^p \\ d\varepsilon_{33}^p \\ d\varepsilon_{12}^p \\ d\varepsilon_{13}^p \\ d\varepsilon_{23}^p \end{pmatrix} = \frac{A_n}{\sigma_{eff}^{1-n}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3(\sigma_{22} - \sigma_{33}) / 2\sigma_{equ} \\ 3(\sigma_{33} - \sigma_{22}) / 2\sigma_{equ} \\ 3a_{6612} / 2\sigma_{equ} \\ 3a_{6613} / 2\sigma_{equ} \\ 3a_{4423} / 2\sigma_{equ} \end{pmatrix} d\sigma_{equ}, \quad (2)$$

где σ_{equ} — эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{equ} = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - 3\sigma_{22}\sigma_{33} + 3a_{44}\sigma_{23}^2 + 3a_{55}\sigma_{13}^2 + 3a_{66}\sigma_{12}^2}. \quad (3)$$

Взаимосвязь между эквивалентным напряжением σ_{equ} и эквивалентной пластической деформацией ε_{equ}^p можно выразить с помощью степенной функции [47]

$$\varepsilon_{equ}^p = A_n \sigma_{equ}^n. \quad (4)$$

В формуле (3) a_{44} , a_{55} , a_{66} — коэффициенты, характеризующие степень анизотропии материала. Для трансверсально-изотропных твердых тел, линейно-упругих в направлении волокон, $a_{44} = 2$. Коэффициенты $a_{55} = a_{66}$, A_n , n можно легко определить из экспериментов на несоосное растяжение или деформирование однонаправленного композита при разных значениях угла несоосности.

2.3.2.2. *Модель иницирования повреждения.* Как уже было указано, большинство моделей разрушения волокна основано на критерии максимального напряжения. Поэтому именно этот критерий использовали в модели разрушения для предсказания разрушения волокна. Аналитически это определяют следующим образом:

— при растяжении вдоль волокна ($\sigma_{11} \geq 0$)

$$F_{1t} = \frac{\sigma_{11}}{X_T}, \quad (5)$$

— при сжатии вдоль волокна ($\sigma_{11} < 0$)

$$F_{1c} = \frac{\sigma_{11}}{X_C}. \quad (6)$$

Для матрицы рассматривали следующие пять критериев разрушения.

1. Критерий максимального напряжения:

— трансверсальное разрушение ($|\sigma_{22}| \geq |\sigma_{33}|$)

с преобладанием растяжения

$$F_{2t} = \frac{\sigma_{22}}{Y_T}, \quad (7)$$

с преобладанием сжатия

$$F_{2c} = \frac{\sigma_{22}}{Y_C}; \quad (8)$$

— разрушение по толщине ($|\sigma_{33}| \geq |\sigma_{22}|$)
с преобладанием растяжения

$$F_{3t} = \frac{\sigma_{33}}{Z_T}, \quad (9)$$

с преобладанием сжатия

$$F_{3c} = \frac{\sigma_{33}}{Z_C}. \quad (10)$$

2. Критерий Хашина:

— растяжение матрицы ($\sigma_{22} + \sigma_{33} \geq 0$)

$$F_{2t} = \frac{1}{Y_C^2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_{23}^2} (\tau_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_{12}^2} (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2), \quad (11)$$

— сжатие матрицы ($\sigma_{22} + \sigma_{33} < 0$)

$$F_{2c} = \frac{1}{Y_C} \left[\left(\frac{Y_C}{2S_{23}} \right)^2 - 1 \right] (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{4S_{23}^2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_{23}^2} (\tau_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S_{12}^2} (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2). \quad (12)$$

3. Критерий Пака:

— растяжение матрицы ($\sigma_n \geq 0$)

$$F_{2t} = \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^{(+A)}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel}^A} \right)^2, \quad (13)$$

— сжатие матрицы ($\sigma_n < 0$)

$$F_{2c} = \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - P_{\perp\perp}^{(-)} \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel}^A - P_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_n} \right)^2, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{22} \cos^2 \theta + \sigma_{33} \sin^2 \theta + 2\tau_{23} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{nt} &= (\sigma_{33} - \sigma_{22}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{23} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \tau_{nl} &= \tau_{31} \sin \theta + \tau_{21} \cos \theta.\end{aligned}$$

Для углеродных волокон

$$P_{\perp\perp}^{(-)} = 0,3, \quad P_{\perp\perp}^{(+)} = 0,2, \quad R_{\perp}^{(+)\text{A}} = Y_T, \quad R_{\perp\perp}^{\text{A}} = S_{21}, \quad R_{\perp\perp}^{\text{A}} = \frac{Y_C}{2(1 + P_{\perp\perp}^{(-)})}.$$

4. Критерий LaRC03:

— растяжение матрицы ($\sigma_{22} > 0$)

$$F_{2t} = (1-g) \frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} + g \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{is}^L} \right)^2, \quad (15)$$

— сжатие матрицы ($\sigma_{22} < 0$)

$$\begin{cases} F_{2c} = \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^T}{S_{23}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^L}{S_{is}^L} \right)^2, & \sigma_{11} \geq Y_C, \\ F_{2c} = \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^{mT}}{S_{23}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{\text{eff}}^{mL}}{S_{is}^L} \right)^2, & \sigma_{11} < Y_C, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}g &= \frac{G_{IC}}{G_{IIC}} = \frac{\Lambda_{22}^0}{\Lambda_{44}^0} \left(\frac{Y_{is}^T}{S_{is}^L} \right)^2, \quad Y_{is}^T = \sqrt{\frac{8G_{IC}}{\pi t \Lambda_{22}^0}}, \\ S_{is}^L &= \sqrt{\frac{8G_{IIC}}{\pi t \Lambda_{44}^0}}, \quad \Lambda_{22}^0 = 2 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{21}^2}{E_1} \right), \quad \Lambda_{44}^0 = \frac{1}{G_{12}}, \\ \tau_{\text{eff}}^T &= -\sigma_{22} \cos \theta (\sin \theta - \eta^T \cos \theta), \quad \tau_{\text{eff}}^L = \cos \theta (|\tau_{12}| + \eta^L \sigma_{22} \cos \theta), \\ \tau_{\text{eff}}^{mT} &= -\sigma_{22}^m \cos \theta (\sin \theta - \eta^T \cos \theta), \quad \tau_{\text{eff}}^{mL} = \cos \theta (|\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m \cos \theta), \\ \sigma_{11}^m &= \sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + 2|\tau_{12}| \sin \varphi \cos \varphi, \\ \sigma_{22}^m &= \sigma_{11} \sin^2 \varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi + 2|\tau_{12}| \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau_{12}^m &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + |\tau_{12}| (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),\end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{|\tau_{12}| + (G_{12} - X_C)\varphi^C}{G_{12} + \sigma_{11} - \sigma_{22}}, \quad \varphi^C = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{S_{is}^L}{X_C} + \eta^L \right) \left(\frac{S_{is}^L}{X_C} \right)}}{2 \left(\frac{S_{is}^L}{X_C} + \eta^L \right)}, \quad \alpha_0 = 53^\circ,$$

$$\eta^T = \frac{-1}{\operatorname{tg} 2\alpha_0}, \quad \eta^L = \frac{S^L \cos 2\alpha_0}{Y_C \cos^2 \alpha_0}, \quad S^T = Y_C \cos \alpha_0 \left(\sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0}{\operatorname{tg} 2\alpha_0} \right).$$

5. Критерий СЗУ:

— трансверсальное разрушение ($|\sigma_{22}| \geq |\sigma_{33}|$)

с преобладанием растяжения ($|\sigma_{22}| \geq |\tau_{12}(\tau_{23})|$ и $\sigma_{22} \geq 0$)

$$F_{2t} = \frac{\sigma_{22}}{Y_T} + \left(\frac{E_{22}}{2G_{12}} \right)^2 \left(\frac{\tau_{12}}{Y_T} \right)^2 + \left(\frac{E_{22}}{2G_{23}} \right)^2 \left(\frac{\tau_{23}}{Y_T} \right)^2 \leq 1, \quad (17)$$

с преобладанием сжатия ($|\sigma_{22}| \geq |\tau_{12}(\tau_{23})|$ и $\sigma_{22} < 0$)

$$F_{2c} = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_C} \right)^2 + \left(\frac{E_{22}}{G_{12}} \right)^2 \left(\frac{\tau_{12}}{Y_C} \right)^2 + \left(\frac{E_{22}}{G_{23}} \right)^2 \left(\frac{\tau_{23}}{Y_C} \right)^2 \leq 1, \quad (18)$$

с преобладанием сдвига ($|\sigma_{22}| \leq |\tau_{12}(\tau_{23})|$)

$$F_{2s} = \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}} \right)^2 + \frac{2G_{12}}{E_{22}} \frac{\sigma_{22}}{Y_C} \leq 1; \quad (19)$$

— разрушение по толщине ($|\sigma_{33}| \geq |\sigma_{22}|$)

с преобладанием растяжения ($|\sigma_{33}| \geq |\tau_{13}(\tau_{23})|$ и $\sigma_{33} \geq 0$)

$$F_{3t} = \frac{\sigma_{33}}{Z_T} + \left(\frac{E_{33}}{2G_{13}} \right)^2 \left(\frac{\tau_{13}}{Z_T} \right)^2 + \left(\frac{E_{33}}{2G_{23}} \right)^2 \left(\frac{\tau_{23}}{Z_T} \right)^2 \leq 1, \quad (20)$$

с преобладанием сжатия ($|\sigma_{33}| \geq |\tau_{13}(\tau_{23})|$ и $\sigma_{33} < 0$)

$$F_{3c} = \left(\frac{\sigma_{33}}{Z_C} \right)^2 + \left(\frac{E_{33}}{G_{13}} \right)^2 \left(\frac{\tau_{13}}{Z_C} \right)^2 + \left(\frac{E_{33}}{G_{23}} \right)^2 \left(\frac{\tau_{23}}{Z_C} \right)^2 \leq 1, \quad (21)$$

с преобладанием сдвига ($|\sigma_{33}| \leq |\tau_{13}(\tau_{23})|$)

$$F_{3s} = \left(\frac{\tau_{13}}{S_{13}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}} \right)^2 + \frac{2G_{13}}{E_{33}} \frac{\sigma_{33}}{Z_C} \leq 1. \quad (22)$$

Здесь F_{it} , F_{ic} , F_{is} , $i = 1, 2, 3$, — индексы типов разрушения при растяжении, сжатии и сдвиге в трех направлениях материала соответственно; X_T , Y_T , Z_T и X_C , Y_C , Z_C — прочности при растяжении и сжатии в направлениях материала соответственно; S_{12} , S_{13} , S_{23} — прочности при сдвиге в соответствующих направлениях материала; θ — угол плоскости разрушения; σ_n , τ_m , τ_{nl} — нормальные и сдвиговые напряжения в плоскости разрушения; P — параметры наклона огибающих кривых прочности; R — сопротивление разрушению; τ_{eff}^T и τ_{eff}^L — эффективное сдвиговое напряжение в поперечном и продольном направлениях в плоскости разрушения соответственно; τ_{eff}^{mT} и τ_{eff}^{mL} — эффективные сдвиговые напряжения в области несоосности волокон; Y_{is}^T и S_{is}^L — прочности по месту при поперечном сжатии и продольном сдвиге соответственно; t — толщина композитной пластины.

2.3.2.3. *Модель распространения повреждения.* В соответствии с моделью развития прогрессирующего повреждения для описания роста внутрислойного повреждения в слое композита определяют переменные повреждения для разрушения волокна и матрицы при растяжении, сжатии и сдвиге. Модель распространения повреждений разработали на основе энергии, рассеиваемой в ходе повреждения, и линейного размягчения материала. Общий вид переменной повреждения d для конкретного типа повреждения приведен в [25]:

$$d = \frac{(\varepsilon^f - \varepsilon_p)(\varepsilon - \varepsilon^0)}{(\varepsilon - \varepsilon_p)(\varepsilon^f - \varepsilon^0)}, \quad (23)$$

где ε — комбинированная деформация в слое композита; ε^0 и ε^f — комбинированные деформации, соответствующие началу повреждения и окончательному разрушению соответственно; ε_p — комбинированная пластическая деформация. Деформации при разрушении можно определить из соответствующих значений энергии внутрислойного разрушения растяжением $G_{Ic}|_{ft}$ и сжатием $G_{Ic}|_{fc}$ слоя в направлении укладки волокон и значений энергии внутрислойного разрушения растяжением $G_{Ic}|_{mt}$, сжатием $G_{Ic}|_{mc}$ и сдвигом $G_{IIc}|_{ms}$ в поперечном направлении. Затем переменную повреждения использовали для формирования матрицы

Табл. 2

Сравнение величины максимальной нагрузки P_{max} , предсказываемой разными критериями разрушения

Величина	Критерий					Эксперимент
	максимального напряжения	Хашина	СЗУ	Пака	LaRC03	
P_{max} , кН	0,98	1,02	1,03	1,06	1,05	1,01—1,07
Время расчета, ч	16	17	16	26	28	—

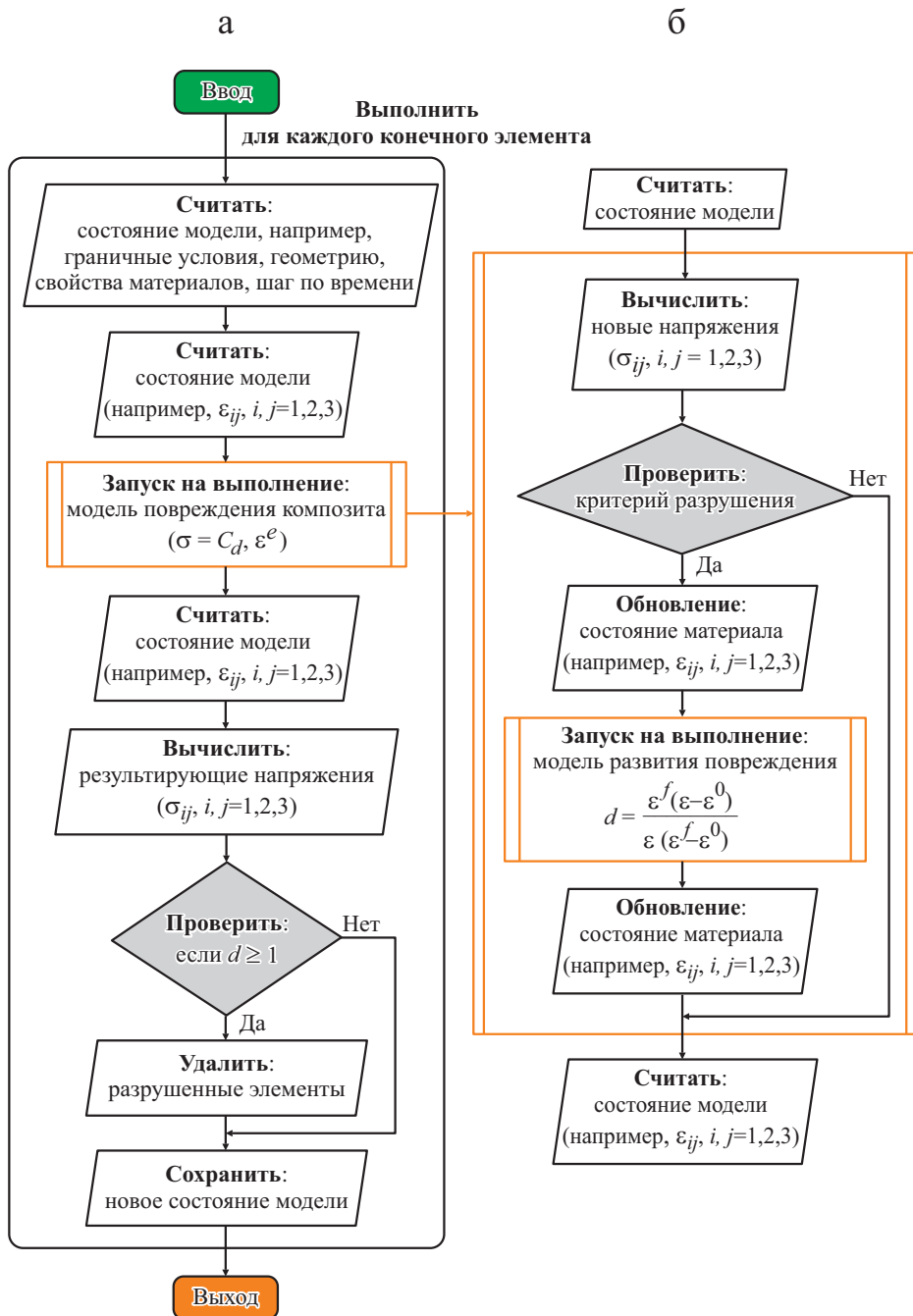


Рис. 4. Блок-схема основной конечно-элементной модели (а) и внедренного критерия разрушения (б).

упругости C_d поврежденного композита, для расчета его деградированного напряженного состояния. Детали этой модели распространения внутрислойных повреждений представлены в [14, 23, 31, 32, 45, 48].

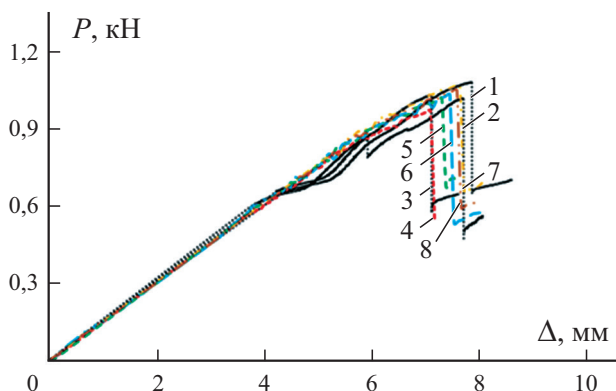


Рис. 5. Сравнение экспериментальных (1—3) и рассчитанных по критериям максимального напряжения (4), Хашина (5), СЗУ (6), Пака (7) и LaRC03 (8) диаграмм нагрузка—перемещение P — Δ при трехточечном изгибе.

2.3.2.4. *Реализация модели.* Блок-схема разработанной конечно-элементной модели показана на рис. 4, где также приведена вспомогательная блок-схема модели повреждения композита. На блок-схеме показан один прогон вычислений для одного конечного элемента. Для выявления механического отклика и прогрессирующего разрушения рассматриваемых термопластичных композитов расчет выполняли для каждого неразрушенного конечного элемента.

2.3.2.5. *Результаты моделирования.* Отклик, полученный в результате эксперимента и численного моделирования, показан на рис. 5. На начальном этапе, до возникновения повреждения, все отклики линейно-упругие, а затем нагрузка уменьшилась. Наблюдало разумное согласование всех откликов с экспериментальными результатами, свидетельствующее о том, что все изученные критерии разрушения имеют приемлемую способность предсказывать общий механический отклик термопластичных слоистых композитов при трехточечном изгибе.

В табл. 2 приведены значения максимальной нагрузки, полученные в результате эксперимента и моделирования. Видно, что критерии Пака и LaRC03 дали очень похожий прогноз максимальной нагрузки — 1,06 и 1,05 кН соответственно, хорошо коррелирующий с экспериментальными результатами. Однако в силу итерационных расчетов угла разрушения эти критерии потребовали большего времени вычислений. Критерий максимального напряжения предсказал самые консервативные результаты.

Заключение

В настоящей работе рассмотрели пять типичных макроскопических критериев разрушения. Сравнительное исследование выполнили путем

анализа теоретических огибающих кривых прочности и численных результатов, полученных с помощью конечно-элементной модели.

На основании аналитических и численных результатов сделаны следующие выводы.

Критерии максимального напряжения/деформации, Хашина и СЗУ удобны на практике в виду небольшого количества входящих в них параметров. Критерий Хашина четко не учитывает взаимодействие между напряжениями σ_{11} и σ_{22} , а также имеет некоторую неоднозначность в выборе параметров, например, прочности при поперечном сдвиге. Критерий СЗУ способен учесть взаимодействие между поперечными σ_{22} и сдвиговыми τ_{12} напряжениями в плоскости, но дает консервативный прогноз разрушения волокна и матрицы при растяжении.

Критерии разрушения Пака и LaRC03 способны выявить больше механизмов разрушения, которые не только отражают взаимодействие между напряжениями σ_{11} , σ_{22} и τ_{12} , но и учитывают влияние ориентации разрушения, перегиба волокон и прочности по месту. Однако используемые в них параметры требуют значительного опыта применения.

Численные результаты показали, что критерий максимального напряжения обеспечивает наиболее консервативное предсказание, в то время как критерии Хашина и СЗУ дают разумные результаты при приемлемом времени вычислений. Критерии Пака и LaRC03 дали более точные предсказания, но при больших затратах времени вычислений.

Благодарность. Авторы высоко ценят финансовую поддержку настоящего исследования Корпорацией авиационной промышленности Китая (AVIC), Первым авиационным институтом (FAI) Китая, Институтом производственных технологий (MTI) Китая и Исследовательским институтом прочности самолетов (ASRI) Китая. Исследование выполнено в Центре конструкционного проектирования и производства AVIC при Имперском колледже Лондона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hinton M. J. and Soden P. D. Predicting failure in composite laminates: The background to the exercise // Compos. Sci. Technol. — 1998. — Vol. 58. — P. 1001—1010.
2. Hinton M. J., Kaddour A. S., and Soden P. D. Evaluation of failure prediction in composite laminates: Background to Part (B) of the exercise // Compos. Sci. Technol. — 2002. — Vol. 62. — P. 1481—1488.
3. Hinton M. J., Kaddour A. S., and Soden P. D. Failure Criteria in Fiber Reinforced Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise. — Oxford: Elsevier Sci., 2004.
4. Hinton M. J., Kaddour A. S., and Soden P. D. Evaluation of failure prediction in composite laminates: Background to Part C of the exercise // Compos. Sci. Technol. — 2004. — Vol. 64. — P. 321—328.
5. Hinton M. J., Kaddour A. S., and Soden P. D. A further assessment of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: Comparison with experimental evidence // Compos. Sci. Technol. — 2004. — Vol. 64. — P. 549—588.

6. *Kaddour A. S. and Hinton M. J.* Evaluation of theories for predicting failure in polymer composite laminates under 3-D states of stress: Part A of the second world-wide failure exercise (WWFE-II) // *J. Compos. Mater.* — 2012. — Vol. 46. — P. 19—20.

7. *Kaddour A. S., Hinton M. J., Smith P. A., and Li S.* Matrix cracking criteria for fiber reinforced polymer composites: Part A of the 3rd world-wide failure exercise // *J. Compos. Mater.* — 2013. — Vol. 47. — P. 20—21.

8. *Talreja R.* Assessment of the fundamentals of failure theories for composite materials // *Compos. Sci. Technol.* — 2014. — Vol. 105. — P. 190—201.

9. *Sun C. T., Quinn B. J., and Tao J.* Comparative evaluation of failure analysis methods for composite laminates // DOT/FAA/AR-95/109. — 1996.

10. *Erskine F. T., Bernstein G. M., Brylow S. M., Newbold W. T., and Gauss R. C.* The place for thermoplastic composites in structural components // National Materials Advisory Board, National Research Council — AD-A189 149. — 1987.

11. *Béland S.* High Performance Thermoplastic Resins and Their Composites. — William Andrew Publ., 2002.

12. *Schaefer J. D. and Daniel I. M.* Strain-rate-dependent yield criteria for progressive failure analysis of composite laminates based on the Northwestern failure theory // *Exp. Mech.* — 2018. — Vol. 58. — P. 487—497.

13. *Daniel I. M., Daniel S. M., and Fenner J. S.* A new yield and failure theory for composite materials under static and dynamic loading // *Int. J. Solids Struct.* — 2018. — Vol. 148. — P. 79—93.

14. *Li X., Ma D., Liu H., Tan W., Gong X., Zhang C., and Li Y.* Assessment of failure criteria and damage evolution methods for composite laminates under low-velocity impact // *Compos. Struct.* — 2019. — Vol. 207. — P. 727—739.

15. *Sun C. T. and Chen G.* Elastic-plastic finite element analysis of thermoplastic composite plates and shells // *AIAA J.* — 1992. — Vol. 30. — P. 513—518.

16. *Tan W. and Falzon B. G.* Modelling the nonlinear behaviour and fracture process of AS4/PEKK thermoplastic composite under shear loading // *Compos. Sci. Technol.* — 2016. — Vol. 126. — P. 60—77.

17. *Liu H., Falzon B. G., Li S., Tan W., Liu J., Chai H., Blackman B. R. K., and Dear J. P.* Compressive failure of woven fabric reinforced thermoplastic composites with an open-hole: An experimental and numerical study // *Compos. Struct.* — 2019. — Vol. 213. — P. 108—117.

18. *Daniel I. M. and Ishai O.* Engineering Mechanics of Composite Materials. — N. Y.: Oxford Univ. Press, 2006.

19. *Zinoviev P. A., Grigoriev S. V., Lebedeva O. V., and Tairova L. P.* The strength of multi-layered composites under a plane-stress state // *Compos. Sci. Technol.* — 1998. — Vol. 58. — P. 1209—1223.

20. *Zinoviev P., Lebedeva O. V., and Tairova L. R.* Coupled analysis of experimental and theoretical on the deformation and failure of laminated composites under a plane state of stress // *Compos. Sci. Technol.* — 2002. — Vol. 62. — P. 1711—1724.

21. *Bogetti T. A., Hoppel R. C. P., Harik V. M., Newill J. F., and Burns B. P.* Predicting the nonlinear response and progressive failure of composite laminates // *Compos. Sci. Technol.* — 2004. — Vol. 64. — P. 329—342.

22. *Bogetti T. A., Hoppel R. C. P., Harik V. M., Newill J. F., and Burns B. P.* Predicting the nonlinear response and failure of composite laminates: Correlation with experimental results // *Compos. Sci. Technol.* — 2004. — Vol. 64. — P. 477—485.

23. *Puck A. and Schürmann H.* Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // *Compos. Sci. Technol.* — 1998. — Vol. 58. — P. 1045—1067.

24. *Puck A. and Schürmann H.* Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // *Compos. Sci. Technol.* — 2002. — Vol. 62. — P. 1633—1662.
25. *Cuntze R. G. and Freund A.* The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates // *Compos. Sci. Technol.* — 2004. — Vol. 64. — P. 343—377.
26. *Cuntze R. G.* The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multi-directional laminates. Part B // *Compos. Sci. Technol.* — 2004. — Vol. 64. — P. 487—516.
27. *Liu K. S. and Tsai S. W.* A progressive quadratic failure criterion of a laminate // *Compos. Sci. Technol.* — 1998. — Vol. 58. — P. 1023—1032.
28. *Talreja R.* Assessment of the fundamentals of failure theories for composite materials // *Compos. Sci. Technol.* — 2014. — Vol. 105. — P. 190—201.
29. *Tsai S. W.* *Strength Characteristics of Composite Materials.* — NASA/CR-224, Washington D.C., 1965.
30. *Hashin Z.* Failure criteria for unidirectional fiber composites // *J. Appl. Mech.* — 1980. — Vol. 47. — P. 329—334.
31. *Catalanotti G., Camanho P. P., and Marques A. T.* Three-dimensional failure criteria for fiber-reinforced laminates // *Compos. Struct.* — 2013. — Vol. 95. — P. 63—79.
32. *Davila C. G.* *Failure Criteria for FRP Laminates in Plane Stress.* — NASA/TM-2003 0212663, 2003.
33. *Hoffman O.* The brittle strength of orthotropic materials // *J. Compos. Mater.* — 1967. — Vol. 1. — P. 200—206.
34. *Garnich M. R. and Akula V. M. K.* Review of degradation models for progressive failure analysis of fiber reinforced polymer composites // *Appl. Mech. Rev.* — 2009. — Vol. 62. — P. 1—33.
35. *Hashin Z. and Rotem A.* A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials // *Compos. Mater.* — 1973. — Vol. 7. — P. 448—464.
36. *Jiang H., Ren Y., Liu Z., Zhang S., and Wang X.* Evaluations of failure initiation criteria for predicting damages of composite structures under crushing loading // *J. Rein. Plast. Compos.* — 2018. — Vol. 37. — P. 1279—1303.
37. *Gliszczynski A. and Kubiak T.* Load-carrying capacity of thin-walled composite beams subjected to pure bending // *Thin-Walled Struct.* — 2017. — Vol. 115. — P.76—85.
38. *Gu J. and Chen P.* Some modifications of Hashin failure criteria for unidirectional composite materials // *Compos. Struct.* — 2017. — Vol. 182. — P. 143—152.
39. *Chaht F. L., Mokhtari M., and Benzaama H.* Using a Hashin Criteria to predict the damage of composite notched plate under traction and torsion behavior // *Frattura ed Integrità Strutturale.* — 2019. — Vol. 50. — P. 331—341.
40. *Li N. and Ju C.* Mode-independent and mode-interactive failure criteria for unidirectional composites based on strain energy density // *Polymers.* — 2020. — Vol. 12. — P. 2813.
41. *Schaefer J. D., Werner B. T., and Daniel I. M.* Progressive failure analysis of multi-directional composite laminates based on the strain-rate-dependent Northwestern Failure Theory // *Mechanics of Composite and Multi-functional Materials.* Vol. 6. *Conf. Proc. Soc. for Experimental Mech. Ser. / Eds. P. Thakre, R. Singh, and G. Slipher, Springer, 2017.*
42. *Reinoso J., Catalanotti G., Blázquez A., Areias P., Camanho P. P., and Paris F.* A consistent anisotropic damage model for laminated fiber-reinforced composites using the 3D-version of the Puck failure criterion // *Int. J. Solids Struct.* — 2017. — Vol. 126. — P. 37—53.

43. *Chang X., Guo X., Ren M., and Li T.* Micromechanical matrix failure analysis for unidirectional fiber-reinforced composites // *Thin-Walled Struct.* — 2019. — Vol. 141. — P. 275—282.

44. Abaqus 2017 documentation. Dassault Systèmes. Provid Rhode Island, USA, 2017.

45. *Sun C. T. and Chen J. L.* A simple flow rule for characterizing nonlinear behavior of fiber composites // *J. Compos. Mater.* — 1989. — Vol. 23. — P. 1009—1020.

46. *Liu H., Falzon B. G., and Dear J. P.* An experimental and numerical study on the crush behaviour of hybrid unidirectional/woven carbon-fiber reinforced composite laminates // *Int. J. Mech. Sci.* — 2019. — Vol. 164. — P. 105160.

47. *Liu H., Falzon B. G., and Tan W.* Predicting the compression-after-impact (CAI) strength of damage-tolerant hybrid unidirectional/woven carbon-fiber reinforced composite laminates // *Composites: Part A.* — 2018. — Vol. 105. — P. 189—202.

48. *Liu H., Falzon B. G., and Tan W.* Experimental and numerical studies on the impact response of damage-tolerant hybrid unidirectional/woven carbon-fiber reinforced composite laminates // *Composites: Part B.* — 2018. — Vol. 136. — P.101—18.

Поступила в редакцию 24.09.2020

Окончательный вариант поступил 28.04.2021

Received Sept. 24, 2020 (Apr. 28, 2021)

С. В. Котомин^{а,б}, И. М. Обидин^{б,в}, Е. А. Павлючкова^{б,г}*

^аМосковский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Россия

^бИнститут нефтехимического синтеза Российской академии наук, Москва, Россия

^вРХТУ им. Д. И. Менделеева, Москва, Россия

^гМИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ АДГЕЗИОННОЙ СВЯЗИ АРМИРУЮЩИХ ВОЛОКОН С ПОЛИМЕРАМИ ПО МЕТОДУ “ПЕТЛИ”

S. V. Kotomin^{}, I. M. Obidin, and E. A. Pavluchkova*

ADHESIVE BOND STRENGTH CALCULATION OF REINFORCING FIBERS WITH POLYMERS BY THE “LOOP” METHOD

Keywords: adhesive strength, fibers, reinforced plastics

The method of evaluation the adhesion strength for the fiber-polymer bond by pulling a thread from the adhesion cell formed by a loop tightened into a knot allows one to determine the adhesion of different types of reinforcing fibers to various thermosetting and thermoplastic polymer matrices. When tightening a knot from the loop covering the tested thread, the contact pressure required in the area of adhesion joint is ensured. The geometric model was developed to determine the contact area in the adhesion cell of this type. When calculating the contact area, the thickness (linear density) of the threads forming the adhesion cell, as well as the density of the material is taken into account. The influence of pressure and time of the contact of the fiber surface with the thermoplastic melt, as well as the melt temperature and content of nanodispersed fillers on the adhesive strength is shown.

Ключевые слова: прочность адгезионная, волокна, пластики армированные

Метод оценки адгезионной прочности связи волокно—полимер вытягиванием нити из адгезионной ячейки, сформированной из

* Автор, с которым следует вести переписку: svk@ips.ac.ru
Corresponding author: svk@ips.ac.ru

затянутой в узел петли, позволяет определять адгезию различных типов армирующих нитей и жгутов как к терморезактивным, так и к термопластичным матрицам. При затягивании узла из петли, охватывающей испытываемую нить, обеспечивается необходимое контактное давление в зоне адгезионного соединения. Разработана геометрическая модель, с помощью которой определена площадь контакта в адгезионной ячейке такого типа. При расчете площади учитывается толщина (линейная плотность) нитей, формирующих адгезионную ячейку, а также плотность материала. Показано влияние на адгезионную прочность давления и времени контакта поверхности волокна с расплавом термопласта, а также температуры расплава и содержания нанодисперсных наполнителей.

Введение

Методы исследования прочности адгезионной связи. Прочность адгезионной связи волокно—полимерная матрица характеризует эффективность распределения нагрузки на армирующие волокна в пластиках до их разрушения или отслоения от матрицы, поэтому изучению адгезии волокон в армированных пластиках уделяется большое внимание [1]. Наиболее высокие результаты при армировании достигаются при ориентации волокон в направлении растягивающих напряжений.

Адгезионная прочность полимеров к волокнам, а также прочность при сдвиге пластиков, армированных непрерывными волокнами, существенно зависит от напряженно-деформированного состояния соединения, а её оценка — от способа испытания и метода расчета, что детально обсуждается в трудах по адгезионной механике [2].

Существует несколько методов оценки прочности адгезионной связи волокон с полимерной матрицей. Наибольшее распространение получили различные варианты вытягивания (сдвига) моноволокна из микроблока полимера (в англоязычной литературе метод называется pull-out) [3]. Определяемое при этом значение сдвигового напряжения τ_{AC} , при котором происходит отделение нити от матрицы, характеризует прочность адгезионной связи. Для испытания образцов по этому методу разработаны различные виды адгезиометров. Фирма Textchno (Германия), например, предлагает установку Fimabond для изготовления образцов и проведения испытаний как с терморезактивными, так и с термопластичными связующими [4]. Использование подобного оборудования облегчает эксперимент, особенно для хрупких и тонких углеродных нитей. Формирование адгезионного соединения поверхности нити с полимером во всех известных адгезиометрах происходит при свободном контакте нити с жидким связующим без давления, и определение площади контакта требует дополнительного анализа.

Некоторые исследователи для формирования микроблока полимера на поверхности углеродной нити предлагают на нити завязывать узел из

термопластичного волокна с его последующим оплавлением [5] или же плавить гранулы термопласта непосредственно на поверхности нити [6]. Во всех подобных методиках создать давление в зоне контакта волокна с расплавом полимера также невозможно.

Методы “трех волокон”, конструкции из специальных измерительных ячеек, а также микрофрагментации и микротвердости [7—9] весьма трудоемки и требуют дополнительной оснастки для проведения испытания. Среди перечисленных методов микроиндентирование (push-out) выделяется возможностью использования образцов из реального композита. Но для проведения испытаний по этой методике необходима предварительная подготовка образцов в виде тонких пластинок, а характер нагружения армирующих волокон и характер разрушения адгезионного соединения принципиально отличаются от обычных условий работы армирующих волокон в композите. Под действием индентора на торец армирующей нити происходит её сжатие и выталкивание из матрицы вместо растяжения [9]. При проведении испытания необходимо прецизионное позиционирование индентора, а полученные экспериментальные результаты требуют достаточно сложной обработки. Определение таким методом значений τ_{AC} возможно для ограниченного типа волокон и не используется для обладающих низкой прочностью при сжатии и склонных к фибриллизации (расщеплению) арамидных волокон.

Волокна для армирования, как правило, используются в виде жгутов, поэтому практический интерес представляют и методики оценки величины τ_{AC} непосредственно для жгутов. Например, методика вытягивания жгута (комплексной нити) из блока связующего в виде керна (названная авторами [10] full pull-out) по процедуре близка к методу pull-out, для чего также требуется специальная оснастка для приготовления и испытания образцов. Усилие вытягивания в этом методе нормализуется по глубине погружения жгута в связующее. Но при подготовке образцов возможно изменение формы и размера зоны адгезионного взаимодействия вследствие капиллярного расклинивания (распушения) пучка элементарных нитей при погружении торца жгута в жидкое связующее.

В большинстве рассмотренных методов невозможно обеспечить и контролировать давление в зоне контакта волокна со связующим, необходимое для формирования прочного адгезионного соединения, что особенно важно для вязких расплавов термопластов. Результатов по измерению значений τ_{AC} , особенно углеродных, с термопластами в литературе крайне мало. В известных публикациях представлены в основном результаты изучения сдвигового напряжения τ_{AC} модельных систем со стальной проволокой [11].

В анизотропно-армированных пластиках содержание волокон достигает свыше 50% по объему, а толщина полимерной матрицы в межволоконном пространстве оказывается сопоставима с толщиной самих волокон. Поэтому представляется крайне важным изучать сдвиговое напряжение τ_{AC} именно для тонких полимерных слоев, а в зоне адгезионного взаимо-

действия необходимо создавать давление, без которого полного контакта поверхности волокна с вязкими расплавами термопластов достичь сложно. В большинстве перечисленных методов учесть эти факторы невозможно, и полученные значения τ_{AC} относятся к результатам отдельных модельных испытаний.

Метод вытягивания нити из петли. Относительно простым видом испытания, не требующим дополнительных приспособлений, является вытягивание волокна из адгезионной ячейки в виде узла, сформированного при затягивании петли, охватывающей испытываемую нить с полимером на поверхности [12—14]. При затягивании петли в узел вокруг испытываемой нити обеспечивается необходимое контактное давление в адгезионной области. Испытания образцов проводят на стандартных разрывных машинах. При испытании фактически происходит разрушение адгезионного соединения при сдвиге на поверхности не одной мононити, а множества элементарных волокон, контактирующих с полимером, так же, как и в упомянутом методе full pull-out [10], но ограниченной по площади шириной узла. Это позволяет сократить количество образцов для статистического учета разброса характеристик одиночных нитей. Данную методику применяли в СССР при исследовании адгезии арамидных волокон к эпоксидным связующим, например, в УкрНИИПМ (Донецк, Украина). Есть примеры и рекомендации для использования этой методики и для других терморезактивных связующих [15].

По данной методике рассчитывали величину τ_{AC} как усилие вытягивания жгута (пучка нитей) из адгезионной ячейки, отнесенное к линейной плотности испытываемого жгута, характеризующей толщину жгута. Площадь адгезионного контакта при этом не определяли, поскольку наибольший практический интерес в большинстве случаев представляет сравнение адгезии разных видов связующих к одному типу волокна или же изучение влияния на этот показатель поверхностной обработки волокон. Для термопластов методика позже была модифицирована таким образом, что узел затягивался на пленке, сформированной из расплава полимера, нанесенного на испытываемый жгут [16, 17].

Данную методику до настоящего времени использовали в основном при испытании адгезии арамидных волокон, поскольку хрупкие стеклянные и углеродные жгуты сложно затянуть в узел для формирования адгезионной ячейки. Также сложно было сравнить результаты, полученные для жгутов разной толщины (линейной плотности), поскольку площадь адгезионного контакта в узле зависит от этой толщины.

Цель настоящей работы — расширить и унифицировать применение методики “вытягивание из узла” для разных типов волокон и термопластичных матриц с учетом площади адгезионного контакта. Для этого было необходимо разработать модель для расчета площади адгезионного контакта в ячейке, сформированной в затянутом узле, охватывающим испытываемую нить, для нитей разного типа и толщины.

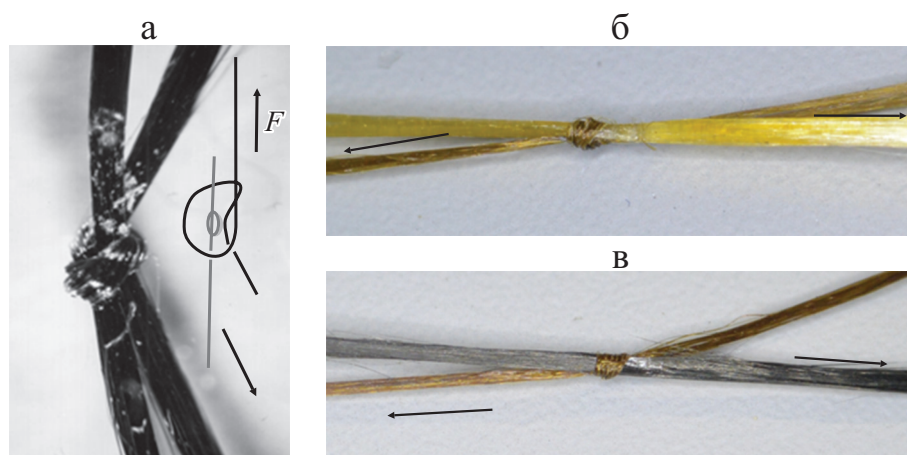


Рис. 1. Схема формирования узла при затягивании петли с усилием F и фотографии узла после испытаний нити Армос (а), стекложгута (б), углеродного жгута (в) (стрелки указывают направление и место растяжения).

Разработка модели адгезионной зоны в испытательной ячейке

Схема формирования адгезионной ячейки при затягивании узла из петли, охватывающей испытываемую нить, показана на рис. 1—а.

Каплю связующего (изначально термореактивного типа) наносят на нить в точку затягивания петли в узел. После этого проводят отверждение образца по необходимому температурному режиму. На микрофотографии (рис. 1—а) показан характер разрушения адгезионной связи волокно Армос—эпоксидное связующее, который, как видно, носит адгезионно-когезионный характер благодаря высокой адгезионной прочности волокон со связующим. Характер разрушения в случае стеклянных (рис. 1—б) и углеродных (рис. 1—в) волокон соответствует адгезионному типу разрушения.

Для термопластов затягивание узла вокруг нити, покрытой оболочкой полимера, проводят при температуре вязкотекучего состояния термопласта.

Для расчета площади адгезионного контакта жгутов в узле рассмотрим положение элементарных нитей, формирующих жгут, при охвате одного жгута петлей из другого. Каждый из двух жгутов, из которых формируется адгезионная ячейка, состоит из множества элементарных нитей (филаментов). В общем случае жгуты могут различаться материалом, толщиной и числом элементарных нитей. Как видно на фото 1—б и 1—в, охватываемая (центральная) нить при затягивании петли в зоне контакта принимает форму, близкую к цилиндрической, а охватывающая нить сплющивается в ленту.

Рассмотрим сечение центрального (охватываемого) жгута диаметром D в области контакта двух соседних филаментов диаметром d , расположенных на поверхности (рис. 2). При $D \gg d$ длина отрезка дуги L между точками касания двух соседних нитей с описывающей цилиндр окружностью приближается к длине прямой, соединяющей эти точки, и равна $\sim d$.

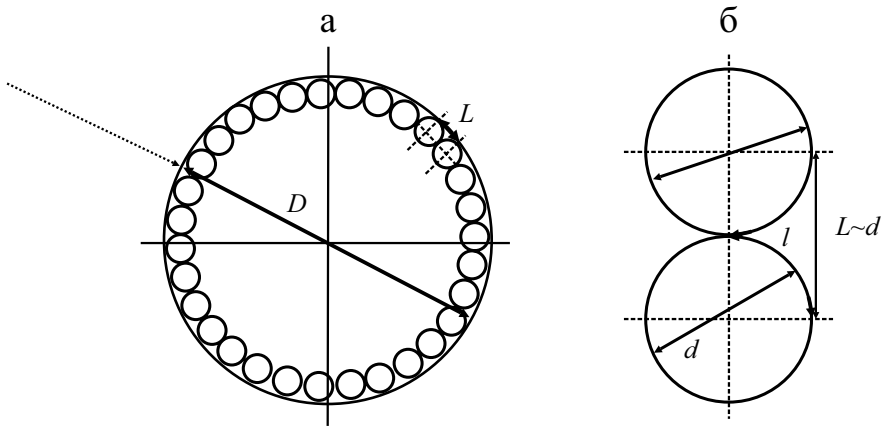


Рис. 2. Схема расположения нитей на поверхности жгута: а — жгут (комплексная нить) диаметром D ; б — мононить диаметром d .

Поскольку длина четверти окружности составляет $\pi d / 4$, то соответственно длина двух дуг l от крайних точек на поверхности до точки касания нитей между собой $\sim \pi d / 2$, что превышает расстояние между этими точками (равное d) в $\pi / 2$ раза. Таким образом, площадь поверхности комплексной нити диаметром D будет также в $\pi / 2$ раза больше цилиндрической поверхности того же диаметра D . Длина окружности при цилиндрической форме жгута диаметром D_1 будет равна πD_1 .

В случае формирования петли из жгута диаметром D_2 и с длиной окружности πD_2 при охвате жгута, расположенного в центре петли, первый расплющивается в плоскую ленту шириной $\sim \pi D_2 / 2$ (как показано на рис. 1—б, в).

Если принять форму жгута за близкую к цилиндрической, то его диаметр D можно рассчитать, исходя из линейной плотности T (измеряется в текс — внесистемная единица, характеризующая массу жгута длиной 1000 м) и плотности материала ρ , с учетом плотности упаковки

элементарных нитей цилиндрической формы в жгуте φ как $D = 2\sqrt{\frac{T}{\varphi\rho}}$.

Для двух жгутов с линейной плотностью T_1 и T_2 и плотностью материалов нитей ρ_1 и ρ_2 диаметры жгутов цилиндрической формы равны

$D_1 = 2\sqrt{\frac{T_1}{\varphi\rho_1}}$ и $D_2 = 2\sqrt{\frac{T_2}{\varphi\rho_2}}$. Тогда площадь контакта двух жгутов в узле на рис. 1 (с учетом расплющивания охватывающего жгута в ленту

шириной $\pi D_2 / 2$) может быть рассчитана как

$$S = \pi D_1 \frac{\pi D_2}{2} = \frac{2\pi}{\varphi} \sqrt{\frac{T_1 T_2}{\rho_1 \rho_2}}.$$

Поскольку с учетом приведенной оценки реальная площадь поверхности жгута превышает площадь цилиндра с тем же внешним диаметром в $\pi / 2$ раза, то площадь адгезионного контакта в этом случае будет равна

$$S = \frac{\pi^2}{\varphi} \sqrt{\frac{T_1 T_2}{\rho_1 \rho_2}}. \quad (1)$$

В случае использования двух жгутов одного вида с плотностью материала ρ и линейной плотностью T уравнение (1) принимает вид

$$S = \frac{\pi^2}{\varphi} T / \rho. \quad (2)$$

Толщина нитей, из которых состоит жгут, в расчетную формулу не входит (поскольку $d \ll D$). Для жгута, состоящего из 130—300 элементарных нитей цилиндрической формы, исходя из геометрии упаковки, степень наполнения будет равна 0,82—0,83 [18], поэтому в предлагаемой модели для расчета использовали значение 0,82. Прочность адгезионной связи жгута со связующим при значении усилия вытягивания F из адгезионной ячейки с учетом площади контакта S определяем как $\tau_{AC} = F / S$.

Из уравнения (2) видно, что нормирование усилия вытягивания нити к её линейной плотности для однотипных нитей, использованное в более ранних публикациях с данной методикой, было корректным.

Экспериментальная часть

Объекты исследования и методика эксперимента. Расчет сдвигового напряжения τ_{AC} для эпоксидных связующих проводили для нитей СВМ, Армос и Терлон [19]. Там же были описаны свойства волокон и условия получения образцов и проведения испытаний. Для определения величины τ_{AC} с термопластами использовали углеродный жгут УКН-5000 производства завода “Аргон” госкорпорации “Уматекс”, Балаково,

Табл. 1

Характеристики волокон

Волокно	Плотность элементарного волокна, кг/м ³	Диаметр элементарного волокна, мкм	Линейная плотность комплексной нити и жгута, текс
Кевлар-29	1450	16	160
Жгут углеродный УКН-5000	1780	8	400
Армос	1430	14	100
CCF-1.5K	-	370*	160*

*Данные для препрега.

углеродный жгут-препрег CCF 1,5K фирмы Анизопринт, нить Кевлар-29 (на основе поли *n*-фенилентерефталамида — некрученное, без замасливателя) производства DuPont, США, и нить Армос производства НПО “Химволокно”, Мытищи.

Основные показатели волокон представлены в табл. 1.

В качестве термопластов использовали полиамид ПА-66 марки Leona 1500 производства Asahi Kasei (ПТР 4,8 при 270 °С), сополимер акрилонитрила и стирола (САН) марки А20С-333 производства фирмы Toray Industries Inc. (Япония) (показатель текучести расплава ПТР 26 при 220 °С), в качестве дисперсных наполнителей — наноалмазы детонационного синтеза (ДНА) и слоистый алюмосиликат — монтмориллонит (ММТ) марки Cloisite 30В фирмы Southern Clay Products Inc., США). Наполненные термопласты получали на смесителе модели Haake PolyDrive (Германия). Согласно оценке размера частиц по спектру мутности в пленке из наполненного термопласта после смешения средний размер частиц ММТ в термопластичной матрице был равен 220—250 нм, частиц ДНА — 300—350 нм [20].

Полимерную оболочку на нити наносили протягиванием нити через расплав и калибрующий капилляр в вискозиметре ИИРТ по процедуре [16, 17]. Затягивание узла проводили с заданным усилием также при нагреве в термокамере вискозиметра ИИРТ. Испытание на растяжение, при котором происходит вытягивание нити из узла, проводили на разрывной машине в соответствии с описанием в этих же работах. Испытывали по 10 образцов каждого вида, коэффициент вариации значений усилия вытягивания 10—15%.

При использовании в качестве “петлеобразующей” нити Армос в соответствии с (2) расчетная площадь S адгезионного контакта для нитей Армос была равной 0,84 мм², для нитей Кевлар — 1,35 мм², Армос—углеродный жгут — 1,54 мм²

Электронно-микроскопическое исследование волокон проводили на СЭМ Quanta 650 FEG фирмы FEI в режиме высокого вакуума при напряжении 2 кВ.

Обсуждение результатов

Расчет прочности адгезионной связи для эпоксидных связующих. В табл. 2 приведены данные расчета адгезионной прочности трех типов отечественных арамидных волокон (в виде тонких жгутов — комплексных нитей) к эпоксидному связующему ЭДТ-10. Гетероарамидные волокна СВМ и Армос выпускали в СССР на опытном заводе НПО “Химволокно” (Мытищи), волокно Терлон выпускали там же на основе ароматического полиамида — поли-*n*-фенилентерефталамида [21]. По химической структуре и свойствам Терлон являлся аналогом волокна Кевлар фирмы DuPont. В качестве испытываемой нити и нити для формирования петли и узла использовали нити с линейной плотностью 58 текс.

Табл. 2

Прочность адгезионной связи арамидных нитей и сдвиговая прочность пластиков на их основе с ЭДТ-10

Тип нити	τ_{AC} сН/текс	τ_{AC} МПа	τ_{AC}^* при сдвиге в пластике, МПа
Армос	54	64	39
СВМ	63	75	39
Терлон СБ	33	39	12

*Коэффициент вариации результатов измерения усилия вытягивания в пределах 10—15%

Площадь адгезионного соединения в узле, рассчитанная по уравнению (2) с учетом плотности полимера в нитях, в этом случае равна 0,488 мм².

В 1-й колонке табл. 2 приведены результаты измерений в соответствии с ранее опубликованными автором данными [19] без расчета площади адгезионного контакта; во 2-й колонке — данные по прочности адгезионной связи для тех же образцов с учетом площади контакта, рассчитанной по уравнению (2); в 3-й колонке для сравнения представлена сдвиговая прочность кольцевых образцов армированных пластиков. Сдвиговая (межслойная) прочность непосредственно связана с адгезией волокон к матрице и является важной характеристикой механических свойств изделий из армированных пластиков.

Как видно из представленных результатов, рассчитанные значения адгезионной прочности оказались очень близки к полученным методом pull-out, приведенным в монографии [1, с. 158] для мононитей ВНИИВЛОН и эпоксидной матрицы ЭДТ-10. Уточним, что СВМ и ВНИИВЛОН являются торговыми марками одного и того же волокна [22]. Подобное совпадение результатов, на первый взгляд, неожиданно, поскольку образцы, используемые в сравниваемых методах, существенно различаются по площади адгезионного контакта (на два порядка). Этот факт можно объяснить тем, что в обсуждаемом методе “вытягивания из узла” толщина межфазного полимерного слоя сопоставима с толщиной элементарных нитей в отличие от испытаний по методу pull-out, где эта толщина является неопределенной, и поэтому влияние масштабного фактора для нашего метода может быть иным, чем приведенное в [1]. Как было отмечено ранее, наиболее высокая адгезионная прочность связи с эпоксидной матрицей достигается для волокон СВМ при близкой для всех трех типов нитей прочности при растяжении, что объясняется аморфной структурой этих волокон, благодаря которой низковязкое связующее легко диффундирует через поверхность нитей. Как было отмечено в [22, 23], разрушение адгезионного соединения волокон СВМ с эпоксидным связующим носит когезионный характер, затрагивающий поверхность самого волокна.

Для волокон Терлон (так же, как для Кевлара) кристаллическая структура затрудняет диффузию связующего, и адгезионная прочность в этом

случае оказывается существенно ниже, что соответствует низкой сдвиговой прочности кольцевых образцов из этих волокон.

Некоторое преимущество значений τ_{AC} волокон СВМ по сравнению с волокнами Армос, имеющими частично-кристаллическую структуру, не сказывается на сдвиговой прочности в кольцевых образцах, что позволяет сделать вывод о том, что адгезия волокон Армос достаточна для реализации прочности этих волокон в полимерной матрице. А для волокон Терлон необходима дополнительная обработка для повышения адгезии к эпоксидным связующим. Из полученных данных можно также сделать важный вывод о том, что гибкие и прочные волокна СВМ и Армос могут быть использованы в качестве “несущих” нитей для формирования петли в адгезионной ячейке при изучении волокон, обладающих низкой адгезией к полимерным матрицам (например, углеродных). В таком случае наиболее слабым участком в рассматриваемом адгезионном соединении является граница раздела полимерная пленка—испытываемая (центральная) нить, прочность которой и изучают.

Определение адгезионной прочности связи для термопластов. На основе предложенной модели по экспериментальным данным проведен расчет величины τ_{AC} для некоторых армирующих волокон и термопластичных матриц, в том числе с дисперсными нанонаполнителями.

На рис. 3 представлена зависимость величины τ_{AC} от усилия затягивания узла F для нитей Армос и Кевлар с термопластом САН при выдержке в расплаве при температуре 220 °С в течение 15 мин. Из данных рисунка видно, что при усилии затягивания $F = 3$ Н значение τ_{AC} максимально. Если считать, что при формировании узла усилие затягивания петли распределяется равномерно по поверхности, охватываемой узлом, то максимум τ_{AC} достигается при усиллии 3 Н, что при площади контакта 0,84 мм² соответствует давлению 3,6 МПа. Этот уровень давления обычно характеризует условия прессования анизотропно армированных термопластов [24]. Наличие максимума можно объяснить, как это было сдела-

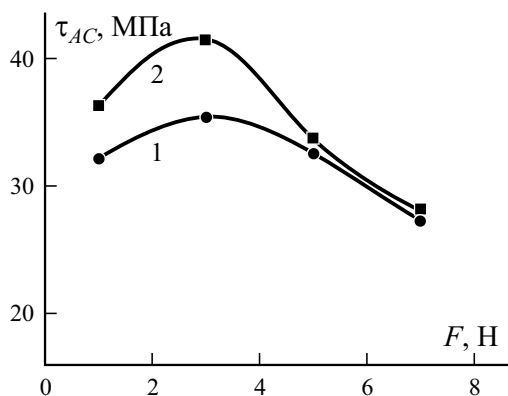


Рис. 3. Зависимость τ_{AC} для нитей Армос (1) и Кевлар (2) с САН от усилия затягивания петли F .

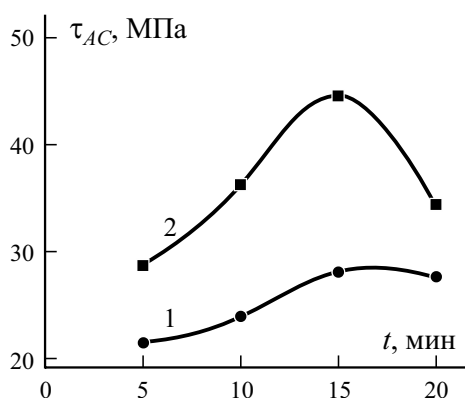


Рис. 4. Зависимость величины τ_{AC} от времени контакта t жгута Армос с расплавом ПА-66 (1) и САН (2).

но в работах [16, 17], с одной стороны, ростом τ_{AC} при лучшем затекании расплава в микронеровности поверхности волокон с ростом давления, а с другой — вероятностью отжима расплава из зоны адгезионного взаимодействия при избыточном давлении.

Характер зависимости величины τ_{AC} от давления свидетельствует о том, что без создания давления в зоне формирования адгезионного контакта с вязким расплавом термопласта нельзя оценивать величину τ_{AC} волокон. Уровень τ_{AC} волокон Армос с термопластом САН на 30% ниже, чем с терморезактивным эпоксидным связующим ЭДТ-10 (см. табл. 2), что объясняется низкой вязкостью эпоксидного связующего и легкостью его диффузии через поверхность волокна. Среди изученных термопластов выбранная марка САН обладает наименьшей вязкостью (наибольшим индексом расплава), но вязкость эпоксидного связующего еще ниже. Для волокна Кевлар с ПА-66 значение τ_{AC} также ниже, чем с эпоксидным связующим, но эта разница менее выражена из-за плотной кристаллической структуры Кевлара, затрудняющей диффузию низковязких терморезактивных связующих.

На рис. 4 приведена зависимость адгезионной прочности от времени контакта под давлением (при равном усилии затягивания 3 Н и температуре расплавов САН и ПА-66 соответственно 220 и 270 °С).

В начальный период времени закономерно наблюдается рост значений τ_{AC} благодаря совершенствованию адгезионного контакта расплава с поверхностью волокна, но после 15 мин наблюдается их снижение, вероятно, как следствие происходящей термодеструкции полимера. Ранее, используя ту же методику испытания, было показано наличие максимума τ_{AC} и для системы волокно Кевлар—полисульфон на зависимости от времени выдержки в расплаве термопласта, но в диапазоне 3—4 мин. Для стеклонити с ПСФ максимум τ_{AC} также наблюдался в этом же интервале при общем уровне τ_{AC} в четыре раза ниже, чем для волокна Кевлар [17].

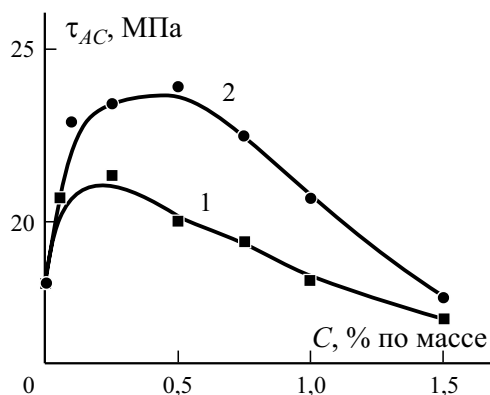


Рис. 5. Зависимость величины τ_{AC} для углеродного жгута УКН от массового содержания C ДНА (1) и ММТ (2) в САН.

Наличие экстремума τ_{AC} от времени контакта стальных волокон с расплавом полисульфона наблюдали и другие исследователи, объяснявшие это явление термодеструкцией полимера [25].

Таким образом, для каждой системы волокно—термопласт существуют оптимальные условия достижения максимального значения τ_{AC} в зависимости от температуры, времени выдержки в расплаве и давления формирования адгезионного контакта.

Последнее время активно развивается применение полимерных матриц с дисперсными наполнителями, в частности, со слоистыми силикатами (монтмориллонитом, ММТ) и нанодиамазами детонационного синтеза (ДНА). Адгезии волокон к таким наполненным матрицам уделяется большое внимание [26, 27].

На рис. 5 представлена зависимость прочности адгезионной связи углеродной нити от содержания наполнителей C в термопластичной матрице САН (температура расплава $220\text{ }^{\circ}\text{C}$, $F = 3\text{ Н}$). Как видно из данных рисунка, величина τ_{AC} достигает максимума при содержании ДНА и ММТ 0,2 и 0,6 % по массе соответственно. Подобный эффект объясняется торможением развития трещины на дисперсных частицах в области адгезионного соединения, как это проявляется для прочности нанокompозитов в целом [26, 27].

Разработанный метод оказался удобным для определения адгезии армирующих нитей и жгутов как к термореактивным, так и к термопластичным связующим, в том числе для композитных прутков, используемых в 3D печати. Армирование непрерывными нитями, прежде всего углеродными, является одним из новых направлений в развитии аддитивных технологий и 3D печати изделий из композитов [28]. Разработанный в России фирмой Анизопринт 3D принтер Composer позволяет по такой технологии получать армированные изделия из углепластика [29, 30]. В данном типе принтера используются препреги — предварительно пропитанные углеродные жгуты с термореактивными связующими. Применение

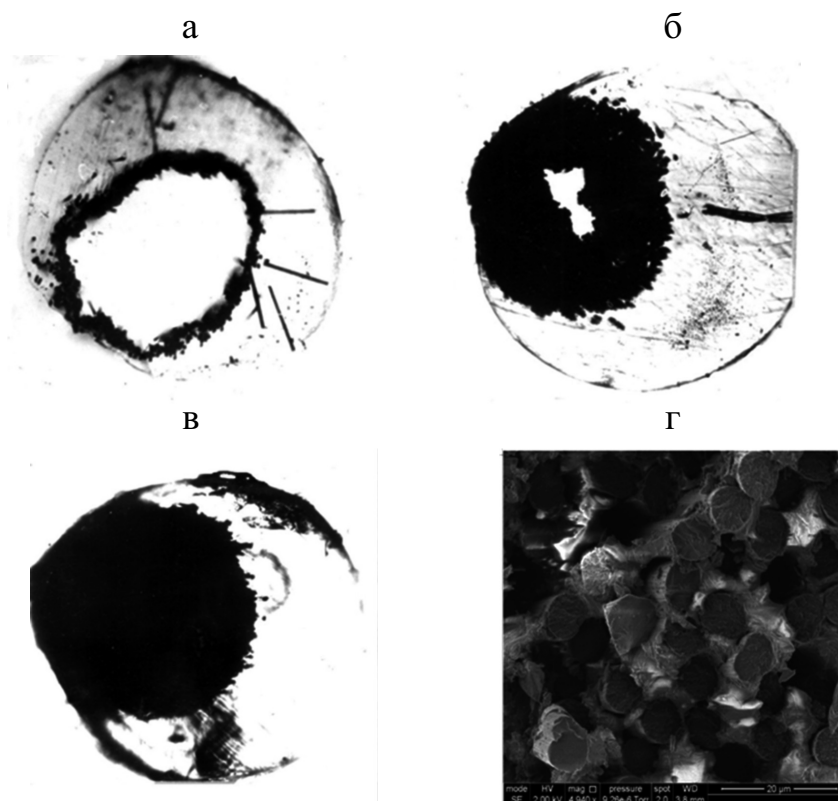


Рис. 6. Микрофотографии (90×) срезов “сухого” углеродного жгута после нанесения полимерной оболочки в расплаве ПА-66 через 2 (а), 15 (б) и 25 мин (в) и фрагмента среза препрега CCF (г).

в данном случае препрегов с реактопластами связано прежде всего со сложностью пропитки жгутов высоковязкими расплавами термопластов. Для таких, по сути, двухматричных композитов важным аспектом является адгезия армирующего композитного прутка к основной термопластичной матрице, но до настоящего времени τ_{AC} подобного прутка к термопластичной матрице не была изучена. На рис. 6 показан поперечный срез “сухого” углеродного жгута с полимерной оболочкой с разным временем пропитки (пребывания в расплаве полимера), используемого для определения величины τ_{AC} , и препрега CCF 1,5К. Непропитанную (без связующего) часть жгута удаляли при срезе для визуализации глубины пропитки, при этом толщина (диаметр) жгута остается практически постоянной, поэтому можно считать, что время пропитки не должно сказываться на геометрии образца при испытании. Анализ расположения элементарных углеродных нитей в препреге (см. рис. 6—г) позволяет считать значение 0,82 адекватным для расчета плотности упаковки элементарных нитей в препреге.

Таким образом, определенная по данному методу адгезионная прочность композитного прутка — препрега марки CCF 1,5К, выпускаемого фирмой Анизопринт, с матрицей САН составила 30 МПа, что на 67%

превышает аналогичный показатель для углеродного жгута УКН-5000 (без пропитки и поверхностной обработки, данные приведены на рис. 5).

Заключение

Разработана модель и способ расчета площади адгезионного контакта при испытании прочности адгезионной связи волокно—термопластичная матрица методом вытягивания из узла. На основе предложенной модели по экспериментальным данным рассчитана адгезионная прочность связи арамидных и углеродных армирующих волокон с эпоксидным связующим и рядом термопластов. Гетероарамидные волокна СМВ и Армос благодаря прочности, гибкости и высокой адгезии к полимерам могут быть использованы для формирования адгезионной ячейки из петли для испытания других волокон. Показана экстремальная зависимость прочности адгезионной связи армирующих нитей и термопластичной матрицы от контактного давления, времени и температуры формирования адгезионного контакта. Доказана необходимость создания давления в зоне формирования адгезионного контакта армирующих волокон с вязкими термопластичными матрицами для достижения прочного адгезионного соединения. Метод вытягивания из петли обеспечивает создание давления в зоне формирования адгезионного контакта в образцах и пригоден для оценки адгезионной прочности связи жгутов и препрегов, используемых для 3D печати анизотропно армированных пластиков.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (проект №17-79-30108).

Благодарность. Выражаем благодарность канд. хим. наук И. Н. Сенчихину (ИФХЭ РАН) за проведение исследований на электронном микроскопе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбаткина Ю. А. Адгезионная прочность в системах полимер—волокно. — М.: Химия, 1987. — 192 с.
2. Турусов Р. А. Адгезионная механика. — М.: НИУ МГСУ, 2016. — 230 с.
3. Zhandarov S., Mader E. Characterization of fiber/matrix interface strength: applicability of different tests, approaches and parameters // Compos. Sci. Technol. — 2005. — Vol. 65 — P. 149—160.
4. URL: <https://www.texttechno.com> (дата обращения: 07.04.2021)
5. Baoying Liu, Zhao Liu, Xiaojun Wang Gang Zhang, Shengru Long, Jie Yang. Interfacial shear strength of carbon fiber reinforced polyphenylene sulfide measured by the microbond test // Polym. Testing. — 2013. — Vol. 32 — P. 724—730.
6. Yang L., Thomason J. L. Development and application of micromechanical techniques for characterising interfacial shear strength in fibre-thermoplastic composites // Polym. Testing. — 2012. — Vol. 31 — P. 895—903.

7. Писанова Е. В., Жандаров С. Ф., Довгяло В. А. Адгезионная прочность в системах термопластичный полимер—тонкое волокно. Зависимость измеряемого значения от метода испытания // Механика композит. материалов. — 1993. — Т. 29, № 2. — С. 232—239.

8. Пат. 2683106 РФ. Образец для определения прочности адгезионной связи армирующих нитей и полимерного связующего и способ его изготовления / П. М. Хавалкин, А. М. Кульков, Ю. В. Антипов. — Заявлено 12.13.2018 // Открытия. Изобретения. — 2019. — № 9. — С. 10.

9. Jager J., Sause M. G. R., Burkert F., Moosburger-Will J., Greisel M., Horn S. Influence of plastic deformation on single-fiber push-out tests of carbon fiber reinforced epoxy resin // Composites: Part A. — 2015. — Vol. 71 — P. 157—167.

10. Кудинов В. В., Крылов И. К., Абдуллин И. Ш., Корнеева Н. В., Мамонов В. И., Геров М. В. Исследование методом full pull out взаимного влияния и свойств волокон на прочность их соединения с полимерной матрицей композиционного материала // Физика и химия обработки материалов. — 2010. — № 6. — С. 77—80.

11. Горбаткина Ю. А., Иванова-Мумжиева В. Г. Адгезия модифицированных эпоксидов к волокнам. — М.: Торус Пресс, 2018. URL: https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_2087178 (дата обращения: 07.04.2021)

12. А. С. 1280499 СССР Образец для определения адгезии волокна к связующему / С. В. Котомин, Л. П. Шевляков. — Заявлено 23.08.85 // Открытия. Изобретения. — 1986. — № 48. — С. 2.

13. Богданова Ю. Г. Адгезия и её роль в обеспечении прочности полимерных композитов / Уч. пособие для студентов по специальности “Композиционные наноматериалы”. — М.: МГУ, 2010.

14. Ilyin S. O., Brantseva T. V., Kotomin S. V., Antonov S. V. Epoxy nanocomposites as matrices for aramid fiber-reinforced plastics // Polym. Compos. — 2018. Vol. 39. — 4. — P. E2167—E2174.

15. Карзов И. М. Влияние полиамидокислоты на адгезионные свойства эпоксисовлачного связующего и прочность полимерных композитов на его основе: Дис... канд. хим. наук. — М.: МГУ, 2011. — 113 с.

16. Kotomin S. V., Filippova T. N., Barankova T. I., Gorbunova I. Y. Strength and adhesion of microplastics based on polysulfone and montmorillonite with polysulfone and a composite matrix // Polym. Sci. Ser. D. — 2016. — Vol. 9. — No. 3. — P. 341—345.

17. Котомин С. В. Оценка прочности адгезионной связи волокно—термопластичная матрица методом петли // Инж. журн.: Наука и инновации. — 2015. — Вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1426.html> (дата обращения: 07.04.2021)

18. URL: <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/cci/> (дата обращения: 21.10.2021)

19. Kotomin S. V., Romanov P. P., Sapozhnikov E. I., Tokarev A. V. Comparison of physico-mechanical properties of unidirectional organoplastics based on epoxy and on polyamide binders // Fiber Chem. — 1992. — No. 5 — P. 389—392.

20. Павлючкова Е. А., Малкин А. Я., Котомин С. В., Френкин Э. И., Симонов-Емельянов И. Д. Реология расплава сополимера акрилонитрила со стиролом, модифицированного монтмориллонитом // Высокомолекуляр. соединения. Сер. А. — 2018. — Т. 60, № 4. — С. 321—328.

21. Котомин С. В. Полимерные молекулярные композиты: ожидания и результаты // Нооинженерия. — 2011. — Vol. 4 С. — 30—37.

22. Зеленский Э. С., Куперман А. М., Горбаткина Ю. А., Иванова-Мумжиева В. Г., Берлин А. А. Армированные пластики — современные конструкционные материалы //

Рос. хим. журн. (Журн. Рос. хим. о-ва им. Д. И. Менделеева). — 2001. — Т. 45, — № 2 — С. 57—71.

23. *Перепелкин К. Е.* Армирующие волокна и волокнистые полимерные композиты. — СПб.: Изд-во НОТ, 2009. — 380 с.

24. Волоконная технология переработки термопластичных композиционных материалов / Под ред. Г. С. Головкина. — М.: МАИ, 1993. — 232 с.

25. *Болотина Л. М., Горбаткина Ю. А., Иванова-Мумжиева В. Г., Корнеева Н. В.* Влияние молекулярной массы полисульфонов на их адгезию к волокнам // Высокомолекуляр. соединения. Сер. Б. — 2002. — Т. 44, № 8. — С. 1427—1432.

26. *Brantseva T. V., Antonov S. V., Gorbunova I. Yu.* Adhesion properties of the nanocomposites filled with aluminosilicates and factors affecting them: A review // Int. J. Adhes. Adhes. — 2018. — Vol. 82. — P. 263—281.

27. *Горбаткина Ю. А., Иванова-Мумжиева В. Г., Куперман А. М.* Адгезия модифицированных эпоксидных матриц к армирующим волокнам // Высокомолекуляр. соединения. Сер. А. — 2016. — Т. 58, № 5. — С. 439—447.

28. Continuous Composites, U. Continuous Fiber 3-D Printing. Available online: <http://www.continuouscomposites.com/technology> (accessed on 20 April 2021)

29. *Azarov A. V., Antonov F. K., Golubev M. V., Khaziev A. R., Ushanov S. A.* Composite 3D printing for the small size unmanned aerial vehicle structure // Composites: Part B. — 2019. — Vol. 169. — P. 157—163.

30. *Adumitroaie A., Antonov F., Khaziev A., Azarov A., Golubev M., Vasiliev V. V.* Novel continuous fiber bi-matrix composite 3-d printing technology // Materials. — 2019. — Vol. 12, P. 3011; doi:10.3390/ma12183011

Поступила в редакцию 23.04.2021

Окончательный вариант поступил 25.10.2021

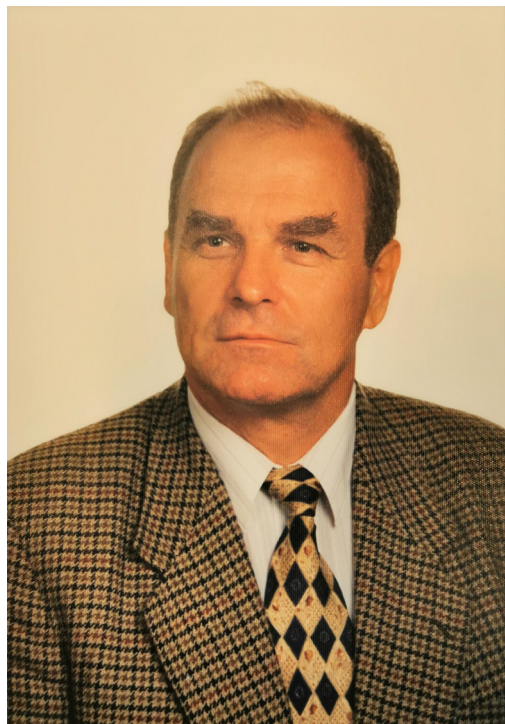
Received Apr. 23, 2021 (Oct. 25, 2021)

Роланд Рикардс

(15.12.1942—02.02.2022)

Латвийская наука понесла тяжелую утрату – 2 февраля 2022 года ушел в вечность яркий ученый и политик независимой Латвии, действительный член Латвийской академии наук, доктор технических наук, профессор Роланд Рикардс.

Роланд Рикардс родился 15 декабря 1942 года в Риге, в семье преподавателя математики, астрономии и геофизики Латвийского университета. В 1966 году окончил строительный факультет Рижского политехнического института (РПИ). С 1966 по 1981 год он работал научным сотрудником в Институте механики полимеров (ИМП) Академии наук Латвийской ССР. В 1970 году Р. Рикардс защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук, совмещая работу в ИМП с обязанностями доцента кафедры механики сплошных сред и магнитной гидродинамики физико-математического факультета Латвийского университета, а в 1983 году – докторскую диссертацию в Московском институте электронной



техники. Через несколько лет он стал профессором кафедры сопротивления материалов РПИ, в 1992 году – хабилитированным доктором технических наук.

В 1992 году Роланд Рикардс, специалист мирового уровня в области механики композитных оболочек и их математической оптимизации, большой энтузиаст применения численных методов в строительной механике, был избран членом-корреспондентом Латвийской Академии наук, а в 1997 году – действительным членом Латвийской академии наук. В 1994 году Роланд Рикардс продолжил свою работу в должности профессора строительного факультета Рижского технического

университета (РТУ), а с 2001 по 2008 год был директором Института материалов и конструкций при РТУ.

Р. Рикардс – один из тех ученых, кто обеспечил широкое признание ИМП и РТУ как на Востоке, так и на Западе, создав рижскую исследовательскую школу строительной механики композитных материалов. Этому способствовала его параллельная работа (с 1989 г.) в редколлегии всемирно известного научного журнала «Механика композитных материалов». Журнал распространяется на русском языке в странах постсоветского пространства и на английском языке через издательство Springer. Р. Рикардс был членом редколлегии журнала «Наука и мы» с 1989 по 1990 год и редактором журнала Балтийского сотрудничества «Revue Baltique» с 1990 по 1992 год.

Научные интересы Роланда Рикардса были связаны с механикой композитных и полимерных материалов, оптимизацией и идентификацией свойств материалов, механикой разрушения композитных материалов, теорией оболочек, численными методами. Академик Р. Рикардс руководил исследованиями во многих международных проектах. Результаты исследования нашли отражение в пяти монографиях и более чем в 300 научных статьях. Научная деятельность Р. Рикардса была замечена, его приглашали читать лекции и проводить совместные исследования в университетах США, Германии, Польши, Греции, Дании и др. Академик Р. Рикардс был членом престижных международных организаций (IACM — Международной ассоциации вычислительной механики и ISMO — Международной ассоциации структурной и междисциплинарной оптимизации), членом Латвийского национального комитета по механике.

Роланд Рикардс был патриотом Латвийского государства, одним из основателей группы поддержки Латвийского народного фронта в РТУ и депутатом Верховного Совета Латвии с 1990 по 1993 год.

В 1996 году Академия наук Латвии присудила Р. Рикардсу премию Ф. Цандера за исследования в области механики композитных материалов. В 1997 году за заслуги в научной деятельности он был награжден Золотой Почетной медалью ордена Трех Звезд, а в 2000 году – Орденом Трех Звезд 3-й степени за заслуги в восстановлении независимости Латвийской республики.

Жизнь яркого ученого и политика закончилась. Латвийская академия наук, Латвийский и Рижский Технический университеты, редколлегия журнала “Механика композитных материалов” выражают глубочайшие соболезнования родным, близким, друзьям и коллегам Роланда Рикардса.

Редколлегия журнала “Механика композитных материалов”

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Триведи Н., Дас С., Крачун Е.-М.</i> Математическое изучение краевой трещины в двух разных моделях при возмущении гармонической волны	3
<i>Митрофанов О., Осман Мазен</i> Проектирование гладких композитных панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом поведении	21
<i>Власов Д. Д., Полилов А. Н.</i> Возможность предсказания ползучести вязкоупругих полимерных композитов на основе частотных зависимостей компонент комплексного модуля	43
<i>Макаревич Ю. Л., Онискив В. Д., Столбов В. Ю., Гитман И.</i> Влияние гамма-облучения на прочностные свойства базальтокомпозитов	59
<i>Резаи-Паджанд М., Масуди А. Р., Аленахамбар А.</i> Потеря устойчивости при продольном изгибе с кручением двунаправленной экспоненциально-градиентной тонкостенной С-образной балки.	75
<i>Даидемир А.</i> Модальный анализ вынужденных колебаний пьезоэлектрической пластины с начальным напряжением посредством конечно-элементного моделирования	97
<i>Герайше Л., Тарфауи М., Османи Х.</i> Влияние старения в горячей воде на компрессионные свойства эпоксидных стеклопластиков при переменной скорости деформирования	115
<i>Кумар А. М., Парамешваран Р., Раджасекар Р., Моганаприя Ч., Маниваннан Р.</i> Обзор сверления волокнисто-армированных полимерных композитов	139
<i>Селахи Е.</i> Анализ разрушения гибридных клееболтовых вертикальных Т- и L-образных композитных соединений, подверженных осевым и изгибающим нагрузкам	159
<i>Чжэн Цз., Махарадж К., Лю Цз., Чай Х., Лю Х., Деар Дж. П.</i> Сравнительное изучение критериев разрушения для предсказания начала повреждения в волокнисто-армированных композитах	175
<i>Котомин С. В., Обидин И. М., Павлючкова Е. А.</i> Расчет прочности адгезионной связи армирующих волокон с полимерами по методу “петли”	197
Роланд Рикардс	213

CONTENTS

<i>Trivedi N., Das S., and Craciun E.-M.</i> The mathematical study of an edge crack in two different specified models under time-harmonic wave disturbance	3
<i>Mitrofanov O. and Osman Mazen.</i> Designing of smooth composite panels providing stability and strength at postbuckling behavior	21
<i>Vlasov D. D. and Polilov A. N.</i> The possibility of creep prediction of viscoelastic polymer composites using frequency dependences of complex modulus components	43
<i>Makarevich Yu. L., Oniskiv V. D., Stolbov V. Yu., and Gitman I.</i> Effect of gamma irradiation on strength properties basalt composites	59
<i>Rezaiee-Pajand M., Masoodi A. R., and Alepaighambar A.</i> Lateral-torsional buckling of a bidirectional exponentially graded thin-walled C-shaped beam	75
<i>Daşdemir A.</i> Modal analysis of forced vibration for a piezoelectric plate with initial stress by finite element simulation	97
<i>Gueraiche L., Tarfaoui M., and Osmani H.</i> Effects of hot-water aging on the compression properties of e-glass/epoxy composites at varying strain rates	115
<i>Kumar A. M., Parameshwaran R., Rajasekar R., Moganapriya C., and Manivannan R.</i> A review on drilling of fiber-reinforced polymer composites	139
<i>Selahi E.</i> A failure analysis of hybrid bolted-bonded vertical T- and L-joints with composite adherends subjected to axial and bending loads	159
<i>Zheng J., Maharaj C., Liu J., Chai H., Liu H., and Dear J. P.</i> A comparative study on the failure criteria for predicting the damage initiation in fiber-reinforced composites	175
<i>Kotomin S. V., Obidin I. M., and Pavluchkova E. A.</i> Adhesive bond strength calculation of reinforcing fibers with polymers by the “loop” method	197
Rolands Rikards	213

Вниманию читателей!

Подписаться на журнал “Механика композитных материалов” (индекс 79676) на 2022 г. можно через каталог “Урал-Пресс” или в редакции. В каталоге указаны два индекса, по которым журнал можно выписать сразу на календарный год или оформить подписку на один номер:

индекс **6115_01** — для оформления подписки на год (6 номеров);
индекс **009416** — для оформления подписки на один номер
(по желанию подписчика).

У компании «Урал-Пресс» есть подразделение «Деловая-Пресса», принимающее подписку online. Подписку можно оформить на сайте, пройдя по ссылке:

<http://ej.uz/mkmpod>

или написать на e-адрес: *podpiska@delpress.ru* письмо с просьбой
рассчитать стоимость заказа и получить счет на оплату.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Список некоторых планируемых конференций (Композиты и перспективные материалы)

2022—2023

PHENMA 2021

10th Anniversary International Conference on Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications

May 23-27, 2022, Rostov-on-Don, Russia

<https://phenma2021.sfedu.ru/>

Composite-Expo 2022

14th Edition of the International Specialized Exhibition on Raw Materials, Equipment and Technologies for Composites' Producing

March 29-31, 2022, Moscow, Russia

<http://www.composite-expo.com/>

DeMEASS2020

10th Design, Modelling and Experiments of Advanced Structures and Systems Conference

May 1-4, 2022, Scopello (Sicily), Italy

<http://www.mul2.polito.it/demeass2020/index.php>

Composite-Sandwich Conference

May 24-25, 2022, Halle (Saale), Germany

<https://www.faserverbund-sandwich.de/en/home/>

IUTAM Symposium on Enhancing Material Performance by Exploiting Instabilities and Damage Evolution

June 5-10, 2022, Warsaw, Poland

<http://iutam2022warsaw.ippt.pan.pl/importantdates.html>

WMCAUS 2022

7th World Multidisciplinary Civil Engineering - Architecture - Urban Planning Symposium

June 13-17, 2022, Prague, Czech Republic

www.wmcaus.org

International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”

June 20-24, 2022, St. Petersburg, Russia

<http://apm-conf.spb.ru/>

ECF23

23rd European Conference on Fracture – ECF23

June 27 — July 1, 2022, Madeira Island, Portugal

<https://www.ecf23.eu/>

MDA 2022

The 4th International Conference on Materials Design and Applications 2022

July 07-08, 2022, FEUP, Porto, Portugal

<https://web.fe.up.pt/~mda2022/>

International Summer School on Fatigue and Damage Mechanics of Composite Materials

July 4-8, 2023, University of Padova in Vicenza, Italy

www.gest.unipd.it/damageschool2022

CMM-SolMech 2022

24th International Conference on Computer Methods in Mechanics (CMM) and the 42nd Solid Mechanics Conference (SolMech)

September 5-8, 2022, Świnoujście, Poland

<http://cmm-solmech.ippt.pan.pl/index.html>

ICAS 2022

33rd Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences

September 4 – 9, 2022, Stockholm Sweden

<https://icas2022.com/>

International Science and Technology Conference for Youth «Advanced Materials for Engineering and Functional Purposes»

October 17-21, 2022, Tomsk Polytechnic University (Tomsk)

<https://portal.tpu.ru/science/konf/mt/eng>

DRMS2023

The first International Conference on Durability, Repair and Maintenance of Structures

March 16-17, 2023, University of Porto (FEUP), Porto, Portugal

<https://web.fe.up.pt/~drms2023/>

Modern Materials and Manufacturing 2023

April 25-27, Tallinn, Estonia

<https://taltech.ee/en/mmm2021>

CICE 2023

11th International Conference on Fiber-Reinforced Polymer (FRP) Composites in Civil Engineering

July 23-26, 2023, Rio de Janeiro, Brazil

<https://cice2023.org/>

ICCM-23

International Conference on Composite Materials

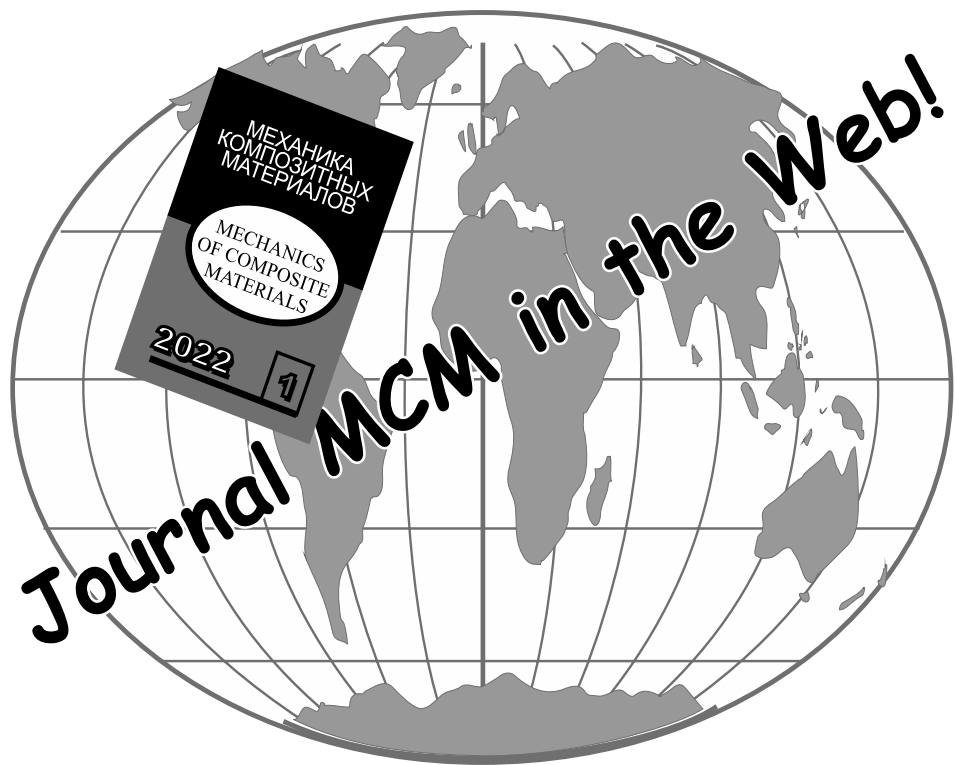
July 30- August 4, 2023, Belfast, Ireland

<https://iccm23.org/about-the-conference/>

IUTAM Symposium Creep in Structures

September 18-22, 2023, Magdeburg, Germany

<http://www.iutam-symposium.ovgu.de>



Адрес редакции:

ул. Айзкрауклес, 23, Рига, LV-1006 Латвия
<https://www.apgads.lu.lv/journals/mkm/>
e-mail: mcm@pmi.lv, tatjana.gubina@pmi.lv

Address:

23 Aizkraukles St., Riga, LV-1006 Latvia
<https://www.apgads.lu.lv/en/journals/mkm/>
e-mail: mcm@pmi.lv, tatjana.gubina@pmi.lv

Редактор *Т. В. Губина*

Редактор английского текста *А. Лагздиньш*

Перевод для издания журнала на английском языке *В. Кулакова, А. Лагздиньша*

Компьютерная верстка *А. В. Пумпурс*

Корректор *С. А. Видинеев*

Отпечатано в типографии SIA "Eiro Print", ул. Апес, 5А – 89, Рига, LV-1039 Латвия